



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ROMPIMIENTO ESPONTÁNEO DE LAS SIMETRÍAS
Y CONFIGURACIONES EXTENDIDAS EN UN
POTENCIAL CON DOS FAMILIAS CONTINUAS DE
ESTADOS BASE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

JONATHAN LOZANO MAYO

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. MANUEL TORRES LABANSAT



CIUDAD DE MÉXICO, 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi abuela y mi padre los gigantes en cuyos hombros me he subido.

Reconocimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi tutor el Dr. Manuel Torres Labansat quien con mucha paciencia me ha enseñado sobre muchos temas interesantes y ha sido mi mentor. Sin él esta tesis no hubiese sido posible. Trabajar con él ha sido la experiencia más enriquecedora en mi camino a ser un científico algún día. Siempre estaré agradecido por la oportunidad de aprender que me brindó.

Estoy agradecido con la Facultad de Ciencias de la UNAM y con el Instituto de Física que hacen posible que muchos jóvenes podamos aprender y emprender nuestro camino. Agradezco también a los profesores y personas que dedican una parte de su vida a compartir su conocimiento sin ellos la ciencia no sería igual.

Quiero agradecer a Tania Zanatta Martínez quién me ha enseñado cada día sobre la amistad, sobre la física y sobre como vivir mejor, a ella le debo más de lo que podría retribuirle. Gracias por tu paciencia, tu amistad y tu amor.

Agradezco también a mi amigos y compañeros Iván Hernández Garibay y Christian Benitez Abarca con quienes he compartido risas, preocupaciones y discusiones. Ellos me han enseñado mucho y han sido un gran apoyo para mí todo este tiempo.

Por último pero no menos importante quiero agradecer a mi abuela Celia quien a través de un gran sacrificio me ha dado todo. Sin ella y su ejemplo yo no tendría la oportunidad de soñar con un mejor futuro. Agradezco a mi padre Ricardo quien junto a mi abuela a través del ejemplo me enseñó el valor de soñar. Cada triunfo mío también les pertenece. Finalmente quiero agradecer a toda mi familia y a aquellos que me han tendido su mano. Todos ustedes son mis maestros.

Declaración de autenticidad

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesis es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquier otra Universidad. Esta tesis es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración, salvo que se indique específicamente en el texto.

JONATHAN LOZANO MAYO. CIUDAD DE MÉXICO, 2020

Resumen

En esta tesis se estudia el rompimiento espontáneo de la simetría de una teoría escalar sujeta a un potencial ϕ^4 generalizado con dos familias continuas de estados base. Se muestra que dentro de la teoría ϕ^4 generalizada es posible obtener soluciones de solitónicas de kink y vórtices de Abrikosov-Nielsen-Olesen, en ambos casos se mostró que los campos sienten la influencia de los dos mínimos del potencial dependiendo del parámetro de acomplamiento del potencial y la diferencia en altura entre los mínimos del potencial. En adición se mostró que cuando los mínimos del potencial tienen diferente altura hay una única solución de kink mientras que esta solución se desacopla en tres kinks individuales cuando los mínimos del potencial tienen la misma altura. Finalmente se estudió el tunelaje entre las dos vacíos de la teoría cuando los mínimos del potencial tienen diferente altura obteniendo soluciones numéricas del exponente de decaimiento, así como una solución analítica cuando la diferencia en altura entre los mínimos del potencial es muy pequeña.

Índice general

Índice de figuras	xI
Índice de tablas	xv
1. Introducción	1
1.1. Introducción	1
1.1.1. ¿Son las configuraciones de vacío los únicos “puntos” estacionarios de la acción?:Configuraciones de campo no triviales	2
2. Rompimiento espontáneo de las simetrías	5
2.1. La teoría de Landau-Ginzburg	5
2.2. Rompimiento espontáneo de la simetría en la teoría de campos	6
2.2.1. Rompimiento espontáneo de simetrías discretas	6
2.2.2. Rompimiento espontáneo de simetrías continuas globales	7
2.3. La invarianza de Norma	11
2.3.1. La invarianza de norma en el Electromagnetismo	12
2.3.2. La invarianza de norma en la mecánica cuántica	14
2.3.3. Una consecuencia, la invarianza de norma determina la interacción	15
2.3.4. Invarianza ante transformaciones de fase locales en teoría de campos	16
2.3.5. Invarianza de norma no Abelianas	17
2.3.6. Sobre la invarianza de norma	19
2.4. El Mecanismo de Higgs	21
3. Rompimiento espontáneo de la simetría en un potencial con dos familias continuas de estados base	25
3.1. Campo escalar con dos familias continuas de estados base	26
3.2. Electrodinámica escalar para un campo con dos familias de vacíos.	32
3.3. Grados de libertad y algunas consideraciones respecto a los dos vacíos de la teoría	35
4. Solitones en la teoría ϕ^4 generalizada.	37
4.1. Soluciones solitónicas para un campo escalar	37
4.2. Teorema de Derrick	38

4.3. Soluciones de solitón y carga conservada	39
4.4. Kinks de una teoría ϕ^4 generalizada	42
4.4.1. Caso $\delta = 0$	42
4.4.2. Caso $\delta \neq 0$	48
5. Vórtices en un modelo de electrodinámica escalar con un potencia ϕ^4 generalizado	55
5.1. Vórtices en la electrodinámica escalar con un potencial ϕ^4 generalizado .	55
5.2. Soluciones numéricas.	61
6. Un falso vacío en la teoría	69
6.1. Tunelaje en varias dimensiones	69
6.2. Tunelaje en teoría de campos	74
6.3. La aproximación de la Burbuja	81
6.4. Soluciones numéricas	87
6.5. La evolución de la burbuja	90
7. Conclusiones	93
A. La geometría de la derivada covariante	95
B. Vórtices: Forma de los campos $f(r)$ y $a(r)$ cerca del origen	99
B.0.1. Expansión de $f(u)$	99
B.0.2. Expansión de $a(u)$	100
C. Tunelaje en el formalismo de la integral de camino Euclidiana	103
C.1. Parte I: La integral de camino Euclidiana	103
C.2. Tunelaje con la integral de camino	107
D. Relaciones tipo virial generalizadas.	109
E. Código del método numérico	113
Bibliografía	117

Índice de figuras

1.1. Tazón con estado base en el origen, el punto de simetría del sistema (a) y Tazón con una meseta simétrica, el estado base está degenerado y no se encuentra en el punto de simetría (b).	2
2.1. Potencial $V(\phi) = -\mu^2\phi\phi^* + \frac{\lambda}{4}\phi^2\phi^{*2}$ como función de $\phi = \phi_1 + i\phi_2$. Las flechas rojas muestran las excitaciones alrededor de la dirección de simetría del potencial.	9
2.2. Efecto Aharonov-Bohm: Consideremos la transmisión de un electrón entre los puntos (a) y (b) mediante dos caminos diferentes que encierran una región Ω en la cual hay un campo magnético $\vec{B} \neq 0$. Aunque el electrón no penetra en la región Ω cuánticamente hay una diferencia en fase provocada por el campo magnético, dicha diferencia en fase está dada en términos del potencial vector \vec{A} como se muestra en la Ec.2.61.	20
3.1. (a) Potencial $U(\phi)$ 3.2 como función de $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ con $[v_1 = 1, v_2 = 4, \delta = 0.5]$.(b) Curvas de nivel para $U(\phi)$.En las gráficas se pueden apreciar dos círculos (amarillo claro) correspondientes a los puntos que minimizan el potencial (b).	27
3.2. Variación de las masas de las partículas vectoriales (Ecs.3.34 y 3.35) y escalares (Ecs.3.10 y 3.11) como función del parámetro delta, tomando en cuenta las restricciones señaladas en la Ec.3.7. Claramente se muestra que las partículas tendrán una dinámica diferente, dependiendo del vacío V_i al cual se asocian. En el límite $\delta = 0$ en el que los vacíos V_1 y V_2 están degenerados ($U(V_1) = U(V_2)$), las masas escalares coinciden $m_{V_1} = m_{V_2}$, mientras que las masas M_{A_1} y M_{A_2} mantienen valores diferentes	36
4.1. (a) Potencial escalar 4.13.(b) Potencial efectivo $-\mathcal{V}$ para el problema clásico equivalente 4.2.	43
4.2. Solución para el kink $\phi_A(x)$ 4.16 con parámetros $v_1 = 1, v_2 = 4$	44
4.3. Densidad de energía del kink $\phi_A(x)$ 4.17 centrada alrededor de $X_0 = 0$ con parámetros $v_1 = 1, v_2 = 4$	44
4.4. Solución para el kink $\phi_B(x)$ \mathcal{V} con parámetros $v_1 = 1, v_2 = 4$	46

ÍNDICE DE FIGURAS

4.5.	Densidad de energía para el kink ϕ_B . Los valores de los parámetros son los mismos que en la gráfica 4.2	46
4.6.	Soluciones solitonicas para el potencial escalar \mathcal{V} Eq.4.13 con parámetros $v_1 = 1, v_2 = 4$.(a) Kink ϕ_A localizado en el intervalo (v_1, v_2) con carga $Q_A = v_2 - v_1$.(b) Kink ϕ_B localizado en el intervalo $(-v_1, v_1)$ con carga $Q_B = 2v_1$.(c) Kink ϕ_C en el intervalo $(-v_2, -v_1)$ con carga $Q_C = v_2 - v_1$.	48
4.7.	Potencial $-\mathcal{V}$ que sentiría una partícula de masa $m = 1$, con \mathcal{V} dado por 4.26, con parámetros $v_1 = 1, v_2 = 4, \delta = 0.5$	50
4.8.	A la izquierda se observa la solución solitonica del potencial \mathcal{V} en el intervalo $(-v_2, v_2)$ con parámetros $v_1 = 1, v_2 = 4, \delta = 0.5$.A la derecha se observa la solución solitonica del potencial \mathcal{V} en el intervalo $(-v_2, v_2)$ con parámetros $v_1 = 1, v_2 = 4, \delta = 0.001$	51
4.9.	Densidad de energía del soliton	52
4.10.	En azul se muestra la densidad de energía del soliton cuando $\delta \neq 0$, mientras que la línea punteada negra muestra la densidad de energía de la solución de soliton en el intervalo $(-v_1, v_1)$ cuando $\delta = 0$. La línea punteada roja muestra la densidad de energía de la solución de soliton en los intervalos $(-v_2, -v_1)$ y (v_1, v_2)	52
5.1.	Gráfica de los perfiles $f(u)$ y $a(u)$ para los parámetros $e = 1, v_1 = 1, v_2 = 2$. Cerca del origen los perfiles se desplazan a la derecha conforme crece el valor de n	60
5.2.	Gráfica del campo magnético $B(u)$ para diferentes valores del cuanto de flujo n y parámetros $e = 1, v_1 = 1, v_2 = 2$	63
5.3.	Gráfica de la densidad energética $\epsilon(u)$ y $a(r)$ para los parámetros $e = 1, v_1 = 1, v_2 = 2$	64
5.4.	Gráfica de los perfiles $f(u)$ y $a(u)$ para los parámetros $e = 1, v_1 = 1, v_2 = 4$	64
5.5.	Gráfica de los perfiles $B(u)$ para diferentes valores del cuanto de flujo n y parámetros $e = 1, v_1 = 1, v_2 = 4$	65
5.6.	Gráfica de la densidad $\epsilon(u)$ para los parámetros $e = 1, v_1 = 1, v_2 = 4$. . .	65
5.7.	Gráfica de los perfiles $f(u)$ y $a(u)$ para los parámetros $e = 1, v_1 = 1, v_2 = 4$.	68
6.1.	El potencial $V(\phi)$ tiene dos vacíos en el $\phi > 0$. $V(\phi_F)$ es el vacío metaestable (falso), mientras que $V(\phi_V)$ es el vacío estable (verdadero). Como el tunelaje no ocurre simultaneamente en todo el espacio el proceso ocurre mediante la nucleación de burbujas de vacío verdadero que se expanden convirtiendo el fonde de vacío falso. En esta figura ϕ_o es la configuración de escape del sistema, es decir, la configuración dentro de la burbuja al momento de la nucleación.	70
6.2.	Potencial 3.2 con parámetros $v_1 = 1, v_2 = 4, \delta = 0.5$ para $\phi > 0$. El potencial tiene un vacío falso ϕ_F y un vacío verdadero ϕ_V	76

6.3. Analogía clásica del tunelaje en teoría de campos. Una partícula sometida a un potencial $-V(\phi)$ y una fricción proporcional a ρ^{-1} . Si la partícula parte de ϕ_u esta comienza a moverse perdiendo energía por la fricción y no alcanzará la cima en ϕ_F . Si la partícula parte de un punto ϕ_o muy cerca del vacío verdadero esta permanece mucho tiempo cerca de ϕ_V y cuando comienza a moverse la fricción es despreciable por lo que la energía se conserva casi por completo provocando que se exceda y no alcance el reposo en ϕ_F si no que continua su camino. Existe un punto entre ϕ_u y ϕ_o tal que la partícula no se excede ni se queda corta por lo que alcanza el reposo en la cima del potencial en ϕ_F	82
6.4. Soluciones de Bounce del potencial 6.63 para $v_1 = 1.0, v_2 = 4.0$ y diferentes valores de δ . El radio de la burbuja aumenta cuando el δ disminuye. Una disminución en δ corresponde a una disminución en la diferencia entre los dos vacíos ϵ	87
6.5. Comparación entre la solución numérica, la solución de pared delgada y la configuración propuesta ϕ_A usando los parámetros $\delta = 0.1, v_1 = 1, v_2 = 4$	88
6.6. Comparación entre los valores de los radios de la burbuja que predice la aproximación de pared delgada y los radios de la solución numérica exacta. R_D es el radio de la aproximación de pared delgada mientras que R_N es el radio numérico.	89
6.7. Error relativo de la predicción de la aproximación de pared delgada del radio y el radio numérico como función del parámetro δ	89
6.8. Logaritmo del Exponente de decaimiento B_N como función del parámetro δ . El orden de magnitud de B_N disminuye conforme aumenta el valor de δ . En esta gráfica B_N es el exponente de decaimiento numérico.	90

Índice de tablas

4.1. Carga topológica Q y masa M de los kinks ϕ_A , ϕ_B y ϕ_C	47
--	----

Introducción

1.1. Introducción

Desde la antigüedad el concepto de simetría ha tenido gran relevancia en la física. Hubo una época en la cual las teorías aceptadas sobre el movimiento de los astros debían cumplir un requisito mínimo de simetría que decía que las orbitas de los planetas debían ser circulares. Hoy gracias a Kepler sabemos que los planetas son indiferentes a nuestra fijación con las simetrías puramente circulares. El pasado nos mostró que la naturaleza no siempre tiene preferencia por círculos o rectángulos pero en 1915 Emmy Noether nos enseñó la belleza que reside detrás de las simetrías con un notable teorema que hoy en día es ampliamente usado en la física moderna. El teorema de Noether establece que a cada simetría continua de la acción de un sistema le corresponde una carga conservada. Si por ejemplo la acción de una teoría es invariante ante traslaciones espaciales uno puede encontrar como carga conservada el momento lineal, mientras que si la invarianza es ante rotaciones espaciales la carga conservada será el momento angular. El poder del teorema de Noether es de tipo conceptual y pragmático ya que nos permite encontrar las cantidades conservadas correspondientes a la transformación continua que deja invariante la acción de un sistema.

Las simetrías nos brindan información relevante de los fenómenos físicos y frecuentemente nos permiten resolver problemas con facilidad. Por ejemplo podemos tirar una canica en un tazón cóncavo y saber en qué lugar se encontrará cuando esté en reposo pues el centro del tazón es el único punto simétrico, es decir, el centro del tazón es el lugar donde se encuentra el estado de menor energía del sistema. Por otra parte si ahora imaginamos un tazón con una meseta en el centro como en la figura 1.1 la simetría del sistema se preserva y sucede algo interesante, el estado base del sistema ya no se encuentra en el centro de simetría del tazón, más aún, el estado base se degenera pues hay toda una región circular fuera del centro de simetría donde la canica puede alcanzar el reposo. Al fenómeno anterior se le llama rompimiento espontáneo de la simetría pues el estado base no preserva la simetría del sistema físico, y se le llama

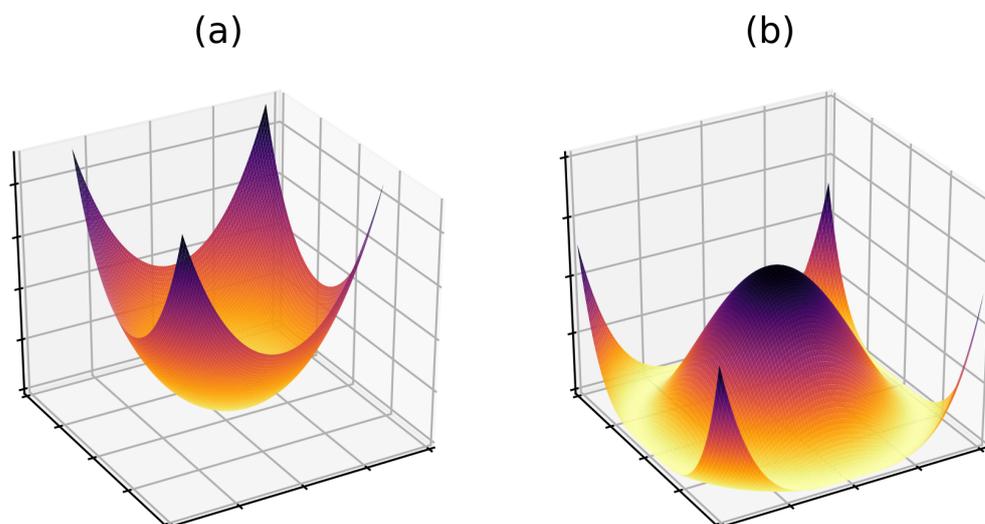


Figura 1.1: Tazón con estado base en el origen, el punto de simetría del sistema (a) y Tazón con una meseta simétrica, el estado base está degenerado y no se encuentra en el punto de simetría (b).

espontáneo ya que no se puede predecir cual de los estados base será el que adopte el sistema. (Kibble, 2015, pp. 1)

El rompimiento espontáneo de las simetrías es uno de los conceptos más importantes en la teoría cuántica de campos, además de que ha permeado otros campos de la física como lo son la física de estado sólido y de los sistemas dinámicos, entre otros. En teoría de campos las partículas son grados de libertad asociados a oscilaciones pequeñas de los campos alrededor del mínimo del potencial es así que en el modelo estándar es mediante el rompimiento de las simetrías que algunas partículas adquieren masa por el mecanismo de Higgs. Es así que en la modernidad la naturaleza vuelve a sorprendernos ya que pareciera los fenómenos físicos y en particular la vida como la conocemos no es producto sólo de las simetrías si no de los caprichos asimétricos de los estados base en la naturaleza.

1.1.1. ¿Son las configuraciones de vacío los únicos “puntos” estacionarios de la acción?: Configuraciones de campo no triviales

A mediados de los años 70s comenzó la curiosidad de varios físicos por estudiar las soluciones estáticas de energía finita de las ecuaciones clásicas de campo pues les interesaba ver si podían ser interpretadas como posibles partículas de la teoría con diferentes propiedades de las partículas elementales producidas como excitaciones de los campos

cuantizados. Pronto se dieron cuenta de que las nuevas configuraciones encontradas eran contribuciones no perturbativas a las integrales de camino.

Una característica importante de las nuevas soluciones es que tienen una estructura topológica que les permite ser estables. Además la información de la estructura topológica por lo regular se puede cuantificar con un número N llamado carga topológica cuya conservación prohíbe el decaimiento de la configuración en una solución trivial de vacío. Se dice que las configuraciones son estabilizadas por su topología. Aquí no hablaremos más de la topología de las soluciones de manera formal sino que solo entenderemos que las configuraciones son estabilizadas por su estructura topológica en el sentido de que estas configuraciones no pueden ser deformadas de manera continua en una solución de vacío sin requerir una cantidad infinita de energía.

A las configuraciones anteriores usualmente se les llama solitones en alusión a su comportamiento de partícula en el sentido de que tienen una densidad de energía localizada en el espacio. El estudio de los solitones en diferentes dimensiones usa como herramienta la teoría de homotopías. Una discusión más formal al respecto se puede encontrar en (Manton and Sutcliffe, 2004) y (Weinberg, 2012).

La teoría de solitones es aplicada a cuando hay un potencial $V(\phi)$ que cuenta con una familia de mínimos degenerados que forman un espacio \mathcal{M} relacionados por un grupo de simetría G . Lo anterior es importante porque la teoría que consideraremos en este trabajo es la de un potencial con dos familias degeneradas de mínimos relacionadas por un grupo de simetría.

En esta tesis se exploran los temas mencionados: rompimiento espontáneo de la simetría y soluciones extendidas cuando se tiene un potencial con dos familias continuas de estados base, en particular se estudia una generalización de la teoría ϕ^4 .

En el capítulo 2 se realiza una revisión de las generalidades del rompimiento espontáneo de la simetría en teoría de campos además de algunos aspectos de las teorías de norma y su relación con el rompimiento espontáneo de la simetrías locales y el mecanismo de Higgs.

En el capítulo 3 se analizan las propiedades de un potencial con dos familias continuas de estados base y se desarrolla la teoría del rompimiento espontáneo de la simetría de una teoría de campo escalar complejo en el potencial antes mencionado. Para complementar se desarrolla la teoría del rompimiento espontáneo de la simetría de una teoría de campo escalar complejo acoplada a un campo de norma en la teoría ϕ^4 generalizada.

Posteriormente, en el capítulo 4 se introducen los conceptos básicos sobre los solitones en una teoría de campo escalar en una dimensión espacial. Usando el potencial

[3.2](#) se obtienen las soluciones de soliton y algunas de sus propiedades.

El capítulo [5](#) nos introduce a un tipo de configuraciones extendidas en $(2 + 1)$ dimensiones llamadas vórtices. Usando el potencial [3.2](#) se analiza las ecuaciones que caracterizan los vórtices de la teoría. Por último, usando métodos numéricos se resuelven las ecuaciones de vórtice y se estudian dichas soluciones.

Finalmente en el capítulo [6](#) se consideran otro tipo de configuraciones llamadas “Bounce” cuya estabilidad no se debe a la estructura topológica teoría sino a las condiciones de frontera fijadas por un proceso de decaimiento entre dos vacíos. Usando el potencial [3.2](#) se obtienen soluciones numéricas para el bounce y una solución analítica aproximada. Además se obtiene un conjunto de relaciones tipo virial que dan lugar a algunas relaciones encontradas anteriormente por Coleman([Coleman, 1977b](#)) y Weinberg([Weinberg, 2001b](#)).

Rompimiento espontáneo de las simetrías

2.1. La teoría de Landau-Ginzburg

Históricamente el concepto de rompimiento espontáneo de las simetrías se originó con el trabajo de Landau (1937) sobre transiciones de fase y de Landau-Ginzburg (1950) en superconductividad. A continuación revisaremos de manera básica algunos aspectos de la teoría de fenómenos críticos de L-G. (Landau, 1937)(Landau and Ginzburg, 1950)

Pensemos en un material ferromagnético en equilibrio térmico cuyo Hamiltoniano está dado en términos de la interacción espín-espín. El hamiltoniano tiene simetría rotacional sin embargo se ha comprobado experimentalmente que debajo de una temperatura crítica T_c el estado base del sistema no preserva la invarianza rotacional pues para temperaturas $T_c > T$ la magnetización del sistema $M(\vec{x})$ es no nula y apunta en una dirección, es decir, el sistema sufre una transición de fase. La magnetización M representa el promedio de los momentos magnéticos de los átomos en escalas grandes comparadas con las dimensiones atómicas, pero pequeñas con respecto al tamaño del sistema. (Lancaster and J.Blundell, 2014, pp.237-238)

En principio uno debería calcular la función de partición del sistema utilizando el Hamiltoniano microscópico, sin embargo esto no es posible en muchos casos. Fue el ingenio de Landau y Ginzburg que les permitió darse cuenta que podían obtener la energía libre de F como función de $M(\vec{x})$ partiendo de principios generales. El caso más sencillo es aquel en el cual la magnetización es constante en \vec{x} . Proponiendo una expansión en potencias de M que sea invariante ante rotaciones y reflexiones $M \rightarrow -M$, los primeros términos dan lugar a

$$F(\vec{x}) = \alpha \vec{M}^2 + \beta \vec{M}^4 \quad (2.1)$$

Necesitamos que para una temperatura $T > T_c$ la simetría se preserve generando una magnetización \vec{M} nula mientras que en el caso en donde $T_c > T$ la simetría debe romperse generando una magnetización no nula de modo que el modelo tenga una

2. ROMPIMIENTO ESPONTÁNEO DE LAS SIMETRÍAS

transición de fase. Veamos que si $\alpha = a(T - T_c)$ entonces para $T > T_c$, F tiene un mínimo cuando $|\vec{M}| = 0$ mientras que para $T_c > T$ el mínimo de F se encuentra en $|\vec{M}| = \sqrt{-a(T - T_c)/2\beta}$ rompiendo así la simetría rotacional del sistema como se observa en los ferromagnetos. Observamos que para temperaturas menores a la temperatura crítica T_c la magnetización tiene un comportamiento no analítico $M \propto (T - T_c)^{1/2}$ y predice un exponente crítico $1/2$.

Si queremos considerar una magnetización que varía en el espacio solo necesitamos agregar términos del tipo $(\nabla M)^2$ que no afectan los mínimos de F .

La teoría de Landau-Ginzburg sentó las bases para el estudio de los fenómenos críticos, fue con los principios de esta teoría que la superconductividad pudo ser estudiada sustituyendo la magnetización con un parámetro de orden Ψ que representa de manera efectiva la función de onda macroscópica de los pares de Cooper. (Aitchison, 1982, pp. 203-205)

Algunas personas que conocieron a Landau cuentan que él tenía una escala logarítmica del 0 al 5 donde clasificaba a los físicos teóricos. En su escala Newton estaba en la cima con 5 puntos, Einstein tenía 4.5, mientras que los fundadores de la física cuántica como Schrödinger, Heisenberg, Dirac y Fermi entre otros tenían 1 punto. (Livanova, 1980) Landau mismo consideró que tenía 2.5 puntos en su escala y se cree que después de su trabajo sobre los fenómenos críticos se movió en la escala 0.5 puntos. (Zee, 2010, pp. 267-271)

2.2. Rompimiento espontáneo de la simetría en la teoría de campos

En esta sección se desarrollan los aspectos básicos del rompimiento espontáneo de la simetría en la teoría de campos.

2.2.1. Rompimiento espontáneo de simetrías discretas

El ejemplo más simple de un sistema con rompimiento espontáneo de las simetrías se presenta cuando el sistema es invariante ante una transformación discreta. Consideremos el caso con un campo escalar real con densidad Lagrangiana dada como sigue

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (2.2)$$

Este Lagrangiano tiene invarianza Z_2 ante transformaciones $\phi \rightarrow -\phi$. El potencial del Lagrangiano tiene una forma que nos recuerda el ejemplo del ferromagneto de la sección anterior

$$V(x) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (2.3)$$

el rompimiento de las simetrías sucede cuando $\mu^2 < 0$, en cuyo caso el potencial tiene un mínimo no trivial en $|\phi| = \pm\sqrt{\frac{6\mu^2}{\lambda}} = v$. Por otra parte si consideramos la densidad Lagrangiana 2.2 con $\mu^2 < 0$ se podría pensar que se tiene una partícula con cuadrimento tipo espacio, permitiendo interacciones más rápidas que la velocidad de la luz. A las partículas que se comunican más rápido que la velocidad de la luz se les llama taquiones. Tener taquiones vuelve no causal a la teoría, sin embargo el problema no es real ya que cuando $\mu^2 < 0$ no podemos considerar al campo ϕ como una excitación pequeña alrededor del origen sino que para tener una teoría perturbativa de campos es necesario expandir alrededor del verdadero vacío v .

Haciendo una expansión $\phi = v + \tilde{\phi}$ alrededor de uno de los mínimos se rompe la simetría del sistema y obtenemos una densidad Lagrangiana transformada

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\tilde{\phi})^2 + \frac{3\mu^4}{2\lambda} + \mu^2\tilde{\phi}^2 - \frac{\lambda}{6}v\tilde{\phi}^3 - \frac{\lambda}{4!}\tilde{\phi}^4 \quad (2.4)$$

En el Lagrangiano 2.4 hay un término cúbico en el campo que rompe la simetría Z_2 mientras que el término cuadrático en $\tilde{\phi}$ nos dice que el campo ha adquirido una masa $m = \sqrt{-2\mu^2}$. Es importante notar que elegir uno de los dos vacíos de la teoría rompe la simetría del sistema pero en el Lagrangiano transformado la simetría se presenta de manera oculta. En el caso de 2.4 la transformación que preserva la simetría es $\tilde{\phi} \rightarrow -\tilde{\phi} - 2v$.

En la teoría de campo escalar real tenemos dos estados base realizables cuando $\mu^2 < 0$, es decir, el grupo de simetría que se rompe es discreto, es por eso que se llama rompimiento espontáneo de simetrías discretas.

2.2.2. Rompimiento espontáneo de simetrías continuas globales

Luego de estudiar que pasa cuando una simetría discreta se rompe es natural preguntarse sobre el rompimiento de las simetrías continuas globales.

Un ejemplo simple de rompimiento espontáneo de simetrías continuas ocurre cuando consideramos el Lagrangiano de un campo escalar cargado.

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi^*)(\partial^\mu\phi) + \mu^2\phi\phi^* - \frac{\lambda}{4}\phi^2\phi^{*2} \quad (2.5)$$

en 2.5 se ha cambiado el signo del término cuadrático en ϕ para poder considerar $\mu^2 > 0$ por simplicidad, además de que requerimos $\lambda > 0$ para que el Hamiltoniano de la teoría sea positivo definido. La teoría de un campo escalar complejo tiene una

2. ROMPIMIENTO ESPONTÁNEO DE LAS SIMETRÍAS

simetría global $U(1)$ ya que si añadimos una fase al campo $\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\phi(x)$ con α constante y el Lagrangiano permanece igual.

La teoría tiene un mínimo cuando $|\phi|^2 = 2\mu^2/\lambda$ que corresponde a un vacío degenerado ya que hay un número infinito de vacíos $|\Omega_\theta\rangle$ equivalentes con un valor de expectación del campo $\langle\Omega_\theta|\phi|\Omega_\theta\rangle = \sqrt{\frac{2\mu^2}{\lambda}}e^{i\theta}$.

Cuando el sistema elige uno de los posibles vacíos $|\Omega_\theta\rangle$ la simetría se rompe, por tanto, para entender lo que le pasa a la teoría tenemos que hacer una elección de la fase del estado base $|\Omega_v\rangle$. Sin pérdida de generalidad podemos elegir $\langle\Omega_v|\phi|\Omega_v\rangle = \sqrt{\frac{2\mu^2}{\lambda}}$. Es posible expandir el campo complejo $\phi(x)$ alrededor del mínimo como $\phi(x) = v + \tilde{\phi}(x)$ sin embargo resulta más sencillo parametrizar $\phi(x)$ en términos de dos campos escalares reales como sigue

$$\phi(x) = \left(\sqrt{\frac{2\mu^2}{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma(x) \right) e^{iC\pi(x)} \quad (2.6)$$

donde C es una constante de normalización introducida por conveniencia. Sustituyendo 2.7 en 2.8 obtenemos

$$\mathcal{L} = C^2 \left(v + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \right)^2 (\partial_\mu\pi)^2 + \frac{(\partial_\mu\sigma)^2}{2} + \frac{\mu^4}{\lambda} - \frac{\lambda}{16}\sigma^4 - \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\mu\sigma^3 - \mu^2\sigma^2 \quad (2.7)$$

La densidad Lagrangiana transformada tiene términos cúbicos por lo que la simetría original se ha roto. Podemos observar que emergió un campo sin masa, o bien, un boson de Goldstone $\pi(x)$ mientras que el campo $\sigma(x)$ tiene una masa $m_\sigma = \sqrt{2}\mu$. La ecuación 2.6 nos sugiere que podemos interpretar a los campos σ como excitaciones radiales masivas mientras que los campos π son excitaciones en la dirección de simetría en la cual los desplazamientos no cuestan energía al sistema como se muestra en la figura 2.1. Observemos que las transformaciones de fase globales solo afectan al campo π por lo que la simetría de la densidad Lagrangiana transformada está oculta y se preserva mediante una transformación del campo π dejando al campo σ invariante.

$$\pi(x) \rightarrow \pi(x) + \frac{\theta}{C} \quad (2.8)$$

$$\sigma(x) \rightarrow \sigma(x) \quad (2.9)$$

Las transformaciones 2.8 y 2.9 preservan la simetría del Lagrangiano. Al modelo anterior se le conoce como modelo sigma lineal, mientras que al potencial escalar complejo se le conoce como potencial de fondo de botella o del sombrero por su forma.

La aparición de partículas sin masa es un resultado general que aparece ante el rompimiento espontáneo de la simetría de fase global por acampos escalares. Este

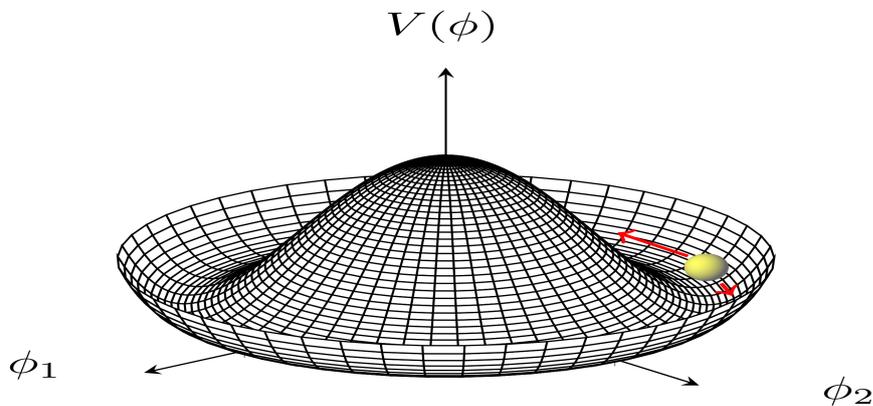


Figura 2.1: Potencial $V(\phi) = -\mu^2\phi\phi^* + \frac{\lambda}{4}\phi^2\phi^{*2}$ como función de $\phi = \phi_1 + i\phi_2$. Las flechas rojas muestran las excitaciones alrededor de la dirección de simetría del potencial.

hecho se expresa a través del teorema de Goldstone, el cual se puede demostrar de forma general. Para ello consideremos que $\phi = \{\phi_m\}$ forma un multiplete de un grupo de simetría G , tal que el Lagrangiano es invariante ante una transformación global infinitesimal del tipo.

$$\phi_n(x) \rightarrow \phi'_n(x) = i \sum_m t_{nm} \phi_m(x) \quad (2.10)$$

donde $\alpha \ll 1$ y it_{nm} es una matriz real.

El teorema de Noether nos dice que la invarianza del Lagrangiano ante esta simetría da lugar a una carga conservada que se obtiene a partir de la siguiente expresión.

$$Q = \int d^3x J_0 = \int d^3x \sum_m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_m} \frac{\delta \phi_m}{\delta \alpha} \quad (2.11)$$

En teoría cuántica de campos la carga conservada es un operador. Recordando las relaciones de conmutación canónicas de los campos conjugados $[\phi_n(\vec{y}), \pi_m(\vec{x})] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y})\delta_{nm}$ podemos encontrar la siguiente relación

$$\begin{aligned}
 [Q, \phi_n(\vec{y})] &= \int d^3x \sum_m \frac{\delta\phi_m}{\delta\alpha} \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_m}, \phi_n(\vec{y}) \right] \\
 &= \int d^3x \sum_m \frac{\delta\phi_m}{\delta\alpha} [\pi_m(\vec{x}), \phi_n(\vec{y})] \\
 &= - \int d^3x \sum_m \frac{\delta\phi_m}{\delta\alpha} i\delta^3(\vec{x} - \vec{y})\delta_{nm} \\
 &= -i \frac{\delta\phi_n}{\delta\alpha}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

que nos dice que la carga Q genera la transformación de simetría del campo ϕ_n . Como Q es una carga conservada debe conmutar con el Hamiltoniano.

$$[Q, H] = 0 \tag{2.13}$$

Cuando el vacío $|\Omega\rangle$ de la teoría es invariante ante la transformación de simetría uno tiene la siguiente relación

$$e^{i\theta Q} |\Omega\rangle = |\Omega\rangle \Rightarrow Q |\Omega\rangle = 0 \tag{2.14}$$

Pero si se produce el rompimiento espontáneo de la simetría el vacío de la teoría pierde la invarianza ante la transformación de simetría y tendremos lo siguiente

$$Q |\Omega\rangle_v \neq 0 \tag{2.15}$$

donde $|\Omega\rangle_v$ es el vacío verdadero de la teoría con energía $H |\Omega\rangle_v = 0$. Ahora consideremos el estado $Q |\Omega\rangle_v$ y calculemos su energía como sigue

$$HQ |\Omega\rangle_v = [H, Q] |\Omega\rangle_v + QH |\Omega\rangle_v = 0 \tag{2.16}$$

Hemos encontrado que el estado $Q |\Omega\rangle_v$ tiene la misma energía que el vacío $|\Omega\rangle$ por lo que es un estado degenerado. Además podemos construir estados de momento \vec{p} a partir del vacío como sigue

$$|\pi(\vec{p})\rangle = \int d^3x e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} J_0(x) |\Omega\rangle_v \tag{2.17}$$

Los estados $|\pi(\vec{p})\rangle$ tienen energía $E(\vec{p})$. Como $|\pi(0)\rangle = Q |\Omega\rangle_v$ el estado debe tener energía cero de donde se infiere que cuando $\vec{p} \rightarrow 0$ también $E(\vec{p}) \rightarrow 0$ por lo que los estados $|\pi\rangle$ deben satisfacer una relación de dispersión de una partícula sin masa. Este es precisamente el teorema de Goldstone.

