



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
DOCTORADO EN CIENCIAS (FÍSICA)
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS UNAM
ECONOFÍSICA

AGLOMERACIONES DE NEGOCIOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTORA EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
LUISANA CLAUDIO PACHECANO

HERNÁN LARRALDE RIDAURA
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS, UNAM

MAXIMINO ALDANA GONZÁLEZ
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS, UNAM

DENIS PIERRE BOYER
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM

CUERNAVACA MORELOS, MARZO 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

TESIS DOCTORAL

Aglomeraciones de Negocios

Autor:

Luisana CLAUDIO PACHECANO

Supervisor:

Dr. Hernán LARRALDE

Tesis

Para obtener el grado de Doctora en Ciencias (Física)

27 de febrero de 2020

“We cannot hope to build a better world without improving the individual. Toward this end, each of us must work for his own highest development, accepting at the same time his share of responsibility in the general life of humanity—our particular duty being to aid those to whom we think we can be most useful.”

-Marie Curie

Quoted in Eve Curie Labouisse and Eve Curie, trans. by Vincent Sheean, *Madame Curie* (1937), 53.

Resumen

Uno de los fenómenos más intrigantes en el mundo del comercio son las causas de la formación de las diferentes distribuciones espaciales de los negocios según su giro (los productos que venden). Es posible observar que a algunos comercios les conviene “aglomerarse” en alguna pequeña región, mientras que a otros comercios, de giros diferentes, les resulta más rentable distribuirse homogéneamente en el espacio (ciudad). ¿Por qué sucede esto? En el caso en que se aglomeran, ¿hasta qué número de tiendas es conveniente esta aglomeración?, con el fin de responder éstas y otras preguntas, y saber qué es lo más conveniente para un negocio, necesitamos entender cómo interaccionan entre sí las tiendas. En el presente trabajo se modela la interacción entre las tiendas mediante los consumidores, que deciden un sitio específico para realizar una compra maximizando su utilidad.

Agradecimientos

Cada inicio tiene su final, y hoy por fin, puedo concluir esta etapa de mi vida: mi doctorado. Debo de confesar que el camino no fue fácil, hubo dudas, frustraciones, estrés, pero al mismo tiempo, ese camino se hizo mucho más fácil de recorrer por las personas que me acompañaron, mi familia, amigos y toda la comunidad del ICF que me hacen sentir como en mi segunda casa. Agradezco a la vida por haber tenido la oportunidad de coincidir con cada una de estas personas y por haber compartido momentos, que ahora sé, son irrepetibles e invaluable.

Quiero empezar por agradecer a mi asesor: Hernán Larralde, que desde la licenciatura hasta el doctorado, ha invertido su tiempo: años, formándome, enseñándome, siempre con una sonrisa, siempre con la gran disponibilidad que lo caracteriza. Gracias Hernán, por que a través de todo ese tiempo, me has brindado tu amistad y apoyado más allá de lo académico, porque me has motivado y/o empujado a realizar cosas que ni yo misma me creía capaz de hacer. Gracias por que en ocasiones fuiste el primero de los dos en confiar en mí. También quiero expresar mi agradecimiento a mis profesores que me compartieron de su experiencia y gran conocimiento, en particular, agradezco al Dr. Maximino Aldana y al Dr. Denis Boyer quiénes fueron parte de comité tutor y dieron de manera constante sus críticas, observaciones y sugerencias que ayudaron a moldear mi proyecto de investigación.

De manera específica quiero agradecer a Adriana Lozano por su amistad que empezó poco antes de iniciar mi doctorado. Gracias Adri, por tu renovadora, deportiva, repostera, pero sobre todo leal amistad. También quiero darle las gracias a una de mis ex-compañeras de cubículo y ahora gran amiga: Cristina Salto Alegre. Gracias Cris, por cuidarme con un cariño sobreprotector y tan cálido, que me hacía olvidarme de cualquier ausencia. Gracias por acompañarme, especialmente en mi embarazo y compartir conmigo mis síntomas en el cubo. A lo largo de este trayecto, como ellas, muchas amistades estuvieron conmigo momentos, etapas, de lejos o muy de cerca. Ellos saben quiénes son: Gracias!

Quiero expresar mi más profundo amor y agradecimiento a mi familia. A mis papás que me han apoyado de manera incondicional para realizarme profesionalmente y como persona. Gracias papi, por ser la figura que me hizo tener la convicción de siempre superarme a mi misma y no dejar de aprender. Gracias mami, por ayudarme a ser siempre cada vez más fuerte. Gracias a los dos, por todo lo que han dado por mí y mis hermanos. Quiero darles gracias, por apoyarme, especialmente en la última etapa de mi doctorado, sin ustedes no lo hubiese logrado. Gracias a la tía bebé por cederle su lugar

a la nueva bebé de la casa: mi AnaFer, y por ser la tía que ahora es. Gracias Eliza, por que siempre tienes esa disponibilidad y energía positiva para ayudar. Gracias por haber regresado, el tiempo que decidiste estar en México, para seguir teniendo la fortuna de disfrutarte de cerca AnaFer y yo. Gracias también al tío Víctor, que aunque de lejos siempre está presente. Gracias a mi niña AnaFer, por ponerme en perspectiva lo que realmente importa en la vida. Los amo.

Finalmente quiero hacer el reconocimiento y agradecer a las instituciones que hicieron posible la realización de mis estudios doctorales: El Instituto de Ciencias Físicas de la UNAM, el CONACyT y DGAPA: por el financiamiento que me ortogaron a lo largo de mi doctorado ...

Índice

Agradecimientos	III
1. Objetivo General	1
2. Introducción	2
3. Antecedentes	7
3.0.1. Modelo de Hotelling	7
3.0.2. Trabajo de D'Aspremont	9
3.0.3. Literatura más reciente	10
3.0.3.1. Modelo de Hideo Konishi	12
4. Metodología y técnicas requeridas	14
4.1. Concepto del Equilibrio de Nash en el sistema económico a estudiar	14
4.2. Sistema económico	17
5. Modelo	20
5.1. Descripción del modelo	20
5.1.1. Estrategia del consumidor	22
5.1.2. Estrategia de las tiendas	23
6. Resultados	26
6.1. Sitio Aislado en la ciudad	26
6.1.1. Monopolio	29
6.1.2. Duopolio en el mismo sitio	31
6.1.3. Muchas tiendas en un sólo sitio	35
6.2. Duopolio en sitios diferentes	38
6.3. Distribución Uniforme	43
7. Conclusiones y Perspectivas	48
A. Competencia de Bertrand en el modelo.	51
B. Variación de m_k con el precio p_k y p_i.	53

C. Dinámica entre tres primeras tiendas en un sitio.	55
D. Demostración de relación que cumple $\frac{\partial m_k}{\partial p_k}$.	61

Para mi niña AnaFer y sus abuelos: mis padres. . . .

Capítulo 1

Objetivo General

Uno de los campos de especialización en economía es la llamada economía geográfica, que surge de la observación de que las actividades económicas no están distribuidas de manera arbitraria sino por el contrario, siguen distintos patrones de ubicación según el caso. Esta rama a su vez aborda varias teorías tales como: la localización industrial, el transporte, el comercio internacional, economía urbana, la globalización, externalidades y economía de aglomeraciones [1].

Nuestro interés dentro de estas teorías es la economía de aglomeraciones, la cual trata de explicar el por qué ciertos comercios se reúnen en una región específica del espacio. En el presente trabajo, se propone estudiar la distribución en el espacio de negocios de un giro específico mediante un modelo cuyo enfoque es similar al de la física estadística. Uno de los objetivos de la termodinámica estadística es establecer un puente entre la fenomenología microscópica y las cantidades termodinámicas (cantidades macroscópicas).

En el caso del modelo, se tienen dos tipos de agentes: consumidores y vendedores, cuyas decisiones son estudiadas a una escala microeconómica. En particular, las interacciones entre las tiendas son a través de los consumidores. En este sentido se presenta la analogía con la física estadística ya que, el comportamiento colectivo de los agentes en el modelo repercute en la distribución espacial de los negocios, fenomenología que se da a una escala global la cual se estudia desde la perspectiva macroeconómica.

Capítulo 2

Introducción

En este capítulo se presenta un breve marco histórico alrededor del concepto de competencia en economía. Se introducen los principales tipos de estructuras de mercado que existen y las formas de competencia a las que se someten.

El concepto de *competencia* es uno de los más fundamentales en economía. Su definición puede tornarse, según la perspectiva, desde: lo opuesto a los monopolios hasta una fuerza regulatoria para los precios y ganancias [2]. Una de las ventajas de la competencia en el mercado es que, en principio, lleva a una reducción de precios, lo cual representa un beneficio para el consumidor, quien termina con más opciones de compra y con precios más bajos. Un ejemplo de estructura de mercado en donde se predice dicho comportamiento es la así llamada: competencia perfecta, en la que existen muchos proveedores al igual que consumidores [3]. Dadas estas condiciones ningún productor tiene la capacidad de cambiar el precio en el mercado. En cambio, cuando sólo existen pocos proveedores en la industria, se habla de otro tipo de estructuras: los oligopolios . A diferencia de la competencia perfecta, cada una de las partes de un oligopolio tiene la capacidad de afectar el precio en el mercado con sus acciones, que no necesariamente se reflejan como un beneficio al consumidor. Los oligopolios son un ejemplo de estructuras con poder de mercado [4] .

Una manera de evitar la competencia entre firmas es que éstas estén coludidas. La colusión es muy común en estructuras con poder de mercado, y toma lugar cuando las firmas se ponen de acuerdo para establecer el precio y las cantidades que producen cada una, formando lo que se conoce como un “cártel”. En un cártel siempre existe el incentivo de hacer trampa con el fin de acaparar más ingresos. En este sentido, un cártel es una estructura inestable ya que si al menos uno de los integrantes tiene la posibilidad de

incrementar sus ganancias, el sistema no está en equilibrio de Nash y por tal motivo los cárteles necesitan cooperación entre sus participantes [5] ¹.

En el presente trabajo consideramos la competencia entre negocios, los cuales suponemos que no cooperan entre sí, a diferencia de los cárteles, hasta que alcanzan un equilibrio de Nash.

Las estructuras de mercado, también se pueden definir de acuerdo a las características de los productos que comercian, como pueden ser: homogéneos o idénticos, similares o intercambiables. Los tipos de competencia en estas estructuras son diversas y se pueden clasificar dependiendo del número de participantes en las mismas: monopolio, duopolio, oligopolio, onopolio. Los dos últimos son los casos en que hay pocos y un sólo comprador respectivamente [6, 7].

La competencia de un duopolio fue descrito por primera vez por Antoine Augustin Cournot en 1838 en su libro: “Researches on the Mathematical Principles of the Theory of Wealth” en donde dió a conocer su teoría sobre conceptos de competitividad. A. Cournot² modela un duopolio a través de las variables de producción q_1 y q_2 y en su modelo se llega a que ambos proveedores se comportan como un monopolio al momento de determinar sus respectivos precios. ³

Bertrand en 1883, sugiere que el precio es una variable más natural como estrategia de ambas firmas [10], argumentando que cualquiera de los dos propietarios podría con una ligera reducción en sus precios acaparar el mercado de su rival incrementando casi al doble sus ganancias. La reacción por parte de su contrincante sería de bajar aún más su precio llevando a ambos a ganancias nulas. Esta dinámica es conocida en literatura como “La competencia de Bertrand”, la cual conduce a los competidores a establecer precios que tienden al costo de producción del producto.

Algunas de las inconformidades que podrían surgir de los modelos de Cournot y de Bertrand es que cada agente no anticipa la reacción de su rival. Otra observación es que, al disminuir una de las firmas un porcentaje mínimo su precio, no necesariamente amerita que todos los consumidores se trasladen hasta donde se encuentra dicha firma para conseguir el producto [9]. Por lo que esto nos lleva a considerar un nuevo ingrediente en los modelos: La competencia espacial.

¹ En la subsección 4.1 se explica el concepto de un equilibrio de Nash y se aplica a un ejemplo.

²Cournot fue uno de los pioneros en aplicar modelos matemáticos a sistemas sociales [8]. También derivó una fórmula que llevó a dibujar las primeras gráficas de oferta y demanda 32 años antes de que el concepto fuera introducido formalmente por Alfred Marshall en su libro: “Elements of economics of industry”. Además, A. Cournot, en el modelo que desarrolló para describir la competencia de un duopolio, introdujo conceptos similares al equilibrio de Nash.

³Un monopolio elige primero su producción para después establecer su precio lo más alto posible que la demanda permita [9].

Uno de los modelos precursores en la literatura para el estudio de la competencia espacial es el modelo de Hotelling (1929). En este modelo se consideran dos firmas, cada una vendiendo un producto homogéneo a los consumidores que se encuentran distribuidos uniformemente en una ciudad lineal. Hotelling considera un juego en dos etapas: ubicación-precio en donde los consumidores asumen un precio de transporte, que es lineal con la distancia que recorren para obtener dicho producto, y además se supone que cada consumidor compra en la tienda en donde el costo total sea el mínimo. Lo que concluye Hotelling es que las firmas terminarán en medio de la ciudad: una al lado de la otra, vendiendo al mismo precio [11]. Es decir, terminan por suprimir las características que distinguían inicialmente a estos dos vendedores: ubicación y precio. Este resultado es conocido como “El Principio de Mínima Diferenciación”, el cual sugiere que existe una tendencia entre competidores a “imitarse” unos a otros en las características de los productos que venden. A través de su modelo, Hotelling da pie a una componente importante a considerar en la competencia entre oligopolios: “Product differentiation”. Lo cual definió toda una línea de investigación [12–16]; que además puede ser aplicada, al menos cualitativamente, para entender el fenómeno de competitividad en distintos sistemas como: campañas políticas, programación televisiva, etc [17, 18].

50 años después del trabajo de Hotelling, D’Aspremont, Gabszewicz y Thiesse publican un artículo que titulan: “ON HOTELLING’S STABILITY IN COMPETITION” cuyo resumen dice: “*The purpose of this note is to show that the so-called Principle of Minimum Differentiation, as based on Hotelling’s 1929 paper “Stability in Competition”, is invalid*” [19]. En dicho trabajo se analizan las mismas expresiones de las ganancias que obtuvo Hotelling y muestran que son válidas sólo bajo ciertas condiciones restrictivas en los precios y por lo tanto de las posiciones. D’Aspremont argumenta que los precios de equilibrio para las firmas son iguales a cero cuando se encuentran una al lado de la otra dada la competencia de Bertrand. Además, resuelve una versión ligeramente distinta del modelo de Hotelling en donde, encuentra un equilibrio en precios para cualquier par de posiciones de las firmas si en lugar de usar costos lineales de transporte consideran costos cuadráticos respecto a la distancia. En dicha versión D’Aspremont concluye que la tendencia de ambas firmas es diferenciarse lo más posible en el espacio, contrario a lo que concluye Hotelling.

Las conclusiones opuestas que obtienen Hotelling y D’Aspremont sobre la competencia espacial en un duopolio han sido la semilla para un sin fin de artículos y discusiones, por ejemplo: [20–22]. Lo que queda claro es que, si bien la solución de Hotelling es incorrecta, la conclusión de D’Aspremont de que las firmas tienden a diferenciarse para relajar la competencia en precios, contrasta con la observación de que ciertos negocios que venden productos similares se aglomeran en distintas regiones del espacio [23, 24]. De hecho, el comportamiento de las ubicaciones de las tiendas varía dependiendo de su giro, por

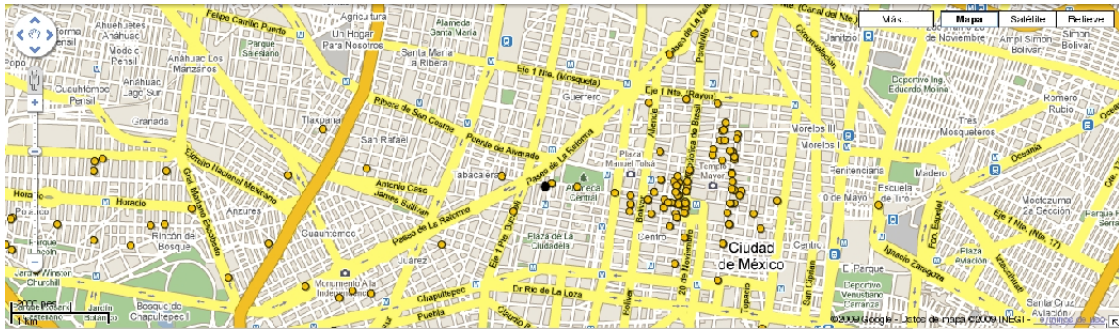


FIGURA 2.1: Ubicaciones de Joyerías en una zona del DF. Imagen obtenida de google maps.

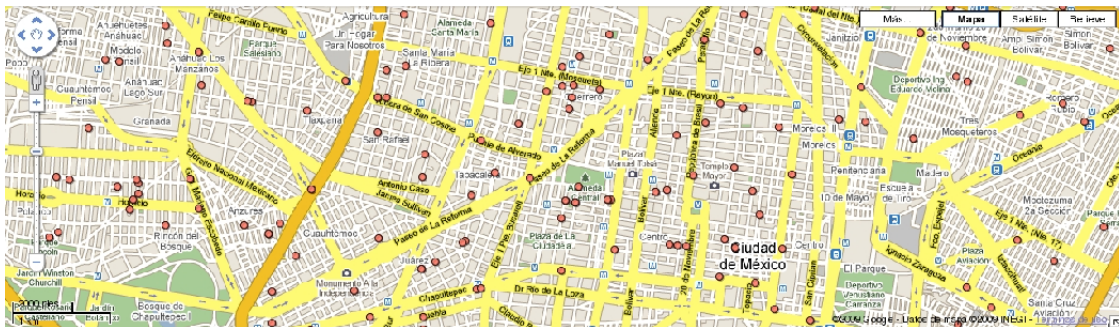


FIGURA 2.2: Ubicaciones de Farmacias en la misma zona.

ejemplo: las joyerías tienen una tendencia a aglomerarse, mientras que las farmacias de separse, según las figuras 2.1, 2.2. Existe una inmensa lista de investigación empírica en relación con el comportamiento de ubicaciones de actividades económicas [25]. En donde, con ayuda de distintos métodos de medición, se pueden identificar patrones específicos de ubicación (en términos de aglomeración o separación) y catalogar cuáles son los negocios que siguen dichos patrones.

Por ejemplo, en [23] se estudian las distribuciones espaciales de 55 giros en la ciudad de Lyon Francia, los negocios que resultaron estar más aglomerados ahí fueron: textiles, bienes de segunda mano, joyerías, zapatos, muebles y artículos del hogar. En este modelo discreto, las ubicaciones de los distintos giros son distribuidos sobre el número total de sitios que sí pueden ser ocupados, lo cual hace que se considere de manera implícita la inhomogeneidad en el espacio debido a la estructura misma de la ciudad: ríos, avenidas, montañas, etc.

En [24] se provee de una medición de estructura espacial (para negocios de un mismo giro), que también considera la inhomogeneidad en el espacio y además la densidad de población en el área de estudio. La finalidad de este trabajo es crear un catálogo de patrones correspondiente a 54 giros de dos ciudades metropolitanas de Canadá: Vancouver y Calgary, e indentificar cuáles son los patrones de ubicación que son más robustos a

través de las ciudades. Se identificaron 5 categorías de patrones de aglomeración/dispersión: (1) hyperagglomeration, en donde se observa aglomeración de tiendas en una o varias zonas metropolitanas; (2) Aglomeración local, en donde tiendas de un mismo tipo se agrupan localmente, pero para escalas mayores la distribución es parecida a la del total de negocios; (3) Patrón mixto, el cual es observado principalmente en autos nuevos, los cuales se atraen entre distintas marcas pero los aglomerados resultantes se repelen a una escala global; (4) Repulsión, negocios de un mismo giro se repelen a una escala global; (5) Sin tendencia, porque las ubicaciones siguen un patrón parecido al del colectivo total de tiendas. Los giros que resultaron seguir el patrón de hyperaglomeración en ambas ciudades fueron: mueblerías, antigüedades, cafeterías, galerías de arte, tabaquerías, autos usados, tiendas de regalos y librerías. En cambio los negocios de giros que se repelen entre sí en ambas ciudades son: gasolineras, supermercados, pizzerías, licores, veterinarias y pinturas.

La fenomenología de cómo se distribuyen espacialmente los negocios es la principal motivación del estudio aquí presentado. Distintos patrones de ubicación como aglomeración o dispersión de negocios, parecido al fenómeno de condensación y evaporización, emergen a una escala global según las observaciones empíricas. Por lo tanto, una mejor descripción de este fenómeno debería poder predecir que las tiendas se agregan o separan, dependiendo de uno o más parámetros que caractericen su giro.

Se presenta en la sección 3 una breve recopilación de trabajos que preceden al nuestro. En la sección 4 se expone el concepto de equilibrio de Nash el cual es de uso fundamental en el modelo que aquí se propone y se presenta el sistema económico al que se aplica el equilibrio de Nash. Dicho modelo económico determina precios y ubicaciones óptimos que surgen de la competencia que se da entre vendedores de productos similares presentado en la sección 5. Finalmente, en la sección 6 a través de ejemplos específicos se muestran las posibles ubicaciones óptimas de los negocios bajo ciertas condiciones del sistema.

Capítulo 3

Antecedentes

En esta sección se empieza por describir a detalle el modelo de Hotelling al igual que el trabajo de D'Aspremont. Adicionalmente, se describen algunos modelos recientes relacionados con el nuestro en el sentido de buscar distintos patrones de ubicación. Finalmente, se explica el modelo de H. Konishi que fue esencial en la construcción del modelo aquí propuesto.

