Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Aplicación de Gauss de hipersuperficies en espacios simétricos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

P R E S E N T A :

Rodrigo Hiram Navarro Betancourt

TUTOR

Dr. Pierre Michel Bayard

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2020

Índice general

Introducción

En una superficie orientable S inmersa en $\mathbb{R}^3$, la variación de su aplicación de Gauss nos da información fundamental sobre su disposición en el espacio. Si denotamos a la aplicación de Gauss por $\mathcal{N}: S \to \mathbb{S}^2$, entonces podemos escribir a la curvatura de Gauss y a la curvatura media en un punto $p \in S$ en términos del endomorfismo $d\mathcal{N}$ como

$$K(p) = \det{(d\mathcal{N})_p} \quad \text{y} \quad H(p) = -\frac{1}{2}\text{traza}\,(d\mathcal{N})_p.$$

La aplicación de Gauss también aporta información más sofisticada. $\mathcal{N}$ satisface la ecuación

$$\Delta\mathcal{N} = -\text{grad}(H) - ||II||^2\,\mathcal{N},$$

donde II es la segunda forma fundamental de S. En particular, S tiene curvatura media constante si y sólo si $\mathcal{N}$ y su Laplaciano son múltiplos escalares; esta última condición es equivalente a que la aplicación de Gauss sea armónica. Resumimos ésto en un teorema debido a Ruh-Vilms [20]:

Teorema (Ruh-Vilms). Una superficie en $\mathbb{R}^3$ tiene curvatura media constante si y sólo si su aplicación de Gauss es armónica.

La aplicación de Gauss induce una forma diferencial cuadrática que en el caso de $S \subset \mathbb{R}^3$ coincide con la diferencial de Hopf, la complejificación de la componente de traza cero de la segunda forma fundamental. Esta diferencial es la herramienta principal que se usa para demostrar el teorema de Hopf, que caracteriza a las superficies de curvatura media constante en $\mathbb{R}^3$.

Teorema (Hopf). Las únicas superficies compactas de género cero inmersas en $\mathbb{R}^3$ con curvatura media constante son las esferas.

En la prueba de este teorema, una propiedad específica de la diferencial de Hopf es especialmente útil: ésta es holoforma si y sólo si la superficie en la que está definida tiene curvatura media constante. En el artículo [1], Abresch y Rosenberg extendieron el teorema de Hopf a superficies inmersas en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Para ello, definieron una forma diferencial cuadrática $\mathcal{Q}$ la cual también sólo es holomorfa en superficies de curvatura media constante. Si $\mathcal{A}$ denota a la diferencial de Hopf, $\mathcal{Q}$ está definida en una superficie S de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ o $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ por

$$\mathcal{Q} = 2H\mathcal{A} - \mathcal{T} \quad \text{y} \quad \mathcal{Q} = 2H\mathcal{A} + \mathcal{T}$$

respectivamente, donde

$$\mathcal{T} = 2h_z\, dz^2$$

en una parametrización

$$(f, h) : U \subset \mathbb{C} \to S;$$

es decir, f toma valores en $\mathbb{S}^2$ o en $\mathbb{H}^2$, y h está valuada en los reales.

En esta tesis seguimos el trabajo de Ramos [18] para extender la definición de la aplicación de Gauss a hipersuperficies inmersas en espacios simétricos. Después, usamos nuestra nueva definición de la aplicación de Gauss para extender el teorema de Ruh-Vilms a espacios simétricos.

Introducimos una forma diferencial cuadrática que induce nuestra nueva aplicación de Gauss en superficies. Para superficies en $\mathbb{S}^3$ y $\mathbb{H}^3$, mostramos que esta diferencial cuadrática difiere de la diferencial de Hopf por un factor escalar. En superficies de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, vemos que la forma inducida coincide con la diferencial de Abresch-Rosenberg.

Estudiaremos a los espacios simétricos como espacios cociente de grupos de Lie G/H, dotados además de una involución distinguida. Para ello, en el capítulo de **Conceptos preliminares** repasamos hechos fundamentales sobre espacios homogéneos. El objetivo principal de este trabajo es aprovechar la estructura algebraica de los espacios simétricos para introducir a la aplicación de Gauss de manera natural; por ésto, también estudiamos haces principales y sus haces asociados.

En el capítulo de **Espacios simétricos** desarrollamos resultados sobre la estructura y geometría de estos espacios; los usaremos para probar los teoremas principales de este trabajo. Ponemos especial énfasis en definir a la conexión canónica de un espacio simétrico y en dar una descripción del haz tangente que nos permita definir a la aplicación de Gauss de manera directa.

Usaremos hechos del capítulo de **Diferencial de Hopf** cuando definamos a la forma diferencial cuadrática inducida por la aplicación de Gauss. Aquí también es donde probamos el teorema de Hopf.

El siguiente capítulo, **Mapeos armónicos entre variedades**, se ocupa puramente de teoría. Naturalmente, damos resultados particulares sobre transformaciones armónicas que toman valores en esferas de espacios euclidianos.

En el capítulo de **Aplicación de Gauss en espacios simétricos** extendemos finalmente la definición de este mapeo. Reservamos los resultados principales de esta tesis para los últimos dos capítulos: en el capítulo de **Armonicidad de la aplicación de Gauss** establecemos un resultado análogo al teorema de Ruh-Vilms en el contexto de los espacios simétricos; en el último capítulo, **Formas diferenciales cuadráticas**, estudiamos la forma diferencial cuadrática que induce la aplicación de Gauss en superficies de espacios simétricos particulares.

Capítulo 1

Conceptos preliminares

1.1. Grupos de Lie

En esta sección damos un breve repaso de hechos elementales sobre los grupos de Lie. Describimos a la representación adjunta de grupos de Lie lineales y también introducimos a la forma de Maurer-Cartan.

Un grupo de Lie es un grupo G dotado de una estructura de variedad diferenciable respecto a la cual los mapeos

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (g,h) &\mapsto gh \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} G &\to G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned} \tag{1.1}$$

son suaves.

Para $g \in G$, $L_g : G \to G$ representa la multiplicación izquierda por g, $L_g(h) = gh$. Análogamente, escribimos $R_g : G \to G$ para la multiplicación derecha por g. Decimos que un campo vectorial $X \in \Gamma(TG)$ es invariante por la izquierda si $L_{g*}X = X$ para toda $g \in G$. Al espacio de los campos invariantes por la izquierda lo denotamos por $\Gamma^L(G)$. Tenemos que si $X, Y \in \Gamma^L(G)$, entonces $[X,Y] \in \Gamma^L(G)$.

Escribimos al espacio tangente a G en la identidad como $\mathfrak{g}$. La transformación

$$\begin{aligned} \psi : \quad \mathfrak{g} &\to \Gamma^L(G) \\ v &\mapsto X^v, \end{aligned}$$

donde $X^v(g) = (L_g)_* v$, es un isomorfismo que nos permite inducir una estructura de álgebra de Lie en $\mathfrak{g}$.

Esta correspondencia entre $\Gamma^L(G)$ y $\mathfrak{g}$ también nos permite definir al mapeo exponencial de G. Usamos φ^v para denotar a la curva integral por la identidad en G del campo vectorial X^v ; es decir, φ^v satisface que

$$\frac{d}{dt}\varphi^v = X^v \circ \varphi^v \quad \text{y} \quad \varphi^v(0) = e \in G.$$

Los campos invariantes por la izquierda en G son completos [14, Teorema 7.72]. La transformación $\exp : \mathfrak{g} \to G$ definida por $\exp(v) = \varphi^v(1)$ es llamada el mapeo exponencial de G.

Para $g \in G$, la conjugación por g es el mapeo $C_g : G \to G$ dado por $C_g(h) = ghg^{-1}$. Designamos por Ad_g a la aplicación tangente de C_g en la identidad. Al ser C_g una transformación invertible que fija a la identidad de G, Ad_g es un isomorfismo de $\mathfrak{g}$. El morfismo de grupos de Lie

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad} : \quad G &\to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \\ g &\mapsto \mathrm{Ad}_g \end{aligned}$$

es llamado la representación adjunta de G.

Para un grupo de Lie lineal $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, identificamos a $\mathfrak{g}$ con un subespacio de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. En este caso, las propiedades de la exponencial de matrices determinan a la representación adjunta de G; ésto es, para $U \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ y $V \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_V U &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} V \circ \exp(tU) \circ V^{-1} \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tV \circ U \circ V^{-1}) = V \circ U \circ V^{-1}. \end{aligned}$$

La versión infinitesimal de Ad es llamada la representación adjunta de $\mathfrak{g}$; ésta es la aplicación tangente de Ad en la identidad. Denotamos a esta transformación por ad, y se cumple que

$$\begin{aligned} \mathrm{ad} : \quad \mathfrak{g} &\to \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \\ v &\mapsto \mathrm{ad}(v), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(v) : \quad \mathfrak{g} &\to \mathfrak{g} \\ w &\mapsto [v, w]. \end{aligned}$$

Dado cualquier grupo de Lie G contamos con una $\mathfrak{g}$-forma diferencial distinguida. Para cada $g \in G$, definimos $\omega_G(g) : T_gG \to \mathfrak{g}$ por

$$\omega_G(g)(v) := L_{g^{-1}*}\, v.$$

A ω_G se le conoce como la forma de Maurer-Cartan de G. Ésta nos permite construir una trivialización sencilla del haz tangente de G:

$$\begin{aligned} TG &\to G \times \mathfrak{g} \\ X_g &\mapsto (g, \omega_G(X_g)), \end{aligned}$$

con $X \in \Gamma(TG)$.

1.2. Espacios homogéneos

Todos los espacios simétricos son en particular espacios homogéneos. Por ello, a continuación enunciamos resultados elementales sobre los espacios homogéneos. Nuestra referencia principal es el libro de Arvanitoyeorgos [2].

Dado un grupo de Lie G y un subgrupo cerrado H, denotamos $G/H := \{gH;\, g \in G\}$, y escribimos $\pi : G \to G/H$ para el mapeo $\pi(g) = gH$. Entonces existe una única estructura diferenciable en G/H que hace de este conjunto una variedad y de la proyección π una submersión [2, Proposición 4.1]. En este caso decimos que G/H es un espacio homogéneo.

Una manera estándar de construir espacios cociente de este estilo usa las acciones de grupos de Lie.

Decimos que una acción de un grupo de Lie G en una variedad M es transitiva si la órbita de un punto cualquiera es todo M. Por otra parte, la acción es libre si para todo $x \in M$ y $g \in G$, $gx \neq x$ si $g \neq e$.

Dada una acción transitiva de G en M, si H denota al subgrupo de isotropía de un punto $x \in M$,

$$H := \{g \in G;\, gx = x\},$$

tenemos que H es un subgrupo cerrado de G y por tanto que G/H es un espacio homogéneo. Más aún, en este caso el mapeo $gH \mapsto gx$ define un difeomorfismo de G/H en M [2, Proposición 4.2].

1.3. Haces principales y asociados

1.3.1. Haces principales

En esta sección repasamos ideas básicas sobre haces principales. Entre los conceptos que revisamos resalta el de forma de conexión.

Sea H un grupo de Lie. Dadas variedades diferenciables M y P, un H-haz principal de espacio total P y espacio base M consta de una submersión $\pi : P \to M$ y de una acción de H en P que satisfacen que

i) H actúa libremente en P por la derecha;

ii) para todo $p \in P$ y $h \in H$, $\pi(ph) = \pi(p)$;

iii) dado $x \in M$, existe una vecindad U de x y un difeomorfismo

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times H$$

de la forma $\varphi(p) = (\pi(p), \psi(p))$, con

$$\varphi(ph) = (\pi(p), \psi(p)h)$$

para toda $h \in H$.

La condición **ii)** nos permite identificar las fibras sobre puntos en M con órbitas de la acción de H en P; puntualmente, dados $x \in M$ y $p \in P$ tal que $\pi(p) = x$, se cumple que $\pi^{-1}\{x\} = pH$.

