



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Inestabilidad y pronóstico en el costo del  
oro para el mercado de Nueva York

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Actuaria

PRESENTA:

Violeta Acevedo Espinosa

TUTOR

Dr. Jorge Chávez Carlos



Ciudad de México Marzo 2020



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*“A mis padres”*

**Agradecimientos:**

A mis padres por apoyarme en el ámbito económico y en mis decisiones para poder lograr mis metas, darme una buena educación, por enseñarme valores, por criarme en un ambiente bueno y en general a estar siempre para mí.

A mis hermanas Azucena y Dalia por haberme motivado a estudiar Actuaría, apoyarme cuando quise darme por vencida en la carrera, y por ser un gran ejemplo en mi vida, por enseñarme que la constancia, la valentía y la perseverancia siempre tienen frutos a pesar de cualquier adversidad.

A mi prima Jazmin por brindarme un hogar a inicios de la carrera, y a inicios de mi vida laboral así como apoyarme con consejos profesionales.

A mi novio y amigo Ricardo por motivarme a ser una mejor persona cada día y estar conmigo en los momentos más difíciles, por creer en mí, en mis capacidades, y por apoyar mis sueños.

A mis amigas Verenice y Cassandra por compartir conmigo una de las etapas más importantes en mi vida, por ser mis mejores amigas, y porque sé que puedo contar con ellas en cualquier momento.

A mi amigo y tutor el Dr. Jorge Chávez Carlos por su dirección, paciencia, orientación y disponibilidad para la realización este trabajo.



# Índice general

Índice general	VII
Índice de figuras	VII
Índice de cuadros	VII
INTRODUCCIÓN	X
<b>1. Antecedentes</b>	<b>3</b>
1.1. Marco histórico	3
1.1.1. Historia del oro	3
1.2. Impacto socioeconómico del oro en el mundo	6
1.2.1. Oferta y demanda en el mercado del oro	6
1.2.2. Mercados de oro más grandes en el mundo	8
1.2.3. Factores que determinan el costo del oro	8
<b>2. Marco teórico</b>	<b>11</b>
2.1. Serie de tiempo	11
2.1.1. Estacionariedad	11
2.1.2. Pruebas de estacionariedad	12
2.2. Proceso estocástico	14
2.3. Proceso Wiener-movimiento browniano	15
2.4. Proceso de Wiener generalizado	16
2.5. Ruido $1/f$	16
2.5.1. Escala y fractalidad del proceso $1/f$	17
2.5.2. Aspecto económico en el ruido $1/f$	19
2.6. Espectro de Fourier	19
2.6.1. Definición y propiedades básicas	20
2.6.2. Análisis espectral	21
2.7. Exponente de Lyapunov	22
2.7.1. El exponente máximo y el tiempo del Lyapunov	24
2.8. Teoría de las cruces	25
2.8.1. Generalización para una cadena larga	27
<b>3. Metodología y análisis</b>	<b>29</b>
3.1. Adquisición de datos y procesamiento	29
3.2. El oro como movimiento browniano	31
3.2.1. Estacionariedad y análisis estadístico en el costo del oro	33

<b>4. Resultados</b>	<b>35</b>
4.1. Análisis del exponente de Lyapunov . . . . .	35
4.2. Estacionariedad respecto al exponente de Lyapunov . . . . .	37
4.3. Función continua para $\lambda(t)$ . . . . .	39
4.4. Modelado continuo para $\lambda$ . . . . .	39
4.5. Modelo semiestocástico para obtener costos de oro a futuro . . . . .	40
<b>5. Conclusiones</b>	<b>43</b>
<b>Apéndices</b>	<b>44</b>
A. Código en R. Obtención de datos y estadísticos	45
B. Código en R. Análisis espectral	47
C. Código en R. Análisis del exponente de Lyapunov	49
D. Código en R. Estacionariedad	59
E. Código en R. Pronóstico, teoría de cruces	63
F. Código en mathematica. Pronóstico	67
Referencias	67

# Índice de figuras

1.1. Porcentaje de ocupación de sectores de demanda . . . . .	7
2.1. Esquema de los ruidos estocásticos en términos de su color (imagen de artículo[12]) . .	19
2.2. Análisis espectral. . . . .	21
2.3. Representación de trayectorias para el exponente máximo de Lyapunov. . . . .	24
2.4. Ejemplificación de la teoría de las cruces dado un periodo de tiempo $\tau$ , donde la flecha roja indica pérdidas y la verde son ganancias. . . . .	25
2.5. Series de tiempo generadas para la cadena de números 2.14 con las reglas dadas por $x_i$ .	26
2.6. Serie de tiempo generada para la cadena con las reglas dadas por $x_i$ para 1000 elementos.	27
2.7. Espectro de Fourier (negro) de la serie de tiempo presentada en la Fig.2.6 y línea de regresión (rojo) de dicha descomposición dada por $8.29 - 1.81t$ . . . . .	27
3.1. Costo de la onza de oro en dólares (imagen adquirida de Kitco) . . . . .	29
3.2. Comportamiento del costo del oro por fecha . . . . .	31
3.3. Densidad espectral del costo del oro . . . . .	32
3.4. Costo de la onza de oro en dólares con tendencia (imagen adquirida de Kitco) . . . .	33
3.5. Test de raíces unitarias para probar estacionariedad obtenidas de D . . . . .	34
3.6. Análisis estadístico de los 478,318 datos de las 926 fechas por hora. . . . .	34
4.1. Exponente de Lyapunov por día/hora . . . . .	36
4.2. Exponente de Lyapunov por día (serie en conjunto) . . . . .	37
4.3. Lyapunov promedio por hora. . . . .	37
4.4. Test de raíces unitarias para probar estacionariedad obtenidas de D . . . . .	38
4.5. Diagrama de cajas del exponente de Lyapunov de todos los datos analizados. . . . .	38
4.6. Datos del exponente de Lyapunov promediado cada hora (rojo) del conjunto total de datos obtenidos, comparados con el modelo polinomial (negro) y el ajuste de la desviación estandar en forma continua (zona gris). . . . .	40
4.7. Comparación entre precios reales (rosa) y precios obtenidos por el modelo (azul) en intervalos de media hora. . . . .	41
4.8. Probabilidades de costo de las 12:00-12:30 hrs . . . . .	42





# Índice de cuadros

3.1. Exponente espectral calculado de seis fechas al azar. . . . .	33
4.1. Varianza y desviación estándar por hora del exponente de Lyapunov obtenidos de Apéndice C . . . . .	39
4.2. Desviación y parámetros, datos obtenidos de Mathematica del Apéndice. F . . . . .	39
4.3. Costo real vs costo pronosticado del día 19-06-28 . . . . .	42



# Introducción

El oro constituye uno de los elementos químicos más empleados, es clave para la economía global, ya que al año genera millones de dólares. Asimismo sigue siendo uno de los instrumentos financieros más seguros del mundo, proporcionando así su rentabilidad por lo que es un tema de estudio de gran importancia.

Como uno de los pilares fundamentales de la economía global requiere un estudio especializado, por este motivo la importancia de caracterizar las series de tiempo del costo de oro para el mercado y obtener cotas en tiempos del proceso de predicción de sus precios, pues en ellos se contiene la evolución reciente de dicho ámbito, su contexto y el comportamiento futuro probable.

El objetivo principal de este trabajo es establecer un modelo para calcular los dominios temporales de inestabilidad ó susceptibilidad en los costos del oro, con el propósito de dar validez a modelos que pronostiquen el costo diario del oro para el mercado de Nueva York, usando el exponente de Lyapunov como cuantificador de inestabilidad, asimismo, se estudia una forma de pronosticar el costo usando un modelo semideterminista, en donde los resultados, se calculan en un tiempo relativamente pequeño para obtener un menor margen de error que los resultados reales, así mismo, dichos datos obtenidos podrían tener un impacto directo en las finanzas de empresas mineras, fabricantes y joyeros en el mundo para así conocer el mejor momento de inversión, y hacer un estudio de las ganancias o pérdidas de éstas.

En cuanto al desarrollo del trabajo, en el capítulo I se abordan las cuestiones teóricas que sustentan el planteamiento, se centra en la historia del oro en el mundo, el papel importante que tiene en Estados Unidos, ya que se analiza el mercado de Nueva York, la exposición de la oferta y demanda a lo largo de la historia, los mercados de oro internacionales más importantes, sus características, y los factores que influyen en el precio del oro que son de suma relevancia para el ámbito socioeconómico.

Asimismo, en el capítulo II se introducen los conceptos que son de relevancia para el desarrollo del trabajo, como son la serie de tiempo, sus características, su relevancia de estudio, el proceso estocástico, y su relación en este trabajo con el proceso de Wiener, el enlace de este proceso con el espectro de Fourier, así como el análisis espectral, el exponente de Lyapunov y su relación con la volatilidad del costo del oro, su exponente máximo y el tiempo, así como la importancia de la estacionariedad y sus características y finalmente la teoría de cruces que nos muestra de forma empírica un comportamiento de la volatilidad en el costo de factores económicos y financieros.

El capítulo III, se centra en la aplicación metodológica que se llevó a cabo para el análisis de las series de tiempo, en los cuales se obtuvieron 478,318 datos totales de las 8 horas a las 16 horas en donde se identifican los costos desde enero del 2015 hasta junio del 2019 del costo del oro en el mercado de Nueva York, otorgándonos diversas series de tiempo para su análisis. Por consiguiente se estudia la relación que existe entre el proceso de Wiener con los datos del

análisis espectral, y se realiza un análisis estadístico básico para conocer el comportamiento del costo del oro.

Posteriormente, en el capítulo IV se calculó la volatilidad, el espectro de Fourier, el exponente de Lyapunov en forma diaria, minuto a minuto, por hora, por semana y por año, se obtuvieron estadísticos del exponente de Lyapunov y se realizaron gráficos para analizar sus características y comportamientos. Se dan pruebas que muestran que el exponente de Lyapunov promedio se comporta de forma estacional y finalmente se propone un método basado en un enfoque semi-determinista para pronosticar el costo del oro utilizando algunas propiedades discutidas por la teoría de cruces para los movimientos brownianos.

Finalmente, en capítulo V concluye la investigación haciendo al análisis y la interpretación económica de los resultados obtenidos a través de esta metodología.

Se incluyen seis apéndices en donde se agrupan los principales códigos para los cálculos realizados para simplificar el contenido de los capítulos de la tesis, cada apéndice se compone desde la obtención de datos hasta los propios resultados.

# Capítulo 1

## Antecedentes

En este capítulo se hará inferencia a la historia del oro en el mundo, su importancia en Estados Unidos, la oferta y demanda en el mercado a nivel global, y finalmente los factores socioeconómicos que determinan el costo del oro.

### 1.1. Marco histórico

Esta sección comprende los hechos, condiciones, evolución y desarrollo histórico del oro que son de relevancia para este estudio de forma mundial y enfocada en Estados Unidos, ya que se analiza el mercado de Nueva York.

#### 1.1.1. Historia del oro

El oro fue uno de los primeros metales que llamó la atención del hombre, ya que es uno de los pocos que se encuentra en la naturaleza en un estado relativamente puro y resiste la acción del fuego sin experimentar ningún tipo de daño.

En la época del neolítico, se caracteriza por el desarrollo de la economía productiva, la inserción en la agricultura y la ganadería, el sedentarismo y aparición de los primeros poblados, la utilización de la piedra pulida y de la cerámica, y al fin de la época comenzó a sustituir a la piedra por el metal, que de hecho esta época se le llama también "Edad de los metales".

El metal amarillo está fuertemente ligado a las civilizaciones, del hemisferio oriental en cuanto a los primeros años de su auge y la historia relata siglo tras siglo cómo las naciones han escalado las cimas más altas de poder. Así como Egipto, a fines del paleolítico, comenzó la edad del oro.

El metal precioso de Egipto, en esa época, provenía de del sur del Sudán, donde los placeres auríferos<sup>1</sup> cubrían extensas áreas cuadradas, que eran trabajados hasta una profundidad de dos metros.

En Egipto se han hallado los documentos más antiguos sobre dicho metal, y no solo esto, sino que parece ser que Egipto fue la mayor potencia aurífera de los tiempos antiguos. Los primitivos instrumentos utilizados en esos comienzos de la minería de subsuelo fueron martillos de piedra,

---

<sup>1</sup>Los placeres corresponden a una concentración gravitacional de minerales pesados por fluidos en movimiento, generalmente por agua, aunque también puede ocurrir en sólidos y gases.

mientras que los primeros trabajos mineros para la extracción del oro en Nubia, provienen de los monumentos de la cuarta dinastía, referente a un minero lavando oro.

También se desarrolló la metalúrgica y la técnica minera, hasta alcanzar un nivel elevado durante la dinastía de los Ptolomeos<sup>2</sup>, tras la conquista de Alejandro Magno.

En Mesopotamia, el oro era conocido y explotado antes de ser conquistado hacia el año 2000 a.C. Persia, Armenia y Fenicia fueron productores de este metal mucho antes de nuestra era. Persia era rica en metales preciosos. Ciro y Darío<sup>3</sup>, en el Siglo VI a.C, reciben tributo en forma de oro hasta el punto, que alcanzaron un gran poder tanto en el interior como en el exterior del país. Los fenicios obtenían su oro valiéndose de transacciones con los pueblos que visitaban. El mismo Herodoto quien relata que los cartaginenses navegaban por la costa occidental de África a fin de cambiar sus mercancías por el metal precioso en los pueblos ribereños.

En el siglo IV d.C. aumentó la circulación del oro particularmente en la forma de moneda, este incremento surgió en la época de Constantino cuando se insistía en que el pago de los impuestos y otras deudas al gobierno se efectuaron en oro.

Posteriormente se inicia un auge en gran parte del mundo de este metal precioso, que se utilizó no sólo como valor monetario, sino incluso como reserva, posteriormente se hablará de esta parte.

## **El papel del oro como dinero y el patrón oro**

La historia del oro está relacionado en gran medida con el dinero, en el cual se determinaba un valor, sin embargo al final de la guerra, se creó el sistema monetario de Bretton Woods, un régimen de tipos de cambio fijos.

Hay dos períodos clave en la historia: el del Estándar de Oro Clásico y el del sistema de tipo de cambio fijo de oro de Bretton Woods[1].

### **Estándar del oro.**

Era un sistema bajo el cual casi todos los países fijaban el valor de sus monedas en términos de una cantidad específica de oro. Las monedas nacionales eran libremente convertibles en oro a un precio fijo y no había restricciones en la importación o exportación de oro. Las monedas de oro circulaban como moneda nacional junto con monedas de otros metales y billetes, y la composición variaba según el país. Como cada moneda se fijó en términos de oro, también se fijaron los tipos de cambio entre las monedas participantes.

### **El sistema Bretton Woods.**

Después de la Segunda Guerra Mundial se necesitaría un nuevo sistema internacional para reemplazar el estándar de oro, éste sistema perseguía lograr una estabilidad en las transacciones comerciales internacionales por medio de la creación de un sistema monetario internacional, basado en un tipo de cambio sólido y estable, con el dólar ejerciendo el papel de divisa internacional, dentro de este sistema se dió la adopción del patrón oro como elemento de estabilización

---

<sup>2</sup>Esta dinastía gobernó en el Antiguo Egipto durante el período helenístico desde la muerte de Alejandro hasta el año 30 a. C.

<sup>3</sup>Reyes de Babilonia tras la conquista de la ciudad por los persas.

de esta divisa internacional.

## El rol del oro en Estados Unidos

El metal precioso ha jugado un papel importante en el establecimiento y la economía de los Estados Unidos. Hubo, descubrimientos indocumentados tempranos de los nativos americanos, pero los primeros registros se conocen por Sir Francis Drake, famoso pirata inglés, quién informó que el oro se producía en abundancia cuando aterrizó en la costa de California. La producción comercial comenzó en 1804 en Carolina del Norte y se extendió entre varios estados de los Apalaches en las décadas de 1820 y 1830 a medida que se descubrían y explotaban depósitos. Después de alcanzar su punto máximo en las décadas de 1830 y 1840, la producción de los Apalaches comenzó a disminuir a medida que se trabajaban los depósitos y los mineros se movían hacia el oeste en respuesta a las noticias de los descubrimientos en California en 1848. La producción de los Apalaches prácticamente cesó con la Guerra Civil, mientras que la producción de California y estados adyacentes se mantuvieron en varios millones de onzas por año. A medida que disminuyó la fiebre del oro de California, los nuevos descubrimientos dieron importancia a los estados de las Montañas Rocosas, Dakota del Sur y Alaska. La producción local, estatal y total respondió al momento del descubrimiento, la extensión de los colocadores, la disponibilidad de mano de obra, la tecnología, los mandatos gubernamentales y, por supuesto, el precio del metal. En general en los 80's se empezó a incursionar en la minería hidráulica, y la minería de túneles, así como el dragado que es la operación que consiste en la limpieza y el ahondamiento de un cuerpo de agua, a partir de la remoción de rocas y sedimentos.

Hacia 1900, se produjeron las principales incursiones de oro y se definieron la mayoría de los principales distritos productores; sin embargo, el precio fijo de éste (desde 1837) proporcionó un incentivo cada vez más atractivo para una mayor exploración y explotación.

Durante la Gran Depresión, el presidente Franklin D. Roosevelt fue elegido y actuó rápidamente para poner fin a la salida de oro de los bancos. Con una proclamación, cerró todos los bancos en los EE. UU. Por una moratoria de tres días. Esto detuvo a los ciudadanos de quitar y buscar oro. Luego exigió a todos los ciudadanos que tenían oro que lo devolvieran a los bancos bajo amenaza de encarcelamiento y una multa. Esto estimuló la economía doméstica al alentar a las personas a gastar su dinero en lugar de mantenerlo en lingotes de oro. Se firmó la ley de reserva de oro, que otorgó al gobierno la autoridad para exigir la posesión física de oro, evitar su exportación, reducir la cantidad de oro físico en dólares acuñados. El aumento del precio del oro, combinado con menores salarios y costos de materiales que fueron consecuencia de la depresión, hizo que la minería de oro volviera a ser atractiva. Las minas viejas reabrieron y las minas actualmente en operación se expandieron, la producción anual de oro de California superó los 320 millones; La mayor parte del oro provenía de unas 15 grandes minas a cielo abierto.

En los años 2000 el precio promedio del oro subió en general, en 2008 el oro alcanzó su máximo histórico, con un precio promedio de \$968 y un máximo de \$1,011 por onza; el promedio anual fue de \$871 por onza, ya que el gobierno de los Estados Unidos reconoció oficialmente que el país estaba en una recesión técnica. La tasa de desempleo aumentó, en 2009 en diciembre, el oro alcanzó su máximo histórico, con un precio promedio de \$1,134 y un máximo de \$1,212 por onza; el promedio anual fue de \$972 por onza en 2010 el oro alcanzó un precio máximo histórico de \$1431, en general el precio promedio del oro ha ido en aumento los últimos años[2].



## 1.2. Impacto socioeconómico del oro en el mundo

La extracción de oro y sus actividades o usos asociados pueden tener un efecto trascendente en el ámbito socioeconómico de los países en donde se desarrolla. Cuando se produce en conjunto con altos estándares sociales, ambientales y de seguridad económica, el oro ofrece oportunidades de empleo, la mejora de la infraestructura y los ingresos fiscales y financieros, así como el progreso en la tecnología y también puede impulsar la inversión extranjera directa y generar divisas.

### 1.2.1. Oferta y demanda en el mercado del oro

El mercado moderno del metal es una imagen de diversidad y crecimiento, ya que ahora es comprado por un conjunto mucho más variado de consumidores e inversores que en cualquier otra etapa histórica, dichos personajes son motivados por diversas razones, en gran parte por una variedad de factores socioculturales, condiciones del mercado y factores económicos.

#### Suministro de oro.

- **Producción minera.**

En la actualidad existen miles de toneladas de oro, las cuales han sido obtenidas mediante operaciones mineras, es por esto que la hace la primera y más importante fuente de oferta, incluso desde los primeros años del auge del oro. El oro se extrae por 4 métodos diferentes. Minería de placer, minería de roca dura, minería de subproductos y proceso mineral de oro.

En la minería por placer, básicamente el oro se obtiene mediante la detección de metales, usando la gravedad y el agua para separar el oro de los otros materiales que lo rodean, esta es la categoría de extracción es más común para aficionados.

La extracción de roca dura es el proceso de utilizar túneles de extracción a cielo abierto o subterráneos para recuperar el oro de la roca.

En la minería de subproductos, el proceso es similar al anterior sin embargo el objetivo principal es la recuperación de cobre, arena, grava u otros productos.

Finalmente el proceso de mineral de oro, es roca o tierra finamente triturada que contiene pequeñas cantidades de oro que se extraen mediante un proceso químico, el elemento más usado en estos casos es el cianuro.

- **Reciclaje.** El reciclaje es la fuente de suministro de oro que responde más inmediatamente al precio del oro y a los choques económicos, ya que depende de la calidad y estado en el que se encuentren, al obtener el oro reciclado, éste se derrite por lo general para darle otro uso, puede provenir de diversas fuentes como empastes dentales, los teléfonos móviles, las computadoras y otros dispositivos electrónicos, incluso la acción de reciclaje de oro podría reducir la demanda minera y ayudar a preservar el medio ambiente[4].