3.0.1. Modelo de Hotelling

Hotelling modela un duopolio en una ciudad lineal (unidimensional) de largo l . Dos vendedores A y B localizados a unas distancias a y b respectivamente de los extremos de la ciudad ($a, b > 0$, $a + b \leq l$), ver figura 3.1. Ambos vendedores producen un producto homogéneo (idéntico) con un costo de producción cero. En un principio, cada vendedor produce la cantidad q_1 y q_2 respectivamente y venden a diferentes precios p_1 y p_2 . Los consumidores se distribuyen uniformemente a lo largo de la ciudad. Se suponen costos de transporte lineales, siendo c la constante de proporcionalidad. Se impone una demanda inelástica igual a uno ¹

Para un consumidor en el punto de indiferencia (ver figura 3.1) se satisface que:

$$p_1 + cx = p_2 + cy \tag{3.1}$$

Otra ecuación en términos de x y y que satisface el mercado total:

$$a + x + y + b = l \tag{3.2}$$

¹i.e. cada consumidor en la ciudad compra una unidad de producto al vendedor con el cual pagaría el menor costo total (Incluyendo el costo de transporte).

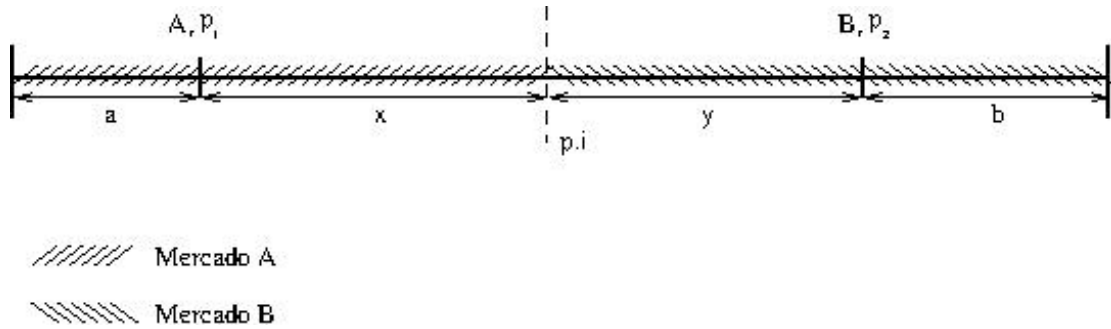


FIGURA 3.1: Dos vendedores A y B están colocados a una distancia a y b respectivamente de los extremos de una ciudad de tamaño l . Los vendedores inicialmente venden a diferente precio sus productos p_1, p_2 . Existe un punto de indiferencia que se encuentra sobre la línea que une a ambos vendedores denotado como $p.i.$. Un consumidor en el punto $p.i$ compra indistintamente a cualquier vendedor. Por lo tanto el mercado del vendedor A estará dado por $q_1 = a + x$ y el de B por $q_2 = y + b$. En el modelo de Hotelling el mercado y las cantidades producidas llamadas q_1 y q_2 coinciden dada la suposición de que toda la población en la ciudad compra.

Por lo tanto, las ganancias estarán dadas por:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= p_1 q_1 = p_1(a + x) \\ \Pi_2 &= p_2 q_2 = p_2(y + b) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Resolviendo para x y y , las ganancias encontradas por Hotelling son:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{1}{2}(l + a - b)p_1 - \frac{p_1^2}{2c} + \frac{p_1 p_2}{2c}, \\ \Pi_2 &= \frac{1}{2}(l - a + b)p_2 - \frac{p_2^2}{2c} + \frac{p_1 p_2}{2c} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Cada competidor determina su precio, suponiendo que el otro lo deja fijo, para maximizar su propia ganancia. Por lo tanto los precios óptimos son:

$$\begin{aligned} p_1^* &= c \left(l + \frac{a - b}{3} \right), \\ p_2^* &= c \left(l - \frac{a - b}{3} \right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

y sustituyéndolos en las expresiones (3.4) se obtienen las ganancias máximas esperadas para cada competidor dadas las distancias a y b :

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \frac{c}{2} \left(l + \frac{a-b}{3} \right)^2, \\ \Pi_2 &= \frac{c}{2} \left(l + \frac{b-a}{3} \right)^2\end{aligned}\tag{3.6}$$

Hotelling usa dichas expresiones para realizar la competencia espacial. Supóngase que el vendedor A escoge su posición, por lo tanto el vendedor B escogerá b tan largo como sea posible dentro de las condiciones del problema ² Por consecuencia B buscará colocarse lo más cerca posible de A , del lado hacia la sección más extensa del mercado. Por lo que la reacción de A , conforme B incrementa b , es moverse de tal forma que también a sea lo más largo posible, donde ambas cantidades a y b terminan siendo iguales a $l/2$ y consecuentemente, los precios quedan determinados por $p_1 = p_2 = cl$ de acuerdo con la ecuación (3.5). Por lo tanto, ambos vendedores que inician vendiendo un producto homogéneo en distintas ubicaciones y a distintos precios, terminan siguiendo el “Principio de mínima diferenciación”.

3.0.2. Trabajo de D’Aspremont

D’Aspremont retoma los resultados de Hotelling y argumenta que el equilibrio encontrado por Hotelling no es válido cuando ambos vendedores se colocaban uno al lado del otro (por lo tanto $a + b = l$) dada la competencia de Bertrand que implica precios de equilibrio que tienden a cero (suponiendo costos de producción igual a cero). Además, D’Aspremont mostró que para $a + b < l$ existe un punto de equilibrio para los precios bajo la condición:

$$\begin{aligned}\left(l + \frac{a-b}{3} \right)^2 &\geq \frac{4}{3}l(a+2b) \\ \left(l + \frac{b-a}{3} \right)^2 &\geq \frac{4}{3}l(b+2a)\end{aligned}\tag{3.7}$$

Dicha condición incluye el hecho de que la función ganancia sufre discontinuidades (ver figura 3.2. Hotelling justifica como necesarias dichas discontinuidades por cuestiones de simplicidad. Con esta condición los parámetros a y b quedan sujetos a restricciones, si

²El modelo de Hotelling restringe el problema a un rango de valores para a y b dentro de las líneas definidas por las ecuaciones: $p_1 - p_2 = \pm(l - a - b)$. Esta restricción surge de una de las suposiciones iniciales del modelo: que el punto de indiferencia $p.i$ está en una posición entre las dos tiendas (ver figura 3.1). Para valores de parámetros que no satisfacen esta condición, por ejemplo $a > b$ las conclusiones de Hotelling no son válidas, por lo tanto a y b quedan restringidos.

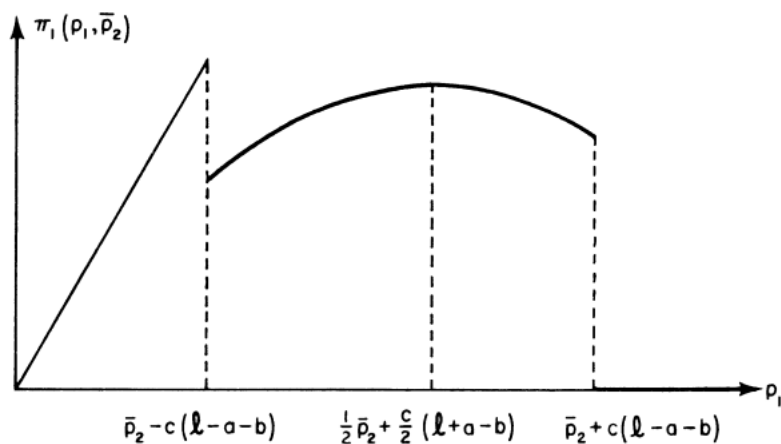


FIGURA 3.2: Ganancia de la tienda A en función de su precio p_1 dado el precio de la tienda B : \bar{p}_2 . En la primera región $p_1 < \bar{p}_2 - c(l-a-b)$ se cumple que todos los consumidores compran en A y por lo tanto, la ganancia Π_1 crece linealmente con p_1 . En la región intermedia es donde la solución de Hotelling es válida. Finalmente, la última región de precios es tal que a ningún consumidor le conviene comprar en A y por lo tanto las ganancias son nulas. Figura tomada de [19].

analizamos (3.7) cuando $a = b$ se encuentra que $a, b < \frac{l}{4}$, lo que termina por contradecir las conclusiones de Hotelling.

De manera adicional, D'Aspremont estudia un versión ligeramente diferente a la de Hotelling en la cual utiliza costos de transporte cuadráticos con la distancia. Bajo esta consideración, los precios de equilibrio (p_1^*, p_2^*) que encuentra no tienen ninguna restricción para el par de parámetros (a, b) . Además, en esta versión las ganancias satisfacen que $\partial \Pi_1(p_1^*, p_2^*)/\partial a, \partial \Pi_2(p_1^*, p_2^*)/\partial b < 0$, es decir, las ganancias disminuyen ante cambios positivos de a y b respectivamente. Por lo que D'Aspremont concluye que lo mejor para este par de vendedores es colocarse lo más alejado posible uno del otro. Sin embargo, D'Aspremont reconoce que a pesar de que la solución de Hotelling es aparentemente errónea, a través de su modelo Hotelling introduce una importante componente en la competencia entre oligopolios: *La diferenciación de productos*.

3.0.3. Literatura más reciente

Un aspecto que no consideraron ni Hotelling ni D'Aspremont en sus argumentos es que cuando más de una tienda se encuentran en un mismo sitio se genera un efecto conocido como *market-size effect* o también llamado como *clustering effect*: entre más tiendas se encuentren en un centro comercial, más alta es la probabilidad de que un consumidor encuentre lo que quiere comprar, y como consecuencia dicho sitio se vuelve más atractivo para que los consumidores lo visiten. En una extensa reseña de modelos de competencia espacial [26], el autor Marionov enfatiza una discrepancia entre lo que se observa en la práctica y lo que describen dichos modelos, algunos tratan de modelar

el fenómeno de aglomeración, en cambio otros, explican la dispersión de negocios como un efecto de evitar la competencia en precios. Con base en la literatura y con el fin de corregir esta discrepancia, Marionov sugiere que las “fuerzas” que provocan las distintas configuraciones espaciales de negocios se podrían clasificar como débiles y fuertes. En el caso de que una fuerza débil induzca aglomeración, sucede como un efecto secundario de que las tiendas buscan ubicarse cerca de sus consumidores para incrementar sus ganancias, como sucede en el modelo de Hotelling. En cambio, una fuerza fuerte que induce aglomeración se da por que los competidores buscan estar cerca unos de otros como principal estrategia de ubicación, tal es el caso del market-size effect.

Dos ejemplos de modelos relativamente recientes que consideran ambas fuerzas y con ello dan lugar a distintos patrones de ubicación, en términos de aglomeración o dispersión, son los modelos de Non y el de Takahashi. En el modelo de Non se busca la existencia de un equilibrio en precios para una configuración espacial donde puedan coexistir un “mall” (un sitio con muchas tiendas) y tiendas aisladas. Su modelo consiste de un juego en tres etapas: las tiendas escogen sus ubicaciones, ofrecen un producto homogéneo a un precio que maximice sus ganancias, mientras que los consumidores deciden qué sitios visitar y en dónde comprar. Una de las principales distinciones de este modelo con el nuestro es que existen dos tipos de consumidores. Una fracción de ellos no asume costos de transporte ni de entrada a cada una de las tiendas, por lo que esta fracción de consumidores compra en el sitio más barato. La fracción restante, asume costos positivos de transporte y entrada.

Un modelo más parecido al nuestro es el de Takahashi [27], en donde se considera “taste heterogeneity”, información imperfecta de las características de los productos en un sitio en cuestión, y costos de transporte entre dos regiones disponibles en el sistema. En este modelo se encuentra un equilibrio para dos tipos de patrones de ubicación: segregación y agregación total. Un resultado diferente se encuentra si en lugar de suponer un costo de transporte homogéneo entre los consumidores se considera uno heterogéneo, lo cual induce otro patrón de ubicación que denotan como una aglomeración incompleta.

A continuación se presenta el modelo de Hideo Konishi [28] en el cual se consideran dos fuerzas fuertes. Una fuerza es debido al “market-size effect” que funciona como una fuerza centrípeta que propicia la aglomeración de negocios y la otra fuerza, por el contrario, induce separación: la competencia en precios, que simula una fuerza centrífuga de igual forma que los costos de transporte.

3.0.3.1. Modelo de Hideo Konishi

El modelo de Konishi consiste en un juego³ de tres etapas. En la primera, los vendedores deciden sus ubicaciones de un conjunto de sitios disponibles en un espacio bidimensional. En la segunda etapa, los consumidores deciden qué sitio visitar bajo la premisa de que conocen las tiendas que se encuentran en cada sitio y un precio representativo del mismo. En esta etapa también se define por lo tanto, el mercado de cada sitio. Finalmente en la tercera etapa del juego, el precio real del producto ofrecido por cada tienda es descubierto por las personas que visitan el sitio. En esta etapa es donde se realiza la competencia en precios entre las tiendas del sitio. En este punto es donde cada consumidor decide comprar en la tienda que le reditúe la máxima utilidad⁴ de entre todas las tiendas en el sitio.

En su trabajo, Konishi primero garantiza la existencia de un equilibrio en precios y busca que se satisfaga una relación inversamente proporcional entre los precios de equilibrio y el número de tiendas en cada centro comercial (desde la tercera etapa del juego). El mercado de cada sitio lo define mediante un radio cuyo círculo contiene los posibles consumidores del sitio. En su modelo, el “market size effect” tiene dos contribuciones positivas conforme el número de tiendas aumenta: una es debida al “taste uncertainty” de los consumidores y la otra, por las expectativas de precios más bajos. Por lo tanto, el radio que define el mercado resulta ser creciente con el número de tiendas. Finalmente, con un par de ejemplos Konishi muestra la relación entre número de tiendas, precios de equilibrio, el radio del mercado, ganancias y la probabilidad de encontrar el producto deseado en el sitio considerando distribuciones uniformes para los precios de reserva y para la distribución de consumidores en el espacio.

En el primer ejemplo se asume que los centros comerciales están lo suficientemente lejos entre sí que no interactúan entre sí, es decir, los mercados no se sobreponen en el espacio. En este caso, se encuentra un máximo en la ganancia en función del número de tiendas, sin embargo, las tiendas continúan agregándose al sitio mientras que sus ganancias sigan siendo más altas que las de un monopolio. Después, las tiendas podrían obtener mejores ganancias colocándose fuera de ese sitio de ser posible. En el segundo ejemplo, se consideran dos centros comerciales con mercados que se sobreponen y por lo tanto surge una competencia adicional entre sitios.

³La palabra “juego” es usada en la connotación de teoría de juegos. En la sección 4 se da una breve definición de la teoría de juegos.

⁴La función utilidad está definida en economía como una medida de “felicidad” o “satisfacción” que le representa a un individuo su decisión. No hay manera de cuantificar con exactitud la función “utilidad”, sin embargo se emplea para ordenar las preferencias de las personas [9]. En este modelo se hace un intento por cuantificar la función utilidad en unidades de dinero, como el excedente neto por adquirir un producto en cuestión.

Una peculiaridad del modelo de Konishi es cómo se determinan los mercados de cada sitio. En particular, él define un radio r_k (un consumidor sobre el perímetro que define r_k percibirá una utilidad esperada nula para visitar el sitio, por tal razón r_k es llamado radio de indiferencia) cuyo círculo determina los visitantes del sitio y posibles consumidores. Es decir, personas que estén fuera de los círculos definidos por el radio de indiferencia no tienen posibilidad de visitar ningún sitio. En el caso en que una persona esté dentro de varios círculos, ésta visitará el sitio que maximice su utilidad esperada. Esta suposición da lugar a discontinuidades en la función mercado en el espacio y asume una completa uniformidad en los consumidores.

Para evitar éstas discontinuidades en el espacio, se propone en el presente trabajo un método diferente para calcular la función mercado. En particular, a cada persona en el espacio se le asigna un precio de reserva⁵ anticipado: $\rho_{k,z}$ (previo a la visita de un sitio en cuestión) por cada producto ofrecido por las distintas tiendas dentro de los sitios. Dada la heterogeneidad de los consumidores, el precio de reserva se considera una variable aleatoria caracterizada mediante una distribución de probabilidad. Esta modificación en el modelo permite que consumidores con precios de reserva muy altos puedan ser parte del mercado de un sitio a pesar de que se encuentren lejos del mismo. Sin embargo, al igual que Konishi, seguimos suponiendo que los consumidores no tienen bien definidas sus preferencias en el producto que desean comprar (consumer uncertainty). De hecho, si los consumidores supieran desde un principio todos los productos ofrecidos en los sitios y sus respectivos precios, entonces ellos comprarían específicamente en una tienda independientemente de si ésta se encuentra aglomerada o no. En cambio, introducir incertidumbre en los consumidores tanto en sus preferencias como en la información exacta de los precios de los productos es lo que induce la aglomeración de tiendas cuando ocurre.

A continuación se introduce el concepto de equilibrio de Nash, el cual es usado como solución a juegos simultáneos, en particular, la competencia en precios.

⁵El precio de reserva es la cantidad máxima de dinero que una persona está dispuesta a pagar por cierto producto, si el vendedor en cuestión sobrepasa el precio de reserva del consumidor, en principio, éste no compra [29]

Capítulo 4

Metodología y técnicas requeridas

En este capítulo se explica el concepto de equilibrio de Nash, el cual usamos en nuestro modelo para establecer los precios de equilibrio al que llega nuestro sistema económico después de una competencia en precios entre los agentes vendedores. Además, se introduce el sistema económico donde se aplica el equilibrio de Nash.

4.1. Concepto del Equilibrio de Nash en el sistema económico a estudiar

La teoría de juegos es una herramienta que fue diseñada para describir sistemas caracterizados por agentes que toman decisiones. Un juego se define fijando un conjunto de jugadores, un conjunto de estrategias, es decir, las decisiones que cada jugador hace, y un conjunto de funciones de pago, que nos indica la recompensa que cada uno de los jugadores recibe dada una combinación de estrategias.

Existe una amplia variedad de juegos que pueden ser clasificados por distintas características, por ejemplo: la información disponible para los jugadores. Esta información puede ser asimétrica, en cuyo caso, la información disponible entre los jugadores no es la misma para todos. En otros juegos, la información pueda estar incompleta, en caso de que la información sea completa a todos los jugadores se le llama: totalmente perfecta. Los juegos pueden ser de movimientos simultáneos o consecutivos, las reglas del juego pueden estar fijas o variables en el tiempo, los jugadores pueden cooperar entre ellos o no, etc. Otros juegos tienen características más peculiares como por ejemplo: que las funciones de pago de todos sus jugadores sumen cero, tal es el caso de juegos con apuestas, donde existe un único ganador que recibe la apuesta de todos los demás jugadores. Estos juegos se les conoce como: “zero-sum games”. La gran mayoría de juegos que existen, sus

funciones de pago no suman cero, en cambio, todos los involucrados reciben algún tipo de beneficio. En general, las actividades comerciales brindan ejemplos de tratos donde todos salen beneficiados de cierta forma.

Por otro lado, las estrategias que se manejan en los juegos son muy variables y dependen de las características del juego. Una estrategia se define como el conjunto de movimientos que escoge un jugador durante todo el juego. En el caso de un juego de movimientos consecutivos o juego extensivo, cada movimiento durante el juego será parte de la estrategia que usa el jugador. En cambio, cuando los juegos son simultáneos, sólo se juegan una sola vez, la estrategia que siguen los jugadores coincide con el único movimiento que hacen en todo el juego. Un ejemplo de juego simultáneo son las elecciones para determinar representantes, gobernadores, presidente, en donde cada uno de los participantes vota de manera “simultánea”. Este juego también se caracteriza porque la información que se maneja entre los participantes es totalmente imperfecta (cada persona vota sin conocimiento alguno de la decisión de todos los demás). Otro ejemplo de juego simultáneo es cuando proveedores de un producto específico escogen las características y precios de sus productos “simultáneamente”. Para un análisis más a detalle de los distintos tipos de juegos y sus respectivas estrategias, véase [30].

Los agentes en nuestro modelo al igual que en teoría de juegos toman decisiones, en particular, los agentes vendedores deciden a qué precio ofrecer sus productos. Un equilibrio en precios se encuentra para el sistema cuando: ninguno de los vendedores puede modificar su propio precio para mejorar su función de pago: su ganancia. Este equilibrio es el definido por un equilibrio de Nash¹.

El equilibrio de Nash es uno de los conceptos más básicos y usados en teoría de juegos. Supóngase un juego con dos jugadores: 1 y 2, el conjunto (p_1, p_2) define un par de estrategias puras² para los jugadores. Entonces, el beneficio que reciben los jugadores por cada par de estrategias es $u_i(p_1, p_2)$, donde $i = 1, 2$. Un equilibrio de Nash en estrategias puras es un arreglo (p_1^*, p_2^*) tal que $u_1(p_1^*, p_2^*) \geq u_1(p_1, p_2^*) \forall p_1$ y análogamente para la utilidad del segundo jugador se satisface que $u_2(p_1^*, p_2^*) \geq u_2(p_1^*, p_2) \forall p_2$. Es decir, el jugador 1 no puede escoger otro valor de p_1 que le retribuya más que $u_1(p_1^*, p_2^*)$. De manera análoga, el jugador 2 percibe su mayor beneficio en p_2^* dado el valor p_1^* . Es decir, ambos jugadores están escogiendo la mejor función respuesta dada la estrategia escogida por su contrincante.

¹1994 John Nash recibió el premio Nobel de economía por sus aportes a la teoría de juegos junto con Reinhard Selten y John Harsanyi.[31]

²Las estrategias de los juegos se clasifican en puras o mixtas. Una estrategia pura se define dentro de un juego en donde los movimientos (simultáneos o consecutivos) de un jugador son deterministas. En cambio, una estrategia mixta es cuando los jugadores toman sus decisiones en base a reglas probabilísticas [31].

