UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

PROMEDIOS EN DENDROIDES Y PROPIEDAD DE KELLEY EN PRODUCTOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
JIMMY ANEL NARANJO MURILLO

DIRECTOR DE LA TESIS
DR. ALEJANDRO ILLANES MEJÍA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DR. JORGE MARCOS MARTÍNEZ MONTEJANO
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM
DRA. MARÍA ISABEL PUGA ESPINOSA
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, ENERO DE 2020.

Índice general

Agradecimientos

Agradezco a mi hija Ana Victoria por haber llegado a mi vida y por hacerme valorar más cada momento.

A mi esposa Betty por su apoyo incondicional, por el amor y la dedicación con que cuida de mí y de nuestra hija, y porque siempre ve por el bienestar de nuestra familia.

A mi hermana Kristel, a mi tía Yoli, y a mis primos Cristian y Gibran, con quienes he compartido tantos momentos y desde pequeño me han ayudado de muchas maneras.

A toda mi familia, por haber hecho de mí una persona de bien y siempre alentarme a cumplir mis metas.

A mis amigos; Chayo, David, Diablo, Diego, Elisandro, Erick, Ernesto, Gilberto, Jorge, Juan, Lauro, Mario, Marlene, Maza, Nora, Oscar, Vero, Yaneri; quienes me han acompañado a lo largo de mis estudios profesionales.

A todos mis profesores. En especial, a mi tutor de la maestría, el Dr. Jorge Marcos Martínez Montejano, y a mi directora de tesis de maestría, la Dra. Verónica Martínez de la Vega y Mansilla, por su apoyo durante mis estudios de posgrado.

A mi director de tesis de doctorado, el Dr. Alejandro Illanes Mejía, por su apoyo, guía y disponibilidad permanente. El Dr. Alejandro ha sido pieza fundamental en mi desarrollo como matemático.

Al Instituto de Matemáticas de la UNAM por haberme brindado la beca de lugar.

Al CONACyT por haberme otorgado la beca de doctorado con número de becario 295666.

Este trabajo fue parcialmente apoyado por los proyectos “Teoría de Continuos, Hiperespacios y Sistemas Dinámicos III” (IN106319) de PAPIIT, DGAPA, UNAM; y “Teoría de Continuos e Hiperespacios” (A1-S-15492) de CONACyT.

Introducción

En esta tesis abordamos principalmente dos temas de la teoría de continuos e hiperespacios: promedios en dendroides y producto de dos continuos encadenables que tienen la propiedad de Kelley.

El Capítulo 1 está dedicado a presentar notación, definiciones y resultados previos que serán utilizados a lo largo de esta tesis. En realidad este capítulo es corto, pues estamos suponiendo que el lector tiene conocimientos básicos de la teoría de continuos e hiperespacios; además, creemos que es más conveniente presentar cada definición cuando es utilizada.

En el Capítulo 2 estudiamos promedios en dendroides. Este capítulo está dividido en tres secciones, las cuales introducimos a continuación.

El concepto de continuo de tipo N fue introducido por L. G. Oversteegen, y después fue extendido por J. J. Charatonik, W. J. Charatonik y S. Miklos cuando presentaron el concepto de continuo de tipo generalizado N. La definición de continuo de tipo N es muy técnica, pero con palabras simples podemos decir que un continuo X es de tipo N si contiene un arco A y dos sucesiones de arcos que convergen a A y están doblados en direcciones opuestas con respecto a A. Si el arco A de la definición de continuo de tipo N es reemplazado por algún subcontinuo de X, entonces obtenemos un continuo de tipo generalizado N. F. Capulín y W. J. Charatonik demostraron que los continuos de tipo N no admiten promedios; sin embargo J. J. Charatonik preguntó si este resultado podía ser extendido a los continuos de tipo generalizado N. En el mismo artículo en el que J. J. Charatonik, W. J. Charatonik y S. Miklos presentaron el concepto de continuo de tipo generalizado N, ellos enunciaron una proposición que dice que si un dendroide es de tipo generalizado N entonces no es selectible, y la prueba se la adjudicaron a T. Maćkowiak. Sin embargo, F. Capulín, F. Orozco-Zitli e I. Puga mostraron que esta proposición es falsa al presentar un dendroide selectible que es de tipo generalizado N. Además, ellos dieron una definición alternativa de continuo de tipo generalizado N (la cual llamaremos tipo COP-generalizado N, por las iniciales de sus apellidos) con la cual dicha proposición resulta cierta. En el Capítulo 2 presentamos un dendroide (dendroide W_2) que es de tipo generalizado N y admite promedios, lo cual responde la pregunta de J. J. Charatonik de manera negativa. Aunque la Sección 2.1 es la que trata de dendroides de tipo generalizado N, el dendroide W_2 lo presentamos en la Sección 2.2 pues satisface otras propiedades que lo hacen más interesante. En la Sección 2.1 probamos la no existencia de promedios para algunos de los dendroides más naturales de tipo generalizado N que son la cerradura de las uniones de dos familias numerables de arcos que se aproximan a un mismo triodo simple. De estos dendroides sólo uno es de tipo

COP-generalizado N. Consideramos que esto podría ser un primer paso para probar que los dendroides de tipo COP-generalizado N no admiten promedios.

Para los dendroides, un tema de estudio ha sido la relación entre admitir un promedio, ser contráctil y ser selectible. T. Maćkowiak presentó un dendroide "selectible" D para el cual ningún criterio conocido puede ser aplicado para determinar si D admite un promedio o no (ponemos las comillas porque la doctora Verónica Martínez de la Vega y Mansilla y Edder Yair Valeriano Reyes notaron que la "selección" que da T. Maćkowiak no funciona). En la Sección 2.2 probamos que D no admite promedios. T. Maćkowiak y A. Illanes de manera independiente construyeron un mismo dendroide, denotado por X_2, el cual es contráctil, no es selectible y no es plano. Luego, J. J. Charatonik, W. J. Charatonik, K. Omiljanowski y J. R. Prajs dieron una retracción de 2^{X_2} sobre X_2. Sin embargo, no se sabía si existe un dendroide con estas mismas propiedades que además sea plano. También en la Sección 2.2 probamos que hay un dendroide W_2 que es contráctil, no es selectible, admite una retracción de 2^{W_2} sobre W_2 (entonces admite un promedio) y es plano.

A. Illanes y L. C. Simón probaron que cada dendrita admite un promedio monótono y que el abanico armónico no admite promedios monótonos. Ellos también preguntaron si los únicos dendroides que admiten promedios monótonos son las dendritas. En la Sección 2.3 mostramos dos respuestas parciales a esta pregunta, las cuales muestran condiciones para un dendroide X que implican que X no admite promedios monótonos.

En el Capítulo 3 probamos que el producto de dos continuos encadenables que tienen la propiedad de Kelley tiene la propiedad fupcon (del inglés, "full projections imply connected open neighborhoods") y tiene la propiedad de Kelley. Presentamos estos resultados en secciones separadas porque sus demostraciones son largas. Para probar ambos resultados, usamos y adaptamos una técnica que A. Illanes, J. M. Martínez-Montejano y K. Villarreal desarrollaron para probar que el producto de un continuo encadenable que tiene la propiedad de Kelley y el intervalo $[0, 1]$ tiene la propiedad fupcon. Cabe mencionar que esta técnica depende fuertemente del Teorema de los Alpinistas.

Capítulo 1

Preliminares

Sean X un espacio topólogico y A un subconjunto de X. Denotaremos por $\mathrm{int}_X(A)$, $\mathrm{cl}_X(A)$ y $\mathrm{bd}_X(A)$ al interior de A en X, a la cerradura de A en X y a la frontera de A en X, respectivamente; cuando no haya confusión respecto al espacio en cuestión, escribiremos solamente $\mathrm{int}(A)$, $\mathrm{cl}(A)$ y $\mathrm{bd}(A)$. Usaremos $X \setminus A$ para denotar al complemento de A en X.

Un *continuo* es un espacio topológico métrico, compacto, conexo y con más de un punto. Un *subcontinuo* de un continuo X es un subconjunto conexo, cerrado y no vacío de X, así que los subconjuntos de X que constan de un sólo punto son subcontinuos de X.

En el segundo capítulo, trabajamos particularmente con los dendroides, así que aquí damos su definición. Un continuo es *hereditariamente unicoherente* si la intersección de cualesquiera dos de sus subcontinuos es conexa. Un *dendroide* es un continuo arco conexo y hereditariamente unicoherente. Si x y y son dos puntos distintos de un dendroide X, existe un único arco en X con extremos x y y, el cual denotamos por xy; si $x = y$, entonces xy denota al conjunto $\{x\}$. Un *triodo simple* es el cono sobre un espacio discreto con exactamente tres puntos. Un punto de un dendroide X es un *punto de ramificación* de X si es el vértice de un triodo simple contenido en X. Un punto p de un dendroide X es un *punto final* de X si cada arco de X que contiene a p, lo tiene como extremo. Un *abanico* es un dendroide con exactamente un punto de ramificación.

Sea X un continuo con métrica d. Los *hiperespacios de* X son ciertas familias de subconjuntos de X con alguna característica particular. Algunos de los hiperespacios más estudiados son:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\},$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\},$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\} \ (n \in \mathbb{N}),$$

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\} \ (n \in \mathbb{N}).$$

Como X es homeomorfo a $F_1(X)$, en algunas ocasiones supondremos que $X \subset F_n(X) \subset C_n(X) \subset 2^X$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si $\varepsilon > 0$, $p \in X$ y $A \subset X$, definimos la *bola de radio* ε *centrada en* p *y la nube de radio* ε *centrada en* A, respectivamente, como:

$$B(p,\varepsilon)=\{x\in X : d(p,x)<\varepsilon\}$$

$$N(A,\varepsilon)=\{q\in X : \text{existe } x\in A \text{ tal que } d(x,q)<\varepsilon\}.$$

Si A y B son subconjuntos no vacíos de X, definimos

$$\operatorname{dist}(A,B)=\text{ínf}\{d(a,b) : a\in A \text{ y } b\in B\}.$$

Dados A, $B\in 2^X$ definimos

$$\mathbf{H}_X(A,B)=\text{ínf}\{\varepsilon>0 : A\subset N(B,\varepsilon) \text{ y } B\subset N(A,\varepsilon)\}.$$

En [15, Proposición 2.1, pág. 22] se puede consultar la demostración de que $\mathbf{H}_X$ es una métrica para 2^X, llamada *métrica de Hausdorff.* Como 2^X contiene a todos los demás hiperespacios, entonces tenemos una métrica en cada uno de ellos. Cuando no haya confusión en el espacio X con el que estemos trabajando, escribiremos simplemente $\mathbf{H}$ en lugar de $\mathbf{H}_X$. Si $A\in 2^X$ y $\varepsilon>0$, similarmente a lo hecho con los puntos de X, usaremos $B(A,\varepsilon)$ para denotar a la bola de radio ε centrada en A con la métrica de Hausdorff, es decir,

$$B(A,\varepsilon)=\{C\in 2^X : \mathbf{H}(A,C)<\varepsilon\}.$$

Sea $n\in\mathbb{N}$. Dada una colección finita $\{U_1,U_2,...,U_m\}$ de subconjuntos de X, definimos

$$\langle U_1,...,U_m\rangle=\{A\in 2^X : A\subset U_1\cup...\cup U_m \text{ y } A\cap U_i\neq\emptyset \text{ para cada } i\in\{1,...,m\}\}$$

y

$$\langle U_1,...,U_m\rangle_n=\langle U_1,...,U_m\rangle\cap F_n(X).$$

Es sabido que la familia de subconjuntos de 2^X de la forma $\langle U_1,...,U_m\rangle$, donde cada U_i es un subconjunto abierto de X, forma una base para una topología de 2^X ([20, Theorem 1.2, p. 3]), y dicha topología coincide con la generada por la métrica de Hausdorff ([20, Theorem 3.1, p. 16]).

Aprovechamos para enunciar el siguiente lema pues será usado en los capítulos siguientes.

Lema 1.1 *[15, p. 26] Dados dos continuos X y Y con métricas d y ρ, respectivamente, la función $\mathbf{D}:(X\times Y)\times(X\times Y)\to[0,\infty)$ dada por*

$$\mathbf{D}((x,y),(p,q))=\text{máx}\{d(x,p),\rho(y,q)\}$$

para cualesquiera $(x,y),(p,q)\in X\times Y$ es una métrica para $X\times Y$ que induce la topología producto.

Capítulo 2

Promedios en dendroides

Un *promedio* para el continuo X es una función continua $m : X \times X \to X$ tal que

a) $m((x,x)) = x$ para cada $x \in X$, y

b) $m((x,y)) = m((y,x))$ para cualesquiera $x, y \in X$.

Es sabido que la existencia de un promedio $m : X \times X \to X$ para un continuo X es equivalente a la existencia de una retracción $r : F_2(X) \to X$, cuando identificamos X con $F_1(X) \subset F_2(X)$ ([20, Definition 76.5, p. 374]). Así que en el resto de esta tesis usamos esta equivalencia.

El problema de determinar qué continuos admiten promedios ha sido estudiado por muchos autores. P. Bacon probó que los continuos que admiten promedios deben ser unicoherentes ([2]) y también probó que el continuo que es la cerradura en $\mathbb{R}^2$ del conjunto $\{(x,\text{sen}(\frac{1}{x})) : 0 < x \leq 1\}$ no admite promedios ([1]). Así que una clase de espacios en los que es natural estudiar a los promedios es en los dendroides.

En [5], los autores mostraron que los continuos de tipo N no admiten promedios, así que es interesante preguntarse si los continuos de tipo generalizado N tampoco admiten promedios. El modo "más natural" de continuar investigando esta cuestión es sustituyendo A por un triodo simple en la Definición 2.1. Esta cuestión es la que abordamos en la Sección 2.1. Los ejemplos que estudiamos en esa sección son precisamente las maneras "más naturales" en las que se tiene este comportamiento.

En la Sección 2.2 abordamos un par de ejemplos en los que se comparan las propiedades de admitir promedios, ser contráctil y ser selectible. El primero de esos ejemplos es un dendroide que presentó T. Maćkowiak en [25]. T. Maćkowiak "probó" que este dendroide es selectible (la doctora Verónica Martínez de la Vega y Mansilla y Edder Yair Valeriano Reyes notaron que la "selección" que da T. Maćkowiak no funciona) y J. J. Charatonik preguntó si admite promedios [7, Pregunta 3.31, p. 66]. En esa sección, también presentamos un dendroide plano con propiedades similares al dendroide de las tijeras (vea [17, Dendroide X_2] y [26]), con el cual también se responden un par de preguntas de J. J. Charatonik ([7, Preguntas 5.11 y 5.12, p. 74]).

En la Sección 2.3 estudiamos promedios monótonos. En [21], A. Illanes y L. C. Simón probaron que el abanico armónico no admite promedios monótonos y formularon una pregunta acerca de la existencia de promedios monótonos en cierto tipo de dendroides. En la Sección 2.3 probamos un par de teoremas que responden parcialmente esa pregunta.

2.1. Dendroides de tipo generalizado N

La siguiente definición fue dada por L. G. Oversteegen en [30], y después generalizada en [9, pp. 78-79].

Definición 2.1 Sean X un continuo y $x, y \in X$, $x \neq y$. Decimos que X es un continuo de *tipo generalizado* N *entre* x *y* y si existen en X: un subcontinuo A que contiene a x y y, dos sucesiones de arcos $\{x_n x_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n y_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$, y dos sucesiones de puntos $\{x_n''\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n''\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que
1) $x_n'' \in y_n y_n' \setminus \{y_n, y_n'\}$ y $y_n'' \in x_n x_n' \setminus \{x_n, x_n'\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
2) $A = \lim_{n\to\infty} x_n x_n' = \lim_{n\to\infty} y_n y_n'$;
3) $x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n' = \lim_{n\to\infty} x_n''$;
4) $y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} y_n' = \lim_{n\to\infty} y_n''$;
5) cada arco en X que une a x_n y x_n' contiene a y_n'';
6) cada arco en X que une a y_n y y_n' contiene a x_n''.
Si el subcontinuo A es un arco con puntos finales x y y, decimos que X es un continuo de *tipo* N *entre* x *y* y. Si existen $x, y \in X$ tales que X es de tipo (generalizado) N entre x y y, simplemente decimos que X es de *tipo (generalizado)* N.

La Figura 1 ilustra la definición de continuo de tipo N.

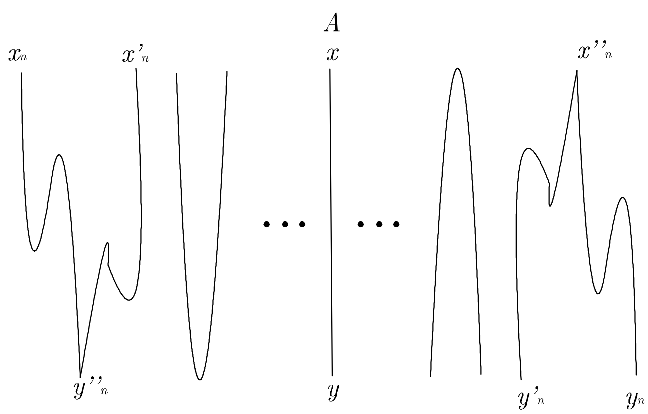

Figura 1. Continuo de tipo N.

La siguiente definición fue presentada en [6, p. 260].

Definición 2.2 Sean X un continuo y $x, y \in X$, $x \neq y$. Decimos que X es un continuo de *tipo COP-generalizado* N *entre* x *y* y si existen en X: un subcontinuo A que contiene a x y y, dos sucesiones de arcos $\{x_n x_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n y_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$, y dos sucesiones de puntos $\{x_n''\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n''\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que
1) $x_n'' \in y_n y_n' \setminus \{y_n, y_n'\}$ y $y_n'' \in x_n x_n' \setminus \{x_n, x_n'\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
2) $A = \lim_{n\to\infty} x_n y_n'' = \lim_{n\to\infty} x_n' y_n'' = \lim_{n\to\infty} y_n x_n'' = \lim_{n\to\infty} y_n' x_n''$;
3) $x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n' = \lim_{n\to\infty} x_n''$;
4) $y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} y_n' = \lim_{n\to\infty} y_n''$;

5) cada arco en X que une a x_n y x'_n contiene a y''_n;
6) cada arco en X que une a y_n y y'_n contiene a x''_n.
Si existen $x, y \in X$ tales que X es de tipo COP-generalizado N entre x y y, simplemente decimos que X es de *tipo COP-generalizado N*.

Observe que las definiciones 2.1 y 2.2 difieren en el inciso 2), y que todo continuo de tipo COP-generalizado N es de tipo generalizado N.

En la Sección 2.2.2 presentamos un dendroide (W_2) que es de tipo generalizado N y admite un promedio. No presentamos este dendroide aquí porque satisface otras propiedades interesantes (admite una retracción de 2^{W_2} sobre W_2, es contráctil y no es selectible), así que la Sección 2.2 nos parece más adecuada para presentarlo. El promedio que admite W_2 lo obtenemos al restringir a $F_2(W_2)$ la retracción que presentamos de 2^{W_2} a W_2. Con este dendroide respondemos de manera negativa la pregunta [7, Question 3.25, p. 64]. Sin embargo no se sabe si los dendroides de tipo COP-generalizado N pueden admitir promedios. En lo que resta de esta sección probaremos la no existencia de promedios para algunos de los dendroides más naturales de tipo generalizado N que son la cerradura de las uniones de dos familias numerables de arcos que se aproximan a un mismo triodo simple. De estos dendroides sólo uno es de tipo COP-generalizado N. A pesar de esto, incluimos las pruebas para todos ellos pues creemos que las ideas son interesantes y podrían ser útiles para probar que los dendroides de tipo COP-generalizado N no admiten promedios.

Antes de presentar los dendroides ya mencionados, enunciamos y probamos algunos resultados previos que usaremos en las pruebas.

Un espacio X es *conexo entre sus subconjuntos* A *y* B si no hay un subconjunto abierto y cerrado F de X tal que $A \subset F$ y $F \cap B = \emptyset$. Un subconjunto C de un espacio X *separa a* A *y* B *en* X si $A \cup B \subset X \setminus C$ y $X \setminus C$ no es conexo entre A y B. Relacionado con estas definiciones, los siguientes dos teoremas son usados en esta tesis.

Teorema 2.3 [24, §47, II, Theorem 3, p. 170]. *Si un espacio compacto y de Hausdorff X es conexo entre dos subconjuntos cerrados A y B, entonces existe una componente C de X tal que $C \cap A \neq \emptyset \neq C \cap B$.*

Teorema 2.4 [24, §57, III, Theorem 2, p. 438]. *Sea X un continuo unicoherente y localmente conexo. Sean K y L dos subconjuntos ajenos y cerrados de X, y tome $x \in K$ y $y \in L$. Entonces existe un separador C de x y y en X que es un continuo localmente conexo disjunto de $K \cup L$.*

El Lema 2.5 es extraído de [5, Theorem 2.1, p. 263], pero escribimos su demostración para completez. El Lema 2.6 es una consecuencia del Lema 2.5.

Lema 2.5 *Sean X un dendroide y $r : F_2(X) \to X$ un promedio. Considere un arco ab en X y $x \in ab \setminus \{a, b\}$, y sea $\mathcal{L} = \{\{a, t\} : t \in ab\} \cup \{\{b, t\} : t \in ab\}$. Si $\mathcal{D}$ es la componente de $r^{-1}(x) \cap F_2(ab)$ que contiene a $\{x\}$, entonces $\mathcal{D} \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$.*

Demostración. Suponga, por el contrario, que $\mathcal{D} \cap \mathcal{L} = \emptyset$.

Sean $\mathcal{F} = r^{-1}(x) \cap F_2(ab)$ y $\mathcal{Z} = \mathcal{F} \cup \mathcal{L}$.

Primero, veremos que $\mathcal{Z}$ no es conexo entre $\mathcal{L}$ y $\{x\}$. Suponga por el contrario que $\mathcal{Z}$ es conexo entre $\mathcal{L}$ y $\{x\}$. Por el Teorema 2.3, existe una componente $\mathcal{K}$ de $\mathcal{Z}$ tal que $\mathcal{K} \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$ y $\{x\} \in \mathcal{K}$. Consideramos dos casos:

Caso 1. $\mathcal{K} \nsubseteq \mathcal{F}$. Entonces $\mathcal{K} \cap \mathcal{F}$ es un subconjunto cerrado propio del continuo $\mathcal{K}$ y $\{x\} \in \mathcal{K} \cap \mathcal{F}$. De acuerdo a [27, Theorem 5.6, p. 74], la componente $\mathcal{K}'$ de $\mathcal{K} \cap \mathcal{F}$ que contiene a $\{x\}$ intersecta a la cerradura de $\mathcal{K} \setminus \mathcal{F}$. Como $\mathcal{K} \setminus \mathcal{F} \subset \mathcal{Z} \setminus \mathcal{F} \subset \mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$ es cerrado, tenemos que $\mathcal{K}' \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$.

Caso 2. $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$. En este caso sólo definamos $\mathcal{K}' = \mathcal{K}$.

En ambos casos obtenemos un subcontinuo $\mathcal{K}'$ de $\mathcal{F}$ tal que $\{x\} \in \mathcal{K}' \subset \mathcal{F}$ y $\mathcal{K}' \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$. Entonces $\mathcal{K}' \subset \mathcal{D}$ y $\mathcal{D} \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$, lo cual contradice nuestra suposición inicial.

Hemos mostrado que $\mathcal{Z}$ no es conexo entre $\mathcal{L}$ y $\{x\}$. Por tanto, $\mathcal{Z}$ es la unión de dos subconjuntos ajenos cerrados de $F_2(ab)$ tales que uno de ellos contiene a $\mathcal{L}$ y el otro contiene a $\{x\}$. Como $F_2(ab)$ es unicoherente ([12, Satz 1, p. 310]) y localmente conexo, por el Teorema 2.4, existe un continuo localmente conexo $\mathcal{H} \subset F_2(ab) \setminus \mathcal{Z}$ que también separa a $\mathcal{L}$ y $\{x\}$ en $F_2(ab)$.

Sean $\mathcal{M} = \{\{t\} : t \in ax\}$ y $\mathcal{M}' = \{\{t\} : t \in xb\}$. Como $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}'$ son dos arcos de $F_2(ab)$ que conectan a $\mathcal{L}$ con $\{x\}$, hay dos puntos $u, u' \in X$ tales que $\{u\} \in \mathcal{H} \cap \mathcal{M}$ y $\{u'\} \in \mathcal{H} \cap \mathcal{M}'$. Como

$$\mathcal{H} \subset F_2(ab) \setminus \mathcal{Z} \subset F_2(ab) \setminus \mathcal{F} = F_2(ab) \setminus [r^{-1}(x) \cap F_2(ab)] \subset F_2(ab) \setminus r^{-1}(x),$$

tenemos que $\mathcal{H} \cap r^{-1}(x) = \emptyset$. Por tanto, $r(\mathcal{H})$ es un subcontinuo localmente conexo de X tal que $u, u' \in r(\mathcal{H})$ y $x \notin r(\mathcal{H})$. Por otro lado, como $r(\mathcal{H})$ es un dendroide, $x \in uu' \subset r(\mathcal{H})$. De esta contradicción, concluimos que $\mathcal{D} \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$. ∎

Lema 2.6 *Sean X un dendroide y $r : F_2(X) \to X$ un promedio. Suponga que existen en X: un arco ab, una sucesión de arcos $\{b_n b'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y una sucesión de puntos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que*

(1) $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ y $a_n \in b_n b'_n \setminus \{b_n, b'_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$,

(2) $b = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b'_n$,

(3) $ab = \lim_{n\to\infty} b_n b'_n$.

Si $\mathcal{L} = \{\{b, t\} : t \in ab\}$ y $\mathcal{D}$ es la componente de $r^{-1}(a) \cap F_2(ab)$ que contiene a $\{a\}$, entonces $\mathcal{D} \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$.

Demostración. Para cada $n \in N$, sea $\mathcal{C}_n$ la componente de $r^{-1}(a_n) \cap F_2(b_n b'_n)$ que contiene a $\{a_n\}$ y sea $\mathcal{L}_n = \{\{b_n, t\} : t \in b_n b'_n\} \cup \{\{b'_n, t\} : t \in b_n b'_n\}$. De acuerdo al Lema 2.5, $\mathcal{C}_n \cap \mathcal{L}_n \neq \emptyset$. Tome $A_n \in \mathcal{C}_n \cap \mathcal{L}_n$. Sin pérdida de generalidad asuma que $\lim_{n\to\infty} \mathcal{C}_n = \mathcal{C}$ para algún $\mathcal{C} \in C(F_2(X))$ y $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ para algún $A \in F_2(X)$. Por (2) y (3), se sigue que $\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_n = \mathcal{L}$, y entonces $A \in \mathcal{C} \cap \mathcal{L}$. Mostraremos que $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$. Para este propósito, sea $\{x, y\} \in \mathcal{C}$. Por [15, p. 70], para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\{x_n, y_n\} \in \mathcal{C}_n$ tal que $\lim_{n\to\infty}\{x_n, y_n\} = \{x, y\}$. Podemos suponer que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Como $x_n, y_n \in b_n b'_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por (3), $\{x, y\} \in F_2(ab)$. Como r es continua y $r(\{x_n, y_n\}) = a_n$, por (1), $r(\{x, y\}) = \lim_{n\to\infty} r(\{x_n, y_n\}) = \lim_{n\to\infty} a_n = a$. Hemos mostrado que $\mathcal{C}$ es un subcontinuo de $F_2(X)$ contenido en $r^{-1}(a) \cap F_2(ab)$. Como $\{a\} = \lim_{n\to\infty}\{a_n\} \in \lim_{n\to\infty} \mathcal{C}_n = \mathcal{C}$, $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ y $\mathcal{D} \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$. ∎

En lo que resta de la sección presentamos los dendroides de tipo generalizado N prometidos. Todos contienen dos sucesiones de arcos que convergen a un triodo simple T con punto de ramificación v y puntos finales x, y y z.

Todo continuo presentado aquí es construído en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ y es considerado con la respectiva métrica euclidiana denotada por ρ. Dados dos puntos distintos $x, y \in \mathbb{R}^2$ (respectivamente $\mathbb{R}^3$), el segmento convexo en $\mathbb{R}^2$ (respectivamente $\mathbb{R}^3$) con extremos x y y es denotado por $\overline{xy}$.

2.1.1. Dendroide W

Sean $x = (-1, 0)$, $y = (1, 0)$, $z = (0, 1)$, $v = (0, 0)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sean

$$x_n = (-1 + \frac{1}{2n+1}, \frac{1}{(2n+1)(2n)}),\ u_n = (-\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n+1}),$$

$$z_n = (0, 1 + \frac{1}{2n+1}),\ v_n = (\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n+1}),$$

$$u'_n = (-\frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n+2}),\ z'_n = (0, 1 + \frac{1}{2n+2}),$$

$$v'_n = (\frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n+2}),\ y'_n = (1 - \frac{1}{2n+2}, \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}),$$

$$A_n = \overline{x_n u_n} \cup \overline{u_n z_n} \cup \overline{z_n v_n} \cup \overline{v_n y},\ B_n = \overline{x u'_n} \cup \overline{u'_n z'_n} \cup \overline{z'_n v'_n} \cup \overline{v'_n y'_n}.$$

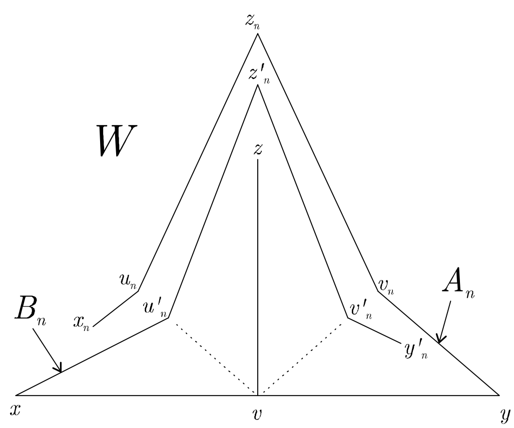

Figura 2. Dendroide W.

Definimos

$$T = \overline{xv} \cup \overline{yv} \cup \overline{zv} \text{ y}$$

$$W = T \cup (\bigcup\{A_n \cup B_n : n \in \mathbb{N}\}) \text{ (vea la Figura 2).}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $x'_n = x_{n+1}$, $x''_n = x$, $y_n = y'_{n+1}$ y $y''_n = y$. Notemos que: T es un subcontinuo de W que contiene a x y a y, $\{x_n x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n y'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones de arcos, y $\{x''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones de puntos tales que

1) $x''_n \in y_n y'_n \setminus \{y_n, y'_n\}$ y $y''_n \in x_n x'_n \setminus \{x_n, x'_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
2) $T = \lim_{n\to\infty} x_n y''_n = \lim_{n\to\infty} x'_n y''_n = \lim_{n\to\infty} y_n x''_n = \lim_{n\to\infty} y'_n x''_n$;
3) $x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x'_n = \lim_{n\to\infty} x''_n$;

4) $y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} y'_n = \lim_{n\to\infty} y''_n$;
5) cada arco en W que une a x_n y x'_n contiene a y''_n;
6) cada arco en W que une a y_n y y'_n contiene a x''_n.
Entonces, W es un dendroide de tipo COP-generalizado N entre x y y, y contiene al triodo simple T. Claramente:

$$\begin{aligned} v &= \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} u'_n = \lim_{n\to\infty} v'_n, \\ z &= \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} z'_n, \\ T &= \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n. \end{aligned}$$

Considere la retracción $R : W \to T$ que satisfaga lo siguiente para cada $n \in \mathbb{N}$:

- $R(x_n) = x$, $R(u_n) = v$, $R(z_n) = z$, $R(v_n) = v$, $R(y'_n) = y$, $R(v'_n) = v$, $R(z'_n) = z$ y $R(u'_n) = v$;
- $R|_{x_n u_n} : x_n u_n \to xv$, $R|_{u_n z_n} : u_n z_n \to vz$, $R|_{z_n v_n} : z_n v_n \to zv$, $R|_{v_n y} : v_n y \to vy$, $R|_{xu'_n} : xu'_n \to xv$, $R|_{u'_n z'_n} : u'_n z'_n \to vz$, $R|_{z'_n v'_n} : z'_n v'_n \to zv$ y $R|_{v'_n y'_n} : v'_n y'_n \to vy$ son homeomorfismos lineales.

Suponga que W admite un promedio $r : F_2(W) \to W$. Tomemos $\delta > 0$ tal que $\mathbf{H}(A,B) < \delta$ implica que $\rho(r(A), r(B)) < \frac{1}{3}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, por la compacidad de A_n y de B_n, existen $a_n \in A_n$ y $b_n \in B_n$ tales que $\rho(a_n, R(a_n)) =$máx$\{\rho(a, R(a)) : a \in A_n\}$ y $\rho(b_n, R(b_n)) =$máx$\{\rho(b, R(b)) : b \in B_n\}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a puntos de T. Entonces $\lim_{n\to\infty} \rho(a_n, R(a_n)) = 0$ y $\lim_{n\to\infty} \rho(b_n, R(b_n)) = 0$. Así que, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(a_n, R(a_n)) < \frac{\delta}{4}$ y $\rho(b_n, R(b_n)) < \frac{\delta}{4}$ para todo $n \geq N$. Por tanto, para cualesquiera $a \in A_N$, $p \in \left(R|_{A_{N+1}}\right)^{-1}(R(a))$ y $q \in (R|_{B_N})^{-1}(R(a))$, tenemos que $\rho(a,p) < \frac{\delta}{2}$ y $\rho(a,q) < \frac{\delta}{2}$. También, para cualesquiera $b \in B_N$ y $p \in \left(R|_{B_{N+1}}\right)^{-1}(R(b))$, tenemos que $\rho(b,p) < \frac{\delta}{2}$. Definimos $\phi : A_N \to A_{N+1}$, $\psi : A_N \to B_N$ y $\tau : B_N \to B_{N+1}$ como sigue:

$$\phi(a) = \begin{cases} \left(R|_{x_{N+1}z_{N+1}}\right)^{-1}(R(a)), & \text{si } a \in x_N z_N; \\ \left(R|_{z_{N+1}y}\right)^{-1}(R(a)), & \text{si } a \in z_N y; \end{cases}$$

$$\psi(a) = \begin{cases} \left(R|_{xz'_N}\right)^{-1}(R(a)), & \text{si } a \in x_N z_N; \\ \left(R|_{z'_N y'_N}\right)^{-1}(R(a)), & \text{si } a \in z_N y; \end{cases}$$

$$\tau(b) = \begin{cases} \left(R|_{xz'_{N+1}}\right)^{-1}(R(b)), & \text{si } b \in xz'_N; \\ \left(R|_{z'_{N+1}y'_{N+1}}\right)^{-1}(R(b)), & \text{si } b \in z'_N y'_N. \end{cases}$$

Notemos que ϕ, ψ y τ son homeomorfismos y satisfacen

$$\rho(a, \phi(a)) < \frac{\delta}{2},\ \rho(a, \psi(a)) < \frac{\delta}{2} \text{ y } \rho(b, \tau(b)) < \frac{\delta}{2} \tag{1}$$

para cualesquiera $a \in A_N$ y $b \in B_N$.

Sea $\mathcal{C}$ la componente de $r^{-1}(z_N) \cap F_2(A_N)$ que contiene a $\{z_N\}$ y sea $\mathcal{L} = \{\{x_N, a\} \in F_2(A_N) : a \in A_N\} \cup \{\{y, a\} \in F_2(A_N) : a \in A_N\}$. Por el Lema 2.5, $\mathcal{C} \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$. Entonces tenemos dos casos:

$$(\mathbf{1})\ \mathcal{C} \cap \{\{y, a\} \in F_2(A_N) : a \in A_N\} \neq \emptyset$$
$$(\mathbf{2})\ \mathcal{C} \cap \{\{x_N, a\} \in F_2(A_N) : a \in A_N\} \neq \emptyset.$$

Caso 1. $\mathcal{C} \cap \{\{y, a\} \in F_2(A_N) : a \in A_N\} \neq \emptyset$.

Sea $p \in A_N$ tal que $\{y, p\} \in \mathcal{C}$. Definimos $f : F_2(A_N) \to F_2(A_N \cup A_{N+1})$ y $g : F_2(A_N) \to F_2(A_N \cup A_{N+1})$ por

$$f(\{a, b\}) = \begin{cases} \{\phi(a), b\}, & \text{si } a \in yb; \\ \{a, \phi(b)\}, & \text{si } b \in ya; \end{cases}$$

$$g(\{a, b\}) = \begin{cases} \{a, \phi(b)\}, & \text{si } a \in yb; \\ \{\phi(a), b\}, & \text{si } b \in ya; \end{cases}$$

para cada $\{a, b\} \in F_2(A_N)$. Es fácil ver que f y g son continuas y que $F_2(\phi) : F_2(A_N) \to F_2(A_{N+1})$ es un homeomorfismo ($F_2(\phi)$ es la función inducida por ϕ en $F_2(A_N)$, dada por $F_2(\phi)(\{a, b\}) = \{\phi(a), \phi(b)\}$, vea [13, Theorem 3.2, p. 369]).

Entonces $f(\mathcal{C})$, $g(\mathcal{C})$ y $F_2(\phi)(\mathcal{C})$ son subcontinuos de $F_2(W)$. Como $\{y, p\} = f(\{y, p\})$, $\{z_N, z_{N+1}\} = f(\{z_N\}) = g(\{z_N\})$ y $\{y, \phi(p)\} = g(\{y, p\}) = F_2(\phi)(\{y,\ p\})$, se sigue que $\{y, p\} \in \mathcal{C} \cap f(\mathcal{C})$, $\{z_N, z_{N+1}\} \in f(\mathcal{C}) \cap g(\mathcal{C})$ y $\{y, \phi(p)\} \in g(\mathcal{C}) \cap F_2(\phi)(\mathcal{C})$. Por tanto, $\mathcal{C} \cup f(\mathcal{C}) \cup g(\mathcal{C}) \cup F_2(\phi)(\mathcal{C})$ es un subcontinuo de $F_2(W)$. Para cada $\{a, b\} \in \mathcal{C}$, por (1), tenemos $\rho(a, \phi(a)) < \frac{\delta}{2}$ y $\rho(b, \phi(b)) < \frac{\delta}{2}$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\{a, b\}, f(\{a, b\})) &< \frac{\delta}{2}, \\ \mathbf{H}(\{a, b\}, g(\{a, b\})) &< \frac{\delta}{2}, \\ \mathbf{H}(\{a, b\}, F_2(\phi)(\{a, b\})) &< \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Así, $\mathcal{C} \cup f(\mathcal{C}) \cup g(\mathcal{C}) \cup F_2(\phi)(\mathcal{C}) \subset N(\mathcal{C}, \frac{\delta}{2})$.

Como $\mathcal{C} \subset r^{-1}(z_N)$, la elección de δ implica que $r(\mathcal{C} \cup f(\mathcal{C}) \cup g(\mathcal{C}) \cup F_2(\phi)(\mathcal{C})) \subset N(r(\mathcal{C}), \frac{1}{3}) = B(z_N, \frac{1}{3})$. Usando que $\{z_N\} \in \mathcal{C}$ y $\{z_{N+1}\} = F_2(\phi)(\{z_N\}) \in F_2(\phi)(\mathcal{C})$, obtenemos que $z_N \in r(\mathcal{C})$ y $z_{N+1} \in r(F_2(\phi)(\mathcal{C}))$. Hemos probado que $r(\mathcal{C} \cup f(\mathcal{C}) \cup g(\mathcal{C}) \cup F_2(\phi)(\mathcal{C}))$ es un subcontinuo de W contenido en $B(z_N, \frac{1}{3})$ y contiene a los puntos z_N y z_{N+1}. Esto es una contradicción porque $y \notin B(z_N, \frac{1}{3})$ y todo subcontinuo de W que contiene a z_N y a z_{N+1} también debe contener a y.

Caso 2. $\mathcal{C} \cap \{\{x_N, a\} \in F_2(A_N) : a \in A_N\} \neq \emptyset$.

Sea $p \in A_N$ tal que $\{x_N, p\} \in \mathcal{C}$. Tenemos que $F_2(\psi) : F_2(A_N) \to F_2(B_N)$ es un homeomorfismo ($F_2(\psi)$ es la función inducida por ψ en $F_2(A_N)$, dada por $F_2(\psi)(\{a, b\}) = \{\psi(a), \psi(b)\}$, vea [13, Theorem 3.2, p. 369]). Definimos $\mathcal{D} = F_2(\psi)(\mathcal{C})$ y $q = \psi(p)$. Entonces $\mathcal{D}$ es un cubcontinuo de $F_2(B_N)$ tal que $\{z'_N\} \in \mathcal{D}$ y $\{x, q\} \in \mathcal{D} \cap \{\{x, b\} \in F_2(B_N) : b \in B_N\}$. Además, por (1), $\mathcal{D} \subset N(\mathcal{C}, \frac{\delta}{2})$. Definimos $f' : F_2(B_N) \to F_2(B_N \cup B_{N+1})$ y $g' : F_2(B_N) \to F_2(B_N \cup B_{N+1})$ por

$$f'(\{a, b\}) = \begin{cases} \{\tau(a), b\}, & \text{si } a \in xb; \\ \{a, \tau(b)\}, & \text{si } b \in xa; \end{cases}$$

$$g'(\{a,b\}) = \begin{cases} \{a,\tau(b)\}, & \text{si } a \in xb; \\ \{\tau(a),b\}, & \text{si } b \in xa; \end{cases}$$

para cada $\{a,b\} \in F_2(B_N)$. Es fácil ver que f' y g' son continuas y que $F_2(\tau) : F_2(B_N) \to F_2(B_{N+1})$ es un homeomorfismo ($F_2(\tau)$ es la función inducida por τ en $F_2(B_N)$, dada por $F_2(\tau)(\{a,b\}) = \{\tau(a),\tau(b)\}$, vea [13, Theorem 3.2, p. 369]).

Entonces $f'(\mathcal{D})$, $g'(\mathcal{D})$ y $F_2(\tau)(\mathcal{D})$ son subcontinuos de $F_2(W)$. Como $\{x,q\} = f'(\{x,q\})$, $\{z'_N, z'_{N+1}\} = f'(\{z'_N\}) = g'(\{z'_N\})$ y $\{x,\tau(q)\} = g'(\{x,q\}) = F_2(\tau)(\{x,q\})$, se sigue que $\{x,q\} \in \mathcal{D} \cap f'(\mathcal{D})$, $\{z'_N, z'_{N+1}\} \in f'(\mathcal{D}) \cap g'(\mathcal{D})$ y $\{x,\tau(q)\} \in g'(\mathcal{D}) \cap F_2(\tau)(\mathcal{D})$. Por tanto, $\mathcal{D} \cup f'(\mathcal{D}) \cup g'(\mathcal{D}) \cup F_2(\tau)(\mathcal{D})$ es un subcontinuo de $F_2(W)$. Para cada $\{a,b\} \in \mathcal{D}$, por (1), tenemos $\rho(a,\tau(a)) < \frac{\delta}{2}$ y $\rho(b,\tau(b)) < \frac{\delta}{2}$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\{a,b\}, f'(\{a,b\})) &< \frac{\delta}{2}, \\ \mathbf{H}(\{a,b\}, g'(\{a,b\})) &< \frac{\delta}{2}, \\ \mathbf{H}(\{a,b\}, F_2(\tau)(\{a,b\})) &< \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Así, $\mathcal{D} \cup f'(\mathcal{D}) \cup g'(\mathcal{D}) \cup F_2(\tau)(\mathcal{D}) \subset N(\mathcal{D}, \frac{\delta}{2})$.

Como $\mathcal{D} \subset N(\mathcal{C}, \frac{\delta}{2})$, tenemos $\mathcal{D} \cup f'(\mathcal{D}) \cup g'(\mathcal{D}) \cup F_2(\tau)(\mathcal{D}) \subset N(\mathcal{C}, \delta)$. Como $\mathcal{C} \subset r^{-1}(z_N)$, la elección de δ implica que $r(\mathcal{D} \cup f'(\mathcal{D}) \cup g'(\mathcal{D}) \cup F_2(\tau)(\mathcal{D})) \subset N(r(\mathcal{C}), \frac{1}{3}) = B(z_N, \frac{1}{3})$. Usando que $\{z'_N\} \in \mathcal{D}$ y $\{z'_{N+1}\} = F_2(\tau)(\{z'_N\}) \in F_2(\tau)(\mathcal{D})$, obtenemos que $z'_N \in r(\mathcal{D})$ y $z'_{N+1} \in r(F_2(\tau)(\mathcal{D}))$. Hemos probado que $r(\mathcal{D} \cup f'(\mathcal{D}) \cup g'(\mathcal{D}) \cup F_2(\tau)(\mathcal{D}))$ es un subcontinuo de W contenido en $B(z_N, \frac{1}{3})$ y contiene a los puntos z'_N y z'_{N+1}. Esto es una contradicción porque $x \notin B(z_N, \frac{1}{3})$ y todo subcontinuo de W que contiene a z'_N y a z'_{N+1} también debe contener a x.

Como en ambos casos obtenemos una contradicción, concluimos que W no admite promedios.

2.1.2. Dendroide X

Sean $x = (-1,0)$, $y = (1,0)$, $z = (0,1)$, $v = (0,0)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = (-1, \frac{1}{2n+1}),\ u_n = (-\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n+1}),\ z_n = (0, 1 + \frac{1}{2n+1}),$$

$$v_n = (\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n+1}),\ z'_n = (0, 1 + \frac{1}{2n+2}),\ u'_n = (-\frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n+2}),$$

$$x'_n = (-1, \frac{1}{2n+2}),\ x''_n = (-1, -\frac{1}{2n+2}),\ v'_n = (0, -\frac{1}{4n+4}),$$

$$C_n = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : (a+1)^2 + b^2 = (\frac{1}{2n+2})^2, a \leq -1\},$$

$$A_n = \overline{x_n u_n} \cup \overline{u_n z_n} \cup \overline{z_n v_n} \cup \overline{v_n y},\ B_n = \overline{z'_n u'_n} \cup \overline{u'_n x'_n} \cup C_n \cup \overline{x''_n v'_n} \cup \overline{v'_n y}.$$

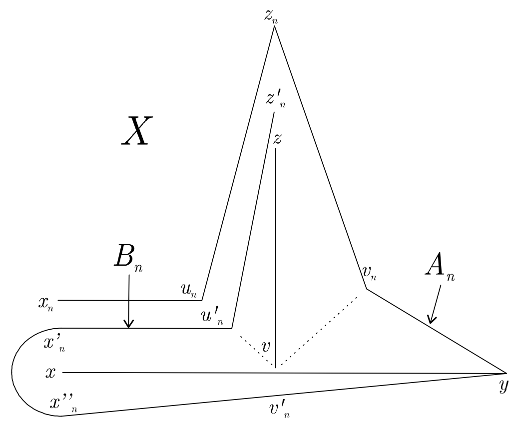

Figura 3. Dendroide X.