Teorema de Goldstone. *El rompimiento espontáneo de una simetría continua global implica la existencia de partículas sin masa.*

Los estados de partículas sin masa emergentes del rompimiento espontáneo de las simetrías son llamados bosones de Nambu-Goldstone. (D.Schwartz, 2016, pp. 562-265)

Finalmente como corolario del teorema de Goldstone podemos notar que por cada carga conservada Q^α que no deja invariante al vacío podemos construir un estado $Q^\alpha |\Omega\rangle$ de energía E_0 . De manera más formal podemos expresar el corolario como sigue (Zee, 2010, pp. 199)

Corolario del Teorema de Goldstone. *Si el Lagrangiano de la teoría es invariante ante un grupo de simetría G con $n(G)$ generadores, mientras que el estado base es invariante ante un subgrupo de H de G con $n(H)$ generadores, entonces el número de bosones de Nambu-Goldstone es $n(G)-n(H)$. El subgrupo de simetrías generadoras de los bosones de Nambu-Goldstone es el coset G/H .*

2.3. La invarianza de Norma

Un tipo particular de transformaciones que surgen en la física son las transformaciones de norma o transformaciones continuas locales, estas son de especial relevancia ya que son la base de la teoría moderna de las interacciones electrodébil, y fuerte. La invarianza de norma es la base del modelo estándar y un elemento importante en la formulación de teorías más generales .

Antes de profundizar en el estudio de la invarianza de norma es conveniente hablar un poco del desarrollo histórico de las teorías de norma pues así podremos darnos cuenta que es una cuestión que se ha abordado no solo desde diferentes puntos de vista en las teorías cuánticas si no también en las teorías de campos clásicos. Las raíces de la invarianza de norma se remontan a 1820 cuando surgió la primera versión de la electrodinámica. En ese entonces J.C.Maxwell se dio cuenta que había cierta arbitrariedad en el potencial vector \mathbf{A} ya que distintos potenciales daban origen a los mismos campos por lo que propuso fijar los potenciales mediante la restricción $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Posteriormente L.V.Lorentz propuso una diferente restricción al potencial $\partial_\mu \mathbf{A}_\mu = 0$ a mediados de los 1860s. El término invarianza de norma apareció por primera ocasión en 1917 cuando Weyl intentó encontrar una formulación unificada de la gravedad y de las interacciones electromagnéticas, sin embargo, su propuesta se refería a una invarianza de escala, la cual no es válida en el electromagnetismo. Posteriormente y después del surgimiento de la teoría cuántica, el mismo Weyl (1929) así como Fock (1927) y London (1927) encontraron una reinterpretación del principio de invarianza de norma en el cual se identifica a la transformación de fase de la función de onda como la variable local correcta en lugar de invarianza escala. En acuerdo a lo anterior, tenemos que sería más correcto hablar de invarianza de fase en lugar de norma. Sin embargo, la terminología

2. ROMPIMIENTO ESPONTÁNEO DE LAS SIMETRÍAS

propuesta inicialmente por Weyl es la que históricamente prevaleció.

Una de las teorías más precisas es la electrodinámica cuántica (QED) la cual es una teoría de norma Abeliana descrita por el grupo $U(1)$. En 1954 Chen-Ning Yang y Robert L. Mills muestran que es posible generalizar el formalismo a grupos no-conmutativos dando lugar a las teorías de norma no Abelianas. Estas ideas fructificaron en los 60's que Glashow, Salam y Weinberg propusieron su teoría electrodébil no Abeliana, * la cual incorpora una descripción correcta de la interacciones débiles, además de unificarlas con las interacciones electromagnéticas. En 1983 se demostró el poder de predicción de la teoría electrodébil cuando en el CERN se encontraron los bosones W y Z .

Posteriormente en 1970 se postuló una teoría de las interacciones fuertes entre quarks y gluones, la teoría basada en el grupo no-Abeliano $SU(3)$ recibió el nombre de cromodinámica cuántica (QCD) y junto con la teoría electrodébil es parte fundamental del Modelo Estándar. (Jackson and Okun, 2001, pp. 2-5)

2.3.1. La invarianza de norma en el Electromagnetismo

Luego de revisar la importancia de las teorías de norma en la física actual podemos estudiar algunas de las bellas consecuencias de la invarianza de norma.

El origen de la invarianza de norma en el electromagnetismo clásico es apreciable cuando escribimos el campo eléctrico \mathbf{E} y el campo magnético \mathbf{B} en términos de un potencial escalar V y un potencial vector \mathbf{A} . Lo anterior se obtiene al analizar las leyes de Maxwell que podemos escribir en unidades de Lorentz-Heaviside como sigue

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \qquad \text{Ley de Gauss} \qquad (2.18)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{Ley de Faraday} \qquad (2.19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \text{No monopolos magnéticos} \qquad (2.20)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} \qquad \text{Ley de Ampère} \qquad (2.21)$$

2.20 nos permite escribir al campo magnético como el rotacional de un potencial vector, mientras que 2.19 nos dice que el campo eléctrico tiene que estar escrito en términos del mismo potencial vector más el gradiente de una función escalar del espacio. Con lo cual tenemos

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad (2.22)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad (2.23)$$

Notemos que los potenciales \mathbf{A} y V no son únicos ya que los campo magnético y eléctrico son invariantes ante las siguientes transformaciones.

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\Lambda \quad (2.24)$$

$$V \rightarrow V - \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \quad (2.25)$$

Donde Λ es una función arbitraria del espacio. Lo anterior se demuestra de manera inmediata al sustituir estas expresiones en 2.22 y 2.23.

La invarianza de norma nos dice que nuestra descripción matemática del sistema físico es altamente redundante, es decir, para un sistema descrito por un campo electromagnético hay una infinidad de potenciales electromagnéticos que describen al mismo sistema.

Las transformaciones 2.24 y 2.25 pueden ser escritas en forma covariante introduciendo un cuadrivector

$$A^\mu \equiv (V, \mathbf{A}) \quad (2.26)$$

$$A^\mu \rightarrow A^\mu - \partial^\mu\Lambda \quad (2.27)$$

Es ilustrativo escribir la teoría electromagnética en el formalismo Lagrangiano como sigue

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 \quad (2.28)$$

donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor de Maxwell que puede ser escrito en términos del potencial vector 2.26

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.29)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenidas a partir de 1.27 dan lugar a las ecuaciones de Maxwell expresadas en forma covariante, donde los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} se obtienen a partir de las componentes del tensor antisimétrico $F_{\mu\nu}$. La invariancia de norma y de Lorentz del electromagnetismo se sigue del hecho de que 2.28 es invariante ante las transformaciones de Lorentz y de norma 2.27. El electromagnetismo describe partículas de espín 1 sin masa, con ecuaciones de movimiento cuyas soluciones de onda plana tienen dos polarizaciones transversales, es decir, dos grados de libertad.

Si ahora consideramos el Lagrangiano de una partícula masiva de espín 1 tenemos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2}m^2 A_\mu^2 \quad (2.30)$$

2. ROMPIMIENTO ESPONTÁNEO DE LAS SIMETRÍAS

El primer término de 2.30 es invariante de norma pero el término de masa es cuadrático en el campo A_μ con lo cual rompe la invarianza de norma. Las soluciones de onda plana de esta teoría tienen tres polarizaciones, dos transversales y una longitudinal.

Al comparar las teorías anteriores observamos que la invarianza de norma surge de manera natural cuando $m \rightarrow 0$ lo cual reduce de manera efectiva los grados de libertad, debido a que las relaciones norma 2.27 dan lugar a grados de libertad redundantes.

2.3.2. La invarianza de norma en la mecánica cuántica

La invarianza de norma también está presente en sistemas cuánticos, si por ejemplo escribimos la ecuación de onda de una partícula en un campo electromagnético, obtenemos lo siguiente

$$\left(\frac{1}{2m} (-i\nabla - q\mathbf{A})^2 + qV \right) \Psi(x, t) = i \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} \quad (2.31)$$

La justificación de esta selección para la ecuación de Schrodinger en presencia de campos electromagnéticos se origina en el formalismo de Hamilton de la mecánica clásica. En cuyo caso la interacción electromagnética se incorpora sustituyendo el momento canónico \vec{p} por $\vec{p} - q\vec{A}$ y el potencial V por $q\phi$. Si además consideramos que el paso de la mecánica clásica a la cuántica se puede implementar incorporando operadores a través de la sustitución \vec{p} por $-i\hbar\nabla$ y \mathbf{E} por $i\hbar\partial_t$, tenemos que podemos definir los operadores D_0 y \vec{D} en lo que se conoce como el principio de acoplamiento mínimo

$$D_0 = i\hbar\partial_t - e\phi \quad (2.32)$$

$$\vec{D} = -i\hbar\nabla - q\vec{A} \quad (2.33)$$

Con lo cual la Ec. 1.30 se escribe en forma compacta como

$$D_0\Psi = \left(\frac{1}{2m} \vec{D}^2 \right) \Psi \quad (2.34)$$

La ecuación 2.31 aparentemente se modifica, sin embargo si en adición a las transformaciones 2.27 modificamos la función de onda de acuerdo a

$$\Psi' \rightarrow e^{iq\Lambda(x,t)} \Psi \quad (2.35)$$

se puede comprobar de manera inmediata que 2.31 permanece invariante. En efecto la invarianza del término cuadrático se sigue de la siguiente observación

$$\begin{aligned}\vec{D}'\Psi &= (-i\nabla - q\mathbf{A}')\Psi' \\ &= (-i\nabla - q\mathbf{A} - q\nabla\Lambda)e^{iq\Lambda}\Psi\end{aligned}\tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}&= e^{iq\Lambda}(-i\nabla - q\mathbf{A})\Psi + q(\nabla\Lambda)e^{iq\Lambda}\Psi - q(\nabla\Lambda)e^{iq\Lambda}\Psi \\ &= e^{iq\Lambda}(-i\nabla - q\mathbf{A})\Psi\end{aligned}\tag{2.37}$$

con una relación análoga para $D_0\Psi$, con lo cual tenemos que

$$(\vec{D}\Psi)' = e^{iq\Lambda}\vec{D}\Psi\tag{2.38}$$

$$(D_0\Psi)' = e^{iq\Lambda}D_0\Psi\tag{2.39}$$

Utilizando estas relaciones la invarianza de la ecuación de Schrödinger para una partícula en un campo electromagnético se sigue de manera directa. Con esto se llega a una conclusión de fundamental importancia, la invarianza de las ecuaciones de Maxwell se preserva en la mecánica cuántica siempre y cuando las transformaciones de norma se definan como el conjunto de relaciones

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda\tag{2.40}$$

$$V' = V - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\tag{2.41}$$

$$\Psi' = e^{iq\Lambda(x,t)}\Psi\tag{2.42}$$

las anteriores relaciones son aplicadas simultáneamente.

2.3.3. Una consecuencia, la invarianza de norma determina la interacción

En la sección anterior analizamos la ecuación para un partícula cuántica en interacción con un campo electromagnético y comprobamos que la teoría incluye en su estructura la invariancia de norma, lo cual se comprueba al identificar apropiadamente la forma de las transformaciones que deben ser aplicadas. Sin embargo, podemos plantear el argumento inverso y preguntarnos a partir de una teoría libre, representada por ejemplo por la ecuación de Schrodinger.

Si comenzamos con la ecuación de Schrödinger para una partícula libre tenemos

$$\frac{1}{2m}(-i\nabla)^2\Psi(x,t) = i\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}\tag{2.43}$$

Si es posible que la teoría sea invariante ante transformaciones de fase locales

$$\Psi \rightarrow e^{i\xi(x,t)}\Psi \quad (2.44)$$

donde $\xi(x,t)$ es una función arbitraria. Es fácil convencerse que esto sólo será posible si agregamos campos \mathbf{A} y V que interaccionen con Ψ a través acoplamiento mínimos como los que aparecen en la Ec.2.31 y la transformación de fase en Ψ va acompañada por la transformación de norma Ec.2.27.

La transformación de fase Ec.2.44 nos dice, que si bien la densidad de probabilidad no se altera localmente, la fase de la función de onda puede variar de forma diferenciada en cada punto del espacio-tiempo. Lo anterior siempre y cuando la partícula interactúe con un campo electromagnético A_μ el cual se rige por una dinámica bien definida, la del electromagnetismo de Maxwell. Visto desde esta perspectiva podemos concluir que el requerimiento de la invarianza local de norma determina las características de la interacción que experimenta dicha partícula.

La invarianza de norma se manifiesta de tal manera que no podemos distinguir de manera observacional ante un cambio en la convención de la fase local o el efecto de un campo en el que la partícula se mueve. Experimentalmente si tuviéramos un experimento de rendijas por el que hacemos pasar un electrón observaríamos un patrón de interferencia, por otra parte si nos dijeran que de alguna manera se ha cambiado la fase de una de las rendijas nosotros observaríamos un patrón de interferencia diferente, pero no podríamos decir si la fase observada se debe a la inclusión de una lámina en una de las rendijas o la aplicación de un campo electromagnético a las rendijas. ('t Hooft, 1980)

2.3.4. Invarianza ante transformaciones de fase locales en teoría de campos

Hemos visto que en mecánica cuántica pedirle invarianza ante transformaciones de fase locales a una teoría involucra añadir campos de norma a la misma. Esta receta se extiende a la teoría de campos de manera natural como veremos a continuación.

Si consideramos el Lagrangiano de un campo escalar complejo tenemos lo siguiente

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^*) - m^2\phi\phi^* \quad (2.45)$$

el término masivo es invariante ante la transformación 2.35 mientras que el término cinético no es invariante ya que involucra parciales respecto a la fase local. Sin embargo las ecuaciones 2.32 y 2.33 se pueden combinar en una definición covariante del principio de acoplamiento mínimo como sigue

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (2.46)$$

A D_μ se le denomina derivada covariante y cumple con la siguiente propiedad ante transformaciones de norma

$$\begin{aligned}
 (D_\mu\phi)' &= (\partial_\mu + ieA_\mu - i\partial_\mu\alpha)(\phi e^{i\alpha}) \\
 &= e^{i\alpha}(\partial_\mu\phi + i\phi\partial_\mu\alpha + ieA_\mu\phi - i\partial_\mu\alpha\phi) \\
 &= e^{i\alpha}(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi \\
 &= e^{i\alpha}D_\mu\phi
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Si sustituimos la derivada parcial por la derivada covariante en 2.45 la teoría se vuelve invariante ante transformaciones de norma.

$$\mathcal{L} = (D_\mu\phi)(D^\mu\phi^*) - m^2\phi\phi^* \tag{2.48}$$

Este Lagrangiano 2.48 es ahora invariante de norma al incorporar la interacción del campo escalar con un campo de norma. El Lagrangiano completo incluyendo la contribución de campo electromagnético está dado por la siguiente expresión .

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + (D_\mu\phi)(D^\mu\phi^*) - m^2\phi\phi^* \tag{2.49}$$

En esta sección hemos mostrado que la noción de invarianza ante transformaciones de fase locales en nos remite a sustituir las parciales por derivadas covariantes utilizando el acoplamiento mínimo.(D.Schwartz, 2016, pp. 118-121)

A la teoría descrita por el Lagrangiano 2.49 se le conoce como electrodinámica escalar. Un procedimiento análogo permite incorporar las interacciones electromagnéticas en la ecuación de Dirac dando lugar a la electrodinámica cuántica QED.

2.3.5. Invarianza de norma no Abeliana

En esta sección se discutirán los aspectos más importantes de las teorías de norma no Abelianas.

Un ejemplo de una teoría con invarianza no Abelianas es el Lagrangiano de N espinores de Dirac.

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^N \bar{\psi}_j(i\not{\partial} - m)\psi_j \tag{2.50}$$

Donde los fermiones forman un multiplete con componentes Ψ_j , $j = 1, \dots, N$. Este Lagrangiano es invariante ante transformaciones globales del grupo $SU(N)$.

$$\psi_i \rightarrow (e^{i\alpha^a T^a})_{ij}\psi_j \tag{2.51}$$

2. ROMPIMIENTO ESPONTÁNEO DE LAS SIMETRÍAS

Donde T^a son los generadores del grupo $SU(N)$. Si además llamamos a las transformaciones locales $U = e^{i\alpha^a(x)T^a}$ y $\mathbf{A}_\mu \equiv A_\mu^a T^a$ podemos construir la derivada covariante y con ella inferir las reglas de transformación de los campos de norma que se introducen en la teoría.

Usando el hecho de que la derivada covariante debe transformar como $D_\mu \vec{\psi} \rightarrow U \cdot D_\mu \vec{\psi}$ tenemos lo siguiente

$$(\partial_\mu - ig\mathbf{A}'_\mu) \cdot U \cdot \vec{\psi} = U \cdot (\partial_\mu - ig\mathbf{A}_\mu) \cdot \vec{\psi} \quad (2.52)$$

$$(2.53)$$

Por lo tanto se tiene

$$\partial_\mu U - ig\mathbf{A}'_\mu U = -igU\mathbf{A}_\mu \quad (2.54)$$

Así podemos despejar \mathbf{A}'_μ de la siguiente manera

$$\mathbf{A}'_\mu = U\mathbf{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} \quad (2.55)$$

Haciendo la expansión explícita y usando el hecho de que $U^{-1} = U^\dagger$ obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} U\mathbf{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} &= (1 + i\alpha^a T^a)\mathbf{A}_\mu(1 - i\alpha^a T^a) + \frac{\partial_\mu(\alpha^a T^a)}{g}U^\dagger \\ &= \mathbf{A}_\mu + i\alpha(T^a \mathbf{A}_\mu - \mathbf{A}_\mu T^a) + \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha^a T^a \\ &= A_\mu^b T^b + i\alpha^a A_\mu^b (T^a T^b - T^b T^a) + \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha^a T^a \\ &= A_\mu^b T^b - \alpha^a A_\mu^b f^{abc} T^c + \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha^a T^a \end{aligned} \quad (2.56)$$

Donde f^{abc} es la constante de estructura del álgebra de Lie de los generadores T^a . De [2.56](#) podemos ver que las componentes de \mathbf{A}_μ transforman como sigue

$$A_\mu^a(x) \rightarrow A_\mu^a(x) + \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha^a(x) - f^{abc}\alpha^b(x)A_\mu^c(x) \quad (2.57)$$

Para construir el tensor de estrés $F_{\mu\nu}$ podemos usar el conmutador de las derivadas covariantes que ya calculamos en [A.14](#) pero en este caso los campos no son conmutativos por lo que obtenemos lo siguiente

$$[D_\mu, D_\nu]\psi(x) = (-ig(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu) - g^2[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu])\psi(x) \quad (2.58)$$

De modo que el tensor $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ para el caso no Abelianiano se generaliza como sigue

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] = (\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu) - ig[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu] \quad (2.59)$$

Vale la pena mencionar que los resultados anteriores pueden ser derivados de manera una manera más elegante y sencilla a partir de 2.55 usando el lenguaje matemático de las formas diferenciales como se hace en (Zee, 2010, pp. 228-229). Finalmente con los resultados anteriores y la prescripción de sustituir las derivadas parciales por la derivada covariante podemos escribir un Lagrangiano invariante ante las transformaciones locales de $SU(N)$.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \sum_{j,i=1}^N \bar{\psi}_i (i\delta_{ij}\not{\partial} - \delta_{ij}m + gA^a T_{ij}^a)\psi_j \quad (2.60)$$

En resumen hemos desarrollado el formalismo que nos permite construir teorías de norma no Abelianas. (D.Schwartz, 2016, pp. 488-493)

2.3.6. Sobre la invarianza de norma

Para finalizar el breve estudio sobre las teorías de norma me gustaría añadir algunas palabras sobre la realidad física de la invarianza de norma.

En el contexto de la física clásica, tanto las ecuaciones de Maxwell como la fuerza de Lorentz involucran directamente a los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} . El potencial vectorial A_μ aparece como una cantidad auxiliar, que no se determina unívocamente, al contrario, la invarianza de norma da lugar a una gran redundancia. Por esta razón A_μ y la invarianza de norma se podrían considerar como auxiliares matemáticos sin contenido físico.

Sin embargo, en el ámbito cuántico la interacción electromagnética de las diversas partículas involucra necesariamente la incorporación del potencial A_μ . No se conoce método alguno que permita reducir, utilizando cantidades locales, la interacción a expresiones en las que aparezcan solamente los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} . Resulta lógico proponer que a nivel cuántico los potenciales A_μ son cantidades físicas relevantes y la invarianza de norma un principio físico fundamental. La realidad física de A_μ tiene fuerte sustento en el efecto Bohm-Aharonov (1959). Consideremos un campo magnético confinado en una región del espacio aislada de tal forma que los electrones no puedan penetrar en dicha región (ver figura 2.2). Un electrón al propagarse en dicha configuración mostrará un patrón de interferencia, debido a la diferencia de fase $\exp\left\{ie \int_\Gamma \vec{A} \cdot d\mathbf{l}\right\}$ de la función de onda al seguir dos trayectorias que rodean a la región Ω . Clásicamente no se esperaría efecto alguno, ya que el electrón se propaga en una región en la que el campo magnético es nulo. Ciertamente A_μ puede cambiar con la elección de norma; sin embargo, la diferencia de fase Delta para dos trayectorias que rodean la región Ω da lugar a una integral sobre una trayectoria, con lo cual tenemos

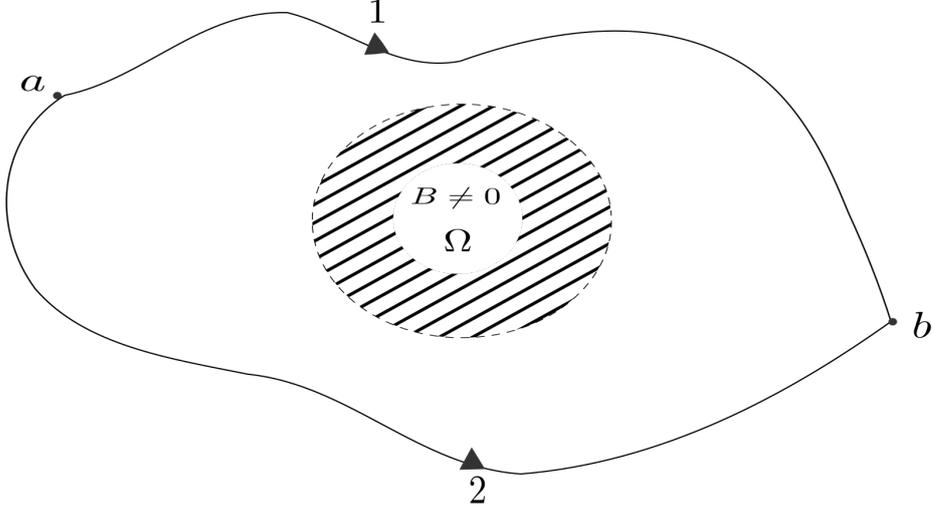


Figura 2.2: Efecto Aharonov-Bohm: Consideremos la transmisión de un electrón entre los puntos (a) y (b) mediante dos caminos diferentes que encierran una región Ω en la cual hay un campo magnético $\vec{B} \neq 0$. Aunque el electrón no penetra en la región Ω cuánticamente hay una diferencia en fase provocada por el campo magnético, dicha diferencia en fase está dada en términos del potencial vector \vec{A} como se muestra en la Ec.2.61.

$$\Delta\phi = e \oint \vec{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.61)$$

Pero $\oint \vec{A} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ es precisamente el flujo magnético encerrado por la trayectoria cerrada que resulta de sustraer las fases de la función de onda a lo largo de las dos trayectorias mostradas en la figura 2.2. Esto nos lleva a concluir que en la teoría cuántica el potencial vectorial ejerce un efecto sobre el electrón, a pesar de que las trayectorias se realizan completamente en una región en la que $\mathbf{B} = 0$. El efecto Bohm-Aharonov se observó experimentalmente por primera vez por Chambers (Chambers, 1960), pero se corroboró de forma contundente por el grupo de Tonomura (Tonomura et al., 1986), utilizando un dispositivo superconductor que aseguraba el aislamiento de la región del campo magnético.

A las consideraciones agregamos: (i) El principio de invarianza de norma determina en buena medida las características de las teorías que describen las interacciones observadas en la naturaleza y (ii) dan lugar a teorías renormalizables con fuerte poder predictivo. Todo esto ha llevado a aceptar la importancia y relevancia física del principio de invarianza norma.(D.Schwartz, 2016, pp. 131-132)(Zee, 2010, pp. 223-224)(Sakurai and Napolitano, 2011, pp. 141-144)

2.4. El Mecanismo de Higgs

El rompimiento espontáneo de la simetría de fase global en una teoría escalar da lugar a fenómenos interesantes como la degeneración del vacío del sistema y el surgimiento de los bosones de Nambu-Goldstone. Como una extensión natural podemos preguntarnos qué pasa en una teoría de norma cuando se incorpora el rompimiento espontáneo de las simetrías. En 1964 Englert y Brout en Bruselas ([Englert and Brout, 1964](#)), Higgs en Edimburgo ([Higgs, 1964](#)) y Guralnik ([Guralnik et al., 1964](#)) en Londres publicaron de manera independiente sus estudios sobre el rompimiento espontáneo de las simetrías en las teorías de norma ([Kibble, 2015](#), pp.7-10). A continuación analizaremos los elementos más importantes de este tema.

Consideraremos la electrodinámica cuántica escalar [2.49](#) incorporando un potencial escalar con términos que dan lugar al rompimiento espontáneo de la simetría (Ec. 1.12), con lo cual tenemos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + (D_\mu\phi)(D^\mu\phi)^* - U(\phi) \quad (2.62)$$

Donde el potencial escalar $U(\phi) = -\mu^2\phi\phi^* + \frac{\lambda}{4}(\phi\phi^*)^2$ rompe la simetría U(1) del Lagrangiano [2.62](#) debido al signo negativo del término cuadrático en ϕ por lo que podemos expandir el campo escalar alrededor del mínimo del potencial como

$$\phi(x) = \rho e^{i\pi(x)} \quad (2.63)$$

Con $\rho = v + \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma(x)$, donde el mínimo del potencial está dado por $v = |\phi_0| = \sqrt{\frac{2\mu^2}{\lambda}}$. Haciendo explícita la expresión para la derivada covariante D_μ tenemos que el Lagrangiano [2.62](#) puede escribirse como sigue

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^*) + \mu^2|\phi|^2 - \frac{\lambda}{4}|\phi|^4 + e^2(A_\mu)^2|\phi|^2 + ieA_\mu(\phi\partial_\mu\phi^* - \phi^*\partial_\mu\phi) \quad (2.64)$$

en la expresión anterior identificamos tres contribuciones al Lagrangiano.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_{IG} \quad (2.65)$$

El primer término de [2.64](#) corresponde al Lagrangiano \mathcal{L}_{EM} del electromagnetismo, los tres siguientes términos forman parte del Lagrangiano \mathcal{L}_ϕ del campo escalar, mientras que \mathcal{L}_{IG} incluye la interacción entre el campo escalar y el campo de norma.

Nos interesa analizar la estructura del Lagrangiano después de incorporar el rompimiento espontáneo de la simetría a través de la expresión del campo escalar en la Ec. 1.74. Al no depender del campo escalar es claro que \mathcal{L}_{EM} no se modifica. Mientras que \mathcal{L}_ϕ toma la siguiente forma

2. ROMPIMIENTO ESPONTÁNEO DE LAS SIMETRÍAS

$$\mathcal{L}_\phi = \rho^2(\partial_\mu\pi)^2 + \frac{(\partial_\mu\sigma)^2}{2} + \frac{\mu^4}{\lambda} - \frac{\lambda}{16}\sigma^4 - \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\mu\sigma^3 - \mu^2\sigma^2 \quad (2.66)$$

Finalmente para el Lagrangiano de interacción encontramos lo siguiente

$$\mathcal{L}_{IG} = e^2\rho^2 A_\mu^2 - 2eA_\mu\rho^2\partial_\mu\pi \quad (2.67)$$

Sumando los resultados anteriores obtenemos el Lagrangiano completo expresado como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{EM} + \rho^2(\partial_\mu\pi)^2 + \frac{(\partial_\mu\sigma)^2}{2} + \frac{\mu^4}{\lambda} - \frac{\lambda}{16}\sigma^4 - \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\mu\sigma^3 \\ &\quad - \mu^2\sigma^2 + e^2\rho^2 A_\mu^2 - 2eA_\mu\rho^2\partial_\mu\pi \\ &= \mathcal{L}_{EM} + e^2\rho^2\left(A_\mu - \frac{\partial_\mu\pi}{e}\right)^2 + \frac{(\partial_\mu\sigma)^2}{2} + \frac{\mu^4}{\lambda} - \mu^2\sigma^2 - \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\mu\sigma^3 - \frac{\lambda}{16}\sigma^4 \end{aligned} \quad (2.68)$$

Considerando la ecuación 2.63 encontramos que el segundo término en 2.68 incluye una contribución de la forma $(ev)^2 A_\mu A^\mu$, que identificamos como un término de masa. Por lo que encontramos que el efecto del rompimiento espontáneo de la simetría da lugar a un campo vectorial A_μ masivo. Aparentemente incluye también la presencia de un boson $\pi(x)$ de Goldstone. Sin embargo, se puede demostrar que el boson de Goldston no es un efecto real, ya que se puede eliminar a través de una transformación de norma, mientras que la presencia del término de masa para el campo vectorial es invariante ante dichas transformaciones. Para convencernos de esto, observamos que $\pi(x)$ aparece solamente en la combinación $A_\mu - \partial_\mu\pi(x)$, lo cual sugiere realizar una transformación de norma $\phi' = e^{-i\pi(x)}\phi(x)$, $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\pi(x)$. Tomando en cuenta la invarianza del tensor electromagnético $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu$, obtenemos que el Lagrangiano 2.68 en términos de los campos transformados toma la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{EM} + e^2\rho^2 A'^2_\mu + \frac{(\partial_\mu\sigma)^2}{2} + \frac{\mu^4}{\lambda} - \frac{\lambda}{16}\sigma^4 - \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\mu\sigma^3 - \mu^2\sigma^2 \\ &= \mathcal{L}_{EM} + e^2 \left[v^2 + \frac{\sigma^2}{2} + \frac{2\sigma v}{\sqrt{2}} \right] A'^2_\mu + \frac{(\partial_\mu\sigma)^2}{2} - \mu^2\sigma^2 + \mathcal{O}(\sigma^3) \end{aligned} \quad (2.69)$$

Adicionalmente se incluye un campo escalar masivo σ con masa $m_\sigma = \sqrt{2}\mu$. En la expresión anterior identificamos nuevamente el termino de masa $(ev)^2 A'_\mu A'^\mu$, pero ahora el bosón de Goldstone $\pi(x)$ ha desaparecido lo cual se entiende fácilmente ya que la transformación de fase para el campo escalar $\phi' = e^{-i\pi(x)}\phi(x)$, cuando $\phi(x)$ está dado por la Ec.2.63, cancela exactamente la fase $\pi(x)$. El resultado en 2.69 se puede identificar como una selección del campo de norma A'_μ para la cual el bosón de Goldstone se elimina y se le conoce como la norma unitaria. Existen diversas selecciones de norma en las cuales se mantienen contribuciones de $\pi(x)$, si bien pueden simplificar los cálculos a realizar, insistimos que la teoría no incluye un bosón de Goldstone real, ya

que este se puede eliminar a través de una transformación de norma. Adicionalmente el Lagrangiano 2.69 incluye un campo escalar sigma con masa $m_\sigma = \sqrt{2}\mu$. El resto del Lagrangiano incluye términos de autointeracción del campo escalar y de interacción entre el campo vectorial y el escalar.

Coloquialmente el rompimiento espontáneo de las simetrías en la teoría de norma sea interpretado como un proceso en el que el campo de norma no masivo se “come” al boson de Nambu-Goldstone y como resultado adquiere masa. Veamos que el conteo de los grados de libertad antes del rompimiento espontáneo de la simetría es consistente con los grados de libertad finales. En el Lagrangiano original tenemos cuatro grados de libertad, dos grados de libertad asociados a las dos polarizaciones del campo de norma sin masa, y dos grados de libertad corresponden al campo complejo. Como resultado del rompimiento espontáneo de las simetrías tenemos un campo de norma masivo con tres grados de libertad, dos polarizaciones transversales y una longitudinal, además de un grado de libertad del campo escalar masivo σ , es decir, hay una conservación de los grados de libertad de la teoría. (H.Ryder, 2001, pp.294) Al mecanismo por el cual los campos de norma no masivos adquieren masa a costa de los bosones de Nambu-Golstone se denomina Mecanismo de Higgs mientras que a los campos escalares masivos σ se les conoce como bosones de Higgs.

En el caso más general consideramos un grupo G con $n(G)$ bosones de norma, y un subgrupo H que preserva la simetría. Luego del rompimiento espontáneo de las simetrías, $n(G) - n(H)$ bosones de Goldstone son sustituidos por $n(G) - n(H)$ bosones de norma que adquieren masa. El resto $n(H)$ de bosones de norma no adquiere masa lo cual tiene sentido ya que coincide con el numero de generadores $n(H)$ del grupo del grupo que preserva la simetría.

El mecanismo de Higgs se puede extender al caso de grupos no-Abelianos. De hecho forma parte sustancial de la teoría de las interacciones electrodébiles formulada en 1967 por Weinberg y Salam. Esta teoría que unifica las interacciones débiles con las electromagnéticas está basada en el grupo de simetría local $SU(2) \times U(1)$, que a través del mecanismo de Higgs genera tres bosones de norma masivos que se identifican con las partículas intermediarias de las interacciones débiles W^{+-} y Z^0 , así como un bosón que permanece con masa nula y que se identifica con el fotón.

Salam y Weinberg creían que su teoría era renormalizable sin embargo no podían probarlo. Fue hasta 1971 cuando Gerard 't Hooft estudiante en aquel tiempo de M.Veltman logró probar que la teoría electro-débil era renormalizable. La corroboración de algunas de las predicciones de la teoría electrodébil le valieron el premio Nobel en 1973 a Salam, Weinberg y Glashow, mientras que el descubrimiento de las partículas W Y Z en el CERN le dieron el nobel en 1983 a Carlo Rubbia y Simon Van der Meer. Posteriormente t'Hooft y M.Veltman obtuvieron el premio Nobel en 1999.

2. ROMPIMIENTO ESPONTÁNEO DE LAS SIMETRÍAS

Encontrar el bosón de Higgs era uno de los objetivos de la creación del *Large Hadron Collider* (LHC) en el CERN. Fue así que en el 2012 se detectó el bosón de Higgs, llevando a Higgs y Englert a ganar el premio Nobel en el 2013.

El mecanismo de Higgs genera la masa de los bosones de norma pero también le da masa a los fermiones del modelo estándar a través de los acoplamientos tipo Yukawa. Frecuentemente se dice que el bosón de Higgs da masa a todas las partículas del universo pero esto no es estrictamente cierto ya que la masa de los hadrones, incluyendo protones y neutrones, se origina como resultado de un efecto dinámico debido al intercambio de gluones en acuerdo a la teoría de la cromodinámica cuántica QCD. Por otro lado, hay que recordar que la naturaleza de la materia oscura es desconocida, aunque existen fuertes evidencias de que constituye cerca del 27 % de la materia que compone el Universo. Esto simplemente nos hace ver que, aunque se han logrado notables avances, las incógnitas que plantea el entendimiento de nuestro universo son gigantescas. . (Kibble, 2015, pp.9-10)

Rompimiento espontáneo de la simetría en un potencial con dos familias continuas de estados base

En el capítulo anterior estudiamos el rompimiento espontáneo de la simetría para un campo escalar así como el mecanismo de Higgs que aparece cuando se incorpora el acoplamiento a un campo vectorial de norma.

Dentro de las muchas preguntas que uno se puede plantear acerca del rompimiento espontáneo de las simetrías es pertinente plantearse lo siguiente ¿Qué sucede si la teoría escalar tiene dos familias continuas de estados base que pueden dar lugar al rompimiento espontáneo de las simetrías?. El presente trabajo es un esfuerzo por dar una respuesta a la anterior pregunta.

La posibilidad de tener un potencial escalar con dos mínimos aparece, por ejemplo, al considerar el potencial efectivo del modelo estándar cuando se incorporan las correcciones cuánticas (Sher, 1989). En ese caso surge el interés de estudiar la estabilidad del vacío y su decaimiento a través de un proceso de tunelaje cuántico, tema que analizaremos en el capítulo 6. Adicionalmente nos interesa estudiar las configuraciones de campo extendidas, tipo soliton, que aparecen en dichas teorías. Veremos que el contar con dos vacíos tiene implicaciones interesantes en las características de dichas soluciones, capítulo 4.

