



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Estimación experimental del  
caudal de salida de un canal  
con flujo espacialmente variado  
decreciente**

**TESIS**

Que para obtener el título de  
**Ingeniero Civil**

**P R E S E N T A**

Sebastián Hernández Caire

**DIRECTOR DE TESIS**

Dr. Óscar Arturo Fuentes Mariles



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2020



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO


FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIVISIÓN DE INGENIERÍAS CIVIL Y GEOMÁTICA


*Aceptación de Trabajo Escrito*

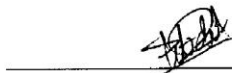
**DR. CARLOS AGUSTÍN ESCALANTE SANDOVAL**  
**DIRECTOR DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA**  
**DE LA U.N.A.M.**  
**Presente.**


En relación con el Examen Profesional de **HERNANDEZ CAIRE SEBASTIAN**, registrado con número de cuenta **312297734** en la carrera de **INGENIERÍA CIVIL**, del cual hemos sido designados sinodales, nos permitimos manifestarle la aceptación del trabajo escrito desarrollado por el citado alumno.

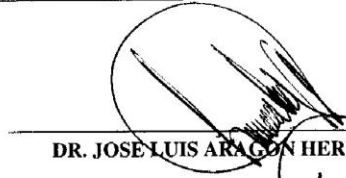
Atentamente.

  
M.I. GABRIEL MORENO PECERO  
FECHA DE ACEPTACIÓN: 13 de Marzo 2020.

  
DR. OSCAR ARTURO FUENTES MARILES  
FECHA DE ACEPTACIÓN: 13 marzo 2020

  
MTRO. FAUSTINO DE LUNA CRUZ  
FECHA DE ACEPTACIÓN: 13 marzo 2020

  
DR. LUIS ANTONIO GARCIA VILLANUEVA  
FECHA DE ACEPTACIÓN: 13/marzo/2020

  
DR. JOSÉ LUIS ARAGÓN HERNÁNDEZ  
FECHA DE ACEPTACIÓN: 13/marzo/2020

FECHA DE EMISIÓN: 13 de marzo de 2020

A mis padres, Rosa María y Jesús, por enfatizar en los valores más importantes durante mi desarrollo y por haberme provisto siempre de las mejores herramientas cognitivas y, sobre todo, emocionales para encarar cualquier situación.

Al Dr. Óscar Fuentes Mariles, por el apoyo y la confianza brindados desde el primer momento, fundamentales en esta etapa de mi vida.

A los miembros del jurado y a quienes contribuyeron a la realización del presente documento, pues cada uno ha aportado a mi crecimiento desde diferentes perspectivas y en momentos clave por medio de su enseñanza, experiencia, consejo y amistad.

*For my part, as I went away, I reasoned with regard to myself: "I am wiser than this human being. For probably neither of us knows anything noble and good, but he supposes he knows something when he does not know, while I, just as I do not know, do not even suppose that I do. I am likely to be a little wiser than he in this very thing: that whatever I do not know, I do not even suppose I know".*

Plato's Apology of Socrates

## RESUMEN

El presente trabajo pretende contribuir a la tarea de experimentar, investigar y robustecer el conocimiento alrededor de uno de los fenómenos comunes en la naturaleza que es conocido el flujo espacialmente variado. Por ello, se presentan sus fundamentos y se señalan algunas de sus características.

Este documento consta de 6 capítulos. En los capítulos 1 y 2 se exponen las bases matemáticas y físicas del comportamiento de los líquidos en movimiento a superficie libre que culminan en las ecuaciones del flujo en cuestión, describiendo sus características y la diferencia entre los dos principales tipos de éste: gasto creciente o decreciente.

En el capítulo 3 se presenta el canal del laboratorio de Hidráulica donde se realizaron los ensayos de flujo espacialmente variado con gasto decreciente; además se exponen los resultados de la experimentación.

En el capítulo 4 se presenta una manera de resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias que este tipo de flujo plantea con el método numérico de Runge-Kutta y en adición se presentan los resultados de su utilización. Asimismo, se realiza la comparación analítica entre ambos grupos de resultados.

En el capítulo 5 se presenta una aplicación del cálculo de flujo espacialmente variado para obtener el gasto de salida de un tramo de un río, con la finalidad de reducir los caudales que fluyen hacia aguas abajo, disminuyendo así la posibilidad de inundación.

# Contenido

Lista de Figuras.....	II
Lista de Tablas.....	V
INTRODUCCIÓN .....	VII
OBJETIVOS.....	VIII
1. ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE FLUJO A SUPERFICIE LIBRE.....	1
1.1.Elementos geométricos .....	1
1.2.Tipos y características de flujo .....	3
1.3.Ecuaciones principales de flujo permanente a superficie libre.....	7
1.3.1. Ecuación de conservación de masa (continuidad) .....	7
1.3.2. Ecuación de la conservación de la energía.....	9
1.3.3. Conservación de la cantidad de movimiento .....	10
2. FLUJO ESPACIALMENTE VARIADO.....	15
2.1.Características principales .....	15
2.2.Ecuaciones de flujo espacialmente variado.....	16
2.2.1. Gasto decreciente .....	16
2.2.2. Gasto creciente.....	18
2.3.Solución numérica del flujo espacialmente variado decreciente .....	18
2.3.1. Método de Runge-Kutta de cuarto orden.....	19
3. DISPOSITIVO FÍSICO EXPERIMENTAL .....	21
3.1 Dimensiones.....	21
3.2 Instrumentación y apoyos visuales .....	21
3.3 Funcionamiento .....	28
3.4 Pruebas experimentales .....	29
4. ANÁLISIS DE RESULTADOS ANALÍTICOS Y EXPERIMENTALES.....	37
4.1.Aplicación del modelo matemático .....	37
4.2.Comparación de resultados.....	39
5. EJEMPLO DE APLICACIÓN. CAUDAL DE DESBORDAMIENTO DE UN RÍO	43
5.1.Capacidad de conducción de un río .....	45
5.2.Cálculo del caudal de desbordamiento de un río.....	46
6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	51
BIBLIOGRAFÍA .....	53
ANEXOS.....	55

## Lista de Figuras

1.1	Sección transversal rectangular .....	2
1.2	Elementos geométricos de una sección hidráulica transversal .....	3
1.3	Flujo uniforme .....	4
1.4	Flujo variado: a) Velocidad creciente, b) Velocidad decreciente....	5
1.5	Visualización de secciones transversales (a y b) y diferenciales de área .....	7
1.6	Gradientes de energía en: a) Superficie libre y b) A presión .....	10
1.7	Fuerzas que intervienen en la ecuación de cantidad de movimiento.....	11
1.8	Análisis del salto hidráulico relacionando energía específica y momentum .....	12
3.1	Diagrama básico del dispositivo sobre el cual se desarrollaron las distintas pruebas .....	21
3.2	Tanque con vertedor triangular señalando las etiquetas para la medición de cargas .....	22
3.3	Regla "h <sub>2</sub> " con la cual se registraron las cargas sobre el vertedor triangular.....	22
3.4	Componentes disipadores de energía al interior del tanque del vertedor .....	22
3.5	Componentes disipadores de energía del flujo de entrada al canal.....	22
3.6	Coefficiente de gasto $\mu$ de vertedores triangulares en la ecuación de la Universidad Católica de Chile.....	24
3.7	Valor del coeficiente $K$ para vertedores triangulares en la ecuación de la Universidad Católica de Chile .....	24
3.8	Comparación de curvas de gastos, teórica y experimental.....	24
3.9	Ubicación del tramo de estudio .....	25



3.10	Detalle de la guía visual del tramo de estudio.....	25
3.11	Vista de las secciones 1 a 7 sobre la margen derecha del canal .	25
3.12	Vista de las secciones 15 a 19.....	25
3.13	Vista general posterior del tramo de estudio .....	26
3.14	Vista frontal del limnómetro fabricado en laboratorio.....	26
3.15	Gráfica del perfil de descarga libre.....	26
3.16	Descarga del canal con una altura de placa de 6 centímetros ....	27
3.17	Depósitos para el aforo de los caudales de desbordamiento .....	28
3.18	Equipo de bombeo y la red de recirculación .....	28
3.19	Perfiles hidráulicos medidos al centro del canal para los 5 gastos experimentales .....	32
3.20	Perfiles hidráulicos medidos en la margen derecha para los 5 gastos experimentales .....	32
3.21	Detalle del gráfico de perfiles hidráulicos medidos en la margen derecha del canal para los 5 gastos .....	33
4.1	Detalle del gráfico de perfiles hidráulicos medidos al centro del canal para los 5 gastos .....	39
4.2	Perfiles hidráulicos calculados con el método numérico de Runge- Kutta .....	40
4.3	Comparativa de caudales de desbordamiento experimentales contra calculados .....	41
5.1	Caudales de aportación al Río Tula .....	43
5.2	Propuesta de la zona de regulación en el tramo de interés .....	44
5.3	Resultado de una simulación matemática en 2D del río Tula para un gasto de 450 m <sup>3</sup> /s realizada con el paquete Iber® .....	45
5.4	Tramo de interés, de la sección 8+500 a la 9+900 .....	47
5.5	Perfiles hidráulicos, para los tres gastos, obtenidos con el método numérico de Runge-Kutta para el caso de aplicación .....	48

5.6 Detalle del gráfico de perfiles hidráulicos obtenidos con el método de Runge-Kutta para el caso de aplicación .....49

# Lista de Tablas

1.1	Clasificación del flujo de acuerdo con el número de Reynolds .....	6
3.1	Aforos realizados en laboratorio .....	23
3.2	Tirantes en descarga libre .....	26
3.3	Extracto de tabla con algunos valores del coeficiente de rugosidad $n$ .....	27
3.4	Aforo de caudales de desbordamiento .....	29
3.5	Taras medidas en el cimacio .....	30
3.6	Mediciones requeridas para la obtención de cargas y perfiles.....	30
3.7	Perfiles hidráulicos medidos en cada prueba .....	31
3.8	Resultados de los cálculos para los coeficientes $\mu$ experimentales.....	35
3.9	Factores de ajuste.....	36
4.1	Datos de entrada para el cálculo numérico con Runge-Kutta .....	37
4.2	Tirantes calculados con el método numérico de Runge-Kutta.....	38
5.1	Condiciones iniciales para el cálculo de la solución con el método numérico de Runge-Kutta .....	46
5.2	Resultados que representan la conducción del río y el desbordamiento.....	47
A-1	Hoja de cálculo con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del primer caso (1/3) .....	55
A-2	Hoja de cálculo con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del primer caso (2/3) .....	56
A-3	Hoja de cálculo con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del primer caso (3/3) .....	57
A-4	Hoja de cálculo con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del segundo caso (1/3).....	58
A-5	Hoja de cálculo con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del segundo caso (2/3).....	59

A-6	Hoja de cálculo con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del segundo caso (3/3) .....	60
A-7	Hoja de cálculo con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del tercer caso (1/3) .....	61
A-8	Hoja de cálculo con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del tercer caso (2/3) .....	62
A-9	Hoja de cálculo con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del tercer caso (3/3) .....	63
A-10	Hoja de cálculo con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del cuarto caso (1/3) .....	64
A-11	Hoja de cálculo con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del cuarto caso (2/3) .....	65
A-12	Hoja de cálculo con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del cuarto caso (3/3) .....	66
A-13	Hoja de cálculo con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del quinto caso (1/3) .....	67
A-14	Hoja de cálculo con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del quinto caso (2/3) .....	68
A-15	Hoja de cálculo con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del quinto caso (3/3) .....	69
B-1	Hoja de cálculo parcial con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del primer caso de aplicación .....	70
B-2	Hoja de Hoja de cálculo parcial con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del segundo caso de aplicación .....	71
B-3	Hoja de cálculo parcial con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del tercer caso de aplicación .....	72

# INTRODUCCIÓN

La actualidad en que vivimos nos ha demandado como sociedad destinar más y mejores recursos para el aprovechamiento y cuidado del agua, sin perder de vista que, como suele decirse en la jerga ingenieril: "El agua es la mejor amiga, pero también la peor enemiga del ingeniero civil". Y es que la presencia del agua en algunas de las obras hidráulicas que conforman nuestra cotidianidad, tiene un papel insoslayable en la seguridad y el servicio.

Así pues, la comprensión y el estudio constante del comportamiento del vital líquido en condiciones determinadas permite aprovecharle cada vez de mejor manera; es por ello importante que las diferentes áreas de la ingeniería se encuentren en permanente actualización e investigación, en la búsqueda de elementos o métodos que optimicen su funcionamiento.

Uno de los motivos principales por los que se utilizan los canales abiertos para el desplazamiento de líquidos radica en su relativa facilidad para construirse, ya que, al ubicarse los sitios de interés a cielo abierto, generalmente requieren de menor cantidad de obras complementarias en comparación con otro tipo de proyectos.

Los canales pueden cumplir diversas funciones, ya sea transportando volúmenes de agua hacia las zonas urbanas (o fuera de ellas), a los comercios o para el uso del agua en la agricultura e industria; o bien, como vías de navegación.

Para responder de mejor manera a los retos y necesidades de la ingeniería hidráulica en la conducción de líquidos, se requiere de cierta clase de conocimientos específicos del área, como es el caso del diseño de obras de infraestructura para el manejo del agua y que tengan un bajo impacto ecológico en el medio ambiente.

El análisis de los canales donde el caudal transportado cambia a lo largo de su recorrido es importante para el diseño de varias obras hidráulicas y es motivo del estudio presentado en esta tesis.

# OBJETIVOS

## PRINCIPAL

Estimar experimentalmente el caudal de salida de un canal con flujo espacialmente variado decreciente permanente (subcrítico), mediante un dispositivo reacondicionado en el laboratorio.

## COMPLEMENTARIOS

- Realizar una revisión bibliográfica en medios impresos y electrónicos sobre las implicaciones físicas del flujo espacialmente variado;
- Integrar los elementos necesarios para la construcción del dispositivo experimental;
- Encontrar los parámetros físicos óptimos del dispositivo (caudales mínimo y máximo y cargas sobre el cimacio, de acuerdo con una única condición de frontera);
- Definir los caudales de estudio en el dispositivo construido;
- Comparar analíticamente los resultados experimentales con los obtenidos a través de la implementación del método numérico de Runge-Kutta.

## 1. ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE FLUJO A SUPERFICIE LIBRE

El flujo en un conducto a superficie libre (canal) es diferente del que se presenta dentro de una tubería ocupando toda su sección transversal. El movimiento del líquido en canales se debe a la inclinación del fondo, mientras que, en el segundo caso, a la diferencia de la presión que existe entre los extremos de un tramo del mismo (Chow, 1994).

El movimiento del agua a superficie libre es afectado por las fuerzas de gravedad y resistencia (la producida por la fricción generada en las fronteras del canal con el agua) (Sotelo, 2002).

Los canales pueden ser naturales o artificiales; en los primeros, sus cauces se han formado a partir de las condiciones atmosféricas a través del tiempo en la superficie del suelo y pueden ser ríos o arroyos; los canales artificiales se construyen con la finalidad de conducir el líquido de una manera conveniente, razón por la cual éstos suelen presentar una geometría casi constante en su extensión longitudinal (Sotelo, 2002).

### 1.1. Elementos geométricos

Cuando un canal tiene sección transversal y pendiente constante en el sentido longitudinal del mismo, se trata de un canal prismático. La sección transversal se suele diseñar con formas geométricas regulares, entre las que destacan el trapecio, el triángulo, el rectángulo y la semicircular, dependiendo muchas veces de la estabilidad del material con que se construye. Independientemente de si se trate de flujos a superficie libre o a presión, se tienen algunos aspectos hidráulicos relacionados con las características físicas de forma y tamaño del canal que se conocen como elementos geométricos.

Dichos elementos son:

*Área hidráulica (A)*. Es el área que ocupa el flujo de una sección transversal de interés perpendicular a la dirección del flujo (Sotelo, 2002).

*Perímetro mojado (P)*. Es la longitud de la línea en la cual se encuentra en contacto el agua con las paredes del canal (se excluye a la superficie libre) (Sotelo, 2002).

*Radio hidráulico ( $R_H$ )*. Es la relación entre el área hidráulica y el perímetro mojado, como se muestra en la Ecuación 1.1 (Chow, 1994):

$$R_h = \frac{A}{P} \quad (1.1)$$

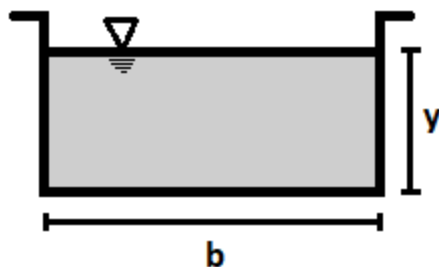
*Ancho de superficie libre ( $T$ )*. Es la longitud del área hidráulica en contacto con la atmósfera.

*Profundidad hidráulica ( $Y$ )*. También conocido como tirante medio, es el cociente entre el área hidráulica y el ancho de superficie libre, de acuerdo con lo expresado en la Ecuación 1.2:

$$Y = \frac{A}{T} \quad (1.2)$$

En canales de sección transversal rectangular (Figura 1.1), la profundidad hidráulica ( $Y$ ) (Ecuación 1.2) y el tirante ( $y$ ) son iguales debido a que:

$$Y = \frac{A}{T} = \frac{by}{b} = y$$



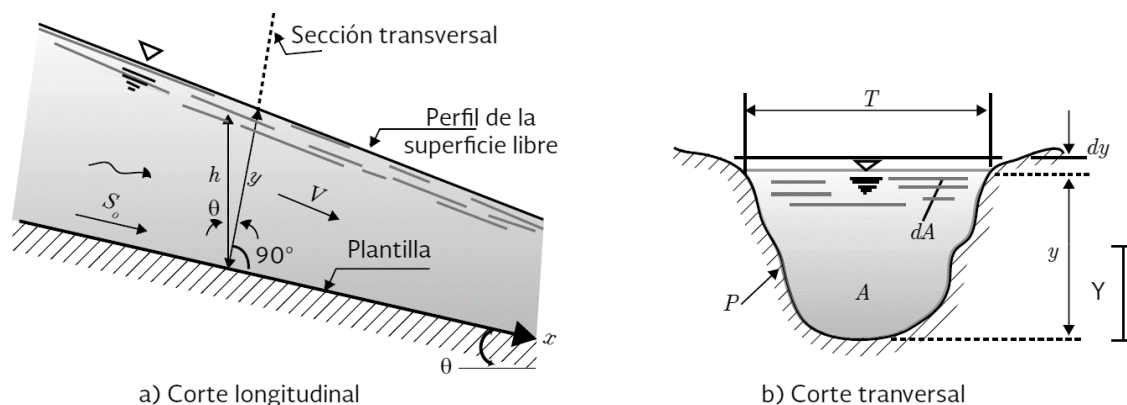
**FIGURA 1.1** Sección transversal rectangular.

*Tirante ( $y$ )*. Se refiere a la distancia vertical desde la plantilla del canal y hasta la superficie libre del agua en cualquier sección del mismo. En ocasiones, cuando el ángulo de inclinación es mayor a 5 grados, se considera una inclinación de relevancia respecto a la vertical y se deberá expresar como lo planteado en la Ecuación 1.3 como sigue (Chow, 1994):

$$y = h \cos \theta \quad (1.3)$$



Los elementos geométricos antes descritos, en una sección transversal irregular, se ilustran en la Figura 1.2 siguiente:



**FIGURA 1.2** Elementos geométricos de una sección hidráulica transversal (Sotelo, 2002).

## 1.2. Tipos y características de flujo

El tipo de flujo en canales con respecto los cambios que tiene relacionados con el tiempo y su desplazamiento a lo largo de estos conductos, se resumen en dos clases, de la siguiente manera (Chow, 1994):

- **Flujo permanente:** la velocidad del movimiento del líquido es constante en el tiempo ( $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ ):
  - **Flujo uniforme:** la velocidad del flujo es constante en el tiempo y a lo largo del conducto ( $\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial t} = 0$ );
  - **Flujo variado:** la velocidad del flujo es constante en el tiempo y cambia a lo largo del conducto ( $\frac{\partial v}{\partial x} \neq 0, \frac{\partial v}{\partial t} = 0$ ):
    - a) Flujo gradualmente variado, el cambio de la velocidad a lo largo del conducto es pequeño;
    - b) Flujo rápidamente variado, el cambio de la velocidad a lo largo del conducto es grande.

- **Flujo no permanente:** la velocidad del movimiento del líquido cambia con el tiempo ( $\frac{\partial V}{\partial t} \neq 0$ ):
  - **Flujo uniforme no permanente:** la velocidad del flujo cambia en el tiempo y es constante a lo largo del conducto ( $\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \frac{\partial V}{\partial t} \neq 0$ );
  - **Flujo no permanente:** la velocidad del flujo cambia en el tiempo y a lo largo del conducto ( $\frac{\partial V}{\partial x} \neq 0, \frac{\partial V}{\partial t} \neq 0$ ):
    - a) Flujo gradualmente variado, el cambio de la velocidad a lo largo del conducto es pequeño;
    - b) Flujo rápidamente variado, el cambio de la velocidad a lo largo del conducto es grande;
    - c) *Flujo espacialmente variado*, el cambio de la velocidad a lo largo del conducto es pequeño y entra (o sale) un caudal pequeño en una dirección distinta a la del flujo en el conducto conforme se desplaza el líquido.

Para cualquiera de los dos casos, de flujo permanente o no permanente, se ilustran respectivamente las condiciones geométricas en que se presenta cada uno, mediante las Figuras 1.3 y 1.4:

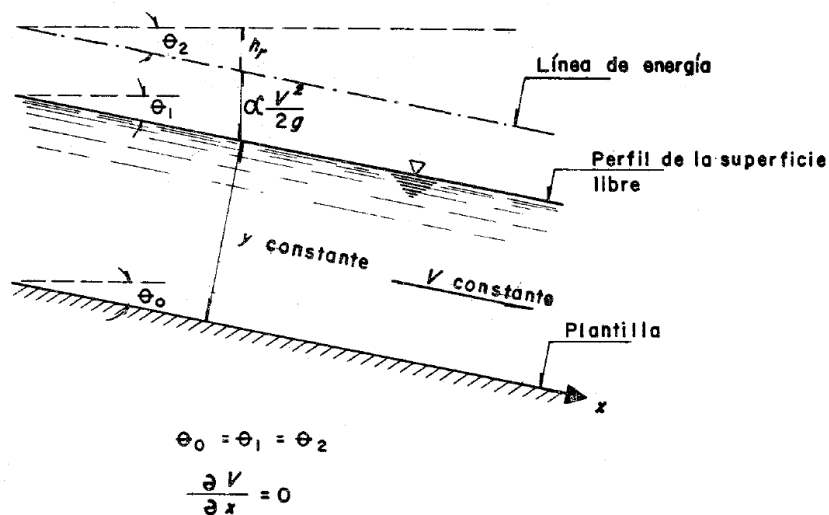
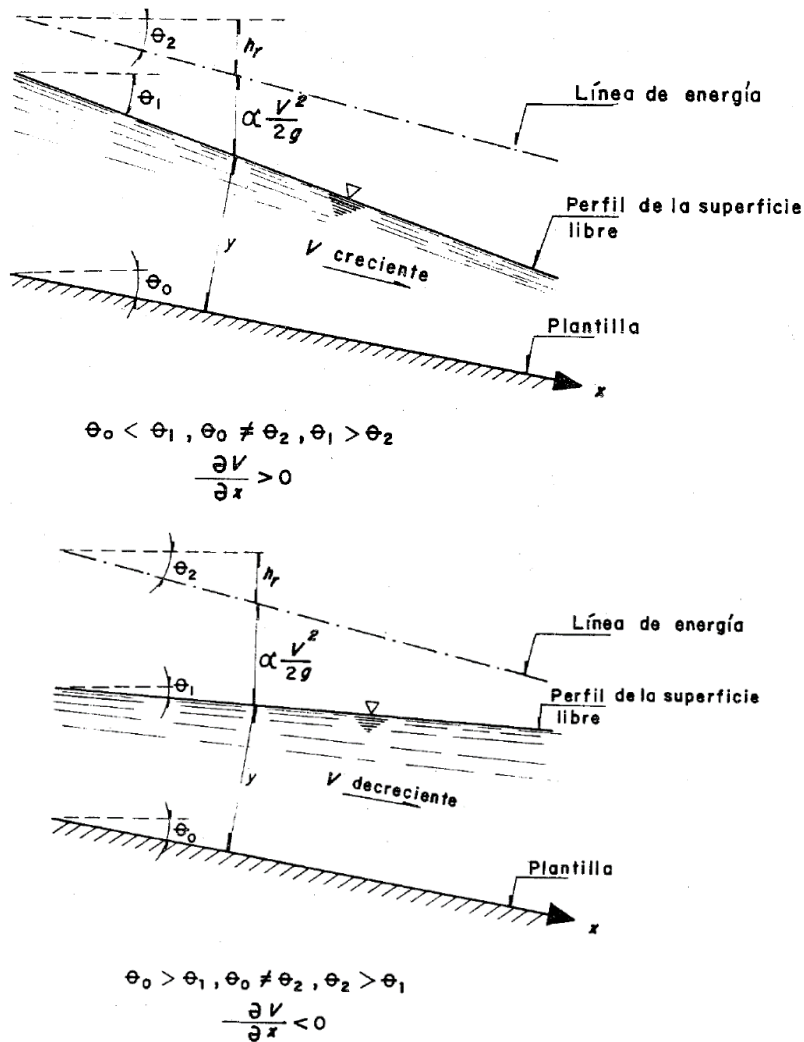


FIGURA 1.3 Flujo uniforme (Sotelo, 2002).



**FIGURA 1.4** Flujo variado: a) Velocidad creciente, b) Velocidad decreciente (Sotelo, 2002).

Por otro lado, dos aspectos físicos importantes en el flujo a superficie libre son: la gravedad y la viscosidad (Chow, 1994).

*Efecto de la gravedad.* Se considera con relación a la fuerza de gravedad y la de inercia (Según la Segunda ley de *Newton* corresponde al producto de la masa por la aceleración), mediante el número de *Froude* (adimensional) (Ecuación 1.4) de la siguiente manera (Chow, 1994):

$$F_r = \frac{V}{\sqrt{gY}} \quad (1.4)$$

donde  $V$  es la velocidad media del flujo en m/s,  $g$  la aceleración de la gravedad en m/s<sup>2</sup>, y  $Y$  la profundidad hidráulica, en metros (Chow, 1994).

Se le llama celeridad al elemento  $\sqrt{gY}$  de la Ecuación 1.4 y corresponde a la velocidad con la que se propaga un disturbio en la superficie libre del flujo (Chow, 1994).

Cuando la velocidad media del flujo se iguala con la celeridad, se presenta el *flujo crítico*; dicho valor corresponde a un  $F_r = 1.0$ . Por otro lado, se habla de un *flujo subcrítico* cuando la velocidad media del flujo es menor que la crítica resultando un  $F_r < 1.0$ . Otro caso más corresponde a aquel en que la velocidad media es mayor que la crítica, dando lugar a un *flujo supercrítico*, que implica un valor de  $F_r > 1.0$  (Chow, 1994).

*Efecto de viscosidad.* La viscosidad es una medida de la resistencia al desplazamiento del líquido. Se considera con relación a la fuerza debida a la viscosidad y la de inercia a través del número de *Reynolds* (adimensional), el cual se expresa mediante la Ecuación 1.5, como sigue (Chow, 1994):

$$Re = \frac{VL}{\nu} \tag{1.5}$$

En donde  $L$  es longitud en metros,  $V$  la velocidad media en m/s y  $\nu$  la viscosidad cinemática del líquido en  $m^2/s$ .

Con base en el número de Reynolds, el flujo puede ser: laminar, transicional o turbulento. El flujo es *laminar* si las partículas del líquido se mueven en la dirección del flujo, de forma suave y a manera de finas capas, una encima de la otra; en este caso, predomina la magnitud relativa de las fuerzas de viscosidad. En contraparte, en el flujo *turbulento* predominan las fuerzas inerciales e implica una divergencia notable en las líneas de corriente del flujo y las cuales no parecen recuperar una dirección definida respecto al tiempo o al espacio (Chaudhry, 2008). Numéricamente, con el criterio recién descrito, se clasifica el flujo como se muestra en la Tabla 1.1.

**TABLA 1.1** Clasificación del flujo de acuerdo con el número de Reynolds.

Tipo de flujo	Conducciones a	
	Presión (tuberías)	Superficie libre (canales)
Laminar	$Re < 2\ 300$	$Re < 500$
De transición	$2\ 300 < Re < 4\ 000$	$500 < Re < 12\ 500$
Turbulento	$Re > 4\ 000$	$Re > 12\ 500$

Fuente: Hidráulica de Canales, Sotelo (2002)

### 1.3. Ecuaciones principales de flujo permanente a superficie libre

Las ecuaciones que describen el movimiento de los líquidos a superficie libre se basan en varios principios de la Física y se presentan a través del concepto de conservación de una propiedad específica en el flujo propuesto por Reynolds.

#### 1.3.1. Ecuación de conservación de masa (continuidad)

Cuando no hay almacenamiento, la cantidad de masa que llega a una sección transversal 1 del canal, por unidad de tiempo (flujo de masa), es igual a la cantidad de masa que sale en la sección 2, por unidad de tiempo (Figura 1.5) y se expresa como:

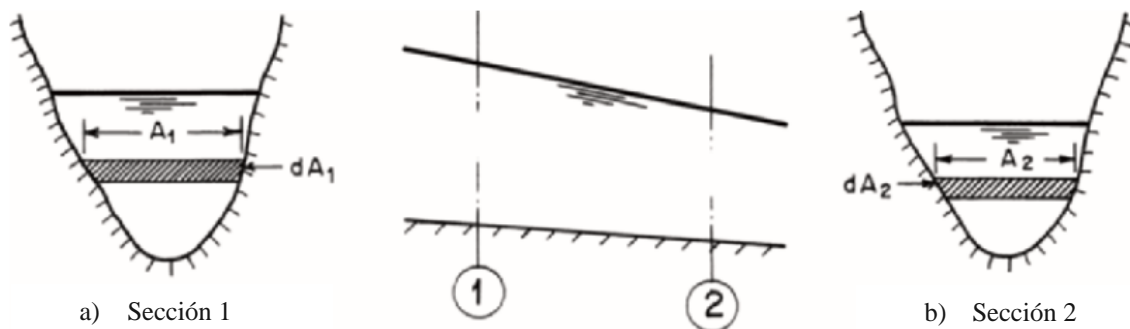
$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2$$

Donde  $\dot{m} = \frac{dm}{dt}$  es flujo de masa.

