





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Índice general

<b>1. Prolegómeno</b>	<b>1</b>
1.1. Estado de la Ciencia . . . . .	1
1.2. La teoría de cuerdas . . . . .	2
1.2.1. Introducción . . . . .	2
1.2.2. Branas y sus dualidades . . . . .	5
1.2.3. Agujeros negros y holografía . . . . .	8
1.3. La Correspondencia AdS/CFT . . . . .	10
1.3.1. Resumen . . . . .	10
1.3.2. Antecedentes y motivación . . . . .	11
1.3.3. Correspondencia entre simetrías y elementos . . . . .	15
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>19</b>
2.1. Aplicaciones de la correspondencia norma-gravedad . . . . .	19
2.1.1. Colisiones de iones pesados y materia condensada . . . . .	20
2.2. Correspondencia Extendida . . . . .	20
2.2.1. Sabor en la Correspondencia . . . . .	21
2.3. Fenómenos magnéticos en materia holográfica . . . . .	27
2.3.1. Espectro de mesones . . . . .	29

2.3.2. Campos externos en sistemas D3/D7 . . . . .	30
<b>3. Metodología</b>	<b>33</b>
<b>4. Resultados</b>	<b>47</b>
4.1. Sobre el parámetro $\varphi_h$ y el campo externo <i>real</i> . . . . .	47
4.2. Masa y condensado de quark . . . . .	49
4.3. Espectro de mesones . . . . .	55
4.3.1. Perturbación $\chi_1$ . . . . .	55
4.3.2. Perturbación $\lambda_{1,1}$ . . . . .	61
<b>5. Discusión y conclusiones</b>	<b>65</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>73</b>
<b>A. Apéndice</b>	<b>75</b>
A.1. Motivación usual de la correspondencia . . . . .	75
A.2. Ecuaciones de movimiento de la teoría pentadimensional . . . . .	77
A.3. Otros lagrangianos de interés . . . . .	79

# 1

## Prolegómeno

### 1.1. Estado de la Ciencia

El modelo estándar es una teoría cuántica de campos con simetría de norma  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  que contiene tres familias de quarks y leptones, así como un bosón de Higgs de espín nulo. Dicho modelo provee una descripción consistente de la naturaleza hasta una escala de aproximadamente  $10^{-18}m$  y trata dentro de un mismo esquema a las interacciones electromagnética, nuclear débil y nuclear fuerte; siendo éste el de teorías de norma. La gravedad, si bien es descrita exitosamente a nivel clásico por la teoría de la relatividad de Einstein como una propiedad geométrica del espacio-tiempo, aún no ha sido incorporada plenamente dentro del modelo estándar pues, dado el conteo de potencias de la constante de acoplamiento, todo intento para cuantizar al campo de la partícula que teóricamente mediaría la interacción gravitacional conduce a la aparición de términos no renormalizables en los cálculos.

El problema de *divergencia en el ultravioleta (UV)* de la gravedad cuántica sugiere la existencia de física extraordinaria a escalas más pequeñas que la de Planck. A grandes energías esta teoría de gravedad cuántica debería entonces suprimir los términos no renormalizables de la relatividad general y describir interacciones en la teoría de campos, a la vez que a bajas energías se recuperase la gravedad clásica.

El modelo estándar presenta otra clase de problemas como la incapacidad de hacer cálculos no perturbativos en él; pues dado que las constantes de acoplamiento modifican su valor en función de la escala energética, hay regímenes en los que las series perturbativas no son convergentes. En particular esto sucede cuando las temperaturas son mayores que la tem-

peratura a la que el sistema transiciona al deconfinamiento, así que no es posible estudiar sistemas de materia caliente y densa *fuertemente interactuante*. Las cantidades asociadas a las propiedades estáticas o termodinámicas en el equilibrio de la teoría pueden, sin embargo, ser tratadas mediante simulaciones en la retícula.

## 1.2. La teoría de cuerdas

### 1.2.1. Introducción

La teoría de cuerdas surgió en principio como una teoría de la interacción fuerte, un intento para interpretar la gran cantidad de datos experimentales de los años 60's cuando el entendimiento de esta interacción era escaso [1–3] y actualmente se considera una teoría matemáticamente bien definida de gravedad cuántica [4, 5]. Su nacimiento se dio después de que Nambu y Goto hallaran que la amplitud de dispersión de Veneziano [6], propuesta en 1968 y que reproducía en buena medida los datos experimentales, era predicha por una teoría en la que las partículas elementales eran consideradas estados vibracionales de cuerdas relativistas.

Por tanto, en ella se renuncia a la acostumbrada estructura *puntual* de las partículas para emplear, en principio, objetos unidimensionales como aquéllos fundamentales dentro de la teoría y cuyos modos de oscilación corresponden a campos cuantizados en el espacio-tiempo<sup>1</sup>.

La teoría de cuerdas se formula en términos de un *principio de acción*. Dicha acción viene dada por el área de la *hoja de mundo*<sup>2</sup>, como resulta natural por analogía con el principio de acción para el caso de una partícula puntual relativista:

$$S = -m \int ds = -m \int dt \sqrt{-\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}. \quad (1.1)$$

Para la cuerda bosónica, la así llamada *acción de Nambu-Goto* está dada por<sup>3</sup>:

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\xi \sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu)} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\xi \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}. \quad (1.2)$$

<sup>1</sup>La idea de que las partículas elementales no son puntuales sino que tienen un tamaño finito se remonta a Heaviside, Searle y J.J Thomson, en torno a 1880; para describir el concepto de la *masa electromagnética*.

<sup>2</sup>La superficie bidimensional trazada en el espacio-tiempo por la cuerda.

<sup>3</sup>La hoja de mundo es parametrizada por las coordenadas  $(\xi^0, \xi^1)$ . Las funciones  $X^\mu(\xi)$  indican la localización de ésta en el espacio-tiempo, y pueden ser vistas como las coordenadas espaciotemporales de la hoja de mundo. Se denota  $\dot{X} = \partial X^\mu / \partial \xi^0$  y  $X' = \partial X^\mu / \partial \xi^1$ . Los índices  $\mu, \nu$  son índices espaciotemporales, mientras que los índices  $a, b$  se refieren a las coordenadas de la hoja de mundo. El parámetro  $\alpha'$  está relacionada con la longitud de la cuerda  $l_s$  vía  $\alpha' = l_s^2$ .

Dicha expresión revela una de las virtudes de la teoría de cuerdas: en contraposición a la gran cantidad de parámetros que deben ser ajustados *ad hoc* dentro del modelo estándar, ésta sólo posee como parámetro libre a la tensión de la cuerda,  $T_s = \frac{1}{2\pi\alpha'}$ .

Una forma alternativa equivalente para la cuerda bosónica está dada por la acción de Polyakov:

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi \sqrt{-h} h_{ab} \partial^a X^\mu \partial^b X_\mu. \quad (1.3)$$

La ventaja de dicha acción es que la raíz cuadrada de la acción de Nambu-Goto ya no figura, a cambio de introducir la métrica inducida de la hoja de mundo  $h_{ab}$ .

Sin embargo, la teoría inicialmente mostró no ser satisfactoria. Las dificultades principales eran: la ausencia de fermiones, el contener taquiones y una partícula no masiva de espín 2, y la aparición de una *anomalía* al cuantizar la teoría. Todas éstas se resolvieron durante la década siguiente.

Una manera de incluir fermiones fue encontrada por Neveu, Schwarz [7] y Ramond [8] al formular una teoría de supercuerdas inspirada en la acción de Polyakov. Adicionalmente a las coordenadas de la hoja de mundo bosónica  $X^\mu$  y la métrica  $h_{ab}$ , la acción involucra las coordenadas fermiónicas de la hoja de mundo  $\psi^\mu$  y  $\bar{\psi}^\mu$ , y el gravitino,  $\chi_a$ . Los campos  $(X^\mu, \psi^\mu)$  forman  $d$  conjuntos de supermultipletes quirales; la métrica  $h$  y el gravitino  $\chi$  también se combinan en un súpermultiplete. La acción adquiere la forma<sup>4</sup>

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi \sqrt{-h} \left[ h_{ab} \partial^a X^\mu \partial^b X_\mu + \frac{i}{2} \bar{\psi}^\mu \not{\partial} \psi_\mu + \frac{i}{2} (\bar{\chi}_a \gamma^b \gamma^a \psi^\mu) (\partial_b X^\mu - \frac{i}{4} \bar{\chi} \psi^\mu) \right]. \quad (1.4)$$

Los campos en la hoja de mundo están separados en los *modos izquierdos* y *modos derechos*; los campos  $\psi^\mu$  son modos derechos, mientras los  $\bar{\psi}^\mu$  son modos izquierdos. Las condiciones de frontera en los extremos de las cuerdas tienen que especificarse para relacionar a los modos derechos con los izquierdos. Hay dos elecciones posibles, y éstas separan a los campos en dos diferentes sectores: el de Neveu-Schwarz (NS), y el de Ramond (R)<sup>5</sup>.

Respecto a los taquiones, Gliozzi, Scherk y Olive fueron capaces de eliminarlos al truncar el espectro de los sectores NS y R en lo que se conoce como proyección GSO, y en el proceso introdujeron supersimetría [9] (*SUSY*, por sus siglas en inglés), la cual relaciona partículas elementales fermiónicas con bosónicas<sup>6</sup>. Se entendió también que la partícula de espín 2

<sup>4</sup>Los índices espaciotemporales,  $\mu$ , toman valores entre 0 y  $d-1$ ; la teoría cuántica es consistente sólo si  $d=10$ . Los índices  $a, b$  se refieren a las coordenadas de la hoja de mundo  $\xi^a$ .

<sup>5</sup>Según si  $\psi^\mu(\tau, \pi) = -\bar{\psi}^\mu(\tau, \pi)$  o  $\psi^\mu(\tau, \pi) = \bar{\psi}^\mu(\tau, \pi)$ , respectivamente.

<sup>6</sup>I.e. partículas de espín semientero con partículas de espín entero, por el teorema de la estadística del espín; SUSY en términos modernos proporciona una vía para resolver el problema de jerarquía del modelo estándar



debía ser vista como una manifestación de la gravedad que por tanto quedaba incluida naturalmente dentro de la teoría. Por esto último, la teoría de cuerdas se mostró desde entonces prometedora para formular una teoría cuántica de la gravedad.

Respecto a la anomalía, la teoría de cuerdas no es consistente en una dimensión arbitraria del espacio-tiempo. Para garantizar la unitariedad e invariancia de Lorentz de la teoría de campo en la hoja de mundo de la cuerda, en la teoría de cuerdas sobre un espacio plano, la métrica sobre la hoja debe poseer la simetría de Weyl:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow e^{2\omega(x_\mu)} g_{\mu\nu}. \quad (1.5)$$

En una teoría cuántica de campos, la anomalía de Weyl para la simetría conforme en una cuerda bosónica sólo se anula en un espacio-tiempo de dimensión  $d = 26$ ; para una supercuerda, sucede cuando  $d = 10$ .

En el caso de las cuerdas cerradas, los estados no masivos de partículas se dividen en cuatro sectores y cada estado se obtiene como el producto tensorial de un modo izquierdo y uno derecho. Los bosones pertenecen a los sectores NS-NS y R-R; mientras los fermiones están en los sectores R-NS y NS-R. El contenido de partículas de estos sectores son:

1. NS-NS contiene al gravitón  $g_{\mu\nu}$ , un tensor de rango 2 antisimétrico denominado *campo de Kalb-Ramond*,  $B_{\mu\nu}$  y un campo escalar, el dilatón  $\phi$ .
2. R-R contiene campos tensoriales antisimétricos de varios rangos y posiblemente un campo escalar, dependiendo de la quiralidad de los estados base considerados.
3. R-NS y NS-R contienen cada uno un gravitino de Majorana-Weyl y una partícula de espín 1/2 que es el compañero supersimétrico del dilatón.

Como el sector R tiene dos estados base no equivalentes que son diferentes en quiralidad, se pueden escoger de dos diferentes formas los estados base de los sectores izquierdo y derecho.

Si las quiralidades son iguales para ambos, entonces se le denomina teoría de supercuerdas tipo IIB a la resultante. En este caso, el sector R-R consiste de un campo escalar,  $C_{(0)}$ , un campo antisimétrico  $C_{(2)}$  y un campo tensorial de rango 4 totalmente antisimétrico  $C_{(4)}$ . Si los estados base para el sector R de los modos izquierdo y derechos tienen diferentes quiralidades, se obtiene teoría de supercuerdas tipo IIA, cuyo sector R-R contiene un campo de norma  $C_{(1)}$  y un campo tensorial de rango 3 totalmente antisimétrico  $C_{(3)}$ . Ambas teorías tipo II contienen dos gravitinos y supersimetría local  $\mathcal{N} = 2$ , con 32 supercargas.

Adicionalmente a las teorías de supercuerdas tipo II, que son teorías de cuerdas orientadas cerradas, hay una teoría tipo I, que involucra cuerdas cerradas no orientadas y cuerdas abiertas no orientadas, lo cual sólo tiene supersimetría  $\mathcal{N} = 1$ , y la cuerda heterótica.

Debido a que la dimensión consistente con una supercuerda sin anomalía de Weyl es  $d = 10$ , para una teoría que se asemeje al espacio-tiempo tetradimensional que percibimos es necesario *compactificar* las seis dimensiones restantes en una variedad interna compacta ‘pequeña’.

Para conseguir que la teoría efectiva en el espacio tetradimensional se asemeje a la naturaleza, es necesario restringir la naturaleza de la variedad compacta. Una de las características que se le solicitan es que tras la compactificación se preserve supersimetría; no porque sea deseable que ésta persista en la teoría tetradimensional, pues después de todo el modelo estándar no es supersimétrico, sino para que esté presente a la escala de la cuerda y se rompa a un nivel energético inferior. Dicho tipo de variedades es conocida como variedades de Calabi-Yau [10].

Uno de los métodos para realizar tal compactificación y obtener un lagrangiano efectivo de la teoría en la dimensión inferior es por ejemplo la *reducción de Kaluza-Klein*. En el que se expande un campo en el espacio-tiempo completo en términos de un conjunto completo de funciones armónicas de un cierto *espacio interno* compacto (típicamente esferas o toros de alguna dimensión), al integrar sobre las coordenadas de este espacio interno se obtiene el espectro de un *campo reducido* que es únicamente función de las coordenadas *externas* del espacio-tiempo. Como resultado de esta reducción se obtiene una cantidad infinita de modos en la teoría de baja dimensión asociados a las funciones armónicas anteriormente mencionadas, al conjunto de masas de dichos modos se le denomina una *torre de Kaluza-Klein*; en particular algunos de éstos pueden ser no masivos.

### 1.2.2. Branas y sus dualidades

La compactificación toroidal es la forma más básica de compactificar sobre dimensiones extra. La así denominada *dualidad T* relaciona un espacio interno compacto *pequeño* con uno *grande* [2]. Si el radio de la dimensión compacta es  $R$ , entonces el momento de la cuerda en la dirección compacta está cuantizado y adquiere uno de los valores  $p = n/R$  con  $n$  entera. Con las cuerdas cerradas una excitación adicional resulta de la posibilidad de que la cuerda esté enrollada en torno a la dimensión compacta un cierto número de veces. Si  $m$  es el número de vueltas, entonces la energía de esta excitación está dada por  $E_m = 2\pi mRT$ . En la teoría de dimensión inferior, ambos tipos de excitaciones aparecen como correcciones a la masa, pues la energía cuadrática es ahora dada por:

$$E^2 = \left(\frac{n}{R}\right)^2 + \left(\frac{mR}{\alpha'}\right)^2 + \dots \quad (1.6)$$

Esta cantidad permanece invariante cuando  $R$  es reemplazado por  $\alpha'/R$  y se intercambia simultáneamente  $m$  con  $n$ , a esta otra teoría se le denomina la *dual* respecto a la inicial. Bajo esta dualidad, las excitaciones a lo largo de la dimensión compacta en una teoría

corresponden con excitaciones por el giro en la teoría dual<sup>7</sup>.

A mediados de los 90's se comprendió que las cuerdas no son los únicos objetos extendidos que tienen cabida dentro del esquema de la teoría de cuerdas. Cuando se aplica esta dualidad a las cuerdas abiertas en el espacio-tiempo 10-dimensional, se obtienen hiperplanos donde las cuerdas abiertas pueden terminar, llamadas *D-branas* por imponer condiciones de Dirichlet, que tienen masa, tensión y carga. Esto proporciona una relación entre objetos unidimensionales y aquéllos de dimensiones superiores<sup>8</sup>.

Para generar una *D-brana*, la dualidad T rompe la conservación del momento en una dirección transversal al reflejar los modos que se mueven hacia una dirección<sup>9</sup>.

Otra dualidad importante es la dualidad S. Las transformaciones de esta dualidad son las de  $SL(2, \mathbb{Z})$ , y en particular algunas reemplazan la constante de acoplamiento de la cuerda,  $g_s$ , con su recíproco,  $1/g_s$ . La invariancia de la teoría bajo estas transformaciones implica que la predicción de que los límites de acoplamiento débil y fuerte de la teoría son equivalentes. Esto es significativo pues permite extraer información sobre el límite de acoplamiento fuerte a partir de cálculos perturbativos.

Entre las distintas teorías de súpercuerdas hay diferentes *dualidades* que las relacionan entre sí. Debido a estas relaciones resulta natural pensar a éstas como diferentes límites de una misma teoría subyacente, denominada *teoría M*.

Antes del descubrimiento de las dualidades de la teoría de cuerdas, sólo había sido posible formular la teoría de cuerdas de manera perturbativa en potencias de la constante de acoplamiento de las cuerdas,  $g_s$ . Como ésta a priori no tendría razón para ser pequeña, el análisis consecuente ocultaba importantes características de las teorías. A saber, la existencia de objetos extendidos de dimensionalidad mayor a las cuerdas conocidos como *p-branas*, cuya tensión diverge en el límite de acoplamiento débil y son por tanto invisibles al análisis perturbativo.

Los límites de bajas energías de las teorías de súpercuerdas son denominados *teorías de supergravedad*. Las *p-branas* son una familia de soluciones solitónicas a supergravedad en  $d = 10$ , objetos *p*-dimensionales extendidos con un espacio transversal de dimensión  $9 - p$  que típicamente preservan la simetría de Poincaré a lo largo de las direcciones de las branas y a la simetría esférica en el espacio transversal a ellas. Un observador en el espacio transversal a la brana percibe a las *p-branas* como objetos localizados, con masa y carga.

La fuente de carga de las *p-branas* da lugar a un potencial, que puede verse como un campo tensorial; y en particular los antisimétricos tienen una forma diferencial asociada.

---

<sup>7</sup>De hecho las teorías IIA y IIB se relacionan entre sí por una dualidad T.

<sup>8</sup>Mismos que mostraron ser de interés para la teoría pues, por ejemplo, Dirac en 1962 trata al electrón como una membrana cargada cuantizada cuyo primer estado excitado es el muón [11].

<sup>9</sup>I.e. transforma condiciones de Neumann en condiciones de Dirichlet. Esto rompe también a la mitad la supersimetría del espacio-tiempo.

Una  $p + 1$  forma  $A^{p+1}$  se acopla naturalmente a objetos de carga  $Q_p$  de dimensión  $p + 1$ , como las  $p$ -branas [2, 3] al considerar:

$$iQ_p \int_{\Sigma_{p+1}} A^{p+1} = iQ_p \int_{\Sigma_{p+1}} A_{\mu_0 \dots \mu_p} dx^{\mu_0} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}. \quad (1.7)$$

El campo  $A^{p+1}$  tiene a su *dual magnético*  $A_m^{d-3-p}$  que se relaciona con  $A^{p+1}$  vía el operador de Hodge:

$$dA_m^{D-3-p} = \star dA^{p+1}. \quad (1.8)$$

Consecuentemente, el *dual magnético de una  $p$ -brana* es una  $d - 4 - p$  brana a la que se acopla  $A_m^{d-3-p}$ .

En teorías de cuerdas tipo II, hay  $p$ -branas que se acoplan a los campos del sector R-R  $A^{p+1}$ , y sus duales magnéticos. Por el contenido de campos, en la teoría IIA,  $p$  toma valores pares; mientras en la IIB son impares. En NS-NS, el campo  $B_{\mu\nu}$  se acopla a la 1-brana que es la cuerda fundamental y cuyo dual magnético es una 5-brana. En este trabajo la atención se centra en la teoría IIB.

Las  $D$ -branas  $p + 1$  dimensionales se acoplan naturalmente a un potencial  $C_{p+1}$ , asociado a la fuente de carga de las  $p$ -branas, y por ello la carga de una  $D$ -brana se relaciona con la tensión de la brana, que está dada por<sup>10</sup>:

$$T_{D_p} = \frac{1}{(2\pi)^p g_s l_s^{p+1}}. \quad (1.9)$$

Las  $p$ -branas pueden verse como una generalización de las soluciones del agujero negro de Reissner-Nordström, por ello su relación con la tensión — y por tanto la masa  $M$  — de las  $p$ -branas deriva en aspectos de gran interés. De la estructura del horizonte de las soluciones de Reissner-Nordström, se sabe que hay una cota superior para la carga de supergravedad de la  $p$ -brana para evitar tener una singularidad desnuda<sup>11</sup>; esto es semejante a la cota para cargas centrales de la supersimetría del espacio-tiempo.

Una  $p$ -brana extremal es aquélla cuya masa,  $M$ , satisface respecto a la carga R-R,  $N$ , la

---

<sup>10</sup>Ésta es inversamente proporcional a la constante de acoplamiento, lo cual muestra que la brana es un efecto no perturbativo. En la teoría perturbativa de cuerdas, cuando  $g_s \ll 1$ , la tensión de la brana se vuelve muy grande y la brana puede pensarse como un objeto pesado y semiclásico.

<sup>11</sup>En las soluciones de Reissner-Nordström, los agujeros negros extremales son las soluciones con  $Q = M$ .

relación<sup>12</sup>

$$M = \frac{N}{(2\pi)^p g_s l_s^{p+1}}. \quad (1.11)$$

Si la masa es mayor que el término del lado derecho, se dice que se tiene una  $p$ -brana negra, por la presencia de un horizonte de eventos en su geometría [3, 12]. Dichas soluciones son objetos rodeados por un horizonte de eventos, y rompen la simetría de Lorentz de la teoría  $(d + 1)$ -dimensional en las transformaciones a lo largo de la brana y en el espacio transversal a ella,  $SO(d, 1) \rightarrow SO(d - p) \times SO(p, 1)$ .

Polchinski descubrió en 1995 que hay una equivalencia efectiva entre  $p$ -branas extremales y  $D$ -branas [13]. Las  $D$ -branas, vistas como  $p$ -branas *per se* son objetos dinámicos  $p + 1$ -dimensionales donde se están imponiendo condiciones de frontera de tipo Dirichlet en  $p$  coordenadas espaciales a las cuerdas abiertas; por ello también son denominadas Dirichlet- $p$ -branas, comúnmente abreviado como  $Dp$ -branas [14, 15].

La *acción de Dirac-Born-Infeld* (DBI) es aquella que describe la dinámica de los campos de norma que viven en el volumen de mundo  $p + 1$  dimensional de una  $Dp$ -brana encajada en un espacio-tiempo 10-dimensional siempre que los campos escalares no presenten una variación considerable. Para el campo de norma de la teoría IIB,  $A$ , y una métrica no plana  $g$ , del espacio-tiempo,

$$S_{DBI} = -T_{Dp} \int d^{p+1}\xi \sqrt{-\det(h_{\mu\nu} + 2\pi l_s^2 F_{\mu\nu})} \quad (1.12)$$

es la acción de DBI. Donde  $T_{Dp}$  es la tensión,  $h_{\mu\nu}$  es el pullback de la métrica  $g$  sobre la brana, i.e. la métrica inducida; y  $F_{\mu\nu}$  la intensidad de campo asociada al campo de norma.

### 1.2.3. Agujeros negros y holografía

Además de la divergencia UV, hay otros fenómenos de la gravitación que con frecuencia son considerados inextricables. Uno de ellos son los agujeros negros, y más específicamente, su interpretación termodinámica.

La idea de la existencia de una temperatura asociada a un agujero negro emana originalmente de la *radiación de Hawking* en el horizonte de eventos de éste; a su vez se justifica

<sup>12</sup>Donde

$$N = \frac{(r_+ r_-)^{(7-p)/2}}{d_p g_s l_s^{7-p}}; \quad d_p = 2^{5-p} \pi^{(5-p)/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}(7-p)\right); \quad r_- = L; \quad r_+^{7-p} = r_0^{7-p} + L^{7-p}, \quad (1.10)$$

con  $r_0$  el *radio del horizonte* del espacio-tiempo y  $L$  su *radio de curvatura*.

la existencia de dicha radiación con base en el *Efecto Unruh* según el cual un observador acelerado detecta un baño térmico de partículas en el horizonte.

Más generalmente se puede definir esta temperatura al imponer regularidad en el horizonte de la continuación euclídeana de una métrica de agujero negro, cosa que se traduce en la periodicidad de la coordenada temporal y cuyo periodo es el inverso de la temperatura asociada. En el caso del agujero de Anti-de Sitter-Schwarzschild, con radio  $L$  y horizonte  $r_0$ , se tiene por ejemplo una temperatura asociada

$$T = \frac{r_0}{\pi L^2}, \quad (1.13)$$

donde  $r_0$  es el radio del horizonte.

Abordando otras propiedades termodinámicas, de acuerdo a la fórmula de Bekenstein-Hawking [16–18] la entropía de un agujero en dimensión  $(d + 1)$  se puede calcular en función de su área,  $A$ , como

$$S_{BH} = \frac{kc^3}{\hbar} \frac{A}{4G_{d+1}}, \quad (1.14)$$

donde  $G_{d+1}$  es la constante gravitacional en un espacio-tiempo de dimensión  $(d + 1)$ ,  $k$  la constante de Boltzmann,  $c$  la velocidad de la luz y  $\hbar$  la constante reducida de Planck.

Dicha fórmula rompe con la gravedad clásica pues, debido al *teorema de no pelo*, los agujeros negros tendrían sólo un microestado y por tanto serían sistemas de entropía nula. Una solución es considerar que el espacio-tiempo es una propiedad emergente a partir de una descripción cuántica subyacente cuyos grados de libertad son codificados en la superficie del agujero negro. Éste es un ejemplo de comportamiento *holográfico*, pues sugiere que toda la *información* dentro de un volumen es función únicamente de la superficie que le rodea.

De la segunda ley de la termodinámica aplicada a un sistema de agujero negro y materia, se tiene que:

$$dS_{BH+materia} \geq 0. \quad (1.15)$$

La cota esférica de Susskind para la entropía es la condición de que la segunda ley no es violada en el proceso de colapso gravitacional de un sistema de materia y así:

$$S_{materia} \leq \frac{A}{4G_{d+1}}, \quad (1.16)$$

con  $A$  el área de un sistema asintóticamente estable de materia que posea simetría esférica. Dicha cota<sup>13</sup> sugiere que no hay teoría gravitacional alguna donde la cantidad de información que puede almacenarse en una región cuya frontera tenga área  $A$ , exceda  $A/4$  grados de libertad.

