UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESPACIOS EXTREMADAMENTE DISCONEXOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A:

GABRIELA ABREU OLVERA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ALEJANDRO DARÍO ROJAS SÁNCHEZ

CIUDAD DE MÉXICO, 2020

Índice general

Introducción **3**

1. Definiciones y resultados preliminares **5**

2. Espacios extremadamente disconexos **9**

2.1. Propiedades básicas 9

3. Ejemplos **19**

3.1. Álgebras de Boole 19

3.2. Absolutos de espacios Hausdorff 29

3.2.1. Funciones irreducibles y Θ-continuas 30

3.2.2. El absoluto de Iliadis 35

4. Producto de espacios extremadamente disconexos **43**

4.1. P-espacios y cardinales medibles 45

5. F-espacios **59**

5.1. F-espacios y espacios extremadamente disconexos 59

5.2. Espacios extremadamente disconexos metrizables 68

6. Espacios extremadamente disconexos separables **71**

A. Álgebras de Boole **75**

Bibliografía **79**

Introducción

El estudio de los espacios extremadamente disconexos tiene un papel muy importante en la teoría de álgebras de Boole, ya que existe una dualidad entre los espacios extremadamente disconexos y las álgebras de Boole completas. También son de gran importancia en el estudio de funciones irreducibles y perfectas, así como en la teoría de absolutos de espacios topológicos.

El objetivo de esta tesis es hacer un estudio exhaustivo sobre los espacios extremadamente disconexos, desde sus propiedades más básicas hasta propiedades más especializadas.

En el primer capítulo introducimos el concepto de espacio extremadamente disconexo y estudiamos sus propiedades más fundamentales. Damos varias equivalencias de la definición y vemos la relación que hay entre un espacio extremadamente disconexo y su compactación de Stone-Čech. Analizamos a qué tipo de subespacios se hereda esta propiedad, y damos un ejemplo de un espacio extremadamente disconexo que tiene un subespacio cerrado que no es extremadamente disconexo. Concluimos el capítulo probando que la suma topológica de espacios extremadamente disconexos es extremadamente disconexa si y sólo si cada sumando lo es (sin importar la cantidad de sumandos).

El capítulo dos está dedicado a la construcción de ejemplos de espacios extremadamente disconexos. Para esto es necesario desarrollar la teoría de álgebras de Boole, la cual se presenta en el Apéndice A. Con esta teoría, construimos el espacio de Stone de un álgebra de Boole y estudiamos sus propiedades. Damos condiciones necesarias y suficientes para que el espacio de Stone sea extremadamente disconexo. Una vez que tenemos desarrollado el espacio de Stone, pasamos a construir el absoluto de Iliadis. Para esto estudiamos primero los conceptos de función irreducible y función Θ-continua. Probamos que el absoluto de Iliadis siempre es extremadamente disconexo y finalmente vemos que es único salvo homeomorfismo.

En el capítulo tres analizamos el comportamiento del producto de dos espacios extremadamente disconexos. En esta parte es importante presentar los conceptos de P-espacio y de cardinal medible. Suponiendo la existencia de un cardinal medible, construimos un P-espacio extremadamente disconexo no discreto. Sin embargo, bajo el supuesto de que no existen cardinales medibles, probamos que todo P-espacio extremadamente disconexo es discreto. Esto nos permite demostrar que la no existencia de cardinales medibles implica que el producto de dos espacios es extremadamente disconexo si y sólo si un factor es discreto y el otro es extremadamente disconexo.

En el capítulo cuatro, estudiamos el concepto de F-espacio. Vemos cuál es la relación entre F-espacio, P-espacio y espacio extremadamente disconexo. Damos un ejemplo de un F-espacio conexo y vemos que el producto de un P-espacio y un espacio extremadamente disconexo no necesariamente es extremadamente disconexo. Concluimos el capítulo dando una caracterización de los espacios extremadamente disconexos metrizables.

Finalmente, en el capítulo cinco, analizamos a los espacios separables Tychonoff extremadamente disconexos. Probamos que un espacio separable Tychonoff es extremadamente disconexo si y sólo si es homeomorfo a un subespacio de la compactación de Stone-Čech de los números naturales.

Para el mejor entendimiento de esta tesis, se recomienda que el lector domine los conceptos básicos de topología, como axiomas de separación, bases, bases locales, conjuntos nulos y conulos, subespacios C-encajados y C^*-encajados. También es recomendable que el lector esté familiarizado con la compactación de Stone-Čech de un espacio y sus propiedades. En particular, la compactación de Stone-Čech de un espacio discreto vista como espacio de ultrafiltros será de importancia.

Capítulo 1

Definiciones y resultados preliminares

El objetivo de esta sección es únicamente el de brindar algunas definiciones y resultados sin prueba, a fin de que el lector tenga un rápido acceso a los mismos, puesto que los usaremos con frecuencia a lo largo del trabajo. Hemos decidido no incluir las pruebas de los resultados por considerarlos como parte de los prerrequisitos para que el lector tenga una óptima comprensión del contenido de la tesis.

Resultados de topología general

Proposición 1.1. *Sea X un espacio topológico, $U \subseteq X$ abierto, $C \subseteq X$ cerrado, y $A, B \subseteq X$. Entonces:*

1. $int_X(cl_X(int_X(cl_X(A)))) = int_X(cl_X(A))$ *y* $cl_X(int_X(cl_X(int_X(A)))) = cl_X(int_X(A))$.

2. $cl_X(U \cap A) = cl_X(U \cap cl_X(A))$.

3. $int_X(cl_X(U \cap A)) = int_X(cl_X(U)) \cap int_X(cl_X(A))$.

Proposición 1.2. *Sea X un espacio topológico y $D \subseteq X$ denso en X. Si $U \subseteq X$ es abierto, entonces $cl_X(U) = cl_X(U \cap D)$.*

Proposición 1.3. *Sea X un espacio topológico Hausdorff y localmente compacto. Entonces X es Tychonoff.*

Definición 1.4. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que A es un conjunto nulo de X si existe una función continua $f\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $A = f^{-1}[\{0\}]$. El conjunto $f^{-1}[\{0\}]$ también se denota $Z(f)$. El conjunto de todos los conjuntos nulos de X se denota $\mathcal{Z}[X]$.*

Abiertos y cerrados regulares

Para la construcción del absoluto de Iliadis necesitamos la siguiente definición.

Definición 1.5. *Sean X espacio topológico y $U, C \subseteq X$.*

1. *Decimos que* $U \subseteq X$ *es un abierto regular si* $U = int_X(cl_X(U))$. *Al conjunto de abierto regulares de* X *lo denotamos* $\mathcal{RO}(X)$.

2. *Decimos que* $C \subseteq X$ *es un cerrado regular si* $C = cl_X(int_X(C))$. *Al conjunto de cerrados regulares de* X *lo denotamos* $\mathcal{R}(X)$.

Observación 1.6. 1. *Dado* $U \subseteq X$ *abierto siempre se tiene que* $U \subseteq int_X(cl_X(U))$.

2. *Dado* $C \subseteq X$ *cerrado siempre se tiene que* $cl_X(int_X(C)) \subseteq C$.

3. *Si* $U \in \mathcal{RO}(X)$, *entonces* $X \setminus U \in \mathcal{R}(X)$.

4. *Si* $C \in \mathcal{R}(X)$, *entonces* $X \setminus C \in \mathcal{RO}(X)$.

Proposición 1.7. *Sea* X *un espacio regular. Entonces* $\mathcal{RO}(X)$ *es una base para* X.

Espacios C-encajados y C*-encajados

También es importante recordar las definiciones de subespacio C-encajado y C^*-encajado, así como algunos resultados.

Definición 1.8. *Sea* X *un espacio topológico. Decimos que* $A \subseteq X$ *está* C*-encajado en* X *si para toda función continua* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *existe una función continua* $g\colon X \to \mathbb{R}$ *tal que* $g|_A = f$.

Definición 1.9. *Sea* X *un espacio topológico. Decimos que* $A \subseteq X$ *está* C^**-encajado en* X *si para toda función continua y acotada* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *existe una función continua y acotada* $g\colon X \to \mathbb{R}$ *tal que* $g|_A = f$.

Proposición 1.10. *Si* $A \subseteq Z$ *está* C^**-encajado en* Z *y* $Z \subseteq X$ *está* C^**-encajado en* X, *entonces* A *está* C^**-encajado en* X.

Proposición 1.11. *Sea* X *un espacio topológico. Si* $B \subseteq X$ *es abierto y cerrado, entonces* B *está* C^**-encajado en* X.

Conjuntos completamente separados

Definición 1.12. *Sean* X *un espacio topológico y* $A, B \subseteq X$. *Los conjuntos* A *y* B *están completamente separados en* X *si existe una función continua* $f\colon X \to [0,1]$ *tal que* $f[A] \subseteq \{0\}$ *y* $f[B] \subseteq \{1\}$.

El siguiente resultado nos da una caracterización de los conjuntos completamente separados. Su prueba se puede consultar en [7].

Proposición 1.13. *Sean* X *un espacio topológico y* $A, B \subseteq X$. *Los conjuntos* A *y* B *están completamente separados en* X *si y sólo si existen* $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}[X]$ *ajenos tales que* $A \subseteq Z_1$ *y* $B \subseteq Z_2$.

Teorema 1.14. *(Teorema de extensión de Urysohn) Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. El conjunto A está C^*-encajado en X si y sólo si cualesquiera dos conjuntos completamente separados en A están completamente separados en X.*

La prueba del Teorema 1.14 se puede consultar en [7]. El Teorema de extensión de Urysohn tiene como consecuencia el siguiente corolario.

Corolario 1.15. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. El conjunto A está C^*-encajado en X si y sólo si para cualesquiera $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}[A]$ ajenos existen $W_1, W_2 \in \mathcal{Z}[X]$ ajenos tales que $Z_1 \subseteq W_1$ y $Z_2 \subseteq W_2$.*

Compactación de Stone-Čech

También necesitamos recordar algunos resultados sobre la compactación de Stone-Čech de un espacio X.

Proposición 1.16. *Sea X un espacio topológico Tychonoff. Si $A \subseteq X$ es abierto y cerrado en X, entonces $cl_{\beta X} A$ es abierto y cerrado en βX.*

Proposición 1.17. *Sea X un espacio topológico Tychonoff. Si $A \in \mathcal{Z}[X]$, entonces*

$$cl_{\beta X} A = A \cup \{\mathcal{U} \in \beta X \setminus X : A \in \mathcal{U}\}.$$

La prueba de la Proposición 1.17 se puede encontrar en [7].

Teorema 1.18. *(Teorema de Čech) Sean X y Y espacios Tychonoff. Si $f \colon X \to Y$ es continua, entonces existe $g \colon \beta X \to \beta Y$ continua tal que $g|_X = f$.*

La prueba del Teorema 1.18 se puede consultar en [7].

Recordemos que si D es un espacio discreto, entonces podemos ver a βD como un espacio de ultrafiltros en D.

Definición 1.19. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Denotamos por $G(A)$ al conjunto de ultrafiltros que tienen a A, es decir,*

$$G(A) = \{\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{U} \text{ es ultrafiltro en } X \text{ y } A \in \mathcal{U}\}.$$

Para un espacio discreto, D, el conjunto $\{G(A) : A \subseteq D\}$ es una base para los abiertos de βD.

Proposición 1.20. *Sea Y un espacio Hausdorff. Si $X \subseteq Y$ es localmente compacto y denso en Y, entonces X es abierto en Y.*

Corolario 1.21. *El subespacio $\mathbb{N}$ es abierto en $\beta\mathbb{N}$.*

Familias separadoras

Finalmente, para el último capítulo necesitamos las siguientes definiciones y proposiciones.

Definición 1.22. *Sean X espacio topológico y $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{I}\}$ familia de espacios topológicos. Sea $\mathcal{C} = \{f_\alpha \colon X \to X_\alpha : \alpha \in \mathcal{J}\}$.*

1. *Decimos que $\mathcal{C}$ separa puntos si para toda $x, y \in X$, con $x \neq y$, existe $\alpha \in \mathcal{J}$ tal que $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$.*

2. *Decimos que $\mathcal{C}$ separa puntos de cerrados si para cualquier $F \subseteq X$ cerrado y para toda $x \notin F$, existe $\alpha \in \mathcal{I}$ tal que $f_\alpha(x) \notin cl_{X_\alpha} f_\alpha[F]$.*

Proposición 1.23. *Sean (X, τ_X) espacio topológico, $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in \mathcal{I}\}$ familia de espacios topológicos y $\mathcal{C} = \{f_\alpha \colon X \to X_\alpha : \alpha \in \mathcal{I}\}$ familia de funciones continuas. La familia $\mathcal{C}$ separa puntos de cerrados si y sólo si $S = \{f_\alpha^{-1}[V] : V \in \tau_\alpha, \alpha \in \mathcal{I}\}$ es base para X.*

Definición 1.24. *Sean X espacio topológico, $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{I}\}$ familia de espacios topológicos y $\mathcal{C} = \{f_\alpha \colon X \to X_\alpha : \alpha \in \mathcal{I}\}$ familia de funciones continuas. Definimos la función evaluación $e \colon X \to \prod_{\alpha \in \mathcal{I}} X_\alpha$ como $e(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in \mathcal{I}}$, es decir, $\Pi_\alpha \circ e = f_\alpha$ para toda $\alpha \in \mathcal{I}$.*

Observación 1.25. *La función evaluación, e, es continua, pues cada f_α lo es.*

Proposición 1.26. *Sean X espacio topológico, $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in \mathcal{I}\}$ familia de espacios topológicos y $\mathcal{C} = \{f_\alpha \colon X \to X_\alpha : \alpha \in \mathcal{I}\}$ familia de funciones continuas.*

1. *Si $\mathcal{C}$ separa puntos, entonces la función evaluación, e, es inyectiva.*

2. *Si $\mathcal{C}$ separa puntos de cerrados, entonces la función evaluación, e, es abierta sobre su imagen, es decir, $e \colon X \to e[X]$ es abierta.*

Por último, introducimos la siguiente notación.

Notación: Dados X y Y conjuntos, denotamos por $F(X, Y)$ al conjunto de funciones de X en Y, es decir,

$$F(X, Y) = \{f \colon X \to Y : f \text{ es función}\}.$$

Capítulo 2

Espacios extremadamente disconexos

Recordemos que un espacio es disconexo si y sólo si existe un subconjunto abierto y cerrado no trivial (es decir, distinto del vacío y del total). Por lo tanto, los conjuntos abiertos y cerrados nos dan información sobre la conexidad o disconexidad de un espacio. Mientras más abiertos y cerrados tenga nuestro espacio, éste será "más" disconexo. En este capítulo nos interesa estudiar la definición de espacio extremadamente disconexo y las propiedades que tienen estos espacios. Damos varias equivalencias de la definición y vemos bajo qué condiciones se preserva la propiedad de ser extremadamente disconexo.

2.1. Propiedades básicas

Definición 2.1. *Sea X un espacio topológico. Denotamos por $\mathcal{B}(X)$ al conjunto de subconjuntos abiertos y cerrados de X, es decir,*

$$\mathcal{B}(X) = \{A \subseteq X : A \text{ es abierto y cerrado en } X\}.$$

Comenzaremos con la definición de espacio 0-dimensional, para después pasar a la de espacio extremadamente disconexo.

Definición 2.2. *Un espacio topológico X es 0-dimensional si X es T_1 y existe una base para X formada por conjuntos abiertos y cerrados, es decir, existe $B \subseteq \mathcal{B}(X)$ tal que B es base para X.*

Proposición 2.3. *Sea X un espacio 0-dimensional. Entonces X es Tychonoff.*

Demostración.
Sea $F \subseteq X$ cerrado y $x \in X \setminus F$. Como X es 0-dimensional y $X \setminus F$ es abierto, existe $A \subseteq X$ abierto y cerrado tal que $x \in A \subseteq X \setminus F$. Consideremos $f = \chi_A$, la función característica de A. La función f es continua, pues A es abierto y cerrado. Además, $f[F] \subseteq \{0\}$ y $f(x) = 1$. Por lo tanto, X es Tychonoff. □

Definición 2.4. *Un espacio topológico X es extremadamente disconexo si la cerradura de cualquier subconjunto abierto de X es abierta, es decir, si $U \subseteq X$ es abierto, entonces $cl_X(U)$ es abierto.*

Ejemplo 2.5. *1. Todo espacio discreto es extremadamente disconexo.*

2. *Todo espacio indiscreto es extremadamente disconexo.*

3. *Si X es un espacio infinito con la topología cofinita, entonces X es extremadamente disconexo, pues la cerradura de cualquier abierto es X.*

4. *Si $X = \{0, 1\}$ y $\tau = \{\emptyset, \{0\}, X\}$, entonces X es extremadamente disconexo.*

Notemos que, sorpresivamente, un espacio extremadamente disconexo no necesariamente es disconexo. Esto se puede ver en el Ejemplo 2.5.3, donde X con la topología cofinita es extremadamente disconexo, pero es conexo. La razón de este fenónemo recae en la separación del espacio, pues ésta es muy débil al sólo ser T_1 pero no T_2. Sin embargo, cuando nuestro espacio es Hausdorff, ser extremadamente disconexo implica la disconexidad del espacio. Esto se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 2.6. *Sea X un espacio Hausdorff, extremadamente disconexo y con $|X| \geq 2$. Entonces X es disconexo.*

Demostración.
Sean $a, b \in X$ con $a \neq b$. Entonces existen U y V abiertos ajenos tales que $a \in U$ y $b \in V$. Por lo tanto, $b \notin cl_X(U)$. Entonces $\emptyset \subsetneq cl_X(U) \subsetneq X$ y $cl_X(U)$ es abierto y cerrado, pues X es extremadamente disconexo. Por lo tanto, X es disconexo. □

La definición de espacio extremadamente disconexo tiene varias equivalencias, como veremos a continuación. Algunas de estas equivalencias nos dicen a qué tipo de subespacios se hereda la propiedad de ser extremadamente disconexo.

Teorema 2.7. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un espacio topológico X:*

1. *X es extremadamente disconexo,*

2. *todo subconjunto denso de X es extremadamente disconexo,*

3. *todo subconjunto abierto de X es extremadamente disconexo,*

4. *si U y V son subconjuntos abiertos de X, entonces $cl_X(U \cap V) = cl_X(U) \cap cl_X(V)$,*

5. *si U y V son subconjuntos abiertos ajenos de X, entonces $cl_X(U) \cap cl_X(V) = \emptyset$,*

6. *$\mathcal{B}(X) = \mathcal{R}(X) = \mathcal{RO}(X)$.*

Demostración.

1)⇒2)] Sea D un subconjunto denso de X y sea V un subconjunto abierto de D. Entonces existe $W \subseteq X$ abierto de X tal que $V = W \cap D$. Como X es extremadamente disconexo, $cl_X(W)$ es abierto en X. Pero como D es denso y W abierto en X, por la Proposición 1.2,

$$D \cap cl_X(W) = D \cap cl_X(W \cap D) = D \cap cl_X(V) = cl_D(V).$$

Por lo tanto, $cl_D(V)$ es abierto en D. Con esto concluimos que D es extremadamente disconexo.

2)⇒3)] Sea V un subconjunto abierto de X y W un subconjunto abierto de V. Entonces W es un subconjunto abierto de X. Por otro lado, $cl_V(W) = cl_X(W) \cap V$. Como X es denso en X, por hipótesis, X es extremadamente disconexo. Por lo tanto, $cl_X W$ es abierto en X. Por lo tanto, $cl_V(W)$ es abierto en V. De este modo, V es extremadamente disconexo.

3)⇒4)] Sean U y V subconjuntos abiertos de X. Entonces, por la Proposición 1.1, $cl_X(U \cap V) = cl_X(U \cap cl_X(V))$. Como X es abierto en X, por hipótesis, X es extremadamente disconexo. Por lo tanto, $cl_X(V)$ es abierto en X. Aplicando ahora la Proposición 1.1 a $cl_X(V)$, tenemos que

$$cl_X(U \cap cl_X(V)) = cl_X(cl_X U \cap cl_X V) = cl_X(U) \cap cl_X(V).$$

Por lo tanto, $cl_X(U \cap V) = cl_X(U) \cap cl_X(V)$.

4)⇒5)] Sean U y V subconjuntos abiertos ajenos de X. Entonces

$$\emptyset = cl_X(U \cap V) = cl_X(U) \cap cl_X(V).$$

5)⇒1)] Sea V un subconjunto abierto de X y sea $U = X \setminus cl_X(V)$. El conjunto U es abierto en X y $V \cap U = \emptyset$. Por hipótesis, $cl_X(V) \cap cl_X(U) = \emptyset$. Además, $(cl_X(V)) \cup (cl_X(U)) = X$. Entonces, $cl_X(V) = X \setminus cl_X(U)$ que es abierto en X. Por lo tanto, X es extremadamente disconexo.

1)⇒6)] Sea $A \in \mathcal{B}(X)$. Entonces $int_X(A) = A$ y $cl_X(int_X(A)) = A$. Por lo tanto, $A \in \mathcal{R}(X)$. Recíprocamente, sea A en $\mathcal{R}(X)$. Entonces $A = cl_X(int_X(A))$. Como $int_X(A)$ es abierto y X es extremadamente disconexo, entonces $cl_X(int_X(A))$ es abierto. Por lo tanto, $A \in \mathcal{B}(X)$. Así, $\mathcal{B}(X) = \mathcal{R}(X)$.

Ahora, sea $A \in \mathcal{RO}(X)$. Entonces $A = int_X(cl_X(A)) = cl_X(A)$, pues X es extremadamente disconexo. Por lo tanto, $A \in \mathcal{B}(X)$. Recíprocamente, sea $A \in \mathcal{B}(X)$. Entonces $int_X(cl_X(A)) = A$. Por lo tanto, $A \in \mathcal{RO}(X)$. Así, $\mathcal{B}(X) = \mathcal{R}(X) = \mathcal{RO}(X)$.

6)⇒ 1)] Sea $U \subseteq X$ abierto. Queremos probar que $cl_X(U) \in \mathcal{B}(X)$. Por hipótesis, basta ver que $cl_X(U) \in \mathcal{R}(X)$. Como U es abierto, entonces $U = int_X(U)$. Por lo tanto, por la Proposición 1.1,

$$cl_x(U) = cl_x(int_X(U)) = cl_X(int_X(cl_X(int_X(U)))) = cl_X(int_X(cl_X(U))).$$

Esto muestra que $cl_X(U) \in \mathcal{R}(X)$, y por lo tanto, $cl_X(U) \in \mathcal{B}(X)$. Esto implica que X es extremadamente disconexo.

□

Ejemplo 2.8. *Definamos*

$$\kappa\mathbb{N} = \mathbb{N} \cup \{\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \mathcal{U} \text{ es ultrafiltro y } \bigcap \mathcal{U} = \emptyset\},$$

con la siguiente topología. Todo punto de $\mathbb{N}$ *es aislado, y una base local para* $\mathcal{U} \in \kappa\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ *es*

$$\{\{\mathcal{U}\} \cup U : U \in \mathcal{U}\}.$$

Usando que, dado $\mathcal{U} \in \kappa\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, $\mathcal{U}$ es ultrafiltro y $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$, es fácil probar que $\kappa\mathbb{N}$ es un espacio Hausdorff. También es evidente que $\mathbb{N}$ es denso en $\kappa\mathbb{N}$. Ahora notemos que dado $A \subseteq \mathbb{N}$, se cumple que

$$cl_{\kappa\mathbb{N}}(A) = A \cup \{\mathcal{U} \in \kappa\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} : A \in \mathcal{U}\}.$$

Por lo tanto, si $A \subseteq \mathbb{N}$ es infinito, entonces $cl_{\kappa\mathbb{N}}(A) \setminus A$ es infinito. De manera que dado $\mathcal{U} \in \kappa\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ y $U \in \mathcal{U}$, se tiene que $cl_{\kappa\mathbb{N}}(\{\mathcal{U}\} \cup V) \nsubseteq \{\mathcal{U}\} \cup U$ para todo $V \in \mathcal{U}$. Esto es porque dado $V \in \mathcal{U}$, como $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$, entonces V es infinito. Por lo tanto, $cl_{\kappa\mathbb{N}}(V) \setminus V$ es infinito y, por lo tanto, $cl_{\kappa\mathbb{N}}(V) \setminus V \nsubseteq \{\mathcal{U}\}$. Esto implica que $\kappa\mathbb{N}$ no es regular.

Además, dados $W_1, W_2 \subseteq \kappa\mathbb{N}$ abiertos, como $\mathbb{N}$ es denso en $\kappa\mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{gathered} cl_{\kappa\mathbb{N}}(W_1 \cap W_2) = cl_{\kappa\mathbb{N}}(W_1 \cap W_2 \cap \mathbb{N}) = (W_1 \cap W_2 \cap \mathbb{N}) \cup \{\mathcal{U} \in \kappa\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} : W_1 \cap W_2 \cap \mathbb{N} \in \mathcal{U}\} = \\ [(W_1 \cap \mathbb{N}) \cup \{\mathcal{U} \in \kappa\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} : W_1 \cap \mathbb{N} \in \mathcal{U}\}] \cap [(W_2 \cap \mathbb{N}) \cup \{\mathcal{U} \in \kappa\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} : W_2 \cap \mathbb{N} \in \mathcal{U}\}] = \\ cl_{\kappa\mathbb{N}}(W_1 \cap \mathbb{N}) \cap cl_{\kappa\mathbb{N}}(W_2 \cap \mathbb{N}) = cl_{\kappa\mathbb{N}}(W_1) \cap cl_{\kappa\mathbb{N}}(W_2). \end{gathered}$$

Por el Teorema 2.7, concluimos que $\kappa\mathbb{N}$ es extremadamente disconexo. Sin embargo, por la Proposición 2.3, $\kappa\mathbb{N}$ no es 0-dimensional, pues ya vimos que $\kappa\mathbb{N}$ no es regular. Por lo tanto, encontramos un ejemplo de un espacio extremadamente disconexo Hausdorff, pero que no es 0-dimensional.

Hemos visto ya que todo espacio extremadamente disconexo Hausdorff es disconexo, sin embargo, el espacio $\kappa\mathbb{N}$ nos muestra que el "nivel de disconexidad"de un espacio extremadamente disconexo Hausdorff no regular, aún no es tan "extremo" como esperaríamos, ya que ni siquiera tiene por qué ser 0-dimensional. Ahora bien, la disconexidad extrema alcanza su mayor potencial cuando la trabajamos en la clase de los espacios regulares. En particular cuando un espacio extremadamente disconexo es regular, entonces ahora sí es 0-dimensional (como mostraremos a continuación). En el Capítulo 4 damos un ejemplo de un espacio 0-dimensional no extremadamente disconexo, exhibiendo así que los espacios extremadamente disconexos poseen un mayor grado de disconexidad que los 0-dimensionales.

Proposición 2.9. *Si X es T_3 y extremadamente disconexo, entonces X es 0-dimensional.*

Demostración.
Sean U abierto en X y $x \in U$. Nos gustaría probar que existe $V \subseteq X$ abierto y cerrado tal que $x \in V \subseteq U$. Como X es T_3, existe W abierto de X tal que $x \in W \subseteq cl_X(W) \subseteq U$. Como X es extremadamente disconexo, $cl_X(W)$ es abierto y cerrado. Por lo tanto, si hacemos $V = cl_X(W)$ se sigue que $x \in V \subseteq U$ y, por lo tanto, X es 0-dimensional. □

A continuación damos una caracterización de los espacios extremadamente disconexos que además son Tychonoff. Dicha caracterización nos ofrece adicionalmente una excelente muestra de las importantes propiedades que poseen los espacios extremadamente disconexos (Tychonoff). El teorema que probamos está motivado en el famoso Teorema de extensión de Tietze: Un espacio X es normal si y sólo si todo cerrado de X está C^*-encajado en X. A partir de este teorema surge una pregunta muy natural: ¿Qué clase de espacios obtenemos si en el Teorema de extensión de Tietze cambiamos "cerrado" por "abierto"?

Teorema 2.10. *Sea X un espacio topológico Tychonoff. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es extremadamente disconexo,*
2. *todo subconjunto denso de X está C^*-encajado en X,*
3. *todo subconjunto abierto de X está C^*-encajado en X,*
4. *βX es extremadamente disconexo.*

Demostración.

1) $\Rightarrow$2)] Sea D un subconjunto denso de X, y sean Z_1 y $Z_2 \in \mathcal{Z}[D]$ con $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$. Sea $h\colon D \to [0,1]$ una función continua tal que $h^{-1}\{0\} = Z_1$ y $h^{-1}\{1\} = Z_2$. Sean $U = h^{-1}\big[[0, \frac{1}{3})\big]$ y $V = h^{-1}\big[(\frac{2}{3}, 1]\big]$. Entonces U y V son abiertos ajenos en D. Por lo tanto, existen U_0 y V_0 abiertos en X tales que $U = U_0 \cap D$ y $V = V_0 \cap D$. Como

$$\emptyset = U \cap V = (U_0 \cap D) \cap (V_0 \cap D)$$

y D es denso, entonces $U_0 \cap V_0 = \emptyset$. Como X es extremadamente disconexo, por el Teorema 2.7, $cl_X(U_0) \cap cl_X(V_0) = \emptyset$. Además, $cl_X(U_0)$ es abierto y cerrado. Por lo tanto, $f = \chi_{cl_X(U_0)} \in C(X, [0,1])$ y $Z_1 \subseteq f^{-1}[\{1\}]$ y $Z_2 \subseteq f^{-1}[\{0\}]$. Por lo tanto, Z_1 y Z_2 están completamente separados en X. Por la Proposición 1.13, existen $W_1, W_2 \in \mathcal{Z}[X]$ ajenos tales que $Z_1 \subseteq W_1$ y $Z_2 \subseteq W_2$. Por el Corolario 1.15, D está C^*-encajado en X.

2)$\Rightarrow$3)] Sea U un subconjunto abierto de X y sea $D = U \cup X \setminus cl_X(U)$. Entonces D es denso en X y U es abierto y cerrado en D. Por lo tanto, por la Proposición 1.11, U está C^*-encajado en D, y por hipótesis D está C^*-encajado en X. Por la Proposición 1.10, U está C^*-encajado en X.

3)$\Rightarrow$4)] Sea U un subconjunto abierto de βX, y sea

$$V = (U \cap X) \cup X \setminus cl_{\beta X}(U).$$

Entonces V es abierto en X. Por hipótesis, V está C^*-encajado en X, y además X está C^*-encajado en βX. Por lo tanto, V está C^*-encajado en βX. Como $U \cap X$ es abierto y cerrado en V, entonces $\chi_{U\cap X}\colon V \to [0,1]$ es continua. Por lo tanto, existe $f \in C^*(\beta X)$ tal que $f|_V = \chi_{U \cap X}$. Finalmente, por la continuidad de f y usando que X es denso en βX y que U es abierto, por la Proposición 1.2 tenemos que

$$f[cl_{\beta X}(U)] = f[cl_{\beta X}(U \cap X)] \subseteq cl_{\mathbb{R}}(f[U \cap X]) \subseteq \{1\}, \text{ y}$$

$$f[cl_{\beta X}(X \setminus cl_{\beta X}(U)] \subseteq cl_{\mathbb{R}} f[X \setminus cl_{\beta X}(U)] \subseteq \{0\}.$$

Por lo tanto, $cl_{\beta X}(U) \cap cl_{\beta X}(X \setminus cl_{\beta X}(U)) = \emptyset$ y, como $\beta X = cl_{\beta X}(U) \cup cl_{\beta X}(X \setminus cl_{\beta X}(U))$, entonces

$$cl_{\beta X}(U) = \beta X \setminus cl_{\beta X}(X \setminus cl_{\beta X}(U)).$$

Por lo tanto, $cl_{\beta X}(U)$ es abierto en βX. De este modo, βX es extremadamente disconexo.

