



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PORTAFOLIO DE OPCIONES SOBRE TEMPERATURA  
PARA PRODUCTORES DE MAÍZ EN LA COSTA DEL  
PACÍFICO:

UNA APLICACIÓN PARA ESTIMAR IMPACTOS  
POTENCIALES EN LA DURACIÓN DE SUS CICLOS DE  
CULTIVO.

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL TÍTULO EN

**Actuaría**

PRESENTA:

**Juan Pablo Acuña González**

DIRECTOR:

Dr. Francisco Estrada Porrúa

Ciudad Universitaria, CDMX 2020





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

<p>1. Datos Estudiante  Acuña  González  Juan Pablo  7228027439/jp_6@ciencias.unam.mx  Universidad Nacional Autónoma de México  Facultad de Ciencias  Actuaría  409073984</p>
<p>2. Datos Titular 1 (Dirección)  Dr.  Francisco  Estrada  Porrúa</p>
<p>3. Datos Titular 2  Dr.  Fernando  Baltazar  Larios</p>
<p>4. Datos Titular 3  M. en I.  Adrián  Girard  Islas</p>
<p>5. Datos Suplente 1  Dra.  Magnolia Miriam  Sosa  Castro</p>
<p>6. Datos Suplente 2  Fís.  Jimmy  Hernández  Morales</p>
<p>7. Datos del trabajo escrito  Portafolio de Opciones sobre Temperatura para  Productores de Maíz en la Costa del Pacífico  82 p  2020</p>
<p>Cambio climático; pronósticos restringidos; binomial; distribución de equilibrio ; derivdas climáticos; contrato de opción; temperatura; patrones puntuales multitypo; modelos Poisson multitypo; simulación; administración de riesgos; administración de riesgos climáticos en agricultura.</p>

---

Prefiero tener rosas en mi mesa que  
diamantes en mi cuello.  
EMMA GOLDMAN

Through research and education.  
SOCIETY OF ACTUARIES (SOA)

---

Los *derivados climáticos* son productos financieros en los que se pacta el pago de cierta cantidad si se supera algún umbral de temperatura, precipitación o cualquier otra variable climática. La primera transacción sobre derivados del clima se realizó en los Estados Unidos en 1996 entre las compañías Enron y Koch. La idea era crear un mecanismo que les permitiera transferir los riesgos de pérdidas económicas de estas empresas por la ocurrencia de condiciones climáticas inesperadas: inviernos menos fríos de lo normal o veranos menos cálidos de lo esperado. La *Chicago Mercantile Exchange* (CME) es la bolsa precursora a nivel mundial en el tema de derivados, en septiembre de 1999 la CME inició con la emisión de contratos basados en días de calentamiento (“Heating Degree Days”, HDD) y días de enfriamiento (“Cooling Degree Days”, CDD) para las principales ciudades de EE.UU. donde se negocian estos derivados.

Actualmente, en la CME se ofrecen derivados del clima en Estados Unidos, Canadá y Europa, Japón y Australia. México es un país pionero en el desarrollo e instrumentación de esquemas de cobertura del tipo catastrófica basados en el concepto de derivados climáticos. A la fecha, aproximadamente 700,000 hectáreas de cultivos están cubiertas por este tipo de instrumento para pérdidas catastróficas. Las transacciones en México son sólo de forma extrabursátil (o, *en el mostrador*, donde los instrumentos se negocian directamente entre dos partes) por lo que es necesario desarrollar una bolsa de derivados climáticos, o bien, comercializar dentro de MexDer (Mercado Mexicano de Derivados). Para poder gestionar el riesgo, mediante el uso de derivados climáticos, se debe tener primero un marco para cuantificar la magnitud del riesgo en sí mismo. Dado que el riesgo es casi por definición incierto, se sigue que los modelos apropiados serán de naturaleza probabilística o *estocástica*. Un fenómeno estocástico es un fenómeno para el cual un experimento asociado tiene más de un resultado posible, se utiliza la notación genérica  $Pr(\cdot)$  para expresar probabilidades y funciones que asignan valores numéricos a cada posible resultado son *variables aleatorias*. La *función de distribución* de una variable aleatoria  $X$ , denotada como  $F_X(x)$ , es la probabilidad de que su valor sea menor o igual a un número dado, esto es,  $F_X(x) = Pr(X \leq x)$ . Asociar probabilidades a los diversos resultados nos permite cuantificar las expectativas así como el riesgo de no cumplirlas.

El objetivo de este trabajo es poder evaluar el riesgo de cambio climático para una cartera climática establecida en el Pacífico y las interpretaciones e implicaciones para el sector agrícola son dadas: las tasas por alteraciones a la duración de cultivos de maíz son del 20 % al 50 % entre varios horizontes y al iniciar la exposición, la tasa de duración se altera en un 200 % para decrecer hasta un 20 % al ir aumentando la exposición. La estructura de los capítulos está organizado como sigue: el primero plantea el problema climático que ha surgido dentro del *antropoceno*, i.e., el cambio debido al significativo impacto global que las actividades humanas han tenido sobre el sistema climático y sus componentes; el segundo da una breve introducción sobre la historia, teoría y distribuciones para la cuantificación del riesgo, se discuten tanto familias continuas como familias discretas de distribuciones; el siguiente capítulo aplica la metodología de estimación de distribuciones de pérdida y se construye el portafolio; en el capítulo 4 se lleva a cabo la implementación espacial del portafolio a nivel local y se estudian patrones de puntos espaciales para las reclamaciones, la resiliencia y la duración en los cultivos

---

de maíz. Finalmente, se reserva un espacio a manera de discusión y ampliación de los resultados obtenidos. Los términos probabilísticos son definidos cuando son usados por primera vez y el apéndice (A) sirve como repaso de otros temas básicos. Además, se cuenta con una plataforma para la negociación climática construida en R empleando la paquetería **Shiny** (B)

# Índice general

<b>1. El Problema Climático.</b>	<b>1</b>
1.1. Análisis de Datos . . . . .	2
1.2. Desarrollo de Modelos . . . . .	10
1.2.1. Modelos Multivariados . . . . .	15
1.3. Observaciones . . . . .	22
<b>2. Teoría del Riesgo.</b>	<b>25</b>
2.1. Antecedentes y Origen. . . . .	25
2.1.1. Bachelier y la Especulación. . . . .	25
2.1.2. Las Compañías Aseguradoras en Suecia. . . . .	26
2.2. Medidas de Riesgo . . . . .	28
2.2.1. Medidas de Riesgo para Familias Continuas . . . . .	30
2.2.2. Medidas de Riesgo para Familias Discretas . . . . .	33
2.2.3. Nota sobre Simulación . . . . .	37
<b>3. Descripción del Portafolio.</b>	<b>39</b>
3.1. Análisis Continuo de Distribuciones. . . . .	39
3.2. Análisis Discreto de Distribuciones . . . . .	47
3.2.1. Impactos Potenciales en la Duración de Ciclos de Cultivo. . . . .	48
<b>4. Implementación Espacial y Repercusiones Locales.</b>	<b>51</b>
4.1. Reclamaciones. . . . .	52
4.2. Resiliencia. . . . .	53
4.3. Duración. . . . .	55
4.3.1. Intensidad. . . . .	57
4.3.2. Modelos. . . . .	59
<b>5. Conclusiones.</b>	<b>63</b>
<b>A. Apéndice.</b>	<b>67</b>
A.1. Funciones . . . . .	67
A.2. Matrices . . . . .	73
<b>B. Plataforma en Shiny.</b>	<b>77</b>
<b>Referencias.</b>	<b>79</b>

# 1

## El Problema Climático.

Eventos extremos recientes, tales como ondas de calor, sequías, inundaciones además del creciente número de incendios forestales y otros peligros naturales han aumentado la conciencia pública sobre la influencia del cambio climático y sus impactos ambientales y socio-económicos. Dichos riesgos también tienen un impacto en infraestructuras y en actividades humanas, cuestan millones de euros y causan bajas humanas. El Protocolo de Montreal es un protocolo del Convenio de Viena para la protección de la capa de ozono, fue negociado en 1987 y entró en vigor el 1 de enero de 1989. El Protocolo de Kyoto es una enmienda a la Convención Marco de las Naciones Unidas sobre el Cambio Climático. Se abrió a la firma en diciembre de 1997 y entró en vigor el 16 de febrero de 2005. Los Acuerdos de París, entrarán en vigor para el año 2020, cuando finaliza la vigencia del Protocolo de Kyoto. Estos acuerdos son compromisos asumidos por las naciones para mantener el aumento de la temperatura global por debajo de los 2 °C bajo un punto de referencia pre-industrial. Fue ratificado por México en 2016. Las proyecciones del calentamiento global utilizan comúnmente uno de los cuatro escenarios numerados para describir los gases de efecto invernadero en la atmósfera futura. Se refiere a estas proyecciones como Trayectorias de Concentración Representativas (RCP), cada una de las cuales modela el crecimiento en las emisiones de gases de efecto invernadero y de su concentración en la atmósfera hasta el año 2100. El RCP 2.6, una de las rutas más optimistas, asume que las emisiones humanas de gases de efecto invernadero comenzarán a reducirse de forma rápida y sustantiva en el corto plazo. Este escenario se mantendrá por debajo de los dos grados de calentamiento global. Gobiernos de todo el mundo intentan hacer cumplir una reducción en el uso de combustibles fósiles y se toman medidas para lidiar con cualquier aumento en desastres naturales. Los argumentos para reducir el efecto invernadero se basan en una combinación de evaluación atmosférica, economía y análisis de series temporales ya que las decisiones tomadas en

los próximos años afectarán al planeta.

La tendencia actual del calentamiento es de particular importancia porque es más probable que sea el resultado de la actividad humana a partir de mediados del siglo XX y que se desarrolla a un ritmo sin precedentes durante décadas a milenios. En [1] se presentan pruebas sólidas sobre la atribución directa del cambio climático a las emisiones de gases de efecto invernadero antropogénicas. Esto altera la composición de la atmósfera global y la respuesta del sistema climático debido a esta intervención antropogénica es comparada con la variabilidad natural del clima y el efecto de forzantes naturales, por lo tanto, encontrar indicadores sobre la atribución del cambio climático puede ser un trabajo intensivo. El conocimiento de la naturaleza del clima depende de la generación, análisis y modelación de datos de alta calidad. Como resultado, la cantidad de datos involucrados está creciendo aceleradamente. Los experimentos de intercomparación de modelos climáticos (CMIP) <sup>1</sup>, la integración de los datos ambientales con los resultados del modelo climático y el trabajo de colaboración del Panel Intergubernamental sobre el Cambio Climático (IPCC) requieren una infraestructura mejorada para tratar grandes cantidades de información. También, los procedimientos metaheurísticos se están abriendo camino en la búsqueda de soluciones más robustas y confiables. Las principales limitaciones que enfrenta este tipo de estudio se deben a la falta de financiamiento o la falta de profesionales. Aunque el número de estudios sobre los costos totales del cambio climático es pequeño, se han explorado estimaciones como la imposición de impuestos al carbono y los derivados. Los seguros indexados podrían complementar estos esfuerzos y ser particularmente importantes en América Latina.

### 1.1. Análisis de Datos

Las *series de tiempo* son analizadas para entender el pasado y predecir el futuro, permitiendo tomar decisiones informadas. Un análisis de series de tiempo cuantifica las principales características de los datos y la variación aleatoria. Cuando una variable se mide secuencialmente en el tiempo los datos resultantes forman una serie temporal, estas series se tratan como realizaciones de secuencias de variables aleatorias. Una secuencia de variables aleatorias definidas en intervalos fijos a veces se denomina *proceso estocástico a tiempo discreto* [2] [3].

Las características principales de muchas series de tiempo son las tendencias y las variaciones estacionales que se pueden modelar determinísticamente como funciones matemáticas del tiempo. Otra característica importante de la mayoría de las series es que las observaciones cercanas en el tiempo tienden a correlacionarse.

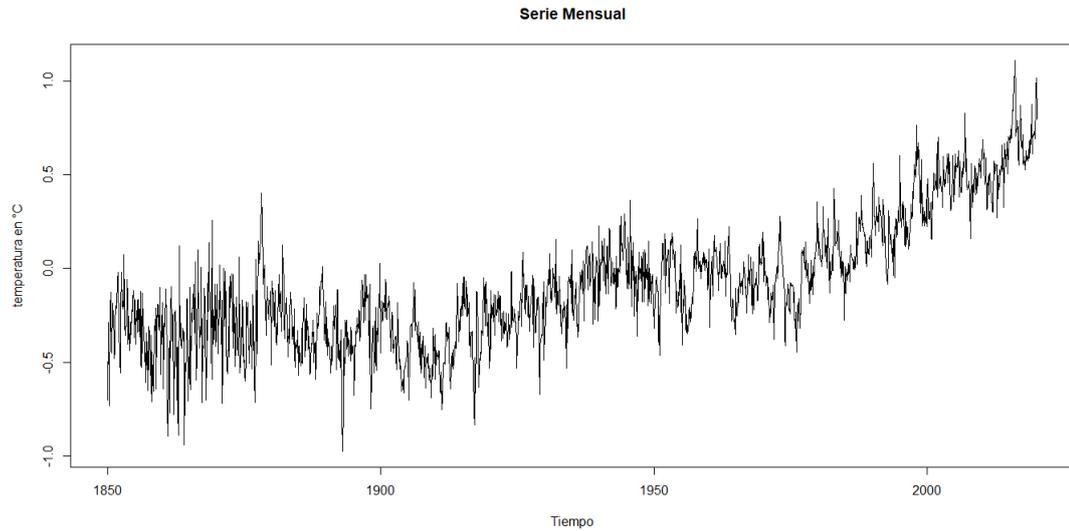
Una serie temporal se representa mediante un gráfico temporal, con el valor de la serie en el eje de ordenadas y los tiempos en el eje de abscisas. Esta es la forma más sencilla de comenzar el análisis de una serie temporal y permite detectar las características y componentes más importantes de una serie [2].

En estudios generales sobre cambio climático, la temperatura global de la superficie,

---

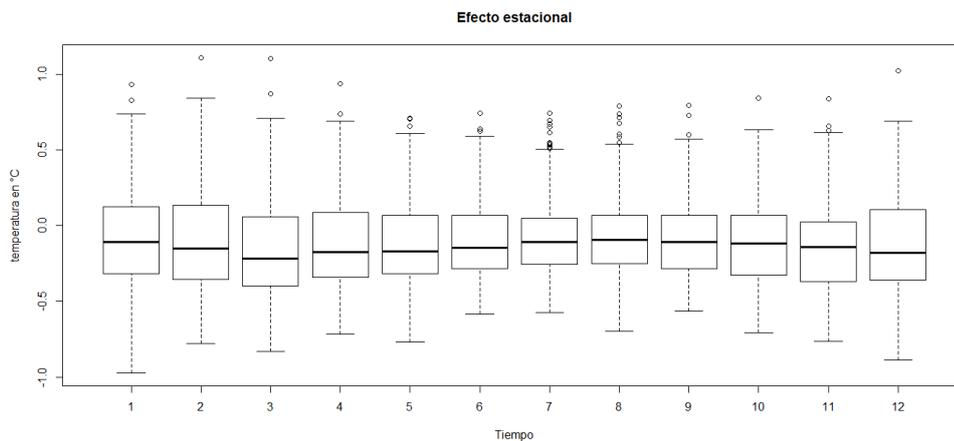
<sup>1</sup><https://www.wcrp-climate.org/>

expresada como anomalías a partir de las medias mensuales durante el periodo 1961-1990, juega un papel fundamental <sup>1</sup>.



**Figura 1.1:** Serie de temperaturas globales

Al graficar el efecto estacional de la temperatura en la figura 1.2, se observan temperaturas extremas al final y principio del año con un ligero incremento durante los meses de verano. Las diferencias estacionales son mucho más claras antes de que se tomen las anomalías con respecto a un periodo de referencia. En [4] se discute la tendencia ascendente partir de 1970 hasta finales del siglo XX mostrada en la figura 1.3.

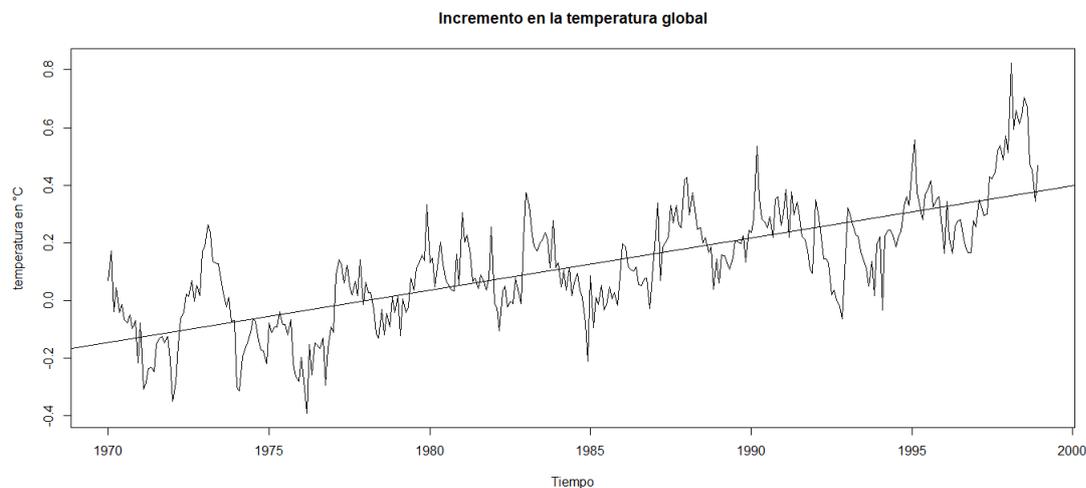


**Figura 1.2:** Diagrama de caja y brazos para temperaturas globales.

<sup>1</sup><https://crudata.uea.ac.uk/cru/data/temperature/HadCRUT4-g1.dat>

## 1. EL PROBLEMA CLIMÁTICO.

---



**Figura 1.3:** Tendencia ascendente a partir de mediados de siglo pasado.

Una pregunta de vital importancia es sobre si estos incrementos son consecuencia de actividades humanas, en particular la quema de combustibles fósiles, o es una tendencia natural, tal vez parte de un ciclo más grande, que puede descender en el futuro sin la necesidad de la reducción global de combustibles.

La serie también presenta dos periodos de desaceleración o pausas, el primero de ellos entre 1940 y 1970, y el segundo desde finales de la década de 1990 hasta principios del siglo XXI. En [5] se apela a que el primero de ellos se explica fuertemente por las guerras mundiales y los efectos de la gran depresión. El segundo apela a la reducción antropogénica de ciertos gases de invernadero y aerosoles. En [6] se presentan fuertes evidencias para atribuir a hiatos de tipo climático.

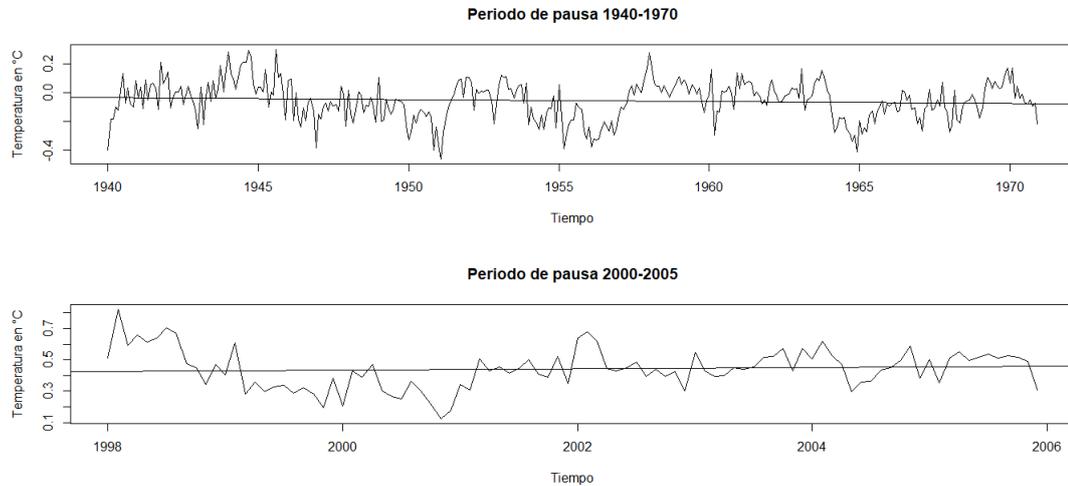
A la hora de realizar un análisis se debe determinar cómo se combinan los componentes de la serie. Para ello se consideran dos modelos habituales para descomponer los valores de la serie. El modelo de descomposición aditiva está dado por

$$x_t = m_t \cdot s_t + z_t,$$

donde, a tiempo  $t$ ,  $x_t$  es el valor observado,  $m_t$  es la tendencia,  $s_t$  es el efecto estacional y  $z_t$  es un término de error, que generalmente suele ser una secuencia de variables aleatorias correlacionadas y de media cero. Si el efecto estacional tiende a incrementar conforme incrementa la tendencia un modelo de descomposición multiplicativo es más útil [2]

$$x_t = m_t \cdot s_t \cdot z_t.$$

Si la variable es positiva y al modelo multiplicativo se le aplica un logaritmo para estabilizarlo, entonces un modelo de descomposición aditiva para  $\log(x_t)$  puede usarse



**Figura 1.4:** Periodos de desaceleración en temperaturas globales.

$$\log(x_t) = \log(m_t) + \log(s_t) + \log(z_t).$$

Una vez que se hayan identificado las tendencias y efectos estacionales, podemos desestacionalizar la serie temporal y eliminar la tendencia

$$z_t = x_t / (m_t \cdot s_t).$$

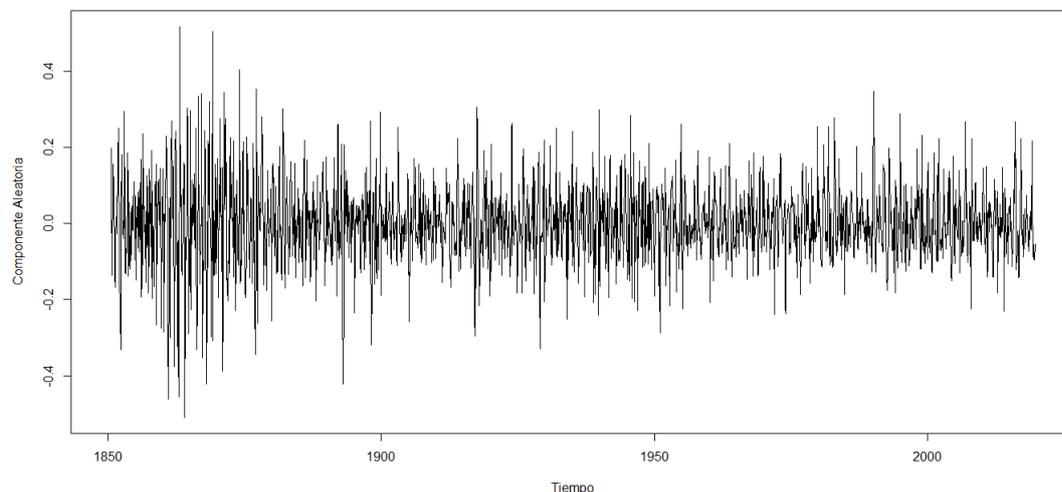
La serie climática presenta una tendencia cada vez mayor con una variación constante, lo que sugirió el uso de una descomposición aditiva. Sin embargo la descomposición no es totalmente satisfactoria pues la componente aleatoria no parece del todo libre de patrones o componentes, claramente se observa una variación mayor al inicio de la serie.

Debido a que el componente aleatorio no es necesariamente bien modelado por variables aleatorias independientes se considera la estructura de correlación de un modelo de series de tiempo.

El *valor esperado* o *esperanza*,  $\mathbb{E}$ , de una variable o función de una variable aleatoria, es su valor medio en una población. Entonces  $\mathbb{E}(x)$  es la media de  $x$ , denotada como  $\mu$ . La función media de un modelo de serie temporal es [2]

$$\mu(t) = \mathbb{E}(x_t),$$

y en general es una función de  $t$ . La esperanza en esta definición es un promedio tomado a través del conjunto de todas las series de tiempo posibles que podrían haber sido producidas por el modelo. Como se hacen estimaciones de cualquier tendencia aparente y efectos estacionales en los datos y se eliminan para obtener series temporales del componente aleatorio, entonces los modelos de series de tiempo con una media constante serán apropiados. La estimación muestral de la media poblacional,  $\mu$ , es la media muestral,  $\bar{x}$ :



**Figura 1.5:** Componente aleatoria obtenida de la descomposición aditiva de la serie de temperaturas globales.

$$\bar{x} = \sum_{t=1}^n x_t/n. \quad (1.1)$$

El hecho expresado en la ecuación (1.1) se basa en la suposición de que una serie de tiempo suficientemente larga caracteriza al modelo hipotético. Un modelo de serie temporal que es estacionario en la media es *ergódico* en la media si el promedio de tiempo para una realización del modelo tiende a la media del modelo a medida que aumenta la longitud de la serie temporal [2]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum x_t}{n} = \mu(t). \quad (1.2)$$

Lo que (1.2) implica, es que el promedio de tiempo es independiente del punto de partida.  $\mathbb{E}[(x - \mu(t))^2]$  es la media de las desviaciones cuadradas respecto a  $\mu$ , mejor conocida como la *varianza* ( $\sigma^2$ ) de  $x$ . La función de varianza de un modelo de series de tiempo que es estacionario en la media es

$$\sigma^2(t) = \mathbb{E}[(x_t - \mu)^2].$$

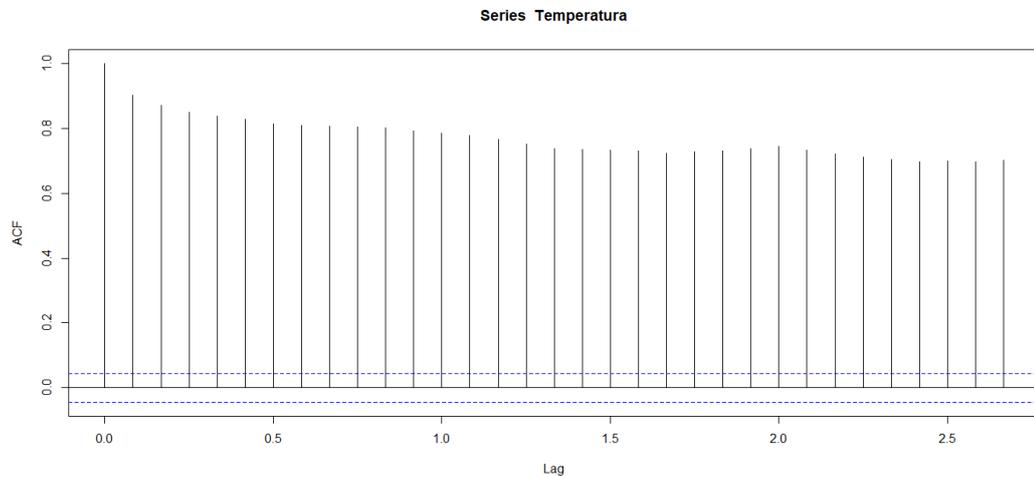
El modelo es *estacionario de segundo orden* si la correlación entre variables depende solo del número de pasos de tiempo (desfase) que las separan. Una correlación de una variable consigo misma en diferentes momentos se conoce como autocorrelación o correlación serial. Si un modelo de serie temporal es estacionario de segundo orden, podemos definir una función de autocovarianza como una función del desfase  $k$ :

$$\gamma_k = \mathbb{E}[(x_t - \mu)(x_{t+k} - \mu)],$$

y la función de autocorrelación de (acf),  $\rho_k$ , se define por

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\sigma^2}.$$

La función  $\gamma_k$  no depende del tiempo ya que el valor esperado es el mismo en todo momento  $t$ . Debido a la tendencia la correlación entre los datos climáticos presenta un decaimiento lento. Estos valores son grandes y positivos debido a valores similares en la serie que ocurren muy juntos en el tiempo.

