Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

EFECTOS DE APANTALLAMIENTO EN LA ESTABILIDAD DE SISTEMAS MICROELECTROMECÁNICOS (MEMS)

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE: Física

PRESENTA: María Guadalupe Gómez Farfán

TUTOR: Dr. Raúl Patricio Esquivel Sirvent



Ciudad Universitaria, Ciudad de México, 2019



Universidad Nacional Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor. Datos del alumno Gómez Farfán María Guadalupe
 71 86 14 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Física 306005590

Datos del tutor
 Dr.
 Esquivel
 Sirvent
 Raúl Patricio

3. Datos del sinodal 1Dr.VillarealLujánCarlos

4. Datos del sinodal 2 Dra. Valladares Mc Nelis Renela María

5. Datos del sinodal 3 Dra. Oropeza Ramos Laura Adriana

6. Datos del sinodal 4 Dr. Ordóñez Romero César Leonardo

7. Datos de la tesis
Efectos de apantallamiento en la estabilidad de sistemas microelectromecánicos (MEMS)
79
2019

A la Facultad de Ciencias y a la Universidad, por la formación que me han dado. Es gracias a ustedes que es posible el presente trabajo. En verdad, gracias. María Guadalupe Gómez Farfán.

Resumen

En este trabajo se presenta un análisis de las condiciones de estabilidad estática y dinámica de sistemas microelectromecánicos (MEMS). En particular se presenta la inestabilidad *pull in* o de colapso súbito presente en estructuras suspendidas (Fig. 1), utilizando el modelo masa resorte.

Dicho análisis se realiza por medio de un parámetro que será llamado λ , el cual caracteriza al sistema de acuerdo a la interacción a contemplar y brinda información acerca de cuándo el sistema deja de ser estable debido a la presencia de la inestabilidad de colapso súbito. Las interacciones contempladas son la electroestática, Van der Waals $(1/u^3)$, Casimir $(1/u^4)$ y un término del tipo Yukawa o de apantallamiento de la forma $\sim e^{-\alpha u}/u^n$, donde α es el término que caracteriza al electrolito, $n \in \mathbb{N}^+$ (se consideran los valores de n = 2, 3, 4, que caracterizan las interacciones contempladas) y u es la distancia entre el elemento móvil del dispositivo y el sustrato. Las fuerzas del tipo apantallado se encuentran presentes en procesos de apantallamiento electroestático, cuando se depositan metales sobre superficies no conductoras y en presencia de electrolitos.

Al contemplar las interacciones del tipo $\frac{1}{u^n}$, se observó que al aumentar el valor de n, la inestabilidad se presenta en valores de \bar{u} (distancia adimensionalizada entre el elemento móvil y el sustrato) más pequeños, es decir, el rango de estabilidad del sistema es menor para el caso de interacciones del tipo van der Waals y Casimir con respecto al caso electroestático. Para el caso donde se contempla el término de apantallamiento para cada una de las interacciones, se varió el valor del parámetro α' (término adimenzionalizado que caracteriza al electrolito) con el propósito de encontrar para qué valores de la variable \bar{u} el sistema presenta estabilidad.

Por medio del uso del espacio fase de la ecuación de movimiento obtenida utilizando el modelo masa resorte, se encontraron los valores de \bar{u} para los cuales el sistema presenta soluciones periódicas, considerando el término de amortiguamiento igual a cero y variando los valores de los parámetros λ y α .



Figura 1: Resonador UHF NEMS (Imagen tomada del sitio web: http://nano.caltech.edu/). Este MEMS se encuentra constituido por una barra vibrante con los extremos fijos. En el dispositivo actúan dos fuerzas: una fuerza de resitución elástica F_e y una fuerza de interacción F, que en nuestro caso puede ser electroestática, de Casimir o del tipo Yukawa.

Índice general

Ag	grade	ecimier	ntos	ш
Ín	dice	de figu	ıras	IX
Ín	dice	de tab	las	cIII
1.	Intr	oducci	ón	1
2.	Mar	co teó	rico	3
	2.1.	Antece	edentes	3
	2.2.	Microf	rabricación	13
		2.2.1.	Micromaquinado en Volumen	13
		2.2.2.	Micromaquinado de Superficie	14
		2.2.3.	Litografía	15
		2.2.4.	Silicio	16
	2.3.	Inesta	bilidad Pull in o colapso súbito	18
	2.4.	Tipos	de MEMS que funcionan por medio de interacciones electroestáticas	19
3.	Moo	delo M	asa Resorte	25
		3.0.1.	Modelo Masa Resorte	26
		3.0.2.	Soluciones para los casos estacionarios	29
		3.0.3.	Modos de Vibración de una viga longitudinal	35
4.	Fue	rzas de	el tipo $\frac{1}{2\pi m}$	37
		4.0.1.	Fuerza de Casimir	37
		4.0.2.	Fuerza de Van der Waals	39
		4.0.3.	Relación entre las fuerzas de Casimir y de Van der Waals	40
		4.0.4.	Ecuación dinámica del sistema masa resorte considerando inter-	
			acciones del tipo $\frac{1}{n^n}$	41
		4.0.5.	Soluciones estáticas	42
		4.0.6.	Solución dinámica	45

5.	Apantalla	miento	53
	5.0.1.	Potencial Coulombiano apantallado	53
	5.0.2.	Fuerzas de dispersión apantalladas	57
	5.0.3.	Ecuación dinámica del sistema masa resorte considerando inter-	
		acciones que presentan un apantallamiento tipo Yukawa $\ .\ .\ .$	60
	5.0.4.	Soluciones estáticas	60
	5.0.5.	Solución dinámica	65
6.	Conclusion	nes	71
А.	Dominio v A.1. Apénd	iscoso ice	73 73
Bi	bliografía		77

Índice de figuras

1.	Resonador UHF NEMS (Imagen tomada del sitio web: http://nano.caltech.e Este MEMS se encuentra constituido por una barra vibrante con los ex- tremos fijos. En el dispositivo actúan dos fuerzas: una fuerza de resitución elástica F_e y una fuerza de interacción F, que en nuestro caso puede ser electroestática, de Casimir o del tipo Yukawa.	edu/). VI
2.1.	Campo eléctrico y distribución de carga en un capacitor de placas para- lelas en el cual se coloca un electreto (Imagen tomada del artículo citado de C Son y B. Ziaia)	4
2.2.	Actuador electroestático modelado como capacitor de placas paralelas (Imagen tomada del artículo citado de S. Chowdhury, M. Ahmadi y C. Millor)	5
2.3.	Esquema del sistema contemplado por el modelo masa-resorte y repre- sentación de la viga empotradrada por ambos lados (Imagen tomada del artículo citado de Sayanu Pamidighantam, Robert Puers, Kris Baert y	0
0.4	Harrie A. C. Tilmans)	7
2.4.	Esquema del sistema contemplado por el modelo masa-resorte y repre- sentación de la viga empotradrada por ambos lados (Imagen tomada del artículo citado de Fuqian Yang)	9
2.5.	Esquema de una actuador electroestático en forma de viga voladiza y posibles configuraciones de la viga voladiza. (a) configuración "floating", (b) configuración "pinned", (c) configuración "flat" (Imagen tomada del artículo citado de Subrahmanyam Gorthi, Atanu Mohanty y Anindya	
	Chatterjee)	11
2.6.	Estructura tetra édrica con un ángulo de 109.5° entre cada uno de los	
0.7	enlaces covalentes.	17
2.7.	(a) GLV constituida por cinco cintas, (b) Vista de un costado de la GLV	20
28	Esquema de un microespeio de torsión	20 21
$\frac{2.0}{2.9}$	Esquema de una microbomba electroestática básica .	22
2.10.	Esquema simple del motor paso a paso electroéstatico	23

3.1.	Sistema masa-resorte que simula el comportamiento del dispositivo elec- troestático. Cuvas placas tienen un área. A	26
3.2.	Gráfica de $f(\bar{u})$ para distintos valores de λ . Las raíces reales de $f(\bar{u})$	20
22	definen los estados estacionarios del sistema	30
ე.ე.	$\bar{u} \in [0, 1]$. En $\bar{u} = 0$ las placas están en su separación inicial. Para $\bar{u} = 1$ la separación entre las placas es cero	31
3.4.	Valores de la constante elástica del resorte para barras con distintas secciones transversales.	32
3.5.	Diagrama de bifurcación. $\lambda vs. \bar{u}$, para distintas secciones transversa- les. El valor de λ_p^* cambia pero no el valor de \bar{u}^*	34
4.1.	Placas paralelas metálicas, a las que las fluctuaciones del vacío tienden a acercar entre sí. Debido a la diferencia de presión que ejercen sobre su	90
4.9	anverso y reverso	00 49
4.2. 13	Gráfica de λ' vs. \bar{u} para distintos valores de n	42
4.9. 4 4	Gráfica de λ'' vs. <i>n</i> donde para distintos valores de n	40 44
4.5	Diagrama de fase de la Ec. (4.5) para el caso no viscoso, para $n = 2$ y	
1.0.	distintos valores de λ'	46
4.6.	Diagrama de fase de la Ec. (4.5) para el caso no viscoso, para $n = 3$ v	10
1.01	distintos valores de λ'	47
4.7.	Diagrama de fase de la Ec. (4.5) para el caso no viscoso, para $n = 4$ y distintos valores de λ'	48
4.8.	Diagrama de fase de la Ec. (4.5) para el caso no viscoso, para $n = 5$ y distintos valores de λ'	49
4.9.	Diagrama de fase de la Ec. (4.5) para el caso no viscoso, para $n = 6$ y distintos valores de λ'	50
- 1		
5.1.	Sistema constituido por dos dieléctricos denotados como A y B con una	50
59	Solution sama entre ambos $\dots \dots \dots$	00 61
53.	Grafica de λ' vs. <i>u</i> para $n = 2$, 5,4 y $\alpha' = 0.10$	62
5.0.5	Gráfica de λ' vs. \bar{u} para $n = 2$ y $\bar{u} = 0.1, 0.5, 0.7$	62 63
5.5	Gráfica de λ' vs. \bar{u} para $n = 4$ v $\rho' = 0.1, 0.5, 0.7$	64
5.6.	Espacio fase de la Ec. 5.27 para $n = 0$, $n = 1$, $\lambda' = 0.26$ y distintos	01
0.01	valores para α' . El inciso (a) corresponde a $\alpha = 0$, el (b) a $\alpha = 0.1$, el	
	(c) a $\alpha' = 0.15$, el (d) a $\alpha' = 0.2$, el (e) a $\alpha' = 0.3$ y el (f) a $\alpha' = 0.4$.	66
5.7.	Espacio fase de la Ec. 5.27 par a $\eta=0,n=2,\lambda'=0.1481$ y distintos	
	valores para α' . El inciso (a) corresponde a $\alpha' = 0$, el (b) a $\alpha' = 0.1$, el	
	(c) a $\alpha' = 0.15$, el (d) a $\alpha' = 0.2$, el (e) a $\alpha' = 0.3$ y el (f) a $\alpha' = 0.4$	67
5.8.	Espacio fase de la Ec. 5.27 para $\eta = 0, n = 3, \lambda' = 0.1055$ y distintos	
	valores para α' . El inciso (a) corresponde a $\alpha' = 0$, el (b) a $\alpha' = 0.1$, el	
	(c) a $\alpha' = 0.15$, el (d) a $\alpha' = 0.2$, el (e) a $\alpha' = 0.3$ y el (f) a $\alpha' = 0.4$.	68

69
74
75
75
76

Índice de tablas

2.1.	Propiedades Mecánicas del Silicio monocristalino (SCS) y otros materia- les de importancia tecnológica.	17
4.1.	Valores de \bar{u} donde se presenta el valor máximo del parámetro λ' , el cual es denotado como λ'^*	44
4.2.	Valores de \bar{u} donde se presenta el máximo del parámetro λ' (denotado como λ'^*) obtenidos por medio de los diagramas de espacio fase	50
5.1.	Valores máximos del parámetro λ' (denotados con λ'^*) y valores de \bar{u} en	
	los cuales se presentan, para el caso $\alpha' = 0.15$ y $n = 2, 3, 4$	61
5.2.	Valores máximos del parámetro λ' (denotados con λ'^*) y valores de \bar{u} en	
	los cuales se presentan, para el caso $n = 2$ y distintos valores de α'	62
5.3.	Valores máximos del parámetro λ' (denotados con λ'^*) y valores de \bar{u} en	
	los cuales se presentan, para el caso $n = 3$ y distintos valores de α'	63
5.4.	Valores máximos del parámetro λ' (denotados con λ'^*) y valores de \bar{u} en	
	los cuales se presentan, para el caso $n = 4$ y distintos valores de α'	64
5.5.	Valores de \bar{u}, α' donde se presenta estabilidad en el sistema, considerando	
	los valores máximos de λ' , donde el sistema presenta estabilidad para	
	el caso sin apantallamiento, obtenidos por medio de los diagramas de	
	espacio fase.	70

Capítulo 1

Introducción

Los sistemas Micro Electro Mecánicos (MEMS) y Nano Electro Mecánicos(NEMS) son dispositivos integrados por elementos eléctricos y mecánicos en el ordén de magnitud de los milímetros a los micrómetros y de los micrómetros a los nanómetros, respectivamente. Dichas estructuras pueden estar constituidas de elementos relativamente simples hasta estar compuestos de elementos móviles que son controlados por microelectrónica integrada.

En las pasadas décadas se ha mostrado que es posible reducir a la micro y nanoescala, muchos de los sensores y actuadores existentes en la macroescala. Varios transductores de energía electroestática, magnética, térmica, mecánica, etc, han sido empleados en el diseño de microsensores de temperatura, presión, flujo de masa, velocidad, sonido, fuerzas inerciales, especies químicas, campos magnéticos, radiación, entre otros (1) y microactuadores como microválvulas, microengranes, micropinzas y nanopinzas, microbombas, microespejos, etc. (2), que a su vez son componentes simples de sistemas más complejos (3). Estos microdispositivos han mostrado un rendimiento que excede de manera considerable el rendimiento de su contraparte en la macroescala y presentan un menor costo de producción, debido a que son construidos por métodos de manufactura por lote, similares a las técnicas utilizadas en la microelectrónica (4).

Además, prometen un avance tecnológico en áreas relacionadas con las tecnologías de la información, medicina, manufactura, transporte, energía, seguridad, etc. En la actualidad los MEMS y NEMS son utilizados en bolsas de aire para automoviles, sistemas de seguridad, arreglos de micro espejos para pantallas ópticas de alta definición, puntas para el microscopio de escaneo electrónico, sistemas de enfriamiento de circuitos eléctronicos, reactores de separación de células biológicas, impresoras de inyección, entre otros (2).

Se han construido modelos que analizan e interpretan los sistemas micro y nano electromecánicos con el fin de estudiar los fenómenos presentes en estas escalas y optimizar su diseño, logrando una disminución en el tiempo y costo que conlleva su desarrollo. Con

1. INTRODUCCIÓN

este fin, se puede clasificar a los micro y nano dispositivos de acuerdo a los fenómenos físicos que se encuentran relacionados con su funcionamiento, es decir, se pueden clasificar en micro y nano sistemas térmicos, elásticos, térmicos y elásticos, electroestáticos, electroestáticos, etc (1).

El presente trabajo aborda la inestabilidad mecánica en los micro y nano dispositivos en los cuales están presentes fenómenos electroestáticos y elásticos. Cuando hablamos de inestabilidad nos referimos a estudiar en qué condiciones sucede el colapso súbito del dispositivo debido al contacto entre el actuador mecánico y los demás componentes de los que se encuentre conformado. Dicha inestabilidad también llamada "pull in" ocurre cuando el voltaje aplicado al sistema excede un valor crítico, lo cual hace que no exista una configuración de estados estacionarios donde los miembros mecánicos permanezcan separados provocando que estos colisionen (1). Los estudios enfocados en la confiabilidad de este tipo de dispositivos han mostrado que la adhesión o el colapso de las partes que conforman los MEMS/NEMS son una de las principales causas por las cuales estos presentan fallas (5, 6). Tal es el caso de los acelerómetros usados para desplegar las bolsas de aire en los automóviles, dispositivos digitales de microespejos utilizados en equipos procesadores digitales de luz (5), sensores capacitivos, micromotores, conmutadores RF, etc (6).

Capítulo 2

Marco teórico

2.1. Antecedentes

Los avances tecnológicos situados en la época de la Segunda Guerra Mundial dieron pie al ascenso de los microsistemas. En particular, el desarrollo del radar impulsó las investigaciones en la síntesis de materiales semiconductores puros. Entre ellos el silicio, el cual abrió paso a los circuitos integrados y a la tecnologia MEMS en la actualidad (1).