4)$\Rightarrow$1)] Se sigue del Teorema 2.7, pues X es denso en βX.

□

Corolario 2.11. *Si X es un espacio discreto, entonces βX es extremadamente disconexo. En particular $\beta\mathbb{N}$ es extremadamente disconexo.*

Demostración.
Como X es discreto, entonces X es extremadamente disconexo. Por el Teorema 2.10, βX es extremadamente disconexo. □

Corolario 2.12. *Si X es discreto y $X \subseteq Y \subseteq \beta X$, entonces Y es extremadamente disconexo.*

Demostración.
Como X es discreto, por el Corolario 2.11, βX es extremadamente disconexo. Además, como X es denso en βX y $X \subseteq Y$, entonces Y es denso en βX. Por el Teorema 2.10, Y es extremadamente disconexo. □

De acuerdo al Teorema 2.10, $\beta\mathbb{N}$ es un ejemplo de un espacio que tiene C^*-encajados a todos sus abiertos. Sin embargo, vale la pena notar que $\mathbb{N}$ es un subespacio abierto que no está C-encajado en $\beta\mathbb{N}$ puesto que $\beta\mathbb{N}$ es pseudocompacto. Esto muestra que no es posible tener una versión "abierta" del Teorema de extensión de Tietze en todo su potencial. A continuación enunciamos el Teorema de extensión de Tietze para que el lector pueda apreciar la cercanía del teorema y el Teorema 2.10.

Teorema 2.13. *(Teorema de extensión de Tietze) Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *X es normal.*
2. *Si $A \subseteq X$ es cerrado, entonces A está C-encajado en X.*
3. *Si $A \subseteq X$ es cerrado, entonces A está C^*-encajado en X.*

El Teorema 2.7 nos dice que la propiedad de ser extremadamente disconexo se hereda a subconjuntos abiertos y a subconjuntos densos. Sin embargo, aún podemos preguntarnos si la disconexidad extrema es hereditaria a cualquier subespacio. Recordemos por ejemplo que la 0-dimensionalidad sí es hereditaria. ¿Ocurrirá lo mismo con los espacios extremadamente disconexos? La respuesta es negativa. A continuación vemos que ser extremadamente disconexo no se hereda necesariamente a cerrados. Para eso necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.14. *Existe una familia $\mathcal{U}$ de abiertos no vacíos en $\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$, ajenos dos a dos y tal que $|\mathcal{U}| = 2^\omega$.*

Demostración.
Pensemos en $\beta\mathbb{N}$ como espacio de ultrafiltros y recordemos la definición 1.19. Consideremos la función $e\colon \mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ dada por

$$e(n) = \mathcal{U}_n = \{A \subseteq \mathbb{N} : n \in A\}.$$

Dado $A \subseteq \mathbb{N}$ tenemos que

$$e[A] = G(A) \cap e[\mathbb{N}] \text{ y } cl_{\beta\mathbb{N}}(e[A]) = G(A).$$

Para ver la última igualdad tomemos $\mathcal{U} \in G(A)$ y $G(B)$ tal que $\mathcal{U} \in G(B)$. Queremos ver que $G(B) \cap e[A] \neq \emptyset$. Como $\mathcal{U} \in G(A) \cap G(B)$, entonces $A, B \in \mathcal{U}$. Así, $A \cap B \neq \emptyset$. Sea $n \in A \cap B$. Entonces $\mathcal{U}_n \in e[A] \cap G(B)$. Por lo tanto, $G(B) \cap e[A] \neq \emptyset$ y $A \in cl_{\beta\mathbb{N}}(e[A])$. La otra contención se sigue de que $G(A)$ es cerrado y $e[A] \subseteq G(A)$.

Ahora tomemos $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ una familia casi ajena tal que $|\mathcal{A}| = 2^\omega$. Podemos ver a $\mathcal{A}$ como

$$\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < 2^\omega\}.$$

Dados $\alpha, \beta < 2^\omega$, con $\alpha \neq \beta$, tenemos que $|A_\alpha \cap A_\beta| < \omega$ y por lo tanto, $e[A_\alpha \cap A_\beta]$ es finito. De esto se sigue que

$$G(A_\alpha \cap A_\beta) = cl_{\beta\mathbb{N}}(e[A_\alpha \cap A_\beta]) = e[A_\alpha \cap A_\beta] \subseteq e[\mathbb{N}].$$

Para cada $\alpha < 2^\omega$ sea

$$U_\alpha = (\beta\mathbb{N} \setminus e[\mathbb{N}]) \cap G(A_\alpha).$$

Como $G(A_\alpha)$ es abierto en $\beta\mathbb{N}$, entonces U_α es abierto en $\beta\mathbb{N} \setminus e[\mathbb{N}]$. Veamos que la familia

$$\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$$

es la buscada.

Como para cada $\alpha < 2^\omega$, A_α es infinito, entonces $e[A_\alpha]$ es infinito, pues la función e es inyectiva. Como $\beta\mathbb{N}$ es compacto, entonces $der_{\beta\mathbb{N}}(e[A_\alpha]) \neq \emptyset$. Además, $e[A_\alpha] \subseteq G(A_\alpha)$ y $G(A_\alpha)$ es cerrado. Por lo tanto, $der_{\beta\mathbb{N}}(e[A_\alpha]) \subseteq G(A_\alpha)$. Pero los puntos de $e[\mathbb{N}]$ son aislados, pues dado $U_n \in e[\mathbb{N}]$ se tiene que $G(\{n\}) = \{U_n\}$. Esto implica que $der_{\beta\mathbb{N}}(e[A_\alpha]) \subseteq \beta\mathbb{N} \setminus e[\mathbb{N}]$. Se sigue que

$$\emptyset \neq der_{\beta\mathbb{N}}(e[A_\alpha]) \subseteq (\beta\mathbb{N} \setminus e[\mathbb{N}]) \cap G(A_\alpha) = U_\alpha.$$

Por lo tanto, cada U_α es no vacío. Ahora tomemos $\alpha, \beta < 2^\omega$ con $\alpha \neq \beta$. Entonces

$$U_\alpha \cap U_\beta = (\beta\mathbb{N} \setminus e[\mathbb{N}]) \cap (G(A_\alpha) \cap G(A_\beta)) = (\beta\mathbb{N} \setminus e[\mathbb{N}]) \cap G(A_\alpha \cap A_\beta) \subseteq (\beta\mathbb{N} \setminus e[\mathbb{N}]) \cap e[\mathbb{N}] = \emptyset.$$

Con esto concluimos que $\mathcal{U}$ es la familia buscada.

□

Recordemos que el Lema de Jones nos da condiciones suficientes para que un espacio no sea normal. Para dar nuestro ejemplo de un subespacio cerrado de un espacio extremadamente disconexo que no es extremadamente disconexo, usamos el Lema de Jones. La prueba de este lema se puede consultar en [5].

Lema 2.15. *(Lema de Jones) Sea X un espacio topológico. Si existen $D, S \subseteq X$, con D denso y S cerrado y discreto tal que $|S| \geq 2^{|D|}$, entonces X no es normal.*

Proposición 2.16. *El espacio $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ no es extremadamente disconexo.*

Demostración.
Supongamos que $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ es extremadamente disconexo. Por el Lema 2.14 existe una familia $\mathcal{U}$ de abiertos no vacíos en $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, ajenos dos a dos tal que $|\mathcal{U}| = 2^\omega$, digamos

$$\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < 2^\omega\}.$$

Para cada $\alpha < 2^\omega$ sea $x_\alpha \in U_\alpha$ y consideremos al conjunto

$$D = \{x_\alpha : \alpha < 2^\omega\}.$$

Sea $X = \mathbb{N} \cup D$. Como $\mathbb{N} \cap D = \emptyset$, entonces $D = X \setminus \mathbb{N}$. Por lo tanto, D es cerrado en X. Además, dado $x_\alpha \in D$, se tiene que $U_\alpha \cap D = \{x_\alpha\}$. Como U_α es abierto en $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, existe $V_\alpha \subseteq \beta\mathbb{N}$ abierto tal que $U_\alpha = V_\alpha \cap (\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$. Entonces

$$\{x_\alpha\} = U_\alpha \cap D = (V_\alpha \cap \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}) \cap D = V_\alpha \cap D = (V_\alpha \cap X) \cap D,$$

donde las últimas dos igualdades se siguen de que $D \subseteq \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ y $D \subseteq X$. Por lo tanto, D es discreto en X. Por otro lado, como $\mathbb{N}$ es denso en $\beta\mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ es denso en X. Además, $|D| \geq 2^{|\mathbb{N}|}$. Por el Lema de Jones, X no es normal. Es decir, existen $A, B \subseteq X$ cerrados ajenos de X que no se pueden separar con abiertos ajenos. Podemos ver a los conjuntos A y B como

$$A = (A \cap \mathbb{N}) \cup (A \cap D),$$

$$B = (B \cap \mathbb{N}) \cup (B \cap D).$$

Si existieran $U, V \subseteq X$ abiertos ajenos tales que $A \cap D \subseteq U$ y $B \cap D \subseteq V$, entonces $(U \setminus B) \cup (A \cap \mathbb{N})$ y $(V \setminus A) \cup (B \cap \mathbb{N})$ serían abiertos ajenos de X que separan a A y B (ya que $\mathbb{N}$ es abierto y discreto en X). Por lo tanto, $A \cap D$ y $B \cap D$ no se separan en X. Sean $A' = A \cap D$ y $B' = B \cap D$. Ahora consideremos a los conjuntos

$$W_{A'} = \bigcup_{x_\alpha \in A'} U_\alpha, \qquad W_{B'} = \bigcup_{x_\alpha \in B'} U_\alpha.$$

Notemos que $W_{A'}$ y $W_{B'}$ son abiertos ajenos de $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Como $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ es extremadamente disconexo, por el Teorema 2.7, $cl_{\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}}(W_{A'}) \cap cl_{\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}}(W_{B'}) = \emptyset$. Sabemos que $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ es cerrado en $\beta\mathbb{N}$, y por lo tanto es normal. Entonces existen $U, V \subseteq \beta\mathbb{N}$ abiertos ajenos de $\beta\mathbb{N}$ tales que $A' \subseteq cl_{\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}}(W_{A'}) \subseteq U$ y $B' \subseteq cl_{\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}}(W_{B'}) \subseteq V$. De modo que $U \cap X$ y $V \cap X$ son abiertos ajenos de X que separan a A' y

B', lo cual es una contradicción. Esta contradicción vino de suponer que $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ es extremadamente disconexo. Con esto concluimos que $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ no es extremadamente disconexo, con $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ cerrado (ver Corolario 1.21). $\square$

La Proposición 2.16 nos muestra que la propiedad de ser extremadamente disconexo no necesariamente se hereda a cerrados.

Ahora nos gustaría ver qué pasa cuando tenemos un espacio extremadamente disconexo y le aplicamos una función continua. ¿La imagen seguirá siendo extremadamente disconexa? Analicemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.17. *$\beta\mathbb{N}$ es extremadamente disconexo y existe una función $f\colon \beta\mathbb{N} \to [0,1]$ continua y sobre, pues $[0,1]$ es compacto y separable. Además, como $\beta\mathbb{N}$ es compacto, f es perfecta. Sin embargo, $[0,1]$ no es extremadamente disconexo. Por lo tanto, la propiedad de ser extremadamente disconexo no se preserva bajo funciones continuas, perfectas y sobreyectivas. En consecuencia, no se preserva bajo cocientes.*

Por lo tanto, no basta con que una función sea continua para garantizar que la imagen de un espacio extremadamente disconexo también lo sea. Sin embargo, podemos dar el siguiente resultado.

Proposición 2.18. *Sean X un espacio extremadamente disconexo, Y un espacio topológico, y $f\colon X \to Y$ una función continua, abierta y sobre. Entonces Y es extremadamente disconexo.*

Demostración.
Sea U un subconjunto abierto de Y. Entonces $f^{-1}[U]$ es abierto en X y, por lo tanto, $cl_X(f^{-1}[U])$ es abierto en X. Por otro lado, como f es continua, $cl_X(f^{-1}[U]) \subseteq f^{-1}[cl_Y(U)]$. Sea $x \in f^{-1}[cl_Y(U)]$. Queremos probar que $x \in cl_X(f^{-1}[U])$. Sea $V \subseteq X$ abierto tal que $x \in V$. Como f es abierta, $f[V]$ es vecindad abierta de $f(x) \in cl_Y(U)$. Por lo tanto, $f[V] \cap U \neq \emptyset$. Sea $y \in f[V] \cap U$. Entonces $y = f(z)$ para algún $z \in V$. Por lo tanto, $z \in V \cap f^{-1}[U]$, es decir, $V \cap f^{-1}[U] \neq \emptyset$. Se sigue que $x \in cl_X(f^{-1}[U])$. Por lo tanto, $cl_X(f^{-1}[U]) = f^{-1}[cl_Y(U)]$. Entonces $f\big[cl_X(f^{-1}[U])\big] = f\big[f^{-1}[cl_Y(U)]\big] = cl_Y(U)$ es abierto en Y, pues f es abierta. Por lo tanto, Y es extremadamente disconexo.

$\square$

Por lo tanto, ser extremadamente disconexo es propiedad topológica.

Ya vimos que esta propiedad no se preserva bajo cocientes. Nuestra siguiente pregunta es si se preserva bajo suma topológica.

Proposición 2.19. *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in J\}$ una familia de espacios topológicos. $\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha$ es extremadamente disconexo si y sólo si cada X_α es extremadamente disconexo.*

Demostración.
$\Rightarrow]$ Supongamos que $\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha$ es extremadamente disconexo. Como cada X_α es abierto en $\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha$,

entonces por el Teorema 2.10, cada X_α es extremadamente disconexo.

$\Leftarrow]$ Supongamos que cada X_α es extremadamente disconexo, y sea U un subconjunto abierto de $\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha$. Entonces $cl_{\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha}(U) = \bigcup_{\alpha\in J} cl_{X_\alpha}(U\cap X_\alpha)$. Como cada X_α es extremadamente disconexo y $U\cap X_\alpha$ es abierto en X_α, entonces $cl_{X_\alpha}(U\cap X_\alpha)$ es abierto en X_α y, por lo tanto, es abierto en $\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha$. Entonces $cl_{\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha}(U)$ es abierto en $\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha$. Así, $\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha$ es extremadamente disconexo. $\square$

Proposición 2.20. *Si X es discreto y Y es extremadamente disconexo, entonces $X\times Y$ es extremadamente disconexo, ya que $X\times Y = \bigoplus_{x\in X}(\{x\}\times Y)$, y $\{x\}\times Y \cong Y$.*

Nos falta ver qué pasa con el producto de espacios extremadamente disconexos. ¿Seguirá siendo extremadamente disconexo? Esta pregunta la contestamos en el Capítulo 4.

Capítulo 3

Ejemplos

En el Ejemplo 2.5, presentamos algunos espacios extremadamente disconexos. Probamos que para espacios Tychonoff, X es extremadamente disconexo si y sólo si βX es extremadamente disconexo. Esto nos da toda una gama de ejemplos. Sin embargo, podemos preguntarnos si hay más. En este capítulo, presentamos otros ejemplos de espacios extremadamente disconexos. Dada un álgebra de Boole, construimos su espacio de Stone. Vemos que éste siempre es un espacio compacto 0-dimensional y damos condiciones necesarias y suficientes para que sea extremadamente disconexo. En la segunda parte del capítulo, partimos de un espacio topológico Hausdorff arbitrario, y hacemos la construcción del absoluto de Iliadis. Demostramos que este espacio siempre es extremadamente disconexo, sin importar el espacio del cual partimos, y probamos su unicidad (salvo homeomorfismo).

Como pudimos apreciar en el Ejemplo 2.5, cuando la separación del espacio es "débil", la disconexidad extrema puede presentarse aún en espacios conexos, situación que podemos considerar como indeseable. Por esta razón, a partir de este momento y por el resto del trabajo, todos los espacios son considerados al menos Hausdorff y con al menos dos puntos.

3.1. Álgebras de Boole

Para hablar del espacio de Stone, primero tenemos que hablar de álgebras de Boole. Para ver más detalles sobre retículas y álgebras de Boole, ver Apéndice A.

Recordemos que un álgebra de Boole es una retícula distributiva y complementada. Veamos algunos ejemplos que nos serán de utilidad más adelante.

Ejemplo 3.1. *1. Dado X un espacio topológico, $(\mathcal{B}(X), \cup, \cap)$ es un álgebra de Boole con $A' = X \backslash A$ para $A \in \mathcal{B}(X)$.*

2. Dado X un espacio topológico, $(\mathcal{RO}(X), \vee, \cap)$ es un álgebra de Boole completa con $U' = X \setminus cl_X(U)$ para $U \in \mathcal{RO}(X)$ y $\bigvee B = int_X(cl_X(\bigcup B))$, $\bigwedge B = int_X(cl_X(\bigcap B))$ para $\emptyset \neq B \subseteq$

$\mathcal{RO}(X)$.

3. *Dado X un espacio topológico, $(\mathcal{R}(X), \cup, \wedge)$ es un álgebra de Boole completa con $A' = X \setminus int_X(A)$ para $A \in \mathcal{R}(X)$ y $\bigvee C = cl_X(int_X(\bigcup C))$, $\bigwedge C = cl_X(int_X(\bigcap C))$ para $\emptyset \neq C \subseteq \mathcal{R}(X)$.*

Definición 3.2. *Decimos que la retícula $(L, \vee, \wedge)$ tiene una representación topológica si existe un isomorfismo de retículas entre $(L, \vee, \wedge)$ y $(\mathcal{B}(X), \cup, \cap)$ para algún espacio topológico X.*

En esta sección vemos que toda álgebra de Boole tiene una representación topológica a través del espacio de Stone. Para construir el espacio de Stone de un álgebra de Boole, son indispensables las definiciones de filtro y ultrafiltro.

Definición 3.3. *Sea $(B, \vee, \wedge, ')$ un álgebra de Boole.*

1. *Una familia $F \subseteq B$ es una B-base de filtro (o una base de filtro en B) si*

   a) *$F \neq \emptyset$ y*

   b) *si $a, b \in F$, entonces existe $c \in F$ tal que $0 \neq c \leq a \wedge b$.*

2. *Una B-base de filtro es un B-filtro si además satisface que siempre que $a \in F$ y $a \leq b$ para $b \in B$, entonces $b \in F$.*

3. *Un B-filtro F es un B-ultrafiltro si F es un filtro maximal (es decir, si G es un B-filtro y $F \subseteq G$, entonces $G = F$). F es un B-filtro primo si para $a, b \in B$, $a \vee b \in F$ implica que $a \in F$ o $b \in F$.*

Observación 3.4. *$1 \in F$ para cualquier B-filtro F y $0 \notin F$ para cualquier B-filtro F.*

Proposición 3.5. *Sea $(B, \vee, \wedge, ')$ un álgebra de Boole y F un B-filtro. Entonces:*

1. *si $a, b \in F$, entonces $a \wedge b \in F$,*

2. *F está contenido en algún B-ultrafiltro,*

3. *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

   a) *F es un B-ultrafiltro,*

   b) *para $a \in B$, si $a \wedge b \neq 0$ para todo $b \in F$, entonces $a \in F$,*

   c) *F es un B-filtro primo, y*

   d) *para $a \in B$, $a \in F$ o $a' \in F$.*

Demostración.

1. Sean $a, b \in F$. Entonces por definición existe $c \in F$ tal que $0 \neq c \leq a \wedge b$. Como F es un B-filtro, por definición se sigue que $a \wedge b \in F$.

2. Sea

$$\mathcal{F} = \{G \subseteq B : G \text{ es B-filtro y } F \subseteq G\}.$$

Nos gustaría aplicar el Lema de Zorn a $(\mathcal{F}, \subseteq)$. Para eso veamos que toda cadena en $\mathcal{F}$ tiene cota superior. Sea $\emptyset \neq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ una cadena. Afirmamos que $\bigcup \mathcal{C}$ es cota superior de $\mathcal{C}$. Es claro que $G \subseteq \bigcup \mathcal{C}$ para todo $G \in \mathcal{C}$. Sólo falta ver que $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{F}$. Probemos primero que $\bigcup \mathcal{C}$ es un B-filtro. Como $\emptyset \neq \mathcal{C}$ y $G \neq \emptyset$ para todo $G \in \mathcal{C}$, entonces $\bigcup \mathcal{C} \neq \emptyset$. Ahora sean $a, b \in \bigcup \mathcal{C}$. Entonces existen $G_1, G_2 \in \mathcal{C}$ tales que $a \in G_1$ y $b \in G_2$. Como $\mathcal{C}$ es cadena, sin pérdida de generalidad, $G_1 \subseteq G_2$. Por lo tanto, $a, b \in G_2$. Como G_2 es un B-filtro, existe $c \in G_2 \subseteq \bigcup \mathcal{C}$ tal que $0 \neq c \leq a \wedge b$. Finalmente, sea $a \in \bigcup \mathcal{C}$ y $b \in B$ tal que $a \leq b$. Entonces existe $G \in \mathcal{C}$ tal que $a \in G$. Como G es un B-filtro, $b \in G$. Por lo tanto, $b \in \bigcup \mathcal{C}$. Con esto concluimos que $\bigcup \mathcal{C}$ es un B-filtro. Además, $F \subseteq \bigcup \mathcal{C}$. Por lo tanto, $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{F}$. Entonces, por el Lema de Zorn, existe $G_0 \in \mathcal{F}$ elemento maximal. Veamos que G_0 es un B-ultrafiltro. Sea G un B-filtro tal que $G_0 \subseteq G$. Entonces $F \subseteq G$. Esto implica que $G \in \mathcal{F}$, pero como G_0 es elemento maximal de $\mathcal{F}$, entonces $G_0 = G$. Por lo tanto, G_0 es un B-ultrafiltro y $F \subseteq G_0$.

3. *a)* $\Rightarrow$ *b)*] Sea $a \in B$ tal que $a \wedge b \neq 0$ para todo $b \in F$. Sea

$$U = \{c \in B : c \geq a \wedge b \text{ para algún } b \in F\}.$$

Veamos que U es un B-filtro. Dado $b \in F$ se tiene que $b \geq a \wedge b$ y por lo tanto, $b \in U$. Entonces $\emptyset \neq F \subseteq U$. Por lo tanto, $U \neq \emptyset$. Además, $1 \in F$ y $a \geq a \wedge 1$, lo que implica que $a \in U$. También tenemos que si $c \in U$ entonces $c \geq a \wedge b$ para algún $b \in F$ y $a \wedge b \neq 0$ por hipótesis. Por lo tanto, $c \neq 0$ y $0 \notin U$. Sean $c_1, c_2 \in U$. Entonces $c_1 \geq a \wedge b_1$ y $c_2 \geq a \wedge b_2$ para $b_1, b_2 \in F$. Entonces

$$c_1 \wedge c_2 \geq (a \wedge b_1) \wedge (a \wedge b_2) = a \wedge (b_1 \wedge b_2)$$

con $b_1 \wedge b_2 \in F$. Por lo tanto, $c_1 \wedge c_2 \in U$. Finalmente, sea $c \in U$ y $d \in B$ tal que $d \geq c$. Entonces $d \geq c \geq a \wedge b$ para algún $b \in F$. Entonces $d \geq a \wedge b$, y por lo tanto $d \in U$. Entonces U es un B-filtro tal que $F \subseteq U$. Como F es maximal, entonces $U = F$, y como $a \in U$, entonces $a \in F$.

b) $\Rightarrow$ *c)*] Supongamos que $a \vee b \in F$ y que $a \notin F$ y $b \notin F$. Entonces por hipótesis existen $c_1, c_2 \in F$ tales que $a \wedge c_1 = 0$ y $b \wedge c_2 = 0$. Como $a \vee b, c_1, c_2 \in F$, entonces por el punto 1 de esta proposición, $(a \vee b) \wedge (c_1 \wedge c_2) \in F$. Pero

$$(a \vee b) \wedge (c_1 \wedge c_2) = (a \wedge c_1 \wedge c_2) \vee (b \wedge c_1 \wedge c_2) = 0 \vee 0 = 0.$$

Por lo tanto, $0 \in F$, lo cual es una contradicción. La contradicción vino de suponer que $a \notin F$ y $b \notin F$. Por lo tanto, $a \in F$ o $b \in F$.

c) $\Rightarrow$ *d)*] Sea $a \in B$. Entonces, por la Observación 3.4, $a \vee a' = 1 \in F$. Por hipótesis, $a \in F$ o $a' \in F$.

d) $\Rightarrow$ *a)*] Sea U un B-ultrafiltro tal que $F \subseteq U$ y sea $a \in U$. Por hipótesis, $a \in F$ o $a' \in F$. Si

$a' \in F$, entonces $a' \in U$, y por lo tanto $a \wedge a' = 0 \in U$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $a' \notin F$, lo cual implica que $a \in F$. Así, $U \subseteq F$, y por lo tanto, $U = F$. Con esto concluimos que F es un B-ultrafiltro.

□

Ahora sí tenemos las herramientas para construir al espacio de Stone de un álgebra de Boole, B. Los elementos de este espacio son los B-ultrafiltros, y para cada elemento en B nos fijamos en todos los B-ultrafiltros que lo tienen. Vamos a ver que esto nos induce una topología en el conjunto de B-ultrafiltros, y vamos a analizar las propiedades de esta topología.

Definición 3.6. *Sea B un álgebra de Boole y sea*

$$S(B) = \{U \subseteq B : U \text{ es un } B\text{-ultrafiltro}\}.$$

Para $a \in B$ definimos

$$\lambda(a) = \{U \in S(B) : a \in U\}.$$

Si hay más de un álgebra de Boole involucrada, escribimos λ_B para referirnos a λ.

Observación 3.7. $\lambda \in F(B, \mathcal{P}(S(B)))$.

Veamos algunas propiedades importantes de la función λ.

Proposición 3.8. *Sean B un álgebra de Boole y $a, b \in B$. Entonces:*

1. $\lambda(0) = \emptyset$ *y* $\lambda(1) = S(B)$,
2. $\lambda(a \vee b) = \lambda(a) \cup \lambda(b)$,
3. $\lambda(a \wedge b) = \lambda(a) \cap \lambda(b)$,
4. $\lambda(a') = S(B) \setminus \lambda(a)$.

Demostración.

1. Por la Observación 3.4, si U es un B-ultrafiltro, entonces $0 \notin U$ y $1 \in U$. Por lo tanto, $\lambda(0) = \emptyset$ y $\lambda(1) = S(B)$.

2. Sea $U \in \lambda(a \vee b)$. Entonces $a \vee b \in U$. Como U es B-ultrafiltro, entonces U es un B-filtro primo (por la Proposición 3.5). Entonces $a \in U$ o $b \in U$, es decir $U \in \lambda(a)$ o $U \in \lambda(b)$. Por lo tanto, $U \in \lambda(a) \cup \lambda(b)$. Recíprocamente, si $U \in \lambda(a) \cup \lambda(b)$, entonces $a \in U$ o $b \in U$. Por lo tanto, como $a \leq a \vee b$ y $b \leq a \vee b$, se sigue que $a \vee b \in U$. Así $U \in \lambda(a \vee b)$. Por lo tanto, $\lambda(a \vee b) = \lambda(a) \cup \lambda(b)$.

3. Sea $U \in \lambda(a \wedge b)$. Entonces $a \wedge b \in U$. Como $a \wedge b \leq a$ y $a \wedge b \leq b$, entonces $a, b \in U$. Por lo tanto, $U \in \lambda(a)$ y $U \in \lambda(b)$. Así, $U \in \lambda(a) \cap \lambda(b)$. Ahora sea $U \in \lambda(a) \cap \lambda(b)$. Entonces $a, b \in U$. Por lo tanto, $a \wedge b \in U$ (por la Proposición 3.5). Así, $U \in \lambda(a \wedge b)$. Esto implica que $\lambda(a \wedge b) = \lambda(a) \cap \lambda(b)$.

4. Por los primeros tres puntos de esta proposición tenemos que $\lambda(a) \cap \lambda(a') = \lambda(a \wedge a') = \lambda(0) = \emptyset$ y $\lambda(a) \cup \lambda(a') = \lambda(a \vee a') = \lambda(1) = S(B)$. Por lo tanto, $\lambda(a') = S(B) \setminus \lambda(a)$.

□

Proposición 3.9. *Dada un álgebra de Boole, B, se tiene que $\{\lambda(a) : a \in B\}$ forma una base para alguna topología en $S(B)$.*

Demostración.
Se sigue de los puntos 1 y 3 de la Proposición 3.8. □

Con la Proposición 3.9, podemos definir al espacio de Stone como espacio topológico.

Definición 3.10. *Sea B un álgebra de Boole. El conjunto $S(B)$ con la topología para la cual*

$$\{\lambda(a) : a \in B\}$$

es una base, se llama espacio de Stone de B.

La base $\{\lambda(a) : a \in B\}$ tiene una característica muy importante, como se muestra en la siguiente observación.

Observación 3.11. *Como para cada $a \in B$ se tiene que $\lambda(a) = S(B) \setminus \lambda(a')$, entonces $\lambda(a)$ es abierto y cerrado en $S(B)$. Por lo tanto, $\{\lambda(a) : a \in B\} \subseteq \mathcal{B}(S(B))$ y $\lambda \in F(B, \mathcal{B}(S(B)))$.*

Además, $\{\lambda(a) : a \in B\}$ es una base para los cerrados de $S(B)$.

Recordemos que dado un espacio topológico X, $\mathcal{B}(X)$ es un álgebra de Boole. El siguiente teorema nos muestra que para cualquier álgebra de Boole, B, existe un espacio topológico X compacto y 0-dimensional, tal que B es isomorfa al álgebra de Boole $\mathcal{B}(X)$. Es decir, toda álgebra de Boole tiene una representación topológica (ver Definición 3.2).

Teorema 3.12. *(Teorema de Representación de Stone). Sea B un álgebra de Boole. Entonces:*

1. *$S(B)$ es un espacio compacto Hausdorff y 0-dimensional,*

2. *$\{\lambda(a) : a \in B\} = \mathcal{B}(S(B))$,*

3. *λ es un isomorfismo de Boole entre B y $\mathcal{B}(S(B))$.*

Demostración.

1. Primero probaremos que $S(B)$ es Hausdorff. Sean $U, V \in S(B)$ con $U \neq V$. Entonces en particular $V \nsubseteq U$. Por lo tanto, existe $b \in V \setminus U$. Como $b \notin U$ y U es un B-ultrafiltro, entonces por la Proposición 3.5, $b' \in U$. Por la Proposición 3.8 tenemos que $\emptyset = \lambda(0) = \lambda(b \wedge b') = \lambda(b) \cap \lambda(b')$. Además, $U \in \lambda(b')$ y $V \in \lambda(b)$. Por lo tanto, $S(B)$ es Hausdorff.

   Por la Observación 3.11 $\lambda(a)$ es abierto y cerrado para cada $a \in B$. Por lo tanto, $S(B)$ es 0-dimensional.

   Ahora veamos que $S(B)$ es compacto. Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S(B))$ una familia de cerrados en $S(B)$ con la propiedad de intersección finita. Queremos probar que $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Sea

$$G = \{a \in B : \text{existe } F \in \mathcal{F} \text{ tal que } F \subseteq \lambda(a)\}.$$

   Afirmamos que $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap\{\lambda(a) : a \in G\}$. Sea $U \in \bigcap \mathcal{F}$. Entonces $U \in F$ para todo $F \in \mathcal{F}$. Sea $a \in G$. Entonces existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subseteq \lambda(a)$. Por lo tanto, $U \in \lambda(a)$. Entonces $U \in \bigcap\{\lambda(a) : a \in G\}$. Ahora sea $U \in \bigcap\{\lambda(a) : a \in G\}$. Entonces $U \in \lambda(a)$ para todo $a \in G$. Sea $F \in \mathcal{F}$. Como F es cerrado y $\{\lambda(a) : a \in B\}$ es base para los cerrados (por la Observación 3.11), entonces existe $\{a_i \in B : i \in \mathcal{I}\} \subseteq B$ tal que $F = \bigcap\{\lambda(a_i) : i \in \mathcal{I}\} \subseteq \lambda(a_j)$ para todo $j \in \mathcal{I}$. Entonces $a_j \in G$ para todo $j \in \mathcal{I}$. Por lo tanto, $U \in \lambda(a_j)$ para todo $j \in \mathcal{I}$, es decir $U \in \bigcap\{\lambda(a_j) : j \in \mathcal{I}\} = F$. Así, $U \in \bigcap \mathcal{F}$. Por lo tanto, $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap\{\lambda(a) : a \in G\}$.