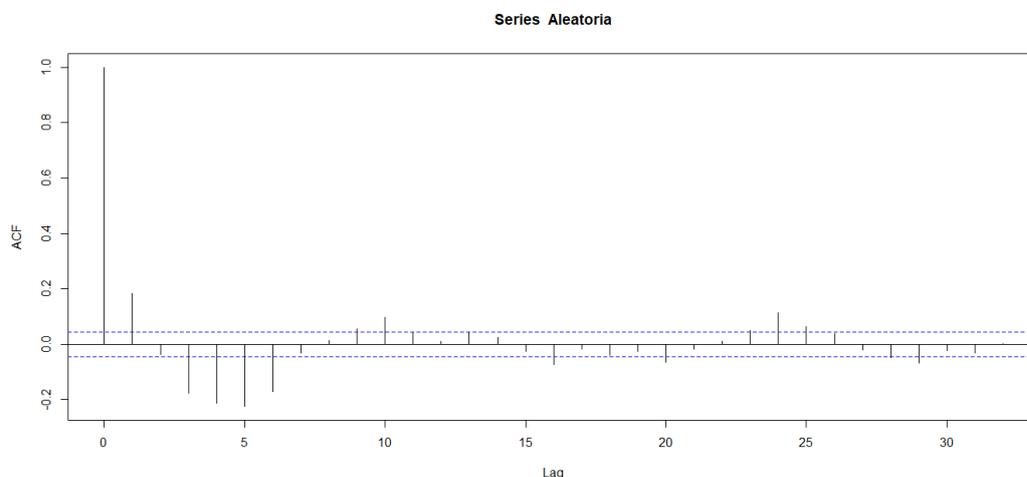


**Figura 1.6:** Decaimiento lento en la correlación de temperaturas globales.

El ciclo anual aparece en el correlograma como picos estacionales que se superponen a este patrón. Esto da un máximo con un retraso de 1 año, lo que refleja una relación lineal positiva entre pares de variables  $(x_t, x_{t+12})$  separadas por períodos de 12 meses. Por el contrario, debido a que la tendencia estacional es aproximadamente sinusoidal, los valores separados por un período de 6 meses tenderán a tener una relación negativa. Por ejemplo, los valores más altos tienden a ocurrir en los meses de verano, seguidos por valores más bajos en los meses de invierno. Por lo tanto, se produce una caída en el correlograma con un retraso de 6 meses.

Después de remover la tendencia y la componente estacional el correlograma sugiere una forma de coseno amortiguada que es característica de un modelo autorregresivo. Así que en general el modelo debe reflejar tendencia, estacionalidad y autocorrelación en los residuales.

Al ajustar modelos matemáticos a datos de series de tiempo, a las discrepancias entre los valores ajustados, calculados a partir del modelo, y los datos se les conoce como *series de errores residuales*. Un error residual es la diferencia entre el valor observado y el valor predicho del modelo al tiempo  $t$ . Si el modelo está definido para la variable  $y_t$  e  $\hat{y}_t$  es el valor predicho por el modelo, el error residual  $x_t$  es [2]



**Figura 1.7:** Correlación de temperaturas globales al remover tendencia y estacionalidad.

$$x_t = y_t - \hat{y}_t.$$

Una serie de tiempo  $\{w_t : t = 1, 2, \dots, n\}$  es *ruido blanco discreto* si las variables  $w_1, w_2, \dots, w_n$  son independientes e idénticamente distribuidas con una media de cero. Una serie de ruido blanco generalmente surge como una serie residual después de ajustar un modelo de serie de tiempo apropiado.

Un modelo fundamental no estacionario basado en ruido blanco discreto es la denominada *caminata aleatoria* [2] [3]

$$x_t = x_{t-1} + w_t.$$

La diferenciación de términos adyacentes de una serie puede transformar una serie no estacionaria en una serie estacionaria. Por ejemplo, si la serie  $\{x_t\}$  es una caminata aleatoria, no es estacionaria. Sin embargo, las diferencias de primer orden de  $\{x_t\}$  producen la serie estacionaria de ruido blanco  $\{w_t\}$  dada por  $x_t - x_{t-1} = w_t$ . Por lo tanto, la diferenciación resulta ser un útil procedimiento de filtrado en el estudio de series temporales no estacionarias.

La serie  $\{x_t\}$  es un *proceso autorregresivo de orden  $p$* , abreviado  $AR(p)$ , si

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \dots + \alpha_p x_{t-p} + w_t,$$

donde los  $\alpha_i$ 's son los parámetros del modelo. Los modelos autorregresivos a menudo proporcionan modelos satisfactorios para la serie de tiempo residual.

Un *proceso de media móvil (MA) de orden  $q$*  es una combinación lineal del término de ruido blanco actual y los  $q$  últimos términos de ruido blanco pasado y se define por

$$x_t = w_t + \beta_1 w_{t-1} + \beta_2 w_{t-2} + \dots + \beta_q w_{t-q},$$

donde los  $\beta'_i$ s son los parámetros del modelo. Debido a que los procesos MA consisten de una suma finita de términos estacionarios de ruido blanco, son estacionarios y, por lo tanto, tienen una media y autocovarianza invariantes en el tiempo.

Se obtiene una clase útil de modelos cuando los términos AR y MA se suman en una sola expresión. Una serie temporal  $\{x_t\}$  sigue un *proceso autorregresivo de promedio móvil (ARMA) de orden  $(p, q)$* , denotado  $\text{ARMA}(p, q)$ , cuando

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \dots + \alpha_p x_{t-p} + w_t + \beta_1 w_{t-1} + \beta_2 w_{t-2} + \dots + \beta_q w_{t-q}.$$

Cuando se ajusta un modelo ARMA a menudo será más eficiente (es decir, requiere menos parámetros) que un solo modelo MA o AR.

Se puede extender el concepto de caminata aleatoria para incluir términos autorregresivos y de medias móviles. Como la serie diferenciada necesita ser agregada (o integrada) para recuperar la serie original, el proceso estocástico subyacente se llama *promedio móvil integrado autorregresivo*, que se abrevia ARIMA. El proceso ARIMA puede ampliarse para incluir términos estacionales, dando origen a un nuevo *proceso ARIMA estacional (SARIMA)* [7]. Los modelos ARIMA estacionales son herramientas de gran alcance pues son capaces de modelar una amplia gama de series. Gran parte de la metodología fue iniciada por Box y Jenkins en la década de 1970 [8].

El *operador de desplazamiento hacia atrás*  $\mathbf{B}$  se define mediante

$$\mathbf{B}x_t = x_{t-1}.$$

El operador de desplazamiento hacia atrás se denomina a veces operador de retraso. Al aplicar repetidamente  $\mathbf{B}$ , se deduce que

$$\mathbf{B}^n x_t = x_{t-n}.$$

El *operador de diferencia*  $\nabla$  se define por

$$\nabla x_t = x_t - x_{t-1}.$$

Entonces, se tiene que  $\nabla x_t = (1 - \mathbf{B})x_t$ , de modo que  $\nabla$  se puede expresar en términos del operador de desplazamiento hacia atrás  $\mathbf{B}$ . En general, las diferencias de orden  $n$  se pueden expresar como

$$\nabla^n = (1 - \mathbf{B})^n.$$

Una serie  $\{x_t\}$  está *integrada de orden  $d$* , denotada como  $I(d)$ , si la diferencia  $d$ -ésima de  $\{x_t\}$  es ruido blanco  $\{w_t\}$ ; i.e.,  $\nabla^d x_t = w_t$ . Una serie temporal  $\{x_t\}$  sigue un proceso  $\text{ARIMA}(p, d, q)$  si las  $d$ -ésimas diferencias de la serie  $\{x_t\}$  son un proceso  $\text{ARMA}(p, q)$ . Un modelo ARIMA estacional utiliza diferencias en un desfase igual al número de temporadas para eliminar los efectos estacionales aditivos. El modelo estacional ARIMA  $(p, d, q)(P, D, Q)$  puede expresarse utilizando el operador de desplazamiento hacia atrás como

$$\Theta_P(\mathbf{B}^s)\theta_p(\mathbf{B})(1 - \mathbf{B}^s)^D(1 - \mathbf{B})^d x_t = \Phi_Q(\mathbf{B}^s)\phi_q(\mathbf{B})w_t,$$

donde  $\Theta_P$ ,  $\theta_p$ ,  $\Phi_Q$  y  $\phi_q$  son polinomios de orden  $P$ ,  $p$ ,  $D$  y  $d$  respectivamente. La ecuación  $\theta_p(\mathbf{B}) = 0$ , donde  $\mathbf{B}$  se trata formalmente como un número (real o complejo), se denomina *ecuación característica*. Las raíces de la ecuación característica deben exceder la unidad en valor absoluto para que el proceso sea estacionario.

Los modelos ARIMA estacionales pueden potencialmente tener un gran número de parámetros y combinaciones de términos. Por lo tanto, es apropiado probar una gran cantidad de modelos cuando se ajustan datos y escoger el mejor ajuste usando algún criterio apropiado. El AIC (Criterio de Información Akaike) es una medida de la calidad relativa de un modelo estadístico que proporciona un medio para la selección de un modelo entre un conjunto de modelos. El AIC [9] maneja un equilibrio entre el ajuste del modelo y la complejidad del modelo, para ello tiene en cuenta lo bien que el modelo se ajusta a los datos penalizando la complejidad del modelo que puede llevar a un sobreentrenamiento (es decir, un modelo más complejo puede ajustarse mejor a los datos, pero esto puede hacer que el modelo sea peor para datos futuros). Un valor más pequeño del AIC representa un mejor ajuste. Una vez que el modelo que mejor ajusta ha sido encontrado, el correlograma de los residuales debe verificarse como ruido blanco.

## 1.2. Desarrollo de Modelos

En las tablas 1.1 y 1.2 se muestran varios modelos ajustados a la serie de temperaturas globales. Al ajustar modelos a este conjunto de datos, los modelos tipo ARIMA estacionales reportan un mejor AIC.

Modelo	AIC
$x_t = -10.27867 + 0.00526t + z_t$	-800.482
$x_t = -10.35007 + 0.0053 + \frac{1}{2}z_{t-1} + w_t$	-2313.194
$- .21811 + .25914t + .13353t^2 - .02519 \cos(2\pi t)$ $- .00821\sin(2\pi t) + .01296 \cos(4\pi t) + .00847 \sin(4\pi t) + .00686 \cos(6\pi t)$ $+ .00306\sin(6\pi t) + .01137 \cos(8\pi t) + .00499 \sin(8\pi t) + .00225 \cos(10\pi t)$ $+ .00508\sin(10\pi t) - .00147 \cos(12\pi t) + z_t$	-1507.382
$- .21772 + .26022t + .13287t^2 - .02557 \cos(2\pi t)$ $- .00762\sin(2\pi t) + .01306 \cos(4\pi t) + .01194 \sin(4\pi t) + .00705 \cos(6\pi t)$ $+ .00330\sin(6\pi t) + .01143 \cos(8\pi t) + .00515 \sin(8\pi t) + .00241 \cos(10\pi t)$ $+ .00507\sin(10\pi t) - .00418 \cos(12\pi t) + z_t$	-2428.414
$-0.21770 + 0.26022t + 0.13285t^2 - 0.02558 \cos(2\pi t)$ $+ 0.01307\cos(4\pi t) + 0.01127 \sin(4\pi t) + 0.00707 \cos(6\pi t) + 0.01144 \cos(8\pi t) + z_t$	-2443.794

**Tabla 1.1:** Modelos ajustados a la serie de temperaturas globales

	Modelo	AIC
$x_t = \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right.$	$0.0053t - 10.34895 + z_t$ $t=1,13,\dots$	-2290.153
	$0.0053t - 10.35736 + z_t$ $t=2,14,\dots$	
	$0.0053t - 10.39406 + z_t$ $t=3,15,\dots$	
	$0.0053t - 10.35776 + z_t$ $t=4,16,\dots$	
	$0.0053t - 10.36766 + z_t$ $t=5,17,\dots$	
	$0.0053t - 10.33790 + z_t$ $t=6,18,\dots$	
	$0.0053t - 10.31755 + z_t$ $t=7,19,\dots$	
	$0.0053t - 10.31379 + z_t$ $t=8,20,\dots$	
	$0.0053t - 10.33566 + z_t$ $t=9,21,\dots$	
	$0.0053t - 10.34685 + z_t$ $t=10,22,\dots$	
	$0.0053t - 10.38339 + z_t$ $t=11,23,\dots$	
	$0.0053t - 10.39035 + z_t$ $t=12,24,\dots$	
$x_t = \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right.$	$0.0052t - 10.27457 + z_t$ $t=1,13,\dots$	-827.8629
	$0.0052t - 10.28290 + z_t$ $t=2,14,\dots$	
	$0.0052t - 10.31953 + z_t$ $t=3,15,\dots$	
	$0.0052t - 10.28315 + z_t$ $t=4,16,\dots$	
	$0.0052t - 10.29502 + z_t$ $t=5,17,\dots$	
	$0.0052t - 10.26476 + z_t$ $t=6,18,\dots$	
	$0.0052t - 10.24399 + z_t$ $t=7,19,\dots$	
	$0.0052t - 10.31528 + z_t$ $t=8,20,\dots$	
	$0.0052t - 10.23989 + z_t$ $t=9,21,\dots$	
	$0.0052t - 10.26144 + z_t$ $t=10,22,\dots$	
	$0.0052t - 10.27235 + z_t$ $t=11,23,\dots$	
	$0.0052t - 10.30860 + z_t$ $t=12,24,\dots$	

**Tabla 1.2:** Modelos con componente estacional ajustados a las temperaturas globales.

## 1. EL PROBLEMA CLIMÁTICO.

---

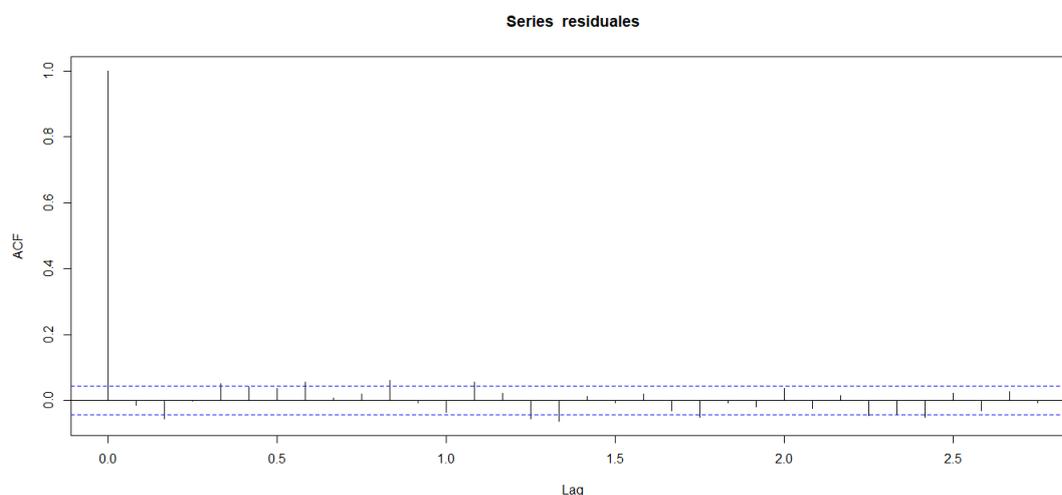
Se puede verificar una gama de modelos mediante un enfoque de prueba y error que implica simplemente evaluar un modelo en cada prueba para ver si ocurre una mejora en el AIC. Alternativamente se pueden adaptar un gran rango de modelos ARIMA y seleccionar el modelo que mejor se ajuste [2].

Implementando esta metodología se encuentra que el modelo que mejor ajusta los datos es un modelo SARIMA(2, 1, 1)(1, 0, 1). Para la serie actualizada a abril del 2020 se obtiene el siguiente modelo,

SARIMA (2,1,1)(1,0,1)					
	ar1	ar2	ma1	sar1	sma1
Coefs.	0.4554	0.1984	-0.9698	0.9915	-0.9654
error est.	0.0242	0.0240	0.0095	0.0053	0.0116

**Tabla 1.3:** Modelo ARIMA estacional ajustado a las temperaturas globales.

El modelo de la tabla 1.3 reporta un AIC de  $-2830.434$  y su correlograma para los residuales muestra un comportamiento de ruido blanco.



**Figura 1.8:** Correlograma para los residuales de un SARIMA(2,1,1)(1,0,1) ajustado a temperaturas globales.

En el análisis de residuales debe verificarse el supuesto de que los errores del modelo son un proceso puramente aleatorio (media cero, varianza constante y no correlación serial), es decir, no tienen estructura de dependencia (los residuales no deben estar correlacionados, deben ser independientes los unos de los otros) y siguen un proceso de ruido blanco.

Para verificar un supuesto se comienza con dos hipótesis, una llamada *nula*,  $H_0$  y la otra *alternativa*,  $H_1$ . La decisión se hace calculando un *estadístico de prueba*, que es una función de las observaciones y se le da un tratamiento de variable aleatoria. La especificación de la prueba se completa construyendo una *región de rechazo* que es un subconjunto de los posibles valores del estadístico de prueba. Si el valor del estadístico para la muestra observada se encuentra en la región de rechazo, entonces la hipótesis nula es rechazada y la alternativa es reportada como el resultado soportado por los datos. En otro caso, la hipótesis nula no es rechazada. El *p-value* está definido como  $\inf_{\Gamma_\alpha: t \in \Gamma_\alpha} Pr(T \in \Gamma_\alpha | H = 0)$ , el ínfimo de la probabilidad de que se rechace  $H_0$  dado que es verdadera<sup>1</sup>.  $\Gamma_\alpha$  denota la región crítica (los valores de  $T_i$  para los cuales se rechaza  $H_0$ ) a un nivel de significancia  $\alpha$  (un resultado tiene significancia estadística cuando es muy poco probable que haya ocurrido dada la hipótesis nula). Los estadísticos Ljung–Box [10] tienen como hipótesis nula que los residuos son independientes (es decir, no están correlacionados). Luego si el p-value obtenido es pequeño indica que no son aleatorios, en cambio, cuanto mayor es su p-value más evidencia hay de que los residuos son ruido blanco. El nivel mínimo es 0.05, es decir, debe suceder que el p-valor sea mayor que 0.05. Aplicando la prueba se obtiene

$\chi^2$	p-value
0.0786	0.7792

**Tabla 1.4:** Resultados de la prueba Ljung-Box.

entonces hay independencia.

Los estadísticos Jarque Bera, Shapiro-Wilk, Kolmogorov-Smirnov, D’Agostino, Lilliefors o Anderson-Darling [11] presentan como hipótesis nula que los errores se encuentran distribuidos normalmente, luego un p-value menor que 0.05, denotará que la hipótesis se puede rechazar, y los residuos no siguen una distribución normal. Para nuestro conjunto, no se cumple la normalidad.

A-D	p-value
9.5121	< 2.2e-16

**Tabla 1.5:** Resultados de la prueba Anderson Darling.

La falta de normalidad en el modelo impactará directamente en las predicciones, ya que las bandas de confianza no se estarán estimando correctamente y las conclusiones

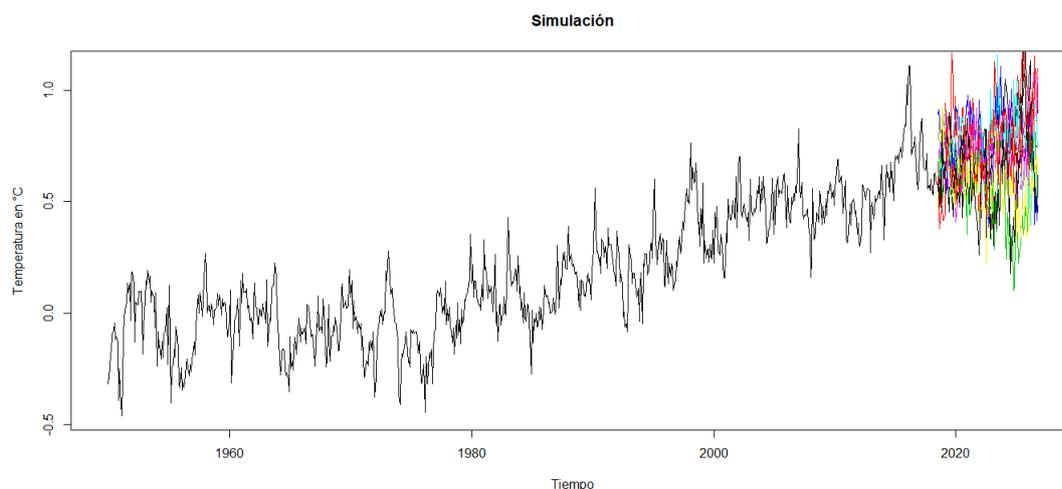
<sup>1</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Q-value\\_\(statistics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Q-value_(statistics))

## 1. EL PROBLEMA CLIMÁTICO.

---

que se extraigan del fenómeno no representarán correctamente la incertidumbre. Otra alternativa es simular el proceso generador.

El proceso de *simulación* consiste en construir un modelo para la distribución de una serie de tiempo que depende de variables aleatorias (ruido blanco, medias móviles). Por la naturaleza estocástica de estas variables al reproducir el modelo se obtendrán realizaciones distintas del fenómeno, estas realizaciones representan escenarios posibles alternativos. Tomando el modelo SARIMA(2,1,1)(1,0,1) ajustado en la tabla 1.3, se simularon 10 escenarios para evaluar el impacto en el incremento de temperaturas para los próximos 10 años, ya que este modelo se basa en el supuesto de una tendencia estocástica en la componente autorregresiva de parámetro 2 y de media móvil de parámetro 1. Sólo dos de estos presentan un comportamiento por debajo de la media de los pronósticos extrapolados y otros tres reflejan una tendencia decreciente, sin embargo, lo hacen por encima de la media. Los peores escenarios muestran picos a principios y mediados de la siguiente década y en general se observa un aumento en la aceleración de la tendencia de la serie.



**Figura 1.9:** Simulación del proceso SARIMA(2,1,1)(1,0,1). Cada realización indicada con un color distinto presenta un escenario posible de temperatura.

No se puede atribuir el incremento de las temperaturas globales al incremento del uso de combustibles fósiles sin apelar a una explicación física. Sin embargo, como el consenso general entre el reforzamiento de las hipótesis es que la tendencia en las temperaturas globales está relacionada al incremento global de emisión de gases de invernadero, parece razonable asumir una relación causal y esperar que la temperatura global continúe aumentando si las emisiones de gases de efecto invernadero no se reducen. Adicionalmente, existe una gran cantidad de estudios, basados tanto en modelos y principios físicos como modelos y análisis empíricos, que apuntan en esta dirección.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup><https://www.ipcc.ch/>

### 1.2.1. Modelos Multivariados

Los modelos multivariados son adecuados cuando las mediciones se han realizado en más de una variable de serie de tiempo.

Un enfoque para el análisis de datos que contiene múltiples cambios estructurales [12] es considerar el *modelo estándar de regresión lineal* [13]

$$y_i = x_i^T \beta_i + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

donde a tiempo  $i$   $y_i$  es la observación de la variable dependiente,  $x_i$  es un vector de orden  $k$  de regresores que explican a  $y_i$ , y  $\beta_i$  es el vector de los coeficientes de regresión. La configuración estructural se refiere a probar la hipótesis de que los coeficientes de regresión permanecen constantes

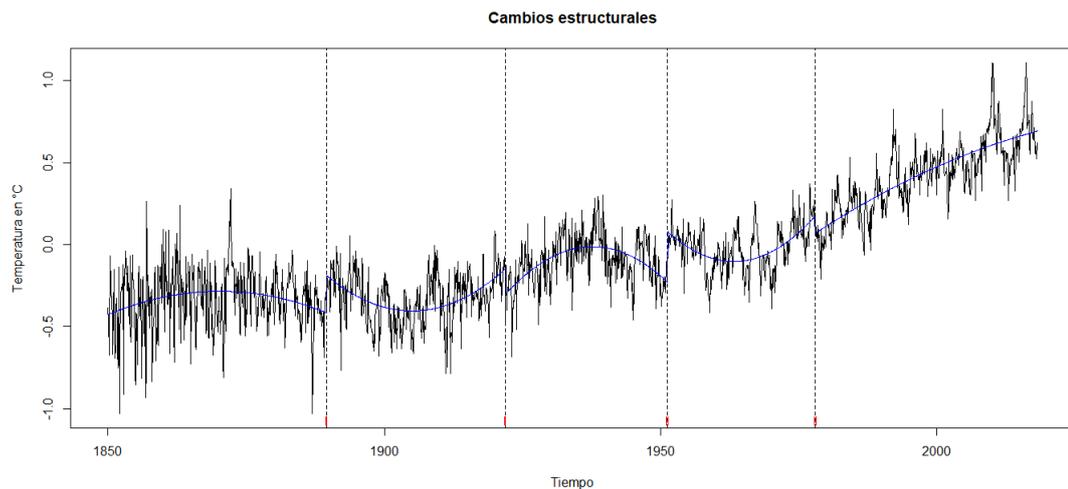
$$H_0 : \beta_i = \beta_0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

contra la alternativa de que al menos un coeficiente varía con el tiempo.