Se puede tomar como punto de partida hacia la investigación de MEMS y NEMS el trabajo presentado por Richard Feyman en la reunión anual de la Sociedad Americana de Física en 1959, titulado "There's Plenty of Room at the Bottom" (1, 2). En el cual anticipaba muchas de las investigaciones de las próximas décadas relacionadas con NEMS y MEMS. Sin embargo, es hasta el año de 1964 cuando la idea se vio culminada con la llegada de un dispositivo que exhibía todas las características de los MEMS presentes en la actualidad: el transistor de compuerta resonante desarrollado por H. C. Nathanson y sus colegas en Westinghouse (1).

Posteriormente, en el año de 1979, el acelerómetro micromaquinado diseñado por investigadores de la Universidad de Stanford se convirtió en el primer dispositivo MEMS exitoso y en el año de 1981 es publicado el primer artículo relacionado con nanotecnología molecular por K. Eric Dexler titulado "Protein design as a pathway to molecular manufacturing".

El interés en la nanotecnología aumentó en las décadas de los 80s y 90s, debido al descubrimiento de los nanotubos de carbono en 1991 y a que en este periodo de tiempo se desarrolló tanto el microscopio de escaneo por tunelamiento (1982), como el microscopio de fuerza atómica (1986) y la técnica para la producción de nanotubos uniformes desarrollada por Smalley en 1996 (1).

Debido a que el estudio de los dispositivos micro y nanoelectromecánicos se ha ex-

tendido, se han desarrollado modelos para analizar la estabilidad de los dispositivos MEMS/NEMS que consideran correcciones al modelo de masa resorte (que será la base de este trabajo) o resuelven las ecuaciones que describen al sistema por medio del uso de métodos numéricos. Algunos de estos trabajos son presentados a continuación:

C. Son y B. Ziaie (7) presentan un análisis teórico de la inestabilidad producida por el colapso súbito presente en microactuadores electroestáticos de placas paralelas bajo una configuración de carga y voltaje variable. Estos microdispositivos constan de dos placas paralelas conectadas entre ellas por medio de una impedancia, a las cuales se les coloca un material dieléctrico cargado (electreto), tal como se muestra en la Fig. 2.1. Si se considera que la fuerza electroestática está dada por



Figura 2.1: Campo eléctrico y distribución de carga en un capacitor de placas paralelas en el cual se coloca un electreto (Imagen tomada del artículo citado de C.Son y B. Ziaie)

$$F_e = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 A}{\epsilon_0} \frac{1}{(1 + \epsilon_{elec} \frac{d_{aire}}{d_{alac}})^2}$$
(2.1)

donde A es el área de las placas, σ es la densidad de carga superficial en las placas, ϵ_0 es la permitividad del vacio, d_{aire} es la brecha ocupada por el aire y d_{elec} es la brecha

ocupada por el electreto y la fuerza elástica por

$$F_r = -kx. (2.2)$$

Entonces, se puede ver que igualando estas, se puede obtener el valor máximo de la distancia recorrida por la placa superior en el cual el sistema aún se encuentra en equilibrio. De esto, se obtiene la siguiente expresión

$$\sigma = \sqrt{2\frac{k\epsilon_0}{A}x(1+\epsilon_{elec}\frac{x_0-x}{d_{elec}})^2},$$
(2.3)

la cual relaciona la densidad de carga en la superficie y la deflexión de la placa superior.

Al obtener el valor de la distancia máxima (x) que puede recorrer la placa superior, por medio de considerar que $\frac{d\sigma}{dx} = 0$ cuando se tiene un máximo en la función, lograron mostrar que el rango de movimiento bajo estas condiciones es mejorado con respecto al del sistema que no contempla un material entre las placas. Para electretos con espesor cuatro veces menor que la separación entre las placas, se observó que el rango de movimiento, abarcó casi el cien por ciento de la separación entre las placas.



Figura 2.2: Actuador electroestático modelado como capacitor de placas paralelas (Imagen tomada del artículo citado de S. Chowdhury, M. Ahmadi y C. Miller)

2. MARCO TEÓRICO

Una variante al sistema de masa-resorte, es la desarrollada por S. Chowdhury, M. Ahmadi y C. Miller (8), en la cual se encuentra la expresión para el voltaje de colapso súbito para una viga en voladizo. Su modelo partió de considerar al sensor capacitivo como un sistema masa resorte, el cual se presenta en la Fig 2.2. El sistema está sujeto a cuatro tipos de fuerzas, las cuales se mencionan a continuación: la excitación externa o mecánica, la fuerza de restauración del resorte, la fuerza de amortiguamiento y la fuerza electroestática dada por el voltaje proporcionado. Una vez considerado esto, introdujeron la corrección para la fuerza electrostática considerando los campos de borde por medio de la expresión de la capacitancia obtenida por Meijs y Fokkema para cuando hay aire entre las placas, la cual tiene la siguiente forma:

$$C = \epsilon_0 l[(\frac{w}{d_0}) + 0.77 + 1.06(\frac{w}{d_0})^{0.25} + 1.06(\frac{h}{d_0})^{0.5}] + 1.06\epsilon_0 w(\frac{l}{d_0}), \qquad (2.4)$$

donde ϵ_0 es la permitividad del vacio, l es la longitud de la viga, w es el ancho de la viga, h es la altura de la viga, d_0 es la separación inicial entre las placas.

Con esta expresión obtuvieron la fuerza electroestática, la cual expandieron usando series de Taylor alrededor de un punto z_0 . De esta forma obtuvieron la siguiente ecuación de movimiento para el sistema en el caso estático,

$$Kz = \frac{\epsilon_0 w l V^2}{2d_0^2} + \frac{0.1325\epsilon_0 w^{0.25} l V^2}{d_0^{1.25}} + \frac{0.265\epsilon_0 h^{0.5} l V^2}{d_0^{1.5}} + \frac{0.1325\epsilon_0 l^{0.25} w V^2}{d_0^{1.25}} + K_{soft-CB}z,$$
(2.5)

donde

$$K_{soft-CB} = \frac{\epsilon_0 w l V^2}{d_0^3} + \frac{0.17\epsilon_0 w^{0.25} l V^2}{d_0^2 \cdot 25} + \frac{0.4\epsilon_0 l h^{0.5} V^2}{d_0^2 \cdot 5} + \frac{0.17\epsilon_0 L^{0.25} w V^2}{d_{2.25}}.$$
 (2.6)

Por medio de la cual y considerando que la expresión para la presión uniforme presente en una viga en voladizo está dada por

$$P = \frac{Kz}{wl} = \frac{2}{3} \frac{\tilde{E}h^3}{l^4} z,$$
 (2.7)

donde z es la deflexión de la viga y \tilde{E} es igual a $E/(1-v^2)$; donde E es el módulo de Young y v es el radio de Poisson del material, se obtuvo que para el caso estático el valor del voltaje donde sucede el colapso súbito se encuentra dado por

$$V_{PI} = \sqrt{\frac{2\tilde{E}h^3d_0}{8.37\epsilon_0 l^4 (\frac{5}{6d_0^2} + \frac{0.19}{d_0^{1.25}w^{0.75}} + \frac{0.19}{d_0^{1.25}l^{0.75}} + \frac{0.4h^{0.5}}{d_0^{1.5}w})}.$$
(2.8)



Figura 2.3: Esquema del sistema contemplado por el modelo masa-resorte y representación de la viga empotradrada por ambos lados (Imagen tomada del artículo citado de Sayanu Pamidighantam, Robert Puers, Kris Baert y Harrie A. C. Tilmans)

Otro modelo que hace correcciones al modelo masa-resorte es el planteado por Sayanu Pamidighantam, Robert Puers, Kris Baert y Harrie A. C. Tilmans (9). Este modelo estudia en que momento se presenta la estabilidad "pull in" en el caso de una viga fija en ambos lados y el caso en el que uno de sus lados se encuentra libre. En el modelo se obtiene el potencial al cual se presenta la inestabilidad, partiendo del hecho de que se puede considerar al sistema como un capacitor de placas paralelas (Fig. 2.3), cuya parte móvil será vista como una placa unida a un resorte con una constante de restauración K_{eff} tal y como lo plantea el modelo masa-resorte. Por lo que, el potencial en el cual se presenta el colpaso del sistema, se encuentra dado por:

$$V_{PI} = \sqrt{\frac{8K_{eff}d_0^3}{27\epsilon_0 A_{eff}}} \tag{2.9}$$

donde d_0 es la distancia inicial entre las placas, ϵ_0 es la permitividad del vacio, K_{eff} es la constante de restitución asociada al resorte y A_{eff} es el área efectiva de la placa móvil. A esta expresión se incorporan las expresiones correspondientes de la constante de restitución efectiva y el área efectiva de las placas, las cuales consideran las correcciones al sistema; es decir, contemplan los efectos de el área parcial contemplada para los electrodos, el esfuerzo axial, la rigidez no lineal, la redistribución de carga y los efectos del campo de borde. Las expresiones correspondientes son presentadas a continuación, para el caso de una viga empotrada por ambos lados se tiene que

$$K_{eff}(\lambda_r) = \frac{q_0 l_c}{y_{max}} = \left[-8k^2 l \lambda_r N \cosh(\frac{kl}{4})\right] \times \left[(8 + k^2 l^2 (\lambda_r - 2)\lambda_r) \cosh(\frac{kl}{4}) - 8\cosh[\frac{kl}{4}(1 - 2\lambda_r)] + 4k l \lambda_r \operatorname{senh}(\frac{kl}{4})\right]^{-1},$$
(2.10)

$$N = (\hat{\sigma} + \sigma_{NL})bh \tag{2.11}$$

$$= (0 + 0NL) 0 n$$

$$\lambda_r = l_c/l \tag{2.12}$$

$$k = \sqrt{12N/\hat{E}bh^3} \tag{2.13}$$

donde $\hat{\sigma}_0 = \sigma_0(1-\nu)$ es el esfuerzo residual de la película, $\sigma_{NL} = \frac{\pi^2 E y_{max}^2}{4l^2}$ es el estiramiento axial estimado inducido por el estiramiento no lineal, l es la longitud de la viga, l_c es la longitud de la parte de la viga que es deflectada y \hat{E} es el módulo de Young efectivo. Para el caso en donde uno de sus extremos se encuentra libre, K_{eff} está dada por

$$K_{eff}(\lambda_r) = \frac{q_0 l_c}{y_{max}} = \frac{2}{3} \frac{\hat{E}bh^3}{l^3} [\frac{3}{8 - 6\lambda_r + \lambda_r^3}].$$
 (2.14)

El área efectiva $A_{eff}(\beta, \lambda_r)$ tiene la siguiente expresión:

$$A_{eff}(\beta, \lambda_r) = \alpha(\beta, \lambda_r) b_{eff}(\beta) l \tag{2.15}$$

donde α depende del caso a tratar. Es decir, se tienen α_{CC} y α_{CF} , las cuales están asociados a la viga empotrada por ambos lados y la viga que tiene uno de sus lados libre y están dadas por las siguientes expresiones:

$$\alpha_{CC}(\beta,\lambda_r) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-\beta} \arctan(\frac{\tan(\frac{\pi\lambda_r}{2})}{\sqrt{1-\beta}})$$
(2.16)

у

$$\alpha_{CF}(\beta,\lambda_r) = \frac{4}{\pi} \frac{1-\beta}{\sqrt{1-2\beta}} \left(\arctan\left[\left(\sqrt{1-2\beta}\right)\right] - \arctan\left[\left(\sqrt{1-2\beta}\right) \tan\frac{\pi}{4}(1-\lambda_r)\right] \right)$$
(2.17)

donde

$$b_{eff}(\beta) = b(1 + 0.65 \frac{(1 - \beta)d_0}{b})$$
(2.18)

y β es la medida de deflexión máxima normalizada de la viga para cualquier voltaje aplicado entre las placas y está dada por:

$$\beta = y_{max}/d_0. \tag{2.19}$$

Hay modelos que no sólo corrigen el modelo agrupado o masa resorte, sino que abordan el problema por medio de otros métodos. Fuqian Yang estudió la deformación mecánica estática de una membrana (el sistema se presenta en la Fig. 2.4) utilizando la teoría de elasticidad para una membrana y obtuvó de manera analítica el valor crítico del voltaje necesario para que la membrana entre en contacto con el sustrato.



Figura 2.4: Esquema del sistema contemplado por el modelo masa-resorte y representación de la viga empotradrada por ambos lados (Imagen tomada del artículo citado de Fuqian Yang)

La ecuación de movimiento que gobierna el sistema está dada por

$$(N+N_0)\frac{d^2w(x)}{dx^2} = -p(x) = -\frac{\epsilon_0}{2} \left[\frac{\epsilon V_0}{\epsilon_0 d_e + \epsilon[g - w(x)]}\right]^2,$$
(2.20)

donde $\frac{d^2w(x)}{dx^2}$ representa la curvatura de la membrana, N es la fuerza de tensión de linea (fuerza por unidad de longitud), N_0 es la fuerza de tensión residual, d_e es el grosor del dieléctrico utilizado para evitar una avería eléctrica y ϵ es su correspondiente permitividad dieléctrica, ϵ_0 es la permitividad dieléctrica del vacio, g es el espacio entre

la membrana y el sustrato y p(x) es la presión externa aplicada, que en este caso es la presión eléctrica aplicada a la membrana. Si introducimos los siguientes parámetros

$$y(x) = 1 - \frac{w(x)}{g + \epsilon_0 d_e/\epsilon}, \quad \tilde{x} = x/L$$
 (2.21)

у

$$\beta = \frac{\epsilon_0 L^2 V_0^2}{2(N+N_0)(G+\epsilon_0 d_e/\epsilon)^3}.$$
(2.22)

la Ec. 2.20 toma la forma siguiente

$$\frac{d^2y}{d\tilde{x}^2} = \frac{\beta}{y^2}.$$
(2.23)

Por lo que, la ecuación a resolver queda expresada por

$$\frac{d^2y}{d\tilde{x}^2} = \frac{\beta}{y^2} \tag{2.24}$$

sujeta a las condiciones de frontera $dy/d\tilde{x} = 0$ a $\tilde{x} = 0$ y y = 1 cuando $\tilde{x} = 1$. Al resolverla obtuvieron que el voltaje "pull" in crítico está dado por

$$V_c^2 = \frac{0.7(N+N_0)(g+\epsilon_0 d_e/\epsilon)^3}{\epsilon_0 L^2}.$$
(2.25)

También consideran el caso donde la membrana experimenta una carga mecánica. Esto lo hacen considerando la siguiente ecuación de movimiento

$$\frac{d^2y}{d\tilde{x}^2} = +\alpha + \frac{\beta}{y^2} \tag{2.26}$$

donde

$$\alpha = \frac{pL^2}{(N+N_0)(g+\epsilon_0 d_e/\epsilon)},\tag{2.27}$$

con lo que obtuvieron una relación de como varia el parámetro β con respecto a la carga mecánica experimentad por el dispositivo. Con esto concluyeron, que el voltaje crítico es proporcional a la raiz cuadrada de la fuerza de tensión experimentada por la membrana e inversamente proporcional a la longitud de la membrana y que si se considera que se aplica una presión mecánica , el voltaje crítico disminuye conforme aumenta la presión. Por lo que, la presión hace que la membrana colapse más rápidamente (4).

Finalmente, en el trabajo de Subrahmanyam Gorthi, Atanu Mohanty y Anindya Chatterjee (10) se muestra que los rangos de operación para los actuadores de placas paralelas MEMS pueden ser extendidos más allá de cuando ocurre el colapso o la adherencía entre sus partes, si se coloca una capa de material dieléctrico entre las placas. Por medio de diferencias finitas obtienen los rangos de voltaje sobre los cuales pueden existir las tres configuraciones que se presentarán a continuación y los puntos de transición entre cada una de ellas. Estas configuraciones se presentan cuando la viga se encuentra flotando o no está en contacto con el sustrato o dieléctrico, cuando el extremo que no se encuentra fijo toca el sustrato pero no sufre adherencia y cuando dicho extremo está completamente tocando el sustrato. Esto se puede observar en la Fig. 2.5.



Figura 2.5: Esquema de una actuador electroestático en forma de viga voladiza y posibles configuraciones de la viga voladiza. (a) configuración "floating", (b) configuración "pinned", (c) configuración "flat" (Imagen tomada del artículo citado de Subrahmanyam Gorthi, Atanu Mohanty y Anindya Chatterjee).

