



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Un problema referente a vértices absorbentes y
trayectorias monocromáticas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Roberto Santiago Chan Valdés

TUTOR

Juan José Montellano Ballesteros



Ciudad Universitaria, Ciudad de México, 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Este trabajo tuvo el apoyo del PAPIIT de la UNAM IN107218.

Contenido

Introducción	3
1 Primer Capítulo	
Definiciones y resultados básicos	5
Lema 1	12
2 Segundo Capítulo	
Torneos 2-coloreados	13
Teorema 2.1	14
Corolario 2.1.1	19
Lema 2	19
Teorema 2.2	23
Lema 3	26
3 Tercer Capítulo	
Torneos 3-coloreados	27
Teorema 3.1	28
4 Cuarto Capítulo	
Contraejemplos y sus propiedades	35
Teorema 4.1	36
Teorema 4.2	39
Teorema 4.3	41
Proposición 4.3.1	44
Lema 4	44
Teorema 4.4	45
Proposición 4.4.1	47
Proposición 4.4.2	48
Proposición 4.4.3	57
Teorema 4.5	60
Conclusiones	63
Referencias	65

Introducción

A mediados del siglo XVIII, se originó la teoría de gráficas gracias al matemático Leonhard Euler, quien dió entrada a una de las ramas de las matemáticas más importantes en la era moderna tras la publicación de *“La solución de un problema referente a la geometría de posición”*. En dicho artículo se plantea un famoso problema, el cual se nos ha presentado a todos nosotros quienes alguna vez llevamos un curso de teoría de gráficas: *“Los puentes de Königsberg”*.

Dicho problema surgió en una localidad de la antigua Alemania, actualmente Kaliningrado, Rusia, la cual estaba conformada por cuatro superficies de tierra divididas por un río; asimismo, estas cuatro superficies de tierra estaban conectadas entre ellas por medio de siete puentes.

El problema consistía principalmente en encontrar algún *paseo* que permitiese a sus habitantes recorrer todos sus puentes una única vez, por lo que Euler hizo pública su solución en el año de 1736. Desde entonces, esta rama de las matemáticas ha alcanzado un alto nivel de desarrollo, permitiendo así el modelado en áreas referentes a economía, ciencias de la computación y ciencias sociales.

Durante la segunda mitad del siglo XX, el matemático Paul Erdős, de origen húngaro, se propuso la siguiente pregunta: ¿Acaso existirá una función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tal que si los arcos de un torneo T_n son coloreados con m colores, pueda asegurar la existencia de un conjunto de vértices absorbentes de cardinalidad $f(m)$, sin importar qué tan grande sea n ?

El problema quedó abierto por unos años; no obstante, en 1982, Sands, Sauer y Woodrow demostraron que para un torneo T_n dos coloreado, puede asegurarse la existencia de un vértice absorbente sin importar su orden, siempre que sus arcos sean coloreados únicamente con dos colores.

Años más tarde (1988), Shen Ming Gang demostró que si un torneo no contiene triángulos tricromáticos, entonces también podemos asegurar la existencia de vértices absorbentes.

Posteriormente, se realizó un intento por debilitar las hipótesis planteadas por Shen y verificar si el teorema seguía cumpliéndose, sin embargo no fue así.

A lo largo de este trabajo exponemos algunas de las propiedades que dichos torneos deben de satisfacer para así poder asegurar la existencia de vértices absorbentes en T_n , bajo una tres coloración en sus arcos.

1 Primer Capítulo

Definiciones y resultados básicos

En este capítulo se busca contextualizar al lector con respecto a las definiciones que serán utilizadas a lo largo del trabajo, de manera que no de cabida a la ambigüedad al momento de utilizarlas, así como la notación especial que se eligió para este trabajo.

Aquí se definirán los términos que se consideran elementales o bien, aquellos que facilitarán el entendimiento de otras definiciones un poco más complejas.

Definición 1. *Una gráfica $G = (V, E)$ es una pareja ordenada, donde V se dice que es el conjunto de vértices de G y E es un conjunto de parejas de elementos distintos de V , a los que llamamos aristas.*

Siempre que se considere trabajar específicamente con gráficas finitas se aclarará en los enunciados de los teoremas; asimismo, en ocasiones se utilizará la notación $V(G)$ para referirse al conjunto de vértices de la gráfica G , así como la notación $E(G)$ permitirá referirse al conjunto de aristas de G .

Definición 2. *Sea G una gráfica. Si la pareja $\{u, v\}$ es elemento de $E(G)$, se dice que u y v son **vértices adyacentes** y se referirá a ellos como **vecinos** uno de otro. El conjunto de vecinos de un vértice v se conocerá como la **vecindad abierta** de v . La vecindad abierta de un vértice v junto con el vértice u , será llamada la **vecindad cerrada** de v .*

Definición 3. *Una digráfica $\vec{G} = (V, E)$ es una pareja ordenada, donde V se dice que es el conjunto de vértices de \vec{G} , y E es un conjunto de parejas ordenadas de elementos distintos de V , los cuales serán llamados arcos de \vec{G} .*

Definición 4. La **valencia** o el **grado** de un vértice se define como la cardinalidad de la vecindad abierta de v . Se utilizará $\delta(v)$ para referirse al grado de v .

Notemos que si se quiere trabajar con digráficas esta definición de valencias no resulta ser la más adecuada, pues no permite una distinción entre arcos salientes y arcos entrantes de v . Es por ello que se considera necesario refinar la definición para que permita dar una orientación a los arcos.

Definición 5. Sea \vec{G} una digráfica. Si $a = (u, v)$ es un arco de $E(\vec{G})$ orientado de u hacia v , se dice que a es **incidente de** u y que a es **incidente a** v . Consecuentemente u es **adyacente a** v y v es **adyacente de** u .

Definición 6. Sea \vec{G} una digráfica. Se llamará **ingrado** de v a la cardinalidad del conjunto de arcos de v , que se dirigen a v . Se referirá al ingrado de v como $\delta^-(v)$.

Definición 7. Sea \vec{G} una digráfica. Se llamará **exgrado** de v a la cardinalidad del conjunto de arcos de v , salientes de v . Se referirá al exgrado de v como $\delta^+(v)$.

Utilizando las definiciones 6 y 7 se puede ver que en efecto se satisface la definición 4

$$\delta^+(v) + \delta^-(v) = \delta(v).$$

Definición 8. Se llamará **secuencia de exgrados** de una digráfica \vec{G} a una n -ada no decreciente $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ donde cada entrada corresponde al exgrado de cada uno de los vértices de \vec{G} acomodado no decrecientemente.

Definición 9. Se dice que una gráfica (digráfica) es de **orden** n , cuando la cardinalidad del conjunto V es igual a n . Análogamente, se dice que una gráfica (digráfica) es de **tamaño** m , cuando la cardinalidad del conjunto E es igual a m .

Si G es de orden 1, G es una gráfica trivial. Si G es de tamaño 0, G es una gráfica vacía.

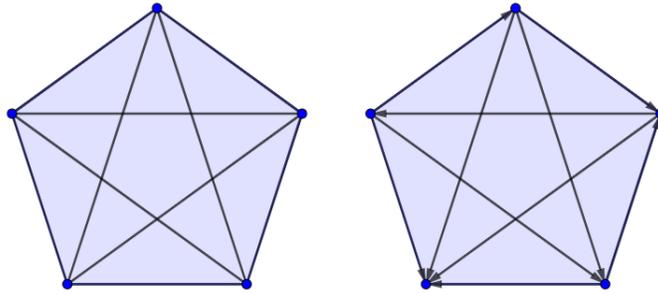


Figura 1: De lado izquierdo una gráfica y de lado derecho una digráfica, ambas de orden 5 y tamaño 10.

Definición 10. Se dice que G es **completa** si para cada par de vértices $u, v \in V$, $\{u, v\} \in E(G)$. Se utilizará K_n para referirse a una gráfica completa de orden n .

Definición 11. Se dice que una digráfica \vec{G} es un torneo, si para cualquier par de vértices $x, y \in V(\vec{G})$, se tiene que $(x, y) \in E(\vec{G})$ ó $(y, x) \in E(\vec{G})$ (pero no ambos). Se utiliza T_n para denotar un torneo de orden n .

Definición 12. Se dice que T_n^{-1} es la **inversa** de T_n , si para cada $(x, y) \in E(T_n)$, $(y, x) \in E(T_n^{-1})$.

En la figura 1, no sólo se eligieron arbitrariamente dos gráficas para ejemplificar lo que es orden y tamaño, sino que también sirven para diferenciar un K_5 de un T_5 , respectivamente.

Dentro de este trabajo, se encontrarán contenidas gráficas con formas características, las cuales dentro de la teoría de gráficas tienen asignada notación especial, es por ello que al ser estructuras a las cuales recurriremos constantemente, se introducen a continuación:

Definición 13. *Un u - v camino dirigido W en \vec{G} es una sucesión de vértices*

$$W = (u = x_1, x_2, \dots, x_r = v)$$

que da inicio en el vértice u y concluye en el vértice v , tal que para cada $i \in \{1, \dots, r - 1\}$, ocurre que $(x_i, x_{i+1}) \in E(\vec{G})$.

Definición 14. *Un u - v paseo dirigido T en \vec{G} es un u - v camino que no repite arcos.*

Definición 15. *Una u - v trayectoria dirigida P en \vec{G} es un u - v camino que no repite vértices.*

Definición 16. *Llamamos **ciclo dirigido** a aquella trayectoria dirigida de orden $n \geq 3$, formada por una sucesión de vértices que da inicio en el vértice v y concluye en él mismo.*

$$C_n = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1} = v_1)$$

Se utilizará la notación \vec{C}_n para referirse a un ciclo de orden n .

Definición 17. *Se dice que una trayectoria dirigida en una digráfica \vec{G} es una **trayectoria hamiltoniana** si esa trayectoria contiene a cada vértice de \vec{G} .*

Definición 18. *Dados dos vértices u, v de una digráfica, al hecho de que exista una u - v trayectoria dirigida se denota como $u \rightarrow v$. Si en particular*

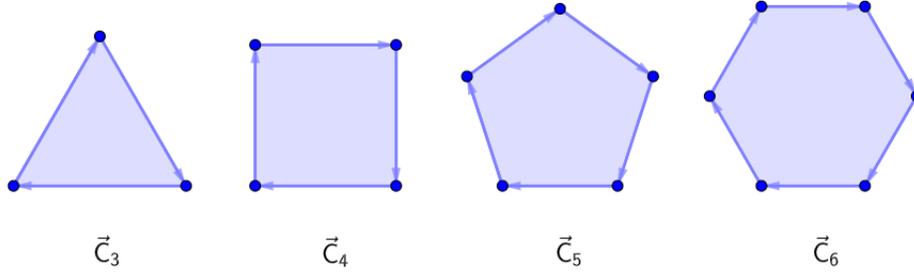


Figura 2: Se muestran las gráficas cíclicas mencionadas en la definición 16.

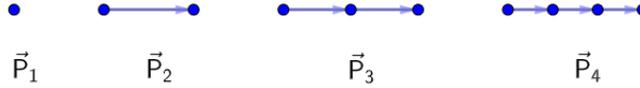


Figura 3: Las trayectorias mencionadas en la definición 15.

Figura 4: Ciclos y trayectorias.

se quiere referir a la trayectoria formada por dos vértices adyacentes, los cuales están conectados en el sentido que afirma la trayectoria por medio de una sola arista se dice que $u \rightarrow_* v$, es decir, un arco (u, v) .

En ocasiones, en lugar de hablar de $u - v$ trayectorias dirigidas, se hablará sobre trayectorias hacia un conjunto, es decir, si $S \subseteq V(G)$ y se hace referencia a una $u - S$ trayectoria, entonces se quiere decir que existe una trayectoria que parte en u y concluye en algún vértice de S . Para referirse a estos casos, se utiliza $u \rightarrow S$ como notación.

En medida que se avanza en el trabajo se verá en la necesidad de hacer hincapié en la no-existencia de estas trayectorias dirigidas. Si no existe una trayectoria dirigida de u a v , entonces se dice que $u \not\rightarrow v$; de igual manera, si se desea expresar que el arco que une u con v no tiene el sentido de la trayectoria, entonces se dice que $u \not\rightarrow_* v$. Finalmente, si se quiere mencionar que no existe una trayectoria dirigida del vértice u hacia $S \subseteq V(G)$, se dice que $u \not\rightarrow S$.

Definición 19. La **longitud** de una $u - v$ trayectoria dirigida se define como la cantidad de arcos que conforman la misma trayectoria.

Definición 20. Una **m -coloración** de los arcos de una digráfica \vec{G} es una función:

$$f : E(\vec{G}) \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$$

Definición 21. Se dice que una digráfica \vec{G} está **m -coloreada**, si está “coloreada” por una m -coloración sobre el conjunto $E(\vec{G})$.

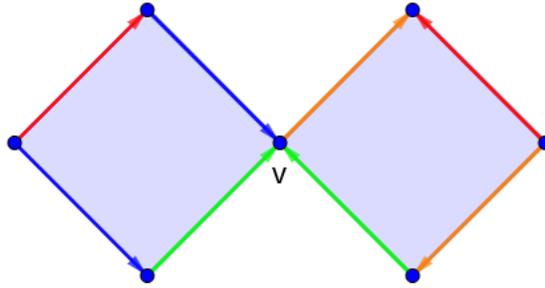


Figura 5: Una digráfica 4-coloreada formada por dos bloques, donde cada uno de ellos es un C_4 , los cuales están unidos por un vértice de corte v .

Definición 22. Una u - v trayectoria dirigida en una digráfica \vec{G} m -coloreada, se dice que es una **trayectoria monocromática** si cada uno de los arcos que la conforman son del mismo color. Para referirse a este tipo de trayectorias se utilizará $u \rightarrow^m v$ si se habla de una trayectoria monocromática en general (es necesario recalcar que el super índice m viene de la inicial de monocromático y no tiene que ver con la cantidad de colores utilizados para colorear \vec{G}), o $u \rightarrow^i v$ si se refiere a una trayectoria monocromática de color i ; análogamente como se mencionó posteriormente a la definición 18 si se quiere negar una trayectoria de color i , se dice $u \not\rightarrow^i v$.

Definición 23. Se dice que v **absorbe** a u si $u \rightarrow^m v$.

Definición 24. Se dice que v es **vértice m -absorbente** de \vec{G} , si para todo $u \in V(G) - \{v\}$ ocurre que $u \rightarrow^m v$.

Definición 25. Se llama a S **conjunto de vértices absorbentes** de \vec{G} , si para todo $u \in V(G) - S$, ocurre que $u \rightarrow^m S$.

Definición 26. Se dice que $S \subseteq V(G)$ es un **conjunto independiente** de vértices si para todo $v_i, v_j \in S$, con i, j distintos, $v_i \not\rightarrow^m v_j$ y $v_j \not\rightarrow^m v_i$.

Definición 27. Se dice que v es **vértice m -dominante** de \vec{G} si para todo $u \in V(G) - \{v\}$ ocurre que $v \rightarrow^m u$.

Así como se enuncian las definiciones que se utilizarán a lo largo del texto, se enunciarán algunas definiciones más junto con el Lema de Zorn, el cual será utilizado en el primer resultado del siguiente capítulo.