Con esto en mente, de acuerdo a 't Hooft [19] y Susskind [20], es común conjeturar que el *principio holográfico* es un rasgo propio de la gravedad cuántica; es decir, que la información contenida en una región del espacio-tiempo en gravedad-cuántica se puede describir por los grados de libertad fundamentales en su frontera, donde se tiene una teoría local no gravitacional. Este principio implica que la gravedad puede ser combinada con la mecánica cuántica de manera no local; en contraposición a las teorías de campo cuánticas no gravitacionales que son generalmente locales y el número de sus grados de libertad está en correspondencia con el volumen del espacio-tiempo que ocupan. Al incorporar la gravedad, el número de grados de libertad fundamentales en cualquier sistema gravitacional es entonces proporcional al área del sistema, y los grados de libertad pueden pensarse como residiendo en una superficie adecuada de dimensión menor, como la frontera.

## 1.3. La Correspondencia AdS/CFT

### 1.3.1. Resumen

Una manifestación del principio holográfico es la *correspondencia AdS/CFT* conjeturada en [21]. Esta dualidad relaciona teorías de gravedad clásica en fondos  $AdS_{d+1}$  con *teorías de campo conformes* (CFT) viviendo en  $d$  dimensiones.

Los espacios-tiempo  $AdS_{d+1}$  son espacios de curvatura constante negativa con una frontera  $d$ -dimensional y conforme, donde se interpreta que la teoría de campos reside. La teoría gravitacional en el espacio-tiempo  $AdS_{d+1}$  interior es comúnmente referida como la teoría en el *bulto*. Esta correspondencia proporciona un esquema teórico muy valioso en el que se pueden hacer preguntas cruciales sobre la gravedad clásica y cuántica; las dos razones principales son:

- La correspondencia nos permite escribir teorías gravitacionales usando variables de la teoría cuántica de campos y viceversa. Por tanto, dependiendo del problema que estemos tratando, podemos escoger el formalismo más conveniente para nosotros. Esta propiedad sirve particularmente para responder preguntas en gravedad cuántica al rephraserlas en términos del lenguaje de la teoría dual en la frontera. Más aún, la correspondencia tiene un carácter de dualidad débil/fuerte, lo que significa que una

---

<sup>13</sup>Que se puede generalizar a la *cota de Bousso*, la cual establece que la entropía en la hoja de luz de una pantalla holográfica está acotada superiormente por el área de la pantalla.

teoría de interacciones fuertes tiene una descripción dual débilmente acoplada. Esto se ha explotado analíticamente para estudiar teorías de campo fuertemente acopladas usando herramientas más sencillas de gravedad clásica.

Más aún, cuando la aproximación clásica para la teoría del *bulto* es aplicable<sup>14</sup>, al emplear el *diccionario* de la correspondencia uno puede lidiar con teorías cuánticas de campo fuertemente acopladas *holográficamente duales* al lado gravitacional, a temperatura finita en  $d$  dimensiones al investigar agujeros negros en *AdS* en  $(d+1)$  dimensiones.

Dualidades norma/gravedad proveen un esquema muy especial para unificar las fuerzas fundamentales de la naturales al considerar a las interacciones de norma como un *alter ego* de la fuerza gravitacional.

- La otra razón es que tenemos gran control sobre este caso particular. El estudio de esta dualidad puede servir para lograr una mejor comprensión del carácter holográfico de la gravedad y el cómo los grados de libertad gravitacionales deben emerger de una teoría de campo cuántico. En particular, en una teoría de gravedad cuántica, el gravitón puede pensarse como si surgiera en la teoría efectiva a bajas energías a partir de los grados de libertad del UV. Una idea interesante que surge de la correspondencia es aquélla de que el espacio-tiempo debe emerger del enredamiento de los grados de libertad en la teoría cuántica de campos. Con el principio holográfico, nuestro mundo se ve como un holograma que codifica toda la información de un *bulto* de dimensión superior.

Motivo de la naturaleza inusitada del principio holográfico, la dificultad para definir algunas cuestiones fundamentales en gravedad se hereda al intentar formular algún sistema holográficamente dual.

### 1.3.2. Antecedentes y motivación

A inicios de los 70's, el papel de la teoría de cuerdas como una teoría descriptiva de las interacciones fuertes fue superada por el modelo de quarks y la *cromodinámica cuántica* (QCD), sin embargo, recientemente se han enfocado esfuerzos al uso de dualidades para tratar de entender de manera no perturbativa la física de los sistemas fuertemente acoplados con herramientas de la teoría de cuerdas.

En 1998, Juan Maldacena conjeturó [21] que una teoría de cuerdas definida en un tipo particular de espacio anti-de Sitter 10-dimensional es equivalente a una teoría de norma supersimétrica en 4 dimensiones que, de cierto modo, está definida en la frontera del espacio anti-de Sitter. Esta equivalencia, lleva el nombre de correspondencia AdS/CFT y más detalles al respecto de ésta fueron provistos por Gubster, Klebanov y Polyakov [22], y Witten [23] poco tiempo después de su publicación.

<sup>14</sup>Cuando se trabaja con una *constante de 't Hooft* grande, normalmente.



Desde entonces, otros ejemplos han sido desarrollados de presuntas dualidades entre teorías de cuerdas y teorías de norma, y el término correspondencia AdS/CFT puede referirse a cualquiera de ellas. Como la correspondencia es, de origen, una conjetura, ha habido numerosos esfuerzos tanto para probar la correspondencia matemáticamente como en estudiarla a alto nivel y extender las ideas a otras dualidades norma/gravedad posibles.

La dualidad norma/gravedad, que puede frasearse como: *Gravedad en  $d + 1$  dimensiones es equivalente a una teoría de norma en  $d$  dimensiones*; además de estar motivada por el principio holográfico ya antes mencionado, también lo está por el hecho de que en 1974, ‘t Hooft [19] observó que el comportamiento perturbativo de las teorías de norma con un gran número de colores  $N_c$  era similar a aquella de la teoría de cuerdas.

Explícitamente, dicha similaridad se expresa entre la función generadora de una teoría de norma masiva de Yang-Mills (YM):

$$\log(\mathcal{Z}_{YM}) = \sum_{\chi} (N_c)^\chi f_\chi(\lambda), \quad (1.17)$$

y la expansión en géneros de la teoría de cuerdas perturbativa,

$$\log(\mathcal{Z}_{Cuerda}) = \sum_{\chi} g_s^{-\chi} \mathcal{Z}_\chi. \quad (1.18)$$

Lo cual sugiere la correspondencia:

$$N_c \sim \frac{1}{g_s}, \quad (1.19)$$

y de donde se observa que el límite plano ( $N_c \rightarrow \infty$ ) de la teoría de norma se corresponde con la teoría de cuerdas libres ( $g_s \rightarrow 0$ ).

Una tercera motivación de la dualidad AdS/CFT se encuentra en el hecho de que la condición para la invariancia de escala de la cuerda cuántica, a orden más bajo en la teoría de perturbaciones o anulando las funciones beta de lazos de orden mayor, da lugar a las ecuaciones de Einstein; con lo que se sugiere que los diferentes campos en la teoría de cuerdas son equivalentes a constantes de acoplamiento y las ecuaciones de flujo del grupo de renormalización de éstas se convierten en las ecuaciones de movimiento en supergravedad<sup>15</sup> [21–24].

---

<sup>15</sup>Con esto en mente, es común añadir a la *escala* de la hoja de mundo como una coordenada espaciotemporal *radial* extra y así ésta corresponde a la escala de renormalización de alguna teoría cuántica de campos que *vive* en la frontera.

Los resultados que pretenden develar relaciones entre las cantidades en el *bulto* y la *frontera* del espacio-tiempo usando modelos sencillos han sido validados por coincidencia entre diversos parámetros y observables de ambos lados de la correspondencia<sup>16</sup> al menos en el límite donde el rango del grupo de norma, dado por el número de colores de la teoría, es grande ( $N_c \rightarrow \infty$ ). Por supuesto no se espera una correspondencia perfecta por el límite de  $N_c$  grande y los grados de libertad adicionales que están presentes en la teoría  $\mathcal{N} = 4$  deformada. Estos resultados han permitido un cambio de paradigma en áreas como la teoría de la información, el estudio de fenomenología de los agujeros negros y la descripción gravitacional desde el punto de vista de las teorías de campo.

La correspondencia conjunta diferentes ideas desarrolladas en la física teórica durante los últimos 40 años. La equivalencia entre teorías de cuerdas y de norma es motivada al considerar un sistema de branas y cuerdas abiertas; desde el punto de vista de las  $D$ -branas en teoría de supercuerdas, y desde el punto de vista de  $p$ -branas en supergravedad clásica [23] (véase A.1). La dualidad es una materialización de la idea de ‘t Hooft [19] acerca de que las teorías de norma están relacionadas con las teorías de cuerdas en el límite llamado de  $N_c$  grande, el cual es relevante pues si se llegare a encontrar una solución exacta en este límite, la solución de QCD se seguiría de tomar una expansión en potencias de  $1/N_c$  y realizar  $N_c = 3$ .

La correspondencia también tiene el potencial de ser muy útil en la práctica. Tan pronto como una correspondencia precisa es establecida entre las cantidades relevantes, tales como los campos y los operadores de las dos teorías, uno podría esperar que los cálculos que antes han sido intratables en una teoría puedan llevarse a cabo en la teoría dual donde las operaciones involucradas sean razonablemente sencillas. Esto es particularmente relevante para QCD donde los cálculos son extremadamente difíciles de llevarse a cabo en el límite de acoplamiento fuerte. Como el límite de acoplamiento fuerte del lado de la teoría de norma generalmente se corresponde con el límite de acoplamiento débil del lado de la teoría de cuerdas, uno tiene esperanza de que se puedan hacer avances en QCD al hacer uso de la dualidad para realizar cálculos en un régimen inaccesible vía métodos tradicionales.

Pese a poseer el principio holográfico, no es evidente cómo extraer las propiedades de la teoría de campo en la frontera. Ante esto surge la interpretación holográfica del grupo de renormalización, donde se considera una descripción en la que los campos de fondo en la acción de la teoría de cuerdas hacen las veces de constantes de acoplamiento y las ecuaciones del grupo de renormalización se convierten en las ecuaciones de movimiento de supergravedad. En esta construcción, la escala energética sobre la hoja de mundo puede verse como una coordenada adicional y el flujo del grupo de renormalización define una dimensión espacio-temporal extra. Así, holográficamente, un flujo del grupo de renormalización en un espacio suficientemente plano  $d$ -dimensional se corresponde con gravedad en  $(d + 1)$  dimensiones.

La forma más fuerte de la conjetura postula que la teoría de cuerdas tipo IIB en  $AdS_5 \times S^5$  es equivalente a  $\mathcal{N} = 4$   $SU(N_c)$  SYM. Aún con este modelo inicial tan ideal, en el régimen

---

<sup>16</sup>A saber, correladores, anomalías, espectros, y cantidades que ya se conocían, fuese por QCD perturbativa o cálculos en la retícula [25–28].

de alta temperatura, la teoría comienza a asemejarse más y más al plasma deconfinado de QCD [29].

Por un lado, al realizar cálculos empleando la correspondencia en dicho régimen, ambas teorías siguen siendo distintas pues [30]:

1.  $\mathcal{N} = 4$  SYM con  $N_c = 3$  tiene más grados de libertad que QCD, aunque coincidan en número de cargas de color, así que sería complicado expresar las cantidades de QCD en términos de los de SYM.
2. Para altas temperaturas,  $\lambda = g_{YM}^2(T)$  es grande, pero no es infinita, como se requiere para tener acoplamiento fuerte.
3. QCD tiene  $N_c = 3$ , pero la correspondencia requiere  $N_c \rightarrow \infty$ .
4. Se sabe cómo introducir en la correspondencia  $N_f$  hipermultipletes fundamentales en la teoría (véase 2.2.1), pero normalmente  $N_f \ll N_c$ , mientras que en QCD,  $N_f = N_c$ .

Sin embargo, a una temperatura suficientemente alta, uno obtiene que:

1. Por la existencia de una temperatura de deconfinamiento para QCD, tanto QCD como SYM son no confinantes.
2. El condensado quiral de QCD se *derrite*, de modo que los vacíos de ambas teorías se asemejan.
3. Pese a que usualmente en QCD la invariancia de escala se rompe por el confinamiento, el condensado quiral y la constante de acoplamiento variable, a temperaturas muy elevadas el plasma se vuelve invariante de escala.
4. La supersimetría  $\mathcal{N} = 4$  SYM es explícitamente rota, en conformidad con la ausencia de supersimetría en QCD.

Con base en ello, se aprecian las bondades que tiene el hacer modificaciones a la conjetura inicial para obtener modelos alternativos a la correspondencia clásica AdS/CFT que posean más aplicaciones físicas. En esta dirección, ha habido interés en generalizar la correspondencia al desarrollar dualidades entre fondos que son asintóticamente anti-de Sitter<sup>17</sup> y teorías de norma más realistas que simplemente  $\mathcal{N} = 4$  SYM<sup>18</sup>, en particular la cromodinámica cuántica.

---

<sup>17</sup>Se busca esto para conservar la interpretación de la dirección radial como una escala del grupo de renormalización, como la frontera se encuentra en  $r \rightarrow \infty$ , las energías a esta escala son muy grandes; en este régimen una teoría de campo es en esencia una teoría conforme y la geometría que es consistente con esa simetría es la de AdS.

<sup>18</sup>Pues ésta, de entre las teorías de norma en un espacio-tiempo cuatro dimensional, es la más *perfecta* por tener el número máximo de supersimetrías permitidas y simetría conforme.

### 1.3.3. Correspondencia entre simetrías y elementos

#### 1.3.3.1. Simetrías

La primera pista de la correspondencia AdS/CFT es a nivel de simetría. Del lado de AdS, la solución maximalmente simétrica con curvatura negativa para espacio-tiempo  $(d + 1)$  que puede ser encajada en un espacio  $(d + 2)$  dimensional plano posee simetría  $SO(2, d)$ . Del lado de la CFT, la simetría conforme incluye un generador vectorial de transformaciones conformes especiales y un generador escalar de dilataciones, que se integran en el grupo de Poincaré para formar el mismo grupo  $SO(2, d)$ .

Lo anterior puede entenderse en general para la dualidad norma/gravedad como que la simetría de una teoría de campo es equivalente a la simetría que adquieren asintóticamente las soluciones de su dual gravitacional.

#### 1.3.3.2. Parámetros

Considérense  $N_c$   $D$ -branas coincidentes en un espacio-tiempo plano. Cada cuerda abierta que termine en esas  $D$ -branas tiene una fuerza  $g_s$ , así que en total al terminar en la pila de branas se tiene una fuerza  $N_c g_s$ . Se puede entender al espacio-tiempo de la cuerda abierta como un campo de norma en la región perturbativa  $N_c g_s \ll 1$ .

Del lado de la  $p$ -brana negra, la curvatura efectiva es  $L^2 \sim N_c g_s$ . Así que la gravedad puede estudiarse en un espacio-tiempo ligeramente curvo al requerir  $N_c g_s \gg 1$ . La correspondencia de las  $D$ -branas y las  $p$ -branas de supergravedad proveen imágenes complementarias la una de la otra a acoplamiento fuerte o en el régimen no perturbativo.

La correspondencia implica la siguiente relación entre los parámetros:

$$\frac{L^4}{\alpha'^2} = 4\pi g_s N_c = g_{YM}^2 N_c; \quad (1.20)$$

donde  $L$  es el radio de AdS,  $\sqrt{\alpha'} = l_s$  es la longitud de la cuerda,  $g_s$  es el acoplamiento de las cuerdas y  $g_{YM}$  es el acoplamiento de Yang-Mills. Para implementar la teoría de supercuerdas a bajas energías, i.e. supergravedad, se requiere  $g_s$  pequeña. Por otro lado, se requiere que el fondo AdS no esté muy curvado para permanecer dentro del régimen de supergravedad de bajas energías, i.e.  $L \gg l_s$ , lo cual conduce a una constante de acoplamiento de 't Hooft  $\lambda := g_{YM}^2 N$  grande del lado de la CFT. Así, se obtiene la dualidad buscada:

Por un lado tenemos supergravedad a bajas energías  $L \gg l_s, g_s \ll 1$ ; y por otro lado, se tiene  $N_c$  grande y  $\lambda$  fuerte en la CFT.

### 1.3.3.3. Regímenes de energía

Una perspectiva útil para apreciar el caso más popular de la correspondencia, supergravedad IIB en  $AdS_5 \times S^5 \simeq \mathcal{N} = 4 SU(N_c)$  SYM, es ver tanto a la gravedad como a la teoría de norma como dos acciones desacopladas. Para SYM, la acción se escribe como  $S = S_{bulto} + S_{brana} + S_{int}$ , donde el término  $S_{bulto}$  representa supergravedad en el fondo 10-dimensional,  $S_{brana}$  está definida en el volumen de mundo (3+1)-dimensional que representa a la teoría cerca de la pila de  $D3$ -branas y contiene a la teoría de SYM, y  $S_{int}$  representa a la interacción entre las dos componentes anteriores.

Del lado de  $AdS$ , la solución de  $p$ -brana está dada por [31]:

$$ds^2 = H^{-\frac{1}{2}}(-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + H^{\frac{1}{2}}(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \quad (1.21)$$

$$F_5 = (1 + *)dt \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dH^{-1}, \quad (1.22)$$

$$H = 1 + \left(\frac{L}{r}\right)^4, \quad L^4 \equiv 4\pi g_s \alpha'^2 N_c. \quad (1.23)$$

Donde  $F_5$  es la intensidad de campo acoplada a las  $D3$ -branas. Si se denota por  $E_p$  a la energía medida por un observador en la posición  $r$  y  $E$  la energía medida en el infinito, entonces se tiene que  $E = H^{-\frac{1}{4}} E_p$ . Cuando se toma el límite  $r \rightarrow 0$  y se deja fijo  $E_p$ , se obtiene que  $E \rightarrow 0$ . Ésta es la teoría a bajas energías desde el marco de referencia de un observador en el infinito. En este límite,  $r \ll L$ , se tiene:

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2}(-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + L^2 \frac{dr^2}{r^2} + L^2 d\Omega_5^2, \quad (1.24)$$

la cual es la métrica de  $AdS_5 \times S^5$ . Por otro lado, cuando  $r \rightarrow \infty$ , esto corresponde con el límite de longitud de onda larga de la gravedad, que es gravedad libre. Así que la teoría contiene dos regiones de baja energía desacopladas,  $r \rightarrow 0$  y  $r \rightarrow \infty$ .

La interacción entre estas dos regiones se desacopla debido a la brecha energética entre ellos. Como  $r \rightarrow \infty$  es descrito por supergravedad a bajas energías, correspondiente con  $S_{bulto}$  en la CFT, la teoría  $r \rightarrow 0$  corresponde a  $S_{brana}$ , o lo que es esencialmente lo mismo,  $\mathcal{N} = 4 SU(N_c)$  SYM.

### 1.3.3.4. Mapeo campo-operador

Con una teoría dual, es esencial el tener un diccionario que mapee las observables físicas de estas dos teorías, pues proveen sólo perspectivas diferentes para abordar un mismo fenómeno.

Según propone la conjetura, la frontera de  $AdS_5 \times S^5$  está identificada con el espacio donde la teoría de  $\mathcal{N} = 4$  SYM está definida. En esa frontera, un campo  $\phi$  definido en el bulto tiene un valor  $\phi_0$  y este valor puede tener algún impacto de alguna forma en la teoría de norma en la frontera. Una propuesta razonable es decir que  $\phi_0$  es una fuente de algún operador  $\mathcal{O}$ , que son los elementos naturales de la teoría de campo. En ese caso se construye una función de partición  $\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}[\phi_0]$  que sea el funcional generado para las funciones de correlación de  $\mathcal{O}$ . Este operador debe ser invariante de norma pues si no lo fuese sería imposible definir correladores que le involucren. Se tiene entonces:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{O}} = \int \mathcal{D}\mu \left[ \exp\{-S_{SYM} + \int d^4x \mathcal{O}(x) \phi_0(x)\} \right], \quad (1.25)$$

con  $\mu$  la medida en la teoría de campo de SYM.

Si en verdad el valor de frontera del campo en el bulto es una fuente para un operador en la teoría de campo que ‘habita’ la frontera, somos capaces de calcular funciones de correlación de este operador en la teoría de campo. Ahora bien, si se alude a la correspondencia de Maldacena, no es necesario calcular este correlador en el lado de la teoría de campo pues sucede que las funciones de partición de ambos lados son equivalentes.

$$\mathcal{Z}_{CFT} = \mathcal{Z}_{string}. \quad (1.26)$$

Empleando explícitamente las expresiones asociadas, en una teoría con una CFT dual en  $(3 + 1)$ -dimensiones, al suponer que la frontera está en  $z = 0$ :

$$\langle e^{\int d^4x \mathcal{O}(x) \phi_0(x)} \rangle_{CFT} = \mathcal{Z}_{string}[\phi(x, z)|_{z=0} = \phi_0(x)]. \quad (1.27)$$

Ello proporciona correspondencia entre campos en la teoría de cuerdas y operadores en la teoría de campo, se le conoce como *correspondencia campo-operador*, y mediante su uso podemos calcular cantidades definidas de un lado al usar la teoría dual. La identificación de la función generadora de CFT y la función de partición de la cuerda provee la relación de GKP-Witten [23].

A alto nivel, una interpretación de esta relación yace en que cada operador manda operadores invariantes de norma de SYM en una representación irreducible particular a campos de supergravedad en la misma representación.



# 2

## Marco Teórico

### 2.1. Aplicaciones de la correspondencia norma-gravedad

La dualidad holográfica, en los años recientes, ha mostrado proveer un enfoque particularmente útil para el estudio de cantidades dinámicas en regimenes fuertemente acoplados. A pesar de que no parece ser aplicable directamente a sistemas físicos, este enfoque puede ser usado para estudiar modelos teóricos que exhiban el mismo tipo de fenómenos y así capturar algo de la física relevante. Las técnicas de la dualidad son particularmente eficientes para contestar preguntas referidas a cuestiones fuera del equilibrio a temperatura y densidad de materia finitos, como la generación dinámica de masa y propiedades de transporte, que pueden ser extremadamente difíciles de estudiar usando otros métodos no perturbativos.

Los modelos holográficos están divididos en dos tipos principales, comúnmente conocidos como modelos *top-down* y modelos *bottom-up*.

En los *top-down*, la descripción del bulto gravitacional del sistema corresponde a una solución consistente de una teoría de gravedad cuántica (ya sea la teoría *completa* de cuerdas o una teoría efectiva de supergravedad) de lo cual se deriva una dinámica fuertemente acoplada en la frontera.

En los *bottom-up*, una parte de la dinámica que se desea en la frontera y se incorporan los elementos en la descripción del bulto para reproducirlos.



### 2.1.1. Colisiones de iones pesados y materia condensada

Durante los últimos años y con base en los experimentos de colisiones de iones pesados que se realizan en aceleradores de partículas como el RHIC o el LHC, se ha determinado que tras las colisiones se forma una fase fuertemente acoplada y deconfinada de QCD, la cual es opaca para partículas de color, muestra conducta hidrodinámica y decae en hadrones, por lo que se considera un plasma de quarks y gluones (QGP) [32, 33]. Ello ha coludido a las generalizaciones de  $AdS/CFT$  con teorías de temperatura finita y experimentos de colisiones, en el afán de dilucidar un esquema que permita el estudio de ciertas propiedades de los QGP a través de duales gravitacionales.

Esta búsqueda no es exclusiva de los QGP, pues también se han hecho investigaciones en materia condensada, superconductividad, hidrodinámica, transiciones cuánticas de fase, etcétera; y con ello, pese a no contar aún con una demostración de la conjetura de Maldacena, la validez de la holografía como herramienta se ha fortalecido.

Debido a que es a efectos prácticos imposible obtener una colisión completamente frontal en los haces de los aceleradores, lo usual es que se genere un campo magnético intenso como producto de la rotación de partículas cargadas en torno al centro de masa del sistema; por ello es imprescindible contar con una descripción holográfica de los efectos magnéticos a fin de que se esté en posibilidad de comparar los datos experimentales con resultados teóricos razonables [34–36].

El carácter dual de la correspondencia puede usarse para darle solidez a cuestiones conceptuales de teorías térmicas de norma fuertemente acopladas como aquéllas que gobiernan el plasma generado en los aceleradores [32], mismas que de otro modo serían inefables.

## 2.2. Correspondencia Extendida

Como ya se mencionó en 1.3.3.3, la teoría de campo conforme considerada del lado de la teoría de norma en la correspondencia *tradicional* ha sido  $\mathcal{N} = 4$  SYM. Sin embargo, generalizaciones de la dualidad en los que la supersimetría y la simetría conforme se rompen han dado lugar a nuevos enfoques para estudiar fenómenos fuertemente acoplados en teorías de  $N_c$  grande [37–41].

De las primeras extensiones a esta dualidad fue realizar un proceso análogo al de 1.3.3.3 en varias dimensiones [42]<sup>1</sup>. Hoy en día la correspondencia norma/gravedad es usada también para referirse a correspondencias extendidas que involucran teorías de norma no conformes ni supersimétricas con características que buscan asemejarse a QCD o al modelo estándar,

---

<sup>1</sup>Por esto uno se refiere a que una teoría de norma  $U(N_c)$  SYM en un volumen de mundo  $(d + 1)$ -dimensional deformado por  $N_c$   $Dp$ -branas es dual a la teoría de cuerdas cerradas en el fondo cercano al horizonte del fondo inducido por las  $Dp$ -branas.

como el rompimiento de simetría quiral, grados de libertad en la representación fundamental y confinamiento.

Introducir estas características del lado de la teoría de norma requiere deformar el fondo  $AdS$  del lado gravitacional de manera que se preserven algunas de las supersimetrías del modelo en la teoría dual<sup>2</sup>; el cambio en la geometría de éste modifica la fenomenología de la teoría de norma dual al añadir operadores relevantes y permite asociarlo con un flujo del grupo de renormalización. Se ha hecho considerable progreso hacia esta meta al considerar geometrías asintóticamente  $AdS$  (AAdS) las cuales corresponden a flujos del grupo de renormalización de una teoría de norma conforme en el ultravioleta a una teoría similar a QCD en el infrarrojo.

Aunque al día de hoy se desconoce la teoría de cuerdas dual a QCD, de cualquier modo se han obtenido resultados relevantes y con relativa universalidad concernientes al estudio de dinámica en *modelos de juguete* fuertemente acoplados [43], rentabilizando así a la correspondencia  $AdS/CFT$ .