En un espacio homogéneo G/H, H actúa libremente por multiplicación derecha en G, y por definición G/H es el cociente de G por la relación de equivalencia que define esta acción. Si $\pi : G \to G/H$ denota la proyección natural, dado $x \in G/H$ existe una vecindad U de x en la cual está definida una sección local $\tau : U \to G$ de la submersión π. Al considerar la trivialización local

$$\begin{aligned} \phi : \quad U \times H &\to \pi^{-1}\{U\} \\ (u, h) &\mapsto \tau(u)h \end{aligned}$$

que induce la sección τ, se observa que $\pi : G \to G/H$ es un H-haz principal asociado al espacio homogéneo G/H.

En un haz principal el transporte paralelo se define con base en una conexión de Ehresmann. Para introducir a estas conexiones, definimos primero a campos vectoriales distinguidos del espacio total.

Consideremos un H-haz principal $\pi : P \to M$. Para $v \in \mathfrak{h} := T_eH$, definimos al campo vectorial de P

$$\hat{v}(p) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} p(\exp tv), \qquad p \in P,$$

el campo vectorial generado por el flujo $\theta(t, p) = p(\exp tv)$. Decimos que $\hat{v}$ es el campo vectorial fundamental que le corresponde a $v \in \mathfrak{h}$.

Definimos al espacio de vectores verticales en $p \in P$ por $\mathcal{V}_p := \ker \pi_* \subset T_pP$. El subhaz de TP de vectores verticales es entonces $\mathcal{V} := \cup_{p\in P}\mathcal{V}_p$.

Una forma de conexión en el haz es una $\mathfrak{h}$-forma diferencial ω en P que cumple

i) $\omega(\hat{v}) = v$ para todo $v \in \mathfrak{h}$;

ii) ${R_h}^*\omega = \mathrm{Ad}_{h^{-1}} \circ \omega$ para todo $h \in H$,

donde $R_h : P \to P$ es la transformación $p \mapsto ph$.

Si ω es una forma de conexión, la condición **i)** implica que para todo $p \in P$, el mapeo $\omega(p) : T_pP \to \mathfrak{h}$ es sobreyectivo. Ésto nos dice que su kernel, $\mathcal{H}_p := \ker \omega(p)$, es un subespacio de T_pP de la misma dimensión que M.

Decimos que $v \in T_pP$ es un vector horizontal si $v \in \mathcal{H}_p$, y llamamos la distribución horizontal al subhaz $\mathcal{H} =: \cup_{p\in P}\mathcal{H}_p$. Esta distribución satisface propiedades análogas a la forma que la induce:

(i) $T_pP = \mathcal{H}_p \oplus \mathcal{V}_p$ para todo $p \in P$;

(ii) $R_{h*}(\mathcal{H}_p) = \mathcal{H}_{ph}$ para todo $p \in P$ y $h \in H$.

Dotados de una forma de conexión, dado $p \in P$, cada vector $v \in T_pP$ admite una descomposición única en sus componentes en $\mathcal{H}_p$ y $\mathcal{V}_p$; ésto nos permite definir a las proyecciones $p_{\mathcal{H}} : T_pP \to \mathcal{H}_p$ y $p_{\mathcal{V}} : T_pP \to \mathcal{V}_p$.

Por otro lado, como $\pi_* : \mathcal{H}_p \to T_{\pi(p)}M$ es un isomorfismo para cada $p \in P$, dado un campo vectorial X en M existe un campo vectorial X^H en P tal que X^H es horizontal en cada punto de P y además satisface

$$\pi_* X^H = X. \tag{1.2}$$

En este caso decimos que X^H es el levantamiento horizontal de X.

Nota. La ecuación (1.2) implica que los campos X^H y X están π-relacionados. En particular, si Y es otro campo de M, lo anterior significa que

$$\pi_*[X^H, Y^H] = [X, Y]. \tag{1.3}$$

Para cerrar este apartado, destacamos que en un H-haz $G \to G/H$ contamos con una forma de conexión canónica, la forma de Maurer-Cartan en G seguida de la proyección en $\mathfrak{h}$:

$$TG \xrightarrow{\omega_G} \mathfrak{g} \xrightarrow{p_{\mathcal{V}}} \mathfrak{h}.$$

1.3.2. Haces asociados

Dado un H-haz principal, podemos definir haces vectoriales asociados usando acciones de Lie del grupo H. Más adelante, la lectura del haz tangente de un espacio simétrico como un haz asociado nos permitirá definir a la aplicación de Gauss de manera natural.

Sea $\pi : P \to M$ un H-haz principal. Dada una acción izquierda de H en una variedad S, podemos definir a la acción derecha de H en $P \times S$

$$((p, s), h) \mapsto (ph, h^{-1}s), \tag{1.4}$$

con $p \in P$, $s \in S$, y $h \in H$. En lo que resta escribimos $[p, s]$ para denotar a la clase de equivalencia de (p, s) con respecto de esta acción.

Si denotamos al espacio de órbitas de la acción (1.4) por $P \times_H S$, éste tiene una estructura única de variedad diferenciable tal que el mapeo cociente $q : P \times S \to P \times_H S$ es una submersión.

Más aún, existe una proyección $\tilde{\pi}$ definida por el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} P \times S \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & P \times_H S \arrow[d, "\tilde{\pi}"] \\ P \arrow[r, "\pi"] & M \end{tikzcd} \tag{1.5}$$

de manera que $\tilde{\pi} : P \times_H S \to M$ sea un haz de fibra típica S [16, pág. 215].

Ahora nos centramos en haces asociados a un H-haz principal $\pi : G \to G/H$. Notamos que una representación de G en un espacio vectorial V,

$$\rho : G \to GL(V),$$

induce a la acción izquierda de G en V dada por

$$\begin{aligned} l_G : \quad & G \times V \to V \\ & (g, v) \mapsto \rho(g)v. \end{aligned}$$

l_G se restringe de manera obvia a una acción izquierda de H en V

$$l_H(h, v) := \rho(h)v,$$

y por lo tanto define a un haz vectorial $G \times_H V$ asociado al haz principal $\pi : G \to G/H$. El hecho de poder extender la acción l_H por la acción l_G nos permite construir una equivalencia de haces vectoriales que resultará útil para interpretar a nuestra nueva aplicación de Gauss.

Proposición 1.1. *$G \times_H V$ es equivalente al haz trivial $G/H \times V$.*

Demostración. Definimos a la transformación

$$\begin{aligned} \Gamma : \quad & G \times_H V \to G/H \times V \\ & [g, v] \mapsto (gH, \rho(g)v). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Para ver que el mapeo está bien definido, basta verificar que no depende del representante en la clase de equivalencia; ésto se sigue de las propiedades de la acción ρ:

$$\Gamma([gh, \rho(h^{-1})v]) = (ghH, \rho(gh)\rho(h^{-1})v) = (gH, \rho(g)v) = \Gamma([g, v]).$$

Por otra parte, del diagrama (1.5), vemos que

$$\tilde{\pi}([g, w]) = (\pi \circ \mathrm{pr}_1)((g, w)) = gH,$$

de donde se sigue que el diagrama

$$\begin{tikzcd} G \times_H V \arrow[rr, "\Gamma"] \arrow[dr, "\tilde{\pi}"'] & & G/H \times V \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & G/H & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Para terminar, notamos que, restringido a una fibra $\tilde{\pi}^{-1}\{gH\}$, Γ es el isomorfismo $\rho(g)$ en V. □

Nota. La representación adjunta de G

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad} : \quad & G \to GL(\mathfrak{g}) \\ & g \mapsto \mathrm{Ad}_g \end{aligned}$$

induce al haz vectorial asociado $\tilde{\pi} : G \times_H \mathfrak{g} \to G/H$. Por la proposición anterior, este haz es equivalente al haz trivial $G/H \times \mathfrak{g}$.

Capítulo 2

Espacios simétricos

Nuestra lectura del haz tangente de un espacio simétrico viene del libro de Sharpe [21]. El resto de nuestro desarrollo sigue la presentación del libro de Kobayashi y Nomizu [13].

Sea G un grupo de Lie conexo. Dado $\sigma : G \to G$ un automorfismo involutivo en G, denotamos al subgrupo de los elementos fijados por σ como

$$\hat{K} := Fix(\sigma) = \{g \in G;\, \sigma(g) = g\},$$

y a la componente conexa de $\hat{K}$ que contiene a la identidad de G por $\hat{K}^\circ$. Decimos entonces que la tripleta (G, H, σ) es un espacio simétrico si H es un subgrupo cerrado de G que satisface

$$\hat{K}^\circ \subset H \subset \hat{K}.$$

Dada una tripleta simétrica (G, H, σ) con frecuencia nos referimos al espacio homogéneo G/H como un espacio simétrico.

Nota. Por su lectura de espacio homogéneo, un espacio simétrico (G, H, σ) tiene asociado de manera natural al H-haz principal

$$\begin{aligned} \pi : \quad & G \to G/H \\ & g \mapsto gH. \end{aligned}$$

A manera de ejemplos, consideramos los espacios simétricos en donde describiremos a mayor detalle la aplicación de Gauss.

Ejemplo 2.1. El espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ es el espacio homogéneo $\mathbb{R}^n/\{0\}$. Si consideramos la involución $x \mapsto -x$, trivialmente se satisface que $\hat{K}^\circ \subset \{0\} \subset \hat{K}$.

Ejemplo 2.2. El grupo de Lie

$$O(n+1) = \{A \in M_{n+1}(\mathbb{R});\, I_{n+1} = A^t A\}$$

actúa transitivamente en $\mathbb{S}^n$ por la acción

$$O(n+1) \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n, \quad (A, x) \mapsto Ax.$$

Si e_1, ..., e_{n+1} denota la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$, el subgrupo de isotropía de e_1 es el conjunto de todas las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \qquad B \in O(n).$$

Al recordar la Sección 1.2, vemos que todo lo anterior significa que

$$\begin{aligned} \zeta: \quad O(n+1)/O(n) &\to \mathbb{S}^n \\ AO(n) &\mapsto Ae_1 \end{aligned}$$

es un difeomorfismo. Exhibimos la simetría de $\mathbb{S}^n$

$$s_1(x) = -x + 2\langle x, e_1\rangle e_1,$$

la reflexión con respecto de la línea $\mathbb{R}e_1$ en $\mathbb{R}^{n+1}$. La involución de $O(n+1)$ definida por

$$\sigma(A) = s_1\, A\, {s_1}^{-1}$$

satisface que $\hat{K}^\circ \subset O(n) \subset \hat{K}$.

Ejemplo 2.3. Con respecto del producto escalar de Lorentz en $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$\langle x, y\rangle = -x_1y_1 + \sum_{i=2}^{n+1} x_iy_i,$$

escribimos al espacio hiperbólico n-dimensional como

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1};\, \langle x, x\rangle = -1,\, x_1 > 0\}.$$

Dotado de la métrica $\langle , \rangle$, éste es una variedad riemanniana de curvatura seccional constante -1.

El subgrupo matricial ortogonal asociado a $\langle , \rangle$,

$$O(1, n) = \{A \in M_{n+1}(\mathbb{R});\, \forall x, y \in \mathbb{R}^{n+1},\, \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle\},$$

actúa de manera transitiva en $\mathbb{H}^n$. El subgrupo de isotropía de e_1 nuevamente se identifica con $O(n)$, y vemos así al espacio hiperbólico n-dimensional como el cociente $O(1, n)/O(n)$.

En este caso la reflexión lorentziana en la línea $\mathbb{R}e_1$,

$$s_2(x) = -x + 2\langle x, e_1\rangle e_1,$$

define a la involución $A \mapsto s_2\, A\, {s_2}^{-1}$, la cual muestra que $\mathbb{H}^n$ es un espacio simétrico.

Ejemplo 2.4. $O(n+1) \times \mathbb{R}$ define a la acción transitiva en el espacio $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ dada por

$$(A, s) \times (x, t) \mapsto (Ax, t + s),$$

para $(A, s) \in O(n+1) \times \mathbb{R}$ y $(x, t) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$.

El subgrupo de isotropía de $(e_1, 0)$ es isomorfo a $O(n) \times \{0\}$, y la involución

$$(A, s) \mapsto (s_1\, A\, {s_1}^{-1}, -s)$$

satisface que $\hat{K}^\circ \subset O(n) \times \{0\} \subset \hat{K}$. Por lo anterior, $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ es un espacio simétrico.