Como la densidad ( $\rho$ ) es igual a la diferencial de masa ( $dm$ ) entre la diferencial de volumen ( $dV$ ); se tiene que la diferencial de masa es igual a densidad ( $\rho$ ) por diferencial de volumen ( $dV$ ), o sea  $dm = \rho dV$ .

Como volumen es igual a distancia por área, el diferencial de volumen es  $dV = x dA$ , siendo  $x$  distancia y  $dA$  diferencial de área, así:

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \rho dV = \frac{d}{dt} \rho x dA = \rho dA \frac{d}{dt} x = \rho dA V = \rho V dA$$



**FIGURA 1.5** Visualización de secciones transversales (a y b) y diferenciales de área (Chaudhry, 2008).

En su forma integral, se tiene lo siguiente, expresado en la Ecuación 1.6 (Chaudhry, 2008):

$$\int_1 \rho_1 V_1 dA = \int_2 \rho_2 V_2 dA \quad (1.6)$$

Donde  $\rho$  es la densidad del líquido ( $\text{kg/m}^3$ ),  $V$  la velocidad media ( $\text{m/s}$ ) y  $dA$  es la diferencial del área hidráulica ( $\text{m}^2$ ). El subíndice 1 corresponde a la entrada y el 2 a la salida.

Siendo:

$$\dot{m} = \rho V dA$$

El líquido se considera incompresible cuando la densidad es constante, por lo tanto (Chaudhry, 2008):

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho_2 \\ \rho_1 \int_1 V_1 dA &= \rho_2 \int_2 V_2 dA \\ \int_1 V_1 dA &= \int_2 V_2 dA \end{aligned}$$

Si se considera flujo permanente, la velocidad es constante e igual a la media en la sección transversal y así (Chaudhry, 2008):

$$\begin{aligned} V_1 \int_1 dA &= V_2 \int_2 dA \\ V_1 A_1 &= V_2 A_2 \end{aligned}$$

Si  $Q=VA$ , entonces se simplifica mediante la Ecuación 1.7 (Chaudhry, 2008):

$$Q_1 = Q_2 \quad (1.7)$$

Por lo anterior, se entiende que, en una sección transversal, el flujo de volumen del líquido que entra es igual al que sale.

### 1.3.2. Ecuación de la conservación de la energía

El flujo de energía que entra a la sección 1 de un tramo del canal ( $H_1\dot{m}_1$ ) menos el flujo de energía que se transforma en calor por el rozamiento del líquido con las paredes y el fondo del conducto ( $F\dot{m}_1$ ) es igual a al flujo de energía que sale por la sección 2 ( $H_2\dot{m}_2$ ). Donde dichos flujos están expresados por unidad de masa y unidad de tiempo, o sea:

$$H_1\dot{m}_1 - F\dot{m}_1 = H_2\dot{m}_2$$

La energía  $H$  tiene unidades de longitud (m) y es igual a la suma de la energía potencial ( $gz$ ) más la debida a la presión  $\left(\frac{p}{\rho}\right)$  más la energía cinética  $\left(\frac{V^2}{2}\right)$ :

$$H = gz + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}$$

Donde  $z$  es una distancia vertical,  $g$  la aceleración de la gravedad,  $P$  la presión,  $\rho$  la densidad y  $V$  la velocidad media del flujo.

De manera semejante a la energía potencial, la energía que se transforma en calor o se pierde (por no aprovechar dicho calor)  $F$  es igual al producto de la aceleración de la gravedad por una longitud vertical ( $h_f$ ), o sea  $F=gh_f$ .

Sustituyendo:

$$\left(g z_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} - g h_f\right) \dot{m}_1 = \left(g z_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2}\right) \dot{m}_2$$

Por la ecuación de continuidad se tiene que:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2$$

Así:

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} - gh_f = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2}$$

Al restar:

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + g h_f$$

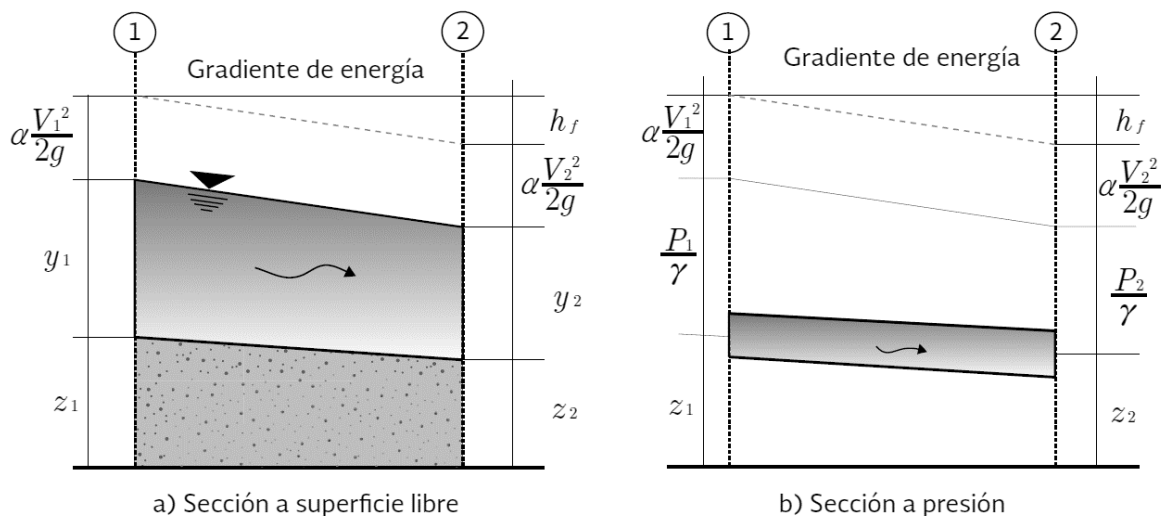
Al dividir entre la aceleración de la gravedad  $g$ :

$$z_1 + \frac{p_1}{g\rho} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{g\rho} + \frac{V_2^2}{2g} + h_f$$

Finalmente, se agrega el coeficiente de Coriolis ( $\alpha$ ) para considerar la variación de la velocidad con la profundidad y resulta la Ecuación 1.8:

$$z_1 + \frac{p_1}{g\rho} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{g\rho} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_f \quad (1.8)$$

En la figura 1.6 se ilustran las diferencias que existen entre los gradientes de energía cuando se trata de una sección a superficie libre (Figura 1.6a) y cuando se trata de una sección propia de un conducto a presión (Figura 1.6b).



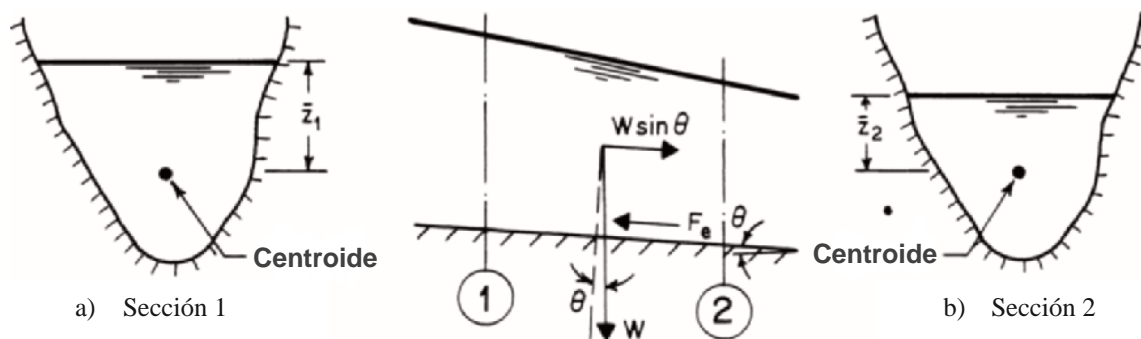
**FIGURA 1.6** Gradientes de energía en: a) Superficie libre y b) A presión (Sotelo, 2002).

### 1.3.3. Conservación de la cantidad de movimiento

Se considera el tramo de un canal comprendido entre dos secciones transversales tal como se ilustra en la Figura 1.7; en la sección 1 (Figura 1.7) entra un flujo de cantidad de movimiento ( $\dot{m}_1 V_1$ ), más las fuerzas externas ( $F_e$ ) que actúan en el tramo y es igual al flujo de cantidad de movimiento que sale por la sección 2, cuando el flujo es permanente:

$$\dot{m}_1 V_1 + F_e = \dot{m}_2 V_2$$





**FIGURA 1.7** Fuerzas que intervienen en la ecuación de cantidad de movimiento (Chaudhry, 2008).

En las fuerzas externas se consideran los empujes ( $\gamma \bar{z}A$ ) debidos a la presión en las secciones transversales y a la proyección en la dirección del fondo del tramo del peso del líquido entre las dos secciones, por lo que (Chaudhry, 2008):

$$F_e = \gamma \bar{z}_1 A_1 - \gamma \bar{z}_2 A_2 + W \text{ sen } \theta$$

En consecuencia:

$$\gamma \bar{z}_1 A_1 - \gamma \bar{z}_2 A_2 + W \text{ sen } \theta = \dot{m}_2 V_2 - \dot{m}_1 V_1$$

Considerando que ahora:  $\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \rho \forall = \rho \frac{d}{dt} \forall = \rho Q$

$$\gamma \bar{z}_1 A_1 - \gamma \bar{z}_2 A_2 + W \text{ sen } \theta = \rho Q_2 V_2 - \rho Q_1 V_1$$

Ya que  $Q=VA$ , queda:

$$\gamma \bar{z}_1 A_1 - \gamma \bar{z}_2 A_2 + W \text{ sen } \theta = \rho A_2 V_2 V_2 - \rho A_1 V_1 V_1$$

$$\gamma \bar{z}_1 A_1 - \gamma \bar{z}_2 A_2 + W \text{ sen } \theta = \rho A_2 V_2^2 - \rho A_1 V_1^2$$

Con lo cual:

$$\gamma \bar{z}_1 A_1 - \gamma \bar{z}_2 A_2 + W \text{ sen } \theta = \dot{m} (V_2 - V_1)$$

Si el ángulo de inclinación del fondo con respecto a la horizontal es pequeño, se considera que  $\text{sen } \theta = 0$ , quedando la ecuación anterior como sigue:

$$\gamma \bar{z}_1 A_1 - \gamma \bar{z}_2 A_2 = \dot{m} (V_2 - V_1)$$

Como:

$$\dot{m} = \rho V dA$$

Sustituyendo:

$$\gamma \bar{z}_1 A_1 - \gamma \bar{z}_2 A_2 = \rho Q (V_2 - V_1)$$

Por la condición de continuidad,  $Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$ , se tiene que:

$$V_2 = \frac{Q}{A_2}; V_1 = \frac{Q}{A_1}$$

De este modo:

$$\gamma \bar{z}_1 A_1 - \gamma \bar{z}_2 A_2 = \rho Q \left( \frac{Q}{A_2} - \frac{Q}{A_1} \right)$$

$$\gamma \bar{z}_1 A_1 - \gamma \bar{z}_2 A_2 = \rho \left( \frac{Q^2}{A_2} - \frac{Q^2}{A_1} \right)$$

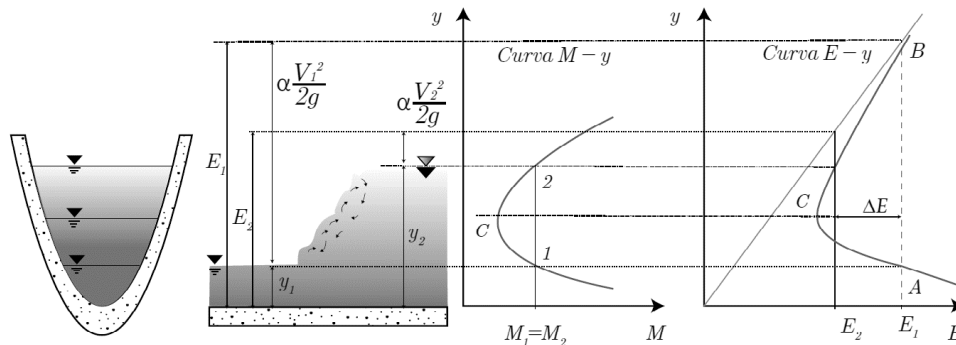
Al dividir entre  $\rho$  y ordenando términos (Chaudhry, 2008):

$$\frac{Q^2}{gA_1} + \bar{z}_1 A_1 = \frac{Q^2}{gA_2} + \bar{z}_2 A_2$$

Finalmente, se tiene que la función de cantidad de movimiento específico o *momentum* corresponde a la Ecuación 1.9:

$$M = \frac{Q^2}{gA} + \bar{z}A \quad (1.9)$$

En la Figura 1.8 se ilustra el comportamiento de la función momentum, en comparación con la de energía específica, en el fenómeno conocido como salto hidráulico.



**FIGURA 1.8** Análisis del salto hidráulico relacionando energía específica y momentum (Sotelo, 2002).

Considerando dos secciones transversales de un salto hidráulico, cuya función en cada caso correspondería al momentum, éstas deben tener el mismo valor, de tal forma que se obtiene la igualdad descrita en la Ecuación 1.10:

$$M_1 = M_2 \quad (1.10)$$

A  $M$  se le llama función cantidad de movimiento y tiene unidades de longitud cúbicas.



## 2. FLUJO ESPACIALMENTE VARIADO

Cuando en un canal el cambio de la velocidad a lo largo de su longitud es pequeño y se considera que entra (o sale) un caudal pequeño en una dirección distinta a la del flujo en el conducto conforme se desplaza el líquido se presenta un flujo espacialmente variado.

En la práctica, y en condiciones naturales, este tipo de flujo es bastante común. Un ejemplo donde se presenta este tipo de flujo son las estructuras de control de volúmenes de agua como lo son vertedores laterales en almacenamientos, pero también en canales de drenaje (Sotelo, 2002).

### 2.1. Características principales

Para analizar el flujo espacialmente variado es preciso enumerar algunas de las suposiciones que son tomadas en cuenta en la deducción de las ecuaciones dinámicas, en cualquiera de sus variantes, para gasto creciente o decreciente y que, para cada caso, pueden presentarse hipótesis particulares de comportamiento hidráulico. Algunas de las suposiciones antes mencionadas son (Chow, 1994):

- El movimiento del agua principalmente se presenta en la dirección de la longitud del canal;
- La distribución de velocidades, así como los coeficientes ( $\alpha$  y  $\beta$ ) de distribución de la misma, permanecen inalterados y constantes en cada sección del canal;
- La pendiente en el canal es uniforme y relativamente pequeña por lo que los efectos en la carga dinámica y en la fuerza sobre el canal son insignificantes, además, se consideran líneas de corrientes prácticamente paralelas entre sí;
- La pérdida de energía por fricción se valúa mediante la ecuación de *Manning*;
- El efecto por atrapamiento de aire es cualitativamente despreciable.

## 2.2. Ecuaciones de flujo espacialmente variado

Con la finalidad de conocer el flujo del líquido en el canal cuando existe una cierta salida o entrada de caudales, se consideran varios conceptos de la Física y es posible realizar el análisis partiendo de la ecuación de momentum o de la energía (Yen, 1971).

La ecuación de continuidad para flujo espacialmente variado establece que la diferencia entre el caudal de entrada y el de salida de un tramo de canal  $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ , es igual al gasto por unidad de ancho  $q$ , como se muestra en la Ecuación 2.1:

$$\frac{dQ}{dx} = q \quad (2.1)$$

Para gasto a lo largo del tramo creciente  $q$  es negativo y para gasto decreciente  $q$  es positivo.

### 2.2.1. Gasto decreciente

Para el análisis de flujo decreciente, es conveniente abordarlo partiendo del principio de la energía, considerando la disminución de carga total producida por una apertura en las paredes del canal en donde sale cierto caudal. Por lo anterior, considerando un nivel de referencia establecido, se tiene la energía en una sección transversal (Chow, 1994):

$$H = z + y + \alpha \frac{Q^2}{2A^2g}$$

Derivando la ecuación anterior respecto a la variable  $x$  (representando una longitud):

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{\alpha}{2g} \left( \frac{2Q}{A^2} \frac{dQ}{dx} - \frac{2Q^2}{A^3} \frac{dA}{dx} \right) \quad (2.2)$$

El coeficiente de Coriolis se considera como unitario dadas las condiciones generales de velocidad del canal;

Por las condiciones geométricas, se tiene que:

$$\frac{dH}{dx} = -S_f \quad (2.3)$$

$$\frac{dz}{dx} = -S_0 \quad (2.4)$$

Además, el cambio del área respecto a la distancia se expresa:

$$\frac{dA}{dx} = \left(\frac{dA}{dy}\right) \left(\frac{dy}{dx}\right) \quad (2.5)$$

Como el área  $A$  es función de las variables  $y$  y  $x$ , la derivada total de  $A$  respecto a  $y$  es:

$$\frac{dA}{dy} = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{dx}{dy} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{dy}{dy} = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{dx}{dy} + \frac{\partial A}{\partial y}$$

Para un canal prismático,  $\frac{\partial A}{\partial x}$  es despreciable, por lo que:

$$\frac{dA}{dy} = \frac{\partial A}{\partial y}$$

Considerando que el diferencial de área es  $dA=Tdy$ , siendo  $T$  el ancho de superficie libre, la Ecuación 2.5 queda:

$$\frac{dA}{dx} = T \left(\frac{dy}{dx}\right) \quad (2.6)$$

Al sustituir las Ecuaciones 2.3, 2.4 y 2.5 en la Ecuación 2.2:

$$-S_f = -S_0 + \frac{dy}{dx} + \frac{\alpha}{2g} \left( \frac{2Q}{A^2} q - \frac{2Q^2}{A^3} T \frac{dy}{dx} \right)$$

Ordenando términos:

$$\left( \frac{\alpha Q^2}{gA^3} T - 1 \right) \frac{dy}{dx} = S_0 - S_f - \frac{2\alpha Q}{gA^2} q$$

Retomando el concepto del número de Froude (Kumar, 1987):

$$\text{Fr}^2 = \frac{\alpha Q^2}{gA^3} T$$

La ecuación dinámica para flujo espacialmente variado con caudal decreciente resulta en la Ecuación 2.7:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f - \frac{Q}{gA^2} q}{1 - \text{Fr}^2} \quad (2.7)$$

### 2.2.2. Gasto creciente

Para el caso de flujo espacialmente variado con caudal creciente, a partir de la ecuación de cantidad de movimiento, se llega a obtener:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f - \frac{2Q}{gA^2} q}{1 - Fr^2} \quad (2.8)$$

La cual difiere por el coeficiente 2 en el tercer término del numerador y el gasto lateral de entrada por unidad de longitud  $q$  es negativo.

### 2.3. Solución numérica del flujo espacialmente variado decreciente

A través del método de *Runge-Kutta* se resuelven numéricamente las ecuaciones diferenciales ordinarias de flujo espacialmente variado con gasto decreciente, esto debido a las bondades que otorga el método, mediante la partición del problema en módulos más sencillos.

Las ecuaciones a resolver son:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{S_0 - S_f - \frac{Q}{gA^2} q}{1 - Fr^2} = f(x, y, Q) \\ \frac{dQ}{dx} &= q = g(x, y, Q) \end{aligned} \quad (2.9)$$

La Ecuación 2.9 representa el ritmo de cambio del tirante  $y$ , con respecto a la distancia  $x$ . El miembro derecho de la ecuación está en función del tirante, la descarga y las propiedades geométricas del canal (Kouchakzadeh, 2002).

Cuando es complicado o no se pueden resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias mediante técnicas analíticas se recurre a métodos numéricos, los que permiten obtener una solución muy aproximada a la exacta. Ellos requieren una gran cantidad de cálculos aritméticos que se realizan de manera rápida con computadoras.

En los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias la solución aproximada se obtiene en forma secuencial para un conjunto valores de la variable independiente con una diferencia pequeña



entre ellos, de modo que cada valor de la variable independiente esté asociado uno de la variable dependiente, lo cual corresponde a la solución aproximada de la ecuación diferencial.

En el caso de las ecuaciones diferenciales de flujo espacialmente variado permanente se tiene como variable independiente a la distancia ( $x$ ) y en una de las ecuaciones la variable dependiente es el caudal ( $Q$ ) a lo largo del canal; y en la otra ecuación es el tirante ( $y$ ).

Para la aplicación del método numérico en esta clase de flujo fue necesario proponer una ecuación para obtener el caudal (por unidad de longitud) de salida del canal basado en la ecuación del gasto que se descarga por un vertedor de sección rectangular horizontal desde un depósito lleno de agua.

Para obtener resultados acordes con los caudales aforados en el dispositivo experimental, en tal ecuación se incluyó un factor constante (FA) que se determinó a partir de dichos caudales.

La justificación del procedimiento de Runge-Kutta requiere de varios pasos matemáticos sencillos basados en la Serie de *Taylor* y se puede consultar en varios textos de métodos numéricos.

### 2.3.1. Método de Runge-Kutta de cuarto orden

Para el caso particular de la ecuación de gasto decreciente, se tiene lo siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, Q) \quad (2.10)$$

$$\frac{dQ}{dx} = g(x, y, Q) \quad (2.11)$$

Para calcular el tirante ( $y$ ) y el gasto ( $Q$ ), respectivamente con el método de Runge-Kutta de cuarto orden, se tiene lo siguiente

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\Delta x \quad (2.12)$$

$$Q_{n+1} = Q_n + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)\Delta x \quad (2.13)$$

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x \quad (2.14)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(x_n, y_n, Q_n)\Delta x \\
 m_1 &= g(x_n, y_n, Q_n)\Delta x \\
 k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}, Q_n + \frac{m_1}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)\Delta x \\
 m_2 &= g\left(x_n + \frac{1}{2}, Q_n + \frac{m_1}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)\Delta x \\
 k_3 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}, Q_n + \frac{m_2}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)\Delta x \\
 m_3 &= g\left(x_n + \frac{1}{2}, Q_n + \frac{m_2}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)\Delta x \\
 k_4 &= f(x_{n+1}, Q_n + m_3, y_n + k_3)\Delta x \\
 m_4 &= g(x_{n+1}, Q_n + m_3, y_n + k_3)\Delta x
 \end{aligned}$$

Para  $n = 0$ , se conoce  $(y_0, Q_0, x_0)$ .

Se propone calcular el gasto de salida lateral, por unidad de ancho, como (Mohammad, 2018):

$$q = \frac{dQ}{dx} = -\frac{2}{3}\mu\sqrt{2g}(y-w)^{\frac{3}{2}} \quad (2.15)$$

Donde:

- $y$  tirante en cada sección;
- $w$  altura de la escotadura, 6 centímetros;
- $\mu$  coeficiente de descarga (por las Ecuaciones 2.16 y 2.17), 0.5470;

$$\eta_L = \frac{(y' - w)}{L} \quad (2.16)$$

- $y'$  tirante promedio para los 5 casos, se consideran 7 centímetros;
- $L$  longitud del vertedor rectangular, 30 centímetros.

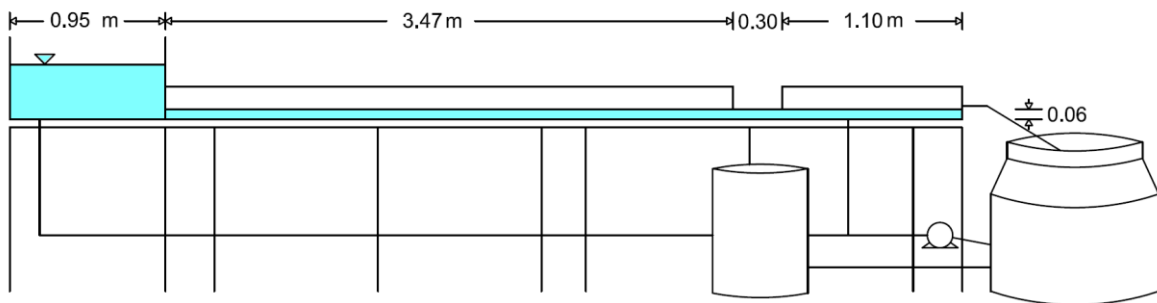
$$\mu = 0.425 + 0.1 + \left(\frac{\eta_L^{3.3} + 0.025\eta_L^7}{1 + 5.5\eta_L^{0.02}}\right) \quad (2.17)$$

### 3. DISPOSITIVO FÍSICO EXPERIMENTAL

Se construyó un canal de acrílico transparente (lucita) (Figura 3.1) para simular un flujo espacialmente variado decreciente permanente.

A continuación, se describen los elementos más importantes y las actividades que se realizaron para conocer sus características y funcionamiento del tipo de flujo de interés.

#### 3.1 Dimensiones



**FIGURA 3.1** Diagrama básico del dispositivo sobre el cual se desarrollaron las distintas pruebas.

El dispositivo consiste de un sistema de recirculación de agua con un canal de sección rectangular constante de extensión longitudinal de 4.87 metros y un ancho de 0.30 metros. Tiene una escotadura que funge como vertedor rectangular por donde se hace la descarga lateral, a una distancia de 3.47 metros desde el almacenamiento donde inicia el flujo a superficie libre.

#### 3.2 Instrumentación y apoyos visuales

Con la finalidad de realizar las lecturas convenientes, se colocaron reglas transparentes escaladas en centímetros en distintos sitios del canal.

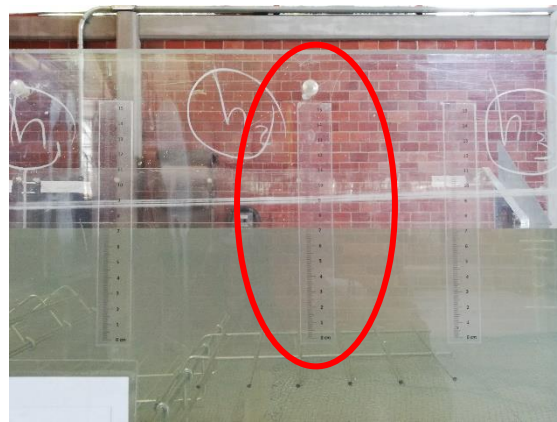
Para conocer el gasto de ingreso al canal se registraba la carga sobre el vertedor triangular. Se instalaron tres reglas a una distancia de 40, 50 y 65 centímetros de la descarga, respectivamente para  $h_3$ ,  $h_2$  y  $h_1$  (Figuras 3.2 y 3.3), sin embargo, el valor que se decidió considerar como único para el registro de la carga en cada condición de descarga fue el correspondiente a  $h_2$ , debido a que en esa sección se considera un nivel

## DISPOSITIVO FÍSICO EXPERIMENTAL

estático de la superficie libre del agua y una velocidad de aproximación casi de cero, condición necesaria para este tipo de vertedores.



**FIGURA 3.2** Tanque con vertedor triangular señalando las etiquetas para la medición de cargas.



**FIGURA 3.3** Regla “ $h_2$ ” con la cual se registraron las cargas sobre el vertedor triangular.

Otro elemento de importancia y que es clave para que las diferentes lecturas adquieran mayor confiabilidad son los sistemas (disipadores de energía) para lograr que el flujo a la entrada tenga un mínimo de alteraciones y disminuya la turbulencia en el tanque (Figuras 3.4 y 3.5).



**FIGURA 3.4** Componentes disipadores de energía al interior del tanque del vertedor.



**FIGURA 3.5** Componentes disipadores de energía del flujo de entrada al canal.

Para determinar la curva de gastos experimentales y observar su similitud con la teórica se realizaron aforos con un volumen de 15 litros (Tabla 3.1) y descarga libre en la salida del canal para garantizar la continuidad en el sistema.

## DISPOSITIVO FÍSICO EXPERIMENTAL

En la Tabla 3.1 se consignan las mediciones de los aforos (LPS son litros sobre segundo).