#### Sectores de Demanda.

La demanda de oro a nivel mundial procede fundamentalmente de:

1. Bancos Centrales.

Los bancos centrales de los mercados emergentes han aumentado sus compras de oro, mientras que los bancos europeos han dejado de vender, y el sector ahora representa una

demanda anual importante de oro.

Mantienen grandes reservas de oro, ahora, aunque las reservas pueden en teoría valer como una última garantía de la moneda, la fortaleza económica de una nación es más importante.

Éstos mismos pueden vender sus reservas de oro para la obtención de liquidez. Pero también conviene mantenerlas por diversas razones como por ejemplo, para distribuir el riesgo de las inversiones entre distintos activos, dar una seguridad económica, y ante alguna contingencia de tipo financiero o natural.

## 2. Inversión particular.

El oro tiene propiedades únicas como clase de activo, se sabe que las asignaciones modestas al oro protegen y mejoran el rendimiento de una cartera de inversiones. Aun así, el papel del oro en carteras de inversión ocupa un porcentaje mínimo.

Sin embargo, esto está cambiando y los inversores de todo tipo están llegando a aceptar el oro como una reserva de valor confiable y tangible a largo plazo, así como proteger la cartera, reducir la volatilidad y minimizar pérdidas durante periodos de crisis.

## 3. Joyería.

Las joyas de oro representan la mayor fuente de demanda anual de oro por sector. Esto ha disminuido en las últimas décadas, pero aún representa alrededor del 50 % de la demanda total.

India y China son, son por mucho, los mercados más grandes, en términos de volumen, y en conjunto representan más del 50 % de la demanda mundial actual de oro.

## 4. Tecnología.

El oro ha sido central durante mucho tiempo para las innovaciones en electrónica. Actualmente, con las propiedades del oro y la llegada de la nanotecnología se están impulsando nuevos usos en medicina, ingeniería y gestión ambiental[5].

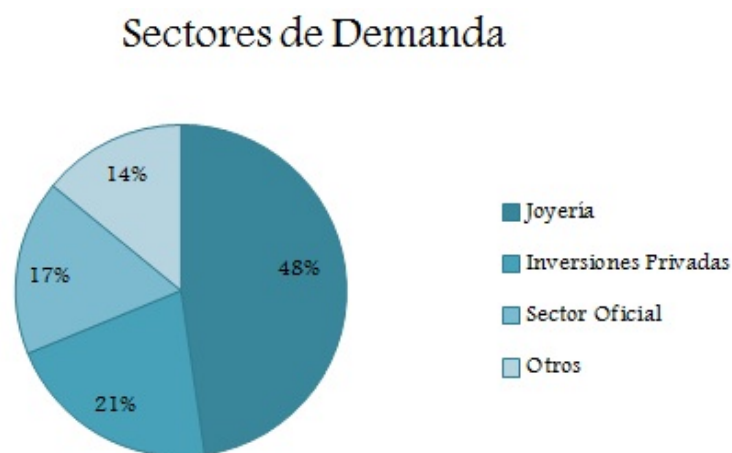


Figura 1.1: Porcentaje de ocupación de sectores de demanda

### 1.2.2. Mercados de oro más grandes en el mundo

En China, el oro a menudo se regala a los miembros más jóvenes de la familia para ocasiones especiales, y existe la tradición de darlo a los recién nacidos en forma de pequeños collares o pulseras, éste también tiene un lugar especial en el año nuevo chino. La mayor parte del oro que entra a China continental previamente pasa por Hong Kong y uno de los mercados principales de China es el Shanghai Gold Exchange (SGE).

India es uno de los mercados más grandes para el oro, y la creciente riqueza está impulsando el crecimiento de la demanda, tiene un papel central en la cultura del país, considerado una reserva de valor, un símbolo de riqueza y estatus y una parte fundamental de muchos rituales.

El mercado de Londres London Bullion Market Association (LBMA) es el más grande en el mundo y el centro del mundo para la venta al mayor de intercambio de oro, ya que utiliza contratos spot (que se liquidan según los precios del momento), así como también contratos swaps y forwards (en donde se promete el envío de metal físico a cambio de dinero en efectivo), options (el vendedor tiene el derecho pero no la obligación de comprar en un futuro una cantidad predeterminada a un precio acordado con anterioridad), préstamos y arrendamientos.

El mercado de Estados Unidos de joyas de oro se ha alejado de las ventas de dicho metal en el mercado masivo y está disfrutando de un renacimiento en la gama alta con el crecimiento de las marcas de diseñadores de joyas. El mercado más importante de futuros en el país sobre el precio del oro está en Nueva York y es el New York Commodity Exchange (COMEX).

En Suiza, la última mina de oro cerró definitivamente hace más de medio siglo, sin embargo, pese a la ausencia de este metal precioso en el subsuelo suizo, el país se convirtió en una auténtica potencia en la compra-venta de oro, la razón de éxito en la comercialización radica en factores vinculados a la seguridad y a la eficacia de los servicios financieros y logísticos que facilitan el comercio de este metal, asimismo cuatro de las principales refinerías internacionales del metal dorado están en Suiza y el mercado principal está en Zurich.

Australia es el sexto mayor exportador mundial de oro, por detrás de Suiza, Hong Kong, Reino Unido y Estados Unidos, fue el segundo mayor productor del metal precioso en 2018 por detrás de China, con 315 toneladas de metal. Su contribución a la economía del país es muy importante ya que la industria del oro acapara más de la mitad de las exportaciones anuales de Australia, y el mercado principal está en Sidney.

### 1.2.3. Factores que determinan el costo del oro

A las 11 de la mañana del 12 de septiembre de 1919, en las oficinas de NM Rothschild, se fijó el precio del oro por primera vez en la historia. Es lo que se conoce como “Gold Fixing”. El primer Gold Fixing fijó oficialmente el precio del oro en Londres con \$20.67 pesos. En la actualidad, casi un siglo después, los miembros de la ‘London Gold Fixing Association’ fijan los precios del oro dos veces al día, vía telefónica. A las 10:30 AM y a las 3:00 PM, hora de Londres. Algunos expertos consideran de mayor importancia esta segunda fijación, ya que es cuando se encuentra operativo el mercado de Nueva York. Hay elementos clave que afectan el precio del oro, entre los principales se encuentran:

- La tasa de interés nacional.  
Cuando esta aumenta, el oro tiende a bajar ya que los inversores se mueven hacia los bonos del gobierno y otros activos cuyo rendimiento está relacionado con la tasa de interés. La tasa de interés más importante es la establecida por la Reserva Federal<sup>4</sup>.
- La coyuntura económica mundial.  
Las incertidumbres económicas y crisis mundiales llevan a que los inversores vendan acciones por el bajo rendimiento de los bonos y suba así el precio del oro.
- Las tensiones políticas.  
Las situaciones geopolíticas mundiales y las tensiones o guerras comerciales entre países líderes mundiales, pueden provocar subidas del metal precioso de manera importante, ya que los inversores compran el producto para tener un alto grado de seguridad ante un momento de confusión.
- Noticias y hechos puntuales.  
Atentados mundiales importantes hacen disparar el precio del oro, así como hechos que pueden producir cambios en la economía en la bolsa mundial.
- Los niveles de oferta, demanda y producción.  
La cantidad de metal que se extrae en las minas y su producción pueden hacer entender que el oro suba o baje. La demanda de oro en sectores como la joyería y tecnología provocan que su valor aumente y que la producción sea cada vez más necesaria. Las grandes producciones de minería de oro “fácil” ya se han extraído. Ahora, extraer este metal precioso cuesta más y eso incide en su precio. La minería tiene mayores riesgos y su costo es mayor por lo que se incrementa el precio del oro. La extracción del oro cada vez será más difícil y menor. La escasez hará aumentar el precio del este metal en el futuro.
- Acumulación de oro en Bancos Centrales.  
La compra de grandes cantidades de oro de países como China y Rusia, entre otros, puede provocar que el precio del oro ascienda o descienda. En ocasiones, la compra de oro se refiere a momentos puntuales debido a causas meramente culturales. Países como India y China, son grandes consumidores de oro y en determinadas épocas del año según sus festividades hacen gran incremento de éste, ya que los ciudadanos de estos países compran oro como regalo, lo cual origina un aumento en la demanda del metal.
- Situación de crisis económica de los Bancos Centrales.  
En momentos de recesión económica es cuando más aumenta la demanda del oro y se dispara su precio. Los Bancos Centrales acumulan reservas de lingotes de oro para poder obtener más liquidez y de esta manera poder prestar dinero. Por otro lado se blindan para combatir una posible inflación.
- El dólar estadounidense.  
La forma estándar de valorar el oro se realiza midiendo su precio según el número de dólares que se necesitarían para obtener una onza de oro. El dólar y el precio del oro tienen una relación inversa, cuando el dólar sube, el oro baja, ya que con un dólar ahora se compra una mayor cantidad de oro que antes. El oro también baja cuando el rendimiento de los bonos sube, especialmente los bonos del tesoro de Estados Unidos a 10 años, que

---

<sup>4</sup>Banco central de Estados Unidos y árbitro importante de los mercados globales.

son generalmente considerados como el punto supremo de referencia para el rendimiento de los bonos.

Al contrario que otras inversiones, el oro no paga interés. En ambientes de baja tasa de interés, que normalmente coinciden con periodos de incertidumbre económica, el oro tiende a ofrecer un buen comportamiento debido al aumento de inversiones por su uso como valor refugio. Cuando las tasas de interés y el rendimiento aumentan, el oro generalmente tiene un peor desempeño, pues los inversores buscan otros activos que les proporcionen ingresos más regulares.

- Fluctuaciones en divisas.

El precio del oro se verá afectado por las fluctuaciones de divisas como el Yen japonés, el dólar australiano o libra esterlina.

- Riesgo de inflación.

La inflación y los tipos de interés están muy relacionados. Un crecimiento sostenido en los precios en general lleva a tipos de interés más altos. El oro suele tener un mejor desempeño en situaciones de inflación alta o de deflación, cuando hay un crecimiento agudo de la tensión financiera. Cuánto más riesgos de inflación existan, mayor valor y demanda tendrá este metal. Los inversionistas se centrarán en él y obtendrá protagonismo porque verán recompensada su apuesta, ya que no hay mucho riesgo de que su dinero pierda valor.

- La producción industrial.

Cuando la producción aumenta, la demanda de oro aumenta y viceversa, sin embargo en su mayoría, se basan en pequeñas explotaciones artesanales donde los mineros trabajan de una forma muy dura, por muy poco dinero ya sea como asalariados o como trabajadores autónomos, por lo que las minas de producción quedan a un costo sumamente razonable[6].

# Capítulo 2

## Marco teórico

El uso de observaciones históricas hasta el instante  $t$  de una serie de tiempo para pronosticar su valor en un futuro  $t + 1$ , es la base para planeaciones económicas, de negocios, de producción, control de inventarios y optimización de procesos industriales, entre otros. Para muchos problemas en los Negocios, Economía, Ingeniería, Física y Ciencias Ambientales, los datos de series de tiempo pueden presentarse como diversas variables de interés.

Para el análisis de los datos, se requieren conocer conceptos importantes que se usaron a lo largo del estudio, los cuales se mencionan a continuación.

### 2.1. Serie de tiempo

Una serie de tiempo es un conjunto de observaciones  $X_t$ , cada una de las cuales está asociada a un momento en el tiempo  $t$ . Cuando las observaciones estudiadas provienen de intervalos fijos de tiempo, entonces se está trabajando con una serie de tiempo discreta. De la misma forma, cuando las observaciones se generan y observan de forma continua, la serie de tiempo es continua[8].

#### 2.1.1. Estacionariedad

La importancia de la estacionariedad radica en que los procesos estacionarios son más fáciles de analizar, modelar e investigar, incluso deberían ser posibles de predecir, ya que la forma en que cambian es predecible, y dicha característica se presenta a lo largo de la metodología como objetivo.

En muchos casos, los modelos simples pueden ser sorprendentemente útiles, ya sea como bloques de construcción para construir otros más elaborados, o como aproximaciones útiles a fenómenos complejos. Debido a estas propiedades, la estacionariedad se ha convertido en un supuesto común para muchas prácticas y herramientas en el análisis de series de tiempo, incluyen la estimación de tendencias, el pronóstico y la inferencia causal, entre otros, además la ubicuidad en el análisis de series de tiempo hace que la capacidad de comprender, detectar y modelar sea necesaria para la aplicación de muchas herramientas y procedimientos destacados en el análisis de series de tiempo.

La estacionariedad significa que las propiedades estadísticas del proceso no cambian con el tiempo. Una distinción importante que hacer antes de sumergirse en estas definiciones es que

la estacionariedad, de cualquier tipo, es una propiedad de un proceso estocástico, y no de una realización finita o infinita del mismo (es decir, una serie temporal de valores)[29].

### Estacionariedad fuerte

Ésta estacionariedad, requiere la invariancia de cambio (en el tiempo) de las distribuciones de dimensiones finitas de un proceso estocástico. Esto significa que la distribución de una subsecuencia finita de variables aleatorias del proceso estocástico. Formalmente el proceso estocástico discreto  $X = \{x_i; i \in \mathbb{Z}\}$  es estacionario si

$$F_X(x_{t_1+\tau}, \dots, x_{t_n+\tau}) = F_X(x_{t_1}, \dots, x_{t_n})$$

Para  $T \subset \mathbb{Z}$  con  $n \in \mathbb{N}$  y cualquier  $\tau \in \mathbb{Z}$  Para procesos estocásticos continuos, la condición es similar, con  $T \subset \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y cualquier  $\tau \in \mathbb{R}$  en su lugar.

Esta es la definición más común de estacionariedad, y comúnmente se conoce simplemente como estacionariedad. A veces también se conoce como estacionariedad de sentido estricto o estacionariedad de sentido fuerte.

### Estacionariedad débil

La estacionariedad débil solo requiere la invariancia de cambio (en el tiempo) del primer momento y el momento cruzado (la covarianza automática). Esto significa que el proceso tiene la misma media en todos los puntos de tiempo, y que la covarianza entre los valores en dos puntos de tiempo,  $t$  y  $tk$ , depende solo de  $k$ , la diferencia entre los dos tiempos, y no de la ubicación de los puntos a lo largo del eje del tiempo.

Formalmente el proceso  $\{x_i; i \in \mathbb{Z}\}$  es estacionariamente débil si:

1. El primer momento de  $x_i$  es constante, es decir  $\forall t, E[x_i] = \mu$
2. El segundo momento de  $x_i$  es finito para todo  $t$ , es decir  $\forall t, E[x_i^2] < \infty$ .
3. El momento cruzado, es decir, la autocovarianza depende solo de la diferencia  $u - v$ , es decir  $\forall u, v, a, cov(x_u, x_v) = cov(x_{u+a}, x_{v+a})$ .

La tercera condición implica que cada retraso  $\tau \in \mathbb{N}$  tiene un valor de covarianza constante asociado con él:

$$cov(x_{t_1}, x_{t_2}) = K_{XX}(t_1, t_2) = K_{XX}(t_2 - t_1, 0) = K_{XX}(\tau)$$

Esto implica directamente que la varianza del proceso también es constante, ya que obtenemos eso para todo  $t \in \mathbb{N}$

$$Var(X_t) = cov(x_t, x_t) = K_{XX}(t, t) = K_{XX}(0) = d$$

### 2.1.2. Pruebas de estacionariedad

En la mayoría de modelos y análisis de series temporales, es indispensable que éstas sean estacionarias, cuando no es el caso, el primer requisito suele ser estacionariedad, lo cual se suele conseguir aplicando:

- Logaritmos (para corregir heterocedasticidad), en la cual se emplea una transformación para que la varianza sea constante.

- Diferencia regular, la cual se refiere a la transformación que elimina la tendencia (o lo que es lo mismo, induce estacionariedad en media) es la diferenciación, consiste en calcular la diferencia entre cada dato (por ejemplo, mensual) y el anterior, en donde siempre se pierde el primer dato de la serie.
- Diferencia estacional (eliminar componente estacional), es decir, calcular la diferencia entre el valor de la serie en un mes de un año con respecto al dato de ese mismo mes, pero del año anterior[8].

Una prueba de raíz unitaria prueba si una variable de serie temporal no es estacionaria y posee una raíz unitaria. La hipótesis nula se define generalmente como la presencia de una raíz unitaria y la hipótesis alternativa es la de estacionariedad. En un principio, una raíz unitaria, es una tendencia estocástica en la serie temporal. Por tanto, si la serie tiene una raíz unitaria, ésta presenta un patrón sistemático que es impredecible.

En general, el enfoque de la prueba de raíz unitaria supone implícitamente que la serie de tiempo que se probará, puede ser escrita como:

$$y_t = D_t + z_t + \epsilon_t$$

donde  $D_t$  es el componente determinista (tendencia, componente estacional),  $z_t$  es el componente estocástico y  $\epsilon_t$  es el proceso de error estacionario. En resumen, el propósito de la prueba es determinar si el componente estocástico contiene una raíz unitaria o es estacionario.

Ahora, con el fin de determinar las propiedades de estacionariedad de las series se pueden utilizar distintos procedimientos:

### 1. Test de Dickey Fuller Aumentado (ADF)

La prueba ADF prueba la hipótesis nula de que una serie de tiempo  $y_t$  es  $I(1)$  frente a la alternativa de que es  $I(0)$ .

$$y_t = \beta' D_t + \phi y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \psi_j \Delta y_{t-j} + \epsilon_t \quad (2.1)$$

donde  $D_t$  es un vector de términos deterministas (constante, tendencia, etc.),  $p$  los términos de diferencia rezagada,  $\Delta y_{t-j}$  se utilizan para aproximar la estructura ARMA de los errores, y el valor de  $p$  se establece de modo que el error  $\epsilon_t$  sea no correlacionado en serie. La especificación de los términos deterministas depende del comportamiento asumido de  $y_t$  bajo la hipótesis alternativa de estacionariedad de tendencia.

Bajo la hipótesis nula,  $y_t$  es  $I(1)$  que implica que  $\phi = 1$ . El estadístico ADF- $t$  y el estadístico de sesgo normalizado se basan en los estimados de mínimos cuadrados de 2.1 y están dados por:

$$ADF_t = t_{\phi=1} = \frac{\hat{\phi} - 1}{SE(\hat{\phi})}$$

$$ADF_n = \frac{T(\hat{\phi} - 1)}{1 - \hat{\psi}_1 - \dots - \hat{\psi}_p}$$

Una formulación alternativa de la regresión de prueba ADF es:

$$\Delta y_t = \beta' D_t + \pi y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \psi_j \Delta y_{t-j} + \epsilon_t \quad (2.2)$$



donde  $\pi = \phi - 1$ . Bajo la hipótesis nula,  $\Delta y_t$  es  $I(0)$  lo que implica que  $\pi = 0$ . El estadístico  $ADF - t$  es entonces el estadístico  $t$  habitual para probar que  $\pi = 0$  y el estadístico de sesgo normalizado ADF es  $T\hat{\pi}/(1 - \hat{\psi}_1 - \dots - \hat{\psi}_p)$ . La prueba de regresión 2.2 se usa a menudo en la práctica porque el estadístico  $ADF - t$  es el estadístico  $t$  habitual que se informa para probar la importancia del coeficiente  $y_{t1}$ . En resumen, es la prueba que elimina la autocorrelación e indica si una serie es estacionaria o no.

## 2. El test de Phillips–Perron (PP)

Este test difiere del anterior principalmente en cómo trata la correlación serial y la heterocedasticidad en los errores. En particular, donde las pruebas de ADF usan una autorregresión paramétrica para aproximar la estructura ARMA de los errores en la regresión de prueba, las pruebas PP ignoran cualquier correlación serial en la regresión de prueba.

$$\Delta y_t = \beta' D_t + \pi y_{t-1} + u_t$$

donde  $u_t$  es  $I(0)$ . Éstas pruebas corrigen cualquier correlación serial y heterocedasticidad en los errores  $u_t$  de la prueba de regresión modificando directamente las estadísticas de prueba  $t_\pi = 0$  y  $T\hat{\pi}$ . Éstas estadísticas modificadas, denominadas  $Z_t$  y  $Z_\pi$ , están dadas por:

$$Z_t = \left( \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\lambda}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot t_\pi = 0 - \frac{1}{2} \left( \frac{\hat{\lambda}^2 - \hat{\sigma}^2}{\hat{\lambda}^2} \right) \cdot \left( \frac{T \cdot SE(\hat{\pi})}{\hat{\sigma}^2} \right)$$

$$Z_\pi = T\hat{\pi} - \frac{T^2 \cdot SE(\hat{\pi})}{2\hat{\sigma}^2} (\hat{\lambda}^2 - \hat{\sigma}^2)$$

Los términos  $\hat{\sigma}^2$  y  $\hat{\lambda}^2$  son estimaciones consistentes de los parámetros de varianza.

$$\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \sum_{t=1}^T \mathbf{E} [u_t^2]$$

$$\lambda^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T \mathbf{E} [T^{-1} S_T^2]$$

donde  $S_T = \sum_{t=1}^T u_t$ . Bajo la hipótesis nula de que  $\pi = 0$ , las estadísticas  $Z_t$  y  $Z_\pi$  tienen las mismas distribuciones asintóticas que la estadística  $t$  de ADF y las estadísticas de sesgo normalizadas. Una ventaja de éstas pruebas sobre las pruebas ADF es que son robustas a las formas generales de heterocedasticidad en el término de error  $u_t$ . En general, es una modificación de test de Dickey-Fuller, en donde corrige la autocorrelación y heterocedasticidad en los errores[26].