Un método que permite abordar el estudio de más de una propiedad física del sistema, so pena de hacer intratables a las ecuaciones incluso del lado débilmente acoplado, es el encontrar una dependencia paramétrica de alguna propiedad física en términos de cantidades ajustables de la teoría para poder adecuar el modelo a las observaciones experimentales [44].

### 2.2.1. Sabor en la Correspondencia

Dado que en la correspondencia estándar con teoría dual  $\mathcal{N} = 4$ , las cuerdas abiertas sólo pueden terminar en la misma pila de  $N_c$   $D3$ -branas, todos los campos están en la representación adjunta del grupo de norma ( $\psi \rightarrow e^{i\Lambda}\psi e^{-i\Lambda}$ ); así que una extensión particularmente importante a la correspondencia original es la introducción de sabor y materia en la representación fundamental ( $\psi \rightarrow e^{i\Lambda}\psi$ ), de forma semejante a lo que ocurre en QCD, para con ello representar quarks y sus estados acoplados, los mesones, estudiados en [45–48].

Algunas de las características deseadas pueden conseguirse mediante el estudio de la dinámica de  $Dq$ -branas sobre el fondo gravitacional generado por una pila de  $Dp$ -branas, en lo que se conoce como un sistema  $Dp/Dq$ .

Es de particular interés, por ejemplo, el dual holográfico de la teoría  $\mathcal{N} = 2$   $SU(N_c)$  SYM acoplada a  $N_f \ll N_c$  sabores de materia fundamental a temperatura finita, la cual es dual a  $N_f$   $Dq$ -branas de prueba en la geometría cercana al horizonte del fondo generado por  $N_c$   $Dp$ -branas negras. El calificativo ‘*de prueba*’ hace referencia a que en este límite se desprecia la retroacción de unas cuantas  $Dq$ -branas pues la geometría generada es dominada por una

---

<sup>2</sup>Además de las extensiones ya mencionadas, también es posible ampliar el estudio de la correspondencia al investigar cómo trascender de la aproximación de supergravedad a la teoría de cuerdas completa y verificar así su *integrabilidad*, pero esto no se hace mediante deformaciones de la geometría estándar.

gran pila de  $Dp$ -branas en el bulto.

Si se considera  $N_c$  suficientemente grande, la teoría es fuertemente acoplada, el fondo efectivo generado por las  $Dp$ -branas es uno tipo  $AdS$ -Schwarzschild, y la geometría de interés es  $AdS_5 \times S^5$  [41, 49, 50].

Quizá el modelo de  $Dq$ -brana de pruebas sobre fondo generado por  $Dp$ -branas más estudiado es el  $D3/D7$ , pues es dual a una teoría de norma en cuatro dimensiones; aunque es también popular el de *Sakai-Sugimoto*, que es del tipo  $D4/D8$ , donde D8-branas y anti-D8-branas son añadidas a un fondo de D4-branas compactificadas en  $S^1$ .

Ambos modelos describen una teoría de norma fuertemente acoplada en cuatro dimensiones con grados de libertad de materia fundamental y presentan similitud fenológica con QCD.

### 2.2.1.1. Sistema D3/D7

En este modelo se parte de la configuración básica de la correspondencia  $AdS/CFT$ , involucrando una pila de  $N_c$  D3-branas con la descripción dual dada por  $\mathcal{N} = 4$   $SU(N_c)$  SYM [47].

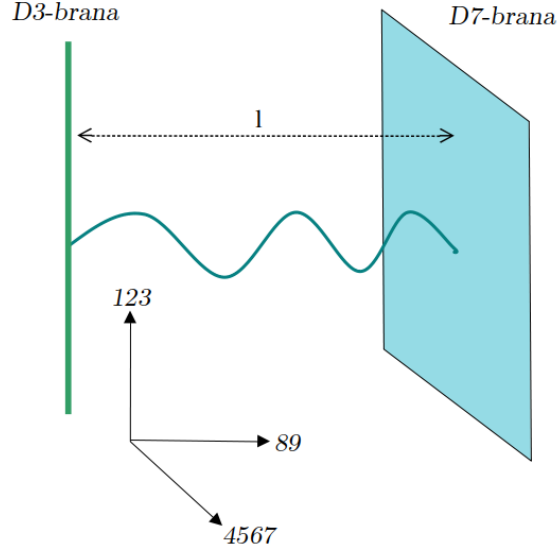
Si a él se añaden  $N_f$  D7-branas de prueba [48, 51], dentro del espacio plano (9+1)-dimensional con coordenadas  $x^\alpha$ , las D3-branas se extienden a lo largo de las direcciones 0123 (la temporal y las espaciales, correspondientes a  $(x, y, z)$ ), mientras que las D7-branas se extienden adicionalmente sobre otras 4 direcciones 4567. Esta configuración preserva una cuarta parte de las supersimetrías de la teoría tipo IIB y tiene grupo de isometría  $SO(4) \times SO(2)$  en las direcciones que son transversales a las D3-branas<sup>3</sup>. Del lado de la teoría de campo dual, se tiene una teoría  $\mathcal{N} = 2$  SYM  $d = (3 + 1)$  dimensional cuyos grados de libertad están acoplados a  $N_f$  hipermultipletes de campos de sabor, contenido provisto por las excitaciones de cuerdas fundamentales que tienen un extremo en una D3-brana y otro en una D7-brana; dando como resultado 2 fermiones de Weyl de quiralidad opuesta y 2 campos escalares  $\{\psi_k, q^k\}_{k=1,2}$  que transforman en la representación fundamental del grupo de norma.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D3:	×	×	×	×						
D7:	×	×	×	×	×	×	×	×		

---

<sup>3</sup>Dado que se permiten rotaciones de las coordenadas en el subespacio engendrado por las direcciones 4567 de la D7-brana y de manera independiente se puede rotar en las direcciones restantes,  $x^8, x^9$ , esta simetría de rotación en las direcciones transversales al volumen de la D7-brana se entiende como la encarnación geométrica de la simetría quiral de los campos de quarks en la teoría de norma. Se enfatiza que esta simetría quiral  $U(1)$  es no anómala en el límite de  $N_c$  grande — y  $N_f \ll N_c$  —, que es también el límite en el que la supergravedad clásica y la acción de DBI en la forma indicada son válidas [52].

Si se separan a las  $D3$ -branas y las  $D7$ -branas por una determinada distancia en las direcciones de las coordenadas  $x^8, x^9$ , la métrica inducida es sólo asintóticamente  $AdS_5 \times S^3$ ; se rompe la simetría  $SO(2)$ . Esto corresponde a darle masa a los hipermultipletes fundamentales del lado de la teoría de norma, así que en general el encaje de  $N_f$   $D7$ -branas de prueba del lado de gravedad se traduce en  $N_f$  grados de libertad fundamentales masivos en la teoría de norma dual.



**Figura 2.1:** Las excitaciones de las cuerdas que se extienden entre una  $D3$ - y una  $D7$ -brana se asocian con un hipermultiplete fundamental.

Cuando se tienen campos de sabor sin masa, el lagrangiano clásico es invariante bajo las transformaciones del grupo  $SO(4, 2)$  (i.e. sigue teniendo invariancia conforme), las R-simetrías  $SU(2)_R, U(1)_R$  y el grupo de rotaciones de los escalares del hipermultiplete adjunto  $SU(2)$ . Cuando se añade un término de masa, la simetría  $U(1)_R$  se rompe explícitamente<sup>4</sup>.

Como las simetrías de la teoría de campo tienen su encarnación del lado del dual gravitacional, se pueden construir operadores compuestos que sean invariantes de norma que se transformen de acuerdo a representaciones adecuadas del grupo  $SO(4) \times SO(2)$ , o en la práctica, a un grupo isomorfo a él como  $SU(2) \times SU(2) \times U(1)$ . Por construcción, a estos operadores se les considera entonces como los duales a las fluctuaciones de la  $D7$ -brana que transforman en la misma representación [47] y así, como se propone en [51, 53, 54], los operadores mesónicos de la teoría de campo se identifican con los nuevos grados de libertad fundamentales debidos a los campos que generan los extremos de las cuerdas abiertas que terminan en el volumen de mundo de una  $D7$ -brana<sup>5</sup>; esta dualidad es entre cuerdas abier-

<sup>4</sup>Más aún, si todos los  $N_f$  campos de sabor tienen la misma masa, la teoría de campo es invariante bajo el grupo  $U(N_f)$  global.

<sup>5</sup>En efecto se asemejan a mesones pues operadores duales a los modos de la  $D7$ -brana deben tener al menos dos campos del hipermultiplete; si son estados de una partícula, deben contener exactamente dos de ellos lo cual se ve como una pareja quark-antiquark.

tas, en contraste con la correspondencia *AdS/CFT* usual donde la dualidad es entre cuerdas abiertas y cerradas.

En resumen, las excitaciones de cuerdas que poseen ambos extremos en las *D7*-branas representan estados mesónicos de la teoría de campo tetradimensional correspondiente y puede calcularse el espectro de ellos de manera análoga a como se hace en [47].

La métrica 1.24 puede escribirse como:

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2} \eta_{ij} dx^i dx^j + \frac{L^2}{r^2} (du^2 + u^2 d\Omega_3^2 + dx_8^2 + dx_9^2), \quad (2.1)$$

donde  $i, j = 0, 1, 2, 3$ ,  $u^2 = \sum_{k=4}^7 x_k^2$  y  $r^2 = u^2 + x_8^2 + x_9^2$ . Como la *D7*-brana está orientada transversal a las direcciones 89, se extiende a lo largo de *AdS*<sub>5</sub> y en el fondo cercano al horizonte envuelve una *S*<sup>3</sup> de las que son secciones de *S*<sup>5</sup>.

La dinámica de la *D7*-brana dentro del fondo 10-dimensional curvo se rige en nuestro límite de baja energía por la acción de DBI; en particular si no hay intensidad de campo en el volumen de mundo de la brana, la acción es:

$$S_{D7} = -T_{D7} \int d^8 \xi u^3 \sqrt{1 + \dot{x}_8^2 + \dot{x}_9^2}; \quad (2.2)$$

de donde se obtiene la ecuación de movimiento para el encaje,

$$\frac{d}{du} \left[ \frac{u^3}{\sqrt{1 + \dot{x}_8^2 + \dot{x}_9^2}} \frac{dx_k}{du} \right] = 0 \quad k = 8, 9. \quad (2.3)$$

En general, las soluciones de 2.3 en la frontera  $u \rightarrow \infty$  toman la forma asintótica:

$$x_k = m + \frac{c}{u^2} + \dots \quad (2.4)$$

Donde  $m$ , que se interpreta como la separación entre las branas, resulta ser el campo escalar dual a la masa desnuda del quark,  $m_q$ . A saber, se relaciona con la masa de los hipermultipletes en la teoría  $\mathcal{N} = 2$  dual y la constante de Regge a través de:

$$m_q = \frac{m}{2\pi\alpha'}. \quad (2.5)$$

Por el diccionario mencionado previamente, el parámetro  $c^6$  está relacionado con el valor esperado del condensado de quark en el vacío,  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  mediante:

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{N_f N_c}{(2\pi l_s^2)^3 \lambda} c. \quad (2.6)$$

Las soluciones a las ecuaciones de supergravedad con  $c$  distinta de cero no son regulares en  $AdS$  y por tanto deben excluirse, pero esto es consistente con preservar la supersimetría pues la existencia del condensado rompe la simetría quiral.

Por ello, se consideran válidos sólo encajes regulares supersimétricos de la  $D7$ -brana para los cuales la masa del quark pueda ser diferente de cero pero el condensado se anule. Para encajes masivos, la  $D7$ -brana está separada de la pila de  $D3$ -branas ya sea en la dirección 8 o 9 una distancia  $m$ . En este caso el radio de la  $S^3$  envuelta se vuelve una función de la coordenada radial  $r$  en  $AdS_5$ . Cuando es no masivo, trivialmente se puede dar la  $D7$ -brana que llena completamente al espacio  $AdS_5$  y que enreda a la  $S^3$  ecuatorial de la  $S^5$ , este tipo de encajes son duales a una teoría  $\mathcal{N} = 2$  SYM con hipermultipletes sin masa.

La métrica inducida sobre el volumen de mundo de la  $D7$ -brana es entonces:

$$ds^2 = \frac{u^2 + m^2}{L^2} \eta_{ij} dx^i dx^j + \frac{L^2}{u^2 + m^2} du^2 + \frac{L^2 u^2}{u^2 + m^2} d\Omega_3^2, \quad (2.7)$$

con  $d\Omega_3^2 = d\theta^2 + \cos^2 \theta d\beta^2 + \sin^2 \theta d\gamma^2$  la métrica en las coordenadas esféricas del espacio 4567, y  $m^2 = r^2 - u^2$ .

Claramente (2.7) es asintóticamente  $AdS_5 \times S^3$  y el radio de la  $S^3$  se vuelve cero cuando  $u = 0$ , a la distancia radial  $r = m$  sobre  $AdS_5$ . Esta teoría no es confinante pues el potencial efectivo entre quark y antiquark es de tipo Coulomb a grandes distancias [55].

Para la adición de temperatura al sistema en la teoría de campo, basta con modificar el fondo para que sea el de  $AdS$ -Schwarzschild, con un agujero negro cuya temperatura de Hawking corresponda a aquélla de la teoría dual [43], i.e. la métrica es:

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2} (-f(r) dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{L^2}{r^2 f(r)} dr^2 + L^2 d\Omega_5^2, \quad (2.8)$$

donde  $f(r) = 1 - \frac{r_h^4}{r^4}$ , con  $r_h$  una constante con dimensiones de longitud relacionada con la temperatura por  $T = \frac{r_h}{\pi L^2}$ .

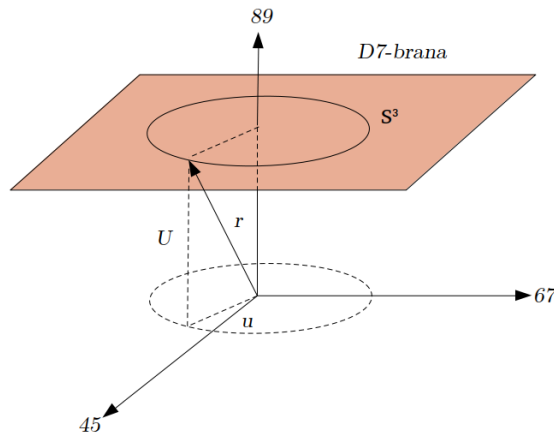
---

<sup>6</sup>Que geoméricamente simboliza el grado de pando de los encajes para  $u$ 's grandes.

Para  $r$  grande, la métrica es la misma que antes, como este límite se corresponde con la región UV de la teoría de norma, la física de UV es inafectada por la temperatura.

Sin embargo, en el IR, la física se modifica considerablemente puesto que ahora hay un horizonte de área finita en  $r = r_h$ , cuya temperatura de Hawking es identificada con la temperatura de la CFT dual.

En este caso, se puede argumentar por simetría que el perfil del encaje de la  $D7$  depende sólo de la coordenada radial  $u$ , la cual se introduce explícitamente como una función polar en el plano 89 mediante  $R = R(u)$ , y que como la métrica no se modifica ante rotaciones en  $\phi$ , puede suponerse  $\phi = cte$ .



**Figura 2.2:** Encaje de una  $D7$ -brana a  $T = 0$

Nuevamente se espera un comportamiento asintótico como el de 2.4, donde los parámetros tienen el mismo significado físico. Sin embargo, a temperatura finita, la supersimetría se rompe y es posible tener encajes con  $c \neq 0$ .

Se hablará más de ello en 2.3, pero hay dos tipos de encajes: aquéllos que, en aparente generalización al caso anterior, poseen un radio mayor al del horizonte para el cual la  $S^3$  colapsa y por ende hace que la  $D7$ -brana nunca toque al horizonte; y aquéllos que alcanzan el agujero negro. En términos del ciclo  $S^1$  de periodo  $\beta = 1/T$  asociado a la continuación euclídeana de la métrica en la coordenada temporal, el contacto con el horizonte equivale a la contracción de este ciclo en un punto.

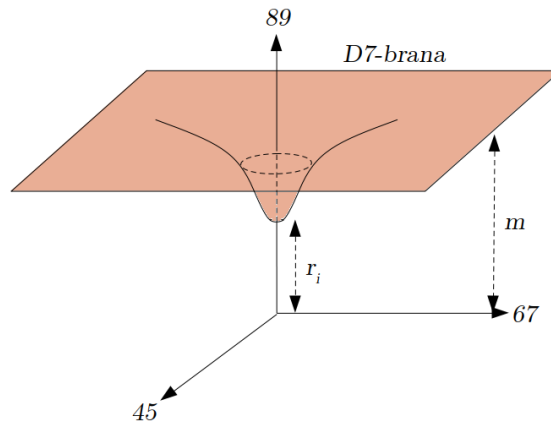
Para este fondo de temperatura finita, la solución con masa nula tiene un condensado también nulo; sin embargo, en fondos que son duales a teorías confinantes es posible tener masa nula y un condensado no nulo, lo cual pone de manifiesto el rompimiento espontáneo de la simetría quirral [56–58]. Un ejemplo de esto es la teoría dual al fondo gravitacional de Constable-Myers; ésta, además de ser confinante, presenta un condensado que rompe la simetría quirral [59, 60].

### 2.3. Fenómenos magnéticos en materia holográfica

El comportamiento de materia fuertemente interactuante sujeta a campos magnéticos es un problema inexorable en diversos sistemas, que van desde la descripción de un gas bidimensional de electrones en el grafeno, a magnetares. Los campos magnéticos dan lugar a una gran cantidad de fenómenos, e.g. la catálisis magnética del rompimiento de simetría quiral en QCD [61, 62] y el efecto Hall cuántico fraccionario relacionado al área de la materia condensada [63, 64].

En particular, las branas de prueba descritas en 2.2.1 son un modelo holográfico *top-down*.

La dinámica de la materia está determinada por las propiedades del encaje de la brana de prueba. En particular, ya se comentó que las fluctuaciones de los campos del volumen de mundo de dicha brana corresponden operadores compuestos invariantes de norma que describen a los estados mesónicos del sistema.



**Figura 2.3:** Encaje de una  $D7$ -brana a  $T \neq 0$

Si se considera el sistema dual a  $\mathcal{N} = 4$   $SU(N_c)$  SYM a temperatura finita  $T$  con  $N_c \gg 1$  con  $N_f \ll N_c$  hipermultipletes  $\mathcal{N} = 2$  de masa  $m_q$  en la representación fundamental, éste requiere la existencia de un agujero negro con base en lo discutido en 1.2.3; esto hace que el encaje ya no sea a una separación constante como en la Figura 2.2 sino que la brana de prueba se deforme al ser atraída por el agujero, de modo que se distinguen dos tipos de encaje. La cantidad que rige el tipo de encaje es el cociente  $\sigma = m_q/T$  donde  $m_q$  es la masa del quark y  $T$  la temperatura de la teoría:

1. **Minkowski:** Aquéllos en los que la brana *termina* antes de llegar al horizonte puesto que su tensión compensa la atracción del agujero negro de fondo; se presentan cuando  $\sigma \gg 1$  y se visualizan como en la Figura 2.3.
2. **Agujero negro:** Aquéllos en los que la brana cede ante la atracción y llega hasta



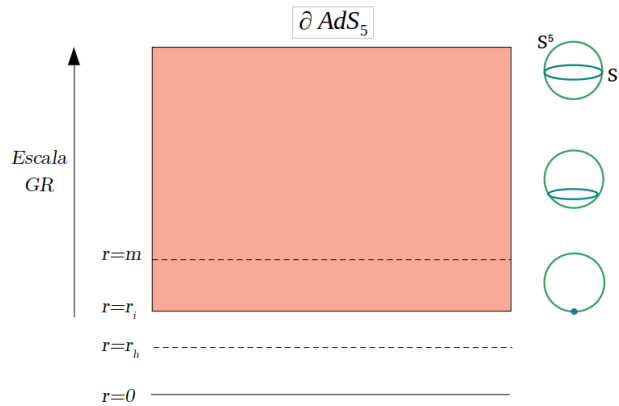
el horizonte del agujero negro del fondo gravitacional. Son favorecidos para valores pequeños de  $\sigma$ .

Ambos tipos describen fases diferentes de la materia en la teoría de norma dual:

### ■ Encajes de Minkowski

En este tipo de encaje, los mesones son estables y se les pueden asociar frecuencias propias reales de las fluctuaciones de la brana de prueba; son favorecidos a bajas temperaturas.

El que el encaje termine a una distancia del horizonte provee un corte infrarrojo para los modos normales de la brana.



**Figura 2.4:** Evolución de la  $S^3$  envuelta por una  $D7$ -brana con encaje de Minkowski conforme varía el parámetro radial del encaje en un fondo de agujero negro; se distinguen  $r_h$  el radio del horizonte,  $r_i$  el radio donde *termina* la  $D7$ -brana y  $m$ , la separación asintótica entre las  $D3$ - y  $D7$ -branas.

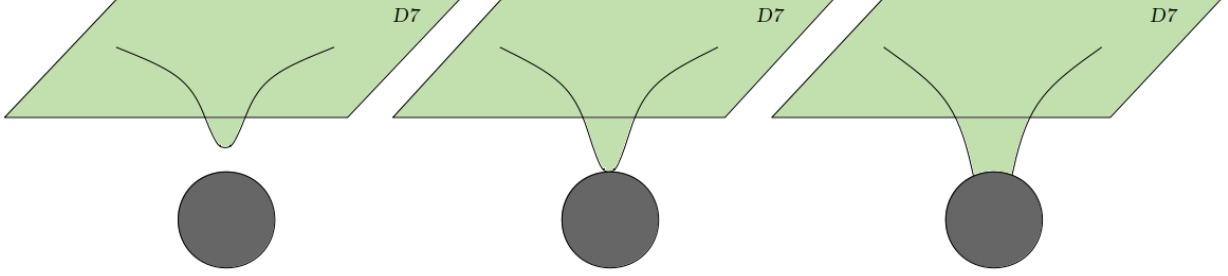
### ■ Encajes de Agujero Negro

En este tipo de encaje puede interpretarse que la energía de las fluctuaciones es disipada hacia el interior del agujero negro, de modo que están *amortiguadas*; esto da lugar a frecuencias propias complejas cuya parte imaginaria se entiende como el *ancho de decaimiento* de los mesones asociados. Al ser estos fondos favorecidos a altas temperaturas, y dado que para constante de 't Hooft grande, hay una transición de fase de primer orden al pasar de un encaje de Minkowski al de agujero negro [59], al proceso de decaimiento de los mesones que otrora estables fueran se le conoce como *derretimiento*.

A estas fluctuaciones amortiguadas es sólitamente denominarles *modos cuasinormales*, y resultan de tomar una condición de frontera de onda entrante en el horizonte [65].

El rompimiento de simetría puede entonces visualizarse geoméricamente en esta visión holográfica como que el pandeo de las  $D7$ -branas rompe una simetría explícita del

espacio al combinar la adición de una  $D7$ -brana de prueba con la deformación del espacio  $AdS_5 \times S^5$ . La métrica del fondo genera una expansión de escala volumétrica para radios cercanos al horizonte y la  $D7$ -brana pareciera ser repelida para minimizar su volumen de mundo; la repulsión de la  $D7$ -brana por la singularidad del espacio causa la aparición del condensado fermiónico [59].



**Figura 2.5:** Posibles encajes de una  $D7$ -brana de prueba en la geometría generada por las  $N_c$   $D3$ -branas del bulto.

### 2.3.1. Espectro de mesones

Con base en lo anteriormente discutido, los mesones se pueden obtener a partir de las fluctuaciones en torno a un encaje de referencia.

Para el caso del fondo de  $AdS$  a temperatura  $T = 0$ , se tiene que fijar  $x^8, x^9$  como constantes es solución de la ecuación; en particular, rotando por un ángulo apropiado en el subespacio 89, y fijando la distancia entre la  $D7$ -brana y la  $D3$ -brana como  $l$ , se tiene que un encaje base es:

$$x^8 = 0 + \delta h_1(\xi^\mu), \quad x^9 = l + \delta h_2(\xi^\mu), \quad (2.9)$$

donde  $h_k$  es una función de las coordenadas sobre la  $D7$ -brana,  $\xi^\mu$ . Resulta que al sustituir estas expresiones en el Lagrangiano de DBI y calcular las ecuaciones de movimiento (Euler-Lagrange) resultantes para las funciones  $h_k$ , arroja la ecuación:

$$\frac{L^4}{(u^2 + l^2)^2} \square h_k + \frac{1}{u^3} \partial_u (u^3 \partial_u h_k) + \frac{1}{u^2} \nabla^2 h_k = 0, \quad (2.10)$$

para  $k = 1, 2$ . Como para ambos modos es la misma ecuación, en lo sucesivo se escribe entonces sencillamente  $h$  para referirse a cualquiera de las dos perturbaciones. Con el objetivo

de separar variables, se propone el Ansatz

$$h = \phi(u)e^{i\langle k, x \rangle}, \quad (2.11)$$

y se sustituye en la ecuación anterior para dar a lugar a una expresión que tiene por solución funciones hipergeométricas. Para satisfacer las condiciones de que la solución sea normalizable<sup>7</sup>, en  $u \rightarrow \infty$  y que sea regular conforme  $u \rightarrow 0$ <sup>8</sup>, se requiere restringir los valores de  $k^2$ , la cual a su vez se relaciona con la masa del mesón físico en la teoría de norma vía  $M^2 = -k^2$ .

El espectro resultante es discreto con masas dadas por:

$$M(n) = \frac{2l}{L^2} \sqrt{(n+1)(n+2)}. \quad (2.12)$$

Para el caso de temperatura distinta de cero, se sigue algo completamente análogo, pero es necesario emplear la métrica 2.8 de la brana negra a fin de introducir la temperatura como se hubo explicado anteriormente.

En este caso, el fondo es dado de forma analítica, sin embargo las ecuaciones que se obtienen para los encajes como resultado de las ecuaciones de Euler-Lagrange a partir de DBI sólo pueden resolverse de forma numérica.

Acto seguido se propone una perturbación a ese encaje de la misma forma que en el caso de temperatura cero y posteriormente puede expandirse a orden cuadrático el lagrangiano a fin de obtener las ecuaciones de movimiento para las funciones  $h_k$ , o bien, obtener las ecuaciones de movimiento completas, usar un regulador para expresar el encaje perturbado como  $x^k = x_0^k + \epsilon h_k(\xi^\mu)$  y expandir a orden lineal en  $\epsilon$  para obtener las ecuaciones *linealizadas* de movimiento correspondiente a las fluctuaciones del encaje.

Por ser éstas numéricas, evidentemente no habrá un criterio analítico como el del caso de temperatura cero y tiene que recurrirse a leer numéricamente las condiciones de regularización de las soluciones a partir de la tendencia esperada en la frontera.

