





















## Resumen

Desde la primera solución a las ecuaciones de campo de la Relatividad General que representaba un agujero negro clásico, estos han despertado gran interés en la comunidad científica, no solo por su carácter misterioso, sino también porque presentan singularidades, las cuales se consideran como una ruptura en la teoría debido a que esta es incapaz de describir la naturaleza de estos puntos divergentes. A pesar de que este punto singular no representa ningún problema serio cuando se estudia la física de sistemas astrofísicos, incluso en dinámicas que se experimentan en regiones muy cercanas al horizonte de eventos, el estudio de las singularidades ha sido un campo en el que se sigue trabajando exhaustivamente por ser un problema teórico conceptual. Hasta la fecha se han propuesto teorías cuánticas de la gravedad que sanan el problema de los puntos singulares que se presentan en la teoría clásica, sin embargo, estas teorías cuánticas no se han demostrado experimentalmente, y se cree que pasaran todavía algunos años antes de que algún experimento favorezca a alguna sobre las otras. Por otro lado, se pueden proponer soluciones a las ecuaciones de campo tales que a partir de acoplar la acción de Einstein-Hilbert a una forma de materia específica, la singularidad desaparezca naturalmente. De esta idea nace la propuesta del estudio de los agujeros negros regulares.

El objetivo de esta tesis es estudiar las propiedades del espacio tiempo, así como las características cualitativas y cuantitativas de las geodésicas dentro y fuera del plano ecuatorial, que describen partículas masivas de prueba en un escenario de un agujero negro regular tipo Hayward con rotación.

A partir de tres enfoques muy utilizados en mecánica clásica: Hamilton-Jacobi, Hamilton y Lagrange, se logra caracterizar completamente las geodésicas y estudiar sus propiedades. Las trayectorias se comparan con las geodésicas en el espacio tiempo de Kerr, y se buscan los valores de los parámetros de rotación y de desviación de cada espacio tiempo para los cuales las diferencias en las trayectorias de las partículas en ambos agujeros negros se vuelven notables.

Se muestra que, como en el agujero negro de Kerr, existe una cuarta integral de movimien-

## RESUMEN

---

to que puede ser asociada a una constante de Carter para el espacio tiempo de Hayward con rotación, lo que permite la separabilidad de variables en el formalismo de Hamilton-Jacobi y el uso del método de potenciales efectivos para la coordenada radial y la coordenada angular polar, para obtener las propiedades cualitativas de las trayectorias.

Las ecuaciones geodésicas se integran numéricamente y se muestran gráficas de las trayectorias para distintos valores del parámetro característico del espacio tiempo de Hayward  $g$ , del espín del agujero negro  $a$  y del momento angular de las partículas  $L_z$ .

El estudio del movimiento de las partículas en escenarios distintos al modelo del agujero negro de Kerr se vuelve importante si nos cuestionamos acerca de la naturaleza de los agujeros negros astrofísicos. De esta manera, naturalmente surge la duda de que probablemente no estén descritos por una métrica de Kerr, sino por métricas con ligeras desviaciones, como es el caso del agujero negro de Hayward con rotación. Y aunque diversas observaciones están de acuerdo con que el mejor candidato a estos objetos compactos es el modelo de Kerr, no están excluidos otros modelos que también ajustan con las observaciones. Por lo tanto, es de gran importancia un estudio como el que se realizó en esta tesis, pues permite modelar correctamente la naturaleza de los objetos que logramos observar.

A partir de los resultados de esta tesis se escribió un artículo de investigación el cual se puede encontrar con la siguiente referencia: arXiv:1908.01886

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
1.1. Observaciones históricas . . . . .	3
1.2. Motivación, perspectivas y organización . . . . .	7
1.3. Propiedades generales de los agujeros negros . . . . .	11
1.4. Consideraciones sobre las singularidades en los agujeros negros . . . . .	13
1.4.1. Singularidades en relatividad general . . . . .	15
<b>2. Aspectos fundamentales de agujeros negros singulares</b>	<b>17</b>
2.1. El espacio tiempo de Schwarzschild . . . . .	18
2.1.1. Horizonte de eventos . . . . .	23
2.2. El espacio tiempo de Kerr . . . . .	23
2.2.1. Horizonte de eventos y ergosfera . . . . .	29
<b>3. Propiedades del espacio tiempo regular</b>	<b>31</b>
3.1. El espacio tiempo de Hayward . . . . .	31
3.1.1. Horizontes . . . . .	37
3.2. El espacio tiempo de Hayward con rotación . . . . .	39
3.2.1. Derivación de la métrica del espacio tiempo de Hayward con rotación . . . . .	39
3.3. Horizonte de eventos y ergosfera . . . . .	46
3.3.1. Horizontes . . . . .	46
3.3.2. Ergosfera . . . . .	49
<b>4. Movimiento geodésico de partículas tipo tiempo</b>	<b>53</b>
4.1. Formalismo de Hamilton Jacobi . . . . .	53
4.2. Formulación Lagrangiana . . . . .	56
4.2.1. Propiedades del movimiento radial . . . . .	58
4.2.2. Propiedades del movimiento polar . . . . .	62

ÍNDICE GENERAL

---

1

4.3. Formulación Hamiltoniana . . . . .	63
4.3.1. Movimiento en el plano ecuatorial . . . . .	65
4.3.2. Movimiento fuera del plano ecuatorial . . . . .	69
<b>5. Conclusiones</b>	<b>73</b>



# 1

## Introducción

### 1.1 Observaciones históricas

Entre los objetos más interesantes y misteriosos del Universo se encuentran los *agujeros negros*. Estos objetos aparecen naturalmente como una solución a las ecuaciones de campo de la relatividad general, la teoría moderna de la gravedad, y al menos hasta hoy, la teoría más precisa para la descripción de la dinámica de cuerpos en el régimen de gravedad fuerte y para el estudio de la dinámica de los mismos campos gravitacionales.

La teoría de la relatividad general fue presentada por Albert Einstein en cuatro artículos; el cuarto y último de ellos sale a la luz el 25 de noviembre de 1915, el cual se titula: *Feldgleichungen der Gravitation*, en donde presenta las famosas ecuaciones de campo ( $G = c = 1$ )

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (1.1)$$

La ecuación tensorial (1.1) representa un conjunto de diez ecuaciones diferenciales parciales no lineales acopladas para la métrica  $g_{\mu\nu}$ . Debido a la complejidad de este sistema de ecuaciones, el propio Einstein consideraba que iba a pasar un largo tiempo antes de que se encontrara una solución exacta que satisficiera las ecuaciones de campo. Por esta razón se dedicó a encontrar una solución de manera aproximativa; incluso se limitó a decir que las ecuaciones dan *a primer orden la ley de atracción de Newton y a segundo orden una explicación de la precesión del perihelio de Mercurio*. De acuerdo a su criterio, era lo que

más se podía decir, en ese momento, acerca de las soluciones.

Unos meses después de haberse publicado el artículo de Einstein, a partir de imponer simetrías de tal manera que las ecuaciones (1.1) fuesen más simples de resolver, en febrero de 1916 Schwarzschild encontró la primer solución exacta, esféricamente simétrica, en el vacío [1]. La métrica que resulta como solución, cuenta con dos singularidades, una en el centro de simetría  $r = 0$  y otra a un radio  $r = r_S = 2M$  tal que el coeficiente  $g_{rr}$  de la métrica diverge en  $r_S$ . Al poco tiempo se entendió que existía una diferencia entre ellas, la primera se trata de una singularidad física mientras que la segunda es una singularidad coordenada, con un significado más profundo las de la primera clase.

Después de haberse presentado la solución de Schwarzschild, a partir de analizar las componentes de la métrica en las coordenadas en las que inicialmente se presentó, la comunidad notó que existía una región en la cual parecía ser que el espacio tiempo tenía un comportamiento singular. Con el trabajo de Flamm en 1916, dio inicio el estudio de la naturaleza de las singularidades, al intentar dar una interpretación de esta región que poseía el espacio tiempo descrito por la métrica de Schwarzschild. Weyl establece en 1917 que *en la naturaleza, evidentemente, la parte de la solución que tiene sentido físico es aquella que no toca dicha esfera singular*, sosteniendo que esta región singular es solo un artilugio matemático. Hilbert, por su parte, consideraba que esta esfera representaba la ilusión del concepto de un punto masivo el cual es solo el caso límite de una distribución de masa esféricamente simétrica. Para 1922, Lanczos va más allá y afirma que las singularidades en las componentes de la métrica no necesariamente tienen significado físico pues deberían desaparecer en un sistema de coordenadas apropiado.

En medio de los trabajos sobre el la naturaleza de las singularidades, Birkhoff en 1923 propone un teorema que eleva la importancia de la solución de Schwarzschild, el cual lleva su nombre:

**Teorema 1.1.1** Teorema de Birkhoff. *La única solución en el vacío de un espacio tiempo esféricamente simétrico es la solución de Schwarzschild.*

Al mismo tiempo continuaba aumentando la relevancia por entender las singularidades y con ello los trabajos: Eddington en 1924, Lemaitre en 1933, Einstein y Rosen en 1935; sin embargo, tuvieron que pasar cerca de veinticinco años, cuando en 1960 con el trabajo de Kruskal y Szekeres, se encontró un sistema de coordenadas maximalmente extendido y regular en el que se podía expresar la métrica de Schwarzschild. Dichas coordenadas se conocen por el nombre de ambos físicos como las coordenadas de Kruskal-Szekeres.

Se observó que  $r = r_S$  está relacionado con la velocidad de escape de una partícula sujeta al campo gravitacional de un cuerpo, tal que si  $r_S$  es el radio de dicho cuerpo masivo



esféricamente simétrico, la velocidad de escape es igual a la velocidad de la luz. Por lo tanto, para valores menores de  $r_S$ , la atracción gravitacional entre las partículas de un cuerpo provoca un colapso gravitacional.

El problema de la singularidad coordinada se había resuelto a través de un cambio de coordenadas, sin embargo este procedimiento no resolvía el problema de la singularidad en el centro de simetría, y por lo tanto su estudio continuaba siendo un problema abierto. Se consideraba imposible que en la naturaleza se encontraran objetos con un tamaño comparable a su radio gravitacional. Sin embargo, varios estudios realizados por Chandrasekhar en 1931, Landau en 1932, Baade y Zwicky en 1934, Oppenheimer y Volkoff [2] en 1939, mostraron que en la naturaleza sí es posible encontrar objetos compactos de tamaño apenas mayor a su radio gravitacional, por ejemplo: las estrellas de neutrones. Más aún, en ese último año 1939, se demostró por Oppenheimer y Snyder [3] que la formación de objetos sumamente compactos, del tamaño de su radio gravitacional, es posible a través del colapso gravitacional de estrellas masivas. La idea de la existencia de *agujeros negros* se encontraba ahora sobre la mesa.

La comunidad de físicos se referían a estos objetos como *objetos completamente colapsados gravitacionalmente*, y no fue sino hasta 1967 que el físico John Wheeler usó el término *agujeros negros* para estos cuerpos durante una charla en el Instituto para Estudios Espaciales de la NASA (GISS por sus siglas en inglés). Durante esta conferencia un asistente le sugirió este término al escucharlo decir repetidas veces: objeto completamente colapsado gravitacionalmente. No obstante, se reportó que el término ya había sido usado anteriormente en un Simposio de Astrofísica Relativista en Dallas, Texas. Aún más, se tiene conocimiento de que ya en 1960 se escuchaba hablar al físico Robert H. Dicke acerca de los objetos gravitacionalmente colapsados con la propiedad análoga al Agujero Negro de Calcuta en donde encerraban una cantidad significativa de personas en un cuarto de dimensiones reducidas, simulando la compresión de la materia en el colapso gravitacional. De cualquier manera, fue hasta que Wheeler adoptó dicho término que la comunidad científica comenzó a adaptarlo de una manera entusiasta.

Durante el paso de los años otras soluciones a las ecuaciones de la relatividad general que modelan agujeros negros se encontraron, por ejemplo, poco después de la métrica de Schwarzschild, dos físicos, Reissner y Nordström, en 1916 y 1918 respectivamente, encontraron un espacio tiempo que representa un agujero negro estático eléctricamente cargado, el cual se obtiene a partir de resolver el sistema de ecuaciones Einstein-Maxwell. Sin embargo, este modelo no es muy relevante en astrofísica debido a que un agujero negro cargado en el universo sería neutralizado rápidamente.

Una espacio tiempo de interés para este trabajo es la famosa solución de Kerr. Pasaron alrededor de cincuenta años desde que se presentó la solución de Schwarzschild y Reissner-Nordström, para que Roy Kerr en 1963 encontrara una métrica más general que describiera el campo gravitacional de un objeto compacto [4]. Esta solución en el vacío a las ecuaciones de campo de la relatividad general describe la geometría de un agujero negro estacionario con rotación. La métrica de Kerr es por lo tanto más complicada. En 1968 B. Carter [5] encontró un nuevo tipo de integrales de movimiento en la métrica de Kerr relacionadas a las simetrías del espacio tiempo, tal que es posible estudiar la dinámica de partículas prueba y propagación de campos gravitacionales en esta métrica de fondo usando el método de separación de variables en la teoría de Hamilton-Jacobi.

A finales de los años 60s, ya se hablaba de teoremas que definen propiedades de los agujeros negros, como por ejemplo, que *los agujeros negros no tienen pelo*, lo que se interpreta en que los agujeros negros están definidos únicamente por tres parámetros: su masa, su espín y su carga. También que *los agujeros negros contienen una singularidad dentro del horizonte de eventos* lo que se conoce como la conjetura de censura cósmica de Penrose [6], y que se puede interpretar de la siguiente manera: no existe conexión causal entre los eventos en el interior de un agujero negro con los campos exteriores, y por lo tanto, lo que ocurre en la región singular no tiene influencia en la región exterior. También se encontró que *el área de los agujeros negros no puede decrecer*; entre otros resultados que hicieron posible construir una imagen cualitativa de la formación de un agujero negro, describir su posible evolución y su interacción con la materia y otros campos clásicos [7]. A pesar de que la conjetura de censura cósmica asegura que lo que ocurre dentro del horizonte de eventos no afecta en ningún sentido a eventos fuera de este, y por lo tanto el comportamiento singular de un agujero negro no altera ninguna ley física fuera del agujero negro, el problema de las singularidades -y hasta la fecha- seguía siendo un problema de gran interés y de gran importancia que los físicos relativistas estudiaban con gran entusiasmo, pues la teoría de la relatividad general, siendo la teoría moderna de la gravedad, por sí sola, seguía siendo incapaz de dar una descripción completa del espacio tiempo.

Se ha encontrado que las teorías cuánticas de la gravedad pueden corregir este comportamiento singular que la relatividad general no puede enfrentar. Por ejemplo, estas teorías efectivas introducen un *término de corte* en la longitud, del orden de la longitud de Planck tal que al reemplazar la región singular con una geometría tipo de Sitter a escalas de curvatura de Planck el espacio tiempo se vuelve libre de singularidades. Sin embargo, hasta la fecha no contamos con dichas teorías por lo que se tiene que proponer una solución clásica. Varias aproximaciones clásicas se han hecho al acoplar la gravedad con un tipo de

materia modelada a partir de electrodinámica no lineal.

En 1968 [8], en una Conferencia Internacional de Gravitación y de la Teoría de la Relatividad que se llevó a cabo en Tbilisi, en ese tiempo parte de la URSS, Bardeen fue el primero en presentar una solución clásica al problema de las singularidades, obteniendo una métrica esféricamente simétrica, estática y asintóticamente plana libre de singularidad en el centro de simetría. Desde entonces, se han propuesto muchas más soluciones tipo Bardeen [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]. No obstante, en ese momento no se sabía si estas métricas representaban una solución a las ecuaciones de campo pues no se conocía si había algún tipo de materia relacionada con estas. Fue en 1999 cuando Ayon-Beato y García [16] y posteriormente Burinskii y Hilderbrandt [17] que mostraron que las solución de Bardeen es una solución a las ecuaciones de campo con un tensor de energía momento dado por una electrodinámica no lineal, y el espacio tiempo describe un agujero negro con un monopolo magnético como fuente.

Uno de los recientes modelos de agujeros negros regulares más sencillos, se encuentra el modelo de Hayward [18] presentado en el año 2006. En este se propone una métrica para un espacio tiempo no singular esféricamente simétrico, como una generalización del espacio tiempo de Schwarzschild debido a la presencia de un parámetro del orden de la longitud de Planck. Hayward propone su métrica pidiendo que el espacio tiempo en la singularidad se comporte como un espacio tiempo tipo de Sitter y por lo tanto se vuelva regular en el centro. Similarmente al caso de Bardeen, no se obtuvo como solución a las ecuaciones de Einstein. Pasaron diez años para que Fan y Wang mostraran en [19, 20] que este espacio tiempo es solución a las ecuaciones de campo en presencia de una carga magnética en un campo electromagnético no lineal como fuente.

Posteriormente, a través del algoritmo de Newman-Janis, mediante en el cual se obtienen espacios tiempo axisimétricos a partir de soluciones esféricamente simétricas (en [21] se encuentra la derivación detalla del algoritmo) la versión rotante de la métrica de Hayward fue presentada por Bambi y Modesto [22], en el año 2013. Esta solución conserva la regularidad del espacio tiempo, sin embargo en [23, 24, 25] se mostró que la materia necesaria para producir la geometría de Hayward rotante, es solamente una aproximación rotante de la fuente magnética del espacio tiempo de Hayward no rotante.

## 1.2 Motivación, perspectivas y organización

La superficie que separa el interior del agujero negro del exterior se le conoce como el horizonte de eventos, y por definición, el interior de agujero negro, es una región escondida.

Debido a esto, una manera de observar el interior de un agujero negro es estudiando las propiedades del espacio tiempo cerca del horizonte. Dentro de la gran variedad de propiedades que se estudian, el análisis más básico que se realiza es el de partículas de prueba moviéndose en la vecindad del horizonte. Bastos estudios de geodésicas en diferentes espacios tiempo se han realizado a lo largo de muchos años, incluyendo en la vecindad de diferentes agujeros negros: Schwarzschild, Reissner-Nordström y Kerr. En estos trabajos se han presentado soluciones analíticas del movimiento de las partículas de prueba en términos de funciones elípticas, por ejemplo en [26, 27] para agujeros negros de Kerr. En el espacio tiempo de Hayward no rotante, un estudio de las geodésicas en el plano ecuatorial fue realizado por Abbas y Sabiullah en [28]. Sin embargo, las ecuaciones de las geodésicas para agujeros negros más generales, se vuelven más complicadas de resolver analíticamente, y por lo tanto soluciones cerradas a las órbitas no se pueden obtener. No obstante, las simetrías que puedan presentar los espacios tiempo se pueden usar para simplificar las ecuaciones de las geodésicas, y además, proveen de información relevante acerca del movimiento de partículas alrededor del agujero negro.

El estudio de geodésicas es importante y sirve como punto de inicio para distintos estudios de procesos físicos que ocurren en agujeros negros. Por ejemplo, si consideramos procesos de acreción. Usualmente, los estudios de acreción se enfocan únicamente en partículas que describen todo su movimiento en el plano ecuatorial ya que es el caso más sencillo, sin embargo, con un estudio de partículas moviéndose en todo el espacio los trabajos de acreción se vuelven más enriquecedores debido a que se puede considerar materia acretada en tres dimensiones. Por otro lado, la emisión en rayos  $X$  de un disco de acreción depende de la dinámica de las partículas que lo constituyen y de su interacción con los fotones circundantes.

Asimismo, en fenómenos de radiación gravitacional, el estudio de geodésicas fuera del plano ecuatorial se vuelve de particular interés. Por ejemplo, en el espacio tiempo de Kerr, la evolución de trayectorias está enteramente determinada por la energía radiada y el momento angular, y a su vez, la dinámica de las partículas determina el perfil de onda gravitacional que describe el sistema. Un estudio similar se puede llevar a cabo en un espacio tiempo más complicado, por decir, en la métrica de Hayward rotante.

En astrofísica se ha encontrado que las estrellas cuentan con rotación, y debido a esto, una vez que ocurre el colapso gravitacional de estrellas lo suficientemente masivas, se espera que los agujeros negros astrofísicos resultantes de este proceso cuenten con rotación. Aunque alguna parte del momento angular inicial de la estrella progenitora se pierda durante el proceso de formación del agujero negro, este debe conservar el momento an-

gular restante, por la ley de conservación del momento angular. De ahí que una de las soluciones a las ecuaciones de Einstein más importantes para la descripción de agujeros negros astrofísicos sea el espacio tiempo de Kerr [33].

No obstante, el proyecto *Event Horizon Telescope* ha presentado las recientes observaciones con las que gracias a ellas, por primera vez, se ha obtenido la imagen de la sombra de un agujero negro supermasivo en el centro de la galaxia M87 [30]. Por ahora esta imagen no solo es consistente con la sombra de un agujero negro de Kerr, sino también, por ejemplo, con la correspondiente a un objeto compacto llamado *superspinar*<sup>1</sup> [34]. Por esta razón, es importante el estudio de espacios tiempo alternativos a la solución de Kerr, como el que se presenta en esta tesis, y el estudio de geodésicas alrededor de agujeros negros regulares rotantes es una manera conveniente para explorar otras geometrías alternativas a los agujeros negros clásicos. Adicionalmente, estos estudios contribuirán a un mejor entendimiento de los datos que se obtengan en el futuro.

Es interesante buscar alternativas a los agujeros negros que presentan una singularidad en su estructura, y posteriormente probar dichas soluciones para obtener implicaciones físicas y astrofísicas, de tal manera que se ponga a prueba la viabilidad de estas.

Por ello, para esta tesis se ha considerado regularizar el espacio tiempo en los agujeros negros basándonos en la idea de *sanar* la región singular dejando de lado la suposición de una teoría cuántica de la gravedad subyacente para explicar la naturaleza de esta región. Ya se ha mencionado que esto se logra debido a que la aparente presencia de una singularidad se puede evitar desde un enfoque semi clásico.

El hecho de evitar la idea de una teoría cuántica para la gravedad no es sinónimo de apatía con la unificación de ambos mecanismos. Aunque es cierto que aún falta un largo trayecto para llegar a esta ambiciosa teoría, y que también es probable que sea muy tardado encontrarla debido a que ambas interacciones son de distinta naturaleza, es importante no dejar de lado la necesidad y la curiosidad de los humanos por entender la naturaleza a un nivel fundamental, y seguir impulsando el desarrollo del conocimiento de frontera gracias al cual probablemente se logre la tan esperada unificación de las interacciones gravitacionales en sistemas que involucren fenómenos cuánticos.

El objetivo de esta tesis es investigar las características de las trayectorias de partículas de prueba alrededor de un agujero negro regular tipo Hayward con rotación.

De todos los modelos regulares con rotación, el modelo de Hayward rotante es, matemáticamente, uno de los más simples, y por lo tanto, un fuerte candidato para existir en la naturaleza y modelar agujeros negros astrofísicos. Por esta razón se buscan desviaciones

---

<sup>1</sup>Un superspinar es un objeto compacto con grandes valores de momento angular tal que viola el límite de Kerr  $|a| \leq m$ , donde  $a = J/m$ ,  $J$  es el momento angular y  $m$  la masa.

del modelo singular de Kerr en las trayectorias de partículas alrededor de cada agujero negro.

Uno de los métodos que se utiliza en este trabajo para obtener información y estudiar el comportamiento de las trayectorias de las partículas de prueba es a través de los potenciales efectivos, además de resolver numéricamente las ecuaciones de movimiento dentro y fuera del plano ecuatorial. En esta tesis se estudian las geodésicas de partículas masivas en la vecindad de un agujero negro de Hayward con rotación en todo el espacio.

Como se muestra en los resultados, se encontraron diferencias en las geodésicas, y estas, a su vez, permiten concluir la naturaleza de los agujeros negros que existen en el Universo a partir de observaciones de astrometría detalladas.

El estudio geodésico se restringió a partículas masivas, y aunque en la literatura se encuentran diversos trabajos del movimiento de fotones, se decidió omitir este análisis por el hecho de que para trabajar geodésicas nulas, se tiene que tomar en cuenta la interacción de los fotones con la fuente de electromagnetismo no lineal. Debido a esto, realizar dicho estudio se encuentra fuera de los objetivos de la presente tesis. No obstante, no se descarta la posibilidad para trabajo a futuro como complemento al que se presenta aquí.

Además de realizar el análisis del movimiento geodésico también se estudia la estructura del agujero negro de Hayward con rotación. La estructura está caracterizada por dos regiones que determinan algunas de las propiedades importantes del espacio tiempo. Estas regiones están separadas por dos superficies, el horizonte de eventos y la ergosfera. De igual manera, se realiza la comparación entre el modelo regular de Hayward rotante y el modelo singular de Kerr. Estas diferencias en la estructura entre ambos escenarios son importantes debido a que, a su vez, estas se reflejan en el comportamiento de las partículas de prueba.