**TABLA 3.1** Aforos realizados en laboratorio.

Aforos			
Vol = 15 litros			
h= 5.10 [cm]	h= 5.50 [cm]	h= 6.15 [cm]	h= 6.80 [cm]
t= 18.30 [s]	t= 15.40 [s]	t= 11.40 [s]	t= 8.76 [s]
Q= 0.820 [LPS]	Q= 0.974 [LPS]	Q= 1.316 [LPS]	Q= 1.712 [LPS]
h= 5.20 [cm]	h= 5.70 [cm]	h= 6.40 [cm]	h= 7.40 [cm]
t= 17.55 [s]	t= 14.11 [s]	t= 10.17 [s]	t= 7.00 [s]
Q= 0.855 [LPS]	Q= 1.063 [LPS]	Q= 1.475 [LPS]	Q= 2.143 [LPS]
h= 5.40 [cm]	h= 5.85 [cm]	h= 6.50 [cm]	
t= 16.08 [s]	t= 13.20 [s]	t= 9.68 [s]	
Q= 0.933 [LPS]	Q= 1.136 [LPS]	Q= 1.550 [LPS]	

Por otro lado, con base en las características físicas del vertedor, se determinó emplear las expresiones para vertedores triangulares planteadas por la Universidad Católica de Chile:

$$Q = Ch^{5/2} \quad (3.1)$$

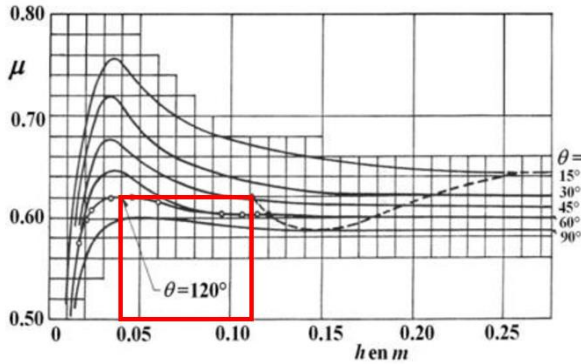
$$C = \frac{8}{15} \sqrt{2g} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \mu K \quad (3.2)$$

Donde:

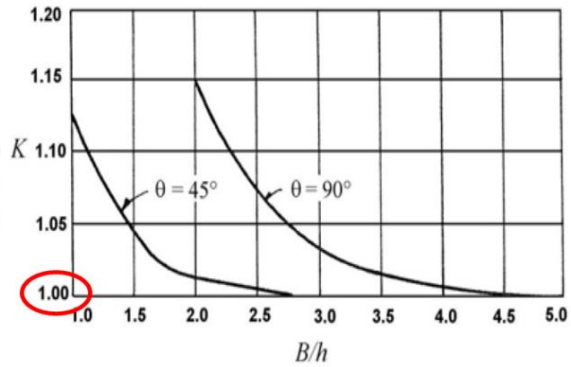
- $\theta$  ángulo del vértice del vertedor, 90°;
- $\mu$  coeficiente experimental, depende de  $h$  y de  $\theta$  (Figura 3.6);
- $K$  coeficiente que depende de  $B/h$  (Figura 3.7);
- $B$  ancho del canal de aproximación, 0.60 metros;
- $g$  aceleración de gravedad, 9.81 m/s<sup>2</sup>.

Para el caso de estudio, los valores de  $\mu$  oscilan entre 0.595 y 0.6 dado que las cargas, a su vez, están en el rango de 5 a 8 centímetros. Por su parte, el valor del coeficiente  $K$  permanece constante debido a que, para todos los casos aquí abordados, la relación  $B/h$  es mayor que el valor adimensional de 5.0.

## DISPOSITIVO FÍSICO EXPERIMENTAL

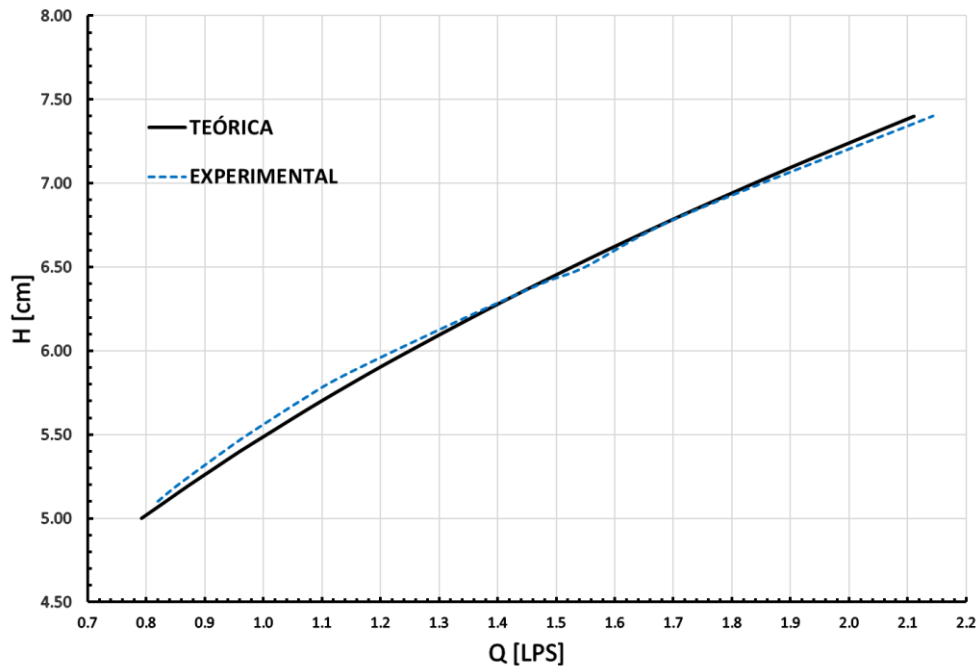


**FIGURA 3.6** Coeficiente de gasto  $\mu$  de vertedores triangulares en la ecuación de la Universidad Católica de Chile.



**FIGURA 3.7** Valor de  $K$  para vertedores triangulares en la ecuación de la Universidad Católica de Chile.

Se obtuvo la curva de gastos teórica para el vertedor triangular, de acuerdo con las condiciones descritas y en la Figura 3.8 se hace una comparación con aquella que es resultado de los aforos (Tabla 3.1).



**FIGURA 3.8** Comparación de curvas de gastos, teórica y experimental.

Se observa que no existen diferencias significativas entre ambas curvas y por ello se acepta la expresión de la Universidad Católica de Chile para definir los gastos numéricamente.



## DISPOSITIVO FÍSICO EXPERIMENTAL

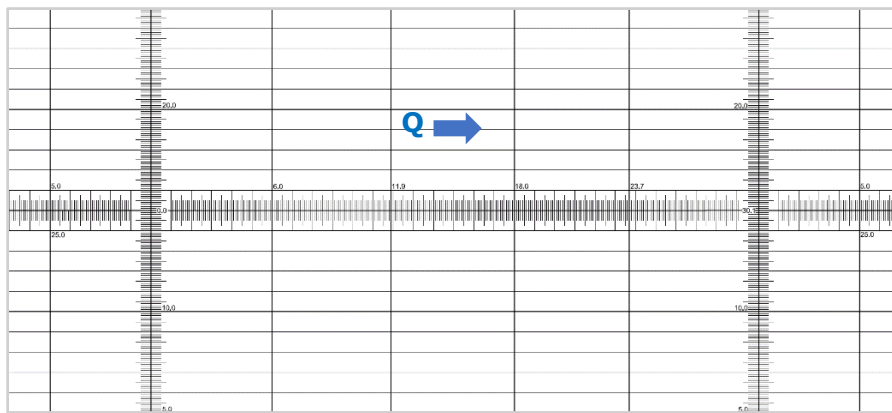
Para el análisis de perfiles y gastos de desbordamiento, se considerará únicamente un tramo del canal (Figura 3.9), contiguo hacia ambos lados de la descarga lateral. Consiste simplemente en ubicar 30 centímetros aguas arriba y aguas abajo del vertedor.

Con el objetivo de medir los tirantes en ese tramo, se adherieron al canal más de las reglas ya descritas, como se aprecia en las Figuras 3.11 y 3.12.

Con ayuda de la guía que se observa en la Figura 3.10, se nombraron las secciones de la 1 a la 19.



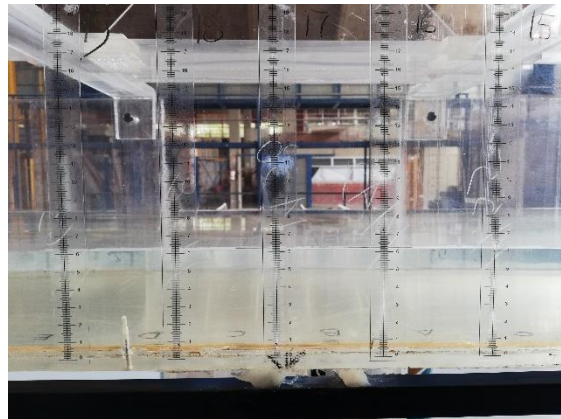
**FIGURA 3.9** Ubicación del tramo de estudio (señalado en rojo).



**FIGURA 3.10** Detalle de la guía visual del tramo de estudio.



**FIGURA 3.11** Vista de las secciones 1 a 7 sobre la margen derecha del canal.



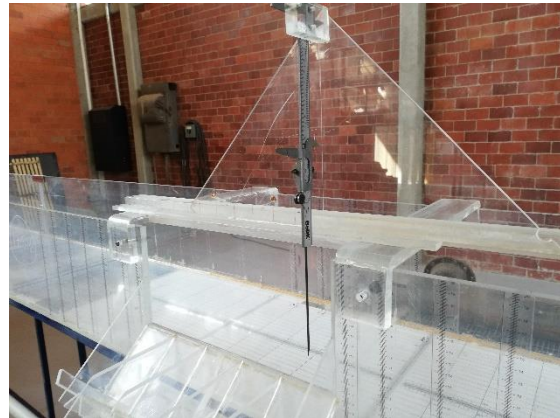
**FIGURA 3.12** Vista de las secciones 15 a 19 (de derecha a izquierda) sobre la margen izquierda del canal.

## DISPOSITIVO FÍSICO EXPERIMENTAL

Dado que en la presente tesis se desean analizar también las cargas justo sobre la cresta del cimacio, se construyó un dispositivo auxiliar o limnómetro (Figuras 3.13 y 3.14) que permitiera, haciendo uso de un calibrador *Vernier*, y montado sobre las paredes del canal, medir cada uno de los niveles  $h$  en esos puntos, los cuales se determinó que fueran 5 y a una distancia promedio de 6 centímetros entre cada uno de ellos.



**FIGURA 3.13** Vista general posterior del tramo de estudio.

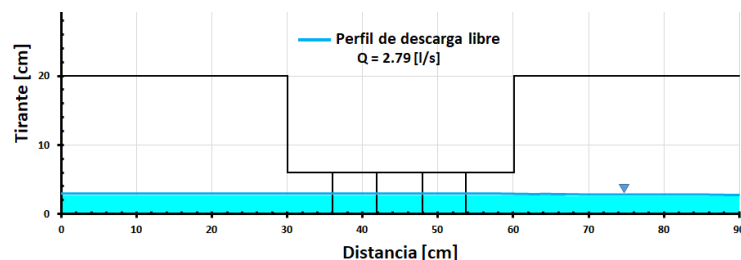


**FIGURA 3.14** Vista frontal del limnómetro fabricado en laboratorio.

**TABLA 3.2** Tirantes en descarga libre.

Perfil hidráulico		
Sección	$\Delta x$ , cm	$y$ , cm
1	0	3.00
2	5	3.00
3	10	3.00
4	15	3.00
5	20	3.00
6	25	3.00
7	28	3.00
C <sub>1</sub>	33	3.00
C <sub>2</sub>	39	3.00
C <sub>3</sub>	45	3.00
C <sub>4</sub>	51	3.00
C <sub>5</sub>	57	3.00
8	62	2.90
9	65	2.90
10	70	2.80
11	75	2.80
12	80	2.80
13	85	2.80
14	90	2.70

Otro aspecto importante, y que tiene injerencia directa sobre el cálculo en el modelo matemático, es el coeficiente  $n$  de la fórmula de Manning, el cual se tuvo que calcular también por medio de la experimentación con una prueba adicional, empleando un gasto de 2.8 litros por segundo y descarga libre en la desembocadura, para dicha prueba se obtuvo el perfil que se observa en la Tabla 3.2 y la Figura 3.15.



**FIGURA 3.15** Gráfica del perfil de descarga libre.



## DISPOSITIVO FÍSICO EXPERIMENTAL

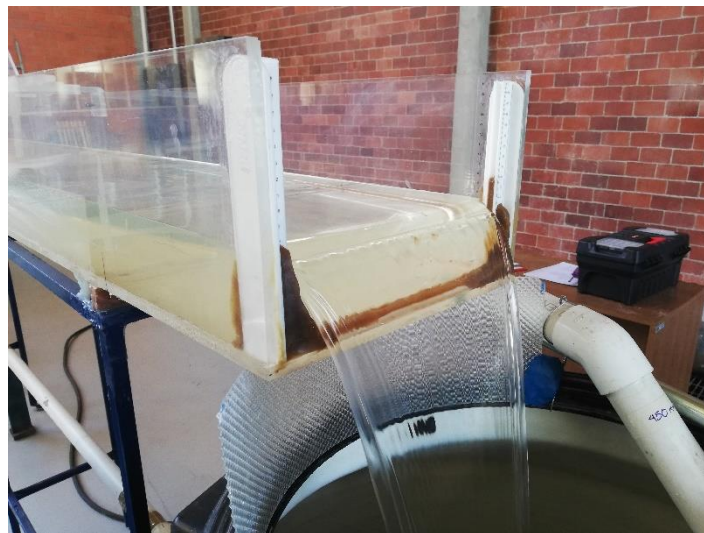
Ya que el tirante normal, para las condiciones geométricas (pendiente  $S_o=0.001$ ) y de caudal previamente descritas, tiene un valor de 3.0 centímetros, el coeficiente  $n$  de Manning real resulta de 0.00869, que coincide con el que se presenta en la literatura de 0.009 (Tabla 3.3) (Chow, 1994).

**TABLA 3.3** Extracto de tabla con algunos valores del coeficiente de rugosidad  $n$ .

Tipo de canal y descripción	Mínimo	Normal	Máximo
<b>A. Conductos cerrados que fluyen parcialmente llenos</b>			
<b>A-2. No metal</b>			
a. Lucita	0.008	<b>0.009</b>	0.010
b. Vidrio	0.009	0.010	0.013
c. Cemento			
1. Superficie pulida	0.010	0.011	0.013
2. Mortero	0.011	0.013	0.015

Fuente: Hidráulica de Canales Abiertos, Ven Te Chow (1994)

Como única condición de salida se tendrá una placa vertical con una altura de 6 centímetros para todos los gastos analizados, la que se observa en la Figura 3.16.



**FIGURA 3.16** Descarga del canal con una altura de placa de 6 centímetros.

## DISPOSITIVO FÍSICO EXPERIMENTAL

Con la finalidad de conocer cuánto del influjo total se desvía del canal, se construyó una caja con 5 depósitos (Figura 3.17), con los que obtuvieron los tiempos de llenado en cada caso para su posterior procesamiento y cálculo de caudales.



**FIGURA 3.17** Depósitos para el aforo de los caudales de desbordamiento, señalando los 5 cimacios donde se realizaron mediciones.

### 3.3 Funcionamiento

Para conducir el flujo a través del sistema se emplea una bomba de 1 HP (caballo de fuerza) (Figura 3.18), la que se localiza en la última parte del dispositivo y por medio de la cual se recircula el agua para llenar el tanque del vertedor, el cual ingresa un gasto al canal y desvía cierto volumen en el tramo ya mencionado para mantener una carga constante.



**FIGURA 3.18** Equipo de bombeo y la red de recirculación.

### 3.4 Pruebas experimentales

Las pruebas en el dispositivo experimental en laboratorio de Hidráulica se hicieron para 5 gastos diferentes. En la Tabla 3.4 se consignan los aforos de caudales de desbordamiento, las cargas y tirantes en el tramo de estudio (Tabla 3.6) y los perfiles hidráulicos para cada caso (Tabla 3.7 y Figuras 3.19, 3.20, 3.21 y 4.1).

Para el caso del cálculo de cargas y tirantes, se consideraron las taras del cimacio registradas previo a la experimentación y que se encuentran en la Tabla 3.5.

**TABLA 3.4** Aforo de caudales de desbordamiento.

Aforo de caudales de desbordamiento					
	Prueba No. 1	Prueba No. 2	Prueba No. 3	Prueba No. 4	Prueba No. 5
Carga del vertedor, cm	7.00	7.30	7.60	7.80	8.30
Gasto en el vertedor, LPS	1.84	2.04	2.24	2.39	2.79
Tiempos de desbordamiento, segundos					
Volumen desb, litros	2.0	2.0	1.5	1.5	1.0
$t_1 =$	10.25	10.79	7.04	6.92	3.86
$t_2 =$	9.94	9.40	6.13	5.87	3.15
$t_3 =$	9.90	9.45	6.12	5.99	3.30
$t_4 =$	10.52	10.07	6.56	6.26	3.30
$t_5 =$	9.65	9.33	5.84	5.75	3.00
Gastos de desbordamiento, LPS					
$Q_1 =$	0.20	0.19	0.21	0.22	0.26
$Q_2 =$	0.20	0.21	0.24	0.26	0.32
$Q_3 =$	0.20	0.21	0.25	0.25	0.30
$Q_4 =$	0.19	0.20	0.23	0.24	0.30
$Q_5 =$	0.21	0.21	0.26	0.26	0.33
Gasto total desbordado, LPS	1.00	1.02	1.19	1.22	1.52

## DISPOSITIVO FÍSICO EXPERIMENTAL

**TABLA 3.5** Taras medidas en el cimacio.

Taras del cimacio, cm											
$T_1 =$	14.45	$T_2 =$	14.45	$T_3 =$	14.56	$T_4 =$	14.56	$T_5 =$	14.56	$\bar{T} =$	14.52

**TABLA 3.6** Mediciones requeridas para la obtención de cargas y perfiles.

Cargas y tirantes										
Prueba No. 1		Prueba No. 2		Prueba No. 3		Prueba No. 4		Prueba No. 5		
Cargas en el cimacio, cm										
	Lectura	Carga	Lectura	Carga	Lectura	Carga	Lectura	Carga	Lectura	Carga
$h_1 =$	13.53	0.92	13.66	0.79	13.40	1.05	13.32	1.13	13.25	1.20
$h_2 =$	13.51	0.94	13.66	0.79	13.32	1.13	13.31	1.14	13.23	1.22
$h_3 =$	13.57	0.99	13.66	0.90	13.41	1.15	13.41	1.15	13.28	1.28
$h_4 =$	13.65	0.91	13.56	1.00	13.41	1.15	13.47	1.09	13.30	1.26
$h_5 =$	13.63	0.93	13.65	0.91	13.42	1.14	13.45	1.11	13.23	1.33
Tirantes al centro, cm										
	Lectura	Tirante	Lectura	Tirante	Lectura	Tirante	Lectura	Tirante	Lectura	Tirante
$Y_{C1} =$	13.25	7.20	13.30	7.15	13.06	7.39	13.01	7.44	12.84	7.61
$Y_{C2} =$	13.22	7.23	13.30	7.15	13.06	7.39	13.06	7.39	12.82	7.63
$Y_{C3} =$	13.26	7.30	13.30	7.26	13.10	7.46	13.10	7.46	12.90	7.66
$Y_{C4} =$	13.34	7.22	13.30	7.26	13.11	7.45	13.15	7.41	12.97	7.59
$Y_{C5} =$	13.34	7.22	13.30	7.26	13.12	7.44	13.16	7.40	12.97	7.59
Tirantes en la margen izquierda, cm										
	Tirante		Tirante		Tirante		Tirante		Tirante	
$Y_{15} =$	7.30		7.20		7.50		7.50		7.70	
$Y_{16} =$	7.30		7.20		7.50		7.50		7.70	
$Y_{17} =$	7.30		7.30		7.50		7.50		7.70	
$Y_{18} =$	7.30		7.30		7.50		7.50		7.70	
$Y_{19} =$	7.30		7.30		7.50		7.50		7.70	

## DISPOSITIVO FÍSICO EXPERIMENTAL

**TABLA 3.7** Perfiles hidráulicos medidos en cada prueba.

Perfiles hidráulicos											
Sección	$\Delta x$ , cm	Prueba No. 1		Prueba No. 2		Prueba No. 3		Prueba No. 4		Prueba No. 5	
		Centro y, cm	MD y, cm	Centro y, cm	MD y, cm	Centro y, cm	MD y, cm	Centro y, cm	MD y, cm	Centro y, cm	MD y, cm
1	0	7.30	7.30	7.30	7.30	7.50	7.50	7.50	7.50	7.70	7.70
2	5	7.30	7.30	7.30	7.30	7.50	7.50	7.50	7.50	7.70	7.70
3	10	7.30	7.30	7.30	7.30	7.50	7.50	7.50	7.50	7.70	7.70
4	15	7.30	7.30	7.30	7.30	7.50	7.50	7.50	7.50	7.70	7.70
5	20	7.30	7.30	7.40	7.40	7.50	7.50	7.50	7.50	7.70	7.70
6	25	7.30	7.30	7.40	7.40	7.50	7.50	7.50	7.50	7.70	7.70
7	28	7.30	7.30	7.40	7.40	7.50	7.50	7.50	7.50	7.70	7.70
C <sub>1</sub>	33	7.20	6.92	7.15	6.79	7.39	7.05	7.44	7.13	7.61	7.20
C <sub>2</sub>	39	7.23	6.94	7.15	6.79	7.39	7.13	7.39	7.14	7.63	7.22
C <sub>3</sub>	45	7.30	6.99	7.26	6.90	7.46	7.15	7.46	7.15	7.66	7.28
C <sub>4</sub>	51	7.22	6.91	7.26	7.00	7.45	7.15	7.41	7.09	7.59	7.26
C <sub>5</sub>	57	7.22	6.93	7.26	6.91	7.44	7.14	7.40	7.11	7.59	7.33
8	62	7.30	7.30	7.40	7.40	7.50	7.50	7.50	7.50	7.80	7.80
9	65	7.30	7.30	7.40	7.40	7.60	7.60	7.50	7.50	7.80	7.80
10	70	7.30	7.30	7.40	7.40	7.60	7.60	7.60	7.60	7.80	7.80
11	75	7.40	7.40	7.40	7.40	7.60	7.60	7.60	7.60	7.80	7.80
12	80	7.40	7.40	7.40	7.40	7.60	7.60	7.60	7.60	7.80	7.80
13	85	7.40	7.40	7.40	7.40	7.60	7.60	7.60	7.60	7.80	7.80
14	90	7.30	7.30	7.40	7.40	7.60	7.60	7.60	7.60	7.70	7.70

## DISPOSITIVO FÍSICO EXPERIMENTAL

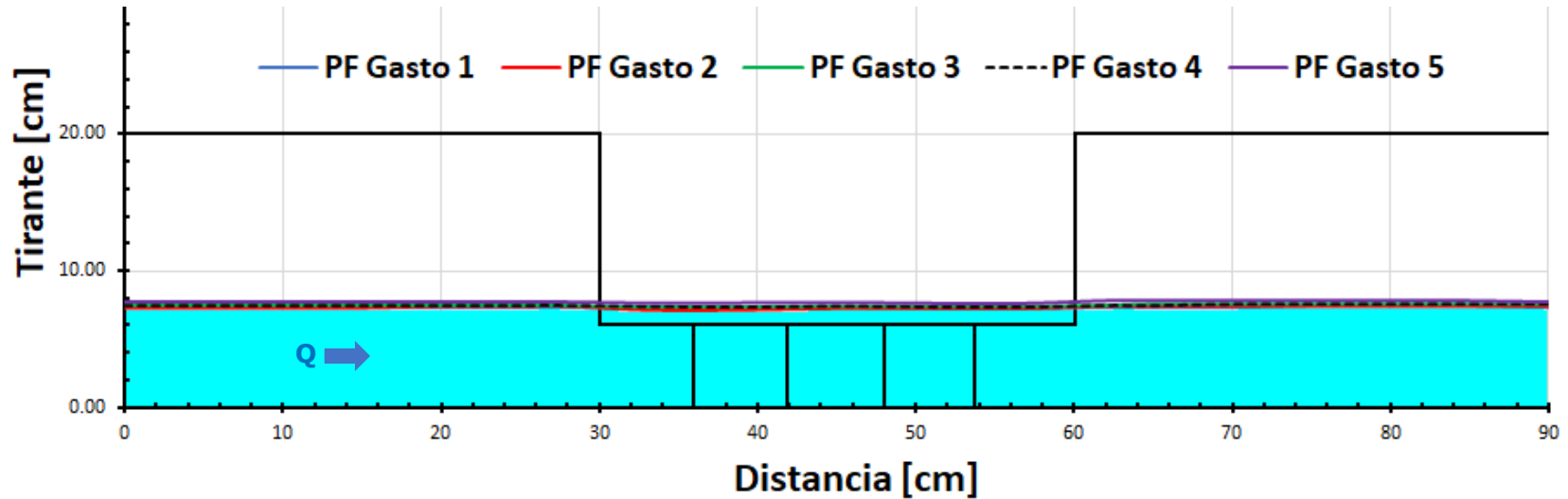


FIGURA 3.19 Perfiles hidráulicos medidos al centro del canal para los 5 gastos experimentales.

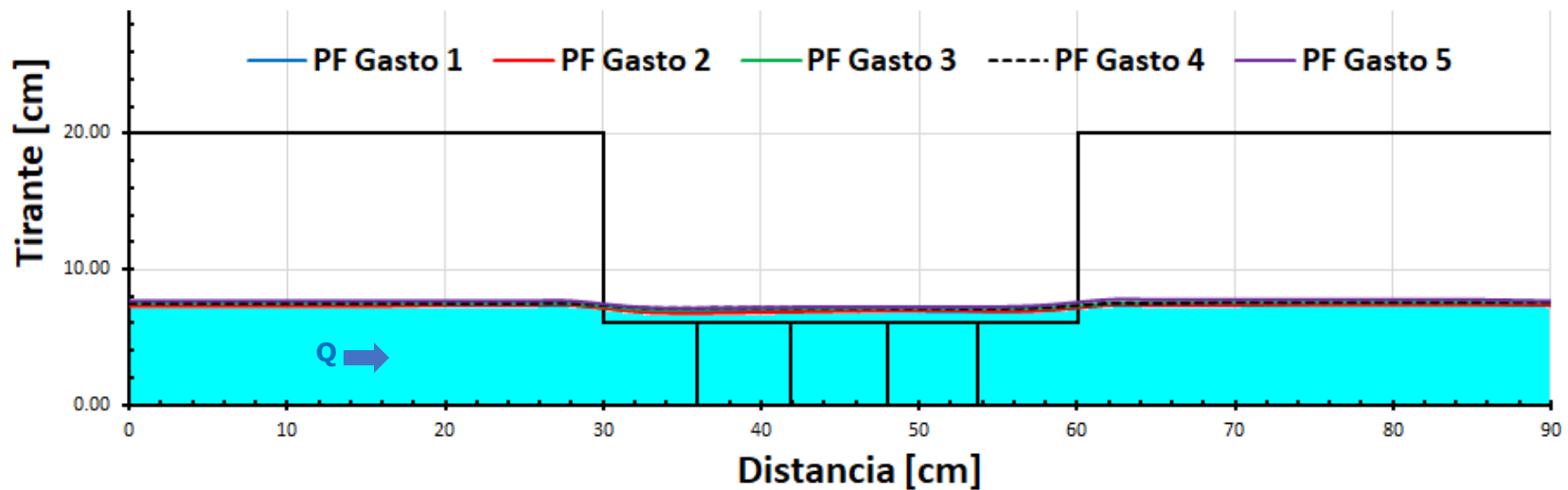
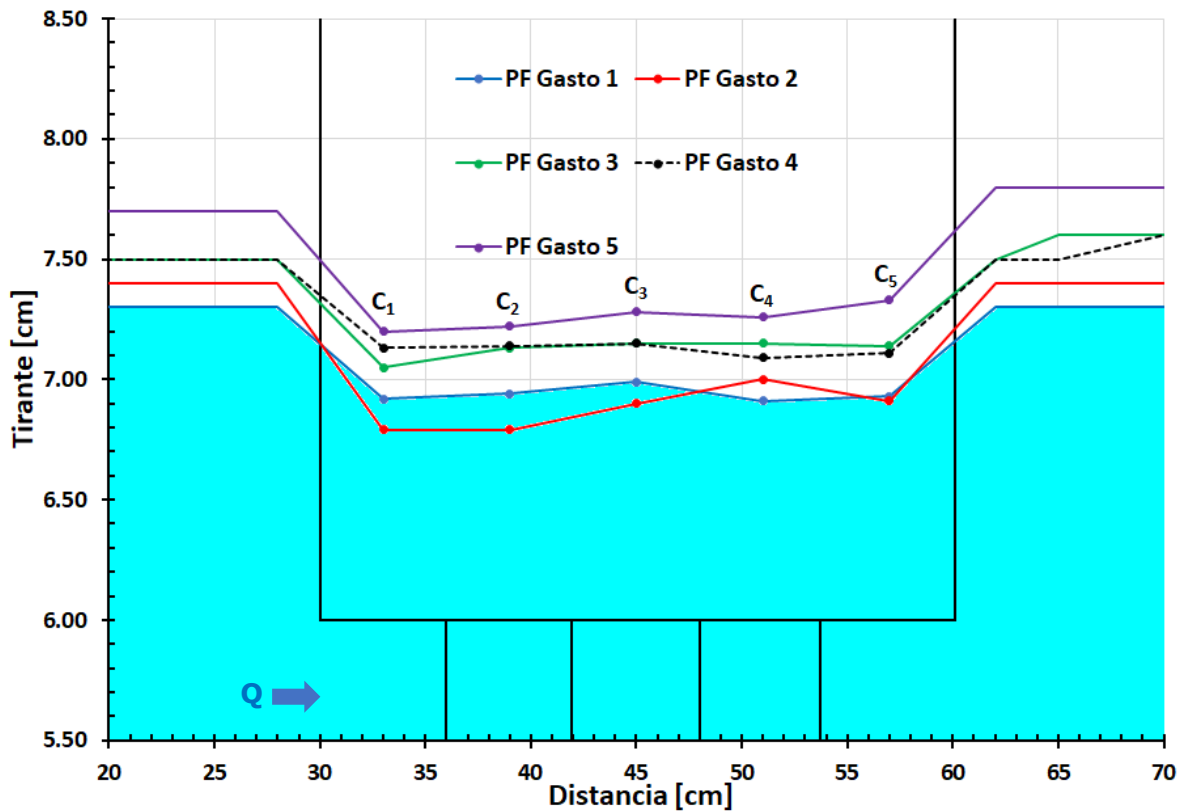


FIGURA 3.20 Perfiles hidráulicos medidos en la margen derecha para los 5 gastos experimentales.



**FIGURA 3.21** Detalle del gráfico de perfiles hidráulicos medidos en la margen derecha del canal para los 5 gastos.

El gráfico anterior fue modificado en sus dos dimensiones para visualizar la variación de la superficie libre del agua (SLA) de acuerdo con la magnitud de los gastos experimentados, encontrándose que, dado que es precisamente en estas secciones donde se realiza la descarga del vertedor lateral, los perfiles presentan disminuciones más significativas respecto de aquellos medidos en el centro.