En este trabajo se partió de la ecuación Euler-Bernoulli que gobierna la deformación mecánica para una viga, la cual se encuentra dada por

$$EI\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = F_e \tag{2.28}$$

 donde

$$F_e = -\frac{\epsilon_0 w V^2}{2(z + \frac{t_d}{\epsilon_e})^2}.$$
(2.29)

 F_e es la fuerza eléctrica por unidad de longitud. Las variables x y z denotan la posición a lo largo de la longitud de la viga y la deflexión lateral de la viga, respectivamente y t es el tiempo. Además, l es la longitud de la viga, w es el grosor de la viga, t_b es la altura de la viga, t_d es el grosor de la película dieléctrica, ρ es la masa por unidad de longitud de la viga, g es la separación entre el sustrato y la viga, I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga, E es el módulo de Young del material, ϵ_0 es la permitividad en el vacio, ϵ_r es la permitividad relativa del dieléctrico o constante dieléctrica y V es el voltaje aplicado.

La ecuación es normalizada teniendo en cuenta las siguientes cantidades:

$$\hat{x} = \frac{x}{l},\tag{2.30}$$

$$\hat{z} = \frac{z}{g},\tag{2.31}$$

$$\hat{t} = \frac{t}{T},\tag{2.32}$$

donde

$$T = \sqrt{\frac{\rho l^4}{EI}}.$$
(2.33)

De esta manera definieron las siguientes dos cantidades adimensionales

$$\hat{V} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 w l^4}{2E I g^3}} V, \qquad (2.34)$$

$$h = \frac{t_d}{g\epsilon_r}.\tag{2.35}$$

y la ecuación que gobierna el sistema toma la siguiente forma:

$$\frac{\partial^4 \hat{z}}{\partial \hat{x}^4} + \frac{\partial^2 \hat{z}}{\partial \hat{t}^2} = -\frac{\hat{V}^2}{(\hat{z}+h)^2}.$$
(2.36)

Para el caso estático, la ecuación se reduce a

$$\frac{\partial^4 \hat{z}}{\partial \hat{x}^4} = -\frac{\hat{V}^2}{(\hat{z}+h)^2}.$$
(2.37)

Por medio de esta ecuación estudian para que valores de V y h aparecen las configuraciones mencionadas. Esta ecuación es resuelta considerando distintas condiciones de frontera para las configuraciones mencionadas por medio de el método de diferencias finitas, considerando las condiciones inciales al momento de usar el método iterativo. Así como, teniendo control de los parámetros V y h, que son proporcionales al voltaje aplicado y al ancho del dieléctrico, teniendo en consideración la altura y la constante dieléctrica del mismo. Sin embargo, de acuerdo a las técnicas de microfabricación

2.2. Microfrabricación

Los dispositios MEMS/NEMS (sistemas microelectrónicos, sistemas micromecánicos, sistemas micro-opto-eléctricos y sistemas micro-opto-mecánicos) son una combinación de elementos pasivos y activos, los cuales se pueden encontrar en un sustrato de silicio monocristalino, cuarzo monocristalino, cuarzo fundido (amorfo) o vidrio (3, 11). En 1990 los dispositivos microelectromecánicos emergieron utilizando las técnicas de fabricación utilizadas para los circuitos integrados. Sin embargo, rápidamente se desarrollaron técnicas de fabricación llamadas de manera general micromaquinado (12). Las técnicas desarrolladas que han tenido mayor impacto son: el micromaquinado superficial, el micromaquinado en volumen y el micromaquinado de alta relación de aspecto (HAR) (13), que a continuación describiremos.

2.2.1. Micromaquinado en Volumen

El micromaquinado en volumen consiste en grabar sustratos o materiales en bulto con el fin de construir micro y nanoestruturas en tres dimensiones (3, 12, 14). Se ha empleado el silicio como material principal en la mayoria de los dispositivos diseñados, como los sensores de tipo mecánico (presión, aceleración y giroscopios). También se ha trabajado con materiales como el cuarzo, Ge cristalino, SiC, GaAs y en menor medida con GaP y InP (3, 14). Los procesos de grabado que son empleados, se pueden clasificar por medio del estado del material que ataca el sustrato en grabado seco, húmedo y plasma.

El grabado mojado o húmedo consiste en esculpir microestructuras en sustratos de cristales semiconductores por medio de ataque químico, llevado acabo por soluciones ácidas o alcalinas. Esta técnica es utilizada principalmente para dar forma, limpiar, pulir y determinar las características estructurales del sistema (3). De acuerdo al tipo de solución, esta técnica se subdivide en isotrópica y anisotrópica. En el grabado anisotrópico se utilizan soluciones alcalinas como KOH, LiOH, NaOH, CsOH, NH_4OH e hidróxidos de amónio (3). En este, la tasa de ataque, depende de la orientación cristalográfica del sustrato. Este método es usado para manufacturar geometrías y formas específicas.

El grabado isotrópico no presenta dependencia en la orientación (14). Es utilizado para pulir, limpiar y grabar en una sola dirección los materiales. Los aguafuertes o grabadores de este tipo, son mezclas de soluciones ácidas como HF, HNO_3 y CH_3COOH (3).

El grabado seco, modifica la superficie sólida por medio de bombardeo de iones en estado gaseoso, especies gaseosas reactivas con la superficie o la combinación de ambos recursos; es decir, grabado de iones reactivos. El gas difloruro de xenón, XeF_2 es un

grabador de este tipo y es utilizado para grabar silicio, de allí su importancia. Además, no ataca metales, dioxido de silicio y otros materiales presentes en la estructura (11). Este método presenta algunas ventajas sobre el grabado mojado, las características metálicas que forman parte de la estructura presentan menor corrosión y se presenta menor estiramiento y compresión de los elementos fotoresistivos. Además de que el grabado seco permite alcanzar características que se encuentran debajo de los elementos resistivos, donde un grabador húmedo no puede actuar debido a la tensión superficial presente en la superficie. Dando como resultado que se logren elementos característicos de dimensiones nanómetricas; mientras que, en el grabado húmedo se obtienen dimensiones no menores a 3μ m (14).

Finalmente, se hablará de el grabado realizado por asistencia de plasma. Un plasma de descarga luminiscente de baja presión produce especies ionizadas de manera abundante. Cuando estos iones se dirigen a la superficie de un una oblea, pueden producir efectos de pulverización, remoción de material y reacciones químicas (11). Sin embargo, la pulverización es el efecto menos deseado, debido a que remueve material de todas partes de la oblea sin hacer ninguna distinción.

El proceso que logra remover material de una zona determinada, se lleva a cabo por medio de un haz de iones enfocado con ayuda de electrodos, que logran que los iones sólo destruyan una región específica. Cuando los iones tienen cierta reactividad química, el resultado de la rección de las especies iónicas con la superficie son especies volátiles, las cuales pueden ser removidas por medio de una bomba de vacío. Un ejemplo en el que es usado dicho proceso es como recurso de limpieza de la microestructura, al remover la fotoresina por medio de plasma de oxígeno, después de haber efectuado el proceso de litografía (11).

Existe una amplia variedad de tipos de plasmas $(CF_4, SF_6, CF_4/H_2, CF_4/0_2, O_2, BCl_3)$ que pueden ser usados para grabar en películas delgadas microelectrónicas (oxidos, nitruros, metales y silicio). Sin embargo, la precisión alcanzada con los grabadores de plasma no es tan buena como la alcanzada por el grabado húmedo. Esto es debido a que es de suma importancia controlar los parámetros (niveles de potencia de radiofrecuencia, mezclas de gases y presión) del plasma para alcanzar los resultados deseados. Por ejemplo, la presión a la que se encuentra sometido el plasma es un factor importante debido a que el grabador de plasma tiene que moverse en una dirección específica y cuando el plasma se encuentra sometido a presiones altas, la trayectoria de los átomos es aleatoria y produce un menor direccionamiento en el flujo de iones que se dirigen a la superficie de la oblea.

2.2.2. Micromaquinado de Superficie

El micromaquinado de superficie es un proceso que se basa en depositar películas delgadas sobre un sustrato, con el fin de fabricar sistemas micromecánicos. Dichas

películas delgadas son depositadas de manera secuencial. Posteriormente se remueven las partes que no están dentro del diseño de la microestructura en tres dimensiones. Se colocan películas compuestas de materiales como silicio policristalino, nitruro de silicio y dióxido de silicio, estos son usados como material estructural, aislante y material sacrificio, respectivamente (15).

En el micromaquinado de superficie la primera fase es la deposición de una capa de aislamiento, dicha capa está compuesta por un material dieléctrico (comunmente óxido de silicio) seguido por nitruro de silicio que juega el papel de aislante eléctrico. Posteriormente se coloca una capa sacrificio, esta capa se encuentra constituida comunmente de vidrio fosfosilicato (PSG) de dimensiones entre 10 a 200 micrómetros de largo y 0.5 a 5 micrómetros de ancho, la cual tiene adherido dioxido de silicio y fosforo, con la finalidad de mejorar el rango de grabado. Esta cumple la función de establecer el espaciamiento o brecha entre la primera capa y la capa del material estructural del dispositivo, después de haber aplicado el grabado correspondiente.

El siguiente paso es la deposición de material estructural, que en la mayoría de los casos es polisilicio. Este es aplicado a presiones que oscilan entre los 100 Pa y 500 Pa con temperaturas de 700 °C. Entre cada capa depositada se coloca un patrón por medio de técnicas litográficas que definen las características de la capa subyacente. Una vez colocadas todas las capas se procede a liberar la estructura, por medio de un grabado selectivo realizado comunmente por ácido fluorhídrico(HF) (3, 14).

2.2.3. Litografía

La litografía es una técnica usada para transferir copias de patrones en superficies de materiales como obleas de silicio. Algunos tipos son: la litografía por haz de electrones, litografía óptica, fotolitografía, impresión de pantalla, litografía de rayos X, etc (13). La fotolitografía es el tipo de litografía más empleada para transferir los patrones presentes en las micro y nanomaquinas (14).

El proceso general llevado acabo en la fotolitografía consiste en cubrir una oblea de silicio con una capa de fotoresina¹ de μ m de espesor. Se establece la máscara a utilizar para lograr la microestructura deseada, una vez establecido el sistema conformado por la oblea revestida con la fotoresina y la máscara el sistema es radiado con luz ultravioleta y posteriormente sumergida o rociada con una solución (comunmente se utiliza HF o $HF + NH_4F$) que ataca las áreas no expuestas a la fotoresina o al silicio subyacente, dejando un patrón determinado por el oxido desnudo y el revestido

¹La fotoresina es un polímero sensible a la luz ultravioleta. Existen dos tipos de fotoresina, la positiva y la negativa. La fotoresina positiva al ser expuesta a luz ultravioleta se debilita; mientras que, la del tipo negativo se endurece. Esto permite que se establezcan los patrones deseados en la oblea de oxido empleada.

por la fotoresistencia. Una vez que el oxido de silicio no cubierto con la fotoresina ha sido grabado, se retira por medio de ácido (por ejemplo H_2SO_4) o combinación de ácido oxido (comunmente se utiliza, $H_2SO_4 - Cr_2O_3$) (14).

La máscara es utilizada como una herramienta que permite generar un patrón de manera repetitiva. Esta máscara es un vidrio o cuarzo ópticamente plano con un patrón de absorción opaco a la luz ultravioleta, donde el vidrio o cuarzo es transparente (14). Existen mascaras de contacto físico directo; sin embargo, este tipo de máscara se degrada rápidamente debido al contacto con las obleas. Por lo que, como este tipo de mascara es inadecuada para la fabricación a gran escala, son utilizadas mascaras que se colocan a una distancia de entre 10 a 20 mum sobre la oblea y se proyecta la imagen por medio de un sistema de lentes de alta resolución. Debido a este sistema de lentes se pueden producir patrones a escalas distintas que la que contiene la máscara.

2.2.4. Silicio

Con el fin de asegurar la estabilidad mecánica de los dispositivos micro y nanoelectromecánicos, es importante conocer cuales son las propiedades mecánicas de los materiales de los cuales esta compuesto el dispositivo. El éxito que ha tenido el silicio en las últimas décadas tanto en las aplicaciones electrónicas como en las mecánicas, se debe justamente a las propiedades que presenta con respecto a otros materiales (16). En esta sección se mencionarán algunas de estas propiedades y la importancia que tienen en el micromaquinado y en el funcionamiento de los dispositivos.

El silicio cristalino presenta una estructura cristalina de diamante. La cual, tiene cuatro enlaces covalentes, coordinados de manera tetraédrica que definen la estructura cúbica cristalina, como se muestra en la Fig 2.6. La celda unitaria es cúbica con átomos en cada uno de sus vertices y en el centro de cada una de sus caras (cúbica centrada en las caras). En el interior tiene cuatro átomos adicionales localizados sobre las diagonales, exactamente a una cuarta parte de la diagonal. Por lo que, esta estructura puede ser vista como dos celdas FCC interpenetradas, una desplazada (1/4, 1/4, 1/4) veces del parámetro de red, con respecto a la otra celda (16, 17).

La estructura cristalina que presenta el silicio lo coloca en un lugar privilegiado con respecto a otros materiales. Debido a que algunos planos cristalinos favorecen su grabado. En los circuitos integrados (transistores semiconductores metal-óxido) las obleas de silicio son orientadas en el plano [100]. Sin embargo, para el caso de MEMS y NEMS la orientación que es privilegiada es la [110], debido a que esta orientación permite que la oblea se rompa por medio de cortes limpios. Por otro lado, la orientación menos usada es la [111] debido a que presenta la densidad mayor de átomos por celda unitaria, lo que provoca que no presente una tasa de grabado similar a la de los demás planos. Este tipo de planos son utilizados para delimitar cavidades o pozos (16, 17).

Como se observa en la Tabla 2.1, el silicio presenta una densidad menor que la de



Figura 2.6: Estructura tetraédrica con un ángulo de 109.5° entre cada uno de los enlaces covalentes.

	Límite elástico o Resistencia a la tracción	Tensión Específica	Dureza de Knoop	Módulo de Young	Densidad	Conductividad Térmica	Expansión Térmica
	a la fluencia $\left(10^9 N/m^2 = GPa\right)$	$(10^3m^2s^2)$	(kg/mm^2)	$(10^9N/m^2 = GPa)$	$(10^3 kg/m^3)$	a 300 K (W/cmK)	$(10^{26}C)$
Diamante(SC)	53	15000	7000	10.35	3.5	20	1.0
Si(SCS)	2.6-2.8	3040	850 - 1100	190	2.32	1.56	2.616
GaAs	2.0			0.75	5.3	0.81	6.0
Si_3N_4	14	4510	3486	323	3.1	0.19	2.8
SiO_2	8.4		820	73	2.5	0.014	0.4-0.55
SiC (6H-SiC)	21	6560	2480	448	3.2	5	4.2
Hierro	12.6		400	196	7.8	0.803	12
Tungsteno (W)	4	210	485	410	19.3	1.78	4.5
Al	0.17	75	130	70	2.7	2.36	25
AlN	16			340		1.60	4.0
Al_2O_3	15.4		2100	275	4.0	0.5	5.4-8.7
Acero Inoxidable	0.5 1.5		660	206-235	7.9-8.2	0.329	17.3
Cuarzo //Z $\perp Z$	9		850	107	2.65	0.014	7.1-13.2 (aumenta con T)
Polisilicio	1.8			161			2.8

T, Temperatura; SC, cristal monocristalino; SCS, cristal monocristalino de silicio; // Z, paralelo al eje Z; \perp Z, perpendicular al eje Z

Tabla 2.1: Propiedades Mecánicas del Silicio monocristalino (SCS) y otros materiales de importancia tecnológica.

los materiales citados en la tabla (16). El valor de la tensión específica es significativamente alto, se compara con los valores correspondientes a los otros materiales, excepto el diamante. Esto asegura que puede experimentar una tensión considerable antes de que la estructura del sistema se vea comprometida. Por otro lado, el módulo de Young presenta un valor por el cual el silicio es contemplado como un material que tendrá menos deformaciones al aplicar tensión con respecto a otros materiales, en el mismo rango de valores se encuentran el acero inoxidable y el cuarzo.

2. MARCO TEÓRICO

La dureza de Knoop del silicio es ligeramente mayor que la del cuarzo. Además de que se encuentra por encima de la del acero inoxidable y del vidrio común. Por lo que, el material presenta una dureza mecánica aceptable para el rango de escala micro y nanométrica. Además, el silicio tiene asociado un valor alto para la conductividad térmica , el cual es comparable con el de metales como el acero, aluminio y es cien veces mayor que el del vidrio. Por otro lado, el valor de su coeficiente de expansión térmica es bajo, lo cual lo hace ser un disipador térmico óptimo.