La organización de esta tesis es la siguiente. En el Capítulo 2 se presentan aspectos fundamentales de las primeras soluciones de agujeros negros que se obtuvieron como soluciones a las ecuaciones de campo de la relatividad general. En el Capítulo 3 se presentan las propiedades del espacio tiempo regular de Hayward para el caso estático y el caso rotante. En el Capítulo 4 se presentan las ecuaciones y el análisis del movimiento de partículas masivas en el espacio tiempo de Hayward con rotación. Y para finalizar, en el Capítulo 5 se presentan las discusiones y conclusiones que se obtuvieron a partir de los resultados de este trabajo.

En las siguientes secciones y a lo largo de la tesis, se encuentran distintas definiciones y teoremas que son importantes, ya sea porque son necesarias como parte del desarrollo de la tesis o para complementar el trabajo y así ayudar al lector para adquirir una mejor apre-

ciación de las ideas que se quieren transmitir; sin embargo, es necesario mencionar que en algunos casos no se ha buscado formalidad debido a no ser necesaria para desarrollar una idea, y en otros casos se encuentra fuera de los objetivos de la tesis. Si el lector considera necesario el estudio formal de dichos teoremas y definiciones que aquí se mencionan, puede recurrir al Capítulo 6, en donde se muestra una amplia bibliografía de diversos estudios que pueden facilitar una mejor comprensión por parte del lector.

### 1.3 Propiedades generales de los agujeros negros

La idea de un agujero negro ya estaba clara desde la teoría newtoniana para la gravedad aunque no era aceptada. Como se discutió anteriormente, el radio gravitacional resulta ser el radio de un cuerpo para el cual la velocidad de escape para dicho objeto sea igual a la velocidad de la luz. La idea de objetos que pudieran tener este radio la presentó John Michell y a su vez Pierre-Simon Laplace a finales del siglo XVIII. Postularon que en la naturaleza podrían existir *estrellas oscuras*, cuya atracción gravitacional fuese lo suficientemente grande tal que la velocidad de escape superara la velocidad de la luz, y por lo tanto esta no pudiera escapar. Dicha idea fue descartada por la comunidad científica y pasó a ser olvidada. No fue sino hasta que nació la teoría de la relatividad general, cuando se recupera este concepto desde un enfoque completamente distinto. Con una idea simple pero ingeniosa, la teoría moderna de la gravedad propone que toda forma de materia curva al espacio tiempo y a su vez el espacio tiempo rige el movimiento de la materia. En otras palabras, la gravedad solo es una manifestación de la curvatura del espacio tiempo. De acuerdo con esta idea, dentro de la teoría encontramos objetos en donde la gravedad es tan intensa que aún la luz no puede continuar su trayectoria natural quedando atrapada por la curvatura originada por estos objetos. Esta es la definición de un *agujero negro*.

Formalmente, un agujero negro está definido en el espacio tiempo a través de su *horizonte de eventos*, región que divide a los puntos que están conectados con el infinito causal a través de trayectorias nulas y aquellos que no lo están.

De acuerdo a la definición de Roger Penrose, tenemos

**Definición 1.3.1** Horizonte de eventos. *El horizonte de eventos en una superficie en el espacio tiempo formada por geodésicas nulas o generadoras que no tienen puntos finales en el futuro. Así, el horizonte de eventos es una superficie nula.*

Como se mencionó anteriormente, todos los eventos que ocurren en esta región están causalmente desconectados con los eventos que se dan lugar fuera, en el resto del universo.

A partir de la definición 1.3.1, podemos definir a un agujero negro de la siguiente manera

**Definición 1.3.2** Agujero negro. *Un agujero negro es una región en el espacio tiempo de todos los puntos tales que no están conectados con el infinito a través de geodésicas nulas.*

El horizonte de eventos previene a un observador fuera del agujero negro de obtener información proveniente dentro de dicha región, la única manera de saber qué ocurre dentro es cruzar el horizonte de eventos y eventualmente caer dentro del agujero negro. Por lo tanto, la existencia de esta superficie es inevitable a la hora de la formación de un agujero negro, y por lo tanto, la estructura causal del espacio tiempo cambia, como veremos en los ejemplos de espacios tiempos con horizonte de eventos.

Cuando se tienen espacios tiempo que describen agujeros negros con rotación, resulta de gran interés una superficie que se genera a partir del momento angular del agujero negro. Esta superficie se le conoce como *ergosfera* o *ergoregión*. La ergoregión está relacionada con la otra superficie de gran interés, la *superficie de límite estático*, que se define como sigue

**Definición 1.3.3** Superficie de límite estático. *La superficie de límite estático se define como la superficie a partir de la cual una curva con coordenadas espaciales constantes pasa de ser temporaloide a ser espacialoide y viceversa, y para la cual todos los observadores que cruzan esta superficie se mueven en el mismo sentido que la rotación del agujero negro.*

De esta manera podemos definir la ergosuperficie

**Definición 1.3.4** Ergosuperficie. *Si consideramos un observador tipo tiempo con 4-velocidad  $u^\mu = (u^t, 0, 0, 0)$  se cumple la relación,  $g_{tt}u^t u^t < 0$ . La ergosuperficie se define como la superficie de límite estático tal que se cumple la ecuación  $g_{tt} = 0$ .*

La ergosuperficie se encuentra localizada fuera del horizonte de eventos y de acuerdo a la definición, un observador que cruza esta superficie comienza a rotar en la misma dirección de rotación del agujero negro. Esto implica que entre el horizonte de eventos y la ergosuperficie existe una región donde ningún observador estacionario puede existir, y esta región recibe el nombre *ergoregión*.

En esta región se da lugar el mecanismo de Penrose, el cual describe la posible extracción energética de una partícula a través de la desintegración de partículas en esta región. Supongamos que tenemos una partícula incidente con energía  $E_0$ , tal que en la ergoregión esta se desintegra en dos partículas, tal que una de ellas, la partícula 1, cuenta con energía  $E_1$  y la partícula 2 con energía  $E_2$ , y las energías son de la forma  $E_1 < 0$  y  $E_2 > 0$ . La partícula 1 cae al agujero negro mientras que la partícula 2 sale de la ergoregión al infinito.



Se cumple que  $E_2 > E_0$  y por lo tanto se ha extraído energía del agujero negro.

Debido a este proceso el agujero negro pierde momento angular hasta cierto límite.

A continuación se expondrá otra característica de los agujeros negros que es la existencia de regiones singulares como parte de su estructura y las implicaciones de estas dentro de la teoría.

### 1.4 Consideraciones sobre las singularidades en los agujeros negros

Relatividad General no ha sido la única teoría que presenta divergencias en su estructura matemática. La presencia de singularidades es un problema que aparece en distintas áreas de la física clásica en donde implica una ruptura en la teoría. Es decir, la teoría deja de describir apropiadamente los fenómenos físicos cuando nos acercamos al límite en el que la singularidad está presente.

Parece improbable que la naturaleza cuente con estas regiones en donde sea imposible describir el comportamiento en esa región. Debido a esto, mucha gente ha dedicado su trabajo al desarrollo de técnicas para extender las teorías clásicas tal que estos nuevos enfoques sean capaces de explicar la naturaleza de estos puntos divergentes.

Una teoría clásica que presenta este tipo de comportamiento es el electromagnetismo, en donde encontramos, por ejemplo, que el potencial de Coulomb, que va como

$$\phi \sim \frac{q}{r}, \quad (1.2)$$

resulta tener una singularidad cuando  $r \rightarrow 0$ . Cuando  $r = 0$ , pareciera que la electrodinámica clásica pierde sentido, y por lo tanto, para entender el comportamiento de la naturaleza del electromagnetismo, se tiene que estudiar a partir de la electrodinámica cuántica. Un problema similar se encuentra en la teoría Newtoniana para la gravedad, en donde el potencial gravitacional tiene la misma forma inversa lineal en  $r$  que se encuentra en el electromagnetismo

$$\phi \sim \frac{M}{r}, \quad (1.3)$$

y el comportamiento divergente se da, de igual manera, en  $r = 0$ . Desde Newton, los científicos se han preguntado acerca de la naturaleza de estos puntos divergentes, sobre cuál es su significado y si presenta un *riesgo* para que la teoría describa adecuadamente los fenómenos naturales; la teoría de la relatividad general no es una teoría libre de singularidades.

Los agujeros negros son matemáticamente permitidos por la teoría y físicamente acep-

tables; aún si estas soluciones presentan una singularidad física dentro del horizonte de eventos <sup>2</sup>, se espera su formación como consecuencia del colapso gravitacional de estrellas masivas.

El proceso de colapso gravitacional comienza cuando las estrellas dejan de producir suficiente combustible nuclear para realizar el proceso de fusión. La gravedad comienza a ganar la disputa contra la fuerza de repulsión, y por lo tanto, si la estrella no tiene suficiente masa (alrededor de  $5M_{\odot}$ ) entonces el objeto remanente será una enana blanca o una estrella de neutrones; sin embargo, si la estrella rebasa este límite, comienza a compactificarse lo suficiente hasta las escalas de la longitud de Planck, unos  $10^{-33}$  cm. El material dentro de esta empieza a interactuar de una manera mecánico cuántica, y estos efectos cuánticos deberían influir en el espacio tiempo mismo. En ese sentido, relatividad general, por ser una teoría que describe la dinámica del espacio tiempo, debería ser capaz de explicar la naturaleza de estas interacciones gravitacionales. Sin embargo, no es así.

Que la naturaleza de las regiones singulares no pueda ser descrita por la relatividad general habla de dos casos: 1. que la teoría es incompleta, y por lo tanto la descripción de la naturaleza de esta singularidad se encuentra fuera de su dominio y habría que extenderla una teoría cuántica de la gravedad, es decir, para una descripción apropiada a estas escalas es preciso tratar con una teoría cuántica de la gravedad, pues la relatividad general es una teoría completamente clásica; 2. que realmente estas regiones singulares en los agujeros negros no existan en la naturaleza, es decir, la verdadera descripción sea a partir de considerar una forma de materia que permita la no singularidad de la región <sup>3</sup>.

Considerando el primer punto, diversas teorías candidatas para describir la interacción entre la gravedad y la mecánica cuántica han sido propuestas al paso del tiempo, por ejemplo: teoría de cuerdas, gravedad cuántica de lazos, etc. Sin embargo, por ahora, no hay alguna que sea más favorable sobre la otra.

El segundo punto habla de una alternativa a estas regiones singulares, y se obtiene a partir de un enfoque semi clásico, en donde se considera regularizar el espacio tiempo sustituyendo la singularidad por un núcleo de materia exótica, como podría ser, en principio, electrodinámica no lineal.

En esta tesis se considera el segundo contexto . Es importante mencionar que a partir de

---

<sup>2</sup>Otra solución que presenta una singularidad en relatividad general es la métrica de Friedman-Robertson-Walker que modela al universo a gran escala. Esta singularidad es de diferente naturaleza a las que encontramos en agujeros negros.

<sup>3</sup>Esto no implica que la relatividad general sea la teoría definitiva para describir las interacciones gravitacionales. En este trabajo solo se considera la posible existencia o no existencia de estas regiones singulares en la estructura de los agujeros negros. La existencia de las singularidades es solo uno de los fenómenos que se explicaría a partir de una teoría cuántica de la gravedad.

teorías de gravedad cuántica también es posible evitar la singularidad de tal manera que el espacio tiempo se vuelva regular, no obstante este enfoque está fuera de los objetivos de este trabajo.

#### 1.4.1 Singularidades en relatividad general

La estructura matemática del espacio tiempo está representada por una variedad pseudo riemanniana cuatro dimensional, lo que implica que para cualquier punto del espacio tiempo es posible encontrar una región lo suficientemente pequeña tal que recuperemos el espacio tiempo de Minkowski (localmente el espacio tiempo es plano). En otras palabras, el espacio tiempo que describe nuestro Universo es una región bien comportada en todos sus puntos.

Se puede entender a una singularidad como un punto divergente en una magnitud física de interés. En el caso de la relatividad general, una singularidad define un punto en donde los escalares de curvatura del espacio tiempo toman valores infinitos.

Dada esta definición, es natural pensar instantáneamente que una singularidad no representa un punto en el espacio tiempo, pues es claro que ahí no se cumple la definición de variedad diferencial.

Esta noción es la más común para localizar singularidades en espacios tiempos que describen agujeros negros. En la siguiente sección se estudia a detalle cómo es que esta definición es de gran ayuda para encontrar la singularidad en las métricas de interés.

No obstante, esta definición tiene fallas, por ejemplo, cuando la curvatura de un espacio tiempo diverge en infinito, ya que este no se considera como singular. Debido a esto, existen otras definiciones para singularidad, como por ejemplo a través de las geodésicas: *Un espacio tiempo se dice ser singular si existe al menos una geodésica inextensible de longitud finita*. Este concepto es el llamado: incompletez geodésica.

El problema de las singularidades retomó relevancia en los años 70s principalmente por Roger Penrose y Stephen Hawking. A partir de estos trabajos se obtuvo como resultado los teoremas de singularidad en Relatividad General. En particular uno de los teoremas que trabajó Penrose es el siguiente:

**Teorema 1.4.1** Segundo Teorema de Singularidad *Bajo condiciones de causalidad y densidad de energía positiva, si existe una superficie atrapada, las cuales se forman durante el colapso gravitacional, dan como resultado singularidades en el espacio tiempo.*

Una superficie atrapada tiene la siguiente definición:

**Definición 1.4.1** Superficie atrapada. *Una superficie atrapada es una variedad compacta, tipo tiempo, 2-dimensional con la propiedad de que los rayos de luz salientes dirigidos hacia el futuro convergen.*

De acuerdo a este teorema, debido al colapso gravitacional siempre se formará una singularidad, y por lo tanto la misma teoría permite la formación de la región singular.

No obstante, a pesar de que gracias a los teoremas de singularidad se han sabido diferentes propiedades de los agujeros negros y sus singularidades, no dan ninguna información acerca de la naturaleza física de estas.

En las siguientes secciones se brinda una descripción acerca de la materia que produce la existencia de agujeros negros regulares. Este tipo de materia viola las condiciones de energía positiva y por lo tanto, es posible violar el teorema de Penrose, tal que se pueden formar agujeros negros no singulares a partir del colapso gravitacional y por lo tanto ser buenos candidatos para competir con la solución de Kerr como modelo que describan a los agujeros negros astrofísicos.

A lo largo de la tesis se usa el sistema geométrico de unidades  $G = c = 1$ .

# 2

## Aspectos fundamentales de agujeros negros singulares

En la sección anterior se ha mencionado que unos meses después de haber presentado la teoría de la relatividad general, en febrero del año 1916, Karl Schwarzschild, físico alemán, obtuvo de manera exacta la primer solución a las ecuaciones de campo [1], mientras este se encontraba en un hospital por haber sido parte del ejercito alemán durante la Primera Guerra Mundial.

No obstante, no fue el único que llegó a la solución que hoy lleva su nombre. Para mayo de 1916, otro físico alemán de nombre Droste había presentado los resultados de su trabajo a la Academia Alemana de Ciencias. Dicho trabajo se titulaba *The field of a single centre in Einstein's theory of gravitation, and the motion of a particle in that field*, en donde presenta la métrica que Schwarzschild había descrito unos meses atrás e incluso hablaba acerca del movimiento de una partícula puntual en este espacio tiempo. Sin embargo, la mayoría de físicos hablaban únicamente acerca de *la solución de Schwarzschild* sin darle crédito a Droste.

La importancia de la métrica Schwarzschild se hace evidente gracias al teorema de Birkhoff, mencionado en la sección anterior. El comportamiento natural asintótico al espacio tiempo de Minkowski, el cual se espera que ocurra en la naturaleza, es parte de la misma solución. Aún más, esta solución no solo describe la geometría de un agujero negro esférico, también describe el campo gravitacional fuera de una estrella esférica de radio  $R$  y

densidad constante  $\rho_0$ . La solución dentro de una estrella posteriormente fue estudiada a detalle por R.C. Tolman, J.R. Oppenheimer y G.M. Volkoff.

De la misma manera, es importante estudiar el modelo rotante que generaliza la solución de Schwarzschild, el espacio tiempo de Kerr. Los modelos más prometedores para representar agujeros negros astrofísicos son aquellos que cuentan con momento angular, por lo tanto, la solución de Kerr presenta mayor importancia en escenarios de astrofísica.

A continuación estudiaremos las soluciones de agujero negro de Schwarzschild y de Kerr a las ecuaciones de campo de la relatividad general y sus propiedades.

## 2.1 El espacio tiempo de Schwarzschild

La solución de Schwarzschild a las ecuaciones de Einstein describe un espacio tiempo estático, en simetría esférica y en el vacío,

$$R_{\mu\nu} = 0 . \quad (2.1)$$

Se propone una métrica de la forma

$$ds^2 = -F dt^2 + G(dx^2 + dy^2 + dz^2) + H(xdx + ydy + zdz)^2 , \quad (2.2)$$

en donde las funciones  $F$ ,  $G$  y  $H$  se definen como

$$\begin{aligned} F &= F((x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}) , \\ G &= G((x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}) , \\ H &= H((x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}) . \end{aligned}$$

En coordenadas esféricas tradicionales se obtiene el intervalo

$$ds^2 = -F dt^2 + (G + r^2 H) dr^2 + Gr^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (2.3)$$

$$= -f_0 dt^2 + f_1 dr^2 + f_2 (d\vartheta + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) . \quad (2.4)$$

donde  $f_0$ ,  $f_1$  y  $f_2$  son funciones arbitrarias redefinidas en términos de  $F$ ,  $G$  y  $H$ .

Si exigimos que  $\det(g_{\mu\nu}) = -1$ . las ecuaciones de Einstein se escriben como

$$\partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\nu\alpha} = 0 . \quad (2.5)$$

Por otro lado, para Minkowski en coordenadas esféricas, se tiene  $\det(\eta_{\mu\nu}) = -r^4 \sin^2 \vartheta$  y por lo tanto el elemento de volumen espacial, definido como  $dV = \sqrt{-g} d^3x$ , con  $g = \eta$  es entonces,  $dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$ .

Definimos dos nuevas funciones  $x = \frac{r^3}{3}$  y  $\psi = -\cos \vartheta$ , tal que el elemento de volumen es entonces

$$dV = dx d\psi d\varphi \quad \Rightarrow \quad \eta = -1 .$$

En estas variables el elemento de línea es

$$ds^2 = -f_0 dt^2 + f_1 dx^2 + f_2 \left[ \frac{d\psi^2}{1-\psi^2} + (1-\psi^2) d\varphi^2 \right] , \quad (2.6)$$

y a partir de la condición del determinante se obtiene  $f_0 f_1 f_2^2 = 1$ . El comportamiento asintótico cuando  $x \rightarrow \infty$  es

$$f_0 \rightarrow 1 , \quad f_1 \rightarrow \frac{1}{r^4} \text{ y } f_2 \rightarrow r^2 . \quad (2.7)$$

A partir del cálculo de los símbolos de Christoffel, obtenemos para las ecuaciones de Einstein (2.5)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{f'_1}{f_1} \right) &= \frac{1}{2} \left( \frac{f'_1}{f_1} \right)^2 + \left( \frac{f'_2}{f_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{f'_0}{f_0} \right)^2 , \\ \frac{d}{dx} \left( \frac{f'_2}{f_1} \right) &= 2 + \frac{1}{f_1 f_2} (f'_2)^2 , \\ \frac{d}{dx} \left( \frac{f'_0}{f_1} \right) &= \frac{1}{f_1 f_0} (f'_0)^2 , \\ f_0 f_1 f_2^2 = 1 &\Rightarrow \left( \frac{f'_1}{f_1} \right) = \frac{f'_1}{f_1} + \frac{2f'_2}{f_2} + \frac{f'_0}{f_0} = 0 , \end{aligned}$$

y resolviendo para  $f_0$ ,  $f_1$  y  $f_2$ , obtenemos

$$f_0 = 1 - \alpha(3x + \rho)^{-1/3} , \quad (2.8)$$

$$f_1 = \frac{(3x + \rho)^{-4/3}}{1 - \alpha(3x + \rho)^{-1/3}} , \quad (2.9)$$

$$f_2 = (3x + \rho)^{2/3} . \quad (2.10)$$

En donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes de integración. A partir de la expresión para  $f_1$  se puede observar que haciendo  $\alpha(3x + \rho)^{-1/3} = 1$  se tiene una singularidad. Ahora, si la singularidad

ocurre en  $x = 0 \Rightarrow \rho = \alpha^3$  y por lo tanto

$$3x + \rho = 3x + \alpha^3 = r^3 + \alpha^3 ,$$

y podemos definir  $R = (r^3 + \alpha^3)^{1/3}$  tal que  $f_0, f_1$  y  $f_2$  obtienen la forma

$$f_0 = 1 - \frac{\alpha}{R}, \quad f_1 = \frac{1}{R^4} \left[ \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{R}} \right], \quad f_2 = R^2, \quad (2.11)$$

y el elemento de línea se reescribe como

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{\alpha}{R} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{\alpha}{R} \right)^{-1} dR^2 + R^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (2.12)$$

La constante  $\alpha$  se determina a partir del límite de campo débil, y por lo tanto  $\alpha = 2m$ . Debido a esto, el punto singular corresponde a  $r = 0 \Rightarrow R^3 = \alpha^3$ , es decir  $R = 2m$ .

Usualmente, no se hace la diferencia entre la variable  $R$  (radio de área) de la ecuación (2.12) y la variable radial  $r$  de las coordenadas esféricas usuales debido al isomorfismo entre el grupo de isometría<sup>1</sup> del espacio tiempo esféricamente simétrico y el grupo SO(3).  $R$  se define como  $R = (A/4\pi)^{1/2}$  donde  $A$  es el área total de la 2-esfera del espacio tiempo, y  $A$  es un múltiplo de la 2-esfera unitaria. Llamándole  $r$  al radio de área, la métrica (2.12) se escribe como:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \quad (2.13)$$

con

$$f(r) = 1 - \frac{2m}{r}, \quad (2.14)$$

donde  $m$  representa la masa del objeto. La métrica (2.13) está escrita en coordenadas de Boyer-Lindquist.

Esta es una solución en el vacío, esféricamente simétrica y estática, y representa lo que hoy en día conocemos como un agujero negro de Schwarzschild.

A partir de la ecuación (2.13) se observa trivialmente que ocurren dos situaciones peculiares cuando  $r = 2M$  y  $r = 0$ . Como se ha hecho notar en la sección anterior, naturalmente nace la pregunta sobre qué es lo que sucede con el espacio tiempo en estos dos valores de la coordenada  $r$ , pues la métrica se vuelve singular en esos puntos.

A pesar de que la comunidad de físicos notaron que existían estos dos puntos especiales

---

<sup>1</sup>Un espacio tiempo es esféricamente simétrico si su grupo de isometría contiene un subgrupo isomórfico al grupo SO(3), y las órbitas de este subgrupo son esferas dos dimensionales [36].



en la métrica de Schwarzschild, nunca consideraron de gran importancia darles una explicación. Ellos consideraban imposible que un objeto fuese tan denso que se tuvieran que considerar estos límites de la teoría.

Por lo tanto, encontrar una explicación a estos puntos singulares llevó varios años y lo que se encontró es que existen dos tipos de singularidades, una relacionada a la descripción coordenada del espacio tiempo y que es fácil evadir al hacer un cambio de coordenadas conveniente, y otra relacionada a la misma naturaleza del espacio tiempo. Entonces, definimos las *singularidades coordenadas* como lugares en donde las coordenadas que estamos utilizando para describir la geometría del espacio tiempo no lo describen correctamente [35]. Mientras que las *singularidades físicas* se definen como aquellos lugares en donde los valores de los escalares de curvatura del espacio tiempo, las densidades de materia, y otras cantidades físicas, toman valores infinitos, y estos no dependen de la elección de coordenadas [36]. Se habla de que este último tipo de singularidades demuestran una ruptura la relatividad general y por lo tanto son las que nos interesan.

En 1933, Lemaître fue el primero en demostrar que  $r = 2m$  representa una singularidad que puede desaparecer haciendo un cambio de coordenadas. Posteriormente Finkelstein, confirmó que esta singularidad es coordenada escribiendo el elemento de línea de Schwarzschild en las coordenadas que hoy en día conocemos como Eddington-Finkelstein.

No obstante, siguiendo esta línea para métricas más generales, se vuelve bastante complicado encontrar sistemas de coordenadas que nos permitan identificar y distinguir las singularidades físicas de las coordenadas. Para ello, es necesario construir un invariante tal que al evaluarlo en cualquier lugar del espacio tiempo seamos capaces de asegurar la existencia, o no existencia, de una singularidad física en dicho espacio tiempo. Este invariante es el llamado *invariante de Kretschmann*, el cual se define como la contracción en los cuatro índices del tensor de Riemann con él mismo.