Note que v'_n es el punto de $\overline{x''_n y}$ cuya abscisa es 0, C_n es la semicircunferencia con radio $\frac{1}{2n+2}$ centrada en x cuyos puntos tienen abscisa menor o igual a -1. Los extremos de C_n son x'_n y x''_n. Definimos

$$T = \overline{xv} \cup \overline{yv} \cup \overline{zv} \text{ y}$$

$$X = T \cup \left(\bigcup\{A_n \cup B_n : n \in \mathbb{N}\}\right) \text{ (vea la Figura 3).}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, pongamos $z''_n = z_n$. Notemos que: T es un subcontinuo de X que contiene a x y a z, $\{x_n x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{z_n z'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones de arcos, y $\{x''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{z''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones de puntos tales que

1) $x''_n \in z_n z'_n \setminus \{z_n, z'_n\}$ y $z''_n \in x_n x'_n \setminus \{x_n, x'_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
2) $T = \lim_{n\to\infty} x_n x'_n = \lim_{n\to\infty} z_n z'_n$;
3) $x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x'_n = \lim_{n\to\infty} x''_n$;
4) $z = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} z'_n = \lim_{n\to\infty} z''_n$;
5) cada arco en X que une a x_n y x'_n contiene a z''_n;
6) cada arco en X que une a z_n y z'_n contiene a x''_n.

Entonces, X es un dendroide de tipo generalizado N entre x y z, y contiene al triodo simple T (vea la Figura 3). Claramente:

$$\begin{array}{rcl} v & = & \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} u'_n = \lim_{n\to\infty} v'_n, \\ T & = & \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n. \end{array}$$

Considere la retracción $R : X \to T$ que satisfaga lo siguiente para cada $n \in \mathbb{N}$:

- $R(x_n) = x$, $R(u_n) = v$, $R(z_n) = z$, $R(v_n) = v$, $R(z'_n) = z$, $R(u'_n) = v$, $R(q) = x$ para cada $q \in C_n$ y $R(v'_n) = v$;

- $R|_{x_n u_n} : x_n u_n \to xv$, $R|_{u_n z_n} : u_n z_n \to vz$, $R|_{z_n v_n} : z_n v_n \to zv$, $R|_{v_n y} : v_n y \to vy$, $R|_{z'_n u'_n} : z'_n u'_n \to zv$, $R|_{u'_n x'_n} : u'_n x'_n \to vx$, $R|_{x''_n v'_n} : x''_n v'_n \to xv$ y $R|_{v'_n y} : v'_n y \to vy$ son homeomorfismos lineales.

Mostraremos que X no admite promedios. Antes de hacer esto definimos otro dendroide Y que tiene algunas propiedades similares a X. Para evitar repeticiones y como las pruebas de que X y Y no admiten promedios son similares, haremos la prueba para ambos dendroides al mismo tiempo.

2.1.3. Dendroide Y

Sean $x = (-1, 0, 0)$, $y = (1, 0, 0)$, $z = (0, 1, 0)$, $v = (0, 0, 0)$ y para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$,

$$x_n = (-1, \frac{1}{n}, 0),\ u_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, 0),\ z_n = (0, 1 + \frac{1}{n}, 0),\ v_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, 0),$$

$$z'_n = (0, 1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{n}),\ u'_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}),\ y'_n = (1, 0, \frac{1}{n}),\ v'_n = (0, 0, \frac{1}{2n}),$$

$$A_n = \overline{x_n u_n} \cup \overline{u_n z_n} \cup \overline{z_n v_n} \cup \overline{v_n y},\ B_n = \overline{z'_n u'_n} \cup \overline{u'_n y'_n} \cup \overline{y'_n v'_n} \cup \overline{v'_n x}.$$

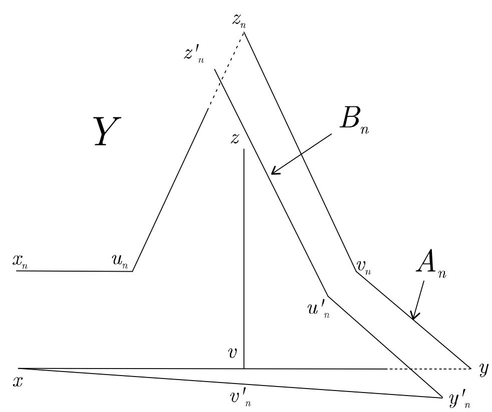

Figura 4. Dendroide Y.

Definimos

$$T = \overline{xv} \cup \overline{yv} \cup \overline{zv} \text{ y}$$

$$Y = T \cup (\bigcup\{A_n \cup B_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}) \text{ (vea la Figura 4).}$$

Para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, pongamos $x'_n = x''_n = x$ y $z''_n = z_n$. Notemos que: T es un subcontinuo de Y que contiene a x y a z, $\{x_n x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{z_n z'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones de arcos, y $\{x''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{z''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones de puntos tales que

1) $x''_n \in z_n z'_n \setminus \{z_n, z'_n\}$ y $z''_n \in x_n x'_n \setminus \{x_n, x'_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$;
2) $T = \lim_{n\to\infty} x_n x'_n = \lim_{n\to\infty} z_n z'_n$;
3) $x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x'_n = \lim_{n\to\infty} x''_n$;
4) $z = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} z'_n = \lim_{n\to\infty} z''_n$;
5) cada arco en Y que une a x_n y x'_n contiene a z''_n;
6) cada arco en Y que une a z_n y z'_n contiene a x''_n.

Entonces Y es un dendroide de tipo generalizado N entre x y z, y contiene al triodo simple

T (vea la Figura 4). Claramente:

$$\begin{array}{rcl} v & = & \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} u'_n = \lim_{n\to\infty} v'_n, \\ y & = & \lim_{n\to\infty} y'_n, \\ T & = & \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n. \end{array}$$

Considere la retracción $R : Y \to T$ que satisfaga lo siguiente para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$:

- $R(x_n) = x$, $R(u_n) = v$, $R(z_n) = z$, $R(v_n) = v$, $R(z'_n) = z$, $R(u'_n) = v$, $R(y'_n) = y$ y $R(v'_n) = v$;

- $R|_{x_n u_n} : x_n u_n \to xv$, $R|_{u_n z_n} : u_n z_n \to vz$, $R|_{z_n v_n} : z_n v_n \to zv$, $R|_{v_n y} : v_n y \to vy$, $R|_{z'_n u'_n} : z'_n u'_n \to zv$, $R|_{u'_n y'_n} : u'_n y'_n \to vy$, $R|_{y'_n v'_n} : y'_n v'_n \to yv$ y $R|_{v'_n x} : v'_n x \to vx$ son homeomorfismos lineales.

Ahora probaremos que X y Y no admiten promedios.

Supongamos que X (o Y) admite un promedio $r : F_2(X) \to X$ ($r : F_2(Y) \to Y$, para Y). Tomemos $\delta > 0$ tal que $\mathbf{H}(A, B) < \delta$ implica que $\rho(r(A), r(B)) < \frac{1}{4}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, por la compacidad de A_n y de B_n, existen $a_n \in A_n$ y $b_n \in B_n$ tales que

$$\rho(a_n, R(a_n)) = \max\{\rho(a, R(a)) : a \in A_n\} \text{ y}$$

$$\rho(b_n, R(b_n)) = \max\{\rho(b, R(b)) : b \in B_n\}.$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a puntos en T. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \rho(a_n, R(a_n)) = 0 \text{ y } \lim_{n\to\infty} \rho(b_n, R(b_n)) = 0,$$

y existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $\rho(a_n, R(a_n)) < \frac{\delta}{3}$ y $\rho(b_n, R(b_n)) < \frac{\delta}{3}$. Por tanto, $\rho(x, R(x)) < \frac{\delta}{3}$ para cada $x \in A_N \cup B_N$.

Sea $\mathcal{D}$ la componente de $r^{-1}(x) \cap F_2(xv)$ que contiene a $\{x\}$ y sea $\mathcal{L} = \{\{q, v\} \in F_2(X) : q \in xv\}$ ($\mathcal{L} = \{\{q, v\} \in F_2(Y) : q \in xv\}$, para Y). Como el arco xv y la sucesión de arcos $\{v'_n u'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ($\{v'_n v\}_{n\in\mathbb{N}}$, para Y) satisfacen las hipótesis del Lema 2.6, $\mathcal{D} \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$. Similarmente, sea $\mathcal{E}$ la componente de $r^{-1}(y) \cap F_2(yv)$ que contiene a $\{y\}$ y sea $\mathcal{M} = \{\{q, v\} \in F_2(X) : q \in yv\}$ ($\mathcal{M} = \{\{q, v\} \in F_2(Y) : q \in yv\}$, para Y). Como el arco yv y la sucesión de arcos $\{vv_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfacen las hipótesis del Lema 2.6, $\mathcal{E} \cap \mathcal{M} \neq \emptyset$. Entonces, existen $\{p_0, v\} \in \mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ y $\{q_0, v\} \in \mathcal{E} \cap \mathcal{M}$ (vea la Figura 5). Note que $v \notin \{p_0, q_0\}$.

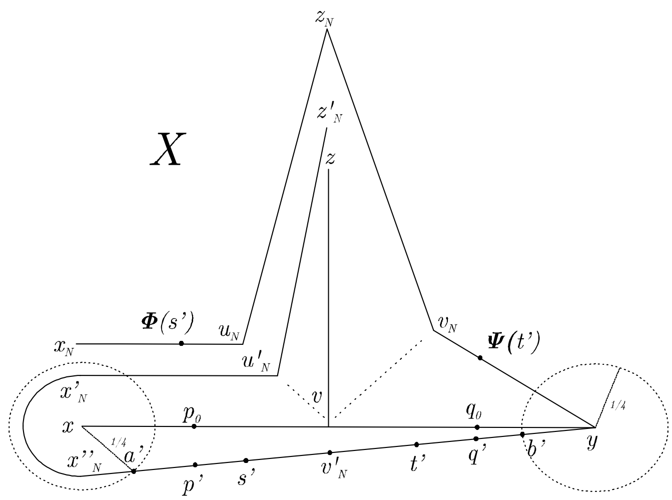

Figura 5. Puntos p_0, q_0, p', q', a', b', s', t', $\Phi(s')$ y $\Psi(t')$.

Sean $K = x''_N v'_N$ ($K = xv'_N$, para Y) y $L = v'_N y$ ($L = v'_N y'_N$, para Y). Como $R|_K : K \to xv$ y $R|_L : L \to vy$ son biyectivas, existen puntos $p' \in K \setminus \{v'_N\}$ y $q' \in L \setminus \{v'_N\}$ tales que $R(p') = p_0$ y $R(q') = q_0$ (vea la Figura 5). Tomemos $a', b' \in K \cup L$ tales que $\rho(x, a') = \frac{1}{4} = \rho(y, b')$ (vea la Figura 5). Por la elección de N,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\{p_0, v\}, \{p', v'_N\}) &< \delta, \\ \mathbf{H}(\{q_0, v\}, \{q', v'_N\}) &< \delta. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} \rho(x, r(\{p', v'_N\})) &< \frac{1}{4}, \\ \rho(y, r(\{q', v'_N\})) &< \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Como $\rho(x, r(\{p', v'_N\})) < \frac{1}{4}$ y $r(\{v'_N\}) = v'_N$, hay un punto $s \in p'v'_N$ tal que $r(\{s, v'_N\}) \in \{a', b'\}$. Sea s' el primer punto en $p'v'_N$ (yendo de v'_N a p') tal que $r(\{s', v'_N\}) \in \{a', b'\}$. Entonces $s' \notin \{p', v'_N\}$ y $r(\{s, v'_N\}) \in a'b' \setminus \{a', b'\}$ para cada $s \in s'v'_N \setminus \{s'\}$. Similarmente, existe $t' \in v'_N q' \setminus \{v'_N, q'\}$ tal que $r(\{t', v'_N\}) \in \{a', b'\}$ y $r(\{t, v'_N\}) \in a'b' \setminus \{a', b'\}$ para cada $t \in v'_N t' \setminus \{t'\}$. Definimos $\mathcal{S}' = \{\{s, v'_N\} : s \in s'v'_N\}$ y $\mathcal{T}' = \{\{t, v'_N\} : t \in v'_N t'\}$. Notemos que $\{v'_N\} \in \mathcal{S}' \cap \mathcal{T}'$ y $r(\mathcal{S}' \cup \mathcal{T}') \subset a'b'$.

Como $R|_K : K \to xv$ y $R|_{x_N u_N} : x_N u_N \to xv$ son homeomorfismos, las funciones $\Phi = (R|_{x_N u_N})^{-1} \circ R|_K : K \to x_N u_N$ y $F_2(\Phi) : F_2(K) \to F_2(x_N u_N)$ también son homeomorfismos ($F_2(\Phi)$ es la función inducida por Φ en $F_2(K)$, dada por $F_2(\Phi)(\{a, b\}) = \{\Phi(a), \Phi(b)\}$, vea [13, Theorem 3.2, p. 369]). Dado $s \in K$, tenemos $\rho(s, \Phi(s)) < \delta$, entonces $\mathbf{H}(\{s, v'_N\}, F_2(\Phi)(\{s, v'_N\})) < \delta$. Así,

$$\rho(r(\{s, v'_N\}), r(F_2(\Phi)(\{s, v'_N\}))) < \frac{1}{4}.$$

Por tanto,

$$r(F_2(\Phi)(\mathcal{S}')) \subset N(r(\mathcal{S}'), \frac{1}{4}) \subset N(a'b', \frac{1}{4}) \subset X \setminus \{z_N, y\} \ (Y \setminus \{z_N, y\}, \text{ para } Y).$$

Similarmente, las funciones $\Psi = (R|_{v_N y})^{-1} \circ R|_L : L \to v_N y$ y $F_2(\Psi) : F_2(L) \to F_2(v_N y)$ son homeomorfismos y

$$r(F_2(\Psi)(\mathcal{T}')) \subset N(r(\mathcal{T}'), \frac{1}{4}) \subset N(a'b', \frac{1}{4}) \subset X \setminus \{z_N, y\} \ (Y \setminus \{z_N, y\}, \text{ para } Y).$$

Afirmación 1. $r(\{s', v'_N\}) = a'$ y $r(\{t', v'_N\}) = b'$.

Probaremos que $r(\{s', v'_N\}) = a'$ y la prueba de que $r(\{t', v'_N\}) = b'$ es similar. Suponga que $r(\{s', v'_N\}) = b'$. Como $\mathcal{S}'$ es un subcontinuo de $F_2(K)$, $F_2(\Phi)(\mathcal{S}')$ es un subcontinuo de $F_2(x_N u_N)$. Como $\{v'_N\} \in \mathcal{S}'$ y $\Phi(v'_N) = u_N$, tenemos que $\{u_N\} \in F_2(\Phi)(\mathcal{S}')$ y $u_N \in r(F_2(\Phi)(\mathcal{S}'))$. Como $\{s', v'_N\} \in \mathcal{S}'$ y $r(\{s', v'_N\}) = b'$, tenemos $r(F_2(\Phi)(\{s', v'_N\})) \in B(b', \frac{1}{4}) \cap r(F_2(\Phi)(\mathcal{S}'))$. Entonces, $r(F_2(\Phi)(\mathcal{S}'))$ es un subcontinuo de $X \setminus \{z_N, y\}$ ($Y \setminus \{z_N, y\}$, para Y) que contiene a u_N e intersecta a $B(b', \frac{1}{4})$. Como esto es una contradicción, concluimos que $r(\{s', v'_N\}) = a'$.

Similarmente, usando $\mathcal{T}'$ en lugar de $\mathcal{S}'$, y Ψ en lugar de Φ, puede ser mostrado que $r(\{t', v'_N\}) = b'$. Esto finaliza la prueba de la Afirmación 1.

Como $\{v'_N\} \in \mathcal{S}' \cap \mathcal{T}'$, $\mathcal{S}' \cup \mathcal{T}'$ es un subcontinuo de $F_2(X)$ ($F_2(Y)$, para Y) tal que $r(\mathcal{S}' \cup \mathcal{T}') = a'b'$. Definimos $\mathcal{S} = \{\{\Phi(s), v_N\} : s \in s'v'_N\}$ y $\mathcal{T} = \{\{u_N, \Psi(t)\} : t \in v'_N t'\}$ (vea la Figura 5). Claramente $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ son subcontinuos de $F_2(X)$ ($F_2(Y)$, para Y). Como $\Phi(v'_N) = u_N$ y $\Psi(v'_N) = v_N$, entonces $\{\Phi(v'_N), v_N\} = \{u_N, v_N\} = \{u_N, \Psi(v'_N)\}$. Por tanto $\{u_N, v_N\} \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ y $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$ es un subcontinuo de $F_2(X)$ ($F_2(Y)$, para Y). Como $\mathcal{S} \cup \mathcal{T} \subset N(\mathcal{S}' \cup \mathcal{T}', \delta)$ y $r(\mathcal{S}' \cup \mathcal{T}') = a'b'$, tenemos $r(\mathcal{S} \cup \mathcal{T}) \subset N(a'b', \frac{1}{4}) \subset X \setminus \{z_N, y\}$ ($Y \setminus \{z_N, y\}$, para Y).

Afirmación 2. $r(\{u_N, v_N\}) \in A_N \setminus \{y\}$.

Para probar esta afirmación, solamente usaremos que $\rho(w, R(w)) < \frac{\delta}{3}$ para cada $w \in u_N v_N$ y la elección de δ.

Sea $e : u_N z_N \to v_N z_N$ dada por $e = (R|_{v_N z_N})^{-1} \circ (R|_{u_N z_N})$. Entonces, e es continua, $e(z_N) = z_N$ y $e(u_N) = v_N$. Por la elección de N, para cada $w \in u_N z_N$, $\rho(w, R(w)) < \frac{\delta}{3}$ y $\rho(e(w), R(w)) < \frac{\delta}{3}$. Entonces $\{\{w, e(w)\} : w \in u_N z_N\}$ es un subcontinuo de $F_2(X)$ ($F_2(Y)$, para Y) que contiene a $\{z_N\}$ y está contenido en $N(\{\{w\} : w \in zv\}, \delta)$. Así que $r(\{\{w, e(w)\} : w \in u_N z_N\})$ es un subcontinuo de X (o Y) que contiene a z_N, y está contenido en $N(zv, \frac{1}{4})$. Por tanto, $r(\{\{w, e(w)\} : w \in u_N z_N\}) \subset A_N \setminus \{y\}$. En particular, $r(\{u_N, v_N\}) \in A_N \setminus \{y\}$. Esto termina la prueba de la Afirmación 2.

Afirmación 3. $r(\mathcal{S} \cup \mathcal{T}) \cap x_N u_N \neq \emptyset \neq r(\mathcal{S} \cup \mathcal{T}) \cap v_N y$.

Por la Afirmación 2, $r(\{u_N, v_N\}) \in (A_N \setminus \{y\}) \cap r(\mathcal{S} \cup \mathcal{T})$. Como $y \notin r(\mathcal{S} \cup \mathcal{T})$, $r(\mathcal{S} \cup \mathcal{T}) \subset A_N \setminus \{y\}$. Finalmente, como $r(\{s', v'_N\}) = a'$ y $r(\{v'_N, t'\}) = b'$, se sigue que $r(\{\Phi(s'), v_N\}) \in B(a', \frac{1}{4}) \cap A_N \subset x_N u_N$ y $r(\{u_N, \Psi(t')\}) \in B(b', \frac{1}{4}) \cap A_N \subset v_N y$. Por tanto, $r(\{\Phi(s'), v_N\}) \in r(\mathcal{S} \cup \mathcal{T}) \cap x_N u_N$ y $r(\{u_N, \Psi(t')\}) \in r(\mathcal{S} \cup \mathcal{T}) \cap v_N y$. Esto completa la prueba de la Afirmación 3.

Hemos probado que $r(\mathcal{S} \cup \mathcal{T})$ es un subcontinuo de X (o Y) que intersecta a $x_N u_N$ y a $v_N y$, pero no contiene a z_N. Esto es una contradicción. Por tanto, X (y Y) no admite promedios.

2.1.4. Dendroide Z

A pesar de que el dendroide Z que aquí definiremos es de tipo N, lo incluimos porque es parte de los dendroides que estamos considerando en este capítulo.

Sean $x = (-1, 0, 0)$, $y = (1, 0, 0)$, $z = (0, 1, 0)$, $v = (0, 0, 0)$ y para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$,

$$z_n = (0, 1, -\frac{1}{n}),\ u_n = (0, \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}),\ x_n = (-1, 0, -\frac{1}{n}),\ v_n = (0, 0, -\frac{1}{2n}),$$

$$z'_n = (0, 1, \frac{1}{n}),\ u'_n = (0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}),\ y'_n = (1, 0, \frac{1}{n}),\ v'_n = (0, 0, \frac{1}{2n}),$$

$$A_n = \overline{z_n u_n} \cup \overline{u_n x_n} \cup \overline{x_n v_n} \cup \overline{v_n y},\ B_n = \overline{z'_n u'_n} \cup \overline{u'_n y'_n} \cup \overline{y'_n v'_n} \cup \overline{v'_n x}.$$

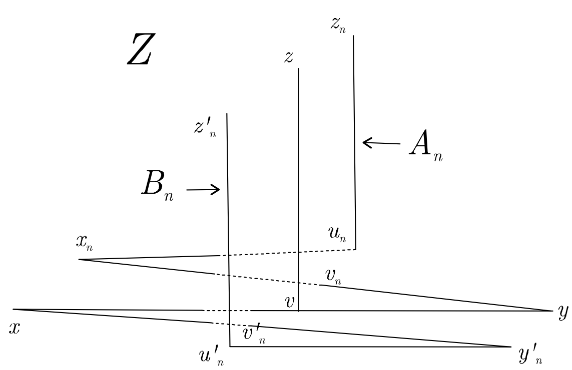

Figura 6. Dendroide Z.

Definimos

$$T = \overline{xv} \cup \overline{yv} \cup \overline{zv} \text{ y}$$

$$Z = T \cup (\bigcup\{A_n \cup B_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}) \text{ (vea la Figura 6).}$$

Entonces Z es un dendroide que contiene al triodo simple T. Para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, definimos $x'_n = x''_n = x$ y $y_n = y''_n = y$. Es fácil ver que el arco xy, las sucesiones de arcos $\{x_n x'_n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}}$ y $\{y_n y'_n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}}$, y las sucesiones de puntos $\{x''_n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}}$ y $\{y''_n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}}$ satisfacen las condiciones (1)-(6) en la Definición 2.1. Entonces, Z es un continuo de tipo N entre x y y. Por tanto, Z no admite promedios ([5, Theorem 2.2, p. 266]).

2.2. Promedios, contractibilidad y selectibilidad

Para los dendroides, un tema de estudio ha sido la relación entre admitir un promedio, ser contráctil y ser selectible (vea por ejemplo [7, p. 73]). Un continuo X es *contráctil* si existen una función continua $h : X \times [0,1] \to X$ y un punto $p \in X$ tal que para cada $x \in X$, $h(x,0) = x$ y $h(x,1) = p$. Un continuo X es *selectible* si existe una función continua $s : C(X) \to X$ tal que para cada $A \in C(X)$, $s(A) \in A$. Es sabido que si un continuo es selectible, entonces es un dendroide ([28, Lemma 3, p. 370]). En esta sección abordamos dos ejemplos en los que se abordan estas tres propiedades.

2.2.1. Dendroide D

El dendroide D considerado en esta sección ha sido estudiado en [25] y [7, p. 66]. T. Maćkowiak en [25] mostró que D es selectible. J. J. Charatonik observó que D no es de tipo generalizado N y él preguntó si D admite un promedio. En esta sección respondemos la pregunta de Charatonik de manera negativa.

Denote por (α, β) el punto en el plano Euclidiano con coordenadas polares α y β. Sean $p = (0,0)$, $a = (1,0)$, $b = (1, \frac{\pi}{2})$, $c = (1, \pi)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = (1, \frac{1}{n}),\ p_n = (\frac{1}{n}, \frac{\pi}{4}),\ b_n = (1 + \frac{1}{n}, \frac{\pi}{2}),\ q_n = (\frac{1}{n}, \frac{3\pi}{4}).$$

Entonces definimos

$$D_1 = \overline{ac} \cup \overline{pb} \cup \left(\bigcup\{\overline{a_n p_n} \cup \overline{p_n b_n} \cup \overline{b_n q_n} \cup \overline{q_n c} : n \in \mathbb{N}\}\right).$$

Denote por h la función que refleja los puntos con respecto al origen. Sean $D = D_1 \cup h(D_1)$ y, para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$,

$$a'_n = h(a_n),\ p'_n = h(p_n),\ b'_n = h(b_n),\ q'_n = h(q_n).$$

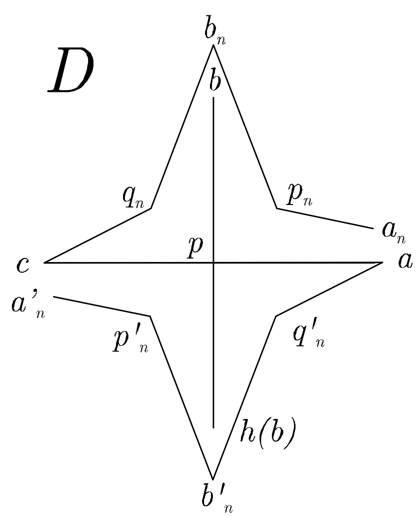

Figura 7. Dendroide D.

Entonces D es un dendroide que no es de tipo generalizado N (vea la Figura 7). Note que $ac \cup pb$ y $ac \cup ph(b)$ son triodos simples tales que $\lim_{n\to\infty} ca_n = ac \cup pb$ y $\lim_{n\to\infty} aa'_n = ac \cup ph(b)$.

Considere la retracción $R : D \to ca \cup bh(b)$ que satisface lo siguiente para cada $n \in \mathbb{N}$:

- $R(a_n) = a$, $R(p_n) = p$, $R(b_n) = b$, $R(q_n) = p$, $R(a'_n) = c$, $R(p'_n) = p$, $R(b'_n) = h(b)$ y $R(q'_n) = p$;
- $R|_{a_n p_n} : a_n p_n \to ap$, $R|_{p_n b_n} : p_n b_n \to pb$, $R|_{b_n q_n} : b_n q_n \to bp$, $R|_{q_n c} : q_n c \to pc$, $R|_{aq'_n} : aq'_n \to ap$, $R|_{q'_n b'_n} : q'_n b'_n \to ph(b)$, $R|_{b'_n p'_n} : b'_n p'_n \to h(b)p$ y $R|_{p'_n a'_n} : p'_n a'_n \to pc$ son homeomorfismos lineales.

Suponga que D admite un promedio $r : F_2(D) \to D$. Tomemos $\delta > 0$ tal que $\mathbf{H}(A, B) < \delta$ implica que $\rho(r(A), r(B)) < \frac{1}{4}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, por la compacidad de ca_n y de $a'_n a$, existen $w_n \in ca_n$ y $z_n \in a'_n a$ tales que $\rho(w_n, R(w_n))$ $=$máx$\{\rho(x, R(x)) : x \in ca_n\}$ y $\rho(z_n, R(z_n))$ $=$máx$\{\rho(y, R(y)) : y \in a'_n a\}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que las sucesiones $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a puntos en $ac \cup pb$ y $ac \cup ph(b)$, respectivamente. Entonces $\lim_{n\to\infty} \rho(w_n, R(w_n)) = 0$ y $\lim_{n\to\infty} \rho(z_n, R(z_n)) = 0$, y existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $\rho(w_n, R(w_n)) < \frac{\delta}{3}$ y $\rho(z_n, R(z_n)) < \frac{\delta}{3}$. Por tanto, $\rho(x, R(x)) < \frac{\delta}{3}$ para cada $x \in ca_N \cup a'_N a$.

Sea $\mathcal{C}$ la componente de $r^{-1}(c) \cap F_2(cp)$ que contiene a $\{c\}$ y sea $\mathcal{L} = \{\{s, p\} \in F_2(cp) : s \in cp\}$. Como el arco cp y la sucesión de arcos $\{q_n q_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfacen las hipótesis del Lema 2.6, tenemos $\mathcal{C} \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$. Similarmente, $\mathcal{A} \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$, donde $\mathcal{A}$ es la componente de $r^{-1}(a) \cap F_2(pa)$ que contiene a $\{a\}$ y $\mathcal{K} = \{\{p, t\} \in F_2(pa) : t \in pa\}$. Entonces, existen $x_0 \in cp \setminus \{p\}$ y $y_0 \in pa \setminus \{p\}$ tales que $\{x_0, p\} \in \mathcal{C} \cap \mathcal{L}$ y $\{p, y_0\} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{K}$.

Sean $u_N \in cq_N$ y $v_N \in p_N a_N$ tales que $\rho(c, u_N) = \frac{1}{4} = \rho(a, v_N)$. Como $\rho(w, R(w)) < \frac{\delta}{3}$ para cada $w \in q_N p_N$ y δ fue elegido como en la prueba de que los dendroides X y Y no admiten promedios (en la Sección 2.1.3), podemos usar el argumento de la Afirmación 2 de la Sección 2.1.3 para probar que $r(\{q_N, p_N\}) \in a_N c \setminus \{c\}$. De hecho, como $\mathbf{H}(\{q_N, p_N\}, \{p\}) < \delta$, tenemos $r(\{q_N, p_N\}) \in (a_N c \setminus \{c\}) \cap B(p, \frac{1}{4})$. Entonces, $r(\{q_N, p_N\}) \in u_N v_N \setminus \{u_N, v_N\}$. Similarmente, se puede probar que $r(\{q'_N, p'_N\}) \in (a'_N a \setminus \{a\}) \cap B(p, \frac{1}{4})$.

Pongamos $x_N = (R|_{q_N c})^{-1}(x_0)$ y $y_N = (R|_{p_N a_N})^{-1}(y_0)$. Como $\rho(x_0, x_N) < \delta$, $\rho(p, p_N) < \delta$ y $r(\{x_0, p\}) = c$, tenemos que $\rho(c, r(\{x_N, p_N\})) < \frac{1}{4}$. Entonces la trayectoria $\{r(\{s, p_N\}) : s \in x_N q_N\}$ conecta un punto en $u_N v_N$ $(r(\{q_N, p_N\}))$ y c. Así que podemos tomar s' como el primer punto en $x_N q_N$ (yendo de q_N a x_N) tal que $r(\{s', p_N\}) \in \{u_N, v_N\}$. Entonces $s' \notin \{q_N, x_N\}$ y $r(\{s, p_N\}) \in u_N v_N \setminus \{u_N, v_N\}$ para cada $s \in s' q_N \setminus \{s'\}$. Similarmente, existe $t' \in p_N y_N \setminus \{p_N, y_N\}$ tal que $r(\{q_N, t'\}) \in \{u_N, v_N\}$ y $r(\{q_N, t\}) \in u_N v_N \setminus \{u_N, v_N\}$ para cada $t \in p_N t' \setminus \{t'\}$. Definimos $\mathcal{S} = \{\{s, p_N\} : s \in s' q_N\}$ y $\mathcal{T} = \{\{q_N, t\} : t \in p_N t'\}$. Notemos que $\{p_N, q_N\} \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ y $r(\mathcal{S} \cup \mathcal{T}) \subset u_N v_N$.

Sean $\Phi = (R|_{p'_N a'_N})^{-1} \circ R|_{q_N c} : q_N c \to p'_N a'_N$ y $\Psi = (R|_{aq'_N})^{-1} \circ R|_{a_N p_N} : a_N p_N \to aq'_N$. Por la elección de N, para cualesquiera $x \in q_N c$ y $y \in p_N a_N$, tenemos que $\rho(x, \Phi(x)) < \delta$, $\rho(x, R(x)) < \delta$, $\rho(y, \Psi(y)) < \delta$ y $\rho(y, R(y)) < \delta$.

Afirmación 1. $r(\{s', p_N\}) = u_N$ y $r(\{q_N, t'\}) = v_N$.

Probaremos que $r(\{s', p_N\}) = u_N$ y la prueba de que $r(\{q_N, t'\}) = v_N$ es similar. Suponga que $r(\{s', p_N\}) = v_N$. Tenemos que $\rho(p'_N, p_N) < \delta$ y, para cada $s \in s' q_N$, $\rho(s, \Phi(s)) < \delta$. Entonces, $\{\{\Phi(s), p'_N\} : s \in s' q_N\} \subset N(\mathcal{S}, \delta)$ y, por a elección de δ,

$$r(\{\{\Phi(s), p'_N\} : s \in s' q_N\}) \subset N(r(\mathcal{S}), \frac{1}{4}) \subset N(u_N v_N, \frac{1}{4}) \subset D \setminus \{b'_N, a, c\}.$$

Como $\Phi(q_N) = p'_N$, tenemos que $p'_N \in r(\{\{\Phi(s), p'_N\} : s \in s' q_N\})$. Como $r(\{s', p_N\}) = v_N$ y $\mathbf{H}(\{\Phi(s'), p'_N\}, \{s', p_N\}) < \delta$, tenemos que $r(\{\Phi(s'), p'_N\}) \in B(v_N, \frac{1}{4})$. Entonces,

$r(\{\{\Phi(s), p'_N\} : s \in s'q_N\})$ es un subcontinuo de D que contiene a p'_N e intersecta a $B(v_N, \frac{1}{4})$. Esto implica que $\{b'_N, a\} \cap r(\{\{\Phi(s), p'_N\} : s \in s'q_N\}) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $r(\{s', p_N\}) = u_N$.

Procediendo como en el párrafo previo, sólo reemplazando: s', p_N, v_N, p'_N, q_N, Φ, $\mathcal{S}$ y u_N por t', q_N, u_N, q'_N, p_N, Ψ, $\mathcal{T}$ y v_N, respectivamente, se puede probar que $r(\{q_N, t'\}) = v_N$. Esto finaliza la prueba de la Afirmación 1.

Por la Afirmación 1, tenemos que

$$r(\mathcal{S} \cup \mathcal{T}) = u_N v_N.$$

Definimos

$$\mathcal{M} = \{\{s, q'_N\} : s \in \Phi(s')p'_N\} \cup \{\{p'_N, t\} : t \in q'_N \Psi(t')\}.$$

Es fácil ver que $\{\{s, q'_N\} : s \in \Phi(s')p'_N\}$ y $\{\{p'_N, t\} : t \in q'_N \Psi(t')\}$ son subcontinuos de $F_2(D)$, y que se intersectan en el punto $\{p'_N, q'_N\}$. Entonces $\mathcal{M}$ es un subcontinuo de $F_2(D)$. Como $\mathcal{M} \subset N(\mathcal{S} \cup \mathcal{T}, \delta)$, tenemos que $r(\mathcal{M})$ es un subcontinuo de D contenido en $N(u_N v_N, \frac{1}{4})$. Más aún, como $r(\{p'_N, q'_N\}) \in (a'_N a \setminus \{a\}) \cap r(\mathcal{M})$ y $a \notin N(u_N v_N, \frac{1}{4})$, entonces $r(\mathcal{M})$ está contenido en $a'_N a \setminus \{a\}$. Por la Afirmación 1, $r(\{\Phi(s'), q'_N\}) \in B(u_N, \frac{1}{4}) \cap a'_N a$ y $r(\{p'_N, \Psi(t')\}) \in B(v_N, \frac{1}{4}) \cap a'_N a$. Entonces $r(\mathcal{M})$ intersecta a $a'_N p'_N$ y a $q'_N a$. Esto implica que $b'_N \in r(\mathcal{M}) \subset N(u_N v_N, \frac{1}{4})$, lo cual es una contradicción. Por tanto, D no admite promedios.

2.2.2. Dendroide W_2

T. Maćkowiak en 1985 y A. Illanes en 1988, por separado, construyeron un mismo dendroide, el cual de aquí en adelante llamaremos el dendroide de Illanes-Maćkowiak y denotaremos por X_2, con el cual respondieron un par de preguntas (vea [17, Continuo X_2, p. 70] y [26]). Maćkowiak probó que $C(X_2)$ no admite selecciones y que X_2 es contráctil. Illanes por su cuenta también probó que $C(X_2)$ no admite selecciones y que X_2 es retracto de $C(X_2)$. Después, en 1997, J. J. Charatonik, W. J. Charatonik, K. Omiljanowski y J. R. Prajs dieron una retracción de 2^{X_2} a X_2 (vea [10, Teorema 5.58, p. 31]), mencionaron que la retracción de $C(X_2)$ a X_2 que dio Illanes no puede ser extendida a todo 2^{X_2} y mencionaron más propiedades que tiene este dendroide (vea [10, Teorema 5.78, p. 31]). Una de ellas es que no es plano, así que en el 2003, J. J. Charatonik. preguntó si existe un dendroide plano contráctil, no selectible y que admita un promedio ([7, Preguntas 5.11 y 5.12, p. 74]). En esta sección presentamos un dendroide W_2 en $\mathbb{R}^2$ contráctil no selectible y damos una retracción de 2^{W_2} a W_2. También veremos que W_2 es un dendroide de tipo generalizado N (vea la Definición 2.1) y es bueno mencionar que la restricción a $F_2(W_2)$ de la retracción que presentamos de 2^{W_2} a W_2 es un promedio para W_2. Las ideas que usamos para probar estas propiedades son las mismas que se usaron en el dendroide de Illanes-Maćkowiak y lo que aquí haremos es ver que también funcionan para W_2. Las funciones que proponemos son muy técnicas, sin embargo probaremos que cumplen con todo lo requerido. Advertimos que necesitamos desarrollar muchas cuentas y esperamos no enfadarlo con los detalles.

Sean $x = (1, 0)$, $y = (0, 1)$, $z = (0, -1)$ y $v = (0, 0)$ en $\mathbb{R}^2$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$z_n = (0, -1 - \frac{1}{2n}),\ v_n = (-\frac{1}{2n}, 0),$$

$$z'_n = (0, -1 - \frac{1}{2n-1}),\ v'_n = (-\frac{1}{2n-1}, 0).$$

También denote por y_n al único punto del segmento $\overline{yv_n}$ cuya distancia a y es $\frac{1}{n}$, y por u_n al único punto del segmento $\overline{v(1,-1)}$ cuya distancia a v es $\frac{1}{n}$. Ahora sean

$$A_n = \overline{yv'_n} \cup \overline{v'_n z'_n},\ C_n = \overline{y_n v_n} \cup \overline{v_n z_n},\ D_n = \overline{z_n u_n} \cup \overline{u_n x},$$

$$M_n = C_n \cup D_n \text{ y } T = \overline{xv} \cup \overline{zy}.$$

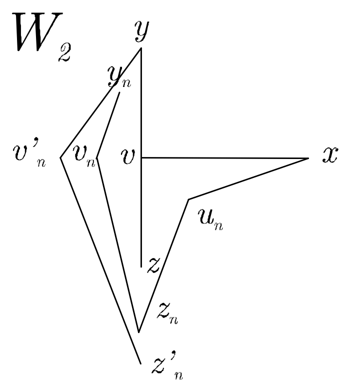

Figura 8. Dendroide W_2.

Finalmente definimos $W_2 = T \cup (\bigcup\{M_n : n \in \mathbb{N}\}) \cup (\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\})$ (vea la Figura 8).

Veamos que W_2 es un dendroide de tipo generalizado N. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $y'_n = y''_n = y$ y $z''_n = z_n$. Notemos que: T es un subcontinuo de W_2 que contiene a y y a z, $\{y_n y'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{z_n z'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones de arcos, y $\{y''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{z''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones de puntos tales que

1) $y''_n \in z_n z'_n \setminus \{z_n, z'_n\}$ y $z''_n \in y_n y'_n \setminus \{y_n, y'_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
2) $T = \lim_{n\to\infty} y_n y'_n = \lim_{n\to\infty} z_n z'_n$;
3) $y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} y'_n = \lim_{n\to\infty} y''_n$;
4) $z = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} z'_n = \lim_{n\to\infty} z''_n$;
5) cada arco en W_2 que une a y_n y y'_n contiene a z''_n;
6) cada arco en W_2 que une a z_n y z'_n contiene a y''_n.

Entonces, W_2 es un dendroide de tipo generalizado N entre y y z, y contiene al triodo simple T.

Definimos las proyecciones $P_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $P_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $P_1(a,b) = a$ y $P_2(a,b) = b$. Sea $R : W_2 \to T$ la retracción natural de W_2 sobre T tal que para cada $n \in \mathbb{N}$

- $R(y_n) = y$, $R(v_n) = R(v'_n) = v$, $R(z_n) = R(z'_n) = z$, $R(u_n) = v$;
- $R|_{yv'_n} : yv'_n \to yv$, $R|_{v'_n z'_n} : v'_n z'_n \to vz$, $R|_{y_n v_n} : y_n v_n \to yv$, $R|_{v_n z_n} : v_n z_n \to vz$, $R|_{z_n u_n} : z_n u_n \to zv$ y $R|_{u_n x} : u_n x \to vx$ son homeomorfismos lineales.

W_2 es retracto de 2^{W_2}

Si A es un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{R}^2$ definimos

$$s_1(A) = \text{mín}P_1(A),\ t_1 = \text{máx}P_1(A),\ s_2(A) = \text{mín}P_2(A) \text{ y } t_2(A) = \text{máx}P_2(A).$$

Por simplicidad, cuando no haya confusión, escribiremos $s_1,\ t_1,\ s_2$ y t_2 en lugar de $s_1(A)$, $t_1(A)$, $s_2(A)$ y $t_2(A)$.

Definiremos una retracción r_0 de 2^T sobre T. Como primer paso consideremos el subconjunto cerrado $\mathcal{P} = \left\{A \in 2^T : s_1(A) = 0\right\}$ de 2^T, y para cada $A \in \mathcal{P}$, definimos

$$r_0(A) = \begin{cases} (0, s_2), & \text{si } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{4} \text{ y } s_2 \leq t_2 \leq 0; \\ (0, (1-4t_1)(1-s_2)t_2 + s_2), & \text{si } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{4} \text{ y } s_2 \leq 0 \leq t_2; \\ (0, 4t_1(s_2 - t_2) + t_2), & \text{si } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{4} \text{ y } 0 \leq s_2 \leq t_2; \\ (0, (1-4t_1)(1+s_2) + s_2), & \text{si } \frac{1}{4} \leq t_1 \leq \frac{1}{2}; \\ (0, 4t_1 - 3), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq \frac{3}{4}; \\ (t_1(4t_1 - 3), 0), & \text{si } \frac{3}{4} \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

Afirmación 1. *Para cada $A \in \mathcal{P}$, $r_0(A) \in T$.*

Demostración. Verifiquemos todos los casos:

Caso 1. $0 \leq t_1 \leq \frac{1}{4}$ y $s_2 \leq t_2 \leq 0$.

Entonces $r_0(A) = (0, s_2) \in T$.

Caso 2. $0 \leq t_1 \leq \frac{1}{4}$ y $-1 \leq s_2 \leq 0 \leq t_2 \leq 1$.

Multiplicando por -4 y después sumando 1 en $0 \leq t_1 \leq \frac{1}{4}$, obtenemos $0 \leq 1 - 4t_1 \leq 1$. Al multiplicar por $t_2 \geq 0$, se tiene $0 \leq (1-4t_1)\, t_2 \leq t_2$. Como $-1 \leq s_2 \leq 0$, entonces $1 \leq 1 - s_2$. Multiplicando por este numero positivo y después sumando s_2 en $0 \leq (1-4t_1)\, t_2 \leq t_2$, obtenemos $s_2 \leq (1-4t_1)\,(1-s_2)\, t_2 + s_2 \leq t_2\,(1-s_2) + s_2$. Como $t_2\,(1-s_2) + s_2 = (1-t_2)\, s_2 + t_2$ y $(1-t_2)\, s_2 \leq 0$, concluimos que $s_2 \leq (1-4t_1)\,(1-s_2)\, t_2 + s_2 \leq t_2$. Por tanto, $r_0(A) = (0, (1-4t_1)(1-s_2)t_2 + s_2) \in T$.

Caso 3. $0 \leq t_1 \leq \frac{1}{4}$ y $0 \leq s_2 \leq t_2$.

Se tiene que $0 \leq 4t_1 \leq 1$ y $0 \leq t_2 - s_2$. Así que $0 \leq 4t_1(t_2 - s_2) \leq t_2 - s_2$. Al multiplicar por -1, obtenemos $s_2 - t_2 \leq 4t_1(s_2 - t_2) \leq 0$. Entonces $s_2 \leq 4t_1(s_2 - t_2) + t_2 \leq t_2$. Por tanto, $r_0(A) = (0, 4t_1(s_2 - t_2) + t_2) \in T$.

Caso 4. $\frac{1}{4} \leq t_1 \leq \frac{1}{2}$.

Multiplicando por 4 y depués restando $4t_1$ nos queda $1-4t_1 \leq 0 \leq 2-4t_1$. Como $-1 \leq s_2 \leq 1$, entonces $0 \leq 1+s_2 \leq 2$. Al multiplicar por $1-4t_1$ obtenemos $(1-4t_1)2 \leq (1-4t_1)(1+s_2) \leq 0$. Así que al sumar s_2 en la desigualdad derecha nos queda $(1-4t_1)(1+s_2) + s_2 \leq s_2$. Por otro lado, multiplicando los dos numeros no negativos $1+s_2$ y $2-4t_1$ obtenemos $0 \leq (1+s_2)(2-4t_1) = (1+s_2)(1-4t_1)+(1+s_2)$. Al restar 1 tenemos $-1 \leq (1+s_2)(1-4t_1)+s_2$. Hemos probado que $-1 \leq (1+s_2)(1-4t_1)+s_2 \leq s_2$. Por tanto $r_0(A) = (0, (1+s_2)(1-4t_1)+s_2) \in T$.

Caso 5. $\frac{1}{2} \leq t_1 \leq \frac{3}{4}$.

Multiplicando por 4 y después restando 3, obtenemos que $-1 \leq 4t_1 - 3 \leq 0$. Entonces $r_0(A) = (0, 4t_1 - 3) \in T$.

Caso 6. $\frac{3}{4} \leq t_1 \leq 1$.
Multiplicando por 4 y después restando 3, obtenemos que $0 \leq 4t_1 - 3 \leq 1$. Entonces $0 \leq t_1(4t_1 - 3) \leq t_1$ y $r_0(A) = (t_1(4t_1 - 3), 0) \in T$.