3.1. Campo escalar con dos familias continuas de estados base

Para abordar la pregunta anterior consideremos la teoría de un campo escalar complejo invariante ante transformaciones de fase globales, su Lagrangiano está dada como

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - \lambda[(|\phi| - v_1)^2 + \delta][|\phi| - v_2]^2 \quad (3.1)$$

con el siguiente potencial

$$\mathcal{V}(\phi) = \lambda[(|\phi| - v_1)^2 + \delta][|\phi| - v_2]^2 \quad (3.2)$$

La propuesta anterior se puede considerar una generalización del potencial de Higgs (teoría ϕ^4) que usualmente se utiliza para estudiar el rompimiento espontáneo de la simetría. Para resaltar las diferencias es conveniente expresar el potencial en Ec.3.2 en potencias de $|\phi|$ de la siguiente manera

$$\mathcal{V}(\phi) = a_0 + a_1|\phi| + a_2|\phi|^2 + a_3|\phi|^3 + a_4|\phi|^4 \quad (3.3)$$

donde identificamos los coeficientes como

$$\begin{aligned} a_0 &= \lambda v_2^2 (v_1^2 + \delta) \\ a_1 &= -2\lambda v_2 (v_1 (v_1 + v_2) + \delta) \\ a_2 &= \lambda ((v_1 + v_2)^2 + 2v_1 v_2 + \delta) \\ a_3 &= -2\lambda (v_1 + v_2) \\ a_4 &= \lambda \end{aligned}$$

El potencial de Higgs se recupera si hacemos $v_1 \rightarrow v, v_2 \rightarrow -v$ y $\delta = 0$; en cuyo caso sólo aparecen potencias pares de $|\phi|$ y el coeficiente a_2 es negativo, dando lugar al rompimiento espontáneo de la simetría. En contraste, en el caso a estudiar se incluyen también las potencias impares de $|\phi|$ y el rompimiento de simetría con dos mínimos diferentes aparecerá cuando $v_1 > 0$ y $v_2 > 0$, con lo que a_2 es ahora positivo, pero ahora el rompimiento espontáneo de la simetría surge debido a que el coeficiente a_3 es negativo. Adicionalmente la incorporación del parámetro delta da lugar a que los dos mínimos de energía no estén degenerados. Usualmente las potencias impares de ϕ se descartan debido a que el campo se vuelve no-analítico en $\phi = 0$ (Tinkham, 2004); esto impide en general realizar expansiones polinomiales alrededor del origen. A pesar de lo anterior consideramos que el modelo es sumamente útil para ejemplificar una serie de resultados de gran interés.

El potencial 3.2 tiene la forma mostrada en la figura 3.1, donde se puede apreciar que hay dos familias continuas de mínimos del potencial. Podemos encontrar de manera explícita estos mínimos considerando la derivada del potencial 3.2.

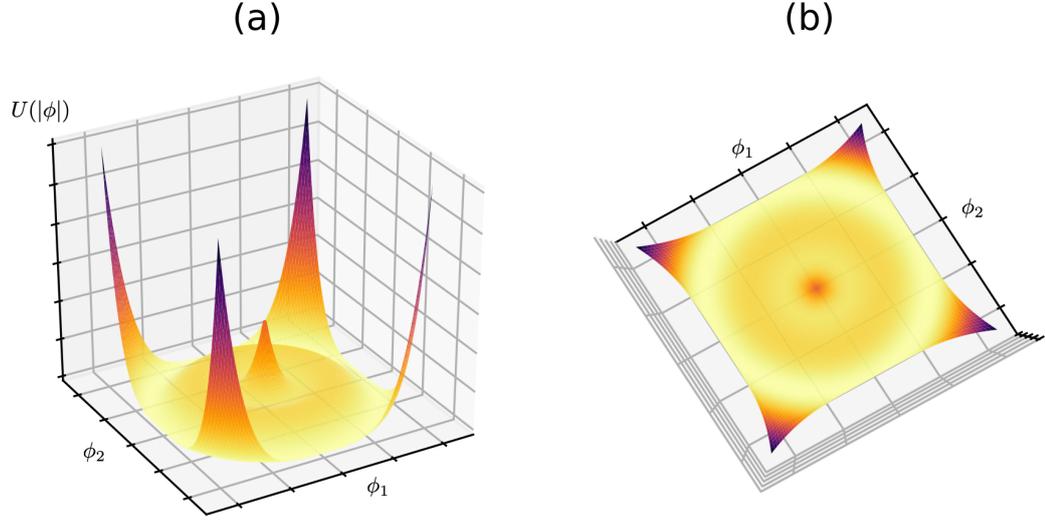


Figura 3.1: (a) Potencial $U(\phi)$ 3.2 como función de $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ con $[v_1 = 1, v_2 = 4, \delta = 0.5]$. (b) Curvas de nivel para $U(\phi)$. En las gráficas se pueden apreciar dos círculos (amarillo claro) correspondientes a los puntos que minimizan el potencial (b).

$$\frac{d\mathcal{V}(|\phi|)}{d|\phi|} = 2\lambda(|\phi| - v_2) [(|\phi| - v_1)^2 + \delta + (|\phi| - v_2)(|\phi| - v_1)] \quad (3.4)$$

De la ecuación 3.4 vemos que hay un mínimo en $V_2 = v_2$ mientras que los otros puntos extremos se encuentran al resolver la ecuación cuadrática $2|\phi|^2 - |\phi|(3v_1 + v_2) + v_1(v_1 + v_2) + \delta = 0$ cuya solución es la siguiente

$$V_m, V_1 = \frac{(3v_1 + v_2) \pm \sqrt{(v_1 - v_2)^2 - 8\delta}}{4} \quad (3.5)$$

Supondremos en general que $v_2 > v_1$, con lo cual el otro mínimo del potencial V_1 corresponde a seleccionar el signo negativo en 3.5, mientras que el signo positivo determina el máximo del potencial V_m . Si queremos que V_1 y V_m sean números reales necesitamos pedir la siguiente condición

$$\delta < \frac{(v_1 - v_2)^2}{8} \quad (3.6)$$

En adición consideramos que V_m y V_1 deben ser mayores que cero pues de otra manera volveríamos al caso de una sola familia de estados base degenerados. Bajo el requerimiento anterior es fácil ver que δ debe cumplir $-\delta > v_1(v_1 + v_2)$. Juntando las dos condiciones anteriores podemos escribir las cotas para el parámetro δ como sigue

$$-v_1(v_1 + v_2) < \delta < \frac{(v_1 - v_2)^2}{8} \quad (3.7)$$

3. ROMPIMIENTO ESPONTÁNEO DE LA SIMETRÍA EN UN POTENCIAL CON DOS FAMILIAS CONTINUAS DE ESTADOS BASE

Para incorporar el rompimiento de la simetría expandimos el Lagrangiano alrededor de los mínimos del campo ϕ . Cerca de cada mínimo V_i el campo se expresa de la siguiente manera.

$$\phi(x) = \left(V_i + \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_i(x) \right) e^{i\beta\pi_i(x)} \quad (3.8)$$

donde $V_i, i = 1, 2$ son los valores que minimizan al potencial, y β es una constante de normalización.

La masa de los modos de oscilación alrededor de los mínimos V_i se determinan a partir de la expresión $m_{v_i}^2 = [d^2\mathcal{V}/d\phi^2]_{V_i}$. Toda vez que conocemos las expresiones para V_i y V_m , tenemos que la primera derivada del potencial 3.2 se puede escribir de manera compacta como

$$\frac{d\mathcal{V}}{d|\phi|} = 2\lambda(|\phi| - V_1)(|\phi| - V_m)(|\phi| - V_2) \quad (3.9)$$

a partir de esta expresión resulta inmediato obtener los valores de las masas como

$$m_{V_1} = \sqrt{2\lambda(V_1 - V_m)(V_1 - V_2)} = \sqrt{\lambda R(R + 3(v_2 - v_1))} \quad (3.10)$$

$$m_{V_2} = \sqrt{2\lambda(V_2 - V_1)(V_2 - V_m)} = \sqrt{\lambda((v_1 - v_2)^2 + \delta)} \quad (3.11)$$

donde definimos $R = \sqrt{(v_2 - v_1)^2 - 8\delta}$. Es interesante comparar con el caso usual de la teoría $|\phi|^4$, donde la masa $m_v = \sqrt{\lambda v^2}$ de la partícula está determinada directamente por el valor de la expectativa del vacío (VEV) v alrededor del cual oscila. En cambio, en las dos primeras igualdades de 3.10 y 3.11 observamos que ahora las masas dependen del producto de las distancias $(V_i - V_m)$ y $(V_i - V_j)$ de V_i respecto al máximo y al otro mínimo del potencial. En las segundas igualdades se escribió explícitamente la dependencia de m_{v_i} en términos de los parámetros originales que aparecen la expresión para $\mathcal{V}(\phi)$ Ec.3.4.

En el caso en que $\delta = 0$ tenemos que las masas se reducen al mismo valor

$$m_{V_1} = m_{V_2} = \sqrt{\lambda(v_2 - v_1)^2} \quad (3.12)$$

El término cinético se del Lagrangiano 3.1 expande como sigue¹

¹El subíndice i en los campos σ y π son sólo etiquetas para denotar respecto a qué mínimo se hace la expansión del campo.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_i &= (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) \\
 &= \left[\partial_\mu \left(V_i + \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_i(x) \right) e^{i\beta\pi_i(x)} \right] \left[\partial^\mu \left(V_i + \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_i(x) \right) e^{-i\beta\pi_i(x)} \right] \\
 &= \left[\frac{(\partial_\mu \sigma_i)(\partial^\mu \sigma_i)}{2} + \beta^2 \left(V_i + \frac{\sigma_i}{\sqrt{2}} \right)^2 (\partial_\mu \pi_i)(\partial^\mu \pi_i) \right]
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Mientras que para el potencial obtenemos la siguiente expansión

$$\mathcal{V}_i(\sigma_i) = \mathcal{V}(V_i) + \frac{m_{V_i}^2}{2} \sigma_i^2 + \lambda_i \sigma_i^3 + \lambda \frac{\sigma_i^4}{4} \tag{3.14}$$

Considerando la expansión 3.14 de phi alrededor del vacío V_1 , el valor de la masa m_{V_1} se obtiene de la Ec.3.10, mientras que la energía de punto cero así como la constante del acoplamiento del vértice σ^3 están dados como

$$\mathcal{V}(V_1) = \lambda \left[-\frac{\delta^2}{4} + \frac{5\delta(\Delta v)^2}{8} - \frac{\delta\Delta v R}{4} + \frac{(\Delta v)^4}{32} - \frac{(\Delta v)^3 R}{32} \right] \tag{3.15}$$

$$\lambda_1 = \lambda \left(\frac{\Delta v + R}{2\sqrt{2}} \right) \tag{3.16}$$

Por otro lado, cuando consideramos la región cercana a V_2 la masa m_{V_2} se obtiene de la Ec.3.11, mientras que los otros términos se obtienen como

$$\mathcal{V}(V_2) = 0 \tag{3.17}$$

$$\lambda_2 = \lambda \frac{\Delta v}{\sqrt{2}} \tag{3.18}$$

El Lagrangiano de la teoría se obtiene como $\mathcal{L}_i = \mathcal{K}_i - \mathcal{V}_i$. Donde la parte cinética K_i se obtiene de (3.13) y la potencial V_i de (3.14). Es mportante resaltar que obtuvimos dos Lagrangianos independientes \mathcal{L}_i ; $i = 1, 2$; relacionados con la dinámica de las oscilaciones alrededor de cada uno de los mínimos del potencial.

Además si nos quedamos con los términos de orden cuadrático o menor en los campos obtenemos

$$\mathcal{L}_i = \frac{(\partial_\mu \sigma_i)(\partial^\mu \sigma_i)}{2} + \beta^2 V_i^2 (\partial_\mu \pi_i)(\partial^\mu \pi_i) - \frac{m_{V_i}^2 \sigma_i^2}{2} \tag{3.19}$$

.El Lagrangiano 3.19 nos dice que los campos σ_i tienen soluciones de onda plana que se propagan con masa m_{V_i} . De manera explícita las ecuaciones de movimiento de σ_i son

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_{V_i}^2) \sigma = 0 \tag{3.20}$$

3. ROMPIMIENTO ESPONTÁNEO DE LA SIMETRÍA EN UN POTENCIAL CON DOS FAMILIAS CONTINUAS DE ESTADOS BASE

identificamos 3.20 esta como la ecuación de Klein-Gordon cuyas soluciones de onda plana para el campo σ se escriben como sigue

$$\sigma_i(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{2w_p}} [a_p e^{-w_p t + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + a_p^* e^{w_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}] \quad (3.21)$$

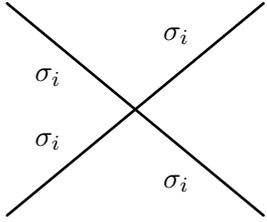
donde w_p obedece la relación de dispersión $w_p^2 = m_{V_i}^2 + \mathbf{p}^2$.

Por otra lado de 3.19 vemos que el campo π cumple con la ecuación de Klein-Gordon sin masa tal y cómo esperábamos del boson de Goldstone de la teoría.

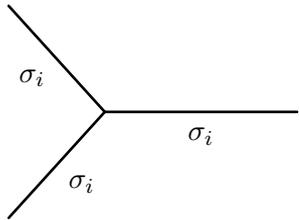
Regresando al Lagrangiano completo \mathcal{L}_i , tenemos que aparte de los términos de auto-interacción del campos sigma contenidos en 3.Y1 , el término cinético 3.8 contiene interacciones entre sigma y el bosón de Goldstone, que se identifican en la siguiente expresión

$$\mathcal{L}_i^{\sigma\pi} = -\beta^2 V_i \sqrt{2} \sigma_i (\partial_\mu \pi_i) (\partial^\mu \pi_i) - \beta^2 \frac{\sigma_i^2}{2} (\partial_\mu \pi_i) (\partial^\mu \pi_i) \quad (3.22)$$

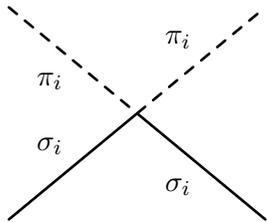
A continuación se muestran los vértices y la respectivas reglas de Feynman.



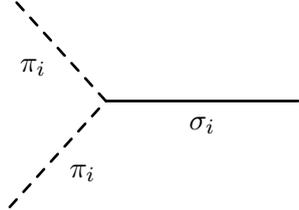
$$-6i\lambda \quad (3.23)$$



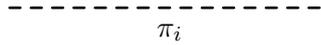
$$6i\lambda_i \quad (3.24)$$



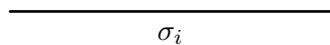
$$(-2i\beta^2)(\pm ip_\mu)(\pm ip_\nu) \quad (3.25)$$



$$-2i(\beta^2 V_i \sqrt{2})(\pm i p_\mu)(\pm i p_\nu) \quad (3.26)$$



$$\frac{i}{p^2 + i\epsilon} \quad (3.27)$$

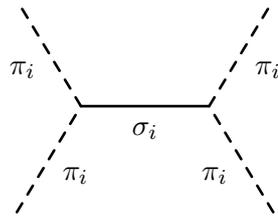


$$\frac{i}{p^2 - m_{V_i}^2 + i\epsilon} \quad (3.28)$$

En 3.23 y 3.24 tenemos la auto-interacción del campo σ_i dada por los términos σ_i^3 y σ_i^4 en 3.14. Mientras que en 3.25 y 3.26 tenemos la interacción del campo σ con π de acuerdo a la Ec.3.22.

Podemos observar que el acoplamiento entre los campos σ_i y π_i involucra las derivadas $\partial_\mu \pi$ por lo que el vértice correspondiente tendrá un factor $\pm i p_\mu$ por cada π_i . Lo anterior se debe a que en el espacio de momento la parcial ∂_μ es proporcional a p_μ .

Con las reglas de Feynman de la teoría es posible realizar cálculos de los posibles procesos de dispersión. Como ejemplo consideremos la dispersión $\pi_i + \pi_i \rightarrow \pi_i + \pi_i$, a primer orden en teoría de perturbación, el diagrama de Feynman correspondiente es el siguiente



$$(3.29)$$

3. ROMPIMIENTO ESPONTÁNEO DE LA SIMETRÍA EN UN POTENCIAL CON DOS FAMILIAS CONTINUAS DE ESTADOS BASE

Recordando que el propagador de un campo masivo está dado por $\frac{i}{(p_1+p_2)^2-m_{V_i}^2+i\epsilon}$ tenemos que la amplitud de dispersión toma la siguiente forma

$$i\mathcal{M} = (i\beta^2 V_i \sqrt{2})^2 (-ip_\mu^1)(-ip_\mu^2) \frac{i}{(p_1+p_2)^2-m_{V_i}^2+i\epsilon} (ip_\nu^3)(ip_\nu^4) \quad (3.30)$$

3.2. Electrodinámica escalar para un campo con dos familias de vacíos.

Luego de desarrollar la teoría del rompimiento espontáneo de las simetrías con el potencial 3.2 podemos acoplar el sistema a un campo de norma. Consideremos la teoría de la electrodinámica cuántica escalar con el potencial 3.2 obteniendo el siguiente Lagrangiano.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + (D_\mu\phi)(D^\mu\phi)^* - \lambda[|\phi| - v_1]^2 + \delta[|\phi| - v_2]^2 \quad (3.31)$$

Para incorporar el rompimiento espontáneo de la simetría, el procedimiento a seguir es análogo al estudiado en la sección 2.4 Sin embargo, se debe aplicar la expansión alrededor de cada mínimo V_i por separado; adicionalmente podemos tomar ventaja de la posibilidad de utilizar la invarianza de norma que nos permite seleccionar la norma unitaria para eliminar la fase del campo escalar. En este caso usaremos la siguiente expansión para el campo cerca de V_i

$$\phi_i(x) = \left(V_i + \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_i(x) \right) \quad (3.32)$$

Consideremos primero el término en 3.31 que incluye las derivadas covariantes, utilizando (3.32) toma la siguiente forma

$$(D_\mu\phi_i)(D^\mu\phi_i)^* = \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma_i)(\partial_\mu\sigma_i) + e^2[V_i^2 + \sqrt{2}V_i\sigma_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2]A_{\mu i}A_i^\mu \quad (3.33)$$

La expresión anterior incluye un término cinético para el campo σ_i , así como la interacción de σ_i con el campo de norma. Adicionalmente, identificamos que el campo $A_{m\mu}$ adquiere masa, con dos posibles valores, determinadas por las siguientes expresiones

$$M_{A_1} = \sqrt{2}eV_1 = \sqrt{2}e \left(\frac{3v_1 + v_2 - \sqrt{(v_2 - v_1)^2 - 8\delta}}{4} \right) \quad (3.34)$$

$$M_{A_2} = \sqrt{2}eV_2 = \sqrt{2}ev_2 \quad (3.35)$$

Tomando en cuenta lo anterior y los resultados de la sección anterior, se sigue de manera directa la forma de Lagrangiano \mathcal{L}_i que resulta de substituir la expansión del campo ϕ cerca de V_i (Ec. 4.2) en el Lagrangiano Ec. (4.1). El resultado se expresa como la suma de tres contribuciones

$$\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_{A_i} + \mathcal{L}_{\sigma_i} + \mathcal{L}_{int_i} \quad i = 1, 2 \quad (3.36)$$

donde \mathcal{L}_{A_i} es el Lagrangiano de Proca

$$\mathcal{L}_{A_i} = -\frac{1}{4}(F_i^{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2}M_{A_i}^2 A_{i\mu} A_i^\mu \quad (3.37)$$

que incluye la dinámica de un campo A_i^μ con masa M_{A_i} (Ec. 4.4). Es importante señalar que la masa se genera a través del rompimiento espontáneo de la simetría; por lo cual, aunque oculta, se mantiene la invarianza de norma de la teoría.

El Lagrangiano \mathcal{L}_{σ_i} del campo de Higgs está dado por la siguiente expresión

$$\mathcal{L}_{\sigma_i} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma_i)^2 - V_i(\sigma_i) \quad (3.38)$$

donde el potencial $V_i(\sigma_i)$, dado por la Ec. (3Y1), incluye los términos de auto interacción del campo σ_i , así como el termino de masa, con dos posibles valores, Ec(3.10 y 3.11), que repetimos aquí para fácil referencia

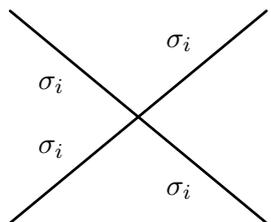
$$m_{V_1} = \sqrt{2\lambda(V_1 - V_m)(V_1 - V_2)} \quad (3.39)$$

$$m_{V_2} = \sqrt{2\lambda(V_2 - V_1)(V_2 - V_m)} \quad (3.40)$$

Finalmente, tenemos el Lagrangiano de interacción \mathcal{L}_{int_i} que se extrae directamente de la Ec. (4.3)

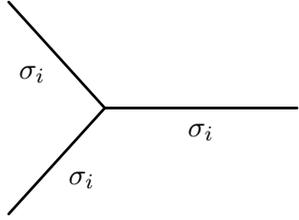
$$\mathcal{L}_{int_i} = e^2[\sqrt{2}V_i\sigma_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2]A_i^\mu A_{i\mu} \quad (3.41)$$

el cual incluye la interacción entre el campo escalar σ_i con el campo de norma A_i^μ . A partir del Lagrangiano \mathcal{L}_i se pueden obtener las reglas de Feynman de la teoría, las cuales se muestran a continuación

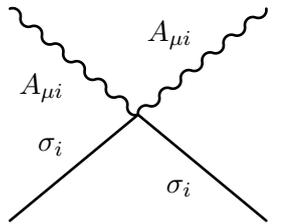


$$-6\lambda i \quad (3.42)$$

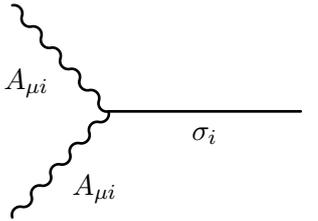
3. ROMPIMIENTO ESPONTÁNEO DE LA SIMETRÍA EN UN POTENCIAL CON DOS FAMILIAS CONTINUAS DE ESTADOS BASE



$$6i\lambda_i \quad (3.43)$$



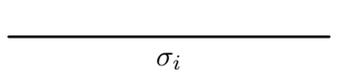
$$(-2ie^2) \quad (3.44)$$



$$-2i(e^2 V_i \sqrt{2}) \quad (3.45)$$



$$i \frac{-g_{\mu\nu} + k_\nu k_\mu}{k^2 - M_{A_{\mu i}}^2 + i\epsilon} \quad (3.46)$$



$$\frac{i}{p^2 - M_{V_i}^2 + i\epsilon} \quad (3.47)$$

Nos damos cuenta de que la física del rompimiento espontáneo de las simetrías alrededor de cada mínimo del potencial con dos familias de vacíos es la misma que la de una teoría ϕ^4 .

Finalmente notemos que una vez que el sistema elige una familia de vacíos y un vacío dentro de esa familia el campo adquiere el valor que minimiza el potencial en todo el espacio, por lo tanto para las dos familias de estados base tenemos el mismo tipo de interacciones pero con diferentes factores para los vértices.

3.3. Grados de libertad y algunas consideraciones respecto a los dos vacíos de la teoría

En la sección anterior vimos que al acoplar la teoría escalar con el campo vectorial se eliminan los bosones de Goldstone. Como resultado del mecanismo de Higgs, se generan campos A_μ de norma masivos, además del campo de Higgs sigma. El efecto novedoso del potencial 3.2 es que, el tener dos mínimos continuos diferentes da lugar a dos Lagrangianos \mathcal{L}_i , dependiendo del mínimo del potencial V_i , respecto al cual se consideren las perturbaciones de los campos ϕ y A_μ .

Cada Lagrangiano \mathcal{L}_i (Ec.3.36) se caracteriza por valores diferentes para su masas escalares y vectorial así como de los acoplamientos de las interacciones. En la gráfica 3.2 presentamos la variación de las masas de las partículas vectoriales (Ecs.3.34 y 3.35) y escalares (Ecs.3.10 y 3.11) como función del parámetro delta, tomando en cuenta las restricciones señaladas en la Ec.3.7. Claramente se muestra que las partículas tendrán una dinámica diferente, dependiendo del vacío V_i al cual se asocian. En particular notamos que en el límite $\delta = 0$ en el que los vacíos V_1 y V_2 están degenerados ($U(V_1) = U(V_2)$), las masas escalares coinciden $m_{V_1} = m_{V_2}$, mientras que las masas M_{A_1} y M_{A_2} mantienen valores diferentes. Otro límite interesante es considerar que v_2 se hace tender a cero ($V_2 = 0$), el campo de norma $A_{\mu 2}$ no adquiere masa $M_{A_2} = 0$, sin embargo $M_{A_1} \neq 0$ y los campos escalares se mantienen masivos con $m_{V_1} \neq m_{V_2}$.

El tener dos Lagrangianos \mathcal{L}_i diferentes podría sugerir que el número de grados de libertad se ha duplicado. Sin embargo, la interpretación que consideramos adecuada es que el sistema elige una configuración dada, por ejemplo, la correspondiente a un mínimo homogéneo absoluto, la cual es estable y no tendrían conexión con los grados de libertad de las partículas asociadas al otro mínimo. En este sentido una vez que se elige un sistema gobernado por el Lagrangiano \mathcal{L}_i , y debido a que consideramos fluctuaciones pequeñas de los campos, nos podemos olvidar de los grados de libertad relacionados con \mathcal{L}_j , $j \neq i$. La pregunta que surge de manera natural es si existen configuraciones del campo que conecten la dinámica entre los dos vacíos de la teoría. Esta cuestión será el tema de estudio de los siguientes capítulos. Analizaremos dos tipos de configuraciones que representan soluciones no-lineales de las ecuaciones de movimiento: (i) En el primer caso estudiaremos soluciones de energía finita tipo solitón y tipo vórtice. (ii) El segundo caso se refiere a soluciones que nos permiten entender el fenómeno de tunelaje, que sucede cuando el sistema se encuentra en un vacío inestable

3. ROMPIMIENTO ESPONTÁNEO DE LA SIMETRÍA EN UN POTENCIAL CON DOS FAMILIAS CONTINUAS DE ESTADOS BASE

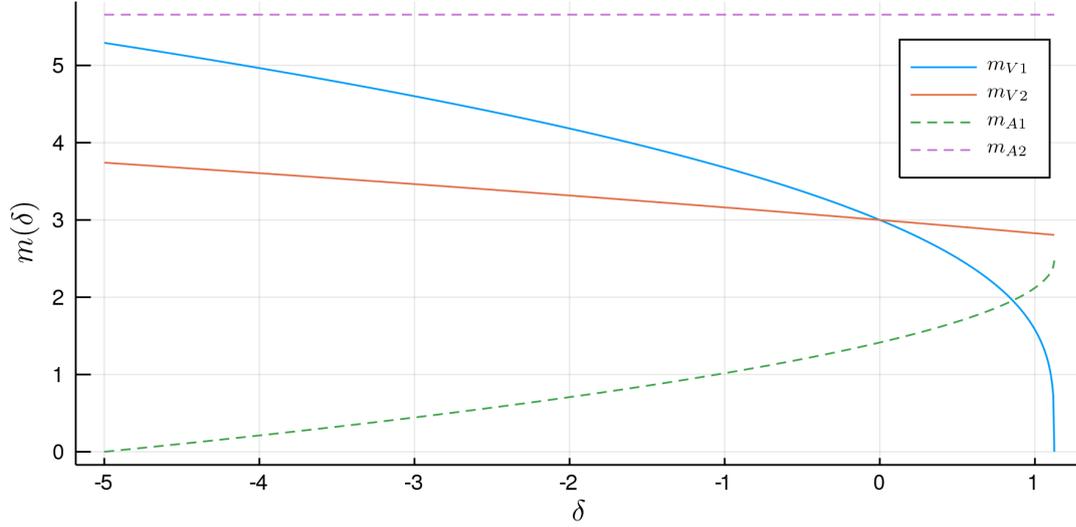


Figura 3.2: Variación de las masas de las partículas vectoriales (Ecs.3.34 y 3.35) y escalares (Ecs.3.10 y 3.11) como función del parámetro delta, tomando en cuenta las restricciones señaladas en la Ec.3.7. Claramente se muestra que las partículas tendrán una dinámica diferente, dependiendo del vacío V_i al cual se asocian. En el límite $\delta = 0$ en el que los vacíos V_1 y V_2 están degenerados ($U(V_1) = U(V_2)$), las masas escalares coinciden $m_{V_1} = m_{V_2}$, mientras que las masas M_{A_1} y M_{A_2} mantienen valores diferentes

que decae al vacío de menor energía.

Solitones en la teoría ϕ^4 generalizada.

4.1. Soluciones solitónicas para un campo escalar

En la teoría de campos, las soluciones de onda plana representan partículas con un momento definido y no tienen una localización espacial acotada. Al cuantizar la teoría, los modos de libertad o cuantos se interpretan como partículas elementales. A partir de las soluciones de onda plana se pueden construir paquetes de onda localizados espacialmente, sin embargo, dichos paquetes son dispersivos, por lo que pierden su coherencia al transcurrir el tiempo, debido al desfaseamiento entre sus diferentes componentes de Fourier.

En contraste con lo anterior, algunas teorías de campo no lineales tienen soluciones localizadas en el espacio, con un espectro de energía bien definida y que no se disipan al transcurrir el tiempo. Dichas soluciones, incluyen los llamados solitones o defectos topológicos. En algunos casos dichas soluciones se pueden interpretar como partículas con localización y tamaño definido, o en otras como configuraciones extendidas en el espacio.

Cabe señalar que el concepto de solitón aparece en diversas disciplinas de la física. Sus orígenes se remontan a la observación de J. Scott Russell en 1834, reportada en 1842-1843 en la “British Association for the Advancement of Science (Russell, 1845). Russell describe un fenómeno al que denomina una “onda solitaria” que se produjo en el agua de un canal estrecho, cuando un bote se frenó bruscamente. Montado en un caballo Russell pudo seguir a dicha protuberancia en el agua por cerca de dos millas antes de que disipara completamente. La interpretación, matemática de dicho fenómeno encontró su primer sustento cuando Korteweg de Vries formuló en 1895 una ecuación (Korteweg and de Vries, 1895) que ahora lleva su nombre, y que incorpora términos no-lineales y efectos dispersivos para describir la propagación de ondas en condiciones similares a las que se presentaban en el caso mencionado.

Regresando al caso de la teoría de campos, tenemos ejemplos en los cuales los solitones se clasifican en configuraciones que podrían representar partículas. Tal es el caso de los llamados Skyrmiones . El Skyrmión surgió en un modelo en el cual los nucleones (protones o neutrones), se pueden entender como solitones en una teoría efectiva no lineal, en la cual los grados de libertad perturbativos representan a piones. Otro ejemplo son los monopolos magnéticos que aparecen como defectos topológicos en algunas teorías de gran unificación. Por otro lado, existen también ejemplos de soluciones, tales como vórtices o paredes de dominio que representan configuraciones extendidas, las cuales se ha especulado, podrían ocupar amplias regiones de nuestro universo contribuyendo con ello a la evolución y formación de estructuras en el universo mismo (Ref). Por otro lado, cabe señalar que los vórtices y paredes de dominio son estructuras presentes en varios fenómenos de materia condensada, en particular en la superconductividad (Ref).

Una característica de los solitones topológicos es que la estructura de mínimos del potencial es tal que permite encontrar configuraciones estables, que difieren del vacío. El carácter topológico de la teoría está codificado en una cantidad conservada, a la que se le denomina carga topológica.

En este capítulo, analizaremos las soluciones de solitón (kinks) que aparecen en una teoría escalar unidimensional, para el potencial de la teoría ϕ^4 generalizada que se discutió en el capítulo 3.

4.2. Teorema de Derrick

En este capítulo consideramos el estudio de solitones que aparecen en una teoría de campo escalar al restringirnos a una sola dimensión espacial $D=1$. Esta restricción se justifica en la existencia del teorema de Derrick, que se discute a continuación

Teorema de Derrick. *Supongamos que tenemos una densidad Lagrangiana dada por:*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - U(\phi)$$

con $U(\phi) > 0$ y $U(V_i) = 0$ para el vacío. Entonces la teoría solo puede tener soluciones estacionarias de energía finita $D = 1$. Con D el número de dimensiones espaciales a parte del tiempo.

Demostración. Consideremos la funcional de energía del sistema es

$$\begin{aligned} E([\phi]) &= \int d^D x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) + U(\phi) \right) \\ &= K + V \end{aligned}$$

Si ahora reescalamos los campos como $\phi(x/a)$, la funcional de energía debe ser invariante ante esta transformación. Calculando la funcional de energía reescalada tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} E(\phi) &= \int d^D x \left(\frac{a^{D-2}}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) + a^D U(\phi) \right) \\ &= a^{D-2} K + a^D V \end{aligned}$$

Por lo tanto la variación de la energía respecto al reescalamiento debe cumplir la siguiente relación

$$\begin{aligned} \frac{\delta E(\phi/a)}{\delta a} &= (D-2)a^{D-3}K + Da^{D-1}V \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dado que K y V son positivos la última ecuación sólo puede tener soluciones para $D = 1$, por lo que hemos demostrado el teorema de Derrick. \square

4.3. Soluciones de solitón y carga conservada

En lo sucesivo nos restringimos a una dimensión espacial, en cuyo caso ϕ se puede considerar un campo escalar real. Para ello consideremos el Lagrangiano (4.1)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - V(\phi) \quad (4.1)$$

4. SOLITONES EN LA TEORÍA ϕ^4 GENERALIZADA.

Donde ϕ es un campo real y $\mu = 0, 1$. Las ecuaciones de movimiento de esta teoría están dadas por las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (4.2)$$

Como buscamos soluciones estáticas, el campo ϕ no depende del tiempo, por lo que la ecuación anterior se reduce a lo siguiente

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} - \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (4.3)$$

Notemos que 4.3 análoga a la ecuación de movimiento clásica de una partícula con masa “ $m = 1$ ” que se mueve en un potencial “ $-V(\phi)$ ” conforme transcurre el “tiempo” x . Además observamos que 4.3 se obtiene al minimizar (Coleman, 1977a)

$$E(\phi) = \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right] \quad (4.4)$$

Lo cual es consistente con que 4.4 es el Lagrangiano en la analogía mecánica. Las soluciones de solitón requieren satisfacer la ecuación de movimiento 4.3 y dar lugar a un valor finito de la energía (4.4). La última condición implica, necesariamente que ϕ tienda a un mínimo del potencial V_i conforme $x \rightarrow \pm\infty$; y que necesariamente el potencial se debe cancelar en dicho mínimo $U(V_i) = 0$. Un caso trivial es la configuración de vacío, en la cual el campo es constante en todo el espacio: $\phi(x) = V_i$ y que obviamente tiene energía nula $E = 0$. Los llamados kinks (en español pliegue) se obtienen para configuraciones que interpolan entre dos mínimos del potencial diferentes en los extremos $x \rightarrow \infty$ y $x \rightarrow -\infty$. El nombre de kink se relaciona con el hecho de que dicha solución se puede considerar como un pliegue que aparece al conectar dos vacíos diferentes. El caso conocido del kink en la teoría ϕ^4 (referencia) aparece debido a que el potencial tiene dos mínimos diferentes v y $-v$. Como veremos a continuación, el considerar el potencial (3.2) que tiene mínimos en $\phi = \pm V_1$ y $\phi = \pm V_2$, da lugar a un mayor número de soluciones tipo kink.

Si multiplicamos ambos lados de 4.3 por $d\phi/dx$ obtenemos la siguiente condición

$$\left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - V(\phi) \right] = K \quad (4.5)$$

La constante K está determinada por el valor asintótico del potencial V en $x \rightarrow \pm\infty$. Tomando en cuenta la condición de que la energía del solitón Ec.(4.4) sea finita implica que $K = 0$. A partir de la observación anterior obtenemos la siguiente ecuación

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V(\phi)} \quad (4.6)$$

De manera adicional al integrar 4.5 obtenemos la identidad del Virial

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \right] = \int_{-\infty}^{\infty} dx V(\phi) \quad (4.7)$$

Integrando la ecuación 4.6 obtenemos lo siguiente

$$x = \int \frac{d\phi}{\sqrt{2V(\phi)}} \quad (4.8)$$

Esta ecuación nos permite explícitamente la configuración del solitón $\phi(x)$ cuando 4.8 es integrable e invertible. Además podemos usara la Ec.4.6 para simplificar la energía del solitón 4.9 dando como resultado

$$\begin{aligned} E[\phi] &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \right] = \int_{-\infty}^{\infty} dx [2V(\phi)] \\ &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \left[\sqrt{2V(\phi)} \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

Es ilustrativo notar que en analogía clásica 4.6 es la condición que cumpliría una partícula que se mueve entre los extremos de un potencial $-V$ cuando la energía total E es cero. Por lo tanto, el movimiento está restringido a una región localizada entre dos mínimos contiguos del potencial.

La estabilidad del kink se relaciona con la existencia de una carga conservada. Notemos que en una dimensión podemos definir una corriente conservada J_μ como sigue

$$J^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \quad (4.10)$$

esta corriente se conserva debido a la antisimetría del tensor $\epsilon^{\mu\nu}$ por lo que se obtiene de manera directa que

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (4.11)$$

La carga topológica asociada a la corriente se puede definir como sigue

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} dx J^0 = \phi(\infty) - \phi(-\infty) \quad (4.12)$$

La corriente J_μ y la carga Q se conservan, pero no están asociados a una simetría a través del teorema de de Noether. Deben su existencia a una propiedad topológica, que en este caso se refiere al hecho de que el campo interpola entre dos vacíos diferentes de la teoría al pasar de $x = -\infty$ a $x = \infty$. Por lo que una vez que el campo $\phi(x)$ está ‘amarrado’ a dos puntos diferentes en los extremos, tenemos que no existe una transformación

continua que lleve la configuración $\phi(x)$ a una solución constante $\phi(x) = V_i$ para todos los puntos x . Por lo tanto, a J_μ y Q se les denomina como corriente y carga topológica respectivamente.