Para la métrica de Schwarzschild, se encuentra que la forma del invariante es la siguiente

$$R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48m^2}{r^6} . \quad (2.15)$$

Es fácil observar que cuando evaluamos  $r = 2m$ , el escalar Kretschmann tiene un valor bien definido y es por lo tanto una superficie regular de la variedad. Sin embargo, al evaluar  $r = 0$ , encontramos que el invariante tiende a infinito, por lo que representa una singularidad física, como se ha hecho mención anteriormente. Teóricamente es importante ser capaces de dar una descripción detallada en cualquier región del espacio tiempo, así como conceptualmente es interesante estudiar la fenomenología. Por esta razón, como

parte del estudio del espacio tiempo de Schwarzschild, es conveniente entender qué ocurre en la región del agujero negro dentro del horizonte de eventos. Para este fin se introduce una variable  $\delta$  tal que la definimos como  $\delta = 2m - r$  con  $r < r_s$ , y por lo tanto se cumple que  $\delta > 0$  [35]. En términos de esta nueva variable, el elemento de línea se escribe como

$$ds^2 = \frac{\delta}{2m - \delta} dt^2 - \frac{2m - \delta}{\delta} d\delta^2 + (2m - \delta)^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (2.16)$$

Si consideramos una línea tal que  $t$ ,  $\vartheta$  y  $\varphi$  sean constantes, obtenemos

$$ds^2 = -\frac{2m - \delta}{\delta} d\delta^2 < 0, \quad (2.17)$$

y vemos que  $\delta$ , y por consiguiente  $r$ , es una coordenada tipo tiempo, mientras que la coordenada  $t$  ahora es tipo espacio. Esto quiere decir que la singularidad  $r = 0$  es tipo tiempo y un observador que esté cayendo en el agujero negro, inevitablemente chocará con la singularidad pues siempre estará avanzando hacia adelante en el tiempo (¡no puede viajar al pasado!).

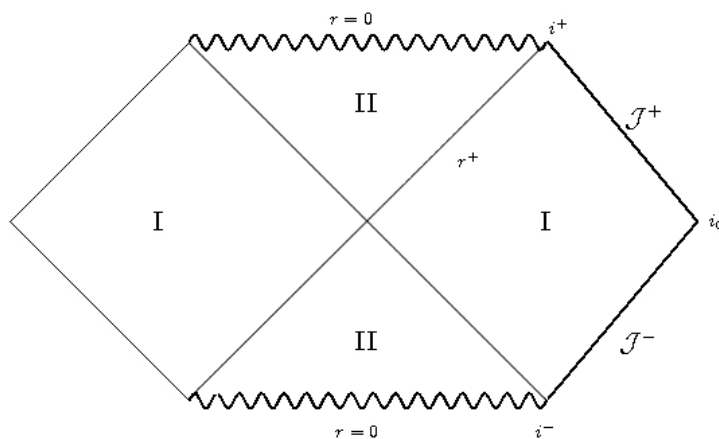


Figura 2.1: Diagrama de Penrose-Carter para el espacio tiempo de Schwarzschild. Imagen inspirada en la ref. [39]

Esto se puede ilustrar mediante el diagrama de Penrose para el espacio tiempo de Schwarzschild en la Figura 2.1. La región I representa el Universo y la región II la región del agujero negro,  $i_0$  los infinitos espaciales,  $i^+$  el infinito temporal futuro,  $i^-$  el infinito temporal pasado  $\mathcal{J}^+$  el futuro infinito nulo, mientras que  $\mathcal{J}^-$  representa el pasado infinito nulo y  $r^+$  el horizonte de eventos. La línea curvada representa la singularidad en  $r = 0$  tipo tiempo, como se había dicho anteriormente.

Cualquier suceso que ocurra dentro de la región II está causalmente desconectado de los

sucesos en la región I e inevitablemente llegará a la singularidad.

### 2.1.1 Horizonte de eventos

A pesar de los constantes esfuerzos por entender la naturaleza de las regiones en  $r = 0$  y en  $r = 2m$ , fue hasta 1958 que se logró dar una interpretación adecuada de lo que representa la superficie en  $r = 2m$  gracias a Finkelstein. Él define al horizonte de eventos como una superficie en la que se puede cruzar únicamente en una dirección y al pasar a través de ella cambia la naturaleza de las curvas con  $r = \text{cte}$ . Es decir, este espacio tiempo tiene la propiedad de que el horizonte de eventos coincide con la superficie de límite estático. Esto ya no se cumple para modelos más generales, por ejemplo, para el agujero negro tipo Kerr.

Al hacer una transformación de coordenadas de Boyer-Lindquist a las coordenadas de Kruskal-Szekeres, obtenemos que en la superficie  $r = 2m$  cualquier geodésica nula que comience en un punto sobre la superficie es tangente a todos los puntos de la misma superficie. Por lo tanto el horizonte de eventos está definido, en coordenadas de Boyer-Lindquist a través de las siguiente relación

$$r_s - 2m = 0 , \quad (2.18)$$

y por lo tanto  $r_+$  es la superficie definida por

$$r_s = 2m , \quad (2.19)$$

como se observa en la Figura 2.2.

## 2.2 El espacio tiempo de Kerr

Sabemos que la mayoría de los planetas, lunas, y en particular, las estrellas cuentan con rotación, por lo que se espera que después de colapsar gravitacionalmente, si un objeto cuenta con la masa necesaria se convertirá en un agujero negro que por conservación de momento angular esté dotado con rotación [33]. Es por eso, entre otras razones, que la geometría de Schwarzschild es muy poco probable que describa agujeros negros astrofísicos, mientras que la métrica Kerr continúa siendo el modelo más favorable.

Debido a esto, es importante generalizar la solución de Schwarzschild a una que describa un objeto compacto con momento angular, tal que ahora tenemos una dirección de movi-

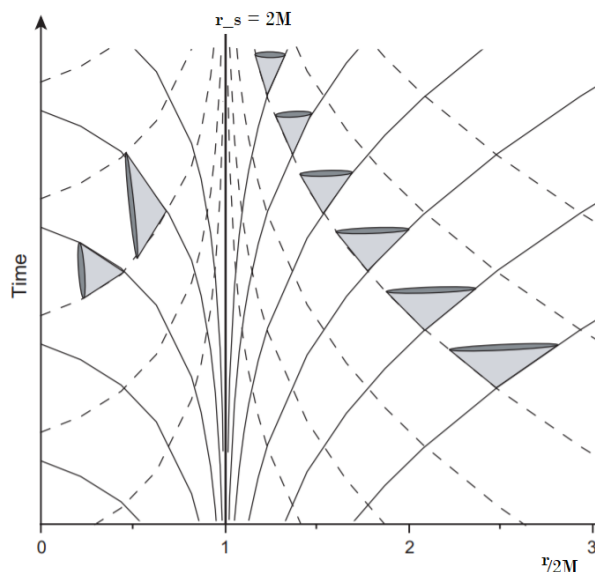


Figura 2.2: Diagrama de espacio tiempo en la vecindad del horizonte de eventos para el espacio tiempo de Schwarzschild. Se observa que los conos de luz están dirigidos hacia la singularidad para regiones con  $r < r_s$  el horizonte de eventos. Imagen tomada de [40]

miento privilegiada. La primer aproximación para encontrar dicho espacio tiempo se dio en 1932 con Lewis. Sin embargo no fue sino hasta 1963 que el físico Roy Kerr presentó esta nueva solución a las ecuaciones de Einstein [4]. Esta solución representa un espacio tiempo en el vacío, axialmente simétrico y estático.

La métrica escrita en coordenadas de Kerr, es

$$ds^2 = (r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta)(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) + 2(du + a \sin^2 \vartheta d\varphi) \times (dr + a \sin^2 \vartheta d\varphi) - \left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta}\right) (du + a \sin^2 \vartheta d\varphi)^2, \quad (2.20)$$

donde  $a$  es el parámetro de espín relacionado con el momento angular total  $J$ , de acuerdo a  $a = J/m$ . Asimismo, esta métrica tiene la propiedad de que cuando  $a = 0$  recuperamos la métrica esféricamente simétrica ec (2.13) de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein. La ec (2.20) representa un espacio tiempo estacionario con simetría axial.

Como en el caso del agujero negro de Schwarzschild, la métrica de Kerr también cuenta con una singularidad física. Las componentes de la base coordenada no son singulares y definen una métrica *bien comportada* siempre excepto cuando  $r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta = 0$ , como se puede inferir directamente de la métrica (2.20). A partir del escalar de Kretschmann se

puede ver [41]

$$R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48m^2(r - a^2 \cos^2 \vartheta)[(a^2 \cos^2 \vartheta)^2 - 16r^2 a^2 \cos^2 \vartheta]}{(r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta)^6}, \quad (2.21)$$

de donde la singularidad física se encuentra, como habíamos deducido anteriormente, cuando  $r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta = 0$ , es decir, cuando ocurre

$$r = 0 \quad ; \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}. \quad (2.22)$$

que además resulta ser la única singularidad en estas coordenadas.

Kerr, en el mismo artículo [4] presenta el elemento de línea (2.20) escrito en un sistema de coordenadas asintóticamente planas a partir de las siguientes transformaciones

$$\begin{aligned} x &= (r \cos \varphi + a \sin \varphi) \sin \vartheta = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \vartheta \cos[\varphi - \arctan(a/r)], \\ y &= (r \sin \varphi - a \cos \varphi) \sin \vartheta = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \vartheta \sin[\varphi - \arctan(a/r)], \\ z &= r \cos \vartheta, \\ t &= u - r, \end{aligned} \quad (2.23)$$

tal que el elemento de línea se escribe como

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2mr^3}{r^2 + a^2 z^2} \left[ dt + \frac{r(xdx + ydy)}{a^2 + r^2} + \frac{a(ydx - xdy)}{a^2 + r^2} + \frac{z}{r} dz \right] \quad (2.24)$$

con  $r = r(x, y, z)$ .

A partir de las transformaciones (2.23), se pueden obtener las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (r^2 + a^2) \sin^2 \vartheta, \\ z^2 &= r^2 \cos^2 \vartheta, \end{aligned}$$

tal que al evaluarlas en la singularidad, encontramos

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad (2.25)$$

$$z = 0, \quad (2.26)$$

mostrando que la singularidad en el espacio-tiempo de Kerr es un anillo de radio  $a$  tipo espacio, a diferencia de la singularidad en el espacio-tiempo de Schwarzschild que es un punto en el tiempo.

Es común encontrar la métrica del agujero negro rotante escrita en coordenadas de Boyer-Lindquist, la cual se escribe de la siguiente manera

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma}\right) dt^2 - \left(\frac{4mar \sin^2 \vartheta}{\Sigma}\right) dt d\varphi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\vartheta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2ma^2 r \sin^2 \vartheta}{\Sigma}\right) \sin^2 \vartheta d\varphi^2, \quad (2.27)$$

en donde las funciones  $\Sigma$  y  $\Delta$  se definen como

$$\Delta := r^2 + a^2 - 2mr, \quad \Sigma := r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta. \quad (2.28)$$

En estas coordenadas las componentes de la base coordenada se hacen singulares cuando  $\Sigma = 0$  y  $\Delta = 0$ . Sin embargo, hemos visto cuando escribimos el escalar de Kretschmann que la única singularidad física que tiene este espacio-tiempo es cuando  $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta = 0$ . Por lo tanto  $\Delta = 0$  es una singularidad coordenada propia de este sistema de coordenadas.

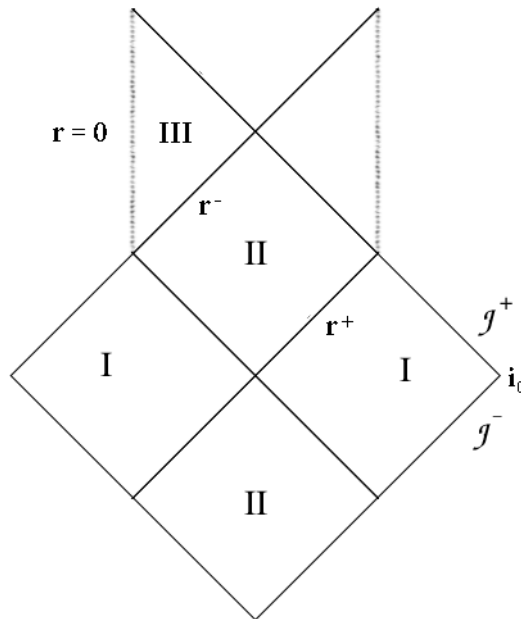


Figura 2.3: Diagrama de Penrose-Carter para el espacio tiempo de Kerr

En la figura 2.3, se observa el diagrama de Penrose-Carter para el espacio tiempo de Kerr. La región I representa el Universo y la región II la región del agujero negro entre el horizonte externo y el horizonte interno, señalados con  $r^+$  y  $r^-$  respectivamente. La región III representa la región interior del agujero negro entre el horizonte interno  $r^-$  y la singu-

laridad tipo anillo en  $r = 0$ , representada por la línea vertical punteada tipo espacio.  $i_0$  los infinitos espaciales,  $i^+$  el infinito temporal futuro,  $i^-$  el infinito temporal pasado  $\mathcal{J}^+$  el futuro infinito nulo, mientras que  $\mathcal{J}^-$  representa el pasado infinito nulo.

Debido a la naturaleza tipo anillo de la singularidad en el espacio, existe una geodésica tal que para un observador que caiga al agujero negro le es posible evadirla y llegar a otro espacio tiempo asintóticamente plano.

### Derivación de la métrica de Kerr

En 1963 Kerr presenta a la comunidad científica una solución en el vacío a las ecuaciones de Einstein de un objeto compacto con rotación. Sin embargo, los cálculos para obtener la métrica son, por no decir menos, muy complicados. Aún más, hay distintas maneras de derivar la métrica de Kerr en la ecuación (2.27) sin entrar en la complejidad de los cálculos de la derivación original. Para este fin, se sigue la misma derivación que se puede encontrar en [42].

Consideremos un espacio tiempo de campo débil de un objeto girando lentamente, a primer orden en el parámetro de espín  $a$  como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2m}{r}\right) dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 - \frac{4am}{r} \sin^2 \vartheta d\varphi dt, \quad (2.29)$$

en donde el último término describe un arrastre de sistemas inerciales. Reescribiendo el intervalo, se obtiene:

$$ds^2 = -dt^2 + \left(1 + \frac{2m}{r}\right) dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + \frac{2m}{r} (dt^2 - a \sin^2 \vartheta d\varphi)^2, \quad (2.30)$$

Debido a la rotación se espera que las esferas se achaten en los polos, tal que es conveniente escoger un sistema de coordenadas en el que este efecto aparezca de una manera sencilla. Usamos la siguiente transformación a coordenadas esferoidales oblatas

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \vartheta, \end{aligned}$$

tal que la métrica del espacio tiempo plano en estas coordenadas se vuelve

$$-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -dt^2 + \frac{\Sigma}{r^2 + a^2} dr^2 + \Sigma d\vartheta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \quad (2.31)$$

donde la función  $\Sigma$  se define como

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta .$$

Comparando las expresiones anteriores, se puede proponer un *anzats* tal que reemplazamos  $r^2 + a^2$  en el primer y segundo término, con unas funciones arbitrarias que dependan de la coordenada  $r$

$$\frac{r^2 + a^2}{\Sigma} \rightarrow \frac{Z(r)}{\Sigma} , \quad (2.32)$$

donde  $Z(r) = r^2 + a^2 + Y(r)$ , mientras que para el segundo término

$$r^2 + a^2 \rightarrow W(r) , \quad (2.33)$$

tal que el elemento de línea se reescribe como

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{\Sigma}{W(r)} dr^2 + \Sigma d\vartheta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + \frac{Y(r)}{\Sigma} (dt - a \sin^2 \vartheta d\varphi)^2 . \quad (2.34)$$

De esta métrica, se propone un cambio de variable  $q = \cos \theta$  tal que  $d\theta^2 = dq^2 / [4q(1-q)]$ , y resolviendo las ecuaciones de Einstein en el vacío, i.e.  $G_{\mu\nu} = 0$ , la componente  $G_{rr} = 0$  tiene un coeficiente de  $q$  y un término constante que se eliminan por separado, de tal manera que se obtienen las siguientes dos ecuaciones:

$$-r^2(r^2 + a^2 - Z) + [Z + r(r - Z')]F = 0 \quad (2.35)$$

$$(r^2 - Z)(r^2 + a^2 - Z) + r(Z' - r)F = 0 . \quad (2.36)$$

tal que resolviendo para  $F$  obtenemos

$$F = \frac{(r^2 - Z)(r^2 + a^2 - Z)}{r(r - Z')} \quad (2.37)$$



de tal manera que si sustituimos  $F$  en la ecuación (2.30) obtenemos que

$$Z' = Z/r, \quad (2.38)$$

$$Z = 2mr, \quad (2.39)$$

$$F = r^2 - 2mr + a^2. \quad (2.40)$$

A partir de estas funciones obtenemos la métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma}\right) dt^2 - \left(\frac{4mar \sin^2 \vartheta}{\Sigma}\right) dt d\varphi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\vartheta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2ma^2r \sin^2 \vartheta}{\Sigma}\right) \sin^2 \vartheta d\varphi^2, \quad (2.41)$$

### 2.2.1 Horizonte de eventos y ergosfera

El agujero negro de Kerr presenta dos horizontes, los cuales se pueden encontrar a través de la relación

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2mr = 0, \quad (2.42)$$

que cuenta con dos soluciones de la forma

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2}, \quad (2.43)$$

en donde  $r_+$  representa el horizonte externo u *horizonte de eventos* y  $r_-$  el horizonte interno y este coincide con el *horizonte de Cauchy*<sup>2</sup>. Es fácil ver que el agujero negro existe si y solo si  $a \leq M$  puesto que  $m^2 - a^2 \geq 0$  y por lo tanto existe el horizonte de eventos. Si  $a > m$ , se tiene una singularidad desnuda, entonces esta solución no representa un agujero negro.

Otra superficie importante de los agujeros negros con rotación que es importante estudiar en este agujero negro es el límite estático, debido a que ahora esta superficie ya no coincide con el horizonte de eventos.

Se define la *ergoregión* como la región localizada entre el horizonte de eventos y la superficie de límite estático. En esta región es posible la extracción de energía del agujero negro a través del proceso de Penrose [37]. Comúnmente a la ergoregión se le conoce

<sup>2</sup>El horizonte de Cauchy es una superficie nula que marca la división entre la región en donde relatividad general es capaz de predecir evoluciones y la región en donde la predictibilidad de las ecuaciones de campo se pierde [43].

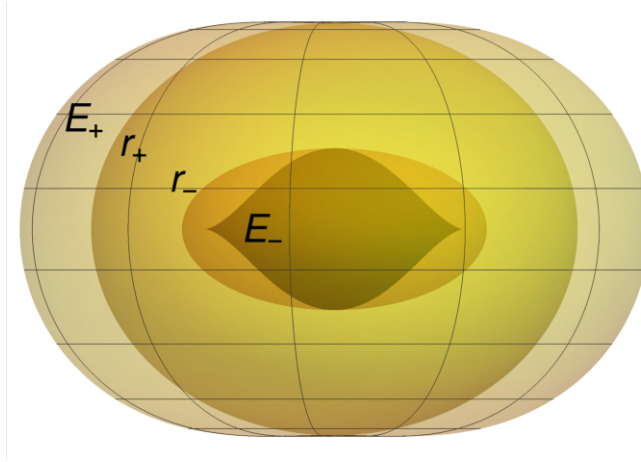


Figura 2.4: Horizontes y ergosferas del espacio tiempo de Kerr.  $E_+$  representa la ergosfera externa,  $E_-$  la ergosfera interna,  $r_+$  representa el horizonte externo u horizonte de eventos y  $r_-$  el horizonte de interno u horizonte de Cauchy.

como *ergosfera*, por lo tanto en adelante nos referiremos a esta región a través de esta denominación.

La ergosfera se obtiene a partir de la siguiente relación

$$g_{tt} = \Sigma - 2mr = r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta - 2mr = 0 \quad (2.44)$$

tal que esta ecuación tiene dos raíces (llamando  $r = E$ )

$$E_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \vartheta} \quad (2.45)$$

en donde  $E_+$  representa la ergosfera externa y  $E_-$  la ergosfera interna. La región que de interés físico está definida por la solución  $E_+$ . La ergosfera interna no tiene ningún significado físico, sin embargo, se toma en consideración por completez a la ecuación (2.45).

En la figura 2.4 se muestran los horizontes y ergosferas para el espacio tiempo de Kerr con parámetro de rotación  $a = 0.9$ , en coordenadas esféricas. Las regiones están señaladas por  $E_+$  que representa la ergosfera externa,  $E_-$  la ergosfera interna,  $r_+$  representa el horizonte externo y  $r_-$  el horizonte de interno. Se observa que la superficie de límite estático ahora se encuentra a un radio exterior del horizonte de eventos para valores de  $\vartheta \neq 0, \pi$ ; mientras que para estos valores coincide con el horizonte.

# 3

## Propiedades del espacio tiempo regular

Dentro de los recientes modelos de agujeros negros regulares se encuentra el agujero negro tipo Hayward y su versión con rotación. Ambos modelos se pueden considerar como una generalización, caracterizada por un *parámetro de desviación*, del agujero negro tipo Schwarzschild y Kerr respectivamente, estudiados en la sección anterior. Las regiones singulares a partir del escalar de curvatura de Kretschmann, presentes en estos últimos modelos, no aparecen en los modelos regulares, de tal manera que el escalar toma un valor finito al ser evaluado en las regiones que presentaban una singularidad. En este sentido, el espacio tiempo es regular.

Los espacios tiempo regulares resultan ser modelos prometedores para representar agujeros negros en el universo, por esta razón es importante su estudio y realizar futuras comparaciones con los resultados obtenidos a partir de los espacios tiempo con singularidad.

A continuación nos enfocaremos brevemente en el estudio de las propiedades del espacio tiempo de Hayward y de la versión rotante de este.

### 3.1 El espacio tiempo de Hayward

El primer modelo de un agujero negro regular fue presentado por J. Bardeen en 1968 [8], y está basado en dotar al espacio tiempo de un monopol magnético tal que desaparece la singularidad en el origen. En el 2006 S. A. Hayward presenta una métrica, estática y con

simetría esférica para un agujero negro regular [18].

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2), \quad (3.1)$$

donde

$$f(r) := 1 - \frac{2M(r)}{r}, \quad M(r) := m \frac{r^3}{r^3 + 2ml^2}, \quad (3.2)$$

y  $m$  representa la masa ADM (Arnowitt-Desser-Misner) mientras que  $l$  es un parámetro de longitud del espacio tiempo. En el origen la métrica  $g$ , ecuación (3.1), se comporta como un espacio tiempo tipo de Sitter, tal que el tensor de Einstein tiene la forma  $G \approx \Lambda g$  con constante cosmológica efectiva  $\Lambda = 3/l^2$ . Debido a que este comportamiento se puede justificar a partir de una teoría cuántica de la gravedad, a través de efectos cuánticos, se encuentra que  $l$  debe acotar la escala para la cual son notables estos efectos, y por lo tanto se espera que  $l$  esté relacionado con la longitud de Planck.

La función  $f(r)$  en la ecuación (3.2), en el límite en que  $r \rightarrow \infty$ , se vuelve

$$f(r) \approx 1 - \frac{2m}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right), \quad (3.3)$$

tal que la métrica (3.1) se reduce a la métrica de Schwarzschild. Lo mismo ocurre en el límite cuando  $l \rightarrow 0$ . A su vez, cuando se cumple que  $r \rightarrow 0$ , la función  $f(r)$  tiene la forma

$$f(r) \approx 1 - \frac{r^2}{l^2} + \mathcal{O}(r^5), \quad (3.4)$$

la cual describe un núcleo tipo de Sitter en donde se espera que aparezcan los efectos de gravedad cuántica. A partir de considerar que la métrica cumpla con estos límites fue como Hayward introduce la métrica para el agujero negro regular, sin aún conocer si esta representaba una solución del espacio tiempo a las ecuaciones de Einstein con materia. Fue hasta el 2016 cuando Fan y Wang [19, 20] muestran que existe un procedimiento para obtener la métrica de Hayward como solución a las ecuaciones de campo de Einstein acopladas a una electrodinámica no lineal (NED) en presencia de una carga magnética como fuente.