Ejemplo 2.5. De manera análoga al caso anterior, la involución

$$(A, s) \mapsto (s_2\, A\, {s_2}^{-1}, -s)$$

exhibe a $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ como el espacio simétrico G/H, con $G = O(1, n) \times \mathbb{R}$ y $H = O(n) \times \{0\}$.

2.6. El haz tangente de un espacio simétrico

Si G/H es un espacio simétrico de involución $\sigma : G \to G$, podemos descomponer al álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en términos de los eigenespacios de $(\sigma_*)_e$. Si $\mathfrak{m}$ denota el eigenespacio que le corresponde al valor propio -1 entonces

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$$

es llamada la descomposición canónica de $\mathfrak{g}$. Se satisfacen las relaciones

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}, \quad \text{y} \quad [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}.$$

Es cierto además que el espacio $\mathfrak{m}$ es invariante por la representación adjunta de G en elementos de H; ésto es

$$\mathrm{Ad}_h(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m},$$

para aquellos $h \in H$ [13, pág. 226]. Podemos entonces considerar al haz asociado $G \times_H \mathfrak{m}$ del H-haz principal G con respecto a la acción izquierda de H en $\mathfrak{m}$ dada por $(h, w) \mapsto \mathrm{Ad}_h\, w$. Este haz nos ofrece una caracterización especial del haz tangente del espacio G/H.

Proposición 2.1. *El haz tangente del espacio simétrico $M := G/H$, $p : TM \to M$, es el haz vectorial $\tilde{\pi} : G \times_H \mathfrak{m} \to M$.*

Demostración. Definimos al mapeo

$$\begin{aligned} \varphi : \quad & G \times_H \mathfrak{m} \to TM \\ & [g, v] \mapsto (\pi(g), \pi_* L_{g_*} v). \end{aligned} \tag{2.1}$$

En un ligero abuso de notación, escribimos $g : M \to M$ para referirnos al difeomorfismo $g'H \mapsto gg'H$. Entonces $(\pi \circ L_g)(g') = gg'H = (g \circ \pi)(g')$; en particular, ésto significa que se satisface la igualdad

$$\pi_*\, L_{g*} = g_*\, \pi_*, \quad g \in G. \tag{2.2}$$

Notamos ahora que para $v \in \mathfrak{h}$, tenemos $L_{g_*}v \in T_g(gH) \subset \ker \pi_*$. Además,

$$\begin{aligned} \varphi[gh, \mathrm{Ad}_{h^{-1}}v] &= (\pi(gh), \pi_* L_{gh_*} \mathrm{Ad}_{h^{-1}}v) \\ &= (\pi(g), \pi_* L_{g_*} R_{h*}v) \\ &= (\pi(g), g_*(\pi R_h)_* v) = \varphi[g, v], \end{aligned}$$

donde usamos tanto la ecuación (2.2), como el hecho de que $\pi \circ R_h = \pi$ para $h \in H$. Por todo lo anterior, φ es un mapeo cociente bien definido. Para terminar, observamos que

$$p\varphi\,[g, v] = \pi(g) = \pi \mathrm{pr}_1\,(g, v) = \tilde{\pi}[g, v],$$

y que $\varphi\big|_{\tilde{\pi}^{-1}\{\pi(g)\}} : \mathfrak{m} \to T_{\pi(g)}M$ es el isomorfismo $v \mapsto \pi_* L_{g_*} v$.

□

Dado $x \in M$, φ sugiere que podemos establecer una correspondencia estándar entre los vectores en $\mathfrak{m}$ y T_xM. Supongamos que $x \in M$ y $g \in G$ son tales que $x = \pi(g)$, y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} T_g(gH) \arrow[r, "\omega_H"] \arrow[d] & \mathfrak{h} \arrow[d] \\ T_gG \arrow[r, "\omega_G"] \arrow[d, "\pi_*"'] & \mathfrak{g} \arrow[d, "p_{\mathcal{H}}"] \\ T_xM \arrow[r, "\varphi_g"] & \mathfrak{m}. \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

En este diagrama denotamos por $p_{\mathcal{H}}$ a la proyección horizontal de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{m}$. Las columnas describen secuencias exactas, y los primeros dos renglones son isomorfismos, por lo que existe un isomorfismo φ_g que hace que el diagrama conmute.

En general, si escogemos otro punto en G sobre x, digamos gh, entonces obtendremos un isomorfismo distinto, $\varphi_{gh} : T_xM \to \mathfrak{m}$. En cierto sentido, la siguiente proposición nos permitirá subsanar este defecto.

Proposición 2.2. *Para cada punto $g \in G$ tal que $\pi(g) = x$ existe un isomorfismo $\varphi_g : T_xM \to \mathfrak{m}$. Estas transformaciones satisfacen que*

$$\varphi_{gh} = Ad_{h^{-1}} \varphi_g. \tag{2.4}$$

Demostración. Ya probamos la existencia de tales isomorfismos, sólo nos resta mostrar la validez de la ecuación (2.4).

Como $\pi \circ R_h = \pi$ para $h \in H$ y π es una submersión, si $v \in T_xM$ podemos escribir $v = \pi_{*g}\, u = \pi_{*gh}(R_{h*}\, u)$ para algún $u \in T_gG$. Entonces,

$$\begin{aligned}\varphi_{gh}(v) &= \varphi_{gh}(\pi_{*gh}\, R_{h*}\, u) \\ &= p_{\mathcal{H}}(\omega_G(R_{h*}\, u),\end{aligned}$$

en donde la relación $\varphi_{gh}\,\pi_* = p_{\mathcal{H}}\,\omega_G$ proviene del diagrama conmutativo (2.3).

Recordamos ahora que $R_h^*\,\omega_G = \mathrm{Ad}_{h^{-1}}\omega_G$, y que $\mathfrak{m}$ es Ad_H-invariante, para llegar a la igualdad

$$\begin{aligned}\varphi_{gh}(v) &= \mathrm{Ad}_{h^{-1}} p_{\mathcal{H}}(\omega_G(u)) \\ &= \mathrm{Ad}_{h^{-1}} \varphi_p(\pi_{*g}(u)) = \mathrm{Ad}_{h^{-1}} \varphi_g(v).\end{aligned}$$

□

El isomorfismo de haces φ de (2.1) nos permite definir una conexión distinguida en M. Sea $\alpha : TG \to \mathfrak{h}$ la proyección de la forma de Maurer-Cartan de G en $\mathfrak{h}$. Localmente, escribimos a un campo vectorial Z en M como

$$Z = [s, \underline{Z}],$$

donde $s :\ M \supset U \to G$ es una sección local del haz principal $\pi :\ G \to M$, y $\underline{Z}$ es una función definida en U y valuada en $\mathfrak{m}$. Con esta notación, definimos a la derivada covariante canónica por

$$\nabla_X Z = [s, \partial_X \underline{Z} + \mathrm{ad}(s^*\alpha(X))(\underline{Z})]. \tag{2.5}$$

Esta derivada covariante es aquella que induce la forma de conexión $\alpha : TG \to \mathfrak{h}$ en el haz asociado a $G \times_H \mathfrak{m}$.

2.7. Espacios simétricos riemannianos

La derivada covariante que definimos en la ecuación (2.5) también coincide con la conexión de Levi-Civita de cualquier métrica G-invariante en M [13, Teorema 3.3]. Es común producir a tal métrica como el descenso de una métrica en G que sea invariante por traslaciones izquierdas.

En este caso, la métrica en M está definida de manera que la acción natural de G en M,

$$(g_1, g_2H) \mapsto g_1g_2H,$$

sea una isometría, y que el mapeo

$$\pi_*\big|_{\mathcal{H}_g} :\ \mathcal{H}_g \to T_{\pi(g)}M, \qquad g \in G,$$

sea una isometría lineal.

En los espacios simétricos G/H que consideraremos, la métrica en G será inducida por un mapeo distinguido de $\mathfrak{g}$: la forma de Killing.

Para un grupo de Lie G, definimos a la forma de Killing en $\mathfrak{g}$ por

$$\begin{aligned} B: \quad & \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R} \\ & (X, Y) \mapsto \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Y); \end{aligned}$$

ésta es claramente bilineal y simétrica.

Decimos que una transformación $\kappa : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es un automorfismo de Lie en $\mathfrak{g}$ si es un isomorfismo que además satisface

$$[\kappa X, \kappa Y] = \kappa[X, Y]$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Si κ es un automorfismo de Lie, entonces

$$\operatorname{ad}(\kappa X)(Y) = [\kappa X, Y] = \kappa[X, \kappa^{-1}Y] = (\kappa \circ \operatorname{ad} X \circ \kappa^{-1})(Y),$$

y tenemos

$$B(\kappa X, \kappa Y) = tr(\kappa \circ \operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Y \circ \kappa^{-1}) = B(X, Y).$$

Lo anterior significa que B es invariante bajo automorfismos de Lie. Como en particular, dado $g \in G$, la representación adjunta Ad_g es un automorfismo de Lie, concluimos que la forma de Killing es Ad-invariante.

Necesitaremos de una propiedad más de la forma B. Aunque tediosa, la demostración de la siguiente proposición es mecánica. Se puede consultar una prueba en el libro [2, Proposición 2.10].

Proposición 2.3. *Sea B la forma de Killing de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Entonces para todo $Z \in \mathfrak{g}$, $ad\, Z$ es anti-simétrica con respecto de B; es decir, para $X, Y \in \mathfrak{g}$,*

$$B(ad\, Z(X), Y) = -B(X, ad\, Z(Y)).$$

Nota. Podemos reescribir la ecuación anterior como

$$B([X, Z], Y) = B(X, [Z, Y]).$$

Usaremos esta igualdad cuando consideremos la forma diferencial cuadrática inducida por la aplicación de Gauss.

2.8. Curvatura

El isomorfismo $\pi_* : TG \to T(G/H)$ nos permitirá escribir al endomorfismo de curvatura en G/H en términos del corchete de Lie en $\mathfrak{g}$;

aprovecharemos este hecho cuando estudiemos la diferencial de nuestra nueva aplicación de Gauss.

En un espacio simétrico G/H, un vector $X \in \mathfrak{g}$ define al campo vectorial X^* determinado por

$$X^*(p) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Big[(\exp tX)(p)\Big]$$

para $p \in G/H$.

Proposición 2.4. *X^* es un campo vectorial de Killing en G/H.*

Demostración. Recordemos que un campo vectorial es de Killing si y sólo si sus grupos uni-paramétricos locales asociados consisten de isometrías. Sabemos que la acción izquierda de G en G/H define una isometría. Ésto significa que para todo t fijo, el flujo de X^*,

$$p \mapsto (\exp tX)(p),$$

preserva la métrica; entonces la proposición se sigue de inmediato. □

Notemos ahora que si $g \in G$ es tal que $p = \pi(g)$, entonces

$$(\exp tX)(p) = \pi(L_{\exp tX}(g)) = \pi(R_g(\exp tX)),$$

y por tanto, tenemos

$$X^*(p) = \pi_* \, R_{g_*} X. \tag{2.6}$$

Es decir, el campo de Killing X^* es la imagen por $\pi_* : TG \to T(G/H)$ del campo invariante por la derecha de G inducido por X.

La siguiente proposición nos ayudará a hacer cálculos en el espacio simétrico G/H. Una demostración de ésta se encuentra en el libro [13], en el contexto más general de los espacios homogéneos. En lo que sigue, denotaremos $p_0 := eH \in G/H$.

Proposición 2.5. *Sea G/H un espacio simétrico. Con respecto de la conexión canónica en G/H, se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *Para $X \in \mathfrak{m}$, el transporte paralelo a lo largo de la curva $\pi(\exp tX)$ coincide con la diferencial de la tranformación*

$$p \mapsto (\exp tX)p, \qquad p \in G/H.$$

2. *Para cada $X \in \mathfrak{m}$, $\pi(\exp tX)$ es una geodésica por el punto p_0.*

Aún necesitamos de otro resultado preliminar para calcular la expresión del endomorfismo de curvatura en los espacios simétricos.

Proposición 2.6. *Sea G/H un espacio simétrico. Entonces se satisfacen las propiedades siguientes:*

1. $\nabla_v X^*(p_0) = 0$ *para todo* $X \in \mathfrak{m}$, $v \in T_{p_0}(G/H)$;

2. $X^*(p_0) = 0$ *para todo* $X \in \mathfrak{h}$.