Un ejemplo clásico para entender el equilibrio de Nash es el dilema del prisionero que fue introducido en 1951 por Raiffa [32]. Este ejemplo consiste de dos delincuentes: *A* y *B*; que son arrestados por ser culpables de un crimen menor, además, son sospechosos de otro crimen mayor. Los dos individuos se rehúsan a confesar el crimen mayor. Para motivarlos a hacerlo, a cada uno de ellos les hacen una propuesta en celdas separadas, de tal forma que ninguno sepa la decisión del otro. La propuesta es la siguiente: “ Tú tendrás que pagar una condena de 2 años por el delito menor, pero si confiesas tu otro crimen, tu condena se reduce a un año y tu compañero recibirá una condena de 10 años. Si ambos deciden confesar no podremos disminuir a los dos la condena a un año, en tal caso, cada uno tendrá que cumplir una condena de 3 años.” A la otra persona le hacen la misma propuesta y los dos lo saben. Para resolver el juego, pongámonos primero en los zapatos del jugador *A*. Éste jugador piensa: si *B* decide confesar, entonces lo mejor para *A* es confesar también, de otro modo su condena se aumentaría a 10 años. Si *B* decidiera no confesar, entonces confesar también sería la mejor opción para *A*, dado que en este caso *A* podría reducir su condena a 1 año. De manera análoga, el jugador *B* hace su análisis para tomar su decisión, por lo tanto, el equilibrio de Nash se encuentra en la opción (confesar/confesar). En la figura 4.1 se muestra el cuadro de recompensas de los jugadores dadas sus estrategias. En este caso, los valores en el cuadro representan años de condena, por lo que entre menor sean estos valores, mayor el beneficio para los jugadores.

		A	
		Confiesa	No confiesa
B	Confiesa	3 3	10 1
	No confiesa	1 10	2 2

FIGURA 4.1: Cuadro de recompensas o beneficios del Juego: Dilema del prisionero. La opción (confesar/confesar) es el equilibrio de Nash, nótese que, éste no coincide con el óptimo dado por la opción (no confesar/no confesar).

El dilema del prisionero es un ejemplo de un juego finito, dado que sólo existen dos estrategias: confesar y no confesar, simultáneo³, y no cooperativo dado que los delincuentes no son amigos. La mejor función respuesta para ambos es confesar, considerando la decisión del otro.

³ Un juego simultáneo, es aquel en donde cada agente toma una sólo decisión de forma definitiva, independiente y simultánea. Por el contrario a lo que sucede en un juego extensivo, en donde los jugadores pueden reconsiderar y cambiar sus estrategias de manera consecutiva [31].

En este juego existe un sólo equilibrio de Nash dado por la opción de (confesar/confesar), se debe notar que esta estrategia no es la óptima dado que sería preferible que ambos eligieran (no confesar/ no confesar), sin embargo esta opción no es estable porque cada uno de los jugadores tendría incentivos para confesar. Cabe mencionar que dependiendo del juego, se puede encontrar un equilibrio de Nash, varios o ninguno y también puede ocurrir que el equilibrio de Nash de un juego coincida con un óptimo [31]. El del dilema del prisionero, es un ejemplo donde el equilibrio de Nash no coincide con el óptimo.

En este trabajo existen dos tipos de agentes: los consumidores y los vendedores. Por el lado de los consumidores: cada uno de ellos decide ir al sitio en donde sea más probable que su utilidad esperada sea la máxima posible, en este caso la función de pago para el consumidor es la utilidad que le representa ir al sitio. Se debe de resaltar que en nuestro modelo dicha decisión es independiente de lo que decidan los demás consumidores. En cambio cuando los agentes vendedores interactúan, desde la perspectiva de teoría de juegos, son jugadores que tratan de maximizar su función de pago (ganancias) que depende de las estrategias (precios y posiciones) de sus oponentes. En este caso las estrategias son variables continuas, que en principio, tienen un rango en el dominio positivo. Para cada una de las tiendas se calcularán los precios óptimos dadas las posiciones y precios de los demás negocios. Cuando ninguna de las tiendas pueda cambiar su precio para mejorar su ganancia se dirá que se ha encontrado un equilibrio de Nash.

El equilibrio de Nash, el cual se encuentra maximizando la función ganancia individual, podría ser análogo al equilibrio al que llega un sistema termodinámico, en donde se maximiza la entropía o dependiendo de las restricciones del sistema, minimiza algún potencial termodinámico.

4.2. Sistema económico

El sistema económico en cuestión consiste de varios elementos que conforman el mercado de un giro o producto que se vende a menudeo. Por lo tanto, se describirá la competencia sólo entre negocios que ofrecen productos similares: que pueden ser distinguibles y sustitutivos o intercambiables ⁴. Existen trabajos cuyo enfoque es estudiar la interacción entre negocios de diferentes giros. Esta interacción se da a través de las externalidades ⁵ que perciben unos de otros [33]. En este trabajo se restringe el estudio a la interacción

⁴Los productos sustitutivos o intercambiables son aquellos bienes que los consumidores perciben similares o comparables, por lo tanto tener una cantidad de un bien hace que se necesite menos del otro [9]. Algunos productos intercambiables son por ejemplo: la mantequilla y la margarina, el té y la tisana. Los productos sustitutivos pueden llegar a ser distinguibles cuando las personas están dispuestas a pagar cantidades distintas por cada uno de ellos.

⁵ Las externalidades son los beneficios o en su defecto, inconvenientes que percibe un negocio de algún otro de forma imprevista

entre negocios de un mismo giro. El sistema económico se plantea en un área geográfica extensa en una o dos dimensiones (que puede representar, un estado, una ciudad, una carretera, una calle etc) que llamaremos ciudad, la cual se divide en pequeñas regiones discretas llamadas “sitios”. Por lo tanto, una ciudad estaría conformada por N sitios, donde cada sitio z ($z = 1, 2, \dots, N$) estará caracterizado por el número de tiendas n_z que contiene. Dado un sitio en cuestión z , se referirá a determinada tienda como la k -ésima del sitio, que vende su producto a un precio: p_k , donde $k = 1, 2, 3, \dots, n_z$.

Como ya mencionamos anteriormente, el sistema está conformado por dos tipos de agentes: consumidores y vendedores. Un vendedor nuevo en el sistema, primero escoge un sitio z en donde colocar su tienda y después busca maximizar su ganancia fijando el precio de su producto dada la configuración del sistema: ubicación y precio de las tiendas previas. En respuesta a este cambio en el sistema - la colocación de una nueva tienda - las demás tiendas, que ya habían llegado a un equilibrio de Nash, reajustan su precio para maximizar sus ganancias sujetas a las nuevas condiciones del sistema. Este reajuste de precios entre la nueva tienda y las demás se da hasta que se encuentra un nuevo equilibrio de Nash. Esta dinámica define en el modelo la antes mencionada: *competencia en precios*.

Por otro lado, nos referiremos a un consumidor en específico con la letra j y a su posición como \mathbf{r}_j . Los consumidores se distribuirán a lo largo de la ciudad mediante una densidad de probabilidad $\rho(\mathbf{r}_j)$. Un consumidor, desde su posición decidirá, qué sitio visitar dadas las propiedades inherentes de cada sitio. Es decir, el número de tiendas que contiene el sitio: n_z , el lugar en dónde se encuentra \mathbf{r}_z y el precio “característico” p_z al cual se venden los productos en el sitio. Este precio es representativo de los precios dentro del sitio z pero no detalla cada uno de los precios. De tal modo que, una persona desde su posición (sin hacer ningún viaje) considera el precio característico p_z , ya que le brinda una idea de qué precios se manejan en cada sitio sin saber con exactitud cada uno de los precios. Por lo tanto, en el modelo p_z se considera como función de los precios ofrecidos en el sitio:

$$p_z = p_z(p_1, p_2, \dots, p_{n_z}). \quad (4.1)$$

Esta función podría ser el promedio, como se usará en este trabajo, la mediana, el mínimo u otra.

Hacemos hincapié en que si un consumidor supiera exactamente qué se vende en cada sitio y a qué precio, entonces simplemente elegiría la opción más conveniente entre todas las tiendas del sistema, independientemente de si la tienda está en un aglomerado o aislada. En cambio, siguiendo el modelo de Konishi, se asume que el consumidor tiene

cierta incertidumbre en sus gustos y en la información exacta de los precios, por lo tanto los consumidores deciden qué sitio visitar considerando las propiedades inherentes los sitios: n_z , \mathbf{r}_z y p_z . Cada consumidor en el modelo, basado en estas propiedades y en su conjunto de precios de reserva, dadas sus preferencias, escoge el sitio que le reditúe la mayor utilidad “esperada”.

Finalmente, los sistemas socio-económicos, como el que se estudia en el presente trabajo, son sistemas complejos en el sentido de que están conformados por diversos agentes que interactúan entre sí, a través de estas interacciones los equilibrios que emergen en el sistema: como precios y ubicaciones de las tiendas, son resultado del comportamiento colectivo de sus agentes. A continuación se presenta el modelo con el cual estudiaremos el sistema económico aquí descrito.

Capítulo 5

Modelo

En esta sección se presenta el modelo económico con el cual se determinan las ubicaciones y los precios óptimos de negocios que venden productos similares. El modelo se divide en dos partes donde se describen respectivamente las estrategias de los agentes del modelo: consumidores y vendedores. Por un lado, los consumidores deciden tomar la decisión de qué sitio visitar y en qué tienda finalmente comprar, tratando de maximizar su utilidad. Y, por otro lado, los vendedores buscan dónde colocarse y el precio óptimo para maximizar sus ganancias.

5.1. Descripción del modelo

Este modelo presenta una forma de interacción entre negocios de un mismo giro que compiten entre ellos. Dicha interacción se da a través de los consumidores. Un consumidor desde su casa o posición inicial decide primero qué sitio visitar con base en la información que cuenta de los sitios (sus posiciones, número de tiendas y los precios característicos a los que venden en dichos sitios). El consumidor decide visitar el sitio que le reditúe la máxima utilidad esperada de entre todos los sitios en la ciudad de acuerdo a esta información y sus preferencias. Un sitio cualquiera, entonces, podría estimar el número de personas que espera recibir: su mercado, calculando la probabilidad de que el sitio reditúe la máxima utilidad esperada para cada uno de los consumidores en la ciudad. Un vendedor en particular, considerando el mercado que llega al sitio estima la fracción de ese mercado que compraría en su tienda. Esta fracción puede ser estimada por los vendedores de acuerdo a su propia experiencia vendiendo sus productos o estudios de mercado previos para inferir cómo son los precios de reserva de sus clientes. Por lo que, en principio, los vendedores cuentan con la distribución de precios de reserva que sus consumidores están dispuestos a pagar por sus respectivos productos: $\phi_k(r)$. Finalmente,

cada vendedor establece el precio de su producto de tal forma que maximice su ganancia estimada.

Los productos de las tiendas son percibidos por la población como equivalentes, sin embargo, dada su heterogeneidad, ellos también pueden distinguir un producto de otro, dado que el gusto difiere de persona en persona, así como también difiere el precio de reserva que los consumidores tengan por el producto de cada tienda. Para reproducir esta heterogeneidad de las personas en el modelo, el precio de reserva se considera como una variable aleatoria independiente e idénticamente ¹ distribuida con distribución de densidad: $\Phi(r)$. Por lo tanto, para cada producto, una persona cualquiera le asignará un precio de reserva de acuerdo a sus preferencias. Entonces, podemos decir que cada producto será distinguido por cómo sea distribuido el precio de reserva sobre la población de la ciudad.

Por lo tanto, se considerará un conjunto de variables aleatorias:

$$\{\rho_{k,z} \mid k \in \{1, \dots, n_z\}, z \in \{1, \dots, N\}\} \quad (5.1)$$

que describirá los precios de reserva por los productos que se vendan en cada tienda de cada sitio en la ciudad.

Un factor importante en la decisión de los consumidores para visitar un sitio es qué tan lejos o cerca les queda el sitio z en cuestión. En el modelo se considera que los consumidores asumen un costo de transporte que es función de la distancia $d_{j,z}$ entre el consumidor j y el sitio z :

$$C(j, z) = C(d_{j,z}) \quad (5.2)$$

Hasta el momento, se han introducido la mayoría de los factores considerados en la decisión de un consumidor, por lo que a continuación se describe a detalle la estrategia del consumidor.

¹Esta es una suposición importante para simplificar las realizaciones del modelo. Primero que nada, el precio de reserva que se asigna a distintas tiendas (del mismo sitio y de otros sitios) debería venir de distintas distribuciones dependiendo, digamos, de la reputación de la tienda, un factor en donde la publicidad puede jugar un papel importante. Sin embargo, una generalización para distintas funciones de probabilidad para los precios de reserva no cambia cualitativamente la naturaleza del problema y sí añade una enorme dificultad a las realizaciones del modelo.

5.1.1. Estrategia del consumidor

La primera decisión que el consumidor tiene que hacer es qué sitio visitar, una vez ahí, escoge la tienda donde comprar el producto en cuestión. Suponemos que los consumidores son individuos que siguen un comportamiento racional ² : de acuerdo a un conjunto de posibles sitios para visitar, el consumidor estima la utilidad que espera recibir de cada sitio y escoge el sitio cuya utilidad esperada sea la máxima, siempre y cuando ésta sea positiva.

La máxima utilidad esperada por visitar un sitio z para un consumidor en \mathbf{r}_j viene dada por el valor máximo del conjunto 5.1, es decir, por el precio de reserva $\rho_z = \max_{k \in z} \{\rho_{k,z}\}$. Las variables \mathbf{r}_z y p_z son propiedades inherentes al sitio e independientes de cualquier consumidor j , por lo tanto la máxima utilidad esperada de un sitio z para un consumidor dado se escribe como:

$$U_z(\mathbf{r}_j) = \rho_z - p_z - C(j, z) \quad (5.3)$$

La distribución de esta “nueva” variable aleatoria ρ_z viene dada por:

$$P_z^{max}(\rho_z) = n_z \Phi(\rho_z) \left[\int_{-\infty}^{\rho_z} \Phi(r) dr \right]^{n_z - 1}. \quad (5.4)$$

que se lee como la probabilidad de que la variable ρ_z sea el máximo precio de reserva en alguna de las n_z tiendas del sitio z . Se escribe $P_z^{max}(\rho_z)$ de manera conveniente en términos de la función utilidad U_z :

$$P_z^{max}(U_z) = \frac{d}{dU_z} \left[\int_{-\infty}^{U_z + p_z + C(j,z)} \Phi(r) dr \right]^{n_z} \quad (5.5)$$

²De acuerdo a un conjunto de opciones X , se considera que un consumidor actúa de manera racional cuando es capaz de ordenar sus preferencias de este conjunto [29]. Por lo tanto, estas preferencias satisfacen las siguientes propiedades:

- Completez: $\forall x, y \in X, x \succeq y$ or $y \succeq x$ o ambos.
- Reflexividad: $\forall x \in X, x \succeq x$.
- Transitividad: $\forall x, y, z \in X, \text{ si } x \succeq y \text{ y } y \succeq z, \text{ entonces, } x \succeq z$.

La expresión anterior se usa para definir la probabilidad de que un consumidor en la posición \mathbf{r}_j visite el sitio z que se escribe como la probabilidad de que el sitio z le brinde a dicho consumidor la máxima utilidad esperada de entre todos los sitios en el sistema:

$$P_z(\mathbf{r}_j) = \int_0^\infty P_z^{max}(U_z) \prod_{z' \neq z} \left[\int_{-\infty}^{U_z + p_{z'} + C(j, z')} \Phi(r) dr \right]^{n_{z'}} dU_z \quad (5.6)$$

Es decir, $U_z > U_{z'} \forall z' \neq z$. Se supone que el consumidor considera visitar el sitio siempre y cuando $U_z > 0$ sea positiva. En el caso de que ningún sitio represente una utilidad esperada positiva, el consumidor no visitaría sitio alguno. Por tal motivo, $P_z(\mathbf{r}_j)$ suma sobre todos los posibles valores positivos de U_z .

Integrando $P_z(\mathbf{r}_j)$ sobre los consumidores en la ciudad se puede calcular el número esperado de gente que espera recibir el sitio z -su mercado- dado por:

$$\mathfrak{M}_z = \int P_z(\mathbf{r}_j) \rho(\mathbf{r}_j) d\mathbf{r}_j \quad (5.7)$$

Finalmente, se escribe la ganancia esperada Π_k de la tienda k en el sitio z en términos de la fracción \mathbf{m}_k del mercado total \mathfrak{M}_z que compra en dicha tienda a un precio p_k :

$$\Pi_k = \mathfrak{M}_z \mathbf{m}_k p_k. \quad (5.8)$$

A continuación se presenta la estrategia de las tiendas en donde se define \mathbf{m}_k .

5.1.2. Estrategia de las tiendas

Supóngase que un número de personas \mathfrak{M}_z visita el sitio z . Un vendedor en dicho sitio, estima la fracción \mathbf{m}_k que compraría en su tienda del mercado total del sitio \mathfrak{M}_z . Para ello, los vendedores suponen que los consumidores deciden comprar en la tienda k si les representa la mayor utilidad U_k de entre todas las tiendas del sitio. Entonces, siendo p_k el precio del producto en la tienda k , dado un consumidor ya en el sitio, esta utilidad estará dada por:

$$U_k = \sigma_k - p_k \geq 0$$

A diferencia de la utilidad esperada $U_z(\mathbf{r}_j)$, la utilidad U_k es la que percibe un consumidor en el sitio, (nótese que ahora la utilidad está definida sin costos de transporte, dado que

estos ya fueron considerados por los visitantes antes de llegar al sitio) donde ya tiene acceso a los productos de cada tienda y sus respectivos precios. Por lo tanto, el precio de reserva σ_k es el que tiene un consumidor dentro del sitio por el producto ofrecido en la tienda k , distinto al máximo precio de reserva ρ_z esperado por un consumidor fuera del sitio.

Además, se supone que los vendedores deben tener una noción de la fracción $\phi_k(\sigma_k)$ de la población para la cual σ_k es su precio de reserva para el producto. Esta noción puede provenir de la experiencia que tienen los vendedores ofertando sus productos, análisis de mercado, etc. Con este conocimiento, ellos pueden estimar la fracción de consumidores $\varphi_k(U_k) \equiv \phi_k(U_k + p_k)$ que obtendrán una utilidad U_k al comprar en la tienda k .

Por lo tanto, la cantidad \mathbf{m}_k se calcula como la probabilidad de que dado un consumidor, una compra en la tienda k represente la mayor utilidad positiva de entre todas las tiendas en el sitio, es decir, $U_k > U_l \forall l \neq k$.

$$\mathbf{m}_k = \int_0^\infty \varphi_k(U_k) \left[\prod_{i \neq k}^{n_z} \int_{-\infty}^{U_k} \varphi_i(U_i) dU_i \right] dU_k \quad (5.9)$$

Donde de nuevo se ha hecho la suposición de que las utilidades son variables aleatorias independientes. Esta suposición es crucial en el análisis de la competencia entre tiendas, dado que, mientras que el caso de variables aleatorias dependientes es inabordable, un caso sencillo de analizar es el de dos tiendas cuyos productos son idénticos y por lo tanto también los son sus precios de reserva. En dicho caso la competencia de Bertrand toma lugar, ver apéndice A.

Escribiendo la ecuación anterior en términos de σ 's y los precios p 's:

$$\mathbf{m}_k = \int_0^\infty \phi_k(U_k + p_k) \left[\prod_{i \neq k}^{n_z} \int_{-\infty}^{U_k} \phi_i(U_i + p_i) dU_i \right] dU_k \quad (5.10)$$

se puede corroborar fácilmente que:

$$\frac{\partial \mathbf{m}_k}{\partial p_i} > 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}_k}{\partial p_k} < 0$$

lo cual refleja el hecho de que la fracción de personas que compran en la tienda k crece cuando sus competidores aumentan sus precios p_i , en cambio cuando el precio de la tienda k aumenta, esta fracción disminuye, ver apéndice B.

Finalmente, la ganancia que obtiene cada tienda del sitio es:

$$\Pi_k = \mathfrak{M}_z \mathfrak{m}_k(p_1, p_2, \dots, p_{n_z}) p_k \quad (5.11)$$

Cada tienda escoge su precio p_k de manera independientemente para maximizar su propia ganancia, considerando los precios de sus competidores: $p_i \forall i \neq k$. Es decir, cuando se llega a un equilibrio de Nash en precios, se satisface localmente que:

$$\frac{\partial \Pi_k}{\partial p_k} = 0 \quad \forall k \quad (5.12)$$

Reescribiendo la ecuación anterior, los precios para cada tienda dentro de un sitio deben satisfacer en equilibrio:

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial p_k} \right) \mathfrak{m}_k p_k + \mathfrak{M}_z \left(\frac{\partial \mathfrak{m}_k}{\partial p_k} \right) p_k + \mathfrak{M}_z \mathfrak{m}_k = 0 \quad \forall k \quad (5.13)$$

Esto es otra diferencia respecto a lo propuesto en el modelo de H. Konishi, donde sólo se maximiza $\mathfrak{m}_k p_k$. Incluir el mercado \mathfrak{M}_z en la maximización de las ganancias hace que el efecto del precio p_z , considerado para visitar el sitio z y posteriormente para definir su mercado \mathfrak{M}_z , sea de gran relevancia, sobre todo cuando existen pocas tiendas. En particular, dado que se considera el promedio de los precios en el sitio para determinar p_z , aumentar o disminuir el precio de una tienda específica tiene mayor contribución a la determinación de p_z , y por consecuencia al mercado \mathfrak{M}_z , que cuando existen muchas tiendas.

A continuación se presentan algunos ejemplos específicos de realizaciones de este modelo y sus respectivas consecuencias.

Capítulo 6

Resultados

A lo largo de este trabajo se considera $\rho(\mathbf{r}_j) = 1$, es decir, los consumidores son distribuidos uniformemente en la ciudad; y un precio característico p_z , que los consumidores consideran para decidir qué sitio visitar, que estará dado como el promedio de los precios de las tiendas dentro del sitio z .