   Ahora sean $a_1, a_2 \in G$. Entonces existen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que $F_i \subseteq \lambda(a_i)(i = 1, 2)$. Como $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de intersección finita, entonces $\emptyset \neq F_1 \cap F_2 \subseteq \lambda(a_1) \cap \lambda(a_2) = \lambda(a_1 \wedge a_2)$. Entonces $a_1 \wedge a_2 \in G$ con $0 \neq a_1 \wedge a_2$. Por lo tanto, es fácil ver que G es un filtro en B. Entonces, por la Proposición 3.5, G está contenido en algún B-ultrafiltro $\mathcal{U} \in S(B)$. Así, para todo $a \in G$ se tiene que $a \in \mathcal{U}$, y por lo tanto, $\mathcal{U} \in \lambda(a)$ para todo $a \in G$. Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \bigcap\{\lambda(a) : a \in G\} = \bigcap \mathcal{F}$. Esto implica que $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $S(B)$ es compacto.

2. Por la Observación 3.11 tenemos que $\{\lambda(a) : a \in B\} \subseteq \mathcal{B}(S(B))$. Ahora tomemos $C \in \mathcal{B}(S(B))$. Como C es abierto y $\{\lambda(a) : a \in B\}$ es base, entonces existe $D \subseteq B$ tal que $C = \bigcup\{\lambda(a) : a \in D\}$. Además, como C es cerrado y $S(B)$ es compacto, entonces C es compacto. Por lo tanto, existe $F \subseteq D$ finito tal que $C = \bigcup\{\lambda(a) : a \in F\}$. Pero por la Proposición 3.8,

$$\bigcup\{\lambda(a) : a \in F\} = \lambda(\bigvee\{a : a \in F\}).$$

   Sea $c = \bigvee\{a : a \in F\}$. Entonces $C = \lambda(c) \in \{\lambda(a) : a \in B\}$. Por lo tanto, $\mathcal{B}(S(B)) \subseteq \{\lambda(a) : a \in B\}$. Así, $\{\lambda(a) : a \in B\} = \mathcal{B}(S(B))$.

3. Por la Proposición 3.8, λ es un homomorfismo de Boole. Por el punto 2 de este teorema, λ es sobre. Falta ver que λ es inyectiva. Sean $a, b \in B$ con $a \neq b$. Entonces $a \nleq b$ o $b \nleq a$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $a \nleq b$. Entonces por la Proposición A.14 $a \wedge b' \neq 0$. Sea $\mathcal{F} = \{c \in B : c \geq a \wedge b'\}$. Es fácil ver que $\mathcal{F}$ es un B-filtro. Por lo tanto, existe un B-ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. Entonces, como $a \wedge b' \in \mathcal{F}$, se sigue que $a \wedge b' \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \lambda(a \wedge b')$.

Como $a \geq a \wedge b'$ y $b' \geq a \wedge b'$, entonces $a, b' \in \mathcal{U}$. Entonces $\mathcal{U} \in \lambda(a)$ y $\mathcal{U} \notin \lambda(b)$. Por lo tanto, $\lambda(a) \neq \lambda(b)$. Así, λ es inyectiva. Por lo tanto, λ es una biyección y por la Proposición A.17, λ es un isomorfismo de Boole.

□

El punto 3 del Teorema 3.12 nos permite hacer la siguiente observación.

Observación 3.13. *Dados $a, b \in B$, $\lambda(a) \subseteq \lambda(b)$ si y sólo si $a \leq b$.*

Con el teorema de representación de Stone tenemos que un álgebra de Boole B tiene una representación topológica como el álgebra de Boole de abiertos y cerrados de un espacio compacto y 0-dimensional, a saber el espacio de Stone de B, $S(B)$. Ahora nos gustaría ver si el recíproco es cierto. Es decir, si tenemos un espacio topológico X compacto y 0-dimensional, ¿existe un álgebra de Boole, B, tal que X es homeomorfo al espacio de Stone de B?

Definición 3.14. *Sean A y B álgebras de Boole, y $f\colon A \to B$ un homomorfismo de Boole. Definimos $\lambda(f) \in F(S(B), \mathcal{P}(A))$ como*

$$\lambda(f)(\mathcal{U}) = \{a \in A : f(a) \in \mathcal{U}\}.$$

Proposición 3.15. *Sean A y B álgebras de Boole, y $f\colon A \to B$ un homomorfismo de Boole. Entonces:*

1. *$\lambda(f) \in F(S(B), S(A))$,*
2. *dado $a \in A$, $(\lambda(f))^{-1}[\lambda_A(a)] = \lambda_B(f(a))$ y $\lambda(f)[\lambda_B(f(a))] = \lambda_A(a) \cap \lambda(f)[S(B)]$,*
3. *$\lambda(f)$ es continua y cerrada,*
4. *f es inyectiva si y sólo si $\lambda(f)$ es sobre (en $S(A)$),*
5. *f es sobre si y sólo si $\lambda(f)$ es inyectiva,*
6. *f es un isomorfismo de Boole si y sólo si $\lambda(f)$ es un homeomorfismo.*

Demostración.

1. Sea $\mathcal{U} \in S(B)$. Queremos probar que $\lambda(f)(\mathcal{U}) \in S(A)$, es decir, que $\lambda(f)(\mathcal{U})$ es un A-ultrafiltro. Como f es homomorfismo de Boole, entonces por la Observación A.16, $f(1) = 1$. Como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, entonces $1 \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $1 \in \lambda(f)(\mathcal{U})$ y así, $\lambda(f)(\mathcal{U}) \neq \emptyset$. Por otro lado, si $a \in \lambda(f)(\mathcal{U})$, entonces $f(a) \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $f(a) \neq 0$ y por la Observación A.16, $a \neq 0$. Por lo tanto, $0 \notin \lambda(f)(\mathcal{U})$. Sean $a, b \in \lambda(f)(\mathcal{U})$. Entonces $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $0 \neq a \wedge b \in \lambda(f)(\mathcal{U})$. Ahora sea $a \in \lambda(f)(\mathcal{U})$ y $b \in A$ con $a \leq b$. Entonces $f(a) \leq f(b)$ con $f(a) \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $f(b) \in \mathcal{U}$, es decir, $b \in \lambda(f)(\mathcal{U})$. Con esto tenemos que $\lambda(f)(\mathcal{U})$ es un A-filtro. Veamos que $\lambda(f)(\mathcal{U})$ es un A-ultrafiltro. Supongamos que $a \vee b \in \lambda(f)(\mathcal{U})$. Entonces

$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es un B-ultrafiltro, entonces por la Proposición 3.5, $\mathcal{U}$ es un B-filtro primo. Entonces $f(a) \in \mathcal{U}$ o $f(b) \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $a \in \lambda(f)(\mathcal{U})$ o $b \in \lambda(f)(\mathcal{U})$. Así, $\lambda(f)(\mathcal{U})$ es un A-filtro primo, y por la Proposición 3.5, $\lambda(f)(\mathcal{U})$ es un A-ultrafiltro. Por lo tanto, $\lambda(f)(\mathcal{U}) \in S(A)$.

2. Sea $\mathcal{U} \in \lambda_B(f(a))$. Entonces $f(a) \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $a \in \lambda(f)(\mathcal{U})$, lo que implica que $\lambda(f)(\mathcal{U}) \in \lambda_A(a)$ y así, $\mathcal{U} \in (\lambda(f))^{-1}[\lambda_A(a)]$. Con esto tenemos que $\lambda_B(f(a)) \subseteq (\lambda(f))^{-1}[\lambda_A(a)]$. Ahora sea $\mathcal{U} \in (\lambda(f))^{-1}[\lambda_A(a)]$. Entonces $\lambda(f)(\mathcal{U}) \in \lambda_A(a)$, es decir, $a \in \lambda(f)(\mathcal{U})$. De este modo $f(a) \in \mathcal{U}$ y por lo tanto, $\mathcal{U} \in \lambda_B(f(a))$. Así, $(\lambda(f))^{-1}[\lambda_A(a)] = \lambda_B(f(a))$. Aplicando $\lambda(f)$ de ambos lados, tenemos que $\lambda(f)[\lambda_B(f(a))] \subseteq \lambda_A(a) \cap \lambda(f)[S(B)]$. Ahora sea $\mathcal{V} \in \lambda_A(a) \cap \lambda(f)[S(B)]$. Entonces $a \in \mathcal{V}$ y $\mathcal{V} = \lambda(f)(\mathcal{U})$ para algún $\mathcal{U} \in S(B)$. Entonces $a \in \lambda(f)(\mathcal{U})$, es decir $f(a) \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \lambda_B(f(a))$ y $\mathcal{V} = \lambda(f)(\mathcal{U}) \in \lambda(f)[\lambda_B(f(a))]$. Así tenemos que $\lambda(f)[\lambda_B(f(a))] = \lambda_A(a) \cap \lambda(f)[S(B)]$.

3. Para ver que $\lambda(f)$ es continua, basta ver que dado $C \in \mathcal{B}(S(A))$ se tiene que $(\lambda(f))^{-1}[C]$ es abierto en $S(B)$, pues $S(A)$ es 0-dimensional. Pero por el Teorema 3.12 sabemos que

$$\mathcal{B}(S(A)) = \{\lambda(a) : a \in A\}.$$

Entonces sea $a \in A$ y veamos que $(\lambda(f))^{-1}[\lambda_A(a)]$ es abierto en $S(B)$. Por el punto 2 de esta proposición $(\lambda(f))^{-1}[\lambda_A(a)] = \lambda_B(f(a)) \in \mathcal{B}(S(B))$. Por lo tanto, $\lambda(f)$ es continua. Además, como $S(B)$ es compacto, dado $F \subseteq S(B)$ cerrado, se tiene que F es compacto. Entonces como $\lambda(f)$ es continua, $\lambda(f)[F]$ es compacto en $S(A)$. Como $S(A)$ es Hausdorff, entonces $\lambda(f)[F]$ es cerrado en $S(A)$. Por lo tanto, $\lambda(f)$ es una función cerrada.

4. $\Rightarrow]$ Supongamos que f es inyectiva y sea $\mathcal{U} \in S(A)$. Sea

$$\mathcal{V} = \{b \in B : \text{existe } a \in \mathcal{U} \text{ tal que } b \geq f(a)\}.$$

Si $a \in \mathcal{U}$ entonces $a \neq 0$. Por lo tanto, $f(a) \neq 0$, pues f es inyectiva. Entonces $0 \notin \mathcal{V}$. Sean $b_1, b_2 \in \mathcal{V}$. Entonces existen $a_1, a_2 \in \mathcal{U}$ tales que $b_1 \geq f(a_1)$ y $b_2 \geq f(a_2)$. Por lo tanto, $b_1 \wedge b_2 \geq f(a_1) \wedge f(a_2) = f(a_1 \wedge a_2)$ con $a_1 \wedge a_2 \in \mathcal{U}$, pues $\mathcal{U}$ es un A-filtro. Entonces $0 \neq b_1 \wedge b_2 \in \mathcal{V}$. Ahora sea $b \in \mathcal{V}$ y $d \in B$ tal que $d \geq b$. Como $b \in \mathcal{V}$ existe $a \in \mathcal{U}$ tal que $b \geq f(a)$. Entonces $d \geq f(a)$ y por lo tanto, $d \in \mathcal{V}$. Así, $\mathcal{V}$ es un B-filtro. Por lo tanto, existe un B-ultrafiltro $\mathcal{W}$ tal que $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$. Como $\{f(a) : a \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathcal{W}$, entonces dado $a \in \mathcal{U}$, se tiene que $f(a) \in \mathcal{W}$. Por lo tanto, $a \in \lambda(f)(\mathcal{W})$. Entonces $\mathcal{U} \subseteq \lambda(f)(\mathcal{W})$. Como $\mathcal{U}$ es un A-ultrafiltro, entonces $\lambda(f)(\mathcal{W}) = \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\lambda(f)$ es sobre.

$\Leftarrow]$ Supongamos que $\lambda(f)$ es sobre y sean $a, b \in A$ con $a \neq b$. Como λ_A es inyectiva, entonces $\lambda_A(a) \neq \lambda_A(b)$. Por lo tanto, $\lambda_A(a) \setminus \lambda_A(b) \neq \emptyset$ o $\lambda_A(b) \setminus \lambda_A(a) \neq \emptyset$. Si $\mathcal{U} \in \lambda_A(a) \setminus \lambda_A(b)$, entonces $a \in \mathcal{U}$ y $b \notin \mathcal{U}$. Entonces por la Proposición 3.5 $b' \in \mathcal{U}$. Como $\lambda(f)$ es sobre, entonces existe

$\mathcal{V} \in S(B)$ tal que $\lambda(f)(\mathcal{V}) = \mathcal{U}$. Por lo tanto, $f(a), f(b') \in \mathcal{V}$. Como $\mathcal{V}$ es un B-filtro, entonces $0 \neq f(a) \wedge f(b') = f(a) \wedge (f(b))'$. Por lo tanto, $f(a) \neq f(b)$. Análogamente, si $\lambda_A(b) \setminus \lambda_A(a) \neq \emptyset$, se tiene que $f(a) \neq f(b)$. Por lo tanto, f es inyectiva.

5. $\Rightarrow]$ Supongamos que f es sobre y sean $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in S(B)$ tales que $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$. Sea $b \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{V}$. Como f es sobre, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Por lo tanto, $a \in \lambda(f)(\mathcal{U})$ y $a \notin \lambda(f)(\mathcal{V})$. Entonces, $\lambda(f)(\mathcal{U}) \neq \lambda(f)(\mathcal{V})$, y por lo tanto, $\lambda(f)$ es inyectiva.

   $\Leftarrow]$ Ahora supongamos que $\lambda(f)$ es inyectiva y sea $b \in B$. Por el punto 3 de esta proposición $\lambda(f) \in F(S(B), S(A))$ es un encaje, pues es inyectiva, continua y cerrada. Es decir, $\lambda(f)\colon S(B) \to \lambda(f)[S(B)]$ es un homeomorfismo. Entonces $\lambda(f)[\lambda_B(b)] = U \cap \lambda(f)[S(B)]$ para algún $U \subseteq S(A)$ abierto. Entonces existe $C \subseteq A$ tal que $U = \bigcup\{\lambda_A(a) : a \in C\}$. Por otro lado,

$$\lambda(f)[\lambda_B(b)] \subseteq U = \bigcup\{\lambda_A(a) : a \in C\},$$

   y $\lambda(f)[\lambda_B(b)]$ es cerrado en $S(A)$, y por lo tanto, es compacto. Entonces existe $F \subseteq C$ finito tal que

$$\lambda(f)[\lambda_B(b)] \subseteq \bigcup\{\lambda_A(a) : a \in F\} = \lambda_A(\bigvee F) \subseteq U.$$

   Sea $a_0 = \bigvee F$. Entonces $\lambda(f)[\lambda_B(b)] = \lambda_A(a_0) \cap \lambda(f)[S(B)]$ (pues recordemos que $\lambda(f)[\lambda_B(b)] = U \cap \lambda(f)[S(B)]$). Entonces, por el punto 2 de esta proposición, $\lambda(f)[\lambda_B(b)] = \lambda(f)[\lambda_B(f(a_0))]$. Como $\lambda(f)$ es inyectiva, entonces $\lambda_B(b) = \lambda_B(f(a_0))$. Como la función λ tambien es inyectiva (por el Teorema 3.12), entonces $f(a_0) = b$. Por lo tanto, f es sobre.

6. $\Rightarrow]$ Supongamos que f es un isomorfismo de Boole. Entonces por los puntos 3, 4 y 5 de esta proposición $\lambda(f)$ es un homeomorfismo.

   $\Leftarrow]$ Supongamos que $\lambda(f)$ es un homeomorfismo. Entonces por lo puntos 4 y 5 de esta proposición, f es un homomorfismo de Boole biyectivo. Por la Proposición A.17, f es un isomorfismo de Boole.

□

Definición 3.16. *Sea X un espacio compacto y 0-dimensional y sea $x \in X$. Definimos $\nu \in F(X, \mathcal{P}(\mathcal{B}(X)))$ como $\nu(x) = \{C \in \mathcal{B}(X) : x \in C\}$. Si estamos hablando de más de un espacio, escribimos ν_X para referirnos a ν.*

Proposición 3.17. *Si X es un espacio compacto y 0-dimensional, entonces $\nu \in F(X, S(\mathcal{B}(X)))$ y ν es un homeomorfismo.*

Demostración.
Sea $x \in X$. Veamos que $\nu(x)$ es un $\mathcal{B}(X)$-ultrafiltro. Claramente $\nu(x) \neq \emptyset$ pues $X \in \nu(x)$. Por otro lado, dados $C, D \in \nu(x)$, se tiene que $\emptyset \neq C \cap D \in \nu(x)$. Además, si $C \in \nu(x)$ y $D \in \mathcal{B}(X)$ es tal que

$C \subseteq D$, entonces es claro que $D \in \nu(x)$. Por lo tanto, $\nu(x)$ es un $\mathcal{B}(X)$-filtro. Ahora, supongamos que $C_1 \cup C_2 \in \nu(x)$, con $C_1, C_2 \in \mathcal{B}(X)$. Entonces $x \in C_1$ o $x \in C_2$. Por lo tanto, $C_1 \in \nu(x)$ o $C_2 \in \nu(x)$. Entonces $\nu(x)$ es un $\mathcal{B}(X)$-filtro primo, y por la Proposición 3.5, $\nu(x)$ es un $\mathcal{B}(X)$-ultrafiltro. Por lo tanto, $\nu(x) \in S(\mathcal{B}(X))$.

Ahora veamos que ν es continua. Como $\{\lambda(C) : C \in \mathcal{B}(X)\}$ es una base para $S(\mathcal{B}(X))$, basta probar que dado $C \in \mathcal{B}(X)$, $\nu^{-1}[\lambda(C)]$ es abierto en X. Pero

$$\nu^{-1}[\lambda(C)] = \{x \in X : \nu(x) \in \lambda(C)\} = \{x \in X : C \in \nu(x)\} = \{x \in X : x \in C\} = C \in \mathcal{B}(X).$$

Por lo tanto, $\nu^{-1}[\lambda(C)]$ es abierto en X. Así, ν es continua.

Tomemos ahora $x, y \in X$ con $x \neq y$. Como X es Hausdorff y 0-dimensional, entonces existe $C \in \mathcal{B}(X)$ tal que $x \in C$ y $y \in C' = X \setminus C$. Por lo tanto, $C \in \nu(x)$ y $C' \in \nu(y)$, es decir, $\nu(x) \in \lambda(C)$ y $\nu(y) \in \lambda(C')$. Como $\lambda(C) \cap \lambda(C') = \lambda(C \cap C') = \lambda(\emptyset) = \emptyset$, entonces $\nu(x) \neq \nu(y)$. Por lo tanto, ν es inyectiva. Veamos que ν es sobre. Sea $\mathcal{U} \in S(\mathcal{B}(X))$. Entonces $\mathcal{U}$ es un $\mathcal{B}(X)$-ultrafiltro. Como X es compacto, entonces $\bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Sea $x \in \bigcap \mathcal{U}$. Entonces $x \in C$ para todo $C \in \mathcal{U}$, y por lo tanto, $C \in \nu(x)$ para todo $C \in \mathcal{U}$, es decir, $\mathcal{U} \subseteq \nu(x)$. Como $\mathcal{U}$ es maximal, entonces $\nu(x) = \mathcal{U}$. Por lo tanto, ν es sobre. Así, $\nu(x)$ es una biyección continua. Como X es compacto y $S(\mathcal{B}(X))$ es Hausdorff, entonces ν es cerrada. Por lo tanto, ν es un homeomorfismo. □

Si A es un álgebra de Boole, entonces por el Teorema 3.12, λ_A es un isomorfismo de Boole entre A y $\mathcal{B}(S(A))$, y si X es un espacio compacto y 0-dimensional, entonces por la Proposición 3.17, ν_X es un homeomorfismo entre X y $S(\mathcal{B}(X))$.

Ya vimos que el espacio de Stone de un álgebra de Boole siempre es compacto y 0-dimensional. Sin embargo, a nosotros nos interesan los espacios extremadamente disconexos. El siguiente teorema nos da condiciones necesarias y suficientes para que el espacio de Stone de un álgebra de Boole sea extremadamente disconexo.

Teorema 3.18. *Sea B un álgebra de Boole. Las siguientes son equivalentes:*

1. *B es completa,*

2. *$S(B)$ es extremadamente disconexo.*

Demostración.
1) $\Rightarrow$ 2)] Supongamos que B es completa y sea $U \subseteq S(B)$ abierto. Entonces existe $\{b_i : i \in I\} \subseteq B$ tal que $U = \bigcup\{\lambda(b_i) : i \in I\}$. Sea $b = \bigvee\{b_i : i \in I\}$ que existe porque B es completa. Queremos probar que $\lambda(b) = cl_{S(B)}(U)$. Como $b_i \leq b$ para todo $i \in I$, entonces por la Observación 3.13, $\lambda(b_i) \subseteq \lambda(b)$ para todo $i \in I$. Por lo tanto, $U = \bigcup\{\lambda(b_i) : i \in I\} \subseteq \lambda(b)$. Entonces $cl_{S(B)}(U) \subseteq \lambda(b)$. Ahora supongamos que $\lambda(b) \backslash cl_{S(B)}(U) \neq \emptyset$. Entonces existe $a \in B$ tal que $\emptyset \neq \lambda(a) \subseteq \lambda(b) \backslash cl_{S(B)}(U)$, pues $\lambda(b) \backslash cl_{S(B)}(U)$ es abierto y distinto del vacío. Entonces $U \subseteq cl_{S(B)}(U) \subseteq \lambda(b) \cap (S(B) \setminus \lambda(a)) = \lambda(b \wedge a')$. Por lo tanto, $b_i \leq b \wedge a' < b$ para todo $i \in I$. (Notemos que no puede pasar que $b \wedge a' = b$, pues en ese caso

tendríamos que $b \leq a'$ y entonces $\lambda(a) \subseteq \lambda(b) \setminus cl_{S(B)}(U) \subseteq \lambda(b) \subseteq \lambda(a') = S(B) \setminus \lambda(a)$, lo cual es una contradicción.) Entonces $b \wedge a'$ es una cota superior de $\{b_i : i \in I\}$ menor que $b = \bigvee\{b_i : i \in I\}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\lambda(b) \setminus cl_{S(B)}(U) = \emptyset$ y $\lambda(b) = cl_{S(B)}(U)$. Por lo tanto, $cl_{S(B)}(U)$ es abierto y $S(B)$ es extremadamente disconexo.

$2) \Rightarrow 1)]$ Como $S(B)$ es extremadamente disconexo, por el Teorema 2.7, $\mathcal{B}(S(B)) = \mathcal{R}(S(B))$. Por la Proposición A.8, $\mathcal{R}(S(B))$ es completa, y por el Teorema 3.12 $\mathcal{B}(S(B))$ es isomorfa a B. Por lo tanto, B es completa. $\square$

Así como probamos que todo espacio compacto 0-dimensional es homeomorfo al espacio de Stone de algún álgebra de Boole, y toda álgebra de Boole es isomorfa al álgebra de Boole de abiertos y cerrados de algún espacio topológico, con el Teorema 3.18 podemos dar un resultado análogo para espacios extremadamente disconexos y álgebras de Boole completas.

Corolario 3.19. *1. Todo espacio compacto extremadamente disconexo es homeomorfo al espacio de Stone de algún álgebra de Boole completa.*

2. Toda álgebra de Boole completa es isomorfa al álgebra de Boole de abiertos y cerrados de algún espacio topológico compacto y extremadamente disconexo.

Demostración.

1. Sea X un espacio compacto extremadamente disconexo. Entonces por el Teorema 2.7 $\mathcal{B}(X) = \mathcal{R}(X)$, y por la Proposición A.8 $\mathcal{R}(X)$ es completa. Como X es compacto y Hausdorff, X es normal y, por lo tanto es 0-dimensional, pues es extremadamente disconexo (ver Proposición 2.9). De la Proposición 3.17 se sigue que X es homeomorfo a $S(\mathcal{B}(X))$ con $\mathcal{B}(X)$ completa.

2. Sea B un álgebra de Boole completa. Por el Teorema 3.18 $S(B)$ es extremadamente disconexo. Por el Teorema 3.12, $S(B)$ es compacto y B es isomorfo a $\mathcal{B}(S(B))$.

$\square$

3.2. Absolutos de espacios Hausdorff

En la sección anterior dimos toda una clase de ejemplos de espacios extremadamente disconexos usando álgebras de Boole y el espacio de Stone. Sin embargo, vimos que para que el espacio de Stone sea extremadamente disconexo, necesitamos que el álgebra de Boole sea completa. En esta sección construimos el absoluto de Iliadis para un espacio topológico X, y vemos que éste siempre es extremadamente disconexo, sin importar cómo sea X. Además, vemos que el absoluto de Iliadis de un espacio topológico X es único salvo homeomorfismo. Para hacer esto, necesitamos primero estudiar dos tipos de funciones: las funciones Θ-continuas y las funciones irreducibles.

3.2.1. Funciones irreducibles y Θ-continuas

Definición 3.20. *Sean X y Y espacios topológicos, $f \in F(X,Y)$ y $x_0 \in X$.*

1. *f es Θ-continua en x_0 si para toda vecindad abierta V de $f(x_0)$ existe una vecindad abierta U de x_0 tal que $f[cl_X(U)] \subseteq cl_Y(V)$.*
2. *f es Θ-continua si f es Θ-continua en todo punto de X.*
3. *El conjunto de funciones Θ-continuas de X a Y se denota $\Theta C(X,Y)$.*
4. *f es un Θ-homeomorfismo si f es una biyección y tanto f como f^{-1} son Θ-continuas.*

Proposición 3.21. *Sean X, Y y Z espacios topológicos, $f \in F(X,Y)$ y $g \in F(Y,Z)$. Entonces:*

1. *si f es Θ-continua en $x_0 \in X$ y g es Θ-continua en $f(x_0)$, entonces $g \circ f$ es Θ-continua en x_0,*
2. *$C(X,Y) \subseteq \Theta C(X,Y)$,*
3. *si Y es regular, entonces $C(X,Y) = \Theta C(X,Y)$,*
4. *si $A \subseteq X$ y $f \in \Theta C(X,Y)$, entonces $f|_A \in \Theta C(A,Y)$,*
5. *si D es denso en Y, $f \in \Theta C(X,Y)$ y $f[X] \subseteq D$, entonces $f \in \Theta C(X,D)$,*

Demostración.

1. Sea $W \subseteq Z$ una vecindad abierta de $g(f(x_0))$. Como g es Θ-continua en $f(x_0)$, existe $V \subseteq Y$ vecindad abierta de $f(x_0)$ tal que $g[cl_Y(V)] \subseteq cl_Z(W)$. Como f es Θ-continua en x_0, existe $U \subseteq X$ vecindad abierta de x_0 tal que $f[cl_X(U)] \subseteq cl_Y(V)$. Por lo tanto,
$$g \circ f[cl_X(U)] \subseteq g[cl_Y(V)] \subseteq cl_Z(W).$$
Así, $g \circ f$ es Θ-continua en x_0.
2. Sea $f \in C(X,Y)$, $x_0 \in X$ y $V \subseteq Y$ vecindad abierta de $f(x_0)$. Entonces, como f es continua, existe $U \subseteq X$ vecindad abierta de x_0 tal que $f[U] \subseteq V$. De la continuidad de f también se sigue que $f[cl_X(U)] \subseteq cl_Y(f[U])$. Entonces $f[U] \subseteq f[cl_X(U)] \subseteq cl_Y(f[U]) \subseteq cl_Y(V)$. Por lo tanto, f es Θ-continua.
3. Por el punto 2 de esta proposición basta probar que $\Theta C(X,Y) \subseteq C(X,Y)$. Sea $f \in \Theta C(X,Y)$ y $x_0 \in X$. Sea V una vecindad abierta de $f(x_0)$. Como Y es regular existe W vecindad abierta de $f(x_0)$ tal que $cl_Y(W) \subseteq V$. Como f es Θ-continua, existe U vecindad abierta de x_0 tal que $f[cl_X(U)] \subseteq cl_Y(W)$. Entonces $f[U] \subseteq f[cl_X(U)] \subseteq cl_Y(W) \subseteq V$. Por lo tanto, f es continua en x_0. Así, $f \in C(X,Y)$ y $C(X,Y) = \Theta C(X,Y)$.

4. Sea $x_0 \in A$ y $V \subseteq Y$ una vecindad abierta de $f(x_0)$. Como $f \in \Theta C(X,Y)$, existe $U \subseteq X$ vecindad abierta de x_0 tal que $f[cl_X(U)] \subseteq cl_Y(V)$. Pero $A \cap U \subseteq A$ es una vecindad abierta de x_0 en A y $cl_A(U \cap A) \subseteq cl_X(U)$. Entonces $f|_A[cl_A(U \cap A)] \subseteq f[cl_X(U)] \subseteq cl_Y(V)$. Por lo tanto, $f|_A \in \Theta C(A,Y)$.

5. Sea $x_0 \in X$ y $V \subseteq D$ una vecindad abierta de $f(x_0)$ en D. Entonces existe $W \subseteq Y$ abierto tal que $V = W \cap D$. Como $f \in \Theta C(X,Y)$ y W es vecindad abierta de $f(x_0)$ en Y, existe $U \subseteq X$ vecindad abierta de x_0 tal que $f[cl_X(U)] \subseteq cl_Y(V)$. Además, como D es denso en Y y W es abierto, por la Proposición 1.2, se tiene que $cl_Y(W) = cl_Y(W \cap D)$. Entonces

$$f[cl_X(U)] \subseteq cl_Y(W) \cap f[X] \subseteq (cl_Y(W \cap D)) \cap D = cl_D(V).$$

Por lo tanto, $f \in \Theta C(X,D)$.

$\square$

Definición 3.22. *Sean X y Y espacios topológicos y $f\colon X \to Y$ una función cerrada y sobre. Se dice que f es irreducible si para todo $A \subsetneq X$ cerrado se tiene que $f[A] \neq Y$.*

Lema 3.23. *Sea $f\colon X \to Y$ irreducible. Entonces:*

1. *si $g\colon Y \to Z$ es irreducible, entonces $g \circ f\colon X \to Z$ es irreducible,*

2. *si T es un espacio topológico, $h\colon X \to T$ es cerrada y sobre, y existe $k\colon T \to Y$ sobre tal que $f = k \circ h$, entonces h es irreducible,*

3. *si U es un subconjunto abierto no vacío de X, entonces $int_Y(f[U]) \neq \emptyset$,*

4. *si S es un subconjunto denso de Y, entonces $f^{-1}[S]$ es un subconjunto denso de X y $f|_{f^{-1}[S]}$ es una función irreducible de $f^{-1}[S]$ a S,*

5. *si T es un espacio topológico, $k\colon T \to X$ una función cerrada, y $h\colon T \to Y$ es una función sobre tal que $h = f \circ k$, entonces k es sobre.*

Demostración.