Se puede concluir que la ausencia de deformación plástica acoplado con el alto valor del límite elástico, hace al silicio un material superior a cualquier metal para muchas aplicaciones. Debido a que el exceso de deformación provoca que los microsensores mecánicos presenten fallas debidas a cambios en la estructura de la parte móvil (16). Otro dato importante, es que el Si_3N_4 es utilizado como revestimiento del silicio, debido a que ambos presentan valores altos para las características citadas en la tabla y los hace una mancuerna de materiales resistentes.

2.3. Inestabilidad Pull in o colapso súbito

La confiabilidad de los dispositivos MEMS y NEMS se encuentra limitada por sucesos relacionados con la inestabilidad electroestática. Esta inestabilidad ocasiona el colapso repentino de la parte móvil del dispositivo sobre la superficie opuesta, provocando que la superficie de contacto quede adherida a la superficie opuesta debido a la presencia de fuerzas de adhesión o en ocasiones provocando la ruptura de los componentes estructurales del dispositivo. Esto se debe a que la energía de adhesión sobrepasa la energía de restauración elástica de la parte móvil. Una de las causas por las que sucede dicha inestabilidad es que el sistema mecánico se encuentra sujeto a una fuerza externa que muestra un comportamiento no lineal con respecto al desplazamiento del sistema. El caso más común es la fuerza electroestática (6).

La determinación precisa de cuando ocurre esta inestabilidad es importante para el proceso de su diseño, para determinar la sensibilidad, la frecuencia de respuesta y el rango dinámico del dispositvo. Además, el valor del voltaje en el que sucede el colapso del sistema puede ser utilizado para obtener propiedades de los materiales, como el módulo de Young o esfuerzos residuales asociados con el elemento móvil del sistema, como una película delgada microfabricada (8).

2.4. Tipos de MEMS que funcionan por medio de interacciones electroestáticas

En esta sección se presentará a grandes razgos el funcionamiento de microdispositivos representativos, en los cuales la fuerza electroestática es utilizada en su funcionamiento y por ello, la inestabilidad de colapso súbito es una de las razones por las cuáles el funcionamiento se ve comprometido o por las que el sistema cumple con su propósito. A continuación se presentarán los principales tipos de MEMS:

Grating light valve (GLV) - Válvula de luz de rejilla

Es un sistema electroestático-elástico desarrollado en la universidad de Stanford. Consiste en un arreglo de pixeles, cada uno de estos pixeles es un MEMS basado en una rejilla de difracción. Cada rejilla de difracción consiste en una arreglo de microcintas elásticas altamente reflectoras montadas en una base de silicio, como se observa en la Fig. 2.7. Las cintas tienen una conexión eléctrica individual, lo cual permite que solo algunas sean deflectadas y cumplan con la función de una rejilla. Por lo que, cuando el voltaje aplicado a las cintas es nulo, las cintas se mantienen en su posición y el dispositivo actua como un espejo, ocasionando que la luz incidente sea reflejada con la misma dirección con la que incidió. Mientras que, cuando el voltaje es aplicado a algunas cintas, estas son deflectadas debido al campo eléctrico entre el sustrato y las mismas. Lo cual, produce que las cintas hagan la función de una rejilla de difracción y la longitud de onda con la que se difracta la luz es determinada por la máscara fotolitográfica usada al construir el dispositivo (1).

2. MARCO TEÓRICO



Figura 2.7: (a) GLV constituida por cinco cintas, (b) Vista de un costado de la GLV que muestra el efecto de difracción.

Microespejos

Los microespejos son estructuras elásticas simples (Fig. 2.8), cuyo objetivo es cambiar el ángulo de un espejo rígido para controlar la localización de un haz de luz reflejado. Los microespejos tienen dimensiones de aproximadamente 16 μ m y giran entre diez y doce grados con la finalidad de colocar el haz de luz en una posición determinada de acuerdo a su aplicación y recobran su posición original con la ayuda de un resorte. Dos pares de electrodos situados debajo del microespejo controlan su posición mediante la atracción electroestática. Como la fuerza electroestática es usada para que el sistema actue, el rango de operación se encuentra limitado por la inestabilidad de colapso súbito. (1).


2.4 Tipos de MEMS que funcionan por medio de interacciones electroestáticas

Figura 2.8: Esquema de un microespejo de torsión

Microbomba

Estas estructuras operan aplicando una diferencia de potencial entre un diafragma deformable y un electrodo fijo, como se puede observar en la Fig. 2.9. La fuerza electroestática causa que el diafragma se deflecte hacia el electrodo, provocando un cambio en el volumen de la cavidad debajo del diafragma. Esto provoca que el fluido entre en la válvula de retención de entrada. Al retirar el voltaje, el diafragma regresa a su estado sin deflexión y empuja el fluido a través de la válvula de retensión de salida. Al repetirse dicho proceso, resulta en una acción de bombeo. El diseño de este sistema se encuentra limitado por la inestabilidad de colapso súbito, debido a que dicha inestabilidad limita el rango del desplazamiento que puede tener el diafragma, ya que la adherencia en el electrodo o el continuo golpeteo provoca que el sistema deje de funcionar como es debido (1).



Figura 2.9: Esquema de una microbomba electroestática básica

Microswitches o microinterruptores

Este es un dispositivo que funciona gracias al efecto de la inestabilidad de colpaso súbito. Dicho dispositivo varia de acuerdo a la aplicación en la que se vaya a utilizar, por ello se describirá uno de los sistemas más simples. Uno de estos sistemas puede ser representado tomando una de las cintas de las que esta compuesta la rejilla de luz, descrita con anterioridad. Esta cinta es sometida a una diferencia de potencial, provocando que esta sienta una fuerza que la haga hacer contacto con el electrodo en el sustrato y desempeñe la función de un interruptor (1).

Micro y nano pinzas

Es un microdispositivo desarrollado por Philip Kim y Charles Lieber. Su diseño consta en colocar un par de nanotubos en electrodos de oro. Los cuales, a su vez están adheridos a una micropipeta de vidrio cónica. Una diferencia de potencial es aplicada entre los nanotubos, provocando una fuerza electroestática entre ellos, la cual hace que la distancia entre los electrodos cambie. Las puntas de los electrodos se acercan y hacen la función que harían unas pinzas de manera macroscópica, pero con objetos en la micro y nanoescala (células, nano y micromáquinas, etc). Su disenõ queda limitado debido a que el rango de desplazamiento estable es un tercio de la brecha cuando el voltaje es cero, lo que limita el tamaño de los objetos que pueden ser manipulados (1).

Motor paso a paso electroestático

Este tipo de motor es capaz de producir grandes fuerzas y pequeños desplazamientos. Consiste en una placa elástica suspendida entre dos abrazaderas. Dichas abrazaderas son libres de desplazarse sobre el sustrato. Con la finalidad de atrancar una de las abrazaderas, se aplica una diferencia de potencial. Una vez atrancada la abrazadera anterior, la diferencia de potencial es aplicada entre la placa elástica y el electrodo en el sustrato, la deflexión sufrida por la placa arrastra la abrazadera posterior, tal como se observa en la Fig. 2.10. Posteriormente, se procede a atrancar la abrazadera posterior y liberar la que inicialmente fue atrancada. Este proceso se repite y por tanto, produce que el sistema sufra un desplazamiento. Como se puede observar el fenómeno de adhesión no es deseado y el estudio de la inestabilidad de colapso súbito es de suma importancia para el desarrollo de este microdispositivo (1).



Figura 2.10: Esquema simple del motor paso a paso electroéstatico

Capítulo 3

Modelo Masa Resorte

El modelo presentado en esta sección agrupa las interacciones electroestáticas y mecánicas dentro en un parámetro (λ) obtenido por medio de la adimenzionalización de la ecuación de movimiento del micro o nanosistema. Los cambios presentes en este parámetro permiten realizar un análisis cualitativo del comportamiento del sistema con la finalidad de presentar para qué valores del parámetro, el sistema muestra un comportamiento estable.

El sistema estudiado consiste en dos placas paralelas que modelan un sistema microelectromecánico. La placa superior puede moverse y es a la que se le aplica una fuerza. Esta fuerza mueve la placa superior hacia la placa inferior, causando que la brecha entre ellas disminuya. Por tanto, la capacitancia entre ellas aumenta. Cuando la fuerza es retirada, el resorte hace que regrese la placa superior a su posición original y la capacitancia entre las placas disminuye de manera acorde a este cambio.

Es necesario un mecanismo para transformar dicho cambio en la capacitancia a una señal de corriente o potencial. Esto se puede realizar conectando el sistema a una fuente de voltaje constante V o batería. Como resultado, la energía eléctrica es almacenada en un campo eléctrico establecido por las cargas acumuladas por el capacitor.

Mientras el voltaje es constante, un incremento en la capacitancia debido al movimiento de la barra o placa superior hará que haya un flujo de carga de la batería hacia el capacitor, lo que provocará que la energía eléctrica almacenada aumente. Mientras que, cuando la placa regresa a su posición inicial, el flujo de carga regresa del capacitor a la batería. Por lo que, es posible establecer un flujo de carga que sea concordante con la excitación externa que sufre el sistema.

La energía mecánica almacenada en la estructura del capacitor varía de acuerdo al principio de conservación de la energía. Por lo que, a cualquier tiempo la energía total almacenada en la estructura es la suma de la energía mecánica y eléctrica. Es por ello, que la estructura puede ser vista como un dispositivo electromecánico que transforma la energía de un dominio a otro dependiendo de la excitación externa (presión, fuerza o vibración).

Sin embargo, aunque el circuito propuesto proporciona un medio para la lectura del cambio de capacitancia debido al movimiento de la placa móvil, la fuerza de atracción electroestática dada por las cargas en las placas del capacitor empuja dichos electrodos uno sobre otro, aún en ausencia de una fuerza mecánica externa. Esto es precisamente el colapso súbito que será estudiado en las siguientes secciones.

3.0.1. Modelo Masa Resorte

El modelo que se presenta a continuación caracteriza un sistema micro y nanoelectromecánico teniendo en cuenta únicamente la interaccón electroestática y mecánica, basándose en el desarrollo realizado por John A. Pelesko en Modeling MEMS and NEMS (1). En este se agrupan las interacciones presentes en los sistemas micro y nano electromecánicos considerando al sistema como dos placas paralelas y rígidas. La placa superior esta suspendida por medio de un resorte que le permite moverse, mientras que la placa inferior se encuentra fija a una distancia L del origen, tal y como se aprecia en la Fig. 3.1.



Figura 3.1: Sistema masa-resorte que simula el comportamiento del dispositivo electroestático. Cuyas placas tienen un área, A.

Con la finalidad de que el sistema pueda ser descrito por medio de una sola variable; la cual describa la deflexión que sufre la parte móvil, se considera que la longitud característica de dicha componente móvil es considerablemente mayor que la deflexión que experimenta. Con ello se puede asegurar que las componentes longitudinales del movimiento permanecen constantes durante la deflexión experimentada. Esto se presupone para caracterizar las interacciones mecánicas del sistema; mientras que, para las electroestáticas se considera que el campo eléctrico puede ser calculado sin tener en cuenta los efectos de borde presentes en las placas paralelas.

Al tener en cuenta lo anterior, se observa que las fuerzas presentes en el sistema son la fuerza elástica del resorte F_s , la fuerza de amortiguamiento F_d y la fuerza electrostática F_e , dada por la diferencia de potencial aplicada entre las placas. Utilizando la segunda ley de Newton, se tiene que la ecuación se encuentra dada por

$$m\frac{d^2u}{dt'^2} = F_s + F_d + F_e.$$
 (3.1)

La fuerza del resorte obedece la ley de Hooke, por lo que

$$F_s = -k(u-l), \tag{3.2}$$

donde l es la longitud de restauración del resorte o la longitud inicial y k es la constante del resorte. La fuerza de amortiguamiento es linealmente proporcional a la velocidad, tal que

$$F_d = -a\frac{du}{dt'}.$$
(3.3)

Para obtener la expresión de la fuerza electro
estática a considerar, se tendrá en cuenta que conocemos que la energí
aUalmancenada por el campo eléctrico, la cual está dada por

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int |E|^2 \tag{3.4}$$

y que la magnitud del campo eléctrico entre dos placas paralelas se encuentra expresada como

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 A} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0},\tag{3.5}$$

donde Q es la carga total presente en las placas, σ la densidad de carga y A su área. Al sustituir 3.5 en 3.4 , se tiene que

$$U = \frac{Q^2(u-L)}{2\epsilon_0 A}.$$
 (3.6)

Como el voltaje es una variable de la cual se tiene control, se expresará la fuerza en términos de este. De la definición de capacitancia $(C = \frac{Q}{V})$ y su expresión para el caso de dos placas paralelas está dada por $C = \frac{\epsilon_0 A}{(u-L)}$, se tiene que Q queda expresado como

$$Q = CV = \frac{\epsilon_0 AV}{(u-L)} \tag{3.7}$$

y por ello, la energía queda expresada como

$$U = \frac{\epsilon_0 V^2 A}{2(u-L)}.\tag{3.8}$$

La fuerza electroestática está dada por el cambio que sufre la energía de manera infinitesimal con respecto a la distancia que existe entre las placas, es por ello que para este caso

$$F_e = -\frac{\partial U}{\partial (u-L)} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A V^2}{(L-u)^2}.$$
(3.9)

Por último, si consideramos una fuerza electro
estática que varíe periódicamente con frecuencia $\omega,$ la expresión que
da dada por

$$F_e = -\frac{\partial U}{\partial (u-L)} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A V^2}{(L-u)^2} \cos^2(wt').$$
(3.10)

Finalmente, la ecuación que gobierna el sistema, queda expresada como

$$m\frac{d^2u}{dt'^2} + a\frac{du}{dt'} + k(u-l) = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 A V^2}{(L-u)^2}\cos^2 wt'.$$
(3.11)

Con la finalidad de realizar un análisis cualitativo del sistema, se procederá a adimensionalizar la ecuación. Si se tienen en cuenta las siguientes escalas de longitud y tiempo

$$\bar{u} = \frac{u-l}{L-l}, \qquad t = \sqrt{\frac{k}{m}t'}.$$
(3.12)

El desplazamiento de la placa superior es adimensionalizado considerando la distancia L - l, la cual es la separación máxima que pueden tener la placa superior y la placa inferior, cuando no hay un voltaje aplicado. Para el caso del tiempo, como el sistema está dominado por la inercia, adimensionalizamos el tiempo por medio de la frecuencia de oscilación del sistema masa resorte. Al aplicar estas condiciones en la Ec. 3.11, se tiene

$$\frac{d^2\bar{u}}{dt^2} + \gamma \frac{d\bar{u}}{dt} + v = \frac{\lambda}{(1-\bar{u})^2} \cos^2 \Omega t, \qquad (3.13)$$

donde

$$\gamma = \frac{a}{\sqrt{mk}}, \quad \lambda = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A V^2}{k(L-l)^3}, \quad \Omega = w \sqrt{\frac{m}{k}}.$$
(3.14)

El parámetro γ puede ser interpretado como el coeficiente de amortiguamiento que compara la fuerza de amortiguamiento debida a la viscosidad del medio con la fuerza del resorte. Mientras que el parámetro Ω mide el cambio que experimenta la frecuencia con respecto a la frecuencia de oscilación natural del sistema. Finalmente, el parámetro λ mide la razón de las fuerzas elásticas y electroestáticas de nuestro sistema.

Esto se puede ver si reescribimos λ de la siguiente forma

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A V^2}{(L-l)^2} \frac{1}{k(L-l)}$$
(3.15)

donde,

$$\lambda = \frac{t\acute{ermino} \ correspondiente \ a \ la \ fuerza \ electroestática}{t\acute{ermino} \ correspondiente \ a \ la \ fuerza \ del \ resorte}.$$

Si contemplamos el caso experimental y que λ varia conforme el voltaje aplicado cambia en el experimento. Se puede decir que este parámetro también sirve como sintonizador del sistema. El hecho de que este parámetro contenga la constante del resorte k, las longitudes l y L, el área de las placas A, la permitividad en el vacio ϵ_0 , da como resultado que el análisis realizado pueda quedar expresado en términos de λ . Por lo tanto, si entendemos el comportamiento de la ecuación en función de λ se puede entender el comportamiento de todos los dispositivos para los cuales las simplificaciones supuestas sean válidas.