Definición 28. Se llama $((X, R))$ a la relación binaria R , sobre el conjunto X .

Definición 29. Se dice que (X, R) es un **Conjunto Parcialmente Ordenado**, si para cualesquiera $a, b, c \in X$, se tiene que:

- aRa (Reflexividad)
- Si aRb y bRa , entonces $a = b$ (Antisimetría)
- Si aRb y bRc , entonces aRc (Transitividad)

Definición 30. Se dice que una **cadena** de un conjunto ordenado X es un subconjunto tal que para cada dos elementos $x, y \in X$, se tiene que $x \leq y$ ó $y \leq x$.

Definición 31. Se dice que x es una **cota superior** de X , si para cada elemento $y \in X$, ocurre que $y \leq x$.

Definición 32. *Se dice que un conjunto X es **acotado superiormente** o que tiene **maximal**, si X tiene una cota superior.*

Lema 1. *(Lema de Zorn) Si \mathcal{X} es un conjunto parcialmente ordenado tal que toda cadena en \mathcal{X} esta acotada superiormente, entonces \mathcal{X} tiene un elemento maximal.*

2 Segundo Capítulo

Torneos 2-coloreados

Paul Erdős dejó una colección de problemas de los cuales una cantidad considerable de ellos siguen abiertos hoy en día, algunos de ellos se dieron a conocer en conferencias y charlas con los tantos colegas con quienes él colaboró (Ver [6]). Si bien, el problema que se aborda en este trabajo no fue trabajado directamente por él, se dice que el primer acercamiento al problema se dio en sus charlas.

En el año de 1982, B. Sands, N. Sauer y R. Woodrow publicaron un artículo llamado “On Monochromatic Paths in Edge-Coloured Digraphs” (ver [1]), en donde abrieron paso a los primeros teoremas que hablaron formalmente de vértices absorbentes mediante trayectorias monocromáticas. En este capítulo se exponen teoremas para entender con mayor claridad el desarrollo del problema principal de esta tesis. Comenzando con un teorema que afirma la existencia de un conjunto de vértices absorbentes en digráficas dos coloreadas, seguido de un corolario y otro teorema que aseguran la existencia de un vértice absorbente en torneos tres coloreados bajo algunas condiciones, que más adelante, se verán con mayor detenimiento.

Teorema 2.1. *Sea \vec{G} una gráfica dirigida cuyas aristas están coloreadas por 2 colores, tal que \vec{G} no contiene ninguna trayectoria dirigida infinita monocromática. Entonces existe un conjunto $S \subseteq V(\vec{G})$ tal que, para todo vértice $x \notin S$ hay una trayectoria monocromática de x a S .*

La idea de la siguiente demostración consiste en definir una familia de conjuntos que satisfagan algunas propiedades particulares, junto con un orden parcial. Dentro de este conjunto parcialmente ordenado se considera un subconjunto el cual se prueba que tiene la propiedad de ser cadena, y al cual posteriormente se le aplica el Lema de Zorn para probar la existencia de un elemento maximal. Este elemento maximal resultará ser el conjunto absorbente de \vec{G} .

Demostración

Sean S, T, R conjuntos independientes de vértices en $V(\vec{G})$. Se dice que $S \leq T$ si para cada $s \in S$ existe un $t \in T$ tal que $s = t$ ó $s \rightarrow^b t$ y $t \not\rightarrow^b s$.

A continuación se verá que \leq define un orden parcial.

i . Reflexividad

Sea S un conjunto independiente. Como para cada $s \in S$, existe $s \in S$ tal que $s = s$, entonces $S \leq S$.

ii . Antisimetría

$$S \leq T \text{ y } T \leq S \implies S = T$$

Sean S y T conjuntos independientes y sea $S_1 = S \cap T$. Para cada $x \in S_1 \subset S$, existe ella misma en T , de tal forma que cumple la condición de orden que se propuso restringida a la intersección de S y T .

Supóngase que existe $x_0 \in S - S_1$, por hipótesis existe $y_0 \in T - S_1$, tal que $x_0 \rightarrow^b y_0$ y $y_0 \not\rightarrow^b x_0$. Análogamente, por hipótesis existe un

$x_1 \in S - S_1$, para la cual $y_0 \rightarrow^b x_1$ y $x_1 \not\rightarrow^b y_0$; sin embargo, esto resulta en una contradicción a la independencia de S tras la suposición de un elemento fuera de S_1 . Por lo que, $S = T$.

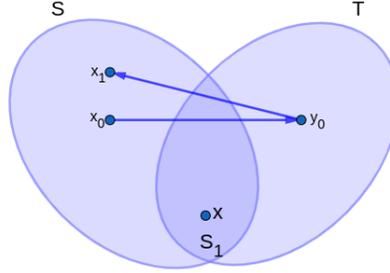


Figura 6: Esbozo de prueba de antisimetría.

iii Transitividad

$$S \leq R \text{ y } R \leq T \implies S \leq T$$

Sean S , R y T conjuntos independientes y sea $S_1 = S \cap T$. Para cada $x \in S_1 \subset S$, existe ella misma en T , de tal forma que cumple con la condición de orden que se propuso restringida a la intersección de S y T .

Supóngase $x_0 \in S - S_1$, por hipótesis, existe $r_0 \in R$ tal que $x_0 = r_0$ ó $x_0 \rightarrow^b r_0$ y $r_0 \not\rightarrow^b x_0$.

- Si $x_0 = r_0$, al ser $R \leq T$, existe $y_0 \in T$, tal que $r_0 \rightarrow^b y_0$ y $y_0 \not\rightarrow^b r_0$.

Supóngase entonces $x_0 \neq r_0$. Por hipótesis, existe $y_0 \in T$, tal que $r_0 = y_0$ ó $r_0 \rightarrow^b y_0$ y $y_0 \not\rightarrow^b r_0$.

- Si $r_0 = y_0$, al ser $S \leq R$, se vió que $x_0 \rightarrow^b r_0$ y $r_0 \not\rightarrow^b x_0$.

Supóngase entonces $r_0 \neq y_0$. Como $x_0 \rightarrow^b r_0$ y $r_0 \rightarrow^b y_0$, podemos asegurar que $x_0 \rightarrow^b y_0$. Si se supone que $y_0 \rightarrow^b x_0$, se llega a $y_0 \rightarrow^b r_0$, lo cual es una contradicción. Por lo que $y_0 \not\rightarrow^b x_0$. Demostrando así, que $S \leq T$.

Se llamará Υ a la familia de todos los conjuntos independientes no vacíos $S \subseteq V(\vec{G})$ tal que para todo $y \in V(\vec{G})$, $S \rightarrow^r y$ implica que $y \rightarrow^m S$.

Afirmación: $\Upsilon \neq \emptyset$.

Supóngase que $\Upsilon = \emptyset$. Entonces para todo vértice $u \in V(\vec{G})$ ocurre que existe un $v \in V(\vec{G})$, tal que $u \rightarrow^r v$ y $v \not\rightarrow^r u$; sin embargo, esto resulta una contradicción, ya que en la hipótesis se pide que G no contenga trayectorias infinitas monocromáticas. Por lo tanto $\Upsilon \neq \emptyset$.

Afirmación: (Υ, \leq) tiene elemento maximal.

Sea Γ una cadena en (Υ, \leq) .

Se definirá a $S^\infty = \{ s \in \cup \Gamma: \exists S \in \Gamma, \text{ tal que } s \in T \text{ siempre que } T \in \Gamma \text{ y } S \leq T \}$. Se probará que S^∞ no es vacío, es independiente y está contenido en Υ , para utilizar posteriormente el Lema de Zorn en (Υ, \leq) .

Sea $S \in \Gamma$ tal que $s \in S$ y $s \notin S^\infty$. Entonces existe $S_1 \in \Gamma$ tal que $s \notin S_1$ y $S \leq S_1$. Así existe un $s_1 \in S_1$ que por definición de nuestro orden, $s \rightarrow^b s_1$ y $s_1 \not\rightarrow^b s$. Si $s_1 \in S^\infty$ entonces S^∞ no es vacío. Suponiendo que $s_1 \notin S^\infty$, entonces existe $S_2 \in \Gamma$ tal que $s_1 \notin S_2$ y $S_1 \leq S_2$. Así debe existir un $s_2 \in S_2$ que por definición del orden, $s_1 \rightarrow^b s_2$ y $s_2 \not\rightarrow^b s_1$ y por tanto $s \rightarrow^b s_2$. Si ocurriese que $s_2 \rightarrow^b s$, entonces $s_2 \rightarrow^b s_1$ lo cual no puede suceder. Por tanto $s_2 \not\rightarrow^b s$. Si $s_2 \notin S^\infty$, se puede iterar este proceso una y otra vez hasta encontrar un $s_n \in S_n$ con $s_n \in S^\infty$ tal que $s \rightarrow^b s_n$ y $s_n \not\rightarrow^b s$. Este proceso es finito porque, de no ser así, debería existir una trayectoria monocromática infinita azul; no obstante, esto último no puede ocurrir. Por tanto $S^\infty \neq \emptyset$.

Nótese que para toda $S \in \Gamma$ se cumple que $S^\infty \geq S$, pues si $S \in \Gamma$, por como se vió en la prueba anterior, para cada elemento $x \in S$, $x \in S^\infty$, o existe $x^\infty \in S^\infty$ tal que $x \rightarrow^b x^\infty$ y $x^\infty \not\rightarrow^b x$.

Sea $s, t \in S^\infty$ vértices arbitrarios y supongamos que $S, T \in \Gamma$ cumplen que $s \in S, t \in T$ y $S \leq T$. Por como se definió S^∞ , $s \in T$ y por ser T independiente, s y t no pueden estar conectados por trayectorias monocromáticas. Por tanto S^∞ es independiente.

Sea $s \in S^\infty$, entonces existe $S \in \Gamma$ tal que $s \in S$. Sea $y \in V(G)$ un vértice arbitrario. Supóngase $s \rightarrow^r y$, es decir, $S \rightarrow^r y$. Por definición de Υ sucede que $y \rightarrow^r S$ aunque no necesariamente a la misma s . Así, existe $x \in S$ que sí cumple con $y \rightarrow^r x$. Si $x \in S^\infty$ se cumpliría la definición de Γ para $S^\infty \subseteq V(G)$. Supóngase que $x \notin S^\infty$, necesariamente $x \neq s$. Al ocurrir que $x \in S$, existe $x^\infty \in S^\infty$ tal que $x \rightarrow^b x^\infty$ y por ende $s \rightarrow^b x^\infty$. Así se ha probado que $S^\infty \in \Upsilon$.

Tras probar que toda cadena (Υ, \leq) tiene una cota superior y que el conjunto es no vacío es posible aplicar el Lema de Zorn con lo que se concluye que (Υ, \leq) cuenta con un elemento maximal.

Ahora, sea S un elemento maximal de (Υ, \leq) . Se afirma que S es un conjunto del cual se habla en el teorema. Supóngase que existe $x \in W \subseteq V(G)$, tal que $W \cap S = \emptyset$ y $W \not\rightarrow^m S$. Se puede tomar esa x de tal forma que si hubiese otros elementos en W aparte de él, existiría un vértice $y \in W$, tal que si $y \rightarrow^r x$, necesariamente ocurre $x \rightarrow^r y$, de lo contrario se tendría una trayectoria infinita monocromática contenida en W , y como $y \in W$, entonces $y \not\rightarrow^m S$.

Sea $T = \{t \in S \mid t \not\rightarrow^b x\}$. Suponiendo que $S \neq T$, se tiene que $(S-T) \rightarrow^b x$, entonces $T \cup \{x\}$ es independiente porque $T \subseteq S$ con S independiente y se tomó a x tal que $x \not\rightarrow^m S$, por otro lado $(S-T) \rightarrow^b x$. Por la definición de orden $T \cup \{x\} > S$. Como S es elemento maximal en (Υ, \leq) , entonces $T \cup \{x\}$ no debe cumplir la condición que pide Υ , es decir, existe un vértice $y \notin S$ tal que:

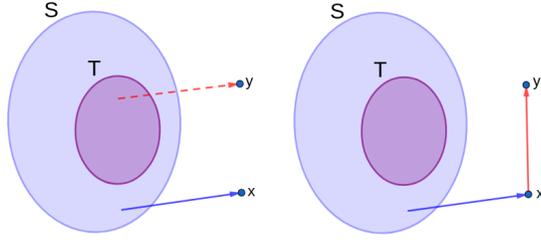


Figura 7: En la izquierda se ilustra la suposición de $T \rightarrow^r y$. En la derecha lo que se concluye de suponer lo de la figura izquierda.

$$T \cup \{x\} \rightarrow^r y \text{ y } y \not\rightarrow^m T \cup \{x\} \quad (1)$$

Analizando esto último:

Si $T \rightarrow^r y$ automáticamente $S \rightarrow^r y$, pues $T < S$, y por Υ , $y \rightarrow^m S$, en particular $y \rightarrow^m (S - T)$.

Si ocurriese $y \rightarrow^r (S - T)$ contradiría la independencia de S porque $T \rightarrow^r y$.

Si ocurriese $y \rightarrow^b (S - T)$ contradiría la segunda condición de (1), porque $(S - T) \rightarrow^b x$. Por tanto de (1), se puede concluir que $T \not\rightarrow^r y$ y necesariamente $x \rightarrow^r y$.

Por otro lado, $y \not\rightarrow^m S$:

Si $y \rightarrow^r S$, por el resultado anterior $x \rightarrow^r S$ lo cual es una contradicción.

Si $y \rightarrow^b S$, ocurre que $y \rightarrow^b x$ porque $(S - T) \rightarrow^b x$, lo cual es una contradicción a la segunda condición de (1).

También por la segunda condición de (1) es claro que $y \not\rightarrow^r x$ lo cual es una contradicción a como se eligió x . Por tanto, S es el conjunto absorbente del cual se habla en el enunciado del teorema; y en consecuencia, el teorema queda demostrado.

□

De este teorema surge un caso especial para cuando G es un torneo finito. Es sencillo notar que al considerar un torneo finito, nuestra gráfica dirigida no

contiene trayectorias infinitas monocromáticas. Por otra parte, un conjunto S independiente en un torneo no puede contener más de un vértice.

Corolario 2.1.1. *Sea T un torneo finito cuyas aristas están coloreadas por dos colores. Entonces existe un vértice v de T tal que para todo vértice x de T hay una trayectoria monocromática de x a v .*

El corolario 2.1.1 asegura la existencia de vértices absorbentes en toda coloración con dos colores de los arcos de un torneo; asimismo, el siguiente resultado asegura la existencia de vértices absorbentes en toda *coloración* con un color de los arcos de un torneo.

Lema 2. *Si los arcos de T son monocromáticos entonces $x \rightarrow z$ es de longitud a lo más 2, donde z es el absorbente de T .*

Demostración

La prueba se realizará por inducción sobre el orden de T .

T_2 y T_3 son casos triviales, en la figura se puede ver que la longitud del resto de los vértices al absorbente es a lo más 2.