1. Como f y g son sobres y cerradas, entonces $g \circ f$ también es sobre y cerrada. Sea $A \subsetneq X$ cerrado. Entonces $f[A] \subsetneq Y$ y $f[A]$ es cerrado. Por lo tanto, $g[f[A]] = (g \circ f)[A] \neq Z$. Así, $g \circ f$ es irreducible.

2. Supongamos que h no es irreducible. Entonces existe $A \subsetneq X$ cerrado tal que $h[A] = T$. Entonces $f[A] = k[h[A]] = k[T] = Y$, lo cual es una contradicción, pues f es irreducible. Por lo tanto, h es irreducible.

3. Como U es abierto y no vacío, entonces $X \setminus U$ es cerrado y $X \setminus U \subsetneq X$. Por lo tanto, $f[X \setminus U] \neq Y$ y además, $f[X \setminus U]$ es cerrado. Así, $Y \setminus f[X \setminus U]$ es un subconjunto abierto no vacío de Y y tal que $Y \setminus f[X \setminus U] \subseteq f[U]$. Por lo tanto, $int_Y(f[U]) \neq \emptyset$.

4. Como f es sobre, $S \subseteq f[cl_X f^{-1}[S]]$, y como f también es cerrada, $Y = cl_Y(S) \subseteq f[cl_X(f^{-1}[S])]$. Entonces $cl_X(f^{-1}[S]) = X$, pues f es irreducible. Por lo tanto, $f^{-1}[S]$ es denso en X. Ahora sea $A \subseteq X$ cerrado. Entonces $f[A \cap f^{-1}[S]] = f[A] \cap S$ que es cerrado en S. Si $f^{-1}[S] \setminus A \neq \emptyset$ entonces $A \neq X$ y $f[A] \neq Y$. Como S es denso en Y y $f[A]$ es cerrado, entonces $S \cap f[A] \neq S$, pues si fueran iguales tendríamos que $S \subseteq f[A]$ y por lo tanto, $Y = cl_Y(S) \subseteq f[A] \neq Y$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $f[A \cap f^{-1}[S]] \neq S$. Así, $f|_{f^{-1}[S]}$ es irreducible.

5. Como $Y = h[T] = f[k[T]]$ y $k[T]$ es un subconjunto cerrado de X, entonces $k[T] = X$, pues f es irreducible. Por lo tanto, k es sobre.

□

Teorema 3.24. *Sean X y Y espacios topológicos y f una función perfecta y sobre (no necesariamente continua). Entonces existe $C \subseteq X$ cerrado tal que $f[C] = Y$ y $f|_C$ es un función perfecta irreducible y sobre de C en Y.*

Demostración.
Sea

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq X : F \text{ es cerrado y } f[F] = Y\}.$$

Es claro que $X \in \mathcal{F}$ y, por lo tanto, $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Consideremos el orden parcial $(\mathcal{F}, \subseteq)$, y definamos el siguiente conjunto,

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F} : (\mathcal{B}, \subseteq) \text{ es un orden total}\}.$$

Entonces $(\mathcal{C}, \subseteq)$ es un orden parcial no vacío en el que toda cadena tiene cota superior (pues dada una cadena $\mathcal{D}$ en $(\mathcal{C}, \subseteq)$ se tiene que $\bigcup \mathcal{D} \in \mathcal{C}$ y $B \subseteq \bigcup \mathcal{D}$ para todo $B \in \mathcal{D}$). Por el lema de Zorn, existe $\mathcal{B}_0 \in \mathcal{C}$ elemento maximal, es decir, $\mathcal{B}_0$ es una cadena maximal en $\mathcal{F}$. Sea $C = \bigcap \{F : F \in \mathcal{B}_0\}$. Claramente $C \subseteq X$ es cerrado, pues es intersección de cerrados. Veamos que C cumple las propiedades que buscamos.

Sea $y \in Y$. Entonces $\mathcal{A} = \{F \cap f^{-1}\{y\} : F \in \mathcal{B}_0\}$ es una familia de subconjuntos cerrados del espacio compacto $f^{-1}\{y\}$ (pues f es perfecta). Además, dado $A \subseteq \mathcal{B}_0$ finito, podemos ordenar sus elementos de menor a mayor, pues $\mathcal{B}_0$ es cadena. Entonces podemos ver a A como $A = \{F_i : 1 \leq i \leq n\}$ donde $F_i \subseteq F_j$ si $i \leq j$. Como $f[F_i] = Y$ para todo $1 \leq i \leq n$, entonces para $i = 1$ existe x_0 tal que $f(x_0) = y$. Entonces $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{n} F_i \cap f^{-1}\{y\}$, es decir, $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de intersección finita. Entonces como $f^{-1}\{y\}$ es compacto, $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$, es decir, $C \cap f^{-1}\{y\} \neq \emptyset$. Como y era arbitrario, se sigue que $f[C] = Y$. Como f es perfecta y C es cerrado en X, entonces $f|_C$ es perfecta y sobre de C a Y.

Finalmente, sea $D \subsetneq C$ cerrado. Entonces D es cerrado en X y por la maximalidad de $\mathcal{B}_0$ se tiene que $D \notin \mathcal{F}$ (pues si $D \in \mathcal{F}$ entonces $\mathcal{B}_0 \cup \{D\}$ es cadena en $\mathcal{F}$, contradiciendo la maximalidad de $\mathcal{B}_0$). Por lo tanto, $f[D] \neq Y$. Así, $f|_C$ es irreducible. $\square$

Teorema 3.25. *Sea $f\colon X \to Y$ una función irreducible y Θ-continua. Entonces:*

1. *si A y B son subconjuntos cerrados de X tales que $int_X(A \cap B) = \emptyset$, entonces $int_Y(f[A] \cap f[B]) = \emptyset$,*

2. *si C es un subconjunto cerrado y denso en ninguna parte de X, entonces $f[C]$ es un subconjunto cerrado y denso en ninguna parte de Y,*

3. *el mapeo $A \to f[A]$ es un isomorfismo de Boole entre $\mathcal{R}(X)$ y $\mathcal{R}(Y)$,*

4. *si Y es extremadamente disconexo, entonces f es inyectiva; si además f es continua, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración.

1. Supongamos que $int_Y(f[A] \cap f[B]) \neq \emptyset$. Entonces, como f es Θ-continua, existe V subconjunto abierto y no vacío de X tal que $f[cl_X(V)] \subseteq cl_Y(int_Y(f[A] \cap f[B])) \subseteq f[A] \cap f[B]$ (esto último se sigue de que f es irreducible, y por lo tanto es cerrada). Como $int_X(A \cap B) = \emptyset$ y $V \neq \emptyset$, entonces $V \nsubseteq A \cap B$. Por lo tanto,

$$X \neq (X \setminus V) \cup (A \cap B) = [(X \setminus V) \cup A] \cap [(X \setminus V) \cup B].$$

   Esto implica que $(X \setminus V) \cup A \neq X$ o $(X \setminus V) \cup B \neq X$. Por otro lado,

$$Y = f[X \setminus V] \cup f[V] \subseteq f[X \setminus V] \cup f[A] = f[(X \setminus V) \cup A]$$

   (la contención se sigue de que $f[cl_X(V)] \subseteq f[A]$). Como f es irreducible y $(X \setminus V) \cup A$ es cerrado, entonces $(X \setminus V) \cup A = X$. Análogamente, tenemos que $(X \setminus V) \cup B = X$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $int_Y(f[A] \cap f[B]) = \emptyset$.

2. Se sigue del punto 1 de este teorema, tomando A y B igual a C.

3. Primero veamos que si $A \in \mathcal{R}(X)$, entonces $f[A] \in \mathcal{R}(Y)$. Como $f[A]$ es cerrado en Y, entonces $cl_Y(int_Y(f[A])) \subseteq f[A]$. Ahora veamos que $f[A] \setminus cl_Y(int_Y(f[A])) = \emptyset$. Supongamos que existe $a \in A$ tal que $f(a) \notin cl_Y(int_Y(f[A]))$. Como f es Θ-continua, entonces existe $V \subseteq X$ abierto tal que $a \in V$ y $f[cl_X(V)] \subseteq Y \setminus cl_Y(int_Y(f[A]))$. Por lo tanto, $f[cl_X(V)] \cap int_Y(f[A]) = \emptyset$, de lo contrario tendríamos que $int_Y(f[A]) \cap Y \setminus cl_Y(int_Y(f[A]) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Como $A \in \mathcal{R}(X)$ y $a \in V \cap A$, entonces $V \cap int_X(A) \neq \emptyset$. Por el Lema 3.23, $int_Y(f[V \cap int_X A]) \neq \emptyset$. Pero $\emptyset \neq int_Y(f[V \cap int_X A]) \subseteq f[cl_X V] \cap int_Y f[A]$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $f[A] = cl_Y(int_Y(f[A]))$ y así, $f[A] \in \mathcal{R}(Y)$.

De esta manera, podemos definir $\phi\colon \mathcal{R}(X) \to \mathcal{R}(Y)$ como $\phi(A) = f[A]$.

Vamos a probar que ϕ es el isomorfismo de Boole buscado. Para ello bastará probar que ϕ es una biyección entre $\mathcal{R}(X)$ y $\mathcal{R}(Y)$ que preserva el orden entre estas retículas.

Comencemos por demostrar que ϕ es sobre. Sea $B \in \mathcal{R}(Y)$, $B \neq \emptyset$. Vamos a probar que

$$cl_X f^{-1}[int_Y B] \in \mathcal{R}(X) \text{ y } f[cl_X f^{-1}[int_Y B]] = B.$$

Sea $p \in f^{-1}[int_Y(B)]$. Como f es Θ-continua, existe $V_p \subseteq X$ abierto tal que $p \in V_p$ y

$$f[cl_X(V_p)] \subseteq cl_Y(int_Y(B)) = B.$$

Si $V_p \setminus cl_X(f^{-1}[int_Y(B)]) \neq \emptyset$, entonces por el Lema 3.23,

$$\emptyset \neq int_Y(f[V_p \setminus cl_X(f^{-1}[int_Y(B)])]) \subseteq B,$$

y además,

$$int_Y(f[V_p \setminus cl_X(f^{-1}[int_Y(B)])]) \cap int_Y(B) \subseteq f[V_p \setminus cl_X(f^{-1}[int_Y(B)])]) \cap int_Y(B) = \emptyset.$$

Es decir, $int_Y(f[V_p \setminus cl_X(f^{-1}[int_Y(B)])])$ es un subconjunto no vacío de Y que está contenido en B y que es ajeno a $int_Y B$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $V_p \subseteq cl_X(f^{-1}[int_Y(B)])$. Sea

$$V = \bigcup\{V_p : p \in f^{-1}[int_Y(B)]\}.$$

Vamos a probar que $cl_X f^{-1}[int_Y(B)] = cl_X V \in \mathcal{R}(X)$. Notemos que V es abierto y, por lo tanto, $V = int_X(V)$. Además, $cl_X(V) \subseteq cl_X(f^{-1}[int_Y(B)])$. Ahora sea $x \in cl_X(f^{-1}[int_Y(B)])$ y sea U abierto de X tal que $x \in U$. Entonces $U \cap f^{-1}[int_Y(B)] \neq \emptyset$. Sea $z \in U \cap f^{-1}[int_Y(B)]$. Entonces $z \in V_z \subseteq V$. Por lo tanto, $U \cap V \neq \emptyset$. Así, $x \in cl_X(V)$. Por lo tanto, $cl_X(f^{-1}[int_Y(B)]) = cl_X(int_X(V))$, y por la Proposición 1.1 $cl_X(f^{-1}[int_Y(B)]) \in \mathcal{R}(X)$.

Ahora veamos que $f\big[cl_X(f^{-1}[int_Y(B)])\big] = B$. Como $int_Y(B) \subseteq f[cl_X(f^{-1}[int_Y(B)])]$ y f es cerrada, entonces $B = cl_Y(int_Y(B)) \subseteq f[cl_X(f^{-1}[int_Y(B)])]$. Ahora sea $p \in X$ tal que $f(p) \notin B$. Como f es Θ-continua, existe W subconjunto abierto de X tal que $p \in W$ y

$$f[cl_X W] \subseteq cl_Y(Y \setminus B) = Y \setminus int_Y(B),$$

(recordando que $int_Y(B) = Y \setminus cl_Y(Y \setminus B)$). Por lo tanto, $W \cap f^{-1}[int_Y(B)] = \emptyset$, y entonces $p \notin cl_X(f^{-1}[int_Y(B)])$. Con esto tenemos que $f[cl_X(f^{-1}[int_Y(B)])] \subseteq B$ y, por lo tanto, $f[cl_X(f^{-1}[int_Y(B)])] = B$. Así, ϕ es sobre.

Ahora veamos que ϕ es inyectiva. Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{R}(X)$ con $A_1 \neq A_2$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $int_X(A_1) \setminus A_2 \neq \emptyset$. Entonces $(X \setminus int_X(A_1)) \cup A_2 \neq X$ y es cerrado. Como

f es irreducible, existe $p \in Y \setminus f[(X \setminus int_X(A_1)) \cup A_2]$. Como f es sobre, existe $a \in X$ tal que $f(a) = p$ y $a \in int_X(A_1)$. Pero $p \notin f[A_2]$, por lo tanto, $f[A_1] \neq f[A_2]$. Así, ϕ es inyectiva.

Finalmente, sean $A_1, A_2 \in \mathcal{R}(X)$. Si $A_1 \leq A_2$, entonces $A_2 = A_1 \cup A_2$. Esto implica que

$$f[A_2] = f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2],$$

de modo que $\phi(A_2) = \phi(A_1) \cup \phi(A_2)$. Por lo tanto, $\phi(A_1) \leq \phi(A_2)$. Recíprocamente, si $\phi(A_1) \leq \phi(A_2)$, entonces $\phi(A_2) = \phi(A_1) \cup \phi(A_2)$. De modo que $f[A_2] = f[A_1] \cup f[A_2] = f[A_1 \cup A_2]$. Como ϕ es inyectiva, se tiene que $A_2 = A_1 \cup A_2$, lo que implica que $A_1 \leq A_2$. Por lo tanto, ϕ es un isomorfismo de orden. Por la Proposición A.17, ϕ es un isomorfismo de Boole.

4. Supongamos que Y es extremadamente disconexo y sean $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$. Sea U subconjunto abierto de X tal que $x_1 \in U$ y $x_2 \in X \setminus cl_X(U)$. Notemos que $cl_X(U), cl_X(X \setminus cl_X(U)) \in \mathcal{R}(X)$. Entonces $f(x_1) \in \phi(cl_X(U))$ y $f(x_2) \in \phi(cl_X(X \setminus cl_X(U)))$. Como Y es extremadamente disconexo, por el Teorema 2.7, $\mathcal{B}(Y) = \mathcal{R}(Y)$. Entonces

$$\phi(cl_X U) \cap \phi(cl_X(X \setminus cl_X(U))) = \phi(cl_X(U)) \wedge \phi(cl_X(X \setminus cl_X(U))).$$

Por lo tanto, como ϕ es isomorfismo de Boole, tenemos que

$$\phi(cl_X U) \cap \phi(cl_X(X \setminus cl_X(U))) = \phi(cl_X(U) \wedge cl_X(X \setminus cl_X(U))) = \phi(\emptyset) = \emptyset.$$

Esto implica que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Por lo tanto, f es inyectiva y así, f es una biyección cerrada de X en Y. Si además f es continua, entonces f es un homeomorfismo.

□

Con estos resultados podemos pasar a construir el absoluto de Iliadis.

3.2.2. El absoluto de Iliadis

Recordemos que dado un espacio topológico X, el conjunto de cerrados regulares, $\mathcal{R}(X)$, es un álgebra de Boole. Por lo tanto, a $\mathcal{R}(X)$ podemos asociarle su espacio de Stone, $S(\mathcal{R}(X))$. Esto nos lleva a la siguiente defінción.

Definición 3.26. *Sea X un espacio topológico. Definimos el espacio de Gleason de X como el espacio de Stone del álgebra booleana $\mathcal{R}(X)$, y lo denotamos θX.*

Por lo tanto, los elementos de θX son ultrafiltros en $\mathcal{R}(X)$, y $\mathcal{B}(\theta X) = \{\lambda(A) : A \in \mathcal{R}(X)\}$, donde $\lambda(A) = \{\mathcal{U} \in \theta X : A \in \mathcal{U}\}$.

Sin embargo, el espacio de Gleason no es el que nos interesa. Queremos estudiar un subespacio particular de éste.

Definición 3.27. *Sea X un espacio topológico. El espacio*

$$\{\mathcal{U} \in \theta X : \bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset\}$$

con la topología de subespacio heredada del espacio θX, se llama el absoluto de Iliadis y se denota EX. (En algunas ocasiones el término "absoluto de Iliadis"se usará para la pareja (EX, k_X) donde k_X es como en la definición que daremos más adelante.)

Definición 3.28. *Sea X un espacio topológico y sea $x \in X$. Denotamos por $F(x)$ a la familia de vecindades cerradas regulares de x, es decir,*

$$F(x) = \{A \in \mathcal{R}(X) : x \in int_X A\}.$$

Observación 3.29. *$F(x)$ es un filtro en $\mathcal{R}(X)$.*

Ahora nos gustaría definir una función sobre de EX en X. Para eso necesitaremos el siguiente lema.

Lema 3.30. *Sea X espacio topológico.*

1. *Si $\mathcal{U} \in EX$, entonces $|\bigcap \mathcal{U}| = 1$.*

2. *Si $x \in X$, entonces existe $\mathcal{U} \in EX$ tal que $\bigcap \mathcal{U} = \{x\}$.*

Demostración.

1. Sean $p, q \in X$ con $p \neq q$. Como X es Hausdorff, existe $A \in \mathcal{R}(X)$ tal que $p \in int_X A$ y $q \notin A$. Si $p \in \bigcap \mathcal{U}$, entonces para todo $B \in \mathcal{U}$, $(int_X(A)) \cap B \neq \emptyset$. Sea $x \in (int_X(A)) \cap B$. Como $B \in \mathcal{R}(X)$, entonces $int_X(A) \cap int_X(B) \neq \emptyset$. Por lo tanto,

$$\emptyset \neq int_X(A) \cap int_X(B) = int_X(A \cap B) \subseteq cl_X(int_X(A \cap B)) = A \wedge B.$$

   Tenemos entonces que $A \wedge B \neq \emptyset$ para todo $B \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es ultrafiltro, por la Proposición 3.5, $A \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $q \notin \bigcap \mathcal{U}$, pues $q \notin A$. Así, $|\bigcap \mathcal{U}| = 1$.

2. Sea $x \in X$. Como $F(x)$ es filtro, existe $\mathcal{U}(x)$ ultrafiltro en $\mathcal{R}(X)$ tal que $F(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$. Supongamos que $x \notin \bigcap \mathcal{U}(x)$. Entonces existe $A \in \mathcal{U}(x)$ tal que $x \notin A$. Por lo tanto,

$$x \in X \setminus A = int_X(cl_X(X \setminus A)),$$

   pues $X \setminus A \in \mathcal{RO}(X)$ (ver Observación 1.6), y entonces $cl_X(X \setminus A) \in F(x)$. Por lo tanto, $\emptyset = A \wedge cl_X(X \setminus A) \in \mathcal{U}(x)$, lo cual es una contradicción. Así, $x \in \bigcap \mathcal{U}(x)$.

□

Si $\mathcal{U} \in EX$, denotamos por $k_X(\mathcal{U})$ al único punto de X que pertence a $\bigcap \mathcal{U}$. Por el lema anterior k_X es una función bien definida y sobre de EX en X.

A continuación estudiamos algunas propiedades del espacio EX y de la función k_X.

Teorema 3.31. *Sea X un espacio topológico. Entonces:*

1. *EX es un subespacio denso, extremadamente disconexo y 0-dimensional de θX, y $\theta X \equiv_{EX} \beta(EX)$.*

2. *Sean $\mathcal{U} \in \theta X$ y $x \in X$. Entonces $\mathcal{U} \in EX$ y $k_X(\mathcal{U}) = x$ si y sólo si $F(x) \subseteq \mathcal{U}$.*

3. *Si $A \in \mathcal{R}(X)$, entonces $k_X[EX \cap \lambda(A)] = A$.*

4. *Sean $x \in X$ y $B \in \mathcal{R}(X)$. Entonces $k_X^{-1}(\{x\}) \subseteq \lambda(B)$ si y sólo si $x \in int_X B$.*

5. *$k_X : EX \to X$ es un función sobre, perfecta, irreducible y Θ-continua.*

6. *k_X es continua si y sólo si X es regular.*

7. *$\mathcal{B}(EX) = \mathcal{R}(EX) = \{\lambda(A) \cap EX : A \in \mathcal{R}(X)\}$.*

8. *La función $EX \cap \lambda(A) \to k_X[EX \cap \lambda(A)]$ es un isomorfismo de Boole entre $\mathcal{B}(EX)$ y $\mathcal{R}(X)$.*

Demostración.

1. Por los teoremas 3.12 y 3.18 θX es un espacio compacto, extremadamente disconexo y 0-dimensional. Veamos que EX es denso en θX. Para eso basta probar que si $\emptyset \neq A \in \mathcal{R}(X)$, entonces $\lambda(A) \cap EX \neq \emptyset$. Sea $x \in int_X(A)$. Entonces $A \in F(x)$, y por el Lema 3.30 existe $\mathcal{U} \in EX$ tal que $F(x) \subseteq \mathcal{U}$ y $\bigcap \mathcal{U} = \{x\}$. Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \lambda(A) \cap EX$, y así EX es denso en θX. Por el Teorema 2.7, EX es extremadamente disconexo. Como θX es 0-dimensional, EX también lo es. Por el Teorema 2.10, EX está C^*-encajado en θX, y por lo tanto, $\theta X \equiv_{EX} \beta(EX)$.

2. $\Rightarrow]$ Por contrapuesta, supongamos que $F(x) \nsubseteq \mathcal{U}$. Sea $A \in F(x) \setminus \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es ultrafiltro, entonces por la Proposición 3.5 $A' \in \mathcal{U}$. Por otro lado, $x \in int_X(A) = X \setminus A'$. Entonces $x \notin \bigcap \mathcal{U}$. Por lo tanto, si $\mathcal{U} \in EX$, $k_X(\mathcal{U}) \neq x$.
$\Leftarrow]$ Supongamos que $F(x) \subseteq \mathcal{U}$. Sea $A \in \mathcal{R}(X)$ y supongamos que $x \notin A$. Entonces, como $A = cl_X(int_X(A))$, existe $U \subseteq X$ abierto tal que $x \in U$ y $U \cap int_X(A) = \emptyset$. Por lo tanto, $x \in U \subseteq X \setminus int_X(A) = A'$. Así, $x \in int_X(A')$. Por lo tanto, $A' \in F(x) \subseteq \mathcal{U}$. Entonces $A' \in \mathcal{U}$ y, por lo tanto, $A \notin \mathcal{U}$. Es decir, acabamos de probar que si $A \in \mathcal{R}(X)$ es tal que $x \notin A$, entonces $A \notin \mathcal{U}$. Por lo tanto, $x \in \bigcap \mathcal{U}$. Así, $\mathcal{U} \in EX$ y $k_X(\mathcal{U}) = x$.

3. Sea $A \in \mathcal{R}(X)$ y $\mathcal{U} \in EX \cap \lambda(A)$. Entonces $A \in \mathcal{U}$ y, por lo tanto, $k_X(\mathcal{U}) \in A$. Así, $k_X[EX \cap \lambda(A)] \subseteq A$. Recíprocamente, sea $x \in A$ y sea $S = F(x) \cup \{A\}$. Veamos que todo subconjunto finito y no vacío de S tiene ínfimo no vacío. Para eso tomemos una subcolección finita de S. Sean $F_i \in F(x)$ con $i \in \{1, ..., n\}$. Entonces $x \in int_X F_i$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Por lo tanto,

$$x \in \bigcap\{int_X(F_i) : i \in \{1, ..., n\}\} = int_X(\bigcap\{F_i : i \in \{1, ..., n\}\}) =$$
$$int_X(cl_X(int_X(\bigcap\{F_i : i \in \{1, ..., n\}\}))) = int_X(\bigwedge\{F_i : i \in \{1, ..., n\}\})$$

(ver proposiciones 1.1 y A.8). Por lo tanto, $x \in int_X(\bigwedge\{F_i : i \in \{1, ..., n\}\})$, y como $x \in A = cl_X(int_X A)$, entonces $int_X(\bigwedge\{F_i : i \in \{1, ..., n\}\}) \cap int_X A \neq \emptyset$. Por lo tanto,

$$A \wedge (\bigwedge\{F_i : i \in \{1, ..., n\}\}) \neq \emptyset,$$

que es lo que queríamos probar. Por lo tanto,

$$B = \{\bigwedge F : F \subseteq S \text{ es finito y no vacío}\}$$

es base de filtro. Entonces existe $\mathcal{U} \in \theta X$ tal que $S \subseteq B \subseteq \mathcal{U}$. Esto implica que $F(x) \subseteq \mathcal{U}$, y por el punto 2 de este teorema, $\mathcal{U} \in EX$ y $k_X(\mathcal{U}) = x$. Además $\mathcal{U} \in \lambda(A)$ y, por lo tanto, $x \in k_X[EX \cap \lambda(A)]$. Así, $A \subseteq k_X[EX \cap \lambda(A)]$ y tenemos que $k_X[EX \cap \lambda(A)] = A$.

4. $\Rightarrow]$ Por contrapuesta, supongamos que $x \notin int_X(B)$. Entonces $x \in X \setminus int_X(B) = B'$. Por el punto 3 de este teorema, $x \in k_X[EX \cap \lambda(B')]$. Por lo tanto, $\emptyset \neq k_X^{-1}[\{x\}] \cap \lambda(B') = k_X^{-1}[\{x\}] \setminus \lambda(B)$ (ver Proposición 3.8). Así, $k_X^{-1}[\{x\}] \nsubseteq \lambda(B)$.
   $\Leftarrow]$ Supongamos que $x \in int_X(B)$ y sea $\mathcal{U} \in k_X^{-1}[\{x\}]$. Entonces $k_X(\mathcal{U}) = x$, y por el punto 2 de este teorema, $F(x) \subseteq \mathcal{U}$. Como $B \in F(x)$, entonces $B \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \lambda(B)$. Así, $k_X^{-1}[\{x\}] \subseteq \lambda(B)$.

5. Sea $x \in X$. Queremos ver que $k_X^{-1}[\{x\}]$ es compacto. Para esto basta probar que $k_X^{-1}[\{x\}]$ es cerrado en θX, pues θX es compacto. Sea $\mathcal{U} \in \theta X \setminus k_X^{-1}[\{x\}]$. Entonces $x \notin \bigcap \mathcal{U}$. Por lo tanto, existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $x \notin A$. Entonces $x \in int_X(A')$. Por el punto 4 de este teorema, $k_X^{-1}[\{x\}] \subseteq \lambda(A')$. Como $\lambda(A) \cap \lambda(A') = \emptyset$, entonces $k_X^{-1}[\{x\}] \cap \lambda(A) = \emptyset$. Así, $\mathcal{U} \in \lambda(A) \subseteq \theta X \setminus k_X^{-1}[\{x\}]$. Por lo tanto, $\theta X \setminus k_X^{-1}[\{x\}]$ es abierto y $k_X^{-1}[\{x\}]$ es cerrado en θX. Por lo tanto, $k_X^{-1}[\{x\}]$ es compacto.

   Ahora veamos que k_X es una función cerrada. Sea $F \subseteq EX$ cerrado y sea $x \in X \setminus k_X[F]$. Entonces $k_X^{-1}[\{x\}] \cap F = \emptyset$. Por lo tanto, dado $\mathcal{U} \in k_X^{-1}[\{x\}]$, $\mathcal{U} \in EX \setminus F$. Como F es cerrado, entonces existe $A_{\mathcal{U}} \in \mathcal{R}(X)$ tal que

$$\mathcal{U} \in \lambda(A_{\mathcal{U}}) \cap EX \subseteq EX \setminus F.$$

   Como $k_X^{-1}[\{x\}]$ es compacto, existen $\mathcal{U}_1$, ..., $\mathcal{U}_n \in k_X^{-1}[\{x\}]$ tales que

$$k_X^{-1}[\{x\}] \subseteq \bigcup\{\lambda(A_{\mathcal{U}_i}) : i \in \{1, ..., n\}\} = \lambda(A)$$

   con $A = \bigcup\{A_{\mathcal{U}_i} : i \in \{1, ..., n\}\}$. Por el punto 4 de este teorema, $x \in int_X(A)$. Además, $\lambda(A) \cap F = \emptyset$, pues $\lambda(A_{\mathcal{U}_i}) \cap EX \subseteq EX \setminus F$. Entonces $F \subseteq EX \setminus \lambda(A) = EX \cap \lambda(A')$. Por lo tanto, $k_X[F] \subseteq k_X[EX \cap \lambda(A')] = A' = X \setminus int_X(A)$. Así, tenemos que $x \in int_X A \subseteq X \setminus k_X[F]$. Por lo tanto, $k_X[F]$ es cerrado. Con esto concluimos que k_X es un función perfecta y por el lema 3.30, k_X es sobre.

Ahora veamos que k_X es irreducible. Sea $F \subsetneq EX$ cerrado. Entonces existe $A \in \mathcal{R}(X)$ tal que $\emptyset \neq \lambda(A) \subseteq EX \setminus F$. Por lo tanto, $F \subseteq EX \setminus \lambda(A) = EX \cap \lambda(A')$. Por el punto 3 de este teorema, $k_X[F] \subseteq A'$. Como $\lambda(A) \neq \emptyset$, entonces $A \neq \emptyset$ y, por lo tanto, $X \setminus A' \neq \emptyset$. Esto implica que $A' \neq X$, y se sigue que $k_X[F] \neq X$. Así, k_X es irreducible.

Por último, veamos que k_X es Θ-continua. Sea $\mathcal{U} \in EX$ y $V \subseteq X$ abierto tal que $k_X(\mathcal{U}) \in V$. Sea $A = cl_X(V)$. Entonces $k_X(\mathcal{U}) \in int_X(A)$. Por el punto 4 de este teorema, $\mathcal{U} \in \lambda(A) \cap EX$, y por el punto 3, $k_X[EX \cap \lambda(A)] = A = cl_X(V)$. Por lo tanto, como $EX \cap \lambda(A)$ es una vecindad abierta y cerrada de $\mathcal{U}$, se tiene que k_X es Θ-continua en $\mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ fue arbitrario, entonces k_X es Θ-continua.

6. Por el punto 1 de este teorema, EX es 0-dimensional y por la Proposición 2.3, EX regular. Como la imagen continua y perfecta de un espacio regular es regular, entonces si k_X es continua, se tiene que X es regular. Recíprocamente, si X es regular, como k_X es Θ-continua, por la Proposición 3.21, se tiene que k_X es continua.

7. Por el Teorema 3.12, $\mathcal{B}(\theta X) = \{\lambda(A) : A \in \mathcal{R}(X)\}$. Por lo tanto, $\{\lambda(A) \cap EX : A \in \mathcal{R}(X)\} \subseteq \mathcal{B}(EX)$. Recíprocamente, si $C \in \mathcal{B}(EX)$, entonces por el punto 1 de este teorema y por la Proposición 1.16, $cl_{\theta X}(C) = cl_{\beta(EX)}(C) \in \mathcal{B}(\beta(EX)) = \mathcal{B}(\theta X)$. Por lo tanto, existe $A \in \mathcal{R}(X)$ tal que $cl_{\theta X}(C) = \lambda(A)$. Entonces $C = cl_{EX}(C) = EX \cap cl_{\theta X}(C) = EX \cap \lambda(A)$. Por lo tanto,

$$C \in \{\lambda(A) \cap EX : A \in \mathcal{R}(X)\}.$$

Con esto concluimos que $\mathcal{B}(EX) = \{\lambda(A) \cap EX : A \in \mathcal{R}(X)\}$. Además, como EX es extremadamente disconexo, entonces por el Teorema 2.7, se tiene que $\mathcal{B}(EX) = \mathcal{R}(EX)$.