## DISPOSITIVO FÍSICO EXPERIMENTAL

Se calcularon también los coeficientes de descarga  $\mu$  experimentales para cada ancho parcial del mismo, para compararlos con el único teórico y obtener un factor de ajuste (FA) compuesto; entendiendo  $C_d$  como:

$$C_d = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \quad (3.3)$$

Para el primer caso, en  $C_1$ :

$$Q_1 = 0.000195 \text{ [m}^3\text{/s]}, \text{ datos en Tabla 3.4}$$

$$b_1 = 0.06 \text{ [m]}, \text{ ancho parcial del vertedor } C_1$$

$$w = 0.06 \text{ [m]}, \text{ altura de la escotadura}$$

$$y_1 = 0.072 \text{ [m]}, \text{ datos en Tabla 3.7}$$

Partiendo de la ecuación de gasto:

$$q = C_d (y - w)^{1.5} \quad (3.4)$$

$$0.000195 = C_d (0.072 - 0.06)^{1.5}$$

$$C_d = 0.1483 \left[ \frac{\text{m}^{1.5}}{\text{s}} \right]$$

Ahora, considerando  $C_d$  constante:

$$C_d = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \quad (3.5)$$

$$0.1483 = \frac{2}{3} \mu (0.06) \sqrt{2(9.81)}$$

$$\mu_1 = 0.8372$$



## DISPOSITIVO FÍSICO EXPERIMENTAL

En la Tabla 3.8 se consignan los resultados de los coeficientes  $\mu$  experimentales para cada caso y un promedio para cada prueba.

**TABLA 3.8** Resultados de los cálculos para los coeficientes  $\mu$  experimentales.

Prueba 1						Prueba 2							
	Gastos, m <sup>3</sup> /s	Anchos, m	Tirantes, m	Cd, m <sup>1.5</sup> /s	$\mu_{Exp}$		Gastos, m <sup>3</sup> /s	Anchos, m	Tirantes, m	Cd, m <sup>1.5</sup> /s	$\mu_{Exp}$		
C <sub>1</sub>	0.000195	0.060	0.0720	0.1483	0.8372	C <sub>1</sub>	0.000185	0.060	0.0715	0.1500	0.8467		
C <sub>2</sub>	0.000201	0.059	0.0723	0.1473	0.8457	C <sub>2</sub>	0.000213	0.059	0.0715	0.1727	0.9913		
C <sub>3</sub>	0.000202	0.061	0.0730	0.1363	0.7566	C <sub>3</sub>	0.000212	0.061	0.0726	0.1499	0.8321		
C <sub>4</sub>	0.000190	0.057	0.0722	0.1410	0.8377	C <sub>4</sub>	0.000199	0.057	0.0726	0.1407	0.8359		
C <sub>5</sub>	0.000207	0.064	0.0722	0.1536	0.8128	C <sub>5</sub>	0.000214	0.064	0.0726	0.1513	0.8006		
					<b>Promedio</b>	<b>0.8180</b>						<b>Promedio</b>	<b>0.8613</b>
Prueba 3						Prueba 4							
	Gastos, m <sup>3</sup> /s	Anchos, m	Tirantes, m	Cd, m <sup>1.5</sup> /s	$\mu_{Exp}$		Gastos, m <sup>3</sup> /s	Anchos, m	Tirantes, m	Cd, m <sup>1.5</sup> /s	$\mu_{Exp}$		
C <sub>1</sub>	0.000213	0.060	0.0739	0.1300	0.7336	C <sub>1</sub>	0.000217	0.060	0.0744	0.1256	0.7088		
C <sub>2</sub>	0.000245	0.059	0.0739	0.1495	0.8581	C <sub>2</sub>	0.000256	0.059	0.0739	0.1562	0.8966		
C <sub>3</sub>	0.000245	0.061	0.0746	0.1389	0.7710	C <sub>3</sub>	0.000250	0.061	0.0746	0.1417	0.7867		
C <sub>4</sub>	0.000229	0.057	0.0745	0.1312	0.7792	C <sub>4</sub>	0.000240	0.057	0.0741	0.1433	0.8516		
C <sub>5</sub>	0.000257	0.064	0.0744	0.1487	0.7870	C <sub>5</sub>	0.000261	0.064	0.0740	0.1576	0.8337		
					<b>Promedio</b>	<b>0.7858</b>						<b>Promedio</b>	<b>0.8155</b>
Prueba 5													
	Gastos, m <sup>3</sup> /s	Anchos, m	Tirantes, m	Cd, m <sup>1.5</sup> /s	$\mu_{Exp}$								
C <sub>1</sub>	0.000259	0.060	0.0761	0.1268	0.7156								
C <sub>2</sub>	0.000317	0.059	0.0763	0.1523	0.8743								
C <sub>3</sub>	0.000303	0.061	0.0766	0.1417	0.7865								
C <sub>4</sub>	0.000303	0.057	0.0759	0.1511	0.8979								
C <sub>5</sub>	0.000333	0.064	0.0759	0.1661	0.8788								
					<b>Promedio</b>	<b>0.8306</b>							

## DISPOSITIVO FÍSICO EXPERIMENTAL

Para poder aproximar el cálculo hacia el que sería el Factor de Ajuste (FA) utilizado finalmente en el modelo numérico, se realizaron cocientes entre ambos grupos de valores, considerando constante el valor teórico, el que es:

$$\mu_{TEÓ} = 0.425$$

Así, para el primer caso, se tiene:

$$FA = \frac{0.8180}{0.425} = 1.9247$$

En la tabla 3.9 se consignan los resultados de los 5 Factores de Ajuste.

**TABLA 3.9** Factores de ajuste.

Pruebas	$\mu_{Exp}$	FA
1	0.8180	1.9247
2	0.8613	2.0267
3	0.7858	1.8489
4	0.8155	1.9188
5	0.8306	1.9544

Con base en los valores obtenidos y después de haber realizado varias combinaciones, se determinó utilizar un único valor como factor de ajuste (FA) para todos los cálculos numéricos, de tal forma que éste le otorgara al cálculo una mayor similitud con los resultados obtenidos en laboratorio y que es el que sigue:

$$FA = 1.75$$

En los capítulos 4 y 5 se retomará con un poco más de detalle el valor recién descrito.

## 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS ANALÍTICOS Y EXPERIMENTALES

De acuerdo con lo que se comentó en el capítulo 2, se aplicó el método numérico de Runge-Kutta para dar solución a la ecuación diferencial de flujo espacialmente variado decreciente (Ecuación 2.9), con todas las consideraciones y características ya abordadas.

### 4.1. Aplicación del modelo matemático

Mediante una hoja de cálculo se programaron las ecuaciones previamente descritas y, con las condiciones iniciales que se presentan en la Tabla 4.1, se obtuvo la solución completa a la ecuación diferencial de flujo espacialmente variado decreciente para este caso particular (ver Anexo A).

**TABLA 4.1** Datos de entrada para el cálculo numérico con Runge-Kutta.

Flujo Espacialmente Variado Decreciente					
Runge-Kutta de 4° orden					
Condiciones Generales					
Del modelo matemático			Geometría		
$\Delta x = -0.10$	<b>m</b>	<b>En flujo subcrítico, la dirección del cálculo es aguas arriba</b>	$n = 0.0087$		
$dx/2 = -0.05$	<b>m</b>		$b = 0.30$	<b>m</b>	
$X_0 = 0$	<b>m</b>		$S_0 = 0.001$		
$Cd = 1.2550$			$FA = 1.75$		
	Prueba 1	Prueba 2	Prueba 3	Prueba 4	Prueba 5
$y_0$ [m] =	0.073	0.074	0.075	0.075	0.078
$Q_{R-K}$ [m <sup>3</sup> /s] =	0.00088	0.00097	0.00105	0.00120	0.00122
$Q_M$ [m <sup>3</sup> /s] =	0.00084	0.00102	0.00105	0.00117	0.00127

La tabla anterior muestra los elementos más importantes que son necesarios para comenzar el cálculo numérico que, como en ella misma se comenta, se realizó en el sentido hacia aguas arriba de acuerdo con lo que indica la teoría acerca de la clasificación de los perfiles, por lo que se tuvo una condición inicial en cada caso y que corresponde al tirante conocido en la sección 8 (Tabla 3.7). Además, se debe introducir el gasto inicial para el cálculo que es aquel que llega a la salida del canal, es decir, la resta del gasto del vertedor triangular menos el de la escotadura.

$$\text{Gasto de salida del canal} = \text{Gasto del vertedor triangular} - \text{Gasto de desbordamiento lateral}$$

## ANÁLISIS DE RESULTADOS NUMÉRICOS Y EXPERIMENTALES

Por medio del factor de ajuste obtenido en el capítulo anterior, se logra que el grupo de valores calculados no difiera demasiado con los obtenidos a partir de la experimentación y entonces se acepta el cálculo.

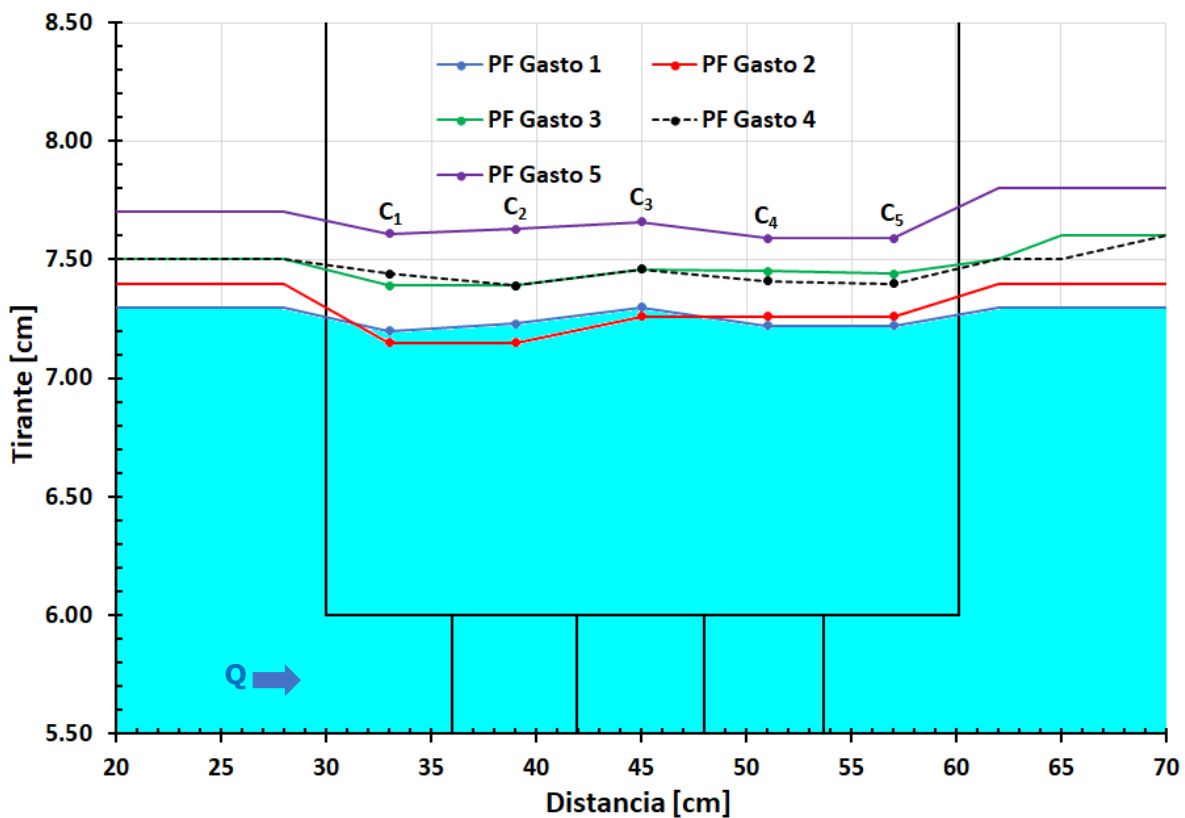
Debido a que uno de los objetivos de la presente tesis consiste en obtener, a través de un método numérico, tanto los perfiles hidráulicos como los caudales de desbordamiento, en la Tabla 4.2 se presenta el primer caso.

**TABLA 4.2** Tirantes calculados con el método numérico de Runge-Kutta.

Perfiles hidráulicos al centro del canal						
		Gasto No. 1	Gasto No. 2	Gasto No. 3	Gasto No. 4	Gasto No. 5
Sección	$\Delta x$ , cm	y, cm	y, cm	y, cm	y, cm	y, cm
1	0	7.30	7.30	7.50	7.50	7.70
2	5	7.30	7.30	7.50	7.50	7.70
3	10	7.30	7.30	7.50	7.50	7.70
4	15	7.30	7.30	7.50	7.50	7.70
5	20	7.30	7.40	7.50	7.50	7.70
6	25	7.30	7.40	7.50	7.50	7.70
7	28	7.30	7.40	7.50	7.50	7.70
C <sub>1</sub>	33	7.28	7.38	7.48	7.48	7.78
C <sub>2</sub>	39	7.28	7.38	7.48	7.48	7.78
C <sub>3</sub>	45	7.29	7.39	7.49	7.49	7.79
C <sub>4</sub>	51	7.29	7.39	7.49	7.49	7.79
C <sub>5</sub>	57	7.30	7.40	7.50	7.50	7.80
8	62	7.30	7.40	7.50	7.50	7.80
9	65	7.30	7.40	7.60	7.50	7.80
10	70	7.30	7.40	7.60	7.60	7.80
11	75	7.40	7.40	7.60	7.60	7.80
12	80	7.40	7.40	7.60	7.60	7.80
13	85	7.40	7.40	7.60	7.60	7.80
14	90	7.30	7.40	7.60	7.60	7.70

## 4.2. Comparación de resultados

Con base en la información que se ha obtenido, tanto a través de la experimentación directa en el canal, como haciendo uso del modelo matemático, es posible generar algunos gráficos que muestran cuán diferidos se encuentran ambos grupos de valores, destacando los Perfiles Hidráulicos al centro del canal (Figuras 4.1 y 4.2) y los Caudales de desbordamiento del vertedor lateral (Ecuación 2.15), plasmando también los factores de ajuste que intervienen en el modelo matemático y a partir de los cuales es posible otorgar más precisión al mismo.

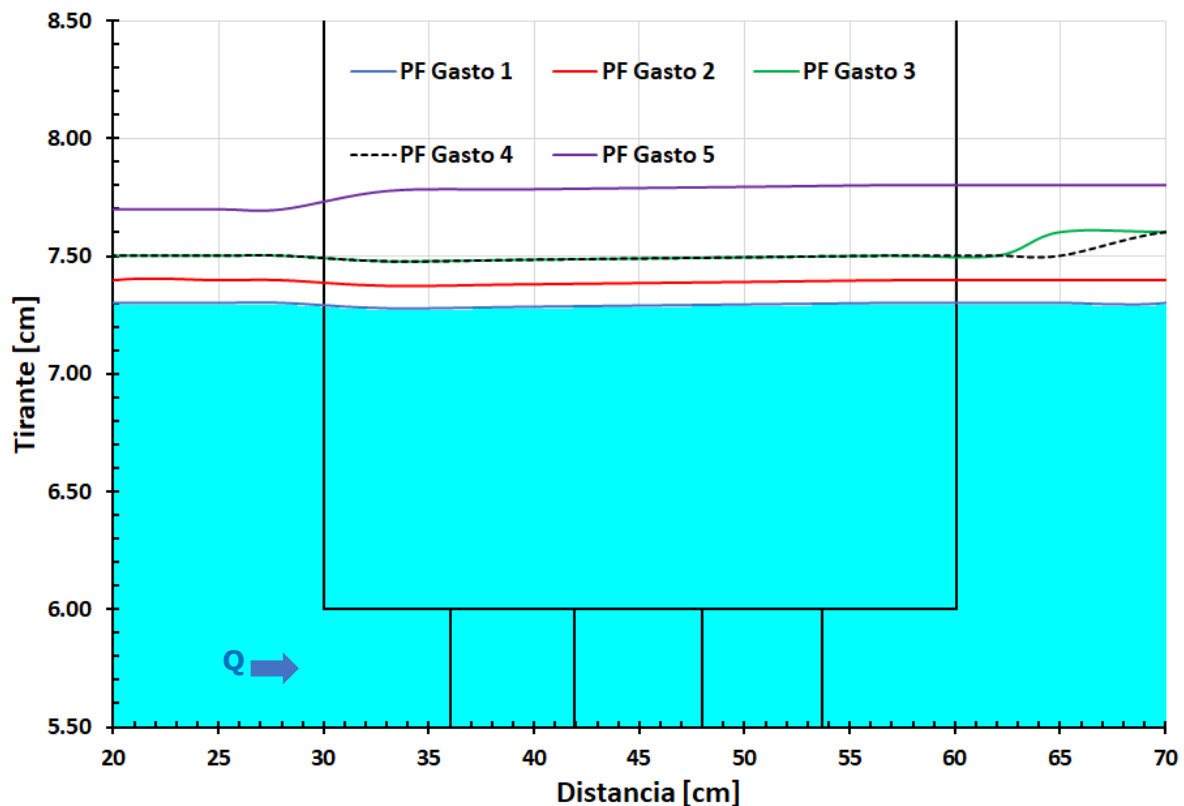


**FIGURA 4.1** Detalle del gráfico de perfiles hidráulicos medidos al centro del canal para los 5 gastos.

La figura anterior también fue deformada de su escala original para apreciar mejor la variación de la superficie libre del agua en cada caso; se observa que hacia el final de la estructura de vertedor lateral se presenta un incremento súbito en el nivel del agua, el cual, de acuerdo con lo observado en laboratorio, se debe fundamentalmente a un fenómeno de remanso originado por la cercanía del vertedor lateral con

la salida del canal a una distancia aproximada de 1 metro, además de que está en función de la magnitud del caudal que circule. Dicho efecto no está considerado en la teoría como tampoco en el método de solución, sin embargo, como ya se mencionó, parece ser un efecto independiente que, aunque tiene injerencia en el fenómeno de flujo espacialmente variado para el caso de estudio, requeriría un análisis propio.

Por otro lado, mediante la implementación del modelo matemático, se le dio solución al problema obteniendo los perfiles que se muestran en la Figura 4.2.



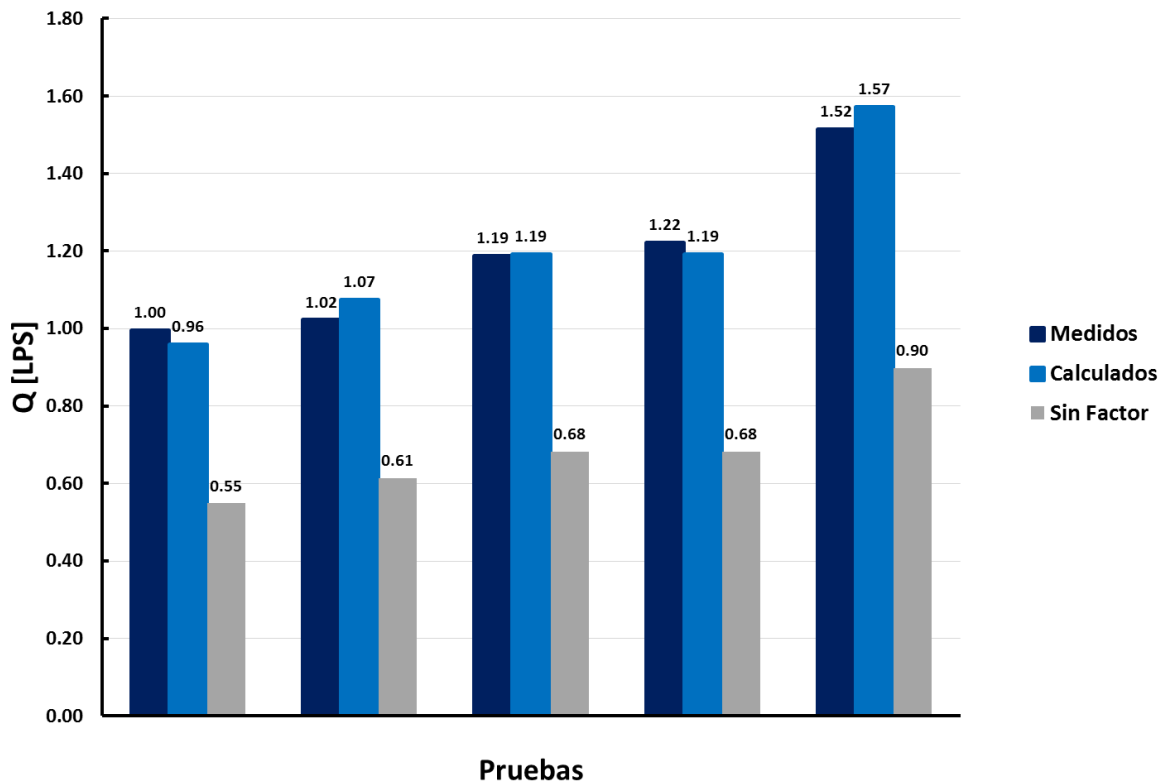
**FIGURA 4.2** Perfiles hidráulicos calculados con el método numérico de Runge-Kutta.

Nótese que la solución numérica descarta por completo el efecto del remanso que ya se comentó y que fue evidente durante las pruebas, lo cual es debido a la naturaleza del método y a que éste no considera más condiciones de frontera que las ya descritas, es por ello necesario que se emplee un modelo multidimensional (2D o 3D).

En este caso, también se observa que existe cierta proporcionalidad en el incremento del nivel del agua de acuerdo al aumento de gasto que fluye sobre el canal, sin embargo, para el Gasto No. 5, de 2.79 litros por

segundo, se presenta lo que pareciera ser un salto hidráulico pero que más bien puede ser provocado por el efecto de remanso ya mencionado.

Por otro lado, se tiene la comparación entre los caudales de desbordamiento en el vertedor lateral. En este caso se decidió realizar el análisis entre la suma de los gastos de desbordamiento medidos en laboratorio contra los que fueron producto del método numérico de Runge-Kutta; además, se incluyen los gastos de desbordamiento sin aplicar el Factor de Ajuste al cálculo, como se ilustra en la Figura 4.3.



**FIGURA 4.3** Comparativa de caudales de desbordamiento medidos contra calculados.

Se observa que al haber aplicado el  $FA=1.75$  al coeficiente de descarga  $C_d$  (Ecuación 3.5), se logró una mayor precisión entre los valores medidos en laboratorio y los del modelo matemático.

Es evidente que el marco teórico expuesto en los capítulos 1 y 2 sustenta en general muy bien la solución de todos los casos que se han abordado hasta el momento, sin embargo, el problema se vuelve más complejo a medida que se le adicionan factores como la irregularidad geométrica en las tres dimensiones del cauce, la calidad y temperatura del agua y, sobre todo, la variación espacial y temporal del flujo, entre otros.





## 5. EJEMPLO DE APLICACIÓN. CAUDAL DE DESBORDAMIENTO DE UN RÍO

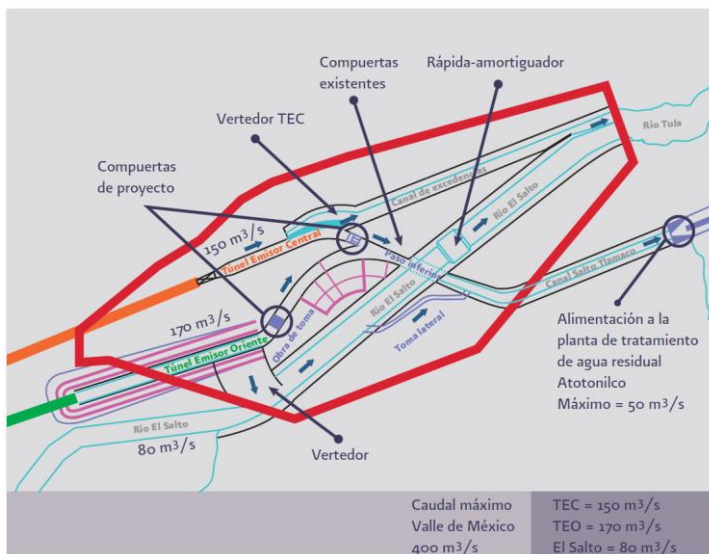
Varias de las descargas de drenaje de cauces superficiales y del sistema de drenaje profundo de la Ciudad de México son conducidas hasta el Río Tula y transportadas a cielo abierto hasta la presa Endhó, la cual se ha declarado zona de emergencia debido a los altos niveles de contaminantes disueltos y suspendidos que recibe (Reyes, 2020).

El río Tula recibe a lo largo su recorrido, principalmente, las aportaciones de la presa Requena y las de los ríos Tlautla y Rosas.

En diversos estudios realizados sobre su capacidad de conducción, se ha planteado la necesidad de ampliar el cauce en algunos tramos y revisar las condiciones del flujo que lo atraviesan para no limitar el flujo y asimismo asegurando que la velocidad de las corrientes no socave el cauce al grado de ponerlo en peligro de falla.

Las restricciones al paso del agua, impuestas debido al desarrollo urbano y por algunos de los puentes existentes dentro del cauce hacen necesario proponer distintas clases de medidas en cada tramo del río para aumentar su capacidad de conducción, sobre todo en la cercanía de las ciudades Cooperativa Cruz Azul y Tula.

Además de las aportaciones ya existentes al río de estudio, el Túnel Emisor Oriente (TEO) incrementará el caudal que fluye a través de él. En la Figura 5.1 se muestran las aportaciones en su extremo aguas arriba.



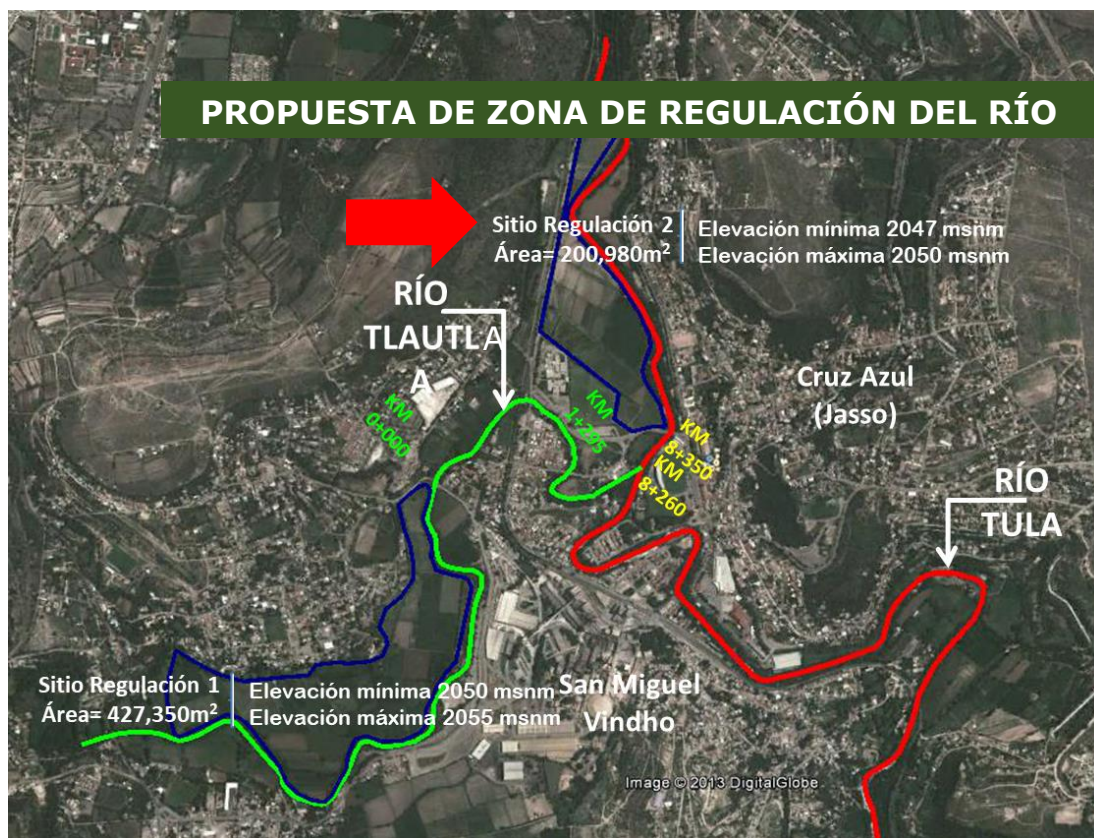
**FIGURA 5.1** Caudales de aportación al Río Tula (CONAGUA, 2012).

## EJEMPLO DE APLICACIÓN. DESBORDAMIENTO DE UN RÍO

El volumen de aportación del Valle de México al río Tula representa el 69% mientras que la presa Requena es el 25% y la suma de los ríos Tlautla y Rosas el 5%.

Para aumentar el margen de seguridad, en caso del evento más desfavorable, se recomienda contar con al menos una zona de regulación.

Se propone construir una escotadura en la margen izquierda del río, cerca de la incorporación del río Tlautla, considerando el tramo del kilómetro 8+500 al kilómetro 9+900 (sitio de regulación 2 mostrado en la Figura 5.2), para regular los caudales del río Tula y reducir su posibilidad de desbordamiento en la zona urbana de la ciudad de Tula.