## 2.2. Proceso estocástico

Un enfoque común en el análisis de datos de series temporales es considerar las series temporales observadas como parte de la realización de un proceso estocástico. Se requieren dos definiciones superficiales antes de definir procesos estocásticos.

**Espacio de probabilidad:** un espacio de probabilidad es un triple  $(\Omega, F, P)$ , donde:

1.  $\Omega$  es un conjunto no vacío, llamado espacio muestral.

2.  $F$  es un  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega$ , es decir, una familia de subconjuntos cerrados con respecto a la unión contable y complemento con respecto a  $\Omega$ .
3.  $P$  es una medida de probabilidad definida para todos los miembros de  $F$ .

**Variable aleatoria:** una variable aleatoria real o variable estocástica real en  $(\Omega, F, P)$  es una función  $x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , de modo que la imagen inversa de cualquier intervalo  $(-\infty, a]$  pertenece a  $F$ ; es decir, una función medible .

Ahora podemos definir qué es un proceso estocástico. Un proceso estocástico real es una familia de variables aleatorias reales  $X = \{x_i(\omega); i \in T\}$ , todos definidos en el mismo espacio de probabilidad  $(\Omega, F, P)$ . El conjunto  $T$  se denomina conjunto de índices del proceso. Si  $T \subset \mathbb{Z}$ , entonces el proceso se llama proceso estocástico discreto. Si  $T$  es un intervalo de  $\mathbb{R}$ , entonces el proceso se llama proceso estocástico continuo[10].

## 2.3. Proceso Wiener-movimiento browniano

En un modelo econométrico de tiempo continuo, suponemos que los choques forman un proceso de Wiener, que también se conoce como un movimiento browniano estándar. Hay muchas formas de definir un proceso Wiener  $\{w_t\}$ <sup>1</sup>. Utilizamos un enfoque simple que se centra en el pequeño cambio  $\Delta w_t = w_{t+\Delta t} - w_t$  asociado con un pequeño incremento  $\Delta t$  de tiempo. Un proceso estocástico continuo  $\{w_t\}$  es un proceso de Wiener si satisface:

1.  $\Delta w_t = \epsilon \sqrt{\Delta t}$ , donde  $\epsilon$  es una variable aleatoria normal estándar.
2.  $\Delta w_t$  es independiente de  $w_j$  para toda  $j \leq t$ .

La segunda condición es una propiedad de Markov que dice que, cualquier información pasada del proceso,  $w_j$  con  $j < t$ , es irrelevante para el futuro  $w_{t+\ell}$  con  $\ell > 0$ , dependiendo del valor presente  $w_t$ . De esta propiedad, se ve fácilmente que para dos intervalos que no tienen elementos en común de tiempo  $\Delta 1$  y  $\Delta 2$ , los incrementos  $w_{t_1+\Delta 1} - w_{t_1}$  y  $w_{t_2+\Delta 2} - w_{t_2}$  son independientes.

Desde la primera condición,  $\Delta w_t$  se distribuye normalmente con media cero y varianza  $\Delta t$ . Es decir,  $\Delta w_t \sim N(0, \Delta t)$ , donde  $\sim$  denota la distribución de probabilidad. Considere a continuación el proceso  $w_t$ . Suponemos que el proceso comienza en  $t = 0$  con valor inicial  $w_0$ , que es fijo y a menudo se establece en cero. Entonces  $w_t - w_0$  puede ser tratado como una suma de muchos pequeños incrementos. Más específicamente, definimos  $T = t/\Delta t$ , donde  $\Delta t$  es un pequeño incremento positivo. Entonces:

$$w_t - w_0 = w_{T\Delta t} - w_0 = \sum_{i=1}^T \Delta w_i = \sum_{i=1}^T \epsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

Donde  $\Delta w_i = w_{i\Delta t} - w_{(i-1)\Delta t}$ . Como  $\epsilon_i$  son independientes tenemos:

$$E(w_t - w_0) = 0$$

$$\text{Var}(w_t - w_0) = \sum_{i=1}^T \Delta t = T\Delta t = t$$

---

<sup>1</sup>Se refiere a  $(w_t, t \in [0, \infty))$

Por lo tanto, el incremento en  $w_t$  del tiempo 0 al tiempo  $t$  se distribuye normalmente con media cero y varianza  $t$ . Formalmente, para un proceso de Wiener  $w_t$ , tenemos  $w_t - w_0 \sim N(0, t)^2$ . Esto dice que la varianza de un proceso de Wiener aumenta linealmente con el intervalo de tiempo[7].

**Observación:** Una definición formal de un movimiento browniano  $w_t$  en un espacio de probabilidad  $(\Omega, F, P)$  es que es un proceso estocástico continuo de valor real para  $t \geq 0$  con incrementos independientes y estacionarios. En otras palabras,  $w_t$  satisface lo siguiente:

1. Continuidad: El mapeo de  $t$  a  $w_t$  es continuo casi seguramente con respecto a la medida de probabilidad  $P$ .
2. Incrementos independientes: Si  $s \leq t$ ,  $w_t - w_s$  es independiente de  $w_v$  para todos los  $v \leq s$ .
3. Incrementos estacionarios: Si  $s \leq t$ ,  $w_t - w_s$  y  $w_{t-s} - w_0$  tiene la misma distribución de probabilidad.

## 2.4. Proceso de Wiener generalizado

El proceso de Wiener es un proceso estocástico especial con deriva cero<sup>3</sup> y varianza proporcional a la duración del intervalo de tiempo. Esto significa que la tasa de cambio en la esperanza es cero y la tasa de cambio en la varianza es 1. En la práctica, la media y la varianza de un proceso estocástico puede evolucionar con el tiempo en un proceso más complicado. Por lo tanto, se necesita una mayor generalización de un proceso estocástico. Al final, consideramos el proceso generalizado de Wiener en el que la esperanza tiene tasa de deriva  $\mu$  y la tasa de cambio de varianza es  $\sigma^2$ . Entonces el modelo para  $x_t$  es:

$$dx_t = \mu dt + \sigma dw_t \quad (2.3)$$

donde  $w_t$  es un proceso de Wiener. Si consideramos una versión discretizada de la ecuación 2.3 entonces

$$x_t - x_0 = \mu t + \sigma \epsilon \sqrt{t}$$

para incrementos de 0 a  $t$ . Por consiguiente

$$E(x_t - x_0) = \mu t$$

$$\text{Var}(x_t - x_0) = \sigma^2 t$$

Los resultados dicen que el incremento en  $x_t$  tiene una tasa de crecimiento de  $\mu$  para la esperanza y una tasa de crecimiento de  $\sigma^2$  para la varianza. En la literatura,  $\mu$  y  $\sigma$  de la ecuación 2.3 se conocen como los parámetros de derivada y volatilidad del proceso generalizado de Wiener  $x_t$ [7].

## 2.5. Ruido $1/f$

Si en nuestro estudio hay fluctuaciones aleatorias o errores de medición en los datos que no están modelados, se puede llamar ruido estocástico; o, cuando el fenómeno que se está modelando (o aprendiendo) es demasiado complejo, por lo que los datos contienen esta complejidad

<sup>2</sup> $w_t - w_0$  se distribuye como una Normal  $(0, t)$

<sup>3</sup>La deriva cero se refiere la velocidad a la que cambia el valor esperado de un proceso

adicional que no está modelada.

En pocas palabras el ruido  $1/f$  es un ruido de baja frecuencia para el cual la potencia de ruido es inversamente proporcional a la frecuencia. Se ha observado el ruido  $1/f$  en electrónica, también en música, biología, ecología e incluso economía.

En su definición más formal, el ruido  $1/f$ , o ruido  $1/f^v$ , es un proceso aleatorio evolutivo en el sentido de que los parámetros que caracterizan el proceso estocástico (media, varianza, covarianzas) que lentamente se desplaza con el tiempo.

Existen diversos tipos de ruido  $1/f$ , el ruido “ $1/f$ ” tal cual, se refiere a el ruido  $1/f^v$  para cada  $0 \leq v \leq 2$ , “ruido-casi-rosa  $1/f$ ” se refiere a casos en los que  $0.5 \leq v \leq 1.5$  y “ruido-rosa” se refiere al caso específico donde  $v = 1$ . Todos los ruidos  $1/f^v$  están definidos por la forma de su espectro de potencia  $S(\omega)$ :

$$S(\omega) \propto \frac{1}{\omega^v} \quad (2.4)$$

donde  $\omega = 2\pi f$  es la frecuencia angular (o frecuencia baja). El espectro 2.4 no constituye un espectro válido en el sentido estacionario de procesos aleatorios porque no es integrable, ya sea como  $\omega \rightarrow 0$  para ( $v \geq 1$ ) o como  $\omega \rightarrow \infty$  para ( $v \leq 1$ ). La no integrabilidad en los casos ( $v \geq 1$ ) está asociado con la potencia infinita en eventos de baja frecuencia; esto se llama la catástrofe infrarroja. Por el contrario para ( $v \leq 1$ ), que contiene potencia infinita a altas frecuencias, se llama catástrofe ultravioleta.

El ruido rosa ( $v = 1$ ) no es integrable en ambos extremos del espectro. Las frecuencias superior e inferior de observación están limitadas por la duración de la serie temporal y la resolución de la medida, respectivamente. Como resultado, todos los ruidos  $1/f$  tienen una serie de sutilezas asociadas con la interpretación de su espectro. Los ruidos  $1/f$  comparten con series temporales ecológicas una serie de propiedades importantes: características en muchas escalas (fractalidad), crecimiento de varianza y memoria a largo plazo, cabe señalar que este trabajo, se consideran la estacionariedad e integrabilidad como conceptos distintos.

También cabe destacar que el ruido  $1/f$  es un intermedio entre el ruido blanco, el cual se refiere a una señal aleatoria que se caracteriza por el hecho de que sus valores de señal en dos tiempos diferentes no guardan correlación estadística (en el tiempo) y como consecuencia de ello, su densidad espectral de potencia es una constante, es decir, su gráfica es plana y el movimiento browniano sin correlación entre incrementos.

### 2.5.1. Escala y fractalidad del proceso $1/f$

Los ruidos  $1/f$  son a menudo considerados como procesos estadísticos fractales, una propiedad que es más claramente expresada a través de la relación de escala para el espectro: para cualquier constante  $a$ ,

$$S(\omega) = |a|^v S(a\omega) \quad (2.5)$$

En pocas palabras, el significado de esto es que el espectro puede considerarse una ley de poder de superposición de perturbaciones en diferentes escalas de tiempo. Los ruidos  $1/f$  tienen vínculos estrechos con el movimiento browniano fraccional (fBm). Un proceso fBm  $X(t)$  obedece a una escala definido a través de su función de densidad de probabilidad  $f(x, t)$ :

$$f(a^H x, at) = a^H f(x, t) \quad (2.6)$$

El parámetro  $H$  se llama el exponente de Hölder y también el “exponente de Hurst” de la fBm. Esto sigue el trabajo de S.E. Hurst[15] sobre la cuantificación del crecimiento de la varianza

como factor de riesgo al considerar el comportamiento a largo plazo de los embalses. Para el movimiento browniano ordinario  $H = \frac{1}{2}$ . El espectro de fBm es aproximadamente  $1/f^v$ , con  $v = 2H + 1$ , por lo que fBm se usa a menudo como modelo del ruido  $1/f$ , para  $v > 1$ , fBm solo es válido para el rango  $0 < H < 1$  y, por lo tanto, no se puede utilizar para ruidos  $1/f$  con  $v \leq 1$ . Sin embargo, si fBm se diferencia por primera vez, el resultado es un ruido gaussiano fraccional (fGn). Esto es un ruido  $1/f$  con exponente espectral  $v = 2H - 1$  y así se puede usar para el rango  $1 > v > -1$ . Una versión discreta de fBm (llamada “diferenciación fraccional”) fue desarrollado por Hosking[17].

### Varianza creciente

La varianza es una medida de la propagación de valores en un proceso y puede definirse como  $V = E \{n(t)^2\} - E \{n(t)\}^2$  donde  $E \{ \}$  denota el valor esperado. los ruidos  $1/f$  son caracterizado por una varianza creciente. Por un tiempo de observación  $\Delta t$ , la varianza observada de una muestra de la serie de procesos depende de  $\Delta t$  de la siguiente manera.

$$V(\Delta t) \propto 1 - \Delta t^{v-1}, \quad \forall v < 1 \quad (a)$$

$$V(\Delta t) \propto \ln \Delta t, \quad v = 1 \quad (b)$$

$$V(\Delta t) \propto \Delta t^{v-1}, \quad \forall v > 1 \quad (c)$$

Solo para  $v < 1$  este crecimiento alcanza un límite.

### La autocorrelación y la memoria de los procesos $1/f$

#### Memoria larga.

Quizás el éxito empírico más dramático de procesos de memoria largos han estado en trabajos recientes, modelando la volatilidad de los precios de los activos y las transformaciones de poder de los rendimientos, por lo cual llega a ser un concepto de suma importancia, el cual dice que dado un proceso discreto de series de tiempo  $Y_t$  con la función de autocorrelación  $P_j$  en el retraso  $j$ , el proceso posee una larga memoria si la cantidad:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-n}^n |P_j|$$

No es finito. De manera equivalente, la densidad espectral  $f(\omega)$  será ilimitada a frecuencias bajas[27].

Una característica clave de los ruidos  $1/f$  es su memoria larga y su función de autocorrelación

$$R(\tau) = E \{n(t + \tau)n(t)\}$$

por lo general, depende de la ley de potencia del retraso  $\tau$ :

$$R(\tau) \propto \frac{1}{|\tau|^{1-v}}, \quad v < 1$$

La series de tiempo se pueden subdividir en categorías diferentes, con el ruido blanco, el ruido  $1/f$  y el ruido browniano como fronteras entre tales categorías respectivas, el ruido blanco

es no correlacionado, el ruido  $1/f$  es ni estacionario ni no estacionario y el ruido browniano es ni persistente ni antipersistente.

La Fig.2.1 ofrece un resumen de las principales definiciones y características de los ruidos  $1/f^v$  en términos de su “color” convencional, el crecimiento de la varianza, la estacionariedad y el alcance de algunos de los modelos utilizados para generar el proceso, en términos de su exponente espectral  $v$  sobre el rango de exponentes de  $-1$  a  $+3$ .

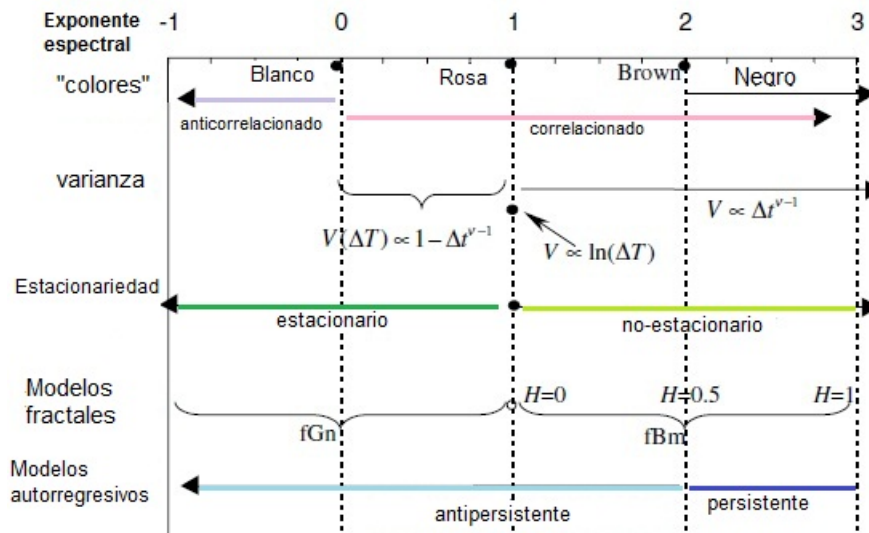


Figura 2.1: Esquema de los ruidos estocásticos en términos de su color (imagen de artículo[12])

### 2.5.2. Aspecto económico en el ruido $1/f$

El ruido  $1/f$  en los datos económicos generalmente se estudia como dependencia de largo alcance o memoria larga. Se ha demostrado repetidamente que las funciones de autocorrelación de series de tiempo económicas, como series de precios de acciones durante días, semanas o meses, o los PNB de varios países durante años, no decaen exponencialmente como lo harían si el proceso que genera la serie fuera un proceso simple autorregresivo, de aquí recae su importancia en el ámbito económico[30].

## 2.6. Espectro de Fourier

La idea básica de la transformada de Fourier es que transforma un problema complicado en otro más fácil de resolver y luego se obtiene la solución del problema original pero ahora como la transformada de Fourier inversa de la solución del problema transformado, es decir, "el problema más fácil". La transformada de Fourier es una herramienta básica en el análisis de series de tiempo que tienen energía finita. En este sentido, la transformada de Fourier juega el mismo papel que las series de Fourier para señales periódicas en resumen, es la representación del dominio de frecuencia de una señal.

### 2.6.1. Definición y propiedades básicas

Antes de dar la definición rigurosa de transformada de Fourier, vamos a motivar dicha definición a partir de las series de Fourier. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , una función dada. Para cada  $l > 0$  podemos calcular el desarrollo en serie de Fourier de la función  $f$  el cual, en su forma compleja y suponiendo suficiente regularidad en la función  $f$ , viene dado por:

$$f(x) = \frac{1}{2l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{nl} e^{in\pi x/l}$$

con

$$c_{nl} = \int_{-l}^l f(y) e^{in\pi y/l} dy$$

Con el cambio  $\xi_n = \frac{n\pi}{l}$  las expresiones se escriben como:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{nl} e^{i\xi_n x} \frac{\pi}{l}, \quad c_{nl} = \int_{-l}^l f(y) e^{-i\xi_n y} dy \quad (2.7)$$

Si suponemos que  $f$  decae muy rápidamente cuando  $|x| \rightarrow \pm\infty$ , entonces

$$c_{nl} \approx \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi_n y} dy$$

y a medida que  $l \rightarrow \infty$  la primera expresión 2.7 tiene un aspecto de una suma de Riemann. De esta forma, haciendo  $l \rightarrow \infty$  se tiene que:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} dx$$

con

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\xi y} dy$$

Los coeficientes de Fourier  $c_{nl}$  pasan a tener la forma  $\hat{f}(\xi)$  que es lo que enseguida llamaremos transformada de Fourier de la función  $f$ . Tenemos pues que la transformada de Fourier es, en el sentido anterior, lo que equivale a los coeficientes de Fourier de una función periódica.

Dada una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , se define formalmente su transformada de Fourier como la función de variable real descrita como:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

La definición anterior es formal en el sentido de que la integral que aparece no tiene porque existir para una  $f$  cualquiera. La convergencia de dicha integral está garantizada en caso de ser  $f$  absolutamente integrable, es decir, si consideramos el espacio.

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty \right\}$$

entonces la transformada de Fourier de  $f$  está bien definida siempre que  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Recordemos que  $L^1(\mathbb{R})$ , equipado de la norma:

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

es un espacio de Banach. En realidad, la integral que aparece en 2.8 no se entiende en sentido de Riemann impropio sino en el sentido de Lebesgue. Lo mismo sucede en la definición del espacio  $L^1(\mathbb{R})$ . Sin embargo, si  $f$  es continua a trozos y si existen los límites y son finitos

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 |f(x)| dx$$

y

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b |f(x)| dx$$

es decir, si  $|f|$  es integrable en sentido de Riemann impropio, entonces  $f \in L^1(\mathbb{R})$  y por tanto existe la transformada de Fourier de  $f$  la cual viene dada por 2.8. A efectos de cálculo, en este capítulo entenderemos que las funciones que consideramos son absolutamente integrables en sentido de Riemann impropio[9].

### 2.6.2. Análisis espectral

En pocas palabras, el análisis espectral o densidad espectral es la descomposición de una serie temporal en funciones seno y coseno subyacentes de diferentes frecuencias empleando el análisis de Fourier descrito anteriormente, lo que nos permite determinar aquellas frecuencias que parecen particularmente fuertes o importantes, o determinar si las potencias siguen una ley exponencial o de ley de potencias en las frecuencias.

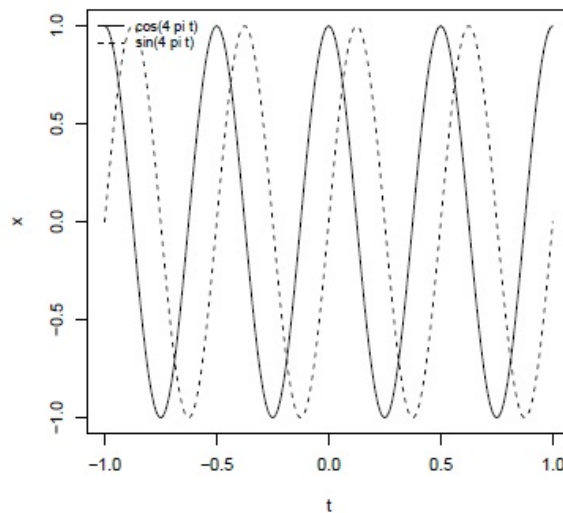


Figura 2.2: Analisis espectral.