La serie estudiada presenta un cambio estructural en la pendiente de su función de tendencia. Investigaciones recientes hacen notar un incremento de la absorción de calor en los océanos contemplando una fuerte influencia antropogénica. La desaceleración observada se puede explicar por este factor, aunado a vibraciones propias del clima.

Un *forzamiento radiativo* en clima significa cualquier cambio en el balance de energía del planeta. La serie del forzamiento de gases de invernadero también presenta cambios estructurales, con un impacto notable alrededor de la década de los 70.

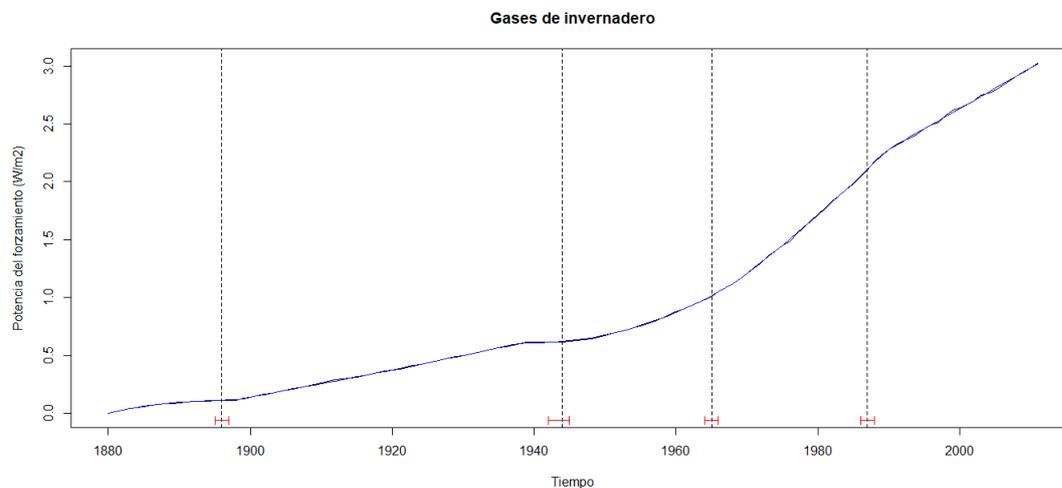
Este comportamiento ha caracterizado al fenómeno del cambio climático como un proceso con cambio de media y varianza constante.



**Figura 1.10:** Cambios estructurales en las temperaturas globales.

## 1. EL PROBLEMA CLIMÁTICO.

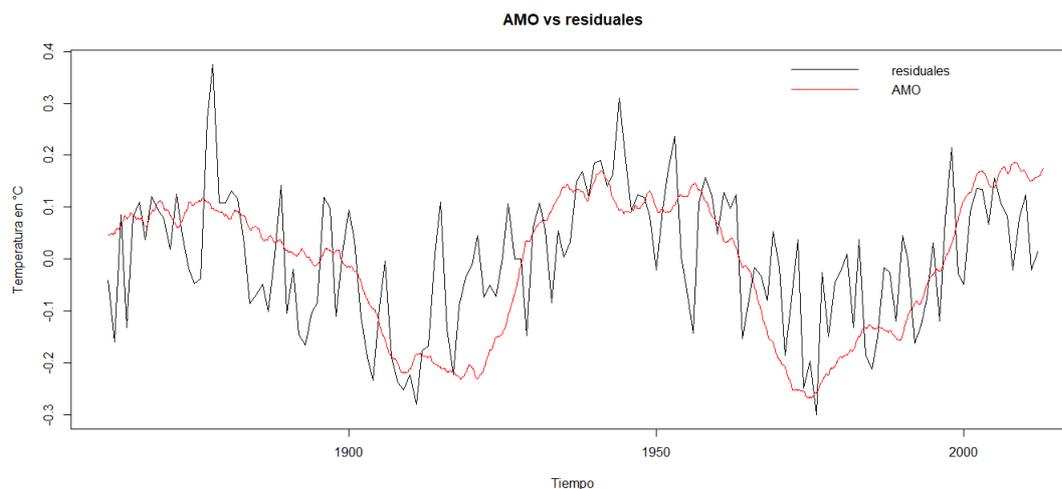
---



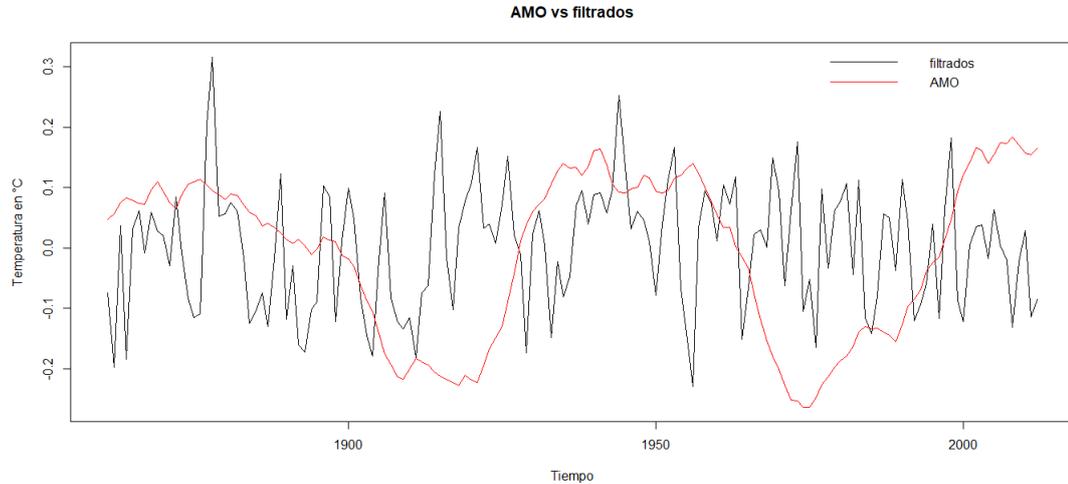
**Figura 1.11:** Cambios estructurales de los gases de invernadero.

Además del factor humano, existen forzamientos y oscilaciones naturales del sistema del clima. La Oscilación Multidecadal del Atlántico (AMO) es un proceso oceano-atmosférico que puede exagerar la tendencia del calentamiento cuando se encuentra en su fase positiva y la enmascara en su fase negativa. Esta relación se observa al comparar con la serie sin tendencia [14].

Se puede filtrar este efecto tomando los residuales de la serie sin tendencia explicados por AMO. Las temperaturas filtradas no muestran la correlación anterior y parecen solo estar afectadas por frecuencias muy altas [14].



**Figura 1.12:** Oscilación Multidecadal del Atlántico (AMO) comparada contra los residuales de las series globales de temperatura.



**Figura 1.13:** Residuales de la serie sin tendencia explicados por AMO.

La existencia de una tendencia secular común entre las temperaturas y las variables de forzamiento radiativo permite investigar las razones detrás de períodos de calentamiento rápido, ralentizaciones y pausas. Para representar las fuentes naturales más importantes de la variabilidad climática mundial y hemisférica interanual, se toman los siguientes índices: el AMO; el Índice de Oscilación del Sur (SOI), la Oscilación del Atlántico Norte (NAO) y la Oscilación Multidecadal del Pacífico (PDO) [15]. Estas series se usan para filtrar los efectos de las oscilaciones de variabilidad natural en las series de temperaturas globales. Los gases de efecto invernadero bien mezclados WMGHG (dióxido de carbono (CO<sub>2</sub>), metano (NH<sub>4</sub>), óxido nitroso (N<sub>2</sub>O) y chlorofluorocarbonos (CFC)); el forzamiento radiativo total (TRF) ( que incluye WMGHG más ozono (O<sub>3</sub>), vapor de agua estratosférico (H<sub>2</sub>O), irradiancia solar, cambio en el uso del suelo, albedo de nieve, carbón negro, aerosoles troposféricos reflectivos y el efecto indirecto de los aerosoles) y el forzamiento radiativo de aerosoles estratosféricos (STRAT) representan las fuentes antropogénicas más importantes [15]. El siguiente análisis está basado en lo propuesto por Estrada y Perron (2017).

El *análisis de componentes principales (PCA)* es un enfoque para derivar un conjunto de características de baja dimensión a partir de un gran conjunto de variables. PCA es una técnica para reducir la dimensión de una matriz de datos  $\mathbf{X}$  de dimensiones  $n \times p$ . El *primer componente principal (PC1)* de un conjunto  $X_1, X_2, \dots, X_p$ , donde  $X_i$  es la  $i$ -ésima serie climática, es la combinación lineal normalizada

$$Z_1 = \phi_{11}X_1 + \phi_{21}X_2 + \dots + \phi_{p1}X_p,$$

que tiene la mayor varianza. Por normalizado, se quiere decir que  $\sum_{j=1}^p \phi_{j1}^2 = 1$ . A los elementos  $\phi_{11}, \dots, \phi_{p1}$  se les llama los *factores de carga* del PC1. El segundo componente principal es la combinación lineal de  $X_1, \dots, X_p$  que tiene varianza máxima de todas las combinaciones lineales que no están correlacionadas con  $Z_1$ . Luego el tercer

## 1. EL PROBLEMA CLIMÁTICO.

---

componente principal es la combinación lineal no correlacionada con  $Z_1$  ni  $Z_2$  y así sucesivamente para los demás componentes. Para el conjunto de las series de temperatura y forzamientos se obtienen los siguientes factores de carga

Componentes principales					
	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5
ntemp	0.43736942	-0.03349828	0.08657986	-0.12265738	0.0628175614
gtemp	0.44842044	0.01303425	0.02702908	-0.07384054	0.0630820103
stemp	0.43755612	0.06776152	-0.04556219	-0.01292760	0.0592456307
amo	0.16168720	-0.17407788	0.52514471	-0.68674975	-0.2751129495
nao	-0.14865819	0.24073388	-0.40029456	-0.58815508	0.5792973077
pdo	0.01143316	0.57827762	0.39273963	0.26031797	-0.0220410697
soi	-0.05463439	-0.62896354	-0.26542720	0.05372677	-0.2034395661
wmghg	0.42576076	0.02325399	-0.25265640	0.12827971	-0.0099872070
trf	0.42447718	0.03860262	-0.26281757	0.11041874	-0.0002667394
strat	0.05797418	-0.41692852	0.44280966	0.24996801	0.7316548246

**Tabla 1.6:** Análisis de los componentes principales de las series de forzamientos naturales y antropogénicos.

Componentes principales					
	PC6	PC7	PC8	PC9	PC10
ntemp	-0.075017442	0.270234047	0.70366770	-0.069124000	-4.500205e-01
gtemp	0.002500156	0.358264317	0.07947128	-0.004413690	8.086360e-01
stemp	0.094549762	0.443540918	-0.66728388	0.060789382	-3.789045e-01
amo	-0.089057932	-0.292122778	-0.16390123	0.018278545	2.493039e-0
nao	-0.277549773	-0.007930990	-0.02555949	0.021221895	3.768494e-05
pdo	-0.663215339	0.009697666	-0.05420381	0.009049796	-1.680060e-04
soi	-0.669810365	0.179674244	-0.07584950	0.003495838	2.366361e-05
ghg	-0.071421685	-0.477631322	0.03427537	0.709491770	-3.199467e-03
trf	-0.079739273	-0.483198127	-0.09984564	-0.698029589	3.206023e-03
strat	-0.022391152	-0.150013622	-0.07691723	0.002138038	-3.772075e-04

**Tabla 1.7:** (cont.) Análisis de los componentes principales de las series de forzamientos naturales y antropogénicos.

La tablas 1.6 y 1.7 muestran que PC1 está relacionado con NTEMP (temperatura de la superficie del hemisferio norte), GTEMP (temperaturas globales), STEMP (temperatura de la superficie del hemisferio sur), WMGHG, y TRF. Otros ejemplos incluyen a STRAT relacionado a PC5 y AMO a PC4.

Al separar los componentes principales para la tendencia de calentamiento de otros modos de variabilidad presentes en los datos, se puede obtener una estimación de la tendencia climática que sea menos ruidosa que las temperaturas y libre de las principales fuentes de variaciones naturales, donde PC1 es el modo de tendencia del conjunto de datos.



**Tabla 1.8:** Gráficas de los componentes principales de las series climáticas.

El primer componente principal define la dirección que está lo más cerca posible de los datos. Es la dimensión a lo largo de la cual los datos varían más, y también define la línea más cercana a todas las observaciones. La varianza explicada por los primeros cuatro componentes principales es del 82.81 %, por lo que se puede mantener la variabilidad de datos originales con sólo estas cuatro dimensiones.

## 1. EL PROBLEMA CLIMÁTICO.

---

PCA1	PCA2	PCA3	PCA4
0.4255227986	0.1666351882	0.1414386376	0.0945289910

**Tabla 1.9:** Proporción de varianza explicada por los cuatro primeros componentes principales.

Dos series  $\{w_{x,t}\}$  y  $\{w_{y,t}\}$  son *ruido blanco bivariado* si son estacionarias y su *covarianza cruzada*  $\gamma_{xy}(k) = \mathbb{E}(w_{x,t}w_{y,t+k})$  satisface

$$\gamma_{xx}(k) = \gamma_{yy}(k) = \gamma_{xy}(k) = 0 \text{ para } k \neq 0.$$

En la ecuación anterior,  $\gamma_{xx}(0) = \gamma_{yy}(0) = 1$  y  $\gamma_{xy}(0)$  puede ser cero o distinto de cero. Por lo tanto, las series bivariadas de ruido blanco  $\{w_{x,t}\}$  y  $\{w_{y,t}\}$  pueden verse como ruido blanco cuando se consideran individualmente, pero cuando se consideran como un par pueden correlacionarse en el desfase  $k = 0$ . Entonces las series estacionarias  $\{w_{1,t}\}, \{w_{2,t}\}, \dots, \{w_{n,t}\}$  son *ruido blanco multivariado* si cada serie individual es ruido blanco y, para cada par de series ( $i \neq j$ ),  $\gamma_{ij}(k) = 0$  para todo  $k \neq 0$  donde  $\gamma_{ij}(k) = E(w_{i,t}w_{j,t+k})$  es la correlación cruzada entre las series  $\{w_{i,t}\}$  y  $\{w_{j,t}\}$  ( $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ ).

Un conjunto de  $m$  series de tiempo  $\{x_t, y_t, \dots, \Omega_t\}$  siguen un proceso *vector autorregresivo de orden 1 (VAR(1))* si

$$\mathbf{Z}_t = \Theta \mathbf{Z}_{t-1} + \mathbf{w}_t,$$

donde

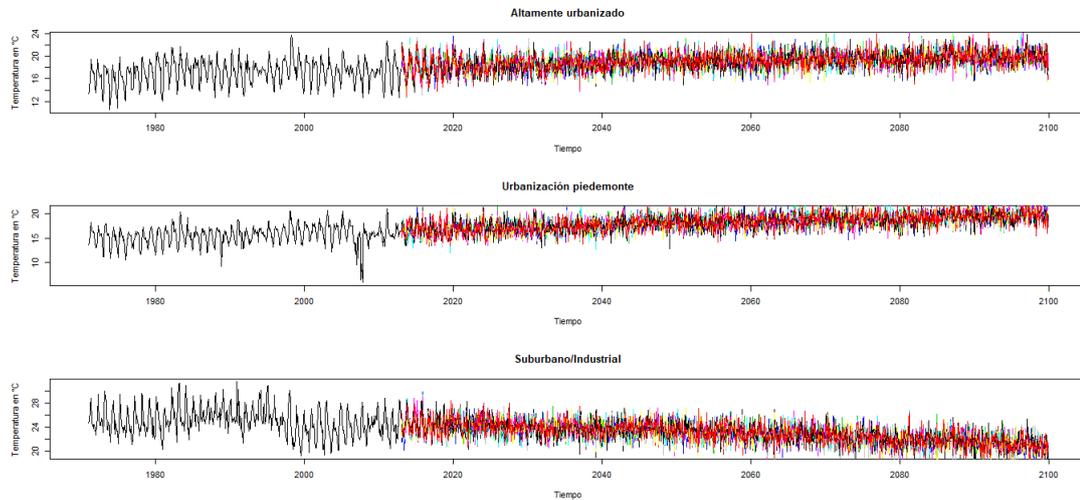
$$\mathbf{Z}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Omega_t \end{pmatrix} \Theta = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \cdots & \theta_{1m} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \cdots & \theta_{2m} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \theta_{n1} & \theta_{n2} & \cdots & \theta_{nm} \end{pmatrix} \mathbf{w}_t = \begin{pmatrix} w_{x,t} \\ w_{y,t} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{\Omega,t} \end{pmatrix},$$

empleando el operador de retraso hacia atrás esto se puede escribir como

$$(\mathbf{I} - \Theta B)\mathbf{Z}_t = \theta(B)\mathbf{Z}_t = \mathbf{w}_t, \quad (1.3)$$

donde  $\theta$  es un polinomio matricial de orden 1 e  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad. Un modelo  $VAR(p)$  para  $m$  series temporales también se define mediante la ecuación (1.3), en la que  $\mathbf{I}$  es la matriz de identidad  $m \times m$ ,  $\theta$  es un polinomio de  $m \times m$  de parámetros,  $\mathbf{Z}_t$  es una matriz  $m \times 1$  de variables de series de tiempo, y  $\mathbf{w}_t$  es ruido blanco multivariado. Para un modelo VAR, la ecuación característica viene dada por un determinante de una matriz. De forma análoga a los modelos AR, un modelo VAR(p) es estacionario si las raíces del determinante  $|\theta(x)|$  exceden la unidad en valor absoluto.

Se supondrá que existe una representación de tipo VAR para las variables en estudio para aplicar la metodología de *pronósticos restringidos* [16] [17] [18], una regla de



**Figura 1.14:** Pronósticos restringidos para tres subregiones de la Ciudad de México.

combinación óptima que se puede emplear cuando dos fuentes básicas de información están disponibles: (1) un modelo estadístico que produce los pronósticos sin restricción  $\hat{\mathbf{Z}}_t$  de  $\mathbf{Z}_t$ , y (2) alguna información externa al modelo  $\mathbf{Y}_t = \mathbf{C}\mathbf{Z}_t$  dada en forma de restricciones lineales impuestas a  $\mathbf{Z}_t$ .

La idea es contar con un estimador que no sólo es correcto en promedio, si no que se acerca mucho la mayor parte del tiempo y, en particular, se acerca más que los estimadores rivales. Esto conlleva a considerar el error absoluto promedio, sin embargo, trabajar con valores absolutos a menudo presenta complejidades analíticas por lo que se ha motivado el concepto de errores cuadráticos promedio.

A escala local el problema climático también se presenta [16] [19] [20]. En general, la creciente urbanización y la actividad industrial, y en particular los efectos de EL Niño/Índice de Oscilación del Sur (ENSO) logran afectar la señal de temperatura. Escenarios que tienen como objetivo reproducir el clima del siglo XX para el 2001-2100 junto a la temperatura de tres subregiones de la Ciudad de México producen pronósticos restringidos y capturan tanto características globales como regionales.

Estas proyecciones pueden ser interpretados como escenarios sin intervención en los que políticas con respecto a cambios en el uso del suelo así como el control de la contaminación atmosférica persistan como en el pasado. El aumento en temperatura se explica principalmente por el efecto de la creciente urbanización, mientras que el decaimiento en la zona industrial es fuertemente explicado por la emisión de aerosoles congelantes [16] [17] [19].

El uso principal del estudio de series geofísicas es en la valuación de derivados climáticos. Estas primas también pueden interpretarse como una estimación de los costos potenciales del cambio climático.

### 1.3. Observaciones

La sostenibilidad social, económica y medioambiental puede mejorarse con enfoques destinados a la gestión de riesgos de desastre y a la adaptación. Los sectores más afectados son: agrícola, pesquero, energético, servicios públicos, construcción, ventas al menudeo, turismo y transporte. Se estima que una tercera parte de las empresas son afectadas por el estado del tiempo.

Es imprescindible contar con información meteorológica y climatológica de la mejor calidad para la toma de decisiones, y en especial para las estrategias de adaptación frente al cambio climático. Sin una buena infraestructura física y humana en el área de ciencias hidroatmosféricas, no es posible evolucionar en las coberturas contra daños meteorológicos ni ingresar a los mercados financieros existentes en dichos instrumentos.

Las evaluaciones de amenazas, vulnerabilidades y riesgos deben ser realizadas por profesionales capaces y de diferentes disciplinas, ya que el tema de los desastres requiere de conocimientos que rebasan el campo de una sola especialidad; se necesita tener experiencia y conocimientos en campos tan diversos como la geología, la geotecnia, la hidrología, la economía, la planificación, y las humanidades (a la cabeza de todas estas), entre otros, para poder obtener una visión integral de la problemática de una zona bajo estudio.

El clima no es un riesgo nuevo para la actividad humana. Sin embargo, antes de poder establecer coberturas de derivados para las empresas, hacía falta elaborar bases de datos con series de variables meteorológicas históricas lo suficientemente largas.

Más allá de la concienciación y el diagnóstico, tener en cuenta el riesgo meteorológico y su cobertura es algo que requiere nuevas prácticas de gestión. En las empresas pioneras, esto es ya una realidad.

Existiendo un mercado sólido y eficiente, aquellas empresas con exposiciones a las alteraciones climáticas deberían considerar muy seriamente la cobertura de tales alteraciones ante posibles pérdidas económicas en el caso de no cubrir ese riesgo. Mediante ese paso se obtendrían numerosos beneficios adicionales. Aquellas entidades que busquen soluciones a sus riesgos climáticos aparecerían como altamente innovadoras y prudentes, obteniendo ventajas competitivas y apareciendo como más atractivas ante los inversores. Puede, por tanto, facilitar el acceso al capital y el crédito, especialmente en circunstancias financieras complicadas.

Dentro de una perspectiva más global, un aspecto imprescindible de los procesos económicos a gran escala es el desarrollo sostenible pues un medio ambiente de calidad favorece al ejercicio de economías más sanas y permite evaluar la calidad de vida de los pueblos del mundo sin utilizar recursos más allá de las capacidades propias del planeta.

El desarrollo macroeconómico que fundamenta el problema ambiental debe proveer información con referencia al mecanismo de los precios para tomar decisiones y que permita la redistribución del costo entre el mercado. Surge entonces una noción de ponderar los límites y alcances del desarrollo sostenible al aplicar política y gestión dentro de materia ambiental.

A grandes rasgos se busca disminuir el impacto de actividades humanas a través

de medidas de regulación económica, por lo que la macroeconomía debe verse como un subsistema de la ecología del planeta. Mientras que en la primera no existe un límite observable al crecimiento, en la segunda, el crecimiento debe alcanzar su escala óptima dentro del sistema global.

Debido a que se prefiere la dimensión física sobre la monetaria, la medida de éxito se obtiene a través de la sostenibilidad del nuevo sistema, condicionada a la capacidad de carga del ecosistema planetario. Al partir de este supuesto en el que se extiende a la macroeconomía, que es parte del algo y no un todo como tal, entonces el crecimiento se vuelve en sí mismo un problema sustancial, de ello emana la noción de sostenibilidad y si no se atiende al crecimiento de manera ordenada se posibilita la existencia de desequilibrios que pondrían eventualmente en peligro la permanencia misma del sistema total [21].

El subsistema macroeconómico debe pues, adquirir un tamaño óptimo relativo que asegure esto. Dicho tamaño óptimo será el sostenible. Esta dinámica físico-económica debe permitir a las culturas humanas poder desarrollarse pero con los efectos de sus actividades retenidos dentro de ciertos límites.

Más concretamente, la creación de mercados específicos que logren captar dinámicas del plano natural harán tangibles los conceptos fiscales y monetarios bajo esta vertiente. Incorporando una nueva curva de equilibrio ecológico se enfatiza que el medio ambiente natural tiene una capacidad de carga agregada, incorporando una restricción al máximo nivel posible de actividad económica. En ella se refleja la degradación ecológica, la intensidad ambiental agregada de la economía y la capacidad del ambiente para regenerarse. Conforme esta intensidad sea mayor a la regeneración el medio ambiente se degradará paulatinamente y el equilibrio se logra cuando estas se igualan, es decir, se respeta la capacidad de carga y el medio no se degrada. Esta curva combina la tasa de interés del mercado específico con su nivel de producto para el mantenimiento del equilibrio ecológico. Al ubicar puntos sobre esta curva se deben encontrar combinaciones interés-producto en donde no se utilicen bienes y servicios ambientales a una tasa superior a la que el medio natural puede proveerlos. La degradación cero es entonces el equilibrio, si la intensidad supera a la capacidad regeneradora la degradación es positiva y si es inferior se tendrá degradación negativa y restauración.

Como los instrumentos miden alteraciones climáticas por medio de relaciones contractuales se pueden construir escenarios que comparen los valores proyectados de, temperatura por ejemplo, contra un escenario base al día de hoy. La diferencia en el caso de escenario de cambio climático utilizado contra el caso de referencia sin cambio climático provee información de los costos de este fenómeno.

Esto se puede correlacionar fuertemente a la saturación de ciertos gases de invernadero en la atmósfera, y existe la posibilidad estar en presencia de un momento en el que el daño a la atmósfera ya no sea reversible.