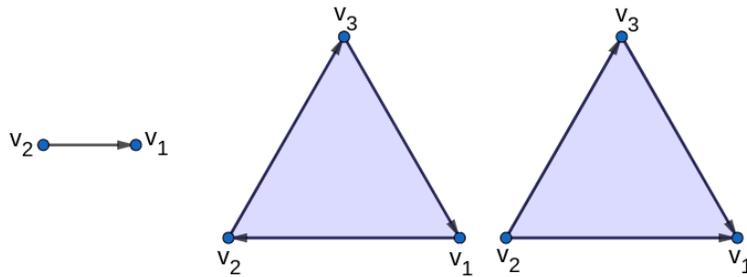


Figura 8: En estos 3 torneos v_1 es el absorbente del torneo de orden 2 y de los torneos de orden 3, C_3 -monocromático y T_3 -monocromático, respectivamente.

Sea T_{n+1} un torneo de orden $n + 1$. Remuévase un vértice arbitrario y nómbrese v_0 . Se sabe por hipótesis inductiva que por el corolario anterior

T_n cuenta con un vértice v absorbente tal que para todo vértice $x \in T_n$, $x \rightarrow v$ con longitud de a lo más 2.

Regresando v_0 a T_n . Si $v_0 \rightarrow_* v$ la observación se cumple. Supóngase que $v_0 \not\rightarrow_* v$, es decir, $v \rightarrow_* v_0$ puesto que se está trabajando en un torneo. Como v es absorbente entonces existe un conjunto $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ tal que $w_i \rightarrow v$ con longitud 1 para $i = \{1, 2, \dots, k\}$.

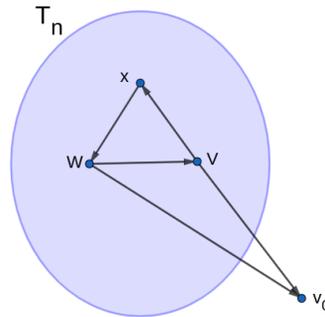


Figura 9: Esbozo de la prueba del lema.

Evidentemente, si $v_0 \rightarrow_* w_i$ para alguna i , la observación se cumple. Supóngase lo contrario, si $w_i \rightarrow_* v_0$ para toda i , fijémonos en el resto de los vértices x que no llegan a v por medio de una sola arista, es decir, $x \rightarrow_* w_i$ para alguna i . Así $v \rightarrow_* v_0$ y $w_i \rightarrow_* v_0$ por medio de una sola arista y $x \rightarrow v_0$ por medio de 2 aristas, de tal forma que v_0 es el absorbente de T_{n+1} y cumple con el lema.

□

Si se colorea con 3 colores a T_n , no necesariamente se cumple la existencia de un absorbente (ver figura 10).

Es posible extenderse a más casos sin vértices absorbentes de orden finito añadiendo vértices partiendo de la figura anterior.

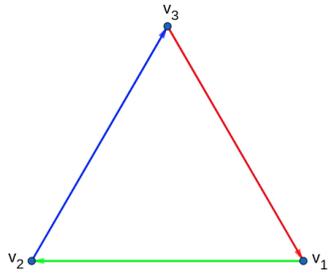


Figura 10: En un torneo cíclico de orden 3, no se satisface el corolario.

Considérese un torneo de orden 9 con la siguiente coloración:

$(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$ rojo.

$(a_2, a_3), (b_2, b_3), (c_2, c_3)$ azul.

$(a_3, a_1), (b_3, b_1), (c_3, c_1)$ verde.

(a_i, b_j) rojo.

(b_i, c_j) azul.

(c_i, c_j) verde.

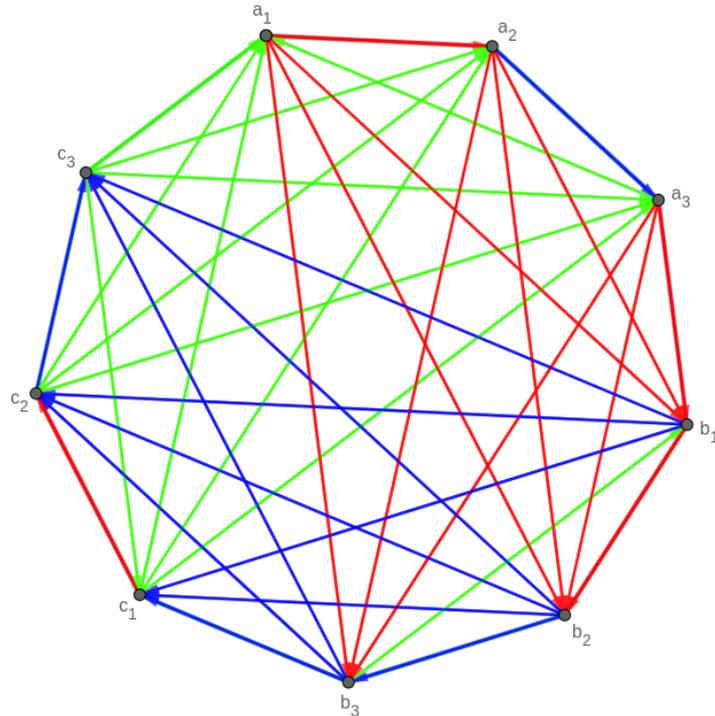


Figura 11: Contraejemplo de corolario, de orden 9.

Afirmación: En la figura anterior, no existe un conjunto S conformado por dos elementos, tal que S sea absorbente; más aún, se requieren tres vértices para generar un conjunto absorbente.

Es sencillo notar la cantidad de arreglos de pares de vértices pueden obtenerse en la figura:

$$\binom{9}{2} = 36 \text{ arreglos}$$

Como cada arreglo de 2 vértices es repetido 3 veces por la simetría de la figura, entonces en total tenemos 12 arreglos distintos, donde el resto de las configuraciones pueden ser obtenidas de las primeras 12 al rotar la figura y reetiquetar vértices. A continuación se presentan los 12 casos con la siguiente notación: $\{v_0, v_1\}_{v_2}$ donde $S = \{v_0, v_1\}$ es el arreglo y v_2 el primer vértice

tal que $v_2 \not\rightarrow^m S$.

$$\begin{array}{cccccc} \{a_1, a_2\}_{b_1} & \{a_1, a_3\}_{b_1} & \{a_1, b_1\}_{b_2} & \{a_1, b_2\}_{b_3} & \{a_1, b_3\}_{b_1} & \{a_2, a_3\}_{b_1} \\ \{a_2, b_1\}_{b_2} & \{a_2, b_2\}_{b_3} & \{a_2, b_3\}_{b_1} & \{a_3, b_1\}_{b_2} & \{a_3, b_2\}_{b_3} & \{a_3, b_3\}_{b_1} \end{array}$$

De aquí puede verse que dada esa coloración dos vértices no son suficientes para formar un conjunto S absorbente. Necesariamente se necesitan tres vértices, sin embargo no cualesquiera de ellos, puesto que no cualquiera tres que se tomen conforman un conjunto absorbente.

El corolario 2.1.1 menciona que dado un torneo dos coloreado es posible asegurar la existencia de un vértice absorbente; no obstante, es posible encontrar un absorbente en una 3-coloración si se añaden algunas hipótesis más al enunciado, como las que se verán a continuación:

Teorema 2.2. *Sea T un torneo cuyos arcos están coloreadas por 3 colores, y donde sus vértices pueden ser particionados en bloques disjuntos tales que:*

1. *Si dos vértices se encuentran en bloques distintos, siempre estarán conectados por un arco rojo.*
2. *Si dos vértices se encuentran en el mismo bloque, siempre estarán conectados por una arco azul o una arco verde.*

Entonces existe un vértice v tal que para todo vértice $x \in T$, hay una trayectoria monocromática de x a v .

Demostración

Sean B_1, B_2, \dots, B_n los bloques de T .

Se define un orden total en cada bloque de la siguiente manera:

Consideremos al bloque B_{i_0} . Al ser un subtorneo de T y estar sus arcos

coloreados por dos colores, por el corolario 2.1.1, se sabe que existe un vértice v_1 , el cual absorbe monocromáticamente al resto de vértices en B_{i_0} . Análogamente, por el mismo corolario, en $B_{i_0} - \{v_1\}$ existe un vértice absorbente monocromáticamente v_2 . Entonces se dirá que $v_2 < v_1$. Si se continua este proceso, se obtiene un orden total para cada B_i , de tal forma que para cada par de vértices $w, z \in B_i$ y $w < z$, entonces existe una trayectoria monocromática de w a z .

Como consecuencia de las condiciones que se dieron en el teorema, si $x, v \in T$, se escribirá $x \rightarrow^m v$ si ocurre alguna de las siguientes condiciones:

- I. x y v están en distintos bloques de T y $x \rightarrow^r v$
- II. x y v están en el mismo bloque de T y $x < v$
- III. x y v están en el mismo bloque de T , $v < x$ y $x \rightarrow^r v$

Se define la función $\eta(v)$ como la cantidad de vértices x para los cuales $x \rightarrow^m v$. Dicho esto, se considera al vértice v tal que $\eta(v)$ sea maximal. Sin perder generalidad suponemos que $v \in B_1$. Se verá que el vértice v satisface las condiciones del teorema.

Supóngase que existe w un vértice fuera de B_1 tal que $w \not\rightarrow^m v$. Como se está trabajando en un torneo, $v \rightarrow_*^r w$, y para cada x tal que $x \rightarrow_*^r v$, $x \rightarrow_*^r w$, porque de no ser así, se contradice la suposición.

Por la propiedad de ser $\eta(v)$ maximal, se sabe que $\eta(v) \geq \eta(w)$. Si ocurriese que $\eta(v) = \eta(w)$, se nota que v está siendo considerado en $\eta(w)$ pero no en $\eta(v)$. En cualquier caso se puede asegurar que existe un vértice v' , tal que $v' \rightarrow v$ pero $v' \not\rightarrow w$. Dicho vértice puede ser elegido de tal forma que $v'' \rightarrow^r w$ para todo $v'' \in B_1$ que cumpla que $v' < v'' < v$. Si no existen v'' entonces basta con tomarse a v' como el predecesor directo de v . Esto se verá más claro a continuación.

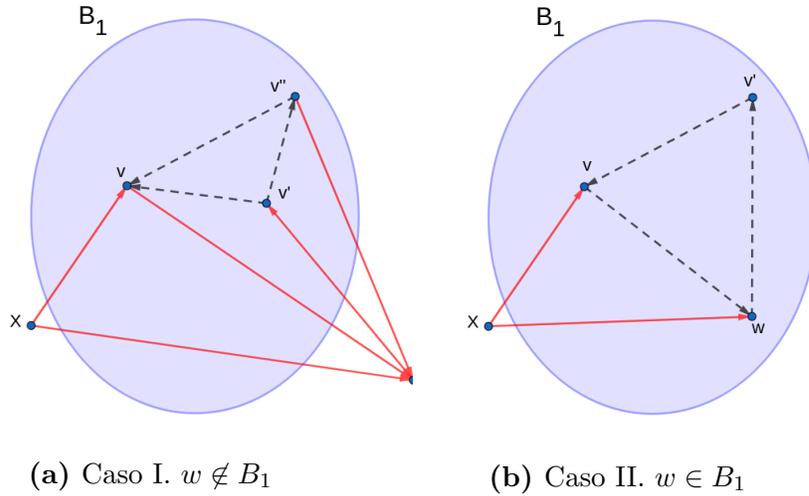


Figura 12: Esbozo de la demostración del teorema, donde las líneas punteadas denotan un trayectoria monocromática que puede ser azul o verde.

Nótese que $x \rightarrow^r v'$, $v \rightarrow^r v'$, $v'' \rightarrow^r v'$ y más aún $w \rightarrow^r v'$. Por lo que $\eta(v') > \eta(v)$, lo cual contradice la maximalidad de $\eta(v)$.

Por otro lado, supóngase que existe $w \neq v$ un vértice dentro de B_1 tal que $w \not\rightarrow_*^m v$, entonces $v < w$, $v \rightarrow_*^m w$ por medio de un solo arco y también $w \not\rightarrow^r v$ y al igual que el caso anterior para cada x tal que $x \rightarrow^r v$, $x \rightarrow^r w$ por medio de un solo arco.

Se sabe que $\eta(v) \geq \eta(w)$, por el mismo razonamiento del caso anterior existe un vértice $v' \in B_1$ tal que $v' \rightarrow^m v$ pero $v' \not\rightarrow^m w$, por lo cual necesariamente $w < v'$. Entonces:

$$v < w < v' \quad (2)$$

Por la condición III, al pertenecer ambos vértices al mismo bloque, si $v < v'$ y $v' \rightarrow^m v$ entonces $v' \rightarrow^r v$, es decir, para alguna x fuera de B_1 , $v' \rightarrow^r x$ y como $x \rightarrow^r w$ obtenemos $v' \rightarrow^r w$, lo cual contradice la existencia de $v' \in B_1$ tal que $v' \rightarrow^m v$ pero $v' \not\rightarrow^m w$.

Se llegó a estas dos contradicciones al suponer que el vértice v elegido, no

es absorbente monocromáticamente.

□

Lema 3. *Dada la estructura del torneo descrita en el teorema 2.2, éste no contiene T_3 tricromáticos.*

Demostración

Considérense los siguientes casos:

1. *Sean tres vértices en el mismo bloque.* Nótese que al estar los tres vértices en un mismo bloque, se tiene un triángulo dos coloreado.
2. *Sean dos vértices en en el mismo bloque.* Supóngase que dos de ellos están en el bloque B_i y el otro vértice está en B_j , para $i \neq j$. Nótese que este triángulo también será dos coloreado, dado que los dos arcos que relacionan B_i y B_j serán de color rojo, mientras que el arco restante puede ser de color azul o verde.
3. *Sean tres vértices en tres bloques distintos.* Se tiene un triángulo monocromático de color rojo, dado que cada vértice estará en bloques distintos.

Por lo tanto, no existen T_3 tricromáticos dentro de torneos construidos bajo las condiciones del teorema 2.2.

3 Tercer Capítulo

Torneos 3-coloreados

Antes de finalizar el capítulo anterior, se hizo una observación en la cual se afirmaba que bajo las condiciones del último teorema no existen triángulos transitivos tricromáticos. Esto evidentemente levantó incógnitas a los autores anteriores y dejaron un problema abierto: Si T es un torneo cuyos arcos están coloreados por 3 colores y no contiene T_3 -tricromáticos, ¿Se puede asegurar la existencia de un vértice absorbente?

Sin embargo, no fue hasta 1988 cuando Shen Ming Gang dió respuesta a ello en su artículo: “On Monochromatic Paths in m -coloured Tournaments”. En él se da respuesta a esa incógnita tras el teorema 3.1 que se expone a continuación, en el cual asegura la existencia de algún vértice absorbente en torneos que no contienen tanto C_3 , como T_3 tricromáticos. Una vez expuesto dicho teorema se piensa debilitar las hipótesis pidiéndole a T m -coloreada que no contenga C_3 -tricromático o T_3 -tricromático, donde en cada uno de los casos nos llevan a exponer un par de contraejemplos.

La importancia de este capítulo recae en que se introduce de forma clara el problema que se estará trabajando en capítulos posteriores en esta tesis, tras los contraejemplos mencionados anteriormente.

