



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y  
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

DESCOMPOSICIÓN DE HEEGAARD CIRCULAR  
PARA EL EXTERIOR DE UN NUDO

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRA EN CIENCIAS

PRESENTA:  
DANIELA CORTÉS RODRÍGUEZ

DIRECTOR  
DRA. FABIOLA MANJARREZ GUTIÉRREZ  
UCIM

CIUDAD DE MÉXICO (4 DE MARZO) 2020.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1 Nudos . . . . .	4
1.2 Funciones de Morse . . . . .	5
<b>2 Descomposiciones de Heegaard</b>	<b>9</b>
2.1 Con funciones de Morse . . . . .	13
2.2 Discos y anillos producto. . . . .	15
2.3 Estabilización y descomposiciones irreducibles . . . . .	17
2.4 Distancia de una descomposición de Heegaard . . . . .	21
2.4.1 Complejo de arcos y curvas de una superficie . . . . .	23
<b>3 Exterior de un Nudo</b>	<b>25</b>
3.1 Descomposición en asas de $E(K)$ . . . . .	26
3.2 Posición circular delgada para nudos . . . . .	28
3.3 Superficies en cuerpos de compresión . . . . .	32
<b>4 Distancia Circular</b>	<b>39</b>
4.1 Mayor acercamiento a la distancia de Hempel. . . . .	42
4.2 Cota para la distancia circular. . . . .	43
4.3 Con superficies de Seifert . . . . .	46
4.4 Reducibilidad de una descomposición de Heegaard circular. . . . .	49
<b>Índice alfabético</b>	<b>51</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>55</b>



# Índice de figuras

1.1. Cubriente universal cíclico infinito de $E(K)$ . . . . .	5
1.2. Función de Morse en el toro de dimensión 2. . . . .	7
2.1. Asas de dimensión 3. . . . .	9
2.2. Descomposición en asas de $S^3$ de género 1. . . . .	10
2.3. Descomposición en asas de $T^3$ . . . . .	10
2.4. Construcción 1 . . . . .	11
2.5. Dualidad entre las dos formas de construir un cuerpo de compresión. . . . .	12
2.6. Esquema de una descomposición de Heegaard. . . . .	13
2.7. Puntos críticos de una función de Morse en una 3-variedad . . . . .	14
2.8. Vecindad regular de $D_1 \cup \partial D_2$ . . . . .	18
2.9. Esquema de una descomposición de Heegaard generalizada . . . . .	21
3.1. Cuerpo de compresión. . . . .	25
3.2. $\partial^*$ -compresión. . . . .	32
3.3. Disco producto. . . . .	33
3.4. $\beta$ une puntos de la misma componente. . . . .	36
3.5. $\beta$ une componentes distintas. . . . .	37
4.1. Descomposición admisible. . . . .	39
4.2. Compresión alterna para obtener un único anillo producto. . . . .	45
4.3. $G_m \cap B$ es un único anillo. . . . .	48
4.4. Anillo $\mathcal{A}$ en $B$ . . . . .	48
4.5. Descomposiciones reducibles. . . . .	50
4.6. Descomposiciones con distancia circular 1. . . . .	51



# Introducción

En 1898 Heegaard encontró una forma simple de construir 3-variedades cerradas. Comenzamos con una 3-bola y le pegamos una asa a su frontera (como la de una taza europea de té), dependiendo de la forma en la que pegamos dicha asa, orientable o no, el resultado es un toro sólido o una botella de Klein sólida, respectivamente. Al resultado de pegar  $g$  asas a una bola sólida se le conoce como un cubo con asas de género  $g$ . Supongamos ahora que tenemos dos cubos con asas del mismo género y con la misma orientación,  $H_1$  y  $H_2$ , entonces  $\partial H_1$  y  $\partial H_2$  son superficies homeomorfas. Al identificar ambas fronteras por un homeomorfismo, el cual puede ser muy complicado, obtenemos una 3-variedad cerrada.

Un hecho importante es que toda 3-variedad cerrada admite una descomposición en cubos con asas. La siguiente pregunta que surge es: ¿qué pasa con las 3-variedades compactas y con frontera no vacía? En [2], Casson y Gordon generalizan este resultado para 3-variedades orientables y compactas con frontera no vacía, usando el concepto de cuerpo de compresión. De esta forma, una descomposición de Heegaard de una 3-variedad  $M$  es una tripleta  $(H_1, H_2; S)$ , con  $H_1$  y  $H_2$  cuerpos de compresión que se pegan a lo largo de una superficie  $S$ , a la cual llamaremos superficie de Heegaard, para obtener  $M$ .

Es evidente que la superficie de Heegaard juega un papel importante en una descomposición de Heegaard. En el 2001, Hempel [6] definió una forma de medir la incompresibilidad de  $S$  en cada uno de los cuerpos de compresión, denominada la distancia de una descomposición de Heegaard,  $d(S)$ . Posteriormente, Hartshorn [5] usó una superficie cerrada propiamente encajada en  $M$  de género  $g$  para acotar a  $d(S)$ .

**Teorema** (Hartshorn). *Si  $M$  es una 3-variedad irreducible que contiene una superficie orientable e incompresible de género  $g \geq 1$ , entonces cualquier descomposición de Heegaard de  $M$  tiene distancia a lo mas  $2g$ .*

Si ahora nos fijamos en una descomposición de Heegaard del exterior de un nudo, partimos a  $E(K)$  en dos cuerpos de compresión, uno de los cuales es un cubo con asas. Estamos interesados en descomponer a  $E(K)$  de tal forma que los cuerpos de compresión se peguen a lo largo de superficies de Seifert, por lo que necesitamos abstraer nuevamente el concepto de cuerpo de compresión; haciendo esto llegamos a las descomposiciones de Heegaard circulares para  $E(K)$ .

El objetivo principal de esta tesis es el de presentar el concepto de distancia circular (análoga a la de Hempel) de una descomposición de Heegaard circular para el exterior de un nudo y dar una cota (como Hartshorn) para tal distancia. La forma en que esta se define varía un poco de la definición dada por Kevin Lamb y Patrick Weed en [12]. Además, la cota que se obtiene difiere en una unidad de la que se encuentra en dicho artículo.

**Teorema 4.9.** *Si  $E(K)$  contiene una superficie cerrada, esencial y orientable  $G$  de género  $g$  y  $(F, S)$  es una descomposición de Heegaard circular de  $E(K)$ , entonces  $cd(F, S) \leq 2g + 1$ .*

Si además,  $F$  es una superficie incompresible y  $G$  una superficie de Seifert, se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 4.16.** *Sea  $K$  un nudo cuyo exterior admite una descomposición de Heegaard circular  $(F, S)$  con  $F$  incompresible. Si  $G$  es una superficie de Seifert incompresible para  $K$  con género  $g$ , disjunta de  $F$  y no isotópica a  $F$ , entonces  $d(S) \leq 2g + 1$ .*

El Capítulo 1 está dedicado únicamente a nociones básicas de 3-variedades, superficies, nudos y funciones de Morse; dichas nociones serán aplicadas a lo largo de los otros capítulos.

El Capítulo 2 estará destinado a descomposiciones de Heegaard, para esto se usan dos puntos de vista: discreto (con triangulaciones) y suave (con funciones de Morse). Se prueba que toda 3-variedad compacta tiene una descomposición de Heegaard. Se habla de estabilización, reducibilidad y distancia de una descomposición de Heegaard y se dan algunos resultados que relacionan estos conceptos.

Lo primero que se hace en el Capítulo 3 es generalizar la definición de cuerpo de compresión, esto para dar una descomposición de Heegaard circular al exterior de un nudo, introducida por Fabiola Manjarrez en [13]. Se define posición delgada circular para nudos y se estudia uno de los resultados obtenidos por Manjarrez. Además, se habla del proceso de realizar una  $\partial^*$ -compresión a una superficie en  $E(K)$  y se analiza como esto afecta a dicha superficie en cada uno de los cuerpos de compresión.

Finalmente, se introduce el concepto de distancia circular para el exterior de un nudo en la primera sección del Capítulo 4. Aunque la definición que se presenta varía un poco de la que se encuentra en [12], la demostración del resultado principal, encontrar una cota para la distancia circular, es idéntica a la que se encuentra en dicho artículo. En la última sección, *Reducibilidad de una descomposición de Heegaard circular*, se usa distancia circular para introducir conceptos análogos para descomposiciones reducibles, débilmente reducibles y fuertemente irreducibles <sup>1</sup>. Se proponen seis preguntas, a una de las cuales se da respuesta.

---

<sup>1</sup>Estos conceptos están definidos en el artículo de Lamb y Weed

# 1 Preliminares

Una  $n$ -variedad topológica o  $n$ -variedad  $M$  es un espacio topológico Hausdorff, segundo numerable tal que cada punto de  $M$  tiene una vecindad homeomorfa a  $\mathbb{R}^n$  o bien a  $\mathbb{R}_+^n$ , a esta ultima propiedad se le denomina ser *localmente euclidiano*.

La *frontera* de  $M$ , denotada por  $\partial M$ , es el conjunto de puntos de  $M$  solo tienen una vecindad homeomorfa a  $\mathbb{R}_+^n$ . El *interior* de  $M$  es  $\text{int}M = M - \partial M$ . Si  $M$  es compacta y  $\partial M = \emptyset$  decimos que  $M$  es *cerrada*. La dimensión de una  $n$ -variedad es  $n$ . Dos variedades son *equivalentes* si son homeomorfas. Una subvariedad  $N$  está propiamente encajada en  $M$  si  $N \cap \partial M = \partial N$ .

**Definición 1.1.** Sea  $M$  una 3-variedad compacta, conexa y orientable.

- $M$  es *reducible* si existe una 2-esfera en  $M$  que no es frontera de una 3-bola en  $M$ , nos referiremos a tal esfera por *esfera reductora*. En caso contrario diremos que  $M$  es *irreducible*.
- $M$  es  $\partial$ -*reducible* si existe un disco propiamente encajado en  $M$  cuya frontera es esencial en  $\partial M$ , llamaremos *disco  $\partial$ -reductor* a tal disco.

Llamaremos *superficie* a toda 2-variedad compacta. Una 1-variedad compacta y conexa se llamará *curva* si no tiene frontera y *arco* en caso contrario.

Una curva en una superficie  $S$  es *esencial* si no es frontera de un disco en  $S$  y no es isotópica a una componente de  $\partial S$ . Un arco  $\alpha$  propiamente encajado en una superficie  $S$  es *esencial* si no existe un arco  $\beta \subset \partial S$  tal que  $\alpha \cup \beta$  sea frontera de un disco en  $S$ .

Sea  $X$  un conjunto de curvas simples cerradas disjuntas encajadas en una superficie  $S$ . Si  $\lambda \in X$  es una curva que es frontera de un disco  $D \subset S$  tal que  $D \cap X = \lambda$ , decimos que  $\lambda$  es una *curva de más adentro* y  $D$  es un disco de más adentro.

Si ahora  $X$  denota un conjunto de arcos disjuntos propiamente encajados en una superficie  $S$ , diremos que  $\alpha \in X$  es un *arco de más afuera* si es un arco separante que corta un disco  $D' \subset S$  tal que  $D' \cap X = \alpha$  y  $\partial D' = \alpha \cup \beta$ , donde  $\beta \subset \partial S$ .

**Definición 1.2.** Una superficie  $S$  propiamente encajada en una 3-variedad  $M$  es *compresible* si se satisface una de las siguientes:

1.  $S$  es una 2-esfera y es frontera de una 3-bola en  $M$ .
2.  $S$  es un disco en  $\partial M$
3.  $S$  es un disco propiamente encajado en  $M$  y existe una 3-bola en  $M$  cuya frontera está contenida en  $S \cup \partial M$ .
4.  $S$  no es una 2-esfera o un disco, y existe un disco  $D \subset M$  tal que  $D \cap S = \partial D$  y  $\partial D$  es una curva esencial en  $S$ . El disco  $D$  es llamado *disco de compresión* para  $S$ .

Una superficie que no es compresible en  $M$  se llama *incompresible*.

## 1 Preliminares

**Definición 1.3.** Una superficie  $S$  propiamente encajada en una 3-variedad  $M$ , con  $\partial S \neq \emptyset$ , es  $\partial$ -compresible, si existe un disco  $D \subset M$  tal que  $\partial D = \alpha \cup \beta$ , donde  $\alpha$  es un arco esencial en  $S$  y un  $\beta$  un arco en  $\partial M$  y  $D \cap S = \alpha$ .  $D$  se llama disco de  $\partial$ -compresión. Si  $S$  no es  $\partial$ -compresible, decimos que es  $\partial$ -incompresible.

Sea  $S \subset M$  una superficie orientable encajada en una 3-variedad  $M$ , si  $S$  es compresible y  $D$  es un disco de compresión, se define el proceso de compresión como sigue: Sea  $\eta(D)$  una vecindad de  $D$  en  $M$  tal que  $\eta(D) \cap S$  es vecindad de  $\partial D$  en  $S$ . Tomemos  $\hat{S} = S \setminus \eta(D)$ . La superficie  $\hat{S}$  tiene dos componentes nuevas en su frontera, las cuales tapamos con dos copias de  $D$ . De forma análoga se define el proceso de  $\partial$ -compresión. Si  $S'$  es la superficie obtenida al hacer compresión o  $\partial$ -compresión a  $S$ ,  $\chi(S) < \chi(S')$ , así que en cierta forma estamos haciendo más simple la superficie.

Una superficie  $S$  propiamente encajada en una 3-variedad  $M$  es  $\partial$ -paralela si es isotópica, fijando  $\partial S$ , a una subsuperficie de  $\partial M$ . Esto es equivalente a decir que  $S$  corta un producto  $S \times [0, 1]$  de  $M$  con  $S = S \times \{0\}$ .

**Definición 1.4.** Sea  $S$  una superficie propiamente encajada en una 3-variedad  $M$ , diremos que  $S$  es esencial si es incompresible,  $\partial$ -incompresible y no  $\partial$ -paralela.

### 1.1. Nudos

En este trabajo nos enfocaremos en los llamados nudos mansos. Así que en adelante por *nudo* nos referiremos a la imagen de un encaje poligonal de  $S^1$  en  $S^3$ . Sea  $K \subset S^3$  un nudo, una superficie orientable  $S \subset S^3$  es una *superficie de Seifert* para  $K$  si  $\partial S = K$ . Gracias al algoritmo proporcionado por Seifert sabemos que todo nudo tiene una superficie de Seifert.

El *género de un nudo*  $g(K)$  es el mínimo género sobre todas las superficies de Seifert para  $K$ . Una superficie de Seifert  $S$  para el nudo  $K$  es de *género mínimo* si  $g(S) = g(K)$ . Toda superficie de Seifert de género mínimo es incompresible.

Sea  $\eta(K) \subset S^3$  una vecindad regular de un nudo  $K$ . Definimos el *exterior* de  $K$  como  $E(K) = S^3 \setminus \text{int}(\eta(K))$ . El exterior de un nudo es una 3-variedad compacta e irreducible cuya frontera es  $\partial\eta(K)$ . Si  $S'$  es una superficie de Seifert para  $K$ , la intersección  $S = S' \cap E(K)$  también se llamará una superficie de Seifert.

Decimos que una función  $f : A \rightarrow B$  es una fibración con fibra  $F$  si cada punto de  $y \in B$  tiene una vecindad  $U$  y un homeomorfismo  $h : f^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  tal que el diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U) & \xrightarrow{h} & U \times F \\ & \searrow f & \swarrow p_1 \\ & U & \end{array}$$

donde  $p_1$  es la proyección a la primera coordenada. Cada conjunto  $f^{-1}(b)$  se llama fibra y es homeomorfo a  $F$ .

Cuando el exterior de un nudo admite una fibricación sobre  $S^1$  con fibra una superficie de Seifert, decimos que tal nudo es *fibrado*.

Sea  $K \subset S^3$  y  $S$  una superficie de Seifert en  $E(K)$ . Una vecindad  $H$  de  $S$  en  $E(K)$  es homeomorfa a  $S \times (-1, 1)$  tal que  $S = S \times \{0\} \subset H$ . Definimos  $H^+ = S \times (0, 1)$ ,  $H^- = S \times (-1, 0)$  y  $Y = E(K) \setminus S$ . Consideremos las tripletas  $(H, H^+, H^-)$ ,  $(Y, H^+, H^-)$  y formamos copias de estas  $(H_i, H_i^+, H_i^-)$ ,  $(Y_i, H_i^+, H_i^-)$ , con  $i \in \mathbb{Z}$ . Identificamos  $H_i^+ \subset Y_i$  con  $H_{i+1}^+ \subset H_{i+1}$  y  $H_{i-1}^- \subset Y_{i-1}$  con  $H_i^- \subset H_i$ . En el Capítulo 5 de [17] se prueba que este espacio, al que denotaremos por  $\tilde{E}(K)$ , es el cubriente universal de  $E(K)$ .

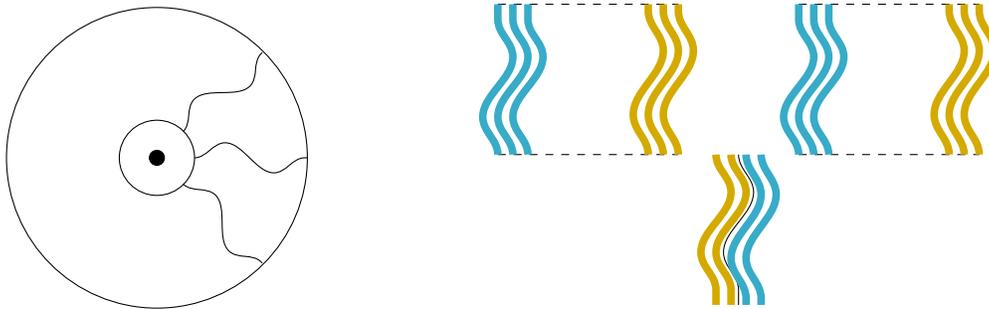


Figura 1.1: Cubriente universal cíclico infinito de  $E(K)$ .

Consideremos la 3-variedad cerrada obtenida de identificar las fronteras de  $E(K_1)$  y  $E(K_2)$  vía un homeomorfismo  $h : \partial E(K_1) \rightarrow \partial E(K_2)$  tal que  $h(\partial S_1) = \partial S_2$ . Esta variedad se conoce como la *suma frontera* de  $E(K_1)$  y  $E(K_2)$  y se denota por  $E(K_1) \#_{\partial} E(K_2)$ . Bajo esta identificación  $S_1$  y  $S_2$  se pegan a lo largo de sus fronteras para obtener una superficie cerrada en  $E(K_1) \#_{\partial} E(K_2)$ ; denotaremos a esta superficie  $S_1 \cup_{\partial} S_2$  y la llamaremos la *suma frontera* de las superficies de Seifert  $S_1$  y  $S_2$ . En [13] se puede encontrar una demostración del siguiente resultado.

**Lema 1.5.** *Si  $S_1$  y  $S_2$  son superficies de Seifert incompresibles en  $E(K_1)$  y  $E(K_2)$  respectivamente, entonces  $F = S_1 \cup_{\partial} S_2$  es incompresible en  $M$ .*

## 1.2. Funciones de Morse

Sea  $M$  una  $n$ -variedad suave y supongamos que  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función suave. Sea  $p$  un punto en  $M$  y elegimos coordenadas locales tal que  $p$  está en el origen,  $p$  es un *punto crítico* de  $f$  si  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$ , para  $i = 1, \dots, n$ .

La *matriz Hessiana* de  $f$  en  $p$  es la matriz de segundas derivadas parciales de  $f$ . Denotamos por  $H_f(p)$  a su determinante. Un punto crítico  $p$  es *no degenerado* si  $H_f(p) \neq 0$ .

**Definición 1.6.** *Una función suave  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de Morse si todos sus puntos críticos son no degenerados.*

## 1 Preliminares

**Lema 1.7. (Morse)** Sea  $p$  un punto crítico no degenerado de  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces existe un sistema local de coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$  que manda a  $p$  al origen y tal que

$$f = f(p) - \sum_{i=1}^k x_i^2 + \sum_{j=k+1}^n x_j^2.$$

Como consecuencia inmediata del lema de Morse se obtienen los siguientes resultados.

1. Los puntos críticos de una función de Morse son aislados.
2. Si  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de Morse y  $M$  es una variedad compacta, entonces  $f$  tiene un número finito de puntos críticos.

El número de signos negativos  $k$  en el Lema de Morse es el número de entradas diagonales negativas en la matriz de segundas derivadas parciales después de diagonalizar. Esto implica que  $k$  está determinado únicamente por  $f$  y el punto crítico  $p$ . De esta forma, llamaremos a  $k$  el *índice* del punto crítico  $p$ .

Notar que los puntos críticos de índice 0 deben ser mínimos locales de la función de Morse y que puntos críticos de índice  $n$  ( $n = \dim M$ ) corresponden a máximos locales.

**Definición 1.8.** Sean  $f$  y  $g$  funciones suaves en  $M$ . Para  $\varepsilon > 0$ , decimos que  $f$  es una  $(C^2, \varepsilon)$ -aproximación de  $g$  en  $M$  si las siguientes desigualdades se cumplen para toda  $p \in M$ :

$$|f(p) - g(p)| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) - \frac{\partial g}{\partial x_i}(p) \right| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) - \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right| < \varepsilon, \quad i, j = 1, \dots, n$$

**Teorema 1.9** ([10], 2.9). Supongamos que  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función suave sobre una variedad compacta  $M$ . Entonces existe una función de Morse  $f$  en  $M$  que es una  $(C^2, \varepsilon)$ -aproximación de  $g$  para  $\varepsilon > 0$  lo suficientemente pequeño.

El teorema anterior nos dice que si  $M$  es una variedad compacta, entonces el conjunto de funciones de Morse es denso en  $C^\infty(M)$ .

Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Morse. Un *conjunto de nivel* de  $f$  es un subconjunto  $f_x = f^{-1}(x) \subset M$  para algún  $x \in \mathbb{R}$  y un *subnivel* es todo lo que se encuentra “debajo” de un conjunto de nivel, i.e,  $f_x^- = f^{-1}((-\infty, x])$ . Si  $f_x$  es un nivel regular entonces  $f_x^-$  es una  $n$ -subvariedad y si  $M$  es cerrada  $f_x = \partial f_x^-$ . En la Figura 1.2 las curvas representan conjuntos de nivel para distintos valores.

**Lema 1.10.** Si  $x$  es un valor regular entonces  $f_x$  es una subvariedad cerrada de  $M$  de dimensión  $n - 1$ .

**Lema 1.11** ([7], sección 6.2). Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  valores regulares tales que  $a < b$ . Si no hay valores críticos en el intervalo  $[a, b]$ , entonces  $f^{-1}([a, b])$  es homeomorfo a  $f^{-1}(a) \times [a, b]$ .

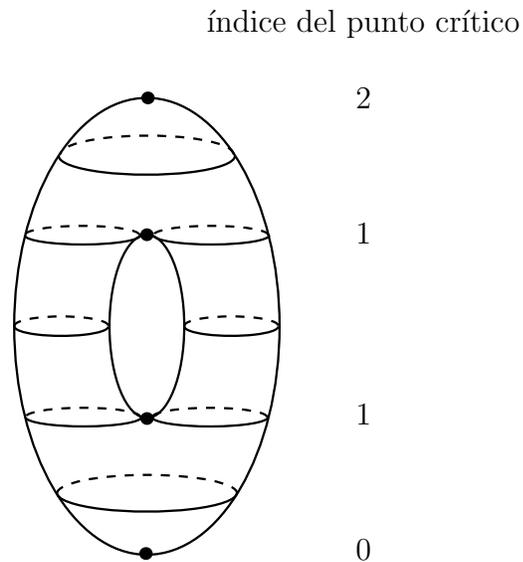


Figura 1.2: Función de Morse en el toro de dimensión 2.

**Lema 1.12.** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  valores regulares tales que  $a < b$ . Si no existen niveles críticos en el intervalo  $[a, b]$  entonces existe una isotopía de  $M$  que transforma  $f_a^-$  en  $f_b^-$ .

Estos tres lemas nos servirán más adelante cuando queramos partir a una 3-variedad en pedazos más simples.



## 2 Descomposiciones de Heegaard

El objetivo principal de este capítulo es mostrar una forma de partir a cualquier 3-variedad compacta en pedazos "simples"; espero que la definición de una asa, lo que forma dichos pedazos, baste para constar de su relativa simplicidad.