### 2.3.2. Campos externos en sistemas D3/D7

Las branas de prueba muestran virtudes notables para estudiar las propiedades de los sistemas duales a materia con densidad no nula sometida a campos electromagnéticos de

---

<sup>7</sup>Para que dicha solución sea dual al estado mesónico de la teoría de campo.

<sup>8</sup>Ya que para ser ‘perturbaciones’ *bona fide* no se puede tener una amplitud muy grande, en particular no es posible que éstas diverjan.

fondo. La influencia de los campos electromagnéticos sobre las branas se manifiesta a través del *encendido* de componentes específicas del campo de norma en el volumen de mundo de la brana, lo cual resulta en un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas resultantes para el cálculo del encaje y los campos de norma.

En [35] se consideró por primera vez un campo magnético inducido en la dirección del volumen de mundo de las  $D3$ -branas precursoras del fondo. Éste se induce acoplando a la materia fundamental un campo de Kalb-Ramond<sup>9</sup>  $B^{(2)} = B dx^2 \wedge dx^3$ , en consecuencia se modifica la acción de DBI y se añade una contribución de Wess-Zumino, términos que a la postre rompen la supersimetría en el volumen de mundo de la  $D7$ -brana. Dado este rompimiento, el encaje ahora depende, incluso en el caso sin temperatura, de  $u$ . Esto puede apreciarse directamente del hecho de que el lagrangiano resultante de tal operación es:

$$\mathcal{L} = -T_{D_p} u^3 \sin\psi \cos\psi \sqrt{1 + (R')^2} \sqrt{1 + \frac{L^4 B^2}{(u^2 + R^2)^2}}. \quad (2.13)$$

En este caso, el encaje para masa de quark nula aún así presenta un condensado no trivial. A este rompimiento espontáneo de la simetría quiral inducido por la aparición del campo magnético se le denomina *catálisis magnética* [36].

La forma de las ecuaciones de movimiento en el caso anterior hacen posible fijar el parámetro adimensional  $B/T^2$ , de modo que al considerar el parámetro  $\sigma$  mencionado anteriormente,  $\sigma \propto m/B$  es la cantidad que determina qué topología de encaje es favorecida.

Para temperatura finita, hay dos mecanismos en disputa: por un lado, el agujero negro atrae a la  $D7$ -brana; por otro, el campo magnético la repele. Ante esto, hay un valor crítico del campo  $B$ <sup>10</sup> por encima del cual la brana de prueba es repelida para todo valor de la masa del quark. [46]

---

<sup>9</sup>También es posible estudiar los efectos de un campo eléctrico al colocar esta forma en las direcciones  $(0, 1)$ , por ejemplo.

<sup>10</sup>O bien, del parámetro  $B/T^2$ .



# 3

## Metodología

En los párrafos siguientes se profundiza en el tratamiento expuesto para el cálculo del espectro de mesones de [66]. Debido a que los elementos necesarios para extender los resultados que en dicho artículo se presentan<sup>1</sup> son en su mayoría ajenos a una expresión analítica, fue necesario reproducir los cálculos que en él mencionan para encontrarse en posición de trabajar con las descripciones numéricas asociadas.

Una manera de construir soluciones a supergravedad en  $(9 + 1)$ -dimensiones es el *levantar* soluciones de teorías de menor dimensionalidad. Para que esto sea posible, es necesario contar con una *truncación consistente de Kaluza-Klein* de la teoría sobre alguna subvariedad compacta del espacio original. Se hubo mencionado en la parte final de 1.2.1 que como resultado de la reducción de Kaluza-Klein se obtiene una torre de estados; se dice que una reducción es *consistente* si matemáticamente es posible fijar a cero los modos masivos y obtener ecuaciones de movimiento sólo para los campos no masivos. En otras palabras, esto quiere decir que si se cuenta con una solución de las ecuaciones de movimiento de la teoría efectiva de dimensión baja, ésta tiene un *levantamiento* en la teoría original<sup>2</sup> en términos de los grados de libertad que se corresponden con los existentes en la teoría efectiva, de modo que dicha solución levantada será solución a las ecuaciones de movimiento de la teoría 10-dimensional completa y no sólo a la efectiva.

No hay un método general para definir este levantamiento para una teoría y espacio compactificante fijos, pero del estudio de soluciones específicas uno puede inferir un Ansatz

---

<sup>1</sup>Como el fondo gravitacional o los encajes de referencia.

<sup>2</sup>También conocida como ‘microscópica’, por contar con los grados de libertad asociados a los modos sobre los que se integró para obtener la reducción a la teoría efectiva, por analogía, la de baja dimensión se conoce como ‘macroscópica’.

genérico para ver la forma que deben adoptar los campos en la teoría microscópica a partir de los campos de la macroscópica a fin de hacer consistente a la truncación. Esto es particularmente conveniente pues permite levantar una solución macroscópica explícita a una solución explícita de la teoría microscópica. A causa de esta manera heurística de construir los levantamientos puede volverse complejo tratar de hacer al proceso invertible para una solución genérica del truncamiento, pero si se restringe la atención a soluciones que posean alguna simetría particular puede construirse un Ansatz específico.

Para efectos del presente trabajo se emplea supergravedad IIB, y dado que deseamos que nuestro espacio sea asintóticamente  $AdS_5 \times S^5$ , lo natural es emplear la reducción sobre  $S^5$ . La reducción completa da lugar a  $\mathcal{N} = 8$  SYM en cinco dimensiones. Para este caso, encontrar un levantamiento general no ha sido posible hasta la fecha, sin embargo basta considerar una truncación consistente de esta teoría con  $\mathcal{N} = 2$ . En ésta, el grupo de norma se reduce al subgrupo de Cartan  $U(1) \times U(1) \times U(1)$  de  $SO(6)$ . Como se menciona en [67], el sector bosónico de esta teoría contiene a los tres bosones de norma asociados a los  $U(1)$ , la métrica, y dos campos escalares. En la misma referencia se proporcionan Ansätze para las reducciones de Kaluza-Klein en tres diferentes teorías; en particular se cuenta con los resultados para el caso bajo presente discusión. En dicho caso, el Ansatz para el levantamiento a la métrica 10-dimensional y los parámetros seleccionados de tal propuesta son:

$$ds_{10}^2 = \sqrt{\Delta} ds_5^2 + \frac{L^2}{\sqrt{\Delta}} \sum_{k=1}^3 X_k^{-1} \left( d\mu_k^2 + \mu_k^2 \left( d\lambda_k + \frac{A^k}{L} \right)^2 \right), \quad (3.1)$$

donde los dos escalares  $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)$  están expresados en términos de las cantidades  $X_i$ , sujetas a la condición  $X_1 X_2 X_3 = 1$ . Éstas a su vez se parametrizan a través de dos dilatones  $\phi_1$  y  $\phi_2$ :

$$X_i = e^{-\frac{1}{2} \vec{a}_i \cdot \vec{\varphi}}, \quad (3.2)$$

y se impone el producto interior entre los vectores  $\vec{a}_i$ :

$$M_{ij} := \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = 4\delta_{ij} - \frac{4}{3}; \quad (3.3)$$

Donde una elección que se indica conveniente es:

$$\vec{a}_1 = \left( \frac{2}{\sqrt{6}}, \sqrt{2} \right), \quad \vec{a}_2 = \left( \frac{2}{\sqrt{6}}, -\sqrt{2} \right), \quad \vec{a}_3 = \left( -\frac{4}{\sqrt{6}}, 0 \right). \quad (3.4)$$

La métrica  $d\Omega_5$  de la  $S^5$  de compactificación se puede escindir al considerar a  $S^5$  descompuesto en fibras  $S^3 \subset S^5$  que a su vez son parametrizadas por ángulos  $\{\lambda_k\}_{k=1}^3$ . En efecto, si

las  $\mu_k$  satisfacen que  $\sum_k \mu_k^2 = 1$ :

$$d\Omega_5^2 = \sum_{k=1}^3 \left( d\mu_k^2 + \mu_k^2 d\lambda_k^2 \right). \quad (3.5)$$

Una forma natural de asegurar que se satisfaga dicha condición es que las  $\mu_k$  parametricen puntos en una  $S^2$  introduciendo dos ángulos auxiliares  $\{\theta, \psi\}$ :

$$\mu_1 = \sin \theta, \quad \mu_2 = \sin \psi \cos \theta, \quad \mu_3 = \cos \psi \cos \theta. \quad (3.6)$$

Por último,  $L$  es el radio de la  $S^5$  y

$$\Delta = \sum_{k=1}^3 X_k \mu_k^2. \quad (3.7)$$

De la sustitución de dicho Ansatz para la métrica<sup>3</sup> dentro de las ecuaciones de movimiento de la teoría IIB, se derivan las mismas ecuaciones pentadimensionales que se obtienen al calcular las ecuaciones de Euler-Lagrange del *Lagrangiano efectivo 5-dimensional* que fue objeto de estudio en [68]:

$$\mathcal{L}_5 = \sqrt{-g} \left[ R - \frac{1}{2}(\partial\varphi_1)^2 - \frac{1}{2}(\partial\varphi_2)^2 + \frac{4}{L^2} \sum_{k=1}^3 X_k^{-1} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^3 X_k^{-2} (F^k)^2 + \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\lambda} F_{\mu\nu}^1 F_{\rho\sigma}^2 A_\lambda^3 \right], \quad (3.8)$$

Las cuales pueden consultarse en el apéndice A.2.

En lo que respecta a la teoría 5-dimensional cuyas soluciones serán levantadas usando el Ansatz anterior, se usa el fondo de [34]. Éste corresponde a una teoría con lagrangiano de Einstein-Maxwell y constante cosmológica negativa,

$$S = -\frac{2N_c^2}{16\pi^2} \int d^5x \sqrt{-g} \left( R + F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{12}{L^2} \right) + S_{bdry}. \quad (3.9)$$

El fondo en dicha referencia se construyó buscando que las soluciones tuvieran un campo magnético sobre el campo de norma que reside en la teoría gravitacional e interpolasen entre un agujero negro BTZ en el horizonte — a fin de tener temperatura — y un *AdS* escalado asintóticamente en la frontera.

---

<sup>3</sup>Y el de la 5 forma de intensidad de campo  $F_{(5)}$  que puede encontrarse en [67].



A fin de introducir un campo magnético estático en la dirección definida como  $x_3 = z$  en el bulto, tangente a las direcciones de la frontera; y que el fondo obtenido sea invariante bajo traslaciones espaciales y rotaciones en el plano  $xy$ , se obtiene el Ansatz general:

$$ds^2 = -U(r)dt^2 + \frac{1}{U(r)}dr^2 + V(r)(dx^2 + dy^2) + W(r)dz^2 \quad (3.10)$$

para la métrica y

$$F_{fondo} = Bdx \wedge dy \quad (3.11)$$

para la intensidad de campo, con  $B$  una constante.

Con dicho Ansatz, las ecuaciones de Maxwell se satisfacen automáticamente.

En el presente caso se optó por considerar sólo un dilatón independiente  $\varphi$ , función únicamente de la coordenada radial y relacionado con los originales mediante:

$$\varphi_1 = \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi_2 = \frac{\varphi\sqrt{3}}{2}. \quad (3.12)$$

Se hace la observación de que esta elección<sup>4</sup> no es libre pues si se desea consistencia en la ecuación de movimiento para  $\varphi$  a partir de las ecuaciones para  $\varphi_1, \varphi_2$ , entonces el factor de escala entre ambas queda determinado por las  $a_i^{(j)}$ .

En lo que a las formas  $A^k$  refiere, la elección hecha es:

$$A^1 = 0, \quad A^2 = \frac{B(xdy - ydx)}{\sqrt{2}} = A^3. \quad (3.13)$$

En el caso de campo nulo  $B = 0$ , dado un parámetro  $V_0$ , se tiene una solución analítica

---

<sup>4</sup>La cual hace que  $X_1 = e^{-\frac{2\varphi}{\sqrt{6}}}$ ,  $X_2 = X_3 = e^{\frac{\varphi}{\sqrt{6}}}$ .

dada por la  $D3$ -brana negra:

$$\begin{aligned}
U_{BB}(r) &= \left(r + \frac{r_h}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{\left(\frac{3r_h}{2}\right)^4}{\left(r + \frac{r_h}{2}\right)^4}\right), \\
V_{BB}(r) &= \frac{4V_0}{9r_h^2} \left(r + \frac{r_h}{2}\right)^2, \\
W_{BB}(r) &= \frac{4}{3} \left(r + \frac{r_h}{2}\right)^2;
\end{aligned} \tag{3.14}$$

sin embargo para  $B \neq 0$  sólo es posible resolver las ecuaciones de movimiento numéricamente.

A partir de las expansiones de la solución (3.14) en torno al horizonte,  $r_h$ , se obtiene una propuesta sobre cómo debe lucir la expansión de la solución al caso con  $B$  no nulo como una serie de potencias:

$$\begin{aligned}
U(r) &= 6r_h(r - r_h) + \sum_{j=0} \sum_{k=2} U_{(j,k)}(r - r_h)^k \ln^j(r - r_h), \\
V(r) &= V_0 + \sum_{j=0} \sum_{k=1} V_{(j,k)}(r - r_h)^k \ln^j(r - r_h), \\
W(r) &= 3r_h^2 + \sum_{j=0} \sum_{k=1} W_{(j,k)}(r - r_h)^k \ln^j(r - r_h), \\
\varphi(r) &= \varphi_h + \sum_{j=0} \sum_{k=1} \varphi_{(j,k)}(r - r_h)^k \ln^j(r - r_h).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Por la forma de las ecuaciones de movimiento de A.2 tras considerar la forma de la métrica, se tiene que:

- Todo reescalamiento de una  $W(r)$  solución es también solución.
- Dado un campo  $B$  y su correspondiente solución en  $V(r)$ , se obtiene una solución  $\alpha V(r)$  asociada al campo  $\alpha B$ .

Por el último punto, realmente  $B$  y  $V_0$  no son parámetros independientes de las soluciones, pues el cociente  $B/V_0$  queda invariante ante la transformación descrita, de modo que es éste el parámetro de utilidad para generar diferentes fondos. Sin pérdida de generalidad se puede entonces fijar  $V_0 = 1$ .

Aunado a éste, se tienen como parámetros a  $r_h$  y  $\varphi_h$ . El primero es aquél que determina

la temperatura del fondo pues ésta es

$$T = \frac{U'(r_h)}{4\pi} = \frac{3r_h}{2\pi}; \quad (3.16)$$

que en lo sucesivo, siempre que se realicen cálculos numéricos explícitos, estará fija a  $r_h = 1/2$ <sup>5</sup>. La elección de  $\varphi_h$  se discute posteriormente.

De la sustitución de una versión finita de (3.15) en las ecuaciones de movimiento e igualando orden a orden los coeficientes de las potencias independientes de  $r$  a 0 se obtienen expresiones para los coeficientes  $U_{(j,k)}$ ,  $V_{(j,k)}$ ,  $W_{(j,k)}$ ,  $\varphi_{(j,k)}$  como función de  $r_h$ ,  $B$ ,  $\phi_h$ . Tras obtener estos coeficientes y sustituirlos en las expresiones de (3.15), se procede a emplear éstas y sus derivadas como condiciones iniciales fijas evaluadas a un radio cercano al del horizonte  $r_{ini} \sim r_h$  a fin de integrar numéricamente las ecuaciones de movimiento desde éste hasta llegar a la frontera del espacio<sup>6</sup>.

Por la forma diagonal de la métrica, en principio hay cinco ecuaciones de movimiento no triviales asociadas a la variación del tensor métrico. Por la simetría en el plano  $xy$ , resulta que dos de ellas son idénticas.

Ahora bien, pareciera que el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas está sobredeterminado por ser éstas cinco (las cuatro de la métrica y la ecuación del dilatón  $\varphi$ ) y tener sólo cuatro funciones independientes en la métrica. Sin embargo, hay en realidad sólo tres ecuaciones de movimiento independientes de entre aquéllas que provienen de la variación de la métrica.

Tras la integración numérica del fondo desde el horizonte hasta la frontera no es sólo obtener funciones  $V, W$  que sean asintóticamente las de  $AdS$ , lo cual es menester para emplear el diccionario de la correspondencia. Sin embargo al ajustar en la frontera un múltiplo de las soluciones<sup>7</sup>  $AAdS$  es posible reescalarlas con base en las reglas ya descritas para satisfacerlo, modificando como efecto colateral a  $B$ .

Realizando un procedimiento análogo al que se hizo para obtener los coeficientes orden

---

<sup>5</sup>I.e. todos los fondos tienen la misma temperatura.

<sup>6</sup>La cual en principio debería ser en  $r \rightarrow \infty$ , pero naturalmente se trabaja con un *infinito numérico*, en el presente caso, de  $10^6$ .

<sup>7</sup>Que son explícitamente de la forma  $kr^2$  con  $k$  constante.

a orden cerca del horizonte, se propone:

$$\begin{aligned}
U(r) &= r^2 + \sum_{j=0} \sum_{k=-1} u_{(j,k)} \left(\frac{1}{r}\right)^k \ln^j (r - r_h), \\
V(r) &= r^2 + \sum_{j=0} \sum_{k=-1} v_{(j,k)} \left(\frac{1}{r}\right)^k \ln^j (r - r_h), \\
W(r) &= r^2 + \sum_{j=0} \sum_{k=-1} w_{(j,k)} \left(\frac{1}{r}\right)^k \ln^j (r - r_h), \\
\varphi(r) &= \tilde{\varphi}_{(0,0)} + \sum_{j=0} \sum_{k=1} \tilde{\varphi}_{(j,k)} \left(\frac{1}{r}\right)^k \ln^j (r - r_h).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

y su sustitución dentro de las ecuaciones de movimiento del fondo gravitacional, para su posterior resolución orden a orden, permite expresar la forma de la solución en la frontera en términos de cuatro parámetros. Éstos pudieron seleccionarse de más de una manera, pero se hubo convenido usar los parámetros  $u_{(-1,0)}$ ,  $u_{(2,0)}$ ,  $\varphi_{(2,0)}$ ,  $\varphi_{(2,1)}$ .

Se puede mostrar que la aparición del término asintótico proporcional a  $\log(r)/r^2$  desestabiliza el fondo. Esto se relaciona con el parámetro  $\varphi_h$  pues, aunque en principio es posible calcular el fondo para una elección arbitraria de  $\varphi_h$ , se seleccionan sólo aquéllos que hagan que la solución en la frontera cumpla  $\varphi_{(2,1)} = 0$ . Así, para cada valor de  $B$  en principio existe un único valor de  $\varphi_h$  que hace que dicha contribución desaparezca y tal selección termina de acotar los parámetros libres a considerar; por esta asignación unívoca, en lo sucesivo  $\varphi_h(B)$  se refiere al único valor  $\varphi$  que elimina la contribución asintótica debida al logaritmo.

Para introducir materia en la representación fundamental se emplean  $D7$ -branas de prueba. Por simplicidad se considera sólo  $N_f = 1$  brana de prueba. Para realizar el encaje de la  $D7$ -brana que introduce la materia fundamental en la teoría dual, dada la dimensionalidad es evidente que se debe realizar el levantamiento del fondo con base en el Ansatz previamente mencionado. Por así haberlo dispuesto,  $S^5$  está descompuesto en secciones homeomorfas a  $S^3$  parametrizadas por las coordenadas de una  $S^2$ .

Explícitamente, la métrica levantada toma entonces la forma<sup>8</sup>:

$$\begin{aligned}
ds_{10}^2 = & \sqrt{\Delta} \left[ -U(r)dt^2 + \frac{1}{U(r)}dr^2 + V(r)(dx^2 + dy^2) + W(r)dz^2 \right] + \\
& + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} [(X^{-2} \cos^2 \theta + X \sin^2 \theta)d\theta^2 + X^{-2} \sin^2 \theta d\lambda_1^2 + \\
& + X \cos^2 \theta (d\psi^2 + \sin^2 \psi d\tilde{\lambda}_2^2 + \cos^2 \psi d\tilde{\lambda}_3^2)],
\end{aligned} \tag{3.19}$$

donde se ha definido  $X = X_2^{-1}$ ,  $d\tilde{\lambda}_k = d\lambda_k + A^k$ . Se identifica dentro de dicha expresión a la métrica de una  $S^5$  deformada por la presencia del campo escalar:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\Delta}d\tilde{\Omega}_5 = & (X^{-2} \cos^2 \theta + X \sin^2 \theta)d\theta^2 + X^{-2} \sin^2 \theta d\lambda_1^2 + \\
& + X \cos^2 \theta (d\psi^2 + \sin^2 \psi d\tilde{\lambda}_2^2 + \cos^2 \psi d\tilde{\lambda}_3^2),
\end{aligned} \tag{3.20}$$

y en el último paréntesis se puede reconocer la métrica de la  $S^3$  que habrá de ser cubierta por la  $D7$ -brana, expresada en *coordenadas de Hopf*:

$$\sqrt{\Delta}d\tilde{\Omega}_3 = X \cos^2 \theta (d\psi^2 + \sin^2 \psi d\tilde{\lambda}_2^2 + \cos^2 \psi d\tilde{\lambda}_3^2). \tag{3.21}$$

En dichas coordenadas,  $\psi$  es un ángulo que va de 0 a  $\pi/2$ , y las otras dos cantidades angulares variarían entre 0 y  $2\pi$ . Para cada valor de  $\psi$ , se tiene un  $T^2$  deformado parametrizado por  $\tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3$ , que son parámetros que mezclan a los ángulos originales de la  $S^3$  con las direcciones del campo de norma del fondo. Más aún,  $\psi$  es una coordenada cíclica en el sentido de que se comienza describiendo un toro degenerado en una circunferencia cuando  $\psi = 0$ , evoluciona en un  $T^2$  para valores en  $(0, \pi/2)$  y regresa a la misma circunferencia original a  $\psi = \pi/2$ .

Por analogía con el caso donde  $B = 0$ , consistente sólo con  $\varphi = 0^9$ , el ángulo  $\theta$  puede pensarse como el ángulo complementario al que forma un vector cualquiera en el bulto respecto a las direcciones paralelas a la  $D7$ -brana. Éste a su vez regula el tamaño de las fibras

---

<sup>8</sup>Aquí se ha simplificado ya considerando las relaciones que satisfacen los campos  $\varphi_k$ ; del caso general se observa la ventaja que representa el que  $X_2 = X_3$ :

$$\begin{aligned}
ds_{10}^2 = & \sqrt{\Delta} \left[ -U(r)dt^2 + \frac{1}{U(r)}dr^2 + V(r)(dx^2 + dy^2) + W(r)dz^2 \right] + \\
& + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} [(X_1^{-1} \cos^2 \theta + X_2^{-1} \sin^2 \psi \sin^2 \theta + X_3^{-1} \cos^2 \psi \sin^2 \theta)d\theta^2 + \\
& + (X_3^{-1} - X_2^{-1}) \sin \psi \cos \psi \sin \theta \cos \theta (d\theta d\psi + d\psi d\theta) + X_1^{-1} \sin^2 \theta d\lambda_1^2 + \\
& + \cos^2 \theta [(X_2^{-1} \cos^2 \psi + X_3^{-1} \sin^2 \psi)d\psi^2 + X_2^{-1} \sin^2 \psi d\tilde{\lambda}_2^2 + X_3^{-1} \cos^2 \psi d\tilde{\lambda}_3^2].
\end{aligned} \tag{3.18}$$

<sup>9</sup>Y por tanto  $X = 1 = \Delta$ .

$S^3$ , como consecuencia de (3.21), a través del factor  $X \cos^2 \theta / \sqrt{\Delta}$ <sup>10</sup>. En lugar de utilizar  $\theta$  directamente, de manera similar a como se hace en [47], se emplea:

$$\chi = \sin \theta. \quad (3.22)$$

Por último, la coordenada  $\lambda_1$  es remanente de una de las coordenadas angulares de la  $S^5$ ; como tal, es cíclica y representa el cómo las  $S^3$  deformadas rodean a la  $S^5$  en dicha dirección.

Para determinar el encaje es necesario elegir un sistema de coordenadas sobre la  $D7$ -brana. En conformidad con lo descrito en 2, ésta debe extenderse sobre las direcciones del campo de norma  $\{t, x, y, z\}$ , así como sobre la dirección radial  $\{r\}$  asintóticamente  $AdS$ , y envolver a las  $S^3$  recién identificadas dependientes de  $\{\psi, \lambda_2, \lambda_3, x, y\}$ . Al dar un total de 8 grados de libertad, son idóneos para parametrizar a las  $D7$ -branas en una clase de norma estática, de modo que el encaje de éstas en el bulto queda determinado por las coordenadas que especifican la forma y tamaño de la  $S^3$  envuelta por la brana, a saber:  $\chi$  y  $\lambda_1$ .

En principio entonces se especificaría un encaje como  $\chi = \chi(r, t, x, y, z, \psi, \lambda_2, \lambda_3)$ ,  $\lambda_1 = \lambda_1(r, t, x, y, z, \psi, \lambda_2, \lambda_3)$ . Sin embargo es posible reducir la dependencia a partir de argumentos de simetría. Se puede comenzar por fijar la atención sólo en encajes que no posean dependencia en los ángulos de la  $S^{311}$ ,  $\chi = \chi(r, t, x, y, z)$ ,  $\lambda_1 = \lambda_1(r, t, x, y, z)$ .

La acción que rige la dinámica del encaje de la brana de prueba es la de DBI, cuya única contribución es la raíz del determinante de la métrica inducida sobre la  $D7$ -brana puesto que en nuestro caso el campo magnético se incorpora a través de la métrica del bulto:

$$S_{D7} = -T_{D7} \int d^8 \xi \sqrt{-\det(g_{D7})}. \quad (3.23)$$

De la forma de la métrica inducida obtenida bajo las dependencias anteriores se observa que la única coordenada angular que prevalece explícitamente en el lagrangiano de la  $D7$ -brana es  $\psi$ ; más aún, su contribución se factoriza del resto como un término  $\sin 2\psi$ . Así, al  $\psi, \lambda_2, \lambda_3$  representar ciclos compactos, y puesto que no se pretende dependencia en éstas, se procede a integrar para obtener un lagrangiano efectivo en las coordenadas restantes,  $\tilde{\xi}$ .

$$S_{D7} = -T_{D7} (2\pi)^2 \int d^5 \tilde{\xi} \mathcal{L}_5. \quad (3.24)$$

Más aún, con base en el precedente sentado por el caso de [69], se proponen *encajes base* tales que  $\chi$  posea sólo una dependencia radial y  $\lambda_1$  sea una constante que, módulo una rotación, puede fijarse igual a 0.

<sup>10</sup>Donde  $\Delta = X^2 \sin^2 \theta + X^{-1} \cos^2 \theta$  es una función explícita de  $\theta$ .

<sup>11</sup>Cosa que seguirá siendo cierta para las perturbaciones de éstos en el presente trabajo pues se trabaja únicamente con mesones de momento angular nulo.