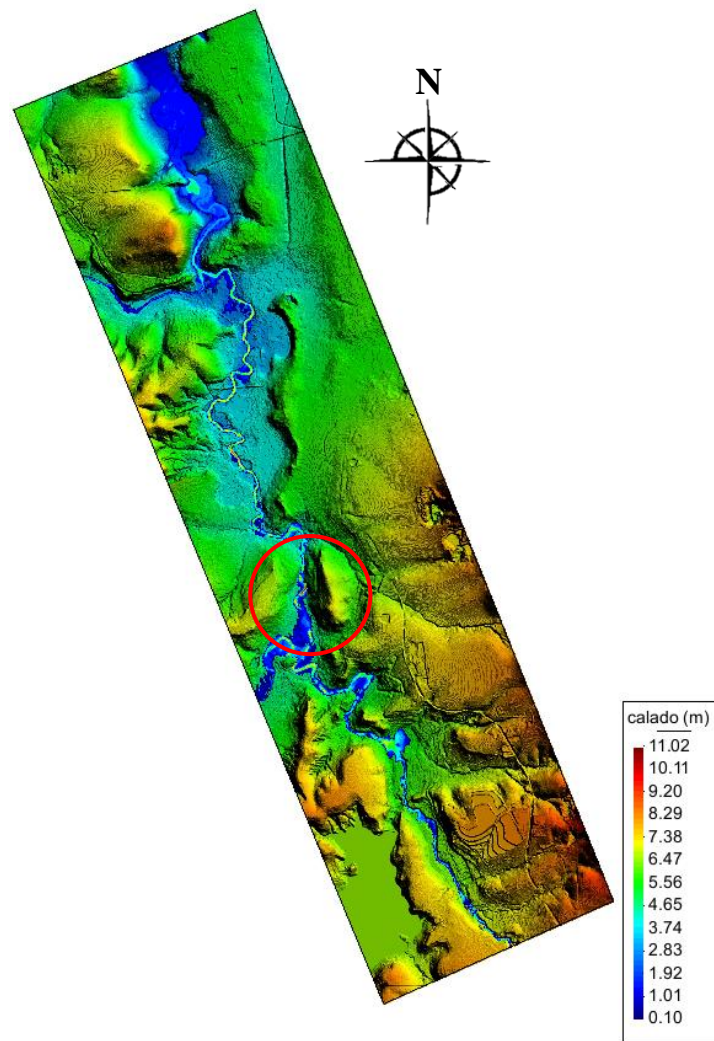


**FIGURA 5.2** Propuesta de la zona de regulación en el tramo de interés, Google Earth ®.

### 5.1. Capacidad de conducción de un río

El río Tula (Figura 5.3), desde el portal de salida hasta la desembocadura en la Presa Endhó, puede conducir aproximadamente 200 m<sup>3</sup>/s, no obstante, si se rectifican las secciones transversales de varios de sus tramos, este gasto podría aumentarse a 590 m<sup>3</sup>/s.

Para contribuir al aumento de su capacidad de conducción se ha considerado desviar parte de sus caudales a varias zonas que son posibles de inundar sin causar daños.



**FIGURA 5.3** Resultado de una simulación matemática en 2D del río Tula para un gasto de 450 m<sup>3</sup>/s realizada con el paquete Iber ®.

## 5.2. Cálculo del caudal de desbordamiento de un río

Se obtuvo con el método de flujo espacialmente variado con gasto decreciente el caudal que podría salir del río Tula hacia una zona que podría inundarse sin causar daños a efecto de reducir los gastos que conduce este río. Importante mencionar que de nuevo se considera un flujo permanente, contrario a lo que se presenta en la naturaleza, donde se involucran distintos tipos hidrogramas en el cálculo (Aparicio, 2015).

Con base en el procedimiento expuesto en los capítulos 3 y 4, se propuso construir una escotadura de 50 metros de longitud aproximadamente a la mitad del tramo elegido (entre los cadenamientos 9+200 y 9+250) y que consiste en bajar la elevación del bordo de la margen izquierda a una altura adecuada (5.5 metros) para permitir que salga un volumen de alrededor de 600,000 metros cúbicos del río hacia la zona inundable (Figura 5.4) de manera controlada durante un período de 6 horas.

En la Tabla 5.1 se presentan las condiciones iniciales más relevantes para iniciar el cálculo y obtener la solución numérica para cada uno de los tres casos.

**TABLA 5.1** Condiciones iniciales para el cálculo de la solución con el método de Runge-Kutta.

Flujo Espacialmente Variado Decreciente				
Runge-Kutta de 4° orden				
Condiciones Generales				
$\Delta x =$	-10	m	$n =$	0.02
$dx/2 =$	-5	m	$b =$	30 m
$X_0 =$	0	m	$S_0 =$	0.0024
$C_d =$	1.2550		$FA =$	1.75

Resalta principalmente el cambio en la geometría que, no obstante, también se trata de una sección rectangular, requirió de observar las secciones rectificadas de proyecto y tomar como referencia los tirantes que ahí se describían, siendo éstos del orden de 7 a 9 metros, así como desde luego el ancho de la plantilla de 30 metros. También para el caso de la pendiente del terreno, se realizó un promedio aritmético entre las tres que se presentaban en ese tramo.

Conservando similitud con lo realizado y obtenido mediante la experimentación, se emplearon los mismos valores para el factor de ajuste (FA) y por ello el mismo coeficiente de descarga ( $C_d$ ).



## EJEMPLO DE APLICACIÓN. DESBORDAMIENTO DE UN RÍO

Se analizaron tres gastos de diferente magnitud y se observó el desbordamiento en términos del incremento en el nivel del agua de la zona inundable, logrando que ésta se llenase en distintas proporciones.

En la Tabla 5.2 se consignan los resultados de interés para cada caso posterior a realizar el cálculo numérico con el método de Runge-Kutta (ver Anexo B).

**TABLA 5.2** Resultados que representan la conducción del río y el desbordamiento ( $h_{\text{Bordo}} = 5.5$  m,  $y_0 = 7.5$  m,  $L_{\text{Escotadura}} = 50$  m, Volumen en  $\text{m}^3$ , Caudal en  $\text{m}^3/\text{s}$ ).

	Caudal inicial del cálculo		Resultados		
	Caudal aguas abajo, $Q_{DS}$	Caudal de desbordamiento, $Q_D$	Caudal aguas arriba, $Q_{US}$	Volumen desbordado a las 6 horas, $V_D$	Capacidad, %
<b>Caso 1</b>	<b>535</b>	27.74	<b>562.74</b>	599,184	<b>99</b>
<b>Caso 2</b>	<b>385</b>	22.41	<b>407.41</b>	484,056	<b>80</b>
<b>Caso 3</b>	<b>270</b>	19.87	<b>289.87</b>	429,192	<b>71</b>

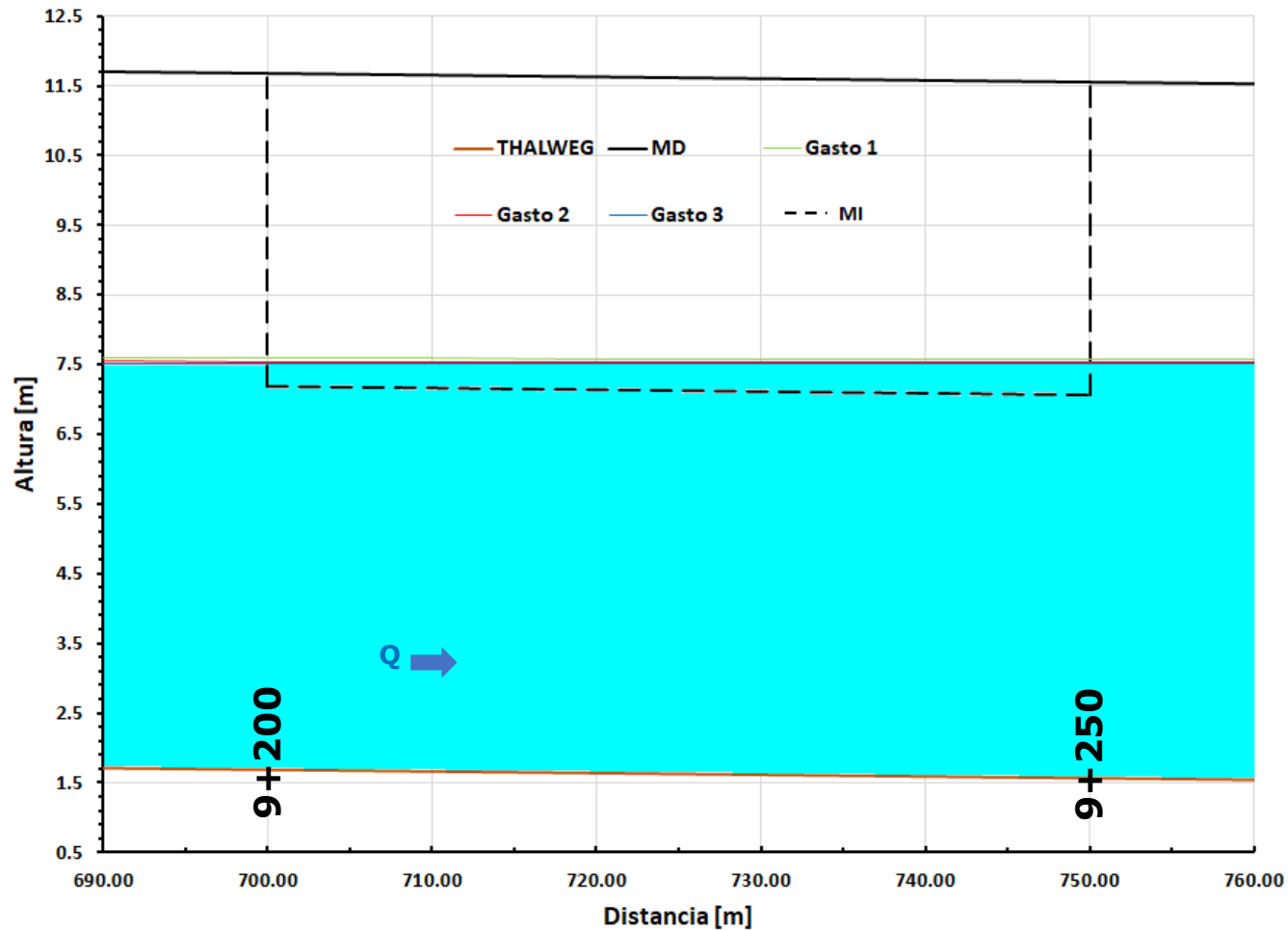
En los tres casos se observa que se cumple el objetivo de desviar el volumen de agua para inundar únicamente el predio disponible, reduciendo así el gasto hacia aguas abajo en, aproximadamente, un 6%.



**FIGURA 5.4** Tramo de interés, de la sección 8+500 a la 9+900, señalando el área propicia para inundar y la zona donde se ubicaría la escotadura, AutoCAD®.

## EJEMPLO DE APLICACIÓN. DESBORDAMIENTO DE UN RÍO

Enseguida se presentan los perfiles correspondientes (Figuras 5.5 y 5.6) producto de los cálculos previamente descritos para cada gasto consignado en la Tabla 5.2.



**FIGURA 5.5** Perfiles hidráulicos, para los tres gastos, obtenidos con el método numérico de Runge-Kutta.

## EJEMPLO DE APLICACIÓN. DESBORDAMIENTO DE UN RÍO

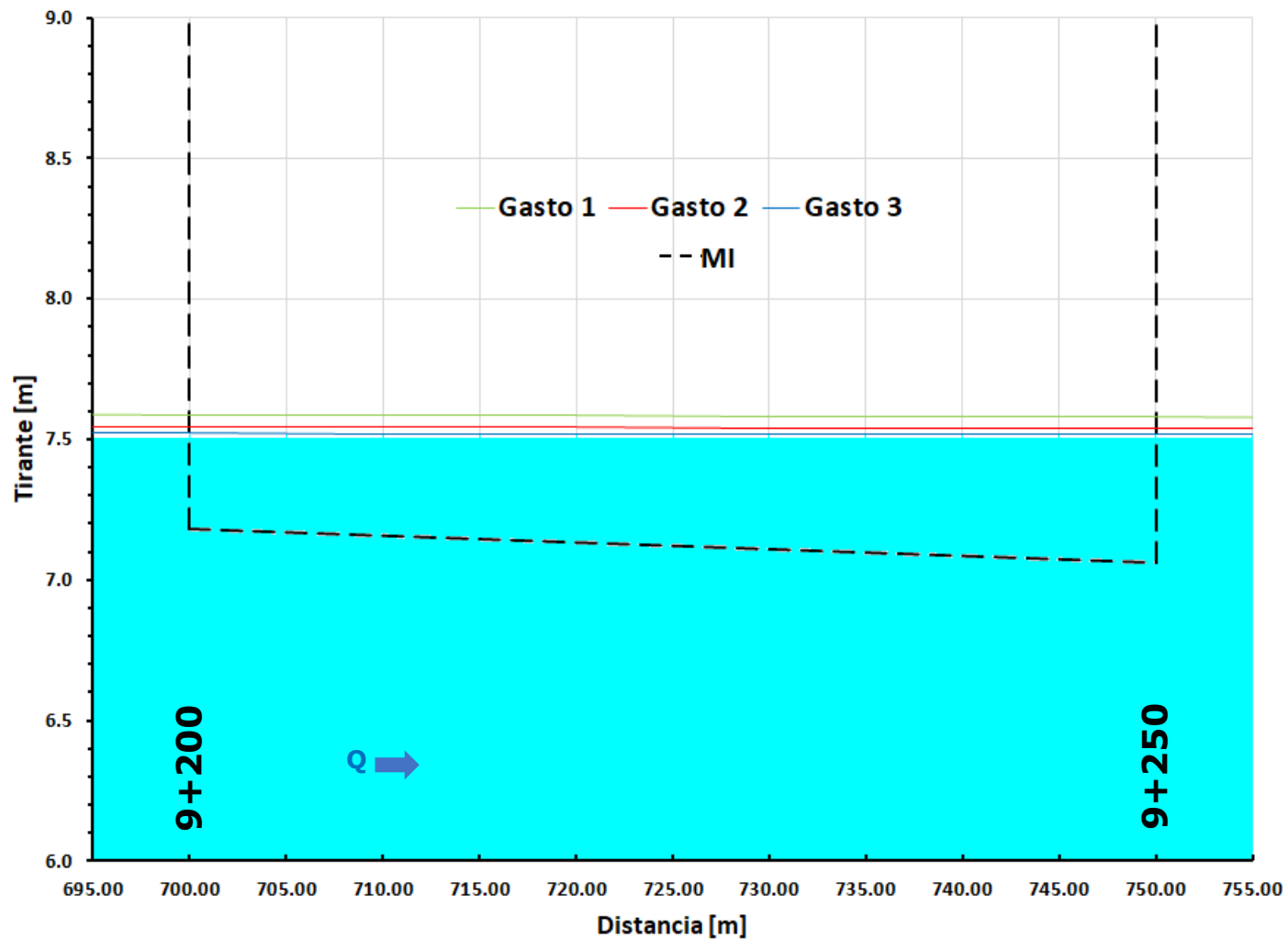


FIGURA 5.6 Detalle del gráfico de perfiles hidráulicos obtenidos con el método de Runge-Kutta.





## 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se construyó un dispositivo físico para obtener el flujo espacialmente variado decreciente, el cual requirió de varios ensayos para obtener las condiciones de su funcionamiento, como lo son los caudales mínimo y máximo que es capaz de entregar el equipo de bombeo, así como las cargas máximas sobre el cimacio del vertedor rectangular que permitieran realizar mediciones confiables.

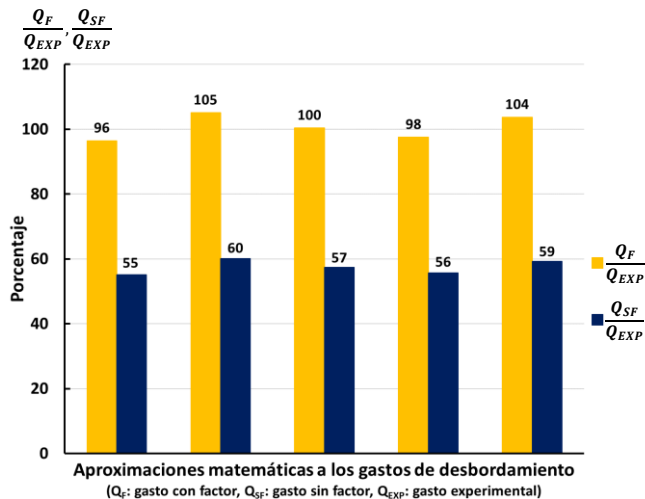
Con base en la revisión bibliográfica realizada se logró comprender mejor el fenómeno, tanto desde el ámbito físico como matemático, facilitando el desarrollo de los experimentos y la posterior resolución numérica de los problemas expuestos.

Siendo este un trabajo con fundamento en la experimentación, se recomienda controlar, en la medida de lo posible, la mayor cantidad de factores para reducir el error humano que pudiese presentarse a través de la apreciación u observación.

Dado que el fenómeno de flujo espacialmente variado es el que más se presenta en la práctica e incluso en la naturaleza, en forma, por ejemplo, de ríos, se recomienda la investigación y el estudio permanente de las variantes que éste pudiese exhibir.

La mayor parte de los modelos matemáticos de simulación para realizar los tránsitos hidráulicos de las avenidas en los que pueden existir desbordamientos no consideran el flujo espacialmente variado decreciente, por ello se recomienda la creación e innovación en métodos de cálculo que involucren el análisis multidimensional para otorgar mayor confiabilidad a los resultados.

En los cálculos matemáticos del flujo espacialmente variado decreciente, por el método que se utilizó, se encontró que el gasto de desbordamiento se subestima casi en un 60% respecto de los medidos experimentalmente, por lo que se recomienda tomar en cuenta un factor de ajuste (FA) como el que en el presente trabajo se ha descrito y aplicado para resarcir esa disparidad numérica.





## BIBLIOGRAFÍA

- Chapra S.C., Canale R.P. *Métodos Numéricos para Ingenieros*. McGraw-Hill, México, 1987, 641 pp;
- Sotelo Ávila, Gilberto. *Hidráulica de Canales*. México, Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería, 2016, 836 pp;
- Chow, Ven Te. *Hidráulica de Canales Abiertos*. McGraw-Hill, Colombia, 2005, 667 pp;
- Chaudhry, M. Hanif. *Open-Channel Flow*. Springer, University of South Carolina, 2008, 523 pp;
- Aparicio Mijares, Francisco Javier. *Fundamentos de Hidrología de superficie*. LIMUSA, México, 2015, 304 pp;
- Reyes A. (16-07-2019). *Declara SEMARNAT zona de emergencia a la presa Endhó*. Milenio. Consultado el 18-02-2020 en la siguiente dirección: <https://www.milenio.com/estados/declara-semarnat-zona-emergencia-presa-endho>;
- CONAGUA. *Manual de agua potable, alcantarillado y saneamiento: drenaje pluvial urbano*. México, 2015, 470 pp;
- CONAGUA. *Acciones de Infraestructura de drenaje y abastecimiento de agua en el Valle de México*. México, 2012, pp. 122;
- Bijankhan Mohammad & Mahdavi Ali. (2018). *Assesing Malcherek´s outflow theory to deduce the theoretical stage-discharge formula for overflow structures*. ASCE;
- Prakash Kumar & Kumar Pathak. (1987). *Triangular side weirs*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering. ASCE;
- Chie Yen. (1971). *Spatially varied open-channel flow equations*. University of Illinois, Water Resources Center;
- Kouchakzadeh S., Kholghi M. & Vatankhah A. (2002). *Spatially varied flow in non-prismatic channels II. Numerical solution and experimental verification*. University of Tehran. Irrigation and Reclamation Engineering Department.



## ANEXOS

## Anexo A

TABLA A-1 Hoja de cálculo con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del primer caso (1/3).

x	y	Q	Q <sub>s</sub>	ΣQ <sub>s</sub>	q	L <sub>s</sub>	Q'	A	P	T	Rh	V	Celeridad	Fr	S <sub>r</sub>	K <sub>s</sub>	y+k
0.00	0.0730	0.00088	0.00		-3.26E-03	-3.26E-05	0.00088	0.022	0.446	0.30	0.049	0.040	0.846	0.047	6.78E-06	-9.95E-06	0.0730
					-3.26E-03	-3.26E-05	0.00090	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.04E-06	-9.95E-06	0.0730
					-3.26E-03	-3.26E-05	0.00090	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.04E-06	-9.95E-06	0.0730
					-3.26E-03	-3.26E-05	0.00090	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.04E-06	-9.95E-06	0.0730
-0.01	0.0730	0.00091	-3.255E-05		-3.25E-03	-3.25E-05	0.00091	0.022	0.446	0.30	0.049	0.042	0.846	0.049	7.30E-06	-9.95E-06	0.0730
					-3.25E-03	-3.25E-05	0.00093	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.04E-06	-9.95E-06	0.0730
					-3.25E-03	-3.25E-05	0.00093	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.04E-06	-9.95E-06	0.0730
					-3.25E-03	-3.25E-05	0.00093	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.04E-06	-9.95E-06	0.0730
-0.02	0.0730	0.00095	-3.252E-05		-3.25E-03	-3.25E-05	0.00095	0.022	0.446	0.30	0.049	0.043	0.846	0.051	7.83E-06	-9.95E-06	0.0730
					-3.25E-03	-3.25E-05	0.00096	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.04E-06	-9.95E-06	0.0730
					-3.25E-03	-3.25E-05	0.00096	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.04E-06	-9.95E-06	0.0730
					-3.25E-03	-3.25E-05	0.00096	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.04E-06	-9.95E-06	0.0730
-0.03	0.0730	0.00098	-3.248E-05		-3.24E-03	-3.24E-05	0.00098	0.022	0.446	0.30	0.049	0.045	0.846	0.053	8.38E-06	-9.94E-06	0.0730
					-3.24E-03	-3.24E-05	0.00099	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.04E-06	-9.95E-06	0.0730
					-3.24E-03	-3.24E-05	0.00099	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.04E-06	-9.95E-06	0.0730
					-3.24E-03	-3.24E-05	0.00099	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.04E-06	-9.95E-06	0.0730
-0.04	0.0730	0.00101	-3.244E-05		-3.24E-03	-3.24E-05	0.00101	0.022	0.446	0.30	0.049	0.046	0.846	0.055	8.95E-06	-9.94E-06	0.0730
					-3.24E-03	-3.24E-05	0.00103	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.05E-06	-9.95E-06	0.0730
					-3.24E-03	-3.24E-05	0.00103	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.05E-06	-9.95E-06	0.0730
					-3.24E-03	-3.24E-05	0.00103	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.05E-06	-9.95E-06	0.0730
-0.05	0.0730	0.00104	-3.240E-05		-3.24E-03	-3.24E-05	0.00104	0.022	0.446	0.30	0.049	0.048	0.846	0.056	9.53E-06	-9.94E-06	0.0729
					-3.24E-03	-3.24E-05	0.00106	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.05E-06	-9.95E-06	0.0729
					-3.24E-03	-3.24E-05	0.00106	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.05E-06	-9.95E-06	0.0729
					-3.24E-03	-3.24E-05	0.00106	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.05E-06	-9.95E-06	0.0729
-0.06	0.0729	0.00107	-3.237E-05	-0.000195	-3.23E-03	-3.23E-05	0.00107	0.022	0.446	0.30	0.049	0.049	0.846	0.058	1.01E-05	-9.93E-06	0.0729
					-3.23E-03	-3.23E-05	0.00109	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.05E-06	-9.95E-06	0.0729
					-3.23E-03	-3.23E-05	0.00109	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.05E-06	-9.95E-06	0.0729
					-3.23E-03	-3.23E-05	0.00109	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.05E-06	-9.95E-06	0.0729
-0.07	0.0729	0.00111	-3.233E-05		-3.23E-03	-3.23E-05	0.00111	0.022	0.446	0.30	0.049	0.051	0.846	0.060	1.08E-05	-9.93E-06	0.0729
					-3.23E-03	-3.23E-05	0.00112	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.06E-06	-9.95E-06	0.0729
					-3.23E-03	-3.23E-05	0.00112	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.06E-06	-9.95E-06	0.0729
					-3.23E-03	-3.23E-05	0.00112	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.06E-06	-9.95E-06	0.0729
-0.08	0.0729	0.00114	-3.229E-05		-3.23E-03	-3.23E-05	0.00114	0.022	0.446	0.30	0.049	0.052	0.846	0.062	1.14E-05	-9.92E-06	0.0729
					-3.23E-03	-3.23E-05	0.00116	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.06E-06	-9.95E-06	0.0729
					-3.23E-03	-3.23E-05	0.00116	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.06E-06	-9.95E-06	0.0729
					-3.23E-03	-3.23E-05	0.00116	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.06E-06	-9.95E-06	0.0729
-0.09	0.0729	0.00117	-3.226E-05		-3.22E-03	-3.22E-05	0.00117	0.022	0.446	0.30	0.049	0.054	0.846	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0729
					-3.22E-03	-3.22E-05	0.00119	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.06E-06	-9.95E-06	0.0729
					-3.22E-03	-3.22E-05	0.00119	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.06E-06	-9.95E-06	0.0729
					-3.22E-03	-3.22E-05	0.00119	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.06E-06	-9.95E-06	0.0729
-0.1	0.0729	0.00120	-3.222E-05		-3.22E-03	-3.22E-05	0.00120	0.022	0.446	0.30	0.049	0.055	0.846	0.065	1.27E-05	-9.91E-06	0.0729

TABLA A-2 Hoja de cálculo con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del primer caso (2/3).

				-3.22E-03	-3.22E-05	0.00122	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.06E-06	-9.95E-06	0.0729
				-3.22E-03	-3.22E-05	0.00122	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.06E-06	-9.95E-06	0.0729
				-3.22E-03	-3.22E-05	0.00122	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.06E-06	-9.95E-06	
-0.11	0.0729	0.00124	-3.218E-05	-3.21E-03	-3.21E-05	0.00124	0.022	0.446	0.30	0.049	0.057	0.846	0.067	1.34E-05	-9.91E-06	0.0729
				-3.21E-03	-3.21E-05	0.00125	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.07E-06	-9.95E-06	0.0729
				-3.21E-03	-3.21E-05	0.00125	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.07E-06	-9.95E-06	0.0729
				-3.21E-03	-3.21E-05	0.00125	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.07E-06	-9.95E-06	
-0.12	0.0729	0.00127	-3.214E-05	-3.21E-03	-3.21E-05	0.00127	0.022	0.446	0.30	0.049	0.058	0.846	0.069	1.42E-05	-9.91E-06	0.0729
				-3.21E-03	-3.21E-05	0.00128	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.07E-06	-9.95E-06	0.0729
				-3.21E-03	-3.21E-05	0.00128	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.846	0.048	7.07E-06	-9.95E-06	
				-3.21E-03	-3.21E-05	0.00128	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.845	0.048	7.07E-06	-9.95E-06	
-0.13	0.0729	0.00130	-3.211E-05	-3.21E-03	-3.21E-05	0.00130	0.022	0.446	0.30	0.049	0.059	0.845	0.070	1.49E-05	-9.90E-06	0.0729
				-3.21E-03	-3.21E-05	0.00132	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.845	0.048	7.07E-06	-9.95E-06	0.0729
				-3.21E-03	-3.21E-05	0.00132	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.845	0.048	7.07E-06	-9.95E-06	0.0729
				-3.21E-03	-3.21E-05	0.00132	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.845	0.049	7.07E-06	-9.95E-06	
-0.14	0.0729	0.00133	-3.207E-05	-3.20E-03	-3.20E-05	0.00133	0.022	0.446	0.30	0.049	0.061	0.845	0.072	1.56E-05	-9.90E-06	0.0729
				-3.20E-03	-3.20E-05	0.00135	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.845	0.049	7.07E-06	-9.95E-06	0.0729
				-3.20E-03	-3.20E-05	0.00135	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.845	0.049	7.08E-06	-9.95E-06	
				-3.20E-03	-3.20E-05	0.00135	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.845	0.049	7.08E-06	-9.95E-06	
-0.15	0.0729	0.00136	-3.203E-05	-3.20E-03	-3.20E-05	0.00136	0.022	0.446	0.30	0.049	0.062	0.845	0.074	1.64E-05	-9.89E-06	0.0728
				-3.20E-03	-3.20E-05	0.00138	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.845	0.049	7.08E-06	-9.95E-06	0.0728
				-3.20E-03	-3.20E-05	0.00138	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.845	0.049	7.08E-06	-9.95E-06	0.0728
				-3.20E-03	-3.20E-05	0.00138	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.845	0.049	7.08E-06	-9.95E-06	
-0.16	0.0728	0.00140	-3.199E-05	-3.20E-03	-3.20E-05	0.00140	0.022	0.446	0.30	0.049	0.064	0.845	0.076	1.72E-05	-9.88E-06	0.0728
				-3.20E-03	-3.20E-05	0.00141	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.845	0.049	7.08E-06	-9.95E-06	0.0728
				-3.20E-03	-3.20E-05	0.00141	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.845	0.049	7.08E-06	-9.95E-06	0.0728
				-3.20E-03	-3.20E-05	0.00141	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.845	0.049	7.08E-06	-9.95E-06	
-0.17	0.0728	0.00143	-3.196E-05	-3.19E-03	-3.19E-05	0.00143	0.022	0.446	0.30	0.049	0.065	0.845	0.077	1.80E-05	-9.88E-06	0.0728
				-3.19E-03	-3.19E-05	0.00144	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.845	0.049	7.08E-06	-9.95E-06	0.0728
				-3.19E-03	-3.19E-05	0.00144	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.845	0.049	7.08E-06	-9.95E-06	0.0728
				-3.19E-03	-3.19E-05	0.00144	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.845	0.049	7.08E-06	-9.95E-06	
-0.18	0.0728	0.00146	-3.192E-05	-3.19E-03	-3.19E-05	0.00146	0.022	0.446	0.30	0.049	0.067	0.845	0.079	1.88E-05	-9.87E-06	0.0728
				-3.19E-03	-3.19E-05	0.00148	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.845	0.049	7.09E-06	-9.95E-06	0.0728
				-3.19E-03	-3.19E-05	0.00148	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.845	0.049	7.09E-06	-9.95E-06	0.0728
				-3.19E-03	-3.19E-05	0.00148	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.845	0.049	7.09E-06	-9.95E-06	
-0.19	0.0728	0.00149	-3.188E-05	-3.18E-03	-3.18E-05	0.00149	0.022	0.446	0.30	0.049	0.068	0.845	0.081	1.96E-05	-9.87E-06	0.0728
				-3.18E-03	-3.18E-05	0.00151	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.845	0.049	7.09E-06	-9.95E-06	0.0728
				-3.18E-03	-3.18E-05	0.00151	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.845	0.049	7.09E-06	-9.95E-06	0.0728
				-3.18E-03	-3.18E-05	0.00151	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.845	0.049	7.09E-06	-9.95E-06	
-0.2	0.0728	0.00152	-3.185E-05	-3.18E-03	-3.18E-05	0.00152	0.022	0.446	0.30	0.049	0.070	0.845	0.083	2.05E-05	-9.86E-06	0.0728
				-3.18E-03	-3.18E-05	0.00154	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.845	0.049	7.09E-06	-9.95E-06	0.0728
				-3.18E-03	-3.18E-05	0.00154	0.022	0.446	0.30	0.049	0.041	0.845	0.049	7.09E-06	-9.95E-06	0.0728