Por simplicidad llamemos a  $2ml^2 = g^3$  tal que  $g$  se define como un parámetro con unidades de longitud que mide desviaciones de la métrica no singular y por lo tanto lo llamaremos *parámetro de desviación*. Entonces la función de masa  $M(r)$  se escribe como

$$M(r) = m \frac{r^3}{r^3 + g^3}. \quad (3.5)$$

$M(r)$  se puede interpretar como la masa dentro de la esfera de radio  $r$  que se aproxima a  $m$  conforme  $r$  tiende a infinito.

Es fácil observar que este espacio tiempo es regular en todo el espacio y particularmente cuando  $r = 0$ , de acuerdo a los invariantes de curvatura:

$$\lim_{r \rightarrow 0}(R) = \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{12mg^3(r^3 - 2g^3)}{(r^3 + g^3)^3} \right] = -\frac{2m}{g^3}, \quad (3.6)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0}(R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{72m^2g^6(5r^6 - 3r^3g^3 + 2g^6)}{(r^3 + g^3)^6} \right] = \frac{144m^2}{g^6}, \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0}(R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}) &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{48m^2(r^{12} - 4r^9g^3 + 18r^6g^6 - 2r^3g^9 + 2g^{12})}{(r^3 + g^3)^6} \right] \\ &= \frac{96m^2}{g^6}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

A partir de los invariantes se puede observar que para  $g \neq 0$  ningún escalar diverge. El espacio tiempo deja de ser regular cuando  $g = 0$ , caso en el que se recupera el espacio tiempo de Schwarzschild, y por lo tanto se observa la divergencia en las ecuaciones (3.6), (3.7) y (3.8).

Hasta este punto, se ha mostrado que la métrica de Hayward representa un espacio tiempo regular, y dicha regularidad depende únicamente del parámetro de desviación  $g$ . Sin embargo, la pregunta natural que nos debemos hacer es si este espacio tiempo se puede obtener a través de resolver las ecuaciones de campo para un tensor de energía momento que represente materia físicamente permitida.

La electrodinámica no lineal como fuente de la deformación del espacio tiempo nos permite obtener geometrías de interés que no presenten singularidades, principalmente para obtener métricas que describan agujeros negros regulares.

Si consideramos Relatividad General acoplada a una electrodinámica no lineal, tenemos que la acción se escribe como

$$S = S_{GR} + S_{NED}, \quad (3.9)$$

donde dos acciones  $S_{GR}$  y  $S_{NED}$  representa la acción Einstein-Hilbert y la acción de materia que en este caso es electrodinámica no lineal, respectivamente, definidas de la siguiente manera:

$$S_{GR} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (3.10)$$

$$S_{NED} = -\frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}(F). \quad (3.11)$$

tal que la acción toma la siguiente forma

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R - \mathcal{L}(F)) , \quad (3.12)$$

donde  $R$  es el escalar de Ricci,  $F = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$  es la norma del tensor Faraday  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  y la densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}$  depende de  $F$ . En el caso particular cuando  $\mathcal{L}(F) \propto F$  se obtiene la acción para la métrica de Reissner-Nordstrom.

A partir de variar la acción (3.12) con respecto al tensor métrico  $\delta\mathcal{L}/\delta g_{\mu\nu}$ , se obtiene la siguiente forma para el tensor de energía momento y por lo tanto para su conservación

$$T_{\mu\nu} = 2 \left( \mathcal{L}_F F_\mu^\alpha F_{\alpha\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \mathcal{L} \right) , \quad (3.13)$$

$$\nabla_\mu (T^{\mu\nu}) = 0 , \quad (3.14)$$

donde  $\mathcal{L}_F = d\mathcal{L}/dF$ . La densidad de energía está dada por la componente  $T^0_0$  del tensor de energía momento

$$\rho_m = T^0_0 = -\mathcal{L}(F) . \quad (3.15)$$

Para cada campo vectorial de Killing<sup>1</sup> del espacio tiempo se tiene asociada una carga conservada  $Q_i = \int_\Sigma \xi_i^\mu T_{\mu\nu} u^\nu \sqrt{\gamma} d\Sigma$ , donde  $u^\mu$  es un vector tipo tiempo, dirigido hacia el futuro, ortogonal a la hipersuperficie 3-dimensional  $\Sigma$ , y  $\sqrt{\gamma} d\Sigma$  es el elemento de volumen en  $\Sigma$ . El espacio tiempo de Hayward es estático y por lo tanto existe un campo vectorial de Killing tipo tiempo en todo el espacio, lo que implica que la carga conservada asociada a este campo de Killing es la masa

$$M(r) = \int_0^r \rho_m r^2 dr = - \int_0^r \mathcal{L}(F) r^2 dr . \quad (3.16)$$

A  $\rho_m$  se le llama densidad de energía magnética debido a que está asociada a un tensor de energía momento que describe una carga magnética, como a continuación se mostrará.

Se propone como *ansatz* que la métrica para el espacio tiempo esféricamente simétrico tal como se define en las ecuaciones (3.1) y (3.2) y además

$$A = a(r)dt + Q_m \cos \vartheta d\varphi , \quad (3.17)$$

<sup>1</sup>Un campo vectorial de Killing  $\xi_\mu$  es aquel que satisface la ecuación  $\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0$ . Esta ecuación es la ecuación de Killing. Un estudio extenso de las propiedades de los campos de Killing se puede encontrar en [36].

y la carga magnética  $Q_m$  está definida en términos de la fuerza

$$Q_m = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{F} . \quad (3.18)$$

Para el caso del agujero negro de Hayward, se tiene  $a(r) = 0$  tal que las ecuaciones de la electrodinámica no lineal se satisfacen para una carga magnética  $Q_m$ , y el invariante  $F$  para el campo puramente magnético a partir del elemento de línea definido por (3.1) para el espacio tiempo esféricamente simétrico, es:

$$F = \frac{2Q_m^2}{r^4} . \quad (3.19)$$

A partir de las ecuaciones de Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (3.20)$$

se encuentran las únicas dos ecuaciones independientes:

$$0 = \frac{f'(r)}{r} + \frac{f(r) - 1}{r^2} + \frac{1}{2} \mathcal{L}(F) , \quad (3.21)$$

$$0 = f''(r) + \frac{2f'(r)}{r} + \mathcal{L}(F) + \frac{4Q_m^2}{r^4} \mathcal{L}_f(F) , \quad (3.22)$$

en donde las primas se refieren a las derivadas con respecto a  $r$ . A partir de la primer ecuación es fácil resolver para la densidad Lagrangiana como

$$\mathcal{L}(F) = -2 \left( \frac{f'(r)}{r} + \frac{f(r) - 1}{r^2} \right) , \quad (3.23)$$

y usando que la masa es una función de la coordenada radial,  $M(r)$ , se puede obtener la siguiente expresión:

$$\mathcal{L} = \frac{4M'}{r^2} . \quad (3.24)$$

A partir de la forma de  $M(r)$  dada en la definición en (3.2) para la métrica de Hayward, y sustituyendo en la forma para la densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}$ , se obtiene:

$$\mathcal{L}(F) = \frac{24m^2 l^2}{(r^3 + 2ml^2)^2} . \quad (3.25)$$

Y usando la magnitud de  $F$  en términos de la carga magnética  $Q_m$ , llegamos a la siguiente

expresión para la densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L}(F) = \frac{24m^2l^2}{\left[\left(\frac{2Q_m^2}{F}\right)^{3/4} + 2ml^2\right]^2}. \quad (3.26)$$

Esta expresión de densidad Lagrangiana está dada para una electrodinámica no lineal descrita por una carga magnética  $Q_m$ .

Por lo tanto, la materia causante de la deformación en el espacio tiempo de Hayward es un *monopolo magnético*.

Esta carga magnética está relacionado con la masa ADM  $m$  y el parámetro  $l$  de acuerdo a la siguiente relación

$$Q_m = \left(\frac{m^2l}{2}\right)^{1/3}. \quad (3.27)$$

Cuando  $l \rightarrow 0$  se tiene  $Q_m \rightarrow 0$ , y se recupera el espacio tiempo con singularidad.

Podemos reescribir la densidad Lagrangiana (3.26) en términos de una variable  $\beta = \frac{2Q_m^2}{(2ml^2)^{4/3}}$ , como sigue

$$\mathcal{L}(F) = \frac{6}{\left[1 + \left(\frac{\beta}{F}\right)^{3/4}\right]^2}, \quad (3.28)$$

y por lo tanto, en el límite de campo débil para  $F$ , expandiendo la densidad Lagrangiana alrededor de  $F = 0$ , tenemos

$$\mathcal{L}(F) = \frac{6F^{3/2}}{l^2\beta^{3/2}} - \frac{12F^{9/4}}{l^2\beta^{9/4}} + \mathcal{O}(F^3), \quad (3.29)$$

se observa que en este límite  $\mathcal{L}(F) \neq F$ , lo que significa que para esta densidad Lagrangiana no se tiene como límite la electrodinámica de Maxwell, y por lo tanto, no debemos esperar que la métrica de Hayward se reduzca a la métrica de Reissner-Nordstrom en el límite de campo débil.

Por otra parte, se puede observar a partir de la expresión para la densidad Lagrangiana (3.23), que para una función  $f(r)$  en donde  $M(r) = \text{cte}$ , es decir, para el espacio tiempo de Schwarzschild, la densidad Lagrangiana es  $\mathcal{L} = 0$ , como se espera por ser una solución en el vacío.



### 3.1.1 Horizontes

Los horizontes del agujero negro de Hayward se pueden encontrar a partir de la siguiente ecuación

$$r^3 - 2mr^2 + 2ml^2 = 0, \quad (3.30)$$

que es la función  $f(r) = 0$  a partir de la definiciones en la ecuación (3.2). Para obtener las soluciones de esta ecuación, vamos a proceder con el discriminante

$$D = -4l^2m^2(27l^2 - 16m^2), \quad (3.31)$$

tal que si  $D > 0$  entonces la ecuación tiene tres raíces reales distintas, si  $D = 0$  la ecuación tiene raíces múltiples reales y si ocurre que  $D < 0$  se tiene que la ecuación tiene una raíz real y dos raíces complejas conjugadas. De acuerdo al diagrama de Penrose para este espacio tiempo, sabemos que el agujero negro cuenta con un horizonte externo y un horizonte interno, por lo que, se tiene que cumplir

$$(27l^2 - 16m^2) < 0, \quad (3.32)$$

y entonces, es fácil obtener la posición de los horizontes

$$r_+ = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \cos \left[ \frac{1}{3} \cos^{-1} \left( 1 - \frac{27l^2}{8} \right) \right], \quad (3.33)$$

$$r_- = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \cos \left[ \frac{1}{3} \cos^{-1} \left( 1 - \frac{27l^2}{8} \right) + \frac{\pi}{3} \right], \quad (3.34)$$

y por lo tanto tenemos que  $l < \frac{4m}{3\sqrt{3}}$ .

En la figura 3.1 observamos el diagrama de Penrose-Carter para el espacio tiempo de Hayward donde la región I representa el Universo, la región II la región del agujero negro entre el horizonte de externo  $r^+$  y el horizonte interno  $r^-$ , y la región III representa la región entre el horizonte interno  $r^-$  y la región  $r = 0$  regular.  $i_0$  representa los infinitos espaciales,  $i^+$  el infinito temporal futuro,  $i^-$  el infinito temporal pasado  $\mathcal{J}^+$  el futuro infinito nulo, mientras que  $\mathcal{J}^-$  representa el pasado infinito nulo. Se puede observar que  $r = 0$  es una región regular tipo tiempo. Cualquier suceso que ocurra dentro de la región II está causalmente desconectado de los sucesos en la región I.

En la figura 3.2 se observan los horizontes externo e interno en el espacio tiempo de Hayward, representados por  $r_+$  y  $r_-$  respectivamente. En este caso  $a = 0$  y  $l = 0.33$ . Se

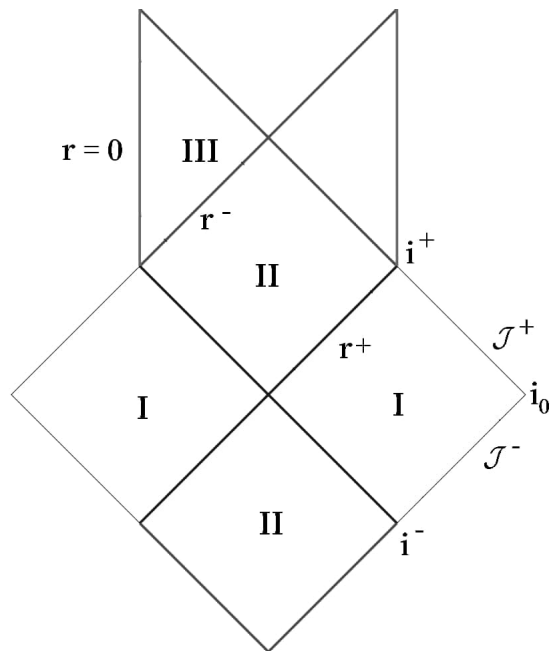


Figura 3.1: Diagrama de Penrose-Carter para el espacio tiempo de Hayward

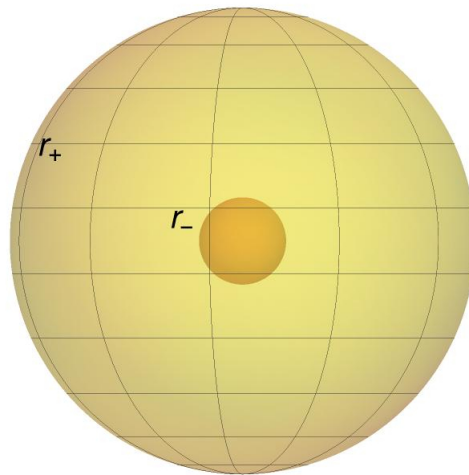


Figura 3.2: Horizontes del espacio tiempo de Hayward. Aquí  $r_+$  representa el horizonte externo u horizonte de eventos y  $r_-$  el horizonte interno u horizonte de Cauchy

puede ver que para ese valor de  $l$  se sigue cumpliendo la desigualdad tal que el espacio tiempo tiene dos horizontes.

## 3.2 El espacio tiempo de Hayward con rotación

A partir de proponer una métrica para un agujero negro regular como alternativa para evadir la existencia de la singularidad en el espacio tiempo de Schwarzschild, es fácil generalizar dicha solución al caso rotante. Ya se ha discutido anteriormente que el modelo más favorable para la descripción de agujeros negros astrofísicos es un modelo con momento angular. La importancia del estudio de la solución de Hayward con rotación viene a partir del campo de la astrofísica. Además de presentar una solución que busca evitar una singularidad que por el momento no es adecuadamente descriptible, se pretende estudiar las interacciones de campo fuerte entre el agujero negro de Hayward rotante y partículas de prueba, considerando a este modelo como una alternativa a la solución de Kerr para describir los agujeros negros astrofísicos, de tal manera que futuras observaciones permitan favorecer algún modelo.

### 3.2.1 Derivación de la métrica del espacio tiempo de Hayward con rotación

Para obtener una métrica rotante a partir de la métrica de Hayward (3.1), se hace uso del algoritmo de Newman-Janis [21], el cual nos permite obtener una métrica axialmente simétrica a partir de una métrica esféricamente simétrica y estática como sigue

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + h(r)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2). \quad (3.35)$$

El primer paso del algoritmo de Newman-Janis, es escribir la métrica (3.35) en coordenadas nulas de Eddington-Finkelstein  $(u, r, \vartheta, \varphi)$ , a partir de la transformación

$$du = dt - \frac{dr}{f(r)}, \quad (3.36)$$

tal que la métrica en coordenadas nulas se reescribe como

$$ds^2 = -f(r)du^2 - 2dt dr + h(r)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2). \quad (3.37)$$

El segundo paso es encontrar una tétrada nula  $Z_\alpha^\mu = (l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu)$  para expresar la métrica inversa  $g^{\mu\nu}$  en términos de  $Z_\alpha^\mu$  como

$$g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + l^\nu n^\mu - m^\mu \bar{m}^\nu - m^\nu \bar{m}^\mu, \quad (3.38)$$

donde  $\bar{m}^\mu$  es el complejo conjugado de  $m^\mu$ , y la tétrada de vectores satisfacen

$$l^\mu l_\mu = n^\mu n_\mu = m^\mu m_\mu = l^\mu m_\mu = n^\mu m_\mu = 0, \quad l^\mu n_\mu = -m^\mu \bar{m}_\mu = 1. \quad (3.39)$$

Se encuentra que la tétrada de vectores que cumple con estas relaciones es

$$l^\mu = \delta_r^\mu, \quad n^\mu = \delta_u^\mu - \frac{f(r)}{2} \delta_r^\mu, \quad m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2h(r)}} \left( \delta_\vartheta^\mu + \frac{i}{\sin \vartheta} \delta_\varphi^\mu \right). \quad (3.40)$$

El tercer paso es realizar una transformación compleja en el plano  $r - u$  dada por

$$r \rightarrow r' = r + i a \cos \vartheta, \quad u \rightarrow u' = u - i a \cos \vartheta, \quad (3.41)$$

junto con la complexificación de las funciones de la métrica  $f(r)$  y  $h(r)$ . Después de la transformación compleja (3.41), los nuevos vectores de la tétrada son

$$l'^\mu = \delta_r^\mu, \quad n'^\mu = \delta_u^\mu - \frac{F(r, \vartheta)}{2} \delta_r^\mu, \quad m'^\mu = \frac{1}{\sqrt{2H(r, \vartheta)}} \left[ i a \sin \vartheta (\delta_u^\mu - \delta_r^\mu) + \delta_\vartheta^\mu + \frac{i}{\sin \vartheta} \delta_\varphi^\mu \right]. \quad (3.42)$$

donde  $F(r, \vartheta)$  y  $H(r, \vartheta)$  son las funciones complexificadas de  $f(r)$  y  $h(r)$  (funciones reales que viven en el espacio complejo). Usando la nueva tétrada, escribimos el inverso de la métrica como

$$g^{\mu\nu} = l'^\mu n'^\nu + l'^\nu n'^\mu - m'^\mu \bar{m}'^\nu - m'^\nu \bar{m}'^\mu, \quad (3.43)$$

y por lo tanto los coeficientes de la métrica son

$$\begin{aligned} g_{uu} &= F(r, \vartheta), & g_{ur} &= g_{ru} = 1, & g_{u\varphi} &= g_{\varphi u} = a \sin^2 \vartheta (1 - F(r, \vartheta)), \\ g_{r\varphi} &= g_{\varphi r} = a \sin^2 \vartheta, & g_{\vartheta\vartheta} &= -H(r, \vartheta), \\ g_{\varphi\varphi} &= -\sin^2 \vartheta [H(r, \vartheta) + a^2 \sin^2 \vartheta (1 - F(r, \vartheta))]. \end{aligned}$$

La nueva métrica en coordenadas nulas es

$$\begin{aligned} ds^2 &= -F du^2 - 2dudr + 2a \sin^2 \vartheta (F - 1) dud\varphi + 2a \sin^2 \vartheta drd\varphi \\ &\quad + Hd\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta [H + a^2 \sin^2 \vartheta (2 - F)] d\varphi^2, \end{aligned} \quad (3.44)$$

El paso final del algoritmo es escribir la métrica nueva en coordenadas de Boyer-Lindquist. Esto requiere transformaciones de coordenadas de la forma

$$du = dt' + \eta(r) dr, \quad d\varphi = d\varphi' + \xi(r) dr. \quad (3.45)$$

Sustituyendo estas transformaciones en la métrica (3.44) y haciendo  $g_{t'r}$  y  $g_{r\varphi'}$  idénticamente a cero, obtenemos

$$\eta(r) = \frac{H(r, \vartheta) + a^2 \sin^2 \vartheta}{F(r, \vartheta)H(r, \vartheta) + a^2 \sin^2 \vartheta}, \quad (3.46)$$

$$\xi(r) = \frac{a}{F(r, \vartheta)H(r, \vartheta) + a^2 \sin^2 \vartheta}. \quad (3.47)$$

Esta transformación es posible únicamente cuando  $\eta$  y  $\xi$  dependen solamente de la coordenada  $r$ . Las componentes de la nueva métrica en coordenadas de Boyer-Lindquist son

$$g_{uu} = F(r, \vartheta), \quad g_{t\varphi} = g_{\varphi t} = a \sin^2 \vartheta (1 - F(r, \vartheta)), \quad g_{rr} = -\frac{H(r, \vartheta)}{H(r, \vartheta)F(r, \vartheta) + a^2 \sin^2 \vartheta},$$

$$g_{\vartheta\vartheta} = -H(r, \vartheta), \quad g_{\varphi\varphi} = -\sin^2 \vartheta [H(r, \vartheta) + a^2 \sin^2 \vartheta (1 - F(r, \vartheta))].$$

Para obtener la métrica de Hayward rotante, necesitamos partir de la métrica de Hayward. Es decir, en la ecuación (3.35) las funciones  $f(r)$  y  $h(r)$  tienen la forma

$$f(r) = 1 - \frac{2mr^2}{r^3 + g^3}, \quad h(r) = r^2, \quad (3.48)$$

donde se ha llamado  $g = 2ml^2$  y se verá después que  $g$  es un parámetro de desviación entre el agujero negro de Kerr y de Hayward rotante. Ahora, debemos escoger una complexificación. En general, hay muchas maneras de complexificar, pero debido a que conocemos la forma de la métrica que estamos buscando, se propone la siguiente complexificación

$$\frac{1}{r} \rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r'} + \frac{1}{\bar{r}'} \right) = \frac{1}{\Sigma}, \quad r^2 \rightarrow r' \bar{r}' = \Sigma, \quad (3.49)$$

y las funciones  $f(r)$  y  $h(r)$ , se vuelven

$$f(r) \rightarrow \bar{f}(r, \vartheta) = 1 - \frac{2\bar{M}r}{\Sigma}, \quad h(r) \rightarrow \bar{h}(r) = \Sigma, \quad (3.50)$$

donde en general  $\bar{M} = \bar{M}_{\alpha,\beta}(r, \vartheta)$ , y la complexificación está caracterizada por  $\alpha$  y  $\beta$ , tal que

$$\bar{M}_{\alpha,\beta}(r, \vartheta) = m \frac{r^{3+\alpha} \Sigma^{-\alpha/2}}{r^{3+\alpha} \Sigma^{-\alpha/2} + g^3 r^\beta \Sigma^{-\beta/2}}. \quad (3.51)$$

Cuando hacemos  $\alpha = \beta = 0$  (complexificación de tipo-I) no se altera el término de la masa  $m(r)$  y obtenemos

$$\bar{f}_I(r, \vartheta) = 1 - \frac{2M(r)r}{\Sigma}, \quad (3.52)$$

$\eta$  y  $\xi$  dependen únicamente de la coordenada  $r$  y entonces se obtiene el elemento de línea

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M(r)r}{\Sigma}\right) dt^2 - \left(\frac{4M(r)ar \sin^2 \vartheta}{\Sigma}\right) dt d\varphi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\vartheta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2M(r)a^2 r \sin^2 \vartheta}{\Sigma}\right) \sin^2 \vartheta d\varphi^2, \quad (3.53)$$

con la función  $M(r)$  definida de la siguiente manera

$$M(r) = m \frac{r^3}{r^3 + g^3}, \quad (3.54)$$

donde  $a$  es el parámetro de espín relacionado con el momento angular total  $J$ , de acuerdo a  $a = J/m$ , y las funciones  $\Sigma$ ,  $\Delta$  y  $M(r)$  se definen como:

$$\Delta := r^2 + a^2 - 2M(r)r + a^2, \quad \Sigma := r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta, \quad M(r) := m \frac{r^3}{r^3 + g^3}, \quad (3.55)$$

y las componentes de la métrica inversa son:

$$g^{tt} = -\frac{1}{\Sigma \Delta} [(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \vartheta], \quad g^{t\varphi} = -\frac{2M(r)ar}{\Delta \Sigma}, \quad g^{rr} = \frac{\Delta}{\Sigma} \quad (3.56)$$

$$g^{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{\Sigma}, \quad g^{\varphi\varphi} = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \vartheta}{\Delta \Sigma \sin^2 \vartheta}.$$

Esta solución es regular en todo el espacio para  $g \neq 0$ . Es fácil comprobarlo a partir de las expresiones para los invariantes

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left( \lim_{\vartheta \rightarrow \pi/2} R \right) = -\frac{24m}{g^3}, \quad (3.57)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left( \lim_{\vartheta \rightarrow \pi/2} R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \right) = \frac{144m^2}{g^6}, \quad (3.58)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left( \lim_{\vartheta \rightarrow \pi/2} R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} \right) = \frac{96m^2}{g^6}, \quad (3.59)$$

Este análisis lo hicieron Bambi y Modesto cuando introdujeron una versión rotante [22] de la métrica de Hayward ec. (3.1).