4.4. Kinks de una teoría ϕ^4 generalizada

4.4.1. Caso $\delta = 0$

Consideremos primero el potencial Eq.3.2 cuando $\delta = 0$. En este caso los mínimos del potencial se localizan en $\pm v_1$ y $\pm v_2$ y están degenerados ya que el potencial se cancela en estos puntos $V(\pm v_1) = V(\pm v_2) = 0$, por lo que podemos esperar que existan 3 kinks y sus respectivos anti-kinks. Para entenderlo, consideremos la analogía mecánica en la cual la partícula con “posición” ϕ se mueve como función del “tiempo” x en un potencial invertido $-U(\phi)$, el cual se muestra en la figura 4.1. Los kinks se obtienen como configuraciones que interpolan entre vacíos contiguos. Supongamos, por ejemplo, que al tiempo inicial $x \rightarrow -\infty$, la partícula se encuentra en $\phi = -v_2$ con velocidad nula ($d\phi/dx = 0$) y se empuja levemente hacia la derecha. Conforme el “tiempo” x se incrementa se moverá hacia el vacío $-v_1$, al cual por conservación de energía llegará con velocidad nula, es decir, para $x \rightarrow \infty$ tendremos $\phi \rightarrow -v_1$. Por lo tanto, podemos esperar soluciones de solitón que interpolan entre los siguientes pares de vacíos: $(-v_2, -v_1)$, $(-v_1, v_1)$ y (v_1, v_2) , además de los correspondientes antisolitones que invierten la dirección en la que conectan los mínimos del potencial. A continuación, presentamos las soluciones explícitas que confirman lo mencionado. Consideremos entonces el potencial

$$\mathcal{V}(\phi) = \lambda[(|\phi| - v_1)^2][|\phi| - v_2]^2 \quad (4.13)$$

Podemos ahora usar el procedimiento desarrollado en la sección 4.3, considerando primero el kink ϕ_A que interpola entre v_1 y v_2 . Sustituyendo la Ec.4.13 en 4.8 obtenemos

$$\begin{aligned} \pm(x - X_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi}{(\phi - v_1)(v_2 - \phi)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \frac{1}{v_2 - v_1} \int \frac{1}{(v_2 - \phi)} - \frac{1}{(\phi - v_1)} \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \frac{1}{v_2 - v_1} \left[\ln \left(\left| \frac{(\phi - v_2)(\phi_0 - v_1)}{(\phi - v_1)(\phi_0 - v_2)} \right| \right) \right] \quad (4.15)$$

La anterior expresión resulta de integrar separando en fracciones parciales el valor absoluto de ϕ no aparece porque ϕ es positivo en toda la región (v_1, v_2) . Los dos signos en 4.15 se obtienen al sacar la raíz cuadrada en la Ec.4.5 y da lugar a las soluciones de soliton y antisolitón respectivamente. X_0 representa la localización o centro de masa del kink; debido a la invarianza traslacional se puede localizar en cualquier punto del espacio, por simplicidad elegimos $X_0 = 0$, pero se puede restablecer en cualquier

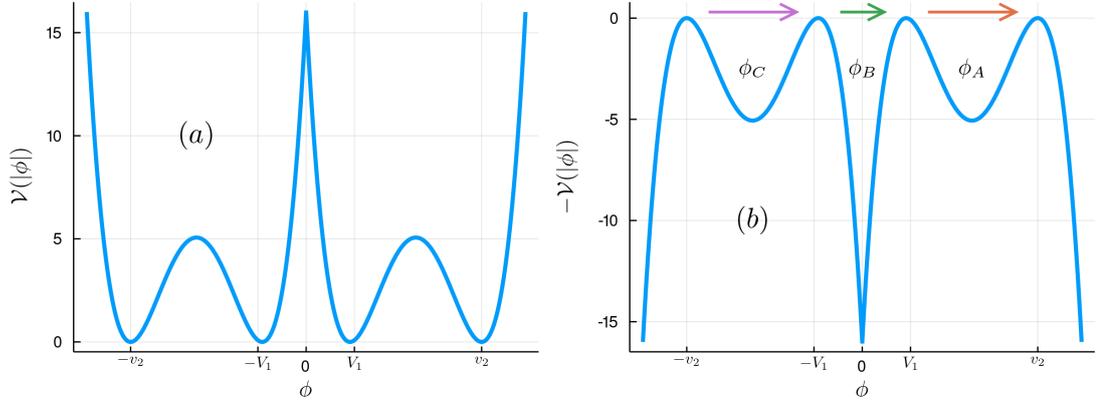


Figura 4.1: (a) Potencial escalar 4.13.(b) Potencial efectivo $-\mathcal{V}$ para el problema clásico equivalente 4.2.

momento con la sustitución $x \rightarrow x - X_0$. El campo ϕ_0 corresponde al valor de ϕ en $x = X_0$. Como ϕ interpola entre $\phi(-\infty) = v_1$ y $\phi(\infty) = v_2$, tenemos que por simetría ϕ_0 debe coincidir con el punto medio entre los dos vacíos, es decir, $\phi_0 = (v_1 + v_2)/2$.

Resolviendo la Ec.4.15 para obtenemos la siguiente expresión para ϕ_A .

$$\begin{aligned}\phi_A(x) &= \frac{v_1 e^{-\sqrt{2\lambda}(v_2-v_1)x} + v_2}{1 + e^{-\sqrt{2\lambda}(v_2-v_1)x}} \\ &= \frac{v_1 e^{-\sqrt{2}mx} + v_2}{1 + e^{-\sqrt{2}mx}}\end{aligned}\quad (4.16)$$

donde la masa del campo escalar 3.10 está dada por $m = \sqrt{\lambda}(v_2 - v_1)$.

El correspondiente antisolitón $\bar{\phi}_A$ se obtiene con las substitución $x \rightarrow -x$. La densidad de energía $dE(x)/dx = (d\phi/dx)^2$ se obtiene de forma directa utilizando la solución en la Ec.4.16 dando como resultado la siguiente expresión

$$\frac{dE(x)}{dx} = \frac{2m^4 e^{2\sqrt{2}mx}}{\lambda(1 + e^{\sqrt{2}mx})}\quad (4.17)$$

En la figura 4.2 se muestra claramente que el kink $\phi_A(x)$ interpola entre los dos vacíos v_1 y v_2 , la región de transición entre los vacíos se concentra alrededor del centro de masa del solitón X_0 , que en este caso se seleccionó como $X_0 = 0$. En la figura 4.3 se muestra que la densidad de energía está concentrada alrededor de X_0 , con una anchura, que de acuerdo a la Ec. (4.17) está dada por una longitud típica ξ_m , que se identifica como el inverso de la masa del campo escalar $\xi_m = 1/m$; entre mayor sea la masa del campo escalar tendremos que la energía del soliton se concentrara en una región mas

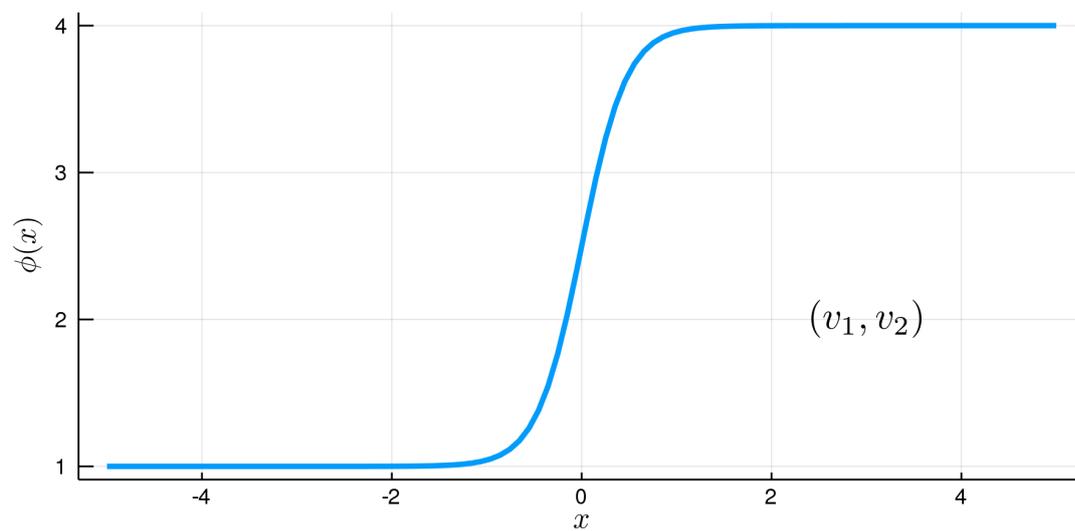


Figura 4.2: Solución para el kink $\phi_A(x)$ 4.16 con parámetros $v_1 = 1, v_2 = 4$.

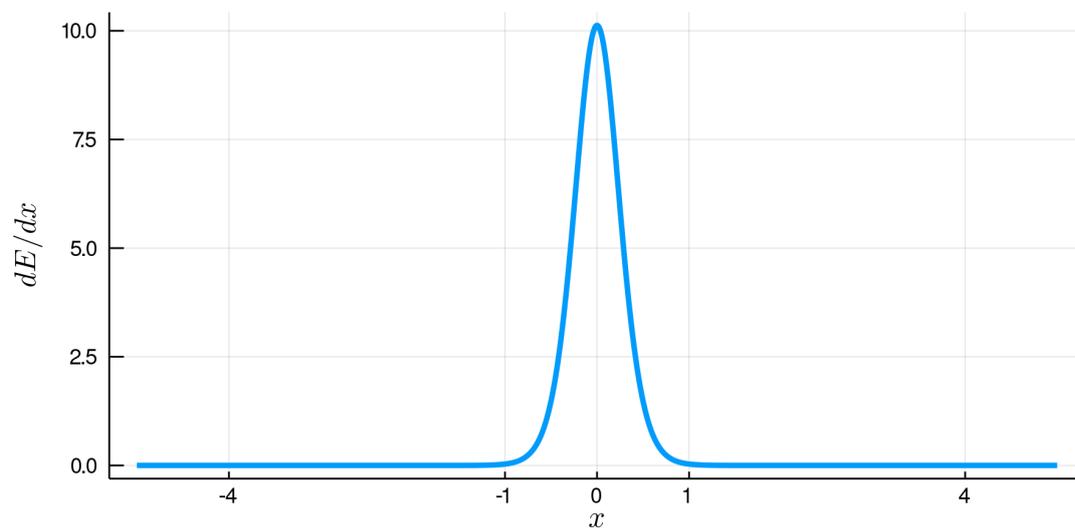


Figura 4.3: Densidad de energía del kink $\phi_A(x)$ 4.17 centrada alrededor de $X_0 = 0$ con parámetros $v_1 = 1, v_2 = 4$.

pequeña. Otro parámetro relevante es la masa M_A del kink. Debido a que tenemos una configuración estática, la masa se identifica como la energía total Ec.4.9, que obviamente coincide con la integral sobre todo el espacio de la densidad de energía en la Ec.4.17, el resultado es

$$M_A = \frac{m^3}{3\sqrt{2}\lambda} \quad (4.18)$$

El kink $\phi_A(x)$ se caracteriza también por una carga topológica, con acuerdo a la Ec.4.12 se calcula de forma directa, con el resultado.

$$Q_A = v_2 - v_1 \quad (4.19)$$

El análisis del kink ϕ_C que interpola entre los vacíos $-v_2$ y $-v_1$ es completamente análogo al caso anterior. Como el campo es negativo en toda la región, hay que tomar en cuenta los valores absolutos que aparecen en la expresión para el potencial Ec.4.13, y notar que $\phi_0 = -(v_1 + v_2)$, el resultado para la configuración de campo ϕ_C es

$$\phi_C(x) = \frac{-v_1 e^{\sqrt{2}\lambda(v_2-v_1)x} - v_2}{1 + e^{\sqrt{2}\lambda(v_2-v_1)x}} \quad (4.20)$$

Mientras que las expresiones para la densidad de energía, la masa y la carga del kink son idénticas a las del solitón ϕ_A : Ec(4.15),(4.18) y (4.19).

Para el kink ϕ_B en el intervalo $(-v_1, v_1)$ podemos separar la integral para obtener una solución definida por partes. Para la región que comprende el intervalo $(0, v_1)$ tenemos lo siguiente

$$\frac{v_2}{v_1} \exp\left\{\sqrt{2}\lambda(v_2 - v_1)x\right\} = \frac{-\phi + v_2}{-\phi + v_1} \quad (4.21)$$

donde se seleccionó el valor de $\phi_0 = 0$, que corresponde al punto intermedio del intervalo $(-v_1, v_1)$. Mientras que para la región que comprende el intervalo $(-v_1, 0)$ usando 4.14 y considerando adecuadamente los valores absolutos tenemos lo siguiente

$$\frac{v_1}{v_2} \exp\left\{\sqrt{2}\lambda(v_2 - v_1)x\right\} = \frac{\phi + v_1}{\phi + v_2} \quad (4.22)$$

si ahora invertimos las ecuaciones 4.22 y 4.21 obtenemos la siguiente expresión

$$\phi_B(x) = \text{sgn}(x) \left(\frac{1 - e^{\sqrt{2}m|x|}}{1 - \frac{v_2}{v_1} e^{\sqrt{2}m|x|}} \right) v_2 \quad (4.23)$$

Donde $\theta(x)$ es la función escalon. El kink ϕ_B 4.23 no es suave en el punto x_0 donde está centrada como se puede observar en 4.5

La densidad de energía se calcula de forma directa con el siguiente resultado

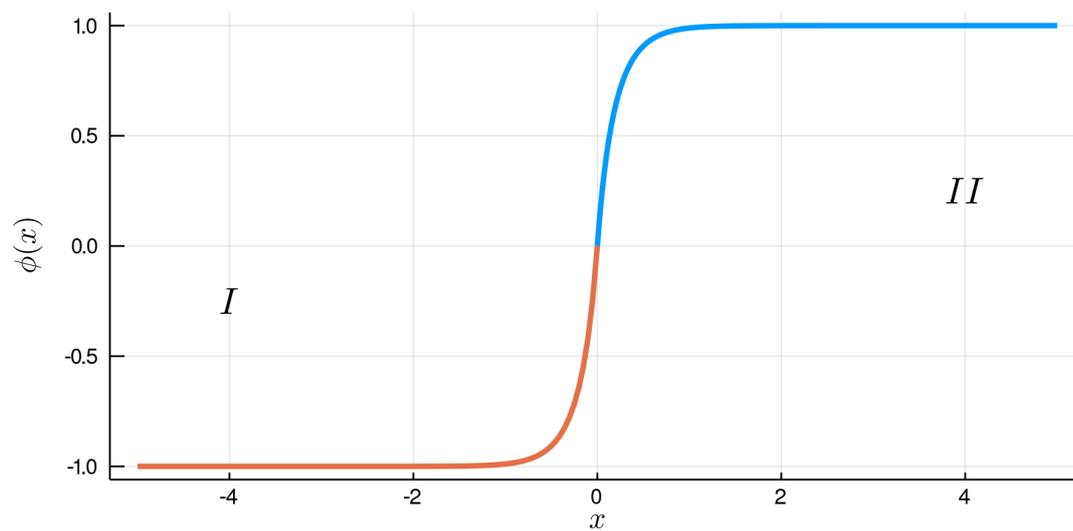


Figura 4.4: Solución para el kink $\phi_B(x)$ \mathcal{V} con parámetros $v_1 = 1, v_2 = 4$.

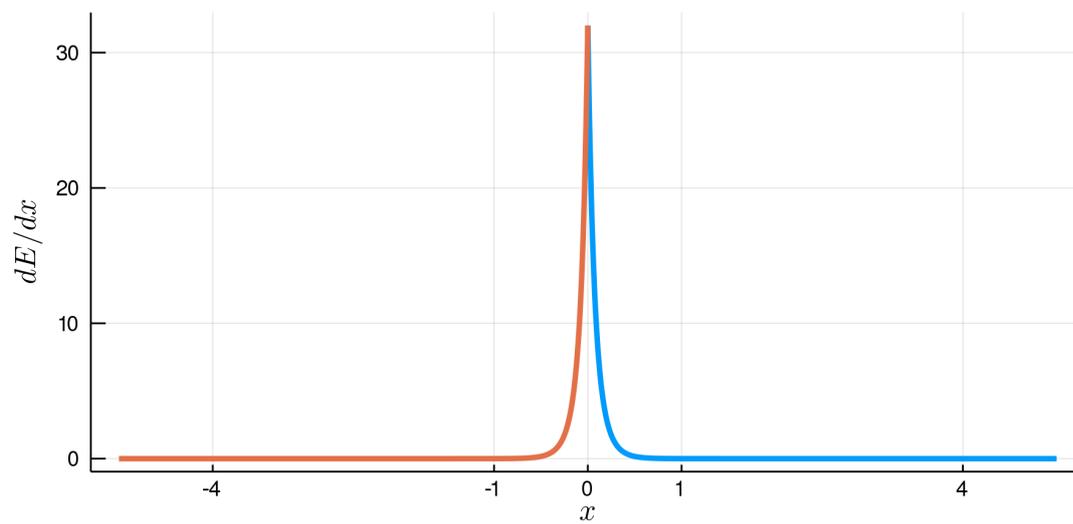


Figura 4.5: Densidad de energía para el kink ϕ_B . Los valores de los parámetros son los mismos que en la gráfica 4.2

$$\frac{dE(x)}{dx} = 4 \frac{(v_1 v_2)^2 m^4 e^{2\sqrt{2}mx}}{(v_1 - v_2 e^{\sqrt{2}mx})^4} \quad (4.24)$$

con $x > 0$. Notemos que la densidad 4.24 se escribe de manera simple ya que el campo ϕ_B es impar alrededor del origen mientras que la densidad $(d\phi/dx)^2$ es par por lo que basta con encontrar la densidad de energía para $\phi > 0$ y multiplicarla por 2. La carga topológica está dada por $Q_B = 2v_1$, mientras que para la masa del kink ϕ_B obtenemos

$$\begin{aligned} M_B &= 2 \int_0^{v_1} \sqrt{2\lambda(-\phi + v_1)^2(-\phi + v_2)^2} d\phi \\ &= \frac{\sqrt{2\lambda}}{3} v_1^2 (3v_2 - v_1) \end{aligned} \quad (4.25)$$

En las figuras 4.5 y 4.4 se presentan la solución para el campo del kink B y su correspondiente densidad de energía, respectivamente. En este caso observamos que nuevamente la densidad de energía se concentra alrededor del centro de masa del solitón $X_0 = 0$, con un decaimiento exponencial determinado por el inverso de la masa m del campo escalar. Sin embargo, observamos que si bien las funciones $\phi_B(x)$ y dE/dx son continuas en el origen, sus pendientes son discontinuas; lo cual se relaciona con el hecho de que el potencial $V(\phi)$ en Ec. (4.13) es no-analítico en $\phi = 0$.

	<i>Masa</i> (M)	<i>Carga</i> (Q)
M_A	$\frac{m^3}{3\sqrt{2\lambda}}$	$Q_A \quad \pm(v_2 - v_1)$
M_B	$\frac{\sqrt{2\lambda}}{3} v_1^2 (3v_2 - v_1)$	$Q_B \quad \pm 2(v_1)$
M_C	$\frac{m^3}{3\sqrt{2\lambda}}$	$Q_C \quad \pm(v_2 - v_1).$

Tabla 4.1: Carga topológica Q y masa M de los kinks ϕ_A , ϕ_B y ϕ_C

En la tabla 4.1 se muestra la carga y masa de los solitones (signo positivo) y la carga de los antisolitones (signo negativo) para los tres intervalos con soluciones de soliton del potencial considerado. El hecho de que las masas y cargas de los kinks A y C sean idénticas, sugiere que existe una simetría que las relaciona. En efecto comprobamos que debido a que la configuración de kink A cumple la condición $0 < \phi_A(x) < v_1 + v_2$; tenemos una simetría ante la transformación $\phi_A(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi_A(x) - (v_1 + v_2)$, la cual deja invariante al lagrangiano escalar con el potencial en Eq(5.14). Además de que transforma el kink ϕ_A en el kink C ya que $\phi_C(x) = \phi'(x)$.

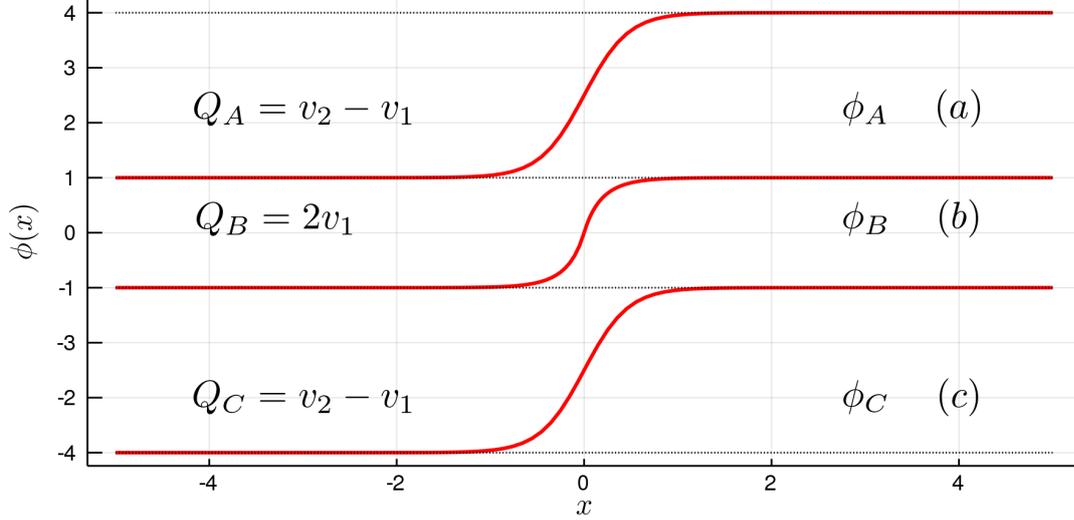


Figura 4.6: Soluciones solitonicas para el potencial escalar \mathcal{V} Eq.4.13 con parámetros $v_1 = 1, v_2 = 4$.(a) Kink ϕ_A localizado en el intervalo (v_1, v_2) con carga $Q_A = v_2 - v_1$.(b) Kink ϕ_B localizado en el intervalo $(-v_1, v_1)$ con carga $Q_B = 2v_1$.(c) Kink ϕ_C en el intervalo $(-v_2, -v_1)$ con carga $Q_C = v_2 - v_1$.

4.4.2. Caso $\delta \neq 0$

Consideremos ahora el caso general en el cual $\delta \neq 0$. Como vimos en el capítulo 3, el parámetro delta da lugar a que los mínimos del potencial dejen de estar degenerados y a que el campo escalar adquiera dos masas diferentes: m_{v_1} (Eq.3.10) y m_{v_2} (Eq.3.39). Consideremos que delta es positivo, por lo que el problema mecánico análogo es el de una partícula que se mueve en el “potencial” $-V(\phi)$, ilustrado en la figura 5.8, donde $V(\phi)$ está dado por la Eq.4.26

$$\mathcal{V}(\phi) = \lambda[(|\phi| - v_1)^2 + \delta][|\phi| - v_2]^2 \quad (4.26)$$

En la figura 4.7 podemos notar que solo esperamos tener una solución de soliton estable con energía finita en la que el campo está localizado en el intervalo $(-v_2, v_2)$. Para obtener la solución podemos partir la integración de la ecuación 4.8 en los dos intervalos $(0, v_2), (-v_2, 0)$. En el intervalo $(0, v_2)$ obtenemos la siguiente ecuación para x

$$\begin{aligned}
 x &= \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{2\mathcal{V}(\phi)}} \\
 &= \frac{\log\left(\frac{(\lambda)^{-\frac{1}{2}} m_{V_2} \sqrt{(v_1 - \phi)^2 + \delta} + (\phi - v_1) \Delta v + \delta}{v_2 - \phi}\right)}{\sqrt{2} m_{V_2}} - g_0
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

donde f y g_0 tienen los siguientes valores

$$m_{V_2} = \sqrt{\Delta v^2 + \delta} \tag{4.28}$$

$$g_0 = \frac{\log\left(\frac{(\lambda)^{-\frac{1}{2}} m_{V_2} \sqrt{v_1^2 + \delta} - v_1 \Delta v + \delta}{v_2}\right)}{\sqrt{2} m_{V_2}} \tag{4.29}$$

Invirtiendo la ecuación 4.27 obtenemos la forma del soliton valida en $x > 0$ como sigue

$$\phi(x) = \frac{2(-v_1^2 + v_2 v_1 - \delta) e^{\sqrt{2} m_{V_2} (x+g_0)} + v_2 e^{2\sqrt{2} m_{V_2} (x+g_0)} - v_2 \delta}{2\Delta v e^{\sqrt{2} m_{V_2} (x+g_0)} + e^{2\sqrt{2} m_{V_2} (x+g_0)} - \delta} \tag{4.30}$$

realizando el procedimiento análogo para ϕ en el intervalo $(-v_2, 0)$ se obtiene la siguiente solución solitonica para $x < 0$. El resultado completo se puede escribir como sigue

$$\phi_{\delta}(x) = \frac{d|x|}{dx} \left(\frac{2(-v_1^2 + v_2 v_1 - \delta) e^{\sqrt{2} m_{V_2} (|x|+g_0)} + v_2 e^{2\sqrt{2} m_{V_2} (|x|+g_0)} - v_2 \delta}{2\Delta v e^{\sqrt{2} m_{V_2} (|x|+g_0)} + e^{2\sqrt{2} m_{V_2} (|x|+g_0)} - \delta} \right) \tag{4.31}$$

La ecuación¹ 4.31 es válida para todo valor de x . En la figura 4.8 se presenta la solución del kink $\phi_{\delta}(x)$ para dos valores de δ . De manera similar a los casos anteriores, se observa que si bien el campo escalar es continuo, las derivadas de ϕ muestran discontinuidades en el origen, donde $\phi(x=0) = 0$. Este hecho se hace más evidente en el pico que muestran las gráficas de la densidad de energía en $x=0$, Figura 4.9. Es de destacar que el perfil del kink $\phi_{\delta}(x)$ muestra tres pliegues, correspondientes a las regiones de transición donde se concentra el cambio del campo al pasar del mínimo $-v_2$ al otro mínimo v_2 . Este efecto es más claro para valores pequeños de delta (Fig. 4.9-b). La localización de los puntos x_c , en los que se da este cambio, corresponden a máximos del potencial $V(\phi)$, los cuales están localizados en $\phi = V_m$ Ec.(3.5) y $\phi = 0$. Lo cual tiene sentido ya que en el problema mecánico análogo, corresponden a mínimos de $-V(\phi)$. Y la partícula análoga tiene energía cinética máxima en estas regiones. Y es precisamente en estas zonas que se concentra la energía del solitón, tal y como muestra la Figura 4.9, en la que observamos paquetes en los cuales se concentra la energía. Es interesante resaltar que $\phi_{\delta}(x)$ es una solución extendida en la cual se tiene tres concentraciones o

¹Notemos que en la ecuación 4.31 se ha usado la representación de la función signo $sgn(x) = \frac{d|x|}{dx}$

4. SOLITONES EN LA TEORÍA ϕ^4 GENERALIZADA.

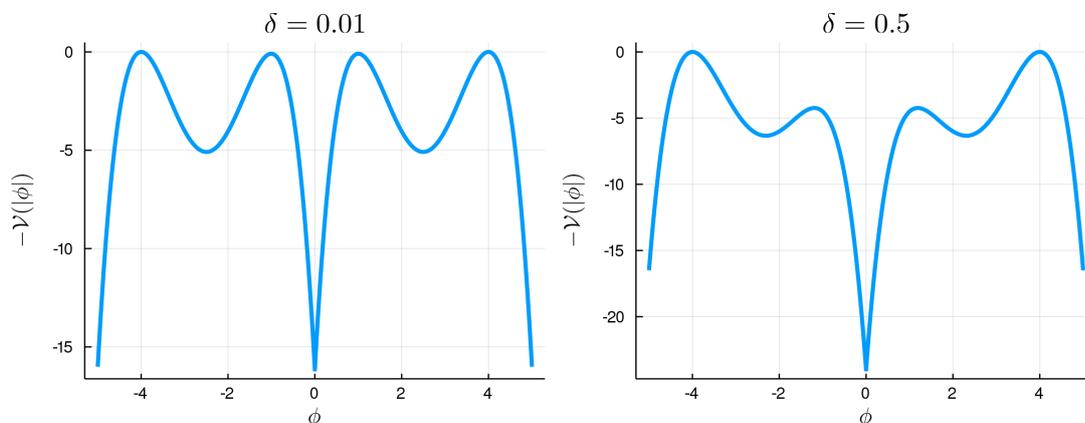


Figura 4.7: Potencial $-\mathcal{V}$ que sentiría una partícula de masa $m = 1$, con \mathcal{V} dado por 4.26, con parámetros $v_1 = 1, v_2 = 4, \delta = 0.5$.

paquetes de energía, a diferencia de las soluciones de la sección anterior, que al igual que los casos usuales de solitones contienen una sola región de concentración de la energía.

Al comparar los resultados y gráficas con las de la sección anterior nos lleva a concluir que el kink $\phi_\delta(x)$ se puede considerar como la fusión de los tres solitones: $\phi_A(x)$, $\phi_B(x)$ y $\phi_C(x)$. Esto será mas claro en cuanto delta sea más pequeño, y se muestra en la figura 4.10 en la que se compara de densidad de energía del kink $\phi_\delta(x)$, con la suma de la energía de los otros tres solitones. En el límite $\delta \rightarrow 0$, tendremos que la “partícula” que inicie su movimiento en $\phi = -v_2$, no podrá rebasar el valor de $\phi = -v_1$ y por lo tanto el kink $\phi_\delta(x)$ se fisionará en los solitones $\phi_A(x)$, $\phi_B(x)$ y $\phi_C(x)$.

La carga del soliton $\phi_\delta(x)$ se calcula de manera sencilla evaluando el campo en infinito, obteniendo la siguiente carga

$$Q_\delta = \pm(2v_2) \quad (4.32)$$

La masa M_δ también se puede calcular de manera directa con el siguiente resultado

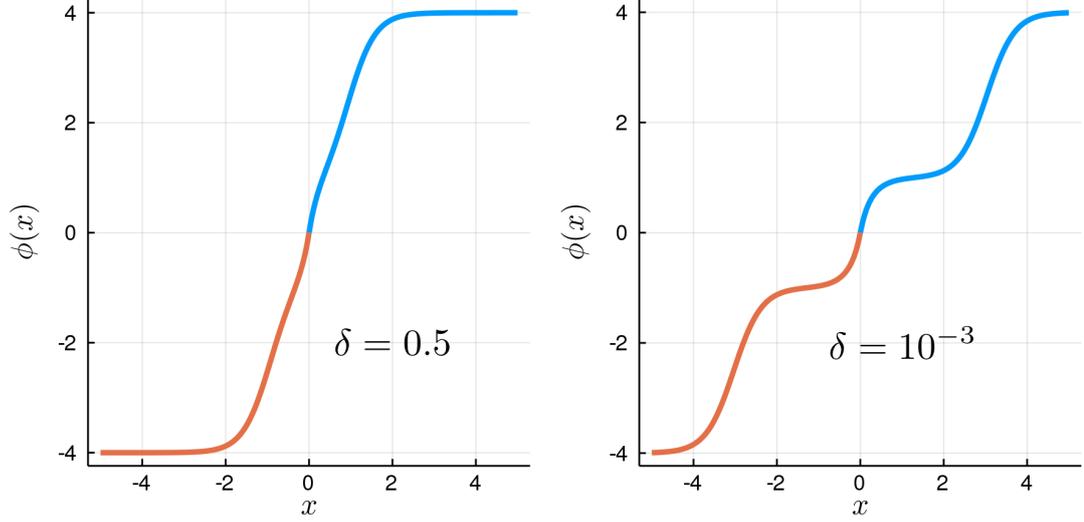


Figura 4.8: A la izquierda se observa la solución solitónica del potencial \mathcal{V} en el intervalo $(-v_2, v_2)$ con parámetros $v_1 = 1, v_2 = 4, \delta = 0.5$. A la derecha se observa la solución solitónica del potencial \mathcal{V} en el intervalo $(-v_2, v_2)$ con parámetros $v_1 = 1, v_2 = 4, \delta = 0.001$.

$$\begin{aligned}
 M_\delta &= \int_{-v_2}^{v_2} \sqrt{2\lambda[(|\phi| - v_1)^2 + \delta](|\phi| - v_2)^2} d\phi \\
 &= 2 \int_0^{v_2} \sqrt{2\lambda[(\phi - v_1)^2 + \delta](\phi - v_2)^2} d\phi
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{2\lambda}}{3} \left[\sqrt{(v_1 - \phi)^2 + \delta}((v_1 - \phi)(v_1 - 3v_2 + 2\phi) - 2\delta) \right. \\
 &\quad \left. + 3\delta(v_2 - v_1) \log\left(\sqrt{(v_1 - \phi)^2 + \delta} - v_1 + \phi\right) \right] \Big|_0^{v_2} \\
 &= \frac{\sqrt{2\lambda}}{3} \left[\sqrt{(\Delta v)^2 + \delta}((\Delta v)^2 - 2\delta) - \sqrt{v_1^2 + \delta}[(v_1)(v_1 - 3v_2) - 2\delta] \right. \\
 &\quad \left. + 3\delta(\Delta v) \log\left(\frac{\sqrt{(\Delta v)^2 + \delta} + \Delta v}{\sqrt{v_1^2 + \delta} - v_1}\right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

La igualdad 4.33 se sigue del hecho de que el integrando es una función par, por lo que en un intervalo simétrico la integral contribuye lo mismo en ambos lados del eje de simetría.

Como mencionamos anteriormente, se espera que para δ pequeña el kink ϕ_δ se pueda considerar como la unión de los tres solitones obtenidos cuando $\delta = 0$, es decir

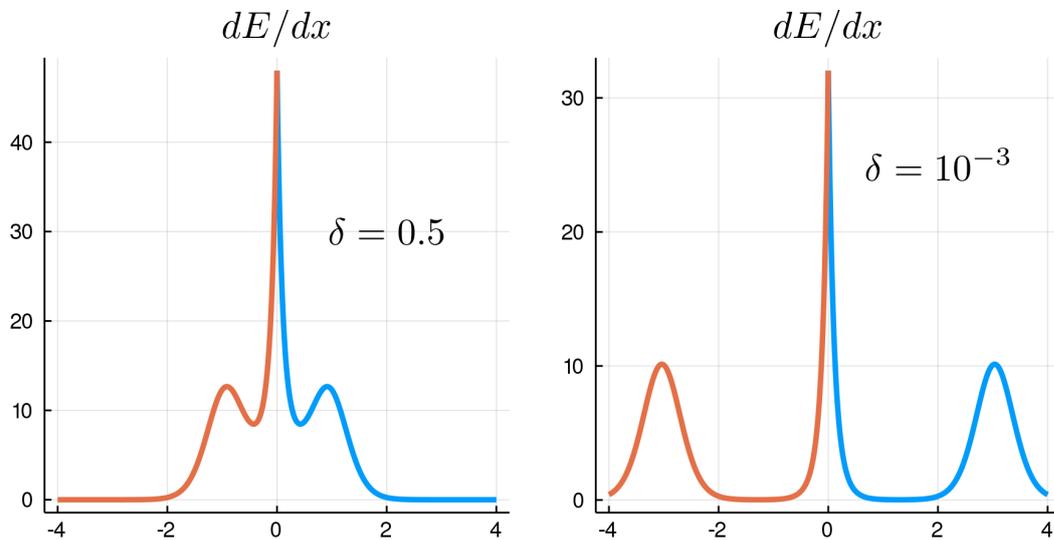


Figura 4.9: Densidad de energía del soliton

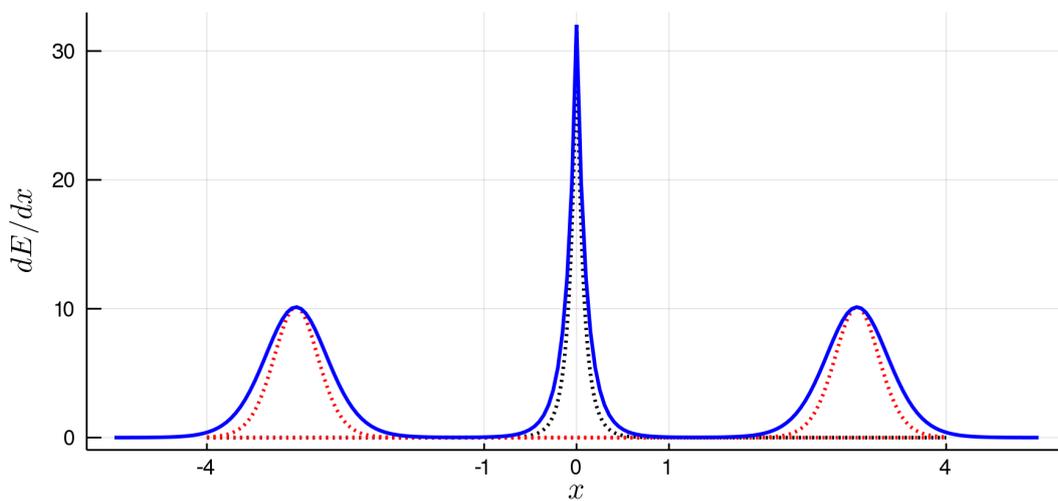


Figura 4.10: En azul se muestra la densidad de energía del soliton cuando $\delta \neq 0$, mientras que la línea punteada negra muestra la densidad de energía de la solución de soliton en el intervalo $(-v_1, v_1)$ cuando $\delta = 0$. La línea punteada roja muestra la densidad de energía de la solución de soliton en los intervalos $(-v_2, -v_1)$ y (v_1, v_2) .

$\phi_A(x)$, $\phi_B(x)$ y $\phi_C(x)$.

Si evaluamos la masa M_δ con los parámetros $v_1 = 1, v_2 = 4$ y $\delta = 10^{-4}$ obtenemos [4.35](#)

$$M_\delta \approx 17.915 \quad (4.35)$$

Mientras que evaluando la suma de las masas [4.18](#) y [4.25](#) que conforman el soliton mostrado en la figura [4.10](#) obtenemos lo siguiente

$$M_T = 2M_A + M_\delta \approx 17.913 \quad (4.36)$$

Resulta evidente también que $Q_\delta = Q_A + Q_B + Q_C$. Los resultados anteriores nos permiten corroborar la interpretación de que ϕ_δ se conforma por la unión de los tres solitones obtenidos cuando $\delta \lll 1$.