TABLA A-4 Hoja de cálculo con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del segundo caso (1/3).

x	y	Q	Qs	q	Ls	Q'	A	P	T	Rh	V	Celeridad	Fr	Sf	Ks	y+k
0.00	0.0740	0.00097	0.00	-3.64E-03	-3.64E-05	0.00097	0.022	0.448	0.30	0.050	0.044	0.852	0.051	7.92E-06	-9.95E-06	0.0740
				-3.64E-03	-3.64E-05	0.00099	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.852	0.052	8.22E-06	-9.94E-06	0.0740
				-3.64E-03	-3.64E-05	0.00099	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.852	0.052	8.22E-06	-9.94E-06	0.0740
				-3.64E-03	-3.64E-05	0.00099	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.852	0.052	8.22E-06	-9.94E-06	0.0740
-0.01	0.0740	0.00101	-3.638E-05	-3.63E-03	-3.63E-05	0.00101	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.852	0.053	8.53E-06	-9.94E-06	0.0740
				-3.63E-03	-3.63E-05	0.00102	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.852	0.052	8.23E-06	-9.94E-06	0.0740
				-3.63E-03	-3.63E-05	0.00102	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.852	0.052	8.23E-06	-9.94E-06	0.0740
				-3.63E-03	-3.63E-05	0.00102	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.852	0.052	8.23E-06	-9.94E-06	0.0740
-0.02	0.0740	0.00104	-3.634E-05	-3.63E-03	-3.63E-05	0.00104	0.022	0.448	0.30	0.050	0.047	0.852	0.055	9.16E-06	-9.94E-06	0.0740
				-3.63E-03	-3.63E-05	0.00106	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.852	0.052	8.23E-06	-9.94E-06	0.0740
				-3.63E-03	-3.63E-05	0.00106	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.852	0.052	8.23E-06	-9.94E-06	0.0740
				-3.63E-03	-3.63E-05	0.00106	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.852	0.052	8.23E-06	-9.94E-06	0.0740
-0.03	0.0740	0.00108	-3.630E-05	-3.63E-03	-3.63E-05	0.00108	0.022	0.448	0.30	0.050	0.049	0.852	0.057	9.81E-06	-9.93E-06	0.0740
				-3.63E-03	-3.63E-05	0.00110	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.852	0.052	8.23E-06	-9.94E-06	0.0740
				-3.63E-03	-3.63E-05	0.00110	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.852	0.052	8.23E-06	-9.94E-06	0.0740
				-3.63E-03	-3.63E-05	0.00110	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.852	0.052	8.23E-06	-9.94E-06	0.0740
-0.04	0.0740	0.00112	-3.627E-05	-3.62E-03	-3.62E-05	0.00112	0.022	0.448	0.30	0.050	0.050	0.852	0.059	1.05E-05	-9.93E-06	0.0740
				-3.62E-03	-3.62E-05	0.00113	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.852	0.052	8.24E-06	-9.94E-06	0.0740
				-3.62E-03	-3.62E-05	0.00113	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.852	0.052	8.24E-06	-9.94E-06	0.0740
				-3.62E-03	-3.62E-05	0.00113	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.852	0.052	8.24E-06	-9.94E-06	0.0740
-0.05	0.0740	0.00115	-3.623E-05	-3.62E-03	-3.62E-05	0.00115	0.022	0.448	0.30	0.050	0.052	0.852	0.061	1.12E-05	-9.93E-06	0.0739
				-3.62E-03	-3.62E-05	0.00117	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.852	0.052	8.24E-06	-9.94E-06	0.0739
				-3.62E-03	-3.62E-05	0.00117	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.852	0.052	8.24E-06	-9.94E-06	0.0739
				-3.62E-03	-3.62E-05	0.00117	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.852	0.052	8.24E-06	-9.94E-06	0.0739
-0.06	0.0739	0.00119	-3.619E-05	-3.61E-03	-3.61E-05	0.00119	0.022	0.448	0.30	0.050	0.054	0.852	0.063	1.19E-05	-9.92E-06	0.0739
				-3.61E-03	-3.61E-05	0.00121	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.852	0.052	8.24E-06	-9.94E-06	0.0739
				-3.61E-03	-3.61E-05	0.00121	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.852	0.052	8.24E-06	-9.94E-06	0.0739
				-3.61E-03	-3.61E-05	0.00121	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.852	0.052	8.24E-06	-9.94E-06	0.0739
-0.07	0.0739	0.00122	-3.615E-05	-3.61E-03	-3.61E-05	0.00122	0.022	0.448	0.30	0.050	0.055	0.852	0.065	1.26E-05	-9.92E-06	0.0739
				-3.61E-03	-3.61E-05	0.00124	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.852	0.052	8.24E-06	-9.94E-06	0.0739
				-3.61E-03	-3.61E-05	0.00124	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.852	0.052	8.24E-06	-9.94E-06	0.0739
				-3.61E-03	-3.61E-05	0.00124	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.852	0.052	8.25E-06	-9.94E-06	0.0739
-0.08	0.0739	0.00126	-3.611E-05	-3.61E-03	-3.61E-05	0.00126	0.022	0.448	0.30	0.050	0.057	0.852	0.067	1.34E-05	-9.91E-06	0.0739
				-3.61E-03	-3.61E-05	0.00128	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.852	0.052	8.25E-06	-9.94E-06	0.0739
				-3.61E-03	-3.61E-05	0.00128	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.852	0.052	8.25E-06	-9.94E-06	0.0739
				-3.61E-03	-3.61E-05	0.00128	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.852	0.052	8.25E-06	-9.94E-06	0.0739
-0.09	0.0739	0.00130	-3.607E-05	-3.60E-03	-3.60E-05	0.00130	0.022	0.448	0.30	0.050	0.058	0.852	0.069	1.42E-05	-9.90E-06	0.0739
				-3.60E-03	-3.60E-05	0.00131	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.851	0.052	8.25E-06	-9.94E-06	0.0739
				-3.60E-03	-3.60E-05	0.00131	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.851	0.052	8.25E-06	-9.94E-06	0.0739
				-3.60E-03	-3.60E-05	0.00131	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.851	0.052	8.25E-06	-9.94E-06	0.0739
-0.1	0.0739	0.00133	-3.603E-05	-3.60E-03	-3.60E-05	0.00133	0.022	0.448	0.30	0.050	0.060	0.851	0.071	1.50E-05	-9.90E-06	0.0739



TABLA A-5 Hoja de cálculo con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del segundo caso (2/3).

				-3.60E-03	-3.60E-05	0.00135	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.851	0.052	8.25E-06	-9.94E-06	0.0739
				-3.60E-03	-3.60E-05	0.00135	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.851	0.052	8.25E-06	-9.94E-06	0.0739
				-3.60E-03	-3.60E-05	0.00135	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.851	0.052	8.26E-06	-9.94E-06	
-0.11	0.0739	0.00137	-3.599E-05	-3.60E-03	-3.60E-05	0.00137	0.022	0.448	0.30	0.050	0.062	0.851	0.072	1.58E-05	-9.89E-06	0.0739
				-3.60E-03	-3.60E-05	0.00139	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.851	0.052	8.26E-06	-9.94E-06	0.0739
				-3.60E-03	-3.60E-05	0.00139	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.851	0.052	8.26E-06	-9.94E-06	0.0739
				-3.60E-03	-3.60E-05	0.00139	0.022	0.448	0.30	0.050	0.045	0.851	0.052	8.26E-06	-9.94E-06	
-0.12	0.0739	0.00140	-3.596E-05	-3.59E-03	-3.59E-05	0.00140	0.022	0.448	0.30	0.050	0.063	0.851	0.074	1.67E-05	-9.89E-06	0.0739
				-3.59E-03	-3.59E-05	0.00142	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.26E-06	-9.94E-06	0.0739
				-3.59E-03	-3.59E-05	0.00142	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.26E-06	-9.94E-06	0.0739
				-3.59E-03	-3.59E-05	0.00142	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.26E-06	-9.94E-06	
-0.13	0.0739	0.00144	-3.592E-05	-3.59E-03	-3.59E-05	0.00144	0.022	0.448	0.30	0.049	0.065	0.851	0.076	1.75E-05	-9.88E-06	0.0739
				-3.59E-03	-3.59E-05	0.00146	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.26E-06	-9.94E-06	0.0739
				-3.59E-03	-3.59E-05	0.00146	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.26E-06	-9.94E-06	0.0739
				-3.59E-03	-3.59E-05	0.00146	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.27E-06	-9.94E-06	
-0.14	0.0739	0.00148	-3.588E-05	-3.58E-03	-3.58E-05	0.00148	0.022	0.448	0.30	0.049	0.067	0.851	0.078	1.84E-05	-9.88E-06	0.0739
				-3.58E-03	-3.58E-05	0.00149	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.27E-06	-9.94E-06	0.0739
				-3.58E-03	-3.58E-05	0.00149	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.27E-06	-9.94E-06	0.0739
				-3.58E-03	-3.58E-05	0.00149	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.27E-06	-9.94E-06	
-0.15	0.0739	0.00151	-3.584E-05	-3.58E-03	-3.58E-05	0.00151	0.022	0.448	0.30	0.049	0.068	0.851	0.080	1.93E-05	-9.87E-06	0.0738
				-3.58E-03	-3.58E-05	0.00153	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.27E-06	-9.94E-06	0.0738
				-3.58E-03	-3.58E-05	0.00153	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.27E-06	-9.94E-06	0.0738
				-3.58E-03	-3.58E-05	0.00153	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.27E-06	-9.94E-06	
-0.16	0.0738	0.00155	-3.580E-05	-3.58E-03	-3.58E-05	0.00155	0.022	0.448	0.30	0.049	0.070	0.851	0.082	2.03E-05	-9.86E-06	0.0738
				-3.58E-03	-3.58E-05	0.00157	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.27E-06	-9.94E-06	0.0738
				-3.58E-03	-3.58E-05	0.00157	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.27E-06	-9.94E-06	0.0738
				-3.58E-03	-3.58E-05	0.00157	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.28E-06	-9.94E-06	
-0.17	0.0738	0.00158	-3.576E-05	-3.57E-03	-3.57E-05	0.00158	0.022	0.448	0.30	0.049	0.071	0.851	0.084	2.12E-05	-9.86E-06	0.0738
				-3.57E-03	-3.57E-05	0.00160	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.28E-06	-9.94E-06	0.0738
				-3.57E-03	-3.57E-05	0.00160	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.28E-06	-9.94E-06	0.0738
				-3.57E-03	-3.57E-05	0.00160	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.28E-06	-9.94E-06	
-0.18	0.0738	0.00162	-3.572E-05	-3.57E-03	-3.57E-05	0.00162	0.022	0.448	0.30	0.049	0.073	0.851	0.086	2.22E-05	-9.85E-06	0.0738
				-3.57E-03	-3.57E-05	0.00164	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.28E-06	-9.94E-06	0.0738
				-3.57E-03	-3.57E-05	0.00164	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.28E-06	-9.94E-06	0.0738
				-3.57E-03	-3.57E-05	0.00164	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.28E-06	-9.94E-06	
-0.19	0.0738	0.00165	-3.569E-05	-3.56E-03	-3.56E-05	0.00165	0.022	0.448	0.30	0.049	0.075	0.851	0.088	2.32E-05	-9.84E-06	0.0738
				-3.56E-03	-3.56E-05	0.00167	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.28E-06	-9.94E-06	0.0738
				-3.56E-03	-3.56E-05	0.00167	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.28E-06	-9.94E-06	0.0738
				-3.56E-03	-3.56E-05	0.00167	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.29E-06	-9.94E-06	
-0.2	0.0738	0.00169	-3.565E-05	-3.56E-03	-3.56E-05	0.00169	0.022	0.448	0.30	0.049	0.076	0.851	0.090	2.42E-05	-9.84E-06	0.0738
				-3.56E-03	-3.56E-05	0.00171	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.29E-06	-9.94E-06	0.0738
				-3.56E-03	-3.56E-05	0.00171	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.29E-06	-9.94E-06	0.0738

TABLA A-6 Hoja de cálculo con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del segundo caso (3/3).

				-3.56E-03	-3.56E-05	0.00171	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.29E-06	-9.94E-06	
-0.21	0.0738	0.00173	-3.561E-05	-3.56E-03	-3.56E-05	0.00173	0.022	0.448	0.30	0.049	0.078	0.851	0.092	2.53E-05	-9.83E-06	0.0738
				-3.56E-03	-3.56E-05	0.00174	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.29E-06	-9.94E-06	0.0738
				-3.56E-03	-3.56E-05	0.00174	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.29E-06	-9.94E-06	0.0738
				-3.56E-03	-3.56E-05	0.00174	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.29E-06	-9.94E-06	
-0.22	0.0738	0.00176	-3.557E-05	-3.55E-03	-3.55E-05	0.00176	0.022	0.448	0.30	0.049	0.080	0.851	0.094	2.63E-05	-9.82E-06	0.0738
				-3.55E-03	-3.55E-05	0.00178	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.29E-06	-9.94E-06	0.0738
				-3.55E-03	-3.55E-05	0.00178	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.29E-06	-9.94E-06	0.0738
				-3.55E-03	-3.55E-05	0.00178	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.29E-06	-9.94E-06	
-0.23	0.0738	0.00180	-3.553E-05	-3.55E-03	-3.55E-05	0.00180	0.022	0.448	0.30	0.049	0.081	0.851	0.095	2.74E-05	-9.82E-06	0.0738
				-3.55E-03	-3.55E-05	0.00181	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.30E-06	-9.94E-06	0.0738
				-3.55E-03	-3.55E-05	0.00181	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.30E-06	-9.94E-06	0.0738
				-3.55E-03	-3.55E-05	0.00181	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.052	8.30E-06	-9.94E-06	
-0.24	0.0738	0.00183	-3.549E-05	-3.55E-03	-3.55E-05	0.00183	0.022	0.448	0.30	0.049	0.083	0.851	0.097	2.85E-05	-9.81E-06	0.0738
				-3.55E-03	-3.55E-05	0.00185	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.053	8.30E-06	-9.94E-06	0.0738
				-3.55E-03	-3.55E-05	0.00185	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.053	8.30E-06	-9.94E-06	0.0738
				-3.55E-03	-3.55E-05	0.00185	0.022	0.448	0.30	0.049	0.045	0.851	0.053	8.30E-06	-9.94E-06	
-0.25	0.0738	0.00187	-3.546E-05	-3.54E-03	-3.54E-05	0.00187	0.022	0.448	0.30	0.049	0.084	0.851	0.099	2.97E-05	-9.80E-06	0.0737
				-3.54E-03	-3.54E-05	0.00189	0.022	0.447	0.30	0.049	0.045	0.851	0.053	8.30E-06	-9.94E-06	0.0737
				-3.54E-03	-3.54E-05	0.00189	0.022	0.447	0.30	0.049	0.045	0.851	0.053	8.30E-06	-9.94E-06	0.0737
				-3.54E-03	-3.54E-05	0.00189	0.022	0.447	0.30	0.049	0.045	0.851	0.053	8.30E-06	-9.94E-06	
-0.26	0.0737	0.00190	-3.542E-05	-3.54E-03	-3.54E-05	0.00190	0.022	0.447	0.30	0.049	0.086	0.851	0.101	3.08E-05	-9.79E-06	0.0737
				-3.54E-03	-3.54E-05	0.00192	0.022	0.447	0.30	0.049	0.045	0.851	0.053	8.31E-06	-9.94E-06	0.0737
				-3.54E-03	-3.54E-05	0.00192	0.022	0.447	0.30	0.049	0.045	0.851	0.053	8.31E-06	-9.94E-06	0.0737
				-3.54E-03	-3.54E-05	0.00192	0.022	0.447	0.30	0.049	0.045	0.850	0.053	8.31E-06	-9.94E-06	
-0.27	0.0737	0.00194	-3.538E-05	-3.53E-03	-3.53E-05	0.00194	0.022	0.447	0.30	0.049	0.088	0.850	0.103	3.20E-05	-9.78E-06	0.0737
				-3.53E-03	-3.53E-05	0.00196	0.022	0.447	0.30	0.049	0.045	0.850	0.053	8.31E-06	-9.94E-06	0.0737
				-3.53E-03	-3.53E-05	0.00196	0.022	0.447	0.30	0.049	0.045	0.850	0.053	8.31E-06	-9.94E-06	0.0737
				-3.53E-03	-3.53E-05	0.00196	0.022	0.447	0.30	0.049	0.045	0.850	0.053	8.31E-06	-9.94E-06	
-0.28	0.0737	0.00197	-3.534E-05	-3.53E-03	-3.53E-05	0.00197	0.022	0.447	0.30	0.049	0.089	0.850	0.105	3.32E-05	-9.78E-06	0.0737
				-3.53E-03	-3.53E-05	0.00199	0.022	0.447	0.30	0.049	0.045	0.850	0.053	8.31E-06	-9.94E-06	0.0737
				-3.53E-03	-3.53E-05	0.00199	0.022	0.447	0.30	0.049	0.045	0.850	0.053	8.31E-06	-9.94E-06	0.0737
				-3.53E-03	-3.53E-05	0.00199	0.022	0.447	0.30	0.049	0.045	0.850	0.053	8.31E-06	-9.94E-06	
-0.29	0.0737	0.00201	-3.530E-05	-3.53E-03	-3.53E-05	0.00201	0.022	0.447	0.30	0.049	0.091	0.850	0.107	3.44E-05	-9.77E-06	0.0737
				-3.53E-03	-3.53E-05	0.00203	0.022	0.447	0.30	0.049	0.045	0.850	0.053	8.32E-06	-9.94E-06	0.0737
				-3.53E-03	-3.53E-05	0.00203	0.022	0.447	0.30	0.049	0.045	0.850	0.053	8.32E-06	-9.94E-06	0.0737
				-3.53E-03	-3.53E-05	0.00203	0.022	0.447	0.30	0.049	0.045	0.850	0.053	8.32E-06	-9.94E-06	
-0.3	0.0737	0.00204	-3.526E-05	-3.52E-03	-3.52E-05	0.00204	0.022	0.447	0.30	0.049	0.092	0.850	0.109	3.56E-05	-9.76E-06	0.0737
				-3.52E-03	-3.52E-05	0.00206	0.022	0.447	0.30	0.049	0.045	0.850	0.053	8.32E-06	-9.94E-06	0.0737
				-3.52E-03	-3.52E-05	0.00206	0.022	0.447	0.30	0.049	0.045	0.850	0.053	8.32E-06	-9.94E-06	0.0737
				-3.52E-03	-3.52E-05	0.00206	0.022	0.447	0.30	0.049	0.045	0.850	0.053	8.32E-06	-9.94E-06	
<b>Gasto de desbordamiento =</b>				<b>-0.00107</b>												

TABLA A-7 Hoja de cálculo con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del tercer caso (1/3).

x	y	Q	Qs	q	Ls	Q'	A	P	T	Rh	V	Celeridad	Fr	Sf	Ks	y+k
0.00	0.0750	0.00105	0.00	-4.03E-03	-4.03E-05	0.00105	0.023	0.450	0.30	0.050	0.047	0.858	0.054	8.93E-06	-9.94E-06	0.0750
				-4.03E-03	-4.03E-05	0.00107	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.858	0.055	9.28E-06	-9.94E-06	0.0750
				-4.03E-03	-4.03E-05	0.00107	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.858	0.055	9.28E-06	-9.94E-06	0.0750
				-4.03E-03	-4.03E-05	0.00107	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.858	0.055	9.28E-06	-9.94E-06	0.0750
-0.01	0.0750	0.00109	-4.035E-05	-4.03E-03	-4.03E-05	0.00109	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.858	0.057	9.63E-06	-9.94E-06	0.0750
				-4.03E-03	-4.03E-05	0.00111	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.858	0.055	9.28E-06	-9.94E-06	0.0750
				-4.03E-03	-4.03E-05	0.00111	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.858	0.055	9.28E-06	-9.94E-06	0.0750
				-4.03E-03	-4.03E-05	0.00111	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.858	0.055	9.28E-06	-9.94E-06	0.0750
-0.02	0.0750	0.00113	-4.031E-05	-4.03E-03	-4.03E-05	0.00113	0.022	0.450	0.30	0.050	0.050	0.858	0.059	1.04E-05	-9.93E-06	0.0750
				-4.03E-03	-4.03E-05	0.00115	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.858	0.055	9.28E-06	-9.94E-06	0.0750
				-4.03E-03	-4.03E-05	0.00115	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.858	0.055	9.28E-06	-9.94E-06	0.0750
				-4.03E-03	-4.03E-05	0.00115	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.858	0.055	9.29E-06	-9.94E-06	0.0750
-0.03	0.0750	0.00117	-4.027E-05	-4.02E-03	-4.02E-05	0.00117	0.022	0.450	0.30	0.050	0.052	0.858	0.061	1.11E-05	-9.93E-06	0.0750
				-4.02E-03	-4.02E-05	0.00119	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.858	0.055	9.29E-06	-9.94E-06	0.0750
				-4.02E-03	-4.02E-05	0.00119	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.858	0.055	9.29E-06	-9.94E-06	0.0750
				-4.02E-03	-4.02E-05	0.00119	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.858	0.055	9.29E-06	-9.94E-06	0.0750
-0.04	0.0750	0.00121	-4.023E-05	-4.02E-03	-4.02E-05	0.00121	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.858	0.063	1.19E-05	-9.92E-06	0.0750
				-4.02E-03	-4.02E-05	0.00123	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.858	0.056	9.29E-06	-9.94E-06	0.0750
				-4.02E-03	-4.02E-05	0.00123	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.858	0.056	9.29E-06	-9.94E-06	0.0750
				-4.02E-03	-4.02E-05	0.00123	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.29E-06	-9.94E-06	0.0750
-0.05	0.0750	0.00125	-4.019E-05	-4.01E-03	-4.01E-05	0.00125	0.022	0.450	0.30	0.050	0.056	0.857	0.065	1.27E-05	-9.91E-06	0.0749
				-4.01E-03	-4.01E-05	0.00127	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.29E-06	-9.94E-06	0.0749
				-4.01E-03	-4.01E-05	0.00127	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.29E-06	-9.94E-06	0.0749
				-4.01E-03	-4.01E-05	0.00127	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.30E-06	-9.94E-06	0.0749
-0.06	0.0749	0.00129	-4.015E-05	-4.01E-03	-4.01E-05	0.00129	0.022	0.450	0.30	0.050	0.057	0.857	0.067	1.35E-05	-9.91E-06	0.0749
				-4.01E-03	-4.01E-05	0.00131	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.30E-06	-9.94E-06	0.0749
				-4.01E-03	-4.01E-05	0.00131	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.30E-06	-9.94E-06	0.0749
				-4.01E-03	-4.01E-05	0.00131	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.30E-06	-9.94E-06	0.0749
-0.07	0.0749	0.00133	-4.011E-05	-4.01E-03	-4.01E-05	0.00133	0.022	0.450	0.30	0.050	0.059	0.857	0.069	1.44E-05	-9.90E-06	0.0749
				-4.01E-03	-4.01E-05	0.00135	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.30E-06	-9.94E-06	0.0749
				-4.01E-03	-4.01E-05	0.00135	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.30E-06	-9.94E-06	0.0749
				-4.01E-03	-4.01E-05	0.00135	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.30E-06	-9.94E-06	0.0749
-0.08	0.0749	0.00137	-4.007E-05	-4.00E-03	-4.00E-05	0.00137	0.022	0.450	0.30	0.050	0.061	0.857	0.071	1.53E-05	-9.90E-06	0.0749
				-4.00E-03	-4.00E-05	0.00139	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.30E-06	-9.94E-06	0.0749
				-4.00E-03	-4.00E-05	0.00139	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.30E-06	-9.94E-06	0.0749
				-4.00E-03	-4.00E-05	0.00139	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.31E-06	-9.94E-06	0.0749
-0.09	0.0749	0.00141	-4.003E-05	-4.00E-03	-4.00E-05	0.00141	0.022	0.450	0.30	0.050	0.063	0.857	0.073	1.62E-05	-9.89E-06	0.0749
				-4.00E-03	-4.00E-05	0.00143	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.31E-06	-9.94E-06	0.0749
				-4.00E-03	-4.00E-05	0.00143	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.31E-06	-9.94E-06	0.0749
				-4.00E-03	-4.00E-05	0.00143	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.31E-06	-9.94E-06	0.0749
-0.1	0.0749	0.00145	-3.999E-05	-3.99E-03	-3.99E-05	0.00145	0.022	0.450	0.30	0.050	0.065	0.857	0.075	1.71E-05	-9.88E-06	0.0749

TABLA A-8 Hoja de cálculo con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del tercer caso (2/3).

				-3.99E-03	-3.99E-05	0.00147	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.31E-06	-9.94E-06	0.0749
				-3.99E-03	-3.99E-05	0.00147	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.31E-06	-9.94E-06	0.0749
				-3.99E-03	-3.99E-05	0.00147	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.31E-06	-9.94E-06	0.0749
-0.11	0.0749	0.00149	-3.995E-05	-3.99E-03	-3.99E-05	0.00149	0.022	0.450	0.30	0.050	0.066	0.857	0.077	1.81E-05	-9.88E-06	0.0749
				-3.99E-03	-3.99E-05	0.00151	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.32E-06	-9.94E-06	0.0749
				-3.99E-03	-3.99E-05	0.00151	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.32E-06	-9.94E-06	0.0749
				-3.99E-03	-3.99E-05	0.00151	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.32E-06	-9.94E-06	0.0749
-0.12	0.0749	0.00153	-3.991E-05	-3.99E-03	-3.99E-05	0.00153	0.022	0.450	0.30	0.050	0.068	0.857	0.080	1.91E-05	-9.87E-06	0.0749
				-3.99E-03	-3.99E-05	0.00155	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.32E-06	-9.94E-06	0.0749
				-3.99E-03	-3.99E-05	0.00155	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.32E-06	-9.94E-06	0.0749
				-3.99E-03	-3.99E-05	0.00155	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.32E-06	-9.94E-06	0.0749
-0.13	0.0749	0.00157	-3.987E-05	-3.98E-03	-3.98E-05	0.00157	0.022	0.450	0.30	0.050	0.070	0.857	0.082	2.01E-05	-9.86E-06	0.0749
				-3.98E-03	-3.98E-05	0.00159	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.32E-06	-9.94E-06	0.0749
				-3.98E-03	-3.98E-05	0.00159	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.32E-06	-9.94E-06	0.0749
				-3.98E-03	-3.98E-05	0.00159	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.32E-06	-9.94E-06	0.0749
-0.14	0.0749	0.00161	-3.983E-05	-3.98E-03	-3.98E-05	0.00161	0.022	0.450	0.30	0.050	0.072	0.857	0.084	2.11E-05	-9.86E-06	0.0749
				-3.98E-03	-3.98E-05	0.00163	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.33E-06	-9.94E-06	0.0749
				-3.98E-03	-3.98E-05	0.00163	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.33E-06	-9.94E-06	0.0749
				-3.98E-03	-3.98E-05	0.00163	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.33E-06	-9.94E-06	0.0749
-0.15	0.0749	0.00165	-3.979E-05	-3.97E-03	-3.97E-05	0.00165	0.022	0.450	0.30	0.050	0.074	0.857	0.086	2.22E-05	-9.85E-06	0.0748
				-3.97E-03	-3.97E-05	0.00167	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.33E-06	-9.94E-06	0.0748
				-3.97E-03	-3.97E-05	0.00167	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.33E-06	-9.94E-06	0.0748
				-3.97E-03	-3.97E-05	0.00167	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.33E-06	-9.94E-06	0.0748
-0.16	0.0748	0.00169	-3.975E-05	-3.97E-03	-3.97E-05	0.00169	0.022	0.450	0.30	0.050	0.075	0.857	0.088	2.33E-05	-9.84E-06	0.0748
				-3.97E-03	-3.97E-05	0.00171	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.33E-06	-9.94E-06	0.0748
				-3.97E-03	-3.97E-05	0.00171	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.33E-06	-9.94E-06	0.0748
				-3.97E-03	-3.97E-05	0.00171	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.34E-06	-9.94E-06	0.0748
-0.17	0.0748	0.00173	-3.971E-05	-3.97E-03	-3.97E-05	0.00173	0.022	0.450	0.30	0.050	0.077	0.857	0.090	2.44E-05	-9.84E-06	0.0748
				-3.97E-03	-3.97E-05	0.00175	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.34E-06	-9.94E-06	0.0748
				-3.97E-03	-3.97E-05	0.00175	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.34E-06	-9.94E-06	0.0748
				-3.97E-03	-3.97E-05	0.00175	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.34E-06	-9.94E-06	0.0748
-0.18	0.0748	0.00177	-3.967E-05	-3.96E-03	-3.96E-05	0.00177	0.022	0.450	0.30	0.050	0.079	0.857	0.092	2.56E-05	-9.83E-06	0.0748
				-3.96E-03	-3.96E-05	0.00179	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.34E-06	-9.94E-06	0.0748
				-3.96E-03	-3.96E-05	0.00179	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.34E-06	-9.94E-06	0.0748
				-3.96E-03	-3.96E-05	0.00179	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.34E-06	-9.94E-06	0.0748
-0.19	0.0748	0.00181	-3.963E-05	-3.96E-03	-3.96E-05	0.00181	0.022	0.450	0.30	0.050	0.081	0.857	0.094	2.67E-05	-9.82E-06	0.0748
				-3.96E-03	-3.96E-05	0.00183	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.34E-06	-9.94E-06	0.0748
				-3.96E-03	-3.96E-05	0.00183	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.34E-06	-9.94E-06	0.0748
				-3.96E-03	-3.96E-05	0.00183	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.35E-06	-9.94E-06	0.0748
-0.2	0.0748	0.00185	-3.959E-05	-3.95E-03	-3.95E-05	0.00185	0.022	0.450	0.30	0.050	0.082	0.857	0.096	2.79E-05	-9.81E-06	0.0748
				-3.95E-03	-3.95E-05	0.00187	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.35E-06	-9.94E-06	0.0748
				-3.95E-03	-3.95E-05	0.00187	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.35E-06	-9.94E-06	0.0748

TABLA A-9 Hoja de cálculo con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del tercer caso (3/3).