Bajo una visión macroeconómica se pueden mostrar a grandes rasgos las implicaciones de política a tomar en cuenta dentro de la sostenibilidad, además resulta muy explícita la dependencia que la economía, al agregarse, guarda en relación con los recursos naturales. Así como en general se está buscando crecer la producción para disminuir

## 1. EL PROBLEMA CLIMÁTICO.

---

desempleo mientras se mantenga la inflación para no alterar decisiones financieras estables, también se deben tomar en cuenta las medidas de compromiso ambiental. Al promover un crecimiento económico, este podrá ser sustentable conforme sus políticas ambientales logren anular los efectos dañinos sobre el medio ambiente.

El crecimiento tan desmedido de la producción se aleja frecuentemente de las metas de sostenibilidad, sin embargo al contar con políticas ambientales suficientemente desarrolladas se pueden mantener niveles altos de actividad económica que sean ambientalmente sostenibles. La sociedad pierde tanto por déficit de producto como por déficit de objetivo ambiental con lo que se busca apegarse al principio conocido como “el que contamina paga”. El poder asignarle un valor monetario a nuestros impactos ambientales nos deja determinar niveles de contaminación, sin embargo, el nivel óptimo puede no ser alcanzable más que a costos muy altos o inalcanzables.

# 2

## Teoría del Riesgo.

### 2.1. Antecedentes y Origen.

En esta sección se presenta un pequeño recuento de los acontecimientos que impulsaron el nacimiento de la teoría del riesgo como la conocemos hoy en día. La forma en que se presenta esta recapitulación histórica es a través de los trabajos de Bachelier, Lundberg y Cramér.

#### 2.1.1. Bachelier y la Especulación.

Es posible que la primera manifestación de un tratado conciso sobre el riesgo sea el atribuido al trabajo de Louis Bachelier a finales del siglo XX. Su discusión seminal sobre el movimiento de las acciones en un mercado financiero no sólo marcaron por vez primera el uso de matemáticas avanzadas en el estudio de la economía, sino que su *Theory of Speculation* [22] se considera como el primer artículo en modelar un proceso estocástico.

Aunque Bachelier fue un pionero en el modelo y el análisis de los mercados financieros, en la actualidad se sabe que su modelo era incorrecto en lo que se refiere a la predicción de que los precios cambian siguiendo una distribución normal. Durante varios años, Bachelier desarrolló la teoría de los procesos de difusión que fue publicada en revistas de prestigio. Profundizó sus estudios sobre los fenómenos estocásticos y las consecuencias de la Segunda ley de la termodinámica.

En 1909 se convirtió en profesor libre de la Sorbona. En 1914 publicó el libro *Le Jeu, la Chance, et le Hasard* del que vendió unas 6,000 copias. Gracias al apoyo de la Universidad de París, Bachelier obtuvo un puesto permanente de profesor en la Sorbona, pero al iniciarse la Primera Guerra Mundial Bachelier se unió al ejército. Después de la guerra encontró trabajo en Besançon cubriendo una vacante. En 1922 reemplazó a otro

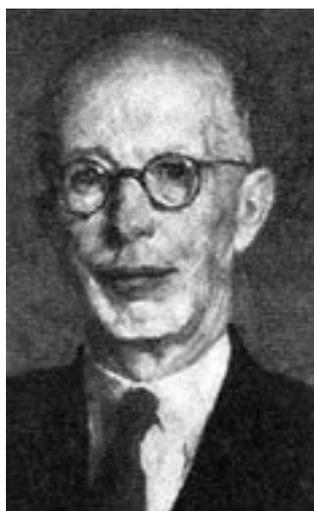


**Figura 2.1:** Louis Bachelier

profesor en Dijon. Se trasladó a Rennes en 1925 y finalmente consiguió un puesto fijo de profesor en Besançon en el que estuvo durante 10 años.

### 2.1.2. Las Compañías Aseguradoras en Suecia.

El problema central del riesgo fue tratado de manera más rigurosa hasta 1903 cuando Ernst Filip Oskar Lundberg defendió su tesis sobre probabilidad y riesgo colectivo. Esto lo consiguió durante su desarrollo profesional dentro de una recién formada compañía aseguradora, en contraste con la forma tradicional en que los matemáticos obtienen esta posición a través de la academia. Muy pronto logró posicionarse en una nueva compañía aseguradora y a la edad de 28 años, se convirtió su director general.

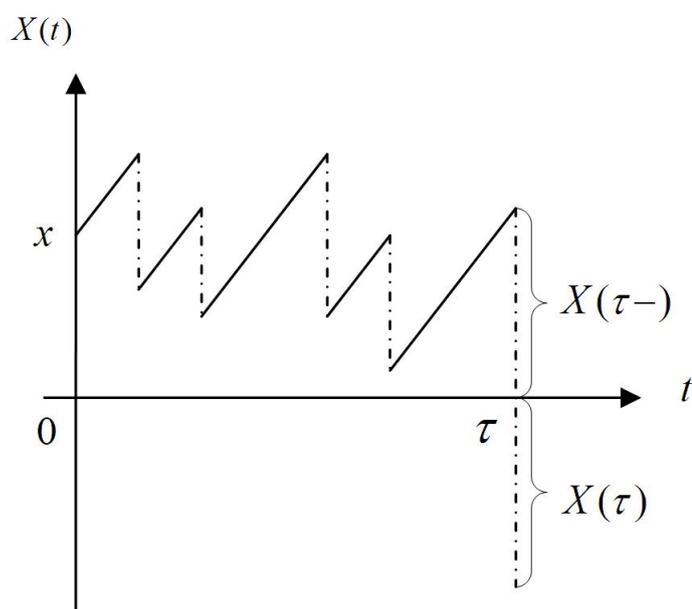


**Figura 2.2:** Filip Lundberg

El modelo a grandes rasgos consiste en describir a una compañía que experimenta el efecto de dos flujos de efectivo: la captación de primas y el pago de reclamacio-

nes. Las primas se reciben a una tasa constante  $c > 0$  por parte de los tenedores de pólizas y las reclamaciones ocurren siguiendo un proceso de Poisson con intensidad  $\lambda$  bajo el supuesto de ser variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución  $F$  y media  $\mu$  (esto es lo que conforma el llamado *Proceso de Poisson compuesto*). Entonces para un asegurador con un capital inicial  $x$ ,

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i \quad \text{para } t \geq 0.$$



**Figura 2.3:** Trayectoria proceso Poisson compuesto.

La tesis doctoral de Lundberg, *Approximations of the Probability Function/Reinsurance of Collective Risks* [23], es única ya que maneja conceptos y métodos que tuvieron que esperar tres décadas para poder ser puestos en una base rigurosa, pero en palabras de Cramér, es imposible de descifrar. Fue sólo gracias a la labor de Harald Cramér a través de sus alumnos en la Universidad de Estocolmo que el trabajo de Lundberg tomó forma, volviéndose accesible a las futuras generaciones. Poco después de la Segunda Guerra Mundial Cramér publicó su muy influyente libro, *Mathematical Methods of Statistics* [24] en 1946.

El libro representa una contribución novedosa a la literatura estadística. Las ideas se desarrollan con elegancia y una aparente facilidad caracterizado por un tratamiento poco convencional de la materia que refleja la personalidad científica del autor.

La primera parte es una introducción a la teoría de la integración y medida suponiendo que no hay más que un conocimiento práctico de cálculo. Una medida es en esencia una forma de asignar un tamaño o peso a los conjuntos en un espacio determinado; la integral de una función, una media ponderada de sus valores, los pesos siendo

dada por la medida. No todos los espacios son medibles, ni son todos los conjuntos dentro de un espacio medible, ni son todas las funciones integrables. La principal labor técnica es hacer la mayor cantidad medible, y así integrable, como sea posible. Esta es una de las mejores exposiciones introductorias de teoría de la medida. (El énfasis es en la integración de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ , pero Cramér también discute integrales algo más generales, y espacios mucho más generales.)

El texto continúa definiendo un espacio de probabilidad como un espacio medible en el que la medida cumple con ciertos requisitos, los axiomas de la teoría de la probabilidad.

La última parte del libro trata la inferencia estadística, métodos de identificar y clasificar las distribuciones a partir de datos parciales. Cramér comienza con distribuciones muestrales, es decir, la distribución de partes (muestras) de las grandes poblaciones asumiendo la distribución de la población a ser conocida. A partir de ahí se va a pruebas de hipótesis, las consideraciones de cuándo rechazar una idea como demasiado improbable en vista de los datos. Todas las partes de la discusión de la inferencia estadística se complementan con ejemplos del mundo real, apoyándose en los datos proporcionados por el censo sueco. Este libro es un clásico, no menos por su combinación de lucidez y rigor.



**Figura 2.4:** Harald Cramér

### 2.2. Medidas de Riesgo

La evaluación de riesgos implica conocer la distribución de posibles resultados, con un enfoque en lo peor que podría pasar, por ejemplo, evaluar la probabilidad de eventos climáticos y sus posibles pérdidas. El *Valor en Riesgo* ( $VaR$ ,  $V@R$ ) es una forma de realizar la evaluación de riesgos para dichos eventos. La idea es estimar las pérdidas

que ocurren con una probabilidad dada. Con una estimación de la distribución de los resultados, se puede preguntar acerca de la probabilidad de que las pérdidas excedan un umbral dado. En la práctica es mejor saber la magnitud esperada de las pérdidas si es que llegasen a ocurrir, una medida relacionada y, a menudo preferible es el TVaR (*Tail Value at Risk*), que es la pérdida esperada si el nivel VaR se excedió. Mientras que el VaR especifica el nivel, que será excedido con cierta probabilidad, el TVaR mide la gravedad promedio del exceso. Es posible interpretar el TVaR como un promedio de VaR's con diferentes niveles de confianza. Los reguladores pueden usar estas medidas para calcular requerimientos de capital.

Propiedades específicas deseables de las medidas de riesgo han sido propuestas como axiomas. Artzner et al. [25] introdujeron el concepto de *coherencia*, y su trabajo se considera pionero en la medición del riesgo. Sean  $X, Y$  variables aleatorias no negativas, una medida de riesgo,  $\rho(\cdot)$ , es una función que asocia las pérdidas a un número. Es *subaditiva* si

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y). \quad (2.1)$$

La propiedad en (2.1) significa que el capital requerido para cubrir riesgos combinados no será mayor que para los riesgos considerados por separado. Esta propiedad refleja el beneficio de la diversificación del riesgo. La propiedad de *monotonidad* dice que

$$\text{si } X \leq Y \text{ entonces } \rho(X) \leq \rho(Y). \quad (2.2)$$

La ecuación (2.2) significa que si un riesgo genera mayores pérdidas que otro riesgo bajo las mismas circunstancias, entonces el capital requerido para cubrirlo siempre será mayor. La *homogeneidad positiva* dada por (2.3), refleja que no hay beneficios de diversificación cuando tenemos múltiplos de la misma cartera, es decir,

$$\rho(\alpha X) = \alpha \rho(X). \quad (2.3)$$

Por último, la *invarianza de traslación* (2.4) dice que añadir una cantidad constante a un riesgo incrementa la medida de riesgo en esa misma cantidad, esto es,

$$\rho(X + \alpha) = \rho(X) + \alpha. \quad (2.4)$$

Esto implica que la medida de riesgo para una pérdida no aleatoria, con valor conocido  $\alpha$ , es simplemente la cuantía de la pérdida  $\alpha$ . Se dice que una medida de riesgo que satisface las cuatro condiciones anteriores es coherente.

Se entiende por el *soporte* de una pérdida como el conjunto de números que son posibles valores para esta variable aleatoria. Una pérdida se llama *discreta* si el soporte contiene a lo más un conjunto numerable de valores. Se llama *continua* si su función de distribución es una función continua y totalmente diferenciable excepto en un conjunto numerable de puntos. El material en el resto de este capítulo está fuertemente basado en [26] para la parte continua y en [27] para la discreta.

### 2.2.1. Medidas de Riesgo para Familias Continuas

Sea  $S$  la variable aleatoria no negativa que mide las pérdidas totales. La función de supervivencia o *cola de la distribución* es la probabilidad de que la pérdida sea mayor a un número dado,  $\bar{F}_S(x) = Pr(S > x) = 1 - F_S(x)$ . La *función de densidad*,  $f_S(x)$ , es la derivada de la función de distribución y su integral sobre todo el espacio es igual a 1. El  $k$ -ésimo momento de una variable aleatoria es el valor esperado (promedio) de la  $k$ -ésima potencia de la variable, donde el primer momento es la esperanza de la variable. La fórmula para el  $k$ -ésimo momento de variables continuas es

$$\mu_k = \mathbb{E}(S^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_S(x) dx. \quad (2.5)$$

Cuando es de interés estudiar una pérdida condicionada a la ocurrencia de otro evento se hace uso de la *densidad condicional*  $f_{S|Y}(s|y)$ , que a su vez permite definir la *esperanza condicional* como

$$\mathbb{E}(S|Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{S|Y}(x|y) dx. \quad (2.6)$$

Las cantidades distribucionales (2.5) y (2.6) son útiles para la determinación del Valor en riesgo de  $S$ , o  $VaR_p(S)$ , definido por

$$VaR_p(S) = \inf_{x \geq 0} \{x | \bar{F}_S(x) \leq 1 - p\}, 0 < p < 1.$$

Por lo que  $\bar{F}_S[VaR_p(S)] \leq 1 - p$ , donde la igualdad se cumple si  $\bar{F}_S(x)$  no tiene saltos discretos en  $VaR_p(S)$ . Como medida de riesgo, esto se conoce históricamente como el principio percentil y no es una medida de riesgo coherente.

Sin embargo, el  $TVaR_p(S)$ , usualmente definido como

$$TVaR_p(S) = \mathbb{E}[S | S > VaR_p(S)] = \frac{\int_p^1 VaR_\phi(S) d\phi}{1 - p},$$

es una medida de riesgo coherente.

También, la variable aleatoria *stop-loss*, con un nivel  $x$  de detener la pérdida, definida como  $(S - x)_+ = \max(S - x, 0)$ , y su media es la *prima stop-loss* dada para  $x \geq 0$  como

$$\mathbb{E}(S - x)_+ = \int_x^\infty (y - x) dF_S(y) = \int_x^\infty \bar{F}_S(y) dy.$$

Claramente,

$$\mathbb{E}(S | S > x) = \frac{\int_x^\infty y dF_S(y)}{\bar{F}_S(x)},$$

por lo que

$$\mathbb{E}(S | S > x) = x + \frac{\mathbb{E}[(S - x)_+]}{\bar{F}_S(x)},$$

lo que implica una estrecha relación entre el  $TVaR_p(S)$  y la prima stop-loss (con un nivel de  $VaR_p(S) = \pi_p$  de detener la pérdida). Otra cantidad de interés es la *vida media residual* definida por

$$m(x) = \mathbb{E}(S - x | S > x) = \frac{\int_x^\infty (y - x) dF_S(y)}{\bar{F}_S(x)} = \frac{\int_x^\infty \bar{F}_S(y) dy}{\bar{F}_S(x)}.$$

Se sigue que

$$\mathbb{E}[(S - x)_+] = m(x)\bar{F}_S(x),$$

y entonces

$$\mathbb{E}(S | S > x) = x + m(x).$$

La evaluación de  $TVaR_p(S)$  es directa usando la vida media residual con  $x$  reemplazado por  $VaR_p(S)$ . La *variable de pérdida limitada* es útil para definir coberturas hasta cierto límite. Se define como,

$$S \wedge x = \begin{cases} S, & \text{si } s \leq x. \\ x, & \text{si } s > x. \end{cases} \quad (2.7)$$

El primer momento de la variable (2.7) es  $\mathbb{E}(S \wedge x) = \int_0^x \bar{F}_S(y) dy$  se le conoce como *valor esperado limitado*. Entonces,

$$m(x) = \frac{\int_x^\infty \bar{F}_S(y) dy}{\bar{F}_S(x)} = \frac{\int_0^\infty \bar{F}_S(y) dy - \int_0^x \bar{F}_S(y) dy}{\bar{F}_S(x)} = \frac{\mathbb{E}(S) - \mathbb{E}(S \wedge x)}{\bar{F}_S(x)}.$$

ya que

$$\mathbb{E}(S) = \int_0^\infty y f_S(y) dy = -y\bar{F}_S(y) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \bar{F}_S(y) dy = \int_0^\infty \bar{F}_S(y) dy.$$

Cuando  $\bar{F}_S(0) = 1$ ,  $m(0) = \mathbb{E}(S) = \int_0^\infty \bar{F}_S(y) dy$  y por lo que  $f_e = \frac{\bar{F}_S(y)}{\mathbb{E}(S)}$  define una densidad. Si la variable aleatoria  $S_e$  tiene este tipo de densidad se denomina *distribución de equilibrio*.

Para ciertas distribuciones se tienen resultados asintóticos que pueden dar muy buenas estimaciones para cantidades asociadas con la cola derecha de la distribución de pérdidas totales.

Se usa la notación  $A(x) \sim B(x), x \rightarrow \infty$ , para denotar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{B(x)} = 1.$$

Una función  $C(x)$  se dice que *varía lentamente en el infinito* si  $C(tx) \sim C(x), x \rightarrow \infty$  para todo  $t > 0$ .

Sea  $F_S(x)$  una función de distribución tal que

$$1 - F_S(x) \sim c(x)x^\gamma e^{-\kappa x}, x \rightarrow \infty,$$

y  $c(x)$  varía lentamente al infinito.

Entonces

$$\int_x^\infty [1 - F_S(y)] dy \sim \frac{c(x)}{\kappa} x^\gamma e^{-\kappa x}, x \rightarrow \infty.$$

Por lo que

$$\frac{\int_x^\infty [1 - F_S(y)] dy}{1 - F_S(x)} \sim \frac{1}{\kappa}, x \rightarrow \infty.$$

Con lo que se obtiene la aproximación

$$\mathbb{E}(S|S > x) \approx x + \frac{1}{\kappa}, \quad (2.8)$$

y por lo tanto la vida media residual en  $x$  es constante. El comportamiento en (2.8) es común en distribuciones de *cola ligera* e indica que la pérdida esperada toma sus valores extremos con menos frecuencia. Las colas ligeras básicamente implican una pequeña variación.

La clase de *distribuciones subexponenciales* que admite la definición,

$$1 - F^{*2}(x) \sim 2[1 - F(x)], x \rightarrow \infty,$$

es una propiedad muy fuerte con muchas implicaciones. Una subclase notable de la clase de distribuciones subexponenciales es la clase de distribuciones con *colas que varían regularmente*, que satisfacen

$$\bar{F}_S(x) \sim x^{-\gamma} C(x), x \rightarrow \infty,$$

donde  $C(x)$  varía lentamente en el infinito y  $0 < \gamma < \infty$ . Entonces, si  $\gamma > 1$

$$\int_x^\infty \bar{F}_S(y) dy \sim C(x) \frac{x^{1-\gamma}}{\gamma - 1}, x \rightarrow \infty.$$

Por lo que,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_x^\infty \bar{F}_S(y) dy}{x \bar{F}_S(x)} = \frac{1}{\gamma - 1},$$

lo que implica que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(S|S > x)}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(S|S > x) - x}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_x^\infty \bar{F}_S(y) dy}{x \bar{F}_S(x)} = 1 + \frac{1}{\gamma - 1} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}.$$

Equivalentemente,

$$\mathbb{E}(S|S > x) \sim \frac{\gamma}{\gamma - 1} x, x \rightarrow \infty, \quad (2.9)$$

y  $\mathbb{E}(S|S > x)$  es linealmente asintótico en  $x$ . El comportamiento en (2.9) es más común en distribuciones de *cola pesada*. Una distribución de cola pesada tiende a tener valores muy grandes con muchos valores atípicos. Cuanto más pesada es la cola, mayor es la probabilidad de que se obtengan uno o más valores muy grandes en una muestra.

### 2.2.2. Medidas de Riesgo para Familias Discretas

El análisis de la cola de la distribución y de las propiedades de las distribuciones discretas son componentes importantes de la gestión financiera del riesgo, ya que una fuente de experiencia adversa es una gran cantidad de pérdidas.

Sea  $N$  una variable de conteo discreta. La *función de masa de probabilidad*,  $p_n = Pr(N = n)$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$ , describe la probabilidad en distintos puntos cuando este no es cero. La *función generadora de probabilidad (fgp)*,  $P(z) = \mathbb{E}[z^N] = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$ , permite generar la probabilidad de experimentar  $n$  pérdidas y su utilidad principal es la relación uno a uno que tiene con la función de distribución de  $N$ . La fórmula para el  $k$ -ésimo momento discreto es

$$\mathbb{E}(N^k) = \sum_j n_j^k p_{n_j}.$$

La cola de su distribución es

$$\bar{P}_n = Pr(N > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad .$$

Estas probabilidades de cola también son una cantidad técnica importante asociada con la evaluación del total acumulado de VaR, TVaR y las primas de stop-loss para familias continuas. Pero su interés es en la conexión que tiene con la medida de riesgo TVaR discreta, la cual usa la cantidad  $\mathbb{E}(N|N > k)$ .

Sea

$$p_n = \left( a + \frac{b}{n+c} \right) p_{n-1}, \quad n = m+1, m+2, \dots, \quad (2.10)$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes y  $m$  es un entero no negativo. La *clase*  $(a, b, 1)$  da como resultado el caso especial con  $c = 0$  y  $m = 1$ . Se sigue que para  $n = m+1, m+2, \dots$ ,

$$(n+c)p_n = [a(n-1) + a(c+1) + b]p_{n-1}, \quad (2.11)$$

y sumando (2.11) sobre  $n$  desde  $k+1$  hasta infinito (donde  $k \geq m$ )

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} (n+c)p_n = a \sum_{n=k+1}^{\infty} (n-1)p_{n-1} + [a(c+1) + b] \sum_{n=k+1}^{\infty} p_{n-1}. \quad (2.12)$$

Reescribiendo (2.12),

$$(1-a) \sum_{n=k+1}^{\infty} np_n + c\bar{P}_k = akp_k + [(a+b) + ac](\bar{P}_k + p_k),$$

o,

$$(1-a) \sum_{n=k+1}^{\infty} np_n = [(a+b) + a(c+k)]p_k + [(a+b) - c(1-a)]\bar{P}_k.$$

Es decir, para  $k = m, m+1, \dots$ , si  $a \neq 1$ ,

$$\mathbb{E}(N|N > k) = \frac{\sum_{n=k+1}^{\infty} np_n}{\bar{P}_k} = \left(\frac{a+b}{1-a} - c\right) + \frac{(a+b) + a(c+k)}{1-a} \frac{p_k}{\bar{P}_k}.$$

En general, es fácil expresar  $\mathbb{E}(N|N > k)$  en términos de probabilidades de cola. Sumando por partes,

$$\mathbb{E}(N|N > k) = k + \frac{\sum_{n=k+1}^{\infty} (n-k)p_n}{\bar{P}_k} = k + \frac{\sum_{n=k+1}^{\infty} \bar{P}_n}{\bar{P}_k}. \quad (2.13)$$

La función generadora asociada a (2.13) es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{P}_n z^n = \frac{P(z) - 1}{z - 1}, \quad (2.14)$$

y se puede notar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1} z^n = \frac{P(z) - p_0}{z}. \quad (2.15)$$

Las expresiones en (2.14) y (2.15) son casos especiales de la función generadora

$$[P(z) - P(t)]/(z - t), \quad (2.16)$$

correspondiente a los casos especiales  $t = 1$  y  $t = 0$  respectivamente. El análisis de la función generadora (2.16) permite el análisis de las colas cuando  $t = 1$  y permite el análisis de la distribución de  $N - (k+1)|N > k$ , o equivalentemente  $N - (k+1)|N \geq k+1$ , para  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Claramente,  $N - (k+1)|N \geq k+1$  da información sobre  $N|N > k$  (porque  $N|N > k$  tiene la misma distribución que  $(k+1) + [N - (k+1)|N \geq k+1]$ ) y, por lo tanto, sobre medidas de riesgo como VaR y TVaR.

Suponiendo que  $P(z)$  tiene radio de convergencia  $z_0 \geq 1$ , y  $t$  es un parámetro que satisface  $0 \leq t \leq z_0$  y  $P(t) < \infty$ . Entonces,

$$\frac{P(z) - P(t)}{z - t} = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \frac{t^j - z^j}{t - z} = \sum_{j=1}^{\infty} p_j t^{j-1} \left[ \frac{1 - \left(\frac{z}{t}\right)^j}{1 - \frac{z}{t}} \right], \quad (2.17)$$

y una expansión en serie geométrica de (2.17) resulta en

$$\frac{P(z) - P(t)}{z - t} = \sum_{j=1}^{\infty} p_j t^{j-1} \sum_{n=0}^{j-1} \left(\frac{z}{t}\right)^n = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \sum_{n=0}^{j-1} z^n t^{j-1-n}, \quad (2.18)$$

e intercambiando el orden de los sumandos en (2.18) se obtiene

$$\frac{P(z) - P(t)}{z - t} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=n+1}^{\infty} p_j t^{j-n-1} \right) z^n. \quad (2.19)$$

Los casos en (2.14) y (2.15) son un caso particular y se obtienen de la fórmula general (2.19). Una representación integral útil se sigue del teorema fundamental del cálculo,

$$\frac{P(z) - P(t)}{z - t} = \int_0^1 P'[t + \theta(z - t)] d\theta.$$

Dos clases muy importantes de distribuciones discretas son la *clase mixta de Poisson*, que proporciona un mecanismo natural para la incorporación de la heterogeneidad en el análisis de riesgo y la clase  $(a, b, 1)$ , que incluye las distribuciones de conteo más comunes. Estas clases se pueden combinar convenientemente y unificar en una clase, definida a través de su fgp de la siguiente manera. Si  $\phi(s)$  es una función que posee derivadas de todos los órdenes con  $\phi(0) = 1$  y  $P(z)$  está dada por

$$G_\alpha(z, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{n,\alpha}(\beta) z^n = \alpha + (1 - \alpha) \frac{\phi[\beta(1 - z)] - \phi(\beta)}{1 - \phi(\beta)}, \quad (2.20)$$

entonces, derivando (2.20)

$$\frac{\partial}{\partial z} G_\alpha(z, \beta) = \beta(1 - \alpha) \phi'[\beta(1 - z)] / [\phi(\beta) - 1], \quad (2.21)$$

lo que produce la representación integral

$$\frac{G_\alpha(z, \beta) - G_\alpha(t, \beta)}{z - t} = \frac{\beta(1 - \alpha)}{\phi(\beta) - 1} \int_0^1 \phi'\{\beta[1 - t - \theta(z - t)]\} d\theta, \quad (2.22)$$

y un cambio en la variable de integración en (2.22) de  $\theta$  a  $x = \theta\beta$  da

$$\frac{G_\alpha(z, \beta) - G_\alpha(t, \beta)}{z - t} = \frac{(1 - \alpha)}{\phi(\beta) - 1} \int_0^\beta \phi'[\beta(1 - t) + x(t - z)] dx. \quad (2.23)$$

Simplificando (2.23) cuando  $t = 1$

$$\frac{G_\alpha(z, \beta) - 1}{z - 1} = \frac{(1 - \alpha)}{\phi(\beta) - 1} \int_0^\beta \phi'[x(1 - z)] dx,$$

y al sustituir  $\beta$  por  $x$  en la derivada de la generadora en (2.20), se obtiene

$$\frac{G_\alpha(z, \beta) - 1}{z - 1} = \frac{1}{\phi(\beta) - 1} \int_0^\beta \frac{\phi(x) - 1}{x} \left[ \frac{\partial}{\partial z} G_\alpha(z, x) \right] dx. \quad (2.24)$$

Como  $[G_\alpha(z, \beta) - 1]/(z - 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{G}_{n,\alpha}(\beta) z^n$  y  $\bar{G}_{n,\alpha}(\beta) = \sum_{j=n+1}^{\infty} g_{j,\alpha}(\beta)$ , entonces al igualar coeficientes de  $z^n$  en (2.24) resulta que

$$\bar{G}_{n,\alpha}(\beta) = \frac{n + 1}{1 - \phi(\beta)} \int_0^\beta \frac{1 - \phi(x)}{x} g_{n+1,\alpha}(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.25)$$

La fórmula integral (2.25) da las probabilidades de cola para miembros de la *clase unificada*.

