



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
DOCTORADO EN CIENCIAS (FÍSICA)  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

**CONTROL DE CORRELACIÓN ESPECTRO-ESPACIAL DE  
PAREJAS DE FOTONES APLICADO A LA TOMOGRAFÍA DE  
COHERENCIA ÓPTICA CUÁNTICA**

**TESIS**  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
**DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)**

PRESENTA:  
**PABLO DANIEL YEPIZ GRACIANO**

TUTOR PRINCIPAL  
DR. ALFRED BARRY U'REN CORTÉS  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

DRA. ROCÍO JÁUREGUI RENAUD  
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM

DR. DANIEL SAHAGÚN SÁNCHEZ  
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, MÉXICO, MARZO 2020



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*A mis padres y hermanas.*

*A mi sobrina Dulce.*

*A ti, Lucy.*



*By the Rays of Light I understand its least Parts, and those as well Successive in the same Lines, as Contemporary in several Lines. For it is manifest that Light consists of Parts, both Successive and Contemporary; because in the same place you may stop that which comes one moment, and let pass that which comes presently after; and in the same time you may stop it in any one place, and let it pass in any other. For that part of Light which is stopp'd cannot be the same with that which is let pass. The least Light or part of Light, which may be stopp'd alone without the rest of the Light, or propagated alone, or do or suffer any thing alone, which the rest of the Light doth not or suffers not, I call a Ray of Light.*

Definition I  
Isaac Newton



*¿Acaso te pedí, Hacedor,  
que de mi barro Hombre me hicieras,  
o te solicité que de la oscuridad me arrancases?*

El Paraíso Perdido

John Milton





---

# Agradecimientos

En estas páginas pretendo reflejar el esfuerzo y dedicación que he tenido durante los años de doctorado en el Posgrado en Ciencias Físicas de la UNAM. Reconozco que este logro no hubiera sido posible sin el apoyo académico, moral y económico de muchas personas, entre ellas: investigadores, tutores, compañeros de trabajo y amigos.

Quiero agradecer en primer lugar al Dr. Alfred U'Ren Cortés por guiarme en el camino científico y por formarme como una persona autodidacta, con una mentalidad crítica y objetiva, con la capacidad para proponer hipótesis y someterlas a pruebas experimentales. También agradezco el apoyo moral que me brindó durante uno de los peores momentos de mi vida que me obligaban a desistir de mis aspiraciones, sin embargo él me motivo para seguir en este ámbito. Y finalmente le agradezco por las habilidades inter-personales, al enseñarme a trabajar en equipo con mis compañeros de laboratorio, colaboradores del ICN y de otras instituciones.

Agradezco al Técnico Académico, Dr. Héctor Cruz Ramírez, quien se encarga de mantener funcionando el laboratorio. Desde que llegué al laboratorio me ha auxiliado en: mis primeras simulaciones del proceso SPDC en MatLab, los principios básicos de la Óptica (que a veces se nos olvidan), la automatización de los motores PI y demás dispositivos de medición. Agradezco también al Dr. Roberto Ramírez Alarcón, quien fue el primero en dirigirme en el ámbito experimental al ayudarme a montar mi primera fuente de SPDC, por tener la paciencia de explicarme las bases y motivarme a trabajar duro para ser competitivo en el área y en la vida.

Agradezco al Dr. Alí Angulo por su ayuda en los últimos proyectos, por las gratas pláticas y discusiones de ideas científicas y, a veces, filosóficas. También al Dr. Carlos Wiechers con quien aprendí, además de conceptos teóricos, mucho de

cuestiones técnicas de detectores y de programación. Ambos fueron los primeros en formar un equipo funcional conmigo. Siempre me guiaron y aconsejaron, y por eso, les guardo respeto y admiración.

Agradezco a mi comité tutor: a la Dra. Rocío Jáuregui Renaud y al Dr. Daniel Sahagún Sánchez, quienes evaluaron mi trabajo doctoral; por ir siguiendo mis avances año con año, por asistir a las reuniones semestrales y por darme sus opiniones, consejos y recomendaciones que me ayudaron y complementaron a la hora de construir este trabajo.

Agradezco a mi jurado conformado por: el Dr. Asaf Paris Mandoki, Dr. Dorilián López Mago, Dr. Roberto de Jesús León Montiel y el Dr. Victor Manuel Velásquez Aguilar, quienes revisaron y evaluaron mi trabajo. Gracias a sus opiniones, sugerencias y correcciones pude mejorar la calidad de este escrito.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por la beca otorgada durante cuatro años para realizar mis estudios de doctorado.

A todos los amigos con los que he compartido experiencias durante el tiempo que he estado en la UNAM. Especialmente a aquellos que, quisieran o no, por azares de la vida estuvieron ahí, teniendo que soportarme y escuchar mis traumas y ocurrencias. Gracias a Edilberto Aguilar, a Arturo Trelles y a Mónica Martínez, por mencionar algunos.

Finalmente, agradezco a mi familia, a mis padres y a mis hermanas Karla y Lluvia, quienes siempre me han apoyado de cerca y de lejos, y a mi sobrina cuasi-hija que es mi adoración. También a Jazmín, por la felicidad que ha traído a mi vida.

A mi hermanita Lucy, quien siempre estará en mis recuerdos.

---

# Abstract

A theoretical and experimental analysis is presented for: (1) the control of the quantum state correlations of the photon pair generated by Spontaneous parametric down-conversion process (SPDC). (2) The interference of the photon pair with controllable joint spectrum, which allows an improvement in the resolution of the quantum optical coherence tomography (QOCT). (3) The proposal of a new QOCT technique in the frequency domain.

Two sources of photon pairs were designed and built for different purposes: the first source was used to study the spectral and spatial correlations present in the photon pair; and the second source, to carry out a study of quantum interference, applying the spectral correlation control to the QOCT tomography. This is why we divide this research into two main parts.

## Part I: Spectro-Spatial Correlation Control

We present a source of photon pairs in the telecommunications band (1550 nm) based on the Spontaneous parametric down-conversion process (SPDC), with controllable spatial and spectral properties. A pulsed femto-second laser pump centered on 775 nm is pumped onto a  $\beta$ -BBO crystal, in order to generate pairs of degenerated photons through the type I process. The entire quantum state is characterized  $|\Psi\rangle_{PDC}$ , retrieving the information contained in the joint spectral amplitude (JSA) of the photon pair through experimental measurements such as: joint spectral intensity (JSI), joint spatial intensity (JSI), and the mixture of both measurements to achieve the full state. In particular, it is possible to control the degree of spectral correlation present in the JSI by varying an experimental parameter precisely, based on the

case of having strongly correlated joint spectrum, until the case of having positively correlated joint spectrum; going through the special case of a fully factorizable joint spectrum. We assess the degree of correlation present in each joint spectrum using the Schmidt number (K).

We classify the type of statistic of the flux of one arm of the source by measuring the second order correlation function  $G^{(2)}(\tau = 0)$  averaged over time for different degrees of correlation (different values of K), a relationship between these two quantities is demonstrated from complementary experiments.

The spatial correlation control is achieved by adjusting a single experimental parameter, in this case: the pump beam waist on the crystal. Results are obtained ranging from a positive correlation to a completely separable case.

Finally, a mixed measurement is carried out, which combines the spectral information contained in each point of the space of the photon pair, recovering the complete SPDC state information experimentally. A general description of the spectrum-spatial correlations is shown in order to gain a better understanding of the SPDC process.

## Part II: Quantum Interference Effects

Currently, interest in the use of QOCT tomography to obtain organic tissue information has grown, since it represents an improvement over its classic analog. In a recent work [1] we show that using a pulsed laser (large bandwidth) can eliminate interference peaks between layers that degrade the resolution of a tomography. The relationship between the coherence time of the pump  $\tau_p$  and the coherence time of the bi-photon  $\tau_a$  with the shape of the JSA are clarified; and also the effects that these times have on the interferogram: the time  $\tau_a$  modifies the width of the Hong-Ou-Mandel dips produced by the sample interfaces, while the time  $\tau_d$  affects the visibility of the intermediate structure.

At last, a novel technique based on the OCT with spectral resolution is presented. Using a fiber spectrometer just before the detectors in the conventional QOCT interferometer we managed to spectrally solve the interferogram  $R_c(\tau)$ , scaling from one to two dimensions when obtaining a two-dimensional spectrogram  $r_c(\tau, \Omega)$  that

generalizes the effects of interference to the frequency domain. A QOCT  $R_c(\tau)$  interferogram reconstruction method is used from the Fourier transform  $\mathbf{F}\{r_c(\tau = \tau_0, \Omega)\}$ , this means, from the measurement of an interference spectrum  $r_c(\Omega, \tau_0)$  in a fixed position  $\tau_0$ . In this way we managed to eliminate the motorized axial scan, and with this we managed to significantly reduce the acquisition times of the interferograms and opening the possibility of the practical application of quantum tomography.



---

# Resumen

Se presenta un análisis teórico y experimental para: (1) el control de las correlaciones del estado cuántico de la pareja de fotones generados mediante el proceso de conversión paramétrica descendente (SPDC). (2) La interferencia de la pareja de fotones con espectros conjuntos controlables, lo que permite una mejora en la resolución de la tomografía de coherencia óptica cuántica (QOCT). (3) La propuesta de una técnica nueva de QOCT en el dominio de frecuencias.

Se diseñaron y construyeron dos fuentes de parejas de fotones para distintos propósitos: la primera fuente se utilizó para el estudio de las correlaciones espectrales y espaciales presentes en la pareja de fotones; y la segunda fuente, para llevar a cabo un estudio de la interferencia cuántica, aplicando el control de correlación espectral a la tomografía de QOCT. Es por esto que dividimos esta investigación en dos partes principales.

## Parte I: Control de Correlaciones Espectro-Espaciales

Presentamos una fuente de pareja de fotones en la banda de las telecomunicaciones (1550 nm) basada en el proceso paramétrico descendente (SPDC), con propiedades espaciales y espectrales controlables. Se utiliza un láser pulsado de bombeo de femto-segundos centrado en 775 nm y un cristal de  $\beta$ -BBO para, mediante el proceso de tipo I, generar parejas de fotones degenerados en 1550 nm. Se caracteriza el estado cuántico completo  $|\Psi\rangle_{PDC}$ , recuperando la información contenida en la amplitud espectral conjunta (JSA) de la pareja de fotones a través de mediciones experimentales como: la intensidad espectral conjunta (JSI), la intensidad espacial conjunta (JSpI), y la mezcla de ambas mediciones para lograr obtener el estado completo.



En particular, se logra controlar el grado de correlación espectral presente en la JSI variando un parámetro experimental de manera precisa, partiendo del caso de tener espectros conjuntos fuertemente correlacionados, hasta el caso de tener espectros conjuntos correlacionados positivamente; pasando por el caso especial de un espectro conjunto completamente factorizable. Evaluamos el grado de correlación presente en cada espectro conjunto utilizando el número de Schmidt ( $K$ ).

Clasificamos el tipo de estadística del flujo de fotones de un brazo de la fuente a través de la medición de la correlación de segundo orden  $G^{(2)}(\tau = 0)$  promediada en el tiempo para distintos grados de correlación (distintos valores de  $K$ ), se demuestra una relación entre estas dos cantidades a partir de experimentos complementarios.

Se logra el control de correlación espacial ajustando un solo parámetro experimental, en este caso: el cinturón de enfocamiento del haz de bombeo sobre el cristal. Se obtienen resultados que van de una correlación positiva a un caso completamente separable.

Finalmente, se realiza una medición mixta que conjunta la información espectral contenida en cada punto del espacio de la pareja de fotones, recuperando la información completa del estado de SPDC de forma experimental. Se muestra una descripción general de las correlaciones espectro-espaciales con el objetivo de lograr un mejor entendimiento del proceso de SPDC.

## Parte II: Efectos de Interferencia Cuántica

Actualmente ha crecido el interés en el uso de la tomografía de QOCT para obtener información de tejidos orgánicos, ya que representa una mejora respecto a su análogo clásico. En un trabajo reciente [1] mostramos que usando un láser pulsado (de ancho de banda grande) se pueden eliminar los picos de interferencia entre capas que degradan la resolución de una tomografía. Se esclarece la relación que tienen el tiempo de coherencia del láser de bombeo  $\tau_p$  y el tiempo de coherencia del bifotón  $\tau_a$  con la forma de la JSA; y también los efectos que tienen estos tiempos sobre el interferograma: el tiempo  $\tau_a$  modifica el ancho de los dips de Hong-Ou-Mandel producidos por las interfaces de la muestra, mientras que el tiempo  $\tau_d$  afecta la visibilidad de la estructura intermedia.

Por último, se presenta una técnica novedosa basada en el OCT con resolución espectral. Utilizando un espectrómetro de fibra justo antes de los detectores en el interferómetro de QOCT convencional logramos resolver espectralmente el interferograma  $R_c(\tau)$ , escalando de una a dos dimensiones al obtener un espectrograma bidimensional  $r_c(\tau, \Omega)$  que generaliza los efectos de interferencia al dominio de frecuencias. Se utiliza un método de reconstrucción del interferograma de QOCT  $R_c(\tau)$  a partir de la transformada de Fourier  $\mathbf{F}\{r_c(\tau = \tau_0, \Omega)\}$ , esto quiere decir, a partir de la medición de un espectro de interferencia  $r_c(\Omega, \tau_0)$  en una posición fija  $\tau_0$ . De esta manera logramos eliminar el escaneo axial motorizado, y con esto conseguimos disminuir considerablemente los tiempos de adquisición de los interferogramas abriendo la posibilidad de la aplicación práctica de la tomografía cuántica.



---

# Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	VII
Introducción	1
<b>I Control de Correlación Espectro-Espacial</b>	<b>7</b>
<b>1. Conversión Paramétrica Descendente</b>	<b>9</b>
I. Óptica No-Lineal . . . . .	9
I.1. Descripción de algunos Procesos No Lineales . . . . .	10
I.2. Proceso de Conversión Paramétrica Descendente . . . . .	14
I.3. Cristales Birrefringentes: Uniaxiales y Biaxiales . . . . .	15
I.4. Condiciones de Empatamiento de Fases . . . . .	17
II. Estado de dos fotones de SPDC . . . . .	21
III. Ingeniería de Estados Cuánticos mediante SPDC . . . . .	23
III.1. Transformación a coordenadas esféricas . . . . .	23
III.2. Acoplamiento a Fibra Óptica Monomodal . . . . .	25
IV. Cálculo del Número de Schmidt . . . . .	27
V. Función de correlación de segundo orden $g^{(2)}(\tau)$ . . . . .	30
VI. Generación de SPDC utilizando un Bombeo monocromático . . . . .	33
<b>2. Control de Correlación Espectro-Espacial de las Parejas de Fotones</b>	<b>35</b>
I. Sistema de Bombeo pulsado . . . . .	36

I.1.	Caracterización del haz pulsado . . . . .	37
II.	Generación de parejas de fotones en 1550 nm y detección síncrona mediante APDs id201 . . . . .	41
II.1.	Sistema de Generación . . . . .	43
II.2.	Búsqueda de coincidencias . . . . .	46
III.	Medición de las correlaciones espectrales . . . . .	50
III.1.	Espectrómetro de fibra óptica . . . . .	50
IV.	Control de correlaciones Espectrales . . . . .	52
V.	Medición del promedio temporal de la función de correlación de se- gundo orden $\langle g^{(2)}(0) \rangle$ . . . . .	54
V.1.	Relación entre el valor de la función de correlación de segundo orden $g^{(2)}(0)$ y número de Schmidt K . . . . .	58
VI.	Medición de la Correlación Espacial . . . . .	61
VII.	Medición de correlaciones Espectro-Espaciales usando un par de rendijas	63
VIII.	Discusión del control de correlación espectro-espacial . . . . .	65
IX.	Conclusiones del control de correlación espectro-espacial . . . . .	72
<b>II</b>	<b>Interferencia Cuántica</b>	<b>73</b>
<b>3.</b>	<b>Tomografía de Coherencia Óptica Cuántica</b>	<b>75</b>
I.	Tomografía de Coherencia Óptica . . . . .	76
I.1.	Interferómetro de OCT . . . . .	76
II.	Tomografía de Coherencia Óptica Cuántica . . . . .	78
II.1.	Interferómetro de QOCT . . . . .	80
III.	Cálculo de QOCT para un bombeo monocromático . . . . .	83
<b>4.</b>	<b>Efectos de Interferencia en la Tomografía de Coherencia Óptica Cuántica usando Ingeniería de Parejas de Fotones</b>	<b>87</b>
I.	Cálculo de QOCT con parejas de fotones con correlaciones arbitrarias	87
II.	Implementación Experimental . . . . .	95
II.1.	Fuente de bombeo . . . . .	95
II.2.	Medio no-lineal de generación . . . . .	98

II.3.	Experimento de interferencia de HOM . . . . .	106
II.4.	Experimento de tomografía de QOCT . . . . .	109
II.5.	Técnica de medición del índice de refracción y espesor de materiales transparentes . . . . .	115
III.	Conclusiones de la Tomografía de coherencia óptica cuántica . . . . .	116
<b>5.</b>	<b>Técnica de Tomografía de Coherencia Óptica Cuántica con Resolución Espectral</b> . . . . .	<b>119</b>
I.	Interferencia de Hong-Ou-Mandel en el dominio espectral . . . . .	119
I.1.	Características del Espectrograma $P_c(\Omega, \tau)$ . . . . .	126
I.2.	Características de la transformada de Fourier del Espectrograma . . . . .	129
II.	Implementación Experimental . . . . .	130
II.1.	Espectrómetro unidimensional . . . . .	130
II.2.	Espectro de desentonamiento interferido . . . . .	135
II.3.	Técnica de Reconstrucción del dip de HOM . . . . .	138
III.	QOCT en el dominio espectral . . . . .	144
III.1.	Forma cualitativa de $P_c(\Omega, \tau)$ para QOCT . . . . .	147
IV.	Implementación Experimental del QOCT espectral . . . . .	147
V.	Límites y alcances de la tomografía de coherencia óptica cuántica espectral . . . . .	152
VI.	Tomografía QOCT resuelta espectralmente para muestras de 3 capas o más capas . . . . .	155
VII.	Conclusiones del QOCT espectral . . . . .	157
<b>III</b>	<b>Apéndices</b> . . . . .	<b>161</b>
<b>A.</b>	<b>Teoría del SPDC de tipo I</b> . . . . .	<b>163</b>
I.	Derivación del Hamiltoniano . . . . .	163
II.	Cálculo del Estado Cuántico . . . . .	165
II.1.	Campo Clásico $E_p$ . . . . .	166
II.2.	Determinación de la función de Amplitud Conjunta $F(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$ . . . . .	167
II.3.	Determinación de la función de empatamiento de fases $\Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$ . . . . .	170

II.4. Estado SPDC . . . . .	172
<b>B. Proceso de la Fotodetección</b>	<b>173</b>
I. Estado cuántico con un Campo de bombeo estrecho . . . . .	173
II. Función de correlacion del campo de bombeo y Flujo de Fotones . . . . .	174
III. Función de correlación de campos cuánticos y Flujo de Fotones de SPDC	175
IV. Medición de Coincidencias . . . . .	177
V. Estado Cuántico con un Campo de Bombeo de Banda Ancha . . . . .	180
VI. Cálculo del Espectro de la pareja de fotones usando un bombeo pulsado	182
<b>C. Interferencia de Hong-Ou-Mandel</b>	<b>185</b>
I. Consideración Mono-Modo . . . . .	185
II. Tratamiento Multi-Modal y Dip de HOM . . . . .	189
III. Cálculo del Estado $ \psi\rangle_{PDC}$ a la salida del BS . . . . .	192
IV. Cálculo del Dip de HOM . . . . .	195
V. Tiempo de Coherencia del Bi-fotón . . . . .	199
<b>D. Detectores de fotones individuales</b>	<b>203</b>
I. Detectores de Fotones Individuales . . . . .	203
I.1. Foto-diodos de Avalancha Semiconductores . . . . .	203
II. Detector id201-Modo Disparado . . . . .	205
III. Detector id230-Modo Libre . . . . .	207
<b>IV Bibliografía</b>	<b>211</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>213</b>

---

# Índice de figuras

1.1. Generación de Segundo Armónico. (a) Geometría de la interacción. (b) Niveles de energía. . . . .	11
1.2. Generación de suma de frecuencias. (a) Geometría de la interacción. (b) Niveles de energía. . . . .	13
1.3. Generación de diferencia de frecuencias. (a) Geometría de la interacción. (b) Niveles de energía. . . . .	13
1.4. Generación de parejas de fotones mediante SPDC o fluorescencia paramétrica. (a) Geometría de la interacción. (b) Niveles de energía. . .	15
1.5. Esquema de un cristal Birrefringente Uniaxial. . . . .	16
1.6. Generación de SPDC de Tipo I. (a) Geometría de la interacción. (b) Conservación de la energía. (c) Conservación del momento. . . . .	19
1.7. Generación de SPDC de Tipo II. (a) Geometría de la interacción. (b) Conservación de la Energía. (c) Conservación del Momento . . . . .	20
1.8. Sistema de coordenadas esféricas para el proceso SPDC de tipo I. . .	23
1.9. Esquema básico para el acoplamiento a fibra SMF . . . . .	25
1.10. Control de correlación de la intensidad espectral conjunta (última columna) al modificar la función de empaquetamiento de fases $\Phi$ (segunda columna) al cambiar el cinturón de acoplamiento $W_f$ . (a) $W_f = 225 \mu\text{m}$ . (b) $W_f = 700 \mu\text{m}$ . (c) $W_f = 1500 \mu\text{m}$ . . . . .	28
1.11. Cálculo del número de Schmidt K, para distintas JSI. La primera y segunda filas corresponde a casos con correlación negativa y positiva ( $K > 1$ ). La última fila muestra el caso de estados sin correlación espectral ( $K \approx 1$ ). . .	31



1.12. Experimento de HBT para medir la función de coherencia temporal de segundo orden $g^{(2)}(z_1, t_1; z_2, t_2)$ . . . . .	32
2.1. Esquema de la cavidad láser de Titanio Zafiro. . . . .	37
2.2. Medición del espectro del haz de bombeo. El espectro mostrado en este caso tiene un ancho a la altura media de 13.3 nm. . . . .	38
2.3. Medición del modo espacial del haz de bombeo utilizando una cámara CCD. . . . .	38
2.4. Perfil del haz de bombeo a la distancia $z = 43.72$ cm. . . . .	39
2.5. Perfil gaussiano del haz de bombeo. La línea roja es el ajuste para el radio de la sección transversal horizontal, la azul para la vertical, y la negra el promedio de ambas. . . . .	40
2.6. Perfil del haz de bombeo utilizando un par de lentes cilíndricas y una lente de distancia focal de 100 cm a la distancia $z = 48.8$ cm. . . . .	40
2.7. Perfil Gaussiano del haz de bombeo corregido utilizando dos lentes cilíndricas y una lente plano convexa. La línea roja es el ajuste para el radio de la sección transversal horizontal, la línea azul para la vertical, y la línea negra el promedio entre ambas. . . . .	41
2.8. Sistema de referencia del laboratorio. . . . .	41
2.9. Nos guiamos haciendo uso de un láser de diodo con una longitud de onda de 1550 nm, con una potencia acoplada de 1.2 mW. . . . .	42
2.10. Medición del cono de SPDC utilizando una cámara IDus1.7. . . . .	44
2.11. Medición del perfil del cono de SPDC a una distancia de 9 cm después del cristal. . . . .	44
2.12. Medición del perfil del cono SPDC enfocado con una lente. . . . .	45
2.13. Esquema de medición en modo disparado. . . . .	45

- 
- 2.14. Esquema experimental para detectar fotones individuales: Incluye tres partes principales: el sistema de bombeo que consiste de la cavidad láser Ti-Za, un par de lentes cilíndricas CL para corregir el astigmatismo, una lente (L) para enfocar el haz sobre el cristal, y un divisor de haz poco reflejante BS que envía una señal óptica al fotodiodo rápido PD; el sistema de generación: que consiste de una placa de media onda  $\lambda/2$ , un cristal cúbico de BBO de 10 mm, un filtro pasa-altas para impedir que el haz de bombeo residual se filtre y un filtro pasa-bandas centrado en 1550 nm para garantizar la selección correcta de los fotones degenerados (HP&BP Filters). El sistema de detección formado por un par de detectores de fotones individuales APD<sub>1</sub> y textAPD<sub>2</sub> id-201 que son disparados por un prescaler, el etiquetador de tiempos digital TDC id800, y una computadora. . . . . 47
- 2.15. Señales electrónicas detectadas por un etiquetador de tiempos digital (TDC por las siglas: *Time-to-digital converter*). Debido a que la frecuencia de repetición del prescaler es de 3 MHz, las detecciones están separadas por 333 ns. Las ventanas de coincidencias mostradas son de 50 ns. . . . . 48
- 2.16. Histograma de coincidencias. . . . . 49
- 2.17. Histogramas de Coincidencias . . . . . 49

2.18. Esquema experimental para medir la JSI: El sistema de bombeo que consiste de la cavidad láser Ti-Za, un par de lentes cilíndricas CL para corregir el astigmatismo, una lente para enfocar el haz (L), y un divisor de haz poco reflejante BS que enviar una señal óptica al fotodiodo rápido PD; el sistema de generación: que consiste de una placa de media onda $\lambda/2$ , un cristal cúbico de BBO de 10 mm, un filtro pasa-altas para impedir que el haz de bombeo residual se filtre y un filtro pasa-bandas centrado en 1550 nm para garantizar la selección correcta de los fotones degenerados (HP&BP Filters). El sistema espectral esta formado por 2 carretes de 5 Km de fibra óptica SMF-28 en los cuales se acoplan los fotones. El sistema de detección formado por un par de detectores de fotones individuales APD <sub>1</sub> y APD <sub>2</sub> que son disparados por un prescaler, el etiquetador de tiempos digital TDC id800, y una computadora. . . . .	51
2.19. Medición de coincidencias despues de pasar por las fibras ópticas. . . . .	52
2.20. Medición de JSI después de utilizar la estadística de 4 pulsos consecutivos y de aplicar nuestra curva de calibración. . . . .	53
2.21. Calibración de la cintura del haz de acoplamiento $W_f$ . . . . .	53
2.22. Mediciones experimentales de la Intensidad Espectral Conjunta (JSI) para 5 distintos valores de cinturas de acoplamiento $W_f = \{225 \mu\text{m}, 524 \mu\text{m}, 691 \mu\text{m}, 770 \mu\text{m}, 1338 \mu\text{m}\}$ de izquierda a derecha. La parte superior muestra las mediciones experimentales y la parte inferior muestra las simulaciones numéricas. En todos los casos la cintura del bombeo fue de $W_0 = 600 \mu\text{m}$ . . . . .	55
2.23. Esquema experimental para medir el valor de $g^{(2)}$ de uno de los brazos del SPDC. Básicamente es el mismo esquema que (2.14) pero con un divisor de haz (BS) colocado en uno de los brazos y los detectores a las salidas de este BS. . . . .	56
2.24. Cuentas individuales $N_{12}$ y $N_{13}$ , y cuentas de coincidencias $N_{123}$ en una ventana de 20 ns. . . . .	58
2.25. Valor de $g^{(2)}(0)$ contra número de mediciones del ensemble, al tomar la estadística adecuada se llega a un valor estable. . . . .	59

2.26. Comparación entre $g^{(2)}(0)$ y $K$ . . . . .	61
2.27. (a) Arreglo experimental utilizando APD's id-230 de free-running. (b) Medición de la Intensidad Espectral Conjunta. (c) Medición de la Intensidad Espacial Conjunta . . . . .	62
2.28. Mediciones experimentales de la Intensidad Espacial Conjunta para los cinturones de bombeo $W_0 = \{600 \mu\text{m}, 192 \mu\text{m}, 161 \mu\text{m}, 130 \mu\text{m}\}$ de izquierda a derecha. Las simulaciones correspondientes se muestran en la parte de abajo. . . . .	63
2.29. Esquema del acomodo de los fotones sobre el anillo de SPDC visto en el plano de detección. Podemos imaginar al anillo completo con un conjunto de sub-anillos con distintas longitudes de onda. Los 3 pares de fotones corresponden a los 3 elementos de matriz 3, 5, 7 en la figura (2.30). Solo la pareja de fotones degenerados se encuentran sobre el mismo sub-anillo. . . . .	64
2.30. Correlación espectro-espacial vista como una matriz de JSI's. Los 9 puntos escaneados sobre la distribución espacial se muestran de lado izquierdo. Las distribuciones espectrales están acomodadas sobre una matriz de $3 \times 3$ del lado derecho. . . . .	66
2.31. Correlación espectro-espacial vista como una matriz de JSI's. $f(\omega_s, \omega_i, x_s, x_i)$ contiene toda la información necesaria para recuperar la JSI y la correlación espacial. . . . .	68
2.32. Caso límite de haz de bombeo muy enfocado. . . . .	69
2.33. Caso límite de haz de bombeo extendido. . . . .	70
2.34. Correlación X de la pareja de fotones. . . . .	71
3.1. Interferómetro de OCT. . . . .	77
3.2. Interferograma de OCT. . . . .	79
3.3. Interferómetro de QOCT. . . . .	81
3.4. Interferograma de QOCT. . . . .	83
3.5. Interferograma de una muestra de $500\mu\text{m}$ de camino óptico. . . . .	86

4.1. (a) Imagen cualitativa para la JSA $ f(\omega_1, \omega_2) ^2$ dado por la ecuación (4.8). (b) Imagen cualitativa de la función temporal conjunta $ \tilde{f}(t_1, t_2) ^2$ dada por la ecuación (4.9). . . . .	90
4.2. Diagrama esquemático que representa la escalas de tiempos usadas en el experimento. . . . .	93
4.3. Tamaño del modo espacial del haz de bombeo para 3 tipos de lentes. La línea roja corresponde al ajuste para el radio de la sección transversal horizontal, la azul para la vertical y la negra para el promedio entre la horizontal y vertical. (a) Lente de distancia focal de 125 mm. (b) $f = 150$ mm. (c) $f = 175$ mm. . . . .	96
4.4. Espectros de las 3 fuentes de bombeo utilizadas en el experimento. . .	97
4.5. Cristal de PPKTP. . . . .	99
4.6. Modo espacial de los fotones generados con PPKTP. . . . .	100
4.7. Espectros conjuntos de los fotones generados por medio de PPKTP. (a) JSIs para 3 temperaturas distintas. (b) Espectros marginales correspondientes. . . . .	101
4.8. Temperatura vs Coincidencias del cristal de PPKTP . . . . .	101
4.9. Curvas de sintonización a partir del modelo analítico de un cristal de PPLN. . . . .	102
4.10. Cristal de PPLN. . . . .	103
4.11. Distribución espacial de la pareja de fotones a 10 cm de la salida del cristal PPLN.(a) Separación espacial en el periodo 1 = 18.50 $\mu\text{m}$ . (b) Separación espacial en el periodo 2 = 18.80 $\mu\text{m}$ . (c) Separación espacial en el periodo 3 = 19.10 $\mu\text{m}$ . (d) Superficie de la apertura del cono a 10 cm del cristal, para distintas temperaturas correspondiente al periodo 1, (e) al periodo 2, (f) periodo 3. . . . .	104
4.12. JSI y espectro de desintonamiento para distintos filtros. . . . .	105
4.13. Arreglo experimental para medir interferogramas de HOM y de QOCT. 107	
4.14. Medición de la interferencia de HOM para 3 anchos de desintonamiento. (a) Filtro de 7.8 nm. (b) Filtro de 40 nm. (C) Sin filtro . . . .	108

4.15. (Color negro)Medición de dip de HOM en espejo de referencia. (Color rojo) Medición del dip de HOM una vez que se añadió la muestra de vidrio de 1 mm de espesor. . . . .	110
4.16. Medición de QOCT para una muestra de dos capas para distintos tipos de JSI:(a) Bombeo CW. (b)Bombeo pulsado de pico-segundos. (c) Bombeo pulsado de femto-segundos. . . . .	111
4.17. Medición de QOCT para una muestra de dos capas, para un bombeo CW a tres tipos de frecuencias destacando el comportamiento de pico/valle, correspondientes a $\lambda_p = 774.86$ nm (panel(a)), $\lambda_p = 774.94$ nm (panel(b)), $\lambda_p = 775.50$ nm (panel(c)). . . . .	113
4.18. Visibilidad de la estructura intermedia como función de la frecuencia del bombeo, para el bombeo CW. Hemos hecho un ajuste de la forma $a \cos(T\omega_0 + b) + c$ . . . . .	114
5.1. Esquema que muestra el efecto fundamental de un BS sobre dos fotones individuales, el fotón representado en color rojo ha sido retrasado previamente por un delay $\tau$ . Después de pasar por el BS y ser desviado adquiere una fase de $\pi$ respecto del otro fotón. . . . .	122
5.2. Esquema intuitivo que muestra el efecto fundamental de un BS sobre dos fotones individuales con resolución espectral. . . . .	123
5.3. Esquema que muestra la relación entre la separación de dos fotones en el dip de HOM y el espectro de desentonamiento interferido para los retrasos temporales $\delta = 0.13, 0.33$ y $0.80$ ps. . . . .	125
5.4. (a) Cálculo de un espectrograma de HOM. (b)Corte en $\tau_0 = -0.5$ ps. (c) Cortes en tres distintas frecuencias de desentonamiento $\Omega_0 = \{-5.7, -25.4, -45.0\}$ THz.rad. . . . .	128
5.5. (a) Cálculo de un espectrograma de HOM. (b) Traza sobres los tiempos de retraso $\tau$ 's. (c) Traza sobre las frecuencias de desentonamiento $\Omega$ 's. . . . .	129
5.6. (a) Cálculo de la transformada de Fourier de un espectrograma de HOM. (b) Corte vertical en $\tau_0 = -1$ ps. (c) Corte horizontal en $t = 0$ ps. . . . .	131

- 5.7. Arreglo experimental para medir la JSI unidimensional o el espectro de desentonamientos. Una vez producida la pareja de fotones, estos son colectados en dos carretes de fibra óptica de 5 km de longitud que nos permite separar temporalmente sus componentes espectrales, posteriormente las detecciones de los APDs son filtradas en coincidencias entre dos canales de un etiquetador de tiempos digital TDC. . . . . 133
- 5.8. (Izquierda) JSI unidimensional o espectro de desentonamientos y la JSI bidimensional correspondiente (a la derecha). Usando: (a) Un filtro de 7 nm. (b) Un filtro de 40 nm. (c) Sin usar ningún filtro, la distribución espectral casi cubre 120 nm. . . . . 134
- 5.9. Arreglo experimental para medir HOM con resolución espectral. El arreglo es exactamente igual al utilizado para medir HOM o QOCT convencionales, pero tiene dos carretes de fibra óptica justo antes de los detectores. . . . . 135
- 5.10. Distribución espectral (figura (5.8 b)) interferida para tres retrasos temporales distintos. (a)  $\tau_0 = 30 \mu\text{m}$ . (b)  $\tau_0 = 90 \mu\text{m}$ . (c)  $\tau_0 = 160 \mu\text{m}$ . (d)(e)(f) son los espectros de desentonamiento correspondientes. Se observa que el número de lóbulos cambia únicamente a lo largo anti-diagonal de la JSI, esto se debe a que la interferencia de HOM está gobernada principalmente por el espectro de desentonamiento  $2\Omega = \omega^-$ . . . . . 137
- 5.11. (a) Espectrograma de HOM,  $C(\Omega, \tau)$ , con pasos del motor de  $75 \mu\text{m}$  y una resolución temporal de 32 ps. (b) Es la traza sobre la variable temporal  $\tau$  del espectrograma (a). (c) Es la traza sobre la variable espectral  $\Omega$  del espectrograma (a). (d) Es la Transformada de Fourier sobre el eje de frecuencias  $\Omega$  del espectrograma (a). (e) Es un corte vertical de (d) en el retraso temporal  $\tau = -1$  ps. (f) Es un corte horizontal de (d) en el eje  $t = 0$  que es equivalente al interferograma normal de HOM,  $P_c(\tau)$ . . . . . 139

5.12. (a) Espectro de desentonamiento interferido $P_c(\Omega, \tau_0)$ para un retraso temporal fijo $\tau_0 = 1.018ps$ (corte vertical en la figura (5.11 a). (b) Transformada de Fourier del espectro de desentonamiento interferido (corte vertical en la figura (5.11 d). . . . .	142
5.13. Procedimiento para obtener las dos funciones complejas $A(\Omega)$ y $B(\Omega)$ . (a) Los tres picos de la figura (5.12). (b,d) Pico 1 y 2 filtrados. (c,e) Transformada de Fourier inversa de los picos 1 y 2 para obtener las funciones A y B. . . . .	143
5.14. Recuperación del interferograma de HOM convencional usando la técnica de HOM en el dominio espectral (línea roja). Interferograma de HOM convencional (puntos negros). . . . .	144
5.15. Esquema sencillo de un interferómetro de QOCT espectral. A la derecha se muestra el espectrograma de una muestra bi-capa. . . . .	148
5.16. Figura QOCT Espectral. (a) Espectrograma $P_c(\Omega, \tau)$ de QOCT para muestra de $170 \mu m$ con resolución temporal de 32 ps. (b) Simulación teórica de (a). (c) Transformada de Fourier de (a), $C(t, \tau)$ . (d) Simulación teórica de (c). . . . .	150
5.17. (Arriba) Espectro de desentonamiento interferido $P_c(\Omega, \tau_0)$ para un retraso temporal fijo $\tau_0 = 0.363 ps$ (corte vertical de (5.11 a)). (Abajo) Transformada de Fourier del espectro de desentonamiento interferido (corte vertical de (5.11 c)). . . . .	151
5.18. Procemiento para obtener las funciones complejas A, B, C, D y E. (a) Muestra la transformada de Fourier $C(t, \tau)$ . (b) Muestra cada pico separado. (c) Muestra la transformada de Fourier inversa de los picos en (b). . . . .	152
5.19. Recuperación del interferograma de QOCT usando nuestra técnica(línea roja). Interferograma de QOCT convencional (puntos negros). . . . .	153



5.20. (a) y (b) Son simulaciones del espectrograma temporal $\tilde{P}_c(t, \tau)$ para una muestra de 3-capas (la capa intermedia se encuentra al 40 %, en comparación con las dos interfaces extremas); en (a) se muestra el caso de una fuente de SPDC utilizando un haz de bombeo centrado en 775 nm con un ancho de banda de $\Delta\lambda \approx 0.1$ nm, mientras que en (b) se incrementó el ancho de banda a 10 nm. (c) y (d) Evaluación de $\tilde{P}_c(t, \tau_0)$ en $\tau_0 = -1.7$ ps; mientras (c) corresponde a utilizar el ancho de banda estrecho (0.1 nm), (d) muestra el efecto de incrementar el ancho de banda (10 nm). (e) y (f) Interferogramas de HOM convencionales correspondientes a los casos (a) y (b). . . . .	158
C.1. Esquema de un cubo divisor de haz en el cual inciden un par de fotones, f1 y f2, los números indican el número de puerto. El puerto 1 y puerto 2 son entradas, mientras que el puerto 3 y 4 son salidas. . .	186
C.2. (a) . . . . .	187
C.3. Esquema básico del interferómetro de HOM. M1 es un espejo motorizado, M2 es un espejo fijo, D1, D2 son dos detectores de fotones. . . .	190
C.4. Esquema de coordenadas. (a) Sistema de coordenadas $\omega_s, \omega_i$ . (b) Sistema rotado $45^\circ$ , $\omega^+ = \omega_s + \omega_i, \omega^- = \omega_s - \omega_i$ . . . . .	196
C.5. Gráfica de la interferencia de HOM. . . . .	199
C.6. Graficas de la dependencia del ancho anti-diagonal $\sigma_a$ con el ancho $\sigma_\tau$ del dip de HOM. El ancho de bombeo es mantenido constante $\sigma_d = \sigma_p = 1nm$ . (a1) La JSA con $\sigma_a = 10nm$ . (a2) El correspondiente dip de HOM. (b1) La JSA con $\sigma_a = 35nm$ . (b2) El correspondiente dip de HOM. . . . .	201
C.7. Graficas de la dependencia del ancho diagonal $\sigma_a$ con el ancho $\sigma_\tau$ del dip de HOM. El ancho antidiagonal es mantenido constante $\sigma_a = 10nm$ . (a1) La JSA usando un ancho de bombeo $\sigma_d = 15nm$ . (a2) El correspondiente dip de HOM. (b1) La JSA con un ancho de bombeo $\sigma_a = 45nm$ . (b2) El correspondiente dip de HOM. . . . .	202
D.1. Cuentas individuales de dos APDs id201. . . . .	206
D.2. Cuentas en coincidencia de dos APDs id201. . . . .	207

---

D.3. Cuentas individuales de dos APDs id230. . . . .	208
D.4. Cuentas en coincidencia de dos APDs id230. . . . .	209

# Índice de tablas

1.1. Valores de la función de correlación para distintos tipos de luz . . . . .	33
2.1. Parámetros del arreglo experimental . . . . .	42
2.2. Número de Schmidt $K$ como función de la cintura de acoplamiento $W_f$ .	60
2.3. Pump waist $W_0$ as a function of the focal length . . . . .	62
4.1. Table caption text . . . . .	93
4.2. Table caption text . . . . .	116



---

# Introducción

La generación de fotones individuales representa un paso crucial para el desarrollo de nuevas tecnologías y es la base de varios experimentos interesantes que ponen a prueba los fundamentos de la mecánica cuántica. En este trabajo nos dedicamos a estudiar el proceso de conversión paramétrica descendente en el régimen espontáneo (SPDC por sus siglas en inglés: *Spontaneous parametric down-conversion*). Este proceso consiste en la incidencia de un modo óptico (llamado haz de bombeo) sobre un medio óptico no lineal, con una susceptibilidad eléctrica de segundo orden apreciable. En este medio ocurre una interacción dipolar, que está correctamente descrita por la mecánica cuántica, en la que un fotón del haz de bombeo es aniquilado para producir una pareja de fotones de forma espontánea; históricamente, estos fotones son llamados señal y acompañante (por su traducción en inglés: *signal e idler*). Debido a que el proceso se produce de forma espontánea, es muy poco eficiente, ya que de  $10^{12}$  fotones del haz de bombeo, sólo 1 decae en una pareja de fotones. El proceso es paramétrico ya que cumple con las condiciones de conservación de energía y momento. En el capítulo 1 se explica más detalladamente.

La primera demostración del proceso de SPDC fue llevada a cabo por Magde y Mahr [2] y más a fondo por Byer y Harris [3]. Después, Burnham y Weinberg [4] realizaron un experimento donde fue encontrado que los fotones señal y acompañante son producidos de forma simultánea dentro de los 4 ns de resolución de su proceso de detección. Este límite fue bajado posteriormente a 100 ps por Fridbert y colaboradores [5] con un sistema de detección optimizado. En experimentos posteriores, Abram y colaboradores [6] midieron la coherencia temporal de segundo orden encontrando valores de tiempos de coherencia menores a 0.2 ps. En la primera medición formal de la interferencia de una pareja de fotones en un divisor de haz, llamada interferencia de

Hong-Ou-Mandel (ó simplemente de HOM por sus iniciales), Hong y colaboradores [7] midieron los tiempos de coherencia del par de fotones con una gran precisión, obteniendo un valor de 100 fs y estimaron la posibilidad de que el paquete de ondas de un fotón del par podría ser menor que 1 fs.

Es claro que los primeros intentos por Burnham y Weinberg [4] y posteriormente por Fridberg y colaboradores [5] de medir directamente las correlaciones temporales de la pareja de fotones fallaran debido a que los tiempos de respuesta de los detectores eran muy grandes, incluso actualmente, el tiempo de respuesta de un detector anda en el orden de 100 ps. Por lo tanto, los primeros intentos de medición de la extensión temporal del paquete de ondas de un fotón sólo dieron los promedios temporales de la función de correlación temporal  $G^{(2)}(\tau)$  evaluada dentro del tiempo de respuesta de los detectores, que para casos prácticos daba meramente la función de respuesta de la electrónica de medición.

Las correlaciones temporales fueron estudiadas y utilizadas en una serie de trabajos pioneros del profesor Mandel y su grupo, dando lugar al término de fotones gemelos (de su traducción en inglés: *twin photons*), ya que la correlación temporal indica que la pareja de fotones ha nacido simultáneamente. Estas correlaciones son de importancia fundamental en todos los experimentos que involucran fuentes de fotones anunciados, que pueden presentar correlaciones en otros grados de libertad, como en la frecuencia y en el momento transversal.

Una de las ventajas de usar una fuente de parejas de fotones es que presenta la propiedad de anunciamiento, ya que el fotón señal y el fotón acompañante son generados al mismo tiempo, la detección del fotón acompañante “anuncia” la existencia del fotón señal, por lo que tal fuente es llamada *fuentes de parejas de fotones anunciados*. Otra ventaja de utilizar SPDC es su amplia gama de posibilidades, ya que este proceso ha sido utilizado en toda clase de experimentos; que van desde la comprobación de la violación de las desigualdades de Bell [8], [9], teleportación cuántica [10], criptografía cuántica usando estados enredados en polarización [11]. Hasta los experimentos de metrología y posicionamiento cuánticos [12], que utilizan los grados de libertad continuos del estado SPDC.

## Ingeniería de estados cuánticos

La manipulación del estado cuántico del proceso de SPDC se ha vuelto muy importante a la hora de optimizar muchas de las mediciones experimentales actuales. Los fotones hermanos normalmente nacen correlacionados entre sí, y pueden presentar enredamiento entre sus variables discretas (por ejemplo: en la polarización) ó entre sus variables continuas, por ejemplo: en la frecuencia y el momento transversal; presentan distintas características, como son: su distribución espacial, su duración temporal, su espectro angular y su espectro de frecuencias, etc; y sus propiedades dependen de muchos parámetros experimentales, como son: el tipo de láser de bombeo: su modo espacial, su longitud de onda central, su ancho de banda; del tipo de medio no lineal generador: su longitud, su temperatura, su ángulo de corte; y de una serie de filtros espaciales y espectrales que sean utilizados. Es por ello que entender el cómo se controlan experimentalmente las variables fotónicas, cuáles son sus alcances y sus limitaciones, puede ayudar a proponer mejores arreglos experimentales; incluso, puede inspirar nuevos experimentos que pongan a prueba los límites de la mecánica cuántica. Por otro lado, tener el conocimiento de las distintas posibilidades para la generación y manipulación de estados cuánticos, se vuelven un factor determinante en el ámbito de las aplicaciones tecnológicas.

## Control de Correlaciones

El control de la correlación espectro-espacial es muy importante a la hora del diseño y construcción de un experimento en el cual las propiedades de coherencia temporal y espacial estén involucradas. A continuación menciono brevemente algunos experimentos relevantes sobre este tema: En el 2007, Hendrych y colaboradores [13] demostraron experimentalmente el control de correlación espectral mediante el diseño adecuado de velocidades de grupo de todas las ondas interactuantes a través del uso de haces con dispersión angular, esto es, pulsos con *pulse-front tilt*. En 2011, Thomas Gerritz y colaboradores [14] caracterizan un cristal de PPKTP que produce fotones casi idénticos, factorizables en frecuencia, utilizando como parámetro de control el cinturón de bombeo del láser. En este mismo año, Eckstein y colaboradores [15] reportan una fuente brillante de SPDC ultra-rápida de tipo II utilizando el

ancho de banda de su láser pulsado como parámetro de control.

En 2014, Thomas Lutz y colaboradores [16] muestran una fuente basada en SPDC con el control de correlación espectral de fotones entrelazados en polarización; controlan la correlación cambiando la duración temporal del pulso del haz de bombeo pulsado de femto-segundos y consiguen obtener correlación negativa perfecta usando un láser de onda continua (CW por sus siglas en inglés: *Continuous Wave*).

En 2008, Osorio y colaboradores [17] hacen un análisis detallado de las correlaciones espectro-espaciales y definen condiciones para separar la parte espacial de la parte espectral del estado SPDC.

En 2018, N. Montaut y colaboradores [18] realizan una caracterización completa de los grados de libertad espacial y espectral utilizando mediciones proyectivas aleatorias en la base espacial que no perturba la parte espectral.

## Bosquejo de la tesis

Esta tesis se divide en dos partes principales: la primera parte se enfoca en las correlaciones espectro-espaciales de la pareja de fotones; la segunda parte se dedica a estudiar los efectos de interferencia de la pareja de fotones en la tomografía de coherencia óptica cuántica (QOCT, por sus siglas en inglés: *Quantum Optical Coherence Tomography*).

### Parte I

En el capítulo 1 se presentan los conceptos básicos y herramientas para poder entender a profundidad el proceso de SPDC de tipo I, se da una introducción de algunos procesos ópticos no lineales, la forma del estado bi-partita del SPDC  $|\Psi\rangle_{PDC}$  (la deducción de éste se deja para el apéndice A), se presenta la amplitud espectral conjunta (JSA por sus siglas en inglés: *Joint Spectral Amplitude*), la descomposición en la base de Schmidt para medir el grado de correlación entre dos subsistemas  $|X_1, X_2\rangle$  y el parámetro de cooperatividad, también llamado, número de Schmidt (K). Se explica de manera breve la teoría de acoplamiento a fibra óptica como forma de suprimir los grados de libertad espaciales, y de alguna forma, de filtrar frecuencias a través del parámetro del cinturón de acoplamiento a fibra  $W_f$  (por su asignación en inglés: *Waist coupling to fiber*).



En el capítulo 2, se presenta la metodología experimental; desde la caracterización del láser de bombeo, a través de una cámara y un espectrómetro, hasta la descripción de 4 experimentos: (1) Experimento para medir correlaciones espectrales presentes en la intensidad espectral conjunta (JSI por sus siglas en inglés: *Joint Spectral Intensity*). (2) Un programa en MATLAB para medir el grado de entrelazamiento entre las variables de frecuencia de cada fotón ( $\omega_s, \omega_i$ ) a través del número de cooperatividad o número de Schmidt ( $K$ ). Y un experimento para medir el valor de  $G^{(2)}(\tau = 0)$  promediado en el tiempo de respuesta de los detectores APDs (APD por sus siglas en inglés: *Avalanche Photodiode*). (3) Un arreglo experimental para medir la correlación espacial, utilizando un par de rendijas delgadas que seccionan regiones transversales del cono de SPDC. (4) Un arreglo experimental para medir conjuntamente la correlación espectral y espacial simultáneamente, combinando el experimento 1 y 3. Esta medición permite obtener la información de la función JSA de manera discretizada, y a partir de ella obtener la información de las correlaciones internas (entre variables de un mismo fotón) y las correlaciones externas (entre variables de distintos fotones). En el experimento 1, se presenta una técnica para controlar el grado de correlación espectral, logrando pasar de un estado con correlación negativa, a obtener un estado factorizable en frecuencia, hasta un estado con correlación positiva, manipulando el tamaño de cinturón del bombeo  $W_f$ . En el experimento 3 se logra modificar la correlación espacial a través del tamaño del cinturón del haz de bombeo  $W_0$ .

## Parte II

En la segunda parte de este trabajo nos enfocamos en los efectos de interferencia cuántica del bi-fotón, que están directamente relacionados con las características espectrales del haz de bombeo y de la fuente SPDC, como son: el ancho de banda del haz de bombeo y el ancho espectral de desentonamiento de los fotones generados: esta información está contenida en la JSI y ésta a su vez está relacionada con la correlación espectral presente en la pareja de fotones.

En el apéndice C se introduce el concepto de interferencia cuántica del bifotón a través del interferómetro de Hong-Ou-Mandel (interferómetro de HOM de ahora en adelante). Que consiste en la interferencia destructiva en un divisor de haz simétrico (BS por sus siglas en inglés: *Beam Splitter*). Se relaciona el ancho de banda del bifotón con el tiempo de coherencia  $t_c$  obtenido del profundo (dip por su traducción

al inglés) del HOM,  $t_c \propto 1/\Delta\omega_{PDC}$ .

En el capítulo 3 se introduce la técnica de tomografía de coherencia óptica (OCT por sus siglas en inglés: *Optical Coherence Tomography*) que consiste en medir el espesor de muestras delgadas semi-transparentes a través de las reflexiones que tiene un haz de baja coherencia temporal, con una muestra multi-capas, estas reflexiones interfieren en un interferómetro tipo Michelson, produciendo un interferograma  $P_c(\tau)$ ; así como su versión cuántica de QOCT, donde en lugar de usar una fuente de luz clásica para interferir, utilizamos un par de fotones individuales, donde uno de los fotones es mandado hacia una muestra multi-capas y el otro fotón es enviado a un camino de retraso temporal  $\tau$  de un interferómetro de HOM, del interferograma  $P_c(\tau)$  obtenemos la separación de las capas al asignar un dip de HOM por capa de la muestra.

En el capítulo 4, se presenta una aplicación del control de correlaciones espectrales en la mejora de la técnica de QOCT convencional, utilizando una función Gaussiana para modelar la JSA, se utiliza la teoría básica de QOCT presentada en el capítulo 4, para describir los efectos completos de los interferogramas, y se obtienen condiciones experimentales para suprimir interferencias indeseables en muestras de dos o más capas. Además, se hace notar que el material presentado en este capítulo ha sido publicado en [1].

En el capítulo 5, se utiliza toda la experiencia obtenida para proponer una nueva técnica para realizar tomografía de QOCT espectral. Aprovechando las propiedades espectrales del bi-fotón fue posible realizar la medición de un interferograma espectro-temporal de dos dimensiones que surge de resolver cada longitud de onda del interferograma convencional  $P_c(\Omega, \tau)$ . Este análisis involucra trabajar sobre el espacio de Fourier y por lo tanto es llamada QOCT en el dominio espectral. Demostremos las enormes ventajas de esta técnica al lograr recuperar los interferogramas de HOM y de QOCT, eliminando la necesidad de realizar barridos motorizados, logrando con esto, un ahorro sustancial del tiempo de medición.

---

# Parte I

## Control de Correlación Espectro-Espacial



---

# 1

## Conversión Paramétrica Descendente

### I. Óptica No-Lineal

La óptica no-lineal es el estudio de los fenómenos que ocurren como consecuencia de la modificación de las propiedades ópticas de un sistema material por presencia de luz. Típicamente, solo la luz láser es suficientemente intensa para modificar las propiedades ópticas de un material. De hecho, los comienzos del campo de la óptica no lineal se consideran desde el descubrimiento del fenómeno de generación del segundo armónico por Franken y colaboradores, en 1961, un poco después de la demostración práctica del primer láser por Maiman en 1960.

#### ■ Óptica Lineal

En el caso de la óptica lineal, la polarización de un medio óptico,  $P(t)$ , depende linealmente de la amplitud del campo eléctrico,  $E(t)$ , de manera que:

$$P(t) = \chi^{(1)}E(t), \quad (1.1)$$

donde la constante de proporcionalidad es llamada susceptibilidad.

#### ■ Óptica No-Lineal

En el caso de la óptica no lineal, la respuesta óptica no lineal se puede describir generalizando la ecuación (1.1), al expresar  $P(t)$  como una serie de potencias de la amplitud de campo eléctrico  $E(t)$  como:

$$\begin{aligned}
P(t) &= \epsilon_0 (\chi^{(1)} E(t) + \chi^{(2)} E(t)^2 + \chi^{(3)} E(t)^3 + \dots) \\
&= P^{(1)} + P^{(2)} + P^{(3)} + \dots
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Esto es en particular para un material homogéneo e isotrópico. En general  $P(t)$  es un vector,  $\chi^{(1)}$  es un tensor de segundo orden, y  $\chi^{(2)}$  es un tensor de tercer orden y así sucesivamente, la expansión quedaría de la forma:

$$P_i = P_i^0 + \epsilon_0 \chi_{ij}^{(1)} E_j^{(0)} + \epsilon_0 \chi_{ijk}^{(2)} E_j^{(1)} E_k^{(2)} + \epsilon_0 \chi_{ijkl}^{(3)} E_j^{(1)} E_k^{(2)} E_l^{(3)} + \dots, \tag{1.3}$$

donde  $\vec{P}^0$  es la polarización espontánea del medio y  $\vec{E}^{(0)}$  es el campo eléctrico original que entra al medio, y  $\vec{E}^{(1)}$ ,  $\vec{E}^{(2)}$ ,  $\vec{E}^{(3)}$  son campos vectoriales secundarios producidos dentro del medio.

### I.1. Descripción de algunos Procesos No Lineales

En esta sección presentaré una breve descripción de algunos procesos ópticos no lineales que son producidos por el efecto de campos ópticos sobre ciertos medios, a los que llamaremos medios no lineales, que debido a su configuración estructural permiten que sus susceptibilidades de segundo o tercer orden tengan un efecto considerable.

#### Generación de Segundo Armónico

Consideremos el proceso de Generación de Segundo Armónico (SHG por sus siglas en inglés), el cuál está ilustrado en la figura (1.1). El proceso consiste en un campo

$$E(t) = Ae^{-i\omega t} + c.c. \tag{1.4}$$

incidiendo sobre un cristal con una susceptibilidad eléctrica  $\chi^{(2)}$  distinta de cero. Introduciendo el campo Ec. (1.4) en la relación de polarización de segundo orden

$$P^{(2)}(t) = \epsilon_0 \chi^{(2)} E^2(t) \tag{1.5}$$

por simplicidad se considera como un campo escalar, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 P^{(2)}(t) &= \epsilon_0 \chi^{(2)} E^2(t) \\
 &= \epsilon_0 \chi^{(2)} E^*(t) E(t) \\
 &= \epsilon_0 \chi^{(2)} (A^* e^{i\omega t} + c.c.) (A e^{-i\omega t} + c.c.) \\
 &= \epsilon_0 \chi^{(2)} (|A|^2 + A^2 e^{-i2\omega t} + c.c.). \tag{1.6}
 \end{aligned}$$

Vemos que la polarización de segundo orden, consta de un término que es independiente de la frecuencia y un segundo término que depende de la frecuencia  $A^2 e^{-i2\omega t}$ , éste término es el que contribuye a la generación de un campo eléctrico pero con frecuencia ( $2\omega$ ). El primer término al no depender de la frecuencia tan solo generará un campo eléctrico estático, llamado rectificación óptica.

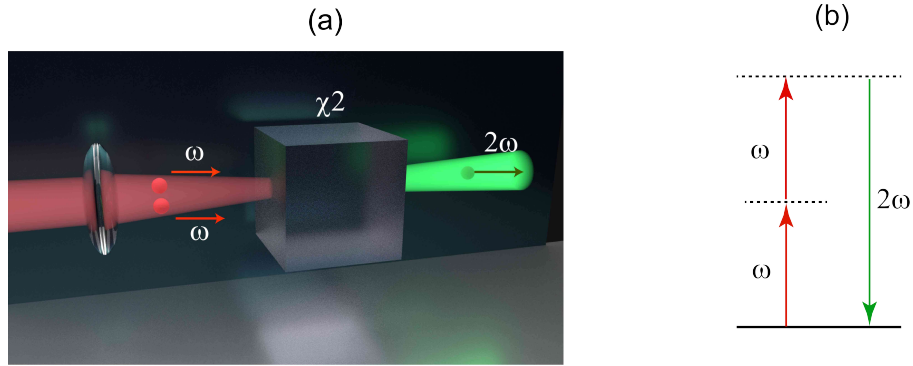


Figura 1.1: Generación de Segundo Armónico. (a) Geometría de la interacción. (b) Niveles de energía.

### Suma y Diferencia de Frecuencias

Ahora vamos a considerar un campo óptico que contiene dos frecuencias que inciden sobre un medio no lineal de segundo orden  $E(t)$

$$E(t) = A_1 e^{-i\omega_1 t} + A_2 e^{-i\omega_2 t} + c.c. \tag{1.7}$$

Sustituyendo la ecuación 1.7 en la expresión de la polarización de segundo orden (ecuación (1.5)) tenemos

$$\begin{aligned}
P^{(2)}(t) &= \epsilon_0 \chi^{(2)} E^2(t) \\
&= \epsilon_0 \chi^{(2)} (A_1^2 e^{-i2\omega_1 t} + A_2^2 e^{-i2\omega_2 t} + 2A_1 A_2 e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} + 2A_1 A_2^* e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} + c.c.) \\
&\quad + 2\epsilon_0 \chi^{(2)} (A_1 A_1^* + A_2 A_2^*). \tag{1.8}
\end{aligned}$$

Ordenando cada término, podemos escribir esta expresión como funciones de las frecuencias:

$$P^{(2)}(t) = P_{SHG}(2\omega_1) + P_{SHG}(2\omega_2) + P_{SFG}(\omega_1 + \omega_2) + P_{DFG}(\omega_1 - \omega_2) + P_{REC}(0) + c.c. \tag{1.9}$$

donde asociamos directamente los campos específicos que se generan:

- $P_{SHG}(2\omega_1) = \epsilon_0 \chi^{(2)} A_1^2 e^{-i2\omega_1 t}$  y  $P_{SHG}(2\omega_2) = \epsilon_0 \chi^{(2)} A_2^2 e^{-i2\omega_2 t}$  corresponden a la generación de segundo armónico para las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  respectivamente (ver la figura (1.1)).
- $P_{SFG}(\omega_1 + \omega_2) = \epsilon_0 \chi^{(2)} 2A_1 A_2 e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t}$  corresponde a la generación de suma de frecuencias (SFG por sus siglas en ingles, ver la figura (1.2)).
- $P_{DFG}(\omega_1 - \omega_2) = \epsilon_0 \chi^{(2)} 2A_1 A_2^* e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t}$  corresponde a la generación de diferencia de frecuencias (DFG por sus siglas en ingles, ver la figura (1.3)).

El último término  $P_{REC}(0)$  es independiente de la frecuencia y dará lugar a un campo eléctrico estático llamado rectificación óptica.

Todos estos procesos también son llamados procesos paramétricos ya que conservan la energía. Es importante hacer notar que en la práctica estos 3 campos no se producen con la misma intensidad, sino que se producirá aquel en el cual se cumplan las condiciones de empatamiento de fases, operacionalmente uno elige que frecuencia será radiada escogiendo apropiadamente la polarización del campo de entrada y la orientación del cristal no lineal. El conocimiento de estos procesos es de alta importancia, ya que nos permitirá tener acceso a diferentes frecuencias, que tal vez



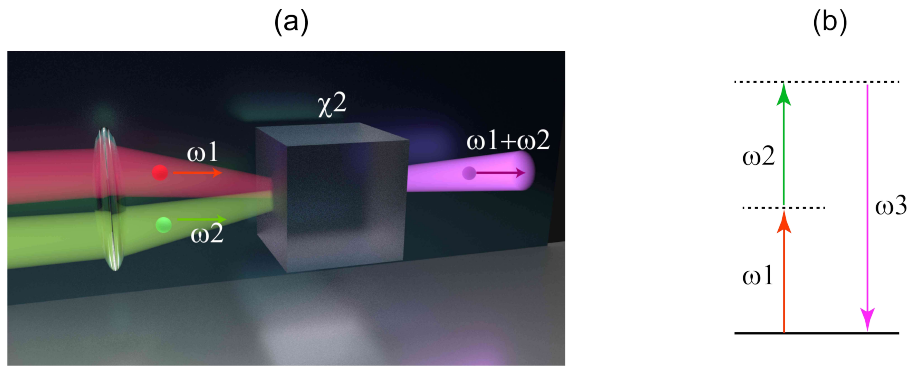


Figura 1.2: Generación de suma de frecuencias. (a) Geometría de la interacción. (b) Niveles de energía.

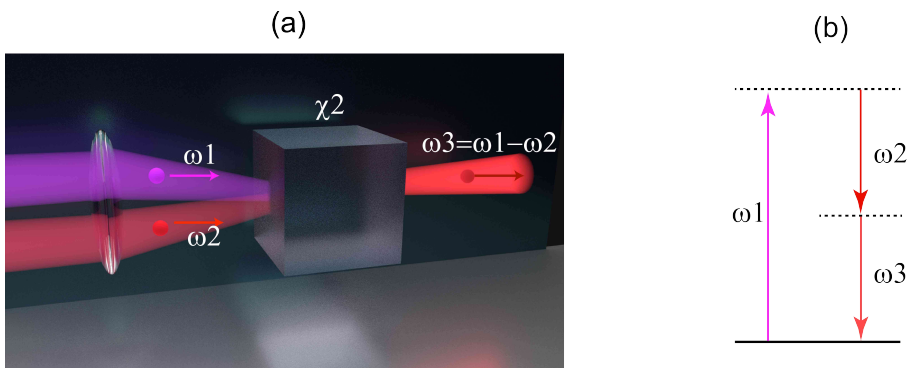


Figura 1.3: Generación de diferencia de frecuencias. (a) Geometría de la interacción. (b) Niveles de energía.

no se podrían alcanzar simplemente con los láseres convencionales. Una aplicación, por ejemplo de la generación de suma de frecuencias, son los láseres sintonizables en el régimen ultravioleta (UV), para lo cuál utilizamos un láser en el visible de frecuencia  $\omega_1$  fija, y otro láser sintonizable en el visible con una frecuencia variable  $\omega_2$ , utilizando el proceso de segundo orden mediante un cristal con el empatamiento de fases adecuado para SFG obtenemos  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  (ver la figura (1.2)), que se localiza en la región UV. La misma lógica se utiliza para generar un láser sintonizable en el régimen infrarrojo (IR) utilizando el proceso de diferencia de frecuencias (ver la figura (1.3)).

### Amplificación Óptica Paramétrica

Una diferencia importante con la suma y diferencia de frecuencias se deduce del diagrama de energías para el proceso de diferencia de frecuencias (figura (1.3)). Se observa que la conservación de energía requiere que por cada fotón creado  $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ , un fotón de frecuencia alta  $\omega_1$  debe ser destruido y un fotón de frecuencia  $\omega_2$  debe de ser creado. Entonces, el campo de entrada de baja frecuencia es amplificado por el proceso de generación de diferencia de frecuencias. Por esta razón, el proceso de diferencia de frecuencias también es conocido como *Amplificación Óptica Paramétrica*. De acuerdo al diagrama de energía de la generación de diferencia de frecuencias, el átomo primero absorbe un fotón de frecuencia  $\omega_1$  y brinca a un nivel virtual superior. Éste nivel decae por la emisión de dos fotones que es estimulado por la presencia del campo  $\omega_2$ , que está presente desde el inicio. La emisión de dos fotones también podría ocurrir incluso sin la presencia del campo  $\omega_2$ . La generación de campos en tal caso es demasiado débil, ya que estos serán creados por la emisión espontanea de dos fotones desde el nivel virtual. Este proceso es conocido como *fluorescencia paramétrica* o *conversión paramétrica descendente espontaneo (SPDC por sus siglas en ingles)* (ver la figura (1.4)).

### 1.2. Proceso de Conversión Paramétrica Descendente

El proceso de conversión paramétrica descendente espontaneo puede verse o entenderse como que un fotón del láser de bombeo  $\omega_p$  se dividiera en los fotones, señal  $\omega_s$  y acompañante  $\omega_i$ , después de que este hubiera interactuado con el medio no

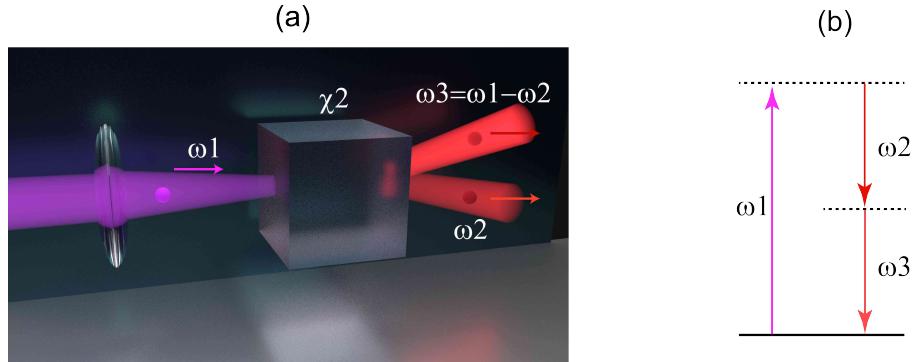


Figura 1.4: Generación de parejas de fotones mediante SPDC o fluorescencia paramétrica. (a) Geometría de la interacción. (b) Niveles de energía.

lineal de segundo orden  $\chi^2$ . En este proceso la energía es conservada, por eso el nombre de paramétrico, esta conservación se expresa así

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i, \quad (1.10)$$

donde las designaciones de las letras p, s e i, vienen del inglés pump (bombeo), signal (señal) y idler (acompañante), respectivamente, por razones históricas y por la jerga común del campo, a partir de ahora las utilizaremos para referirnos a la pareja de fotones.

Y ya que también el momento es conservado

$$\vec{k}_p = \vec{k}_s + \vec{k}_i, \quad (1.11)$$

los haces convertidos no viajan en la misma dirección necesariamente, sino que siguen su camino a cierto ángulo con respecto al eje de propagación del bombeo, este ángulo queda determinado por las condiciones de empatamiento de fases satisfechas en el cristal y que no son más que las expresiones de conservación de energía y momento de las ecuaciones (1.10) y (1.11).

### I.3. Cristales Birrefringentes: Uniaxiales y Biaxiales

Sabemos que el índice de refracción de los materiales está en función de la frecuencia de la luz que incide sobre éstos. La *birrefringencia* es la propiedad óptica que

tiene un cristal con un índice de refracción que depende de la *polarización* de la luz.

## Cristales Uniaxiales

Un cristal uniaxial es aquel que presenta una sola dirección ó eje principal que gobierna la anisotropía óptica, donde todas las direcciones perpendiculares a éste, son ópticamente equivalentes, por lo que girar el cristal sobre este eje, no cambia el comportamiento óptico. Esta dirección especial es conocida como *eje óptico* del cristal birrefringente uniaxial. La luz que se propaga paralela al eje óptico (cuya

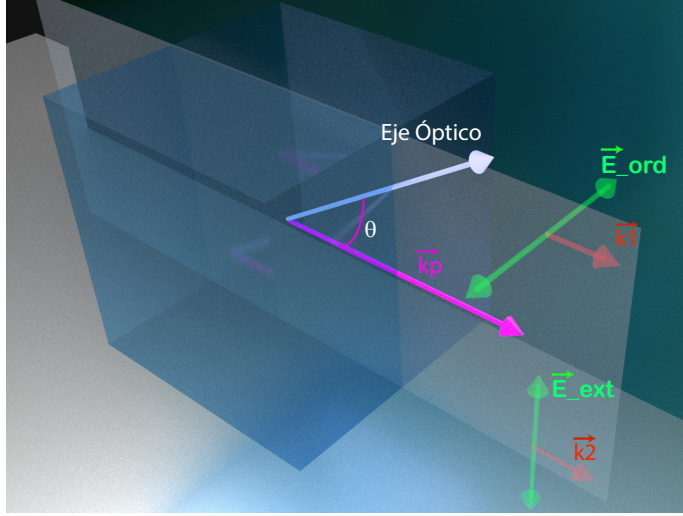


Figura 1.5: Esquema de un cristal Birrefringente Uniaxial. polarización sea siempre perpendicular al eje óptico) será gobernada por el índice de refracción *ordinario*  $n_o$ . Para los rayos de luz que se propaguen en cualquier otra dirección, habrá un haz cuya polarización lineal se encuentre dentro del denominado *plano principal* (formado por el vector de bombeo  $\vec{k}_p$  y el vector de eje óptico) , a este haz se les denomina *haz extraordinario*, mientras que al haz cuya polarización sea normal a este plano, se le denomina *haz ordinario* (ver figura (1.5)). El índice de refracción del haz ordinario  $n_o$ , no depende de la dirección de propagación de la luz, sin embargo, para el haz extraordinario, el índice de refracción depende de la dirección del rayo de luz [19].

La diferencia entre los índices de refracción ordinario y extraordinario se denomina grado de *birefringencia*  $\Delta n$ . El valor de  $\Delta n$  es igual a cero a lo largo del eje óptico, mientras que alcanza su valor máximo en dirección normal a este eje. El índice de refracción extraordinario es en general una función del ángulo del haz con respecto al eje óptico del cristal:

$$n_e(\theta) = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 \sin^2(\theta) + n_e^2 \cos^2(\theta)}}. \quad (1.12)$$

El índice de refracción de un haz extraordinario  $n_e(\theta)$  varía entre  $n_o$  para  $\theta = 0^\circ$  y  $n_e$  para  $\theta = 90^\circ$ .