Debido a que en la métrica inducida no aparecen sino derivadas de  $\lambda_1$ , entonces es consistente el considerarla constante y enfocarse en  $\chi(r)$ , el cual describe al perfil radial y que determina entonces por completo a dicha clase de encajes. La imposición de estas condiciones sobre la métrica inducida da como resultado el lagrangiano de la ecuación (A.16) del apéndice.

Se observa que en el caso en ausencia del campo magnético,  $W(r) = V(r)$ ,  $X = 1$ ,  $\Delta = 1$ :

$$\mathcal{L}_5|_{B=0} = \frac{1}{2}(1 - \chi(r)^2)(V(r))^{3/2}\sqrt{1 - \chi(r)^2 + U(r)\chi'(r)^2}. \quad (3.25)$$

A partir de (A.16), se obtiene la ecuación de movimiento para  $\chi(r)$  y puede ser ésta resuelta numéricamente en plena analogía con la resolución de las ecuaciones del fondo.

Para el cálculo del espectro de mesones se requiere introducir una perturbación sobre este fondo que, de acuerdo a [47, 59, 69], puede tomarse de forma tal que la ecuación resultante en la perturbación sea separable. La propuesta genérica, con un modulador de la perturbación,  $\epsilon$ , toma la forma de una onda plana<sup>12</sup>:

$$\chi = \chi_0(r) + \epsilon\chi_1(r)\mathcal{Y}^{l_3}(S^3)e^{-i\omega t}e^{i\langle\mathbf{k},\mathbf{x}\rangle}, \quad \lambda_1 = 0 + \epsilon\lambda_{1,1}(r)\mathcal{Y}^{l_3}(S^3)e^{-i\omega t}e^{i\langle\mathbf{k},\mathbf{x}\rangle}, \quad (3.26)$$

donde  $\mathcal{Y}^{l_3}(S^3)$  son los armónicos esféricos sobre  $S^3$  que transforman en la representación  $(\frac{l}{2}, \frac{l}{2})$  de  $SO(4)$ . Como en el presente caso  $l_3 = 0$  y en [69] se define a la *masa en reposo* de los mesones como la energía  $\omega$  con momento espacial  $k = 0$  en el marco en reposo del plasma, basta considerar:

$$\chi = \chi_0(r) + \epsilon\chi_1(r)e^{-i\omega t}, \quad \lambda_1 = 0 + \epsilon\lambda_{1,1}(r)e^{-i\omega t}. \quad (3.27)$$

A continuación se sustituyen las ecuaciones anteriores dentro de las ecuaciones de movimiento obtenidas a partir de (A.16);

$$EOM_{\chi B}(\epsilon) := \left[ \frac{\delta\mathcal{L}_5}{\delta\chi} = 0 \right], \quad EOM_{\lambda_1 B}(\epsilon) := \left[ \frac{\delta\mathcal{L}_5}{\delta\lambda_1} = 0 \right]. \quad (3.28)$$

y los miembros izquierdos de dichas ecuaciones de movimiento pueden expandirse en potencias de  $\epsilon$ , cuyos coeficientes en lo sucesivo se denominan  $EOM_{\chi B}^{(k)}$ ,  $EOM_{\lambda_1 B}^{(k)}$ . De tal expansión se consideran únicamente los órdenes 0 y 1, a lo que se denomina la versión *linealizada* de las ecuaciones.

<sup>12</sup>Donde  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ ,  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ ; debido a la invariancia traslacional en estas direcciones, es razonable proponer esta dependencia.

A orden 0:

- $EOM\chi B^{(0)}$  reproduce la ecuación obtenida al suponer sólo dependencia radial, pero en función de  $\chi_0$ .
- $EOM\lambda_1 B^{(0)}$  se reduce a 0, consistente con que  $\lambda_1 = cte.$  es solución.

A orden 1:

- $EOM\chi B^{(1)}, EOM\lambda_1 B^{(1)}$  factorizan una potencia  $e^{-i\omega t}$ , separando correctamente la dependencia temporal de las ecuaciones.
- $EOM\chi B^{(1)}, EOM\lambda_1 B^{(1)}$  constituyen dos ecuaciones diferenciales para  $\chi_1$  y  $\lambda_{1,1}$  respectivamente. Éstas se desacoplan, puesto que la primera depende sólo de  $\chi_0, \chi_1$  y sus derivadas, mientras que la segunda sólo de  $\chi_0$  y las derivadas de  $\lambda_{1,1}$ . Al hacer el cálculo se puede entonces integrar cada una por separado.

Para la integración numérica de los encajes de referencia,  $\chi_0(r)$ , se distinguen dos casos:

- Los encajes de Minkowski, en los cuáles se parte de un radio inicial  $r_i > r_h$  y se expande desde él cerca del eje  $\chi$ <sup>13</sup>.

$$\chi_0(r) = \sum_{k=0} \chi_0^{(k)}(r - r_i)^k. \quad (3.29)$$

- Y los encajes de agujero negro, en los cuáles necesariamente el encaje es en torno al radio del horizonte, pero se puede modular  $\chi_h := \chi_0^{(0)} \in (0, 1)$ , que representa el seno del ángulo sobre el horizonte al cual ingresa la  $D7$ -brana.

$$\chi_0(r) = \sum_{k=0} \chi_0^{(k)}(r - r_h)^k. \quad (3.30)$$

Para cualquiera de los casos, la extracción de los coeficientes  $\chi_0^{(k)}$  se realiza mediante sustitución de las expansiones de (3.29) o (3.30), según corresponda, en la ecuación  $EOM\chi B^{(0)}$ ; para luego igualar a cero los coeficientes orden a orden.

Tras la obtención de la forma de la solución cerca del radio inicial (o el horizonte), como función de  $r_i$  (o  $\chi_h$ ), ésta y su derivada se fijan como condición inicial de la solución numérica a dicho  $r_i$  (o en un valor cercano al horizonte,  $r_{emb} \approx r_h$ ) para finalmente hallar el encaje de referencia asociado.

---

<sup>13</sup>Por ser éste perpendicular a las direcciones de la  $D7$ -brana,  $\theta = \pi/2$ , con lo que  $\chi_0^{(0)} = 1$ .



Para encontrar el encaje perturbado, el procedimiento es análogo. Se proponen expansiones de potencias para las funciones perturbadas,  $\chi_1(r)$  y  $\lambda_{1,1}(r)$ , dependientes de un parámetro inicial<sup>14</sup>; se sustituyen éstas y las expansiones obtenidas para el encaje de referencia dentro de  $EOM\chi B^{(1)}$ ,  $EOM\lambda_1 B^{(1)}$ , y se examina potencia a potencia hasta determinar los coeficientes  $\chi_1^{(k)}$ ,  $\lambda_{1,1}^{(k)}$  como función del parámetro inicial.

Esto provee de nueva cuenta condiciones iniciales para integrar numéricamente las ecuaciones  $EOM\chi B^{(1)}$ ,  $EOM\lambda_1 B^{(1)}$  al usar en ellas la solución previamente obtenida para la  $\chi_0$  que corresponda a los parámetros seleccionados.

A pesar de que la solución completa del encaje puede sólo ser calculada numéricamente, el comportamiento asintótico en la frontera que es dual al régimen UV del lado de la teoría de norma, puede hallarse con el procedimiento hecho para las funciones de la métrica. La expresión asintótica a la frontera en este caso, si se parte del supuesto de que no está presente el término logarítmico en la expansión asintótica del campo escalar, resulta ser:

$$\begin{aligned}\chi_0(r) &= \frac{\chi_0^{(1)}}{r} - \frac{u_{(-1,0)}\chi_0^{(1)}}{2r^2} + \frac{\chi_0^{(3)}}{r^3} + \dots \\ \chi_1(r) &= \frac{\chi_1^{(1)}}{r} - \frac{u_{(-1,0)}\chi_1^{(1)}}{2r^2} + \frac{\chi_1^{(3)}}{r^3} + \dots \\ \lambda_{1,1}(r) &= \frac{\lambda_{1,1}^{(2)}}{r^2} - \frac{u_{(-1,0)}\lambda_{1,1}^{(2)}}{r^3} + \frac{\lambda_{1,1}^{(4)}}{r^4} + \dots\end{aligned}\tag{3.31}$$

Los términos siguientes en sendas expansiones se pueden expresar en función de los coeficientes ya presentados.

De la expansión asintótica de  $\chi_0$  pueden leerse las cantidades  $m, c$  de manera semejante a como ocurre en (2.4).

Como se ha discutido, para estudiar el espectro de mesones de la teoría, se necesita considerar las fluctuaciones de los encajes de  $D7$ -brana en torno a los encajes de referencia y estudiar los modos normales correspondientes. La presencia de los términos que contienen  $\chi_1^{(1)}$  en (3.31) vuelven no normalizable a la expresión y, naturalmente ello desafía la naturaleza perturbativa de la  $\chi_1^{(1)}$ , de modo que cuando se resuelva la ecuación diferencial  $EOM\chi B$  linealizada en  $\epsilon$ , el espectro de mesones se obtiene seleccionando sólo aquellas frecuencias  $\omega$  tales que su comportamiento asintótico ajustado a las expresiones de (3.31) no posea tal contribución.

Puesto que aquellos encajes que son de principal interés son los de Minkowski por la característica de que los mesones producidos son estables, el procedimiento para obtener el espectro, dado un radio inicial, se puede resumir en:

---

<sup>14</sup>  $\chi_1^{(0)}$  o  $\lambda_{1,1}^{(0)}$  respectivamente, los cuales deben ser pequeños ( $\sim 10^{-2}$ ) por estar asociados con una perturbación.

1. Seleccionar un campo magnético y a partir de éste generar suficientes fondos de manera tal que se obtenga  $\varphi_h(B)$  como se ha definido previamente, mismo que se fija como el término a orden cero en la expansión del dilatón.
2. Para una colección de valores de  $\omega$  obtener los encajes numéricos perturbados correspondientes a los parámetros  $B, \varphi, r_i$  fijos.
3. Ajustar los encajes numéricos perturbados con la expresión asintótica a fin de observar la dependencia en  $\omega$  del coeficiente correspondiente a la contribución no normalizable de la perturbación.
4. Seleccionar los valores de  $\omega$  que sean raíces del mapeo anterior, pues es necesario que las soluciones sean normalizables y regulares para que sean duales a un estado mesónico de la teoría de campo.
5. Se define entonces a la masa en reposo del mesón en las unidades de [47] como:

$$M = \omega\pi T. \tag{3.32}$$



# 4

## Resultados

Para la ejecución del esquema descrito al final del capítulo anterior<sup>1</sup>, se seleccionaron un conjunto de valores para el campo magnético  $\mathcal{B}$ , un conjunto de radios iniciales  $\mathcal{R}$ , y una colección inicial de frecuencias  $\Omega$ .

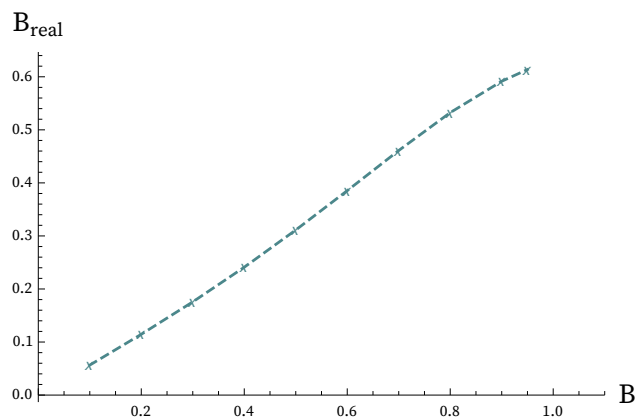
### 4.1. Sobre el parámetro $\varphi_h$ y el campo externo *real*

Para cada  $B \in \mathcal{B} := \{0, 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 0.9, 1.0\}$  se hubieron calculado soluciones a las ecuaciones 5 dimensionales de (A.2) dada la propuesta de (3.10); modificando el parámetro  $\varphi_h$  sobre un intervalo de forma tal que se obtuvieron  $\varphi_h(B)$  y  $b(B)$ , el campo *real* asociado a cada fondo al escalarlo a un *AAdS bona fide*. Como resultado se encontraron las dependencias observadas en las Figuras 4.2 y 4.1.

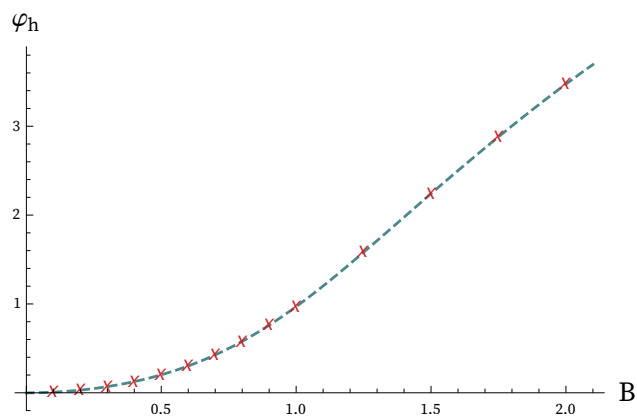
Se observa que  $\varphi_h(B) \rightarrow 0$  conforme  $B \rightarrow 0$ , lo cual pone de manifiesto el hecho de que la única solución consistente con un campo magnético nulo requiere también que se anule el campo escalar a fin de eliminar el modo no-normalizable.

---

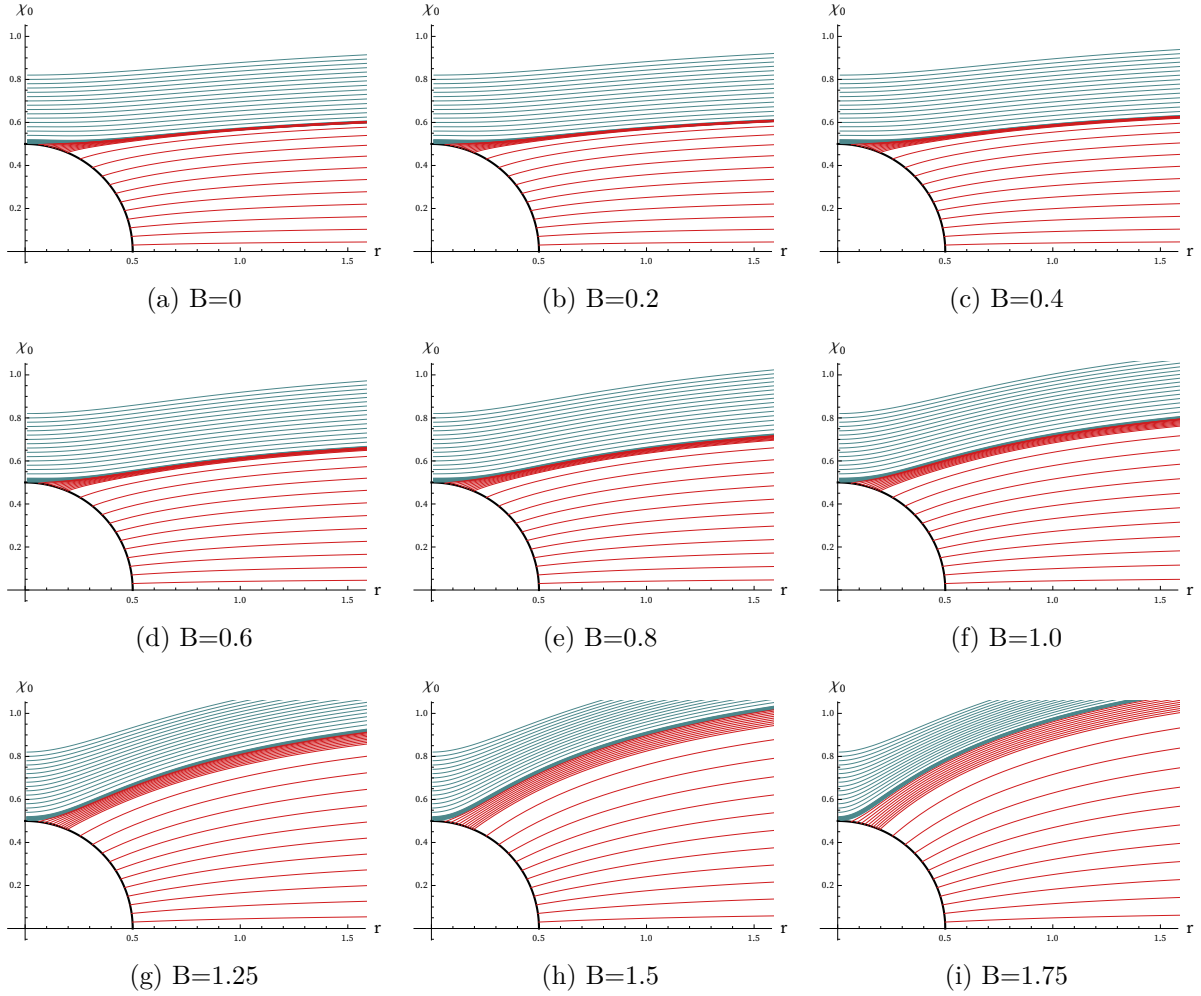
<sup>1</sup>El cual se implementó en Wolfram Mathematica 12.0



**Figura 4.1:** Valores del campo real  $b(B)$  para  $B \in \mathcal{B}$  y en línea discontinua una interpolación.



**Figura 4.2:** Valores del parámetro  $\varphi_h(B)$ ; en rojo se indican los valores específicos para  $B \in \mathcal{B} \cup \{1.25, 1.5, 1.75, 2.0\}$  y en línea discontinua azul una interpolación.



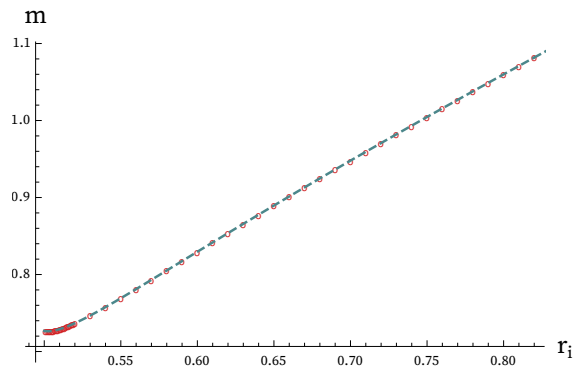
**Figura 4.3:** Gráficas de los encajes de referencia a diferentes valores del campo magnético.

## 4.2. Masa y condensado de quark

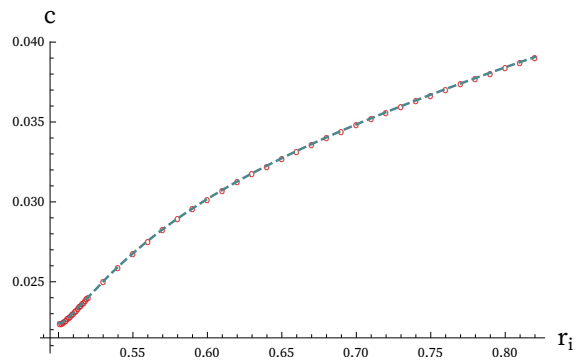
Para los valores en  $\mathcal{B}$  y fijos los parámetros  $r_h = 1/2, V_0 = 1, \varphi_h = \varphi_h(B)$ , se procedió al cálculo del encaje numérico de referencia  $\chi_0$  tanto para encajes tipo Minkowski, de radios iniciales  $r_i \in \mathcal{R} \subset (0.5, 0.82]$ ; como de tipo Agujero negro (en lo sucesivo, ‘BH’, cuando sea recomendable abreviar), de valor inicial  $\chi_h \in \mathcal{X} \subset (0, 1)$ . Sencos valores inducen condiciones iniciales a la ecuación  $EOM_{\chi B^{(0)}}$ , de cuya integración resultan los encajes radiales, algunos de los cuales son ilustrados en la Figura 4.3.

Dichos encajes se ajustaron a la forma asintótica (3.31) a fin de obtener la dependencia de  $m$  y  $c$ <sup>2</sup> en términos de  $\chi_h$  o  $r_i$  según el caso. El comportamiento de  $m$  y  $c$  como función de las condiciones del encaje se muestra en la Figura 4.4, correspondiente a  $B = 0.5$ .

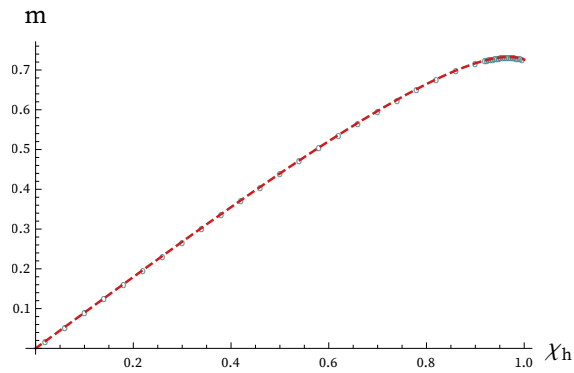
<sup>2</sup>Relacionados con la masa del quark y el condensado según (2.5) y (2.6) respectivamente.



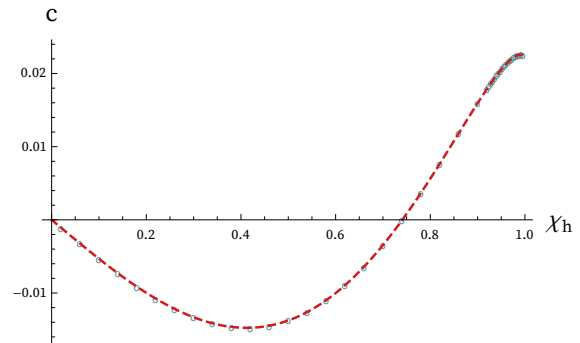
(a) Masa-Minkowski



(b) Condensado-Minkowski



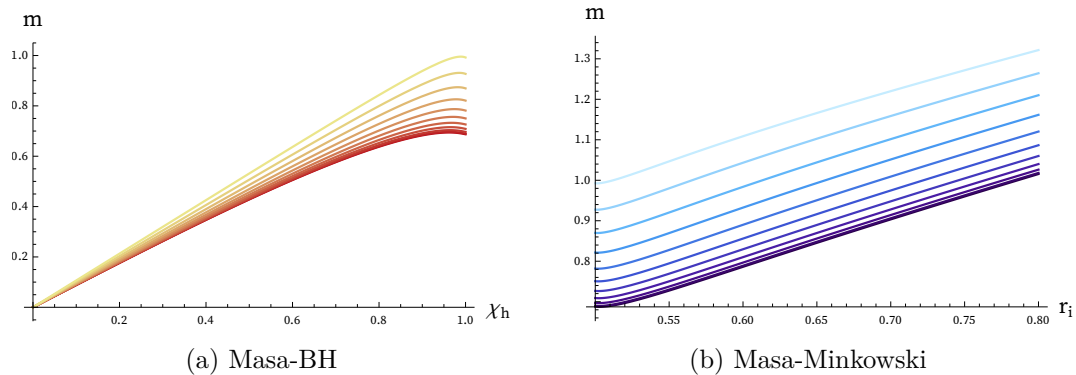
(a) Masa-BH



(b) Condensado-BH

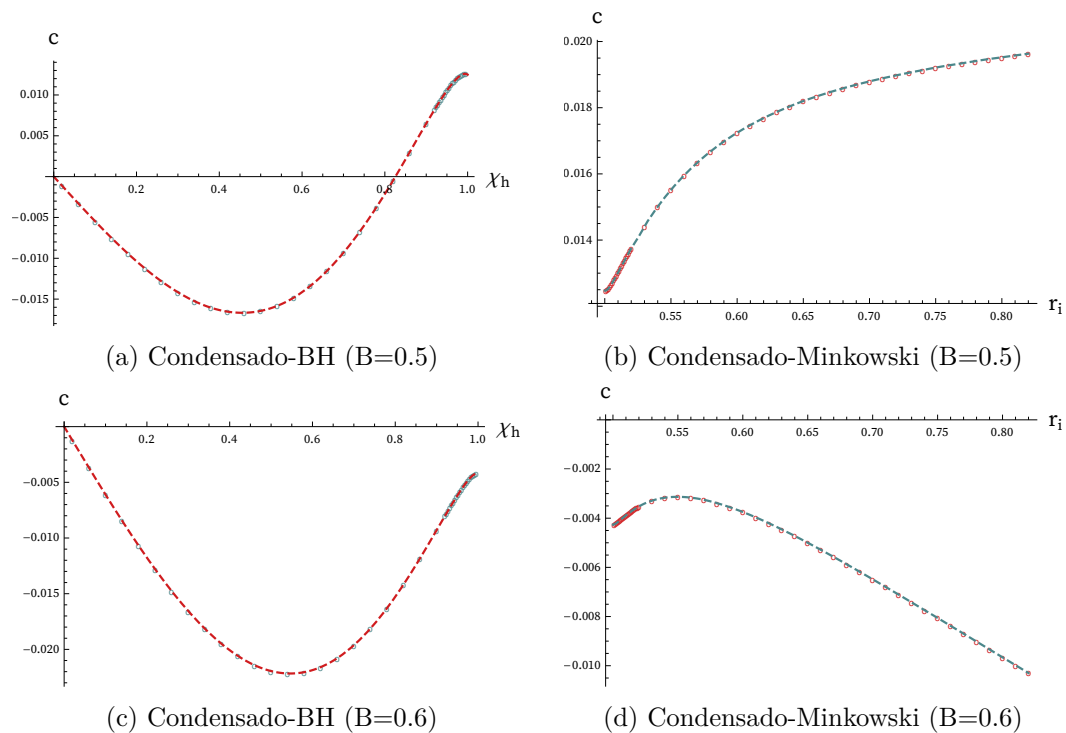
**Figura 4.4:** Dependencia de los parámetro asintóticos  $m, c$  como función de las condiciones iniciales del encaje,  $B = 0.5$ .

En la Figura 4.5 se despliegan en conjunto el resto de las curvas para las masas asociadas a los diferentes valores de  $B \in \{0, 0.1, \dots, 1.0\}$ , se observa que el comportamiento cualitativo es en esencia el mismo, de ello que no se considere relevante mostrar cada una por separado.



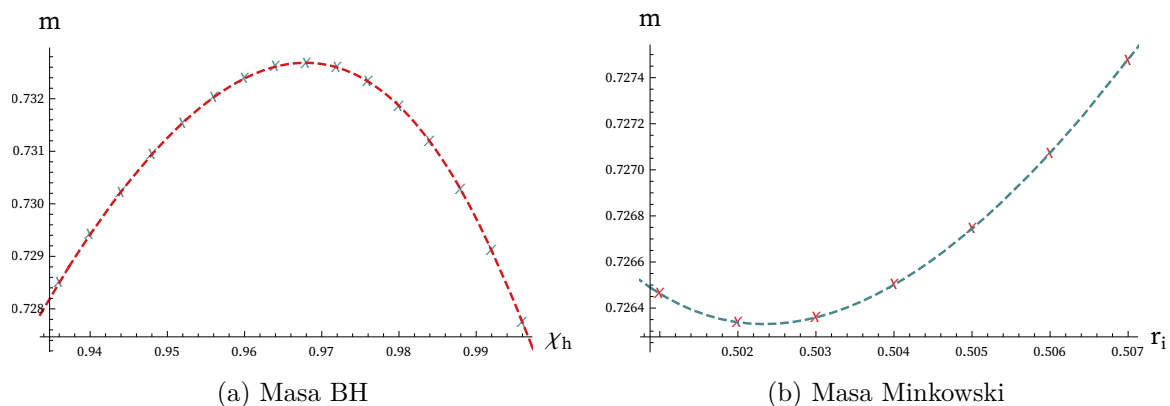
**Figura 4.5:** Colección de las gráficas de  $m$ . Se va del tono más oscuro, correspondiente a  $B = 0$ , al más claro,  $B = 1.0$ , en pasos de 0.1.