Una  $k$ -asa de dimensión  $n$  es una  $n$ -bola, parametrizada como  $D^k \times D^{n-k}$ <sup>1</sup>, que se pega a una  $n$  variedad preexistente a lo largo de  $\partial D^k \times D^{n-k}$ . Una *descomposición en asas* de una 3-variedad  $M$  es una sucesión de asas cuya unión es  $M$ .

El *corazón* de una  $k$ -asa está dado por  $D^k \times \{0\}$  y el *co-corazón* por  $\{0\} \times D^{n-k}$ . En la Figura 2.1 se muestran esquemas de las asas de dimensión 3, la región por donde se pegan, sus corazones y co-corazones se encuentran de color azul, morado y verde, respectivamente. En el caso de una 0-asa, de cualquier dimensión, su región de pegado es el conjunto vacío, por lo que en ocasiones pensaremos en ella como una  $n$ -bola que "aparece".

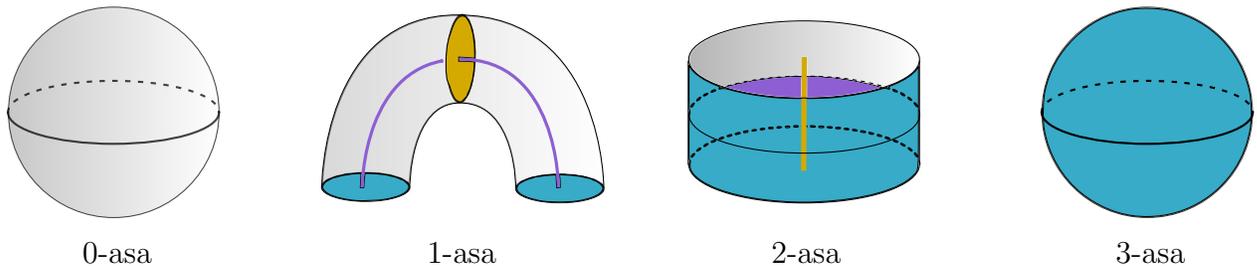


Figura 2.1: Asas de dimensión 3.

En dimensión 3, llamaremos *cubo con asas* a la unión de 0 y 1-asas; el *género* de un cubo con asas es el género de su frontera. Dada una descomposición en asas de una 3-variedad cerrada, en la que las 0 y 1 asas se pegan antes que las 2 y 3 asas, es posible dar una descomposición en cubos con asas y viceversa; para lograr esto basta considerar la unión de las 2 y 3-asas como un cubo con asas.

*Ejemplo 1:  $S^3$ .*

Sabemos que  $S^3$  se obtiene al pegar dos 3-bolas a lo largo de su frontera, así que  $S^3$  es el resultado de pegar una 0-asa con una 3-asa. Otra descomposición es la que se obtiene de pegar 0, 1 y 2-asas como se muestra en la Figura 2.2, la línea café indica el lugar donde se pega la 2-asa; el resultado es una bola a la que le pegamos una 3-asa para obtener  $S^3$ . Cuando pegamos la 0 y 1-asa obtenemos un cubo con asas de género 1; lo mismo ocurre

<sup>1</sup>Por  $D^s$  no referimos a la bola de dimensión  $s$ , es decir,  $D^s = [-1, 1]^s$ .

## 2 Descomposiciones de Heegaard

cuando pegamos la 2 y 3-asa. De esta forma, hemos obtenido una descomposición en cubos con asas de género 1 para  $S^3$ , lo cual también es posible para cualquier género.

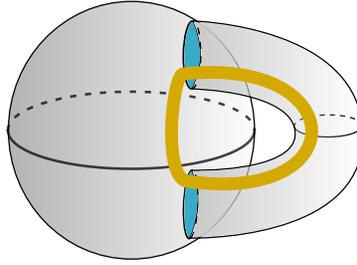


Figura 2.2: Descomposición en asas de  $S^3$  de género 1.

*Ejemplo 2:  $T^3$ .*

Sabemos que  $T^3$  se puede ver como el cubo  $[0, 1]^3$  con sus caras opuestas identificadas. Sea  $B_0$  una vecindad regular en  $T^3$  del vértice  $v$  y  $B_i$ , con  $i = 1, 2, 3$ , vecindades regulares de cada una de las aristas  $a_i$  (en la Figura 2.3 se muestra  $B_1$ ). Sean  $H_1 = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3$  y  $H_2$  el complemento de  $H_1$  en  $T^3$ .  $H_2$  está formado por tres bolas  $N_j$ , con  $j = 1, 2, 3$ , que se pegan a  $H_1$  a lo largo de anillos en su frontera, y una cuarta bola,  $N_4$ , que se pega a lo largo de su frontera a  $H_1 \cup (N_1 \cup N_2 \cup N_3)$  (Figura 2.3). Finalmente,  $T^3$  es la unión de una 0-asa ( $B_0$ ), tres 1-asas ( $B_1, B_2, B_3$ ), tres 2-asas ( $N_1, N_2, N_3$ ) y una 3-asa ( $N_4$ ).

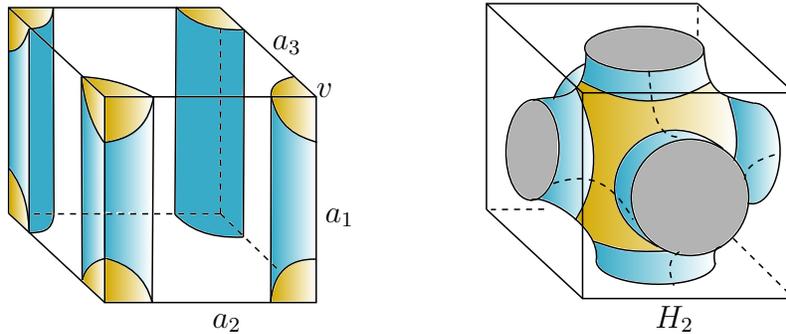


Figura 2.3: Descomposición en asas de  $T^3$ .

Por construcción,  $H_1$  es un cubo con asas de género 3. Para ver que  $H_2$  también es un cubo con asas, basta observar que  $N_4$  es una 0-asa y las  $N_j$ , para  $j = 1, 2, 3$ , son bolas que se pegan a  $N_4$  a lo largo de discos, es decir, cada  $N_j$  es una 1-asa.

El siguiente resultado se empleará para probar que toda 3-variedad cerrada tiene una descomposición en cubos con asas. En el libro de Moise [15] se pueden consultar las definiciones de triangulación, subcomplejo, baricentro, etc.

**Teorema 2.1** (Moise). *Toda 3-variedad compacta tiene una triangulación.*

**Construcción 1:** Sea  $T$  una triangulación de una 3-variedad cerrada  $M$ . Sea  $\Gamma_1$  el 1-esqueleto de  $T$ , construimos  $\Gamma_2$  como sigue: los vértices de  $\Gamma_2$  son los baricentros de los simplejos de dimensión 2 y 3 y las aristas unen los baricentros de los 3-simplejos con los baricentros de cada una de sus caras. Como  $M$  es cerrada, cada vértice que proviene de un 2-simplejo tiene valencia dos por lo que podemos amalgamar dichas aristas; de esta forma  $\Gamma_2$  se convierte en una gráfica en la que cada vértice corresponde a un 3-simplejo y cada arista a un 2-simplejo. Una vecindad regular de una gráfica finita en una 3-variedad puede ser vista como un cubo con asas de género  $|aristas| - |vértices| + 1$ , ya que una vecindad de un árbol maximal es claramente una 3-bola (0-asa) y una vecindad de cada arista fuera del árbol contribuye con una 1-asa. Además, la región entre vecindades regulares de  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  es una región producto (ver Figura 2.4). De esta forma,  $M$  puede verse como la unión de dichas vecindades, es decir, como la unión de dos cubos con asas.

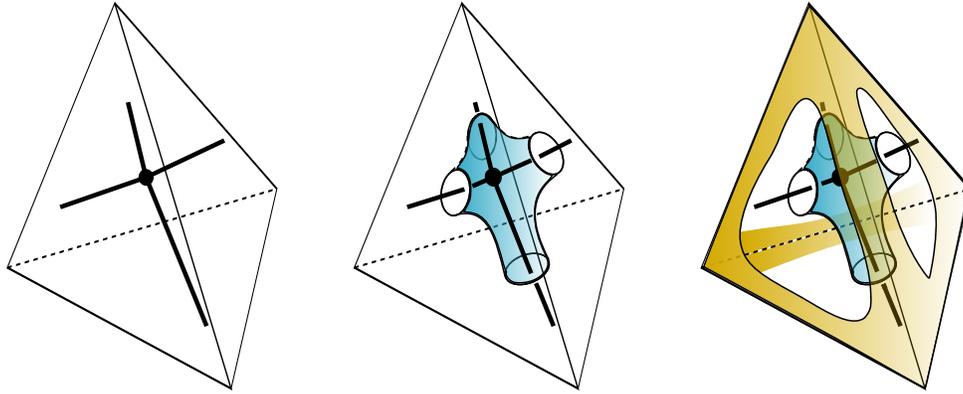


Figura 2.4: Construcción 1

La construcción de descomposiciones en asas de 3-variedades cerradas sugiere una forma de extender tal descomposición a variedades con frontera.

**Construcción 2:** Sea  $M$  una 3-variedad con  $\partial M \neq \emptyset$ . Escribimos  $\partial M$  como una partición de dos elementos  $\partial_1 M$  y  $\partial_2 M$ , alguna de las cuales puede ser vacía. Sea  $T$  una triangulación de  $M$  tal que ningún simplejo interseca a más de dos componentes de la frontera y sea  $T'$  la subdivisión baricéntrica de  $T$ . Denotamos por  $N_1$  y  $N_2$  a la unión de todos los simplejos de  $T'$  que inciden en  $\partial_1 M$  y  $\partial_2 M$ , respectivamente.  $N_1 \cup N_2$  es una vecindad collar de  $\partial M$ , así que  $M' = M \setminus N_1 \cup N_2$  es una 3-variedad homeomorfa a  $M$ . Denotamos por  $\partial_1 M'$  y  $\partial_2 M'$  a las respectivas copias de  $\partial_1 M$  y  $\partial_2 M$ .

$T'$  se restringe a una triangulación  $T''$  de  $M'$ . Sea  $\Lambda_1$  el 1-esqueleto de  $T''$  y  $\Lambda_2$  su gráfica dual, la cual se define como en la Construcción 1. Definimos  $\Gamma_1 = \partial_1 M' \cup \Lambda_1$  y  $\Gamma_2 = \partial_2 M' \cup \Lambda_2$ . Consideramos vecindades regulares en  $M$  de  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ . Nuevamente,  $M$  es la unión de dichas vecindades a lo largo de su frontera, la cuál es una superficie cerrada.

## 2 Descomposiciones de Heegaard

Lo anterior sugiere una nueva forma de definir los pedazos en los que queremos separar a una 3-variedad compacta con frontera

**Definición 2.2.** Sea  $F$  una superficie cerrada y orientable. Consideramos  $F \times I$ . Un cuerpo de compresión  $H$  es el resultado de hacer una de las siguientes:

- Pegar 1-asas en  $F \times \{1\}$ . Se definen  $\partial_-H = F \times \{0\}$  y  $\partial_+H = \partial H \setminus \partial_-H$ .
- Pegar 2-asas en  $F \times \{0\}$ , si esta variedad tiene componentes esfera en su frontera, pegamos 3-asas. En este caso,  $\partial_+H = F \times \{1\}$  y  $\partial_-H = \partial H \setminus \partial_+H$ .

Un cuerpo de compresión es un cubo con asas cuando  $\partial_-H = \emptyset$ . Cuando  $H \cong F \times I$ , diremos que el cuerpo de compresión es *trivial*. Es importante notar que el primer y segundo inciso de la definición de cuerpo de compresión son en cierto sentido “duales”. Si extendemos los corazones de las 2-asas verticalmente a  $F \times I$ , obtenemos un sistema de discos  $\Delta$  para  $H$  tal que la variedad obtenida de cortar  $H$  a lo largo de  $\Delta$  es homeomorfa a la unión de  $\partial_-H \times I$  y un conjunto (posiblemente vacío) de 3-bolas. Para recuperar  $H$  es necesario pegar las copias de los discos de  $\Delta$ , lo cual equivale a unirlos con 1-asas. En la Figura 2.5 se construye el mismo cuerpo de compresión de forma distinta: en la izquierda tenemos  $H = F \times I$ , donde  $F$  es una superficie de género 3, después pegamos 2-asas por donde lo indican las líneas azules y llenamos con 3-asas; por otro lado comenzamos con una superficie de género 1 y pegamos dos 1-asas.

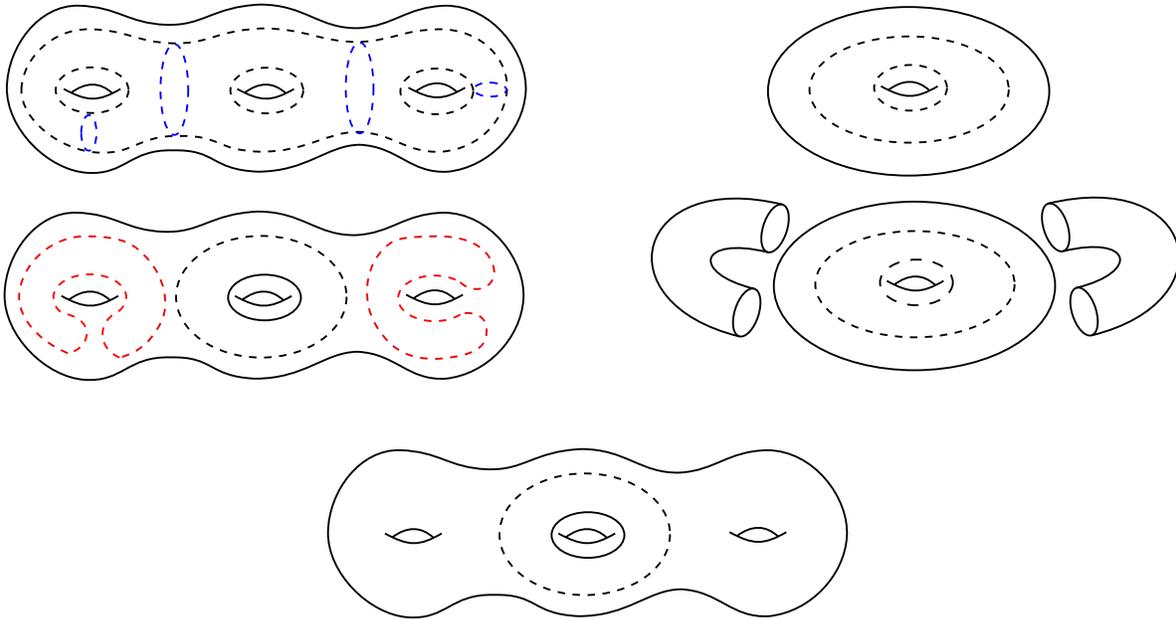


Figura 2.5: Dualidad entre las dos formas de construir un cuerpo de compresión.

Si en las Construcciones 1 y 2,  $H_1$  y  $H_2$  son las vecindades regulares de  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , respectivamente, entonces son cuerpos de compresión tales que  $\partial_-H_1 = \partial_1M$ ,  $\partial_-H_2 = \partial_2M$  y  $\partial_+H_1 = \partial_+H_2$ .

**Definición 2.3.** Una descomposición de Heegaard para una 3-variedad  $M$  es un triplete  $(H_1, H_2; S)$  donde  $H_1$  y  $H_2$  son cuerpos de compresión,  $S = \partial_+ H_1 = \partial_+ H_2$  y son tales que  $M = H_1 \cup H_2$ ,  $S = H_1 \cap H_2$  y  $\partial M = \partial_- H_1 \cup \partial_- H_2$ .

De las construcciones 1 y 2 obtenemos el siguiente resultado:

**Teorema 2.4.** Toda 3-variedad compacta tiene una descomposición de Heegaard.

En la Figura 2.6 se resume la construcción de una descomposición de Heegaard: primero dividimos en dos su frontera (por lo que la descomposición depende de tal partición), comenzamos con la superficie  $\partial_- H_1$ , la “engordamos” y pegamos 1-asas hasta llegar a la superficie  $S$ ; en este punto hay dos formas equivalentes de continuar con el trabajo, la primera es hacer lo mismo con el cuerpo de compresión  $H_2$  para después pegarlos a lo largo de  $S$ ; la segunda consiste en pegar 2-asas a  $S$  y de ser necesario agregar 3-asas para llegar a  $\partial_- H_2$ .

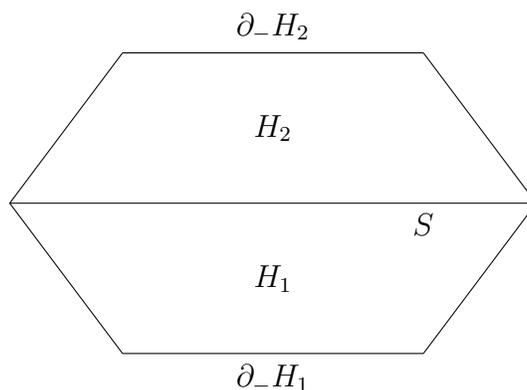


Figura 2.6: Esquema de una descomposición de Heegaard.

## 2.1. Con funciones de Morse

Sabemos que si  $M$  es una variedad suave, entonces existen funciones de Morse sobre  $M$ . De hecho, el conjunto de funciones de Morse es denso en  $C^\infty(M)$ .

Una función de Morse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  descompone a la variedad  $M$  en niveles regulares y singulares. Si no hay valores críticos entre dos valores regulares, entonces sus conjuntos de nivel son difeomorfos. Más aún, los valores regulares que se encuentran entre dos valores críticos consecutivos brindan una estructura producto: el de los correspondientes conjuntos de nivel. Específicamente, si  $(a, b)$  es un intervalo que no contiene valores críticos y  $c \in (a, b)$ , entonces  $f^{-1}((a, b))$  es difeomorfo a  $f^{-1}(c) \times (a, b)$ . Así que para entender a la variedad, necesitamos entender cómo cambian los conjuntos de nivel cuando pasamos por un valor crítico.

Si  $M$  es una 3-variedad los conjuntos de nivel regulares son superficies. Así que los valores regulares que están entre dos valores críticos consecutivos corresponden a productos de la

## 2 Descomposiciones de Heegaard

forma (superficie)  $\times I$ .

**Lema 2.5.** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  valores tal que  $a < b$ . Si existe un único nivel crítico en  $[a, b]$  y este nivel contiene un punto crítico de índice  $k$  entonces  $f_b^-$  es isotópico al resultado de pegar una  $k$ -asa a  $f_a^-$ .

Una demostración al lema anterior se puede encontrar en el libro de Knudson [10]. Para fines prácticos fijaremos nuestra atención en variedades de dimensiones bajas. Funciones de Morse sobre superficies pueden visualizarse como funciones altura (Figura 1.2), en el caso de 3-variedades imaginaremos las funciones al dibujar los conjuntos de nivel dentro de una bola. Existen cuatro tipos de puntos críticos en una función de Morse de una 3-variedad:

- índice 0:  $x^2 + y^2 + z^2 + f(0)$
- índice 1:  $x^2 + y^2 - z^2 + f(0)$
- índice 2:  $x^2 - y^2 - z^2 + f(0)$
- índice 3:  $-x^2 - y^2 - z^2 + f(0)$

en la Figura 2.7 las flechas indican la dirección en la que la función aumenta, para puntos críticos de índice 1 y 2  $f_x^-$  está de azul y  $f_x^+$  de verde.

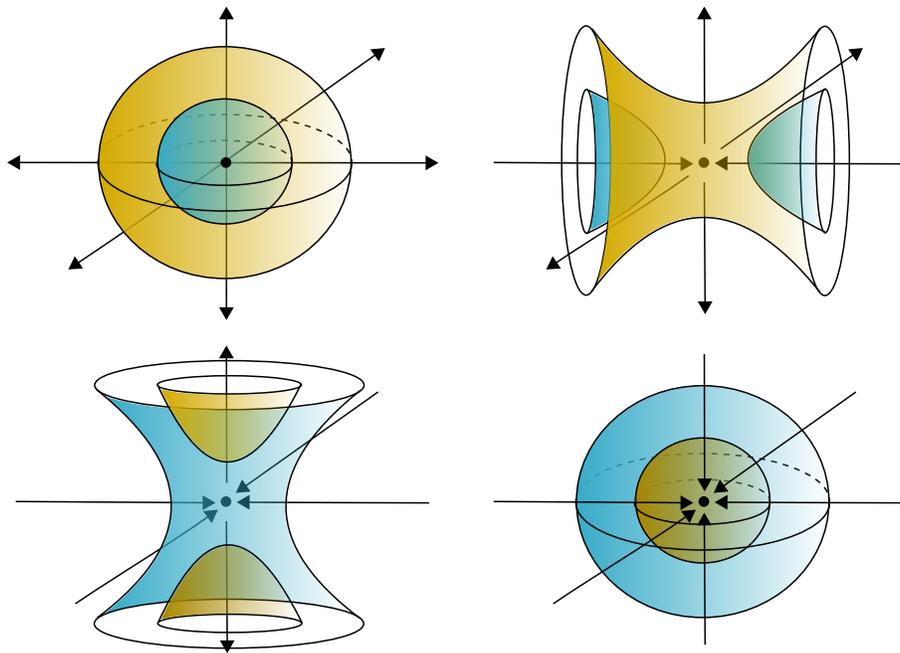


Figura 2.7: Puntos críticos de una función de Morse en una 3-variedad

Sea  $M$  una 3-variedad compacta, decimos que  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de Morse *propia* si: es constante en cada componente de  $\partial M$ , es una función de Morse en el interior de  $M$  y cerca de  $\partial M$  los conjuntos de nivel de  $f$  son superficies paralelas a la frontera.

**Lema 2.6.** *Sea  $M$  una 3-variedad compacta y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Morse propia. Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ , con  $a < b$ , valores regulares de  $f$  tal que todos los puntos críticos en  $f^{-1}[a, b]$  tienen índice 0 o 1. Entonces  $H = f^{-1}([a, b])$  es un cuerpo de compresión con  $\partial_+ H = f_b$  y  $\partial_- H = f_a$ .*

*Demostración.* Sean  $p_1, \dots, p_n$  los puntos críticos en el intervalo  $[a, b]$  y  $x_1, \dots, x_{n-1}$  valores regulares tales que  $p_i < x_i < p_{i+1}$ . Por el Lema 1.11 sabemos que cualquier conjunto de nivel regular que se encuentra entre  $a$  y un valor crítico anterior es homeomorfo a  $f^{-1}(a)$ . Del Lema 2.5 obtenemos que  $f_{x_i}^-$  es el resultado de pegar una 0-asa o una 1-asa a  $f_{x_{i-1}}^-$ . Pegar una 0-asa es equivalente a hacer una unión disjunta con una 3-bola, por lo que el resultado es un cuerpo de compresión.  $\square$

Si reemplazamos  $f$  por la función de Morse  $-f$ , los puntos críticos de índice 0 pasan a ser puntos críticos de índice 3 y viceversa. Lo mismo ocurre con los puntos críticos de índice 1 y 2, de donde se sigue el siguiente corolario.

**Corolario 2.7.** *Sea  $M$  una 3-variedad compacta y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Morse propia. Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ , con  $a < b$ , valores regulares de  $f$  tal que todos los puntos críticos en  $f^{-1}[a, b]$  tienen índice 2 o 3. Entonces  $H = f^{-1}([a, b])$  es un cuerpo de compresión con  $\partial_+ H = f_a$  y  $\partial_- H = f_b$ .*

Combinando los dos resultados anteriores obtenemos lo siguiente:

**Teorema 2.8.** *Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Morse propia en una 3-variedad compacta  $M$ . Supongamos que existe un valor regular  $a \in \mathbb{R}$  tal que todo punto crítico bajo el conjunto de nivel  $f_a$  tiene índice 0 o 1 y todo punto crítico sobre  $f_a$  tiene índice 2 o 3. Entonces la superficie  $f_a$  es una superficie de Heegaard para  $M$ .*

Esto nos dice que para una clase de funciones de Morse existe una descomposición de Heegaard asociada y el Lema siguiente nos indica que esta relación es recíproca.

**Lema 2.9.** *Sea  $(H_1, H_2; S)$  una descomposición de Heegaard para una 3-variedad compacta  $M$ , entonces existe una función de Morse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que al menos una superficie de nivel de  $f$  es isotópica a  $S$ .*

## 2.2. Discos y anillos producto.

Un sistema de discos para un cuerpo de compresión  $H$  es un conjunto de discos esenciales disjuntos tal que la variedad obtenida al cortar  $H$  a lo largo de los discos es la unión disjunta de bolas con  $\partial_- H \times I$ . Es importante notar que todo disco esencial en  $H$  debe tener su frontera en la frontera positiva puesto que para cualquier cuerpo de compresión,  $\partial_- H$  es incompresible en  $H$ .