Retomando la función generadora (2.19), es conveniente normalizarla para poder obtener un resultado en relación a la clase unificada. Para  $0 \leq t \leq z_0$ ,

$$P_1(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{n,1}(t) z^n = \frac{1-t}{z-t} \frac{P(z) - P(t)}{1 - P(t)} = \frac{P(z) - P(t)}{(\sum_{n=0}^{\infty} \bar{P}_n t^n)(z-t)},$$

es una fgp y  $P_1(z, z_0)$  es una fgp si  $\sum_{n=0}^{\infty} \bar{P}_n z_0^n < \infty$ . A  $P_1(z, t)$  se le conoce como la *fgp generalizada basada en colas* asociada con  $P(z)$ .

Cuando  $t = 1$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \bar{P}_n = \mathbb{E}(N)$ . Es decir,

$$P_1(z, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{P}_n}{\mathbb{E}(N)} z^n = \frac{P(z) - 1}{\mathbb{E}(N)(z-1)},$$

y  $P_1(z, 1)$  también se denomina *distribución discreta de equilibrio*.

Cuando  $t = 0$

$$P_1(z, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_{n+1}}{1-p_0} z^n = \frac{P(z) - p_0}{z(1-p_0)}, \quad (2.26)$$

entonces (2.26) es la fgp de  $N - 1 | N \geq 1$ .

Definiendo para  $k = 0, 1, 2, \dots$ , la fgp

$$P_{k+1}(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{n,k+1}(t) z^n, \quad (2.27)$$

se observa que las probabilidades de cola para (2.27) son

$$\bar{P}_{n,k+1}(t) = \sum_{j=n+1}^{\infty} p_{j,k+1}(t), \quad (2.28)$$

y de manera recursiva para (2.27) se llega a que

$$P_{k+1}(z, t) = \frac{P_k(z, t) - P_k(t, t)}{(z-t)[\sum_{n=0}^{\infty} \bar{P}_{n,k}(t)t^n]} = \frac{1-t}{z-t} \frac{P_k(z, t) - P_k(t, t)}{1 - P_k(t, t)}, \quad (2.29)$$

donde el valor inicial para (2.29) es  $p_0(z, t) = P(z)$ .

Cuando  $t = 0$ ,  $P_{k+1}(z, 0)$  es la fgp de  $N - (k+1) | N \geq k+1$ .

Similarmente, cuando  $t = 1$ ,  $P_{k+1}(z, 1)$  es de utilidad en conexión con la evaluación de momentos stop-loss. También, una fórmula simple para  $\mathbb{E}(N | N > K)$  está disponible al emplear  $P_2(z, 1)$ . Notando que  $p_{n,1}(1) = \bar{P}_n / \mathbb{E}(N)$  y considerando la fgp (2.20) de la clase unificada cuando  $t = 1$ ,

$$p_{n,2}(1) = \frac{\sum_{j=n+1}^{\infty} p_{j,1}(1)}{\sum_{j=1}^{\infty} j p_{j,1}(1)} = \frac{\sum_{j=n+1}^{\infty} \bar{P}_j / \mathbb{E}(N)}{\mathbb{E}[\binom{N}{2}] / \mathbb{E}(N)} = \frac{\sum_{j=n+1}^{\infty} \bar{P}_j}{\mathbb{E}[\binom{N}{2}]}. \quad (2.30)$$

Por lo que empleando (2.30) el TVaR puede ser expresado como

$$\mathbb{E}(N|N > k) = (k + 1) + \frac{\mathbb{E}[\binom{N}{2}]p_{k,2}(1)}{\mathbb{E}(N)p_{k,1}(1)}. \quad (2.31)$$

Además, para  $k = 0, 1, 2, \dots$ , en (2.31) se tiene

$$p_{n,k+1}(t) = \frac{\sum_{j=n+k+1}^{\infty} \binom{j-n-1}{k} p_j t^{j-n-1}}{\sum_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k} \bar{P}_j t^j}, \quad p_{n,k+1}(0) = \frac{p_{n+k+1}}{\bar{P}_k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.32)$$

donde la segunda expresión en (2.32) es la función de masa de probabilidad de  $N - (k + 1)|N \geq k + 1$ .

Una revisión más completa de distribuciones de órdenes superiores o generalizadas la presenta [28]

### 2.2.3. Nota sobre Simulación

Si la distribución de interés es demasiado compleja para admitir alguna forma de tractabilidad analítica, estimación del VaR y TVaR es directa a través del modelado estocástico. Suponiendo que  $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$  es una muestra simulada ordenada de la variable aleatoria de interés. Si el percentil que se usa es  $p$ , entonces los dos estimadores son

$$\hat{VaR}_p(X) = y_k \quad \text{y} \quad TV\hat{aR}_p(X) = \frac{1}{n - k + 1} \sum_{j=k}^n y_j.$$



# 3

## Descripción del Portafolio.

Esta cartera se compone de tres regiones: Dos en Norte América (EUA y México) y una en América del Sur. La porción correspondiente a México contiene tres estados: Sonora, Sinaloa y Guerrero. Además de considerar su nivel en la producción de maíz, el riesgo de cambio de clima también se tuvo en cuenta [29]. La selección de Sonora se debió a una serie de inundaciones recientes, ya que estudios posteriores sobre la percepción de este tipo de riesgo serían interesantes [30]. Las bases de datos tomadas para pronósticos restringidos se pueden encontrar en el sistema CLICLUM, <http://clicom-mex.cicese.mx/>. Para los datos locales se utilizaron las siguientes estaciones meteorológicas; “LosMochis” (Sinaloa), “Quiriego” (Sonora) y “La Unión” (Guerrero). Para EUA, los contratos se estructuran en Las Vegas y Sacramento, ya que se ofrecen opciones de temperatura a través del Grupo CME en estas ciudades, y los datos se obtuvieron de la Administración Nacional Oceánica y Atmosférica, <https://www.ncdc.noaa.gov>, “Southwest Climate Region” (Las Vegas) y “West Climate Region” (Sacramento). La región de América del Sur se basa en los datos del Grupo del Banco Mundial, <http://sdwebx.worldbank.org>, y abarca Colombia. Los modelos globales de clima son tomados del KNMI Explorer, <https://climexp.knmi.nl/start.cgi>, que corresponden al proyecto de Intercomparación de Modelos Acoplados Fase 5 (CMIP5).

### 3.1. Análisis Continuo de Distribuciones.

Para formular los pronósticos restringidos se ajustaron modelos de tipo VAR a los históricos de cada región.

### 3. DESCRIPCIÓN DEL PORTAFOLIO.

---

VAR EUA				
Las Vegas			Sacramento	
	Las Vegas	Sacramento	Las Vegas	Sacramento
$\theta_1$	0.218629378	0.053913326	0.0504328121	0.221170084
$\theta_2$	0.028850863	-0.010256086	0.0452486775	0.045125548
$\theta_3$	0.079125247	0.048185922	-0.0980241517	-0.060962080
$\theta_4$	-0.002788957	0.013808921	0.0120803867	0.002498693
$\theta_5$	-0.024281631	-0.025307784	0.0043629506	0.031131700
$\theta_6$	-0.103115128	-0.096456713	0.1086632896	0.109853437
$\theta_7$	-0.051908323	-0.107695253	0.0336845693	0.072096776
$\theta_8$	0.040159047	-0.034710186	-0.0226427580	-0.005921298
$\theta_9$	-0.014698021	0.017972276	-0.0396051621	-0.073873890
$\theta_{10}$	0.078231113	0.070120800	-0.0735425488	-0.054430665
$\theta_{11}$	0.087884625	0.073436326	0.0557359404	0.054074598
$\theta_{12}$	0.181044929	0.130328471	-0.0101758062	0.047453094
$\theta_{13}$	0.045168086	0.062515756	-0.0357021590	-0.012166393
$\theta_{14}$	-0.020404490	-0.013125465	-0.0008805269	0.003966617
$\theta_{15}$	-0.048870633	-0.091382388	-0.0086755285	-0.005498960
$\theta_{16}$	0.037010662	-0.002215625	-0.0640935238	0.007573107
$\theta_{17}$	-0.045117753	-0.030831949	0.0032538954	0.032946745
$\theta_{18}$	-0.070585627	-0.058145052	0.0506849007	0.076480341
$\theta_{19}$	-0.084019305	-0.060648094	0.0616828582	0.047475329
$\theta_{20}$	-0.042843975	-0.002230992	0.0393989560	-0.018296604
$\theta_{21}$	0.040872131	0.030041965	-0.0607396377	-0.055753686
$\theta_{22}$	0.029337569	0.006743048	0.0027560072	0.026265288
$\theta_{23}$	0.052871147	0.120495741	0.0986100811	-0.007349803
$\theta_{24}$	0.051942402	0.026548902	0.0654249916	0.083230258
$\theta_{25}$	0.003608620	0.015178276	0.0743057151	0.077411478
$\theta_{26}$	0.010704809	-0.053579862	-0.0251396242	-0.017044679

**Tabla 3.1:** Modelo VAR ajustado a los históricos de la región de EUA

VAR México.								
Sinaloa			Sonora			Guerrero		
Sinaloa	Sonora	Guerrero	Sinaloa	Sonora	Guerrero	Sinaloa	Sonora	Guerrero
0.226	0.074	-0.008	-0.122	-0.092	0.362	-0.122	-0.092	0.362
0.050	-0.228	-0.005	0.148	0.087	0.056	0.148	0.087	0.056
-0.028	-0.069	0.086	0.001	0.012	-0.011	0.001	0.0128	-0.011
-0.027	-0.116	0.055	0.051	0.028	0.050	0.051	0.028	0.050
0.008	-0.039	-0.148	-0.015	-0.002	-0.025	-0.015	-0.002	-0.025
-0.044	-0.215	-0.066	-0.040	0.008	0.110	-0.040	0.008	0.110
-0.014	-0.111	0.037	-0.066	-0.255	0.055	-0.066	-0.255	0.055
0.064	0.147	0.105	0.054	0.000	-0.118	0.054	0.000	-0.118
0.017	-0.022	0.036	0.090	0.0317	0.048	0.090	0.031	0.048

**Tabla 3.2:** Modelo VAR ajustado a los históricos de México

SARIMA(1,1,1)(1,0,1) Colombia.				
	ar1	ma1	sar1	sma1
Coefs.	0.3598	-0.7475	1	-0.9844
error est.	0.0487	0.0359	0	0.0081

**Tabla 3.3:** Modelo SARIMA ajustado a las serie de Colombia.

Al ajustar el modelo a cada región, una distribución normal mostró un buen ajuste para el ruido blanco multivariado. La *densidad normal o gaussiana* viene dada por la fórmula

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (3.1)$$

donde  $\mu$  es la media y  $\sigma^2$  es la varianza de la distribución (3.1). Además,

$$TVaR_p(X) = \mu + \sigma \frac{\phi[\Phi^{-1}(p)]}{1-p}. \quad (3.2)$$

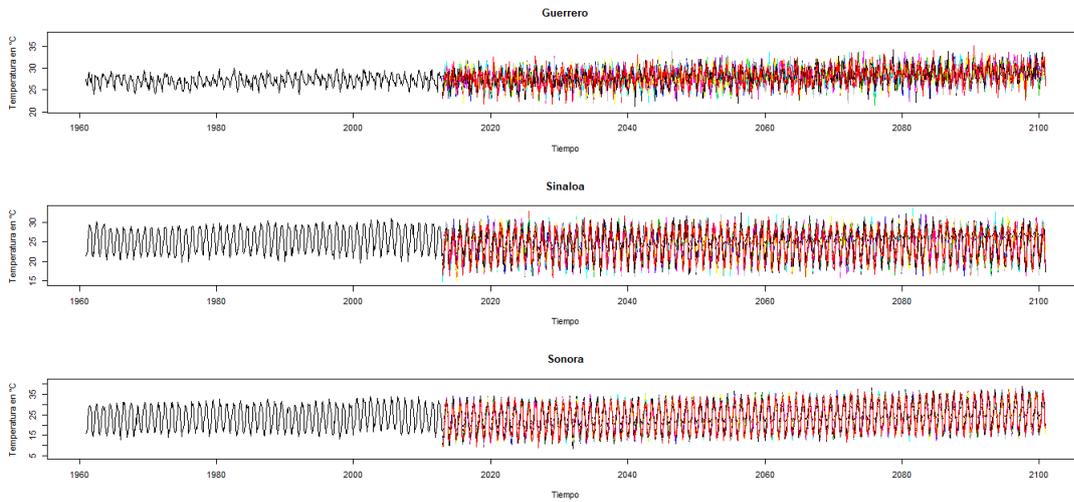
La función en (3.2) es constante respecto a  $X$  y establece la presencia de una cola ligera ( $\phi(X)$  y  $\Phi(X)$  son la densidad y distribución de una normal con media 0 y varianza 1).

Combinando la información histórica con los modelos globales se producen pronósticos restringidos. Se tomaron las coordenadas de cada ubicación para obtener los modelos globales del KMNI Explorer. En general, se espera un calentamiento con una estabilización para el horizonte 2100.

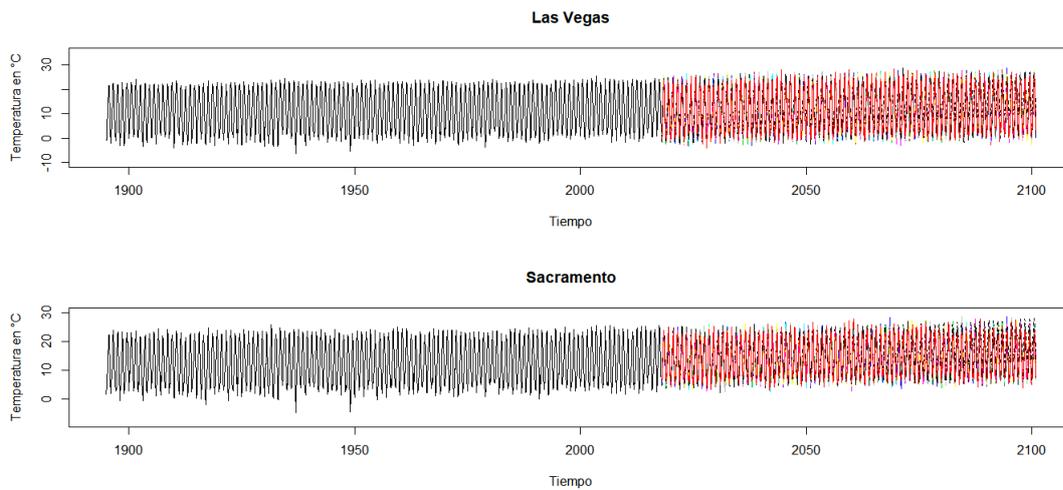
Con estos escenarios, se construye un índice para reflejar un clima anormalmente cálido o frío. Efectivamente, un derivado recibe este nombre ya que *deriva* su precio

### 3. DESCRIPCIÓN DEL PORTAFOLIO.

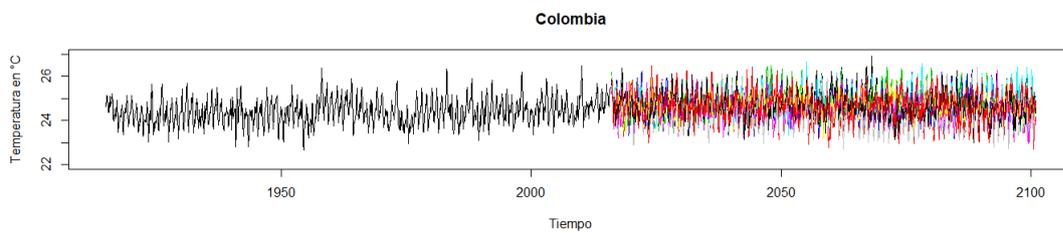
---



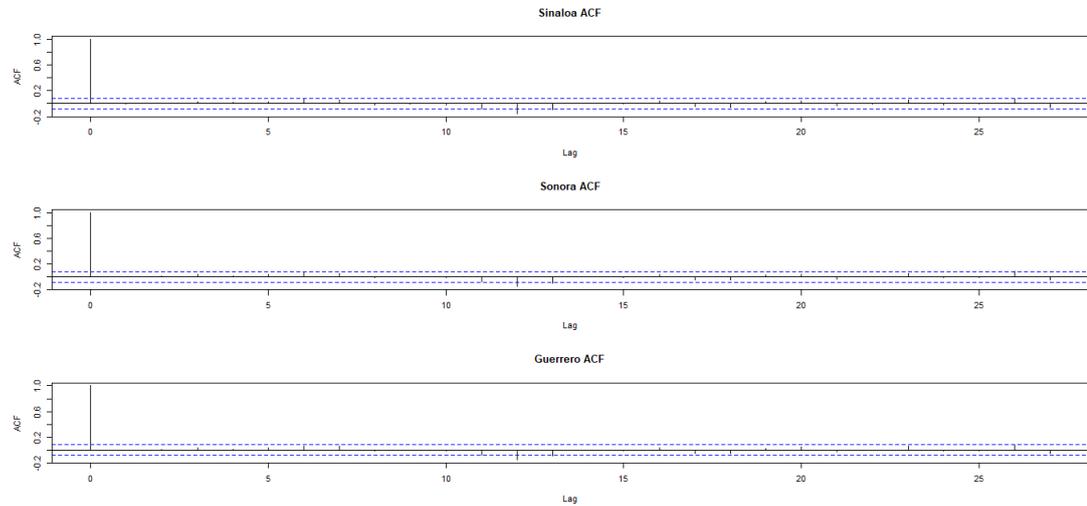
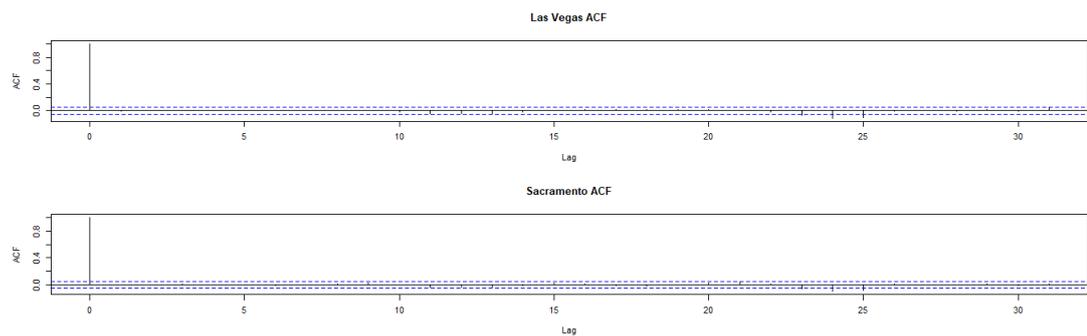
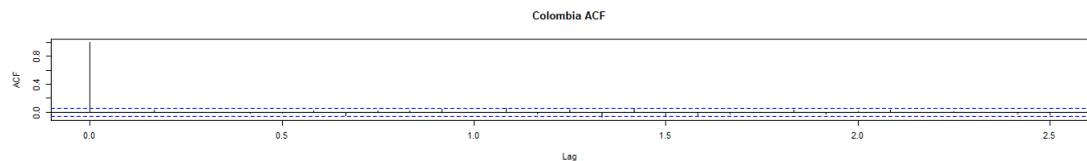
**Figura 3.1:** Pronósticos restringidos México.



**Figura 3.2:** Pronósticos restringidos EUA.



**Figura 3.3:** Pronósticos restringidos Colombia.

**Figura 3.4:** Correlogramas series México.**Figura 3.5:** Correlogramas series EUA.**Figura 3.6:** Correlogramas series Colombia.

mediante la determinación del valor de cualquier otra cosa. Un derivado de clima típicamente tiene un índice que agrega la variable de clima durante el periodo de contrato. Los contratos de temperatura usan los *días de grado (DD)* en su mayoría. El número de DD es directamente proporcional a la pérdida o la capacidad para sostener tales pérdidas. Esta capacidad suele ser un requisito de capital o, en algunos casos, puede ser un producto básico como el agua [31].

### 3. DESCRIPCIÓN DEL PORTAFOLIO.

---

Modelos Globales.	
Ubicación	Coordenadas
Las Vegas	36.2277°N 115.264 36°O
Sacramento	38.5816°N 121.4944°O
Sinaloa	24.7903°N 107.3878°O
Sonora	31.3086°N 110.9422°O
Guerrero	23.634501°N 102.552784°O
Colombia	4.570868°N 74.297333°O

**Tabla 3.4:** Coordenadas en el KNMI Explorer.

Los DD son índices cuantitativos que reflejan la cantidad de energía demandada por comercios y hogares, ya sea para calentarlos o enfriarlos. El número de DD es directamente proporcional a la cantidad de energía necesaria para calentar (“Heating Degree Days”, HDD) o enfriar (“Cooling Degree Days”, CDD) un espacio para que este sea confortable. Tradicionalmente los DD miden la demanda de energía, por lo que la capacidad para calentar un espacio viene dado por los HDD’s y la capacidad para enfriarlo por los CDD’s. En el contexto agropecuario los DD son proporcionales a las pérdidas producidas en las cosechas debido a temperaturas extremas.

Si  $T_0$  es el umbral y  $T_i$  es un valor diario para medir los excesos entonces se crea una nueva serie  $z_i$  que medirá los grados por abajo o por arriba en el día  $i$  y así,

$$\sum z_i = \sum \max(\delta(T_0 - T_i), 0) = \begin{cases} HDD & \text{si } \delta = 1 \\ CDD & \text{si } \delta = -1 \end{cases}. \quad (3.3)$$

El índice (3.3) permite la evaluación de una función de pago que requiere un nivel de agregación (*valor de ejercicio* o *strike*) y de un cantidad que será pagada por cada unidad en exceso de este nivel (*tick*). Existen tres opciones básicas que ayudan a la agricultura para “encadenarse” a cierta cantidad de temperatura o a una época particular del año en la que se requiere una temperatura específica. Estas son, o bien las llamadas *call* o *put* largas, o una combinación de ambas, el *straddle*. Cualquier contrato derivado se compone de una parte que acepta comprar y una que acepta vender; el término *larga* es usado para describir al comprador y *corta* es usado para describir al vendedor. Para contratos call, put y straddle se cuenta con las siguientes funciones de pago:

$$p(x)_{call} = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq K \\ D(x - K), & \text{si } K \leq x \leq L \\ L_{\S}, & \text{si } x \geq L \end{cases} \quad (3.4)$$

$$p(x)_{put} = \begin{cases} L_{\S}, & \text{si } x \leq L \\ D(K - x), & \text{si } L \leq x \leq K \\ 0, & \text{si } x \geq K \end{cases} \quad (3.5)$$

$$p(x)_{straddle} = \begin{cases} L_{\$}, & \text{si } x \leq L_1 \\ D(K - x), & \text{si } L_1 \leq x \leq K \\ D(x - K), & \text{si } K \leq x \leq L_2 \\ L_{\$}, & \text{si } x \geq L_2 \end{cases} \quad (3.6)$$

Donde  $x$  en (3.4), (3.5) y (3.6) representa ya sea HDD o CDD,  $D$  es el tick,  $K$  es el strike y  $L$  representa los límites que se imponen a las ganancias/pérdidas del contrato.

Se estructuró una call CDD para cubrirse en contra de un verano excesivamente cálido con horizontes 2020, 2050 y 2100 con un tick arbitrario de \$7,000.00 pesos mexicanos y valor de ejercicio el promedio de CDD's. Esta opción también es recomendable para periodos en los que se cuenta con mayor amenaza de un aumento de temperatura, dependiendo de la experiencia del agricultor. También, el VaR y el TVaR de cada estrategia indican el nivel y la pérdida esperada para los peores escenarios en caso de no contar con la cobertura. El conocer estos niveles permitirá a los proveedores agregar valor a sus producciones de maíz canalizando el riesgo climático lejos de los consumidores. Empleando una comercialización correcta el producto maizalero se vuelve más atractivo al consumidor y el proveedor puede aumentar el precio de venta para el mismo nivel de demanda o permitir que la demanda aumente manteniendo el precio de venta. Esto produce mayores ganancias pues el riesgo que enfrenta el productor es respaldado por el derivado y a su vez las pérdidas por primas son recuperadas al incrementar las ventas.