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación. ■

Afirmación 2. *Para cada $A \in \mathcal{P}$, el punto $r_0(A)$ está bien definido.*

Demostración. Verifiquemos los casos en donde el punto $r_0(A)$ puede tener problemas de definición.

Caso 1. $0 \leq t_1 \leq \frac{1}{4}$ y $s_2 \leq t_2 \leq 0$; y también $s_2 \leq 0 \leq t_2$.
En este caso, $t_2 = 0$ y entonces $(1 - 4t_1)(1 - s_2)t_2 + s_2 = s_2$.

Caso 2. $0 \leq t_1 \leq \frac{1}{4}$ y $s_2 \leq t_2 \leq 0$; y también $0 \leq s_2 \leq t_2$.
En este caso $s_2 = 0 = t_2$, así que $(1 - 4t_1)(1 - s_2)t_2 + s_2 = 0 = s_2$.

Caso 3. $0 \leq t_1 \leq \frac{1}{4}$ y $s_2 \leq t_2 \leq 0$; y también $\frac{1}{4} \leq t_1 \leq \frac{1}{2}$.
Se cumple que $t_1 = \frac{1}{4}$, así que $1 - 4t_1 = 0$ y $(1 - 4t_1)(1 + s_2) + s_2 = s_2$.

Caso 4. $0 \leq t_1 \leq \frac{1}{4}$ y $s_2 \leq 0 \leq t_2$; y también $0 \leq s_2 \leq t_2$.
Se tiene que $s_2 = 0$. Entonces $(1 - 4t_1)(1 - s_2)t_2 + s_2 = t_2 - 4t_1t_2 = 4t_1(s_2 - t_2) + t_2$.

Caso 5. $0 \leq t_1 \leq \frac{1}{4}$ y $s_2 \leq 0 \leq t_2$; y también $\frac{1}{4} \leq t_1 \leq \frac{1}{2}$.
En este caso, $t_1 = \frac{1}{4}$, de donde $1 - 4t_1 = 0$. Entonces $(1 - 4t_1)(1 - s_2)t_2 + s_2 = s_2 = (1 - 4t_1)(1 + s_2) + s_2$.

Caso 6. $0 \leq t_1 \leq \frac{1}{4}$ y $0 \leq s_2 \leq t_2$; y también $\frac{1}{4} \leq t_1 \leq \frac{1}{2}$.
Se cumple que $t_1 = \frac{1}{4}$. Así que $4t_1 = 1$ y $1 - 4t_1 = 0$. Entonces $4t_1(s_2 - t_2) + t_2 = s_2 = (1 - 4t_1)(1 + s_2) + s_2$.

Caso 7. $\frac{1}{4} \leq t_1 \leq \frac{1}{2}$ y también $\frac{1}{2} \leq t_1 \leq \frac{3}{4}$.
Entonces $t_1 = \frac{1}{2}$, de donde $(1 - 4t_1) = -1$. Por tanto, $(1 - 4t_1)(1 + s_2) + s_2 = -1 = 4t_1 - 3$.

Caso 8. $\frac{1}{2} \leq t_1 \leq \frac{3}{4}$ y también $\frac{3}{4} \leq t_1 \leq 1$.
Tenemos que $t_1 = \frac{3}{4}$, así que $4t_1 - 3 = 0$. Entonces $(0, 4t_1 - 3) = (0, 0) = (t_1(4t_1 - 3), 0)$.

Como ya consideramos todos los casos, la afirmación queda demostrada. ■

Observación 2.7 *Dado $A \in \mathcal{P}$, se satisface que*
i) si $t_1(A) = 1$, entonces $r_0(A) = x$;
ii) si $A = \{q\}$, entonces $q \in yz$, $s_1 = t_1 = 0$ y $r_0(A) = q$;
iii) si $0 \leq t_1(A) \leq \frac{1}{2}$, entonces $r_0(A) \in yz$ (ver los casos 1, 2, 3 y 4 de la Afirmación 1);
iv) si $0 \leq t_1(A) \leq \frac{1}{2}$ y $A \subset zx$, entonces $t_2 \leq 0$ y $r_0(A) \in zv$ (ver casos 1 y 4 de la Afirmación 1);
v) si $\frac{1}{2} \leq t_1(A) \leq 1$, entonces $r_0(A) \in zx$ (ver casos 5 y 6 de la Afirmación 1);
vi) si $z \in A \subset zx$ y $0 \leq t_1(A) \leq \frac{1}{2}$, entonces $s_2 = -1$ y $r_0(A) = z$;
vii) si $t_1(A) = \frac{1}{2}$, entonces $r_0(A) = z$;
viii) si $A \subset zx$, entonces $t_2 \leq 0$ y $r_0(A) \in zx$ (ver casos 1, 4, 5 y 6 de la Afirmación 1);
ix) si $A \subset yz$, entonces $t_1 = 0$ y $r_0(A) \in yz$;
x) si $y \in A \subset yz$, entonces $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ y $r_0(A) = y$.

Sea $\mathcal{Q} = \left\{A \in 2^T : A \subset vx\right\}$. Para cada $A \in \mathcal{Q}$, definimos

$$
r_0(A) = \begin{cases}
(2s_1 - t_1, 0), & \text{si } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{4} \text{ y } \frac{t_1}{2} \leq s_1 \leq t_1; \\
(0,0), & \text{si } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{4} \text{ y } 0 \leq s_1 \leq \frac{t_1}{2}; \\
(2s_1 - t_1, 0), & \text{si } \frac{1}{4} \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \text{ y } \frac{t_1}{2} \leq s_1 \leq t_1; \\
(0, (1-4t_1)(1-\frac{2s_1}{t_1})), & \text{si } \frac{1}{4} \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \text{ y } 0 \leq s_1 \leq \frac{t_1}{2}; \\
(2s_1 - t_1, 0), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq \frac{3}{4} \text{ y } \frac{t_1}{2} \leq s_1 \leq t_1; \\
(0, (4t_1-3)(1-\frac{2s_1}{t_1})), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq \frac{3}{4} \text{ y } 0 \leq s_1 \leq \frac{t_1}{2}; \\
((2s_1 - t_1) + (4t_1-3)(2t_1 - 2s_1), 0), & \text{si } \frac{3}{4} \leq t_1 \leq 1 \text{ y } \frac{t_1}{2} \leq s_1 \leq t_1; \\
(t_1(4t_1-3), 0), & \text{si } \frac{3}{4} \leq t_1 \leq 1 \text{ y } 0 \leq s_1 \leq \frac{t_1}{2}.
\end{cases}
$$

Afirmación 3. *Para cada $A \in \mathcal{Q}$, $r_0(A) \in T$, más aún, $r_0(A) \in zx$.*

Demostración. Verifiquemos todos los casos:

Caso 1. Se satisface alguna de las siguientes condiciones: $[0 \leq t_1 \leq \frac{1}{4}$ y $\frac{t_1}{2} \leq s_1 \leq t_1]$ o $[\frac{1}{4} \leq t_1 \leq \frac{1}{2}$ y $\frac{t_1}{2} \leq s_1 \leq t_1]$ o $[\frac{1}{2} \leq t_1 \leq \frac{3}{4}$ y $\frac{t_1}{2} \leq s_1 \leq t_1]$.
Multiplicando por 2 y luego restando t_1 en $\frac{t_1}{2} \leq s_1 \leq t_1$, obtenemos que $0 \leq 2s_1 - t_1 \leq t_1$. Así que $r_0(A) = (2s_1 - t_1, 0) \in vx$.

Caso 2. $0 \leq t_1 \leq \frac{1}{4}$ y $0 \leq s_1 \leq \frac{t_1}{2}$.
Por la definición, $r_0(A) = (0,0) \in zx$.

Caso 3. $\frac{1}{4} \leq t_1 \leq \frac{1}{2}$ y $0 \leq s_1 \leq \frac{t_1}{2}$.
Multiplicando por -4 y luego sumando 1 en $\frac{1}{4} \leq t_1 \leq \frac{1}{2}$, obtenemos que $-1 \leq 1 - 4t_1 \leq 0$. Multiplicando por $-\frac{2}{t_1}$ y luego sumando 1 en $0 \leq s_1 \leq \frac{t_1}{2}$, obtenemos que $0 \leq 1 - \frac{2s_1}{t_1} \leq 1$. Así que $-1 \leq (1-4t_1)(1-\frac{2s_1}{t_1}) \leq 0$. Por tanto $r_0(A) = (0, (1-4t_1)(1-\frac{2s_1}{t_1})) \in zv$.

Caso 4. $\frac{1}{2} \leq t_1 \leq \frac{3}{4}$ y $0 \leq s_1 \leq \frac{t_1}{2}$.
Similar al caso anterior, se obtiene que $0 \leq 1 - \frac{2s_1}{t_1} \leq 1$. Multiplicando por 4 y luego restando 3 en $\frac{1}{2} \leq t_1 \leq \frac{3}{4}$, obtenemos que $-1 \leq 4t_1 - 3 \leq 0$. Así que $-1 \leq (4t_1-3)(1-\frac{2s_1}{t_1}) \leq 0$. Por tanto $r_0(A) = (0, (4t_1-3)(1-\frac{2s_1}{t_1})) \in zv$.

Caso 5. $\frac{3}{4} \leq t_1 \leq 1$ y $\frac{t_1}{2} \leq s_1 \leq t_1$.
Multiplicando por 2 y luego restando t_1 en $\frac{t_1}{2} \leq s_1 \leq t_1$, obtenemos que $0 \leq 2s_1 - t_1 \leq t_1$. Entonces

$$\begin{aligned}
(2s_1 - t_1) + (4t_1 - 3)(2t_1 - 2s_1) &= (2s_1 - t_1) - (4t_1 - 3)(2s_1 - 2t_1) \\
&= (2s_1 - t_1) - (4t_1 - 3)(2s_1 - t_1 - t_1) \\
&= (2s_1 - t_1) - (4t_1 - 3)(2s_1 - t_1) \\
&\quad + t_1(4t_1 - 3) \\
&= (2s_1 - t_1)(1 - 4t_1 + 3) + t_1(4t_1 - 3) \\
&\leq t_1(1 - 4t_1 + 3) + t_1(4t_1 - 3) \\
&= t_1(1 - 4t_1 + 3 + 4t_1 - 3) \\
&= t_1.
\end{aligned}$$

Por tanto, $0 \leq (2s_1 - t_1) + (4t_1 - 3)(2t_1 - 2s_1) \leq t_1$ y $r_0(A) \in vx$.

Caso 6. $\frac{3}{4} \leq t_1 \leq 1$ y $0 \leq s_1 \leq \frac{t_1}{2}$.

Multiplicando por 4 y luego restando 3 en $\frac{3}{4} \leq t_1 \leq 1$, obtenemos que $0 \leq 4t_1 - 3 \leq 1$. Así que $0 \leq t_1(4t_1 - 3) \leq t_1$ y $r_0(A) = (t_1(4t_1 - 3), 0) \in vx$.

Como ya cubrimos todos los casos, queda demostrada la afirmación. ■

Afirmación 4. *Para cada $A \in \mathcal{Q}$, el punto $r_0(A)$ está bien definido.*

Demostración. Considere los siguientes casos:

Caso 1. $[0 \leq t_1 \leq \frac{1}{4}$ y $\frac{t_1}{2} \leq s_1 \leq t_1]$ y $[0 \leq t_1 \leq \frac{1}{4}$ y $0 \leq s_1 \leq \frac{t_1}{2}]$.

Se tiene que $s_1 = \frac{t_1}{2}$, así que $2s_1 - t_1 = 0$. Por tanto, $r_0(A) = (0, 0)$.

Caso 2. $[0 \leq t_1 \leq \frac{1}{4}$ y $\frac{t_1}{2} \leq s_1 \leq t_1]$ y $[\frac{1}{4} \leq t_1 \leq \frac{1}{2}$ y $\frac{t_1}{2} \leq s_1 \leq t_1]$.

Este caso no tiene problemas porque $r_0(A)$ está definido de la misma manera.

Caso 3. $[0 \leq t_1 \leq \frac{1}{4}$ y $\frac{t_1}{2} \leq s_1 \leq t_1]$ y $[\frac{1}{4} \leq t_1 \leq \frac{1}{2}$ y $0 \leq s_1 \leq \frac{t_1}{2}]$.

Se tiene que $t_1 = \frac{1}{4}$ y $s_1 = \frac{t_1}{2}$, así que $2s_1 - t_1 = 0$ y $1 - 4t_1 = 0$. Entonces, por un lado $r_0(A) = (2s_1 - t_1, 0) = (0, 0)$, y por el otro lado, $r_0(A) = (0, (1 - 4t_1)(1 - \frac{2s_1}{t_1})) = (0, 0)$.

Caso 4. $[0 \leq t_1 \leq \frac{1}{4}$ y $0 \leq s_1 \leq \frac{t_1}{2}]$ y $[\frac{1}{4} \leq t_1 \leq \frac{1}{2}$ y $\frac{t_1}{2} \leq s_1 \leq t_1]$.

Se tiene que $s_1 = \frac{t_1}{2}$, así que $r_0(A) = (2s_1 - t_1, 0) = (0, 0)$.

Caso 5. $[0 \leq t_1 \leq \frac{1}{4}$ y $0 \leq s_1 \leq \frac{t_1}{2}]$ y $[\frac{1}{4} \leq t_1 \leq \frac{1}{2}$ y $0 \leq s_1 \leq \frac{t_1}{2}]$.

Entonces $t_1 = \frac{1}{4}$ y $1 - 4t_1 = 0$. Así, $r_0(A) = (0, (1 - 4t_1)(1 - \frac{2s_1}{t_1})) = (0, 0)$.

Caso 6. $[\frac{1}{4} \leq t_1 \leq \frac{1}{2}$ y $\frac{t_1}{2} \leq s_1 \leq t_1]$ y $[\frac{1}{4} \leq t_1 \leq \frac{1}{2}$ y $0 \leq s_1 \leq \frac{t_1}{2}]$.

Se cumple que $s_1 = \frac{t_1}{2}$, de donde $2s_1 - t_1 = 0$ y $1 - \frac{2s_1}{t_1} = 0$. Entonces, por un lado $r_0(A) = (2s_1 - t_1, 0) = (0, 0)$ y por otro lado $r_0(A) = (0, (1 - 4t_1)(1 - \frac{2s_1}{t_1})) = (0, 0)$.

Caso 7. $[\frac{1}{4} \leq t_1 \leq \frac{1}{2}$ y $\frac{t_1}{2} \leq s_1 \leq t_1]$ y $[\frac{1}{2} \leq t_1 \leq \frac{3}{4}$ y $\frac{t_1}{2} \leq s_1 \leq t_1]$.

Este caso no tiene problemas porque $r_0(A)$ está definido de la misma manera.

Caso 8. $[\frac{1}{4} \leq t_1 \leq \frac{1}{2}$ y $\frac{t_1}{2} \leq s_1 \leq t_1]$ y $[\frac{1}{2} \leq t_1 \leq \frac{3}{4}$ y $0 \leq s_1 \leq \frac{t_1}{2}]$.

Se tiene que $s_1 = \frac{t_1}{2}$ y $t_1 = \frac{1}{2}$. Entonces $2s_1 - t_1 = 0$ y $1 - \frac{2s_1}{t_1} = 0$. Por tanto $(2s_1 - t_1, 0) = (0, 0)$ y $(0, (4t_1 - 3)(1 - \frac{2s_1}{t_1})) = (0, 0)$.

Caso 9. $[\frac{1}{4} \leq t_1 \leq \frac{1}{2}$ y $0 \leq s_1 \leq \frac{t_1}{2}]$ y $[\frac{1}{2} \leq t_1 \leq \frac{3}{4}$ y $\frac{t_1}{2} \leq s_1 \leq t_1]$.

Tenemos que $s_1 = \frac{t_1}{2}$ y $t_1 = \frac{1}{2}$. Entonces $1 - \frac{2s_1}{t_1} = 0$ y $2s_1 - t_1 = 0$. Así, por un lado, $r_0(A) = (0, (1 - 4t_1)(1 - \frac{2s_1}{t_1})) = (0, 0)$, y por el otro lado $r_0(A) = (2s_1 - t_1, 0) = (0, 0)$.

Caso 10. $[\frac{1}{4} \leq t_1 \leq \frac{1}{2}$ y $0 \leq s_1 \leq \frac{t_1}{2}]$ y $[\frac{1}{2} \leq t_1 \leq \frac{3}{4}$ y $0 \leq s_1 \leq \frac{t_1}{2}]$.

Entonces $t_1 = \frac{1}{2}$. Luego, $1 - 4t_1 = -1$ y $4t_1 - 3 = -1$. Por un lado, $r_0(A) = (0, (1 - 4t_1)(1 - \frac{2s_1}{t_1})) = (0, -(1 - \frac{2s_1}{t_1}))$, y por el otro lado $r_0(A) = (0, (4t_1 - 3)(1 - \frac{2s_1}{t_1})) = (0, -(1 - \frac{2s_1}{t_1}))$.

Caso 11. $[\frac{1}{2} \leq t_1 \leq \frac{3}{4}$ y $\frac{t_1}{2} \leq s_1 \leq t_1]$ y $[\frac{1}{2} \leq t_1 \leq \frac{3}{4}$ y $0 \leq s_1 \leq \frac{t_1}{2}]$.
Se tiene que $s_1 = \frac{t_1}{2}$, así que $2s_1 - t_1 = 0$ y $1 - \frac{2s_1}{t_1} = 0$. Por tanto $(2s_1 - t_1, 0) = (0, 0)$ y $(0, (4t_1 - 3)(1 - \frac{2s_1}{t_1})) = (0, 0)$.

Caso 12. $[\frac{1}{2} \leq t_1 \leq \frac{3}{4}$ y $\frac{t_1}{2} \leq s_1 \leq t_1]$ y $[\frac{3}{4} \leq t_1 \leq 1$ y $\frac{t_1}{2} \leq s_1 \leq t_1]$.
Se cumple que $t_1 = \frac{3}{4}$. Entonces $4t_1 - 3 = 0$ y $((2s_1 - t_1) + (4t_1 - 3)(2t_1 - 2s_1), 0)$ coincide con $(2s_1 - t_1, 0)$.

Caso 13. $[\frac{1}{2} \leq t_1 \leq \frac{3}{4}$ y $\frac{t_1}{2} \leq s_1 \leq t_1]$ y $[\frac{3}{4} \leq t_1 \leq 1$ y $0 \leq s_1 \leq \frac{t_1}{2}]$.
Tenemos que $s_1 = \frac{t_1}{2}$ y $t_1 = \frac{3}{4}$, así que $2s_1 - t_1 = 0$ y $4t_1 - 3 = 0$. Entonces $(2s_1 - t_1, 0) = (0, 0)$ y $(t_1(4t_1 - 3), 0) = (0, 0)$.

Caso 14. $[\frac{1}{2} \leq t_1 \leq \frac{3}{4}$ y $0 \leq s_1 \leq \frac{t_1}{2}]$ y $[\frac{3}{4} \leq t_1 \leq 1$ y $\frac{t_1}{2} \leq s_1 \leq t_1]$.
Tenemos que $t_1 = \frac{3}{4}$ y $s_1 = \frac{t_1}{2}$. Entonces $4t_1 - 3 = 0$ y $2s_1 - t_1 = 0$. Por tanto, en ambas situaciones $r_0(A) = (0, 0)$.

Caso 15. $[\frac{1}{2} \leq t_1 \leq \frac{3}{4}$ y $0 \leq s_1 \leq \frac{t_1}{2}]$ y $[\frac{3}{4} \leq t_1 \leq 1$ y $0 \leq s_1 \leq \frac{t_1}{2}]$.
Entonces $t_1 = \frac{3}{4}$, de donde $4t_1 - 3 = 0$. Por tanto, $(0, (4t_1 - 3)(1 - \frac{2s_1}{t_1})) = (0, 0)$ y $(t_1(4t_1 - 3), 0) = (0, 0)$.

Caso 16. $[\frac{3}{4} \leq t_1 \leq 1$ y $\frac{t_1}{2} \leq s_1 \leq t_1]$ y $[\frac{3}{4} \leq t_1 \leq 1$ y $0 \leq s_1 \leq \frac{t_1}{2}]$.
Entonces $s_1 = \frac{t_1}{2}$, de donde $2s_1 - t_1 = 0$ y $2t_1 - 2s_1 = t_1$. Por tanto $((2s_1 - t_1) + (4t_1 - 3)(2t_1 - 2s_1), 0) = (t_1(4t_1 - 3), 0)$.

Como ya cubrimos todos los casos, la afirmación queda demostrada. ■

Observación 2.8 *Dado $A \in \mathcal{Q}$, se satisface que*
i) si $t_1(A) = 1$, entonces $r_0(A) = x$;
ii) si $A = \{q\}$, entonces $q \in vx$, $s_1(A) = t_1(A)$ y $r_0(A) = q$.

Afirmación 5. *Para cada $A \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$, el punto $r_0(A)$ está bien definido.*
Demostración. Observe que si $A \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$, entonces $s_2 = t_2 = 0$ y $s_1 = 0$. Así que sólo tenemos que considerar los siguientes casos:

Caso 1. $0 \leq t_1 \leq \frac{1}{4}$.
Como $A \in \mathcal{P}$, $r_0(A) = (0, s_2) = (0, 0)$; y como $A \in \mathcal{Q}$, $r_0(A) = (0, 0)$.

Caso 2. $\frac{1}{4} \leq t_1 \leq \frac{1}{2}$.
Como $A \in \mathcal{P}$, $r_0(A) = (0, (1 - 4t_1)(1 + s_2) + s_2) = (0, 1 - 4t_1)$; y como $A \in \mathcal{Q}$, $r_0(A) = (0, (1 - 4t_1)(1 - \frac{2s_1}{t_1})) = (0, 1 - 4t_1)$.

Caso 3. $\frac{1}{2} \leq t_1 \leq \frac{3}{4}$.
Como $A \in \mathcal{P}$, $r_0(A) = (0, 4t_1 - 3)$; y como $A \in \mathcal{Q}$, $r_0(A) = (0, (4t_1 - 3)(1 - \frac{2s_1}{t_1})) = (0, 4t_1 - 3)$.

Caso 4. $\frac{3}{4} \leq t_1 \leq 1$.
Como $A \in \mathcal{P}$, $r_0(A) = (t_1(4t_1 - 3), 0)$; y como $A \in \mathcal{Q}$, $r_0(A) = (t_1(4t_1 - 3), 0)$.

Como ya cubrimos todos los casos posibles, queda demostrada la afirmación. ■

Entonces, dado que $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q} = 2^T$, tenemos definida la función $r_0 : 2^T \to T$ que a cada elemento $A \in 2^T$ le asigna el punto $r_0(A) \in T$. Por las afirmaciones anteriores, esta función está bien definida. Además, las restricciones de r_0 a cada uno de los subconjuntos cerrados de $\mathcal{P}$ y de $\mathcal{Q}$ en los que se definió son continuas y coinciden en sus intersecciones. Por tanto, r_0 es una función continua. Por las observaciones 2.7 *ii)* y 2.8 *ii)*, si $A \in 2^T$ y $A = \{q\}$, entonces $r_0(A) = q$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $r_n : 2^{A_n} \to A_n$ por

$$r_n(A) = (R|_{A_n})^{-1}(r_0(R(A)))$$

para cada $A \in 2^{A_n}$. Como $R|_{A_n} : A_n \to yz$ es un homeomorfismo y $r_0(A) \in yz$ si $A \in 2^{yz}$ (Observación 2.7 *ix)*), entonces r_n está bien definida y es continua. Notemos que si $A \in 2^{A_n}$ y $A = \{q\}$, entonces $r_n(A) = q$. También notemos que $R(r_n(A)) = r_0(R(A))$ para cada $A \in 2^{A_n}$.

También, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $r'_n : 2^{M_n} \to M_n$ por

$$r'_n(A) = \begin{cases} (R|_{C_n})^{-1}(r_0(R(A))), & \text{si } A \subset C_n \\ & \text{o} \\ & [A \cap C_n \neq \emptyset \neq A \cap D_n \text{ y } 0 \leq t_1(R(A)) \leq \frac{1}{2}]; \\ (R|_{D_n})^{-1}(r_0(R(A))), & \text{si } A \subset D_n \\ & \text{o} \\ & [A \cap C_n \neq \emptyset \neq A \cap D_n \text{ y } \frac{1}{2} \leq t_1(R(A)) \leq 1]; \end{cases}$$

para cada $A \in 2^{M_n}$.

Afirmación 6. *Para cada $A \in 2^{M_n}$, el punto $r'_n(A)$ está bien definido.*
Demostración. Considere los siguientes casos:

1. $A \subset C_n$.
   Se cumple que $R(A) \subset yz$ y entonces $t_1(R(A)) = 0$. Luego, por la Observación 2.7 *iii)*, $r_0(R(A)) \in yz = R|_{C_n}(C_n)$.

2. $[A \cap C_n \neq \emptyset \neq A \cap D_n$ y $0 \leq t_1(R(A)) \leq \frac{1}{2}]$.
   Por la Observación 2.7 *iii)*, tenemos que $r_0(R(A)) \in yz = R|_{C_n}(C_n)$.

3. $A \subset D_n$.
   Si $A \cap z_n u_n \neq \emptyset$, entonces $R(A) \in \mathcal{P}$ y $R(A) \subset zx$. Por la Observación 2.7 *viii)*, $r_0(R(A)) \in zx = R|_{D_n}(D_n)$. Mientras que si $A \cap z_n u_n = \emptyset$, entonces $R(A) \subset vx \setminus \{v\}$, $R(A) \in \mathcal{Q}$ y $r_0(R(A)) \in zx = R|_{D_n}(D_n)$.

4. $[A \cap C_n \neq \emptyset \neq A \cap D_n$ y $\frac{1}{2} \leq t_1(R(A)) \leq 1]$.
   Por la Observación 2.7 *v)*, $r_0(R(A)) \in zx = R|_{D_n}(D_n)$.

5. $A \subset C_n$ y $A \subset D_n$.
   Entonces $A = \{z_n\}$, lo cual implica que $r_0(R(A)) = z$ (Observación 2.7 *ii)*) Como $R|_{C_n} : C_n \to yz$ y $R|_{D_n} : D_n \to zx$ son homeomorfismos, $(R|_{C_n})^{-1}(r_0(R(A))) = (R|_{C_n})^{-1}(z) = z_n$ y también $(R|_{D_n})^{-1}(r_0(R(A))) = (R|_{D_n})^{-1}(z) = z_n$.

6. $A \subset C_n$ y $[A \cap C_n \neq \emptyset \neq A \cap D_n$ y $\frac{1}{2} \leq t_1(R(A)) \leq 1]$.
   Este caso no puede ocurrir porque $R(A) \subset yz$ y $t_1(yz) = 0$ implican que $t_1(R(A)) = 0$.

7. $[A \cap C_n \neq \emptyset \neq A \cap D_n$ y $0 \leq t_1(R(A)) \leq \frac{1}{2}]$ y $A \subset D_n$.
Se cumple que $z_n \in A$, lo que implica que $z \in R(A) \subset zx$ y $0 \leq t_1(R(A)) \leq \frac{1}{2}$. Por la Observación 2.7 *vi)*, $r_0(R(A)) = z$. Entonces $(R|_{C_n})^{-1}(r_0(R(A))) = z_n$ y $(R|_{D_n})^{-1}(r_0(R(A))) = z_n$.

8. $[A \cap C_n \neq \emptyset \neq A \cap D_n$ y $0 \leq t_1(R(A)) \leq \frac{1}{2}]$ y $[A \cap C_n \neq \emptyset \neq A \cap D_n$ y $\frac{1}{2} \leq t_1(R(A)) \leq 1]$. Entonces $t_1(R(A)) = \frac{1}{2}$. Por la Observación 2.7 *vii)*, $r_0(R(A)) = z$. Entonces
$$(R|_{C_n})^{-1}(r_0(R(A))) = z_n \text{ y } (R|_{D_n})^{-1}(r_0(R(A))) = z_n.$$

Como ya consideramos todos los casos, concluimos que el punto $r'_n(A)$ está bien definido.
■

Sean
$$\mathcal{R} = \langle C_n \rangle \cup (\langle C_n, D_n \rangle \cap \{B \in 2^{M_n} : 0 \leq t_1(R(B)) \leq \frac{1}{2}\}) \text{ y}$$
$$\mathcal{S} = \langle D_n \rangle \cup (\langle C_n, D_n \rangle \cap \{B \in 2^{M_n} : \frac{1}{2} \leq t_1(R(B)) \leq 1\})$$
Notemos que $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son dos subconjuntos cerrados de 2^{M_n} cuya unión es 2^{M_n}. Por los casos 1 y 2 de la Afirmación 6, $r_0(R(A)) \in yz$ para cada $A \in \mathcal{R}$. Como $R : W_2 \to T$ y $r_0 : 2^T \to T$ son continuas y, además, $R|_{C_n} : C_n \to yz$ es un homeomorfismo, tenemos que $r'_n|_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \to M_n$ es continua. Por los casos 3 y 4 de la Afirmación 6, $r_0(R(A)) \in zx$ para cada $A \in \mathcal{S}$. Como $R : W_2 \to T$ y $r_0 : 2^T \to T$ son continuas y, además, $R|_{D_n} : D_n \to zx$ es un homeomorfismo, tenemos que $r'_n|_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \to M_n$ es continua. Tenemos entonces que las restricciones de r'_n a $\mathcal{R}$ y a $\mathcal{S}$ son continuas, por lo tanto r'_n es continua.

Notemos que si $A \in 2^{M_n}$ y $A = \{q\}$, entonces $r_n(A) = q$. También notemos que $R(r'_n(A)) = r_0(R(A))$ para cada $A \in 2^{M_n}$.

Definimos entonces $r : 2^{W_2} \to W_2$ por
$$r(A) = \begin{cases} r_0(A), & \text{si } A \in 2^T; \\ r_n(A), & \text{si } A \in 2^{A_n}, \text{ para alguna } n \in \mathbb{N}; \\ r'_n(A), & \text{si } A \in 2^{M_n}, \text{ para alguna } n \in \mathbb{N}; \\ r_0(R(A)), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sean $n, m \in \mathbb{N}$, con $n \neq m$. Tenemos que $2^T \cap 2^{A_n} = \{\{y\}\}$, $2^{A_n} \cap 2^{A_m} = \{\{y\}\}$, $2^T \cap 2^{M_n} = \{\{x\}\}$, $2^{M_n} \cap 2^{M_m} = \{\{x\}\}$, $r_0(\{y\}) = y = r_n(\{y\}) = r_m(\{y\})$ y $r_0(\{x\}) = x = r'_n(\{x\}) = r'_m(\{x\})$. Esto demuestra que r está bien definida.

Por las observaciones 2.7 *ii)* y 2.8 *ii)*, tenemos que para toda $q \in W_2$, $r(\{q\}) = q$.

Afirmación 7. *La función $r : 2^{W_2} \to W_2$ es continua.*
Demostración. Para probar esta afirmación consideremos una sucesión $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en 2^{W_2} que converge a un elemento $B \in 2^{W_2}$ y probemos que $r(B) = \lim_{k \to \infty} r(B_k)$. Notemos que B tiene dos opciones: $B \not\subset T$ o $B \subset T$. El caso en que $B \not\subset T$ lo dividimos en siete casos. Así que a continuación probamos que $r(B) = \lim_{k \to \infty} r(B_k)$ en los ocho casos posibles para B.

Caso 1. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B \in \langle A_n \setminus \{y\} \rangle \cup \langle M_n \setminus \{x\} \rangle$.

Caso 1.1. $B \in \langle A_n \setminus \{y\}\rangle$.

En este caso $r(B) = r_n(B)$. Como $\langle A_n \setminus \{y\}\rangle$ es un abierto de 2^{W_2}, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $B_k \in \langle A_n \setminus \{y\}\rangle$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces $r(B_k) = r_n(B_k)$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Como $r_n : 2^{A_n} \to A_n$ es continua, tenemos que

$$r(B) = r_n(B) = \text{lím}_{k\to\infty} r_n(B_k) = \text{lím}_{k\to\infty} r(B_k).$$

Caso 1.2. $B \in \langle M_n \setminus \{x\}\rangle$.

En este caso $r(B) = r'_n(B)$. Como $\langle M_n \setminus \{x\}\rangle$ es un abierto de 2^{W_2}, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $B_k \in \langle M_n \setminus \{x\}\rangle$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces $r(B_k) = r'_n(B_k)$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Como $r'_n : 2^{M_n} \to M_n$ es continua, tenemos que

$$r(B) = r'_n(B) = \text{lím}_{k\to\infty} r'_n(B_k) = \text{lím}_{k\to\infty} r(B_k).$$

Caso 2. Existen $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, tales que $B \in \langle A_n \setminus \{y\}, A_m \setminus \{y\}, W_2\rangle$.

En este caso $r(B) = r_0(R(B))$. Como $\langle A_n \setminus \{y\}, A_m \setminus \{y\}, W_2\rangle$ es un abierto de 2^{W_2}, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $B_k \in \langle A_n \setminus \{y\}, A_m \setminus \{y\}, W_2\rangle$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Tenemos que para todo $k \in \mathbb{N}$, $r(B_k) = r_0(R(B_k))$. Dado que R y r_0 son continuas, tenemos que

$$r(B) = r_0(R(B)) = \text{lím}_{k\to\infty} r_0(R(B_k)) = \text{lím}_{k\to\infty} r(B_k).$$

Caso 3. Existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $B \in \langle A_n \setminus \{y\}, M_m, W_2\rangle$.

En este caso $r(B) = r_0(R(B))$. Como $A_n \setminus \{y\}$ es un abierto de W_2, sin pérdida de generalidad podemos suponer que para cada $k \in \mathbb{N}$, $B_k \cap (A_n \setminus \{y\}) \neq \emptyset$. Además, como $B \cap M_m \neq \emptyset$ y $\text{lím}_{k\to\infty} B_k = B$, existe una sucesión $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en W_2 que converge a un punto $p \in B \cap M_m$ tal que $p_k \in B_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Como $p \in M_m$ y $M_m \cap A_n = \emptyset$, entonces podemos suponer que $p_k \notin A_n$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por tanto, tenemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, $B_k \cap (A_n \setminus \{y\}) \neq \emptyset$ y $B_k \not\subset A_n$. Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, $r(B_k) = r_0(R(B_k))$. Dado que R y r_0 son continuas, tenemos que

$$r(B) = r_0(R(B)) = \text{lím}_{k\to\infty} r_0(R(B_k)) = \text{lím}_{k\to\infty} r(B_k).$$

Caso 4. Existen $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, tales que $B \in \langle M_n \setminus \{x\}, M_m \setminus \{x\}, W_2\rangle$.

Este caso es similar al Caso 2. Tenemos que $r(B) = r_0(R(B))$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $B_k \in \langle M_n \setminus \{x\}, M_m \setminus \{x\}, W_2\rangle$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por tanto, $r(B_k) = r_0(R(B_k))$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces

$$r(B) = r_0(R(B)) = \text{lím}_{k\to\infty} r_0(R(B_k)) = \text{lím}_{k\to\infty} r(B_k).$$

Caso 5. Existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $B \in \langle M_n \setminus \{x\}, A_m, W_2\rangle$.

Este caso es similar al Caso 3. Tenemos que $r(B) = r_0(R(B))$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que para cada $k \in \mathbb{N}$, $B_k \cap (M_n \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ y $B_k \not\subset M_n$. Entonces $r(B_k) = r_0(R(B_k))$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Dado que R y r_0 son continuas, tenemos que

$$r(B) = r_0(R(B)) = \text{lím}_{k\to\infty} r_0(R(B_k)) = \text{lím}_{k\to\infty} r(B_k).$$

Caso 6. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B \in \langle A_n \setminus \{y\}, T\rangle$.

Caso 6.1. $B \subset A_n$.

En este caso $y \in B \cap R(B)$ y $R(B) \subset R(A_n) = yz$. Por la Observación 2.6 x), tenemos que $r(B) = r_n(B) = (R|_{A_n})^{-1}(r_0(R(B))) = y = r_0(R(B))$. Como $A_n \setminus \{y\}$ es un abierto de W_2 que intersecta a B, sin pérdida de generalidad podemos suponer que para cada $k \in \mathbb{N}$, $B_k \cap (A_n \setminus \{y\}) \neq \emptyset$. Sean $\mathbb{N}_1 = \{k \in \mathbb{N} : B_k \subset A_n\}$ y $\mathbb{N}_2 = \{k \in \mathbb{N} : B_k \not\subset A_n\}$. Notemos que $\mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 = \mathbb{N}$. Para cada $k \in \mathbb{N}_1$ y $l \in \mathbb{N}_1$, tenemos que $r(B_k) = r_n(B_k) = (R|_{A_n})^{-1}(r_0(R(B_k)))$ y $r(B_k) = r_n(B_k) = r_0(R(B_k))$. Si $\mathbb{N}_1$ es finito, entonces podemos suponer que $\mathbb{N}_2 = \mathbb{N}$, y por la continuidad de R y r_0, tenemos que

$$r(B) = r_0(R(B)) = \text{lím}_{k\to\infty} r_0(R(B_k)) = \text{lím}_{k\to\infty} r(B_k).$$

Si $\mathbb{N}_2$ es finito, entonces podemos suponer que $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}$, y por la continuidad de R, r_0 y $(R|_{A_n})^{-1}$, tenemos que

$$r(B) = (R|_{A_n})^{-1}(r_0(R(B))) = \text{lím}_{k\to\infty}(R|_{A_n})^{-1}(r_0(R(B_k))) = \text{lím}_{k\to\infty} r(B_k).$$

Si $\mathbb{N}_1$ y $\mathbb{N}_2$ son infinitos, entonces los escribimos como $\mathbb{N}_1 = \{s_k : k \in \mathbb{N}\}$ y $\mathbb{N}_2 = \{l_k : k \in \mathbb{N}\}$, con $s_1 < s_2 < ...$ y $l_1 < l_2 < ....$ Por la continuidad de R, r_0 y $(R|_{A_n})^{-1}$, tenemos que

$$r(B) = (R|_{A_n})^{-1}(r_0(R(B))) = \text{lím}_{k\to\infty}(R|_{A_n})^{-1}(r_0(R(B_{s_k}))) = \text{lím}_{k\to\infty} r(B_{s_k}).$$

y

$$r(B) = r_0(R(B)) = \text{lím}_{k\to\infty} r_0(R(B_{l_k})) = \text{lím}_{k\to\infty} r(B_{l_k}).$$

Como $\mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 = \mathbb{N}$, concluimos que $r(B) = \text{lím}_{k\to\infty} r(B_k)$.

Caso 6.2. $B \not\subset A_n$.

En este caso $r(B) = r_0(R(B))$. Como $A_n \setminus \{y\}$ es un abierto de W_2 que intersecta a B, sin pérdida de generalidad podemos suponer que para cada $k \in \mathbb{N}$, $B_k \cap (A_n \setminus \{y\}) \neq \emptyset$. Sea $p \in B \cap (T \setminus A_n)$. Como $\text{lím}_{k\to\infty} B_k = B$, existe una sucesión $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en W_2 que converge a p tal que $p_k \in B_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Como $p \notin A_n$, entonces podemos suponer que $p_k \notin A_n$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por tanto, para cada $k \in \mathbb{N}$, $B_k \cap (A_n \setminus \{y\}) \neq \emptyset$ y $B_k \not\subset A_n$. Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, $r(B_k) = r_0(R(B_k))$. Dado que R y r_0 son continuas, tenemos que

$$r(B) = r_0(R(B)) = \text{lím}_{k\to\infty} r_0(R(B_k)) = \text{lím}_{k\to\infty} r(B_k).$$

Caso 7. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B \in \langle M_n \setminus \{x\}, T\rangle$.

Caso 7.1. $B \subset M_n$.

En este caso $x \in B \cap R(B)$ y por las observaciones 2.6 i) y 2. 7 i), tenemos que $r(B) = r_n(B) = (R|_{D_n})^{-1}(r_0(R(B))) = x = r_0(R(B))$. Como $M_n \setminus \{x\}$ es un abierto de W_2 que intersecta a B, sin pérdida de generalidad podemos suponer que para cada $k \in \mathbb{N}$, $B_k \cap (M_n \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Como $\text{lím}_{k\to\infty} B_k = B$ y $x \in B$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que para cada $k \in \mathbb{N}$, $t_1(R(B_k)) > \frac{1}{2}$. Sean $\mathbb{N}_1 = \{k \in \mathbb{N} : B_k \subset M_n\}$ y $\mathbb{N}_2 = \{k \in \mathbb{N} : B_k \not\subset M_n\}$. Notemos que $\mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 = \mathbb{N}$. Para cada $k \in \mathbb{N}_1$ y $l \in \mathbb{N}_1$, tenemos que $r(B_k) = r_n(B_k) = (R|_{D_n})^{-1}(r_0(R(B_k)))$ y $r(B_k) = r_n(B_k) = r_0(R(B_k))$. Si $\mathbb{N}_1$ es finito, entonces podemos suponer que $\mathbb{N}_2 = \mathbb{N}$, y por la continuidad de R y r_0, tenemos que

$$r(B) = r_0(R(B)) = \text{lím}_{k\to\infty} r_0(R(B_k)) = \text{lím}_{k\to\infty} r(B_k).$$

Si $\mathbb{N}_2$ es finito, entonces podemos suponer que $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}$, y por la continuidad de R, r_0 y $(R|_{D_n})^{-1}$, tenemos que

$$r(B) = (R|_{D_n})^{-1}(r_0(R(B))) = \text{lím}_{k\to\infty}(R|_{D_n})^{-1}(r_0(R(B_k))) = \text{lím}_{k\to\infty} r(B_k).$$

Si $\mathbb{N}_1$ y $\mathbb{N}_2$ son infinitos, entonces los escribimos como $\mathbb{N}_1 = \{s_k : k \in \mathbb{N}\}$ y $\mathbb{N}_2 = \{l_k : k \in \mathbb{N}\}$, con $s_1 < s_2 < ...$ y $l_1 < l_2 < ....$ Por la continuidad de R, r_0 y $(R|_{D_n})^{-1}$, tenemos que

$$r(B) = (R|_{D_n})^{-1}(r_0(R(B))) = \text{lím}_{k\to\infty}(R|_{D_n})^{-1}(r_0(R(B_{s_k}))) = \text{lím}_{k\to\infty} r(B_{s_k}).$$

y

$$r(B) = r_0(R(B)) = \text{lím}_{k\to\infty} r_0(R(B_{l_k})) = \text{lím}_{k\to\infty} r(B_{l_k}).$$

Como $\mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 = \mathbb{N}$, concluimos que $r(B) = \text{lím}_{k\to\infty} r(B_k)$.

Caso 7.2. $B \not\subset M_n$.

En este caso $r(B) = r_0(R(B))$. Como $M_n \setminus \{x\}$ es un abierto de W_2 que intersecta a B, sin pérdida de generalidad podemos suponer que para cada $k \in \mathbb{N}$, $B_k \cap (M_n \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Sea $p \in B \cap (T \setminus M_n)$. Como $\text{lím}_{k\to\infty} B_k = B$, existe una sucesión $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en W_2 que converge a p tal que $p_k \in B_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Como $p \notin M_n$, entonces podemos suponer que $p_k \notin M_n$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por tanto, para cada $k \in \mathbb{N}$, $B_k \cap (M_n \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ y $B_k \not\subset M_n$. Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, $r(B_k) = r_0(R(B_k))$. Dado que R y r_0 son continuas, tenemos que

$$r(B) = r_0(R(B)) = \text{lím}_{k\to\infty} r_0(R(B_k)) = \text{lím}_{k\to\infty} r(B_k).$$

Caso 8. $B \in \langle T \rangle$.

En este caso $r(B) = r_0(B) = r_0(R(B))$.

Sea $\varepsilon > 0$.

Por la definición de $R : W_2 \to T$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(p, R(p)) < \frac{\varepsilon}{2}$ para cada $p \in T \cup (\bigcup\{A_n \cup C_n \cup D_n : n \geq N\})$. Así, si $n \geq N$, $p \in yz$ y $q \in zx$, tenemos que $\rho(p,(R|_{A_n})^{-1}(p)) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\rho(p,(R|_{C_n})^{-1}(p)) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\rho(q,(R|_{D_n})^{-1}(q)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $\text{lím}_{k\to\infty} B_k = B$ y $B \subset T$, existe $K_1 \in \mathbb{N}$ tal que $B_k \subset T \cup (\bigcup\{A_n \cup C_n \cup D_n : n \geq N\})$ para cada $k \geq K_1$. Por la continuidad de $r_0 \circ 2^R : 2^{W_2} \to T$, tenemos que $\text{lím}_{k\to\infty} r_0(2^R(B_k)) = r_0(2^R(B))$, equivalentemente, $\text{lím}_{k\to\infty} r_0(R(B_k)) = r_0(R(B))$. Así que existe $K_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(r_0(R(B_k)), r_0(R(B))) < \frac{\varepsilon}{2}$ para cada $k \geq K_2$. Sea $k \geq$máx$\{K_1, K_2\}$. Por la definición de r, tenemos que $r(B_k) \in \{r_0(B_k), r_0(R(B_k))\}$ o existe $n_k \in \mathbb{N}$, $n_k \geq N$, tal que

$$r(B_k) \in \{(R|_{A_{n_k}})^{-1}(r_0(R(B_k))), (R|_{C_{n_k}})^{-1}(r_0(R(B_k))), (R|_{D_{n_k}})^{-1}(r_0(R(B_k)))\}.$$

Entonces, en cualquier caso, $\rho(r(B_k), r_0(R(B_k))) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por tanto

$$\begin{aligned}\rho(r(B_k), r(B)) &\leq \rho(r(B_k), r_0(R(B_k))) + \rho(r_0(R(B_k)), r_0(R(B))) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Entonces $r(B) = \text{lím}_{k\to\infty} r(B_k)$.

Notemos que con estos ocho casos cubrimos todas las posibilidades para B. Por lo tanto, hemos demostrado que $r(B) = \text{lím}_{k\to\infty} r(B_k)$, con lo cual terminamos la prueba de la Afirmación 7. ■

De la Afirmación 7, concluimos que $r : 2^{W_2} \to W_2$ es una retracción.

W_2 **es contráctil**

Note que $W_3 = T \cup (\bigcup\{M_n : n \in \mathbb{N}\})$ es un subcontinuo contráctil de W_2. Entonces para ver que W_2 es contráctil basta dar una función continua $G : W_2 \times [0,1] \to W_2$ tal que $G(p,0) = p$ para cada $p \in W_2$ y $G(W_2 \times \{1\}) \subset W_3$.