Teorema 3.1. *Sea T un torneo m -coloreado tal que T no contiene T_3 -tricromático ni C_3 -tricromático. Entonces existe un vértice $v \in V(T)$ tal que para todo $x \in V(T)$, hay una trayectoria monocromática de x a v .*

Demostración

La prueba se realizará por inducción sobre el orden de T .

Para los casos base $n = 1$ y $n = 2$ se cumple trivialmente el teorema.

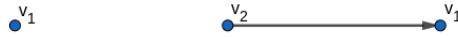


Figura 13: Para T_1 y T_2 , v_1 es el vértice absorbente.

Como hipótesis inductiva se supondrá que el enunciado del teorema es cierto para todo torneo de orden menor a n con $n > 2$.

Se sabe por hipótesis de inducción que si quitamos un vértice v de T_n , existe algún vértice w , para el cual, $x \rightarrow^m w$ para todo $x \in V(T_n) - \{v\}$.

Se propone una función f , donde si se remueve a v , entonces $f(v)$ resulta el vértice absorbente de $T_n - \{v\}$, el cual se llamará el *predecesor* de v .

Afirmación: Si f no es inyectiva, entonces existe un vértice m -absorbente. Supóngase que para $u \neq v$, $f(u) = f(v)$.

Al momento de quitar a u se puede asegurar por hipótesis de inducción que para cualquier otro vértice existe una trayectoria monocromática a $f(u)$, en particular $v \rightarrow^m f(u) = f(v)$; análogamente, si se remueve a v , ocurre que $u \rightarrow^m f(v) = f(u)$ y como $f(u) = f(v)$, entonces ya existía una trayectoria monocromática para cada uno de los vértices de T_n a $f(u) = f(v)$.

Por tanto, si f no es inyectiva, entonces ocurre lo ya mencionado y si no es suprayectiva, entonces f no es inyectiva. Así que se supondrá que f es

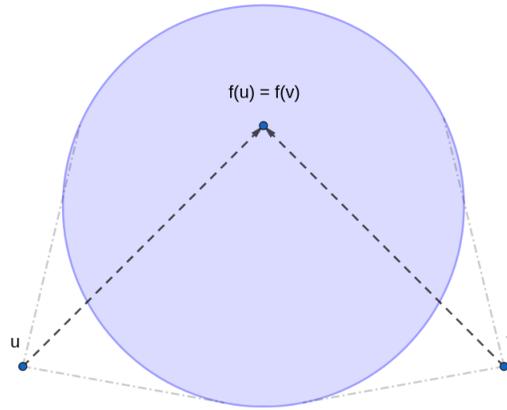


Figura 14: Si $f(u) = f(v)$ para $u \neq v$; la línea punteada denota una trayectoria monocromática.

biyectiva y que $v \not\rightarrow^m f(v)$. (3)

Una vez teniendo a nuestro torneo T , se puede reetiquetar vértices de tal forma que $f(v_i) = v_{i+1}$. Bajo esta reetiquetación ¿Ocurre que los vértices de T_n pueden ser particionados en varios ciclos de la siguiente forma?

$$(v_1, v_2, \dots, v_{n_1})(v_{n_1+1}, v_{n_1+2}, \dots, v_{n_2}) \dots$$

donde:

$$f(v_1) = v_2, \dots, f(v_{n_1}) = v_1, f(v_{n_1+1}) = v_{n_1+2}, \dots, f(v_{n_2}) = v_{n_1+1}, \dots$$

Por hipótesis de inducción y sin pérdida de generalidad, por ser cada uno de esos ciclos de orden menor a n , existe un vértice $v \in \{v_1, v_2, \dots, v_{n_1}\}$ tal que para toda $x \in \{v_1, v_2, \dots, v_{n_1}\} - v$ ocurre que $x \rightarrow^m v$. Pero al ser f una función suprayectiva, quiere decir que $v = f(w)$, para alguna $w \in \{v_1, v_2, \dots, v_{n_1}\}$, lo cual es una contradicción, puesto que $w \rightarrow^m f(w) = v$.

Por tanto los vértices de T_n sólo pueden estar en un solo ciclo (v_1, v_2, \dots, v_n) . Por (3) se sabe que no existen trayectorias monocromáticas de v_i a v_{i+1} , por tanto, los arcos entre este par de vértices son de la siguiente manera:

$$(v_2, v_1), (v_3, v_2), (v_4, v_3), \dots, (v_n, v_{n-1}), (v_1, v_n).$$

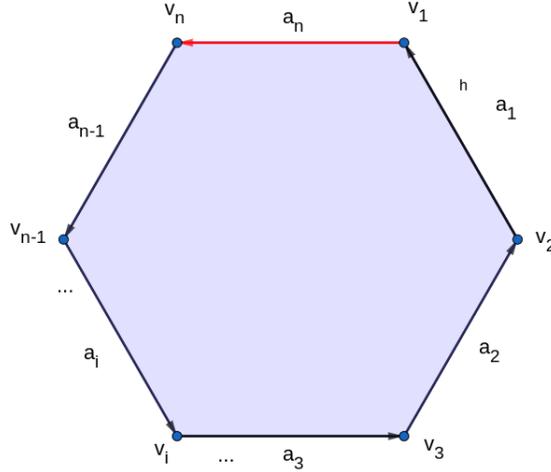


Figura 15: Se muestra la dirección que debe llevar cada arco.

Supongamos una coloración de los arcos $(v_2, v_1), (v_3, v_2), \dots, (v_1, v_n)$ de la figura, con los colores $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ respectivamente. Nótese que si $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{n-1}$ entonces existe $v_n \xrightarrow{m} v_1$ lo cual es una contradicción que se puede ver en la figura anterior. Por lo tanto no todos los arcos pueden compartir el mismo color. Así que existe $a_{t-1} = \text{rojo}$ y $a_t = \text{azul}$.

Se sabe que existe $v_{t-1} \xrightarrow{m} v_{t+1}$, porque es lo que nos asegura nuestra hipótesis inductiva tras remover a v_t .

Sin embargo, esta trayectoria no puede ser de color rojo ni de color azul, porque si fuese rojo entonces $v_t \xrightarrow{r} v_{t+1}$ o bien si fuese azul se obtiene, $v_{t-1} \xrightarrow{b} v_t$, donde ambos casos resultan contradictorios. Por lo que dicha trayectoria debe ser coloreada con un tercer color, supóngase verde. Considérese la trayectoria monocromática más pequeña: $\{v_{t-1} = u_1, u_2, \dots, u_r = v_{t+1}\}$.

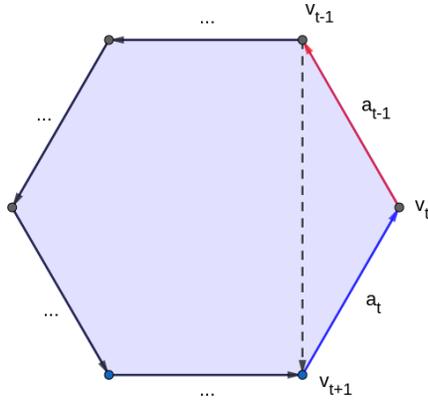


Figura 16: Existe una trayectoria monocromática de v_{t-1} a v_{t+1}

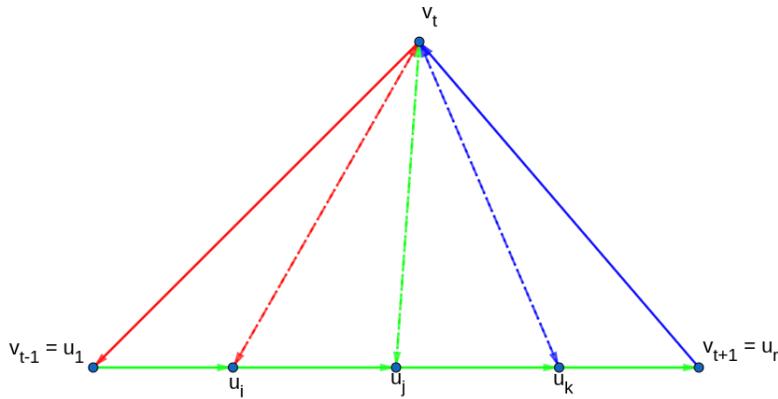


Figura 17: Muestra qué ocurriese si conectáramos los arcos $\{v_t, u_i\}$ con cada uno de los diferentes colores, rojo, verde y azul.

Considérese los arcos $\{v_t, u_i\}$ con $1 < i < r$. Si todos los arcos fuesen rojos partiendo de u_1 , al llegar a u_r se encontraría con un triángulo tricromático formado por $v_t u_{r-1} u_r$; lo mismo ocurriría partiendo de u_r si todos los arcos fuesen azules, obteniendo un triángulo tricromático formado por $v_t u_1 u_2$. Como la hipótesis del teorema impide tanto T_3 como C_3 tricromáticos, entonces ambos caminos llegan a una contradicción. Si alguna de aquellas aristas fuese de color verde (g), ocurre lo siguiente:

- Si (u_i, v_t) entonces $v_{s-1} \rightarrow^g v_s$, lo cual es una contradicción.
- Si (v_t, u_i) entonces $v_s \rightarrow^g v_{s+1}$, lo cual es una contradicción.

Todos los caminos nos llevan a contradicciones, las cuales parten de suponer que f era biyectiva y que $v \not\rightarrow^m f(v)$. Por tanto el teorema queda demostrado.

□

Tras haber demostrado este teorema resulta natural la idea de generalizar este resultado, surgiendo las siguientes incógnitas:

- Si T es un torneo m -coloreado tal que no contiene T_3 -tricromáticos, ¿Acaso existe un vértice $v \in V(T)$ tal que para todo $x \in V(T)$, existe una trayectoria monocromática de x a v ?

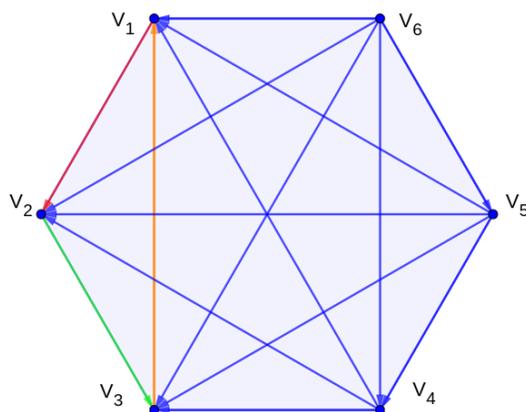


Figura 18: Contraejemplo. $v_i \rightarrow^b v_j$ para toda $i > j$ e $i > 3$ mientras que los arcos de los vértices v_1, v_2, v_3 están coloreados de tal forma que se genere un C_3 -tricromático. El color azul de los arcos de nuestro contraejemplo puede ser sustituido por alguno de los otros tres colores, obteniendo así un contraejemplo tres coloreado.

En esta figura se puede ver un contraejemplo cuatro coloreado propuesto por Shen Ming Gang (ver [4]). Esta gráfica cumple con la propiedad de ser torneo y no tener en ella un T_3 -tricromático; sin embargo, no cuenta con un vértice absorbente. Nótese que ésta figura también sirve como contraejemplo para $m > 4$ al añadir nuevos vértices w , tal que $\delta^-(w) = 0$ y coloreando sus arcos de algún otro color.

- Si T es un torneo m -coloreado tal que no contenga C_3 -tricromáticos, ¿Acaso existe un vértice $v \in V(T)$ tal que para todo $x \in V(T)$, hay una trayectoria monocromática de x a v ?

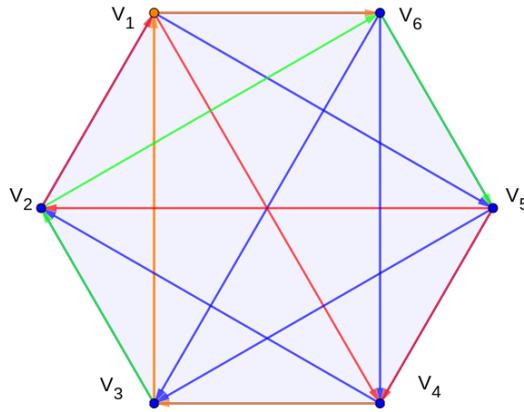


Figura 19: Contraejemplo.

La respuesta a esta incógnita la da la Dra. Hortensia Galeana Sánchez (ver [3]). La gráfica presentada en la figura 19 es un torneo 4-coloreado sin C_3 -tricromáticos. Este segundo contraejemplo al igual que el anterior puede generalizarse a más colores añadiendo vértices w tal que $\delta^-(w) = 0$ y coloreando sus arcos de algún otro color.

Las familias de contraejemplos mostradas responden a las incógnitas propuestas para torneos m -coloreados, con $m \geq 3$, sin T_3 -tricromáticos, (dando respuesta al problema abierto dejado por Sands) y con $m \geq 4$ para torneos sin C_3 -tricromáticos.

El siguiente capítulo se enfocará en los torneos tres coloreados sin C_3 -tricromáticos, para los cuales se conjetura lo siguiente:

Si T es un torneo tres coloreado tal que no contiene ningún C_3 -tricromático, entonces T tiene un vértice absorbente.

4 Cuarto Capítulo

Contraejemplos y sus propiedades

En el capítulo anterior se vieron algunas familias de contraejemplos que mostraban cómo un torneo 3-coloreado sin T_3 -tricromáticos no siempre contienen un vértice absorbente; asimismo, se vió que en un torneo 4-coloreado sin C_3 -tricromático tampoco contiene vértices absorbentes necesariamente, dejando pendiente este último caso para torneos 3-coloreados.

Como se mencionó anteriormente, se piensa que existe un vértice absorbente siempre que un torneo 3-coloreado no tenga C_3 -tricromático; sin embargo, esto no está comprobado aún.

En este capítulo, se supondrá que existen torneos con estas propiedades, tales que no contengan vértices absorbentes y se verán las estructuras que deben de tener, para así, tener una mejor idea de cómo encontrarlos. De aquí en adelante, se refirirán a dichos torneos como *contraejemplos*.

Está claro que demostrando que el conjunto de contraejemplos es vacío, es posible afirmar que las suposiciones que se tienen acerca de vértices absorbentes dentro de torneos sin C_3 -tricromáticos son ciertas. Por lo que en este capítulo, no sólo se tiene la intención de buscar propiedades que nos restrinjan contraejemplos a un conjunto vacío, sino que, en caso de que dicho conjunto sea distinto del vacío, entonces se podrá describir a esta familia de contraejemplos para facilitar su búsqueda.

Teorema 4.1. *Sea T un contraejemplo minimal, es decir, no existe un subtorneo de T tal que sea contraejemplo. Entonces los vértices de T pueden ser etiquetados como $1, 2, \dots, n$ de tal forma que se cumplan las siguientes propiedades:*

- *Existe un ciclo hamiltoniano de $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow 1$, cuyos arcos no son todos del mismo color.*
- *Cada vértice i absorbe a todos los demás vértices con excepción de $i+1$.*
- *Siempre que los arcos $(i-1) \rightarrow^1 i$, $i \rightarrow^2 (i+1)$ tengan colores distintos 1 y 2, el arco entre $(i-1)$ y $(i+1)$ esta orientado de $(i-1)$ a $(i+1)$, y $(i-1)$ absorbe a $(i+1)$ por una trayectoria de longitud al menos dos mediante un color 3 distinto a 1 y 2.*

Demostración

Antes de iniciar la demostración, se puede observar que T no tiene dominante, puesto que, de no ser así, significaría que $v \rightarrow^m x$ para toda $x \in T-v$, en particular si $x = (v-1)$; sin embargo, esto es una contradicción.

