



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**PROBLEMA DE YAMABE EN EL
ESPACIO-TIEMPO DE MINKOWSKI**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

GIOVANNI DE LA CRUZ AVILA

DIRECTOR DE TESIS:

DRA. MARÍA DE LOS ÁNGELES SANDOVAL ROMERO

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2020





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

A mi madre, gracias por tu apoyo incondicional. Muchas veces me sentí perdido pero gracias a ti pude seguir adelante. Te agradezco tus desvelos, tus consejos y todos los buenos momentos que pasamos. Te agradezco también las llamadas de atención, sin eso no podría ser la persona que hoy soy. Te agradezco que en todo momento apoyaras mis gustos y aficiones pese a no entenderlas. Te doy las gracias por todo. Vivirás siempre en mi corazón.

A mi padre, gracias por tus consejos. Te doy las gracias por acercarme a la ciencia ficción y a los videojuegos que me hicieron soñar con mundos imposibles pero hermosos, mundos llenos de historias e infinidad de posibilidades. Gracias por dejarme vivir en un mundo de fantasía al que aún hoy, a pesar del tiempo, puedo volver.

A mis hermanas les agradezco por su compañía. Las cosas no siempre fueron fáciles pero gracias a que estaban a mi lado pude mantenerme fuerte. Les agradezco los días de juegos y por siempre cuidarme (aún cuando se supone que soy su hermano mayor y un adulto responsable).

A mis abuelitos, Celeste y Miguel. Les agradezco por su paciencia y por aceptarme como soy. Les agradezco también el que estuvieran conmigo en los momentos difíciles y que me dejaran acompañarlos estos años. Nunca voy a olvidar las horas que pasamos frente al televisor viendo numerosas historias. Nunca voy a olvidar el tiempo que pasaron escuchando mis historias ni el tiempo que pasé escuchando las suyas. Nunca voy a olvidar sus sonrisas al compartir la felicidad que sentía por lograr alguna cosa o por simplemente despertar así. Nunca voy a olvidar todo lo que me han dado. Gracias por buscar que fuera un buen hombre. Chele, sigues

viviendo junto a mi madre en mi corazón y el de todos los que te queremos.

A mi abue, Teo. Te doy la gracias por cuidarme en mis primeros años. Estoy seguro que de no haber sido por tus cuidados no sería ni la mitad de lo que hoy soy.

A mis tíos les agradezco por todo su apoyo. Les agradezco por toda su ayuda, en especial en los momentos en que sentía que el peso con el que cargaba me iba a aplastar; me enseñaron que está bien pedir ayuda y que a pesar de tener intereses distintos, podemos compartírselos con nuestros seres queridos.

A mis primos les agradezco por las horas interminables de juegos. De no haber tenido a alguien con quien compartir mis gustos y aficiones no habría explorado todo lo que hoy conozco y amo, no sería el loco de los videojuegos, comics y animaciones que hoy soy.

A mis amigos les agradezco por sus pláticas y sus bromas. Les agradezco por estar cuando más los necesité y les agradezco aún más por estar a mi lado cuando no existía alguna necesidad, porque sin requerir de un pretexto o de una ocasión especial pudimos compartir horas y horas de juegos. Estoy muy feliz de haberlos conocido a todos y ni el tiempo ni la distancia van a cambiar mi sentir.

Le doy las gracias a la dra. María de los Ángeles Sandoval Romero por su ayuda en la elaboración de esta tesis. Quiero agradecerle también por su paciencia y en especial, por darme una oportunidad que concluyó en este trabajo. Le agradezco también por las charlas que tuvimos más allá del trabajo y por el apoyo que me brindó todo este tiempo. Siempre le voy a estar agradecido.

Finalmente, quiero agradecer al programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) que, por medio del proyecto con clave IN113718, me brindó su apoyo por medio de una beca de titulación durante la realización del presente trabajo.

Índice general

| | |
|--|------------|
| Introducción | VII |
| 1. Relatividad especial | 1 |
| 2. Geometría Diferencial | 15 |
| 2.1. Variedades diferenciales | 15 |
| 2.2. Vectores tangentes | 17 |
| 2.3. Haz tangente | 20 |
| 2.4. Pull-back y push-forward | 22 |
| 2.5. Haces vectoriales | 22 |
| 2.6. Haz cotangente | 28 |
| 2.7. Derivada de Lie | 31 |
| 2.8. Tensores | 32 |
| 3. Geometría Riemanniana | 39 |
| 3.1. Isomorfismos musicales | 39 |
| 3.2. Traza | 41 |
| 3.2.1. Traza respecto a la métrica | 42 |
| 3.3. Conexiones | 42 |
| 3.4. Derivada covariante de campos tensoriales | 45 |
| 3.5. Curvatura | 46 |
| 3.6. Operadores diferenciales | 49 |
| 4. El problema de Yamabe | 51 |
| 4.1. Geometría conforme | 51 |

| | |
|---|-----------|
| 4.2. Problema de Yamabe clásico | 59 |
| 5. El problema hiperbólico de Yamabe | 67 |
| 5.1. Estructura formal del espacio-tiempo y espacio-tiempo de Minkowski | 67 |
| 5.2. Problema de Yamabe Lorentziano | 69 |
| 5.3. Problema de Yamabe hiperbólico en el Espacio-tiempo de Minkowski | 71 |
| Conclusión Final | 86 |
| Bibliografía | 87 |

Introducción

El objetivo de ésta tesis es presentar de manera formal y monográfica un problema de tipo Yamabe en un espacio relevante en el campo de la física: el espacio-tiempo de Minkowski. El problema de Yamabe original consiste en que, dada una variedad Riemanniana compacta (M, g) , siempre será posible encontrar una métrica \bar{g} (sobre la misma variedad M) tal que \bar{g} sea conforme a g , esto es $\bar{g} = fg$, donde $f = e^{2\varphi}, \varphi \in C^\infty(M)$ y tal que su curvatura escalar es constante. Básicamente se aplica una transformación conforme a la métrica original; recordemos que una transformación conforme es aquella que preserva ángulos (en nuestro caso preservará ángulos entre vectores). El problema de Yamabe comienza como un problema geométrico pero al final se reduce a resolver una ecuación diferencial parcial que involucra a la curvatura escalar de la variedad. El enunciado del problema fue una afirmación debida a Hidehiko Yamabe [22], que en 1960 ofreció una demostración y que en 1968 Niel Trudinger mostraró que era incorrecta; así nació el problema de Yamabe, pues se buscaba demostrar que la afirmación hecha por Hidehiko Yamabe era verdadera. Además de descubrir el error en la demostración, Trudinger pudo rescatar buena parte del trabajo de Yamabe. En 1976 Thierry Aubin logró avances para la resolución del problema y, finalmente, en 1984 Richard Schoen concluyó la demostración de la afirmación de Yamabe. La ecuación diferencial a resolver fue planteada bajo condiciones diferentes al planteamiento original (no solo en variedades compactas) lo que llevó a varios problemas de “tipo Yamabe”.

En el caso de la tesis en cuestión, se seguirá el problema de Yamabe planteado por Nicolas Ginoux [9], el problema de Yamabe Lorentziano. El problema de Yamabe Lorentziano toma su nombre del problema original (buscar métricas conformes) pero también del tipo de métricas con que se trabaja: métricas Lorentzianas o pseudo-métricas. En el presente escrito, motivados por el uso de las transformaciones conformes en el estudio de la estructura causal del espacio-tiempo, revisare-

mos la clase de métricas conformes a la métrica del espacio-tiempo de Minkowski. Como en [11], se planteará la ecuación diferencial del problema de Yamabe y se revisará, aprovechando la hiperbolicidad global del espacio-tiempo de Minkowski [11], bajo qué condiciones un problema de Cauchy con esa ecuación diferencial tiene solución. Dada la métrica del espacio-tiempo de Minkowski, el problema podría ser trivial pues esta métrica ya tiene una curvatura escalar constante, por lo anterior se trabajará en casos distintos. Para ser más precisos, se mostrará que siempre es posible encontrar una métrica con curvatura escalar constante y positiva (arbitraria) tal que es conforme a la métrica del espacio-tiempo de Minkowski.

Para lograr nuestro cometido, en el Capítulo 1 hablaremos sobre algunos aspectos básicos de la relatividad especial y discutiremos un poco sobre aspectos geométricos de la gravedad que nos llevarán naturalmente al estudio de la geometría diferencial y Riemanniana, en los Capítulos 2 y 3 respectivamente.

Si bien la geometría resulta importante en la construcción de la relatividad general, será fundamental para plantear el problema de Yamabe. Usando las herramientas geométricas de los capítulos anteriores, en el capítulo 4 presentaremos algunos conceptos sobre geometría conforme y se introducirá el problema de Yamabe. Cabe señalar que buena parte del trabajo de la tesis consistió en obtener las ecuaciones para la curvatura escalar después de aplicar la transformación conforme $\bar{g} = e^{2\varphi}g$; si bien se trata de resultados ampliamente conocidos, pocos son los textos clásicos de geometría que mencionan algo sobre la obtención de los mismos.

En el Capítulo 5 se presentará un poco de la estructura matemática del espacio-tiempo y se hablará sobre un espacio relevante para física: el espacio-tiempo de Minkowski. Haremos una breve introducción al problema de Yamabe Lorentziano. Revisaremos un poco sobre el uso de las transformaciones conformes para el estudio de la estructura causal del espacio-tiempo. Finalmente, revisaremos bajo qué condiciones es posible encontrar soluciones al problema de Yamabe Lorentziano en el espacio-tiempo de Minkowski (también llamado problema hiperbólico de Yamabe por Kong De-xing y Liu Qi) para el caso de dimensión $3 + 1$.

Relatividad especial

La relatividad especial fue introducida por primera vez en una publicación de Albert Einstein [6] en 1905. La teoría relaciona de una forma muy particular al tiempo y al espacio. Para hablar de esta teoría lo mejor será seguir el enfoque que el mismo Einstein utilizó en la publicación mencionada.

Tomemos un sistema de referencia estacionario. Si tuviéramos un cuerpo puntual, quieto, podríamos utilizar sólo varillas rígidas graduadas para determinar la posición de dicho cuerpo en nuestro sistema de referencia. Si el cuerpo puntual estuviera en movimiento podríamos tomar los valores de las coordenadas como función del tiempo, pero para esto deberíamos estar conscientes de aquello que entendemos por tiempo. Por experiencia, decimos que algo ocurre en cierto momento cuando miramos un reloj y asignamos una hora al acontecimiento en cuestión. Como Einstein escribió en [6], es posible evitar las dificultades que el concepto de tiempo involucra si remplazamos al tiempo por la acción de asignar a un evento una cierta hora mediante el uso de un reloj, pero entonces surgiría un problema: si nos encontramos en México con un reloj, a la espera de noticias referentes a un acontecimiento importante en otro país ¿Sería mi reloj adecuado para asignar una hora al evento en cuanto éste ocurra? Ciertamente lo mejor sería que alguien cercano al evento usara un reloj para para asignar la hora correspondiente, de modo que mi reloj sería de poca utilidad. Por supuesto que los relojes deberán operar del mismo modo, esto es, deberán ser iguales. Si se estuviera realizando un experimento, nos gustaría que nuestros relojes estuvieran sincronizados, pero... ¿Cuál sería el significado de sincronía? Supongamos que tenemos dos puntos distintos A y B en el espacio y que en dichos puntos hay relojes para que dos observadores puedan asignar un valor a los acontecimientos que ocurran cerca. Entonces sería

posible hablar del tiempo A y del tiempo B . Nótese que aún no hemos hablado de un “tiempo común”, para hacer esto estableceremos lo siguiente: el tiempo que toma a un rayo de luz para ir de A a B es el mismo tiempo que se requiere para que un rayo de luz vaya de B a A . Supongamos que un rayo de luz parte del punto A a un tiempo t_A y llega al punto B a un tiempo t_B . Al llegar al punto B el rayo es reflejado de regreso al punto A , al que llega al tiempo t'_A . Tendremos entonces que:

$$t_B - t_A = t'_A - t_B.$$

Esta expresión será la definición de sincronía entre dos relojes. Einstein elige un rayo de luz para definir la sincronía debido a la universalidad de la velocidad de la luz, descrita más adelante. Si tenemos dos relojes A y B pasará lo siguiente:

- Si A está sincronizado con B , entonces B está sincronizado con A .
- Si tenemos un tercer reloj C y ocurre que A está sincronizado con B , mientras que B está sincronizado con C , entonces A está sincronizado con C .

Una vez establecido lo anterior, lo conveniente será tener un reloj a cada punto del espacio para poder hablar del tiempo que se asigna a cada situación o acontecimiento del que queramos dar una descripción.

La discusión previa no es otra cosa que una forma “nueva” de ver las cosas; aún debemos introducir ciertas bases para cimentar la teoría. La relatividad especial se construye partiendo de los siguientes postulados:

1. Principio de relatividad: Las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales.
2. Universalidad de la velocidad de la luz: La velocidad de la luz relativa a cualquier observador no acelerado es $c = 3 \times 10^8 m/s$, sin importar la velocidad del movimiento de la fuente de luz relativo al observador.

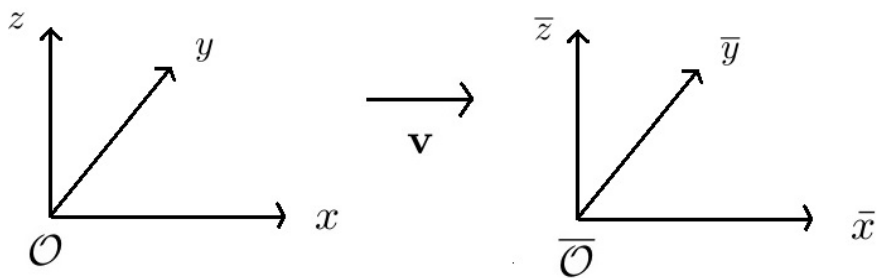
En los postulados usamos la palabra *observador*. Un *observador inercial* es un sistema de referencia inercial, esto es, un sistema de referencia que satisface

1. La distancia entre dos puntos $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $p_2 = (x_2, y_2, z_2)$ es independiente del tiempo.
2. Los relojes que están en todo punto, midiendo el tiempo, están sincronizados y corren de igual forma.
3. En cada tiempo t , constante, la geometría del espacio es Euclidiana.

Observación 1.1. *Los relojes están colocados en los puntos de intersección de la rejilla dada por un observador inercial, esto es, los puntos de un marco rígido que son etiquetados usando las coordenadas (x, y, z) .*

De ahora en adelante al usar la palabra observador nos referiremos a un observador inercial.

Tomemos un sistema de referencia, \mathcal{O} , con ejes x, y, z . Consideremos eventos que sólo ocurren en el eje x , en el sistema de referencia \mathcal{O} . Cada evento será representado por el tiempo t y la posición x . Tomemos un sistema de referencia $\bar{\mathcal{O}}$, cuyo eje \bar{x} coincide siempre con el eje x del sistema \mathcal{O} y que se mueve con velocidad v (respecto a \mathcal{O}) en la dirección positiva del eje x ; al tiempo $t = \bar{t} = 0$ los orígenes de ambos sistemas coinciden.



Si un rayo de luz viaja en la dirección positiva del eje x , por el postulado sobre la universalidad de la velocidad de la luz tendremos que éste se propagará (visto desde \mathcal{O}) como

$$x = ct,$$

o bien,

$$x - ct = 0.$$

Como en el sistema de referencia $\bar{\mathcal{O}}$ la velocidad de la luz también debe ser constante, tendremos de manera análoga:

$$\bar{x} - c\bar{t} = 0.$$

Los puntos del espacio que satisfacen $x - ct = 0$ también debe cumplir $\bar{x} - c\bar{t} = 0$. Dicha condición seguirá cumpliéndose si pedimos que se satisfaga la siguiente expresión para cualesquiera puntos del espacio:

$$\bar{x} - c\bar{t} = \lambda(x - ct),$$

donde λ es una constante no nula. Al anularse $x - ct$, el término $\bar{x} - c\bar{t}$ se anulará también. Si consideramos ahora, un rayo de luz que viaja en la dirección negativa del eje x , podremos obtener (como antes):

$$\bar{x} + c\bar{t} = \mu(x + ct).$$

Si hacemos:

$$\begin{aligned} \bar{x} - c\bar{t} &= \lambda(x - ct) \\ + \\ \bar{x} + c\bar{t} &= \mu(x + ct) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \bar{x} - c\bar{t} &= \lambda(x - ct) \\ - \\ \bar{x} + c\bar{t} &= \mu(x + ct), \end{aligned}$$

obtendremos:

$$\begin{aligned} 2\bar{x} &= (\lambda + \mu)x + (\mu - \lambda)ct \\ -2c\bar{t} &= (\lambda - \mu)x - (\lambda + \mu)ct, \end{aligned}$$

o bien,

$$\bar{x} = \frac{\lambda + \mu}{2}x + \frac{\mu - \lambda}{2}ct = ax - bct \quad (1.2)$$

$$c\bar{t} = -\frac{\lambda - \mu}{2}x + \frac{\lambda + \mu}{2}ct = -bx + act \quad (1.3)$$

donde $a := (\lambda + \mu)/2$ y $b := (\lambda - \mu)/2$. El origen en $\bar{\mathcal{O}}$ siempre tendrá la coordenada $\bar{x} = 0$, de modo que:

$$0 = ax - bct,$$

de donde se obtiene:

$$x = \frac{bct}{a},$$

por lo que la velocidad con que se mueve el sistema $\bar{\mathcal{O}}$ respecto a \mathcal{O} , será:

$$v = \frac{x}{t} = \frac{bc}{a}.$$

Ahora, si nos montamos sobre el sistema de referencia $\bar{\mathcal{O}}$, veremos que es el sistema de referencia \mathcal{O} el que se mueve en la dirección negativa de $\bar{\mathcal{O}}$ con rapidez v . Revisemos cómo es que se ven los puntos del eje \bar{x} desde el sistema de referencia \mathcal{O} . Para esto debemos “tomar una fotografía”. esto es, revisar el espacio a un tiempo fijo. Tomemos $t = 0$, de (1.2) tenemos:

$$\bar{x} = ax.$$

Si nos fijamos en dos puntos separados por una distancia $\Delta\bar{x} = 1$, medida desde $\bar{\mathcal{O}}$, en la fotografía (tomada desde \mathcal{O}) los puntos tendrán una separación

$$\Delta x = \frac{\Delta\bar{x}}{a} = \frac{1}{a}.$$

Si al instante $\bar{t} = 0$, tomamos una fotografía desde $\bar{\mathcal{O}}$, usando la ecuación (1.3) tendremos:

$$x = \frac{act}{b},$$

o bien,

$$t = \frac{bx}{ac}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= ax - bct = ax - bc \left(\frac{bx}{ac} \right) \\ &= ax - b^2 \frac{x}{a},\end{aligned}$$

pero $v = bc/a$, de modo que:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= ax - b^2 \frac{x}{a} = ax - \left(\frac{va}{c} \right)^2 \frac{x}{a} \\ &= a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) x.\end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que dos puntos en \mathcal{O} , separados una distancia $\Delta x = 1$ (medida desde \mathcal{O}), en la fotografía tomada desde $\bar{\mathcal{O}}$ tendrán una separación

$$\Delta \bar{x} = a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right).$$