6.1. Sitio Aislado en la ciudad

En esta sección se proporcionan los cálculos explícitos del caso en donde sólo existe un sitio z en la ciudad. Se considera una ciudad lineal de largo L y costos de transporte lineales $C(j, z) = c|r_j - r_z|$. Dado que se considera un espacio lineal, se simplifica la notación para las posiciones, omitiendo la notación para vectores.

Se propone una función de Weibull para la distribución de precios de reserva, siguiendo el ejemplo de [34–36], la cual nos permite estudiar una gran variedad de distintos comportamientos cualitativos mientras que sigue siendo relativamente manejable para cálculos analíticos. Específicamente, se considera:

$$\Phi(r; \lambda, \alpha) = \alpha r^{\alpha-1} (\lambda \Gamma(1 + 1/\alpha))^\alpha e^{-(\lambda \Gamma(1+1/\alpha)r)^\alpha} \quad (6.1)$$

donde α es el factor de forma, $\Gamma(x)$ es la función gamma y el parámetro de escala $\lambda \Gamma(1 + 1/\alpha)$ ha sido escogido de tal forma que el valor esperado del precio de reserva anticipado, por parte de la población en el sistema, sea $1/\lambda$. La distribución de Weibull tiene la ventaja de que, con sólo dos parámetros, se puede cambiar drásticamente su comportamiento cualitativo, que puede variar desde una exponencial hasta una función muy parecida a una gaussiana. En la figura 6.1 se pueden ver ejemplos de sus distintos

comportamientos. Si bien es cierto que, existe poca evidencia de cómo son las distribuciones de los precios de reserva, es muy común en modelos económicos proponer una forma cualitativa de éstas [28, 34–37]. En este caso, la distribución de Weibull nos da la ventaja de que dada su versatilidad para cambiar su comportamiento cualitativo, se pueden incluir distribuciones de precios de reserva, por ejemplo: más pesadas a la derecha o por lo contrario, bien localizadas, esto dependerá de un producto o mercado definido. Entonces, determinar los parámetros λ, α dependerá del estudio específico de los precios de reserva de la población por un producto en cuestión. En donde λ se relacionaría con el valor promedio de los precios de reserva: $\lambda = \frac{1}{\langle r \rangle}$, mientras que α nos determinaría la forma cualitativa de la distribución de precios de reserva.

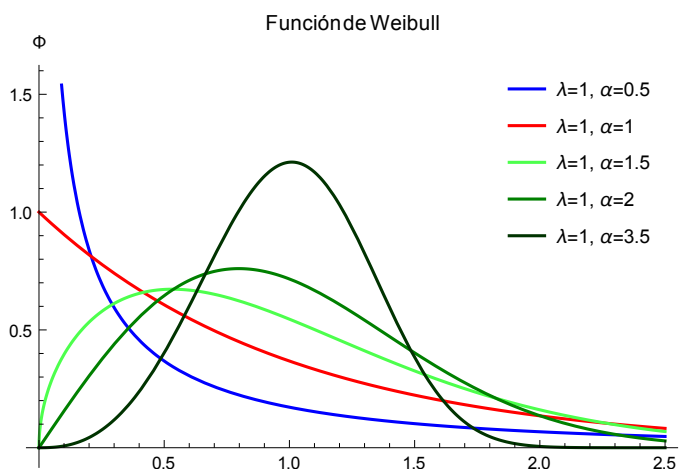


FIGURA 6.1: Para valores del factor de forma $0 < \alpha < 1$ la función de Weibull tiende a infinito conforme r se acerca a cero desde la derecha y es monótonamente decreciente con una pendiente negativa e infinita en $r = 0$. Para $\alpha = 1$, la función tiende a λ cuando r se aproxima a cero por la derecha y la función es monótonamente decreciente. Para factores de forma $\alpha > 1$ la función tiende a cero cuando r se aproxima a cero desde la derecha, es creciente hasta llegar a su máximo, a partir de donde se vuelve decreciente. Para valores del factor de forma en el intervalo $1 < \alpha < 2$ la pendiente de la función es infinita y positiva en $r = 0$, en cambio, cuando $\alpha > 2$ la pendiente se anula en $r = 0$. Conforme crece el factor de forma la función de Weibull se va haciendo más estrecha convergiendo a una delta de Dirac.

De acuerdo a la ecuación (5.6) y usando la distribución (6.1), la probabilidad de que un consumidor en la posición r_j visite el sitio z que contiene n_z tiendas, está dado por:

$$P_z(\mathbf{r}_j) = 1 - \left[1 - e^{-(\lambda \Gamma(1+1/\alpha)(p_z + C(j,z)))^\alpha} \right]^{n_z} \quad (6.2)$$

El mercado del sitio z puede ser calculado integrando ecuación (6.2) sobre todo el intervalo $[0, L]$:

$$\mathfrak{M}_z = - \sum_{k=1}^{n_z} \binom{n_z}{k} \frac{(-1)^k k^{-1/\alpha}}{\lambda c \Gamma(1/\alpha)} \times \left[2\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}, k(\lambda\Gamma(1+1/\alpha)p_z)^\alpha\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}, k(\lambda\Gamma(1+1/\alpha)(p_z + c(L-r_z))^\alpha\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}, k(\lambda\Gamma(1+1/\alpha)(p_z + cr_z)^\alpha\right) \right] \quad (6.3)$$

donde $\Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$ es la función gamma incompleta.

Por simplicidad, para evaluar la fracción \mathfrak{m}_k del mercado que compra en cada tienda del sitio, se escoge nuevamente, una distribución Weibull (con promedio $1/\gamma$ y un factor de forma β) para la fracción de personas para la cual r es el precio de reserva por un producto vendido en la tienda k :

$$\phi_k(r; \gamma, \beta) = \alpha r^{\alpha-1} (\gamma\Gamma(1+1/\alpha))^\alpha e^{-(\lambda\Gamma(1+1/\alpha)r)^\alpha} \quad (6.4)$$

En este caso, los parámetros γ, β , nos definen la distribución del precio de reserva: σ_k . A diferencia de las distribuciones para los precios de reserva anticipados: $\rho_{k,z}$, que reflejan expectativas de la población del sistema por ir al sitio z , σ_k se define sobre los consumidores que han visitado el sitio z y comprado específicamente en la tienda k . Es decir, σ_k , es el precio de reserva para sus consumidores sin ningún tipo de incertidumbre en precio o características del producto de la tienda k .

Por lo tanto, de acuerdo a ecuación (5.9) y dado los precios p_1, \dots, p_{n_z} ofrecidos en el sitio, la fracción \mathfrak{m}_k puede ser expresada como:

$$\mathfrak{m}_k = - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial U_k} \left(e^{-(\gamma\Gamma(1+1/\beta)(U_k+p_k))^\beta} \right) \prod_{i \neq k}^{n_z} (1 - e^{-(\gamma\Gamma(1+1/\beta)(U_k+p_i))^\beta}) dU_k \quad (6.5)$$

Se puede encontrar una expresión para \mathfrak{m}_k evaluada en el precio de equilibrio $p_i = p_k = p$:

$$\mathfrak{m}_k(n_z) \Big|_{p_k=p} = \frac{1}{n_z} \left[1 - \left(1 - e^{-\left(\frac{\gamma}{\beta}\Gamma(1/\beta)p\right)^\beta} \right)^{n_z} \right] \quad (6.6)$$

Proponiendo una solución simétrica para los precios de equilibrio, es decir, $p_k = p, \forall k$, se puede mostrar que:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{m}_k}{\partial p_k} \right|_{p_k=p} = -\beta \left(\frac{\gamma}{\beta} \Gamma(1/\beta) \right)^\beta p^{\beta-1} \mathbf{m}_k, \quad (6.7)$$

En el apéndice D se muestra cómo se llega a esta relación. Bajo estas condiciones, el precio de equilibrio satisface la siguiente condición de acuerdo a la ecuación (5.12):

$$p \left. \frac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial p_k} \right|_{p_k=p} + \mathfrak{M}_z \left(1 - \beta \left(\frac{\gamma}{\beta} \Gamma(1/\beta) p \right)^\beta \right) = 0 \quad (6.8)$$

Se debe resaltar que \mathfrak{M}_z también depende de todos los precios en el sitio a través de p_z , por lo que la ecuación (5.12) representa un conjunto de n_z ecuaciones acopladas para los precios de las tiendas. La expresión anterior junto con la ecuación (6.3), nos permiten el cálculo de los precios de equilibrio, con el cual se determinan las funciones ganancia para cada tienda en el sitio z .

A continuación se presenta el caso particular en donde $n_{z_1} = 1$, es decir, el monopolio.

6.1.1. Monopolio

Un sitio con una sola tienda es el caso de estudio más simple de todos: el monopolio. Dada su inherente importancia, existe una teoría que describe el comportamiento de monopolios [38]. Las discusiones alrededor de esta teoría son diversas, por ejemplo, cómo determinar cuantitativamente el poder que ejercen en el mercado los monopolios, hacer comparaciones entre su precio contra los precios de un mercado competitivo, así como medir el impacto social que tienen [39–41]. Distintos autores concuerdan que el precio de un monopolio es mayor que el precio en un mercado competitivo [42, 43]. En relación a este tema, los resultados aquí mostrados pueden diferir de esta aserción dependiendo de las variables del modelo.

En este trabajo la solución del monopolio se usará como referencia para comparar con ganancias correspondientes a diferentes configuraciones espaciales de tiendas. En particular, si la ganancia del monopolio es mayor que la ganancia que obtendría una nueva tienda en un aglomerado, entonces, en lugar de unírsele, buscaría establecerse en otro sitio(si existiese en la ciudad), para ganar lo más parecido a un monopolio.

De acuerdo a ecuación (6.3) el mercado del monopolio ubicado en la posición r_z y vendiendo al precio p es:

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{1}{c\lambda\Gamma(1/\alpha)} \left[2\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}, (\lambda\Gamma(1+1/\alpha)p)^\alpha\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}, (\lambda\Gamma(1+1/\alpha)(p+c(L-r_z)))^\alpha\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}, (\lambda\Gamma(1+1/\alpha)(p+cr_z))^\alpha\right) \right] \quad (6.9)$$

Incluso para un monopolio, sólo una fracción \mathbf{m}_1 del mercado total que lo visita \mathfrak{M}_1 terminará comprando. De acuerdo con la ecuación (6.6), esta fracción está dada por:

$$\mathbf{m}_1 = e^{-(\gamma\Gamma(1+1/\beta)p)^\beta} \quad (6.10)$$

Entonces, resolviendo la ecuación (6.8) con su correspondiente mercado (ecuación (6.9)), el precio de equilibrio y la ganancia esperada para un monopolio pueden ser obtenidos. En particular, una expresión muy simple se puede encontrar para la ganancia del monopolio cuando $\alpha = \beta = 1$, en dado caso, la distribución de Weibull se reduce a una exponencial:

$$\Pi_1 = \frac{1}{c\lambda e(\lambda + \gamma)} \left[2 - e^{-\lambda c(L-r_z)} - e^{-\lambda cr_z} \right] \quad (6.11)$$

En las figuras 6.2 y 6.3 se muestra, para distintos valores del parámetro c , el comportamiento de la ganancia del monopolio en función de la posición y los parámetros λ , γ respectivamente. La ganancia, tal como se esperaba, es una función que decrece como función del parámetro c , constante de proporcionalidad del costo de transporte. Esto refleja el hecho de que los consumidores muy lejos del sitio les resulta muy caro viajar disminuyendo la probabilidad de ir al sitio. Las figuras 6.2 y 6.3 muestran cualitativamente un mismo comportamiento para la ganancia: teniendo un máximo para el monopolio en $r_z = L/2$, el centro de la ciudad. En lo que sigue se establecerá $\lambda = 1$, esta condición nos simplifica el análisis de los resultados sin pérdida de generalidad. Al establecer $\lambda = 1$, también se está definiendo el promedio de los precios de reserva sobre la población en el sistema es uno, al hacer el análisis de los resultados, tenemos que tener en cuenta de que estamos en una escala de dinero donde $\lambda = \frac{1}{\langle r \rangle} = 1$.

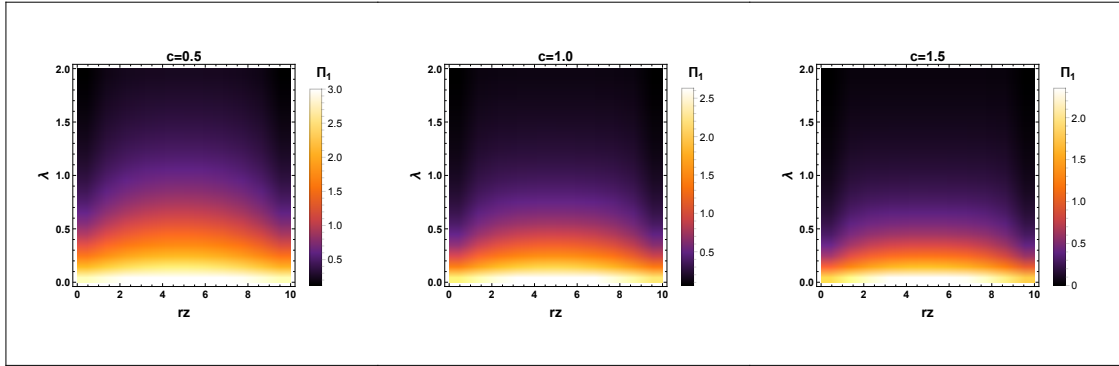


FIGURA 6.2: Ganancia de un monopolio en función de su posición y lambda para distintos valores de $c = 0.5, 1.0, 2.0$. La gráfica muestra para todos los casos, un máximo para la ganancia en $r_z = L/2$ para todo rango de λ .

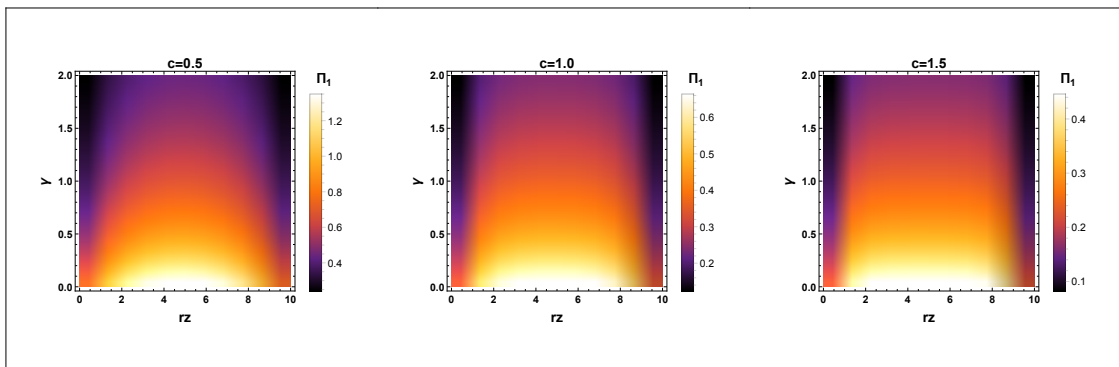


FIGURA 6.3: Ganancia de un monopolio en función de su posición y gamma para distintos valores de $c = 0.5, 1.0, 2.0$. La gráfica muestra para todos los casos, un máximo para la ganancia en $r_z = L/2$ para todo rango de γ .

6.1.2. Duopolio en el mismo sitio

En esta sección se analiza el caso de dos tiendas en el mismo sitio z . Esta es la situación más simple para ejemplificar el efecto de la competencia en precios entre tiendas cercanas, además de que se le puede pensar como el comienzo de un aglomerado aún más grande de ser el caso. Por lo tanto el “market-size effect” se verá reflejado en este ejemplo por el hecho de que dos tiendas estén en el mismo sitio.

De acuerdo con la ecuación (6.2), ahora la probabilidad de que un consumidor con posición r_j vaya a un sitio incluye el “clustering effect”, efecto que surge por tener $n_z > 1$ tiendas en el mismo sitio lo cual induce una mayor utilidad esperada para un consumidor. Por lo tanto, la probabilidad de que un consumidor j vaya al sitio z estará dado por:

$$P_z(j) = 2e^{-(\lambda\Gamma(1+1/\alpha)(p_z+C(j,z)))^\alpha} - e^{-2(\lambda\Gamma(1+1/\alpha)(p_z+C(j,z)))^\alpha} \quad (6.12)$$

Nótese que si el precio característico del sitio p_z no es muy diferente al del monopolio, entonces $P_z(j)$ es mayor que la probabilidad para un consumidor de visitar un monopolio (ver la ecuación (6.2)).

Entonces, de la ecuación (6.3), el mercado para este sitio es:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_z = & \frac{2}{c\lambda\Gamma(1/\alpha)} \left[2\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}, (\lambda\Gamma(1+1/\alpha)p_z)^\alpha\right) \right. \\ & \left. - \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}, (\lambda\Gamma(1+1/\alpha)(p_z + c(L-r_z)))^\alpha\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}, (\lambda\Gamma(1+1/\alpha)(p_z + cr_z))^\alpha\right) \right] \\ & - \frac{2^{-1/\alpha}}{c\lambda\Gamma(1/\alpha)} \left[2\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}, 2(\lambda\Gamma(1+1/\alpha)p_z)^\alpha\right) \right. \\ & \left. - \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}, 2(\lambda\Gamma(1+1/\alpha)(p_z + c(L-r_z)))^\alpha\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}, 2(\lambda\Gamma(1+1/\alpha)(p_z + cr_z))^\alpha\right) \right] \end{aligned} \quad (6.13)$$

Usando la condición (ecuación (6.8)) con el correspondiente mercado del sitio (ecuación (6.13)) se encuentra el precio de equilibrio que maximiza las ganancias de las tiendas.

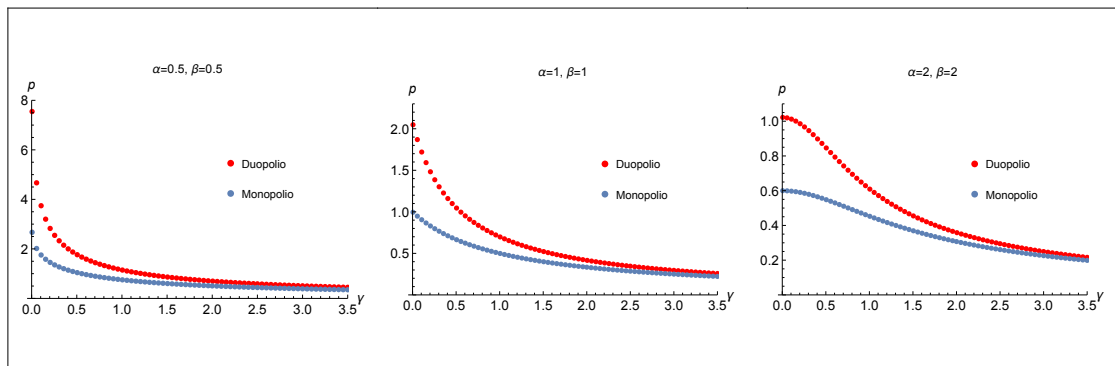


FIGURA 6.4: Precios de equilibrio del monopolio y para un duopolio en el mismo sitio como función de γ para factores de forma $\alpha = \beta = 0.5, 1, 2$, correspondientes a 3 comportamientos distintos para la distribución de Weibull (ver figura 6.1). Para este conjunto de parámetros, dado el efecto “clustering”, el precio de equilibrio que obtiene cada tienda en un duopolio es mayor que la de un monopolio, a pesar de la competencia en precios. Los parámetros del sistema son: $L = 1000$, $\lambda = 1.0$, $c = 0.01$, $r_z = L/2$.

La relación entre el precio de equilibrio y γ se muestra en figura 6.4 para $L = 1000$, $\lambda = 1.0$, $c = 0.01$, con el sitio en medio de la ciudad $z = L/2$ y para distintos valores de factores de forma α y β . Nótese que en contraste con lo que se hubiese esperado, los precios de equilibrio para un duopolio son mayores que los de un monopolio. En el caso de dos tiendas, resulta ser que el efecto de atracción por parte del sitio (con ahora 2 tiendas) domina al efecto producido por la competencia interna en precios.

De acuerdo con la ecuación (6.6), en equilibrio, la fracción \mathbf{m} del total del mercado que realmente compra en cada tienda $k = 1, 2$ es:

$$\mathbf{m}_k = e^{-(\gamma\Gamma(1+1/\beta)p)^\beta} - \frac{e^{-2(\gamma\Gamma(1+1/\beta)p)^\beta}}{2} \quad (6.14)$$

En la figura 6.5 se muestra la comparación entre la ganancias de un monopolio y la de cada tienda de un duopolio en el mismo sitio, para los mismos valores de factores de forma α y β de la 6.4. Es importante resaltar que, a pesar de que los precios de equilibrio para este conjunto de parámetros resultan ser cualitativamente los mismos: el precio ofrecido por un duopolio siempre es mayor al de un monopolio, el comportamiento de las ganancias es drásticamente distinto. Para $\alpha = \beta = 0.5$, cada tienda en un duopolio gana más que un monopolio para todo rango de γ . Por el contrario, cuando $\alpha = \beta = 2$ la configuración más rentable es siempre la de un monopolio $\forall \gamma$. Es decir, estos dos valores de $\alpha = \beta = 0.5, 2$ me llevan a resultados totalmente opuestos independientemente de cómo varíe el promedio del precio de reserva del consumidor ($\gamma = \frac{1}{\langle r \rangle}$) respecto al de la población definido como uno $\lambda = \frac{1}{\langle r \rangle} = 1$. Cabe recordar que para estos factores de forma, las distribuciones de Weibull cambian también drásticamente su comportamiento (ver figura 6.1). Finalmente, para valores intermedios de α y β resulta más conveniente ser un monopolio sólo para un pequeño rango de valores de γ . Por ejemplo, para $\alpha = \beta = 1$, las ditribuciones de Weibull, correspondientes a la figura 6.5, son exponenciales. En dicha figura se puede apreciar que para un rango de valores de $0 < \gamma < 0.235$, es más conveniente ser un monopolio. Luego, a partir de $\gamma = 0.235$ en adelante, la ganancias de un duopolio se vuelven mayores que la del monopolio. Por lo tanto, cambiar la forma de mis distribuciones de precios de reserva, a través de: $\alpha = \beta$, nos brinda distintos escenarios óptimos que se podrían dar en el sistema. Entonces, a este nivel del análisis, al variar las características del producto - a través de variar los parámetros: α , β y/o γ - se puede volver más rentable para dos tiendas juntarse en un mismo sitio que ser un monopolio.