Un sistema de discos es *minimal* si su cardinalidad es mínima sobre todos los sistemas de discos para  $H$ . Se sabe que si un sistema de discos es minimal éste corta al cuerpo de compresión en

## 2 Descomposiciones de Heegaard

$\partial_-H \times I$  si  $\partial_-H \neq \emptyset$  y en una 3-bola si  $H$  es un cubo con asas. Además, si  $D$  es un disco esencial, existe un sistema de discos que lo contiene.

Un anillo  $A$  propiamente encajado en un cuerpo de compresión  $H$  es llamado un *anillo producto* si  $A$  es incompresible en  $H$  y una componente de su frontera está en  $\partial_-H$  y la otra en  $\partial_+H$ . El término "producto" se le asigna debido a que cualquier anillo con dichas características se puede expresar como  $\alpha \times I \subset \partial_-H \times I$ , donde  $\alpha$  es una curva esencial en  $\partial_-H$ .

**Lema 2.10.** *Sean  $H$  un cuerpo de compresión no trivial y  $A$  un anillo producto en  $H$ , entonces existe un disco esencial  $D$  en  $H$  que no interseca a  $A$ .*

*Demostración.* Como  $H$  es no trivial, existe un disco esencial de  $H$  (por ejemplo el corazón de una 1-asa). Elegimos un disco esencial  $D$  de  $H$  que interseca a  $A$  transversalmente y tal que  $|D \cap A|$  sea minimal sobre todos los discos esenciales de  $H$ . Como  $A$  es incompresible,  $A \cap \partial_-H$  es esencial en  $\partial_-H$ .

**Afirmación 1:** No existen curvas simples cerradas en  $D \cap A$ .

Supongamos que la colección de componentes de  $D \cap A$  que son lazos no esenciales en  $A$  es no vacía y sea  $\alpha$  un lazo de más adentro en  $A$  de dicha colección. Entonces  $\alpha$  es frontera de un disco  $D_\alpha \subset A$  tal que su interior no interseca a  $D$ . Aunque  $\alpha$  no es necesariamente un lazo de más adentro en  $D$ , si es frontera de un disco  $D'_\alpha \subset D$ . Sea  $D'$  el disco que se obtiene de cambiar  $D_\alpha$  por  $D'_\alpha$ . Como  $\alpha$  es no esencial en  $A$ ,  $D'$  es un disco esencial de  $H$ ; podemos isotopar a  $D'$  de modo que  $|D' \cap A| < |D \cap A|$ , lo que contradice la elección de  $D$ .

Por el razonamiento anterior podemos suponer que si una componente de  $D \cap A$  es un lazo, entonces es esencial en  $A$ . Sea  $\beta$  un lazo en  $D \cap A$  que sea de más adentro en  $D$ , entonces es frontera de un disco  $D_\beta$  en  $D$  tal que su interior no interseca a  $A$ . Como  $\beta$  es esencial en  $A$ , corta a  $A$  en dos anillos. Sea  $A'$  el anillo adyacente a  $\partial_-H$ , entonces  $D'' = A' \cup D_\beta$  es un disco de compresión de  $\partial_-H$  en  $H$ , lo cual es una contradicción pues  $\partial_-H$  es incompresible en  $H$ .

**Afirmación 2:** No existen arcos en  $D \cap A$ .

Supongamos lo contrario. Como  $\partial D \subset \partial_+H$ , todos los arcos de  $D \cap A$  tienen frontera en la misma componente frontera de  $A$  (la que está en  $\partial_+H$ ), así que todos los arcos son inesenciales en  $A$ . Sea  $\gamma$  un arco de más afuera en  $A$ , entonces  $\gamma$  corta un disco  $D_\gamma$  de  $A$ , tal que su interior no interseca a  $D$ . Por otro lado,  $\gamma$  corta a  $D$  en dos subdiscos,  $D'$  y  $D''$ . Si  $D_\gamma \cup D'$  y  $D_\gamma \cup D''$  son no esenciales en  $H$ , entonces  $D$  es no esencial, lo cual es falso. Supongamos que  $\tilde{D} = D_\gamma \cup D'$  es esencial en  $H$ , podemos isotopar a  $\tilde{D}$  de tal forma que no interseca a  $A$  en  $\gamma$ , de esta forma  $|\tilde{D} \cap A| < |D \cap A|$ , lo cual es una contradicción.

De las dos afirmaciones se obtiene que  $D \cap A = \emptyset$ . □

En el Capítulo 3 se presentará un resultado análogo al siguiente teorema, por lo que se deja la demostración para más tarde.

**Teorema 2.11.** *Las únicas superficies esenciales propiamente encajadas en un cuerpo de compresión  $H$  son discos esenciales y anillos producto.*

## 2.3. Estabilización y descomposiciones irreducibles

Como vimos, las descomposiciones de Heegaard están relacionadas con triangulaciones y funciones de Morse. Así como podemos subdividir una triangulación o perturbar una función de Morse para introducir un par de puntos críticos que se cancelan, también hay una manera natural de complicar una descomposición de Heegaard. Supongamos que  $(H_1, H_2; S)$  es una descomposición de Heegaard de una 3-variedad  $M$  y  $\alpha$  es un arco propiamente encajado en  $H_2$  paralelo a un arco en  $S$ ; es decir, existe un disco  $D$  en  $H_2$  cuya frontera es la unión de  $\alpha$  con un arco en  $S = \partial_+ H_2$ . Sea  $\eta(\alpha) \subset H_2$  una vecindad de  $\alpha$ , si pegamos  $\eta(\alpha)$  a  $H_1$  y la borramos en  $H_2$ , lo que estamos haciendo es agregar una 1-asa a  $H_1$  (cuyo corazón es  $\alpha$ ) y también agregamos una 1-asa a  $H_2$  (con co-corazón  $D$ ). El resultado es una descomposición de Heegaard  $(H'_1, H'_2; S')$  de  $M$ , donde  $H'_1 = H_1 \cup \eta(\alpha)$ ,  $H'_2 = H_2 \setminus \eta(\alpha)$  y el género de  $S'$  es una unidad mayor que el de  $S$ . A este proceso lo llamaremos *estabilización* de  $S$ .

**Lema 2.12.** *Una descomposición  $M = (H_1, H_2; S)$  es estabilización de otra descomposición si y sólo si existen discos  $D_i \subset H_i$  tal que  $|\partial D_1 \cap \partial D_2| = 1$ .*

*Demostración.* Supongamos que la descomposición es estabilización de otra. Hacemos  $D_1 \subset H_1$  el co-corazón de  $\eta(\alpha)$  y  $D_2 = D \subset H_2$ . Entonces  $|\partial D_1 \cap \partial D_2| = 1$ .

Supongamos ahora que tales discos existen. Sea  $N_i$  una vecindad regular de  $D_i$  en  $H_i$  y  $T_i$  la superficie obtenida al comprimir  $S$  a lo largo de  $D_i$ . Al hacer compresión pegamos  $N_i$  al cuerpo de compresión  $H_j$ , con  $i \neq j$ , lo cual es equivalente a pegar una 2-asa. De esta forma obtenemos dos cuerpos de compresión  $H'_i$ . Como los discos sólo se intersectan en un punto,  $N_1$  y  $N_2$  se intersectan en un disco, así que  $N_1 \cup N_2$  es una 3-bola, por lo que  $T_1$  y  $T_2$  son isotópicas. En particular,  $T_1$  divide a  $M$  en los cuerpos de compresión  $H'_1$  y  $H'_2$ .

Si  $\alpha$  es el corazón de  $N_1$  y  $D = D_2$ , al estabilizar  $T_1$  obtenemos la descomposición original. Por lo tanto,  $(H_1, H_2; S)$  es una estabilización.  $\square$

En 1933 Reidemeister [16] y Singer [20] probaron de forma independiente, que cualesquiera dos descomposiciones de Heegaard de la misma 3-variedad cerrada son isotópicas después de un número suficiente de estabilizaciones. Así que al realizar una estabilización estamos perdiendo información sobre la estructura de la descomposición. Es por esto que nuestra atención se centrará en descomposiciones de Heegaard que no son estabilización de otra.

En 1968 Waldhausen [22] probó que cualquier descomposición de Heegaard de género positivo de  $S^3$  es estabilizada. Así que la descomposición en 3-bolas es la única descomposición no estabilizada de  $S^3$ , Por tanto la única de género  $g$  es la obtenida al estabilizar  $g$  veces a la de género cero.

En 1970 R. Engmann [3] demostró que el resultado de unicidad salvo estabilización no es cierto en general, pues probó que la suma conexa de ciertos espacios lentes tienen dos descomposiciones de Heegaard de género dos y, por tanto, no estabilizaciones, las cuales no son homeomorfos (también se puede consultar [1]).

Otra forma de complicar descomposiciones de Heegaard es considerar la suma conexa de 3-variedades. Sean  $M'$  y  $M''$  dos 3-variedades con descomposición de Heegaard  $(H'_1, H'_2; S')$  y  $(H''_1, H''_2; S'')$ , respectivamente. Intuitivamente podemos construir una descomposición de

## 2 Descomposiciones de Heegaard

$M' \# M''$ . Sean  $B'$  y  $B''$  3-bolas que intersectan a  $S'$  y  $S''$  en discos que tienen por frontera al ecuador. Pegamos las fronteras de las 3-bolas de forma tal que cada hemisferio  $H'_i \cap \partial B'$  se pega con  $H''_i \cap \partial B''$ . De esta forma, la superficie resultante  $S' \# S''$  descompone a  $M' \# M''$  en cuerpos de compresión.

Por el contrario, sea  $(H_1, H_2; S)$  una descomposición de Heegaard de una 3-variedad  $M$  y  $\Sigma$  una 2-esfera que intersecta a  $S$  en un sólo círculo. Sean  $M_1$  y  $M_2$  los pedazos que se obtienen al cortar  $M$  a lo largo de  $\Sigma$ ;  $(H_1, H_2; S)$  induce entonces una descomposición de Heegaard de cada pedazo. Si  $\Sigma$  no es frontera de una bola en  $M$ , la descomposición de cada  $M_i$  es más simple, ya que se reduce el género de la superficie de Heegaard. Además, como se mencionó en el párrafo anterior, es posible reconstruir la descomposición original de la descomposición obtenida.

**Definición 2.13.** Una descomposición de Heegaard  $(H_1, H_2; S)$  es reducible si existe una 2-esfera que intersecta a  $S$  en un sólo círculo esencial.

**Observación 2.14.** Si una descomposición es reducible, entonces existen discos esenciales propiamente encajados,  $D_i \in H_i$ , tal que  $\partial D_1 = \partial D_2$  en  $S$ . Además, estos discos son discos de compresión para  $S$  en cada uno de los cuerpos de compresión.

**Teorema 2.15** ([18], Corolario 2.4.a). Si  $M$  es una variedad reducible, entonces cualquier descomposición de Heegaard de  $M$  es reducible.

Existe una relación entre descomposiciones reducibles y estabilizadas.

**Proposición 2.16.** Supongamos que  $(H_1, H_2; S)$  es estabilización de una descomposición, entonces es reducible o bien es la descomposición estándar de género uno de  $S^3$ .

*Demostración.* Como  $(H_1, H_2; S)$  es estabilización, por el Lema 2.12, existen discos  $D_i \in H_i$  tales que  $|\partial D_1 \cap \partial D_2| = 1$ . Sea  $N_1$  una vecindad regular de  $D_1 \cup \partial D_2$  en  $H_1$ . Como  $\partial D_1$  y  $\partial D_2$  sólo se intersectan en un punto,  $\partial N_1 \setminus S$  es un disco, lo denotamos como  $D'_1 \subset H_1$  (Figura 2.8). Construimos  $D'_2 \subset H_2$  de forma análoga. La frontera de  $D'_1$  coincide con la frontera de una vecindad regular de  $\partial D_1 \cap \partial D_2$  en  $S$ . Lo mismo ocurre con  $\partial D'_2$ , así que  $\partial D'_1 = \partial D'_2$  y  $D'_1 \cup D'_2$  es frontera de una bola  $B$ .

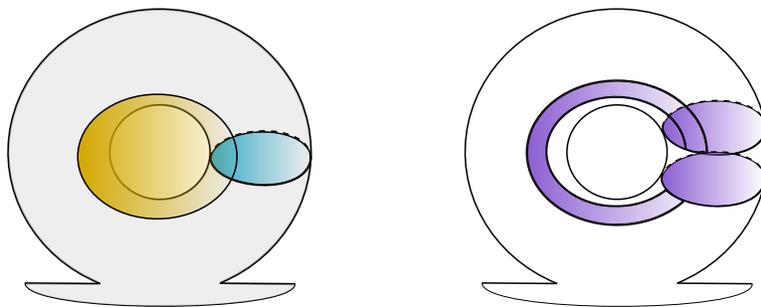


Figura 2.8: Vecindad regular de  $D_1 \cup \partial D_2$

Si  $D'_1$  y  $D'_2$  son esenciales, la descomposición es reducible. Si alguno de los discos es no esencial,

digamos  $D'_1$ ,  $\partial D'_1$  es frontera de un disco en  $S$ .  $N_1 \cap S$  es una vecindad regular de  $\partial D_1 \cup \partial D_2$  en  $S$ , por lo que  $N_1 \cap S$  es un toro pinchado cuya frontera,  $\partial D'_1$ , es frontera de un disco en  $S$ . Por lo anterior,  $S$  debe ser un toro. Como los discos forman una esfera que es frontera de una 3-bola en cada lado, la variedad es  $S^3$ .  $\square$

Recordemos que  $S^3$  sólo tiene una descomposición no estabilizada, así que cualquier descomposición de Heegaard está completamente determinada por su género. Gracias a esto, podemos probar una especie de recíproco de la Proposición 2.16.

**Proposición 2.17.** *Supongamos que  $M$  es una 3-variedad irreducible y  $(H_1, H_2; S)$  es una descomposición de Heegaard reducible de  $M$ , entonces  $(H_1, H_2; S)$  es estabilizada.*

*Demostración.* Sea  $P$  una esfera que intersecta a  $S$  en un sólo círculo esencial y sea  $D_i = P \cap H_i$ . Como  $M$  es irreducible,  $P$  es frontera de una 3-bola  $B$  en  $M$ , así que la variedad obtenida al reducir  $M$  a lo largo de  $P$  es la unión disjunta de  $S^3$  y una 3-variedad homeomorfa a  $M$ . Como  $D_1$  y  $D_2$  son esenciales, la superficie  $S' = S \cap B$  es de género positivo (no es un disco), así que la descomposición de Heegaard de  $S^3$  inducida por la original es estabilizada. Los discos de estabilización, vistos en  $(H_1, H_2; S)$ , muestran que  $S$  también es estabilizada.  $\square$

De las Proposiciones 2.16 y 2.17 obtenemos que si  $M$  es una variedad irreducible distinta de  $S^3$ , entonces una descomposición de  $M$  es estabilizada si y sólo si es reducible. Así que el problema de encontrar descomposiciones no estabilizadas se traduce a encontrar descomposiciones irreducibles.

**Definición 2.18.** *Una descomposición de Heegaard  $(H_1, H_2; S)$  es débilmente reducible si existen discos esenciales  $D_i \subset H_i$  tal que  $\partial D_1$  y  $\partial D_2$  son disjuntos en  $S$ . En caso contrario diremos que la descomposición es fuertemente irreducible.*

De la Observación 2.14, es fácil ver que toda descomposición reducible es débilmente reducible; basta con isotopar las fronteras de  $D_i$  para hacerlas disjuntas.

Intuitivamente, si una descomposición es débilmente reducible, indica que una 2-asa (con corazón  $D_2$ ) se pegó de tal forma disjunta a una 1-asa (con co-corazón  $D_1$ ) y por tanto podemos cambiar el orden de pegado.

Al igual que en el caso de descomposiciones reducibles, los discos que hacen débilmente reducible a una descomposición  $(H_1, H_2; S)$  son discos de compresión de  $S$  propiamente encajados en cada uno de los cuerpos de compresión. Como estos discos no interactúan, es posible comprimir simultáneamente a  $S$  hacia ambos lados, por lo que llamaremos a  $S$  fuertemente compresible. En caso contrario diremos que  $S$  es débilmente incompresible.

**Definición 2.19.** *Una descomposición de Heegaard  $M = (H_1, H_2; S)$  es  $\partial$ -reducible si existe un disco  $\partial$ -reductor de  $M$  que intersecta a  $S$  en sólo una curva.*

Esto sugiere un resultado análogo al Teorema 2.15.

## 2 Descomposiciones de Heegaard

**Teorema 2.20** ([18], Corolario 2.4.b). *Cualquier descomposición de Heegaard de una 3-variedad  $\partial$ -reducible es  $\partial$ -reducible.*

**Proposición 2.21.** *Si  $(H_1, H_2; S)$  es  $\partial$ -reducible entonces es débilmente reducible.*

*Demostración.* Sea  $D$  un disco  $\partial$ -reductor de la descomposición; sin pérdida de generalidad, supongamos que  $\partial D \subset \partial_- H_1$ . Como  $D$  intersecta a  $S$  solamente en una curva esencial,  $A = D \cap H_1$  es un anillo esencial en  $H_1$  y  $D_2 = D \cap H_2$  es un disco esencial en  $H_2$ . Por el Lema 2.10 existe un disco esencial  $D_1 \subset H_1$  disjunto de  $A$  por lo que  $\partial D_1 \cap \partial D_2 = \emptyset$ , así que la descomposición es débilmente reducible.  $\square$

**Teorema 2.22.** *Sea  $(H_1, H_2; S)$  una descomposición de Heegaard de una 3-variedad  $M$ . Si  $\partial_- H_1$  o  $\partial_- H_2$  son compresibles en  $M$ , entonces la descomposición es débilmente reducible.*

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $\partial_- H_1$  es compresible en  $M$ ; es decir, existe un disco  $D \subset M$  tal que  $\partial D$  es una curva esencial en  $\partial_- H_1$ , entonces  $D$  es un disco de  $\partial$ -reductor para  $M$ , por lo que  $M$  es  $\partial$ -reducible. Por el Teorema 2.20 la descomposición es  $\partial$ -reducible y por la Proposición 2.21 es débilmente reducible.  $\square$

**Teorema 2.23.** *Si  $(H_1, H_2; S)$  es una descomposición de Heegaard débilmente reducible de una 3-variedad  $M$ , entonces es reducible o  $M$  contiene una superficie incompresible.*

*Demostración.* Como  $(H_1, H_2; S)$  es débilmente reducible,  $S$  puede comprimirse simultáneamente hacia  $H_1$  y  $H_2$ . Sea  $\Delta_i \subset H_i$  una colección de discos de compresión para  $S$  tales que  $\partial \Delta_1 \cap \partial \Delta_2 = \emptyset$  y las familias  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  son maximales; es decir, si  $S_i$  es la superficie obtenida al comprimir  $S$  a lo largo de  $\Delta_i$  y  $D$  es un disco de compresión para  $S_i$ , entonces  $D$  intersecta a las fronteras de  $\Delta_j$ , con  $i \neq j$ .

Sea  $\bar{S}$  la superficie obtenida al comprimir  $S_1$  (o bien  $S_2$ ) a lo largo de  $\Delta_2$  (o bien  $\Delta_1$ ).  $\bar{S}$  separa a  $M$  en dos 3-variedades  $W_1$  y  $W_2$  tales que  $H_1$  (o bien  $H_2$ ) puede recuperarse pegando 1-asas a  $W_1$  (o a  $W_2$ ). Si pintamos a  $H_1$  de rojo y a  $H_2$  de azul, la compresión de  $S$  a lo largo de  $\Delta_i$ , con  $i = 1, 2$ , pinta lunares rojos y azules en  $\bar{S}$ , un par rojo por cada disco en  $\Delta_1$  y un par azul por cada disco en  $\Delta_2$ .

Veamos que  $\bar{S}$  es incompresible en  $M$ . Supongamos que  $\bar{S}$  es compresible hacia  $W_1$ . Después de empujar un poco a  $\bar{S}$  hacia  $W_2$ , podemos ver a  $S_1$  como una superficie de Heegaard de  $W_1$ , esto es  $W_1 = (H_1, W_1 \cap H_2; S_1)$ . La compresión de  $\bar{S}$  es una  $\partial$ -reducción de  $W_1$ . Así que, por el Teorema 2.20, existe un disco  $D$   $\partial$ -reductor que intersecta a  $S_1$  en un sólo círculo; podemos tomar  $\partial D$  disjunta de  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$ . Pero esto contradice la maximalidad de  $\Delta_i$ . Por lo tanto  $\bar{S}$  es incompresible.

Si  $\bar{S}$  no es una colección de esferas, hemos encontrado una superficie incompresible en  $M$ . Supongamos que  $\bar{S}$  es una colección de esferas, entonces tiene una componente  $\bar{S}_0$  que tiene lunares rojos y azules, al menos uno de cada color. Sea  $\sigma \subset \bar{S}_0$  un curva cerrada que separa a los lunares rojos de los azules, así  $\sigma$  separa a  $\bar{S}_0$  en dos discos que contienen lunares de un color,  $D_1$  y  $D_2$ . Si  $D_1$  contiene a los rojos y  $D_2$  a los azules, empujamos  $D_1$  a  $H_1$  y  $D_2$  a  $H_2$ ; tenemos que  $\bar{S}_0$  se descompone en dos discos por lo que es una esfera reductora para  $(H_1, H_2; S)$ .  $\square$

Al final de la demostración anterior,  $\bar{S}$  divide a  $M$  en dos 3-variedades, no necesariamente conexas,  $W_1$  y  $W_2$ . Cada componente de  $W_i$  hereda una superficie de Heegaard (una componente de  $S_i$ ) de género menor que  $S$ . Esta descomposición podría ser nuevamente débilmente reducible por lo que podemos repetir el proceso anterior. A la larga, una descomposición de Heegaard reducible se rompe en una serie de descomposiciones fuertemente irreducibles. Las descomposiciones que consisten de más de un bloque (no necesariamente fuertemente irreducibles) se conocen como *descomposiciones de Heegaard generalizadas* (Figura 2.9).

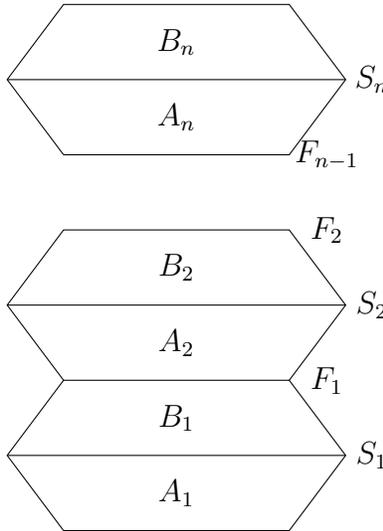


Figura 2.9: Esquema de una descomposición de Heegaard generalizada

## 2.4. Distancia de una descomposición de Heegaard

Sea  $S$  una superficie orientable, el *complejo de curvas* de  $S$ , denotado por  $C(S)$ , se define como:

- Los vértices son las clases de isotopía de curvas simples cerradas esenciales en  $S$ , a las que denotaremos por  $[\gamma]$ .
- $[\gamma_0], \dots, [\gamma_k]$  determinan un  $k$ -simplejo de  $C(S)$  si tienen representantes que no se intersectan dos a dos.

Observemos que si  $S$  es una esfera o un disco, el conjunto de curvas esenciales es vacío. Si  $S$  es el 2-toro, cualesquiera dos curvas esenciales no isotópicas de  $S$  se intersectan. En adelante, sólo consideraremos superficies para las cuales su complejo de curvas es no vacío y no consiste de puntos aislados.

Para un par de curvas esenciales en la misma componente de  $S$ ,  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , se define la distancia  $d_C([\gamma_1], [\gamma_2])$  como el mínimo número de aristas que conectan a  $[\gamma_1]$  con  $[\gamma_2]$ ; claramente, si  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son isotópicas  $d_C([\gamma_1], [\gamma_2]) = 0$ . Si  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  están en distintas componentes de  $S$ ,

## 2 Descomposiciones de Heegaard

$d_C(\gamma_1, \gamma_2) = \infty$ . Por último, usaremos la convención  $d_C(\gamma, \emptyset) = 0$  para cualquier curva esencial  $\gamma \subset S$ .