La **frecuencia** ( $f$ ) de una función seno o coseno se expresa típicamente en términos del número de ciclos por unidad de tiempo. Por ejemplo, en la figura anterior, la frecuencia de cada función es de 2 ciclos por unidad de tiempo.

El **período** ( $T$ ) de una función seno o coseno se define como el tiempo requerido para un ciclo completo. Por lo tanto, es el recíproco de la frecuencia ( $T = \frac{1}{f}$ ). En la figura anterior  $T = \frac{1}{2}$ .



### Montaje de ondas sinusoidales

Al considerar la serie de tiempo como una variable independiente, es posible identificar el análisis espectral como un montaje de ondas sinusoidales compuestas por funciones sinusoidales de todas las posibles frecuencias (discreto).

Supongamos que tenemos una serie temporal  $x_t$  de longitud  $n$ , por conveniencia suponemos que  $n$  es par. Podemos ajustar una serie de tiempo a una regresión con  $x_t$  como respuesta y las siguientes  $n - 1$  variables predictoras.

$$\cos\left(\frac{2\pi t}{n}\right), \sin\left(\frac{2\pi t}{n}\right), \dots, \cos\left(\frac{2\left(\frac{n}{2}-1\right)\pi t}{n}\right), \sin\left(\frac{2\left(\frac{n}{2}-1\right)\pi t}{n}\right), \cos(\pi t)$$

Si representamos los coeficientes de regresión estimados por:  $a_1, b_1, \dots, a_{\frac{n}{2}-1}, b_{\frac{n}{2}-1}, a_{\frac{n}{2}}$  respectivamente, se puede escribir  $x_t$  como:

$$x_t = a_0 + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{n}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{n}\right)$$

+  $a_{\frac{n}{2}} \cos(\pi t)$  Los parámetros del coseno,  $a_k$ , y los parámetros del seno,  $b_k$ , nos dicen el grado en que las funciones respectivas están correlacionados con los datos. Este modelo de regresión es una transformada de Fourier finita para una serie temporal discreta.

Se debe tener en cuenta que debido a que el número de coeficientes es igual a la longitud de la serie de tiempo, no hay grados de libertad para el error. El término de intercepción,  $a_0$ , es solo la media,  $\bar{x}$ , de la serie de tiempo. La frecuencia más baja posible es un ciclo, o  $2\pi$  radianes, por longitud de registro (que es  $2\frac{\pi}{n}$  radianes por intervalo de muestreo). Una frecuencia general, en esta representación, es  $k$  ciclos por longitud de registro ( $2\pi\frac{k}{n}$  radianes por muestreo intervalo). La frecuencia más alta es de 0.5 ciclos por intervalo de muestreo ( $\pi$  radianes por intervalo de muestreo). El intervalo de muestreo (o frecuencia de muestreo) restringe la frecuencia más alta (conocida como frecuencia de Nyquist) que podemos detectar por ejemplo, si tomamos muestras cada semana, no podemos detectar ciclos de menos de 2 semanas en longitud. Por otro lado, la longitud de la serie temporal determina la frecuencia más baja que podemos distinguir.

Se debe prestar mucha atención al intervalo de muestreo y la longitud del registro. Muchas series de tiempo son de una variable que es continua en el tiempo pero se muestrea para dar una serie de tiempo en pasos de tiempo discretos[16].

## 2.7. Exponente de Lyapunov

En los procesos dinámicos, el exponente de Lyapunov es un parámetro que nos ayuda a cuantificar la separación entre una órbita y otra muy cercana, dicho parámetro es empleado en sistemas dinámicos.

La caracterización del exponente de Lyapunov necesita un poco de cálculo. Para este fin, consideramos la iteración de una transformación suave  $f$ , en ésta iteración tenemos  $x_{n+l} = f(x_n)$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Primero reescribimos el crecimiento relativo del error después de  $n$  pasos como un producto.

$$\frac{E_n}{E_0} = \frac{E_n}{E_{n-1}} \cdot \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \cdots \frac{E_1}{E_0}$$

y tomando valor absoluto y logaritmo natural vemos que

$$\frac{1}{n} \ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left| \frac{E_k}{E_{k-1}} \right|$$

Por definición de los términos de error tenemos:

$$\frac{E_k}{E_{k-1}} = \frac{f(x_{k-1} + E_{k-1}) - f(x_{k-1})}{E_{k-1}}$$

y del cálculo obtenemos

$$\lim_{E_0 \rightarrow 0} \frac{E_k}{E_{k-1}} = f'(x_{k-1})$$

Así,

$$\lim_{E_0 \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left| \frac{E_k}{E_{k-1}} \right| = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln |f'(x_{k-1})|$$

Ahora con  $n \rightarrow \infty$  se obtiene el exponente de Lyapunov

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln |f'(x_{k-1})| \quad (2.9)$$

Presentemos una fórmula explícita para el exponente de Lyapunov  $\lambda(x_0)$  para el caso especial de que la órbita de  $x_0$  sea periódica con un período  $m > 0$ . Por lo tanto,

$$X_m = f^m(x_0) = x_0$$

Debido a esta periodicidad tenemos

$$\lambda(x_0) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \ln |f'(x_{k-1})|$$

En otras palabras, el promedio de los factores de amplificación logarítmica, tomado en un ciclo periódico, es el mismo que el promedio tomado durante dos, tres o más períodos, y, por lo tanto, igual al límite en la ecuación 2.9. Por lo tanto, si  $x_0$  es un punto fijo, es decir,  $m = 1$ , obtenemos

$$\lambda(x_0) = \ln |f'(x_{k-1})|$$

Para un segundo ciclo, el exponente de Lyapunov es

$$\lambda(x_0) = \lambda(x_1) = \frac{1}{2} (\ln |f'(x_0)| + \ln |f'(x_1)|)$$

En el caso del iterador cuadrático, donde  $f(x) = ax(1-x)$  obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda(x_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln |a - 2ax_{k-1}| \\ &= \ln a + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |1 - 2x_k| \end{aligned}$$

Dado que  $x = 0$  es un punto fijo del iterador cuadrático, tenemos  $\lambda(0) = \ln a$  (y también,  $\lambda = \ln a$ )[13].

### 2.7.1. El exponente máximo y el tiempo del Lyapunov

El tiempo de Lyapunov se conoce como la escala de tiempo característica en la que un sistema dinámico es caótico y se define como el inverso del mayor exponente de Lyapunov de un sistema.

#### Exponente máximo

Consideramos la separación  $\delta \equiv x' - x$  entre dos trayectorias  $x(t)$  y  $x'(t)$ : Suponemos que

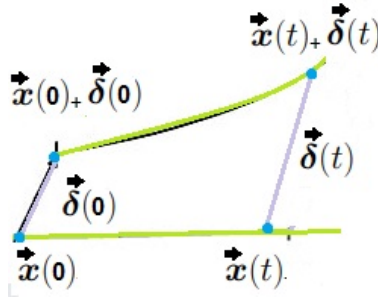


Figura 2.3: Representación de trayectorias para el exponente máximo de Lyapunov.

la distancia pequeña  $\delta(t) \equiv |\delta(t)|$  cambia suavemente como  $\delta \rightarrow 0$  ( $\dot{\delta}$  se aproxima a cero linealmente a medida que  $\delta$  se acerca a cero) y descuida los términos de orden superior en  $\delta(t)$  (suponga que  $\delta(0)$  es lo suficientemente pequeño como para que  $\delta(t)$  sea pequeño para todos los momentos de consideración):

$$\dot{\delta}(t) = h(t)\delta(t) \Rightarrow \delta(t) = \delta(0) \exp \left[ \int_t^0 dt' h(t') \right] \quad (2.10)$$

Se define el exponente máximo de Lyapunov  $\lambda_1$  como el promedio a largo plazo de  $h$ :

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_t^0 dt' h(t') \quad (2.11)$$

y se considera  $t$  grande ( $t$  tiempo).

$$\delta(t) \sim \exp(\lambda_1 t) \delta(0) \Rightarrow \lambda_1 \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta(t)|}{|\delta(0)|} \quad (2.12)$$

Aquí  $\delta(0)$  se hace lo suficientemente pequeño como para que las trayectorias permanezcan cercanas en todo momento de interés.  $\lambda_1$  describe si un sistema es sensible a pequeñas desviaciones en las condiciones iniciales. Dependiendo del signo de  $\lambda_1$ , una pequeña desviación entre dos trayectorias disminuye ( $\lambda_1 < 0$ ) o aumenta ( $\lambda_1 > 0$ ) exponencialmente rápido durante grandes tiempos[25].

#### Interpretación de $\lambda_1$

Un  $\lambda_1$  positivo implica una dinámica caótica. La magnitud de  $\frac{1}{\lambda_1}$  es el tiempo de Lyapunov: cuando  $\lambda_1 > 0$  determina el horizonte temporal para el cual el sistema es predecible[28].

Ejemplos:

- El movimiento de los planetas en nuestro sistema solar es caótico, pero no hay ningún problema en predecir el movimiento del planeta en escalas de tiempo de observación (tiempo de Lyapunov  $\approx 50$  millones de años para nuestro sistema solar).
- Sistema meteorológico: tiempo de Lyapunov (días) del mismo orden que la escala de tiempo relevante típica.
- Circuitos eléctricos caóticos (milisegundos)

## 2.8. Teoría de las cruces

La teoría de las cruces es mencionada por el contador público Jorge Chávez Contreras a principios de los años 70's cuando laboraba en una compañía de refrescos. Esta teoría basada en la experiencia laboral de más de 30 años, menciona que los procesos de ventas pueden subir o bajar de manera muy cercana en forma semi periódica de modo que si en un periodo las ventas netas fueron de bajada, en el siguiente periodo las ventas tendrán la probabilidad alta de subir o en forma inversa, si primero se tuvo una subida es probable que después se tenga una bajada, si este proceso se grafica en forma transpuesta (ver Fig.2.4) la imagen correspondiente será algo parecido a una cruz, de aquí el nombre de esta teoría.

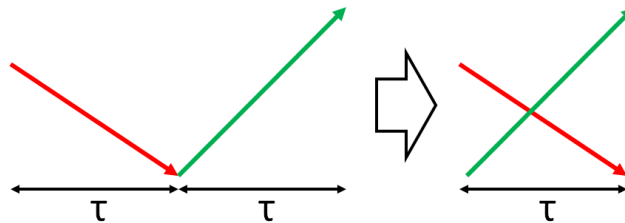


Figura 2.4: Ejemplificación de la teoría de las cruces dado un periodo de tiempo  $\tau$ , donde la flecha roja indica pérdidas y la verde son ganancias.

Las pendientes representadas en la Fig.2.4 por la flecha roja y verde son aleatorias en general, sin embargo es posible argumentar bajo esta teoría que dada alguna función de prueba  $f$ , la pendiente de ganancia o pérdida se relaciona de la siguiente manera en algún intervalo de tiempo  $i$ -ésimo:

$$m_i = \text{choice}(-f(i), f(i)) \quad (2.13)$$

donde choice es la función elección aleatoria de sus argumentos.

Para ejemplificar la relevancia de esta teoría consideremos cuatro números aleatorios entre 0 y 1, tales que dichos números son:

$$r_n = \{0.692266, 0.528938, 0.376354, 0.903878\} \quad (2.14)$$

Considerando que cada número aleatorio que corresponde con  $m_i$ , se puede construir una serie de tiempo en un intervalo de tiempo definido de  $n$  periodos, para este fin cada periodo estará normalizado a uno de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\tau &= t_i - t_{i-1} = 1 \\
x_0 &= 0 \\
x_i &= m_i + x_{i-1}
\end{aligned}
\tag{2.15}$$

donde  $i \in [1, 4]$ , en términos de números enteros de esta construcción el conjunto de las posibles series de tiempo origina  $2^4 = 16$  posibilidades como se muestra en Fig.2.5

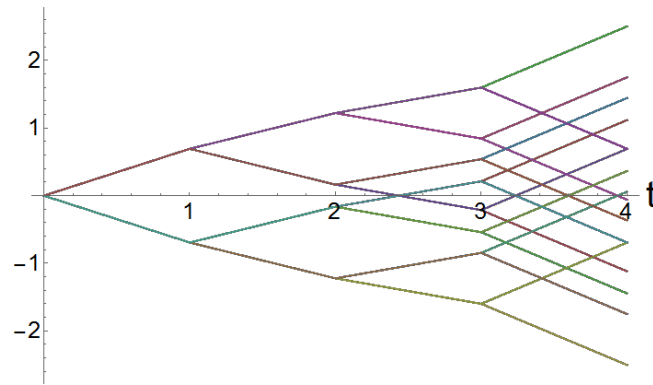


Figura 2.5: Series de tiempo generadas para la cadena de números 2.14 con las reglas dadas por  $x_i$ .

De las 16 cadenas la probabilidad de obtener 4 pendientes positivas y ninguna negativa es de  $p(++++) = 1/16$ , 3 pendientes positivas y 1 negativa tienen probabilidad de aparecer  $p(+++) = p(-) = 4/16$ , 2 pendientes positivas y 2 negativas tienen una máxima probabilidad de  $p(++) = p(--) = 6/16$ , y de aquí las posibilidades se repiten en forma inversa para las pendientes negativas con su correspondiente cardinalidad de positivas.

La mayor probabilidad descrita en las series de tiempo sigue un comportamiento descrito por la teoría de las cruces por construcción de estas en la ecuación 2.15 como era de esperarse de modo que si consideramos la asignatura en estas cadenas de mayor probabilidad se tienen estas posibles combinaciones:

$$\begin{aligned}
p(++) = p(--) = \{ \\
\quad [+ , - , + , -], \\
\quad [- , + , - , +], \\
\quad [+ , + , - , -], \\
\quad [- , - , + , +], \\
\quad [- , + , + , -], \\
\quad [+ , - , - , +] \}
\end{aligned}
\tag{2.16}$$

Los dos primeros casos de 2.16 son correspondientes a los descritos por la teoría ya que después de una bajada en un periodo sigue una subida con alta probabilidad y del mismo modo el caso opuesto, sin embargo los dos penúltimos casos en 2.16 mapean algo similar pero con un periodo de dos, tal que cada dos periodos hay subida y bajada respectivamente, esto es consistente con la característica de invarianza de escala para todo proceso browniano, además

como se indica que una subida y una bajada son igualmente probables y sin correlación entre futuro y pasado, es decir caracterizadas por efectos de memoria de largo plazo que suceda hoy impactara en el futuro por siempre y a su vez no, es decir, ni es persistente ni antipersistente. Finalmente los dos últimos casos están separados el ascenso o caída en un período de dos unidades, en forma trasladada un período de uno en el comienzo.

A continuación una cadena de mayor tamaño es mostrada para generalizar este análisis.

### 2.8.1. Generalización para una cadena larga

Al considerar una cadena de 1000 elementos como se describe en la Ec. 2.15 una serie de tiempo puede ser creada (ver Fig. 2.6) y esta cadena de información justo tendrá el comportamiento de un movimiento browniano.

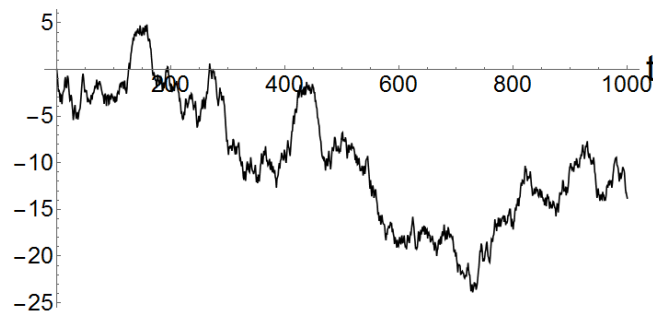


Figura 2.6: Serie de tiempo generada para la cadena con las reglas dadas por  $x_i$  para 1000 elementos.

Por ende el concepto descrito por la teoría de las cruces es válido como un resultado de la invarianza de escala presentada por procesos que tengan un comportamiento estocástico del tipo browniano.

Para verificar que el comportamiento tiene una invarianza de escala se construye el espectro de Fourier o también conocido como espectro de potencias. De este es interesante notar que tiene una tendencia lineal al ser representado en escala logarítmica como se ve en la Fig. 2.7, y para el ejemplo tomado con 1000 elementos de la serie de tiempo de la Fig. 2.6 la regresión lineal da como resultado una pendiente de  $-1.8 \approx -2$ .

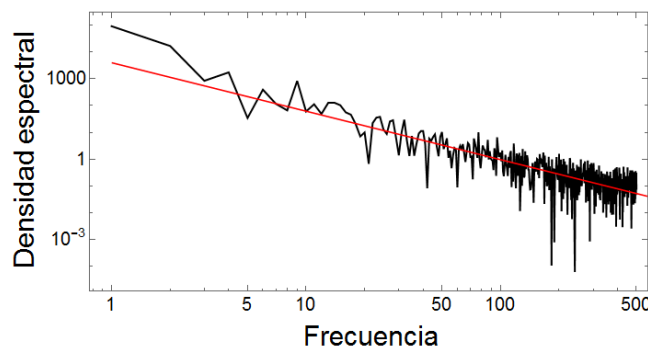


Figura 2.7: Espectro de Fourier (negro) de la serie de tiempo presentada en la Fig.2.6 y línea de regresión (rojo) de dicha descomposición dada por  $8.29 - 1.81t$ .

Debido a que la pendiente de la regresión lineal en el espectro de Fourier es cercana a menos dos, lo cuál como vimos en Fig.2.1, se comprueba que el comportamiento es un movimiento browniano, como se menciona en la Sección.2.5.

Es interesante notar que el concepto dado por la teoría de las cruces puede ser abordado en diversos fenómenos de finanzas, economía, sociología, biología etc. Y que en conclusión el efecto de subida, tarde o temprano tendrá una bajada y de manera análoga una bajada involucrará una subida al transcurrir el tiempo en forma óptima desde el punto de vista probabilístico. Las implicaciones de esta teoría serán útiles en esta tesis para el desarrollo de un modelo de pronóstico como se observará en la Sección.4.5.

# Capítulo 3

## Metodología y análisis

En este capítulo se examina como se adquieren los datos a analizar, se presentan series de tiempo que nos refieren el comportamiento del costo del oro, algunas herramientas estadísticas a estudiar y analizar, y la relación que tiene todo este estudio con el movimiento browniano y el análisis espectral.

En este trabajo de tesis se realizó un estudio de los precios diarios minuto a minuto del oro del mercado de Nueva York, obtenidos del vínculo: <https://www.kitco.com/>.

Kitco es una de las principales webs mundiales de información general sobre el oro y los metales. Kitco fue creada en 1995 por Bart Kitner, quien estuvo relacionado con los metales desde los años setenta cuando empezó a comprar oro en las joyerías del Este de Canadá. Esta empresa es, sin duda, uno de los grandes nombres mundiales en la comunidad de los “gold bugs” [18].

### 3.1. Adquisición de datos y procesamiento

En este capítulo se detallan los pasos que se siguieron para la adquisición de datos y el proceso que se llevo a cabo.

Los datos se adquirieron de Kitco de enero del 2015 a junio del 2019, minuto a minuto todos los días, de las 8:00 am a las 17:00 pm, salvo sábados y domingos, como se muestra en la Fig.3.4.

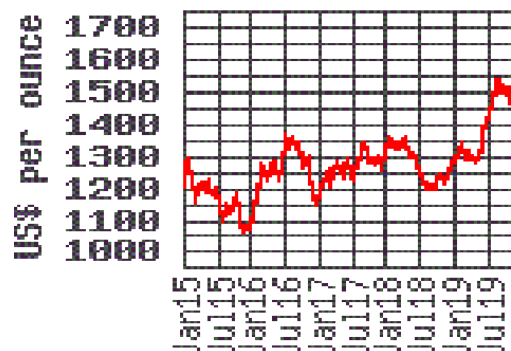


Figura 3.1: Costo de la onza de oro en dólares (imagen adquirida de Kitco)

La página Kitco nos muestra graficamente el precio del oro por minuto diariamente, cada imagen fué descargada y se convirtió al formato *jpg* posteriormente se realizó un código en el



software Mathematica [23], para adquirir numéricamente la información, es decir, los datos de los costos de los gráficos, guardándolos en extensión *csv* para su fácil análisis en el lenguaje R[24].

La base de datos adquirida en forma propia como se detalló previamente puede ser encontrada de forma abierta en el siguiente link: [https://github.com/NuclearGeorge/GOLD\\_TIME\\_SERIES\\_NY/blob/master/gold\\_data\\_time\\_series.zip](https://github.com/NuclearGeorge/GOLD_TIME_SERIES_NY/blob/master/gold_data_time_series.zip), éstos datos consisten en 926 archivos cuyo nombre indica la fecha de forma aa/mm/dd y cada archivo contiene dos columnas tiempo y costo.