Primero definimos una homotopía $G_0 : T \times [0,1] \to T$ de la siguiente manera:

i) si $p = (0,t)$, $t \in [-1,0]$, hacemos

$$G_0(p,s) = \begin{cases} (0, t(1-3s) - 3s)\,, & \text{si } s \in [0,\frac{1}{3}]; \\ (0,-1) & \text{si } s \in [\frac{1}{3},\frac{1}{2}]; \\ (0, 12s-7)\,, & \text{si } s \in [\frac{1}{2},\frac{2}{3}]; \\ (0,1), & \text{si } s \in [\frac{2}{3},1]; \end{cases}$$

ii) si $p = (0,t)$, $t \in [0,\frac{1}{2}]$, hacemos

$$G_0(p,s) = \begin{cases} (0, t(1-3s) + 3s(2t-1))\,, & \text{si } s \in [0,\frac{1}{3}]; \\ (0, (2t-1)(3-6s) - (6s-2))\,, & \text{si } s \in [\frac{1}{3},\frac{1}{2}]; \\ (0, (6s-4) + (1-4t)(6s-3))\,, & \text{si } s \in [\frac{1}{2},\frac{2}{3}]; \\ (0, (1-4t)(3-3s) + (3s-2)), & \text{si } s \in [\frac{2}{3},1]; \end{cases}$$

iii) si $p = (0,t)$, $t \in [\frac{1}{2},1]$, hacemos

$$G_0(p,s) = \begin{cases} (0, t(1-3s) + 3s(2t-1))\,, & \text{si } s \in [0,\frac{1}{3}]; \\ (0, (2t-1)(3-6s) + (4t-3)(6s-2))\,, & \text{si } s \in [\frac{1}{3},\frac{1}{2}]; \\ (0, 4t-3), & \text{si } s \in [\frac{1}{2},\frac{2}{3}]; \\ (0, (4t-3)(3-3s) + (3s-2)), & \text{si } s \in [\frac{2}{3},1]; \end{cases}$$

iv) si $p = (t,0)$, $t \in [0,\frac{1}{3}]$, hacemos

$$G_0(p,s) = \begin{cases} (t-s, 0)\,, & \text{si } s \in [0,t]; \\ (0, 3(t-s))\,, & \text{si } s \in [t,\frac{1}{3}]; \\ (0, (3t-1)(3-6s) - (6s-2))\,, & \text{si } s \in [\frac{1}{3},\frac{1}{2}]; \\ (0, (6s-4) + (1-6t)(6s-3))\,, & \text{si } s \in [\frac{1}{2},\frac{2}{3}]; \\ (0, 1-6t), & \text{si } s \in [\frac{2}{3},1]; \end{cases}$$

v) si $p = (t,0)$, $t \in [\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$, hacemos

$$G_0(p,s) = \begin{cases} (t(1-3s), 0)\,, & \text{si } s \in [0,\frac{1}{3}]; \\ (0, (3t-2)(6s-2))\,, & \text{si } s \in [\frac{1}{3},\frac{1}{2}]; \\ (0, 3t-2), & \text{si } s \in [\frac{1}{2},1]; \end{cases}$$

vi) si $p = (t,0)$, $t \in [\frac{2}{3},1]$, hacemos

$$G_0(p,s) = \begin{cases} (t - 6s(1-t), 0), & \text{si } s \in [0,\frac{1}{3}]; \\ (t - 2(1-t), 0), & \text{si } s \in [\frac{1}{3},1]; \end{cases}$$

Afirmación 1. *Para cualesquiera* $p \in T$ *y* $s \in [0,1]$, $G_0(p,s) \in T$.
Demostración. Primero note lo siguiente:
a) si $0 \leq s \leq \frac{1}{3}$, entonces $0 \leq 1-3s \leq 1$;
b) si $\frac{1}{3} \leq s \leq \frac{1}{2}$, entonces $0 \leq 3-6s \leq 1$ y $0 \leq 6s-2 \leq 1$;
c) si $\frac{1}{2} \leq s \leq \frac{2}{3}$, entonces $-1 \leq 12s-7 \leq 1$, $0 \leq 6s-3 \leq 1$ y $-1 \leq 6s-4 \leq 0$;
d) si $\frac{2}{3} \leq s \leq 1$, entonces $0 \leq 3-3s \leq 1$, $0 \leq 3s-2 \leq 1$ y $-1 \leq 6s-5 \leq 1$.

Probaremos la afirmación verificando todos los casos.

Caso 1. $p = (0,t)$, $-1 \leq t \leq 0$.

Claramente $G_0(p,s) \in T$ cuando $s \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Entonces suponga que $0 \leq s \leq \frac{1}{3}$. Multiplicando por 3, obtenemos $0 \leq 3s \leq 1$. Como $0 \leq t+1 \leq 1$, entonces $0 \leq 3s(t+1) \leq t+1 \leq 1$. Multipllicando por -1 y después sumando t, obtenemos $-1+t \leq t-(t+1) \leq t-3s(t+1) \leq t$. Como $t-(t+1) = -1$ y $t-3s(t+1) = t(1-3s)-3s$, concluimos que $G_0(p,s) = (0, t(1-3s)-3s) \in vz \subset T$.

Ahora suponga que $\frac{1}{2} \leq s \leq \frac{2}{3}$. Por c), $-1 \leq 12s-7 \leq 1$, así que $G_0(p,s) = (0, 12s-7) \in yz \subset T$.

Caso 2. $p = (0,t)$, $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$.

Suponga $0 \leq s \leq \frac{1}{3}$. Por a), $0 \leq 1-3s \leq 1$ y como $t \geq 0$, entonces $0 \leq t(1-3s) \leq t$. Por otro lado, multiplicando por 2 y después restando 1 en $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, obtenemos $-1 \leq 2t-1 \leq 0$. Como $0 \leq 3s \leq 1$, tenemos $-3s \leq 3s(2t-1) \leq 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
-1 &\leq -3s \\
&\leq -3s + t(1-3s) \\
&\leq 3s(2t-1) + t(1-3s) \\
&\leq t(1-3s) \\
&\leq t.
\end{aligned}$$

Esto prueba que $G_0(p,s) \in zp \subset zv \subset T$.

Suponga $\frac{1}{3} \leq s \leq \frac{1}{2}$. Por b), $0 \leq 3-6s \leq 1$ y $0 \leq 6s-2 \leq 1$. Como $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, entonces $0 \leq 1-2t \leq 1$. Al multiplicar por $1-2t$ en $0 \leq 3-6s \leq 1$ se obtiene $0 \leq (1-2t)(3-6s) \leq 3-6s$. Entonces $6s-3 \leq (2t-1)(3-6s) \leq 0$. Luego

$$\begin{aligned}
-1 &= (6s-3)-(6s-2) \\
&\leq (2t-1)(3-6s)-(6s-2) \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Por tanto $G_0(p,s) = (0, (2t-1)(3-6s)-(6s-2)) \in vz \subset T$.

Suponga $\frac{1}{2} \leq s \leq \frac{2}{3}$. Por c), $-1 \leq 12s-7 \leq 1$ y $0 \leq 6s-3 \leq 1$. Al multiplicar por -4 y después sumar 1 en $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, nos queda $-1 \leq 1-4t \leq 1$. Entonces $-(6s-3) \leq (1-4t)(6s-3) \leq 6s-3$, y sumando $6s-4$ se tiene

$$\begin{aligned}
-1 &= (6s-4)-(6s-3) \\
&\leq (6s-4)+(1-4t)(6s-3) \\
&\leq (6s-4)+(6s-3) \\
&= 12s-7 \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

Por tanto $G_0(p,s) = (0, (6s-4) + (1-4t)(6s-3)) \in yz \subset T$.

Por último, suponga $\frac{2}{3} \leq s \leq 1$. Por d), $-1 \leq 6s-5 \leq 1$ y $0 \leq 3-3s \leq 1$. Igual que en el párrafo anterior, se tiene que $-1 \leq 1-4t \leq 1$. Entonces $-(3-3s) \leq (1-4t)(3-3s) \leq 3-3s$, y sumando $3s-2$ se tiene

$$\begin{aligned} -1 &\leq 6s-5 \\ &= (3s-2)-(3-3s) \\ &\leq (3s-2)+(1-4t)(3-3s) \\ &\leq (3s-2)+(3-3s) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por tanto $G_0(p,s) = (0, (1-4t)(3-3s) + (3s-2)) \in yz \subset T$.

Caso 3. $p = (0,t)$, $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$.

Suponga $0 \leq s \leq \frac{1}{3}$. Por a), $0 \leq 1-3s \leq 1$. Multiplicando por 2 y después restando 1 en $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, obtenemos $0 \leq 2t-1 \leq 1$. Como $0 \leq t \leq 1$ y $3s \geq 0$, tenemos que $0 \leq t(1-3s)+3s(2t-1) \leq 1-3s+3s = 1$. Entonces $G_0(p,s) = (0, t(1-3s)+3s(2t-1)) \in vy \subset T$.

Suponga $\frac{1}{3} \leq s \leq \frac{1}{2}$. Por b), $0 \leq 3-6s \leq 1$ y $0 \leq 6s-2 \leq 1$. Como en el párrafo anterior, obtenemos que $0 \leq 2t-1 \leq 1$; al multiplicar por 2 y después restar 1 nos queda $-1 \leq 4t-3 \leq 1$. Entonces

$$\begin{aligned} -1 &\leq -(6s-2) \\ &\leq (6s-2)(4t-3) \\ &\leq 6s-2. \end{aligned}$$

Como $0 \leq 3-6s$ y $0 \leq 2t-1 \leq 1$, se tiene que $0 \leq (2t-1)(3-6s) \leq 3-6s$. Entonces

$$\begin{aligned} (6s-2)(4t-3) &\leq (6s-2)(4t-3)+(2t-1)(3-6s) \\ &\leq (6s-2)+(3-6s) = 1. \end{aligned}$$

Por tanto $G_0(p,s) \in yz \subset T$.

Suponga $\frac{1}{2} \leq s \leq \frac{2}{3}$. En el párrafo anterior vimos que $-1 \leq 4t-3 \leq 1$, así que $G_0(p,s) \in yz \subset T$.

Suponga $\frac{2}{3} \leq s \leq 1$. Sabemos que $-1 \leq 4t-3 \leq 1$, y por d), $0 \leq 3-3s \leq 1$ y $0 \leq 3s-2 \leq 1$. Entonces

$$\begin{aligned} -1 &\leq -(3-3s) \\ &\leq (3-3s)(4t-3) \\ &\leq (3-3s)(4t-3)+(3s-2) \\ &\leq (3-3s)+(3s-2) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Así que $G_0(p,s) \in yz \subset T$.

Caso 4. $p = (t,0)$, $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$.

Suponga $0 \leq s \leq t$. Entonces $0 \leq t-s \leq t$. Así $G_0(p,s) \in vp \subset vx \subset T$.

Suponga $t \leq s \leq \frac{1}{3}$. Entonces $-\frac{1}{3} \leq t - s \leq 0$ y $-1 \leq 3(t-s) \leq 0$. Por tanto $G_0(p,s) \in vz \subset T$.

Suponga $\frac{1}{3} \leq s \leq \frac{1}{2}$. Por b), $0 \leq 3-6s \leq 1$ y $0 \leq 6s-2 \leq 1$. Multiplicando por 3 y luego restando 1 en $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$, nos queda $-1 \leq 3t-1 \leq 0$. Entonces $-(3-6s) \leq (3-6s)(3t-1) \leq 0$, y restando $6s-2$ tenemos

$$\begin{aligned} -1 &= -(3-6s)-(6s-2) \\ &\leq (3-6s)(3t-1)-(6s-2) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Por lo que $G_0(p,s) = (0, (3t-1)(3-6s)-(6s-2)) \in vz \subset T$.

Suponga $\frac{1}{2} \leq s \leq \frac{2}{3}$. Por c), $-1 \leq 12s-7 \leq 1$, $0 \leq 6s-3 \leq 1$ y $-1 \leq 6s-4 \leq 0$. Multiplicando por -6 y después sumando 1 en $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$, obtenemos $-1 \leq 1-6t \leq 1$. Al multiplicar por $6s-3$ nos queda $-(6s-3) \leq (1-6t)(6s-3) \leq 6s-3$. Entonces

$$\begin{aligned} -1 &= -(6s-3)+(6s-4) \\ &\leq (1-6t)(6s-3)+(6s-4) \\ &\leq 6s-3+(6s-4) \\ &= 12s-7 \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Así, $G_0(p,s) = (0, (6s-4)+(1-6t)(6s-3)) \in yz \subset T$.

Suponga $\frac{2}{3} \leq s \leq 1$. En el párrafo anterior probamos que $-1 \leq 1-6t \leq 1$, así que $G_0(p,s) = (0, 1-6t) \in yz \subset T$.

Caso 5. $p = (t,0)$, $\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}$.

Suponga $0 \leq s \leq \frac{1}{3}$. Como $0 \leq 1-3s \leq 1$, entonces $0 \leq t(1-3s) \leq t$. Por tanto, $G_0(p,s) \in vp \subset vx \subset T$.

Suponga $\frac{1}{3} \leq s \leq \frac{1}{2}$. Por b), $0 \leq 6s-2 \leq 1$. Multiplicando por 3 y luego restando 2 en $\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}$, obtenemos $-1 \leq 3t-2 \leq 0$. Entonces

$$\begin{aligned} -1 &\leq -(6s-2) \\ &\leq (6s-2)(3t-2) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $G_0(p,s) = (0, (3t-2)(6s-2)) \in vz \subset T$.

Suponga $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$. En el párrafo anterior vimos que $-1 \leq 3t-2 \leq 0$, así que $G_0(p,s) = (0, 3t-2) \in vz \subset T$.

Caso 6. $p = (t,0)$, $\frac{2}{3} \leq t \leq 1$.

Suponga $0 \leq s \leq \frac{1}{3}$. Como $1-t \geq 0$, entonces $0 \leq 6s(1-t) \leq 2(1-t) = 2-2t$ y al multiplicar por -1, $2t-2 \leq -6s(1-t) \leq 0$. Entonces $3t-2 \leq t-6s(1-t) \leq t$. Por otro lado, multiplicando por 3 y luego restando 2 en $\frac{2}{3} \leq t \leq 1$, se tiene $0 \leq 3t-2 \leq 1$. Con esto queda probado que $G_0(p,s) = (t-6s(1-t), 0) \in vp \subset vx \subset T$.

Suponga $\frac{1}{3} \leq s \leq 1$. Como $t-2(1-t) = 3t-2$ y ya vimos que $0 \leq 3t-2 \leq 1$, tenemos que $G_0(p,s) = (t-2(1-t), 0) \in vx \subset T$.

Como ya hicimos todos los casos, la afirmación queda demostrada. ■

Afirmación 2. *Para cualesquiera $p \in T$ y $s \in [0,1]$, el punto $G_0(p,s)$ está bien definido.*
Demostración. Veremos que en cada parte donde se tome p, $G_0(p,s)$ está bien definido para cada s.

Caso 1. p como en i).

Si $s = \frac{1}{3}$, entonces $t(1-3s) - 3s = -1$. Así que $(0, t(1-3s) - 3s) = (0,-1)$.

Si $s = \frac{1}{2}$, se tiene que $12s - 7 = -1$. Luego, $(0, 12s - 7) = (0,-1)$.

Si $s = \frac{2}{3}$, se cumple que $12s - 7 = 1$. Entonces, $(0, 12s - 7) = (0,1)$.

Caso 2. p como en ii).

Si $s = \frac{1}{3}$, entonces $t(1-3s) + 3s(2t-1) = 2t-1$ y $(2t-1)(3-6s) - (6s-2) = 2t-1$. Así que $G_0(p, \frac{1}{3}) = (0, 2t-1)$.

Si $s = \frac{1}{2}$, se sigue que $(2t-1)(3-6s) - (6s-2) = -1$ y $(6s-4) + (1-4t)(6s-3) = -1$. Luego $G_0(p, \frac{1}{2}) = (0,-1)$.

Si $s = \frac{2}{3}$, se cumple que $(6s-4)+(1-4t)(6s-3) = 1-4t$ y $(1-4t)(3-3s)+(3s-2) = 1-4t$. Por lo que $G_0(p, \frac{2}{3}) = (0, 1-4t)$.

Caso 3. p como en iii).

Si $s = \frac{1}{3}$, entonces $t(1-3s)+3s(2t-1) = 2t-1$ y $(2t-1)(3-6s)+(4t-3)(6s-2) = 2t-1$. Por tanto, $G_0(p, \frac{1}{3}) = (0, 2t-1)$.

Si $s = \frac{1}{2}$, entonces $(2t-1)(3-6s) + (4t-3)(6s-2) = 4t-3$. Así, $G_0(p, \frac{1}{2}) = (0, 4t-3)$.

Si $s = \frac{2}{3}$, se tiene que $(4t-3)(3-3s) + (3s-2) = 4t-3$. Entonces $G_0(p, \frac{2}{3}) = (0, 4t-3)$.

Caso 4. p como en iv).

Si $s = t$, se tiene que $t - s$ coincide con $3(t-s)$. Entonces $G_0(p,t) = (0,0)$.

Si $s = \frac{1}{3}$, entonces $3(t-s) = 3t-1$ y $(3t-1)(3-6s) - (6s-2) = 3t-1$. Por tanto, $G_0(p, \frac{1}{3}) = (0, 3t-1)$.

Si $s = \frac{1}{2}$, tenemos que $(3t-1)(3-6s) - (6s-2) = -1$ y $(6s-4) + (1-6t)(6s-3) = -1$. Así que $G_0(p, \frac{1}{2}) = (0,-1)$.

Si $s = \frac{2}{3}$, entonces $(6s-4) + (1-6t)(6s-3) = 1-6t$. Por tanto $G_0(p, \frac{2}{3}) = (0, 1-6t)$.

Caso 5. p como en v).

Si $s = \frac{1}{3}$, entonces $1 - 3s = 0 = 6s - 2$, por lo que $G_0(p, \frac{1}{3}) = (0,0)$.

Si $s = \frac{1}{2}$, se cumple que $6s - 2 = 1$. Por tanto $G_0(p, \frac{1}{2}) = (0, 3t-2)$.

Caso 6. p como en vi).

Si $s = \frac{1}{3}$, entonces $t - 6s(1-t) = t - 2(1-t)$.

Solamente resta verificar lo que sucede cuando p satisface más de un inciso de la definición de $G_0(p,s)$. Note que dichos puntos p son los siguientes:

- $p = (0,0)$.
  En este caso p satisface i), ii) y iv). Para sustituir en la fórmula dada en i) usamos que p es de la forma $(0,t)$ con $t = 0$. Entonces $t(1-3s) - 3s = -3s$ y

$$G_0(p,s) = \begin{cases} (0,-3s)\,, & \text{si } s \in [0, \frac{1}{3}]; \\ (0,-1) & \text{si } s \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]; \\ (0, 12s-7)\,, & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]; \\ (0,1), & \text{si } s \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

  Para sustituir en la fórmula de ii) escribimos a p de la forma $(0,t)$ con $t = 0$. Entonces $t(1-3s)+3s(2t-1) = -3s$, $(2t-1)(3-6s)-(6s-2) = -1$, $(6s-4)+(1-4t)(6s-3) = 12s-7$ y $(1-4t)(3-3s) + (3s-2) = 1$. Por tanto, la definición de $G_0(p,s)$ dada en ii) coincide con la de i). Por último, para usar la fórmula dada en iv), escribimos a p

de la forma $(t,0)$ con $t=0$. Entonces $3(t-s)=-3s$, $(3t-1)(3-6s)-(6s-2)=-1$ y $(6s-4)+(1-6t)(6s-3)=12s-7$, así que la definición de $G_0(p,s)$ dada en iv) es la misma que la de i). Por tanto, $G_0(p,s)$ está bien definido para cada $s\in[0,1]$.

- $p=(0,\frac{1}{2})$.
  En este caso p satisface ii) y iii). Entonces ponemos $p=(0,t)$ con $t=\frac{1}{2}$. Note que para $s\in[0,\frac{1}{3}]$, las expresiones de $G_0(p,s)$ dadas en ii) y en iii) son iguales. Como $4t-3=-1$, para $s\in[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$, las definiciones de $G_0(p,s)$ dadas en ii) y iii) son la misma. Como $1-4t=-1$, si $s\in[\frac{1}{2},\frac{2}{3}]$, la expresión en ii) para $G_0(p,s)$ queda $(0,(6s-4)-(6s-3))=(0,-1)$; mientras que la expresión dada en iii) es $(0,4t-3)=(0,-1)$. Así que si $s\in[\frac{1}{2},\frac{2}{3}]$, $G_0(p,s)=(0,-1)$. Ahora tomemos $s\in[\frac{2}{3},1]$. Como $1-4t=-1$ y $4t-3=-1$, entonces $(1-4t)(3-3s)+(3s-2)$ coincide con $(4t-3)(3-3s)+(3s-2)$. Por lo tanto, $G_0(p,s)$ está bien definido para cualquier $s\in[0,1]$.

- $p=(\frac{1}{3},0)$.
  En este caso p satisface iv) y v). Escribimos $p=(t,0)$ con $t=\frac{1}{3}$. Entonces la definición en iv) queda
  $$G_0(p,s)=\begin{cases}(\frac{1}{3}-s), & \text{si } s\in[0,\frac{1}{3}];\\ (0,2-6s), & \text{si } s\in[\frac{1}{3},\frac{1}{2}];\\ (0,-1), & \text{si } s\in[\frac{1}{2},\frac{2}{3}];\\ (0,-1), & \text{si } s\in[\frac{2}{3},1];\end{cases}$$
  Como $t(1-3s)=\frac{1}{3}-s$, $(3t-2)(6s-2)=2-6s$ y $3t-2=-1$, tenemos que la definición de $G_0(p,s)$ dada en v) coincide con la dada en iv).

- $p=(\frac{2}{3},0)$.
  En este caso p satisface v) y vi). Se tiene que p es de la forma $(t,0)$ con $t=\frac{2}{3}$. Entonces $t(1-3s)=\frac{2}{3}-2s$ y $t-6s(1-t)=\frac{2}{3}-2s$. También $3t-2=0$ y $t-2(1-t)=0$. Por tanto, las definiciones de $G_0(p,s)$ dadas en v) y en vi) son iguales.

Como ya vimos todos lo casos posibles, concluimos que la afirmación queda demostrada.

■

Observación 2.9 *Dado $p\in T$ y $s\in[0,1]$, se satisface que*
i) $G_0(p,0)=p$;
ii) si $p\in yz$, entonces $G_0(p,s)\in yz$ y $G_0(p,1)=y$;
iii) si $p\in zx$ y $s\in[0,\frac{1}{2}]$, entonces $G_0(p,s)\in zx$ (ver casos 1, 4, 5 y 6 de la Afirmación 1);
iv) $G_0(y,s)=y$ y $G_0(x,s)=x$;

Por las afirmaciones 1 y 2, tenemos que la función $G_0:T\times[0,1]\to T$ está bien definida. Como G_0 fue definida en una cantidad finita de subconjuntos cerrados de $T\times[0,1]$ cuya unión es $T\times[0,1]$ y la restricción de G_0 a cada uno de ellos es continua, tenemos que G_0 es continua.

Ahora, para cada $n\in\mathbb{N}$, definimos $G_n:A_n\times[0,1]\to A_n$ por
$$G_n(p,s)=(R|_{A_n})^{-1}(G_0(R(p),s)),$$
para cualesquiera $p\in A_n$ y $s\in[0,1]$. Para cualesquiera $p\in A_n$ y $s\in[0,1]$, tenemos que $R(p)\in yz$ y por la Observación 2.9 *ii)*, $G_0(R(p),s)\in yz$. Como $R|_{A_n}:A_n\to yz$

es homeomorfismo, entonces G_n está bien definida. Como $R : W_2 \to T$, $G_0 : T \times [0,1]$ y $(R|_{A_n})^{-1} : yz \to A_n$ son continuas, tenemos que G_n es continua. Por la Observación 2.9 *i)*, para cada $p \in A_n$, tenemos que $G_0(R(p), 0) = R(p)$, así que $G_n(p, 0) = p$. Por la Observación 2.9 *ii)*, para cada $p \in A_n$, tenemos que $G_0(R(p), 1) = y$, así que $G_n(p, 1) = y$. Esto muestra que $G_n(A_n \times \{1\}) = \{y\}$. Por la Observación 2.9 *iv)*, para cada $s \in [0,1]$, tenemos que $G_n(y, s) = y$. Esto muestra que $G_n(\{y\} \times [0,1]) = \{y\}$.

También, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $G'_n : M_n \times [0,1] \to M_n$ por

$$G'_n(p,s) = \begin{cases} (R|_{C_n})^{-1}(G_0(R(p),s)), & \text{si } p \in C_n \text{ y } s \in [0,1]; \\ (R|_{D_n})^{-1}(G_0(R(p),s)), & \text{si } p \in D_n \text{ y } s \in [0,\frac{1}{2}]; \\ (R|_{C_n})^{-1}(G_0(R(p),s)), & \text{si } p \in D_n,\ t_1(R(p)) \leq \frac{1}{3} \text{ y } s \in [\frac{1}{2},1]; \\ (R|_{D_n})^{-1}(G_0(R(p),s)), & \text{si } p \in D_n,\ \frac{1}{3} \leq t_1(R(p)) \text{ y } s \in [\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

Afirmación 3. *Para cualesquiera $p \in M_n$ y $s \in [0,1]$, el punto $G'_n(p,s)$ está bien definido.*

Demostración. Considere los siguientes casos:

Caso 1. $p \in C_n$ y $s \in [0,1]$.

Tenemos que $R(p) \in yz$ y por la Observación 2.9 *ii)*, $G_0(R(p),s) \in yz = R|_{C_n}(C_n)$.

Caso 2. $p \in D_n$ y $s \in [0,\frac{1}{2}]$.

Tenemos que $R(p) \in zx$ y por la Observación 2.9 *iii)*, $G_0(R(p),s) \in zx = R|_{D_n}(D_n)$.

Caso 3. $p \in D_n$, $t_1(R(p)) \leq \frac{1}{3}$ y $s \in [\frac{1}{2},1]$.

En este caso $R(p) \in zx$. Si $R(p) \in vz$, entonces por la Observación 2.9 *ii)*, $G_0(R(p),s) \in yz = R|_{C_n}(C_n)$. Si $R(p) \in vx$, entonces por el Caso 4 de la Afirmación 1, $G_0(R(p),s) \in yz = R|_{C_n}(C_n)$.

Caso 4. $p \in D_n$, $\frac{1}{3} \leq t_1(R(p))$ y $s \in [\frac{1}{2},1]$.

Si $t_1(R(p)) \in [\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$, entonces $G_0(R(p),s) \in vz \subset zx = R|_{D_n}(D_n)$ (ver el Caso 5 de la Afirmación 1). Si $t_1(R(p)) \in [\frac{2}{3},1]$, entonces $G_0(R(p),s) \in vx \subset zx = R|_{D_n}(D_n)$ (ver el Caso 6 de la Afirmación 1).

Caso 5. $[p \in C_n$ y $s \in [0,1]]$ y $[p \in D_n$ y $s \in [0,\frac{1}{2}]]$.

En este caso $p = z_n$, $R(p) = z = (0,-1)$ y $s \in [0,\frac{1}{2}]$. Así que $R(p)$ satisface i) en la definición de G_0. Entonces, si $s \in [0,\frac{1}{3}]$, tenemos que $G_0(R(p),s) = (0, -1(1-3s) - 3s) = (0,-1)$; mientras que si $s \in [\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$, tenemos que $G_0(R(p),s) = (0,-1)$. En ambos casos $G_0(R(p),s) = (0,-1) = z$; así que

$$(R|_{C_n})^{-1}(G_0(R(p),s)) = z_n = (R|_{D_n})^{-1}(G_0(R(p),s)).$$

Caso 6. $[p \in C_n$ y $s \in [0,1]]$ y $[p \in D_n$, $\frac{1}{3} \leq t_1(R(p))$ y $s \in [\frac{1}{2},1]]$.

Este caso no es posibe, pues si $p \in C_n$, entonces $t_1(R(p)) = 0$.

Caso 7. $[p \in D_n$ y $s \in [0,\frac{1}{2}]]$ y $[p \in D_n$, $t_1(R(p)) \leq \frac{1}{3}$ y $s \in [\frac{1}{2},1]]$.

En este caso $R(p) \in zx$, $t_1(R(p)) \in [0,\frac{1}{3}]$ y $s = \frac{1}{2}$. Si $R(p) \in zv$, entonces $R(p)$ satisface i) en la definición de G_0, de donde $G_0(R(p),s) = G_0(R(p),\frac{1}{2}) = (0,-1)$. Si $R(p) \in vx$, entonces $R(p)$ satisface iv) en la definición de G_0, de donde $G_0(R(p),s) = G_0(R(p),\frac{1}{2}) = (0, (3t-1)(3-6(\frac{1}{2})) - (6(\frac{1}{2})-2)) = (0,-1)$. En ambos casos $G_0(R(p),s) = (0,-1) = z$; así que $(R|_{C_n})^{-1}(G_0(R(p),s)) = z_n = (R|_{D_n})^{-1}(G_0(R(p),s))$.

Caso 7. $[p \in D_n$, $t_1(R(p)) \leq \frac{1}{3}$ y $s \in [\frac{1}{2},1]]$ y $[p \in D_n$, $\frac{1}{3} \leq t_1(R(p))$ y $s \in [\frac{1}{2},1]]$.

En este caso $R(p) = (\frac{1}{3},0)$. Entonces $R(p)$ satisface iv) y v) en la definición de G_0. En la prueba de la Afirmación 2 ya vimos que para el punto $(\frac{1}{3},0)$ las definiciones de $G_0((\frac{1}{3},0),s)$

dadas en iv) y en v) coinciden, y que de hecho $G_0((\frac{1}{3},0),s)=(0,-1)$ para cada $s\in[\frac{1}{2},1]$. Por tanto $(R|_{C_n})^{-1}(G_0(R(p),s))=z_n=(R|_{D_n})^{-1}(G_0(R(p),s))$ para cada $s\in[\frac{1}{2},1]$.

Como ya cubrimos todos los casos, concluimos que el punto $G'_n(p,s)$ está bien definido. ■

Por las afirmaciones 3, tenemos que la función $G'_n : M_n\times[0,1]\to M_n$ está bien definida. Como G'_n fue definida en una cantidad finita de subconjuntos cerrados de $M_n\times[0,1]$ cuya unión es $M_n\times[0,1]$ y la restricción de G'_n a cada uno de ellos es continua (porque las funciones $R : W_2\to T$, $G_0 : T\times[0,1]$, $(R|_{C_n})^{-1} : yz\to C_n$ y $(R|_{D_n})^{-1} : zx\to D_n$ son continuas), tenemos que G'_n es continua. Por la Observación 2.9 *i)*, para cada $p\in M_n$, tenemos que $G_0(R(p),0)=R(p)$, así que $G'_n(p,0)=p$. Por la Observación 2.9 *iv)*, para cada $s\in[0,1]$, tenemos que $G'_n(x,s)=x$. Esto muestra que $G'_n(\{x\}\times[0,1])=\{x\}$.

Por último, definimos la función $G : W_2\times[0,1]\to W_2$ por

$$G(p,s)=\begin{cases} G_0(p,s), & \text{si } p\in T;\\ G_n(p,s), & \text{si } p\in A_n,\ \text{para alguna } n\in\mathbb{N};\\ G'_n(p,s), & \text{si } p\in M_n,\ \text{para alguna } n\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Sean $n,m\in\mathbb{N}$, con $n\neq m$. Tenemos que $T\cap A_n=\{y\}$, $A_n\cap A_m=\{y\}$, $T\cap M_n=\{x\}$, $M_n\cap M_m=\{x\}$. También tenemos que, para cada $s\in[0,1]$, $G_0(y,s)=y=G_n(y,s)=G_m(y,s)$ y $G_0(x,s)=x=G'_n(x,s)=G'_m(x,s)$. Esto demuestra que G está bien definida.

Recordemos que $W_3=T\cup(\bigcup\{M_n : n\in\mathbb{N}\})$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, tenemos que $G'_n(M_n\times\{1\})\subset M_n$ y $G_n(A_n\times\{1\})=\{y\}$. También tenemos que $G_0(T\times\{1\})\subset T$. Por tanto, $G(W_2\times\{1\})\subset W_3$.

Afirmación 4. *La función $G : W_2\times[0,1]\to W_2$ es continua.*

Demostración. Consideremos una sucesión $\{(p_k,s_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $W_2\times[0,1]$ que converge a un elemento (p_0,s_0) en $W_2\times[0,1]$. Tenemos dos casos:

Caso 1. $p_0\notin T$.

En este caso, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $p_0\in A_n\setminus\{y\}$ o $p_0\in M_n\setminus\{y\}$. Probaremos que $G(p_0,s_0)=\lim_{k\to\infty}G(p_k,s_k)$ para el caso en que $p_0\in A_n\setminus\{y\}$; la prueba para el caso en que $p_0\in M_n\setminus\{y\}$ es similar. Supongamos entonces que $p_0\in A_n\setminus\{y\}$. Entonces $G(p_0,s_0)=G_n(p_0,s_0)$. Como $A_n\setminus\{y\}$ es un abierto de W_2, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $p_k\in A_n\setminus\{y\}$ para todo $k\in\mathbb{N}$. Entonces $(p_k,s_k)\in(A_n\setminus\{y\})\times[0,1]$ y $G(p_k,s_k)=G_n(p_k,s_k)$ para todo $k\in\mathbb{N}$. Así que, como $G_n : A_n\times[0,1]\to A_n$ es continua,

$$G(p_0,s_0)=G_n(p_0,s_0)=\lim_{k\to\infty}G_n(p_k,s_k)=\lim_{k\to\infty}G(p_k,s_k).$$

Caso 2. $p_0\in T$.

En este caso $G(p_0,s_0)=G_0(p_0,s_0)=G_0(R(p_0),s_0)$.

Sea $\varepsilon>0$.

Por la definición de $R : W_2\to T$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $\rho(p,R(p))<\frac{\varepsilon}{2}$ para cada $p\in T\cup(\bigcup\{A_n\cup C_n\cup D_n : n\geq N\})$. Así, si $n\geq N$, $p\in yz$ y $q\in zx$, tenemos que $\rho(p,(R|_{A_n})^{-1}(p))<\frac{\varepsilon}{2}$, $\rho(p,(R|_{C_n})^{-1}(p))<\frac{\varepsilon}{2}$ y $\rho(q,(R|_{D_n})^{-1}(q))<\frac{\varepsilon}{2}$. Como $\lim_{k\to\infty}p_k=p_0$ y $p_0\in T$, existe $K_1\in\mathbb{N}$ tal que $p_k\in T\cup(\bigcup\{A_n\cup C_n\cup D_n : n\geq N\})$ para cada $k\geq K_1$. Por la continuidad de $R : W_2\to T$ y $G_0 : T\times[0,1]\to T$, tenemos que $\lim_{k\to\infty}G_0(R(p_k),s_k)=$

$G_0(R(p_0), s_0)$. Así que existe $K_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(G_0(R(p_k), s_k), G_0(R(p_0), s_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$ para cada $k \geq K_2$. Sea $k \geq$máx$\{K_1, K_2\}$. Por la definición de G, tenemos que $G(p_k, s_k) \in \{G_0(p_k, s_k), G_0(R(p_k), s_k)\}$ o existe $n_k \in \mathbb{N}$, $n_k \geq N$, tal que

$$\begin{array}{rcl} G(p_k, s_k) & \in & \{(R|_{A_{n_k}})^{-1}(G_0(R(p_k), s_k)), (R|_{C_{n_k}})^{-1}(G_0(R(p_k), s_k)), \\ & & (R|_{D_{n_k}})^{-1}(G_0(R(p_k), s_k))\}. \end{array}$$

Entonces, en cualquier caso, $\rho(G(p_k, s_k), G_0(R(p_k), s_k)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $G(p_0, s_0) = G_0(R(p_0), s_0)$, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \rho(G(p_k, s_k), G(p_0, s_0)) & \leq & \rho(G(p_k, s_k), G_0(R(p_k), s_k)) \\ & & +\rho(G_0(R(p_k), s_k), G_0(R(p_0), s_0)) \\ & < & \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{array}$$

Por tanto $G(p_0, s_0) = \lim_{k\to\infty} G(p_k, s_k)$.

Como ya cubrimos todos los casos, concluimos que $G : W_2 \times [0, 1] \to W_2$ es continua. ■

Hemos demostrado que $G : W_2 \times [0, 1] \to W_2$ es una función continua tal que $G(p, 0) = p$ para cada $p \in W_2$ y $G(W_2 \times \{1\}) \subset W_3$. Como W_3 es un subcontinuo contráctil de W_2, concluimos que W_2 es contráctil.

$C(W_2)$ no admite selecciones

Suponga que $s : C(W_2) \to W_2$ es una selección.

Mostraremos que $s(yz) = y = (0, 1)$. Suponga que $s(yz) = (0, t)$ con $t < 1$. Sea $\varepsilon = \frac{1}{2}(1-t)$. Por la continuidad uniforme de s, existe $\delta > 0$ tal que si $A, B \in C(W_2)$ y $\mathbf{H}(A, B) < \delta$ entonces $\rho(s(A), s(B)) < \varepsilon$. Como $\lim_{n\to\infty} A_n = yz$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{H}(A_N, yz) < \delta$. Sea

$$\mathcal{C} = \{zp : p \in A_N\} \cup \{z'_N p : p \in yz\}.$$

Como zz'_n pertenece a ambos uniendos, tenemos que $\mathcal{C}$ es un subcontinuo de $C(W_2)$ tal que $A_N = z'_N y$ y yz pertenecen a $\mathcal{C}$ y $\mathbf{H}(A, yz) < \delta$ para cada $A \in \mathcal{C}$. Entonces $s(\mathcal{C})$ es un subcontinuo de W_2 contenido en $B((0, t), \varepsilon)$ y que contiene a los puntos $s(A_N)$ y $(0, t)$. Notemos que $B((0, t), \varepsilon)$ es disconexa y que $R = B((0, t), \varepsilon) \cap A_N$ es una de sus componentes y esta componente no tiene a $(0, t)$. Como $s(A_N) \in A_N$, tenemos que $s(A_N) \in R$ y como $s(\mathcal{C})$ es un subconjunto conexo de $B((0, t), \varepsilon)$, tenemos que $s(\mathcal{C}) \subset R$. Pero $(0, t) \notin R$ y así llegamos a una contradicción. Por tanto, $s(yz) = y$. Con un argumento similar y usando la sucesión $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en lugar de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se prueba que $s(T) = x$.

Sea $\delta > 0$ tal que si $A, B \in C(W_2)$ y $\mathbf{H}(A, B) < \delta$ entonces $\rho(s(A), s(B)) < \frac{1}{8}$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{H}(A_N, yz)$, $\mathbf{H}(M_N, T) < \delta$ y $\rho(p, R(p)) < \delta$ para cada $p \in A_N \cup M_N$.

Recordemos que $P_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es la proyección en la segunda coordenada. Sean $L = \{p \in W_2 : |P_2(p)| \geq \frac{3}{4}\}$ y, para cada $t \in [0, 1]$, $p_t = (t, 0)$. Entonces $s(yz) = y \in L$ y $s(T) = x \notin L$. Sean $J = \{t \in [0, 1] : s(yz \cup vp_t) \in L\}$ y $t_0 = \sup J$. Como L es cerrado y s es continua, tenemos que $s(yz \cup vp_{t_0}) \in L$. Como $yz \cup vp_1 = T$ y $s(T) = x \notin L$, tenemos que $t_0 \in [0, 1)$. Como $L \cap (yz \cup vp_{t_0}) \subset yz$, tenemos que $s(yz \cup vp_{t_0}) \in yz$. Tenemos dos casos:

Caso 1. $P_2(s(yz \cup vp_{t_0})) \geq \frac{3}{4}$.

En este caso, $s(yz \cup vp_{t_0}) \in (0, \frac{3}{4})y$. Sea $q_0 = (R|_{D_N})^{-1}(p_{t_0})$. Por la elección de N, tenemos que

$$\mathbf{H}(yz \cup vp_{t_0}, y_N q_0) < \delta.$$

Entonces, por la elección de δ,

$$\rho(s(yz \cup vp_{t_0}), s(y_N q_0)) < \frac{1}{8}.$$

Por tanto,

$$\begin{array}{rcl} s(y_N q_0) & \in & B(s(yz \cup vp_{t_0}), \frac{1}{8}) \cap M_N \\ & \subset & N((0, \frac{3}{4})y, \frac{1}{8}) \cap M_N \\ & \subset & v_N y_N. \end{array}$$

Por otro lado, como $\mathbf{H}(M_N, T) < \delta$, tenemos que $\rho(s(M_N), s(T)) < \frac{1}{8}$. Entonces

$$s(M_N) \in B(x, \frac{1}{8}) \cap M_N \subset u_N x.$$

Sea $\mathcal{Q} = \{y_N p : p \in q_0 x\}$. Notemos que $\mathcal{Q}$ es un subcontinuo de $C(W_2)$ que tiene a $y_N q_0$ y a $y_N x = M_N$. Entonces $s(\mathcal{Q})$ es un subcontinuo de W_2 que tiene a $s(y_N q_0)$ y a $s(M_N)$. Como $s(y_N q_0) \in v_N y_N$ y $s(M_N) \in u_N x$, tenemos que $z_N \in s(\mathcal{Q})$. Entonces existe $q_1 \in q_0 x \setminus \{q_0, x\}$ tal que $s(y_N q_1) = z_N$. Como $R(q_0) = p_{t_0}$, tenemos que $R(q_1) \in p_{t_0} x \setminus \{p_{t_0}, x\}$. Entonces $R(q_1) = p_{t_1}$ para algún $t_1 \in (t_0, 1)$. Por la elección de N,

$$\mathbf{H}(y_N q_1, yz \cup vp_{t_1}) < \delta,$$

así que,

$$\rho(s(y_N q_1), s(yz \cup vp_{t_1})) < \frac{1}{8},$$

y como $s(y_N q_1) = z_N$, tenemos que $s(yz \cup vp_{t_1}) \in B(z_N, \frac{1}{8})$. Por tanto, $P_2(s(yz \cup vp_{t_1})) \leq -\frac{3}{4}$, $s(yz \cup vp_{t_1}) \in L$ y $t_1 \in J$, lo cual contradice la elección de t_0. Así, concluimos que este caso no es posible.

Caso 2. $P_2(s(yz \cup vp_{t_0}) \leq -\frac{3}{4}$.

En este caso, $s(yz \cup vp_{t_0}) \in (0, -\frac{3}{4})z$. Por la elección de N, tenemos que

$$\mathbf{H}(yz \cup vp_{t_0}, z'_N p_{t_0}) < \delta.$$

Entonces, por la elección de δ,

$$\rho(s(yz \cup vp_{t_0}), s(z'_N p_{t_0})) < \frac{1}{8}.$$

Por tanto,

$$\begin{array}{rcl} s(z'_N p_{t_0}) & \in & B(s(yz \cup vp_{t_0}), \frac{1}{8}) \cap z'_N p_{t_0} \\ & \subset & N((0, -\frac{3}{4})z, \frac{1}{8}) \cap z'_N p_{t_0} \\ & \subset & z'_N v'_N. \end{array}$$

Por otro lado, como $\mathbf{H}(z'_N x, T) < \delta$, tenemos que $\rho(s(z'_N x), s(T)) < \frac{1}{8}$. Entonces

$$s(z'_N x) \in B(x, \frac{1}{8}) \cap z'_N x \subset vx.$$

Sea $\mathcal{Q} = \{z'_N p : p \in p_{t_0} x\}$. Notemos que $\mathcal{Q}$ es un subcontinuo de $C(W_2)$ que tiene a $z'_N p_{t_0}$ y a $z'_N x$. Entonces $s(\mathcal{Q})$ es un subcontinuo de W_2 que tiene a $s(z'_N p_{t_0})$ y a $s(z'_N x)$. Como $s(z'_N p_{t_0}) \in z'_N v'_N$ y $s(z'_N x) \in vx$, tenemos que $y \in s(\mathcal{Q})$. Entonces existe $q_1 \in p_{t_0} x \setminus \{p_{t_0}, x\}$ tal que $s(z'_N q_1) = y$. Así que $q_1 = p_{t_1}$ para algún $t_1 \in (t_0, 1)$. Por la elección de N,

$$\mathbf{H}(z'_N p_{t_1}, yz \cup vp_{t_1}) < \delta,$$

así que,

$$\rho(s(z'_N p_{t_1}), s(yz \cup vp_{t_1})) < \frac{1}{8},$$

y como $s(z'_N p_{t_1}) = s(z'_N q_1) = y$, tenemos que $s(yz \cup vp_{t_1}) \in B(y, \frac{1}{8})$. Por tanto, $P_2(s(yz \cup vp_{t_1})) \geq \frac{3}{4}$, $s(yz \cup vp_{t_1}) \in L$ y $t_1 \in J$, lo cual contradice la elección de t_0. Así, concluimos que este caso no es posible.

Como ninguno de los dos casos es posible, concluimos que $C(W_2)$ no admite selecciones.

2.3. Promedios monótonos

Una función continua y suprayectiva entre continuos $f : X \to Y$ es *monotona* si $f^{-1}(y)$ es conexo para cada $y \in Y$. Una función continua y suprayectiva entre continuos $f : X \to Y$ es *abierta* si $f(U)$ es abierto para cada subconjunto abierto U de X. El *abanico armómico* es el cono sobre la sucesión armónica $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\}$. El *abanico de Cantor* es el cono sobre el conjunto de Cantor. En [21] se estudiaron promedios monótonos, confluentes y abiertos. En particular, fue demostrado que: cada dendrita admite un promedio monótono, el abanico armónico no admite promedios monótonos y el abanico de Cantor admite un promedio abierto. También fue preguntado si los únicos dendroides que admiten promedios monótonos son las dendritas [21, Question 2.3, p. 316]. En esta sección mostramos dos respuestas parciales a esta pregunta. En los teoremas 2.10 y 2.19 mostramos condiciones para un dendroide X que implican que X no admite promedios monótonos. Como corolario de estos teoremas, obtenemos que el abanico de Cantor no admite promedios monótonos.

Recordemos que dados subconjuntos H y K de X, definimos $\langle H, K\rangle_2 = \langle H, K\rangle \cap F_2(X) = \{A \in F_2(X) : A \subset H \cup K,\ A \cap H \neq \emptyset \text{ y } A \cap K \neq \emptyset\}$ y $\langle H\rangle_2 = \langle H\rangle \cap F_2(X) = \{A \in F_2(X) : A \subset H\}$.