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{m}$, y sea $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ una curva tal que $\gamma'(0) = v$, entonces

$$\begin{aligned}\nabla_v X^*(p) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial t}(\exp tX)\gamma(s)\\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial s}(\exp tX)\gamma(s) = 0,\end{aligned}$$

pues por la Proposición 2.5, $\frac{\partial}{\partial s}(\exp tX)\gamma(s)$ es un campo vectorial paralelo sobre $\pi(\exp tX)$.

Supongamos ahora que $X \in \mathfrak{h}$; se sigue que

$$X^*(p_0) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\exp tX)p_0.$$

Como el mapeo exponencial en $\mathfrak{h}$ es la restricción de la exponencial en $\mathfrak{g}$, $\exp tX \in H$, y por tanto

$$X^*(p_0) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} p_0 = 0.$$

□

Llegamos al resultado principal de esta sección. Notamos que la siguiente proposición solamente describe explícitamente al tensor de curvatura en G/H para vectores en $T_{p_0}(G/H)$.

Proposición 2.7. *El tensor de curvatura de* G/H *satisface*

$$R_{p_0}(X^*, Y^*)Z^* = -[[X^*, Y^*], Z^*](p_0). \tag{2.7}$$

Demostración. Para $V \in \mathfrak{m}$, consideremos la geodésica $c(t) := \pi(\exp tV)$. Tenemos

$$\begin{aligned}V^*(c(t)) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (\exp sV)(\pi(\exp tV))\\ &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \pi((\exp sV)(\exp tV))\\ &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \pi(\exp (s+t)V) = c'(t).\end{aligned} \tag{2.8}$$

Si tomamos $X \in \mathfrak{m}$, X^* es un campo de Killing, y por lo tanto es también un campo de Jacobi a lo largo de c. Por el desarrollo en (2.8), podemos escribir la ecuación de Jacobi correspondiente como

$$\nabla_{V^*}\nabla_{V^*}X^* + R(X^*, V^*)V^* = 0.$$

Para $Y, Z \in \mathfrak{m}$, si sustituimos $V = Y + Z$ en la expresión anterior, llegamos a que

$$\nabla_{Y^*}\nabla_{Z^*}X^* + \nabla_{Z^*}\nabla_{Y^*}X^* + R(X^*, Y^*)Z^* + R(X^*, Z^*)Y^* = 0.$$

Se sigue por la identidad de Bianchi que

$$\nabla_{Y^*}\nabla_{Z^*}X^* + \nabla_{Z^*}\nabla_{Y^*}X^* + 2R(X^*, Y^*)Z^* + R(Y^*, Z^*)X^* = 0. \quad (2.9)$$

Ahora recordemos la igualdad

$$R(Y^*, Z^*)X^* = \nabla_{Y^*}\nabla_{Z^*}X^* - \nabla_{Z^*}\nabla_{Y^*}X^* - \nabla_{[Y^*,Z^*]}X^*; \quad (2.10)$$

como $[Y^*, Z^*] = -[Y, Z]^*$ [8, Proposición D.16], y $[Y, Z] \in \mathfrak{h}$, la Proposición 2.6 implica que $[Y^*, Z^*](p_0) = 0$. Entonces, si sustituimos (2.10) en (2.9) deducimos

$$\nabla_{Y^*}\nabla_{Z^*}X^*(p_0) + R_{p_0}(X^*, Y^*)Z^* = 0. \quad (2.11)$$

Si usamos la ecuación (2.11), finalmente podemos obtener

$$\begin{aligned} R_{p_0}(X^*, Y^*)Z^* &= -R_{p_0}(Y^*, Z^*)X^* + R_{p_0}(X^*, Z^*)Y^* \\ &= \nabla_{Z^*}\nabla_{X^*}Y^*(p_0) - \nabla_{Z^*}\nabla_{Y^*}X^*(p_0) \\ &= \nabla_{Z^*}[X^*, Y^*](p_0) \\ &= \nabla_{[X^*,Y^*]}Z^*(p_0) - [[X^*, Y^*], Z^*](p_0) \\ &= -[[X^*, Y^*], Z^*](p_0), \end{aligned}$$

donde usamos que $[X^*, Y^*](p_0) = 0$. □

Nota. Dado $v \in T_{p_0}M$, existe $X \in \mathfrak{m}$ tal que $v = \pi_* X$. Se sigue que la geodésica $\pi(\exp tX)$ cumple

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \pi(\exp tX) = \pi_* X = v.$$

De lo anterior concluimos que el mapeo exponencial de G/H está definido sobre todo $T_{p_0}(G/H)$ y por tanto, como consecuencia del teorema de Hopf-Rinow, tenemos que G/H es geodésicamente completo.

Aunque la ecuación (2.7) sólo describe al tensor de curvatura en el punto p_0, en cierto sentido podemos extenderla al resto de los puntos de G/H. Primero necesitamos producir una expresión que relacione el corchete de Lie en G/H con el corchete de $\mathfrak{g}$:

Proposición 2.8. *Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$. Para $eH \in G/H$, se cumple la relación*

$$[[X^*, Y^*], Z^*](eH) = [e, [[X, Y], Z]]. \quad (2.12)$$

Demostración. Antes de empezar, notemos que la ecuación anterior tiene sentido, pues $[X,Y] \in [\mathfrak{m},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$, y a la vez $[[X,Y],Z] \in [\mathfrak{h},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$.

Ahora observamos que

$$\begin{aligned} X^*(eH) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\exp tX)eH \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\exp tX)\pi(e) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \pi(\exp tX) = \pi_* L_{e*} X. \end{aligned}$$

Entonces, con nuestra identificación por el isomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : \quad & G \times_H \mathfrak{m} \to TM \\ & [g,v] \mapsto (\pi(g), \pi_* L_{g*} v), \end{aligned}$$

tenemos

$$X^*(eH) = [e, X]. \tag{2.13}$$

Para terminar, la ecuación anterior y la relación $[X^*, Y^*] = -[X,Y]^*$ nos permiten escribir

$$\begin{aligned} [[X^*,Y^*],Z^*](eH) &= -[[X,Y]^*, Z^*](eH) \\ &= [[X,Y],Z]^*(eH) = [e,[[X,Y],Z]]. \end{aligned}$$

$\square$

Dado $g \in G$, recordemos que el mapeo

$$\begin{aligned} g : \quad & G/H \to G/H \\ & g'H \mapsto gg'H. \end{aligned}$$

es una isometría. Puntualmente, su expresión en el haz $G \times_H \mathfrak{m}$ está determinada por el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} (\pi(g'), \pi_* L_{g'*} v) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\varphi"'] & (\pi(gg'), \pi_* L_{gg'*} v) \arrow[d, "\varphi"] \\ {[g', v]} \arrow[r, "g_*"] & {[gg', v],} \end{tikzcd} \tag{2.14}$$

donde usamos implícitamente la relación $g \circ \pi = \pi \circ L_g$.

Ahora estamos en condiciones de extender nuestra expresión para el tensor de curvatura. Usaremos la notación

$$X := [g, \underline{X}],\ Y := [g, \underline{Y}],\ Z := [g, \underline{Z}] \in T_{gH} G/H;$$

definimos también

$$X_0 := [e, \underline{X}],\ Y_0 := [e, \underline{Y}],\ Z_0 := [e, \underline{Z}] \in T_{eH}G/H.$$

Entonces el diagrama (2.14) establece que $g_* X_0 = X$, junto con otras relaciones análogas para Y_0 y Z_0.

Proposición 2.9. *Con respecto de la notación anterior, se cumple que*

$$R_{gH}(X, Y)Z = [g, -[[\underline{X}, \underline{Y}], \underline{Z}]] \tag{2.15}$$

para $gH \in G/H$.

Demostración. Como $g : G/H \to G/H$ es una isometría,

$$R_{gH}(X, Y)Z = g_* R_{eH}(X_0, Y_0)Z_0.$$

Pero al tener $X_0 = [e, \underline{X}] = \underline{X}^*(eH)$, es cierto que

$$\begin{aligned} R_{eH}(X_0, Y_0)Z_0 &= R_{eH}(\underline{X}^*, \underline{Y}^*)\underline{Z}^* \\ &= -[[\underline{X}^*, \underline{Y}^*], \underline{Z}^*](eH) \\ &= [e, -[[\underline{X}, \underline{Y}], \underline{Z}]], \end{aligned}$$

donde usamos la ecuación (2.12) y la expresión para la curvatura en $p_0 := eH$ que ya conocemos. Concluimos la prueba con las igualdades

$$R_{gH}(X, Y)Z = g_* [e, -[[\underline{X}, \underline{Y}], \underline{Z}]] = [g, -[[\underline{X}, \underline{Y}], \underline{Z}]].$$

□

Capítulo 3

Diferencial de Hopf

3.1. Conceptos básicos

Para introducir a la diferencial de Hopf, recordamos la notación clásica para la primera y segunda forma fundamental de una superficie. Después de definir a la curvartura de Gauss y a la curvatura media, terminamos por enunciar un teorema sobre superficies totalmente umbilicales.

Sea $(N, \langle, \rangle)$ una variedad riemanniana tres-dimensional, y sea M una superficie de N . Si ∇^M y ∇^N denotan las conexiones de Levi-Civita en estas variedades, entonces

$$\nabla^M_X Y = (\nabla^N_X Y)^T$$

para $X, Y \in \Gamma(TM)$, donde T representa la proyección $TN \to TM$.

En coordenadas locales, escribimos a la métrica de N como $(g_{ij})_{i,j=1,2,3}$. Entonces denotamos

$$E = g_{11}, \quad F = g_{12}, \quad G = g_{22},$$

para emplear la notación clásica de la primera forma fundamental en M:

$$I = E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2.$$

Con respecto a un campo vectorial unitario

$$\eta : M \to TM^\perp,$$

escribimos al operador de forma en M como

$$\begin{aligned} A_\eta : \quad & T_xM \to T_xM \\ & X \mapsto -(\nabla^N_X \eta)^T \end{aligned}$$

para $x \in M$. La segunda forma fundamental de M es la forma bilineal simétrica definida para $X, Y \in \Gamma(TM)$ por

$$II(X, Y) = -\langle A_\eta(X), Y\rangle.$$

En una parametrización $S(x,y)$, designamos

$$L = -\langle S_x, \eta_x \rangle, \quad M = -\langle S_x, \eta_y \rangle, \quad \text{y} \quad N = -\langle S_y, \eta_y \rangle;$$

así podemos escribir a la segunda forma fundamental como:

$$II = Ldx^2 + 2Mdxdy + Ndy^2.$$

Para relacionar la primera y segunda forma fundamental usamos las ecuaciones de Codazzi-Mainardi:

$$\begin{aligned} L_y - M_x &= \Gamma^1_{12}L + (\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11})M - \Gamma^2_{11}N, \\ M_y - N_x &= \Gamma^1_{22}L + (\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{21})M - \Gamma^2_{21}N, \end{aligned}$$

con

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{il}(g_{jl,k} + g_{kl,j} - g_{jk,l}),$$

los símbolos de Christoffel en M.

Como el operador de forma es auto-adjunto con respecto a la métrica en M, sus dos eigenvalores son reales. Los denotamos por k_1 y k_2, y les llamamos las curvaturas principales de M. La curvatura de Gauss de M es

$$K = k_1k_2,$$

y su curvatura media

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Clasificamos los puntos de una superficie de acuerdo a los valores de las curvaturas principales. En particular, decimos que un punto $x \in M$ es umbílico si satisface que

$$k_1(x) = k_2(x).$$

En un punto umbílico la segunda forma fundamental es proporcional a la métrica, y la superficie parece curvearse en todas las direcciones de la misma manera. Cuando todos los puntos en una superficie son umbílicos decimos que ésta es una superficie totalmente umbilical.

El siguiente teorema bien conocido determina a las superficies totalmente umbilicales en los espacios euclidianos. Una prueba elemental se encuentra, por ejemplo, en el libro de Montiel y Ros [17].