3.0.2. Soluciones para los casos estacionarios

Si se considera el caso estacionario; es decir, que el sistema no dependa del tiempo, la Ec. 3.13 se reduce a

$$\bar{u} = \frac{\lambda}{(1-\bar{u})^2}.\tag{3.16}$$

Para caracterizar las soluciones estacionaras del sistema, se define la función

$$f(\bar{u}) = \frac{\lambda}{(1-\bar{u})^2} - \bar{u},$$
 (3.17)

por medio de esta expresión se pueden caracterizar dichas soluciones, obteniendo sus raíces reales. En la Fig. 3.2 se presenta la gráfica de $f(\bar{u})$ para distintos valores de λ , se puede observar que en $\bar{u} = 1$ existe una discontinuidad que se atribuye a que para este valor de \bar{u} la placa superior colisiona con la placa inferior. Los valores de λ cuando $\bar{u} > 1$, no tienen interés físico debido a que es cuando la placa superior queda por debajo de la inferior, lo cual no es posible. Mientras que, las raíces situadas en valores de $\bar{u} < 1$ corresponden a las soluciones con relevancia física. En esta región se puede observar que para valores de λ pequeños se tienen dos raíces, debido a que la fuerza electroestática es débil en comparación con la fuerza de restauración del resorte, por lo que, existe un balance entre las fuerzas que permite la existencia de estados estables. Conforme el valor de λ aumenta, la fuerza de restauración del resorte es superada por la fuerza electroestática, provocando la inestabilidad del sistema.



Figura 3.2: Gráfica de $f(\bar{u})$ para distintos valores de λ . Las raíces reales de $f(\bar{u})$ definen los estados estacionarios del sistema.

El fenómeno de inestabilidad de colapso súbito también puede ser caracterizado por medio de diagramas de bifurcación, los cuales muestran las regiones de estabilidad e inestabilidad con respecto a parámetros que engloban los distintos tipos de interacciones entre las partes que conforman el dispositivo. En este caso, el diagrama de bifurcación se obtiene por medio de graficar λ en función de \bar{u} utilizando la Ec. 3.16 e invirtiendo la posición de los ejes, como se observa en la Fig. 3.3. Por medio de esta gráfica se puede observar que λ^* es el valor en el que el sistema se encuentra en el voltaje adimensional donde ocurre el colapso del sistema. Esto sucede cuando λ^* es igual a $\frac{4}{27}$ y se presenta cuando \bar{u} toma el valor de $\frac{1}{3}$, siendo esta la máxima deflexión adimencional que puede presentar el sistema.

Por otro lado, otra forma de obtener el valor de λ en el cual sucede el colapso del sistema, es derivando la expresión $\lambda = \bar{u}(1-\bar{u})^2$ con respecto a \bar{u} , para de este modo encontrar el valor de \bar{u} donde se encuentra el máximo de la función, como se expone a continuación:

$$\frac{d\lambda}{d\bar{u}} = \frac{d(\bar{u}(1-\bar{u})^2)}{d\bar{u}} = 1 - 4\bar{u} + 3\bar{u}^2$$
$$\Rightarrow \ 3\bar{u}^2 - 4\bar{u} + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \ \bar{u} = \frac{1}{3}$$



Figura 3.3: Diagrama de bifurcación. $\lambda \quad vs. \quad \bar{u}$. Las soluciones físicas son para $\bar{u} \in [0, 1]$. En $\bar{u} = 0$ las placas están en su separación inicial. Para $\bar{u} = 1$ la separación entre las placas es cero.

$$\therefore \lambda^* = \frac{4}{27}.$$
(3.18)

Por medio de la definición de λ y considerando que $\lambda^* = \frac{4}{27}$, se tiene que el valor del voltaje en el cual sucede el colapso del sistema (V_p) , esta dado por

$$V_p = \sqrt{\frac{8}{27} \frac{k(L-l)^3}{\epsilon_0 A}}$$
(3.19)

y utilizando la Ec. 3.12, se tiene que la distancia máxima que puede experimentar el sistema antes de colapsar es igual a la tercera parte de la que se tiene cuando no hay un voltaje aplicado. Es decir, no se puede aplicar una diferencia de potencial mayor a V_p si se quiere evitar el salto o contacto entre las partes del sistema.

Con la finalidad de comprobar que este modelo puede ser utilizado para distintos tipos de sistemas (vigas voladizas con distintas secciones transversales), es decir, que presenta la misma tendencia al variar su geometría. Se introducirá un cambio en la geometría del sistema por medio de cambiar el valor que toma k para cada una de las secciones transversales a estudiar, lo cual modifica el valor del parámetro λ . Es decir, hay varios sistemas elásticos cuyo comportamiento se describe por la Ec. 3.11



Figura 3.4: Valores de la constante elástica del resorte para barras con distintas secciones transversales.

Al considerar que $k = \frac{3EI}{l'^3}$, donde E es el módulo de Young asociado al material, I el segundo momento de inercia o momento de inercia de área de la sección transversal respecto a un punto de apoyo y l' la longitud característica del sistema o su largo, se puede observar que la forma de la viga se encuentra presente en el segundo momento de inercia. Por lo que, a continuación se presentan las expresiones de I para una barra con sección transversal circular, rectangular, de superficie circular y superficie rectangular (Fig. 3.4):

$$I = \frac{\pi d^4}{64},$$
 (3.20)

$$I = \frac{gt^3}{12},$$
 (3.21)

$$I = \frac{\pi}{64} (d_e^4 - d_i^4), \tag{3.22}$$

$$I = \frac{g_0 t_e^3 - g_i t_i^3}{12},\tag{3.23}$$

respectivamente. El segundo momento de inercia de las secciones tansversales circulares es calculado con respecto al eje perpendicular al plano del área que pasa por el centro del círculo. El momento de inercia de las secciones transversales rectangulares está calculada con respecto al eje y, si contemplamos que el eje y es donde se encuentra ubicado el ancho de la viga y el eje z donde está ubicado su largo. La constante d es el diámetro del círculo que forma la sección transversal, d_e y d_i son los diámetros de los círculos exterior e interior, respectivamente. La constante t, t_e y t_i son los largos de los rectángulos; mientras que, g, g_e , g_i corresponden a su ancho, el subíndice e se refiere al rectángulo exterior, mientrás que el i hace alusión al rectángulo interior que conforma la sección transversal de la barra. Con esto, los valores de λ para cada tipo de geometría quedan expresados como

$$\lambda_{Circular} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A V^2}{(L-l)^2} \frac{1}{\frac{3E\pi d^4}{64l'^3} (L-l)},$$
(3.24)

$$\lambda_{Rectangular} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A V^2}{(L-l)^2} \frac{1}{\frac{3Egt^3}{12l'^3}(L-l)},$$
(3.25)

$$\lambda_{Superficie\ tubular} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A V^2}{(L-l)^2} \frac{1}{\frac{3E\pi (d_e^4 - d_e^4)}{64 U^3} (L-l)},$$
(3.26)

$$\lambda_{Superficie\ rectangular} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A V^2}{(L-l)^2} \frac{1}{\frac{3E(g_e t_e^3 - g_i t_i^3)}{12l'^3} (L-l)}.$$
(3.27)

Por otro lado, si tomamos una λ de referencia (λ_{ref}) y por tanto una k_{ref} y reescribimos la expresión como

$$\lambda_{ref} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A V^2}{(L-l)^2} \frac{1}{k_{ref}(L-l)} = \frac{\beta}{k_{ref}}$$
(3.28)

donde

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A V^2}{(L-l)^2} \frac{1}{(L-l)}$$

y se considera lo mismo para la expresión de las $\lambda's$ correspondientes a las distintas secciones transversales, esta toma la forma siguiente

$$\lambda_s = \frac{\beta}{k_s}.\tag{3.29}$$

Se puede observar que para ambas expresiones se tiene el mismo valor para β y si sustituimos dicho valor en términos de λ_s y k_s en 3.28, se tiene que

$$\lambda_{ref} = \frac{k_s \lambda_s}{k_{ref}} = \bar{u}(1 - \bar{u})^2$$
$$\Rightarrow \lambda_s = \frac{k_{ref}}{k_s} \bar{u}(1 - \bar{u})^2. \tag{3.30}$$



Figura 3.5: Diagrama de bifurcación. λ vs. \bar{u} , para distintas secciones transversales. El valor de λ_p^* cambia pero no el valor de \bar{u}^*

Esta expresión nos da una idea de cómo cambia el modelo masa resorte al contemplar aspectos de la geometría del sistema. La Fig. 3.5 muestra la gráfica de λ_s contra \bar{u} , para distintas secciones transversales de una viga. Considerando $E = 190 \times 10^9 Pa$ (módulo de Young del silicio), $l' = 10 \times 10^{-6}m$ y teniendo en cuenta los siguientes valores para las dimensiones de las distintas secciones transversales: para el caso de la sección circular $d = 1 \times 10^{-6}m$, para la sección de superficie tubular $d_0 = 1.5 \times 10^{-6}m$ y $d_i = 1 \times 10^{-6}m$, para la sección cuadrada $g = 1 \times 10^{-6}m$, para la sección rectangular $g = 2 \times 10^{-6}m$ y $t = 1.5 \times 10^{-6}m$ y para la sección de superficie rectangular $g_e =$ $2 \times 10^{-6}m$, $t_e = 1.5 \times 10^{-6}m$, $g_i = 1.5 \times 10^{-6}m$ y $t_i = 1 \times 10^{-6}m$. En la Fig. 3.5 se puede observar que los datos para cada una de las geometrías de las sección transversal de la barra siguen la misma tendencia que el modelo general, ya que el máximo se presenta cuando $\bar{u} = \frac{1}{3}$. La diferencia recae en el valor máximo que puede tomar λ antes de que el sistema colapse, se puede observar que para el área transversal circular se pueden considerar valores mayores para el voltaje aplicado a la estructura que para las otras áreas transversales.

Modos de Vibración de una viga longitudinal 3.0.3.

Las vigas en voladizo son utilizadas en muchos de los microdispositivos de sensado, como el elemento principal (8). Es por ello que esta estructura será analizada con mayor detalle a continuación.

Para esto, se considerará una viga de longitud L homogénea y con secciones transversales uniformes a lo largo de su longitud. La cual, no experimenta ningún otro tipo de carga más que su peso. Teniendo en cuenta que la deflexión producida por su peso, define una curva de deflexión que une los centroides de las secciones transversales de la estructura. Por último, que la deflexión se presenta en el eje y(y(x)) y se define positiva si sucede por debajo del eje de simetría.

Una vez considerado lo anterior se partirá de la teoría de Euler-Bernoulli para una barra, por medio de la siguiente ecuación de movimiento

$$EI\frac{d^{4}Y}{dx^{4}} + \rho A\frac{d^{2}Y}{dt^{2}} = 0,$$
(3.31)

para resolver la ecuación, se hará uso del método de separación de variables. Por lo que, se propone la siguiente solución:

$$Y(x,t) = X(x)T(t),$$
 (3.32)

sustituyendo esta solución en la Ec. 3.31 y desarrollando, se tiene

$$EI\frac{d^{4}[X(x)T(t)]}{dx^{4}} = -\rho A \frac{d^{2}[X(x)T(t)]}{dt^{2}}$$

$$\Rightarrow EIT(t)\frac{d^{4}X(x)}{dx^{4}} = -\rho AX(x)\frac{d^{2}T(t)}{dt^{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{EI}{\rho A X(x)}\frac{d^{4}X(x)}{dx^{4}} = -\frac{1}{T(t)}\frac{d^{2}T(t)}{dt^{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{EI}{\rho A X(x)}\frac{d^{4}X(x)}{dx^{4}} = -\frac{1}{T(t)}\frac{d^{2}T(t)}{dt^{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{d^{4}X(x)}{dx^{4}} = \frac{\rho A}{EI}w_{n}^{2}X(x) \qquad (3.33)$$

0.-

у

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 T(t)}{\mathrm{d}t^2} = -w_n^2 T(t). \tag{3.34}$$

Si definimos $k_n^4 = \frac{\rho A}{EI} w_n^2$, como la Ec. 3.34 es una ecuación de segundo ordeń homogénea, su solución para la variable temporal es

$$T(t) = b_1 sen(w_n t) + b_2 \cos(w_n t)$$
(3.35)

y para el caso de la posición

$$X(x) = c_1 \cos(k_n x) + c_2 sen(k_n x) + c_3 \cosh(k_n x) + c_4 senh(k_n x).$$
(3.36)

Por lo que, la solución general de la Ec. 3.31, esta dada por

$$Y(x) = [c_1 \cos(k_n x) + c_2 \sin(k_n x) + c_3 \cosh(k_n x) + c_4 \sinh(k_n x)][b_1 \sin(w_n t) + b_2 \cos(w_n t)].$$
(3.37)

Aplicando las condiciones de frontera que se presentan a continuación, para una barra que tiene fijo uno de sus extremos y libre el otro

$$y = 0 \ si \ x = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \ si \ x = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = 0 \ si \ x = L$$
$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} = 0 \ si \ x = L$$
$$T(t) = 0 \ si \ t = 0$$
$$T(t) = 0 \ si \ t = L,$$

se llega a las siguientes igualdades

$$c_1 = -c_3$$

$$c_2 = -c_4$$

$$\cos(Lk_n)\cosh(Lk_n) = -1$$

$$\Rightarrow k_n L = \frac{(2n-1)\pi}{2}.$$

En la parte temporal de la solución,

$$T(t) = b_1 sen(k_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} t) + b_2 \cos\left(k_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} t\right), \qquad (3.38)$$

se tiene que $w_n = \frac{k_n^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$. Por lo que, la frecuencia en radianes por segundo esta dada por

$$f_n = \frac{w_n}{2\pi} = \frac{k_n^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}.$$
 (3.39)

Capítulo 4

Fuerzas del tipo $\frac{1}{u^n}$

Las fuerzas de dispersión inducen una fuerte adherencia, fricción y desgaste en los micro y nano sistemas. Estos fenómenos limitan no sólo su funcionamiento, también producen limitaciones al momento de construir el dispositivo. Estas fuerzas son muy débiles por lo que sólo tienen ingerencia en una escala de longitud considerablemente pequeña, como es el caso de los dispositivos a tratar (18, 19). A continuación se presentarán dos de estas fuerzas, la fuerza de Casimir y la fuerza de Van der Waals. Estas serán contempladas en la ecuación de movimiento del sistema, con la finalidad de realizar un análisis cualitativo que permita conocer en qué rangos el sistema presenta estabilidad.

4.0.1. Fuerza de Casimir

La fuerza de Casimir es la atracción entre dos materiales no cargados resultado de las fluctuaciones electromagnéticas en el punto cero (se hace referencia a la energía más baja que un sistema puede poseer), esto es un fenómeno de origen cuántico, el cual puede tener influencia en la escala mesoscópica y macroscópica (20). Casimir planteó que dos placas conductoras perfectas, una frente de la otra en el vacío (Fig. 4.1), podrían experimentar una fuerza atractiva como resultado de las fluctuaciones presentes, incluso a temperatura cero. (21).



Figura 4.1: Placas paralelas metálicas, a las que las fluctuaciones del vacío tienden a acercar entre sí. Debido a la diferencia de presión que ejercen sobre su anverso y reverso

El fenómeno cuántico al cual se debe esta fuerza, está relacionado con la energía presente en el vacío del campo electromagnético cuantizado; es decir, al estado base de la electrodinámica cuántica (22, 23). Dicha energía se debe al hecho de que los osciladores cuánticos no presentan una energía mínima nula, lo que ocasiona que aún sin fuentes que generen un campo, la energía mínima de los osciladores que componen el campo no sea nula. Es precisamente a estos estados de energía mínima a lo que hace referencia el término fluctuaciones del vacio.

Casimir propuso comparar la energía de las fluctuaciones presentes en el vacío y la energía correspondiente a las fluctuaciones del vacío al colocar condiciones de frontera, asociándoles la energía del punto cero de $\frac{\hbar\omega}{2}$ a cada modo electromagnético (fotón). Dichas condiciones fueron dos placas paralelas. Para ello consideró que las placas paralelas interactúan con ondas electromagnéticas fluctuantes de cualquier frecuencia. Como las ondas electromagnéticas que se encuentran dentro de las placas tienen que cumplir con las condiciones de frontera; es decir, están limitadas por su frecuencia, mientras que las ondas electromagnéticas que se encuentran fuera de las placas, no tienen ninguna restricción. Se puede observar que hay una mayor cantidad de energía fuera de las placas, que dentro y la diferencia entre la energía entre las placas y fuera de ellas es la que produce la atracción entre las mismas. Por lo que, las fluctuaciones de energía en el vacío, estarían ejerciendo una presión de radiación que es proporcional a la energía o frecuencia de los distintos modos de vibración.