El algoritmo de Newman-Janis no especifica las propiedades de la materia del espacio tiempo resultante, y por lo tanto, la fuente de curvatura para la nueva métrica hasta este punto es desconocida. Para obtener la fuente es necesario resolver las ecuaciones de campo.

En el año 2017 se mostró por Rodrigues [23], y posteriormente por Toshmatov [24, 25], que la materia que se necesita como fuente de la métrica de Hayward con rotación, no es un *monopolo magnético rotante*, como se esperaría, al ser la versión rotante de un agujero negro con una carga magnética como fuente.

A partir de la métrica descrita en la ecuación (3.53), se pueden obtener las componentes distintas de cero del tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$ ,

$$\begin{aligned} G_{tt} &= \frac{2(r^4 + a^2r^2 - a^4 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta)}{\Sigma^3} M' - \frac{4r^3}{\Sigma^3} M M' - \frac{a^2 r \sin^2 \vartheta}{\Sigma^2} M'' , \\ G_{rr} &= -\frac{2r^2}{\Sigma \Delta} M' , \\ G_{t\varphi} &= \frac{2a \sin^2 \vartheta (r^2 + a^2)(a^2 \cos^2 \vartheta - r^2)}{\Sigma^3} M' + \frac{4ar^3 \sin^2 \vartheta}{\Sigma^3} M M' \\ &\quad + \frac{a^2 r \sin^2 \vartheta (r^2 + a^2)}{\Sigma^2} M'' , \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} G_{\vartheta\vartheta} &= -\frac{2a^2 \cos^2 \vartheta}{\Sigma} M' - r M'' , \\ G_{\varphi\varphi} &= -\frac{a \sin^2 \vartheta (r^2 + a^2)(a^2 + (2r^2 + a^2) \cos 2\vartheta)}{\Sigma^3} M' - \frac{4a^2 r^3 \sin^4 \vartheta}{\Sigma^3} M M' \\ &\quad - \frac{r \sin^2 \vartheta (r^2 + a^2)^2}{\Sigma^2} M'' , \end{aligned}$$

y la (') corresponde a la derivada con respecto a la coordenada  $r$ . Se puede observar que cuando  $M(r) = \text{cte}$ , se obtiene la métrica para el modelo de Kerr, y las componentes del tensor de Einstein se hacen cero debido a que en este caso el espacio tiempo es una solución en el vacío.

A partir de resolver las ecuaciones de campo  $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ , se puede obtener la materia con la que el espacio tiempo de Hayward con rotación (3.53) es compatible. Sin embargo, es preciso verificar que el tensor de energía momento con el cual la métrica es compatible, realmente corresponda a una electrodinámica no lineal, y no a otro tipo de materia.

Se propone la misma acción que en la ecuación (3.12) de tal manera que se siguen cumpliendo las ecuaciones (3.13) y (3.14) para el tensor de energía momento y la ley de conservación, respectivamente. Para el caso de Hayward esféricamente simétrico se impone la norma  $A_\mu = Q_m \cos \vartheta \delta_\mu^\varphi$ . Para el caso con rotación, la norma cambia apareciendo un componente extra como sigue

$$A_\mu = -\frac{Q_m a \cos \vartheta}{\Sigma} \delta_\mu^t + \frac{Q_m (r^2 + a^2) \cos \vartheta}{\Sigma} \delta_\mu^\varphi. \quad (3.61)$$

La forma del invariante  $F$  para el modelo con rotación, que se obtiene a partir del tensor de Faraday es la siguiente

$$F = \frac{Q_m^2 [a^4(3 - \cos 4\vartheta) + 4(6a^2 r^2 + 2r^4 + a^2(a^2 - 6r^2) \cos 2\vartheta)]}{4\Sigma^4}, \quad (3.62)$$

y es fácil observar que cuando  $a = 0$ , se recupera  $F = 2Q_m^2/r^4$ . Esta última expresión es la que se obtuvo para el agujero negro tipo Hayward sin rotación.

Para encontrar la densidad Lagrangiana para este espacio tiempo rotante, se tienen que resolver de las ecuaciones de campo de la relatividad general igualando las componentes del tensor de Einstein (3.60) con el tensor de energía momento definido en la ecuación (3.13) para una electrodinámica no lineal, con respecto a la densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}$  y su derivada  $\mathcal{L}_f$ . Siguiendo el mismo procedimiento que en [24], se obtiene que las expresiones para  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{L}_f$  son las siguientes:

$$\mathcal{L} = \frac{r^2 [(15a^4 - 8a^2 r^2 + 8r^4 + 4a^2(5a^2 - 2r^2) \cos 2\vartheta + 5a^4 \cos 4\vartheta) M']}{2\Sigma^4} + \frac{8a^2 r^3 \cos^2 \vartheta M''}{\Sigma^3}, \quad (3.63)$$

$$\mathcal{L}_f = \frac{2(r^2 - a^2 \cos \vartheta) M' - r \Sigma M''}{2Q_m^2}. \quad (3.64)$$



En el límite en el que el espacio tiempo es tipo Hayward, es decir, cuando  $a = 0$ , recuperamos la expresión (3.26),  $\mathcal{L} = 4M'/r^2$  y para su derivada se sigue  $\mathcal{L}_f = r^2(2M' - rM'')/2Q_m^2$ . Además, también se muestra en [24], que en el caso en que la densidad Lagrangiana es  $\mathcal{L} = F$  para la electrodinámica de Maxwell, es posible obtener la métrica de Kerr-Newmann.

Sin embargo, se demostró en [23] que las expresiones (3.63) y (3.64) no están relacionadas mediante la expresión

$$\mathcal{L}_f = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F}. \quad (3.65)$$

Si se reescribe esta última ecuación como sigue

$$\mathcal{L}_f - \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial F} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial F} \right] = 0. \quad (3.66)$$

tal que a partir de las expresiones (3.62), (3.63) y (3.64), para el invariante  $F$ , la densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}$  y su derivada  $\mathcal{L}_f$  respectivamente, para el espacio tiempo de Hayward rotante, y realizando las operaciones correspondientes, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f - \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \left( \frac{\partial F}{\partial r} \right)^{-1} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} \left( \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right)^{-1} \right] &= \frac{1}{4Q_m^2} \left\{ 2[2(r^2 - a^2 \cos^2 \vartheta)M' \right. \\ &- r(r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta)M''] + \frac{16r^4[(6a^2 - 4r^2 + 6a^2 \cos 2\vartheta)M' + r(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos 2\vartheta)M'']}{a^4 + 16a^2r^2 + 16r^4 + 2a^2(a^2 - 2r^2) \cos 2\vartheta} \\ &- \left[ -2(a^2 - 2r^2 + a^2 \cos 2\vartheta)^2(5a^2 + 2r^2 + 5a^2 \cos 2\vartheta)M' \right. \\ &- \frac{1}{2}r(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos 2\vartheta)((33a^4 + 8r^4 + 44a^4 \cos 2\vartheta \\ &11a^4 \cos 4\vartheta)M'' + 8a^2r \cos^2 \vartheta(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos 2\vartheta)M'''] \left. \right] \\ &\times [a^2(4r^2 + 2(a^2 - 4r^2) \cos 2\vartheta + a^2 \cos 4\vartheta)]^{-1} \left. \right\} = 0. \quad (3.67) \end{aligned}$$

Sustituyendo la forma de la función de masa para el espacio tiempo de Hayward con rotación  $M(r) = mr^3/(r^3 + g^3)$ , se puede demostrar que no se satisface la relación (3.67). Por lo tanto se concluye que la solución que se obtiene a partir del algoritmo de Newman Janis, es inconsistente con la densidad Lagrangiana definida por (3.63). Sin embargo, en [25] se demostró que la diferencia  $\Delta \mathcal{L}_f = \mathcal{L}_f - \partial \mathcal{L} / \partial F$  es muy cercana a cero; la inconsistencia entre ambas expresiones es alrededor de  $10^{-2}$ . Esto quiere decir que las ecuaciones son aproximadamente consistentes.

Por otra parte, se muestra que si el agujero negro rota lentamente, es decir, cuando el parámetro de rotación  $a \rightarrow 0$ , la fuente se puede aproximar a una generalización rotante de la materia correspondiente al espacio tiempo de Hayward sin rotación, en cuyo caso es un monopolo magnético.

Para este trabajo vamos a considerar esta discrepancia como insignificante y consideraremos que la fuente para el agujero negro es, de una manera aproximativa, una forma de materia familiar desde la perspectiva de una generalización del modelo de Hayward sin rotación (un monopolo magnético con rotación). Esto se puede hacer debido a que estamos considerando la dinámica de partículas no cargadas. Sin embargo, si se consideran partículas de prueba cargadas, se tiene que tomar en cuenta esta inconsistencia, y por lo tanto, ser cuidadosos. No obstante, los resultados continúan siendo de gran interés para estudios de astrofísica y desde una perspectiva teórica.

De la misma manera, el parámetro  $g$  es del orden de la longitud de Planck, y de la ecuación (3.53) observamos que la métrica es la misma del espacio tiempo de Kerr variando la masa a través de una función que depende de  $r$ , que se interpreta como una masa de apantallamiento. De esta manera, la interpretación matemática de  $g$  es que este parámetro mide la desviación del espacio tiempo de Kerr.

### 3.3 Horizonte de eventos y ergosfera.

#### 3.3.1 Horizontes

Para localizar las regiones en las que se encuentran los horizontes en el espacio tiempo de Hayward rotante, al igual que en el agujero negro de Kerr, se buscan a partir de la ecuación cuando  $\Delta = 0$  tal que para esta métrica regular obtenemos:

$$\begin{aligned} r^2 - 2M(r)r + a^2 &= 0, \\ \Rightarrow r^5 - 2mr^4 + a^2r^3 + g^3r^2 + a^2g^3 &= 0. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Esta ecuación es de quinto orden en  $r$  y admite valores reales dependiendo de los valores de los parámetros  $a$  y  $g$ . El radio al que se encuentra el horizonte externo determina el horizonte de eventos del agujero negro. En el límite  $g \rightarrow 0$  existen dos horizontes permitidos para valores  $0 < a < m$  debido a la ecuación (2.43). Como se mencionó en la sección anterior para el agujero negro de Kerr, cuando se tiene el valor extremo  $a = m$  los dos horizontes coinciden y lo mismo ocurre para su análogo regular de Hayward.

Cuando tomamos el límite  $a \rightarrow 0$  obtenemos los horizontes correspondientes al agujero negro de Hayward esféricamente simétrico tal que se recupera la ecuación para los horizontes

$$1 - \frac{2mr^2}{r^3 + 2m\ell^2} = 0. \quad (3.69)$$

Debido al orden de la ecuación (3.68) se requiere encontrar las raíces numéricamente. En

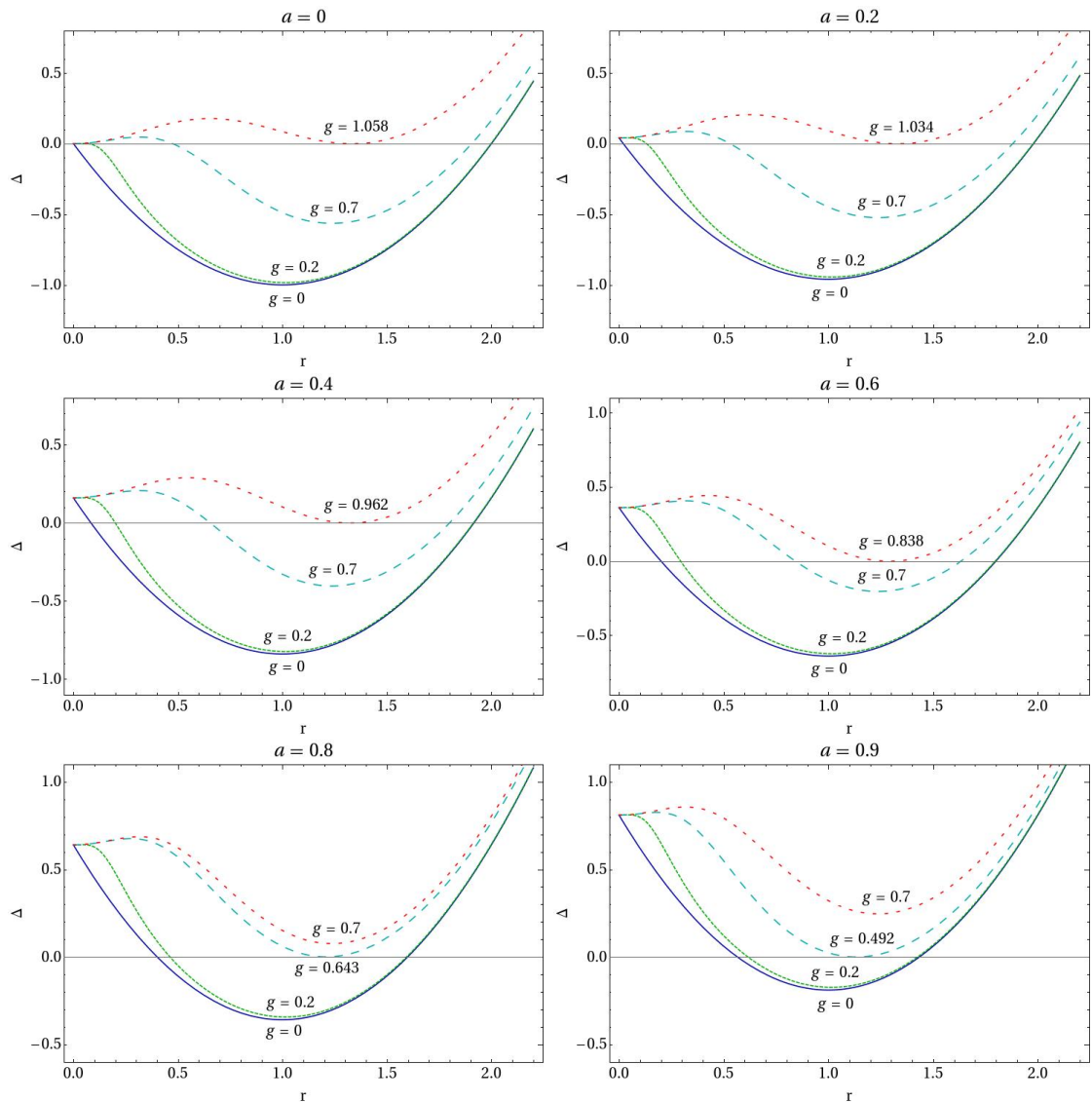


Figura 3.3: Estructuras posibles del espacio tiempo para un agujero negro rotante depende de los valores de  $g$  y  $a$ . Los ceros de la función  $\Delta$  determina la presencia de dos horizontes, un horizonte o ningún horizonte.

la figura 3.3 se muestra el comportamiento de  $\Delta$  como función de  $r$  para distintos valores del parámetro de rotación  $a$  y del parámetro  $g$ . Las intersecciones con el eje horizontal en

$\Delta = 0$  determinan la posición de los horizontes en cada caso, y dependiendo del valor relativo entre  $a$  y  $g$  el espacio tiempo tiene dos, uno o ningún horizonte.

La gráfica en el primer renglón de la figura 3.3 muestra el comportamiento de  $\Delta$  para el caso no rotante, es decir cuando  $a = 0$ . En este caso, para valores  $g < 1.058$  el espacio tiempo tiene dos horizontes, para el valor crítico  $g = 1.058$  el espacio tiempo cuenta con un horizonte mientras que para  $g > 1.058$  no cuenta con horizonte. Las siguientes gráficas de la figura 3.3 muestran el comportamiento de  $\Delta$  para el espacio tiempo con distintos valores positivos del parámetro de rotación  $a$  y a su vez, variando el parámetro  $g$ . Se puede observar que el valor crítico de  $g$  para el cual el espacio tiempo cuenta con un solo horizonte cambia de acuerdo al valor de  $a$ . En particular, si nos enfocamos en la gráfica derecha del tercer renglón para el espacio tiempo con  $a = 0.9$ , el valor crítico de  $g$  es  $g = 0.492$ . Entonces, se puede ver que este valor crítico decrece conforme el valor de  $a$  se aproxima al caso extremo  $a = 1$ .

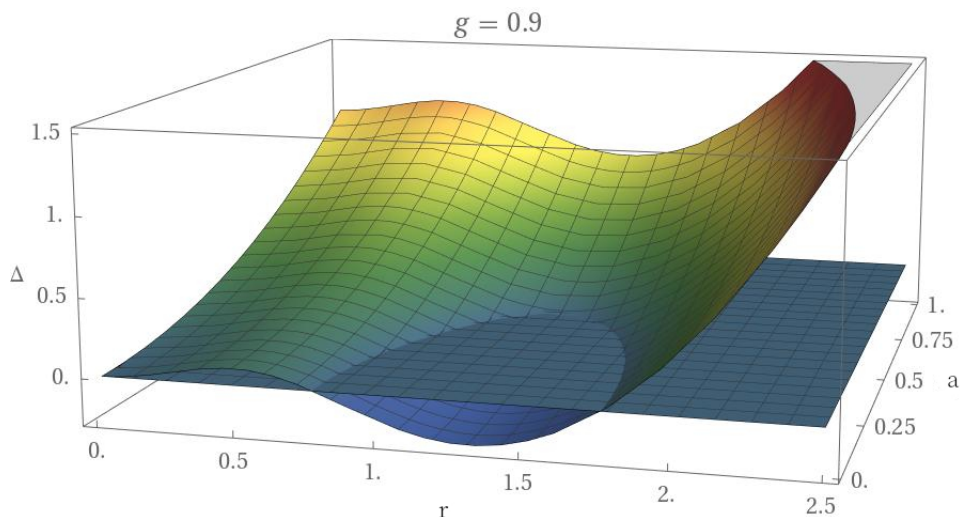


Figura 3.4: Superficie bidimensional de  $\Delta$  como una función de  $r$  y  $a$  para  $g = 0.9$ . La intersección de la superficie con el plano  $z = 0$  para un valor dado de  $a$  determina la posición de los horizontes.

En la figura 3.4 se muestra la superficie bidimensional de los posibles valores de  $\Delta$  como función de  $a$  y  $r$  para un valor fijo  $g = 0.9$ . A partir de la figura se puede observar que el espacio tiempo cuenta con dos horizontes conforme el valor de  $a$  aumenta hasta un valor crítico  $a_c < 1$  en el que se tiene un solo agujero negro. A partir de este valor  $a = a_c$  hasta  $a = 1$  el espacio tiempo no cuenta con horizontes. La degeneración del horizonte ocurre para valores de  $a$  menores a uno, caso contrario al agujero negro de Kerr (caso extremo).

### 3.3.2 Ergosfera

La superficie del límite estático se define por la ecuación

$$g_{tt} = r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta - 2M(r)r = 0 . \quad (3.70)$$

Un estudio de las ergosferas para un agujero negro de Hayward rotante fue presentado en [44], donde los autores concluyen que la ergosfera se agranda conforme el valor del parámetro  $g$  se incrementa. En la figura 3.5 se presenta una secuencia de las ergosferas y los horizontes para el agujero negro de Hayward con rotación dejando fijo el valor del parámetro de rotación  $a = 0.9$  y variando el parámetro  $g$ , a partir de las coordenadas esferoidales, definidas como sigue

$$x = \sqrt{r^2 + a^2} \cos \varphi \sin \vartheta , \quad (3.71)$$

$$y = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \varphi \sin \vartheta , \quad (3.72)$$

$$z = r \cos \vartheta . \quad (3.73)$$

Las etiquetas  $r_+$  y  $r_-$  muestran las regiones para los horizontes externo e interno respectivamente, mientras que  $E_+$  y  $E_-$  representan la ergosfera externa y la ergosfera interna. En las gráficas se puede observar la forma y la extensión de la ergosfera. Se puede notar que conforme el valor de  $g$  incrementa, los dos horizontes se fusionan en uno.

Para dar una descripción cuantitativa de la media del efecto de  $g$  en las ergosferas y horizontes, se obtiene el cociente entre la longitud de la geodésica entre el polo norte y el polo sur, y el círculo en el plano ecuatorial  $\varepsilon(g; R) := \frac{l_p}{l_e}$ , donde

$$l_p = \int_0^\pi (R^2 + a^2 \cos^2 \vartheta)^{1/2} d\vartheta , \quad (3.74)$$

y

$$l_e = \int_0^{2\pi} \left( R^2 + a^2 + \frac{2a^2 M(R)}{R} \right)^{1/2} d\varphi . \quad (3.75)$$

La superficie  $R$  toma los valores de  $r_+$ ,  $r_-$ ,  $E_+$   $E_-$  respectivamente.

En la figura 3.6 se observan las gráficas de las razones  $\varepsilon$  como función de  $g$  para los horizontes  $r_\pm$  y las ergosferas  $E_\pm$ . Se puede ver que  $\varepsilon(g; r_+)$  y  $\varepsilon(g; E_+)$  decrecen conforme el valor de  $g$  aumenta, mientras que, por el contrario, para  $\varepsilon(g; r_-)$  y  $\varepsilon(g; E_-)$  incrementan. Para el caso de de Kerr, una gráfica de este estilo correspondería a líneas

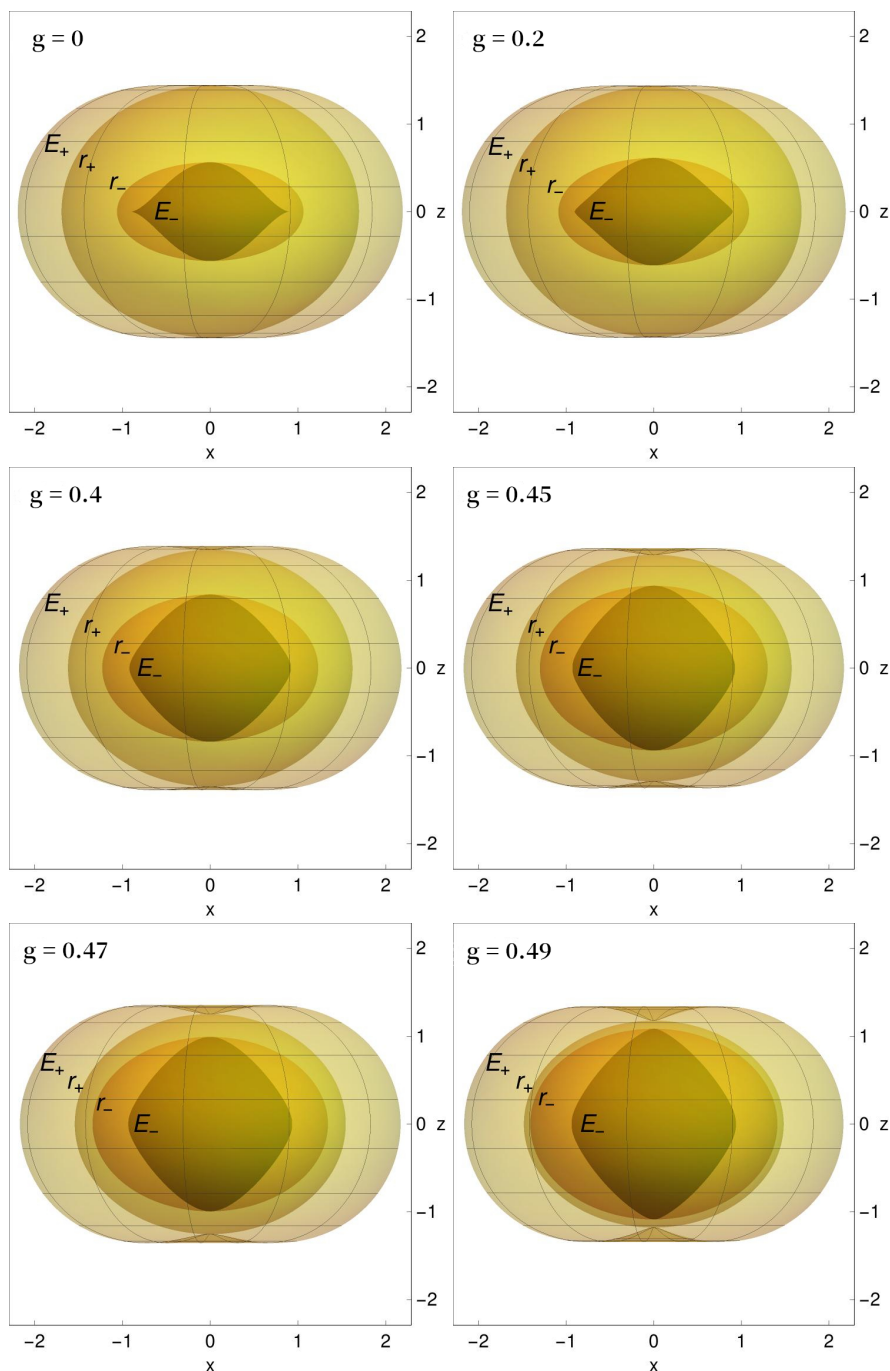


Figura 3.5: La ergosfera está delimitada por la superficie del límite estático definido en la ecuación (3.70). El agujero negro de Kerr corresponde a  $g = 0$ . El parámetro de rotación usado en las gráficas corresponde a  $a = 0.9$ . El efecto del parámetro  $g$  es más relevante en el horizonte interno  $r_-$  y en la ergosfera interna  $E_-$ .

horizontales constantes en el valor  $\varepsilon(0; R)$ . Se puede inferir que a partir de la figura 3.6 para el radio  $\varepsilon(g; R)$  es que las superficies oblicuas  $r_+$  y  $E_+$  se extienden en el ecuador

mientras que las superficies  $r_-$  y  $E_-$  se hacen más estrechas y extendidas en los polos de acuerdo al comportamiento que se observa en la figura 3.5.