Retomando la demostración del teorema: sea T un contraejemplo mínimo, si se remueve cualquier vértice v , se obtiene un subtorneo que no puede ser contraejemplo, por tanto dentro de $T-v$, existe un vértice absorbente w , al cual se definirá como el predecesor de v .

Como w no era absorbente en T , quiere decir que v no era absorbido monocromáticamente por w , en particular, $w \rightarrow_* v$. Si se supone que w es predecesor de algún otro vértice ocurriría que $v \rightarrow^m w$ lo cual resulta una contradicción justo como en la figura 14. Esto dice que cada vértice debe tener un predecesor distinto. Bajo el mismo razonamiento del teorema 3.1, T no puede estar compuesto por ciclos disjuntos, así que existe un único ciclo que recorre a

todos los vértices de T y a dicho ciclo se puede etiquetar sus vértices de tal forma que:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow 1$$

y los arcos que conforman el ciclo no tengan todos el mismo color, porque entonces $(i + 1) \rightarrow^m i$.

Para el último punto, si se consideran dos arcos $(i - 1) \rightarrow^1 i$ y $i \rightarrow^2 (i + 1)$, con color 1 distinto al color 2, ya se vió en la figura 17 que entre $(i - 1)$ y $(i + 1)$, $(i + 1) \not\rightarrow_* (i - 1)$ porque ese tercer arco no podría ser ni de color 1, ni 2 porque entonces $(i + 1) \rightarrow^1 i$ o $i \rightarrow^2 (i - 1)$ respectivamente y un tercer color genera un C_3 -trícromático. Por tanto $(i + 1)$ absorbe a $(i - 1)$ mediante un arco y $(i - 1)$ absorbe a $(i + 1)$ mediante una trayectoria dirigida de al menos longitud dos, de color 3 distinto a los colores utilizados anteriormente. \square

Nótese que cuando se tienen tres arcos orientados de tal forma que se genere un C_3 , al menos dos arcos deben ser de un mismo color para evitarse C_3 -trícromáticos. Esta coloración muestra una trayectoria monocromática de longitud dos dentro del torneo. Si ocurren este tipo de sucesos múltiples veces dentro de T esto creará muchas trayectorias monocromáticas y eventualmente podremos encontrar un vértice que sea absorbido por su predecesor. Este razonamiento sirve como motivación para poder abordar el problema pensando en la cantidad de ciclos que puede llegar a tener un torneo 3-coloreado antes de encontrársele un vértice absorbente.

Para hallar alguna cota para la cantidad de ciclos que puede tener un torneo, encontraremos el número de C_3 de T en función de la cantidad de T_3 .

En un torneo T de orden n existen $\binom{n}{3}$ triángulos los cuales son transitivos ó son cíclicos. Un triángulo cíclico (C_3) se caracteriza en que todos los

vértices que conforman a la figura, tienen el mismo ingrado y exgrado de valor uno. Por otro lado, los triángulos transitivos (T_3) tienen exactamente un vértice al cual le salen 2 arcos. El T_3 de la figura 8 permite visualizar lo que ocurre. En este ejemplo $v_2 \rightarrow_* v_3$, $v_3 \rightarrow_* v_1$ y $v_2 \rightarrow_* v_1$, donde v_2 es el vértice del cual salen los dos arcos, $v_2 \rightarrow_* v_3$ y $v_2 \rightarrow_* v_1$. Nótese que recíprocamente, cualquier par de arcos que salgan de un mismo vértice dentro de un torneo forman un T_3 , dado que la dirección del tercer arco del triángulo es irrelevante. Entonces esto nos dice que existe una biyección entre la cantidad de pares de arcos que surgen de un vértice y la cantidad de T_3 en el torneo y esta última se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T(T_3) &= \sum_{v \in T} \binom{\delta^+(v)}{2} = \sum_{v \in T} \frac{\delta^+(v)^2 - \delta^+(v)}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{v \in T} \delta^+(v)^2 - \delta^+(v) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{v \in T} \delta^+(v)^2 - \binom{n}{2} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto el número de C_3 , $\left(T(C_3)\right)$ que tiene un torneo en términos de la cantidad de T_3 , $\left(T(T_3)\right)$ está dado como:

$$T(C_3) = \binom{n}{3} - \frac{1}{2} \left(\sum_{v \in T} \delta^+(v)^2 - \binom{n}{2} \right)$$

Evidentemente $T(C_3)$ en un torneo es máximo cuando $T(T_3)$ es mínimo, o siendo más específicos, cuando el término $\sum_{v \in T} \delta^+(v)^2$ es mínimo.

Teorema 4.2. *Sea $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ la secuencia de exgrados de un torneo.*

$$\sum_{i=1}^n s_i^2$$

es mínimo si y sólo si para todo i, j , ocurre que $|s_i - s_j| \leq 1$.

Demostración

Supóngase que $s_1 \geq s_2 + 2$ y sea $r_1 = s_1 - 1, r_2 = s_2 + 1$ y $r_i = s_i$ para toda $i > 2$.

Como $\sum_{i=1}^n s_i^2$ es mínimo, entonces:

$$\sum_{i=1}^n r_i^2 \geq \sum_{i=1}^n s_i^2, \quad \text{si y sólo si} \quad r_1^2 + r_2^2 \geq s_1^2 + s_2^2.$$

Desarrollando los cuadrados de ambos lados de la desigualdad, llegamos a que:

$$-2s_1 + 2s_2 + 2 \geq 0 \iff -2(s_1 - s_2 - 1) \geq 0 \iff s_1 - s_2 \leq 1$$

lo cual es una contradicción a la suposición. □

Como consecuencia de este teorema se puede afirmar que el torneo cuya secuencia se acerca más al promedio de los exgrados permite que $\sum_{i=1}^n s_i^2$ alcance su mínimo, y por tanto que se maximice $T(C_3)$. Por otro lado, aquellas secuencias asignadas a torneos cuyas entradas se alejen más del promedio, (ejemplo $(0, 1, 2, 3, \dots, n - 1)$) contienen la menor cantidad de C_3 .

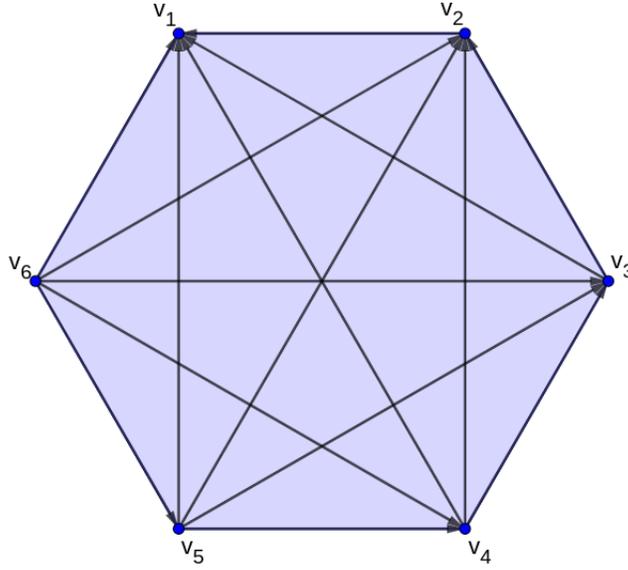


Figura 20: Torneo de orden 6, el cual no contiene C_3 , dado que los únicos triángulos que contiene son transitivos. Su secuencia es $(0, 1, 2, 3, 4, 5)$

Tal es el caso del torneo transitivo, en el cual para todo par de vértices v_i y v_j , $v_i \rightarrow_* v_j$ siempre que $i > j$, y no tiene C_3 .

Es natural preguntarse cómo es alterado dicho término si se decide invertir la dirección de algún arco: sea $S = (s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_k, \dots, s_n)$ la secuencia de ex-grados de T un torneo de orden n y sea $S_1 = (s_1, s_2, \dots, s_i + 1, \dots, s_k - 1, \dots, s_n)$ la secuencia del otro torneo T' que solo se diferencia de T por un único arco con dirección opuesta.

Si se compara la suma de los cuadrados de cada secuencia como en la demostración anterior, se tiene que al intercambiar la dirección de un arco estamos añadiendo algo de la forma $2(s_i - s_k + 1)$ a $\sum_{i=1}^n s_i^2$.

Y haciendo un análisis rápidamente de este sumando se puede concluir que ocurre lo siguiente:

- $2(s_i - s_k + 1) > 0$, si $s_i > s_k - 1$.
- $2(s_i - s_k + 1) = 0$, si $s_i = s_k - 1$.
- $2(s_i - s_k + 1) < 0$, si $s_i < s_k - 1$.

Esto resulta en una herramienta importante para la demostración del siguiente teorema.

Se define la *i*-ésima suma parcial de la secuencia S como:

$$\sigma_i(S) = \sum_{j=1}^i s_j.$$

Se define $\Omega(S) = \sum_{i=1}^n s_i^2$, donde S es la secuencia de un torneo T de orden n .

Teorema 4.3. *Si $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ y $R = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ son la secuencias de exgrado de dos torneos, donde $\sigma_i(R) \geq \sigma_i(S)$ para cada i , entonces $\Omega(S) \geq \Omega(R)$.*

Demostración

Considérese ambas secuencias S y R mencionadas en la hipótesis del teorema. Está claro que $S \neq R$ porque de ser iguales se cumple trivialmente la afirmación. Así que se supondrá que a S y R son secuencias distintas.

Sea i el índice más pequeño para el cual $\sigma_i(R) > \sigma_i(S)$, de la misma forma, como se está trabajando con distintas secuencias de torneos de un mismo orden necesariamente $\sigma_n(R) = \sigma_n(S)$, por tanto existe un índice k tal que $s_k > r_k$, llegando a la siguiente serie de desigualdades.

$$s_i < r_i \leq r_k < s_k \iff s_i < s_k - 1$$

Sin embargo, aunque sea evidente se cree necesario mencionar que $s_i < s_i + 1 \leq s_k - 1 < s_k$, y al recordar las tres condiciones consecuentes al teorema anterior $2(s_i - s_k + 1) < 0$. Lo cual lleva a:

$$\Omega(S) \geq \Omega(S_1)$$

donde $S_1 = (s_1, s_2, \dots, s_i + 1, \dots, s_k - 1, \dots, s_n)$.

Si $r_i = s_i + 1$ y $r_k = s_k - 1$ la prueba concluye, sin embargo estas igualdades no necesariamente ocurren. Si ninguna de estas dos igualdades se da, se puede considerar $s_i + 1 < s_i + 2 \leq s_k - 2 < s_k - 1$ y trabajar con S_1 , llegando a que $\Omega(S_1) \geq \Omega(S_2)$ donde $S_2 = (s_1, s_2, \dots, s_i + 2, \dots, s_k - 2, \dots, s_n)$. Supóngase que realizando este proceso una j -ésima vez se alcanza r_i ó r_k , si $s_i = r_i$ para toda $i = 1, 2, \dots, n$, se concluye $S_j = R$ y el teorema queda demostrado. De no ser así, entonces existen dos índices minimales con $p < q$ para los cuales $s_p < r_p$ y $s_q > r_q$, repitiendo así la demostración anterior. Dado que no es posible incrementar en uno el valor de las entradas de las secuencias indefinidamente, para algún índice j , $S_j = R$ y por tanto:

$$\Omega(S) \geq \Omega(S_1) \geq \Omega(S_2) \geq \Omega(S_3) \geq \dots \geq \Omega(S_r) \geq \dots \geq \Omega(S_j) = \Omega(R)$$

□

Para visualizar lo que se dice en la demostración anterior considérese a T un torneo cuya secuencia esta dada por S y sean $a, b \in V(T)$ tales que $s(a) = s_k$ y $s(b) = s_i$.

Si dentro de T , $a \rightarrow_* b$, al invertir este arco, el exgrado de a aumentará mientras que el de b disminuirá llevándonos a un torneo de secuencia S_1 . Si por el contrario $b \rightarrow a$ se sabe que existen otros s_k vértices c a los cuales $a \rightarrow c$ y $s_i - 1$ vértices c distintos a a tales que $b \rightarrow c$. Como $s_k \geq s_i$ entonces existe un vértice c_0 tal que $a \rightarrow c_0$ pero $b \not\rightarrow c_0$, que implica $a \rightarrow c_0 \rightarrow b$. Al invertir estos dos arcos, se llega de una secuencia S a S_1 .

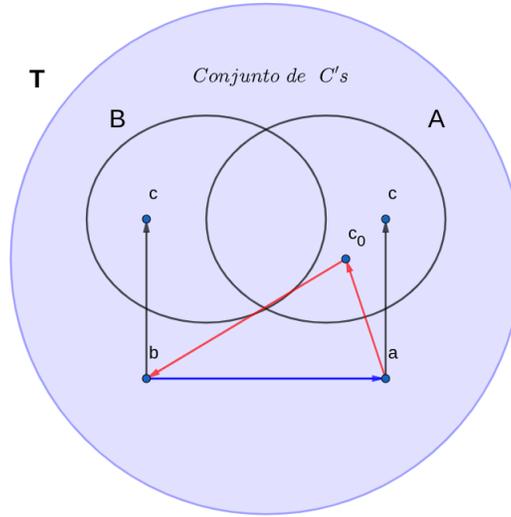


Figura 21: En este torneo T (con secuencia de exgrados S) se ven dentro el conjunto A y el conjunto B donde $|A| = s_k$ y $|B| = s_i - 1$. Cuando la dirección de los arcos rojos es invertida, se obtiene una nueva secuencia S_1 .

Como consecuencia del teorema anterior el haber dado una cota inferior a las sumas parciales de la secuencia, permite encontrar cotas superiores para $\Omega(S)$ y por tanto acotar por debajo a $T(C_3)$.

En los siguientes lemas y proposiciones se considerará a T como un contraejemplo minimal como el que se ha descrito en la introducción de éste capítulo.

Proposición 4.3.1. *La i -ésima suma parcial de S siempre debe de ser al menos $\binom{i}{2} + 1$.*

Demostración

Considérese un torneo T de orden n , formado por los torneos T_1 y T_2 , de tal forma que T_1 es un subtorneo de T formado por los i -vértices correspondientes a las primeras i entradas de la secuencia de T y, T_2 otro subtorneo de T formado por los $n - 1$ vértices restantes.

Dentro de T_1 existen $\binom{i}{2}$ arcos, sin embargo, al ser T un contraejemplo, este debe contener un ciclo hamiltoniano, por tanto existe un vértice $v_k \in T_1$ donde su sucesor $v_{k+1} \in T_2$.