Sea  $(H_1, H_2; S)$  una descomposición de Heegaard de una 3-variedad compacta  $M$ . La superficie  $S$  puede ser compresible de varias formas hacia cada uno de los cuerpos de compresión  $H_1$  y  $H_2$ . Si  $\Gamma_1$  es el conjunto de todos los discos de compresión de  $S$  que se encuentran en  $H_1$  y  $\Gamma_2$  el conjunto de todos los discos de compresión de  $S$  en  $H_2$ ,  $\partial\Gamma_1$  y  $\partial\Gamma_2$  son curvas esenciales en  $S$ . Así que considerando el complejo de curvas  $C(S)$ , es posible medir que tan compresible es  $S$  hacia ambos lados. En [6], Hempel definió la *distancia de Hempel* de una descomposición de Heegaard  $(H_1, H_2; S)$  como:

$$d(S) = \min\{d_C([\partial\alpha], [\partial\beta]) \mid \alpha \in \Gamma_1, \beta \in \Gamma_2\}.$$

Si  $d(S) = 0$ , existen discos de compresión de  $S$  en ambos lados tales que sus fronteras tienen distancia 0 en el complejo de curvas; podemos isotopar ambos discos de tal forma que coincidan sus fronteras, al pegar las fronteras obtenemos una esfera que intersecta a  $S$  en una única curva esencial, lo cual implica que la descomposición es reducible. Es evidente que si ahora la descomposición es reducible, la distancia de Hempel es 0.

Supongamos que  $d(S) = 1$ , con un razonamiento análogo al caso anterior, obtenemos que existen discos a cada lado de  $S$  cuya frontera es disjunta y no isotópica (de lo contrario  $d(S) = 0$ ), lo cual implica que la descomposición es débilmente reducible. Recíprocamente, si la descomposición es débilmente reducible,  $d(S) \leq 1$ .

De las observaciones anteriores obtenemos las siguientes equivalencias:

**Teorema 2.24.** *Sea  $(H_1, H_2; S)$  una descomposición de Heegaard de una 3-variedad compacta  $M$ , entonces se cumple lo siguiente:*

- a)  $d(S) = 0$  si y sólo si la descomposición es reducible.
- b)  $d(S) \leq 1$  si y sólo si la descomposición es débilmente reducible.
- c)  $d(S) \geq 2$  si y sólo si la descomposición es fuertemente irreducible.

En [6], Hempel probó que si una 3-variedad  $M$  contiene un toro incompresible, entonces  $d(H_1, H_2; S) \leq 2$ , para cualquier descomposición de Heegaard  $(H_1, H_2; S)$  de  $M$ . Posteriormente, Hartshorn generalizó este resultado en [5].

**Teorema 2.25** (Hartshorn). *Si  $M$  es una 3-variedad irreducible que contiene una superficie orientable e incompresible de género  $g \geq 1$ , entonces cualquier descomposición de Heegaard de  $M$  tiene distancia a lo más  $2g$ .*

En el Capítulo 4 definiremos la distancia circular de una descomposición del exterior de un nudo y probaremos un resultado análogo para acotar dicha distancia.

### 2.4.1. Complejo de arcos y curvas de una superficie

Cuando una superficie  $S$  tiene frontera no vacía es posible considerar, además de curvas simples cerradas, arcos simples propiamente encajados en  $S$ ; es decir, arcos cuyos extremos están en  $\partial S$ . De forma análoga, al complejo de curvas  $C(S)$ , construimos el *complejo de curvas y arcos* de  $S$ , denotado por  $AC(S)$ , como:

- Los vértices son las clases de isotopía de arcos y curvas cerradas simples esenciales en  $S$ .
- $[\gamma_0], \dots, [\gamma_k]$  determinan un  $k$ -simplejo de  $AC(S)$  si tienen representantes que no se intersectan dos a dos.

De esta forma, es claro que podemos ver a  $C(S)$  como un subcomplejo de  $AC(S)$ . Se define la distancia  $d_{AC}$  en el complejo  $AC(S)$  similarmente a como lo hicimos en el complejo  $C(S)$ .

**Lema 2.26** ([11], sección 5). *Sea  $S$  una superficie orientable, conexa, de género  $g$  y con  $n$  componentes en su frontera. Para cualesquiera  $\gamma_1, \gamma_2$  en  $C(S)$  se cumple:*

a) Si  $2g + 1 \geq 5$ ,

$$\frac{1}{2}d_C(\gamma_1, \gamma_2) \leq d_{AC}(\gamma_1, \gamma_2) \leq d_C(\gamma_1, \gamma_2).$$

b) Si  $(g, n) = (1, 1)$ ,

$$d_C(\gamma_1, \gamma_2) \leq d_{AC}(\gamma_1, \gamma_2) \leq d_C(\gamma_1, \gamma_2) + 2.$$

c) Si  $(g, n) = (0, 4)$ ,

$$\frac{1}{2}d_C(\gamma_1, \gamma_2) \leq d_{AC}(\gamma_1, \gamma_2) \leq d_C(\gamma_1, \gamma_2) + 2.$$



### 3 Exterior de un Nudo

Sabemos que toda 3-variedad compacta tiene una descomposición de Heegaard, lo cual incluye a exteriores de nudos. Sin embargo, nos gustaría descomponer a  $E(K)$  usando una superficie de Seifert como superficie de Heegaard; pero hasta el momento hemos usado superficies cerradas para tal papel. Si abstraemos la definición de cuerpo de compresión, no es difícil ver que un cuerpo de compresión  $W$  es en realidad un cobordismo entre dos superficies cerradas  $\partial_-W$  y  $\partial_+W$  que se obtienen al pegar asas de forma particular.

**Definición 3.1.** *Un cuerpo de compresión generalizado  $W$  es un cobordismo rel  $\partial$  entre dos superficies  $\partial_+W$  y  $\partial_-W$  (posiblemente con frontera no vacía) tal que  $W \cong (\partial_+W \times I) \cup 2 - \text{asas} \cup 3 - \text{asas}$  (pegadas a lo largo de  $\partial_+W \times \{1\}$ ) y  $\partial_-W$  no tiene componentes que sean 2-esferas. Si  $\partial_-W \neq \emptyset$  y  $W$  es conexa, entonces  $W$  se obtiene de pegar 1-asas a  $\partial_-W \times I$  a lo largo de discos en  $\partial_-W \times 1$ . La frontera de  $W$  se divide en  $\partial_+W$ ,  $\partial_-W$  y la frontera vertical  $\partial_vW = \partial(\partial_+W) \times I = \partial(\partial_-W) \times I$ .*

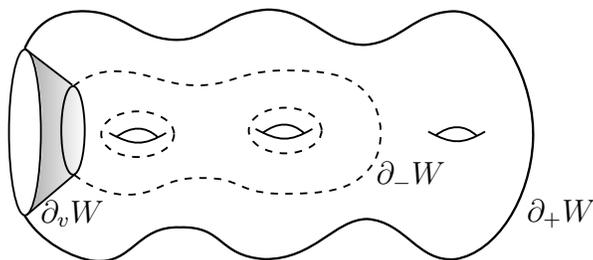


Figura 3.1: Cuerpo de compresión.

Con esta definición obtenemos un cuerpo de compresión cuando  $\partial(\partial_+W) = \emptyset$ ; si, además,  $\partial_-W = \emptyset$ , lo que obtenemos es un cubo con asas. En adelante, nos ahorraremos la palabra “generalizado” para referirnos a los cuerpos de compresión generalizados.

Sea  $M$  una variedad y  $f : M \rightarrow S^1$  una función suave. Para un punto  $x \in M$  elegimos una vecindad  $V$  de  $f(x)$  en  $S^1$  difeomorfa a un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$  y sea  $U = f^{-1}(V)$ . La función restringida  $f|_U$  se identifica entonces con una función suave de  $U$  a  $\mathbb{R}$ . De esta forma, todas las nociones locales de Teoría de Morse con valores reales, en particular las nociones de punto crítico no degenerado e índice de punto crítico, se traducen inmediatamente para funciones con valores circulares.

### 3 Exterior de un Nudo

**Definición 3.2.** Una función suave  $f : M \rightarrow S^1$  es de Morse si todos sus puntos críticos son no degenerados.

Denotaremos por  $S(f)$  al conjunto de todos los puntos críticos de  $f$  y por  $S_k(f)$  al conjunto de puntos críticos de índice  $k$ .

Como en el primer capítulo, si  $M$  es compacta entonces  $S(f)$  es finito; en este caso denotaremos por  $m(f)$  y  $m_k(f)$  a las cardinalidades de  $S(f)$  y  $S_k(f)$ , respectivamente. Una función de Morse es *mínima* si el número  $m_k(f)$  es mínimo para toda  $k$ , sobre la clase de todas las funciones de Morse homotópicas a  $f$ .

Aún en el caso de funciones de Morse con valores reales no siempre existen funciones de Morse mínimas, el problema es que en general los número de Morse  $m_k(f)$  no son mínimos simultáneamente. En la primera sección mostraremos que siempre es posible encontrar una función de Morse mínima para el exterior de un nudo y que dicha función sólo tiene puntos críticos de índice 1 y 2.

### 3.1. Descomposición en asas de $E(K)$

Sea  $f : E(K) \rightarrow S^1$  una función de Morse, supongamos que  $1 \in S^1$  es un valor regular de  $f$ . Consideremos al cubriente cíclico infinito  $\tilde{E}(K)$  de  $E(K)$  y sea  $F : \tilde{E}(K) \rightarrow \mathbb{R}$  un levantamiento de  $f$ .  $W = F^{-1}([0, 1])$  es un cobordismo entre dos superficies con frontera  $F^{-1}(0)$  y  $F^{-1}(1)$ . Los siguientes resultados se pueden encontrar en [21].

**Lema 3.3.** Existe una función de Morse regular  $g : E(K) \rightarrow S^1$  tal que  $m_k(g) \leq m_k(f)$  para cada  $k$  y una de las superficies que corresponde a un nivel regular de  $g$  es conexa.

*Demostración.* Supongamos que  $S = F^{-1}(0)$  es no conexo. Construyamos una función  $f_0$  tal que para cada  $k$ ,  $m_k(f_0) \leq m_k(f)$  y se cumpla sólo una de las siguientes:

- a)  $m(f_0) < m(f)$  o bien
- b)  $m(f_0) = m(f)$  y  $f_0$  tiene una superficie de nivel regular  $S_0$  tal que el número de componentes conexas de  $S_0$  es estrictamente menor que el de  $S$ .

Aplicando esta construcción sucesivamente probamos el Lema.

Como  $W$  es conexa y  $S$  no lo es, la función inducida por la inclusión  $H_0(S) \rightarrow H_0(W)$  es no inyectiva y por tanto tiene kernel no trivial. Por un argumento de reordenamiento (ver [14]), podemos suponer que  $F : W \rightarrow \mathbb{R}$  está ordenado, es decir, existen valores regulares  $0 = a_1 < a_2 < a_3 < a_4 = 1$  tal que para cada  $i = 0, 1, 2, 3$ , todos los puntos de índice  $i$  de  $F$  están en  $F^{-1}([a_i, a_{i+1}])$ .

Consideramos las siguientes inclusiones:

$$S = F^{-1}(0) \subset F^{-1}([0, a_1]) \subset F^{-1}([0, a_2]) \subset W.$$

$F^{-1}([0, a_1])$  se obtiene al pegar 0-asas a  $F^{-1}(0) \times I$  y  $W$  se obtiene al pegar 2-asas y 3-asas a  $F^{-1}([0, a_2])$ . así que la primera y tercera inclusión inducen monomorfismos en  $H_0$ , por lo que la segunda inclusión induce un morfismo no inyectivo. Esto implica que pegamos una 1-asa que une a dos componentes distintas de  $F^{-1}([0, a_1])$ . Tenemos dos casos:

- i) Ambas componentes son componentes de  $F^{-1}(0) \times I$ .
- ii) Al menos una de las componentes es una 0-asa.

En el primer caso podemos redefinir la función de Morse  $F$  para que la superficie de nivel  $S$  tenga una componente menos. En el segundo caso podemos eliminar la 0-asa y la 1-asa involucradas, de esta forma obtenemos una función de Morse con menos puntos críticos.  $\square$

Si ahora  $S$  es conexa, con un argumento de cancelación como en la demostración anterior, no es necesario pegar 0-asas para obtener  $W$ . Haciendo lo mismo para la función de Morse  $-F$ , encontramos que podemos deshacernos de todos los puntos críticos de índice 3.

**Lema 3.4.** *Si  $f$  tiene una superficie de nivel regular conexa  $S$ , entonces existe una función de Morse  $g$  que no tiene puntos críticos de índice 0 o 3 y tal que  $S$  es una superficie de nivel de  $g$ . Más aún,  $m_1(g) \leq m_1(f)$  y  $m_2(g) \leq m_2(f)$ .*

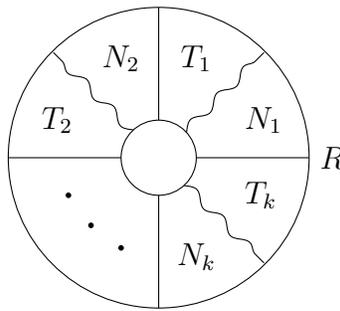
De los Lemas 3.3 y 3.4 obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema 3.5.** *Existe una función de Morse mínima  $f : E(K) \rightarrow S^1$  con únicamente puntos críticos de índice 1 y 2.*

Del Lema 3.4 obtenemos que podemos descomponer al exterior de un nudo como sigue:

$$E(K) = ((R \times I) \cup N_1 \cup T_1 \cup \dots \cup N_k \cup T_k) / R \times \{0\} \sim R \times \{1\},$$

donde  $R$  es una superficie de nivel regular conexa de  $f$  y por tanto una superficie de Seifert para  $K$ ;  $N_i$  es una colección de 1-asas correspondientes a puntos críticos de índice 1 y  $T_i$  es una colección de 2-asas correspondientes a puntos críticos de índice 2.



Llamaremos *descomposición circular en asas para  $E(K)$*  a la descomposición anterior. Esta noción fue introducida por Fabiola Manjarrez en [13], al igual que ella definimos las superficies

$$S_i = cl[\partial((R \times I) \cup N_1 \cup T_1 \cup \dots \cup N_i) \setminus (\partial E(K) \cup R \times 0)]$$

y

$$F_{i+1} = cl[\partial((R \times I) \cup N_1 \cup T_1 \cup \dots \cup N_i \cup T_i) \setminus (\partial E(K) \cup R \times 0)],$$

### 3 Exterior de un Nudo

para  $i = 1, \dots, k$ . Cuando  $i = k$ ,  $F_{k+1} = F_1 = R$ .

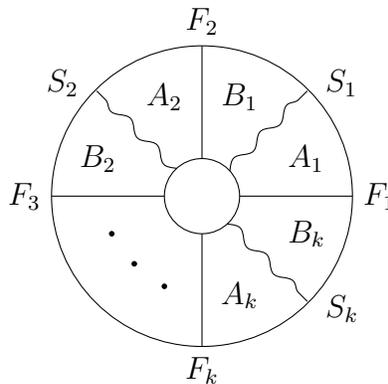
Llamaremos *superficie de nivel delgada* a  $F_i$  y *superficie de nivel gruesa* a  $S_i$ . Es importante notar que, aunque  $F_i$  y  $S_i$  no necesariamente son conexas, una de sus componentes (la que contiene a su frontera) es una superficie de Seifert para  $K$ .

Si además hacemos  $W_i = (\text{collar}F_i) \cup N_i \cup T_i$ ,  $S_i$  divide a  $W_i$  en dos cuerpos de compresión  $A_i = (\text{collar}F_i) \cup N_i$  y  $B_i = (\text{collar}S_i) \cup T_i$ . De esta forma obtenemos una descomposición de Heegaard de  $W_i$  en cuerpos de compresión  $A_i$  y  $B_i$ , donde  $\partial_- A_i \cong R$ ,  $\partial_- B_i \cong R$  y  $\partial(\partial_\pm A_i) \cong \partial(\partial_\pm B_i) \cong \partial R$ . Finalmente, se define la *frontera vertical* de cada cuerpo de compresión como  $\partial_v(A_i) = \partial A_i \cap \partial E(K)$  y  $\partial_v B_i = \partial B_i \cap \partial E(K)$ , i.e. la parte de frontera que está en la frontera del exterior. De esta forma, la frontera de nuestros cuerpos de compresión se divide en:  $\partial_+$ ,  $\partial_-$  y  $\partial_v$ .

Con las definiciones anteriores podemos escribir

$$E(K) = (A_1 \cup_{S_1} B_1) \bigcup_{F_2} (A_2 \cup_{S_2} B_2) \bigcup_{F_3} \dots \bigcup_{F_k} (A_k \cup_{S_k} B_k).$$

Denotaremos por  $(F_1, S_1, \dots, F_k, S_k)$  a esta descomposición.



### 3.2. Posición circular delgada para nudos

Ahora que ya tenemos a  $E(K)$  con una estructura de asas, quisiéramos fijarnos en la descomposición más simple; ese sentido de simplicidad nos lo darán las superficies gruesas. Para una superficie cerrada y conexa  $S$ , definimos su *complejidad* como  $c(S) = 1 - \chi(S)$ . Si  $S$  es una superficie compacta, conexa y con frontera no vacía,  $c(S) = 1 - \chi(\bar{S})$ , donde  $\bar{S}$  denota a  $S$  con sus componentes frontera tapadas por discos. Si  $S = S^2$  o  $S = D^2$ ,  $c(S) = 0$ . Finalmente, si  $S$  es disconexa  $c(S) = \sum c(S_i)$ , donde  $S_i$  son las componentes de  $S$ .

**Observación 3.6.** Si  $S$  es una superficie y obtenemos  $S'$  al realizar una compresión no trivial, entonces  $c(S') < c(S)$ .

Sea  $K \subset S^3$  un nudo y  $\mathcal{D}$  una descomposición circular para  $E(K)$ , definimos el ancho circular de  $\mathcal{D}$ , denotado por  $cu(E(K), \mathcal{D})$ , como el conjunto de enteros ordenados de manera no

creciente  $\{c(S_i)\}$ . Definimos el *ancho circular* de  $E(K)$ ,  $cw(E(K))$ , cómo el mínimo sobre todos sus posibles anchos, comparándolos con el orden lexicográfico. Diremos que  $E(K)$  está en *posición delgada* si el ancho de la descomposición es el ancho circular de  $E(K)$ . Si el nudo  $K$  es fibrado, definimos  $cw(E(K)) = 0$ . De forma análoga a [19] se satisface el siguiente resultado.

**Teorema 3.7** ([13]). *Si  $E(K)$  está en posición circular delgada, entonces:*

1. *Cada descomposición de Heegaard  $(A_i, B_i; S_i)$  es fuertemente irreducible.*
2. *Cada  $F_i$  es una superficie incompresible en  $E(K)$ .*
3. *Cada  $S_i$  es una superficie débilmente incompresible.*

*Demostración.* 1. Supongamos que  $(A_i, B_i; S_i)$  es débilmente reducible para algún  $i$ , entonces existen dos discos compresores de  $S_i$ ,  $D_A \subset A_i$  y  $D_B \subset B_i$  tales que  $\partial D_A \cap \partial D_B = \emptyset$ . Comprimos  $S_i$  hacia  $A_i$  a lo largo de  $D_A$  para obtener la superficie  $S_i^A$  que divide a  $A_i$  en cuerpos de compresión  $H_1^A$  y  $H_2^A$ . Hacemos lo mismo para  $B_i$ . Se tiene:

$$\partial_- H_1^A = F_i, \quad \partial_+ H_1^A = \partial_+ H_2^A = S_i^A, \quad \partial_- H_2^A = S_i,$$

$$\partial_- H_1^B = S_i, \quad \partial_+ H_1^B = \partial_+ H_2^B = S_i^B, \quad \partial_- H_2^B = F_{i+1}.$$

Así que obtenemos una nueva descomposición para  $E(K)$  cuyo ancho difiere de la original al cambiar  $c(S_i)$  por  $c(S_i^A)$  y  $c(S_i^B)$ . Por el Lema 3.6 esta nueva presentación tiene un ancho circular menor, lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $(A_i, B_i; S_i)$  es fuertemente irreducible.

2. Supongamos que  $F_i$  es compresible para algún  $i$  y sea  $D'$  un disco de compresión. Sea  $F = \bigcup F_i$ , con un argumento de curva de más adentro, podemos encontrar un disco  $D$  tal que  $D \cap F = \partial D \subset F_j$  para algún  $j$ . Como  $\partial D$  es una curva de más adentro de  $D' \cap F$ ,  $D$  no intersecta a  $F_{j-1}$  o a  $F_{j+1}$ ; es decir,  $D$  está contenido en  $W_j$  o en  $W_{j-1}$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $D$  está contenido en  $W_j$ , entonces  $D$  es un disco compresor de  $\partial_- A_j$  en  $W_j$ . Por el Teorema 2.22  $(A_j, B_j; S_j)$  es débilmente reducible lo que contradice 1.

3. Se sigue de 1. □

El recíproco del Teorema 3.7 no siempre es cierto. El exterior de un nudo puede tener una descomposición en asas circular que cumplen 1, 2 y 3, pero tal descomposición no tiene que ser la más delgada. Llamaremos a una descomposición *localmente delgada* si sus superficies delgadas  $F_i$  son incompresibles y sus superficies gruesas  $S_i$  son débilmente incompresibles.

Recordemos que un nudo es fibrado si su exterior admite una fibración sobre  $S^1$  con fibra una superficie de Seifert. Si  $K$  es un nudo con una descomposición delgada circular en la que las 1-asas se agregan antes que las 2-asas, tal descomposición consta de sólo dos cuerpos de compresión.

**Definición 3.8.**  *$K$  es casi-fibrado si tiene una descomposición circular delgada de la forma  $E(K) = ((R \times I) \cup N_1 \cup T_1)/R \times 0 \sim R \times 1$*

### 3 Exterior de un Nudo

En [4] se prueba que los nudos primos no fibrados de hasta 10 cruces son ejemplos de nudos casi-fibrados; además, tal descomposición circular delgada es realizada por una superficie de Seifert de género mínimo.

El siguiente teorema es uno de los resultados obtenidos por Manjarrez en [13], por completez de este trabajo, presentaremos su prueba.

**Teorema 3.9.** *Sea  $K \subset S^3$  un nudo. Al menos una de las siguientes opciones de cumple:*

- a)  $K$  es fibrado,
- b)  $K$  es casi-fibrado,
- c)  $K$  contiene una superficie cerrada esencial en su complemento. Más aún, esta superficie está en el complemento de una superficie de Seifert para el nudo.
- d)  $K$  tiene al menos dos superficies de Seifert incompresibles no isotópicas.

En la demostración de este teorema necesitamos aplicar un resultado de Waldhausen al doble de  $E(K)$ ,  $E(K) \#_{\partial} E(K)$ , dicha tarea se desarrolla en los siguientes lemas.

**Lema 3.10** ([23], Proposición 5.4). *Sea  $M$  una 3-variedad irreducible. Sean  $F$  y  $G$  superficies incompresibles en  $M$  tales que  $\partial F \subset \partial F \cap \partial G$  y  $F \cap G$  consiste de curvas simples cerradas disjuntas, con intersección transversal a cualquier curva que no está en  $\partial F$ . Supongamos que existe una superficie  $H$  y una función  $f : H \times I \rightarrow M$  tal que  $f|_{H \times 0}$  es una función cubriente sobre  $F$  y  $f(\partial(H \times I) \setminus H \times 0) \subset G$ . Entonces existe una superficie  $\tilde{H}$  y un encaje  $\tilde{H} \times I \rightarrow M$  tal que*

$$\tilde{H} \times 0 = \tilde{F} \subset F \quad \text{y} \quad \text{cl}(\partial(\tilde{H} \times I) \setminus \tilde{H} \times 0) = \tilde{G} \subset G$$

(es decir, una pequeña pieza de  $F$  es paralela a una pequeña pieza de  $G$ ); más aún,  $\tilde{F} \cap G = \partial \tilde{F}$  y, o bien  $\tilde{G} \cap F = \partial \tilde{G}$  o  $\tilde{F}$  y  $\tilde{G}$  son discos.