				-3.95E-03	-3.95E-05	0.00187	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.35E-06	-9.94E-06	
-0.21	0.0748	0.00189	-3.955E-05	-3.95E-03	-3.95E-05	0.00189	0.022	0.450	0.30	0.050	0.084	0.857	0.098	2.91E-05	-9.80E-06	0.0748
				-3.95E-03	-3.95E-05	0.00191	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.35E-06	-9.94E-06	0.0748
				-3.95E-03	-3.95E-05	0.00191	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.35E-06	-9.94E-06	0.0748
				-3.95E-03	-3.95E-05	0.00191	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.857	0.056	9.35E-06	-9.94E-06	
-0.22	0.0748	0.00193	-3.951E-05	-3.95E-03	-3.95E-05	0.00193	0.022	0.450	0.30	0.050	0.086	0.857	0.100	3.04E-05	-9.79E-06	0.0748
				-3.95E-03	-3.95E-05	0.00195	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.856	0.056	9.35E-06	-9.94E-06	0.0748
				-3.95E-03	-3.95E-05	0.00195	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.856	0.056	9.35E-06	-9.94E-06	0.0748
				-3.95E-03	-3.95E-05	0.00195	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.856	0.056	9.36E-06	-9.94E-06	
-0.23	0.0748	0.00197	-3.947E-05	-3.94E-03	-3.94E-05	0.00197	0.022	0.450	0.30	0.050	0.088	0.856	0.102	3.16E-05	-9.79E-06	0.0748
				-3.94E-03	-3.94E-05	0.00199	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.856	0.056	9.36E-06	-9.94E-06	0.0748
				-3.94E-03	-3.94E-05	0.00199	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.856	0.056	9.36E-06	-9.94E-06	0.0748
				-3.94E-03	-3.94E-05	0.00199	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.856	0.056	9.36E-06	-9.94E-06	
-0.24	0.0748	0.00201	-3.943E-05	-3.94E-03	-3.94E-05	0.00201	0.022	0.450	0.30	0.050	0.089	0.856	0.105	3.29E-05	-9.78E-06	0.0748
				-3.94E-03	-3.94E-05	0.00203	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.856	0.056	9.36E-06	-9.94E-06	0.0748
				-3.94E-03	-3.94E-05	0.00203	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.856	0.056	9.36E-06	-9.94E-06	0.0748
				-3.94E-03	-3.94E-05	0.00203	0.022	0.450	0.30	0.050	0.048	0.856	0.056	9.36E-06	-9.94E-06	
-0.25	0.0748	0.00205	-3.939E-05	-3.94E-03	-3.94E-05	0.00205	0.022	0.450	0.30	0.050	0.091	0.856	0.107	3.42E-05	-9.77E-06	0.0747
				-3.94E-03	-3.94E-05	0.00207	0.022	0.449	0.30	0.050	0.048	0.856	0.056	9.37E-06	-9.94E-06	0.0747
				-3.94E-03	-3.94E-05	0.00207	0.022	0.449	0.30	0.050	0.048	0.856	0.056	9.37E-06	-9.94E-06	0.0747
				-3.94E-03	-3.94E-05	0.00207	0.022	0.449	0.30	0.050	0.048	0.856	0.056	9.37E-06	-9.94E-06	
-0.26	0.0747	0.00209	-3.935E-05	-3.93E-03	-3.93E-05	0.00209	0.022	0.449	0.30	0.050	0.093	0.856	0.109	3.56E-05	-9.76E-06	0.0747
				-3.93E-03	-3.93E-05	0.00211	0.022	0.449	0.30	0.050	0.048	0.856	0.056	9.37E-06	-9.94E-06	0.0747
				-3.93E-03	-3.93E-05	0.00211	0.022	0.449	0.30	0.050	0.048	0.856	0.056	9.37E-06	-9.94E-06	0.0747
				-3.93E-03	-3.93E-05	0.00211	0.022	0.449	0.30	0.050	0.048	0.856	0.056	9.37E-06	-9.94E-06	
-0.27	0.0747	0.00213	-3.931E-05	-3.93E-03	-3.93E-05	0.00213	0.022	0.449	0.30	0.050	0.095	0.856	0.111	3.70E-05	-9.75E-06	0.0747
				-3.93E-03	-3.93E-05	0.00215	0.022	0.449	0.30	0.050	0.048	0.856	0.056	9.37E-06	-9.94E-06	0.0747
				-3.93E-03	-3.93E-05	0.00215	0.022	0.449	0.30	0.050	0.048	0.856	0.056	9.37E-06	-9.94E-06	0.0747
				-3.93E-03	-3.93E-05	0.00215	0.022	0.449	0.30	0.050	0.048	0.856	0.056	9.37E-06	-9.94E-06	
-0.28	0.0747	0.00216	-3.927E-05	-3.92E-03	-3.92E-05	0.00216	0.022	0.449	0.30	0.050	0.097	0.856	0.113	3.84E-05	-9.74E-06	0.0747
				-3.92E-03	-3.92E-05	0.00218	0.022	0.449	0.30	0.050	0.048	0.856	0.056	9.38E-06	-9.94E-06	0.0747
				-3.92E-03	-3.92E-05	0.00218	0.022	0.449	0.30	0.050	0.048	0.856	0.056	9.38E-06	-9.94E-06	0.0747
				-3.92E-03	-3.92E-05	0.00218	0.022	0.449	0.30	0.050	0.048	0.856	0.056	9.38E-06	-9.94E-06	
-0.29	0.0747	0.00220	-3.923E-05	-3.92E-03	-3.92E-05	0.00220	0.022	0.449	0.30	0.050	0.098	0.856	0.115	3.98E-05	-9.73E-06	0.0747
				-3.92E-03	-3.92E-05	0.00222	0.022	0.449	0.30	0.050	0.048	0.856	0.056	9.38E-06	-9.94E-06	0.0747
				-3.92E-03	-3.92E-05	0.00222	0.022	0.449	0.30	0.050	0.048	0.856	0.056	9.38E-06	-9.94E-06	0.0747
				-3.92E-03	-3.92E-05	0.00222	0.022	0.449	0.30	0.050	0.048	0.856	0.056	9.38E-06	-9.94E-06	
-0.3	0.0747	0.00224	-3.919E-05	-3.92E-03	-3.92E-05	0.00224	0.022	0.449	0.30	0.050	0.100	0.856	0.117	4.12E-05	-9.72E-06	0.0747
				-3.92E-03	-3.92E-05	0.00226	0.022	0.449	0.30	0.050	0.048	0.856	0.056	9.38E-06	-9.94E-06	0.0747
				-3.92E-03	-3.92E-05	0.00226	0.022	0.449	0.30	0.050	0.048	0.856	0.056	9.38E-06	-9.94E-06	0.0747
				-3.92E-03	-3.92E-05	0.00226	0.022	0.449	0.30	0.050	0.048	0.856	0.056	9.39E-06	-9.94E-06	
Gasto de desbordamiento =				-0.00119												

TABLA A-10 Hoja de cálculo con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del cuarto caso (1/3).

x	y	Q	Qs	q	Ls	Q'	A	P	T	Rh	V	Celeridad	Fr	Sf	Ks	y+k
0.00	0.0750	0.0012	0.00	-4.03E-03	-4.03E-05	0.00120	0.023	0.450	0.30	0.050	0.053	0.858	0.062	1.17E-05	-9.92E-06	0.0750
				-4.03E-03	-4.03E-05	0.00122	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.858	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0750
				-4.03E-03	-4.03E-05	0.00122	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.858	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0750
				-4.03E-03	-4.03E-05	0.00122	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.858	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0750
-0.01	0.0750	0.00124	-4.035E-05	-4.03E-03	-4.03E-05	0.00124	0.022	0.450	0.30	0.050	0.055	0.858	0.064	1.25E-05	-9.92E-06	0.0750
				-4.03E-03	-4.03E-05	0.00126	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.858	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0750
				-4.03E-03	-4.03E-05	0.00126	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.858	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0750
				-4.03E-03	-4.03E-05	0.00126	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.858	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0750
-0.02	0.0750	0.00128	-4.031E-05	-4.03E-03	-4.03E-05	0.00128	0.022	0.450	0.30	0.050	0.057	0.858	0.066	1.33E-05	-9.91E-06	0.0750
				-4.03E-03	-4.03E-05	0.00130	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.858	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0750
				-4.03E-03	-4.03E-05	0.00130	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.858	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0750
				-4.03E-03	-4.03E-05	0.00130	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.858	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0750
-0.03	0.0750	0.00132	-4.027E-05	-4.02E-03	-4.02E-05	0.00132	0.022	0.450	0.30	0.050	0.059	0.858	0.068	1.41E-05	-9.90E-06	0.0750
				-4.02E-03	-4.02E-05	0.00134	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.858	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0750
				-4.02E-03	-4.02E-05	0.00134	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.858	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0750
				-4.02E-03	-4.02E-05	0.00134	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.858	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0750
-0.04	0.0750	0.00136	-4.023E-05	-4.02E-03	-4.02E-05	0.00136	0.022	0.450	0.30	0.050	0.061	0.858	0.071	1.50E-05	-9.90E-06	0.0750
				-4.02E-03	-4.02E-05	0.00138	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.858	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0750
				-4.02E-03	-4.02E-05	0.00138	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.858	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0750
				-4.02E-03	-4.02E-05	0.00138	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0750
-0.05	0.0750	0.00140	-4.019E-05	-4.01E-03	-4.01E-05	0.00140	0.022	0.450	0.30	0.050	0.062	0.857	0.073	1.59E-05	-9.89E-06	0.0749
				-4.01E-03	-4.01E-05	0.00142	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0749
				-4.01E-03	-4.01E-05	0.00142	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0749
				-4.01E-03	-4.01E-05	0.00142	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0749
-0.06	0.0749	0.00144	-4.015E-05	-4.01E-03	-4.01E-05	0.00144	0.022	0.450	0.30	0.050	0.064	0.857	0.075	1.69E-05	-9.89E-06	0.0749
				-4.01E-03	-4.01E-05	0.00146	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0749
				-4.01E-03	-4.01E-05	0.00146	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0749
				-4.01E-03	-4.01E-05	0.00146	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0749
-0.07	0.0749	0.00148	-4.011E-05	-4.01E-03	-4.01E-05	0.00148	0.022	0.450	0.30	0.050	0.066	0.857	0.077	1.78E-05	-9.88E-06	0.0749
				-4.01E-03	-4.01E-05	0.00150	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0749
				-4.01E-03	-4.01E-05	0.00150	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0749
				-4.01E-03	-4.01E-05	0.00150	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0749
-0.08	0.0749	0.00152	-4.007E-05	-4.00E-03	-4.00E-05	0.00152	0.022	0.450	0.30	0.050	0.068	0.857	0.079	1.88E-05	-9.87E-06	0.0749
				-4.00E-03	-4.00E-05	0.00154	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0749
				-4.00E-03	-4.00E-05	0.00154	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0749
				-4.00E-03	-4.00E-05	0.00154	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0749
-0.09	0.0749	0.00156	-4.003E-05	-4.00E-03	-4.00E-05	0.00156	0.022	0.450	0.30	0.050	0.069	0.857	0.081	1.98E-05	-9.87E-06	0.0749
				-4.00E-03	-4.00E-05	0.00158	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0749
				-4.00E-03	-4.00E-05	0.00158	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0749
				-4.00E-03	-4.00E-05	0.00158	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0749
-0.1	0.0749	0.00160	-3.999E-05	-3.99E-03	-3.99E-05	0.00160	0.022	0.450	0.30	0.050	0.071	0.857	0.083	2.09E-05	-9.86E-06	0.0749

TABLA A-11 Hoja de cálculo con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del cuarto caso (2/3).

				-3.99E-03	-3.99E-05	0.00162	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0749
				-3.99E-03	-3.99E-05	0.00162	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0749
				-3.99E-03	-3.99E-05	0.00162	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	
-0.11	0.0749	0.00164	-3.995E-05	-3.99E-03	-3.99E-05	0.00164	0.022	0.450	0.30	0.050	0.073	0.857	0.085	2.19E-05	-9.85E-06	0.0749
				-3.99E-03	-3.99E-05	0.00166	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0749
				-3.99E-03	-3.99E-05	0.00166	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0749
				-3.99E-03	-3.99E-05	0.00166	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	
-0.12	0.0749	0.00168	-3.991E-05	-3.99E-03	-3.99E-05	0.00168	0.022	0.450	0.30	0.050	0.075	0.857	0.087	2.30E-05	-9.85E-06	0.0749
				-3.99E-03	-3.99E-05	0.00170	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0749
				-3.99E-03	-3.99E-05	0.00170	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0749
				-3.99E-03	-3.99E-05	0.00170	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	
-0.13	0.0749	0.00172	-3.987E-05	-3.98E-03	-3.98E-05	0.00172	0.022	0.450	0.30	0.050	0.077	0.857	0.089	2.41E-05	-9.84E-06	0.0749
				-3.98E-03	-3.98E-05	0.00174	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0749
				-3.98E-03	-3.98E-05	0.00174	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0749
				-3.98E-03	-3.98E-05	0.00174	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	
-0.14	0.0749	0.00176	-3.983E-05	-3.98E-03	-3.98E-05	0.00176	0.022	0.450	0.30	0.050	0.078	0.857	0.092	2.53E-05	-9.83E-06	0.0749
				-3.98E-03	-3.98E-05	0.00178	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0749
				-3.98E-03	-3.98E-05	0.00178	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0749
				-3.98E-03	-3.98E-05	0.00178	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	
-0.15	0.0749	0.00180	-3.979E-05	-3.97E-03	-3.97E-05	0.00180	0.022	0.450	0.30	0.050	0.080	0.857	0.094	2.64E-05	-9.82E-06	0.0748
				-3.97E-03	-3.97E-05	0.00182	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0748
				-3.97E-03	-3.97E-05	0.00182	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0748
				-3.97E-03	-3.97E-05	0.00182	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	
-0.16	0.0748	0.00184	-3.975E-05	-3.97E-03	-3.97E-05	0.00184	0.022	0.450	0.30	0.050	0.082	0.857	0.096	2.76E-05	-9.81E-06	0.0748
				-3.97E-03	-3.97E-05	0.00186	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0748
				-3.97E-03	-3.97E-05	0.00186	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0748
				-3.97E-03	-3.97E-05	0.00186	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	
-0.17	0.0748	0.00188	-3.971E-05	-3.97E-03	-3.97E-05	0.00188	0.022	0.450	0.30	0.050	0.084	0.857	0.098	2.88E-05	-9.81E-06	0.0748
				-3.97E-03	-3.97E-05	0.00190	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0748
				-3.97E-03	-3.97E-05	0.00190	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0748
				-3.97E-03	-3.97E-05	0.00190	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	
-0.18	0.0748	0.00192	-3.967E-05	-3.96E-03	-3.96E-05	0.00192	0.022	0.450	0.30	0.050	0.086	0.857	0.100	3.01E-05	-9.80E-06	0.0748
				-3.96E-03	-3.96E-05	0.00194	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0748
				-3.96E-03	-3.96E-05	0.00194	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0748
				-3.96E-03	-3.96E-05	0.00194	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	
-0.19	0.0748	0.00196	-3.963E-05	-3.96E-03	-3.96E-05	0.00196	0.022	0.450	0.30	0.050	0.087	0.857	0.102	3.13E-05	-9.79E-06	0.0748
				-3.96E-03	-3.96E-05	0.00198	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0748
				-3.96E-03	-3.96E-05	0.00198	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	0.0748
				-3.96E-03	-3.96E-05	0.00198	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.21E-05	-9.92E-06	
-0.2	0.0748	0.00200	-3.959E-05	-3.96E-03	-3.96E-05	0.00200	0.022	0.450	0.30	0.050	0.089	0.857	0.104	3.26E-05	-9.78E-06	0.0748
				-3.96E-03	-3.96E-05	0.00202	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.22E-05	-9.92E-06	0.0748
				-3.96E-03	-3.96E-05	0.00202	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.22E-05	-9.92E-06	0.0748

TABLA A-12 Hoja de cálculo con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del cuarto caso (3/3).

				-3.96E-03	-3.96E-05	0.00202	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.22E-05	-9.92E-06	
-0.21	0.0748	0.00204	-3.955E-05	-3.95E-03	-3.95E-05	0.00204	0.022	0.450	0.30	0.050	0.091	0.857	0.106	3.39E-05	-9.77E-06	0.0748
				-3.95E-03	-3.95E-05	0.00206	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.22E-05	-9.92E-06	0.0748
				-3.95E-03	-3.95E-05	0.00206	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.22E-05	-9.92E-06	0.0748
				-3.95E-03	-3.95E-05	0.00206	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.857	0.063	1.22E-05	-9.92E-06	
-0.22	0.0748	0.00208	-3.951E-05	-3.95E-03	-3.95E-05	0.00208	0.022	0.450	0.30	0.050	0.093	0.857	0.108	3.53E-05	-9.76E-06	0.0748
				-3.95E-03	-3.95E-05	0.00210	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.856	0.064	1.22E-05	-9.92E-06	0.0748
				-3.95E-03	-3.95E-05	0.00210	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.856	0.064	1.22E-05	-9.92E-06	0.0748
				-3.95E-03	-3.95E-05	0.00210	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.856	0.064	1.22E-05	-9.92E-06	
-0.23	0.0748	0.00212	-3.947E-05	-3.94E-03	-3.94E-05	0.00212	0.022	0.450	0.30	0.050	0.094	0.856	0.110	3.66E-05	-9.75E-06	0.0748
				-3.94E-03	-3.94E-05	0.00214	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.856	0.064	1.22E-05	-9.92E-06	0.0748
				-3.94E-03	-3.94E-05	0.00214	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.856	0.064	1.22E-05	-9.92E-06	0.0748
				-3.94E-03	-3.94E-05	0.00214	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.856	0.064	1.22E-05	-9.92E-06	
-0.24	0.0748	0.00216	-3.943E-05	-3.94E-03	-3.94E-05	0.00216	0.022	0.450	0.30	0.050	0.096	0.856	0.112	3.80E-05	-9.74E-06	0.0748
				-3.94E-03	-3.94E-05	0.00218	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.856	0.064	1.22E-05	-9.92E-06	0.0748
				-3.94E-03	-3.94E-05	0.00218	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.856	0.064	1.22E-05	-9.92E-06	0.0748
				-3.94E-03	-3.94E-05	0.00218	0.022	0.450	0.30	0.050	0.054	0.856	0.064	1.22E-05	-9.92E-06	
-0.25	0.0748	0.00220	-3.939E-05	-3.94E-03	-3.94E-05	0.00220	0.022	0.450	0.30	0.050	0.098	0.856	0.114	3.95E-05	-9.73E-06	0.0747
				-3.94E-03	-3.94E-05	0.00222	0.022	0.449	0.30	0.050	0.054	0.856	0.064	1.22E-05	-9.92E-06	0.0747
				-3.94E-03	-3.94E-05	0.00222	0.022	0.449	0.30	0.050	0.054	0.856	0.064	1.22E-05	-9.92E-06	0.0747
				-3.94E-03	-3.94E-05	0.00222	0.022	0.449	0.30	0.050	0.054	0.856	0.064	1.22E-05	-9.92E-06	
-0.26	0.0747	0.00224	-3.935E-05	-3.93E-03	-3.93E-05	0.00224	0.022	0.449	0.30	0.050	0.100	0.856	0.116	4.09E-05	-9.72E-06	0.0747
				-3.93E-03	-3.93E-05	0.00226	0.022	0.449	0.30	0.050	0.054	0.856	0.064	1.22E-05	-9.92E-06	0.0747
				-3.93E-03	-3.93E-05	0.00226	0.022	0.449	0.30	0.050	0.054	0.856	0.064	1.22E-05	-9.92E-06	0.0747
				-3.93E-03	-3.93E-05	0.00226	0.022	0.449	0.30	0.050	0.054	0.856	0.064	1.22E-05	-9.92E-06	
-0.27	0.0747	0.00228	-3.931E-05	-3.93E-03	-3.93E-05	0.00228	0.022	0.449	0.30	0.050	0.101	0.856	0.119	4.24E-05	-9.71E-06	0.0747
				-3.93E-03	-3.93E-05	0.00230	0.022	0.449	0.30	0.050	0.054	0.856	0.064	1.22E-05	-9.92E-06	0.0747
				-3.93E-03	-3.93E-05	0.00230	0.022	0.449	0.30	0.050	0.054	0.856	0.064	1.22E-05	-9.92E-06	0.0747
				-3.93E-03	-3.93E-05	0.00230	0.022	0.449	0.30	0.050	0.054	0.856	0.064	1.22E-05	-9.92E-06	
-0.28	0.0747	0.00231	-3.927E-05	-3.92E-03	-3.92E-05	0.00231	0.022	0.449	0.30	0.050	0.103	0.856	0.121	4.39E-05	-9.70E-06	0.0747
				-3.92E-03	-3.92E-05	0.00233	0.022	0.449	0.30	0.050	0.054	0.856	0.064	1.22E-05	-9.92E-06	0.0747
				-3.92E-03	-3.92E-05	0.00233	0.022	0.449	0.30	0.050	0.054	0.856	0.064	1.22E-05	-9.92E-06	0.0747
				-3.92E-03	-3.92E-05	0.00233	0.022	0.449	0.30	0.050	0.054	0.856	0.064	1.22E-05	-9.92E-06	
-0.29	0.0747	0.00235	-3.923E-05	-3.92E-03	-3.92E-05	0.00235	0.022	0.449	0.30	0.050	0.105	0.856	0.123	4.54E-05	-9.69E-06	0.0747
				-3.92E-03	-3.92E-05	0.00237	0.022	0.449	0.30	0.050	0.054	0.856	0.064	1.22E-05	-9.92E-06	0.0747
				-3.92E-03	-3.92E-05	0.00237	0.022	0.449	0.30	0.050	0.054	0.856	0.064	1.22E-05	-9.92E-06	0.0747
				-3.92E-03	-3.92E-05	0.00237	0.022	0.449	0.30	0.050	0.054	0.856	0.064	1.22E-05	-9.92E-06	
-0.3	0.0747	0.00239	-3.919E-05	-3.92E-03	-3.92E-05	0.00239	0.022	0.449	0.30	0.050	0.107	0.856	0.125	4.69E-05	-9.68E-06	0.0747
				-3.92E-03	-3.92E-05	0.00241	0.022	0.449	0.30	0.050	0.054	0.856	0.064	1.22E-05	-9.92E-06	0.0747
				-3.92E-03	-3.92E-05	0.00241	0.022	0.449	0.30	0.050	0.054	0.856	0.064	1.22E-05	-9.92E-06	0.0747
				-3.92E-03	-3.92E-05	0.00241	0.022	0.449	0.30	0.050	0.054	0.856	0.064	1.22E-05	-9.92E-06	
Gasto de desbordamiento = -0.00119																



TABLA A-13 Hoja de cálculo con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del quinto caso (1/3).

x	y	Q	Qs	q	Ls	Q'	A	P	T	Rh	V	Celeridad	Fr	Sf	Ks	y+k
0.00	0.0780	0.00122	0.00	-5.30E-03	-5.30E-05	0.00122	0.023	0.456	0.30	0.051	0.052	0.875	0.060	1.08E-05	-9.93E-06	0.0780
				-5.30E-03	-5.30E-05	0.00125	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.875	0.061	1.12E-05	-9.92E-06	0.0780
				-5.30E-03	-5.30E-05	0.00125	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.875	0.061	1.12E-05	-9.92E-06	0.0780
				-5.30E-03	-5.30E-05	0.00125	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.875	0.061	1.12E-05	-9.92E-06	0.0780
-0.01	0.0780	0.00127	-5.304E-05	-5.30E-03	-5.30E-05	0.00127	0.023	0.456	0.30	0.051	0.054	0.875	0.062	1.17E-05	-9.92E-06	0.0780
				-5.30E-03	-5.30E-05	0.00130	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.875	0.061	1.12E-05	-9.92E-06	0.0780
				-5.30E-03	-5.30E-05	0.00130	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.875	0.061	1.12E-05	-9.92E-06	0.0780
				-5.30E-03	-5.30E-05	0.00130	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.875	0.061	1.12E-05	-9.92E-06	0.0780
-0.02	0.0780	0.00133	-5.300E-05	-5.30E-03	-5.30E-05	0.00133	0.023	0.456	0.30	0.051	0.057	0.875	0.065	1.27E-05	-9.91E-06	0.0780
				-5.30E-03	-5.30E-05	0.00135	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.875	0.061	1.12E-05	-9.92E-06	0.0780
				-5.30E-03	-5.30E-05	0.00135	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.875	0.061	1.12E-05	-9.92E-06	0.0780
				-5.30E-03	-5.30E-05	0.00135	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.875	0.061	1.12E-05	-9.92E-06	0.0780
-0.03	0.0780	0.00138	-5.295E-05	-5.29E-03	-5.29E-05	0.00138	0.023	0.456	0.30	0.051	0.059	0.875	0.067	1.38E-05	-9.91E-06	0.0780
				-5.29E-03	-5.29E-05	0.00141	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.875	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0780
				-5.29E-03	-5.29E-05	0.00141	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.875	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0780
				-5.29E-03	-5.29E-05	0.00141	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.875	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0780
-0.04	0.0780	0.00143	-5.291E-05	-5.29E-03	-5.29E-05	0.00143	0.023	0.456	0.30	0.051	0.061	0.875	0.070	1.49E-05	-9.90E-06	0.0780
				-5.29E-03	-5.29E-05	0.00146	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0780
				-5.29E-03	-5.29E-05	0.00146	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0780
				-5.29E-03	-5.29E-05	0.00146	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0780
-0.05	0.0780	0.00148	-5.286E-05	-5.28E-03	-5.28E-05	0.00148	0.023	0.456	0.30	0.051	0.063	0.874	0.073	1.60E-05	-9.89E-06	0.0779
				-5.28E-03	-5.28E-05	0.00151	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0779
				-5.28E-03	-5.28E-05	0.00151	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0779
				-5.28E-03	-5.28E-05	0.00151	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0779
-0.06	0.0779	0.00154	-5.282E-05	-5.28E-03	-5.28E-05	0.00154	0.023	0.456	0.30	0.051	0.066	0.874	0.075	1.71E-05	-9.88E-06	0.0779
			-0.000318	-5.28E-03	-5.28E-05	0.00156	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0779
				-5.28E-03	-5.28E-05	0.00156	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0779
				-5.28E-03	-5.28E-05	0.00156	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0779
				-5.28E-03	-5.28E-05	0.00156	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0779
-0.07	0.0779	0.00159	-5.278E-05	-5.27E-03	-5.27E-05	0.00159	0.023	0.456	0.30	0.051	0.068	0.874	0.078	1.83E-05	-9.88E-06	0.0779
				-5.27E-03	-5.27E-05	0.00162	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0779
				-5.27E-03	-5.27E-05	0.00162	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0779
				-5.27E-03	-5.27E-05	0.00162	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0779
-0.08	0.0779	0.00164	-5.273E-05	-5.27E-03	-5.27E-05	0.00164	0.023	0.456	0.30	0.051	0.070	0.874	0.080	1.96E-05	-9.87E-06	0.0779
				-5.27E-03	-5.27E-05	0.00167	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0779
				-5.27E-03	-5.27E-05	0.00167	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0779
				-5.27E-03	-5.27E-05	0.00167	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0779
-0.09	0.0779	0.00170	-5.269E-05	-5.26E-03	-5.26E-05	0.00170	0.023	0.456	0.30	0.051	0.073	0.874	0.083	2.09E-05	-9.86E-06	0.0779
				-5.26E-03	-5.26E-05	0.00172	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0779
				-5.26E-03	-5.26E-05	0.00172	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0779
				-5.26E-03	-5.26E-05	0.00172	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0779
-0.1	0.0779	0.00175	-5.264E-05	-5.26E-03	-5.26E-05	0.00175	0.023	0.456	0.30	0.051	0.075	0.874	0.086	2.22E-05	-9.85E-06	0.0779

TABLA A-14 Hoja de cálculo con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del quinto caso (2/3).