Por lo que dentro de un conjunto de i -vértices deben surgir al menos $\binom{i}{2} + 1$ arcos, esto es:

$$\sum_{j=1}^i s_j \geq \binom{i}{2} + 1.$$

□

Lema 4. *T es contraejemplo si y sólo si T^{-1} es contraejemplo.*

Demostración

La demostración es sencilla, basta con probar la definición de contraejemplo para T^{-1} , la cual es no tener C_3 -tricromáticos ni tampoco tener vértices absorbentes.

Evidentemente si T^{-1} tuviese algún C_3 -tricromático, entonces T también tendría uno, dado que la inversión de la dirección de arcos conserva triángulos transitivos y cíclicos. Se sabe que T^{-1} tampoco tiene vértices absorbentes

porque de ser así, dentro de T habría algún vértice dominante. Sin embargo, por la observación realizada en la demostración del teorema 4.1, eso es imposible.

Por tanto T^{-1} es contraejemplo.

□

Teorema 4.4. *Consideremos a T un contraejemplo minimal. Si $v \in T$, entonces $\delta^+(v) \neq 1$ y $\delta^+(v) \neq n - 1$.*

Demostración

Supóngase que existe $v \in T$ tal que $\delta^+(v) = 1$. Dado que T es contraejemplo mínimo, por propiedades estructurales de los contraejemplos minimales, T contiene un ciclo hamiltoniano, donde v tiene como sucesor a $(v + 1)$, que es con quien se conecta v por medio de su único arco.

Considérese a $(v - 1)$ y sin pérdida de generalidad supóngase que el arco $(v - 1) \rightarrow_* v$ es de color rojo. Esto significa que necesariamente el arco $v \rightarrow_* (v + 1)$ no puede ser rojo porque como v sería absorbido por todos, en particular por $(v - 2)$, entonces implicaría que $(v - 1) \rightarrow^r (v - 2)$, lo cual es una contradicción; entonces habrá que suponer que $v \rightarrow_*^b (v + 1)$.

Se sabe que existe una trayectoria monocromática $(v + 1) \rightarrow (v - 1)$ que no puede ser azul ni roja porque $(v + 1) \rightarrow^r v$ y $v \rightarrow^b (v - 1)$ son trayectorias no permitidas. Por tanto deberá ser verde y de longitud al menos dos. Considérese a x el primer vértice de la trayectoria $(v + 1) \rightarrow^g v$ y obsérvese qué ocurre con el arco x y v . Por hipótesis $v \not\rightarrow_* x$, entonces la dirección del arco va en dirección contraria, entonces $x \rightarrow_*^r v$ no puede ocurrir porque $x \rightarrow_*^r v \rightarrow_*^b (v + 1) \rightarrow_*^g x$ es un C_3 -tricromático; $x \rightarrow_*^g v$ tampoco es posible pues $(v + 1) \rightarrow^g v$ es una trayectoria no permitida; y por último $x \rightarrow_*^b v$

tampoco puede darse, puesto que al ser $v \rightarrow_*^b (v + 1)$, obliga que v deba ser absorbido en azul por todos los vértices con excepción de $(v - 1)$, pasando por $(v + 1)$, particularmente $v \rightarrow_*^b (v + 1) \rightarrow_*^b x$, de tal forma que se genere una trayectoria azul $(v + 1) \rightarrow^b v$ no permitida.

Es por ello que $\delta^+(v) \neq 1$.

Ahora, para demostrar que $\delta^+(v) \neq n - 1$, considérese un torneo donde a uno de sus vértices v le entre un único arco (equivale a decir que le salgan únicamente $n - 1$ arcos), después tómesese la inversa de ese torneo. Es posible darse cuenta que esta figura en comparación con la anterior es igual en el sentido de que uno de sus vértices tiene exgrado uno. Como ya se demostró que en un contraejemplo no pueden existir vértices de exgrado uno, si T no es contraejemplo entonces T^{-1} tampoco lo es.

□

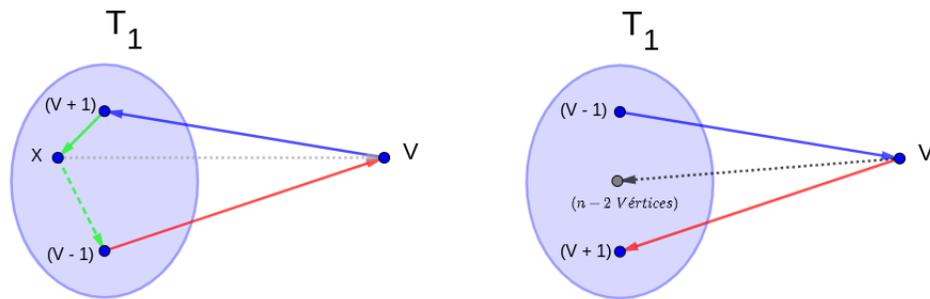


Figura 22: En la izquierda se tiene un esbozo del caso en donde $\delta^+(v) = 1$. El arco punteado de color verde denota una trayectoria verde de $x \rightarrow (v - 1)$, mientras que el arco $x \rightarrow_* v$ de color gris, denota el arco cuyo color es una incógnita. En la figura de la derecha se tiene un torneo con un vértice v tal que $\delta^-(v) = 1$. El arco de color gris que sale de v denota los otros $n - 2$ arcos que salen de v y se dirigen a $n - 2$ vértices distintos en T_1 .

Proposición 4.4.1. *La i -ésima suma parcial de S siempre debe de ser al menos $\binom{i}{2} + 2$.*

Demostración

Considérese un torneo T de orden n formado por los torneos T_1 y T_2 como en la proposición anterior, de tal forma que T_1 sea de orden $i = \{2, 3, \dots, n - 2\}$, puesto que ya vimos en el resultado anterior que no existen contraejemplos con vértices de exgrado 1 y $n - 1$, es por ello que falta revisar el caso donde T_1 es de orden i .

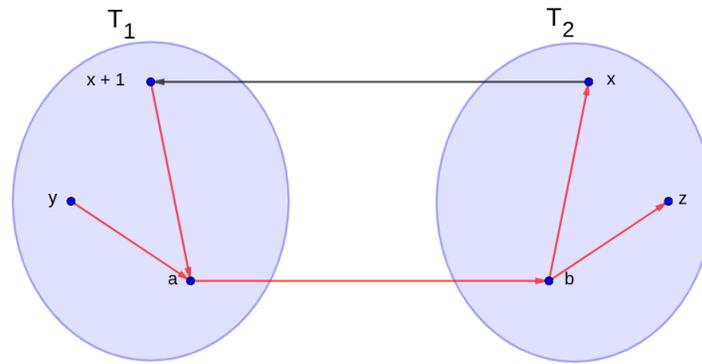


Figura 23: Esbozo de la demostración de la proposición. Nótese que tanto y como z , son vértices distintos a $(x + 1)$ y x , no necesariamente distintos a a y b , es posible que sean iguales, de ser así, esta demostración funciona igual.

Supóngase que de T_1 a T_2 sólo sale un arco y también supóngase que $a \in T_1$ y $b \in T_2$ son vértices tales que forman dicho arco que sin pérdida de generalidad será de color rojo. Como $a \rightarrow^r b$ forma parte del ciclo estructural debe existir una $x \in T_2$ tal que su sucesor $(x + 1) \in T_1$. Como T_1 cuenta con al menos dos vértices, entonces existe $y \in T_1$ (puede resultar confuso que, al suponer que existen al menos dos vértices en T_1 , se asegure la existencia de un tercer vértice y ; no obstante, a puede asumir el papel de y), con $y \neq (x + 1)$ tal que debe ser absorbido por x . Como $a \rightarrow^r b$ es la única entrada a T_2 para los vértices de T_1 , debe ocurrir que $y \rightarrow^r a \rightarrow^r b \rightarrow^r x$. Análogamente,

existe $z \in T_2$ tal que $z \neq x$ que debe absorber a $(x + 1)$ y como el único modo de hacerlo es mediante $a \rightarrow^r b$ entonces $(x + 1) \rightarrow^r a \rightarrow^r b \rightarrow^r z$; sin embargo, esto es una contradicción, porque se aseguró la existencia de una tercer trayectoria $(x + 1) \rightarrow^r a \rightarrow^r_* b \rightarrow^r x$.

Por tanto, no puede ocurrir que a un torneo T_1 , como el ya descrito, le surjan $\binom{i}{2} + 1$ arcos, es por eso debe de haber al menos un arco más proveniente de T_1 .

□

Proposición 4.4.2. *Sea S una secuencia de exgrados. Cuando $\sigma_i(S) = \binom{i}{2} + 2$ entonces, $i = \{1, n - 1\}$ o las siguientes condiciones se cumplen:*

Existen vértices $y, z \in V(T_1)$ y $t, x \in V(T_2)$ tales que

1. *y absorbe en rojo a todo vértice de T_1 con excepción de $(x + 1)$ y todo arco proveniente de T_1 es rojo.*
2. *z absorbe en verde a todo vértice de T_1 con excepción de $(t + 1)$ y todo arco proveniente de T_1 es verde.*
3. *$(y + 1)$ es absorbido en rojo por todos los vértices de T_2 con excepción de t y todos sus arcos hacia T_2 son únicamente de color rojo.*
4. *$(z + 1)$ es absorbido en verde por todos los vértices de T_2 con excepción de x y todos sus arcos hacia T_2 son únicamente de color verde.*

Demostración

Se supondrá que $\sigma_i(S) = \binom{i}{2} + 2$, para alguna $i \neq \{1, n - 1\}$.

Considerése a $T = T_1 + T_2$. Se sabe que existen dos arcos provenientes de T_1 hacia T_2 . Supóngase que dichos arcos provienen de los vértices $y, z \in V(T_1)$

hacia $y', z' \in V(T_2)$ de tal forma que: $y \rightarrow_*^c y'$ y $z \rightarrow_*^d z'$ donde los colores c y d no necesariamente son distintos.

Se sabe que por el teorema 4.1 existe un ciclo hamiltoniano que estructura al torneo. Es por ello que debe existir una $t \in V(T_2)$, tal que $(t+1) \in V(T_1)$. Como $i \geq 2$, existe un vértice distinto a $(t+1)$ en $V(T_1)$ para el cual t debe absorberlo y debe hacerlo ya sea por medio de $y \rightarrow_*^c y'$ ó $z \rightarrow_*^d z'$. Supóngase sin pérdida de generalidad que lo hace por medio de z con el color d formando una trayectoria $z \rightarrow_*^d z' \rightarrow^d t$, donde ésta última trayectoria no necesariamente está formada por un único arco.

Análogamente, como $i \geq 2$ debe existir otro vértice distinto a t en $V(T_2)$ para el cual $(t+1)$ debe ser absorbido por él y lo hace por medio de $y \rightarrow_*^c y'$ ó $z \rightarrow_*^d z'$; sin embargo, para el caso anterior se supuso que se utilizaba el arco $z \rightarrow_*^d z'$ para llegar a t y si se volviese a asignar este arco para que $(t+1)$ sea absorbido, entonces existirá una trayectoria $(t+1) \rightarrow^d t$ no permitida. Esto obliga a utilizar la trayectoria $(t+1) \rightarrow^c y \rightarrow_*^c y'$.

Es necesario recalcar que el vértice y no puede ser absorbido por t con color c , ni tampoco z puede absorber a $(t+1)$ con color d .

Más aún, todo vértice en T_1 con excepción de $(t+1)$ es absorbido por z con color d pues t absorbe a todos con excepción de su consecutivo. De la misma forma y debe ser absorbido por todo vértice en T_2 por medio del color c excepto por t .

Supóngase por un momento que $z = y$, y considérese el sucesor del vértice z . Como $(z+e1)$ no puede ser $(t+1)$ porque $z \neq t$, tampoco ninguno de los vértices absorbidos por z , por ello $(z+1) \in T_2$. Entonces ocurre uno de los siguientes dos posibles casos: $(z+1) = z'$ ó $(z+1) = y'$ (nótese que no puede ocurrir ambas simultáneamente porque implica que $y' = z'$ y contradice la suposición de tener dos arcos provenientes de T_1 hacia T_2).

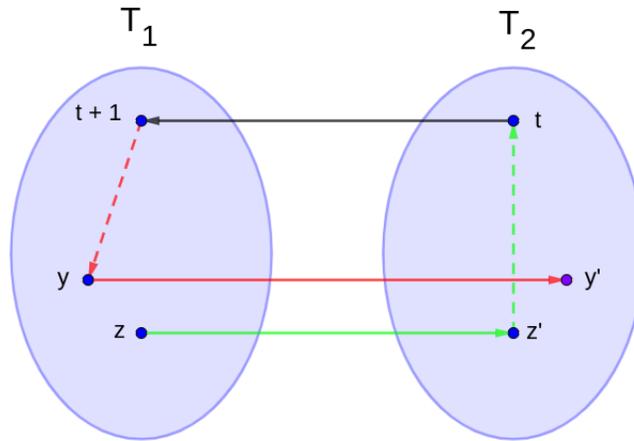


Figura 24: Esbozo 1 de la prueba, donde el color rojo representa a c y el color verde representa a d . Los arcos punteados no necesariamente son arcos directos entre $(t+1)$ y y o z' y t .

Supóngase de entrada que $(z+1) = y'$. Si se supone que los colores c y d son iguales entonces tenemos una trayectoria monocromática $(t+1) \xrightarrow{d} y \xrightarrow{d} z' \xrightarrow{d} t$ no permitida. Por lo tanto, se puede pensar que $c \neq d$, donde para fines ilustrativos c es considerado rojo y d verde. Se llamará p al último vértice de la trayectoria $(t+1) \xrightarrow{r} y$ y se trabajará con el arco (p, z') .

Dado que por hipótesis existen únicamente dos arcos de T_1 dirigidos a T_2 , podemos asegurar que el arco apunta de z' a p . ¿Cómo debería estar coloreado el arco?

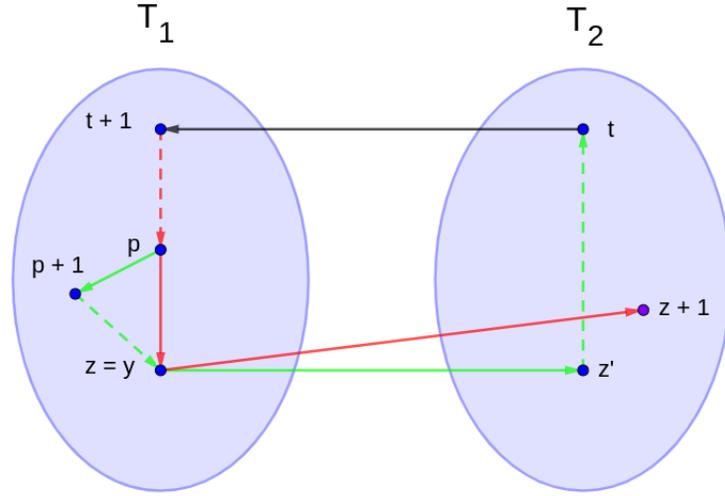


Figura 25: Esbozo 2 de la prueba, donde el color rojo representa a c y el color verde representa a d . Los arcos punteados no necesariamente son arcos directos entre $(t+1)$ y p , z' y t o $(p+1)$ y z .