## Cristales Biaxiales

En un cristal biaxial la relación de los índices de refracción con la polarización del haz incidente es un poco más compleja que para el caso uniaxial. Están caracterizados por 3 índices de refracción que corresponden a los 3 ejes principales del cristal  $n_\alpha, n_\beta, n_\gamma$ . En este caso el cristal no tendrá ejes al rededor de los cuales una rotación deje invariante las propiedades, sin embargo existen 2 ejes o binormales que están definidos como las direcciones en las cuales la *birrefringencia* se vuelve cero  $\Delta n = 0$ . Por esta razón, los materiales birrefringentes con tres índices de refracción distintos son llamados *biaxiales*.

### I.4. Condiciones de Empatamiento de Fases

La llamada condición de empatamiento de fases no es mas que la ecuación (1.11) pero dentro de un cristal no lineal. En el apéndice A se deriva la expresión analítica exacta del estado cuántico SPDC, y ahí se muestra la forma específica de esta función, por ahora despejando de la expresión de conservación de momento, y considerando que los fotones señal y acompañante se encontraran dentro del medio no lineal, tenemos:

$$\Delta \vec{k} = \vec{k}_p(\omega_p) - \vec{k}_s(\omega_s) - \vec{k}_i(\omega_i). \quad (1.13)$$

La conservación de energía y momento son muy estrictas, especialmente en cristales birrefringentes. Esto significa que solo ciertas polarizaciones son permitidas. En la practica, dependiendo del tipo de polarización de los fotones señal y acompañante, tendremos dos tipos de conversión descendente: el proceso de tipo I produce a los 2 fotones en la misma polarización, mientras que el denominado de tipo II, los produce en polarizaciones mutuamente ortogonales.

## Empatamiento de Fases de Tipo I

En el caso de SPDC de tipo I, el haz de bombeo  $\vec{k}_p$  con polarización extraordinaria, incide sobre un cristal no lineal, y produce una pareja de fotones en direcciones diametralmente opuestas, con vectores de onda  $\vec{k}_s$  y  $\vec{k}_i$  y ambos con un vector de polarización ordinario (esto es normal al plano principal del cristal). Debido a que en este caso utilizamos un cristal uniaxial birrefringente, tendremos simetría con respecto al eje óptico, y debido a esto también tendremos simetría azimutal con respecto al eje de bombeo, por lo que los fotones cubrirán la superficie de un cono con centro en el eje del bombeo. Ver figura (1.6). De la conservación de momentos, tenemos que:

$$\Delta\vec{k} = \vec{k}_p^e(\omega_p) - \vec{k}_s^o(\omega_s) - \vec{k}_i^o(\omega_i), \quad (1.14)$$

donde los superíndices denotan polarización ordinaria o extraordinaria. Utilizando coordenadas cilíndricas podemos separar los vectores de momento en dos ejes:

$$\begin{aligned} k_p^e(\omega_p) &= k_s^o(\omega_s) \cos \theta_s + k_i^o(\omega_i) \cos \theta_i, \\ k_s^o(\omega_s) \sin \theta_s &= k_i^o(\omega_i) \sin \theta_i. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Aquí  $\theta_s$  y  $\theta_i$  son los ángulos de emisión de los fotones señal y acompañante, respectivamente. Las magnitudes de los vectores de onda  $k_\mu$ , están relacionadas con los índices de refracción y con las frecuencias de los fotones  $\mu = \{p, s, i\}$ :

$$\begin{aligned} k_p &= n_e(\omega_p, \theta_{pm})\omega_p/c \\ k_s &= n_o(\omega_s)\omega_s/c \\ k_i &= n_o(\omega_i)\omega_i/c \end{aligned} \quad (1.16)$$

utilizando la ecuación (1.21) y el denominado *ángulo de empatamiento de fases*  $\theta_{pm}$  (el ángulo que forma el rayo de bombeo con el eje óptico del cristal)

$$n_e(\omega_p, \theta_{pm}) = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 \sin^2(\theta_{pm}) + n_e^2 \cos^2(\theta_{pm})}}. \quad (1.17)$$

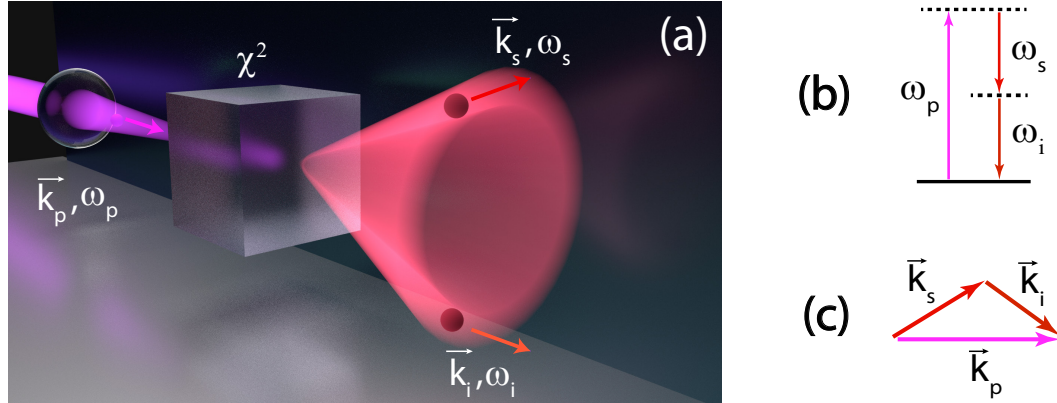


Figura 1.6: Generación de SPDC de Tipo I. (a) Geometría de la interacción. (b) Conservación de la energía. (c) Conservación del momento.

## Empatamiento de Fases de Tipo II

En el caso de SPDC de tipo II: un haz de bombeo  $\vec{k}_p$  con polarización ordinaria, incide sobre un cristal no lineal, y produce una pareja de fotones en direcciones diametralmente opuestas, con vectores de onda  $\vec{k}_s$  con polarización ordinaria y  $\vec{k}_i$  con polarización extraordinaria, en este caso los fotones generados tienen una polarización ortogonal entre ellos, y cada uno formara su propio cono ya que la simetría azimutal se rompe por la presencia del fotón con polarización extraordinaria. Ver la figura (1.7). De la conservación de momentos, tenemos pues, que:

$$\Delta \vec{k} = \vec{k}_p^o(\omega_p) - \vec{k}_s^o(\omega_s) - \vec{k}_i^e(\omega_i), \quad (1.18)$$

Utilizando coordenadas cilíndricas podemos separar la conservación de la energía en tres ejes:

$$\begin{aligned}
k_p^o(\omega_p) &= k_s^o(\omega_s) \cos \theta_s - k_i^e(\omega_i, \theta_e) \cos \theta_i, \\
k_s^o(\omega_s) \sin \theta_s x &= k_i^e(\omega_i, \theta_e) \sin \theta_i x \\
k_s^o(\omega_s) \sin \theta_s y &= k_i^e(\omega_i, \theta_e) \sin \theta_i y.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Aquí  $\theta_s x$ ,  $\theta_s y$  y  $\theta_i x$ ,  $\theta_i y$  son los ángulos de emisión de los fotones señal y acompañante con respecto a los ejes  $x, y$ , respectivamente, y las magnitudes de  $k$ , están relacionadas con los índices de refracción y las frecuencias de los fotones  $\mu = \{p, s, i\}$ :

$$\begin{aligned}
k_p &= n_o(\omega_p) \omega_p / c \\
k_s &= n_o(\omega_s) \omega_s / c \\
k_i &= n_e(\omega_i, \theta_e) \omega_i / c.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Utilizando la ec.(1.21) y el ángulo que forma el vector de onda del fotón acompañante con el eje del cristal  $\theta_e$

$$n_e(\omega_i, \theta_e) = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 \sin^2(\theta_e) + n_e^2 \cos^2(\theta_e)}}. \tag{1.21}$$

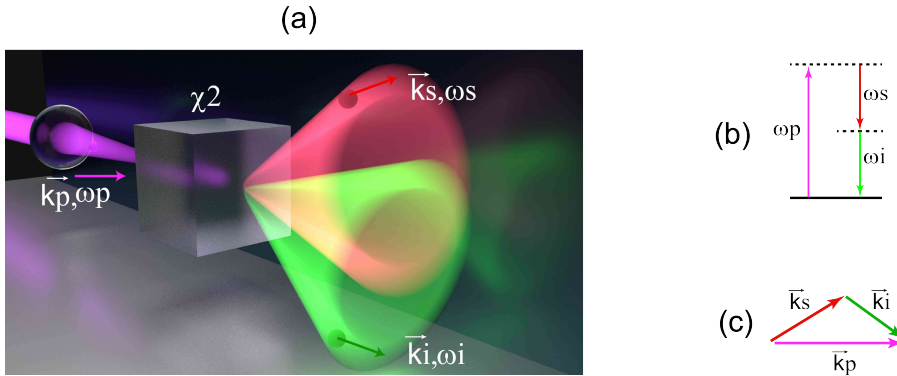


Figura 1.7: Generación de SPDC de Tipo II. (a) Geometría de la interacción. (b) Conservación de la Energía. (c) Conservación del Momento



## II. Estado de dos fotones de SPDC

En el apéndice A se deduce la forma del estado cuántico de SPDC utilizando el término de segundo orden de la susceptibilidad eléctrica, y utilizando la definición de campos cuánticos, junto con la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo para calcular el estado de dos fotones  $|\Psi\rangle_{PDC}$ . A continuación muestro la forma general del estado (ecuación (A.46))

$$|\Psi\rangle_{PDC} = |0\rangle + \eta \int dk_s^3 \int dk_i^3 F(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_i) |0\rangle. \quad (1.22)$$

El estado de en la ecuación (1.22) describe la generación de una pareja de fotones donde  $F(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$  es la amplitud de probabilidad conjunta (JSA por sus siglas en inglés) que describe la probabilidad de generar un fotón con vector de onda  $\vec{k}_s$  y frecuencia  $\omega_s$  y un fotón con vector de onda  $\vec{k}_i$  y frecuencia  $\omega_i$  de manera *simultánea*. En general la amplitud de probabilidad conjunta puede escribirse como

$$F(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = \alpha(\omega_s + \omega_i) \Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i), \quad (1.23)$$

siendo

$$\Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = \exp\left\{\left(-\frac{W_0^2}{4} |\vec{k}_\perp|^2\right)\right\} \text{sinc}\left(\frac{L}{2} \Delta k\right). \quad (1.24)$$

La función  $\alpha(\omega_s, \omega_i)$  es la envolvente espectral que depende de las propiedades del haz de bombeo; la función  $\Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$  es la llamada función de empatamiento de fases, la cual depende de las propiedades del cristal y del bombeo mismo: del cristal a través de su índice de refracción  $n$  y de su longitud,  $L$ ; y de la estructura espacial del bombeo, a través de la cintura del haz  $W_0$  y del vector de onda transversal  $\vec{k}_\perp$  dado por

$$\vec{k}_\perp = (k_{sx} + k_{ix}, k_{sy} + k_{iy}). \quad (1.25)$$

y dentro de la función sinc aparece

$$\Delta k = k_p - \frac{|\vec{k}_\perp|^2}{2k_p} - k_{sz} - k_{iz} + \vec{k}_{\perp y} \tan \rho_0 \quad (1.26)$$

que es el llamado *des-empatamiento de fases* (mismatch)<sup>1</sup>, donde  $\rho_0$  es el ángulo de *walk-off*, que es el ángulo entre el vector de onda y el vector de Poynting, debido a que en un cristal uniaxial los frentes de onda, que son normales al vector de onda ( $\vec{k}$ ), y la energía, en dirección del vector de Poynting ( $\vec{S}$ ) de la onda no van en la misma dirección necesariamente.

La parte que tiene que ver con las frecuencias del láser de bombeo es la función

$$\alpha(\omega_p) = \exp \left\{ \left[ -\frac{(\omega_p - \omega_{p0})^2}{\sigma_p^2} \right] \right\}, \quad (1.27)$$

que es la envolvente espectral del pulso, donde  $\omega_{p0}$  y  $\sigma_p$  son la frecuencia central y el ancho de banda del bombeo respectivamente.

En la ecuación (1.24) las fases complejas han sido omitidas debido a que en este trabajo medimos intensidades de amplitudes conjuntas y en los capítulos de interferencia de Hong-Ou-Mandel, donde es necesario considerar el efecto completo, trabajamos con un modelo Gaussiano idealizado de esta función. Fijándonos bien en la ecuación (1.24), vemos que se puede dividir en dos partes: una parte transversal, descrita por  $\vec{k}_\perp$  y una parte longitudinal descrita por  $\Delta k$ . Las dependencias de las frecuencias de los fotones entra a través de las magnitudes de los vectores de onda (ecuaciones (1.16) y (1.19)). Por lo que es posible escribir el estado (1.22) de la siguiente manera:

$$|\Psi\rangle = \eta \int d\vec{k}_{\perp s} d\vec{k}_{\perp i} F(\vec{k}_{\perp s}, \vec{k}_{\perp i}) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_{\perp s}, \vec{k}_{\perp i}) |0\rangle_{k's} \otimes \int d\omega_s d\omega_i F(\omega_s, \omega_i) \hat{a}^\dagger(\omega_s, \omega_i) |0\rangle_{\omega's}. \quad (1.28)$$

Separar la parte espacial de la parte espectral es posible siempre que se consideren las condiciones adecuadas, en el trabajo de Clara I. Osorio [17], se demuestra que es posible separarlos utilizando cinturones de bombeo pequeños (límite de haz enfocado) o utilizando un cinturón de acoplamiento grandes (acoplados a fibras ópticas). El caso trivial de utilizar una producción colineal de la pareja de fotones también funciona, ya que en este caso  $\vec{k}_\perp = 0$ .

---

<sup>1</sup>que es la forma específica para un proceso de tipo I en un cristal no lineal, básicamente es equivalente a la conservación del momento (ecuación (1.14))

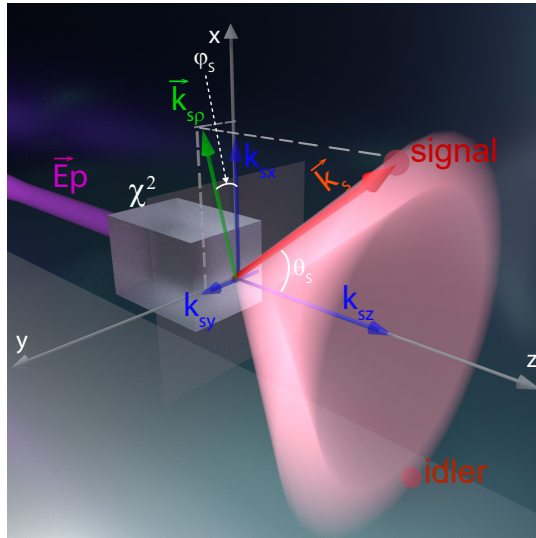
## Función de Intensidad Conjunta

A lo largo de este trabajo se realizarán aproximaciones o cálculos no directamente con  $F(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$  sino más bien un *filtrado* espacial y espectral de esta función, ya que para medir o detectar los fotones, utilizamos detectores de fotones individuales que previamente han sido colectados en fibras ópticas mono-modales, por lo que la función ya no será la misma.

## III. Ingeniería de Estados Cuánticos mediante SPDC

A lo largo de esta tesis tendremos que trabajar con distintos estados de la pareja de fotones, pero siempre partimos del estado más general de la ecuación (1.22). Al hablar de diferentes estados, me refiero a que el estado recién salido del cristal será modificado por distintos elementos ópticos, por ejemplo, para realizar una medición de detección de estos fotones, procederemos a primero acoplarlos a fibra óptica, a filtrarlos mediante filtros espectrales, a colimarlos por medio de rendijas, etc. Otro tipo de estados, serán generados intercambiando el tipo de bombeo: entre un bombeo de onda continua (CW) y un bombeo de onda pulsada (PW). El bombeo CW nos permite crear parejas de fotones con una correlación perfecta; mientras que el bombeo PW nos da la posibilidad de quitar la correlación perfecta y generar estados con correlaciones espectrales arbitrarias. Utilizar un láser pulsado nos permite generar parejas de fotones factorizables o separables espectralmente.

### III.1. Transformación a coordenadas esféricas



A la hora de trabajar con el sistema no colineal, las parejas de fotones cubren la superficie de un cono centrado en el eje de bombeo, por lo cual será de gran utilidad pasarnos a un sistema de coordenadas esféricas, en las cuales los vectores de onda de los fotones señal  $\vec{k}_s$  y acompañante  $\vec{k}_i$ , se escriben en términos de sus componentes cartesianas  $(k_x, k_y, k_z)$ :

Figura 1.8: Sistema de coordenadas esféricas para el proceso SPDC de tipo I.

$$\vec{k}_\mu = k_{\mu x}\hat{x} + k_{\mu y}\hat{y} + k_{\mu z}\hat{z}, \quad (1.29)$$

donde  $\mu = (s, i)$ . Ver la figura (1.8). Ahora expresamos las coordenadas cartesianas en términos de las coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} k_{\mu x} &= k_\mu \sin \theta_\mu \cos \phi_\mu \\ k_{\mu y} &= k_\mu \sin \theta_\mu \sin \phi_\mu \\ k_{\mu z} &= k_\mu \cos \theta_\mu. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Podemos agrupar las coordenadas  $xy$  en una sola  $\rho$ , y ahora tendremos:

$$\begin{aligned} \vec{k}_{\mu\rho} = \vec{k}_{\perp s} &= k_{\mu x}\hat{x} + k_{\mu y}\hat{y} \\ \vec{k}_{\mu z} &= k_{\mu z}\hat{z}, \end{aligned} \quad (1.31)$$

reescribiendo el vector de onda así:

$$\vec{k}_\mu = \vec{k}_{\mu\rho}\hat{\rho} + k_{\mu z}\hat{z}. \quad (1.32)$$

La magnitud del vector de onda esta relacionado con la frecuencia y con el índice de refracción de la siguiente forma:

$$k_\mu(\omega) = \frac{n_o(\omega_\mu)\omega_\mu}{c}. \quad (1.33)$$

Reescribiendo el estado SPDC, en términos de estas variables, nos queda:

$$|\Psi\rangle = \eta \int d\vec{k}_{\perp s} d\omega_s \int d\vec{k}_{\perp i} d\omega_i F(\vec{k}_{\perp s}, \vec{k}_{\perp i}, \omega_s, \omega_i) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_{\perp s}, \omega_s) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_{\perp i}, \omega_i) |0\rangle. \quad (1.34)$$

Aquí hemos escrito la función de amplitud conjunta  $F(\vec{k}_{\perp s}, \vec{k}_{\perp i}, \omega_s, \omega_i)$  en términos de las componentes transversales del vector de onda, y las frecuencias de los

fotones generados, esta expresión es muy útil a la hora de manejar el acoplamiento a las fibras ópticas, ya que precisamente trataremos este acoplamiento como un filtro de componentes transversales del vector de onda.

Otra forma que será útil más adelante, es la expresión del estado en términos de sus ángulos de emisión:

$$|\Psi\rangle = \eta \int d\omega_s d\theta_s d\phi_s \int d\omega_i d\theta_i d\phi_i F(\omega_s, \omega_i, \theta_s, \theta_i, \phi_s, \phi_i) \hat{a}^\dagger(\omega_s, \theta_s, \phi_s) \hat{a}^\dagger(\omega_i, \theta_i, \phi_i) |0\rangle. \quad (1.35)$$

Es claro que en las ecuaciones (Ec.A.46), (Ec.1.34) y (Ec.1.35) se tienen seis variables de integración, tres por cada fotón. También se entiende que el estado de vacío que se suma se ha ignorado en las últimas de estas ecuaciones.

### III.2. Acoplamiento a Fibra Óptica Monomodal

Sea la función de amplitud conjunta  $F(\xi_s, \xi_i)$ , donde  $\xi_s = \{\omega_s, \vec{k}_{\perp s}\}$  y análogo con  $\xi_i$ .

Podemos pensar que las fibras mono-modo (SMF por sus siglas en inglés) se comportan como un par de filtros espaciales que le permiten a los fotones ocupar solo ciertos modos transversales  $u(x, y, \omega)$  que se propagan a través de la fibra.

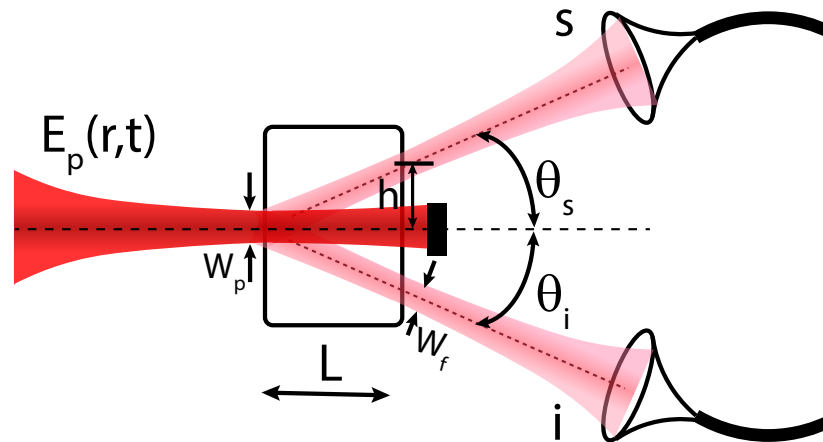


Figura 1.9: Esquema básico para el acoplamiento a fibra SMF

El modo de salida  $u(x, y, \omega)$  puede ser aproximado por un haz Gaussiano inci-

dente en el cristal.

Vamos a considerar una configuración en la cuál el haz se propaga en el plano horizontal (común al haz de bombeo) y cruza la cara de salida del cristal a una distancia  $h$  del punto de intersección del haz de bombeo y la superficie del cristal (ver figura (1.9)).

En el caso más simple, cuándo el haz de salida es enfocado sobre la superficie del cristal, éste está parametrizado únicamente por el ángulo de incidencia  $\theta_s$ , la distancia  $h$  desde el haz de bombeo y el cinturón de acoplamiento  $W_f$ .

**La Transformada de Fourier de la función de modos a la salida del cristal es:**

$$\tilde{u}(\xi_s) = A_f(\omega_s) \frac{W}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ \left\{ -\frac{W^2}{4} \left[ \left( k_{sx} - \frac{\omega_s \theta_s}{c} \right)^2 + k_{sy}^2 \right] \right\} \right\} \exp \left\{ \left[ -ih \left( k_{sx} - \frac{\omega_s \theta_s}{c} \right) \right] \right\} \tilde{u}(\xi_s) = \mathcal{F} \{ u(x, y, \omega) \} \quad (1.36)$$

donde

$$A_f(\omega_s) = \exp \left\{ \left[ -\frac{(\omega_s - \omega_0)^2}{2\sigma_f^2} \right] \right\} \quad (1.37)$$

es la transmitividad de los filtros interferentes.

La amplitud de probabilidad espectral conjunta acoplada a fibra  $F(\omega_s, \omega_i)$  para las parejas de fotones acopladas a las fibras se escribe como:

$$f_c(\omega_s, \omega_i) = \int_{|\vec{k}_s|=\omega_s/c} d\vec{k}_{\perp s} \int_{|\vec{k}_i|=\omega_i/c} d\vec{k}_{\perp i} F_f(\xi_s, \xi_i) \tilde{u}^*(\xi_s) \tilde{u}(\xi_i) \quad (1.38)$$

Aquí  $F_f$  es la amplitud de probabilidad conjunta en el espacio libre, se calcula a partir de la amplitud conjunta  $F$  dentro del cristal, considerando el ángulo de refracción de los fotones al salir del cristal  $\theta_\mu \rightarrow \arcsin(\sin(\theta_\mu)/n(\omega_\mu))$  con  $\mu = \{s, i\}$ .

El estado SPDC acoplado a fibra se escribe como:

$$|\Psi\rangle = |0\rangle + \eta \int d\omega_s \int d\omega_i f_c(\omega_s, \omega_i) \hat{a}^\dagger(\omega_s) \hat{a}^\dagger(\omega_i) |0\rangle, \quad (1.39)$$

donde

$$f_c(\omega_s, \omega_i) = \alpha(\omega_s + \omega_i) \Phi_c(\omega_s, \omega_i) \quad (1.40)$$

es la función de amplitud conjunta acoplada a fibra, y  $\Phi_c$  es la función de empaquetamiento de fases acoplada a fibra.

Es importante destacar que la expresión involucra integración de amplitud de probabilidad, no de probabilidades en sí, ya que los fotones con distintos vectores de onda, pero de misma frecuencia, son *indistinguibles* después de acoplarse a la fibra [20].

También es importante señalar que la brillantez de la fuente dependerá del porcentaje de fotones que sean acoplados a la fibra. En algunos trabajos se habla de eficiencias del 12 % [21], mientras que en otros en eficiencias de hasta el 90 % [22].

La función de amplitud conjunta que aquí se obtiene,  $f_c(\omega_s, \omega_i)$ , es la que realmente estaremos midiendo en el laboratorio, más específicamente el módulo cuadrado de esta función,  $|f(\omega_s, \omega_i)|^2$ , debido a que es todo lo que los detectores pueden medir. Esta “intensidad” de probabilidad es llamada *Intensidad Espectral Conjunta* (JSI por sus siglas en inglés).

Es posible controlar el grado de correlación espectral mediante el control del parámetro del cinturón de acoplamiento  $W_f$ , que solamente afecta a la *función de empaquetamiento de fases*  $\Phi_c(\omega_s, \omega_i)$ , la envolvente espectral  $\alpha(\omega_s + \omega_i)$  depende del espectro del láser de bombeo, y se mantendrá fija a menos de que cambiemos de láser. En la figura (1.10) se muestra el control de correlación de la JSI.

## IV. Cálculo del Número de Schmidt

Una herramienta útil para medir el grado pureza del estado de parejas de fotones es mediante la descomposición de Schmidt, tal cómo se hace en los trabajos [23] y [24]. La función  $F(\xi_s; \xi_i)$  puede tener correlación entre las variables del fotón señal y del acompañante, donde  $\xi_s = \{\omega_s, \theta_s, \phi_s\}$  y  $\xi_i = \{\omega_i, \theta_i, \phi_i\}$ .

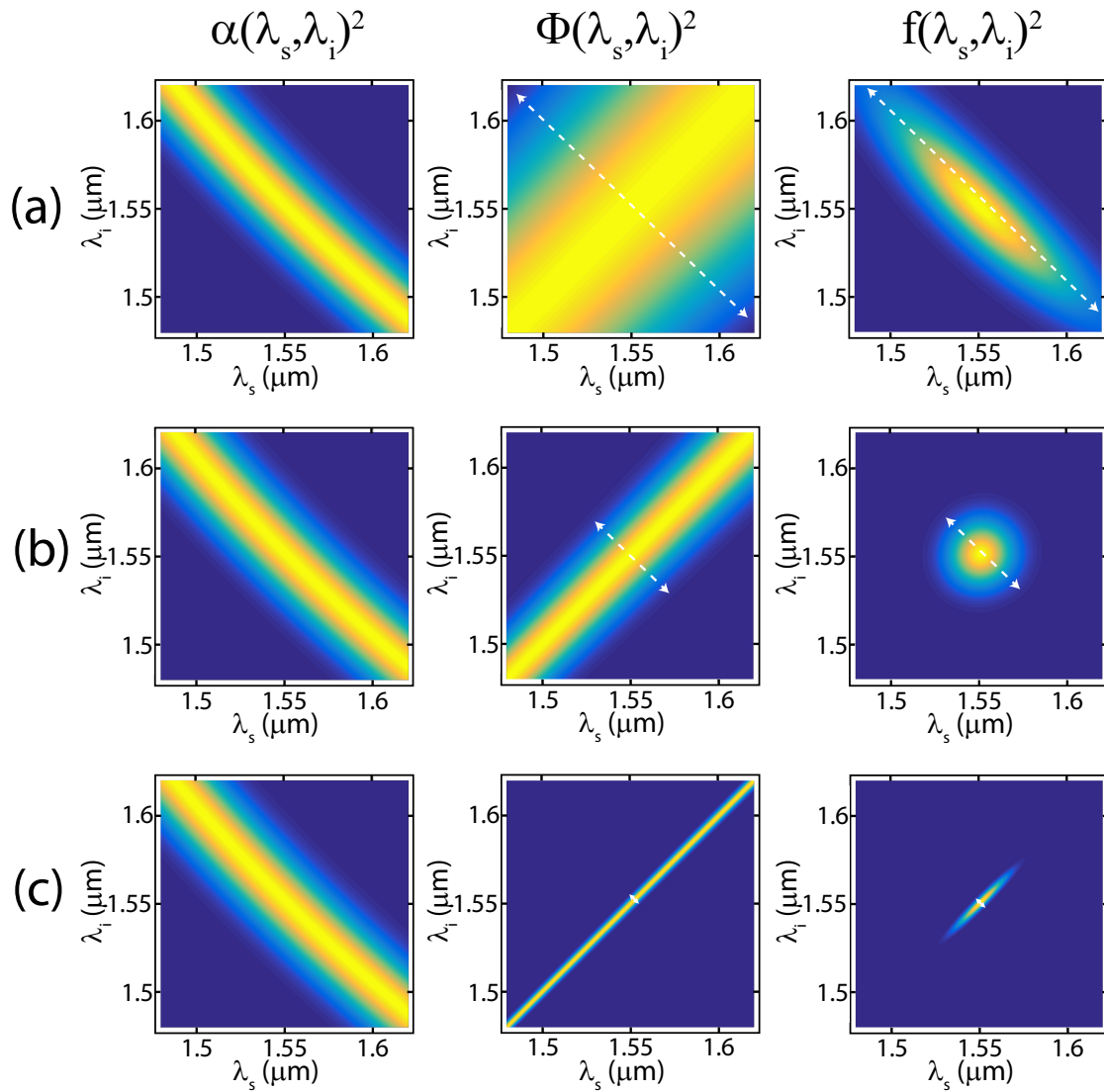


Figura 1.10: Control de correlación de la intensidad espectral conjunta (última columna) al modificar la función de empatación de fases  $\Phi$  (segunda columna) al cambiar el cinturón de acoplamiento  $W_f$ . (a)  $W_f = 225 \mu\text{m}$ . (b)  $W_f = 700 \mu\text{m}$ . (c)  $W_f = 1500 \mu\text{m}$ .



$$|\Psi\rangle = |0\rangle + \eta \int d\xi_s \int d\xi_i F(\xi_s, \xi_i) \hat{a}^\dagger(\xi_s) \hat{a}^\dagger(\xi_i) |0\rangle \quad (1.41)$$

Es posible hacer una descomposición de la función  $F(\xi_s; \xi_i)$  de tal manera que ahora el estado se escriba en términos de una base completa de estados.

$$|\Psi\rangle = \sum_n \sqrt{\lambda_n} \hat{A}_n^\dagger \otimes \hat{B}_n^\dagger |0\rangle \quad (1.42)$$

donde  $\hat{A}_n^\dagger$  y  $\hat{B}_n^\dagger$  son operadores de creación efectivos y donde:

$$\sum_n \lambda_n = 1.$$

Ahora estos estados se pueden escribir en términos de las funciones de Schmidt  $\psi(\xi_s)$  y  $\phi(\xi_i)$  como:

$$\begin{aligned} \hat{A}^\dagger &= \int d\xi_s \psi(\xi_s) \hat{a}^\dagger(\xi_s) \\ \hat{B}^\dagger &= \int d\xi_i \phi(\xi_i) \hat{a}^\dagger(\xi_i). \end{aligned} \quad (1.43)$$

donde la amplitud conjunta puede ser escrita como:

$$F(\xi_s, \xi_i) = \sum_n \sqrt{\lambda_n} \psi_n(\xi_s) \phi_n(\xi_i). \quad (1.44)$$

Para el cálculo de las funciones de Schmidt primero se determina la matriz de densidad reducida para cada sub-sistema del fotón señal y acompañante.

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_s(\xi_s, \tilde{\xi}_s) &= Tr_i(\hat{\rho}(\xi_s, \xi_i)) \\ \hat{\rho}_i(\xi_i, \tilde{\xi}_i) &= Tr_s(\hat{\rho}(\xi_s, \xi_i)). \end{aligned} \quad (1.45)$$

y como segundo paso resolvemos la siguiente ecuación de eigen-valores:

$$\begin{aligned} \int d\xi' \hat{\rho}_s(\xi_s, \xi') \psi_n(\xi') &= \lambda_n \psi_n(\xi) \\ \int d\xi' \hat{\rho}_i(\xi_i, \xi') \phi_n(\xi') &= \lambda_n \phi_n(\xi) \end{aligned} \quad (1.46)$$

Los  $\lambda_n$  son conocidos como coeficientes de Schmidt. La descomposición de Schmidt simplifica un poco la descripción ya que nos hace cambiarnos de un estado expresado en términos de 6 integrales sobre las frecuencias, ángulos polares y azimutales a únicamente un limitado número de suma de términos. El grado de enredamiento puede ser cuantificado por medio del factor de cooperatividad  $K$ , definido

como:

$$K = \frac{1}{\sum_n \lambda_n^2} \quad (1.47)$$

El número de  $K$  es un indicador del número de par de modos de Schmidt, que a su vez es una medida de que tanto entrelazamiento está presente en el par de fotones. El mínimo valor que puede alcanzar es  $K = 1$  y representa un estado en el cual solo tenemos un coeficiente de Schmidt  $\lambda = 1$ , por lo que podremos escribir la función de amplitud conjunta como:

$$F(\xi_s, \xi_i) = \psi_1(\xi_s)\phi_1(\xi_s). \quad (1.48)$$

a este tipo de estado se le llama factorizable, y en este caso podemos afirmar que no existe correlación entre la pareja de variables involucradas.

## V. Función de correlación de segundo orden $g^{(2)}(\tau)$

La coherencia de segundo orden no trivial fue descubierta experimentalmente por Hanbury Brown and Twiss en 1956. En su arreglo experimental, ahora conocido como interferómetro HBT, la luz térmica radiada aleatoriamente tiene el doble de oportunidad de ser captada por dos detectores independientes colocados dentro del área de coherencia transversal de la radiación, y con una ventana temporal del orden del tiempo de coherencia de la radiación. En la figura (1.12) se muestra el arreglo experimental para medir la función de coherencia de segundo orden. La luz de una fuente es dividida en un divisor de haz simétrico (esto es 50 % de la luz es transmitida, mientras que el otro 50 % es reflejada), los fotodetectores D1 y D2 son escaneados en las zonas de campo lejano a las salidas de los puertos 1 y 2 del divisor de haz y un circuito de coincidencias es utilizado para medir las detecciones simultáneamente. Las coincidencias son escaneadas en función de los retrasos  $\tau_1 = t_1 - z_1/c$  y  $\tau_2 = t_2 - z_2/c$ , y en general es posible dejar un detector fijo y realizar el escaneo sobre  $\tau = \tau_2 - \tau_1$ .

**Campos Clásicos** Para campos clásicos nos referimos a aquellos que pueden describirse por las ecuaciones de Maxwell:

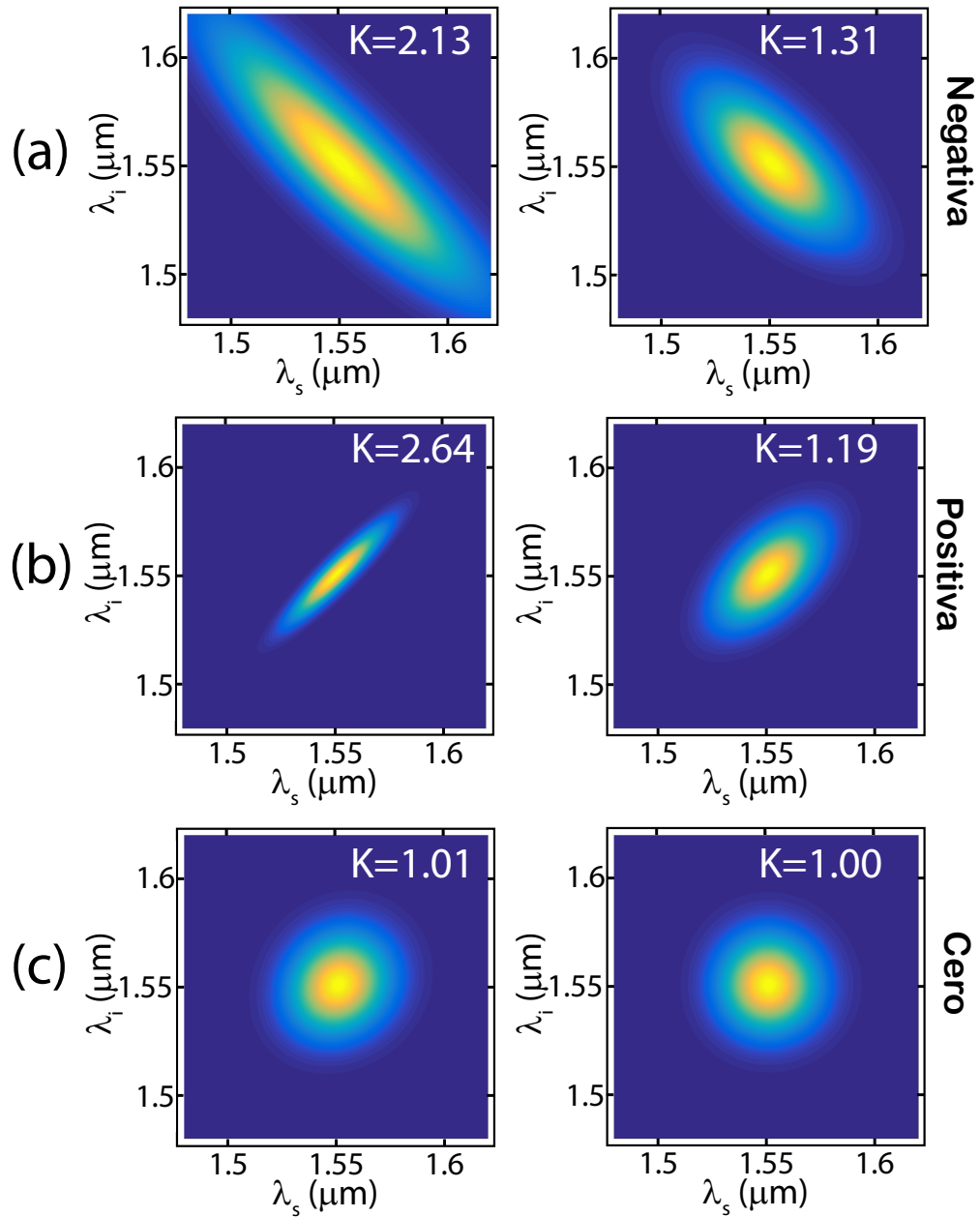


Figura 1.11: Cálculo del número de Schmidt  $K$ , para distintas JSI. La primera y segunda filas corresponde a casos con correlación negativa y positiva ( $K > 1$ ). La última fila muestra el caso de estados sin correlación espectral ( $K \approx 1$ ).

$$\begin{aligned}
g^{(2)}(z_1, t_1; z_2, t_2) &= \frac{\langle I_1(z_1, t_1) I_2(z_2, t_2) \rangle}{\langle I_1(z_1, t_1) \rangle \langle I_2(z_2, t_2) \rangle} \\
&= \frac{\langle E^*(z_1, t_1) E(z_1, t_1) E^*(z_2, t_2) E(z_2, t_2) \rangle}{\langle E^*(z_1, t_1) E(z_1, t_1) \rangle \langle E^*(z_2, t_2) E(z_2, t_2) \rangle}. \quad (1.49)
\end{aligned}$$

La función de coherencia de segundo orden se calcula usando la ecuación (1.49): se define como el valor de expectación del producto de dos intensidades medidas en los puntos espacio-temporales  $(z_1, t_1)$  y  $(z_2, t_2)$ . La teoría clásica de la coherencia óptica trata a la coherencia de segundo orden de la luz como la correlación estadística de las fluctuaciones de las intensidades de las fuentes de luz.

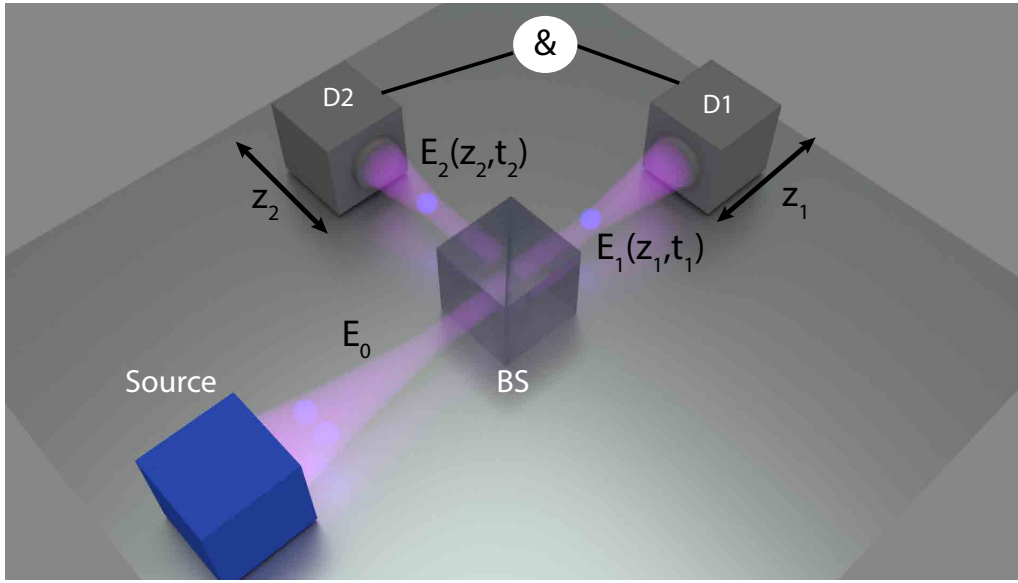


Figura 1.12: Experimento de HBT para medir la función de coherencia temporal de segundo orden  $g^{(2)}(z_1, t_1; z_2, t_2)$ .

**Campos Cuánticos** En la teoría cuántica, las correlaciones entre los campos de salida del divisor de haz simétrico (ver figura(1.12)) son descritos por operadores de campo, en lugar de las amplitudes clásicas:

$$g^{(2)}(z_1, t_1; z_2, t_2) = \frac{\langle \hat{E}^{(-)}(z_1, t_1) \hat{E}^{(-)}(z_2, t_2) \hat{E}^{(+)}(z_2, t_2) \hat{E}^{(+)}(z_1, t_1) \rangle}{\langle \hat{E}^{(-)}(z_1, t_1) \hat{E}^{(+)}(z_1, t_1) \rangle \langle \hat{E}^{(-)}(z_2, t_2) \hat{E}^{(+)}(z_2, t_2) \rangle}. \quad (1.50)$$

En la perspectiva de la teoría cuántica de la luz la función de coherencia de segundo orden cuántica se calcula usando la ecuación (1.50): se define como la medida de la probabilidad de observar conjuntamente una pareja de fotones en  $(z_1, t_1)$  y  $(z_2, t_2)$  para un campo de radiación. Los promedios temporales están dados por los valores de expectación de la mecánica cuántica. Y depende de los estados de entrada al divisor de haz. A continuación se muestran resultados obtenidos para diferentes tipos de fuentes (todas para  $\tau = 0$ ).

#	$g^{(2)}(0)$	Estado de Luz
1	= 0	Fotón Individual
2	< 1	Anti-bunching
3	> 1	Bunching
4	= 1	Coherente
5	= 2	Térmico

Tabla 1.1: Valores de la función de correlación para distintos tipos de luz.

## VI. Generación de SPDC utilizando un Bombeo monocromático

Comenzamos con un caso especial ideal, cuando el bombeo tiene una única componente de frecuencia  $\omega_p = \omega_{p0}$ , en este caso la envolvente espectral de la Ec.(A.47) se escribe

$$\alpha_p(\omega_p) = V_p \delta(\omega_p - \omega_{p0}) \quad (1.51)$$

con  $V_p$  siendo la amplitud del campo de bombeo. La Ec.(1.39)

$$|\Psi\rangle^{CW} = |0\rangle + \eta \int d\omega_s \int d\omega_i F(\omega_s, \omega_i) \hat{a}^\dagger(\omega_s) \hat{a}^\dagger(\omega_i) |0\rangle, \quad (1.52)$$

con

$$F(\omega_s, \omega_i) = V_p \delta(\omega_p - \omega_{p0}) \phi(\omega_s, \omega_i). \quad (1.53)$$

sustituyendo en la expresión para el estado y aplicando la delta de Dirac, obtenemos:

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle^{CW} &= \eta V_p \int d\omega_s \int d\omega_i \delta(\omega_p - \omega_{p0}) f(\omega_s, \omega_i) \hat{a}^\dagger(\omega_s) \hat{a}^\dagger(\omega_i) |0\rangle \\
&= \eta V_p \int d\omega_s \int d\omega_i \delta(\omega_s + \omega_i - \omega_{p0}) f(\omega_s, \omega_i) \hat{a}^\dagger(\omega_s) \hat{a}^\dagger(\omega_i) |0\rangle \\
&= \eta V_p \int d\Omega f(\Omega, -\Omega) \hat{a}^\dagger(\Omega) \hat{a}^\dagger(-\Omega) |0\rangle.
\end{aligned} \tag{1.54}$$

Donde hemos aprovechado que las variables  $\omega_s$  y  $\omega_i$  pueden ponerse una en función de la otra,  $\omega_s = \omega_{p0} - \omega_i$ , y definiendo las siguientes dos relaciones para el caso degenerado

$$\begin{aligned}
\omega_s &= \frac{\omega_{p0}}{2} + \Omega \\
\omega_i &= \frac{\omega_{p0}}{2} - \Omega
\end{aligned} \tag{1.55}$$

y donde  $\Omega = (\omega_s - \omega_i)/2$ , es la mitad del llamado *desentonamiento*  $\omega^-$  entre las frecuencias de las parejas de fotones.

Notemos que en el estado Ec.(1.54) los fotones señal y acompañante están perfectamente correlacionados  $\omega_s + \omega_i = \omega_{p0}$ . Este caso corresponde al de una pareja de fotones con una sola frecuencia, o monocromaticos.

---

## 2

# Control de Correlación Espectro-Espacial de las Parejas de Fotones

En este capítulo presentamos las técnicas básicas para la generación y detección en el laboratorio de parejas de fotones individuales anunciados mediante el proceso de conversión paramétrica descendente espontáneo (SPDC) en el régimen de la banda de las telecomunicaciones (1550 nm). Utilizamos métodos analíticos, numéricos y experimentales para producir estados espectralmente correlacionados, anti-correlacionados o no-correlacionados (es decir *factorizables*) en determinado grado de libertad, en pocas palabras, control de correlación espectral.

Caracterizamos la fuente de parejas de fotones, a través del grado de coherencia temporal del flujo de un brazo del SPDC mediante la medición de la función de correlación de segundo orden promediada en el tiempo de los detectores  $\langle g^2(0) \rangle_T$ .

Realizamos una medición de la correlación espacial de la pareja de fotones y se encuentra un parámetro de control para este grado de libertad.

Finalmente realizamos una medición que involucra los grados espaciales y espectrales simultáneamente, con esto terminamos de describir todos los grados de libertad de nuestra fuente alcanzando una mejor comprensión del proceso de SPDC y las correlaciones espaciales y espectrales.

Al trabajar con fotones individuales es necesario hacer uso de detectores al nivel de un solo fotón, en este trabajo utilizamos fotodiodos de avalancha <sup>1</sup> de InGaAs de la marca *id-Quantique*, al inicio del trabajo sólo teníamos el modelo id201, que

---

<sup>1</sup>APD por sus siglas en inglés

funciona en el llamado *gated mode triggering*<sup>2</sup>, por lo cuál los primeros programas y esquemas de medición experimental funcionaron con esta lógica. Posteriormente se actualizaron los detectores por el modelo id230 con los que se puede trabajar en el llamado *free-running mode*<sup>3</sup>, que significa que ya no fue necesario una señal de referencia para disparar los APDs, de esta forma, tuvimos la posibilidad de medir señales de láser en modo CW<sup>4</sup>, y también la ventaja de contar con una buena relación señal a ruido, que fue casi 2 ordenes de magnitud mayor que para el modelo id201(en el apéndice se analizan más a fondo de estos dispositivos).

A continuación mostramos los pasos principales a seguir para poder montar una fuente de parejas de fotones, detectarlos y caracterizarlos.

## I. Sistema de Bombeo pulsado

Para poder satisfacer las condiciones de estados factorizables, y/o de control espectral de estados, fue necesario utilizar una fuente de bombeo de banda ancha (10 nm - 20 nm). Se construyó una cavidad láser pulsado en el régimen de femto-segundos, con un cristal de Titanio Zafiro ( $Ti - Al_2O_3$ ) como medio activo y excitado por un láser verde de 532 nm a una potencia promedio de 5 Watts.

La cavidad tiene una longitud para producir pulsos de femto-segundo con una frecuencia de repetición de 90 MHz y una potencia promedio de 400 mW. Para ajustar la longitud de onda de salida se utiliza un par de rendijas puestas después del primer prisma para poder barrer el espectro de frecuencias. Con este sistema obtenemos un láser pulsado y sintonizable en un rango aproximado de (1750 nm - 1850 nm), y cuyo ancho de banda es controlable de 10 nm a 20 nm aproximadamente (ver la figura (2.1)).

En la figura (2.1) mostramos un esquema básico de la cavidad que esta formada por cuatro espejos que cierran la cavidad para el infrarrojo: dos espejos cóncavos  $E_C$ (color azul) que son completamente reflejantes para 800 nm y completamente transparentes para 532 nm, el haz es enfocado por una lente L sobre un cristal de

---

<sup>2</sup>modo disparado

<sup>3</sup>modo libre

<sup>4</sup>modo continuo



Titanio Zafiro que ha sido cortado al ángulo de Brewster<sup>5</sup>. Un espejo  $E_{R=1}$  que es completamente reflejante, al final del segundo prisma  $P_2$  y un espejo  $E_{R=0.90}$  que semitransparente, el cuál deja salir una fracción de la radiación. Los prismas  $P_1$  y  $P_2$  están colocados al ángulo de Brewster y tienen la función de compensar la dispersión de los demás elementos ópticos para así poder alcanzar mode-locking<sup>6</sup> que permite generar los pulsos ultracortos.

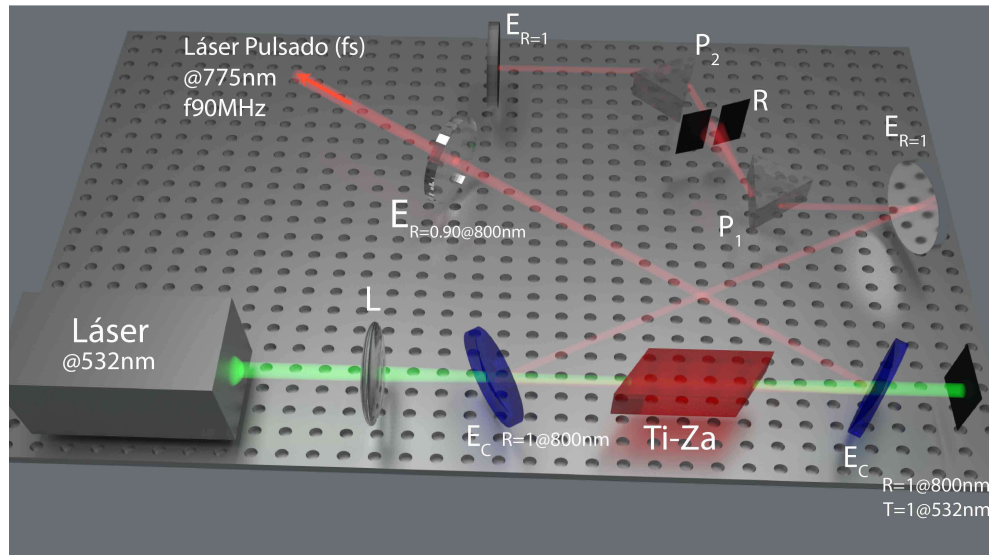


Figura 2.1: Esquema de la cavidad láser de Titanio Zafiro.

### I.1. Caracterización del haz pulsado

Como ya mencionamos nuestro interés es generar parejas de fotones degenerados en la longitud de onda de 1550 nm por lo que para satisfacer la condición de empatamiento de fases es necesario que la longitud central de nuestro haz de bombeo sea de 775 nm. Para poder estar seguros de esta longitud de onda, utilizamos un espectrómetro de la marca Ocean Optics, y todo el tiempo se estuvo vigilando que la longitud central fuera la correcta (ver la figura 2.2).

<sup>5</sup>es el ángulo de incidencia al cuál la luz con cierta polarización es perfectamente transmitida por el medio sin ninguna reflexión

<sup>6</sup>amarramiento de modos

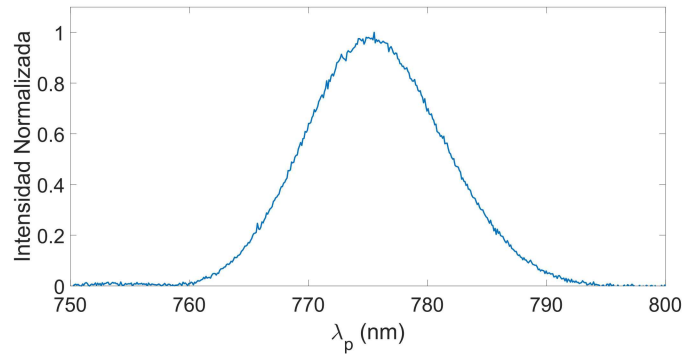


Figura 2.2: Medición del espectro del haz de bombeo. El espectro mostrado en este caso tiene un ancho a la altura media de 13.3 nm.

El modo espacial es otro factor importante para garantizar la buena producción de pares de fotones en el cristal y de este también depende el buen traslape con las funciones de acoplamiento a fibra óptica, por lo tanto estará directamente relacionado con la brillantez de la fuente. Por todo esto es indispensable asegurarnos de tener un buen modo espacial transversal a lo largo de la longitud del cristal. Para poder caracterizar el modo espacial, utilizamos una cámara CCD de la marca de ThorLabs (ver la figura (2.3)).

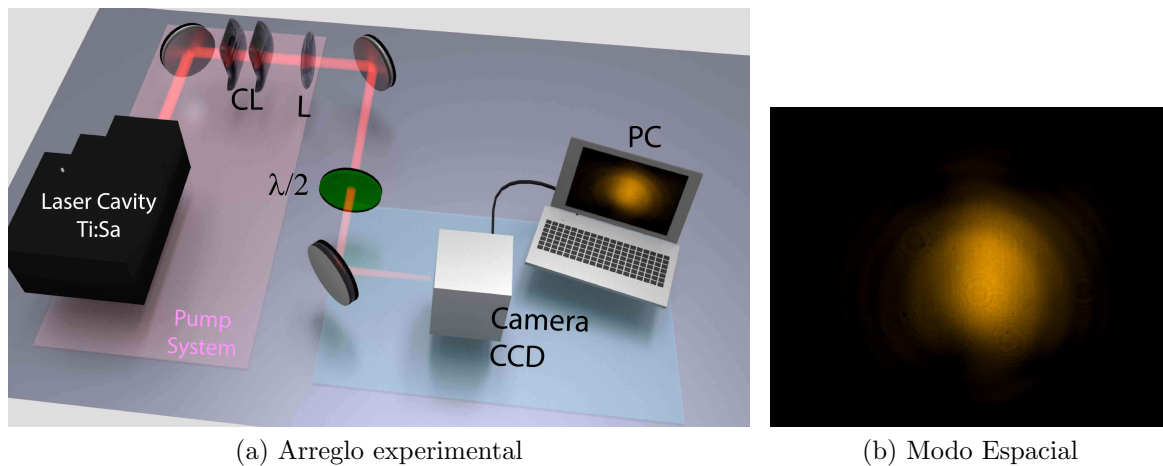


Figura 2.3: Medición del modo espacial del haz de bombeo utilizando una cámara CCD.

Reconstruimos el perfil completo del haz, tomando fotos en distintas posiciones del eje  $z$ , realizamos ajustes Gaussianos en secciones transversales del haz; y re-

construimos la función del radio del perfil transversal como función de  $z$  ( $W(z)$ ), y obtuvimos los parámetros básicos del haz de bombeo; como son el rango de Rayleigh ( $z_R$ ), la posición de la cintura del haz a la altura del cristal ( $Z_0$ ), y el ancho de la cintura del haz ( $W_0$ ). En la figura (2.4) mostramos el perfil transversal del haz de bombeo en cierta posición, el grado de astigmatismo<sup>7</sup> es apreciable con una diferencia de aproximadamente  $200 \mu\text{m}$  entre el corte horizontal y el vertical de la sección transversal.

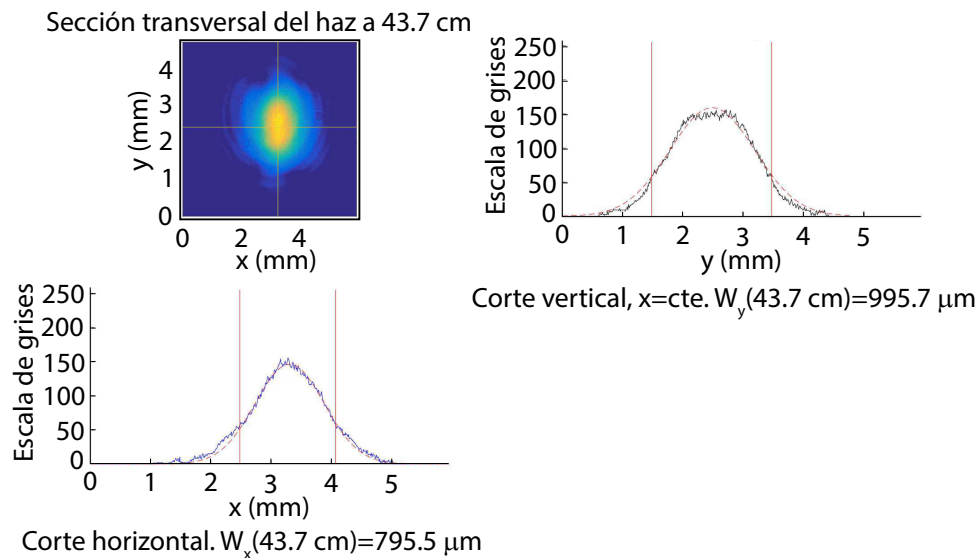


Figura 2.4: Perfil del haz de bombeo a la distancia  $z = 43.72 \text{ cm}$ .

En la figura (2.5) mostramos el perfil Gaussiano del haz de bombeo en el rango del experimento, se observa claramente que hay una divergencia del haz, y un grado alto de astigmatismo. Por lo cual fue necesario utilizar un sistema de lentes cilíndricas para así corregir el grado de astigmatismo.

Una vez puestas las lentes cilíndricas, utilizamos una lente plano-convexa para enfocar el haz en la posición del cristal. En la figura (2.6) se muestra el perfil transversal reducido al orden de  $160 \mu\text{m}$  aproximadamente y se ve que el grado de astigmatismo también fue reducido.

En la figura (2.7) se muestra el perfil Gaussiano del haz de bombeo corregido, podemos observar que el astigmatismo se corrige en una región de aproximadamente

<sup>7</sup>ocurre cuando las secciones transversales horizontal y vertical se enfocan en distintas posiciones

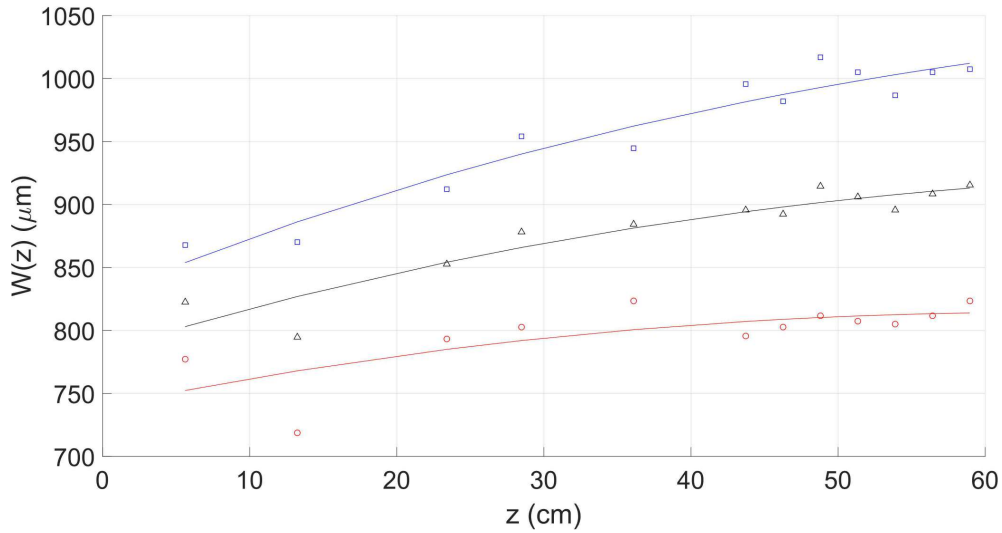


Figura 2.5: Perfil gaussiano del haz de bombeo. La línea roja es el ajuste para el radio de la sección transversal horizontal, la la azul para la vertical, y la negra el promedio de ambas.

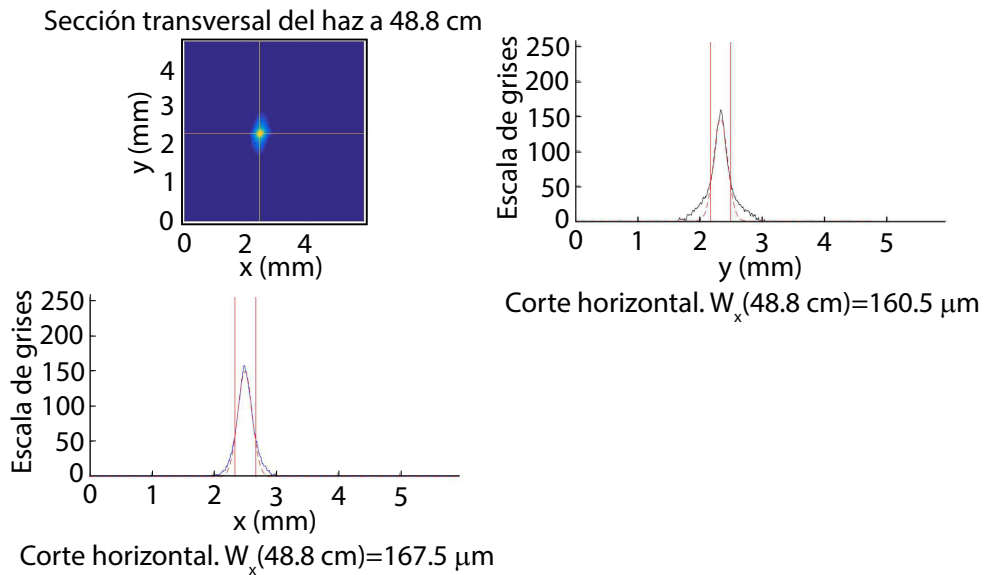


Figura 2.6: Perfil del haz de bombeo utilizando un par de lentes cilíndricas y una lente de distancia focal de 100 cm a la distancia  $z = 48.8$  cm.

20 cm, y el rango de Rayleigh de ( $z_R \approx 16.5$  cm), fue suficiente para cubrir el cristal de 10 mm de longitud. La cintura promedio del haz fue de ( $W_0 \approx 168 \mu\text{m}$ ), y la distancia a la cintura del haz fue de ( $Z_0 \approx 54$  cm).

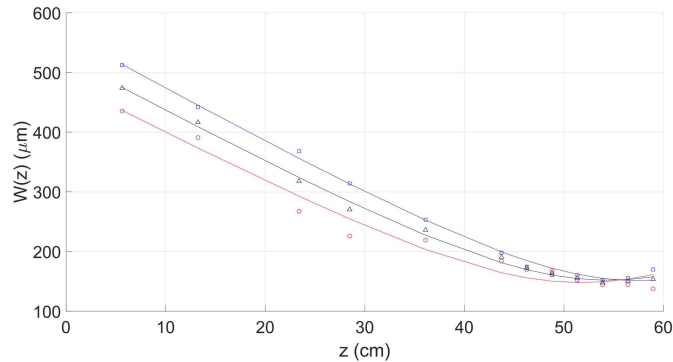


Figura 2.7: Perfil Gaussiano del haz de bombeo corregido utilizando dos lentes cilíndricas y una lente plano convexa. La línea roja es el ajuste para el radio de la sección transversal horizontal, la línea azul para la vertical, y la línea negra el promedio entre ambas.

## II. Generación de parejas de fotones en 1550 nm y detección síncrona mediante APDs id201

A continuación se enumeran los pasos preliminares para el montaje experimental de una fuente de parejas de fotones degenerados en el régimen de las telecomunicaciones ( $\lambda = 1550$  nm) generados mediante el proceso paramétrico descendente de tipo I no colineal:

1. Utilizamos un programa que se basa en las condiciones de emparejamiento de fases para calcular los ángulos de emisión de los fotones señal y acompañante al introducir los parámetros adecuados para conseguir un estado con el mínimo de correlación en sus grados de libertad.

2. Establecimos un sistema de referencia sobre la mesa óptica, trazando el punto donde se colocaría el cristal de  $\beta$ -Borato de Bario(BBO) y trazamos líneas de referencia de las trayectorias que se-

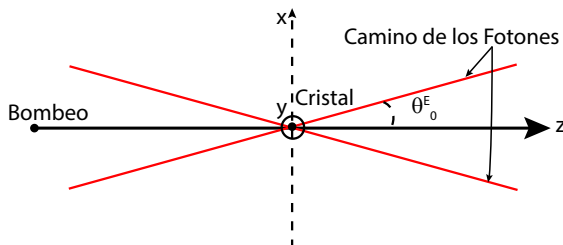


Figura 2.8: Sistema de referencia del laboratorio.

guirían los fotones al salir del cristal (ver figura (2.8)).

Los parámetros fueron los siguientes:

Parámetro	Símbolo	Valor
Longitud de onda del bombeo	$\lambda_{p0}$	775 nm
Longitud de onda de los fotones	$\lambda_{s0} = \lambda_{i0}$	1550 nm
Ángulo de emparejamiento de fases	$\theta_{PM}$	20.3°
Longitud del cristal	$L$	10 mm
Ángulo de emisión de los fotones	$\theta_{s0} = \theta_{i0}$	$\approx 3^\circ$

Tabla 2.1: Parámetros del arreglo experimental

3. Determinamos la distancia efectiva para colocar las lentes acopladoras a fibra óptica,  $L_f$ . Esta distancia es la adecuada para que el acoplamiento de fotones sea óptimo y se consigue al lograr que la cintura del haz de bombeo ( $W_0$ ) y la cintura del haz de acoplamiento ( $W_f$ ) sean del mismo orden ( $W_0 \approx W_f$ ) a la distancia de la segunda cara del cristal. Esta distancia fue aproximadamente de 17cm desde la segunda cara del cristal a las lentes acopladoras.

Para que el espacio fuera el adecuado utilizamos un par de espejos en forma de cuña, estos espejos tienen una alta reflectancia en el infrarrojo.

También utilizamos dos lentes acopladoras, de tipo esféricas C, de 15mm de distancia focal.

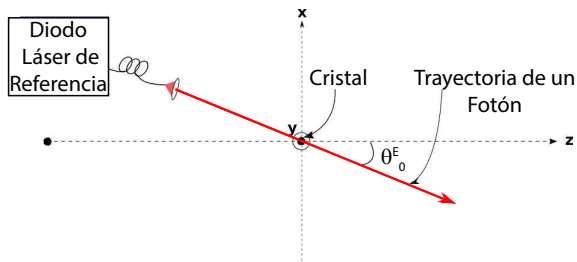


Figura 2.9: Nos guiamos haciendo uso de un láser de diodo con una longitud de onda de 1550 nm, con una potencia acoplada de 1.2 mW.

4. Para asegurarnos de que las posiciones y orientaciones de los elementos ópticos fueran las adecuadas, utilizamos un diodo láser de Thorlabs con una longitud de onda centrada en 1550 nm, con este láser se simuló el camino que siguen los fotones haciendo uso del arreglo experimental de la figura (2.9).

5. La luz se acopló a fibras ópticas mono-modales, para lo cual se requiere que la luz a acoplar pase lo más colineal-

mente posible al eje de la lente  $L_f$  y de la punta de fibra, para esto utilizamos un sistema de orientación angular dado por micro-blocks. Los micro-blocks sobre los que van las lentes  $L_f$  y las puntas de fibra se orientan de tal modo que se acople la mayor cantidad de luz del diodo, para ello hicimos uso de un medidor de potencia ThorLabs en el rango del infrarrojo, de tal suerte que se logró acoplar más del 80 % de luz en cada fibra óptica.

6. Retiramos el láser de referencia e incidimos el haz de bombeo pulsado alineado con el eje  $z$  y colocamos el cristal no lineal sobre el centro de referencia.

### II.1. Sistema de Generación

Para generar la pareja de fotones utilizamos un cristal no lineal cúbico de 1 mm de longitud de  $\beta$ -Borato de Bario ( $\beta$ -BaB<sub>2</sub>O<sub>4</sub> o BBO por simplicidad), este material tiene una fuerte birrefringencia uniaxial negativa y fue cortado a 20.3° respecto a su eje principal y la dirección del haz de bombeo para satisfacer la condición de empaquetamiento de fases de un proceso SPDC de tipo I (eoo). Para definir la polarización (e) del haz de bombeo, se utilizó una placa de media de onda ( $\lambda/2$ ) colocada antes del cristal, y para controlar la cintura del haz ( $W_0$ ) se utilizó una lente (L) de 100 cm de distancia focal justo antes de la placa  $\lambda/2$ . El cristal tiene una susceptibilidad de segundo orden suficientemente fuerte para producir parejas de fotones degenerados en 1550 nm cuando el cristal es bombeado a 775 nm de longitud de onda central, estos fotones salen en direcciones diametralmente opuestas a ángulos de 2.7° respecto al eje del bombeo, y debido a la conservación del momento, la simetría azimutal es conservada, por lo que los fotones llenan la superficie de un cono con cierto grosor que los vuelven fácilmente separables espacialmente para ser acoplados en fibras ópticas mono modales.

Para eliminar el bombeo residual que atraviesa el cristal, usamos un filtro pasa-altas (HP filter) con corte en 980 nm y también un filtro pasa-bandas (BP filter) centrado en 1550 nm con un ancho de 3 nm, esto nos permite estar seguros de encontrar la posición angular de los fotones degenerados.

Antes de poner el sistema de acoplamiento a fibras ópticas y el sistema de detección de coincidencias, utilizamos una cámara IDus 1.7 de InGaAs, que es básicamente un arreglo de pixeles lineal, donde cada pixel tiene la capacidad de detectar fotones

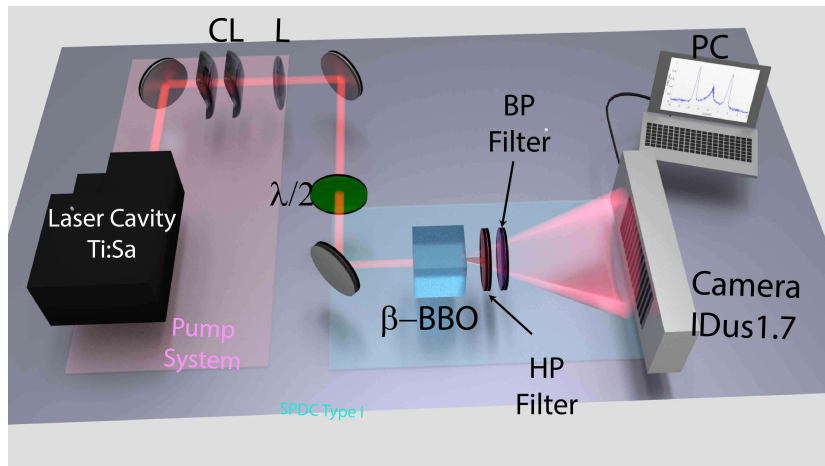
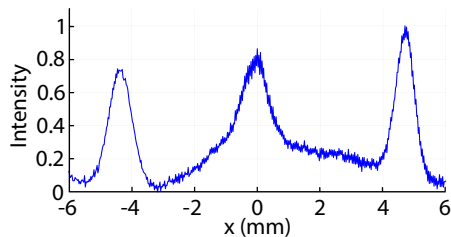
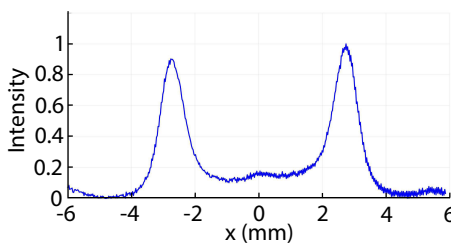


Figura 2.10: Medición del cono de SPDC utilizando una cámara IDus1.7.

individuales (ver la figura (2.10)).