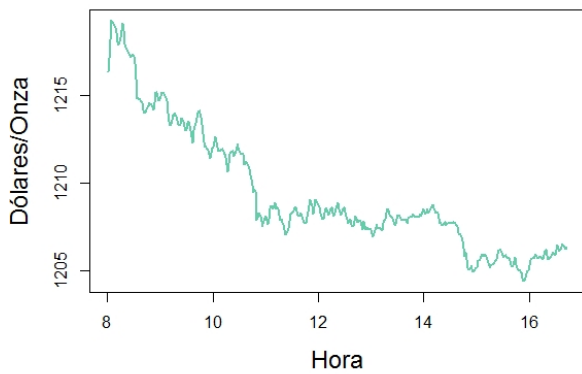
Para mostrar el comportamiento diario del precio en el costo del oro, se han seleccionado seis fechas tomadas al azar del conjunto de datos obtenidos como se muestra en la Fig. 3.2. Dichas gráficas se obtuvieron del Apéndice. A.

Estas gráficas que se presentan a continuación, nos muestran seis días al azar para su estudio, en estas series principalmente nos muestran el precio del oro por minuto de la hora de apertura a la hora de cierre del mercado.

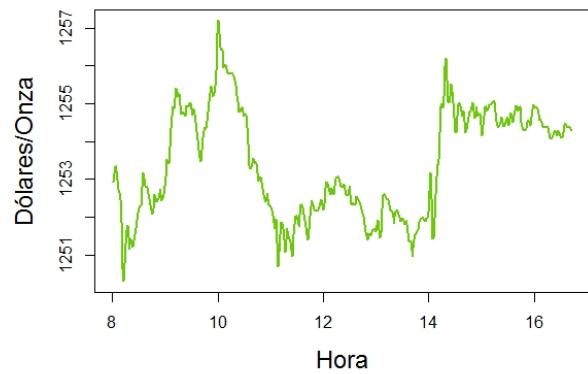
Su importancia radica en la volatilidad del valor del metal en cuanto a hora por día, y si también se comparan los días, se puede observar que al pasar de los años ha habido una alza del precio del oro, en los primeros tres años, es decir del 2015 al 2017 en realidad el porcentaje de alza de precio no fue considerable, sin embargo al iniciar el año 2018 y lo que se analizó del año 2019, hay una diferencia de alta significativa, esto se puede otorgar a consecuencia de la política económica que el presidente de los Estados Unidos, Donald Trump, ha impuesto en cuanto a la desaceleración del crecimiento mundial y un mercado bursátil en crisis, asimismo se ve implicado el precio del dólar ya que habitualmente, el dólar y el oro siguen caminos divergentes: cuando uno sube, el otro baja. Las recientes subidas del oro han seguido este patrón y se han producido después de que el dólar haya perdido posiciones.

Entonces, la bajada del dólar, la caída de los rendimientos de los bonos del tesoro, la recuperación del yuan chino, esto es debido a que el banco central fija su tipo de cambio frente al dólar por encima de los siete yuanes por primera vez desde la crisis financiera, lo cual propicia la implicación de la guerra comercial entre China y Estados Unidos, lo cual a su vez causó caídas en las bolsas de valores de todo el mundo y que Wall Street sufriera la peor jornada del año.

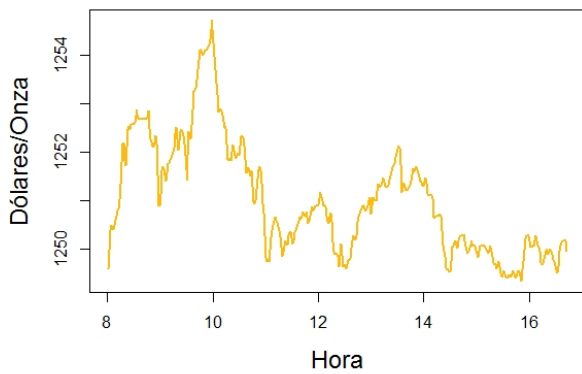
Además, dejando el tema de la guerra de divisas, ha habido un incremento el aumento de la demanda[21] en el sector joyero y en general propiciarán una subida del precio del oro. A pesar de que como mencionamos en la Sección.1.2.3, de que el precio se determina por ‘London Gold Fixing Association’ la situación del mercado de Nueva York y todos éstos puntos en cuestión, son de importancia a la hora de conocer el costo del metal.



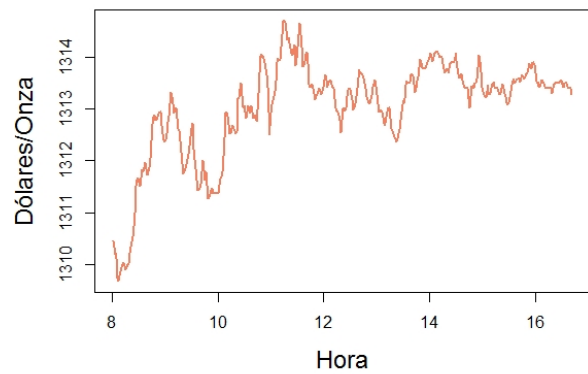
(a) 02-Marzo-2015



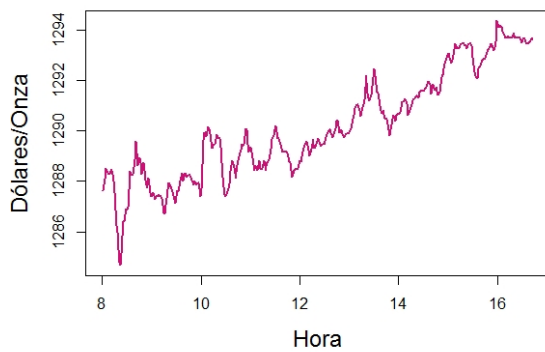
(b) 12-October-2016



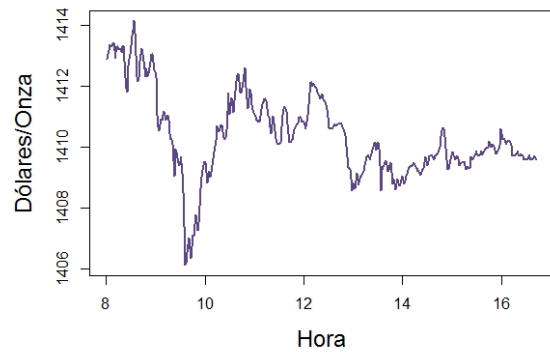
(c) 25-Julio-2017



(d) 07-Mayo-2018



(e) 03-Enero-2019



(f) 28-Junio-2019

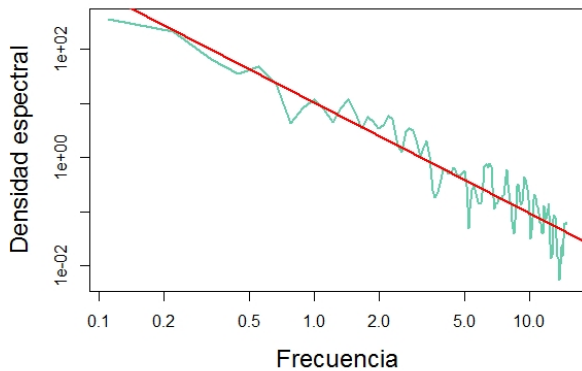
Figura 3.2: Comportamiento del costo del oro por fecha

### 3.2. El oro como movimiento browniano

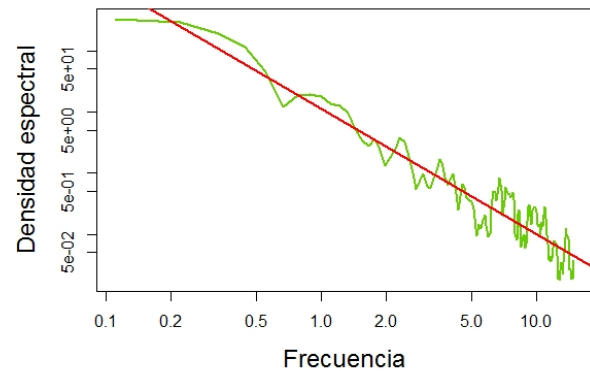
Como se mencionó en la Sección. 2.3 los procesos en el sector económico y financiero generalmente tienen un comportamiento de un movimiento browniano, para corroborar esta carac-

terística en el costo del oro, se implementó un código que realiza un análisis de Fourier, éste código puede verse en el Apéndice.B, los resultados obtenidos del análisis espectral se muestran en la Fig.3.3 para cada una de las seis series de tiempo que se muestran en la Fig. 3.2.

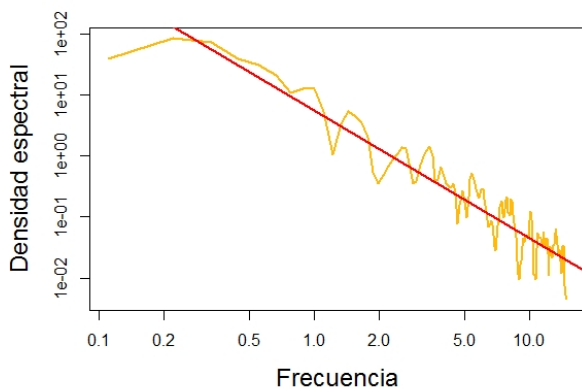
De este estudio se observa claramente un comportamiento en la invarianza de escala de las series de tiempo que es mostrado por el exponente espectral respectivo para cada serie, como se ve en los resultados de la Tabla. 3.1.



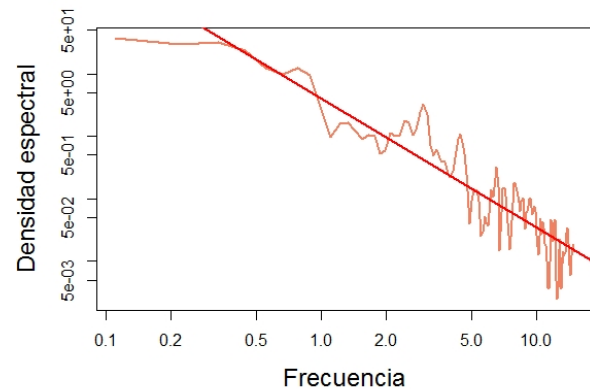
(a) 02-Marzo-2015



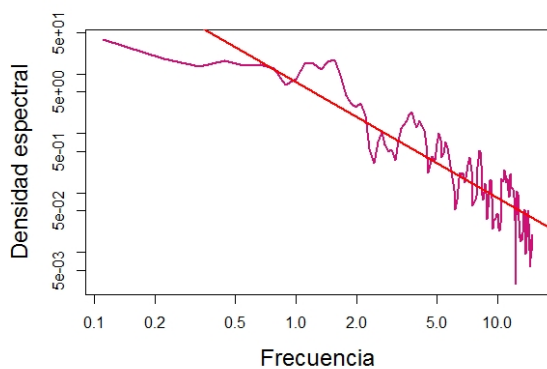
(b) 12-October-2016



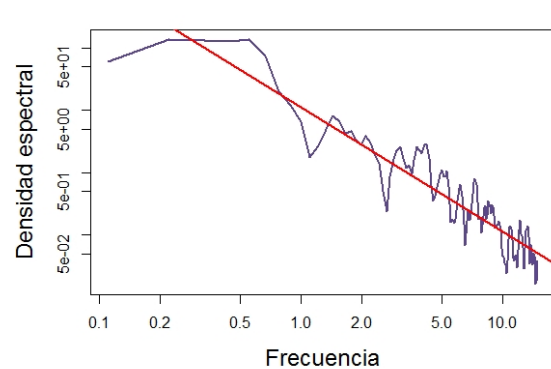
(c) 25-July-2017



(d) 07-May-2018



(e) 03-Jan-2019



(f) 28-June-2019

Figura 3.3: Densidad espectral del costo del oro

	Fecha					
	02-03-15	12-10-16	25-07-17	07-05-18	03-01-19	28-06-19
Exponente espectral	2.039757	2.053973	2.09171	2.072253	1.949278	1.999664

Cuadro 3.1: Exponente espectral calculado de seis fechas al azar.

Podemos observar tanto en la Fig. 3.3 como en la Tabla.3.1 que la pendiente de los días analizados es aproximadamente 2, con una diferencia menor de 0.1. De acuerdo a dichos resultados se puede hacer una comparación de la Fig.2.1 y se concluye que el costo del oro se comporta como un movimiento browniano.

El movimiento browniano describe el movimiento de un polen en agua, y como viene empujado por las moléculas de agua que son órdenes de magnitud menores, en éste caso el costo del oro viene empujado por otros factores mucho más rápidos como el precio del dólar, la tasa de interés, la coyuntura económica mundial y más factores que se abordan en la Sección.1.2.3.

### 3.2.1. Estacionariedad y análisis estadístico en el costo del oro

Como se vió en secciones anteriores, los modelos de series de tiempo analizados hasta ahora se basan en el supuesto de estacionariedad, esto es, la media y la varianza para una serie de tiempo son constantes en el tiempo y la covarianza es invariante en el tiempo.

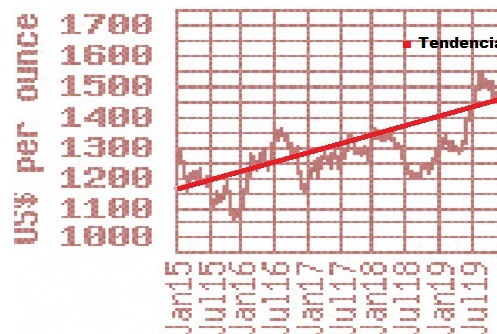


Figura 3.4: Costo de la onza de oro en dólares con tendencia (imagen adquirida de Kitco)

Como se observa en la siguiente figura, se pueden mostrar una tendencia creciente, es decir que la media crece a lo largo del tiempo, lo cual es una característica de una serie no estacionaria, incluso si se analizan las distintas fechas de la Fig.3.2, se observa que en cada una de ellas hay tendencia ya sea creciente o decreciente.

Para mayor seguridad al concluir si el gráfico cumple con estacionariedad, como se menciona en la Sección.2.1.1 se realizan dos tests de raíces unitarias. En estos tests, la hipótesis nula es que la serie tiene raíces unitarias, por tanto, no es estacionaria. Por ende, la hipótesis alternativa es que la serie es estacionaria (alternative=“stationary”) y  $k$ , corresponde al orden de retrasos. Con un  $p$  – valor inferior a 0.05, la hipótesis nula se suele rechazar. Por consiguiente, en la Fig.3.5 se muestran los resultados de las pruebas de raíces unitarias.

En ambos tests, se obtuvo un  $p$  – valor  $> 0.05$ , por tanto, aceptamos la hipótesis nula y

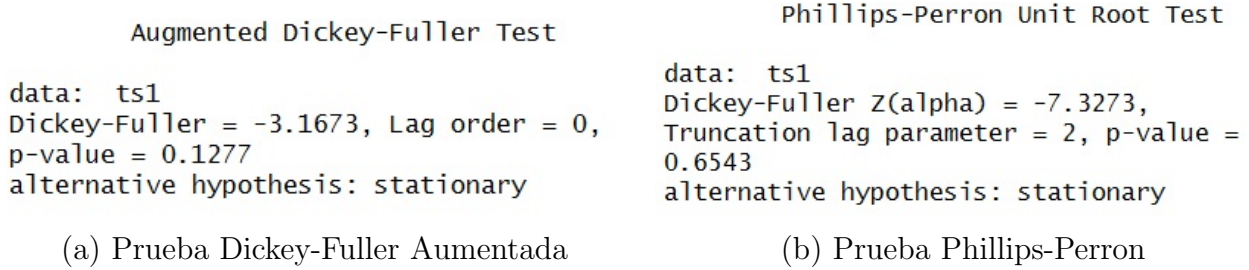
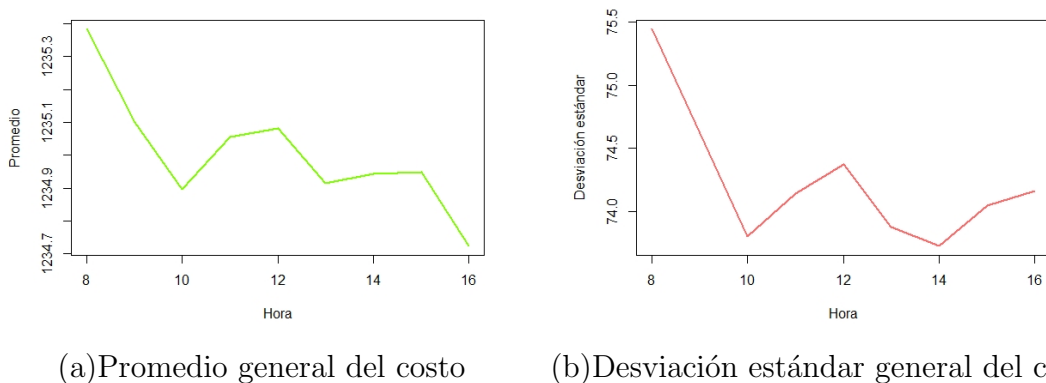


Figura 3.5: Test de raíces unitarias para probar estacionariedad obtenidas de D

podemos decir que la serie no es estacionaria.

De los 478,318 datos de las 926 fechas se analizaron los estadísticos principales en cada intervalo

de hora de las 8:00 horas hasta las 16:00 horas, con el objetivo de buscar alguna tendencia o comportamiento particular en esos intervalos de tiempo, en donde se puede observar que en la apertura del mercado de Nueva York, existe un promedio mayor en el costo comparado con las horas de cierre. La desviación estándar es un índice numérico de la dispersión de un conjunto de datos, mientras mayor es la desviación estándar, mayor es la dispersión de los datos, la desviación estándar en resumen, mide el grado de dispersión o variabilidad. Sabiendo estas características, se observa que la desviación estándar mayor corresponde a la hora de apertura, la cual indica que tiene una mayor dispersión de datos, y que los valores en el conjunto de datos están más lejos de la media, mientras que la más baja es la de las 14 horas, es decir, que los valores están más cerca de la media. Por lo general, una desviación estándar más grande se traduce en un mayor error estándar de la media y una estimación menos precisa de la media de la cual corresponde a la hora de apertura. Esto nos da una idea empírica de cuales son los tiempos en que es conveniente comprar oro (Ver Fig.3.6), la hora de apertura no nos dice que no convenga, pero si que es más volátil a la hora de conocer el precio, independientemente del fin que éste busque, por esto, uno de los objetivos principales de este trabajo, utilizará esta característica cualitativa como una base que consolidará un modelo semiestocástico que se detallará en secciones posteriores. Dichos cálculos se encuentran en el ApéndiceA.



(a) Promedio general del costo

(b) Desviación estándar general del costo

Figura 3.6: Análisis estadístico de los 478,318 datos de las 926 fechas por hora.

# Capítulo 4

## Resultados

### 4.1. Análisis del exponente de Lyapunov

Debido a que en éste trabajo se busca concretar un modelo semiestocástico para poder pronosticar el costo del oro, es importante conocer, si el exponente de Lyapunov es globalmente estacionario, pues como se mencionó en la Sección. 2.7 se sabe que el tiempo de Lyapunov, es el tiempo máximo en que un sistema dinámico puede comportarse en forma determinista, por tal motivo, en esta sección se da detallado el cálculo del exponente de Lyapunov para los datos adquiridos usando Ec.2.9 en intervalos de tiempo finito. En el Apéndice C se muestra el código realizado en *R*, el cual sirve para calcular el exponente de Lyapunov de los datos almacenados *.csv*, por día y por hora tomando en cuenta todas las semanas, cabe señalar que las semanas se tomaron en cuenta solamente de lunes a viernes, ya que Sábado y Domingo está cerrado el mercado de Nueva York.

A continuación se presentan las gráficas del exponente de Lyapunov de los cinco días de la semana para cada una de las nueve horas del día, considerando que los tonos azules, representan las horas del día de las 9:00 am hasta las 15:00 pm hrs, mientras que el color amarillo y rojo representa la hora de apertura y de cierre respectivamente, es importante señalar que el exponente de Lyapunov tiene un valor de tiempo de  $\frac{1}{hr}$ .

En cuánto al gráfico del día lunes, se puede observar que hay una irregularidad bastante notoria, la cual corresponde a la semana 138, dicha semana, de 8 hrs a las 16 hrs los valores de los exponentes de Lyapunov son mayores a 200 llegando a un máximo de 364.49, todos estos datos corresponden a los días del 21 al 25 de agosto del 2017, a su vez, se muestra que hay una inestabilidad mayor en las primeras horas del día que al cierre. En el día martes se observa que los exponentes de Lyapunov son mayores en la hora de apertura que en la hora del cierre y también se puede concluir que en la hora de cierre se muestra una estabilidad mayor al compararla con las demás horas. En la serie del exponente del día miércoles, podemos ver que en la hora de cierre se muestra una estabilidad mayor al compararla con las demás horas, sin embargo en las últimas semanas del análisis, es decir en el mes de junio del 2019 creció considerablemente el exponente. El gráfico de la serie del día jueves, podemos concluir que en la hora de cierre se muestra una estabilidad mayor al compararla con las demás horas, sin embargo de la semana 60 a la 75 la volatilidad es mayor en comparación de las otras horas. Finalmente, se observa la serie del día viernes, podemos concluir que la hora menos volátil es la del cierre, aunque como la serie del jueves, la semana 60 a la 75 la volatilidad es mayor en comparación de las otras horas. En conclusión, estos resultados reflejan algo semejante a lo visto en la Fig.3.6, es decir, que los datos son más volátiles a la hora de apertura, mientras

que los datos más estables son a la hora de cierre, con la ventaja de que ésta información nos permitirá crear un modelo para pronosticar el costo del oro en una mejor forma cuantitativa.