Teorema 2.10 *Sea X un dendroide con métrica d. Suponga que existen una sucesión $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos finales de X y un punto $q \in X$ tales que*

1) $c = \text{ínf}\{d(e_n, q) : n \in \mathbb{N}\} > 0$;

2) $e_n q \cap e_m q = \{q\}$ para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, con $n \neq m$;

3) ningún conjunto de la forma $e_n q \setminus \{q\}$ tiene puntos de ramificación;

4) para cada $\varepsilon > 0$, existen $n, m \in \mathbb{N}$, con $n \neq m$, y un homeomorfismo $f : e_n q \to e_m q$ tal que $d(x, f(x)) < \varepsilon$ para cada $x \in e_n q$.

Entonces X no admite promedios monótonos.

Demostración. Supongamos, por el contrario, que X admite un promedio monótono $r : F_2(X) \to X$.

Tomemos $\delta > 0$ tal que $\delta < \frac{c}{2}$ y $\mathbf{H}(A, B) < \delta$ implica que $d(r(A), r(B)) < \frac{c}{3}$.

Por (4) en la hipótesis, existen $n, m \in \mathbb{N}$, con $n \neq m$, y un homeomorfismo $f : e_n q \to e_m q$ tal que $d(x, f(x)) < \frac{\delta}{2}$ para cada $x \in e_n q$. Como $d(e_n, q) \geq c > \delta$, $f(e_n) \neq q$, y consecuentemente $f(e_n) = e_m$ y $f(q) = q$. Entonces, $d(e_n, e_m) < \delta$. Definimos $p_0 = r(\{e_n, e_m\})$. Como $\mathbf{H}(\{e_n\}, \{e_n, e_m\}) < \delta$ y $\mathbf{H}(\{e_m\}, \{e_n, e_m\}) < \delta$, tenemos que $d(p_0, e_n) < \frac{c}{3}$ y $d(p_0, e_m) < \frac{c}{3}$. Si $d(q, p_0) < \frac{c}{3}$, entonces $d(q, e_n) \leq \frac{c}{3} + \frac{c}{3} < c$, lo cual contradice (1) en la hipótesis. Por tanto, $d(q, p_0) \geq \frac{c}{3}$.

Sea $\mathcal{C} = r^{-1}(p_0)$. Como r es monótono, $\mathcal{C}$ es un subcontinuo de $F_2(X)$ que contiene a $\{p_0\}$ y a $\{e_n, e_m\}$. Sea $\mathcal{D}$ la componente de $\mathcal{C} \cap \langle e_n q, e_m q \rangle$ que contiene a $\{e_n, e_m\}$.

Afirmación 1. $\mathcal{D} \cap \langle \{q\}, X \rangle_2 \neq \emptyset$.

Suponga por el contrario que $\mathcal{D} \cap \langle \{q\}, X \rangle_2 = \emptyset$. Como $\mathcal{D} \cap F_1(X) \subset \langle e_n q, e_m q \rangle_2 \cap F_1(X) = \{\{q\}\}$ y $p_0 \neq q$, tenemos que $\{p_0\} \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{D}$. Entonces, $\mathcal{D}$ está contenido propiamente en $\mathcal{C}$. Como $\langle \{q\}, X \rangle_2$ es cerrado en $F_2(X)$ y $\mathcal{D}$ no lo intersecta, usando un arco ordenado de $\mathcal{D}$ a $\mathcal{C}$, es posible construir un subcontinuo $\mathcal{E}$ de $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{D} \subsetneq \mathcal{E} \subsetneq \mathcal{C}$ y $\mathcal{E} \cap \langle \{q\}, X \rangle_2 = \emptyset$. Ya que $\mathcal{E} \cap \langle \{q\}, X \rangle_2 = \emptyset$, ningún elemento de $\mathcal{E}$ puede tener a q. Sea $E = \bigcup \mathcal{E}$. Por los lemas 2.1 y 2.2 de [11], E tiene a lo más dos componentes. Como $e_n q \cap e_m q = \{q\}$, todo subcontinuo de X que tiene a e_n y a e_m tiene a q. Ya que $q \notin E$ y $e_n, e_m \in E$, obtenemos que E tiene exactamente dos componentes E_1 y E_2. Podemos suponer que $e_n \in E_1$ y $e_m \in E_2$.

Probaremos que $E_1 \subset q e_n$ y la prueba de que $E_2 \subset q e_m$ es similar. Supongamos que $E_1 \not\subset q e_n$. Entonces, hay un punto $x \in E_1 \setminus q e_n$. Como E_1 es un subcontinuo de X, E_1 es arco conexo. Entonces, $x e_n \subset E_1$. Sea $y \in x e_n$ tal que $xy \cap q e_n = \{y\}$ (y es el primer punto del arco $x e_n$, yendo de x a e_n que pertenece al arco $q e_n$). Como $q \notin E_1$, tenemos que $y \neq q$. Como e_n es un punto final de X, tenemos que $y \neq e_n$. Entonces, y es un punto de ramificación de X, lo cual contradice (3) en la hipótesis. Por tanto, $E_1 \subset q e_n$, y similarmente puede ser probado que $E_2 \subset q e_m$. Como cada elemento de $\mathcal{E}$ intersecta a todas las componentes de E (esto es mostrado en la prueba del Lema 2.1 de [11]), obtenemos que $\mathcal{E} \subset \langle q e_n, q e_m \rangle_2$. De manera que $\mathcal{E} \subset \mathcal{C} \cap \langle q e_n, q e_m \rangle_2$, así que $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$, lo cual es absurdo. Esto finaliza la prueba de la Afirmación 1.

Sea $g = f^{-1}$ y defina las funciones $G_1 : \langle e_n q, e_m q \rangle_2 \to \langle e_n q \rangle_2$, $G_2, G_3 : \langle e_n q \rangle_2 \to \langle e_n q, e_m q \rangle_2$ y $G_4 : \langle e_n q \rangle_2 \to \langle e_m q \rangle_2$ de la siguiente manera.

$$G_1(\{x, y\}) = \{x, g(y)\}, \text{ si } x \in e_n q \text{ y } y \in e_m q;$$

$$G_2(\{a, b\}) = \begin{cases} \{f(a), b\}, & \text{si } qa \subset qb; \\ \{a, f(a)\}, & \text{si } a = b; \end{cases}$$

$$G_3(\{a, b\}) = \begin{cases} \{a, f(b)\}, & \text{si } qa \subset qb; \\ \{a, f(a)\}, & \text{si } a = b; \end{cases}$$

$$G_4(\{a, b\}) = \{f(a), f(b)\}.$$

Entonces G_i es continua para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Pongamos $\mathcal{D}_1 = G_1(\mathcal{D})$, $\mathcal{D}_i = G_i(\mathcal{D}_1)$ para cada $i \in \{2, 3, 4\}$ y $\mathcal{A} = \mathcal{D}_1 \cup ... \cup \mathcal{D}_4$. Entonces $\mathcal{D}_i$ es conexo para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Afirmación 2. $\mathcal{A}$ es un subcontinuo de $F_2(X)$ que contiene a $\{e_n\}$ y a $\{e_m\}$ y $\mathcal{A} \subset N(\mathcal{C}, \delta)$.

Por la Afirmación 1, existe $x_0 \in e_n e_m$ tal que $\{q, x_0\} \in \mathcal{D}$. Si $x_0 \in e_n q$, pongamos $p = x_0$. Como $g(q) = q$, $\{p, q\} \in \mathcal{D}_1$. Si $x_0 \in e_m q$, pongamos $p = g(x_0)$. Entonces, $\{q, p\} \in \mathcal{D}_1$. En ambos casos, obtenemos que $\{q, p\} \in \mathcal{D}_1$. Como $f(q) = q$, entonces $\{q, p\} \in \mathcal{D}_2$. Así, $\{q, p\} \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$. Usando que $\{e_n, e_m\} \in \mathcal{D}$, $g(e_m) = e_n$ y $f(e_n) = e_m$, es fácil ver que $\{e_n\} \in \mathcal{D}_1$, $\{e_n, e_m\} \in \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3$ y $\{e_m\} \in \mathcal{D}_4$. También tenemos que $\{q, f(p)\} \in \mathcal{D}_3 \cap \mathcal{D}_4$. Claramente, $\mathcal{A} \subset N(\mathcal{D}, \delta) \subset N(\mathcal{C}, \delta)$. Por tanto, la Afirmación 2 está probada.

De la Afirmación 2, se sigue que $r(\mathcal{A})$ es un subcontinuo de X que contiene a e_n y a e_m. Entonces, $q \in r(\mathcal{A})$. Por otro lado, como $\mathcal{A} \subset N(\mathcal{C}, \delta)$, la elección de δ implica que $r(\mathcal{A}) \subset B(p_0, \frac{c}{3}) \subset X \setminus \{q\}$. Hemos obtenido una contradicción. Por tanto X no admite promedios monótonos. ■

Corolario 2.11 *Si X es un abanico que contiene un abanico armónico Y tal que los puntos finales de Y son también puntos finales de X y el único punto de ramificación de X en Y es el vértice de Y, entonces X no admite promedios monótonos.*

Corolario 2.12 *El abanico de Cantor no admite promedios monótonos.*

Para probar el Teorema 2.19, necesitamos algunos resultados previos. Las definiciones de semi-peine y semi-escoba fueron introducidas en [18, Definition 11, p. 311]. Los lemas 2.16 y 2.17 son fáciles de probar, pero escribimos sus demostraciones por completez.

Definición 2.13 Un subcontinuo Y de un dendroide X es una *semi-escoba* si existen:
(1) un arco $A \subset Y$,
(2) dos puntos $p \neq q$ en A, y
(3) una sucesión de puntos $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $Y \setminus A$ tales que:
(3.1) $Y = A \cup cl_X(\bigcup\{p_n q : n \in \mathbb{N}\})$,
(3.2) $\lim_{n\to\infty} p_n = p$,
(3.3) $p_n q \cap p_m q = \{q\}$ si $m \neq n$, y
(3.4) $p_n q \cap A = \{q\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.14 Un subcontinuo Y de un dendroide X es un *semi-peine* si existen:
(1) un arco $A \subset Y$,
(2) dos puntos $p \neq q$ en A,
(3) una sucesión de puntos $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $Y \setminus A$
(4) una sucesión de puntos $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en A tales que:
(4.1) $Y = A \cup cl_X(\bigcup\{p_n q_n : n \in \mathbb{N}\})$,
(4.2) $\lim_{n\to\infty} p_n = p$, $\lim_{n\to\infty} q_n = q$,
(4.3) $p_n q_n \cap p_m q_m = \emptyset$ si $m \neq n$, y
(4.4) $p_n q_n \cap A = \{q_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.15 *[18, Theorem 13, p. 313] Sea X un dendroide. Entonces X es una dendrita si y sólo si X no contiene ni un semi-peine ni una semi-escoba.*

Lema 2.16 *Sea X un dendroide con métrica d y a, b, q tres puntos distintos en X tales que $q \in ab$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que si $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, ..., x_n \in X$ satisfacen que $x_1 = a$, $x_n = b$ y $d(x_i, x_{i+1}) < \eta$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, entonces $d(x_j, q) < \varepsilon$ para algún $j \in \{1, ..., n\}$.*

Demostración. Suponga que $d(a, q) \leq d(b, q)$ y sea $\varepsilon > 0$.

Si $d(a, q) < \varepsilon$, entonces cualquier $\eta > 0$ funciona. Suponga entonces que $0 < \varepsilon \leq d(a, q)$.

Sea $Z = X \setminus B(q, \varepsilon)$. Entonces Z es un espacio métrico compacto y, $\{a\}$ y $\{b\}$ son dos subconjuntos no vacíos cerrados de Z. Suponga que existe una componente C de Z tal que $a, b \in C$. Entonces C es un subcontinuo de X (es cerrado porque es componente del subconjunto cerrado Z de X) y por tanto C es arco conexo. Así, $ab \subset C \subset Z \subset X \setminus \{q\}$, lo cual contradice la hipótesis. Entonces ninguna componente de Z intersecta a ambos conjuntos $\{a\}$ y $\{b\}$. Por [27, Teorema 5.2, p. 72], existen dos cerrados ajenos H y K de Z tales que $a \in H$, $b \in K$ y $Z = H \cup K$. Como $H \cap K = \emptyset$, entonces $\text{dist}(H, K) > 0$ y podemos tomar $\eta > 0$ tal que $\eta <\text{dist}(H, K)$.

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, ..., x_n \in X$ tales que $x_1 = a$, $x_n = b$ y $d(x_i, x_{i+1}) < \eta$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$. Como $x_1 = a \in H$, podemos tomar $m = \text{máx}\{r \in \{1, 2, ..., n\} : x_r \in H\}$. Entonces, $m < n$. Si $x_{m+1} \notin B(q, \varepsilon)$, entonces $x_{m+1} \in Z = H \cup K$. Como $x_{m+1} \notin H$, obtenemos que $x_{m+1} \in K$. Entonces $\text{dist}(H, K) \leq d(x_m, x_{m+1}) < \eta$, lo cual es una contradicción. Por tanto $x_{m+1} \in B(q, \varepsilon)$ y esto finaliza la prueba del lema. ■

Lema 2.17 *Sean X un espacio métrico conexo con métrica d, $\varepsilon > 0$ y $p, q \in X$. Entonces existen $n \in \mathbb{N}$ y $x_0, x_1, ..., x_n \in X$ tales que $x_0 = p$, $x_n = q$ y $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ para cada $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$.*

Demostración. $\mathcal{U} = \{B(x, \frac{\varepsilon}{3}) : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X y cada elemento de $\mathcal{U}$ tiene diámetro menor que ε. Decimos que $\mathcal{C} = \{U_1, ..., U_n\}$ es una cadena débil de x a y si $\mathcal{C}$ es una cadena débil cuyos eslabones pertenecen a $\mathcal{U}$ (cadena débil significa que $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i < n$), $x \in U_1$ y $y \in U_n$.

Sea $W = \{x \in X : \text{existe una cadena débil de } p \text{ a } x\}$. Entonces W es un abierto de X que tiene a p. Considere $w \in \text{cl}_X(W)$. Entonces existen $x \in B(w, \frac{\varepsilon}{3}) \cap W$ y una cadena débil $\mathcal{C} = \{U_1, ..., U_n\}$ de p a x. Entonces $\{U_1, ..., U_n, B(w, \frac{\varepsilon}{3})\}$ es una cadena débil de p a w. En ambos casos, $w \in W$. Así que W es cerrado en X. La conexidad de X implica que $W = X$.

Ahora, tome una cadena débil $\mathcal{C} = \{U_1, ..., U_n\}$ de p a q (entonces los elementos de $\mathcal{C}$ pertenecen a $\mathcal{U}$). Para cada $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, elegimos $x_i \in U_i \cap U_{i+1}$ y pongamos $x_0 = p$, $x_n = q$. Entonces, para cada $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$, se tiene que $x_i, x_{i+1} \in U_{i+1}$, así que $d(x_i, x_{i+1}) \leq \text{diámetro}(U_{i+1}) < \varepsilon$. ■

Las siguientes definiciones y el Teorema 2.18 fueron tomados de [22]. Una función continua $f : [0, 1] \to [0, 1]$ es llamada una *PL función* (viene de "piecewise linear mapping") si existe una partición $P : 0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1$ de $[0, 1]$ tal que, para cada $i \in \{1, ..., n\}$ y para cada $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $f(t) = \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} f(t_i) + \frac{t_i - t}{t_i - t_{i-1}} f(t_{i-1})$. En este caso, decimos que *f es soportada por P*. Decimos que una PL función f es una *función salto* si $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$.

Teorema 2.18 *[22, Theorem 3.3, p. 51] Si f es una PL función tal que $f(0) = 0$ y g es una función salto, entonces existen una función salto α y una PL función β tales que $\beta(0) = 0$ y $f \circ \alpha = g \circ \beta$.*

Teorema 2.19 *Sea X un abanico que admite un promedio monótono. Si $\mathcal{L} = \{A \subset X : A$ es un arco$\} \cup F_1(X)$ es compacto, entonces X es una dendrita.*

Demostración. Suponga que X no es una dendrita. Por el Teorema 2.15, X contiene una semi-escoba o un semi-peine Y. Como X es un abanico, X no contiene un semi-peine, así que Y es una semi-escoba. Usamos la misma notación de la Definición 2.13. Como X es un abanico, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un único punto final e_n de X tal que $p_n \in qe_n$. Por la compacidad de $\mathcal{L}$, podemos suponer que $\lim_{n\to\infty} qe_n = ba$. Ya que ba es un arco, y $q, p \in ba$, podemos darle un orden natural y suponer que $b \leq q < p \leq a$.

Afirmación 1. $b = q$.

Suponga al contrario que $b \neq q$. Como $b \neq q$, $a \neq q$ y, por (3.3) en la Definición 2.13, $e_nq \cap e_mq = \{q\}$ si $m \neq n$, tenemos que no hay más de un conjunto de la forma e_kq que tiene a b y lo mismo pasa con a. De modo que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b \notin qe_n$ y $a \notin qe_n$. Como e_n es un punto final de X, tenemos $e_n \notin ba$. Como q es el único punto de ramificación de X, tenemos $e_nq \cap ba = \{q\}$. Entonces, $e_nq \cup ba$ es un triodo simple. Sin embargo, para cualesquiera $m \neq n$, $e_nq \cup qe_m$ es un arco y $\lim_{m\to\infty} e_nq \cup qe_m = e_nq \cup ba$, lo cual contradice la compacidad de $\mathcal{L}$. Por tanto, la prueba de la Afirmación 1 está terminada.

Sea d una métrica para X. Considere $X \times X$ con la métrica $\mathbf{D}$ dada por

$$\mathbf{D}((x, y), (w, z)) = \max\{d(x, w), d(y, z)\}.$$

Pongamos $\varepsilon = d(q, a)$. Sea $m : X \times X \to X$ un promedio monótono. Por la continuidad uniforme de m, existe $\delta_1 > 0$ tal que $\delta_1 < \frac{\varepsilon}{4}$ y $\mathbf{D}((x, y), (w, z)) < \delta_1$ implica que $d(m(x, y), m(w, z)) < \frac{\varepsilon}{4}$.

Como $\lim_{n\to\infty} qe_n = qa$, hay una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de X tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $a_n \in qe_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $q \neq a$, podemos suponer que $a_n \neq q$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Pongamos $E = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup aq$ y definimos $R : E \to aq$ como $R(a_n) = a$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $R(x) = x$ para cada $x \in aq$. Entonces, R es continua. Como E es cerrado en X y aq es un extensor absoluto, existe una extensión continua de R a todo X (vea [27, p. 301]), la cual también denotaremos por R. Entonces, $R : X \to aq$ es una retracción y $R(a_n) = a$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Afirmación 2. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ y $x \in qe_n$, entonces $d(x, R(x)) < \frac{\delta_1}{4}$.

Supongamos que la afirmación no es cierta. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $k(n) \geq n$ y $x_{k(n)} \in qe_{k(n)}$ tales que $d(x_{k(n)}, R(x_{k(n)})) \geq \frac{\delta_1}{4}$. Podemos suponer que $k(1) < k(2) < \ldots$ y que $\{x_{k(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $x \in qa$. Entonces $\lim_{n\to\infty} R(x_{k(n)}) = R(x) = x$. Así, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(R(x_{k(n)}), x) < \frac{\delta_1}{8}$ y $d(x_{k(n)}, x) < \frac{\delta_1}{8}$. Por tanto, $d(x_{k(n)}, R(x_{k(n)})) < \frac{\delta_1}{4}$, lo cual es una contradicción. Esto finaliza la prueba de la Afirmación 2.

Como $d(a_N, a) < \frac{\delta_1}{4}$ y $d(a_{N+1}, a) < \frac{\delta_1}{4}$, entonces $d(a_N, a_{N+1}) < \frac{\delta_1}{2}$ y

$$\varepsilon = d(q, a) \leq d(q, a_N) + d(a_N, a) < d(q, a_N) + \tfrac{\delta_1}{4} < d(q, a_N) + \tfrac{\varepsilon}{16}.$$

Entonces, $\frac{15\varepsilon}{16} < d(q, a_N)$. Sea $p_0 = m(a_N, a_{N+1})$. Como

$$\mathbf{D}((a_N, a_N), (a_N, a_{N+1})) < \delta_1,$$

tenemos $d(p_0, a_N) < \frac{\varepsilon}{4}$ y

$$\tfrac{15\varepsilon}{16} < d(q, a_N) \leq d(q, p_0) + d(p_0, a_N) < d(q, p_0) + \tfrac{\varepsilon}{4}.$$

Esto implica que $\frac{11\varepsilon}{16} < d(q, p_0)$.

Fijaremos algunos números positivos para su uso posterior. Por el Lema 2.16, existe $\eta > 0$ tal que si $n \in \mathbb{N}$ y $z_0, z_1, ..., z_n \in X$ satisfacen que $z_0 = a_N$, $z_n = a$ y $d(z_i, z_{i+1}) < \eta$ para cada $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$, entonces $d(z_j, q) < \frac{\varepsilon}{4}$ para algún $j \in \{0, 1, ..., n\}$. Por la continuidad uniforme de m y de R, existe $\delta_2 > 0$ tal que $\delta_2 < \delta_1$ y $\mathbf{D}((x, y), (w, z)) < \delta_2$ implica que $d(m(x, y), m(w, z)) < \eta$, y existe $\delta_3 > 0$ tal que $2\delta_3 < \delta_2$ y $d(x, y) < \delta_3$ implica que $d(R(x), R(y)) < \delta_2$. Sea $\gamma : aq \to [0, 1]$ un homeomorfismo que satisface que $\gamma(a) = 0$ y $\gamma(q) = 1$. Por la continuidad uniforme de γ^{-1} y de $\gamma \circ R$, existe $\delta_4 > 0$ tal que $|s - t| < \delta_4$ implica que $d(\gamma^{-1}(s), \gamma^{-1}(t)) < \delta_3$, y existe $\delta_5 > 0$ tal que $\delta_5 < \delta_3$ y $d(x, y) < \delta_5$ implica que $d((\gamma \circ R)(x), (\gamma \circ R)(y)) < \frac{\delta_4}{2}$.

Sea $\mathcal{C} = m^{-1}(p_0)$. Entonces $(p_0, p_0), (a_N, a_{N+1}), (a_{N+1}, a_N) \in \mathcal{C}$ y, como m es monótona, $\mathcal{C}$ es un subcontinuo de $X \times X$. Tomemos la componente $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C} \cap (qe_N \times qe_{N+1})$ que contiene a (a_N, a_{N+1}).

Afirmación 3. $\mathcal{D} \cap [(\{q\} \times X) \cup (X \times \{q\})] \neq \emptyset$.

Supongamos lo contrario. Como

$$\mathcal{D} \cap \{(x, x) \in X \times X : x \in X\} \subset (qe_N \times qe_{N+1}) \cap \{(x, x) \in X \times X : x \in X\} = \{(q, q)\}$$

y $p_0 \neq q$, tenemos que $(p_0, p_0) \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{D}$. Entonces, hay un subcontinuo $\mathcal{E}$ de $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{D} \subsetneq \mathcal{E} \subsetneq \mathcal{C}$ y $\mathcal{E} \cap [(\{q\} \times X) \cup (X \times \{q\})] = \emptyset$ (vea [20, Theorem 12.12, p. 102]).

Las respectivas proyecciones E_1 y E_2 en la primera y en la segunda coordenada de $\mathcal{E}$ son subcontinuos de X tales que $a_N \in E_1$ y $a_{N+1} \in E_2$. Probaremos que $E_1 \subset qe_N$ y la prueba de que $E_2 \subset qe_{N+1}$ es similar. Suponga, por el contrario, que hay un punto $x \in E_1 \setminus qe_N$. Como E_1 es arco conexo (porque es un subcontinuo de X), $xa_N \subset E_1$. Como e_N es un punto final de X, $a_N \in qe_N$ y q es el único punto de ramificación de X, tenemos $q \in xa_N \subset E_1$. Entonces, $\mathcal{E} \cap (\{q\} \times X) \neq \emptyset$, lo cual no es cierto. Esto prueba que $E_1 \subset qe_N$, y similarmente se puede probar que $E_2 \subset qe_{N+1}$. Entonces, $\mathcal{E} \subset qe_N \times qe_{N+1}$ y como $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$, tenemos que $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$, lo cual es una contradicción. Esto finaliza la prueba de la Afirmación 3.

Por la Afirmación 3, sin pérdida de generalidad existe $c \in qe_{N+1}$ tal que $(q, c) \in \mathcal{D}$. Por el Lema 2.17, existen $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n) \in \mathcal{D}$ tales que $(x_0, y_0) = (a_N, a_{N+1})$, $(x_n, y_n) = (q, c)$ y $\mathbf{D}((x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})) < \delta_5$ para cada $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$.

Para cada $i \in \{0, 1, ..., n\}$, definimos

$$f(\tfrac{i}{n}) = (\gamma \circ R)(y_i) \text{ y}$$

$$g(\tfrac{i}{n}) = (\gamma \circ R)(x_i).$$

Para cada $i \in \{1, ..., n\}$ y cada $t \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$, definimos

$$f(t) = (nt - i + 1)f(\tfrac{i}{n}) + (i - nt)f(\tfrac{i-1}{n}) \text{ y}$$

$$g(t) = (nt - i + 1)g(\tfrac{i}{n}) + (i - nt)g(\tfrac{i-1}{n}).$$

Notemos que $f, g : [0,1] \to [0,1]$ son PL funciones. Como $y_0 = a_{N+1}$, $R(a_{N+1}) = a$ y $\gamma(a) = 0$, obtenemos que

$$\begin{aligned} f(0) &= (\gamma \circ R)(y_0) \\ &= (\gamma \circ R)(a_{N+1}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $x_0 = a_N$, $R(a_N) = a$ y $\gamma(a) = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} g(0) &= (\gamma \circ R)(x_0) \\ &= (\gamma \circ R)(a_N) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $x_n = q$, $R(q) = q$ y $\gamma(q) = 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} g(1) &= (\gamma \circ R)(x_n) \\ &= (\gamma \circ R)(q) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Entonces f es una PL función tal que $f(0) = 0$ y g es una función salto. Por el Teorema 2.18, existen una función salto α y una PL función β tales que $\beta(0) = 0$ y

$$f \circ \alpha = g \circ \beta.$$

Sea $L = \{0, \frac{1}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\}$. Por la continuidad uniforme de α y de β, existe $\lambda > 0$ tal que $|s - t| < \lambda$ implica que $|\alpha(s) - \alpha(t)| < \frac{1}{n}$ y $|\beta(s) - \beta(t)| < \frac{1}{n}$. Tomemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < \lambda$. Para cada $i \in \{0, 1, ..., k\}$, definimos $t_i = \frac{i}{k}$,

$$r_i = \text{mín}\{r \in \{0, 1, ..., n\} : \left|\beta(t_i) - \tfrac{r}{n}\right| = d(\beta(t_i), L)\} \text{ y}$$

$$s_i = \text{mín}\{s \in \{0, 1, ..., n\} : \left|\alpha(t_i) - \tfrac{s}{n}\right| = d(\alpha(t_i), L)\}.$$

Como $\beta(0) = 0$, entonces $r_0 = 0$ y $x_{r_0} = x_0 = a_N$. Como $\alpha(0) = 0$, tenemos que $s_0 = 0$, y entonces $y_{s_0} = y_0 = a_{N+1}$ y $x_{s_0} = x_0 = a_N$. Como $\alpha(1) = 1$, entonces $s_k = n$ y se cumple que $y_{s_k} = y_n = c$ y $x_{s_k} = x_n = q$.

Consideremos los siguientes elementos de $X \times X$:

$$(x_{r_0}, x_{s_0}), (x_{r_1}, x_{s_1}), ..., (x_{r_k}, x_{s_k}),$$

$$(x_{r_k}, R(x_{s_k})), (x_{r_{k-1}}, R(x_{s_{k-1}})), ..., (x_{r_0}, R(x_{s_0})),$$

$$(x_0, R(y_0)), (x_1, R(y_1)), ..., (x_n, R(y_n)),$$

$$(R(x_n), R(y_n)), (R(x_{n-1}), R(y_{n-1})), ..., (R(x_0), R(y_0)).$$

Tenemos que

$$(x_{r_0}, x_{s_0}) = (a_N, a_N),$$

$$(x_{r_k}, x_{s_k}) = (x_{r_k}, q) = (x_{r_k}, R(x_{s_k})),$$

$$(x_{r_0}, R(x_{s_0})) = (a_N, a) = (x_0, R(y_0)),$$
$$(x_n, R(y_n)) = (q, R(c)) = (R(x_n), R(y_n)) \text{ y}$$
$$(R(x_0), R(y_0)) = (a, a).$$

Afirmación 4. Para cada $i \in \{0, 1, ..., k-1\}$, $|r_i - r_{i+1}| \leq 1$ y $|s_i - s_{i+1}| \leq 1$.

Tomemos $i \in \{0, 1, ..., k-1\}$. Probaremos que $|r_i - r_{i+1}| \leq 1$, y la prueba de que $|s_i - s_{i+1}| \leq 1$ es similar. Como $|t_i - t_{i+1}| < \lambda$, tenemos $|\beta(t_i) - \beta(t_{i+1})| < \frac{1}{n}$. Tenemos tres casos: $r_i = 0$, $r_i = n$ o $0 < r_i < n$. En el primer caso, $\beta(t_i) \in [0, \frac{1}{2n}]$ y $\beta(t_{i+1}) \in [0, \frac{1}{n} + \frac{1}{2n})$. Entonces, $r_{i+1} \in \{0, 1\}$. En el segundo caso, $\beta(t_i) \in (1 - \frac{1}{2n}, 1]$ y $\beta(t_{i+1}) \in (1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{n}, 1]$. Así que $r_{i+1} \in \{n-1, n\}$. Finalmente, si $0 < r_i < n$, entonces $\beta(t_i) \in (\frac{r_i}{n} - \frac{1}{2n}, \frac{r_i}{n} + \frac{1}{2n}]$, lo cual implica que $\beta(t_{i+1}) \in (\frac{r_i}{n} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{n}, \frac{r_i}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{n})$. Entonces $r_{i+1} \in \{r_i - 1, r_i, r_i + 1\}$. En todos los casos, tenemos que $|r_i - r_{i+1}| \leq 1$. Por tanto, la Afirmación 4 está probada.

Afirmación 5. Para cada $i \in \{0, 1, ..., k\}$, $d(x_{r_i}, y_{s_i}) < \delta_1$.

Para probar esta afirmación, tomemos $i \in \{0, 1, ..., k\}$. Por la definición de r_i, $\beta(t_i) \in [\frac{r_i}{n}, \frac{r_i+1}{n}]$ o $\beta(t_i) \in [\frac{r_i-1}{n}, \frac{r_i}{n}]$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\beta(t_i) \in [\frac{r_i}{n}, \frac{r_i+1}{n}]$. Como g es lineal en ese intervalo y $d(x_{r_i}, x_{r_i+1}) < \delta_5$, tenemos que

$$\begin{aligned} d(g(\beta(t_i)), g(\tfrac{r_i}{n})) &\leq d(g(\tfrac{r_i}{n}), g(\tfrac{r_i+1}{n})) \\ &= d((\gamma \circ R)(x_{r_i}), (\gamma \circ R)(x_{r_i+1})) \\ &< \tfrac{\delta_4}{2}. \end{aligned}$$

Similarmente, puede ser probado que $d(f(\alpha(t_i)), f(\frac{s_i}{n})) < \frac{\delta_4}{2}$. Como $(f \circ \alpha)(t_i) = (g \circ \beta)(t_i)$, tenemos que

$$\begin{aligned} d((\gamma \circ R)(x_{r_i}), (\gamma \circ R)(y_{s_i})) &= d(g(\tfrac{r_i}{n}), f(\tfrac{s_i}{n})) \\ &\leq d(g(\tfrac{r_i}{n}), g(\beta(t_i))) + d(f(\alpha(t_i)), f(\tfrac{s_i}{n})) \\ &< \tfrac{\delta_4}{2} + \tfrac{\delta_4}{2} = \delta_4. \end{aligned}$$

Por la elección de δ_4, esto implica que $d(R(x_{r_i}), R(y_{s_i})) < \delta_3$. Usando la desigualdad $\delta_3 < \frac{\delta_1}{2}$ y la Afirmación 2, obtenemos

$$\begin{aligned} d(x_{r_i}, y_{s_i}) &\leq d(x_{r_i}, R(x_{r_i})) + d(R(x_{r_i}), R(y_{s_i})) + d(R(y_{s_i}), y_{s_i}) \\ &< \tfrac{\delta_1}{4} + \tfrac{\delta_1}{2} + \tfrac{\delta_1}{4} = \delta_1. \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba de la Afirmación 5.

Para cada $i \in \{0, 1, ..., k\}$ y cada $j \in \{0, 1, ..., n\}$, definimos

$$z_i = m(x_{r_i}, x_{s_i}),$$
$$z_{k+i} = m(x_{r_{k-i}}, R(x_{s_{k-i}})),$$
$$z_{2k+j} = m(x_j, R(y_j)) \text{ y}$$
$$z_{2k+n+j} = m(R(x_{n-j}), R(y_{n-j})).$$

Afirmación 6. $z_0 = a_N$, $z_{2k+2n} = a$ y, para cada $i \in \{0, 1, 2, ..., 2k+2n-1\}$, $d(z_i, z_{i+1}) < \eta$.

Como $(x_{r_0}, y_{s_0}) = (a_N, a_N)$, tenemos $z_0 = m(a_N, a_N) = a_N$.

Como $(R(x_0), R(y_0)) = (R(a_N), R(a_{N+1})) = (a, a)$, obtenemos $z_{2k+2n} = m(a, a) = a$.

Para probar el resto de la afirmación, primero tomemos $i \in \{0, 1, ..., k-1\}$. Por la Afirmación 4, $|r_i - r_{i+1}| \leq 1$, $|s_i - s_{i+1}| \leq 1$, $|r_{k-i} - r_{k-i-1}| \leq 1$ y $|s_{k-i} - s_{k-i-1}| \leq 1$. Entonces,

$$d(x_{r_i}, x_{r_{i+1}}) < \delta_5,$$

$$d(x_{s_i}, x_{s_{i+1}}) < \delta_5,$$

$$d(x_{r_{k-i}}, x_{r_{k-i-1}}) < \delta_5 \text{ y}$$

$$d(x_{s_{k-i}}, x_{s_{k-i-1}}) < \delta_5.$$

Usando la desigualdad $\delta_5 < \delta_3 < \delta_2$ y la elección de δ_3, obtenemos que

$$\mathbf{D}((x_{r_i}, x_{s_i}), (x_{r_{i+1}}, x_{s_{i+1}})) < \delta_2 \text{ y}$$

$$\mathbf{D}((x_{r_{k-i}}, R(x_{s_{k-i}})), (x_{r_{k-i-1}}, R(x_{s_{k-i-1}}))) < \delta_2.$$

Por la elección de δ_2 y las definiciones de z_i, z_{i+1}, z_{k+i} y z_{k+i+1}, tenemos

$$d(z_i, z_{i+1}) = d(m(x_{r_i}, x_{s_i}), m(x_{r_{i+1}}, x_{s_{i+1}})) < \eta \text{ y}$$

$$d(z_{k+i}, z_{k+i+1}) = d(m(x_{r_{k-i}}, R(x_{s_{k-i}})), m(x_{r_{k-i-1}}, R(x_{s_{k-i-1}}))) < \eta.$$

Ahora tomemos $j \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Tenemos que

$$d(x_j, x_{j+1}) < \delta_5,$$

$$d(y_j, y_{j+1}) < \delta_5,$$

$$d(x_{n-j}, x_{n-j-1}) < \delta_5 \text{ y}$$

$$d(y_{n-j}, y_{n-j-1}) < \delta_5.$$

Usando la desigualdad $\delta_5 < \delta_3 < \delta_2$ y la elección de δ_3, obtenemos que

$$d(R(y_j), R(y_{j+1})) < \delta_2,$$

$$d(R(x_{n-j}), R(x_{n-j-1})) < \delta_2 \text{ y}$$

$$d(R(y_{n-j}), R(y_{n-j-1})) < \delta_2.$$

Entonces,

$$\mathbf{D}((x_j, R(y_j)), (x_{j+1}, R(y_{j+1}))) < \delta_2 \text{ y}$$

$$\mathbf{D}((R(x_{n-j}), R(y_{n-j})), (R(x_{n-j-1}), R(y_{n-j-1}))) < \delta_2.$$

Por la elección de δ_2 y las definiciones de z_{2k+j}, z_{2k+j+1}, z_{2k+n+j} y $z_{2k+n+j+1}$, tenemos

$$d(z_{2k+j}, z_{2k+j+1}) = d(m(x_j, R(y_j)), m(x_{j+1}, R(y_{j+1}))) < \eta \text{ y}$$

$$\begin{aligned} d(z_{2k+n+j}, z_{2k+n+j+1}) &= d(m(R(x_{n-j}), R(y_{n-j})), m(R(x_{n-j-1}), R(y_{n-j-1}))) \\ &< \eta. \end{aligned}$$

Esto finaliza la prueba de la Afirmación 6.

Afirmación 7. Para cada $i \in \{0, 1, ..., 2k + 2n\}$, $d(z_i, p_0) < \frac{\varepsilon}{4}$.
Tomemos $i \in \{0, 1, 2, ..., k\}$. Por la Afirmación 5, $d(x_{r_i}, y_{s_i}) < \delta_1$. Entonces

$$\mathbf{D}((x_{r_i}, x_{s_i}), (y_{s_i}, x_{s_i})) < \delta_1.$$

Como $(x_{s_i}, y_{s_i}) \in \mathcal{D} \subset m^{-1}(p_0)$ y $m(x_{s_i}, y_{s_i}) = m(y_{s_i}, x_{s_i})$, tenemos $p_0 = m(y_{s_i}, x_{s_i})$. Por la elección de δ_1 y la definición de z_i, tenemos

$$d(z_i, p_0) = d(m(x_{r_i}, x_{s_i}), m(y_{s_i}, x_{s_i})) < \tfrac{\varepsilon}{4}.$$

Por las afirmaciones 5 y 2, $d(x_{r_{k-i}}, y_{s_{k-i}}) < \delta_1$ y $d(R(x_{s_{k-i}}), x_{s_{k-i}}) < \delta_1$. Entonces

$$\mathbf{D}((x_{r_{k-i}}, R(x_{s_{k-i}})), (y_{s_{k-i}}, x_{s_{k-i}})) < \delta_1.$$

Como $(x_{s_{k-i}}, y_{s_{k-i}}) \in \mathcal{D} \subset m^{-1}(p_0)$ y $m(x_{s_{k-i}}, y_{s_{k-i}}) = m(y_{s_{k-i}}, x_{s_{k-i}})$, tenemos $p_0 = m(y_{s_{k-i}}, x_{s_{k-i}})$. Por la elección de δ_1 y la definición de z_{k+i}, tenemos

$$d(z_{k+i}, p_0) = d(m(x_{r_{k-i}}, R(x_{s_{k-i}})), m(y_{s_{k-i}}, x_{s_{k-i}})) < \tfrac{\varepsilon}{4}.$$

Ahora tomemos $i \in \{0, 1, ..., n\}$. Tenemos que $d(x_i, R(x_i)) < \delta_1$, $d(y_i, R(y_i)) < \delta_1$, $d(x_{n-i}, R(x_{n-i})) < \delta_1$ y $d(y_{n-i}, R(y_{n-i})) < \delta_1$. Entonces

$$\mathbf{D}((x_i, R(y_i)), (x_i, y_i)) < \delta_1 \text{ y}$$

$$\mathbf{D}((R(x_{n-i}), R(y_{n-i})), (x_{n-i}, y_{n-i})) < \delta_1.$$

Como $(x_i, y_i), (x_{n-i}, y_{n-i}) \in \mathcal{D} \subset m^{-1}(p_0)$, tenemos $m(x_i, y_i) = m(x_{n-i}, y_{n-i}) = p_0$. Por la elección de δ_1 y las definiciones de z_{2k+i}, z_{2k+n+i}, tenemos

$$d(z_{2k+i}, p_0) = d(m(x_i, R(y_i)), m(x_i, y_i)) < \tfrac{\varepsilon}{4} \text{ y}$$

$$d(z_{2k+n+i}, p_0) = d(m(R(x_{n-i}), R(y_{n-i})), m(x_{n-i}, y_{n-i})) < \tfrac{\varepsilon}{4}.$$

Esto finaliza la prueba de la Afirmación 7.

Recordemos que ya probamos que $\frac{11\varepsilon}{16} < d(q, p_0)$. Tomemos $i \in \{0, 1, ..., 2k + 2n\}$. Por la Afirmación 7,

$$\tfrac{11\varepsilon}{16} < d(q, p_0) \leq d(q, z_i) + d(z_i, p_0) < d(q, z_i) + \tfrac{\varepsilon}{4}.$$

Entonces

$$\tfrac{\varepsilon}{4} < (\tfrac{11}{16} - \tfrac{1}{4})\varepsilon < d(q, z_i).$$

Por otro lado, por la Afirmación 6 y la elección de η, existe $j \in \{0, 1, ..., 2k + 2n\}$ tal que $d(z_j, q) < \frac{\varepsilon}{4}$, lo cual es una contradicción. Como todo resultó de suponer que X no es una dendrita, concluimos que X es una dendrita. ∎

Finalizamos esta sección con la pregunta de A. Illanes y L. C. Simón acerca de promedios monótonos.

Problema 2.20 [21, Question 2.3, p. 316] Si X es un dendroide que admite un promedio monótono, ¿se sigue que X es una dendrita?

Por el Teorema 2.19, sería interesante resolver la Pregunta 2.20 cuando X es un abanico.

Capítulo 3

Producto de dos continuos encadenables que tienen la propiedad de Kelley

Este capítulo está dedicado principalmente a probar que:

a) el producto de dos continuos encadenables de Kelley tiene la propiedad fupcon (Teorema 3.5), y

b) el producto de dos continuos encadenables de Kelley también es un continuo de Kelley (Teorema 3.8).

Para probar estos resultados, usamos y adaptamos la técnica desarrollada por A. Illanes, J. M. Martínez-Montejano y K. Villarreal en el Teorema 5.4 de [19]. Esta técnica depende fuertemente del Teorema de los Alpinistas (el cual es la base para probar el Lema 3.4 abajo). Como la técnica para demostrar los dos teoremas es la misma, las pruebas son muy similares. Por esta razón, aprovechamos esta sección para presentar las definiciones y resultados previos que serán utilizados en ambas pruebas.

Un continuo X es un *continuo de Kelley* si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $A \in C(X)$, $p \in A$ y $q \in B(p, \delta)$, entonces existe $B \in C(X)$ tal que $q \in B$ y $\mathbf{H}_X(A, B) < \varepsilon$. Una *cadena* para un continuo X es una cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, ..., U_n\}$ de X tal que para cualesquiera $i, j \in \{1, ..., n\}$, $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$. Un continuo X es *encadenable* si para cada $\varepsilon > 0$, existe una cadena $\mathcal{U}$ para X tal que para cada $U \in \mathcal{U}$, diámetro$(U) < \varepsilon$. Una *cadena tensa* $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, ..., U_n\}$ para un continuo encadenable X es una cadena tal que $U_1 \setminus \bigcup\{\mathrm{cl}_X(U_i) : i \geq 2\} \neq \emptyset$, $U_n \setminus \bigcup\{\mathrm{cl}_X(U_i) : i \leq n-1\} \neq \emptyset$ y para cualesquiera $i, j \in \{1, ..., n\}$, $\mathrm{cl}_X(U_i) \cap \mathrm{cl}_X(U_j) \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$. Es sabido que si X es un continuo encadenable, entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe una cadena tensa $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, ..., U_n\}$ para X tal que diámetro$(U_i) < \varepsilon$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$ [27, Lemma 12.10, p. 235]. Dadas una función continua entre continuos $f : X \to Y$ y $\varepsilon > 0$, f es una *ε-función* si es suprayectiva y diámetro$(f^{-1}(y)) < \varepsilon$ para cada $y \in Y$. Un continuo X es *tipo arco* si para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε-función $f : X \to [0, 1]$. Es sabido que un continuo es encadenable si y sólo si es tipo arco [27, Theorem 12.11, p. 235].

Dado un continuo X, un *arco ordenado en* $C(X)$ es un arco α en $C(X)$ tal que si $A, B \in \alpha$ entonces $A \subset B$ o $B \subset A$ [20, Definition 14.1, p. 110]. Es sabido que si X es un continuo y $A, B \in C(X)$, con $A \subsetneq B$, entonces hay un arco ordenado en $C(X)$ de A a B [20, Theorem 14.6, p. 112].

Lema 3.1 *Si X es un continuo, $\varepsilon > 0$ y $\varphi : X \to [0,1]$ es una ε-función, entonces existe $\eta > 0$, $\eta < \varepsilon$, tal que para cada subintervalo J de $[0,1]$ con diámetro$(J) < \eta$, se tiene que diámetro$(\varphi^{-1}(J)) < \varepsilon$.*

Demostración. Por contradicción, supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un subintervalo J_n de $[0,1]$ con diámetro$(J_n) < \frac{1}{n}$ y diámetro$(\varphi^{-1}(J_n)) \geq \varepsilon$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, diámetro$(J_n) < \frac{1}{n}$ y diámetro$(\varphi^{-1}(J_n)) \geq \varepsilon$, así que podemos suponer que J_n es cerrado. Sin pérdida de generalidad supongamos que la sucesión $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un subcontinuo J de $[0,1]$. Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, diámetro$(J_n) < \frac{1}{n}$, entonces diámetro$(J) = 0$, así que existe $t \in [0,1]$ tal que $J = \{t\}$. Como $\varphi^{-1}(J_n)$ es compacto para cada $n \in \mathbb{N}$, elegimos $x_n, y_n \in \varphi^{-1}(J_n)$ tales que $d(x_n, y_n) \geq \varepsilon$. Podemos suponer que las sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a x y a y, respectivamente. Por la continuidad de φ,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \text{lím}_{n\to\infty} \varphi(x_n) \in \text{lím}_{n\to\infty} J_n = J, \text{ y} \\ \varphi(y) &= \text{lím}_{n\to\infty} \varphi(y_n) \in \text{lím}_{n\to\infty} J_n = J. \end{aligned}$$

Entonces, $x, y \in \varphi^{-1}(t)$. Ya que φ es una ε-función, $d(x,y) < \varepsilon$. Entonces $\varepsilon - d(x,y) > 0$ y existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_N, x) < \frac{\varepsilon - d(x,y)}{2}$ y $d(y_N, y) < \frac{\varepsilon - d(x,y)}{2}$. Esto implica que

$$\begin{aligned} \varepsilon \leq d(x_N, y_N) &\leq d(x_N, x) + d(x,y) + d(y, y_N) \\ &< \frac{\varepsilon - d(x,y)}{2} + d(x,y) + \frac{\varepsilon - d(x,y)}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Esta contradicción termina la prueba del lema. ■

Lema 3.2 *Sean X un continuo encadenable y $\varphi : X \to [0,1]$ una función continua y suprayectiva. Entonces para cada $\eta > 0$ existen $r \in \mathbb{N}$, una η-función $\psi : X \to [0,r]$ y una función continua lineal por pedazos $\mu : [0,r] \to [0,1]$ tales que $|(\mu \circ \psi)(x) - \varphi(x)| < \eta$ para cada $x \in X$.*

Demostración. Sea d una métrica para X. Sea $\theta > 0$ tal que si $x, y \in X$ y $d(x,y) < \theta$, entonces $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \frac{\eta}{2}$. Sea $\gamma > 0$ tal que $\gamma <$mín$\{\eta, \theta\}$. Tomemos una cadena tensa de subconjuntos abiertos $\mathcal{U} = \{U_1, ..., U_r\}$ de X tal que para cada $i \in \{1, ..., r\}$, diámetro$(U_i) < \frac{\gamma}{2}$ y $\mathcal{U}$ cubre a X.