**Lema 3.11.** *Sea  $M$  una 3-variedad irreducible. Sean  $F$  y  $G$  dos superficies cerradas, incompresibles, conexas, disjuntas e isotópicas en  $M$ . Entonces  $F$  y  $G$  son paralelas, en otras palabras, son cofrontera de una región producto en  $M$ .*

*Demostración.* Como  $F$  y  $G$  son isotópicas, existe  $H : M \times I \rightarrow M$  tal que  $h_t : M \rightarrow M$ , dada por  $h_t(x) = H(x, t)$ , es un homeomorfismo para todo  $t \in I$ ,  $h_0 = id_M$  y  $h_1(F) = G$ . Definimos  $f = H|_{F \times I} : F \times I \rightarrow M$ . La restricción de  $f$  a  $F \times 0$  es la identidad sobre  $F$ , así que es una función cubriente sobre  $F$ . Más aún, como  $F$  es una superficie cerrada,

$$f(\partial(F \times I) \setminus F \times 0) = f(F \times 1) = h_1(F) = G$$

Aplicando el Lema 3.10 encontramos superficies paralelas  $\tilde{F} \subset F$  y  $\tilde{G} \subset G$  tales que  $\tilde{F} \cap G = \partial \tilde{F}$ ; como  $F \cap G = \emptyset$ ,  $\partial \tilde{F} = \emptyset$  así que  $\tilde{F}$  y  $\tilde{G}$  no pueden ser discos y por tanto  $\tilde{G}$  interseca a  $F$  en  $\partial \tilde{G}$ , esto último implica que  $\partial \tilde{G} = \emptyset$ . Por último, basta notar que las únicas subsuperficies de  $F$  y  $G$  con frontera vacía son ellas mismas, por lo que  $F$  y  $G$  son paralelas.  $\square$

**Lema 3.12.** *Sea  $K \subset S^3$  un nudo. Si  $F$  y  $G$  son superficies de Seifert disjuntas, incompresibles e isotópicas en  $E(K)$ , entonces  $F$  y  $G$  son paralelas.*

*Demostración.* Sea  $M$  el doble de  $E(K)$ , es decir  $M = E(K) \#_{\partial} E(K)$ .  $M$  es una variedad irreducible pues se construye al pegar dos copias de  $E(K)$  a lo largo de su frontera. Sean  $F'$  y  $G'$  las superficies cerradas en  $M$  que se obtienen al pegar las dos copias de  $F$  y las dos copias de  $G$ , respectivamente. Por hipótesis,  $F'$  y  $G'$  son incompresibles, disjuntas e isotópicas, así que por el Lema 3.11 son paralelas.

Por construcción, la intersección en  $M$  de  $F'$  y  $G'$  con la imagen de  $\partial E(K)$  son cofrontera de un anillo producto  $A$  en la imagen de  $\partial E(K)$ , el cual está acotado por  $F'$  y  $G'$ . Podemos separar  $M$  a lo largo de  $\partial E(K)$  para recuperar a la variedad  $E(K)$ . Las superficies  $F$  y  $G$  heredan el paralelismo de  $F'$  y  $G'$ , por lo que  $F$  y  $G$  son cofrontera de una región producto en  $E(K)$ .  $\square$

*Demostración del Teorema 3.9.* Sea  $K \subset S^3$  un nudo, consideremos una descomposición circular delgada

$$\mathcal{D} = (R \times I) \cup N_1 \cup T_1 \cup \dots \cup N_k \cup T_k / R \times 0 \sim R \times 1$$

donde  $R$  es una superficie de Seifert,  $N_i$  son 1-asas y  $T_i$  son 2-asas.

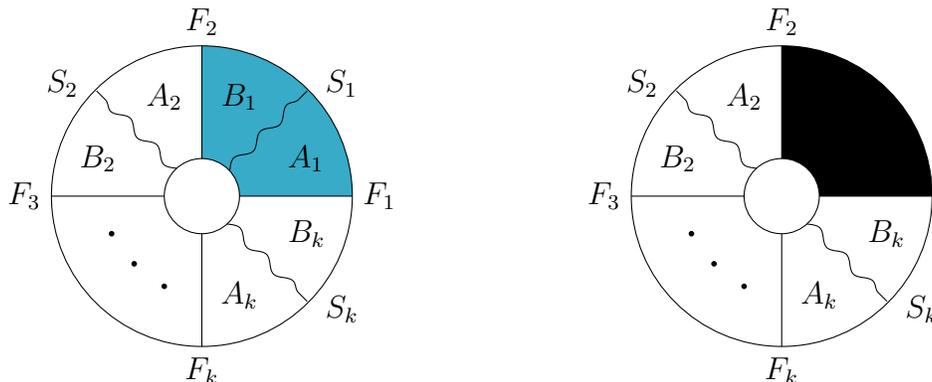
Supongamos que  $K$  no es fibrado ni casi-fibrado, entonces existe una superficie de nivel delgada  $F_2$  diferente de  $R$ . Por el Teorema 3.7,  $F_2$  es una superficie incompresible en  $E(K)$ . Si  $F_2$  no es conexa, entonces  $F_2$  contiene una componente cerrada  $F_2'$  y una componente con frontera  $F_2''$ ; claramente  $F_2''$  es una superficie de Seifert para  $K$  y  $F_2'$  es una superficie esencial (pues es incompresible,  $\partial$ -incompresible y no es  $\partial$ -paralela) que vive en el complemento de  $F_2''$ ; es decir, se cumple *c*).

Supongamos ahora que  $F_2$  es conexa, entonces  $F_2$  es una superficie de Seifert incompresible. Si  $F_2$  es isotópica a  $R$ , entonces  $R$  también es incompresible y por el Lema 3.12 son paralelas; es decir, acotan una región producto. Podemos cambiar la descomposición

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= (R \times I) \cup N_1 \cup T_1 \cup \dots \cup N_k \cup T_k / R \times 0 \sim R \times 1 \\ &= (A_1 \cup_{S_1} B_1) \bigcup_{F_2} (A_2 \cup_{S_2} B_2) \bigcup_{F_3} \dots \bigcup_{F_k} (A_k \cup_{S_k} B_k) \end{aligned}$$

por

$$\begin{aligned} \mathcal{D}' &= (R \times I') \cup N_2 \cup T_2 \cup \dots \cup N_k \cup T_k / R \times 0 \sim R \times 1 \\ &= (A' \cup_{S_2} B_2) \bigcup_{F_3} (A_3 \cup_{S_3} B_3) \bigcup_{F_4} \dots \bigcup_{F_k} (A_k \cup_{S_k} B_k) \end{aligned}$$



### 3 Exterior de un Nudo

Se tiene que  $cw(E(K), \mathcal{D}') < cw(E(K), \mathcal{D})$ , lo cual contradice que  $D$  estaba en posición delgada. Podemos concluir que  $F$  no es isotópica a  $R$  por lo que se cumple  $d$ ).  $\square$

### 3.3. Superficies en cuerpos de compresión

Sea  $K \subset S^3$  un nudo cuyo exterior  $E(K)$  tiene una descomposición en asas circular ( $F_1, S_1, \dots, F_k, S_k$ ). Supongamos que  $G \subset E(K)$  es una superficie esencial y orientable de género  $g$ . Consideramos su intersección con el cuerpo de compresión  $A_i$ , si en  $G \cap A_i$  hay una componente  $G_0$   $\partial$ -compresible, entonces existe un disco  $D$  propiamente encajado en  $A_i$  tal que  $\partial D = \alpha \cup \beta$ , donde  $\alpha = D \cap G_0$  y  $\beta \subset \partial A_i$  son arcos.

Queremos hacer  $\partial$ -compresión a  $G \cap A_i$  de tal forma que globalmente la nueva superficie sea isotópica a  $G$ . Si  $\beta \cap \partial E(K) = \emptyset$ , podemos hacer  $\partial$ -compresión en  $A_i$  empujando la superficie hacia otro cuerpo de compresión ( $B_i$  o  $B_{i-1}$ ). Específicamente, supongamos que  $\beta \cap \partial E(K) = \emptyset$  y  $\beta \subset S_i$ , sea  $\eta(\alpha) \subset G_0$  una vecindad regular de  $\alpha$ , empujamos  $\eta(\alpha)$  a lo largo de  $D$  traspasando  $S_i$ . Esto remueve una 1-asa (de dimensión 2) de  $G_0$  y pega una 1-asa en  $B_i$  a  $G_0$  (Figura 3.2). Al hacer esto la superficie resultante es isotópica a  $G$ .

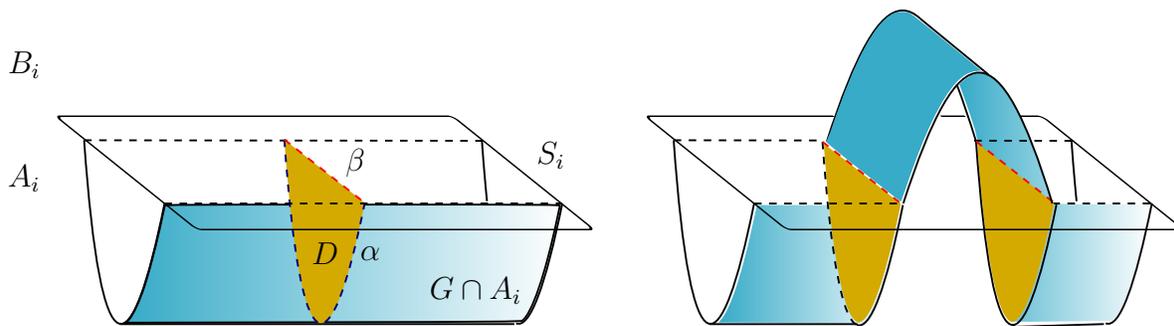


Figura 3.2:  $\partial^*$ -compresión.

A la movida anterior la llamaremos una  $\partial^*$ -compresión de  $G$  de  $A_i$  a  $B_i$ . Si  $G$  admite una  $\partial^*$ -compresión de  $A_i$  a  $B_i$ , diremos que  $G$  es  $\partial^*$ -compresible de  $A_i$  a  $B_i$ . De forma análoga se definen  $\partial^*$ -compresión de  $A_i$  a  $B_{i-1}$ , de  $B_i$  a  $A_i$  y de  $B_i$  a  $A_{i+1}$ . La idea de realizar una  $\partial$ -compresión que mueva la superficie de un cuerpo de compresión a otro fue dada por Hartshorn en [5]. Lamb y Weed introdujeron la  $\partial^*$ -compresión para descomposiciones circulares en [12].

En general, si  $W$  es un cuerpo de compresión y  $R$  es una superficie propiamente encajada en  $W$ ,  $R$  es  $\partial^*$ -compresible si es  $\partial$ -compresible hacia  $\partial_- W$  o  $\partial_+ W$ . Diremos que  $R$  es  $\partial^*$ -incompresible si no es posible realizar una  $\partial^*$ -compresión a  $R$ .

**Lema 3.13.** *Supongamos que  $G'$  es el resultado de hacer una  $\partial^*$ -compresión a  $G$  de  $A_i$  a  $B_i$ . Entonces  $\chi(G' \cap A_i) = \chi(G \cap A_i) + 1$  y  $\chi(G' \cap B_i) = \chi(G \cap B_i) - 1$ .*

*Demostración.* Hacer una  $\partial^*$ -compresión es equivalente a remover una 1-asa de dimensión 2, la cual es homotópica a una 1-celda con característica de Euler  $-1$ , así que al removerla aumentemos la característica de Euler por 1; es decir,  $\chi(G' \cap A_i) = \chi(G \cap A_i) + 1$ .

Como  $G \cap A_i$  y  $G \cap B_i$  sólo se intersectan en círculos, los cuales tienen característica cero,  $\chi(G \cap (A_i \cup B_i)) = \chi(G \cap A_i) + \chi(G \cap B_i)$ . Fuera de  $A_i \cup B_i$ , la superficie permanece igual, además  $G'$  es isotópica a  $G$ , por lo que  $\chi(G') = \chi(G)$ . Haciendo cuentas, obtenemos que  $\chi(G' \cap B_i) = \chi(G \cap B_i) - 1$ .  $\square$

Diremos que un anillo es  $\partial^*$ -paralelo si es  $\partial$ -paralelo a  $S_i$  o a  $F_i$  en  $A_i$ . Sea  $G_0$  un anillo  $\partial^*$ -paralelo y  $\alpha$  un arco, como en la definición de  $\partial^*$ -compresión, que une a las dos fronteras de  $G_0$ . Al hacer  $\partial^*$ -compresión obtenemos un disco que es  $\partial$ -paralelo a  $S_i$  o  $F_i$ , por lo que podemos isotopar  $G_0$  para eliminar la intersección. A esta clase de compresión la llamaremos  *$\partial^*$ -compresión anular*. Cualquier  $\partial^*$ -compresión que no sea anular se llamará  *$\partial^*$ -compresión elemental*.

Es importante observar que al hacer una  $\partial^*$ -compresión anular y eliminar el disco resultante, lo que hacemos es eliminar una componente anillo de  $G \cap A_i$ , así que la característica de Euler no cambia; es decir,  $\chi(G' \cap A_i) = \chi(G \cap A_i)$  y  $\chi(G' \cap B_i) = \chi(G \cap B_i)$ .

En el Teorema 2.11 mencionamos que las únicas superficies propiamente encajadas en cuerpos de compresión que son incompresibles,  $\partial$ -incompresibles y que no son  $\partial$ -paralelas son discos esenciales y anillos producto. Quisiéramos dar un resultado análogo para nuestros nuevos cuerpos de compresión, el problema radica en que la frontera de  $A_i$  y  $B_i$  está dividida en tres partes:  $\partial_+$ ,  $\partial_-$  y  $\partial_v$ .

Recordemos que  $A_i = (F_i \times I) \cup N_i$ , donde  $N_i$  es una colección de 1-asa pegadas a  $F_i \times 1$ . Elegimos un arco esencial  $\gamma$  propiamente encajado en  $F_i \times 1$  que es disjunto de los discos por los que se pega  $N_i$ ; de esta forma,  $D = \gamma \times I$  es un disco esencial propiamente encajado en  $A_i$  que es disjunto de  $N_i$ . Llamaremos a  $D$  un *disco producto* y a  $\gamma$  un *arco generador* en  $F_i$ . Similarmente se define un disco producto en  $B_i$ .

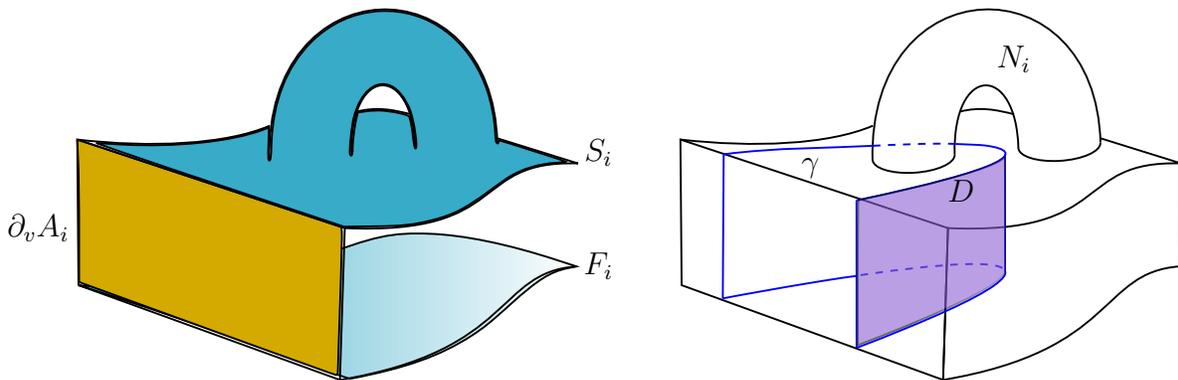


Figura 3.3: Disco producto.

**Teorema 3.14.** *Sea  $W$  un cuerpo de compresión con exactamente una componente en su frontera vertical. Las únicas superficies conexas, incompresibles,  $\partial^*$ -incompresibles y que no son  $\partial$ -paralelas en  $W$  son discos esenciales, anillos producto y discos producto.*

### 3 Exterior de un Nudo

La demostración de este teorema se sigue de los siguientes dos lemas.

**Lema 3.15.** *Supongamos que  $R$  es una superficie conexa, incompresible y no  $\partial$ -paralela propiamente encajada en  $W$ , que puede ser isotopada para ser disjunta de  $\partial_v W$ . Si  $R$  es  $\partial^*$ -incompresible, entonces  $R$  es un disco esencial o un anillo producto.*

*Demostración.* Sea  $\Delta$  un sistema de discos minimal de  $W$  disjunto de  $R$  (usando un argumento de curva de más adentro y arco de más afuera, siempre es posible encontrar dicho sistema de discos). Cortando a  $W$  a lo largo de  $\Delta$  obtenemos una 3-variedad  $V \cong \partial_- W \times I$ , por lo que  $R \subset V$ . Si  $\partial V \cap R = \emptyset$ , entonces  $R$  es cerrada y, por lo tanto, compresible; se sigue que  $\partial V \cap R \neq \emptyset$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $R \cap \partial_- W \neq \emptyset$ .

Si ocurre que  $g(R) > 0$ ,  $\pi_1(R, \partial R \cap \partial_- W)$ <sup>1</sup> tiene un elemento no nulohomotópico. Como  $V \cong \partial_- W \times I$ ,  $\pi_1(V, \partial_- W)$  consiste únicamente del elemento nulohomotópico. Por lo anterior, existe un lazo esencial en  $R$  que es frontera de un disco en  $V$ , lo que implica que  $R$  es compresible, . Por tanto  $g(R) = 0$ .

Sabemos que  $R \cap \partial_- W \neq \emptyset$ , si tal intersección consta de más de una componente, elegimos a dos puntos,  $x_1$  y  $x_2$ , en componentes distintas. Como  $R$  es conexa, existe un arco  $\alpha$  que une a  $x_1$  con  $x_2$ , dicho arco es esencial en  $R$  pues su frontera está en componentes distintas de  $\partial R$ . Si  $\partial_- W$  es no conexa,  $R$  está contenida en  $\partial_- W' \times I$ , donde  $\partial_- W'$  es una componente conexa de  $\partial_- W$ ; podemos considerar un arco  $\beta$  en  $\partial_- W$  que une a  $x_1$  con  $x_2$ . Nuevamente, como la clase de homotopía de un punto es la única clase de  $\pi_1(V, \partial_- W)$ , existe un disco  $D$  en  $W$  cuya frontera es  $\alpha \cup \beta$ . Hemos llegado a que  $R$  es  $\partial^*$ -compresible, lo cual es una contradicción, por lo que  $R \cap \partial_- W$  consta de sólo una componente.

Con un razonamiento análogo y usando que  $\pi_1(V, \partial_- W \times \{1\}) \subset \partial_+ W$  es el conjunto del elemento nulohomotópico, obtenemos que  $|R \cap \partial_+ W| \leq 1$ . Concluimos que  $R$  es un disco esencial si no interseca a  $\partial_+ W$  y un anillo producto si lo hace.  $\square$

**Lema 3.16.** *Sea  $W$  un cuerpo de compresión con exactamente una componente en su frontera vertical. Supongamos que  $R$  es una superficie conexa propiamente encajada en  $W$ , incompresible y no  $\partial$ -paralela, que no puede ser isotopada para ser disjunta de  $\partial_v W$ . Si  $R$  es  $\partial^*$ -incompresible, entonces  $R$  es un disco producto.*

*Demostración.* Primero isotopamos a  $R$  de tal forma que intersekte a  $\partial_v W$  en un número mínimo de arcos. Tal intersección consiste de una colección de al menos dos arcos esenciales y paralelos en  $\partial_v W$  (de lo contrario podemos isotopar a  $R$  para hacerla disjunta de  $\partial_v W$ ). Podemos isotopar a  $R \cap \partial_v W$  para que sea vertical con respecto a la identificación  $W \cong (\partial_- W \times I) \cup N_i$ , es decir, cada arco en  $R \cap \partial_v W$  puede considerarse como  $\{x\} \times I$  para algún  $x \in \partial(\partial_- W)$ .

<sup>1</sup> Sea  $(X, x_0)$  un espacio punteado y  $A \subset X$  que contiene a  $x_0$ . Para  $n \geq 1$ , el  $n$ -ésimo conjunto de homotopía relativa de  $(X, A, x_0)$  se define como:

$$\pi_n(X, A, x_0) = [(D^n, S^{n-1}, s_{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)],$$

donde  $s_n = (1, 0, \dots, 0) \in S^n$  es el punto base en común de  $S^n$  y  $D^{n+1}$ .

Para  $n \geq 2$ , se puede definir la operación concatenación como en  $\pi_n(X, A, x_0)$ , haciendo a  $\pi_n(X, A, x_0)$  un grupo. Usualmente nos olvidamos del punto  $x_0$  y abreviamos como  $\pi_n(X, A)$ .

Como en el lema anterior, encontramos un sistema de discos minimal  $\Delta$  para  $W$  e isotopamos  $R$  para que esté contenida en la 3-variedad que se obtiene al cortar  $W$  a lo largo de  $\Delta$ ,  $V \cong \partial_-W \times I$ .

Si  $g(R) > 0$  entonces  $\pi_1(R, R \cap \partial_-W)$  tiene un elemento no nulohomotópico. Como  $\pi_1(V, \partial_-W)$  consiste del elemento nulohomotópico, existe un lazo esencial en  $R$  que es frontera de un disco en  $V$ , lo cual implica que  $R$  es compresible. Se tiene entonces que  $g(R) = 0$ .

Como  $G \cap \partial_v W$  consiste de por lo menos dos arcos esenciales,  $|R \cap \partial_-W|, |R \cap \partial_+W| \geq 1$ . Si  $\partial R$  interseca a  $\partial_-W$  en más de una componente, elegimos a dos puntos  $x_1$  y  $x_2$  en componentes distintas de  $\partial R \cap \partial_-W \setminus \partial_v W$ . Como  $R$  es conexa, existe un arco  $\alpha$  en  $R$  que une a  $x_1$  con  $x_2$ . Si  $\partial_-W$  es no conexa,  $R$  está contenida en  $\partial_-W'' \times I$ , donde  $\partial_-W''$  es la componente con frontera de  $\partial_-W$ ; podemos considerar un arco  $\beta$  en  $\partial_-W$  que une a  $x_1$  con  $x_2$ . Como el único elemento de  $\pi_1(V, \partial_-W)$  es la clase nulohomotópica, existe un disco  $D$  en  $W$  cuya frontera es  $\alpha \cup \beta$ , pero esto contradice que  $R$  es  $\partial^*$ -compresible. Aplicando un razonamiento análogo para  $\partial_+W$  obtenemos que  $|R \cap \partial_-W| = |R \cap \partial_+W| = 1$ .

Tenemos que  $\partial R$  consiste de exactamente dos arcos en  $\partial_v W$ , un arco en  $\partial_+W$  y un arco en  $\partial_-W$ ; es decir,  $R$  es un disco.

Ahora consideremos una colección de arcos  $\Gamma$  propiamente encajados en  $\partial_-W \times 1$  que son disjuntos de los discos por los que se pegan las 1-asas de  $N_i$ . Más aún, elegimos  $\Gamma$  de tal forma que  $\partial_-W \setminus \eta(\Gamma)$  es un disco, con  $\eta(\Gamma)$  una vecindad regular de  $\Gamma$ . Cada arco  $\sigma \in \Gamma$  es un arco generador para un disco producto  $D$  en  $W$ . Esta colección de discos constituye un sistema de discos minimal para el cubo con asas  $V$ . Con un argumento de disco de más adentro y arco de más afuera podemos hacer a  $R$  disjunto de este sistema de discos, por lo que  $R$  es un disco producto de  $W$ .  $\square$

Por el momento, nos enfocaremos en analizar cómo se comporta una superficie orientable en  $E(K)$  después de hacerle una  $\partial^*$ -compresión:

**Lema 3.17.** *Sea  $G$  una superficie orientable propiamente encajada en  $E(K)$  tal que  $G \cap A_i$  es incompresible en  $A_i$  y cada componente de  $G \cap S_i$  es esencial en  $S_i$ . Denotamos por  $G'$  al resultado de hacer una  $\partial^*$ -compresión elemental de  $A_i$  a  $B_i$ . Entonces:*

1.  $G'$  es incompresible en  $A_i$ .
2. Las componentes de  $G' \cap S_i$  también son esenciales en  $S_i$ .

*Demostración.* Por hipótesis existe un disco  $D \subset A_i$  tal que  $\partial D = \alpha \cup \beta$ , donde  $\alpha \subset G \cap A_i$  y  $\beta \subset S_i$ . Podemos elegir una vecindad  $D \times I$  tal que  $\partial D \times I = (\alpha \cup \beta) \times I$ ,  $\alpha \times I \subset G$  y  $\beta \times I \subset S_i$ . Esta compresión elemental reemplaza a  $\alpha \times I$  por los discos  $D_0 = D \times \{0\}$  y  $D_1 = D \times \{1\}$ .