				-5.26E-03	-5.26E-05	0.00177	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0779	
				-5.26E-03	-5.26E-05	0.00177	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0779	
				-5.26E-03	-5.26E-05	0.00177	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0779	
-0.11	0.0779	0.00180	-5.260E-05	-5.26E-03	-5.26E-05	0.00180	0.023	0.456	0.30	0.051	0.077	0.874	0.088	2.36E-05	-9.84E-06	0.0779	
				-5.26E-03	-5.26E-05	0.00183	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0779	
				-5.26E-03	-5.26E-05	0.00183	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0779	
				-5.26E-03	-5.26E-05	0.00183	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0779	
-0.12	0.0779	0.00185	-5.256E-05	-0.000316	-5.25E-03	-5.25E-05	0.00185	0.023	0.456	0.30	0.051	0.079	0.874	0.091	2.50E-05	-9.83E-06	0.0779
				-5.25E-03	-5.25E-05	0.00188	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0779	
				-5.25E-03	-5.25E-05	0.00188	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0779	
				-5.25E-03	-5.25E-05	0.00188	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0779	
-0.13	0.0779	0.00191	-5.251E-05	-5.25E-03	-5.25E-05	0.00191	0.023	0.456	0.30	0.051	0.082	0.874	0.093	2.64E-05	-9.82E-06	0.0779	
				-5.25E-03	-5.25E-05	0.00193	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0779	
				-5.25E-03	-5.25E-05	0.00193	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0779	
				-5.25E-03	-5.25E-05	0.00193	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0779	
-0.14	0.0779	0.00196	-5.247E-05	-5.24E-03	-5.24E-05	0.00196	0.023	0.456	0.30	0.051	0.084	0.874	0.096	2.79E-05	-9.81E-06	0.0779	
				-5.24E-03	-5.24E-05	0.00198	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0779	
				-5.24E-03	-5.24E-05	0.00198	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0779	
				-5.24E-03	-5.24E-05	0.00198	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0779	
-0.15	0.0779	0.00201	-5.243E-05	-5.24E-03	-5.24E-05	0.00201	0.023	0.456	0.30	0.051	0.086	0.874	0.099	2.94E-05	-9.80E-06	0.0778	
				-5.24E-03	-5.24E-05	0.00204	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0778	
				-5.24E-03	-5.24E-05	0.00204	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0778	
				-5.24E-03	-5.24E-05	0.00204	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0778	
-0.16	0.0778	0.00206	-5.238E-05	-5.23E-03	-5.23E-05	0.00206	0.023	0.456	0.30	0.051	0.088	0.874	0.101	3.10E-05	-9.79E-06	0.0778	
				-5.23E-03	-5.23E-05	0.00209	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0778	
				-5.23E-03	-5.23E-05	0.00209	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0778	
				-5.23E-03	-5.23E-05	0.00209	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0778	
-0.17	0.0778	0.00212	-5.234E-05	-5.23E-03	-5.23E-05	0.00212	0.023	0.456	0.30	0.051	0.091	0.874	0.104	3.26E-05	-9.78E-06	0.0778	
				-5.23E-03	-5.23E-05	0.00214	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0778	
				-5.23E-03	-5.23E-05	0.00214	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0778	
				-5.23E-03	-5.23E-05	0.00214	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0778	
-0.18	0.0778	0.00217	-5.230E-05	-0.000314	-5.23E-03	-5.23E-05	0.00217	0.023	0.456	0.30	0.051	0.093	0.874	0.106	3.42E-05	-9.77E-06	0.0778
				-5.23E-03	-5.23E-05	0.00219	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0778	
				-5.23E-03	-5.23E-05	0.00219	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0778	
				-5.23E-03	-5.23E-05	0.00219	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0778	
-0.19	0.0778	0.00222	-5.225E-05	-5.22E-03	-5.22E-05	0.00222	0.023	0.456	0.30	0.051	0.095	0.874	0.109	3.59E-05	-9.76E-06	0.0778	
				-5.22E-03	-5.22E-05	0.00225	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0778	
				-5.22E-03	-5.22E-05	0.00225	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0778	
				-5.22E-03	-5.22E-05	0.00225	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0778	
-0.2	0.0778	0.00227	-5.221E-05	-5.22E-03	-5.22E-05	0.00227	0.023	0.456	0.30	0.051	0.097	0.874	0.111	3.76E-05	-9.74E-06	0.0778	
				-5.22E-03	-5.22E-05	0.00230	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0778	
				-5.22E-03	-5.22E-05	0.00230	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0778	

**TABLA A-15** Hoja de cálculo con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del quinto caso (3/3).

				-5.22E-03	-5.22E-05	0.00230	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	
-0.21	0.0778	0.00232	-5.217E-05	-5.21E-03	-5.21E-05	0.00232	0.023	0.456	0.30	0.051	0.100	0.874	0.114	3.94E-05	-9.73E-06	0.0778
				-5.21E-03	-5.21E-05	0.00235	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0778
				-5.21E-03	-5.21E-05	0.00235	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0778
				-5.21E-03	-5.21E-05	0.00235	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.874	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	
-0.22	0.0778	0.00238	-5.212E-05	-5.21E-03	-5.21E-05	0.00238	0.023	0.456	0.30	0.051	0.102	0.874	0.117	4.12E-05	-9.72E-06	0.0778
				-5.21E-03	-5.21E-05	0.00240	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.873	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0778
				-5.21E-03	-5.21E-05	0.00240	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.873	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0778
				-5.21E-03	-5.21E-05	0.00240	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.873	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	
-0.23	0.0778	0.00243	-5.208E-05	-5.20E-03	-5.20E-05	0.00243	0.023	0.456	0.30	0.051	0.104	0.873	0.119	4.30E-05	-9.71E-06	0.0778
				-5.20E-03	-5.20E-05	0.00245	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.873	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0778
				-5.20E-03	-5.20E-05	0.00245	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.873	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0778
				-5.20E-03	-5.20E-05	0.00245	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.873	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	
-0.24	0.0778	0.00248	-5.203E-05	-5.20E-03	-5.20E-05	0.00248	0.023	0.456	0.30	0.051	0.106	0.873	0.122	4.49E-05	-9.69E-06	0.0778
				-5.20E-03	-5.20E-05	0.00251	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.873	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0778
				-5.20E-03	-5.20E-05	0.00251	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.873	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0778
				-5.20E-03	-5.20E-05	0.00251	0.023	0.456	0.30	0.051	0.053	0.873	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	
-0.25	0.0778	0.00253	-5.199E-05	-5.19E-03	-5.19E-05	0.00253	0.023	0.456	0.30	0.051	0.109	0.873	0.124	4.68E-05	-9.68E-06	0.0777
				-5.19E-03	-5.19E-05	0.00256	0.023	0.455	0.30	0.051	0.053	0.873	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0777
				-5.19E-03	-5.19E-05	0.00256	0.023	0.455	0.30	0.051	0.053	0.873	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0777
				-5.19E-03	-5.19E-05	0.00256	0.023	0.455	0.30	0.051	0.053	0.873	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	
-0.26	0.0777	0.00258	-5.195E-05	-5.19E-03	-5.19E-05	0.00258	0.023	0.455	0.30	0.051	0.111	0.873	0.127	4.88E-05	-9.67E-06	0.0777
				-5.19E-03	-5.19E-05	0.00261	0.023	0.455	0.30	0.051	0.053	0.873	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0777
				-5.19E-03	-5.19E-05	0.00261	0.023	0.455	0.30	0.051	0.053	0.873	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	0.0777
				-5.19E-03	-5.19E-05	0.00261	0.023	0.455	0.30	0.051	0.053	0.873	0.061	1.13E-05	-9.92E-06	
-0.27	0.0777	0.00264	-5.190E-05	-5.19E-03	-5.19E-05	0.00264	0.023	0.455	0.30	0.051	0.113	0.873	0.129	5.08E-05	-9.65E-06	0.0777
				-5.19E-03	-5.19E-05	0.00266	0.023	0.455	0.30	0.051	0.053	0.873	0.061	1.14E-05	-9.92E-06	0.0777
				-5.19E-03	-5.19E-05	0.00266	0.023	0.455	0.30	0.051	0.053	0.873	0.061	1.14E-05	-9.92E-06	0.0777
				-5.19E-03	-5.19E-05	0.00266	0.023	0.455	0.30	0.051	0.053	0.873	0.061	1.14E-05	-9.92E-06	
-0.28	0.0777	0.00269	-5.186E-05	-5.18E-03	-5.18E-05	0.00269	0.023	0.455	0.30	0.051	0.115	0.873	0.132	5.28E-05	-9.64E-06	0.0777
				-5.18E-03	-5.18E-05	0.00271	0.023	0.455	0.30	0.051	0.053	0.873	0.061	1.14E-05	-9.92E-06	0.0777
				-5.18E-03	-5.18E-05	0.00271	0.023	0.455	0.30	0.051	0.053	0.873	0.061	1.14E-05	-9.92E-06	0.0777
				-5.18E-03	-5.18E-05	0.00271	0.023	0.455	0.30	0.051	0.053	0.873	0.061	1.14E-05	-9.92E-06	
-0.29	0.0777	0.00274	-5.182E-05	-5.18E-03	-5.18E-05	0.00274	0.023	0.455	0.30	0.051	0.118	0.873	0.135	5.49E-05	-9.63E-06	0.0777
				-5.18E-03	-5.18E-05	0.00277	0.023	0.455	0.30	0.051	0.053	0.873	0.061	1.14E-05	-9.92E-06	0.0777
				-5.18E-03	-5.18E-05	0.00277	0.023	0.455	0.30	0.051	0.053	0.873	0.061	1.14E-05	-9.92E-06	0.0777
				-5.18E-03	-5.18E-05	0.00277	0.023	0.455	0.30	0.051	0.053	0.873	0.061	1.14E-05	-9.92E-06	
-0.3	0.0777	0.00279	-5.177E-05	-5.17E-03	-5.17E-05	0.00279	0.023	0.455	0.30	0.051	0.120	0.873	0.137	5.70E-05	-9.61E-06	0.0777
				-5.17E-03	-5.17E-05	0.00282	0.023	0.455	0.30	0.051	0.053	0.873	0.061	1.14E-05	-9.92E-06	0.0777
				-5.17E-03	-5.17E-05	0.00282	0.023	0.455	0.30	0.051	0.053	0.873	0.061	1.14E-05	-9.92E-06	0.0777
				-5.17E-03	-5.17E-05	0.00282	0.023	0.455	0.30	0.051	0.053	0.873	0.061	1.14E-05	-9.92E-06	
<b>Gasto de desbordamiento =</b>																<b>-0.00157</b>

## Anexo B

TABLA B-1 Hoja de cálculo parcial con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del primer caso de aplicación.

x	y	Q	Q <sub>s</sub>	ΣQ <sub>s</sub>	q	L <sub>s</sub>	Q'	A	P	T	Rh	V	Celeridad	Fr	S <sub>f</sub>	K <sub>s</sub>	y+k
0.00	7.5000	535	0.00		0.00E+00	0.00E+00	535.00000	225.000	45.000	30.00	5.000	2.378	8.578	0.277	2.65E-04	-2.31E-02	7.4884
					0.00E+00	0.00E+00	535.00000	224.653	44.977	30.00	4.995	2.381	8.571	0.278	2.66E-04	-2.31E-02	7.4884
					0.00E+00	0.00E+00	535.00000	224.653	44.977	30.00	4.995	2.381	8.571	0.278	2.66E-04	-2.31E-02	7.4769
					0.00E+00	0.00E+00	535.00000	224.306	44.954	30.00	4.990	2.385	8.564	0.278	2.67E-04	-2.31E-02	
-10	7.4769	535.00000	0.000E+00		0.00E+00	0.00E+00	535.00000	224.306	44.954	30.00	4.990	2.385	8.564	0.278	2.67E-04	-2.31E-02	7.4653
					0.00E+00	0.00E+00	535.00000	223.959	44.931	30.00	4.985	2.389	8.558	0.279	2.68E-04	-2.31E-02	7.4653
					0.00E+00	0.00E+00	535.00000	223.959	44.931	30.00	4.985	2.389	8.558	0.279	2.68E-04	-2.31E-02	7.4538
					0.00E+00	0.00E+00	535.00000	223.613	44.908	30.00	4.979	2.393	8.551	0.280	2.69E-04	-2.31E-02	
-20	7.4538	535.00000	0.000E+00		0.00E+00	0.00E+00	535.00000	223.613	44.908	30.00	4.979	2.393	8.551	0.280	2.69E-04	-2.31E-02	7.4422
					0.00E+00	0.00E+00	535.00000	223.266	44.884	30.00	4.974	2.396	8.544	0.280	2.70E-04	-2.31E-02	7.4422
					0.00E+00	0.00E+00	535.00000	223.266	44.884	30.00	4.974	2.396	8.544	0.280	2.70E-04	-2.31E-02	7.4306
					0.00E+00	0.00E+00	535.00000	222.919	44.861	30.00	4.969	2.400	8.538	0.281	2.72E-04	-2.31E-02	
-700	5.9082	535.00000	0.000E+00		-5.73E-01	-5.73E+00	535.00000	177.245	41.816	30.00	4.239	3.018	7.613	0.396	5.31E-04	-2.22E-02	5.8971
					-5.73E-01	-5.73E+00	537.86370	176.913	41.794	30.00	4.233	3.024	7.606	0.398	5.34E-04	-2.22E-02	5.8971
					-5.73E-01	-5.73E+00	537.86370	176.913	41.794	30.00	4.233	3.024	7.606	0.398	5.34E-04	-2.22E-02	5.8860
					-5.73E-01	-5.73E+00	537.86370	176.580	41.772	30.00	4.227	3.030	7.599	0.399	5.37E-04	-2.21E-02	
-710	5.8860	540.72740	-5.727E+00		-5.27E-01	-5.27E+00	540.72740	176.580	41.772	30.00	4.227	3.062	7.599	0.403	5.49E-04	-2.21E-02	5.8750
					-5.27E-01	-5.27E+00	543.36107	176.249	41.750	30.00	4.222	3.035	7.592	0.400	5.40E-04	-2.21E-02	5.8749
					-5.27E-01	-5.27E+00	543.36107	176.248	41.750	30.00	4.222	3.035	7.592	0.400	5.40E-04	-2.21E-02	5.8639
					-5.27E-01	-5.27E+00	543.36107	175.916	41.728	30.00	4.216	3.041	7.585	0.401	5.43E-04	-2.21E-02	
-720	5.8639	545.99475	-5.267E+00		-4.82E-01	-4.82E+00	545.99475	175.917	41.728	30.00	4.216	3.104	7.585	0.409	5.66E-04	-2.20E-02	5.8529
					-4.82E-01	-4.82E+00	548.40523	175.586	41.706	30.00	4.210	3.047	7.577	0.402	5.46E-04	-2.21E-02	5.8528
					-4.82E-01	-4.82E+00	548.40523	175.585	41.706	30.00	4.210	3.047	7.577	0.402	5.46E-04	-2.21E-02	5.8418
					-4.82E-01	-4.82E+00	548.40523	175.253	41.684	30.00	4.204	3.053	7.570	0.403	5.49E-04	-2.21E-02	
-1380	4.4969	562.74205	0.000E+00		0.00E+00	0.00E+00	562.74205	134.907	38.994	30.00	3.460	4.171	6.642	0.628	1.33E-03	-1.77E-02	4.4881
					0.00E+00	0.00E+00	562.74205	134.642	38.976	30.00	3.454	3.973	6.635	0.599	1.21E-03	-1.86E-02	4.4876
					0.00E+00	0.00E+00	562.74205	134.629	38.975	30.00	3.454	3.974	6.635	0.599	1.21E-03	-1.86E-02	4.4784
					0.00E+00	0.00E+00	562.74205	134.351	38.957	30.00	3.449	3.982	6.628	0.601	1.22E-03	-1.85E-02	
-1390	4.4785	562.74205	0.000E+00		0.00E+00	0.00E+00	562.74205	134.355	38.957	30.00	3.449	4.188	6.628	0.632	1.35E-03	-1.75E-02	4.4697
					0.00E+00	0.00E+00	562.74205	134.092	38.939	30.00	3.444	3.990	6.622	0.603	1.22E-03	-1.85E-02	4.4693
					0.00E+00	0.00E+00	562.74205	134.079	38.939	30.00	3.443	3.990	6.621	0.603	1.22E-03	-1.85E-02	4.4601
					0.00E+00	0.00E+00	562.74205	133.802	38.920	30.00	3.438	3.998	6.615	0.604	1.23E-03	-1.84E-02	
-1400	4.4602	562.74205	0.000E+00	0.000000	0.00E+00	0.00E+00	562.74205	133.807	38.920	30.00	3.438	4.206	6.615	0.636	1.36E-03	-1.74E-02	4.4515
					0.00E+00	0.00E+00	562.74205	133.546	38.903	30.00	3.433	4.006	6.608	0.606	1.24E-03	-1.83E-02	4.4510
					0.00E+00	0.00E+00	562.74205	133.531	38.902	30.00	3.433	4.007	6.608	0.606	1.24E-03	-1.83E-02	4.4419
					0.00E+00	0.00E+00	562.74205	133.256	38.884	30.00	3.427	4.015	6.601	0.608	1.25E-03	-1.83E-02	
<b>Gasto de desbordamiento = -27.74205</b>																	

**TABLA B-2** Hoja de cálculo parcial con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del segundo caso de aplicación.

x	y	Q	Q <sub>s</sub>	ΣQ <sub>s</sub>	q	L <sub>s</sub>	Q'	A	P	T	Rh	V	Celeridad	Fr	S <sub>f</sub>	K <sub>s</sub>	y+k
0.00	7.5000	385	0.00		0.00E+00	0.00E+00	385.00000	225.000	45.000	30.00	5.000	1.711	8.578	0.199	1.37E-04	-2.36E-02	7.4882
					0.00E+00	0.00E+00	385.00000	224.646	44.976	30.00	4.995	1.714	8.571	0.200	1.38E-04	-2.36E-02	7.4882
					0.00E+00	0.00E+00	385.00000	224.647	44.976	30.00	4.995	1.714	8.571	0.200	1.38E-04	-2.36E-02	7.4764
					0.00E+00	0.00E+00	385.00000	224.293	44.953	30.00	4.990	1.717	8.564	0.200	1.38E-04	-2.36E-02	
-10	7.4764	385.00000	0.000E+00		0.00E+00	0.00E+00	385.00000	224.293	44.953	30.00	4.990	1.717	8.564	0.200	1.38E-04	-2.36E-02	7.4647
					0.00E+00	0.00E+00	385.00000	223.940	44.929	30.00	4.984	1.719	8.557	0.201	1.39E-04	-2.36E-02	7.4647
					0.00E+00	0.00E+00	385.00000	223.940	44.929	30.00	4.984	1.719	8.557	0.201	1.39E-04	-2.36E-02	7.4529
					0.00E+00	0.00E+00	385.00000	223.586	44.906	30.00	4.979	1.722	8.551	0.201	1.39E-04	-2.36E-02	
-20	7.4529	385.00000	0.000E+00		0.00E+00	0.00E+00	385.00000	223.586	44.906	30.00	4.979	1.722	8.551	0.201	1.39E-04	-2.36E-02	7.4411
					0.00E+00	0.00E+00	385.00000	223.233	44.882	30.00	4.974	1.725	8.544	0.202	1.40E-04	-2.36E-02	7.4411
					0.00E+00	0.00E+00	385.00000	223.233	44.882	30.00	4.974	1.725	8.544	0.202	1.40E-04	-2.36E-02	7.4293
					0.00E+00	0.00E+00	385.00000	222.879	44.859	30.00	4.968	1.727	8.537	0.202	1.41E-04	-2.36E-02	
-700	5.8634	385.00000	0.000E+00		-4.81E-01	-4.81E+00	385.00000	175.902	41.727	30.00	4.216	2.189	7.584	0.289	2.81E-04	-2.31E-02	5.8518
					-4.81E-01	-4.81E+00	387.40562	175.555	41.704	30.00	4.210	2.193	7.577	0.289	2.83E-04	-2.31E-02	5.8518
					-4.81E-01	-4.81E+00	387.40562	175.555	41.704	30.00	4.210	2.193	7.577	0.289	2.83E-04	-2.31E-02	5.8403
					-4.81E-01	-4.81E+00	387.40562	175.209	41.681	30.00	4.204	2.197	7.569	0.290	2.85E-04	-2.31E-02	
-710	5.8403	389.81125	-4.811E+00		-4.36E-01	-4.36E+00	389.81125	175.209	41.681	30.00	4.204	2.225	7.569	0.294	2.92E-04	-2.31E-02	5.8288
					-4.36E-01	-4.36E+00	391.99113	174.863	41.658	30.00	4.198	2.202	7.562	0.291	2.86E-04	-2.31E-02	5.8287
					-4.36E-01	-4.36E+00	391.99113	174.862	41.657	30.00	4.198	2.202	7.562	0.291	2.86E-04	-2.31E-02	5.8172
					-4.36E-01	-4.36E+00	391.99113	174.516	41.634	30.00	4.192	2.206	7.554	0.292	2.88E-04	-2.31E-02	
-720	5.8172	394.17101	-4.360E+00		-3.92E-01	-3.92E+00	394.17101	174.516	41.634	30.00	4.192	2.259	7.554	0.299	3.02E-04	-2.30E-02	5.8057
					-3.92E-01	-3.92E+00	396.13282	174.170	41.611	30.00	4.186	2.210	7.547	0.293	2.90E-04	-2.31E-02	5.8057
					-3.92E-01	-3.92E+00	396.13282	174.170	41.611	30.00	4.186	2.210	7.547	0.293	2.90E-04	-2.31E-02	5.7941
					-3.92E-01	-3.92E+00	396.13282	173.824	41.588	30.00	4.180	2.215	7.539	0.294	2.91E-04	-2.31E-02	
-1380	4.3364	407.41042	0.000E+00		0.00E+00	0.00E+00	407.41042	130.093	38.673	30.00	3.364	3.132	6.522	0.480	7.78E-04	-2.11E-02	4.3259
					0.00E+00	0.00E+00	407.41042	129.777	38.652	30.00	3.358	2.967	6.514	0.455	7.00E-04	-2.14E-02	4.3257
					0.00E+00	0.00E+00	407.41042	129.771	38.651	30.00	3.357	2.967	6.514	0.455	7.00E-04	-2.14E-02	4.3150
					0.00E+00	0.00E+00	407.41042	129.450	38.630	30.00	3.351	2.974	6.506	0.457	7.06E-04	-2.14E-02	
-1390	4.3151	407.41042	0.000E+00		0.00E+00	0.00E+00	407.41042	129.452	38.630	30.00	3.351	3.147	6.506	0.484	7.90E-04	-2.10E-02	4.3046
					0.00E+00	0.00E+00	407.41042	129.137	38.609	30.00	3.345	2.981	6.498	0.459	7.11E-04	-2.14E-02	4.3044
					0.00E+00	0.00E+00	407.41042	129.131	38.609	30.00	3.345	2.981	6.498	0.459	7.11E-04	-2.14E-02	4.2937
					0.00E+00	0.00E+00	407.41042	128.810	38.587	30.00	3.338	2.989	6.490	0.461	7.16E-04	-2.14E-02	
-1400	4.2937	407.41042	0.000E+00	0.000000	0.00E+00	0.00E+00	407.41042	128.812	38.587	30.00	3.338	3.163	6.490	0.487	8.02E-04	-2.10E-02	4.2833
					0.00E+00	0.00E+00	407.41042	128.498	38.567	30.00	3.332	2.996	6.482	0.462	7.22E-04	-2.13E-02	4.2831
					0.00E+00	0.00E+00	407.41042	128.492	38.566	30.00	3.332	2.996	6.482	0.462	7.22E-04	-2.13E-02	4.2724
					0.00E+00	0.00E+00	407.41042	128.172	38.545	30.00	3.325	3.004	6.474	0.464	7.27E-04	-2.13E-02	
<b>Gasto de desbordamiento = -22.41042</b>																	

**TABLA B-3** Hoja de cálculo parcial con el método numérico de Runge-Kutta para la solución del tercer caso de aplicación.

x	y	Q	Q <sub>s</sub>	ΣQ <sub>s</sub>	q	L <sub>s</sub>	Q'	A	P	T	Rh	V	Celeridad	Fr	S <sub>f</sub>	K <sub>s</sub>	y+k
0.00	7.5000	270	0.00		0.00E+00	0.00E+00	270.00000	225.000	45.000	30.00	5.000	1.200	8.578	0.140	6.74E-05	-2.38E-02	7.4881
					0.00E+00	0.00E+00	270.00000	224.643	44.976	30.00	4.995	1.202	8.571	0.140	6.77E-05	-2.38E-02	7.4881
					0.00E+00	0.00E+00	270.00000	224.643	44.976	30.00	4.995	1.202	8.571	0.140	6.77E-05	-2.38E-02	7.4762
					0.00E+00	0.00E+00	270.00000	224.286	44.952	30.00	4.989	1.204	8.564	0.141	6.80E-05	-2.38E-02	
-10	7.4762	270.00000	0.000E+00		0.00E+00	0.00E+00	270.00000	224.286	44.952	30.00	4.989	1.204	8.564	0.141	6.80E-05	-2.38E-02	7.4643
					0.00E+00	0.00E+00	270.00000	223.929	44.929	30.00	4.984	1.206	8.557	0.141	6.83E-05	-2.38E-02	7.4643
					0.00E+00	0.00E+00	270.00000	223.929	44.929	30.00	4.984	1.206	8.557	0.141	6.83E-05	-2.38E-02	7.4524
					0.00E+00	0.00E+00	270.00000	223.573	44.905	30.00	4.979	1.208	8.550	0.141	6.86E-05	-2.38E-02	
-20	7.4524	270.00000	0.000E+00		0.00E+00	0.00E+00	270.00000	223.573	44.905	30.00	4.979	1.208	8.550	0.141	6.86E-05	-2.38E-02	7.4405
					0.00E+00	0.00E+00	270.00000	223.216	44.881	30.00	4.973	1.210	8.544	0.142	6.89E-05	-2.38E-02	7.4405
					0.00E+00	0.00E+00	270.00000	223.216	44.881	30.00	4.973	1.210	8.544	0.142	6.89E-05	-2.38E-02	7.4286
					0.00E+00	0.00E+00	270.00000	222.859	44.857	30.00	4.968	1.212	8.537	0.142	6.93E-05	-2.38E-02	
-700	5.8408	270.00000	0.000E+00		-4.37E-01	-4.37E+00	270.00000	175.223	41.682	30.00	4.204	1.541	7.570	0.204	1.40E-04	-2.36E-02	5.8290
					-4.37E-01	-4.37E+00	272.18449	174.869	41.658	30.00	4.198	1.544	7.562	0.204	1.41E-04	-2.36E-02	5.8290
					-4.37E-01	-4.37E+00	272.18449	174.870	41.658	30.00	4.198	1.544	7.562	0.204	1.41E-04	-2.36E-02	5.8172
					-4.37E-01	-4.37E+00	272.18449	174.516	41.634	30.00	4.192	1.547	7.554	0.205	1.42E-04	-2.36E-02	
-710	5.8172	274.36899	-4.369E+00		-3.92E-01	-3.92E+00	274.36899	174.516	41.634	30.00	4.192	1.572	7.554	0.208	1.46E-04	-2.36E-02	5.8054
					-3.92E-01	-3.92E+00	276.33076	174.163	41.611	30.00	4.186	1.550	7.547	0.205	1.43E-04	-2.36E-02	5.8054
					-3.92E-01	-3.92E+00	276.33076	174.162	41.611	30.00	4.186	1.550	7.547	0.205	1.43E-04	-2.36E-02	5.7936
					-3.92E-01	-3.92E+00	276.33076	173.809	41.587	30.00	4.179	1.553	7.539	0.206	1.43E-04	-2.36E-02	
-720	5.7936	278.29254	-3.924E+00		-3.49E-01	-3.49E+00	278.29254	173.809	41.587	30.00	4.179	1.601	7.539	0.212	1.52E-04	-2.35E-02	5.7819
					-3.49E-01	-3.49E+00	280.03980	173.456	41.564	30.00	4.173	1.557	7.531	0.207	1.44E-04	-2.36E-02	5.7818
					-3.49E-01	-3.49E+00	280.03980	173.455	41.564	30.00	4.173	1.557	7.531	0.207	1.44E-04	-2.36E-02	5.7701
					-3.49E-01	-3.49E+00	280.03980	173.102	41.540	30.00	4.167	1.560	7.524	0.207	1.45E-04	-2.36E-02	
-1380	4.2582	289.87017	0.000E+00		0.00E+00	0.00E+00	289.87017	127.746	38.516	30.00	3.317	2.269	6.463	0.351	4.16E-04	-2.26E-02	4.2469
					0.00E+00	0.00E+00	289.87017	127.407	38.494	30.00	3.310	2.119	6.455	0.328	3.64E-04	-2.28E-02	4.2468
					0.00E+00	0.00E+00	289.87017	127.404	38.494	30.00	3.310	2.119	6.455	0.328	3.64E-04	-2.28E-02	4.2354
					0.00E+00	0.00E+00	289.87017	127.062	38.471	30.00	3.303	2.125	6.446	0.330	3.67E-04	-2.28E-02	
-1390	4.2354	289.87017	0.000E+00		0.00E+00	0.00E+00	289.87017	127.063	38.471	30.00	3.303	2.281	6.446	0.354	4.23E-04	-2.26E-02	4.2241
					0.00E+00	0.00E+00	289.87017	126.724	38.448	30.00	3.296	2.131	6.437	0.331	3.70E-04	-2.28E-02	4.2240
					0.00E+00	0.00E+00	289.87017	126.721	38.448	30.00	3.296	2.131	6.437	0.331	3.70E-04	-2.28E-02	4.2126
					0.00E+00	0.00E+00	289.87017	126.379	38.425	30.00	3.289	2.136	6.429	0.332	3.73E-04	-2.28E-02	
-1400	4.2127	289.87017	0.000E+00	0.000000	0.00E+00	0.00E+00	289.87017	126.380	38.425	30.00	3.289	2.294	6.429	0.357	4.30E-04	-2.26E-02	4.2014
					0.00E+00	0.00E+00	289.87017	126.041	38.403	30.00	3.282	2.142	6.420	0.334	3.76E-04	-2.28E-02	4.2013
					0.00E+00	0.00E+00	289.87017	126.038	38.403	30.00	3.282	2.142	6.420	0.334	3.76E-04	-2.28E-02	4.1899
					0.00E+00	0.00E+00	289.87017	125.697	38.380	30.00	3.275	2.148	6.411	0.335	3.79E-04	-2.28E-02	
Gasto de desbordamiento = -19.87017																	