8. Por el punto 5 de este teorema, $k_X : EX \to X$ es una función irreducible y Θ-continua. Por lo tanto, por el Teorema 3.25, el mapeo $EX \cap \lambda(A) \to k_X[EX \cap \lambda(A)]$ es un isomorfismo de Boole entre $\mathcal{B}(EX)$ y $\mathcal{R}(X)$.

$\square$

Nos gustaría probar ahora que la pareja (EX, k_X) es única (salvo homeomorfismo).

Teorema 3.32. *Sea X un espacio topológico y (Y, f) una pareja que consiste de un espacio Y extremadamente disconexo 0-dimensional y una función $f : Y \to X$ perfecta, irreducible, Θ-continua y sobre. Entonces existe un homeomorfismo h de EX en Y tal que $f \circ h = k_X$.*

Demostración.

Como Y es extremadamente disconexo, entonces por el Teorema 2.7 $\mathcal{B}(Y) = \mathcal{R}(Y)$. Como f es una función irreducible y Θ-continua, entonces por el Teorema 3.25, el mapeo $B \to f[B]$ es un isomorfimo de Boole, digamos ϕ, entre $\mathcal{B}(Y)$ y $\mathcal{R}(X)$.

Sean $\mathcal{U} \in EX$ y

$$\mathcal{U}' = \phi^{-1}[\mathcal{U}] = \{B \in \mathcal{B}(Y) : f[B] \in \mathcal{U}\}.$$

Como $\mathcal{U}$ es $\mathcal{R}(X)$-ultrafiltro y ϕ es isomorfismo de Boole, entonces $\mathcal{U}'$ es $\mathcal{B}(Y)$-ultrafiltro. Como $\mathcal{B}(Y) = \mathcal{R}(Y)$, entonces por el Lema 3.30, $\bigcap \mathcal{U}'$ tiene a lo más un punto. Ahora consideremos al conjunto

$$\mathcal{A} = \{B \cap f^{-1}[\{k_X(\mathcal{U})\}] : B \in \mathcal{U}'\}.$$

Veamos que $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de intersección finita. Sean $B_1, ..., B_n \in \mathcal{U}'$. Entonces $\bigwedge\{f[B_i] : 1 \leq i \leq n\} \in \mathcal{U}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} k_X(\mathcal{U}) \in \bigwedge\{f[B_i] : 1 \leq i \leq n\} &= \bigwedge\{\phi(B_i) : 1 \leq i \leq n\} \\ &= \phi(\bigwedge\{B_i : 1 \leq i \leq n\}) \\ &= f[\bigcap\{B_i : 1 \leq i \leq n\}]. \end{aligned}$$

Es decir, $f^{-1}[\{k_X(\mathcal{U})\}] \cap (\bigcap\{B_i : 1 \leq i \leq n\}) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de intersección finita.

Como f es perfecta, entonces $f^{-1}[\{k_X(\mathcal{U})\}]$ es compacto. Además, cada $B \in \mathcal{U}'$ es cerrado en Y. Por lo tanto, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(f^{-1}[k_X(\mathcal{U})])$ es una familia de cerrados con la propiedad de intersección finita. Lo anterior implica que $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Así, $\bigcap \mathcal{U}' \neq \emptyset$. Es decir, acabamos de probar que para cada $\mathcal{U} \in EX$ existe un único punto en $\bigcap \mathcal{U}'$. A este punto lo denotaremos $h(\mathcal{U})$. Esto nos define una función $h \colon EX \to Y$. Además,

$$\{f \circ h(\mathcal{U})\} = \bigcap\{f[B] : B \in \mathcal{B}(Y) \text{ y } f[B] \in \mathcal{U}\} = \bigcap \mathcal{U} = \{k_X(\mathcal{U})\}.$$

De modo que $f \circ h(\mathcal{U}) = k_X(\mathcal{U})$ y $f \circ h = k_X$.

Veamos que h es sobre. Sean $y \in Y$ y

$$\mathcal{U}(y) = \{f[B] : B \in \mathcal{B}(Y) \text{ y } y \in B\}.$$

Como $\{B \in \mathcal{B}(Y) : y \in B\}$ es un ultrafiltro en $\mathcal{B}(Y)$, entonces $\mathcal{U}(y)$ es un ultrafiltro en $\mathcal{R}(X)$. Es claro que $f(y) \in \bigcap \mathcal{U}(y)$, y por el Lema 3.30 $\{f(y)\} = \bigcap \mathcal{U}(y)$. Entonces $h(\mathcal{U}(y)) = y$. De esto se sigue que h es sobre.

Ahora veamos que h es inyectiva. Sean $\mathcal{U}, \mathcal{W} \in EX$ con $\mathcal{U} \neq \mathcal{W}$. Entonces existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $A \notin \mathcal{W}$. Como $\mathcal{W}$ es ultrafiltro, entonces $A' \in \mathcal{W}$ (por Proposición 3.5). Como ϕ es un isomorfismo, entonces existe un único $B \in \mathcal{B}(Y)$ tal que $\phi(B) = A$. Entonces $\phi(Y \setminus B) = \phi(B') = A'$. Por lo tanto, $B \in \mathcal{U}'$ y $Y \setminus B \in \mathcal{W}'$. De este modo, $h(\mathcal{U}) \neq h(\mathcal{W})$. Esto implica que h es inyectiva.

Probemos ahora que h es cerrada. Sea $F \subseteq EX$ cerrado. Entonces existe una familia $\{A_i : i \in \mathcal{I}\} \subseteq \mathcal{R}(X)$ tal que $F = \bigcap\{\lambda(A_i) \cap EX : i \in \mathcal{I}\}$. Para cada $i \in \mathcal{I}$ existe un único $B \in \mathcal{B}(Y)$ tal que $f[B_i] = A_i$. Afirmamos que $h[F] = \bigcap\{B_i : i \in \mathcal{I}\}$. Sea $y \in h[F]$. Entonces existe $\mathcal{U} \in F$ tal que $h(\mathcal{U}) = y$. Sea $i \in \mathcal{I}$. Queremos ver que $y \in B_i$. Como $\mathcal{U} \in F$, entonces $\mathcal{U} \in \lambda(A_i)$ y, por lo tanto, $A_i = f[B_i] \in \mathcal{U}$. De esto se sigue que $B_i \in \mathcal{U}'$ y así, por la definición de la función h, $y \in B_i$. Recíprocamente, sea $y \in \bigcap\{B_i : i \in \mathcal{I}\}$. Ya probamos que $h(\mathcal{U}(y)) = y$. Veamos que $\mathcal{U}(y) \in F$. Sea $i \in \mathcal{I}$. Como $y \in B_i$, entonces $f(y) \in f[B_i] = A_i$. De modo que $A_i \in \mathcal{U}(y)$. Por lo tanto, $\mathcal{U}(y) \in \lambda(A_i) \cap EX$. Esto implica que $\mathcal{U}(y) \in F$. De esto se sigue que $y \in h[F]$. Así, $h[F] = \bigcap\{B_i : i \in \mathcal{I}\}$ y, por lo tanto, h es una función cerrada.

Por último veamos que h es continua. Sean $\mathcal{U} \in EX$ y $B \in \mathcal{B}(Y)$ tal que $h(\mathcal{U}) \in B$. Entonces, como $h(\mathcal{U}) \in C$ para todo $C \in \mathcal{U}'$, se sigue que $h(\mathcal{U}) \in B \cap C$ para todo $C \in \mathcal{U}'$. Por lo tanto, $B \in \mathcal{U}'$. Por lo tanto, $f[B] \in \mathcal{U}$ y así, $\mathcal{U} \in \lambda(f[B])$. Ahora tomemos $\mathcal{W} \in \lambda(f[B])$. Entonces $f[B] \in \mathcal{W}$ y, por lo tanto, $B \in \mathcal{W}'$. Se sigue que $h(\mathcal{W}) \in B$. Es decir, $h[\lambda(f[B])] \subseteq B$. De modo que h es continua en $\mathcal{U}$, el cual fue tomado arbitrariamente. Por lo tanto, h es continua. Con esto concluimos que h es un homeomorfismo. □

Corolario 3.33. *Sean X y Y espacios topológicos y $g\colon Y \to X$ una función perfecta, Θ-continua y sobre. Supongamos que $\phi\colon S \to X$ es una función perfecta, irreducible y Θ-continua, donde S es un espacio extremadamente disconexo. Entonces existe un subespacio C cerrado de Y y una función $f\colon S \to C$ perfecta, irreducible, Θ-continua, y tal que $g \circ f = \phi$.*

Demostración.
Por el Teorema 3.24 existe un subespacio C cerrado de Y tal que $g|_C\colon C \to X$ es perfecta, irreducible y sobre. Por la Proposición 3.21, $g|_C \in \Theta C(C, X)$. Se sigue del Teorema 3.31 y de la Proposición 3.21 que $(g|_C) \circ k_C$ es una función perfecta, irreducible y Θ-continua de EC en X. Por el Teorema 3.32 existen $h_1\colon EX \to S$ y $h_2\colon EX \to EC$ homeomorfismos tales que $\phi \circ h_1 = k_X$ y $(g|_C) \circ k_C \circ h_2 = k_X$. La función buscada es $f = k_C \circ h_2 \circ [h_1]^{-1}$. □

Dado un espacio topológico Hausdorff, X, logramos construir un espacio, EX, extremadamente disconexo y 0-dimensional, y una función perfecta, irreducible y Θ-continua de EX en X. Esto nos da una infinidad de ejemplos de espacios extremadamente disconexos, pues a cada espacio Hausdorff le podemos asociar su absoluto de Ilidadis, el cual siempre será extremadamente disconexo.

Capítulo 4

Producto de espacios extremadamente disconexos

En este capítulo vemos cómo se comporta la propiedad de ser extremadamente disconexo bajo el producto y analizamos cuándo el producto de dos espacios es extremadamente disconexo. Para esto introducimos los conceptos de P-espacio y cardinal medible. Vamos a ver que bajo la no existencia de cardinales medibles, el producto de dos espacios es extremadamente disconexo si y sólo si un factor es discreto y el otro extremadamente disconexo.

En el Capítulo 2 vimos que el producto de un espacio discreto y un espacio extremadamente disconexo vuelve a ser extremadamente disconexo. Pero, ¿qué pasa con el producto de dos espacios extremadamente disconexos? ¿Seguirá siendo extremadamente disconexo? A continuación vemos un ejemplo que responderá esta pregunta. Para esto vamos a probar primero un lema técnico.

Lema 4.1. *El subespacio $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ no está C^*-encajado en $\beta\mathbb{N} \times \beta\mathbb{N}$.*

Demostración.
Consideremos la función $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $f(n,m) = \frac{n}{n+m}$. La función f está acotada y es continua, pues $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es discreto. Veamos que f no se puede extender de manera continua a $\beta\mathbb{N} \times \beta\mathbb{N}$. Para eso supongamos lo contrario. Entonces existe una función $g\colon \beta\mathbb{N} \times \beta\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ continua tal que $g|_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} = f$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(m) = \frac{n}{n+m}$. Entonces $f_n \in C^*(\mathbb{N})$ y, por lo tanto, existe $g_n\colon \beta\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ continua tal que $g_n|_{\mathbb{N}} = f_n$. Ahora sea $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Queremos ver que $g_n(\mathcal{U}) = 0$. Dado $F \in \mathcal{U}$ se tiene que F es infinito (pues $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$). Por lo tanto, existe una sucesión $\{m_k\} \subseteq F$ creciente. Entonces

$$\lim_{k\to\infty} f_n(m_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{n}{n+m_k} = 0.$$

De esto concluimos que $0 \in cl_{\mathbb{R}}(f_n[F])$ para cualquier $F \in \mathcal{U}$. Entonces $0 \in \bigcap\limits_{F\in\mathcal{U}} cl_{\mathbb{R}}(f_n[F])$. Ahora sea $r \in \bigcap\limits_{F\in\mathcal{U}} cl_{\mathbb{R}}(f_n[F])$ y supongamos que $r \neq 0$. Entonces, como $cl_{\mathbb{R}}(f_n[F]) = \{0\} \cup f_n[F]$ y f_n es inyectiva, se tiene que $r \in \bigcap_{F\in\mathcal{U}} f_n[F] = f_n[\bigcap_{F\in\mathcal{U}} F] = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\bigcap_{F\in\mathcal{U}} cl_{\mathbb{R}}(f_n[F]) = \{0\}$. Consideremos al conjunto

$$\mathcal{V} = \{f_n[F] : F \in \mathcal{U}\}.$$

El conjunto $\mathcal{V}$ es base de filtro y, por la continuidad de g_n, se tiene que $\mathcal{V} \to g_n(\mathcal{U})$. Entonces

$$g_n(\mathcal{U}) \in \bigcap_{F\in\mathcal{U}} cl_{\mathbb{R}}(f_n[F]) = \{0\}.$$

Así, $g_n(\mathcal{U}) = 0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\mathcal{U}_n = \{A \subseteq \mathbb{N} : n \in A\}$. Veamos que $g_n(\mathcal{U}) = g(\mathcal{U}_n,\mathcal{U})$. Consideremos la función $\phi_n\colon \beta\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $\phi_n(\mathcal{F}) = g(\mathcal{U}_n, \mathcal{F})$. La función ϕ_n es continua, pues g lo es. Además, dado $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $g(\mathcal{U}_n,\mathcal{U}_m) = f(n,m) = \frac{n}{n+m} = f_n(m)$. Por lo tanto, $\phi_n|_{\mathbb{N}} = f_n$. De este modo, $\phi_n = g_n$. Entonces acabamos de probar que dado $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$,

$$0 = g_n(\mathcal{U}) = \phi_n(\mathcal{U}) = g(\mathcal{U}_n,\mathcal{U}).$$

Si ahora definimos para cada $m \in \mathbb{N}$ la función $h_m\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ como $h_m(n) = \frac{n}{n+m}$ y seguimos un razonamiento análogo al anterior, llegamos a que $g(\mathcal{U},\mathcal{U}_m) = 1$ para todo $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

Sea $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ fijo y consideremos los siguientes conjuntos,

$$A = \{(\mathcal{U},\mathcal{U}_m) : m \in \mathbb{N}\},$$
$$B = \{(\mathcal{U}_n,\mathcal{U}) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{U} \in (der_{\beta\mathbb{N}\times\beta\mathbb{N}}(A)) \cap (der_{\beta\mathbb{N}\times\beta\mathbb{N}}(B))$. Sean $D, C \in \mathcal{U}$. Como $\{\mathcal{U}_m : m \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\beta\mathbb{N}$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{U}_m \in G(C)$ (ver Definición 1.19). Por lo tanto,

$$(\mathcal{U},\mathcal{U}_m) \in ((G(D) \times G(C)) \cap A) \setminus \{(\mathcal{U},\mathcal{U})\}.$$

Análogamente, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\mathcal{U}_n,\mathcal{U}) \in ((G(D) \times G(U)) \cap B) \setminus \{(\mathcal{U},\mathcal{U})\}.$$

Así, $\mathcal{U} \in (der_{\beta\mathbb{N}\times\beta\mathbb{N}}(A)) \cap (der_{\beta\mathbb{N}\times\beta\mathbb{N}}(B))$. Por lo que acabamos de probar, $g[A] = \{1\}$ y $g[B] = \{0\}$. Como g es continua, $g(\mathcal{U},\mathcal{U}) \in cl_{\mathbb{R}}(g[A]) = \{1\}$ y $g(\mathcal{U},\mathcal{U}) \in cl_{\mathbb{R}}(g[B]) = \{0\}$. Por lo tanto, $g(\mathcal{U},\mathcal{U}) = 1$ y $g(\mathcal{U},\mathcal{U}) = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, f no se extiende continuamente a $\beta\mathbb{N} \times \beta\mathbb{N}$. Con esto concluimos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ no está C^*-encajado en $\beta\mathbb{N} \times \beta\mathbb{N}$. □

Ejemplo 4.2. *Consideremos a $\mathbb{N}$ con la topología discreta. Sabemos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es denso en $\beta\mathbb{N} \times \beta\mathbb{N}$. Sin embargo, por el Lema 4.1, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ no está C^*-encajado en $\beta\mathbb{N} \times \beta\mathbb{N}$. Del Teorema 2.10 se sigue que $\beta\mathbb{N} \times \beta\mathbb{N}$ no es extremadamente disconexo, aún cuando $\beta\mathbb{N}$ sí lo es. Por lo tanto, el producto de espacios extremadamente disconexos puede no ser extremadamente disconexo, aún cuando sea un producto finito. Nótese que esto también nos da un ejemplo de un espacio 0-dimensional que no es extremadamente disconexo, evidenciando así que en la clase de espacios regulares la disconexidad extrema alcanza un nivel de disconexidad más alto que los 0-dimensionales.*

Aunque el producto de dos espacios extremadamente disconexos no necesariamente lo es, sí es necesario que ambos factores sean extremadamente disconexos para que el producto también lo sea. Esto se ve en la siguiente proposición.

Proposición 4.3. *Sean X y Y espacios topológicos tales que $X \times Y$ es extremadamente disconexo. Entonces X y Y son extremadamente disconexos.*

Demostración.
Consideremos las proyecciones $\Pi_X : X \times Y \to X$, $\Pi_Y : X \times Y \to Y$. Las funciones Π_X y Π_Y son continuas, abiertas y sobreyectivas. Por la Proposición 2.18, X y Y son extremadamente disconexos. □

Para estudiar más a fondo cuándo el producto de dos espacios es extremadamente disconexo, tenemos que introducir las definiciones de P-espacio y de cardinal medible.

4.1. P-espacios y cardinales medibles

Definición 4.4. *Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Decimos que x es un P-punto si satisface que para todo $G \subseteq X$ conjunto G_δ tal que $x \in G$, se tiene que G es una vecindad de x.*

Decimos que X es un P-espacio si todo punto de X es un P-punto, es decir, X es un P-espacio si y sólo si todo conjunto G_δ de X es abierto.

Dado que estamos estudiando espacios extremadamente disconexos, podríamos preguntarnos si ser P-espacio implica algún tipo de disconexidad. A continuación vemos que con cierto nivel de separación se puede garantizar que un P-espacio es 0-dimensional.

Proposición 4.5. *Sea X un P-espacio regular. Entonces X es 0-dimensional.*

Demostración.
Nos gustaría ver que $\mathcal{B}(X)$ es una base para los abiertos de X. Sea $V \subseteq X$ abierto y $x \in V$. Como X es regular, entonces existe $V_1 \subseteq X$ abierto tal que $x \in V_1 \subseteq cl_X(V_1) \subseteq V$. Aplicando otra vez la regularidad de X, podemos encontrar $V_2 \subseteq X$ abierto tal que $x \in V_2 \subseteq cl_X(V_2) \subseteq V_1$. Procediendo inductivamente podemos construir una familia de abiertos $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$x \in V_n \text{ y } cl_X(V_{n+1}) \subseteq V_n.$$

Sea $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Afirmamos que B es el abierto y cerrado que buscamos. Como X es P-espacio, B es abierto. Por otro lado, $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl_X(V_n)$. Por lo tanto, B es cerrado. Además es claro que $x \in B \subseteq V$. Esto implica que $\mathcal{B}(X)$ es base para los abiertos de X y, por lo tanto, X es 0-dimensional. □

El resultados obtenido en la Proposición 4.5 no debería causar mayor sorpresa, debido a que los P-espacios guardan una estrecha cercanía con los espacios discretos. (De hecho, el nombre de P-espacio es una abreviación de “espacio pseudodiscreto”). Esta cercanía va a quedar evidenciada cuando analicemos a los P-espacios extremadamente disconexos.

Es claro que todo espacio discreto es un P-espacio. Ahora veamos un ejemplo de un P-espacio Tychonoff no discreto.

Ejemplo 4.6. *Sea $X = \omega_1 \cup \{p\}$ con $p \notin \omega_1$. Dotemos a X de la siguiente topología: cada $\alpha \in \omega_1$ es aislado, y*

$$B_p = \{C \subseteq X : p \in C \text{ y } |X \setminus C| \leq \omega\}$$

es una base de vecindades para p. No es difícil verificar que este espacio es Hausdorff y 0-dimensional. Por lo tanto, por la Proposición 2.3, X es Tychonoff. Queremos ver que X con esta topología, τ, es un P-espacio no discreto. Si $x \in X \setminus \{p\}$, entonces x es P-punto, pues es punto aislado. Veamos que p es P-punto. Sea $\{U_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \tau$ y $U = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, con $p \in U$. Entonces $p \in U_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $C_n \in B_p$ tal que $C_n \subseteq U_n$. Entonces $p \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ y

$$|X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n| = |\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \setminus C_n| \leq \omega,$$

pues es una unión numerable de conjuntos numerables. De este modo, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \in B_p$ y $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \subseteq U$. Esto implica que U es vecindad de p. Así, p es P-punto.

Con esto concluimos que X es P-espacio. Además, X no es discreto, pues p no es punto aislado, pues si lo fuera, $\{p\} \in B_p$ y entonces $|X \setminus \{p\}| \leq \omega$, lo cual es una contradicción, ya que X tiene cardinalidad no numerable.

Con esto tenemos un ejemplo de un P-espacio Tychonoff que no es discreto.

Vale la pena notar que este espacio no es extremadamente disconexo ya que el conjunto

$$S = \{\alpha + 1 : \alpha \in \omega_1\}$$

es abierto en X. Sin embargo, $cl_X S = S \cup \{p\}$ y $p \notin int_X(S \cup \{p\})$.

Proposición 4.7. *Sea X un espacio topológico Tychonoff. X es un P-espacio si y sólo si $\mathcal{Z}(X) = \mathcal{B}(X)$.*

Demostración.

$\Rightarrow]$ Supongamos que X es un P-espacio. Sea $A \in \mathcal{Z}(X)$. Nos gustaría probar que $A \in \mathcal{B}(X)$. Ya sabemos que A es cerrado por ser nulo. Veamos que A es abierto. Sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ continua tal que $A = f^{-1}[0]$. Como $\{0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\frac{-1}{n}, \frac{1}{n})$, entonces

$$A = f^{-1}[\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\tfrac{-1}{n}, \tfrac{1}{n})] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}[(\tfrac{-1}{n}, \tfrac{1}{n})].$$

Pero como f es continua, $(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n})$ es abierto y X es P-espacio, entonces A es abierto. Así, $A \in \mathcal{B}(X)$.

Recíprocamente, sea $A \in \mathcal{B}(X)$. Consideremos la función característica de A, χ_A, que es continua, pues A es abierto y cerrado. Entonces $A = \chi_A^{-1}[\{1\}]$. Por lo tanto, $A \in \mathcal{Z}(X)$. Así, $\mathcal{Z}(X) = \mathcal{B}(X)$.

$\Leftarrow]$ Recordemos que X es Tychonoff si y sólo si las vecindades conulas de cada punto forman una base de vecindades.

Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ con A_n abierto para toda $n \in \mathbb{N}$. Queremos ver que $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es abierto. Sea $x \in A$. Entonces $x \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Como X es Tychonoff, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una vecindad conula de x, digamos V_n, tal que $x \in V_n \subseteq A_n$. Como $V_n \in co\mathcal{Z}(X)$, entonces $X \setminus V_n \in \mathcal{Z}(X) = \mathcal{B}(X)$. Por lo tanto, $V_n \in \mathcal{B}(X) = \mathcal{Z}(X)$. De este modo, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \in \mathcal{Z}(X)$ y, por lo tanto, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \in \mathcal{B}(X)$. En particular, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ es abierto en X y cumple que $x \in \bigcap_{n\in\mathcal{N}} V_n \subseteq A$. Esto implica que A es abierto y, por lo tanto, X es P-espacio. □

En [2] los autores construyen un ejemplo de un espacio infinito, X, regular conexo en el que todas las funciones continuas y real-valuadas son constantes. Estas condiciones sobre el espacio X implican que $\mathcal{Z}(X) = \{\emptyset, X\} = \mathcal{B}(X)$. Sin embargo, X no puede ser un P-espacio pues no es Tychonoff (ver Proposición 4.5 y Proposición 2.3). Esto prueba la importancia de la hipótesis Tychonoff en la Proposición 4.7.

La Proposición 2.16 nos muestra que la propiedad de ser extremadamente disconexo no es hereditaria. Sin embargo, ser P-espacio sí se hereda a subespacios.

Proposición 4.8. *Sea X un P-espacio y sea $Y \subseteq X$ un subespacio. Entonces Y es un P-espacio.*

Demostración.
Sea $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de abiertos en Y. Queremos ver que $U = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ es abierto en Y. Cada U_n lo podemos ver como $U_n = V_n \cap Y$ con V_n abierto en X. Entonces

$$U = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (V_n \cap Y) = Y \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n).$$

Como X es P-espacio, $\bigcap_{n\in\mathbb{X}} V_n$ es abierto en X. Esto implica que U es abierto en Y. Por lo tanto, Y es P-espacio. □

Ya vimos que el producto finito de espacios extremadamente disconexos puede no serlo. Veamos qué pasa con los P-espacios.

Proposición 4.9. *Sean X y Y P-espacios. Entonces $X \times Y$ es un P-espacio.*

Demostración.
Sea $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de abiertos en $X \times Y$. Queremos ver que $U = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ es abierto en $X \times Y$. Sea $(x, y) \in U$. Dado $n \in \mathbb{N}$, existe W_n abierto de X y V_n abierto de Y tal que

$$(x, y) \in W_n \times V_n \subseteq U_n.$$

Como X y Y son P-espacios, $W = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n$ es abierto en X y $V = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ es abierto en Y, y se cumple que

$$(x, y) \in W \times V \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n.$$

Por lo tanto, U es abierto en $X \times Y$. Con esto concluimos que $X \times Y$ es P-espacio. □

Corolario 4.10. *Sea $\{X_i : i \in \{1, ..., k\}\}$ una familia finita de P-espacios. Entonces $\prod_{i=1}^{k} X_i$ es un P-espacio.*

Demostración.
Se sigue inductivamente de la Proposición 4.9. □

Ejemplo 4.11. *El producto topológico $X = 2^{\mathbb{N}}$ no es un P-espacio ya que $\{\overline{0}\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Pi_n^{-1}[\{0\}]$ y $\{\overline{0}\}$ no es abierto en $2^{\mathbb{N}}$. Por lo tanto, el producto numerable de P-espacios no necesariamente es un P-espacio.*

Regresando a espacios extremadamente disconexos, queremos ver qué pasa cuando el producto de dos espacios es extremadamente disconexo. ¿Cómo tienen que ser los factores para que su producto tenga esta propiedad?

Proposición 4.12. *Sean X y Y espacios Tychonoff. Si $X \times Y$ es extremadamente disconexo, entonces X es un P-espacio o Y es un P-espacio.*

Demostración.
Supongamos que X no es un P-espacio y Y no es un P-espacio. Entonces por la Proposición 4.7, existen $Z_1 \in \mathcal{Z}(X) \setminus \mathcal{B}(X)$ y $Z_2 \in \mathcal{Z}(Y) \setminus \mathcal{B}(Y)$. Por lo tanto, existe $f \in C(X)$, $f \geq 0$, tal que $Z_1 = \mathcal{Z}(f)$, y existe $g \in C(Y)$, $g \geq 0$, tal que $Z_2 = \mathcal{Z}(g)$. Sea $h \colon X \times Y \to \mathbb{R}$ dada por

$$h((x, y)) = f(x) - g(y).$$

La función h es continua. Sean $U = h^{-1}[(-\infty, 0)]$ y $V = h^{-1}[(0, \infty)]$. Como U y V son abiertos ajenos en $X \times Y$ y $X \times Y$ es extremadamente disconexo, entonces por el Teorema 2.7, $cl_{X\times Y}(U) \cap cl_{X\times Y}(V) = \emptyset$. Sea

$$W = cl_{X\times Y}(U) \cap cl_{X\times Y}(V).$$

Como $Z_1 \notin \mathcal{B}(X)$, existe $x \in Z_1 \setminus int_X(Z_1)$. De igual manera, existe $y \in Z_2 \setminus int_Y(Z_2)$. Afirmamos que $(x, y) \in W$. Para ver esto, tomemos $W_X \subseteq X$ abierto y $W_Y \subseteq Y$ abierto, tales que $(x, y) \in W_X \times W_Y$. Queremos ver que $(W_X \times W_Y) \cap U \neq \emptyset$ y $(W_X \times W_Y) \cap V \neq \emptyset$. Como $x \notin int_X Z_1$, entonces $W_X \nsubseteq Z_1$. Por lo tanto, existe $p \in W_X \setminus Z_1$ y $f(p) > 0$. Entonces $h((p, y)) = f(p) - g(y) = f(p) > 0$. De esto se sigue que $(p, y) \in (W_X \times W_Y) \cap V$. Análogamente, existe $q \in W_Y \setminus Z_2$ y $g(q) > 0$. Entonces $h((x, q)) = f(x) - g(q) = -g(q) < 0$. Por lo tanto, $(x, q) \in (W_X \times W_Y) \cap U$. Con esto concluimos que $(x, y) \in W$, lo cual es una contradicción, pues $W = \emptyset$. Por lo tanto, X es un P-espacio o Y es un P-espacio. $\square$

Hemos visto en la Proposición 4.3 que si $X \times Y$ es extremadamente disconexo, entonces tanto X como Y deben ser extremadamente disconexos. Con lo obtenido en la Proposición 4.12, ahora sabemos que al menos uno de estos factores será P-espacio y extremadamente disconexo. Esto nos motiva a analizar cómo son realmente los P-espacios extremadamente disconexos. En el Ejemplo 4.6 hemos visto un P-espacio 0-dimensional no discreto. Sin embargo, este espacio tampoco resulta ser extremadamente disconexo. Parece natural preguntarnos si un P-espacio Tychonoff y extremadamente disconexo es discreto. La respuesta a este problema no es sencilla. Para ello necesitaremos estudiar brevemente a los cardinales medibles y algunas de sus propiedades.

Definición 4.13. *Sea X un conjunto. Decimos que X es Ulam-medible si existe una función $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}$ que cumple lo siguiente:*

1. *dado $x \in X$, $\mu(\{x\}) = 0$,*
2. *$\mu(X) = 1$,*
3. *dado $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que $A_n \cap A_m = \emptyset$ para $n \neq m$, se tiene que $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.*

Observación 4.14.

1. *Dado un conjunto Ulam-medible, X con medida μ, se tiene que $\mu(\emptyset) = 0$, pues $1 = \mu(X) = \mu(X \cup \emptyset) = \mu(X) + \mu(\emptyset) = 1 + \mu(\emptyset)$.*
2. *Si $A, B \subseteq X$, con $A \subseteq B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$, pues $\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. Por lo tanto, $\mu(A) = \mu(B) - \mu(B \setminus A)$.*
3. *En general, si $A, B \subseteq X$, entonces $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A \cap B)$.*

Ejemplo 4.15. *ω no es Ulam-medible, pues si lo fuera existiría $\mu\colon \mathcal{P}(\omega) \to \{0,1\}$ tal que*

$$1 = \mu(\omega) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{n\}) = 0,$$

lo cual es una contradicción.

Proposición 4.16. *Sean X y Y conjuntos. Si X es Ulam-medible con medida μ y existe una función $f\colon X \to Y$ inyectiva, entonces Y es Ulam-medible.*

Demostración.
Consideremos la función $\lambda\colon \mathcal{P}(Y) \to \{0,1\}$ dada por $\lambda(E) = \mu(f^{-1}[E])$. Veamos que λ es una medida para Y.

1. Sea $y \in Y$. Si $f^{-1}[\{y\}] = \emptyset$, entonces $\lambda(\{y\}) = \mu(f^{-1}[\{y\}]) = \mu(\emptyset) = 0$ (ver Observación 4.14). Si $f^{-1}[\{y\}] \neq \emptyset$, entonces como f es inyectiva, existe un único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Por lo tanto, $\lambda(\{y\}) = \mu(f^{-1}[\{y\}]) = \mu(\{x\}) = 0$.