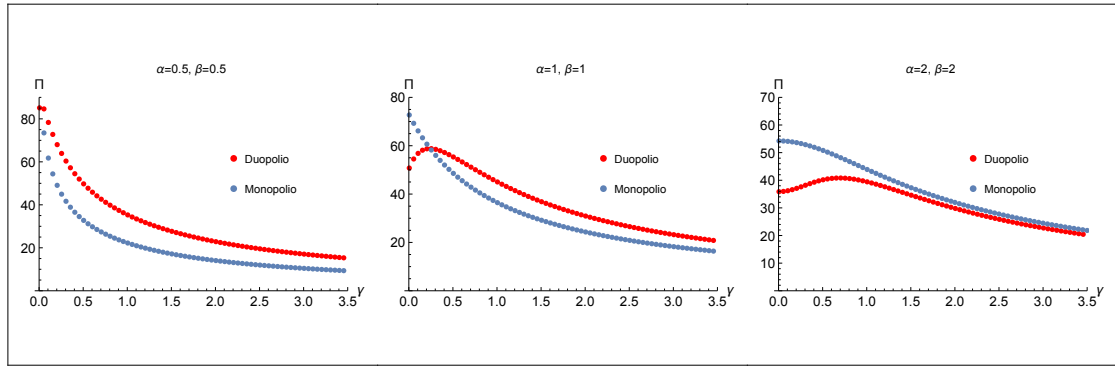


FIGURA 6.5: Ganancias en equilibrio de un monopolio y un duopolio en un mismo sitio en función de γ para factores de forma $\alpha = \beta = 0.5, 1, 2$. Para $\alpha = \beta = 0.5$, cada tienda en un duopolio gana más que un monopolio, en contraste, cuando $\alpha = \beta = 2$ las ganancias de un monopolio son siempre mayores que para un duopolio. Finalmente, para valores intermedios de α y β es conveniente ser un monopolio para un rango de valores bajos de γ , para $\gamma > 0.235$, las ganancias de un duopolio son mayores que las del monopolio. Los otros parámetros del sistema son: $L = 1000$, $\lambda = 1.0$, $c = 0.01$, $r_z = L/2$. (Color Online).

Un conjunto más grande de valores de γ y c se explora en la figura 6.6. Dicha figura nos ayuda a estimar un conjunto de parámetros que propicien agregación o separación de tiendas. En particular, cuando la ganancia del monopolio es mayor que la ganancia de una tienda parte de un duopolio en un mismo sitio, se espera que la mejor opción para una segunda tienda sea alejarse lo más posible de la primera tienda si la ciudad es lo suficientemente larga. Esta situación da lugar al caso de dos tiendas en distintos sitios que se estudia en el apartado 6.2. Por otro lado, para el conjunto de parámetros para los cuales la ganancia del duopolio sea mayor a la de un monopolio, se puede esperar un aglomerado de más tiendas, lo cual se estudia en el apartado 6.1.3.

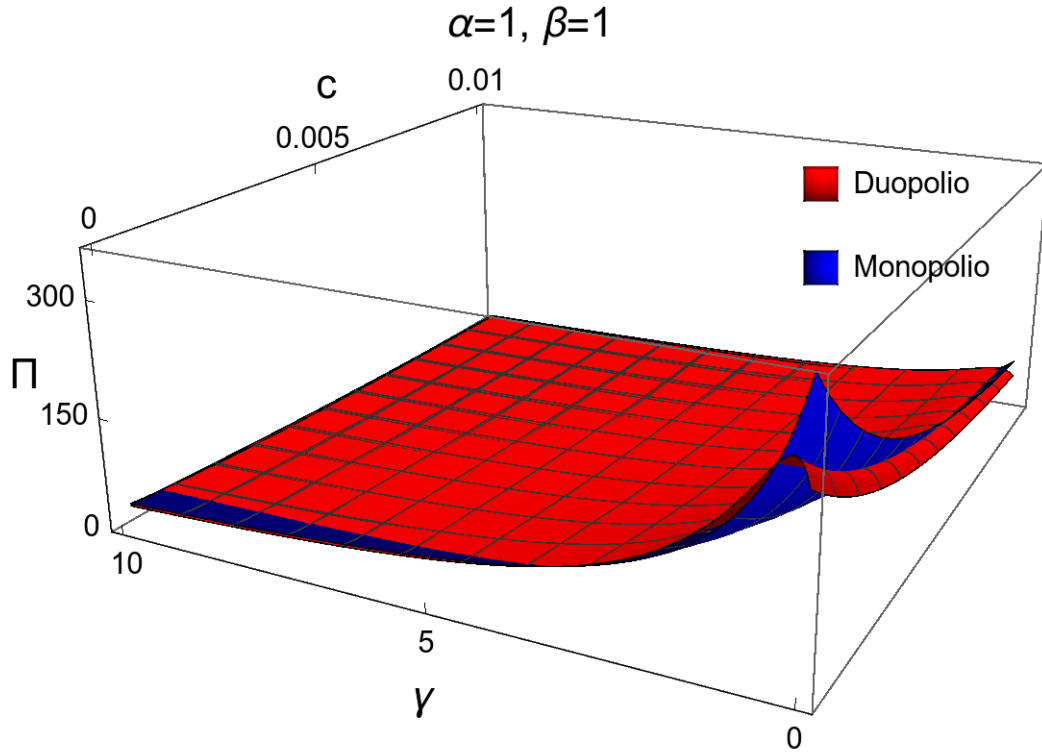


FIGURA 6.6: Ganancias en equilibrio del monopolio y de un duopolio en el mismo sitio como función de γ y c . Se puede apreciar que para un conjunto grande de parámetros, cada tienda en un duopolio en el centro de la ciudad gana más que un monopolio. Excepciones ocurren en una región de valores pequeños de γ , como en figura 6.5, y en una región de costos de transporte muy bajos. Los otros parámetros del sistema son: $L = 1000$, $\lambda = 1.0$, $r_z = L/2$.

6.1.3. Muchas tiendas en un sólo sitio

En las subsecciones anteriores 6.1.1 y 6.1.2 se analizaron casos particulares cuando sólo existe un sitio en la ciudad. En dichas secciones se expusieron resultados que confirman que para ciertos valores de los parámetros $\{\gamma, c\}$ es más conveniente que las tiendas se junten formando un aglomerado de dos tiendas en un mismo sitio. Esto hace pensar que tal vez para estos mismos parámetros más tiendas puedan añadirse al incipiente aglomerado de dos tiendas. En esta sección se considera un único sitio z en la ciudad, en el cual se encuentran un número arbitrario de tiendas: n_z . Se considera el caso de una ciudad lineal finita de tamaño L , con costos de transporte lineales, y el sitio z ubicado en $L/2$.

La función ganancia para una tienda dentro de un aglomerado de n_z tiendas se calcula de acuerdo a las ecuaciones (6.3), (6.6) y (6.8).

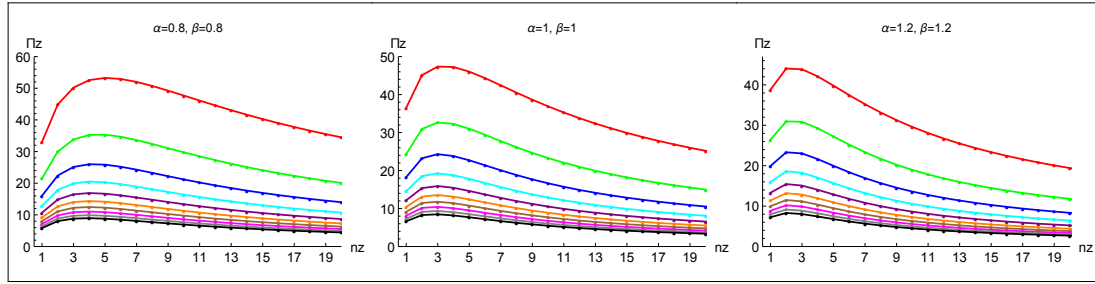


FIGURA 6.7: Ganancia en equilibrio de una tienda como función del número de tiendas dentro del sitio. Cada línea representa un valor diferente de γ , desde $\gamma = 1.0$ (línea roja) hasta $\gamma = 10$ (línea negra). Estas curvas sugieren que para una ciudad lo suficientemente grande, para cada valor de γ , existe un número máximo de tiendas, a partir del cual, las tiendas podrían colocarse fuera del aglomerado para intentar ganar como un monopolio.

En la figura 6.7 se muestra cómo varía la ganancia de una tienda dentro de un aglomerado en función de su número de tiendas. Los parámetros $\{c, \gamma\}$ corresponden a una situación en la cual es más rentable ser parte de un duopolio que ser un monopolio. Específicamente, se fija el parámetro $c = 0.01$ y se varía γ desde 1 hasta 10 en pasos de uno. Como se puede ver en la figura 6.7, para este rango de valores de γ 's, existe un número óptimo de tiendas $n_z > 1$ que maximiza la respectiva ganancia. El valor de la ganancia del monopolio puede ser usado para estimar el número máximo de tiendas que puedan coexistir dentro de un aglomerado. Por ejemplo, para $\alpha = \beta = 1$ y $\gamma = 1$ las ganancias de todas las tiendas hasta la décima, son mayores que la ganancia del monopolio. De tal forma que una onceava tienda podrá encontrar más rentable colocarse lejos de este aglomerado, de ser posible, para tratar de alcanzar ganar una ganancia de monopolio. Por lo tanto, en una ciudad lo suficientemente grande, el sitio podría acoger hasta 10 tiendas.

En el cuadro 6.1 se muestra el número máximo de tiendas que se agregan en el sitio como función de γ y de los parámetros α, β . Los parámetros de factor de forma fueron escogidos de acuerdo a la figura 6.5, para valores alrededor de $\alpha = \beta = 1$ nos permiten analizar dos comportamientos distintos de la función ganancia al variar un sólo parámetro: γ . Es decir, al hacer la comparación del valor promedio de los precios de reserva de los consumidores, a través de γ , respecto al de la población en el sistema $\lambda = \frac{1}{\langle r \rangle} = 1$.

ÍNDICE DE TABLA 6.1: Relación entre el parámetro γ y el máximo número de tiendas en un aglomerado de acuerdo con la figura 6.7.

Valores $\alpha=\beta$	nz	Valores de γ									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.8		21	18	16	14	14	12	12	8	7	6
1		10	9	8	8	7	7	7	7	7	7
1.2		5	5	3	2	2	1	1	1	1	1

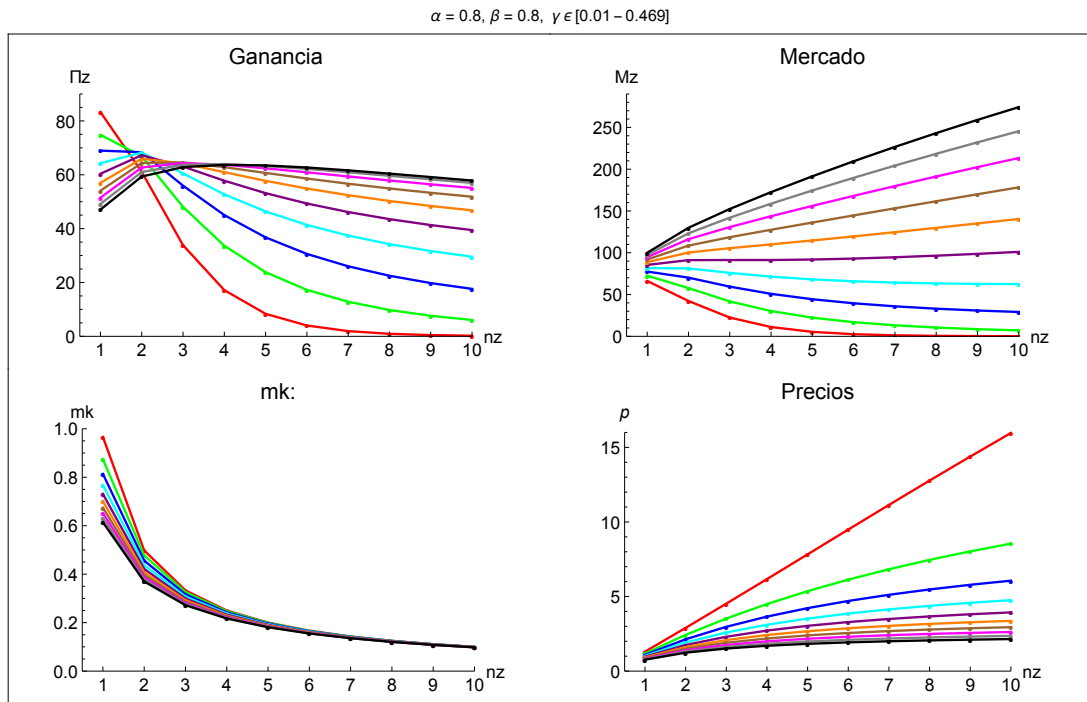


FIGURA 6.8: Ganancia en equilibrio, el mercado, la fracción m_k de compradores esperados por cada tienda, y los precios, como función del número de tiendas en el sitio. Cada línea de las figuras representa un valor diferente de γ , desde $\gamma = 0.01$ (primera línea roja) hasta $\gamma = 0.469$ (última línea negra). Los otros parámetros del sistema son: $L = 1000, \lambda = 1.0, c = 0.01$ y $z = L/2$.

La función ganancia puede tener distintos comportamientos cualitativos al mostrado en figura 6.7 en otros intervalos del parámetro γ . Como una ilustración, en la figura 6.8 se muestra adicional a la ganancia: el mercado del sitio, la fracción de compradores de cada tienda, los precios de equilibrio en función del número de tiendas en el sitio para $\alpha = \beta = 0.8$ y γ desde 0.01 hasta 0.469 en intervalos de 0.051. En este intervalo de γ , la ganancia muestra una transición en su comportamiento: desde una función monótona decreciente con el número de tiendas ($\gamma = 0.01$), donde lo más conveniente es ser un monopolio, hasta una función que presenta un máximo en $n_z > 1$ conforme crece γ , que favorece a los aglomerados de tiendas. El mercado del sitio también presenta una

transición en su comportamiento, de una función monótonamente decreciente a una función monótonamente creciente al incrementar γ . En contraste con el mercado y la ganancia, los precios de equilibrio, a pesar de la competencia interna, son funciones crecientes con el número de tiendas para toda γ en el intervalo $[0.01 - 0.469]$.

6.2. Duopolio en sitios diferentes

En esta sección se estudia los efectos de la competencia espacial. Específicamente, se considera una situación en la que dos tiendas en distintas posiciones escogen sus precios de equilibrio para maximizar sus ganancias, lo cual hace alusión al problema de Hotelling. Las principales consideraciones que distinguen este caso de estudio del modelo de Hotelling son: la heterogeneidad de los consumidores y el “clustering effect” en caso de que ambas tiendas se encuentren en el mismo sitio. Estas consideraciones cambian consecuentemente la manera de calcular la demanda de cada tienda y su correspondiente ganancia respecto al modelo de Hotelling.

Sean tienda 1 y tienda 2 las que conforman el duopolio y $\{r_{z_1}, r_{z_2}\}$ sus respectivas posiciones. Los precios de reserva que le asignan los consumidores a los productos ofrecidos en cada una de las tiendas son caracterizados por las variables ρ_{z_1} y ρ_{z_2} respectivamente. Dada la heterogeneidad de los consumidores, éstas variables se consideran variables aleatorias, y por simplicidad se suponen independientes e idénticamente distribuidas con distribución $\Phi(r) = \Phi_{z_1}(r) = \Phi_{z_2}(r)$. Nuevamente se consideran distribuciones de Weibull para los precios de reserva, ver ecuación (6.1). Sin embargo, en esta sección se restringe el análisis al caso donde los factores de forma son 1, por lo que las distribuciones de Weibull $\Phi(r; \lambda, \alpha)$ se convierten en exponenciales, y como anteriormente, se toma $\lambda = 1$.

Las utilidades esperadas por un consumidor j desde su posición \mathbf{r}_j de visitar las tiendas son: $U_1(j)$ y $U_2(j)$ respectivamente, donde se consideran los costos de transporte:

$$\rho_{z_1} = U_1 + p_1 + C(j, z_1)$$

$$\rho_{z_2} = U_2 + p_2 + C(j, z_2)$$

donde $\{p_1, p_2\}$ son los precios característicos de los sitios donde están las tiendas. De acuerdo a la ecuación 5.6 la probabilidad de ir a uno de estos negocios, digamos el de la tienda 1 es:

$$P_1(j) = \int_0^\infty \left[\frac{d}{dU_1} \left[\int_{-\infty}^{U_1+p_1+C(j,z_1)} \Phi_{z_1}(r) dr \right] \right] \left[\int_{-\infty}^{U_1+p_2+C(j,z_2)} \Phi_{z_2}(r) dr \right] dU_1 \quad (6.15)$$

Resolviendo para soluciones simétricas, $r_{z_2} = L - r_{z_1}$, el mercado que llega a la tienda del sitio z_1 está dado por:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_1 = & \frac{e^{-p_1}}{c} \left[2 - e^{-c(L-r_{z_1})} - e^{-cr_{z_1}} \right] \\ & - \frac{e^{-(p_1+p_2)}}{2c} \left[(1 + c(L - 2r_{z_1}))e^{-c(L-2r_{z_1})} - e^{-cL} \right] \end{aligned} \quad (6.16)$$

donde se puede notar que el primer término es el mercado de un monopolio para una tienda en z_1 ofreciendo un producto a un precio p_1 , y el segundo término es una reducción que se debe a la otra tienda en la posición $r_{z_2} = L - r_{z_1}$.

Una fracción \mathfrak{m}_1 del mercado \mathfrak{M}_1 compra en la tienda de acuerdo a la ecuación (5.9). Considerando una distribución Weibull para los precios de reserva σ_1 (con promedio $1/\gamma$ y un factor de forma $\beta = 1$), esta fracción resulta ser:

$$\mathfrak{m}_1 = e^{-\gamma p_1} \quad (6.17)$$

Se calcula el precio de equilibrio de la tienda 1 de acuerdo ecuación (5.13) con el correspondiente mercado (ecuación (6.16)).

La figura 6.9 muestra las ganancias en equilibrio en función de la posición correspondientes a valores de c del orden λ/L . En este escenario de costos de transporte bajos, ambas tiendas tienden a ubicarse en medio de la ciudad. No obstante, cuando las dos tiendas se sitúan en el mismo sitio (en $r_z = 500$), los precios y las ganancias deben ser calculadas considerando el “clustering effect” que hace al sitio más atractivo, al igual que la competencia en precios que surge entre ambas tiendas dentro del sitio, como ya se ha descrito en apartado 6.1.2. Las curvas mostradas en la figura 6.9 corresponden a dos valores específicos de γ dentro los rangos $\gamma \geq 0.12$ y $\gamma < 0.12$. Cuando γ es mayor o igual que 0.12 se encuentra un máximo global de las ganancias en la posición $L/2$, siendo para ambas tiendas más conveniente ubicarse juntas en medio de la ciudad. En cambio, cuando γ es menor que 0.12 un mínimo local para la ganancia se encuentra en medio de la ciudad, por lo que cada tienda escoge ubicarse en diferentes sitios próximos a $L/2$.

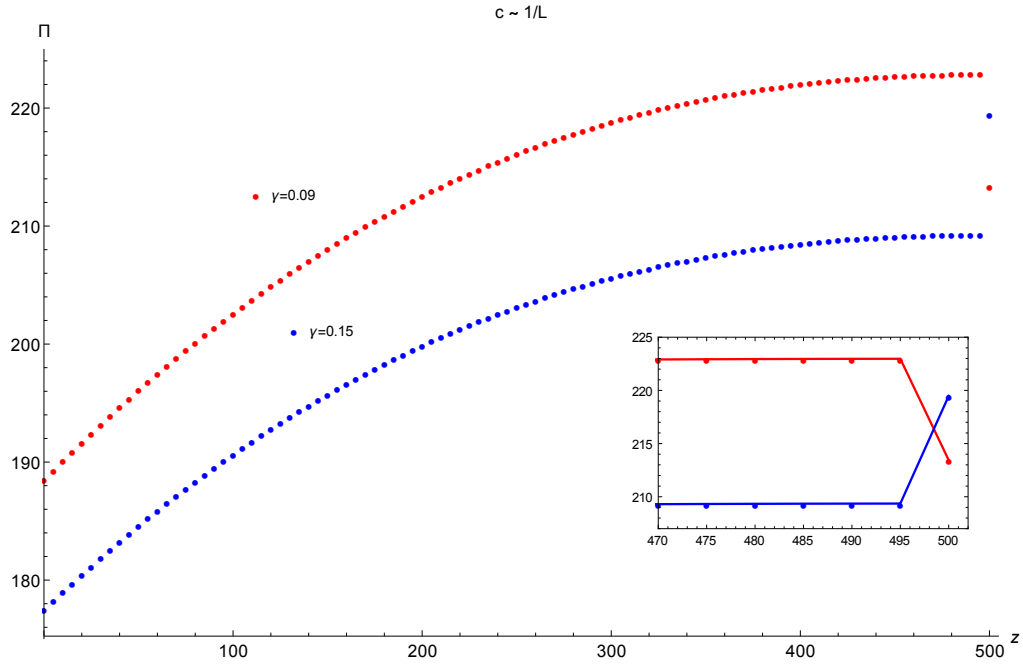


FIGURA 6.9: Ganancia en equilibrio de la tienda 1 en función de su ubicación r_{z_1} dado que la otra tienda se encuentra en $r_{z_2} = L - r_{z_1}$ para costos de transporte bajos $c = 0.001$. Nótese que cuando $\gamma = 0.09$, la ubicación óptima resulta ser cerca del centro, pero no en el mismo sitio, lo cual evita la competencia en precios entre las tiendas dentro del mismo sitio. En contraste, cuando $\gamma = 0.15$ el “clustering effect” domina, y la aglomeración de las tiendas en el mismo sitio se favorece. Los otros parámetros del sistema son: $L = 1000$ y $\lambda = 1.0$.