Por el principio de relatividad ambas fotografías deben ser idénticas, esto es, $\Delta x = \Delta \bar{x}$. Por lo tanto:

$$\frac{1}{a} = a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right).$$

Escrito de otro modo:

$$a^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)},$$

con lo cual encontramos los valores de a y b :

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$b = \frac{v}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Entonces, para pasar de un sistema de referencia a otro tenemos:

$$\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(x - vt)$$
$$\bar{t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left(t - \frac{v}{c^2}x\right).$$

Las transformaciones anteriores son conocidas como *transformaciones de Lorentz* para eventos sobre el eje x . Notemos que las transformaciones satisfacen:

$$\begin{aligned}\bar{x}^2 - c^2\bar{t}^2 &= \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}(x - vt)^2 - \frac{c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)^2 \\ &= \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\left(x^2 - 2xvt + v^2t^2 - c^2t^2 + 2xvt - \frac{v^2}{c^2}x^2\right) \\ &= \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)x^2 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)c^2t^2\right] \\ &= x^2 - c^2t^2.\end{aligned}$$

Debemos ver lo que ocurre para puntos fuera del eje x , esto es, debemos encontrar las transformaciones para \bar{y}, \bar{z} . Las transformaciones restantes son:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= y \\ \bar{z} &= z.\end{aligned}$$

Supongamos que los sistemas de referencia \mathcal{O} y $\bar{\mathcal{O}}$ al tiempo $t = 0$ coinciden en el origen, de donde se emite una señal luminosa, arbitraria. La señal descrita se propagará de la siguiente forma en \mathcal{O} :

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2.$$

En el caso del sistema de referencia $\bar{\mathcal{O}}$, la propagación será análoga:

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = (c\bar{t})^2,$$

de modo que, como en el caso previo, deberá satisfacerse la relación:

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = \xi[\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - (c\bar{t})^2],$$

donde ξ es una constante por determinar. Si tomamos un punto sobre el eje deberá cumplirse, como ya vimos, la relación $\bar{x}^2 - c^2\bar{t}^2 = x^2 - c^2t^2$. Lo anterior nos permite concluir que $\xi = 1$; por lo cual se sigue que:

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - (c\bar{t})^2$$

y entonces, las *transformaciones de Lorentz* no dependerán de la dirección de la señal de luz.

Tomaremos un sistema de unidades para las cuales $c = 1$. Lo anterior resulta de adoptar al metro como nueva unidad de tiempo. Un metro de tiempo será el tiempo que toma a la luz viajar un metro.

$$\begin{aligned}c &= \frac{\text{distancia que la luz viaja en un intervalo de tiempo dado}}{\text{intervalo de tiempo dado}} \\ &= \frac{1m}{\text{tiempo que tarda la luz en viajar } 1m} = \frac{1m}{1m} = 1\end{aligned}$$

Todo esto se conoce como unidades naturales y, evidentemente, al usar unidades naturales, toda cantidad física conocida deberá tener unidades acordes a la convención introducida. Si bien esta idea puede contradecir nuestra intuición, es necesario recordar que la humanidad definió de manera conveniente para sus propósitos las unidades de medida a las que tanto estamos acostumbrados. Además, tomar el valor de $c = 1$ hará más tratables muchas ecuaciones, pues no dependerán de constantes de proporcionalidad como c . Utilizando unidades naturales, las *transformaciones de Lorentz* se escribirán de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\bar{t} &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(t - vx) \\ \bar{x} &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(x - vt) \\ \bar{y} &= y \\ \bar{z} &= z.\end{aligned}$$

Cabe señalar que nada impide al sistema de referencia $\bar{\mathcal{O}}$ moverse en la dirección y o en la dirección z , por lo que si se da uno de estos casos las *transformaciones de Lorentz* cambiarán de forma obvia.

Notemos que es interesante tener una transformación para pasar del tiempo medido en un sistema de referencia al tiempo medido desde otro sistema de referencia, de modo que la transformación es diferente a como lo haríamos bajo transformaciones Galileanas (ambos tiempos serían iguales). Lo anterior (así como el hecho de que dicha transformación haya surgido de dos postulados y del movimiento relativo de los sistemas de referencia considerados) nos hace pensar sobre la estrecha relación que hay entre espacio y tiempo, y en que no pueden ser cosas separadas en esta teoría sino que deben ser algo un tanto más homogéneo: el espacio-tiempo. Dejaremos de ver al tiempo como un parámetro y, matemáticamente, será una coordenada más que nos permitirá dar cuenta de fenómenos físicos. El espacio-tiempo estará conformado entonces por puntos de la forma (t, x, y, z) (por convención el tiempo se escribirá delante de las coordenadas espaciales). Un *punto* a un tiempo y coordenadas espaciales específicas es llamado *evento*.

Definiremos al intervalo entre cualesquiera dos eventos separados por incrementos coordenados $(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ como:

$$\Delta S^2 = -(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2,$$

donde (t_1, x_1, y_1, z_1) y (t_2, x_2, y_2, z_2) son dos eventos cualesquiera y $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta z = z_2 - z_1$.

Sean \mathcal{O} y $\overline{\mathcal{O}}$ observadores inerciales. El intervalo entre cualesquiera dos eventos es tal que:

$$\Delta \overline{S}^2 = \Delta S^2.$$

Las *transformaciones de Lorentz* garantizan lo anterior. Dicho de otra forma, el intervalo entre cualesquiera dos eventos es el mismo para cualesquiera dos observadores; el hecho de que esta cantidad sea invariante entre observadores inerciales es justamente lo que nos hace definirla como el intervalo o distancia ente dos eventos.

El hecho de que ΔS^2 no depende de los observadores nos permite utilizar esta cantidad para clasificar cualesquiera dos eventos. Si $\Delta S^2 > 0$ entonces diremos que los eventos están espacialmente separados, si $\Delta S^2 < 0$ los eventos estarán temporalmente separados y si $\Delta S^2 = 0$ diremos que los eventos tienen separación nula. Para ver mejor lo que implica esta clasificación será necesario introducir los diagramas de espacio-tiempo.

Considérese un espacio-tiempo 2-dimensional x vs. t (lo pedimos bidimensional para visualizar fácilmente lo siguiente). Como ya mencionamos, un punto (t, x) fijo será llamado evento. Una línea en este espacio estará dada por la relación $x = x(t)$ y podrá representar la posición de una partícula a varios tiempos. Dicha línea se conoce como línea de mundo y su pendiente se relaciona con la velocidad de la partícula en cuestión. La Fig. 1.1 ilustra lo anterior.

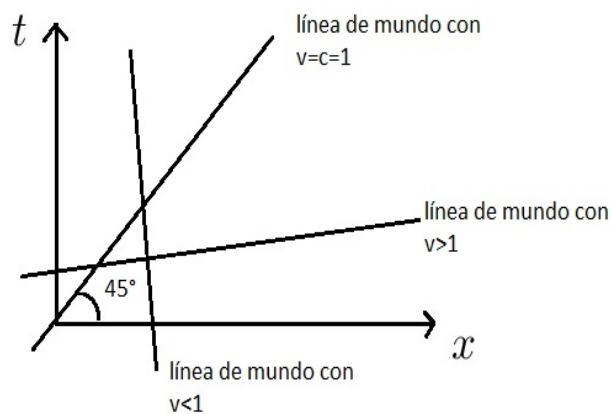


Figura 1.1: Ejemplo de diagrama espacio-tiempo

Tomemos ahora un evento **E** en el espacio 2-dimensional de antes (para visualizar las cosas fácilmente). En base al diagrama de la Fig. 1.1 tendremos que los eventos con separación nula respecto a **E** formarán un cono con ápice **E**. Los eventos con separación temporal respecto a **E** vivirán dentro del cono y los que tienen una separación espacial vivirán fuera de él. Algo importante es que nada puede moverse más rápido que la velocidad de la luz, de modo que la línea de mundo de un cuerpo en **E** vivirá dentro del cono. Los eventos dentro del cono de luz serán alcanzables para el cuerpo en **E**, mientras que los de afuera no lo serán. Por todo esto los eventos dentro del cono, arriba de **E**, se conocen como futuro absoluto mientras aquellos dentro del cono y que están debajo de **E** se conocen como pasado absoluto.

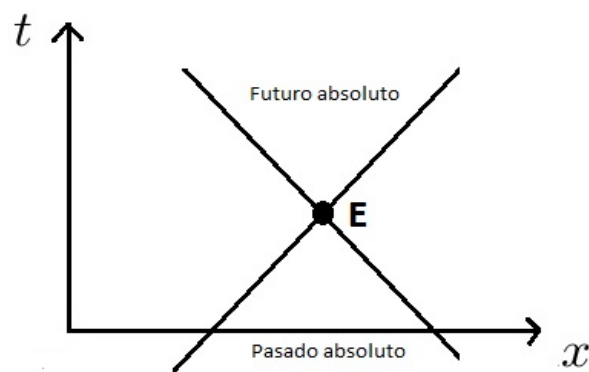


Figura 1.2: Cono de luz.

Tenemos una teoría que es compatible con el electromagnetismo (recordemos que Einstein concibió la relatividad especial, inicialmente, para explicar fenómenos relacionados al electromagnetismo), pero que requiere de un tratamiento un poco más geométrico al intentar hablar de la gravedad.

Consideremos el principio de equivalencia débil que nos dice que la masa inercial es igual a la masa gravitacional para cualquier cuerpo (ésta es la forma que toma el principio inicialmente). La masa inercial es la constante de proporcionalidad entre una fuerza aplicada a un cuerpo y la aceleración que dicho cuerpo siente, esto es, la masa inercial es la que aparece en la segunda ley de Newton: $\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}$. La masa gravitacional es la constante de proporcionalidad que relaciona a la fuerza que siente un cuerpo debido a la gravedad y al gradiente del campo gravitacional: $\mathbf{F}_g = -m_g \nabla \Phi$. Galileo, al dejar caer objetos en la torre de Pisa, se dió cuenta de que la gravedad actúa de igual forma sobre todos los cuerpos, con lo que el principio de equivalencia débil queda escrito como:

$$m_i = m_g,$$

que a su vez implica:

$$\mathbf{a} = -\nabla \Phi.$$

El principio de equivalencia débil puede escribirse entonces de la siguiente manera: en experimentos en que sólo dejamos caer objetos en presencia de un campo gravitacional uniforme, los efectos debidos a la aceleración uniforme del sistema serán indistinguibles de aquellos debidos a la gravedad. Notemos que el campo gravitacional terrestre hará caer dos cuerpos muy alejados entre sí en direcciones distintas (Fig.1.3). Es por detalles como la inhomogeneidad del campo gravitacional que el principio de equivalencia débil puede reescribirse como: las leyes de los cuerpos que caen libremente (es decir, exclusivamente bajo la acción de la gravedad) en un campo gravitacional y en un sistema de referencia uniformemente acelerado son las mismas en una región suficientemente pequeña del espacio (el principio adquiere un carácter local).

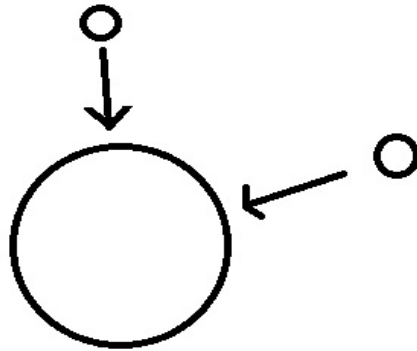


Figura 1.3: Cuerpos siendo afectados por el campo gravitacional terrestre.

Einstein pensó en generalizar el principio de equivalencia débil, buscando que dicho principio fuese válido no sólo para experimentos en que cuerpos caen libremente, sino para cualquier experimento realizado. Lo anterior llevó a lo que conocemos hoy como principio de equivalencia de Einstein: en regiones pequeñas del espacio-tiempo las leyes de la física se reducen a aquellas descritas por la relatividad especial; no es posible detectar la existencia de un campo gravitacional mediante experimentos locales. En relatividad especial los sistemas de referencia que utilizamos son los inerciales y dichos sistemas son aquellos que no están acelerados entre sí (recordemos que el principio de relatividad, en cierta forma, acaba con la noción de que los sistemas de referencia están “fijos”). Como en el caso de la gravedad no tenemos un cuerpo que no sea afectado por ella y que podamos usar para determinar la aceleración debida a la gravedad, será necesario determinar cuáles serán los sistemas de referencia inerciales a utilizar. En base a la discusión realizada, será necesario que los sistemas de referencia inerciales sean aquellos que caen libremente. Si usamos los sistemas de referencia inerciales del modo descrito y como en relatividad especial, construimos dichos sistemas mediante barras rígidas y colocando relojes en cada punto del espacio, nos encontraremos con problemas: si usamos un sistema de referencia inercial como en relatividad especial y consideramos dos cuerpos muy alejados entre sí cayendo libremente hacia la Tierra, colocando el sistema de referencia en uno de los cuerpos, el cuerpo restante parecerá acelerado respecto al sistema de referencia inercial utilizado (Fig. 1.4). Es entonces que definimos los sistemas de referencia inerciales locales como aquellos que siguen la trayectoria de cuerpos que caen libremente en una región muy pequeña del espacio-tiempo. Para poder utilizar lo anterior, lo natural será apelar a una teoría matemática que nos permita construir sistemas de referencia inerciales de manera local, a saber, la geometría Riemanniana.

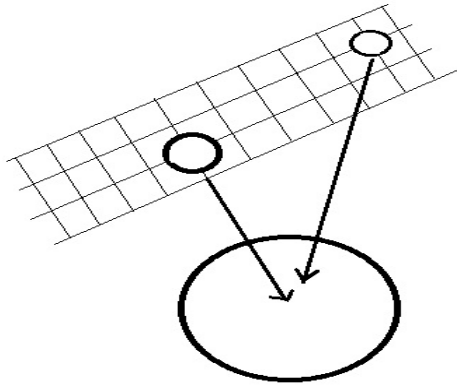


Figura 1.4

2.1. Variedades diferenciales

Definición 2.1. Sea M un espacio topológico. Decimos que M es una variedad topológica de dimensión n si cumple las siguientes propiedades:

1. M es de Hausdorff.
2. M es segundo numerable.
3. Para cada punto $p \in M$, existe una vecindad de p que es homeomorfa a un abierto de \mathbb{R}^n .

Definición 2.2. Sea M una variedad topológica, Una carta coordenada sobre M es un par (U, x) , donde U es un subconjunto abierto de M y $x : U \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo. El mapeo x es llamado mapeo coordenado (local) y las funciones componentes (x^1, \dots, x^n) de x , definidas como $x(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$, son llamadas coordenadas locales.

Definición 2.3. Sea $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una colección de cartas valuadas en \mathbb{R}^n sobre un conjunto M . Decimos que \mathcal{A} es un atlas de clase C^r si se satisface lo siguiente:

1. $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha = M$.
2. Los conjuntos de la forma $x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ para $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ son todos abiertos en \mathbb{R}^n .
3. Si $U_\alpha \cap U_\beta$ es no vacío, la función

2.1. VARIEDADES DIFERENCIALES

$$x_\beta \circ x_\alpha^{-1} : x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

es un difeomorfismo C^r .

Definición 2.4. Sean \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 atlas de clase C^r sobre M . Decimos que \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 son equivalentes si $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ es también un atlas de clase C^r para M . Una estructura diferenciable C^r en M es una clase de equivalencia de atlas C^r , dicha relación de equivalencia está dada trivialmente por la equivalencia de atlas C^r . Una estructura C^∞ es llamada estructura suave.

Diremos que un par de cartas (U, x) y (V, y) estarán C^r -relacionadas si $U \cap V = \emptyset$ o si $x(U \cap V)$ y $y(U \cap V)$ son abiertos y además $x \circ y^{-1}$, $y \circ x^{-1}$ son funciones C^r . Decimos también que una carta (U, x) es compatible con un atlas \mathcal{A} de clase C^r si $\mathcal{A} \cup U$ es también un atlas de clase C^r . Un atlas maximal de clase C^r determinado por un atlas \mathcal{A} consiste en todas las cartas compatibles con \mathcal{A} . Una carta de un atlas maximal será llamada admisible si da la estructura diferenciable a M .

Definición 2.5. Una variedad diferencial de clase C^r , (M, \mathcal{A}) , es un conjunto M equipado con un atlas maximal \mathcal{A} tal que la topología inducida por dicho atlas hace al conjunto M de Hausdorff y paracompacto. Si las cartas toman valores en \mathbb{R}^n , entonces diremos que la variedad tiene dimensión n . Si la variedad es de clase C^∞ diremos que es una variedad suave.

Funciones suaves

Definición 2.6. Sean M una variedad suave de dimensión n , k un número entero no negativo y $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$. Decimos que f es una función suave si para cada $p \in M$ existe una carta (U, x) con $p \in U$ y tal que la función $f \circ x^{-1}$ es suave.

Observación 2.7. Si f fuese de clase C^r , en la definición anterior deberíamos cambiar la palabra suave por de clase C^r .

Definición 2.8. Sean M, N variedades suaves y sea $F : M \rightarrow N$ cualquier función. Decimos que F es suave si para cada $p \in M$ existen cartas $(U, x), (V, y)$ que contengan a p y $F(p)$, respectivamente, tales que $x(U) \subset V$ y que $y \circ F \circ x^{-1}$ es suave como función de $x(U)$ a $y(V)$.

2.2. Vectores tangentes

Escribiremos $C^r(M)$ para referirnos al conjunto $C^r(M, \mathbb{R})$, esto es, el conjunto de las funciones $M \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^r .