Dicha presión de radiación provoca una fuerza que es proporcional al área de las placas e inversamente proporcional a la separación entre ellas elevada a la cuarta po-

tencia, con una constante de proporcionalidad constituida por la constante de Planck y la velocidad de la luz (19). Es decir,

$$\frac{F(L)}{A} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240L^4},$$
(4.1)

donde L representa la distancia entre las placas y A es el área entre las placas. La dependencia de la fuerza en la separación entre las placas es negativa y aumenta en magnitud a medida que las placas se encuentran más cercanas. Por lo que, se puede concluir que la fuerza de Casimir es atractiva (21).

El término efecto Casimir es aplicado a un gran número de interacciones de largo alcance, como la interacción entre átomos o moléculas (Interacción retardada de Van der Waals), entre un átomo y la superficie de un material (Interacción Casimir-Polder) y la interacción entre cuerpos materiales en bulto (23).

En 1958 fue reportada una medición de la fuerza de Casimir realizada por Sparnaay. Sin embargo, aunque esta mostraba una fuerza atractiva no inconscistente con las predicciones teóricas, la medición tenía un rango de incertidumbre del 100%. Debido a factores que no fueron contemplados, como que las placas no son perfectamente conductoras, la rugosidad de la superficie, efectos de temperatura, gravitatorios, etc (24). Hasta los 90's se pudo demostrar de manera experimental la existencia de la fuerza de Casimir. Steve Lamoreaux, utilizando un sistema basado en una balanza de torsión logró medirla con un márgen de error del 5% con un acercamiento máximo de 0.6 μm (24). De manera simultanea, Umar Mohiddeen midió la fuerza de Casimir utilizando el microscopio de fuerza atómica, pegando una esfera de oro a una punta de fuerza atómica. Consiguiendo medir la fuerza entre la esfera y una placa con un margen de error del 1%, ya que consideró una corrección con respecto a la rugosidad de los materiales utilizados. La fuerza fue medida para una separación de 0.1 *a* 0.9 μm entre la esfera y la placa (21, 25).

4.0.2. Fuerza de Van der Waals

Fritz Wolfgang London demostró que las fuerzas de Van der Waals se producen por un momento dipolar instantáneo producido por una posición de los electrones en la molécula. Este dipolo temporal polariza la distribución de electrones de la molécula cercana, creando una energía de dispersión atractiva proporcional a $\frac{1}{r^6}$, donde r es la distancia entre las moléculas. Esta teoría asume que las moléculas cercanas reaccionan inmediatamente al dipolo y es por ello que sólo se puede considerar en el caso de distancias menores que 10 nm (18, 20, 26).

El argumento es que el Hamiltoniano que describe la interacción del momento dipolar d con el campo eléctrico E es $H = -d \cdot E$. De esto, se observa que la energía de interacción entre estos dipolos; llamados 1 y 2, es

$$H_{int} = \frac{(d_1 \cdot d_2)r^2 - 3(d_1 \cdot r)(d_2 \cdot r)}{r^5},$$
(4.2)

donde r es el vector asociado a la posición relativa entre los dipolos. Por la teoría de perturbaciones a primer orden, se tiene que la energía esta dada por $\langle H_{int} \rangle$, pero este término es cero debido a que los dipolos están orientados de manera azarosa y $\langle d_i \rangle = 0$. El resultado es distinto de cero hasta la teoría a segundo ordén, ya que

$$V_{eff} = \sum_{m \neq 0} \frac{\langle 0|H_{int}|m \rangle \langle m|H_{int}|0 \rangle}{E_0 - E_m},$$
(4.3)

lo cual resulta en $V_{eff} \sim r^{-6}$. Este es un efecto electroestático a corta distancia (26).

Sin embargo, también podría interpretarse por medio de las fluctuacions del campo electromagnético, asumiendo que inducen un momento dipolar en los átomos o moléculas. Por lo que, en lugar de verlo como la acción de la distancia entre las moléculas en términos de las fluctuaciones de los dipolos se puede pensar como las fluctuaciones del campo eléctrico, dada la relación lineal entre estas cantidades, cuando se hablan de campos débiles (26).

4.0.3. Relación entre las fuerzas de Casimir y de Van der Waals

Una manifestación del efecto Casimir tiene su origen en interacciones moleculares (fuerza de dispersión o de Van der Waals); para el caso de medios no densos, se puede interpretar como los potenciales de Van der Waals retardados $(1/r^7)$ y de corto alcance $(1/r^6)$ entre las moléculas que conforman el cuerpo, como fue discutido por primera vez por London. Sin embargo, cuando los cuerpos son lo suficientemente densos, ya no es valido considerar sólo interacciones entre molécula-molécula y se deben considerar las condiciones de frontera o de borde para el campo electromagnético de las superficies del material y los efectos intermoleculares (23).

Casimir y Polder, quienes investigaban las fuerzas de Van der Waals en coloides, mostraron que si se consideran separaciones más grandes entre dos moléculas, se presenta una energía de interacción entre las moléculas proporcional a $\frac{1}{r^7}$. Lo que resulta en que la fuerza usual no retardada de Van der Waals se encuentra ausente y se tiene otro tipo de interacción. Estos resultados experimentales motivaron a que se desarrollaran modelos como el desarrollado por Lifshitz. Los resultados obtenidos por Lifshitz no envuelven de manera explícita las propiedades moleculares de los cuerpos, ya que la fuerza atractiva es únicamente función de las propiedades del material en bulto y la separación entre los planos considerados e indica la importancia de las fronteras (23). La teoría de Lisfhitz para el caso de un material con conductividad perfecta, obtiene una expresión idéntica a la Ec. 4.1; es decir, la fuerza de atracción es independiente a la carga del electrón o las propiedades de los cuerpos materiales. La simplicidad de la expresión permite dar cierta realidad a las fluctuaciones en el punto cero del campo electromagnético, implicando que la fuerza Casimir es una propiedad intrínseca del espacio (23).

Para materiales reales, la ecuación no describe de manera correcta el fenómeno para distancias entre las cuales los modos de frecuencia son mayores que las frecuencias de plasma (considerando un metal) o mayores que la resonancia de absorción (considerando un dieléctrico). La fuerza de atracción cambia como $1/r^3$, la fuerza en este rango es referida como atracción London-Van der Waals, mientras que si varia como $1/r^4$ es referida como interacción de Van der Waals retardada (Casimir) (23).

Para la fueza de Casimir, la distancia a considerar es de $r \approx 100$ nm, más grande que el espaciamiento atómico en el material, es por ello que tiene sentido describir al material por medio de sus propiedades en bulto. El cambio en la potencia de $1/r^4$ a $1/r^3$ es debido al cambio de los modos de frecuencia que son afectados por el cambio de la separación de las placas. Por lo tanto, las sección transversal entre los dos régimenes parece ser una diferencia de origen físico comparada con el caso de fuerzas atractivas entre átomos aislados (23).

4.0.4. Ecuación dinámica del sistema masa resorte considerando interacciones del tipo $\frac{1}{u^n}$

En la siguiente sección se presentará un análisis cualitativo de la ecuación de movimiento del sistema masa resorte de la sección precedente, teniendo en consideración interacciones que van como el inverso de la distancia entre las placas; tal es el caso, de la fuerza electroestática, la fuerza de Van der Waals y la de Casimir.

La ecuación de movimiento que describe el sistema es

$$m\frac{d^2u}{dt'^2} + a\frac{du}{dt'} + k(u-l) = \frac{\sigma}{(L-u)^n},$$
(4.4)

donde σ es una constante, la cual esta dadá por el tipo de interacción que se contemple. Si adimensionalizamos la ecuación dinámica, considerando las mismas escalas de longitud y tiempo empleadas en la sección anterior en la Ec. 3.12. Se tiene que

$$\frac{d^2\bar{u}}{dt^2} + \gamma \frac{d\bar{u}}{dt} + \bar{u} = \frac{\sigma}{k(L-l)^{n+1}(1-\bar{u})^n} = \frac{\lambda'}{(1-\bar{u})^n}$$
(4.5)

donde

$$\gamma = \frac{a}{\sqrt{mk}}, \quad \lambda' = \frac{\sigma}{k(L-l)^{n+1}} \tag{4.6}$$

El parámetro λ' para el caso $n \neq 2$ se encuentra constituida por la razón entre la fuerza de interacción entre las placas y la fuerza de resititución elástica del resorte. Por lo que, se le puede dar una interpretación similar a la que se dio en el capítulo anterior para el caso electroestático, considerándolo un sintonizador del sistema, el cual reune información para poder caracterizarlo.

4.0.5. Soluciones estáticas

Considerando que no hay un cambio en el comportamiento del sistema en función del tiempo, la Ec. 4.5 se puede escribir como

$$\bar{v}(1-\bar{v})^n = \lambda'. \tag{4.7}$$

En la Fig. 4.2, se muestran las curvas de λ contra \bar{u} para distintos valores de n. En esta gráfica se consideran las interacciones de Casimir y Van der Waals. Por otro lado, en la Fig. 4.3 se presentan los valores de \bar{u} donde se presentan los máximos de λ' , a los cuales se llamarán λ'^* . En la Fig. 4.4, se muestran como cambia el valor máximo de λ' con respecto a la interacción a considerar; es decir, con respecto al cambio en el valor de n.



Figura 4.2: Gráfica de λ' vs. \bar{u} para distintos valores de n



Figura 4.3: Gráfica de λ'^* vs. \bar{u} para distintos valores de n



Figura 4.4: Gráfica de λ'^* vs. n, donde para distintos valores de n

En la tabla 4.1 se muestran los valores donde se presentan los máximos de la Ec. 5.29, para las interacciones en las que n toma valores de 2 a 6.

n	λ'^*	\bar{u}	
2	0.1481	0.33	
3	0.1055	0.25	
4	0.08192	0.20	
5	0.06696	0.17	
6	0.05664	0.14	

Tabla 4.1: Valores de \bar{u} donde se presenta el valor máximo del parámetro λ' , el cual es denotado como λ'^*

4.0.6. Solución dinámica

Con la finalidad de encontrar los valores que determinan el equilibrio del sistema dinámico. Se reescribió la Ec. 4.5 como un sistema de ecuaciones siguiendo el procedimiento que se presenta a continuación: si se toma

$$y_1 = \bar{u}$$

у

$$y_2 = \frac{d\bar{u}}{dt},$$

entonces, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2 \frac{dy_2}{dt} = -\gamma y_2 - y_1 + \frac{\sigma}{k(L-l)^{n+1}(1-y_1)^n} = -\gamma y_2 - y_1 + \frac{\lambda'}{(1-y_1)^n}$$

Por medio de este sistema de ecuaciones y utilizando el programa pplane.m se dibujó el espacio fase de la Ec. 4.5 para el caso no viscoso, considerando distintos valores de n y λ . Es decir, el sistema considerado en el programa queda expresado de la siguiente forma:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2 \frac{dy_2}{dt} = -y_1 + \frac{\sigma}{k(L-l)^{n+1}(1-y_1)^n} = -y_1 + \frac{\lambda'}{(1-y_1)^n}.$$



Figura 4.5: Diagrama de fase de la Ec. (4.5) para el caso no viscoso, para n=2y distintos valores de λ'



Figura 4.6: Diagrama de fase de la Ec. (4.5) para el caso no viscoso, para n=3y distintos valores de λ'



Figura 4.7: Diagrama de fase de la Ec. (4.5) para el caso no viscoso, para n=4y distintos valores de λ'



Figura 4.8: Diagrama de fase de la Ec. (4.5) para el caso no viscoso, para n=5y distintos valores de λ'



Figura 4.9: Diagrama de fase de la Ec. (4.5) para el caso no viscoso, para n = 6 y distintos valores de λ'

n	λ'^*	\bar{u}	$\dot{\bar{u}}$
2	0.1481	0.25	0
3	0.1055	0.18	0
4	0.08192	0.13	0
5	0.06696	0.1	0
6	0.05664	0.09	0

Tabla 4.2: Valores de \bar{u} donde se presenta el máximo del parámetro λ' (denotado como λ'^*) obtenidos por medio de los diagramas de espacio fase.

Los diagramas de fase il
ustrados en las figuras 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9 muestran que los valores par
a λ' en los cuales se presentan soluciones periódicas en el sistema son

cercanos a los obtenidos por medio del modelo masa resorte para el caso estacionario. Para valores menores que el máximo del parámetro λ' , el sistema presenta estabilidad. Los valores máximos de λ' son presentados en la tabla 4.1.

Los valores de \bar{u} en los que se presentan los valores máximos de λ' son distintos para cada una de las interacciones a considerar. Notando que el sistema se torna inestable mucho antes cuando se consideran interacciones tipo Van der Waals o Casimir, esto con respecto a la interacción electroestática.

En el caso dinámico, los diagramas de espacio fase nos permiten determinar para que valores de λ' y \bar{u} , se logra tener un comportamiento periódico, dichos valores se encuentran reportados en la tabla 4.2.

Capítulo 5

Apantallamiento

En esta sección se contempla el colapso súbito del sistema causado por fuerzas no lineales, que no son precisamente la fuerza de electroestática o la fuerza de Casimir. Con esto nos referimos al caso en el que estas fuerzas se encuentran apantalladas por un término tipo Yukawa. En las siguientes secciones se presentará el planteamiento para el caso electroestático y se aclarará en que caso se puede considerar un apantallamiento para las interacciones del tipo Van der Waals y Casimir.

Además se expone un análisis de la ecuación de movimiento para el sistema con un potencial de apantallamiento tipo Yukawa, por medio del uso del espacio fase de la ecuación de movimiento. Este análisis se realizó considerando distintos valores de los parámetros presentes en la ecuación, con la finalidad de mostrar para qué valores el sistema muestra estabilidad.

5.0.1. Potencial Coulombiano apantallado

El potencial de Coulomb apantallado; también conocido como potencial de Yukawa en la física atómica y potencial Debye-Huckel en la física de plasmas, es de interés en muchas áreas de la física. Inicialmente fue utilizado para modelar las interacciones fuertes entre nucleón-nucleón dadas por el intercambio de un mesón en la física nuclear, pero su uso se extendió para representar el potencial de Coulomb apantallado dado por la nube de portadores de carga alrededor del nucleo en la física atómica o tomar en cuenta el blindaje producido por los electrones en un plasma de hidrógeno. La forma genérica del potencial esta dada por

$$V(r) = -\frac{A}{r}e^{-\mu r},\tag{5.1}$$

donde μ es el parámetro de apantallamiento y A es la intensidad del potencial (27).

Por ejemplo, el campo eléctrico de una carga positiva dentro de una nube de electrones decae más rápido que $\frac{1}{r}$ conforme aumenta r, debido a que los electrones apantallan la carga positiva. El apantallamiento estático puede ser descrito por la dependencia en el vector de onda (K) de la función dieléctrica estática $\epsilon(0, K)$. El planteamiento de este modelo es realizado por Kittel (28) y se presenta a continuación.

El modelo planteado en los sucesivo, se enfoca en encontrar la expresión del potencial apantallado en una dimensión, siguiendo el siguiente esquema. Se encuentra una expresión para la densidad de carga inducida en una distribución de cargas positivas y negativas, en términos de una densidad de carga aplicada de manera externa. Posteriormente, se encuentra una relación entre el potencial electroestático y la densidad de electrones por medio del potencial químico, obteniendo una expresión para la función dieléctrica que depende de la densidad de carga inducida. Finalmente, por medio de la ecuación de Poisson y la expresión para la función dieléctrica se encuentra la expresión del potencial apantallado en términos de un vector de onda k_s del cual depende la función dieléctrica.

Con la finalidad de escribir la función dieléctrica en términos del vector de onda \vec{K} , se considerará una nube de cargas positivas y negativas, de tal manera que los electrones con concentración de carga $-n_0e$ se encuentran superpuestos a las cargas positivas con concentración de carga n_0e . Además, se le inducira una deformación mecánica a la nube de carga, con la finalidad de producir una variación sinusoidal de la densidad de carga positiva en la dirección x. Por lo que, la densidad de carga positiva queda expresada como

$$\rho^{+}(x) = n_0 e + \rho_{ext}(K) \operatorname{sen} Kx, \qquad (5.2)$$

donde el término $\rho_{ext} \operatorname{sen} Kx$ da lugar a un campo electroestático que llamamos el campo externo aplicado al gas de electrones.