Por otro lado, los productores que adopten estas medidas se consolidarán con perfiles de clientes e inventarios más consistentes e indirectamente se estará promoviendo un consumo más responsable.

Valor de una opción Call sobre CDD			
Horizonte	2020	2050	2100
Sinaloa	237225.5	175988	108469.2
Sonora	221669.7	169194.7	109280.8
Guerrero	254226.1	183993.7	108827.3
Las Vegas	119571	103091.5	62185
Sacramento	120783.5	100193.9	62413.7
Colombia	132629.8	108521.3	96262

**Tabla 3.5:** Primas para una Call CDD para cubrirse a distintos horizontes.

Los mayores beneficios se obtienen al negociar los contratos norteamericanos con un horizonte de 100 años. Esto se debe a que los precios de cierre más bajos producen mayores ingresos con la opción de compra. La estrategia en este caso requiere mantener posiciones en Las Vegas hasta que el índice CDD alcance un valor de 520.18 y luego cambiar las posiciones a Sacramento.

### 3. DESCRIPCIÓN DEL PORTAFOLIO.

---

Valor en riesgo de la opción al 99 %			
Horizonte	2020	2050	2100
Sinaloa	1508188	1504798	1084457
Sonora	1399535	1394052	1117621
Guerrero	1547312	1552265	1109231
Las Vegas	759193.7	853309.2	631556.9
Sacramento	806150.6	866405.2	636817.1
Colombia	803744.3	859766.2	963719.5

**Tabla 3.6:** Cuantiles al 99 % para primas de una Call CDD a distintos horizontes.

TVaR de la opción al 99 %			
Horizonte	2020	2050	2100
Sinaloa	1724912	1742391	1232816
Sonora	1620762	1619980	1270597
Guerrero	1767101	1803291	1279396
Las Vegas	877732.5	971534.2	732560.2
Sacramento	925969.8	991877.2	751431.2
Colombia	914360.7	982608.2	1096328

**Tabla 3.7:** Valor esperado de las primas en exceso del umbral al 99 %.

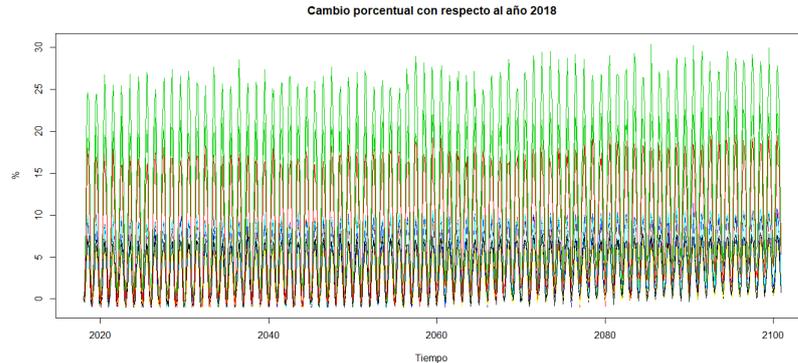
Al ir largo en una estrategia put se cubre contra una disminución en la temperatura. Esta es la situación opuesta al call; si menor temperatura que la establecida se presenta durante el periodo del contrato entonces se ejerce la opción. Si la producción necesita una cantidad específica de temperatura en un periodo en particular, el straddle es la mejor solución pues se obtiene la cobertura total en la posición. Como antes, el promedio de CDD's sirve como nivel de ejercicio pero ahora con un tick arbitrario de \$5,000.00 pesos mexicanos.

Straddle para posición en Sacramento			
Horizonte	2020	2050	2100
Put	120672.3	144908.1	707511.2
VaR	781096.5	1117621	1985588
TVaR	907176.9	138953.0	2112242
Straddle	241455.8	245102.1	769925

**Tabla 3.8:** Estrategias put y straddle sobre CDD's a distintos horizontes.

La estrategia con el straddle permite participar en el aumento o disminución del

valor del índice CDD pero no garantiza los mejores beneficios. Las opciones de put y call establecen el mayor beneficio en el caso de disminución o aumento de la temperatura, sin embargo el costo de cada estrategia en la opción de compra no permite participar en el cambio del índice. La estrategia con el straddle es la más cara, pero está disponible para protegerse contra una alta volatilidad en el movimiento de la temperatura.



**Figura 3.7:** Evolución de días de grado (DD)

Al analizar la evolución de DD, es decir la suma de HDD y CDD, se puede dar un índice de pérdidas anuales debido a temperaturas extremas de calor o frío. Este índice agrega el DD de todas las estaciones de datos. Un impacto total debido a las condiciones cálidas es del 10 % en condiciones normales, alcanzando el 15 % y el 30 % en tiempos difíciles. Estos cambios porcentuales son un buen indicador del nivel en que los rendimientos estarán afectados.

Para obtener un estimado de los costos potenciales de cambio climático causados por la pérdida de cultivos el valor presente de las opciones es calculado y comparado con el valor asumiendo los costos de cobertura fijos al día de hoy. El *valor presente* es la cantidad que al ser colocada a cierta tasa de interés durante cierto plazo produce un monto determinado (en estudios de cambio climático se asume una tasa libre de riesgo del 10 %). Se estima que los costos de cobertura bajo el cambio climático son 156.4055 % más altos que el promedio. Los costos acumulados hasta 2100 de las estrategias de cobertura alcanzarían un valor presente total de \$ 408,075, 240.00 en el caso del escenario de cambio climático utilizado y \$ 159,152, 269.00 en el caso del escenario de referencia sin cambio climático.

### 3.2. Análisis Discreto de Distribuciones

La distribución de reclamaciones en cada porción de contrato del portafolio es útil para saber el número de pérdidas esperadas bajo diferentes escenarios y en distintos horizontes. A pesar de que las cantidades producidas y vendidas se encuentra a merced de las condiciones del tiempo, un estudio discreto de las pérdidas proveerá a los agricultores de una visión muy correlacionada a estas cantidades de comercialización

### 3. DESCRIPCIÓN DEL PORTAFOLIO.

---

pues los niveles de producción dependen directamente del riesgo en las fluctuaciones de temperatura.

Distribución del número de reclamos para 10000 realizaciones.							
Horizonte	0	1	2	3	4	5	6
2020	0	345	1591	3234	3050	1492	288
2050	0	323	1663	3158	3038	1512	306
2100	0	323	1625	3134	3069	1516	333

**Tabla 3.9:** Simulación del número de reclamaciones en exceso del umbral promedio de CDD's.

Esta situación describe el comportamiento de distribuciones *truncadas con zeros* [32] caracterizadas por tener cero ocurrencias o menos de las esperadas en cero. En particular se ajustaron distribuciones de la clase truncada para el corto y largo plazo. En todos los casos el AIC resulta más convincente para las distribuciones de tipo *binomial* con función de densidad

$$p_k = Pr(N = k) = \binom{m}{k} q^k (1 - q)^{m-k}, \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (3.7)$$

En la distribución (3.7), el parámetro  $m$  presenta 6 riesgos sujetos a reclamación (2 estaciones para Norte América, 3 para México y una de Colombia) y  $q$  es la probabilidad de ocurrencia.

#### 3.2.1. Impactos Potenciales en la Duración de Ciclos de Cultivo.

La temperatura afecta el desarrollo de los cultivos y de otros organismos relevantes en la agricultura e información pertinente sobre la duración de estos ciclos de desarrollo es crucial para un control efectivo. Para este caso por ejemplo, entender el número de reclamaciones puede alertar en que medida están siendo perturbados los rendimientos de maíz. Al alcanzar los cuantiles del VaR discreto se deberán tomar decisiones al aplicar prácticas de gestión como la cantidad de agua que se requerirá en cierta temporada o para la calendarización de mano de obra y maquinaria. En particular los impactos estarán relacionados con aumentos de temperatura debido a la naturaleza del call sobre CDD.

El número de reclamaciones esperadas en exceso al umbral representan una distribución del riesgo al que se encuentra expuesta la cartera, pero al tratarse de variables aleatorias discretas la fluctuación en la distribución permite conocer el cambio en el número de cultivos que no alcanzan un desarrollo completo para lograr los rendimientos

Ajuste de la distribución del número de reclamos		
Horizonte	parámetros	AIC
ZT Binomial		
2020	0.5734567	-81629.06
2050	0.5764843	-81598.88
2100	0.5771388	-81502.34
ZT Poisson		
2020	3.3388917	17419.788
2100	3.0426702	17548.092
2100	3.362495	17930.454
ZT Binomial Negativa		
2020	38208.8439,.0000905994	394474.2
2050	38304.4942,.0000905142	282393.8
2100	38475.2322,.0000905232	456077.4

**Tabla 3.10:** Selección de modelos para el número de reclamaciones en exceso del umbral promedio de CDD's.

esperados. Conforme más se acelera el número de reclamaciones menos cultivos alcanzan este nivel óptimo en su duración.

Tomando las fórmulas correspondientes a la familia  $(a, b, m)$  se obtiene que,

TVaR					
Horizonte/Umbral	1	2	3	4	5
2020	0.219732473	0.675054506	1.249916211	1.700212729	2.041081379
2050	0.213208858	0.673786311	1.239481529	1.700159188	2.041227579
2100	0.212739831	0.661956063	1.237464203	1.693843574	2.041436433

**Tabla 3.11:** Número de reclamaciones esperadas en exceso del umbral promedio de CDD's.

Al incrementar el umbral se incrementa el exceso bajo todos los horizontes, ya que conforme va creciendo el valor en riesgo también va creciendo el capital requerido por cada reclamación. Este incremento se representa como un 20% a 30% en la alteración de la duración en los cultivos de maíz cuando la exposición es baja y el valor de esta tasa de alteración llega a estar cerca del 50% conforme aumenta la exposición.

Al comparar este incremento se tiene una alteración cerca del 200% al considerar el desfase de la duración al estar expuesto de 1 a 2 reclamaciones, pero presenta una desaceleración pues decrece a un cambio de sólo el 20% de 4 a 5 reclamaciones. Esto implica que la cartera se debe iniciar con coberturas altas, y conforme se aumenta la exposición, se abaratarán los costos conforme se vaya diversificando el portafolio. El

### 3. DESCRIPCIÓN DEL PORTAFOLIO.

---

impacto por esta alteración en la duración del ciclo se resentirá más al inicio de la exposición en cultivos que requieran de una segunda especie para mejorar el intercambio de nutrientes o cualquier otro proceso que pueda optimizar la producción. Al ir sofisticando el portafolio esta desventaja desaparece e incluso se revierte su efecto produciendo un abaratamiento general de costos.

La proporción creciente del exceso respecto al umbral caracteriza que el aumento en la diversificación del riesgo permita ofrecer una mayor cobertura para los riesgos en exceso ya que al comercializar la cartera la decisión de ir largo en cierta posición, y en que proporción, será condicional al número de reclamaciones que se hayan experimentado.

# 4

## Implementación Espacial y Repercusiones Locales.

Se toman en cuenta ahora 181 observaciones distribuidas en la costa noroeste de la República Mexicana. Cada observación reporta las coordenadas geográficas de una estación meteorológica distinta.

Asumiendo que el portafolio describe la situación física en que cada riesgo es independiente pero con la misma probabilidad de reclamación, entonces la probabilidad de reclamación para cada estación sigue una distribución Bernoulli, caracterizada por la fgp

$$P(z) = 1 + q(z - 1), \quad (4.1)$$

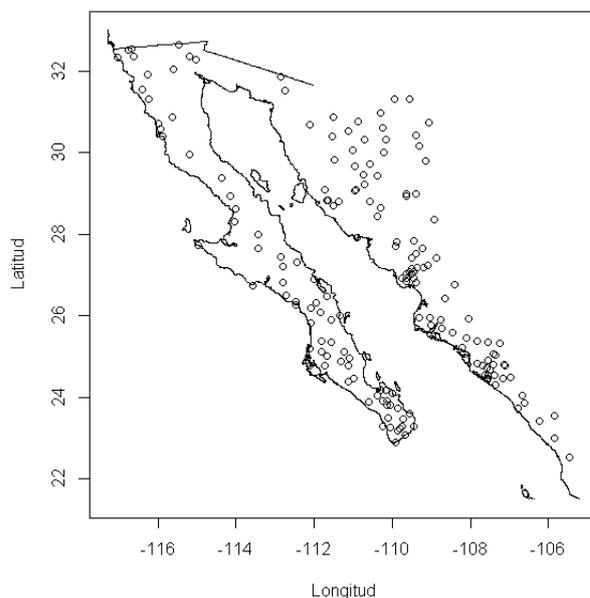
pues si hay  $m$  eventos independientes generados por (4.1) la fgp del total de reclamaciones es el producto

$$P(z) = [1 + q(z - 1)]^m. \quad (4.2)$$

La función generadora (4.2) es del tipo binomial considerado anteriormente.

Dadas las condiciones se pueden generar patrones de puntos espaciales tomando ahora como escenario base sin cambio climático, ya sea, un escenario año a fecha actual o un escenario sin riesgo donde todavía no se ha superado ningún número de pérdidas.

Un conjunto de datos de patrones de puntos proporciona las ubicaciones de los objetos o eventos que ocurren en una región de estudio. El patrón de puntos observado  $\mathbf{x}$  se tratará como una realización de un proceso puntual  $\mathbf{X}$  en un espacio bidimensional. Un proceso puntual es simplemente un conjunto aleatorio de puntos; el número de puntos es aleatorio, al igual que las ubicaciones de los puntos. El objetivo de tener esta aleatoriedad es la de poder analizar los patrones sin estar condicionados a sólo



**Figura 4.1:** Estaciones región noroeste.

las ubicaciones muestreadas (i.e, las estaciones), si no que se pueda comprender el comportamiento dentro de toda la región de estudio. Una forma más precisa de decirlo es que no se toma sólo el tiempo como indicador en un proceso estocástico, sino que el índice puede ser cualquier otra cosa.

El modelo asume que el proceso se extiende en un espacio bidimensional pero es observado sólo dentro de una región  $\mathbf{W}$ , la *ventana muestral*. Para reflejar las repercusiones locales, se toma como ventana la extensión territorial del país.

El tipo de patrones generados son llamados *patrones puntuales replicados* [33] ya que son conjuntos de datos que consisten de patrones puntuales que pueden ser generados como repeticiones independientes del mismo experimento. La distribución bernoulli asociada a cada estación es el experimento que se genera para ir obteniendo las realizaciones.

### 4.1. Reclamaciones.

Este es el patrón más básico, simplemente se realiza una simulación bernoulli y se asocia el valor simulado con cada coordenada geográfica de las estaciones. Cuando se simula el valor de 1 se está generando una reclamación por pérdidas climáticas y cuando se simula el valor 0 la estación no presenta escenarios desfavorables por lo que no se genera reclamación del contrato de derivados.

Para el 2020, el patrón refleja la cola ligera del portafolio, ya que ninguna realización

muestra escenarios catastróficos y la distribución de reclamaciones se mantiene en un porcentaje del 60% generalmente, comportamiento esperado por la probabilidad  $q = 0.5734567$  de reclamación para 2020.

Así mismo, las diferentes realizaciones muestran concentraciones de puntos, o en forma *cluster* en la región de Baja California Sur y al sur de Sonora. Sin embargo, este comportamiento puede ser simplemente una consecuencia de la presencia de mayores muestras en esta zonas. Del mismo modo, la zona norte de Sonora muestra cierta dependencia pues generalmente los patrones de puntos se concentran o como estaciones siniestradas o como estaciones no siniestradas, efecto que puede deberse al menor número de estaciones en esta región.



**Figura 4.2:** Distribución de la siniestralidad para 2020

Una producción sostenible dentro del sector agrícola permite la cobertura y especulación ante pérdidas ocasionadas a los cultivos por eventos imprevistos. Con esta estabilización al ingreso agrícola se garantiza la continuidad a la agricultura. Al adoptar prácticas innovadoras se permite un flujo crediticio dentro de la agricultura y se contribuye a la seguridad alimentaria, además de proveer protección al riesgo de producción.

## 4.2. Resiliencia.

Este patrón utiliza el año 2020 como base de escenario sin cambio climático. Se simulan las reclamaciones del año base y la resiliencia es la diferencia entre los valores simulados con el año analizado. Con este patrón se puede obtener la distribución espacial de las estaciones que permanecen siniestradas a lo largo del tiempo, las estaciones que no presentan impacto durante el mismo plazo y aquellas que presentan un cambio con respecto al tiempo. Cuando una estación presenta una reclamación en el año base pero



**Figura 4.3:** Distribución de la siniestralidad para 2050



**Figura 4.4:** Distribución de la siniestralidad para 2100

se recupera y no se siniestra en el año de análisis, se presenta una *resiliencia positiva*. Sin embargo, las estaciones que habían permanecido sin pérdidas en el año base pero con condiciones adversas para el año de análisis, presentan una *resiliencia negativa*.

Para el año 2050 se espera un nivel sostenido en las estaciones que permanecen siniestradas.

Para el año 2100 aumenta la resiliencia negativa y el nivel de reclamaciones continúa sosteniéndose.

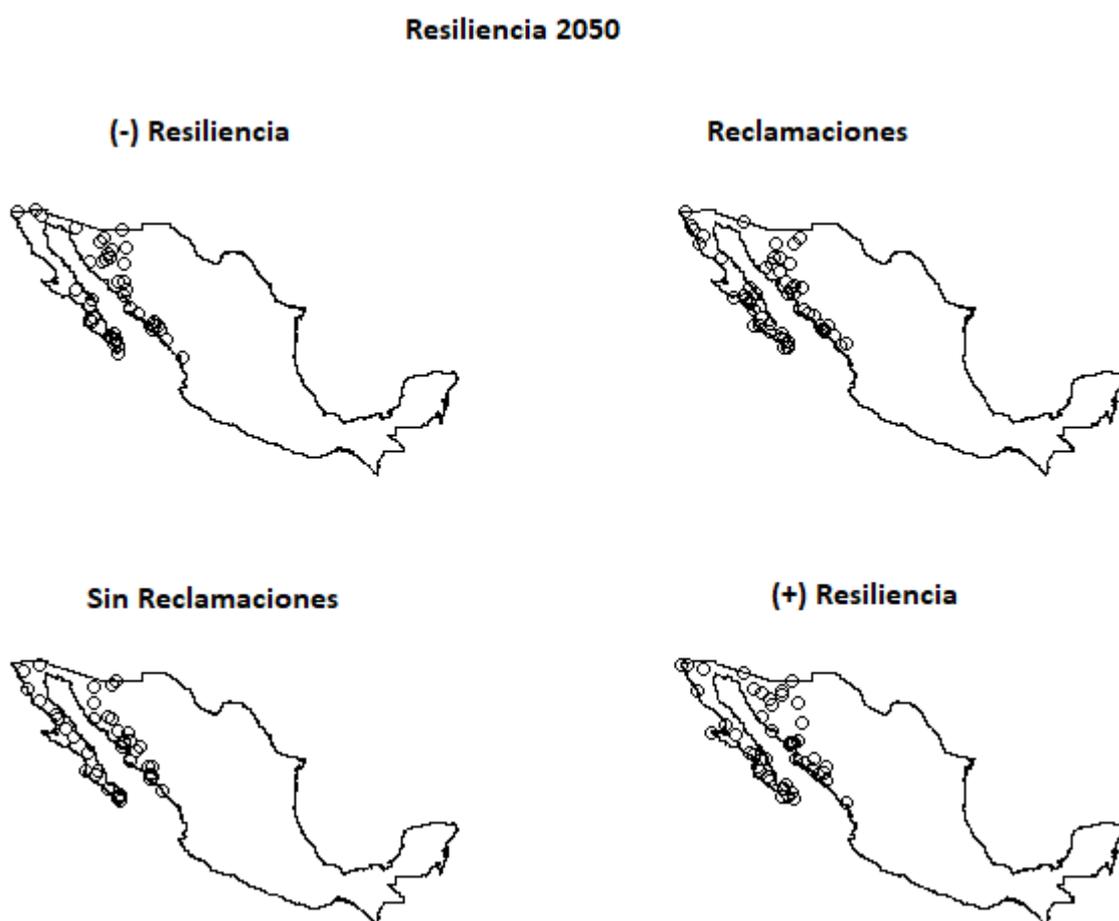
Localmente existen sistemas de cultivo tradicionales que incluyen una relación compleja a largo plazo entre el cultivo de maíz y un ambiente más amplio. La globalización en el modelo de agronegocios ha ejercido una intensa presión sobre estos productores, con lo que se ha ocasionado una pérdida de soberanía alimentaria.

Se ha adoptado este enfoque conceptual de los sistemas alimentarios, ya que estos reflejan una interfaz entre los ecosistemas y las economías.

La resiliencia económica dentro de estos sistemas incluyen el acceso a la tierra así

como el potencial de subsistir con la producción local. La capacidad de recuperación económica permite a los sistemas resistir el choque climático, la escasez o las perturbaciones a largo plazo.

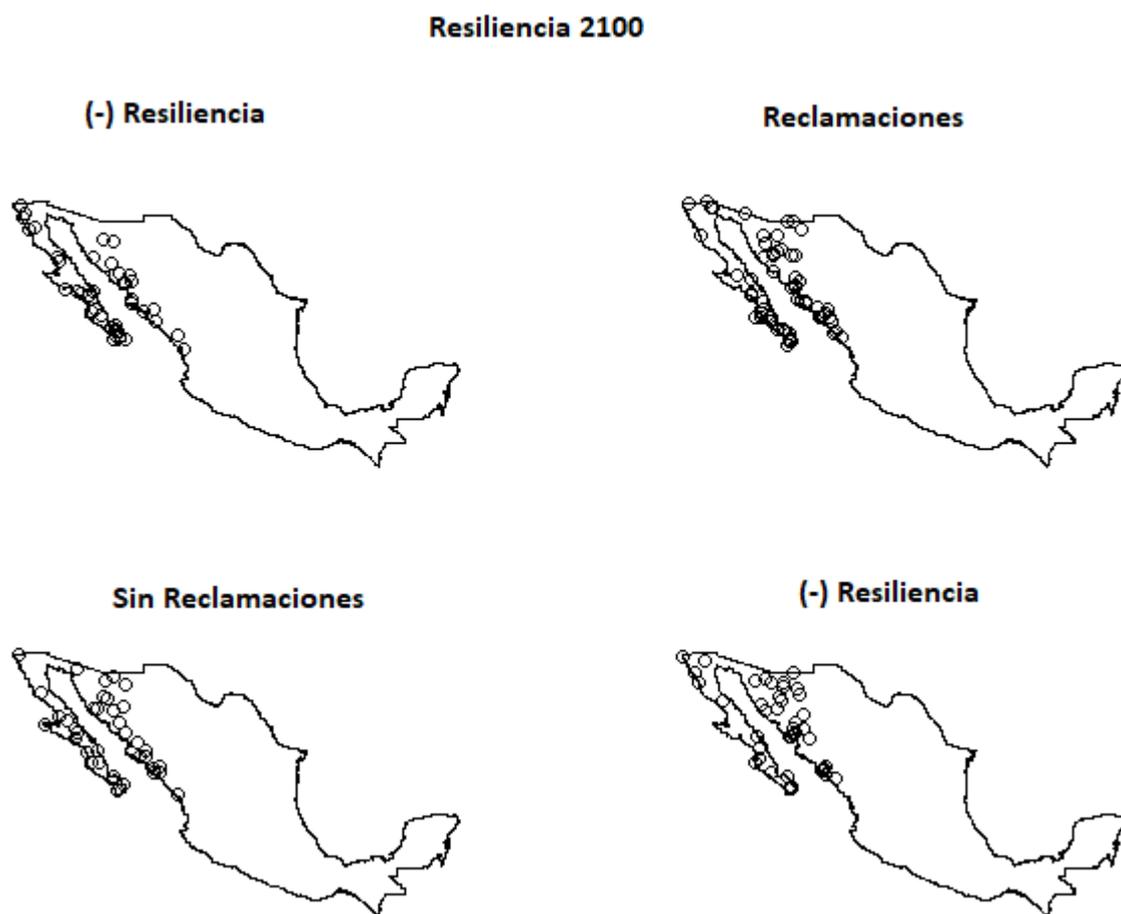
El desarrollo de sistemas alimentarios a nivel local requiere interacciones que no se limiten a las innovaciones de los agricultores, sino que incluyan redes de agricultor a agricultor, organizaciones rurales fuertes y políticas públicas redistributivas.



**Figura 4.5:** Distribución de la resiliencia para 2050.

### 4.3. Duración.

Para estudiar este patrón, primero se consideran las condiciones esperadas de un escenario sin cambio climático. Como la esperanza para una binomial se define como



**Figura 4.6:** Distribución de la resiliencia para 2100

$$\mathbb{E}[N] = mq,$$

entonces se espera un total de reclamaciones muy cercano a esta media. Así mismo se toman en cuenta escenarios catastróficos al 95 % y al 99 %.

El multitypo del patrón presenta una proporción del 56 % en reclamaciones, 36 % de truncamiento en cero y 8 % entre pérdidas que superan los umbrales de pérdida.

Esta visualización del portafolio muestra las condiciones normales, los escenarios malos y los escenarios catastróficos. Se toman como escenarios sin cambio climático las condiciones normales esperadas, su fluctuación con respecto al nivel del riesgo discreto de los escenarios malos y catastróficos representan estas tasas de alteración a la duración óptima en ciclos de cultivo.