Definición 2.9. Sea M una variedad suave y sea $p \in M$ un punto. Un mapeo lineal $v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ es llamado derivación en p , si satisface:

$$v(fg) = f(p)v_g + g(p)v_f \quad \text{para toda } f, g \in C^\infty(M).$$

El conjunto de todas las derivaciones de $C^\infty(M)$ en p , denotado $T_p M$, es un espacio vectorial llamado espacio tangente a M en p . Un elemento de $T_p M$ es llamado vector tangente en p y se denota como v o como v_p para dejar en claro el espacio tangente al que pertenece.

Lema 2.10. Supongamos que M es una variedad suave. Sean $p \in M$, $v_p \in T_p M$ y $f, g \in C^\infty(M)$.

1. Si $f, g \in C^\infty(M)$ son iguales en alguna vecindad de $p \in M$, entonces $v_p(f) = v_p(g)$.
2. Si $h \in C^\infty(M)$ es constante en alguna vecindad de $p \in M$, entonces $v_p(h) = 0$.

Demostración. 1. Sea U una vecindad de p tal que $f = g$ sobre U . Tomemos una función β con soporte compacto en U y $\beta(p) = 1$. Consideremos una función $\eta \in C^\infty(M)$ tal que $\eta = 0$ en U . Entonces tenemos que $\eta\beta = 0$ y por lo tanto:

$$0 = v_p(\eta\beta) = \eta(p)v_p(\beta) + \beta(p)v_p(\eta) = v_p(\eta).$$

El resultado deseado se sigue de la linealidad de v_p .

2. Por lo que acabamos de probar, será suficiente demostrar el resultado para el caso $h = c$ (una constante) sobre toda la variedad. Revisemos el caso en que tenemos la función constante 1:

$$v_p(1) = v_p(1 \cdot 1) = 1 \cdot v_p(1) + 1 \cdot v_p(1) = 2v_p(1).$$

Por lo tanto $v_p(1) = 0$. Para el caso general $h = c$ se tiene:

2.2. VECTORES TANGENTES

$$v_p(c) = v_p(1 \cdot c) = c(v_p(1)) = 0.$$

□

Teorema 2.11. *Sea M una variedad suave de dimensión n y sea (U, x) una carta con $p \in U$. Entonces la n -tupla de vectores $(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p)$ es una base para T_pM . Para cada $v_p \in T_pM$, tendremos que:*

$$v_p = \sum_{i=1}^n v_p(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p.$$

Demostración. Tomemos una carta (U, x) con $p \in U$. Supondremos que $x(U)$ es una bola de radio ε en \mathbb{R}^n (esto pues hay una equivalencia entre usar las cartas como las definimos y usar bolas abiertas [14]), esto es, $x(U)$ es un conjunto convexo. Mediante una traslación podemos hacer que $x(p) = 0$. Para cualquier función suave g definida sobre el convexo $x(U)$, definiremos:

$$g_i(u) := \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u^i}(tu) dt \quad \text{para toda } u \in x(U),$$

de la regla de la cadena se sigue que:

$$\begin{aligned} g(u) - g(0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} g(tu) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial u^i}\Big|_{tu} \frac{d}{dt}(tu^i) dt \\ &= \sum_{i=1}^n u^i \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u^i}\Big|_{tu} dt \\ &= \sum_{i=1}^n g_i u^i. \end{aligned}$$

Si hacemos $g = f \circ x^{-1}$ para $f \in C^\infty(M)$, se tendrá $f = f(p) + \sum_{i=1}^n f_i x^i$ con $f_i := \int_0^1 \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial x^i}\Big|_{tx} dt$. Aplicando la derivación $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ a f , obtendremos:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_j}{\partial x^i}\Big|_p \right) x^j(p) + f_i(p) = f_i(p).$$

Aplicando la derivación v_p a f , se sigue que:

$$\begin{aligned} v_p f &= \cancel{v_p(f(p))} + \sum_{i=1}^n v_p(f_i x^i) \\ &= \sum_{i=1}^n [f_i(p) v_p(x^i) + \cancel{x^i(p)} v_p(f_i)] \\ &= \sum_{i=1}^n v_p(x^i) \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\}$ genera a $T_p M$. Para ver que la propuesta de base es linealmente independiente, hagamos:

$$0 = v_p(x^j) = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \Big|_p = \sum_{i=1}^n a^i \delta_i^j = a^j.$$

Por lo tanto, $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\}$ es una base de $T_p M$.

□

Observación 2.12. Usaremos indistintamente la siguiente notación para las derivadas parciales:

$$\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Además usaremos la notación de suma de Einstein: si se tienen términos con índices repetidos, uno arriba y otro abajo, entonces se tiene una suma sobre dichos índices. Un ejemplo sería la expresión local para v_p :

$$v_p = \sum_{i=1}^n v^i \partial_i \Big|_p = v^i \partial_i \Big|_p.$$

En caso de hablar de una variedad suave cualquiera M , supondremos que tiene dimensión n salvo que se indique lo contrario. En algunos casos escribiremos M^n para ser más específicos sobre la dimensión de la variedad.

2.3. HAZ TANGENTE

Definición 2.13. Sea $f : M \rightarrow N$ una función suave entre variedades y tomemos $v_p \in T_p M$ para algún $p \in M$. El mapeo tangente en p

$$T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N,$$

se define como el mapeo que hace a $T_p f \cdot v_p$ una derivación:

$$(T_p f \cdot v_p)g = v_p(g \circ f)$$

para cualquier función suave $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. En buena parte de la bibliografía disponible, el mapeo tangente se denota por f_* .

Definición 2.14. Una función $f : M \rightarrow N$ es llamada *inmersión* en $p \in M$ si $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ es una inyección. Una función $f : M \rightarrow N$ es llamada *inmersión* si es una inmersión para cada $p \in M$.

Definición 2.15. Si $f : M \rightarrow N$ es una inmersión que además es un homeomorfismo en su imagen, entonces decimos f que es un *encaje*.

Definición 2.16. Si \mathfrak{C} es una variedad de dimensión $n - 1$ y $\theta : \mathfrak{C} \rightarrow M$ es un encaje, la imagen de \mathfrak{C} , $\theta(\mathfrak{C})$, se conoce como *hipersuperficie*.

Definición 2.17. Sea M una variedad suave y sea $p \in M$. Para $f \in C^\infty(M)$, definimos al diferencial de f en p como el mapeo lineal $df(p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$df(p) \cdot v_p = v_p f$$

para todo $v_p \in T_p M$.

2.3. Haz tangente

Definimos al haz tangente de M^n , denotado por TM , como la unión ajena de los espacios tangentes a todos los puntos de M :

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M.$$

Usualmente se escribe a los elementos de TM como pares ordenados (p, v) , con $p \in M$ y $v \in T_p M$. El haz tangente está equipado con una proyección natural $\pi : TM \rightarrow M$.

Es posible dar una estructura diferenciable a TM , esto es, TM es una variedad diferenciable de dimensión $2n$. Tomemos una carta (U, x) para M . $\pi^{-1}(U) \subset TM$ es el conjunto de todos los vectores tangentes a M a todos los puntos de U . Sean (x^1, \dots, x^n) las funciones coordenadas de x y definamos $\tilde{x} : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ como:

$$\tilde{x}(v^i \partial_i|_p) = (x^1(p), \dots, x^n(p), v^1, \dots, v^n).$$

Entonces (π^{-1}, \tilde{x}) será una carta. Podemos construir más cartas para TM usando el resto de las cartas para M , con lo cual daremos una estructura suave a TM .

Definición 2.18. *Sea M una variedad suave. Un campo vectorial suave sobre M es una sección suave del haz $\pi : TM \rightarrow M$, esto es, un mapeo suave $X : M \rightarrow TM$ tal que $\pi \circ X = Id_M$. Al conjunto de campos vectoriales suaves sobre M , lo denotamos $\mathfrak{X}(M)$.*

Observación 2.19. *Un campo vectorial no necesariamente debe ser suave, sin embargo, nuestro interés se restringirá a los campos suaves y por ello al hablar de campos vectoriales supondremos que se trata de campos suaves salvo que se indique lo contrario.*

Supongamos que M^n es una variedad suave. Si $X : M \rightarrow TM$ es un campo vectorial y (U, x) es una carta coordenada para M , podemos escribir el valor de X en cualquier punto $p \in U$ en términos de los correspondientes vectores base

$$X_p := X(p) = X^i(p) \partial_i|_p.$$

lo anterior define n funciones $X^i : U \rightarrow \mathbb{R}$, llamadas funciones componentes de X en la carta dada.

Definición 2.20. *Dado un mapeo suave $f : M \rightarrow N$, los mapeos tangentes $T_p f$ de cada espacio tangente $T_p M$ pueden combinarse para dar lugar a un mapeo*

$$Tf : TM \rightarrow TN$$

2.4. PULL-BACK Y PUSH-FORWARD

sobre el haz tangente. El mapeo Tf es lineal sobre cada $\pi^{-1}(p)$. El mapeo Tf también es llamado mapeo tangente.

Definición 2.21. si $f : M \rightarrow V$, donde V es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces tenemos al diferencial $df(p) : T_pM \rightarrow V$ para cada $p \in M$. Combinando cada mapeo obtenemos un único mapeo $df : TM \rightarrow V$, definido como

$$df(v) = df(p)(v)$$

cuando $v \in T_pM$. Si identificamos al producto $V \times V$, entonces tendremos $df = pr_2 \circ Tf$, donde $pr_2 : TV = V \times V \rightarrow V$ es la proyección en el segundo factor.

2.4. Pull-back y push-forward

Dado un difeomorfismo $\phi : M \rightarrow N$, definimos al pull-back $\phi^*Y \in \mathfrak{X}(M)$ para $Y \in \mathfrak{X}(N)$ y al push-forward $\phi_*X \in \mathfrak{X}(N)$ de $X \in \mathfrak{X}(M)$ mediante ϕ , como

$$\begin{aligned}\phi^*Y &= T\phi^{-1} \circ Y \circ \phi \\ \phi_*X &= T\phi \circ X \circ \phi^{-1}.\end{aligned}$$

En el caso de funciones cualesquiera, el pull-back se define como $\phi^*g = g \circ \phi$, para cualquier función suave $g \in C^\infty(\mathbb{N})$.

Observación 2.22. El haber denotado al mapeo tangente como Tf en lugar de f_* para $f : M \rightarrow N$, es justo para evitar confusión con el uso del push-forward.

2.5. Haces vectoriales

Definición 2.23. Sea M un espacio topológico. Un haz vectorial (real) de rango k sobre M es un espacio topológico E equipado con un mapeo suprayectivo y continuo $\pi : E \rightarrow M$ que satisface:

1. Para cada $p \in M$, la fibra $E_p = \pi^{-1}(p)$ sobre p , está dotada con la estructura de un espacio vectorial real de dimensión k .
2. Para cada $p \in M$, existe una vecindad U de $p \in M$ y un homeomorfismo $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ (llamado trivialización local de E sobre U) que satisface las siguientes condiciones:
 - $\pi_U \circ \phi = \pi$ (donde $\pi_U : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow U$ es una proyección).
 - Para cada $q \in U$, la restricción de ϕ a E_q es un isomorfismo entre espacios vectoriales que va de E_q a $\{q\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$.

Si M y E son variedades suaves, π es suave y las trivializaciones locales pueden ser elegidas como difeomorfismos en sus respectivas imágenes, decimos que E es un haz vectorial suave.

El espacio E se conoce como el **espacio total del haz**, M es llamado **espacio base** y π es su **proyección**. Se suele decir que $\pi : E \rightarrow M$ es un haz vectorial (esto para enfatizar los elementos que conforman al haz en cuestión).

Proposición 2.24. Sea M una variedad suave de dimensión n . TM es un haz vectorial suave de rango n sobre M .

Demostración. Tomemos una carta cualquiera (U, x) para M , con coordenadas (x^i) . Definamos $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ como

$$\phi(v^i \partial_i|_p) = (p, (v^1, \dots, v^n)).$$

La expresión anterior es lineal en las fibras $\pi^{-1}(p)$ y además

$$\pi_1 \circ \phi(v^i \partial_i|_p) = \pi_1(p, (v^1, \dots, v^n)) = p,$$

esto es, $\pi_1 \circ \phi = \pi$. La composición

$$\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\phi} U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{x \times Id_{\mathbb{R}^n}} x(U) \times \mathbb{R}^n$$

será:

$$\begin{aligned} (x \times Id_{\mathbb{R}^n}) \circ \phi(v^i \partial_i|_p) &= (x \times Id_{\mathbb{R}^n})(p, (v^1, \dots, v^n)) \\ &= (x^1(p), \dots, x^n(p), v^1, \dots, v^n). \end{aligned}$$

2.5. HACES VECTORIALES

Siendo precisos, la composición anterior es igual al mapeo coordenado \tilde{x} con el que se dotó de una estructura suave a TM . Al ser \tilde{x} y $x \times Id_{\mathbb{R}^n}$ difeomorfismos, entonces ϕ también debe serlo. Se tiene que ϕ satisface las condiciones para ser una trivialización local suave. □

Podría darse el caso de que exista una trivialización local de E sobre toda M , entonces dicho haz será llamado *haz trivial*. Generalmente no encontraremos *haces triviales* por lo que tendremos varias trivializaciones locales. Si tenemos traslapes entre trivializaciones, éstos tomarán una forma simple.

Lema 2.25. *Sea $\pi : E \rightarrow M$ un haz vectorial suave de rango k sobre M . Supongamos que $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ y $\psi : \pi^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{R}^k$ son dos trivializaciones locales suaves de E , que satisfacen $U \cap V \neq \emptyset$. Existe un mapeo suave $\tau : U \cap V \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$ tal que la composición*

$$\phi \circ \psi^{-1} : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \rightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^k$$

tiene la forma:

$$\phi \circ \psi^{-1}(p, v) = (p, \tau(p)v),$$

donde $\tau(p)v$ denota a la matriz de $k \times k$, $\tau(p)$, actuando sobre el vector $v \in \mathbb{R}^k$.

Demostración. El siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} (U \cap V) \times \mathbb{R}^k & \xleftarrow{\psi} & \pi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\phi} & (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \\ & \searrow \pi_1 & \downarrow \pi & \swarrow \pi_1 & \\ & & U \cap V & & \end{array}$$

Es importante aclarar que ψ y ϕ se interpretan, en el diagrama, como restricciones sobre $\pi^{-1}(U \cap V)$. Del diagrama se sigue que $\pi_1 \circ (\phi \circ \psi^{-1}) = \pi$, entonces $\phi \circ \psi^{-1}$ debe ser de la forma:

$$\phi \circ \psi^{-1}(p, v) = (p, \sigma(p, v))$$

para alguna función $\sigma : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$. Como ϕ y ψ son suaves, entonces la composición $\phi \circ \psi$ también lo es y entonces σ también es suave. Para cada $p \in M$

fija, tomemos el mapeo $v \mapsto \sigma(p, v)$ de \mathbb{R}^k en sí mismo. Al ser ϕ y ψ isomorfismos sobre E_p , el mapeo $v \mapsto \sigma(p, v)$ será lineal y además invertible. Entonces debe existir una matriz $\tau(p)$ de $k \times k$ tal que $\sigma(p, v) = \tau(p)v$ para $v \in \mathbb{R}^k$. Como σ es suave y determina a $\tau(p)$, entonces $\tau : U \cap V \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$ debe ser suave. \square

El mapeo $\tau : U \cap V \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$ descrito, se conoce como *función de transición* entre las trivializaciones locales ϕ y ψ .

El siguiente lema permitirá identificar con mayor facilidad un haz vectorial.

Lema 2.26. *Sea M^n una variedad suave y supóngase que para cada $p \in M$ tenemos un espacio vectorial real E_p de dimensión fija k . Sea $E = \bigcup_{p \in M} E_p$ y sea $\pi : E \rightarrow M$ la función que toma cada elemento de E_p y lo manda a p . Supóngase que además se tiene lo siguiente:*

1. Una cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de M .
2. Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, tenemos una función biyectiva $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$, cuya restricción a cada E_p , es un isomorfismo de espacios vectoriales de E_p a $\{p\} \times \mathbb{R}^k$.
3. Para cada $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, se tiene una función suave $\tau_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$ tal que

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k$$

tiene la forma:

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(p, v) = (p, \tau(p)v).$$

Entonces E tiene una única topología y una estructura suave que le convierten en una variedad diferencial y en un haz vectorial suave de rango k sobre M , con π como proyección y $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ como trivializaciones locales suaves.

Demostración. Para cada $p \in M$ elegiremos algún U_α tal que $p \in U$. Tomaremos una carta (V_p, φ_p) tal que $p \in V_p \subseteq U_\alpha$ y definiremos $\widehat{V}_p := \varphi_p(V_p) \subseteq \mathbb{R}^n$. Definimos a la función $\tilde{\varphi}_p : \pi^{-1}(V_p) \rightarrow V_p \times \mathbb{R}^k$, como $\tilde{\varphi}_p = (\varphi_p \times Id_{\mathbb{R}^k}) \circ \phi_\alpha$:

$$\pi^{-1}(V_p) \xrightarrow{\phi_\alpha} V_p \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{\varphi_p \times Id_{\mathbb{R}^k}} \widehat{V}_p \times \mathbb{R}^k \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^{n+k}.$$

2.5. HACES VECTORIALES

Afirmamos que $\{(\pi^{-1}(V_p), \tilde{\varphi}_p)\}_{p \in M}$ son cartas que le dan una estructura diferenciable a E . Siendo más concretos, la propuesta de cartas que se ha dado satisface las condiciones del siguiente lema:

Lema 2.27. *Sea M un conjunto y supongamos que tenemos una colección $\{U_\alpha\}$ de subconjuntos de M junto con funciones $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$, tales que las siguientes propiedades se satisfacen*

1. *Para cada α , φ_α es una biyección entre U_α y un subconjunto abierto $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$.*
2. *Para cada α, β los conjuntos $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ y $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ son abiertos de \mathbb{R}^n .*
3. *Cuando $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, la función $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es suave.*
4. *Una cantidad numerable de conjuntos U_α cubren a M .*
5. *Cuando p, q son puntos distintos en M , existe algún U_α tal que $p, q \in U_\alpha$ o bien, existen conjuntos U_α y U_β con $p \in U_\alpha$ y $q \in U_\beta$.*

Entonces M tiene una única estructura de variedad suave tal que cada $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ es una carta suave.