El potencial electroestático ϕ de la distribución de carga positiva es encontrado por medio de la ecuación de Poisson $\nabla^2 \phi = -4\pi\rho$, al considerar que $\nabla \vec{E} = \rho/\epsilon_0 = (\rho_{ext} + \rho_{ind})/\epsilon_0$ y $E = -\nabla \phi$. Su expresión esta dada por

$$\phi = \phi_{ext}(K) \operatorname{sen} Kx \quad , \quad \rho = \rho_{ext}(K) \operatorname{sen} Kx.$$
(5.3)

Por lo que, por la ecuación de Poisson se cumple que,

$$K^2 \phi_{ext}(K) = 4\pi \rho_{ext}(K). \tag{5.4}$$

Para el caso del gas de electrones, su densidad de carga sufrirá una deformación por la influencia del potencial electroestático $\phi_{ext}(K)$ de la distribución de carga positiva, dando como resultado un potencial electroestático inducido. Por lo que, la densidad de carga de electrones se encuentra dada por

$$\rho^{-}(x) = -n_0 e + \rho_{ind}(K) \operatorname{sen}(Kx), \tag{5.5}$$

donde $\rho_{ind}(K)$ es la amplitud de la variación de la densidad de carga inducida en el gas de electrones.

Como se quiere conocer $\rho_{ind}(K)$ en términos de $\rho_{ext}(K)$, se hará notar que la amplitud del potencial electroestático total $\phi(K) = \phi_{ext}(K) + \phi_{ind}(K)$ de las distribuciones de carga positiva y negativa, esta relacionada con la variación de la densidad de carga total $\rho(K) = \rho_{ext}(K) + \rho_{ind}(K)$ por la ecuación de Poisson. Por lo que, la Ec. (5.4), queda expresada como

$$K^2 \phi(K) = 4\pi \rho(K).$$
 (5.6)

Por otro lado, se necesita otra ecuación que relacione la concentración de electrones con el potencial electroestático. Esta relación se consigue utilizando la aproximación de Thomas-Fermi. La aproximación consiste, en asumir que el potencial químico se encuentra definido de manera local como función de la concentración de electrones. Por lo que, el potencial químico total del gas de electrones es constante en equilibrio, independientemente de la posición. En la región donde no hay contribuciones electroestáticas el potencial químico esta dado por

$$\mu = \epsilon_F^0 = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n_0)^{2/3}, \tag{5.7}$$

para el cero absoluto. En la región donde el potencial electroestático es $\phi(x)$, el potencial químico total es constante e igual a

$$\mu = \epsilon_F(x) - e\phi(x) \cong \frac{\hbar}{2m} (3\pi^2 n_0)^{2/3}, \tag{5.8}$$

donde $\epsilon_F(x)$ es el valor local de la energía de Fermi.

La Ec. (5.8) es válida para potenciales electroestáticos que varían lentamente comparados con la longitud de onda del electrón en la energía de Fermi. Si se realiza una expansión en series de Taylor de ϵ_F , la Ec. (5.8) toma la forma

$$\frac{d\epsilon_F}{dn_0}[n(x) - n_0] \cong e\phi(x) \tag{5.9}$$

y considerando la Ec. 5.7 se tiene que $\frac{d\epsilon_F}{dn_0} = \frac{2\epsilon_F}{3n_0}$, por lo que

$$n(x) - n_0 \cong \frac{3}{2} n_0 \frac{e\phi(x)}{\epsilon_F^0}.$$
 (5.10)

Se puede notar que el lado izquierdo es la parte inducida por la concentración de electrones, por lo que

$$\rho_{ind}(K) = -(\frac{3n_0 e^2}{2\epsilon_F})\phi(K).$$
(5.11)

y por la Ec. (5.6) se tiene

$$\rho_{ind}(K) = -(\frac{6\pi n_0 e^2}{\epsilon_F K^2})\rho(K).$$
(5.12)

Considerado que la función dieléctrica cumple con la siguiente relación

$$\epsilon(0,K) = 1 - \frac{\rho_{ind}(K)}{\rho(K)} \tag{5.13}$$

y utilizando la expresión 5.12, se llega a que

$$\epsilon(0,K) = 1 + \frac{k_s^2}{K^2}; \tag{5.14}$$

donde

$$k_s^2 = \frac{6\pi n_0 e^2}{\epsilon_F} = 4(3/\pi)^{1/3} n_0^{1/3} / a_0 = 4\pi e^2 D(\epsilon_F), \qquad (5.15)$$

 a_0 es el radio de Bohr y $D(E_F)$ es la densidad de estados de un gas de electrones libres. E $\epsilon(0, K)$ en la Ec. (5.14), es llamada función dieléctrica de Thomas-Fermi, y $1/k_s$ es la longitud de apantallamiento de Thomas-Fermi.

Una vez obtenida la función dieléctrica en términos de la densidad de carga inducida, volvamos a considerar una carga q positiva colocada en una nube de electrones de conducción, con la finalidad de encontrar el cambio que sufre el potencial debido a la distribución de carga inducida. La ecuación de Poisson para el potencial no apantallado de Coulomb es

$$\nabla^2 \phi_0 = -4\pi q \delta(r), \tag{5.16}$$

y sabemos que $\phi_0 = q/r$, lo cual nos permite escribir

$$\phi_0(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{K} \phi_0(\vec{K}) exp(i\vec{K} \cdot \vec{r}).$$
(5.17)

, utilizando en la Ec. (5.16) y la representación de Fourier de la función delta¹, se tiene que $K^2\phi_0(K) = 4\pi q$.

Como
$$\frac{\phi_{ext}(\vec{K})}{\phi(\vec{K})} = \frac{\rho_{ext}(\vec{K})}{\rho(\vec{K})} = \epsilon(\vec{K})$$
 entonces el potencial apantallado cumple

$$\phi_0(\vec{K})/\phi(\vec{K}) = \epsilon(\vec{K}), \qquad (5.19)$$

 $\delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{K} exp(i\vec{K}\cdot\vec{r}), \qquad (5.18)$
donde $\phi(K)$ es el potencial apantallado. Usando $\epsilon(K)$ en la forma de Fermi-Thomas encontramos

$$\phi(K) = \frac{4\pi q}{K^2 + k_s^2}.$$
(5.20)

Por lo que, el pontencial de coulomb apantallado en coordenadas de posición se obtiene por medio de la transformada de Fourier de $\phi(\vec{K})$, tal que:

$$\phi(r) = \frac{4\pi q}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dK \frac{2\pi K^2}{K^2 + k_s^2} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \exp\left(iKr\cos\theta\right) = \frac{2q}{\pi r} \int_0^\infty dK \frac{K\sin\left(Kr\right)}{K^2 + k_s^2} = \frac{q}{r} \exp\left(-k_s r\right)$$
(5.21)

El parámetro de apantallamiento k_s es definido en la Ec. (5.15). Se puede observar que el factor exponencial reduce el rango del potencial de Coulomb.

5.0.2. Fuerzas de dispersión apantalladas

Las fuerzas de dispersión (Casimir y Van der Waals) presentan un término de apantallamiento cuando el sistema a considerar se encuentra dentro de un medio electrolítico. Cuando se considera que el sistema se encuentra en un electrolito, los iones del electrolito no sólo experimentan un potencial electroestático cerca de las placas, también existe un potencial dado por las fuerzas de dispersión. Este potencial es menos significativo y despreciable a bajas concentraciones del electrolito pero puede dominar cuando las fuerzas electroestáticas son apantalladas.

Para describir sistemas constituidos por líquidos polares como el agua; donde puede haber fluctuaciones de carga por vibraciones dipolares, rotación de la molécula polar y fluctuaciones iónicas, se consideran estas contribuciones por medio de las susceptibildades dieléctricas, que pueden también ayudar a estudiar el desplazamiento de carga a frecuencia cero correspondiente a las corrientes de carga producidas por las cargas en movimiento en un metal o en soluciones de sal (29).



Figura 5.1: Sistema constituido por dos dieléctricos denotados como A y B con una solución salina entre ambos

Las interacciones entre los iones presentes en una solución electrolítica y las superficies; así como, las interacciones entre las superficies que se encuentran dentro de una solución electrolítica se pueden estudiar considerando la energía libre de interacción de la teoría de Lifshitz entre dos cuerpos no cargados. En el límite no retardado se conoce que la energía libre de Helmholtz G(l) para interacciones entre dos superficies planas a distancia l (Fig. 5.1), está dada por:

$$G(l,T) = -\frac{A_{Am/Bm}}{12\pi l^2}$$
(5.22)

donde el coeficiente de Hamaker $A_{Am/Bm}$ para las interacciones entre las interfaces Am y Bm es

$$A_{Am/Bm}(l) \approx \frac{3kT}{2} \sum_{\infty}^{n=0} \bar{\Delta}_{Am} \bar{\Delta}_{Bm} R_n(l), \qquad (5.23)$$

$$\bar{\Delta}_{Am} = \frac{\varepsilon_A - \varepsilon_m}{\varepsilon_A + \varepsilon_m} \quad y \quad \bar{\Delta}_{Bm} = \frac{\varepsilon_B - \varepsilon_m}{\varepsilon_B + \varepsilon_m}.$$
(5.24)

Se observa que su dependencia está en la distancia l y en las susceptibilidades dieléctricas. El índice n designa la suma sobre todas las frecuencias ξ_n . La prima de la suma indica que el término n = 0 está multiplicado por $\frac{1}{2}$ y a cortas distancias $R_n(l) = 1$. La forma que tiene esta interacción permite que se considere un término exponencial en la ecuación de movimiento para el caso de las fuerzas de dispersión

(29, 30, 31).

Las soluciones de sales, tienen especial interés en los sistemas coloidales y biológicos, debido a que forman capas electroestáticas dobles, provocando que los iones móviles muestren un acoplamiento particular entre las fluctuaciones de carga y el apantallamiento de los campos eléctricos que vienen de las fluctuaciones.

Un ejemplo de este acoplamiento es visto en el apantallamiento a frecuencia cero $(\xi_{n=0} = 0)$, debido a las fluctuaciones de carga. Si se considera que el medio m al que hace referencia la Fig 5.1 es una solución de sal con una longitud de Debye $\lambda_{Debye} = \lambda_D$. Los campos eléctricos de baja frecuencia que salen del cuerpo A podrían ser apantallados por la solución de sal con una típica atenuación exponencial de doble capa entre los cuerpos planos paralelos. Esto es, el campo decrecera como e^{-x/λ_D} contra la distancia medida desde la interface de la cual emerge (A) hacia el medio m. En el momento en que la señal recorre la distancia l hacia el cuerpo B, se apantallará e^{-l/λ_D} . La respuesta de B de regreso a A también sufrirá un apantallamiento que será del mismo tipo, e^{-l/λ_D} (29).

De la movilidad iónica que apantalla los campos eléctricos también se tienen fluctuaciones en la densidad iónica, formación transitoria de regiones de carga eléctrica neta y de esta región también emanan campos eléctricos. Cuando el medio m es sal con agua, la consecuencia principial de incorporar la sal, es precisamente la interacción apantallada entre A y B (29).

Por otro lado, el desplazamiento iónico no ocurre debido a campos eléctricos a frecuencias que corresponden incluso a la primera eigenfrecuencia no cero $(\xi_1 = (2\pi kT/\hbar) = 2.41 \times 10^{14} rad/s = 3.84 \times 10^{13} Hz)$. Esto se observa, si se compara el hecho de que la constante de difusión de un ión pequeño es $\approx 10^{-5} cm^2/s = 10^{-9} m^2/s = 10^{+11} \text{Å}^2/s$. Para difundirse una distancia comparable a sus dimensiones ($\approx 1\text{Å} = 0.1nm$), le llevará 10^{-11} s, lo cual es 100 veces mayor que el periodo de la primer eigenfrecuencia ($\approx 10^{-13}s$). Es decir, en el periodo de tiempo de la primera eigenfrecuencia, el ión puede moverse sólo $\approx 1/100$ de su radio (29).

Especificamente, cuando A y B son dieléctricos y m es una solución salina sin una constante dieléctrica alta como el agua, entonces $\bar{\Delta}'s$ tiende a 1. El único término que contribuye es cuando n = 0. Cuando A y B son sólo dieléctricos y m es la solución salina, la magnitud de $\bar{\Delta}'s$ sigue siendo 1 y se tiene un apantallamiento dado por

$$G_{AmB}(l) \approx -\frac{kT}{16\pi l^2} (1+2l/\lambda_D) e^{-2l/\lambda_D}.$$
(5.25)

Teniendo que la sal le confiere un apantallamiento correlacionado con las fluctuaciones de carga (29).

5.0.3. Ecuación dinámica del sistema masa resorte considerando interacciones que presentan un apantallamiento tipo Yukawa

La ecuación de movimiento que describe el sistema considerando la interacción del tipo Yukawa y las fuerzas que van como el inverso de la distancia a una potencia; esta dada por

$$m\frac{d^2u}{dt'^2} + a\frac{du}{dt'} + k(u-l) = \frac{\sigma e^{-\alpha(L-u)}}{(L-u)^n},$$
(5.26)

donde σ es una constante, la cual esta dadá por el tipo de interacción que se contemple. Si adimensionalizamos la ecuación dinámica; considerando las mismas escalas de longitud y tiempo empleadas en la sección anterior. Se tiene que

$$\frac{d^2\bar{u}}{dt^2} + \gamma \frac{d\bar{u}}{dt} + \bar{u} = \frac{\sigma e^{-\alpha(L-l)(1-\bar{u})}}{k(L-l)^{n+1}(1-\bar{u})^n} = \frac{\lambda' e^{-\alpha'(1-\bar{u})}}{(1-\bar{u})^n}$$
(5.27)

donde

$$\gamma = \frac{a}{\sqrt{mk}}, \quad \lambda' = \frac{\sigma}{k(L-l)^{n+1}} \quad \alpha' = \alpha(L-l)$$
(5.28)

5.0.4. Soluciones estáticas

Considerando que no hay un cambio en el comportamiento del sistema en función del tiempo, la Ec. 4.5 se puede escribir como

$$\bar{u}(1-\bar{u})^n e^{\alpha'(1-\bar{u})} = \lambda'.$$
(5.29)

En la Fig. 5.2, se muestran las curvas de λ' contra v para distintos valores de n y $\alpha' = 0.15$. En esta gráfica se tienen en consideración las interacciones de Casimir, Van der Waals y el caso electroestático.



Figura 5.2: Gráfica de λ' vs. \bar{u} para n=2,3,4 y $\alpha'=0.15$

$\alpha'=0.15$	n = 2	n = 3	n = 4
	$\bar{u} = 0.32$	$\bar{u} = 0.24$	$\bar{u} = 0.20$
	$\lambda'^*=0.1639$	$\lambda'^*=0.1181$	$\lambda'^*=0.09236$

Tabla 5.1: Valores máximos del parámetro λ' (denotados con λ'^*) y valores de \bar{u} en los cuales se presentan, para el caso $\alpha' = 0.15$ y n = 2, 3, 4.



Figura 5.3: Gráfica de λ' vs. \bar{u} para n=2 y $\alpha'=0.1, 0.5, 0.7$

n=2	$\alpha'=0.1$	$\alpha'=0.5$	$\alpha'=0.7$
	$\bar{u} = 0.32$	$\bar{u} = 0.3$	$\bar{u} = 0.28$
	$\lambda'^*=0.1584$	$\lambda'^*=0.2086$	$\lambda^{\prime *}=0.2403$

Tabla 5.2: Valores máximos del parámetro λ' (denotados con λ'^*) y valores de \bar{u} en los cuales se presentan, para el caso n = 2 y distintos valores de α' .



Figura 5.4: Gráfica de λ' vs. \bar{u} para n=3 y $\alpha'=0.1, 0.5, 0.7$

n = 3	$\alpha'=0.1$	$\alpha'=0.5$	$\alpha'=0.7$
	$\bar{u} = 0.24$	$\bar{u} = 0.23$	$\bar{u} = 0.22$
	$\lambda'^*=0.1137$	$\lambda'^*=0.1543$	$\lambda'^*=0.1802$

Tabla 5.3: Valores máximos del parámetro λ' (denotados con λ'^*) y valores de \bar{u} en los cuales se presentan, para el caso n = 3 y distintos valores de α' .