- Si $z' \rightarrow_*^b p$, formamos un C_3 -tricromático.
- Si $z' \rightarrow_*^g p$, considérese al sucesor de p , como éste debe ser absorbido por t , entonces existe la trayectoria $(p+1) \rightarrow^g z$, formando otra trayectoria monocromática $(p+1) \rightarrow^g p$.
- Si $z' \rightarrow_*^r p$, considérese al antecesor de z' , claramente no puede ser z y como no existe otro arco proveniente de T_1 que entre, su antecesor debe estar en T_2 . Habíamos dicho anteriormente que $(t+1)$ era absorbido por todo vértice de T_2 con excepción de t , en particular a $(z'-1)$. Al tener $z' \rightarrow_*^r p$, formamos una trayectoria monocromática $z' \rightarrow_*^r p \rightarrow^r z \rightarrow_*^r (z+1) \rightarrow^r (z'-1)$.

Tras verificar que el arco (p, z') no permite una coloración roja, verde o azul, llegamos a una contradicción al suponer que $(z+1) = y'$, por lo que $(z+1) = z'$.

Considérese ahora al predecesor de y' , sabemos que no puede ser t porque $y' \neq (t + 1)$ ni tampoco ningún otro vértice que absorba a y . Esto significa que su predecesor pertenece a T_1 . Dicho esto, se tienen dos posibles casos, cuando $(y' - 1) = z$ ó $(y' - 1) = y$; sin embargo, ya vimos que la primera igualdad no es posible, por lo que $y' = (y + 1)$, y entonces, suponer que $y = z$ implica suponer que $z' = y'$ lo cual es una contradicción; así pues, $y \neq z$; análogamente, $y' \neq z'$.

Se verá que todo vértice de T_1 (con excepción de $(t + 1)$) a z deben ser de color verde. Supóngase que existe un vértice w tal que $w \rightarrow_*^r z$. Considérese la coloración del arco $(z + 1) \rightarrow_* w$

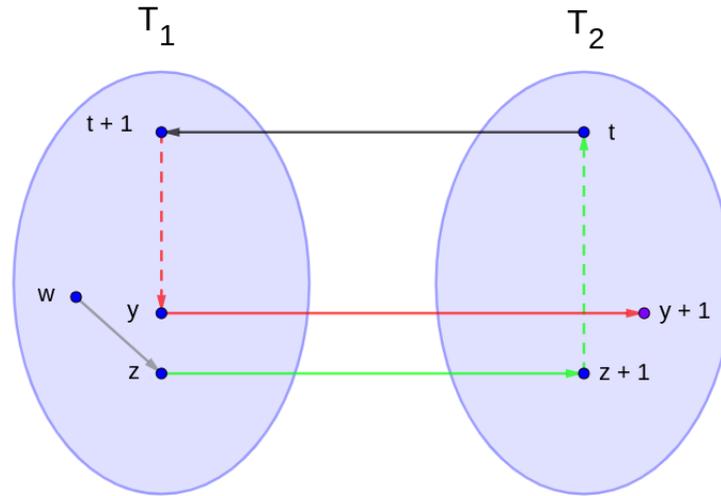


Figura 26: Esbozo 3 de la prueba, donde el color rojo representa a c , el color verde representa a d y el color gris representa el arco que estaremos cambiando de color (rojo y azul). Los arcos punteados no necesariamente son arcos directos entre $(t + 1)$ y y ó $(z + 1)$ y t .

- Si $(z + 1) \rightarrow_*^r w$, entonces $(z + 1) \rightarrow^r z$.
- Si $(z + 1) \rightarrow_*^b w$, tenemos un C_3 -tricromático.
- Si $(z + 1) \rightarrow_*^g w$, como $z \rightarrow_*^g (z + 1)$ es el único medio por el cual todos

los vértices de T_1 son absorbidos por t (con excepción de $(t+1)$), existe una trayectoria $w \rightarrow^g z$, generando así una trayectoria $(z+1) \rightarrow^g z$.

Por tanto no pueden existir vértices de T_1 que lleguen a z por color rojo. Veamos qué ocurre si el arco de w a z es azul.

- Si $(z+1) \rightarrow_*^r w$, tenemos un C_3 -tricromático.
- Si $(z+1) \rightarrow_*^b w$, entonces $(z+1) \rightarrow^b z$.
- Si $(z+1) \rightarrow_*^g w$, como $z \rightarrow_*^g (z+1)$ es el único medio por el cual todos los vértices de T_1 son absorbidos por t (con excepción de $(t+1)$), existe una trayectoria $w \rightarrow^g z$, generando así una trayectoria $(z+1) \rightarrow^g z$.

Por tanto, se prueba el punto dos de la proposición. De la misma forma, se verá que todos los arcos que salen de $(y+1)$ para T_2 (con excepción de t) son de color rojo, probando así el punto tres de la proposición.

Supóngase que existe un vértice $w \in T_2$ tal que el arco $(y+1) \rightarrow_* w$ sea de otro color distinto de rojo. Véase qué ocurre con $w \rightarrow_* y$ si $(y+1) \rightarrow_*^g w$.

- Si $w \rightarrow_*^g y$, entonces $(y+1) \rightarrow^g y$.
- Si $w \rightarrow_*^b y$, tenemos un C_3 -tricromático.
- Si $w \rightarrow_*^r y$, como $(t+1)$ es absorbido por todos los vértices de T_2 (con excepción de t), por medio de $y \rightarrow^r (y+1)$, en particular $(w-1)$ absorbe en rojo a y , por lo que se genera una trayectoria $w \rightarrow^r (w-1)$.

Es por eso que el arco $(y+1) \rightarrow_* w$ no puede ser verde. Por lo que se coloreará ahora de azul y se verá qué ocurre:

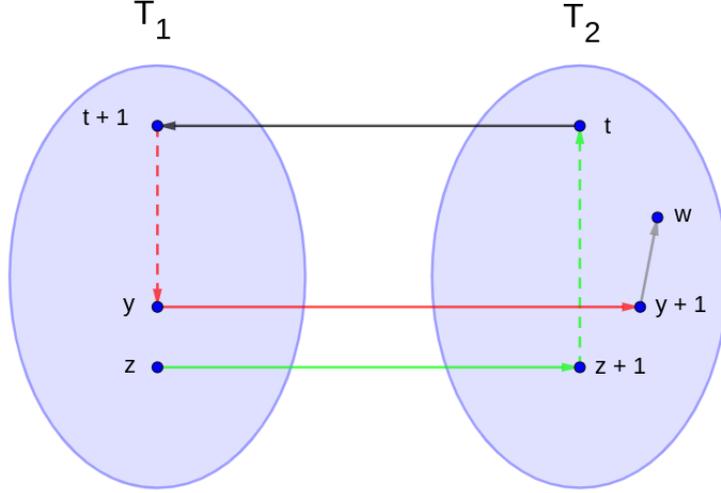


Figura 27: Esbozo 4 de la prueba. El color gris representa el arco que estaremos cambiando de color (rojo y azul). Los arcos punteados no necesariamente son arcos directos.

- Si $w \rightarrow_*^g y$, tenemos un C_3 -tricromático.
- Si $w \rightarrow_*^b y$, entonces $(y + 1) \rightarrow^b y$.
- Si $w \rightarrow_*^r y$, como $(t + 1)$ es absorbido por todos los vértices de T_2 (con excepción de t), por medio de $y \rightarrow_*^r (y + 1)$, en particular $(w - 1)$ absorbe en rojo a y , por lo que se genera una trayectoria $w \rightarrow^r (w - 1)$.

El arco $(y + 1) \rightarrow_* w$ tampoco puede ser coloreado de azul, por lo que a $(y + 1)$ solo le salen aristas rojas hacia T_2 .

Ahora, el ciclo hamiltoniano que estructura al torneo va de T_1 a T_2 en dos ocasiones, una de ellas pasando por el arco $(y, y + 1)$ y en otra por $(z, z + 1)$. Así como va en dos ocasiones con ese sentido, debe regresar de T_2 hacia T_1 dos veces. Sea $x \neq t$ tal que $x \in T_2$ y $(x + 1) \in T_1$, como x es distinto de t , éste debe absorber a $(t + 1)$ por medio de $(y + 1)$ en c . Al ser $(x + 1)$ distinto de $(t + 1)$, éste es absorbido por t por medio de z en d .

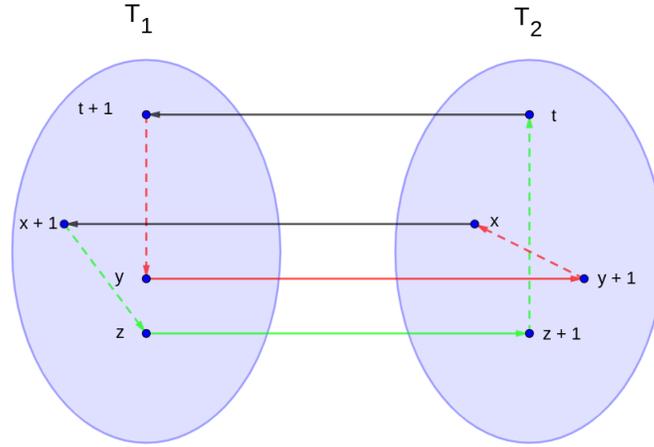


Figura 28: Esbozo 5 de la prueba tras añadir los vértices x y $(x + 1)$. Los arcos punteados no necesariamente son arcos directos.

Como consecuencia, x absorbe por medio de y y $(y + 1)$ en c a todos los vértices de T_1 con excepción de $(x + 1)$, y por otro lado, $(x + 1)$ es absorbido por medio de z y $(z + 1)$ por todo vértice en T_2 con excepción de x .

Un argumento similar a cuando supusimos la existencia de un vértice w , nos es útil para probar los puntos uno y cuatro de la proposición.

Tras haber añadido estos últimos vértices, para proceder de manera análoga que en las pruebas de los puntos dos y tres de la proposición, solo se deberá probar que los colores c' y d' de los arcos que salen de x y t son de distinto color entre ellos. Se verá por qué c' no puede ser igual a d' . Supóngase que se dan las siguientes igualdades como se ven en la figura 29.

Se verá por qué este contraejemplo de orden cuatro no existe. Se sabe que en T_1 pueden ocurrir cuatro casos: $(x + 1) \rightarrow_*^g (t + 1)$, $(t + 1) \rightarrow_*^r (x + 1)$, $(x + 1) \rightarrow_*^r (t + 1)$ ó $(t + 1) \rightarrow_*^g (x + 1)$; sin embargo, estos últimos dos nos generan una trayectoria monocromática $(x + 1) \rightarrow x$ y $(t + 1) \rightarrow t$ respectivamente, lo cual no es posible, por lo que se trabajará únicamente con los primeros dos casos.

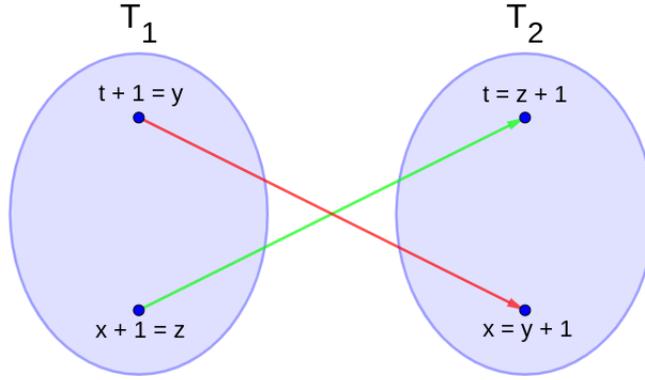


Figura 29: Esbozo 6 de la prueba. Supóngase las siguientes igualdades: $(t+1) = y$, $(x+1) = z$, $(z+1) = t$, $(y+1) = x$.

Si $(x+1) \rightarrow_*^g (t+1)$, entonces $x \rightarrow_*^r (x+1)$ y $t \rightarrow_*^g (t+1)$. Solo faltaría darle una orientación y un color al arco (x, t) no obstante, ninguna orientación con los colores rojo o verde son posibles, por lo que se fuerza a utilizar un tercer color azul formando un C_3 -tricromático (x, t, y) , o bien (t, x, z) dependiendo de la orientación que se haya elegido para el arco azul. Si $(t+1) \rightarrow_*^r (x+1)$, ocurre exactamente lo mismo al caso anterior, salvo por el arco que cambiamos de color y orientación, donde también $x \rightarrow_*^r (x+1)$ y $t \rightarrow_*^g (t+1)$. Llegando a los mismos posibles C_3 -tricromáticos formados por el arco azul que obliga a añadir.

Es por ello que se debe suponer que alguna de estas igualdades no se cumple, sin pérdida de generalidad se considera $(t+1) \neq y$.

Como $(t+1)$ y y son vértices distintos entonces necesariamente y debe ser absorbido por z en color verde, logrando formar una trayectoria como la que sigue:

$$(t+1) \rightarrow_*^c y \rightarrow_*^d z \rightarrow_*^d (z+1) = t,$$

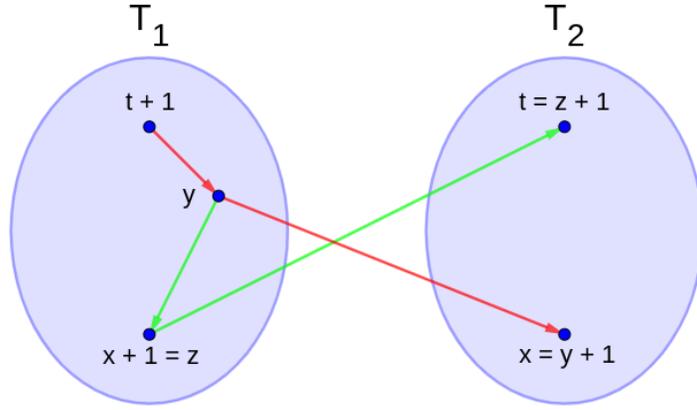


Figura 30: Esbozo 7 de la prueba con $(t + 1) \neq y$.

la cual sería una trayectoria no permitida de suponer que $c = d$, por lo que c y d son considerados colores distintos, rojo y verde respectivamente.

□

Proposición 4.4.3. *Sea S la secuencia de un torneo T de orden n . Existe a lo más un índice i distinto de 1 y $n - 1$ tal que $\sigma_i(S) = \binom{i}{2} + 2$.*

Demostración

Supóngase que existen dos índices i_1 e i_2 , donde $S = (s_1, s_2, \dots, s_{i_1}, \dots, s_{i_2}, \dots, s_n)$, tales que $\sigma_{i_1} = \binom{i_1}{2} + 2$ y $\sigma_{i_2} = \binom{i_2}{2} + 2$. Considérese a T_1 al subtorneo formado por los vértices cuyos exgrados constan de s_1, \dots, s_{i_1} , asimismo, considérese a T_3 al sub-torneo formado por los vértices cuyos exgrados constan de s_{i_2}, \dots, s_n , y a T_2 a todos los vértices cuyos exgrados están entre s_{i_1} y s_{i_2} .