Una de las características distintivas de los solitones es que son no dispersivos. Ya que representan paquetes de energía localizados que se mueven con velocidad constante manteniendo su estructura inicial. Esto en contraste con los paquetes de onda que se forman al superponer soluciones con diferentes longitudes de ondas, que por lo tanto se desfasan conforme transcurre el tiempo, dando lugar a un ensanchamiento progresivo del paquete de energía inicial.

Hasta ahora hemos considerado soluciones estáticas, pero podemos aplicar un boost a las soluciones escalares obtenidas al definir $\psi_S(\xi)$ donde $\psi_S(\xi)$ es cualquiera de las soluciones de kink obtenidas en esta sección y donde ξ está dado por

$$\xi = \gamma(x - Vt) \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (4.37)$$

Sustituyendo $\psi_S(\xi)$ en la ecuación [4.2](#), resulta inmediato comprobar que se tiene una solución de la ecuación de movimiento dependiente del tiempo y que en efecto $\psi_S(\xi)$ es no dispersivo, y por lo tanto un solitón.

Vórtices en un modelo de electrodinámica escalar con un potencia ϕ^4 generalizado

En este capítulo analizaremos soluciones tipo vortice en una teoría de electrodinámica escalar con el potencial ϕ^4 generalizado.

Los vórtices son solitones que aparecen en teorías de campo escalar complejo acoplados a un campo de norma. Son soluciones con simetría cilíndrica en las que los campos dependen de dos dimensiones espaciales. La existencia de estos objetos fue postulada por primera vez en el ámbito de la superconductividad por Abrikosov ([Abrikosov, 1957](#)) utilizando la teoría de Landau-Ginzburg. Abrikosov demostró que cuando se aplica un campo magnético por encima de un valor crítico en superconductores tipo *II* aparecen estados mixtos con soluciones de vórtices (fluxones). Posteriormente Nielsen y Olesen ([Nielsen and Olesen, 1973](#)) demostraron que las soluciones de vórtice aparecen también en una teoría de electrodinámica escalar con rompimiento espontáneo de la simetría, lo cual es de esperarse debido a la similitud de dicha teoría con la de Landau-Ginzburg.

5.1. Vórtices en la electrodinámica escalar con un potencial ϕ^4 generalizado

Consideremos el Lagrangiano [5.1](#) de la electrodinámica escalar.

5. VÓRTICES EN UN MODELO DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR CON UN POTENCIA ϕ^4 GENERALIZADO

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + (D_\mu\phi)(D^\mu\phi)^* - V(\phi) \quad (5.1)$$

donde el potencial ϕ^4 generalizado está dado por la Ec.(3.2). Por completez recordamos que $F_{\mu\nu}$ y la derivada covariante D_μ están dados por las siguientes expresiones

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (5.2)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (5.3)$$

Aplicando la variación del Lagrangiano anterior respecto a los campos independientes ϕ , ϕ^* y A_μ , obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = & F_{\mu\nu}\partial^\nu\delta A^\mu - \frac{\partial V}{\partial\phi}\delta\phi - \frac{\partial V}{\partial\phi^*}\delta\phi^* + (-\partial_\mu\partial^\mu\phi - 2ieA_\mu\partial^\mu\phi - ie\phi\partial^\mu A_\mu)\delta\phi^* \\ & + [J_\mu + 2e^2A_\mu\phi\phi^*]\delta A^\mu - (\partial_\mu\partial^\mu\phi^* - 2ieA_\mu\partial^\mu\phi^* - ie\phi^*\partial^\mu A_\mu)\delta\phi \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$J_\mu = ie(\phi\partial_\mu\phi^* - \phi^*\partial_\mu\phi) \quad (5.5)$$

Finalmente integrando el primer término en 5.4 por partes y usando el hecho de que las derivadas totales no contribuyen a la acción tenemos que el principio de Hamilton $\delta S = 0$ da lugar a las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = J_\mu + 2e^2A_\mu\phi\phi^* \quad (5.6)$$

$$(\partial_\mu + ieA_\mu)(\partial^\mu + ieA^\mu)\phi = -\frac{\partial V}{\partial\phi} \quad (5.7)$$

Por otro lado la funcional de energía está dada por la siguiente expresión

$$E[\phi] = \int d^2x \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_i\phi)(D^i\phi)^* + V(\phi) \right] \quad (5.8)$$

Como se mencionó, nos interesa estudiar configuraciones estáticas con simetría cilíndrica. Podemos entonces suponer que campos dependen de las coordenadas $(x, y) = (x_1, x_2)$, mientras que las únicas componentes no nulas de $F_{\mu\nu}$ corresponden al campo magnético $F_{12} = -F_{21} = B$; por lo cual podemos elegir una norma en la que el campo vectorial apunte en la dirección del vector unitario $\hat{\theta}$. De manera similar al caso de los kinks, la condición de energía finita implica que las contribuciones al integrado de 5.8 se deben anular por separado en la frontera de integración, esto da lugar a las siguientes condiciones cuando $r \rightarrow \infty$

$$B = 0 \quad (5.9)$$

$$|\phi| = v_2 \quad (5.10)$$

$$D_i\phi = 0 \quad (5.11)$$

Las dos primeras condiciones determinan que asintóticamente el campo magnético se cancela y el valor absoluto del campo escalar tiende a un mínimo del potencial. Sin embargo el campo escalar ϕ puede tener una fase dependiente de las coordenadas espaciales $\phi = |\phi| \exp\{i\chi(\vec{r})\}$. Consideremos coordenadas polares (r, θ) , la última ecuación 5.11 implica dos condiciones, en la dirección radial $D_r\phi = 0$ se cumple de manera trivial si elegimos un potencial vectorial que apunta en la dirección angular \hat{e}_θ . Por otro lado si χ sólo depende de θ tenemos que la componente angular $D_\theta\phi$ se cancele asintóticamente si las siguientes condiciones se cumplen

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r, \theta) = v_2 e^{i\chi(\theta)} \quad (5.12)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A_\theta(r, \theta) = \frac{1}{er} \partial_\theta \chi(\theta) \quad (5.13)$$

Las Ecs. (5.12-5.13) muestran que, asintóticamente, el campo de norma es proporcional a la derivada de la fase del campo ϕ en un círculo en infinito. Debido a que el campo ϕ debe estar univaluado la fase cumple con $\chi(2\pi) - \chi(0) = 2\pi n$ donde n es un entero. Podemos entonces escribir la fase como sigue $\chi(\theta) = n\theta$ por lo tanto la ecuación 5.13 se reduce a

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A_\theta(r, \theta) = \frac{n}{er} \quad (5.14)$$

Esta condición nos permite calcular el flujo del campo magnético del sistema como sigue

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint_{S_\infty^1} A_i dx^i \\ &= \frac{2\pi n}{e} \end{aligned} \quad (5.15)$$

La ecuación 5.15 nos dice que el flujo magnético está cuantizado de manera similar a lo que sucede con los superconductores tipo II, con la diferencia de que la carga del flujo en dicho caso es la de los pares de Cooper, mientras que en este caso e representa la carga del campo de norma. En general hemos considerado unidades naturales en las que $\hbar = c = 1$. Sin embargo, reestableciendo unidades la ecuación anterior toma la siguiente forma $\Phi = n\Phi_0$, donde el cuanto de flujo está dado por $\Phi_0 = h/e \approx 10^{-7}$ Gauss-cm². Tenemos entonces que un vórtice está formando por n cuantos de flujo. En el caso de la superconductividad, en la que la carga efectiva es $e^* = 2e$, la cuantización del flujo $\Phi = n\Phi_0$ ha sido corroborada experimentalmente (Deaver and Fairbank, 1961), (Doll and Näbauer, 1961)

Tomando en cuenta comportamiento asintótico de los campos en todo el espacio resulta natural proponer el siguiente ansatz para los campos como sigue (Marciano and Pagels, 1978)

5. VÓRTICES EN UN MODELO DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR CON UN POTENCIA ϕ^4 GENERALIZADO

$$\phi(r, \theta) = v_2 f(r) e^{in\theta} \quad (5.16)$$

$$A(\theta) = \frac{n}{er} a(r) \hat{\theta} \quad (5.17)$$

De lo discutido tenemos que las condiciones de frontera en $r \rightarrow \infty$ son: $a \rightarrow 1$ y $f \rightarrow 1$. Mientras que en $r = 0$ son las siguientes

$$a(0) = 0 \quad f(0) = 0 \quad (5.18)$$

de tal manera que los campos no sean singulares en el origen.

Sustituyendo el ansatz (5.16- 5.17) en 5.6 y obtenemos las ecuaciones

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{n^2}{r^2} (1-a)^2 f - \lambda v_2^2 (f-1)(f-\tilde{V}_1)(f-\tilde{V}_m) = 0 \quad (5.19)$$

$$\frac{d^2 a}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{da}{dr} + 2e^2 v_2^2 f^2 (1-a) = 0 \quad (5.20)$$

En 5.19 y 5.20 hemos sustituido el potencial 3.2 para obtener la forma explícita de las ecuaciones¹. Se usa la notación \tilde{V}_i para los mínimos adimensionalizados con V_2 .

Tomando en cuenta las condiciones de frontera de los campos en infinito podemos obtener el comportamiento asintótico de los campos de las ecuaciones anteriores.

Sustituyendo $f_\infty = 1$ en la ecuación de 5.20 tenemos

$$r^2 \frac{d^2 \delta a}{dr^2} - r \frac{d\delta a}{dr} - 2e^2 v_2^2 r^2 \delta a = 0 \quad (5.21)$$

con $\delta a = 1 - a$, la ecuación diferencial anterior tiene solución exacta en términos de funciones de Bessel (Arfken and Weber, 2012).

$$\begin{aligned} 1 - a(r) &= c_1 r J_1(im_{A_2} r) + c_2 r Y_1(-im_{A_2} r) \\ &= cr K_1(m_{A_2} r) \\ &\approx c \sqrt{\frac{2}{\pi m_{A_2}}} r^{\frac{1}{2}} e^{-m_{A_2} r} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Donde $m_{A_2} = \sqrt{2}eV_2$ es la masa vectorial que encontramos en 3.40. Notemos que el acercamiento exponencial del campo vectorial a su valor asintótico, está determinado

¹En este capítulo se ha usado la convención $\lambda \rightarrow \frac{\lambda}{2}$ para

por la masa vectorial m_{A_2} , adquirida con el rompimiento espontáneo de la simetría. Las constantes c_1 y c_2 están relacionadas debido a que en infinito la solución debe anularse. Si ahora consideramos el comportamiento asintótico de la ecuación expandiendo la función f en infinito como $f(r) = 1 - \delta f(r)$ y manteniendo términos dominantes podemos encontrar la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} (\delta f)'' + \frac{1}{r}(\delta f)' - \lambda \Delta v_- \Delta v_+ \delta f &= 0 \\ (\delta f)'' + \frac{1}{r}(\delta f)' - m_{V_2}^2 \delta f &= 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

donde $\Delta v_+ = V_1 - v_2$ y $\Delta v_- = V_m - v_2$ e identificamos la masa escalar como $m_{V_2} = \sqrt{\frac{\lambda}{2}[(v_1 - v_2)^2 + \delta]}$.

La solución a la ecuación 5.23 es la siguiente

$$\begin{aligned} \delta f(r) &= d_1 J_0(im_{V_2} r) + d_2 Y_0(-im_{V_2} r) \\ &= d K_0(m_{V_2} r) \\ &\approx d \sqrt{\frac{1}{2\pi m_{V_2} r}} e^{-m_{V_2} r} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Con lo cual tenemos que el acercamiento exponencial del campo escalar al vacío v_2 , está determinado por la masa del campo escalar m_{V_2} .

Ahora que conocemos la forma de los campos en infinito podemos darnos cuenta que existen dos escalas características relacionadas con las longitudes de Compton de los campos masivos A_μ y ϕ , dadas por las siguientes expresiones (Blasone et al., 2011)

$$\begin{aligned} \eta_2 &= \frac{1}{m_{A_2}} \\ \zeta_2 &= \frac{1}{m_{V_2}} \end{aligned} \quad (5.25)$$

En los superconductores a estas escalas se les conoce como longitud de correlación (ζ), y la longitud de penetración de London (η), mientras que al parámetro adimensional $\kappa = \frac{\eta}{\zeta}$ es llamado parámetro de Landau-Ginzburg. Los valores de κ sirven para clasificar a los superconductores en el tipo I y el tipo II, $\kappa < 1$ y $\kappa > 1$ respectivamente.

Hacemos notar, que debido a que el potencial tiene dos mínimos que producen dos masas diferentes para los campos A_μ y ϕ , podemos definir otra longitud de correlación η_1 y de penetración ζ_1 , utilizando las masas m_{V_1} (Eq.3.10) y m_{A_1} (Eq.3.34). En el análisis numérico haremos referencia a los dos conjuntos de longitudes características,

5. VÓRTICES EN UN MODELO DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR CON UN POTENCIA ϕ^4 GENERALIZADO

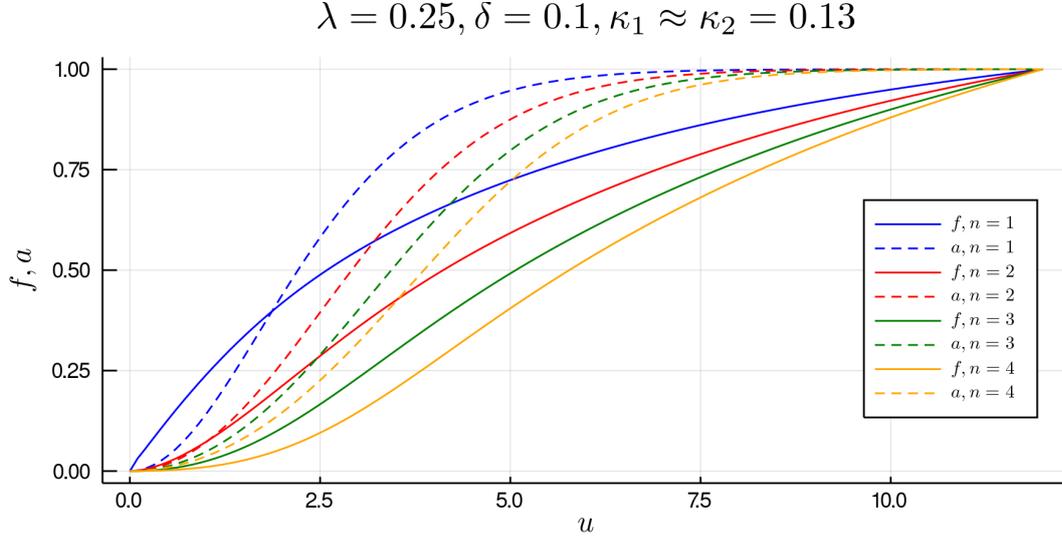


Figura 5.1: Gráfica de los perfiles $f(u)$ y $a(u)$ para los parámetros $e = 1, v_1 = 1, v_2 = 2$. Cerca del origen los perfiles se desplazan a la derecha conforme crece el valor de n .

discutiendo en que casos se manifiestan en las soluciones.

Es interesante notar que el comportamiento asintótico de los perfiles $a(r)$ y $f(r)$ determina la naturaleza de la interacción entre vórtices con separaciones L entre si. La fuerza de interacción entre los vórtices tienen dos contribuciones, una fuerza “electromagnética” mediada por el boson de norma A y una fuerza escalar mediada por el boson escalar, por otra parte la fuerza asociada al boson de norma es repulsiva para fuentes con misma “carga” mientras que la fuerza asociada al boson escalar es atractiva, una demostración muy elegante de este hecho se puede encontrar en (Zee, 2010).

Consideremos ahora el comportamiento de los campos cerca del origen $r \ll 1$, tomando en cuenta los valores determinados en la Ec.5.18. Usualmente se busca un desarrollo en series de potencia de r . Por ejemplo en el caso de los vórtices de Nielsen y Olesen una expansión en serie de potencias de r se puede llevar a cabo explícitamente y se muestra que el término dominante de la serie para el caso escalar toma la forma $f(r) \approx f_n r^n + \mathcal{O}(r^{(n+2)})$, donde f_n se determina numéricamente.

En nuestro caso el desarrollo en serie no siempre está bien definido, lo cual se relaciona con el hecho de que el potencial no es analítico en $\phi = 0$. Sin embargo, en el apéndice B se muestra que el comportamiento dominante de las campos escalar y vectorial cerca del origen se puede determinar y para el campo escalar está dado por la siguiente expresión

$$f(r) \approx \delta_{n,1} f_1 r + f_2^{(n)} r^2 \quad (5.26)$$

con el coeficiente del termino cuadrático dado por las siguientes expresiones

$$f_2^{(n)} = \frac{G(0)}{(4 - n^2)} \quad n = 1, 3, 4, \dots \quad (5.27)$$

$$f_2^{(n)} = \frac{(-G(0) + 2c(4a_2 N^2 - G'(0)))}{16} \quad n = 2 \quad (5.28)$$

en las ecuaciones anteriores f_1 y c son constantes a determinar, a_2 es el coeficiente que aparece en el término dominante de $a(r)$, ver ecuación X, mientras que $G(0)$ y $G'(0)^2$ se relacionan con las derivadas del potencial escalar adimensional evaluadas en el origen

$$G(0) = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{dV}{df} = -\left(\frac{\lambda}{e^2}\right) \tilde{V}_1 \tilde{V}_m \quad (5.29)$$

$$G'(0) = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{d^2V}{df^2} = \left(\frac{\lambda}{e^2}\right) (\tilde{V}_1 \tilde{V}_m + \tilde{V}_m + \tilde{V}_1) \quad (5.30)$$

De acuerdo a la Ec.(5.26), para $n = 1$, $f(r)$ debe iniciar con un comportamiento lineal y a segundo orden tiene una contribución cuadrática donde el correspondiente coeficiente es negativo. Para todos los demás vórtices, $n > 1$, $f(r)$ debe mostrar inicialmente un comportamiento cuadrático creciente.

En el caso del potencial vectorial, la función $a(r)$ cerca del origen se determina como sigue

$$a(r) \approx a_2 r^2 - \frac{\delta_{n,1}}{4} f_1^2 r^4 - \frac{1}{12} (f_2^{(n)})^2 r^6. \quad (5.31)$$

Hacemos notar que a_2 determina el valor del campo magnético en el origen $B_0 = 2a_2 en$. En las expresiones anteriores f_1 , c y a_2 son constantes que se determinan auto-consistentemente al resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales

Por último podemos observar que para $n = 1$ f es una función convexa ($f'' < 0$) en el origen con término dominante lineal. Mientras que cuando $n > 1$ la función es cóncava ($f'' > 0$) con término dominante cuadrático.

5.2. Soluciones numéricas.

Las ecuaciones diferenciales 5.19 y 5.20 no tienen solución analítica por lo que tienen que ser resueltas con métodos numéricos de modo que es conveniente reescribirlas en

5. VÓRTICES EN UN MODELO DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR CON UN POTENCIA ϕ^4 GENERALIZADO

términos de variables adimensionales. Considerando $u = ev_2r$ las ecuaciones diferenciales adquieren la siguiente forma

$$\frac{d^2 f}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{df}{du} - \frac{n^2}{u^2} (1-a)^2 f - \frac{\lambda}{e^2} (f-1)(f-\tilde{V}_1)(f-\tilde{V}_m) = 0 \quad (5.32)$$

$$\frac{d^2 a}{du^2} - \frac{1}{u} \frac{da}{du} + 2f^2(1-a) = 0 \quad (5.33)$$

Por otra parte, si sustituimos 5.16 en la funcional de energía estática obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} E &= \int d^2x \left[\frac{1}{2} B^2 + (D_i \phi)(D^i \phi)^* + V(\phi) \right] \\ &= 2\pi \int dr r \left[\frac{n^2}{2e^2 r^2} \left(\frac{da}{dr} \right)^2 + v_2^2 \left(\frac{df}{dr} \right)^2 + \frac{v_2^2 n^2}{r^2} (1-a)^2 f^2 + \frac{\lambda}{2} [(v_2 f - v_1)^2 + \delta] [v_2 f - v_2]^2 \right] \\ &= 2\pi v_2^2 \int du u \left[\frac{n^2}{2u^2} (a')^2 + (f')^2 + \frac{n^2}{u^2} (1-a)^2 f^2 + \frac{\lambda}{2e^2} \left[\left(f - \frac{v_1}{v_2} \right)^2 + \delta \right] [f - 1]^2 \right] \end{aligned} \quad (5.34)$$

La ecuación 5.34 representa la energía estática del vórtice en términos de variables adimensionales. Donde se tomó en cuenta que $B = \frac{n}{er} \frac{da}{dr}$.

Para obtener las soluciones numéricas de las ecuaciones 5.32 se usó el lenguaje de programación *Julia*, en particular se utilizó el método de Runge-Kutta implícito dada la inestabilidad del sistema.

En la figura 5.1 presentamos las gráficas de $f(u)$ y $a(u)$ como función de la distancia u al centro del vórtice, para diferentes valores de la vorticidad o cuanto de flujo n . Los valores pequeños de los parámetros de LG seleccionados $\kappa_1 \approx \kappa_2 = 0.13$, implican que las longitudes de coherencia ($\zeta_1 = 9.1, \zeta_2 = 5.39$) son grandes respecto a las longitudes de penetración ($\eta_1 = 1.25, \eta_2 = 0.71$). Por lo tanto el campo escalar $f(u)$ alcanza desde cero su valor en el vacío v_2 (en la normalización adoptada $v_2 = 1$) en una distancia del orden ζ_1 , que es aproximadamente un factor $1/\kappa_1 \approx 7.3$ mayor que la distancia requerida para que el campo vectorial $a(u)$ llegue a su valor asintótico 1. En la figura 5.2 se muestra que el campo magnético se concentra alrededor del centro del vórtice en una región caracterizada, en el caso $n = 1$, por la longitud de coherencia $\eta_1 \approx 1.25$. Conforme n crece el radio promedio del vórtice aumenta, de tal manera que la integral bajo la curva satisface la relación de cuantización del flujo magnético Eq.5.15. En la figura 5.1 notamos que al aumentar n las funciones $f(u)$ y $a(u)$ muestran un corrimiento a la derecha, este efecto es causado por el tercer término en la funcional de interacción Eq. 5.34, que se puede considerar un potencial “centrífugo” que se agrega al potencial $V(\phi)$, dando lugar a un potencial efectivo $V_{ef}(\phi) = V(\phi) + (n/u)^2(1-a)^2 f^2$. Se observa

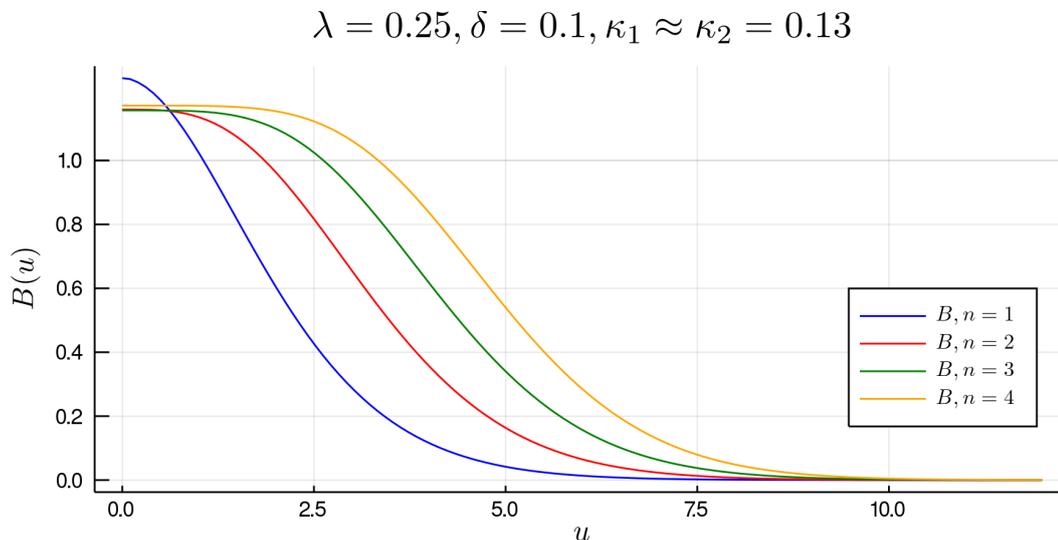


Figura 5.2: Gráfica del campo magnético $B(u)$ para diferentes valores del cuanto de flujo n y parámetros $e = 1, v_1 = 1, v_2 = 2$.

también que cerca del origen $f(u)$ muestra un comportamiento lineal en el caso $n = 1$ y cuadrático para $n \geq 2$ con un coeficiente decreciente conforme n crece, lo cual es consistente con las expresiones en las Ec.(5.26 y 5.31). En la figura 5.3 se muestra la densidad de energía dE/du como función de u . Llama la atención que para $n = 1$ se presenta una discontinuidad en la derivada de la gráfica, lo cual probablemente se relaciona con el mencionado comportamiento no-analítico del potencial cerca del origen. Se presenta también la energía total E_n de cada vórtice, al evaluar numéricamente las superficies limitadas por las diferentes curvas. Al comparar las gráficas 5.2 y 5.3 observamos que la variación de B como función de u es similar a la densidad de energía dE/du , lo que nos lleva a concluir, que la distribución de energía coincide espacialmente con la del campo magnético de cada vórtice.

Consideremos ahora un caso en que las dos constantes de LG son mayores que el valor crítico $\kappa_c = 1$. La figura 5.4 muestra los perfiles de $f(u)$ y $a(u)$ para $\kappa_1 = 3.94$, $\kappa_2 = 1.44$ y diferentes valores de n . En este caso que las longitudes de coherencia ($\zeta_1 = 0.60, \zeta_2 = 0.49$) son menores que las longitudes de penetración ($\eta_1 = 2.37, \eta_2 = 0.71$). El campo escalar $f(u)$ muestra dos regiones de transición entre los valores $0 \rightarrow \tilde{V}_1$ y $\tilde{V}_1 \rightarrow 1$, determinadas por el acercamiento de $f(u)$ al primer y segundo mínimo del potencial respectivamente. La segunda transición $f(u) \rightarrow 1$ está descrita por la Eq.5.26, que muestra una dependencia exponencial que determina una región de transición con un ancho del orden $\zeta_2 = 1/m_2$. Por otro lado, de manera notable observamos una meseta intermedia bien definida, en la cual f permanece prácticamente constante alrededor del primer mínimo del potencial, $f \approx \tilde{V}_1$, para un rango amplio de valores de u . Este

5. VÓRTICES EN UN MODELO DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR CON UN POTENCIA ϕ^4 GENERALIZADO

$$\lambda = 0.25, \delta = 0.1, \kappa_1 \approx \kappa_2 = 0.13$$

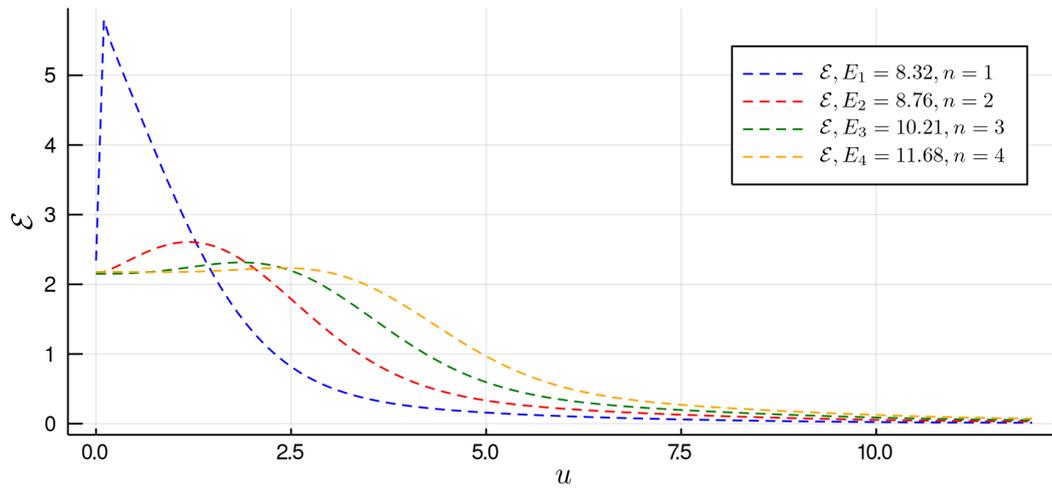


Figura 5.3: Gráfica de la densidad energética $\epsilon(u)$ y $a(r)$ para los parámetros $e = 1, v_1 = 1, v_2 = 2$.

$$\lambda = 14.0, \delta = 0.5, \kappa_1 = 3.94, \kappa_2 = 1.44$$

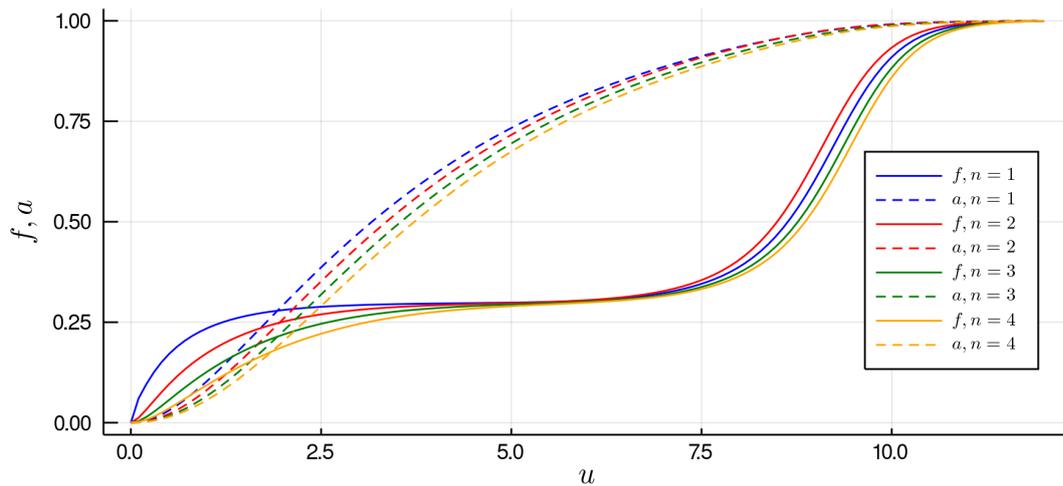


Figura 5.4: Gráfica de los perfiles $f(u)$ y $a(u)$ para los parámetros $e = 1, v_1 = 1, v_2 = 4$.

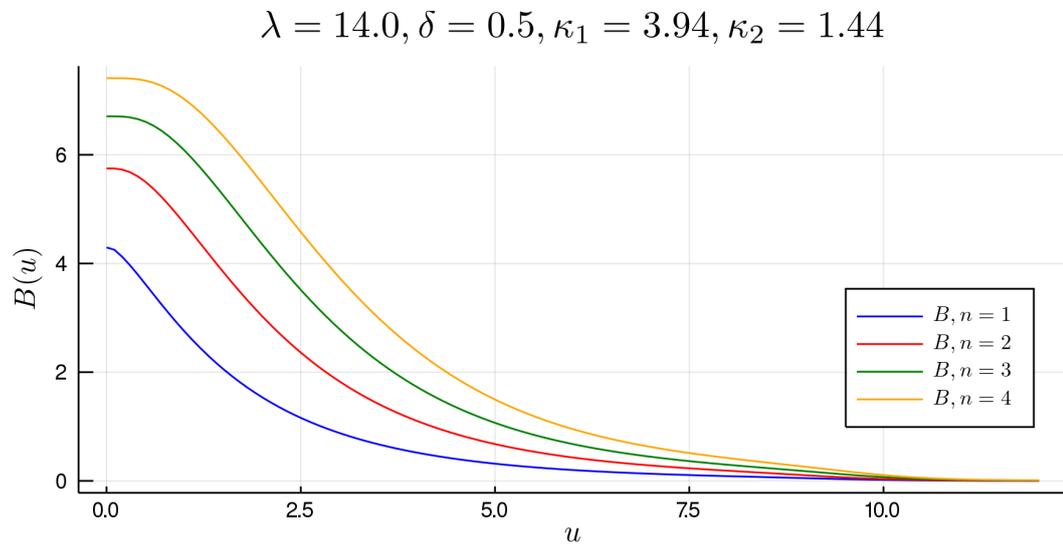


Figura 5.5: Gráfica de los perfiles $B(u)$ para diferentes valores del cuanto de flujo n y parámetros $e = 1, v_1 = 1, v_2 = 4$.

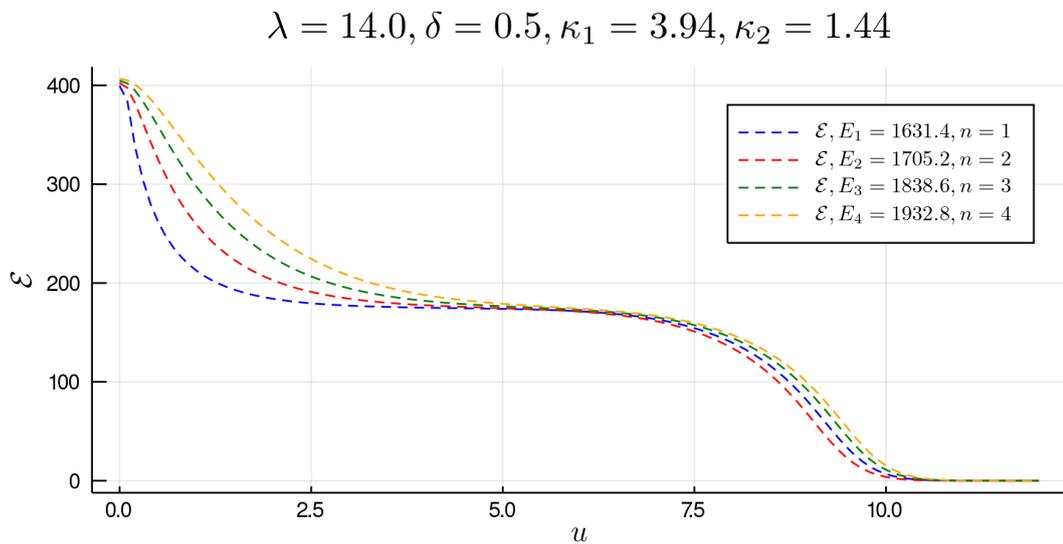


Figura 5.6: Gráfica de la densidad $\epsilon(u)$ para los parámetros $e = 1, v_1 = 1, v_2 = 4$.

5. VÓRTICES EN UN MODELO DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR CON UN POTENCIA ϕ^4 GENERALIZADO

comportamiento difiere del caso conocido de Nielsen y Olesen, donde ϕ muestra un crecimiento monótono hasta alcanzar el mínimo del potencial. La meseta que encontramos puede explicarse observando la funcional de energía 5.34, notemos que tenemos $m_{A_i} \lll m_{V_i}$ por lo que el perfil $f(u)$ llega a su valor \tilde{V}_1 mucho antes de que $a(u)$ llegue a 1. Como el término centrífugo de la energía es proporcional a $(1-a)^2 f^2$ este término se minimiza cuando f es pequeño, en particular es favorable energéticamente que el valor de f sea \tilde{V}_1 porque es un mínimo del potencial. f se mantiene cerca de \tilde{V}_1 hasta que $a \approx 1$ de modo que la contribución $1-a$ es pequeña y ahora es más favorable para la energía que f tienda al mínimo absoluto $f \rightarrow 1$.

Para entender la meseta que surge cerca de \tilde{V}_1 también podemos examinar las Ecs.5.32 y 5.33. Si consideramos primero la ecuación para el campo $a(u)$ y tomamos en cuenta que $f \approx \tilde{V}_1$ obtenemos lo siguiente

$$\frac{d^2 a}{du^2} - \frac{1}{u} \frac{da}{du} + 2\tilde{V}_1^2(1-a) = 0 \quad (5.35)$$

La ecuación 5.35 es análoga a la ecuación que se obtiene para a cuando $u \rightarrow \infty$ por lo que la solución es la siguiente

$$a(u) = 1 - \sqrt{2}\tilde{V}_1 K_1(\sqrt{2}\tilde{V}_1 u) \quad (5.36)$$

Hemos elegido la constante de integración de tal manera que $a(0) = 0$. Por otra parte aunque $a(u)$ crece más lentamente que $f(u)$ su valor no es despreciable en general. Expandiendo f como $f(u) = \tilde{V}_1 - h(u)$ alrededor de \tilde{V}_1 con $h(u) \lll \tilde{V}_1$ obtenemos la siguiente ecuación a partir de 5.32

$$\frac{d^2 h}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{dh}{du} + 2n^2 \tilde{V}_1^2 (K_1(\sqrt{2}\tilde{V}_1 u))^2 (\tilde{V}_1 - h) - 2\tilde{m}_{\tilde{V}_1}^2 h = 0 \quad (5.37)$$

Cerca de \tilde{V}_1 los dos primeros términos de 5.37 son despreciables, ya que el campo h es casi constante cerca de la meseta. De modo que podemos escribir

$$n^2 \tilde{V}_1^3 K_1^2(\sqrt{2}\tilde{V}_1 u) - n^2 \tilde{V}_1^2 K_1^2(\sqrt{2}\tilde{V}_1 u) h(u) - \tilde{m}_{\tilde{V}_1}^2 h(u) = 0 \quad (5.38)$$

resolviendo para h obtenemos la siguiente función

$$h(u) = \frac{n^2 \tilde{V}_1^3 (K_1(u))^2}{n^2 \tilde{V}_1^2 (K_1(u))^2 + \tilde{m}_{\tilde{V}_1}^2} \quad (5.39)$$

Usando la Ec.5.39 podemos escribir el perfil $f(u)$ como sigue

$$\begin{aligned}
f(u) &= \tilde{V}_1 \left[1 + \frac{\left(nK_1(\sqrt{2}\tilde{V}_1 u) \right)^2}{\left(nK_1(\sqrt{2}\tilde{V}_1 u) \right)^2 + \kappa_1^2} \right] \\
&\approx \tilde{V}_1 \left[1 + \left(\frac{nK_1(\sqrt{2}\tilde{V}_1 u)}{\kappa_1} \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{5.40}$$

En la segunda línea de Ec.5.40 se ha considerado que $\kappa_1 \gg 1$. Usando los la ecuación 5.40 uno puede encontrar que las derivadas que omitimos al resolver para h son despreciables aproximadamente cuando $4 \ll \kappa_1^2$ lo cual se cumple para las gráficas que tenemos en la figura 5.4. Es importante notar que las condiciones anteriores son condiciones suficientes pero no necesarias.