Figura 5.5: Gráfica de λ' vs. \bar{u} para n = 4 y $\alpha' = 0.1, 0.5, 0.7$

n = 4	$\alpha'=0.1$	$\alpha'=0.5$	$\alpha'=0.7$
	$\bar{u} = 0.20$	$\bar{u} = 0.19$	$\bar{u} = 0.18$
	$\lambda'^*=0.0887$	$\lambda'^*=0.1226$	$\lambda'^*=0.1445$

Tabla 5.4: Valores máximos del parámetro λ' (denotados con λ'^*) y valores de \bar{u} en los cuales se presentan, para el caso n = 4 y distintos valores de α' .

En el caso que se presenta en la Fig. 5.2, la inestabilidad del sistema se presenta en rangos de movimiento de la placa superior menores conforme aumenta el valor de n, de la misma forma en la que se presenta para el caso en el que sólo se consideran interacciones que van como $\frac{1}{u^n}$. Sin embargo, la inestabilidad se presenta a menores distancias recorridas por la placa superior en el caso que considera el término apantallado.

Por medio de las Figs. 5.3, 5.4, 5.5 se puede observar que al aumentar el valor del parámetro α' el sistema se torna inestable a distancias más pequeñas recorridas por la

parte móvil del dispositivo.

5.0.5. Solución dinámica

De manera análoga a la sección anterior, se reescribió la Ec. 5.26 como un sistema de ecuaciones, tal como se muestra a continuación: si se considera

$$y_1 = \bar{u}$$

у

$$y_2 = \frac{d\bar{u}}{dt},$$

entonces, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2 \frac{dy_2}{dt} = -\gamma \frac{dy_1}{dt} - y_1 + \frac{\lambda' e^{-\alpha'(1-y_1)}}{(1-y_1)^n}$$

Por medio de este sistema de ecuaciones y utilizando el programa pplane.m se dibujo el espacio fase de la Ec. 5.26 para el caso no viscoso ($\gamma = 0$), considerando distintos valores de n y λ' . Es decir, el sistema considerado en el programa queda expresado de la siguiente forma:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2 \frac{dy_2}{dt} = -y_1 + \frac{\lambda' e^{-\alpha'(1-y_1)}}{(1-y_1)^n}.$$

A continuación, se presenta el espacio fase de la Ec. (5.27) para distintos valores de los parámetros α' y λ' . En las gráficas de espacio fase 5.3, 5.4, 5.5, se considera un valor fijo para λ' y la variación del parámetro α' .

Los valores de λ' que se contemplan en el espacio fase para las distintas n's, son los valores máximos que puede tomar λ' para que el sistema siga siendo estable para el caso donde no se contempla el término de apantallamiento, estos valores son presentados en la Tabla 4.1. Se puede observar que considerando estos valores para λ' el espacio fase no muestra que el sistema tenga soluciones periódicas; por lo que, se varió el valor de α' con la finalidad de encontrar cuando el espacio fase muestra que el sistema tiene soluciones de este tipo.

5. APANTALLAMIENTO



Figura 5.6: Espacio fase de la Ec. 5.27 para $\eta = 0$, n = 1, $\lambda' = 0.26$ y distintos valores para α' . El inciso (a) corresponde a $\alpha = 0$, el (b) a $\alpha = 0.1$, el (c) a $\alpha' = 0.15$, el (d) a $\alpha' = 0.2$, el (e) a $\alpha' = 0.3$ y el (f) a $\alpha' = 0.4$



Figura 5.7: Espacio fase de la Ec. 5.27 para $\eta = 0$, n = 2, $\lambda' = 0.1481$ y distintos valores para α' . El inciso (a) corresponde a $\alpha' = 0$, el (b) a $\alpha' = 0.1$, el (c) a $\alpha' = 0.15$, el (d) a $\alpha' = 0.2$, el (e) a $\alpha' = 0.3$ y el (f) a $\alpha' = 0.4$

5. APANTALLAMIENTO



Figura 5.8: Espacio fase de la Ec. 5.27 para $\eta = 0$, n = 3, $\lambda' = 0.1055$ y distintos valores para α' . El inciso (a) corresponde a $\alpha' = 0$, el (b) a $\alpha' = 0.1$, el (c) a $\alpha' = 0.15$, el (d) a $\alpha' = 0.2$, el (e) a $\alpha' = 0.3$ y el (f) a $\alpha' = 0.4$



Figura 5.9: Espacio fase de la Ec. 5.27 para $\eta = 0$, n = 4, $\lambda' = 0.08192$ y distintos valores para α' . El inciso (a) corresponde a $\alpha' = 0$, el (b) a $\alpha' = 0.1$, el (c) a $\alpha' = 0.15$, el (d) a $\alpha' = 0.2$, el (e) a $\alpha' = 0.3$ y el (f) a $\alpha' = 0.4$

n	α'	λ'^*	\bar{u}	$\dot{\bar{u}}$
2	0.15	0.1481	0.21	0
3	0.15	0.1055	0.15	0
4	0.15	0.08192	0.12	0

Tabla 5.5: Valores de \bar{u} , α' donde se presenta estabilidad en el sistema, considerando los valores máximos de λ' , donde el sistema presenta estabilidad para el caso sin apantallamiento, obtenidos por medio de los diagramas de espacio fase.

Capítulo 6

Conclusiones

Si se contempla que la estructura a analizar es una viga voladiza y se considera un cambio en la geometría de la sección transversal de la viga, se puede concluir que para el caso estacionario el efecto de colapso súbito sucede a la misma distancia entre la barra y el sustrato, pero el valor del parámetro λ es menor cuando el valor de la constante de restauración elástica k_s asociada a la sección transversal aumenta.

Para el caso estacionario si se contemplan interacciones de la forma $\frac{1}{r^n}$, se observa que la inestabilidad de colapso súbito se presenta con mayor rápidez (a una distancia de separación de las placas mayor) al considerar interacciones del tipo Casimir y Van der Waals. Considerando el término tipo Yukawa con una constante α' fija para la interacción electroestática, de Van der Waals y Casimir, se observa que el comportamiento es el mismo que en el caso sin apantallamiento; es decir, la inestabilidad de colapso súbito se presenta con mayor rapidez al considerar la interacción de Casimir. Sin embargo, los valores máximos que puede tomar λ'^* son mayores, lo cual en particular para el caso electroestático hace referencia a que el voltaje aplicado puede ser mayor si se contempla el sistema en una solución electrolítica caracterizada por el parámetro α' .

Al varíar el parámetero α' para cada una de las interacciones, se observa que el valor del parámetro λ'^* es mayor al tomar valores mayores de α' , sin embargo, la inestabilidad se presenta a valores de \bar{u} más pequeños.

Finalmente, para el caso dinámico y por medio del espacio fase de la ecuación obtenida por el modelo masa resorte, se encontró que apartir de que α' toma el valor de 0.15 el sistema presenta soluciones periódicas para las interacciones: electroestática, de Van der Waals y de Casimir considerando el término tipo Yukawa. Por lo que, si en principio se tiene un sistema que no se encuentra dentro de una solución electrolítica, con parámetros que no aseguren que se puedan tener soluciones periódicas, se puede encontrar una solución caracterizada por el valor de α' , para que el sistema dentro de esta solución presente soluciones periódicas.

Apéndice A

Dominio viscoso

A.1. Apéndice

En los capítulos anteriores se estudió la estabilidad de los sistemas microelectromecánicos al considerar las interacciones de dispersión y las apantalladas, sin considerar el caso viscoso. En este apartado se tomará en cuenta el régimen viscoso al presentar el espacio fase de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d^2\bar{u}}{dt^2} + \gamma \frac{d\bar{u}}{dt} + \bar{u} = \frac{\sigma}{k(L-l)^{n+1}(1-\bar{u})^n} = \frac{\lambda'}{(1-\bar{u})^n}$$
(A.1)

donde

$$\gamma = \frac{a}{\sqrt{mk}}, \quad \lambda' = \frac{\sigma}{k(L-l)^{n+1}}$$
 (A.2)

у

$$\frac{d^2\bar{u}}{dt^2} + \gamma \frac{d\bar{u}}{dt} + \bar{u} = \frac{\sigma e^{-\alpha(L-l)(1-\bar{u})}}{k(L-l)^{n+1}(1-\bar{u})^n} = \frac{\lambda' e^{-\alpha'(1-\bar{u})}}{(1-\bar{u})^n}$$
(A.3)

donde

$$\gamma = \frac{a}{\sqrt{mk}}, \quad \lambda' = \frac{\sigma}{k(L-l)^{n+1}} \quad \alpha' = \alpha(L-l).$$
 (A.4)

A continuación se presentan el espacio fase de estas ecuaciones. La Fig. A.1 muestra el espacio fase para n = 2, $\lambda' = 0.1$ y distintos valores de $\gamma = 2, 1, 0.5$ y 0.15, la Fig. A.2 muestra el espacio fase para n = 4, $\lambda' = 0.1$ y distintos valores de $\gamma = 5, 1, 0.5$ y 0.1, la Fig. A.3 muestra el espacio fase para $n = 2, \lambda' = 0.1$, $\alpha' = 0.15$ y distintos valores de $\gamma = 30, 1, 0.5$ y 0.1 y la Fig. A.4 muestra el espacio fase para $n = 4, \lambda' = 0.1, \alpha' = 0.15$ y distintos valores de $\gamma = 30, 1, 0.5$ y 0.1 y la Fig. A.4 muestra el espacio fase para $n = 4, \lambda' = 0.1, \alpha' = 0.15$ y distintos valores de $\gamma = 5, 2, 1$ y 0.5. Los parámetros usados para λ' y alpha', son los que aseguran estabilidad para el caso no viscoso y estático. Se considera un valor para la viscosidad, el cual va cambiando. Debido a esto, se puede ver que para conseguir soluciones periódicas para este caso, el valor para la viscosidad adimensionalizado debe de ser menor de 0.5.

Por otro lado, si se toma en cuenta la viscosidad adimensionalizada para el caso del aire ($1.8 \times 10^{-5} \frac{Ns}{m^2}$) y agua ($1.0 \times 10^{-3} \frac{Ns}{m^2}$), considerando un sistema caracterizado por un valor de k de 320.625 $\frac{N}{m}$ y una masa de $m = 100 \times 10^{-6}$ g, se tiene que la viscosidad adimensionalizada para el aire y el agua está dada por 1.0052×10^{-4} y 5.6×10^{-3} . Se puede ver que estos valores están por debajo de los escogidos en los espacios fase de las figuras que se muestran a continuación, además de que son muy pequeños y tienen una contribución pequeña a la dinámica del sistema.



Figura A.1: Diagrama de fase de la Ec. (A.1) para el caso viscoso, para $n = 2, \lambda = 0.1$ y distintos valores de γ



Figura A.2: Diagrama de fase de la Ec. (A.1) para $n=4,\,\lambda=0.08$ y distintos valores de γ



Figura A.3: Diagrama de fase de la Ec. (A.3) para el caso viscoso, para $n=2, \lambda=0.14,$ $\alpha'=0.15$ y distintos valores de γ



Figura A.4: Diagrama de fase de la Ec. (A.3) para el caso viscoso, para $n=4,\,\lambda=0.08,$ $\alpha'=0.15$ y distintos valores de γ

Bibliografía

- John A Pelesko and David H Bernstein. Modeling Mems and Nems. CRC press, 2002. 1, 2, 3, 19, 20, 21, 22, 23, 26
- [2] Nitaigour Premchand Mahalik. Mems. Tata McGraw-Hill Education, 2008. 1, 3
- [3] Nitaigour Premchand Mahalik. *Micromanufacturing and nanotechnology*. Springer, 2006. 1, 13, 15
- [4] Fuqian Yang. Electromechanical instability of microscale structures. Journal of Applied Physics, 92(5):2789–2794, 2002. 1, 10
- [5] Huiwen Liu and Bharat Bhushan. Adhesion and friction studies of microelectromechanical systems/nanoelectromechanical systems materials using a novel microtriboapparatus. Journal of Vacuum Science & Technology A: Vacuum, Surfaces, and Films, 21(4):1528–1538, 2003. 2
- [6] Raffaele Ardito, A Frangi, Alberto Corigliano, B De Masi, and G Cazzaniga. The effect of nano-scale interaction forces on the premature pull-in of real-life micro-electro-mechanical systems. *Microelectronics Reliability*, 52(1):271–281, 2012. 2, 18
- [7] C Son and B Ziaie. Pull-in instability of parallel-plate electrostatic microactuators under a combined variable charge and voltage configuration. Applied Physics Letters, 92(1):013509, 2008. 4
- [8] S Chowdhury, M Ahmadi, and WC Miller. A closed-form model for the pull-in voltage of electrostatically actuated cantilever beams. *Journal of Micromechanics* and Microengineering, 15(4):756, 2005. 6, 18, 35
- [9] Sayanu Pamidighantam, Robert Puers, Kris Baert, and Harrie AC Tilmans. Pullin voltage analysis of electrostatically actuated beam structures with fixed-fixed and fixed-free end conditions. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 12(4):458, 2002. 7

- [10] Subrahmanyam Gorthi, Atanu Mohanty, and Anindya Chatterjee. Cantilever beam electrostatic mems actuators beyond pull-in. *Journal of Micromechanics and Mi*croengineering, 16(9):1800, 2006. 10
- [11] Stephen D Senturia. Microsystem design. Springer Science & Business Media, 2007. 13, 14
- [12] Hiroyuki Fujita. Microactuators and micromachines. Proceedings of the IEEE, 86(8):1721–1732, 1998. 13
- [13] Sergey Edward Lyshevski. MEMS and NEMS: systems, devices, and structures. CRC press, 2002. 13, 15
- [14] Marc J Madou. Manufacturing techniques for microfabrication and nanotechnology, volume 2. CRC press, 2011. 13, 14, 15, 16
- [15] Gregory TA Kovacs, Nadim I Maluf, and Kurt E Petersen. Bulk micromachining of silicon. *Proceedings of the IEEE*, 86(8):1536–1551, 1998. 15
- [16] Marc J Madou. Solid-State Physics, Fluidics, and Analytical Techniques in Microand Nanotechnology, volume 1. CRC Press, 2011. 16, 17, 18
- [17] Giuseppe Grosso and Parravicini Giuseppe Pastori. Solid State Physics. Academic Press, 2003. 16
- [18] Frank W DelRio, Maarten P de Boer, James A Knapp, E David Reedy Jr, Peggy J Clews, and Martin L Dunn. The role of van der waals forces in adhesion of micromachined surfaces. *Nature materials*, 4(8):629, 2005. 37, 39
- [19] Luque Jiménez Jesús Humberto. Estabilidad de mems y nems para fuerzas generales. Tesis para obtener el grado de maestro en Ciencia e Ingeniería de Materiales, UNAM, 2008. 37, 39
- [20] Johanna Miller. Casimir forces between solids can be repulsive. *Physics today*, 62(2):19, 2009. 37, 39
- [21] William MR Simpson and Ulf Leonhardt. Forces of the quantum vacuum: An Introduction to Casimir Physics. World Scientific Publishing Company, 2015. 37, 39
- [22] Michael Bordag, Galina Leonidovna Klimchitskaya, Umar Mohideen, and Vladimir Mikhaylovich Mostepanenko. Advances in the Casimir effect, volume 145. OUP Oxford, 2009. 38
- [23] Steven K Lamoreaux. The casimir force: background, experiments, and applications. *Reports on progress in Physics*, 68(1):201, 2004. 38, 39, 40, 41
- [24] Steven K Lamoreaux. Demonstration of the casimir force in the 0.6 to 6 μ m range. *Physical Review Letters*, 78(1):5, 1997. 39

- [25] Umar Mohideen and Anushree Roy. Precision measurement of the casimir force from 0.1 to 0.9 μ m. *Physical Review Letters*, 81(21):4549, 1998. 39
- [26] Kimball A Milton. The Casimir effect: physical manifestations of zero-point energy. World Scientific, 2001. 39, 40
- [27] H Bahlouli, MS Abdelmonem, and IM Nasser. Analytical treatment of the yukawa potential. *Physica Scripta*, 82(6):065005, 2010. 53
- [28] Charles Kittel. Introducción a la física del estado sólido. Reverté, 1995. 54
- [29] V Adrian Parsegian. Van der Waals forces: a handbook for biologists, chemists, engineers, and physicists. Cambridge University Press, 2005. 57, 59
- [30] Barry W Ninham and Vassili Yaminsky. Ion binding and ion specificity: the hofmeister effect and onsager and lifshitz theories. *Langmuir*, 13(7):2097–2108, 1997. 59
- [31] B Davies and BW Ninham. Van der waals forces in electrolytes. The Journal of Chemical Physics, 56(12):5797–5801, 1972. 59