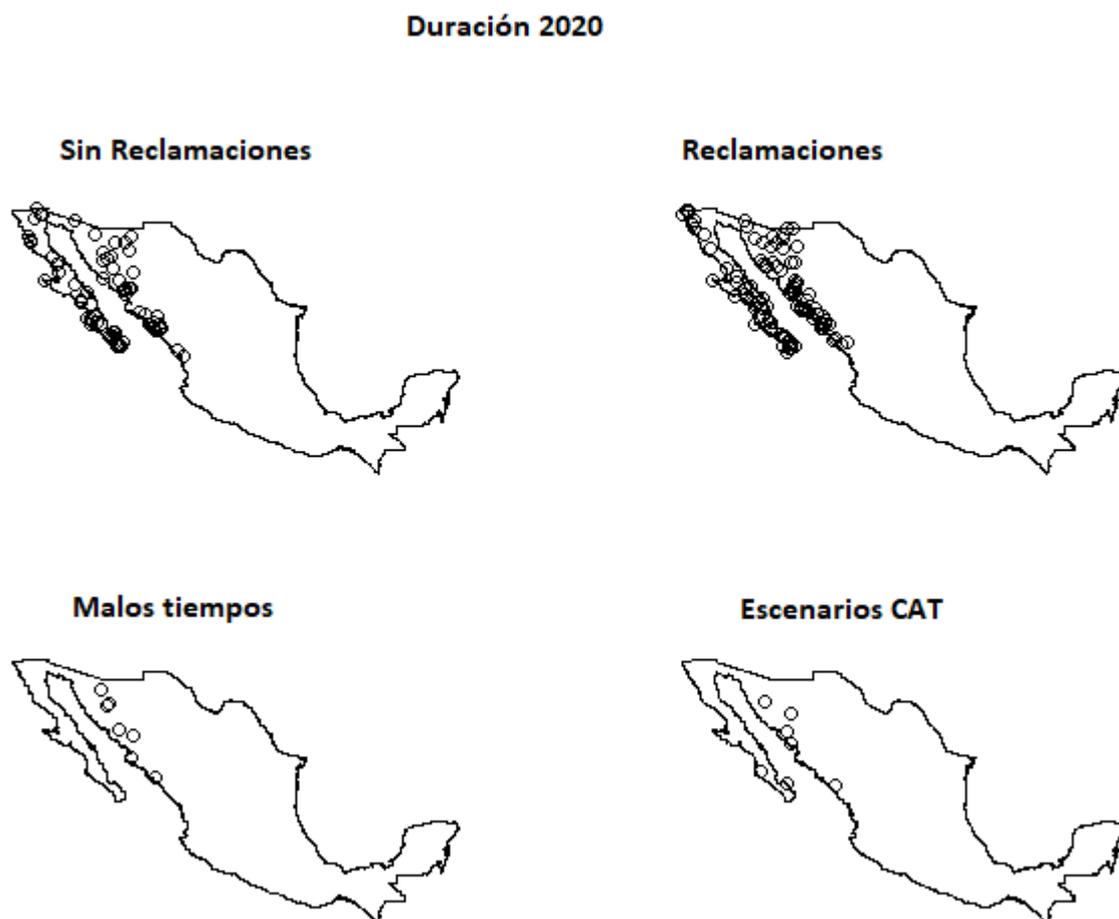


Figura 4.7: Distribución de la duración para 2020

#### 4.3.1. Intensidad.

El análogo del valor medio o esperado de una variable aleatoria es la intensidad en un proceso puntual. La *Intensidad* es la densidad promedio de puntos (número esperado de puntos por unidad de área). La intensidad puede ser constante (uniforme u homogénea) o puede variar de un lugar a otro (No homogénea).

A través de la intensidad conjunta de los puntos se vuelve a observar el cluster de muestras en el sur de la península y en las costas de Sinaloa y Sonora. La costa se acentúa menos pues se cuenta con una región más grande de la ventana en esta parte. En las densidades marginales también se refleja la clusterización para las condiciones normales. Las observaciones en exceso además se concentran a lo largo de Sonora, mientras que al norte de la península no se presentan condiciones extremas.

En general, se presenta un densidad de 1.045488 puntos por unidad de área, tomando

#### 4. IMPLEMENTACIÓN ESPACIAL Y REPERCUSIONES LOCALES.

---

en cuenta que la superficie de la venta es de 173.125 unidades cuadradas y la fracción del área ocupada es 0.313.

### Intensidad Conjunta

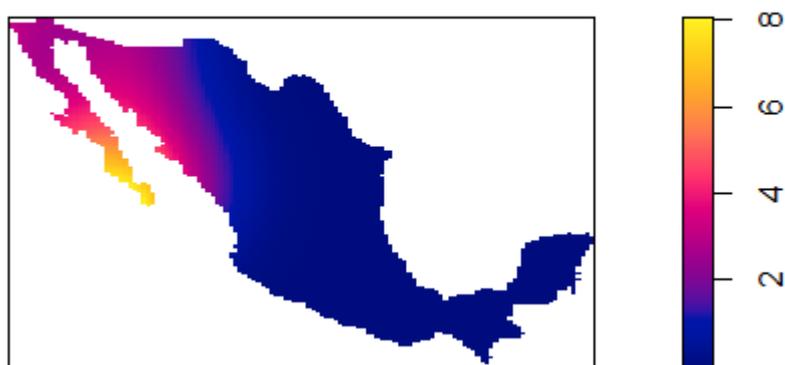


Figura 4.8: Intensidad de la duración para 2020

### Intensidades marginales

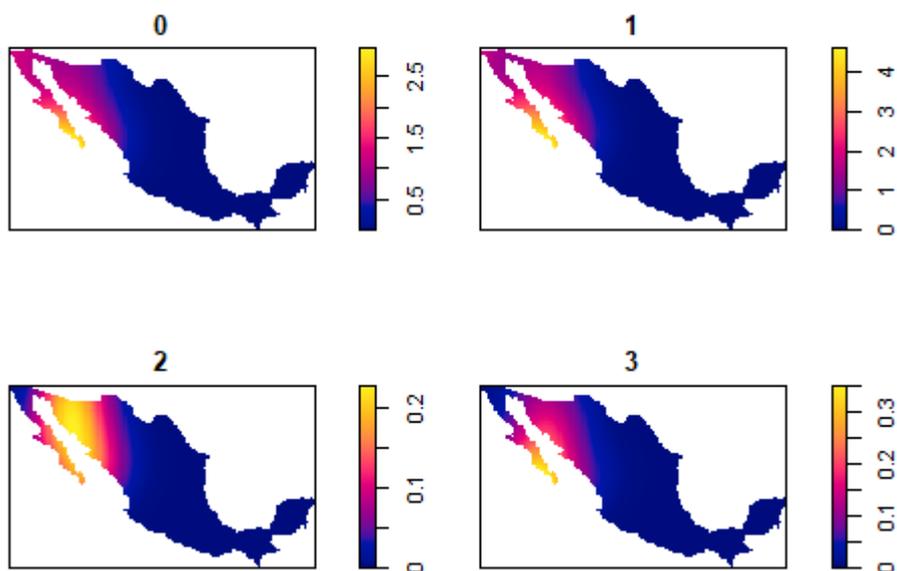


Figura 4.9: Intensidad marginal de la duración para 2020

### 4.3.2. Modelos.

El modelo básico de referencia de un patrón de puntos aleatorios es el proceso puntual *Poisson uniforme* en el plano con intensidad  $\lambda$ , a veces llamado *aleatoriedad espacial completa* (CSR, por sus siglas en inglés). Sus propiedades básicas son:

- El número de puntos que caen en cualquier región  $A$  tiene una distribución Poisson con media,  $\lambda \times \text{area}(A)$ .
- Dado que hay  $n$  puntos dentro de la región  $A$ , las ubicaciones de estos puntos son independientes e idénticamente distribuidos de manera uniforme dentro de  $A$ .
- Los contenidos de dos regiones disjuntas  $A$  y  $B$  son independientes.

Una función de distribución sigue una densidad poisson si esta es de la forma

$$p_k = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

En (4.3) el parámetro  $\lambda$  representa la media de la distribución. Cada punto en un patrón espacial puede llevar información adicional llamada *marca*. En el ejemplo estas marcas pueden verse como una coordenada adicional al proceso de reclamaciones. Un proceso de puntos marcados en un espacio  $\mathbf{S}$  con marcas que pertenecen a un conjunto  $\mathbf{M}$  es definido como un proceso puntual en el producto cartesiano  $S \times M$ . Un patrón de puntos marcados es un conjunto

$$\mathbf{y} = \{(x_1, m_1), \dots, (x_n, m_n)\}, \quad x_i \in \mathbf{W}, \quad m_i \in \mathbf{M}. \quad (4.4)$$

De (4.4) tomamos  $x_i$  como las ubicaciones y  $m_i$  como las alteraciones a la duración respecto a distintos niveles de riesgo.

La *función I de Morán* [34] ofrece una medida de la autocorrelación espacial, es decir, la correlación entre los valores de una variable basada en las ubicaciones en donde se realizaron las mediciones. Para el patrón de puntos de la duración, la tabla 4.1 muestra que no se cuenta con información suficiente como para rechazar la hipótesis nula de que hay cero autocorrelación espacial a una alpha del 0.05.

Observados	Esperados	Desv. est.	p-value
-0.04181768	-0.0055555556	0.04570473	0.4275449

**Tabla 4.1:** Resultado del índice de Morán.

Para investigar si el modelo adecuado corresponde efectivamente a CSR se pueden considerar algunos ejemplos. A los modelos Poisson uniformes en  $\mathbb{R}^2$  con marcas en  $\mathbf{M}$  suele llamárseles *Poisson multitypos*. La función de densidad de un proceso multitypo es una función  $f(y)$  definida para todos los puntos marcados. El proceso con densidad de probabilidad  $f(y) \equiv 1$  es el proceso uniforme de puntos con intensidad 1 para cada marca. Es decir, para este modelo, el subproceso de puntos con marca  $m_i = m$  es un

#### 4. IMPLEMENTACIÓN ESPACIAL Y REPERCUSIONES LOCALES.

---

proceso Poisson uniforme con intensidad 1. No es recomendable suponer CSR donde las intensidades  $\beta_m$  son equivalentes a,  $\beta_m \equiv \alpha$  digamos, para todas las marcas posibles ya que ese modelo solo es apropiado si creemos que todos los valores de marca son igualmente probables.

Una alternativa es considerar el proceso *Poisson No Homogéneo* con función de intensidad  $\lambda(u)$ ,  $u \in \mathbb{R}^2$ , que no es más que una modificación a CSR pero considerando

- El número  $N(X \cap B)$  de puntos que caen en una región  $B$  tiene valor esperado

$$E[N(X \cap B)] = \int_B \lambda(u) du.$$

- Dado que  $N(X \cap B) = n$ , los  $n$  puntos son independientes e idénticamente distribuidos, con densidad de probabilidad común  $f(u) = \lambda(u)/I$ , donde  $I = \int_B \lambda(u) du$ .

Al ajustar un modelo poisson no homogéneo se considera su *función de log-verosimilitud* ya que es una función bien comportada, por lo que distintas propuestas deben especificar su tendencia a través de la forma del logaritmo de su función de intensidad. En el proceso *Poisson Homogéneo* la tendencia depende solo de las marcas, y no de la ubicación espacial; Como las marcas son un factor, la tendencia tiene un valor constante separado para cada nivel de marcas.

Para el Poisson homogéneo se obtiene un AIC de 66.3915 y los estimados de los parámetros  $\hat{\beta}_m$  son

$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$
0.37582916	0.58976268	0.04047391	0.04047391

**Tabla 4.2:** Ajuste de un modelo Poisson homogéneo a los datos en la región local.

Este comportamiento es esperado ya que sólo se está extendiendo la proporción de observaciones a toda la ventana, como se muestra en la simulación de la figura 4.10.

Bajo este modelo ahora el valor esperado se desfasa a 95 reclamaciones y a 72 sin reclamaciones bajo condiciones normales. Además, este escenario alcanza el cuantil al 95 % a las 103 reclamaciones, por lo que sus impactos a la duración son del 12.8 %. El escenario catastrófico al 99.5 % se alcanza en 109 reclamaciones dando unas tasas de alteración en la duración del 45.16 %.

En cambio, si se considera un Poisson no homogéneo cuya función de intensidad  $\lambda(x, y, m)$  en la ubicación  $(x, y)$  y de marca  $m$  es

$$\log \lambda(x, y, m) = \alpha_m + \beta x,$$

se tiene que la intensidad es log-lineal en la coordenada cartesiana de  $x$  con un intercepto diferente para cada marca, pero con la misma pendiente.

## Poisson Homogéneo



**Figura 4.10:** Realización proceso de Poisson homogéneo.

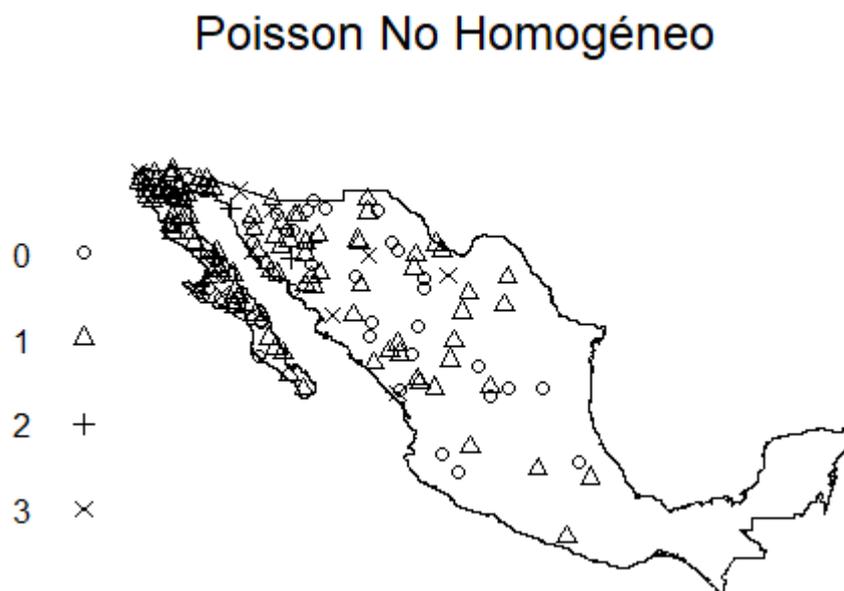
Este modelo, aunque un poco más complejo resulta atractivo ya que su AIC disminuye a 51.84166 y tiene como parámetros

$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$
-0.2466424	-27.3733438	-26.92276	-29.15124	-31.37971

**Tabla 4.3:** Ajuste de un modelo Poisson no homogéneo.

Este modelo adquiere una mejor interpretación ya que funciona con una tendencia espacial común y diferente intensidad para cada tipo.

Los valores esperados bajo condiciones normales se encuentra en 105 para reclamaciones y en 66 sin reclamaciones. El cuantil al 95 % se mueve hasta 111 reclamaciones, por lo que sus impactos a la duración son del 23.74 %. El cuantil al 99.5 % se desplaza hasta 123 dando impactos totales del 121.66 %.



**Figura 4.11:** Realización proceso Poisson no homogéneo

# 5

## Conclusiones.

La restricción producida por CMIP5 junto a un periodo más largo de descuento genera un portafolio con una disminución en general de los costos a largo plazo pero con riesgos y primas mas caros en el corto plazo.

Para la simulación del modelo VAR un ruido gaussiano mostró un buen ajuste por lo que los riesgos poseen una cola ligera, se consideran no catastróficos y pueden permear fuertemente en la cultura del inversionista pues se cuenta con instrumentos de diversificación que no conllevan grandes riesgos.

Los resultados no sólo son aplicables en la agricultura. Existe un gran potencial para su aplicación en diversos sectores como salud y energía [16] Los derivados del clima proporcionan una opción simple y razonable para la cuantificación económica de estos impactos, al comparar estrategias de cobertura hipotéticas en un escenario base sin cambio climático y bajo condiciones de cambio climático.

Para la parte discreta se puede observar que el incremento de la temperatura se verá más marcado a final de siglo, ño que sugiere que la tendencia de cambio climático no se verá disminuida.

Las tasas por alteraciones a la duración de cultivos de maíz son del 20% a cerca del 50% entre varios horizontes, que es lo que se ofrece de cobertura con cada contrato de la cartera. El riesgo por cambio climático es muy severo al iniciar la exposición, ya que la tasa de duración se alterará en un 200%.

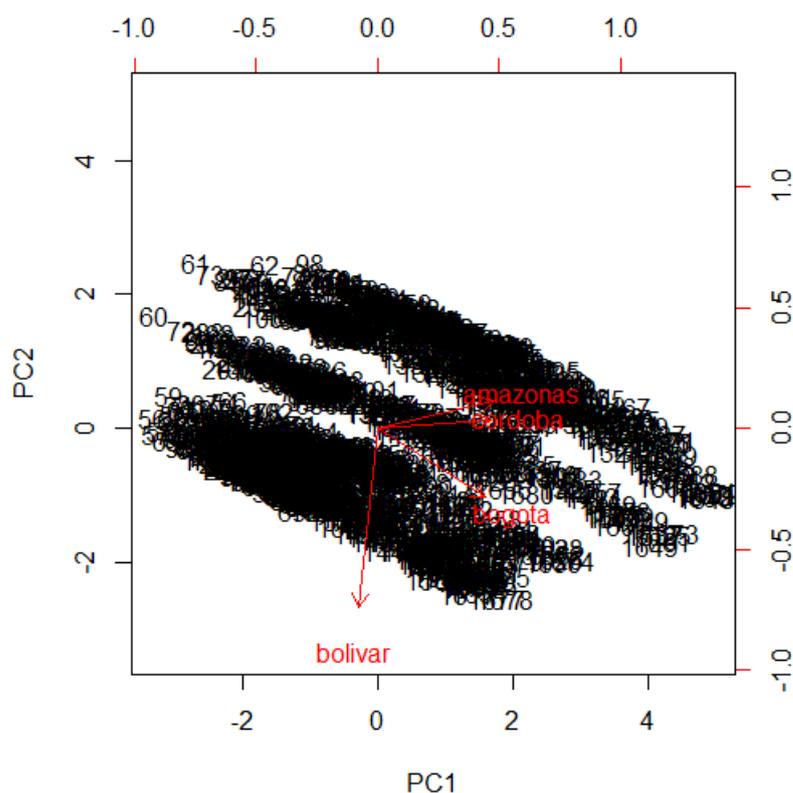
La cartera se inicia con coberturas altas y conforme aumenta la exposición, los costos se abaratarán.

En su mayor parte hasta este punto se ha tratado con el desarrollo de modelos estocásticos. Sin embargo, en la práctica existen modelos que *integran* [35] tanto la física del clima como sus aspectos económicos y las observaciones no precisamente forman una muestra aleatoria. Por su naturaleza, estos modelos tienen un corte más determinístico y

## 5. CONCLUSIONES.

numérico. Modelar la incertidumbre no es tan difícil. Inicialmente, un modelo integrado tiene un estado del mundo. Se supone que las variables y los parámetros se conocen perfectamente y, por lo tanto, podrían representarse con un solo número. Al introducir nuevos estados del mundo para los parámetros significa que se necesita dividir cada variable que depende de los nuevos escenarios. Debido a que estos modelos se construyen al integrar muchas partes en las que todo depende de todo, todo el modelo debe dividirse. Al aumentar el número de estados o el número de parámetros esta representación se vuelve algo prohibitiva.

Aplicando estas ideas a la cartera, puede resultar que la información agregada para Colombia no sea suficiente e información regional (a una distinta resolución) sea requerida. Como antes, se cuenta con la información de 4 estaciones: Bogotá, Bolívar, Córdoba y Amazonas. Entonces, en vez de replicar las valuaciones para cada caso, se puede tomar en cuenta en que dirección varía más el conjunto de datos. Al analizar los componentes principales se tiene que los vectores de carga son



PCA				
Bogotá	0.55410431	-0.35654126	0.3891293	0.64375860
Bolívar	-0.09609141	-0.92252460	-0.1266313	-0.35168072
Córdoba	0.57651870	0.04386836	-0.8156329	0.02108871
Amazonas	0.59275715	0.14107536	0.4090060	-0.67930171

Los primeros componentes están relacionados con Bogotá y Bolívar, pero Bolívar

---

lleva la tendencia de los datos. Al volver a desarrollar el portafolio pero sólo considerando esta dirección se vuelve a generar una distribución del número de reclamaciones. Esta distribución vuelve a ser del tipo binomial, con truncamiento a corto y largo plazo, y modificación en cero en el mediano plazo.

Ajuste de la distribución del número de reclamos		
Horizonte	q	AIC
2020	0.4248566	40829.42
2050	0.4893116	41418.6
2100	0.5809462	40683.3

Los resultados son similares a los obtenidos con el portafolio original, por lo que los resultados con una resolución agregada pueden ser generados con la información de la tendencia del conjunto de datos que se encuentra a una resolución distinta. Empleando este enfoque se pueden evitar las dificultades computacionales de evaluar todo un modelo para cada estado del mundo.

En el análisis espacial, el patrón de resiliencia también detecta este comportamiento, sin embargo el impacto se acentúa pues no solamente disminuye la resiliencia positiva, sino que también aumenta la resiliencia negativa.

Se definió la alteración a la duración de los cultivos de maíz como la sensibilidad al cambio del nivel de riesgo entre escenarios sin cambio climático y escenarios con distintos umbrales de pérdida.

Inicialmente se planteó un modelo poisson homogéneo, el cual genera un valor constante para cada nivel de marcas. Las tasas de duración se alteran en un 12.8 % dadas situaciones malas y lo hacen en un 45.16 % dadas situaciones catastróficas (superar el cuantil 95 % y 99.5 % respectivamente).

Posteriormente se encontró que un modelo poisson no homogéneo arroja un mejor ajuste, ya que funciona con una tendencia espacial y diferentes intensidades para cada patrón. Este modelo logra capturar un mayor impacto puesto que los impactos incrementan a un 23.74 % en cuanto a escenarios malos, y a un 121.66 % en cuanto a escenarios catastróficos.





## Apéndice.

### A.1. Funciones

Conjunto y función son de los términos más básicos en matemáticas. Una *función* es un conexión entre cantidades dada por relaciones matemáticas u operaciones. Siempre que los valores de ciertas cantidades  $y_1, y_2, \dots$  estén determinados por los de ciertas otras  $x_1, x_2, \dots$ , se dice que  $y_1, y_2, \dots$  dependen de  $x_1, x_2, \dots$ , o bien que están en función de  $x_1, x_2, \dots$ . Estas leyes matemáticas asignan valores únicos de las variables dependientes a valores dados de las variables independientes. Las correspondientes relaciones entre  $x_1, x_2, \dots$  y los valores asociados  $y_1, y_2, \dots$  se escribe en la forma  $(y_1, y_2, \dots) = f(x_1, x_2, \dots)$ , donde dependiendo el contexto se puede sustituir la notación  $f$  por cualquier otra letra. Un *conjunto* es una colección de objetos bien definidos de tal manera que para cualquier objeto dado se puede afirmar que el objeto está en el conjunto o no, pero no ambos. Los conjuntos generalmente se representan con letras mayúsculas. Cuando un objeto  $x$  pertenece a un conjunto  $A$ , se escribe  $x \in A$ , de lo contrario, se usa la notación  $x \notin A$ . Una forma de representar un conjunto es hacer una lista sin repetición de sus elementos. El conjunto de los números enteros positivos se puede expresar como  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ . Otra forma de representar conjuntos es describiendo una propiedad que caracterice a sus elementos;  $\mathbb{N} = \{x|x \text{ es un entero positivo}\}$ ,  $\mathbb{R} = \{x|x \text{ es un número real}\}$ . Dos conjuntos son iguales si contienen los mismos elementos, lo que suele escribirse como  $A = B$ . Se define el *conjunto vacío*, denotado por  $\emptyset$ , como el conjunto sin elementos. La cantidad de elementos en un conjunto es llamado *cardinalidad*. Se escribe  $\#(A)$  para denotar la cardinalidad del conjunto  $A$ . Si  $A$  tiene una cardinalidad finita decimos que  $A$  es un conjunto *finito*. De otra manera, se llama *infinito*. Una función es *inyectiva* si  $f(m) = f(n)$  implica  $m = n$ , con  $m, n \in A$ . Una función es *sobreyectiva* si para cada  $b \in B$ , hay un  $a \in A$  tal que  $b = f(a)$ . Si  $A$  y  $B$  son dos conjuntos (finitos o infinitos)

y hay una *biyección* de  $A$  a  $B$  (es decir, una función inyectiva y sobreyectiva) luego se dice que los dos conjuntos tienen la misma cardinalidad. Si  $\#(A)$  es finito o tiene la misma cardinalidad que  $\mathbb{N}$ , entonces  $A$  se llama *numerable*. El *dominio* de una función es la totalidad de valores  $A$  para los cuales la función está definida. El *contradominio* de la función,  $B$ , es el conjunto donde toma valores la función. Para especificar el dominio y contradominio de una función se utiliza la notación  $f : A \rightarrow B$ . Una *pareja ordenada* es una pareja  $(a, b)$  tal que el primer elemento  $a \in A$  y el segundo  $b \in B$ . El *producto cartesiano*,  $A \times B$ , es el conjunto de parejas ordenadas  $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$ . En el caso en que  $B = A$  se denota  $A \times B = A^2$  e inductivamente si  $B = A^{n-1}$  entonces  $A \times B = A^n$ .

Una función sencilla de  $n \in \mathbb{N}$  es la expresión *factorial de  $n$* , el producto de los primeros  $n$  enteros:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Otra función de  $n$  es el *coeficiente binomial*  $\binom{n}{k}$  definido por:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

En muchas aplicaciones se consideran conjuntos dotados exclusivamente de una distancia. Sea  $X$  un conjunto. Una métrica (o distancia) en  $X$  es una función  $d_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  que tiene las siguientes tres propiedades:

1.  $d_X(x, y) = 0$  si y sólo si  $x = y$ .
2.  $d_X(x, y) = d_X(y, x)$  para todos  $x, y \in X$ .
3.  $d_X(x, z) \leq d_X(x, y) + d_X(y, z)$  para todos  $x, y, z \in X$ .

Un espacio métrico,  $(X, d_X)$  es un conjunto  $X$  con una métrica dada  $d_X$ .

Las métricas más interesantes son en espacios vectoriales que son las inducidas por una norma. Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ . Una norma en  $V$  es una función  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  que tiene las siguientes propiedades:

1.  $\|v\| = 0$  si y sólo si  $v = 0$ .
2.  $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$  para cualesquiera  $v \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ .
3.  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$  para cualesquiera  $v, w \in V$ .