2. $\lambda(Y) = \mu(f^{-1}[Y]) = \mu(X) = 1$.

3. Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ tal que $A_n \cap A_m = \emptyset$ para $n \neq m$. Entonces $f^{-1}[A_n] \cap f^{-1}[A_m] = \emptyset$ si $n \neq m$. Por lo tanto,

$$\lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mu(f^{-1}[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n]) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}[A_n]) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(f^{-1}[A_n]) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n).$$

De este modo, λ es medida para Y.

□

Decimos que un cardinal κ es medible si se puede definir una medida de Ulam en κ.

Notemos que por la Proposición 4.16 tenemos que si κ y λ son cardinales tales que $\kappa < \lambda$ y κ es medible, entonces λ es medible.

Veamos qué pasa con los cardinales que no son Ulam-medibles.

Proposición 4.17. *Sea κ un cardinal. Si κ no es Ulam-medible, entonces 2^κ no es Ulam-medible.*

Demostración.
La prueba la haremos por contrapuesta. Supongamos que 2^κ es medible. Sea $\mu \colon \mathcal{P}(2^\kappa) \to \{0,1\}$ una medida para 2^κ. Construiremos una medida en κ. Para cada $x \in \kappa$ sea

$$P_x = \{A \subseteq \kappa : x \in A\},$$

y sea

$$M = \{x \in \kappa : \mu(P_x) = 1\}.$$

Sea $F \colon \kappa \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\kappa))$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} P_x & si \quad x \notin M \\ \\ \mathcal{P}(\kappa) \setminus P_x & si \quad x \in M \end{cases}$$

Llamaremos F_x a $F(x)$ y definimos

$$G_x = F_x \setminus \bigcup\{F_y : y < x\}.$$

Finalmente definimos $p \colon \mathcal{P}(\kappa) \to \{0,1\}$ como

$$p(A) = \mu(\bigcup\{G_x : x \in A\}).$$

Veamos que p es medida para κ.

Afirmación 1: $\mu(G_x) = 0$ para toda $x \in \kappa$.

Sea $x \in \kappa$. Si $x \in M$, entonces $F_x = \mathcal{P}(\kappa) \setminus P_x$ y $\mu(P_x) = 1$. Por lo tanto, $\mu(F_x) = 0$ (ver Observación 4.14) y, como $G_x \subseteq F_x$, entonces $\mu(G_x) = 0$. Si $x \notin M$, entonces $F_x = P_x$ y $\mu(P_x) = 0$.

Por lo tanto, $\mu(F_x) = 0$ y, como $G_x \subseteq F_x$, se sigue que $\mu(G_x) = 0$. De este modo, $\mu(G_x) = 0$ para toda $x \in \kappa$.

Afirmación 2: $\bigcup\{G_x : x \in \kappa\} = \mathcal{P}(\kappa) \setminus \{M\}$.

Veamos primero que para cualquier $x \in \kappa$, $M \notin G_x$. Sea $x \in \kappa$. Si $x \in M$, entonces $F_x = \mathcal{P}(\kappa) \setminus P_x$ y $M \in P_x$. Por lo tanto, $M \notin F_x$. Así, $M \notin G_x$. Si $x \notin M$, entonces $F_x = P_x = \{A \subseteq \kappa : x \in A\}$. Como $x \notin M$, se sigue que $M \notin F_x$. De este modo, $M \notin G_x$. Por lo tanto, $M \notin \bigcup\{G_x : x \in \kappa\}$. Esto implica que $\bigcup\{G_x : x \in \kappa\} \subseteq \mathcal{P}(\kappa) \setminus \{M\}$.

Ahora sea $A \in \mathcal{P}(\kappa) \setminus \{M\}$. Entonces $A \neq M$. Supongamos que $A \setminus M \neq \emptyset$. Sea $x \in A \setminus M$. Como $x \notin M$, se tiene que $F_x = P_x = \{B \subseteq \kappa : x \in B\}$. Además, como $x \in A$, entonces $A \in F_x$. Por lo tanto, $\mathcal{C} = \{y \in \kappa : A \in F_y\} \neq \emptyset$. Sea $z = \min \mathcal{C}$. Entonces $A \in F_z \setminus \bigcup\{F_y : y < z\} = G_z$. Así, $A \in \bigcup\{G_x : x \in \kappa\}$. Ahora supongamos que $M \setminus A \neq \emptyset$ y $A \setminus M = \emptyset$. Sea $x = \min M \setminus A$. Entonces $x \in M$ y $F_x = \mathcal{P}(\kappa) \setminus P_x$. Como $x \notin A$, se sigue que $A \notin P_x$. Por lo tanto, $A \in F_x$. Sea $y < x$. Entonces $y \notin M$ o $y \in M \cap A$. Si $y \notin M$, se tiene que $F_y = P_y$, y como $A \setminus M = \emptyset$, entonces $y \notin A$. Por lo tanto, $A \notin F_y$. Si $y \in M \cap A$, entonces $F_y = \mathcal{P}(\kappa) \setminus P_y$. Como $y \in A$, entonces $A \in P_y$ y así, $A \notin F_y$. Por lo tanto, $A \in F_x \setminus \bigcup\{F_y : y < x\} = G_x$. De este modo, $A \in \bigcup\{G_x : x \in \kappa\}$. Con esto concluimos que $\mathcal{P}(\kappa) \setminus \{M\} \subseteq \bigcup\{G_x : x \in \kappa\}$ y, por lo tanto, $\bigcup\{G_x : x \in \kappa\} = \mathcal{P}(\kappa) \setminus \{M\}$.

Finalmente, veamos que p es medida para κ.

1. Sea $x \in \kappa$. Queremos ver que $p(\{x\}) = 0$. Pero $p(\{x\}) = \mu(G_x) = 0$ por la Afirmación 1.

2. Veamos que $p(\kappa) = 1$. Por definición de p, tenemos que

$$p(\kappa) = \mu(\bigcup\{G_x : x \in \kappa\}) = \mu(\mathcal{P}(\kappa) \setminus \{M\}) = 1,$$

   por la Afirmación 2 y porque μ es medida para 2^κ.

3. Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ tal que $A_n \cap A_m = \emptyset$ para $n \neq m$. Nos gustaría probar que $p(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n)$. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$. Veamos que $(\bigcup_{x\in A_n} G_x) \cap (\bigcup_{y\in A_m} G_y) = \emptyset$. Supongamos que no y sea $B \in G_x \cap G_y$ para algún $x \in A_n$ y algún $y \in A_m$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x < y$. Entonces $B \in G_y = F_y \setminus \bigcup\{F_z : z < y\}$. Esto implica que $B \notin F_x$, pero $B \in G_x \subseteq F_x$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $(\bigcup_{x\in A_n} G_x) \cap (\bigcup_{y\in A_m} G_y) = \emptyset$. Entonces

$$p(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\bigcup_{x\in A_n} G_x)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\bigcup_{x\in A_n} G_x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n).$$

Por lo tanto, p es una medida para κ. $\square$

Observación 4.18. *Por el Ejemplo 4.15 sabemos que ω no es medible. Por lo tanto, por la Proposición 4.17, 2^ω no es medible. Como $\omega_1 \leq 2^\omega$, entonces por la Proposición 4.16, ω_1 no es medible.*

Supongamos que existe un cardinal medible. Sea $\kappa = min\{\lambda : \lambda \text{ es cardinal medible }\}$. Como ω no es medible, entonces $\omega < \kappa$. Pero por la Proposición 4.17 2^ω no es medible, entonces $2^\omega < \kappa$.

Aplicando la Proposición 4.17 nuevamente, tenemos que $2^{2^{\omega}} < \kappa$, y así sucesivamente. Es decir, si existe un cardinal medible, éste debe ser muy grande.

A continuación daremos una caracterización de cardinales medibles en términos de ultrafiltros. Para eso recordemos la siguiente definición.

Definición 4.19. *Sea X un conjunto. Una familia $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tiene la propiedad de intersección numerable si se cumple que para todo $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ numerable y no vacío, $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$.*

Observación 4.20. *Sea X un conjunto y $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un ultrafiltro. Entonces $\mathcal{U}$ tiene la propiedad de intersección numerable si y sólo si dado $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{U}$ se tiene que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{U}$.*

Teorema 4.21. *Sea X un conjunto. X es Ulam-medible si y sólo si existe $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ultrafiltro tal que*

1. *$\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$,*

2. *$\mathcal{U}$ tiene la propiedad de intersección numerable.*

Demostración.
$\Rightarrow$] Sea $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}$ una medida de Ulam para X. Consideremos

$$\mathcal{U} = \{A \subseteq X : \mu(A) = 1\}.$$

Queremos ver que $\mathcal{U}$ es el ultrafiltro buscado.

Notemos que por la Observación 4.14, $\emptyset \notin \mathcal{U}$ y $X \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{U} \neq \emptyset$. Ahora sean $A, B \in \mathcal{U}$. Entonces

$$1 = \mu(A \cup B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) = 1 + 1 - \mu(A \cap B).$$

Por lo tanto, $\mu(A \cap B) = 1$, y así $A \cap B \in \mathcal{U}$.

Sea $A \in \mathcal{U}$ y $B \subseteq X$ tal que $A \subseteq B$. Por la Observación 4.14, $1 = \mu(A) \leq \mu(B)$. Por lo tanto, $\mu(B) = 1$ y se sigue que $B \in \mathcal{U}$. Hasta ahora tenemos que $\mathcal{U}$ es filtro.

Veamos que $\mathcal{U}$ es ultrafiltro. Sea $A \subseteq X$. Entonces

$$1 = \mu(X) = \mu(A \cup (X \setminus A)) = \mu(A) + \mu(X \setminus A).$$

Esto implica que $\mu(A) = 1$ o $\mu(X \setminus A) = 1$. Por lo tanto, $A \in \mathcal{U}$ o $X \setminus A \in \mathcal{U}$. De modo que $\mathcal{U}$ es ultrafiltro.

Por último veamos que $\mathcal{U}$ cumple 1) y 2). Supongamos que $\bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset$ y sea $x \in \bigcap \mathcal{U}$. Entonces, como $\mathcal{U}$ es ultrafiltro, $\{x\} \in \mathcal{U}$. Esto implica que $1 = \mu(\{x\}) = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$.

Ahora sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es filtro podemos suponer que $A_{n+1} \subseteq A_n$ (pues en caso contrario podemos tomar $B_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_n \in \mathcal{U}$ y entonces $B_{n+1} \subseteq B_n$). Queremos ver que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{U}$, es decir, que $\mu(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1$ o, equivalentemente, que $\mu(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X \setminus A_n) = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$E_n = X \setminus A_n$. Entonces $E_n \subseteq E_{n+1}$. Ahora definimos $F_1 = E_1$ y $F_{n+1} = E_{n+1} \setminus E_n$. Se sigue que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ y $F_n \cap F_m = \emptyset$ si $n \neq m$. Además, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mu(F_n) = 0$ (pues $\mu(A_n) = 1$). Por lo tanto,

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \setminus A_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(F_n) = 0.$$

De esto se sigue que $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1$. Con esto concluimos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{U}$ y, por la Observación 4.20, $\mathcal{U}$ tiene la propiedad de intersección numerable.

$\Leftarrow]$ Sea $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un ultrafiltro que cumple 1) y 2). Definimos $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}$ como

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & si \quad A \in \mathcal{U} \\ \\ 0 & si \quad A \notin \mathcal{U} \end{cases}$$

Veamos que μ es medida de Ulam para X. Dado $x \in X$ se tiene que $\{x\} \notin \mathcal{U}$ ya que $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$. Por lo tanto, $\mu(\{x\}) = 0$. Es claro que $\mu(X) = 1$. Ahora tomemos $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$. Si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A_m \in \mathcal{U}$, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{U}$ y para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{m\}$ se tiene que $A_k \notin \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

Si para toda $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $A_m \notin \mathcal{U}$, entonces como $\mathcal{U}$ es ultrafiltro, $X \setminus A_m \in \mathcal{U}$ para toda $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, como $\mathcal{U}$ tiene la propiedad de intersección numerable, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X \setminus A_n \in \mathcal{U}$, es decir, $X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{U}$. Así, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \notin \mathcal{U}$ y

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

En consecuencia, μ es medida de Ulam para X. $\square$

Recordemos que queremos ver si todo P-espacio extremadamente disconexo es discreto. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.22. *Sea X un espacio dotado de la topología discreta y supongamos que $|X|$ es medible. Entonces por el Teorema 4.21, existe $\mathcal{U} \in \beta X \setminus X$ con la propiedad de intersección numerable. Sea*

$$Z = X \cup \{\mathcal{U}\} \subseteq \beta X,$$

visto como subespacio de βX.

Como X es discreto, entonces X es extremadamente disconexo y, por el Teorema 2.10, βX es extremadamente disconexo. Por otro lado, como X es denso en βX, entonces Z es denso en βX y, por el Teorema 2.7, Z es extremadamente disconexo. Queremos ver que Z es un P-espacio extremadamente disconexo y no discreto.

Primero probemos que Z es un P-espacio. Como todo punto de X es aislado en Z, entonces todo punto de X es un P-punto en Z. Falta ver que $\mathcal{U}$ es un P-punto. Para eso tomemos $U \subseteq Z$ conjunto

G_δ tal que $\mathcal{U} \in U$. Entonces $U = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ con U_n abierto en Z para toda $n \in \mathbb{N}$. A cada U_n lo podemos ver como $U_n = V_n \cap Z$ con V_n abierto en βX.
Recordemos que

$$\{G(A) : A \in \mathcal{U}\}$$

es una base local para $\mathcal{U}$ (ver Definición 1.19). Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $A_n \in \mathcal{U}$ tal que $G(A_n) \subseteq V_n$. Como $\mathcal{U}$ tiene la propiedad de intersección numerable, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \in G(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)$. Además,

$$G(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G(A_n) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n.$$

Por lo tanto, $G(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cap Z \subseteq U$. Así, U es una vecindad de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}$ es un P-punto. Por lo tanto, Z es un P-espacio. Además Z es Tychonoff (pues βX lo es) y no es discreto ya que $\mathcal{U}$ no es un punto aislado.

En el Ejemplo 4.22 construimos un P-espacio Tychonoff y extremadamente disconexo que no es discreto. Sin embargo, esto lo hicimos bajo el supuesto de que existen cardinales medibles. Veamos qué pasa si no existen cardinales medibles.

Lema 4.23. *Sea X un espacio Hausdorff extremadamente disconexo y sea p un punto no aislado de X. Entonces existe una familia $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(X)$ tal que $U \cap V = \emptyset$ para todo $U, V \in \mathcal{S}$ con $U \neq V$, $X = cl_X(\bigcup \mathcal{S})$ y $p \notin \bigcup \mathcal{S}$.*

Demostración.
Para cada $x \in X \setminus \{p\}$, existen $U_x, V_x \subseteq X$ abiertos ajenos tales que $x \in U_x$ y $p \in V_x$. Por lo tanto, $p \notin cl_X(U_x)$, es decir, $p \in X \setminus cl_X(U_x)$. Como X es extremadamente disconexo y U_x es abierto, entonces $cl_X(U_x) \in \mathcal{B}(X)$. Consideremos a la siguiente familia,

$$\Gamma = \{cl_X(U_x) : x \in X \setminus \{p\}\}.$$

La familia Γ está formada por conjuntos abiertos y cerrados de X. Además, $p \notin \bigcup \Gamma$. Veamos que Γ es de unión densa en X. Sea $z \in X$ y W vecindad abierta de z. Nos gustaría probar que $W \cap (\bigcup \Gamma) \neq \emptyset$. Si $z \neq p$, entonces $z \in cl_X(U_z) \in \Gamma$. Por lo tanto, $z \in W \cap (\bigcup \Gamma)$. Si $z = p$, como p no es aislado, entonces $W \neq \{z\}$. Por lo tanto, existe $w \in W \setminus \{z\}$. De esta manera, $w \in cl_X(U_w) \in \Gamma$. Esto implica que $w \in W \cap (\bigcup \Gamma)$. En ambos casos se llega a que $W \cap (\bigcup \Gamma) \neq \emptyset$. Así, $z \in cl_X(\bigcup \Gamma)$ y $X = cl_X(\bigcup \Gamma)$.

Ahora consideremos el siguiente conjunto,

$$\Gamma_0 = \{U \in \mathcal{B}(X) : \text{existe } V \in \Gamma \text{ tal que } U \subseteq V\}.$$

Notemos que $\bigcup \Gamma_0 = \bigcup \Gamma$. Por lo tanto, $cl_X(\bigcup \Gamma_0) = X$ y $p \notin \bigcup \Gamma_0$. Sea $\mathcal{S} \subseteq \Gamma_0$ una familia celular maximal. Afirmamos que $\mathcal{S}$ es la familia que buscamos. Claramente, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(X)$ y $p \notin \bigcup \mathcal{S}$, pues $p \notin \bigcup \Gamma_0$. Además, los elementos de $\mathcal{S}$ son ajenos dos a dos por ser familia celular. Sólo falta ver que

$X = cl_X(\bigcup \mathcal{S})$. Supongamos que existe $q \in X$ tal que $q \notin cl_X(\bigcup \mathcal{S})$. Entonces existe $V \subseteq X$ abierto tal que $q \in V$ y $V \cap (\bigcup \mathcal{S}) = \emptyset$. Por lo tanto, por el Teorema 2.7,

$$cl_X(V) \cap (\bigcup \mathcal{S}) \subseteq cl_X(V) \cap cl_X(\bigcup \mathcal{S}) = \emptyset.$$

Entonces $W = cl_X(V) \in \mathcal{B}(X)$ es vecindad de q tal que $W \cap (\bigcup \mathcal{S}) = \emptyset$. Pero como Γ_0 es de unión densa en X, $W \cap (\bigcup \Gamma_0) \neq \emptyset$. Es decir, existe $U \in \Gamma_0 \setminus \mathcal{S}$ tal que $W \cap U \neq \emptyset$. Además, notemos que $W \cap U \in \Gamma_0 \setminus \mathcal{S}$, pues $W \cap V = \emptyset$ para todo $V \in \mathcal{S}$ y $W \cap U \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\mathcal{S} \subsetneq \mathcal{S} \cup \{W \cap U\} \subseteq \Gamma_0$. Pero $\mathcal{S} \cup \{W \cap U\}$ es familia celular, contradiciendo la maximalidad de $\mathcal{S}$. Así, $X = cl_X(\bigcup \mathcal{S})$. Con esto concluimos que $\mathcal{S}$ es la familia buscada. □

Lema 4.24. *Sean X y $\mathcal{S}$ como en el Lema 4.23 y sea $\mathcal{U} = \{F \subseteq \mathcal{S} : p \in cl_X(\bigcup F)\}$. Entonces $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro libre en $\mathcal{S}$.*

Demostración.
Veamos primero que $\mathcal{U}$ es filtro en $\mathcal{S}$. Claramente $\emptyset \notin \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \neq \emptyset$ pues $\mathcal{S} \in \mathcal{U}$. Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{U}$. Nos gustaría probar que $p \in cl_X(\bigcup(F_1 \cap F_2))$. Sea V una vecindad abierta de p. Como $F_1, F_2 \in \mathcal{U}$, entonces $p \in cl_X(\bigcup F_1) \cap cl_X(\bigcup F_2)$. Pero

$$cl_X(\bigcup F_1) \cap cl_X(\bigcup F_2) = cl_X(\bigcup F_1 \cap \bigcup F_2),$$

pues $\bigcup F_1, \bigcup F_2$ son abiertos y X es extremadamente disconexo (ver Teorema 2.7). Por lo tanto, $V \cap (\bigcup F_1 \cap \bigcup F_2) \neq \emptyset$. Sea $z \in V \cap (\bigcup F_1 \cap \bigcup F_2)$. Entonces existe $U_1 \in F_1$ tal que $z \in U_1$ y existe $U_2 \in F_2$ tal que $z \in F_2$. Por lo tanto, $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, pero como los elementos de $\mathcal{S}$ son ajenos dos a dos, entonces $U_1 = U_2$. De este modo $z \in U_1 \in F_1 \cap F_2$ y así, $z \in V \cap (\bigcup(F_1 \cap F_2))$. Con esto concluimos que $p \in cl_X(\bigcup(F_1 \cap F_2))$. Por lo tanto, $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{U}$. Por último, sea $F \in \mathcal{U}$ y $C \subseteq \mathcal{S}$ tal que $F \subseteq C$. Entonces $p \in cl_X(\bigcup F) \subseteq cl_X(\bigcup C)$. Por lo tanto, $C \in \mathcal{U}$. De esta manera, $\mathcal{U}$ es filtro en $\mathcal{S}$.

Ahora veamos que $\mathcal{U}$ es ultrafiltro. Sea $C \subseteq \mathcal{S}$ y supongamos que $\mathcal{S} \setminus C \notin \mathcal{U}$. Queremos ver que $C \in \mathcal{U}$, es decir, que $p \in cl_X(\bigcup C)$. Sea V una vecindad abierta de p. Nos gustaría probar que $V \cap (\bigcup C) \neq \emptyset$. Como $\mathcal{S} \setminus C \notin \mathcal{U}$, entonces $p \notin cl_X(\bigcup(\mathcal{S} \setminus C))$. Por lo tanto, existe W vecindad abierta de p tal que $W \cap (\bigcup(\mathcal{S} \setminus C)) = \emptyset$. Por otro lado, como $V \cap W$ es vecindad abierta de p y $p \in cl_X(\bigcup \mathcal{S})$, entonces $V \cap W \cap (\bigcup \mathcal{S}) \neq \emptyset$. Por lo tanto, existe $U \in \mathcal{S}$ y $z \in X$ tal que $z \in V \cap W \cap U$. Supongamos que $U \notin C$. Entonces $U \in \mathcal{S} \setminus C$. Así, $z \in (\bigcup(\mathcal{S} \setminus C)) \cap W$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $U \in C$, y $z \in (\bigcup C) \cap V$. De esto se sigue que $p \in cl_X(\bigcup C)$ y, por lo tanto, $C \in \mathcal{U}$. Con esto concluimos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro.

Por último veamos que $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$. Supongamos que existe $A \in \bigcap \mathcal{U}$. Entonces $\{A\} \in \mathcal{U}$ y, por lo tanto, $p \in cl_X(A)$, pero $p \notin A$. Entonces $p \in X \setminus A$. Como $A \in \mathcal{B}(X)$, entonces $X \setminus A \in \mathcal{B}(X)$. Por lo tanto, $X \setminus A$ es vecindad abierta de p y de este modo $(X \setminus A) \cap A \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. De este modo, $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$.

Por lo tanto, $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro libre en $\mathcal{S}$. □

Lema 4.25. *Sea X como en el Lema 4.23 y supongamos que $|X|$ no es medible. Sea $\mathcal{S}$ como en el Lema 4.23 y sea $\mathcal{U}$ como en el Lema 4.24. Entonces existe $\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{U}$ tal que para cada $S \in \mathcal{S}$ existe $n_S \in \mathbb{N}$ tal que $S \notin F_{n_S}$.*

Demostración.
Como $|X|$ no es medible, entonces por la Proposición 4.17, $2^{|X|}$ no es medible. Como $|\mathcal{S}| \leq 2^{|X|}$, se sigue que $|\mathcal{S}|$ no es medible (ver Proposición 4.16). Entonces, por el Teorema 4.21, $\mathcal{U}$ no tiene la propiedad de intersección numerable. Por lo tanto, existe $\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$. Entonces, dado $S \in \mathcal{S}$, $S \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Por lo tanto, existe $n_S \in \mathbb{N}$ tal que $S \notin F_{n_S}$. □

Lema 4.26. *Sea X como en el Lema 4.23, $\mathcal{U}$ como en el Lema 4.24 y $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ como en el Lema 4.25. Sea $G = \bigcap\{cl_X(\bigcup F_n) : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces G es G_δ, $p \in G$ y $p \notin int_X G$.*

Demostración.
Como $\bigcup F_n$ es abierto para toda $n \in \mathbb{N}$ y X es extremadamente disconexo, entonces $cl_X(\bigcup F_n)$ es abierto para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, G es G_δ. Además, como $F_n \in \mathcal{U}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $p \in cl_X(\bigcup F_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Así, $p \in G$.

Ahora queremos ver que $int_X(G) = \emptyset$. Sea $U = int_X(G)$ y supongamos por el contrario que $U \neq \emptyset$. Entonces, como $cl_X(\bigcup \mathcal{S}) = X$, se sigue que $U \cap (\bigcup \mathcal{S}) \neq \emptyset$. Entonces existe $S \in \mathcal{S}$ tal que

$$\emptyset \neq U \cap S \subseteq G \cap S.$$

Por el Lema 4.25, existe $n_S \in \mathbb{N}$ tal que $S \notin F_{n_S}$. Pero como $G \cap S \neq \emptyset$ y $G = \bigcap\{cl_X(\bigcup F_n) : n \in \mathbb{N}\}$, entonces

$$\emptyset \neq S \cap cl_X(\bigcup F_{n_S}) = cl_X(S) \cap cl_X(\bigcup F_{n_S}) = cl_X(S \cap (\bigcup F_{n_S})),$$

donde estamos usando que $S \in \mathcal{B}(X)$, $\bigcup F_{n_S}$ es abierto, y X es extremadamente disconexo (ver Teorema 2.7). Por lo tanto,

$$S \cap (\bigcup F_{n_S}) \neq \emptyset.$$

Es decir, existe $A \in F_{n_S}$ tal que $S \cap A \neq \emptyset$. Como los elementos de $\mathcal{S}$ son ajenos dos a dos, se sigue que $S = A$. Por lo tanto, $S \in F_{n_S}$, lo cual es una contradicción. De este modo $U = \emptyset$, es decir, $int_X(G) = \emptyset$. Por lo tanto, $p \notin int_X(G)$. □

Corolario 4.27. *Sean X y p como en el Lema 4.23. El punto p no es un P-punto de X.*

Demostración.
Por el Lema 4.26, existe G un conjunto G_δ tal que $p \in G$, pero $p \notin int_X(G)$, es decir, G no es vecindad de p. Por lo tanto, p no es p-punto de X. □

Teorema 4.28. *Sea X un espacio Hausdorff extremadamente disconexo de cardinalidad no medible. Entonces todo P-punto de X es un punto aislado de X.*

Demostración.

Por contrapuesta, sea p un punto no aislado de X. Entonces siguiendo los Lemas 4.23, 4.24, 4.25 y 4.26, p no es un P-punto. Por lo tanto, todo P-punto de X es aislado. $\square$

Corolario 4.29. *Todo P-espacio Hausdorff extremadamente disconexo de cardinalidad no medible es discreto.*

Demostración.

Sea X un P-espacio extremadamente disconexo de cardinalidad no medible. Entonces todo punto de X es un P-punto. Por el Teorema 4.28, todo punto de X es aislado. Por lo tanto, X es discreto. $\square$

Con el Corolario 4.29 a nuestra disposición, bajo el supuesto de que no existen cardinales medibles, podemos dar una caracterización completa referente al producto de dos espacios extremadamente disconexos.

Teorema 4.30. *Sean X y Y espacios Tychonoff y supongamos que no existen cardinales medibles. Entonces $X \times Y$ es extremadamente disconexo si y sólo si un factor es discreto y el otro es extremadamente disconexo.*

Demostración.

Supongamos que $X \times Y$ es extremadamente disconexo. Entonces, por la Proposición 4.3, X y Y son extremadamente disconexos. Además, por la Proposición 4.12, X es P-espacio o Y es P-espacio. Entonces X o Y es un P-espacio extremadamente disconexo y de cardinalidad no medible. Por lo tanto, por el Corolario 4.29, X es discreto o Y es discreto. La implicación contraria se sigue de la Proposición 2.20. $\square$

Corolario 4.31. *Sea X un espacio Tychonoff de cardinalidad no medible y tal que $X \times X$ es extremadamente disconexo. Entonces X es discreto.*

Demostración.

Se sigue del Teorema 4.30. $\square$

Ya vimos que el producto de dos P-espacios es P-espacio y que el producto de dos espacios extremadamente disconexos no necesariamente es extremadamente disconexo. Podríamos preguntarnos ahora qué pasa con el producto de un P-espacio y un espacio extremadamente disconexo. ¿Será extremadamente disconexo? Para contestar esta pregunta necesitamos introducir el concepto de F-espacio. Esto se hace en el siguiente capítulo.

Capítulo 5

F-espacios

En este capítulo introducimos la definición de F-espacio y vemos que si un espacio Tychonoff es extremadamente disconexo o es un P-espacio, entonces es un F-espacio, pero no al revés. Damos un ejemplo de un F-espacio conexo, y vemos qué pasa con el producto de un P-espacio y un espacio extremadamente disconexo. Finalmente, caracterizamos a los espacios extremadamente disconexos metrizables.

5.1. F-espacios y espacios extremadamente disconexos

Definición 5.1. *Sea X un espacio topológico Tychonoff. Decimos que X es un F-espacio si todo conulo de X está C^*-encajado en X.*

Para ver que todo espacio extremadamente disconexo es un F-espacio necesitamos primero la definición de espacio básicamente disconexo, la cual es más débil que la definición de espacio extremadamente disconexo.

Definición 5.2. *Sea X un espacio topológico Tychonoff. Decimos que X es básicamente disconexo si la cerradura de cualquier conulo de X es abierta.*

Observación 5.3. *Todo espacio Tychonoff extremadamente disconexo es básicamente disconexo.*

Recordemos que todo espacio regular extremadamente disconexo es 0-dimensional (ver Proposición 2.9). La siguiente proposición nos muestra que si nuestro espacio es Tychonoff, basta con que sea básicamente disconexo para ser 0-dimensional.

Proposición 5.4. *Sea X un espacio básicamente disconexo. Entonces X es 0-dimensional.*

Demostración.
Como X es Tychonoff, $co\mathcal{Z}(X)$ forma una base para X. Sea $\mathcal{B} = \{cl_X(A) : A \in co\mathcal{Z}(X)\}$. Como X es básicamente disconexo, los elementos de $\mathcal{B}$ son abiertos y cerrados. Veamos que $\mathcal{B}$ es base. Sea $U \subseteq X$ abierto y $x \in U$. Entonces existe $A \in co\mathcal{Z}(X)$ tal que $x \in A \subseteq U$. Como X es regular, existe $B \in co\mathcal{Z}(X)$ tal que

$$x \in B \subseteq cl_X(B) \subseteq A \subseteq U,$$

con $cl_X(B) \in \mathcal{B}$. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es base. Con esto concluimos que X es 0-dimensional. □

Por lo tanto, ser básicamente disconexo es más fuerte que ser 0-dimensional. En la Proposición 4.5 vimos que un P-espacio regular es 0-dimensional. A continuación probamos que, de heho, un P-espacio regular es básicamente disconexo.

Proposición 5.5. *Sea X un espacio regular. Si X es un P-espacio, entonces X es básicamente disconexo.*

Demostración.
Sea $A \in co\mathcal{Z}(X)$. Queremos probar que $cl_X(A)$ es abierto en X. Como X es un P-espacio regular, entonces es 0-dimensional y, por lo tanto, es Tychonoff. Por la Proposición 4.7, $\mathcal{Z}(X) = \mathcal{B}(X)$. Esto implica que $X \setminus A \in \mathcal{B}(X)$. Por lo tanto, $A \in \mathcal{B}(X)$ y $A = cl_X(A)$. Por lo tanto, $cl_X(A)$ es abierto. De modo que X es básicamente disconexo.

□

Recordemos que nuestro objetivo es probar que si un espacio es extremadamente disconexo o es un P-espacio, entonces es un F-espacio. Sin embargo, trabajar con la definición de F-espacio puede ser un poco complicado, pues hay que ver que toda función continua y acotada de un conulo en $\mathbb{R}$ se puede extender de manera continua y acotada a todo el espacio. A veces es más fácil trabajar con las siguientes equivalencias.