Entonces tenemos:

1. φ_α es una biyección, en su dominio, al igual que $Id_{\mathbb{R}^k}$, entonces $\varphi_p \times Id_{\mathbb{R}^k}$ es una biyección. Por hipótesis, φ_α es biyectiva y por lo tanto $\tilde{\varphi}_p = (\varphi_p \times Id_{\mathbb{R}^k}) \circ \varphi_\alpha$ es biyectiva en un abierto de \mathbb{R}^{n+k} .
2. Sean $p, q \in M$, entonces:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_p(\pi^{-1}(V_p) \cap \pi^{-1}(V_q)) &= [(\varphi_p \times Id_{\mathbb{R}^k}) \circ \varphi_\alpha][\pi^{-1}(V_p \cap V_q)] \\ &= [\varphi_p \times Id_{\mathbb{R}^k}][\varphi_\alpha(\pi^{-1}(V_p \cap V_q))] \\ &= [\varphi_p \times Id_{\mathbb{R}^k}][(V_p \cap V_q) \times \mathbb{R}^k] \\ &= \varphi_p(V_p \cap V_q) \times \mathbb{R}^k. \end{aligned}$$

Como V_p y V_q son abiertos en M y dado que φ es un mapeo coordenado, entonces $\varphi(V_p \cap V_q)$ es abierto en \mathbb{R}^n . Se sigue que $\varphi(V_p \cap V_q) \times \mathbb{R}^k$ es abierto en \mathbb{R}^{n+k} y por lo tanto, $\tilde{\varphi}_p(\pi^{-1}(V_p) \cap \pi^{-1}(V_q))$ es abierto en \mathbb{R}^{n+k} .

3. Consideremos que $\pi^{-1}(V_p) \cap \pi^{-1}(V_q) \neq \emptyset$ para algunos $p, q \in M$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varphi}_p \circ \tilde{\varphi}_p^{-1} &= [(\varphi_p \times Id_{\mathbb{R}^k}) \circ \phi_\alpha] \circ [(\varphi_q \times Id_{\mathbb{R}^k}) \circ \phi_\beta]^{-1} \\
 &= [(\varphi_p \times Id_{\mathbb{R}^k}) \circ \phi_\alpha] \circ [\phi_\beta^{-1} \circ (\varphi_q \times Id_{\mathbb{R}^k})^{-1}] \\
 &= (\varphi_p \times Id_{\mathbb{R}^k}) \circ (\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}) \circ (\varphi_q \times Id_{\mathbb{R}^k}).
 \end{aligned}$$

Trivialmente tenemos que $Id_{\mathbb{R}^k}$ es suave y al ser mapeos coordenados $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ también lo son. Se sigue que $\varphi_p \times Id_{\mathbb{R}^k}$ y $\varphi_q \times Id_{\mathbb{R}^k}$ son suaves. Dado que la *función de transición* $\tau_{\alpha\beta}$ es suave se sigue que $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ es también un difeomorfismo y entonces $\tilde{\varphi}_p \circ \tilde{\varphi}_p^{-1}$ es suave.

4. Al ser M paracompacta, la cubierta $\{V_p | p \in M\}$ tiene una subcubierta numerable, digamos $\{V_{p_\theta}\}_{\theta \in \mathbb{N}}$, que permite cubrir a E con una cantidad numerable de conjuntos $\pi^{-1}(V_{p_\theta})$.
5. Nótese que dos puntos en el mismo E_p estarán en la misma carta $\pi^{-1}(V_p)$. Si consideramos dos puntos $\psi \in E_p$ y $\eta \in E_q$ con $p \neq q$, al ser M de Hausdorff, podemos tomar dos vecindades ajenas V_p y V_q de p y q respectivamente. Entonces tendremos que $\pi^{-1}(V_p), \pi^{-1}(V_q)$ son vecindades coordenadas que satisfacen $\pi^{-1}(V_p) \cap \pi^{-1}(V_q) = \emptyset$ y que contienen a ψ y η , respectivamente. Por lo tanto, E tiene estructura de variedad suave.

Usando la estructura descrita, cada ϕ_α puede escribirse localmente en términos de las cartas coordenadas $(\pi^{-1}(V_p), \tilde{\varphi}_p)$ para E y $(V_p \times \mathbb{R}^k, \varphi_p \times Id_{\mathbb{R}^k})$ para $V_p \times \mathbb{R}^k$:

$$\begin{aligned}
 (\varphi_p \times Id_{\mathbb{R}^k}) \circ \phi_\alpha \circ \tilde{\varphi}_p^{-1}(x, v) &= (\varphi_p \times Id_{\mathbb{R}^k}) \circ \phi_\alpha \circ ((\varphi_p \times Id_{\mathbb{R}^k}) \circ \phi_\alpha)^{-1}(x, v) \\
 &= (\varphi_p \times Id_{\mathbb{R}^k}) \circ \phi_\alpha \circ (\phi_\alpha^{-1} \circ (\varphi_p \times Id_{\mathbb{R}^k})^{-1})(x, v) \\
 &= (\varphi_p \times Id_{\mathbb{R}^k}) \circ Id_{V_p \times \mathbb{R}^k} \circ (\varphi_p \times Id_{\mathbb{R}^k})^{-1}(x, v) \\
 &= Id_{\hat{V}_p \times \mathbb{R}^k}(x, v) \\
 &= (x, v).
 \end{aligned}$$

Localmente ϕ_α es la identidad, por lo que es suave. Consideremos ahora la misma carta de E y la carta (V_p, φ_p) , entonces para la proyección se tiene que:

2.6. HAZ COTANGENTE

$$\begin{aligned}
 \varphi_p \circ \pi \circ \tilde{\varphi}_p^{-1}(x, v) &= \varphi_p \circ \pi \circ ((\varphi_p \times Id_{\mathbb{R}^k}) \circ \phi_\alpha)^{-1}(x, v) \\
 &= \varphi_p \circ \pi \circ (\phi_\alpha^{-1} \circ (\varphi_p \times Id_{\mathbb{R}^k})^{-1})(x, v) \\
 &= \varphi_p \circ \pi(\phi_\alpha^{-1}(\tilde{p}, v)) \\
 &= \varphi_p(\tilde{p}) \\
 &= x,
 \end{aligned}$$

donde $\tilde{p} \in V_p$, $\varphi_p(\tilde{p}) = x \in \varphi_p(V_p) \subset \mathbb{R}^n$ y $v \in \mathbb{R}^k$. Entonces π es suave.

Es inmediato que $\pi_1 \circ \phi_\alpha = \pi$ y por hipótesis ϕ_α es lineal sobre las fibras. Por lo tanto ϕ_α satisface las condiciones de una trivialización local.

Al ser cada ϕ_α un difeomorfismo en su imagen, cualquier otra estructura suave que satisfaga las mismas condiciones que ϕ_α debe incluir las cartas que construimos y entonces debe ser la estructura ya descrita; la estructura suave construida es única. \square

2.6. Haz cotangente

Recordemos que si tenemos un espacio vectorial V de dimensión finita, el espacio dual V^* de V es el espacio de todas las funciones lineales $\lambda : V \rightarrow \mathbb{R}$. Recordemos también que si $f : V \rightarrow W$ es una transformación lineal entre dos espacios vectoriales, entonces existe una transformación $f^* : W^* \rightarrow V^*$ definida como $(f^* \lambda)(v) = \lambda(fv)$ para $v \in V$ y $\lambda \in W^*$. Además, si $\{E_1, \dots, E_n\}$ es una base de V , entonces podemos obtener una base $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ para V^* definida por:

$$\varphi^i(E_j) = \delta_j^i.$$

Tomemos una variedad suave M^n . Antes construimos al haz tangente usando espacios vectoriales $T_p M$, si tomamos los respectivos espacios duales, $T_p^* M$, es posible construir un nuevo haz vectorial. Para cualquier variedad suave M^n , la unión ajena

$$T^* M := \bigsqcup_{p \in M} T_p^* M,$$

es llamada haz cotangente. El haz cotangente está equipado con una proyección $\pi : T^*M \rightarrow M$ y manda a cada $\omega \in T_p^*M$ a $p \in M$. Dadas algunas coordenadas suaves (x^i) sobre un abierto $U \subset M$, para cada $p \in M$ denotamos a la base de T_p^*M (dual a la base $(\partial_i|_p)$) como $(\lambda^i|_p)$. Lo anterior define n mapeos $\lambda^1, \dots, \lambda^n : U \rightarrow T^*M$, llamados *campos covectoriales coordinados*. Los elementos de T_p^*M son llamados covectores. En términos de la base dada, cualquier $\omega \in T_p^*M$ puede escribirse como

$$\omega = \omega_i \lambda^i|_p,$$

donde $\omega_i = \omega(\partial_i|_p)$. Sea (V, \tilde{x}) otra carta coordenada tal que $p \in V$, entonces tendremos otra base $(\partial/\partial\tilde{x}^j|_p)$ para T_pM y la respectiva base dual $(\tilde{\lambda}^j|_p)$ de T_p^*M . La regla de transformación de *campos vectoriales coordinados* es la siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \Big|_p,$$

donde la función $(\partial\tilde{x}^j/\partial x^i)$ es suave. Escribiendo a ω en ambas bases, $\omega = \omega_i \lambda^i|_p = \tilde{\omega}_j \tilde{\lambda}^j|_p$, tendríamos

$$\begin{aligned} \omega_i &= \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \omega \left(\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \Big|_p \right) \\ &= \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p) \omega \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \Big|_p \right) = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p) \tilde{\omega}_j. \end{aligned}$$

Podemos utilizar el último lema mostrado para darle a T^*M la estructura de un haz vectorial suave de rango n . Dada una carta (U, x) con coordenadas (x^i) , definimos a $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ como

$$\phi(\omega_i \lambda^i|_p) = (p, (\omega_1, \dots, \omega_n)).$$

Supongamos que (\tilde{U}, \tilde{x}) es otra carta con funciones coordenadas (\tilde{x}^j) y sea $\tilde{\phi} : \pi^{-1}(\tilde{U}) \rightarrow \tilde{U} \times \mathbb{R}^n$ definida de forma análoga a ϕ . Sobre $\pi^{-1}(U \cap \tilde{U})$ tendremos:

2.6. HAZ COTANGENTE

$$\begin{aligned}\phi \circ \tilde{\phi}^{-1}(p, (\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_n)) &= \phi(\tilde{\omega}_j \tilde{\lambda}^j|_p) = \phi(\omega_j \lambda^j|_p) \\ &= (p, (\omega_1, \dots, \omega_n)) = \left(p, \left(\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^1}(p) \tilde{\omega}_j, \dots, \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^n}(p) \tilde{\omega}_j \right) \right),\end{aligned}$$

de modo que las funciones ϕ serán trivializaciones locales suaves.

Podemos dar a T^*M la estructura de una variedad suave. Sea (U, x) con funciones coordenadas (x^i) . El mapeo que va de $\pi^{-1}(U)$ a \mathbb{R}^{2n} dado por

$$\omega_i \lambda^i|_p \mapsto (x^1(p), \dots, x^n(p), \omega_1, \dots, \omega_n),$$

es una carta coordenada suave para T^*M . Llamamos a (x^i, ω_i) coordenadas naturales de T^*M asociadas a (x^i) . Ahora podemos definir a los *campos covectoriales* como secciones suaves del haz T^*M .

Definición 2.28. Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función C^∞ , entonces una sección suave de T^*M puede ser definida como

$$df(p)(X) = X(f) \quad \text{para } X \in T_p M, p \in M.$$

La sección df se llama diferencial de f .

Sea $p \in M$ y sea (U, x) una carta coordenada centrada en p . Sea $x = (x^1, \dots, x^n)$ entonces de la definición anterior se tiene que:

$$dx^i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (x^j) = \delta_j^i,$$

de modo que $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ es una base para T_p^*M , dual a la base $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ de $T_p M$. Cada $\xi \in T_p^*M$ tendrá la forma $\xi = \xi_i dx^i|_p$.

Como ocurre con los campos vectoriales, podemos expresar a las secciones de $\omega \in T^*M$ de manera local mediante cartas coordenadas (U, x) :

$$\omega(p) = \omega_i(p) dx^i(p),$$

donde las funciones $\omega_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ son llamadas *funciones componentes de ω* . Cada componente está caracterizada mediante

$$\omega_i(p) = \omega_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right),$$

donde ω_p denota, como en el caso de los campos vectoriales, a $\omega(p)$.

Si ω es un campo covectorial y X es un campo vectorial sobre M , podemos definir a la función $\omega(X) : M \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\omega(X)(p) = \omega_p(X_p), \quad p \in M.$$

Para que una sección ω de T^*M sea suave, basta con que cada ω_i sea suave en cada carta coordenada suave.

2.7. Derivada de Lie

Definición 2.29. Sea M una variedad suave. Una derivación global sobre $C^\infty(M)$ es un mapeo lineal $\mathcal{D} : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ tal que:

$$\mathcal{D}(fg) = \mathcal{D}(f)g + f\mathcal{D}(g).$$

Denotamos al conjunto de derivaciones de $C^\infty(M)$ como $Der(C^\infty(M))$.

Definición 2.30. Dado un campo vectorial fijo X , podemos asociarle el mapeo $\mathcal{L}_X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, definido como:

$$(\mathcal{L}_X f)(p) := X_p f$$

Tenemos que $\mathcal{L}_X \in Der(C^\infty(M))$.

Definición 2.31. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, entonces existe un único campo vectorial $[X, Y]$ tal que

$$\mathcal{L}_{[X, Y]} = \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X.$$

2.8. TENSORES

Como \mathcal{L}_X también se escribe Xf , tenemos que:

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Al campo vectorial $[X, Y]$ se le conoce como corchete de Lie.

2.8. Tensores

Supongamos que V_1, \dots, V_k y W son espacios vectoriales. Una función $F : V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W$ se dice multilineal si es lineal como una función de cada variable, separadamente, cuando las otras variables se dejan fijas:

$$F(v_1, \dots, av_i + a'v'_i, \dots, v_k) = aF(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + a'F(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_k).$$

Definición 2.32. Sea V un espacio vectorial sobre los reales y de dimensión n . Llamaremos tensores covariantes de rango k a las funciones multilineales

$$F : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \text{ copias}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Al conjunto de los tensores descritos, lo denotaremos $T^k(V)$.

$T^k(V)$ tiene la estructura de un espacio vectorial con las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}(T_1 + T_2)(v_1, \dots, v_k) &= T_1(v_1, \dots, v_k) + T_2(v_1, \dots, v_k), \quad T_1, T_2 \in T^k(V) \\ (aT)(v_1, \dots, v_k) &= a(T(v_1, \dots, v_k)), \quad a \in \mathbb{R} \text{ y } T \in T^k(V).\end{aligned}$$

Definición 2.33. Para $T \in T^k(V)$ y $S \in T^l(V)$ definimos el producto tensorial

$$T \otimes S : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k+l \text{ copias}} \rightarrow \mathbb{R}$$

como

$$T \otimes S(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) = T(v_1, \dots, v_k)S(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}).$$

Obsérvese que $T \otimes S \in T^{k+l}(V)$.

Nótese que $T^1(V) = V^*$ y que $(S \otimes T) \otimes F = S \otimes (T \otimes F)$, de modo que podemos definir productos más grandes sin caer en ambigüedades.

Afirmación 2.34. Si E_1, \dots, E_n es una base de V y $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ es la base dual para $V^* = T^1(V)$, los elementos

$$\varphi^{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_k} \quad 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n;$$

son una base para $T^k(V)$, que tiene dimensión n^k .

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{\varphi^{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_k} \mid 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\}$. Tomemos $T \in T^k(V)$ arbitrario. Para cualquier k -tupla (i_1, \dots, i_k) de enteros tales $1 \leq i_j \leq n$, definamos al número $T_{i_1 \dots i_k}$ como

$$T_{i_1 \dots i_k} = T(E_{i_1}, \dots, E_{i_k}).$$

Mostraremos que

$$T = T_{i_1 \dots i_k} \varphi^{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_k}.$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} T_{i_1 \dots i_k} \varphi^{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_k}(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}) &= T_{i_1 \dots i_k} \varphi^{i_1}(E_{j_1}) \dots \varphi^{i_k}(E_{j_k}) \\ &= T_{i_1 \dots i_k} \delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_k}^{i_k} \\ &= T_{j_1 \dots j_k} \\ &= T(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, \mathcal{B} genera a $T^k(V)$. Luego tenemos que si

2.8. TENSORES

$$T_{i_1 \dots i_k} \varphi^{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_k} = 0,$$

entonces

$$0 = T_{i_1 \dots i_k} \varphi^{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_k}(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}) = T_{j_1 \dots j_k};$$

\mathcal{B} es linealmente independiente. Por lo tanto \mathcal{B} es una base para $T^k(V)$. □

Cada $T \in T^k(V)$ podrá escribirse del siguiente modo:

$$T = T_{i_1 \dots i_k} \varphi^{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_k}.$$

Podemos definir más tipos de tensores.

Definición 2.35. *Un tensor contravariante de rango l (l -tensor contravariante) es una función multilineal*

$$T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{l \text{ copias}} \rightarrow \mathbb{R}$$

Un tensor de tipo (k, l) , llamado también tensor k -covariante, l -contravariante ((k, l) -tensor), es una función multilineal

$$T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{l \text{ copias}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \text{ copias}} \rightarrow \mathbb{R}$$

Se denota al espacio de todos los l -tensores contravariantes como $T_l(V)$ y al espacio de los (k, l) -tensores por $T_l^k(V)$.

Del mismo modo que se mostró que

$$\{\varphi^{j_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{j_k} \mid 1 \leq j_1, \dots, j_k \leq n\}$$

es base de $T^k(V)$, se puede probar que

$$\{E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_k} \mid 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\}$$

y

$$\{E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_k} \otimes \varphi^{j_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{j_k} \mid 1 \leq i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k \leq n\}$$

son bases de $T_l(V)$ y $T_l^k(V)$, respectivamente. Sean $F \in T_l(V)$ y $G \in T_l^k(V)$, usando las bases anteriores podremos escribir a cada tensor de la siguiente forma

$$F = T^{i_1 \dots i_k} E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_k}$$

$$G = G_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k} E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_k} \otimes \varphi^{j_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{j_k}$$

Sea M^n una variedad suave y sea $p \in M$. Al ser $T_p M$ y $T_p^* M$ espacios vectoriales, podemos construir algunos otros espacios: $T^k(T_p M)$, $T_l(T_p)$ y $T_l^k(T_p M)$. Podemos incluso definir más haces vectoriales.

Definición 2.36. *Definimos al haz de tensores mixtos de tipo (k, l) como*

$$T_l^k M := \bigsqcup_{p \in M} T_l^k(T_p M),$$

con la proyección $\pi : T_l^k M \rightarrow M$.