El condensado tiene un comportamiento más interesante pues conforme el campo se incrementa, la región con  $c < 0$  de los encajes de agujero negro se extiende hasta  $\chi_h = 1$ , ello tiene aparentemente un efecto correspondiente en  $c$  para los encajes de Minkowski, la cual cambia de concavidad.



**Figura 4.6:** Cambio de la concavidad en la función del condensado al incrementar el campo externo.



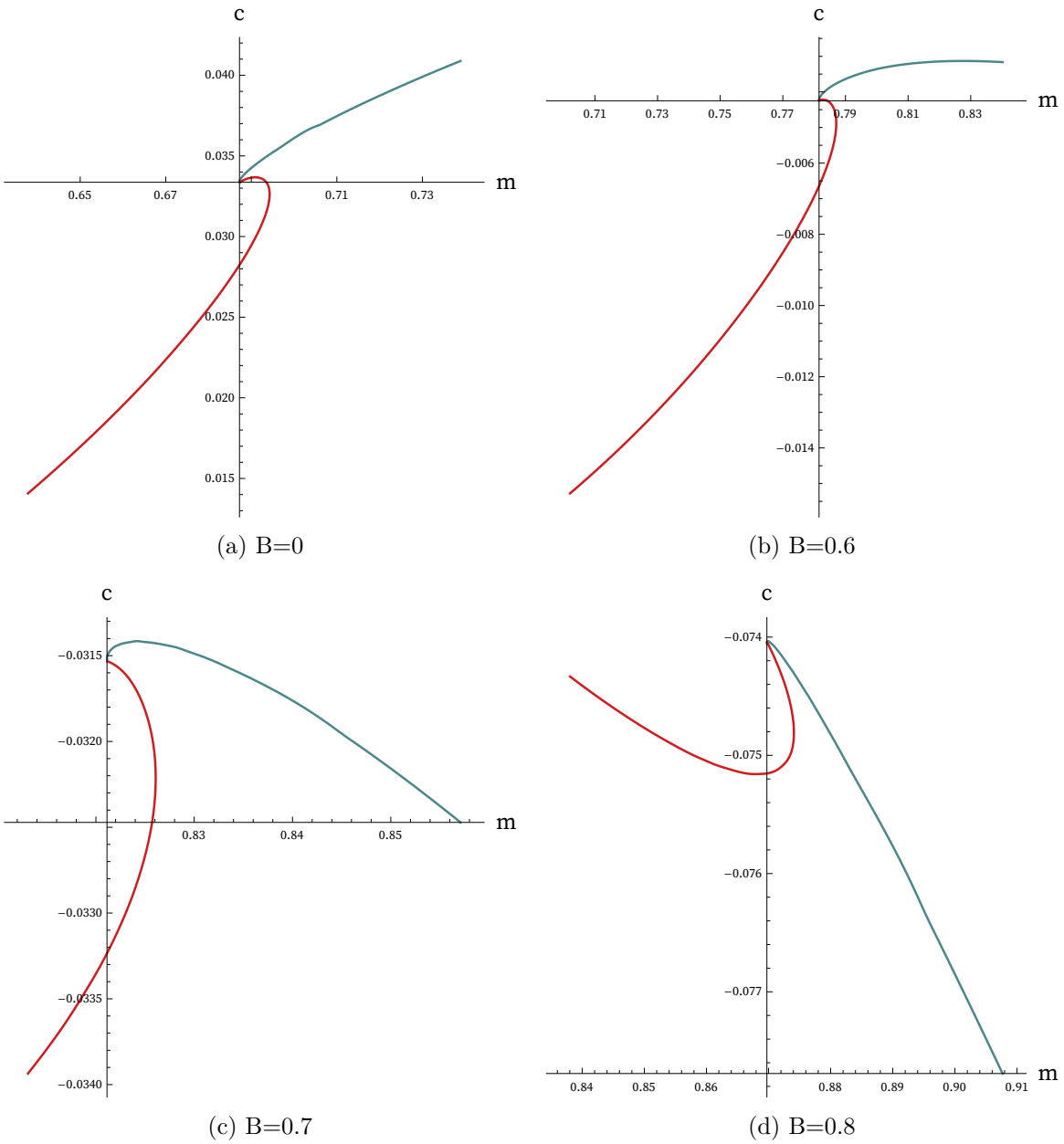


**Figura 4.7:** La masa asociada al encaje no está en correspondencia unívoca con los parámetros iniciales de éste.

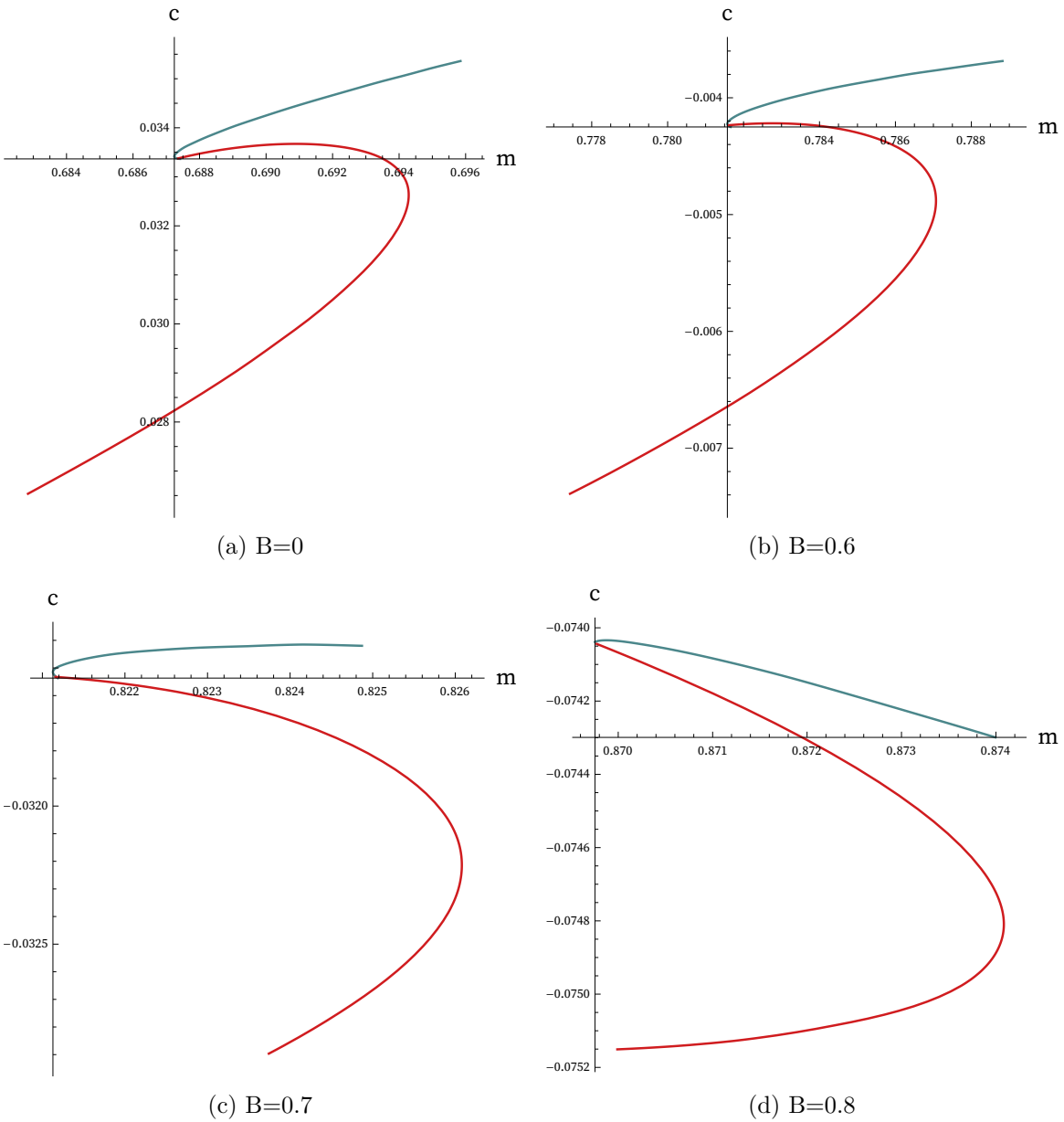
Ahora bien, puede que no sea evidente de la Figura 4.4, pero la masa del quark es también una función multivaluada conforme se aproxima el encaje al régimen crítico  $r_i \rightarrow r_h, \chi_h \rightarrow 1$ ; para visualizar este hecho la densidad de puntos en  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{X}$  es mayor cerca de estos valores.

En efecto, ampliando las gráficas de 4.4 se observa la no inyectividad de  $m$  en la Figura 4.7.

De ello que para una masa fija se tengan más de dos encajes posibles asociados, incluso de diferente naturaleza topológica. A partir de las soluciones numéricas para  $m$  y  $c$  puede parametrizarse una función de estado que permita ver a  $c$  como función  $c(m)$ , tal y como se ilustra en la Figura 4.8. Las mismas gráficas, ampliadas en torno a la transición, se muestran en la Figura 4.9.



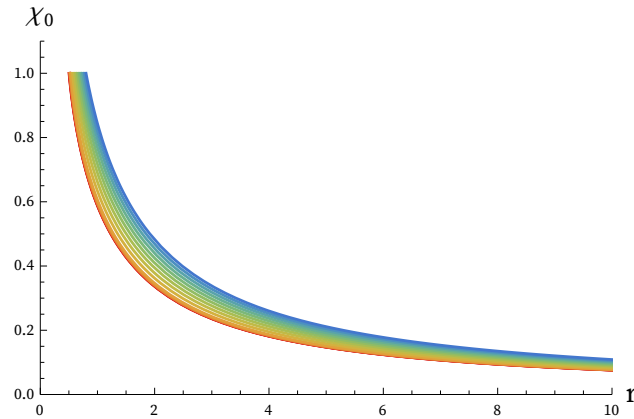
**Figura 4.8:** El condensado como función de la masa del quark. Las líneas azules corresponden a los encajes de Minkowski, mientras que las rojas hacen referencia a los de tipo agujero negro.



**Figura 4.9:** Gráficas de la Figura 4.8 ampliadas en torno a la transición entre encajes de diferente topología.

Esta asignación múltiple implica una transición de fase en la teoría de norma, la cual sucede para un valor crítico de la masa del quark<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Éste en principio puede encontrarse con base en una ley de áreas iguales[70], porque  $c(m)$  en el contexto holográfico es proporcional a la derivada de la energía libre, el área bajo esa curva es proporcional a la energía libre en sí, pero escapa al objetivo del texto.



**Figura 4.10:** Ejemplo de las gráficas de los encajes  $\chi_0$  para  $B = 0.5$ , donde se va de  $r_i = 0.501$  (línea roja), a  $r_i = 0.82$  (línea azul).

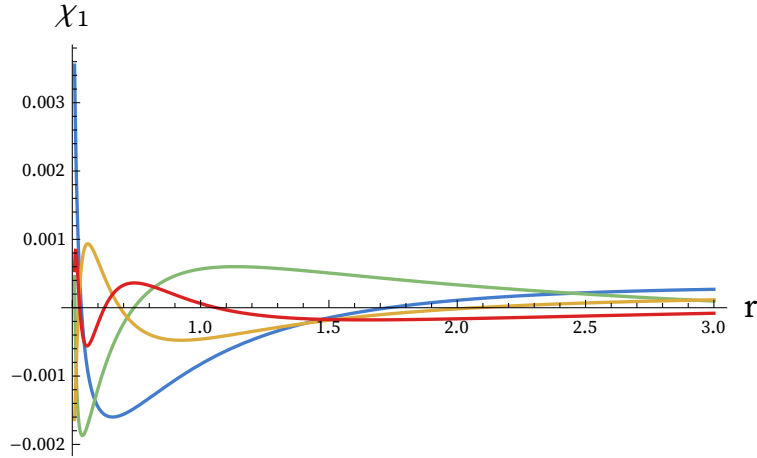
### 4.3. Espectro de mesones

En lo que respecta al espectro de mesones, se seleccionó inicialmente  $\Omega \subset (0, 10)$ , de modo que para cada encaje de Minkowski entre aquéllos previamente calculados — i.e. con  $B$  y  $r_i$  fijos — se integraron numéricamente las ecuaciones  $EOM_\chi B^{(1)}$ ,  $EOM_{\lambda_1} B^{(1)}$  usando un valor distinto de  $\omega \in \Omega$ .

Dado que dichas ecuaciones no están acopladas en  $\lambda_{1,1}$  y  $\chi_1$  pueden analizarse los espectros de  $\chi$  y de  $\lambda_1$  por separado. Como valor inicial de la perturbación se consideraron  $\lambda_{1,1}^{(0)} = \chi_1^{(0)} = 10^{-2}$  y con base en éstos se realizó la integración de cada ecuación.

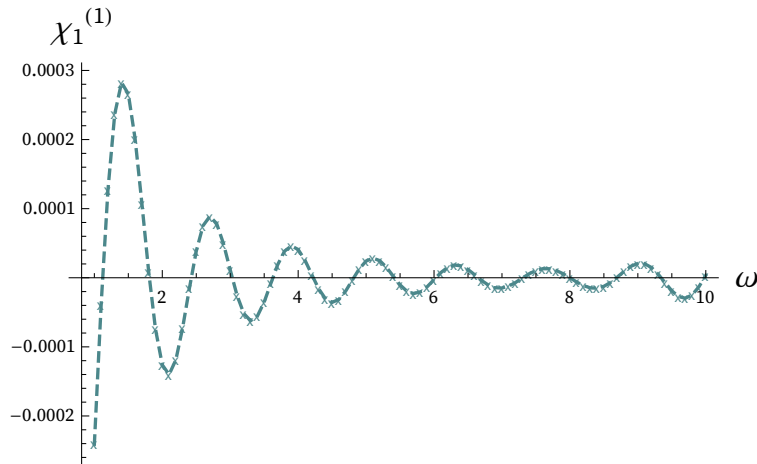
#### 4.3.1. Perturbación $\chi_1$

La contribución  $\chi_1$  debida a la perturbación en  $\chi$  respecto al encaje de referencia  $\chi_0$  correspondiente resultó en funciones como las que se ilustran en 4.11.



**Figura 4.11:** Para parámetros  $B = 0.5, r_i = 0.51$ , gráficas de las funciones  $\chi_1$ , correspondientes a  $\omega = 0.5$  (roja), 1.5 (amarilla), 3 (verde) y 5 (azul).

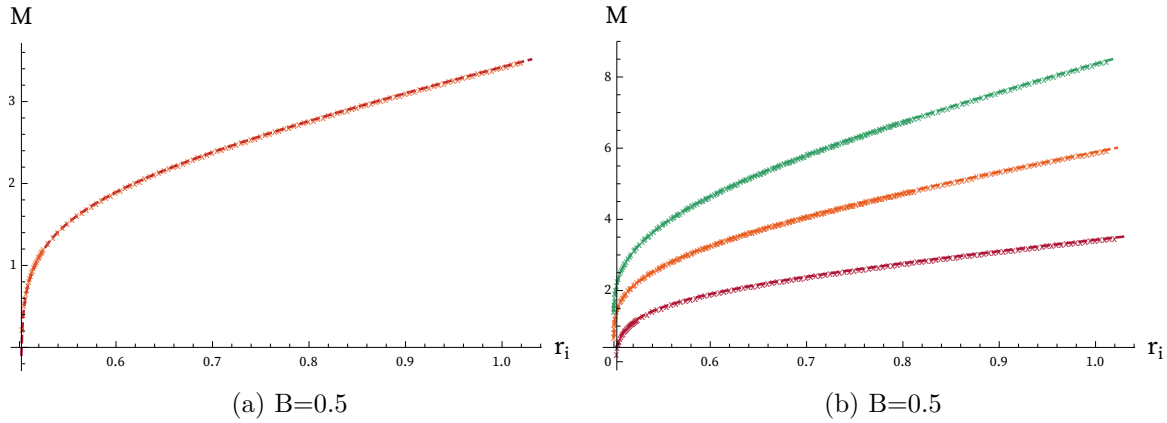
En éstas se puede apreciar que las perturbaciones se ven como oscilaciones amortiguadas en la  $D7$ -brana. Al graficar el coeficiente del modo no normalizable en la frontera,  $\chi_1^{(1)}$ , como función de la frecuencia selecta, se obtienen gráficas como la de 4.12.



**Figura 4.12:** Variación del coeficiente no normalizable de la perturbación en  $\chi$  como función de  $\omega$  para los valores  $B = 0.1, r_i = 0.501$ .

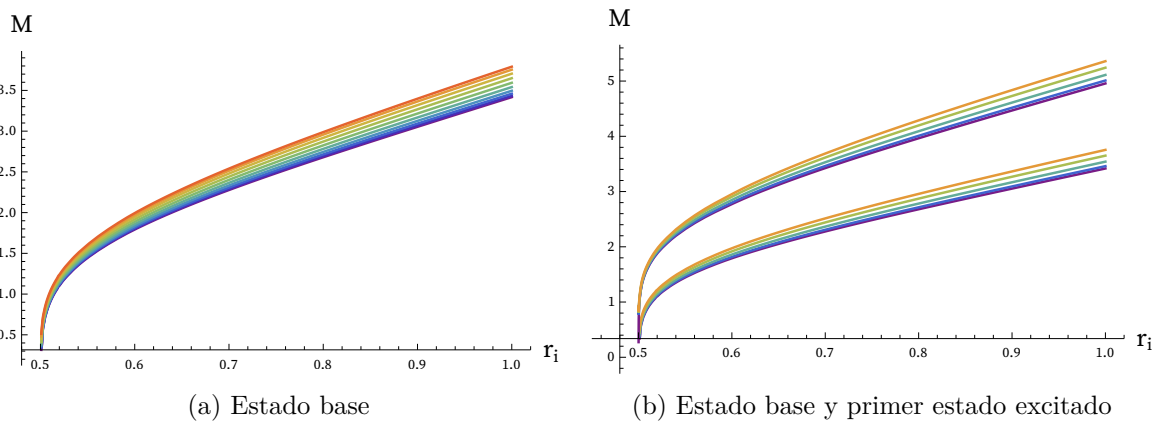
Los ceros de estas gráficas representan la masa de los estados mesónicos. El primero se identifica como el estado base del mesón, mientras que los sucesivos se entienden como estados excitados del mismo. En vista del árbol de posibilidades que se genera al variar sobre el campo externo — a través de  $B$  —, la masa del quark — a través de  $r_h$  —, y cada valor  $\omega$ ; fueron considerados sólo el estado base y el primer estado excitado en la mayoría de los casos, con algunas excepciones donde por completez y fines ilustrativos se encontró también el segundo estado excitado.

Las curvas obtenidas de las masas de los mesones como función de la condición inicial  $r_i$  se observa en la Figura 4.13. En ellas se aprecia que  $M = M(r_i)$  es monótona creciente y la masa del meson tiende a cero conforme se aproxima el encaje al horizonte.



**Figura 4.13:** Dependencia de la masa de los mesones de  $\chi$  como función del radio inicial para (a) el estado base y (b) dos estados excitados.

Al comparar las masas de los estados base con diferentes campos externos (Figura 4.14), se observa que el comportamiento cualitativo no se modifica, sino sólo la pendiente de las curvas, siendo ésta y las masas asociadas mayores cuanto más grande sea el campo. Este mismo comportamiento se observa de manera afín para los estados excitados.



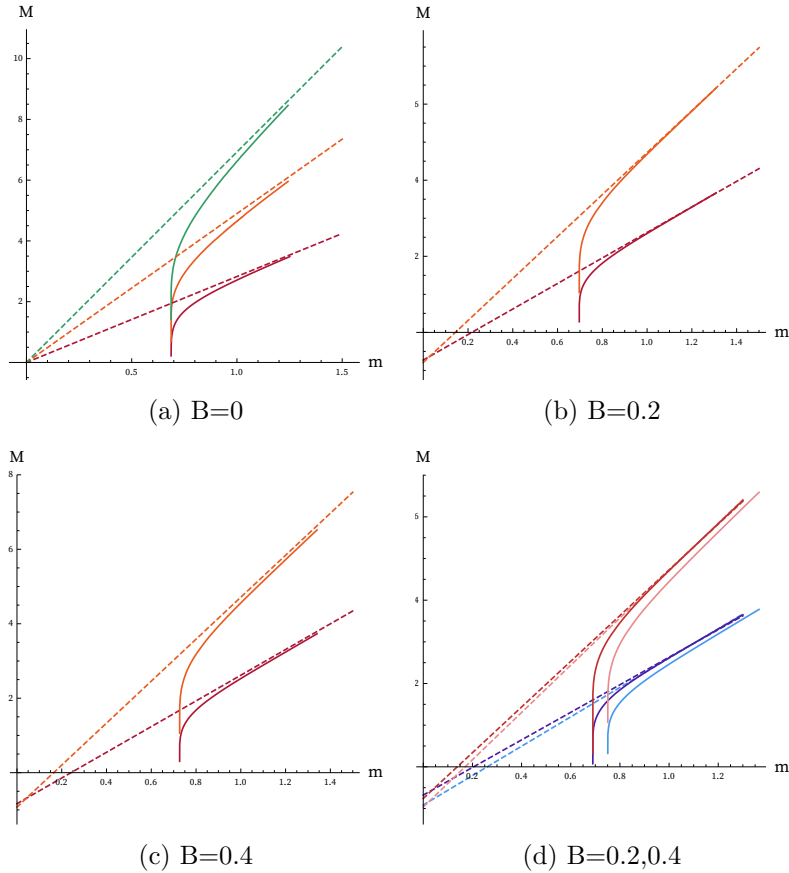
**Figura 4.14:** Dependencia de la masa de los mesones en  $\chi$  al modificar el campo externo, se diferencian las gráficas por su color desde  $B = 0$  (morado) hasta  $B = 1.0$  (rojo) en pasos de 0.1 en (a), y 0.2 en (b), con el gradiente cromático natural.

Combinando estos resultados con aquéllos obtenidos para la masa del quark en la sección anterior, puede reparametrizarse la masa de los mesones como función de la masa de los

quarks en el encaje correspondiente. Ello da como resultado las gráficas de la Figura 4.15. Las líneas punteadas en (a) son aquéllas resultantes de sustituir  $n = 0, 1$  en la ecuación

$$M = 2m\sqrt{(n+1)(n+2)}, \quad (4.1)$$

deducida en [47] de forma analítica para describir el espectro de los mesones escalares en el fondo sin temperatura ni campo externo. Para las gráficas (b) y (c) no se espera que la expresión anterior sea válida, las líneas punteadas que en ellas se tienen provienen de considerar la tendencia de la pendiente para el valor más grande de  $m$  con el que se contaba; con dicha *pendiente asintótica* se genera una recta que pasa no exactamente por el punto de mayor  $m$  sobre la curva  $M = M(m)$ , sino ligeramente por encima, preservando la distancia que guardan los puntos de dicha  $m$  en las gráficas en (a) respecto a las rectas asociadas dictadas por (4.1).

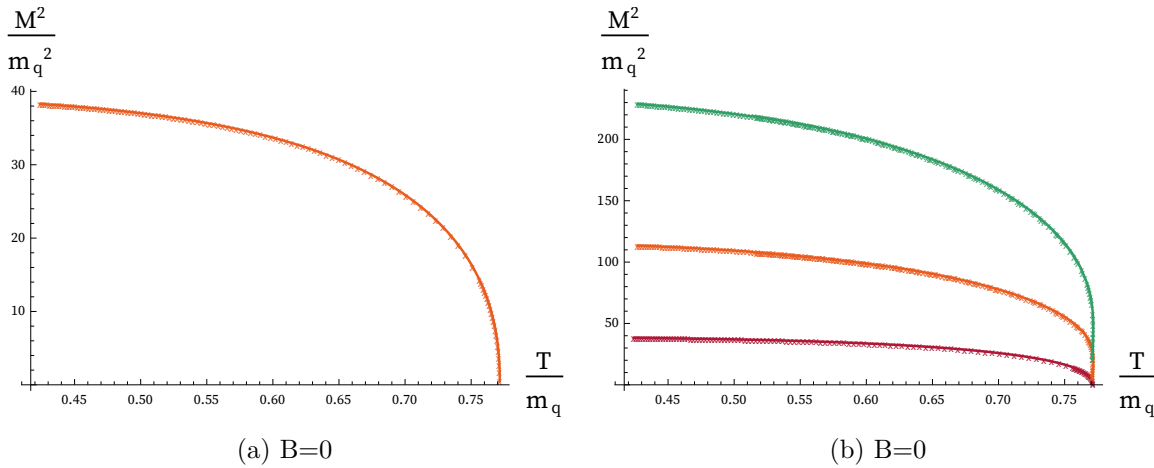


**Figura 4.15:** Dependencia de la masa de los mesones en  $\chi$  como función del parámetro  $m$ , relacionado con la masa del quark.

Como se discutió, la separación asintótica,  $m$  es un parámetro adimensional proporcional a  $m_q/T$ , de modo que pese a que en este caso la temperatura del fondo está fija por así

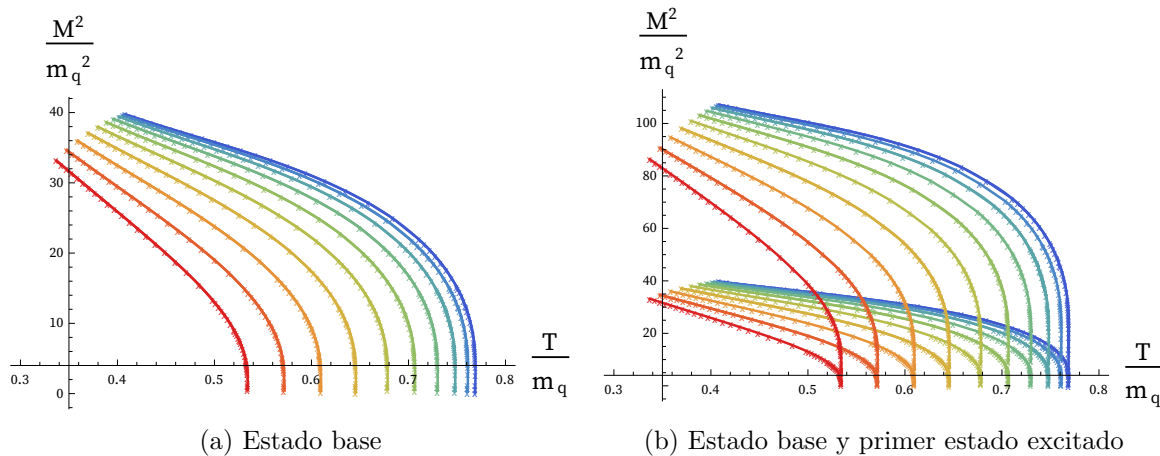
estarlo el radio del horizonte, se puede analizar la fenomenología de los mesones a diferentes temperaturas considerando diferentes valores de la masa de los quarks.