Teorema 5.6. *Sea X un espacio Tychonoff. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es un F-espacio,*
2. *conulos ajenos de X están completamente separados,*
3. *para toda $f \in C(X)$, $pos(f)$ y $neg(f)$ están completamente separados, donde*

$$pos(f) = \{x \in X : f(x) > 0\} \text{ y } neg(f) = \{x \in X : f(x) < 0\}.$$

Demostración.
1) ⇒ 2)] Supongamos que X es un F-espacio y sean $A, B \in co\mathcal{Z}(X)$ ajenos. Consideremos la función $f\colon A \cup B \to [0,1]$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ \\ 0 & si \quad x \in B \end{cases}.$$

Como f es una función acotada y continua (pues $f|_A$ y $f|_B$ son continuas con A y B abiertos), y $A \cup B \in co\mathcal{Z}(X)$, entonces existe $g \in C^*(X)$ tal que $g|_{A\cup B} = f$. De este modo, tenemos que

$$g[A] = f[A] \subseteq \{1\} \text{ y } g[B] = f[B] \subseteq \{0\}.$$

Por lo tanto, A y B están completamente separados.

2) $\Rightarrow$ 3)] Sea $f \in C(X)$ y consideremos a las funciones $g = \text{máx}\{f, 0\}$ y $h = \text{mín}\{f, 0\}$. Entonces

$$g^{-1}[\{0\}] = \{x \in X : \text{máx}\{f(x), 0\} = 0\} = \{x \in X : f(x) \leq 0\}.$$

Por lo tanto, $X \setminus g^{-1}[\{0\}] = \{x \in X : f(x) > 0\} = pos(f)$. Análogamente, tenemos que $X \setminus h^{-1}[\{0\}] = neg(f)$. Por lo tanto, $pos(f)$ y $neg(f)$ son conulos ajenos y, por hipótesis, están completamente separados.

3) $\Rightarrow$ 1)] Supongamos que para toda $f \in C(X)$ se tiene que $pos(f)$ y $neg(f)$ están completamente separados. Sea $W \in co\mathcal{Z}(X)$. Entonces $W = X \setminus \mathcal{Z}(h)$ para alguna función $h \in C^*(X)$. Ahora usaremos el teorema de extensión de Urysohn (Teorema 1.14) para probar que W está C^*-encajado en X. Para eso tomemos $A, B \subseteq W$ completamente separados en W. Nos gustaría ver que A y B están completamente separados en X. Como A, B están completamente separados en W, entonces existe $g \in C^*(W)$ tal que $A \subseteq pos(g)$ y $B \subseteq neg(g)$. Consideremos la función $f\colon X \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \notin W \\ & \\ g(x)|h(x)| & si \quad x \in W \end{cases}.$$

La función f es acotada, pues g y h lo son. Veamos que f es continua en X. Sea $x_0 \in X$. Hay que distinguir dos casos.

Caso 1: $x_0 \in W$

Sea $U \subseteq \mathbb{R}$ vecindad abierta de $f(x_0)$. Como $g(x)|h(x)|$ es continua en W, entonces existe $V \subseteq W$ vecindad abierta en W de x_0 tal que $f[V] \subseteq U$. Pero como W es abierto en X, entonces V es vecindad abierta en X de x_0. Por lo tanto, f es continua en x_0.

Caso 2: $x_0 \notin W$

En este caso tenemos que $x_0 \in \mathcal{Z}(h)$. Sea $r > 0$ y $M > 0$ tal que $|g(x)| < M$ para toda $x \in X$. Como h es continua, existe $V \subseteq X$ vecindad abierta de x_0 tal que, $h[V] \subseteq (\frac{-r}{M}, \frac{r}{M})$, es decir, $|h(x)| < \frac{r}{M}$ para toda $x \in V$. Veamos que esta vecindad nos sirve para probar la continuidad de f en x_0. Sea $x \in V$. Si $x \notin W$, entonces $|f(x) - f(x_0)| = |0 - 0| < r$. Si $x \in W$, entonces

$$|f(x) - f(x_0)| = |g(x)||h(x)| < M\tfrac{r}{M} = r.$$

Por lo tanto, f es continua en x_0.

Con esto concluimos que f es continua en todo X. Entonces, por hipótesis, $pos(f)$ y $neg(f)$ están completamente separados en X. Además, $A \subseteq pos(f)$ y $B \subseteq neg(f)$. Esto implica que A y B están completamente separados en X. Por lo tanto, por el teorema de extensión de Urysohn, W está C^*-encajado en X. Así, X es un F-espacio. $\square$

Recordemos que en un espacio extremadamente disconexo, abiertos ajenos tienen cerraduras ajenas. En espacios básicamente disconexos tenemos un resultado similar, aunque no tan fuerte. Sin embargo, este resultado nos va a ayudar a probar que todo espacio básicamente disconexo es un F-espacio.

Proposición 5.7. *Sea X un espacio topológico básicamente disconexo. Si $C \in co\mathcal{Z}(X)$ y $V \subseteq X$ es un abierto tal que $C \cap V = \emptyset$, entonces $cl_X(C) \cap cl_X(V) = \emptyset$.*

Demostración.
Sea $C \in co\mathcal{Z}(X)$ y $V \subseteq X$ abierto tal que $C \cap V = \emptyset$. Supongamos que existe $x \in cl_X(C) \cap cl_X(V)$. Como X es básicamente disconexo, $cl_X(C)$ es abierto. Entonces, como $x \in cl_X(V)$, se sigue que $cl_X(C) \cap V \neq \emptyset$. Sea $z \in cl_X(C) \cap V$. Como V es abierto y $z \in cl_X(C)$, entonces $C \cap V \neq \emptyset$. Esto es una contradicción. Por lo tanto, $cl_X(C) \cap cl_X(V) = \emptyset$. □

Lema 5.8. *Sea X un espacio Tychonoff. Si X es básicamente disconexo, entonces X es un F-espacio.*

Demostración.
Vamos a probar que si $A, B \in co\mathcal{Z}(X)$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces A y B están completamente separados (ver Teorema 5.6). Como B es abierto en X (por ser conulo) y $A \cap B = \emptyset$, entonces por la Proposición 5.7, $cl_X(A) \cap cl_X(B) = \emptyset$. Como X es básicamente disconexo, $cl_X(A) \in \mathcal{B}(X)$. Sea $f \colon X \to [0,1]$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in cl_X(A) \\ \\ 0 & si \quad x \notin cl_X(A) \end{cases}.$$

La función f es continua y cumple que $f[A] \subseteq \{1\}$ y $f[B] \subseteq \{0\}$. Por lo tanto, A y B están completamente separados. Del Teorema 5.6 se sigue que X es un F-espacio. □

Corolario 5.9. *Todo P-espacio Tychonoff es un F-espacio.*

Demostración.
Por la Proposición 5.5, tenemos que todo P-espacio Tychonoff es un espacio básicamente disconexo. Por lo tanto, por el Lema 5.8, todo P-espacio Tychonoff es un F-espacio. □

Corolario 5.10. *Todo espacio Tychonoff extremadamente disconexo es un F-espacio.*

Demostración.
Se sigue del Lema 5.8, pues todo espacio Tychonoff extremadamente disconexo es básicamente disconexo. □

Aunque el recíproco del Corolario 5.10 en general no es cierto, existe una clase de espacio en el que sí lo es. Para ver esto necesitamos recordar las siguientes definiciones.

Definición 5.11. *Sea X un espacio topológico. X es débilmente Lindelöf si para toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X existe una subcolección numerable $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $X \subseteq cl_X(\bigcup \mathcal{V})$, es decir, la unión de $\mathcal{V}$ es densa en X.*

Definición 5.12. *Sea X un espacio topológico. La celularidad de X, $c(X)$, se define como*

$$c(X) = sup\{|F| : F \text{ es una familia de abiertos no vacíos de } X \text{ y ajenos dos a dos}\}.$$

Si $c(X)$ es numerable, decimos que X es c.c.c.

Nos gustaría ver que todo espacio c.c.c. es débilmente Lindelöf. Este resultado es un corolario inmediato de la siguiente proposición.

Proposición 5.13. *Sea X un espacio topológico y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Entonces existe una subcolección $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$, con $|\mathcal{U}_0| \leq c(X)$, tal que $\bigcup \mathcal{U}_0$ es denso en X.*

Demostración.
Sea $\mathcal{G}$ la colección de todos los abiertos de X que son subconjunto de algún elemento de $\mathcal{U}$, es decir,

$$\mathcal{G} = \{U \subseteq X : U \text{ es abierto y existe } V \in \mathcal{U} \text{ tal que } U \subseteq V\}.$$

Por el lema de Zorn, existe una familia celular maximal $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{G}$. Entonces $|\mathcal{G}_0| \leq c(X)$. Supongamos que $\bigcup \mathcal{G}_0$ no es denso en X. Entonces existe $x \in X \setminus cl_X(\bigcup \mathcal{G}_0)$. Como $\mathcal{U}$ es cubierta de X, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Además, existe un abierto $V \subseteq X$, con $V \subseteq U$ y $x \in V$, tal que $V \cap (\bigcup \mathcal{G}_0) = \emptyset$, pues $x \notin cl_X(\bigcup \mathcal{G}_0)$. Esto implica que $V \in \mathcal{G}$ y $\mathcal{G}_0 \cup \{V\}$ es una familia celular que rompe la maximalidad de $\mathcal{G}_0$. Por lo tanto, $\bigcup \mathcal{G}_0$ es denso en X.

Ahora, para cada $V \in \mathcal{G}_0$ sea $U_V \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq U_V$. Consideremos a la familia

$$\mathcal{U}_0 = \{U_V : V \in \mathcal{G}_0\}.$$

La familia $\mathcal{U}_0$ es densa en X, pues $X = cl_X(\bigcup \mathcal{G}_0) \subseteq cl_X(\bigcup \mathcal{U}_0)$ y además, $|\mathcal{U}_0| \leq c(X)$. Por lo tanto, $\mathcal{U}_0$ es la familia buscada. □

Corolario 5.14. *Sea X un espacio topológico c.c.c. Entonces X es débilmente Lindelöf.*

Demostración.
Se sigue de la Proposición 5.13 □

Corolario 5.15. *Si X es c.c.c., entonces todo subconjunto abierto de X es débilmente Lindelöf.*

Demostración.
Sea $U \subseteq X$ abierto. Entonces U es c.c.c. y, por el Corolario 5.14, U es débilmente Lindelöf. □

Ahora sí tenemos las herramientas necesarias para ver que en un espacio Tychonoff y c.c.c., ser extremadamente disconexo y ser F-espacio son equivalentes.

Proposición 5.16. *Sea X un espacio Tychonoff y c.c.c. Entonces X es un F-espacio si y sólo si X es extremadamente disconexo.*

Demostración.

$\Rightarrow]$ Supongamos que X es un F-espacio. Sean $U, V \subseteq X$ abiertos ajenos. Por el Teorema 2.7 basta probar que $cl_X(U) \cap cl_X(V) = \emptyset$. Como X es Tychonoff, para cada $y \in U$ existe $U_y \in co\mathcal{Z}(X)$ tal que $y \in U_y \subseteq U$. Entonces $\mathcal{U} = \{U_y : y \in U\}$ es una cubierta abierta de U. Como X es c.c.c., por el Corolario 5.15, U es débilmente Lindelöf. Por lo tanto, existe una subcolección numerable $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ tal que $U \subseteq cl_X(\bigcup \mathcal{U}_0)$. Análogamente, podemos encontrar una colección numerable $\mathcal{V}_0$ de conulos tal que $V \subseteq cl_X(\bigcup \mathcal{V}_0)$. Entonces $\bigcup \mathcal{U}_0$ y $\bigcup \mathcal{V}_0$ son conulos ajenos y, por lo tanto, están completamente separados, pues X es un F-espacio. Entonces, por la Proposición 1.13, existen $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}(X)$ ajenos tales que $\bigcup \mathcal{U}_0 \subseteq Z_1$ y $\bigcup \mathcal{V}_0 \subseteq Z_2$. Por lo tanto,

$$cl_X(U) \cap cl_X(V) \subseteq cl_X(\bigcup \mathcal{U}_0) \cap cl_X(\bigcup \mathcal{V}_0) \subseteq Z_1 \cap Z_2 = \emptyset.$$

Esto implica que $cl_X U \cap cl_X V = \emptyset$ y así, X es extremadamente disconexo.

$\Leftarrow]$ Se sigue del Corolario 5.10. □

El Corolario 5.10 nos dice que todo espacio extremadamente disconexo Tychonoff es un F-espacio, y la Proposición 5.16 nos muestra que en un espacio Tychonoff y c.c.c., es equivalente ser un F-espacio y ser un espacio extremadamente disconexo. Una pregunta natural es si ser F-espacio implica algún tipo de disconexidad. Para responder esta pregunta, necesitamos primero una definición y algunos resultados.

Definición 5.17. *Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que A es σ-compacto si se puede ver como unión numerable de subconjuntos compactos de X, es decir, existe $\{K_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que K_n es compacto para toda $n \in \mathbb{N}$ y $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$.*

Proposición 5.18. *Sea K un espacio topológico compacto y $A \in co\mathcal{Z}(K)$. Entonces A es σ-compacto.*

Demostración.

Sea $A \in co\mathcal{Z}(K)$. Entonces $A = K \setminus \mathcal{Z}(f)$ para alguna $f \in C(K)$. Como $\mathcal{Z}(f)$ es un conjunto G_δ, existe $\{U_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}(K)$ familia de abiertos, tal que $\mathcal{Z}(f) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Por lo tanto,

$$A = K \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K \setminus U_n.$$

Como cada U_n es abierto en K, entonces $K \setminus U_n$ es cerrado y, por lo tanto, compacto. Así, A es σ-compacto. □

Proposición 5.19. *Sea X un espacio topológico localmente compacto y σ-compacto. Entonces $\beta X \setminus X$ es un F-espacio.*

Demostración.

La prueba la haremos usando la definición de F-espacio. Como X es Hausdorff y localmente compacto, por la Proposición 1.3, X es Tychonoff. Por lo tanto, sí tiene sentido hablar de βX. Sea

$$A \in co\mathcal{Z}(\beta X \setminus X).$$

Queremos probar que A está C^*-encajado en $\beta X \setminus X$. Como X es localmente compacto, entonces X es abierto en βX. Por lo tanto, $\beta X \setminus X$ es cerrado, lo cual implica que $\beta X \setminus X$ es compacto. Por la Proposición 5.18, A es σ-compacto y, por hipótesis, X también lo es. De esto se sigue que $X \cup A$ es σ-compacto. Por lo tanto, $X \cup A$ es Lindelöf y, además, es regular. Esto implica que $X \cup A$ es normal. Por otro lado, notemos que A es cerrado en $X \cup A$, pues X es abierto en $X \cup A$ y $X \cap A = \emptyset$. Por lo tanto, A está C^*-encajado en $X \cup A$. Como X está C^*-encajado en βX y X es denso en $X \cup A$, entonces $X \cup A$ está C^*-encajado en βX. Esto implica que A está C^*-encajado en βX y, por lo tanto, en $\beta X \setminus X$. Con esto concluimos que $\beta X \setminus X$ es un F-espacio. □

Veamos ahora sí que ser F-espacio no implica ningún tipo de disconexidad.

Proposición 5.20. *El espacio $\beta\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^+$ es un F-espacio conexo, donde $\mathbb{R}^+$ denota al espacio euclidiano $[0, \infty)$.*

Demostración.
Por la proposición 5.19, $\beta\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^+$ es un F-espacio, pues $\mathbb{R}^+$ es localmente compacto y σ-compacto. Sólo falta ver que $\beta\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^+$ es conexo.
Sea $X = \beta\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^+$, y supongamos que X no es conexo. Entonces existe $\emptyset \subsetneq A \subsetneq X$ tal que χ_A es continua. Como A es cerrado en X y X es cerrado en $\beta\mathbb{R}^+$, entonces A es cerrado en $\beta\mathbb{R}^+$. Por lo tanto, A está C^*-encajado en $\beta\mathbb{R}^+$, pues $\beta\mathbb{R}^+$ es normal. Entonces existe $f \in C^*(\beta\mathbb{R}^+)$ tal que $f|_A = \chi_A$. Sea $p \in \beta\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^+$ y $U \subseteq \beta\mathbb{R}^+$ abierto tal que $p \in U$. Queremos ver que $U \cap \mathbb{R}^+$ no está acotado. Por contrapuesta, supongamos que $U \cap \mathbb{R}^+$ está acotado. Entonces $K = cl_{\mathbb{R}^+}(U \cap \mathbb{R}^+)$ es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^+$. Como $\mathbb{R}^+$ es cerrado en $\mathbb{R}$, todo subconjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}^+$ es compacto. Por lo tanto, K es compacto. Nos gustaría ver que $p \in cl_{\beta\mathbb{R}^+}K$. Sea $V \subseteq U$ abierto en $\beta\mathbb{R}^+$ tal que $p \in V$. Entonces, como $\mathbb{R}^+$ es denso en $\beta\mathbb{R}^+$,

$$\emptyset \neq V \cap \mathbb{R}^+ = U \cap \mathbb{R}^+ \cap V \subseteq K \cap V.$$

Por lo tanto, $p \in cl_{\beta\mathbb{R}^+}(K)$. Notemos que $K \in \mathcal{Z}(\mathbb{R}^+)$, pues K es compacto en $\mathbb{R}^+$. Como $p \in \beta\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^+$ y $K \subseteq \mathbb{R}^+$, entonces $p \notin K$. Esto implica que $K \in p$ (ver Proposición 1.17). Entonces el conjunto

$$\mathcal{C} = \{W \cap K : W \in p\} \subseteq \mathcal{P}(K)$$

es una familia con la propiedad de intersección finita. Por lo tanto, existe $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(K)$ ultrafiltro tal que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}$. Como K es compacto, $a_K(\mathcal{U}) \neq \emptyset$. Entonces

$$\emptyset \neq a_K(\mathcal{U}) = \bigcap_{W \in \mathcal{U}} cl_K(W) \subseteq \bigcap_{W \in p} cl_K(W \cap K) \subseteq \bigcap_{W \in p} (cl_{\mathbb{R}^+}W) \cap K = \bigcap_{W \in p} cl_{\mathbb{R}^+}(W) = a_{\mathbb{R}^+}(p),$$

donde la penúltima igualdad se sigue de que $K \in p$. Por lo tanto, $p \notin \beta\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^+$, lo cual no es posible. Es decir, acabamos de probar que si $p \in \beta\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^+$ y $U \subseteq \beta\mathbb{R}^+$ es abierto con $p \in U$, entonces $U \cap \mathbb{R}^+$ no está acotado.

Ahora sea $p \in X \setminus A$ y $\varepsilon > 0$. Entonces $f(p) = 0$ y, por la continuidad de f, existe $U \subseteq \beta\mathbb{R}^+$ abierto tal que $p \in U$ y $f[U] \subseteq [0, \varepsilon)$. Por lo que acabamos de probar, $U \cap \mathbb{R}^+$ no está acotado. Además, $f[U \cap \mathbb{R}^+] \subseteq [0, \varepsilon)$. Analógamente, si $p \in A$ y $\varepsilon > 0$, existe $V \subseteq \beta\mathbb{R}^+$ abierto tal que $p \in V$ y $f[V \cap \mathbb{R}^+] \subseteq (1 - \varepsilon, 1]$, con $V \cap \mathbb{R}^+$ no acotado.

Entonces existen $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^+$ no acotados tales que $f[A_1] \subseteq [0, \frac{1}{3})$ y $f[A_2] \subseteq (\frac{2}{3}, 1]$. Por lo tanto, existe $x_1 \in A_1$ tal que $f(x_1) < \frac{1}{3}$ y existe $y_1 \in A_2$ tal que $f(y_2) > \frac{2}{3}$. Como $\mathbb{R}^+$ es conexo y $f|_{\mathbb{R}^+}$ es continua, existe $z_1 \in \mathbb{R}^+$ tal que $x_1 < z_1 < y_1$ y $f(z_1) = \frac{1}{2}$. Como A_1 y A_2 no están acotados, existe $x_2 \in A_1$ tal que $y_1 < x_2$ y $f(x_2) < \frac{1}{3}$, y existe $y_2 \in A_2$ tal que $x_2 < y_2$ y $f(y_2) > \frac{2}{3}$. Usando nuevamente la continuidad de f y la conexidad de $\mathbb{R}^+$, existe $z_2 \in \mathbb{R}^+$ tal que $x_2 < z_2 < y_2$ y $f(z_2) = \frac{1}{2}$. Inductivamente podemos encontrar una sucesión creciente y no acotada $\{z_n\} \subseteq \mathbb{R}^+$ tal que $f(z_n) = \frac{1}{2}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $\{z_n\}$ es infinita, pues no está acotada. Sea $B = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$. De la compacidad de $\beta\mathbb{R}^+$, se sigue que existe $q \in der_{\beta\mathbb{R}^+}(B)$. Además, $q \in X = \beta\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^+$, pues $\{z_n\}$ no tiene puntos de acumulación en $\mathbb{R}^+$ por ser una sucesión creciente y no acotada. Como f es continua, $f[der_{\beta\mathbb{R}^+}(B)] \subseteq cl_{\mathbb{R}}(f[B])$. Pero $f[B] = \{\frac{1}{2}\}$. Por lo tanto, $f(p) = \frac{1}{2}$. Esto es una contradicción, pues en X la función f sólo toma los valores 0 y 1. Esta contradicción vino de suponer que X no era conexo. Con esto concluimos que $\beta\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^+$ es conexo.

Por lo tanto, hemos encontrado un F-espacio conexo. □

La Proposición 5.20 nos muestra que ser F-espacio no implica ser P-espacio y tampoco implica ser espacio extremadamente disconexo, aún cuando el espacio sea normal.

Ahora sí vamos a contestar la pregunta que nos hicimos al final del Capítulo 4. ¿El producto de un P-espacio y un espacio extremadamente disconexo es extremadamente disconexo? Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.21. *Sea $D = \omega_1$ con la topología discreta y definamos $X = D \cup \{p\}$, con $p \notin D$. Dotemos a X de la siguiente topología: todo $\alpha \in D$ es aislado y una base de vecindades para p es*

$$B(p) = \{\{p\} \cup D \setminus C : C \subseteq D \text{ es numerable } \}.$$

Notemos que todas las vecindades de p son abiertas y cerradas. Esto implica que X es 0-dimensional y, por lo tanto, X es Tychonoff. Veamos que X es un P-espacio. Claramente todo punto en D es un P-punto. Basta ver que p es un P-punto. Sea G un conjunto G_δ tal que $p \in G$. Queremos probar que G es una vecindad de p.

Como G es G_δ, lo podemos ver como $G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ con $U_n \subseteq X$ abierto para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces, como $p \in G$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $C_n \subseteq D$ numerable tal que

$$\{p\} \cup D \setminus C_n \subseteq U_n.$$

Se sigue que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ es numerable y

$$\{p\} \cup D \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = G.$$

Por lo tanto, G es vecindad de p y así, p es un P-punto. Con esto concluimos que X es un P-espacio.

Ahora consideremos al espacio βD. Sea

$$\mathcal{A} = \{B \subseteq D : |D \setminus B| \leq \omega\}.$$

Veamos que $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de intersección finita. Sean $B_1, B_2, ..., B_n \in \mathcal{A}$. Entonces $|D \setminus B_i| \leq \omega$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$. Se sigue que $|\bigcup_{i=1}^{n} D \setminus B_i| \leq \omega$. Por lo tanto, $|D \setminus \bigcap_{i=1}^{n} B_i| \leq \omega$. Como D no es numerable, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} B_i \neq \emptyset$. Esto implica que existe un ultrafiltro $q \in \beta D$ tal que $\mathcal{A} \subseteq q$. Sea

$$Y = D \cup \{q\},$$

visto como subespacio de βD.

Veamos primero que $q \notin D$. Como $\mathcal{F} = \{A \subseteq D : |D \setminus A| < \omega\} \subseteq \mathcal{A}$ y $\mathcal{A} \subseteq q$, entonces $\bigcap q = \emptyset$. Por lo tanto, $q \in \beta D \setminus D$.

Ahora notemos que por cómo escogimos a q, toda vecindad de q en βD interseca a D en una cantidad no numerable de puntos. Además, por el Teorema 2.10, βD es extremadamente disconexo, y Y es denso en βD. Por lo tanto, por el Teorema 2.7, Y es extremadamente disconexo. Queremos ver que $X \times Y$ no es un F-espacio.

Como $|D| = \omega_1$ y $\bigcap q = \emptyset$, entonces por el Teorema 4.21, q no tiene la propiedad de intersección numerable. Por lo tanto, existe $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq q$ tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $f_n \colon D \to \mathbb{R}$ dada por $f_n = 1 - \chi_{A_n}$. Como D es discreto, f_n es continua y, por lo tanto, existe $g_n \colon \beta D \to \mathbb{R}$ continua tal que $g_n|_D = f_n$. Entonces $A_n = \mathcal{Z}(g_n) \cap D$. Sea $Z = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{Z}(g_n)$. El conjunto Z es un nulo de βD y, por lo tanto, existe $g \colon \beta D \to \mathbb{R}$ continua tal que $Z = g^{-1}[\{0\}]$. Entonces $g|_Y \in C(Y)$. Veamos que $g(q) = 0$. Dada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $A_n \in q$, lo que implica que $q \in cl_{\beta D}(A_n)$ (ver Proposición 1.17). Como $cl_{\beta D}(A_n) \subseteq \mathcal{Z}(g_n)$, entonces $q \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{Z}(g_n) = Z$. Por lo tanto, $g(q) = 0$. Además,

$$D \cap \mathcal{Z}(g) = D \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{Z}(g_n)) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset.$$

Por lo tanto, $g(x) \neq 0$ para toda $x \in D$. Ahora definamos $h \colon X \times Y \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$h(x,y) = \begin{cases} g(x) & si \quad x = y \in D \\ \\ -g(y) & si \quad x = y + 1 \text{ con } y \in D \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Queremos probar que h es continua y que $pos(h)$ y $neg(h)$ no están completamente separados.

Sea $(x, y) \in X \times Y$. Queremos ver que h es continua en (x, y).

Caso 1: $x, y \in D$

En este caso $\{x\}$ *es abierto en* X *y* $\{y\}$ *es abierto en* Y. *Por lo tanto,* h *es continua en* (x, y).

Caso 2: $x \in D$ *y* $y = q$

En este caso $h(x, y) = 0$. *Sea* $\varepsilon > 0$. *Como* $g(q) = 0$ *y* g *es continua, existe* $U \subseteq Y$ *abierto tal que* $q \in U$ *y* $g[U] \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$. *Sea* $s \in U$. *Si* $s = x$, *entonces* $h(x, s) = g(x) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. *Si* $x = s + 1$, *entonces* $h(x, s) = -g(s) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. *En cualquier otro caso,* $h(x, s) = 0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. *Por lo tanto,* $h[\{x\} \times U] \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$. *Así,* h *es continua en* (x, y).

Caso 3: $x = p$ *y* $y \in D$

En este caso también tenemos que $h(x, y) = 0$. *Sean* $\varepsilon > 0$ *y* $A = \{p\} \cup (D \setminus \{y, y + 1\})$. *El conjunto* A *es una vecindad de* p *y dado* $s \in A$ *se tiene que* $h(s, y) = 0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. *Por lo tanto,* $h[A \times \{y\}] \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$. *Esto implica que* h *es continua en* (x, y).

Caso 4: $x = p$, $y = q$

En este caso, $h(x, y) = 0$. *Sea* $\varepsilon > 0$. *Como* g *es continua en* q *y* $g(q) = 0$, *existe* $V \subseteq Y$ *vecindad de* q *tal que* $g[V] \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$. *Entonces* $X \times V$ *es vecindad de* (p, q) *y cumple que* $h[X \times V] \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$. *Por lo tanto,* h *es continua en* $X \times Y$.

Ahora veamos que h *cambia de signo en cualquier vecindad de* (p, q). *Dado* $\sigma \in D$, *sea*

$$U_\sigma = \{\alpha \in D : \alpha \geq \sigma\}.$$

Entonces, dada W *una vecindad de* (p, q), *existe* $\sigma \in D$ *y* V *vecindad de* q *tal que* $U_\sigma \times V \subseteq W$. *Como* $D \cap V$ *es no numerable, existe* $\alpha \in D \cap V$ *tal que* $\alpha \geq \sigma$. *Entonces* $\alpha, \alpha + 1 \in U_\sigma$. *Esto implica que* $(\alpha, \alpha), (\alpha + 1, \alpha) \in W$. *Pero* $h((\alpha, \alpha))$ *y* $h((\alpha + 1, \alpha))$ *tienen signos distintos.*

Finalmente, veamos que pos(h) *y neg*(h) *no están completamente separados. Supongamos que sí. Entonces existe* $f : X \times Y \to [0, 1]$ *tal que* $f[pos(h)] \subseteq \{0\}$ *y* $f[neg(h)] \subseteq \{1\}$. *Sea* $V \subseteq [0, 1]$ *una vecindad de* $f((p, q))$ *tal que* $|V \cap \{0, 1\}| \leq 1$. *Como* f *es continua, existe* $W \subseteq X \times Y$ *vecindad de* (p, q) *tal que* $f[W] \subseteq V$. *Por lo que acabamos de probar, existe* $\alpha \in D$ *tal que* $(\alpha, \alpha), (\alpha + 1, \alpha) \in W$. *Supongamos sin pérdida de generalidad que* $h((\alpha, \alpha)) > 0$. *Entonces* $h(\alpha + 1, \alpha) < 0$. *Por lo tanto,* $f((\alpha, \alpha)) = 0$ *y* $f((\alpha + 1, \alpha)) = 1$. *Entonces* $0, 1 \in V$, *lo cual es una contradicción. Así, pos*(h) *y neg*(h) *no están completamente separados. Por el Teorema 5.6,* $X \times Y$ *no es un F-espacio, y por el Corolario 5.10,* $X \times Y$ *no es extremadamente disconexo.*

Acabamos de probar que el producto de un P-espacio y un espacio extremadamente disconexo no necesariamente es un espacio extremadamente disconexo. Como todo espacio extremadamente disconexo es un F-espacio, entonces también encontramos un P-espacio y un F-espacio cuyo producto no es un F-espacio.

5.2. Espacios extremadamente disconexos metrizables

En esta sección vemos que todo espacio extremadamente disconexo metrizable es discreto. Para esto nos apoyamos de los F-espacios. Veamos primero cómo son las sucesiones convergentes en un

F-espacio.

Lema 5.22. *Sea X un F-espacio y $\{x_k\} \subseteq X$ una sucesión convergente. Entonces $\{x_k\}$ es eventualmente constante.*

Demostración.
Por contradicción, supongamos que $x_k \to x$ y que $\{x_k\}$ no es eventualmente constante. Sea

$$k_1 = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} : x_k \neq x\}.$$

Como X es Tychonoff, existen conulos ajenos $U_1, V_1 \subseteq X$ tales que $x_{k_1} \in U_1$ y $x \in V_1$. Como $x_k \to x$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$, con $N_1 > k_1$, tal que $x_k \in V_1$ para toda $k \geq N_1$. Sea

$$k_2 = \text{mín}\{k \geq N_1 : x_k \neq x\}.$$

Como $\{x_k\}$ no es eventualmente constante, k_2 está bien definido. Usando nuevamente que X es Tychonoff, podemos encontrar conulos ajenos $U_2, V_2 \subseteq V_1$ tales que $x_{k_2} \in U_2$ y $x \in V_2$. Notemos que U_1 y U_2 son ajenos ya que $U_1 \cap U_2 \subseteq U_1 \cap V_1 = \emptyset$. Además, $k_2 > k_1$. Por lo tanto, siguiendo el proceso de manera inductiva, conseguimos una subsucesión $\{x_{k_n}\}$ de $\{x_k\}$ y una sucesión $\{U_n\}$ de conulos ajenos dos a dos, y tales que $x_{k_n} \in U_n$. Por comodidad, llamemos y_n a x_{k_n}. Como $x_k \to x$, entonces $y_n \to x$.