(a) No filtrado



(b) Filtrado

Figura 2.11: Medición del perfil del cono de SPDC a una distancia de 9 cm después del cristal.

En la figura (2.11a) se muestra el bombeo residual que atravesó por los filtros pasa altas y pasa bandas. En general muy complicado filtrar el haz de bombeo utilizando únicamente filtros espectrales, debido a los ordenes de magnitud de diferencia que existe en comparación con los fotones individuales generados. Es posible filtrar, el molesto, haz de bombeo residual, al subir un poco la cámara del plano de detección XZ, ya que el bombeo no sale de este plano, pero los fotones, que están distribuidos sobre el cono, sí lo hacen. En la figura (2.11b) se observa la atenuación del haz de bombeo, se tiene que ser muy cuidadosos de que la señal de bombeo no sea acoplada a las fibras que irán conectadas a los detectores en el siguiente paso debido a que esto ocasiona una

disminución de la calidad de la señal de los fotones individuales.

Colocamos una lente para poder colimar los fotones generados y se volvió a medir con la cámara IDus1.7. En la figura (2.12a) se observa que el bombeo residual vuelve



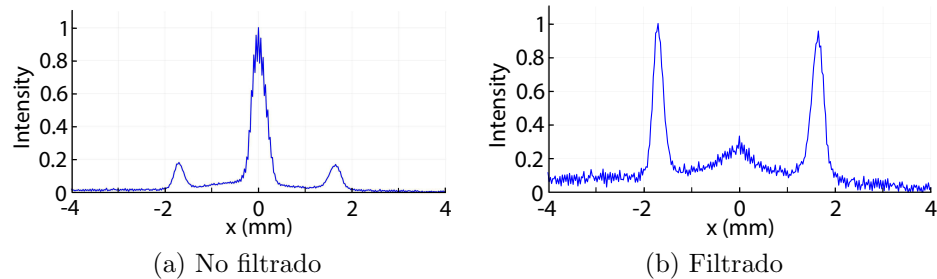


Figura 2.12: Medición del perfil del cono SPDC enfocado con una lente.

a aparecer y esta vez está mucho más intenso debido al enfocamiento de la lente. Si se levanta un poco la cámara inmediatamente podemos disminuir el efecto del bombeo (ver la figura (2.12b)).

### Sistema de Medición de Coincidencias en modo gated

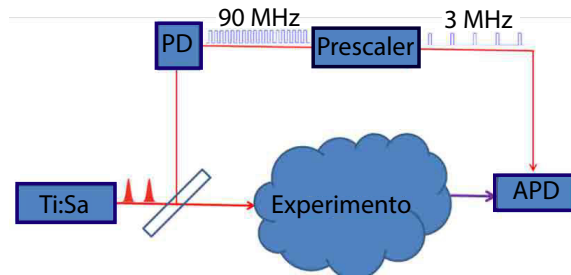


Figura 2.13: Esquema de medición en modo disparado.

7. Se conectan las fibras ópticas a los detectores, APD1 Y APD2. Como se explica en el apéndice D, estos aparatos tienen que configurarse para eliminar en lo posible las detecciones de ruido producidas por cuentas oscuras y de afterpulsing. Para lograr esto se configuran en modo trigger externo, la señal de trigger externo la obtenemos del mismo láser de bombeo reduciendo electrónicamente la frecuencia de repetición por medio de un fotodiodo rápido y un prescaler. Para esto se introduce un divisor de haz asimétrico que manda un pequeño reflejo del bombeo hacia un fotodiodo rápido que convierte a señales electrónicas los pulsos de luz del láser de bombeo, esta señal se puede manipular directamente con un generador digital de señales o prescaler (DG645) con el que podemos modificar la frecuencia de los pulsos electrónicos, su anchura temporal y su retraso o corrimientos temporales (ver la figura (2.13)).

8. Los APDs se configuran de la siguiente manera: la frecuencia de disparo de

3 MHz, las compuertas temporales con un ancho 2.5 ns y con una probabilidad de detección del 25 %.

9. Se hacen barridos temporales del canal 1 y del canal 2 del prescaler con el fin de maximizar las cuentas individuales de los APDs.

10. Ahora se coloca un filtro espectral estrecho centrado en 1550 nm con un ancho de 3 nm después del filtro pasa-altas. Este filtro se utiliza para poder estar seguros de que las cuentas que vemos en los APDs se deben a fotones centrados en 1550 nm y no en otras frecuencias. Si todo fue bien deben de verse cuentas mayores que las cuentas del ruido.

11. Finalmente se optimiza la orientación de las lentes de colección por medio de los microblocks. En la figura (2.14) se muestra el esquema final de nuestro sistema de detección.

## II.2. Búsqueda de coincidencias

El primer paso para poder medir la distribución espectral conjunta de la pareja de fotones, es encontrar las coincidencias. Las coincidencias se definen como la detección de una pareja de fotones nacidas del mismo pulso, en otras palabras, detectar simultáneamente a los fotones gemelos.

Para este fin utilizaremos un dispositivo etiquetador de tiempos digital (TDC id800), que es un dispositivo que te permite medir tiempos relativos entre sus diferentes canales.

Como se explica más a fondo en el apéndice D, la detección síncrona, implica utilizar una señal de reloj para disparar las ventanas de detección de los APDs id201, para lo cual es necesario convertir los pulsos ópticos del haz de bombeo en señales electrónicas por medio de un fotodiodo rápido y reducir la frecuencia de repetición de 90 MHz a 3 MHz por medio de un prescaler (Presc en la figura (2.14)). Utilizamos tres canales de salida del prescale, dos para disparar los APDs y una para usarse como señal de referencia del TDC id800. Utilizamos el canal 1 como disparo de referencia del etiquetador de tiempos TDC(figura (2.14)).

Ajustamos el ancho de las ventanas temporales de los APDs a 50 ns, la probabilidad de detección la disminuimos al 10 % y activamos un tiempo muerto de  $10\mu s$  en cada detector.

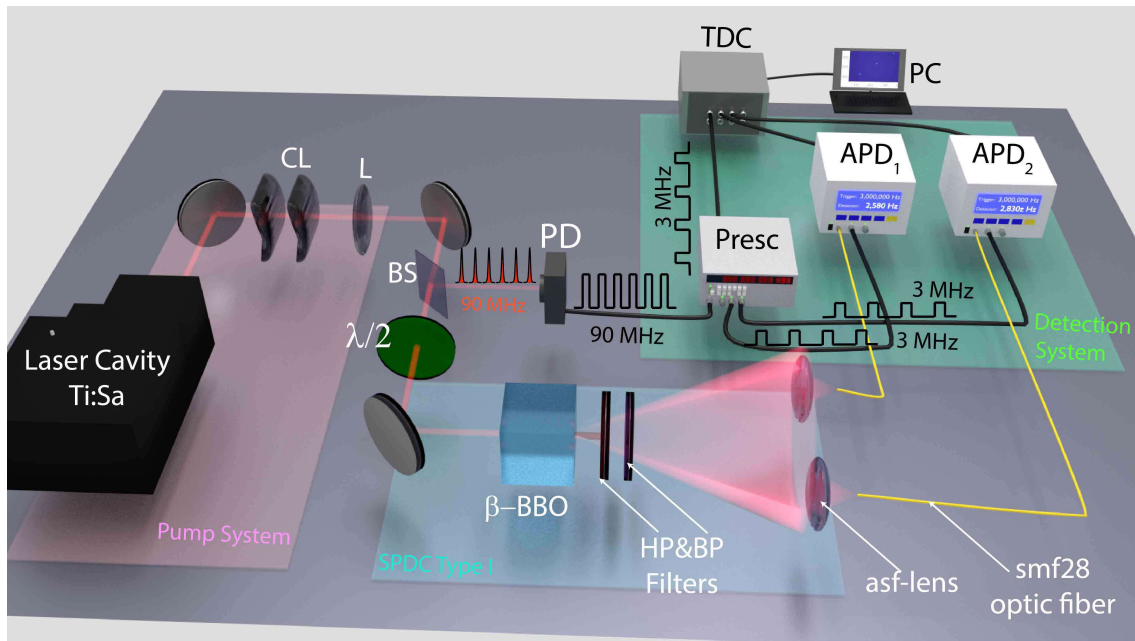


Figura 2.14: Esquema experimental para detectar fotones individuales: Incluye tres partes principales: el sistema de bombeo que consiste de la cavidad láser Ti-Za, un par de lentes cilíndricas CL para corregir el astigmatismo, una lente (L) para enfocar el haz sobre el cristal, y un divisor de haz poco reflejante BS que envía una señal óptica al fotodiodo rápido PD; el sistema de generación: que consiste de una placa de media onda  $\lambda/2$ , un cristal cúbico de BBO de 10 mm, un filtro pasa-altas para impedir que el haz de bombeo residual se filtre y un filtro pasa-bandas centrado en 1550 nm para garantizar la selección correcta de los fotones degenerados (HP&BP Filters). El sistema de detección formado por un par de detectores de fotones individuales APD<sub>1</sub> y APD<sub>2</sub> id-201 que son disparados por un prescaler, el etiquetador de tiempos digital TDC id800, y una computadora.

Los tiempos de llegada de los fotones son aleatorios dentro del pulso óptico que los genera, pero no todos los pulsos generarán una pareja de fotones, por lo que no sabemos los tiempos exactos de llegada a los detectores ni su extensión en el tiempo, usamos una ventana de 50 ns en lugar de los 2.5 ns que usamos en la detección simple. Al aumentar el ancho de las ventanas, es normal que estos dispositivos se saturen, para evitar esto bajamos al mínimo la probabilidad de detección y además configuramos que los APD's tenga un tiempo muerto, esto significa que ignore detecciones durante este lapso.

Se considerara como coincidencia a las veces que llegue una señal del canal 1, canal 2 y canal 3 con una diferencia temporal menor al tiempo de la ventana de coincidencias. En la figura (2.15) se muestran 2 coincidencias. Cada vez que las señales lleguen en el orden 1,2,3 o 1,3,2 entenderemos que las señales 2 y 3 corresponden a una pareja de fotones que nacieron de alguno de los pulsos ópticos que genero la señal 1.

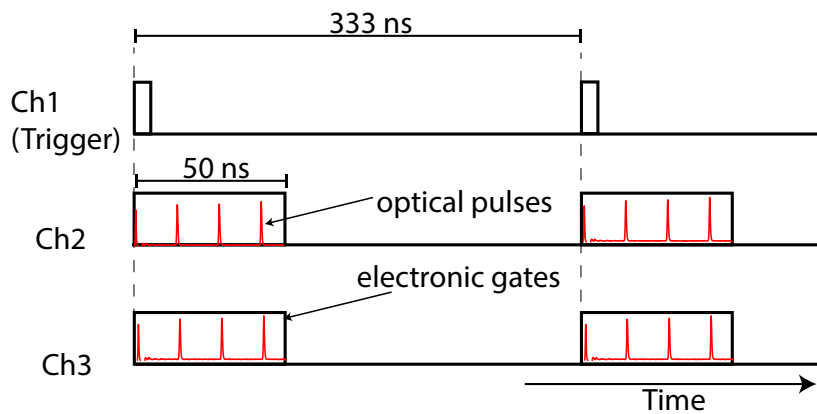


Figura 2.15: Señales electrónicas detectadas por un etiquetador de tiempos digital (TDC por las siglas: *Time-to-digital converter*). Debido a que la frecuencia de repetición del prescaler es de 3 MHz, las detecciones están separadas por 333 ns. Las ventanas de coincidencias mostradas son de 50 ns.

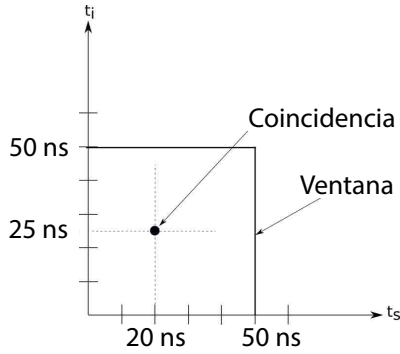


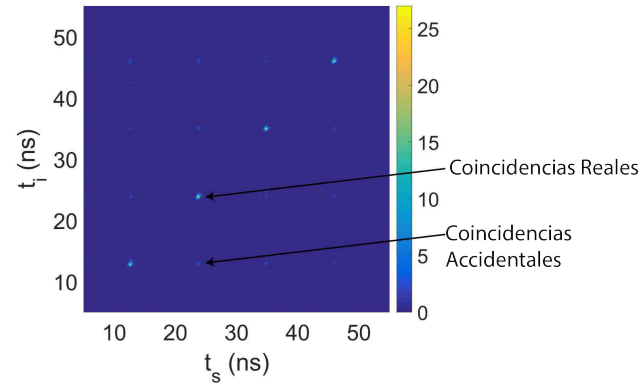
Figura 2.16: Histograma de coincidencias.

En la figura 2.16 se muestra una coincidencia dentro de la ventana de 50 ns. Este caso se toma como coincidencia donde tenemos que el tiempo entre canal 1 y 2,  $t_s = t_{12} = 20$  ns, y el tiempo entre canal 1 y 3, es de,  $t_s = t_{13} = 25$  ns. Si pintamos un punto en un plano de tiempos de llegada  $t_s$  vs  $t_i$  podemos construir un histograma bidimensional que nos muestra lo que llamamos una distribución temporal conjunta.

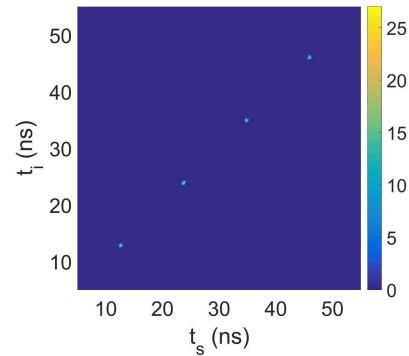
Con este procedimiento podemos hacer un histograma de tiempos de llegada, los cuales corresponden a una distribución de coincidencias repartidas en el tiempo. La resolución del histograma está limitada por la resolución del Time Tagger (TDC), que en este caso es de 81 ps.

Es interesante ver que al correr los histogramas podemos observar la separación entre los pulsos del bombeo. Como sabemos nuestro láser tiene una frecuencia de repetición de 90 MHz, o sea pulsos que estarán separados temporalmente aproximadamente por 11 ns. Como observamos en la figura (2.17a), vemos coincidencias cada 11 ns tanto como horizontal como verticalmente, en realidad los puntos que aparecen a distintos tiempos son coincidencias accidentales, que no representan a fotones que provienen de una misma

pareja. Si el sistema estuviera perfectamente alineado, las coincidencias accidentales desaparecerían y nuestro histograma de tiempos se vería como en la figura (2.17b).



(a) No Optimizado



(b) Optimizado

Figura 2.17: Histogramas de Coincidencias

### III. Medición de las correlaciones espectrales

Una de las mediciones más importantes para caracterizar un estado de dos fotones gemelos es la Intensidad Espectral Conjunta (JSI por sus siglas: *Joint Spectral Intensity*) que esta dada por el módulo cuadrado de la función de amplitud conjunta acoplada a fibra óptica,  $f(\omega_s, \omega_i)$ . Para medir la JSI es necesario utilizar sistemas de resolución espectral: tales como los monocromadores, que utilizan rejillas de difracción o inclusive prismas para separar las frecuencias de la luz espacialmente. Estos sistemas en general son muy ineficientes y pueden perder más del 90% de la luz que incide sobre ellos. Es por lo que en este trabajo se optó por utilizar un sistema de resolución espectral basado en la dispersión cromática de un pulso de luz al viajar dentro de un material muy largo, en específico se implementó un espectrómetro basado en fibra óptica.

#### III.1. Espectrómetro de fibra óptica

Debido a la baja eficiencia de producción del cristal de  $\beta$ -BBO se tuvo que utilizar un espectrómetro de fibra óptica en lugar de un prisma o rejilla de difracción que en general son los métodos usuales para separar espacialmente las componentes espectrales de la luz analizada, estas técnicas se vuelven prohibitivas a la hora de medir coincidencias de fuentes de luz tenues. Se ha demostrado que el uso de una fibra óptica larga permita agregar diferentes corrimientos temporales a distintas componentes espectrales ya que la velocidad de grupo de la luz depende de la longitud de onda,  $v_g(\lambda)$  [25]. Se realizó una calibración de un espectrómetro de fibra óptica SMF-28 de 5 km de longitud, sabemos que  $t(\lambda) = L/v_g(\lambda)$ , linealizando y tomando la longitud de onda central  $\lambda_0 = 1550$  nm,

$$t(\lambda) \approx t(\lambda_0) + \left. \frac{\partial t}{\partial \lambda} \right|_{\lambda_0} (\lambda - \lambda_0) \quad (2.1)$$

donde  $t(\lambda)$  es el tiempo de viaje de la componente  $\lambda$  a través de la longitud de fibra  $L$ , y  $\left. \frac{\partial t}{\partial \lambda} \right|_{\lambda_0}$  fue obtenida midiendo la pendiente de nuestra curva de calibración, y esta pendiente es equivalente a la dispersión del material, ya que  $D_\lambda = \frac{1}{L} \left. \frac{\partial t}{\partial \lambda} \right|_{\lambda_0}$ .  $D_\lambda$  es llamado el *coeficiente de dispersión* de la fibra. En este caso se obtuvo un

valor de  $D_\lambda \approx 17.53$  ps/nm·km (este valor es consistente con las especificaciones técnicas de la fibra). Con este valor medido y sabiendo la resolución limitada por el etiquetador de tiempos id-800 ( $\Delta t = 81$  ps) se puede saber la resolución espectral que fue de  $\Delta\lambda \approx 0.92$  nm. Ya que el ancho de banda de generación de los fotones es del orden de 100 nm, esta resolución es adecuada para medir los espectros de los fotones generados y su distribución espectral conjunta (JSI). En la figura (2.18) se muestra el esquema experimental para poder medir la JSI.

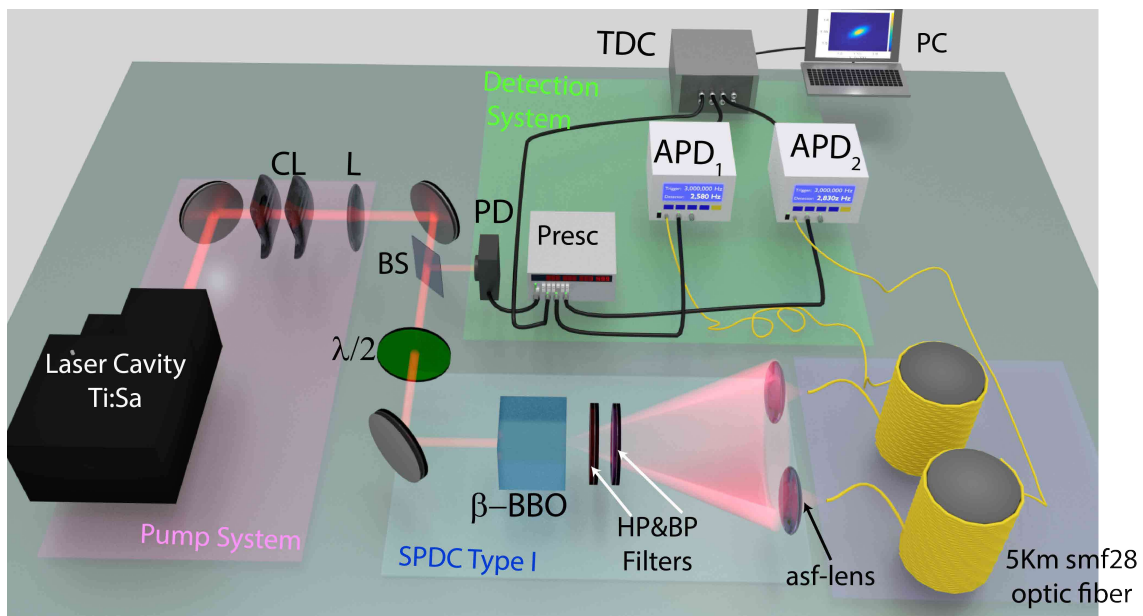


Figura 2.18: Esquema experimental para medir la JSI: El sistema de bombeo que consiste de la cavidad láser Ti-Za, un par de lentes cilíndricas CL para corregir el astigmatismo, una lente para enfocar el haz (L), y un divisor de haz poco reflejante BS que enviar una señal óptica al fotodiodo rápido PD; el sistema de generación: que consiste de una placa de media onda  $\lambda/2$ , un cristal cúbico de BBO de 10 mm, un filtro pasa-altas para impedir que el haz de bombeo residual se filtre y un filtro pasa-bandas centrado en 1550 nm para garantizar la selección correcta de los fotones degenerados (HP&BP Filters). El sistema espectral esta formado por 2 carretes de 5 Km de fibra óptica SMF-28 en los cuales se acoplan los fotones. El sistema de detección formado por un par de detectores de fotones individuales  $APD_1$  y  $APD_2$  que son disparados por un prescaler, el etiquetador de tiempos digital TDC id800, y una computadora.

Las modificaciones hechas al arreglo experimental para medir coincidencias fue-

ron:

1. Se anexan 2 carretes de fibra monomodal a las fibras a las que ya se acoplaron los fotones anteriormente.
2. Al sacar el histograma bidimensional de coincidencias obtenemos las graficas mostradas en la figura (2.19).

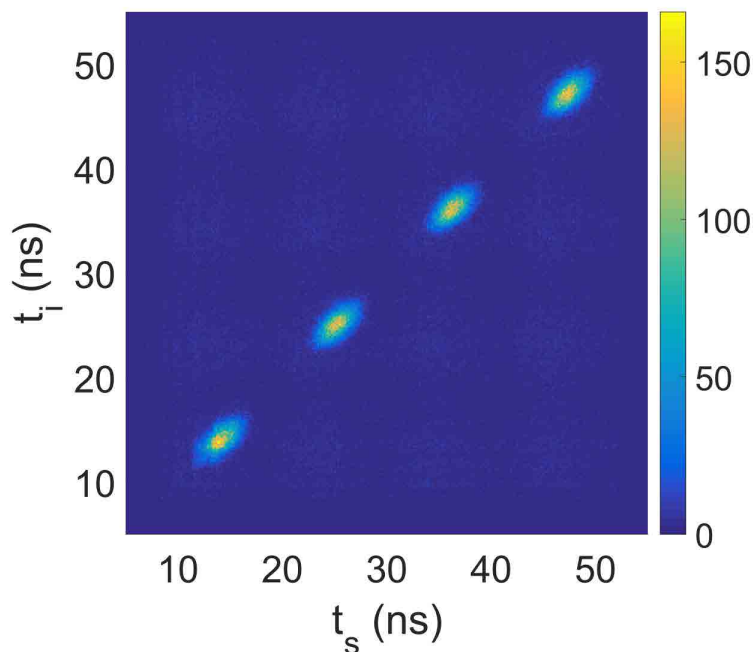


Figura 2.19: Medición de coincidencias despues de pasar por las fibras ópticas.

Aquí aprovechamos las coincidencias de fotones de distintos pulsos repetidos periódicamente para aumentar la estadística y así poder reducir los tiempos de toma de datos. Al final utilizamos nuestra calibración para convertir tiempos de llegada a longitudes de onda (ver figura (2.20)).

#### IV. Control de correlaciones Espectrales

Existen pocos trabajos donde se ha demostrado control fino de correlaciones en todos los grados de libertad de las variables del bi-fotón, como son los grados espectrales, los grados espaciales, y los grados espectro-espaciales. Algunos trabajos usan distintos procedimientos para cambiar las correlaciones espectrales, tal como



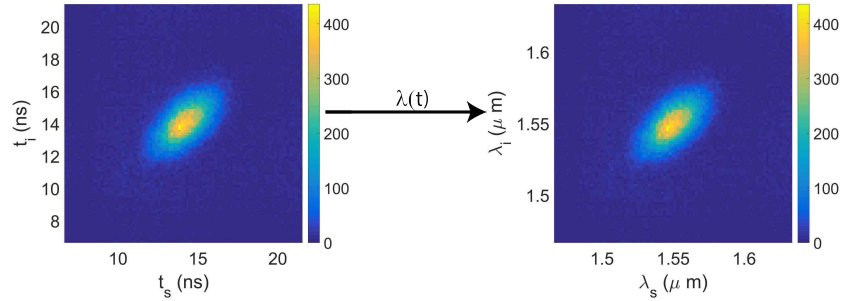


Figura 2.20: Medición de JSI después de utilizar la estadística de 4 pulsos consecutivos y de aplicar nuestra curva de calibración.

cambiar la cintura del haz de bombeo  $W_0$  [14], cambiar el ancho de banda del láser de bombeo [13], cambiando la dispersión angular [13], y cambiando entre un láser pulsado de femto-segundos y uno de onda continua (CW) [16]. En este trabajo buscamos encontrar un sólo parámetro lo suficientemente preciso con el fin de tener un control fino en las correlaciones espectrales. A pesar de que nuestra configuración (figura (2.18)) nos permitió poder variar la cintura del haz de bombeo  $W_0$ , el ancho de banda del láser  $\sigma_p$ , y la cintura del haz de acoplamiento a fibra óptica  $W_f$ , nos dimos cuenta de que la cintura del haz de acoplamiento podría ser modificada muy sencillamente, moviendo la distancia entre las puntas de fibra y las lentes esféricas acopladoras  $Z_{coup}$ , permitiendo cambiar suavemente entre los diferentes valores de  $W_f$  y por lo tanto tener un control preciso sobre las correlaciones espectrales (ver la figura (2.22)).

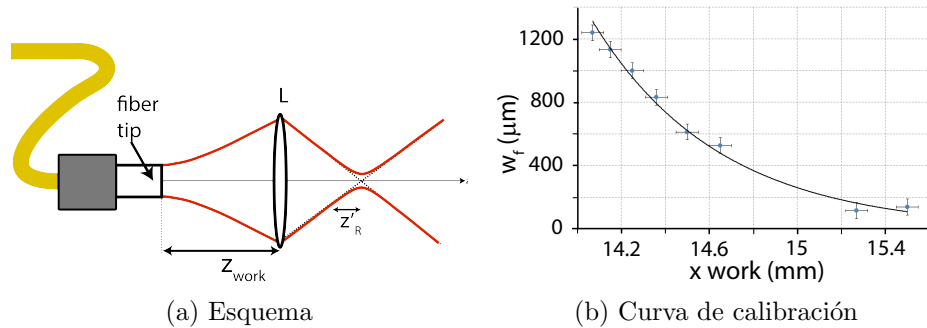


Figura 2.21: Calibración de la cintura del haz de acoplamiento  $W_f$

En la figura (2.21a) se muestra un esquema de como se calibró el control de la

cintura del haz de acoplamiento y en la figura 2.21b se muestra la curva de calibración obtenida.

De la sección III.2, sobre acoplamiento a fibra óptica, sabemos que la amplitud espectral conjunta acoplada a fibra óptica puede ser escrita como

$$f_{coup} = \int \int dk_s^t dk_i^t f(\omega_s, \omega_i, k_s^t, k_i^t) u_s(k_s^t) u_i(k_i^t),$$

que puede ser separada como  $f_{coup} = \alpha(\omega_s, \omega_i, \sigma_p) \times \phi_{coup}(\omega_s, \omega_i, W_f)$ , en este trabajo utilizamos la sensibilidad de la función de empatamiento de fases acoplada  $\phi_{coup}$  al parámetro  $W_f$ . En la figura (2.22) se muestra un cambio gradual de la forma de la JSI y por tanto de su grado de correlación, comenzando por un ancho de desentonamiento<sup>8</sup> tan grande como 100 nm que es alcanzado con una cintura del haz de acoplamiento  $W_f = 225 \mu\text{m}$ . Con una cintura del haz de acoplamiento de  $W_f = 691 \mu\text{m}$  obtenemos un estado de cero correlación, esto se relaciona con la simetría entre los anchos horizontales y verticales que forman casi un círculo perfecto<sup>9</sup> y obtuvimos un número de Schmidt  $K = 1.05$  que es un valor muy cercano al estado factorizable. El valor de cintura de acoplamiento más grande que pudimos obtener fue  $W_f = 1338 \mu\text{m}$  nos permitió medir una correlación positiva que tuvo el valor de ancho de desentonamiento más pequeño.

Es importante hacer notar que estas mediciones mantienen el ancho diagonal constante, ya que los anchos diagonales dependen exclusivamente de la envolvente espectral  $\alpha(\omega_s, \omega_i, \sigma_p)$  que depende del ancho de banda del láser de bombeo  $\sigma_p$ .

## V. Medición del promedio temporal de la función de correlación de segundo orden $\langle g^{(2)}(0) \rangle$

Otra medición interesante que realizamos fue la función temporal de coherencia a segundo orden  $\langle g^{(2)}(\tau = 0) \rangle_T$  que fue promediada en el tiempo. Usando el mismo sistema para obtener las coincidencias, solamente que en lugar de utilizar ambos brazos del SPDC, obtuvimos las coincidencias de un solo brazo. Lo que nos interesa

<sup>8</sup>ancho anti-diagonal  $\omega^- = \omega_s - \omega_i$

<sup>9</sup>una elipse alineada con los ejes también describe correlación cero pero corresponde al caso de funciones de amplitud no simétricas

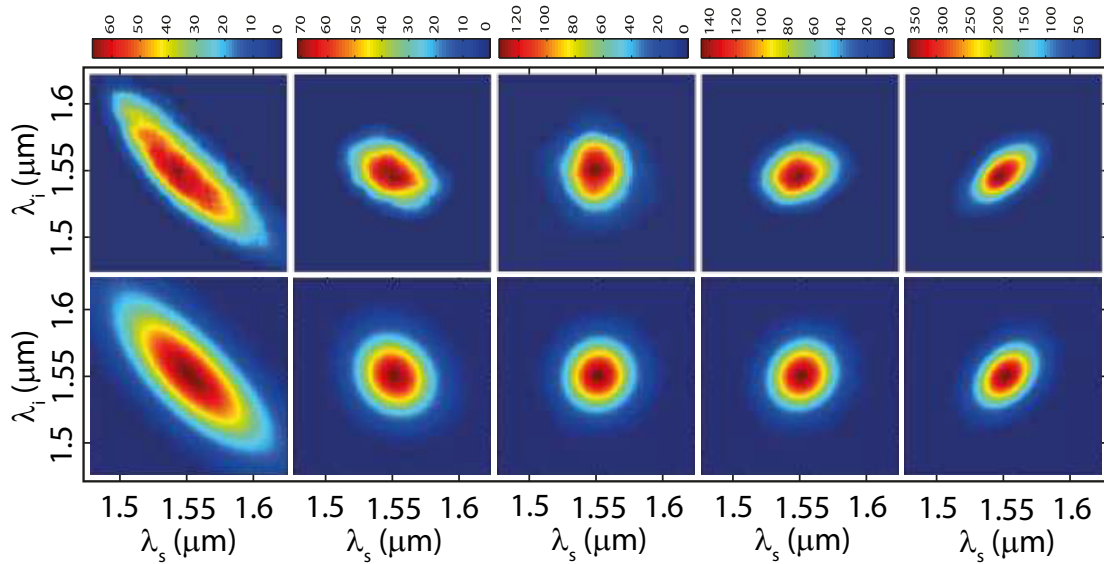


Figura 2.22: Mediciones experimentales de la Intensidad Espectral Conjunta (JSI) para 5 distintos valores de cinturas de acoplamiento  $W_f = \{225 \mu\text{m}, 524 \mu\text{m}, 691 \mu\text{m}, 770 \mu\text{m}, 1338 \mu\text{m}\}$  de izquierda a derecha. La parte superior muestra las mediciones experimentales y la parte inferior muestra las simulaciones numéricas. En todos los casos la cintura del bombeo fue de  $W_0 = 600 \mu\text{m}$ .

ver es la estadística de amontonamiento de los fotones, esta se relaciona directamente con el tipo de correlación entre la pareja de fotones.

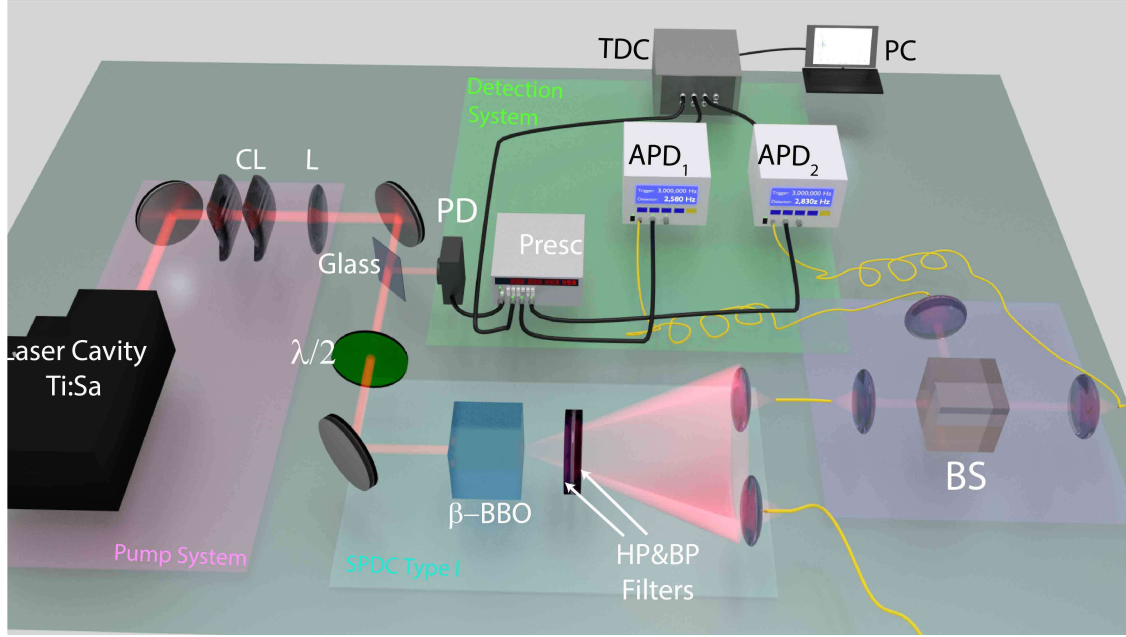


Figura 2.23: Esquema experimental para medir el valor de  $g^{(2)}$  de uno de los brazos del SPDC. Básicamente es el mismo esquema que (2.14) pero con un divisor de haz (BS) colocado en uno de los brazos y los detectores a las salidas de este BS.

La función de correlación de segundo orden está dada por la ecuación (1.50), y experimentalmente se puede entender como probabilidad de detección de fotones de manera simultánea en dos puntos del espacio-tiempo  $(z_1, t_1)$  y  $(z_2, t_2)$ . Cuando uno trata con estados estacionarios y ergódicos, donde las propiedades estadísticas no cambian con el tiempo, uno puede reemplazar el promedio de ensemble por el promedio temporal y si el estado es simplemente estacionario, la función de correlación dependerá solamente de las diferencias temporales entre cada fotón  $g^{(2)}(\tau)$ . Con esta condicionante, la medición del valor de la función de correlación de segundo orden en  $\tau = 0$  está dada por:

$$\langle g^2(0) \rangle_T = \frac{P_{123}}{P_{12}P_{13}} \quad (2.2)$$

donde  $P_{12}$  y  $P_{13}$  son las probabilidades de medir fotones transmitidos y reflejados a las salidas de los puertos del divisor de haz,  $P_{123}$  es la probabilidad de coinciden-

cias entre estos dos fotones, también disparados simultáneamente por una referencia 1. Los paréntesis angulares denotan promedio temporal sobre el tiempo T. <sup>10</sup> Las probabilidades pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} P_{123} &= \frac{N_{123}}{N_1} \\ P_{12} &= \frac{N_{12}}{N_1} \\ P_{13} &= \frac{N_{13}}{N_1} \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde,  $N_{12}$  es el número de cuentas en el APD 1,  $N_{13}$  el número de cuentas en el APD 2 y  $N_{123}$  son el número de cuentas en coincidencias de ambos APD'S.

Al sustituir la ecuación (2.3) en la ecuación (2.2) es posible calcular experimentalmente el valor de la  $g^{(2)}(0)$  para un tiempo de retraso cero ( $\tau = 0$ ).

$$g^2(0) = \frac{N_{123}N_1}{N_{12}N_{13}} \tag{2.4}$$

**A continuación se detalla un pequeño procedimiento de como se obtuvieron los valores numéricos de  $\langle g^2(0) \rangle$ :**

1. Se emplea el arreglo de detección básico (figura (2.14)) y se agrega un divisor de haz (BS) en uno de los brazos.

2. Se acopla las salidas de luz transmitida y reflejada a 2 fibras mono-modales y estas directamente a los APD's.

3. Se conectan las detecciones de los APD's a los puertos 2 y 3 del time tagger (id-800) y el canal 1 (referencia) al prescaler.

4. Se configuró cada APD con las ventanas de 20 ns, se configuró un tiempo muerto de 10  $\mu$ s y probabilidades del 10 %. Esto nos permite lograr detectar coincidencias de parejas de fotones provenientes de un solo pulso de bombeo a la vez (el arreglo queda como en la figura (2.23)).

5. Las cuentas individuales  $N_{12}$  y  $N_{13}$  se grafican en un eje de tiempo unidi-

---

<sup>10</sup>Se hace especial hincapié en que las mediciones aquí realizadas están supeditadas a los tiempos de respuesta de los detectores, por lo que a veces omitiremos los corchetes angulares  $\langle \rangle$  de promedio temporal.

mensional, mientras que las coincidencias  $N_{123}$  se grafican en un plano de tiempos bidimensional (ver la figura (2.24)).

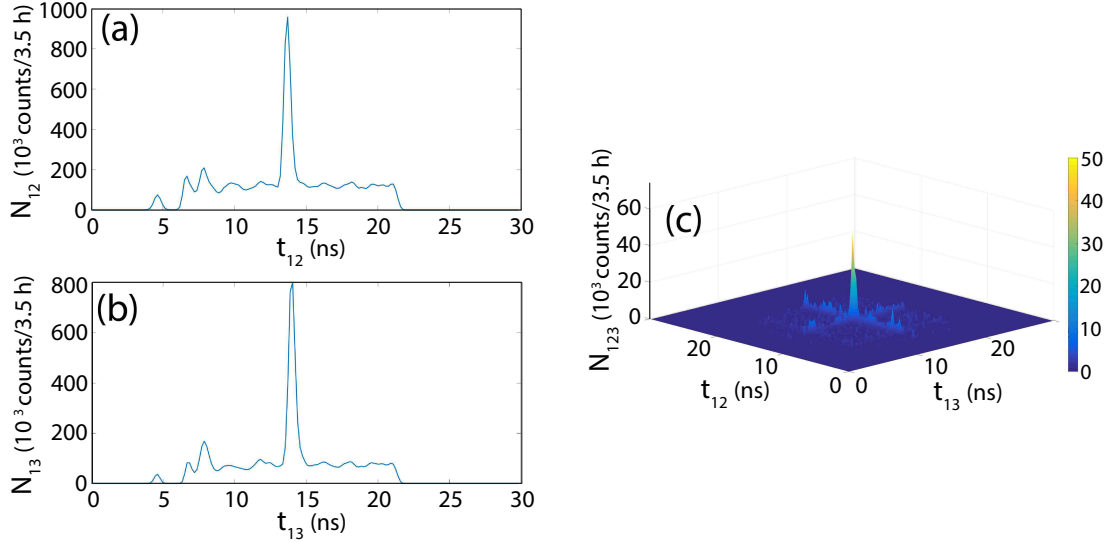


Figura 2.24: Cuentas individuales  $N_{12}$  y  $N_{13}$ , y cuentas de coincidencias  $N_{123}$  en una ventana de 20 ns.

6. Finalmente se sustituyen estos valores en la expresión (2.4), y este procedimiento se repite varias veces, por cada toma, se obtiene más estadística, hasta que el valor converge (figura (2.25)).

7. Finalmente se utilizó un algoritmo de corrección de las cuentas de detección al post-procesar los datos para poder eliminar las cuentas de ruido debidas al after-pulsing, y las cuentas de ruido provenientes de cuentas oscuras o fluctuaciones. El algoritmo utilizado se vuelve necesario en los casos de detección modo compuerta, para el tipo de detectores (APDs de InGaAs de id-201) se vuelve imprescindible a la hora de manejar altas frecuencias de repetición, altas probabilidades cuánticas de detección, ventanas de compuertas grandes y tiempos muertos pequeños [26].

### V.1. Relación entre el valor de la función de correlación de segundo orden $g^{(2)}(0)$ y número de Schmidt K

Para cada valor de la cintura de acoplamiento con el que medimos la JSI también medimos el valor de  $g^{(2)}(0)$  de un brazo del cono del SPDC, mientras el otro brazo

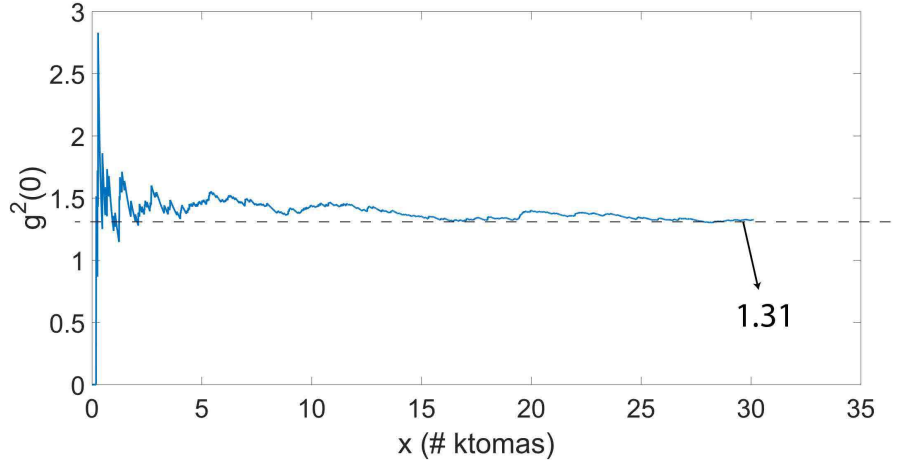


Figura 2.25: Valor de  $g^{(2)}(0)$  contra número de mediciones del ensemble, al tomar la estadística adecuada se llega a un valor estable.

fue ignorado (como se muestra en la figura (2.23)). Es importante destacar que la medición de  $g^{(2)}(0)$  que hicimos es realizada con detectores una resolución temporal finita donde es necesario promediar en el tiempo la función  $g^{(2)}(\tau)$  infinitesimal, esto se debe al tiempo de coherencia de los fotones que esta en el régimen de femto-segundos comparado con los cientos de pico-segundos de las ventanas de detección. En lugar de sacar promedios temporales, lo que se suele hacer es sacar promedios de ensemble de nuestro experimento, de acuerdo a la ecuación  $g^{(2)}(0) = \frac{N_{123}N_1}{N_{12}N_{13}}$ , donde  $N_1$  es el número de compuertas de detección abiertas en dos detectores de fotones id-201, este número es proporcional al número de pulsos del láser de bombeo que es de 90 millones de pulsos por segundo, en nuestro caso,  $N_1$  es reducido en el prescaler a 3 millones de pulsos por segundo y también presenta una corrección debida al número de compuertas perdidas durante el tiempo muerto de los detectores de  $10\mu s$ . El número de cuentas detectadas en el APD1 disparado por las  $N_1$  compuertas es  $N_{12}$ , mientras que el número de cuentas detectadas en el APD2 que también es disparado por  $N_1$  es  $N_{13}$ , y finalmente, el número de cuentas en coincidencia entre ambos APD's en relación con las  $N_1$  compuertas son  $N_{123}$ . Estos números se acumulan cada 100 mili-segundos de tiempo de exposición por medición usando un etiquetador de tiempos id-800, esto significa que cada décima de segundo obtenemos valores distintos de  $N_{12}$ ,  $N_{13}$  y  $N_{123}$ , obviamente  $N_1$  se acumula constantemente así que

tendremos distintos valores de  $g^{(2)}(0)$  para cada experimento o medición, acumulamos las distintas  $N$ 's y re-calculamos valores de  $g^{(2)}(0)$  para muestras de 5000 segundos y para esta estadística vemos que el valor converge en 25,000 segundos (como se muestra en la figura (2.25)).

Existe una relación entre el grado de correlación de los dos fotones (sistema bifotón) y el valor de  $g^{(2)}(0)$  con  $\tau = 0$  para el flujo de fotones de un único brazo.

$$g^{(2)}(\tau = 0) = 1 + P = 1 + \frac{1}{K} \quad (2.5)$$

donde  $P$  es la pureza and  $K$  es el número de Schmidt ([15]).

Usando la relación  $K = 1/(g^{(2)}(0) - 1)$  pudimos calcular los números de Schmidt y compararlos con los obtenidos por descomposición directamente de las JSI's (ver tabla (2.2)). Encontramos una buena concordancia entre estos valores. Es importante notar que existen algunas discrepancias que atribuimos a que el valor de  $g^{(2)}(0)$  es sensible a las fases complejas de las funciones de amplitud espectral que son ignoradas en la medición de la JSI.

$W_f$ ( $\mu\text{m}$ )	$K(JSI)$	$g^{(2)}(0)$	$K(g^{(2)}(0))$
225	1.89	1.55	1.81
524	1.18	1.82	1.21
691	1.05	1.92	1.08
774	1.07	1.83	1.20
1338	1.20	1.86	1.16

Tabla 2.2: Número de Schmidt  $K$  como función de la cintura de acoplamiento  $W_f$ .

La figura (2.26) muestra 5 puntos experimentales de los pares  $(g^{(2)}(0), K)$  y la curva teórica  $g^{(2)}(0) = 1 + 1/K$ . Es importante decir que el valor de  $K$  se calculó directamente de las mediciones experimentales de JSI's (esto significa que es una medición de ambos fotones), mientras que el valor de  $g^{(2)}(0)$  es solamente la medición de uno de los fotones.

Observamos que en el caso de  $W_f = 691 \mu\text{m}$  casi tenemos un estado factorizable  $K \rightarrow 1$  que es conocido como un doble-haz comprimido individual<sup>11</sup>  $g^{(2)}(0) \rightarrow 2$ . El

<sup>11</sup>single twin-beam squeezer



valor de  $g^{(2)}(0) = 2$  exhibe el comportamiento de una distribución térmica del número de fotones. Es interesante notar que la información del grado de entrelazamiento  $K(JSI)$  puede ser obtenida de la medición del valor de  $g^{(2)}(0)$  de un único brazo de la fuente SPDC.

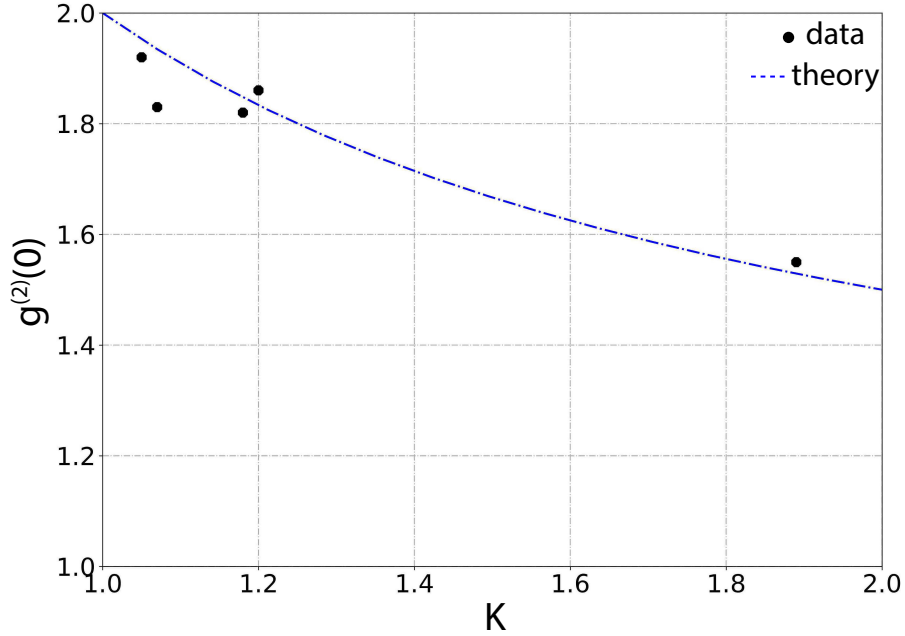


Figura 2.26: Comparación entre  $g^{(2)}(0)$  y  $K$ .

## VI. Medición de la Correlación Espacial

Para medir la correlación espacial existente entre ambos fotones, es necesario poder filtrar cortes del anillo, y poder medir las coincidencias en esa región. El uso de un par de rendijas delgadas, nos puede ayudar a constreñir regiones horizontales, pero las pérdidas de luz, se vuelven importantes a la hora de realizar tales mediciones, es por esto, que la implementación de detectores más sofisticados como los APD's id-230 de la marca id-quantique fue de gran ayuda, como se explica en el apéndice C, estos detectores tienen 50 veces mayor relación señal a ruido que los detectores id-201 que además tienen que ser disparados. En la figura (2.27) se muestra la adaptación de estos nuevos detectores, que nos permiten quitarnos 2 elementos, el prescaler, y la lógica de disparo de ambos APD's.

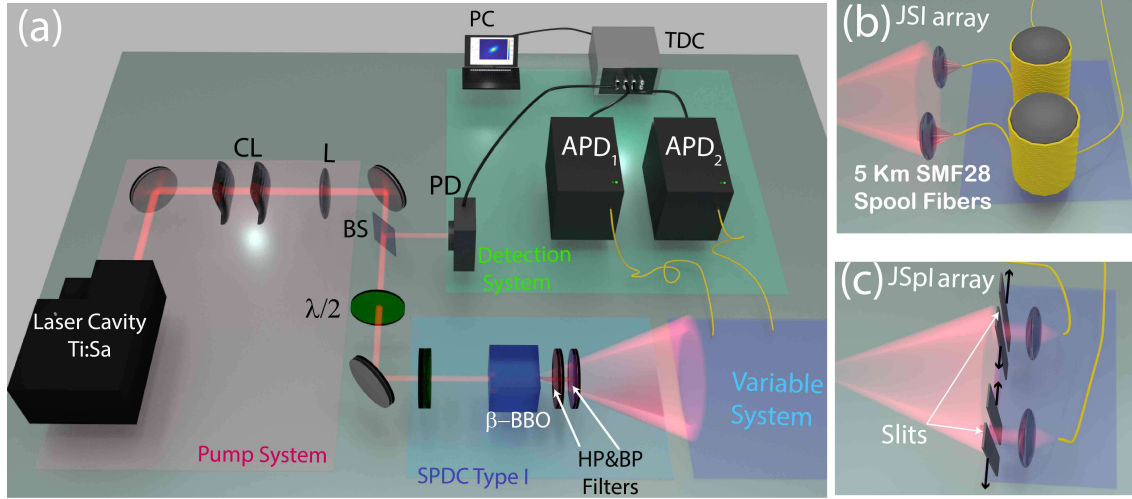


Figura 2.27: (a) Arreglo experimental utilizando APD's id-230 de free-running. (b) Medición de la Intensidad Espectral Conjunta. (c) Medición de la Intensidad Espacial Conjunta

El parámetro de control más efectivo con el que pudimos manipular la distribución de intensidad espacial fue el tamaño de la cintura del haz de bombeo  $W_0$ , utilizamos cuatro configuraciones de lentes para ser capaces de manipular la cintura del haz de bombeo en un rango de  $130 \mu\text{m}$  a  $600 \mu\text{m}$  (ver tabla (2.3)).

L (focal length in cm)	$W_0$ ( $\mu\text{m}$ )
50	130
75	161
100	192
without lens	600

Tabla 2.3: Pump waist  $W_0$  as a function of the focal length

Utilizamos un valor de cintura del haz de acoplamiento fijo de  $W_f = 225 \mu\text{m}$  que maximiza el acoplamiento de los fotones a fibras ópticas. Podemos observar que la correlación espectral más positiva se logró utilizando una cintura del haz de bombeo muy desenfocado de esta cintura (sin ninguna lente)  $W_0 = 600 \mu\text{m}$ , la figura (2.28) muestra las distribuciones espaciales medidas experimentalmente (parte superior) y las simulaciones numéricas (parte inferior) incluyendo el efecto de convolución del par de rendijas con un ancho de  $300 \mu\text{m}$  con la resolución perfecta de la distribución

real (líneas punteadas), en otras palabras, nuestros pixeles de observación son de  $300 \mu\text{m}$  hace parecer que la distribución es mayor. El caso de cero correlación se encuentra para un valor de cintura de  $W_0 = 130 \mu\text{m}$ , que no es deseado, ya que no empata con la cintura de bombeo utilizado en el control de correlación espectral de la sección anterior. Viendo la figura (2.22) y la figura (2.28), encontramos el estado completamente factorizable usando una cintura de bombeo de  $W_0 = 600 \mu\text{m}$  y una cintura de acoplamiento de  $W_f = 691 \mu\text{m}$ .

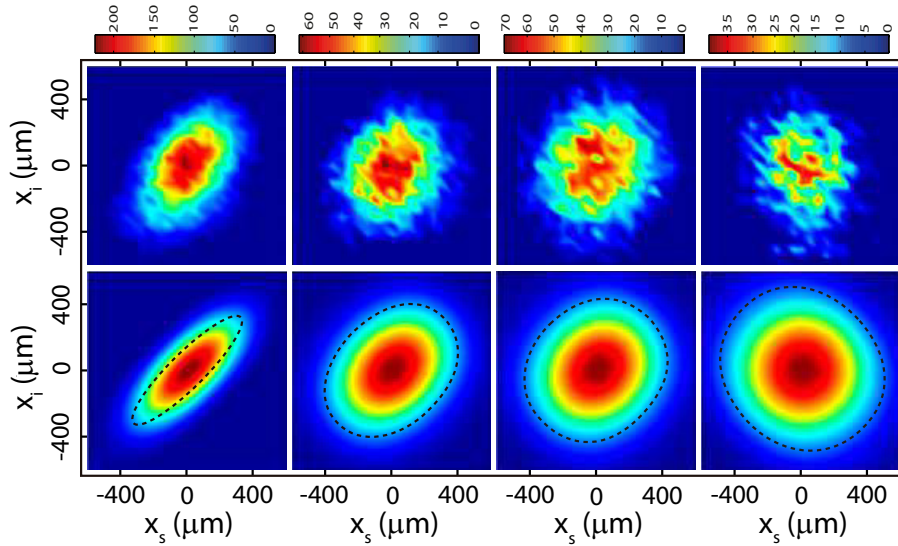


Figura 2.28: Mediciones experimentales de la Intensidad Espacial Conjunta para los cinturones de bombeo  $W_0 = \{600 \mu\text{m}, 192 \mu\text{m}, 161 \mu\text{m}, 130 \mu\text{m}\}$  de izquierda a derecha. Las simulaciones correspondientes se muestran en la parte de abajo.

## VII. Medición de correlaciones Espectro-Espaciales usando un par de rendijas

Con el fin de poder medir el grado de correlación entre las posiciones espaciales y las componentes espectrales de las parejas de fotones, hicimos un conjunto de mediciones de JSI's pero construyendo las aperturas de las lentes usando rendijas con anchura de  $300 \mu\text{m}$  para seleccionar puntos en el eje x del cono. Utilizamos la cintura de bombeo  $W_0 = 600 \mu\text{m}$  correspondiente a la correlación espacial positiva (primera imagen en la figura (2.28)), y la cintura de acoplamiento  $W_f = 225 \mu\text{m}$

correspondiente a la correlación espectral más negativa (primera imagen en figura (2.22)), luego movemos la rendija de cada brazo en 3 distintos puntos en pasos de  $200 \mu\text{m}$  en total barremos 9 puntos en una área cuadrada de la distribución espacial, en cada punto hacemos una medición con el espectrómetro de fibra para obtener una JSI limitada por el par de rendijas y seleccionando solo una  $x_s$  y  $x_i$  del cono, básicamente estamos combinando los esquemas (b) y (c) en la figura (2.27). La figura 2.30 muestra los 9 puntos que seleccionamos sobre la distribución espacial (izquierda) y la matriz de pedazos de JSI por cada punto, que nos indican que composición de componentes de longitudes de onda existen en cada punto espacial. Notamos varias cosas:

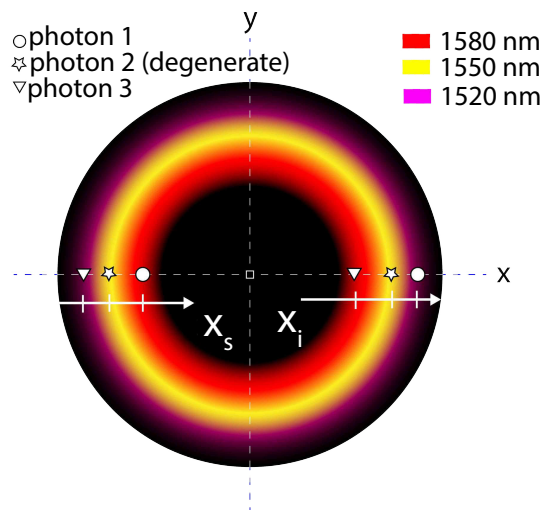


Figura 2.29: Esquema del acomodo de los fotones sobre el anillo de SPDC visto en el plano de detección. Podemos imaginar al anillo completo con un conjunto de sub-anillos con distintas longitudes de onda. Los 3 pares de fotones corresponden a los 3 elementos de matriz 3, 5, 7 en la figura (2.30). Solo la pareja de fotones degenerados se encuentran sobre el mismo sub-anillo.

- La suma de todas las 9 piezas es exactamente equivalente a la JSI completa mostrada en la figura (2.22).
- Trazar sobre las longitudes de onda es exactamente equivalente a la distribución espacial conjunta de la figura (2.28).

- La matriz contiene toda la información espacio-temporal de los 2 fotones, y es la discretización de la función de amplitud conjunta  $f(\lambda_s, \lambda_i, x_s, x_i)$  esto es una función de 4-variables en la función  $M_{ij}(\lambda_s, \lambda_i)$  donde  $i$  es el índice correspondiente a la coordenada  $x_s$  y  $j$  a la coordenada  $x_i$ .
- La matriz de JSI's es un tipo de matriz simétrica, ya que  $M_{ij} = M_{ji}$ , podemos observar la anti-diagonal, donde 1, 5 y 9 tienen la misma distribución (correspondiendo a fotones degenerados), 4 and 8 también tienen la misma distribución corrida en la dirección superior de la anti-diagonal, y 2 y 6 tienen el mismo corrimiento pero en la posición anti-diagonal contraria. Las distribuciones más desplazadas fueron 3 y 7 pero en direcciones contrarias.
- Los puntos en los que el desplazamiento de longitudes de onda fueron mayores corresponden a fotones colocados en posiciones espaciales distintas del anillo de SPDC, mientras un fotón se acomode en la parte interior del anillo con cierta longitud de onda, su pareja se colocará en la parte externa del anillo con la longitud de onda complementaria<sup>12</sup> (ver la figura (2.29)).

## VIII. **Discusión del control de correlación espectro-espacial**

La función de amplitud conjunta (ecuación (1.23)) es una función compleja que depende de varios parámetros, y en general para ser descrita completamente requerimos de un espacio de 6 dimensiones. Cuando nosotros hablamos de la medición de JSI, estamos quitándonos las dependencias sobre las variables espaciales, y cuando medimos la correlación espacial, nos estamos quitando la información sobre las variables espectrales. Al acoplar a fibra óptica, estamos también eliminando información espacial, traslapando la verdadera función de amplitud conjunta con los modos de acoplamiento a la fibra óptica, es claro que al hacer esto, siempre perdemos parte de la información original del estado. Intentar caracterizar el estado completo  $|\Psi\rangle_{PDC}$  no es una tarea sencilla, de hecho estamos siempre limitados a nuestros aparatos de medición, limitados a sus tiempos de respuesta y a su resolución espacial, por lo que siempre tendremos un promedio temporal en cualquier medición y los resultados

<sup>12</sup>para satisfacer la conservación de energía  $\omega_s + \omega_i = \omega_p$

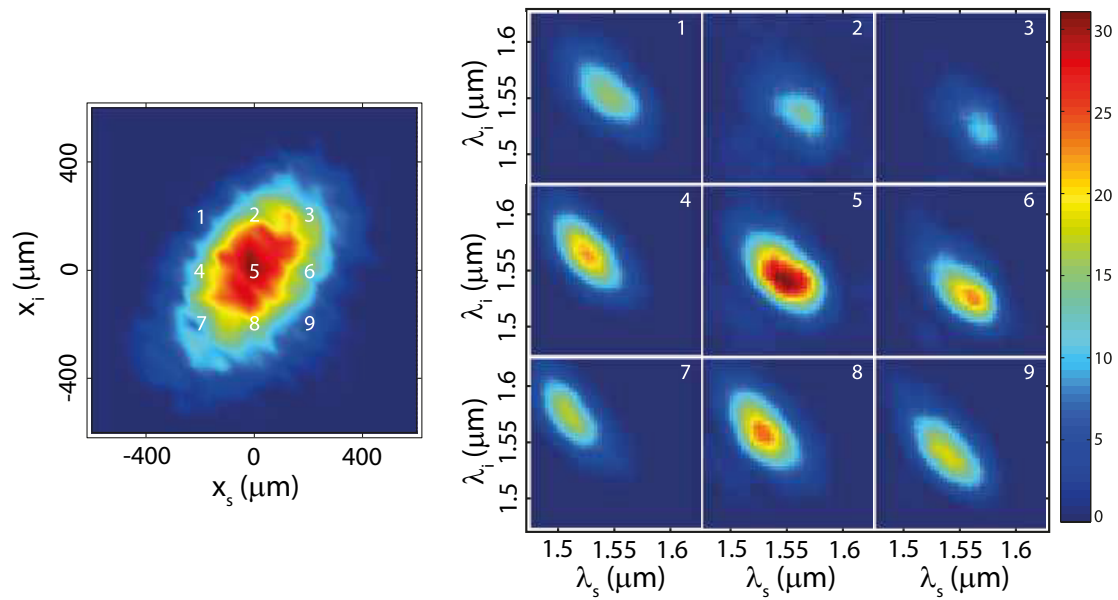


Figura 2.30: Correlación espectro-espacial vista como una matriz de JSI's. Los 9 puntos escaneados sobre la distribución espacial se muestran de lado izquierdo. Las distribuciones espectrales están acomodadas sobre una matriz de  $3 \times 3$  del lado derecho.

que observamos siempre serán una especie traslape o convolución entre el tamaño espacio-temporal del proceso y la ventana espacio-temporal de nuestro aparato de medición. Además, otra propiedad difícil de medir son las fases complejas de las amplitudes de probabilidad, y digo difícil, más no imposible, ya que actualmente existen varias técnicas como FROG o SPYDER que nos permiten recuperar la amplitud y la fase de pulsos ópticos, sin embargo, en este trabajo nos enfocamos solo en medir intensidades, o módulos de la amplitud compleja de la función de amplitud.

Es posible discretizar la función de seis variables  $f(\omega_s, \theta_s, \phi_s, \omega_i, \theta_i, \phi_i)$ . Primero utilizando el argumento de que en un cono de SPDC los fotones señal y acompañante salen en direcciones opuestas formando un cono simétrico, por lo que ( $\phi_s \approx \phi_i \approx \text{constante}$ ), por lo que nuestra nueva función a medir es  $f(\omega_s, \theta_i, \omega_i, \theta_i)$ . En el experimento a plantear será más fácil medir el desplazamiento de un par de rendijas con aperturas de  $\approx 300 \mu\text{m}$  en la dirección  $x$  (ver la figura (2.27c)), por lo que la función que medimos es en realidad  $f(\omega_s, x_s, \omega_i, x_i)$ , que está relacionada con los ángulos simplemente por  $x = z \tan(\theta)$  donde  $z$  es la distancia que hay entre el cristal y los detectores. Una rendija junto con la fibra óptica y el detector, formarán un sistema de detección, desplazando cada rendija en pasos de  $100 \mu\text{m}$  y utilizando el espectrómetro de fibra por cada coordenada  $(x_s, x_i)$ , podemos medir una matriz de JSI's, en la figura (2.31(a)) se muestra esta matriz, donde uno tiene la versión discretizada de la función de amplitud conjunta. Es posible obtener la información puramente espectral o puramente espacial a partir de ésta matriz. Sí uno traza sobre todas las coordenadas espaciales de manera coherente (considerando la fase de cada elemento de la matriz), uno recupera la JSI (ver figura (2.31b)). Si en vez de sumar sobre las coordenadas espaciales, uno suma incoherentemente (solo las magnitudes) de todas las componentes espectrales, uno recupera la correlación espacial (ver figura (2.31c))

Es posible también medir las correlaciones internas de cada fotón  $(\omega_s, x_s)$  y  $(\omega_i, x_i)$ . Lo que nos dice que tan correlacionada está cada frecuencia con el espacio. Fijando parámetros como la longitud del cristal, el ángulo de empatamiento de fases y el ancho de banda del láser, es posible ver el comportamiento límite de la función de amplitud conjunta al variar dos parámetros: la cintura del haz de bombeo ( $W_0$ ) y la cintura del haz de acoplamiento ( $W_f$ ). En la figura (2.32) se muestra el

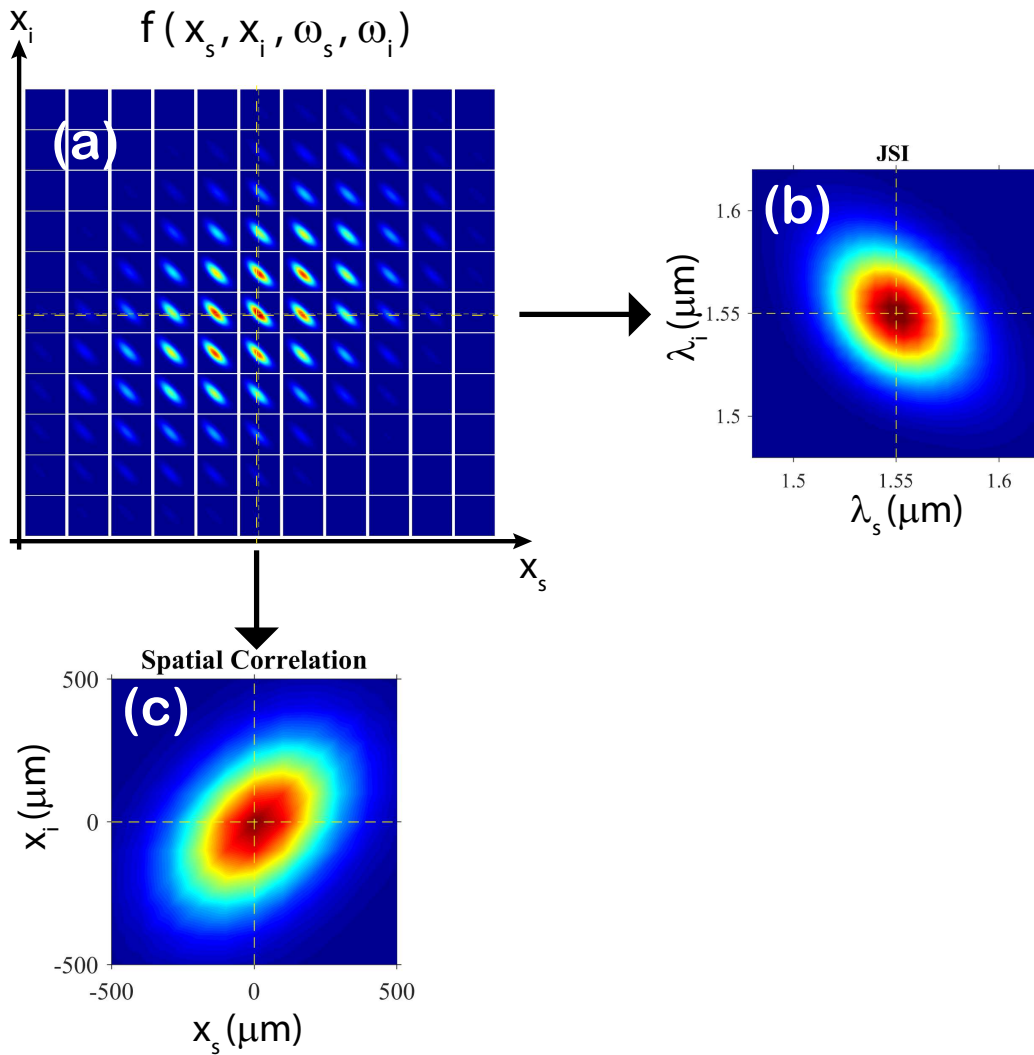


Figura 2.31: Correlación espectro-espacial vista como una matriz de JSI's.  $f(\omega_s, \omega_i, x_s, x_i)$  contiene toda la información necesaria para recuperar la JSI y la correlación espacial.



caso límite de una cintura del haz bombeo muy enfocado de apenas  $10 \mu\text{m}$ , y una cintura del haz de acoplamiento muy extendido, lo que nos permite garantizar un desacoplamiento entre las componentes espectrales y espaciales. En la figura (2.32b) se observa la correlación espacial, también presenta correlación cero, pero en cambio la figura (2.32c) muestra que la JSI presenta correlación completa. Las figuras (2.32d) y (2.32e) muestra la ausencia de correlaciones internas de cada fotón.

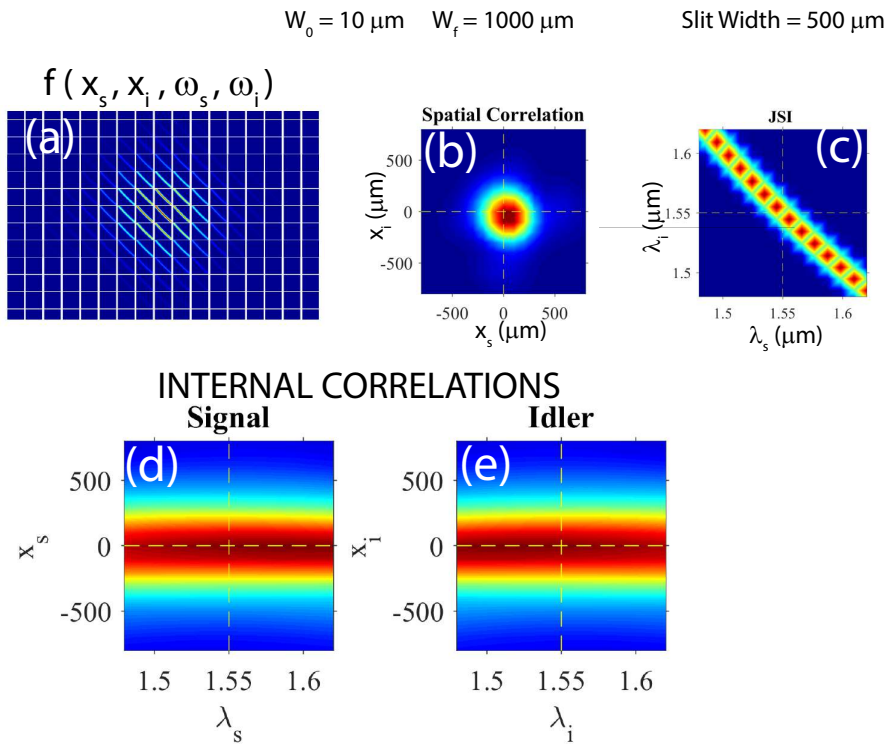


Figura 2.32: Caso límite de haz de bombeo muy enfocado.