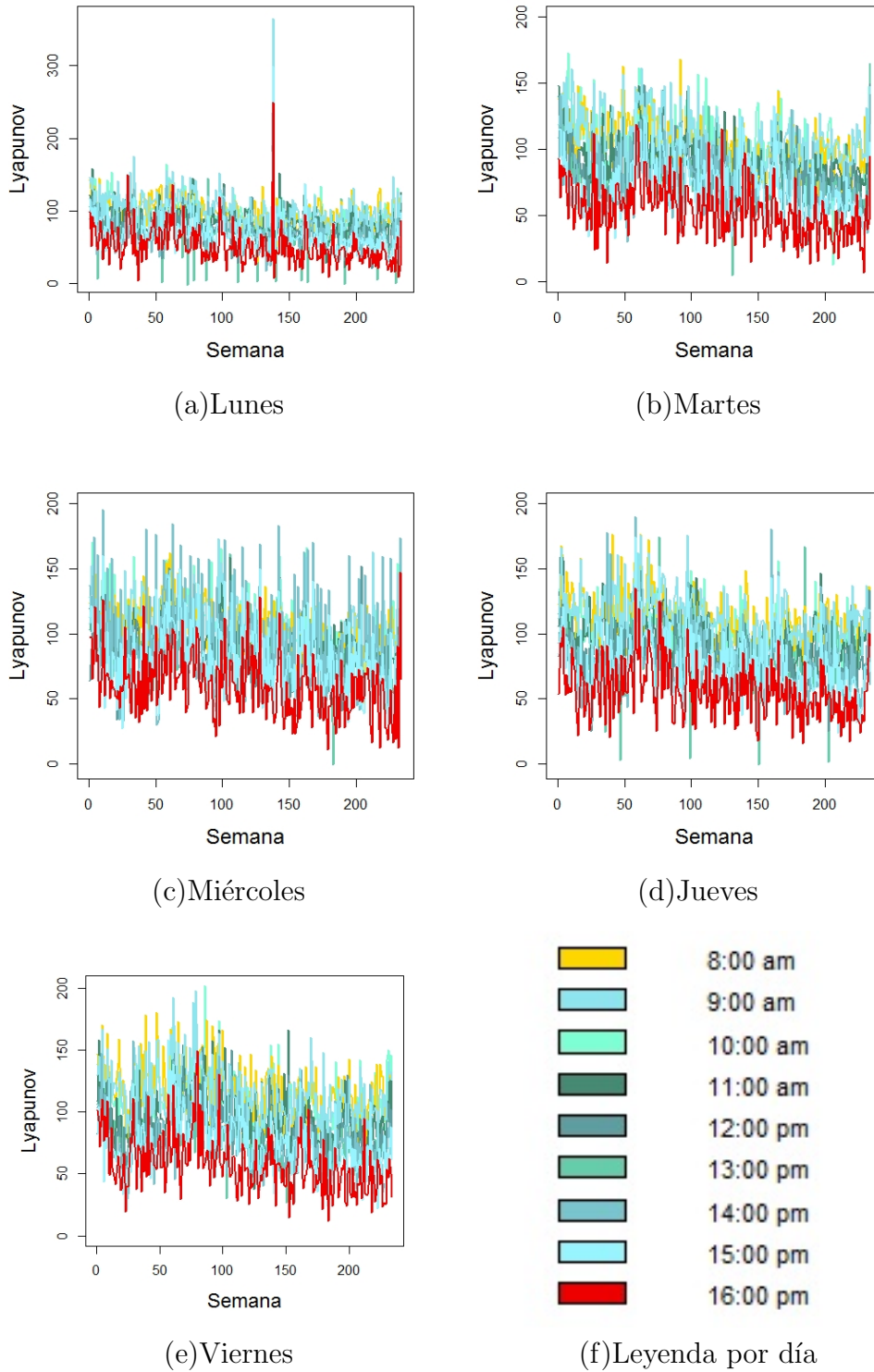


Figura 4.1: Exponente de Lyapunov por día/hora

En la Fig.4.2, se implementa una serie que comparte los cinco días de la semana en conjunto, se puede observar que la dinámica no es distinta en cualquier día de la semana, a excepción del

valor atípico del lunes, todas manejan un comportamiento similar.

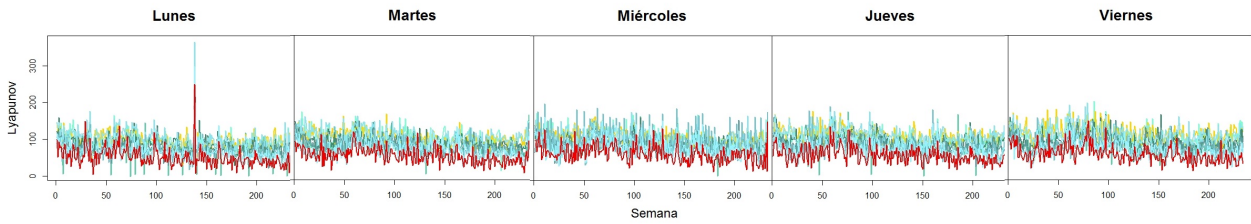


Figura 4.2: Exponente de Lyapunov por día (serie en conjunto)

## 4.2. Estacionariedad respecto al exponente de Lyapunov

En la sección 3.2.1, se comprobó que la serie del costo del oro general, no es estacionaria, y como se sabe que es un requisito de suma importancia para el análisis de datos y modelaje, se procedió a tomar en cuenta otros datos, en éste caso se calculó el promedio semanal, ya que si se tomaban los datos del exponente de Lyapunov tal cual, existen criterios de sesgo y valores atípicos, los cuáles se explican más adelante, a su vez, se toma en cuenta el criterio de estacionariedad para el Lyapunov. En primer instancia se muestra el gráfico 4.3 del cálculo del promedio semanal de los exponentes de Lyapunov, cada línea gris vertical representa las 234 semanas totales que se analizaron del año 2015 al 2019, mientras que el color verde representa el Lyapunov promedio de todos los datos, cabe destacar, que los valores de la serie tienden a oscilar alrededor de un valor fijo (media) y la variabilidad con respecto a esa media también permanece constante en el tiempo, es decir cumple una característica muy importante de la estacionariedad. Dichos cálculos se pueden encontrar en el Apéndice D.

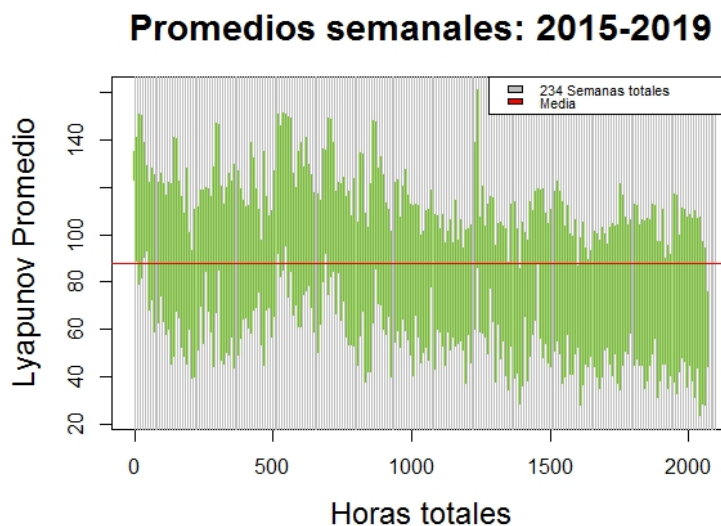


Figura 4.3: Lyapunov promedio por hora.

Se procede a realizar los dos tests de raíces unitarias.



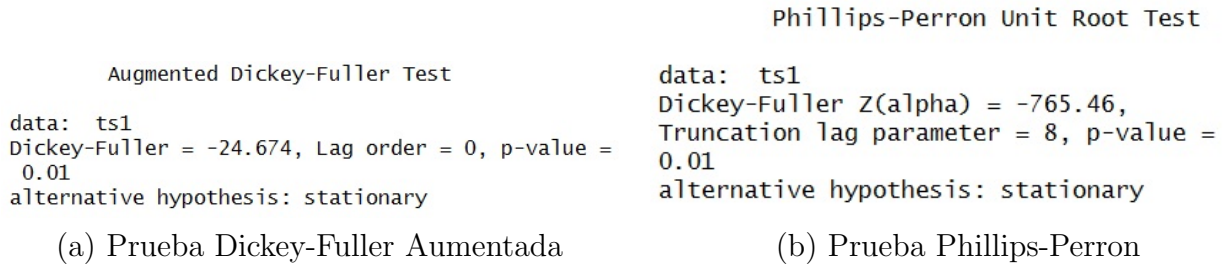


Figura 4.4: Test de raíces unitarias para probar estacionariedad obtenidas de D

En ambos tests, se obtuvo un  $p - valor$  de 0.01, y es inferior a 0.05, por tanto, rechazamos la hipótesis nula y aceptamos la alternativa, y podemos decir que la serie es estacionaria.

Y finalmente se muestra una gráfica de cajas de los exponentes de Lyapunov calculadosC.

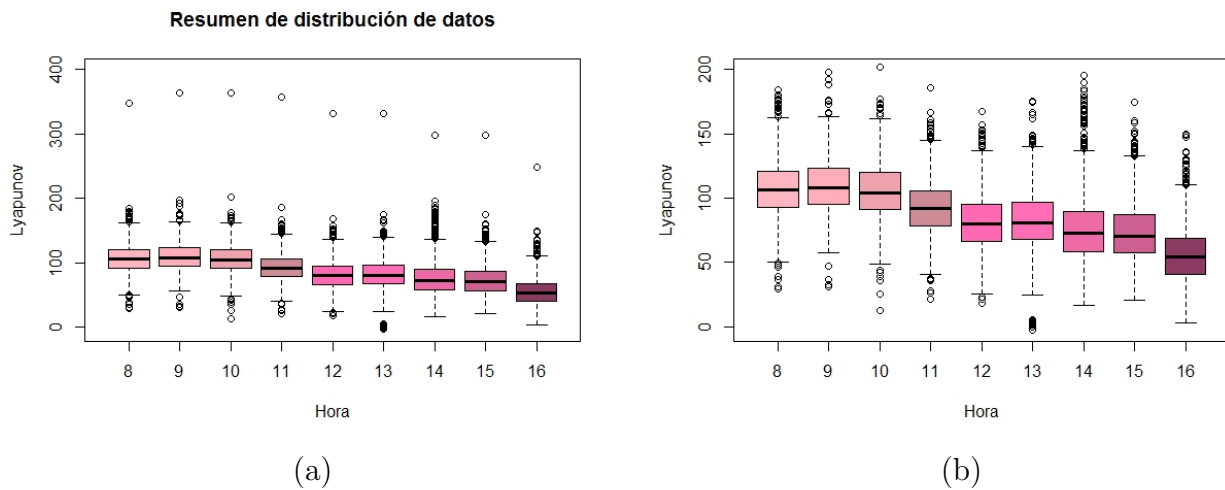


Figura 4.5: Diagrama de cajas del exponente de Lyapunov de todos los datos analizados.

Este gráfico representa el diagrama de caja por hora, en el análisis gráfico del Lyapunov y con los datos anteriormente proporcionados, podemos ver que a cada hora de las 8:00 hrs a las 16:00 hrs, la mediana está relativamente en el centro de la caja, por lo que la distribución es simétrica. Podemos observar que el horario con más valores atípicos es la de las 14 hrs, y de hecho, de las 14 hrs al cierre que son las 16 hrs comparados con las demas horas más tempranas, son los que tienen mas valores atípicos, éstos valores atípicos son datos apartados del cuerpo principal de la información, pueden representar efectos de causas extrañas, opiniones extremas o en el caso de la tabulación manual, errores de medición o registro, también se caculó la varianza y desviación estándar de éstos datos, como se muestra en la Tabla4.1.

Con éstos datos, podemos observar que hay tendencia, y valores atipicos por lo que se procedió anteriormente a tomar en cuenta el promedio de los exponentes de Lyapunov para transformar nuestros datos a una serie estacionaria.

Como se mencionó en la Sección2.7. el exponente de Lyapunov es un coeficiente que da información sobre el carácter caótico de un sistema dinámico y el tiempo de Lyapunov interpreta el tiempo límite de predictibilidad en dicho sistema determinísticamente.

Los valores del exponente de Lyapunov mostrados en la Fig.4.5 están en un intervalo aproximado de  $50 - 100[\frac{1}{hr}]$ , esto implica que en un contexto determinista el tiempo de predictibilidad

Hora	Desviación E	Varianza	Media
8 am	23.14151	535.5294	107.6041022
9 am	23.19259	537.8962	109.6617287
10 am	23.62528	558.1541	105.8736376
11 am	22.91661	525.1709	93.41196548
12 pm	23.26274	541.1551	81.92706801
13 pm	24.94901	622.4533	82.62903677
14 pm	28.64527	820.5513	76.8897587
15 pm	24.43893	597.2613	73.84076471
16 pm	23.16855	536.7818	56.0743767

Cuadro 4.1: Varianza y desviación estándar por hora del exponente de Lyapunov obtenidos de Apéndice C

es de 0.6 – 1.2 minutos. Sin embargo como se demostró en la Sección.4.2. la serie de tiempo para el valor  $\lambda$ , s estacionario, lo que implica la posibilidad de utilizar esta información en el planteamiento de un modelo que determine el valor de  $\lambda$  como función del tiempo, como se detallará en la siguiente sección.

### 4.3. Función continua para $\lambda(t)$

En la sección previa se demostró que el valor para el exponente de Lyapunov resulta tener una propiedad de estacionariedad, esta propiedad ha permitido crear una función continua que calcula los valores del  $\lambda = \lambda(t)$  con  $t \in [8, 16]$  hrs, con sus incertidumbres respectivas, utilizando la información de la Fig.4.5.

El plantamiento de esta función se basa en representar en forma polinomial el valor del exponente de Lyapunov de la siguiente manera:

$$\lambda(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i \quad (4.1)$$

donde cada coeficiente  $a_i$  sería obtenido utilizando el mejor ajuste en forma cualitativa para los datos de la Tabla.4.1, de este proceso se encontró que el mejor modelo es para  $n = 6$ , los coeficientes relacionados para Ec.4.1.

n	0	1	2	3	4	5	6
$a_n$	20784.0864	-11295.0220	2518.6494	-293.3060	18.8172	-0.6311	0.00865
Desv.Estándar	43878.9276	-23731.3930	5276.3806	-615.2766	39.6907	-1.3436	0.0186

Cuadro 4.2: Desviación y parámetros, datos obtenidos de Mathematica del Apéndice. F

### 4.4. Modelado continuo para $\lambda$

Los polinomios de orden seis de  $\lambda$  y su respectiva incertidumbre se observan en la Tabla.4.2. La Fig.4.6 muestra la forma del ajuste de función continua comparado con los datos obtenidos.

Al tener una forma continua el valor del exponente de Lyapunov:  $\lambda(t) \pm \sigma_\lambda(t)$ , es fácil obtener el valor máximo y dicho valor es  $\lambda_{\max} = 110.11$  [1/hr], es importante notar que este valor ocurre a las 8.98hr  $\sim$  9hr de la mañana. Con el valor de  $\lambda_{\max} = 0.009$  [hr] se puede tener

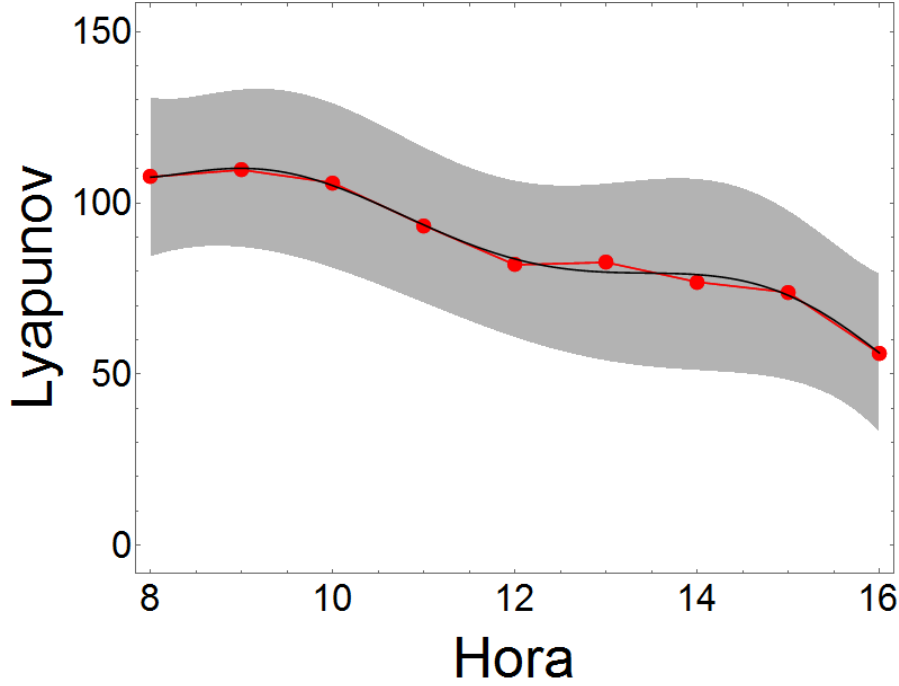


Figura 4.6: Datos del exponente de Lyapunov promediado cada hora (rojo) del conjunto total de datos obtenidos, comparados con el modelo polinomial (negro) y el ajuste de las desviación estandar en forma continua (zona gris).

el tiempo de Lyapunov mínimo ya que  $t_{\lambda}^{\min} = 1/\lambda_{\max}$ , este valor tendrá mucha utilidad en la sección siguiente pues al tener una cota del tiempo de máxima predictibilidad se considerará este valor en la implementación de un modelo semiestocástico para pronosticar valores en el costo de del precio del oro.

## 4.5. Modelo semiestocástico para obtener costos de oro a futuro

En esta sección se construye un modelo semiestocástico que utiliza el tiempo de Lyapunov  $t_{\lambda}^{\min}$  como un límite temporal determinista de predicción mezclado con la teoría de las cruces expuesta en la Sección.2.8.

La idea principal es utilizar la propiedad caótica de los sistemas dinámicos ya que si a un tiempo inicial  $t_0$  se hace una observación del costo del oro  $C(t_0)$ , se espera que exista una divergencia exponencial de este valor a tiempos cercanos al tiempo de Lyapunov pues después de este tiempo característico el determinismo quedaría ausente originando aleatoriedad en posibles predicciones. Por lo tanto la diferencia entre el costo futuro  $C(t)$  y el costo medido al tiempo  $t_0$  será  $\Delta(t)$  tal que,

$$\Delta C(t) = |C(t) - C(t_0)| = C(t_0)e^{\lambda t}. \quad (4.2)$$

Si se considera que el exponente  $\lambda$  cambia con el tiempo y si se contemplan intervalos de tiempo pequeños  $\delta t$  donde sea válida la ecuación (4.2) es posible hacer una predicción por cada intervalo de tiempo  $t_i$

$$\Delta C_i = \Delta C_{i-1} e^{\lambda(t_i)\delta t} \quad (4.3)$$

#### 4.5. MODELO SEMIESTOCÁSTICO PARA OBTENER COSTOS DE ORO A FUTURO 41

con  $\Delta C(t_0) = C_0$ .

Como por definición  $\Delta C > 0$  significa que el crecimiento exponencial necesariamente no implica  $C(t_i) > C(t_{i-1})$ , pues también podría tener un crecimiento exponencial negativo  $C(t_i) < C(t_{i-1})$ , es decir  $C_i \propto e^{\lambda(t_i)\delta t}$  o  $C_i \propto -e^{\lambda(t_i)\delta t}$  por lo tanto  $C_i$ .

Si cada intervalo de tiempo es fijo y pequeño tal que  $\lambda(t_i)\delta t \ll 1$ , se puede desarrollar en serie la exponencial tal que  $e^x = 1 + x$ , de esto

$$\Delta C_i = \Delta C_{i-1}(1 + \lambda(t_i)\delta t), \quad (4.4)$$

y considerando que la separación es positiva sin importar si se tenía un crecimiento o un decrecimiento

$$C_i \simeq C_{i-1}(1 \pm \lambda(t_i)\delta t). \quad (4.5)$$

Para asegurar que  $\lambda(t_i)\delta t \ll 1$ , se puede escoger  $\delta t = t_\lambda^{\min}$  pues justo va a satisfacer la desigualdad, de este modo en un intervalo de tiempo pequeño la divergencia entre costos puede desarrollarse a orden lineal con una pendiente positiva o negativa.