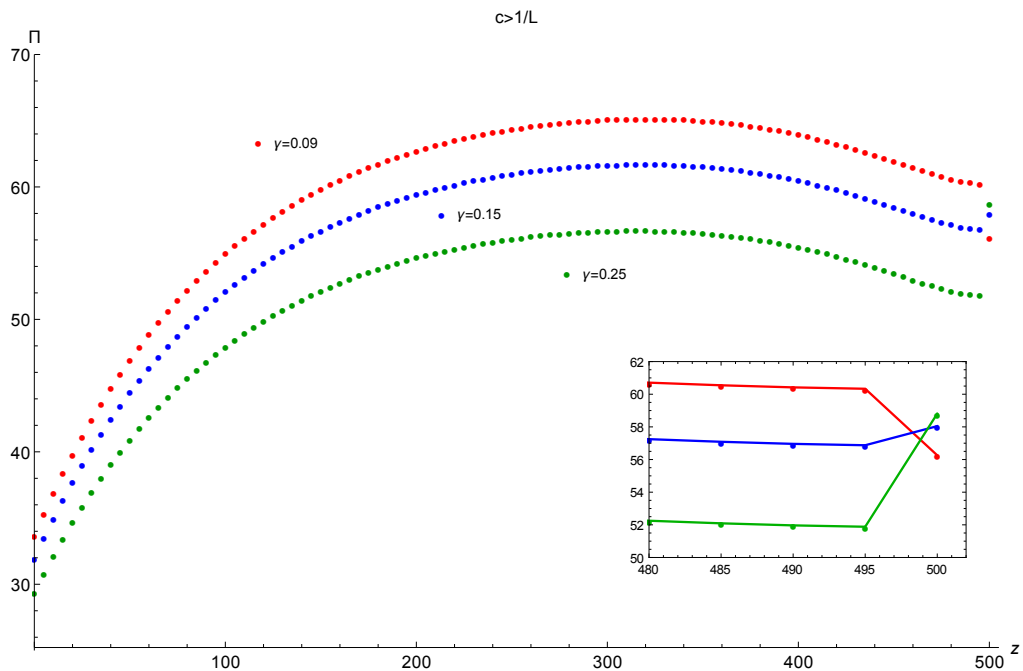


FIGURA 6.10: Ganancia en equilibrio de la tienda 1 en función de su posición r_{z_1} dado que la otra tienda se encuentra en $r_{z_2} = L - r_{z_1}$ para costos de transporte altos $c = 0.01$. Ahora la separación de las tiendas es favorable, sin embargo el “clustering effect” domina para $\gamma = 0.25$. Los otros parámetros del sistema son: $L = 1000$ y $\lambda = 1.0$.

En contraste, para valores de $c > 1/L$, mostrados en la figura 6.10, existe una tendencia de ambas tiendas por separarse, encontrando más rentables los sitios cercanos a los cuartiles del mercado: $r_z \cong L/4, 3L/4$. Sin embargo, a pesar de esta tendencia a separarse, las tiendas no se separan a tal punto de colocarse cerca de las fronteras de la ciudad, dado que ahí perciben un decaimiento en su mercado y por consecuencia una menor percepción de ganancias. Las curvas mostradas en la figura 6.10 corresponden a valores específicos de γ dentro de tres rangos. El primer rango es $\gamma \in [0 - 0.13]$ (puntos rojos), en cuyo caso las ganancias presentan un mínimo local en $L/2$, luego, para el rango $\gamma \in [0.14 - 0.198]$ (puntos azules) la ganancia en $L/2$ aumenta, pero sigue siendo insuficiente para ser un máximo global. Por lo tanto, para γ 's dentro de estos dos primeros rangos la ubicación óptima para este duopolio es ubicarse en sitios distintos: cercanos a los cuartiles. Finalmente, para el rango $\gamma > 0.2$ (puntos verdes) el “clustering effect” domina convirtiendo al centro de la ciudad la ubicación óptima para ambas tiendas.

Los resultados presentados en figura 6.9 y figura 6.10 son consistentes con los expuestos en apartado 6.1.2 donde se encuentra que la ganancia de cada tienda en un duopolio en el mismo sitio es mayor que la del monopolio para un rango de valores $\gamma \in [0.25, 5]$, para diferentes valores de c (ver figura 6.6). Pero como se puede ver en la misma figura, existe otro rango que parece interesante explorar, dado que las ganancias de un monopolio se tornan de nuevo mayores que las de un duopolio para $c \sim 0.0001$ y $\gamma \in [5 - 10]$. Resulta que, en esta región de parámetros, las tiendas se agregan en el centro por una razón distinta a las mencionadas anteriormente.

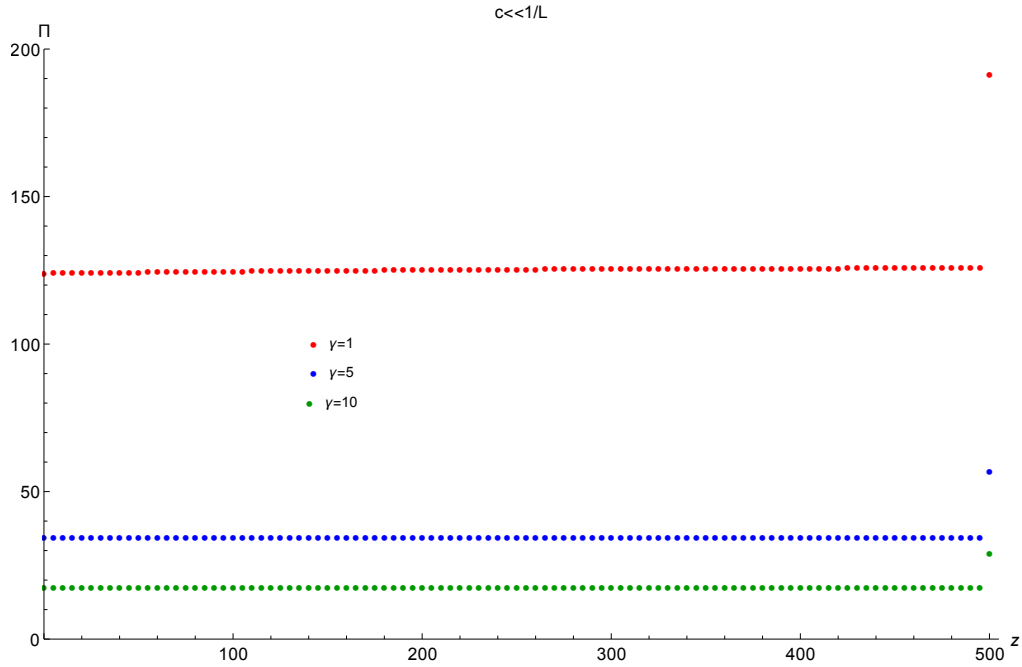


FIGURA 6.11: Ganancia en equilibrio de la tienda 1 en función de su posición r_{z_1} dado que la otra tienda se encuentra en $r_{z_2} = L - r_{z_1}$ para costos de transporte muy bajos $c = 0.0001$. La figura muestra que la ubicación óptima para ambas tiendas es en el centro de la ciudad para valores de $\gamma = 1, 5, 10$. Estos parámetros corresponden a la región de costos de transporte muy bajos, del orden de $c \lesssim 0.0001$ y $\gamma > 1$ in figura 6.6. En esta región, ser monopolio es más conveniente que ser parte de un duopolio en un mismo sitio. Sin embargo, debido a los bajos costos de transporte, la ciudad no es lo suficientemente grande para que las tiendas puedan ubicarse lejos una de la otra para ganar como un monopolio, por lo que sigue siendo más conveniente aglomerarse en medio de la ciudad. Los otros parámetros del sistema son: $L = 1000$ y $\lambda = 1.0$.

En la figura 6.11, se muestra la ganancia de una tienda del duopolio como función de la posición para $c = 0.0001$ y valores específicos de γ donde se esperaba que la mejor opción para ambas tiendas fuera separarse. Sin embargo, las ganancias muestran que la mejor configuración espacial para estas tiendas es colocarse en medio de la ciudad dado que las tiendas no se pueden separar lo suficiente como para ganar ganancias monopolísticas. En este escenario de costos de transporte bajos (o ciudades pequeñas), a pesar de que la ganancia de un monopolio es mayor que la del duopolio en el mismo sitio, no implica una separación de tiendas.

6.3. Distribución Uniforme

En esta sección se estudian las condiciones bajo las cuales se cumple que los precios de equilibrio son decrecientes con el número de tiendas en un sitio.

Una hipótesis que se maneja tradicionalmente en economía estándar es que al incrementar la competencia entre agentes vendedores se reducen los precios en el mercado. De acuerdo a nuestro modelo, a continuación se proporcionan las condiciones necesarias para el cumplimiento de dicha hipótesis.

Al igual que en las secciones anteriores, se analizará el caso de una ciudad lineal de largo L , considerando costos de transporte lineales. Sin embargo, en contraste a las otras secciones, se considera una distribución uniforme (manteniendo un promedio de $1/\gamma$) para la distribución de precios de reserva asumidos por los vendedores cuando compiten en precios: $\phi_k(r)$ y manteniendo una distribución Weibull para la distribución de precios de reserva considerada para definir el mercado de cada sitio: $\Phi_z(r)$. Es decir,

$$\phi_k(r) = \begin{cases} \frac{\gamma}{2} & \text{para } r \in [0, \frac{2}{\gamma}] \\ 0 & \text{para } r \notin [0, \frac{2}{\gamma}] \end{cases} \quad (6.18)$$

donde, la función de distribución acumulativa es:

$$\int_{-\infty}^x \phi_k(r) dr = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{\gamma x}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{2}{\gamma} \\ 1 & \text{si } x > \frac{2}{\gamma} \end{cases} \quad (6.19)$$

Por lo tanto, de acuerdo a la ecuación 5.9, la fracción de compradores que compran en la tienda k es:

$$\mathbf{m}_k(n_z) = \int_{p_k}^{2/\gamma} \phi_k(\omega) \left[\prod_{i \neq k}^{n_z} \int_0^{\omega + p_i - p_k} \phi_i(\omega') d\omega' \right] d\omega. \quad (6.20)$$

Llamémos $I(\omega)$ a la integral que aparece entre corchetes de la ecuación anterior:

$$I(\omega) = \int_0^{\omega + p_i - p_k} \phi_i(\omega') d\omega' = \begin{cases} 0 & \text{if } \omega + (p_i - p_k) < 0 \\ \frac{\gamma(\omega + (p_i - p_k))}{2} & \text{if } 0 < \omega + (p_i - p_k) < 2/\gamma \\ 1 & \text{if } \omega + (p_i - p_k) > 2/\gamma \end{cases} \quad (6.21)$$

donde dicha integral nos define intervalos para integrar 6.20. El subcaso: $\omega + (p_i - p_k) < 0$ no es considerado ya que $\omega - p_k \geq 0 \quad \forall \quad \omega \in [p_k, 2/\gamma]$ y $p_i > 0$ por lo que nunca se cumple. Supóngase que: $0 < p_i - p_k < 2/\gamma$, en tal caso, $p_k < p_i < 2/\gamma$ por lo que 6.20 se calcula como:

$$\mathbf{m}_k(n_z) = \int_{p_k}^{2/\gamma - (p_i - p_k)} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^n (\omega + (p_i - p_k))^{n-1} d\omega + \int_{2/\gamma - (p_i - p_k)}^{2/\gamma} \frac{\gamma}{2} d\omega \quad (6.22)$$

En el caso en que $p_i - p_k < 0$:

$$\mathbf{m}_k(n_z) = \int_{p_k}^{2/\gamma} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^n (\omega + (p_i - p_k))^{n-1} d\omega \quad (6.23)$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{m}_k(n_z) = \begin{cases} \frac{1}{n} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^n \left[\left(\frac{2}{\gamma} - p_k + p_i\right)^n - p_i^n \right] & \text{para } p_i < p_k < 2/\gamma \\ \frac{1}{n} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^n \left[\left(\frac{2}{\gamma}\right)^n - p_i^n \right] + \frac{\gamma}{2}(p_i - p_k) & \text{para } p_k < p_i < 2/\gamma \end{cases} \quad (6.24)$$

Para propósitos ilustrativos, se considera nuevamente para el factor de forma de la distribución de Weibull: $\alpha = 1$. En las figuras 6.12, 6.13, 6.14 y 6.15 se muestran los comportamientos del sistema para distintos rangos de γ .

En la figura 6.12 se muestra la ganancia, el mercado del sitio, la fracción de compradores que compran en cada tienda y los precios de equilibrio, como función del número de tiendas en el sitio para $\gamma \in [0.01 - 0.1]$. En este rango, es evidente que un monopolio es el escenario más rentable. Sin embargo, ahora que los precios no son funciones monótonamente crecientes del número de tiendas, y en sintonía con este comportamiento, el mercado que atiende al sitio tampoco es monotónico. Para estos valores de $\gamma \in [0.01 - 0.1]$, en promedio, el precio de reserva del consumidor es en comparación con el promedio de la población en el sistema. De modo que, la estrategia óptima es incrementar los precios conforme las tiendas se incorporan al sitio, incluso cuando esto implique una reducción en el mercado total del sitio conforme p_z crece. De hecho, los vendedores pueden fijar precios más altos porque para estos parámetros, la mayoría de los compradores que llegaron al sitio compran, y lo hacen indistintamente del precio, lo que disminuye la competencia interna en precios, es decir, $\mathbf{m}_k \sim 1/n$. A medida que se incrementa γ , la competencia interna se vuelve más fuerte, hasta el punto en que la estrategia óptima conjunta de las tiendas resulta en bajar los precios para atraer al sitio un mercado más grande.

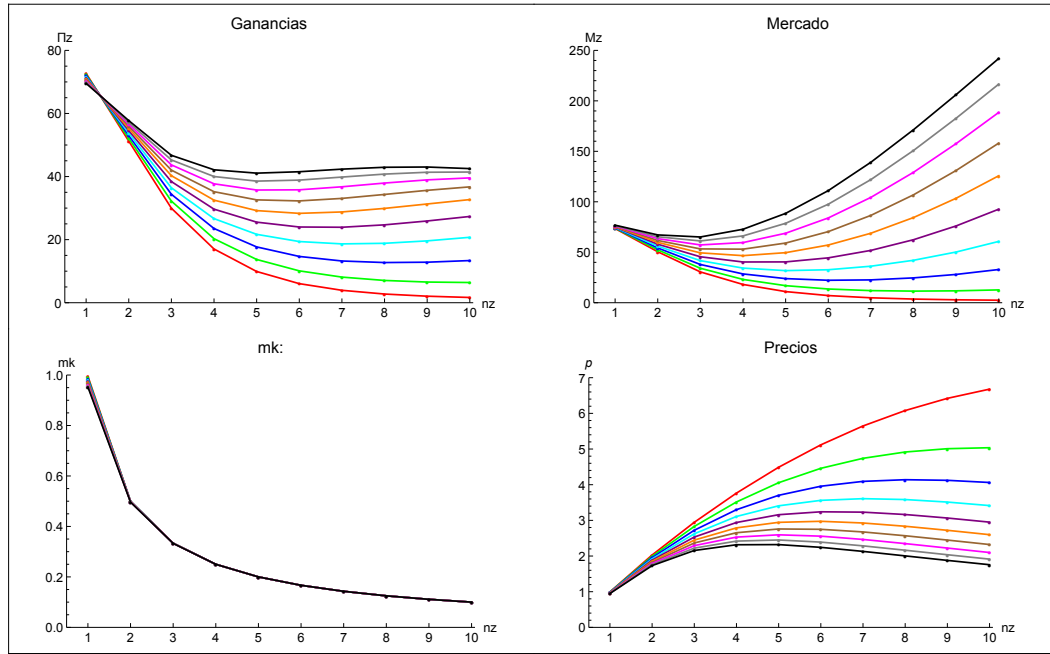


FIGURA 6.12: Ganancia en equilibrio, el mercado, la fracción m_k de compradores esperados por cada tienda, y los precios, como función del número de tiendas en el sitio. Cada línea de las figuras representa un valor diferente de γ , desde $\gamma = 0.01$ (primera línea roja) hasta $\gamma = 0.1$ (última línea negra). Los otros parámetros del sistema son: $L = 1000$, $\lambda = 1.0$, $c = 0.01$ y $z = L/2$.

Hay dos parámetros que juegan un papel determinante en el comportamiento del mercado de un sitio. Uno es el número de tiendas, que hacen el sitio más atractivo. Sin embargo, en equilibrio, \mathfrak{M}_z puede incluso disminuir a medida que aumenta el número de tiendas si el precio característico p_z , el segundo parámetro crucial, aumenta demasiado rápido. La figura (6.12) resalta el efecto combinado de estos dos parámetros en \mathfrak{M}_z . En el apéndice C se muestra la dinámica que siguen 3 primeras tiendas en un sitio para un valor de $\gamma = 0.1$, en donde se puede apreciar los distintos movimientos que hacen dichas tiendas en precios para llegar a precios de equilibrio que crecen con el número de tiendas.

Otro rango interesante es $\gamma \in [0.1 - 0.49]$ que se muestra en la figura 6.13. En este rango, además de un comportamiento no monotónico de los precios como función del número de tiendas, se puede ver una transición de una situación en la que ser monopolio es el mejor escenario, a una en donde se beneficia la aglomeración de tiendas, y por lo tanto el máximo de la función ganancia ocurre en $n_z > 1$.

En la figura 6.14 se muestra el comportamiento del sistema para valores de $\gamma \in [0.5 - 5]$. En el extremo superior de este rango, finalmente, los precios de equilibrio se convierten en una función monótonamente decreciente del número de tiendas y en consecuencia el

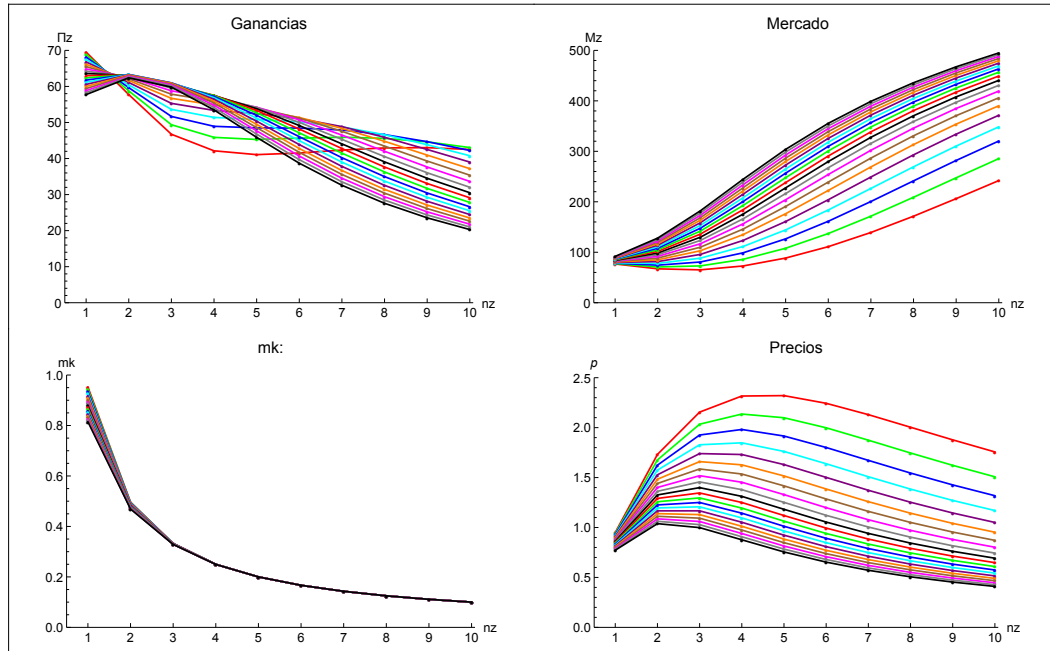


FIGURA 6.13: Ganancia en equilibrio, el mercado, la fracción m_k de compradores esperados por cada tienda, y los precios, como función del número de tiendas en el sitio. Cada línea de las figuras representa un valor diferente de γ , desde $\gamma = 0.1$ (una primera línea roja) hasta $\gamma = 0.49$ (una última línea negra). Los otros parámetros del sistema son: $L = 1000$, $\lambda = 1.0$, $c = 0.01$ y $z = L/2$.

mercado del sitio se vuelve una función monótonamente creciente. Este comportamiento persiste para valores de γ mayores, como se muestra en la figura 6.15.

La forma decreciente de los precios en equilibrio en función del número de tiendas, es el comportamiento que tiene sentido común y que es tan predicho en economía estándar en donde se tiene como hipótesis una reducción de precios al incrementar la competencia entre negocios. En este modelo, se encuentran las condiciones que también reproducen esta hipótesis.