Para el caso contrario de un haz de bombeo muy extendido y una cintura del haz de acoplamiento pequeño, las correlaciones internas se vuelven perfectas (ver figuras (2.33d) y (2.33e)). En este caso la correlación espacial estará fuertemente marcada y concuerda perfectamente con nuestras mediciones experimentales (ver primer columna de figuras (2.28)).

Es importante hacer notar que en general las correlaciones espaciales y espectrales son muy fuertes entre la pareja de fotones, ya que estos nacen de un proceso paramétrico en el que la energía y el momento son conservados. Utilizando un bombeo

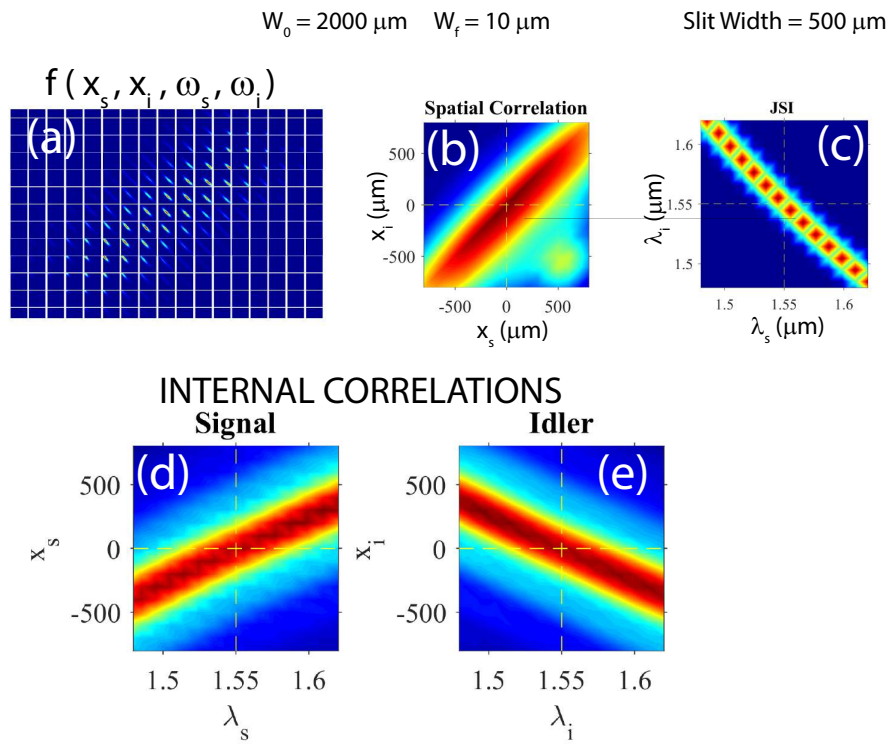


Figura 2.33: Caso límite de haz de bombeo extendido.

perfectamente monocromático, las correlaciones de los fotones se vuelven perfectas. Esta correlación se va perdiendo conforme cambiamos a un bombeo pulsado, en el cuál una distribución de frecuencias generadoras  $\omega_p$  hacen difusa la correlación perfecta, hasta tal grado de eliminarla. En el caso de correlación intermedia, podemos utilizar la información de las correlaciones internas de los fotones, para ver como se distribuyen las diferentes frecuencias en el cono de luz. En la figura (2.34) se muestra la llamada correlación X de la pareja de fotones que muestra de forma cualitativa cómo se distribuyen en el espacio las frecuencias del fotón señal (color rojo) en relación con como se distribuyen las frecuencias del fotón acompañante (azul). Un punto de el espacio-frecuencia del fotón acompañante mapea una región de donde podría estar su fotón gemelo. Los fotones que están degenerados ( $\lambda \approx 1.55 \mu\text{m}$ ) en el centro ( $x \approx 0 \mu\text{m}$ ) forman un estado completamente factorizable. Por lo que acoplar fotones utilizando un modo de colección que tome solo esos fotones centrales es lo que hacemos en este trabajo cuándo elegimos una cintura del haz de bombeo y una cintura del haz de acoplamiento adecuados.

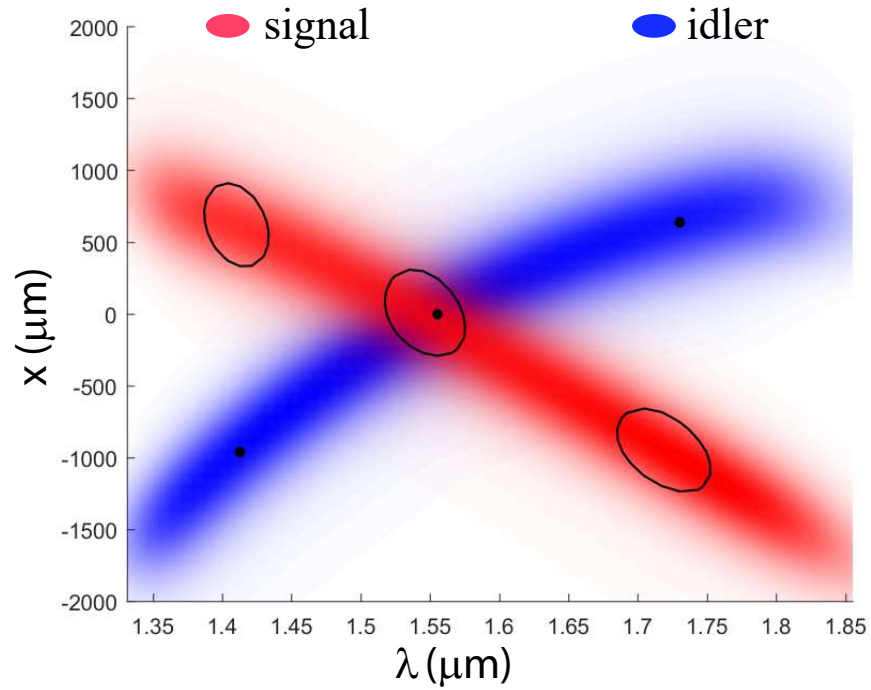


Figura 2.34: Correlación X de la pareja de fotones.

## IX. Conclusiones del control de correlación espectro-espacial

Es posible construir estados cuánticos en demanda a las necesidades que tengamos, las correlaciones espectrales pueden desaparecer utilizando varias técnicas, pero primero se hace necesario eliminar el grado de correlación espacial, esta información casi siempre se pierde al haber acoplado la pareja de fotones a los modos de una fibra óptica mono-modo por lo que acoplar a fibra, será usado como un tipo de traza sobre las variables espaciales. En nuestro primer análisis nos olvidamos de las coordenadas espaciales una vez acoplado nuestro estado a las fibras, y posteriormente se buscó un parámetro para controlar las correlaciones espectrales, que fue usar el tamaño de la cintura del haz de acoplamiento  $W_f$  con el cuál pudimos controlar muy precisamente el grado de correlación de la JSI (ver figura (2.22)). Otra forma de separar las componentes espaciales de las espectrales es utilizar un diseño en el que los fotones se producen de manera colineal ( $\theta_s \approx \theta_i \approx 0$ ), ya que en este caso las componentes transversales del vector de onda tienden también a cero (pero este es el caso trivial). La última manera es utilizando un haz de bombeo sumamente enfocado  $W_0 \approx 0 \mu\text{m}$  (como se demuestra en el trabajo [17]) como hemos demostrado aquí también (ver figura (2.32)).



## Parte II

# Interferencia Cuántica



---

## 3

# Tomografía de Coherencia Óptica Cuántica

La Tomografía de Coherencia Óptica Cuántica (QOCT por sus siglas del inglés: *Quantum Optical Coherence Tomography*) es una técnica no invasiva que pretende obtener imágenes tridimensionales de alta resolución (en el orden de micrómetros) de tejidos biológicos semi-transparentes para el infrarrojo ( $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ ), como son: los tejidos cutáneos, la retina y nervios ópticos, tejidos arteriales, etc. La técnica de QOCT es básicamente un interferómetro de Hong-Ou-Mandel (HOM) en el cual se ha sustituido el espejo de uno de los caminos por una muestra de dos o más capas. El interferómetro de HOM se basa en el fenómeno de interferencia cuántica de parejas de fotones entrelazados. Cuando un par de fotones indistinguibles<sup>1</sup> inciden por los dos puertos de entrada de un divisor de haz simétrico (50/50), ocurre el efecto denominado *coalescencia* del par de fotones o *interferencia de HOM*. En el apéndice C se explica con detalle este fenómeno.

En este capítulo describiremos los aspectos principales de la tomografía de coherencia óptica cuántica y para comparar sus ventajas, describiremos un poco la técnica clásica de tomografía de coherencia óptica (OCT por sus siglas en inglés).

---

<sup>1</sup>indistinguible se refiere a que tienen la misma frecuencia, polarización y camino óptico

## I. Tomografía de Coherencia Óptica

En 1986 Fujimoto y compañía propusieron una técnica basada en pulsos de femto-segundo para la medición de sistemas biológicos. Utilizaron una técnica que usaba la correlación cruzada para medir la profundidad de la cornea del ojo de un conejo (*in vivo*), y la piel humana (*in vitro*), midieron las capas de la epidermis de un trozo de piel del tobillo [27].

En 1988 A. Fercher y compañía utilizaron luz parcialmente coherente para medir la longitud óptica de un ojo humano (*in vivo*) y midieron las relación de incertidumbre  $\Delta\omega\Delta l \sim c/2$  con esta relación encontraron que para una fuente superluminiscente con  $\lambda_0 = 0.8 \mu\text{m}$  ( $\Delta\lambda \sim 10 \text{ nm}$ ) se tenía una longitud de coherencia de  $\Delta l \sim 5\mu\text{m}$  y para una fuente de láser semi-conductor ( $\Delta\lambda \sim 2 \text{ nm}$ ),  $\Delta l \sim 25 \mu\text{m}$ , esta fuente corresponde a un láser pulsado de 100 fs [28].

En 1991 D. Huang y J. Fujimoto utilizan el primer interferómetro de Michelson de fibra óptica iluminado con luz de baja coherencia temporal generada por una fuente de diodo superluminiscente (SLD). Con éste dispositivo se midió OCT de una retina de ojo humano y de una arteria coronaria[29].

En 1997 Chinn y compañía usan interferometría de longitud de onda sintonizable [30] y en 1998 Hausler y Lindler generaron imagenes OCT usando interferometría espectral[31].

En el año 2000 U. Margner y compañía comentan la posibilidad de encontrar información en el espectro del OCT [32], y en ese mismo año Leitgeb y compañía dan el primer resultado de OCT espectral usando un método basado en el dominio de Fourier del OCT [31].

### I.1. Interferómetro de OCT

Comenzamos con un haz de luz de baja coherencia o un pulso ultra-corto  $E(t)$  que atraviesa un divisor de haz simétrico (BS) y es dividido en dos rayos  $E_1(t)$  y  $E_2(t)$  (ver la figura 3.1). El rayo que se dirige hacia la muestra será representado con rojo y etiquetado como  $E_S(t)$  y el rayo que es reflejado hacia un espejo móvil de referencia, será representado por el rayo color azul y se llama  $E_R(t)$ , estos rayos tienen una representación en el espacio de frecuencias dado por sus transformadas



de Fourier

$$\begin{aligned} E_S(t) &= \int d\Omega E_S(\Omega) e^{i\Omega t} \\ E_R(t) &= \int d\Omega E_R(\Omega) e^{i\Omega t}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

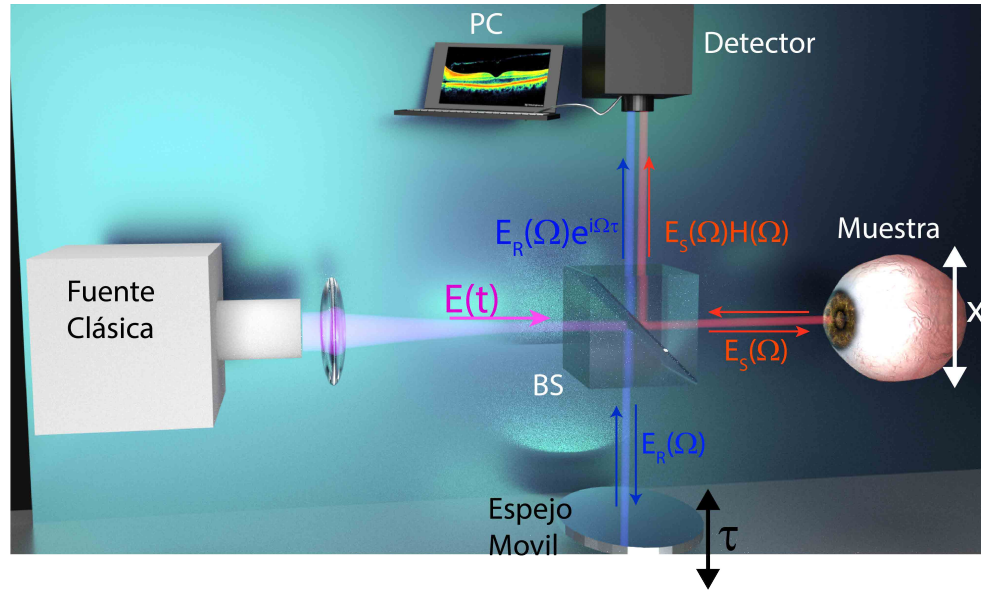


Figura 3.1: Interferómetro de OCT.

El campo que se dirige hacia el espejo adquiere una fase proporcional al desplazamiento del espejo  $E_R(\Omega) \rightarrow E_R(\Omega) \exp(i\Omega\tau)$ . Mientras que el campo que se reflejó en las distintas capas de la muestra se modifica por la función de respuesta del medio, que en el espacio de frecuencias es una simple multiplicación por una función de transferencia  $H(\Omega, x)$  que dependerá tanto de la posición de la muestra, del material del que esta compuesta, y del número de capas reflectoras  $E_S(\Omega) \rightarrow E_S(\Omega)H(\Omega, x)$ . Los dos campos: muestra y referencia se recombinan en el BS y llegan a un detector, lo que el detector observa es la suma del módulo cuadrado de la superposición de ambos campos:

$$I(\tau, x) = \int d\Omega |E(\Omega) \exp(i\Omega\tau) + E(\Omega)H(\Omega, x)|^2 \quad (3.2)$$

Al desarrollar el módulo cuadrado es posible describir la intensidad detectada como:

$$I(\tau) \propto \Gamma_0 + 2\text{Re}\{\Gamma(\tau)\} \quad (3.3)$$

donde

$$\Gamma_0 = \int d\Omega [1 + |H(\Omega)|^2] S(\Omega) \quad (3.4)$$

es el término debido a la detección de las intensidades aisladas del campo muestra y campo referencia. El término de interferencia es

$$\Gamma(\tau) = \int d\Omega H(\Omega) S(\Omega) \exp(-i\Omega\tau) = h_c(\tau) * s(\tau). \quad (3.5)$$

En la expresión para  $\Gamma(\tau)$  está incluida la información de la muestra a través de la función de transferencia  $H(\Omega)$ , y se traslapa con el espectro de la fuente  $S(\Omega) = |E(\Omega)|^2$ , también esta función es igual a la convolución de la función de respuesta de la muestra  $h_c(\tau)$  y la función de correlación de la fuente  $s(\tau)$  que son las transformadas inversas de Fourier de la función de transferencia y el espectro, respectivamente. En la figura (3.2) se muestra un interferograma de OCT obtenido para una muestra de 3 capas, el ancho de la función  $\Gamma(\tau)$  es inversamente proporcional al ancho espectral de la fuente  $\tau_c \propto 1/\Omega$ ; esto es el tiempo de coherencia de la fuente de OCT disminuye conforme su ancho de banda aumenta.

## II. Tomografía de Coherencia Óptica Cuántica

En 2002 Abouraddy y colaboradores propusieron una nueva técnica para realizar OCT utilizando una fuente de luz no-clásica de fotones entrelazados a la que llamaron *Tomografía de Coherencia Óptica Cuántica* (QOCT). Esta técnica ofrece ventajas considerables respecto al OCT debido a que mejora en tres aspectos principales: la resolución axial, la cancelación de dispersión y tiene una mayor sensibilidad [33].

En 2003 M. Nasr y compañía lograron probar experimentalmente la cancelación de la dispersión en QOCT utilizando una muestra de 10 mm de ZnSe ([34], [35]).

En 2004 M. Booth y compañía proponen una técnica de QOCT sensitiva a la

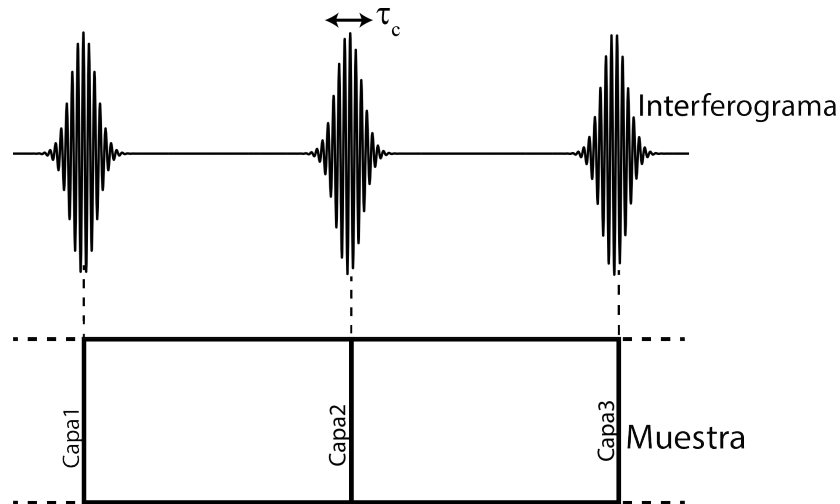


Figura 3.2: Interferograma de OCT.

polarización que permite seccionar axialmente cambiando la polarización[36].

En 2004 S. Carrasco, P. Torres y L.Torner demuestran teóricamente que utilizar cristales con cuasi-phase-matching puede mejorar significativamente la resolución en QOCT [37].

En 2009 J. Lavoie y compañía proponen una nueva técnica que tiene todas las ventajas que el QOCT, pero en lugar de utilizar fotones individuales, utilizan dos pulsos de femtosegundos, uno con chirp y el otro con anti-chirp, obteniendo un dip tipo HOM, pero con 10 millones de veces mas señal[38], [39].

En 2009 M. Nasr y colaboradores realizaron la primera tomografía QOCT a una muestra biológica, en este caso utilizaron la capa de una cebolla con recubrimiento de nanopartículas de oro para mejorar el contraste [40].

En 2012 Dorilian Lopez y Lukas Novotny presentaron una implementación de QOCT usando fotones entrelazados con geometría colineal, además de proponer utilizar un sistema completamente en fibra óptica [41]

En 2013 Masayuki Okano demuestra la mejora sustancial de resolución en QOCT comparando con la técnica anterior OCT, utilizando una muestra de 5 mm de ZnSe comprueba el efecto de la cancelación de dispersión usando un dip de  $2 \mu\text{m}$  [42].

En 2015 Masayuki Okano y colaboradores realizan el QOCT con mayor resolución que existía hasta la fecha, rompiendo el record que existía de  $0.75 \mu\text{m}$  con una fuente

de baja coherencia en OCT, llegando a tener dips de HOM de tan solo  $0.54 \mu\text{m}$  utilizando una fuente de Tantalato de Litio con un cuasi-empatamiento de fases con chirp, logrando un ancho de banda tan grande como 166 THz [43].

En 2016 D. Lopez y compañía realizaron un análisis teórico de que mientras mayor sea el número de fotones entrelazados mayor será la resolución del QOCT, hacen un análisis usando tripletas de fotones mejorando la resolución por un factor de 4 [44].

En 2019 presentamos un modelo extendido para incluir parejas de fotones con correlaciones espectrales controlables y se observan ventajas al suprimir interferencias intermedias que aparecen en una muestra de 2 capas al utilizar un láser pulsado contra un láser de onda CW [1]. Este trabajo ya ha sido publicado y será desarrollado en el siguiente capítulo.

## II.1. Interferómetro de QOCT

Basándonos en la figura (C.3) del apéndice dedicado al tratamiento de la interferencia de Hong-Ou-Mandel (Apéndice C), y cambiando uno de los espejos por una muestra semi-transparente obtenemos el interferómetro de QOCT (ver la figura (3.3)). Como la fuente de luz es de un bifotón producido mediante SPDC, utilizaremos el formalismo del Apéndice C. Las coincidencias,  $C$ , a la salida de un BS están dadas por la ecuación (C.35):

$$C = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_s d\omega_i |f(\omega_s, \omega_i) - f(\omega_i, \omega_s)|^2,$$

donde  $f(\omega_s, \omega_i)$  es la función de amplitud conjunta y  $f(\omega_i, \omega_s)$  es la misma función pero bajo la operación de permutar los fotones señal y acompañante. Si la función de amplitud es perfectamente simétrica, entonces las coincidencias,  $C$ , serán siempre cero.

En la figura (3.3) se observa que uno de los fotones, digamos el fotón señal se fue por el camino de referencia, donde está el espejo móvil (este espejo es movido por un motor que agrega un retraso temporal  $\tau$ ), entonces este fotón adquiere una fase  $\Omega\tau$ , por lo que la amplitud de la función de onda correspondiente al brazo referencia se escribe

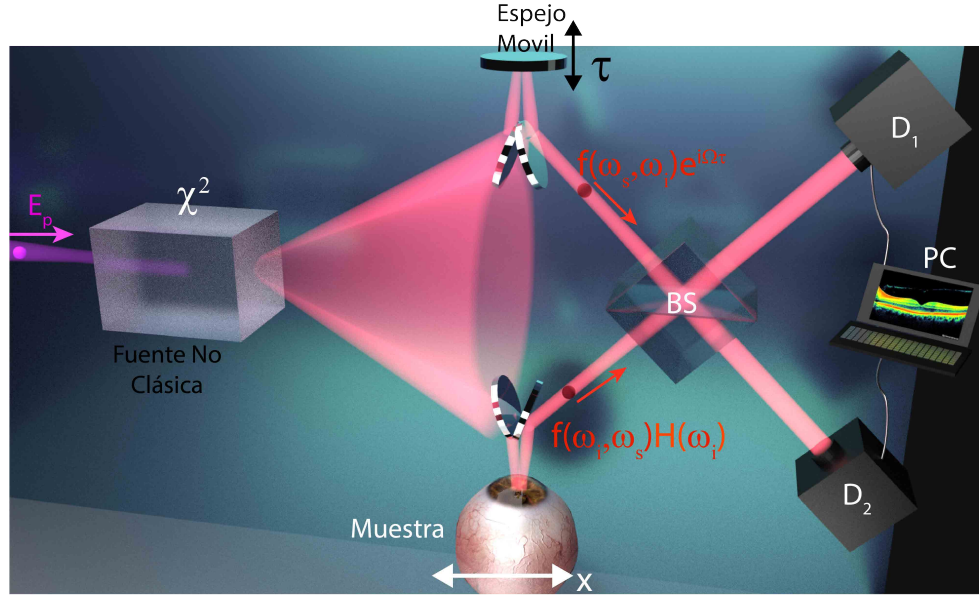


Figura 3.3: Interferómetro de QOCT.

$$f(\omega_s) \rightarrow f(\omega_s) \exp(i\Omega\tau). \quad (3.6)$$

El fotón acompañante, por su lado, es dirigido por el brazo de la muestra, y su amplitud de onda debe de ser multiplicada por la función de transferencia de la muestra  $H(\omega_i)$ , por lo que la amplitud de la función de onda correspondiente al brazo de la muestra se escribe como

$$f(\omega_i) \rightarrow f(\omega_i)H(\omega_i). \quad (3.7)$$

Es necesario tener una sola función de amplitud conjunta ya que en general los fotones estarán entrelazados, por lo que escribimos :

$$f(\omega_s, \omega_i) \rightarrow f(\omega_s, \omega_i)H(\omega_i) \exp(i\Omega\tau), \quad (3.8)$$

aquí está incluido el efecto del retraso temporal  $\tau$  del motor, así como también el efecto de las reflectividades de cada capa de la muestra.

La muestra es modelada por la función de transferencia que tiene la forma:

$$H(\omega) = \sum_{j=0}^N r_j \exp(i\omega T_j), \quad (3.9)$$

donde  $N$  es el número de capas,  $T_j$  es el desfase temporal adquirido al recorrer el trayecto hasta la capa  $j$  y  $r_j$  es la reflectancia de la capa  $j$ .

Al agregar el efecto del espejo y de la muestra, las coincidencias se escriben como:

$$P_c(\tau) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_s d\omega_i |f(\omega_s, \omega_i) H(\omega_i) \exp(i\Omega\tau) - f(\omega_i, \omega_s) H(\omega_s) \exp(-i\Omega\tau)|^2,$$

al factorizar el término del retraso temporal  $\exp(i\Omega\tau)$  podemos escribir la expresión para un interferograma QOCT en general:

$$P_c(\tau) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_s d\omega_i |f(\omega_s, \omega_i) H(\omega_i) - f(\omega_i, \omega_s) H(\omega_s) \exp(-i2\Omega\tau)|^2. \quad (3.10)$$

Ahora desarrollamos el módulo cuadrado, podemos escribir:

$$P_c(\tau) = \Gamma_0 - \text{Re}\{\Gamma(\tau)\} \quad (3.11)$$

con

$$\Gamma_0 = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_s d\omega_i (|f(\omega_s, \omega_i) H(\omega_i)|^2 + |f(\omega_i, \omega_s) H(\omega_s)|^2) \quad (3.12)$$

y

$$\Gamma(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_s d\omega_i f(\omega_s, \omega_i) H(\omega_i) f^*(\omega_i, \omega_s) H^*(\omega_s) \exp(i2\Omega\tau). \quad (3.13)$$

Al comparar la función  $\Gamma(\tau)$  de la ecuación (3.5) para OCT con la función  $\Gamma(\tau)$  de la ecuación (3.11) para QOCT, podemos observar que ésta última tiene un factor de 2 en el recorrido del retraso temporal por lo que presentará una resolución del doble

que la técnica de OCT. Esto también se podría entender por el lado del espectro del bi-fotón que es  $2\Omega$  comparado con el espectro de una fuente de luz clásica que es  $\Omega$ . También habrá una mejora en la relación señal a ruido, ya que el término de  $\Gamma_0$  en la ecuación (3.4) contiene un término unitario  $(1 + |H(\Omega)|^2)$  que se suma al término de interferencia, mientras que en QOCT el análogo a ese término no contiene un término unitario y además se resta del término de interferencia. En la figura (3.4) se muestra una simulación de un interferograma de QOCT para una muestra de 3 capas. El tiempo de coherencia en este caso es proporcional al inverso del espectro anti-diagonal de la pareja de fotones  $\tau_c \propto 1/(2\Omega)$ .

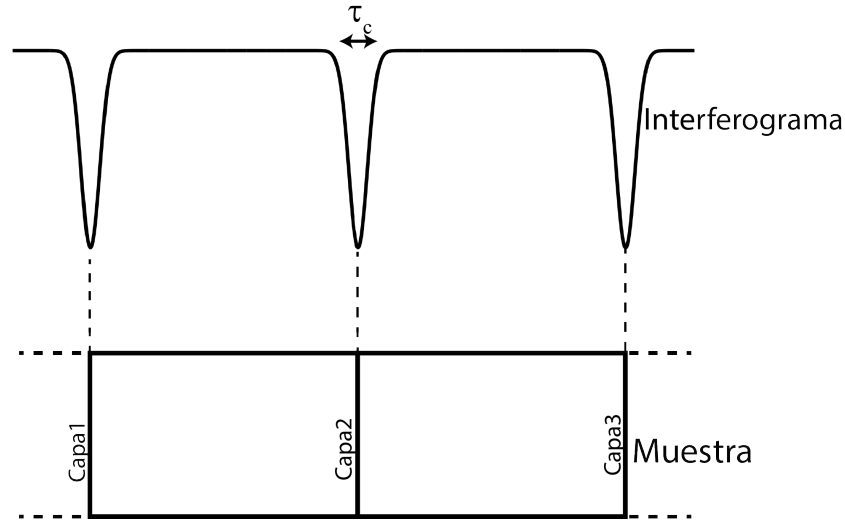


Figura 3.4: Interferograma de QOCT.

### III. Cálculo de QOCT para un bombeo monocromático

A continuación calculamos el interferograma QOCT utilizando fotones generados con un haz de bombeo monocromático (Ec.1.54).

$$|\Psi\rangle^{CW} = \int d\Omega f(\Omega, -\Omega) \hat{a}^\dagger(\Omega) \hat{a}^\dagger(-\Omega) |0\rangle. \quad (3.14)$$

Al igual que en Apéndice C, la probabilidad de coincidencias para este caso está dada por:

$$P_c = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega |f(\Omega) - f(-\Omega)e^{i2\Omega\tau}|^2, \quad (3.15)$$

donde ahora incluimos el efecto de la muestra sustituyendo la función  $f(\Omega)$  por  $f(\Omega)H(\Omega)$ .

$$P_c = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega |f(\Omega)H(\Omega) - f(-\Omega)H(-\Omega)e^{i2\Omega\tau}|^2, \quad (3.16)$$

al desarrollar obtenemos, la misma expresión que en la ecuación (3.11) pero con

$$\Gamma_0 = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega (|f(\Omega)H(\Omega)|^2 + |f(-\Omega)H(-\Omega)|^2) \quad (3.17)$$

y con

$$\Gamma(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega f(\Omega)H(\Omega)f^*(-\Omega)H^*(-\Omega)\exp(i2\Omega\tau). \quad (3.18)$$

Ahora hacemos dos consideraciones:

1.  $f(\Omega) = f(-\Omega)$  es simétrica.
2. Utilizamos una función de transferencia para una muestra de 2 capas.

La función de transferencia para dos capas es:

$$H(\Omega) = r_1 + r_2 \exp(i\Omega T) \quad (3.19)$$

con  $|r_1|^2 + |r_2|^2 = 1$ , y donde  $T = T_2 - T_1$  es la separación temporal que hay entre las dos capas. Escogemos que las reflectancias sean iguales, por lo que podemos reducir esta función a, simplemente:

$$H(\Omega) = r(1 + \exp(i\Omega T)). \quad (3.20)$$

El módulo cuadrado de la función de transferencia  $|H(\Omega)|^2 = |H(-\Omega)|^2$  también es simétrico. Al hacer estas consideraciones, el término  $\Gamma_0$  se reduce a :



$$\Gamma_0 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega |f(\Omega)H(\Omega)|^2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega |H(\Omega)|^2 S(\Omega) \quad (3.21)$$

donde  $S(\Omega) = |f(\Omega)|^2$  es el espectro de la pareja de fotones. El término de interferencia  $\Gamma(\tau)$  se reduce a

$$\Gamma(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega H(\Omega)H^*(-\Omega)S(\Omega) \exp(i2\Omega\tau). \quad (3.22)$$

donde

$$H(\Omega)H^*(-\Omega) = r^2 [1 + 2 \exp(i\Omega T) + \exp(i2\Omega T)]. \quad (3.23)$$

Al sustituir este valor, obtenemos 3 términos equivalentes a la interferencia de HOM por cada término (véase la figura (3.5)):

$$\begin{aligned} \Gamma(\tau) &= \frac{r^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega (1 + 2 \exp(i\Omega T) + \exp(i2\Omega T)) S(\Omega) \exp(i2\Omega\tau) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega r^2 [S(\Omega) \exp(i2\Omega\tau) + 2S(\Omega) \exp(i2\Omega(\tau + T/2)) + S(\Omega) \exp(i2\Omega(\tau + T))] \end{aligned} \quad (3.24)$$

En la figura (3.5) se muestra la asociación que tiene cada término de la ecuación (3.24), el primer término es idéntico al de la ecuación (C.46) que al ser integrado representa un HOM con visibilidad de 1/2, el segundo término representa un HOM desplazado en  $T/2$  y que puede tener una visibilidad de 1, el último término representa un HOM que está desplazado en  $T$  y también presenta una visibilidad máxima de 1/2.

El pico intermedio que aparece en el interferograma es indeseable a la hora de tomar interferogramas de muestras de más de una capa, ya que dificultan la distinguibilidad de las capas y es imposible deshacerse de él utilizando un bombeo mono-cromático como acabamos de demostrar en este ejemplo sencillo. En el siguiente capítulo se realiza un cálculo similar para el caso general de una correlación arbitraria de la JSI y por lo tanto considerando el efecto de un bombeo banda ancha.

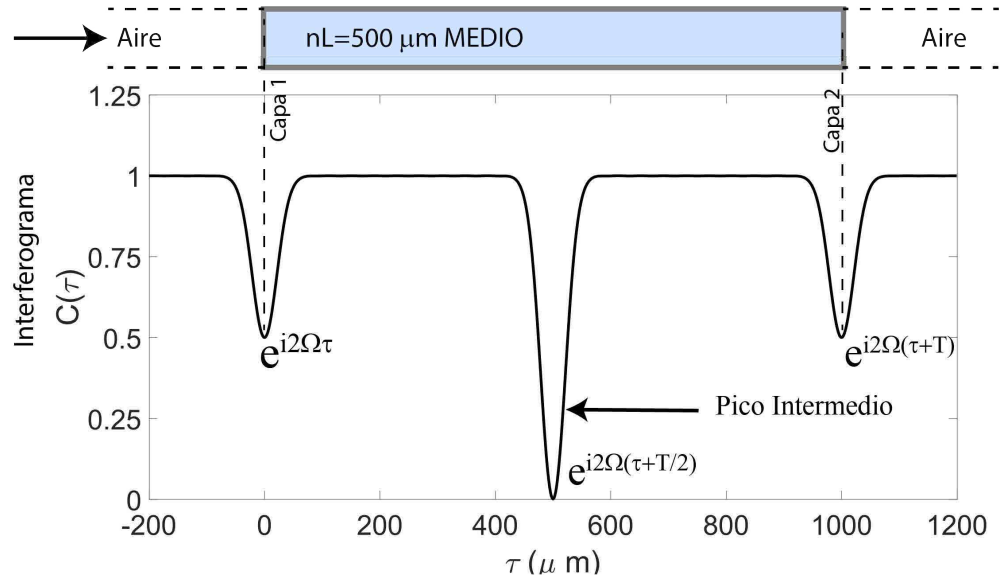


Figura 3.5: Interferograma de una muestra de  $500\mu m$  de camino óptico.

---

# Efectos de Interferencia en la Tomografía de Coherencia Óptica Cuántica usando Ingeniería de Parejas de Fotones

En el presente capítulo nos vamos a centrar en el estudio teórico y la metodología para desarrollar un experimento de QOCT completamente en fibra. Cómo ya hemos mostrado en la primera parte de esta Tesis, podemos controlar el grado de correlación espectral controlando el cinturón de acoplamiento  $W_f$ , pero también es posible modificar el ancho de banda del bombeo  $\sigma_p$ , podemos determinar directamente el grado de correlación midiendo la JSI de la pareja de fotones generados en el proceso de SPDC. Hemos desarrollado un estudio teórico y experimental de cómo la forma de la distribución espectral conjunta determina el interferograma de QOCT y encontramos las condiciones bajo las cuales los efectos de correlaciones cruzadas (que aparecen en interferogramas con bombeo CW) son eliminados.

## I. Cálculo de QOCT con parejas de fotones con correlaciones arbitrarias

Consideremos el caso de un bombeo pulsado; el caso de un bombeo monocromático (que ya vimos en el capítulo anterior) puede ser obtenido como caso especial límite de éste. En esta situación, el ancho de banda del haz de bombeo no es despreciable y el estado de dos fotones puede expresarse como

$$|\psi\rangle = |0\rangle_1 |0\rangle_2 + \eta \int d\omega_1 \int d\omega_2 f(\omega_1, \omega_2) |\omega_1\rangle |\omega_2\rangle, \quad (4.1)$$

con una amplitud espectral conjunta dos-dimensional  $f(\omega_1, \omega_2)$  donde  $|\eta|^2$  es proporcional a la tasa de generación de parejas de fotones. Usando la ecuación (3.10) del capítulo anterior, el interferograma de coincidencias se obtiene por la expresión

$$P_c(\tau) = \frac{1}{4} \int \int d\omega_1 d\omega_2 |f(\omega_2, \omega_1)H(\omega_1)e^{i(\omega_2-\omega_1)\tau} - f(\omega_1, \omega_2)H(\omega_2)|^2. \quad (4.2)$$

Expandiendo la ecuación (4.2), se encuentra que  $P_c(\tau)$  tiene la forma general de

$$P_c(\tau) = A + B - G(\tau) - G^*(\tau), \quad (4.3)$$

donde

$$A = \frac{1}{4} \int d\omega_1 \int d\omega_2 |f(\omega_2, \omega_1)H(\omega_1)|^2, \quad B = \frac{1}{4} \int d\omega_1 \int d\omega_2 |f(\omega_1, \omega_2)H(\omega_2)|^2, \quad (4.4)$$

son reconocidas como términos de auto-interferencias (equivalentes a  $\Lambda_0$  in Abouraddy y colaboradores[33]), independientes de  $\tau$ , y

$$G(\tau) = \frac{1}{4} \int d\omega_1 \int d\omega_2 f(\omega_2, \omega_1)f^*(\omega_1, \omega_2)H(\omega_1)H^*(\omega_2)e^{i(\omega_2-\omega_1)\tau}, \quad (4.5)$$

se identifica como el término de interferencia-cruzada (equivalente a  $\Lambda(\tau)$ [33]), el cual contiene la información relacionada con la estructura interna de la muestra. Con el objetivo de entender las características de  $G(\tau)$ , es conveniente trabajar con la amplitud temporal conjunta  $\tilde{f}(t_1, t_2)$ , que se relaciona con  $f(\omega_1, \omega_2)$  a través de la transformada de Fourier como sigue

$$f(\omega_1, \omega_2) = \int dt_1 \int dt_2 \tilde{f}(t_1, t_2)e^{i\omega_1 t_1} e^{i\omega_2 t_2}. \quad (4.6)$$

Usando las ecuaciones (4.6) y (4.5) y sustituyendo la función de transferencia  $H(\omega)$ ,

encontramos que

$$G(\tau) = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} r_j r_l^* \int \int dt_1 dt_2 \tilde{f}(t_2, t_1) \tilde{f}^*(t_1 - \tau + T_j, t_2 + \tau - T_l). \quad (4.7)$$

Note que el interferograma está dado por la ecuación (4.3) en forma general, esto es, sin asumir una forma particular para la amplitud espectral conjunta (JSA). Emplearemos un modelo simplificado para la JSA con el objetivo de ganar mayor comprensión de las características que se observan en el interferograma, como el tipo de correlaciones presentes en  $f(\omega_1, \omega_2)$ . Consideremos una JSA de la forma

$$f(\omega_1, \omega_2) = \frac{2}{\sqrt{\pi\Omega_a\Omega_d}} \exp \left[ - \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{\Omega_a} \right)^2 \right] \exp \left[ - \left( \frac{\omega_1 + \omega_2 - 2\omega_0}{\Omega_d} \right)^2 \right]. \quad (4.8)$$

Un esquema de la JSI resultante de este modelo simplificado se presenta en la figura (4.1 a). Esta está dada por el producto de dos funciones Gaussianas, en general con distintos parámetros de anchos completos  $1/e$  (en intensidades)  $\Omega_a$  y  $\Omega_d$  a lo largo de las direcciones anti-diagonal y diagonal, respectivamente, en el espacio  $\{\omega_1, \omega_2\}$ , produciendo una elipse con sus ejes paralelos a las direcciones diagonal y anti-diagonal. El factor de normalización  $2/\sqrt{\Omega_a\Omega_d\pi}$  asegura que  $\int \int |f(\omega_1, \omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2 = 1$ . El espectro conjunto está centrado en  $(\omega_1, \omega_2) = (\omega_0, \omega_0)$ , con  $\omega_0 = \omega_p/2$ , donde  $\omega_p$  es la frecuencia central del bombeo.

La amplitud temporal conjunta correspondiente, en ausencia del efecto de dispersión de la velocidad de grupo, está dada por

$$\tilde{f}(t_1, t_2) = \frac{2}{\sqrt{\pi\tau_a\tau_d}} \exp [i\omega_0(t_1 + t_2)] \exp \left[ - \left( \frac{t_1 - t_2}{\tau_a} \right)^2 \right] \exp \left[ - \left( \frac{t_1 + t_2}{\tau_d} \right)^2 \right], \quad (4.9)$$

caracterizada por los parámetros de anchos completos  $1/e$  (en intensidad) anti-diagonal y diagonal  $\tau_a$  y  $\tau_d$ , respectivamente. Nos referimos a  $\tau_a$  y  $\tau_d$  como los tiempos de entrelazamiento anti-diagonal y diagonal y estos están dados en términos de los

anchos espectrales  $\Omega_a$  and  $\Omega_d$  como sigue

$$\tau_a = \frac{4}{\Omega_a}, \quad \tau_d = \frac{4}{\Omega_d}. \quad (4.10)$$

Estos dos parámetros temporales, juntos, definen las propiedades de entrelazamiento espectro-temporal de nuestra fuente. La intensidad temporal conjunta que corresponde a la amplitud espectral conjunta en la figura (4.1 a) se muestra esquemáticamente en la figura (4.1 b). Es importante notar la relación inversa entre los anchos diagonal/anti-diagonal en los dominios espectral y temporal.

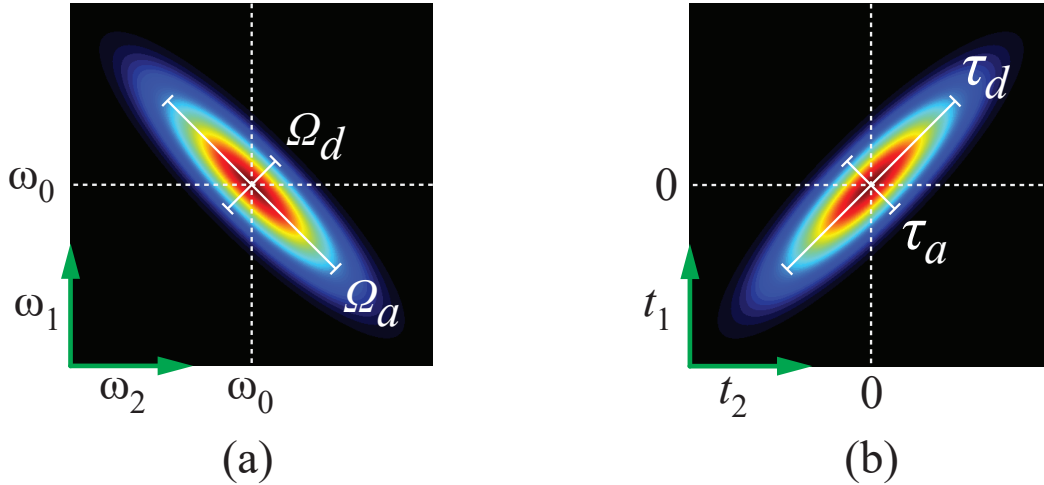


Figura 4.1: (a) Imagen cualitativa para la JSA  $|f(\omega_1, \omega_2)|^2$  dado por la ecuación (4.8). (b) Imagen cualitativa de la función temporal conjunta  $|\tilde{f}(t_1, t_2)|^2$  dada por la ecuación (4.9).

Con el objetivo de ganar mayor intuición, consideremos el ejemplo sencillo de una muestra de dos-capas, descrita por una función de transferencia de la siguiente forma

$$H(\omega) = r_0 e^{i\omega T_0} + r_1 e^{i\omega T_1}. \quad (4.11)$$

donde  $r_0$  y  $r_1$  representan las reflectividades de las dos capas y  $(T_1 - T_0)c$  representa la diferencia de camino óptico entre las dos capas. Usando las ecuaciones (4.4) y (4.7) junto con las ecuaciones (4.8) y (4.9) encontramos que el interograma de QOCT

$P_c(\tau)$ , normalizado de tal manera que  $P_c(\tau)=1$  para  $\tau \rightarrow \pm\infty$ , puede ser expresado como

$$\frac{P_c(\tau)}{A+B} = 1 - V_0 \exp\left[-2\left(\frac{\tau}{\tau_a}\right)^2\right] - V_{\text{mid}} \exp\left[-2\left(\frac{\tau - T/2}{\tau_a}\right)^2\right] - V_1 \exp\left[-2\left(\frac{\tau - T}{\tau_a}\right)^2\right], \quad (4.12)$$

donde  $T = T_1 - T_0$  es el tiempo de propagación entre las dos capas y

$$V_0 = \frac{R_0}{2(A+B)}, \quad V_1 = \frac{R_1}{2(A+B)}, \quad V_{\text{mid}} = \frac{\sqrt{R_0 R_1}}{A+B} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{T}{\tau_d}\right)^2\right] \cos(\omega_0 T), \quad (4.13)$$

con

$$A+B = \frac{1}{2}(R_0+R_1) + \sqrt{R_0 R_1} \exp\left[-\left(\frac{T}{\tau_a}\right)^2\right] \exp\left[-\left(\frac{T}{\tau_d}\right)^2\right] \cos(\omega_0 T) \approx \frac{1}{2}(R_0+R_1), \quad (4.14)$$

en términos de las reflectividades de la primera y segunda interfaces  $R_0 = |r_0|^2$  y  $R_1 = |r_1|^2$ . Note que el segundo término en la ecuación (4.14) puede ser ignorado cuando  $T \gg \tau_a$  ó  $T \gg \tau_d$ .

La ecuación (4.12) muestra tres elementos: dos fondos (dips) separados por un tiempo  $T = 2nL/c$  (con  $L$  el ancho de la muestra y  $n$  su índice de refracción), con visibilidades  $V_0$  y  $V_1$ , así como también una estructura intermedia ubicada en  $\tau = T/2$ , esto es a la mitad de los dos dips, con amplitud  $V_{\text{mid}}$ . Note que cada uno de los dos dips está asociado con una de las dos interfaces en la muestra, mientras que la estructura intermedia está asociada con ambas interfaces. Podemos ver de la expresión  $V_{\text{mid}}$ , ecuación (4.13), que esta estructura puede ser un fondo (dip) o un pico (peak), dependiendo del signo de  $\cos(\omega_0 T)$ , con una amplitud determinada por varios parámetros de la fuente y la muestra.

Cambiamos la discusión a cómo los parámetros de tiempos de entrelazamiento  $\tau_a$  y  $\tau_d$  son determinados en varias situaciones experimentales de interés. El valor de  $\tau_d$  está determinado en gran medida por las propiedades temporales del haz de bombeo. Por otro lado, si el haz de bombeo es monocromático el ancho espectral diagonal  $\Omega_d$  desaparece y  $\tau_d \rightarrow \infty$ : entonces, evidentemente en este caso  $\tau_d \gg T$ . Por

otro lado, si el haz de bombeo es un tren de pulsos ultra-cortos (por ejemplo pulsos de femto-segundos), y aumiendo que el ancho espectral diagonal está limitado por la amplitud espectral del haz de bombeo en vez de por la función de empatamiento de fases, podemos expresar  $\tau_d$  en términos de la duración del pulso de bombeo  $\tau_p$  como  $\tau_d = \sqrt{2}\tau_p$ . Para un  $L = 1$  mm y  $\tau_p = 100$  fs, obtenemos  $\tau_d/T \approx 0.014$ . Entonces, interesantemente, mientras  $\tau_d \gg T$  para el caso CW, esta relación puede ser invertida a  $\tau_d \ll T$  para el caso de un haz de bombeo pulsado ultracorto.

Mientras el ancho espectral anti-diagonal  $\Omega_a$  está influenciado tanto por las propiedades de empatamiento del cristal así como por las propiedades del bombeo, en nuestro caso, el ancho espectral de la anti-diagonal resultante está limitado por el filtro espectral pasa-bandas utilizado (que en nuestro caso está centrado en 1550 nm con un ancho espectral de 7.8 nm  $1/e$ ). De la inspección de la ecuación (4.12), se vuelve evidente que en una medición experimental del interferograma de QOCT,  $\tau_a$  puede ser obtenido directamente del ancho del dip del HOM;  $\tau_a$  corresponde esencialmente al ancho del dip. Note que con el fin de que una medición de QOCT nos dé información útil de la muestra, la separación de los dip, que corresponde a  $T$ , debe de ser considerablemente mayor que  $\tau_a$ . De hecho, si  $T \lesssim \tau_a$ , los dos dips no pueden ser resueltos y no seremos capaz de obtener información útil acerca de la muestra.

Con el objetivo de entender la interacción entre el estado de dos-fotones (los parámetros  $\tau_a$  y  $\tau_d$ ) y el grosor de la muestra (parámetro  $T$ ) al definir el interferograma QOCT resultante, es de gran ayuda visualizar un espacio de parámetros  $\{\tau_a, \tau_d\}$ . Note que en el modelo Gaussiano que está siendo utilizado para describir la amplitud espectral (ver la ecuación (4.9)), el estado está completamente determinado por las coordenadas en este espacio. Una inspección de la expresión para las visibilidades y la amplitud de la estructura intermedia, ecuaciones (4.13) y (4.14), revelan que  $\tau_a$  y  $\tau_d$  aparecen tan solo como cocientes  $\tau_a/T$  y  $\tau_d/T$ . Por lo tanto, en la figura (4.2) indicamos el grosor de la muestra como un círculo de radio  $T$ ; para esta ilustración asumimos el valor de  $T$  que corresponde con el experimento que será descrito más abajo, usamos un vidrio de soda lime de un espesor de 1 mm (con un valor aproximado resultante de  $T \approx 10$  ps). Hemos indicado con una línea punteada vertical el valor de  $\tau_a$ , que es esencialmente el mismo independientemente del ancho de banda del bombeo.



Tabla 4.1: Source parameters

source configuration	$\Delta\lambda_p(\text{nm})$	$\tau_d(\text{ps})$	$\tau_a(\text{ps})$
CW pump	0.12	$(\tau_d \rightarrow \infty)$	$0.499 \pm 0.028$
pulsed pump (ps)	0.30	17.006	$0.440 \pm 0.014$
pulsed pump (fs)	10.8	0.472	$0.432 \pm 0.026$

En la tabla (4.1) se muestran tres distintas fuentes de bombeo (bombeo CW, bombeo de duración de pico-segundos con  $\tau_p \approx 10$  ps y un bombeo de duración de femto-segundos con  $\tau_p \approx 100$  fs) los valores resultantes de  $\tau_d$  y  $\tau_a$ , que corresponden a las fuentes usadas en nuestra medición experimental discutida más abajo. Hemos puesto marcas en la figura (4.2) para estas tres fuentes.

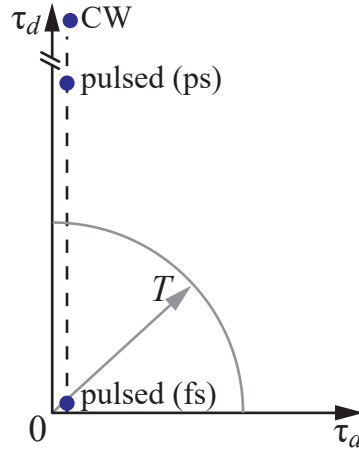


Figura 4.2: Diagrama esquemático que representa las escalas de tiempos usadas en el experimento.

Con los valores de  $\tau_a$  en la tabla (4.1), podría verificarse que  $\exp[-(T/\tau_a)^2]$  termina siendo un número lo suficientemente pequeño de tal modo que el término cosenoidal en la ecuación (4.14) puede ser ignorado, quedando  $A+B = (R_0 + R_1)/2$ . Esto a su vez conduce a las siguientes expresiones para las amplitudes de los dos dips:

$$V_0 = \frac{R_0}{R_0 + R_1}, \quad V_1 = \frac{R_1}{R_0 + R_1}. \quad (4.15)$$

Notar que en el límite de bombeo monocromático,  $\exp[-(T/\tau_d)^2] \rightarrow 0$  es satisfecho y las expresiones de arriba (ver la ecuación (4.15)) para las visibilidades de los

dips son válidas. Como la amplitud de la estructura intermedia, claramente depende del cociente  $T/\tau_d$ . En el caso monocromático para el cual  $\tau_d \rightarrow \infty$ , obtenemos

$$V_{\text{mid}} = \frac{2\sqrt{R_0 R_1}}{R_0 + R_1} \cos(\omega_0 T), \quad (4.16)$$

mientras que para el caso de bombeo de pulsos ultra-cortos, para el cual  $T \gg \tau_d$ , se obtiene  $V_{\text{mid}} = 0$ . El criterio para la supresión de la estructura intermedia puede ser expresado como un umbral para el ancho espectral diagonal, como sigue, en términos del ancho de la muestra  $L$ :

$$\Omega_d \gtrsim \frac{2c}{nL}. \quad (4.17)$$

Por lo tanto, mientras  $\Omega_d$  aumenta desde 0, para por ejemplo un láser monocromático ideal, hasta el ancho espectral diagonal mayor generado por ejemplo, por una fuente láser pulsado, la visibilidad de la estructura intermedia irá disminuyendo gradualmente, hasta que desaparece completamente para al caso de láseres de pulsos lo suficientemente cortos (o anchos espectrales lo suficientemente grandes) como para satisfacer la desigualdad de arriba.

Note que en el caso específico de reflectividades iguales,  $R_0 = R_1$ , con un bombeo monocromático obtenemos  $V_0 = V_1 = 1/2$  y  $V_{\text{mid}} = \cos(\omega_0 T)$  como se mostró en la última sección del capítulo anterior. Notar también que mientras que el número de capas aumenta, la visibilidad del HOM asociado con cada capa reducirá su visibilidad como  $1/N$ , donde  $N$  es el número de capas. Por lo tanto, mientras que la visibilidad ideal se reduce desde 1, en la interferencia de HOM estándar, a 0.5, en el QOCT de dos-capas con reflectividades iguales, la estructura intermedia con un bombeo monocromático CW constituye un pico o un fondo, gobernado por  $\cos(\omega_0 T)$ , con una amplitud que no es reducida al aumentar el número de capas. Para una muestra de ancho fijo  $T$  somos capaces de controlar la amplitud, y el carácter de fondo/pico, de la estructura intermedia, a través de un haz de bombeo de frecuencia sintonizable  $\omega_p = 2\omega_0$ .

## II. Implementación Experimental

En esta sección me enfocaré en todas las cuestiones necesarias y los pormenores para desarrollar el experimento de QOCT. Es importante una rápida descripción de:

- Caracterizar la fuente de bombeo
- Caracterizar medio no lineal de producción (PPKTP y PPLN).

### II.1. Fuente de bombeo

#### Caracterización del modo espacial del haz de bombeo

Para poder caracterizar el modo espacial del haz de bombeo, se utilizó un cámara CCD a color de Thorlabs, y se procedió a utilizar el método de caracterización de haz del capítulo 3 del control de correlaciones. En la figura (4.3) se muestran las mediciones del perfil del haz para 3 lentes de distancia focal  $f$  distinta, se realiza un ajuste Gaussiano para poder obtener el cinturón  $W_0$  así como el rango de Rayleigh  $z_R$ . Debido a que el cristal que utilizaremos tiene un ancho de 10 mm y un sección transversal de 0.5 mm, cualquiera de estas lentes nos ayuda a obtener buena colimación sobre el cristal no lineal, pero en nuestro caso escogimos la lente plano-convexa de distancia focal  $f = 175$  cm, ya que con esta obtenemos un rango de Rayleigh de las dimensiones del cristal, lo que resulta en una producción más eficiente.

#### Caracterización del espectro de frecuencias del haz de bombeo

Los láseres utilizados en este trabajo fueron: una cavidad MIRA900 que se puede usar en modo CW y en modo pulsado en el régimen de pico-segundos Fig.(4.4a) y Fig.(4.4b). Un láser construido en el laboratorio que está en el régimen de femto-segundos Fig.(4.4c), este láser fue el que utilizamos para el control de correlaciones espectrales en capítulos anteriores. Los espectros fueron obtenidos utilizando un monocromador y una cámara Andor, con una resolución de 0.02 nm, se midieron los anchos a la altura  $(1/e)$ , y los valores correspondientes fueron de 0.12 nm para la fuente CW, de 0.30 nm para la fuente pulsada en pico-segundos, y de 10.8 nm para la fuente pulsada de femto-segundos que se despega completamente de las otras fuentes

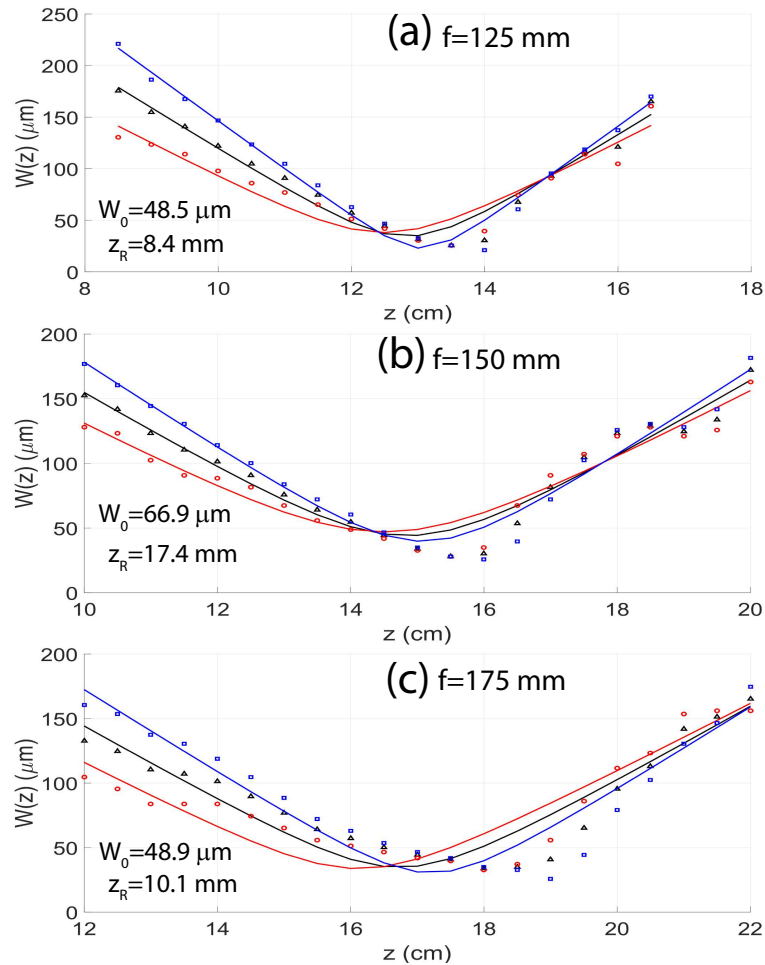


Figura 4.3: Tamaño del modo espacial del haz de bombeo para 3 tipos de lentes. La línea roja corresponde al ajuste para el radio de la sección transversal horizontal, la azul para la vertical y la negra para el promedio entre la horizontal y vertical. (a) Lente de distancia focal de 125 mm. (b)  $f = 150$  mm. (c)  $f = 175$  mm.

y nos servirá para satisfacer la condición de la ecuación (4.17) para eliminar el pico intermedio. Los valores que caracterizaran a la fuente están dados en la tabla (4.1).

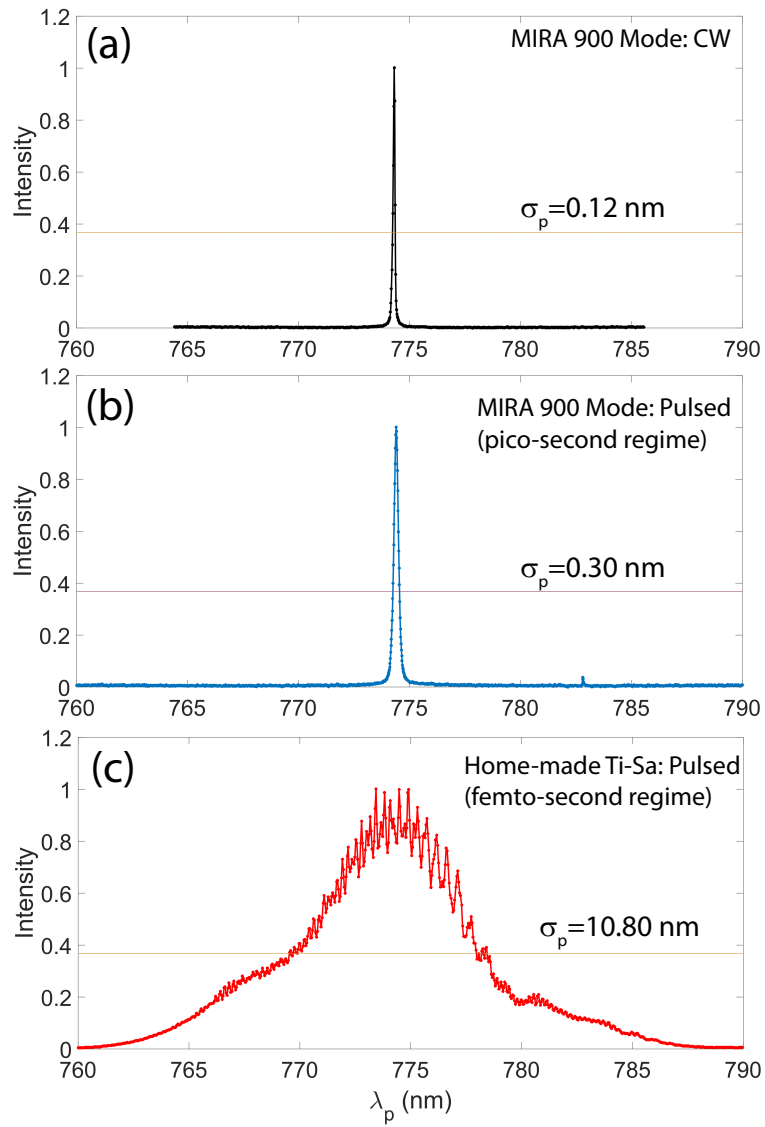


Figura 4.4: Espectros de las 3 fuentes de bombeo utilizadas en el experimento.

## II.2. Medio no-lineal de generación

### Cristal de PPKTP

Con el fin de alcanzar una mejor brillantez de la fuente se optó por utilizar un cristal de PPKTP<sup>1</sup> que es un cristal birrefringente con susceptibilidad de segundo orden alta y que debido al empatamiento de fases de las ondas incidente y generadas es ideal para producción de segundo armónico (SHG), pero también funciona en sentido inverso, en este caso nosotros estamos interesados en el proceso inverso que es la producción de parejas de fotones a partir de un bombeo de frecuencia más alta. En un cristal no lineal la eficiencia de producción normalmente es periódica conforme aumenta la longitud del cristal, esto significa que existen longitudes óptimas para cortar un cristal, en estas longitudes la producción de fotones será máxima, y si se sigue avanzando se llegará a una distancia en la cual la producción será mínima y así sucesivamente. Un cristal periódicamente polarizado consiste en un cristal con varias regiones que tienen polarización invertida, si se invierte la estructura del cristal cuando se llega a la longitud de mínima producción los fotones generados estarán 180 ° fuera de fase de lo que estarían si no se hubiera invertido el cristal en esa posición, escogiendo el periodo correcto se puede generar un cuasi-empatamiento de fases que produzca interferencia constructiva entre los fotones generados en cada tramo del cristal, dando una eficiencia de generación de fotones mucho mayor como se muestra en la figura (4.5).

El efecto de agregar un periodo modifica la función de desempatamiento de fases  $\Delta k = k_p - k_s - k_i$  a

$$\Delta k^{pp} = k_p - k_s - k_i - 2\pi/\Lambda, \quad (4.18)$$

siendo  $\Lambda$  es el periodo espacial del cristal (usualmente medido en  $\mu m$ ). Como los vectores de onda también dependen del índice de refracción  $n(\omega, T)$  que depende de las frecuencias de los fotones, y también de la temperatura del medio. La función de amplitud de probabilidad en general pasa a ser una función de 2 variables extra  $f(\omega_s, \omega_i, T, \Lambda)$ .

Para lograr el cuasi-empatamiento de fases eficiente es necesario enfocar el haz

---

<sup>1</sup>periodically poled (PP) potassium titanyl phosphate (KTP)

de bombeo debidamente polarizado con el eje óptico del cristal. En la sección anterior se caracterizó el bombeo utilizando una lente de 175 mm para conseguir un enfocamiento óptico en este cristal de 10 mm de longitud. El cristal de PPKTP que utilizamos nos permite obtener cuasi-empatamiento de fases para un proceso de SPDC de tipo II, donde la pareja de fotones tiene distinta polarización *extraordinaria* y *ordinaria*, además el proceso es colineal, esto significa que los fotones salen a ángulo cero respecto al eje de propagación del bombeo. Este tipo de empatamiento de fases también depende de la temperatura a la que se encuentra el cristal, ya que los índices de refracción dependen, además de la longitud de onda, de la temperatura del medio. Por lo tanto este tipo de cristales se sintoniza por medio de un control de temperatura fija por medio de un horno.

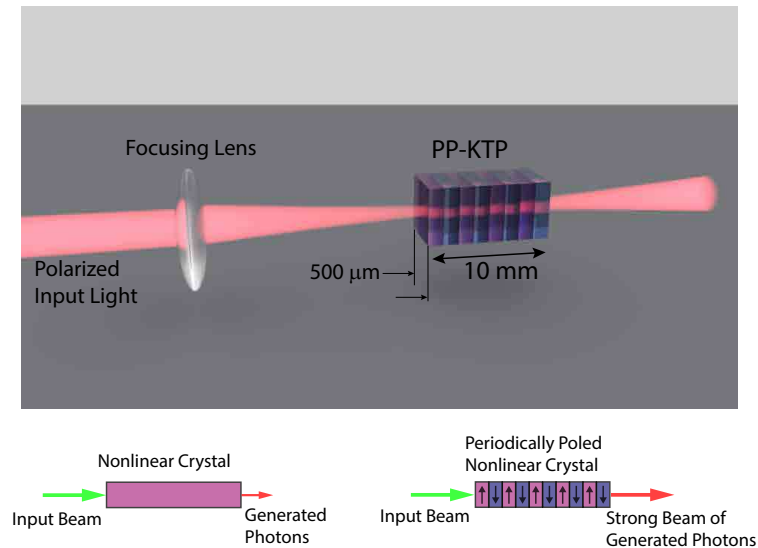


Figura 4.5: Cristal de PPKTP.

Utilizando una cámara Idus1.7 usando el arreglo presentado en el capítulo 3 de control de correlación, se logró medir el modo espacial de las parejas de fotones. En la figura (4.6) se muestra el modo espacial de la pareja de fotones generados a la salida del cristal de PPKTP, cómo podemos ver, no podemos distinguir entre los fotones, ya que sus distribuciones se traslapan, para poder separarlos se tuvo que hacer uso de un cubo divisor de haz polarizado (PBS) con los cuales fue posible obtener la JSI.

En la figura (4.7a) mostramos las distribuciones JSI para 3 distintas temperaturas

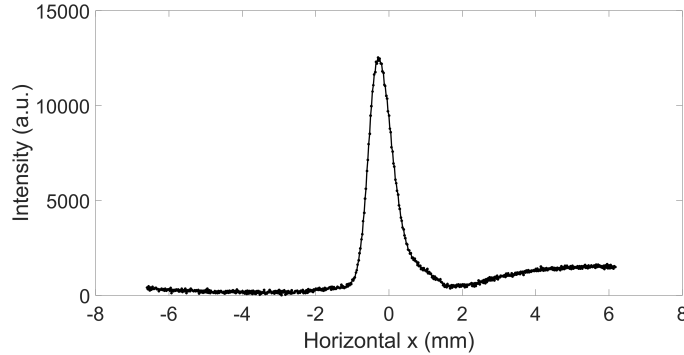


Figura 4.6: Modo espacial de los fotones generados con PPKTP.

del horno, podemos ver que a  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$  logramos obtener fotones degenerados necesarios para la interferencia de Hong-Ou-Mandel. Para el caso de  $200\text{ }^{\circ}\text{C}$  las marginales de los fotones señal y acompañante están demasiado separadas lo que equivale a decir que la distribución espectral no es simétrica  $f(\omega_s, \omega_i) \neq f(\omega_i, \omega_s)$ , por lo que la visibilidad en un experimento de interferencia HOM se perdería así como el número de coincidencias. En la figura (4.8) se muestra el número de coincidencias por minuto para distintas temperaturas del cristal de PPKTP, podemos observar una región donde el número de coincidencias se mantienen estable desde  $60\text{ }^{\circ}\text{C}$  hasta  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$  tendremos buena tasa de emisión de fotones, pero solo los fotones generados cerca de los cien grados estarán degenerados y nos serán útiles para nuestro propósito.

### Cristal de PPLN

Con el fin de poder tener un mejor candidato para la producción de parejas de fotones se analizó simultáneamente un cristal PPLN <sup>2</sup> creado para generación de segundo armónico, este cristal tiene 9 periodos distintos, por lo que nos será más útil la sintonización de la longitud de onda de interés y el proceso de generación de este cristal es de tipo 0 no colineal, por lo que los fotones ya serán indistinguibles en polarización extraordinaria, y será fácil separarlos por ángulo de emisión. La generación de parejas de fotones en el PPLN es mucho más intensa debido a su alto valor de coeficiente no-lineal efectivo  $d_{eff} = 14\text{ pm/V}$  comparado con el PPKTP  $d_{eff} = 3.4\text{ pm/V}$  y con el BBO  $d_{eff} = 2.5\text{ pm/V}$ . Debido a que este cristal cuenta con

<sup>2</sup>Niobato de litio periódicamente polarizado



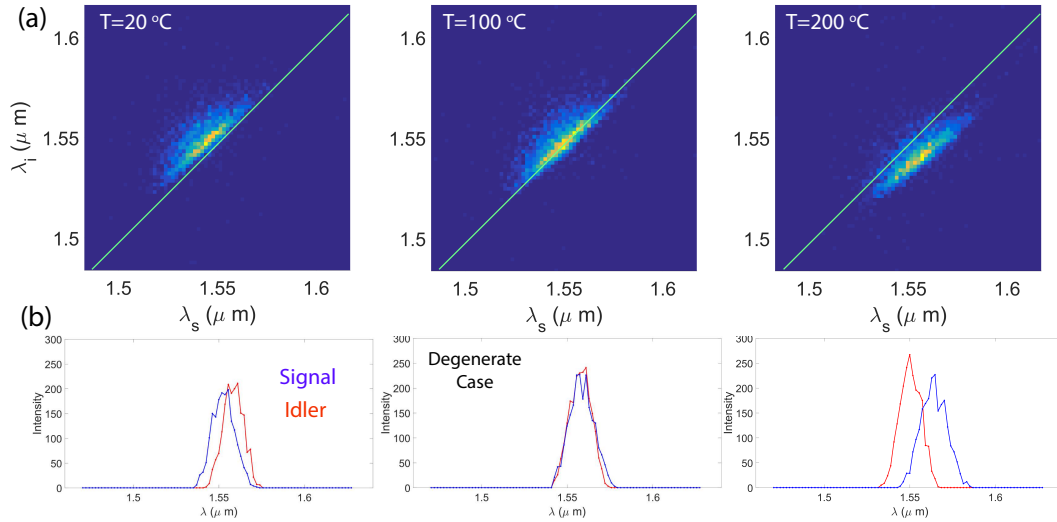


Figura 4.7: Espectros conjuntos de los fotones generados por medio de PPKTP. (a) JSIs para 3 temperaturas distintas. (b) Espectros marginales correspondientes.