De manera análoga podemos definir haces de tensores covariantes y contravariantes.

Las secciones suaves del haz $T_l^k M$ serán llamadas *campos tensoriales suaves*. Denotamos como $\mathcal{T}_l^k(M)$ al conjunto de los campos tensoriales de tipo (k, l) y al espacio de los campos tensoriales de rango k (secciones del haz $T_0^k M = T^k M$) como $\mathcal{T}^k(M)$. Tendremos también la siguiente notación: $\mathcal{T}_1^0(M) = \mathcal{T}(M) = \mathfrak{X}(M)$

Restringiremos el estudio de los campos a aquellos que son suaves. Siempre que hagamos referencia a algún campo, se deberá entender que nos referimos a una

2.8. TENSORES

sección suave del haz con que estemos trabajando.

Si (x^i) son cualesquiera coordenadas locales sobre $U \subset M$ y $p \in M$, cualquier campo tensorial sobre U tiene la expresión coordenada

$$F(p) = F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}(p) \partial_{j_1} \otimes \dots \otimes \partial_{j_k} \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k},$$

donde las $F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}$ son funciones sobre U y $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$, $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ son bases para $T_p M$ y $T_p^* M$, respectivamente.

Proposición 2.37. *Sea $F : M \rightarrow T_1^k M$ una sección. F es un campo tensorial suave si y solo si, cuando $\{X^i\}$ y $\{\omega_i\}$ son campos vectoriales y campos covectoriales definidos sobre un abierto $U \subset M$, la función*

$$F(\omega^i, \dots, \omega^l, X_1, \dots, X_k)(p) = F_p(\omega_p^1, \dots, \omega_p^l, X_1|_p, \dots, X_k|_p)$$

es suave.

Demostración. Sea (V, x) una carta con $p \in V \subset U$. Tendremos entonces funciones coordenadas (x^i) y podremos escribir localmente a los campos

$$\omega^i = \omega_l^i dx^l \quad \text{y} \quad X_j = X_j^k \partial_k.$$

Localmente, la función $F(\omega^i, \dots, \omega^l, X_1, \dots, X_k)$ será:

$$F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} \omega_{j_1}^1 \dots \omega_{j_l}^l X_1^{j_1} \dots X_k^{j_k}.$$

Si F es una sección suave, entonces sus componentes deben ser suaves. Como $\{\omega^i\}$ y $\{X_j\}$ son suaves, entonces sus componentes son suaves también. Por lo tanto, el producto anterior es suave.

Por otra parte, si la función de la proposición es suave tendremos que su expresión local será suave. Al ser $\{\omega^i\}$ y $\{X_j\}$ suaves, cada $F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}$ deberá ser suave (para poder garantizar siempre la suavidad de la función). Por lo tanto, la sección F es suave. \square

Sea $F \in \mathcal{T}_l^k(M)$. Para $X_i \in \mathcal{T}(M)$ y $\omega^j \in \mathcal{T}^1(M)$, la proposición anterior nos dice que la función $F(\omega^1, \dots, \omega^l, X_1, \dots, X_k)$ es suave y entonces induce un mapeo

$$F : \mathcal{T}^1(M) \times \dots \times \mathcal{T}^1(M) \times \mathcal{T}(M) \times \dots \times \mathcal{T}(M) \rightarrow C^\infty.$$

Trivialmente tenemos que el mapeo descrito es multilinear sobre C^∞ .

Lema 2.38. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre los reales. Existe un isomorfismo natural (independiente de la base) entre $T_{l+1}^k(V)$ y el espacio de las funciones multilineales:*

$$V^* \times \dots \times V^* \times V \times \dots \times V \rightarrow V.$$

Demostración. Denotemos

$$\mathcal{E}(V) := \{V^* \times \dots \times V^* \times V \times \dots \times V \rightarrow V \mid F \text{ es multilinear}\}.$$

Sea $F \in \mathcal{E}(V)$ y consideremos al mapeo $\Phi : \mathcal{E}(V) \rightarrow T_l^k + 1(V)$. ΦF define al tensor $(k, l + 1)$ definido por

$$\Phi F(\omega^1, \dots, \omega^{l+1}, X_1, \dots, X_k) = \omega^{l+1}(F(\omega^1, \dots, \omega^l, X_1, \dots, X_k)).$$

Probemos que Φ es lineal. Tomemos $F, G \in \mathcal{E}(V)$ y $a, a' \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned} \Phi(aF + a'G)(\omega^1, \dots, \omega^{l+1}, X_1, \dots, X_k) &= \omega^{l+1}((aF + a'G)(\omega^1, \dots, \omega^l, X_1, \dots, X_k)) \\ &= \omega^{l+1}(aF(\omega^1, \dots, \omega^l, X_1, \dots, X_k)) + \omega^{l+1}(a'G(\omega^1, \dots, \omega^l, X_1, \dots, X_k)) \\ &= a\omega^{l+1}(F(\omega^1, \dots, \omega^l, X_1, \dots, X_k)) + a'\omega^{l+1}(G(\omega^1, \dots, \omega^l, X_1, \dots, X_k)) \\ &= a\Phi F(\omega^1, \dots, \omega^{l+1}, X_1, \dots, X_k) + a'\Phi G(\omega^1, \dots, \omega^{l+1}, X_1, \dots, X_k). \end{aligned}$$

Al ser V un espacio de dimensión finita y Φ lineal, basta con probar que Φ es un mapeo inyectivo. Notemos que $\text{Ker}\Phi = \{0\}$. Sea $F \in \text{Ker}\Phi$, entonces:

$$0 = \Phi F(\omega^1, \dots, \omega^{l+1}, X_1, \dots, X_k)$$

2.8. TENSORES

$$= \omega^{l+1}(F(\omega^1, \dots, \omega^l, X_1, \dots, X_k)),$$

dado que cada ω^i, X_j es arbitrario, la única opción para que se satisfaga la igualdad anterior es $F = 0$. Entonces Φ es inyectiva, por lo que se sigue que Φ es un isomorfismo. □

El siguiente lema [15] nos permite usar los resultados anteriores para poder identificar tensores fácilmente.

Lema 2.39 (Caracterización de tensores). *Un mapeo*

$$\tau : \mathcal{T}^1(M) \times \dots \times \mathcal{T}^1(M) \times \mathcal{T}(M) \times \dots \times \mathcal{T}(M) \rightarrow C^\infty$$

es inducido por un tensor de tipo (k, l) , como se mencionó antes, si y solo si es multilineal sobre $C^\infty(M)$. Un mapeo

$$\tau : \mathcal{T}^1(M) \times \dots \times \mathcal{T}^1(M) \times \mathcal{T}(M) \times \dots \times \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M)$$

es inducido por un campo tensorial de tipo $(k, l + 1)$, como en el lema anterior, si y solo si es multilineal sobre $C^\infty(M)$.

Geometría Riemanniana

Definición 3.1. Una métrica Riemanniana sobre una variedad suave M es un campo tensorial $g \in \mathcal{T}_0^2(M)$, simétrico y positivo definido; g_p es un producto interno para cada $p \in M$.

Utilizando un marco coordenado, la métrica se escribe como

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

donde

$$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j).$$

Definición 3.2. Llamamos variedad Riemanniana a una variedad suave, M , equipada con una métrica Riemanniana g .

3.1. Isomorfismos musicales

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre los reales. Supongamos que V tiene un producto interno $g = \langle \cdot, \cdot \rangle \in T^2(V)$. El producto interno induce isomorfismos

$$\langle v, \omega^\sharp \rangle = \omega(v) \quad V \begin{array}{c} \xrightarrow{\flat} \\ \xleftarrow{\sharp} \end{array} V^* \quad v^\flat(u) = \langle u, v \rangle,$$

3.1. ISOMORFISMOS MUSICALES

de manera general, se tienen los isomorfismos:

$$\underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{l \text{ copias}} \times V \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \text{ copias}} \xrightleftharpoons[\#]{b} \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{l \text{ copias}} \times \underbrace{V^* \times V \times \dots \times V}_{k \text{ copias}}.$$

La composición con estos isomorfismos, induce los isomorfismos:

$$T_l^{k+1}(M) \xrightleftharpoons[\#]{b} T_{l+1}^k(M)$$

dados por:

$$\begin{aligned} A^b(\omega^1, \dots, \omega^l, X_1, X_2, \dots, X_{k+1}) &= A(\omega^1, \dots, \omega^l, X_1^b, X_2, \dots, X_{k+1}), \quad A \in T_{l+1}^k(V) \\ B^\#(\omega^1, \dots, \omega^l, \omega^{l+1}, X_1, \dots, X_{k+1}) &= B(\omega^1, \dots, \omega^l, (\omega^{l+1})^\#, X_1, \dots, X_{k+1}), \quad B \in T_l^{k+1}(V). \end{aligned}$$

Sea $\{E_j\}$ la base de V y $\{\varphi^i\}$ la base dual. Si tomamos $\omega = \omega_i \varphi^i \in V^*$ y $X = X^j E_j \in V$, entonces:

$$X^b = X^j E_j^b = X^j E_j^b(E_i) \varphi^i = X^j \langle E_i, E_j \rangle \varphi^i = g_{ij} X^j \varphi^i,$$

de manera natural, podemos escribir

$$(X^j E_j)^b = X_i \varphi^i,$$

donde $X_i = g_{ij} X^j$. De manera análoga tenemos:

$$(\omega_i \varphi^i)^\# = \omega^j E_j,$$

donde $\omega^j = g^{ij} \omega_i$.

Decimos entonces que la métrica *sube* y *baja* índices. De manera general, si $A \in T_{l+1}^k(V)$, entonces las componentes de $A^b \in T_l^{k+1}(V)$ son

$$(A^b)_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = g_{ij} A_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}.$$

Análogamente, si $B \in T_l^{k+1}(V)$, las componentes de $B^\# \in T_{l+1}^k(V)$ son

$$(B^\#)_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = g^{ij} B_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l},$$

donde $g^{ij} = (g_{ij})^{-1}$.

3.2. Traza

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre los reales. La *traza* o *contracción* $\text{tr} : T_1^1(V) \rightarrow \mathbb{R}$ de cualquier $F \in T_1^1(V)$ es simplemente la traza de F cuando es considerado como un elemento de $\text{End}(V)$. En este caso $\text{tr} : T_1^1(V) \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$\text{tr} F = F(\varphi^i, E_i) = F_i^i,$$

donde $\{E_i\}$ es base de V y $\{\varphi^i\}$ es la base dual. De manera general, definimos

$$\text{tr} : T_{l+1}^{k+1}(V) \rightarrow T_l^k(V)$$

como:

$$\text{tr} F(\omega^1, \dots, \omega^l, X_1, \dots, X_k) = \text{tr}(F(\omega^1, \dots, \omega^l, \cdot, X_1, \dots, X_k, \cdot)),$$

donde tomamos la traza del endomorfismo

$$F(\omega^1, \dots, \omega^l, \cdot, X_1, \dots, X_k, \cdot) \in T_1^1(V).$$

Utilizando una base de V y la base dual correspondiente, las componentes son:

$$(\text{tr } F)_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l m}.$$

3.3. CONEXIONES

3.2.1. Traza respecto a la métrica

La traza respecto a g es el mapeo lineal

$$\text{tr} : T_l^{k+1}(V) \xrightarrow{\#} T_{l+1}^k(V) \xrightarrow{\text{tr}} T_l^{k-1}(V),$$

donde se dualiza el primer vector que toma el tensor en cuestión y se toma la traza respecto al segundo vector y el nuevo elemento de V^* . Siendo más precisos, si se tiene $B \in T_l^{k+1}(V)$ con componentes $B_{i_1 \dots i_{k+1}}^{j_1 \dots j_l}$, entonces las componentes de tr_g son:

$$\text{tr}_g(B)_{i_3 \dots i_{k+1}}^{j_1 \dots j_l} = (B^\#)_{j i_3 \dots i_{k+1}}^{j_1 \dots j_l} = g^{ij} B_{ij i_3 \dots i_{k+1}}^{j_1 \dots j_l}.$$

3.3. Conexiones

Definición 3.3. Una conexión afín sobre una variedad diferencial M , es un mapeo

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M),$$

que se denota por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$ y que satisface:

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$.
2. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$.
3. $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$.

donde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y $f, g \in C^\infty(M)$.

La expresión $\nabla_X Y$ se conoce como la derivada covariante de Y en la dirección de X .

Proposición 3.4. Sea $p \in M$. $\nabla_X Y(p)$ depende de los valores de X, Y en el punto p , esto es, la noción de conexión afín es una noción local.

Demostración. Tomemos un marco local alrededor de $p \in M$. Los campos vectoriales se escriben como

$$X = X^i \partial_i \quad \text{y} \quad Y = Y^j \partial_j.$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{X^i \partial_i} (Y^j \partial_j) = X^i \nabla_{\partial_i} (Y^j \partial_j) \\ &= X^i (\partial_i Y^j) \partial_j + X^i Y^j \nabla_{\partial_i} \partial_j. \end{aligned}$$

Se define a los *símbolos de Christoffel* de ∇ (respecto al marco local $\{\partial_i\}$), Γ_{ij}^k , como

$$\Gamma_{ij}^k \partial_k := \nabla_{\partial_i} \partial_j,$$

de modo que:

$$\nabla_X Y = X^i (\partial_i Y^j) \partial_j + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

Al evaluar $\nabla_X Y$ en p , se sigue la proposición. □

Definición 3.5. Una conexión ∇ sobre una variedad Riemanniana M es compatible con la métrica si y sólo si

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

con $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Definición 3.6. Una conexión afín ∇ sobre una variedad suave M se dice simétrica cuando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. $[\cdot, \cdot]$ denota al corchete de Lie.

Si una conexión afín es simétrica y compatible con la métrica, se dice que es una conexión de Levi-Civita (o una conexión Riemanniana).

3.3. CONEXIONES

Observación 3.7. *La conexión de Levi-Civita nos permite dar una expresión local para los símbolos de Christoffel. Consideremos la condición de compatibilidad con la métrica permutando cíclicamente X, Y, Z :*

$$\begin{aligned}X\langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \\Y\langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle \\Z\langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle\end{aligned}$$

Usando la condición de simetría en el último término de cada igualdad, obtenemos:

$$\begin{aligned}X\langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle \\Y\langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_X Y \rangle + \langle Z, [Y, X] \rangle \\Z\langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y Z \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle.\end{aligned}$$

Hagamos ahora:

$$\begin{aligned}X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle \\= 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle Z, [Y, X] \rangle + \langle X, [Z, X] \rangle,\end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X Y, Z \rangle &= \frac{1}{2}(X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle \\&\quad - \langle Y, [X, Z] \rangle - \langle Z, [Y, X] \rangle - \langle X, [Z, X] \rangle).\end{aligned}$$

Tomemos $X = \partial_i, Y = \partial_j$ y $Z = \partial_k$. Utilizando la expresión anterior, tenemos que:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_k \rangle &= \frac{1}{2} (\partial_i \langle \partial_j, \partial_k \rangle + \partial_j \langle \partial_k, \partial_i \rangle - \partial_k \langle \partial_i, \partial_j \rangle \\ &\quad - \langle \partial_j, [\partial_i, \partial_k] \rangle - \langle \partial_k, [\partial_j, \partial_i] \rangle - \langle \partial_i, [\partial_k, \partial_j] \rangle), \end{aligned}$$

pero

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k, \quad g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle, \quad [\partial_i, \partial_j] = 0;$$

de modo que:

$$\Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}).$$

Por lo tanto:

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} g^{mk} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}).$$

3.4. Derivada covariante de campos tensoriales

Proposición 3.8. *Dada una conexión ∇ sobre TM , existe una única conexión en el haz tensorial, también denotada por ∇ , tal que satisface las siguientes propiedades:*

1. *Sobre TM , ∇ coincide con la conexión dada.*
2. *Sobre $C^\infty(M) = T^0M$, ∇ es la acción de un vector como derivación:*

$$\nabla_X f = Xf$$

para cualquier función suave.

3. *∇ obedece la siguiente regla de producto respecto al producto tensorial:*

$$\nabla_X (F \otimes G) = (\nabla_X F) \otimes G + F \otimes (\nabla_X G)$$

para cualesquiera tensores F y G .

3.5. CURVATURA

4. ∇ conmuta con todas las contracciones:

$$\nabla_X(\text{tr}F) = \text{tr}(\nabla_X F)$$

para cualquier tensor F .

La conexión descrita satisface las siguientes propiedades adicionales:

- ∇ obedece la siguiente regla de producto respecto al emparejamiento natural de un cocampo ω y un campo vectorial Y :

$$\nabla_X \langle \omega, Y \rangle = \langle \nabla_X \omega, Y \rangle + \langle \omega, \nabla_X Y \rangle.$$

- Para cualesquiera $F \in T_1^k(M)$, campos vectoriales Y_i y 1-formas ω^j , se tiene que:

$$\begin{aligned} (\nabla_X F)(\omega^1, \dots, \omega^l, Y_1, \dots, Y_k) = & X(F(\omega^1, \dots, \omega^l, Y_1, \dots, Y_k)) \\ & - \sum_{j=1}^l F(\omega^1, \dots, \nabla_X \omega^j, \dots, \omega^l, Y_1, \dots, Y_k) \\ & - \sum_{i=1}^k F(\omega^1, \dots, \omega^l, Y_1, \dots, \nabla_X Y_i, \dots, Y_k). \end{aligned}$$

3.5. Curvatura

Definición 3.9. Dada una variedad Riemanniana, el endomorfismo de curvatura es el mapeo $R : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M)$ definido por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z,$$

donde ∇ es la conexión Riemanniana en M .