Teorema 3.1 (Clasificación de superficies completamente umbilicales). *Las únicas superficies completas totalmente umbilicales que están inmersas en $\mathbb{R}^3$ son los planos y las esferas.*

3.2. Superficies de Riemann

Nuestro tratamiento de la diferencial de Hopf y de la forma diferencial cuadrática que induce la aplicación de Gauss se beneficia del estudio de superficies parametrizadas en los complejos.

Una estructura compleja en una variedad $2n$-dimensional es un atlas de cartas $\{U_j, z_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ que satisface:

1. $z_j : U_j \to \mathbb{C}^n$ es un homeomorfismo en un subconjunto abierto de $\mathbb{C}^n$;

2. si $U_j \cap U_k \neq \varnothing$, entonces la función de transición $z_k {z_j}^{-1} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ es holomorfa.

Llamamos a una 2-variedad con una estructura compleja una superficie de Riemann.

En este caso, escribimos a las coordenadas de una carta (z, U) en M como $z = x + iy$. Definimos además a los operadores

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

y a las formas

$$dz := dx + idy, \quad d\bar{z} := dx - idy.$$

3.3. Estructura compleja inducida

El propósito de esta sección es garantizar la existencia de un atlas de coordenadas isotérmicas en una superficie de Riemann. En estas coordenadas, de las ecuaciones de Codazzi podremos inferir información significativa sobre la diferencial de Hopf. Nuestro desarrollo de estructuras casi complejas sigue al libro de Jensen et al. [10].

Dado un espacio vectorial real V de dimensión $2n$, decimos que una transformación lineal $J : V \to V$ es una estructura compleja en V si ésta satisface que $J^2 = -\mathrm{Id}$. Notamos que podemos definir una estructura compleja en V si contamos con un isomorfismo $\mathbb{R}$-lineal

$$\varphi : V \to \mathbb{C}^n.$$

Este isomorfismo define a la estructura compleja J en V dada por

$$J(v) := \varphi^{-1} i \varphi(v), \qquad v \in V,$$

donde $i : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ representa a la multiplicación por i.

Una estructura casi compleja en una superficie M es un $(1,1)$-tensor J de M tal que, para todo $p \in M$, $J_p : T_pM \to T_pM$ es una estructura compleja en T_pM.

De manera análoga al caso de un espacio vectorial, una 1-forma compleja φ definida en un abierto $U \subset M$ induce una estructura casi compleja en U si

$$\varphi_p : T_pM \to \mathbb{C}$$

es un isomorfismo $\mathbb{R}$-lineal para todo punto $p \in U$.

Para definir una estructura casi compleja en todo M, necesitamos de una cubierta $\{U_j, \varphi_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ compuesta por 1-formas φ_j definidas en U_j que además satisfagan, siempre que $U_j \cap U_k \neq \varnothing$,

$$\varphi_j = a_{jk}\varphi_k \tag{3.1}$$

para un mapeo $a_{jk} : U_j \cap U_k \to \mathbb{C}^*$.

Como es de esperarse, una estructura compleja en una superficie induce una estructura casi compleja; en una carta (U, z) alrededor de $p \in M$, su descripción local es

$$J_p : T_pM \to T_pM,$$
$$J_p = dz_p^{-1} \circ i \circ dz_p.$$

Las formas dz_j satisfacen la condición de regularidad (3.1), pues tenemos que

$$dz_j = \frac{\partial z_j}{\partial z_k} dz_k,$$

y el requisito (2) de la definición de estructura compleja implica que el mapeo

$$\frac{\partial z_j}{\partial z_k} : U_j \cap U_k \to \mathbb{C}$$

es suave e invertible.

Dada M una superficie de Riemann orientable con métrica I, decimos que un comarco ortonormal en $U \subset M$, $\theta := (\theta^1, \theta^2)$, es orientado si

$$\theta^1 \wedge \theta^2(X_1, X_2) > 0$$

para todo marco (X_1, X_2) de orientación positiva en U.

De ser así, la 1-forma compleja

$$\psi = \theta^1 + i\theta^2$$

define para todo $p \in M$ al isomorfismo $\psi_p : T_pM \to \mathbb{C}$, y por lo tanto induce una estructura casi compleja en U. Si $\tilde{\theta} := (\tilde{\theta}^1, \tilde{\theta}^2)$ es otro comarco ortonormal orientado en un abierto $\tilde{U} \subset M$, con $U \cap \tilde{U} \neq \varnothing$, entonces

$$\tilde{\theta} = A \cdot \theta$$

para algún mapeo $A : U \cap \tilde{U} \to SO(2)$. Escribimos $A = (a_{ij})$; podemos asumir que $a_{12} + ia_{22} = i(a_{11} + ia_{21})$. Con esta notación, la 1-forma que induce $\tilde{\theta}$ cumple

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} := \tilde{\theta}^1 + i\tilde{\theta}^2 &= (a_{11}\,\theta^1 + a_{12}\,\theta^2) + i(a_{21}\,\theta^1 + a_{22}\,\theta^2) \\ &= (a_{11} + ia_{21})\theta^1 + (a_{12} + ia_{22})\theta^2 \\ &= (a_{11} + ia_{21})\psi. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Como la función

$$a_{11} + ia_{21} : U \cap \tilde{U} \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^*$$

es suave, la ecuación (3.2) describe exactamente la condición de regularidad (3.1), y deducimos que una cubierta de M por comarcos ortonormales orientados define una estructura casi compleja. Se satisface además que

$$I = \psi\overline{\psi},$$

por lo que se dice que la estructura casi compleja resultante está inducida por I.

Siempre es posible definir una estructura compleja que en cierto sentido sea compatible con la métrica. Para una prueba elemental del siguiente teorema puede consultarse el artículo de Chern [3].

Teorema 3.2 (Korn-Lichtenstein)**.** *Si M es una superficie orientable de métrica I entonces cuenta con una estructura compleja que induce la misma estructura casi compleja que I. También, en una carta (U, z) tenemos*

$$I = e^{2u} dz d\bar{z}, \tag{3.3}$$

con $u : U \to \mathbb{R}$ una función suave.

En una carta de este estilo los parámetros x, y satisfacen que

$$I = E(dx^2 + dy^2).$$

Resumimos esta situación diciendo que (x, y) son coordenadas locales isotérmicas en M.

En un sistema de coordenadas isotérmicas se cumple

$$\begin{aligned} K &= k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{E^2}, \\ H &= \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{L + N}{2E}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Además, podemos escribir las ecuaciones de Codazzi como

$$\begin{aligned} \left(\frac{L - N}{2}\right)_x + M_y &= EH_x, \\ \left(\frac{L - N}{2}\right)_y + M_x &= -EH_y. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Gracias al teorema anterior, siempre podemos introducir un atlas de parámetros isotérmicos en una superficie riemanniana orientable.

3.4. Teorema de Hopf

En esta sección restringimos nuestra discusión a superficies en $\mathbb{R}^3$. Sabemos que la esfera es una superficie compacta con genero 0 y de curvatura media constante; el teorema de Hopf afirma que no podemos esperar encontrar otra superficie con estas características.

Definimos a la función compleja

$$\phi(z) := \frac{L-N}{2} - iM. \tag{3.6}$$

Entonces la diferencial de Hopf es la forma diferencial cuadrática

$$\mathcal{A} := 2\phi\, dz^2. \tag{3.7}$$

La condición de que la curvatura media de la superficie sea constante es equivalente a que

$$H_x = H_y = 0.$$

En este caso, las ecuaciones de Codazzi (3.5) se convierten en las ecuaciones de Cauchy-Riemann para las partes real e imaginaria de ϕ. Resumimos lo anterior en el siguiente resultado:

Corolario 3.3. *La curvatura media de una superficie es constante si y sólo si la diferencial de Hopf es holomorfa.*

Notemos que las ecuaciones (3.4) implican que

$$|\phi| = \frac{E}{2}\,|k_1 - k_2|, \tag{3.8}$$

por lo que los puntos en los que se anula $\mathcal{A}$ son exactamente los puntos umbílicos de M. Con esta última observación podemos demostrar el teorema principal de esta sección.

Teorema 3.4 (Hopf)**.** *Sea M una superficie compacta de género 0 y con curvatura media constante en $\mathbb{R}^3$. Entonces M es la esfera estándar.*

Demostración. La curvatura media constante de M implica que la diferencial de Hopf es holomorfa. Pero al ser M una superficie cerrada de género 0, la única diferencial cuadrática holomorfa que existe sobre ella es la trivial [9, Teorema 2.6]. Como $\mathcal{A}$ es idénticamente cero, la observación (3.8) nos dice que todo punto de M es umbílico. Concluimos al recordar que las únicas superficies totalmente umbilicales en $\mathbb{R}^3$ son planos o esferas. □

Capítulo 4

Mapeos armónicos entre variedades

En esta sección definimos a las aplicaciones armónicas entre variedades riemannianas de dos maneras: como los puntos críticos de un funcional lineal, y en términos de una sección distinguida que llamaremos el campo de tensión. Después de probar la equivalencia entre ambas definiciones, concluimos al mencionar un criterio para reconocer a los mapeos armónicos valuados en una esfera euclidiana. Nuestra presentación es la del libro de Jost [12].

Sean M y N variedades orientables de dimensión m y n respectivamente, con tensores métricos

$$(\gamma_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=1,\dots,m} \quad y \quad (g_{ij})_{i,j=1,\dots,n}.$$

Para una función real valuada ϕ definida en un abierto de la variedad M, escribimos al operador de Laplace-Beltrami de M como

$$\Delta_M \phi = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{\gamma} \gamma^{\alpha\beta}(x) \frac{\partial \phi}{\partial x^\beta} \right), \tag{4.1}$$

donde

$$\gamma = \det(\gamma_{\alpha\beta}).$$

Dada una aplicación $f : M \to N$ y $x \in M$, aprovechamos el isomorfismo $\mathrm{Hom}(T_x M, T_{f(x)} N) \simeq T_x M^* \otimes T_{f(x)} N$ para escribir a f_* como una sección del haz $T^*M \otimes f^*TN$ sobre M,

$$f_* = \frac{\partial f_i}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial f^i},$$

para coordenadas locales $(x^1, ..., x^m)$ en M y $(f^1, ..., f^n)$ en N.

En el haz T^*M consideramos la métrica

$$(\gamma^{\alpha\beta}(x))_{\alpha,\beta=1,\dots,m} = (\gamma_{\alpha\beta}(x))^{-1}_{\alpha,\beta=1,\dots,m},$$

y en el haz f^*TN, la métrica $(g_{ij}(f(x)))_{i,j=1,\ldots n}$. Entonces la métrica inducida en $TM^* \otimes f^*TN$ está dada por

$$\langle dx^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial f^i}, dx^\beta \otimes \frac{\partial}{\partial f^j}\rangle = \gamma^{\alpha\beta}(x) g_{ij}(f(x)).$$

Con respecto de esta métrica, definimos la densidad de energía del mapeo f como

$$e(f) = \frac{1}{2}||f_*||^2,$$

y a su energía por

$$E(f) = \int_M e(f) dM,$$

donde dM es la forma de volumen en M.

Decimos que un mapeo $f : M \to N$ es armónico si es un punto crítico del funcional de Dirichlet E; ésto equivale a ser solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas. En coordenadas locales, éstas son de la forma

$$\Delta_M f^i + \gamma^{\alpha\beta}(x)\Gamma^i_{jk}(f(x))\frac{\partial}{\partial x^\alpha} f^j \frac{\partial}{\partial x^\beta} f^k = 0. \tag{4.2}$$

Como consecuencia de la formulación variacional de la definición, vemos que la propiedad de ser un mapeo armónico no depende de las coordenadas locales.