En la figura 5.5 observamos la dependencia del campo magnético como función de u . Nuevamente el campo se concentra alrededor origen dentro de vórtice un radio determinado por la longitud de coherencia ζ_1 , y aumenta con n tal, de tal manera que se garantice la cuantización del flujo magnético Ec.5.15.

Es interesante notar en la figura 5.6 la gráfica de la densidad de energía como función de u , la cual ahora se concentra en dos regiones, a diferencia de lo observado en el ejemplo anterior. La primera región coincide con el tubo de flujo, por lo cual se identifica principalmente con energía magnética. La segunda coincide con la meseta descrita anteriormente y corresponde a la energía de campo del vacío $U(V_1)$; recordando que en $U(V_1)$ el potencial tiene un valor no nulo $U(V_1) > 0$ que contribuye a la energía del vórtice.

En la figura en la figura 5.7 se muestra que también es posible que se formen mesetas cuando $\delta \approx (v_1 - v_2)^2/8$ y $\lambda \gg 1$. Un análisis análogo al que se hizo en la ecuación 5.37 nos dice que en este caso la función h está dada por

$$h(u) \approx \frac{2n^2 \left(K_1(\sqrt{2}\tilde{V}_1 u) \right)^2}{\frac{\lambda}{e^2} \left(1 - \frac{v_2}{V_1} \right)^2} \tag{5.41}$$

Usando 5.41 se puede mostrar que la condición aproximada para que se obtenga la meseta es $8/(1 - v_2/V_1)^2 \ll \lambda/e^2$. Para los parámetros usados en la gráfica 5.7, la condición es explícita es $3.85 \ll \lambda/e^2$ lo cual es consistente con el comportamiento que se observa en la figura 5.7.

Otra característica interesante de esta teoría es que tanto para el régimen de los perfiles de la figura 5.1 ($\kappa_1 < \kappa_c$) como para los perfiles de la figura 5.4 ($\kappa_1 < \kappa_c$) se cumple $E_2 < 2E_1$ lo que sugiere que los vórtices dos vórtices sienten una fuerza

5. VÓRTICES EN UN MODELO DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR CON UN POTENCIA ϕ^4 GENERALIZADO

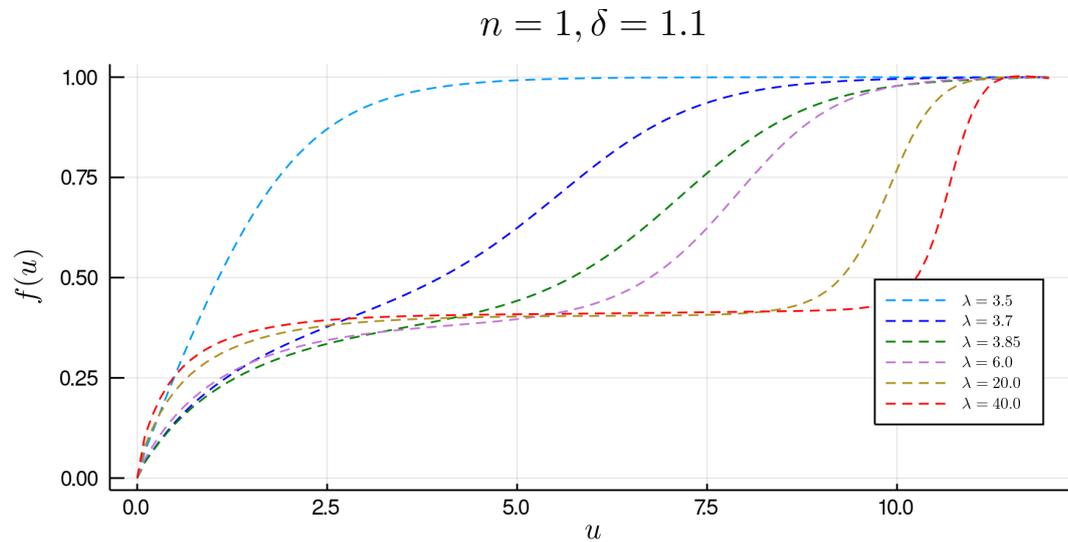


Figura 5.7: Gráfica de los perfiles $f(u)$ y $a(u)$ para los parámetros $e = 1, v_1 = 1, v_2 = 4$.

atractiva entre si. Lo anterior difiere del comportamiento de los vórtices de Nielsen-Olesen en donde para $\kappa < \kappa_c$ los vórtices se atraen mientras que para $\kappa_c < \kappa$ los vórtices se repelen.

Un falso vacío en la teoría

Luego del éxito del modelo estándar para describir muchos fenómenos de la física de partículas los científicos comenzaron a preguntarse cuales eran los horizontes de la física del boson de Higgs. Pronto se dieron cuenta que el modelo estándar no podía explicar algunos fenómenos cosmológicos como la bariogénesis, en particular se observó que para explicar la asimetría barionica se necesitaba que en la etapa primordial del universo cuando este estaba muy caliente este pasara de su fase simétrica a su fase asimétrica al enfriarse mediante una transición de fase de primer orden sin embargo esto no es lo que se observa pues se cree que la transición de fase fue de segundo orden. Si bien la bariogénesis no es explicada con tunelaje cuántico esta abrió las puertas para preguntarse si estamos en un vacío estable. Se cree que el vacío electrodébil puede estar asentado en un vacío falso (metaestable) de modo que puede haber tunelaje cuántico del vacío falso al vacío verdadero. En este capítulo se desarrolla la teoría para considerar el tunelaje cuántico en una teoría de campos que cuenta con un vacío falso y un vacío verdadero tal el que estudiamos en los capítulos 3 y 4. En particular haremos notar que el formalismo de tiempo imaginario tiene analogías interesantes con las soluciones de soliton consideradas anteriormente.([Rajantie, 2018](#))

6.1. Tunelaje en varias dimensiones

Antes de considerar el tunelaje en teoría de campos vale la pena estudiar el fenómeno en teoría cuántica de una dimensión. En una dimensión podemos calcular la probabilidad de tunelaje de una partícula a través un potencial $V(q)$ con dos mínimos en una región donde $E < V(q)$. Nos interesa mostrar que la expresión conocida para la probabilidad de tunelaje, en la aproximación WKB, se puede obtener en el formalismo de “tiempo Euclideo”, en el cual se considera la evolución del sistema como función del tiempo imaginario $\tau = it$. La ventaja es que este formalismo se adapta fácilmente al análisis del tunelaje de mecánica cuántica en n-dimensiones, así como al de la teoría de campos. Consideremos, la transmisión de una partícula en el esquema de la figura 6.1, conviene por simplicidad desplazar el eje de energía, $V_d(q) = V(q) - E$,

6. UN FALSO VACÍO EN LA TEORÍA

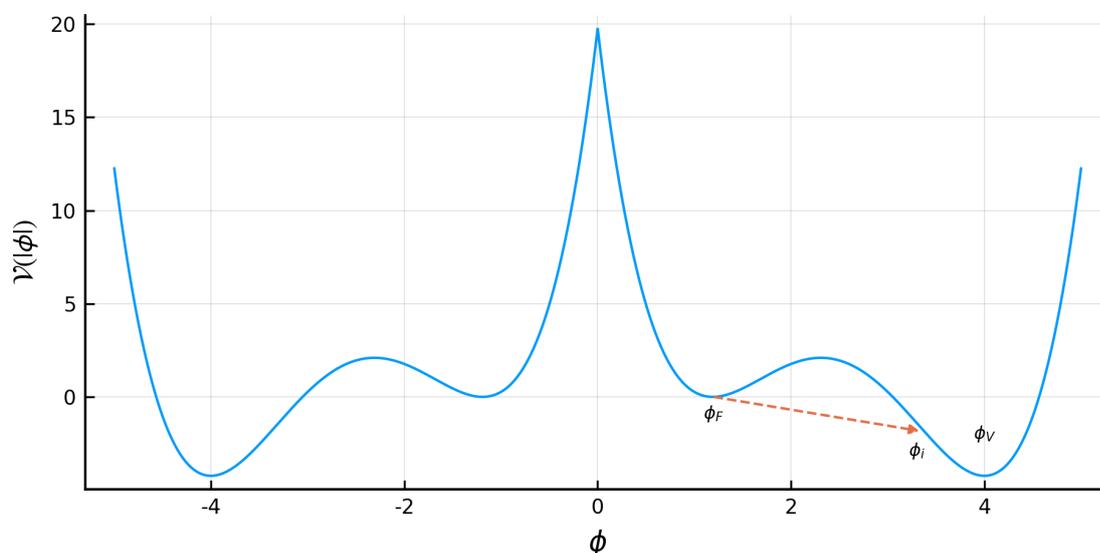


Figura 6.1: El potencial $V(\phi)$ tiene dos vacíos en el $\phi > 0$. $V(\phi_F)$ es el vacío metaestable (falso), mientras que $V(\phi_V)$ es el vacío estable (verdadero). Como el tunelaje no ocurre simultáneamente en todo el espacio el proceso ocurre mediante la nucleación de burbujas de vacío verdadero que se expanden convirtiendo el fondo de vacío falso. En esta figura ϕ_o es la configuración de escape del sistema, es decir, la configuración dentro de la burbuja al momento de la nucleación.

de tal manera que el potencial se cancele en los puntos de retorno: $V_d(q_a) = V_d(q_b) = 0$. La ecuación de Scrodinger expresada en un tiempo Euclideo $\tau = it$ está dada por

$$-\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(q, \tau) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Phi(q, \tau) + V_d(q) \Phi(q, \tau) \quad (6.1)$$

Para implementar el límite semiclásico se escribe la función de onda como sigue

$$\Phi(q, \tau) = \mathcal{A} e^{-\frac{1}{\hbar} S_E(q, \tau)} \quad (6.2)$$

Operando en la función de onda obtenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi(q, \tau) &= \left(-\frac{S''_E}{\hbar} + \frac{(S'_E)^2}{\hbar^2} \right) \mathcal{A} e^{-\frac{1}{\hbar} S_E} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi &= -\frac{\mathcal{A}}{\hbar} \dot{S}_E e^{-\frac{1}{\hbar} S_E} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Hacemos notar que no se tomará en cuenta la variación de A , ya que a primer orden en \hbar no afecta la dinámica de S . Sustituyendo en la ecuación de Schrodinger en el límite semiclásico $\hbar \rightarrow 0$ tenemos la siguiente relación

$$\frac{\partial S_E}{\partial \tau} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_E}{\partial q} \right)^2 - V_d(q) = 0 \quad (6.4)$$

La ecuación 6.4 es la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula en un potencial invertido $-V_d(q)$, por lo tanto podemos identificar el hamiltoniano euclidiano como sigue

$$H_E(q, p; \tau) = \frac{p^2}{2m} - V_d(q) \quad (6.5)$$

donde hemos identificado el momento $p = \frac{\partial S_E}{\partial q}$, y $S_E(q; P; \tau)$ es la acción euclidiana o función principal de Hamilton, de acuerdo al formalismo de transformaciones canónicas (Goldstein et al., 2002). Notemos que S_E depende de q , τ y P que es una constante de movimiento. Así la dependencia dinámica de la acción euclidiana se escribe como $S_E(q, t)$. Con lo anterior podemos obtener la siguiente relación

$$\begin{aligned} \frac{dS_E}{dt} &= \frac{\partial S_E}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial S_E}{\partial \tau} \\ &= p\dot{q} - H_E \\ &= \mathcal{L}_E \end{aligned} \quad (6.6)$$

Ahora podemos ver que la acción euclidiana es tan solo la integral temporal del Lagrangiano euclidiano

$$S_E = \int^{\tau} \mathcal{L}_E d\tau \quad (6.7)$$

Donde el Lagrangiano euclidiano está dado por la siguiente expresión

$$\mathcal{L}_E = \frac{m}{2} \dot{q}^2 + V_d(q) \quad (6.8)$$

La ecuación de movimiento que determina la dinámica en la región del tunelaje se obtiene usando las ecuaciones de Hamilton, o de Euler-Lagrange obteniendo lo siguiente

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} = \frac{\partial V_d}{\partial q} \quad (6.9)$$

6.9 es la ecuación de una partícula que se mueve a través de un potencial invertido. Multiplicando la expresión anterior por \dot{q} en ambos lados es fácil derivar la siguiente expresión para la conservación de la energía tomando en cuenta que las condiciones en los puntos de retorno toman la forma $m\dot{q}^2/2 - V_d(q) = 0$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{q}^2 - V_d(q) \right) = 0 \quad (6.10)$$

Usando las ecuaciones anteriores podemos escribir la acción euclidiana como sigue

$$\begin{aligned} S_E &= \int_{\tau_a}^{\tau_b} 2(V_d(q)) d\tau \\ &= \int_{\tau_a}^{\tau_b} \sqrt{2(V_d(q))} \sqrt{2(V_d(q))} d\tau \\ &= \int_{q_a}^{q_b} \sqrt{(2/m)(V_d(q))} dq \\ &= \int_{q_a}^{q_b} \sqrt{(2/m)(V(q) - E)} dq \end{aligned} \quad (6.11)$$

En la ecuación anterior se reescribió el potencial tomando en cuenta que $V_d(q) = V(q) - E$. El resultado anterior coincide con la aproximación usual WKB y el hecho de que la hayamos obtenido en el límite $\hbar \rightarrow 0$ significa que su validez corresponde con el régimen semiclásico. Puesto de manera más precisa para que la ecuación 6.4 sea válida se necesita cumplir la siguiente condición

$$\hbar \left| \frac{\frac{\partial^2 S_E}{\partial q^2}}{(\frac{\partial S_E}{\partial q})^2} \right| = \hbar \left| \frac{\frac{\partial p}{\partial q}}{p^2} \right| \lll 1 \quad (6.12)$$

donde nuevamente hemos usado que $p_i = \frac{\partial S_E}{\partial q}$, si también usamos la relación de DeBroglie $\lambda = h/p$ obtenemos la siguiente condición equivalente.

$$\left| \frac{d(\frac{\lambda(q)}{2\pi})}{dq} \right| \lll 1 \quad (6.13)$$

La condición 6.13 nos dice que la longitud de onda de DeBroglie de la partícula debe variar muy poco en distancias del orden de la misma longitud. (Landau and Lifshitz, 1981)

Finalmente utilizando la solución para la ecuación de onda y las condiciones de continuidad con las ondas incidente y transmitida en los puntos de retorno q_a y q_b se obtiene

$$\Gamma = Ae^{-B} \quad (6.14)$$

Donde el exponente de decaimiento $B = 2S_E$ está dado como sigue

$$B = 2 \int_{q_a}^{q_b} dq \sqrt{(2/m)[V(q) - E]} \quad (6.15)$$

Donde q_a y q_b son el punto de incidencia y escape de la partícula cuando realiza el tunelaje.

La generalización para el caso multidimensional de 6.15 para una partícula de masa $m = 1$ en un potencial V en varias dimensiones está dada por la siguiente ecuación (Sher, 1989)

$$B = 2 \int_{\vec{q}_0}^{\vec{\sigma}} ds \sqrt{2[V(q) - E]} \quad (6.16)$$

con $(ds)^2 = d\vec{q} \cdot d\vec{q}$, y $\vec{\sigma}$ un punto en una superficie de ceros del potencial $V_d(\vec{q})$. El tunelaje tendrá lugar por el camino con mayor probabilidad de decaimiento, lo cual es equivalente a la trayectoria que minimiza la funcional B . Lo anterior nos dice que el tunelaje se determina por la solución del siguiente problema variacional.

$$\delta \int_{\vec{q}_0}^{\vec{\sigma}} ds \sqrt{2[V(q) - E]} = 0 \quad (6.17)$$

Además, de manera similar a la demostración del caso unidimensional, tenemos que la expresión 6.17 es equivalente a encontrar la variación de la acción euclidiana en el espacio n-dimensional

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau_\sigma} d\tau \mathcal{L}_E = 0 \quad (6.18)$$

La variación de la acción nos dice que el camino que extremiza la acción es el dado por la solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial V_d}{\partial q_j} = \frac{d^2 q_j}{d\tau^2} \quad (6.19)$$

La expresión 6.19 es la ecuación de movimiento de una partícula en un potencial $-V$. Es importante notar que como $\dot{q}_j \dot{q}_j = 2(V_d(q))$, q solo puede alcanzar el valor q_0 de manera asintótica, por lo que el tiempo inicial se elige como $\tau \rightarrow -\infty$. El punto de retorno $\vec{\sigma}$ se alcanza en un tiempo τ arbitrario por lo que podemos elegirlo como $\tau = 0$, además observemos que luego de llegar al punto de retorno la dinámica de la partícula es simétrica con lo que al tiempo si cambiamos el sentido del parámetro $\tau \rightarrow \infty$ la partícula retornará a \vec{q}_0 esto fija los límites de integración de la funcional B como sigue

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \frac{dq_j}{d\tau} \frac{dq_j}{d\tau} + V(q) - V(q_0) \right) d\tau$$

Finalmente veamos que el problema inicial se ha reducido a resolver la ecuación 6.19 con las siguientes condiciones de frontera

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \vec{q} = \vec{q}_0 \quad (6.20)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{dq}{d\tau} = 0 \quad (6.21)$$

Observemos que el coeficiente de tunelaje se obtiene a partir de una trayectoria que inicia en el punto q_0 , retornando al mismo luego de rebotar en el punto de retorno. Debido a lo anterior en la literatura a solución se le conoce como *Bounce*, es decir Rebote. Luego de obtener la solución a las ecuaciones anteriores podemos sustituir el resultado en la funcional B 6.20 y evaluar la integral para obtener la probabilidad de tunelaje. (Coleman, 1977b)

6.2. Tunelaje en teoría de campos

La dinámica del universo depende de forma esencial de las configuraciones estacionarias de posibles campos escalares que lo permean. Así, por ejemplo, el campo de Higgs del modelo estándar se encuentra en una configuración que se supone espacialmente uniforme y ocupando un mínimo del potencial, cuyo valor de expectación no nulo determina las masas de los campos vectoriales y fermiónicos. Dicha configuración se supone estable. Sin embargo, si el campo escalar tiene dos mínimos de potencial, y en un momento dado ocupa el estado de energía superior, el estado resulta ser metaestable, dicho estado se denomina como un falso vacío y se espera que decaiga al vacío verdadero, es decir al vacío estable con menor energía. Es importante tomar en cuenta que el sistema en cuestión ocupa un espacio de grandes dimensiones (posiblemente infinito), por lo que no se espera que la transición se dé simultáneamente en las diferentes regiones del espacio. En su lugar el proceso debe ser similar a la nucleación de burbujas que se crean en un fluido sobrecalentado. En dicho fluido aparecen constantemente burbujas de gas, dentro de las cuales la densidad de energía es menor que en el fluido, y en los casos en que domina sobre el efecto de la tensión superficial da lugar a la expansión de las burbujas. Un fenómeno similar se presenta en el caso de campos escalares con dos mínimos no degenerados (Coleman, 1977a). A continuación revisaremos los elementos esenciales del formalismo correspondiente y presentaremos un análisis basado en el potencial estudiado en el capítulo 2.

La generalización de los resultados obtenidos en la sección anterior es bastante directa. Tenemos que el coeficiente B para un campo escalar se obtiene a partir de la integral de la Lagrangiana Euclideana, dada por la siguiente expresión

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + V(\phi) - V(\phi_F) \right) d\tau d^3x \quad (6.22)$$

La condición de que la variación de B se anule da lugar a las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} + \nabla^2 \phi = \frac{dV_d}{d\phi} \quad (6.23)$$

Donde $V_d(q) = V(q) - V(q_0)$. 6.23 es la ecuación de movimiento para un campo escalar en un potencial $-V_d$ en un espacio euclidiano de 4 dimensiones. Mientras que las condiciones de frontera son las siguientes

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \phi(\tau, x) = \phi_F \quad (6.24)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \pm\infty} \phi(\tau, x) = \phi_F \quad (6.25)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{d\phi}{d\tau} = 0 \quad (6.26)$$

ϕ_F es el valor del campo en el falso vacío (es una configuración meta-estable ya que no es el mínimo absoluto), mientras que llamaremos ϕ_V al valor del campo en el vacío verdadero (la configuración que corresponde al estado de menor energía del sistema). Notemos que en las ecuaciones anteriores hemos hecho el requerimiento de que el campo adquiera el valor ϕ_F en la frontera espacial para que la funcional 6.20 tenga un valor finito, por otra parte veamos que este es un requerimiento físico razonable ya que lejos de la burbuja de vacío verdadero el sistema permanece en el falso vacío.

En teoría de campos la energía potencial de un campo escalar real estará dada por 6.27

$$U = \int d^3x \left(V_d(\phi) + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right) \quad (6.27)$$

vemos que hay una diferencia sutil entre el caso de muchas dimensiones y el caso de una teoría de campo escalar, ya que uno debe tomar en cuenta que hay más de una solución estacionaria de B debemos sumar sobre un continuo de configuraciones que contribuyen con factores V y T en una caja de espacial de volumen V . Por lo tanto la cantidad que estudiamos es la tasa de decaimiento por unidad de volumen Γ/V .

Dado que las ecuaciones de movimiento son invariantes ante el grupo de rotaciones $O(4)$ podemos hacer un ansatz para las soluciones ϕ y pedir que el campo sea $O(4)$ invariante pensando que da lugar a un valor menor de la acción comparado con un Bounce no invariante. Afortunadamente Coleman demostró en (Coleman et al., 1978)

6. UN FALSO VACÍO EN LA TEORÍA

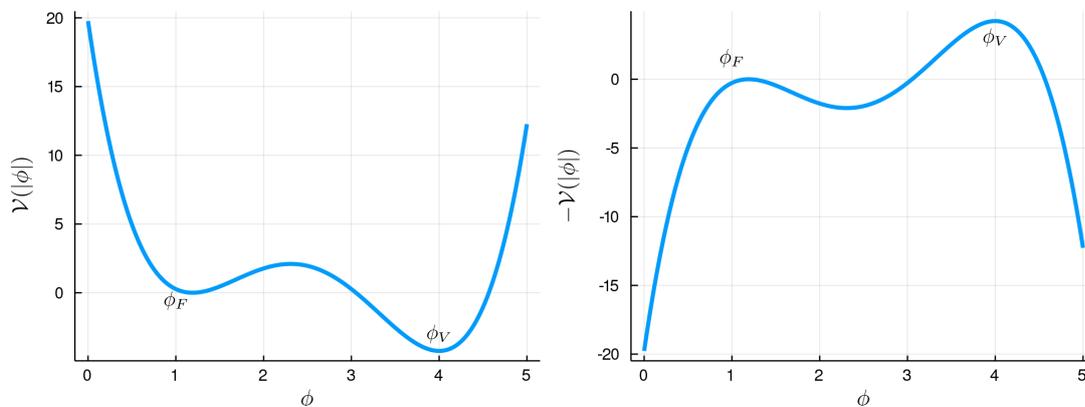


Figura 6.2: Potencial 3.2 con parámetros $v_1 = 1, v_2 = 4, \delta = 0.5$ para $\phi > 0$. El potencial tiene un vacío falso ϕ_F y un vacío verdadero ϕ_V .

que en efecto la configuración que minimiza la acción es $O(4)$ invariante.

Dada la simetría del problema podemos definir un radio 4-dimensional con la relación $\rho^2 = \tau^2 + |x|^2$. Dado que ρ es el radio de una 3-esfera podemos definir las siguientes coordenadas hipersféricas

$$\tau = \rho \cos \alpha \quad (6.28)$$

$$x = \rho \cos \psi \sin \theta \sin \alpha \quad (6.29)$$

$$y = \rho \sin \psi \sin \theta \sin \alpha \quad (6.30)$$

$$z = \rho \cos \theta \sin \alpha \quad (6.31)$$

Con las coordenadas anteriores podemos encontrar el Laplaciano del campo ϕ como sigue

$$\nabla^2 \phi(\rho) = \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^3 \frac{\partial \phi(\rho)}{\partial \rho} \right) \quad (6.32)$$

Así podemos escribir 6.23 de la siguiente manera

$$\frac{d^2 \phi}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{d\phi}{d\rho} = \frac{\partial V_d}{\partial \phi} \quad (6.33)$$

además tenemos la siguientes condición de frontera

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \phi(\rho) = \phi_F \quad (6.34)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \phi(\rho) = \phi_i \quad (6.35)$$

Donde ϕ_r se determina de manera autoconsistente al resolver la ecuación diferencial 6.33. Adicionalmente tenemos la siguiente condición

$$\left. \frac{d\phi}{d\rho} \right|_0 = 0 \quad (6.36)$$

para que la configuración ϕ no sea singular en el origen. Finalmente la funcional 6.22 se escribe como sigue (Coleman, 1977b)

$$B = 2\pi^2 \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 + V_d(\phi) \right) \rho^3 d\rho \quad (6.37)$$

En una analogía mecánica clásica 6.33 es equivalente a la ecuación de una partícula con posición ϕ que evoluciona en un tiempo ρ en presencia de un potencial $-V$ con un término de fricción adicional cuyo coeficiente de fricción es inversamente proporcional al parámetro ρ .

Es natural esperar que el signo de B sea positivo de modo que sus valores están en un intervalo entre 0 y ∞ y la probabilidad de decaimiento entonces tenga valores entre 0 y 1. Para ver cual es el signo de B podemos usar el argumento de Derrick sobre la invarianza de la acción euclidiana ante reescalamientos de las coordenadas tal como se muestra en (Weinberg, 2001b). Sin embargo tomaremos otra ruta derivaremos una serie de relaciones tipo virial, de las cuales un caso particular incluye la expresión encontrada por Weinberg. La forma de 6.37 nos sugiere que podemos definir un Lagrangiano efectivo dependiente de ρ como sigue

$$L_\rho = \rho^3 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 + V_d(\phi) \right) \quad (6.38)$$

La variación del Lagrangiano 6.38 da lugar a la ecuación de movimiento 6.33. El hamiltoniano correspondiente se obtiene usando la transformación de Legendre como sigue

$$\begin{aligned} H_\rho &= p \frac{d\phi}{d\rho} - L_\rho \\ &= \rho^3 \left(\left[\frac{d\phi}{d\rho} \right]^2 - V_d(\phi) \right) \end{aligned} \quad (6.39)$$

En la expresión anterior hemos usado $p = \frac{\partial L_\rho}{\partial \dot{\phi}}$. Si ahora obtenemos la derivada total del Lagrangiano L_ρ se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
 \frac{dL_\rho}{d\rho} &= \frac{\partial L_\rho}{\partial \phi} \frac{d\phi}{d\rho} + \frac{\partial L_\rho}{\partial \dot{\phi}} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\phi}{d\rho} \right) + \frac{\partial L_\rho}{\partial \rho} \\
 &= \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\partial L_\rho}{\partial \dot{\phi}} \right) \frac{d\phi}{d\rho} + \frac{\partial L_\rho}{\partial \dot{\phi}} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\phi}{d\rho} \right) + \frac{\partial L_\rho}{\partial \rho} \\
 &= \frac{d}{d\rho} (p\dot{\phi}) + \frac{\partial L_\rho}{\partial \rho}
 \end{aligned} \tag{6.40}$$

En la ecuación anterior hemos definido $\dot{\phi} \equiv \frac{d\phi}{d\rho}$. Usando 6.39 y 6.40 obtenemos la siguiente relación

$$\begin{aligned}
 \frac{dH_\rho}{d\rho} &= -\frac{\partial L_\rho}{\partial \rho} \\
 &= -3\rho^2 \mathcal{L}_E \\
 &= -\frac{3}{\rho} L_\rho
 \end{aligned} \tag{6.41}$$

Es interesante notar que de acuerdo a la analogía mecánica, L_ρ depende explícitamente del “tiempo” ρ , lo cual explica que H_ρ no sea una cantidad conservada.

Consideremos la siguiente identidad

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \frac{d(\rho^\alpha H_\rho)}{d\rho} d\rho &= [\rho^\alpha H_\rho] \Big|_0^\infty \\
 &\equiv F^\alpha
 \end{aligned} \tag{6.42}$$

Por otra parte desarrollando la integral 6.42 y utilizando 6.41 obtenemos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
 F^\alpha &= \int_0^\infty \frac{d(\rho^\alpha H_\rho)}{d\rho} d\rho \\
 &= \int_0^\infty \left(\rho^\alpha \frac{dH_\rho}{d\rho} + \alpha \rho^{\alpha-1} H_\rho \right) d\rho \\
 &= \int_0^\infty (\alpha \rho^{\alpha-1} H_\rho - 3\rho^{\alpha-1} L_\rho) d\rho \\
 &= \int_0^\infty \rho^{\alpha+2} \left(\frac{\alpha-3}{2} \left(\frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 - (\alpha+3)V_d(\phi) \right) d\rho
 \end{aligned} \tag{6.43}$$

Con $V_d(\phi) = V(\phi) - V(\phi_F)$. Es útil definir las siguientes integrales

$$I_\alpha^\phi = \int_0^\infty \rho^{\alpha+2} \left(\frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 d\rho \quad (6.44)$$

$$I_\alpha^{V_d} = \int_0^\infty \rho^{\alpha+2} V_d(\phi) d\rho \quad (6.45)$$

Finalmente obtenemos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} F^\alpha &= \rho^{\alpha+3} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 - V_d(\phi) \right) \Big|_0^\infty \\ &= -(\alpha+3) I_\alpha^{V_d} + \frac{(\alpha-3)}{2} I_\alpha^\phi \end{aligned} \quad (6.46)$$

Las anteriores son un conjunto de relaciones de tipo Virial ya que relacionan promedios del término cinético $\dot{\phi}^2$ con promedios de $V_d(\phi)$ ponderados con potencias de ρ .

El valor de F_α depende de las condiciones de frontera. Para llevar a cabo el análisis asintótico consideramos el potencial 6.63. Sabemos que en $\rho \rightarrow \infty$, el potencial tiende al falso vacío por lo tanto tenemos $V_d(\phi_F) = 0$. Por otra parte cerca de infinito podemos hacer una expansión del campo $\phi = \phi_F + \delta\phi$, luego de sustituir en la ecuación 6.33 y quedarnos a primer orden en la perturbación $\delta\phi$ obtenemos el comportamiento del campo en infinito

$$\phi(\rho) \approx \phi_F + \frac{e^{-m_{V_2}\rho}}{\rho^{3/2}} \quad (6.47)$$

Donde la masa m_{V_2} se obtiene de 3.39. Utilizando la ecuación 6.47 encontramos que el término cinético se cancela por lo que no hay contribución de F_α en infinito.

Cerca de $\rho = 0$ podemos expandir el campo en una serie de potencias $\phi = c_j \rho^j$. El comportamiento de los dos primeros términos es fácil de deducir de las condiciones de frontera, necesitamos que el término constante sea $c_0 = v_2(1 - \Delta)$ donde Δ es un parámetro de desviación del punto de retorno respecto al vacío verdadero. Como en $\rho = 0$ tenemos $\dot{\phi} = 0$ podemos concluir que $c_1 = 0$ y así expresamos el campo cerca del origen como sigue

$$\phi(\rho) = v_2(1 - \Delta) + c_2 \rho^2 + \dots \quad (6.48)$$

La primera contribución a $\dot{\phi}$ es de orden lineal en ρ . Finalmente el potencial cerca del origen se escribe aproximadamente de la siguiente manera

$$V_d(\phi) \approx V_d(v_2(1 - \Delta)) \quad (6.49)$$

Considerando estos resultados concluimos que la ecuación 6.46 es válida para $-3 \leq \alpha$ ya que para $\alpha < -3$ las integrales son divergentes. El valor de F_α está determinado por la siguiente ecuación

$$F_\alpha = \rho^{\alpha+3} \left(-\frac{(c_2\rho)^2}{2} + V_d(v_2(1-\Delta)) \right) \Big|_0 \quad (6.50)$$

Con lo que concluimos que F_α se anula excepto cuando $\alpha = -3$. Ahora podemos analizar la relación 6.46 para distintos valores de α , en particular veamos que para $\alpha = 1$ tenemos $F_1 = 0$ y se cumple la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} F_1 &= -4I_1^{V_d} - I_1^\phi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.51)$$

que explícitamente da lugar a la siguiente relación

$$\int_0^\infty \rho^3 \left(\frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 d\rho = -4 \int_0^\infty \rho^3 V_d(\phi) d\rho \quad (6.52)$$

Es fácil ver que al sustituir 6.52 en el exponente de decaimiento obtenemos

$$B = \frac{\pi^2}{2} \int_0^\infty \left(\frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 \rho^3 d\rho > 0 \quad (6.53)$$

con lo que corroboramos que el signo de B es positivo, tal como corresponde a un coeficiente de decaimiento. Las ecuaciones 6.52 y 6.53 fueron obtenidas previamente por Weinberg utilizando el criterio de Derrick basado en la invarianza de la acción ante un reescalamiento.

En el caso $\alpha = -3$ tenemos que $F_{-3} = V_d(v_2(1-\Delta))$ por lo que de 6.46 se sigue la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \int_0^\infty -\frac{3}{\rho} \left(\frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 d\rho &= V_d(v_2[1-\Delta]) \\ &< 0 \end{aligned} \quad (6.54)$$

La ecuación es interesante porque nos dice algo que intuitivamente ya sabíamos, el término derecho corresponde a la disminución de la energía cuando el campo cae del falso vacío a un valor cercano al vacío verdadero. La disminución de la energía coincide exactamente con la “perdida de energía” debido a la fricción en la ecuación 6.33.

La forma diferencial del resultado anterior puede obtenerse multiplicando la ecuación 6.33 por un factor $\dot{\phi}$ en ambos lados, para así obtener la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 - V_d(\phi) \right) &= -\frac{3}{\rho} \left(\frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 \\ &\leq 0 \end{aligned} \quad (6.55)$$

6.3. La aproximación de la Burbuja

En esta y en la próxima sección analizaremos las soluciones a la ecuación 6.33 que satisfacen las condiciones de frontera 6.34 y 6.35. En acuerdo con el argumento presentado por (Coleman, 1977b) dichas soluciones deben existir si el potencial es continuo y tiene dos mínimos no degenerados. Consideremos la analogía mecánica mencionada anteriormente y el potencial invertido mostrado en la figura 6.3. Para una solución dada, el movimiento de la “partícula” equivalente cumplirá la condición inicial $\phi(0) = \phi_i$, donde $\phi_F < \phi_i < \phi_V$ y el valor de ϕ_i se determina autoconsistentemente. Supongamos dos casos para la condición inicial: (a) un valor de ϕ_i muy cercano al vacío verdadero ϕ_V . Al ser este un punto cercano al mínimo de potencial se tendrá que la partícula permanecerá estacionaria por un largo “tiempo” ρ , de tal manera que empezará a moverse para un valor grande de ρ , lo cual da lugar a un coeficiente de fricción despreciable. Pero al despreciar la fricción como la partícula parte de un punto donde el valor del potencial es mayor que el del falso vacío, tendremos que es imposible que se cumpla la condición de frontera 6.34 que requiere que la partícula se detenga al llegar al falso vacío y por lo tanto pasará de largo. (b) Por otro lado si la partícula inicia su movimiento a la izquierda de ϕ_u , es claro que es imposible que alcance el punto de falso vacío ϕ_F y no se podrá satisfacer la condición de frontera 6.34. Por continuidad concluimos que debe existir un punto intermedio ϕ_o , para el cual las condiciones 6.34 y 6.35 se satisfacen simultáneamente y por lo tanto la solución a la ecuación 6.33 debe existir.

En general no es posible obtener soluciones analíticas de la ecuación diferencial 6.33 sin embargo existen una aproximación que permite obtener soluciones analíticas para el coeficiente de decaimiento B.

Esto sucede cuando el campo $\phi(\rho)$ permanece casi constante y cercano al vacío verdadero dentro de una región $0 < \rho < R$, la cual corresponde al interior de la burbuja. Posteriormente el campo decae al falso vacío dentro de la pared de la burbuja de ancho $\Delta w \sim f/m_{V_2}$, donde m_{V_2} es la masa del campo escalar y f es un factor numérico a estimar. Finalmente en el exterior de la burbuja el campo permanece en la configuración de falso vacío.