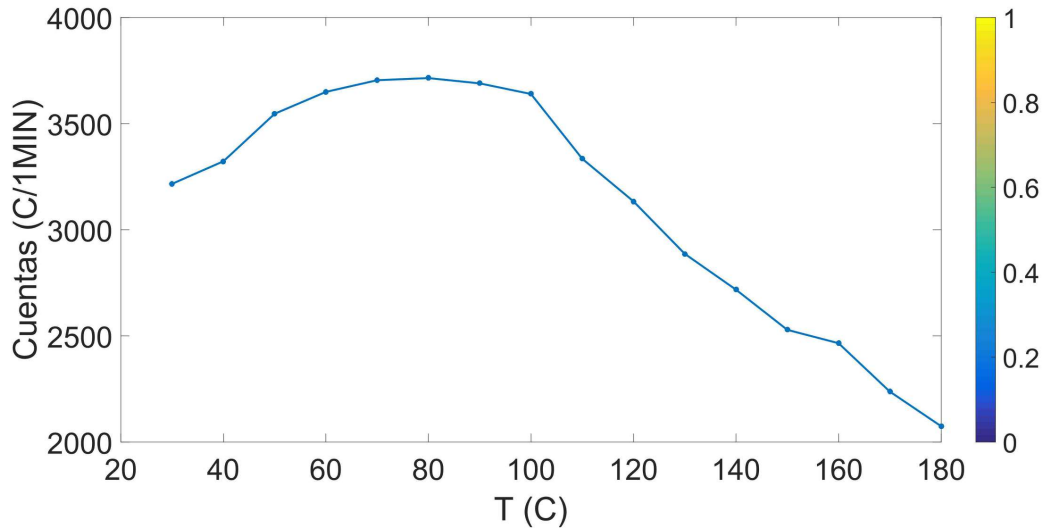


Figura 4.8: Temperatura vs Coincidencias del cristal de PPKTP

9 periodos distintos, nos dispusimos a calcular los distintos empatamientos usando la ecuación (4.18) para los 9 periodos distintos, junto con las ecuaciones para los índices de refracción<sup>3</sup> dependientes de la temperatura, calculamos las llamadas curvas de sintonización para un proceso de SPDC de tipo 0 (ver figura 4.9). Se encontró que utilizando el periodo número 3, correspondiente a 19.10  $\mu\text{m}$  y calentando el cristal hasta una temperatura de 95  $^{\circ}\text{C}$  se satisface empatamiento óptimo para producir fotones degenerados en 1550 nm utilizando un láser de bombeo centrado en  $\lambda_p = 775$  nm.

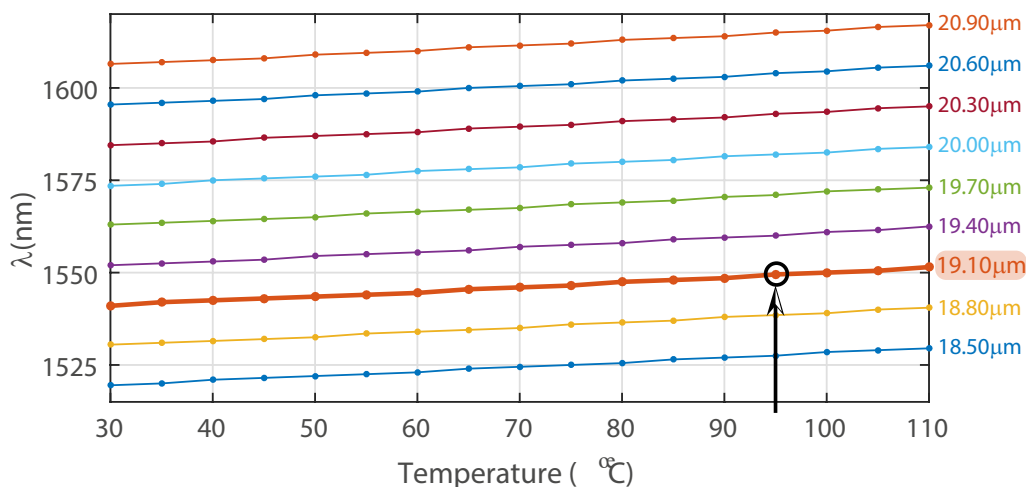


Figura 4.9: Curvas de sintonización a partir del modelo analítico de un cristal de PPLN.

En la figura (4.10) el cristal de PPLN con solo algunos periodos de los que en realidad tiene, así como sus dimensiones, podemos ver la diferencia con el PPKTP en el cual los fotones permanecen colineales al bombeo.

Con el fin de separar los fotones señal y acompañante nos dispusimos a medir la distribución espacial en un plano a 10 cm del cristal utilizando una cámara lineal Idus1.7 y el arreglo que describimos en el apartado de metodología experimental del capítulo 3. Para poder quitarnos el bombeo que atravesaba el cristal, recurrimos a filtros espectrales pasa-altas, no se usó en este paso ningún filtro pasa-bandas. Tomando mediciones cada 10  $^{\circ}\text{C}$  medimos las distintas aperturas del cono de SPDC

<sup>3</sup>ecuaciones de Sellmeier

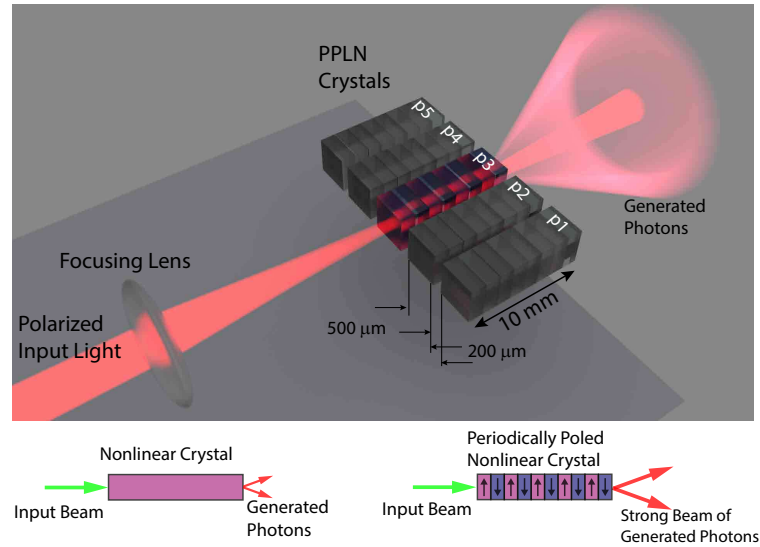


Figura 4.10: Cristal de PPLN.

y construimos unos mapas por cada uno de los 3 periodos correspondientes a  $18.5 \mu\text{m}$ ,  $18.8 \mu\text{m}$  y  $19.1 \mu\text{m}$  (ver figuras (4.11 d), (4.11 e) y (4.11 f)). Estos mapas muestran que es posible controlar a nuestra voluntad los ángulos de emisión de los fotones generados, están muy abiertos para el primer periodo y bajas temperaturas, al ir aumentando de temperatura los ángulos de emisión se van cerrando; al cambiar a un periodo mayor el efecto es de cerrarse aún más, hasta alcanzar ángulo de emisión colineal con el bombeo en el tercer periodo a una temperatura de  $150 \text{ }^\circ\text{C}$ . En las figuras (4.11 a), (4.11 b) y (4.11 c) se muestran cortes del cono a la temperatura de degeneración, con esto fue posible calcular el ángulo de emisión de la pareja de fotones, que fue de  $2.5^\circ$ .

### Caracterización del Espectro de los fotones

Una vez encontradas las condiciones de producción de parejas de fotones degenerados en  $1550 \text{ nm}$ , el periodo y la temperatura adecuados, se procedió a acoplar los fotones a fibras ópticas, y utilizando las técnicas de medición de coincidencias ya mostrado en capítulos anteriores, se procedió a medir la JSI de los fotones para 3 casos: una medición usando un filtro pasa-bandas de  $7.8 \text{ nm}$  (1/e), un filtro pasa-bandas de  $40 \text{ nm}$  (1/e) y sin usar ningún filtro. Se midieron por separado los espectros de des-

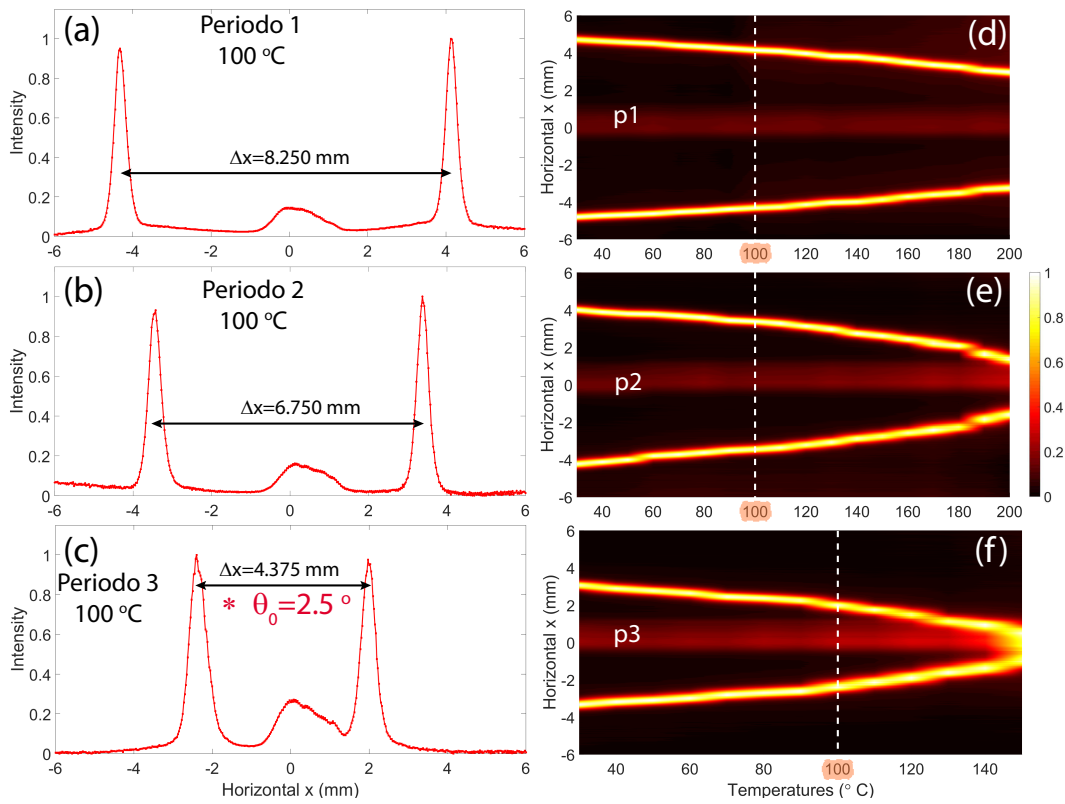


Figura 4.11: Distribución espacial de la pareja de fotones a 10 cm de la salida del cristal PPLN. (a) Separación espacial en el periodo 1 =  $18.50 \mu\text{m}$ . (b) Separación espacial en el periodo 2 =  $18.80 \mu\text{m}$ . (c) Separación espacial en el periodo 3 =  $19.10 \mu\text{m}$ . (d) Superficie de la apertura del cono a 10 cm del cristal, para distintas temperaturas correspondiente al periodo 1, (e) al periodo 2, (f) periodo 3.

entonamiento uni-dimensionales que son prácticamente las anti-diagonales de la JSI (ver figura (4.12)). Como ya mencionamos en el capítulo concerniente al fenómeno de interferencia de Hong-Ou-Mandel, el espectro del bi-fotón está dado únicamente por el desentonamiento del par, y el ancho del dip de HOM es igual a la transformada de Fourier de este espectro, esto quiere decir que el espectro de la figura (4.12 c) es el que nos daría el mejor dip, entiéndase, mejor, por más estrecho, ya que esto estará directamente ligado a la resolución que alcanzarán nuestros interferogramas de QOCT. En la práctica uno usa espectros de ancho espectral grande, mientras más grande mejor, ya que el tiempo de coherencia está en relación inversa al ancho de banda de la fuente. Al comparar el ancho espectral del PPLN sin filtro y el espectro sin filtro del cristal de PPKTP en la figura (4.7) que es apenas del orden de 10 nm, podemos saber que la fuente de PPLN es la mejor opción para nuestro sistema.

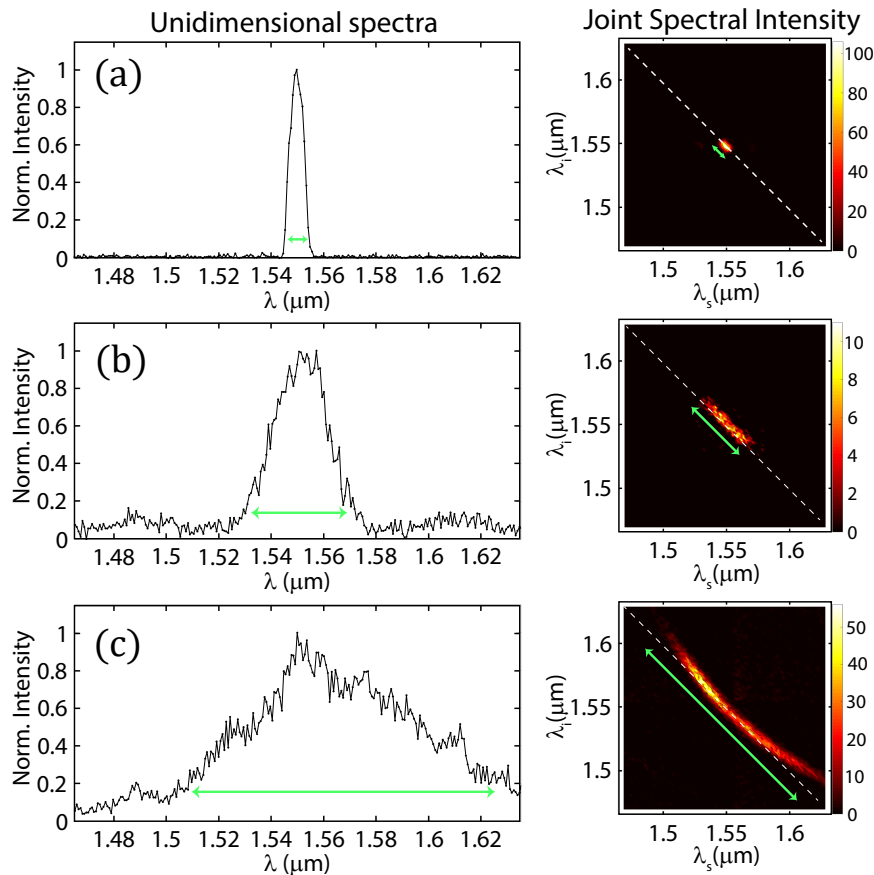


Figura 4.12: JSI y espectro de desentonamiento para distintos filtros.

### II.3. Experimento de interferencia de HOM

Con el fin de validar la teoría presentada al inicio del capítulo, llevamos a cabo un experimento; nuestro arreglo experimental se muestra en la figura (4.13). Hemos usado 3 configuraciones como se muestra en la tabla (4.1), diseñadas para ir de un bombeo de onda continua, hasta un bombeo de pulsos ultra-cortos de femto-segundos. Estas configuraciones, como ya mencionamos se basan en usar dos láseres, ambos centrados en 775 nm: una cavidad de Ti:Zafiro de femto-segundos, así como una cavidad de pico-segundos que también puede trabajar en modo de onda continua (CW). Usamos un cristal de PPLN de 10 cm de longitud, con un periodo de 19.1  $\mu\text{m}$ , y operado a una temperatura de 95 °C. Este cristal es bombeado de acuerdo a cada una de las tres configuraciones de las que ya hablamos. Nuestra fuente de SPDC produce parejas de fotones degenerados en 1550 nm, no colineales (que se propagan a  $\pm 1.25^\circ$  con respecto al haz de bombeo). Filtramos la pareja de fotones con un filtro pasa-altas con corte en 980 nm para opacar el bombeo residual, y con un filtro pasa-bandas centrado en 1550 nm con un ancho de 7.8 nm a la altura 1/e. Acoplamos cada uno de estos fotones a dos fibras mono-modo. El fotón señal es inyectado en el puerto 1 de un circulador de fibra óptica (PMC), éste sale a espacio libre por el puerto 2, pasa a través de una lente esférica colimadora, y llega hasta un espejo de referencia (RM). Si el fotón individual es reflejado por el espejo RM, se vuelve a acoplar al circulador por el mismo puerto 2, y finalmente emerge por el puerto 3 que está conectado al divisor de haz de fibra (Fiber BS). El fotón acompañante es acoplado a una fibra compensadora (FC que iguala el camino del fotón señal) y de ahí es colimado en espacio libre y re-acoplado a una fibra móvil que es desplazada por una estación motorizada, de tal forma que somos capaces de introducir un retraso temporal arbitrario  $\tau$  entre los dos fotones. Después de interferir en el divisor de haz (por supuesto que los dos brazos son balanceados de tal manera que tengan la misma longitud de camino óptico), los fotones que salen de ambos puertos del BS son dirigidos a dos foto-diodos de avalancha de InGaAs id230 que trabajan en modo *free-running*. Hemos usado controladores de polarización de fibra en ambos brazos para garantizar que la polarización con la que lleguen los fotones al BS sea idéntica. Las cuentas en coincidencias son registradas con ayuda de un etiquetador de tiempos digital (TDC) como función del retraso temporal  $\tau$ .

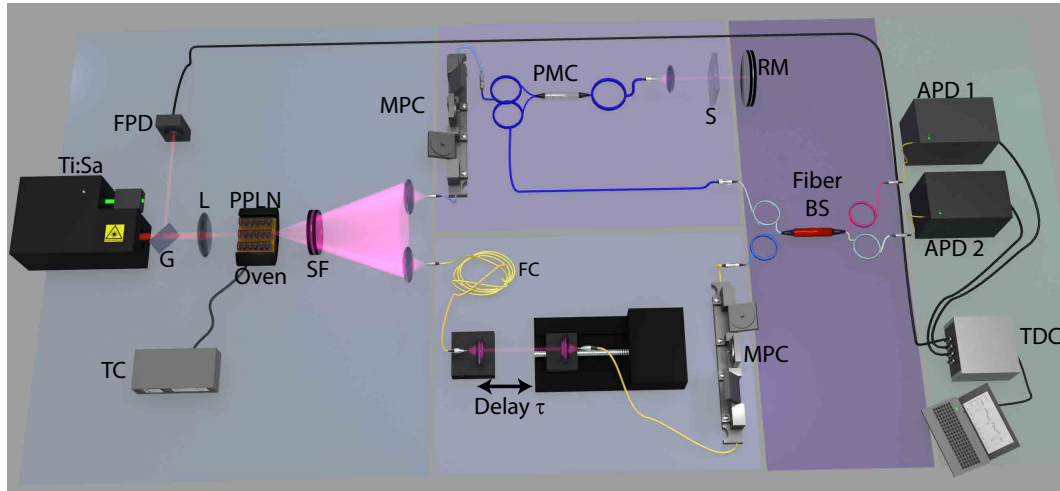


Figura 4.13: Arreglo experimental para medir interferogramas de HOM y de QOCT.

Es importante hacer notar que la muestra tiene una reflectividad tan pequeña que es despreciable comparada con la reflectividad del espejo de referencia, así que por ahora mediremos la interferencia del fotón que es reflejado por este espejo. En la figura (4.14) se muestra una medición de la interferencia de HOM con pasos de motor de  $2.5 \mu\text{m}$  y tiempo de medición de 10 segundos por punto. En la figura (4.14 a) se muestra el efecto de un filtro de  $7.8 \text{ nm}$  sobre la JSI, el fondo (dip) de HOM correspondiente fue de  $230 \mu\text{m}$  a la altura media con una visibilidad del 92%. En la figura (4.14 b) el tiempo de medición fue de 20 segundos por punto y el filtro utilizado fue de  $40 \text{ nm}$ , al extenderse el espectro se midió un dip de HOM de tan solo  $40 \mu\text{m}$  con una visibilidad del 90%. El último inciso no fue tan fácil de medir ya que requería tiempos de medición mayor y debido a que la visibilidad disminuyó casi al 50% y al parecer apareció un pico en la parte derecha del dip, además no se observó la disminución del ancho esperada, esto podría deberse a que la interferencia ya no es tan buena dado que la intensidad espectral conjunta ya dejó de ser simétrica como se observa en la figura (4.14 c), al parecer ésta distribución tiene dos máximos, y no están centrados en una frecuencia degenerada precisamente. El doble pico que aparece en el HOM podría deberse a que la distribución espectral presenta algo de anti-simetría debido al doble pico, curiosamente el pico que aparece suele ser mucho más delgado que el ancho del dip con el filtro de  $40 \text{ nm}$ .

Como el tiempo de medición de cada dip, con pasos tan pequeños como micras

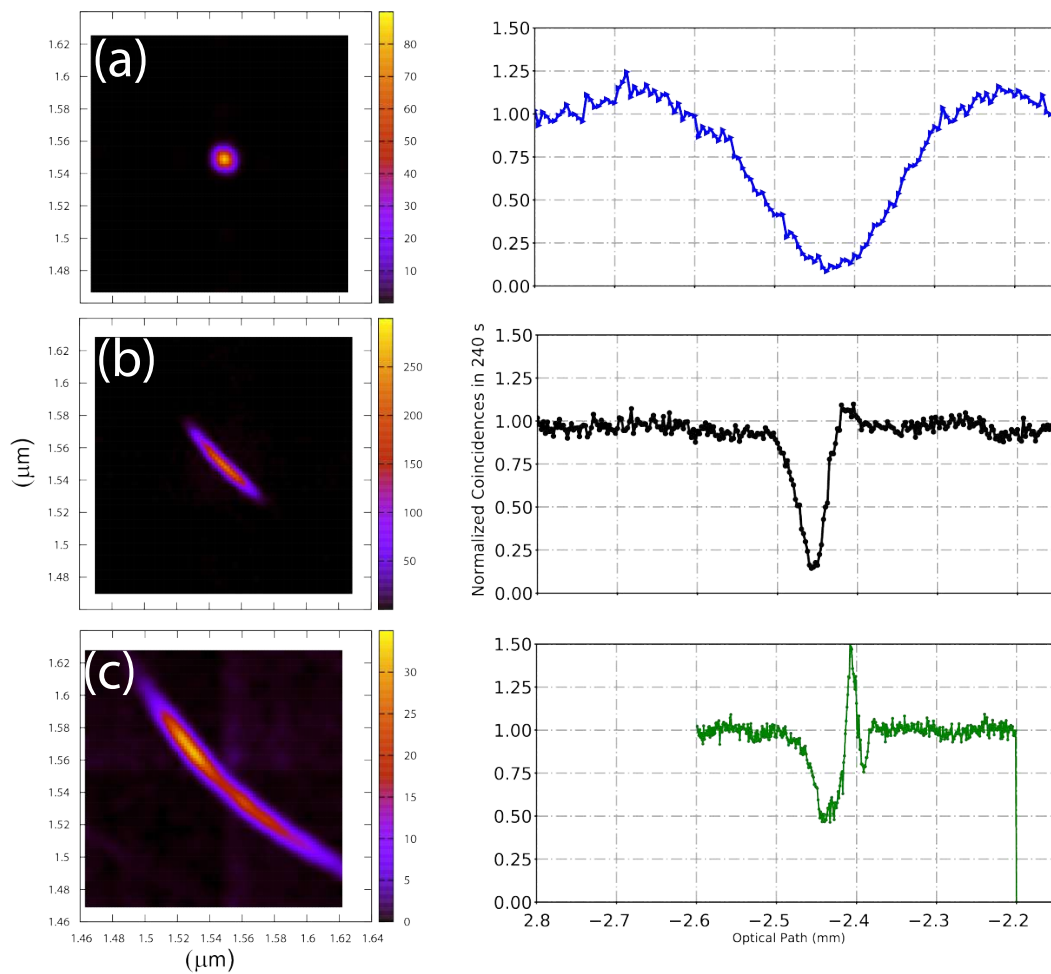


Figura 4.14: Medición de la interferencia de HOM para 3 anchos de desintonamiento. (a)Filtro de 7.8 nm. (b)Filtro de 40 nm. (C) Sin filtro



fue largo, se hicieron barridos de  $600 \mu\text{m}$  aproximadamente, y con pasos de  $2.5 \mu\text{m}$  y tiempos de medición de 10 segundos por punto, el número de puntos en un solo interferograma fue de 240 puntos, consumiendo un tiempo total de 40 minutos por dip de HOM, es por esto que para poder optimizar tiempos se eligió el dip de HOM de  $230 \mu\text{m}$  (filtro espectral estrecho) y se aumento el tamaño de paso a  $25 \mu\text{m}$  y aumentando el tiempo de medición a 20 segundos, tardando tan solo 8 minutos por medición.

### Corrimiento del dip de HOM

Repetimos la medición de HOM pero esta vez agregando un vidrio porta objetos de 1 mm de espesor (S) (ver arreglo de la figura (4.13)). Es posible medir el ancho de la muestra transparente por el ligero retraso que este material ejerce sobre el fotón señal. Ya que si el fotón señal normalmente tardaba  $\tau_0$  en empatarse con el fotón acompañante, al añadir un medio de índice de refracción  $n$  y longitud  $L$ , ahora su tiempo de interferencia máxima se retrasa de  $2L/c$  a  $2nL/c$ , por lo cual el tiempo efectivo agregado al poner el bloque de vidrio es  $\tau'_0$

$$\tau'_0 = \tau_0 + \frac{2nL}{c} - \frac{2L}{c} = \tau_0 + \frac{2L}{c}(n - 1) \quad (4.19)$$

y el corrimiento de camino óptico es

$$\Delta l_c = c(\tau'_0 - \tau_0) = 2L(n - 1). \quad (4.20)$$

Utilizando el valor de índice de refracción aproximado de este vidrio  $n \approx 1.5$  podemos decir que prácticamente  $\Delta l_c \approx L$ . En la figura (4.15) se observa a simple vista que nuestra aproximación es buena.

#### II.4. Experimento de tomografía de QOCT

Hemos usado un porta objetos de 1 mm de espesor nominal y una reflectancia del 4% en cada interface. Como la baja reflectancia es opacada por el espejo de referencia, ponemos un material no reflejante entre la muestra y el espejo, para ahora solo ver las coincidencias provenientes de la muestra. Un interferograma es medido registrando la tasa de detección de coincidencias entre fotón señal y acompañante

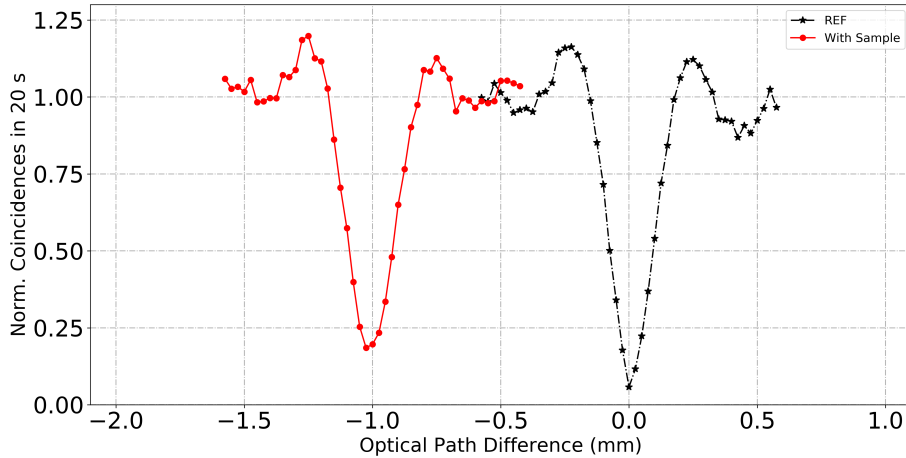


Figura 4.15: (Color negro) Medición de dip de HOM en espejo de referencia. (Color rojo) Medición del dip de HOM una vez que se añadió la muestra de vidrio de 1 mm de espesor.

como función del retraso temporal en aire. Realizamos escaneos con pasos de  $25 \mu\text{m}$  del motor y con tiempos de adquisición de 240 segundos por paso. Los interferogramas experimentales de QOCT para esta muestra son mostrados en la segunda columna de la figura (4.16) para nuestros tres tipos de configuraciones. Para cada configuración de fuente mostramos las mediciones experimentales (puntos rojos), así como dos curvas teóricas: el interferograma derivado del modelo teórico Gaussiano (ecuaciones (4.8) y (4.9)) (línea azul punteada), y el interferograma derivado por integración numérica de las ecuaciones (4.4) y (4.5) con el modelo completo, esto es, incluyendo la presencia de filtros espectrales (línea negra sólida). Notar que, como era de esperarse, los dips, y la estructura intermedia, exhiben una forma Gaussiana para el caso de usar el modelo Gaussiano (ver ecuación (4.8)), el hecho de que el filtro espectral tenga una función de transmisión casi rectangular, modifica las forma de las estructuras a funciones con oscilaciones tipo sinc. La figura (4.1) muestra el parámetro de tiempo de entrelazamiento  $\tau_d$  y  $\tau_a$  para cada una de las tres configuraciones. Los valores de  $\tau_d$  (primera columna) fueron obtenidos al medir el ancho de banda de los láseres (ver figura (4.4)); note que mientras que  $\tau_d$  tiende a infinito para un bombeo monocromático, para nuestra fuente de bombeo realista CW el estado de

dos fotones es una suma incoherente de estados, cada uno asociado con un bombeo monocromático que corresponde a cada una de las componentes espectrales, dejando  $\tau_d$  indefinido.  $\tau_a$  se obtiene de los anchos de los dips de HOM, específicamente a través de un ajuste Gaussiano hecho a los datos experimentales.

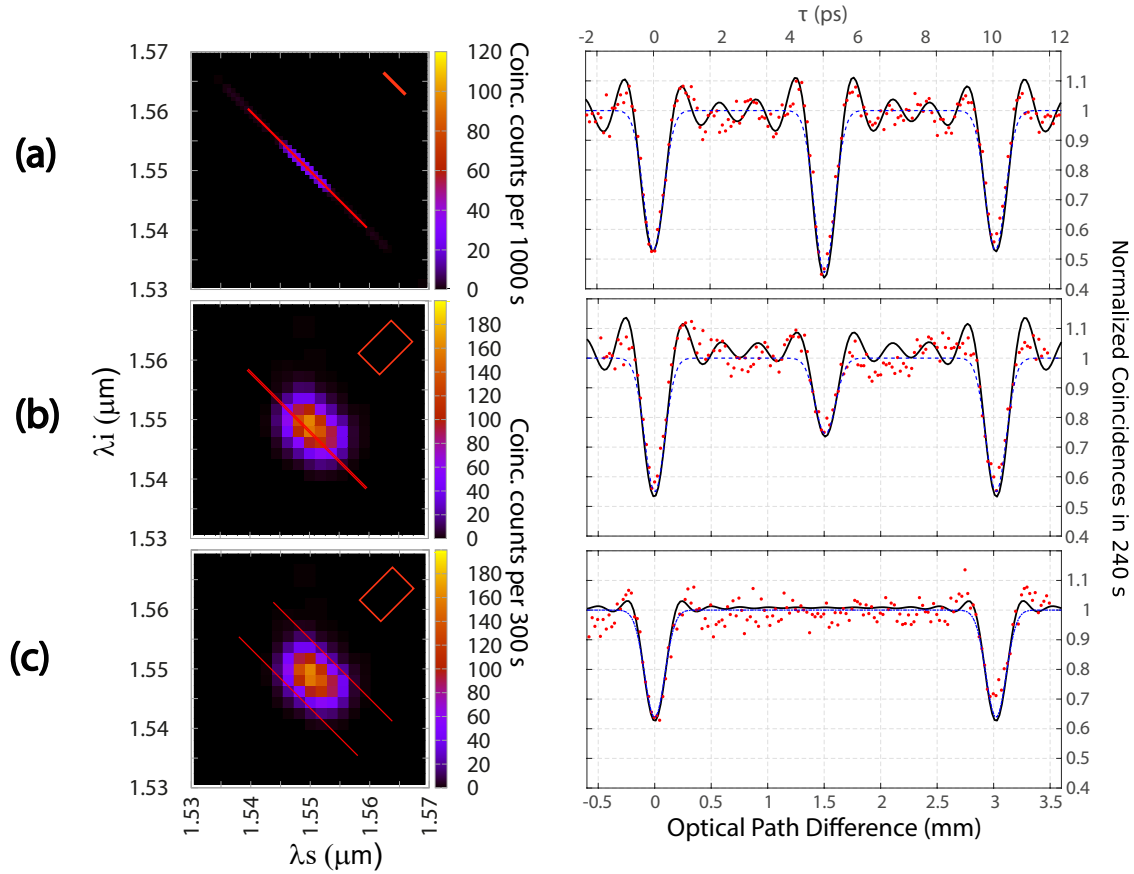


Figura 4.16: Medición de QOCT para una muestra de dos capas para distintos tipos de JSI: (a) Bombeo CW. (b) Bombeo pulsado de pico-segundos. (c) Bombeo pulsado de femto-segundos.

De acuerdo con nuestra teoría, el interferograma obtenido en la figura (4.16 a), presenta una estructura intermedia que puede ser un pico o un dip con amplitud proporcional a  $\cos(\omega_0 T)$  [ver la ecuación (4.16)]. Para el caso específico mostrado, esta estructura intermedia es un dip con mayor visibilidad que los otros dos dips, o sea, los que representan a las dos capas. La figura (4.16 b) muestra el interferograma de QOCT obtenido para parejas de fotones parcialmente anti-correlacionados, o sea,

con un bombeo pulsado en el régimen de pico-segundos. Finalmente, la figura (4.16 c) muestra un interferograma de QOCT obtenido para un pareja de fotones casi factorizable, esto es, en el régimen de femto-segundos. Estos resultados muestran que la estructura intermedia es reducida en amplitud para el bombeo de pico-segundos, y es completamente eliminado para el bombeo de femto-segundos, como predice nuestra teoría. Note que la separación de los dos dips de HOM, determinados por el ancho de la muestra, es el mismo, en las tres configuraciones, y que el ancho del HOM (que depende del tiempo de entrelazamiento anti-diagonal  $\tau_a$  y en este caso constreñido por el ancho del filtro espectral), también continua esencialmente inalterado para las tres configuraciones. Note que las visibilidades de los dips que corresponden a las capas de la muestra se acercan mucho al valor teórico máximo del 50 %, al menos para el láser CW y al láser de pico-segundos, aunque es un poco menor para el láser en el régimen de femto-segundos; esto se debe probablemente a las inestabilidades de nuestro láser de femto-segundos. La separación de los dips corresponde a  $2nL \approx 3$  mm, con  $n \approx 1.5$  que es el índice de refracción aproximado de nuestro material, tenemos que la longitud de la muestra es aproximadamente de 1 mm.

Hemos puntualizado que la estructura intermedia puede ser un pico o un valle, con una amplitud que depende de  $\cos(\omega_0 T)$ . Con el fin de mostrar este efecto experimentalmente, hemos llevado a cabo mediciones de interferogramas de QOCT para el caso de bombeo CW, similar al mostrado en la figura (4.16 a), como función de la frecuencia central del bombeo. Los interferogramas completos que muestran el efecto de pico/valle se muestra en la figura (4.17) para tres distintas frecuencias centrales de bombeo. El efecto es más claro en la figura (4.18), que muestra la amplitud de la estructura intermedia como función de la frecuencia del bombeo obtenida experimentalmente más o menos cubriendo un periodo de oscilación, así como una curva cosenoidal (curva azul punteada) obtenida como mejor ajuste a los datos (puntos negros); el valor de T inferido de este ajuste es cerca de 10 ps que corresponde bien con el valor esperado  $2nL$  ya mencionado. y que también define la separación entre los dos dips. Note que debido a la imperfecciones experimentales la amplitud máxima del pico en la figura (4.18) es mayor que la máxima amplitud del valle. Es valioso mencionar que el efecto de este pico/valle ha sido comentado en trabajos previos, ver [33], junto con la sugerencia de que la estructura intermedia podría ser eliminada

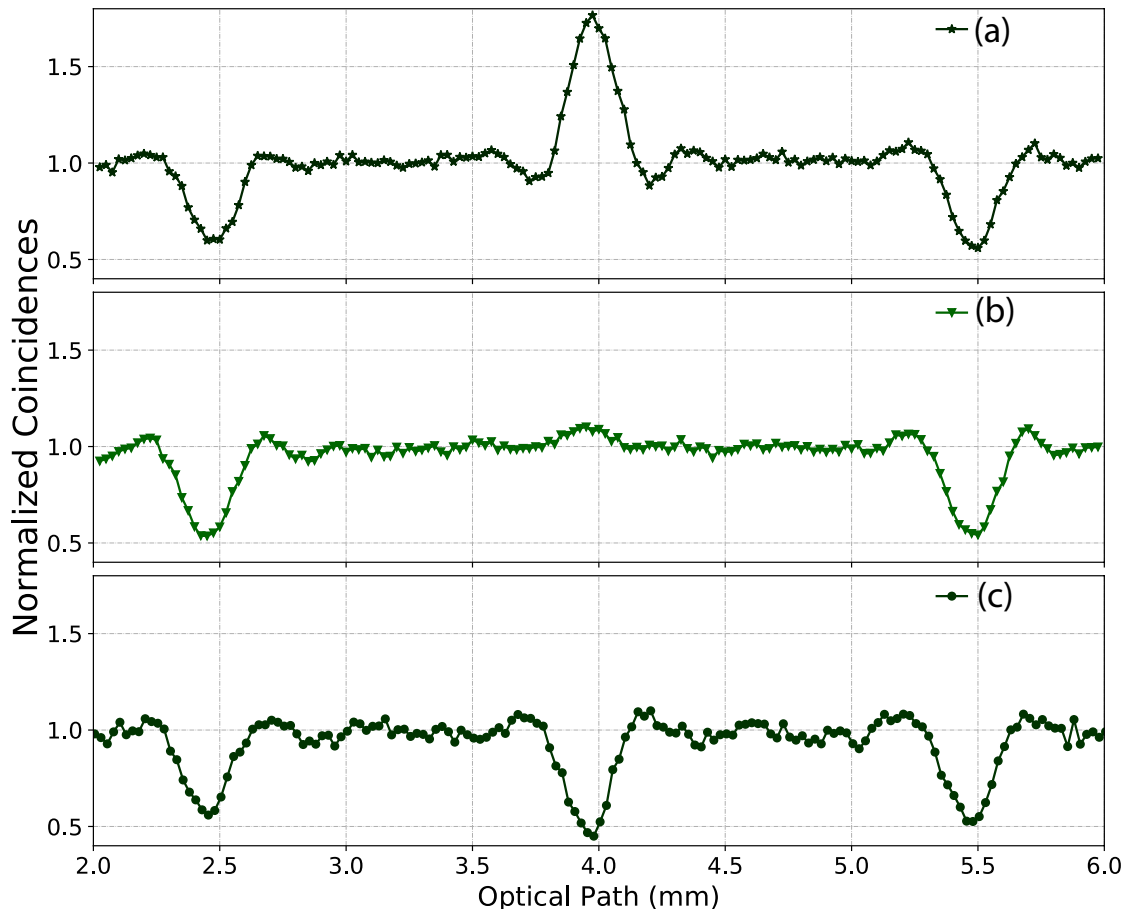


Figura 4.17: Medición de QOCT para una muestra de dos capas, para un bombeo CW a tres tipos de frecuencias destacando el comportamiento de pico/valle, correspondientes a  $\lambda_p = 774.86$  nm (panel(a)),  $\lambda_p = 774.94$  nm (panel(b)),  $\lambda_p = 775.50$  nm (panel(c)).

promediando sobre interferogramas tomados a distintas frecuencias. Mientras que es cuestionable un enfoque que requiera múltiples repeticiones del experimento, cada uno con una frecuencia central ligeramente diferente, sea factible en una configuración práctica, nuestro bombeo pulsado de femto-segundos, que de hecho ya contiene un rango amplio de componentes espectrales cumple con ese proceso de promedio directamente, permitiendo la supresión de la estructura intermedia usando una sola medición experimental.

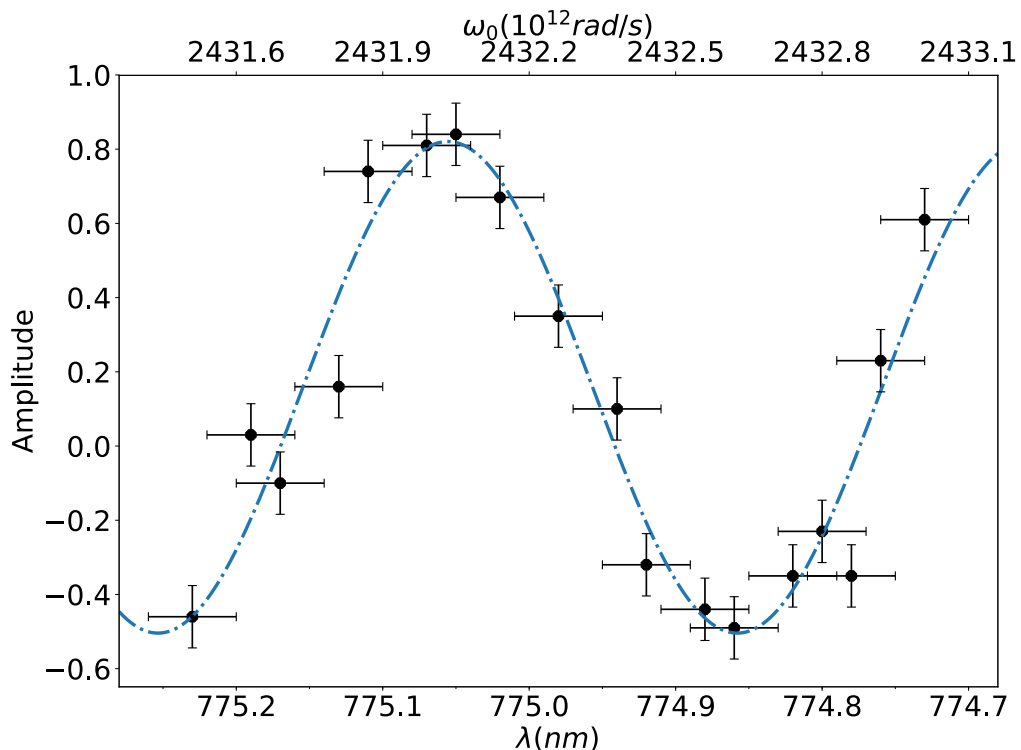


Figura 4.18: Visibilidad de la estructura intermedia como función de la frecuencia del bombeo, para el bombeo CW. Hemos hecho un ajuste de la forma  $a \cos(T\omega_0 + b) + c$ , del cual obtuvimos el valor de  $T \approx 10$  ps, como esperamos (el valor real es  $T = 10.067 \pm 0.419$  ps, calculado de las mediciones puestas en la tabla 4.2).

### II.5. Técnica de medición del índice de refracción y espesor de materiales transparentes

Hemos implementado un método complementario diseñado para medir el grosor de una muestra de dos capas, donde ambas interfaces corresponden a aire-muestra y muestra-aire. En este método primero hacemos uso del arreglo experimental de la figura (4.13), pero sin la muestra (S), y midiendo un interferograma de HOM simple. El experimento es repetido colocando de nuevo la muestra (S) y midiendo el corrimiento del HOM, tal y como explicamos en la sección *Corrimiento del dip de HOM* (ver figura (4.15)). Este resultado representa una traslación del dip de HOM por un tiempo  $2(n-1)L/c$ , que corresponde al camino óptico añadido al introducir la muestra. Note que para el HOM obtenido en presencia de la muestra, la visibilidad se ha reducido un poco, ya que la muestra y espejo juntos forman un tipo de sistema de tres capas con la visibilidad de cada capa disminuida de acuerdo al flujo de fotones de las otras dos capas en cuestión.

Con esto contamos con tres métodos, ver tabla (4.2), que nos dan información acerca del índice de refracción  $n$  y del espesor de la muestra  $L$ . En dos de estos métodos: (i) basado en la separación de los dos dips de HOM obtenidos en el interferograma de QOCT, y (ii) basado en el ajuste cosenoidal a la amplitud de la estructura intermedia como función de la frecuencia del bombeo, obteniendo la cantidad  $d = 2nL$ . En un tercer método, (iii) que se basa en medir el corrimiento del dip de HOM con y sin muestra, y registrando el corrimiento relativo, obtenemos la cantidad  $d' = 2(n-1)L$ . Por lo que podemos hacer uso de cualquiera de los dos métodos del primer grupo (método i y ii), junto con el resultado del tercer método (iii), para generar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas ( $n, L$ ):

$$\begin{aligned} d &= 2nL \\ d' &= 2(n-1)L, \end{aligned} \tag{4.21}$$

donde los valores  $d$  se obtiene del interferograma de QOCT y  $d'$  se obtiene del corrimiento de los dips de HOM del espejo de referencia (RM). Resolver este sistema de ecuaciones nos da la información experimental de  $n$  y  $L$  de manera simultanea

Método	Medición (mm)	$n$	$L$ (mm)
QOCT dip separation HOM with/without sample	$2nL = 3.021 \pm 0.025$ $2(n-1)L = 1.026 \pm 0.025$	} $1.514 \pm 0.025$	$0.997 \pm 0.025$
término coseno (estructura intermedia)	$2nL = 3.033 \pm 0.072$		

Tabla 4.2: Determinación experimental de  $n$  y  $L$ .

sin ningún conocimiento previo del material de la muestra. En la tabla (4.2) hemos seleccionado el método (i), en lugar del (ii) ya que involucraba menor incertidumbre experimental. Los valores de  $n$  y  $L$  obtenidos son mostrados en la tabla, junto con el valor nominal del fabricante.

### III. Conclusiones de la Tomografía de coherencia óptica cuántica

En la primer parte de este trabajo demostramos la manera de controlar las correlaciones espectrales y espaciales de las parejas de fotones generadas por SPDC, en esta segunda parte, demostramos la importancia que tiene el control de la correlación espectral en específico. Modificar la forma de la JSI nos permite adaptar determinada fuente a determinado experimento o a determinada aplicación, en el ámbito de interferencia de QOCT nos interesa tener tiempos de coherencia pequeños para así poder ganar resolución a la hora de medir muestras biológicas. Es importante destacar que el tiempo de coherencia que mejora la resolución del QOCT no es el tiempo de coherencia del láser de bombeo que impacta al cristal no lineal, sino se refiere al tiempo de de coherencia  $\tau_d \propto 1/(2\Omega)$  que depende de la frecuencia de desentonamiento ( $2\Omega = \omega_s - \omega_i$ ) entre los fotones generados. El tiempo de coherencia del láser de bombeo pulsado  $\tau_d$  se refiere más bien, al tiempo durante el cual un paquete de ondas será coherente consigo mismo, es decir la duración del paquete mismo. Si existe pico intermedio es porque el ancho de este paquete es mayor que la muestra. El pico intermedio podría asemejarse a una interferencia más clásica que cuántica, ya que se debe a que dos fotones de dos parejas distintas generadas por un mismo paquete de ondas del bombeo, que estén separados una distancia menor que el tamaño de la muestra, pueden interferir en un mismo detector. Así podemos concluir



que la interferencia de un bi-fotón en dos detectores separados espacialmente, está relacionada con el tiempo de coherencia de la anti-diagonal de la JSI  $\tau_a$ , mientras que la interferencia de dos o más fotones en un sólo punto del espacio, está relacionada con la separación que existe entre estos fotones y esto está limitado por el tiempo de coherencia de la diagonal de la JSI  $\tau_d$ .

Otra cosa interesante es saber que a medida que aumente el número de capas en una muestra, la visibilidad de los dips disminuye en relación inversa al número de capas  $1/N$ , mientras que los picos/dips intermedios mantienen su alta visibilidad, esto nos lleva a preguntarnos lo siguiente: ¿Podría ser posible diseñar un experimento de QOCT en el que se aproveche la visibilidad del pico intermedio para reconstruir la muestra? Y hacemos esta pregunta, ya que la visibilidad del pico cambiaría dependiendo de la profundidad de las distintas capas, pudiendo esconder algunas capas y resaltar otras.



---

## 5

# Técnica de Tomografía de Coherencia Óptica Cuántica con Resolución Espectral

En el presente capítulo mostramos una técnica novedosa para medir imágenes tomográficas tipo QOCT pero utilizando las ventajas que representa trabajar en el espacio de Fourier de la pareja de fotones. En la primera parte me dedicaré a explicar la ampliación de la técnica de interferometría de Hong-Ou-Mandel al régimen de frecuencias (el dominio espectral de la interferencia de HOM), la implementación experimental y la recuperación de la información que existe en el interferograma convencional de HOM. En la segunda parte me enfocaré en generalizar esta técnica en lo que denominaremos QOCT en el dominio espectral.

## I. Interferencia de Hong-Ou-Mandel en el dominio espectral

Partiendo del estado de dos fotones general del capítulo anterior (ecuación (4.1))

$$|\psi\rangle = |0\rangle_1 |0\rangle_2 + \eta \int d\omega_s \int d\omega_i f(\omega_s, \omega_i) |\omega_s\rangle |\omega_i\rangle,$$

con una amplitud espectral conjunta dos-dimensional  $f(\omega_s, \omega_i)$  donde  $|\eta|^2$  es proporcional a la tasa de generación de parejas de fotones. Usando la ecuación (4.2) del capítulo anterior, pero usando un espejo en lugar de muestra,  $H(\omega) = 1$ , el interferograma de coincidencias se puede escribir como

$$P_c(\tau) = \frac{1}{4} \int \int d\omega_s d\omega_i |f(\omega_i, \omega_s) e^{i(\omega_i - \omega_s)\tau} - f(\omega_s, \omega_i)|^2.$$

Sabemos que el ancho del dip de HOM depende principalmente del espectro del bi-fotón, o espectro de desentonamiento, por lo que resulta mejor hacer un cambio de variables, tal y como se hace en el apéndice C, ecuación (C.40):

$$\begin{aligned}\omega^+ &= \omega_s + \omega_i \\ \omega^- &= \omega_s - \omega_i.\end{aligned}$$

donde  $\omega^+$  es un eje a lo largo de la diagonal principal y  $\omega^-$  es la frecuencia de desentonamiento de los fotones y corresponde al eje anti-diagonal de la JSI (ver figura (C.4 b)). Con esto la ecuación (4.1) se puede reescribir:

$$|\psi\rangle = |0\rangle_1 |0\rangle_2 + \eta \int d\omega^+ \int d\omega^- f(\omega^+, \omega^-) |\omega^+\rangle |\omega^-\rangle, \quad (5.1)$$

y las coincidencias como

$$P_c(\tau) = \frac{1}{4} \int \int d\omega^+ d\omega^- |f(\omega^-, \omega^+) e^{-i(\omega^-)\tau} - f(\omega^+, \omega^-)|^2. \quad (5.2)$$

Ahora utilizando el modelo Gaussiano del capítulo anterior (ecuación (4.8)) para representar las función de amplitud conjunta, podemos reescribirla en términos de las variables  $(\omega^+, \omega^-)$  como:

$$f(\omega^+, \omega^-) = \frac{2}{\sqrt{\pi\Omega_a\Omega_d}} \exp\left[-\left(\frac{\omega^-}{\Omega_a}\right)^2\right] \exp\left[-\left(\frac{\omega^+ - 2\omega_0}{\Omega_d}\right)^2\right]. \quad (5.3)$$

Siendo  $\Omega_a$  y  $\Omega_d$  los anchos anti-diagonal y diagonal respectivamente. Podemos ver también que en este sistema de coordenadas la función de amplitud conjunta es separable  $f(\omega^+, \omega^-) = f(\omega^+)f(\omega^-)$  por lo que la ecuación (5.3) se simplifica en el producto de dos integrales independientes:

$$P_c(\tau) = \frac{1}{4} \int d\omega^+ |f(\omega^+)|^2 \int d\omega^- |f(\omega^-) e^{-i(\omega^-)\tau} - f(-\omega^-)|^2 \quad (5.4)$$

estando normalizada la función de amplitud, podemos observar que el ancho del interferograma solo depende de la componente anti-diagonal del espectro  $f(\omega^-)$  de la pareja de fotones, a este espectro lo llamamos *espectro de desentonamiento* o *espectro del bi-fotón*. Escribiendo todo en términos del desentonamiento individual  $\Omega$  del fotón señal  $\omega_s = \omega_0 + \Omega$  y el fotón acompañante  $\omega_i = \omega_0 - \Omega$ , llegamos a que  $\omega^- = \omega_s - \omega_i = 2\Omega$ . Debido a que lo que se medirá en los experimentos es  $2\Omega$  que es el espectro de desentonamiento total del bi-fotón escribiremos todas las expresiones en términos de esta variable ( $\Omega = 2\Omega$ ), recordando siempre asociar en las ecuaciones  $\Omega_{(bi-foton)} = 2\Omega_{(1-foton)}$  al espectro completo, por simplicidad escribamos  $\Omega$  como el espectro de desentonamiento completo del bi-fotón.

Ahora podemos escribir la nueva función de coincidencias de la siguiente manera:

$$P_c(\tau) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega |f(\Omega) - f(-\Omega)e^{i\Omega\tau}|^2 \quad (5.5)$$

que corresponde al interferograma producido por un bombeo monocromático.

El fenómeno de interferencia de Hong-Ou-Mandel consiste en medir la detección en coincidencias de dos fotones que salen de un divisor de haz 50/50, como ya es sabido, si los fotones que inciden en el divisor de haz son indistinguibles, ocurrirá el efecto de amontonamiento, en el cual los fotones tienden a salir por un solo puerto, pero no por ambos, y por lo tanto habrá cero coincidencias. Para poder medir este efecto se hacen distinguibles los fotones por medio de un retraso temporal ( $\tau$ ) agregado a uno de los fotones, conforme el retraso temporal  $\tau$  tiende a cero, también las coincidencias lo harán, lo cual es demostrado por el famoso dip de Hong-Ou-Mandel (ver figura (5.1)).

El interferómetro de HOM convencional no hace distinción de la composición espectral de los fotones que interfieren, ya que sólo acumula incoherentemente los interferogramas de cada frecuencia. Si ahora antes del sistema de detección de coincidencias se procede a colocar un espectrómetro de fibra óptica, la dispersión de las componentes espectrales de los fotones puede ser medida y también así el efecto de la interferencia sobre cada componente espectral, esto es equivalente a quitar la integral sobre las frecuencias, ya que ahora somos capaces de ver con cierta precisión el grado de interferencia espectral (ver la figura (5.2)).

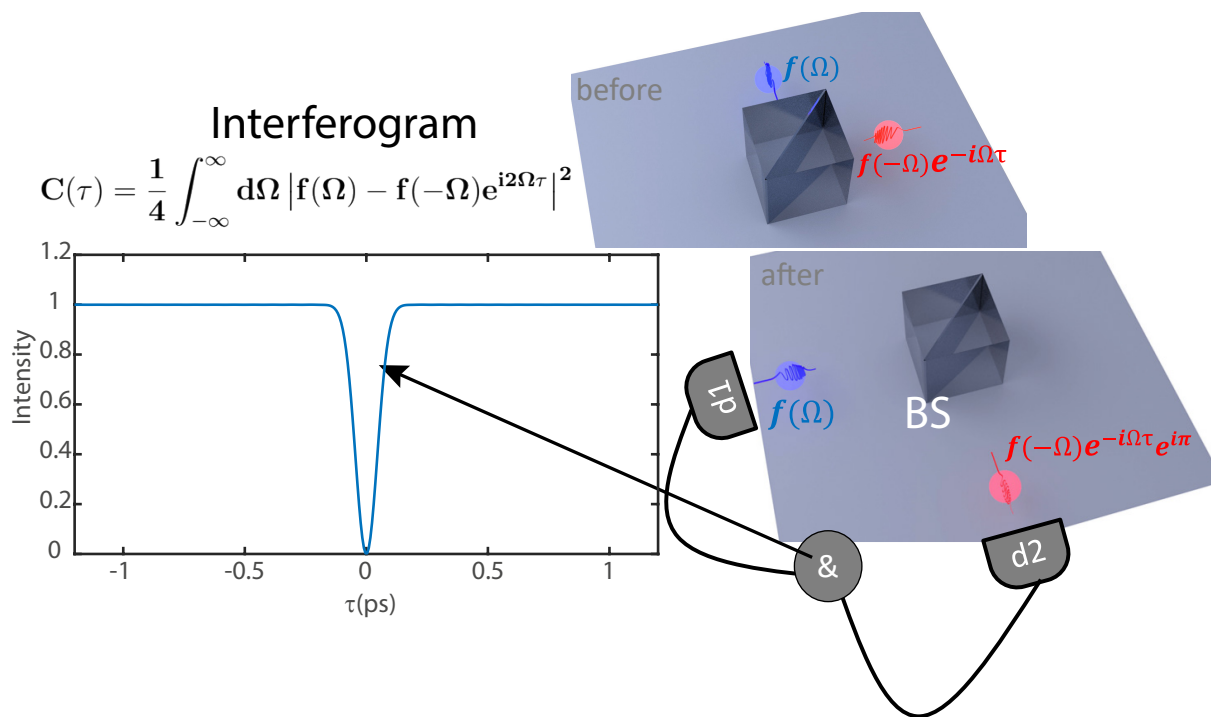


Figura 5.1: Esquema que muestra el efecto fundamental de un BS sobre dos fotones individuales, el fotón representado en color rojo ha sido retrasado previamente por un delay  $\tau$ . Después de pasar por el BS y ser desviado adquiere una fase de  $\pi$  respecto del otro fotón.

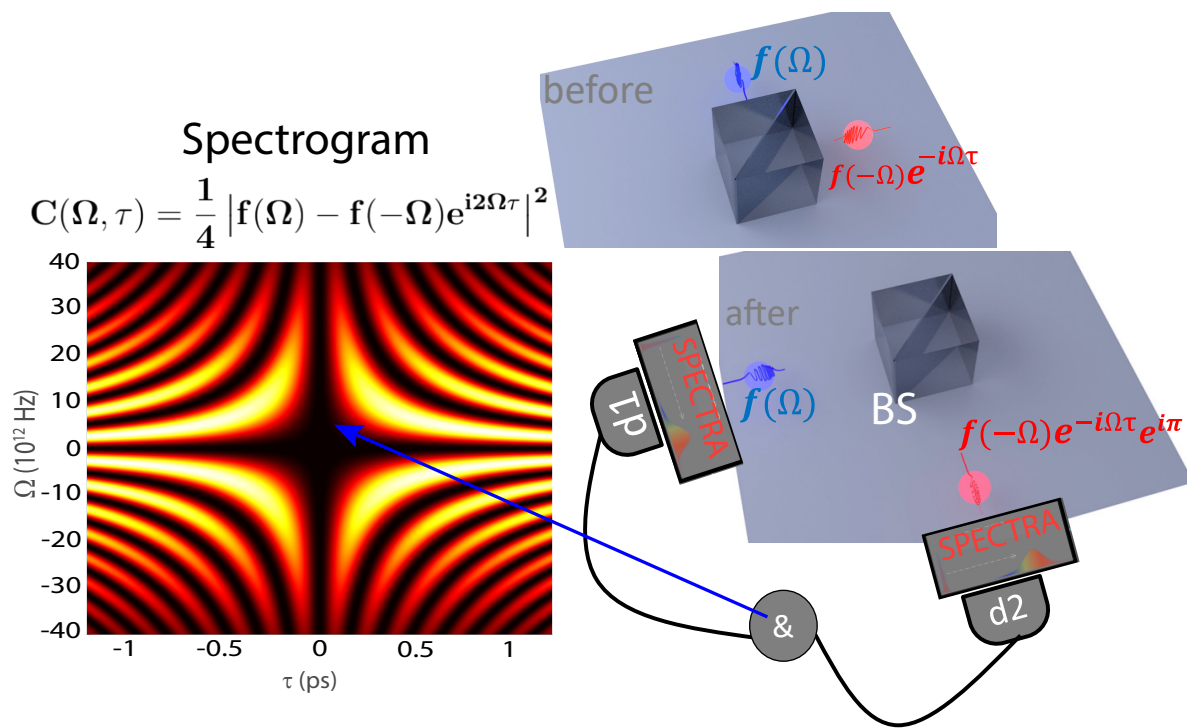


Figura 5.2: Esquema intuitivo que muestra el efecto fundamental de un BS sobre dos fotones individuales con resolución espectral.

El interferograma de HOM espectral se obtiene quitando la integral en frecuencias, esto significa que tendremos resolución espectral del interferograma de HOM convencional. Ahora por cada punto en el eje de retraso temporal,  $\tau$ , tendremos el grado de interferencia de todas las componentes espectrales,  $\Omega$ . Por lo que estaremos pasando de un interferograma 1D,  $P_c(\tau)$ , a un interferograma 2D,  $P_c(\tau, \Omega)$  ó *espectrograma de interferencia*.

La expresión del espectrograma, como ya mencionamos, es tan sencillo como quitar la integral de la ecuación (5.5):

$$P_c(\Omega, \tau) = \frac{1}{4} |f(\Omega) - f(-\Omega)e^{i2\Omega\tau}|^2, \quad (5.6)$$

donde, evidentemente, se cumple la siguiente relación:

$$P_c(\tau) = \int d\Omega P_c(\Omega, \tau). \quad (5.7)$$

Podemos saber que forma tendrá esta expresión si tomamos solamente el argumento en el módulo cuadrado y asumimos como es de esperarse en la interferencia de HOM que la función de amplitud conjunta es simétrica  $f(\Omega) = f(-\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} f(\Omega) - f(-\Omega)e^{i\Omega\tau} &= f(\Omega) (1 - e^{i\Omega\tau}) \\ &= f(\Omega) (e^{-i(\Omega/2)\tau} - e^{i(\Omega/2)\tau}) e^{i(\Omega/2)\tau}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

debido a que este término esta dentro de un módulo cuadrado podemos deshacernos de la última exponencial compleja y ver la forma que tendrá nuestro espectro interferido:

$$f(\Omega) - f(-\Omega)e^{i\Omega\tau} \propto f(\Omega) \sin((\Omega/2)\tau), \quad (5.9)$$

por lo que

$$P_c(\Omega, \tau) \propto |f(\Omega)|^2 \sin^2((\Omega/2)\tau), \quad (5.10)$$



esto es una envolvente espectral que está modulada por una función periódica seno. En la figura (5.3) se muestra el efecto cualitativo de esta función  $P_c(\Omega, \tau_0)$  para 3 distintos  $\tau_0$ 's fijos. Es interesante ver que la frecuencia de oscilaciones está dada por  $\tau_0$  (el periodo es  $2\pi/\tau_0$ ).

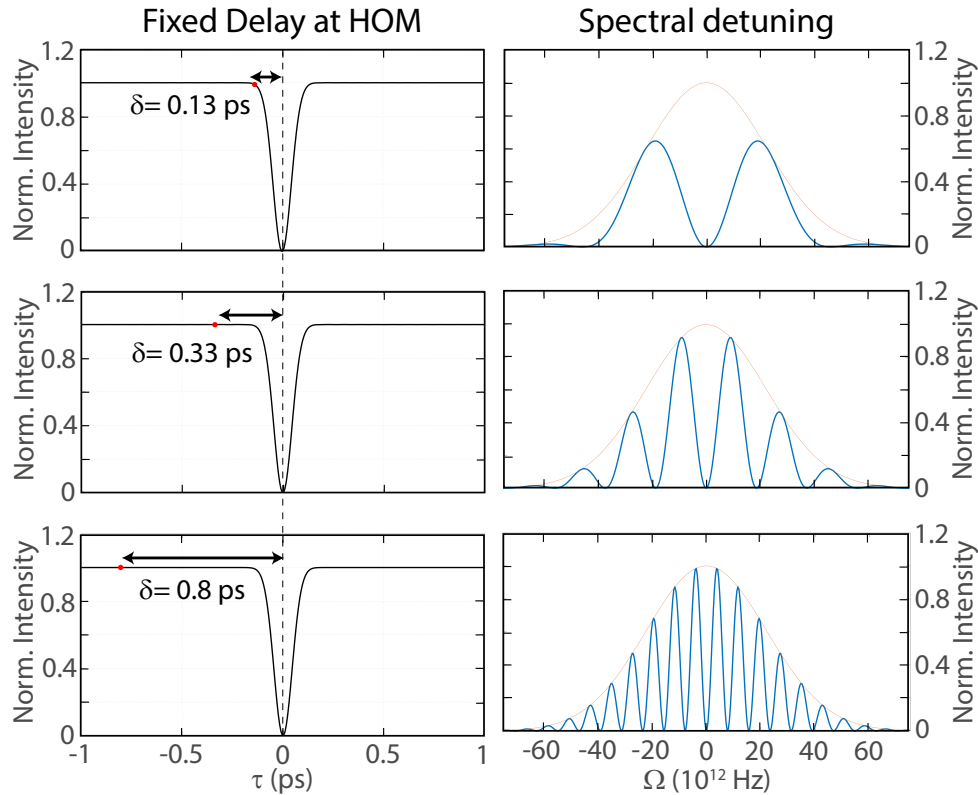


Figura 5.3: Esquema que muestra la relación entre la separación de dos fotones en el dip de HOM y el espectro de desentonamiento interferido para los retrasos temporales  $\delta = 0.13, 0.33$  y  $0.80$  ps.

Esto significa que el efecto completo de desplazar el motor sobre distintas posiciones en torno al punto de máxima interferencia del dip de HOM, será obtener espectros de desentonamiento modulados por oscilaciones que irán disminuyendo conforme nos acercamos al punto del dip de HOM. El número de lóbulos siempre es par, por ejemplo en la figura (5.3) ( $\delta = 0.13$  ps) es de dos lóbulos, mientras que para  $\delta = 0.33$  ps es de seis y así sucesivamente. El conjunto de todos los espectros interferidos  $P_c(\Omega, \tau_1), P_c(\Omega, \tau_2) \dots P_c(\Omega, \tau_n)$  será llamado *espectrograma de interferencia* de HOM,  $P_c(\Omega, \tau)$ , que es una función bi-dimensional que tiene la forma de una flor de

pétalos (ver la figura (5.2)).

### I.1. Características del Espectrograma $P_c(\Omega, \tau)$

Mostraremos algunos aspectos importantes del espectrograma de HOM que tiene mucho más información que el interferograma de HOM convencional. Para comenzar estamos escalando de una función de una variable a una función de dos variables, uno siempre puede obtener la función de una variable trazando sobre una de las variables de la función más general, por lo que tener un espectrograma,  $P_c(\Omega, \tau)$ , nos dará una ventaja en información en comparación de sólo tener el interferograma  $P_c(\tau)$ . Para poder medir el espectrograma de HOM se realiza la medición del espectro de desentonamientos  $f(\Omega)$  (o una traza sobre la variable diagonal  $\omega^+$  de la función  $f(\omega^+, \omega^-)$ ), sin embargo se requiere tomar un espectro completo por cada paso del motor. En la figura (5.4 b) se muestra un espectro de desentonamiento común igual a los de la figura (5.3), cada uno de estos patrones nos dan información directa de la separación espacial entre cada fotón del par, y es completamente análogo a sacar la transformada de Fourier de dos funciones Gaussianas con cierta separación entre ellas. En la figura (5.4 a) se muestra el espectrograma completo formado al tomar un espectro de desentonamiento por cada paso del motor, y sobre este espectrograma se muestran cortes denotados por líneas punteadas de colores, el corte vertical (color azul) corresponde a un espectro de desentonamiento tomado en  $\tau_0 = -0.5$  pico-segundos de separación temporal del dip de HOM. La forma de este espectro se entiende cualitativamente al tomar un corte de la ecuación (5.10) para un  $\tau_0$  fijo,  $P_c(\Omega, \tau_0) \propto |f(\Omega)|^2 \sin^2((\tau_0/2)\Omega)$ , como se dijo antes, es el espectro normal del bi-fotón pero con una modulación dada por el seno de  $(\tau_0/2)\Omega$  donde,  $(\tau_0/2)$  cumpliría el papel de la frecuencia, mientras más lejos estemos del dip de HOM más oscilaciones veremos en la modulación. En la figura (5.4 c) se muestran tres cortes horizontales  $P_c(\Omega_0, \tau)$  sobre el espectrograma: para  $\Omega_0=5.7$  THz.rad (color rojo), para  $\Omega_0=25.4$  THz.rad (color amarillo) y para  $\Omega_0=45.05$  THz.rad (color violeta), se observa un comportamiento meramente sinusoidal, esto corresponde con la forma cualitativa dada por la ecuación (5.10),  $P_c(\Omega_0, \tau) \propto |f(\Omega_0)|^2 \sin^2((\Omega_0/2)\tau)$ , donde la contribución de la  $f(\Omega_0)$  es una constante que decrece conforme aumenta la frecuencia de desentonamiento  $\Omega_0$ . El significado físico de estas funciones armóni-

cas, en el espacio  $\tau$ , es similar al de las ondas perfectamente monocromáticas planas,  $\exp(ikx)$  que son utilizadas como base para representar paquetes de ondas espaciales, o completamente análogo a  $\exp(i\omega t)$  que se utilizan como base para formar paquetes de ondas temporales. Si uno pudiera seleccionar experimentalmente un pequeño  $\Delta\Omega \neq 0$  del espectro de desentonamiento lo suficientemente lejos de la frecuencia de degeneración,  $\tilde{\Omega} \neq 0$ , significaría que los fotones dejarían de ser degenerados en esa región, o sea, que un fotón tendría una frecuencia  $\omega_1 \neq \omega_{p0}/2$  y por lo tanto  $\omega_2 = \omega_{p0} - \omega_1$ , de tal manera que  $\omega_1 - \omega_2 = \tilde{\Omega}$ . En tal caso, a pesar de que los fotones ya serían distinguibles en frecuencia, aún habría interferencia de HOM; en tal caso ya no aparece el dip normal, sino que aparecen batidos espaciales. Conforme  $\Delta\Omega \rightarrow 0$  los batidos se extienden en el espacio hasta convertirse en una función armónica coseno perfecta, distribuida en todo el espacio, como las mostradas en la figura (5.4 c). En cambio, cuándo  $\Delta\Omega$  crece hasta ir abarcando más y más del espectro de desentonamientos, la función armónica extendida, tiende a irse concentrando, formando los batidos, cada vez más localizados, hasta que en el límite en que  $\Delta\Omega \rightarrow \infty$ , o al menos que cubra todo el espectro, los batidos desaparecen y se recupera el dip de HOM localizado de siempre que equivale a no tener nada de resolución espectral (ver figura (5.5 c)).

Ahora mostraremos la ventaja de tener este espectrograma, primeramente podremos obtener de nuevo la información del dip de HOM tan solo trazando sobre las frecuencias como se muestra en la figura (5.5 c), esto es lo que comúnmente hace un detector sin resolución espectral. En la figura (5.5 b) mostramos una traza sobre todos los retrasos temporales  $\tau$ , lo que nos deja un tipo de espectro de desentonamiento al que se le ha restado una función tipo sinc. Las oscilaciones tipo sinc que aparecían en los interferogramas de HOM del capítulo anterior (figura (4.16)) se deben a que existe un filtro espectral constriñendo el espectro de desentonamiento completo; en este caso, al parecer las oscilaciones tipo sinc que aparecen en la traza sobre los retrasos temporales, se deben a un filtro temporal que constriñe la duración del bi-fotón en el tiempo (posiblemente este se deba a la ventana temporal de los detectores individuales). Podemos ver la analogía o el parecido entre el dip de HOM en el espacio de frecuencias y el espacio de retrasos temporales; en el caso límite en el que el espectro de desentonamientos  $\Omega \rightarrow \infty$ , la simetría se vuelve completa y

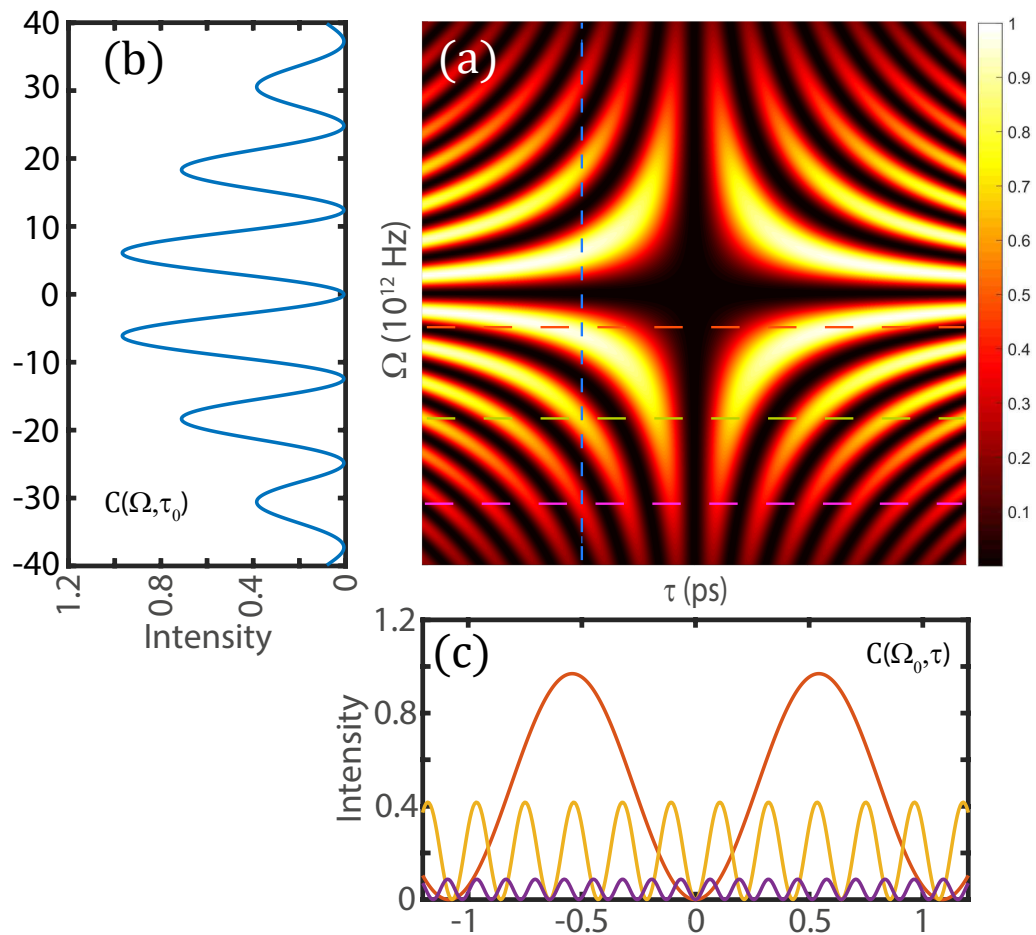


Figura 5.4: (a) Cálculo de un espectrograma de HOM. (b) Corte en  $\tau_0 = -0.5$  ps. (c) Cortes en tres distintas frecuencias de desintonamiento  $\Omega_0 = \{-5.7, -25.4, -45.0\}$  THz.rad.

el espectrograma de HOM se convierte en un conjunto de hipérbolas perfectamente indistinguibles ante el intercambio de los ejes  $\tau$  y  $\Omega$ .