Tomemos $M = \mathbb{R}^n$. Los campos vectoriales X, Y y Z estarán dados en coordenadas, por lo que se escribirán $X = X^i \partial_i$, $Y = Y^j \partial_j$ y $Z = Z^k \partial_k$. Recordemos que

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_j g_{il} + \partial_i g_{jl} - \partial_l g_{ij})$$

y notemos que, en forma matricial, la métrica de \mathbb{R}^n es

$$(g)_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que los símbolos de Christoffel serán $\Gamma_{ij}^k = 0$. De la expresión local de $\nabla_X Z$ se sigue:

$$\nabla_X Z = (X Z^k) \partial_k = (X^i \partial_i Z^k) \partial_k.$$

Luego:

$$\nabla_Y \nabla_X Z = Y^j \partial_j (X^i \partial_i Z^k) \partial_k = Y^j (\partial_j X^i) (\partial_i Z^k) \partial_k + Y^j X^i (\partial_j \partial_i Z^k).$$

Análogamente:

$$\nabla_X \nabla_Y Z = X^i (\partial_i Y^j) (\partial_j Z^k) \partial_k + X^i Y^j (\partial_i \partial_j Z^k).$$

Entonces:

$$\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z = Y^j (\partial_j X^i) (\partial_i Z^k) \partial_k - X^i (\partial_i Y^j) (\partial_j Z^k) \partial_k.$$

Luego:

$$\begin{aligned} \nabla_{[X,Y]} Z &= \nabla_{[X,Y]} (Z^k \partial_k) = ([X, Y] Z^k) \partial_k + Z^k \nabla_{[X,Y]} \partial_k \\ &= X^i (\partial_i Y^j) (\partial_j Z^k) \partial_k - Y^j (\partial_j X^i) (\partial_i Z^k) \partial_k. \end{aligned}$$

3.5. CURVATURA

Se sigue de la definición de curvatura, en \mathbb{R}^n , que:

$$R(X, Y)Z = 0.$$

Nótese que el resultado obtenido fue posible debido a la métrica de \mathbb{R}^n pues ésta permitió que los símbolos de Christoffel se anularan. En vista de lo anterior, podemos interpretar al endomorfismo de curvatura como un objeto que nos permite saber cuando una variedad difiere de \mathbb{R}^n . En este sentido, el endomorfismo de curvatura coincide con la experiencia que tenemos para distinguir un objeto plano de otro que no lo es.

Trivialmente, por el lema de caracterización tensorial, se tiene que el endomorfismo de curvatura es un (3,1)-campo tensorial. Al ser un campo tensorial podemos escribirlo en términos de coordenadas, para lo cual se adoptará la siguiente convención: el último índice es el contravariante.

$$R = R_{ijk}{}^l dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \partial_l,$$

donde los coeficientes son definidos mediante

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R_{ijk}{}^l \partial_l.$$

Podemos definir también al tensor de curvatura como un 4-campo tensorial:

$$Rm(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle$$

y en coordenadas, tendremos:

$$Rm = R_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l,$$

donde

$$R_{ijkl} = g_{lm} R_{ijk}{}^m.$$

Dada la dificultad de trabajar con el tensor de curvatura lo mejor es utilizar un tensor más simple que codifique la información de dicho tensor.

Definición 3.10. *El tensor de Ricci, también conocido como curvatura de Ricci es*

$$\text{Ric}(X, Y) = \text{tr}_g \text{Rm}(X, \cdot, Y, \cdot).$$

En componentes:

$$\text{Ric}(\partial_i, \partial_j) = R_{ij} = R_{ilj}{}^l = g^{lk} R_{iljk}.$$

Definición 3.11. *La traza del tensor de Ricci es llamada curvatura escalar:*

$$R = R_i{}^i = g^{ij} R_{ij}.$$

3.6. Operadores diferenciales

Definición 3.12 (Gradiente). *Sea $f \in C^\infty(M)$. Sea $f \in C^\infty(M)$. El gradiente de f , $\text{grad} f$, es el único campo vectorial que satisface*

$$\langle \text{grad} f, X \rangle_g = Xf.$$

De manera alternativa:

$$\langle \text{grad} f, \cdot \rangle_g = df(\cdot).$$

Usando coordenadas suaves (x^i) , se escribe del siguiente modo:

$$\text{grad} f = g^{ij} \partial_i f \partial_j.$$

Definición 3.13 (segunda derivada covariante). *Si ∇ es una conexión sobre TM , entonces:*

$$\nabla_{X,Y}^2 = \nabla_X \circ \nabla_Y - \nabla_{\nabla_X Y} : \mathcal{F}_l^k(M) \rightarrow \mathcal{F}_l^k(M),$$

donde X, Y son campos vectoriales fijos. ∇^2 se conoce como segunda derivada covariante.

La segunda derivada covariante puede escribirse de las siguientes maneras:

3.6. OPERADORES DIFERENCIALES

$$\nabla_X \nabla_Y F = \nabla_{X,Y}^2 F = (\nabla \nabla F)(X, Y, \dots) = (\nabla_X (\nabla F))(Y, \dots).$$

Definición 3.14 (Hessiano). *El Hessiano de $f \in C^\infty(M)$ se define como*

$$\text{Hess}(f)(X, Y) = \nabla^2 f(X, Y) = \nabla_X d f(Y).$$

En coordenadas locales, se tiene:

$$(\nabla^2 f)_{ij} = \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k}.$$

Definición 3.15 (Laplaciano). *Para cualquier campo tensorial $F \in \mathcal{T}_1^k(M)$, el laplaciano asociado a la conexión ∇ , es:*

$$\Delta F = \text{tr}_g \nabla^2 F.$$

En el caso del haz tensorial $T^0 M = C^\infty(M)$, explícitamente se tiene:

$$\Delta f = g^{ij} \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} f = g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right).$$

El problema de Yamabe

4.1. Geometría conforme

Las transformaciones conformes son aquellas que preservan ángulos. En nuestro caso el ángulo entre dos vectores $X, Y \in T_p M$ es el único $\theta \in [0, \pi]$ que satisface $\cos \theta = \langle X, Y \rangle / |X||Y|$. Particularmente podemos hablar de métricas conformes.

Definición 4.1. Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Una métrica h es puntualmente conforme a g si existe una función f tal que $h = e^f g$. La función e^f se conoce como factor conforme.

Definición 4.2. Sean (M, g) y (N, h) variedades Riemannianas. Un difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow N$ es llamado conforme si $\varphi^* h = e^f g$. Decimos que (M, g) y (N, h) son conformemente equivalentes.

Sea (M^n, g) una variedad Riemanniana. Usando la expresión para los símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_j g_{il} + \partial_i g_{jl} - \partial_l g_{ij})$$

y la transformación conforme

$$\bar{g} = e^{2\varphi} g$$

4.1. GEOMETRÍA CONFORME

donde $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$, es suave. Podemos obtener los símbolos de Christoffel asociados a la métrica \bar{g} .

$$\begin{aligned}
 \bar{\Gamma}_{ij}^k &= \frac{1}{2} \bar{g}^{kl} (\partial_j \bar{g}_{il} + \partial_i \bar{g}_{jl} - \partial_l \bar{g}_{ij}) \\
 &= \frac{1}{2} e^{-2\varphi} g^{kl} (\partial_j (e^{2\varphi} g_{il}) + \partial_i (e^{2\varphi} g_{jl}) - \partial_l (e^{2\varphi} g_{ij})) \\
 &= \frac{1}{2} e^{-2\varphi} e^{2\varphi} g^{kl} (\partial_j g_{il} + \partial_i g_{jl} - \partial_l g_{ij}) + e^{-2\varphi} e^{2\varphi} (g_{il} \partial_j \varphi + g_{jl} \partial_i \varphi - g_{ij} \partial_l \varphi) \\
 &= \Gamma_{ij}^k + g^{kl} g_{il} \partial_j \varphi + g^{kl} g_{jl} \partial_i \varphi - g^{kl} g_{ij} \partial_l \varphi \\
 &= \Gamma_{ij}^k + \delta_i^k \partial_j \varphi + \delta_j^k \partial_i \varphi - g_{ij} g^{kl} \partial_l \varphi.
 \end{aligned}$$

Recordemos que si tenemos una base $\{E_i\}$ los símbolos de Christoffel se definen como $\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k$ y que con dicha base los campos vectoriales se expresan como $X = X^i E_i$, $Y = Y^j E_j$ y $Z = Z^k E_k$. Con lo anterior podemos escribir a la conexión asociada a la métrica \bar{g} como

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + S(X, Y),$$

donde

$$S(X, Y) := (X\varphi)Y + (Y\varphi)X - g(X, Y)\text{grad}\varphi.$$

De manera explícita se tiene que

$$\begin{aligned}
 \bar{\nabla}_X Y &= \bar{\nabla}_{X^i E_i} (Y^j E_j) = X^i \bar{\nabla}_{E_i} (Y^j E_j) = X^i E_i (Y^j) E_j + X^i Y^j \bar{\Gamma}_{ij}^k E_k \\
 &= X^i E_i (Y^j) E_j + X^i Y^j (\Gamma_{ij}^k + \delta_i^k \partial_j \varphi + \delta_j^k \partial_i \varphi - g_{ij} g^{kl} \partial_l \varphi) E_k \\
 &= [X^i E_i (Y^j) E_j + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k E_k] + (Y^j \partial_j \varphi) (X^i E_i) + (X^i \partial_i \varphi) (Y^j E_j) \\
 &\quad - (X^i Y^j g_{ij}) (g^{kl} \partial_l \varphi E_k) \\
 &= \nabla_X Y + (Y\varphi)X + (X\varphi)Y - g(X, Y)\text{grad}\varphi.
 \end{aligned}$$

Dada la forma de $S(X, Y)$ es fácil ver que $S(X, Y) = S(Y, X)$ y además, S es lineal en ambas entradas. Por el lema de caracterización tensorial, tenemos que

$S(X, Y)$ es inducido por un campo tensorial.

Podemos calcular ahora cantidades relevantes asociadas a la métrica \bar{g} , en particular, todas aquellas relacionadas a la curvatura. En el caso del endomorfismo de curvatura será útil ver que

$$[X, Y]_{\bar{g}} = [X, Y]$$

esto pues trabajamos con una conexión Riemanniana (o de Levi-Civita).

Respecto a la forma que toma el endomorfismo de curvatura, tendremos

$$\begin{aligned} \overline{R(X, Y)Z} &= \bar{\nabla}_Y(\bar{\nabla}_X Z) - \bar{\nabla}_X(\bar{\nabla}_Y Z) + \bar{\nabla}_{[X, Y]_{\bar{g}}} Z \\ &= \bar{\nabla}_Y(\nabla_X Z + S(X, Z)) - \bar{\nabla}_X(\nabla_Y Z + S(Y, Z)) + \nabla_{[X, Y]_{\bar{g}}} Z + S([X, Y]_{\bar{g}}, Z) \\ &= \nabla_Y(\nabla_X Z + S(X, Z)) + S(Y, \nabla_X Z + S(X, Z)) \\ &\quad - [\nabla_X(\nabla_Y Z + S(Y, Z)) + S(X, \nabla_Y Z + S(Y, Z))] \\ &\quad + [\nabla_{[X, Y]} Z + S([X, Y], Z)] \\ &= \nabla_Y(\nabla_X Z) + S(Y, \nabla_X Z) + \nabla_Y(S(X, Z)) + S(Y, S(X, Z)) \\ &\quad - [\nabla_X(\nabla_Y Z) + S(X, \nabla_Y Z) + \nabla_X(S(Y, Z)) + S(X, S(Y, Z))] \\ &\quad + [\nabla_{[X, Y]} Z + S([X, Y], Z)] \\ &= R(X, Y)Z + S(Y, \nabla_X Z) + \nabla_Y(S(X, Z)) + S(Y, S(X, Z)) \\ &\quad - [S(X, \nabla_Y Z) + \nabla_X(S(Y, Z)) + S(X, S(Y, Z))] \\ &\quad + S([X, Y], Z). \end{aligned}$$

Nótese que en la última igualdad se tienen dos términos correspondientes a la derivada covariante de S respecto a Y (también hay dos para el caso en X), esto es

$$\nabla_Y S(X, Z) = \nabla_Y(S(X, Z)) - S(\nabla_Y X, Z) - S(X, \nabla_Y Z)$$

Utilizando lo anterior (también para los correspondientes términos de $\nabla_X S$) tenemos que

4.1. GEOMETRÍA CONFORME

$$\begin{aligned}
 \overline{R(X, Y)Z} &= R(X, Y)Z + [(\nabla_Y S)(X, Z) + S(\nabla_Y X, Z)] + S(Y, S(X, Z)) \\
 &\quad - [(\nabla_X S)(Y, Z) + S(\nabla_X Y, Z)] - S(X, S(Y, Z)) + S([X, Y], Z) \\
 &= R(X, Y)Z + [\nabla_Y S(X, Z) - \nabla_X S(Y, Z)] \\
 &\quad - S([X, Y], Z) + S([X, Y], Z) + S(Y, S(X, Z)) - S(X, S(Y, Z)) \\
 &= R(X, Y)Z + \nabla S(Y, X, Z) - \nabla S(X, Y, Z) + S(Y, S(X, Z)) \\
 &\quad - S(X, S(Y, Z)).
 \end{aligned}$$

Es necesario revisar cada uno de los términos de la expresión anterior a fin de conocer su forma explícita. Empecemos con:

$$\begin{aligned}
 \nabla_Y S(X, Z) &= \nabla_Y(S(X, Z)) - S(\nabla_Y X, Z) - S(X, \nabla_Y Z) \\
 &= \nabla_Y[(X\varphi)Z + (Z\varphi)X - g(X, Z)\text{grad}\varphi] \\
 &\quad - [((\nabla_Y X)\varphi)Z + (Z\varphi)\nabla_Y X - g(\nabla_Y X, Z)\text{grad}\varphi] \\
 &\quad - [(X\varphi)\nabla_Y Z + ((\nabla_Y Z)\varphi)X - g(X, \nabla_Y Z)\text{grad}\varphi] \\
 &= [Y(X\varphi)]Z + (X\varphi)\nabla_Y Z + [Y(Z\varphi)]X + (Z\varphi)\nabla_Y X \\
 &\quad - [g(\nabla_Y X, Z) + g(X, \nabla_Y Z)]\text{grad}\varphi - g(X, Z)\nabla_Y \text{grad}\varphi \\
 &\quad - [((\nabla_Y X)\varphi)Z + (Z\varphi)\nabla_Y X - g(\nabla_Y X, Z)\text{grad}\varphi] \\
 &\quad - [(X\varphi)\nabla_Y Z + ((\nabla_Y Z)\varphi)X - g(X, \nabla_Y Z)\text{grad}\varphi] \\
 &= [Y(X\varphi)]Z + [Y(Z\varphi)]X - g(X, Z)\nabla_Y \text{grad}\varphi \\
 &\quad - ((\nabla_Y X)\varphi)Z - ((\nabla_Y Z)\varphi)X \\
 &= (\nabla_{YX}^2 \varphi)Z + (\nabla_{YZ}^2 \varphi)X - g(Y, Z)\nabla_X \text{grad}\varphi.
 \end{aligned}$$

Análogamente, tenemos

$$\nabla_X S(Y, Z) = (\nabla_{XY}^2 \varphi)Z + (\nabla_{XZ}^2 \varphi)Y - g(X, Z)\nabla_Y \text{grad}\varphi.$$

Entonces

$$\nabla_Y S(X, Z) - \nabla_X S(Y, Z) = g(\nabla_Y \text{grad}\varphi, Z)X - g(\nabla_X \text{grad}\varphi, Z)Y$$

$$+ [g(X, Z)\nabla_Y - g(Y, Z)\nabla_X]\text{grad}\varphi,$$

donde hemos utilizado que $\nabla_{XY}^2 f = \nabla_{YX}^2 f$ para una función suave y una conexión simétrica, así como $\nabla_{XY}^2 f = g(\nabla_X \text{grad}\varphi, Y)$.

Revisemos el término $S(Y, S(X, Z))$:

$$\begin{aligned} S(Y, S(X, Z)) &= S(Y, (X\varphi)Z + (Z\varphi)X - g(X, Z)\text{grad}\varphi) \\ &= S(Y, (X\varphi)Z) + S(Y, (Z\varphi)X) - S(Y, g(X, Z)\text{grad}\varphi) \\ &= (X\varphi)S(Y, Z) + (Z\varphi)S(Y, X) - g(X, Z)S(Y, \text{grad}\varphi) \\ &= (X\varphi)[(Y\varphi)Z + (Z\varphi)Y - g(Y, Z)\text{grad}\varphi] \\ &\quad + (Z\varphi)[(Y\varphi)X + (X\varphi)Y - g(Y, X)\text{grad}\varphi] \\ &\quad - g(X, Z)[(Y\varphi)\text{grad}\varphi + ((\text{grad}\varphi)\varphi)Y - g(Y, \text{grad}\varphi)\text{grad}\varphi] \end{aligned}$$

donde por definición, $g(Y, \text{grad}\varphi) = d\varphi(Y) = Y(\varphi)$.