Fijemos puntos $u_0 \in U_1 \setminus \bigcup\{\text{cl}_X(U_i) : i \geq 2\}$ y $u_r \in U_r \setminus \bigcup\{\text{cl}_X(U_i) : i \leq r-1\}$. Para cada $i \in \{1, ..., r\}$, tenemos que $\text{cl}_X(U_i)$ es normal (porque X es normal y cada subespacio cerrado de un espacio normal es normal). Por el Lema de Uryhson existen funciones continuas $\psi_1 :\text{cl}_X(U_1) \to [0,1]$ y $\psi_r :\text{cl}_X(U_r) \to [r-1, r]$ tales que $\psi_1(u_0) = 0$, $\psi_1(\text{cl}_X(U_1) \cap \text{cl}_X(U_2)) = 1$, $\psi_r(u_r) = r$ y $\psi_r(\text{cl}_X(U_{r-1}) \cap \text{cl}_X(U_r)) = r - 1$. Para cada $i \in \{2, ..., r-1\}$, de nuevo por el Lema de Uryhson, existe una función continua $\psi_i :\text{cl}_X(U_i) \to [i-1, i]$ tal que $\psi_i(\text{cl}_X(U_{i-1}) \cap \text{cl}_X(U_i)) = i - 1$ y $\psi_i(\text{cl}_X(U_i) \cap \text{cl}_X(U_{i+1})) = i$. Si $i, j \in \{1, ..., r\}$ son tales que $\mathrm{cl}_X(U_i) \cap \mathrm{cl}_X(U_j) \neq \emptyset$, entonces $|i-j| \leq 1$, y podemos suponer que $j = i+1$. Entonces $\psi_i(x) = i = \psi_{i+1}(x)$. Por tanto, la extensión común $\psi : X \to [0, r]$ de las funciones $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_r$ está bien definida y es continua. Además, como X es conexo, ψ es continua y $0, r \in \psi(X)$, tenemos que ψ es suprayectiva.

Sea $t \in [0, r]$. Si $t \in [0, 1]$, entonces $\psi^{-1}(t) \subset \mathrm{cl}_X(U_1) \cup \mathrm{cl}_X(U_2)$, así que diámetro$(\psi^{-1}(t)) < \gamma < \eta$. Si $t \in (i, i+1]$ para algún $i \in \{1, ..., r-1\}$, entonces $\psi^{-1}(t) \subset \mathrm{cl}_X(U_i) \cup \mathrm{cl}_X(U_{i+1})$, así que diámetro$(\psi^{-1}(t)) < \gamma < \eta$. Por tanto, ψ es una η-función.

Para cada $i \in \{1, ..., r-1\}$ fijemos un punto $u_i \in U_i \cap U_{i+1}$. Para cada $i \in \{1, ..., r\}$, consideremos la función lineal más simple μ definida en el intervalo $[i-1, i]$ que satisface $\mu(i-1) = \varphi(u_{i-1})$ y $\mu(i) = \varphi(u_i)$. Denotamos por $\mu : [0, r] \to [0, 1]$ a la extensión común de todas estas funciones.

Tomemos $x \in X$. Sea $i \in \{1, ..., r\}$ tal que $x \in U_i$. Entonces

$$\text{máx}\{d(u_i, u_{i-1}), d(x, u_i)\} < \text{diámetro}(U_i) < \theta.$$

Por la definición de ψ, $\psi(x) \in [i-1, i]$. Por la definición de μ, tenemos que

$$\varphi(u_{i-1}) = \mu(i-1) \leq \mu(\psi(x)) \leq \mu(i) = \varphi(u_i)$$

o

$$\varphi(u_i) = \mu(i) \leq \mu(\psi(x)) \leq \mu(i-1) = \varphi(u_{i-1}).$$

Por la elección de θ, $|\varphi(u_{i-1}) - \varphi(u_i)| < \frac{\eta}{2}$ y $|\varphi(x) - \varphi(u_i)| < \frac{\eta}{2}$. Entonces

$$\begin{gathered} |\mu(\psi(x)) - \varphi(x)| \leq \\ |\mu(\psi(x)) - \varphi(u_i)| + |\varphi(u_i) - \varphi(x)| \leq \\ |\varphi(u_{i-1}) - \varphi(u_i)| + |\varphi(u_i) - \varphi(x)| < \\ \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta. \end{gathered}$$

■

Lema 3.3 *Si J y L son subcontinuos de $\mathbb{R}$ y K es un subcontinuo de $J \times L$, entonces existe una función continua $f : [0,1] \to J \times L$ tal que: cada coordenada de f es lineal por pedazos,* $\mathrm{Im}\, f$ *está tan cerca como queramos de K y* $\mathrm{Im}\, f$ *contiene cualesquiera puntos previamente elegidos en K.*

Demostración. Supondremos que la métrica para $\mathbb{R}^2$ es la euclidiana y que para cada $x \in J \times L$ y cada $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon)$ denota a la bola con centro en x y radio ε intersectada con $J \times L$.

Sean $\varepsilon > 0$ y $p_1, p_2, ..., p_n \in K$.

Notemos que $\{B(x, \varepsilon) : x \in K\}$ es una colección de abiertos convexos de $J \times L$ que cubre a K. De la compacidad de K, existen $m \in \mathbb{N}$ y $x_1, x_2, .., x_m \in K$ tales que $K \subset \bigcup\{B(x_i, \varepsilon) : i \in \{1, ..., m\}\}$. Podemos suponer que $\{p_1, p_2, ..., p_n\} \subset \{x_1, ..., x_m\}$ y (por la conexidad de K) que para cada $i \in \{1, ..., m-1\}$, $B(x_i, \varepsilon) \cap B(x_{i+1}, \varepsilon) \neq \emptyset$.

Sea $i \in \{1, ..., m-1\}$. Elegimos $q_i \in B(x_i, \varepsilon) \cap B(x_{i+1}, \varepsilon)$. Sea $g_i : [0, 1] \to B(x_i, \varepsilon) \cup B(x_{i+1}, \varepsilon)$ dada por

$$g_i(t) = \begin{cases} (1-2t)x_i + 2tq_i, & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ (2-2t)q_i + (2t-1)x_{i+1}, & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Notemos que $g_i(0) = x_i$, $g_i(\frac{1}{2}) = q_i$, $g_i(1) = x_{i+1}$, $\operatorname{Im} g_i = \overline{x_i q_i} \cup \overline{q_i x_{i+1}} \subset B(x_i, \varepsilon) \cup B(x_{i+1}, \varepsilon)$, y que las funciones $\pi_1 \circ g_i$ y $\pi_2 \circ g_i$ son lineales por pedazos. Sea $\alpha_i : [\frac{i-1}{m-1}, \frac{i}{m-1}] \to [0,1]$ dada por $\alpha_i(t) = (m-1)t - (i-1)$. Notemos que α_i es una función lineal y que es un homeomorfismo tal que $\alpha_i(\frac{i-1}{m-1}) = 0$ y $\alpha_i(\frac{i}{m-1}) = 1$.

Definimos $f : [0,1] \to J \times L$ como $f(t) = g_i(\alpha_i(t))$, si $t \in [\frac{i-1}{m-1}, \frac{i}{m-1}]$.

Veamos que f está bien definida. Suponga que existen $i, j \in \{1, ..., m-1\}$ tales que $t \in [\frac{i-1}{m-1}, \frac{i}{m-1}] \cap [\frac{j-1}{m-1}, \frac{j}{m-1}]$. Entonces $j = i$, $j = i-1$ o $j = i+1$. Si $j = i-1$, entonces $t = \frac{i-1}{m-1}$, $\alpha_i(t) = 0$, $\alpha_j(t) = \alpha_{i-1}(t) = 1$, $g_i(\alpha_i(t)) = g_i(0) = x_i$ y $g_j(\alpha_j(t)) = g_{i-1}(1) = x_i$. Si $j = i+1$, entonces $t = \frac{i}{m-1}$, $\alpha_i(t) = 1$, $\alpha_j(t) = \alpha_{i+1}(t) = 0$, $g_i(\alpha_i(t)) = g_i(1) = x_{i+1}$ y $g_j(\alpha_j(t)) = g_{i+1}(0) = x_{i+1}$. Por lo tanto, f está bien definida.

Notemos que f es la extensión común de las funciones $g_1 \circ \alpha_1, g_2 \circ \alpha_2, ..., g_{m-1} \circ \alpha_{m-1}$, así que para cada $k \in \{1, 2\}$, $\pi_k \circ f$ es la extensión común de las funciones lineales por pedazos $\pi_k \circ g_1 \circ \alpha_1, \pi_k \circ g_2 \circ \alpha_2, ..., \pi_k \circ g_{m-1} \circ \alpha_{m-1}$. Por tanto, $\pi_1 \circ f$ y $\pi_2 \circ f$ son lineales por pedazos.

Como para cada $i \in \{1, ..., m-1\}$, $x_i, x_{i+1} \in \operatorname{Im} g_i$, tenemos que $\{x_1, ..., x_m\} \subset \operatorname{Im} f$. Dado que $\{p_1, ..., p_n\} \subset \{x_1, ..., x_m\}$, entonces $\operatorname{Im} f$ contiene a los puntos $p_1, ..., p_n$ elegidos en K desde el inicio.

Veamos que $\mathbf{H}(K, \operatorname{Im} f) < \varepsilon$. Como α_i es suprayectiva para cada $i \in \{1, ..., m-1\}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \bigcup \{\operatorname{Im} g_i : i \in \{1, ..., m-1\}\} \\ &= \bigcup \{\overline{x_i q_i} \cup \overline{q_i x_{i+1}} : i \in \{1, ..., m-1\}\} \\ &\subset N(\{x_1, ..., x_m\}, \varepsilon) \\ &\subset N(K, \varepsilon). \end{aligned}$$

Por otro lado, como $\{x_1, ..., x_m\} \subset \operatorname{Im} f$,

$$\begin{aligned} K &\subset N(\{x_1, ..., x_m\}, \varepsilon) \\ &\subset N(\operatorname{Im} f, \varepsilon). \end{aligned}$$

Esto demuestra que $\mathbf{H}(K, \operatorname{Im} f) < \varepsilon$. Con esto terminamos la prueba del lema. ■

En la prueba de los principales resultados de este capítulo usaremos el siguiente lema que aparece en [19]. No incluimos su prueba aquí porque es muy técnica y ya ha sido publicada, pero es importante mencionar que es un resultado esencial para nosotros y que se basa en el teorema de los Alpinistas (Mountain Climbing Theorem).

Lema 3.4 *[19, Lemma 5.3, p. 178] Suponga que* $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_{n-1} \leq ... \leq a_1 = b_1 \leq ... \leq b_{n-1} \leq b_n$, $c_n \leq c_{n-1} \leq ... \leq c_1 = e_1 \leq ... \leq e_{n-1} \leq e_n$, $f, g : [0, n] \to \mathbb{R}$ *son funciones continuas lineales por pedazos y para cada* $i \in \{1, ..., n\}$, $f(i) = b_i$, $g(i) = e_i$, $f([i-1, i]) = [a_i, b_i]$ *y* $g([i-1, i]) = [c_i, e_i]$ *(entonces* $f|_{[0,1]}$ *y* $g|_{[0,1]}$ *son constantes). Sea*

$$\lambda = \text{máx}(\{\text{máx}\{|a_i - c_i|, |b_i - e_i|\} : i \in \{1, ..., n\}\} \cup$$

$$\{\text{máx}\{a_{i-1} - a_i, b_i - b_{i-1}, c_{i-1} - c_i, e_i - e_{i-1}\} : i \in \{2, ..., n\}\}).$$

Entonces existen funciones continuas lineales por pedazos $\alpha, \beta : [0, n] \to [0, n]$ *tales que* $\alpha(0) = 0 = \beta(0)$, $\alpha(n) = n = \beta(n)$, *y para cada* $t \in [0, n]$,

$$|(f \circ \alpha)(t) - (g \circ \beta)(t)| \leq 2\lambda.$$

3.1. Propiedad fupcon

Dada una familia de continuos $\{X_\alpha : \alpha \in J\}$, el producto $X = \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ *tiene la propiedad fupcon* (del inglés, "full projections imply connected open neighborhoods") si para cada subcontinuo M de X tal que $\pi_\alpha(M) = X_\alpha$ para cada $\alpha \in J$ (π_α es la α-ésima proyección) y para cada subconjunto abierto U de X que contiene a M, existe un subconjunto abierto conexo V de X tal que $M \subset V \subset U$. Claramente, cada producto de continuos localmente conexos tiene la propiedad fupcon.

Por [14, Lemma 1, p. 75], el producto $X = \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ tiene la propiedad fupcon si y sólo si cada subcontinuo de X que se proyecta sobre cada X_α es un subconjunto amplio de X. Un subcontinuo M de un continuo X es *amplio* si para cada subconjunto abierto U de X que contiene a M, existe un subcontinuo L de X tal que $M \subset \mathrm{int}_X(L) \subset L \subset U$. Los subcontinuos amplios fueron introducidos en [31] para mejorar la comprensión de los continuos homogéneos y de los continuos de Kelley. Los autores de [31] probaron que si X es un continuo de Kelley, un subcontinuo M de X es amplio si y sólo si el hiperespacio $C(X)$ de subcontinuos de X es conexo en pequeño en M. Así que, si X es un producto con la propiedad fupcon, entonces es posible encontrar subcontinuos M de X en los cuales $C(X)$ es conexo en pequeño. Esto es algo notable, ya que en algunos de los ejemplos considerados (productos de seudoarcos, solenoides y continuos de Knaster) de productos con la propiedad fupcon, las propiedades de conexidad local son muy raras.

Algunos resultados acerca de la propiedad fupcon son:

A. cualquier producto de continuos de Knaster tiene la propiedad fupcon [3, Theorem 4.1 and Observation in p. 230],

B. cualquier producto de seudoarcos tiene la propiedad fupcon [3, Theorem 4.4 and Observation in p. 230],

C. el producto de un solenoide consigo mismo no tiene la propiedad fupcon [3, Corollary 4.3, p. 228],

D. el producto de un seudoarco con cualquier producto de continuos de Knaster tiene la propiedad fupcon [14, Corollary 9, p. 79],

E. existen continuos encadenables indescomponibles cuyo producto no tiene la propiedad fupcon [14, Example 11, p. 81],

F. si un producto de dos continuos tiene la propiedad fupcon, entonces cada factor es un continuo de Kelley [14, Theorem 10, p. 79],

G. hay una caracterización completa de los continuos encadenables X para los cuales la diagonal en $X \times X$ tiene vecindades conexas arbitrariamente pequeñas [16, Corollary 3.2, p. 515],

H. todo producto de continuos homogéneos que tienen la propiedad del punto fijo tiene la propiedad fupcon [19, Theorem 2.1, p. 174],

I. cualquier producto de un solenoide y cualquier continuo de Knaster tiene la propiedad fupcon [19, Corollary 3.2, p. 176],

J. existe un continuo de Kelley X tal que $X \times [0,1]$ no tiene la propiedad fupcon [19, Example 4.1, p. 176],

K. el producto de un continuo encadenable de Kelley y $[0,1]$ tiene la propiedad fupcon [19, Theorem 5.4, p. 179], y

L. si $m_1, m_2, ..., m_r$ es una sucesión finita de enteros mayores que 1 co-primos a pares y si, para cada $i \in \{1, ..., r\}$, Σ_{m_i} es el solenoide m_i-ádico, entonces $\Sigma_{m_1} \times \cdots \times \Sigma_{m_r}$ tiene la propiedad fupcon [4].

Esta sección está dedicada a probar que el producto de dos continuos encadenables de Kelley tiene la propiedad fupcon, lo cual extiende el resultado K. Nuestro resultado también cubre otros resultados conocidos, a saber: el producto de dos seudoarcos, el producto de dos continuos de Knaster, el producto de un seudoarco y un continuo de Knaster y el producto de un seudoarco o continuo de Knaster con $[0,1]$. Para probar este resultado, usamos y adaptamos la técnica desarrollada por A. Illanes, J. M. Martínez-Montejano y K. Villarreal en el Teorema 5.4 de [19]. Esta técnica depende fuertemente del Teorema de los Alpinistas (el cual fue la base para probar el Lema 3.4). Un uso similar de esta técnica sirve para probar el Teorema 3.8 en la siguiente sección (vea [29]).

Las demostraciones de los teoremas 3.5 y 3.8 son bastante largas y técnicas, en ambas tenemos que definir y considerar muchos objetos matemáticos tales como: funciones, números reales, puntos fijos de un espacio, intervalos de números reales, etcétera. Para facilitar la lectura de estas pruebas, haremos uso de cajas del siguiente estilo $\boxed{}$. Con ellas resaltaremos cada objeto matemático que hayamos definido en el párrafo previo, para futuras referencias durante la prueba.

Teorema 3.5 *Si X y Y son continuos encadenables de Kelley, entonces $X \times Y$ tiene la propiedad fupcon.*

Demostración. Sean d y ρ métricas para X y Y, respectivamente. Suponemos que la métrica $\mathbf{D}$ para $X \times Y$ está dada por

$$\mathbf{D}((x,y),(p,q)) = \text{máx}\{d(x,p), \rho(y,q)\}$$

para cualesquiera $(x,y),(p,q) \in X \times Y$.

Sea M un subcontinuo de $X \times Y$ tal que $\pi_X(M) = X$ y $\pi_Y(M) = Y$.

Sea U un subconjunto abierto de $X \times Y$ tal que $M \subset U$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que

$$N(M, 3\varepsilon) \subset U.$$

Por [14, Lemma 1, p. 75], solamente necesitamos mostrar que hay un subcontinuo R de $X \times Y$ tal que $M \subset \text{int}_{X\times Y}(R) \subset R \subset N(M,3\varepsilon).\varepsilon$.

$\boxed{R}$

Pongamos

$$Z = \text{cl}_{X\times Y}(N(M, 2\varepsilon)).$$

$\boxed{Z}$

Sea R la componente de Z que contiene a M.

En el caso en que $M \subset \text{int}_{X\times Y}(R)$ hemos terminado.

Supongamos que esto no se cumple.

Haremos una serie de construcciones y probaremos un buen número de afirmaciones para obtener una contradicción.

Podemos elegir un punto

$$(p_0, q_0) \in M \setminus \text{int}_{X\times Y}(R).$$

$\boxed{(p_0, q_0)}$

Como X y Y son continuos encadenables, por [27, Theorem 12.11, p. 235], existen $\frac{\varepsilon}{2}$-funciones $\varphi_X : X \to [0,1]$ y $\varphi_Y : Y \to [0,1]$.

$\boxed{\varphi_X,\, \varphi_Y}$

Por el Lema 3.1, existe $\eta > 0$ tal que $\eta < \varepsilon$ y para cada subintervalo J de $[0,1]$ con diámetro$(J) < \eta$, tenemos que

$$\text{diámetro}(\varphi_X^{-1}(J)) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y diámetro}(\varphi_Y^{-1}(J)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\boxed{\eta}$

Por la continuidad uniforme de φ_X y φ_Y, existe $\zeta > 0$ tal que:

$$\text{si } x, y \in X \text{ y } d(x,y) < \zeta, \text{ entonces } |\varphi_X(x) - \varphi_X(y)| < \frac{\eta}{48}$$

y

$$\text{si } x, y \in Y \text{ y } \rho(x,y) < \zeta, \text{ entonces } |\varphi_Y(x) - \varphi_Y(y)| < \frac{\eta}{48}.$$

$\boxed{\zeta}$

Como X y Y son continuos de Kelley, existe $\delta > 0$ tal que $\delta <$mín$\{\frac{\varepsilon}{2}, \zeta\}$ y

i) si $A \in C(X)$, $p \in A$ y $q \in B(p, \delta)$, entonces existe $B \in C(X)$ tal que $q \in B$ y $\mathbf{H}_X(A, B) < \zeta$;

ii) si $A \in C(Y)$, $p \in A$ y $q \in B(p, \delta)$, entonces existe $B \in C(Y)$ tal que $q \in B$ y $\mathbf{H}_Y(A, B) < \zeta$.

$\boxed{\delta}$

Como $(p_0, q_0) \in M \setminus \text{int}_{X \times Y}(R)$, podemos tomar un punto

$$(x_0, y_0) \in B((p_0, q_0), \delta) \setminus R.$$

$\boxed{(x_0, y_0)}$

Sea T la componente de Z que contiene a (x_0, y_0).

$\boxed{T}$

Como $R \neq T$, por el Teorema del Cable Cortado [20, Theorem 12.9, p. 101], hay dos subconjuntos compactos ajenos R_0 y T_0 de Z tales que $Z = R_0 \cup T_0$, $R \subset R_0$ y $T \subset T_0$.

$\boxed{R_0,\, T_0}$

Por [20, Theorem 14.6, p. 112], existe un arco ordenado de $\{(p_0, q_0)\}$ a M. Entonces, existe una función continua inyectiva $\sigma : [0,1] \to C(M)$ tal que $\sigma(0) = \{(p_0, q_0)\}$, $\sigma(1) = M$ y: si $0 \leq s \leq t \leq 1$, entonces $\sigma(s) \subset \sigma(t)$.

$\boxed{\sigma}$

Por la continuidad uniforme de σ, hay un $n \in \mathbb{N}$ tal que si $s, t \in [0,1]$ y $|s - t| \leq \frac{1}{n}$, entonces $\mathbf{H}_{X \times Y}(\sigma(s), \sigma(t)) < \zeta$.

$\boxed{n}$

Para cada $j \in \{0, 1, ..., n\}$, sean $t_j = \frac{j}{n}$, $A_j = \pi_X(\sigma(t_j))$ y $C_j = \pi_Y(\sigma(t_j))$. Notemos que $\{p_0\} = A_0$, $\{q_0\} = C_0$ y para cada $j \in \{1, ..., n\}$,

$$\mathbf{H}_{X \times Y}(\sigma(t_{j-1}), \sigma(t_j)) < \zeta.$$

Esto implica que $\mathbf{H}_X(A_{j-1}, A_j) < \zeta$ y $\mathbf{H}_Y(C_{j-1}, C_j) < \zeta$.

$\boxed{t_0,\, t_1,\dots,\, t_n}$ $\boxed{A_0,\, A_1,\dots,\, A_n}$ $\boxed{C_0,\, C_1,\dots,\, C_n}$

Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, por la elección de δ y (x_0, y_0), existen subcontinuos K_j y L_j de X y Y, respectivamente, tales que $x_0 \in K_j$, $\mathbf{H}_X(K_j, A_j) < \zeta$, $y_0 \in L_j$ y $\mathbf{H}_Y(L_j, C_j) < \zeta$.

$\boxed{K_1,\, K_2,\dots,\, K_n}$ $\boxed{L_1,\, L_2,\dots,\, L_n}$

Sean $K_0 = \{x_0\} = B_0$, $L_0 = \{y_0\} = D_0$ y para cada $j \geq 1$, $B_j = K_0 \cup K_1 \cup \dots \cup K_j$ y $D_j = L_0 \cup L_1 \cup \dots \cup L_j$. Entonces $\mathbf{H}_X(A_0, B_0) = d(p_0, x_0) < \zeta$, $\mathbf{H}_Y(C_0, D_0) = \rho(q_0, y_0) < \zeta$ y para cada $j \geq 1$, B_j y D_j son subcontinuos de X y de Y, respectivamente, tales que $\mathbf{H}_X(A_j, B_j) < \zeta$ y $\mathbf{H}_Y(C_j, D_j) < \zeta$.

$\boxed{K_0}$ $\boxed{L_0}$ $\boxed{B_0,\, B_1,\dots,\, B_n}$ $\boxed{D_0,\, D_1,\dots,\, D_n}$

Sea $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. Como $\mathbf{H}_X(A_j, B_j) < \zeta$ y $\mathbf{H}_Y(C_j, D_j) < \zeta$, la elección de ζ implica que

$$\mathbf{H}_{[0,1]}(\varphi_X(A_j), \varphi_X(B_j)) < \frac{\eta}{48} < \frac{\eta}{16}$$

y

$$\mathbf{H}_{[0,1]}(\varphi_Y(C_j), \varphi_Y(D_j)) < \frac{\eta}{48} < \frac{\eta}{16}.$$

Sea $j \in \{1, \dots, n\}$. Como $\mathbf{H}_X(A_{j-1}, A_j) < \zeta$ y $\mathbf{H}_Y(C_{j-1}, C_j) < \zeta$, la elección de ζ implica que

$$\mathbf{H}_{[0,1]}(\varphi_X(A_{j-1}), \varphi_X(A_j)) < \frac{\eta}{48} < \frac{\eta}{16}$$

y

$$H_{[0,1]}(\varphi_Y(C_{j-1}), \varphi_Y(C_j)) < \frac{\eta}{48} < \frac{\eta}{16}.$$

Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{gathered}
\mathbf{H}_{[0,1]}(\varphi_X(B_{j-1}), \varphi_X(B_j)) \leq \\
\mathbf{H}_{[0,1]}(\varphi_X(B_{j-1}), \varphi_X(A_{j-1})) + \\
\mathbf{H}_{[0,1]}(\varphi_X(A_{j-1}), \varphi_X(A_j)) + \\
\mathbf{H}_{[0,1]}(\varphi_X(A_j), \varphi_X(B_j)) < \\
\frac{\eta}{48} + \frac{\eta}{48} + \frac{\eta}{48} = \frac{\eta}{16}.
\end{gathered}$$

Similarmente,

$$\mathbf{H}_{[0,1]}(\varphi_Y(D_{j-1}), \varphi_Y(D_j)) < \frac{\eta}{16}.$$

Sea $\theta > 0$ tal que $\theta <$mín$\{D(u, v) : u \in R_0 \text{ y } v \in T_0\}$ y $\theta <$mín$\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\eta}{16}\}$. Como $\mathrm{cl}_{X \times Y}(N(M, 2\varepsilon)) = Z = R_0 \cup T_0$ y $M \subset R_0$, tenemos $N(M, \theta) \subset R_0$.

$\boxed{\theta}$

Afirmación 1. Existen $r_X, r_Y \in \mathbb{N}$, dos θ-funciones $\psi_X : X \to [0, r_X]$, $\psi_Y : Y \to [0, r_Y]$, $\omega > 0$ ($\omega < \theta$) y dos funciones continuas lineales por pedazos $\mu_X : [0, r_X] \to [0, 1]$ y $\mu_Y : [0, r_Y] \to [0, 1]$ que satisfacen:

(1) si $x, u \in X$ y $|\psi_X(x) - \psi_X(u)| < \omega$, entonces $d(x, u) < \theta$;

(2) si $v, y \in Y$ y $|\psi_Y(v) - \psi_Y(y)| < \omega$, entonces $\rho(v, y) < \theta$;

(3) para cada $x \in X$, $|(\mu_X \circ \psi_X)(x) - \varphi_X(x)| < \theta < \frac{\eta}{16}$;

(4) para cada $y \in Y$, $|(\mu_Y \circ \psi_Y)(y) - \varphi_Y(y)| < \theta < \frac{\eta}{16}$;
(5) para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $\mathbf{H}_{[0,1]}(\mu_X(\psi_X(A_{i-1})), \mu_X(\psi_X(A_i))) < \frac{\eta}{4}$ y $\mathbf{H}_{[0,1]}(\mu_Y(\psi_Y(C_{i-1})), \mu_Y(\psi_Y(C_i))) < \frac{\eta}{4}$;
(6) para cada $i \in \{0, 1, ..., n\}$, $\mathbf{H}_{[0,1]}(\mu_X(\psi_X(A_i)), \mu_X(\psi_X(B_i))) < \frac{\eta}{4}$ y $\mathbf{H}_{[0,1]}(\mu_Y(\psi_Y(C_i)), \mu_Y(\psi_Y(D_i))) < \frac{\eta}{4}$;
(7) para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $\mathbf{H}_{[0,1]}(\mu_X(\psi_X(B_{i-1})), \mu_X(\psi_X(B_i))) < \frac{\eta}{4}$ y $\mathbf{H}_{[0,1]}(\mu_Y(\psi_Y(D_{i-1})), \mu_Y(\psi_Y(D_i))) < \frac{\eta}{4}$.
$\boxed{r_X}$ $\boxed{r_Y}$ $\boxed{\psi_X}$ $\boxed{\psi_Y}$ $\boxed{\omega}$ $\boxed{\mu_X}$ $\boxed{\mu_Y}$

Para probar la Afirmación 1, aplicamos el Lema 3.2. Primero lo aplicamos usando el continuo X, la función φ_X y el número θ. Así, obtenemos $r_X \in \mathbb{N}$, una θ-función $\psi_X : X \to [0, r_X]$ y una función continua lineal por pedazos $\mu_X : [0, r_X] \to [0, 1]$ que satisfacen (3). Ahora, aplicamos el Lema 3.2 usando el continuo Y, la función φ_Y y el número θ. De esta manera, obtenemos $r_Y \in \mathbb{N}$, una θ-función $\psi_Y : Y \to [0, r_Y]$ y una función lineal por pedazos $\mu_Y : [0, r_Y] \to [0, 1]$ que satisfacen (4). Como ψ_X es una θ-función, por el Lema 3.1, existe $\omega_X > 0$, con $\omega_X < \theta$, tal que si $x, u \in X$ y $|\psi_X(x) - \psi_X(u)| < \omega_X$, entonces $d(x, u) < \theta$. Como ψ_Y es una θ-función, por el Lema 3.1, existe $\omega_Y > 0$, con $\omega_Y < \theta$, tal que si $v, y \in Y$ y $|\psi_Y(v) - \psi_Y(y)| < \omega_Y$, entonces $\rho(v, y) < \theta$. Pongamos $\omega = \text{mín}\{\omega_X, \omega_Y\}$. Entonces $\omega < \theta$ y las funciones ψ_X y ψ_Y son θ-funciones que satisfacen (1), (2), (3) y (4).

Para probar (5), tomemos $i \in \{1, ..., n\}$. Por (3), tenemos que

$$\mathbf{H}_{[0,1]}(\mu_X(\psi_X(A_{i-1})), \mu_X(\psi_X(A_i))) \leq$$

$$\mathbf{H}_{[0,1]}(\mu_X(\psi_X(A_{i-1})), \varphi_X(A_{i-1}))+$$
$$\mathbf{H}_{[0,1]}(\varphi_X(A_{i-1}), \varphi_X(A_i))+$$
$$\mathbf{H}_{[0,1]}(\varphi_X(A_i), \mu_X(\psi_X(A_i))) <$$
$$\frac{\eta}{16} + \frac{\eta}{16} + \frac{\eta}{16} < \frac{\eta}{4}.$$

Similarmente, por (4),

$$\mathbf{H}_{[0,1]}(\mu_Y(\psi_Y(C_{i-1})), \mu_Y(\psi_Y(C_i))) < \frac{\eta}{4}.$$

Para probar (6), tomemos $i \in \{0, 1, ..., n\}$. Por (3), tenemos que

$$\mathbf{H}_{[0,1]}(\mu_X(\psi_X(A_i)), \mu_X(\psi_X(B_i))) \leq$$

$$\mathbf{H}_{[0,1]}(\mu_X(\psi_X(A_i)), \varphi_X(A_i))+$$
$$\mathbf{H}_{[0,1]}(\varphi_X(A_i), \varphi_X(B_i))+$$
$$\mathbf{H}_{[0,1]}(\varphi_X(B_i), \mu_X(\psi_X(B_i))) <$$
$$\frac{\eta}{16} + \frac{\eta}{16} + \frac{\eta}{16} < \frac{\eta}{4}.$$

Similarmente, por (4),

$$\mathbf{H}_{[0,1]}(\mu_Y(\psi_Y(C_i)), \mu_Y(\psi_Y(D_i))) < \frac{\eta}{4}.$$

Para probar (7), tomemos $i \in \{1, ..., n\}$. Por (3), tenemos que

$$\mathbf{H}_{[0,1]}(\mu_X(\psi_X(B_{i-1})), \mu_X(\psi_X(B_i))) \leq$$
$$\mathbf{H}_{[0,1]}(\mu_X(\psi_X(B_{i-1})), \varphi_X(B_{i-1})) +$$
$$\mathbf{H}_{[0,1]}(\varphi_X(B_{i-1}), \varphi_X(B_i)) +$$
$$\mathbf{H}_{[0,1]}(\varphi_X(B_i), \mu_X(\psi_X(B_i))) <$$
$$\frac{\eta}{16} + \frac{\eta}{16} + \frac{\eta}{16} < \frac{\eta}{4}.$$

Similarmente, por (4),

$$\mathbf{H}_{[0,1]}(\mu_Y(\psi_Y(D_{i-1})), \mu_Y(\psi_Y(D_i))) < \frac{\eta}{4}.$$

Por tanto, la prueba de la Afirmación 1 está terminada.

Para cada $i \in \{0, 1, ..., n\}$, sean

$$[a_i^X, b_i^X] = \mu_X(\psi_X(A_i)),\ [c_i^X, e_i^X] = \mu_X(\psi_X(B_i)),$$
$$[a_i^Y, b_i^Y] = \mu_Y(\psi_Y(C_i)) \text{ y } [c_i^Y, e_i^Y] = \mu_Y(\psi_Y(D_i)).$$

$\boxed{[a_i^X, b_i^X]}$ $\boxed{[c_i^X, e_i^X]}$
$\boxed{[a_i^Y, b_i^Y]}$ $\boxed{[c_i^Y, e_i^Y]}$
Entonces

$$\begin{array}{rcl}
[a_0^X, b_0^X] & = & \{\mu_X(\psi_X(p_0))\}, \\
a_0^X & = & b_0^X, \\
[c_0^X, e_0^X] & = & \{\mu_X(\psi_X(x_0))\}, \\
c_0^X & = & e_0^X, \\
[a_0^Y, b_0^Y] & = & \{\mu_Y(\psi_Y(q_0))\}, \\
a_0^Y & = & b_0^Y, \\
[c_0^Y, e_0^Y] & = & \{\mu_Y(\psi_Y(y_0))\}, \\
c_0^Y & = & e_0^Y.
\end{array}$$

Por (6), para cada $i \in \{0, 1, ..., n\}$, $\mathbf{H}_{[0,1]}([a_i^X, b_i^X], [c_i^X, e_i^X]) < \frac{\eta}{4}$, lo cual implica que

$$\text{máx}\{\left|a_i^X - c_i^X\right|, \left|b_i^X - e_i^X\right|\} < \frac{\eta}{4}.$$

Por (5), para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $\mathbf{H}_{[0,1]}([a_{i-1}^X, b_{i-1}^X], [a_i^X, b_i^X]) < \frac{\eta}{4}$, lo cual implica que

$$\text{máx}\{a_{i-1}^X - a_i^X, b_i^X - b_{i-1}^X\} < \frac{\eta}{4}.$$

Por (7), para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $\mathbf{H}_{[0,1]}([c_{i-1}^X, e_{i-1}^X], [c_i^X, e_i^X]) < \frac{\eta}{4}$, lo cual implica que

$$\text{máx}\{c_{i-1}^X - c_i^X, e_i^X - e_{i-1}^X\} < \frac{\eta}{4}.$$

Por tanto,

$$\begin{gathered}\text{máx}(\{\text{máx}\{|a_i^X - c_i^X|, |b_i^X - e_i^X|\} : i \in \{0,1,...,n\}\} \cup \\ \{\text{máx}\{a_{i-1}^X - a_i^X, b_i^X - b_{i-1}^X, c_{i-1}^X - c_i^X, e_i^X - e_{i-1}^X\} : i \in \{1,...,n\}\}) \\ < \frac{\eta}{4}.\end{gathered}$$

Similarmente, usando (6), (5) y (7), puede ser mostrado que

$$\begin{gathered}\text{máx}(\{\text{máx}\{|a_i^Y - c_i^Y|, |b_i^Y - e_i^Y|\} : i \in \{0,1,...,n\}\} \cup \\ \{\text{máx}\{a_{i-1}^Y - a_i^Y, b_i^Y - b_{i-1}^Y, c_{i-1}^Y - c_i^Y, e_i^Y - e_{i-1}^Y\} : i \in \{1,...,n\}\}) \\ < \frac{\eta}{4}.\end{gathered}$$

Para cada $k \in \{1,2\}$, sea $\pi_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la proyección respectiva en la k-ésima coordenada.
$\boxed{\pi_k}$

Dado $i \in \{0,1,...,n\}$, como $A_i = \pi_X(\sigma(t_i))$ y $C_i = \pi_Y(\sigma(t_i))$, tenemos $\pi_1((\psi_X \times \psi_Y)(\sigma(t_i))) = \psi_X(A_i) \subset [0, r_X]$ y $\pi_2((\psi_X \times \psi_Y)(\sigma(t_i))) = \psi_Y(C_i) \subset [0, r_Y]$.

Entonces $(\psi_X \times \psi_Y)(\sigma(t_i))$ es un subcontinuo del conjunto $\psi_X(A_i) \times \psi_Y(C_i)$ y $\psi_X(A_i) \times \psi_Y(C_i)$ es un arco o una 2-celda. Entonces, por el Lema 3.3, existe una función continua $f_i : [i, i+1] \to \psi_X(A_i) \times \psi_Y(C_i)$ tal que: cada coordenada de f_i es lineal por pedazos, Im f_i está tan cerca como queramos de $(\psi_X \times \psi_Y)(\sigma(t_i))$ e Im f_i contiene cualesquiera puntos previamente elegidos en $(\psi_X \times \psi_Y)(\sigma(t_i))$.
$\boxed{f_i}$

Elegimos f_i de modo que satisfaga las siguientes condiciones.

Como $(\psi_X \times \psi_Y)(\sigma(t_0)) = \{(\psi_X(p_0), \psi_Y(q_0))\}$, podemos elegir f_0 como la función constante que sólo toma el valor $(\psi_X(p_0), \psi_Y(q_0))$.

Como ψ_X es una θ-función, ψ_X es suprayectiva. De modo que existe $x^* \in X$ tal que $\psi_X(x^*) = 0$. Recordemos que $\pi_X(M) = X$, así que existe $y^* \in Y$ tal que $(x^*, y^*) \in M$. Entonces $(\psi_X \times \psi_Y)(x^*, y^*) \in (\psi_X \times \psi_Y)(M) = (\psi_X \times \psi_Y)(\sigma(t_n))$. De modo que podemos pedir que $(\psi_X \times \psi_Y)(x^*, y^*) \in \text{Im } f_n$. Sea $t^* \in [n, n+1]$ tal que $f_n(t^*) = (\psi_X \times \psi_Y)(x^*, y^*) = (\psi_X(x^*), \psi_Y(y^*)) = (0, \psi_Y(y^*))$. De modo que $0 \in \text{Im}(\pi_1 \circ f_n)$. Similarmente, podemos pedir que $r_X \in \text{Im}(\pi_1 \circ f_n)$. Por tanto, podemos pedir que $\pi_1 \circ f_n : [n, n+1] \to [0, r_X]$ sea suprayectiva. Similarmente, podemos pedir que $\pi_2 \circ f_n : [n, n+1] \to [0, r_Y]$ sea suprayectiva.

Como $\mu_X \times \mu_Y$ es uniformemente continua, f_i puede ser elegida de manera que

$$\begin{gathered}H_{[0,1]^2}((\mu_X \times \mu_Y)(\text{Im } f_i), (\mu_X \times \mu_Y)((\psi_X \times \psi_Y)(\sigma(t_i)))) < \frac{\eta}{8}, \text{ y} \\ H_{[0,r_X]\times[0,r_Y]}(\text{Im } f_i, (\psi_X \times \psi_Y)(\sigma(t_i)))) < \omega. \qquad (8)\end{gathered}$$

Notemos que

$$\pi_1((\mu_X \times \mu_Y)(\text{Im } f_i)) = \mu_X(\pi_1(\text{Im } f_i)) \subset \mu_X(\psi_X(A_i)) = [a_i^X, b_i^X],$$

$$\begin{gathered}\pi_1((\mu_X \times \mu_Y)((\psi_X \times \psi_Y)(\sigma(t_i)))) = \\ \mu_X(\pi_1((\psi_X \times \psi_Y)(\sigma(t_i)))) = \mu_X(\psi_X(A_i)) = [a_i^X, b_i^X],\end{gathered}$$

y también

$$\pi_2((\mu_X \times \mu_Y)(\operatorname{Im} f_i)) = \mu_Y(\pi_2(\operatorname{Im} f_i)) \subset \mu_Y(\psi_Y(C_i)) = [a_i^Y, b_i^Y], \text{ y}$$

$$\pi_2((\mu_X \times \mu_Y)((\psi_X \times \psi_Y)(\sigma(t_i)))) =$$

$$\mu_Y(\pi_2((\psi_X \times \psi_Y)(\sigma(t_i)))) = \mu_Y(\psi_Y(C_i)) = [a_i^Y, b_i^Y].$$

Elegimos puntos w_i, x_i, y_i, z_i en $(\psi_X \times \psi_Y)(\sigma(t_i))$ tales que

$$\mu_X(\pi_1(w_i)) = a_i^X,\ \mu_X(\pi_1(x_i)) = b_i^X,\ \mu_Y(\pi_2(y_i)) = a_i^Y \text{ y } \mu_Y(\pi_2(z_i)) = b_i^Y.$$

Entonces también podemos suponer que w_i, x_i, y_i, z_i pertenecen a $\operatorname{Im} f_i$. Entonces $a_i^X, b_i^X \in \mu_X(\pi_1(\operatorname{Im} f_i))$ y $a_i^Y, b_i^Y \in \mu_Y(\pi_2(\operatorname{Im} f_i))$. Por tanto,

$$\pi_1((\mu_X \times \mu_Y)(\operatorname{Im} f_i)) = [a_i^X, b_i^X] \text{ y}$$

$$\pi_2((\mu_X \times \mu_Y)(\operatorname{Im} f_i)) = [a_i^Y, b_i^Y].$$

$\boxed{w_i,\ x_i,\ y_i,\ z_i}$

De hecho, retrazando una parte de la trayectoria f_i, si es necesario, podemos pedir que f_i termine en x_i. Así, $f_i(i+1) = x_i$ y $\pi_1((\mu_X \times \mu_Y)(f_i(i+1))) = b_i^X$.

Si $i \geq 1$, como $\sigma(t_{i-1}) \subset \sigma(t_i)$, podemos pedir también que $\operatorname{Im} f_i$ comience en el punto x_{i-1}. Así, $f_i(i) = x_{i-1}$ y $\pi_1((\mu_X \times \mu_Y)(f_i(i))) = b_{i-1}^X$.

Definimos $f_X : [0, n+1] \to [0, 1]$ como la extensión común de las funciones continuas lineales por pedazos $\pi_1 \circ (\mu_X \times \mu_Y) \circ f_0, ..., \pi_1 \circ (\mu_X \times \mu_Y) \circ f_n$. Consideramos la extensión común $f^* : [0, n+1] \to [0, r_X] \times [0, r_Y]$ de todas las funciones $f_0, ..., f_n$. Notemos que $f_X = \pi_1 \circ (\mu_X \times \mu_Y) \circ f^* = \mu_X \circ \pi_1 \circ f^*$ y f_X es lineal por pedazos. Como $\pi_1 \circ f_n : [n, n+1] \to [0, r_X]$ y $\pi_2 \circ f_n : [n, n+1] \to [0, r_Y]$ son funciones suprayectivas, tenemos que $\pi_1 \circ f^* : [0, n+1] \to [0, r_X]$ y $\pi_2 \circ f^* : [0, n+1] \to [0, r_Y]$ también son funciones suprayectivas.

$\boxed{f_X}$ $\boxed{f^*}$

Para cada $i \in \{0, 1, ..., n\}$, fijemos un punto $p_i' \in \psi_X(B_i)$ tal que $\mu_X(p_i') = e_i^X$. En el caso que $i = 0$, $p_i' = \psi_X(x_0)$. Si $i \geq 1$, como $\psi_X(B_i)$ es un subintervalo de $[0, r_X]$ y $p_{i-1}' \in \psi_X(B_{i-1}) \subset \psi_X(B_i)$, existe una función continua lineal por pedazos $g_i : [i, i+1] \to \psi_X(B_i)$ tal que $g_i(i) = p_{i-1}'$, $g_i(i+1) = p_i'$ y $g_i([i, i+1]) = \psi_X(B_i)$. Entonces $\mu_X(g_i(i)) = e_{i-1}^X$, $\mu_X(g_i(i+1)) = e_i^X$ y

$$\mu_X(g_i([i, i+1])) = \mu_X(\psi_X(B_i)) = [c_i^X, e_i^X].$$

$\boxed{p_i'}$ $\boxed{g_i}$

Consideremos a la función constante $g_0 : [0, 1] \to \{\psi_X(x_0)\}$.

$\boxed{g_0}$

Sea $g : [0, n+1] \to [0, 1]$ la extensión común de las funciones continuas lineales por pedazos $\mu_X \circ g_0, ..., \mu_X \circ g_n$, y sea $g^* : [0, n+1] \to [0, r_X]$ la extensión común de las funciones continuas $g_0, ..., g_n$. Notemos que $g = \mu_X \circ g^*$ y g es lineal por pedazos.