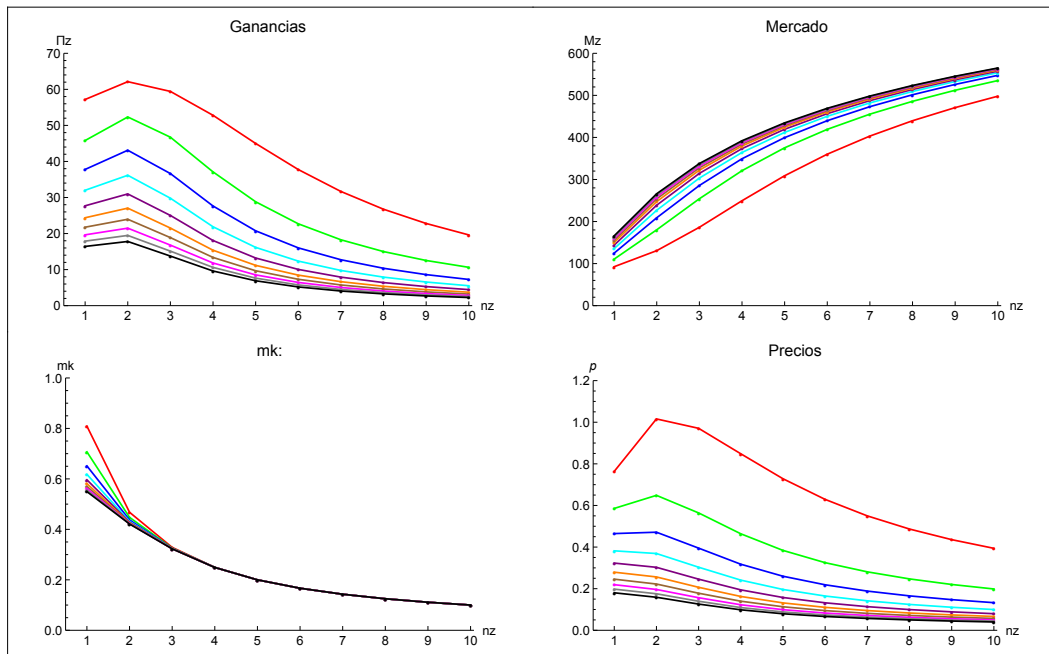


FIGURA 6.14: Ganancia en equilibrio, el mercado, la fracción m_k de compradores esperados por cada tienda, y los precios, como función del número de tiendas en el sitio. Cada línea de las figuras representa un valor diferente de γ , desde $\gamma = 0.5$ (primera línea roja) hasta $\gamma = 5$ (última línea negra). Los otros parámetros del sistema son: $L = 1000$, $\lambda = 1.0$, $c = 0.01$ y $z = L/2$.

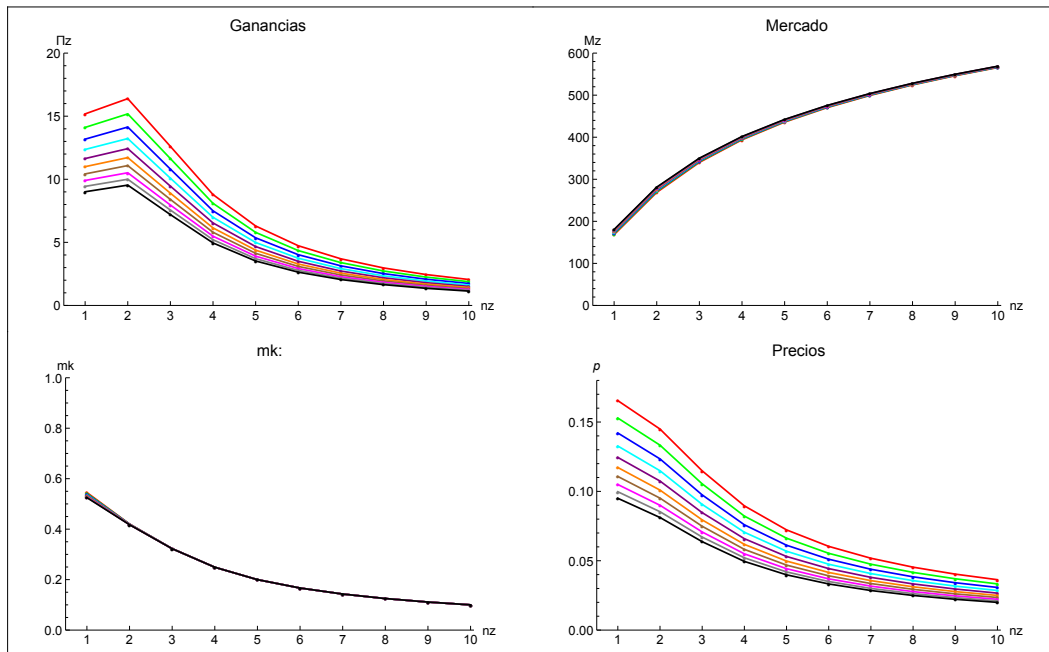


FIGURA 6.15: Ganancia en equilibrio, el mercado, la fracción m_k de compradores esperados por cada tienda, y los precios, como función del número de tiendas en el sitio. Cada línea de las figuras representa un valor diferente de γ , desde $\gamma = 5.5$ (primera línea roja) hasta $\gamma = 10$ (última línea negra). Los otros parámetros del sistema son: $L = 1000$, $\lambda = 1.0$, $c = 0.01$ y $z = L/2$.

Capítulo 7

Conclusiones y Perspectivas

La intuición nos dicta que la competencia en precio entre tiendas cercanas conlleva a una reducción de precios conforme el número de tiendas aumenta. De hecho, muchos trabajos se han esforzado en reproducir este comportamiento [28, 44]. Sin embargo, estudios de naturaleza empírica muestran que esta expectativa de reducción de precios no necesariamente se cumple, por decir un ejemplo: la relación entre la densidad de gasolineras y precios ha sido estudiada en varias ciudades. Sorprendentemente, en algunas regiones existe una relación negativa entre estas dos cantidades -datos de Phoenix, Tucson, San Diego y San Francisco revelan que una mayor densidad de gasolineras en estas ciudades se asocia con una reducción en el promedio de los precios[45]-, sin embargo, en otras regiones, se encuentra una relación positiva [46, 47]. Esta relación positiva es frecuentemente asociada con practicas colusivas entre los vendedores. Los resultados de nuestro trabajo ofrece una explicación alterna a estas observaciones.

Diversos autores habían hecho la predicción de que la competencia en precios entre vendedores en línea, debería acercarse a la competencia de Bertrand dado que los costos de búsqueda y de transporte se ven drásticamente reducidos con el internet, y por lo tanto los vendedores en línea estarían sujetos a una fuerte competencia en precios. Nuevamente, en lugar de ello, existe una gran dispersión en los precios. Por ejemplo, un estudio encontró que los precios en boletos varían cerca de un 20% entre distintas agencias de viajes online [48]. En otro caso de estudio, se encontraron distintos patrones en el comportamiento del precio para libros (productos muy cercanos a ser homogéneos) de dos páginas web; un detalle interesante del estudio es que los precios en línea eran en algunas ocasiones incluso mayores que los precios ofrecidos en librerías físicas [49]. Dentro la misma línea de estudio, [50] encuentra que bienes ofrecidos en sitios web pueden llegar a ser más caros que los ofrecidos en sus contrapartes sin internet. Este estudio fue realizado sujeto a los datos proporcionados por AUCNET, un sitio web para

hacer transacciones de ventas de carros usados en Japón, en el cual el autor resalta un efecto importante en este mercado: Entre más altos son los precios por parte de la página web, AUCNET se vuelve más atractivo para las personas que intentan vender su carro, brindando como consecuencia una mayor variedad de modelos y opciones de compra al consumidor. Por lo tanto, los consumidores se ven atraídos por la diversidad en el sitio. Un efecto similar está detrás del comportamiento creciente en los precios con el número de tiendas en nuestro modelo, existen otros modelos que resaltan que la expectativa de reducción en precios no necesariamente sucede [51, 52]. En resumen, mientras que la cantidad de estudios empíricos en relación a precios como función de la densidad de negocios es escasa, se encuentran distintos comportamientos en los precios para diferentes mercados, e incluso para el mismo mercado pero en distintas regiones. El hecho es que esta variación en los precios existe y refleja de cierta manera la heterogeneidad de los consumidores, que posiblemente nos podría brindar información sobre las distribuciones de precios de reserva.

Claramente, los factores que son tomados en cuenta para decidir dónde abrir un nuevo negocio son múltiples y deberían ser tomados en cuenta para reproducir la gran variedad de comportamientos que ocurren, desde externalidades y/o regularizaciones, hasta tradiciones históricas, entre otras. En este trabajo se presentó un modelo que caracteriza a los productos a través de la distribución de los precios de reserva por parte de sus consumidores, con ello se pretende describir la utilidad esperada por un consumidor al adquirir un producto en cuestión. A cambio, los precios de reserva determinan las decisiones de cada consumidor de qué sitio visitar si se visita alguno. Una vez en el sitio, los consumidores escogen en qué tienda comprar, ahora con la información de los verdaderos precios ofrecidos en las tiendas. En esta última etapa es donde las tiendas compiten en precio. Los precios escogidos por las tiendas son los que maximizan las ganancias de cada tienda, incluyendo el efecto del precio en el mercado total del sitio así como la fracción de consumidores que escoge comprar en una tienda. Se encontraron una gran variedad de comportamientos dependiendo de los parámetros del sistema, la forma de la distribución de precios de reserva y el tamaño de la ciudad. Para ciertos parámetros, la aglomeración es benéfica para las tiendas, y con otros favorece a los monopolios, lo cual podría implicar la segregación de tiendas en una ciudad lo suficientemente grande. Más aún, dependiendo de la situación, se encuentra que los precios de equilibrio pueden crecer, decrecer o incluso, tener un comportamiento no monótono con el número de tiendas. Comportamientos similares se encuentran bajo ligeras variaciones del modelo como considerar espacios bidimensional o costos de transporte cuadráticos. Una situación más complicada ocurre si se relaja la conjetura de que distintas variables del modelo son independientes.

Otro aspecto interesante que surge como incógnita sería el hecho de poder determinar, teóricamente y empíricamente, la naturaleza de las distribuciones de precios de reserva que describa un mercado específico, así como identificar cómo varían de un mercado a otro. Al respecto, es natural pensar que exista una relación en la distribución de precios de reserva con la distribución de ingresos de los consumidores. A diferencia de los precios de reserva, la distribución de ingresos ha sido ampliamente medida desde el trabajo de Pareto(1985), quien fue el primero en proponer una función que describiera los datos empíricos de las distribuciones de ingresos. Se han propuesto distintos modelos en la literatura para ajustar de manera adecuada una función de distribución en todo el dominio de ingresos y no sólo en el dominio de ingresos altos que siguen una ley de Pareto [53]. Entre estas distribuciones se encuentra: la de Weibull, que ha sido usada de manera ocasional para describir la ley de ingresos al igual que precios de reserva en modelos económicos [34, 35, 54, 55]. Sin embargo esta coincidencia no determina una relación entre distribuciones de precios de reserva y ley de ingresos. Cálculos preliminares sugieren que usar una ley de Pareto como distribución de los precios de reserva en nuestro modelo conlleva a precios de equilibrio que crecen con el número de tiendas.

Apéndice A

Competencia de Bertrand en el modelo.

En este apéndice se describen las condiciones necesarias que reproducen con nuestro modelo la competencia de Bertrand. Es decir, llevar a dos competidores cercanos a precios de equilibrio nulos.

Sean p_1 y p_2 los precios correspondientes a las tiendas 1 y 2. Supóngase que la distribución conjunta de los precios de reserva para los productos que venden dichas tiendas está dado por:

$$\varphi(\sigma_1, \sigma_2) = f(\sigma_1)\delta(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (\text{A.1})$$

En este caso, la fracción de personas que compran en la tienda 1 se escribe como:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_1 &= \int_0^\infty dU_1 \int_{-\infty}^{U_1} \varphi(\sigma_1, \sigma_2) dU_2 \\ &= \int_0^\infty dU_1 \int_{-\infty}^{U_1} \varphi(U_1 + p_1, U_2 + p_2) dU_2 \end{aligned}$$

la probabilidad de que la tienda 1 reditúe una utilidad $U_1 > U_2$. Reescribimos \mathbf{m}_1 :

$$\mathbf{m}_1 = \int_0^\infty dU_1 \int_{-\infty}^{U_1} f(U_1 + p_1)\delta(U_1 + p_1 - (U_2 + p_2))dU_2 \quad (\text{A.2})$$

Supóngase que $p_1 > p_2$. Escribamos el argumento de la función delta como:

$$\delta(U_1 + p_1 - (U_2 + p_2)) = \delta(U_2 - [U_1 + (p_1 - p_2)])$$

el argumento de la función delta nunca se iguala a cero, dado que $p_1 - p_2 > 0$ y el valor máximo que alcanza U_2 en la integral es U_1 . Por lo tanto, $\mathbf{m}_1 = 0$ cuando $p_1 > p_2$.

En el caso en que $p_2 > p_1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_1 &= \int_0^\infty dU_1 \int_{-\infty}^{U_1} f(U_1 + p_1) \delta(U_2 - [U_1 + (p_1 - p_2)]) dU_2 \\ &= \int_0^\infty f(U_1 + p_1) dU_1 \end{aligned}$$

.

Por lo tanto, $\mathbf{m}_1 > 0$ cuando $p_2 > p_1$.

En resumen, la tienda 1 tendrá una fracción $\mathbf{m}_1 > 0$ sólo cuando su precio p_1 sea menor al de su rival: $p_2 > p_1$. De lo contrario, si $p_1 > p_2$ su fracción $\mathbf{m}_1 = 0$ y por lo tanto, dado que el mercado \mathfrak{M}_z es finito, sus ganancias serán nulas también.

$$\mathbf{m}_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } p_1 > p_2 \\ \int_0^\infty f(U_1 + p_1) dU_1 & \text{si } p_2 \geq p_1 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

.

Este es el caso de dos tiendas con productos idénticos y por lo tanto, precios de reserva idénticos que nos llevan a la famosa competencia de Bertrand, donde hay un claro incentivo por bajar los precios para obtener ganancias distintas de cero.

Apéndice B

Variación de \mathbf{m}_k con el precio p_k y p_i .

En este apéndice se muestra la variación de \mathbf{m}_k ante cambios del precio de la k -ésima tienda: p_k o del precio p_i correspondiente a alguna de las $n_z - 1$ tiendas distintas a k dentro del mismo sitio.

Escribimos entonces la fracción \mathbf{m}_k :

$$\mathbf{m}_k = \int_0^\infty \phi_k(U_k + p_k) \left[\prod_{i \neq k}^{n_z} \int_{-\infty}^{U_k} \phi_i(U_i + p_i) dU_i \right] dU_k \quad (\text{B.1})$$

Tomemos la derivada parcial respecto de p_k de \mathbf{m}_k :

$$\frac{\partial \mathbf{m}_k}{\partial p_k} = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial p_k} \phi_k(U_k + p_k) \left[\prod_{i \neq k}^{n_z} \int_{-\infty}^{U_k} \phi_i(U_i + p_i) dU_i \right] dU_k \quad (\text{B.2})$$

En este caso $\frac{\partial \phi_k}{\partial p_k} = \frac{\partial \phi_k}{\partial U_k}$, por lo que podemos integrar por partes la integral anterior:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{m}_k}{\partial p_k} &= \phi_k(U_k + p_k) \prod_{i \neq k}^{n_z} \int_{-\infty}^{U_k} \phi_i(U_i + p_i) dU_i \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \phi_k(U_k + p_k) \frac{\partial}{\partial U_k} \left[\prod_{i \neq k}^{n_z} \int_{-\infty}^{U_k} \phi_i(U_i + p_i) dU_i \right] dU_k \\
&= -\phi_k(p_k) \prod_{i \neq k}^{n_z} \int_{-\infty}^0 \phi_i(U_i + p_i) dU_i \\
&\quad - \int_0^\infty \phi_k(U_k + p_k) * \left[\sum_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^{n_z} \phi_i(U_k + p_i) \prod_{l \neq i}^{n_z} \int_{-\infty}^{U_k} \phi_l(U_l + p_l) dU_l \right] dU_k
\end{aligned}$$

El signo menos en ambos términos de la ecuación anterior define el signo de $\frac{\partial \mathbf{m}_k}{\partial p_k} < 0$, dado que se aplica a cantidades positivas como $\phi_k(r) > 0 \forall r$, las multiplicaciones de distintas distribuciones acumulativas y la integral sobre $U_k > 0$ de cantidades positivas. Por lo tanto, la fracción de mercado al incrementar \mathbf{m}_k disminuye a cambios positivos del precio p_k .

Ahora veamos cómo cambia \mathbf{m}_k ante cambios positivos de p_i :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{m}_k}{\partial p_i} &= \int_0^\infty \phi_k(U_k + p_k) \left[\left(\prod_{\substack{j \neq k \\ j \neq i}}^{n_z} \int_{-\infty}^{U_k} \phi_j(U_j + p_j) dU_j \right) * \frac{\partial}{\partial p_i} \int_{-\infty}^{U_k} \phi_i(U_i + p_i) dU_i \right] dU_k \\
&= \int_0^\infty \phi_k(U_k + p_k) \left[\left(\prod_{\substack{j \neq k \\ j \neq i}}^{n_z} \int_{-\infty}^{U_k} \phi_j(U_j + p_j) dU_j \right) * \phi_i(U_k + p_i) \right] dU_k
\end{aligned}$$

de donde se ve notoriamente que: $\frac{\partial \mathbf{m}_k}{\partial p_i} > 0$. Es decir, la fracción de mercado que compra en la tienda k aumenta ante cambios positivos de algún precio p_i correspondiente a alguna otra tienda $i \neq k$.

Apéndice C

Dinámica entre tres primeras tiendas en un sitio.

En este apéndice se describe la dinámica que siguen 3 tiendas ubicadas en un mismo sitio, a las cuales les asignaremos los subíndices: i, j, k , para llegar a un precio de equilibrio.

La dinámica es como se describe a continuación: Primero, la tienda 1 se establece en sitio z , calcula su precio óptimo p_1 que maximiza sus ganancias y su ganancia esperada Π_1 . Una segunda tienda se coloca en el sitio, que también calcula su precio óptimo p_2 considerando el precio de la primera tienda. Ahora las variables del sitio como p_z y \mathfrak{M}_z toman valores de acuerdo a los precios de ambas tiendas. La tienda 1 reacciona al recalcular su ganancia por la llegada de la tienda 2, por lo que cambia su precio p_1 considerando ahora el precio p_2 . La tienda 2 también reacciona ante los cambios de la tienda 1 reajustando su precio p_2 . Estos reajustes siguen hasta que se llega a un equilibrio en precios $p_1 = p_2$ como se puede ver en la figura C.1. Cuando se llega a un equilibrio en precios entre las dos primeras tiendas, se añade una tercera tienda, ahora los reajustes en precios se dan para las tres tiendas hasta que llegan a un nuevo equilibrio en precios.

Las condiciones del sistema son las mismas expuestas en apartado 6.3. Es decir, se considera una distribución $\phi_k(r)$ uniforme (manteniendo un promedio de $1/\gamma$) para la distribución que son asumidos por los vendedores cuando compiten en precios y una distribución Weibull para definir el mercado del sitio.

Para hacer el cálculo de las ganancias se considera una considera un único sitio z en una ciudad lineal de largo L , costos de transporte lineales con la distancia y se resuelve \mathfrak{m}_k como a continuación se describe.