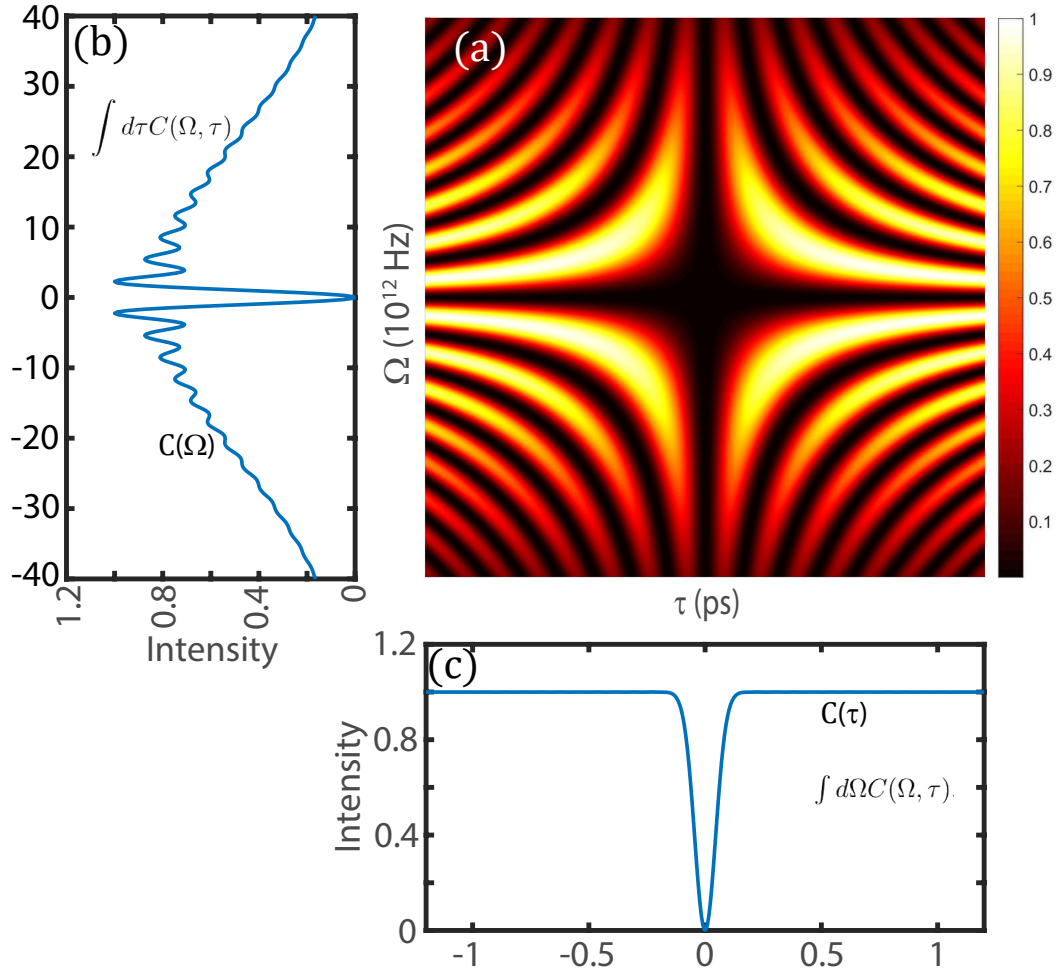


Figura 5.5: (a) Cálculo de un espectrograma de HOM. (b) Traza sobre los tiempos de retraso  $\tau$ 's. (c) Traza sobre las frecuencias de desintonamiento  $\Omega$ 's.

## I.2. Características de la transformada de Fourier del Espectrograma

Al sacar la transformada de Fourier uni-dimensional (sobre la variable  $\Omega$ ) del espectrograma  $P_c(\Omega, \tau)$

$$\mathbf{F}[P_c(\Omega, \tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} dt P_c(\Omega, \tau) e^{i\Omega t} = \tilde{P}_c(t, \tau) \quad (5.11)$$

obtendremos un mapa bi-dimensional que nos describe como se van juntando los fotones antes de interferir. En la figura (5.6 b) se muestra la transformada de Fourier del espectro de desentonamientos en una posición fija del motor  $\tau_0 = -1$  ps. Esto resulta muy útil a la hora de alinear un interferómetro de HOM, ya que el tiempo necesario para balancear los brazos depende de nuestro conocimiento de las diferencia temporal entre los fotones<sup>1</sup> que interfieren, que son del orden de varios pico-segundos ( $1 \text{ ps} \approx 300 \mu\text{m}$  en el vacío), sabiendo que uno debe de hacer barridos de pasos mucho más pequeños que el ancho del dip de HOM, saber dónde comenzar el escaneo para poder encontrar el dip de HOM se vuelve un proceso lento; por consiguiente este tipo de medición ahorra mucho tiempo a la hora de localizar la posición correcta del dip. Ahora bien, si uno ya cuenta con esta transformada de Fourier  $\tilde{C}(t, \tau)$ , uno puede recuperar el interferograma de HOM de 2 maneras: la primera es evaluando la función en  $t = 0$ , que sería tomar un corte horizontal del mapa de tiempos bi-dimensional (figura (5.6 (a))), viendo la ecuación (5.11) y sustituyendo el valor de  $t = 0$  en la exponencial de la transformada, es claro que esto es exactamente igual a trazar sobre las frecuencias en el espectrograma,  $\int d\Omega P_c(\Omega, \tau) = P_c(\tau)$ , lo que nos dejaría precisamente con el dip de HOM convencional (ver figura (5.6 c)). La segunda manera es reconstruir el interferograma de HOM,  $P_c(\tau)$ , a partir de la información que se encuentra en los picos de la transformada de un solo espectro de desentonamiento (ver figura (5.6 b)), este procedimiento se mostrará en la siguiente sección, y será de gran relevancia en la medición de la tomografía de QOCT.

## II. Implementación Experimental

A continuación mostraremos las técnicas para poder medir un espectrograma de HOM. Comenzaremos por la forma de medir el espectro de desentonamiento antes de mostrar el esquema experimental para medir espectrogramas de HOM.

### II.1. Espectrómetro unidimensional

Como ya no será tan necesaria la información de la componente diagonal  $\Omega_d$  de la JSI y puesto que estamos pensando trabajar con un bombeo CW ( $\Omega_d \approx 0$ ), podemos

---

<sup>1</sup>considerados como paquetes de ondas con un ancho temporal del orden de femto-segundos

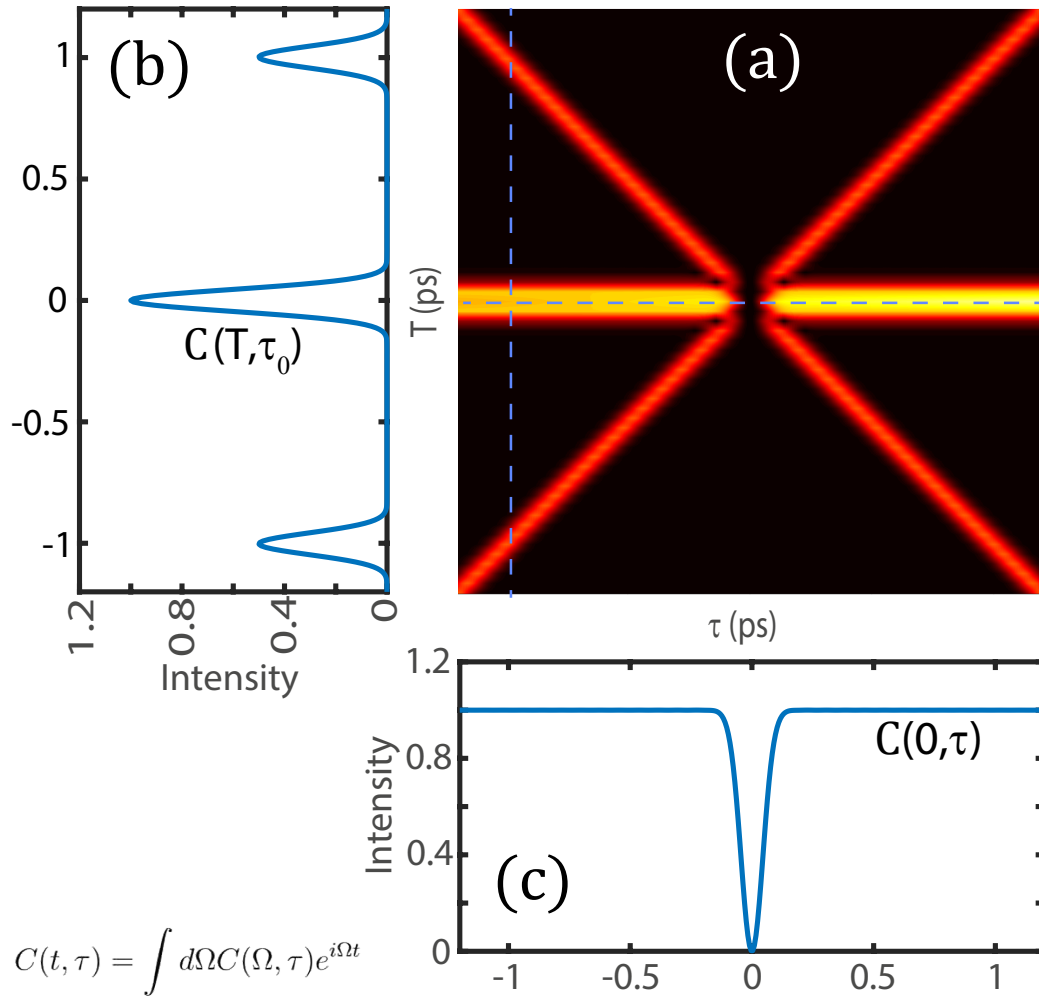


Figura 5.6: (a) Cálculo de la transformada de Fourier de un espectrograma de HOM. (b) Corte vertical en  $\tau_0 = -1$  ps. (c) Corte horizontal en  $t = 0$  ps.

caracterizar el estado bi-fotón midiendo solamente el espectro de desentonamiento  $|f(\Omega)|^2$ , que es una función de una sola variable que describe que tanto se despega la frecuencia de un fotón con respecto a la frecuencia de su compañero. Y ya que el desentonamiento no es más que la diferencia relativa que hay entre cada frecuencia del fotón señal y del fotón acompañante, podremos medir esta diferencia relativa utilizando un espectrómetro de fibra óptica para obtener la diferencia de los tiempos de llegada del fotón señal respecto al fotón acompañante,  $t_s - t_i$ , esta diferencia ya no depende de una referencia global de pulsos de llegada, por lo que, a diferencia de la JSI bidimensional donde forzosamente requerimos que el láser sea pulsado,  $|f(\Omega)|^2$  podremos medirla para un láser de onda continua o para cualquier tipo de láser en general. En la figura (5.7) se muestra el arreglo experimental básico para medir el espectro de desentonamiento de la pareja de fotones. Se utiliza un cristal de PPLN para producir una pareja de fotones mediante el proceso de SPDC de tipo 0, las temperaturas y ángulos de emisión son los mismos que utilizamos en el capítulo anterior. Los fotones de ambos brazos son colectados en dos carretes de fibras ópticas mono-modo SMF-28 de 5 km, y de ahí se conectan en dos detectores de fotón individual id-230 de InGaAs (marca id-Quantique). Las diferencias de tiempos de llegada son registradas utilizando un etiquetador de tiempos digital HydraHarp-400 de la marca picoQuant con el cual podemos alcanzar una resolución temporal de hasta 1 pico-segundo. En este experimento trabajamos con una resolución temporal de 64 ps.

En la figura (5.8) mostramos mediciones de espectros de desentonamiento para los casos de: (a) Utilizar un filtro espectral (SF) de 7.8 nm, (b) utilizar un filtro espectral de 40 nm y (c) sin utilizar ningún filtro espectral más que el filtro pasa-altas para limpiar el bombeo. Note que las anti-diagonales coinciden aproximadamente con el ancho de los filtros. En la figura (5.8 c) vemos que el espectro de desentonamiento es tan grande como 120 nm, pero también vemos que la simetría de la JSI correspondiente ya no es muy buena, y es por esto que no podemos trabajar con esta distribución y optamos por utilizar el filtro de 40 nm en el resto de nuestras mediciones.



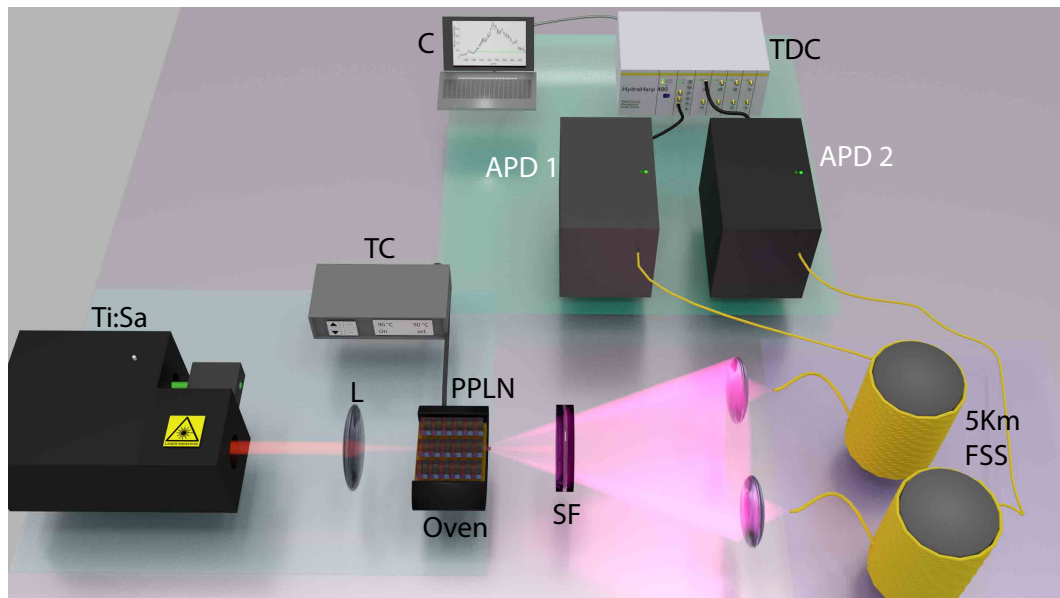


Figura 5.7: Arreglo experimental para medir la JSI unidimensional o el espectro de desintonamientos. Una vez producida la pareja de fotones, estos son colectados en dos carretes de fibra óptica de 5 km de longitud que nos permite separar temporalmente sus componentes espectrales, posteriormente las detecciones de los APDs son filtradas en coincidencias entre dos canales de un etiquetador de tiempos digital TDC.

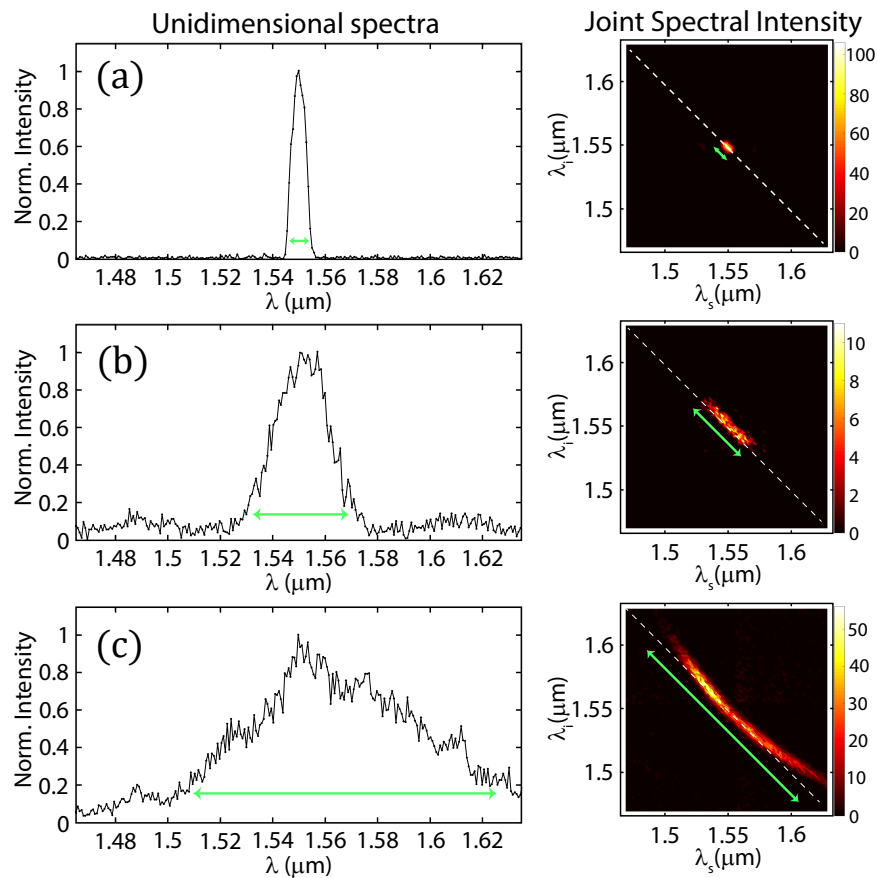


Figura 5.8: (Izquierda) JSI unidimensional o espectro de desintonamientos y la JSI bidimensional correspondiente (a la derecha). Usando: (a) Un filtro de 7 nm. (b) Un filtro de 40 nm. (c) Sin usar ningún filtro, la distribución espectral casi cubre 120 nm.

## II.2. Espectro de desintonamiento interferido

Para medir el espectro de desintonamiento interferido, será necesario utilizar un arreglo experimental igual al utilizado en el capítulo anterior (ver figura (4.13)), pero esta vez agregamos dos carretes de fibra óptica antes de los detectores con el fin de obtener resolución espectral. Como en este tipo de mediciones nos interesa tener la mayor resolución espectral, hicimos uso de un etiquetador de tiempos digital HydraHarp con resolución de hasta 1 pico-segundo. En la figura (5.9) se muestra el esquema utilizado en nuestras mediciones.

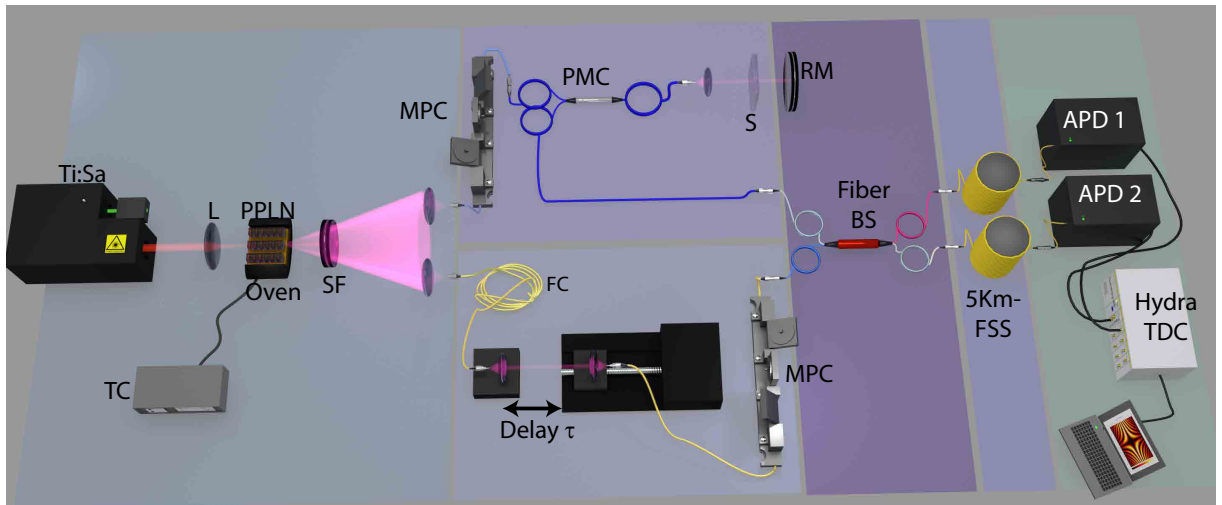


Figura 5.9: Arreglo experimental para medir HOM con resolución espectral. El arreglo es exactamente igual al utilizado para medir HOM o QOCT convencionales, pero tiene dos carretes de fibra óptica justo antes de los detectores.

Es importante notar que en el esquema experimental aparece la muestra (S), en esta primera parte solo estamos analizando el espectrograma correspondiente a un solo dip de HOM, así que solo necesitamos quitar la muestra (S), más adelante incluiremos el efecto de obtener espectrogramas de QOCT. Se obtuvieron espectros de desintonamiento interferidos para tres distintas posiciones del motor,  $\tau_0 = 30 \mu\text{m}$ ,  $\tau_0 = 90 \mu\text{m}$  y para  $\tau_0 = 160 \mu\text{m}$ , en las figuras (5.10 a), (5.10 b) y (5.10 c) se muestran las JSI's interferidas correspondientes. Es importante aclarar que el arreglo experimental de la figura (5.9) nos sirve para obtener únicamente la sección anti-diagonal de la JSI, esta sección anti-diagonal es precisamente el espectro de

desentonamiento del bi-fotón ó simplemente el *espectro de interferencia*, que resulta de hacer interferir ambos fotones en un divisor de haz simétrico, inclusive, aunque ambos fotones estén separados temporal y espacialmente, éstos presentan una interferencia de tipo no-local. Los espectros de desentonamiento interferidos se muestran en las figuras (5.10 d), (5.10 e) y (5.10 f). Debido a que la interferencia de HOM está regida principalmente por el ancho espectral anti-diagonal, que es equivalente al espectro de desentonamiento del bi-fotón,  $\omega^- = 2\Omega$ , el ancho de banda del haz de bombeo no influye de manera apreciable, y en caso de utilizar un régimen de haz de onda continua, desaparece por completo el efecto debido a la diagonal principal de la JSI. Sólo en los casos en los que hay efectos de dispersión es cuando se hace evidente el efecto del ancho de banda del haz de bombeo, es por esto, que cuando se utiliza un ancho de banda grande, los efectos de dispersión son inevitables, pero al utilizar un láser de onda continua, la cancelación de dispersión aparece (al menos para ordenes pares).

Para medir el espectrograma  $P_c(\Omega, \tau)$  completo se realizó un escaneo con pasos de  $7.5 \mu\text{m}$  utilizando motores PI que tienen una alta precisión ( $0.2 \mu\text{m}$ ), por cada paso del motor se registró un espectro interferido de desentonamientos utilizando un filtro espectral de  $40 \text{ nm}$ , cada espectro fue tomado durante un tiempo de  $300$  segundos ( $5$  minutos) y la resolución temporal del etiquetador de tiempos fue de  $32 \text{ ps}$ . En la figura (5.11 a) se muestra el espectrograma medido experimentalmente. Podemos observar una ligera asimetría respecto del eje  $x$ , teniendo más intensidad los lóbulos superiores que los inferiores. Como ya sabemos, de la ecuación (5.7), integrando este espectrograma  $P_c(\Omega, \tau)$  sobre  $\Omega$  nos entrega la información del interferograma de HOM  $P_c(\tau)$  mostrado en la figura (5.11 c). Una posibilidad interesante es integrar  $P_c(\Omega, \tau)$  sobre  $\tau$ ; mostramos la traza correspondiente en la figura (5.11 b). Físicamente, esto podría representar el efecto de promediar sobre todos los retrasos temporales, mientras se registran las coincidencias como función de la frecuencia  $\Omega$ . Es interesante ver que un dip tipo HOM aparece como función de la variable espectral, con la interpretación natural de suponer que el dip se produce debido a que en  $\Omega = 0$ , los fotones son completamente indistinguibles, y conforme el desentonamiento de frecuencias aumenta, los fotones vuelven a hacerse distinguibles, lo que elimina la interferencia. Además del hecho, de que este resultado muestra un efecto

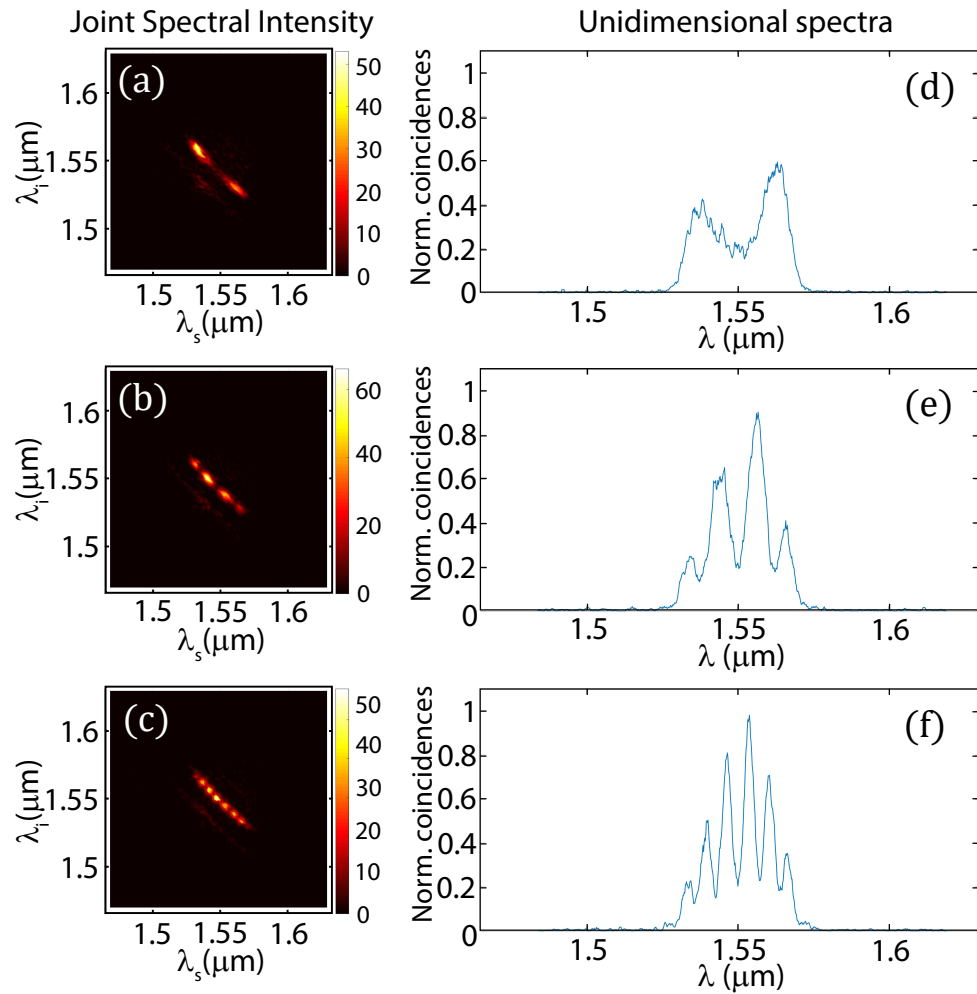


Figura 5.10: Distribución espectral (figura (5.8 b)) interferida para tres retrasos temporales distintos. (a)  $\tau_0 = 30 \mu\text{m}$ . (b)  $\tau_0 = 90 \mu\text{m}$ . (c)  $\tau_0 = 160 \mu\text{m}$ . (d)(e)(f) son los espectros de desintonamiento correspondientes. Se observa que el número de lóbulos cambia únicamente a lo largo anti-diagonal de la JSI, esto se debe a que la interferencia de HOM está gobernada principalmente por el espectro de desintonamiento  $2\Omega = \omega^-$ .

de interferencia no-local, donde la interferencia destructiva ocurre incluso cuando los fotones no se han reunido en el divisor de haz [45].

La figura (5.11 d) muestra la transformada de Fourier del espectrograma,  $P_c(\Omega, \tau)$ , respecto a la variable  $\Omega$ , obteniendo entonces un espectrograma de interferencia en el dominio temporal,  $\tilde{C}(t, \tau)$ , que está dado por la ecuación (5.11), en términos de  $t$ , la variable conjugada de  $\Omega$ . Es interesante puntualizar que el interferograma de HOM convencional,  $P_c(\tau)$ , puede ser obtenido al evaluar el espectrograma de interferencia temporal,  $\tilde{C}(t, \tau)$  en  $t = 0$ , esto es,  $P_c(\tau) = \tilde{C}(0, \tau)$ . La característica más importante del espectrograma 2D ( $\tau-t$ ), es que si fijamos un retraso temporal  $\tau_0$ , equivalente a tomar un corte vertical, nos proporciona la separación de los fotones correspondiente al retraso del motor seleccionado como se muestra en la figura (5.11 e). Se muestran tres picos, cada uno corresponde al ancho natural del dip de HOM, y la separación de estos iguala, precisamente, la separación física real entre los dos fotones antes de que sus envolventes interfieran de manera completa y destructivamente en  $\tau = 0$ ; viendo el espectrograma y su transformada, (5.11 a) y (5.11 d), podemos observar que la interferencia en un divisor de haz no se limita a que los fotones se encuentren juntos espacialmente, ni tampoco que sean precisamente degenerados, sino que en cualquier retraso temporal,  $\tau \neq 0$  y en cualquier frecuencia de desentonamiento,  $\Omega \neq 0$ , estos ya se encuentran interfiriendo, lo que exhibe un comportamiento no-local de la pareja de fotones. En la figura (5.11 d) se muestra una simetría respecto a los ejes  $\tau-t$ , que por cuestiones de las condiciones particulares del experimento, no se alcanza completamente. Podemos observar que a diferencia de la parte teórica, la pendiente no es exactamente de  $45^\circ$ , esto posiblemente se deba a alguna imperfección en la calibración del espectrómetro de fibra ya que tenemos una incertidumbre que se debe a los tiempos de respuesta de los APDs.

### II.3. Técnica de Reconstrucción del dip de HOM

Expandiendo la ecuación (5.5), se encuentra que  $P_c(\tau)$  tiene la forma general

$$P_c(\tau) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega (A(\Omega) + B(\Omega)e^{-i\Omega\tau} + B(\Omega)^* e^{i\Omega\tau}), \quad (5.12)$$

donde

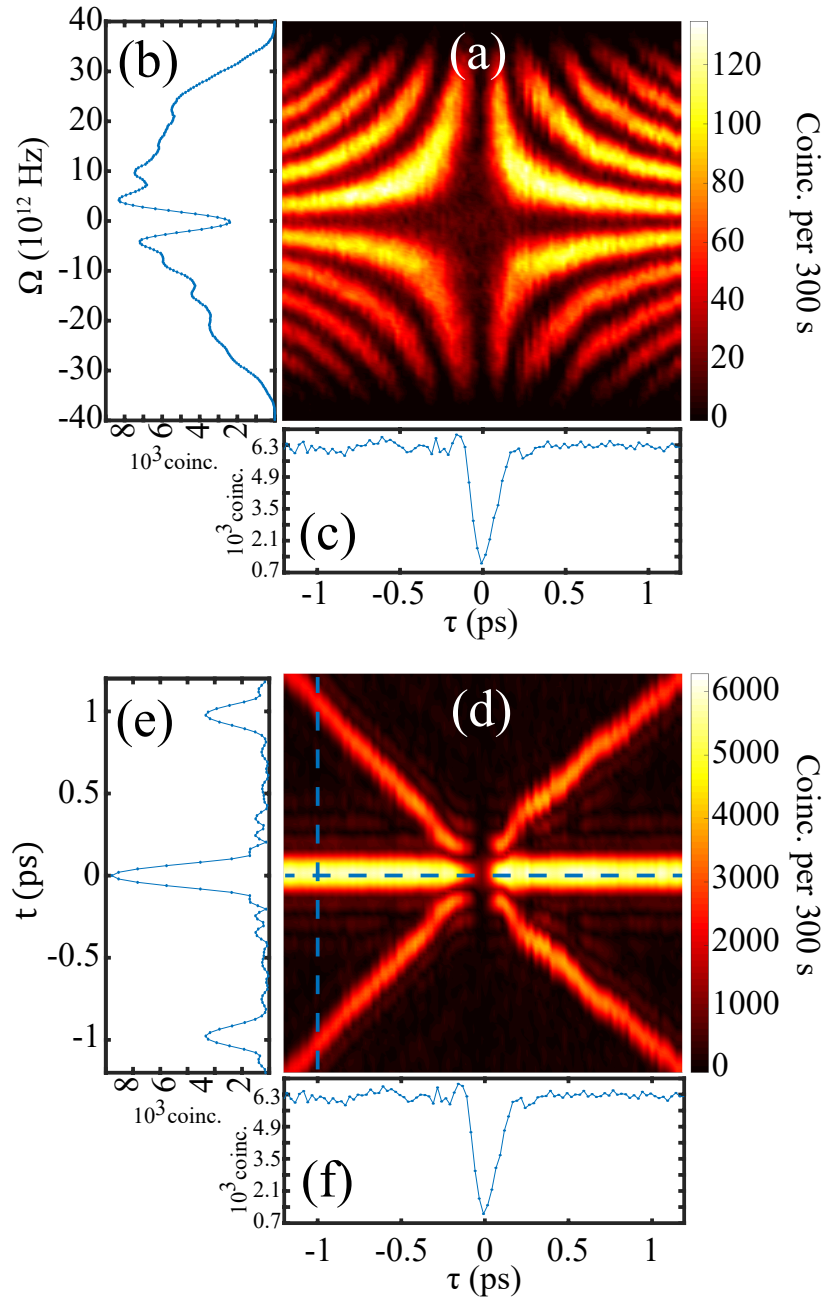


Figura 5.11: (a) Espectrograma de HOM,  $C(\Omega, \tau)$ , con pasos del motor de  $75 \mu\text{m}$  y una resolución temporal de 32 ps. (b) Es la traza sobre la variable temporal  $\tau$  del espectrograma (a). (c) Es la traza sobre la variable espectral  $\Omega$  del espectrograma (a). (d) Es la Transformada de Fourier sobre el eje de frecuencias  $\Omega$  del espectrograma (a). (e) Es un corte vertical de (d) en el retraso temporal  $\tau = -1$  ps. (f) Es un corte horizontal de (d) en el eje  $t = 0$  que es equivalente al interferograma normal de HOM,  $P_c(\tau)$ .

$$A(\Omega) = |f(\Omega)|^2 + |f(-\Omega)|^2, \quad (5.13)$$

son los términos de auto-interferencia, independientes de  $\tau$ , y

$$B(\Omega) = -f(\Omega)f^*(-\Omega) \quad (5.14)$$

se identifica como el término de interferencia cruzada.

Podemos resolver en frecuencias las coincidencias del interferograma de coincidencias  $P_c(\tau)$  para lo cual se colocan fibras largas de 5 km en cada puerto de salida del divisor de haz antes de los detectores.

$$P_c(\Omega, \tau) = \frac{1}{4} (A(\Omega) + B(\Omega)e^{-i\Omega\tau} + B(\Omega)^*e^{i\Omega\tau}) \quad (5.15)$$

$P_c(\Omega, \tau)$  representa un espectrograma con la información espectral de la pareja de fotones, que es más general que las coincidencias  $P_c(\tau)$  que se puede obtener trazando sobre las frecuencias del espectrograma  $\int d\Omega P_c(\Omega, \tau)$ .

Sacando la transformada de Fourier de  $P_c(\Omega, \tau)$

$$C(t, \tau) = \frac{1}{4} \left( \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega A(\Omega)e^{i\Omega t} + \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega B(\Omega)e^{-i\Omega\tau}e^{i\Omega t} + \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega B(\Omega)^*e^{i\Omega\tau}e^{i\Omega t} \right) \quad (5.16)$$

podemos identificar 3 términos, donde el primero no contiene información de las fases, lo llamaremos  $Pico1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega A(\Omega)e^{i\Omega t}$ , además este termino corresponde a un pico centrado en cero en el espacio de tiempos. El segundo pico ya contiene información de las fases, lo llamaremos  $Pico2 = -\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega B(\Omega)e^{-i\Omega\tau}e^{i\Omega t}$ , que es un pico que esta corrido por  $\tau$  del cero, el tercer término es simplemente el complejo conjugado del segundo  $B(\Omega)^*$  y esta corrido por  $-\tau$  con respecto al cero. La figura (5.11 a) muestra un espectrograma en el espacio  $(\Omega, \tau)$  medido experimentalmente y su transformada de Fourier (ver figura (5.11 d)) que muestra una banda central que no depende del delay  $\tau$  del motor, y 2 barras diagonales con pendiente de  $45^\circ$  cuya altura depende de manera lineal del delay del motor.

**Obtención del ancho del dip de HOM a partir de una traza del HOM Espectral**



Si tomamos una traza en algún retraso  $\tau = \tau_0$  cercano al dip de hom y medimos el espectro de desentonamiento de la pareja de fotones, podemos obtener información muy útil. Podemos sacar una sola traza para el espectrograma (ecuación (5.15))

$$P_c(\Omega, \tau_0) = \frac{1}{4} (A(\Omega) + B(\Omega)e^{-i\Omega\tau_0} + B(\Omega)^*e^{i\Omega\tau_0}) \quad (5.17)$$

que tiene la forma mostrada en la figura (5.12 a). Ahora sacando la transformada de Fourier de la traza  $P_c(\Omega, \tau_0)$  obtenemos

$$\tilde{C}(t, \tau_0) = \frac{1}{4} \left( \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega A(\Omega)e^{i\Omega t} + \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega B(\Omega)e^{-i\Omega\tau_0}e^{i\Omega t} + \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega B(\Omega)^*e^{i\Omega\tau_0}e^{i\Omega t} \right). \quad (5.18)$$

$\tilde{C}(t, \tau_0)$  tiene la forma mostrada en la figura (5.12 b), que muestra tres picos, el ancho de cada pico es igual al ancho del dip de HOM, el pico central es insensible a las fases presentes en la función de amplitud conjunta ya que son proporcionales a su intensidad  $|f(\Omega)|^2$ , mientras que los picos de a lado contienen la información de las fases, ya que son proporcionales a  $f(\Omega)f^*(-\Omega)$ . La separación que hay entre los picos es igual al retraso temporal de los fotones, donde se fijó el motor  $\tau_0$ , y esto es muy interesante, ya que podríamos conocer la posición exacta del dip de HOM incluso sin efectuar el barrido del motor. La ecuación (5.18) es la clave de la técnica que estamos por proponer, ya que muestra que los picos aparecen separados por un retraso fijo  $\tau_0$ .

Lo más importante de esta técnica es que los picos de la figura (5.12), realmente nos están permitiendo separar los términos  $A(\Omega)$  Y  $B(\Omega)$  en la ecuación (5.18), ya que los términos 2 y 3, resultan ser una convolución de las transformadas de  $B(\Omega)$  y  $B^*(\Omega)$  con las delta de Dirac  $\delta(t + \tau)$  y  $\delta(t - \tau)$ , mientras que el término correspondiente a  $A(\Omega)$  se queda inalterado en el origen. Procedemos a separar los picos de manera algorítmica, y ahora podemos sacar la transformada inversa de Fourier para recuperar la información de las funciones  $A(\Omega)$  y  $B(\Omega)$ . El algoritmo es mostrado en la figura (5.13)

Ahora solamente utilizamos la ecuación (5.12) para reconstruir numéricamente el interferograma  $P_c(\tau) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega (A(\Omega) + B(\Omega)e^{-i\Omega\tau} + B(\Omega)^*e^{i\Omega\tau})$ . En la figura (5.14)

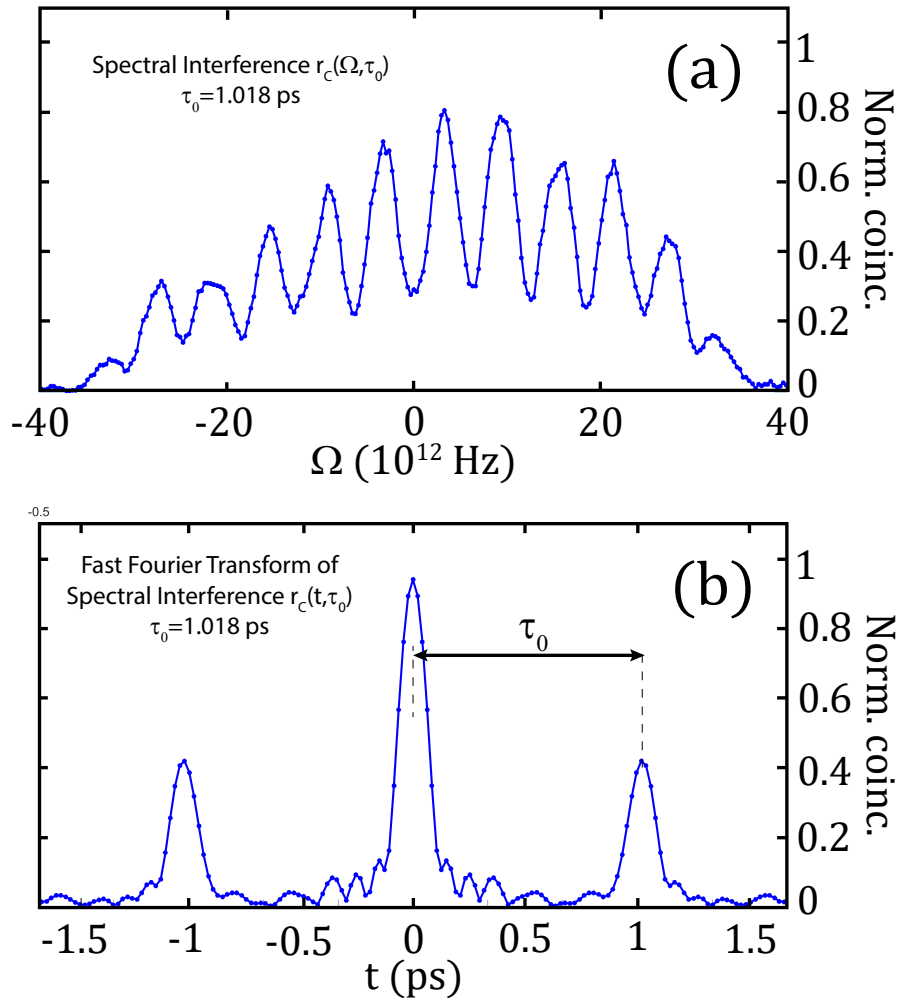


Figura 5.12: (a) Espectro de desintonamiento interferido  $P_c(\Omega, \tau_0)$  para un retraso temporal fijo  $\tau_0 = 1.018$  ps (corte vertical en la figura (5.11 a)). (b) Transformada de Fourier del espectro de desintonamiento interferido (corte vertical en la figura (5.11 d)).

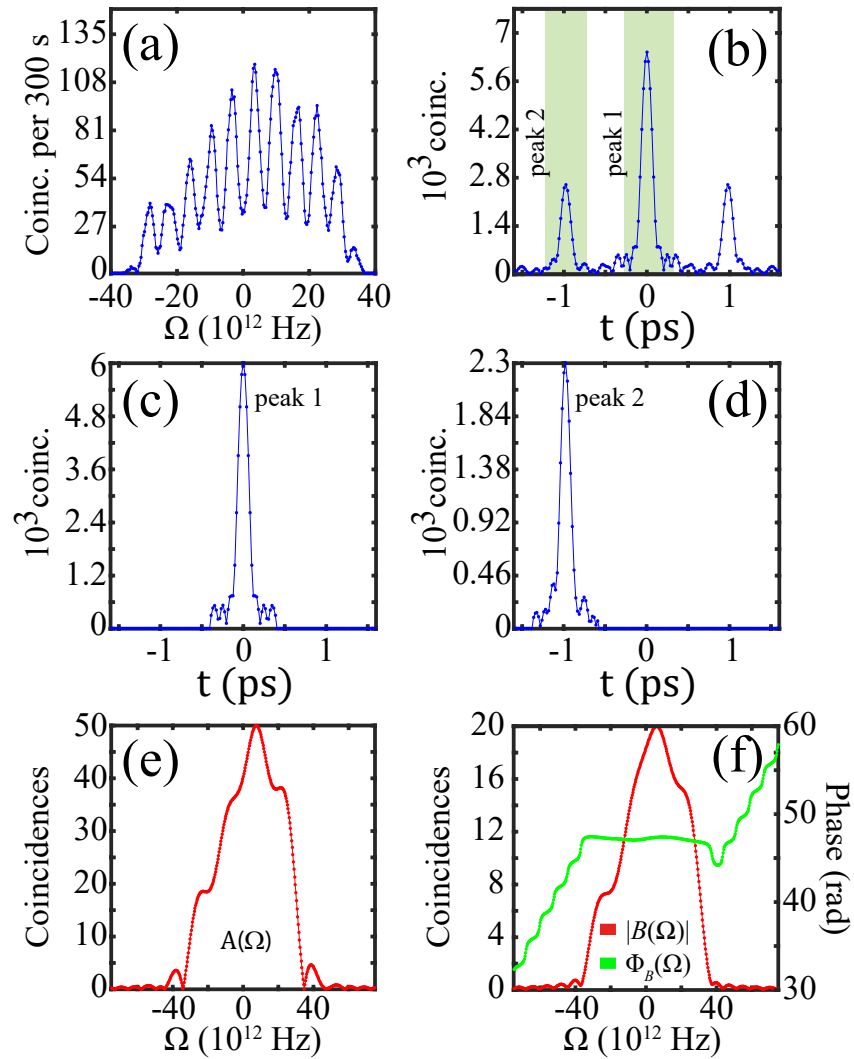


Figura 5.13: Procedimiento para obtener las dos funciones complejas  $A(\Omega)$  y  $B(\Omega)$ . (a) Los tres picos de la figura (5.12). (b,d) Pico 1 y 2 filtrados. (c,e) Transformada de Fourier inversa de los picos 1 y 2 para obtener las funciones A y B.

se muestra el interferograma original (puntos negros) y el recuperado utilizando este método (línea roja). Como se observa, el detalle de la asimetría del dip se logra recobrar sin la necesidad de realizar ningún escaneo del motor.

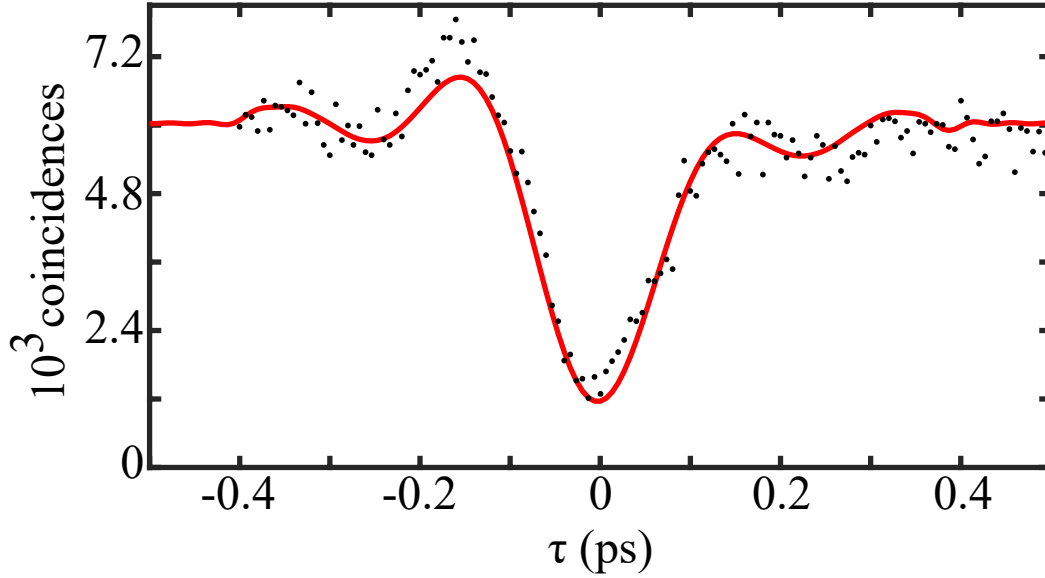


Figura 5.14: Recuperación del interferograma de HOM convencional usando la técnica de HOM en el dominio espectral (línea roja). Interferograma de HOM convencional (puntos negros).

### III. QOCT en el dominio espectral

Para un bombeo monocromático el interferograma de coincidencias considerando el efecto de una muestra con  $N$  capas, se escribe modificando un poco la ecuación (5.5) al cambiar la función  $f(\Omega) \rightarrow f(\Omega)H(\omega_0 + \Omega/2)$ :

$$P_c(\tau) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega |f(\Omega)H(\omega_0 + \Omega/2) - f(-\Omega)H(\omega_0 - \Omega/2)e^{i\Omega\tau}|^2 \quad (5.19)$$

donde  $H(\omega)$  es la función de transferencia de la muestra, está dada por:

$$H(\omega) = \sum_{j=0}^{N-1} r_j e^{i\omega T_j}, \quad (5.20)$$

que para el caso de 2 capas con igual reflectividad se escribe como

$$H(\omega) = r(1 + e^{i\omega T}), \quad (5.21)$$

Desarrollando la ecuación (5.19)

$$P_c(\tau) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega |f(\Omega)|^2 |H(\omega_0 + \Omega/2)|^2 + |f(-\Omega)|^2 |H(\omega_0 - \Omega/2)|^2 - f(\Omega)f^*(-\Omega)H(\omega_0 + \Omega/2)H^*(\omega_0 - \Omega/2)e^{-i\Omega\tau} + c.c. \quad (5.22)$$

Calculando los productos  $|H(\omega_0 + \Omega/2)|^2$ ,  $|H(\omega_0 - \Omega/2)|^2$  y  $H(\omega_0 + \Omega/2)H^*(\omega_0 - \Omega/2)$  tenemos:

$$|H(\omega_0 + \Omega/2)|^2 = r^2(2 + e^{i(\omega_0 + \Omega/2)T} + e^{-i(\omega_0 + \Omega/2)T}), \quad (5.23)$$

$$|H(\omega_0 - \Omega/2)|^2 = r^2(2 + e^{i(\omega_0 - \Omega/2)T} + e^{-i(\omega_0 - \Omega/2)T}) \quad (5.24)$$

y

$$H(\omega_0 + \Omega/2)H^*(\omega_0 - \Omega/2) = r^2(1 + 2 \cos(\omega_0 T)e^{i\Omega T/2} + e^{i\Omega T}) \quad (5.25)$$

Sustituyendo en la ecuación (5.22) obtenemos:

$$\begin{aligned} P_c(\tau) = & \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega [ (|f(\Omega)|^2 + |f(-\Omega)|^2) - f(\Omega)f^*(-\Omega)e^{-i\Omega\tau} \\ & + (e^{i\omega_0 T}|f(\Omega)|^2 + e^{-i\omega_0 T}|f(-\Omega)|^2)e^{i\Omega T/2} - 2 \cos(\omega_0 T)f(\Omega)f^*(-\Omega)e^{i\Omega T/2}e^{-i\Omega\tau} \\ & - f(\Omega)f^*(-\Omega)e^{i\Omega T}e^{-i\Omega\tau} + c.c. ]. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Definiendo los siguientes términos

$$A(\Omega) = |f(\Omega)|^2 + |f(-\Omega)|^2 \quad (5.27)$$

$$B(\Omega) = -f(\Omega)f^*(-\Omega) \quad (5.28)$$

$$C(\Omega, T, \omega_0) = (e^{i\omega_0 T/2}|f(\Omega)|^2 + e^{-i2\omega_0 T/2}|f(-\Omega)|^2)e^{i\Omega T/2} \quad (5.29)$$

$$D(\Omega, T, \omega_0) = -2 \cos(\omega_0 T)f(\Omega)f^*(-\Omega)e^{i\Omega T/2} \quad (5.30)$$

y

$$E(\Omega, T) = -f(\Omega)f^*(-\Omega)e^{i\Omega T} \quad (5.31)$$

Utilizando las funciones  $A(\Omega)$ ,  $B(\Omega)$ ,  $C(\Omega, T, \omega_0)$ ,  $D(\Omega, T, \omega_0)$  y  $E(\Omega, T)$  podemos escribir la ecuación (5.26) de la manera simplificada:

$$P_c(\tau) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega [A(\Omega) + B(\Omega)e^{-i\Omega\tau} + C(\Omega, T, \omega_0) + D(\Omega, T, \omega_0)e^{-i\Omega\tau} + E(\Omega, T)e^{-i\Omega\tau} + c.c.]. \quad (5.32)$$

Para obtener el espectrograma de QOCT tan solo quitamos la integral y dejamos la dependencia en las frecuencias de desintonamiento en la ecuación (5.32):

$$P_c(\Omega, \tau) = \frac{1}{4} [A(\Omega) + B(\Omega)e^{-i\Omega\tau} + C(\Omega, T, \omega_0) + D(\Omega, T, \omega_0)e^{-i\Omega\tau} + E(\Omega, T)e^{-i\Omega\tau} + c.c.]. \quad (5.33)$$

La Transformada de Fourier de la ecuación anterior es:

$$P_c(t, \tau) = \tilde{A}(t) + \tilde{B}(t - \tau) + \tilde{C}(t - T/2, \omega_0) + \tilde{D}(t - (\tau - T/2), \omega_0) + \tilde{E}(t - (\tau - T)) + c.c. \quad (5.34)$$

### III.1. Forma cualitativa de $P_c(\Omega, \tau)$ para QOCT

Para entender mejor que representa cada término en la ecuación (5.26), la reescribimos realizando la suposición de tener un espectro simétrico  $f(\Omega) = f(-\Omega)$ , por lo que podemos reducir la expresión a

$$P_c(\Omega, \tau) = \frac{1}{2}|f(\Omega)|^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2}e^{-i\Omega\tau} + \cos(\omega_0 T)e^{-i\Omega T/2} - \cos(\omega_0 T)e^{-i\Omega(\tau-T/2)} - \frac{1}{2}e^{-i\Omega(\tau-T)} \right\} + c.c. \quad (5.35)$$

Al sacar la Transformada de Fourier de la ecuación (5.35):

$$P_c(t, \tau) = \tilde{f}(t) * \left\{ \delta(t) - \frac{1}{2}\delta(t - \tau) + \cos(\omega_0 T)\delta(t - T/2) - \cos(\omega_0 T)\delta(t - (\tau - T/2)) - \frac{1}{2}\delta(t - (\tau - T)) \right\} + c.c., \quad (5.36)$$

podemos darnos cuenta de que el primer término contribuye a un pico centrado en cero, el segundo término contribuye al dip (debido al signo negativo) con una visibilidad máxima del 50 %, y su posición dependerá del retraso temporal  $\tau$ , eso significa que nos dirá que tan lejos estamos del primer dip de HOM o de la primera capa de la muestra; el tercer pico contribuye a un pico/dip debido a la dependencia del  $\cos(\omega_0 T)$ , además el pico estará recorrido en  $T/2$  del origen. El cuarto término también podría ser un pico o un valle dependiendo del  $\cos(\omega_0 T)$  y es un pico que se encuentra recorrido  $T/2$  respecto del segundo pico. El quinto término contribuye a un dip desplazado  $T$  del segundo pico, y representa a la segunda capa de la muestra, también tiene una visibilidad máxima del 50 %.

## IV. Implementación Experimental del QOCT espectral

Podemos medir el espectrograma de QOCT utilizando el mismo arreglo experimental que para el espectrograma de HOM de la figura (5.9) pero esta vez considerando las reflexiones en la muestra (S). En la figura (5.15) se muestra un esquema

sencillo del experimento y del espectrograma de coincidencias  $P_c(\Omega, \tau)$  que se debe obtener en este caso.

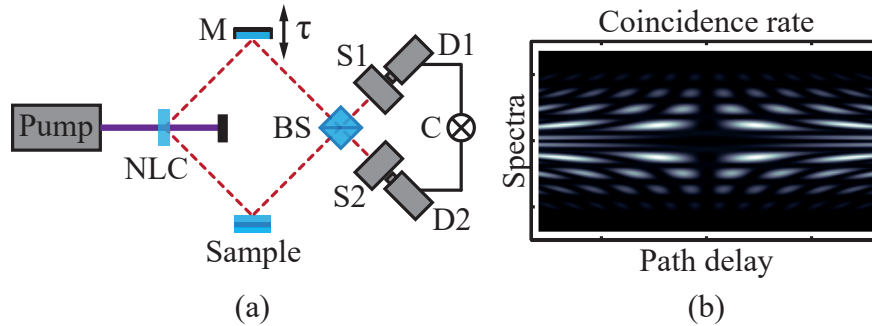


Figura 5.15: Esquema sencillo de un interferómetro de QOCT espectral. A la derecha se muestra el espectrograma de una muestra bi-capa.

Utilizamos como muestra (S) un vidrio cubre-objetos de Borosilicato de  $170 \mu m$  de espesor, un tamaño de paso del motor de  $10 \mu m$ , una resolución temporal de  $32 \text{ ps}$  y un tiempo de  $100$  segundos acumulación por paso del motor. En figura (5.16 a) mostramos el espectrograma de QOCT obtenido para la muestra delgada (S), se observa que cambia en algunos aspectos del espectrograma para una sola capa (figura 5.11), por ejemplo, aunque siguen apareciendo las ramas o tipo pétalos de flor, esta vez presentan franjas oscuras horizontales que modulan la envolvente tipo pétalos de flor continua. Sacando la transformada de Fourier del espectrograma obtenemos el patrón de cruces mostrado en la figura (5.16 c) que muestra tres líneas horizontales, y tres cruces centradas cada una en la posición de las capas de la muestra, la cruz central corresponde a la mitad de la muestra ( $T/2$ ) que corresponde a la interferencia cruzada debida a las dos capas. Es interesante ver que cada la línea horizontal centrada en cero corresponde con el primer término de la ecuación (5.35), las líneas horizontales superior e inferior que están cercanas a  $1 \text{ ps}$ , tienen que ver con el segundo término y su complejo conjugado correspondiente, estas líneas son horizontales ya que no dependen del retraso temporal. La cruz que aparece centrada en el retraso temporal ( $\tau = 0, t = 0$ ), corresponde al tercer término y a su complejo conjugado correspondiente, ésta forma una cruz de pendiente  $45^\circ$  debido a la dependencia lineal con  $\tau$ . La cruz que está centrada en ( $\tau = T/2, t = 0$ ) corresponde al cuarto término y a su complejo conjugado correspondiente, podemos



observar 4 puntos máximos que aparecen debido a la superposición con las otras cruces. Por último, la cruz que está centrada en  $(\tau = T, t = 0)$  corresponde al quinto término ya su complejo conjugado.

En la figura (5.17 a) se muestra un corte vertical del espectrograma  $P_c(\Omega, \tau_0)$  (figura 5.16 a) para un  $\tau_0 = 0.363$  ps del primer dip de HOM. Sacamos la Transformada de Fourier para poder obtener la información de los picos [ver la figura (5.17 b)]. Nos enfocamos solamente en los picos con retrasos temporales positivos, cada pico se corresponde con la transformada de Fourier de las funciones  $A(\Omega)$ ,  $B(\Omega)$ ,  $C(\Omega, T, \omega_0)$ ,  $D(\Omega, T, \omega_0)$  y  $E(\Omega, T)$ . El primer pico (marcado como peak1) corresponde a la transformada de Fourier de  $A(\Omega)$ , éste corresponde al término de auto-correlación que no depende del retraso temporal y cuyo ancho es igual al ancho del dip de HOM pero sin efectos de dispersión o fase. El segundo pico, aparece a una distancia  $\tau_0$  del primer pico y se asocia a la función  $B(\Omega)$ , éste pico corresponde a la primera capa de la muestra y depende directamente del retraso temporal,  $\tau$ , su visibilidad máxima es del 50%. El tercer pico tiene una altura mayor ya que su visibilidad podría ser del 100%, se encuentra a una distancia  $T/2$  respecto del primer pico, al igual que el primer pico, no depende del retraso temporal por lo que podría ser usado como referencia, y se asocia a la función  $C(\Omega, T, \omega_0)$  y corresponde a una de las líneas horizontales del espectrograma temporal (figura (5.16 c)), este pico depende cosenoidalmente de la frecuencia central de los fotones,  $\omega_0$ , lo que es lo mismo a depender de la longitud de onda central del láser de bombeo,  $\omega_{p0}$ , por lo que se podría manipular para que sea pico/valle, o para que simplemente no aparezca. El cuarto pico, se encuentra a una distancia  $T/2$  del segundo pico, se asocia con la función  $D(\Omega, T, \omega_0)$ , éste corresponde al pico intermedio que fue eliminado en el capítulo anterior, este pico también depende cosenoidalmente de la frecuencia central del haz de bombeo,  $\omega_{p0}$ , y por lo tanto puede variar entre pico/valle (con una visibilidad del 100%) o incluso ser eliminado. El quinto pico se corresponde con la función  $E(\Omega, T)$  que representa la segunda capa de la muestra y se encuentra a una distancia  $T$  del segundo pico, este pico, al igual que el pico 2, también está limitado a una visibilidad del 50%.

Nos enfocamos en separar cada uno de los picos. En la figura (5.18) se muestra el procedimiento para obtener el valor de las funciones complejas  $A(\Omega)$ ,  $B(\Omega)$ ,

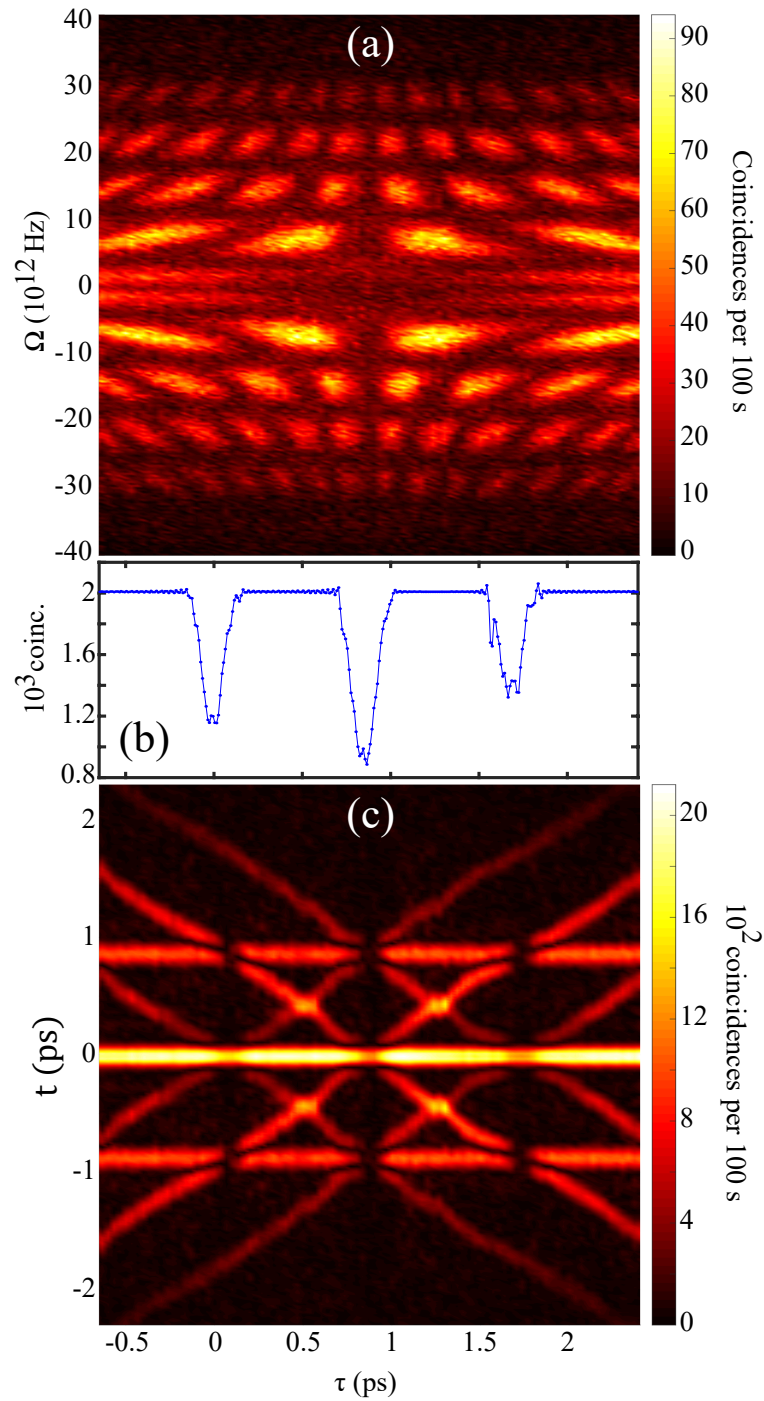


Figura 5.16: Figura QOCT Espectral. (a) Espectrograma  $P_c(\Omega, \tau)$  de QOCT para muestra de  $170 \mu\text{m}$  con resolución temporal de 32 ps. (b) Simulación teórica de (a). (c) Transformada de Fourier de (a),  $C(t, \tau)$ . (d) Simulación teórica de (c).

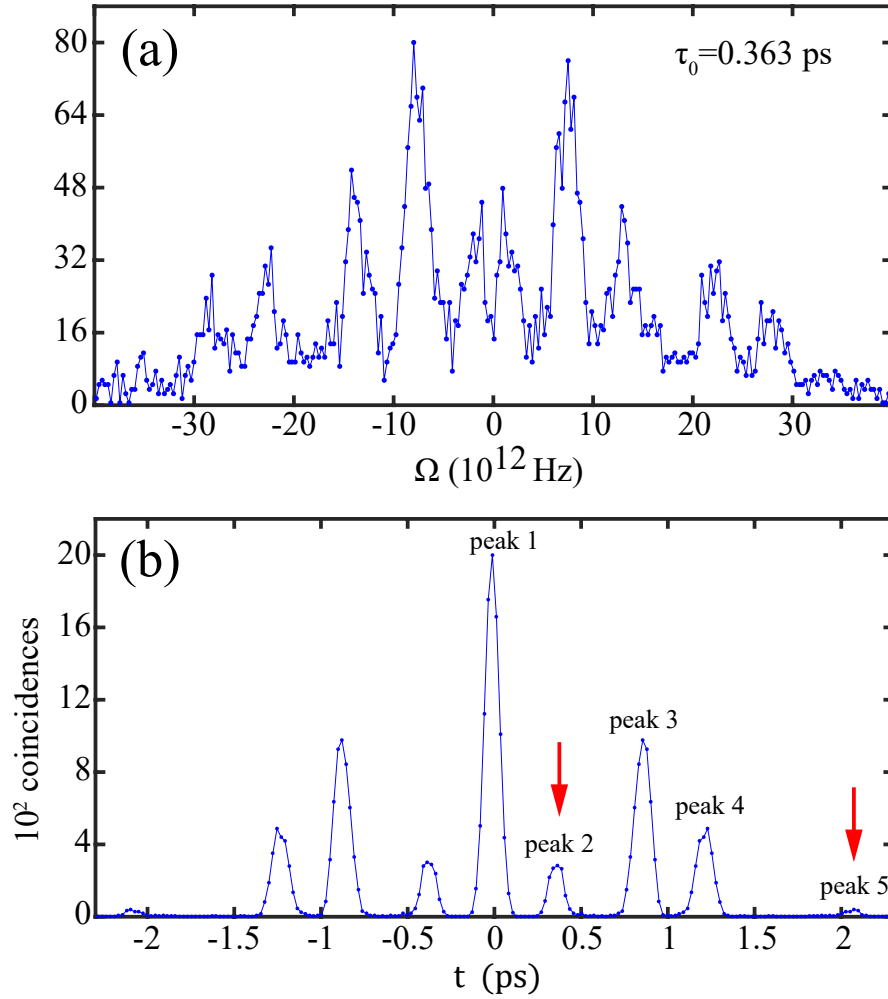


Figura 5.17: (Arriba) Espectro de desentonamiento interferido  $P_c(\Omega, \tau_0)$  para un retraso temporal fijo  $\tau_0 = 0.363$  ps (corte vertical de (5.11 a)). (Abajo) Transformada de Fourier del espectro de desentonamiento interferido (corte vertical de (5.11 c)).

$A(\Omega, T, \omega_0)$ ,  $A(\Omega, T, \omega_0)$  y  $E(\Omega, T)$ .

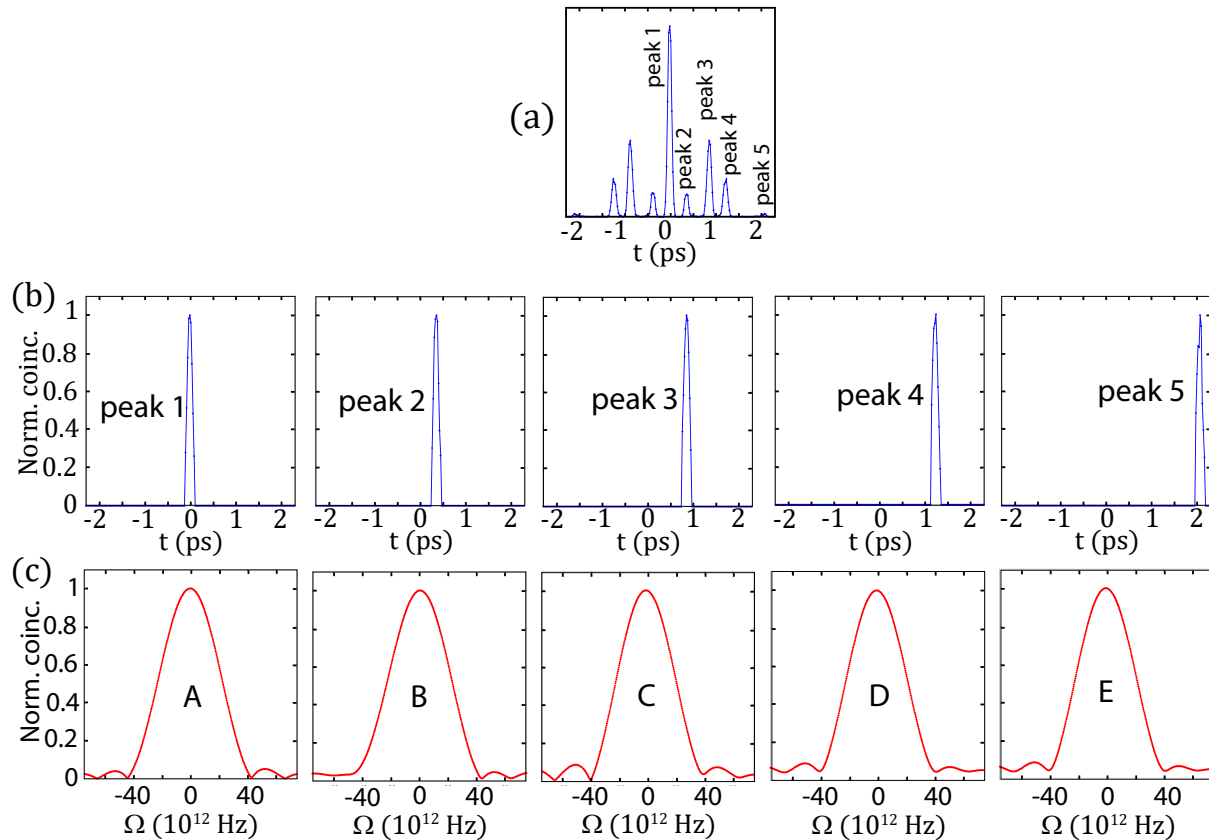


Figura 5.18: Procemiento para obtener las funciones complejas A, B, C, D y E. (a) Muestra la transformada de Fourier  $C(t, \tau)$ . (b) Muestra cada pico separado. (c) Muestra la transformada de Fourier inversa de los picos en (b).