Otro de los términos que ha aparecido es $(\text{grad}\varphi)\varphi$, que no es otra cosa que

$$\begin{aligned} (\text{grad}\varphi)\varphi &= g^{ij}\partial_i\varphi\partial_j\varphi = \delta_i^j g^{lj}\partial_i\varphi\partial_j\varphi = (g^{im}g_{ml})g^{lj}\partial_i\varphi\partial_j\varphi \\ &= (g^{im}\partial_i\varphi)(g^{jl}\partial_j\varphi)g_{ml} = (g^{im}\partial_i\varphi)(g^{jl}\partial_j\varphi)g(\partial_m, \partial_l) \\ &= g(g^{im}\partial_i\varphi\partial_m, g^{jl}\partial_j\varphi\partial_l) = g(\text{grad}\varphi, \text{grad}\varphi) = \|\text{grad}\varphi\|^2. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} S(Y, S(X, Z)) &= S(Y, (X\varphi)Z + (Z\varphi)X - g(X, Z)\text{grad}\varphi) \\ &= (X\varphi)S(Y, Z) + (Z\varphi)S(Y, X) - g(X, Z)S(Y, \text{grad}\varphi) \\ &= (X\varphi)[(Y\varphi)Z + (Z\varphi)Y - g(Y, Z)\text{grad}\varphi] \\ &\quad + (Z\varphi)[(Y\varphi)X + (X\varphi)Y - g(Y, X)\text{grad}\varphi] \\ &\quad - g(X, Z)[(Y\varphi)\text{grad}\varphi + \|\text{grad}\varphi\|^2 Y - (Y\varphi)\text{grad}\varphi]. \end{aligned}$$

4.1. GEOMETRÍA CONFORME

Análogamente,

$$\begin{aligned} S(X, S(Y, Z)) = & (Y\varphi)[(X\varphi)Z + (Z\varphi)X - g(X, Z)\text{grad}\varphi] \\ & + (Z\varphi)[(X\varphi)Y + (Y\varphi)X - g(X, Y)\text{grad}\varphi] \\ & - g(Y, Z)[(X\varphi)\text{grad}\varphi + \|\text{grad}\varphi\|^2 X - (X\varphi)\text{grad}\varphi]. \end{aligned}$$

Si hacemos,

$$\begin{aligned} S(Y, S(X, Z)) - S(X, S(Y, Z)) &= (X\varphi)(Z\varphi)Y - g(X, Z)\|\text{grad}\varphi\|^2 Y + (Y\varphi)g(X, Z)\text{grad}\varphi \\ &\quad - (Z\varphi)(Y\varphi)X - (X\varphi)g(Y, Z)\text{grad}\varphi + g(Y, Z)\|\text{grad}\varphi\|^2 X \\ &= (Z\varphi)[(X\varphi)Y - (Y\varphi)X] \\ &\quad + \|\text{grad}\varphi\|^2 [g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] \\ &\quad + [(Y\varphi)g(X, Z) - (X\varphi)g(Y, Z)]\text{grad}\varphi. \end{aligned}$$

De modo que,

$$\begin{aligned} \overline{R(X, Y)Z} = & R(X, Y)Z + g(\nabla_Y \text{grad}\varphi, Z)X - g(\nabla_X \text{grad}\varphi, Z)Y \\ & + [g(X, Z)\nabla_Y - g(Y, Z)\nabla_X]\text{grad}\varphi \\ & + (Z\varphi)[(X\varphi)Y - (Y\varphi)X] \\ & + \|\text{grad}\varphi\|^2 [g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] \\ & + [(Y\varphi)g(X, Z) - (X\varphi)g(Y, Z)]\text{grad}\varphi. \end{aligned}$$

Definición 4.3. *Producto de Kulkarni-Nomizu*

Sean A, B $(0, 2)$ -tensores simétricos. Se define al producto de Kulkarni-Nomizu como

$$\begin{aligned} A \otimes B(X, Y, Z, W) := & A(X, Z)B(Y, W) + A(Y, W)B(X, Z) \\ & - A(X, W)B(Y, Z) - A(Y, Z)B(X, W). \end{aligned}$$

El tensor de Riemann es:

$$Rm(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle.$$

y bajo la transformación conforme se escribe de la forma

$$\overline{Rm}(X, Y, Z, W) = \overline{\langle R(X, Y)Z, W \rangle} = e^{2\varphi} \langle R(X, Y)Z, W \rangle_g.$$

De ahora en adelante, al escribir \langle , \rangle nos referiremos a \langle , \rangle_g . Para simplificar el término exponencial, hacemos

$$e^{-2\varphi} \overline{Rm}(X, Y, Z, W) = \overline{\langle R(X, Y)Z, W \rangle}.$$

Considerando la forma que tiene $\overline{\langle R(X, Y)Z, W \rangle}$ y la bilinealidad de la métrica, se sigue

$$\begin{aligned} e^{-2\varphi} \overline{Rm}(X, Y, Z, W) &= Rm(X, Y, Z, W) + \langle \nabla_Y \text{grad} \varphi, Z \rangle \langle X, W \rangle - \langle \nabla_X \text{grad} \varphi, Z \rangle \langle Y, W \rangle \\ &\quad + \langle Y, Z \rangle \langle \nabla_X \text{grad} \varphi, W \rangle - \langle X, Z \rangle \langle \nabla_Y \text{grad} \varphi, W \rangle \\ &\quad + (Z\varphi)(X\varphi) \langle Y, W \rangle - (Z\varphi)(Y\varphi) \langle X, W \rangle \\ &\quad + \|\text{grad} \varphi\|^2 [\langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle] \\ &\quad + [(Y\varphi) \langle X, Z \rangle - (X\varphi) \langle Y, Z \rangle] \langle \text{grad} \varphi, W \rangle \\ &= Rm(X, Y, Z, W) - \frac{1}{2} \|\text{grad} \varphi\|^2 g \otimes g(X, Y, Z, W) \\ &\quad - (\nabla^2 \varphi) \otimes g(X, Y, Z, W) + (\nabla \varphi)^2 \otimes g(X, Y, Z, W), \end{aligned}$$

donde

$$(\nabla \varphi)^2(X, Y) := (\nabla_X \varphi)(\nabla_Y \varphi) = (X\varphi)(Y\varphi)$$

es un tensor simétrico y

$$\nabla^2 \varphi(X, Y) := \nabla \nabla \varphi(X, Y)$$

esto es, $\nabla^2 \varphi$ es el Hessiano de φ .

Para obtener la expresión del tensor de Ricci lo mejor será usar expresiones locales

4.1. GEOMETRÍA CONFORME

$$\begin{aligned}
\text{Ric}_{ij} &= \text{tr}_{24} \overline{Rm}_{ikjl} = \overline{Rm}_{ikj}{}^k = \overline{g}^{kl} \overline{Rm}_{ikjl} = e^{-2\varphi} g^{kl} \overline{Rm}_{ikjl} \\
&= g^{kl} \left\{ Rm_{ikjl} - \frac{1}{2} \|\text{grad}\varphi\|^2 [g \otimes g]_{ikjl} - [(\nabla^2 \varphi) \otimes g]_{ikjl} + [(\nabla \varphi)^2 \otimes g]_{ikjl} \right\} \\
&= \text{Ric}_{ij} - \frac{1}{2} \|\text{grad}\varphi\|^2 g^{kl} [2g_{ij}g_{kl} - 2g_{il}g_{kj}] \\
&\quad - g_{kl} [\nabla_{ij}^2 \varphi g_{kl} + \nabla_{kl}^2 \varphi g_{ij} - \nabla_{il}^2 \varphi g_{kj} - \nabla_{kj}^2 \varphi g_{il}] \\
&\quad + g^{kl} [\nabla_i \varphi \nabla_j \varphi g_{kl} + \nabla_k \varphi \nabla_l \varphi g_{ij} - \nabla_i \varphi \nabla_l \varphi g_{kj} - \nabla_k \varphi \nabla_j \varphi g_{il}] \\
&= \text{Ric}_{ij} - \|\text{grad}\varphi\|^2 [g_{ij} \delta_k^k - \delta_i^k g_{kj}] - [\nabla_{ij}^2 \varphi \delta_k^k + g^{kl} \nabla_{kl}^2 \varphi g_{ij} - \nabla_{il}^2 \varphi \delta_j^l - \nabla_{kj}^2 \varphi \delta_i^k] \\
&\quad + [\nabla_i \varphi \nabla_j \varphi \delta_k^k + (g^{kl} \nabla_k \varphi \nabla_l \varphi) g_{ij} - \nabla_i \varphi \nabla_l \varphi \delta_j^l - \nabla_k \varphi \nabla_j \varphi \delta_i^k] \\
&= \text{Ric}_{ij} - \|\text{grad}\varphi\|^2 (n-2) g_{ij} - [n \nabla_{ij}^2 \varphi - \nabla_{ij}^2 \varphi + g^{kl} \nabla_{kl}^2 \varphi g_{ij}] \\
&\quad + [n \nabla_i \varphi \nabla_j \varphi - \nabla_i \varphi \nabla_j \varphi - \nabla_i \varphi \nabla_\varphi] \\
&= \text{Ric} - \|\text{grad}\varphi\|^2 (n-2) g_{ij} - (n-2) \nabla_{ij}^2 \varphi - \Delta \varphi g_{ij} + (n-2) \nabla_i \varphi \nabla_j \varphi \\
&= \text{Ric}_{ij} - (\Delta \varphi + (n-2) \|\text{grad}\varphi\|^2) g_{ij} + (n-2) (\nabla_\varphi \nabla_j \varphi - \nabla_{ij}^2 \varphi).
\end{aligned}$$

En general, se tiene

$$\begin{aligned}
\overline{\text{Ric}}(X, Y) &= \text{Ric}(X, Y) - (\Delta \varphi + (n-2) \|\text{grad}\varphi\|^2) g(X, Y) \\
&\quad + (n-2) ((\nabla \varphi)^2(X, Y) - \nabla^2 \varphi(X, Y)).
\end{aligned}$$

Calculemos ahora la curvatura escalar

$$\begin{aligned}
\overline{R} &= \text{tr}_g \overline{\text{Ric}}_{ij} = \overline{\text{Ric}}_i{}^i = \overline{g}^{ij} \overline{\text{Ric}}_{ij} = e^{-2\varphi} g^{ij} \overline{\text{Ric}}_{ij} \\
&= e^{-2\varphi} [R - (\Delta \varphi + (n-2) \|\text{grad}\varphi\|^2) \delta_i^i + (n-2) (g^{ij} \nabla_i \varphi \nabla_j \varphi - g^{ij} \nabla_{ij}^2 \varphi)] \\
&= e^{-2\varphi} [R - n \Delta \varphi - n(n-2) \|\text{grad}\varphi\|^2 + (n-2) \|\text{grad}\varphi\|^2 - (n-2) \Delta \varphi] \\
&= e^{-2\varphi} [R - 2(n-1) \Delta \varphi - (n-2)(n-1) \|\text{grad}\varphi\|^2].
\end{aligned}$$

Por lo tanto la curvatura escalar se escribe como

$$\overline{R} = e^{-2\varphi} [R - 2(n-1) \Delta \varphi - (n-2)(n-1) \|\text{grad}\varphi\|^2].$$

A manera de resumen, enlistaremos nuestros resultados:

- Endomorfismo de curvatura

$$\begin{aligned} \overline{R(X, Y)Z} = & R(X, Y)Z + g(\nabla_Y \text{grad}\varphi, Z)X - g(\nabla_X \text{grad}\varphi, Z)Y \\ & + [g(X, Z)\nabla_Y - g(Y, Z)\nabla_X]\text{grad}\varphi \\ & + (Z\varphi)[(X\varphi)Y - (Y\varphi)X] \\ & + \|\text{grad}\varphi\|^2[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] \\ & + [(Y\varphi)g(X, Z) - (X\varphi)g(Y, Z)]\text{grad}\varphi. \end{aligned}$$

- Tensor de Riemann

$$\begin{aligned} e^{-2\varphi}\overline{Rm}(X, Y, Z, W) = & Rm(X, Y, Z, W) - \frac{1}{2}\|\text{grad}\varphi\|^2 g \otimes g(X, Y, Z, W) \\ & - (\nabla^2\varphi) \otimes g(X, Y, Z, W) + (\nabla\varphi)^2 \otimes g(X, Y, Z, W). \end{aligned}$$

- Tensor de Ricci

$$\begin{aligned} \overline{\text{Ric}}(X, Y) = & \text{Ric}(X, Y) - (\Delta\varphi + (n-2)\|\text{grad}\varphi\|^2)g(X, Y) \\ & + (n-2)((\nabla\varphi)^2(X, Y) - \nabla^2\varphi(X, Y)). \end{aligned}$$

- Curvatura escalar

$$\overline{R} = e^{-2\varphi}[R - 2(n-1)\Delta\varphi - (n-2)(n-1)\|\text{grad}\varphi\|^2].$$

4.2. Problema de Yamabe clásico

La conjetura de Poincaré dice que:

Si una variedad compacta M de dimensión tres tiene la propiedad de que cualquier curva simple y cerrada puede ser deformada de manera continua a un punto, entonces M es homeomorfa a \mathbb{S}^3 .

4.2. PROBLEMA DE YAMABE CLÁSICO

Hidehiko Yamabe buscaba probar la conjetura de Poincaré y para ello pensó que un primer paso sería exhibir una métrica con curvatura constante. Yamabe utilizó métricas conformes pues las transformaciones conformes de la métrica simplifican el problema y estableció la siguiente conjetura:

En una variedad Riemanniana cerrada (compacta y sin frontera) (M^n, g) de dimensión $n \geq 3$, con curvatura escalar R , existe una métrica \bar{g} conforme a g tal que la curvatura escalar \bar{R} es constante.

En 1960 Yamabe dio una prueba de su conjetura, sin embargo, su prueba no era correcta. Fue entonces que nació el problema de Yamabe y pasó un largo tiempo antes de que la afirmación pudiera ser totalmente demostrada.

Si en la ecuación para la curvatura escalar

$$\bar{R} = e^{-2\varphi}[R - 2(n-1)\Delta\varphi - (n-2)(n-1)\|\text{grad}\varphi\|^2],$$

hacemos $e^{2\varphi} = u^{\frac{4}{n-2}}$, donde u es una función suave y positiva, tendremos que

$$\ln e^{2\varphi} = 2\varphi = \ln u^{\frac{4}{n-2}},$$

de modo que

$$\varphi = \frac{1}{2} \ln u^{\frac{4}{n-2}},$$

calculemos $\text{grad}\varphi = g^{ij}\partial_i\varphi\partial_j$. Basta entonces con calcular

$$\begin{aligned}\partial_i\varphi &= \partial_i\left(\frac{1}{2}\ln u^{\frac{4}{n-2}}\right) = \frac{1}{2}u^{\frac{-4}{n-2}}\partial_i(u^{\frac{4}{n-2}}) = \frac{2}{n-2}u^{\frac{-4}{n-2}}u^{\frac{4}{n-2}-1}\partial_i u \\ &= \frac{2}{n-2}u^{\frac{6-4-n}{n-2}}\partial_i u = \frac{2}{u(n-2)}\partial_i u,\end{aligned}$$

luego:

$$\|\text{grad}\varphi\|^2 = g(g^{ij}\partial_i\varphi\partial_j, g^{kl}\partial_k\varphi\partial_l) = g^{ij}g^{kl}g_{ji}\partial_i\varphi\partial_k\varphi$$

4.2. PROBLEMA DE YAMABE CLÁSICO

$$\begin{aligned}
 &= g^{ij} \delta_j^k \partial_i \varphi \partial_k \varphi = g^{ij} \partial_i \varphi \partial_k \varphi = g^{ij} \left[\frac{2}{u(n-2)} \right]^2 \partial_i u \partial_j u \\
 &= \frac{4}{u^2(n-2)^2} |\nabla u|^2.
 \end{aligned}$$

Debemos calcular también $\Delta \varphi = g^{ij} \nabla_{ij}^2 \varphi$, entonces:

$$\begin{aligned}
 \nabla_{ij}^2 \varphi &= \partial_i (\partial_j \varphi) - (\nabla_{\partial_i} \partial_j) \varphi = \partial_i (\partial_j \varphi) - \Gamma_{ij}^k \partial_k \varphi \\
 &= \partial_i \left[\frac{2}{u(n-2)} \partial_j u \right] - \Gamma_{ij}^k \left[\frac{2}{u(n-2)} \partial_k u \right] \\
 &= \frac{2}{n-2} \left[-u^{-2} \partial_i u \partial_j u + u^{-1} \partial_i (\partial_j u) - \Gamma_{ij}^k u^{-1} \partial_k u \right] \\
 &= \frac{2}{n-2} \left[u^{-1} \nabla_{ij}^2 u - u^{-2} \partial_i u \partial_j u \right].
 \end{aligned}$$

de donde se sigue que:

$$\Delta \varphi = \frac{2}{n-2} \left[u^{-1} \Delta u - u^{-2} |\nabla u|^2 \right].$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 &-2(n-1)\Delta \varphi - (n-2)(n-1) \|\text{grad} \varphi\|^2 \\
 &= -2(n-1) \frac{2}{n-2} \left[u^{-1} \Delta u - u^{-2} |\nabla u|^2 \right] - (n-2)(n-1) \frac{4}{u^2(n-2)^2} \|\nabla u\|^2 \\
 &= \frac{-4(n-1)}{u(n-2)} \Delta u + \frac{4(n-1)}{n-2} \|\nabla u\|^2 - \frac{4(n-1)}{n-2} \|\nabla u\|^2 \\
 &= \frac{-4(n-1)}{u(n-2)} \Delta u.
 \end{aligned}$$

Por lo que

$$e^{2\varphi} \bar{R} = u^{\frac{4}{n-2}} \bar{R} = R - \frac{4(n-1)}{u(n-2)} \Delta u$$

4.2. PROBLEMA DE YAMABE CLÁSICO

que también puede expresarse como:

$$\frac{-4(n-1)}{n-2} \Delta u + Ru = u^{\frac{n+2}{n-2}} \bar{R},$$

o bien

$$\bar{R} = u^{-\frac{n+2}{n-2}} \left(\frac{-4(n-1)}{n-2} \Delta u + Ru \right),$$

que es válida para $n \geq 3$. Resolver el problema de Yamabe implica probar que la expresión obtenida siempre tiene solución cuando $\bar{R} = cte$.