Supóngase que la tienda k busca el precio óptimo para maximizar su ganancia considerando los precios que conoce de las tiendas i, j , para ello necesita saber la fracción de

mercado que compraría en su tienda como función de su precio p_k y de los precios p_j, p_i . La fracción de mercado que compra en la tienda k estará dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_k &= \int_0^\infty \phi_k(U_k + p_k) \left[\int_0^{U_k} \phi_i(U_i + p_i) dU_i \int_0^{U_k} \phi_j(U_j + p_j) dU_j \right] dU_k \\ &= \int_{p_k}^{2/\gamma} \phi_k(\omega) \left[\int_0^{\omega+p_i-p_k} \phi_i(\omega') d\omega' \int_0^{\omega+p_j-p_k} \phi_j(\omega'') d\omega'' \right] d\omega \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Donde,

$$\int_0^{\omega+p_i-p_k} \phi_i(\omega') d\omega' = \begin{cases} 0, & \text{si } \omega + (p_i - p_k) < 0 & (\text{C.2}) \\ \frac{\gamma(\omega + (p_i - p_k))}{2}, & \text{si } 0 < \omega + (p_i - p_k) < 2/\gamma & (\text{C.3}) \\ 1 & \text{si } \omega + (p_i - p_k) > 2/\gamma & (\text{C.4}) \end{cases}$$

$$\int_0^{\omega+p_j-p_k} \phi_j(\omega'') d\omega'' = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega + (p_j - p_k) < 0 & (\text{C.5}) \\ \frac{\gamma(\omega + (p_j - p_k))}{2} & \text{si } 0 < \omega + (p_j - p_k) < 2/\gamma & (\text{C.6}) \\ 1 & \text{si } \omega + (p_j - p_k) > 2/\gamma & (\text{C.7}) \end{cases}$$

Se evalúa C.1 bajo los siguientes casos:

- I $p_k < p_i < p_j < 2/\gamma$
- II $p_i < p_k < p_j < 2/\gamma$
- III $p_i < p_j < p_k < 2/\gamma$

En el caso (I) implicaría que:

$$\begin{aligned} \Delta_i &= p_i - p_k > 0 \\ \Delta_j &= p_j - p_k > 0 \end{aligned}$$

donde a su vez, $\Delta_j > \Delta_i$ por lo que $\frac{2}{\gamma} - \Delta_j < \frac{2}{\gamma} - \Delta_i$. Por lo tanto C.1 se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m}_k &= \int_{p_k}^{2/\gamma} \phi_k(\omega) \left[\int_0^{\omega+\Delta_i} \phi_i(\omega') d\omega' \int_0^{\omega+\Delta_j} \phi_j(\omega'') d\omega'' \right] d\omega \\
 &= \int_{p_k}^{2/\gamma-\Delta_j} \phi_k(\omega) \frac{\gamma}{2}(\omega + \Delta_i) \frac{\gamma}{2}(\omega + \Delta_j) d\omega \\
 &\quad + \int_{2/\gamma-\Delta_j}^{2/\gamma-\Delta_i} \phi_k(\omega) \frac{\gamma}{2}(\omega + \Delta_i) * 1 d\omega \\
 &\quad + \int_{2/\gamma-\Delta_i}^{2/\gamma} \phi_k(\omega) 1 * 1 d\omega
 \end{aligned} \tag{C.8}$$

En el caso (II):

$$\Delta_i = p_i - p_k < 0$$

$$\Delta_j = p_j - p_k > 0$$

donde se cumple que: $\frac{2}{\gamma} - \Delta_j < \frac{2}{\gamma} < \frac{2}{\gamma} - \Delta_i$. Por lo tanto, \mathbf{m}_k se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m}_k &= \int_{p_k}^{2/\gamma} \phi_k(\omega) \left[\int_0^{\omega+\Delta_i} \phi_i(\omega') d\omega' \int_0^{\omega+\Delta_j} \phi_j(\omega'') d\omega'' \right] d\omega \\
 &= \int_{p_k}^{2/\gamma-\Delta_j} \phi_k(\omega) \frac{\gamma}{2}(\omega + \Delta_i) \frac{\gamma}{2}(\omega + \Delta_j) d\omega \\
 &\quad + \int_{2/\gamma-\Delta_j}^{2/\gamma} \phi_k(\omega) \frac{\gamma}{2}(\omega + \Delta_i) * 1 d\omega
 \end{aligned} \tag{C.9}$$

En el caso (III):

$$\Delta_i = p_i - p_k < 0$$

$$\Delta_j = p_j - p_k < 0$$

donde se cumple que: $p_k < \frac{2}{\gamma} < \frac{2}{\gamma} - \Delta_j < \frac{2}{\gamma} - \Delta_i$. Por lo tanto, \mathbf{m}_k se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m}_k &= \int_{p_k}^{2/\gamma} \phi_k(\omega) \left[\int_0^{\omega+\Delta_i} \phi_i(\omega') d\omega' \int_0^{\omega+\Delta_j} \phi_j(\omega'') d\omega'' \right] d\omega \\
 &= \int_{p_k}^{2/\gamma} \phi_k(\omega) \frac{\gamma}{2}(\omega + \Delta_i) \frac{\gamma}{2}(\omega + \Delta_j) d\omega
 \end{aligned} \tag{C.10}$$

La expresión de \mathbf{m}_k para los distintos casos en que el precio p_k : sea el menor de todos los precios o el intermedio o el mayor de todos los precios, es necesario para calcular las ganancias de las tiendas en la dinámica que siguen para converger a su precio de equilibrio dentro del mismo sitio.

En la figura C.1 se ejemplifica la dinámica que siguen tiendas 3 tiendas para converger a su precio de equilibrio donde se describen las variables asociadas a las tiendas: p, \mathbf{m}, Π y de manera simultánea las variables que caracterizan a los sitios: p_z, \mathfrak{M}_z .

En primera instancia, la tienda 1 se establece en el sitio con un precio $p_1 = 0.9501$ el cual le brinda una fracción de mercado $\mathbf{m}_1 = 0.9524$ y una ganancia $\Pi_1 = 69.5188$. El sitio, que por el momento sólo contiene a la tienda 1, atrae un mercado $\mathfrak{M}_z = 76.8144$ cuyo precio característico p_z coincide con p_1 . Véase la primera columna de la figura C.1.

Ahora supongamos una segunda tienda se coloca en el sitio. El precio que maximiza las ganancias de la tienda 2 resulta ser $p_2 = 1.7554$, considerando el precio p_1 , con ello la fracción $\mathbf{m}_2 = 0.4594$ y su ganancia $\Pi_2 = 77.4447$. Nótese ahora que el precio característico del sitio aumenta a 1.3527, sin embargo dado que el “clustering effect” domina, el mercado del sitio aumenta a $\mathfrak{M}_z = 96.0278$. Sin embargo la tienda 1 se ve afectada por la llegada de esta nueva tienda, con la cual ahora comparte el mercado que llega al sitio y por lo tanto su ganancia queda reducida a $\Pi_1 = 48.9415$. Véase la segunda columna de la figura C.1.

1	$p_1 = 0.9501$ $m_1 = 0.9524$ $\Pi_1 = 69.5188$	$p_1 = 1.7315$ $m_1 = 0.4973$ $\Pi_1 = 57.2098$	$p_1 = 1.7315$ $m_1 = 0.4962$ $\Pi_1 = 57.7338$	$p_1 = 1.73$ $m_1 = 0.3437$ $\Pi_1 = 50.2243$	$p_1 = 2.1613$ $m_1 = 0.3224$ $\Pi_1 = 51.4922$	$p_1 = 2.1613$ $m_1 = 0.3329$ $\Pi_1 = 46.5698$	$p_1 = 2.1613$ $m_1 = 0.3326$ $\Pi_1 = 46.7261$	$p_1 = 2.1553$ $m_1 = 0.3329$ $\Pi_1 = 46.7263$
2	$p_2 = 1.7554$ $m_2 = 0.4594$ $\Pi_2 = 77.4447$	$p_2 = 1.7554$ $m_2 = 0.4950$ $\Pi_2 = 57.7325$	$p_2 = 1.7317$ $m_2 = 0.4962$ $\Pi_2 = 57.7381$	$p_2 = 1.73$ $m_2 = 0.3437$ $\Pi_2 = 50.2243$	$p_2 = 1.73$ $m_2 = 0.3545$ $\Pi_2 = 45.3644$	$p_2 = 2.1556$ $m_2 = 0.3339$ $\Pi_2 = 46.5066$	$p_2 = 2.1556$ $m_2 = 0.3330$ $\Pi_2 = 46.6627$	$p_2 = 2.1556$ $m_2 = 0.3329$ $\Pi_2 = 46.7304$
3	$p_3 = 2.1694$ $m_3 = 0.3117$ $\Pi_3 = 57.0547$	$p_3 = 2.1694$ $m_3 = 0.3219$ $\Pi_3 = 51.5901$	$p_3 = 2.1694$ $m_3 = 0.3223$ $\Pi_3 = 46.6588$	$p_3 = 2.1694$ $m_3 = 0.3323$ $\Pi_3 = 46.6588$	$p_3 = 2.1694$ $m_3 = 0.3332$ $\Pi_3 = 46.6598$	$p_3 = 2.1554$ $m_3 = 0.3332$ $\Pi_3 = 46.6598$	$p_3 = 2.1554$ $m_3 = 0.3329$ $\Pi_3 = 46.7275$	$p_3 = 2.1554$ $m_3 = 0.3329$ $\Pi_3 = 46.7275$
p_z	0.9501	1.7435	1.7316	1.8776	2.0208	2.1621	2.1574	2.1554
\mathfrak{M}_z	76.8144	66.4317	67.1861	84.3721	73.8750	64.7096	64.8784	65.1177

FIGURA C.1: Ilustración de la dinámica que siguen 3 tiendas en sus precios para converger al precio de equilibrio. Cada columna de la figura da a conocer los valores de las variables p, m, Π correspondientes a cada tienda y simultáneamente los valores de las variables del sitio: p_z, \mathfrak{M}_z . La primera columna de la figura describe las variables de la tienda 1 en un inicio cuando sólo ésta se encuentra en el sitio. Una segunda tienda se coloca en el sitio por lo que las variables de sistema cambian descritas en la segunda columna. Las dos columnas siguientes son debidos a los reajustes que hacen las tiendas 1 y 2 en sus precios para mejorar sus ganancias hasta que llegan a un equilibrio en precios $p_1 = p_2 = 1.73$. Entonces una tercera tienda se adhiere al sitio con un precio $p_3 = 2.1694$. Las reacciones de las 3 tiendas son descritas en las columnas siguientes hasta que el sitio llega a un nuevo equilibrio donde $p_1 = p_2 = p_3 = 2.15$. Los parámetros del sistema son $L = 1000, \lambda = 1.0, c = 0.01, z = L/2, \gamma = 0.1$.

Los cambios consecuentes en los precios p_1, p_2 son reajustes que hacen las tiendas mientras tienen posibilidad de mejorar sus ganancias hasta que se llega a un equilibrio donde los precios p_1, p_2 se igualan. Una vez llegado el equilibrio en precios para las dos primeras tiendas en el sitio, se coloca en el sitio una tercera tienda con precio p_3 . Ahora las tres tiendas reajustan sus respectivos precios hasta llegar a un nuevo equilibrio C.1. El valor de $\gamma = 0.1$ corresponde a uno descrito en la figura 6.13, en donde se puede verificar la coincidencia de los valores de las variables: $p_z, \mathfrak{m}, \mathfrak{M}_3, \Pi$ en equilibrio.

Apéndice D

Demostración de relación que cumple $\frac{\partial \mathbf{m}_k}{\partial p_k}$.

Se considera una distribución de Weibull (con un valor esperado $1/\gamma$ y factor de forma β) para los precios de reserva que consideran las tiendas para hacer la competencia en precio entre ellas. Por lo tanto, de acuerdo a la ecuación 6.5, \mathbf{m}_k se escribe como:

$$\mathbf{m}_k = - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial U_k} \left(e^{-(\gamma\Gamma(1+1/\beta)(U_k+p_k))^\beta} \right) \prod_{i \neq k}^{n_z} (1 - e^{-(\gamma\Gamma(1+1/\beta)(U_k+p_i))^\beta}) dU_k \quad (\text{D.1})$$

Se hace la suposición de que las demás tiendas $i \neq k$ ya han llegado a un equilibrio anteriormente en donde se cumple que $p_i = p \forall i \neq k$. Por lo tanto podemos reescribir la ecuación anterior como:

$$\mathbf{m}_k = - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial U_k} \left(e^{-(\gamma\Gamma(1+1/\beta)(U_k+p_k))^\beta} \right) (1 - e^{-(\gamma\Gamma(1+1/\beta)(U_k+p_i))^\beta})^{n_z-1} dU_k \quad (\text{D.2})$$

Nótese que, en este caso, $\frac{\partial \mathbf{m}_k}{\partial p_k} = \frac{\partial \mathbf{m}_k}{\partial U_k}$, entonces se puede escribir $\frac{\partial \mathbf{m}_k}{\partial p_k}$ como:

$$\frac{\partial \mathbf{m}_k}{\partial p_k} = - \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial U_k^2} \left(e^{-(\gamma\Gamma(1+1/\beta)(U_k+p_k))^\beta} \right) (1 - e^{-(\gamma\Gamma(1+1/\beta)(U_k+p_i))^\beta})^{n_z-1} dU_k \quad (\text{D.3})$$

Desarrollando la segunda parcial y escribiendo la parte elevada a la $n_z - 1$ en su forma de serie binomial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{m}_k}{\partial p_k} &= \beta (\gamma \Gamma(1 + 1/\beta))^\beta \int_0^\infty [(\beta - 1)(U_k + p_k)^{\beta-2} - \beta (\gamma \Gamma(1 + 1/\beta))^\beta (U_k + p_k)^{2\beta-2}] \\ &\quad * e^{-(\gamma \Gamma(1+1/\beta)(U_k+p_k))^\beta} \sum_{j=0}^{n_z-1} \binom{n_z-1}{j} (-1)^j e^{-(\gamma \Gamma(1+1/\beta)(U_k+p_i))^\beta} dU_k \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Evaluando en $p_k = p_i = p$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathbf{m}_k}{\partial p_k} \right|_{p_k=p} &= - \sum_{j=0}^{n_z-1} \binom{n_z-1}{j} \frac{(-1)^j}{(j+1)^2} \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial U_k^2} e^{-(\gamma \Gamma(1+1/\beta)(U_k+p))^\beta (j+1)} dU_k \\ &= \frac{\beta (\gamma \Gamma(1 + 1/\beta))^\beta p^{\beta-1}}{n_z} \left[\sum_{i=0}^{n_z} \binom{n_z}{i} (-1)^i e^{-(\gamma \Gamma(1+1/\beta)(U_k+p))^\beta i} - 1 \right] \\ &= \frac{\beta (\gamma \Gamma(1 + 1/\beta))^\beta p^{\beta-1}}{n_z} \left[\left(1 - e^{-(\gamma \Gamma(1+1/\beta)(U_k+p))^\beta i} \right)^{n_z} - 1 \right] \\ &= -\beta \left(\frac{\gamma}{\beta} \Gamma(1/\beta) \right)^\beta p^{\beta-1} \mathbf{m}_k \end{aligned}$$

Por lo tanto finalmente se encuentra la relación:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{m}_k}{\partial p_k} \right|_{p_k=p} = -\beta \left(\frac{\gamma}{\beta} \Gamma(1/\beta) \right)^\beta p^{\beta-1} \mathbf{m}_k, \quad (\text{D.5})$$

la cual ayuda a encontrar los precios de equilibrio, ver 6.8.

Bibliografía

- [1] Steven Brakman, Harry Garretsen, and Charles Van Marrewijk. *The new introduction to geographical economics*. Cambridge University Press, 2009.
- [2] Paul J McNulty. Economic theory and the meaning of competition. *The Quarterly Journal of Economics*, 82(4):639–656, 1968.
- [3] George J Stigler. Perfect competition, historically contemplated. *The Journal of Political Economy*, 65(1):1–17, 1957.
- [4] Roy J Ruffin. Cournot oligopoly and competitive behaviour. *The Review of Economic Studies*, 38(4):493–502, 1971.
- [5] Marc ESCRIHUELA-VILLAR. Cartel sustainability and cartel stability. *The Fondazione Eni Enrico Mattei Note di Lavoro Series*, 44(04):1–21, 2004.
- [6] Jean Tirole. *The Theory of Industrial Organization*. MIT press, 1988.
- [7] Steven C Salop. Monopolistic competition with outside goods. *The Bell Journal of Economics*, 10(1):141–156, 1979.
- [8] Jean-Philippe Touffut. *Augustin Cournot: modelling economics*. Edward Elgar Publishing, 2007.
- [9] Steven Landsburg. *Price theory and applications*. Cengage Learning, 2013.
- [10] Joseph Bertrand. *Review of Walras’s théorie mathématique de la richesse sociale and Cournot’s recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses in Cournot oligopoly: Characterization and applications. edited by A. F. Daughety*. Cambridge University Press.(1988), 1883.
- [11] Harold Hotelling. Stability in competition. *THE ECONOMIC JOURNAL*, 39(153): 41–57, 1929.
- [12] Avner Shaked and John Sutton. Relaxing price competition through product differentiation. *The review of economic studies*, 49(1):3–13, 1982.

-
- [13] Masahisa Fujita and Jacques-François Thisse. Economics of agglomeration. *Journal of the Japanese and international economies*, 10(4):339–378, 1996.
- [14] Andre De Palma, Victor Ginsburgh, Yorgo Y Papageorgiou, and J-F Thisse. The principle of minimum differentiation holds under sufficient heterogeneity. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 53(4):767–781, 1985.
- [15] Roger W Koenker and Martin K Perry. Product differentiation, monopolistic competition, and public policy. *The Bell Journal of Economics*, 12(1):217–231, 1981.
- [16] ECH Veendorp and Anjum Majeed. Differentiation in a two-dimensional market. *Regional Science and Urban Economics*, 25(1):75–83, 1995.
- [17] Maria Cancian, Angela Bills, and Theodore Bergstrom. Hotelling location problems with directional constraints: an application to television news scheduling. *The Journal of Industrial Economics*, 43(1):121–124, 1995.
- [18] Stephen Ansolabehere and James M. Snyder Jr. Valence politics and equilibrium in spatial election models. *Public Choice*, 103(3):327–336, 2000.
- [19] Claude d’Aspremont, J Jaskold Gabszewicz, and J-F Thisse. On hotelling’s “stability in competition”. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 47(5):1145–1150, 1979.
- [20] Dominique Graitson. Spatial competition a la hotelling: A selective survey. *The Journal of Industrial Economics*, 31(1):11–25, 1982.
- [21] Simon P Anderson and Andre De Palma. Spatial price discrimination with heterogeneous products. *The Review of Economic Studies*, 55(4):573–592, 1988.
- [22] Andreas Irmen and Jacques-Francois Thisse. Competition in multi-characteristics spaces: Hotelling was almost right. *Journal of Economic Theory*, 78(1):76–102, 1998.
- [23] Pablo Jensen. Analyzing the localization of retail stores with complex systems tools. In *International Symposium on Intelligent Data Analysis*, pages 10–20. Springer, 2009.
- [24] Robert E Krider and Daniel S Putler. Which birds of a feather flock together? clustering and avoidance patterns of similar retail outlets. *Geographical Analysis*, 45(2):123–149, 2013.
- [25] Pierre-Philippe Combes, Thierry Mayer, and Jacques-François Thisse. *Economic geography: The integration of regions and nations*. Princeton University Press, 2008.

- [26] Vladimir Marianov and Horst A Eiselt. On agglomeration in competitive location models. *Annals of Operations Research*, 246(1-2):31–55, 2016.
- [27] Takaaki Takahashi. Agglomeration in a city with choosy consumers under imperfect information. *Journal of Urban Economics*, 76:28–42, 2013.
- [28] Hideo Konishi. Concentration of competing retail stores. *Journal of Urban Economics*, 58(3):488–512, 2005.
- [29] Hal R Varian and Hal R Varian. *Microeconomic analysis*, volume 2. Norton New York, 1992.
- [30] Avinash K Dixit and Susan Skeath. *Games of Strategy*. Norton and Company, 2015.
- [31] Martin J Osborne and Ariel Rubinstein. *A course in game theory*. MIT press, 1994.
- [32] Howard Raiffa et al. Game theory at the university of michigan, 1948–1952. *Toward a history of game theory*, 1992.
- [33] Pablo Jensen. Analyzing the localization of retail stores with complex systems tools. In *Advances in Intelligent Data Analysis VIII*, pages 10–20. Springer, 2009.
- [34] Gabriel R Bitran, Susana V Mondschein, et al. Pricing perishable products: An application to the retail industry. *MIT Working Paper*, 1993.
- [35] Gabriel R Bitran and Susana V Mondschein. Periodic pricing of seasonal products in retailing. *Management science*, 43(1):64–79, 1997.
- [36] R Venkatesh and Vijay Mahajaim. A probabilistic approach to pricing a bundle of products or services. *Journal of Marketing Research*, 30(4):494–508, 1993.
- [37] Georg Wuebker and Vijay Mahajan. A conjoint analysis-based procedure to measure reservation price and to optimally price product bundles. In *Optimal Bundling*, pages 157–174. Springer, 1999.
- [38] Morris A Copeland. The theory of monopolistic competition. *Journal of Political Economy*, 42(4):531–536, 1934.
- [39] Stephen C Littlechild. Misleading calculations of the social costs of monopoly power. *The Economic Journal*, 91(362):348–363, 1981.
- [40] Keith Cowling and Dennis C Mueller. The social costs of monopoly power. *The Economic Journal*, 88(352):727–748, 1978.
- [41] Tibor Scitovsky. Ignorance as a source of oligopoly power. *The American Economic Review*, 40(2):48–53, 1950.

- [42] Eugene E Agger. Monopoly and competitive prices. *The American Economic Review*, 3(3):589–597, 1913.
- [43] David Schwartzman. The effect of monopoly on price. *Journal of Political Economy*, 67(4):352–362, 1959.
- [44] Pablo Jensen, Jean Boisson, and Hernán Larralde. Aggregation of retail stores. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 351(2), 2005.
- [45] John M Barron, Beck A Taylor, and John R Umbeck. Number of sellers, average prices, and price dispersion. *International Journal of Industrial Organization*, 22(8-9):1041–1066, 2004.
- [46] Gerhard Clemenz and Klaus Gugler. Locational choice and price competition: some empirical results for the austrian retail gasoline market. In *Spatial Econometrics*, pages 223–244. Springer, 2009.
- [47] Severin Borenstein and Andrea Shepard. Dynamic pricing in retail gasoline markets. Technical report, National Bureau of Economic Research, 1993.
- [48] Eric K Clemons, Il-Horn Hann, and Lorin M Hitt. The nature of competition in electronic markets: An empirical investigation of online travel agent offerings. *The Wharton School of the University of Pennsylvania*, 1998.
- [49] Judith Chevalier and Austan Goolsbee. Measuring prices and price competition online: Amazon. com and barnesandnoble. com. *Quantitative marketing and Economics*, 1(2):203–222, 2003.
- [50] Ho-Guen Lee. Do electronic marketplaces lower the price of goods? *Communications of the ACM*, 41(1):73–80, 1998.
- [51] Norbert Schulz and Konrad Stahl. Do consumers search for the highest price? oligopoly equilibrium and monopoly optimum in differentiated-products markets. *The RAND Journal of Economics*, pages 542–562, 1996.
- [52] Yongmin Chen and Michael H Riordan. Price-increasing competition. *The RAND Journal of Economics*, 39(4):1042–1058, 2008.
- [53] Fabio Clementi and Mauro Gallegati. *Distribution of Income and Wealth*. Springer, 2016.
- [54] Cornelis PA Bartels and H Van Metelen. *Alternative probability density functions of income: A comparison of the lognormal-, Gamma-and Weibull-distribution with Dutch data*. Vrije Universiteit, Economische Faculteit, 1975.

-
- [55] Naosumi Atoda, Terukazu Suruga, and Toshiaki Tachibanaki. Statistical inference of functional forms for income distribution. *The Economic Studies Quarterly*, 39 (1):14–40, 1988.