De acuerdo a la descripción anterior, en la aproximación de la Burbuja la acción Euclidiana S_E (Que hemos demostrado es equivalente al exponente B de decaimiento) puede descomponerse como la suma de tres contribuciones como sigue

$$S_E = S_{\rho < R} + S_{\rho > R} + S_{\rho \approx R} \quad (6.56)$$

Dentro de la burbuja el campo permanece constante y cercano al punto inicial ϕ_o por lo que en el intervalo $\rho < R$ podemos despreciar las derivadas del campo y considerar el potencial constante, con lo que podemos escribir la acción como sigue

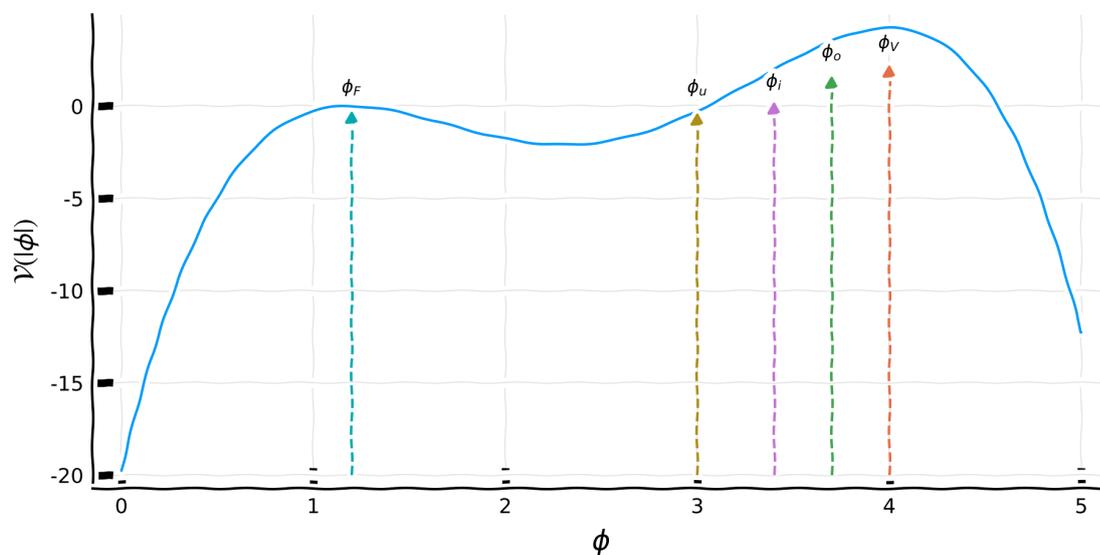


Figura 6.3: Analogía clásica del tunelaje en teoría de campos. Una partícula sometida a un potencial $-V(\phi)$ y una fricción proporcional a ρ^{-1} . Si la partícula parte de ϕ_u esta comienza a moverse perdiendo energía por la fricción y no alcanzará la cima en ϕ_F . Si la partícula parte de un punto ϕ_o muy cerca del vacío verdadero esta permanece mucho tiempo cerca de ϕ_V y cuando comienza a moverse la fricción es despreciable por lo que la energía se conserva casi por completo provocando que se exceda y no alcance el reposo en ϕ_F si no que continua su camino. Existe un punto entre ϕ_u y ϕ_o tal que la partícula no se excede ni se queda corta por lo que alcanza el reposo en la cima del potencial en ϕ_F

$$\begin{aligned}
 S_{\rho < R} &= 2\pi^2 \int_0^R \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 + V_d(\phi) \right) \rho^3 d\rho \\
 &\approx 2\pi^2 \int_0^R (V_d(\phi_V)) \rho^3 d\rho \\
 &= -\Delta V \frac{\pi^2}{2} R^4
 \end{aligned} \tag{6.57}$$

Donde $\Delta V = -V_d(\phi_V)$. En la ecuación anterior supusimos que el punto inicial ϕ_i se encuentra cerca del vacío verdadero ϕ_V , siendo éste un mínimo del potencial se justifica que la configuración del campo permanezca constante. El resultado anterior representa el decremento de la energía de volumen de la burbuja (4-esfera), debido a que en su interior encierra una región de vacío verdadero.

Considerando ahora la región de la pared en donde hay una transición del vacío verdadero al vacío falso. Si suponemos que el radio R de la Burbuja es muy grande comparado con el ancho Δw de la pared ρ puede considerarse constante y con valor R . Entonces tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
 S_{\rho \approx R} &\approx 2\pi^2 R^3 \int_R^{R+\xi} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 + V_d(\phi) \right) d\rho \\
 &= 2\pi^2 R^3 \sigma
 \end{aligned} \tag{6.58}$$

En la ecuación anterior el ancho de la pared es proporcional a ξ la longitud característica de decaimiento de la configuración. La longitud característica depende del potencial $V(\phi)$ y es inversamente proporcional a la masa del campo escalar $\xi \propto m_{V_2}^{-1}$ con $m_{V_2} = \sqrt{\lambda(\Delta v)^2 + \delta}$. La acción en esta región es proporcional a la superficie de la burbuja con el término σ representando una tensión superficial.

En la región $\rho > R$ el campo permanece en el falso vacío por lo que no contribuye la acción. Así encontramos la siguiente expresión para la acción

$$S_E = 2\pi^2 R^3 \sigma - \epsilon \frac{\pi^2}{2} R^4 \tag{6.59}$$

Finalmente podemos obtener el radio R variando la acción respecto de R y pidiendo que sea un punto estacionario de la misma.

$$\frac{dS}{dR} = 6\pi^2 R^2 \sigma - 2\Delta V \pi^2 R^3 = 0 \tag{6.60}$$

Resolviendo para R se obtiene el siguiente valor del radio y de la acción (Coleman, 1977b).

$$R = \frac{3\sigma}{\Delta V} \quad (6.61)$$

$$S_E = \frac{27\pi^2\sigma^4}{2\Delta V^3} \quad (6.62)$$

la ecuación 6.61 y la condición de validez de la aproximación de la burbuja $R \gg \Delta w$ implica que la diferencia entre los vacíos ΔV es pequeña de acuerdo a la condición $m_{V_2} \gg \Delta V$.

Para determinar R y S_E requerimos evaluar explícitamente la tensión superficial sigma y la diferencia delta V del potencial entre el interior y el exterior de la burbuja. Consideremos el caso específico del potencial 3.2 estudiado en la sección 2.

$$\mathcal{V}(\phi) = \lambda[(|\phi| - v_1)^2 + \delta][|\phi| - v_2]^2 \quad (6.63)$$

Suponiendo que $\lambda > 0$, identificamos el vacío verdadero $\phi_V = V_2$ y el falso vacío $\phi_F = V_1$

De acuerdo a 6.57 $\Delta V = -V_d(\phi_i) = V(\phi_i) - V(\phi_F)$, lo cual requiere conocer ϕ_i , que se obtiene autoconsistentemente al resolver numéricamente la Ec.6.33. Sin embargo cuando la diferencia entre los dos vacíos es pequeña, podemos identificar ϕ_i con el vacío verdadero ϕ_V y tendremos que ΔV queda explícitamente determinado como

$$\Delta V = -V_d(\phi_V) = V(\phi_V) - V(\phi_F) \quad (6.64)$$

Para referencia posterior, consideremos en detalle las expresiones para delta pequeño, $\delta \ll (\Delta v)^2$, donde delta $\Delta v = v_2 - v_1$. La expresión para el falso vacío se aproxima como

$$\begin{aligned} \phi_F &= \frac{1}{4} \left[3v_1 + v_2 - \sqrt{(\Delta v)^2 - 8\delta} \right] \\ &\approx v_1 + \frac{\delta}{\Delta v} \end{aligned} \quad (6.65)$$

sustituyendo obtenemos el siguiente valor para ΔV

$$\Delta V = \lambda \left[\delta(\Delta v)^2 - \delta^2 + \mathcal{O}(\delta^3) \right] \quad (6.66)$$

Para evaluar la tensión superficial σ Eq.6.58 utilizaremos las soluciones de kink obtenidas en el capítulo 4.

Si el radio R es suficientemente grande el término de fricción en la ecuación 6.33 será despreciable cuando $\rho \approx R$ y 6.33 se reducirá a una ecuación unidimensional idéntica la estudiada en el capítulo 4. Por lo cual podemos utilizar la solución 4.30, desplazando el origen al centro de la pared R , para proponer el siguiente ansatz A1 para el campo en la región de la pared

$$\phi(\rho - R) = \frac{2(-v_1^2 + v_2v_1 - \delta)e^{A(-\sqrt{2}(\rho-R)+I)} + v_2e^{2A(-\sqrt{2}(\rho-R)+I)} - v_2\delta}{2\Delta v e^{A(-\sqrt{2}(\rho-R)+I)} + e^{2A(-\sqrt{2}(\rho-R)+I)} - \delta} \quad (A1)$$

donde hemos definido las siguientes constantes

$$A = \sqrt{\lambda}\sqrt{(\Delta v)^2 + \delta} \quad (6.67)$$

$$I = \frac{\log\left(\frac{(A\sqrt{(v_1-v_2)^2+d+v_1^2+d-v_1v_2+\Delta vv_2})}{v_2-V_1}\right)}{A} \quad (6.68)$$

La expresión A1 es válida cerca del radio de la burbuja, en un intervalo aproximado $(R - \Delta w/2, R + \Delta w/2)$.

Cuando el término $\rho^{-1}\frac{d\phi}{d\rho}$ es despreciable la energía superficial está dada como sigue

$$\sigma = \int_{\phi_F}^{\phi_V} \sqrt{2(V_d(\phi))} \quad (6.69)$$

Como vimos en el caso del kink, esta expresión se puede evaluar explícitamente Ec. (4.40). Tomando en cuenta que en el caso del bounce el potencial cambia de ϕ_F a ϕ_V al cruzar la pared, tenemos que sigma está dado por

$$\begin{aligned} \sigma = & \frac{1}{3\sqrt{2}} \left[\sqrt{(v_1 - V_2)^2 + \delta}(2\delta - (v_1 - V_2)(v_1 - 3v_2 + 2V_2)) \right. \\ & + 3\delta(\Delta v) \tanh^{-1} \left(\frac{v_1 - V_2}{\sqrt{(v_1 - V_2)^2 + \delta}} \right) + ((\Delta v)^2 - 2\delta) \sqrt{(\Delta v)^2 + \delta} \\ & \left. - 3\delta\Delta v \tanh^{-1} \left(\frac{-\Delta v}{\sqrt{(\Delta v)^2 + \delta}} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.70)$$

Con 6.70 podemos calcular el radio R 6.61 y el valor del exponente de decaimiento B 6.62.

6. UN FALSO VACÍO EN LA TEORÍA

Una segunda aproximación (A2), con expresiones sencillas se obtiene si consideramos el límite $\delta \lll 1$. En este caso la diferencia de potencial entre el falso y verdadero vacío ΔV se reduce a (Ec. 6.66) $\Delta V = \delta\lambda(\Delta v)^2$. En cuanto a la configuración del campo ϕ , recordemos que en el límite $\delta = 0$, existen soluciones de kink (Ec. 4.19), que interpolan entre los mínimos del potencial v_1 y v_2 . Mientras que en el caso del bounce cerca de la pared tenemos una configuración unidimensional que interpola entre v_2 y V_1 ; lo cual sugiere adaptar la expresión en (4.19) al caso actual, localizando el centro del kink en la posición de la pared $\rho = R$ y reemplazando v_1 por V_1 , con lo cual proponemos el ansatz

$$\phi_A(\rho) = \frac{V_1 + v_2 e^{-\sqrt{2}m_{V_2}(r-R)}}{1 + e^{-\sqrt{2}m_{V_2}(r-R)}} \quad (\text{A2})$$

finalmente para obtener el valor de R debemos calcular σ por lo que es conveniente calcular la derivada del campo.

$$\left(\frac{d\phi}{d\rho}\right)^2 = \frac{2(V_1 + v_2)^2 m_{V_2}^2 e^{-2\sqrt{2}m_{V_2}(r-R)}}{(1 + e^{-\sqrt{2}m_{V_2}(r-R)})^4} \quad (6.71)$$

La expresión anterior incorpora una dependencia en delta a través del valor del falso vacío V_2 Ec.6.65 y del radio de la burbuja R . Utilizando (6.71) podemos calcular explícitamente la tensión superficial

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_0^\infty \left(\frac{d\phi}{d\rho}\right)^2 d\rho \\ &= \frac{(V_1 - v_2)^2 m_{V_2}}{3\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (6.72)$$

Dado que $\sigma \approx \frac{(V_1 - v_2)^2}{\Delta w}$ la Ec.6.72 nos permite obtener un estimado del ancho de la pared como sigue

$$\Delta w \approx \frac{3\sqrt{2}}{m_{V_2}} \quad (6.73)$$

A partir de (6.72), obtenemos expresiones explícitas para el radio de la burbuja y el coeficiente de tunelaje B en el límite $\delta \lll 1$

$$R = \frac{(V_1 - v_2)^2 m_{V_2}}{\sqrt{2}\lambda\delta(\Delta v)^2} \quad (6.74)$$

$$B = \frac{\pi^2(V_1 - v_2)^8 m_{V_2}^4}{24\lambda^3\delta^3(\Delta v)^6} \quad (6.75)$$

Las Ecs.6.74 y 6.75 muestran que conforme delta disminuye el radio de la burbuja y B se incrementan, disminuyendo con ello probabilidad de tunelaje del campo.

6.4. Soluciones numéricas

Para obtener soluciones a la ecuación diferencial 6.33 se utilizó el programa AnyBubble (Masoumi et al., 2017) en mathematica. En adición se consideró el tunelaje entre los mínimos del potencial que se encuentran en $\phi > 0$ pues por simetría el tunelaje en el otro eje es análogo.

La soluciones numéricas de la ecuación 6.33 se muestran en la figura 6.4 para diferentes valores de δ . Conforme el parámetro δ se hace más pequeño la diferencia entre el vacío real y el vacío falso se hace muy pequeña y observamos que crece el radio de la burbuja, por otra parte conforme δ se hace grande la diferencia entre el vacío real y el falso crece haciendo que el radio de la burbuja sea más pequeño y el valor del vacío en el interior de la misma se aleja del valor del vacío verdadero. Lo anterior concuerda con el comportamiento asintótico esperado de las soluciones.

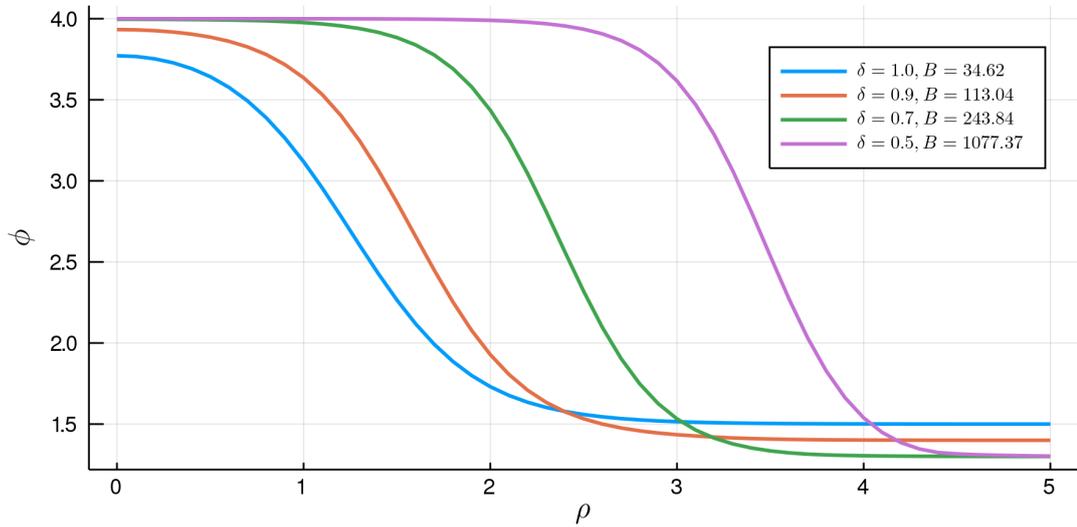


Figura 6.4: Soluciones de Bounce del potencial 6.63 para $v_1 = 1.0, v_2 = 4.0$ y diferentes valores de δ . El radio de la burbuja aumenta cuando el δ disminuye. Una disminución en δ corresponde a una disminución en la diferencia entre los dos vacíos ϵ .

La figura 6.5 nos muestra la solución numérica para $\delta = 0.1$ y la solución analítica de pared delgada A1. Cerca del la pared de la burbuja en la zona de decaimiento del

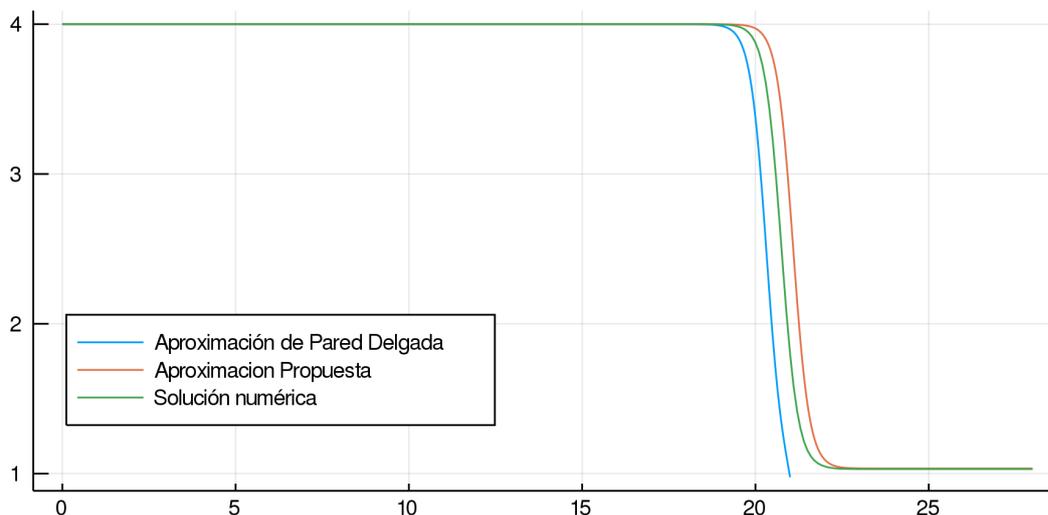


Figura 6.5: Comparación entre la solución numérica, la solución de pared delgada y la configuración propuesta ϕ_A usando los parámetros $\delta = 0.1$, $v_1 = 1$, $v_2 = 4$.

bounce se puede apreciar que las dos soluciones tienen un comportamiento de decaimiento exponencial. El desplazamiento de la gráfica se puede explicar como una sobre estimación del radio de la burbuja ya que se hizo una segunda aproximación $V(\phi_+) \approx 0$ para obtener la solución analítica.

El error en el radio de la pared numérica puede reducirse si no se hace la aproximación analítica, en la figura 6.6 se comparan las predicciones del radio de la burbuja para la solución numérica (R_E) y la aproximación de pared delgada (R_D). El ajuste lineal nos da la siguiente relación de dispersión $R_E = -0.563791 + 0.980729R_D$, sin embargo este ajuste no puede usarse para valores arbitrarios del parámetro δ pues la figura 6.7 nos muestra que el error relativo en la estimación del radio de la burbuja aumenta conforme el valor de δ crece lo cual es de esperarse ya que el crecimiento de δ aumenta la diferencia entre el vacío verdadero y el falso alejándonos del régimen de validez de la aproximación de pared delgada.

La dependencia del exponente de decaimiento como función de δ se muestra en la figura 6.8, conforme aumenta la diferencia entre los vacíos falso verdadero disminuye el valor del exponente de decaimiento. Lo anterior quiere decir que la probabilidad de decaimiento del sistema es mayor cuando aumenta la diferencia entre los vacíos.

La solución de Bounce determina el exponente de decaimiento del vacío, y no solo eso, sino que determina el camino que minimiza el exponente de decaimiento del tunelaje y la configuración de nucleamiento más probable, es decir, el punto de tunelaje.

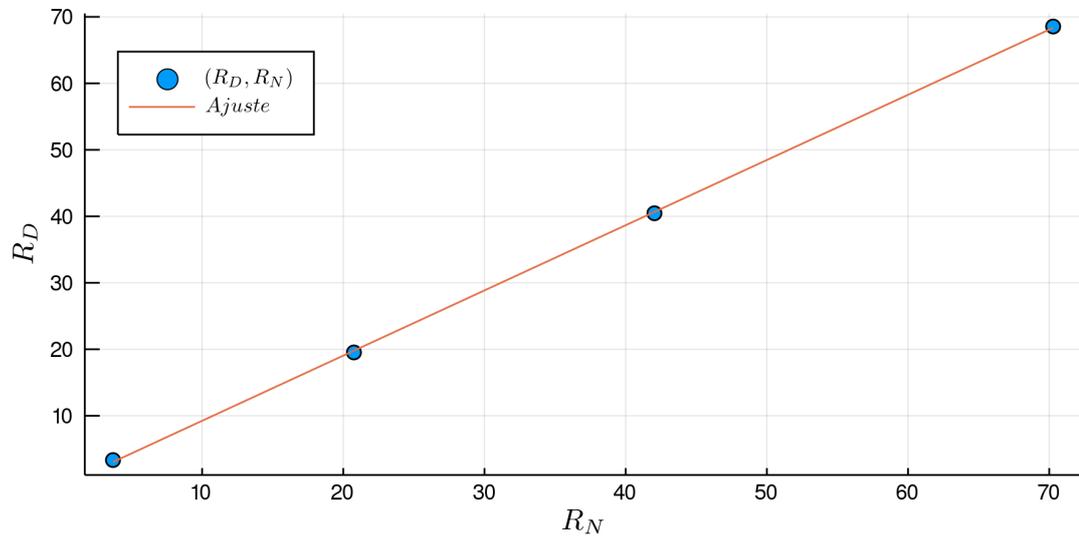


Figura 6.6: Comparación entre los valores de los radios de la burbuja que predice la aproximación de pared delgada y los radios de la solución numérica exacta. R_D es el radio de la aproximación de pared delgada mientras que R_N es el radio numérico.

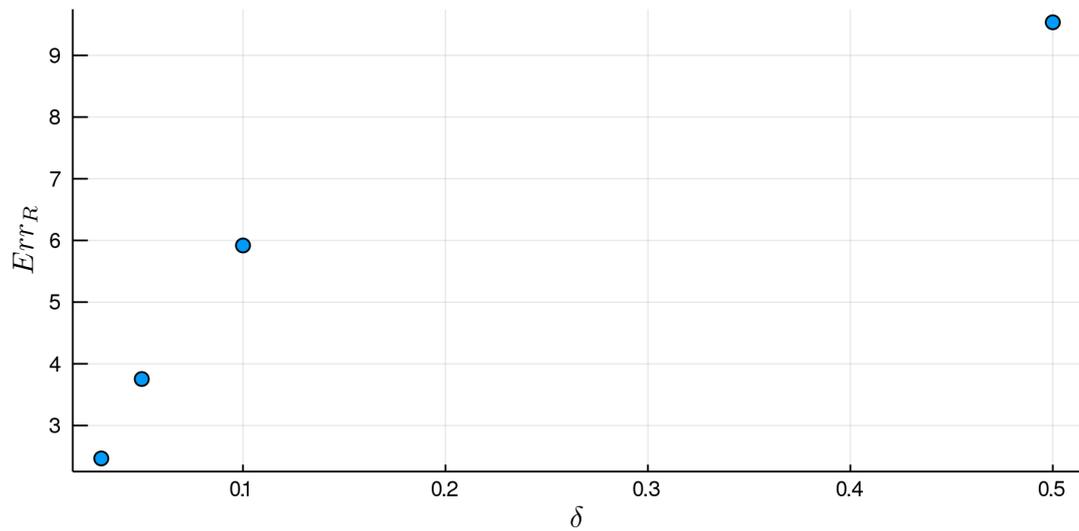


Figura 6.7: Error relativo de la predicción de la aproximación de pared delgada del radio y el radio numérico como función del parámetro δ

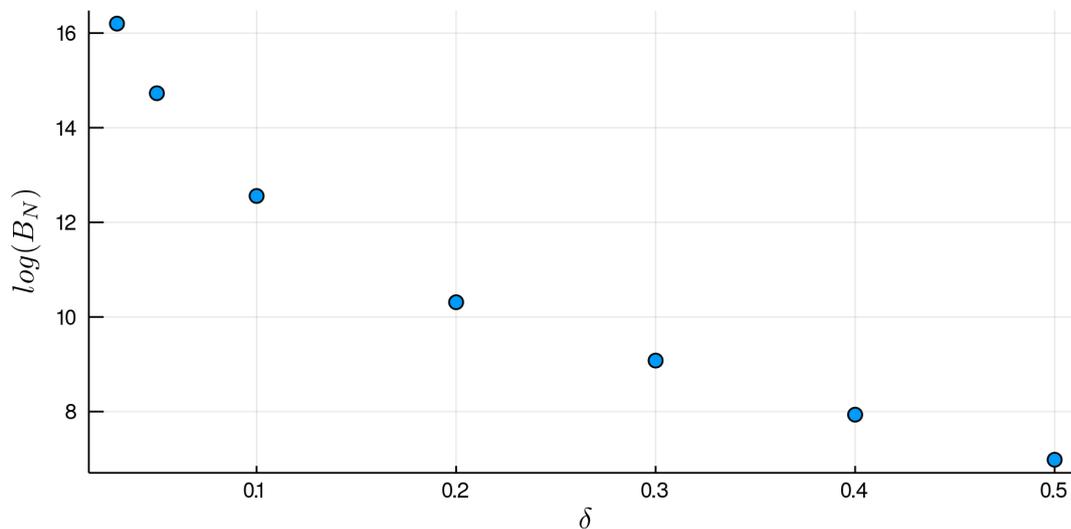


Figura 6.8: Logaritmo del Exponente de decaimiento B_N como función del parámetro δ . El orden de magnitud de B_N disminuye conforme aumenta el valor de δ . En esta gráfica B_N es el exponente de decaimiento numérico.

6.5. La evolución de la burbuja

Otra característica del Bounce $\phi(\rho)$ es que no solo nos da información de la burbuja cuando esta emerge adquiriendo la configuración más probable del campo al tiempo $\tau = t = 0$ en el espacio euclidiano, sino que determina la evolución de la burbuja en el espacio de Minkowski, lo anterior se debe a que una vez que la burbuja emerge la evolución del campo está dada por la ecuación de campo clásica 6.76, si comparamos las ecuaciones 6.76 y 6.23 notamos que haciendo la sustitución $it = \tau$ las soluciones $\phi(\rho)$ nos dicen como evoluciona la burbuja en el espacio de Minkowski.

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \phi = \frac{dV}{d\phi} \quad (6.76)$$

De manera más formal lo anterior significa que 6.76 es la continuación analítica de 6.23 por lo que tenemos podemos hacer la siguiente identificación.

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi(\rho) = \phi(|\vec{x}|^2 - t^2) \quad (6.77)$$

Ahora que sabemos que $\phi(\rho)$ nos proporciona información de la evolución de la burbuja podemos usar la aproximación de pared delgada para estudiar algunas características de la evolución de la burbuja. Recordando que pared de la burbuja se encuentra en $\rho \approx R$ podemos calcular la evolución del radio de la burbuja como sigue

$$\begin{aligned} r(t) &= |\vec{x}| \\ &= \sqrt{R^2 + t^2} \end{aligned} \quad (6.78)$$

donde R está determinado por la forma del potencial de acuerdo a 6.61. Es inmediato calcular la velocidad con la que se expande la burbuja como sigue

$$\begin{aligned} v &= \frac{dr}{dt} \\ &= \frac{t}{r} \\ &= \sqrt{1 - R^2/r^2} \end{aligned} \quad (6.79)$$

La ecuación 6.79 nos dice que una vez que la burbuja comienza a crecer su velocidad de expansión se aproxima a la velocidad de la luz. Por otra parte sabemos que la pared en reposo aporta una energía $E_p = 4\pi r^2 \sigma$ por lo que podemos calcular la energía de la pared en movimiento como sigue

$$\begin{aligned} E_p &= 4\pi r^2 \gamma \sigma \\ &= 4\pi r^2 \frac{\sigma}{\sqrt{1 - v^2}} \\ &= 4\pi r^3 \frac{\sigma}{\sqrt{r^2 - t^2}} \\ &= 4\pi r^3 \frac{\sigma}{R} \\ &= \frac{4\pi}{3} r^3 \Delta V \end{aligned} \quad (6.80)$$

La ecuación 6.80 es consecuencia de usar 6.61 y 6.79. Físicamente nos dice que la energía liberada al convertir el vacío falso en verdadero en el volumen de la burbuja es usada por el sistema para acelerar el crecimiento de la pared de la burbuja. Como consecuencia tenemos que la burbuja convierte el vacío falso en verdadero sin dejar energía disponible en su interior para excitar el campo dentro del volumen y crear partículas. (Weinberg, 2012)

6. UN FALSO VACÍO EN LA TEORÍA

Por último podemos señalar que una vez trasladado el Bounce del espacio Euclidiano al espacio de Minkowski, la invarianza $O(4)$ ante rotaciones en el espacio de cuatro dimensiones de la solución se convierte en una invarianza $O(3,1)$ ante transformaciones de Lorentz, por lo tanto el crecimiento de la burbuja se ve igual para todos los observadores inerciales. (Coleman, 1977a)

Conclusiones

Usando el potencial con dos familias continuas de estados base 3.2 se demostró que al ocurrir el rompimiento espontáneo de las simetrías del sistema en el caso de campo escalar invariante ante transformaciones de fase globales se obtiene bosones de Goldstone y una partícula masiva cuya masa depende de la familia de estados base del potencial en que se rompe la simetría del sistema. También se mostró que a primer orden las ecuaciones de movimiento de los campos tienen como solución ondas planas.

Se encontró que si se promueve la teoría con invarianza de fase global a una teoría de norma con invarianza ante transformaciones de fase locales, luego del rompimiento espontáneo de la simetría de norma se produce una partícula escalar masiva y el campo de norma adquiere masa, además las masas nuevamente dependen de la familia de estados base del potencial en donde se rompe la simetría.

Se encontraron soluciones estáticas de energía finita de las ecuaciones clásicas de movimiento para el potencial 3.2 en una dimensión con un campo escalar real. En el caso en el que $\delta = 0$, es decir, cuando los mínimos del potencial tienen la misma altura se mostró que hay seis soluciones solitónicas. Las soluciones solitónicas encontradas vienen en pares soliton-antisoliton definidos en los intervalos $\pm(v_1, v_2)$ y $(-v_1, v_1)$. En adición se encontró que la masa de los solitones en intervalos $\pm(v_1, v_2)$ está dada por 4.18 mientras que en el intervalo $(-v_1, v_1)$ se tiene una masa dada por 4.25. Se calculó la carga topológica de los solitones y se encontró que en encontrando que en los intervalos $\pm(v_1, v_2)$ se tiene una carga $\pm(v_2 - v_1)$ mientras que en el intervalo $(-v_1, v_1)$ se tiene una carga $\pm 2v_1$. Finalmente se consideró el caso $\delta \neq 0$, es decir, cuando los mínimos del potencial tienen diferente altura. Se encontraron dos soluciones solitónicas en el intervalo $(-v_2, v_2)$, se obtuvo la carga topológica de los solitones así como una expresión analítica para la masa de los mismos. Se mostró que cuando δ es muy pequeño la solución solitónica adquiere la forma de los tres solitones encontrados en el caso $\delta = 0$ y además de que la carga total del soliton cuando $\delta \neq 0$ es igual a la suma de las cargas de los tres solitones del caso $\delta = 0$ mientras que la masa total del soliton con $\delta \neq 0$ es aproximadamente la masa de los tres solitones individuales del caso $\delta = 0$

7. CONCLUSIONES

como se muestra en 4.36.

Se obtuvieron soluciones estáticas de energía finita para una teoría de norma como 5.1 en dos dimensiones con el potencial 3.2, usando un ansatz con simetría polar consistente con la condición de que el campo en infinito tiene sus valores en un círculo de radio v_2 se mostró que las soluciones buscadas están dadas por dos ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas no lineales. Dada la complejidad de las ecuaciones las soluciones se obtuvieron de forma numérica. Las soluciones encontradas tienen el mismo comportamiento que los vórtices de Abrikosov-Nielsen-Olesen cuando el parámetro de acoplamiento λ es pequeño, mientras que cuando la constante de acoplamiento no es pequeña la parte radial de la solución $f(r)$ muestra el efecto de los dos mínimos del potencial tal como se observa en 5.7, este efecto es observable de igual manera en la densidad de energía del vórtice como se muestra en 5.3. También se observó el comportamiento esperado del campo magnético dada la cuantización del flujo magnético como se muestra en 5.2. Adicionalmente se mostró que el parámetro δ no es tan determinante en la forma de los perfiles radiales $f(r)$ como se observa en ???. Finalmente la expansión del perfil $f(r)$ cerca del origen parece presentar una divergencia para $n = 2$ sin embargo esto no es observado al obtener las soluciones numéricas, esta discrepancia puede entenderse como una manifestación de la forma del potencial 3.2 en el origen donde la derivada del potencial no está bien definida.

Por último se desarrolló la teoría del exponente de decaimiento B del tunelaje entre los dos mínimos del potencial 3.2 que tienen diferente altura. Se mostró que la teoría de tunelaje cuántico clásica con algunas consideraciones se puede usar para calcular el tunelaje en teoría de campos cuando se usa el espacio euclidiano en cuatro dimensiones. En teoría de campos el problema de encontrar el exponente de decaimiento se traslada a encontrar la configuración más probable por la que el campo realiza el tunelaje además de la configuración de escape resolviendo la ecuación diferencial 6.23 con las condiciones de frontera 6.24. Usando el resultado de Coleman en (Coleman et al., 1978) se propuso un ansatz $O(4)$ invariante que permitió reescribir las ecuaciones de movimiento de la configuración como 6.33, la forma de la ecuación es en analogía clásica la de una partícula sometida a un potencial $-V$ y una fricción cuya influencia es inversamente proporcional al tiempo. Se obtuvieron soluciones numéricas del exponente de decaimiento y las configuraciones en donde se observó que conforme la diferencia en altura entre los mínimos del potencial crece el vacío formado dentro de las burbujas se aleja del vacío verdadero y el radio de la burbuja decrece, mientras que para valores muy pequeños de la diferencia entre los mínimos del potencial el radio de la burbuja crece y el vacío dentro de la misma tiende al vacío verdadero. Se mostró que la aproximación de pared delgada es buena cuando la diferencia en altura entre los dos mínimos del potencial es suficientemente pequeña. Finalmente se mostró que la solución $O(4)$ invariante nos da información sobre el desarrollo de la burbuja luego de su materialización, además de que la energía liberada por el sistema luego de transformar vacío falso en verdadero se gasta en acelerar el crecimiento de la burbuja.

La geometría de la derivada covariante

En la sección anterior vimos que la derivada covariante sirve para introducir interacciones en una teoría, pero también surge de manera natural cuando tratamos de construir una teoría invariante ante transformaciones locales. En esta sección tomaremos el segundo punto de vista y asumiremos que tenemos una teoría invariante ante transformaciones de fase locales, y veremos que esto nos permite darle una muy interesante interpretación geométrica a la derivada covariante.

Como la fase de ϕ es inobservable podemos elegir distintas fases en diferentes regiones del espacio sin ninguna consecuencia. Es así que cantidades como $\phi(x) - \phi(y)$ pueden no estar bien definidas. En una teoría local debemos ser capaces de hacer comparaciones entre campos en diferentes regiones del espacio ya que las derivadas $\partial_\mu \phi$ involucran precisamente comparaciones entre campos separados por una distancia infinitesimal. Veamos que si comparamos dos campos en dos puntos x^μ y y^μ tenemos lo siguiente

$$\phi(y) - \phi(x) \rightarrow e^{i\alpha(y)}\phi(y) - e^{i\alpha(x)}\phi(x) \quad (\text{A.1})$$

Para poder comparar los campos podemos definir un nuevo campo $W(x, y)$ que dependa de los puntos x^μ y y^μ y que transforme como

$$W(x, y) \rightarrow e^{i\alpha(x)}W(x, y)e^{-i\alpha(y)} \quad (\text{A.2})$$

Si multiplicamos al campo $\phi(y)$ por $W(x, y)$ cuando realicemos la transformación de fase local, la fase final dependerá sólo del punto x^μ y podremos realizar comparaciones entre campos como sigue

$$W(x, y)\phi(y) - \phi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}W(x, y)e^{-i\alpha(y)}e^{i\alpha(y)}\phi(y) - e^{i\alpha(x)}\phi(x) \quad (\text{A.3})$$

$$= e^{i\alpha(x)}[W(x, y)\phi(y) - \phi(x)] \quad (\text{A.4})$$

La diferencia $W(x, y)\phi(y) - \phi(x)$ está bien definida ya que solo depende en la convención de fase adoptada en un punto del espacio.

También es posible definir una derivada tomando $y^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$ de la siguiente manera

$$D_\mu \phi(x) \equiv \lim_{\delta x^\mu \rightarrow 0} \frac{W(x, x^\mu + \delta x^\mu) \phi(x^\mu + \delta x^\mu) - \phi(x)}{\delta x^\mu} \quad (\text{A.5})$$

La derivada A.5 cumple con la propiedad 2.47, es decir

$$D'_\mu \phi = e^{i\alpha(x)} D_\mu \phi \quad (\text{A.6})$$

Una propiedad del campo W que buscamos es que $W(x, x) = 1$ por lo tanto para δx^μ debemos poder expandir como sigue

$$W(x, x + \delta) = 1 - ie\delta x^\mu A_\mu(x) + \mathcal{O}(\delta x^2) \quad (\text{A.7})$$

Sustituyendo A.7 en la transformación A.2 obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} W(x, x + \delta x^\mu) &\rightarrow e^{i\alpha(x)} W(x, x + \delta x^\mu) e^{-i\alpha(x + \delta x^\mu)} \\ &= e^{i\alpha(x)} [1 - ie\delta x^\mu A_\mu(x)] e^{-i\alpha(x + \delta x^\mu)} \\ &= e^{i\alpha(x)} [1 - ie\delta x^\mu A_\mu(x)] e^{-i\alpha(x)} e^{-i\delta x^\mu \partial_\mu \alpha} \\ &= e^{i\alpha(x)} [1 - ie\delta x^\mu A_\mu(x)] e^{-i\alpha(x)} [1 - i\delta x^\mu \partial_\mu \alpha] \\ &= 1 - ie\delta x^\mu \left(A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha \right) + \mathcal{O}(\delta x^2) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

La ecuación A.8 nos dice que el campo de norma transforma como

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha \quad (\text{A.9})$$

con α una función arbitraria de x^μ y e una constante real arbitraria. La transformación de los campos de norma surgió de manera natural cuando tratamos de comparar campos en una teoría con invarianza de fase local.

Usando la ecuación A.8 en la definición de la derivada A.5 obtenemos $D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - ieA_\mu \phi$, esta es precisamente la derivada covariante. En este sentido los campos de norma se introducen como una conexión que nos permite comparar valores del campo en diferentes puntos, tal como las conexiones de la relatividad general permiten comparar campos en diferentes sistemas de coordenadas locales.