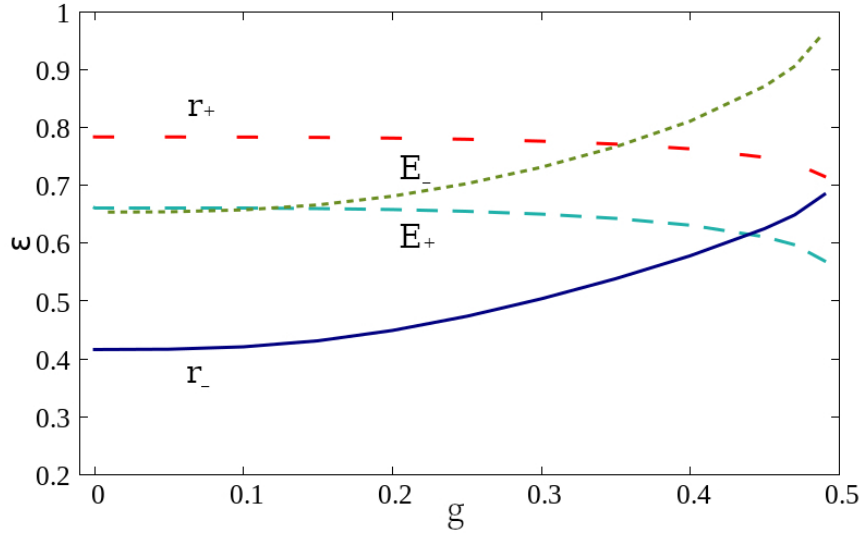


Figura 3.6: El cociente entre la longitud de la geodésica entre el polo norte y sur y el círculo en el ecuador  $\varepsilon(g; R)$  para el valor  $a = 0.9$  del parámetro de rotación. Las gráficas corresponden a las regiones de los horizontes  $r_{\pm}$  y las ergosferas  $E_{\pm}$ .





# 4

## Movimiento geodésico de partículas tipo tiempo

Diversos estudios sobre el movimiento geodésico de partículas alrededor de diferentes espacio tiempos se han realizado a lo largo de los años. Estos estudios son de gran importancia para probar si el modelo está de acuerdo con las observaciones. En el estudio teórico consideramos partículas tipo tiempo puntuales en la vecindad del agujero negro rotante de Hayward, tal que en observaciones astronómicas, las estrellas alrededor de un cuerpo muy masivo, representan las partículas de prueba; esto es válido debido a que la masa de las estrellas es muy pequeña comparada con la masa de estos cuerpos muy densos, con lo que, para fines prácticos, está bien justificado considerar a las estrellas como cuerpos puntuales.

Bajo estas consideraciones, se espera que en unos años seamos capaces de encontrar variaciones en el movimiento estelar que nos permitan obtener conclusiones sobre la naturaleza de los agujeros negros.

### 4.1 Formalismo de Hamilton Jacobi

A partir del formalismo de Hamilton Jacobi es posible encontrar una cuarta integral de movimiento relacionada con la constante de Carter para la métrica de Hayward rotante, similarmente al caso del espacio tiempo de Kerr. Esto nos brinda ciertas ventajas para

analizar el movimiento de la partícula de prueba en todo el espacio.

Consideremos el movimiento de una partícula de prueba que se mueve a lo largo de una geodésica en la métrica (3.53) de fondo. La ecuación de Hamilton Jacobi de la partícula es de la forma

$$H\left(x^\alpha, \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}\right) + \frac{\partial S}{d\tau} = 0, \quad (4.1)$$

donde  $H$  es el Hamiltoniano de la partícula y  $S$  la función principal de Jacobi y las coordenadas  $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$  están parametrizadas con el tiempo propio de la partícula  $\tau$ . El Hamiltoniano de la partícula se escribe como

$$H = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial S}{\partial x^\alpha}\frac{\partial S}{\partial x^\beta}, \quad (4.2)$$

usando que

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}. \quad (4.3)$$

Entonces la ecuación de Hamilton Jacobi se escribe como

$$\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial S}{\partial x^\alpha}\frac{\partial S}{\partial x^\beta} + \frac{\partial S}{d\tau} = 0. \quad (4.4)$$

De la norma del cuadrimomento (suponiendo que la masa de la partícula de prueba es 1),

$$p^\alpha p_\alpha = -1 \quad \Rightarrow \quad H = -\frac{1}{2},$$

se obtiene una tercer integral de movimiento asociada al tiempo propio  $\tau$ .

La métrica no depende explícitamente de la de las coordenadas  $t$  y  $\varphi$ , lo cual implica que podemos introducir dos integrales de movimiento a lo largo de las trayectorias, los momentos canónicos conjugados a esas variables,

$$p_t = \frac{\partial S}{\partial t} = -E, \quad (4.5)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = L_z, \quad (4.6)$$

donde hemos llamado  $E$  a la energía y  $L_z$  al momento angular axial.

La función Principal de Hamilton  $S$ , se puede escribir utilizando las cantidades conservadas como

$$S = \frac{1}{2}\tau - Et + L_z\varphi + S'(r, \vartheta), \quad (4.7)$$

donde la  $S'$  representa una función que depende de  $r$  y  $\vartheta$ . Si suponemos además separabilidad en las coordenadas  $r$  y  $\vartheta$  de tal manera que

$$S'(r, \vartheta) = S_r(r) + S_\vartheta(\vartheta) \quad (4.8)$$

la función  $S$  toma la siguiente forma

$$S = \frac{1}{2}\tau - Et + L_z\varphi + S_r(r) + S_\vartheta(\vartheta) . \quad (4.9)$$

Sustituyendo las componentes de la métrica inversa (3.57) en la ecuación de Hamilton Jacobi (4.4), la forma (4.9) y el momento correspondiente, se obtiene

$$- \left[ \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \vartheta \right] E^2 + \frac{4M(r)ar}{\Delta} EL_z \quad (4.10)$$

$$+ \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \vartheta}{\Delta \sin^2 \vartheta} L_z^2 + \Delta \left( \frac{dS_r}{dr} \right)^2 + \left( \frac{dS_\vartheta}{d\vartheta} \right)^2 + \Sigma = 0 , \quad (4.11)$$

tal que reescribiéndola obtenemos

$$\Delta \left( \frac{dS_r}{dr} \right)^2 - \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} E^2 + \frac{4M(r)ar}{\Delta} EL_z - \frac{a^2}{\Delta} L_z^2 + r^2 = \left( \frac{dS_\vartheta}{d\vartheta} \right)^2 + a^2 \sin^2 \vartheta E^2 + \frac{L_z^2}{\sin^2 \vartheta} + a^2 \cos^2 \vartheta , \quad (4.12)$$

$$\Delta \left( \frac{dS_r}{dr} \right)^2 - \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)E - aL_z]^2 + r^2 = \left( \frac{dS_\vartheta}{d\vartheta} \right)^2 + a^2 \sin^2 \vartheta E^2 + \frac{L_z^2}{\sin^2 \vartheta} + a^2 \cos^2 \vartheta + 2aEL_z , \quad (4.13)$$

en donde se ha utilizado la definición de  $\Delta$ . La ecuación (4.13) representa, por el método de separación de variables una ecuación diferencial para  $W'_r$  y otra para  $W'_\vartheta$ , tal que

$$\Delta \left( \frac{dS_r}{dr} \right)^2 - \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)E - aL_z]^2 + r^2 = k , \quad (4.14)$$

$$\left( \frac{dS_\vartheta}{d\vartheta} \right)^2 + a^2 \sin^2 \vartheta E^2 + \frac{L_z^2}{\sin^2 \vartheta} + a^2 \cos^2 \vartheta + 2aEL_z = k , \quad (4.15)$$

donde hemos introducido una constante de separación  $k$ , que representa una constante de movimiento adicional, a través de la cual se define la constante de Carter  $Q$  como  $Q = k - (aE - L_z)^2$  y definiendo dos funciones  $R(r)$  y  $\Theta(\vartheta)$  como

$$R(r) = [(r^2 + a^2)E - aL_z]^2 - \Delta[r^2 + Q + (aE - L_z)^2], \quad (4.16)$$

$$\Theta(\vartheta) = Q - \left[ \frac{L_z^2}{\sin^2 \vartheta} + a^2(1 - E^2) \right] \cos^2 \vartheta, \quad (4.17)$$

tal que las ecuaciones (4.14) y (4.15) se pueden escribir de la siguiente manera

$$\Delta \left( \frac{dS_r}{dr} \right)^2 = \frac{R(r)}{\Delta}, \quad \left( \frac{dS_\vartheta}{d\vartheta} \right)^2 = \Theta(\vartheta). \quad (4.18)$$

La solución a la ecuación de Hamilton Jacobi es la función principal de Jacobi  $S$  que es la forma

$$S = \frac{1}{2}\tau - Et + L_z\varphi + \int_0^r \frac{\sqrt{R(r')}}{\Delta} dr' + \int_0^\vartheta \sqrt{\Theta(\vartheta')} d\vartheta'. \quad (4.19)$$

Las expresiones finales para el momento radial y el momento angular en  $\vartheta$  son

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\sqrt{R(r)}}{\Delta}, \quad (4.20)$$

$$p_\vartheta = \frac{\partial S}{\partial \vartheta} = \sqrt{\Theta(\vartheta)}. \quad (4.21)$$

Gracias a la existencia de la constante de Carter, es posible separar el movimiento en todo el espacio en su parte radial y en la parte angular en  $\vartheta$ , en términos de la constante. Esto nos ayudará más adelante para separar el análisis y hacer un estudio más detallado del movimiento de acuerdo a las propiedades del espacio tiempo que dependen de la variable de desviación  $g$  y su contraparte con el espacio tiempo de Kerr.

## 4.2 Formulación Lagrangiana

Una forma de caracterizar el movimiento de las partículas sin tener que integrar las ecuaciones de movimiento es a través del método de potenciales efectivos.

Este método consiste en encontrar una función potencial definida por el espacio tiempo a partir de la energía de la partícula. Esto nos ayuda a caracterizar el movimiento cualitativamente. Para encontrar las funciones, a partir de la aproximación Lagrangiana se obtienen las ecuaciones de movimiento y posteriormente las funciones potenciales.

En la aproximación Lagrangiana tenemos que la función Lagrangiana en términos de las componentes de la métrica se define como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu, \quad (4.22)$$

donde se a escogido la notación:  $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\tau$ . Los momentos se definen a partir de:

$$p_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu} = g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu. \quad (4.23)$$

De acuerdo a la ecuación (4.23), y sustituyendo las componentes de la métrica (3.53), obtenemos:

$$p_t = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{t}} = -\left(1 - \frac{2M(r)r}{\Sigma}\right)\dot{t} - \frac{2M(r)ar\sin^2\vartheta}{\Sigma}\dot{\varphi}, \quad (4.24)$$

$$p_r = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} = \frac{\Sigma}{\Delta}\dot{r}, \quad (4.25)$$

$$p_\vartheta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vartheta}} = \Sigma\dot{\vartheta}, \quad (4.26)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{2M(r)ar\sin^2\vartheta}{\Sigma}\dot{t} + \left((r^2 + a^2) + \frac{2M(r)a^2r\sin^2\vartheta}{\Sigma}\right)\sin^2\vartheta\dot{\varphi} \quad (4.27)$$

Las ecuaciones de movimiento para las geodésicas son:

$$\Sigma\frac{dt}{d\tau} = -\left(aE - \frac{L_z}{\sin^2\vartheta}\right) + \frac{a}{\Delta}(E(r^2 + a^2) - aL_z), \quad (4.28)$$

$$\Sigma\frac{dr}{d\tau} = \sqrt{R(r)}, \quad (4.29)$$

$$\Sigma\frac{d\vartheta}{d\tau} = \sqrt{\Theta(\vartheta)}, \quad (4.30)$$

$$\Sigma\frac{d\varphi}{d\tau} = -a(aE\sin^2\vartheta - L_z) + \frac{r^2 + a^2}{\Delta}[E(r^2 + a^2) - aL_z]. \quad (4.31)$$

Las ecuaciones (4.29) y (4.30) presentan términos en raíces cuadradas, lo que causa dificultad a la hora de resolverlas numéricamente debido a los cambios de signo en los puntos de retorno [45]. Debido a esto, se tienen que reformular las ecuaciones de movimiento usando otro formalismo.

A su vez, las ecuaciones (4.29) y (4.30), permiten separar las orbitas de las partículas y tratarlas a partir en movimiento radial en  $r$  y movimiento orbital en  $\vartheta$  separadamente.

En la siguiente sección se hace uso de esta ventaja separando el movimiento en su parte radial y orbital, definiendo dos funciones potencial para cada caso a partir de las ecuaciones

de movimiento. Gracias a este método se pueden inferir las propiedades del movimiento simplemente analizando el comportamiento de las funciones potenciales. Posteriormente se recurre al método de Hamilton para encontrar las ecuaciones geodésicas e integrarlas numéricamente.

#### 4.2.1 Propiedades del movimiento radial

Numerosos estudios se han realizado para el movimiento de partículas masivas en el plano ecuatorial en distintos espacio tiempos de gran interés. En particular estudios detallados en el espacio-tiempo de Hayward sin rotación se han presentado en [46, 47, 48]. A continuación se presenta un estudio para las geodésicas de partículas masivas usando como método el potencial efectivo en el espacio-tiempo de Hayward rotante. En este trabajo se resumen algunos resultados obtenidos en [44].

Tomando el cuadrado de la ecuación (4.29) y haciendo  $Q = 0$ , el lado de derecho de la ecuación se vuelve un polinomio de segundo orden para la energía  $E$ . Entonces, la ecuación de movimiento para  $r$  se escribe como

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = -g^{tt}g^{rr}(E - V_+)(E - V_-), \quad (4.32)$$

donde los potenciales  $V_{\pm}$  se escriben en términos de los coeficientes de la métrica como

$$V_{\pm} = \frac{g^{t\varphi}}{g^{tt}}L_z \pm \left( \left[ \left(\frac{g^{t\varphi}}{g^{tt}}\right)^2 - \frac{g^{\varphi\varphi}}{g^{tt}} \right] L_z^2 - \frac{1}{g^{tt}} \right)^{1/2}. \quad (4.33)$$

Sustituyendo los coeficientes de la métrica inversa (3.57) obtenemos

$$V_{\pm} = \frac{2aM(r)L_z}{r^3 + a^2(2M(r) + r)} \pm \left( \frac{\Delta[(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta + r^2L_z^2]}{[r^3 + a^2(2M(r) + r)]^2} \right)^{1/2}. \quad (4.34)$$

Esta expresión se reduce la función potencial radial de Kerr en el límite cuando  $M = \text{cte}$ . [49, 50].

A partir de la expresión (4.34), se puede hacer un análisis cuantitativo acerca de las propiedades generales del movimiento de partículas masivas. Las orbitas físicamente aceptables son aquellas que corresponden a partículas con energía  $E > V_+$ , de esta manera, a partir de gráficas para esta función, podemos predecir el tipo de órbita que va a describir la partícula.

En la figura 4.1 se muestran tres funciones potencial  $V_+$  para espacio tiempos caracte-

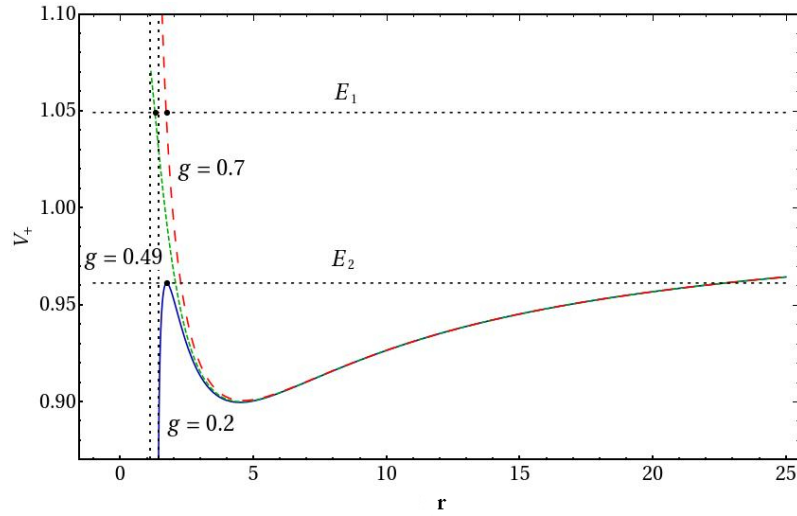


Figura 4.1: Función potencial  $V_+$ , para diferentes valores del parámetro  $g$  y valores de  $a = 0.9$  y  $L_z = 2.5$ . Para el potencial con  $g = 0.7$  el espacio tiempo no cuenta con algún horizonte de eventos y conforme el valor de  $g$  decrece, el horizonte externo tiende al valor dado por el límite de Kerr  $r_{+Kerr} = M + \sqrt{M^2 - a^2}$ .

rizados con espín  $a = 0.9$ , momento angular  $L_z = 3.0$  y con distinto valor del parámetro  $g$ , con  $g = 0.7$ ,  $0.49$  y  $0.2$  que representan espacio-tiempos sin horizonte, con un horizonte y con dos horizontes, respectivamente. Las líneas verticales punteadas indican la posición  $r = 1.13$  del horizonte para  $g = 0.49$  y  $r = 1.42$  la posición del horizonte externo para  $g = 0.2$ .

Se puede notar que para un valor fijo de  $a$ , la posición del horizonte externo se desplaza hacia valores menores de  $r$  conforme el parámetro  $g$  aumenta, llegando al punto crítico cuando  $r_+ = r_-$  en el que el espacio-tiempo cuenta con un solo horizonte. Para  $a = 0$  se recupera el espacio tiempo de Hayward estático [18].

Las funciones potenciales para los espacios tiempo con  $g = 0.49$  y  $g = 0.7$  son un poco distintos que para el caso con  $g = 0.2$ . Para los dos primeros, tenemos que una partícula con  $E_1$  alcanzará un radio mínimo para después escapar a infinito, mientras que cuando la partícula, con la misma energía  $E_1$  se encuentra en el potencial del agujero negro con  $g = 0.2$ , caerá a este.

Por otro lado, para una partícula con energía  $E_2$  no puede atravesar la barrera de potencial para los agujeros negros con  $g = 0.49$  y  $g = 0.7$  y se quedará atrapada en un movimiento entre dos radios, mientras que para el agujero negro con  $g = 0.2$  la partícula seguirá una órbita circular inestable, debido al máximo relativo en el potencial para este caso. El hecho de ser un punto inestable, permite a la partícula después de un tiempo, seguir una trayectoria acotada entre dos radios (puntos de retorno) como en los casos cuando  $g = 0.49$  y

$g = 0.7$ , o por el contrario, caer al agujero negro. La diferencia de comportamiento en la dinámica de las partículas se puede usar para restringir valores del parámetro  $g$ .

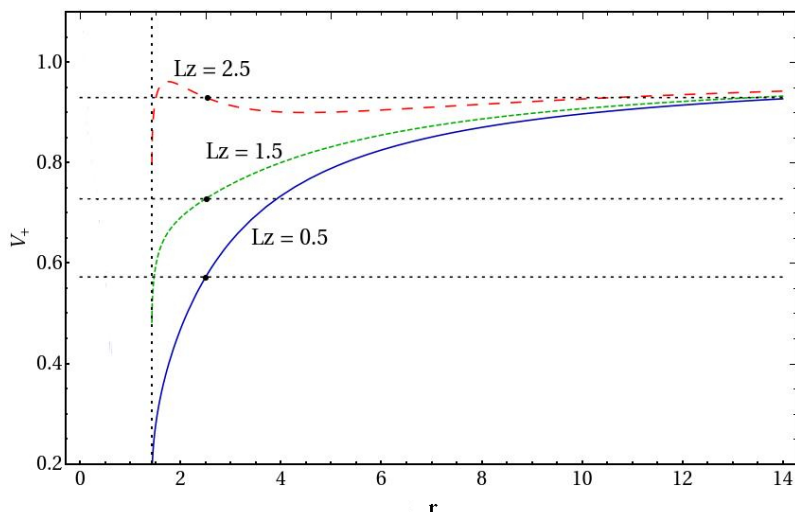


Figura 4.2: Función potencial  $V_+$  para diferentes valores del momento angular  $L_z$ . Los parámetros del espacio tiempo son  $g = 0.2$  y  $a = 0.9$ . Las líneas verticales muestran la posición del horizonte externo en cada caso.

En la figura 4.2 se muestran tres funciones potencial para diferentes valores del momento angular  $L_z$ , dejando fijos los parámetros  $a = 0.9$  y  $g = 0.2$ . Para este caso, el espacio-tiempo cuenta con dos horizontes y los valores del momento angular son representativos para mostrar el comportamiento del potencial cerca del horizonte. Como en el caso anterior, la línea vertical punteada indica la posición del horizonte externo, en los tres casos. Se observa que la posición de este no cambia conforme aumenta el valor del momento angular, sin embargo, el potencial desarrolla un máximo local y un mínimo local, permitiendo orbitas circulares inestables y estables, respectivamente. Las partículas con energía entre el máximo local y mínimo local de  $V_+$  describen orbitas acotadas entre dos puntos de retorno. En el caso cuando  $L_z = 0$  la partícula describe un movimiento radial y el potencial  $V_+$ , ecuación (4.34) se vuelve monótono sin máximos o mínimos.

De la derivada, la ecuación  $V'_+ = 0$  no tiene soluciones reales para algún valor de los parámetros, entonces cuando  $L_z = 0$  las partículas siempre van a caer al agujero negro.

En la figura 4.3 se muestra el comportamiento del potencial para distintos valores del parámetro de rotación  $a$ . Como en el caso de Kerr, el efecto de la rotación solo es notable para valores chicos de  $r$ . Además de que el efecto de  $g$  es también relevante para valores chicos de  $r$ . Una característica destacada de la función potencial  $V_+$  es que para  $aL_z < 0$ , toma valores negativos conforme nos acercamos al horizonte. En la región donde el potencial es negativo, la energía de las partículas  $E$  es también negativa y por lo tanto



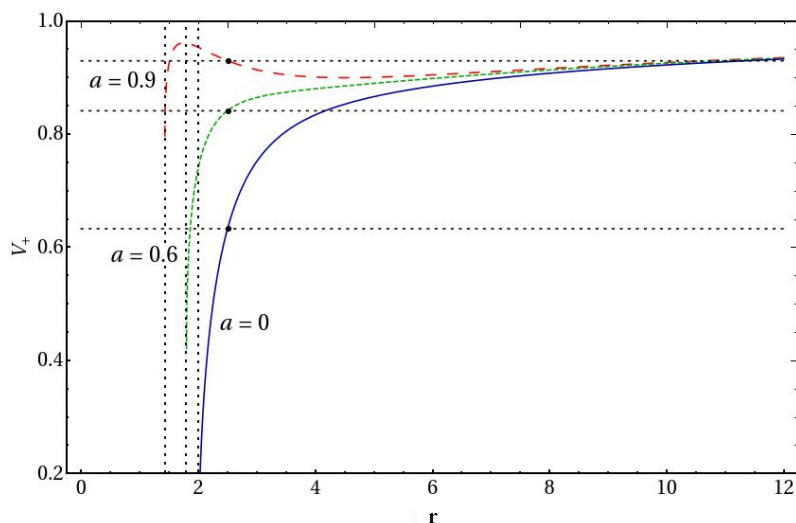


Figura 4.3: Función potencial  $V_+$  para diferentes valores del parámetro de rotación  $a$  y  $g = 0.2$ . El momento angular de la partícula es  $L_z = 2.5$ .

es posible la extracción de energía del agujero negro a través del proceso de Penrose [38].

En la figura 4.4 se gráfica la función  $V_+$  para un valor negativo del momento angular  $L_z = -2.5$  con  $g = 0.2$  y para tres valores diferentes del parámetro de rotación,  $a = 0.6$ ,  $a = 0.9$  y el caso límite cuando  $a = 0$ . Las líneas verticales punteadas muestran las posiciones de los horizontes de eventos. En el límite cuando  $a = 0$ , el caso no rotante, la función potencial siempre es positiva mientras que para  $a = 0.6$  y  $a = 0.9$  existe una región cercana al horizonte donde el movimiento de partículas con energía negativa está permitido.