Las conexiones de Levi-Civita en M y N inducen naturalmente una conexión en el haz $T^*M \otimes f^*TN$. Escribimos a ésta última simplemente como ∇. Para llegar a una definición intrínseca de armonicidad, mostramos que:

Proposición 4.1. *Las soluciones del sistema de ecuaciones (4.2) de Euler-Lagrange de E son aquellas transformaciones que satisfacen*

$$\tau(f) := \mathit{traza}\, \nabla f_* = 0. \tag{4.3}$$

Demostración. En coordenadas locales, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\beta}} f_* &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\beta}} \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial f^i} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha}\right) dx^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial f^i} + \left(\nabla^{T^*M}_{\frac{\partial}{\partial x^\beta}} dx^\alpha\right) \otimes \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial f^i}\right) \\
&+ \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha} dx^\alpha\right) \otimes \left(\nabla^{f^*TN}_{\frac{\partial}{\partial x^\beta}} \frac{\partial}{\partial f^i}\right) \\
&= \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} dx^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial f^i} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha} dx^\gamma \otimes \frac{\partial}{\partial f^i} \\
&+ \Gamma^k_{ij} \frac{\partial f^j}{\partial x^\beta} \frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial f^k}.
\end{aligned}$$

Las componentes de $\tau(f)$ son entonces

$$\tau^i(f) = \gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \gamma^{\alpha\beta}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial f^i}{\partial x^\gamma} + \gamma^{\alpha\beta}\Gamma^i_{jk}\frac{\partial f^j}{\partial x^\alpha}\frac{\partial f^k}{\partial x^\beta}.$$

El operador de Laplace-Beltrami en M satisface

$$\Delta_M = \gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \gamma^{\alpha\beta}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\gamma}.$$

Ésto último nos permite escribir a las componentes de $\tau(f)$ como

$$\tau^i(f) = \Delta_M f^i + \gamma^{\alpha\beta}\Gamma^i_{jk}\frac{\partial f^j}{\partial x^\alpha}\frac{\partial f^k}{\partial x^\beta},$$

lo cual implica que las ecuaciones (4.2) son equivalentes a (4.3). $\square$

Llamamos a la sección $\tau(f) \in \Gamma(f^*TN)$ el campo de tensión de f. Podemos observar en la demostración anterior que el operador de Laplace-Beltrami en las ecuaciones de Euler-Lagrange (4.2) es la contribución de la conexión ∇^{T^*M}, y cómo el término con los símbolos de Christoffel surge de ∇^{f^*TN}.

Cuando N es una subvariedad de algún espacio euclidiano $\mathbb{R}^m$, un mapeo $f : M \to N$ es armónico si y sólo si satisface que

$$\Delta_M f(x) \perp T_{f(x)}N \tag{4.4}$$

para todo $x \in M$, donde

$$\Delta_M f = \sum_{i=1}^m \Delta_M \langle f, e_i\rangle e_i.$$

Una prueba de esta afirmación en un contexto más general se encuentra en el libro de Hélein [7].

Como ejemplo, consideramos mapeos que toman valores en la esfera unitaria de algún espacio euclidiano.

Para $u : (M, g) \to \mathbb{S}^n$, se cumple

$$0 = \Delta|u|^2 = 2\langle u, \Delta u\rangle + 4e(u), \tag{4.5}$$

con

$$e(u) = \frac{1}{2}g^{ij}(x)\langle\frac{\partial u}{\partial x^i}, \frac{\partial u}{\partial x^j}\rangle.$$

Denotamos por P_u a la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^{n+1}$ en $T_{u(x)}\mathbb{S}^n$, y por $P_u^\perp$ a la proyección en $(T_{u(x)}\mathbb{S}^n)^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Como el subespacio ortogonal a $\mathbb{S}^n$ en $u(x)$ es $\mathbb{R}u(x)$, es cierto que

$$P_u^\perp(\Delta u) = \langle u, \Delta u\rangle u = -2e(u)u,$$

donde usamos la igualdad (4.5).

Si u es una transformación armónica, $P_u(\Delta u) = 0$, y al considerar el hecho $P_u + P_u^{\perp} = \mathrm{Id}$, tenemos

$$\Delta u + 2e(u)u = 0. \tag{4.6}$$

Es cierto el converso de este resultado; probar esta afirmación nos ofrece una caracterización de los mapeos armónicos valuados en esferas que nos será útil para extender el teorema de Ruh-Vilms a espacios simétricos.

Proposición 4.2. *Sea M una variedad riemanniana. Una aplicación $u : M \to \mathbb{S}^n$ es armónica si y sólo si*

$$\Delta u = \lambda u \tag{4.7}$$

para alguna $\lambda : M \to \mathbb{R}$.

Demostración. Ya probamos que los mapeos armónicos $u : M \to \mathbb{S}^n$ satisfacen la ecuación (4.7) para $\lambda = -2e(u)$. Por otra parte, si suponemos que $\Delta u = \lambda u$, se cumple

$$P_u^{\perp}(\Delta u) = P_u^{\perp}(\lambda u) = \lambda u,$$

por lo que u satisface la condición de armonicidad que establece (4.4). $\square$

Capítulo 5

Aplicación de Gauss en espacios simétricos

Ahora definimos la aplicación de Gauss de una hipersuperficie en un espacio simétrico, y la estudiamos en la familia de espacios simétricos que nos interesa. También escribimos una fórmula para la diferencial de la aplicación de Gauss en términos del endomorfismo de curvatura.

Sea (G, H, σ) un espacio simétrico, y sea M una hipersuperficie del espacio G/H. Recordemos que el haz tangente de G/H es equivalente al haz asociado $G \times_H \mathfrak{m}$ que define la siguiente representación de H en $\mathfrak{m}$:

$$\begin{aligned} \rho_H : \quad & H \to GL(\mathfrak{m}) \\ & h \mapsto \mathrm{Ad}_h. \end{aligned}$$

Podemos extender a ρ_H por la representación adjunta de G en $\mathfrak{g}$. En términos de la Proposición 1.1, ésto significa que el haz $G \times_H \mathfrak{g}$ es equivalente al haz trivial $G/H \times \mathfrak{g}$ por el isomorfismo

$$\begin{aligned} \Gamma : \quad & G \times_H \mathfrak{g} \to G/H \times \mathfrak{g} \\ & [g, v] \mapsto (gH, \mathrm{Ad}_g v). \end{aligned}$$

Supongamos ahora que M está orientada por un campo vectorial normal unitario η. Definimos entonces a la aplicación de Gauss de M como

$$\begin{aligned} \mathcal{N} : \quad & M \to \mathfrak{g} \\ & p \to \Gamma(\eta(p)), \end{aligned} \tag{5.1}$$

para $\eta(p) \in T(G/M) = G \times_H \mathfrak{m}$. Vemos entonces que la aplicación de Gauss surge de manera natural al identificar a $G \times_H \mathfrak{m}$ con un subhaz del haz trivial $G \times_H \mathfrak{g} \approx G/H \times \mathfrak{g}$.

En lo que resta escribiremos al campo vectorial unitario η de M como

$$\eta = [s, \underline{\eta}],$$

donde $s : M \supset U \to G$ es una sección local del H-haz principal $\pi : G \to G/H$ y $\underline{\eta} : U \to \mathfrak{m}$ es una transformación suave. Con esta convención, nuestra definición de la aplicación de Gauss establece que

$$\mathcal{N} = \mathrm{Ad}_s \underline{\eta}.$$

Recordamos que la métrica en $\mathfrak{g}$ está definida por la forma de Killing, B. Como este operador es Ad-invariante,

$$B(\mathcal{N}, \mathcal{N}) = B(\mathrm{Ad}_s \underline{\eta}, \mathrm{Ad}_s \underline{\eta}) = B(\underline{\eta}, \underline{\eta}). \tag{5.2}$$

La métrica en $(G/H, \langle , \rangle)$ es el descenso de la métrica que induce B en G; al ser η un campo vectorial unitario en M se cumple

$$B(\underline{\eta}, \underline{\eta}) = \langle \eta, \eta \rangle = 1, \tag{5.3}$$

y vemos que las ecuaciones (5.2) y (5.3) implican que $\mathcal{N} : M \to \mathfrak{g}$ toma valores en la esfera unitaria de $\mathfrak{g}$.

Ahora estudiamos cómo se ve la aplicación de Gauss que definimos en nuestros espacios modelo.

Ejemplo 5.1. En el espacio simétrico $\mathbb{R}^n$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}$, y la trivialización $\Gamma : T\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ es la identidad. Con esta observación tenemos que nuestra nueva aplicación de Gauss coincide con la aplicación clásica definida para hipersuperficies de algún espacio euclidiano.

Ejemplo 5.2. En $\mathbb{S}^3 = O(4)/O(3)$ la aplicación de Gauss queda determinada por la representación adjunta del grupo matricial $O(4)$. Escribimos a un campo unitario de una superficie M en $\mathbb{S}^3$ como $\eta = [s, \underline{\eta}]$, con

$$s : M \supset U \to O(4) \quad \text{y} \quad \underline{\eta} : M \supset U \to \mathfrak{o}(4)/\mathfrak{o}(3);$$

entonces

$$\mathcal{N}(x) = \mathrm{Ad}_{s(x)} \underline{\eta}(x) = s(x) \circ \underline{\eta}(x) \circ s(x)^{-1}.$$

Ejemplo 5.3. Si M es una superficie del espacio simétrico $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, desarrollamos a los componentes de un campo unitario $\eta = [s, \underline{\eta}]$ como

$$s = (A, t) \quad \text{y} \quad \underline{\eta} = (B, r),$$

donde

$$(A, t) : M \supset U \to O(3) \times \mathbb{R} \quad \text{y} \quad (B, r) : M \supset U \to (\mathfrak{o}(3)/\mathfrak{o}(2)) \times \mathbb{R}.$$

Entonces, para $x \in M$,

$$\mathcal{N}(x) = (Ad_{A(x)} B(x), \mathrm{Ad}_{t(x)} r(x)) = (A(x) \circ B(x) \circ A(x)^{-1}, r(x)).$$

Nota. La representación adjunta de los grupos de Lie lineales $O(n)$ y $O(1,n)$ coincide en ambos casos con la conjugación de matrices. Se sigue que la aplicación de Gauss de superficies en los espacios simétricos $\mathbb{H}^3$ y $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ es análoga a aquella para superficies en $\mathbb{S}^3$ y $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, respectivamente.

Al identificar a $T(G/H)$ con un subhaz del haz trivial $(G/H)\times\mathfrak{g}$, el operador de forma en una hipersuperficie (ajustado por el endomorfismo de curvatura en G/H), se corresponde con la diferencial de la aplicación de Gauss. En el artículo de Ramos y Ripoll [19] se demuestra una fórmula análoga a la siguiente, para el caso particular de hipersuperficies en $\mathbb{S}^3$ o $\mathbb{H}^3$.

Proposición 5.1. *Sea M una hipersuperficie de G/H y $\mathcal{N} : M \to \mathfrak{g}$ su aplicación de Gauss. Entonces dados $p \in M$ y $X \in \Gamma(TM)$,*

$$d\mathcal{N}(X) = \Gamma(\nabla_X \eta - R(X,\eta)) \tag{5.4}$$

en el punto p, donde R es el tensor de curvatura en G/H.