1. Supongamos que  $G'$  es compresible en  $A_i$ , entonces existe un disco de compresión  $D' \subset A_i$ . Isotopamos  $c = \partial D'$  para ser disjunta de  $D_0$  y  $D_1$ . Deshaciendo la compresión elemental podemos ver a  $D'$  como un disco de compresión para  $G$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $G'$  es incompresible en  $A_i$ .

2. Supongamos que existe una componente  $c' \subset G' \cap S_i$  que es frontera de un disco  $D'$  en  $S_i$ . Por hipótesis,  $c'$  debe ser una curva generada por la compresión elemental de  $G$ . Consideramos el arco  $\beta \subset S_i$  por el que se hace la  $\partial^*$ -compresión; tenemos dos opciones, la frontera de  $\beta$

### 3 Exterior de un Nudo

está en una o en dos componentes de  $G \cap S_i$ .

Si  $\beta$  une puntos de la misma componente  $c \subset G \cap S_i$ , al hacer la  $\partial^*$ -compresión,  $c$  se divide en dos componentes, digamos  $c_1$  y  $c_2$ . Supongamos que  $c' = c_1$ , entonces  $c_1$  es frontera del disco  $D'$  en  $S_i$ . Como  $c_1 \cap c_2 = \emptyset$ ,  $c_2 \subset D'$  o bien  $c_2 \subset S_i \setminus D'$  (Figura 3.4). En el primer caso  $c_2$  debe ser frontera de un disco  $D''$  en  $D'$ ; al revertir la  $\partial^*$ -compresión,  $D'$  y  $D''$  comparten a  $\beta$  en su frontera, por lo que  $D' \setminus D''$  es un disco en  $S_i$  con frontera  $c$ , lo cual es una contradicción. En el segundo caso descomponemos la frontera de  $D'$  en dos pedazos,  $\partial D' = \beta \cup \gamma$ , donde  $\gamma = c_1 \setminus \beta$ ; se tiene que  $D \cup D'$  es un disco con frontera  $\alpha \cup \gamma \subset G$ , por lo que constituye un disco de compresión de  $G$  en  $A_i$  lo cual contradice el inciso anterior.

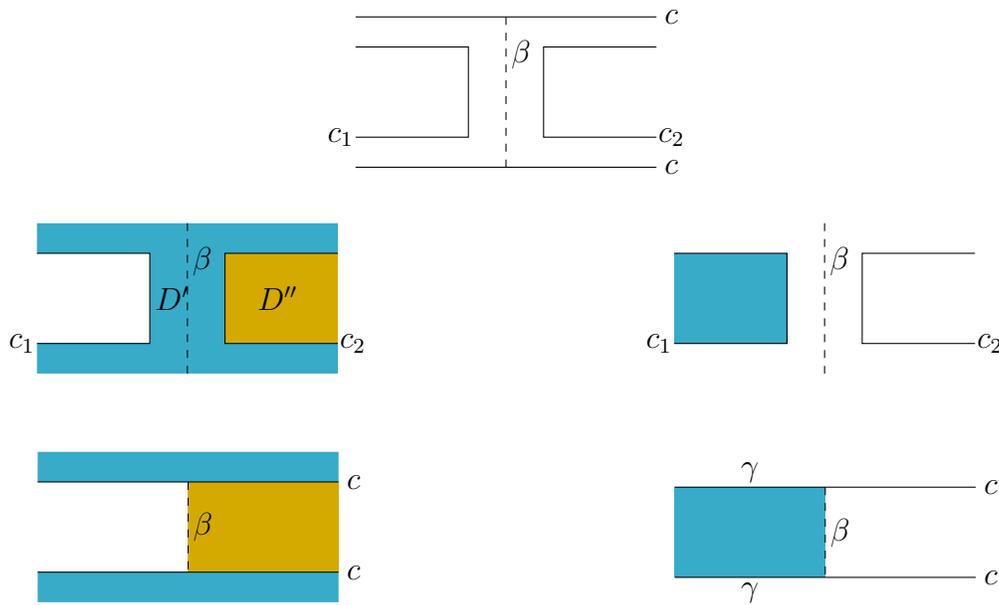


Figura 3.4:  $\beta$  une puntos de la misma componente.

Supongamos ahora que  $\beta$  une puntos de distintas componentes de  $G \cap S_i$ ,  $c_1$  y  $c_2$ . Nuevamente, tenemos dos casos:  $D'$  contiene o no a  $\beta$  (Figura 3.5). Si  $\beta$  está en  $D'$ , al deshacer la  $\partial^*$ -compresión  $c_1$  y  $c_2$  resultan ser no esenciales en  $S_i$ , lo cual es una contradicción. Si ahora  $\beta$  no está en  $D'$ , al revertir la  $\partial^*$ -compresión obtenemos un anillo  $A$  con componentes frontera  $c_1$  y  $c_2$ . Empujando  $D'$  hacia  $A_i$  encontramos una compresión para  $A$ ; por el inciso anterior  $A$  debe ser no esencial y por tanto es  $\partial$ -paralelo. Lo anterior implica que realizamos una  $\partial^*$ -compresión anular en lugar de una  $\partial^*$ -compresión elemental lo cual nos conduce nuevamente a una contradicción.  $\square$

El lema anterior se puede aplicar para cualquiera cuerpos de compresión consecutivos, por lo que obtenemos el siguiente teorema. Denotemos por  $S = \bigcup S_i$  y  $F = \bigcup F_i$ .

**Teorema 3.18.** *Sea  $G$  una superficie orientable propiamente encajada en  $E(K)$  tal que para toda  $i$ ,  $G \cap A_i$  y  $G \cap B_i$  son incompresibles y cada componente de  $G \cap (S \cup F)$  es esencial en  $S \cup F$ . Denotamos por  $G'$  al resultado de hacer una  $\partial^*$ -compresión elemental. Entonces:*

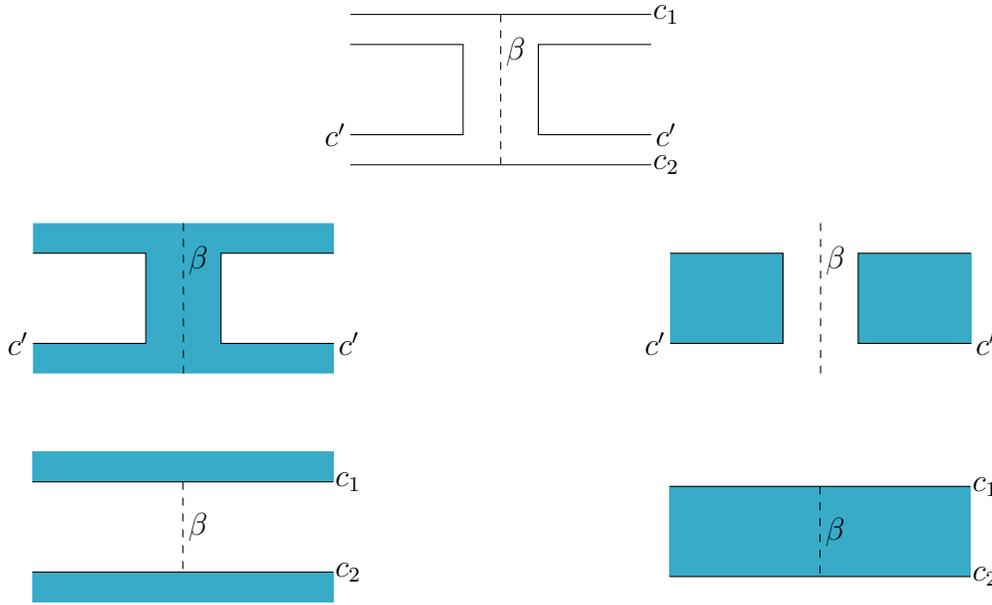


Figura 3.5:  $\beta$  une componentes distintas.

1.  $G'$  es incompresible en cada cuerpo de compresión.
2. Las componentes de  $G' \cap (S \cup F)$  también son esenciales en  $S \cup F$ .

En el siguiente teorema probamos que si  $G$  es una superficie cerrada e incompresible en  $E(K)$ , basta que  $|G \cap (F \cup S)|$  sea minimal para que las condiciones del Teorema 3.18 se cumplan.

**Teorema 3.19.** *Si  $E(K)$  contiene una superficie cerrada, orientable e incompresible  $G$  tal que  $|G \cap (F \cup S)|$  es minimal. Entonces*

1.  $G \cap A_i$  y  $G \cap B_i$  son incompresibles en  $A_i$  y  $B_i$ , respectivamente, para toda  $i = 1, \dots, k$
2.  $G \cap (F \cup S)$  es una colección de curvas simples cerradas esenciales en  $S \cup F$ .
3. No hay componentes anillos  $\partial$ -paralelos en  $G \cap A_i$  ni en  $G \cap B_i$ . En particular no hay anillos  $\partial^*$ -paralelos en  $G \cap A_i$  o  $G \cap B_i$ .

*Demostración.* 1. Supongamos que para algún  $i$ ,  $G \cap A_i$  tiene una componente compresible en  $A_i$ . Existe un disco  $D \subset A_i$  tal que  $\partial D$  es esencial en  $G \cap A_i$ . Como  $G$  es incompresible en  $E(K)$ , existe un disco  $D' \subset G$  tal que  $\partial D = \partial D'$ . Como  $\partial D$  no es frontera de un disco en  $G \cap A_i$ ,  $D'$  intersecta a  $F_i$  o  $S_i$  (posiblemente a ambos) por lo que  $D' \cap (F \cup S) \neq \emptyset$ . Como  $E(K)$  es irreducible,  $D \cup D'$  es frontera de una 3-bola y podemos isotopar  $D'$  en  $D$ , con lo que reducimos el número de componentes en  $G \cap (F \cup S)$ , lo cual es una contradicción. La demostración para  $G \cap B_i$  es análoga.

2. Supongamos que para alguna  $i$  existe una curva  $c$  en  $G \cap F_i$  que es inesencial en  $F_i$ . Entonces existe un disco  $D \subset F_i$  tal que  $\partial D = c$ . Como  $G$  es incompresible en  $E(K)$ , existe un disco  $D' \subset G$  tal que  $\partial D' = c$ . Nuevamente, como  $E(K)$  es irreducible,  $D \cup D'$  es frontera de una 3-bola. Isotopando  $D'$  en  $D$  reducimos el número de veces que  $G$  intersecta a  $F \cup S$ , lo cual

### 3 Exterior de un Nudo

contradice la hipótesis de minimalidad. La prueba es análoga para  $G \cap S_i$ .

3. Supongamos que para alguna  $i$ ,  $G \cap A_i$  tiene una componente  $G_0$  que es un anillo  $\partial$ -paralelo. Como  $G$  es cerrada,  $G \cap \partial_v A_i = \emptyset$ ; con esto, cualquier componente  $\partial$ -paralelo es una componente  $\partial^*$ -paralelo. Al realizar la  $\partial^*$ -compresión se reduce el número de componentes en  $G \cap (S \cup F)$ , lo que es nuevamente una contradicción.  $\square$

**Lema 3.20.** *Sea  $G \subset E(K)$  una superficie cerrada, conexa, orientable e incompresible. Si  $|G \cap (\cup S)|$  es minimal y  $\chi(G \cap A_i) < 0$  para algún  $i$ , existe una  $\partial^*$ -compresión elemental de  $G \cap A_i$  de  $A_i$  a  $B_i$  o a  $B_{i+1}$ .*

*Demostración.* Como  $G$  es cerrada e incompresible,  $G \cap \partial_v A_i = \emptyset$ . Por el Teorema 3.19  $G \cap A_i$  es incompresible en  $A_i$ . Si todas los componentes de  $G \cap A_i$  fueran discos o anillos, entonces  $\chi(G \cap A_i) \geq 0$ . Esto implica que existe una componente que no es disco ni anillo. En particular,  $G \cap A_i$  tiene una componente que es  $\partial^*$ -compresible y tal compresión debe ser una  $\partial^*$ -compresión elemental.  $\square$

En resumen, hemos probado que si  $G \subset E(K)$  es una superficie cerrada e incompresible que interseca a  $S \cup F$  en un número mínimo de curvas, entonces:

1.  $G \cap A_i$  y  $G \cap B_i$  son incompresibles en  $A_i$  y  $B_i$ , respectivamente, para toda  $i = 1, \dots, k$ .
2. Las curvas de  $G \cap (S \cup F)$  son esenciales en  $S \cup F$ .

Estas propiedades se preservan al hacer una  $\partial^*$ -compresión, que necesariamente es elemental.

## 4 Distancia Circular

En este capítulo estudiaremos los resultados obtenidos por Kevin Lamb y Patrick Weed en [12]. El análogo a una descomposición de Heegaard de una descomposición circular en asas de  $E(K)$  es cuando tal descomposición sólo tiene un nivel delgado y uno grueso.

**Definición 4.1.** *Sea  $K \subset S^3$  un nudo y  $D$  una descomposición circular en asas de  $E(K)$ . Decimos que  $D$  es admisible si sólo tiene un nivel grueso  $S$  y un nivel delgado  $F$ . Para una descomposición admisible, llamaremos descomposición de Heegaard circular de  $E(K)$  a la pareja  $(F, S)$ .*

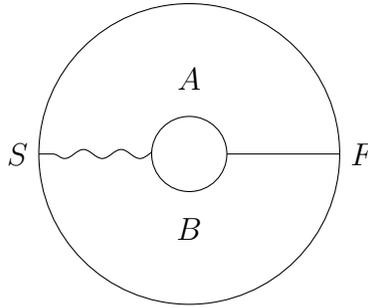


Figura 4.1: Descomposición admisible.

Es importante notar que como  $F$  es una superficie de Seifert para  $K$  y  $S$  se obtiene de pegar 1-asas a  $F \times I$ , entonces  $S$  es conexa, lo que significa que  $S$  también es una superficie de Seifert para  $K$ .

Las descomposiciones delgadas de los nudos casi-fibrados son ejemplo de descomposiciones admisibles. Si  $K$  es un nudo fibrado, podemos construir una descomposición de Heegaard circular  $(F_0, F_1)$  de  $E(K)$  usando una copia paralela  $F_1$  de la superficie fibra  $F_0$ ; en este sentido, los nudos fibrados también admiten una descomposición de Heegaard circular aún cuando la función de Morse circular no tiene puntos críticos.

En adelante, supondremos que  $(F, S)$  es una descomposición de Heegaard circular de  $E(K)$ .

**Lema 4.2.** *Sea  $G$  una superficie compacta y orientable propiamente encajada en  $E(K)$ . Supongamos que  $G'$  es el resultado de hacer una  $\partial^*$ -compresión de  $A$  en  $B$ , y sean  $c \subset G \cap (S \cup F)$  y  $c' \subset G' \cap (S \cup F)$  curvas esenciales en la misma componente de  $S \cup F$ . Entonces  $d_C(c, c') \leq 1$  y, por tanto,  $d_{AC}(c, c') \leq 1$ .*

*Demostración.* Sea  $D$  el disco de  $\partial^*$ -compresión para  $G$ , tal que  $\partial D = \alpha \cup \beta$  con  $\alpha \subset G \cap A$  y  $\beta \subset S \cup F$ .

## 4 Distancia Circular

Supongamos que  $c$  es una componente de  $G \cap (S \cup F)$  que se ve afectada por la  $\partial^*$ -compresión. Si tal compresión es anular,  $c$  es eliminada de  $S \cup F$ , así que podemos hacerla disjunta de cualquier  $c'$  en  $G' \cap (S \cup F)$  y por tanto  $d(c, c') = 1$ . En adelante supondremos que la  $\partial^*$ -compresión es elemental.

Si  $c$  es una componente de  $G \cap (S \cup F)$  que no se ve afectada por la  $\partial^*$ -compresión o  $c' \in G' \cap (S \cup F)$  no resulta de hacer la  $\partial^*$ -compresión, entonces  $d_C(c, c') \leq 1$ , pues  $c \simeq c'$  o  $c \cap c' = \emptyset$ . Resta calcular la distancia cuando  $c$  es una componente de  $G \cap (S \cup F)$  afectada por la  $\partial^*$ -compresión elemental y  $c'$  es resultado de dicha  $\partial^*$ -compresión. Procederemos de forma análoga al Lema 3.17 dependiendo de las componentes que une el arco  $\beta$ .

*$\beta$  une dos componentes.* Sean  $c_1, c_2 \subset G \cap (S \cup F)$  dichas componentes. Para cada  $i = 1, 2$ , sea  $\eta_i$  una vecindad collar en  $S \cup F$  de  $c_i$  tal que el interior no interseca a  $\beta$  y  $\hat{c}_i$  la frontera de  $\eta_i$  paralela a  $c_i$  que no interseca a  $\beta$ . Si  $c'$  es la curva resultante de hacer  $\partial^*$ -compresión; se tiene que  $c' \cap \hat{c}_i = \emptyset$  por lo que  $d_C(c_i, c') = d_C(\hat{c}_i, c') = 1$ .

*$\beta$  une una componente.* Sea  $c$  la componente de  $G \cap (S \cup F)$  que contiene a los extremos de  $\beta$ . Como  $G$  es una superficie orientable, podemos considerar una copia de  $G$  hacia su lado positivo o negativo de tal forma que no interseca al disco  $D$ . Al realizar la  $\partial^*$ -compresión estamos dividiendo a  $c$  en dos componentes, digamos  $c'_1, c'_2 \subset G' \cap (S \cup F)$ , las cuales son disjuntas de  $c$ , es decir, para  $i = 1, 2$ , se tiene  $d_C(c, c'_i) = 1$ .  $\square$

A continuación definimos el análogo de la distancia de Hempel para una descomposición de Heegaard circular del exterior de un nudo. En este caso, los cuerpos de compresión se pegan a lo largo de dos superficies de Seifert, por lo que no basta considerar el complejo de curvas de una de las superficies, en vez de eso consideramos el complejo de arcos y curvas de ambas.

**Definición 4.3.** Sea  $K \subset S^3$  un nudo cuyo exterior  $E(K)$  tiene una descomposición de Heegaard circular  $(F, S)$ . Denotemos por  $\Gamma_A$  y  $\Gamma_B$  al conjunto de todos los discos esenciales, discos producto y anillos producto de  $A$  y  $B$ , respectivamente.

Definimos la distancia circular de  $(F, S)$  como

$$cd(F, S) = \min\{d_{AC}(\partial_S\alpha, \partial_S\beta) + d_{AC}(\partial_F\alpha, \partial_F\beta) \mid \alpha \in \Gamma_A, \beta \in \Gamma_B\}$$

y la distancia gruesa de  $S$

$$td(S) = \min\{d_{AC}(\partial_S\alpha, \partial_S\beta) \mid \alpha \in \Gamma_A, \beta \in \Gamma_B\}.$$

donde  $d_{AC}$  denota la distancia en el complejo de arcos y curvas de  $S$  y  $F$ .

Es importante subrayar que los discos esenciales en  $\Gamma_A$  y  $\Gamma_B$  deben tener frontera en  $S$ , ya que  $F$ , al ser la frontera negativa de los cuerpos de compresión  $A$  y  $B$ , es una superficie incompresible hacia  $A$  y hacia  $B$ . Lo anterior no implica que  $F$  sea incompresible en  $E(K)$ .

**Proposición 4.4.** Si  $td(S) \leq 1$ , entonces  $cd(F, S) \leq 2$ .

*Demostración.* Sean  $\alpha \in \Gamma_A$  y  $\beta \in \Gamma_B$  que realizan la distancia  $td(S)$ . Consideraremos varios casos:

*Caso 1:* Si  $\alpha$  y  $\beta$  son discos esenciales, como  $\partial_F\alpha, \partial_F\beta = \emptyset$ ,  $d_{AC}(\partial_F\alpha, \partial_F\beta) = 0$ , así que

$$cd(F, S) \leq d_{AC}(\partial_S\alpha, \partial_S\beta) \leq 1.$$

*Caso 2:* Si  $\alpha$  es un disco esencial y  $\beta$  un anillo producto o disco producto,  $\partial_F\alpha = \emptyset$ , por lo que  $d_{AC}(\partial_F\alpha, \partial_F\beta) = 0$ , se sigue que  $cd(F, S) \leq d_{AC}(\partial_S\alpha, \partial_S\beta) \leq 1$ .

*Caso 3:* Si  $\alpha$  y  $\beta$  son anillos producto o discos producto, hacemos uso de la estructura producto de cada uno de los cuerpo de compresión; es decir,  $A = (F \times I_1) \cup N_1$  y  $B = (F \times I_2) \cup N_2$ , donde  $I_i$  es el intervalo  $[0, 1]$  y  $N_i$  es un conjunto de 1-asas.

*i)* Supongamos que  $d_{AC}(\partial_S\alpha, \partial_S\beta) = 1$ , entonces existen representantes  $\gamma_1 \in [\partial_S\alpha]$  y  $\gamma_2 \in [\partial_S\beta]$  disjuntos en  $S$ . Por definición de disco producto y anillo producto, podemos suponer que  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  no intersectan a  $N_1$  y  $N_2$ , respectivamente. Se sigue que  $\alpha' = \gamma_1 \times I_1$  y  $\beta' = \gamma_2 \times I_2$  son discos producto o anillos producto en  $F \times I_1$  y  $F \times I_2$ , respectivamente, tales que al recuperar los cuerpos de compresión se tiene que  $d_{AC}(\partial_S\alpha', \partial_S\beta') = 1$  y  $d_{AC}(\partial_F\alpha', \partial_F\beta') \leq 1$  por lo que  $cd(F, S) \leq 2$ .

*ii)* Supongamos que  $d_{AC}(\partial_S\alpha, \partial_S\beta) = 0$ , entonces  $\partial_S\alpha \simeq \partial_S\beta$  en  $S$  (ambos son discos producto o ambos son anillos producto) podemos hacer disjuntos a  $\partial_S\alpha$  y  $\partial_S\beta$  en  $S$  y regresamos al caso anterior.  $\square$

Si  $K \subset S^3$  es un nudo fibrado,  $td(S) = 0$  para la descomposición de Heegaard circular  $(F, S)$  de  $E(K)$ , donde  $F = S$  es la fibra de la fibración de  $E(K)$  sobre  $S^1$ . Basta considerar un anillo producto  $\mathcal{A}$  en  $E(K) \setminus \eta(F)$  el cual es cortado por  $S$  en un par de anillos producto  $\alpha \subset A$  y  $\beta \subset B$ , con  $\partial\alpha = \partial\beta$ .

De lo anterior, junto con la Proposición 4.4, se obtiene el siguiente resultado para nudos fibrados.

**Lema 4.5.** *Si  $K \subset S^3$  es un nudo fibrado y  $(F, S)$  es la descomposición de Heegaard circular de  $E(K)$ , con  $F = S$  la fibra de la fibración de  $E(K)$  sobre  $S^1$ , entonces  $cd(F, S) \leq 2$ .<sup>1</sup>*

En adelante  $K \subset S^3$  será un nudo no fibrado, es decir  $F$  y  $S$  no son superficies isotópicas en  $E(K)$ , lo que implica que los conjuntos  $N$  y  $T$  de 1 y 2-asas, respectivamente, son no vacíos.

Si nos olvidamos de los discos producto y anillos producto en  $\Gamma_A$  y  $\Gamma_B$  y, en vez de pensar en la descomposición de Heegaard circular de  $E(K)$ , pensamos en  $(A, B; S)$  como una descomposición de Heegaard de  $E(K) \setminus \eta(F)$ , con  $\eta(F)$  una vecindad regular de  $F$  en  $E(K)$ , la distancia gruesa  $td(S)$  coincide con la distancia de Hempel  $d(S)$ . A continuación presentamos una relación más precisa entre las nuevas distancias y la distancia de Hempel.

**Proposición 4.6.** *Sea  $K \subset S^3$  un nudo no fibrado y  $(F, S)$  una descomposición admisible de su exterior,*

$$0 \leq td(S) \leq cd(F, S) \leq d(S) \leq 2td(S) + 4.$$

*Demostración.* Las primeras dos desigualdades son evidentes. Por otro lado, si  $\Gamma_1$  es el conjunto de todos los discos esenciales en  $A$  y  $\Gamma_2$  el de discos esenciales en  $B$  (como en la definición de la distancia de Hempel),  $\Gamma_1 \subset \Gamma_A$  y  $\Gamma_2 \subset \Gamma_B$ . Las fronteras de  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  deben

---

<sup>1</sup>La Proposición 4.4 es un resultado propio y no se encuentra en [12], en dicho artículo emplean el Teorema 3 de [8] para probar que si  $K$  es fibrado y  $(F, S)$  es una descomposición de Heegaard circular de  $E(K)$ ,  $cd(F, S) \leq 4$ .