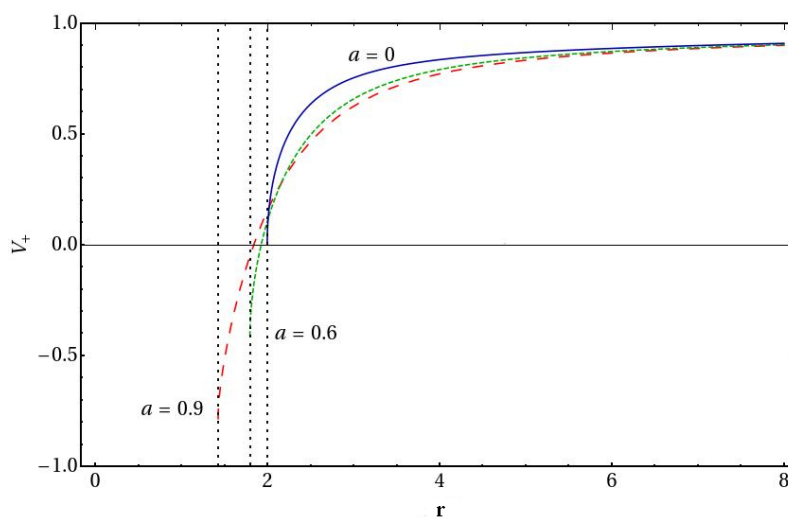


Figura 4.4: Función potencial,  $V_+$  para  $a =$  con  $g = 0.2$  y  $L_z = -2.5$

### 4.2.2 Propiedades del movimiento polar

Explícitamente, la raíz cuadrada del lado derecho de la ecuación (4.30) se escribe como

$$\Sigma \frac{d\vartheta}{d\tau} = \sqrt{Q - \left[ \frac{L_z^2}{\sin^2 \vartheta} + a^2(\mu^2 - E^2) \right] \cos^2 \vartheta}. \quad (4.35)$$

Haciendo el cambio de variable  $u = \cos \vartheta$ , a ecuación (4.35) se reescribe como

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma^2}{\sin^2 \vartheta} \left( \frac{du}{d\tau} \right)^2 &= Q - \left[ \frac{L_z^2}{\sin^2 \vartheta} + a^2(\mu^2 - E^2) \right] u^2, \\ \Rightarrow \Sigma^2 \left( \frac{du}{d\tau} \right)^2 &= \left( 1 - \cos^2 \vartheta \right) \left\{ Q - \left[ \frac{L_z^2}{\sin^2 \vartheta} + a^2(\mu^2 - E^2) \right] u^2 \right\} \\ &= Q + \left[ -Q - L_z - a^2(E^2 - \mu^2) \right] u^2 - a^2(E^2 - \mu^2) \end{aligned} \quad (4.36)$$

de tal manera que en términos de  $u$ , la (ec. (4.35)) se convierte en un polinomio de cuarto orden

$$\Sigma^2 \left( \frac{du}{d\tau} \right)^2 = f(u) = Q + Au^2 + Bu^4, \quad (4.37)$$

donde

$$A := -(Q + L_z^2 - a^2(E^2 - 1)), \quad B := -a^2(E^2 - 1). \quad (4.38)$$

De la ecuación (4.37) se puede concluir que el movimiento solo es posible si  $f(u) \geq 0$ . Además, al evaluar  $f(u)$  y sus derivadas  $f'(u)$  y  $f''(u)$ , en los valores extremos

$$\begin{aligned} f(0) &= Q, & f(1) &= -L_z^2, & f'(0) &= 0, \\ f'(1) &= 2(2B + A), & f''(0) &= 2A, \end{aligned}$$

se puede ver que la partícula alcanza al eje  $u^2 = 1$  ( $\vartheta = 0$  o  $\vartheta = \pi$ ) si y solo si se cumple que  $L_z = 0$ .

A partir de la constante de Carter  $Q$  y como sucede en el análisis para el agujero negro de Kerr [5], los tipos de movimiento en la coordenada  $\vartheta$  se pueden clasificar de acuerdo al signo de  $Q$  como sigue.

- Si  $Q < 0$  se tiene  $f(0) < 0$  y  $f(1) \leq 0$ , entonces el caso interesante ocurre cuando  $f'(1) = (Q + L_z^2 - a^2(E^2 - 1))^2 + 4a^2(E^2 - 1)Q \leq 0$ . En general, se tiene un movimiento que oscila entre  $0 < u_1 \leq u \leq u_2$  donde  $u_1$  y  $u_2$  son los dos ceros de  $f(u)$ . La partícula nunca cruza el plano ecuatorial.

- Si  $Q = 0$  se tiene una solución trivial para  $(E^2 - 1) = 0 = L_z$ . Entonces  $\frac{du}{d\tau} = 0$ , y  $\vartheta$  toma cualquier valor constante. En particular, existe una solución en la que  $\vartheta$  es constante en el plano ecuatorial  $u = 0$ , ( $\vartheta = \pi/2$ ) si  $L_z < a^2(E^2 - 1)$ .
- Si  $Q > 0$  la partícula oscila cruzando el plano ecuatorial con ángulo  $\vartheta$  entre  $\vartheta_0 \leq \vartheta \leq \pi - \vartheta_0$  donde  $\cos \vartheta_0 = u_0$  y  $u_0$  es el único cero de  $f(u)$  en el rango  $0 < u \leq 1$ . Además, si se cumple que  $L_z = 0$  y  $Q - a^2(E^2 - 1) > 0$ , el movimiento de la partícula será siempre en el eje  $\vartheta = 0$ .

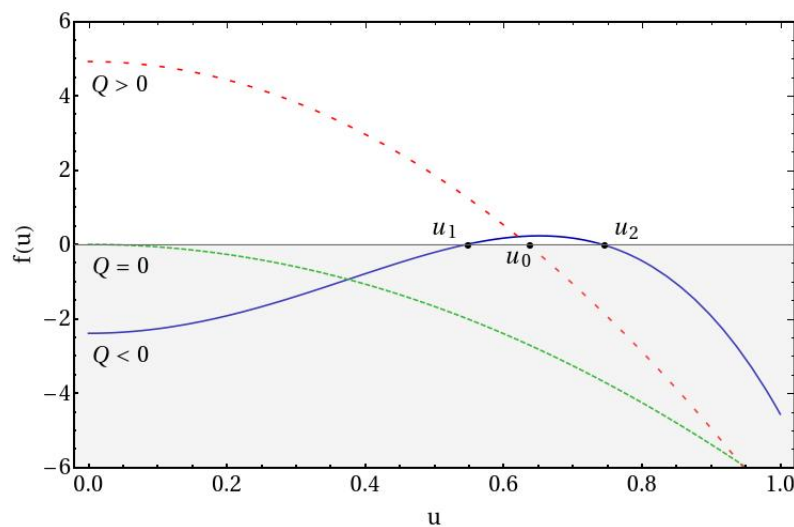


Figura 4.5: Para  $Q > 0$  los valores que  $u$  puede tomar están entre  $u = 0$  y  $u = u_0$ . Para  $Q = 0$  el movimiento de la partícula es en el plano ecuatorial  $u = 0$ . Para  $Q < 0$  el movimiento de la partícula está acotado entre  $u = u_1$  y  $u = u_2$ , y por lo tanto nunca cruza el plano ecuatorial. El movimiento de la partícula está permitido en la región donde  $f(u) \geq 0$ .

En la Figura 4.5 se muestra una gráfica de  $f(u)$  con valores de  $Q$ :  $Q = -5.0$ ,  $Q = 0$  y  $Q = 2.0$ . Podemos identificar las trayectorias permitidas en el espacio de parámetros de acuerdo al comportamiento de  $f(u)$ . El movimiento se restringe a la región no sombreada.

### 4.3 Formulación Hamiltoniana

Utilizando el formalismo de Hamilton, es posible encontrar las ecuaciones para el movimiento de las partículas. Como vimos en el capítulo anterior, de teoría Lagrangiana no es posible integrar numéricamente las ecuaciones, sin embargo, veremos que de los momentos conjugados, es fácil obtener las soluciones numéricas.

El Hamiltoniano se escribe como

$$H = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu, \quad (4.39)$$

y las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}, \quad \dot{x}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}. \quad (4.40)$$

La ecuación para  $\dot{p}_r$  es

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{1}{2} \left( g_{,r}^{tt} p_t^2 + g_{,r}^{rr} p_r^2 + g_{,r}^{\vartheta\vartheta} p_\vartheta^2 + g_{,r}^{\varphi\varphi} p_\varphi^2 + 2g_{,r}^{t\varphi} p_\varphi p_t \right) \quad (4.41)$$

$$= -\frac{1}{2} \left( g_{,r}^{tt} E^2 + g_{,r}^{rr} p_r^2 + g_{,r}^{\vartheta\vartheta} p_\vartheta^2 + g_{,r}^{\varphi\varphi} L_z^2 - 2g_{,r}^{t\varphi} E L_z \right), \quad (4.42)$$

donde en la última línea se han usado las constantes de movimiento  $p_t = -E$  y  $p_\varphi = L_z$  para la energía y la proyección del momento angular en dirección del eje z, respectivamente.

Usando la normalización del cuatro-momento para partículas con masa unitaria

$$p^\mu p_\mu = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = -1, \quad (4.43)$$

obtenemos

$$g^{tt} p_t^2 + 2g^{t\varphi} p_t p_\varphi + g^{rr} p_r^2 + g^{\vartheta\vartheta} p_\vartheta^2 + g^{\varphi\varphi} p_\varphi^2 = -1, \quad (4.44)$$

y podemos resolver para  $p_\vartheta^2$

$$p_\vartheta^2 = -\frac{1}{g^{\vartheta\vartheta}} \left( 1 + g^{tt} E^2 + g^{rr} p_r^2 + g^{\varphi\varphi} L_z^2 - 2g^{t\varphi} E L_z \right). \quad (4.45)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (4.42) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{p}_r &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{g^{tt}}{g^{\vartheta\vartheta}} g_{,r}^{\vartheta\vartheta} - g_{,r}^{tt} \right) E^2 + \left( \frac{g^{rr}}{g^{\vartheta\vartheta}} g_{,r}^{\vartheta\vartheta} - g_{,r}^{rr} \right) p_r^2 + \left( \frac{g^{\varphi\varphi}}{g^{\vartheta\vartheta}} g_{,r}^{\vartheta\vartheta} - g_{,r}^{\varphi\varphi} \right) L_z^2 \right. \\ &\quad \left. - 2 \left( \frac{g^{t\varphi}}{g^{\vartheta\vartheta}} g_{,r}^{\vartheta\vartheta} - g_{,r}^{t\varphi} \right) E L_z + \frac{g_{,r}^{\vartheta\vartheta}}{g^{\vartheta\vartheta}} \right]. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Esta ecuación contiene únicamente derivadas radiales de los coeficientes métricos y constantes de movimiento. Ahora, la ecuación para  $\dot{p}_\vartheta$  es

$$\dot{p}_\vartheta = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = -\frac{1}{2} \left( g_{,\vartheta}^{tt} E^2 + 2g_{,\vartheta}^{t\varphi} E L_z + g_{,\vartheta}^{rr} p_r^2 + g_{,\vartheta}^{\vartheta\vartheta} p_\vartheta^2 + g_{,\vartheta}^{\varphi\varphi} L_z^2 \right), \quad (4.47)$$

Finalmente, para cerrar el sistema, las ecuaciones para cada una de las coordenadas se obtienen en términos de las constantes de movimiento y los momentos  $p_r$  y  $p_\vartheta$

$$\dot{t} = g^{t\varphi} L_z - g^{tt} E, \quad (4.48)$$

$$\dot{r} = g^{rr} p_r, \quad (4.49)$$

$$\dot{\vartheta} = g^{\vartheta\vartheta} p_\vartheta, \quad (4.50)$$

$$\dot{\varphi} = g^{\varphi\varphi} L_z - g^{t\varphi} E. \quad (4.51)$$

### 4.3.1 Movimiento en el plano ecuatorial

Los primeros resultados son los siguientes dentro del plano ecuatorial de movimiento radial de partículas moviéndose bajo la influencia del potencial descrito en la figura 4.1. Las ecuaciones de movimiento se resuelven de manera numérica imponiendo condiciones iniciales tal que las partículas tengan las energías  $E_1$  y  $E_2$  que corresponden a las líneas horizontales en la figura 4.1.

En la figura 4.6, se muestra la trayectoria de una partícula con la energía  $E_1 = 1.05$ . La zona con color amarillo señala la región del horizonte externo del agujero negro. A partir del potencial se puede inferir que la trayectoria no está acotada para el espacio tiempo con  $g = 0.49$  y para el espacio tiempo con  $g = 0.7$ . Las partículas con energía  $E > E_1$  en estos espacio tiempos alcanzarán un radio mínimo y escaparán al infinito. Para el espacio tiempo con parámetro  $g = 0.2$  una partícula con la misma energía  $E_1$  caerá dentro del agujero negro.

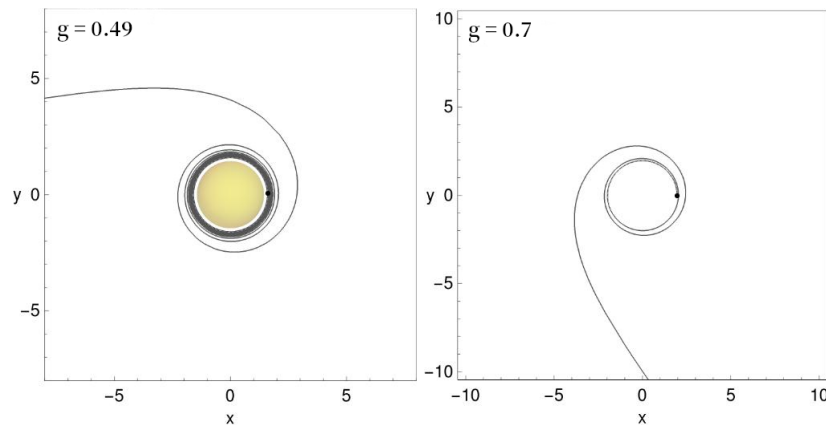


Figura 4.6: Movimiento de una partícula con energía  $E_1 = 1.04$  para un espacio tiempo con  $g = 0.49$  y  $g = 0.7$ . En el panel de la izquierda el espacio tiempo cuenta con un horizonte mientras que en el panel de la derecha no hay horizonte.

En la figura 4.7, se muestran las trayectorias de partículas de prueba con energía  $E_2 = 0.961$ , que corresponde a la línea horizontal  $E_2$  en el potencial de la figura 4.1. Las partículas se mueven en un espacio tiempo de Hayward con rotación con tres valores distintos del parámetro  $g = 0.2, 0.49$  y  $0.7$ , momento angular  $L_z = 2.5$  y parámetro de rotación  $0.9$ , ambos valores para los tres casos. En el panel izquierdo de la figura 4.7, para un espacio tiempo con  $g = 0.2$ , la partícula se mueve en una órbita circular inestable con radio  $r = 1.98$ , tal que, al ser inestable, cualquier perturbación hará que la partícula salga de la órbita original, ocasionando que esta caiga al agujero negro o hacia una región dentro del potencial efectivo en donde la nueva órbita se encuentre acotada entre dos radios. La región de color amarillo señala el horizonte externo para este agujero negro. Cuando tenemos espacio tiempos con  $g = 0.49$  y  $g = 0.7$  las partículas con la misma energía  $E_2$  y momento angular se mueven en órbitas acotadas entre dos radios, definidos por la intersección de la gráfica de la energía  $E_2$  el potencial respectivo. Para estas órbitas la dirección

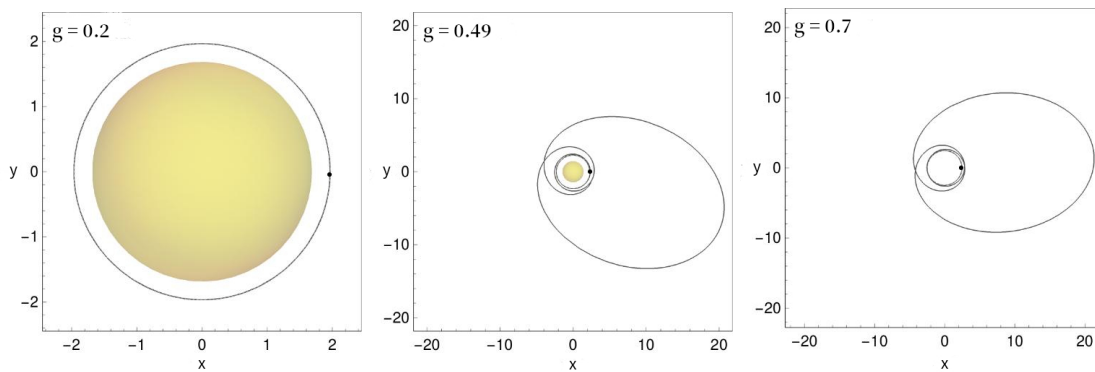


Figura 4.7: Órbitas para el potencial radial con diferentes valores del parámetro  $g$ . El panel izquierdo corresponde a un espacio tiempo con un solo horizonte, y la partícula sigue una órbita circular inestable. El panel central corresponde a un espacio tiempo con dos horizontes y la trayectoria de la partícula está acotada. El panel de la derecha muestra la órbita de una partícula moviéndose en un espacio tiempo sin horizontes.

de precesión se da en la dirección de las manecillas del reloj y la rapidez de precesión es más grande que en el caso del agujero negro de Kerr. La región en amarillo para el espacio tiempo con  $g = 0.49$  señala la localización del horizonte del agujero negro. Para el caso con  $g = 0.7$ , no existen horizonte, como se puede observar de acuerdo a la gráfica 3.3. A partir de la figura 4.7 se puede observar el efecto del parámetro  $g$  en las trayectorias de las partículas. Para valores pequeños de  $g$  una partícula caerá al agujero negro, mientras que esa partícula, con las mismas condiciones iniciales, para valores grandes de  $g$ , escapará a infinito después de chocar con la barrera del potencial.

En la figura 4.8 se grafican las trayectorias de partículas para distintos espacio tiempos

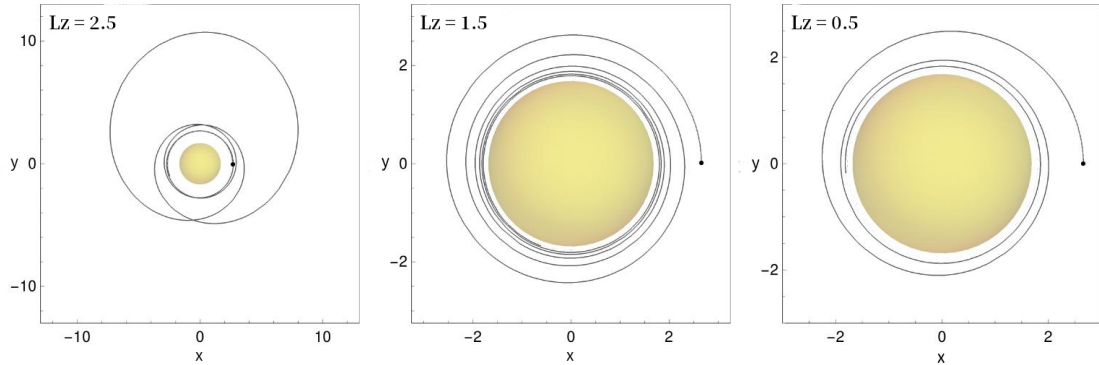


Figura 4.8: Orbitas para partículas con diferentes valores del momento angular  $L_z$ . Los parámetros del espacio tiempo son  $a = 0.9$  y  $g = 0.2$  y por lo tanto la métrica corresponde a un agujero negro con dos horizontes.

de Hayward con rotación descritos por los potenciales en la figura 4.2. El parámetro de rotación  $a = 0.9$  y  $g = 0.2$  se mantienen para los tres casos, mientras que cada partícula cuenta un distinto valor del momento angular  $L_z = 2.5, 1.5, 0.5$ . Como en el caso del agujero negro de Kerr, conforme el momento angular de las partículas decrece, la barrera de potencial desaparece, tal que las partículas eventualmente caerán al agujero negro.

Las trayectorias corresponden a partículas con energía constante representada por las líneas punteadas horizontales en la figura 4.2, para cada valor de  $L_z$ . Los puntos de intersección de la función potencial y la energía en la figura 4.2 señalan la posición inicial de las partículas  $r = 2.5$  para los tres casos. La trayectoria de la partícula con  $L_z = 2.5$  es la única orbita acotada entre los dos radios  $r = 2.5$  y  $r = 10.2$ , mientras que para las partículas con  $L_z = 1.5$  y  $L_z = 0.5$  las trayectorias no están acotadas y de acuerdo al potencial en 4.2 caen al agujero negro, como se observa en las trayectorias de la figura 4.8.

En la figura 4.9 se presentan las orbitas de las partículas alrededor de agujeros negros de Hayward con rotación con distinto parámetro de rotación  $a$  de acuerdo a los potenciales de la figura 4.3. Las partículas cuentan con momento angular  $L_z = 2.5$ , y la posición inicial de los tres casos es  $r_0 = 2.5$ . Los valores de la energía de cada partícula corresponden a las líneas punteadas horizontales en la figura 4.3, respectivamente. Los parámetros de los espacios tiempos son  $g = 0.2$  para los tres casos y  $a = 0.9, 0.6, 0$ .

Como se observa en la figura 4.3, para el valor de  $L_z = 2.5$  la barrera de potencial desaparece conforme  $a$  tiende a cero y el máximo local y el mínimo del potencial se fusionan de tal manera que eventualmente desaparecen para  $a = 0$ . Durante este proceso, las orbitas acotadas desaparecen dejando las trayectorias de partículas que caen al agujero negro.

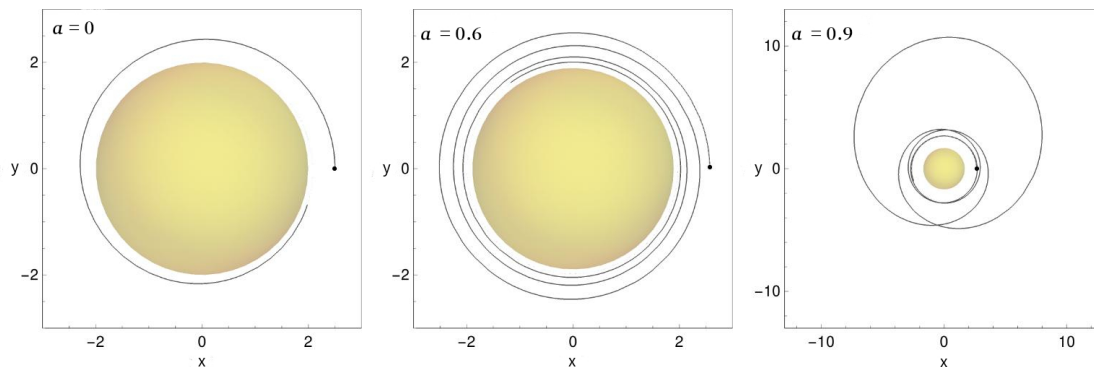


Figura 4.9: Geodésicas de partículas orbitando un agujero negro con diferentes valores de  $a$ . En cada caso, el agujero negro cuenta con dos horizontes. Para  $a = 0$  y  $a = 0.6$  la partícula cae al agujero negro mientras que para  $a = 0.9$  la trayectoria está acotada entre dos radios.

Esto se observa para  $a = 0.6$  y  $a = 0$  donde las partículas caen al agujero negro mientras que para  $a = 0.9$  la partícula orbita alrededor del agujero negro entre dos radios  $r = 2.5$  y  $r = 10.2$ .

En la figura 4.10 se muestran tres gráficas para las trayectorias de partículas acotadas alrededor de agujeros negros con parámetro de rotación  $a = 0.4$  para los tres y parámetros  $g = 0, 0.6$  y  $g = 0.96$ , tal que este último corresponde al valor límite en el que el espacio tiempo tiene un solo horizonte. La posición inicial para los tres casos se encuentra en  $r_0 = 7.0$ , mientras que la magnitud de la velocidad inicial es  $v_0 = 0.45$  u el momento angular de las partículas es  $L_z = 3.5$ , para los tres casos, y el tiempo de simulación  $\tau = 2780$ , también para todos los casos. Los puntos en la figura 4.10 corresponden a las posiciones iniciales  $r_0$ . Para esta figura, los valores de  $a$  y  $L_z$  se escogieron de tal manera que se mostraran notablemente los cambios en las trayectorias de acuerdo a la variación de  $g$ . Conforme  $g$  incrementa su valor, la diferencia en las trayectorias se hace más notoria. Para estos casos, el cambio en las orbitas, con respecto al caso del agujero negro de Kerr, son relevantes en el estudio de emisión de ondas gravitacionales [51, 52]. En principio, en un sistema binario, donde se asume que los objetos consisten en un agujero negro de Kerr y una estrella compacta pequeña, que en principio se puede considerar, con respecto al agujero negro, como una partícula puntual.