Se procedió entonces a utilizar unidades de  $m_q = \sqrt{2}m/\pi^4$  para graficar la dependencia de la masa cuadrática de los mesones en la temperatura, dando como resultado la Figura 4.16.



**Figura 4.16:** Dependencia de la masa de los mesones en  $\chi$  como función de la temperatura  $T/m_q$ .

Cuando se comparan aquéllas correspondientes a los otros campos magnéticos se obtiene:

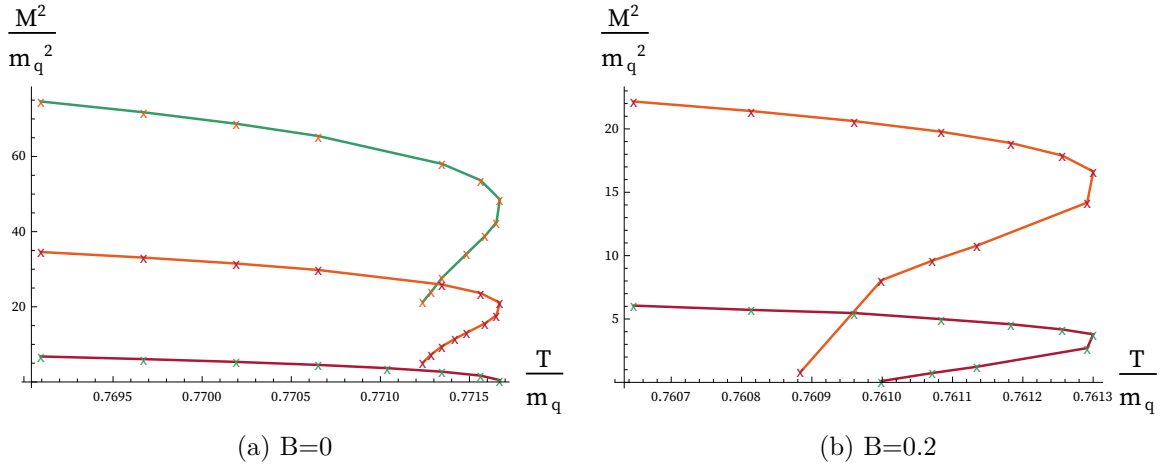


**Figura 4.17:** Dependencia de la masa de los mesones en  $\chi$  como función de la temperatura  $T/m_q$ , mostrando el efecto para diferentes campos externos. Se comienza desde el azul, correspondiente a  $B = 0$  y se termina en el rojo,  $B = 1.0$ , en pasos de 0.1.

<sup>4</sup>Las constantes fueron seleccionadas a fin de reproducir las unidades empleadas en [69].

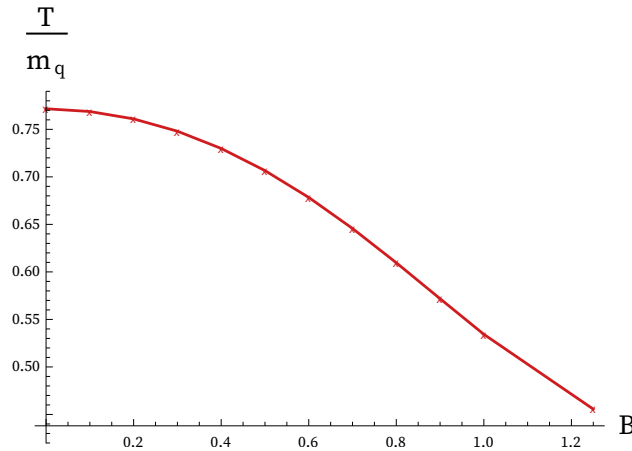


Nuevamente podría parecer que la correspondencia es unívoca, pero si se amplían las gráficas en torno a la *temperatura crítica* en la que  $M^2 \rightarrow 0$ , se observa el comportamiento de la Figura 4.18, que se debe nuevamente al hecho de para encajes cercanos al horizonte, existen radios iniciales diferentes que tienen asociada la misma separación asintótica, y por tanto  $m_q$  igual, pero diferente masa del mesón de acuerdo con la gráfica 4.13. Vale la pena notar que la escala de la gráfica a la que se puede apreciar este efecto es tal que no es posible mostrar las secciones correspondientes a diferentes campos externos dentro de la misma figura.



**Figura 4.18:** Ampliación de la dependencia de la masa de los mesones en  $\chi$  como función de la temperatura.

Si se denota por  $T_{crit}$  a la *temperatura crítica* a la que cada curva de 4.17 tiende conforme  $M \rightarrow 0$ , se obtiene la siguiente gráfica que muestra la dependencia de  $T_{crit}$  como función de  $B$ .

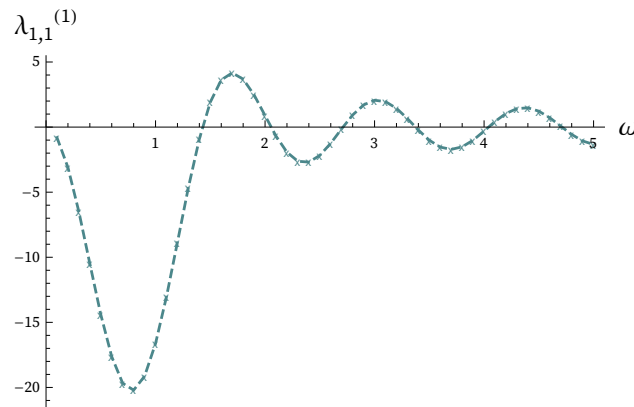


**Figura 4.19:** Dependencia de la temperatura crítica respecto al campo externo hallada con base en los encajes perturbados por  $\chi_1$ .

### 4.3.2. Perturbación $\lambda_{1,1}$

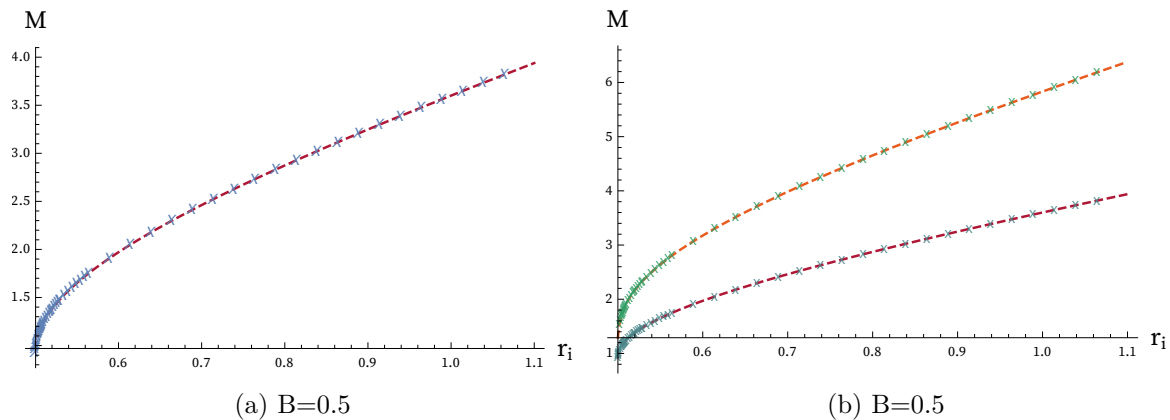
El esquema seguido para encontrar el espectro de mesones de  $\chi$  en la sección anterior se siguió *verbatim* pero considerando la integración de la ecuación  $EOM\lambda_1 B^{(1)}$ , con lo cual se observan resultados análogos a aquéllos obtenidos en la sección 4.3.1.

Tras usar una colección  $\Omega \subset (0, 5)$  de frecuencias dentro de la integración de la ecuación de movimiento linealizada para  $\lambda_{1,1}$  y ajustar cada solución a la forma asintótica de la ecuación (3.31), se obtuvo nuevamente una oscilación en el valor del coeficiente correspondiente a la parte no normalizable de la perturbación.

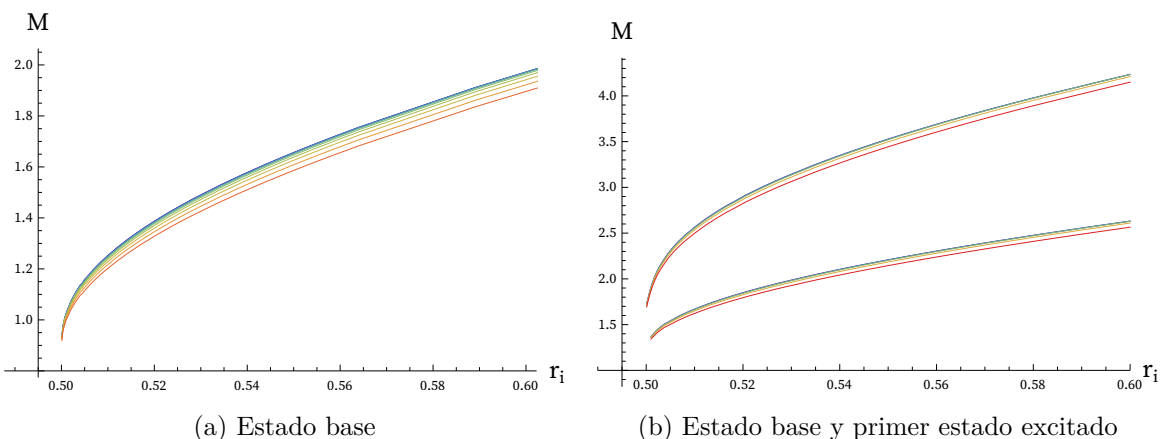


**Figura 4.20:** Variación del parámetro asintótico que porta la información sobre la no regularidad de la solución para  $\lambda_1$  como función de la frecuencia; ejemplo empleando parámetros  $B = 0.1, r_i = 0.501$ .

Las gráficas de las masas obtenidas como función del radio inicial del encaje, 4.21 y 4.22 se muestran homólogas a las de 4.13 y 4.14 mostrando apenas una ligera diferencia en cuanto a la separación entre líneas de diferentes campos externos respecta.

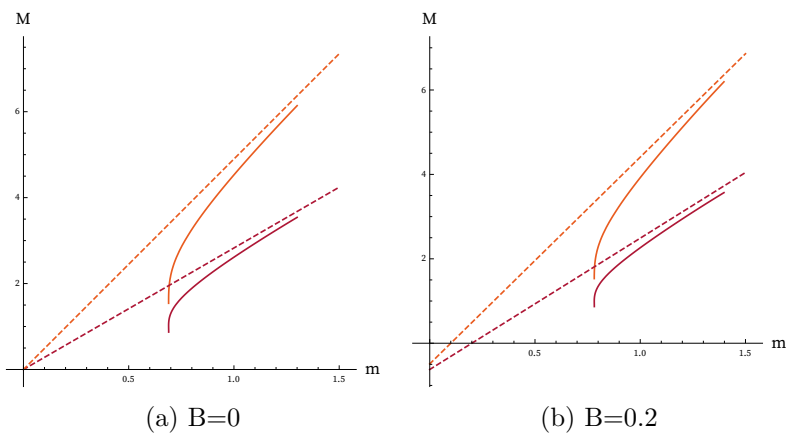


**Figura 4.21:** Dependencia de la masa de los mesones en  $\lambda_1$  como función del radio inicial para (a) el estado base y (b) dos estados excitados.



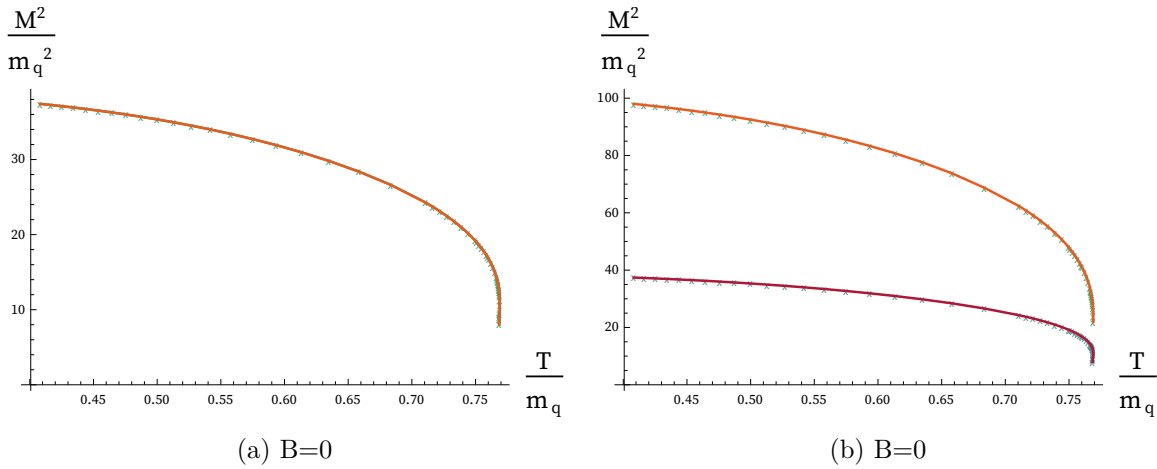
**Figura 4.22:** Dependencia de la masa de los mesones en  $\lambda_1$  al modificar el campo externo, se diferencian las gráficas por su color desde  $B = 0$  (morado) hasta  $B = 1.0$  (rojo) en pasos de 0.1 en (a), y 0.2 en (b), con el gradiente cromático natural.

Nuevamente puede usarse la masa del quark como parámetro para la masa de los mesones y ello conduce a las gráficas de 4.23. Éstas reproducen el comportamiento asintótico del modelo analítico para los primeros dos estados de [47] y las otras rectas fueron generadas de la misma manera que en la sección anterior.



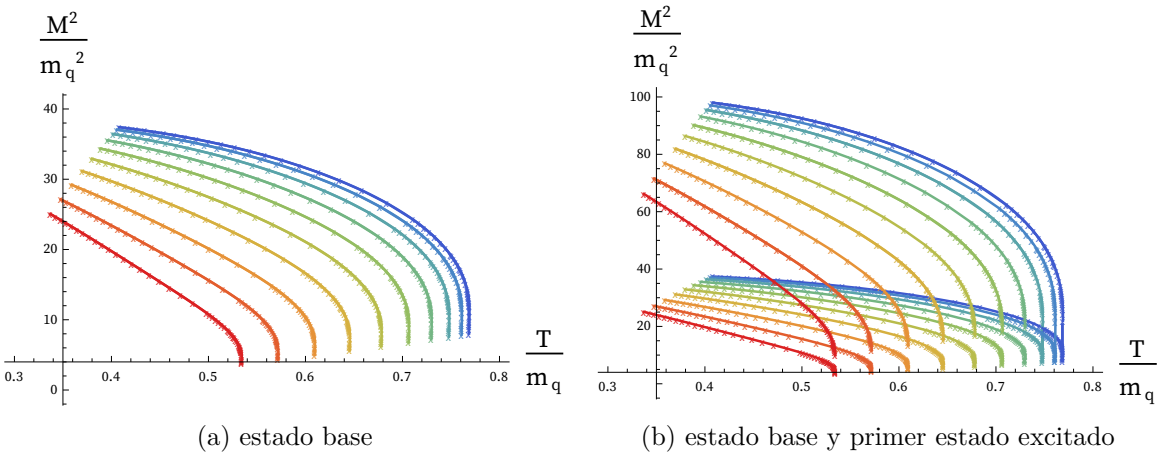
**Figura 4.23:** Dependencia de la masa de los mesones en  $\lambda_1$  como función del parámetro  $m$ , relacionado con la masa del quark.

Las correspondientes gráficas de la temperatura contra la masa de los mesones en unidades de la masa del quark se muestran en las Figuras 4.24 y 4.25.



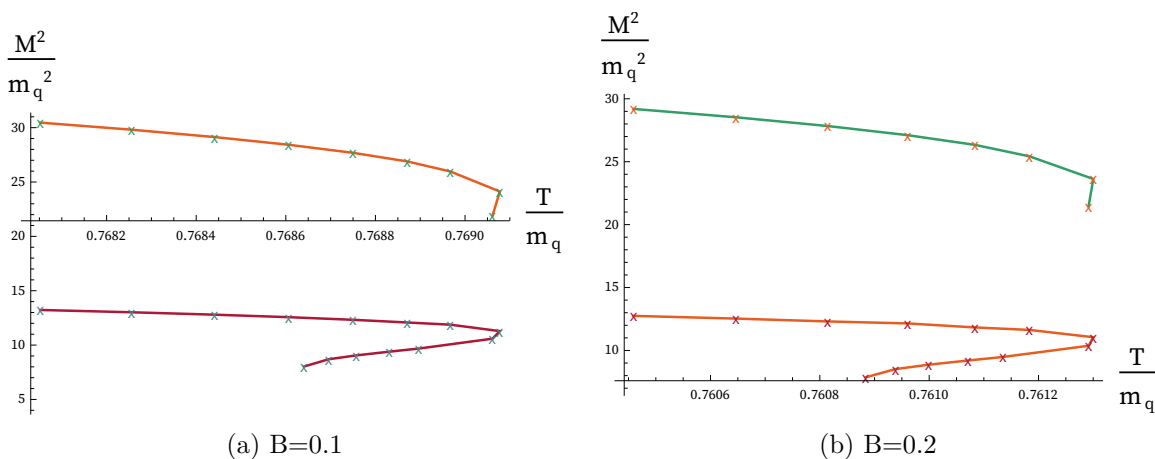
**Figura 4.24:** Dependencia de la masa de los mesones en  $\lambda_1$  como función de la temperatura  $T/m_q$ .

Cuando se comparan aquéllas correspondientes a los otros campos magnéticos se obtiene:



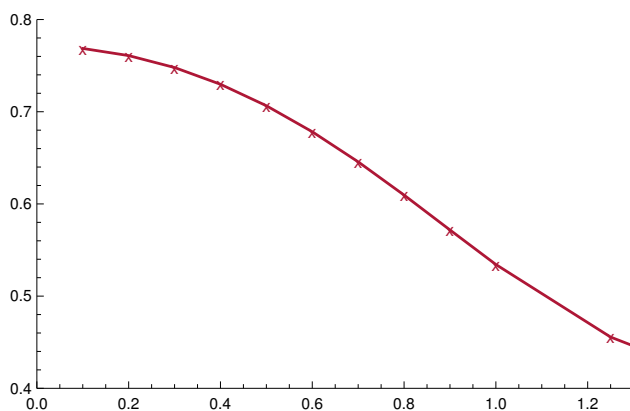
**Figura 4.25:** Dependencia de la masa de los mesones en  $\lambda_1$  como función de la temperatura  $T/m_q$  mostrando el efecto para diferentes campos externos. Se comienza desde el azul, correspondiente a  $B = 0$  y se termina en el rojo,  $B = 1.0$ , en pasos de 0.1.

Y de nueva cuenta se aprecia que la masa del mesón no está unívocamente definida en torno a la temperatura crítica.



**Figura 4.26:** Ampliación de la dependencia de la masa de los mesones en  $\lambda_1$  como función de la temperatura  $T/m_q$  cerca de la temperatura crítica.

Si se denota por  $T_{crit}$  a la *temperatura crítica* a la que cada curva de 4.17 tiende conforme  $M \rightarrow 0$ , se obtiene la siguiente gráfica que muestra la dependencia de  $T_{crit}$  como función de  $B$ .



**Figura 4.27:** Dependencia de la temperatura crítica respecto al campo externo obtenida de la perturbación en  $\lambda_1$  de los encajes.

La dependencia de la temperatura crítica obtenida como función del campo externo en 4.27 es idéntica a la de 4.19; como era de esperarse teniendo en cuenta que todo mesón, independientemente de la dirección de la que provengan las oscilaciones que le generaron, transiciona a la fase de derretimiento cerca de esta temperatura.

# 5

## Discusión y conclusiones

Se consideró la configuración gravitacional macroscópica dada por la métrica cinco dimensional (3.10) discutida en [68], ésta está asociada a un lagrangiano de tipo Einstein-Maxwell con campo escalar  $\varphi$  a fin de representar un sistema a temperatura finita sometido a un campo magnético externo estático en la dirección  $z$ .

Como es señalado en la sección donde se discute el fondo gravitacional en [66], a través del Ansatz de [67] para el levantamiento de soluciones a supergravedad IIB reducida sobre  $S^5$  se generan soluciones de la teoría microscópica 10-dimensional a fin de encajar una  $D7$ -brana en el fondo y con ello introducir materia fundamental — i.e. quarks — al sistema. En la imagen dual mediante la correspondencia esto se consigue puesto que se considera que la geometría del fondo es generada por una gran pila de  $N_c$   $D3$ -branas y al encajar  $N_f \ll N_c$   $D7$ -branas en dicha geometría, las cuerdas que se extienden entre una  $D3$ - y una  $D7$ -brana dan lugar a un hipermultiplete cargado bajo la representación fundamental de  $SU(N_c)$ ; con ello el contenido de materia de los hipermultipletes está dado por las excitaciones de las cuerdas fundamentales anteriormente mencionadas.

La forma del encaje de la  $D7$ -brana es el elemento que nos permite extraer información acerca de la teoría de norma dual. Al comparar los grados de libertad de la  $D7$ -brana y aquéllos del bulto, el perfil del encaje se determina por su forma en las direcciones transversales a la brana; en principio uno podría suponer una dependencia en todas las variables de la  $D7$ -brana y describir el encaje al indicar cómo varían  $\chi$  y  $\lambda_1$  como función de éstas, sin embargo tal propuesta supone intrincar las ya de por sí extensas ecuaciones en un fútil intento por adquirir generalidad. Tal búsqueda es insustancial pues los encajes deseados para realizar perturbaciones sobre ellos precisan ser estacionarios si se desea que estén asociados a materia fundamental de masa definida e independiente del tiempo. Hallar tal clase de encajes

sería posible al dejar evolucionar un sistema inestable por un tiempo suficientemente largo, sin embargo con base en lo hecho en artículos como [47, 69], basta con considerar un perfil simple caracterizado por la dependencia del radio de la  $S^3$  en la dirección radial homóloga a la de  $AdS_5 \times S^5$ .

Los encajes numéricos obtenidos y su variación con el campo magnético externo, ilustrados en 4.3, guardan estrecha semejanza con lo reportado en [66]. Con base en lo discutido previamente, esta corroboración fue inicialmente de suma importancia pues sólo se cuenta con expresiones numéricas para las soluciones sobre las que se procede en el resto de los cálculos y fallar en la reproducción del fondo coartaría completamente el progreso.

Cuando las  $D3$ - y las  $D7$ -branas se separan a lo largo de las direcciones que son simultáneamente ortogonales a ambas, los hipermultipletes adquieren masa proporcional a la distancia entre las branas y ésta se calcula como la separación que el encaje de la  $D7$ -brana presenta respecto a las direcciones de la  $D3$ -brana asintóticamente cerca la frontera del fondo. Amén de la masa, del comportamiento para valores grandes de  $r$  puede extraerse el valor del condensado quiral de cada encaje. Mediante la inspección de las curvas halladas en 4.7 para el condensado como función de la masa del quark se encuentra que hay soluciones regulares con un valor esperado no nulo del condensado quiral y que hay un régimen cercano al horizonte en torno al cual a una misma masa del quark le pueden corresponder encajes de diferentes parámetros característicos e incluso diferente topología.

Se puede apreciar vía el escrutinio de las gráficas de 4.8 que en torno a dicha transición las curvas del condensado correspondientes a los encajes de Minkowski y aquéllas de agujeros negros se entrecruzan; como consecuencia de esta asociación no unívoca, la fase del encaje crítico que se muestra en la Figura 2.5 no es alcanzable y en su lugar se tiene una transición de fase de primer orden a una temperatura crítica correspondiente a aquélla en la que las energías libres de ambas fases son iguales [70]. A partir de esta temperatura crítica se entiende que, de continuar el incremento en la temperatura, el encaje termodinámicamente favorecido será aquél de agujero negro. Dado que los encajes pueden parametrizarse por la razón adimensional  $T/m_q$ , este régimen de ‘alta’ temperatura donde ocurre la transición puede también verse como uno de quarks ‘muy ligeros’.

Las excitaciones de las cuerdas fundamentales con ambos extremos en las  $D7$ -branas representan estados mesónicos en la teoría de campo dual cuyo estudio permite determinar el espectro de masas de los mesones. Más allá de la temperatura crítica, la  $D7$ -brana indefectiblemente toca al agujero negro y los mesones tienen un tiempo de vida finito; del lado gravitacional se les entiende como *modos cuasinormales* que decaen al horizonte. Nuevamente estas excitaciones, como perturbaciones respecto al encaje de referencia obtenido anteriormente, podrían tener una dependencia arbitraria en las coordenadas de la  $D7$ -brana, sin embargo a fin de volver separables a las ecuaciones diferenciales asociadas, y dado que las simetrías rotacionales y traslacionales del problema lo permiten, se propuso una perturbación de tipo onda plana acompañada de armónicos esféricos en la  $S^3$  que es envuelta por la brana de prueba. Dado que el esquema descrito en la metodología plantea un problema

numérico extenso, por simplicidad se hubieron empleado sólo perturbaciones de momento angular nulo.

Las gráficas de 4.17 reproducen lo obtenido en [66] al mostrar el efecto del campo sobre las masas de los mesones que resultan de las perturbaciones en  $\chi$  y se obtiene información adicional pues no sólo se muestreó un mayor número de valores para el campo magnético sino que además se hicieron los cálculos correspondientes para los mesones en  $\lambda_1$ .

Los resultados obtenidos para las propiedades físicas de los mesones en  $\chi$  y  $\lambda_1$  como consecuencia de la modificación del campo son cualitativamente equivalentes, presentando a cada instancia desviaciones sólo en los valores exactos que toman las masas de los mesones; tal comportamiento puede reconocerse como un vestigio del hecho de que ambos espectros son idénticos para el caso supersimétrico.