Al satisfacerse que, $\sigma_{i_1}(S) = \binom{i_1}{2} + 2$ y $\sigma_{i_2}(S) = \binom{i_2}{2} + 2$, para T_1 , $T_2 \cup T_3$ y $T_1 \cup T_2$, T_3 respectivamente, implica que ambas particiones del torneo contienen una estructura como la descrita en la proposición 4.4.2.

Sean $y_1, z_1 \in V(T_1)$, $t_1, x_1 \in V(T_2 \cup T_3)$, $y_2, z_2 \in V(T_1 \cup T_2)$ y $t_1, x_1 \in V(T_3)$

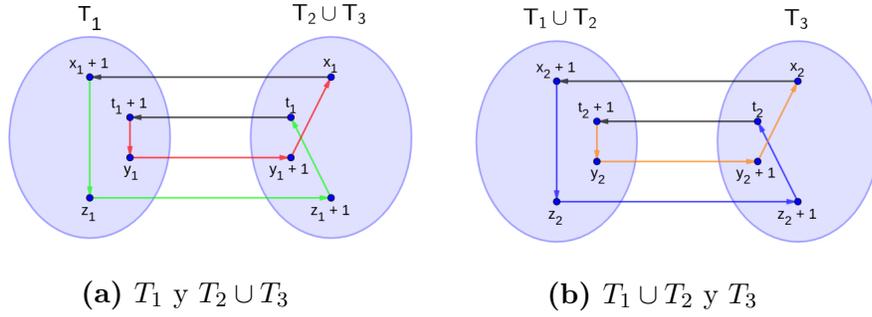


Figura 31: Se muestra el mismo torneo desde distintas perspectivas. El color a es denotado por el color rojo, b por el color verde. Los colores azul y anaranjado no necesariamente denotan dos colores distintos a rojo y verde, sino que en su lugar, idealizan el uso de colores c y d no necesariamente distintos a los colores a y b .

vértices que satisfacen las propiedades de la proposición 4.4.2, y supóngase que $y_1 = y_2$; asimismo, sin pérdida de generalidad que $y_1 \rightarrow_*^r (y_1 + 1)$, análogamente $y_2 \rightarrow_*^r (y_2 + 1)$. Se recuerda que t_1 es el único vértice en $T_2 \cup T_3$ que no absorbe a $(y_1 + 1)$ con color rojo; es decir, cualquier otro vértice distinto a t_1 se puede asegurar con certeza que absorbe a $(y_1 + 1)$. Si se supone que $t_1 \neq t_2$, entonces existe una trayectoria $y_1 = y_2 \rightarrow^r t_2$, lo cual significa que t_2 debe absorber a y_2 por medio de $(y_2 + 1)$; sin embargo, es evidente en la Figura 31b que eso no ocurre, por lo que $t_1 = t_2 \in T_3$.

Sea m un vértice en T_2 , distinto de t_1 y de $t_2 + 1 = t_1 + 1$, pues como ya se mencionó, $t_1 \in T_3$ y $t_1 + 1 \in T_1$. Esto significa que existen trayectorias $(y_1 + 1) \rightarrow^r m$ y $m \rightarrow^r y_2$; no obstante, la trayectoria $(y_1 + 1) \rightarrow^r m \rightarrow^r y_2 = y_1$ no es permitida, por lo que $y_1 \neq y_2$.

Para ver que $z_1 \neq z_2$ el razonamiento es análogo. Supóngase que se da la igualdad y que $z_1 \rightarrow_*^g (z_1 + 1)$, se recuerda que el único vértice que no absorbe a z_1 es x_1 en $T_2 \cup T_3$.

Si se supone que $x_1 \neq x_2$, entonces x_2 absorbe a z_1 y lo hace por medio de $z_1 \rightarrow_*^g (z_1 + 1)$; sin embargo, en la misma figura $(z_2 + 1) = (z_2 + 1) \not\rightarrow^g x_2$, por lo que $x_1 = x_2$.

Sea m' un vértice en T_2 tal que no sea x_1 porque claramente $x_1 \in T_3$ ni tampoco $(x_1 + 1) \in T_1$, por lo que se genera las siguientes dos trayectorias, $(z_1 + 1) \rightarrow^g m'$ y $m' \rightarrow^g z_2$; sin embargo, la trayectoria $(z_1 + 1) \rightarrow^g m' \rightarrow^g z_1$ no es permitida, y entonces $z_1 \neq z_2$.

Como algún vértice de T_1 debe ser absorbido por algún otro vértice de T_3 , necesariamente debe hacerlo con color rojo o color verde, es decir, ya sea el color c o el color d debe ser rojo o verde. Supóngase que $c = a$ (el color c es el que se menciona en la figura 31 y hace el papel del color azul).

Como $(z_1 + 1) \neq (x_2 + 1)$, dado que $z_1 \in T_1$ y $x_2 \in T_3$, implica que existe una trayectoria $(z_1 + 1) \rightarrow^r y_2$; sin embargo, gracias a la proposición anterior se sabe que de $(z_1 + 1)$ a vértices de $T_2 \cup T_3$ sólo pueden ser de color verde; es decir, por un lado se tiene que existe una trayectoria monocromática roja $(z_1 + 1) \rightarrow^r y_2$, y por el otro, únicamente es permitido dirigir arcos de $(z_1 + 1)$ a vértices pertenecientes a T_2 con color verde, lo cual es una contradicción.

□

Por tanto existe a lo más un índice distinto a 1 y $n - 1$ tal que $\sigma(S) = \binom{i}{2} + 2$; más aún, existe a lo más un índice que cumple con los cuatro puntos de la proposición 4.4.2.

e Como último resultado daremos una cota inferior de la cantidad de ciclos dirigidos que debe tener un *contraejemplo* minimal. Es decir, haciendo uso de los resultados anteriores se buscará la forma de encontrar cual es la mínima cantidad de tres ciclos que debe tener un *contraejemplo*.

Recordando, un poco antes del teorema 4.2 se definió una función que nos arrojaba la cantidad de C_3 que se pueden encontrar en un torneo arbitrario en función de los T_3 que contenía, a saber,

$$\#(C_3) = \binom{n}{3} - \frac{1}{2} \left(\Omega(S) - \binom{n}{2} \right).$$

Por lo que, si es de interés encontrar una cota inferior a la cantidad de tres ciclos, basta con buscar cuando $\Omega(S)$ se vuelva máximo bajo las propiedades que estructuran a éstos contraejemplos.

En la siguiente demostración se hará uso del teorema 4.2. Se propondrá un torneo que se construye a partir de algunas modificaciones al torneo transitivo de orden n , tal que satisfaga las proposiciones vistas en este mismo capítulo, y se verá que su secuencia S asociada a la figura satisfará con tener la mínima de las sumas parciales y por ende $\Omega(S)$ alcanzará su máximo, salvo por un pequeño detalle que se verá en el siguiente teorema.

Teorema 4.5. *Un contraejemplo minimal de orden n tiene al menos $3n - 12$ 3-ciclos.*

Demostración

Para esta demostración se separará a todos nuestros torneos que satisfacen con las proposiciones anteriores en dos conjuntos. En el primer conjunto se tendrán a todos los torneos tales que en su secuencia asociada S exista un único índice i distinto de 1 y $n - 1$, tal que $\sigma_i(S) = \binom{i}{2} + 2$, y en el segundo conjunto se encontrarán el resto de los torneos para los cuales, no existirá ningún índice salvo por 1 y $n - 1$ tal que cumplan con esa igualdad.

Considérese un torneo transitivo con las siguientes modificaciones: se invertirán las orientaciones de los arcos $v_n \rightarrow_* v_1$, $v_n \rightarrow_* v_2$ y $v_{n-1} \rightarrow_* v_1$, de tal forma que su secuencia asociada S' no será de la forma $(0, 1, 2, 3, \dots, n - 1)$, sino $(2, 2, 2, 3, 4, \dots, n - 4, n - 3, n - 3, n - 3)$.

Este torneo, cuya secuencia es la descrita anteriormente cumple con que

$\sigma_i(S) = \binom{i}{2} + 3$, para $i \neq 1, n-1$ y tienen una cantidad de $3n - 10$ ciclos, lo cual puede demostrarse fácilmente por inducción.

Se verá que cualquier otra secuencia del segundo conjunto de contraejemplos tendrá al menos $3n - 10$ ciclos. Sea S una secuencia donde $\sigma_i(S) \geq \binom{i}{2} + 3$ para $i \neq 1, n-1$. Es claro ver que $\sigma_i(S') \leq \sigma_i(S)$. Por lo tanto, haciendo uso del teorema 4.3, se tiene que $\Omega(S') \geq \Omega(S)$, en donde el torneo asociado a S' sigue siendo en este caso, aquel con menor cantidad de ciclos dentro del conjunto de torneos considerados.

Para el otro caso, donde en la secuencia S existe un único índice i distinto de 1 y $n-1$ tal que cumple la igualdad, la secuencia S' no nos funciona del todo, porque en la i -ésima entrada $\sigma_i(S) < \sigma_i(S')$, es por ello que se debe hacer una pequeña modificación a S' .

Sea $S'' = (2, 2, 2, 3, 4, \dots, j-2, j-2, j+1, j+1, j+2, \dots, n-4, n-3, n-3, n-3)$ una nueva secuencia, la cual se obtuvo de S' , al tomar la entrada de grado $j-1$ y disminuirlo en uno y la entrada de grado j y aumentárselo en uno, obteniendo así a S'' .

Está claro que para aquél torneo con secuencia S , en el cual ocurría que en la i -ésima entrada $\sigma_i(S) \leq \sigma_i(S')$, ahora $\sigma_j(S'') \leq \sigma_j(S)$, para toda j . Por lo que $\Omega(S'') \geq \Omega(S)$.

Esto dice que el torneo cuya secuencia asociada es S'' contiene la menor cantidad de C_3 dentro del conjunto de torneos considerados en este caso.

Sin embargo, falta ver qué torneo arroja la menor cantidad de ciclos entre el torneo cuya secuencia asociada es S' ó S'' .

Por un lado se sabe que:

$$3n - 10 = \binom{n}{3} - \frac{1}{2} \left(\Omega(S') - \binom{n}{2} \right)$$

Sin embargo, si se recuerdan los criterios que se expusieron justo antes del teorema 4.3, al aumentar en uno y disminuir en uno dos entradas dentro de una secuencia, (en este caso S' para conseguir S''), $\Omega(S')$ varía en un sumando de la forma $2(s_i - s_k + 1)$, donde s_i y s_k son los grados a los cuales estamos sumando y restando uno, respectivamente.

Haciendo uso de estos criterios, podemos ver que: $j = s + i$ y $j - 1 = s_k$. Como $j > j - 1 - 1$, entonces tras hacer el cambio en las entradas de S' , se estarán añadiendo $2(j - (j - 1) + 1)$ a $\Omega(S')$. Es decir:

$$\Omega(S'') = \Omega(S') + 2(j - (j - 1) + 1) = \Omega(S') + 4$$

Esto lleva a:

$$\binom{n}{3} - \frac{1}{2} \left(\Omega(S'') - \binom{n}{2} \right) = \binom{n}{3} - \frac{1}{2} \left(\Omega(S') + 4 - \binom{n}{2} \right) = 3n - 12.$$

Dado que la secuencia S'' lleva como consecuencia a tener un torneo con una menor cantidad de ciclos que S' , entonces S'' sirve como cota inferior a la cantidad de ciclos que puede tener un contraejemplo minimal.

□

Conclusiones

Como resumen de lo que se hizo en este trabajo, se demostró en un principio que si se tiene una digráfica 2-coloreada, entonces se puede asegurar la existencia de un vértice absorbente, dicho resultado es válido para digráficas infinitas, siempre y cuando no existan trayectorias monocromáticas infinitas; es decir, que eventualmente estas se cierren en un ciclo, por lo que, este resultado se adoptó a torneos finitos (ver [1]).

Poco después, se prueba que dentro de un torneo m -coloreado que no contiene C_3 -tricromáticos, ni T_3 -tricromáticos, existe un vértice absorbente; como consecuencia, se piensa en debilitar la hipótesis, restringiéndonos a que en una digráfica no se contengan T_3 -tricromáticos o C_3 -tricromáticos; no obstante, se muestran contraejemplos, de torneos m -coloreados (con $m \leq 3$), que no contienen T_3 -tricromáticos ni tampoco vértices absorbentes (ver [4]). Asimismo, se muestra otro contraejemplo de torneos m -coloreado (con $m \geq 4$), que no contienen C_3 -tricromáticos, ni tampoco vértices absorbentes (ver [3]).

Llegando al problema principal que se abordó a lo largo de este trabajo:

Si T es un torneo 3-coloreado tal que no contenga C_3 -tricromático, ¿Acaso existe un vértice $v \in V(T)$ tal que para todo $x \in V(T)$, existe una trayectoria monocromática de x a v ?

La forma en la que se abordó el problema fue la siguiente: se asumió que existen torneos 3-coloreados sin C_3 -tricromáticos, tales que no contengan vértices absorbentes, para así, conocer la estructura que éstos deban tener en caso de existir, como por ejemplo: la cantidad de arcos que deban salir si consideramos únicamente i vértices de un torneo; de que longitud y que dirección deben ser los arcos de predecesores y sucesores de cada uno de los vértices en un torneo; no existen vértices de exgrados e ingrados equivalentes

a uno; la cantidad mínima de ciclos de orden tres que contiene un torneo; entre otras.

Si bien, la forma en la que se aproximó a este problema no fue directa, se lograron obtener algunas pistas sobre cómo debe verse un torneo con estas características; mas aún, es posible utilizar todas estas propiedades que fueron encontradas, tales como, cotas en la suma de secuencias de exgrados, cantidad de ciclos mínimas, entre otras, para seguir buscando más y cerciorarse de que ninguna de las nuevas propiedades contradigan a las anteriores; o por el contrario, reducir los candidatos que fungirán como contraejemplos y finalmente darle una respuesta a dicha incógnita.

En el texto en el que se basó para desarrollar la parte final de la tesis (ver [5]) realizan un código que busca contraejemplos; sin embargo, nunca se acotó la búsqueda implementando los resultados que se obtuvieron, por lo que, alguna de las propuestas pensadas para darle continuidad al trabajo puede ser utilizar métodos computacionales para hallar contraejemplos restringidos al cumplimiento de las proposiciones vistas aquí, y ver si se tiene suerte encontrando alguno, al reducir los tiempos de búsqueda e indagar en torneos de órdenes mayores.

Referencias

- [1] B. Sands, N.Sauer, and R. Woodrow, On monochromatic paths in edge-coloured digraphs, *J. Combin. Theory Ser. 33*: 271-275, 1982.
- [2] Chartrand, Gary, and Ping Zhang. Chromatic Graph Theory. Chapman & Hall/CRC, 2009.
- [3] H. Galeana-Sánchez and R. Rojas-Monroy, A counterexample to a conjecture on edge-coloured tournaments. *Discrete Mathematics*, 282: 275-276, 2004.
- [4] S. Ming Gang, On monochromatic paths in m-coloured tournaments, *Journal of Combinatorial Theory*, 45: 108-111, 1988.
- [5] T. Picchetti, Absorbing in colors, *Research Internship* (LIMOS, Clermont-Ferrand)
- [6] F. R. K. Chung, Open problems of Paul Erdős in graph theory, n.d.