Las diferencias en las trayectorias de partículas masivas en el plano ecuatorial, alrededor del agujero negro de Kerr y el agujero negro de Hayward con rotación, son los cambios en los ángulos de precesión. Conforme  $g$  incrementa su valor, la precesión incrementa. Esta diferencia se hace más notable para valores pequeños del parámetro  $a$ , mientras que para valores cercanos al caso de agujeros extremos ( $a \sim 1$ ) las diferencias son despreciables.



Este comportamiento con respecto a  $a$ , está estrictamente relacionado con los valores de  $g$  que el espacio tiempo puede tomar a partir de dejar fijo el parámetro de rotación, pues para valores pequeños de  $a$  existen más posibles valores de  $g$  que siguen describiendo un agujero negro, como se puede ver en la figura 3.3, mientras que para valores grandes de  $a$ , los posibles valores de  $g$  son menores. A su vez,  $g$  juega un rol importante en la dinámica de las partículas masivas, para un valor específico de  $a$  y del momento angular  $L_z$ , una partícula puede orbitar el agujero negro o caer a él dependiendo exclusivamente del parámetro  $g$ . *E.g.* si una partícula cae a un agujero negro de Kerr, podemos escoger un valor de  $g$  en el agujero negro de Hayward rotante, tal que para ese valor, la partícula bajo las mismas condiciones, no caiga al agujero negro.

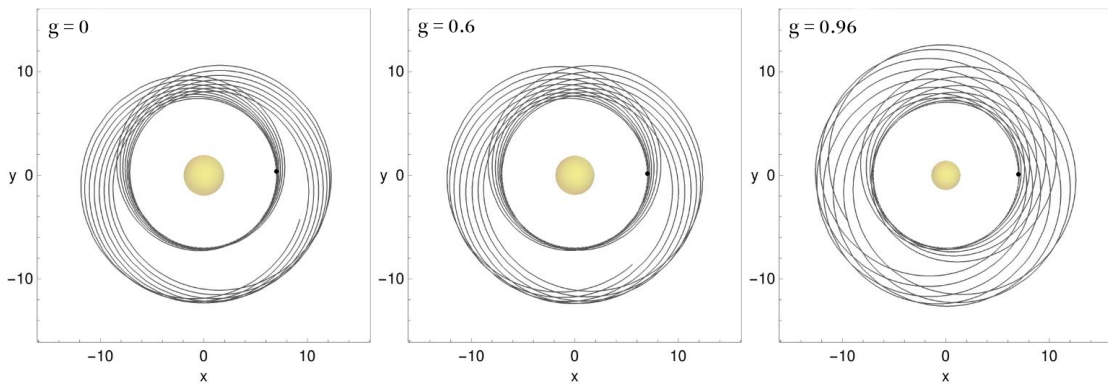


Figura 4.10: Orbitas de partículas moviéndose en el plano ecuatorial de tres agujeros negros con distinto valor del parámetro  $g$  y espín  $a = 0.4$ . Las partículas tienen momento angular  $L_z = 3.5$ . El movimiento en el plano ecuatorial corresponde a una constante de Carter con valor  $Q = 0$ .

### 4.3.2 Movimiento fuera del plano ecuatorial

Como se ha mencionado en las secciones anteriores, algunos estudios se han realizado para el movimiento de partículas en espacio tiempo regulares restringidas al plano ecuatorial por ejemplo en [28]. Sin embargo, no hay estudios para el movimiento de partículas fuera del plano ecuatorial. Debido a esto y la importancia de dicho estudio, es necesario hacer un estudio completo de las orbitas en todo el espacio, de tal manera que seamos capaces de hacer comparaciones precisas con el agujero negro de Kerr y con los datos recolectados de observaciones astronómicas así como de futuras observaciones. Las trayectorias fuera del plano ecuatorial para el agujero negro rotante de Hayward también se calcularon numéricamente.

Como se mencionó en la sección 4.2.2, las orbitas fuera del plano ecuatorial se pueden clasificar de acuerdo a la constante de Carter  $Q$ .

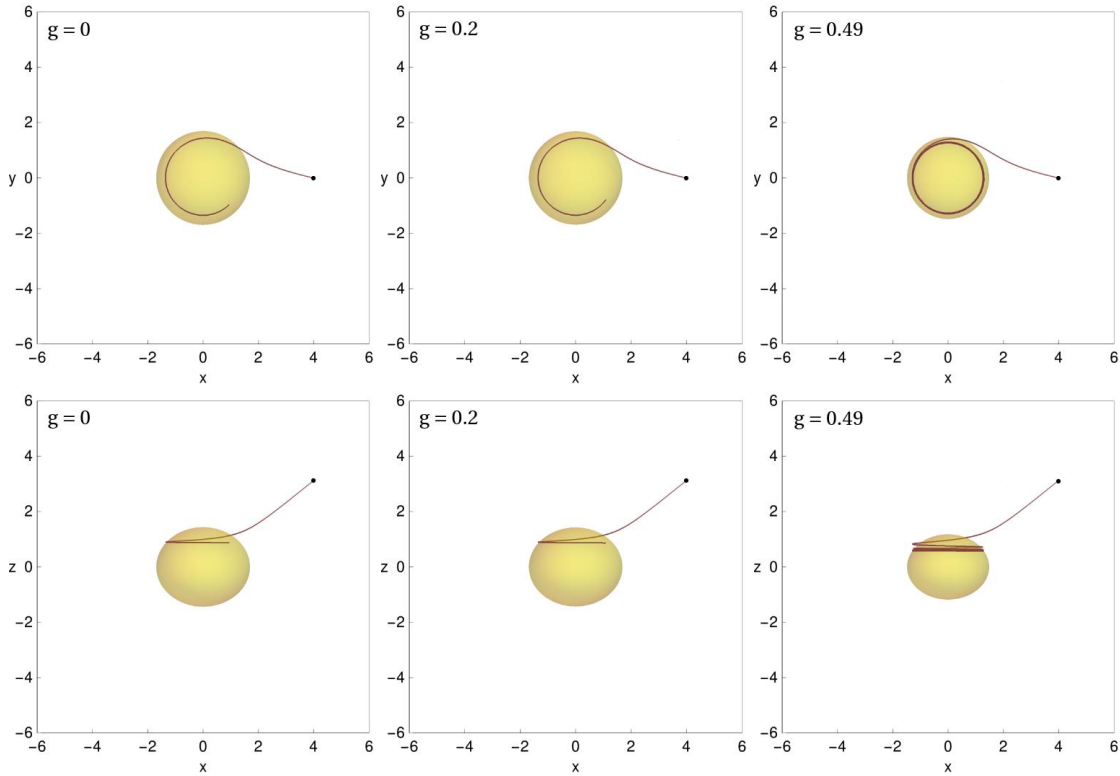


Figura 4.11: Distintas vistas de las trayectorias de partículas moviéndose en alrededor de un agujero negro con diferente valor del parámetro  $g$ . El espín de los agujeros negros es  $a = 0.9$  y las partículas satisfacen la condición  $Q < 0$ . Las figuras de la columna derecha corresponde a un espacio tiempo con un solo horizonte de eventos.

En la figura 4.11 se muestran las trayectorias para tres partículas de prueba con constante de Carter negativa  $Q = -0.2$  para tres situaciones distintas de agujeros negros rotantes de Hayward variando el parámetro  $g$ . Las dos gráficas del panel izquierdo corresponden al espacio tiempo de Kerr con  $g = 0$ , mientras que las otras gráficas de izquierda a derecha corresponden a agujeros negros de Hayward con rotación con parámetro  $g = 0.2$  y  $g = 0.49$  tal que representan un agujero negro con dos horizontes y un agujero negro con un solo horizonte, respectivamente. La región en amarillo señala la localización del horizonte externo. En los tres casos, el agujero negro tiene espín  $a = 0.9$ , y la velocidad inicial es 0.96 mientras que las posiciones iniciales se encuentran en  $r_0 = 5.0$ , representadas en las gráficas con un punto. El tiempo de evolución en unidades de  $M$  fue  $\tau = 160$ , para los tres casos. El primer renglón corresponde a la proyección de la orbita en el plano  $x - y$ . El eje del espín del agujero negro es paralelo al eje  $z$  y rota de acuerdo a las manecillas

del reloj. La segunda fila corresponde a una proyección en el plano  $z - x$ . El movimiento de la partícula ocurre entre los ángulos  $\vartheta_1$  y  $\vartheta_2$ , que están relacionados con  $u_1$  y  $u_2$  de la función potencial  $f(u)$  en la subsección 4.2.2. Estos ángulos cambian de acuerdo al valor de  $g$ , si  $g$  se incrementa, la diferencia entre los dos ángulos se vuelve ligeramente pequeña. Para  $g = 0$  el valor de  $\vartheta$  se encuentra entre  $\vartheta_1 = 0.316\pi$  y  $\vartheta_2 = 0.233\pi$ .

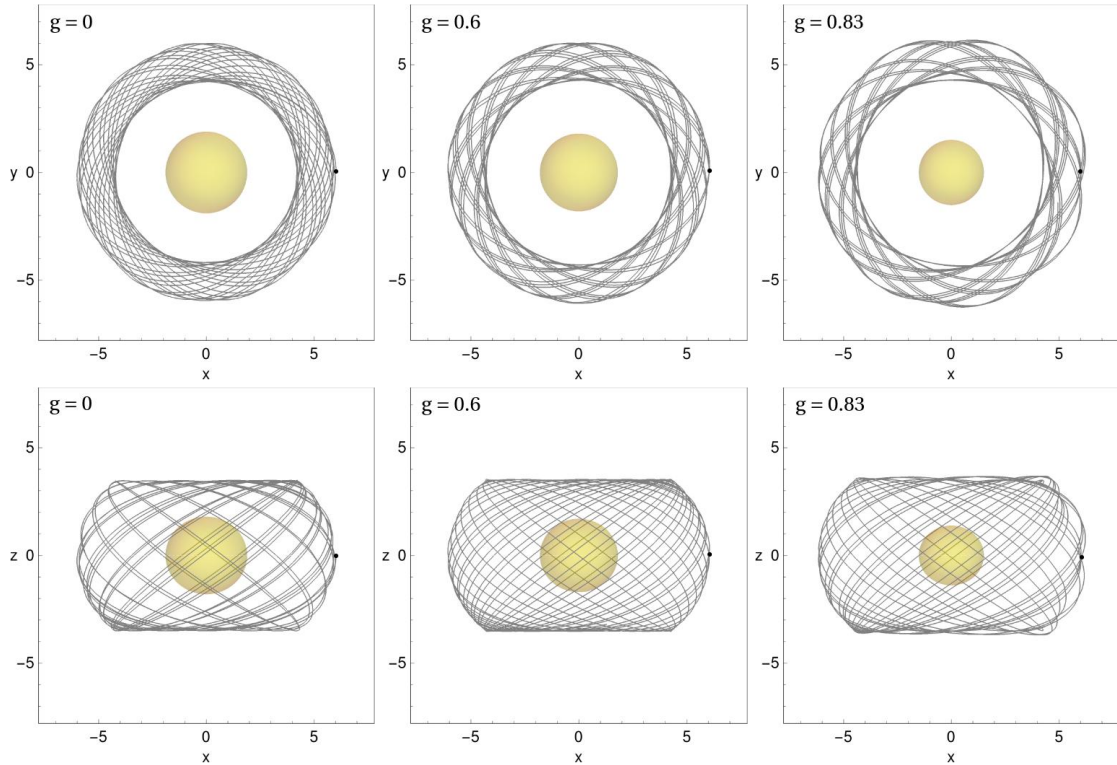


Figura 4.12: Diferentes vistas de las trayectorias de partículas de prueba orbitando tres agujeros negros rotantes con distinto valor del parámetro  $g$  y valor de espín  $a = 0.6$ . El espacio tiempo con  $g = 0.836$  corresponde a un agujero negro con un solo horizonte. Los valores iniciales de las partículas se escogieron tal que se cumpla  $Q > 0$  para la constante de Carter.

En la figura 4.12, la partícula inicialmente satisface la condición  $Q > 0$ , es decir, el movimiento se encuentra entre  $\vartheta_0 \leq \vartheta \leq \pi\vartheta_0$  y por lo tanto cruza el plano ecuatorial. La velocidad inicial es  $v_0 = 0.52$  y la posición inicial es  $r_0 = 6$ . Para el agujero negro con  $g = 0$ , la partícula se mueve entre los ángulos  $\vartheta_1 = 0.280\pi$  y  $\vartheta_2 = 0.719\pi$ . Para los casos ilustrados,  $g = 0$  representa un agujero negro de Kerr y  $g = 0.6$ ,  $g = 0.8$  representan agujeros negros rotantes de Hayward con dos horizontes y uno horizonte, respectivamente.

Las regiones en amarillo señalan el horizonte externo para los dos primeros casos y el único horizonte para  $g = 0.8$ . Para agujeros negros rotando rápidamente, el efecto de  $g$  en las trayectorias es despreciable mientras que para agujeros negros rotando lentamente, se observan cambios en las trayectorias de acuerdo al valor de  $g$ . Si  $g$  aumenta el efecto es más notable.

# 5

## Conclusiones

Debido a la importancia de obtener resultados que difieran de las soluciones clásicas de agujeros negros, esta tesis tiene como objetivo comparar las trayectorias de partículas masivas en el espacio tiempo de Kerr con en el espacio tiempo de Hayward con rotación. La desviación entre ambos agujeros negros está dada en términos del parámetro  $g$ , cuando  $g = 0$  se recupera el espacio tiempo de Kerr. Este valor está relacionado con el parámetro de espín  $a$ . Para cada valor que tomae  $a$ , se tienen ciertos valores posibles del parámetro  $g$  de tal manera que en la estructura del espacio tiempo exista un horizonte de eventos y por lo tanto describa un agujero negro.

Se sabía, gracias al trabajo de Brandon Carter [5], que en la métrica de Kerr es posible usar el método de separación de variables en la teoría de Hamilton-Jacobi, tal que obtuvo una cuarta constante de movimiento  $Q$ , la cual lleva su nombre. En trabajos anteriores, en el agujero negro de Hayward con rotación, no se especifica la existencia de esta constante, aún más, no existe un estudio sistemático de las geodésicas fuera de plano ecuatorial. En este trabajo, al estudiar las propiedades de las geodésicas a partir de la teoría de Hamilton-Jacobi, se ha encontrado que como en el espacio tiempo de Kerr, también el de Hayward con rotación tiene una simetría *escondida* relacionada con las integrales de movimiento para las coordenadas  $r$  y  $\vartheta$ , de tal manera que se puede hacer uso del método de separación de variables, dando como resultado la existencia de una cuarta constante de movimiento tipo constante de Carter.

Gracias a la existencia de esta constante, para estudiar el movimiento de las partículas,

se obtuvieron potenciales efectivos para el movimiento en las coordenadas  $r$  y  $\vartheta$ , dando como resultado que las geodésicas fuera del plano ecuatorial se pueden caracterizar completamente en términos de los valores que tome la constante  $Q$ .

Posteriormente se realizó un estudio de las propiedades del movimiento en el plano ecuatorial, dando como resultados interesantes que estas características no solo dependen de los valores del parámetro de espín  $a$  y del momento angular  $L_z$ , también dependen estrictamente del valor de  $g$  que mide las desviaciones entre Kerr y Hayward con rotación, y por lo tanto, las características del movimiento de las partículas pueden ser inferidas a partir de la forma que tenga el potencial, y viceversa a través de las geodésicas es posible deducir el potencial efectivo del espacio tiempo al cual están sujetas las partículas. De esta manera somos capaces de obtener las propiedades del espacio tiempo a partir de observar el movimiento de las partículas. Se mostró, que debido a la existencia de ergosferas es posible la extracción de energía mediante el proceso de Penrose.

Para la parte angular se logró escribir un potencial efectivo para  $\vartheta$  permitiéndonos caracterizar las geodésicas fuera del plano ecuatorial. Se demostró que el tipo de movimiento angular de las partículas depende únicamente del valor que adquiera la constante de Carter, sea idénticamente a cero, positivo o negativo.

Se integraron numéricamente las ecuaciones de movimiento, dentro del plano ecuatorial y fuera del plano ecuatorial, para el caso de Kerr y para Hayward con rotación, dando como resultado que existen diferencias notables entre ambos espacio tiempos cuando los agujeros negros rotan lentamente para los dos tipos de movimiento. Estas diferencias están ligadas a valores altos del parámetro  $g$ . Por ello para agujeros negros cercanos al valor extremo, los valores permitidos de  $g$  son muy chicos, y las diferencias en el movimiento de las partículas son prácticamente insignificantes.

En general, se cree que los agujeros negros astrofísicos son del tipo Kerr y por lo tanto, la importancia astrofísica de estudios de agujeros negros regulares es limitada. Sin embargo, el estudio de órbitas alrededor de agujeros negros rotantes, es importante desde el punto de vista conceptual y teórico, pues nos permite identificar diferencias entre distintos modelos de agujeros negros, específicamente en las regiones cercanas al horizonte de eventos, en donde los parámetros tienen relevancia en la dinámica de las partículas. Además, pocos son los trabajos sobre orbitas de objetos compactos diferentes al agujero negro de Kerr. Si estos representan objetos compactos astrofísicos, los estudios realizados sobre sus propiedades y en particular, los resultados obtenidos en esta tesis, se volverán importantes para su identificación.

# Bibliografía

- [1] K. Schwarzschild, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys. ) **1916**, 189 (1916) [physics/9905030].
- [2] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff, Phys. Rev. **55**, 374 (1939). doi:10.1103/PhysRev.55.374
- [3] J. R. Oppenheimer and H. Snyder, Phys. Rev. **56**, 455 (1939). doi:10.1103/PhysRev.56.455
- [4] R. P. Kerr, Phys. Rev. Lett. **11**, 237 (1963). doi:10.1103/PhysRevLett.11.237
- [5] B. Carter, Phys. Rev. **174**, 1559 (1968). doi:10.1103/PhysRev.174.1559
- [6] R. Penrose, Riv. Nuovo Cim. **1**, 252 (1969) [Gen. Rel. Grav. **34**, 1141 (2002)].
- [7] Frolov, Valeri P., Zelnikov, A. Introduction to Black Hole Physics. Oxford University Press. 2011
- [8] J. Bardeen. In Proceedings of the 5th International Conference on Gravitation and the Theory of Relativity. Tbilisi, Georgia. 913 September 1968. Tbilisi University Press, Tbilisi. 1968.
- [9] I. Dymnikova. *Gen Relativ Gravit.*, 24:235, 1992.
- [10] C. Barrabès and V.P. Frolov. *Phys. Rev. D*, 53:3215, 1996.
- [11] M. Mars, M. M. Martín-Prats, and J. M. M. Senovilla. *Class. Quant. Grav.*, 13:L51, 1996.
- [12] A. Cabo and E. Ayón-Beato. *Int. J. Mod. Phys. A*, 14:2013, 1999.
- [13] K. A. Bronnikov, H. Dehnen, and V. N. Melnikov. *Gen Relativ Gravit.*, 39:973, 2007.
- [14] I. Dymnikova, *Class. Quant. Grav.* **21** (2004) 4417 [gr-qc/0407072].
- [15] L. Balart and E. C. Vagenas, *Phys. Rev. D* **90** (2014) no.12, 124045 [arXiv:1408.0306 [gr-qc]].
- [16] E. Ayón-Beato and A. García. *Phys. Rev. Lett.*, 80:5056, 1998.
- [17] A. Burinskii and S.R. Hildebrandt. *Phys. Rev.*, D65:104017, 2002.
- [18] S. A. Hayward, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 031103 [gr-qc/0506126].
- [19] Z. Y. Fan, *Eur. Phys. J. C* **77**, no. 4, 266 (2017) [arXiv:1609.04489 [hep-th]].

- [20] Z. Y. Fan and X. Wang, Phys. Rev. D **94**, no. 12, 124027 (2016) [arXiv:1610.02636 [gr-qc]].
- [21] S. P. Drake and P. Szekeres, Gen. Rel. Grav. **32**, 445 (2000) [gr-qc/9807001].
- [22] C. Bambi and L. Modesto, Phys. Lett. B **721** (2013) 329 [arXiv:1302.6075 [gr-qc]].
- [23] M. E. Rodrigues and E. L. B. Junior, Phys. Rev. D **96**, no. 12, 128502 (2017) [arXiv:1712.03592 [gr-qc]].
- [24] B. Toshmatov, Z. Stuchlík and B. Ahmedov, Phys. Rev. D **95**, no. 8, 084037 (2017) [arXiv:1704.07300 [gr-qc]].
- [25] B. Toshmatov, Z. Stuchlík and B. Ahmedov, arXiv:1712.04763 [gr-qc].
- [26] E. Hackmann and C. Lammerzahl, (Anti-) de Sitter Spacetimes,” Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 171101 [arXiv:1505.07955 [gr-qc]].
- [27] E. Hackmann, C. Lammerzahl, V. Kagramanova and J. Kunz, Phys. Rev. D **81** (2010) 044020 [arXiv:1009.6117 [gr-qc]].
- [28] G. Abbas and U. Sabiullah, Astrophys. Space Sci. **352** (2014) 769 [arXiv:1406.0840 [gr-qc]].
- [29] M. J. Valtonen *et al.*, Nature **452** (2008) 851 [arXiv:0809.1280 [astro-ph]].
- [30] K. Akiyama *et al.* [Event Horizon Telescope Collaboration], Astrophys. J. **875** (2019) no.1, L1.
- [31] V. Cardoso and L. Gualtieri, Class. Quant. Grav. **33** (2016) no.17, 174001 [arXiv:1607.03133 [gr-qc]].
- [32] R. Torres and F. Fayos, Gen. Rel. Grav. **49** (2017) no.1, 2 [arXiv:1611.03654 [gr-qc]].
- [33] M. J. Valtonen *et al.*, Nature **452** (2008) 851 [arXiv:0809.1280 [astro-ph]].
- [34] C. Bambi, K. Freese, S. Vagnozzi and L. Visinelli, arXiv:1904.12983 [gr-qc].
- [35] Schutz, B. A First Course in General Relativity. Cambridge University Press. 2009.
- [36] Wald, Robert M. General Relativity. The University of Chicago Press, Chicago and London. 1984.
- [37] R. Penrose, Phys. Rev. Lett. **14** (1965) 57.
- [38] B. Pourhassan and U. Debnath, arXiv:1506.03443 [gr-qc].
- [39] B. Gouteraux, arXiv:1011.4941 [hep-th].
- [40] D. Lust and W. Vleeshouwers, doi:10.1007/978-3-030-10919-6 arXiv:1809.01403 [gr-qc].
- [41] M. Visser, arXiv:0706.0622 [gr-qc].
- [42] S. A. Teukolsky, Class. Quant. Grav. **32**, no. 12, 124006 (2015) doi:10.1088/0264-9381/32/12/124006 [arXiv:1410.2130 [gr-qc]].
- [43] C. M. Chambers, Annals Israel Phys. Soc. **13**, 33 (1997) [gr-qc/9709025].



- 
- [44] M. Amir, F. Ahmed and S. G. Ghosh, *Eur. Phys. J. C* **76** (2016) no.10, 532 [arXiv:1607.05063 [gr-qc]].
- [45] S. V. Fuerst and K. W. Wu, *Astron. Astrophys.* **424**, 733 (2004) [astro-ph/0406401].
- [46] T. Chiba and M. Kimura, *PTEP* **2017**, no. 4, 043E01 (2017) [arXiv:1701.04910 [gr-qc]].
- [47] J. P. Hu, L. L. Shi, Y. Zhang and P. F. Duan, *Astrophys. Space Sci.* **363** (2018) no.10, 199.
- [48] J. P. Hu, Y. Zhang, L. L. Shi and P. F. Duan, *Gen. Rel. Grav.* **50** (2018) no.7, 89.
- [49] Misner, C.W. and Thorne, K.S. and Wheeler, J.A. *Gravitation*. Princeton University Press. 1970.
- [50] Chandrasekhar, S. *The Mathematical theory of black hole*. Oxford University Press. 1983.
- [51] S. A. Hughes, *Phys. Rev. D* **61**, no. 8, 084004 (2000)
- [52] M. Sasaki and H. Tagoshi, *Living Rev. Rel.* **6** (2003) [gr-qc/0306120].