$\boxed{g}$ $\boxed{g^*}$

Por el Lema 3.4, existen funciones continuas lineales por pedazos $\alpha_X, \beta_X : [0, n+1] \to [0, n+1]$ tales que $\alpha_X(0) = 0 = \beta_X(0)$, $\alpha_X(n+1) = n+1 = \beta_X(n+1)$, y para cada $t \in [0, n+1]$,

$$|(f_X \circ \alpha_X)(t) - (g \circ \beta_X)(t)| \leq \frac{\eta}{2}. \tag{9}$$

$\boxed{\alpha_X, \beta_X}$

Recordemos que, para cada $i \in \{0, 1, ..., n\}$, los puntos y_i y z_i fueron elegidos en $\operatorname{Im} f_i$ de modo que satisfacen $\mu_Y(\pi_2(y_i)) = a_i^Y$ y $\mu_Y(\pi_2(z_i)) = b_i^Y$.

Afirmación 2. Existe una función continua lineal por pedazos suprayectiva $\lambda : [0, n+1] \to [0, n+1]$ tal que $\lambda(0) = 0$ y para cada $i \in \{0, 1, ..., n\}$, $(f^* \circ \alpha_X \circ \lambda)(i+1) = z_i$ y

$$\pi_2((\mu_X \times \mu_Y)((f^* \circ \alpha_X \circ \lambda)([i, i+1]))) = [a_i^Y, b_i^Y].$$

$\boxed{\lambda}$

Para probar la Afirmación 2, definimos $r_0 = 0$ y para cada $i \in \{1, ..., n+1\}$, $r_i = \sup\{t \in [0, n+1] : \alpha_X([0, t]) \subset [0, i]\}$. Notemos que $\alpha_X(r_i) = i$, $r_{n+1} = n+1$ y, para cada $t \in [r_0, r_1]$, se cumple que $\alpha_X(t) \in [0, 1]$ y $f^*(\alpha_X(t)) = (\psi_X(p_0), \psi_Y(q_0))$.

$\boxed{r_0}$ $\boxed{r_i}$

Sea $i \in \{1, ..., n+1\}$. Entonces $f^*(\alpha_X(r_i)) = f^*(i) = x_{i-1}$ y $[i-1, i] \subset \alpha_X([r_{i-1}, r_i])$. Como el dominio de f_{i-1} es $[i-1, i]$ y $z_{i-1} \in \operatorname{Im} f_{i-1}$, existe $s_i \in [r_{i-1}, r_i]$ tal que $f_{i-1}(\alpha_X(s_i)) = z_{i-1}$. Pongamos $s_0 = 0$. Notemos que $s_0 = r_0$ y $s_{i-1} \leq r_{i-1} \leq s_i \leq r_i$. Así, podemos definir $\lambda_i : [i-1, i] \to [s_{i-1}, r_i]$ como la función lineal por pedazos más simple que satisface $\lambda_i(i-1) = s_{i-1}$, $\lambda_i(i - 1 + \frac{1}{2}) = r_i$ y $\lambda_i(i) = s_i$.

$\boxed{s_i}$ $\boxed{\lambda_i}$

Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $\lambda_i(i) = s_i = \lambda_{i+1}(i)$, de modo que la extensión común $\lambda : [0, n+1] \to [0, n+1]$ de todas las funciones $\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}$ está bien definida. λ es continua porque $\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}$ son continuas. La función λ es suprayectiva porque $\lambda(0) = \lambda_1(0) = s_0 = 0$ y $\lambda(n + \frac{1}{2}) = \lambda_{n+1}(n + \frac{1}{2}) = r_{n+1} = n+1$.

Sea $i \in \{0, 1, ..., n\}$. Entonces $\lambda(i+1) = \lambda_{i+1}(i+1) = s_{i+1}$ y $(f^* \circ \alpha_X \circ \lambda)(i+1) = f_i(\alpha_X(s_{i+1})) = z_i$. Resta mostrar que

$$\pi_2((\mu_X \times \mu_Y)((f^* \circ \alpha_X \circ \lambda)([i, i+1]))) = [a_i^Y, b_i^Y].$$

Primero tomamos $t \in [i, i+1]$. Entonces $\lambda(t) = \lambda_{i+1}(t) \in [s_i, r_{i+1}]$ y, por la definición de r_{i+1}, $\alpha_X(\lambda(t)) \in [0, i+1]$. Sea $j \in \{0, 1, ..., i\}$ tal que $\alpha_X(\lambda(t)) \in [j, j+1]$. Entonces $f^*(\alpha_X(\lambda(t))) = f_j(\alpha_X(\lambda(t)))$. Como $\pi_2((\mu_X \times \mu_Y)(\operatorname{Im} f_j)) = [a_j^Y, b_j^Y] \subset [a_i^Y, b_i^Y]$, tenemos que $\pi_2((\mu_X \times \mu_Y)(f_j(\alpha_X(\lambda(t))))) \in [a_i^Y, b_i^Y]$.

Ahora, tomamos $u \in [a_i^Y, b_i^Y]$. Como $\pi_2((\mu_X \times \mu_Y)(\operatorname{Im} f_i)) = [a_i^Y, b_i^Y]$, existe $v \in [i, i+1]$ tal que $\pi_2((\mu_X \times \mu_Y)(f_i(v))) = u$. Como $[i, i+1] \subset \alpha_X([r_i, r_{i+1}])$, existe $s \in [r_i, r_{i+1}]$ tal que $\alpha_X(s) = v$. Como $[r_i, r_{i+1}] \subset [s_i, r_{i+1}]$ y $\lambda_{i+1} : [i, i+1] \to [s_i, r_{i+1}]$ es suprayectiva, existe $t \in [i, i+1]$ tal que $\lambda_{i+1}(t) = s$. Entonces, $\pi_2((\mu_X \times \mu_Y)((f^* \circ \alpha_X \circ \lambda)(t))) = u$.

Por tanto, la prueba de la Afirmación 2 está terminada.

Sea $f_Y = \pi_2 \circ (\mu_X \times \mu_Y) \circ (f^* \circ \alpha_X \circ \lambda) : [0, n+1] \to [0, 1]$. Notemos que $f_Y = \mu_Y \circ \pi_2 \circ (f^* \circ \alpha_X \circ \lambda)$ y f_Y es lineal por pedazos.

$\boxed{f_Y}$

Para cada $i \in \{0, 1, ..., n\}$, fijemos un punto $q'_i \in \psi_Y(D_i)$ tal que $\mu_Y(q'_i) = e_i^Y$. En el caso que $i = 0$, $q'_i = \psi_Y(y_0)$. Si $i \geq 1$, como $\psi_Y(D_i)$ es un subintervalo de $[0, r_Y]$ y $q'_{i-1} \in \psi_Y(D_{i-1}) \subset \psi_Y(D_i)$, hay una función continua lineal por pedazos $h_i : [i, i+1] \to \psi_Y(D_i)$ que satisface $h_i(i) = q'_{i-1}$, $h_i(i+1) = q'_i$ y $h_i([i, i+1]) = \psi_Y(D_i)$. Entonces, $\mu_Y(h_i(i)) = e_{i-1}^Y$, $\mu_Y(h_i(i+1)) = e_i^Y$ y

$$\mu_Y(h_i([i, i+1])) = \mu_Y(\psi_Y(D_i)) = [c_i^Y, e_i^Y].$$

$\boxed{q'_i}$ $\boxed{h_i}$

Consideremos a la función constante $h_0 : [0, 1] \to \{\psi_Y(y_0)\}$.

$\boxed{h_0}$

Sea $h : [0, n+1] \to [0, 1]$ la extensión común de todas las funciones lineales por pedazos $\mu_Y \circ h_0, ..., \mu_Y \circ h_n$, y sea $h^* : [0, n+1] \to [0, r_Y]$ la extensión común de todas las funciones $h_0, ..., h_n$. Notemos que $h = \mu_Y \circ h^*$ y h es lineal por pedazos.

$\boxed{h}$ $\boxed{h^*}$

Por el Lema 3.4, existen funciones continuas lineales por pedazos $\alpha_Y, \beta_Y : [0, n+1] \to [0, n+1]$ tales que $\alpha_Y(0) = 0 = \beta_Y(0)$, $\alpha_Y(n+1) = n+1 = \beta_Y(n+1)$, y para cada $t \in [0, n+1]$,

$$|(f_Y \circ \alpha_Y)(t) - (h \circ \beta_Y)(t)| \leq \frac{\eta}{2}. \qquad (10)$$

$\boxed{\alpha_Y,\, \beta_Y}$

Por la continuidad uniforme de $g^* \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y$, $h^* \circ \beta_Y$, $\pi_1 \circ f^* \circ \alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y$, $\pi_2 \circ f^* \circ \alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y$, $g \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y$ y $h \circ \beta_Y$, existe $\vartheta > 0$ tal que si $s, t \in [0, n+1]$ y $|s - t| < \vartheta$ entonces

$$|(g^* \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(s) - (g^* \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(t)| < \omega,$$

$$|(h^* \circ \beta_Y)(s) - (h^* \circ \beta_Y)(t)| < \omega,$$

$$|(\pi_1 \circ f^* \circ \alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(s) - (\pi_1 \circ f^* \circ \alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(t)| < \omega,$$

$$|(\pi_2 \circ f^* \circ \alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(s) - (\pi_2 \circ f^* \circ \alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(t)| < \omega,$$

$$|(g \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(s) - (g \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(t)| < \frac{\eta}{4} \text{ y}$$

$$|(h \circ \beta_Y)(s) - (h \circ \beta_Y)(t)| < \frac{\eta}{4}. \qquad (11)$$

$\boxed{\vartheta}$

Como $\pi_1 \circ f_n$ es suprayectiva y también lo son α_X, λ y α_Y, tenemos que $\pi_1 \circ f^* \circ \alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y : [0, n+1] \to [0, r_X]$ es una función continua y suprayectiva y como $g^* \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y : [0, n+1] \to [0, r_X]$ es continua, existe $\tau' \in [0, n+1]$ tal que $(\pi_1 \circ f^* \circ \alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau') = (g^* \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau')$.

$\boxed{\tau'}$

Como $\pi_2 \circ f_n$ es suprayectiva y también lo son α_X, λ y α_Y, tenemos que $\pi_2 \circ f^* \circ \alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y : [0, n+1] \to [0, r_Y]$ es una función continua y suprayectiva y como $h^* \circ \beta_Y : [0, n+1] \to [0, r_Y]$ es continua, existe $\chi' \in [0, n+1]$ tal que $(\pi_2 \circ f^* \circ \alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\chi') = (h^* \circ \beta_Y)(\chi')$.

$\boxed{\chi'}$

Tenemos dos casos para τ' y χ' a saber: $\tau' \leq \chi'$ o $\chi' < \tau'$. En ambos casos obtendremos una contradicción al probar que $R_0 \cap T_0 \neq \emptyset$. En el primer caso, presentamos las afirmaciones 3, 4 y 5; en el segundo caso presentamos las afirmaciones 6, 7 y 8. A pesar de que las afirmaciones 6, 7 y 8 se prueban de manera similar a las afirmaciones 3, 4 y 5, respectivamente, escribiremos todas sus demostraciones por completez.

Caso A. $\tau' \leq \chi'$.

Fijemos una partición $0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_k \leq \tau_{k+1} \leq ... \leq \tau_l = \chi'$ del intervalo $[0, \chi']$ tal que $\tau_k = \tau'$ y para cada $i \in \{1, ..., l\}$, $\tau_i - \tau_{i-1} < \vartheta$.

$\boxed{\tau_i}$

Para cada $i \in \{0, 1, ..., k\}$, elegimos puntos $u_i \in X$ y $v_i \in Y$ que satisfacen

$$\psi_X(u_i) = (g^* \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i) \text{ y } \psi_Y(v_i) = (h^* \circ \beta_Y)(\tau_i).$$

Para cada $i \in \{k, k+1 ..., l\}$, elegimos puntos $u_i \in X$ y $v_i \in Y$ que satisfacen

$$\psi_X(u_i) = (\pi_1 \circ f^* \circ \alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i) \text{ y } \psi_Y(v_i) = (h^* \circ \beta_Y)(\tau_i).$$

$\boxed{u_i,\, v_i}$

Notemos que, como $(g^* \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau') = (\pi_1 \circ f^* \circ \alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau')$, no hay problema en la elección de u_k y v_k. Como $(g^* \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_0) = g^*(0) = \psi_X(x_0)$, elegimos $u_0 = x_0$. Como $(h^* \circ \beta_Y)(\tau_0) = h^*(0) = \psi_Y(y_0)$, elegimos $v_0 = y_0$. Entonces, $(u_0, v_0) = (x_0, y_0)$.

$\boxed{u_0,\, v_0}$

Afirmación 3. $(u_l, v_l) \in R_0$.

Como $(h^* \circ \beta_Y)(\chi') = (\pi_2 \circ f^* \circ \alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\chi')$ y $\tau_l = \chi'$, tenemos que

$$\begin{aligned}(\psi_X(u_l), \psi_Y(v_l)) &= ((\pi_1 \circ f^* \circ \alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\chi'), (\pi_2 \circ f^* \circ \alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\chi')) \\ &\in \operatorname{Im} f^* \circ \alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y = \operatorname{Im} f^*.\end{aligned}$$

Por (8), existe $(m_1, m_2) \in M$ tal que

$$\|(\psi_X(u_l), \psi_Y(v_l)) - (\psi_X(m_1), \psi_Y(m_2))\| < \omega.$$

Esto implica que

$$|\psi_X(u_l) - \psi_X(m_1)| < \omega \text{ y}$$
$$|\psi_Y(v_l) - \psi_X(m_2)| < \omega.$$

Usando (1) y (2), $d(u_l, m_1) < \theta$ y $\rho(v_l, m_2) < \theta$. Entonces,

$$(u_l, v_l) \in N(M, \theta) \subset R_0.$$

Afirmación 4. Para cada $i \in \{0, 1, ..., k-1\}$,

$$\mathbf{D}((u_i, v_i), (u_{i+1}, v_{i+1})) < \theta,$$

y para cada $i \in \{0, 1, ..., k\}$, $(u_i, v_i) \in T_0$.

Para probar la primera parte de la afirmación, tomemos $i \in \{0, 1, ..., k-1\}$. Tenemos que $\tau_{i+1} - \tau_i < \vartheta$, entonces por (11),

$$|\psi_X(u_i) - \psi_X(u_{i+1})| = |(g^* \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i) - (g^* \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_{i+1})| < \omega.$$

Así que, usando (1), $d(u_i, u_{i+1}) < \theta$. Similarmente, usando (11) y (2), puede ser probado que $\rho(v_i, v_{i+1}) < \theta$. Por tanto, $\mathbf{D}((u_i, v_i), (u_{i+1}, v_{i+1})) < \theta$.

Para probar el resto de la afirmación, tomemos $i \in \{0, 1, ..., k\}$ y veamos que $(u_i, v_i) \in N(M, \frac{\varepsilon}{2})$.

Sea $j \in \{0, 1, ..., n\}$ tal que $(\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i) \in [j, j+1]$. Entonces, $f^*((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)) = f_j((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i))$. Por (8), existe $(m_1, m_2) \in \sigma(t_j) \subset M$ tal que

$$\|(\mu_X \times \mu_Y)(f_j((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i))) - (\mu_X \times \mu_Y)(\psi_X \times \psi_Y)(m_1, m_2)\| < \frac{\eta}{8}.$$

Esto implica que

$$|\mu_X(\pi_1(f_j((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i))) - \mu_X(\psi_X(m_1))| < \frac{\eta}{8} \text{ y}$$

$$|\mu_Y(\pi_2(f_j((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i))) - \mu_Y(\psi_Y(m_2))| < \frac{\eta}{8}.$$

Usando que $f_X = \mu_X \circ \pi_1 \circ f^*$ y $f_Y = \mu_Y \circ \pi_2 \circ f^* \circ \alpha_X \circ \lambda$, podemos reescribir las últimas dos desigualdades como

$$|f_X((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)) - \mu_X(\psi_X(m_1))| < \frac{\eta}{8} \text{ y}$$

$$|f_Y(\alpha_Y(\tau_i)) - \mu_Y(\psi_Y(m_2))| < \frac{\eta}{8}.$$

Por (3) y (4), $|\mu_X(\psi_X(m_1)) - \varphi_X(m_1)| < \frac{\eta}{8}$ y $|\mu_Y(\psi_Y(m_2)) - \varphi_Y(m_2)| < \frac{\eta}{8}$. Así,

$$|f_X((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)) - \varphi_X(m_1)| < \frac{\eta}{4} \text{ y}$$

$$|f_Y(\alpha_Y(\tau_i)) - \varphi_Y(m_2)| < \frac{\eta}{4}. \tag{12}$$

Por la elección de α_X y β_X (vea (9)),

$$|(f_X \circ \alpha_X)((\lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)) - (g \circ \beta_X)((\lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i))| \leq \frac{\eta}{2}.$$

Por definición,

$$\mu_X(\psi_X(u_i)) = \mu_X((g^* \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)) = g((\beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)).$$

Entonces, por (3) y (12),

$$|\varphi_X(u_i) - \varphi_X(m_1)| \leq$$

$$|\varphi_X(u_i) - \mu_X(\psi_X(u_i))| +$$

$$|\mu_X(\psi_X(u_i)) - f_X((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i))| +$$

$$|f_X((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)) - \varphi_X(m_1)| <$$

$$\frac{\eta}{8} + \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{4} = \frac{7\eta}{8}.$$

Por la elección de η, $d(u_i, m_1) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por la elección de α_Y y β_Y (vea (10)), $|(f_Y \circ \alpha_Y)(\tau_i) - (h \circ \beta_Y)(\tau_i)| \leq \frac{\eta}{2}$. Por definición, $\mu_Y(\psi_Y(v_i)) = \mu_Y((h^* \circ \beta_Y)(\tau_i)) = h(\beta_Y(\tau_i))$. Entonces, por (4) y (12),

$$|\varphi_Y(v_i) - \varphi_Y(m_2)| \leq$$

$$|\varphi_Y(v_i) - \mu_Y(\psi_Y(v_i))| +$$

$$|\mu_Y(\psi_Y(v_i)) - f_Y(\alpha_Y(\tau_i))| +$$

$$|f_Y(\alpha_Y(\tau_i)) - \varphi_Y(m_2)| <$$

$$\frac{\eta}{8} + \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{4} = \frac{7\eta}{8}.$$

Por la elección de η, $\rho(v_i, m_2) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por tanto, $(u_i, v_i) \in B((m_1, m_2), \frac{\varepsilon}{2}) \subset N(M, \frac{\varepsilon}{2}) \subset Z$.

Como $(u_0, v_0) = (x_0, y_0) \in T_0$ y (u_1, v_1) es un punto en Z tal que

$$\mathbf{D}((u_0, v_0), (u_1, v_1)) < \theta,$$

la elección de θ implica que $(u_1, v_1) \in T_0$. Procediendo de esta manera, obtenemos que $(u_2, v_2), ..., (u_k, v_k) \in T_0$.

Por tanto, la prueba de la Afirmación 4 está completa.

En el caso que $\tau' = \chi'$, tenemos que $(u_l, v_l) = (u_k, v_k) \in T_0$. Sin embargo, por la Afirmación 3, tenemos que $(u_l, v_l) \in R_0$, lo cual contradice que T_0 y R_0 son disjuntos. Así, $\tau' < \chi'$.

Afirmación 5. Para cada $i \in \{k, k+1, ..., l-1\}$,

$$\mathbf{D}((u_i, v_i), (u_{i+1}, v_{i+1})) < \theta,$$

y para cada $i \in \{k, k+1, ..., l\}$, $(u_i, v_i) \in T_0$.

Para probar la primera parte de la afirmación, tomamos $i \in \{k, k+1, ..., l-1\}$. Tenemos que $\tau_{i+1} - \tau_i < \vartheta$, entonces por (11)

$$\left|\psi_X(u_i) - \psi_X(u_{i+1})\right| =$$

$$|(\pi_1 \circ f^* \circ \alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i) - (\pi_1 \circ f^* \circ \alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_{i+1})| < \omega.$$

Así que, por (1), $d(u_i, u_{i+1}) < \theta$. Similarmente, usando (11) y (2), puede ser probado que $\rho(v_i, v_{i+1}) < \theta$. Por tanto, $\mathbf{D}((u_i, v_i), (u_{i+1}, v_{i+1})) < \theta$.

Para probar el resto de la afirmación, tomemos $i \in \{k, k+1, ..., l\}$. Veremos que $(u_i, v_i) \in N(M, \frac{\varepsilon}{2})$.

Sea $j \in \{0, 1, ..., n\}$ tal que $(\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i) \in [j, j+1]$. Entonces, $f^*((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)) = f_j((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i))$. Por (8), existe $(m_1, m_2) \in \sigma(t_j) \subset M$ tal que

$$\|(\mu_X \times \mu_Y)(f^*((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i))) - (\mu_X \times \mu_Y)(\psi_X \times \psi_Y)(m_1, m_2)\| < \frac{\eta}{8}.$$

Esto implica que

$$|\mu_X(\pi_1(f^*((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i))) - \mu_X(\psi_X(m_1))| < \frac{\eta}{8} \text{ y}$$

$$|\mu_Y(\pi_2(f^*((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i))) - \mu_Y(\psi_Y(m_2))| < \frac{\eta}{8}.$$

Entonces

$$|f_X((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)) - \mu_X(\psi_X(m_1))| < \frac{\eta}{8} \text{ y}$$

$$|f_Y(\alpha_Y(\tau_i)) - \mu_Y(\psi_Y(m_2))| < \frac{\eta}{8}.$$

Por (3) y (4),

$$|\mu_X(\psi_X(m_1)) - \varphi_X(m_1)| < \frac{\eta}{8} \text{ y}$$

$$|\mu_Y(\psi_Y(m_2)) - \varphi_Y(m_2)| < \frac{\eta}{8}.$$

Así,

$$|f_X((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)) - \varphi_X(m_1)| < \frac{\eta}{4} \text{ y}$$

$$|f_Y(\alpha_Y(\tau_i)) - \varphi_Y(m_2)| < \frac{\eta}{4}. \qquad (13)$$

Por definición,

$$\mu_X(\psi_X(u_i)) = \mu_X((\pi_1 \circ f^* \circ \alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)) = f_X((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)).$$

Entonces, por (3) y (13),

$$|\varphi_X(u_i) - \varphi_X(m_1)| \leq$$
$$|\varphi_X(u_i) - \mu_X(\psi_X(u_i))| +$$
$$|\mu_X(\psi_X(u_i)) - f_X((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i))| +$$
$$|f_X((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)) - \varphi_X(m_1)| <$$
$$\frac{\eta}{8} + 0 + \frac{\eta}{4} = \frac{3\eta}{8}.$$

Por la elección de η, $d(u_i, m_1) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por la elección de α_Y y β_Y (vea (10)), $|(f_Y \circ \alpha_Y)(\tau_i) - (h \circ \beta_Y)(\tau_i)| \leq \frac{\eta}{2}$. Por definición, $\mu_Y(\psi_Y(v_i)) = \mu_Y((h^* \circ \beta_Y)(\tau_i)) = h(\beta_Y(\tau_i))$. Entonces, por (4) y (13),

$$|\varphi_Y(v_i) - \varphi_Y(m_2)| \leq$$

$$|\varphi_Y(v_i) - \mu_Y(\psi_Y(v_i))| +$$

$$|\mu_Y(\psi_Y(v_i)) - f_Y(\alpha_Y(\tau_i))| +$$

$$|f_Y(\alpha_Y(\tau_i)) - \varphi_Y(m_2)| <$$
$$\frac{\eta}{8} + \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{4} = \frac{7\eta}{8}.$$

Por la elección de η, $\rho(v_i, m_2) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por tanto, $(u_i, v_i) \in B((m_1, m_2), \frac{\varepsilon}{2}) \subset N(M, \frac{\varepsilon}{2}) \subset Z$.

Como $(u_k, v_k) \in T_0$ y (u_{k+1}, v_{k+1}) es un punto en Z tal que

$$\mathbf{D}((u_k, v_k), (u_{k+1}, v_{k+1})) < \theta,$$

la elección de θ implica que $(u_{k+1}, v_{k+1}) \in T_0$. Procediendo de esta manera, obtenemos que $(u_{k+2}, v_{k+2}), ..., (u_l, v_l) \in T_0$.

Por tanto, la prueba de la Afirmación 5 está completa.

Por las afirmaciones 3 y 5, tenemos que $(u_l, v_l) \in R_0 \cap T_0$. Esto es una contradicción porque R_0 y T_0 son disjuntos. Por tanto, el Caso A no es posible.

Caso B. $\chi' < \tau'$.

Fijemos una partición $0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_k \leq \tau_{k+1} \leq ... \leq \tau_l = \tau'$ del intervalo $[0, \tau']$ tal que $\tau_k = \chi'$ y para cada $i \in \{1, ..., l\}$, $\tau_i - \tau_{i-1} < \vartheta$. Para cada $i \in \{0, 1, ..., k\}$, elegimos puntos $u_i \in X$ y $v_i \in Y$ que satisfacen

$$\psi_X(u_i) = (g^* \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i) \text{ y } \psi_Y(v_i) = (h^* \circ \beta_Y)(\tau_i).$$

Para cada $i \in \{k, k+1..., l\}$, elegimos puntos $u_i \in X$ y $v_i \in Y$ que satisfacen

$$\psi_X(u_i) = (g^* \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i) \text{ y } \psi_Y(v_i) = (\pi_2 \circ f^* \circ \alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i).$$

$\boxed{u_i,\ v_i}$

Notemos que, como $(h^* \circ \beta_Y)(\chi') = (\pi_2 \circ f^* \circ \alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\chi')$, no hay problema en la elección de u_k y v_k. Como $(g^* \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_0) = g^*(0) = \psi_X(x_0)$, elegimos $u_0 = x_0$. Como $(h^* \circ \beta_Y)(\tau_0) = h^*(0) = \psi_Y(y_0)$, elegimos $v_0 = y_0$. Entonces, $(u_0, v_0) = (x_0, y_0)$.

$\boxed{u_0,\ v_0}$

Afirmación 6. $(u_l, v_l) \in R_0$.

Como $(g^* \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau') = (\pi_1 \circ f^* \circ \alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau')$ y $\tau_l = \tau'$, tenemos que

$$(\psi_X(u_l), \psi_Y(v_l)) = ((\pi_1 \circ f^* \circ \alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau'), (\pi_2 \circ f^* \circ \alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau'))$$
$$\in \operatorname{Im} f^* \circ \alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y = \operatorname{Im} f^*.$$

Por (8), existe $(m_1, m_2) \in M$ tal que

$$\|(\psi_X(u_l), \psi_Y(v_l)) - (\psi_X(m_1), \psi_Y(m_2))\| < \omega.$$

Esto implica que

$$|\psi_X(u_l) - \psi_X(m_1)| < \omega \text{ y}$$
$$|\psi_Y(v_l) - \psi_Y(m_2)| < \omega.$$

Usando (1) y (2), $d(u_l, m_1) < \theta$ y $\rho(v_l, m_2) < \theta$. Entoces,

$$(u_l, v_l) \in N(M, \theta) \subset R_0.$$

Afirmación 7. Para cada $i \in \{0, 1, ..., k-1\}$,

$$\mathbf{D}((u_i, v_i), (u_{i+1}, v_{i+1})) < \theta,$$

y para cada $i \in \{0, 1, ..., k\}$, $(u_i, v_i) \in T_0$.

Para probar la primera parte de la afirmación, tomemos $i \in \{0, 1, ..., k-1\}$. Tenemos que $\tau_{i+1} - \tau_i < \vartheta$, entonces por (11),

$$|\psi_X(u_i) - \psi_X(u_{i+1})| = |(g^* \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i) - (g^* \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_{i+1})| < \omega.$$

Así que, usando (1), $d(u_i, u_{i+1}) < \theta$. Similarmente, usando (11) y (2), puede ser probado que $\rho(v_i, v_{i+1}) < \theta$. Por tanto, $\mathbf{D}((u_i, v_i), (u_{i+1}, v_{i+1})) < \theta$.

Para probar el resto de la afirmación, tomemos $i \in \{0, 1, ..., k\}$ y veamos que $(u_i, v_i) \in N(M, \frac{\varepsilon}{2})$.

Sea $j \in \{0, 1, ..., n\}$ tal que $(\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i) \in [j, j+1]$. Entonces, $f^*((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)) = f_j((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i))$. Por (8), existe $(m_1, m_2) \in \sigma(t_j) \subset M$ tal que

$$\|(\mu_X \times \mu_Y)(f_j((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i))) - (\mu_X \times \mu_Y)(\psi_X \times \psi_Y)(m_1, m_2)\| < \frac{\eta}{8}.$$

Esto implica que

$$|\mu_X(\pi_1(f_j((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i))) - \mu_X(\psi_X(m_1))| < \frac{\eta}{8} \text{ y}$$

$$|\mu_Y(\pi_2(f_j((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i))) - \mu_Y(\psi_Y(m_2))| < \frac{\eta}{8}.$$

Usando que $f_X = \mu_X \circ \pi_1 \circ f^*$ y $f_Y = \mu_Y \circ \pi_2 \circ f^* \circ \alpha_X \circ \lambda$, podemos reescribir las últimas dos desigualdades como

$$|f_X((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)) - \mu_X(\psi_X(m_1))| < \frac{\eta}{8} \text{ y}$$

$$|f_Y(\alpha_Y(\tau_i)) - \mu_Y(\psi_Y(m_2))| < \frac{\eta}{8}.$$

Por (3) y (4), $|\mu_X(\psi_X(m_1)) - \varphi_X(m_1)| < \frac{\eta}{8}$ y $|\mu_Y(\psi_Y(m_2)) - \varphi_Y(m_2)| < \frac{\eta}{8}$. Así,

$$|f_X((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)) - \varphi_X(m_1)| < \frac{\eta}{4} \text{ y}$$

$$|f_Y(\alpha_Y(\tau_i)) - \varphi_Y(m_2)| < \frac{\eta}{4}. \tag{14}$$

Por la elección de α_X y β_X (vea (9)),

$$|(f_X \circ \alpha_X)((\lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)) - (g \circ \beta_X)((\lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i))| \leq \frac{\eta}{2}.$$

Por definición,

$$\mu_X(\psi_X(u_i)) = \mu_X((g^* \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)) = g((\beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)).$$

Entonces, por (3) y (14),

$$|\varphi_X(u_i) - \varphi_X(m_1)| \leq$$
$$|\varphi_X(u_i) - \mu_X(\psi_X(u_i))| +$$
$$|\mu_X(\psi_X(u_i)) - f_X((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i))| +$$
$$|f_X((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)) - \varphi_X(m_1)| <$$
$$\frac{\eta}{8} + \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{4} = \frac{7\eta}{8}.$$

Por la elección de η, $d(u_i, m_1) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por la elección de α_Y y β_Y (vea (10)), $|(f_Y \circ \alpha_Y)(\tau_i) - (h \circ \beta_Y)(\tau_i)| \leq \frac{\eta}{2}$. Por definición, $\mu_Y(\psi_Y(v_i)) = \mu_Y((h^* \circ \beta_Y)(\tau_i)) = h(\beta_Y(\tau_i))$. Entonces, por (4) y (14),

$$|\varphi_Y(v_i) - \varphi_Y(m_2)| \leq$$
$$|\varphi_Y(v_i) - \mu_Y(\psi_Y(v_i))| +$$
$$|\mu_Y(\psi_Y(v_i)) - f_Y(\alpha_Y(\tau_i))| +$$
$$|f_Y(\alpha_Y(\tau_i)) - \varphi_Y(m_2)| <$$
$$\frac{\eta}{8} + \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{4} = \frac{7\eta}{8}.$$

Por la elección de η, $\rho(v_i, m_2) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por tanto, $(u_i, v_i) \in B((m_1, m_2), \frac{\varepsilon}{2}) \subset N(M, \frac{\varepsilon}{2}) \subset Z$.

Como $(u_0, v_0) = (x_0, y_0) \in T_0$ y (u_1, v_1) es un punto en Z tal que

$$\mathbf{D}((u_0, v_0), (u_1, v_1)) < \theta,$$

la elección de θ implica que $(u_1, v_1) \in T_0$. Procediendo de esta manera, obtenemos que $(u_2, v_2), ..., (u_k, v_k) \in T_0$.

Por tanto, la prueba de la Afirmación 7 está completa.

Afirmación 8. Para cada $i \in \{k, k+1, ..., l-1\}$,

$$\mathbf{D}((u_i, v_i), (u_{i+1}, v_{i+1})) < \theta,$$

y para cada $i \in \{k, k+1, ..., l\}$, $(u_i, v_i) \in T_0$.

Para probar la primera parte de la afirmación, tomamos $i \in \{k, k+1, ..., l-1\}$. Tenemos que $\tau_{i+1} - \tau_i < \vartheta$, entonces por (11)

$$\left|\psi_X(u_i) - \psi_X(u_{i+1)})\right| =$$
$$|(g^* \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i) - (g^* \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_{i+1})| < \omega.$$

Así que, por (1), $d(u_i, u_{i+1}) < \theta$. Similarmente, usando (11) y (2), puede ser probado que $\rho(v_i, v_{i+1}) < \theta$. Por tanto, $\mathbf{D}((u_i, v_i), (u_{i+1}, v_{i+1})) < \theta$.

Para probar el resto de la afirmación, tomemos $i \in \{k, k+1, ..., l\}$. Veremos que $(u_i, v_i) \in N(M, \frac{\varepsilon}{2})$.

Sea $j \in \{0, 1, ..., n\}$ tal que $(\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i) \in [j, j+1]$. Entonces, $f^*((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)) = f_j((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i))$. Por (8), existe $(m_1, m_2) \in \sigma(t_j) \subset M$ tal que

$$\|(\mu_X \times \mu_Y)(f^*((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i))) - (\mu_X \times \mu_Y)(\psi_X \times \psi_Y)(m_1, m_2)\| < \frac{\eta}{8}.$$

Esto implica que

$$|\mu_X(\pi_1(f^*((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i))) - \mu_X(\psi_X(m_1))| < \frac{\eta}{8} \text{ y}$$

$$|\mu_Y(\pi_2(f^*((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i))) - \mu_Y(\psi_Y(m_2))| < \frac{\eta}{8}.$$

Entonces

$$|f_X((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)) - \mu_X(\psi_X(m_1))| < \frac{\eta}{8} \text{ y}$$

$$|f_Y(\alpha_Y(\tau_i)) - \mu_Y(\psi_Y(m_2))| < \frac{\eta}{8}.$$

Por (3) y (4),

$$|\mu_X(\psi_X(m_1)) - \varphi_X(m_1)| < \frac{\eta}{8} \text{ y}$$

$$|\mu_Y(\psi_Y(m_2)) - \varphi_Y(m_2)| < \frac{\eta}{8}.$$

Así,

$$|f_X((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)) - \varphi_X(m_1)| < \frac{\eta}{4} \text{ y}$$

$$|f_Y(\alpha_Y(\tau_i)) - \varphi_Y(m_2)| < \frac{\eta}{4}. \tag{15}$$

Por definición,

$$\mu_X(\psi_X(u_i)) = \mu_X((g^* \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)) = g((\beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)).$$

Por la elección de α_X y β_X (vea (9)),

$$|(f_X \circ \alpha_X)((\lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)) - (g \circ \beta_X)((\lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i))| \leq \frac{\eta}{2}.$$

Entonces, por (3) y (15),

$$\begin{gathered} |\varphi_X(u_i) - \varphi_X(m_1)| \leq \\ |\varphi_X(u_i) - \mu_X(\psi_X(u_i))| + \\ |\mu_X(\psi_X(u_i)) - f_X((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i))| + \\ |f_X((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)) - \varphi_X(m_1)| < \\ \frac{\eta}{8} + \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{4} = \frac{7\eta}{8}. \end{gathered}$$

Por la elección de η, $d(u_i, m_1) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por definición,

$$\mu_Y(\psi_Y(v_i)) = \mu_Y((\pi_2 \circ f^* \circ \alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)) = f_Y(\alpha_Y(\tau_i)).$$

Entonces, por (4) y (15),

$$|\varphi_Y(v_i) - \varphi_Y(m_2)| \leq$$
$$|\varphi_Y(v_i) - \mu_Y(\psi_Y(v_i))| +$$
$$|\mu_Y(\psi_Y(v_i)) - f_Y(\alpha_Y(\tau_i))| +$$
$$|f_Y(\alpha_Y(\tau_i)) - \varphi_Y(m_2)| <$$
$$\frac{\eta}{8} + 0 + \frac{\eta}{4} = \frac{3\eta}{8}.$$

Por la elección de η, $\rho(v_i, m_2) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por tanto, $(u_i, v_i) \in B((m_1, m_2), \frac{\varepsilon}{2}) \subset N(M, \frac{\varepsilon}{2}) \subset Z$.

Por la Afirmación 7 $(u_k, v_k) \in T_0$ y como (u_{k+1}, v_{k+1}) es un punto en Z tal que

$$\mathbf{D}((u_k, v_k), (u_{k+1}, v_{k+1})) < \theta,$$

la elección de θ implica que $(u_{k+1}, v_{k+1}) \in T_0$. Procediendo de esta manera, obtenemos que $(u_{k+2}, v_{k+2}), ..., (u_l, v_l) \in T_0$.

Por tanto, la prueba de la Afirmación 8 está completa.

Por las afirmaciones 6 y 8, $(u_l, v_l) \in R_0 \cap T_0$. Esto es una contradicción porque R_0 y T_0 son disjuntos. Por tanto, el Caso B no es posible.

Como ambos casos, A y B, no se pueden dar, la prueba del Teorema 3.5 está terminada.
■

3.2. Propiedad de Kelley

Los continuos de Kelley también son conocidos como continuos con la propiedad de Kelley, precisamente porque fue J. L. Kelley quien definió esta propiedad. Él la introdujo en [23, p. 26], donde la llamó propiedad 3.2 y la usó para estudiar la contractibilidad de los hiperespacios. Sin embargo, la propiedad de Kelley ha sido considerada interesante por sí misma por su relación con otras propiedades en los continuos.

Por muchos años, fue una pregunta abierta si el producto de dos continuos de Kelley es un continuo de Kelley. Esto fue respondido en 1977, cuando R. W. Wardle presentó un continuo de Kelley X tal que $X \times X$ no es un continuo de Kelley [32, Example 4.7, p. 297]. A pesar de este resultado, parecía natural que el producto de un continuo de Kelley con el intervalo $[0, 1]$ fuera un continuo de Kelley. Sin embargo, en 2004, J. J. Charatonik y W. J. Charatonik presentaron un continuo de Kelley X tal que $X \times [0, 1]$ no es un continuo de Kelley [8, Theorem 1, p. 3]. Por otro lado, se sabe que si un producto de continuos es un continuo de Kelley, entonces también lo son los espacios factores [32, Corollary 4.6, p. 297]. En esta dirección, el siguiente problema parece ser interesante.

Problema 3.6 Encuentre clases $\mathcal{C}$ de continuos con la siguiente propiedad: si X y Y son continuos de Kelley que pertenecen a $\mathcal{C}$, entonces $X \times Y$ es un continuo de Kelley.

Recuerde que un *dendroide* es un continuo arco conexo X tal que la intersección de cada par de sus subcontinuos es conexa. El siguiente caso particular del Problema 3.6 es una pregunta abierta.

Problema 3.7 ¿Es el producto de dos dendroides de Kelley un continuo de Kelley?

Esta sección está dedicada a probar que el producto de dos continuos encadenables de Kelley es también un continuo de Kelley. Para probar este resultado, usamos y adaptamos la técnica desarrollada por A. Illanes, J. M. Martínez-Montejano y K. Villarreal en el Teorema 5.4 de [19]. Esta técnica depende fuertemente del Teorema de los Alpinistas (el cual fue la base para demostrar el Lema 3.4).

Al igual que en la prueba del Teorema 3.5, para facilitar la lectura de la demostración del Teorema 3.8, haremos uso de cajas del siguiente estilo $\boxed{}$. Con ellas resaltaremos cada objeto matemático que hayamos definido en el párrafo previo, para futuras referencias durante la prueba.

Teorema 3.8 *Si X y Y son continuos encadenables de Kelley, entonces $X \times Y$ es también un continuo de Kelley.*

Demostración. Sean d y ρ métricas para X y Y, respectivamente. Consideremos la métrica $\mathbf{D}$ para $X \times Y$ dada por

$$\mathbf{D}((x,y),(p,q)) = \text{máx}\{d(x,p), \rho(y,q)\}$$

para cualesquiera $(x,y),(p,q) \in X \times Y$.

Sea $\varepsilon > 0$.

Como X y Y son continuos encadenables, por [27, Theorem 12.11, p. 235], existen $\frac{\varepsilon}{2}$-funciones $\varphi_X : X \to [0,1]$ y $\varphi_Y : Y \to [0,1]$.

$\boxed{\varphi_X, \varphi_Y}$

Entonces, por el Lema 3.1, existe $\eta > 0$ tal que $\eta < \varepsilon$ y para cada subintervalo J de $[0,1]$ con diámetro$(J) < \eta$, tenemos que

$$\text{diámetro}(\varphi_X^{-1}(J)) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y diámetro}(\varphi_Y^{-1}(J)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\boxed{\eta}$

Por la continuidad uniforme de φ_X y φ_Y, existe $\zeta > 0$ tal que:

$$\text{si } x,u \in X \text{ y } d(x,u) < \zeta, \text{ entonces } |\varphi_X(x) - \varphi_X(u)| < \frac{\eta}{48}$$

y

$$\text{si } v,y \in Y \text{ y } \rho(v,y) < \zeta, \text{ entonces } |\varphi_Y(v) - \varphi_Y(y)| < \frac{\eta}{48}.$$

$\boxed{\zeta}$

Como X y Y son continuos de Kelley, existe $\delta > 0$ tal que $\delta <$mín$\{\frac{\varepsilon}{2}, \zeta\}$ y que satisface que

i) si $A \in C(X)$, $p \in A$ y $q \in B(p,\delta)$, entonces existe $B \in C(X)$ tal que $q \in B$ y $\mathbf{H}_X(A,B) < \zeta$;
ii) si $A \in C(Y)$, $p \in A$ y $q \in B(p,\delta)$, entonces existe $B \in C(Y)$ tal que $q \in B$ y $\mathbf{H}_Y(A,B) < \zeta$.
$\boxed{\delta}$

Sean $A \in C(X\times Y)$, $(p_0,q_0) \in A$ y $(x_0,y_0) \in B((p_0,q_0),\delta)$. Encontraremos $B \in C(X\times Y)$ tal que $(x_0,y_0) \in B$ y $\mathbf{H}_{X\times Y}(A,B) < \varepsilon$.
$\boxed{A}$ $\boxed{(p_0,q_0)}$ $\boxed{(x_0,y_0)}$

Por [20, Theorem 14.6, p. 112], existe un arco ordenado de $\{(p_0,q_0)\}$ a A. Entonces, existe una función continua inyectiva $\sigma : [0,1] \to C(A)$ tal que $\sigma(0) = \{(p_0,q_0)\}$, $\sigma(1) = A$ y: si $0 \leq s \leq t \leq 1$, entonces $\sigma(s) \subset \sigma(t)$.
$\boxed{\sigma}$
Por la continuidad uniforme de σ, hay un $n \in \mathbb{N}$ tal que si $s,t \in [0,1]$ y $|s-t| \leq \frac{1}{n}$, entonces $\mathbf{H}_{X\times Y}(\sigma(s),\sigma(t)) < \zeta$.
$\boxed{n}$
Para cada $j \in \{0,1,...,n\}$, pongamos $t_j = \frac{j}{n}$, $A_j = \pi_X(\sigma(t_j))$ y $C_j = \pi_Y(\sigma(t_j))$.
$\boxed{t_j,\ A_j,\ C_j}$
Para cada $j \in \{1,...,n\}$, por la elección de δ y (x_0,y_0), existen subcontinuos K_j y L_j de X y Y, respectivamente, tales que $x_0 \in K_j$, $\mathbf{H}_X(K_j,A_j) < \zeta$, $y_0 \in L_j$ y $\mathbf{H}_Y(L_j,C_j) < \zeta$.
$\boxed{K_j,\ L_j}$
Sean $K_0 = \{x_0\} = B_0$, $L_0 = \{y_0\} = D_0$ y para cada $j \geq 1$, $B_j = K_0 \cup K_1 \cup ... \cup K_j$ y $D_j = L_0 \cup L_1 \cup ... \cup L_j$. Entonces $\mathbf{H}_X(A_0,B_0) = d(p_0,x_0) < \zeta$, $\mathbf{H}_Y(C_0,D_0) = \rho(q_0,y_0) < \zeta$ y para cada $j \geq 1$, B_j y D_j son subcontinuos de X y de Y, respectivamente, tales que $\mathbf{H}_X(A_j,B_j) < \zeta$ y $\mathbf{H}_Y(C_j,D_j) < \zeta$.
$\boxed{K_0,\ L_0}$ $\boxed{B_j,\ D_j}$
Sea $j \in \{0,1,...,n\}$. Como $\mathbf{H}_X(A_j,B_j) < \zeta$ y $\mathbf{H}_Y(C_j,D_j) < \zeta$, la elección de ζ implica que

$$\mathbf{H}_{[0,1]}(\varphi_X(A_j),\varphi_X(B_j)) < \frac{\eta}{48} < \frac{\eta}{16}$$

y

$$\mathbf{H}_{[0,1]}(\varphi_Y(C_j),\varphi_Y(D_j)) < \frac{\eta}{48} < \frac{\eta}{16}.$$

Similarmente, para cada $j \in \{1,...,n\}$,

$$\mathbf{H}_{[0,1]}(\varphi_X(A_{j-1}),\varphi_X(A_j)) < \frac{\eta}{48} < \frac{\eta}{16}$$

y

$$\mathbf{H}_{[0,1]}(\varphi_Y(C_{j-1}),\varphi_Y(C_j)) < \frac{\eta}{48} < \frac{\eta}{16}.$$

Para cada $j \in \{1,...,n\}$, tenemos

$$\mathbf{H}_{[0,1]}(\varphi_X(B_{j-1}),\varphi_X(B_j)) \leq$$

$$\mathbf{H}_{[0,1]}(\varphi_X(B_{j-1}),\varphi_X(A_{j-1}))+$$

$$\mathbf{H}_{[0,1]}(\varphi_X(A_{j-1}), \varphi_X(A_j))+$$
$$\mathbf{H}_{[0,1]}(\varphi_X(A_j), \varphi_X(B_j)) <$$
$$\frac{\eta}{48} + \frac{\eta}{48} + \frac{\eta}{48} = \frac{\eta}{16}.$$

Similarmente,

$$\mathbf{H}_{[0,1]}(\varphi_Y(D_{j-1}), \varphi_Y(D_j)) < \frac{\eta}{16}.$$

El continuo requerido B será construido como el límite en $2^{X\times Y}$, de una sucesión de conjuntos finitos $\{E_m\}_{m\in\mathbb{N}}$. Construiremos, para cada $m \in \mathbb{N}$, un número $k_m \in \mathbb{N}$ y un conjunto finito $E_m = \{(x_i^{(m)}, y_i^{(m)}) : i \in \{0, 1, ..., k_m\}\} \subset X \times Y$ tal que $\mathbf{H}_{X\times Y}(E_m, A) < \frac{\varepsilon}{2}$, $(x_0, y_0) = (x_0^{(m)}, y_0^{(m)})$, y para cada $i \in \{0, 1, ..., k_m - 1\}$,

$$d(x_i^{(m)}, x_{i+1}^{(m)}) < \frac{1}{m} \text{ y } \rho(y_i^{(m)}, y_{i+1}^{(m)}) < \frac{1}{m}.$$

Sean $m \in \mathbb{N}$ y $\theta > 0$ tal que $\theta <$mín$\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\eta}{16}, \frac{1}{m}\}$.
$\boxed{m}$ $\boxed{\theta}$

Afirmación 1. Existen $r_X, r_Y \in \mathbb{N}$, dos θ-funciones $\psi_X : X \to [0, r_X]$, $\psi_Y : Y \to [0, r_Y]$, $\omega > 0$ ($\omega < \theta$) y dos funciones continuas lineales por pedazos $\mu_X : [0, r_X] \to [0, 1]$ y $\mu_Y : [0, r_Y] \to [0, 1]$ que satisfacen:
(1) si $x, u \in X$ y $|\psi_X(x) - \psi_X(u)| < \omega$, entonces $d(x, u) < \theta$;
(2) si $v, y \in Y$ y $|\psi_Y(v) - \psi_Y(y)| < \omega$, entonces $\rho(v, y) < \theta$;
(3) para cada $x \in X$, $|(\mu_X \circ \psi_X)(x) - \varphi_X(x)| < \theta < \frac{\eta}{16}$;
(4) para cada $y \in Y$, $|(\mu_Y \circ \psi_Y)(y) - \varphi_Y(y)| < \theta < \frac{\eta}{16}$;
(5) para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $\mathbf{H}_{[0,1]}(\mu_X(\psi_X(A_{i-1})), \mu_X(\psi_X(A_i))) < \frac{\eta}{4}$ y $\mathbf{H}_{[0,1]}(\mu_Y(\psi_Y(C_{i-1})), \mu_Y(\psi_Y(C_i))) < \frac{\eta}{4}$;
(6) para cada $i \in \{0, 1, ..., n\}$, $\mathbf{H}_{[0,1]}(\mu_X(\psi_X(A_i)), \mu_X(\psi_X(B_i))) < \frac{\eta}{4}$ y $\mathbf{H}_{[0,1]}(\mu_Y(\psi_Y(C_i)), \mu_Y(\psi_Y(D_i))) < \frac{\eta}{4}$;
(7) para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $\mathbf{H}_{[0,1]}(\mu_X(\psi_X(B_{i-1})), \mu_X(\psi_X(B_i))) < \frac{\eta}{4}$ y $\mathbf{H}_{[0,1]}(\mu_Y(\psi_Y(D_{i-1})), \mu_Y(\psi_Y(D_i))) < \frac{\eta}{4}$.
$\boxed{r_X,\, r_Y}$ $\boxed{\psi_X,\, \psi_Y}$ $\boxed{\omega}$ $\boxed{\mu_X,\, \mu_Y}$

Para probar la Afirmación 1, aplicamos el Lema 3.2. Primero lo aplicamos usando el continuo X, la función φ_X y el número θ. Así, obtenemos $r_X \in \mathbb{N}$, una θ-función $\psi_X : X \to [0, r_X]$ y una función continua lineal por pedazos $\mu_X : [0, r_X] \to [0, 1]$ que satisfacen (3). Ahora, aplicamos el Lema 3.2 usando el continuo Y, la función φ_Y y el número θ. De este modo, obtenemos $r_Y \in \mathbb{N}$, una θ-función $\psi_Y : Y \to [0, r_Y]$ y una función continua lineal por pedazos $\mu_Y : [0, r_Y] \to [0, 1]$ que satisfacen (4). Como ψ_X es una θ-función, por el Lema 3.1, existe $\omega_X > 0$, con $\omega_X < \theta$, tal que si $x, u \in X$ y $|\psi_X(x) - \psi_X(u)| < \omega_X$, entonces $d(x, u) < \theta$. Como ψ_Y es una θ-función, por el Lema 3.1, existe $\omega_Y > 0$, con $\omega_Y < \theta$, tal que si $v, y \in Y$ y $|\psi_Y(v) - \psi_Y(y)| < \omega_Y$, entonces $\rho(v, y) < \theta$. Pongamos $\omega =$mín$\{\omega_X, \omega_Y\}$. Entonces las funciones ψ_X y ψ_Y son θ-funciones que satisfacen (1), (2), (3) y (4).