Utilizamos estas funciones junto con la ecuación (5.32) para poder reconstruir el interferograma de QOCT. En la figura (5.19) se muestra el resultado obtenido con el método de recuperación (color rojo) y también se muestra una medición convencional de escaneo motorizado tomando solo coincidencias (puntos negros).

## V. Límites y alcances de la tomografía de coherencia óptica cuántica espectral

Consideremos una muestra hipotética de grosor  $L$  e índice de refracción  $n$ . El interferograma de QOCT incluye un dip por cada capa de la muestra, junto con dips

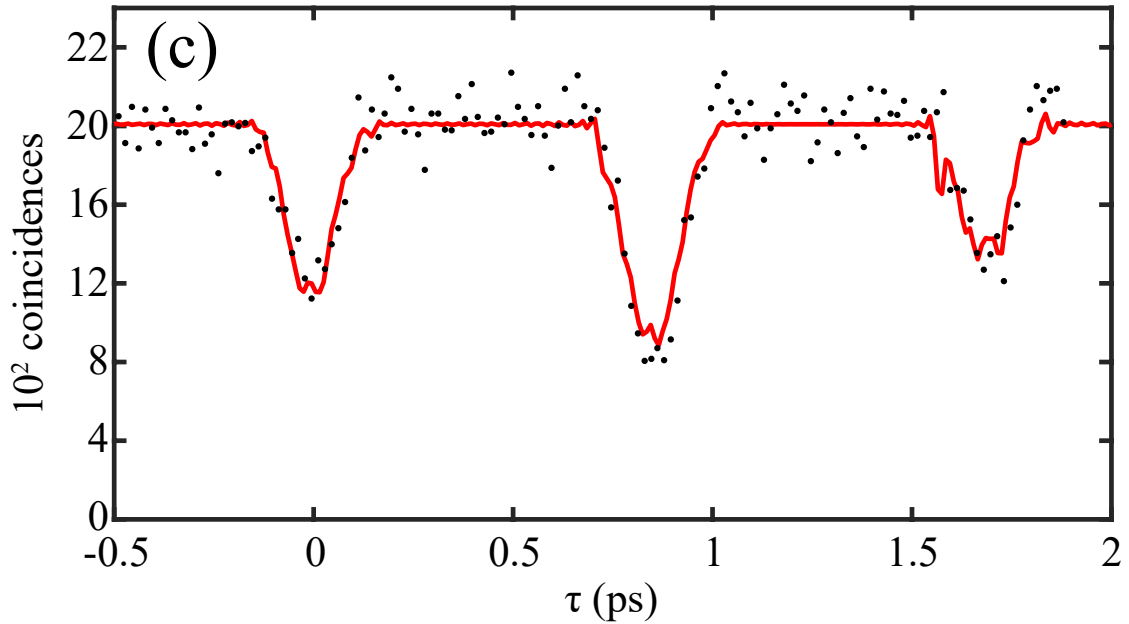


Figura 5.19: Recuperación del interferograma de QOCT usando nuestra técnica (línea roja). Interferograma de QOCT convencional (puntos negros).

adicionales para posibles estructuras intermedias. Si el retraso temporal se introduce por un espejo móvil desplazado por un motor, los dos dips más alejados estarán separados por  $2nL$  de este espejo. Note que la resolución de QOCT está determinada por el ancho del dip de HOM. Si el ancho del dip es  $c\Delta\tau$  y necesitamos  $M$  puntos para que cada dip quede bien definido, entonces requerimos de un total de  $N$  pasos del motor, dados por

$$N = \frac{2nLM}{c\Delta\tau}. \quad (5.37)$$

Como ejemplo, considerando la figura (5.20 e) en la que se observa una muestra de 3-capas, para una muestra de 10 ps, que equivale a 3 mm de camino óptico total (recordando que  $1 \text{ ps} \approx 300 \mu\text{m}$  en el aire). Por lo tanto, sabiendo que ya esta considerado que el camino óptico incluye el efecto del doble camino del brazo de la muestra y el índice de refracción de la misma,  $L_O = 2nL = 3 \text{ mm}$ , si consideramos que un vidrio tiene una índice de refracción aproximadamente de  $n = 1.5$ , esta muestra tiene en realidad una longitud de 1 mm. Si suponemos un ancho de dip de

HOM de  $3 \mu\text{m}$  y asumimos que se necesitan  $M = 10$  puntos por dip, esto implica que necesitamos  $N = 10,000$  pasos del motor para medir un interferograma convencional de QOCT. Asumiendo que la brillantez de la fuente es suficientemente grande para tener tiempos de adquisición de 1 segundo por punto (por paso del motor), esto equivale a un tiempo de medición de 10,000 segundos ó 2.7 horas (y esto ignorando el tiempo que le lleva moverse al motor). El tiempo que tardaría el QOCT espectral sería de tan sólo 1 segundo para obtener la misma información del interferograma de QOCT. Con lo que hemos abierto la posibilidad de eliminar el escaneo del motor e incrementado la velocidad de la técnica un factor de  $M$ , o sea que el tiempo de adquisición por punto o por paso del motor es el mismo tiempo que se requiere para obtener la información espectral y con esta información y una transformada de Fourier es suficiente para recobrar la información de las interfaces.

Otro factor importante a determinar, es saber cuál es el espesor de muestra máximo que podemos medir con esta técnica. Vamos a abordar ahora la cuestión de cómo la resolución del espectrómetro utilizado para resolver las componentes de frecuencia de los fotones interferidos en el divisor de haz del interferómetro de HOM, afectan o limitan el desempeño de nuestro método tomográfico. Sabemos del teorema de muestreo de Nyquist que para una función limitada en frecuencia (con una componente máxima  $\omega_{max}$  de su espectro) el periodo de muestreo, limitado por  $\tau < \pi/\omega_{max}$ , será suficiente para reconstruir la función en cuestión. En nuestro caso, la función que queremos determinar es  $P_c(\Omega, \tau_0)$  [mostrada en la figura (5.17 a)] y su espectro es  $\tilde{P}_c(t, \tau_0)$  mostrado en la figura (5.17 b). Por lo tanto,  $P_c(\Omega, \tau_0)$  será muestreada apropiadamente por un periodo de  $\pi/(|\tau_f| + \delta t)$  donde  $|\tau_f|$  es la ubicación del pico más alejado, en nuestro caso corresponde al quinto pico en la figura (5.17 b);  $\delta t$  es el ancho-medio del pico. Debido a que en un escaneo de QOCT lo que más limita es mover el motor por una distancia entre-capas, la separación entre las capas extremas de la muestra es proporcional al tiempo  $|\tau_f|$  y este tiempo es mucho mayor que el ancho del pico por lo que podemos despreocupar  $\delta t$ ,  $(|\tau_f| + \delta t) \rightarrow |\tau_f|$ ; por otro lado, siendo  $\delta\omega$  la mínima diferencia de frecuencias que podemos resolver con nuestros aparatos, llegamos a la conclusión de que nuestra técnica de QOCT espectral funciona para muestras que cumplan con el siguiente límite:

$$|\tau| < \frac{\pi}{\delta\omega}. \quad (5.38)$$

Claramente, conforme la resolución espectral del aparato mejore, esto es, que  $\delta\omega$  sea reducida, seremos capaces de reconstruir interferogramas de QOCT sobre muestras más anchas o sobre mayores longitudes de penetración.

## VI. Tomografía QOCT resuelta espectralmente para muestras de 3 capas o más capas

En las secciones anteriores se demostró que las cuentas en coincidencias para un retraso temporal  $\tau_0$  fijo, contienen la información espectral completa del bi-fotón, esta información está contenida en los términos  $A(\Omega)$  y  $B(\Omega)$ , para el caso de un espejo (una sola capa), que corresponden a los 2 picos mostrados en la figura (5.13 b); y está en los términos  $A(\Omega)$ ,  $B(\Omega)$ ,  $C(\Omega, T, \omega_0)$ ,  $D(\Omega, T, \omega_0)$  y  $E(\Omega, T)$ , para una muestra de dos capas, que corresponden a los 5 picos identificados en la figura (5.17 b). Es claro que conforme aumentan las capas, el número de picos crece en proporción no lineal, sino en una proporción que considera las contribuciones de las  $n$  capas, así como las reflexiones inter-capas, esto significa que para una muestra de 1 capa, aparecerá un pico centrado en cero equivalente a la función de auto-correlación de la fuente, es el término incoherente que siempre aparece incluso cuando no hay interferencia. El segundo pico corresponderá a la capa del espejo, indicando dónde se encuentra ubicado en relación con el retraso temporal  $\tau_0$  donde se encuentra el motor. Para el caso de 2 capas, ahora además de contar 1 pico de auto-correlación debido a la intensidad de cada fotón reflejándose en cada capa de manera separada y de los 2 picos correspondientes a la interferencia de HOM de cada capa, tendremos que considerar las interferencias inter-capas, ya que el tiempo de separación que existe entre un bi-fotón y un segundo bi-fotón puede ser menor al tiempo de separación entre las inter-capas de la muestra, en tal caso aparecen 2 picos extra por número de inter-capas: el primero pico se debe a la superposición de dos fotones consecutivos que se reflejan en tiempos subsecuentes en las capas 1 y 2, respectivamente, y que toman en cuenta la adición de sus intensidades separadas en  $T/2$  (donde  $T$  es la separación entre capas); el segundo pico se debe a un tipo de interferencia que se

asemeja más a la interferencia tipo Young, en la que ambos fotones reflejados inter-capas provenientes de distintas parejas se superponen en el divisor de haz, y según empatemos el camino óptico, tendremos una contribución del doble de la interferencia de HOM, es por esto que estos picos pueden alcanzar visibilidades del 100 %.

Podemos encontrar una relación entre el número de picos,  $N_p$ , en función del número de capas,  $n$ , dentro de una muestra

$$N_p = 1 + n + 2C_2^n \quad (5.39)$$

donde  $C_2^n$  son las combinaciones de  $n$  capas tomando las reflexiones entre 2 de ellas. Podemos calcular rápidamente para  $n = 3$  capas, llegando a que se tendrían 10 picos, 3 de los cuales corresponderían a las verdaderas interfaces de la muestra. Para  $n = 4$  capas, se tendrían 17 picos, con lo cual podemos concluir que el método de separar cada pico para recuperar la información del interferograma de QOCT se vuelve impráctico al aumentar el número de interfaces de una muestra.

La solución para poder aplicar el método de QOCT con resolución espectral para muestras de más de una capa, es utilizar el método del capítulo anterior para eliminar picos de interferencias inter-capas indeseables. Como demostramos, utilizar una fuente de láser de bombeo pulsado en el régimen de femto-segundos, nos ayuda a eliminar picos intermedios, debido a que enviar un bi-fotón con un tiempo de coherencia  $\tau_d$  que cumpla la condición de ser más pequeño que el ancho temporal inter-capas, permite que no haya interferencias provenientes de fotones de distintas parejas. Para demostrar el caso, se realizó una simulación de espectrogramas de interferencia en el dominio temporal,  $\tilde{P}_c(t, \tau)$ , para una muestra de 3-capas, el espesor de la muestra fue de 10 ps de separación entre sus interfaces extremas y la tercera capa se colocó a 4 ps de la primera capa. Se realizó el cálculo para dos anchos de banda distintos: uno ancho de banda estrecho (del orden de 0.1 nm) y un ancho de banda grande, correspondiente a un bombeo pulsado de femto-segundos (del orden de 10 nm). En la figura (5.20 a) se muestra el espectrograma temporal,  $\tilde{P}_c(t, \tau)$ , para un ancho de banda pequeño, podemos ver un corte para  $\tau = -1.7$  ps (ver figura (5.20 c)) donde se observan 10 picos como ya habíamos anticipado. De estos picos, sólo 3 son los que nos ayudarán a identificar las capas de manera clara. En el inciso (e) de la figura (5.20) se muestra el interferograma de QOCT convencional correspondiente,



en el cual se ven los dips de HOM coincidentes con las capas de la muestra, y tres picos/valles correspondientes a las interferencias inter-capas. En la figura (5.20 b) se observa como se limpia el espectrograma temporal al utilizar un ancho de banda grande ( $\Delta\lambda = 10$  nm), se vislumbran inmediatamente 3 mínimos en el eje horizontal, ubicamos una cruz por cada mínimo, y esto propaga la posición de las tres interfaces a distintos retrasos temporales, no importando dónde ubiquemos el motor. En la figura (5.20 b) mostramos un corte del espectrograma temporal en  $\tau = -1.7$  ps, y comprobamos el potencial completo de la técnica de QOCT espectral con una fuente de banda ancha de bombeo, al ya no tener que distinguir entre los términos espurios, no es necesario reconstruir el interferograma convencional de QOCT, ya que la información está contenida en la transformada de Fourier del espectrograma de interferencia para un valor de retraso temporal fijo.

## VII. Conclusiones del QOCT espectral

Hemos logrado reconstruir con éxito los interferogramas de HOM y QOCT a partir de la medición de un único espectro de desentonamiento de la pareja de fotones, en una posición arbitraria del retraso temporal  $\tau_0$ . La importancia de esta técnica radica en la rapidez para obtener información concerniente a la muestra, ya que usualmente, el tiempo de barrido típico de una muestra es de horas; por ejemplo, en la muestra de 1 mm del capítulo anterior, se tomó un tiempo de adquisición de 240 segundos por cada paso del motor, los pasos fueron de  $25 \mu\text{m}$ , y el tamaño longitudinal del barrido completo fue de 4 mm, esto equivale a 160 pasos del motor, haciendo el cálculo del tiempo, un sólo interferograma de alta calidad nos tomó al rededor de 10 horas. El escaneo de la muestra de  $170 \mu\text{m}$  mostrado en la figura (5.19 color negro), se hizo con pasos de  $10 \mu\text{m}$  y tiempos de adquisición de 40 segundos, utilizando, obviamente, un dip de HOM mucho menor (dip de ancho de  $40 \mu\text{m}$ ), sólo fueron necesarios 220 pasos del motor y un tiempo total de aproximadamente 2.5 horas (con calidad baja). El tiempo que tardamos en medir un espectro de desentonamiento fue de tan sólo 100 segundos, claro, más el tiempo de procesamiento (que para el caso de una muestra bi-capas es despreciable), pero la ventaja aquí es clara. El tiempo de medición de un interferograma de QOCT resultó ser 90 veces más corto que el tiempo de realizar

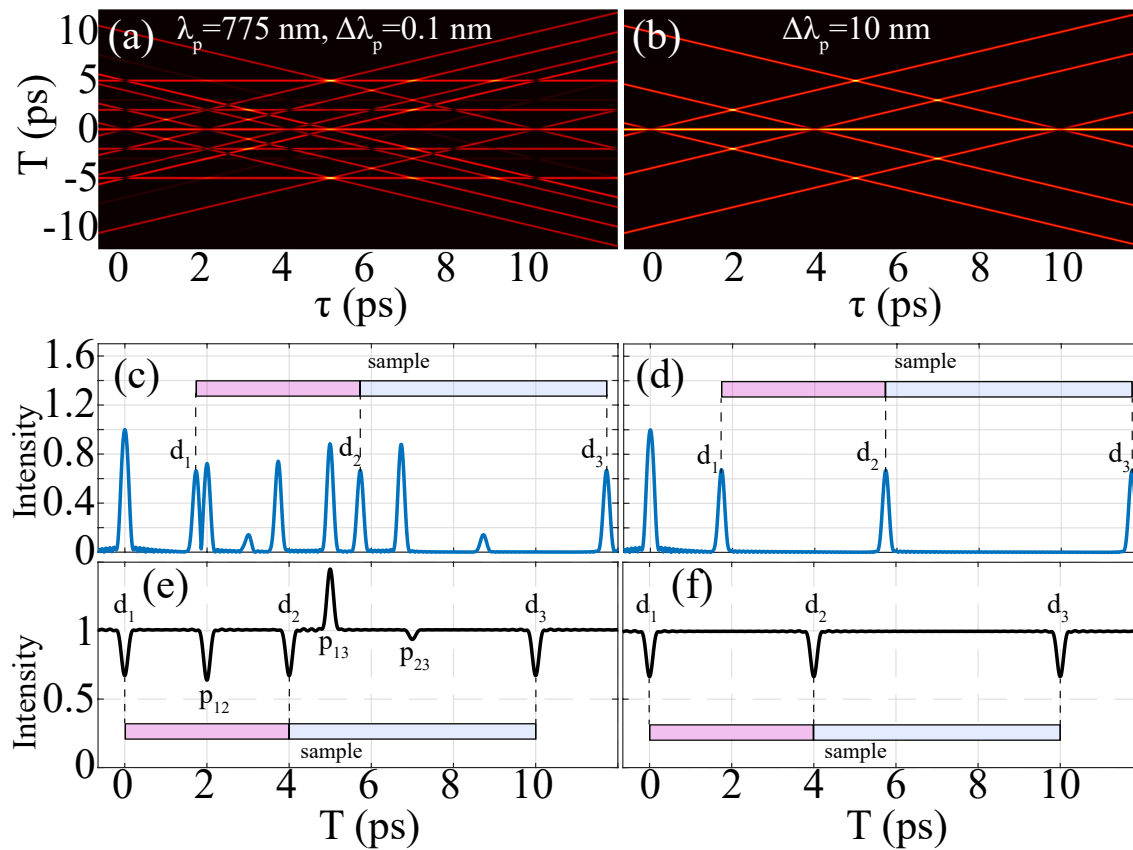


Figura 5.20: (a) y (b) Son simulaciones del espectrograma temporal  $\tilde{P}_c(t, \tau)$  para una muestra de 3-capas (la capa intermedia se encuentra al 40%, en comparación con las dos interfaces extremas); en (a) se muestra el caso de una fuente de SPDC utilizando un haz de bombeo centrado en 775 nm con un ancho de banda de  $\Delta\lambda \approx 0.1 \text{ nm}$ , mientras que en (b) se incrementó el ancho de banda a 10 nm. (c) y (d) Evaluación de  $\tilde{P}_c(t, \tau_0)$  en  $\tau_0 = -1.7 \text{ ps}$ ; mientras (c) corresponde a utilizar el ancho de banda estrecho (0.1 nm), (d) muestra el efecto de incrementar el ancho de banda (10 nm). (e) y (f) Interferogramas de HOM convencionales correspondientes a los casos (a) y (b).

una medición convencional de QOCT tomando coincidencias y un simple barrido del motor.

La limitación y alcance que tiene esta técnica tiene que ver, como casi siempre, con la resolución máxima que tenga nuestro espectrómetro, como sabemos  $\omega = 2\pi c/\lambda$  y  $\Delta\omega = 2\pi c\Delta\lambda/\lambda^2$ , y  $\Delta t \propto 2\pi/\Delta\omega$ . La separación temporal  $\Delta t$  que alcanzamos con 1 nm de resolución espectral, es de 8 ps, recordando que la muestra de 1 mm que medimos en el capítulo anterior, corresponde a 10 ps de tiempo de viaje redondo del fotón dentro del medio (1 mm  $\approx$  10 ps), podemos darnos cuenta de que con esta resolución espectral sólo podremos resolver muestras menores de 800 micras. Es por esto mismo que decidimos trabajar con una muestra de 170  $\mu m$ . Este problema ciertamente se resuelve utilizando un sistema espectral con mayor resolución, como por ejemplo utilizar una fibra óptica compensadora de dispersión más larga.

Es necesario enfatizar que las mediciones de tomografía de QOCT resuelta espectralmente que aquí mostramos no fueron tomadas con los tiempos de adquisición mínimos, ni con la resolución mínima del convertidor de tiempos HydraHarp, sino que se utilizaron valores arbitrarios de resolución y tiempos de adquisición. Por lo que el factor de mejora de la técnica es mucho mayor, en el caso ideal, sabemos que el tiempo de adquisición  $t_{adq}$  tomado en una posición fija del motor,  $\tau_0$ , nos permite saber el número de coincidencias,  $P_c(\tau_0)$ , y como ya comprobamos, la información espectral está contenida en este número de coincidencias, por lo que al resolverlo espectralmente, podemos obtener un espectro de desentonamiento interferido para ese punto,  $P_c(\tau_0, \Omega)$ , de este espectro es posible obtener la información espectral del bi-fotón, con lo cual podremos recalcular el interferograma completo. Por lo tanto, considerando un escaneo motorizado de QOCT con  $M$  pasos del motor, la técnica de QOCT resuelta espectralmente resulta ser  $M$  veces más rápida.

Para el caso de utilizar muestras de más de dos capas, mostramos que se complica el problema, ya que suelen aparecer interferencias inter-capas indeseables que dificultan la correcta asociación de los picos con las interfaces de la muestra. Es por esto que se recomienda utilizar una fuente de bombeo de láser pulsada en el régimen de los femto-segundos, de esta manera se eliminan los picos intermedios y sólo se quedan los picos correspondientes a las verdaderas capas de la muestra. Además se descarta la necesidad de tener que reconstruir el interferograma de QOCT, ya que

la separación de las capas queda clara desde que tenemos un espectro de desentona-  
miento y sacamos su transformada de Fourier. En conclusión propusimos una forma  
alternativa de obtener todas las ventajas de la tomografía de QOCT, como son, el  
doble de resolución, la cancelación de dispersión y el alto contraste, pero sin la necesi-  
dad de tener que realizar  $M$  pasos del motor, logrando tiempos de medición ordenes  
de magnitud menores, lo que nos acerca a la posibilidad de una implementación  
tecnológica de esta técnica.

---

# Parte III

## Apéndices



---

# A

## Teoría del SPDC de tipo I

### I. Derivación del Hamiltoniano

Utilizando la expresión para la energía de un campo electromagnético clásico dentro de un material

$$H(t) = \frac{1}{2} \int_V [\vec{E}_p \cdot \vec{D}_p + \vec{B}_p \cdot \vec{H}_p] dV, \quad (\text{A.1})$$

donde  $\vec{E}_p$  y  $\vec{H}_p$  son los campos eléctrico y magnético del haz de bombeo,  $\vec{D}_p$  es el vector desplazamiento eléctrico y  $\vec{B}_p$  es la inducción magnética del bombeo, ligados por las relaciones constitutivas:

$$\vec{D}_p = \epsilon_0 \vec{E}_p + \vec{P}_p, \quad (\text{A.2})$$

$$\vec{B}_p = \mu_0 \vec{H}_p. \quad (\text{A.3})$$

Ahora utilizando la expresión para la polarización en un medio no lineal (ecuación 1.3), quedándonos solo con el término lineal y el primer término no-lineal:

$$P_i = \epsilon_0 \chi_{ij}^{(1)} E_j^{(p)} + \epsilon_0 \chi_{ijk}^{(2)} E_j^{(s)} E_k^{(i)}, \quad (\text{A.4})$$

y sustituyendo en la ecuación A.2, obtenemos:

$$\vec{D}_p = \epsilon \vec{E}_p + \vec{P}_p^{(2)}, \quad (\text{A.5})$$

con  $\vec{P}_p^{(2)} = \epsilon_0 \chi_{ijk}^{(2)} E_j^{(s)} E_k^{(i)}$  siendo el término de interacción no lineal.

Continuamos sustituyendo A.5 y A.3 en A.1, y después de agrupar términos, obtenemos:

$$H(t) = \frac{1}{2} \int_V \left[ \epsilon |\vec{E}_p|^2 + \frac{1}{\mu} |\vec{B}_p|^2 \right] dV + \frac{1}{2} \int_V \vec{E}_p \cdot \vec{P}_p^{(2)} dV = H_{(0)} + H_I. \quad (\text{A.6})$$

El primer término no es más que la energía del campo electromagnético sin interacción, el segundo término corresponde a la interacción con el medio no-lineal.

Ahora para obtener el hamiltoniano cuantizado, sustituimos los campos por sus operadores de campo correspondientes

$$\hat{H} = \hat{H}_{(0)} + \hat{H}_I. \quad (\text{A.7})$$

El primer operador del hamiltoniano se puede escribir como (??),

$$\hat{H}_{(0)} = \sum_{\ell} \hbar \omega_{\ell} \left( \hat{a}_{\ell}^{\dagger} \hat{a}_{\ell} + \frac{1}{2} \right), \quad (\text{A.8})$$

es el campo electromagnético cuantizado, y

$$\hat{H}_I = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V \hat{E}_i^{(p)} \chi_{ijk} \hat{E}_j^{(s)} \hat{E}_k^{(i)} dV, \quad (\text{A.9})$$

es el operador de campo correspondiente a la interacción no lineal de segundo orden.

Se puede demostrar ([46]) que para un proceso de SPDC de tipo I para un cristal uniaxial negativo, podemos escribir finalmente el hamiltoniano de interacción como:

$$\hat{H}_I = 2\epsilon_0 \int_V d_{eff} \hat{E}_p \hat{E}_s \hat{E}_i dV \quad (\text{A.10})$$

donde  $d_{eff}$  es el coeficiente efectivo no-lineal de segundo orden, que en general depende de la temperatura y puede tener dependencia espacial,  $d_{eff} = d_{eff}(\vec{r})$ , como en el caso de cristales periódicamente polarizados; los operadores de campo eléctrico



para el fotón bombeo, señal y acompañante, son  $\hat{E}_p$ ,  $\hat{E}_s$  y  $\hat{E}_i$ . En general cada operador de campo puede escribirse como  $\hat{E}_x = \hat{E}_x^{(-)} + \hat{E}_x^{(+)}$ , por lo que sustituyendo en nuestro hamiltoniano de interacción y quedándose solamente con los términos que cumplen con la conservación de energía obtenemos el hamiltoniano de interacción cuántica del proceso SPDC:

$$\hat{H}_I = 2\epsilon_0 \int_V d_{eff} \hat{E}_p^{(+)} \hat{E}_s^{(-)} \hat{E}_i^{(-)} dV + H.C. \quad (A.11)$$

## II. Cálculo del Estado Cuántico

De la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo en el esquema de interacción tenemos que el estado cuántico queda determinado por:

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle, \quad (A.12)$$

que obedece a la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H}_I |\Psi(t)\rangle. \quad (A.13)$$

Cómo el operador de evolución también debe satisfacer esta ecuación

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}(t) = \hat{H}_I \hat{U}(t), \quad (A.14)$$

resolviendo para  $\hat{U}(t)$  en series y quedándonos hasta primer orden, obtenemos:

$$\hat{U}(t) = \hat{I} + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \hat{H}_I(t') dt'. \quad (A.15)$$

Ahora aplicamos este operador al estado  $|\Psi(0)\rangle = |\{\alpha_p(\omega)\}\rangle \otimes |0\rangle$  obteniendo la evolución del estado cuántico SPDC:

$$|\Psi(t)\rangle \approx |\{\alpha_p(\omega)\}\rangle \otimes \left[ |0\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \hat{H}_I(t') |0\rangle \right] \quad (A.16)$$

donde el estado vacío es para un espacio de Fock de dos fotones  $|0\rangle = |0\rangle_s \otimes |0\rangle_i$ .

Ahora ya podemos sustituir el operador Hamiltoniano de interacción A.11 en

A.16, teniendo en cuenta que el operador de campo de cada fotón<sup>1</sup> está dado por:

$$\hat{E}_\mu^{(+)}(\vec{r}, t) = i \int dk_\mu^3 \ell(\omega_\mu) \hat{a}(\vec{k}_\mu) e^{i(\vec{k}_\mu \cdot \vec{r} - \omega_\mu t)}. \quad (\text{A.17})$$

donde

$$\ell(\omega_\mu) = \sqrt{\frac{\hbar \omega_\mu}{2\epsilon_0 (2\pi)^3 n(\omega_\mu)^2}} \quad (\text{A.18})$$

es un coeficiente que solo depende de la energía (frecuencia) de los fotones. Aquí  $\mu = \{s, i\}$  es un índice que se refiere al fotón señal o al fotón acompañante. El haz de bombeo será descrito por un campo clásico ( $\hat{E}_p^{(+)} \rightarrow E_p$ ).

## II.1. Campo Clásico $E_p$

Ahora cambiamos el operador del campo eléctrico para el bombeo por su versión clásica. A este campo eléctrico se le dará una estructura espacial, en este caso una estructura gaussiana, casos más generales son descritos en términos de la familia de haces Helmholtz-Gauss descritos en el trabajo [46]. La función de amplitud compleja que representa al haz gaussiano es:

$$u(\vec{r}) = \exp\left\{\left(\frac{-ik_{tp}^2}{2k_p q(z)} z\right)\right\} GB(\vec{r}), \quad (\text{A.19})$$

donde

$$GB(\vec{r}) = \exp\{[ik_p(\omega_p)z]\} \frac{1}{q(z)} \exp\left\{\left[-\frac{\rho^2}{W_0^2 q(z)}\right]\right\}, \quad (\text{A.20})$$

representa un haz con estructura gaussiana y  $\rho^2 = x^2 + y^2$  es el vector de coordenadas cilíndricas, y

$$q(z) = 1 + \frac{iz}{z_R}, \quad (\text{A.21})$$

es el parámetro del haz complejo que depende de la distancia longitudinal  $z$  (medida desde el cinturón del haz).

---

<sup>1</sup>considerando un proceso SPDC de tipo I en el cual las polarizaciones de cada fotón están bien definidas

Aquí A.20 es la componente gaussiana con  $W_0$  igual al radio del cinturón y  $z_R = k_p W_0^2/2$  el rango de Rayleigh.

Ahora podemos escribir la amplitud del campo eléctrico del bombeo como una superposición de haces gaussianos de frecuencias individuales:

$$E_p(\vec{r}, t) = (2\pi)^3 A_p \int d\omega_p \alpha(\omega_p) \exp\left\{\left(\frac{-ik_{tp}^2}{2k_p q(z)} z\right)\right\} GB(x, y - z \tan \rho_0, z) \exp\{-i\omega_p t\}, \quad (\text{A.22})$$

donde

$$\alpha(\omega_p) = \exp\left\{\left[-\frac{(\omega_p - \omega_{p0})^2}{\sigma_p^2}\right]\right\}, \quad (\text{A.23})$$

es la envolvente espectral del pulso, con  $\omega_{p0}$  y  $\sigma_p$ , la frecuencia central y el ancho de banda del bombeo respectivamente, y dónde  $\rho_0$  es el ángulo de *walk-off*, que es el ángulo entre el vector de onda y el vector de poynting, debido a que en un cristal uniaxial los frentes de onda, que son normales al vector de onda ( $\vec{k}$ ), y la energía, en dirección del vector de Poynting ( $\vec{S}$ ) de la onda no van en la misma dirección necesariamente.

## II.2. Determinación de la función de Amplitud Conjunta $F(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$

La función de amplitud conjunta de la pareja de fotones en términos de los vectores de onda, es la amplitud de probabilidad de que un fotón señal se genere con vector de onda  $\vec{k}_s$  mientras que el fotón gemelo, acompañante, se genera con un vector de onda  $\vec{k}_i$  de manera simultánea.

Sustituyendo las ecuaciones A.22, A.17 en A.11 y finalmente sustituyendo en la evolución del estado SPDC A.16, dejando de lado el estado de vacío, tenemos que:

$$|\Psi(t)\rangle \approx \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' 2\epsilon_0 \int_V d_{eff} E_p \hat{E}_s^{(-)} \hat{E}_i^{(-)} dV |0\rangle, \quad (\text{A.24})$$

$$|\Psi(t)\rangle \approx \frac{-2\epsilon_0}{i\hbar} \int_0^t dt' \int_V dV d_{eff} E_p(\vec{r}, t') \int dk_s^3 \ell(\omega_s) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_s) e^{i(\vec{k}_s \cdot \vec{r} - \omega_s t')} \int dk_i^3 \ell(\omega_i) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_i) e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t')} |0\rangle, \quad (\text{A.25})$$

$$= \frac{-2\epsilon_0}{i\hbar} \int_0^t dt' \int_V dV d_{eff} E_p(\vec{r}, t') \int dk_s^3 \ell(\omega_s) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_s) e^{i(\vec{k}_s \cdot \vec{r} - \omega_s t')} \int dk_i^3 \ell(\omega_i) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_i) e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t')} |0\rangle. \quad (\text{A.26})$$

Aquí nos vamos por partes, primero calculamos  $\hat{E}_s^{(-)} \hat{E}_i^{(-)}$ :

$$\hat{E}_s^{(-)} \hat{E}_i^{(-)} = - \int dk_s^3 \int dk_i^3 \ell(\omega_s) \ell(\omega_i) e^{i(\omega_s + \omega_i) t'} e^{-i(\vec{k}_s + \vec{k}_i) \cdot \vec{r}} \hat{a}^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_i), \quad (\text{A.27})$$

ahora incluimos el bombeo:

$$E_p \hat{E}_s^{(-)} \hat{E}_i^{(-)} = -(2\pi)^3 A_p \int_0^\infty d\omega_p \alpha(\omega_p) \int dk_s^3 \int dk_i^3 \ell(\omega_s) \ell(\omega_i) e^{i(\omega_s + \omega_i - \omega_p) t'} e^{-i\vec{k}^\perp \cdot \vec{\rho}} e^{i(k_p - k_{sz} - k_{iz})z} \exp\left\{ \left( \frac{-ik_{tp}^2}{2k_p q(z)} z \right) \right\} GB_T(x, y - z \tan \rho_0, z) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_i), \quad (\text{A.28})$$

donde

$$\begin{cases} \vec{k}^\perp = (k_{sx} + k_{ix}, k_{sy} + k_{iy}) \\ \vec{r} = \vec{\rho} + z\hat{z} \\ (\vec{k}_s + \vec{k}_i) \cdot \vec{r} = \vec{k}^\perp \cdot \vec{\rho} + (k_{sz} + k_{iz})z \end{cases}$$

son, la componente transversal de la suma de los vectores de onda de los fotones generados, el vector de posición radial en cilíndricas, y el producto interior entre la suma de vectores de onda de los fotones generados y el vector de posición radial, respectivamente.

Ahora realizamos la integral de volumen, considerando  $d_{eff}$  constante.

$$\int dV E_p \hat{E}_s^{(-)} \hat{E}_i^{(-)} = -(2\pi)^3 A_p \int_0^\infty d\omega_p \alpha(\omega_p) \int dk_s^3 \int dk_i^3 \ell(\omega_s) \ell(\omega_i) e^{-i\Delta\omega t'} \left[ \int dV e^{-i\vec{k}^\perp \cdot \vec{\rho}} e^{i\Delta k_z z} \exp\left\{ \left( \frac{-ik_{tp}^2}{2k_p q(z)} \right) z \right\} GB_T(x, y - z \tan \rho_0, z) \right] \hat{a}^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_i), \quad (\text{A.29})$$

con  $\Delta\omega = \omega_p - \omega_s - \omega_i$  y  $\Delta k_z = k_p - k_{sz} - k_{iz}$ .

Ahora definimos la función de *empatamiento de fases* (PMF por sus siglas en inglés),

$$\Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = \int dV e^{-i\vec{k}^\perp \cdot \vec{\rho}} e^{i\Delta k_z z} \exp\left\{ \left( \frac{-ik_{tp}^2}{2k_p q(z)} \right) z \right\} GB_T(x, y - z \tan \rho_0, z), \quad (\text{A.30})$$

sustituyendo esta función en la ecuación anterior tenemos que :

$$\int dV E_p \hat{E}_s^{(-)} \hat{E}_i^{(-)} = -(2\pi)^3 A_p \int_0^\infty d\omega_p \int dk_s^3 \int dk_i^3 \ell(\omega_s) \ell(\omega_i) e^{-i\Delta\omega t'} \alpha(\omega_p) \Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_i) \quad (\text{A.31})$$

Ahora realizando la integral temporal

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dt' \int dV E_p \hat{E}_s^{(-)} \hat{E}_i^{(-)} = \\ & -(2\pi)^3 A_p \int_0^\infty d\omega_p \int dk_s^3 \int dk_i^3 \ell(\omega_s) \ell(\omega_i) \left[ \int_0^\infty dt' e^{-i\Delta\omega t'} \right] \alpha(\omega_p) \Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_i), \\ & = -(2\pi)^4 A_p \int_0^\infty d\omega_p \int dk_s^3 \int dk_i^3 \ell(\omega_s) \ell(\omega_i) \delta(\Delta\omega) \alpha(\omega_p) \Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_i), \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

donde hemos usado  $\int_0^\infty dt' e^{-i\Delta\omega t'} = 2\pi\delta(\Delta\omega)$ . Por lo que finalmente tenemos que:

$$|\Psi\rangle \approx \frac{-2\epsilon_0 d_{eff} (2\pi)^4 A_p}{i\hbar} \int dk_s^3 \int dk_i^3 \ell(\omega_s) \ell(\omega_i) \alpha(\omega_s + \omega_i) \Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_i) |0\rangle. \quad (\text{A.33})$$

Introduciendo la constante  $\eta$  para englobar términos constantes, el estado completo quedaría como:

$$|\Psi\rangle = |0\rangle + \eta \int dk_s^3 \int dk_i^3 \ell(\omega_s) \ell(\omega_i) \alpha(\omega_s + \omega_i) \Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_i) |0\rangle. \quad (\text{A.34})$$

Definiendo ahora la Función de amplitud conjunta como:

$$F(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = \ell(\omega_s) \ell(\omega_i) \alpha(\omega_s + \omega_i) \Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \quad (\text{A.35})$$

### II.3. Determinación de la función de empataamiento de fases $\Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$

Partiendo de la relación A.30, procedemos a realizar el cálculo de la integral de volumen al principio sin tomar en cuenta el ángulo de walk-off:

$$\Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = \int dV e^{-i\vec{k}^\perp \cdot \vec{\rho}} e^{i\Delta k_z z} G B_T(x, y, z), \quad (\text{A.36})$$

se omitió la fase de la exponencial que depende solo de la componente transversal del vector de onda del bombeo debido a que las propiedades del SPDC que se medirán son la intensidad y no la amplitud de probabilidad.

Separando en parte transversal y parte longitudinal y considerando que las paredes del cristal son mucho más grandes que el tamaño del cinturón, y que la longitud transversal del cristal es  $L$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) &= \int_{-L/2}^{L/2} dz e^{i\Delta k_z z} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-i\vec{k}^\perp \cdot \vec{\rho}} G B_T(x, y, z) \\ &= \int_{-L/2}^{L/2} dz e^{i\Delta k_z z} \Gamma(z; \vec{k}^\perp), \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

donde la función de *espectro angular* está definida como:

$$\Gamma(z; \vec{k}^\perp) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-i\vec{k}^\perp \cdot \vec{\rho}} GB_T(x, y, z). \quad (\text{A.38})$$

Realizando las integrales

$$\begin{aligned} \Gamma(z; \vec{k}^\perp) &= \frac{1}{q(z)} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left\{\left[-ik_x x - \frac{x^2}{W_0^2 q(z)}\right]\right\} \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left\{\left[-ik_y y - \frac{y^2}{W_0^2 q(z)}\right]\right\} \\ &= \frac{1}{q(z)} W_0 \sqrt{\pi q(z)} \exp\left\{\left[-\frac{1}{4}(k_x^\perp)^2 W_0^2 q(z)\right]\right\} W_0 \sqrt{\pi q(z)} \exp\left\{\left[-\frac{1}{4}(k_y^\perp)^2 W_0^2 q(z)\right]\right\} \\ &= \pi W_0^2 \exp\left\{\left[-\frac{W_0^2}{4} |\vec{k}_\perp|^2 q(z)\right]\right\} \end{aligned}$$

Ahora sustituimos en la ecuación A.37, obteniendo:

$$\Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = \pi W_0^2 \int_{-L/2}^{L/2} dz e^{i\Delta k_z z} \exp\left\{\left[-\frac{W_0^2}{4} |\vec{k}_\perp|^2 q(z)\right]\right\} \quad (\text{A.39})$$

$$= \pi W_0^2 \exp\left\{\left[-\frac{W_0^2}{4} |\vec{k}_\perp|^2\right]\right\} \int_{-L/2}^{L/2} dz e^{i\Delta k_z z} \exp\left\{\left[-i\frac{W_0^2}{4} |\vec{k}_\perp|^2 \frac{z}{z_R}\right]\right\} \quad (\text{A.40})$$

$$= \pi W_0^2 \exp\left\{\left[-\frac{W_0^2}{4} |\vec{k}_\perp|^2\right]\right\} \int_{-L/2}^{L/2} dz \exp\left\{\left[i\left(\Delta k_z - \frac{|\vec{k}_\perp|^2}{2k_p}\right) z\right]\right\}, \quad (\text{A.41})$$

realizando esta integral llegamos a:

$$\Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = L\pi W_0^2 \exp\left\{\left(-\frac{W_0^2}{4} |\vec{k}_\perp|^2\right)\right\} \text{sinc}\left(\frac{L}{2}\Delta k\right), \quad (\text{A.42})$$

con

$$\Delta k = \Delta k_z - \frac{|\vec{k}_\perp|^2}{2k_p} = k_p - \frac{|\vec{k}_\perp|^2}{2k_p} - k_{sz} - k_{iz}, \quad (\text{A.43})$$

es la función de desempatamiento de fases (phase mismatch).

Ahora incluyendo el efecto de walk-off:

$$\Delta k = k_p - \frac{|\vec{k}_\perp|^2}{2k_p} - k_{sz} - k_{iz} + \vec{k}_{\perp y} \tan \rho_0. \quad (\text{A.44})$$

Finalmente extrayendo las constantes de la función de empatamiento de fases y agrupándolas con las constantes del estado principal, culminamos con:

$$\Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = \exp\left\{\left(-\frac{W_0^2}{4}|\vec{k}_\perp|^2\right)\right\} \text{sinc}\left(\frac{L}{2}\Delta k\right). \quad (\text{A.45})$$

#### II.4. Estado SPDC

El estado SPDC completo es:

$$|\Psi\rangle_{PDC} = |0\rangle + \eta \int dk_s^3 \int dk_i^3 F(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_i) |0\rangle, \quad (\text{A.46})$$

donde  $F(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$  es la función de amplitud conjunta (JSA):

$$F(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = \ell(\omega_s)\ell(\omega_i)\alpha(\omega_s + \omega_i) \exp\left\{\left(-\frac{W_0^2}{4}|\vec{k}_\perp|^2\right)\right\} \text{sinc}\left(\frac{L}{2}\Delta k\right), \quad (\text{A.47})$$

y  $\Delta k$  es llamada el desempatamiento de fases (*phase mismatch*) y esta dado por la ecuación A.44; y  $\vec{k}_\perp$  es la suma de las componentes transversales de los fotones generados:

$$\vec{k}_\perp = (k_{sx} + k_{ix}, k_{sy} + k_{iy}). \quad (\text{A.48})$$



---

## B

# Proceso de la Fotodetección

### I. Estado cuántico con un Campo de bombeo estrecho

Comenzamos con un caso especial ideal cuándo el bombeo tiene una única componente de frecuencia  $\omega_p = \omega_{p0}$  y  $\alpha_p \omega_p = V_p \delta(\omega_p - \omega_{p0})$ , con  $V_p$  siendo la amplitud del campo de bombeo. La ecuación de un estado de dos fotones acoplado a fibra óptica se puede escribir como:

$$|\Psi\rangle_{PDC} = |0\rangle + \xi \int \int d\omega_s d\omega_i f(\omega_s, \omega_i) |\omega_s, \omega_i\rangle \quad (\text{B.1})$$

donde  $f(\omega_s, \omega_i)$  es la amplitud de probabilidad, que para este caso especial de campo de bombeo estrecho puede escribirse como:

$$f(\omega_s, \omega_i) = V_p \delta(\omega_s + \omega_i - \omega_p) \psi(\omega_s). \quad (\text{B.2})$$

Aquí  $\psi \propto h(\omega_s, \omega_{p0} - \omega_s) = h(L\Delta k)$ , siendo esta función  $h$ , la función sinc del estado SPDC deducido anteriormente,

$$h(L\Delta k) = e^{-i\frac{L\Delta k}{2}} \text{sinc}\left(\frac{L\Delta k}{2}\right). \quad (\text{B.3})$$

Notemos que en el estado B.1, los fotones señal y acompañante están perfectamente correlacionados  $\omega_s + \omega_i = \omega_{p0}$ . Este caso corresponde a una frecuencia individual o monocromático.

Sin embargo en un caso más general cuando el campo de bombeo es estacionario

continuo (CW) pero con un ancho de banda finito, podemos tratar la amplitud espectral del bombeo  $\alpha_p(\omega_p)$  como una variable aleatoria que satisface la relación de correlación

$$\langle \alpha_p^*(\omega)\alpha_p(\omega') \rangle_p = 2\pi n_p(\omega_p)\delta(\omega - \omega'), \quad (\text{B.4})$$

donde  $n_p(\omega_p)$  es la potencia espectral del campo de bombeo. Para un bombeo CW estacionario el espectro es mucho más estrecho que el ancho de banda de los fotones generados. Por lo tanto, una buena aproximación sería

$$\int d\omega_s |h(\omega_s, \omega_p - \omega_s)|^2 = f(\omega_p) \approx f(\omega_{p0}) \quad (\text{B.5})$$

para  $|\omega_p - \omega_{p0}| \ll \Delta\omega_{PDC}$ . Podemos reescribir B.1 como

$$|\Psi\rangle_{PDC}^{CW} = |0\rangle + \eta \int \int d\omega_s d\omega_i \alpha(\omega_s, \omega_i) \psi(\omega_s, \omega_i) |\omega_s, \omega_i\rangle \quad (\text{B.6})$$

donde introducimos la constante  $\eta = \xi \sqrt{f(\omega_{p0})}$  tal que

$$\psi(\omega_s, \omega_i) = \frac{h(\omega_s, \omega_i)}{\sqrt{f(\omega_{p0})}}$$

y

$$\int d\omega_s |\psi(\omega_s, \omega_p - \omega_s)|^2 = \frac{f(\omega_p)}{\sqrt{f(\omega_{p0})}} \approx 1.$$

Esto solo funciona para anchos de banda muy pequeños comparados con los espectros de los fotones generados. Para un campo de bombeo ultra-rápido, los anchos de banda del bombeo son tan grandes como los anchos espectrales de los fotones generados, por lo que no podemos normalizar como en la ecuación B.6.

## II. Función de correlación del campo de bombeo y Flujo de Fotones

El subíndice  $P$  en la ecuación (B.4) significa promedio sobre un ensamble clásico sobre la onda de bombeo. Por lo que, al calcular el valor de expectación de cualquier

operador, necesitaremos tomar no solo el promedio cuántico sobre el estado en la Ec.(B.6) sino también el promedio clásico sobre el campo de bombeo. Con esta notación, la función de campo de bombeo  $E_p(\vec{r}, t)$ , que es el eigenvalor del operador de campo unidimensional sobre el estado de bombeo:

$$\hat{E}_p^{(+)}(\vec{r}, t)|\{\alpha_p(\omega)\}\rangle = E_p(\vec{r}, t)|\{\alpha_p(\omega)\}\rangle \quad (\text{B.7})$$

tiene la forma

$$E_p(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega_p \alpha_p(\omega_p) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_p t)} \quad (\text{B.8})$$

y también es una variable aleatoria clásica. Su función de correlación de campo puede ser calculado como sigue:

$$\Gamma_p(\tau) = \langle E_p^*(\vec{r}, t) E_p(\vec{r}, t + \tau) \rangle_P = \int d\omega_p n_p(\omega_p) e^{-i\omega_p \tau}, \quad (\text{B.9})$$

y su rango nos da el tiempo de coherencia  $T_c^{(p)}$  del campo de bombeo.

Notar que la función de potencia espectral  $n_p(\omega_p)$  es una cantidad adimensional y

$$I_p = \Gamma_p(0) = \langle |V_p(\vec{r}, t)|^2 \rangle_P = \int d\omega_p n_p(\omega_p) \quad (\text{B.10})$$

tiene unidades de  $Hz$  o  $s^{-1}$ . Por lo tanto,  $I_p = \langle |V_p(\vec{r}, t)|^2 \rangle_P$  es el flujo de fotones del campo de bombeo.

### III. Función de correlación de campos cuánticos y Flujo de Fotones de SPDC

Para este proceso podemos utilizar el marco de Heisenberg y elegir  $|\psi\rangle_{PDC}$  dado en la ecuación (??) como el estado cuántico inicial. Consideramos el operador de campo unidimensional para los campos señal y acompañante:

$$\hat{E}_m(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega_m \hat{a}_m(\omega_m) e^{i(\vec{k}_m\cdot\vec{r} - \omega_m t)} \quad (\text{B.11})$$

siendo ( $m = s, i$ ). Este operador es un poco diferente del campo eléctrico cuantizado (apéndice).

Definimos la **Función de Correlación de un campo cuantizado** como

$$\Gamma_m(\tau) \equiv \langle \hat{E}_m^\dagger(\vec{r}, t) \hat{E}_m(\vec{r}, t + \tau) \rangle \quad (\text{B.12})$$

que no es mas que el valor de expectación del operador  $\hat{E}_m^\dagger(\vec{r}, t) \hat{E}_m(\vec{r}, t + \tau)$ . Utilizando la ecuación de los campos Ec.(B.11) y el estado  $\Psi_{PDC}$  Ec.(??), obtenemos

$$\Gamma_s(\tau) = |\xi|^2 \int \int d\omega_s d\omega_i n_p(\omega_s + \omega_i) |\phi(\omega_s, \omega_i)|^2 e^{-i\omega_i \tau} \quad (\text{B.13})$$

para el fotón señal y

$$\Gamma_i(\tau) = |\xi|^2 \int \int d\omega_s d\omega_i n_p(\omega_s + \omega_i) |\phi(\omega_s, \omega_i)|^2 e^{-i\omega_s \tau} \quad (\text{B.14})$$

para el fotón acompañante. Para un ancho de banda estrecho, introducimos la restricción  $\omega_s + \omega_i \approx \omega_{p0}$ , que nos permite separar la doble integral, en una integral que sólo depende del bombeo y otra que sólo depende de los fotones:

$$\begin{aligned} \Gamma_s(\tau) &= |\xi|^2 \int d\omega_p n_p(\omega_p) \int d\omega |\phi(\omega, \omega_p - \omega)|^2 e^{-i\omega \tau} \\ &\approx |\xi|^2 I_p \int d\omega |\phi(\omega, \omega_p - \omega)|^2 e^{-i\omega \tau} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

donde hemos usado la relación de intensidad del campo de bombeo Ec.(B.10), hacemos lo mismo para la función de correlación del fotón acompañante, obteniendo

$$\begin{aligned} \Gamma_i(\tau) &\approx |\xi|^2 I_p \int d\omega |\phi(\omega_p - \omega, \omega)|^2 e^{-i(\omega_p - \omega)\tau} \\ &= e^{-i\omega_{p0}\tau} |\xi|^2 I_p \int d\omega |\phi(\omega_p - \omega, \omega)|^2 e^{i\omega \tau}. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Podemos decir que las expresiones son casi iguales  $\Gamma_i(\tau) = e^{-i\omega_{p0}\tau} \Gamma_s^*(\tau)$ . Es obvio que los 2 fotones generados tienen propiedades de coherencia similares pero son el complejo conjugado del otro. Su espectro está dado por  $|\phi(\omega, \omega_p - \omega)|^2$  y es comple-

tamente independiente de las propiedades de coherencia del campo de bombeo. El ancho de banda de los campos convertidos de SPDC están determinados por el rango de la función de empatamiento de fases, que involucra a la función  $\text{sinc}(\Delta kL/2)$  en la Ec.(A.42), claro que esto es para un ancho de banda estrecho, para un bombeo de ancho de banda grande, la situación es distinta.

Con el fin de dar significado al coeficiente  $|\xi|^2$ , expresamos la tasa de fotones señal y acompañante en términos de la razón de fotones de bombeo. Notar que la cantidad  $\langle \hat{E}_m^\dagger(\vec{r}, t) \hat{E}_m(\vec{r}, t) \rangle$  tiene unidades de  $s^{-1}$ , así que representa el flujo de fotones del campo al tiempo  $t$  y en la posición  $\vec{r}$ , y esta relacionado, para un campo cuasi-monocromático, con la razón  $R_m(\vec{r}, t)$  de fotones registrados por un detector colocado en la posición  $\vec{r}$  al tiempo  $t$ .

$$R_m(\vec{r}, t) = \beta_m \langle \hat{E}_m^\dagger(\vec{r}, t) \hat{E}_m(\vec{r}, t) \rangle = \beta_m \Gamma_m(0) \quad (\text{B.17})$$

donde  $\beta_m$  es la eficiencia cuántica del detector.

De las ecuaciones (B.15), (B.16) y (B.17), tenemos :

$$R_m(\vec{r}, t) \approx \beta_m |\xi|^2 \int d\omega_p n_p(\omega_p) = \beta_m |\xi|^2 I_p. \quad (\text{B.18})$$

Para un campo mono-modo con el estado cuántico de la ecuación (1.54), obtenemos un resultado similar, pero con  $I = |V_p|^2/2\pi$ . Para detectores ideales con una eficiencia cuántica unitaria, obtenemos:

$$R_s(\vec{r}, t) = R_i(\vec{r}, t) = |\xi|^2 I_p. \quad (\text{B.19})$$

Por lo tanto, un significado físico de  $|\xi|^2$  es la probabilidad de conversión de un fotón del bombeo en 2 fotones convertidos en cierta dirección vía la interacción no lineal de SPDC.

## IV. Medición de Coincidencias

La razón de coincidencias  $R_c$  de registrar un fotón señal con un detector  $A$  y un fotón acompañante con el detector  $B$  dentro del tiempo de resolución de los detectores  $T_R$  también puede expresarse en términos de  $\hat{E}(\vec{r}, t)$ , para un campo cuasi-

monocromático, en la forma:

$$R_c \equiv \beta_s \beta_i \int_{T_R} d\tau G^{(2)}(\tau). \quad (\text{B.20})$$

Con la **Función de Correlación de Intensidad**:

$$G^{(2)}(\tau) \equiv \langle \hat{E}_i^\dagger(\vec{r}_i, t) \hat{E}_s^\dagger(\vec{r}_s, t + \tau) \hat{E}_s(\vec{r}_s, t + \tau) \hat{E}_i(\vec{r}_i, t) \rangle, \quad (\text{B.21})$$

donde  $\beta_s$  y  $\beta_i$  son las eficiencias cuánticas de los detectores A y B.

Comenzamos por calcular primero  $\hat{E}_s(\vec{r}_s, t + \tau) \hat{E}_i(\vec{r}_i, t) |\psi\rangle_{PDC}$  con el estado Ec.(1.54) y los operadores de campo Ec.(B.11):

$$\hat{E}_s(\vec{r}_s, t + \tau) \hat{E}_i(\vec{r}_i, t) |\psi\rangle_{PDC} = \frac{\xi}{2\pi} \int \int \int \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega_s d\omega_i e^{i(\vec{k}_s \cdot \vec{r}_s - \omega_s t)} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r}_i - \omega_i t)} e^{-i\omega_s \tau} V_p \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_p) \phi(\omega_1, \omega_2) \hat{a}_s(\omega_s) \hat{a}_i(\omega_i) |\omega_{1s}, \omega_{2i}\rangle. \quad (\text{B.22})$$

Usando  $\hat{k}_s \cdot \vec{r}_s = z_s$  como la distancia del detector A al final del cristal no-lineal (origen del sistema), y utilizando la relación de la magnitud  $k_s = \omega_s/c$ , y además expresando los kets  $|\omega_{1s}, \omega_{2i}\rangle = \hat{a}_1^\dagger(\omega_1) \hat{a}_2^\dagger(\omega_2) |0_s, 0_i\rangle$  y finalmente utilizando las relaciones básicas de conmutación de los operadores de aniquilación y creación:

$$\hat{a}_s(\omega_s) \hat{a}_i(\omega_i) \hat{a}_1^\dagger(\omega_1) \hat{a}_2^\dagger(\omega_2) |0_s, 0_i\rangle = \delta(\omega_s - \omega_1) \delta(\omega_i - \omega_2) |0_s, 0_i\rangle. \quad (\text{B.23})$$

Podemos simplificar la expresión a :

$$\hat{E}_s(\vec{r}_s, t + \tau) \hat{E}_i(\vec{r}_i, t) |\psi\rangle_{PDC} = \frac{\xi}{2\pi} \int \int d\omega_1 d\omega_2 V_p \delta(\omega_1 + \omega_2) \phi(\omega_1, \omega_2) e^{-i\omega_1(t+\tau-z_s/c)} e^{-i\omega_2(t-z_i/c)} |0_s, 0_i\rangle. \quad (\text{B.24})$$

Entonces, la función de correlación en intensidad se obtiene sacando el módulo cuadrado de esta expresión:

$$\begin{aligned}
G^{(2)}(\tau) &= \|\hat{E}_s(\vec{r}_s, t + \tau)\hat{E}_i(\vec{r}_i, t)\rangle_{PDC}\|^2 \\
&= \left| \frac{\xi V_p}{2\pi} g(\tau - \Delta z/c) \right|^2,
\end{aligned} \tag{B.25}$$

con

$$g(\tau) \equiv \int d\omega \phi(\omega) e^{-i\omega\tau} \tag{B.26}$$

la **Transformada de Fourier** de la función de empatamiento de fases para el caso monocromático  $\phi(\omega)$ . La función  $g(\tau)$  tiene el rango de  $T_c \sim 1/\Delta\omega_{PDC}$  donde  $\Delta\omega_{PDC}$  es el rango de  $\phi(\omega)$  o el ancho de banda de los fotones generados.

Normalmente en ancho de banda de los fotones convertidos son tan grandes como  $10^{12\sim 13} Hz$  de tal forma que  $T_c \sim 1ps$ . Los intentos tempranos por Burnham y Winberg y despues por Friberg et al, para medir directamente la función de correlación  $G^{(2)}(\tau)$  falló para encontrar la dependencia sobre la función  $g(\tau)$  ya que los detectores tienen tiempos de resolución del orden de  $T_R \sim 100ps$ . Por lo que, las mediciones de Brunham y Weinberg y por Friberg et al. median simplemente la funciones de respuesta electrónica. Posiblemente, estos experimentos pioneros probaron que los fotones producidos en el proceso de SPDC están altamente correlacionados en el tiempo con tiempos de correlación más cortos que cualquier otra fuente conocida hasta entonces [47].

Ya que en la mayoría de los casos  $T_R \gg T_c$ , podemos tomar el rango de integración en la Ec.(B.20) como  $(-\infty, \infty)$ . Bajo estas condiciones, las mediciones de coincidencias considera a cada par de fotones no importa el retraso temporal entre ellos. Entonces, tenemos la razón de coincidencias como:

$$R_c = \beta_A \beta_B |\xi V_p|^2 \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau |g(\tau)|^2. \tag{B.27}$$

Debido a que la función  $\phi(\omega)$  está normalizada, podemos decir que la integral es igual a 1 y finalmente tenemos:

$$R_c = \beta_A \beta_B |\xi V_p|^2 \frac{1}{(2\pi)^2} = \beta_A \beta_B |\xi|^2 I_p, \tag{B.28}$$

utilizando la razón de cuentas simples Ec.(B.18) podemos ver que  $R_c = \beta_A R_s = \beta_B R_i$ . Y en el caso ideal en el que las eficiencias cuánticas de los aparatos sea unitaria  $\beta_A = \beta_B = 1$ , tenemos:

$$R_c = R_s = R_i. \quad (\text{B.29})$$

En este caso ideal, los detectores logran captar a todos los fotones entrantes, y esto significa que la razón de coincidencias es exactamente igual a la razón de fotones individuales, que implica que los 2 fotones generados están exactamente correlacionados dentro de  $T_c$ . Esta conclusión fue alcanzada inicialmente por medio de distintas aproximaciones por Hong y Mandel [48].

## V. Estado Cuántico con un Campo de Bombeo de Banda Ancha

Cuando el campo de bombeo es un pulso ultra-corto ( $\sim 100 fs$ ), su ancho de banda es tan grande como el de los fotones generados. Junto con la función de empatamiento de fases  $\phi(\omega_s, \omega_i)$ , la amplitud espectral del bombeo  $\alpha(\omega_p)$  determinara la función de onda de 2 fotones  $f(\omega_s, \omega_i)$  en el estado principal Ec.(1.39).

La principal diferencia entre esta sección y la anterior es que para un pulso de bombeo, el campo se vuelve no estacionario, y, normalmente, el marco de tiempo es mucho mas corto que el tiempo de respuesta de cualquier detector de fotones. Por lo tanto, la salida de cualquier proceso es una integral temporal de  $(-\infty, \infty)$ . Por ejemplo, la tasa de detección de fotones individuales en Ec.(B.17) es intercambiada a una probabilidad de detección de fotón individual por detector ( $m = s, i$ ).

$$P_1^{(m)}(\vec{r}) \equiv \beta_m \int dt \langle \hat{E}_m^\dagger(\vec{r}, t) \hat{E}_m(\vec{r}, t) \rangle. \quad (\text{B.30})$$

Con el estado cuántico en de fotones acoplados a fibra óptica, en la que la información espacial está determinada Ec.(1.39) y los operadores de campo Ec.(B.11), podemos calcular  $\langle \hat{E}_m^\dagger(\vec{r}, t) \hat{E}_m(\vec{r}, t) \rangle$  :



$$\langle \hat{E}_m^\dagger(\vec{r}, t) \hat{E}_m(\vec{r}, t) \rangle = \frac{|\xi|^2}{2\pi} \int \int \int d\omega'_1 d\omega_2 d\omega_1 f(\omega'_1, \omega_2) f(\omega_1, \omega_2) e^{-i(\omega_1 - \omega'_1)t}. \quad (\text{B.31})$$

Sustituyendo en la expresión para la probabilidad Ec.(B.30):

$$P_1^{(s)}(\vec{r}) = \beta_s |\xi|^2 \int \int d\omega_1 d\omega_2 |f(\omega_1, \omega_2)|^2 = \beta_s |\eta|^2, \quad (\text{B.32})$$

donde la integral temporal se vuelve una  $\delta(\omega_1 - \omega'_1)$ . Para el campo acompañante igualmente tenemos:

$$P_1^{(i)}(\vec{r}) = \beta_i |\xi|^2 \int \int d\omega_1 d\omega_2 |f(\omega_1, \omega_2)|^2 = \beta_i |\eta|^2. \quad (\text{B.33})$$

La probabilidad de detección conjunta para detector A y el detector B está, de forma similar, relacionado con la razón de detección de dos-fotones Ec.(B.20) :

$$P_2 \equiv \beta_s \beta_i \int \int dt_1 dt_2 G^{(2)}(t_1, t_2) \quad (\text{B.34})$$

con  $G^{(2)}(t_1, t_2)$  dada por Ec.(B.21) pero con  $t = t_2$  y  $\tau = t_1 - t_2$  o, más explícitamente:

$$G^{(2)}(t_1, t_2) = \langle \hat{E}_i^\dagger(\vec{r}_i, t_2) \hat{E}_s^\dagger(\vec{r}_s, t_1) \hat{E}_s(\vec{r}_s, t_1) \hat{E}_i(\vec{r}_i, t_2) \rangle, \quad (\text{B.35})$$

Para el estado cuántico en la Ec.(1.39), encontramos, similar a la Ec.B.24, que:

$$\begin{aligned} \hat{E}_s(\vec{r}_s, t_1) \hat{E}_i(\vec{r}_i, t_2) |\psi\rangle_{PDC} &= \frac{\xi}{2\pi} \int \int d\omega_1 d\omega_2 f(\omega_1, \omega_2) \\ &e^{-i\omega_1(t_1 - z_s/c)} e^{-i\omega_2(t_2 - z_i/c)} |0_s, 0_i\rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Por lo que el resultado final para  $G^{(2)}$  queda como:

$$G^{(2)}(t_1, t_2) = |\xi g(t_1 - z_s/c, t_2 - z_i/c)|^2 \quad (\text{B.37})$$

con

$$g(t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi} \int \int d\omega_1 d\omega_2 f(\omega_1, \omega_2) e^{-i\omega_1 t_1} e^{-i\omega_2 t_2}. \quad (\text{B.38})$$

Entonces la probabilidad de detección en coincidencias de dos fotones es:

$$\begin{aligned} P_2 &= \beta_1 \beta_2 \int \int dt_1 dt_2 |\xi g(t_1 - z_s/c, t_2 - z_i/c)|^2 \\ &= \beta_1 \beta_2 |\xi|^2 \int \int d\omega_1 d\omega_2 |f(\omega_1, \omega_2)|^2 \\ &= \beta_1 \beta_2 |\eta|^2. \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

Para 2 detectores ideales, tenemos la eficiencias cuánticas  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ , por lo tanto:

$$P_2 = P_1^{(s)} = P_1^{(i)} = |\eta|^2. \quad (\text{B.40})$$

La ecuación (B.40) para un bombeo pulsado es equivalente a la ecuación (B.29) para bombeo continuo CW. Por lo que el significado de  $|\eta|^2$  es la probabilidad de generación de una pareja de fotones en un pulso de bombeo.

## VI. Cálculo del Espectro de la pareja de fotones usando un bombeo pulsado

Para un campo no estacionario, el espectro  $S(\omega)$  es la transformada de Fourier del promedio temporal de la función de correlación de amplitud en la Ec.(B.12):

$$\langle \Gamma_m(\tau) \rangle_T = \int dt \langle \hat{E}_m^\dagger(\vec{r}, t) \hat{E}_m(\vec{r}, t + \tau) \rangle. \quad (\text{B.41})$$

Por lo tanto, similar a la ecuación (B.15), tenemos:

$$\langle \Gamma_s(\tau) \rangle_T = |\xi|^2 \int \int d\omega_s d\omega_i |f(\omega_s, \omega_i)|^2 e^{-i\omega_s \tau} \quad (\text{B.42})$$

Según lo ya mencionado, para obtener el espectro del fotón señal, debemos sacar la transformada de Fourier de la expresión anterior:

$$S_s(\omega_1) = \frac{1}{2\pi} \int dt \langle \Gamma_s(\tau) \rangle_T e^{i\omega_s t} = |\xi|^2 \int d\omega_i |f(\omega_s, \omega_i)|^2 \quad (\text{B.43})$$

y similarmente para el fotón acompañante

$$S_i(\omega_2) = \frac{1}{2\pi} \int dt \langle \Gamma_i(\tau) \rangle_T e^{i\omega_i t} = |\xi|^2 \int d\omega_s |f(\omega_s, \omega_i)|^2. \quad (\text{B.44})$$

A  $S_s(\omega_1)$  y  $S_i(\omega_2)$  se les denomina **marginales** de la pareja de fotones. Para el proceso SPDC de tipo I, tenemos la simetría  $f(\omega_s, \omega_i) = f(\omega_i, \omega_s)$ . Esto se generaliza a la misma forma espectral  $S_s(\omega) = S_i(\omega)$  para los campos convertidos.

Para el caso de SPDC de tipo II, sin embargo, tenemos que  $f(\omega_s, \omega_i) \neq f(\omega_i, \omega_s)$ , que implica que  $S_s(\omega) \neq S_i(\omega)$ . Tal asimetría en el espectro para los dos campos de los fotones de SPDC tendrán un efecto determinado sobre la Interferencia del bi-fotón.



---

# C

## Interferencia de Hong-Ou-Mandel

En este capítulo, estudiaremos el arreglo más popular en la interferencia de dos fotones: el interferómetro de Hong-Ou-Mandel (para abreviar HOM)(3.1). Esta interferencia es única, debido a la simplicidad de su geometría y claridad en su física, y ha sido ampliamente utilizada como un criterio para probar el grado de entrelazamiento de dos fotones. Comenzamos con la situación de un sólo modo para demostrar el principio físico sencillo, luego nos pasaremos al caso más realista multi-modal, donde los resultados son distintos dependiendo de la situación.

### I. Consideración Mono-Modo

Comenzando con el arreglo que consiste de un divisor de haz 50/50 (BS por sus siglas en inglés) por el que entra un fotón 1 por el puerto 1 y un fotón 2 por el puerto 2.

De la figura (C.1), podemos apreciar que el interferómetro de HOM difícilmente es igual a un interferómetro tradicional, en el que las ondas son divididas y recombinadas en un sólo punto del espacio y tiempo  $(\vec{r}, t)$ . En vez de esto, un interferómetro de HOM involucra un par de fotones que entran por dos puertos distintos de un divisor de haz sin pérdidas y salen por dos puertos distintos para luego ser detectados en coincidencias (al mismo tiempo  $t$ ) por dos detectores colocados en dos puntos distintos del espacio  $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ . Debido a la implicación de ser fotones individuales, hay solo cuatro posibilidades para que salgan del divisor de haz: ambos son transmitidos (Figura C.2a), ambos son reflejados (Figura C.2b), y uno es transmitido y el otro es

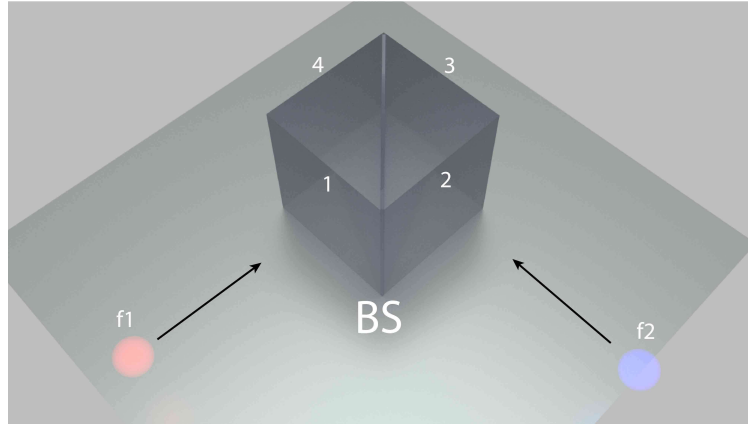


Figura C.1: Esquema de un cubo divisor de haz en el cual inciden un par de fotones,  $f_1$  y  $f_2$ , los números indican el número de puerto. El puerto 1 y puerto 2 son entradas, mientras que el puerto 3 y 4 son salidas.

reflejado (Fig. C.2c y C.2d).

Las primeras dos posibilidades son indistinguibles, por lo que las amplitudes de los casos a y b terminan sumándose. Sin embargo, debido al efecto del BS se introduce una diferencia de fases de  $\pi$  entre las dos posibilidades. Esto nos lleva a una interferencia destructiva, y los dos casos se cancelan completamente cuando sus amplitudes son las mismas. Este efecto fue descubierto por Hong, Ou y Mandel en 1987 [49].