## 4 Distancia Circular

estar en  $S$ . Por lo que, para cualesquiera  $\alpha \in \Gamma_1$  y  $\beta \in \Gamma_2$ ,  $d_C(\partial_F\alpha, \partial_F\beta) = 0$ . Además, como  $C(S)$  es un subcomplejo de  $AC(S)$ ,  $d_{AC}(\partial_S\alpha, \partial_S\beta) \leq d_C(\partial_S\alpha, \partial_S\beta)$ . Finalmente:

$$\begin{aligned} cd(F, S) &\leq \min\{d_{AC}(\partial_S\alpha, \partial_S\beta) \mid \alpha \in \Gamma_1, \beta \in \Gamma_2\} \\ &\leq \min\{d_C(\partial_S\alpha, \partial_S\beta) \mid \alpha \in \Gamma_1, \beta \in \Gamma_2\} = d(S). \end{aligned}$$

La primera desigualdad se cumple gracias a que  $K$  es un nudo no fibrado. De lo contrario  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \emptyset$ .

Por último probaremos que  $d(S) \leq 2td(S) + 4$ . Sean  $\alpha \in \Gamma_A$  y  $\beta \in \Gamma_B$  que realizan  $td(S)$ . Por a) y b) del Lema 2.26 obtenemos que para cualesquiera curvas  $x$  y  $y$  en  $S$ ,  $d_C(x, y) \leq 2d_{AC}(x, y)$ . Si  $\alpha$  y  $\beta$  son discos esenciales, como  $F$  es incompresible en ambos cuerpos de compresión,  $\partial\alpha, \partial\beta \subset S$ . Se tiene que

$$d(S) \leq d_C(\partial_S\alpha, \partial_S\beta) \leq 2d_{AC}(\partial_S\alpha, \partial_S\beta) = 2td(S).$$

Si  $\alpha$  es un disco esencial y  $\beta$  un anillo producto o disco producto, por el Lema 2.10 (la prueba es análoga si  $\beta$  es un disco producto), existe un disco esencial  $\beta' \subset B$  disjunto de  $\beta$ . Usando nuevamente los incisos a) y b) del Lema 2.26,

$$d(S) \leq d_C(\partial_S\alpha, \partial_S\beta') \leq 2d_{AC}(\partial_S\alpha, \partial_S\beta') \leq 2[d_{AC}(\partial_S\alpha, \partial_S\beta) + 1] = 2td(S) + 2.$$

Si  $\alpha$  y  $\beta$  son anillos producto o discos producto, existen discos esenciales  $\alpha'$  y  $\beta'$  en  $A$  y  $B$ , respectivamente, disjuntos de  $\alpha$  y  $\beta$  y con frontera en  $S$ ; se cumple

$$d(S) \leq d_C(\partial_S\alpha', \partial_S\beta') \leq 2d_{AC}(\partial_S\alpha', \partial_S\beta') \leq 2[d_{AC}(\partial_S\alpha, \partial_S\beta) + 2] = 2td(S) + 4$$

□

### 4.1. Mayor acercamiento a la distancia de Hempel.

Podemos aproximarnos más a la distancia de Hempel si en vez de usar el complejo  $AC(S)$  usamos el complejo de curvas  $C(S)$ , pero para esto es necesario olvidarnos de los discos productos en los cuerpos de compresión. La definición que se presenta enseguida es la que se encuentra en el trabajo de Lamb y Weed [12]. Para evitar confusión usaremos  $cd_C$  y  $td_C$ .

**Definición 4.7.** Sea  $K \subset S^3$  un nudo cuyo exterior  $E(K)$  tiene una descomposición de Heegaard circular  $(F, S)$ . Denotemos por  $\Gamma'_A$  y  $\Gamma'_B$  al conjunto de todos los discos esenciales y anillos producto de  $A$  y  $B$ , respectivamente.

Definimos la distancia circular de  $(F, S)$  como

$$cd_C(F, S) = \min\{d_C(\partial_S\alpha, \partial_S\beta) + d_C(\partial_F\alpha, \partial_F\beta) \mid \alpha \in \Gamma'_A, \beta \in \Gamma'_B\}$$

y la distancia gruesa de  $S$

$$td_C(S) = \min\{d_C(\partial_S\alpha, \partial_S\beta) \mid \alpha \in \Gamma'_A, \beta \in \Gamma'_B\}.$$

Es claro que

$$cd(F, S) \leq cd_C(F, S) \quad \text{y} \quad td(S) \leq td_C(S)$$

pero aunque estas distancias son mayores que las que usan el complejo  $AC$ , logran dar una mejor cota para la distancia de Hempel. La demostración del siguiente resultado es análoga a la de la Proposición 4.6.

**Proposición 4.8.** *Sea  $K \subset S^3$  un nudo no fibrado y  $(F, S)$  una descomposición admisible de su exterior,*

$$0 \leq td_C(S) \leq cd_C(F, S) \leq d(S) \leq td_C(S) + 2.$$

## 4.2. Cota para la distancia circular.

Finalmente, enunciamos el resultado análogo al de Hartshorn para la distancia circular de una descomposición de Heegaard circular  $(F, S)$  de  $E(K)$ . La demostración es similar a la que se encuentra en [5].

**Teorema 4.9.** *Si  $E(K)$  contiene una superficie cerrada, esencial y orientable  $G$  de género  $g$ , entonces  $cd(F, S) \leq 2g + 1$ .*

De la Proposición 4.4 sabemos que si  $td(S) \leq 1$ , entonces  $cd(F, S) \leq 2$ . Así que en adelante supondremos que  $td(S) \geq 2$ . La idea es realizar una sucesión de  $\partial^*$ -compresiones a la superficie  $G$  para encontrar discos esenciales o anillos producto en cada uno de los cuerpos de compresión (como  $G$  es cerrada no hay forma de obtener discos producto). Como  $td(S) \geq 2$ , no es posible encontrar discos esenciales o anillos producto en  $A$  y  $B$  con frontera disjunta o isotópica en  $S$ . Si  $G \cap B$  tiene un disco esencial o anillo producto  $\beta$  en  $B$  y  $\alpha$  es la componente de  $G \cap A$  que comparte frontera en  $S$  con  $\beta$ ,  $\alpha$  no puede ser un disco esencial o anillo producto en  $A$ . Más aún, ninguna otra componente de  $G \cap A$  puede ser un disco esencial o anillo producto, pues su frontera en  $S$  no intersecta a la frontera de  $\beta$ . Dicho esto, en los siguientes lemas supondremos que sólo uno o ninguno de los cuerpos de compresión contienen discos esenciales o anillos esenciales.

**Lema 4.10.** *Sea  $G$  una superficie cerrada, conexa, esencial y orientable en  $E(K)$  tal que cada componente de  $G \cap (S \cup F)$  es esencial en  $S \cup F$ . Si  $td(S) \geq 2$  y  $G \cap B$  contiene un disco esencial o un anillo producto, entonces existe una sucesión de isotopías de  $G$ ,*

$$G \simeq G_0 \simeq G_1 \simeq \cdots \simeq G_k \simeq G_{k+1} \simeq \cdots \simeq G_n$$

tales que:

1. Cada componente de  $G_i \cap A$  es incompresible en  $A$ , para cada  $0 \leq i \leq n$ .
2. Cada componente de  $G_i \cap (S \cup F)$  es esencial en  $S \cup F$ .
3. Para cualquier elección de componentes  $c_i \subset G_i \cap (S \cup F)$  que pertenecen a la misma componente de  $S \cup F$ ,  $d_{AC}(c_i, c_{i+1}) \leq 1$ , para  $0 \leq i \leq n - 1$ .
4. Para  $0 \leq i \leq k$ , al menos una componente de  $G_i \cap B$  es un disco esencial o un anillo producto.

## 4 Distancia Circular

5.  $G_n \cap A$  contiene exactamente un disco esencial o un anillo producto.
6.  $k \leq n - 2$ .

*Demostración.* Realizamos  $\partial^*$ -compresiones anulares para eliminar todos los anillos  $\partial^*$ -paralelos en  $G \cap A$  y llamamos a la superficie obtenida  $G_0$ . Como  $td(S) \geq 2$ , ninguna componente de  $G_0 \cap A$  es un disco esencial o anillo producto, por lo que  $\chi(G_0 \cap A) < 0$ . Además, alguna componente de  $G_0$  debe intersectar a  $S$  en una curva esencial. De otra forma, podríamos isotopar  $G$  a lo largo de  $S$  para que esté contenida en  $A$  o  $B$ . Si  $G \subset A$ ,  $G$  es compresible y si  $G \subset B$ ,  $G$  no es cerrada. Por lo tanto, podemos realizar una  $\partial^*$ -compresión elemental de  $G_0 \cap A$  de  $A$  a  $B$  a través de  $S$ . Llamamos a la superficie obtenida  $G'_1$ . Eliminamos nuevamente todos los anillos  $\partial^*$ -paralelos de  $G'_1 \cap A$  para obtener la superficie  $G_1$ .

Realizamos el proceso anterior hasta que aparece un disco esencial o anillo producto en  $G_n \cap A$ . Esto es posible ya que cada vez que realizamos una  $\partial^*$ -compresión elemental aumenta la característica de  $G_i \cap A$  y disminuye la de  $G_i \cap B$ . Como  $td(S) \geq 2$ , no es posible que  $G_i \cap A$  y  $G_i \cap B$  tengan un disco esencial o anillo producto al mismo tiempo. Así que, cuando encontremos un disco esencial o anillo producto en  $A$ , es porque ya no hay en  $B$ . Sea  $k$  el último índice donde aparece un disco esencial o anillo producto en  $G_k \cap B$ . Por lo anterior,  $k < n$ .

Los primeros tres incisos se cumplen por los Teoremas 3.18 y 3.19 y el Lema 4.2. De la definición de  $k$  obtenemos el cuarto inciso.

Si  $G_n \cap A$  contiene un disco esencial, tal disco debe ser el único; de lo contrario,  $\chi(G_n \cap A) \geq \chi(G_{n-1} \cap A) + 2$ , lo cual contradice el Lema 3.13. Puede pasar que  $G_n \cap A$  contenga dos anillos producto; en este caso los anillos provienen de un par de pantalones en  $G_{n-1} \cap A$ . En la Figura 4.2 se observa que es posible realizar una  $\partial^*$ -compresión alternativa a través de  $F$  (usamos el arco rojo en lugar del azul), al cambiar la  $\partial^*$ -compresión, obtenemos sólo un anillo producto y demostramos el quinto inciso.

Finalmente, si  $k = n - 1$  existen componentes  $c_n \subset G_n \cap S$  y  $c_k \subset G_k \cap S$  que son frontera de un disco esencial o anillo producto en  $A$  y  $B$ , respectivamente. Del tercer inciso se sigue que  $td(S) \leq d_{AC}(c_k, c_n) \leq 1$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $k \leq n - 2$ .  $\square$

Es importante observar que en el Lema anterior pudimos comenzar con un disco esencial o un anillo producto en  $G \cap A$  en lugar de  $G \cap B$  y hacer  $\partial^*$ -compresiones de  $B$  en  $A$  a través de  $S$ .

**Lema 4.11.** *Sea  $G$  una superficie cerrada, conexa, esencial y orientable en  $E(K)$  tal que cada componente de  $G \cap (S \cup F)$  es esencial en  $S \cup F$ . Si  $td(S) \geq 2$  y ni  $G \cap A$  ni  $G \cap B$  contienen un disco esencial o un anillo producto, entonces existe una sucesión de isotopías de  $G$ ,*

$$G_{-m} \simeq G_{1-m} \simeq \cdots \simeq G_{-1} \simeq G \simeq G_1 \simeq \cdots \simeq G_{n-1} \simeq G_n$$

tales que:

1. Cada componente de  $G_i \cap A$  es incompresible en  $A$ , para cada  $-m \leq i \leq 0$ , y cada componente de  $G_j \cap B$  es incompresible en  $B$ , para cada  $0 \leq j \leq n$ .
2. Cada componente de  $G_i \cap (S \cup F)$  es esencial.

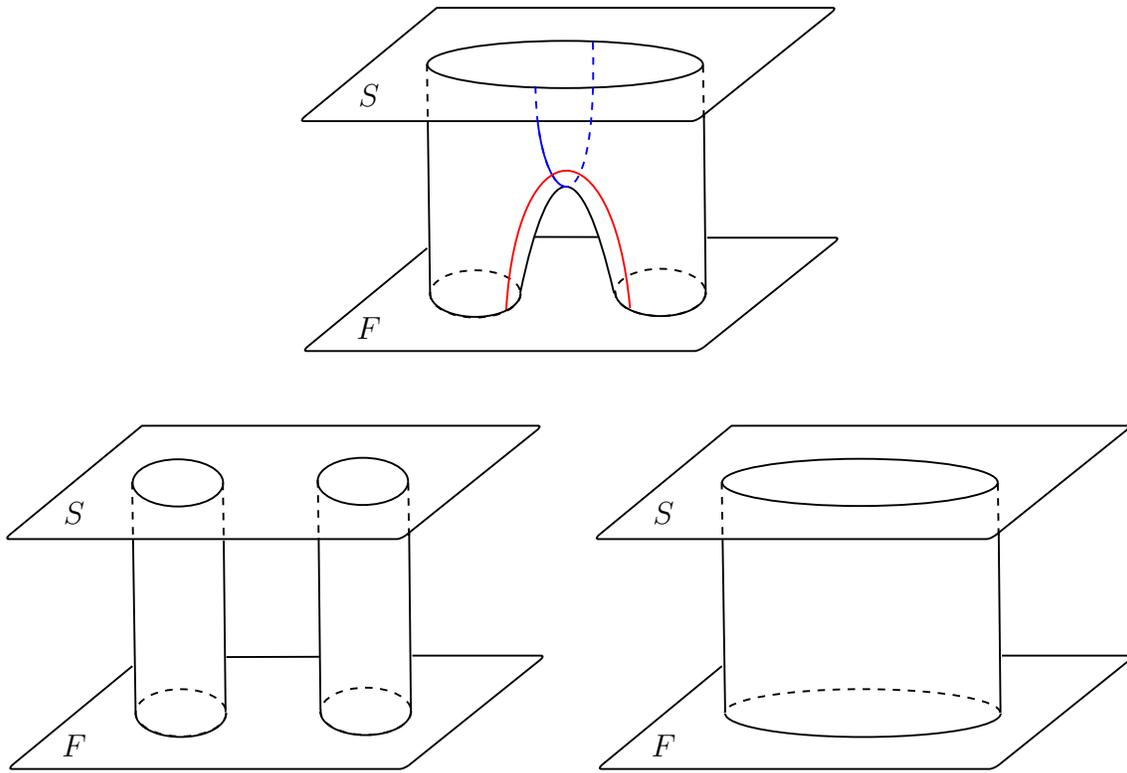


Figura 4.2: Compresión alterna para obtener un único anillo producto.

3. Para cualquier elección de componentes  $c_i \subset G_i \cap (S \cup F)$  que pertenecen a la misma componente de  $S \cup F$ ,  $d_{AC}(c_i, c_{i+1}) \leq 1$  para  $-m \leq i \leq n-1$ .
4. Existe exactamente una componente de  $G_{-m} \cap A$  y  $G_n \cap B$  que es un disco esencial o un anillo producto.
5. Para  $1-m \leq i \leq n-1$ , ninguna componente de  $G_i \cap A$  o  $G_i \cap B$  es un disco esencial o un anillo producto.

*Demostración.* Como no existen discos esenciales ni anillos producto en  $G \cap A$  y  $G \cap B$ ,  $\chi(G \cap A) < 0$  y  $\chi(G \cap B) < 0$ . Se sigue que  $G \cap A$  tiene una  $\partial^*$ -compresión elemental de  $A$  a  $B$  a través de  $S$ . De forma análoga al Lema 4.10, construimos una sucesión de superficies isotópicas  $G_i$ , para  $-m \leq i \leq -1$ , tal que  $G_{-m} \cap A$  contenga exactamente un disco esencial o un anillo producto. Partiendo de  $G$  y cambiando los roles de  $A$  y  $B$  en el lema anterior, obtenemos superficies  $G_j$ , con  $1 \leq j \leq n$ , de tal forma que  $G_n \cap B$  contenga exactamente un disco esencial o un anillo producto. Todos los incisos se prueban como en el lema anterior.  $\square$

*Demostración del Teorema 4.9.* Isotopamos la superficie  $G$  de tal forma que intersecte a  $S \cup F$  en un número mínimo de curvas. El teorema se cumple si  $td(S) \leq 1$ , así que supondremos que  $td(S) \geq 2$ .

Por el Teorema 3.19,  $G$  satisface las condiciones de los Lemas 4.10 y 4.11. Por lo tanto existe

## 4 Distancia Circular

una sucesión de superficies  $G_0 \simeq \cdots \simeq G_n$  isotópicas a  $G$ , tal que  $G_0 \cap A$  y  $G_n \cap B$  contienen un único disco esencial o anillo producto, sean  $\alpha$  y  $\beta$  dichas componentes. Para cualquier elección de curvas  $c_i \subset G_i \cap S$  se tiene que  $d_{AC}(c_i, c_{i+1}) \leq 1$ , esto implica que  $d_{AC}(\partial_S \alpha, \partial_S \beta) \leq n$ . Como  $G \simeq G_0$  y  $G_0 \cap (S \cup F)$  es una colección de curvas entonces  $\chi(G) = \chi(G_0 \cap A) + \chi(G_0 \cap B)$ . Cada vez que realizamos una  $\partial^*$ -compresión la característica de Euler difiere en una unidad, por lo que  $\chi(G_0 \cap B) = \chi(G_n \cap B) - n$ . Debido a que  $\chi(G_0 \cap A), \chi(G_n \cap B) \leq 1$ ,

$$2 - 2g = \chi(G) = \chi(G_0 \cap A) + \chi(G_n \cap B) - n \leq 2 - n,$$

es decir,  $n \leq 2g$ .

Si alguno de  $\alpha$  y  $\beta$  es un disco esencial,

$$cd(F, S) \leq d_{AC}(\partial_S \alpha, \partial_S \beta) \leq 2g.$$

Si ambos son anillos esenciales, sea  $\beta'$  un disco esencial en  $B$  disjunto de  $\beta$ , se tiene que

$$cd(F, S) \leq d_{AC}(\partial_S \alpha, \partial_S \beta') \leq d_{AC}(\partial_S \alpha, \partial_S \beta) + 1 \leq n + 1 \leq 2g + 1.$$

□

Es fácil ver que si  $F$  y  $G$  no se intersectan, sólo se cumple el primer caso de la demostración.

**Corolario 4.12.** *Si  $E(K)$  contiene una superficie cerrada, esencial y orientable  $G$  de género  $g$ , que puede ser isotopada para ser disjunta de  $F$ , entonces  $cd(F, S) \leq 2g$ .*

### 4.3. Con superficies de Seifert

Si  $F$ ,  $S$  y  $G$  son superficies de Seifert, podemos isotopar  $G$  de tal forma que  $\partial G$  sea disjunta de  $\partial S$  y  $\partial F$  y olvidarnos del caso en que  $G \cap A$  y  $G \cap B$  tengan discos producto. Estamos interesados en probar un resultado análogo al Teorema 4.9 para la distancia de Hempel  $d(S)$ , usando una superficie de Seifert para  $K$ .

Modificando las demostraciones de los Teoremas 3.18 y 3.19, se prueba lo siguiente.

**Lema 4.13.** *Sea  $K \subset S^3$  un nudo tal que  $E(K)$  tiene una descomposición de Heegaard circular  $(F, S)$ . Si  $G$  es una superficie de Seifert incompresible para  $K$  que intersecta en un número mínimo de curvas a  $S \cup F$ , entonces:*

1.  $G \cap A$  y  $G \cap B$  son incompresibles en  $A$  y  $B$ , respectivamente.
2.  $G \cap (S \cup F)$  son curvas esenciales en  $S \cup F$ .

*Además, esto se preserva al hacer una  $\partial^*$ -compresión.*

En el Teorema 2.1 de [9], Kakimizu probó que si  $F$  y  $F'$  son superficies de Seifert incompresibles no isotópicas, entonces existe una sucesión de superficies incompresibles  $F = F_0, F_1, \dots, F_n$  tales que:

1.  $F_n$  es isotópica a  $F'$ ,
2.  $F_i \cap F_{i+1} = \emptyset$ , para  $i = 0, \dots, n - 1$ .

Así que, si tenemos una superficie incompresible en  $E(K)$  no isotópica a  $F$ , también tenemos una superficie incompresible  $G = F_1$  no isotópica a  $F$ , tal que  $F \cap G = \emptyset$ . De esta forma, ninguna componente de  $G \cap A$  y  $G \cap B$  es un anillo producto. Así que para probar un resultado análogo al Teorema 4.9, necesitamos probar los siguientes dos lemas.

**Lema 4.14.** *Sea  $(F, S)$  una descomposición de Heegaard circular para  $E(K)$  con  $F$  incompresible y  $d(S) \geq 2$ . Sea  $G$  una superficie de Seifert incompresible para  $K$  disjunta de  $F$  y no isotópica a  $F$ , de tal forma que  $G \cap S$  es una colección de curvas esenciales en  $S$ . Si  $G \cap A$  contiene un disco esencial y cada componente de  $G \cap A$  es incompresible en  $A$ , existe una sucesión de isotopías*

$$G \simeq G_0 \simeq G_1 \simeq \dots \simeq G_k \simeq G_{k+1} \simeq \dots \simeq G_n$$

tales que:

1. Cada componente de  $G_i \cap A$  es incompresible en  $A$ , para cada  $0 \leq i \leq n$ .
2. Cada componente de  $G_i \cap S$  es esencial en  $S$ .
3. Para cualquier elección de componentes  $c_i \subset G_i \cap S$ ,  $d_{AC}(c_i, c_{i+1}) \leq 1$  para  $0 \leq i \leq n - 1$ .
4.  $G_n \cap B$  contiene exactamente un disco esencial.
5. Para  $0 \leq i \leq k$ , al menos una componente de  $G_i \cap A$  es un disco esencial.
6. Para  $k + 1 \leq i \leq n - 1$ , ninguna componente de  $G_i \cap A$  o  $G \cap B$  es un disco esencial.

*Demostración.* Como  $G$  no es isotópica a  $F$ ,  $G \cap S \neq \emptyset$ . Si  $G \cap A$  contiene algún anillo  $\partial^*$ -paralelo, usamos  $\partial^*$ -compresiones para removerlos y llamamos a esta superficie  $G_0$ . Como  $d(S) \geq 2$  y  $G \cap F = \emptyset$ ,  $G_0 \cap B$  no contiene discos esenciales ni anillos producto; esto implica que  $G_0 \cap B$  es  $\partial^*$ -compresible. Realizamos una  $\partial^*$ -compresión de  $B$  a  $A$  a lo largo de  $S$  y eliminamos los anillos  $\partial^*$ -paralelos para obtener la superficie  $G_1$ . Al igual que la prueba del Lema 4.10, construimos las superficies  $G_i$  hasta encontrar un  $m$  tal que: (i)  $G_m \cap B$  contiene un disco esencial o (ii)  $\chi(G_m \cap B) = 0$  y ninguna componente de  $G_m \cap B$  es un disco esencial. Si el primer caso ocurre, hacemos  $n = m$  y procedemos como en el Lema 4.10 para ver que dicho disco es único.

El segundo caso pasa cuando  $G_m \cap B$  es una colección de anillos, ninguno de los cuales es  $\partial^*$ -paralelo<sup>2</sup>. Como  $\partial G$  es disjunta de  $\partial S$  y  $\partial F$ ,  $\partial G$  está contenida en  $\partial_v A$  o bien en  $\partial_v B$ . Supongamos que  $\partial G \subset \partial_v B$  y que  $G_m \cap B$  consiste de un único anillo  $\mathcal{A}$ . Denotemos por  $\partial_v \mathcal{A}$  a la frontera de  $\mathcal{A}$  en  $\partial_v B$  y por  $\partial_S \mathcal{A}$  a la frontera de  $\mathcal{A}$  en  $S$  (Figura 4.3).

Usaremos la estructura de cuerpo de compresión de  $B$ , es decir,  $B = F \times I_2 \cup N_2$ , con  $N_2$  un conjunto de 1-asas pegadas a  $F \times \{1\}$ . Como  $\mathcal{A} = G_m \cap B$  es incompresible, con un argumento de curva de más adentro, podemos hacer a  $\mathcal{A}$  disjunta de  $N_2$ .  $\partial_S \mathcal{A}$  es esencial en  $S$ , por lo que no existe un anillo en  $S$  entre  $\partial S$  y  $\partial_S \mathcal{A}$ . El anillo  $\mathcal{A}$ , con respecto al cuerpo de compresión  $B$ , tiene dos opciones como se muestra en la Figura 4.4. En el primer caso,  $G_m \cap S$  contiene una curva distinta de  $\partial_S \mathcal{A}$ , lo cual es una contradicción. En el segundo caso podemos hacer una  $\partial^*$ -compresión para encontrar un disco esencial. Llamamos a la superficie resultante  $G_{m+1}$  y hacemos  $n = m + 1$ .