Antes de seguir con la prueba de la proposición, aclaramos cómo interpretar la ecuación (5.4). Tomamos a Γ como un mapeo valuado en $\mathfrak{g}$,

$$\Gamma : G \times_H \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}.$$

Para evaluar a Γ en $\nabla_X \eta$, consideramos que

$$\nabla_X \eta \in T(G/H) = G \times_H \mathfrak{m} \subset G \times_H \mathfrak{g}.$$

Por otro lado, $R(X,\eta)$ es un endomorfismo de $T(G/H)$ que pertenece a $G\times_H \mathfrak{h} \subset G\times_H \mathfrak{g}$. Explícitamente, si escribimos a los campos vectoriales de M, X y η, como

$$X = [s, \underline{X}] \quad \text{y} \quad \eta = [s, \underline{\eta}],$$

entonces

$$R(X,\eta) = [s, \underline{R(X,\eta)}],$$

donde definimos a $\underline{R(X,\eta)}$ en términos del corchete de Lie en $\mathfrak{g}$ como

$$\underline{R(X,\eta)} := -[\underline{X}, \underline{\eta}].$$

Recordemos de la Sección 2.6 que se satisface $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$. Como $\underline{X}, \underline{\eta} \in \mathfrak{m}$, vemos que efectivamente $R(X,\eta) \in G \times_H \mathfrak{h}$, y que además define a un endomorfismo de $T(G/H) = G \times_H \mathfrak{m}$: para un campo vectorial de G/H, $Y =$ [s, $\underline{\text{Y}}$], la ecuación (2.15) establece

$$R(X,\eta)(Y) = [s, [\underline{R(X,\eta)}, \underline{Y}]].$$

Demostración de la Proposición 5.1. Sea $\mathcal{N}$ la aplicación de Gauss asociada al campo unitario $\eta = [s, \underline{\eta}]$ definida en la ecuación (5.1); podemos suponer que s es una sección local del haz principal $\pi : G \to G/H$ que es horizontal en p. Para $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to N$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = X_p$, denotamos $s(t) := s(\gamma(t))$ y $\underline{\eta}(t) := \underline{\eta}(\gamma(t))$. Así, de acuerdo a nuestra definición de la derivada covariante en la ecuación (2.5),

$$\nabla_X \eta(p) = [s(p), d\underline{\eta}(X_p)], \tag{5.5}$$

ya que s es horizontal en p. Entonces desarrollamos

$$\begin{aligned} d\mathcal{N}(X_p) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathcal{N}(\gamma(t)) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}_{s(t)}\, \underline{\eta}(t) \\ &= \mathrm{Ad}_{s(p)}\, d\underline{\eta}(X_p) + \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}_{s(t)}\, \underline{\eta}(p). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Ahora, si $\omega : TG \to \mathfrak{g}$ denota a la forma de Maurer-Cartan de G,

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}_{s(t)}\, \underline{\eta}(p) &= \mathrm{Ad}_{s(p)} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}_{s(p)^{-1}} \mathrm{Ad}_{s(t)}\, \underline{\eta}(p) \\ &= \mathrm{Ad}_{s(p)} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}_{s(p)^{-1}s(t)}\, \underline{\eta}(p) \\ &= \mathrm{Ad}_{s(p)}\, \mathrm{ad}(L_{s(p)^{-1}*}\, s_*\, X_p)\underline{\eta}(p) \\ &= \mathrm{Ad}_{s(p)}\, \mathrm{ad}(s^*\omega(X_p))\underline{\eta}(p). \end{aligned}$$

Al sustituir la igualdad anterior de vuelta en la ecuación (5.6), llegamos a

$$\begin{aligned} d\mathcal{N}(X_p) &= \mathrm{Ad}_{s(p)} d\underline{\eta}(X_p) + \mathrm{Ad}_{s(p)} \mathrm{ad}(s^*\omega(X_p))\underline{\eta}(p) \\ &= \mathrm{Ad}_{s(p)}\big(d\underline{\eta}(X_p) + [s^*\omega(X_p), \underline{\eta}(p)]\big). \end{aligned} \tag{5.7}$$

De (5.5), el primer término en la ecuación (5.7) es

$$\mathrm{Ad}_{s(p)}\, d\underline{\eta}(X(p)) = \Gamma(\nabla_X \eta(p)).$$

Por otra parte, como s es una sección paralela en p, $s^*\omega(X_p) \in \mathfrak{m}$. Si $\varphi : G \times_H \mathfrak{m} \to TM$ denota al isomorfismo de haces de la Proposición 2.1, tenemos entonces

$$\varphi[s(p), s^*\omega(X_p)] = (\pi(s(p)), \pi_* L_{s(p)*}\, \omega(s_* X_p)) = (p, X_p),$$

y por lo tanto $s^*\omega(X_p) = \underline{X_p}$. Se sigue que el segundo término de (5.7) es

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_{s(p)}\, [s^*\omega(X_p), \underline{\eta}(p)] &= \mathrm{Ad}_{s(p)}\, [\underline{X_p}, \underline{\eta_p}] \\ &= -\mathrm{Ad}_{s(p)}\, \underline{R(X_p, \eta_p)} \\ &= -\Gamma(R(X, \eta)(p)), \end{aligned}$$

y concluimos así nuestra prueba. □

Llegamos a un resultado análogo al hecho de que, para una hipersuperficie de $\mathbb{R}^n$, la derivada de la aplicación de Gauss usual coincide con el operador de forma. El siguiente corolario también fue publicado originalmente en el artículo [19].

Corolario 5.2. *Sea $\mathcal{N} : M \to \mathfrak{g}$ la aplicación de Gauss de una hipersuperficie M de G/H, y sea X un campo vectorial en M. Dados $p \in M$ y $g \in G$ con $\pi(g) = p$, se cumple*

$$\pi_* (R_g)_* \, d\mathcal{N}(X_p) = -A_\eta(X_p),$$

donde A_η es el operador de forma en M inducido por η.

Demostración. Conservamos la notación de la prueba anterior. Primero notemos que, dado $w \in \mathfrak{h}$, se cumple

$$(L_g)_* w \in T_g(gH) \subset \ker \pi_*$$

para toda $g \in G$. Entonces, de la fórmula (5.4), tenemos

$$\begin{aligned}
\pi_* (R_g)_* \, d\mathcal{N}(X_p) &= \pi_* (R_g)_* \operatorname{Ad}_g(d\underline{\eta}(X_p) - \underline{R(X,\eta)}(p)) \\
&= \pi_*(L_g)_* \, d\underline{\eta}(X_p) - \pi_*(L_g)_* \, \underline{R(X,\eta)}(p) \\
&= \pi_* (L_g)_* \, d\underline{\eta}(X_p) \\
&= \nabla_X \eta(p),
\end{aligned}$$

ya que $\underline{R(X,\eta)}(p) \in \mathfrak{h}$ y $T(G/H)$ se identifica con $G \times_H \mathfrak{m}$ vía el isomorfismo de haces

$$\begin{aligned}
\varphi : \quad & G \times_H \mathfrak{m} \to TM \\
& [g, v] \mapsto (\pi(g), \pi_* L_{g_*} v).
\end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 6

Armonicidad de la aplicación de Gauss

En este capítulo pretendemos extender el teorema de Ruh-Vilms a hipersuperficies en espacios simétricos usando nuestra nueva definición de la aplicación de Gauss.

Para un espacio simétrico G/H y un vector $X \in \mathfrak{g}$, recordemos que en la Sección 2.8 definimos al campo de Killing de G/H

$$X^*(p) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Big[(\exp tX)(p)\Big], \qquad p \in G/H.$$

Tengamos presente también que si $g \in G$ y $p \in G/H$ cumplen $\pi(g) = p$, entonces

$$X^*(p) = \pi_* \, R_{g_*} X.$$

Si denotamos por $u = [g, \underline{u}]$ a un vector en $T_p(G/H)$, la observación anterior nos permite escribir

$$\begin{aligned} \langle X^*(p), u\rangle &= \langle \pi_* \, R_{g_*} X, u\rangle \\ &= \langle R_{g_*} X, (\pi_*|_{\mathcal{H}_g})^{-1} \, u\rangle \\ &= \langle R_{g_*} X, L_{g_*} \underline{u}\rangle \\ &= \langle X, \mathrm{Ad}_g \, \underline{u}\rangle = \langle X, \Gamma(u)\rangle, \end{aligned} \tag{6.1}$$

donde $\langle , \rangle$ representa indistintamente a la métrica en G y en G/H.

El resultado principal de esta sección precisa de la Proposición 1 del artículo de Fornari y Ripoll [6]:

Proposición 6.1. *Sea $\tilde{M}$ una variedad (n+1)-dimensional y sea V un campo de Killing de $\tilde{M}$. Sea M una hipersuperficie orientada de $\tilde{M}$ y asumamos que η es un campo vectorial unitario a M en $\tilde{M}$. Entonces, si denotamos*

$$f(p) = \langle \eta(p), V(p)\rangle$$

para $p \in M$, tenemos

$$\Delta f = -n\langle V, grad\, H\rangle - (Ric(\eta) + ||II||^2)f, \tag{6.2}$$

donde H es la curvatura media de M, II es la segunda forma fundamental de M en $\tilde{M}$, y $Ric(\eta)$ es la curvatura de Ricci de $\tilde{M}$ con respecto del campo unitario η.

Al usar esta proposición podemos obtener una expresión explícita para el Laplaciano de la aplicación de Gauss.

Teorema 6.2. *Sea M un hipersuperficie n-dimensional de G/H, con aplicación de Gauss $\mathcal{N} : M \to \mathfrak{g}$. Entonces*

$$\Delta\mathcal{N} = -n\Gamma(grad\, H) - (||II||^2 + Ric(\eta))\mathcal{N}, \tag{6.3}$$

Demostración. Sea $\{e_i\}$ una base ortonormal de $\mathfrak{g}$. Si escribimos

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}^i e_i,$$

se cumple

$$\Delta\mathcal{N} = \Delta\mathcal{N}^i e_i.$$

Por otro lado, al considerar (6.1),

$$\Delta\mathcal{N}^i = \Delta\langle\Gamma(\eta), e_i\rangle = \Delta\langle\eta, e_i^*\rangle.$$

Como $e_i^* : G/H \to T(G/H)$ es un campo de Killing en G/H, la Proposición 6.1 establece que

$$\Delta\langle\eta, e_i^*\rangle = -n\langle \mathrm{grad}\, H, e_i^*\rangle - (||II||^2 + \mathrm{Ric}(\eta))\langle\eta, e_i^*\rangle.$$

Si usamos de nuevo la ecuación (6.1) para revertir términos en la expresión anterior, tenemos

$$\Delta\mathcal{N}^i = -n\langle\Gamma(\mathrm{grad}\, H), e_i\rangle - (||II||^2 + \mathrm{Ric}(\eta))\mathcal{N}^i,$$

de donde se sigue el resultado que buscamos. □

Notemos que si M tiene curvatura media constante entonces su aplicación de Gauss satisface

$$\Delta\mathcal{N} + (||II||^2 + \mathrm{Ric}(\eta))\mathcal{N} = 0.$$

Al recordar la Proposición 4.2, tenemos que la igualdad anterior es equivalente a la armonicidad de la aplicación de Gauss. Como consecuencia directa podemos formular el teorema de Ruh-Vilms para superficies en espacios simétricos. Este resultado proviene originalmente de la tesis [18].

Teorema 6.3 (Ruh-Vilms en espacios simétricos). *Sea $\mathcal{N} : M \to \mathfrak{g}$ la aplicación de Gauss de una hipersuperficie en G/H orientada con respecto al campo vectorial unitario $\eta : M \to T(G/H)$. Entonces son equivalentes*

1. *M tiene curvatura media constante;*

2. *la aplicación de Gauss $\mathcal{N}$ es armónica;*

3. *$\mathcal{N}$ satisface la ecuación*

$$\Delta\mathcal{N} + (||II||^2 + Ric(\eta))\mathcal{N} = 0.$$

Capítulo 7

Formas diferenciales cuadráticas

Definimos una diferencial cuadrática inducida de manera natural por la aplicación de Gauss de superficies en espacios simétricos tridimensionales. Para superficies en $\mathbb{S}^3$ o $\mathbb{H}^3$, vemos que ésta coincide con la diferencial de Hopf salvo por un factor escalar. En $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ o $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, probamos que la diferencial inducida coincide con la diferencial de Abresch-Rosenberg. Estos resultados fueron publicados originalmente en el artículo [19] de Ramos y Ripoll.

Sea M una superficie en algún espacio simétrico tridimensional $(G/H, \langle,\rangle)$, y sea $F : \mathbb{C} \supset U \to M$ una parametrización en un atlas de coordenadas isotérmicas para M.

En este caso, si $z = x + iy$ es un sistema de coordenadas complejo en U, entonces

$$\begin{aligned}\langle F_x, F_x\rangle = \langle F_y, F_y\rangle &=: \lambda > 0,\\ \langle F_z, F_z\rangle = \langle F_{\overline{z}}, F_{\overline{z}}\rangle &= 0,\\ \langle F_z, F_{\overline{z}}\rangle &= \lambda/2,\end{aligned}$$

donde extendemos a $\langle,\rangle$ por $\mathbb{C}$-linealidad.

Definimos a la forma diferencial cuadrática inducida por la aplicación de Gauss de M, $\mathcal{N} : M \to \mathfrak{g}$, como

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{N}} := \langle \mathcal{N}_z, \mathcal{N}_z\rangle dz^2.$$

Antes de seguir, debemos de escribir al operador de forma de M en términos de F_z y $F_{\overline{z}}$.