Más rigurosamente, si los dos fotones entrantes en el divisor de haz tienen la misma frecuencia, misma polarización y el mismo modo-espacial, podemos ver a cada uno de ellos como un solo-modo  $\hat{a}_1$  y  $\hat{a}_2$ , respectivamente:

$$|\psi\rangle_{in} = |1_{a1}, 1_{a2}\rangle. \quad (\text{C.1})$$

Si los modos de salida son etiquetados como  $\hat{b}_1$  y  $\hat{b}_2$ , estos están relacionados con los operadores de creación y aniquilación por la transformación de BS:

$$\begin{aligned} \hat{b}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1 + \hat{a}_2) \\ \hat{b}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_2 - \hat{a}_1) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

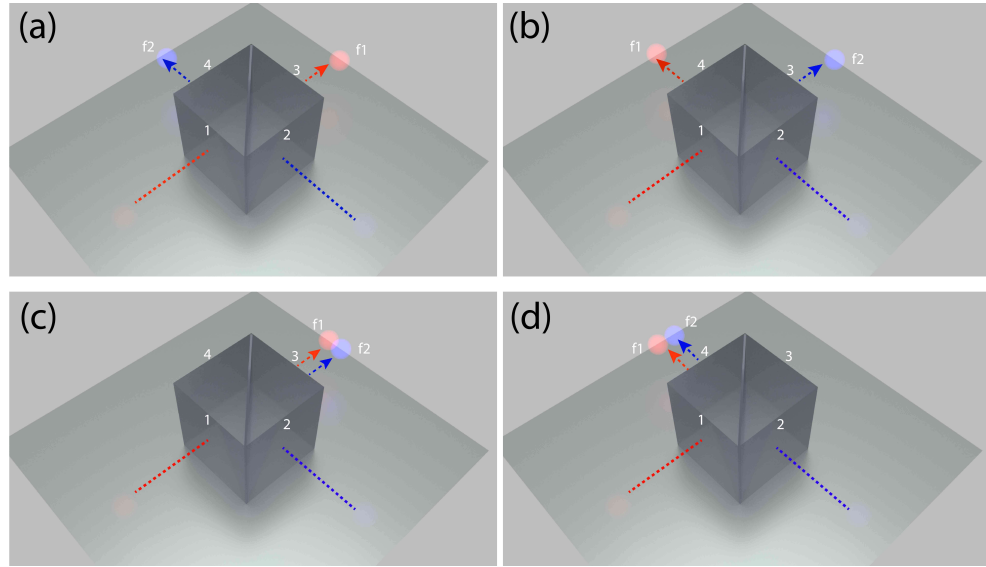


Figura C.2: (a) .

Utilizando la transformación de BS, junto con el estado de entrada al BS en la ecuación (C.1), es suficiente para determinar las propiedades de los puertos de salida. Por, ejemplo, la probabilidad  $P_{12}$  de detectar un fotón en cada uno de los puertos de salida:

$$P_{12} = \langle \psi |_{in} \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 \hat{b}_1 | \psi \rangle_{in} . \quad (C.3)$$

Con el estado Ec.(C.1) en términos de los operadores de creación y en los puertos de entrada:

$$| \psi \rangle_{in} = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger | 0_1, 0_2 \rangle \quad (C.4)$$

ahora expresando todo en términos de los operadores de salida del BS, para lo cual invertimos la transformación de la ecuación (C.2):

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{b}_1 - \hat{b}_2) \\ \hat{a}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{b}_1 + \hat{b}_2) \end{aligned} \quad (C.5)$$

con lo cuál sustituyendo en la ecuación (C.4) tenemos:

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle_{out} &= \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger |0_1, 0_2\rangle \\
&= \frac{1}{2} (\hat{b}_1^\dagger - \hat{b}_2^\dagger) (\hat{b}_1^\dagger + \hat{b}_2^\dagger) |0_1, 0_2\rangle \\
&= \frac{1}{2} (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1^\dagger + \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger - \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_1^\dagger - \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2^\dagger) |0_1, 0_2\rangle \\
&= \frac{1}{2} (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1^\dagger - \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2^\dagger) |0_1, 0_2\rangle
\end{aligned} \tag{C.6}$$

en donde hemos utilizando la relación de conmutación  $[\hat{b}_1^\dagger, \hat{b}_2^\dagger] = 0$ . Por lo que el estado de salida se escribe:

$$|\psi\rangle_{out} = \frac{1}{2} \left( (\hat{b}_1^\dagger)^2 - (\hat{b}_2^\dagger)^2 \right) |0_1, 0_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|2_{b1}, 0_{b2}\rangle - |0_{b1}, 2_{b2}\rangle). \tag{C.7}$$

No es necesario hacer la cuenta para la probabilidad  $P_{12}$ , ya que se ve directamente que el estado no tiene términos correspondientes a  $|1_{b1}, 1_{b2}\rangle$  debido a una interferencia completamente destructiva.

Este efecto de *amontonamiento* o tendencia de que ambos fotones se unan llenándose hacia un lado o ambos se vayan hacia el otro lado del BS, es una propiedad bosónica de los fotones. Esto requiere que la función de onda sea simétrica con respecto a los dos fotones. Sin embargo, la simetría es para la función de onda global. Si consideramos otros grados de libertad de los fotones, por decir, la polarización, de tal manera que el estado de polarización de los fotones sea anti-simétrica, los 2 fotones se comportarán como fermiones y se irán en direcciones separadas en el BS.

Es muy interesante considerar a los dos fotones como partículas clásicas (Newtonianas) y ver que salidas se predicen: en este caso, los 2 fotones que entran son identificables, por lo que las situaciones en la figura (C.2a) y (C.2b) son distinguibles, y no ocurrirá interferencia en absoluto. Para un BS 50/50 las 4 situaciones en la figura(C.2) son igualmente probables, por lo que la probabilidad de  $|1, 1\rangle$  sería de 1/2. Este caso corresponde a la situación en la que los 2 fotones no se traslapan en el BS y, entonces son identificables por su orden de arribo. Pero, esta situación



nunca podría ocurrir en un tratamiento de una pareja de fotones mono-modal, en la que los campos son trenes de ondas infinitamente largos y los fotones son igualmente probables a lo largo de todo el tren de ondas. Por lo que no seremos capaces de distinguir los tiempos de arribo de los fotones al BS. Un modelo más realista contendría multi-modos para los fotones por lo que ellos estarán en paquetes de ondas finitos.

## II. Tratamiento Multi-Modal y Dip de HOM

Ahora consideraremos el caso multi-frecuencia, cuando hay mas de un modo de frecuencia en el estado de entrada al BS. Como ya se derivó en el capítulo 2, un estado de 2 fotones multi-modal, dado en la Ec.(1.39). Lo reescribimos como:

$$|\psi\rangle_{PCD} = |0_s, 0_i\rangle + \xi \int \int d\omega_s d\omega_i f(\omega_s, \omega_i) \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger |0_s, 0_i\rangle \quad (\text{C.8})$$

Para un bombeo de banda ancha sabemos que la función de amplitud conjunta es de la forma:

$$f(\omega_s, \omega_i) = \alpha(\omega_s + \omega_i) \phi(\omega_s, \omega_i). \quad (\text{C.9})$$

Para separar a los 2 fotones de SPDC, escogemos una geometría de SPDC no-colineal (ver la figura C.3).

Para propagación unidireccional y el caso ideal en el que  $\tau = 0$ , los operadores de campo de entrada en el BS son similares a los de la Ec.(B.11):

$$\hat{E}_m^{(in)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \hat{a}_m(\omega) e^{-i\omega(t-z_m/c)}, \quad (\text{C.10})$$

con  $(m = 1, 2)$ , donde  $z_m$  es el camino óptico de los fotones señal y acompañante recorrido desde la salida del cristal no lineal, hasta el BS. La diferencia  $\Delta z = z_1 - z_2$  refleja la diferencia en sus caminos ópticos.

Asumiendo que los modos espaciales de los dos campos de entrada están perfectamente alineados, tenemos que los operadores de salida del BS están dados por [49]:

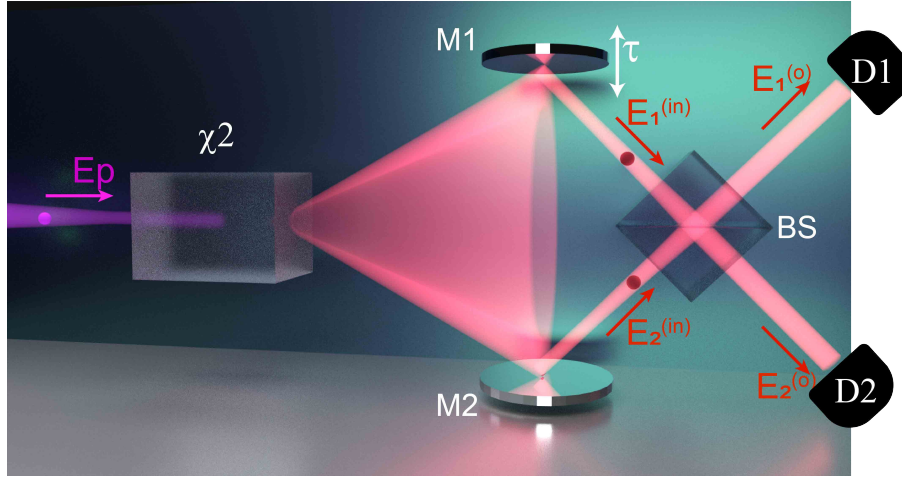


Figura C.3: Esquema básico del interferómetro de HOM. M1 es un espejo motorizado, M2 es un espejo fijo, D1,D2 son dos detectores de fotones.

$$\begin{aligned}\hat{E}_1^{(o)}(t) &= \sqrt{T}\hat{E}_1^{(in)}(t) + i\sqrt{R}\hat{E}_2^{(in)}(t), \\ \hat{E}_2^{(o)}(t) &= \sqrt{T}\hat{E}_2^{(in)}(t) + i\sqrt{R}\hat{E}_1^{(in)}(t),\end{aligned}\quad (\text{C.11})$$

La probabilidad de detectar un fotón en cada lado de los puertos de salida del BS está relacionada con la función de correlación en intensidad del bi-fotón Ec.(B.35):

$$G^{(2)}(t_1, t_2) = \langle \hat{E}_1^{(o)\dagger}(t_1)\hat{E}_2^{(o)\dagger}(t_2)\hat{E}_2^{(o)}(t_2)\hat{E}_1^{(o)}(t_1) \rangle. \quad (\text{C.12})$$

Con el estado de Ec.(C.8) y los operadores de campo Ec.(C.10), es posible derivar  $G^{(2)}$ , partimos primero de calcular:

$$\begin{aligned}&= \hat{E}_2^{(o)}(t_2)\hat{E}_1^{(o)}(t_1) |\psi\rangle_{PCD} \\ &= \left(\sqrt{T}\hat{E}_1^{(in)}(t) + i\sqrt{R}\hat{E}_2^{(in)}(t)\right) \left(\sqrt{T}\hat{E}_2^{(in)}(t) + i\sqrt{R}\hat{E}_1^{(in)}(t)\right) |\psi\rangle_{PCD} \\ &= \left(T\hat{E}_1^{(in)}\hat{E}_2^{(in)} + i\sqrt{TR}\left(\hat{E}_2^{(in)^2} + \hat{E}_1^{(in)^2}\right) - R\hat{E}_2^{(in)}\hat{E}_1^{(in)}\right) |\psi\rangle_{PCD}\end{aligned}\quad (\text{C.13})$$

donde hemos omitido los argumentos  $(t)$  para reducir espacio, finalmente eliminamos los términos de campo cuadráticos, ya que al evaluarse con el estado de 2

fotones dan cero, obteniendo

$$\hat{E}_2^{(o)}(t_2)\hat{E}_1^{(o)}(t_1)|\psi\rangle_{PCD} = \left(T\hat{E}_1^{(in)}\hat{E}_2^{(in)} - R\hat{E}_2^{(in)}\hat{E}_1^{(in)}\right)|\psi\rangle_{PCD}. \quad (\text{C.14})$$

Sustituyendo los operadores de campo y el estado:

$$\begin{aligned} &= \hat{E}_2^{(o)}(t_2)\hat{E}_1^{(o)}(t_1)|\psi\rangle_{PCD} \\ &= \frac{T\xi}{2\pi} \int \int d\omega_1 d\omega_2 f(\omega_1, \omega_2) e^{-i\omega_1(t_1-z_s/c)} e^{-i\omega_2(t_2-z_i/c)} |0_s, 0_i\rangle \\ &- \frac{R\xi}{2\pi} \int \int d\omega_1 d\omega_2 f(\omega_2, \omega_1) e^{-i\omega_2(t_1-z_s/c)} e^{-i\omega_1(t_2-z_i/c)} |0_s, 0_i\rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Sacando el módulo cuadrado para obtener el valor de  $G^{(2)}$ , podemos obtener la expresión siguiente:

$$G^{(2)}(t_1, t_2) = |\xi|^2 |Tg(t_1 - z_1/c, t_2 - z_2/c) - Rg(t_2 - z_1/c, t_1 - z_2/c)|^2, \quad (\text{C.16})$$

donde  $g(t_1, t_2)$  está dada por:

$$g(t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi} \int \int d\omega_1 d\omega_2 f(\omega_1, \omega_2) e^{-i\omega_1 t_1} e^{-i\omega_2 t_2}. \quad (\text{C.17})$$

Los 2 términos en la ecuación (C.16) corresponden a los casos de la figura (C.2a) y (C.2b). En especial cuando

$$f(\omega_1, \omega_2) = f(\omega_2, \omega_1), \quad (\text{C.18})$$

tenemos

$$g(t_1, t_2) = g(t_2, t_1), \quad (\text{C.19})$$

y si los 2 caminos están balanceados con  $z_1 = z_2$  y un BS 50/50 es utilizado, entonces tendremos  $G^{(2)}(t_1, t_2) = 0$ , esto significa, que no hay absolutamente ninguna coincidencia en los 2 detectores a la salida del BS. Ésta es la interferencia cuántica

de HOM pero usando un análisis multi-frecuencias.

Para encontrar la probabilidad de tener detecciones de coincidencias, vamos a considerar que los tiempos de coherencia  $T_c$  de los fotones generados son mucho más pequeños que los tiempos de respuesta  $T_R$  de los detectores, por lo tanto podemos escribir la probabilidad de coincidencias como:

$$R_{12} = \beta_1\beta_2 \int \int dt_1 dt_2 G^{(2)}(t_1, t_2), \quad (\text{C.20})$$

que al comparar con la Ec.(B.39) podemos relacionar las integrales de tiempos con las integrales en el espacio de frecuencias de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} R_{12} &= \beta_1\beta_2 \int \int dt_1 dt_2 |\xi|^2 |Tg(t_1 - z_1/c, t_2 - z_2/c) - Rg(t_2 - z_1/c, t_1 - z_2/c)|^2 \\ &= \beta_1\beta_2 |\xi|^2 \int \int d\omega_1 d\omega_2 |Tf(\omega_1, \omega_2) - Rf(\omega_2, \omega_1)|^2. \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Para el caso en el que tengamos un BS 50/50, esta relación se reduce a:

$$R_{12} = \frac{1}{4} \beta_1\beta_2 |\xi|^2 \int \int d\omega_1 d\omega_2 |f(\omega_1, \omega_2) - f(\omega_2, \omega_1)|^2. \quad (\text{C.22})$$

Esta expresión será nuestro caballito de batalla a la hora de calcular la interferencia de HOM para una pareja de fotones.

### III. Cálculo del Estado $|\psi\rangle_{PDC}$ a la salida del BS

Es instructivo ver como se modifica el estado de SPDC al pasar por un BS. Partimos de nuestro estado inicial  $|\psi\rangle_{PDC}$ :

$$|\psi\rangle_{PDC}^{in} = |0_1, 0_2\rangle + \xi \int \int d\omega_1 \omega_2 f(\omega_1, \omega_2) \hat{a}_1^\dagger(\omega_1) \hat{a}_2^\dagger(\omega_2) |0_1, 0_2\rangle. \quad (\text{C.23})$$

En la representación de Schrödinger un estado evoluciona por medio del operador unitario  $\hat{U}_{bs}$  que aquí esta representado por la transformación:

$$\begin{aligned}\hat{b}_1 &= \sqrt{T}\hat{a}_1 + i\sqrt{T}\hat{a}_2 \\ \hat{b}_2 &= \sqrt{T}\hat{a}_2 - i\sqrt{T}\hat{a}_1.\end{aligned}\tag{C.24}$$

La evolución del estado  $|\psi\rangle_{PCD}$  queda determinada por:

$$|\psi\rangle_{PCD}^o = \hat{U}_{BS} |\psi\rangle_{PCD}^{in}.\tag{C.25}$$

Podemos operar sobre los operadores de creación y aniquilación  $\hat{U}_{BS}$  para así obtener:

$$|\psi\rangle_{PDC}^{in} = |0_1, 0_2\rangle + \xi \int \int d\omega_1 \omega_2 f(\omega_s, \omega_2) \hat{U}_{BS} \hat{a}_1^\dagger(\omega_1) \hat{a}_2^\dagger(\omega_2) |0_1, 0_2\rangle.\tag{C.26}$$

Multiplicando por el operador identidad  $\hat{I} = \hat{U}_{BS}^\dagger \hat{U}_{BS}$  después de los operadores  $\hat{a}_1^\dagger(\omega_1)$  y  $\hat{a}_2^\dagger(\omega_2)$ , y utilizando la identidad  $\hat{U}_{BS} |0_1, 0_2\rangle = |0_1, 0_2\rangle$ , escribimos

$$|\psi\rangle_{PDC}^o = |0_1, 0_2\rangle + \xi \int \int d\omega_1 \omega_2 f(\omega_s, \omega_2) \hat{U}_{BS} \hat{a}_1^\dagger(\omega_1) \hat{U}_{BS}^\dagger \hat{U}_{BS} \hat{a}_2^\dagger(\omega_2) \hat{U}_{BS}^\dagger |0_1, 0_2\rangle.\tag{C.27}$$

podemos reescribir el estado como:

$$|\psi\rangle_{PDC}^o = |0_1, 0_2\rangle + \xi \int \int d\omega_1 \omega_2 f(\omega_s, \omega_2) \hat{b}_1^\dagger(\omega_1) \hat{b}_2^\dagger(\omega_2) |0_1, 0_2\rangle,\tag{C.28}$$

con  $\hat{b}_1^\dagger = \hat{U}_{BS} \hat{a}_1^\dagger(\omega_1) \hat{U}_{BS}^\dagger$ .

Ahora calculamos el término  $\hat{b}_1^\dagger(\omega_1) \hat{b}_2^\dagger(\omega_2)$ :

$$\begin{aligned}\hat{b}_1^\dagger(\omega_1) \hat{b}_2^\dagger(\omega_2) &= \\ &= \left(\sqrt{T}\hat{a}_1^\dagger + i\sqrt{T}\hat{a}_2^\dagger\right) \left(\sqrt{T}\hat{a}_2^\dagger + i\sqrt{T}\hat{a}_1^\dagger\right) \\ &= T\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger + i\sqrt{RT} \left(\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1^\dagger\right) - R\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1^\dagger.\end{aligned}\tag{C.29}$$

Las integrales en el espacio de frecuencias se toman en todo el espacio completo, los estados que corresponden a  $(\omega_1, \omega_2)$  y  $(\omega_2, \omega_1)$  son indistinguibles y deben sumarse, para ello dividimos las integrales en :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 d\omega_2 = \int \int_{\omega_1 < \omega_2} d\omega_1 d\omega_2 + \int \int_{\omega_1 = \omega_2} d\omega_1 d\omega_2 + \int \int_{\omega_1 > \omega_2} d\omega_1 d\omega_2 \quad (\text{C.30})$$

y luego intercambiar las variables  $\omega_1$  y  $\omega_2$  en la última sumatoria. Por lo que el estado queda:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{PDC}^o &= \xi \int \int_{\omega_1 \leq \omega_2} d\omega_1 d\omega_2 \left\{ i\sqrt{RT} (f(\omega_1, \omega_2) + f(\omega_2, \omega_1)) \left( \hat{a}_2^\dagger(\omega_1) \hat{a}_2^\dagger(\omega_2) + \hat{a}_1^\dagger(\omega_1) \hat{a}_1^\dagger(\omega_2) \right) \right. \\ &+ (Tf(\omega_1, \omega_2) - Rf(\omega_2, \omega_1)) \hat{a}_1^\dagger(\omega_1) \hat{a}_2^\dagger(\omega_2) \\ &+ \left. (Tf(\omega_2, \omega_1) - Rf(\omega_1, \omega_2)) \hat{a}_1^\dagger(\omega_2) \hat{a}_2^\dagger(\omega_1) \right\} |0_1, 0_2\rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

Y en particular para un divisor de haz balanceado  $T = R = 1/2$  .

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{PDC}^o &= \frac{\xi}{2} \int \int_{\omega_1 \leq \omega_2} d\omega_1 d\omega_2 \left\{ i (f(\omega_1, \omega_2) + f(\omega_2, \omega_1)) \left( \hat{a}_2^\dagger(\omega_1) \hat{a}_2^\dagger(\omega_2) + \hat{a}_1^\dagger(\omega_1) \hat{a}_1^\dagger(\omega_2) \right) \right. \\ &+ \left. (f(\omega_1, \omega_2) - f(\omega_2, \omega_1)) \left( \hat{a}_1^\dagger(\omega_1) \hat{a}_2^\dagger(\omega_2) - \hat{a}_1^\dagger(\omega_2) \hat{a}_2^\dagger(\omega_1) \right) \right\} |0_1, 0_2\rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

Podemos ver claramente que cada término  $\hat{a}_i \hat{a}_j$  corresponde a una de las posibilidades de la figura C.2 y que los términos de los pares de operadores de creación con igual subíndice crearán pares de fotones a la salida del mismo puerto, y estos términos no contribuyen a las detecciones en coincidencias, solo los términos con subíndice distinto  $\hat{a}_1 \hat{a}_2$  y  $\hat{a}_2 \hat{a}_1$  darán estados con fotones que salen por distintos puertos y por lo tanto podrán ser detectados en coincidencias. Para determinar la probabilidad de coincidencias, simplemente sacamos el módulo cuadrado de la amplitud del segundo término:

$$P_c = \frac{|\xi|^2}{4} 2 \int \int_{\omega_1 \leq \omega_2} d\omega_1 d\omega_2 |f(\omega_1, \omega_2) - f(\omega_2, \omega_1)|^2, \quad (\text{C.33})$$

donde el factor de 2 aparece debido a que de las cuatro posibilidades de, 2 términos contribuyen a que hayan coincidencias. Finalmente incluyendo todo el rango de integración obtenemos la probabilidad de coincidencias:

$$P_c = \frac{|\xi|^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 d\omega_2 |f(\omega_1, \omega_2) - f(\omega_2, \omega_1)|^2. \quad (\text{C.34})$$

Considerando las propiedades de los detectores, multiplicamos por las eficiencias cuánticas  $\beta_1$  y  $\beta_2$  y llegamos a la expresión antes obtenida (ecuación C.22) que obtuvimos antes.

## IV. Cálculo del Dip de HOM

Partimos de la ecuación C.22 pero consideramos la constante  $|xi|^2 = 1$  para suponer que en caso de que los fotones ya hayan sido generados, para referirnos a las probabilidades de que los fotones salgan o no por los dos puertos. Reescribiendo  $\omega_1 = \omega_s$  y  $\omega_2 = \omega_i$  para ya quedarnos de aquí en adelante con esta notación:

$$P_c = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_s d\omega_i |f(\omega_s, \omega_i) - f(\omega_i, \omega_s)|^2. \quad (\text{C.35})$$

Consideramos que uno de los fotones se retrasa temporalmente con respecto al otro (ver figura C.3 pero con  $\tau \neq 0$ ). Podemos comenzar considerando que los 2 fotones tienen su propio tiempo de viaje  $\omega_s t_1$  y  $\omega_i t_2$ . Por lo que la propagación agrega un término de fase  $e^{i\omega_s t_1 + i\omega_i t_2}$  a la función de amplitud conjunta:

$$f(\omega_s, \omega_i) \rightarrow f(\omega_s, \omega_i) e^{i\omega_s t_1 + i\omega_i t_2}. \quad (\text{C.36})$$

Al sustituir en la ec.C.35 tendremos que:

$$P_c = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_s d\omega_i |f(\omega_s, \omega_i) e^{i\omega_s t_1 + i\omega_i t_2} - f(\omega_i, \omega_s) e^{i\omega_i t_1 + i\omega_s t_2}|^2. \quad (\text{C.37})$$

al factorizar  $e^{i\omega_s t_1 + i\omega_i t_2}$  tenemos

$$\begin{aligned}
P_c &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_s d\omega_i |f(\omega_s, \omega_i) - f(\omega_i, \omega_s) e^{i\omega_i t_1 + i\omega_s t_2} e^{-i\omega_s t_1 - i\omega_i t_2}|^2 \\
&= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_s d\omega_i |f(\omega_s, \omega_i) - f(\omega_i, \omega_s) e^{-i(\omega_s - \omega_i)t_1 + i(\omega_s - \omega_i)t_2}|^2 \\
&= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_s d\omega_i |f(\omega_s, \omega_i) - f(\omega_i, \omega_s) e^{-i(\omega_s - \omega_i)(t_2 - t_1)}|^2. \quad (\text{C.38})
\end{aligned}$$

Definimos la variable de *desentonamiento de frecuencias* como  $\omega^- = \omega_s - \omega_i$ , y a la variable de *retraso temporal* de un fotón con respecto del otro como  $\tau = t_2 - t_1$ .

$$P_c = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_s d\omega_i |f(\omega_s, \omega_i) - f(\omega_i, \omega_s) e^{i\omega^- \tau}|^2 \quad (\text{C.39})$$

Definimos unas nuevas variables que serán más apropiadas, es un sistema rotado  $45^\circ$  en el que los ejes caen directamente en la diagonal y la antidiagonal de la función de amplitud conjunta  $f(\omega_s, \omega_i)$  (ver figura C.4).

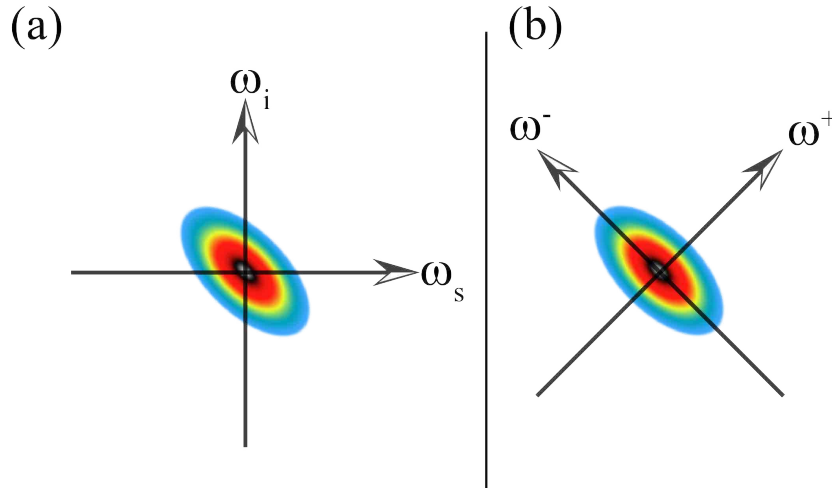


Figura C.4: Esquema de coordenadas. (a) Sistema de coordenadas  $\omega_s, \omega_i$ . (b) Sistema rotado  $45^\circ$ ,  $\omega^+ = \omega_s + \omega_i, \omega^- = \omega_s - \omega_i$ .

Aquí  $\omega^+$  se refiere a una variable que es directamente proporcional al ancho de banda del láser de bombeo y  $\omega^-$  se refiere al ancho de banda de los fotones generados o al desentonamiento de los fotones.

La transformación de coordenadas se es tan sencilla como la siguiente:



$$\begin{aligned}\omega^+ &= \omega_s + \omega_i \\ \omega^- &= \omega_s - \omega_i.\end{aligned}\tag{C.40}$$

Ahora utilizando una simple función Gaussiana en dos dimensiones como modelo de la función de amplitud conjunta:

$$f(\omega_s, \omega_i) = A \exp \left[ - \left( \frac{\omega_s - \omega_i}{\sigma_a} \right)^2 \right] \exp \left[ - \left( \frac{\omega_s + \omega_i - 2\omega_0}{\sigma_d} \right)^2 \right].\tag{C.41}$$

conde  $\omega_0 = \omega_{p0}/2$  es la frecuencias central de los fotones generados, o la mitad de la frecuencia central del bombeo. La ecuación (C.41) es una gaussiana bidimensional en el espacio de frecuencias, que describe una distribución que tiene un ancho  $\sigma_a$  en al dirección anti-diagonal, y un ancho  $\sigma_d$  en la dirección diagonal.

Al aplicar la transformación de la ecuación (C.40), a la función de amplitud conjunta (ecuación (C.41)), nos queda:

$$f(\omega^+, \omega^-) = A \exp \left[ - \left( \frac{\omega^-}{\sigma_a} \right)^2 \right] \exp \left[ - \left( \frac{\omega^+ - 2\omega_0}{\sigma_d} \right)^2 \right].\tag{C.42}$$

En el caso especial, en que estemos utilizando un láser CW que tienda al caso monocromático ideal  $\omega^+ \rightarrow 0$ , entonces la función se reduce a

$$f(\omega^-) = A \exp \left[ - \left( \frac{\omega^-}{\sigma_a} \right)^2 \right].\tag{C.43}$$

Aquí la constante de normalización A, es ignorada, ya que nos interesará mostrar el comportamiento cualitativo de la interferencia. También utilizamos las definiciones de la que ya platicamos en el capítulo 2, donde el estado utilizado es Ec.(1.54), y las frecuencias  $\omega_s, \omega_i$  se escriben en términos de la frecuencias centrales Ec.(1.55)  $\omega_s = \omega_{p0}/2 + \Omega$  y  $\omega_i = \omega_{p0}/2 - \Omega$ , al sustituir en la definición de  $\omega^-$

$$\omega^- = 2\Omega\tag{C.44}$$

Sustituyendo en la ecuación C.39

$$\begin{aligned} P_c &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega |f(\Omega) - f(-\Omega)e^{i2\Omega\tau}|^2 \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega [ |f(\Omega)|^2 + |f(-\Omega)|^2 - f(\Omega)f^*(-\Omega)e^{-i\Omega\tau} - c.c. ]. \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

Como la función  $f(\Omega)$  está normalizada, los dos primeros términos no nos interesan, solo nos concentramos en los dos finales:

$$P_c = \frac{1}{2} \left( |B|^2 - \text{Re} \left\{ \int d\Omega f(\Omega) f^*(-\Omega) \exp(-i2\Omega\tau) \right\} \right), \quad (\text{C.46})$$

donde la contante B contiene términos extra que salen de la integral sobre los primeros términos. sustituyendo la expresión Gaussiana de la ecuación (C.43), resolviendo solamente la integral de la que aparece en la ecuación (C.46):

$$\begin{aligned} \int d\Omega f(\Omega) f^*(-\Omega) \exp(-i\Omega\tau) &= |A|^2 \int d\Omega \exp \left[ - \left( \frac{4\Omega}{\sigma_a} \right)^2 \right] \exp(-i2\Omega\tau) \\ &= |A|^2 \frac{\sqrt{\pi}\sigma_a}{2} \exp \left( - \frac{\sigma_a^2}{16} \tau^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

Finalmente la probabilidad de coincidencias de HOM para una pareja de fotones generada con un bombeo mono-cromático es:

$$P_c = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \exp \left( - \frac{\sigma_a^2}{16} \tau^2 \right) \right\}. \quad (\text{C.48})$$

En esta ecuación podemos apreciar el ancho inverso con respecto al ancho de la función de amplitud conjunta  $\sigma_a$ , que en este caso llamaremos  $\sigma_\tau$  que es igual a

$$\sigma_\tau = \frac{8}{\sigma_a}. \quad (\text{C.49})$$

Esto implica que el ancho de la antidiagonal de la JSI es la que determinará el ancho del dip de HOM. También podemos ver los comportamientos límites cuando  $\tau \gg \sigma_\tau$ , la exponencial tiende a cero, y el valor de la probabilidad siempre es

$P_c = 1/2$ . Cuando al contrario,  $\tau \rightarrow 0$  la exponencial tiende a 1, por lo que la probabilidad de coincidencias de 2 fotones tiende a cero  $P_c \rightarrow 0$ . El comportamiento es el de un dip de ancho igual al tiempo de  $\sigma_\tau$  o igual al *tiempo de coherencia* del bi-fotón(Ver figuraC.5).

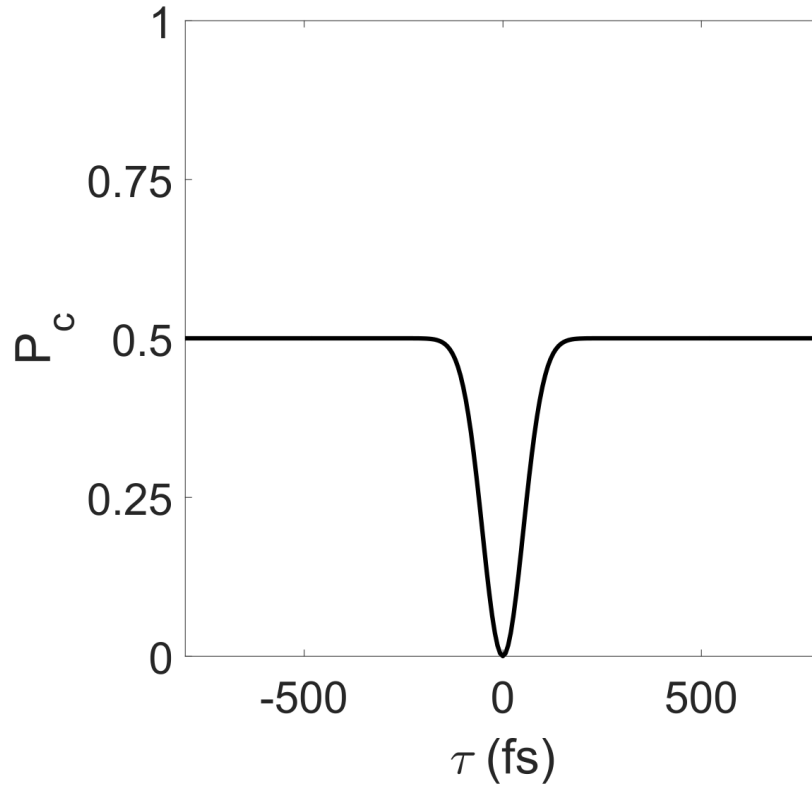


Figura C.5: Gráfica de la interferencia de HOM.

## V. Tiempo de Coherencia del Bi-fotón

El tiempo de coherencia esta definido clásicamente en términos de la función de correlación cruzada normalizada  $\gamma(\tau) = \Gamma(\tau)/\Gamma(0)$  donde

$$\Gamma(\tau) = \langle E_1(t)E_2(t + \tau) \rangle \quad (\text{C.50})$$

donde  $E_1$  y  $E_2$  son dos campos que en interferencia clásica pertenecen a un mismo campo E que es dividido en un BS por ejemplo en el interferómetro de Michelson.

El tiempo de coherencia de ese campo  $t_c$  es proporcional al tiempo en el cual la magnitud de la función  $\gamma$  a decaído  $1/e$  de su valor inicial. El tiempo de coherencia de una fuente nos dice por cuanto tiempo de separación entre los dos campos estos aún podrían interferir entre ellos. Se sabe que el ancho espectral  $\Delta\Omega$  de la fuente es inversamente proporcional al tiempo de coherencia  $t_c$ :

$$t_c \propto \frac{1}{\Delta\Omega} \quad (\text{C.51})$$

esto se debe a que el espectro de una fuente es igual a la transformada de Fourier del promedio temporal de la función de correlación cruzada de la fuente.

En el caso de la interferencia cuántica de HOM el tiempo de coherencia de la fuente  $t_c^{(\text{bombeo})}$ , es completamente independiente del tiempo de coherencia del campo de bombeo que genera la pareja de fotones  $\sigma_\tau$ , que como ya se mostró en el capítulo 2, la función de amplitud conjunta de la pareja de fotones se puede dividir en un producto separable de dos funciones  $f(\omega_s, \omega_i) = \alpha(\omega_s + \omega_i)\phi(\omega_s, \omega_i)$ , donde la función envolvente espectral tiene un ancho proporcional al espectro del láser de bombeo  $\alpha \propto \Delta\omega_p$ , mientras que la función de empataamiento de fases es proporcional al desentonamiento de los fotones  $\Phi \propto \sigma_a$ . El ancho de ésta función solo puede ser cambiado por las propiedades del cristal no lineal (como la longitud del cristal) y propiedades de acoplamiento a fibra óptica (como el cinturón de acoplamiento  $W_f$ ), y nunca por el ancho de banda del bombeo. En la figura (C.6) se muestra la dependencia del ancho de dip de HOM con respecto al ancho anti-diagonal de la JSA.

En la figura (C.7) se muestra que al cambiar en ancho de la diagonal en la JSA, o lo que es lo mismo a cambiar el espectro del láser de bombeo, el efecto en el dip de HOM es nulo. Esto nos garantiza poder trabajar con un láser continuo (CW) o con uno pulsado de femtosegundos (PW) sin tener que preocuparnos por la pérdida de resolución de nuestro interferograma <sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>claro, sólo en el caso en el que no se consideran efectos de dispersión en medios

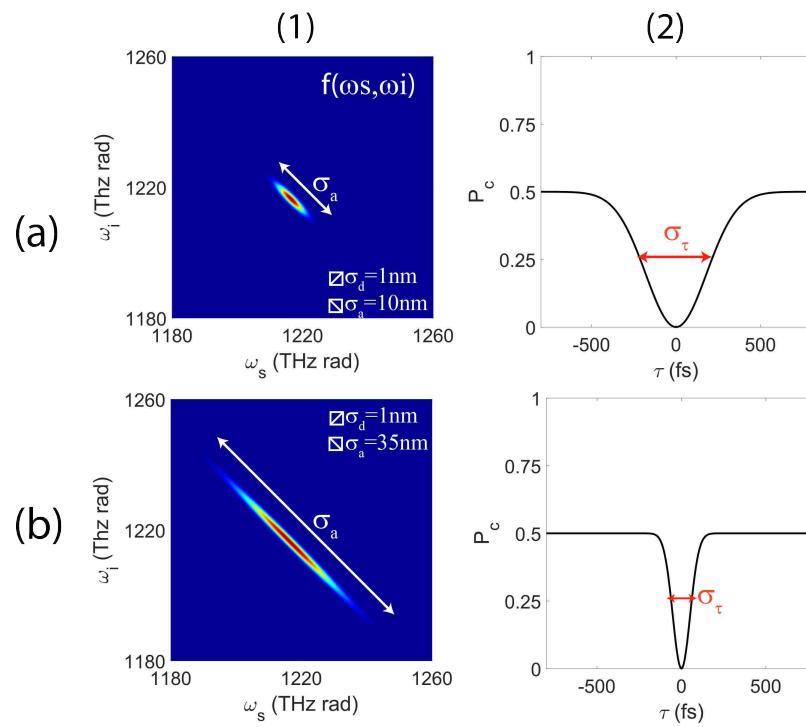


Figura C.6: Graficas de la dependencia del ancho anti-diagonal  $\sigma_a$  con el ancho  $\sigma_\tau$  del dip de HOM. El ancho de bombeo es mantenido constante  $\sigma_d = \sigma_p = 1 \text{ nm}$ . (a1) La JSA con  $\sigma_a = 10 \text{ nm}$ . (a2) El correspondiente dip de HOM. (b1) La JSA con  $\sigma_a = 35 \text{ nm}$ . (b2) El correspondiente dip de HOM.

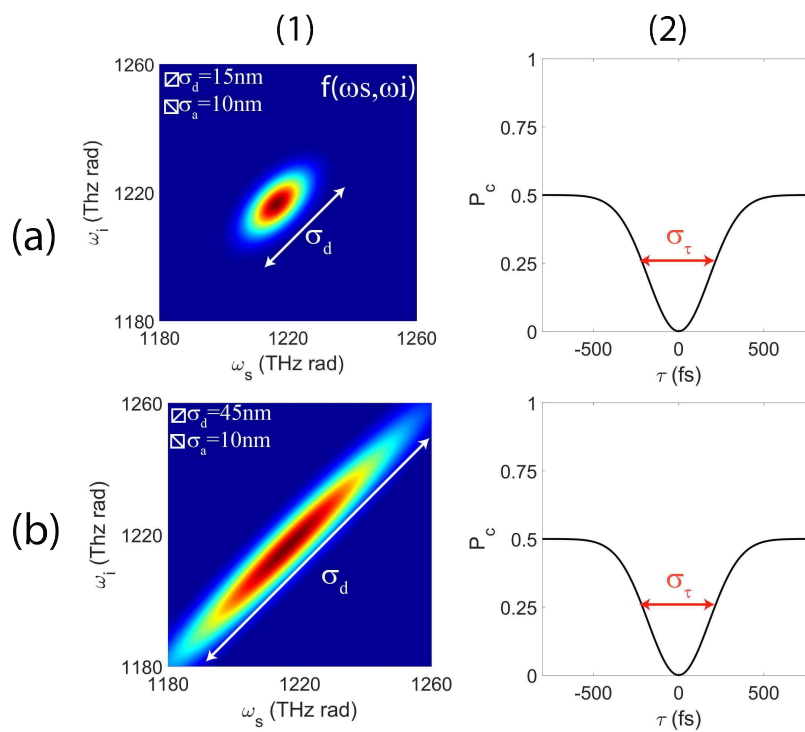


Figura C.7: Graficas de la dependencia del ancho diagonal  $\sigma_a$  con el ancho  $\sigma_\tau$  del dip de HOM. El ancho anti-diagonal es mantenido constante  $\sigma_a = 10 \text{ nm}$ . (a1) La JSA usando un ancho de bombeo  $\sigma_d = 15 \text{ nm}$ . (a2) El correspondiente dip de HOM. (b1) La JSA con un ancho de bombeo  $\sigma_d = 45 \text{ nm}$ . (b2) El correspondiente dip de HOM.

---

# D

## Detectores de fotones individuales

### I. Detectores de Fotones Individuales

El dispositivo más sensible capaz de detectar luz a nivel de fotones individuales es el detector de fotón individual (SPD por sus siglas en inglés). Actualmente existen múltiples tecnologías para la detección de luz al nivel de un solo fotón.

Los tipos de detectores de hoy en día se pueden clasificar en 4:

- Tubos Foto-multiplicadores
- Foto-diodos de Avalancha Semiconductores
- Detectores de Puntos Cuánticos Semiconductores
- Detectores Superconductores

En este trabajo utilizaremos Foto-diodos de Avalancha.

#### I.1. Foto-diodos de Avalancha Semiconductores

La idea de como opera un foto-diodo de avalancha (APD) es convertir el fotón incidente en una cascada de portadores de carga (parejas electrón-agujero) en un semiconductor. Este consiste de un foto-diodo con una alta polarización inversa (reverse bias), que hace a los portadores acelerarse, con la suficiente energía para excitar nuevos portadores en un proceso llamado *impacto ionizante*. Cuando un fotón llega,

este es absorbido y genera una pareja portadora. El electrón(agujero) es acelerado por el fuerte campo eléctrico en el semiconductor. Si la energía adquirida por el electrón antes de que este colisione con otro en el semi-conductor es suficiente para tener una energía cinética mayor que la brecha de energía  $E_g$ , este liberará otro electrón. Estos dos electrones seguirán ganando energía del mismo campo eléctrico, y colisionarán con otros electrones, y así sucesivamente...

Algunos valores típicos de longitudes de onda de operación son para APDs  $700nm < \lambda < 800nm$  para los detectores hechos de Silicio, y de  $1\mu m < \lambda < 1.7\mu m$  para aquellos detectores hechos de Ga, InGaAs, e InGaAsP. En este trabajo nos concentramos en la utilización de fotodiodos de avalancha de InGaAs para la detección de fotones en el infrarrojo.

### Detenido de Avalancha

Para alcanzar la resolución de fotón individual en el proceso de detección, un APD es usado para operar en modo Geiger, donde existe un exceso de voltaje de polarización  $V_E$  por encima del voltaje de ruptura. El problema con esta situación es que la amplificación, que es necesaria para que sea posible la detección de un fotón, se vuelve infinita, pero hay un límite donde la alta corriente obtenida podría destruir el dispositivo. Esto implica que debe de existir un circuito controlando el proceso de avalancha, para evitar el daño permanente del APD. Estos dispositivos son llamados *circuitos de enfriamiento* (*quenching circuits*), y estos vienen en varios esquemas, tales como circuitos de quenching pasivo, quenching activo y de gated quenching.

### Controlando el Desempeño

Básicamente hay dos parámetros que pueden controlarse externamente, llamados la temperatura  $T$ , y el exceso de voltaje de bias  $V_E$ .

**La eficiencia cuántica**  $\eta$ , depende en este caso de la probabilidad que tiene un fotón de ser absorbido en la capa semi-conductora (eficiencia de absorción), la probabilidad de que el portador generado por el fotón comience un proceso de avalancha (probabilidad de disparo) y en la eficiencia de acoplamiento óptico al dispositivo. Si  $V_E$  es incrementado, una eficiencia cuántica mayor que 10% podría ser alcanzada por



detectores InGaAs y alrededor de 70 % para los detectores de Silicio, pero a expensas del aumento de ruido.

Otro indicador de desempeño en un detector de fotones es la llamada **tasa de cuentas oscuras**. Todo fotodiodo de avalancha generará algunas avalanchas aún sin luz incidente; la tasa de cuentas oscuras se refiere al número de eventos aparentes de detección no atribuibles a fotones incidentes. En los fotodiodos de avalancha de silicio, las cuentas oscuras típicamente se encuentran en niveles de entre 100 y 1000 por segundo. Reducir la temperatura ayuda a reducir el nivel de cuentas oscuras.

Las cuentas oscuras son una fuente de error usual de los detectores, que en el caso de los APDs generalmente surgen por las avalanchas residuales de detecciones previas (este efecto es llamado *afterpulsing*). Estos pulsos retrasados pueden ocurrir cerca de un tiempo de  $\mu s$  después de que el pulso original fue creado. La probabilidad de tener *afterpulsing* incrementa cuando el flujo de cargas por el semi-conductor aumenta. Cuando T disminuye este flujo se incrementa de manera exponencial.

Por lo tanto debe de existir un sistema de control optimizado diseñado para cada dispositivo.

### Modos de Operación

Los detectores SPDs pueden trabajar en 2 modos:

- Gated (id201)
- Free-running(id230)

Free-running es importante en ciertas aplicaciones, particularmente cuándo los fotones llegan de manera aleatoria, más que sincronizados con un reloj. Este es el caso de SPDC con un haz de bombeo continuo (CW).

## II. Detector id201-Modo Disparado

En este trabajo se utilizaron dos tipos de detectores de fotones individuales en el régimen de infrarrojo cercano de la marca id-Quantique construidos a base de InGaAs/InP. el primero fue un id-201, que opera en el llamado modo Gated, en el

que una señal periódica tiene que abrir compuertas de detección con una frecuencia no mayor a  $8MHz$ .

A continuación se probó el desempeño utilizando un láser pulsado MIRA800 de Titanio Zafiro a  $775\text{ nm}$ , que operaba en el régimen de pico-segundos con una frecuencia de repetición  $f_R = 76MHz$ . Este láser se utilizó para bombear sobre un cristal de PPLN para producir parejas de fotones degenerados en  $1550\text{ nm}$ , luego estos fotones son acoplados a fibras y dirigidos a dos detectores id201. Se abren compuertas de detección de  $50\text{ ns}$  en los APDs, y se maneja una probabilidad del  $10\%$  constante además de un tiempo muerto de  $10\ \mu s$ . Estas compuertas son disparadas por una señal proveniente del láser, detectada con un foto-diodo rápido de avalancha y por medio de un prescaler se disminuye la frecuencia a  $3\text{ MHz}$  antes de disparar los detectores. Se miden las cuentas de los APDs en relación a la referencia de los pulsos del láser. En la figura D.1 se muestran las cuentas individuales acumuladas en 60 segundos. En el inciso (a) se muestran las cuentas del brazo 1, en (b) Cuentas del brazo 2 y en (c) la relación señal/ruido del APD1, también se puede observar el tiempo de jitter de las distribución fue de  $378\text{ pico-segundos}$ .

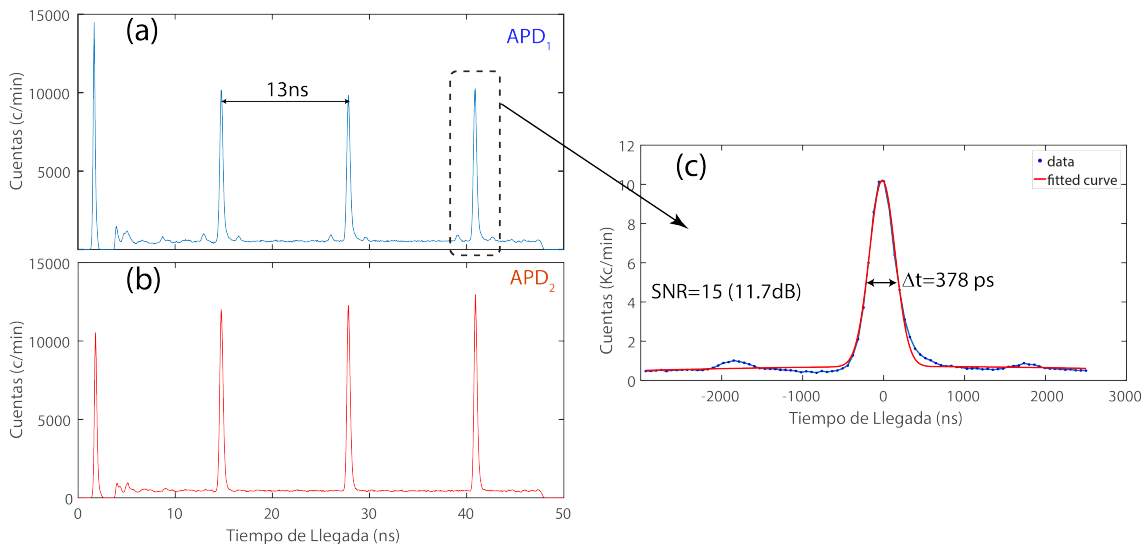


Figura D.1: Cuentas individuales de dos APDs id201.

Utilizando un etiquetador de tiempos digital se miden las cuentas en coincidencias entre ambos detectores. En la figura D.2 se muestran las cuentas en coincidencias. En el inciso (a) se muestran diferencias de tiempos entre las detecciones del APD1

y el APD2, se puede apreciar que con una frecuencia de compuerta de 3 MHz la separación entre cada compuerta es de 333 ns, y cada vez que se abra una compuerta de 50 ns, está convolucionará con otra compuerta de 50 ns del otro detector, por lo que al final formará una distribución del doble de tiempo (100 ns). En el inciso (b) se hace un acercamiento en una ventana de 100 ns, y se distingue una base de ruido inherente a la convolución entre las ventanas de detección, y sobre esta base de ruido triangular se distinguen picos cada 13 ns (corresponden a la frecuencia óptica de 76 MHz). En el último inciso (c) se muestra la relación de señal a ruido que fue de 12 dB, corresponden a tener 16 veces más señal que ruido, y el tiempo de jitter fue de 578 ps, claro que el verdadero jitter tendría que ser la mitad de esto.

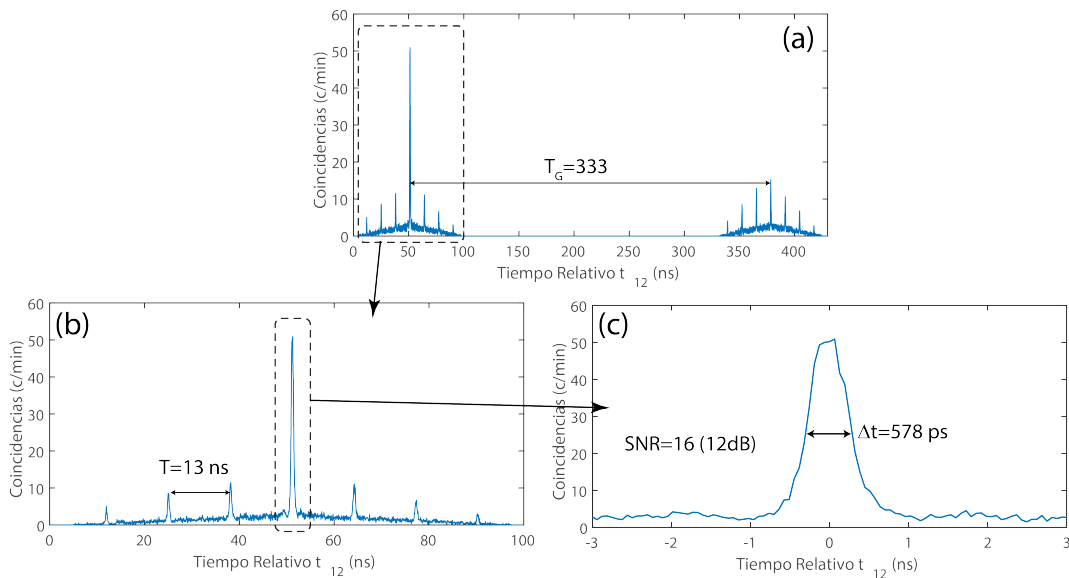


Figura D.2: Cuentas en coincidencia de dos APDs id201.

### III. Detector id230-Modo Libre

A continuación repetimos el mismo procedimiento que en la sección anterior pero esta vez utilizando nuestros detectores más recientes hasta el momento, dos APDs id230 que operan a una temperatura de  $-90$  °C y con un tiempo muerto del 10  $\mu s$  y una probabilidad de cuántica del 15%. Estos detectores ya no requieren ser disparados por ninguna frecuencia de reloj ya que su funcionamiento es similar a

los foto-detectores de silicio (operan en el llamado free-running). En la figura D.3 se muestran las cuentas individuales del APD1 y APD2 (inciso a y b), y en el inciso (c) se muestra una relación señal a ruido mucho más alta que para los detectores anteriores, alcanzando 26.4 dB (435 más señal que ruido).

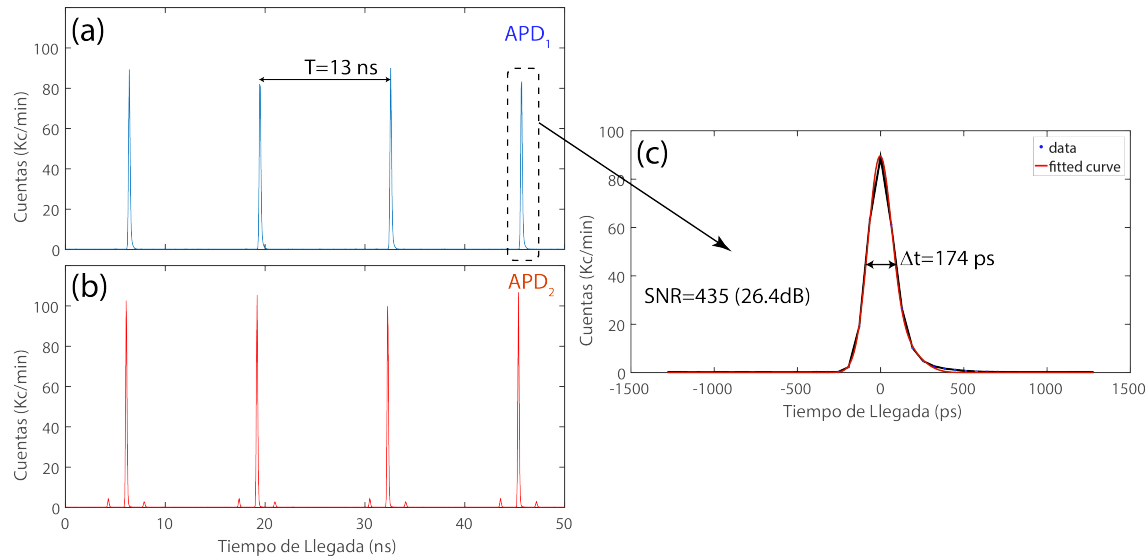


Figura D.3: Cuentas individuales de dos APDs id230.

Finalmente mostramos las cuentas en coincidencias entre estos dos detectores. En la figura D.4(a) se muestra que estos detectores alcanzan a observar todos los pulsos ópticos con muy buena razón de cuentas de coincidencias, ni siquiera se logra observar la base de ruido. En el inciso (b) se muestra un acercamiento en una ventana de 100 ns, y se logran encontrar las convolución de antes, y en (c) se logra medir una relación señal a ruido de 28.8 dB (758 veces más señal que ruido). Y no suficiente con esto, se logra medir un tiempo convolución de jitter de 189 ps, lo que en realidad equivale a decir que el jitter de estos detectores es tan bajo como de 94.5 ps. Esta será nuestra máxima resolución temporal a la hora de medir nuestras distribuciones.

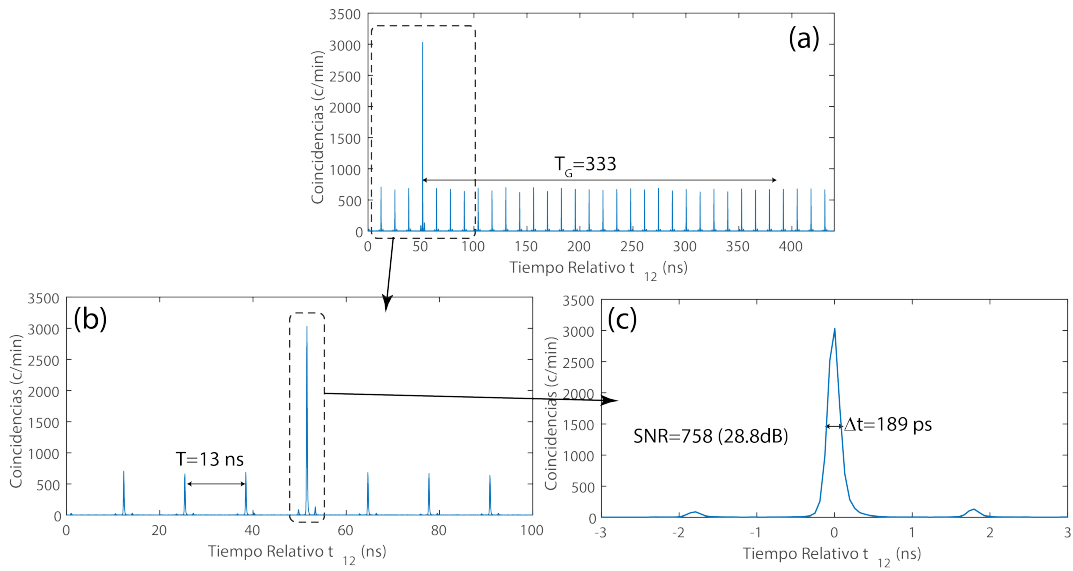


Figura D.4: Cuentas en coincidencia de dos APDs id230.



---

**Parte IV**  
**Bibliografía**





---

## Bibliografía

- [1] Pablo Yepiz Graciano, Alí Michel Angulo Martínez, Dorilian Lopez-Mago, Gustavo Castro-Olvera, Martha Rosete-Aguilar, Jesús Garduño-Mejía, Roberto Ramírez Alarcón, Héctor Cruz Ramírez, and Alfred B. U'Ren. Interference effects in quantum-optical coherence tomography using spectrally engineered photon pairs. *Scientific Reports*, 9:8954, 2019.
- [2] Douglas Magde and Herbert Mahr. Study in ammonium dihydrogen phosphate of spontaneous parametric interaction tunable from 4400 to 16 000 Å. *Phys. Rev. Lett.*, 18:905–907, May 1967. doi: 10.1103/PhysRevLett.18.905. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.18.905>.
- [3] R. L. Byer and S. E. Harris. Power and bandwidth of spontaneous parametric emission. *Phys. Rev.*, 168:1064–1068, Apr 1968. doi: 10.1103/PhysRev.168.1064. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.168.1064>.
- [4] David C. Burnham and Donald L. Weinberg. Observation of simultaneity in parametric production of optical photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, 25:84–87, Jul 1970. doi: 10.1103/PhysRevLett.25.84. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.25.84>.
- [5] S. Friberg, C. K. Hong, and L. Mandel. Measurement of time delays in the parametric production of photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, 54:2011–2013, May 1985. doi: 10.1103/PhysRevLett.54.2011. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.54.2011>.
- [6] I. Abram, R. K. Raj, J. L. Oudar, and G. Dolique. Direct observation of the second-order coherence of parametrically generated light. *Phys. Rev. Lett.*, 57:

- 2516–2519, Nov 1986. doi: 10.1103/PhysRevLett.57.2516. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.57.2516>.
- [7] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel. Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference. *Phys. Rev. Lett.*, 59:2044–2046, Nov 1987. doi: 10.1103/PhysRevLett.59.2044. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.59.2044>.
- [8] Z. Y. Ou and L. Mandel. Violation of bell’s inequality and classical probability in a two-photon correlation experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 61:50–53, Jul 1988. doi: 10.1103/PhysRevLett.61.50. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.61.50>.
- [9] Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gérard Roger. Experimental realization of einstein-podolsky-rosen-bohm gedankenexperiment: A new violation of bell’s inequalities. *Phys. Rev. Lett.*, 49:91–94, Jul 1982. doi: 10.1103/PhysRevLett.49.91. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.49.91>.
- [10] Yoon-Ho Kim, Sergei P. Kulik, and Yanhua Shih. Quantum teleportation of a polarization state with a complete bell state measurement. *Phys. Rev. Lett.*, 86:1370–1373, Feb 2001. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.1370. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.86.1370>.
- [11] Artur K. Ekert, John G. Rarity, Paul R. Tapster, and G. Massimo Palma. Practical quantum cryptography based on two-photon interferometry. *Phys. Rev. Lett.*, 69:1293–1295, Aug 1992. doi: 10.1103/PhysRevLett.69.1293. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.69.1293>.
- [12] Vittorio Giovannetti, Seth Lloyd, and Lorenzo Maccone. Quantum-enhanced positioning and clock synchronization. *Nature*, 412:417–419, 2001.
- [13] M. Hendrych, M. Micuda, and J. P. Torres. Tunable control of the frequency correlations of entangled photons. *Opt. Lett.*, 32(16):2339–2341, Aug 2007. doi: 10.1364/OL.32.002339. URL <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-32-16-2339>.

- [14] Thomas Gerrits, Martin J. Stevens, Burm Baek, Brice Calkins, Adriana Lita, Scott Glancy, Emanuel Knill, Sae Woo Nam, Richard P. Mirin, Robert H. Hadfield, Ryan S. Bennink, Warren P. Grice, Sander Dorenbos, Tony Zijlstra, Teun Klapwijk, and Val Zwiller. Generation of degenerate, factorizable, pulsed squeezed light at telecom wavelengths. *Opt. Express*, 19:24434–24447, 2011.
- [15] Andreas Eckstein, Andreas Christ, Peter J. Mosley, and Christine Silberhorn. Highly efficient single-pass source of pulsed single-mode twin beams of light. *Phys. Rev. Lett.*, 106:013603, Jan 2011. doi: 10.1103/PhysRevLett.106.013603. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.013603>.
- [16] Thomas Lutz, Piotr Kolenderski, and Thomas Jennewein. Demonstration of spectral correlation control in a source of polarization entangled photon pairs at telecom wavelength. *Optics Letter*, 39:1481–1484, 2014.
- [17] Clara I Osorio, Alejandra Valencia, and Juan P Torres. Spatiotemporal correlations in entangled photons generated by spontaneous parametric down conversion. *New Journal of Physics*, 10(11):113012, 2008. URL <http://stacks.iop.org/1367-2630/10/i=11/a=113012>.
- [18] Nicola Montaut, Omar S. Magaña Loaiza, Tim J. Bartley, Varun B. Verma, Sae Woo Nam, Richard P. Mirin, Christine Silberhorn, and Thomas Gerrits. Compressive characterization of telecom photon pairs in the spatial and spectral degrees of freedom. *Optica*, 5(11):1418–1423, Nov 2018. doi: 10.1364/OPTICA.5.001418. URL <http://www.osapublishing.org/optica/abstract.cfm?URI=optica-5-11-1418>.
- [19] Verónica Vicuña Hernández. *EFFECTOS DE LA NO PARAXIALIDAD Y LA LONGITUD DEL CRISTAL EN EL PROCESO DE CONVERSIÓN PARAMÉTRICA DESCENDENTE*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, México, D.F., 2017.
- [20] Andrzej Dragan. Efficient fiber coupling of down-conversion photon pairs. *Phys. Rev. A*, 70:053814, 2004.

- 
- [21] Tae-Gon, Heonoh Kim, Chun Ju Youn, Seok-Beom Cho, Jongcheol Hong, and Taehyoung Zyung. Noncollinear correlated photon pair source in the 1550 nm telecommunication band. *Optics Express*, 14:2805–2810, 2006.
- [22] N. Bruno, A. Martin and T.Guerreiro, B. Sanguinetti, and R.T. Thew. Pulsed source of spectrally uncorrelated and indistinguishable photons at telecom wavelengths. *Optics Express*, 22:17246–17253, 2014.
- [23] W. P. Grice, A.B. U'Ren, and I. A. Walmsley. Eliminating frequency and space-time correlations in multiphoton states. *Physics Review A*, 64 063815:1–7, 2001.
- [24] A. B. U'Ren, C. Silberhorn, K. Banaszek, I. A. Walmsley, R. Erdmann, W. P. Grice, and M.G. Raymer. Generation of pure-state single-photon wavepackets by conditional preparation based on spontaneous parametric downconversion. *Laser Physics*, 15:146–161, 2005.
- [25] Malte Avenhaus, Andreas Eckstein, Peter J. Mosley, and Christine Silberhorn. Fiber-assisted single-photon spectrograph. *Optics Letter*, 34:1873–1875, 2009.
- [26] Carlos Wiechers, Roberto Ramírez-Alarcón, Oscar R. Muñiz Sánchez, Pablo Daniel Yépez, Alejandro Arredondo-Santos, Jorge G. Hirsch, and Alfred B. U'Ren. Systematic afterpulsing-estimation algorithms for gated avalanche photodiodes. *Appl. Opt.*, 55(26):7252–7264, Sep 2016. doi: 10.1364/AO.55.007252. URL <http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-55-26-7252>.
- [27] J. G. Fujimoto, S. De Silvestri, E. P. Ippen, C. A. Puliafito, R. Margolis, and A. Oseroff. Femtosecond optical ranging in biological systems. *Opt. Lett.*, 11(3):150–152, Mar 1986. doi: 10.1364/OL.11.000150. URL <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-11-3-150>.
- [28] A. F. Fercher, K. Mengedoht, and W. Werner. Eye-length measurement by interferometry with partially coherent light. *Opt. Lett.*, 13(3):186–188, Mar 1988. doi: 10.1364/OL.13.000186. URL <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-13-3-186>.

- [29] D Huang, EA Swanson, CP Lin, JS Schuman, WG Stinson, W Chang, MR Hee, T Flotte, K Gregory, CA Puliafito, and al. et. Optical coherence tomography. *Science*, 254(5035):1178–1181, 1991. ISSN 0036-8075. doi: 10.1126/science.1957169. URL <https://science.sciencemag.org/content/254/5035/1178>.
- [30] S. R. Chinn, E. A. Swanson, and J. G. Fujimoto. Optical coherence tomography using a frequency-tunable optical source. *Opt. Lett.*, 22(5):340–342, Mar 1997. doi: 10.1364/OL.22.000340. URL <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-22-5-340>.
- [31] R. Leitgeb, M. Wojtkowski, A. Kowalczyk, C. K. Hitzenberger, M. Sticker, and A. F. Fercher. Spectral measurement of absorption by spectroscopic frequency-domain optical coherence tomography. *Opt. Lett.*, 25(11):820–822, Jun 2000. doi: 10.1364/OL.25.000820. URL <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-25-11-820>.
- [32] U. Morgner, W. Drexler, F. X. Kärtner, X. D. Li, C. Pitris, E. P. Ippen, and J. G. Fujimoto. Spectroscopic optical coherence tomography. *Opt. Lett.*, 25(2):111–113, Jan 2000. doi: 10.1364/OL.25.000111. URL <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-25-2-111>.
- [33] Ayman F. Abouraddy, Magued B. Nasr, Bahaa E. A. Saleh, Alexander V. Sergienko, and Malvin C. Teich. Quantum-optical coherence tomography with dispersion cancellation. *Phys. Rev. A*, 65:053817, May 2002. doi: 10.1103/PhysRevA.65.053817. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.65.053817>.
- [34] Magued B. Nasr, Bahaa E. A. Saleh, Alexander V. Sergienko, and Malvin C. Teich. Demonstration of dispersion-canceled quantum-optical coherence tomography. *Phys. Rev. Lett.*, 91:083601, Aug 2003. doi: 10.1103/PhysRevLett.91.083601. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.91.083601>.
- [35] Magued Boshra Nasr. *Quantum optical coherence tomography*. PhD thesis, Boston University, Jan 2005.

- [36] Mark C. Booth, Bahaa E.A. Saleh, and Malvin Carl Teich. Polarization-sensitive quantum optical coherence tomography: Experiment. *Optics Communications*, 284(10):2542 – 2549, 2011. ISSN 0030-4018. doi: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2011.01.065>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401811001027>.
- [37] Silvia Carrasco, Juan P. Torres, Lluís Torner, Alexander Sergienko, Bahaa E. A. Saleh, and Malvin C. Teich. Enhancing the axial resolution of quantum optical coherence tomography by chirped quasi-phase matching. *Opt. Lett.*, 29(20):2429–2431, Oct 2004. doi: 10.1364/OL.29.002429. URL <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-29-20-2429>.
- [38] J. Lavoie, R. Kaltenbaek, and K. J. Resch. Quantum-optical coherence tomography with classical light. *Opt. Express*, 17(5):3818–3826, Mar 2009. doi: 10.1364/OE.17.003818. URL <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-17-5-3818>.
- [39] R. Kaltenbaek, J. Lavoie, Biggerstaff, D. N., and Resch K. J. Quantum-inspired interferometry with chirped laser pulses. *Nature Physics*, 4:864, 2008.
- [40] Magued B. Nasr, Darryl P. Goode, Nam Nguyen, Guoxin Rong, Linglu Yang, Björn M. Reinhard, Bahaa E.A. Saleh, and Malvin C. Teich. Quantum optical coherence tomography of a biological sample. *Optics Communications*, 282(6):1154 – 1159, 2009. ISSN 0030-4018. doi: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2008.11.061>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S003040180801153X>.
- [41] Dorilian Lopez-Mago and Lukas Novotny. Quantum-optical coherence tomography with collinear entangled photons. *Opt. Lett.*, 37(19):4077–4079, Oct 2012. doi: 10.1364/OL.37.004077. URL <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-37-19-4077>.
- [42] M. Okano, R. Okamoto, A. Tanaka, S. Ishida, N. Nishizawa, and S. Takeuchi. High-resolution quantum optical coherence tomography by broadband parametric fluorescence. In *2013 Conference on Lasers and Electro-Optics Pacific Rim (CLEOPR)*, pages 1–2, June 2013. doi: 10.1109/CLEOPR.2013.6600600.

- [43] Masayuki Okano, Hwan Hong Lim, Ryo Okamoto, Norihiko Nishizawa, Sunao Kurimura, and Shigeki Takeuchi. 0.54  $\mu\text{m}$  resolution two-photon interference with dispersion cancellation for quantum optical coherence tomography. *Scientific Reports*, 5:18042, 2016.
- [44] Dorilian Lopez-Mago, Arturo Burguete, and Ernesto Campos. Quantum optical coherence tomography using three time-energy entangled photons. 9980, 2016. doi: 10.1117/12.2237712. URL <https://doi.org/10.1117/12.2237712>.
- [45] T. B. Pittman, D. V. Strekalov, A. Migdall, M. H. Rubin, A. V. Sergienko, and Y. H. Shih. Can two-photon interference be considered the interference of two photons? *Phys. Rev. Lett.*, 77:1917–1920, Sep 1996. doi: 10.1103/PhysRevLett.77.1917. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.77.1917>.
- [46] Héctor Cruz Ramírez. *ACONDICIONAMIENTO DEL ENREDAMIENTO ESPACIAL EN PAREJAS DE FOTONES PRODUCIDAS POR CONVERSIÓN PARAMÉTRICA DESCENDENTE*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, México, D.F., 2014.
- [47] S. Friberg, C. K. Hong, and L. Mandel. Measurement of time delays in the parametric production of photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, 54:2011–2013, May 1985. doi: 10.1103/PhysRevLett.54.2011. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.54.2011>.
- [48] C. K. Hong and L. Mandel. Theory of parametric frequency down conversion of light. *Phys. Rev. A*, 31:2409–2418, Apr 1985. doi: 10.1103/PhysRevA.31.2409. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.31.2409>.
- [49] Z.Y. Ou, C.K. Hong, and L. Mandel. Relation between input and output states for a beam splitter. *Optics Communications*, 63(2):118 – 122, 1987. ISSN 0030-4018. doi: [https://doi.org/10.1016/0030-4018\(87\)90271-9](https://doi.org/10.1016/0030-4018(87)90271-9). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0030401887902719>.