Sea $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. El conjunto U es conulo por ser unión numerable de conulos. Entonces, como X es un F-espacio, U está C^*-encajado en X. Consideremos la función $f\colon U \to [0,1]$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in U_n,\ n\ par \\ \\ 0 & si \quad x \in U_n,\ n\ impar \end{cases}.$$

La función f está bien definida, pues los U_n son ajenos dos a dos y, además, es continua en U, ya que es continua en cada U_n con U_n abierto. Como U está C^*-encajado en X, existe $g\colon X \to \mathbb{R}$ continua y acotada tal que $g|_U = f$.

Como $y_n \to x$, entonces $y_{2n} \to x$ y $y_{2n+1} \to x$. De la continuidad de g se sigue que $g(y_{2n}) \to g(x)$ y $g(y_{2n+1}) \to g(x)$. Pero $g(y_{2n}) = 1$ y $g(y_{2n+1}) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $g(x) = 0$ y $g(x) = 1$, lo cual es una contradicción. Con esto concluimos que la sucesión $\{x_k\}$ es eventualemente constante. □

Con el Lema 5.22 hemos caracterizado a todas las sucesiones convergentes de un F-espacio. Una sucesión en un F-espacio es convergente si y sólo si es eventualmente constante. Esto nos da un resultado importante sobre los F-espacios primero numerables (en particular los F-espacios metrizables).

Proposición 5.23. *Sea X un F-espacio. Si $x \in X$ tiene una base local numerable, entonces x es un punto aislado de X.*

Demostración.
Sea $B(x) = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base local numerable de x. Podemos pedir que $B_{n+1} \subseteq B_n$. Nos gustaría probar que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $B_k = \{x\}$. Supongamos que no. Entonces para toda $k \in \mathbb{N}$ podemos

tomar $x_k \in B_k \setminus \{x\}$. Así, conseguimos una sucesión $\{x_k\} \subseteq X$ que converge a x, pero que no es eventualemente constante. Pero el Lema 5.22 nos dice que esto es una contradicción. Por lo tanto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $B_k = \{x\}$. Esto implica que x es un punto aislado de X. □

Corolario 5.24. *Sea X un espacio topológico metrizable y extremadamente disconexo. Entonces X es discreto.*

Demostración.
Como X es metrizable, entonces X es Tychonoff y primero numerable. Además, como X es extremadamente disconexo, por el Corolario 5.10, X es un F-espacio. Así, por la Proposición 5.23, todos los puntos de X son aislados. Por lo tanto, X es discreto. □

Capítulo 6

Espacios extremadamente disconexos separables

En este capítulo caracterizamos a los espacios separables Tychonoff extremadamente disconexos. Vamos a probar que un espacio Tychonoff separable es extremadamente disconexo si y sólo si es homeomorfo a un subespacio de $\beta\mathbb{N}$. Para demostrar esto, primero tenemos que ver que todos los subespacios separables de $\beta\mathbb{N}$ son extremadamente disconexos. Necesitamos algunos resultados previos.

Proposición 6.1. *Sea X un espacio Tychonoff y sean $A, B \subseteq X$ numerables. Si $A \cap cl_X(B) = \emptyset$ y $B \cap cl_X(A) = \emptyset$, entonces existen $U, V \in co\mathcal{Z}(X)$ tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

Demostración.
Si A o B es vacío no hay nada que hacer. Supongamos A y B distintos del vacío. Como A y B son numerables, los podemos ver como $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces $a_1 \in X \setminus cl_X(B)$. Usando que X es Tychonoff, existe $A_1 \in co\mathcal{Z}(X)$ tal que $a_1 \in A_1 \subseteq cl_X(A_1) \subseteq X \setminus cl_X(B)$. Por otro lado, $b_1 \in X \setminus (cl_X(A_1) \cup cl_X(A))$. Usando nuevamente que X es Tychonoff, podemos encontrar $B_1 \in co\mathcal{Z}(X)$ tal que $b_1 \in B_1 \subseteq cl_X(B_1) \subseteq X \setminus (cl_X(A_1) \cup cl_X(A))$. Inductivamente podemos encontrar $A_n, B_n \in co\mathcal{Z}(X)$ tales que

$$a_n \in A_n \subseteq cl_X(A_n) \subseteq X \setminus (cl_X(B) \cup \bigcup_{j=1}^{n-1} cl_X(B_j)), \text{ y}$$

$$b_n \in B_n \subseteq cl_X(B_n) \subseteq X \setminus (cl_X(A) \cup \bigcup_{j=1}^{n} cl_X(A_j)).$$

Sean $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Es claro que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. Si existiera $z \in U \cap V$, entonces existirían $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $z \in A_n \cap B_m$, pero por construcción esto es una contradicción, pues $A_n \subseteq X \setminus (cl_X(B) \cup \bigcup_{j=1}^{n-1} cl_X(B_j))$ y $B_m \subseteq X \setminus (cl_X(A) \cup \bigcup_{j=1}^{m} A_j)$. Por lo tanto, U y V son ajenos. Además, $U, V \in co\mathcal{Z}(X)$ pues son unión numerable de conulos. Por lo tanto, U y V son los conulos buscados. $\square$

Proposición 6.2. *Sea X un F-espacio y $S \subseteq X$ numerable. Entonces S está C^*-encajado en X.*

Demostración.
Sean $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}(S)$ tales que Z_1 y Z_2 están completamente separados en S. Queremos ver que Z_1 y Z_2 están completamente separados en X. Como Z_1 es cerrado en S, existe $D \subseteq X$ cerrado tal que $Z_1 = D \cap S$. Entonces $Z_1 \subseteq D$ y, por lo tanto, $cl_X Z_1 \subseteq D$. Se sigue que

$$cl_X(Z_1) \cap Z_2 \subseteq D \cap Z_2 = D \cap Z_2 \cap S = Z_1 \cap Z_2.$$

Por lo tanto, $cl_X(Z_1) \cap Z_2 = \emptyset$. Analógamente, tenemos que $Z_1 \cap cl_X(Z_2) = \emptyset$. Además, Z_1 y Z_2 son numerables, pues S es numerable. Por la Proposición 6.1, existen $U, V \in co\mathcal{Z}(X)$ tales que $Z_1 \subseteq U$, $Z_2 \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Como X es F-espacio, por el Teorema 5.6, U y V están completamente separados en X. Por lo tanto, Z_1 y Z_2 están completamente separados en X. Por la Proposición 1.13 y el Teorema 1.14, S está C^*-encajado en X. □

Proposición 6.3. *Sea X un F-espacio y $S \subseteq X$ numerable. Entonces S es un F-espacio.*

Demostración.
Sean $A_1, A_2 \in co\mathcal{Z}(S)$ ajenos. Por el Teorema 5.6, basta demostrar que A_1 y A_2 están completamente separados en S. Notemos que A_1 y A_2 son numerables, pues S es numerable. Como A_1 y A_2 son abiertos en S, existen $U, V \subseteq X$ abiertos de X tales que $A_1 = U \cap S$ y $A_2 = V \cap S$. Supongamos que $A_1 \cap cl_X A_2 \neq \emptyset$. Sea $x \in U \cap S \cap cl_X A_2$. Entonces $x \in U$ y $x \in cl_X(A_2)$. Por lo tanto,

$$\emptyset \neq U \cap A_2 = U \cap (V \cap S) = (U \cap S) \cap (V \cap S) = A_1 \cap A_2,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $A_1 \cap cl_X(A_2) = \emptyset$. Análogamente, $cl_X(A_1) \cap A_2 = \emptyset$. Por la Proposición 6.1, existen $U_1, U_2 \in co\mathcal{Z}(X)$ tales que $A_1 \subseteq U_1$, $A_2 \subseteq U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Como X es F-espacio, U_1 y U_2 están completamente separados en X. Esto implica que A_1 y A_2 están completamente separados en X y, por lo tanto, en S. De modo que S es un F-espacio. □

Proposición 6.4. *Sea X un F-espacio y $D \subseteq X$ un subespacio separable. Entonces D es un F-espacio.*

Demostración.
Sean $A, B \in co\mathcal{Z}(D)$ tales que $A \cap B = \emptyset$. Por el Teorema 5.6, basta probar que A y B están completamente separados en D. Sea $S \subseteq D$ un denso numerable. Por la Proposición 6.3, S es F-espacio. Entonces, como $A \cap S$ y $B \cap S$ son conulos ajenos de S, existe $h \in C^*(S)$ tal que $h[A \cap S] = \{1\}$ y $h[B \cap S] = \{0\}$. Además, por la Proposición 6.2, S está C^*-encajado en X y, por lo tanto, en D. Entonces existe $H \in C^*(D)$ tal que $H|_S = h$. Afirmamos que $H[A] = \{1\}$. Sea $a \in A$. Si $a \in S$, entonces $H(a) = h(a) = 1$. Supongamos que $a \in A \setminus S$. Como A es abierto en D y S es denso, $cl_D(A) = cl_D(A \cap S)$. Entonces

$$a \in A \subseteq cl_D(A) = cl_D(A \cap S) = (A \cap S) \cup der_D(A \cap S).$$

Como $a \notin A \cap S$, entonces $a \in der_D(A \cap S)$. De la continuidad de H se sigue que

$$H[der_D(A \cap S)] \subseteq cl_D(H[A \cap S]) = \{1\}.$$

Por lo tanto, $H(a) = 1$. De manera que $H[A] = \{1\}$. Análogamente, $H[B] = \{0\}$. Esto implica que A y B están completamente separados en D. Así, D es F-espacio. $\square$

Ahora sí tenemos lo que necesitamos para probar que todo subespacio separable de $\beta\mathbb{N}$ es extremadamente disconexo.

Proposición 6.5. *Sea D un subespacio separable de $\beta\mathbb{N}$. Entonces D es extremadamente disconexo.*

Demostración.
Como $\beta\mathbb{N}$ es extremadamente disconexo, entonces por el Corolario 5.10, $\beta\mathbb{N}$ es F-espacio. De la Proposición 6.4, se sigue que D es F-espacio. Además, como D es separable, entonces D es c.c.c. Por la Proposición 5.16, D es extremadamente disconexo. $\square$

Por último nos gustaría caracterizar a los espacios Tychonoff extremadamente disconexos y separables en términos de $\beta\mathbb{N}$. Para eso necesitamos algunas definiciones y unos resultados previos.

Definición 6.6. *Sea X un espacio topológico. La densidad de X, denotada $d(X)$, es*

$$d(X) = \text{mín}\{|D| : D \subseteq X \textit{ es denso en } X\}.$$

Definición 6.7. *Sea X un espacio topológico. El peso de X, denotado $w(X)$ es*

$$w(X) = \text{mín}\{|B| : B \textit{ es base de } X\}.$$

El siguiente lema nos da una relación entre la cardinalidad de abiertos regulares de un espacio X y la densidad de X. Su prueba se puede consultar en [5].

Lema 6.8. *Sea X un espacio topológico. Entonces $|\mathcal{RO}(X)| \leq 2^{d(X)}$.*

Lema 6.9. *Sea X un espacio Tychonoff infinito y 0-dimensional. Entonces X está encajado en el producto topológico $2^{w(X)}$ (donde $2 = \{0, 1\}$ con la topología discreta).*

Demostración.
Sea $B \subseteq \mathcal{B}(X)$ una base de X tal que $|B| = w(X)$. Podemos ver a B como $B = \{B_\alpha : \alpha < \kappa\}$ con $\kappa = w(X)$. Para cada $\alpha < \kappa$, sea $f_\alpha = \chi_{B_\alpha} \colon X \to \{0, 1\}$ la función característica de B_α. Como B_α es abierto y cerrado, entonces f_α es continua para cada $\alpha < \kappa$. Sea

$$S = \{f_\alpha^{-1}[V] : V \subseteq \{0, 1\}, \alpha < \kappa\}.$$

Entonces $B \subseteq S$. Por lo tanto, S es base para X. Por la Proposición 1.23, $\mathcal{C} = \{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$ separa puntos de cerrados. Por lo tanto, por la Proposición 1.26, la función evaluación $e \colon X \to \{0, 1\}^\kappa$ dada por $e(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha<\kappa}$ es un encaje. Así, X está encajado en $2^{w(X)}$. $\square$

El siguiente Teorema nos dará un resultado importante sobre el espacio 2^{2^ω}. Su prueba se puede consultar en [5].

Teorema 6.10. *Sea* $X = \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ *con* $|\mathcal{I}| \leq 2^\kappa$ *y* $d(X_i) \leq \kappa$ *para toda* $i \in \mathcal{I}$*. Entonces* $d(X) \leq \kappa$*. En particular, el producto de a lo más* 2^ω *espacios separables es separable.*

Como consecuencia del Teorema 6.10, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 6.11. *El producto topológico* 2^{2^ω} *es separable.*

Con estos resultados podemos dar una caracterización de los espacios extremadamente disconexos Tychonoff y separables.

Teorema 6.12. *Sea* X *un espacio Tychonoff separable. Entonces* X *es extremadamente disconexo si y sólo si* X *es homeomorfo a un subespacio de* $\beta\mathbb{N}$*.*

Demostración.
$\Rightarrow]$ Como X es Tychonoff y extremadamente disconexo, entonces X es 0-dimensional. Por el Lema 6.9, X está encajado en $2^{w(X)}$. Pero $w(X) \leq |\mathcal{RO}(X)|$, pues X es Tychonoff y, por la Proposición 1.7, $\mathcal{RO}(X)$ es una base para X. Por otro lado, por el Lema 6.8, $|\mathcal{RO}(X)| \leq 2^{d(X)} = 2^\omega$, pues X es separable. Entonces $2^{w(X)} \leq 2^{2^\omega}$. Esto implica que existe un encaje $\phi\colon X \to 2^{2^\omega}$. Por el Corolario 6.11, 2^{2^ω} es separable. Sea $D \subseteq 2^{2^\omega}$ denso numerable. Entonces existe una función $h\colon \mathbb{N} \to 2^{2^\omega}$ tal que $h\colon \mathbb{N} \to D$ es biyectiva. Además, h es continua, pues $\mathbb{N}$ es discreto. Por el Teorema 1.18, existe $g\colon \beta\mathbb{N} \to 2^{2^\omega}$ continua tal que $g|_{\mathbb{N}} = h$. Notemos que g es sobre, pues

$$2^{2^\omega} = cl_{2^{2^\omega}}(D) = cl_{2^{2^\omega}}(h[\mathbb{N}]) \subseteq cl_{2^{2^\omega}}(g[\beta\mathbb{N}]) = g[\beta\mathbb{N}],$$

donde la última igualdad se sigue de la compacidad de $\beta\mathbb{N}$ y la continuidad de g.

Además, g es perfecta, pues es continua y $\beta\mathbb{N}$ es compacto. Sea $A = g^{-1}[\phi[X]]$. Entonces $g[A] = \phi[X]$ y $g|_A\colon A \to \phi[X]$ es perfecta y sobre. Por el Teorema 3.24, existe $C \subseteq A$ cerrado en A tal que $g|_C\colon C \to \phi[X]$ es una función perfecta irreducible y sobre. Como $\phi[X]$ es extremadamente disconexo, pues X lo es y ϕ es un encaje, entonces por el Teorema 3.25, $g|_C$ es un homeomorfismo. Por lo tanto, X es homeomorfo a C con C subespacio de $\beta\mathbb{N}$.

$\Leftarrow]$ Se sigue de la Proposición 6.5. $\square$

Apéndice A

Álgebras de Boole

Definición A.1. *1. Un orden parcial sobre un conjunto A es una relación binaria "$\leq$"sobre A, es decir, $\leq$ es un subconjunto de $A \times A$, que cumple lo siguiente:*

a) *Reflexiva: Si $a \in A$, entonces $a \leq a$.*

b) *Antisimétrica: Si $a, b \in A$, $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.*

c) *Transitiva: Si $a, b, c \in A$, $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.*

A la pareja $(A, \leq)$ la llamamos conjunto parcialmente ordenado (COPO).

2. Si $(A, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y $B \subseteq A$, entonces $\leq_B$ lo usaremos para denotar $\leq \cap (B \times B)$.

Definición A.2. *Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $B \subseteq A$.*

1. *Una cota superior (inferior) de B es un elemento $a \in A$ tal que $b \leq a$ ($a \leq b$) para todo $b \in B$. Esto lo denotaremos como $B \leq a$ ($a \leq B$).*

2. *Un elemento $a \in A$ es una mínimia cota superior (máxima cota inferior) de B si a es cota superior (cota inferior) de B, y para toda cota superior (inferior), b, de B, se tiene que $a \leq b$ ($b \leq a$).*

Observación A.3. *Si B tiene una mínima cota superior (máxima cota inferior), entonces es única.*

Notación: Si a es la mínima cota superior de B (máxima cota inferior), escribiremos $a = \bigvee B = \sup B$ ($a = \bigwedge B = \inf B$).

Definición A.4. *Un conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$ es una retícula si para cualesquiera $a, b \in A$, $\bigvee\{a, b\}$ y $\bigwedge\{a, b\}$ existen.*

Notación: $\bigvee\{a, b\}$ lo escribiremos como $a \vee b$, y $\bigwedge\{a, b\}$ como $a \wedge b$. A veces denotaremos a una retícula como $(A, \vee, \wedge)$ o $(A, \leq, \vee, \wedge)$.

Proposición A.5. *Sean $(A, \leq)$ una retícula y $a, b, c \in A$. Entonces se cumple lo siguiente:*

1. *$a \leq b$ si y sólo $a \vee b = b$ si y sólo si $a \wedge b = a$.*

2. *$a = a \vee a = a \wedge a$.*

3. *$a \wedge b = b \wedge a$ y $a \vee b = b \vee a$.*

4. *$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ y $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$.*

5. *$a \wedge (a \vee b) = a$ y $a \vee (a \wedge b) = a$.*

Definición A.6. *Un conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$ es una semirretícula superior (semirretícula inferior) si para cualesquiera $a, b \in A$, $a \vee b$ $(a \wedge b)$ existe. Una semirretícula superior (inferior) es completa si para todo $\emptyset \neq B \subseteq A$, $\bigvee B$ $(\bigwedge B)$ existe. Una retícula es completa si es completa como semirretícula inferior y superior.*

Teorema A.7. *Una semirretícula superior (inferior) completa con elemento mínimo (máximo) es una retícula completa.*

Demostración.
Sea $(A, \leq)$ una semirretícula superior completa y $0 = \bigwedge A$. Sea $\emptyset \neq B \subseteq A$ y $C = \{c \in A : c \leq B\}$. Como $0 \in C$, entonces $C \neq \emptyset$. Por lo tanto, $d = \bigvee C$ existe. Afirmamos que $d = \bigwedge B$. Sea $b \in B$. Entonces $C \leq b$ y, por lo tanto, $d = \bigvee C \leq b$. Como b fue arbitrario, entonces $d \leq B$. Por lo tanto, d es cota inferior de B. Ahora sea e tal que $e \leq B$. Entonces $e \in C$ y, por lo tanto, $e \leq \bigvee C = d$. Así, tenemos que $d = \bigwedge B$ y, por lo tanto, A es una retícula completa. La prueba para cuando tenemos $(A, \leq)$ semirretícula inferior completa con elemento máximo es análoga. □

Proposición A.8. *Dado un esapacio topológico X, $(\mathcal{RO}(X), \subseteq)$ y $(\mathcal{R}(X), \subseteq)$ son retículas completas.*

Demostración.
Veamos que $(\mathcal{RO}(X), \subseteq)$ es una retícula completa. Sean $U, V \in \mathcal{RO}(X)$. Entonces $U = int_X(cl_X(U))$, $V = int_X(cl_X(V))$ y

$$U \cap V = int_X(cl_X(U)) \cap int_X(cl_X(V)) = int_X(cl_X(U \cap V))$$

por la Proposición 1.1. Por lo tanto, $U \cap V \in \mathcal{RO}(X)$ y $U \cap V = U \wedge V$. Sea $\emptyset \neq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{RO}(X)$. Entonces dado $B \in \mathcal{B}$ se tiene que $B \subseteq int_X(cl_X(\bigcup \mathcal{B}))$. Por lo tanto, $int_X(cl_X(\bigcup \mathcal{B}))$ es cota superior de $\mathcal{B}$. Sea $C \in \mathcal{RO}(X)$ tal que $B \subseteq C$ para todo $B \in \mathcal{B}$. Entonces $int_X(cl_X(\bigcup \mathcal{B})) \subseteq int_X(cl_X(C)) = C$. Por lo tanto, $int_X(cl_X(\bigcup \mathcal{B})) = \bigvee \mathcal{B}$. Así, $(\mathcal{RO}(X), \subseteq)$ es semirretícula superior completa. Además, $\emptyset \in \mathcal{RO}(X)$ y $\emptyset$ es el elemento mínimo de $\mathcal{RO}(X)$. Por el Teorema A.7 se sigue que $(\mathcal{RO}(X), \subseteq)$ es retícula completa.
La prueba para $(\mathcal{R}(X), \subseteq)$ es análoga. □

Si $U, V \in \mathcal{RO}(X)$ y $\emptyset \neq B \subseteq \mathcal{RO}(X)$, entonces $U \vee V = int_X(cl_X(U \cup V))$, $U \wedge V = U \cap V$, $\bigvee B = int_X(cl_X(\bigcup B))$ y $\bigwedge B = int_X(cl_X(\bigcap B))$.

De manera similar, si $A, B \in \mathcal{R}(X)$ y $\emptyset \neq C \subseteq \mathcal{R}(X)$, entonces $A \vee B = A \cup B$, $A \wedge B = cl_X(int_X(A \cap B))$, $\bigwedge C = cl_X(int_X(\bigcap C))$ y $\bigvee C = cl_X(int_X(\bigcup C))$.

Definición A.9. *Sean $(L, \leq, \vee, \wedge)$ y $(L^*, \leq^*, \vee^*, \wedge^*)$ dos retículas y $f \in F(L, L^*)$. La función f es:*

1. *un homomorfismo de orden si $a \leq b$ implica $f(a) \leq^* f(b)$ para cualesquiera $a, b \in L$,*

2. *un isomorfismo de orden si f es biyectiva y tanto f como f^{-1} son homomorfismos de orden,*

3. *un homomorfismo de retículas si $f(a \vee b) = f(a) \vee^* f(b)$ y $f(a \wedge b) = f(a) \wedge^* f(b)$ para cualesquiera $a, b \in L$,*

4. *un isomorfismo de retículas si f es biyectiva y tanto f como f^{-1} son homomorfismos de retículas.*

Definición A.10. *Una retícula L que satisface*

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \text{ y } a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

para cualesquiera $a, b, c \in L$, se llama retícula distributiva.

Definición A.11. *Sea $(L, \vee, \wedge)$ una retícula acotada. Denotemos por 0 y 1 al elemento mínimo y máximo de L, respectivamente, y sea $a \in L$. Entonces $b \in L$ es un complemento de a si $a \vee b = 1$ y $a \wedge b = 0$. Una retícula complementada es una retícula acotada en la cual todo elemento tiene un complemento.*

Proposición A.12. *Si $(L, \vee, \wedge)$ es una retícula distributiva y acotada, entonces cada elemento de L tiene a lo más un complemento.*

Demostración.
Sea $a \in L$ y supongamos que b y c son complementos de a. Entonces

$$c = c \wedge 1 = c \wedge (a \vee b) = (c \wedge a) \vee (c \wedge b) = 0 \vee (c \wedge b) = c \wedge b \leq b.$$

Por lo tanto, $c \leq b$. Análogamente, $b \leq c$. Por lo tanto, $b = c$. $\square$

Notación: Si $(L, \vee, \wedge)$ es una retícula complementada en la cual cada elemento $a \in L$ tiene un complemento, entonces denotamos al único complemento de a como a'.

Definición A.13. *Una retícula complementada y distributiva se llama álgebra de Boole.*

Notación: A veces escribiremos $(L, \vee, \wedge, ')$ para denotar un álgebra de Boole.

Notación: Si $(B, \vee, \wedge, ')$ es un álgebra de Boole y $a \in B$, entonces $(a')'$ lo denotaremos a''. Usaremos 0 para denotar el mínimo elemento de B y 1 para el máximo.

Proposición A.14. *Sean $(B, \vee, \wedge, ')$ un álgebra de Boole y $a, b \in B$. Entonces:*

1. *(leyes de De Morgan)* $(a \wedge b)' = a' \vee b'$ *y* $(a \vee b)' = a' \wedge b'$*,*

2. $a'' = a$*,* $0' = 1$ *y* $1' = 0$*,*

3. $a \wedge b = (a' \vee b')'$ *y* $a \vee b = (a' \wedge b')'$*,*

4. $a \leq b$ *si y sólo si* $b' \leq a'$*,* $a \wedge b = 0$ *si y solo si* $b \leq a'$*, y* $a \vee b = 1$ *si y sólo si* $a' \leq b$*,*

5. $a \wedge b' = 0$ *si y sólo si* $a \leq b$*, y* $a \wedge b' = 1$ *si y sólo si* $a = 1$ *y* $b = 0$*.*

Demostración.

1. Como B es distributiva, entonces

$$(a \wedge b) \wedge (a' \vee b') = (a \wedge b \wedge a') \vee (a \wedge b \wedge b') = (a \wedge a' \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge b') = (0 \wedge b) \vee (a \wedge 0) = 0.$$

Por otro lado,

$$(a \wedge b) \vee (a' \vee b') = (a \vee a' \vee b') \wedge (b \vee a' \vee b') = (a \vee a' \vee b') \wedge (b \vee b' \vee a') = (1 \vee b') \wedge (1 \vee a') = 1.$$

Por lo tanto, $(a \wedge b)' = a' \vee b'$. Análogamente, se llega a que $(a \vee b)' = a' \wedge b'$.

2. Dado que $a' \wedge a = 0$ y $a' \vee a = 1$, se sigue que $a'' = a$. Por otro lado, se tiene que $0 \wedge 1 = 0$ y $0 \vee 1 = 1$. Por lo tanto, $0' = 1$ y $1' = 0$.

3. Por los puntos 1 y 2 de esta proposición, tenemos que

$$(a' \vee b')' = a'' \wedge b'' = a \wedge b \text{ y } (a' \wedge b')' = a'' \vee b'' = a \vee b.$$

4. Por la Proposición A.5 sabemos que $a \leq b$ si y sólo si $a \wedge b = a$ si y sólo si $a' = (a \wedge b)' = a' \vee b'$ si y sólo si $b' \leq a'$.

Ahora supongamos que $a \wedge b = 0$. Entonces

$$a' = a' \vee 0 = a' \vee (a \wedge b) = (a' \vee a) \wedge (a' \vee b) = 1 \wedge (a' \vee b) = a' \vee b.$$

Por lo tanto, $b \leq a'$. Recíprocamente, si $b \leq a'$, entonces $a \wedge b \leq a \wedge a' = 0$. Por lo tanto, $a \wedge b = 0$.

Finalmente, $a \vee b = 1$ si y sólo si $0 = 1' = (a \vee b)' = a' \wedge b'$ si y sólo si $a' \leq b''$ si y sólo si $a' \leq b$.

5. Por el punto 4 de esta proposición, $a \wedge b' = 0$ si y solo si $a \leq b''$ si y solo si $a \leq b$.

Ahora supongamos que $a = 1$ y $b = 0$. Entonces $a \wedge b' = 1 \wedge 1 = 1$. Recíprocamente, si $a \wedge b' = 1$, entonces $1 = a \wedge b' \leq a$ y $1 = a \wedge b' \leq b'$. Por lo tanto, $a = 1$ y $b' = 1$. Así, $a = 1$ y $b = 0$.

□

Definición A.15. *1. Sean A y B álgebras de Boole y $f \in F(A, B)$. La función f es un homomorfismo de Boole si f es un homomorfismo de retículas y para todo $a \in A$ se tiene que $f(a') = (f(a))'$.*

2. La función f es un isomorfismo de Boole si f es biyectiva y tanto f como f^{-1} son homomorfismos de Boole.

Observación A.16. *Por la Proposición A.14, f es un homomorfismo de Boole si y sólo si para cualesquiera $a, b \in A$ se tiene que $f(a') = (f(a))'$ y $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ (o $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$).*

Notemos que si f es homomorfismo de Boole, entonces $f(1) = f(0') = f(0)'$. Entonces

$$f(0) = f(0 \wedge 1) = f(0) \wedge f(1) = f(0) \wedge f(0)' = 0.$$

Por lo tanto, $f(0) = 0$. Análogamente, se tiene que $f(1) = 1$.

Proposición A.17. *Sean C y B álgebras de Boole y $f \in F(C, B)$.*

1. Si f es un isomorfismo de orden, entonces f es un isomorfismo de Boole.

2. Si f es un homomorfismo de Boole biyectivo, entonces f es un isomorfismo de Boole.

Demostración.

1. Como f es un isomorfismo de orden, entonces f es un isomorfismo de retículas. Sólo falta probar que dado $c \in C$, $f(c') = (f(c))'$. Como f es isomorfismo de orden, entonces $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Entonces

$$0 = f(0) = f(c \wedge c') = f(c) \wedge f(c')$$

y

$$1 = f(1) = f(c \vee c') = f(c) \vee f(c').$$

Por lo tanto, $f(c')$ es el complemento de $f(c)$, es decir, $f(c') = (f(c))'$. Así, f es isomorfismo de Boole.

2. Veamos que f es un isomorfismo de orden. Como f es homomorfismo de Boole, entonces en particular es homomorfismo de orden. Probaremos que f^{-1} también lo es. Sean $a, b \in B$ con $a \leq b$. Como f es biyectiva, existen $c, d \in C$ tales que $a = f(c)$ y $b = f(d)$. Entonces $f(c) \leq f(d)$. Por la Proposición A.14 $f(c) \wedge (f(d))' = 0$. Como f es homomorfismo de Boole, entonces $f(c) \wedge (f(d')) = f(c \wedge d') = 0$. Por lo tanto, $c \wedge d' = 0$. Nuevamente por la Proposición A.14, se sigue que $c \leq d$, es decir, $f^{-1}(a) \leq f^{-1}(b)$. Por lo tanto, f^{-1} es un homomorfismo de orden. Así, f es un isomorfismo de orden biyectivo, y por el punto 1 de esta proposición, f es un isomorfismo de Boole.

□

Definición A.18. *Un álgebra de Boole B es completa si es completa como retícula.*

Bibliografía

[1] A. Arkhangel'skii y V. Ponomarev, *Fundamentals of General Topology: Problems and Exercises*, D. Reidel Publishing Company, 1984.

[2] K. C. Ciesielski y J. Wojciechowski, *Cardinality of Regular Spaces Admitting Only Constant Continuous Functions*, Topology Proc., 47, 313-329, 2016.

[3] L. Gillman, *A P-space and an Extremally Disconnected Space whose Product is not an F-space*, Arch. Math, 11, 53-55, 1960.

[4] L. Gillman y M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, D. Van Nostrand Company, 1960.

[5] K. Kunen y J. E. Vaughan *Handbook of Set-theoretic Topology*, Elsevier, 1984.

[6] S. Negropontis, *Absolute Baire Sets*, Proc. Amer. Math. Soc., 18, 691-694, 1967.

[7] J. Porter y R. Woods, *Extensions and Absolutes of Hausdorff Spaces*, Springer-Verlag, 1988.

[8] R. C. Walker, *The Stone-Čech Compactification*, Springer, 1974.

[9] R. Woods, *Characterizations of Some C^*-embedded Subspaces of $\beta\mathbb{N}$*, Pacific Journal of Mathematics, 65, 573-579, 1976.