Es posible escribir $W(x, y)$ de forma cerrada como sigue

$$W_C(x, y) = \exp \left\{ ie \int_x^y A_\mu(z) dz^\mu \right\} \quad (\text{A.10})$$

la funcional de A_μ A.10 es llamada Línea de Wilson. La línea de Wilson es una integral de línea a lo largo de un camino C entre los puntos x^μ y y^μ , esto quiere decir que

$z^\mu(\lambda)$ es un camino parametrizado por λ con $0 \leq \lambda \leq 1$ tal que $z^\mu(0) = x^\mu$ y $z^\mu(1) = y^\mu$.

Un caso importante de las líneas de Wilson es cuando tomamos $x^\mu = y^\mu$ pues la integral de línea A.10 se convierte en una integral de contorno a la que comunmente se le llama Lazo de Wilson.

$$W_L(x, y) = \exp \left\{ ie \oint_C A_\mu dx^\mu \right\} \quad (\text{A.11})$$

Los lazos de Wilson tienen la característica de ser invariantes de norma, lo cual puede ser visto a partir de la regla de transformación que siguen las funcionales $W(x, x)$ ante una transformación de norma. Si aplicamos el teorema de Stokes (Nakahara, 2003, pp. 217-218) a la integral de contorno podemos escribir el lazo de Wilson como sigue

$$W_L(x, y) = \exp \left\{ \frac{ie}{2} \int_\Sigma (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu \right\} \quad (\text{A.12})$$

$$= \exp \left\{ \frac{ie}{2} \int_\Sigma (F_{\mu\nu}) dx^\mu \wedge dx^\nu \right\} \quad (\text{A.13})$$

Σ es la superficie delimitada por el contorno C , podemos darnos cuenta que el lazo de Wilson depende únicamente del tensor invariante de norma $F_{\mu\nu}$.

Si aplicamos el conmutador de la derivada covariante a un campo cualquiera obtenemos la siguiente relación interesante

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu]\phi(x) &= ([\partial_\mu, \partial_\nu] - ie[\partial_\mu, A_\nu] + ie[\partial_\nu, A_\mu] - e^2[A_\mu, A_\nu])\phi(x) \\ &= ([\partial_\mu, \partial_\nu] - ie[\partial_\mu, A_\nu] + ie[\partial_\nu, A_\mu])\phi(x) \quad (\text{Conmutatividad de } A_\mu) \\ &= -ieF_{\mu\nu}\phi(x) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Así podemos definir al tensor de norma de la siguiente manera

$$F_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{e} [D_\mu, D_\nu] \quad (\text{A.15})$$

El tensor A.15 puede interpretarse como la diferencia que obtenes entre comparar campos en la dirección μ y luego en la dirección ν , o comparar campos en la dirección ν y luego en la dirección μ .

Vórtices: Forma de los campos $f(r)$ y $a(r)$ cerca del origen

Consideremos las ecuaciones de vórtice encontradas en el capítulo 5 en su forma adimensional

$$\frac{d^2 f}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{df}{du} - \frac{n^2}{u^2} (1-a)^2 f - \frac{\lambda}{e^2} (f-1)(f-\tilde{V}_1)(f-\tilde{V}_m) = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{d^2 a}{du^2} - \frac{1}{u} \frac{da}{du} + 2f^2(1-a) = 0 \quad (\text{B.2})$$

B.0.1. Expansión de $f(u)$

Notemos que el campo magnético está dado por $B = nev_2^2 \frac{1}{u} \frac{da}{du}$. Lo anterior implica que si hacemos la expansión $a(u) = a_n u^n$ es necesario tener $n \geq 2$. Sustituyendo la expansión de $a(r)$ en B.1 y quedándonos con términos dominantes obtenemos la siguiente ecuación

$$\frac{d^2 f}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{df}{du} - \frac{n^2}{u^2} f - G(0) + (2a_2 n^2 - G'(0))f = 0 \quad (\text{B.3})$$

Donde hemos definido $G(f) = \frac{\lambda}{e^2} (f-1)(f-\tilde{V}_1)(f-\tilde{V}_m)$. También se ha usado el hecho de que $(1 - a_n u^n)^2 \approx 1 - 2a_n u^n$ cerca del origen.

Proponemos el siguiente ansatz para $f(u)$

$$f(u) = f_1 u + u^2 h(u) \quad (\text{B.4})$$

Sustituyendo el ansatz B.4 en la eq. B.3 obtenemos la siguiente ecuación

$$u^2 h'' + 5uh' + (4 - n^2)h + \frac{f_1}{u} (1 - n^2) + u f_1 N^2 - G(0) = 0 \quad (\text{B.5})$$

B. VÓRTICES: FORMA DE LOS CAMPOS $F(R)$ Y $A(R)$ CERCA DEL ORIGEN

Con $N^2 = 2a_2^2 n^2 - G'(0)$ y $h' = dh/du$. Primero buscaremos soluciones con h constante por lo que la eq.B.5 se reduce a la siguiente expresión.

$$(4 - n^2)h + \frac{f_1}{u}(1 - n^2) + uf_1 N^2 - G(0) = 0 \quad (\text{B.6})$$

Cuando $n = 1$ el coeficiente f_1 es arbitrario y se obtiene $h = G(0)/3$. Para $n > 1$ se requiere que $f_1 = 0$ para poder satisfacer la ecuación B.6, es fácil verificar que en este caso se tiene $h = G(0)/(4 - n^2)$ por lo que la ecuación B.6 no puede satisfacerse para $n = 2$.

Para $n = 2$ es necesario considerar h como una función de u obteniendo la siguiente ecuación diferencial para $h(u)$.

$$u^2 h'' + 5u h' + uf_1 N^2 - G(0) = 0 \quad (\text{B.7})$$

La eq.B.7 tiene una solución analítica como sigue

$$h(u) = \frac{c_1 J_2(Nu)}{u^2} + \frac{\pi G(0)}{4N^2 u^2} \left(4Y_2(Nu) - 4J_0(Nu)Y_2(Nu) - 2NuJ_1(Nu)Y_2(Nu) \right. \\ \left. + N^2 u^2 J_2(Nu)G_{21}^3 \left(\frac{Nu}{2}, \frac{1}{2} \middle| \begin{matrix} -3/2, 0 \\ -1, -1, 1, -3/2 \end{matrix} \right) \right) \quad (\text{B.8})$$

Donde J y Y son las funciones de Bessel especiales, mientras que G es la función de Meijer Generalizada. Sin embargo lo importante es que cuando $u \rightarrow 0$ h tiene un valor finito dado por $h(0) = (-G(0) + 2c_1 N^2)/16$.

Expandiendo el campo f como $f(u) = \delta_{n,1} f_1 u + f_2^{(n)} u^2 + \mathcal{O}(u^3)$ cerca del origen $u \lll 1$ los resultados anteriores pueden resumirse de la siguiente manera

$$f_2^{(1)} = \frac{G(0)}{3} \quad n = 1 \quad (\text{B.9})$$

$$f_2^{(2)} = \frac{2c_1 n^2 - G'(0)}{16} \quad n = 2 \quad (\text{B.10})$$

$$f_2^{(n)} = \frac{G(0)}{4 - n^2} \quad n > 2 \quad (\text{B.11})$$

Las constantes c_1 y a_2 son determinadas de manera auto consistente al resolver las ecuaciones de vórtice numéricamente.

B.0.2. Expansión de $a(u)$

Con los resultados anteriores podemos obtener la forma de la expansión del campo $a(u)$ sustituyendo la forma de f cerca del origen en la ecuación B.2 obtenemos lo siguiente

$$a_m m(m - 2)u^{m-2} + 2(f_d^{(n)})^2(1 - a_2 u^2) = 0 \quad (\text{B.12})$$

Donde $f_d^{(n)}$ es el término dominante de f cerca del origen para una vorticidad n . Una inspección de la ecuación B.12 nos permite obtener los siguientes resultados

$$a_4 = \frac{-f_1^2}{4} \quad n = 1, m = 4 \quad (\text{B.13})$$

$$a_6 = \frac{-(f_2^{(n)})^2}{12} \quad n > 1, m = 6 \quad (\text{B.14})$$

Los coeficientes B.13 mostrados en la ecuación anterior corresponden al término dominante en la serie $a_m u^m$ del campo $a(u) = a_2 u^2 + a_m u^m$ cerca del origen.

Tunelaje en el formalismo de la integral de camino Euclidiana

C.1. Parte I: La integral de camino Euclidiana

En 1942 Feynman presentó su tesis “Una nueva formulación de la mecánica cuántica” en donde exponía su método de las integrales de camino motivado por encontrar una analogía entre el principio de mínima acción de la mecánica clásica y el mismo principio en mecánica cuántica. La nueva formulación de Feynman resultó ser útil en diversos problemas en donde el formalismo usual no permitía obtener soluciones. En esta sección se revisa la formulación de la integral de camino Euclidiana.

Consideremos el problema de encontrar la amplitud de transición entre dos estados $|q'\rangle$ y $|q\rangle$ que son eigenestados de un conjunto de variables canónicas hermitianas Q_a , además supongamos que tenemos otro conjunto de variables canónicas P_a de modo que P_a y Q_a cumplen las relaciones de conmutación canónicas y las relaciones de completitud usuales. Lo anterior puede escribirse matemáticamente como sigue

$$\langle q' | \exp\{-HT\} | q \rangle = F(q, q'; T) \quad (\text{C.1})$$

Donde T es una constante positiva. Nuestro objetivo es encontrar el valor de $F(q, q'; T)$, veamos que si $|n\rangle$ es un conjunto de eigenestados del operador Hamiltoniano podemos reescribir la parte izquierda de C.1 como sigue

$$\langle q' | \exp\{-HT\} | q \rangle = \sum_n \langle q' | \exp\{-HT\} | n \rangle \langle n | q \rangle \quad (\text{C.2})$$

Veamos que cuando $T \rightarrow \infty$ la amplitud es dominada por el valor del eigenvalor del hamiltoniano de menor energía, esto es E_0 , por lo que podemos escribir la ecuación C.2

de la siguiente manera

$$\langle q' | \exp\{-HT\} | q \rangle = \exp\{-E_0 T\} \langle q' | 0 \rangle \langle 0 | q \rangle \quad (\text{C.3})$$

De C.3 vemos que el valor de la energía del estado base del sistema está dado por la siguiente expresión

$$E_0 = - \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{\log F(q, q'; T)}{T} \right) \quad (\text{C.4})$$

Para continuar podemos partir el intervalo T en N intervalos tal que en $-T/2$ estemos en q' y en $T/2$ estemos en q , al igual que discretizaremos el espacio por lo que la notación con el subíndice en los operadores Q_a nos es conveniente, pero antes es muy útil definir los siguientes operadores y estados dependientes del tiempo.

Los operadores O evolucionaran de acuerdo a la siguiente transformación

$$O(t) = e^{Ht} O e^{-Ht} \quad (\text{C.5})$$

mientras que los estados $|\alpha\rangle$ evolucionaran de acuerdo a las siguiente transformación

$$|\alpha, t\rangle = e^{Ht} |\alpha\rangle \quad \langle \alpha, t| = \langle \alpha| e^{-Ht} \quad (\text{C.6})$$

Es fácil ver que con estas transformaciones los operadores $Q_a(t)$ aplicados a un estado $|q, t\rangle$ tienen como eigenvalor q_a , de igual manera los estados $|p, t\rangle$ son eigenestados del operador $P_a(t)$ con eigenvalor p_a . Con estas definiciones podemos escribir la amplitud de transición como sigue

$$\langle q', T/2 | q, T/2 \rangle = F(q, q'; T) \quad (\text{C.7})$$

Antes de partir el intervalo T es conveniente calcular el valor de la amplitud en un intervalo arbitrario entre $-T/2$ y $T/2$

$$\langle q', t + dt | q, t \rangle = \langle q', t | \exp\{-Hdt\} | q, t \rangle \quad (\text{C.8})$$

Escribiendo los estados $|q, t\rangle$ en términos de un conjunto completo de eigenestados del operador $P_a(t)$ tendremos lo siguiente

$$\langle q', t + dt | q, t \rangle = \int \left(\prod_a \frac{dp_a}{2\pi} \right) \exp \left\{ i \sum_a p_a (q'_a - q_a) - Hdt \right\} \quad (\text{C.9})$$

Partiendo el intervalo T en $N+1$ subintervalos con espaciado igual a $dt = \frac{T}{N+1}$ podemos escribir C.7 como un producto de integrales sobre las amplitudes de los subintervalos

usando la relación de completitud de los estados $|q, t\rangle$, así obtenemos la siguiente expresión

$$\langle q', T/2 | q, -T/2 \rangle = \int \prod_{k=1}^N (dq_k) \langle q', T/2 | q, t_N \rangle \langle q'_N, t_N | q_{N-1}, t_{N-1} \rangle \cdots \langle q'_1, t_1 | q, -T/2 \rangle \quad (\text{C.10})$$

En la ecuación anterior hemos usado la notación q_k que en realidad es $q_k, a = q(t_k)_a$ indicando la discretización en el tiempo y el espacio, notemos también que la expansión tiene un significado físico transparente, nos dice que si tomamos un camino entre los puntos q' y q y luego dividimos este camino en segmentos, la amplitud de ir de q' a q es el producto de las amplitudes de transmisión entre cada segmento, ahora si no sabemos que camino tomó el sistema entonces por superposición debemos sumar sobre todos los caminos posibles entre los puntos q' y q que puede tomar el sistema y esa será la amplitud total de transmisión.

Es hora de que usemos el resultado C.9 y lo sustituyamos en C.10 para obtener el siguiente resultado

$$\begin{aligned} \langle q', T/2 | q, -T/2 \rangle &= \int \left[\prod_{k=1}^N \prod_a dq_{k,a} \right] \left[\prod_{k=0}^N \prod_a dp_{k,a} \right] \\ &\times \exp \left\{ i \sum_{k=1}^{N+1} \left(\sum_a (q_{k,a} - q_{k-1,a}) p_{k-1,a} - H(q_k, p_{k-1}) dt \right) \right\} \quad (\text{C.11}) \end{aligned}$$

El término dentro de la exponencial se puede simplificar si hacemos una expansión de las funciones $q(t_{k-1})$ y $p(t_{k-1})$ quedandonos a primer orden en dt recordando que $t_{k-1} = t_k - dt$, así obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{N+1} \left(\sum_a (q_{k,a} - q_{k-1,a}) p_{k-1,a} - H(q_k, p_{k-1}) Dt \right) \\ &= \sum_{k=1}^{N+1} \left(\sum_a \dot{q}_a(t_k) p_a(t_k) dt - H(q(t_k), p(t_k)) dt \right) \quad (\text{C.12}) \end{aligned}$$

Usando el resultado anterior podemos escribir la forma general de la función $F(q, q'; T)$, además tomamos el límite cuando $N \rightarrow \infty$ es decir cuando dt es muy pequeño para obtener lo siguiente

$$\begin{aligned} \langle q', T/2 | q, -T/2 \rangle &= \int \left[\prod_{t,a} dq_a(t) \right] \left[\prod_{t,a} dp_a(t) \right] \\ &\times \exp \left\{ \int_{-T/2}^{T/2} \left(i \sum_a \dot{q}_a(t) p_a(t) dt - H(q(t), p(t)) \right) dt \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

La integral de camino [C.13](#) es sobre todos los caminos tal que $q(T/2) = q'$ y $q(-T/2) = q$. En el caso en que $H(q, p)$ es una función cuadrática en p podemos evaluar la integral en p . Lo anterior sugiere restringirnos al caso en el que H se escribe de la siguiente manera

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{a,b} K_{ab}(q) p_a p_b + \sum_a B_a(q) p_a + C(q) \quad (\text{C.14})$$

Sabemos que las integrales Gaussianas pueden ser evaluadas cuando la variable de integración es como un punto en donde el argumento de la exponencial en [C.13](#) es estacionario. La demostración del hecho anterior se puede encontrar en ([Weinberg, 2001a](#)). Así sustituyendo [C.14](#) tendremos la siguiente expresión

$$\langle q', T/2 | q, -T/2 \rangle = \int \left[\prod_{t,a} dq_a(t) \right] [\det\{2i\pi K(q)\}]^{-1/2} \quad (\text{C.15})$$

$$\times \exp \left\{ \int_{-T/2}^{T/2} \left(i \sum_a \dot{q}_a(t) \tilde{p}_a(t) dt - H(q(t), \tilde{p}(t)) \right) dt \right\} \quad (\text{C.16})$$

donde $\tilde{p}(t)$ es un punto estacionario del argumento de la exponencial [C.15](#), por lo que cumple con la siguiente ecuación diferencial

$$\left. \frac{\delta H}{\delta p_a} \right|_{p=\tilde{p}} = i\dot{q}_a \quad (\text{C.17})$$

o de manera explícita

$$\sum_b (K_{ab} \tilde{p}_b) + B_a(q) = i\dot{q}_a \quad (\text{C.18})$$

Por lo tanto una solución a la ecuación es la siguiente

$$\tilde{p}_a = \sum_b ([K^{-1}]_{ab} (i\dot{q}_b - B_b)) \quad (\text{C.19})$$

Finalmente veamos que en el caso en que $B_b(q) = 0$ obtenemos el siguiente resultado

$$\langle q', T/2 | q, -T/2 \rangle = \int \left[\prod_{t,a} dq_a(t) \right] [\det\{2i\pi K(q)\}]^{-1/2} \quad (\text{C.20})$$

$$\times \exp\{-S[q]\} \quad (\text{C.21})$$

donde $S[q]$ es la acción euclidiana que escribimos como sigue

$$S[q] = \int_{-T/2}^{T/2} \left(\frac{1}{2} \sum_{ab} k_{ab}^{-1}(q) \dot{q}_a \dot{q}_b + C(q) \right) dt \quad (\text{C.22})$$

C.2. Tunelaje con la integral de camino

Ahora que sabemos que la amplitud de transición está dada por la integral de camino [C.20](#) podemos usarla para calcular la primera corrección a la energía E_0 . En este caso restauraremos la \hbar para usar el límite semiclásico $\hbar \rightarrow \infty$ por lo que la integral [C.20](#) estará dominada por el valor estacionario de la acción. De modo que podemos expandir alrededor del punto estacionario haciendo $q = \tilde{q} + \sum_n c_n \phi_n$ donde ϕ_n es un conjunto completo de eigenestados ortonormales que por conveniencia elegimos como eigenestados de la segunda variación de la acción. Además usaremos la siguiente medida

$$\mathcal{D}x = (2\pi\hbar)^{-\frac{1}{2}} \prod_n dc_n \quad (\text{C.23})$$

Sustituyendo en la integral [C.20](#) tenemos lo siguiente

$$\langle q', T/2 | q, -T/2 \rangle = \int \left[\prod_n \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi}} \right] \exp \left\{ -S[\tilde{q}]/\hbar + \frac{1}{2} \sum_k \lambda_k c_k^2 + \dots \right\} \quad (\text{C.24})$$

Con λ_n un eigenvalor de las eigenfunciones ϕ_n . Evaluando la integral

$$\begin{aligned} \langle q', T/2 | q, -T/2 \rangle &= e^{-S[\tilde{q}]/\hbar} \prod_n \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \\ &= e^{-S[\tilde{q}]/\hbar} [\det\{-\partial_t^2 + V''(\tilde{q})\}]^{-1/2} \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

Debemos tomar en cuenta que hay muchas configuraciones que son puntos estacionarios de la acción y sumar todas las contribuciones. Cada una de estas configuraciones tiene un punto de retorno diferente (τ_j, x_j) al que llamamos centro, como el sistema es

invariante ante traslaciones al integrar sobre estas coordenadas obtendremos un factor T y V en un intervalo de tiempo T y una caja espacial de volumen V . Por lo tanto tenemos lo siguiente

$$\langle q', T/2 | q, -T/2 \rangle \approx TV e^{-S[\tilde{q}]/\hbar} \quad (\text{C.26})$$

Si ahora consideramos que para T y V grandes podemos obtener soluciones adicionales superponiendo m configuraciones estacionarias de la acción obtenemos el siguiente resultado

$$\begin{aligned} \langle q', T/2 | q, -T/2 \rangle &\approx \sum_m^{\infty} \left[\frac{V^m T^m}{m!} e^{-mS[\tilde{q}]/\hbar} \right] \\ &= e^{VT} e^{-S[\tilde{q}]/\hbar} \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

si ahora sustituimos en C.4 obtendremos la energía del estado base

$$\begin{aligned} E_0 &= - \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{\log F(q, q'; T)}{T} \right) \\ &\approx - \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{\log e^{VT} e^{-S[\tilde{q}]/\hbar}}{T} \right) \\ &= V e^{-S[\tilde{q}]/\hbar} \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Así obtenemos el valor de la tasa de decaimiento por unidad de Volumen Γ como sigue

$$\frac{\Gamma}{\mathcal{V}} = |A| e^{-S[\tilde{q}]/\hbar} \quad (\text{C.29})$$

donde A es un factor de proporcionalidad que incluimos de modo que se cumpla la igualdad.

Hemos obtenido el resultado de la aproximación WKB 6.14, además con este formalismo la evaluación del factor A nos proporcionaría la información del prefactor que no tomamos en cuenta en la aproximación WKB, una discusión completa de como evaluarlo puede encontrarse en (Callan and Coleman, 1977).

Relaciones tipo virial generalizadas.

En el capítulo 6 se encontró una ecuación que da lugar a un conjunto de relaciones entre el término cinético y el potencial $\mathcal{V}(|\phi|)$ del Lagrangiano 6.38.

Aquí se mostrará que la ecuación 6.46 puede obtenerse como un caso particular de una relación más general. Consideremos una teoría de campo escalar cuyas con campos que tienen simetría $O(N)$, el Lagrangiano de la teoría esta dado como sigue

$$L = N \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{(\frac{N}{2})!} \int \rho^{N-1} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 + V(\phi) \right) d\rho \quad (\text{D.1})$$

La ecuación D.1 sugiere definir nuevamente una densidad Lagrangiana dependiente de ρ de la siguiente manera

$$L_\rho = \rho^{N-1} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 + V(\phi) \right) \quad (\text{D.2})$$

La variación del Lagrangiano D.2 da lugar a la ecuación de movimiento 6.33. El hamiltoniano correspondiente se obtiene usando la transformación de Legendre como sigue

$$\begin{aligned} H_\rho &= p \frac{d\phi}{d\rho} - L_\rho \\ &= \rho^{N-1} \left(\left[\frac{d\phi}{d\rho} \right]^2 - V_d(\phi) \right) \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

En la expresión anterior hemos usado $p = \frac{\partial L_\rho}{\partial \dot{\phi}}$. Si ahora obtenemos la derivada total del Lagrangiano L_ρ se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
 \frac{dL_\rho}{d\rho} &= \frac{\partial L_\rho}{\partial \phi} \frac{d\phi}{d\rho} + \frac{\partial L_\rho}{\partial \dot{\phi}} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\phi}{d\rho} \right) + \frac{\partial L_\rho}{\partial \rho} \\
 &= \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\partial L_\rho}{\partial \dot{\phi}} \right) \frac{d\phi}{d\rho} + \frac{\partial L_\rho}{\partial \dot{\phi}} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\phi}{d\rho} \right) + \frac{\partial L_\rho}{\partial \rho} \\
 &= \frac{d}{d\rho} (p\dot{\phi}) + \frac{\partial L_\rho}{\partial \rho}
 \end{aligned} \tag{D.4}$$

En la ecuación anterior hemos definido $\dot{\phi} \equiv \frac{d\phi}{d\rho}$. Usando D.3 y D.4 obtenemos la siguiente relación

$$\begin{aligned}
 \frac{dH_\rho}{d\rho} &= -\frac{\partial L_\rho}{\partial \rho} \\
 &= -\frac{N-1}{\rho} L_\rho
 \end{aligned} \tag{D.5}$$

Consideremos la siguiente identidad

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{d(\rho^\alpha H_\rho)}{d\rho} d\rho &= [\rho^\alpha H_\rho] \Big|_{\mathcal{D}} \\
 &\equiv F_N^\alpha
 \end{aligned} \tag{D.6}$$

Donde hemos usado $\partial\mathcal{D}$ para denotar la frontera de un intervalo cualquiera tal que $\rho \in \mathcal{D} \forall \rho$. Por otra parte desarrollando la integral D.6 y utilizando D.5 obtenemos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
 F_N^\alpha &= \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{d(\rho^\alpha H_\rho)}{d\rho} d\rho \\
 &= \int_{\partial\mathcal{D}} \rho^{\alpha+N-2} \left(\frac{\alpha - (N-1)}{2} \left(\frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 - (\alpha + N - 1)V(\phi) \right) d\rho
 \end{aligned} \tag{D.7}$$

Es útil definir las siguientes integrales

$$I_{\alpha N}^\phi = \int_{\partial\mathcal{D}} \rho^{\alpha+N-2} \left(\frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 d\rho \tag{D.8}$$

$$I_{\alpha N}^V = \int_{\partial\mathcal{D}} \rho^{\alpha+N-2} V(\phi) d\rho \tag{D.9}$$

así obtenemos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
F_N^\alpha &= \rho^{\alpha+N-1} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 - V_d(\phi) \right) \Big|_{\partial\mathcal{D}} \\
&= -(\alpha + N - 1) I_{\alpha N}^V + \frac{(\alpha - N + 1)}{2} I_{\alpha N}^\phi
\end{aligned} \tag{D.10}$$

Notemos que 6.46 se sigue de manera inmediata de D.10 cuando se tiene una teoría con campos con simetría $O(4)$ y se considera un intervalo $\mathcal{D} = [0, \infty)$.

Finalmente observemos que D.10 es una relación aplicable a teorías con campos ϕ con simetría $O(N)$, sin embargo, el valor explícito de D.10 depende de los valores asintóticos de los campos en la frontera $\partial\mathcal{D}$.

Código del método numérico

En este apéndice se muestra el código usado para obtener numéricamente las soluciones a las ecuaciones 5.32.

Luego de adimensionalizar las ecuaciones de los vórtices se usó Julia 1.1.1 para resolver las ecuaciones de los perfiles. Para poder resolver el sistema de ecuaciones primero se hizo un cambio de variables para convertir el sistema de dos ecuaciones de segundo orden acopladas a un sistema de primer orden de cuatro ecuaciones acopladas reduciendo la complejidad del problema. Dado que el problema es un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden no lineales con condiciones de frontera se utilizó el método de Runge-Kutta implícito que está implementado en la paquetería de Julia para problemas de valores en la frontera. La razón por la que se usó este método sobre el shooting method es que este último es muy sensible a la trayectoria inicial elegida como ansatz sobre todo en sistemas de ecuaciones con singularidades que hacen que al método numérico inestable. Dicho lo anterior en primera instancia se trató de usar el shooting method permitiendo obtener soluciones para valores del parámetro de acoplamiento muy pequeños, sin embargo para radios más grandes y valores del parámetro de acoplamiento el método resultó inestable siendo la utilidad de las soluciones obtenidas así obtener un mejor ansatz para el método de Runge-kutta.

En las siguientes líneas se muestra el código implementado en Julia.

```

1 #####
2 #Paqueteria necesaria para obtener las graficas y las soluciones de
   vortice, en particular es necesario usar BoundaryValueDiffEq ya que
   proporciona el m todo de Shooting y el Runge-Kutta implícito
   aplicado a problemas de valores en la frontera.
3 #####
4

```

E. CÓDIGO DEL MÉTODO NUMÉRICO

```
5 using Plots.
6 using LaTeXStrings
7 using BoundaryValueDiffEq
8 using DifferentialEquations
9 using OrdinaryDiffEq
10 gr()
11
12 #####
13 #Aqui estamos definiendo una funcion general que depende de los
    parametros del potencial y la vorticidad de tal manera que al llamar
    la funcion VORTICE obtengamos la informacion necesaria del vortice#
14 #####
15
16 function VORTICE(delta,lambda,m,u1,u2)
17 tf=12.0 #Radio de integracion#
18 v1=u1 #Valor del parametro v_1 del potencial con dos familias de estados
    base#
19 v2=u2 #Valor del parametro v_2#
20 L=lambda/2 #Valor del parametro de acoplamiento#
21 k=delta #Valor del parametro delta del potencial#
22 n=m. #Valor de la vorticidad n#
23 e=1.0 #Valor del parametro e#
24 ti=1e-5 #Radio inicial de integracion#
25 tspan = (ti,tf) #intervalo de integracion#
26 vm=((3*v1+v2)-sqrt(-8*k+(v2-v1)^2))/4 #minimo no trivial del potencial#
27 vM=((3*v1+v2)+sqrt(-8*k+(v2-v1)^2))/4 #maximo local del potencial#
28 masaA= sqrt(2)*e*v2 #masa del campo de norma#
29 masaH=sqrt((L)*(k+(v2-v1)^2)) #masa del boson de Higgs#
30 kappa=masaH/masaA #valor del parametro kappa#
31
32 #####
33 #Aqui se define el sistema de ecuaciones diferenciales#
34 #####
35
36 function vorticetesis!(dx,x,p,t)
37     dx[1] = x[2]
```

```

38     dx[2] = -x[2]/t+x[1]*(1-x[3])^2*(n^2/t^2)+(2*L/e^2)*(x[1]-1)*(x[1]-
vM/v2))*(x[1]-(vm/v2))
39     dx[3] = x[4]
40     dx[4] = x[4]/t-(2.0*x[1]^2)*(1-x[3])
41 end
42
43 #####
44 #Aqui se define la funcion residuo que nos permite establecer las
condiciones de frontera a satisfacer#
45 #####
46
47 function bc1!(residual, u, p, t)
48     residual[1] = u[1][1] - 0.0
49     residual[2] = u[end][1] - (1-(1/sqrt(tf))*exp(-sqrt(2)*(masaA/masaH)
*tf))
50     residual[3] = u[1][3] - 0.0
51     residual[4] = u[end][3] - (1-sqrt(tf)*exp(-sqrt(2)*tf))
52 end
53
54 #####
55 #Aqui se implementa el m todo numero usando la paqueteria de Julia,
primero definiendo el problema, es decir, el sistema de ecuaciones,el
residuo, un ansatz y un intervalo de integracion#
56 #####
57
58 bvp1 = BVProblem(vorticetesis!, bc1!, [0.01,1.0,0.0,0.005], tspan)
59 st = solve(bvp1, GeneralMIRK4(), dt=0.1)
60
61 #####
62 #Aqui se definen los arreglos donde se guardara la informacion de los
perfiles, f,A, el campo magnetico B y la energia E luego de las
iteraciones.#
63 #####
64
65
66 sol1tn1=[]

```

E. CÓDIGO DEL MÉTODO NUMÉRICO

```
67 sol2tn1=[]
68 sol3tn1=[]
69 E=[]
70
71 for i in 1:length(st.u)
72     push!(sol1tn1,st.u[i][1])
73     push!(sol2tn1,st.u[i][3])
74     push!(sol3tn1,(n/e)*st.u[i][4]/st.t[i])
75     energy=(v2^2)*((n^2/(2*st.t[i]^2))*(st.u[i][4])^2+st.u[i][2]^2+(n^2/
76     st.t[i]^2)*((1-st.u[i][3])^2)*st.u[i][1]^2+(L/e^2)*((st.u[i][1]-1)^2)
77     *(delta+(st.u[i][1]-(v1/v2))^2))
78     push!(E,energy)
79 end
80 return [st.t,sol1tn1,sol2tn1,sol3tn1,E,kappa]
81 end
```

Por otra parte para obtener los valores numéricos de la integral 6.69 se usó el método de integración del trapecio cuya implementación también se realizó en Julia.

Finalmente cabe mencionar que para obtener las soluciones numéricas se utilizó el programa AnyBubble en Mathematica, este programa es un método de Shooting optimizado por lo que permite a las soluciones converger más rápidamente además de que sirve para resolver ecuaciones más generales como se discute en el artículo. (Masoumi et al., 2017).

Bibliografía

- Abrikosov, A. A. (1957). On the magnetic properties of superconductors of the second group. *Soviet Physics JETP*, 5(6):1174–1182. [55](#)
- Aitchison, I. J. R. (1982). *Gauge Theories in Particle Physics: A Practical Introduction, Volume 1*. Adam Hilger Ltd. [6](#)
- Arfken, G. B. and Weber, H. J. (2012). *Mathematical Methods for Physicists Essential*. [58](#)
- Blasone, M., Vitiello, G., and Jizba, P. (2011). *Quantum field theory and its macroscopic manifestations: Boson condensation, ordered patterns, and topological defects*. [59](#)
- Callan, C. G. and Coleman, S. (1977). Fate of the false vacuum. II. First quantum corrections. *Physical Review D*, 16(6):1762–1768. [108](#)
- Chambers, R. G. (1960). Shift of an electron interference pattern by enclosed magnetic flux. *Phys. Rev. Lett.*, 5:3–5. [20](#)
- Coleman, S. (1977a). *Classical Lumps and Their Quantum Descendants*, pages 297–421. Springer US, Boston, MA. [40](#), [74](#), [92](#)
- Coleman, S. (1977b). Fate of the false vacuum: Semiclassical theory. *Physical Review D*, 15(10):2929–2936. [4](#), [74](#), [77](#), [81](#), [84](#)
- Coleman, S., Glaser, V., and Martin, A. (1978). Action minima among solutions to a class of Euclidean scalar field equations. *Communications in Mathematical Physics*, 58(2):211–221. [75](#), [94](#)
- Deaver, B. S. and Fairbank, W. M. (1961). Experimental evidence for quantized flux in superconducting cylinders. *Phys. Rev. Lett.*, 7:43–46. [57](#)
- Doll, R. and Näbauer, M. (1961). Experimental proof of magnetic flux quantization in a superconducting ring. *Phys. Rev. Lett.*, 7:51–52. [57](#)
- D. Schwartz, M. (2016). *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press. [11](#), [17](#), [19](#), [20](#)

BIBLIOGRAFÍA

- Englert, F. and Brout, R. (1964). Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons. *Phys. Rev. Lett.*, 13:321–323. [21](#)
- Goldstein, H., Poole, C., and Safko, J. (2002). *Classical Mechanics*. Academic Press. [71](#)
- Guralnik, G. S., Hagen, C. R., and Kibble, T. W. B. (1964). Global conservation laws and massless particles. *Phys. Rev. Lett.*, 13:585–587. [21](#)
- Higgs, P. W. (1964). Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Phys. Rev. Lett.*, 13:508–509. [21](#)
- H.Ryder, L. (2001). *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2nd edition. [23](#)
- Jackson, J. D. and Okun, L. B. (2001). Historical roots of gauge invariance. *Reviews of Modern Physics*, 73(3):663–680. [12](#)
- Kibble, T. W. (2015). Spontaneous symmetry breaking in gauge theories. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 373(2032). [2](#), [21](#), [24](#)
- Korteweg, D. D. J. and de Vries, D. G. (1895). Xli. on the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 39(240):422–443. [37](#)
- Lancaster, T. and J.Blundell, S. (2014). *Quantum Field Theory for Gifted Amateur*. Oxford University Press, 1st edition. [5](#)
- Landau, L. D. (1937). *On The Theory of Phase Transitions*. Zh. Eksp. Teor. Fiz. 7: 19-32.). [5](#)
- Landau, L. D. and Ginzburg, V. L. (1950). . Zh. Eksp. Teor. Fiz. 20: 19-32.English translation in: L. D. Landau, Collected papers (Oxford: Pergamon Press, 1965) p. 546. [5](#)
- Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (1981). *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*. Course of Theoretical Physics. Elsevier Science. [72](#)
- Livanova, A. (1980). *Landau: a Great Physicist and Teacher*. Pergamon Press, 1st edition. [6](#)
- Manton, N. and Sutcliffe, P. (2004). *Topological Solitons Cambridge Monographs on Mathematical Physics*. [3](#)
- Marciano, W. and Pagels, H. (1978). Quantum Chromodynamics. *Physics Letters*, 3(3):137– 276. [57](#)

- Masoumi, A., Olum, K. D., and Shlaer, B. (2017). Efficient numerical solution to vacuum decay with many fields. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2017(01):051–051. [87](#), [116](#)
- Nakahara, M. (2003). *Geometry, Topology and Physics*. IOP Publishing Ltd, 2nd edition. [97](#)
- Nielsen, H. B. and Olesen, P. (1973). Vortex-line models for dual strings. *Nuclear Physics, Section B*, 61(C):45–61. [55](#)
- Rajantie, A. (2018). Higgs cosmology. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 376(2114). [69](#)
- Russell, J. S. (1845). Report on waves. *Proc. of the British Association for the Advancement of Science*, page 311. [37](#)
- Sakurai, J. J. and Napolitano, J. (2011). *Modern Quantum Mechanics*. Pearson, 2nd edition. [20](#)
- Sher, M. (1989). Electroweak Higgs potential and vacuum stability. *Physics Reports*, 179(5-6):273–418. [25](#), [73](#)
- 't Hooft, G. (1980). Gauge theories of the forces between elementary particles. *Scientific American*, 242(6):104–141. [16](#)
- Tinkham, M. (2004). *Introduction to Superconductivity*. Dover Publications. [26](#)
- Tomomura, A., Osakabe, N., Matsuda, T., Kawasaki, T., Endo, J., Yano, S., and Yamada, H. (1986). Evidence for aharonov-bohm effect with magnetic field completely shielded from electron wave. *Phys. Rev. Lett.*, 56:792–795. [20](#)
- Weinberg, E. (2012). *Classical Solutions in Quantum Field Theory: Solitons and Instantons in High Energy Physics*. Cambridge University Press. [3](#), [91](#)
- Weinberg, S. (2001a). *The Quantum Theory of Fields. Volume I: Foundations*. Cambridge University Press. [106](#)
- Weinberg, S. (2001b). *The Quantum Theory of Fields. Volume II: Modern Applications*. Cambridge University Press. [4](#), [77](#)
- Zee, A. (2010). *Quantum Field Theory in a Nutshell*, volume 78. Princeton University Press, 2nd edition. [6](#), [11](#), [19](#), [20](#), [60](#)