A partir de las gráficas de las Figuras 4.15 y 4.23 se aprecia que para valores grandes de la masa del quark se recupera, mas sólo asintóticamente, la dependencia analítica dada en el caso del fondo sin temperatura ni campo magnético externo — i.e. el fondo supersimétrico de [47] — esto tanto para el espectro de mesones asociados a las perturbaciones en  $\chi$  como en  $\lambda_1$ . La presencia de la temperatura es la culpable de la existencia de los encaje de tipo agujero negro, de modo que aún sin campo magnético se esperaría tener esa temperatura crítica ante la cual los mesones se *derriten*; esto puede verse, por ejemplo, en [70], donde en un fondo con temperatura finita se obedece asintóticamente la relación 4.1. Esta conducta asintótica parece razonable si se arguye que para una masa de quark grande, las  $D7$ -branas aparentemente no perciben el efecto de la singularidad por su relativa lejanía a ella, de modo que son aproximadamente planas como en la configuración  $AdS$  supersimétrica.

En la presencia de un campo magnético es posible ajustar rectas a las cuales las soluciones aquí expuestas se aproximan; sin embargo el campo externo muestra tener el efecto de modificar la pendiente y ordenada inicial de las rectas en cuestión a partir de aquéllas que otrora pasaran por el origen. Dado que la colección de radios  $\mathcal{R}$  seleccionados para cada valor del campo magnético fueron iguales y que para campos crecientes se observa un aumento en la *masa crítica* de los mesones estables — i.e. la menor masa posible en la fase de Minkowski —, en una posterior iteración de estos cálculos valdría la pena emplear encajes adicionales para masas de quark mayores a fin de extender las curvas de 4.15 y cavilar en si esta apreciación es correcta o sólo es el resultado de considerar una aproximación ‘asintótica’ para valores de  $m_q$  aún muy cercanos a la masa crítica, en cuyo caso esta conducta implicaría que el efecto del campo magnético es suprimido para masas grandes del quark.

De los resultados obtenidos en las gráficas de 4.16 y 4.24 se aprecia que hay una tendencia en la masa de los mesones hacia un valor crítico de la temperatura en unidades de  $m_q$ , mismo que se relaciona con la transición antes mencionada hacia encajes de tipo agujero negro pues no hay estados mesónicos estables posteriores a esta temperatura. Así como sucedía para el condensado quiral, en torno a esta temperatura crítica la masa de los mesones producidos no está bien definida, pudiendo tenerse más de dos posibles para una misma masa según



indica la Figura 4.18. Pese a que la *rama* a tomar de dicha curva depende entonces de la fase termodinámicamente favorecida, las nuevas ramas asociadas a cada estado excitado convergen consistentemente al mismo valor, pues disminuyen dramáticamente en torno a esta temperatura. Es también de resaltar que las temperaturas críticas obtenidas tanto para los mesones en  $\chi$  como en  $\lambda_1$  muestran perfecto acuerdo entre ellas, en conformidad con la interpretación del derretimiento.

Finalmente, de 4.17 y tal como anticipaba [66], se concluye que la temperatura de derretimiento se vuelve menor conforme el campo magnético externo se incrementa; este hecho era un tanto predecible desde las imágenes de los encajes 4.3 donde se observa que la zona de contacto entre encajes de Minkowski y de agujero negro ocurre cada vez a una mayor altura, en particular cada vez es mayor la región donde los encajes de tipo agujero negro son dominantes. Como una mayor altura de los encajes se traduce en una mayor separación asintótica entre las branas, esto implica una mayor masa del quark; y como ésta está en relación inversa con la temperatura en los encajes parametrizados por  $T/m_q$ , entonces se traduce en una menor temperatura asociada a la transición.

# Bibliografía

- [1] J. Polchinski. *String Theory*. Cambridge University Press, 1998.
- [2] J. H. Schwarz. Introduction to superstring theory. *hep-ex*, 0008017.
- [3] E. Kiritsis. *String Theory in a Nutshell*. Princeton University Press, 2007.
- [4] J. Polchinski. *String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string*. Cambridge, UK: Univ. Pr., 1998.
- [5] J. Polchinski. *String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond*. Cambridge, UK: Univ. Pr., 1998.
- [6] G. Veneziano. Construction for a crossing-symmetric, regge-behaved amplitude for linearly rising trajectories. *Nuovo Cim. A*, 57:190, 1968.
- [7] A. Neveu and J. H. Schwarz. Factorizable dual model of pions. *Nucl. Phys. B*, 31:86, 1971.
- [8] P. Ramond. Dual theory for free fermions. *Phys. Rev. D*, 3:2415, 1971.
- [9] F. Gliozzi, J. Scherk, and D. I. Olive. Supergravity and the spinor dual model. *Nucl. Phys. B*, 122:253, 1977.
- [10] P. Candelas, Gary T. Horowitz, Andrew Strominger, and Edward Witten. Vacuum configurations for superstrings. *Nucl. Phys.*, B198:46–74, 1985.
- [11] P.A.M. Dirac. An extensible model of the electron. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A268:57, 1962.
- [12] G. T. Horowitz and A. Strominger. Black strings and p-branes. *Nucl. Phys. B*, 360:197, 1991.
- [13] P.K. Townsend, K. Pilch, and P. van Nieuwenhuizen. Selfduality in odd dimensions. *Phys. Lett.*, 136:38, 1984.
- [14] J. Polchinski. Tasi lectures on d-branes. *JHEP*, 9611050.

- [15] J. Polchinski. Dirichlet-branes and ramond-ramond charges. *Phys. Rev. Lett.*, 75:4724, 1995.
- [16] S.W. Hawking. Black holes in general relativity. *Commun. Math. Phys.*, 25:152–166, 1972.
- [17] J.D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Phys. Rev.*, D7:2333–2346, 1973.
- [18] S.W. Hawking. Particle creation by black holes. *Commun. Math. Phys.*, 43:199–220, 1975.
- [19] G. ‘t Hooft. A planar diagram theory for strong interactions. *Nucl. Phys.*, B72:461, 1974.
- [20] L. Susskind. The world as a hologram. *J. Math. Phys.*, 36:6377, 1995.
- [21] J.M. Maldacena. The large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:231–252, 1998.
- [22] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. M. Polyakov. Gauge theory correlators from non-critical string theory. *Phys. Lett. B*, 428:105, 1998.
- [23] E. Witten. Anti-de sitter space and holography. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:253–291, 1998.
- [24] L. Susskind and E. Witten. The holographic bound in anti-de sitter space. *JHEP*, 9805114.
- [25] Karch et al. Linear confinement and ads/qcd. *Phys. Rev. D*, 74, 2005.
- [26] P. Colangelo et al. On the light glueball spectrum in a holographic description of qcd. *Phys. Lett. B*, 652, 2007.
- [27] P.Colangelo et al. Light scalar mesons in the soft-wall model of ads/qcd. *Phys. Rev. D*, 78, 2008.
- [28] S.J. Brodsky and G.F. de Teramond. Ads/cft and light-front qcd. *JHEP*, 0802.0514.
- [29] I. R. Klebanov. Tasi lectures: Introduction to the ads/cft correspondence. *JHEP*, 0009139.
- [30] J. Casalderrey-Solanaa, H. Liu, D. Mateos, K. Rajagopal, and U.A. Wiedemann. *Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions*. Cambridge, 2014.
- [31] O. Aharony, S.S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri, and Y. Oz. Large n field theories, string theory and gravity. *Phys. Rept.*, 323:183–386, 2000.
- [32] M. Gyulassy and L. McLerran. New forms of qcd matter discovered at rhic. *Nucl. Phys. A*, 750:30–63, 2005.

- [33] E.V. Shuryak. What rhic experiments and theory tell us about properties of quark-gluon plasma. *Nucl. Phys. A*, 64, 2005.
- [34] Eric D'Hoker and Per Kraus. Magnetic brane solutions in ads. *hep-th*, 0908.3875, 2009.
- [35] V.G. Filev, C.V. Johnson, R.C. Rashkov, and K.S. Viswanathan. Flavoured large n gauge theory in an external magnetic field. *JHEP*, 0710(019), 2007.
- [36] V.G. Filev and R.C. Raskov. Magnetic catalysis of chiral symmetry breaking. a holographic prospective. *Adv. High Energy Phys.*, 2010(473206), 2010.
- [37] J.G. Russo. New compactifications of supergravities and large n qcd. *Nucl. Phys. B*, 543(183), 1999.
- [38] J.A. Minahan. Glueball mass spectra and other issues for supergravity duals of qcd models. *JHEP*, 9901(020), 1999.
- [39] C. Csaki, Y. Oz, J. Russo, and J. Terning. Large n qcd from rotating branes. *Phys. Rev. D*, 59, 1999.
- [40] J.G. Russo and K. Sfetsos. Rotating d3 branes and qcd in 3 dimensions. *Adv. Theor. Math. Phys.* 3, 131, 1999.
- [41] C. Csaki, J. Russo, K. Sfetsos, and J. Terning. Supergravity models for 3+1 dimensional qcd. *Phys. Rev. D*, 60, 1999.
- [42] N. Itzhaki, J.M. Maldacena, J. Sonnenschein, and S. Yankielowicz. Supergravity and the large n limit of theories with sixteen supercharges. *Phys. Rev. D*, 58, 1998.
- [43] D. T. Son and A . O. Starinets. Viscosity, black holes and quantum field theory. *Ann. Rev. Nucl. Part. Schi.*, 57:95–118, 2007.
- [44] D.Z. Freedman, S.S. Gubser, K. Pilch, and N.P. Warner. Continuous distributions of d3-branes and gauged supergravity. *JHEP*, 07(038), 2000.
- [45] D. Mateos, R. C. Myers, and R. M. Thomson. Holographic phase transitions with fundamental matter. *Phys. Rev. Lett.*, 97, 2006.
- [46] S. Kobayashi, D. Mateos, S. Matsuura, R. C. Myers, and R. M. Thomson. Holographic phase transitions at finite baryon density. *JHEP*, 02:016, 2006.
- [47] M. Kruczenski, D. Mateos, R. C. Myers, and D. J. Winters. Meson spectroscopy in ads/cft with flavour. *JHEP*, 07:049, 2003.
- [48] J. Erdmenger, N. Evans, I. Kirsch, and E. Threlfall. Mesons in gauge/gravity duals-a review. *JHEP*, arXiv:0711.4467, 2008.
- [49] A. Karch and L. Randall. Open and closed string interpretation of susy cft's on branes with boundaries. *JHEP*, 0106(063), 2001.

- [50] N.R. Constable, J. Erdmenger, Z. Guralnik, and I. Kirsch. Intersecting d3-branes and holography. *JHEP*, 0211222.
- [51] A. Karch and E. Katz. Adding flavor to ads/cft. *JHEP*, 206:043, 2002.
- [52] E. Witten. Bound states of strings and p-branes. *Nucl. Phys. B*, 460, 1996.
- [53] O. Aharony, A. Fayyazuddin, and J.M. Maldacena. The large n limit of n=2,1 field theories from threebranes in f-theory. *JHEP*, 9807(013), 1998.
- [54] T. Sakai and J. Sonnenschein. Probing flavored mesons of confining gauge theories by supergravity. *JHEP*, 0309(047), 2003.
- [55] Johanna Erdmenger. *String Cosmology: Modern String Theory Concepts from the Big Bang to Cosmic Structure*. Some Press, 2009.
- [56] E. Witten. Anti-de sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories. *Adv. Theor. Math. Phys.* 2, 505, 1998.
- [57] S.S. Gubser. Dilaton-driven confinement. *JHEP*, 9902155.
- [58] N. Evans. Qcd-like gauge dynamics from gravity duals. *Fortschritte der Physik*, 52(6), 2004.
- [59] J. Babington, J. Erdmenger, N. J. Evans, Z. Guralnik, and I. Kirsch. Chiral symmetry breaking and pions in non-supersymmetric gauge/gravity duals. *Phys. Rev. D*, 69, 2004.
- [60] N.R. Constable and R. Myers. Exotic scalar states in the ads/cft correspondence. *JHEP*, 9911(020), 1999.
- [61] V.P. Gusynin, V.A. Miransky, and I.A. Shovkovy. Catalysis of dynamical flavor symmetry breaking by a magnetic field in (3+1)-dimensions. *Phys. Lett. B*, 349:477–483, 1995.
- [62] V.A. Miransky and I.A. Shovkovy. Magnetic catalysis and anisotropic confinement in qcd. *Phys. Rev. D*, 66(045006), 2002.
- [63] D.C. Tsui, H.L. Stormer, and A.C. Gossard. Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit. *Phys. Rev. Lett.*, 48:1559–1562, 1982.
- [64] R.B. Laughlin. Anomalous quantum hall effect—an incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations. *Phys. Rev. Lett.*, 50:1395–1398, 1983.
- [65] T. Horowitz and V.E. Hubeny. Quasinormal modes of ads black holes and the approach to thermal equilibrium. *Phys. Rev. D*, 62(024027), 2000.
- [66] D. Avila and L. Patiño. Melting holographic mesons by applying a magnetic field. *Physics Lett. B*, 795:689–693, 2019.

- [67] M. Cvetič, M.J. Duff, P.Hoxha, J.T. Liu, H. Lü, J.X. Lu, R. Martínez Acosta, C.N. Pope, H. Sati, and T.A. Tran. Embedding ads black holes in ten and eleven dimensions. *JHEP*, 990321, 1999.
- [68] D. Avila and L. Patiño. Instability of a magnetized qgp sourced by a scalar operator. *JHEP*, 04(086), 2019.
- [69] D. Mateos, R. Myers, and R.M. Thomson. Thermodynamics of the brane. *JHEP*, 0705(067), 2007.
- [70] J. Erdmenger and V. Filev. Mesons from global anti-de sitter space. *JHEP*, 1101(119), 2011.
- [71] I. R. Klebanov. World volume approach to absorption by nondilatonic branes. *Nucl. Phys. B*, 496:231, 1997.



# A

## Apéndice

### A.1. Motivación usual de la correspondencia

La equivalencia entre teorías de cuerdas y de norma es motivada al considerar un sistema de branas y cuerdas abiertas; desde el punto de vista de las D-branas en teoría de supercuerdas, y desde el punto de vista de p-branas en supergravedad clásica.

Considérense  $N_c$  D3-branas coincidentes en la teoría de cuerdas tipo IIB. En lo que se llama la *descripción de cuerda abierta*, al tomar  $g_s N_c \ll 1$  el sistema consiste de cuerdas abiertas con puntos extremos que yacen sobre las branas (3+1) dimensionales, cuerdas cerradas propagándose en el bulto 10-dimensional<sup>1</sup>, y sus interacciones:

$$S = S_{brana} + S_{bulto} + S_{int}. \quad (\text{A.1})$$

$S_{brana}$  es sencillamente  $\mathcal{N} = 4$   $SU(N_c)$  SYM en 3+1 dimensiones planas y correcciones a orden  $\alpha'$ , mientras  $S_{bulto}$  es supergravedad IIB en un espacio plano 10-dimensional más correcciones a orden  $\alpha'$ . Resulta que en el límite de bajas energías, las interacciones entre las cuerdas pueden *apagarse* (i.e. la gravedad se vuelve libre en el infrarrojo), de modo que todos los modos de las cuerdas se desacoplan entre sí y la acción anterior se reduce sólo a las descripciones de cuerdas abiertas y cerradas no interactuantes.

---

<sup>1</sup>Las cuerdas abiertas describen las excitaciones de las branas, en particular los modos no masivos dan lugar a un campo de norma sobre ella; mientras que las cuerdas cerradas describen las excitaciones del vacío.



Desc. de cuerda abierta a bajas energías  $\Rightarrow \mathcal{N} = 4 SU(N_c)$  SYM + Supergravedad IIB libre

En la *descripción de cuerda cerrada*,  $g_s N_c \gg 1$ , por la fuerte retroacción de las  $N_c$  D3-branas, éstas se ven como precursoras de los campos del bulto y generan así el fondo de una 3-brana extremal:

$$ds^2 = H^{-1/2}(r)(-dt^2 + d\mathbf{x}^2) + H^{1/2}(r)(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \quad H(r) \equiv 1 + \left(\frac{L}{r}\right)^4, \quad L^4 \equiv 4\pi g_s N_c l_s^4. \quad (\text{A.2})$$

Lejos del horizonte ( $r \rightarrow \infty$ ), esta métrica se reduce al espacio tiempo 10-dimensional de Minkowski. En el límite cercano al horizonte ( $r \rightarrow 0$ ), ésta se vuelve  $AdS \times S^5$ :

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2}(-dt^2 + d\mathbf{x}^2) + \frac{L^2}{r^2}(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2) = \left\{ \frac{r^2}{L^2}(-dt^2 + d\mathbf{x}^2) + \frac{L^2}{r^2} dr^2 \right\} + L^2 d\Omega_5^2. \quad (\text{A.3})$$

De la métrica se puede leer que la energía de un objeto, medido por un observador estacionario a una distancia  $r$  está relacionada con la energía medida en el infinito vía  $E(r) = H^{1/4}(r)E_\infty$ .

Para un observador en el infinito, hay entonces dos diferentes tipos de excitaciones de baja energía, excitaciones masivas de longitud de onda larga, que pueden propagarse por doquier en el espacio-tiempo, y excitaciones de masa arbitraria y cualquier longitud de onda, localizadas muy cerca de  $r = 0$ . En el límite de baja energía, las excitaciones cerca de  $r = 0$  no tienen suficiente energía para escapar a grandes distancias y se puede mostrar que la sección transversal para absorción de partícula por las branas se vuelve despreciable en el límite de bajas energías [29, 71]. Las excitaciones lejanas al horizonte que se mueven en lo que en esencia es Minkowski 10-dimensional se desacoplan de aquéllas en la región cercana a él y el sistema nuevamente se descompone en dos:

Desc. de cuerda cerrada a bajas energías  $\Rightarrow$  Teoría de cuerdas tipo IIB en  $AdS_5 \times S^5$  +  
Gravedad IIB libre

Como ambas son descripciones del mismo sistema de  $N_c$  D3-branas coincidentes, sus acciones deberían coincidir. Como la supergravedad libre IIB es común a ambas descripciones a bajas energías y la teoría de norma está definida para cualquier valor del acoplamiento, se conjetura que los elementos restantes deben corresponderse; y así se motiva la correspondencia entre  $\mathcal{N} = 4 SU(N_c)$  SYM y la teoría de súpercuerdas tipo IIB en  $AdS_5 \times S^5$ .

Cuando dos teorías son iguales, sus parámetros fundamentales se espera que estén en una correspondencia biunívoca. Debido a la correspondencia, éste debe ser el caso para  $\mathcal{N} =$

$4SU(N_c)$  SYM y teoría de cuerdas IIB en  $AdS_5 \times S^5$ . La primera depende de dos parámetros fundamentales, el rango del grupo de norma o número de colores,  $N_c$ , y la constante de acoplamiento de 't Hooft  $\lambda$  — o bien, la de SYM, a partir de la relación  $\lambda = g_{YM}^2 N_c$  —.

Del lado de la teoría de cuerdas, los parámetros básicos son el radio de  $AdS_5$ ,  $L = R$ , con  $R$  el radio de la  $S^5$ ; la longitud de la cuerda fundamental — o bien, la pendiente de Regge, a través de  $l_s^2 = \alpha'$ , — y la longitud de Planck 10-dimensional,  $l_p^8 = l_s^8 g_s^2$ .

La correspondencia vincula los parámetros fundamentales de las dos teorías vía:

$$\left(\frac{l_p}{L}\right) = \frac{1}{4\pi N_c} \quad \left(\frac{l_s}{L}\right)^4 = \frac{1}{\lambda}; \quad (\text{A.4})$$

y respecto a los acoplamientos,

$$g_{YM}^2 = 4\pi g_s. \quad (\text{A.5})$$

Hay dos límites de interés que uno típicamente encuentra cuando trata con la correspondencia. Uno es el límite de acoplamiento fuerte en el que, de acuerdo con el emparejamiento de parámetros, la longitud de la cuerda fundamental tiende a cero y las cuerdas son a efectos prácticos puntuales ( $\lambda \rightarrow \infty \Leftrightarrow l_s \rightarrow 0$ ); el segundo es el límite de  $N_c$  grande, también conocido como *planar*, o de 't Hooft, que corresponde a teoría clásica de cuerdas ( $N_c \rightarrow \infty \Leftrightarrow g_s \rightarrow 0$ ),  $\lambda$  fija.

Si se combinan ambos, se obtiene lo que se denomina la aproximación clásica de supergravedad, en la que la teoría de cuerdas tipo IIB se reduce a supergravedad clásica IIB en  $AdS_5 \times S^5$  la cual es dual, vía la *forma débil* de la correspondencia a  $\mathcal{N} = 4$  plana fuertemente acoplada. Si se abandonan ambos límites del párrafo anterior, se obtiene lo que se denomina la *forma fuerte* de la correspondencia, donde uno supone que ésta es válida para cualesquiera valores de  $N_c$  y  $\lambda$ .

## A.2. Ecuaciones de movimiento de la teoría pentadimensional

Como puede consultarse en [68], las ecuaciones de movimiento resultantes de la variación de la acción 3.8 respecto a los campos escalares  $\varphi_j$ ,  $j = 1, 2$ , la métrica  $g_{\mu\nu}$  y los campos de

norma  $A_\lambda^i$ ,  $i = 1, 2, 3$  son, para los campos escalares,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi_j) + \frac{2}{L^2}\sum_{k=1}^3 a_k^{(j)} X_k^{-1} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^3 a_k^{(j)} X_k^{-2}(F^k)^2 = 0; \quad j = 1, 2 \quad (\text{A.6})$$

para los campos de norma,

$$\partial_\mu \left[ \sqrt{-g} \left( X_1^{-2} F^{1\mu\nu} - \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\lambda} F_{\rho\sigma}^2 A_\lambda^3 \right) \right] = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$\partial_\mu \left[ \sqrt{-g} \left( X_2^{-2} F^{2\mu\nu} - \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\lambda} F_{\rho\sigma}^1 A_\lambda^3 \right) \right] = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}X_3^{-2}F^{3\mu\lambda}) + \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\lambda}F_{\mu\nu}^1F_{\rho\sigma}^2 = 0; \quad (\text{A.9})$$

y finalmente, para la métrica:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left( \partial_\mu\varphi_1\partial_\nu\varphi_1 + \partial_\mu\varphi_2\partial_\nu\varphi_2 + \sum_{k=1}^3 X_k^{-2} F_{\mu\nu}^k F_\nu^k{}^\sigma \right) + g_{\mu\nu} \left( \frac{4}{3L^2} \sum_{k=1}^3 X_k^{-1} + \frac{1}{12} \sum_{k=1}^3 X_k^{-2} (F^k)^2 + \frac{1}{2} \epsilon^{\theta\eta\rho\sigma\lambda} F_{\theta\eta}^1 F_{\rho\sigma}^2 A_\lambda^3 \right) = 0. \quad (\text{A.10})$$

Bajo la elección particular hecha en 3 de los campos de norma, se satisfacen automáticamente las ecuaciones (A.7),(A.8) y (A.9). Mientras que bajo la elección del resto de los parámetros, incluyendo la forma de la métrica, las ecuaciones restantes se son:

$$\frac{\frac{8B^2 e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\varphi(r)}}{V(r)^2} - 6U''(r) - \frac{6U'(r)V'(r)}{V(r)} - \frac{3U'(r)W'(r)}{W(r)} + 16e^{-\frac{\varphi(r)}{\sqrt{6}}} \left( e^{\sqrt{\frac{3}{2}}\varphi(r)} + 2 \right)}{U(r)} + \frac{6(V'(r)^2 - 2V(r)V''(r))}{V(r)^2} + \frac{3(W'(r)^2 - 2W(r)W''(r))}{W(r)^2} - 6\varphi'(r)^2 = 0, \quad (\text{A.11})$$

$$-\frac{8B^2 e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\varphi(r)}}{V(r)^2} + 6U''(r) + \frac{6U'(r)V'(r)}{V(r)} + \frac{3U'(r)W'(r)}{W(r)} - 16e^{-\frac{\varphi(r)}{\sqrt{6}}} \left( e^{\sqrt{\frac{3}{2}}\varphi(r)} + 2 \right) = 0, \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{16B^2 e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\varphi(r)}}{V(r)} - \frac{3V'(r)(2W(r)U'(r)+U(r)W'(r))}{W(r)} - \\
& 6U(r)V''(r) + 16V(r)e^{-\frac{\varphi(r)}{\sqrt{6}}} \left( e\sqrt{\frac{3}{2}}\varphi(r) + 2 \right) = 0,
\end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}
& 8W(r)e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\varphi(r)} \left( \frac{B^2}{V(r)^2} + 2e^{\frac{\varphi(r)}{\sqrt{6}}} \left( e\sqrt{\frac{3}{2}}\varphi(r) + 2 \right) \right) \\
& - \frac{6W'(r)(V(r)U'(r)+U(r)V'(r))}{V(r)} - 6U(r)W''(r) + \frac{3U(r)W'(r)^2}{W(r)} = 0,
\end{aligned} \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{4\sqrt{2}B^2 e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\varphi(r)}}{V(r)^2} + 2\sqrt{3}U'(r)\varphi'(r) + \frac{2\sqrt{3}U(r)V'(r)\varphi'(r)}{V(r)} + \frac{\sqrt{3}U(r)W'(r)\varphi'(r)}{W(r)} + \\
& 2\sqrt{3}U(r)\varphi''(r) - 8\sqrt{2}e^{-\frac{\varphi(r)}{\sqrt{6}}} + 8\sqrt{2}e\sqrt{\frac{2}{3}}\varphi(r) = 0.
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Siendo esta última la asociada al dilatón  $\varphi$  y donde no se anotó una de las ecuaciones de la métrica, correspondiente a la entrada  $(y, y)$  por ser ésta idéntica a la de  $(x, x)$ , lo cual es de esperarse dada la simetría en el plano  $x - y$ .

### A.3. Otros lagrangianos de interés

A partir del lagrangiano principal para la  $D7$ -brana que resulta del cálculo del determinante de la métrica inducida sobre la  $D7$ -brana con la dependencia completa indicada en 3 — el cual por su extensión no se considera conveniente o relevante incluir en el presente escrito,— puede recuperarse el caso límite donde se supone únicamente dependencia radial en  $\chi$  y se deja fija  $\lambda_1$ :

$$\tilde{\mathcal{L}} = \sqrt{V(r)^2 W(r) \left( -e^{-\frac{5\varphi(r)}{\sqrt{6}}} \right) \left( \chi(r)^2 \left( e\sqrt{\frac{3}{2}}\varphi(r) - 1 \right) - e\sqrt{\frac{3}{2}}\varphi(r) \right) \left( U(r)e^{\frac{\varphi(r)}{\sqrt{6}}} \chi'(r)^2 - \chi(r)^2 + 1 \right)} \tag{A.16}$$

Donde  $\tilde{\mathcal{L}} = 2\mathcal{L}/(1 - \chi(r)^2)$ .

En particular se recupera aquél con campo nulo, donde como se menciona en el texto, es menester fijar  $\varphi = 0$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( 1 - \chi(r)^2 \right) \sqrt{-V(r)^2 W(r) (-U(r)\chi'(r)^2 + \chi(r)^2 - 1)}. \tag{A.17}$$