Para probar (5), tomemos $i \in \{1, ..., n\}$. Por (3), tenemos

$$\begin{gathered}\mathbf{H}_{[0,1]}(\mu_X(\psi_X(A_{i-1})), \mu_X(\psi_X(A_i))) \leq \\ \mathbf{H}_{[0,1]}(\mu_X(\psi_X(A_{i-1})), \varphi_X(A_{i-1})) + \\ \mathbf{H}_{[0,1]}(\varphi_X(A_{i-1}), \varphi_X(A_i)) + \\ \mathbf{H}_{[0,1]}(\varphi_X(A_i), \mu_X(\psi_X(A_i))) < \\ \frac{\eta}{16} + \frac{\eta}{16} + \frac{\eta}{16} < \frac{\eta}{4}.\end{gathered}$$

Similarmente, por (4),

$$\mathbf{H}_{[0,1]}(\mu_Y(\psi_Y(C_{i-1})), \mu_Y(\psi_Y(C_i))) < \frac{\eta}{4}.$$

Para probar (6), tomemos $i \in \{0, 1, ..., n\}$. Por (3), tenemos

$$\begin{gathered}\mathbf{H}_{[0,1]}(\mu_X(\psi_X(A_i)), \mu_X(\psi_X(B_i))) \leq \\ \mathbf{H}_{[0,1]}(\mu_X(\psi_X(A_i)), \varphi_X(A_i)) + \\ \mathbf{H}_{[0,1]}(\varphi_X(A_i), \varphi_X(B_i)) + \\ \mathbf{H}_{[0,1]}(\varphi_X(B_i), \mu_X(\psi_X(B_i))) < \\ \frac{\eta}{16} + \frac{\eta}{16} + \frac{\eta}{16} < \frac{\eta}{4}.\end{gathered}$$

Similarmente, por (4),

$$\mathbf{H}_{[0,1]}(\mu_Y(\psi_Y(C_i)), \mu_Y(\psi_Y(D_i))) < \frac{\eta}{4}.$$

Para probar (7), tomemos $i \in \{1, ..., n\}$. Por (3), tenemos

$$\begin{gathered}\mathbf{H}_{[0,1]}(\mu_X(\psi_X(B_{i-1})), \mu_X(\psi_X(B_i))) \leq \\ \mathbf{H}_{[0,1]}(\mu_X(\psi_X(B_{i-1})), \varphi_X(B_{i-1})) + \\ \mathbf{H}_{[0,1]}(\varphi_X(B_{i-1}), \varphi_X(B_i)) + \\ \mathbf{H}_{[0,1]}(\varphi_X(B_i), \mu_X(\psi_X(B_i))) < \\ \frac{\eta}{16} + \frac{\eta}{16} + \frac{\eta}{16} < \frac{\eta}{4}.\end{gathered}$$

Similarmente, por (4),

$$\mathbf{H}_{[0,1]}(\mu_Y(\psi_Y(D_{i-1})), \mu_Y(\psi_Y(D_i))) < \frac{\eta}{4}.$$

Por tanto, la prueba de la Afirmación 1 está terminada.

Para cada $i \in \{0, 1, ..., n\}$, sean

$$[a_i^X, b_i^X] = \mu_X(\psi_X(A_i)),\ [c_i^X, e_i^X] = \mu_X(\psi_X(B_i)),$$

$$[a_i^Y, b_i^Y] = \mu_Y(\psi_Y(C_i)) \text{ y } [c_i^Y, e_i^Y] = \mu_Y(\psi_Y(D_i)).$$

$\boxed{[a_i^X, b_i^X],\ [c_i^X, e_i^X]}$
$\boxed{[a_i^Y, b_i^Y],\ [c_i^Y, e_i^Y]}$
Entonces

$$\begin{array}{rcl} [a_0^X, b_0^X] & = & \{\mu_X(\psi_X(p_0))\}, \\ a_0^X & = & b_0^X, \\ [c_0^X, e_0^X] & = & \{\mu_X(\psi_X(x_0))\}, \\ c_0^X & = & e_0^X, \\ [a_0^Y, b_0^Y] & = & \{\mu_Y(\psi_Y(q_0))\}, \\ a_0^Y & = & b_0^Y, \\ [c_0^Y, e_0^Y] & = & \{\mu_Y(\psi_Y(y_0))\}, \\ c_0^Y & = & e_0^Y. \end{array}$$

Por (6), para cada $i \in \{0, 1, ..., n\}$, $\mathbf{H}_{[0,1]}([a_i^X, b_i^X], [c_i^X, e_i^X]) < \frac{\eta}{4}$, lo cual implica que

$$\text{máx}\{|a_i^X - c_i^X|, |b_i^X - e_i^X|\} < \frac{\eta}{4}.$$

Por (5), para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $\mathbf{H}_{[0,1]}([a_{i-1}^X, b_{i-1}^X], [a_i^X, b_i^X]) < \frac{\eta}{4}$, lo cual implica que

$$\text{máx}\{a_{i-1}^X - a_i^X, b_i^X - b_{i-1}^X\} < \frac{\eta}{4}.$$

Por (7), para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $\mathbf{H}_{[0,1]}([c_{i-1}^X, e_{i-1}^X], [c_i^X, e_i^X]) < \frac{\eta}{4}$, lo cual implica que

$$\text{máx}\{c_{i-1}^X - c_i^X, e_i^X - e_{i-1}^X\} < \frac{\eta}{4}.$$

Por tanto,

$$\begin{gathered} \text{máx}(\{\text{máx}\{|a_i^X - c_i^X|, |b_i^X - e_i^X|\} : i \in \{0, 1, ..., n\}\} \cup \\ \{\text{máx}\{a_{i-1}^X - a_i^X, b_i^X - b_{i-1}^X, c_{i-1}^X - c_i^X, e_i^X - e_{i-1}^X\} : i \in \{1, ..., n\}\}) \\ < \frac{\eta}{4}. \end{gathered}$$

Similarmente, usando (6), (5) y (7), puede ser mostrado que

$$\begin{gathered} \text{máx}(\{\text{máx}\{|a_i^Y - c_i^Y|, |b_i^Y - e_i^Y|\} : i \in \{0, 1, ..., n\}\} \cup \\ \{\text{máx}\{a_{i-1}^Y - a_i^Y, b_i^Y - b_{i-1}^Y, c_{i-1}^Y - c_i^Y, e_i^Y - e_{i-1}^Y\} : i \in \{1, ..., n\}\}) \\ < \frac{\eta}{4}. \end{gathered}$$

Para cada $k \in \{1, 2\}$, sea $\pi_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la proyección respectiva en la k-ésima coordenada.
$\boxed{\pi_k}$

Dado $i \in \{0,1,...,n\}$, como $A_i = \pi_X(\sigma(t_i))$ y $C_i = \pi_Y(\sigma(t_i))$, tenemos $\pi_1((\psi_X \times \psi_Y)(\sigma(t_i))) = \psi_X(A_i) \subset [0, r_X]$ y $\pi_2((\psi_X \times \psi_Y)(\sigma(t_i))) = \psi_Y(C_i) \subset [0, r_Y]$.

Entonces $(\psi_X \times \psi_Y)(\sigma(t_i))$ es un subcontinuo del conjunto $\psi_X(A_i) \times \psi_Y(C_i)$ y $\psi_X(A_i) \times \psi_Y(C_i)$ es un arco o una 2-celda. Entonces, por el Lema 3.3, existe una función continua $f_i : [i, i+1] \to \psi_X(A_i) \times \psi_Y(C_i)$ tal que: cada coordenada de f_i es lineal por pedazos, $\operatorname{Im} f_i$ está tan cerca como queramos de $(\psi_X \times \psi_Y)(\sigma(t_i))$ e $\operatorname{Im} f_i$ contiene cualesquiera puntos previamente elegidos en $(\psi_X \times \psi_Y)(\sigma(t_i))$.

$\boxed{f_i}$

Elegimos f_i de modo que satisfaga las siguientes condiciones.

Como $(\psi_X \times \psi_Y)(\sigma(t_0)) = \{(\psi_X(p_0), \psi_Y(q_0))\}$, podemos elegir f_0 como la función constante que sólo toma el valor $(\psi_X(p_0), \psi_Y(q_0))$.

Como $\mu_X \times \mu_Y$ es uniformemente continua, f_i puede ser elegida de modo que

$$\mathbf{H}_{[0,1]^2}((\mu_X \times \mu_Y)(\operatorname{Im} f_i), (\mu_X \times \mu_Y)((\psi_X \times \psi_Y)(\sigma(t_i)))) < \frac{\eta}{8}, \text{ y}$$

$$\mathbf{H}_{[0,r_X]\times[0,r_Y]}(\operatorname{Im} f_i, (\psi_X \times \psi_Y)(\sigma(t_i)))) < \omega. \tag{8}$$

Notemos que

$$\pi_1((\mu_X \times \mu_Y)(\operatorname{Im} f_i)) = \mu_X(\pi_1(\operatorname{Im} f_i)) \subset \mu_X(\psi_X(A_i)) = [a_i^X, b_i^X],$$

$$\pi_1((\mu_X \times \mu_Y)((\psi_X \times \psi_Y)(\sigma(t_i)))) =$$
$$\mu_X(\pi_1((\psi_X \times \psi_Y)(\sigma(t_i)))) = \mu_X(\psi_X(A_i)) = [a_i^X, b_i^X],$$

y también

$$\pi_2((\mu_X \times \mu_Y)(\operatorname{Im} f_i)) = \mu_Y(\pi_2(\operatorname{Im} f_i)) \subset \mu_Y(\psi_Y(C_i)) = [a_i^Y, b_i^Y], \text{ y}$$

$$\pi_2((\mu_X \times \mu_Y)((\psi_X \times \psi_Y)(\sigma(t_i)))) =$$
$$\mu_Y(\pi_2((\psi_X \times \psi_Y)(\sigma(t_i)))) = \mu_Y(\psi_Y(C_i)) = [a_i^Y, b_i^Y].$$

Elegimos puntos w_i, x_i, y_i, z_i en $(\psi_X \times \psi_Y)(\sigma(t_i))$ tales que

$$\mu_X(\pi_1(w_i)) = a_i^X,\ \mu_X(\pi_1(x_i)) = b_i^X,\ \mu_Y(\pi_2(y_i)) = a_i^Y \text{ y } \mu_Y(\pi_2(z_i)) = b_i^Y.$$

Entonces también podemos suponer que w_i, x_i, y_i, z_i pertenecen a $\operatorname{Im} f_i$. Entonces $a_i^X, b_i^X \in \mu_X(\pi_1(\operatorname{Im} f_i))$ y $a_i^Y, b_i^Y \in \mu_Y(\pi_2(\operatorname{Im} f_i))$. Por tanto,

$$\pi_1((\mu_X \times \mu_Y)(\operatorname{Im} f_i)) = [a_i^X, b_i^X] \text{ y}$$

$$\pi_2((\mu_X \times \mu_Y)(\operatorname{Im} f_i)) = [a_i^Y, b_i^Y].$$

$\boxed{w_i,\ x_i,\ y_i,\ z_i}$

De hecho, retrazando una parte de la trayectoria f_i, si es necesario, podemos pedir que f_i termine en x_i. Así que, $f_i(i+1) = x_i$ y $\pi_1((\mu_X \times \mu_Y)(f_i(i+1))) = b_i^X$.

Si $i \geq 1$, como $\sigma(t_{i-1}) \subset \sigma(t_i)$, podemos pedir también que $\operatorname{Im} f_i$ comience en el punto x_{i-1}. Así que, $f_i(i) = x_{i-1}$ y $\pi_1((\mu_X \times \mu_Y)(f_i(i))) = b_{i-1}^X$.

Definimos $f_X : [0, n+1] \to [0,1]$ como la extensión común de las funciones lineales por pedazos $\pi_1 \circ (\mu_X \times \mu_Y) \circ f_0, ..., \pi_1 \circ (\mu_X \times \mu_Y) \circ f_n$. Consideramos la extensión común

$f^* : [0, n+1] \to [0\,, r_X] \times [0, r_Y]$ de las funciones lineales por pedazos $f_0, ..., f_n$. Notemos que $f_X = \pi_1 \circ (\mu_X \times \mu_Y) \circ f^* = \mu_X \circ \pi_1 \circ f^*$.

$\boxed{f_X}$ $\boxed{f^*}$

Para cada $i \in \{0, 1, ..., n\}$, fijemos un punto $p'_i \in \psi_X(B_i)$ tal que $\mu_X(p'_i) = e_i^X$. En el caso que $i = 0$, $p'_i = \psi_X(x_0)$. Si $i \geq 1$, como $\psi_X(B_i)$ es un subintervalo de $[0, r_X]$ y $p'_{i-1} \in \psi_X(B_{i-1}) \subset \psi_X(B_i)$, existe una función continua lineal por pedazos $g_i : [i, i+1] \to \psi_X(B_i)$ tal que $g_i(i) = p'_{i-1}$, $g_i(i+1) = p'_i$ y $g_i([i, i+1]) = \psi_X(B_i)$. Entonces $\mu_X(g_i(i)) = e_{i-1}^X$, $\mu_X(g_i(i+1)) = e_i^X$ y

$$\mu_X(g_i([i, i+1])) = \mu_X(\psi_X(B_i)) = [c_i^X, e_i^X].$$

$\boxed{p'_i}$ $\boxed{g_i}$

Consideremos la función constante $g_0 : [0, 1] \to \{\psi_X(x_0)\}$.

$\boxed{g_0}$

Sea $g : [0, n+1] \to [0, 1]$ la extensión común de las funciones lineales por pedazos $\mu_X \circ g_0, ..., \mu_X \circ g_n$, y sea $g^* : [0, n+1] \to [0, r_X]$ la extensión común de las funciones $g_0, ..., g_n$. Notemos que $g = \mu_X \circ g^*$.

$\boxed{g}$

Por el Lema 3.4, existen funciones continuas lineales por pedazos $\alpha_X, \beta_X : [0, n+1] \to [0, n+1]$ tales que $\alpha_X(0) = 0 = \beta_X(0)$, $\alpha_X(n+1) = n+1 = \beta_X(n+1)$, y para cada $t \in [0, n+1]$,

$$|(f_X \circ \alpha_X)(t) - (g \circ \beta_X)(t)| \leq \frac{\eta}{2}. \tag{9}$$

$\boxed{\alpha_X,\, \beta_X}$

Recordemos que, para cada $i \in \{0, 1, ..., n\}$, los puntos y_i y z_i fueron elegidos en $\operatorname{Im} f_i$ y satisfacen $\mu_Y(\pi_2(y_i)) = a_i^Y$ y $\mu_Y(\pi_2(z_i)) = b_i^Y$.

Afirmación 2. Existe una función continua suprayectiva y lineal por pedazos $\lambda : [0, n+1] \to [0, n+1]$ tal que $\lambda(0) = 0$ y para cada $i \in \{0, 1, ..., n\}$, $(f^* \circ \alpha_X \circ \lambda)(i+1) = z_i$ y

$$\pi_2((\mu_X \times \mu_Y)((f^* \circ \alpha_X \circ \lambda)([i, i+1]))) = [a_i^Y, b_i^Y].$$

$\boxed{\lambda}$

Para probar la Afirmación 2, definimos $r_0 = 0$ y para cada $i \in \{1, ..., n+1\}$, $r_i = \sup\{t \in [0, n+1] : \alpha_X([0, t]) \subset [0, i]\}$. Notemos que $\alpha_X(r_i) = i$, $r_{n+1} = n+1$ y, para cada $t \in [r_0, r_1]$, se cumple que $\alpha_X(t) \in [0, 1]$ y $f^*(\alpha_X(t)) = (\psi_X(p_0), \psi_Y(q_0))$.

$\boxed{r_0,\, r_i}$

Sea $i \in \{1, ..., n+1\}$. Entonces $f^*(\alpha_X(r_i)) = f^*(i) = x_{i-1}$ y $[i-1, i] \subset \alpha_X([r_{i-1}, r_i])$. Como el dominio de f_{i-1} es $[i-1, i]$ y $z_{i-1} \in \operatorname{Im} f_{i-1}$, existe $s_i \in [r_{i-1}, r_i]$ tal que $f_{i-1}(\alpha_X(s_i)) = z_{i-1}$. Pongamos $s_0 = 0$. Notemos que $s_0 = r_0$ y $s_{i-1} \leq r_{i-1} \leq s_i \leq r_i$. Así, podemos definir $\lambda_i : [i-1, i] \to [s_{i-1}, r_i]$ como la función lineal por pedazos más simple que satisface $\lambda_i(i-1) = s_{i-1}$, $\lambda_i(i-1+\frac{1}{2}) = r_i$ y $\lambda_i(i) = s_i$.

$\boxed{s_i}$ $\boxed{\lambda_i}$

Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $\lambda_i(i) = s_i = \lambda_{i+1}(i)$, de modo que la extensión común $\lambda : [0, n+1] \to [0, n+1]$ de todas las funciones $\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}$ está bien definida. La función λ es continua porque $\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}$ son continuas. La función λ es suprayectiva porque $\lambda(0) = \lambda_1(0) = s_0 = 0$ y $\lambda(n + \frac{1}{2}) = \lambda_{n+1}(n + \frac{1}{2}) = r_{n+1} = n + 1$.

Sea $i \in \{0, 1, ..., n\}$. Entonces $\lambda(i + 1) = \lambda_{i+1}(i + 1) = s_{i+1}$ y $(f^* \circ \alpha_X \circ \lambda)(i + 1) = f_i(\alpha_X(s_{i+1})) = z_i$. Resta demostrar que

$$\pi_2((\mu_X \times \mu_Y)((f^* \circ \alpha_X \circ \lambda)([i, i + 1]))) = [a_i^Y, b_i^Y].$$

Primero tomemos $t \in [i, i + 1]$. Entonces $\lambda(t) = \lambda_{i+1}(t) \in [s_i, r_{i+1}]$ y, por la definición de r_{i+1}, $\alpha_X(\lambda(t)) \in [0, i + 1]$. Sea $j \in \{0, 1, ..., i\}$ tal que $\alpha_X(\lambda(t)) \in [j, j + 1]$. Entonces $f^*(\alpha_X(\lambda(t))) = f_j(\alpha_X(\lambda(t)))$. Como $\pi_2((\mu_X \times \mu_Y)(\mathrm{Im}\, f_j)) = [a_j^Y, b_j^Y] \subset [a_i^Y, b_i^Y]$, tenemos que $\pi_2((\mu_X \times \mu_Y)(f_j(\alpha_X(\lambda(t))))) \in [a_i^Y, b_i^Y]$.

Ahora, tomamos $u \in [a_i^Y, b_i^Y]$. Como $\pi_2((\mu_X \times \mu_Y)(\mathrm{Im}\, f_i)) = [a_i^Y, b_i^Y]$, existe $v \in [i, i+1]$ tal que $\pi_2((\mu_X \times \mu_Y)(f_i(v))) = u$. Como $[i, i + 1] \subset \alpha_X([r_i, r_{i+1}])$, existe $s \in [r_i, r_{i+1}]$ tal que $\alpha_X(s) = v$. Como $[r_i, r_{i+1}] \subset [s_i, r_{i+1}]$ y $\lambda_{i+1} : [i, i + 1] \to [s_i, r_{i+1}]$ es suprayectiva, existe $t \in [i, i + 1]$ tal que $\lambda_{i+1}(t) = s$. Entonces, $\pi_2((\mu_X \times \mu_Y)((f^* \circ \alpha_X \circ \lambda)(t))) = u$.

Por tanto, la prueba de la Afirmación 2 está terminada.

Sea $f_Y = \pi_2 \circ (\mu_X \times \mu_Y) \circ (f^* \circ \alpha_X \circ \lambda) : [0, n + 1] \to [0, 1]$. Notemos que $f_Y = \mu_Y \circ \pi_2 \circ (f^* \circ \alpha_X \circ \lambda)$ y f_Y es lineal por pedazos.

$\boxed{f_Y}$

Para cada $i \in \{0, 1, ..., n\}$, fijemos un punto $q_i' \in \psi_Y(D_i)$ tal que $\mu_Y(q_i') = e_i^Y$. En el caso que $i = 0$, $q_i' = \psi_Y(y_0)$. Si $i \geq 1$, como $\psi_Y(D_i)$ es un subintervalo de $[0, r_Y]$ y $q_{i-1}' \in \psi_Y(D_{i-1}) \subset \psi_Y(D_i)$, hay una función continua lineal por pedazos $h_i : [i, i + 1] \to \psi_Y(D_i)$ que satisface $h_i(i) = q_{i-1}'$, $h_i(i+1) = q_i'$ y $h_i([i, i+1]) = \psi_Y(D_i)$. Entonces, $\mu_Y(h_i(i)) = e_{i-1}^Y$, $\mu_Y(h_i(i + 1)) = e_i^Y$ y

$$\mu_Y(h_i([i, i + 1])) = \mu_Y(\psi_Y(D_i)) = [c_i^Y, e_i^Y].$$

$\boxed{q_i'}$ $\boxed{h_i}$

Consideremos a la función constante $h_0 : [0, 1] \to \{\psi_Y(y_0)\}$.

$\boxed{h_0}$

Sea $h : [0, n + 1] \to [0, 1]$ la extensión común de todas las funciones lineales por pedazos $\mu_Y \circ h_0, ..., \mu_Y \circ h_n$, y sea $h^* : [0, n + 1] \to [0, r_Y]$ la extensión común de todas las funciones $h_0, ..., h_n$.

$\boxed{h}$ $\boxed{h^*}$

Por el Lema 3.4, existen funciones continuas lineales por pedazos $\alpha_Y, \beta_Y : [0, n + 1] \to [0, n + 1]$ tales que $\alpha_Y(0) = 0 = \beta_Y(0)$, $\alpha_Y(n + 1) = n + 1 = \beta_Y(n + 1)$, y para cada $t \in [0, n + 1]$,

$$|(f_Y \circ \alpha_Y)(t) - (h \circ \beta_Y)(t)| \leq \frac{\eta}{2}. \tag{10}$$

$\boxed{\alpha_Y,\ \beta_Y}$

Por la continuidad uniforme de $g^* \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y$, $h^* \circ \beta_Y$, $g \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y$ y $h \circ \beta_Y$ existe $\vartheta > 0$ tal que si $s, t \in [0, n + 1]$ y $|s - t| < \vartheta$ entonces

$$|(g^* \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(s) - (g^* \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(t)| < \omega,$$

$$|(h^* \circ \beta_Y)(s) - (h^* \circ \beta_Y)(t)| < \omega,$$
$$|(g \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(s) - (g \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(t)| < \frac{\eta}{4} \text{ y}$$
$$|(h \circ \beta_Y)(s) - (h \circ \beta_Y)(t)| < \frac{\eta}{4}. \tag{11}$$

$\boxed{\vartheta}$

Fijemos una partición $0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_k = n+1$ del intervalo $[0, n+1]$ tal que para cada $i \in \{1, ..., k\}$, $\tau_i - \tau_{i-1} < \vartheta$.

$\boxed{\tau_i}$

Para cada $i \in \{0, 1, ..., k\}$, elegimos puntos $x_i^{(m)} \in X$ y $y_i^{(m)} \in Y$ de modo que satisfagan

$$\psi_X(x_i^{(m)}) = (g^* \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i) \text{ y } \psi_Y(y_i^{(m)}) = (h^* \circ \beta_Y)(\tau_i).$$

$\boxed{(x_i^{(m)}, y_i^{(m)})}$

Como $(g^* \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_0) = g^*(0) = \psi_X(x_0)$, elegimos $x_0^{(m)} = x_0$. Como $(h^* \circ \beta_Y)(\tau_0) = h^*(0) = \psi_Y(y_0)$, elegimos $y_0^{(m)} = y_0$. Pongamos $k_m = k$ y $E_m = \{(x_i^{(m)}, y_i^{(m)}) : i \in \{0, 1, ..., k_m\}\}$.

$\boxed{k_m}$ $\boxed{E_m}$

Afirmación 3. Para cada $i \in \{0, 1, ..., k_m - 1\}$,

$$\begin{aligned} d(x_i^{(m)}, x_{i+1}^{(m)}) &< \frac{1}{m}, \\ \rho(y_i^{(m)}, y_{i+1}^{(m)}) &< \frac{1}{m}, \end{aligned}$$

y

$$\mathbf{H}_{X \times Y}(E_m, A) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para probar la primera parte de la afirmación, tomemos $i \in \{0, 1, ..., k_m - 1\}$. Tenemos que $\tau_i - \tau_{i-1} < \vartheta$, la elección de ϑ implica que

$$\begin{aligned} \left|\psi_X(x_i^{(m)}) - \psi_X(x_{i+1}^{(m)})\right| &= |(g^* \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i) - (g^* \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_{i+1})| \\ &< \omega. \end{aligned}$$

Entonces, la elección de ω garantiza que $d(x_i^{(m)}, x_{i+1}^{(m)}) < \theta < \frac{1}{m}$. De manera similar, $\rho(y_i^{(m)}, y_{i+1}^{(m)}) < \frac{1}{m}$.

Para probar el resto de la afirmación, consideremos $i \in \{0, 1, ..., k_m\}$ y veamos que $(x_i^{(m)}, y_i^{(m)}) \in N(A, \frac{\varepsilon}{2})$.

Sea $j \in \{0, 1, ..., n\}$ tal que $(\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i) \in [j, j+1]$. Entonces, $f^*((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)) = f_j((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i))$. Por (8), existe $(m_1, m_2) \in \sigma(t_j) \subset A$ tal que

$$\|(\mu_X \times \mu_Y)(f_j((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i))) - (\mu_X \times \mu_Y)(\psi_X \times \psi_Y)(m_1, m_2)\| < \frac{\eta}{8}.$$

Esto implica que

$$|\mu_X(\pi_1(f_j((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i))) - \mu_X(\psi_X(m_1))| < \frac{\eta}{8} \text{ y}$$

$$|\mu_Y(\pi_2(f_j((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i))) - \mu_Y(\psi_Y(m_2))| < \frac{\eta}{8}.$$

Entonces

$$|f_X((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)) - \mu_X(\psi_X(m_1))| < \frac{\eta}{8} \text{ y}$$

$$|f_Y(\alpha_Y(\tau_i)) - \mu_Y(\psi_Y(m_2))| < \frac{\eta}{8}.$$

Por (3) y (4),

$$|\mu_X(\psi_X(m_1)) - \varphi_X(m_1)| < \frac{\eta}{8} \text{ y } |\mu_Y(\psi_Y(m_2)) - \varphi_Y(m_2)| < \frac{\eta}{8}.$$

Entonces,

$$|f_X((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)) - \varphi_X(m_1)| < \frac{\eta}{4} \text{ y}$$

$$|f_Y(\alpha_Y(\tau_i)) - \varphi_Y(m_2)| < \frac{\eta}{4}. \tag{12}$$

Por la elección de α_X y β_X,

$$|(f_X \circ \alpha_X)(\lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)) - (g \circ \beta_X)((\lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i))| \leq \frac{\eta}{2}.$$

Por definición,

$$\mu_X(\psi_X(x_i^{(m)})) = \mu_X((g^* \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)) = g((\beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)).$$

Entonces, por (3) y (12),

$$\left|\varphi_X(x_i^{(m)}) - \varphi_X(m_1)\right| \leq$$
$$\left|\varphi_X(x_i^{(m)}) - \mu_X(\psi_X(x_i^{(m)}))\right| +$$
$$\left|\mu_X(\psi_X(x_i^{(m)})) - f_X((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i))\right| +$$
$$|f_X((\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)) - \varphi_X(m_1)| <$$
$$\frac{\eta}{8} + \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{4} = \frac{7\eta}{8}.$$

Por la elección de η, $d(x_i^{(m)}, m_1) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por la elección de α_Y y β_Y,

$$|(f_Y \circ \alpha_Y)(\tau_i) - (h \circ \beta_Y)(\tau_i)| \leq \frac{\eta}{2}.$$

Por definición,

$$\mu_Y(\psi_Y(y_i^{(m)})) = \mu_Y((h^* \circ \beta_Y)(\tau_i)) = h(\beta_Y(\tau_i)).$$

Entonces, por (4) y (12),

$$\left|\varphi_Y(y_i^{(m)}) - \varphi_Y(m_2)\right| \leq$$
$$\left|\varphi_Y(y_i^{(m)}) - \mu_Y(\psi_Y(y_i^{(m)}))\right| +$$
$$\left|\mu_Y(\psi_Y(y_i^{(m)})) - f_Y(\alpha_Y(\tau_i))\right| +$$
$$|f_Y(\alpha_Y(\tau_i)) - \varphi_Y(m_2)| <$$
$$\frac{\eta}{8} + \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{4} = \frac{7\eta}{8}.$$

Por la elección de η, $\rho(y_i^{(m)}, m_2) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por tanto, $(x_i^{(m)}, y_i^{(m)}) \in B((m_1, m_2), \frac{\varepsilon}{2}) \subset N(A, \frac{\varepsilon}{2})$. Esto prueba que $E_m \subset N(A, \frac{\varepsilon}{2})$.

Ahora, tomemos $(m_1, m_2) \in A$. Como $A = \sigma(t_n)$, por (8), existe $t \in [n, n+1]$ tal que

$$\|(\mu_X \times \mu_Y)(f_n(t)) - (\mu_X \times \mu_Y)((\psi_X \times \psi_Y)(m_1, m_2))\| < \frac{\eta}{8}.$$

Esto implica que

$$|\mu_X(\pi_1(f_n(t)) - \mu_X(\psi_X(m_1))| < \frac{\eta}{8} \text{ y}$$
$$|\mu_Y(\pi_2(f_n(t))) - \mu_Y(\psi_Y(m_2))| < \frac{\eta}{8}.$$

Como $\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y : [0, n+1] \to [0, n+1]$ es suprayectiva, existe $s \in [0, n+1]$ tal que $(\alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(s) = t$. Ya que $f_X = \mu_X \circ \pi_1 \circ f^*$ y $f_Y = \mu_Y \circ \pi_2 \circ (f^* \circ \alpha_X \circ \lambda)$, las desigualdades previas pueden ser reescritas como

$$|(f_X \circ \alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(s) - \mu_X(\psi_X(m_1))| < \frac{\eta}{8} \text{ y}$$
$$|(f_Y \circ \alpha_Y)(s) - \mu_Y(\psi_Y(m_2))| < \frac{\eta}{8}.$$

Tomemos $i \in \{0, 1, ..., k_m - 1\}$ tal que $s \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$.

Como $\mu_X(\psi_X(x_i^{(m)})) = (g \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i)$ y $|s - \tau_i| \leq \tau_{i+1} - \tau_i < \vartheta$, por (11) y (9) tenemos que

$$\left|\mu_X(\psi_X(x_i^{(m)})) - \mu_X(\psi_X(m_1))\right| \leq$$
$$|(g \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(\tau_i) - (g \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(s)| +$$
$$|(g \circ \beta_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(s) - (f_X \circ \alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(s)| +$$
$$|(f_X \circ \alpha_X \circ \lambda \circ \alpha_Y)(s) - \mu_X(\psi_X(m_1))| <$$
$$\frac{\eta}{4} + \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{8} = \frac{7\eta}{8}.$$

Entonces, usando (3) y la desigualdad $\theta < \frac{\eta}{16}$, tenemos que

$$\left|\varphi_X(x_i^{(m)}) - \varphi_X(m_1)\right| \leq$$

$$\left|\varphi_X(x_i^{(m)}) - \mu_X(\psi_X(x_i^{(m)}))\right| +$$

$$\left|\mu_X(\psi_X(x_i^{(m)})) - \mu_X(\psi_X(m_1))\right| +$$

$$|\mu_X(\psi_X(m_1)) - \varphi_X(m_1)| <$$

$$\frac{\eta}{16} + |\mu_X(\psi_X(x_i^m)) - \mu_X(\psi_X(m_1))| + \frac{\eta}{16} < \eta.$$

Por la elección de η, tenemos que $d(x_i^{(m)}, m_1) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Como $\mu_Y(\psi_Y(y_i^{(m)})) = (h \circ \beta_Y)(\tau_i)$ y $|s - \tau_i| \leq \tau_{i+1} - \tau_i < \vartheta$, por (11) y (10), tenemos que

$$\left|\mu_Y(\psi_Y(y_i^{(m)})) - \mu_Y(\psi_Y(m_2))\right| \leq$$

$$|(h \circ \beta_Y)(\tau_i) - (h \circ \beta_Y)(s)| +$$

$$|(h \circ \beta_Y)(s) - (f_Y \circ \alpha_Y)(s)| +$$

$$|(f_Y \circ \alpha_Y)(s) - \mu_Y(\psi_Y(m_2))| <$$

$$\frac{\eta}{4} + \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{8} = \frac{7\eta}{8}.$$

Entonces, usando (4) y la desigualdad $\theta < \frac{\eta}{16}$, tenemos que

$$\left|\varphi_Y(y_i^{(m)}) - \varphi_Y(m_2)\right| \leq$$

$$\left|\varphi_Y(y_i^{(m)}) - \mu_Y(\psi_Y(y_i^{(m)}))\right| +$$

$$\left|\mu_Y(\psi_Y(y_i^{(m)})) - \mu_Y(\psi_Y(m_2))\right| +$$

$$|\mu_Y(\psi_Y(m_2)) - \varphi_Y(m_2)| <$$

$$\frac{\eta}{16} + \left|\mu_Y(\psi_Y(y_i^{(m)})) - \mu_Y(\psi_Y(m_2))\right| + \frac{\eta}{16} < \eta.$$

Por la elección de η, tenemos que $\rho(y_i^{(m)}, m_2) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por tanto, $(m_1, m_2) \in B((x_i^{(m)}, y_i^{(m)}), \frac{\varepsilon}{2}) \subset N(E_m, \frac{\varepsilon}{2})$. Esto prueba que $A \subset N(E_m, \frac{\varepsilon}{2})$.

Hemos mostrado que $\mathbf{H}_{X\times Y}(E_m, A) < \frac{\varepsilon}{2}$, lo cual termina la prueba de la Afirmación 3.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\{E_m\}_{m=1}^{\infty}$ converge a algún elemento $B \in 2^{X\times Y}$. Como, para cada $m \in \mathbb{N}$, $(x_0, y_0) \in E_m$, entonces $(x_0, y_0) \in B$. Como, para cada $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{H}_{X\times Y}(E_m, A) < \frac{\varepsilon}{2}$, tenemos que $\mathbf{H}_{X\times Y}(B, A) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Afirmación 4. B es conexo.

Supongamos que existen subconjuntos cerrados ajenos no vacíos K y L de $X \times Y$ tales que $B = K \cup L$. Pongamos $\text{dist}(K, L) = \text{mín}\{D(\widehat{a}, \widehat{b}) : \widehat{a} \in K \text{ y } \widehat{b} \in L\}$. Como K y L son compactos ajenos, $\text{dist}(K, L) > 0$. Entonces, existe $r > 0$ tal que $\text{dist}(K, L) > 3r$.

Podemos suponer que $(x_0, y_0) \in K$. Como $\{E_m\}_{m=1}^{\infty}$ converge a B, hay un $M \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{M} < r$ y para cada $m \geq M$, $\mathbf{H}_{X\times Y}(B, E_m) < r$. Entonces, para cada $m \geq M$,

$E_m \subset N(B,r) = N(K,r) \cup N(L,r)$. Sea $m \geq M$. Tenemos que $(x_0^{(m)}, y_0^{(m)}) = (x_0, y_0) \in K$, así que

$$l_0 = \text{máx}\{l \in \{0,1,...,k_m\} : \text{para cada } j \in \{0,...,l\},\ (x_j^{(m)}, y_j^{(m)}) \in N(K,r)\}$$

está bien definido y $l_0 \geq 0$. Si $l_0 < k_m$, entonces $(x_{l_0+1}^{(m)}, y_{l_0+1}^{(m)}) \in N(L,r)$. Así, existen $\widehat{p} \in K$ y $\widehat{q} \in L$ tales que $D(\widehat{p}, (x_{l_0}^{(m)}, y_{l_0}^{(m)})) < r$ y $D(\widehat{q}, (x_{l_0+1}^{(m)}, y_{l_0+1}^{(m)})) < r$. Por tanto,

$$\text{dist}(K,L) \leq D(\widehat{p}, \widehat{q}) \leq$$

$$D(\widehat{p}, (x_{l_0}^{(m)}, y_{l_0}^{(m)})) + D((x_{l_0}^{(m)}, y_{l_0}^{(m)}), (x_{l_0+1}^{(m)}, y_{l_0+1}^{(m)})) + D((x_{l_0+1}^{(m)}, y_{l_0+1}^{(m)}), \widehat{q}) <$$

$$r + \frac{1}{m} + r < 3r.$$

Esto contradice la elección de r, así que $l_0 = k_m$. Entonces, $E_m \subset N(K,r)$. Como esto ocurre para cada $m \geq M$, tenemos que $B \subset \text{cl}_{X\times Y}(N(K,r))$ y $L = \emptyset$. Esto contradice que $L \neq \emptyset$. Por tanto, concluimos que B es conexo.

Hemos demostrado que B es un subcontinuo de $X \times Y$, $(x_0, y_0) \in B$ y $\mathbf{H}_{X\times Y}(A,B) < \varepsilon$. Esto concluye la prueba de que $X \times Y$ es un continuo de Kelley. $\blacksquare$

Bibliografía

[1] P. Bacon, *An acyclic continuum that admits no mean*, Fund. Math. 67 (1970), 11-13.

[2] P. Bacon, *Unicoherence in means,* Colloq. Math. 21 (1970), 211-215.

[3] D. P. Bellamy y J. M. Łysko, *Connected open neighborhoods of subcontinua of product continua with indecomposable factors*, Topology Proc. 44 (2014), 223-231.

[4] J. P. Boroński, A. Illanes y E. R. Márquez, *Connected neighborhoods in Cartesian products of solenoids*, Fund. Math. 248 (2020), no. 3, 309-320.

[5] F. Capulín y W. J. Charatonik, *Retractions from $C(X)$ onto X and continua of type N,* Houston J. Math. 33 (2007), no. 1, 261-272.

[6] F. Capulín, F. Orozco-Zitli e I. Puga, *Bend intersection property and continua of generalized type N*, Topology Proc. 40 (2012), 259-270.

[7] J. J. Charatonik, *Selected problems in continuum theory*, Topology Proc. 27 (2003), no. 1, 51-78.

[8] J. J. Charatonik y W. J. Charatonik, *Property of Kelley for the Cartesian products and hyperspaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), no. 1, 341-346.

[9] J. J. Charatonik, W. J. Charatonik y S. Miklos, *Confluent mappings of fans*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 301 (1990), 1-86.

[10] J. J. Charatonik, W. J. Charatonik, K. Omiljanowski y J. R. Prajs, *Hyperspace retractions for curves,* Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 370 (1997), 1-34.

[11] J. J. Charatonik y A. Illanes, *Local connectedness in hyperspaces*, Rocky Mountain J. Math. 36 (2006), no. 3, 811-856.

[12] T. Ganea, *Symmetrische Potenzen topologischer Räume. (German),* Math. Nachr. 11 (1954), 305-316.

[13] G. Higuera y A. Illanes, *Induced mappings on symmetric products*, Topology Proc. 37 (2011), 367-401.

[14] A. Illanes, *Connected open neighborhoods in products,* Acta Math. Hungar. 148 (2016), no. 1, 73-82.

[15] A. Illanes, *Hiperespacios de continuos.* Aportaciones Matemáticas: Textos 28, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2004.

[16] A. Illanes, *Small connected neighborhoods containing the diagonal of a product*, Topology Appl. 230 (2017), 506-516.

[17] A. Illanes, *Two examples concerning hyperspace retraction,* Topology Appl. 29 (1988), no. 1, 67-72.

[18] A. Illanes y V. Martínez-de-la-Vega, *Product topology in the hyperspace of subcontinua*, Topology and its Applications 105 (2000), no. 3, 305-317.

[19] A. Illanes, J. M. Martínez-Montejano y K. Villarreal, *Connected neighborhoods in products*, Topology Appl. 241 (2018), 172-184.

[20] A. Illanes y S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1999.

[21] A. Illanes y L. C. Simón. *Means with special properties*. Houston J. Math. 29 (2003), no. 2, 313-324.

[22] A. Illanes y H. Villanueva, *The arc is the only chainable continuum admitting a mean*, Mexican Mathematical Society, Aportaciones Mat. Comun 41 (2006), 47-75.

[23] J. L. Kelley, *Hyperspaces of a continuum*, Trans. Amer. Math. Soc. 52, (1942), 22-36.

[24] K. Kuratowski, *Topology*, Vol II, Academic Press, New York, N. Y., (1968).

[25] T. Maćkowiak, *Continuous selections for* $C(X)$, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 26 (1978), no. 6, 547-551.

[26] T. Maćkowiak, *Contractible and nonselectible dendroids*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 33 (1985), no. 5-6, 321-324.

[27] S. B. Nadler Jr., *Continuum theory. An introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 158. Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[28] S. B. Nadler Jr. y L. E. Ward Jr., *Concerning continuous selections*, Proc. Amer. Math. Soc. 25, (1970), 369-374.

[29] J. A. Naranjo-Murillo, *The product of two chainable Kelley continua is also a Kelley continuum*, Topology Appl. 269 (2020), 106924, 13 pp.

[30] L. G. Oversteegen, *Noncontractibility of continua*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 26 (1978), no. 9-10, 837-840.

[31] J. R. Prajs y K. Whittington, *Filament sets and homogeneous continua*, Topology Appl. 154 (2007), 1581-1591.

[32] R. W. Wardle, *On a property of J. L. Kelley*, Houston J. Math. 3 (1977), no. 2, 291-299.