Siguiendo la ecuación.2.13 de la teoría de las cruces y sabiendo que el exponente de Lyapunov como función del tiempo está modelado como se muestra en la Fig. 4.6 con su respectiva desviación se puede tomar

$$C_i = \text{choice}[C_{i-1}(1 + \lambda_r(t_i)t_\lambda^{\min}), C_{i-1}(1 - \lambda_r(t_i)t_\lambda^{\min})], \quad (4.6)$$

donde choice es la función elección aleatoria de sus argumentos y

$$\lambda_r(t) = \text{rand.norm.dist.}(\mu = \lambda(t), \sigma = \sigma_\lambda(t)). \quad (4.7)$$

Para ejemplificar el uso de este modelo en la práctica se eligió la fecha **19-06-28** y se calculó el costo del oro en intervalos de media hora comenzando a las 8am hasta las 4pm, la Fig.4.7 muestra las serie de tiempo obtenida por el modelo y la obtenida por los datos verídicos. La implementación del código para este modelo se muestra en el apéndice.E.

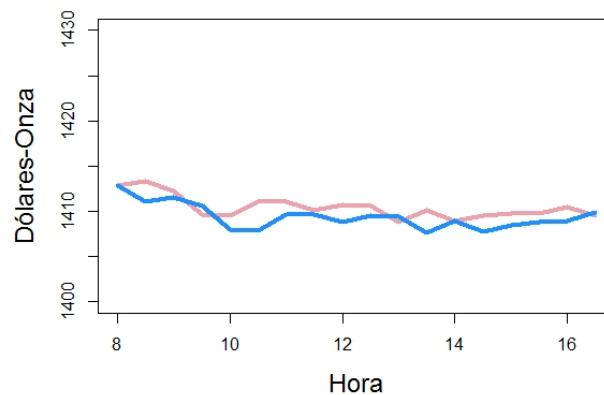


Figura 4.7: Comparación entre precios reales (rosa) y precios obtenidos por el modelo (azul) en intervalos de media hora.

Hora	Costo-Real	Costo-Pronosticado
8	1412.888889	1412.888889
8.5	1413.333333	1411.127219
9	1412.277778	1411.567782
9.5	1409.666667	1410.54568
10	1409.5	1408.004349
10.5	1411.083333	1407.929376
11	1411.083333	1409.613661
11.5	1410.083333	1409.713077
12	1410.722222	1408.798045
12.5	1410.638889	1409.497498
13	1408.833333	1409.450907
13.5	1410.138889	1407.664079
14	1408.916667	1408.977916
14.5	1409.527778	1407.775491
15	1409.805556	1408.435788
15.5	1409.805556	1408.817214
16	1410.444444	1408.997305
16.5	1409.583333	1409.909317

Cuadro 4.3: Costo real vs costo pronosticado del día 19-06-28

Posteriormente podemos ver las 1000 simulaciones en un histograma de probabilidades en la Fig:4.8 que representa el mismo día, ie 19-06-20 pero de un solo tiempo a pronosticar, de 12:00 hrs a 12:30 hrs.

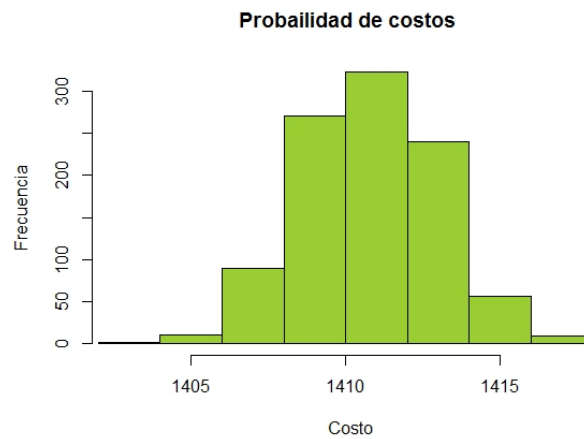


Figura 4.8: Probabilidades de costo de las 12:00-12:30 hrs

Podemos observar que la mayor probabilidad está representada por el costo 1410.72 que en realidad, es similar al costo real a esa hora del oro. Ésto nos da la certeza de que entre más simulaciones haya, más exacto es el precio pronosticado de acuerdo a las probabilidades de éste.

# Capítulo 5

## Conclusiones

La presente tesis se ha enfocado en el análisis del comportamiento de la volatilidad en las series de tiempo presentadas con el costo del oro del mercado de Nueva York. Se presentaron resultados generales del análisis del costo del oro, así como su relación con el movimiento browniano y el índice espectral.

Posteriormente se complementó este análisis con la realización del cálculo del exponente de Lyapunov con la finalidad de observar el comportamiento de la volatilidad por hora de los días analizados, del 2015 al 2019 del precio del oro. Se presentaron resultados generales del análisis del costo del oro, así como su relación con el movimiento browniano y el índice espectral. De éste análisis se pudo observar que las horas menos volátiles para el cálculo del costo del oro, son de las 14 a 16 horas, a diferencia de las primeras horas de apertura del mercado, de acuerdo con el cálculo del exponente de Lyapunov.

La estacionariedad tomó importancia en el promedio de exponentes de Lyapunov, ya que son los exponentes los que se usaron para el modelo de predicción, asimismo como el costo general del oro, no fue una serie estacionaria, no se podían realizar análisis más profundos a menos que se realizarán cambios en la serie, entonces del análisis del promedio de los exponentes, se pudo verificar que las series mostradas del costo del oro son estacionarias lo cual fué clave para poder realizar un pronóstico del precio, éste se verificó con los resultados de la Prueba Dickey Fuller. y de Phillips Perron, la estacionariedad

Finalmente, se obtiene un modelo semiestocástico que pronostica el costo del oro dado un tiempo de inicio y uno final, cuyos resultados son muy similares a los reales en un intervalo de confianza como se mostró en el caso analizado.

Éste modelo se basó en dos métodos, el subjetivo el cual está basado en el uso del exponente de Lyapunov, y el histórico, ya que se basa en eventos pasados o de experiencia, de la cual nos aportó la teoría de cruces. Dicho modelo puede ser útil en las diversas aplicaciones de pronóstico, ya que se puede predecir el costo de sus productos y servicios, la cantidad de ingresos y ganancias que puede anticipar, y en general en el mercado financiero representa un método vital la toma de decisiones.

El oro debería ser una parte importante de una cartera de inversiones y con la metodología planteada aumenta más su significado ya que se puede conocer precios futuros y se tendría una

visión más aproximada de su valor y el uso del concepto del exponente de Lyapunov llega a ser muy importante porque como sabemos el precio del oro es volátil a corto plazo, si sabemos esta característica del costo y se puede pronosticar incluso tomando en cuenta su inestabilidad, llega a ser un tema que vale la pena considerar.

# Apéndice A

## Código en R. Obtención de datos y estadísticos

Posteriormente de que se obtienen los datos de la pagina **KITCO**, todos los datos *csv* se encuentran en [https://github.com/NuclearGeorge/GOLD\\_TIME\\_SERIES\\_NY](https://github.com/NuclearGeorge/GOLD_TIME_SERIES_NY) se realiza un código en *R* para el mejor análisis del trabajo. Asimismo se realizan los calculos de media y desviación estándar

```
#Importe de datos
datos = read.csv("190628.csv", header = FALSE)
datos$hora <- datos$V1;
datos$costo <- datos$V2;
dt = (datos$hora[2]-datos$hora[1]);

# Gráfica: Costo del oro
plot(datos$costo~datos$hora, lwd=2, type = "l",
      col="mediumpurple4", xlab = "Hora", ylab = "Dólares/Onza",
      cex=0.5, cex.main=1.75, cex.lab=1.5, cex.axis=1.0)
#*

*****
ESTADÍSTICOS DEL COSTO GENERAL DEL ORO
*****
#Para la obtención de estos datos, se realizó una
  aglomeración de todos los datos en general en Excel.
Promedio={c(1235.38368,1235.101341,1234.897079,1235.054527,
1235.08071,1234.915518,1234.943259,1234.948652,1234.723095)}
Varianza={c(5691.598328,5567.815195,5447.373042,5497.005578,
5531.169514,5458.12117,5435.422199,5483.016297,5500.167228)}
DesviacionE={c(75.4426824,74.61779409,73.80632115,74.14179373,
74.3718328,73.87909833,73.72531586,74.04739224,74.16311231)}
diasdela semana=c("8","9","10","11","12","13","14","15","16")

plot(diasdela semana ,Promedio ,type="l", lwd=2,
      col="chartreuse", xlab = "Hora", ylab="",cex=1,
```



```
cex.main=1, cex.lab=1, cex.axis=1,ylim=c(73,5692))
par(new=TRUE)

plot(diasdelasemana ,DesviacionE ,type="l" ,,lwd=2,
     col="indianred1" , xlab = "Hora" , ,ylab="", cex=1,
     cex.main=1, cex.lab=1, cex.axis=1,ylim=c(73,5692))
legend("topleft" , c("Promedio" ," Varianza" ,
"-Desviaci\ 'on Est\ 'andar") , fill=c("chartreuse" ,
"cadetblue3" ," indianred1" ) ,cex=0.6)
```

# Apéndice B

## Código en R. Análisis espectral

Se realiza el cálculo del exponente espectral del costo del oro, para la prueba del movimiento-browniano.

```
#Importe de datos
datos = read.csv("190628.csv", header = FALSE)
datos$hora <- datos$V1;
datos$costo <- datos$V2;
dt = (datos$hora[2]-datos$hora[1]);

#*****
# ANÁLISIS ESPECTRAL
#*****
x <- datos$costo
del <- dt # intervalo de muestreo
x.spec <- spectrum(x, log="no", span=3, plot=FALSE)
spx <- x.spec$freq/del
spy <- 2*x.spec$spec

# Ajuste frecuencias bajas
ff = 15;
plot(spy[1:length(spx[spx<ff])]~spx[spx<ff],
     log="xy", lwd=2, type="l", col="mediumpurple4",
     xlab="Frecuencia", ylab="Densidad espectral",
     cex=0.5, cex.main=1.75, cex.lab=1.5, cex.axis=1.0)

reg.lm <- lm(log10(spy[1:length(spx[spx<ff])])
~log10(spx[spx<ff]))
abline(reg.lm, lwd=2, col="red")
#reg.lm$coefficients
print("Coeficiente del exponente espectral = ")
reg.lm$coefficients[[2]] #Prueba del mov-Browniano.
#*****
```



# Apéndice C

## Código en R. Análisis del exponente de Lyapunov

Se calcula la ecuación (2.9) que calcula el exponente de Lyapunov de las 8:00 horas a las 16:00 horas obteniéndose nueve exponentes por día, los cuales se registraron en un documento de excel para crear la base de datos que posteriormente se utiliza para el análisis de los exponentes de forma semanal por día y por hora. Este código está escrito en el lenguaje[24] y se detalla a continuación.

```
#Importe de datos
datos = read.csv("190628.csv", header = FALSE)
datos$hora <- datos$V1;
datos$costo <- datos$V2;
dt = (datos$hora[2]-datos$hora[1])
```

```
*****
# CÁLCULO DEL EXPONENTE DE LYAPUNOV POR HORA
ly = function(i){(1/(datos$hora[nd[i+1]]
-datos$hora[nd[i]]))
*sum(log(abs(datos$derivada[nd[i]:nd[i+1]]+1),
base = exp(1)))}
sapply(1:9, FUN=ly)
*****
```

```
*****
Ya obtenidos cada uno de los exponentes,
se procede a realizar el código en R-Studio
para un mejor análisis.
```

```
#Dirección para importar datos de excel.
dir = "C:/Users/LANIX/Desktop/Tesis/
Comparación lyapunov2.xlsx"
library(readxl)
datos = read_xlsx(dir)
semanas=seq(1,2106,9) #seq de 1 a 2106
semanas totales , por 9 que son las hrs de 8 a 16 hrs.
```

```
sem=1:234 #de la semana 1 a la 234 que
es lo que llevamos hasta el día 28/06/19
```

```
#Función de la hora 8 a la hora 16.
```

```
f8=function(i,j){datos[[i,j]]}
f9=function(i,j){datos[[i+1,j]]}
f10=function(i,j){datos[[i+2,j]]}
f11=function(i,j){datos[[i+3,j]]}
f12=function(i,j){datos[[i+4,j]]}
f13=function(i,j){datos[[i+5,j]]}
f14=function(i,j){datos[[i+6,j]]}
f15=function(i,j){datos[[i+7,j]]}
f16=function(i,j){datos[[i+8,j]]}
```

```
# 2-Lunes, 3-Martes, 4-Miercoles,
5-Jueves, 6-Viernes
dia=2
dias=c("Lunes", "Martes", "Miércoles",
"Jueves", "Viernes")
diaProm=12
# 8_Prom_Lun, 9_Prom_Mar, 10_Prom_Mie,
11_Prom_jue, 12_Prom_Vie
Prom_GenLun=77.5214928
Prom_GenMar=85.09403736
Prom_GenMie=90.89367924
Prom_GenJue=89.45417695
Prom_GenVie=87.89274063
```

```
#Función que coloca las horas y
las semanas totales.
```

```
h8dia=function(i){f8(semanas[i], dia)}
Ly8=sapply(sem, h8dia)
Prom8dia=function(i){f8(semanas[i], diaProm)}
promly8=sapply(sem, Prom8dia)
```

```
h9dia=function(i){f9(semanas[i], dia)}
Ly9=sapply(sem, h9dia)
Prom9dia=function(i){f9(semanas[i], diaProm)}
promly9=sapply(sem, Prom9dia)
```

```
h10dia=function(i){f10(semanas[i], dia)}
Ly10=sapply(sem, h10dia)
Prom10dia=function(i){f10(semanas[i], diaProm)}
promly10=sapply(sem, Prom10dia)
```

```

h11dia=function ( i ){ f11 (semanas [ i ] , dia )}
Ly11=sapply (sem , h11dia )
Prom11dia=function ( i ){ f11 (semanas [ i ] , diaProm )}
promly11=sapply (sem , Prom11dia )

```

```

h12dia=function ( i ){ f12 (semanas [ i ] , dia )}
Ly12=sapply (sem , h12dia )
Prom12dia=function ( i ){ f12 (semanas [ i ] , diaProm )}
promly12=sapply (sem , Prom12dia )

```

```

h13dia=function ( i ){ f13 (semanas [ i ] , dia )}
Ly13=sapply (sem , h13dia )
Prom13dia=function ( i ){ f13 (semanas [ i ] , diaProm )}
promly13=sapply (sem , Prom13dia )

```

```

h14dia=function ( i ){ f14 (semanas [ i ] , dia )}
Ly14=sapply (sem , h14dia )
Prom14dia=function ( i ){ f14 (semanas [ i ] , diaProm )}
promly14=sapply (sem , Prom14dia )

```

```

h15dia=function ( i ){ f15 (semanas [ i ] , dia )}
Ly15=sapply (sem , h15dia )
Prom15dia=function ( i ){ f15 (semanas [ i ] , diaProm )}
promly15=sapply (sem , Prom15dia )

```

```

h16dia=function ( i ){ f16 (semanas [ i ] , dia )}
Ly16=sapply (sem , h16dia )
Prom16dia=function ( i ){ f16 (semanas [ i ] , diaProm )}
promly16=sapply (sem , Prom16dia )

```

```

#*****
# Gráfica: Lyapunov Histórico comparando
# 8 graficas de las 8 a las 16 horas.
plot (Ly10~sem , lwd=2 , type = "l" ,
col="aquamarine" ,
xlab = "Semana" ,
ylab = "Lyapunov" , main=dias [[ dia -1]] ,
cex=0.5 , cex.main=1.75 , cex.lab=1.5 ,
cex.axis=1.0 , ylim=c (3 , 367))
lines (Ly13~sem , lwd=2 , type = "l" ,
col="aquamarine3" , xlab = "Semana" ,
ylab = "Lyapunov" , main=dias [[ dia -1]] ,
cex=0.5 , cex.main=1.75 , cex.lab=1.5 ,
cex.axis=1.0)
lines (Ly8~sem , lwd=2 , type = "l" ,
col="gold" , xlab = "Semana" ,

```

```

ylab = "Lyapunov", main=dias [[ dia - 1]], cex=0.5,
  cex.main=1.75, cex.lab=1.5, cex.axis=1.0)
lines(Ly11~sem, lwd=2, type = "l",
  col="aquamarine4",
  xlab = "Semana", ylab =
  "Lyapunov", main=dias [[ dia - 1]], cex=0.5,
  cex.main=1.75, cex.lab=1.5, cex.axis=1.0)
lines(Ly12~sem, lwd=2, type = "l",
  col="cadetblue", xlab = "Semana",
  ylab = "Lyapunov", main=dias [[ dia - 1]],
  cex=0.5, cex.main=1.75, cex.lab=1.5, cex.axis=1.0)
lines(Ly9~sem, lwd=2, type = "l",
  col="cadetblue2", xlab =
  "Semana", ylab =
  "Lyapunov", main=dias [[ dia - 1]], cex=0.5,
  cex.main=1.75, cex.lab=1.5, cex.axis=1.0)
lines(Ly14~sem, lwd=2, type = "l",
  col="cadetblue3",
  xlab = "Semana", ylab =
  "Lyapunov", main=dias [[ dia - 1]], cex=0.5,
  cex.main=1.75, cex.lab=1.5, cex.axis=1.0)
lines(Ly15~sem, lwd=2, type = "l",
  col="cadetblue1", xlab =
  "Semana", ylab = "Lyapunov",
  main=dias [[ dia - 1]], cex=0.5,
  cex.main=1.75, cex.lab=1.5, cex.axis=1.0)
lines(Ly16~sem, lwd=2, type = "l",
  col="red2", xlab = "Semana", ylab = "Lyapunov",
  main=dias [[ dia - 1]], cex=0.5, cex.main=1.75,
  cex.lab=1.5, cex.axis=1.0)

```

```

#Leyenda del exponente de lyapunov.
legend("topright", c("8:00 am", "9:00 am",
  "10:00 am", "11:00 am", "12:00 pm", "13:00 pm",
  "14:00 pm", "15:00 pm", "16:00 pm"), fill=
c("gold", "cadetblue2", "aquamarine", "aquamarine4",
  "cadetblue", "aquamarine3", "cadetblue3",
  "cadetblue1", "red2"), cex=0.7)

```

```

legend("topright", 250, legend=c("Línea 1",
  "Línea 2", "Línea 3", "4"),
  col =c("springgreen", "red2", "cadetblue3", "gold"),
  lty=1:2, cex=0.4)
abline(h=Prom_GenVie, col="yellow")

```

```

*****

```

```

*****
DATOS ESTADÍSTICOS Y GRÁFICA BOXPLOT DE
  LOS EXPONENTES DE LYAPUNOV.
*****
# 2–Lunes , 3–Martes , 4–Miercoles ,
5–Jueves , 6–Viernes
dia1=2
dia2=3
dia3=4
dia4=5
dia5=6

#toda la semana a las 8
h8dia1=function(i){f8(semanas[i], dia1)}
Ly81=sapply(sem, h8dia1)

h8dia2=function(i){f8(semanas[i], dia2)}
Ly82=sapply(sem, h8dia2)

h8dia3=function(i){f8(semanas[i], dia3)}
Ly83=sapply(sem, h8dia3)

h8dia4=function(i){f8(semanas[i], dia4)}
Ly84=sapply(sem, h8dia4)

h8dia5=function(i){f8(semanas[i], dia5)}
Ly85=sapply(sem, h8dia5)

#toda la semana a las 9
h9dia1=function(i){f9(semanas[i], dia1)}
Ly91=sapply(sem, h9dia1)

h9dia2=function(i){f9(semanas[i], dia2)}
Ly92=sapply(sem, h9dia2)

h9dia3=function(i){f9(semanas[i], dia3)}
Ly93=sapply(sem, h9dia3)

h9dia4=function(i){f9(semanas[i], dia4)}
Ly94=sapply(sem, h9dia4)

h9dia5=function(i){f9(semanas[i], dia5)}
Ly95=sapply(sem, h9dia5)

#toda la semana a las 10
h10dia1=function(i){f10(semanas[i], dia1)}