Un espacio normado,  $(V, \|\cdot\|)$  es un espacio vectorial  $V$  provisto de una norma  $\|\cdot\|$ . Todo espacio normado  $(V, \|\cdot\|)$  es un espacio métrico con la métrica dada por  $d(v, w) := \|v - w\|$ .

De los espacios métricos mejor conocidos se encuentran los *espacios euclidianos*,  $\mathbb{R}^n$ , con la *distancia usual*  $d_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$  donde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ . El caso  $n = 1$  se reduce al conjunto de los números reales,  $\mathbb{R}$ , con distancia  $d = |x - y|$ .

Para un espacio métrico  $(X, d_X)$  se define la *bola abierta* de radio  $r$  y centro  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{B}_X(x_0, r)$ , como el conjunto de puntos  $\mathbf{x}$  tales que  $d(x, x_0) < r$ . Un punto  $x \in A \subset X$  se llama un *punto interior* de  $A$  si existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\mathbf{B}_X(x, \varepsilon) \subset A$ . El conjunto de todos los puntos interiores de  $A$  se llama el *interior* de  $A$  en  $X$  y se denota  $\text{int}_X(A)$ . Se dice que  $A$  es *abierto* en  $X$  si  $A = \text{int}_X(A)$ . Un punto  $x \in A \subset X$  se llama un *punto de contacto* de  $A$  si  $\mathbf{B}_X(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$  para toda  $\varepsilon > 0$ . El conjunto de todos los puntos de contacto de  $A$  se llama la *cerradura* de  $A$  en  $X$  y se denota  $\bar{A}$ . Se dice que  $A$  es *cerrado* en  $X$  si  $A = \bar{A}$  y que es *acotado* si existe un número real  $M$  y  $p \in X$  tal que  $d_X(q, p) < M$  para todo  $q \in X$ . Cuando un conjunto es cerrado y acotado se llama *compacto*.

En la naturaleza aparecen numerosos fenómenos que tienen un comportamiento continuo. Se puede pensar que un proceso continuo tiene lugar gradualmente, sin interrupciones ni cambios abruptos. Lo anterior conduce a la siguiente definición más precisa, una función  $f : X \rightarrow Y$  es *continua* en el punto  $x_0 \in X$  si, dado un número positivo  $\varepsilon$  existe un número positivo  $\delta$  (que depende de  $x_0$  y de  $\varepsilon$ ) tal que

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \text{ si } d_X(x, x_0) < \delta.$$

Intuitivamente, la continuidad significa que un pequeño cambio en las variables independientes  $x \in X$  implican sólo un pequeño cambio en las variables dependientes  $y \in Y = f(X)$  y excluye saltos en los valores de  $f$ .

El *soprote* de una función continua  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es la cerradura en  $\mathbb{R}^n$  del conjunto  $\{x | f(x) \neq 0\}$ . Se denota

$$\text{sop}(f) := \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \neq 0\}.$$

Además

$$C_C^0(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^0(\mathbb{R}^n) | \text{sop } f \text{ es compacto}\},$$

donde  $C^0(\mathbb{R}^n)$  es el conjunto de todas las funciones continuas  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Cuando una cantidad  $a$  depende de un entero positivo  $n$ , la función  $a : \mathbb{N} \rightarrow X$  se denomina *sucesión*, el  $k$ -ésimo término de la sucesión se denota por  $a_k := a(k)$  y la sucesión por  $a = (a_n)$ . A menudo un número  $a$  se describe por medio de una sucesión infinita  $a_n$  de aproximaciones. Esta situación se expresa diciendo que si  $n$  crece la sucesión  $(a_n)$  tienden a un límite. Se dice que  $(a_n)$  *converge* a un punto  $x \in X$  si, dada  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $d_X(a_n, x) < \varepsilon$  para todo  $n \geq n_0$ . El punto  $x$  se llama el *límite* de la sucesión  $(a_n)$ . Se usa la notación

$$a_n \rightarrow x \in X \text{ o bien } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x.$$

para decir que  $a_n$  converge a  $x \in X$ .

La *serie geométrica*

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = S_n$$

donde  $q \in \mathbb{R}$  se denomina *razón común* de la serie puede expresarse de la forma

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

La sucesión de sumas  $S_n$  tiene un límite definido  $S$  si  $q$  está situado entre  $-1$  y  $1$ , excluyendo estos valores extremos, y

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - q}.$$

Una *serie*

$$a_1 + a_2 + \dots$$

requiere que los términos sean sumados en el orden en el cual aparecen. Es costumbre utilizar para  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  el símbolo

$$\sum_{k=1}^n a_k.$$

Los números reales son usualmente representados en forma gráfica mediante puntos en una línea recta  $L$ , el *eje numérico* (o *recta numérica*). Un conjunto en  $L$  con puntos extremos  $a, b$  con  $a < b$  se denomina *intervalo*. Sea la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua en el intervalo cerrado  $a \leq x \leq b$ . Al dividir este conjunto por  $(n - 1)$  puntos  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ , con las longitudes  $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) donde, además,  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$  entonces en cada subintervalo cerrado  $[x_{i-1}, x_i]$  se elige cualquier punto  $\xi_i$  y se considera el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

si este límite existe se le denomina la *integral* de  $f(x)$  sobre el intervalo  $a \leq x \leq b$

$$\int_a^b f(x) dx.$$

El paso al límite a partir de una subdivisión finita en porciones  $\Delta x_i$  es indicado mediante el uso de la letra  $d$  en lugar de  $\Delta$ . La integral es una medida del efecto total de un proceso de cambio continuo.

Si  $a_i < b_i$  para  $i = 1, \dots, k$ , el conjunto de todos los puntos  $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$  cuyas coordenadas satisfacen las desigualdades  $a_i \leq x_i \leq b_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , es llamado *k-celda* (los intervalos son 1-celdas). Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continua en una  $k$ -celda que contiene al soporte de  $f$  y se divide cada  $a_i \leq x_i \leq b_i$  por  $(n_i - 1)$  puntos  $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i-1}$  con longitudes  $x_{ij_i} - x_{i(j_i-1)} = \Delta x_{ij_i}$  ( $j_i = 1, 2, \dots, n_i$ ) donde, además,  $x_{i0} = a_i$ ,  $x_{in_i} = b_i$  entonces en cada subconjunto cerrado  $[x_{1j_1-1}, x_{1j_1}] \times [x_{2j_2-1}, x_{2j_2}] \times \dots \times [x_{kj_k-1}, x_{kj_k}]$  se elige cualquier punto  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$  y se considera el límite

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n_1, n_2, \dots, n_k \rightarrow \infty} \sum_{j_k=1}^{n_k} \cdots \sum_{j_2=1}^{n_2} \sum_{j_1=1}^{n_1} f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \Delta x_{1j_1} \Delta x_{2j_2} \cdots \Delta x_{kj_k} \\
 = & \lim_{n_1, n_2, \dots, n_k \rightarrow \infty} \sum_{j_k=1}^{n_k} \cdots \sum_{j_2=1}^{n_2} \left( \sum_{j_1=1}^{n_1} f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \Delta x_{1j_1} \right) \Delta x_{2j_2} \cdots \Delta x_{kj_k} \\
 = & \lim_{n_1, n_2, \dots, n_k \rightarrow \infty} \sum_{j_k=1}^{n_k} \cdots \sum_{j_2=1}^{n_2} \Delta x_{2j_2} \cdots \Delta x_{kj_k} \left( \sum_{j_1=1}^{n_1} f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \Delta x_{1j_1} \right) \\
 = & \lim_{n_2, n_3, \dots, n_k \rightarrow \infty} \sum_{j_k=1}^{n_k} \cdots \sum_{j_2=1}^{n_2} \Delta x_{1j_1} \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \xi_2, \dots, \xi_k) dx_1
 \end{aligned}$$

Haciendo

$$F(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k) = \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \xi_2, \dots, \xi_k) dx_1$$

y sustituyendo en la última expresión se obtiene

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n_2, n_3, \dots, n_k \rightarrow \infty} \sum_{j_k=1}^{n_k} \cdots \sum_{j_2=1}^{n_2} F(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k) \Delta x_{2j_2} \cdots \Delta x_{kj_k} \\
 = & \lim_{n_3, n_4, \dots, n_k \rightarrow \infty} \sum_{j_k=1}^{n_k} \cdots \sum_{j_3=1}^{n_3} \Delta x_{3j_3} \cdots \Delta x_{kj_k} \int_{a_2}^{b_2} F(x_2, \xi_3, \dots, \xi_k) dx_2 \\
 = & \lim_{n_3, n_4, \dots, n_k \rightarrow \infty} \sum_{j_k=1}^{n_k} \cdots \sum_{j_3=1}^{n_3} \Delta x_{3j_3} \cdots \Delta x_{kj_k} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \dots, \xi_k) dx_1 dx_2
 \end{aligned}$$

Continuando de este modo se encuentra que la integral

$$\int_{a_k}^{b_k} \cdots \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 dx_2 \cdots dx_k$$

puede expresarse como una *integral iterada*.

La expresión

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$$

donde  $h \in \mathbb{R}^+$  y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se denomina *cociente incremental*. Al límite de la forma

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$$

se le conoce como *derivada*. Su notación varía dependiendo el contexto pero suele escribirse como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

Sea  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U$  un conjunto abierto. Entonces las *derivadas parciales* de  $f$  respecto de la primera, segunda, ...,  $n$ -ésima variable, denotadas como  $\partial f/\partial x_1, \dots, \partial f/\partial x_n$ , se definen como

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_j + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}.$$

La derivada de una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es la función lineal que mejor se aproxima a  $f$ . Esto se puede expresar como

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - f'(x)h\|}{\|h\|} = 0$$

donde  $f'(x)$  en este caso es la matriz de  $m \times n$  con elementos  $\partial f_i/\partial x_j$ . Las funciones que admiten tal aproximación se llaman *diferenciables*.

El hecho fundamental del cálculo establece que las operaciones de integración y derivación (o diferenciación) son procesos inversos.

## A.2. Matrices

Un punto  $P$  en el espacio se representa como una coordenada cartesiana  $(a_1, \dots, a_n)$ . Una entidad que actúe sobre un punto e involucre una dirección y una magnitud se llama *vector*. Los vectores suelen denotarse con las letras  $x$  ó  $y$  ya que en el caso unidimensional de un espacio euclidiano<sup>1</sup> se reducen a los números reales. Los vectores se representan por flechas en las que la longitud define la magnitud del vector y la dirección también representa la dirección del vector. Los vectores tienen muchas motivaciones físicas, por lo que en lugar de observar el fenómeno directamente se puede aprender de él mediante los vectores que lo describen. Esto implica que si dos vectores tienen la misma magnitud y el mismo sentido entonces son iguales. Cuando dos vectores actúan simultáneamente sobre un punto la magnitud resultante es la del vector  $x + y = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$ , que en el paralelogramo que tiene a  $x$  y  $y$  como lados adyacentes, se representa por la diagonal que parte de  $P$ . Cuando la longitud del vector es amplificada o reducida sin cambiar de dirección resulta el vector  $tx = (ta_1, \dots, ta_n)$ , donde a  $t \in \mathbb{R}$  se le denomina *escalar*.

Un *campo*  $F$  es un conjunto en el cual se definen dos operaciones  $+$ ,  $\cdot$  de modo que para cualquier par de elementos  $a, b$  en  $F$  existen elementos únicos  $a + b$  y  $a \cdot b$  (que suele denotarse como  $ab$ ) tales que cumplen las siguientes propiedades para todo  $a, b$  en  $F$ :

1.  $a + b = b + a$  y  $a \cdot b = b \cdot a$ .
2.  $(a + b) + c = a + (b + c)$  y  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ .
3. Existen elementos distintos  $0$  y  $1$  en  $F$  tales que  $0 + a = a$  y  $1 \cdot a = a$ .
4. Para cada elemento  $a \in F$  y cada elemento no nulo  $b \in F$  existen elementos  $c$  y  $d$  en  $F$  tales que  $a + c = 0$  y  $b \cdot d = 1$ .
5.  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ .

Un *espacio vectorial* (o espacio *lineal*)  $V$  sobre un campo  $F$  consiste de un conjunto en el que están definidas dos operaciones tal que para cualquier par de elementos  $x, y$  en  $V$  exista un elemento único  $x + y$  en  $V$ , y para cada elemento  $a$  en  $F$  y cada elemento  $x$  en  $V$  exista un elemento único  $ax$  en  $V$ , de manera que se cumplan las siguientes propiedades:

1. Para toda  $x, y$  en  $V$ ,  $x + y = y + x$ .
2. Para toda  $x, y, z$  en  $V$ ,  $(x + y) + z = x + (y + z)$ .
3. Existe un elemento en  $V$  denotado  $0$  tal que  $x + 0 = x$  para toda  $x$  en  $V$ .
4. Para cada elemento  $x$  en  $V$ , existe un elemento  $y$  en  $V$  tal que  $x + y = 0$ .

<sup>1</sup>En los *postulados de Euclides* se describe el comportamiento y la relación entre ciertos elementos básicos de la geometría como son *punto*, *distancia*, etc.

5. Para cada elemento  $x$  en  $V$ ,  $1x = x$ .
6. Para cada par  $a, b$  de elementos en  $F$  y cada elemento  $x$  en  $V$ ,  $(ab)x = a(bx)$ .
7. Para cada elemento  $a$  en  $F$  y cada par de elementos  $x, y$  en  $V$ ,  $a(x+y) = ax + ay$ .
8. Para cada par de elementos  $a, b$  en  $F$  y cada elemento  $x$  en  $V$ ,  $(a+b)x = ax + bx$ .

Los escalares son los elementos del campo y los vectores los elementos del espacio vectorial. Los elementos de  $F^n$  también se expresan como *vectores columna*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Una *matriz de dimensiones*  $m \times n$  con valores de un campo  $F$  es un arreglo rectangular de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde cada elemento  $a_{ij}$  ( $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ ) pertenece a  $F$ .

Si  $m = n$  la matriz se dice que es *cuadrada*. Una matriz cuadrada se llama *diagonal* si  $a_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ . Si una matriz diagonal de  $n \times n$  tiene unidades como elementos ( $a_{ii} = 1$ ) se llama *identidad* y se denota como  $\mathbf{I}_n$ , donde el subíndice se suele omitir si las dimensiones se sobreentienden.

La *transpuesta*,  $\mathbf{A}^\top$ , de una matriz  $\mathbf{A}$  de dimensiones  $m \times n$  se obtiene de intercambiar sus renglones por las columnas. El transpuesto de un vector columna  $x$  es el vector renglón  $x^\top$ .

Si dos matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son de las mismas dimensiones su suma es la matriz  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ . El producto de un escalar  $\alpha$  por una matriz  $\mathbf{A}$  es la matriz  $\alpha\mathbf{A}$  con elementos  $\alpha a_{ij}$ . El producto de una matriz  $\mathbf{A}$  de dimensiones  $m \times p$  por una matriz  $\mathbf{B}$  de  $p \times n$  es la matriz  $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$  de  $m \times n$  cuyos elementos están dados por  $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$ . Para una matriz cuadrada  $\mathbf{A}$  de  $n \times n$  el *determinante* está dado por  $\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} M_{ij}$  donde  $M_{ij}$  es el *menor* de la matriz formado al eliminar el renglón  $i$  y la columna  $j$ .

Sea  $S$  un conjunto no vacío de  $V$ . Se dice que un vector  $x$  de  $V$  es una *combinación lineal* de elementos de  $S$  si existe un número finito de elementos  $y_1, y_2, \dots, y_n$  en  $S$  y escalares  $a_1, a_2, \dots, a_n$  en  $F$  tales que  $x = a_1y_1 + \dots + a_ny_n$ . También se puede describir esta situación diciendo que los elementos de  $S$  son linealmente dependientes. Si el subconjunto no es linealmente dependiente se dice que es *linealmente independiente*.

El *rango* de una matriz es el número máximo de columnas (filas respectivamente) que son linealmente independientes. El rango fila y el rango columna siempre son iguales por lo que este número es llamado simplemente rango de  $A$ . Un *polinomio matricial* es un polinomio cuyos coeficientes son matrices. El polinomio matricial de orden  $n$ -ésimo en la variable  $t$  está dado por  $\theta(t) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 t + \mathbf{A}_2 t^2 + \dots + \mathbf{A}_n t^n$  donde  $\mathbf{A}_k$  son matrices cuadradas de dimensiones  $p \times p$ . Se dice que  $\mathbf{A}$  de  $n \times n$  es positiva definida si las siguientes condiciones se cumple:

- $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$  (Es *simétrica*)
- $y^\top \mathbf{A} y > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, y \neq 0$  (Es *definida positiva*)
- $y^\top \mathbf{A} y \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, y \neq 0$  (Es *semidefinida positiva*)



# B

## Plataforma en Shiny.

- Valuación de Opciones.

<https://juan-pablo-acua-gnzalez.shinyapps.io/bolivar2/>

- Repercusiones Locales.

<https://juan-pablo-acua-gnzalez.shinyapps.io/hoja/>



## Referencias.

- [1] Estrada, F. , Perron, P. y Martínez-López, B. (2013). “Statistically derived contributions of diverse human influences to twentieth-century temperature changes.” *Nature Geoscience*, 6, 1050–1055.
- [2] Cowpertwait, P. y Metcalfe, A. (2009), *Introductory time series with R*, NY: Springer.
- [3] Lütkepohl, H. (2005), *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Berlín: Springer.
- [4] Jones, P. y Moberg, A. (2003). “Hemispheric and large-scale surface air temperature variations: An extensive revision and an update to 2001.” *Journal of Climate*, 16, 206–223.
- [5] Rodríguez, S. (2003). Detección y atribución de la desaceleración del calentamiento global en variables oceánicas. *UNAM*, México.
- [6] D. Kim et al., (2019). Inference related to common breaks in a multivariate system with joined segmented trends with applications to global and hemispheric temperatures. *Journal of Econometrics*
- [7] Enders, W. (1995). *Applied Economic Time Series*. New York: John Wiley Sons.
- [8] Box, G., Jenkins, G. y Reinsel, G. (1994). *Time Series Analysis, Forecasting and Control*. 3a. ed, Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- [9] Akaike, H. (1974). “A New Look at the Statistical Model Identification”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19 (6), 716-723.
- [10] G. M. Ljung, G. E. P. Box (1978). “On a Measure of a Lack of Fit in Time Series Models”. *Biometrika*, 65 (2): 297-303.
- [11] Anderson, T.W., Darling, D.A. (1954). “A Test of Goodness-of-Fit”. *Journal of the American Statistical Association*, 49: 765–769.
- [12] Bai, J.; Perron, P. (2003). “Computation and analysis of multiple structural change models.” *Journal of Applied Econometrics*. 18 (1): 1–22.
- [13] James, G., Witten, D., Hastie, T., Tibshirani, R. (2017), *An introduction to statistical learning with applications in R*, NY: Springer.

## REFERENCIAS.

---

- [14] Estrada, F., Perron, P. y Martínez-López, B. (2013). “Statistically derived contributions of diverse human influences to twentieth-century temperature changes.” *Nature Geoscience*, 6, 1050–1055.
- [15] Estrada, F. y Perron, P. (2017). “Extracting and analyzing the warming trend in global and hemispheric temperatures.” *Atmósfera*, 30(2), 163-187.
- [16] Estrada, F. (2010). Generación de escenarios de cambio climático locales mediante pronósticos restringidos de modelos VAR: una aplicación para estimar impactos potenciales en la demanda de energía del Distrito Federal usando derivados financieros. *ITAM*, México.
- [17] Estrada, F. y Guerrero, V. (2014). “A new methodology for building local climate change scenarios: A case study of monthly temperature projections for Mexico City.” *Atmósfera*, 27(4), 429-449.
- [18] Guerrero, V., Peña, D. (2000) “Linear Combination of Restrictions and Forecasts in Time Series Analysis.” *Journal of Forecasting*, 19, 103-122.
- [19] Gay-García, C., Estrada, F. , Sánchez, A. (2008). “Global and hemispheric temperatures revisited.” *Climatic Change*, 94(3-4), 333–349.
- [20] Estrada, F. y Perron, P. (2012). “Breaks, trends and the attribution of climate change: a time-series analysis.” *Boston University - Department of Economics - Working Papers Series WP2012-013*.
- [21] López M., C. A. (2003). Macroeconomía ambiental: Modelo IS-LM-EE. UNAM, México.
- [22] Bachelier, L. (1900). “The Theory of Speculation.” *Annales scientifiques de l’Ecole Normale Supérieur*. Ser 3, 17.
- [23] Lundberg, F. (1903). I.Approximerad framställning av sannolikhetsfunktionen II.Aterforsakring av kollektivrisker. Almqvist and Wiksell, Uppsala.
- [24] Cramér, H. (1946), *Mathematical Methods of Statistics*, NY: The Princeton University Press.
- [25] Artzner, P., Delbaen, F, Eber, J y Heath, D. (1997), “Thinking Coherently”, *RISK*, 11, 68–71.
- [26] Klugman, S., Panjer, H. y Willmot, G. (2013), *Loss Models: Further Topics*, Hoboken, NJ: Wiley.
- [27] Willmot, G. y Woo, J. (2013). “Some Distributional Properties of a Class of Counting Distributions with Claims Analysis Applications.” *ASTIN Bulletin*, v. 43 n. 2, p. 189-212

- 
- [28] Willmot, G., Drekić, S., and Cai, J. (2005). “Equilibrium Compound Distributions and Stop-Loss Moments.” *Scandinavian Actuarial Journal*, 6–24
- [29] Botzen, W. (2018). “Economics of climate change.” *Panorama Actual de las Ciencias Atmosféricas*, Centro de Ciencias de la Atmósfera, UNAM, México.
- [30] Botzen, W., Howard Kunreuther H., Michel-Kerjan E. (2015). “Divergence between individual perceptions and objective indicators of tail risks: Evidence from floodplain residents in New York City.” *Judgment and Decision Making*, 10-4, 365-385.
- [31] Juárez-Torres, M. , Sánchez-Aragón, L. , Vedenov, D. (2017). “Weather Derivatives and Water Management in Developing Countries: An Application for an Irrigation District in Central Mexico.” *Journal of Agricultural and Resource Economics*, 42(2),146–163.
- [32] Klugman, S., Panjer, H. y Willmot, G. (2019), *Loss Models: From Data to Decisions*, 5a ed, Hoboken, NJ: Wiley.
- [33] Baddeley, A., Rubak, E., y Turner, R. (2015), *Spatial Point Patterns: Methodology and Applications with R*, Orlando, Florida: Chapman Hall/CRC.
- [34] Tol, R. (2019), *Climate Economics. Economic Analysis of Climate, Climate Change and Climate Policy*, 2a ed, UK: Edward Elgar Publishing.
- [35] Gittleman, J. L. y Kot, M. (1990). “Adaptation: statistics and a null model for estimating phylogenetic effects”. *Systematic Zoology*, 39, 227–241.
- [36] Feller, W. (1968), *An introduction to probability theory and its applications*, London: Wiley, 3a. ed.
- [37] Acerbi, C. y Tasche, D. (2002), “On the Coherence of Expected Shortfall”, *Journal of Banking and Finance*, 26, 1487–1503.
- [38] Álvarez, L. (2018). El cambio climático y su impacto en la seguridad alimentaria en México. Caso de estudio maíz. UNAM, México.
- [39] Arreguín, A. (2019), “Género y cambio climático: ¿Cómo se aborda en el CMNUCC?” 1ª *Semana de Acción Ambiental y Climática*, Facultad de Ciencias, UNAM, México.
- [40] Bingham, N., Goldie, C., y Teugels, J. (1987), *Regular Variation*, Cambridge: Cambridge University Press.
- [41] Bobriková, M. (2016). “Weather Risk Management in Agriculture.” *Acta Universitatis Agriculturae et Silviculturae Mendelianae Brunensis*. <http://dx.doi.org/10.11118/actaun201664041303>.
- [42] Cantero, A. (2019). Derivados Climáticos en México: Contexto y Viabilidad de la Propuesta. UNAM, México.
-

## REFERENCIAS.

---

- [43] Day, T. (2006). “Degree-days: theory and application.” *The Chartered Institution of Building Services Engineers*, TM41.
- [44] Embrechts, P., Maejima, M., y Teugels, J. (1985) “Asymptotic Behaviour of Compound Distributions”, *ASTIN Bulletin*, 15, 45–48.
- [45] Ford, P., “MCMC Algorithms.” CAS Study Note Version 0.6, 2018
- [46] Geysers, J., Van de Venter, T. (2001). “Hedging maize risk with weather derivatives.” *SAFA Conference Working paper*, Department of Agricultural Economics, University of Pretoria.
- [47] Hermosa, C. (2017). Modelos Estadísticos para la Valuación de Derivados Climáticos en Temperatura y Precipitación. *UNAM*, México.
- [48] Jewson, S., Brix, A. (2005), *Weather derivative valuation*, NY: Cambridge University Press.
- [49] Jewson, S. 2002. Weather derivative pricing and risk management: volatility and value at risk. <http://ssrn.com/abstract=405802>.
- [50] Jewson, S. 2003. Horizon value at risk for weather derivatives, part 1: single contracts. <http://ssrn.com/abstract=477585>.
- [51] Jewson, S. 2003. Horizon value at risk for weather derivatives, part 2: portfolios. <http://ssrn.com/abstract=478051>.
- [52] Juárez-Torres, M. , Sánchez-Aragón, L. (2012). “Effectiveness of Weather Derivatives as a Cross-Hedging Instrument against Climate Change: The Cases of Reservoir Water Allocation Management in Guanajuato, Mexico and Lambayeque, Peru.” *IDB WORKING PAPER SERIES*, 328.
- [53] McCune, N. et al. (2012), *Social-Ecological Resilience and Maize Farming in Chiapas, Mexico*. Capítulo de acceso abierto en, *Sustainable Development. Authoritative and Leading Edge Content for Environmental Management*. Editado por Sime Curkovic.
- [54] McDonald, L. (2013), *Derivatives Markets*, 3a ed, NJ: Pearson.
- [55] Panjer, H. (2006), *Operational Risk. Modeling Analytics*, Hoboken, NJ: Wiley.
- [56] Sarmiento, C. (2018). Calentamiento Global Antropogénico. Notas. *UNAM*, México.
- [57] <https://shiny.rstudio.com>