<sup>2</sup>Esta parte de la demostración no sigue el esquema de la demostración en [12].

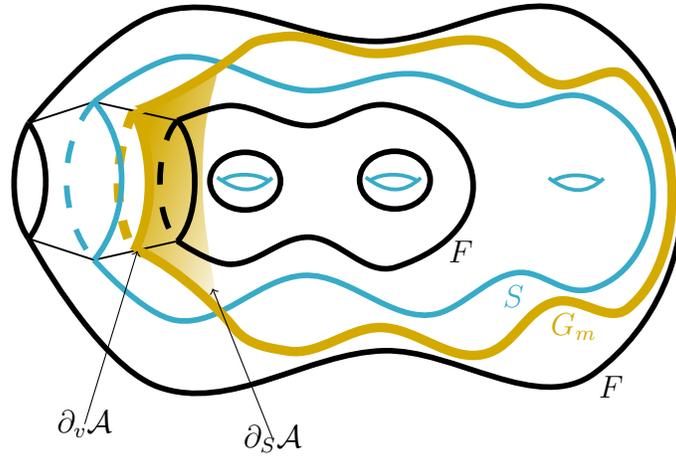


Figura 4.3:  $G_m \cap B$  es un único anillo.

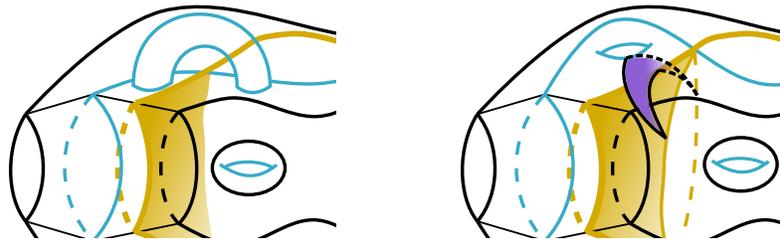


Figura 4.4: Anillo  $A$  en  $B$ .

Supongamos ahora que  $\partial G \subset \partial_v A$  o  $G_m \cap B$  consiste de más de un anillo. En ambos casos, existe un anillo cuyas fronteras están en  $S$ , entonces dicho anillo es  $\partial^*$ -compresible. Al realizar la  $\partial^*$ -compresión, obtenemos un disco esencial, pues de lo contrario el anillo era  $\partial^*$ -paralelo. Llamamos  $G_{m+1}$  a la superficie obtenida y hacemos  $n = m + 1$ .

Cada uno de los incisos del enunciado se prueban de forma análoga que el Lema 4.10.  $\square$

El siguiente resultado se prueba de forma análoga al Lema 4.11.

**Lema 4.15.** *Sea  $(F, S)$  una descomposición de Heegaard circular para  $E(K)$  con  $F$  incompresible y  $d(S) \geq 2$ . Sea  $G$  una superficie de Seifert incompresible para  $K$  disjunta de  $F$  y no isotópica a  $F$ , de tal forma que  $G \cap S$  es una colección de curvas esenciales en  $S$ . Si  $G \cap A$  y  $G \cap B$  no contienen discos esenciales y cada una de sus componentes son incompresibles en  $A$  y  $B$ , respectivamente, entonces existe una sucesión de isotopías*

$$G_{-m} \simeq G_{1-m} \simeq \cdots \simeq G_{-1} \simeq G \simeq G_1 \simeq \cdots \simeq G_{n-1} \simeq G_n$$

tales que:

1. Cada componente de  $G_i \cap A$  es incompresible en  $A$ , para cada  $-m \leq i \leq 0$ , y cada componente de  $G_j \cap B$  es incompresible en  $B$ , para cada  $0 \leq j \leq n$ .

#### 4.4 Reducibilidad de una descomposición de Heegaard circular.

2. Cada componente de  $G_i \cap S$  es esencial en  $S$ .
3. Para cualquier elección de componentes  $c_i \subset G_i \cap S$ ,  $d_{AC}(c_i, c_{i+1}) \leq 1$  para  $-m \leq i \leq n-1$ .
4.  $G_{-m} \cap A$  y  $G_n \cap B$  tienen exactamente un disco esencial.
5. Para  $1-m \leq i \leq n-1$ , ninguna componente de  $G_i \cap A$  o  $G_i \cap B$  es un disco esencial.

**Teorema 4.16.** *Sea  $K$  un nudo cuyo exterior admite una descomposición de Heegaard circular  $(F, S)$  con  $F$  incompresible. Si  $G$  es una superficie de Seifert incompresible para  $K$  de género  $g$ , disjunta de  $F$  y no isotópica a  $F$ , entonces  $d(S) \leq 2g + 1$ .*

*Demostración.* El Teorema se cumple si  $d(S) \leq 1$ , así que en adelante supondremos que  $d(S) \geq 2$ . Isotopamos  $G$  de tal forma que intersekte a  $S$  en un número mínimo de curvas, por lo que  $G \cap S$  consiste de curvas esenciales en  $S$ . Por los Lemas 4.14 y 4.15, existe una sucesión de superficies  $G_0, \dots, G_n$  isotópicas a  $G$ , tales que  $G_0 \cap B$  y  $G_n \cap A$  contienen exactamente un disco esencial,  $G_i \cap S$  es una colección de curvas esenciales en  $S$  y  $\chi(G_{i+1} \cap B) = \chi(G_i \cap B) + 1$ . Sean  $\alpha$  y  $\beta$  los discos esenciales de  $G_0 \cap B$  y  $G_n \cap A$ , respectivamente. Al igual que en la demostración del Teorema 4.9, tenemos que  $d_C(\partial_S \alpha, \partial_S \beta) \leq n$ . Como  $\chi(G) = \chi(G_0 \cap A) + \chi(G_0 \cap B)$ ,

$$1 - 2g \leq 1 + \chi(G_0 \cap B).$$

Se sigue que

$$-2g \leq \chi(G_0 \cap B) = \chi(G_n \cap B) - n = 1 - n.$$

Finalmente,

$$d(S) \leq d_C(\partial_S \alpha, \partial_S \beta) \leq n \leq 2g + 1$$

□

## 4.4. Reducibilidad de una descomposición de Heegaard circular.

El Teorema 2.24 da una relación entre la distancia y los tipos de reducibilidad de una descomposición de Heegaard. Para descomposiciones de Heegaard circulares, Lamb y Weed definen conceptos análogos en [12].

**Definición 4.17.** *Sea  $K$  un nudo cuyo exterior  $E(K)$  tiene una descomposición de Heegaard circular  $(F, S)$ . Decimos que tal descomposición es:*

- *reducible si  $cd(F, S) = 0$ ,*
- *débilmente reducible si  $cd(F, S) \leq 1$ ,*
- *fuertemente irreducible si  $cd(F, S) \geq 2$ .*

Es natural preguntarse si es posible obtener resultados análogos a los que se tienen para descomposiciones de Heegaard; por ejemplo, podemos demostrar el análogo al Teorema 2.22.

## 4 Distancia Circular

**Proposición 4.18.** *Sea  $K$  un nudo cuyo exterior admite una descomposición de Heegaard circular  $(F, S)$ . Si  $F$  es compresible, la descomposición es reducible.*

*Demostración.* Como  $F$  es compresible en  $E(K)$ , existe un disco compresor  $D \subset E(K)$  con  $F \cap D = \partial D$ .

Consideremos a la 3-variedad  $M = E(K) \setminus \eta(F)$ , donde  $\eta(F)$  es una vecindad regular de  $F$ ; de esta forma,  $M$  es una variedad con una componente frontera, a la cual podemos dividir en tres pedazos:  $F_+ = \partial_- A$ ,  $F_- = \partial_- B$  y  $\partial_v M$ . Con esto, la tripleta  $(A, B; S)$  constituye una descomposición de Heegaard para  $M$ .

Como  $F$  es orientable, podemos suponer que  $\partial D \subset F_+$ . Debido a que  $F$  es incompresible en  $A$  y en  $B$ ,  $D$  intersecta a  $S$ ; es decir,  $D$  es un disco  $\partial$ -compresor de  $M$ . Por el Teorema 2.20, la descomposición  $(A, B; S)$  es  $\partial$ -reducible por lo que existe un disco  $\partial$ -reductor y por tanto un disco de compresión de  $F$  que intersecta a  $S$  en una sola curva esencial. Sea  $D''$  dicho disco, se tiene que  $D'' \cap A$  es un anillo producto en  $A$  y  $D'' \cap B$  es un disco esencial de  $B$ . De lo anterior obtenemos que  $cd(F, S) = 0$ .  $\square$

Los esquemas de las Figuras 4.5 y 4.6 resumen cómo deberían verse las descomposiciones débilmente reducibles<sup>3</sup>, están separadas en dos partes para diferenciar las que son reducibles de las que no. En la Figura 4.5 b) se puede observar el disco  $D''$  de la demostración anterior.

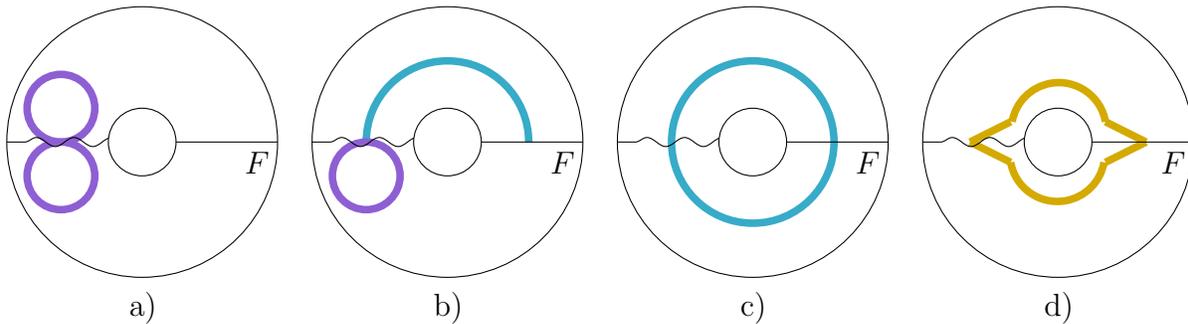


Figura 4.5: Descomposiciones reducibles.

En la Figura 4.5 c) se encuentra un anillo producto en cada uno de los cuerpos de compresión, de tal forma que sus fronteras son isotópicas en  $S$  y  $F$ . Isotopando dichos anillos es posible encontrar un toro  $T$  en  $E(K)$  que intersecta en una única curva esencial a cada superficie de Seifert; además, por la forma en que construimos  $T$ ,  $T \cap A$  y  $T \cap B$  son incompresibles,  $\partial$ -incompresibles y no son  $\partial$ -paralelos en  $A$  y  $B$ , respectivamente. Con un razonamiento análogo para la Figura 4.5 d), encontramos un anillo  $R$  propiamente encajado en  $E(K)$ .

Por el Teorema de Hiperbolización de Thurston sabemos que los nudos se dividen en tres clases: toroidales, satélites e hiperbólicos. Si  $T$  o  $R$  resultaran ser esenciales en  $E(K)$ , entonces  $K$  es un nudo satélite o un nudo toroidal, respectivamente.

Supongamos ahora que  $K$  es un nudo satélite, entonces existe un toro esencial  $T$  en  $E(K)$ .

<sup>3</sup>Los círculos morados representan discos esenciales, mientras que los arcos azules y verdes representan anillos esenciales y discos producto, respectivamente.

#### 4.4 Reducibilidad de una descomposición de Heegaard circular.

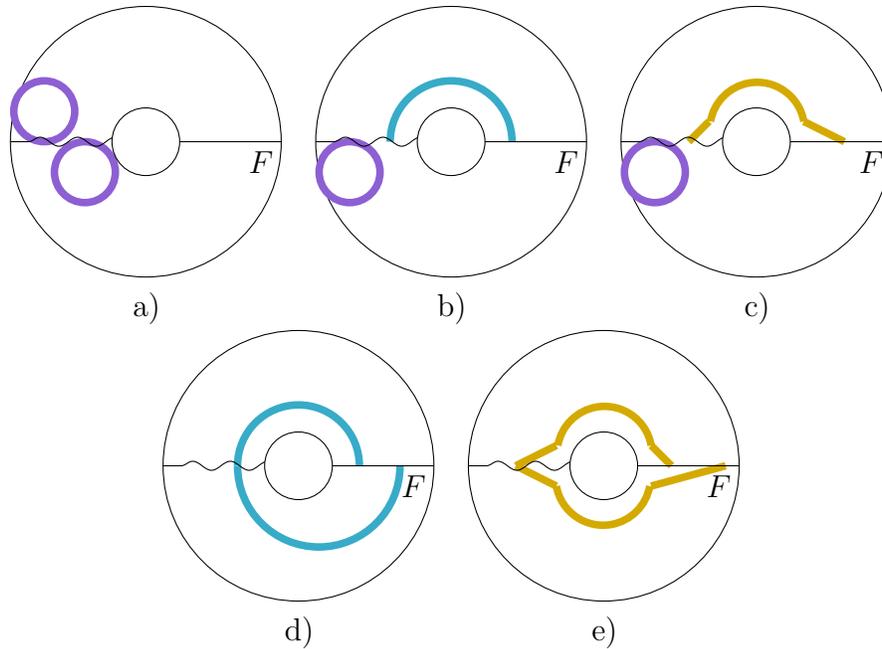


Figura 4.6: Descomposiciones con distancia circular 1.

Por el Teorema 3.19,  $T \cap A$  y  $T \cap B$  son incompresibles en cada cuerpo de compresión, pero no es posible saber si además son  $\partial^*$ -incompresibles.

Con lo anterior, surgen las siguientes preguntas:

- P2.** ¿Existen condiciones bajo las cuales la existencia de una descomposición reducible implique que el nudo sea no hiperbólico?
- P3.** ¿Nudos hiperbólicos tienen descomposiciones reducibles?

Además de esto, en la Sección 2.3 estudiamos el concepto de estabilización de una descomposición de Heegaard. Supongamos que  $(F, S)$  es una descomposición de Heegaard circular para  $E(K)$  y  $\alpha$  es un arco propiamente encajado en  $A$  con frontera en  $S \setminus \partial_v A$ , paralelo a un arco en  $S$ . Sea  $\eta(\alpha) \subset A$  una vecindad de  $\alpha$ , si pegamos  $\eta(\alpha)$  a  $B$  y la borramos de  $A$ , lo que estamos haciendo es agregar una 1-asa a  $B$  (cuyo corazón es  $\alpha$ ) y una 1-asa a  $A$  (con co-corazón  $D$ ). El resultado es una descomposición de Heegaard  $(F, S')$  donde el género de  $S'$  es una unidad mayor que el de  $S$ . A este proceso lo llamaremos *estabilización* de  $S$ .

Haciendo algunas modificaciones a los resultados obtenidos en la sección 2.3, es posible demostrar que una descomposición estabilizada es también reducible.

- P4.** (Proposiciones 2.16 y 2.17) ¿Una descomposición de Heegaard circular para  $E(K)$  es estabilizada si y sólo si es reducible?

Como esto parece algo poco probable, debido al uso de anillos producto y discos producto,

- P5.** ¿Que condiciones garantizan la equivalencia?

Dar respuesta a P2-P5 es trabajo a futuro.



# Índice alfabético

- $(C^2, \varepsilon)$ -aproximación, 6
- $\partial$ -reducible, 19
- $\partial^*$ -compresión, 32
- $k$ -asa, 9
- $n$ -variedad, 3
- índice, 6
  
- admisible, 39
- ancho circular, 29
- anillo producto, 16
- arco de más afuera, 3
  
- complejidad, 28
- complejo de curva y arcos, 23
- complejo de curvas, 21
- conjunto de nivel, 6
- cubo con asas, 9
- cuerpo de compresión, 12
- cuerpo de compresión generalizado, 25
- curva de más adentro, 3
  
- débilmente incompresible, 19
- débilmente reducible, 19, 49
- descomposición circular en asas para  $E(K)$ , 27
- descomposición de Heegaard, 13
- descomposiciones de Heegaard generalizadas, 21
- disco producto, 33
- distancia circular, 40, 42
- distancia de Hempel, 22
- distancia gruesa, 40, 42
  
- estabilización, 17, 51
- exterior de un nudo, 4
  
- frontera vertical, 28
  
- fuertemente irreducible, 49
- función de Morse mínima, 26
- función de Morse propia, 14
  
- localmente delgada, 29
  
- posición delgada, 29
- punto crítico, 5
  
- reducible, 18, 49
  
- sistema de discos, 15
- superficie  $\partial$ -compresible, 4
- superficie compresible, 3
- superficie de Seifert, 4
- superficie esencial, 4
  
- variedad irreducible, 3



# Bibliografía

- [1] Joan S. Birman, F. González-Acuña y José M. Montesinos. «Heegaard splittings of prime 3-manifolds are not unique». En: *Michigan Math. J.* 23.2 (1976), págs. 97-103. ISSN: 0026-2285. URL: <http://projecteuclid.org/euclid.mmj/1029001657> (vid. pág. 17).
- [2] A. J. Casson y C. McA. Gordon. «Reducing Heegaard splittings». En: *Topology Appl.* 27.3 (1987), págs. 275-283. ISSN: 0166-8641. DOI: [10.1016/0166-8641\(87\)90092-7](https://doi.org/10.1016/0166-8641(87)90092-7). URL: [https://doi.org/10.1016/0166-8641\(87\)90092-7](https://doi.org/10.1016/0166-8641(87)90092-7) (vid. pág. 1).
- [3] Renate Engmann. «Nicht-homöomorphe Heegaard-Zerlegungen vom Geschlecht 2 der zusammenhängenden Summe zweier Linsenräume». En: *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 35 (1970), págs. 33-38. ISSN: 0025-5858. DOI: [10.1007/BF02992472](https://doi.org/10.1007/BF02992472). URL: <https://doi.org/10.1007/BF02992472> (vid. pág. 17).
- [4] Hiroshi Goda. «On handle number of Seifert surfaces in  $S^3$ ». En: *Osaka J. Math.* 30.1 (1993), págs. 63-80. ISSN: 0030-6126. URL: <http://projecteuclid.org/euclid.ojm/1200784260> (vid. pág. 30).
- [5] Kevin Hartshorn. «Heegaard splittings of Haken manifolds have bounded distance». En: *Pacific J. Math.* 204.1 (2002), págs. 61-75. ISSN: 0030-8730. DOI: [10.2140/pjm.2002.204.61](https://doi.org/10.2140/pjm.2002.204.61). URL: <https://doi.org/10.2140/pjm.2002.204.61> (vid. págs. 1, 22, 32, 43).
- [6] John Hempel. «3-manifolds as viewed from the curve complex». En: *Topology* 40.3 (2001), págs. 631-657. ISSN: 0040-9383. DOI: [10.1016/S0040-9383\(00\)00033-1](https://doi.org/10.1016/S0040-9383(00)00033-1). URL: [https://doi.org/10.1016/S0040-9383\(00\)00033-1](https://doi.org/10.1016/S0040-9383(00)00033-1) (vid. págs. 1, 22).
- [7] Morris W. Hirsch. *Differential topology*. Graduate Texts in Mathematics, No. 33. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976, págs. x+221 (vid. pág. 6).
- [8] Jesse Johnson. «Heegaard splittings and open books». En: *arXiv e-prints*, arXiv:1110.2142 (oct. de 2011), arXiv:1110.2142. arXiv: [1110.2142 \[math.GT\]](https://arxiv.org/abs/1110.2142) (vid. pág. 41).
- [9] Osamu Kakimizu. «Finding disjoint incompressible spanning surfaces for a link». En: *Hiroshima Math. J.* 22.2 (1992), págs. 225-236. ISSN: 0018-2079. URL: <http://projecteuclid.org/euclid.hmj/1206392900> (vid. pág. 46).
- [10] Kevin P. Knudson. *Morse theory*. Smooth and discrete. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2015, págs. xiv+181. ISBN: 978-981-4630-96-2. DOI: [10.1142/9360](https://doi.org/10.1142/9360). URL: <https://doi.org/10.1142/9360> (vid. págs. 6, 14).
- [11] Mustafa Korkmaz y Athanase Papadopoulos. «On the arc and curve complex of a surface». En: *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 148.3 (2010), págs. 473-483. ISSN: 0305-0041. DOI: [10.1017/S0305004109990387](https://doi.org/10.1017/S0305004109990387). URL: <https://doi.org/10.1017/S0305004109990387> (vid. pág. 23).

## Bibliografía

- [12] Kevin Lamb y Patrick Weed. «A distance for circular Heegaard splittings». En: *J. Knot Theory Ramifications* 28.9 (2019), págs. 1950059, 34. ISSN: 0218-2165. DOI: [10.1142/S0218216519500597](https://doi.org/10.1142/S0218216519500597). URL: <https://doi.org/10.1142/S0218216519500597> (vid. págs. 1, 2, 32, 39, 41, 42, 47, 49).
- [13] Fabiola Manjarrez-Gutiérrez. «Circular thin position for knots in  $S^3$ ». En: *Algebr. Geom. Topol.* 9.1 (2009), págs. 429-454. ISSN: 1472-2747. DOI: [10.2140/agt.2009.9.429](https://doi.org/10.2140/agt.2009.9.429). URL: <https://doi.org/10.2140/agt.2009.9.429> (vid. págs. 2, 5, 27, 29, 30).
- [14] John Milnor. *Lectures on the h-cobordism theorem*. Notes by L. Siebenmann and J. Sondow. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1965, págs. v+116 (vid. pág. 26).
- [15] Edwin E. Moise. *Geometric topology in dimensions 2 and 3*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 47. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977, págs. x+262 (vid. pág. 10).
- [16] Kurt Reidemeister. «Zur dreidimensionalen Topologie». En: *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 9.1 (1933), págs. 189-194. ISSN: 0025-5858. DOI: [10.1007/BF02940644](https://doi.org/10.1007/BF02940644). URL: <https://doi.org/10.1007/BF02940644> (vid. pág. 17).
- [17] Dale Rolfsen. *Knots and links*. Vol. 7. Mathematics Lecture Series. Corrected reprint of the 1976 original. Publish or Perish, Inc., Houston, TX, 1990, págs. xiv+439. ISBN: 0-914098-16-0 (vid. pág. 5).
- [18] Martin Scharlemann y Abigail Thompson. «Thin position and Heegaard splittings of the 3-sphere». En: *J. Differential Geom.* 39.2 (1994), págs. 343-357. ISSN: 0022-040X. URL: <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214454875> (vid. págs. 18, 20).
- [19] Martin Scharlemann y Abigail Thompson. «Thin position for 3-manifolds». En: *Geometric topology (Haifa, 1992)*. Vol. 164. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, págs. 231-238. DOI: [10.1090/conm/164/01596](https://doi.org/10.1090/conm/164/01596). URL: <https://doi.org/10.1090/conm/164/01596> (vid. pág. 29).
- [20] James Singer. «Three-dimensional manifolds and their Heegaard diagrams». En: *Trans. Amer. Math. Soc.* 35.1 (1933), págs. 88-111. ISSN: 0002-9947. DOI: [10.2307/1989314](https://doi.org/10.2307/1989314). URL: <https://doi.org/10.2307/1989314> (vid. pág. 17).
- [21] K. Veber, A. Pazhitnov y L. Rudolf. «The Morse-Novikov number for knots and links». En: *Algebra i Analiz* 13.3 (2001), págs. 105-118. ISSN: 0234-0852 (vid. pág. 26).
- [22] Friedhelm Waldhausen. «Heegaard-Zerlegungen der 3-Sphäre». En: *Topology* 7 (1968), págs. 195-203. ISSN: 0040-9383. DOI: [10.1016/0040-9383\(68\)90027-X](https://doi.org/10.1016/0040-9383(68)90027-X). URL: [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(68\)90027-X](https://doi.org/10.1016/0040-9383(68)90027-X) (vid. pág. 17).
- [23] Friedhelm Waldhausen. «On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large». En: *Ann. of Math. (2)* 87 (1968), págs. 56-88. ISSN: 0003-486X. DOI: [10.2307/1970594](https://doi.org/10.2307/1970594). URL: <https://doi.org/10.2307/1970594> (vid. pág. 30).