```



```
Ly101=sapply(sem, h10dia1)

h10dia2=function(i){f10(semanas[i], dia2)}
Ly102=sapply(sem, h10dia2)

h10dia3=function(i){f10(semanas[i], dia3)}
Ly103=sapply(sem, h10dia3)

h10dia4=function(i){f10(semanas[i], dia4)}
Ly104=sapply(sem, h10dia4)

h10dia5=function(i){f10(semanas[i], dia5)}
Ly105=sapply(sem, h10dia5)

#toda la semana a las 11
h11dia1=function(i){f11(semanas[i], dia1)}
Ly111=sapply(sem, h11dia1)

h11dia2=function(i){f11(semanas[i], dia2)}
Ly112=sapply(sem, h11dia2)

h11dia3=function(i){f11(semanas[i], dia3)}
Ly113=sapply(sem, h11dia3)

h11dia4=function(i){f11(semanas[i], dia4)}
Ly114=sapply(sem, h11dia4)

h11dia5=function(i){f11(semanas[i], dia5)}
Ly115=sapply(sem, h11dia5)

#toda la semana a las 12
h12dia1=function(i){f12(semanas[i], dia1)}
Ly121=sapply(sem, h12dia1)

h12dia2=function(i){f12(semanas[i], dia2)}
Ly122=sapply(sem, h12dia2)

h12dia3=function(i){f12(semanas[i], dia3)}
Ly123=sapply(sem, h12dia3)

h12dia4=function(i){f12(semanas[i], dia4)}
Ly124=sapply(sem, h12dia4)

h12dia5=function(i){f12(semanas[i], dia5)}
Ly125=sapply(sem, h12dia5)

#toda la semana a las 13
```

```
h13dia1=function ( i ){ f13 (semanas [ i ] , dia1 ) }  
Ly131=sapply ( sem , h13dia1 )
```

```
h13dia2=function ( i ){ f13 (semanas [ i ] , dia2 ) }  
Ly132=sapply ( sem , h13dia2 )
```

```
h13dia3=function ( i ){ f13 (semanas [ i ] , dia3 ) }  
Ly133=sapply ( sem , h13dia3 )
```

```
h13dia4=function ( i ){ f13 (semanas [ i ] , dia4 ) }  
Ly134=sapply ( sem , h13dia4 )
```

```
h13dia5=function ( i ){ f13 (semanas [ i ] , dia5 ) }  
Ly135=sapply ( sem , h13dia5 )
```

```
#toda la semana a las 14  
h14dia1=function ( i ){ f14 (semanas [ i ] , dia1 ) }  
Ly141=sapply ( sem , h14dia1 )
```

```
h14dia2=function ( i ){ f14 (semanas [ i ] , dia2 ) }  
Ly142=sapply ( sem , h14dia2 )
```

```
h14dia3=function ( i ){ f14 (semanas [ i ] , dia3 ) }  
Ly143=sapply ( sem , h14dia3 )
```

```
h14dia4=function ( i ){ f14 (semanas [ i ] , dia4 ) }  
Ly144=sapply ( sem , h14dia4 )
```

```
h14dia5=function ( i ){ f14 (semanas [ i ] , dia5 ) }  
Ly145=sapply ( sem , h14dia5 )
```

```
#toda la semana a las 15  
h15dia1=function ( i ){ f15 (semanas [ i ] , dia1 ) }  
Ly151=sapply ( sem , h15dia1 )
```

```
h15dia2=function ( i ){ f15 (semanas [ i ] , dia2 ) }  
Ly152=sapply ( sem , h15dia2 )
```

```
h15dia3=function ( i ){ f15 (semanas [ i ] , dia3 ) }  
Ly153=sapply ( sem , h15dia3 )
```

```
h15dia4=function ( i ){ f15 (semanas [ i ] , dia4 ) }  
Ly154=sapply ( sem , h15dia4 )
```

```
h15dia5=function ( i ){ f15 (semanas [ i ] , dia5 ) }  
Ly155=sapply ( sem , h15dia5 )
```

```

#toda la semana a las 16
h16dia1=function(i){f16(semanas[i], dia1)}
Ly161=sapply(sem, h16dia1)

h16dia2=function(i){f16(semanas[i], dia2)}
Ly162=sapply(sem, h16dia2)

h16dia3=function(i){f16(semanas[i], dia3)}
Ly163=sapply(sem, h16dia3)

h16dia4=function(i){f16(semanas[i], dia4)}
Ly164=sapply(sem, h16dia4)

h16dia5=function(i){f16(semanas[i], dia5)}
Ly165=sapply(sem, h16dia5)

Lysem8={c(Ly81, Ly82, Ly83, Ly84, Ly85)}
Lysem9={c(Ly91, Ly92, Ly93, Ly94, Ly95)}
Lysem10={c(Ly101, Ly102, Ly103, Ly104, Ly105)}
Lysem11={c(Ly111, Ly112, Ly113, Ly114, Ly115)}
Lysem12={c(Ly121, Ly122, Ly123, Ly124, Ly125)}
Lysem13={c(Ly131, Ly132, Ly133, Ly134, Ly135)}
Lysem14={c(Ly141, Ly142, Ly143, Ly144, Ly145)}
Lysem15={c(Ly151, Ly152, Ly153, Ly154, Ly155)}
Lysem16={c(Ly161, Ly162, Ly163, Ly164, Ly165)}
y=c();
a=mean(Lysem8)
b=mean(Lysem9)
c=mean(Lysem10)
d=mean(Lysem11)
e=mean(Lysem12)
f=mean(Lysem13)
g=mean(Lysem14)
h=mean(Lysem15)
i=mean(Lysem16)
#HORA 8
d8=(Lysem8-a)^2 #desv al cuadrado
sd28=sum(d8) #suma de desv
n8=length(Lysem8)#num de datos
varianza8=sd28/(n8-1)#varianza
d. estandar8=sqrt(varianza8)#d
#HORA 9
d9=(Lysem9-b)^2 #desv al cuadrado
sd29=sum(d9) #suma de desv
n9=length(Lysem9)#num de datos

```

```

varianza9=sd29/(n9-1)#varianza
d. estandar9=sqrt(varianza9)#d
##HORA 10
d10=(Lysem10-c)^2 #desv al cuadrado
sd210=sum(d10) #suma de desv
n10=length(Lysem10)#num de datos
varianza10=sd210/(n10-1)#varianza
d. estandar10=sqrt(varianza10)#d
##HORA 11
d11=(Lysem11-d)^2 #desv al cuadrado
sd211=sum(d11) #suma de desv
n11=length(Lysem11)#num de datos
varianza11=sd211/(n11-1)#varianza
d. estandar11=sqrt(varianza11)#d
##HORA 12
d12=(Lysem12-e)^2 #desv al cuadrado
sd212=sum(d12) #suma de desv
n12=length(Lysem12)#num de datos
varianza12=sd212/(n12-1)#varianza
d. estandar12=sqrt(varianza12)#d
##HORA 13
d13=(Lysem13-f)^2 #desv al cuadrado
sd213=sum(d13) #suma de desv
n13=length(Lysem13)#num de datos
varianza13=sd213/(n13-1)#varianza
d. estandar13=sqrt(varianza13)#d
##HORA 14
d14=(Lysem14-g)^2 #desv al cuadrado
sd214=sum(d14) #suma de desv
n14=length(Lysem14)#num de datos
varianza14=sd214/(n14-1)#varianza
d. estandar14=sqrt(varianza14)#d
##HORA 15
d15=(Lysem15-h)^2 #desv al cuadrado
sd215=sum(d15) #suma de desv
n15=length(Lysem15)#num de datos
varianza15=sd215/(n15-1)#varianza
d. estandar15=sqrt(varianza15)#d
##HORA 16
d16=(Lysem16-i)^2 #desv al cuadrado
sd216=sum(d16) #suma de desv
n16=length(Lysem16)#num de datos
varianza16=sd216/(n16-1)#varianza
d. estandar16=sqrt(varianza16)#d

```

```
# Gráfica : Lyapunov-Boxplot
```

```
diasdelasemana=c("8","9","10","11","12",
"13","14","15","16")

boxplot(Lysem8,Lysem9,Lysem10,Lysem11,
Lysem12,Lysem13,
Lysem14,Lysem15,Lysem16,col=c("lightpink",
"lightpink1",
"lightpink2","lightpink3","hotpink","hotpink1",
"hotpink2",
"hotpink3","hotpink4"),ylim=c(-5,400),
names=diasdelasemana,
  xlab="Hora", ylab="Lyapunov",
  main="Resumen de distribución de datos")
#*****
```

# Apéndice D

## Código en R. Estacionariedad

En el siguiente código se realizó un promedio semanal de los exponentes de Lyapunov, los cuales ayudarán a verificar la serie de tiempo como una serie estacional, a su vez, se realiza la prueba Dickey Fuller y Phillips Perron los cuáles reforzaron la idea de que el promedio corresponde a una serie fue estacionaria.

```
*****
ESTACIONARIEDAD
*****
AN\ 'ALISIS DEL PROMEDIO SEMANAL
*****
#Datos semanas
f8sem=function(i){
x=c();
for(a in 2:6) x=append(x, f8(semanas[i], a), length(x))
mean(as.numeric(x[1:5]))}
f9sem=function(i){
x=c();
for(a in 2:6) x=append(x, f9(semanas[i], a), length(x))
mean(as.numeric(x[1:5]))}
f10sem=function(i){
x=c();
for(a in 2:6) x=append(x, f10(semanas[i], a), length(x))
mean(as.numeric(x[1:5]))}
f11sem=function(i){
x=c();
for(a in 2:6) x=append(x, f11(semanas[i], a), length(x))
mean(as.numeric(x[1:5]))}
f12sem=function(i){
x=c();
for(a in 2:6) x=append(x, f12(semanas[i], a), length(x))
mean(as.numeric(x[1:5]))}
f13sem=function(i){
x=c();
for(a in 2:6) x=append(x, f13(semanas[i], a), length(x))
mean(as.numeric(x[1:5]))}
```

```

f14sem=function(i){
  x=c();
  for(a in 2:6) x=append(x, f14(semanas[i], a), length(x))
  mean(as.numeric(x[1:5]))}
f15sem=function(i){
  x=c();
  for(a in 2:6) x=append(x, f15(semanas[i], a), length(x))
  mean(as.numeric(x[1:5]))}
f16sem=function(i){
  x=c();
  for(a in 2:6) x=append(x, f16(semanas[i], a), length(x))
  mean(as.numeric(x[1:5]))}

# 2-Lunes, 3-Martes, 4-Miercoles, 5-Jueves, 6-Viernes
dia=2
dias=c("Lunes", "Martes", "Miércoles", "Jueves", "Viernes")

Lysem=function(i){c(f8sem(i), f9sem(i), f10sem(i),
f11sem(i), f12sem(i), f13sem(i),
f14sem(i), f15sem(i), f16sem(i))}
y=c();
for(b in 1:230) y=append(y, Lysem(sem[b]), length(y))
ndat=1:length(y)

#*****
# Gráfica: Lyapunov Histórico

plot(y~ndat, lwd=2, type = "l", col="chartreuse3",
xlab = "Horas totales", ylab = "Lyapunov Promedio",
main="Promedios semanales: 2005-2019", cex=0.5,
cex.main=1.75,
cex.lab=1.5, cex.axis=1.0)

abline(v=semanas, col = "gray")

legend("topright", c("234 Semanas totales"),
fill=c("gray"), cex=1.0)

*****
PRUEBA DE ESTACIONARIEDAD PARA EL PROMEDIO
DEL LYAPUNOV
*****
dir = "C:/Users/LANIX/Desktop/Tesis/Serie_E.xlsx"
library(readxl)
datos = read_xlsx(dir)

```

```

x <- as.numeric(datos$Costo)
blockLenght <- 2016
ts1 <- ts(x, frequency=blockLenght) # Convertir a
  serie de tiempo
library(tseries)
adf.test(ts1, alternative="stationary", k=0)
#Prueba Dickey-Fuller
pp.test(ts1, alternative="stationary")
#Prueba Phillips Perron

```

```

#*****

```

Para la estacionariedad del precio del oro, se realizó primero una MACRO en Excel donde se copiaron todos los datos almacenados en .csv por fecha y posteriormente se realizó el mismo código en *R* de los test de raíces unitarias.

```

#*****

```

```

ESTACIONARIEDAD EN EL COSTO DEL ORO

```

```

#*****

```

```

dir = "C:/Users/LANIX/Desktop/Tesis/Serie_CostoEG.xlsx"
library(readxl)
datos = read_xlsx(dir)
x <- as.numeric(datos$Costo)
blockLenght <- 2016
ts1 <- ts(x, frequency=blockLenght) # Convertir a
  serie de tiempo
library(tseries)
adf.test(ts1, alternative="stationary", k=0)
#Prueba Dickey-Fuller
pp.test(ts1, alternative="stationary")
#Prueba Phillips Perron

```

```

#*****

```





# Apéndice E

## Código en R. Pronóstico, teoría de cruces

Finalmente se realiza el cálculo del pronóstico.

```
*****
PRONÓSTICO DEL COSTO DEL ORO E IMPLEMENTACIÓN
DE TEORÍA DE CRUCES
*****
# Tiempo (Hrs) y costo iniciales (Dólares)
t0 = 15 #Hora conocida
c0 = 1287.4
# Hora de pronóstico
tf = 16
# Lyapunov máximo
lmax = 110.10907044319902
# Tamaño de paso mínimo
dti = 1/lmax
t = seq(t0,tf,dti)
# Longitud de datos
np = length(t)
# Parámetros obtenidos del polinomio de orden 6
# Lyapunov promedio (Datos Obtenidos de Mathematica)
a0 = 20784.08646977505
a1 = -11295.022075749677
a2 = 2518.6494354538336
a3 = -293.3060474166627
a4 = 18.81721694243643
a5 = -0.6311412290189167
a6 = 0.008654248854167261
# Desviación Lyapunov
a0s = 43878.92769246453
a1s = -23731.39302435406
a2s = 5276.380657698407
a3s = -615.2766767272644
```

```

a4s = 39.6907301029192
a5s = -1.3436509328727664
a6s = 0.0186604821876079

# Lyapunov a tiempo t
ly = function(x){a0+a1*x+a2*x^2+a3*x^3+a4*
x^4+a5*x^5+a6*x^6}
ds = function(x){(a0s-a0)+(a1s-a1)*x+
(a2s-a2)*x^2+(a3s-a3)*x^3+(a4s-a4)*x^4+
(a5s-a5)*x^5+(a6s-a6)*x^6}

# Distribución Normal Truncada
mysamp <- function(n, m, s, lwr, upr, nnorm) {
  samp <- rnorm(nnorm, m, s)
  samp <- samp[samp >= lwr & samp <= upr]
  if (length(samp) >= n) {
    return(sample(samp, n))
  }
  stop(simpleError("Not enough values to
sample from. Try increasing nnorm."))
}

set.seed(42)
#mysamp(n=1, m=0, s=25.09, lwr=0, upr=340, nnorm=1000)

# Lyapunov random con distribución normal
lyr = function(x){(1/3600)*mysamp(n=1, m=ly(x),
s=ds(x), lwr=ly(x)-ds(x), upr=ly(x)+ds(x), nnorm=1000)}

# Implementación teoría
de cruces
sep = function(x){sample(c(2 - (1 + lyr(x)*dti),
(1 + lyr(x)*dti)), size=1, replace=T,
prob=c(.5, .5))}

#-----
# Costos de una sola simulación
c= c()
c[1]=c0
for(i in 1:np){
c[i+1] <- c[i]*sep(t0+(i-1)*dti)
}
print(paste0(" Precio estimado: $ ", c[np]))
#-----

```

```
#-----  
# 1000 Simulaciones  
cs = c()  
for(j in 1:1000){  
  c = c()  
  c[1] = c0  
  for(i in 1:np){  
    c[i+1] <- c[i]*sep(t0+(i-1)*dti)  
  }  
  cs=append(cs , c[np] , length(cs))  
}  
print(paste0(" Precio mínimo: $ ", min(cs)))  
print(paste0(" Precio máximo: $ ", max(cs)))  
#-----  
# HISTOGRAMA de las 1000 simulaciones  
hist(cs ,  
  main="Probailidad de costos ",  
  xlab="Costo" ,  
  xlim=c(min(cs) ,max(cs)) ,  
  col ="darkmagenta"  
#freq=FALSE  
)  
#-----
```



# Apéndice F

## Código en mathematica. Pronóstico

Se realizó este código en Mathematica que calculan los datos obtenidos del polinomio de grado 6, y la desviación del exponente de Lyapunov.

```
SetDirectory[NotebookDirectory []];
data = Import["CLy.xlsx"];

pts = data[[1, 2, 2 ;; -1]];
dsv = data[[1, 9, 2 ;; -1]];
ptss = Table[{7 + i, pts[[i]]}, {i, 1, Length[pts]}];
dsvs = Table[{7 + i, dsv[[i]]}, {i, 1, Length[pts]}];

n = 6;
coef = Table[a[i], {i, 0, n}];
pol = Sum[a[i] x^i, {i, 0, n}];
im1 = ListPlot[ptss, PlotStyle ->
{Red, PointSize[0.02]},
  Joined -> False];
  im1a = ListPlot[ptss, PlotStyle ->
  {Red, PointSize[0.02]},
  Joined -> True];
mod = FindFit[ptss, pol, coef, x]
impr = Plot[Evaluate[{pol /. mod}], {x, 8, 16},
PlotStyle -> Black];
(*modt=Table[{x, pol /. mod}, {x, 8, 16, 0.01}];
im2=ListPlot[modt, PlotStyle -> Blue];*)
impr = Show[im1a, im1, impr, PlotRange -> All]

mods = FindFit[
  Table[{7 + i, dsv[[i]] + pts[[i]]},
    {i, 1, Length[pts]}], pol, coef,
  x]
```



# Bibliografía

- [1] History of gold.<https://www.gold.org/about-gold/history-gold/>.
- [2] The American History of Gold Mining.<https://www.americanbullion.com/the-american-history-of-gold-mining/>.
- [3] SP Global Market Intelligence, (2019), *La producción de oro en 2019*. <http://https://oroinformacion.com/la-produccion-de-oro-alcanzara-un-nuevo-record-de-3-409-toneladas-en-2019/>
- [4] Gold supply. <https://www.gold.org/about-gold/gold-supply/>.
- [5] Global gold demand.<https://www.gold.org/about-gold/gold-demand/>.
- [6] ¿Qué determina el precio del oro?.<https://www.ig.com/es/materias-primas/que-determina-el-precio-del-oro/>.
- [7] Tsay Ruey. (2010).(3da ed). *Analysis of Financial Time Series*. Chicago, IL.:A JOHN WILEY SONS, INC., PUBLICATION
- [8] Brockwell Peter J. & Davis Richard A. (2010).(2da ed). *Introduction to Time Series and Forecasting*, N.Y, E.U.: Springer-Verlag
- [9] Gasquet, Claude, Witomski, Patrick. (1999). *Fourier Analysis and Applications*, Masson. Paris.
- [10] Beichelt Frank. (2016).(2da ed). *Applied Probability and Stochastic Processes*, N.Y, E.U.: Taylor Francis Group, LLC.
- [11] Byung-Sik Kim, Hung-Soo Kim<sup>2</sup> & Sun-Hong Min.(Enero 2014). *Hurst's Memory for Chaotic, Tree Ring, and SOI Series*,Gangwon, South Korea: Scientific Research.
- [12] JOHN M. HALLEY & PABLO INCHAUSTI (2004). *THE INCREASING IMPORTANCE OF 1/f-NOISES AS MODELS OF ECOLOGICAL VARIABILITY*,Gangwon, South Korea:World Scientific Publishing Company.



- [13] Peitgen Heinz-Otto. & Jurgens Hartmut. & Saupe Dietmar. (1992).(Volumen 2) *Fractals for the Classroom, Complex Systems and Mandelbrot Set*, N.Y, E.U.: Springer-Verlag.
- [14] D.Cryer Johathan & Chang Kung-Sik (2011).(2da ed) *Time Series Analysis. With applications in R*, N.Y, E.U.: Springer-Verlag
- [15] H. E. Hurst. (1951)*Long-term storage capacity of reservoirs*, *Trans Am. Soc. Civ. Eng.*
- [16] Wearing Helen J. (June 2010). *Spectral Analysis in R*.
- [17] J. R. M. Hosking.(1981). *Fractional differencing*, *Biometrika*.
- [18] Kitco Metals Inc. (2019).*Kitco Metals Inc.* (Who we are). [http://corp.kitco.com/kitco\\_story.html](http://corp.kitco.com/kitco_story.html).
- [19] ElDolar.info. <https://www.eldolar.info/es-MX/mexico/dia/20150127>.
- [20] Precio del dólar. <https://www.mibolsillo.com/noticias/Precio-del-dolar-hoy-4-de-noviembre-tipo-de-cambio-actual-20191104-0001.html>.
- [21] La demanda de oro durante el primer semestre de 2019 alcanzó un máximo de tres años. <https://oroinformacion.com/la-demanda-de-oro-durante-el-primer-semestre-de-2019-alcanzo-un-maximo-de-tres-anos/>.
- [22] The Fourier Transform. <http://www.thefouriertransform.com/>. (1951) 770–808.
- [23] Wolfram Research, Inc. *Mathematica*(Versión 10.0) Champaign, IL(2014).
- [24] RStudio, Inc. *RStudio*(versión 1.0.153) Joseph J. Allaire (2011).
- [25] Michael T. Rosenstein James J. Collins Carlo J. De Luca(1992). *A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets*, Boston, E.U.
- [26] Hatanaka T. (1995) *Time-Series-Based Econometrics: Unit Roots and Co-Integration*, Oxford University Press, Oxford..
- [27] Baillic, Richard T. (1996) *Long memory processes and fractional integration in econometrics* , Michigan S, E.U.
- [28] Kristian Gustafsson (2018). *Dynamical systems*, Gotemburgo, Suecia
- [29] Stationarity in time series analysis A review of the concept and types of stationarity. Towards data science, 2019.
- [30] Lawrence M. Ward Priscilla E Greenwood (2007). *1/f noise*, Brain Corporation , Vancouver, Canadá.