Proposición 7.1. *Sea $l\, dx^2 + 2m\, dxdy + n\, dy^2$ la expresión local de la segunda forma fundamental de M y η un campo vectorial unitario que orienta a M. Si denotamos por ∇ a la conexión de Levi-Civita en G/H, entonces*

$$-\nabla_{F_z}\eta = HF_z + (2\alpha/\lambda)F_{\overline{z}},$$

donde $H = (l+n)/2\lambda$ es la curvatura media de la superficie y

$$\alpha := -\langle \nabla_{F_z}\eta, F_z \rangle$$

es el coeficiente de la diferencial de Hopf, $\mathcal{A} = 2\alpha dz^2$.

Demostración. Escribimos para constantes $A, B, C \in \mathbb{C}$

$$\nabla_{F_z}\eta = AF_z + BF_{\overline{z}} + C\eta.$$

De primera instancia la ecuación $\langle \eta, \eta \rangle = 1$ implica que $\langle \nabla_{F_z}\eta, \eta \rangle = 0$, y por ende también que $C = 0$. Ahora, por definición,

$$\langle \nabla_{F_z}\eta, F_z \rangle = -\alpha,$$

y entonces $B\frac{\lambda}{2} = -\alpha$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{F_z}\eta, F_{\overline{z}} \rangle &= \frac{1}{4}\langle \nabla_{\frac{1}{2}(F_x - iF_y)}\eta, \frac{1}{2}(F_x + iF_y) \rangle \\ &= -\frac{H\lambda}{2}, \end{aligned}$$

y se sigue que $A\frac{\lambda}{2} = -\frac{H\lambda}{2}$. De aquí tenemos de inmediato nuestra igualdad. □

Al usar la proposición anterior podemos mostrar que la diferencial cuadrática que induce la aplicación de Gauss en una superficie de $\mathbb{S}^3$ o de $\mathbb{H}^3$ coincide con la diferencial de Hopf salvo por el factor escalar de la curvatura media.

En lo que resta de esta sección adoptamos la notación

$$N^n(1) := \mathbb{S}^n \quad \text{y} \quad N^n(-1) := \mathbb{H}^n.$$

Entendemos que $N^n(c)$ denota a alguno de los espacios anteriores, dependiendo del valor de c. En el Capítulo 2, mostramos que $N^n(c)$ es el espacio simétrico $G^n(c)/H^n(c)$, donde

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^n &= G^n(1)/H^n(1) := O(n+1)/O(n), \\ \mathbb{H}^n &= G^n(-1)/H^n(-1) := O(1,n)/O(n). \end{aligned}$$

Teorema 7.2. *Sea M una superficie en $N^3(c)$. Denotamos por $\mathcal{N}$ a la aplicación de Gauss para M que definimos en el Capítulo 5. Entonces la diferencial cuadrática que induce $\mathcal{N}$ satisface*

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{N}} = H\mathcal{A},$$

donde H es la curvatura media y $\mathcal{A}$ es la diferencial de Hopf de la superficie.

Demostración. Definimos a $\mathcal{N}$ en términos del campo unitario η. Conservando nuestra notación del Capítulo 5, escribiremos a los campos η y F_z como

$$\eta = [s, \underline{\eta}] \quad \text{y} \quad F_z = [s, \underline{F_z}],$$

donde $\underline{\eta}$ y $\underline{F_z}$ son transformaciones en M valuadas en el álgebra de Lie de $G^3(c)$, y s es una sección local del haz principal $\pi : G^3(c) \to N^3(c)$. Dependiendo de si $N^3(c) = \mathbb{S}^3$ o $N^3(c) = \mathbb{H}^3$, B denota a la forma de Killing en $\mathfrak{o}(4)$ o en $\mathfrak{o}(1,3)$, respectivamente. Como en ambos casos ésta es Ad-invariante, de la Proposición 5.1 se desprende

$$\begin{aligned} B(\mathcal{N}_z, \mathcal{N}_z) &= B(\Gamma(\nabla_{F_z}\eta - R(F_z,\eta)), \Gamma(\nabla_{F_z}\eta - R(F_z,\eta))) \\ &= B(d\underline{\eta}(F_z) - \underline{R(F_z,\eta)}, d\underline{\eta}(F_z) - \underline{R(F_z,\eta)}) \end{aligned}$$

Recordemos que $\underline{R(F_z,\eta)} = -[\underline{F_z}, \underline{\eta}] \in \mathfrak{h}$; ya que $\mathfrak{m} \perp_B \mathfrak{h}$, tenemos que $B(d\underline{\eta}(F_z), \underline{R(F_z,\eta)}) = 0$, y por tanto

$$B(\mathcal{N}_z, \mathcal{N}_z) = B(d\underline{\eta}(F_z), d\underline{\eta}(F_z)) + B(\underline{R(F_z,\eta)}, \underline{R(F_z,\eta)}).$$

Por una parte, de la proposición anterior se sigue que

$$\begin{aligned} B(d\underline{\eta}(F_z), d\underline{\eta}(F_z)) &= \langle A_\eta(F_z), A_\eta(F_z)\rangle \\ &= \langle HF_z + (2\alpha/\lambda)F_{\overline{z}}, HF_z + (2\alpha/\lambda)F_{\overline{z}}\rangle \\ &= (4H\alpha/\lambda)\langle F_z, F_{\overline{z}}\rangle \\ &= 2H\alpha, \end{aligned}$$

donde usamos que la métrica en $N^3(c)$ es el descenso por π_* de la métrica que induce B en $G^3(c)$. Por otro lado, la anti-simetría de ad $\underline{F_z}$ con respecto de B [Proposición 2.3] nos permite desarrollar

$$\begin{aligned} B([\underline{F_z}, \underline{\eta}], [\underline{F_z}, \underline{\eta}]) &= B([[\underline{F_z}, \underline{\eta}], \underline{F_z}], \underline{\eta}) \\ &= -B([\underline{R(F_z,\eta)}, F_z], \underline{\eta}) \\ &= -\langle R(F_z,\eta)(F_z), \eta\rangle \\ &= -R(F_z,\eta,F_z,\eta), \end{aligned} \tag{7.1}$$

donde R en la igualdad final denota al (0,4)-tensor de curvatura en $N^3(c)$. Sin embargo,

$$R(F_z,\eta,F_z,\eta) = c(\langle F_z,\eta\rangle^2 - \langle F_z,F_z\rangle\langle\eta,\eta\rangle) = 0. \tag{7.2}$$

Entonces

$$B(\mathcal{N}_z, \mathcal{N}_z) = \langle A_\eta(F_z), A_\eta(F_z)\rangle,$$

y se sigue la proposición. $\square$

Nota. Si M es una superficie de curvatura media constante, entonces su diferencial de Hopf es holomorfa [Corolario 3.3]. Junto con esta observación, el Teorema 7.2 nos permite concluir que la differencial cuadrática inducida por la aplicación de Gauss en una superficie de curvatura media constante es holomorfa.

Sea ahora $F : \mathbb{C} \supset U \to M$ una parametrización que induce un sistema de coordenadas isotérmicas en una superficie M de $N^2(c) \times \mathbb{R}$. Entonces escribimos

$$F_z = (f_z, h_z)$$

para

$$f : \mathbb{C} \supset U \to N^2(c) \quad \text{y} \quad h : \mathbb{C} \supset U \to \mathbb{R},$$

y definimos a la diferencial de Abresch-Rosenberg por

$$\mathcal{Q} := 2H\mathcal{A} - c\mathcal{T},$$

donde $\mathcal{T} := 2h_z\, dz^2$.

Teorema 7.3. *Sea M una superficie en $N^2(c) \times \mathbb{R}$. Entonces*

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{N}} = \frac{1}{2}\mathcal{Q}. \tag{7.3}$$

Demostración. Escribimos al campo unitario en M que induce a $\mathcal{N}$ como $\eta = (V, \upsilon)$. Se sigue entonces que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \eta, F_z \rangle = V.\, f_z + \upsilon h_z, \\ 0 &= \langle F_z, F_z \rangle = f_z.\, f_z + h_z^2, \\ 1 &= \langle \eta, \eta \rangle = V.\, V + \upsilon^2. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Si ahora R denota al (0,4)-tensor de curvatura en $N^2(c) \times \mathbb{R}$,

$$R(F_z, \eta, F_z, \eta) = R^1(f_z, V, f_z, V) + R^2(h_z, \upsilon, \upsilon, h_z) \tag{7.5}$$

para R^1 y R^2 los tensores de curvatura en $N^2(c)$ y $\mathbb{R}$, respectivamente.

Desarrollando el primer sumando en (7.5),

$$\begin{aligned} R^1(f_z, V, f_z, V) &= c[(V.\, f_z)^2 - (f_z.\, f_z)(V.\, V)] \\ &= c[(-\upsilon h_z)^2 - (-h_z^2)\,(1 - \upsilon^2)] \\ &= c h_z^2, \end{aligned}$$

donde usamos las igualdades en (7.4). Entonces, de nuestros cálculos en el teorema anterior, tenemos finalmente

$$\begin{aligned} B(\mathcal{N}_z, \mathcal{N}_z) &= \langle A_\eta(F_z), A_\eta(F_z) \rangle - R(F_z, \eta, F_z, \eta) \\ &= 2H\alpha - c h_z^2, \end{aligned}$$

lo cual equivale a la ecuación (7.3). □

Bibliografía

[1] U. Abresch y H. Rosenberg. *A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ *and* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Acta Mathematica 193 (2004), págs. 141-174.

[2] A. Arvanitoyeorgos. *An Introduction to Lie Groups and the Geometry of Homogeneous Spaces*. American Mathematical Society, 2003.

[3] S. S. Chern. *An Elementary Proof of the Existence of Isothermal Parameters on a Surface*. Proceedings of the American Mathematical Society 6.5 (1955), págs. 771-782.

[4] S. S. Chern. *On surfaces of constant mean curvature in a three-dimensional space of constant curvature. Geometric Dynamics.* (1981). Río de Janeiro: Springer Verlag, 1983, págs. 104-108.

[5] J. Eschenburg. *Lecture Notes on Symmetric Spaces*. Ene. de 1997.

[6] S. Fornari y J. Ripoll. *Killing Fields, Mean Curvature, Translation Maps*. Illinois Journal of Mathematics 48.4 (2004).

[7] F. Hélein. *Harmonic maps, conservation laws and moving frames*. Cambridge University Press, 2002.

[8] P. Holmelin. *Symmetric Spaces*. Lund University, 2005.

[9] H. Hopf. *Differential Geometry in the Large: Seminar Lectures New York University 1946 and Stanford University 1956*. Springer-Verlag, 1983.

[10] G. R. Jensen, E. Musso y L. Nicoldi. *Surfaces in Classical Geometries: A Treatment by Moving Frames*. Springer-Verlag, 2016.

[11] J. Jost. *Harmonic Maps Between Surfaces (with a special Chapter on Conformal Mappings)*. Springer-Verlag, 1984.

[12] J. Jost. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Springer-Verlag, 2017.

[13] S. Kobayashi y K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*. Vol. II. Interscience Publishers, 1969.

[14] J. M. Lee. *Manifolds and Differential Geometry*. American Mathematical Society, 2009.

[15] M. L. Leite y J. Ripoll. *On Quadratic Differencials and Twisted Normal Maps of Surfaces in* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ *and* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Results in Mathematics 60 (2011), págs. 351-360.

[16] P. W. Michor. *Topics in Differential Geometry*. American Mathematical Society, 2008.

[17] S. Montiel y A. Ros. *Curves and Surfaces*. American Mathematical Society, 2005.

[18] Á. K. Ramos. *Constant mean curvature hypersurfaces on symmetric spaces, minimal graphs on semidirect products and properly embedded surfaces in hyperbolic 3-manifolds*. Tesis doct. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2015.

[19] Á. Ramos y J. Ripoll. *An Extension of Ruh-Vilms' Theorem to Hypersurfaces in Symmetric Spaces and some Applications*. Transactions of the American Mathematical Society 368.7 (2016), págs. 4731-4749.

[20] E. A. Ruh y J. Vilms. *The Tension Field of the Gauss Map*. Transactions of the American Mathematical Society 149.2 (1970), págs. 569-573.

[21] R. W. Sharpe. *Differential Geometry: Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program*. Springer-Verlag, 2000.