Yamabe observó que la ecuación anterior es la ecuación de Euler-Lagrange para el funcional:

$$Q(u) = \frac{\int \left(\frac{4(n-1)}{n-2} \|\nabla u\|^2 + Ru^2 \right) dV}{\left(\int |u|^q dV \right)^{\frac{2}{q}}}$$

donde dV es el elemento de volumen sobre M^n y $q = \frac{2n}{n-2}$. Notemos también que $\|u\|_q = \left(\int |u|^q dV \right)^{1/q}$. Para corroborar lo anterior, definamos

$$i[\tau] := Q(u + \tau\psi),$$

para cualquier $\psi \in C^\infty(M)$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} i'[\tau] &= \left\{ \partial_\tau \left[\int_M \left(\frac{4(n-1)}{n-2} |\nabla(u + \tau\psi)|^2 + R(u + \tau\psi)^2 \right) dV \right] \|u + \tau\psi\|_q^2 \right. \\ &\quad \left. - \left[\int_M \left(\frac{4(n-1)}{n-2} |\nabla(u + \tau\psi)|^2 + R(u + \tau\psi)^2 \right) dV \right] \partial_\tau (\|u + \tau\psi\|_q^2) \right\} / \|u + \tau\psi\|_q^4. \end{aligned}$$

Escribamos el primer término de la suma en coordenadas locales:

$$\partial_\tau \left[\int_M \left(\frac{4(n-1)}{n-2} g^{ij} \partial_i(u + \tau\psi) \partial_j(u + \tau\psi) + R(u + \tau\psi)^2 \right) dV \right] \|u + \tau\psi\|_q^2,$$

de donde se sigue que:

$$\partial_\tau [g^{ij} \partial_i(u + \tau\psi) \partial_j(u + \tau\psi)] = 2g^{ij} \partial_i(u + \tau\psi) \partial_j \psi,$$

el término completo equivale a:

$$\begin{aligned} & 2 \left[\int_M \left(\frac{4(n-1)}{n-2} g^{ij} \partial_i(u + \tau\psi) \partial_j \psi + R(u + \tau\psi) \psi \right) dV \right] \|u + \tau\psi\|_q^2 \\ &= 2 \left[\int_M \left(\frac{4(n-1)}{n-2} \langle \nabla(u + \tau\psi), \nabla \psi \rangle + R(u + \tau\psi) \psi \right) dV \right] \|u + \tau\psi\|_q^2. \end{aligned}$$

Usando integración por partes y recordando que M^n es cerrada, la expresión anterior se escribe como

$$2 \left[\int_M \left(\frac{-4(n-1)}{n-2} \Delta u + R(u + \tau\psi) \right) \psi dV \right] \|u + \tau\psi\|_q^2.$$

por otra parte:

$$\begin{aligned} \partial_\tau \|u + \tau\psi\|_q^2 &= 2 \|u + \tau\psi\|_q \partial_\tau \|u + \tau\psi\|_q \\ &= \frac{2}{q} \|u + \tau\psi\|_q \left(\int_M |u + \tau\psi|^q dV \right)^{\frac{1}{q}-1} \partial_\tau \left(\int_M |u + \tau\psi|^q dV \right) \\ &= \frac{2}{q} \left(\int_M |u + \tau\psi|^q dV \right)^{\frac{2}{q}-1} \int_M q |u + \tau\psi|^{q-1} \frac{u + \tau\psi}{|u + \tau\psi|} \psi dV \\ &= 2 \|u\|_q^2 \|u\|_q^{-q} \int_M |u + \tau\psi|^{q-2} (u + \tau\psi) \psi dV. \end{aligned}$$

Si hacemos:

$$i'[0] = 0,$$

tendremos:

4.2. PROBLEMA DE YAMABE CLÁSICO

$$0 = \frac{2}{\|u\|_q^{-2}} \int_M \left(\frac{-4(n-1)}{n-2} \Delta u + Ru - \frac{E(u)}{\|u\|_q^q} u^{q-1} \right) \psi dV.$$

Donde,

$$E(u) := \int_M \left(\frac{4(n-1)}{n-2} |\nabla u|^2 + Ru^2 \right) dV.$$

Se sigue que

$$\frac{-4(n-1)}{n-2} \Delta u + Ru - \frac{E(u)}{\|u\|_q^q} u^{q-1} = 0.$$

Entonces u es un punto crítico de Q si y sólo si satisface la ecuación de Yamabe con:

$$\lambda = cte. = \bar{R} = \frac{E(u)}{\|u\|_q^q}.$$

Podemos definir ahora:

$$\lambda(M) := \inf \{ Q(u) \mid u \text{ es una función suave y positiva sobre } M \}.$$

La constante $\lambda(M)$ es una invariante de la clase conforme de (M^n, g) y se conoce como invariante de Yamabe. Niel Trudinger tomó como base los argumentos de Yamabe para dar una prueba correcta a su conjetura para el caso en el que $\lambda(M) \leq 0$. Siendo más precisos, Trudinger demostró la existencia de una constante positiva $\alpha(M)$ tal que la modificación realizada a la prueba de Yamabe era correcta cuando $\lambda(M) < \alpha(M)$. En 1976, en ?? Thierry Aubin logró extender el resultado de Trudinger al demostrar que $\alpha(M) = \lambda(\mathbb{S}^n)$ para cualquier M . La contribución de Aubin quedó plasmada en el siguiente teorema:

Teorema 4.4 (Yamabe-Trudinger-Aubin). *El problema de Yamabe puede ser solucionado en cualquier variedad compacta M , con $\lambda(M) < \lambda(\mathbb{S}^n)$, donde \mathbb{S}^n es la esfera con su métrica estándar y $n \geq 3$.*

En las notas de Robin Neumayer [18] se encuentra una demostración alternativa al teorema 4.4. Este teorema representa la parte analítica del problema. La idea

detrás del teorema es la siguiente: una sucesión de funciones que minimizan $\lambda(M)$ solo puede converger a un minimizador o bien, concentrarse en un punto $p \in M$. El segundo caso es descartado al analizar la contribución a la energía de la solución junto a la condición $\lambda(M) < \lambda(\mathbb{S}^n)$, entonces la sucesión converge a un minimizador de $\lambda(M)$. El problema tiene solución.

En [3], Aubin también logró probar que:

Teorema 4.5. *Si M tiene dimensión $n \geq 6$ y no es conformemente plana de manera local, entonces $\lambda(M) < \lambda(\mathbb{S}^n)$.*

En 1984, Richard Schoen completa la solución al problema de Yamabe resolviendo para los casos restantes:

Teorema 4.6. *Si M tiene dimensión 3,4,5 o si M es conformemente plana de manera local, entonces $\lambda(M) < \lambda(\mathbb{S}^n)$ a menos que M sea conforme a la esfera estándar.*

Los teoremas 4.5 y 4.6 corresponden a la parte geométrica del problema de Yamabe, esto es, los resultados se enfocan en la comprensión del invariante de Yamabe $\lambda(M)$. El método para demostrar que $\lambda(M) < \lambda(\mathbb{S}^n)$ es encontrar una función de prueba φ que satisfaga $Q(\varphi) < \lambda(\mathbb{S}^n)$. En el caso del teorema 4.5, Aubin buscó dicha función con soporte compacto en la vecindad de un punto $p \in M$. Estudiando localmente la geometría de M cerca del punto p en coordenadas normales, , logró construir las funciones de prueba para varios casos, demostrando así el teorema 4.5. Para la demostración el teorema 4.6 en [19], Schoen tomó una función de prueba φ con soporte cerca del punto $o \in M$ y argumentó que como la función φ permitía acercarse arbitrariamente a $Q(\varphi)$, dicha función podría perturbarse a manera de hacerla muy pequeña pero distinta de cero al alejarse del punto p . Debido a que la no linealidad de la ecuación de Yamabe involucra potencias grandes de la solución, las soluciones pequeñas debían acercarse a las soluciones de la ecuación

$$Lu = o.$$

El operador L corresponde a la parte lineal de la ecuación asociada al problema de Yamabe, esto es:

$$Lu = \Delta u - \frac{n-2}{4(n-1)}Ru.$$

4.2. PROBLEMA DE YAMABE CLÁSICO

Schoen explicó que la única solución positiva a la ecuación anterior, fuera del punto o , era un múltiplo de la función de Green del operador L . Schoen redujo el problema de probar que $Q(\varphi) < Q(\mathbb{S}^n)$ al estudio de una función de Green cerca del punto o .

El problema hiperbólico de Yamabe

5.1. Estructura formal del espacio-tiempo y espacio-tiempo de Minkowski

Consideremos una métrica g . La *signatura* de la métrica será el número de eigenvalores positivos de la matriz (g_{ij}) en $p \in M^n$, menos el número de eigenvalores negativos. Diremos que g es una métrica *Lorentziana* (pseudo-métrica) si tiene signatura $(n - 2)$. Si M^n está equipada con una métrica Lorentziana, diremos que M^n es una *variedad Lorentziana*. Una métrica Lorentziana puede tomar valores positivos negativos y nulos.

El modelo matemático que utilizamos para referirnos al espacio-tiempo es una variedad Lorentziana suave de dimensión 4. El que la variedad sea de Hausdorff, aunado a la existencia de la métrica Lorentziana sobre ella, implica que la variedad es paracompacta.

Una de las métricas más simples que se utilizan en física, en coordenadas (t, x, y, z) , es

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Esta métrica se conoce como métrica de Minkowski y a \mathbb{R}^4 , equipado con esta métrica, se le llama espacio-tiempo de Minkowski. El espacio-tiempo de Minkowski es el ejemplo de espacio-tiempo más simple que tenemos pues es una variedad

5.1. ESTRUCTURA FORMAL DEL ESPACIO-TIEMPO Y ESPACIO-TIEMPO DE MINKOWSKI

plana. En forma matricial, la métrica de Minkowski se expresa como

$$(\eta)_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \mathbf{0} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{pmatrix}$$

La signatura de la métrica de Minkowski es +2.

Nótese que ahora usamos el alfabeto griego para los índices. El alfabeto latino, al hablar de relatividad, será utilizado en los índices sólo para denotar a las coordenadas espaciales (cuando sea que se quiera hablar de ellas).

Si comparamos la métrica de Minkowski con el intervalo relativista podremos ver que son iguales, entonces es claro que el espacio-tiempo de Minkowski es en realidad el espacio asociado a la relatividad especial.

Podemos usar una métrica Lorentziana en M para clasificar vectores distintos de cero: un vector en $X \in T_p M$ puede ser temporaloide, espacialoide o nulo dependiendo de si $g(X, X)$ es negativo, positivo o cero, respectivamente.

Lo anterior también nos permite clasificar curvas. Sea $\gamma = \gamma(s)$ una curva sobre M^n , diremos que γ es espacialoide, temporaloide o nula dependiendo de si todos sus vectores de velocidad $\gamma'(s)$ son espacialoides, temporaloides o nulos, respectivamente.

Definición 5.1 (Superficie de Cauchy). *Una superficie de Cauchy es una hipersuperficie tal que toda curva no espacialoide la intersecta sólo una vez.*

Observación 5.2. *En el espacio de Minkowski, las superficies $t = \text{cte.}$ forman una familia de superficies de Cauchy que cubren a toda la variedad.*

Definición 5.3 (Espacio globalmente hiperbólico). *Un espacio se dice globalmente hiperbólico si admite una superficie de Cauchy.*

Observación 5.4. *El espacio-tiempo de Minkowski es un espacio globalmente hiperbólico.*

5.2. Problema de Yamabe Lorentziano

En [9], Nicolas Ginoux busca soluciones al problema de Yamabe sobre un tipo particular de variedad. Para ser más precisos, Ginoux estudia si dada (M^n, g) una variedad Lorentziana con signatura $(-, + \dots, +)$ existe una métrica con curvatura constante que sea conforme a la métrica g . Como en el problema de Yamabe original, todo se reduce a resolver

$$e^{2u} S_{\bar{g}} = S_g + 2\Box u$$

con $\bar{g} := e^{2u} g$ y $u \in C^\infty(\mathbb{R})$, para el caso $n = 2$. S_g y $S_{\bar{g}}$ son las curvaturas escalares correspondientes a las métricas g y \bar{g} , respectivamente. Además

$$\Box := -\text{tr}_g(\nabla \circ d).$$

Para el caso $n \geq 3$ el problema se reduce a resolver

$$\frac{n-2}{4(n-1)} S_{\bar{g}} \varphi^{\frac{n+2}{n-2}} = \Box \varphi + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g \varphi$$

con $\bar{g} := \varphi^{\frac{4}{n-2}} g$ y $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$.

Ginoux restringe el problema al trabajar en los espacios que tienen la estructura de espacio-tiempo y, además, pide que dichos espacios sean globalmente hiperbólicos. Al trabajar con espacios globalmente hiperbólicos se tiene el siguiente resultado:

Teorema 5.5. *Sea (M^n, g) un espacio-tiempo, entonces:*

1. *Si (M^n, g) es globalmente hiperbólico, entonces es isométrico a $(\mathbb{R} \times \Sigma, -\beta dt^2 \oplus g_t)$, donde cada $\{t\} \times \Sigma$ corresponde a una superficie de Cauchy espacialoide y suave de M , $\beta \in C^\infty(\mathbb{R} \times \Sigma, \mathbb{R}_+)$ y (g_t) es una familia uniparamétrica de métricas Riemannianas en Σ .*
2. *Si $\Sigma \subset M$ es una hipersuperficie de Cauchy espacialoide y suave en el espacio-tiempo (M^n, g) , entonces para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$ existe una isometría $(M^n, g) \cong (\mathbb{R} \times \Sigma, -\beta dt^2 \oplus g_t)$ y que identifica a Σ con $\{t_0\} \times \Sigma$.*

5.2. PROBLEMA DE YAMABE LORENTZIANO

En particular, utilizaremos el siguiente resultado del trabajo de Ginoux [9]:

Lema 5.6. *Sea un espacio-tiempo (M^n, g) de la forma $(I \times \Sigma, -\beta dt^2 \oplus g_t)$ donde $\beta \in C^\infty(I \times \Sigma, \mathbb{R}_+)$, I es un intervalo abierto y $(g_t)_t$ es una familia uniparamétrica de métricas Riemannianas sobre Σ , entonces*

- Para cada $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \square f &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{1}{2\beta} \left(\text{tr}_{g_t} \left(\frac{\partial g_t}{\partial t} \right) - \frac{1}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial t} \right) \frac{\partial f}{\partial t} \\ &\quad - \frac{1}{2\beta} g_t \left(\text{grad}_{g_t}(\beta(t, \cdot)), \text{grad}_{g_t}(f(t, \cdot)) \right) \\ &\quad + \Delta_{g_t} f(t, \cdot) \end{aligned}$$

- En el caso $\beta = 1$, tenemos

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \text{tr}_{g_t} \left(\frac{\partial g_t}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial t} + \Delta_{g_t}.$$

- En el caso $\beta = 1$ y $g_t = b^2(t)g_\Sigma$ para alguna $b \in C^\infty(I, \mathbb{R}_+)$ y alguna métrica Riemanniana g_Σ en Σ , se tiene

$$\square + a_n S_g = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (n-1) \frac{b'}{b} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{b^2} \Delta_{g_\Sigma}.$$

- Si $\beta = 1$ y $g_t = g_\Sigma$ para alguna métrica Riemanniana g_Σ sobre Σ , se tiene

$$\square + a_n S_g = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + L_{g_\Sigma}$$

donde $L_{g_\Sigma} := \Delta_{g_\Sigma} + a_n S_{g_\Sigma}$, $\Delta_{g_\Sigma} := -\text{tr}(\text{Hess}_{g_\Sigma}^\Sigma)$ y $a_n := \frac{n-2}{4(n-1)}$.

Observación 5.7. *Debemos tener en cuenta que la convención de signo que usa Ginoux para expresiones como Δ_{g_Σ} considera un signo negativo, algo distinto a la notación que hemos utilizado a lo largo de la tesis, por lo cual*

$$L_{g_\Sigma} := -\Delta_{g_\Sigma} + a_n S_{g_\Sigma}$$

5.3. PROBLEMA DE YAMABE HIPERBÓLICO EN EL ESPACIO-TIEMPO DE MINKOWSKI

Uno de los resultados más importantes del trabajo de Ginoux, es el siguiente:

Teorema 5.8. *Sea (M^n, g) un espacio-tiempo globalmente hiperbólico de dimensión $n \geq 3$ con una hipersuperficie de Cauchy $\Sigma \subset M$ y $S_{\bar{g}} \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria. Denotemos por ν a un vector normal unitario futuro-dirigido a lo largo de Σ . Entonces para cualesquiera $\varphi_0, \varphi_1 \in C^\infty(\Sigma, \mathbb{R})$ con $\varphi_0 > 0$, existe un único subconjunto maximal, globalmente hiperbólico, \hat{D}_Σ de M en el que Σ es una hipersuperficie de Cauchy y sobre la cual el problema*

$$\left\{ \begin{array}{l} \square \varphi + a_n S_g \varphi = a_n S_{\bar{g}} \varphi^{\frac{n+2}{n-2}} \\ \varphi|_\Sigma = \varphi_0 \\ \partial_\nu \varphi = \varphi_1 \end{array} \right.$$

tiene un única solución positiva.

5.3. Problema de Yamabe hiperbólico en el Espacio-tiempo de Minkowski

En física, particularmente en la relatividad general, las transformaciones conformes son utilizadas de varias formas. Textos como [21] introducen métricas \bar{g} via transformaciones conformes:

$$\bar{g} = \Omega^2 g, \quad (5.9)$$

donde g es la métrica asociada a una variedad M y Ω es una función estrictamente positiva.

En [10] se muestra un uso concreto de las transformaciones conformes: estudiar la *estructura causal* del espacio-tiempo. Por *estructura causal* se entiende al conjunto de *relaciones causales* entre eventos del espacio-tiempo, esto es, la descripción de qué eventos pueden influenciar a qué otros eventos de un espacio-tiempo dado. Como un ejemplo de estas relaciones se tiene que una señal puede enviarse entre dos eventos si y solo si dichos eventos pueden unirse mediante una curva no espa-

5.3. PROBLEMA DE YAMABE HIPERBÓLICO EN EL ESPACIO-TIEMPO DE MINKOWSKI

cialoide; lo anterior debido al *postulado de causalidad* enunciado en [10].

Para estudiar la geometría conforme de un espacio-tiempo M , y por tanto su estructura causal, Hawking y Ellis [10] imponen sobre 5.9 las siguientes condiciones:

- g es una métrica física.
- Ω es distinta de cero y es de clase C^r .

Dado un espacio-tiempo (M, g) , de la expresión 5.9 se tiene lo siguiente:

- Un vector v es espacialoide, temporaloide o nulo respecto a la métrica g si y solo si satisface la misma propiedad respecto a \bar{g} . Entonces (M, g) y (M, \bar{g}) tienen la misma estructura causal.
- Si los conos de luz de dos métricas Lorentzianas g y \bar{g} coinciden en un punto $p \in M$, entonces g debe ser un múltiplo de \bar{g} en p . En consecuencia, si los espacios (M, g) y (M, \bar{g}) tienen la misma estructura causal, g y \bar{g} están relacionadas mediante una transformación conforme.

En vista de la relación que tienen las transformaciones conformes con la métrica asociada a un espacio-tiempo, se decidió trabajar en un problema de tipo Yamabe sobre el espacio-tiempo de Minkowski con el fin estudiar la clase conforme de métricas de este espacio. Como en [11], se mostrará que existe una métrica conforme a la métrica del espacio-tiempo de Minkowski de dimensión $(3 + 1)$ tal que dicha métrica tiene una curvatura constante k . El caso $k = 0$ es trivial, sin embargo, para resolver la ecuación diferencial del problema de Yamabe trabajaremos con un valor arbitrario de k . Acto seguido, para garantizar la existencia de una solución positiva, nos restringiremos al caso $k > 0$ como en [11].

Tomemos (\mathbb{R}^4, η) , el espacio-tiempo de Minkowski. Usando los resultados de la sección anterior para el caso $\beta = 1$ y $g_t = g_\Sigma$, tomando $\Sigma = \mathbb{R}^3$ y g_Σ como su métrica usual, tendremos que $(\mathbb{R}^4, \eta) \cong (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, -dt^2 \oplus g_\Sigma)$. El problema de tipo Yamabe a resolver será

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_{g_\Sigma} u = a_n k u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

con k una constante arbitraria. Como estamos trabajando con un espacio de dimensión $n + 1$, la ecuación tomará la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_{g_\Sigma} u = a_{n+1} k u^{\frac{n+3}{n-1}}.$$

5.3. PROBLEMA DE YAMABE HIPERBÓLICO EN EL ESPACIO-TIEMPO DE MINKOWSKI

Si hacemos $n = 3$, tendremos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_{g_\Sigma} u = \frac{2}{12} k u^3 = C u^3.$$

Como el laplaciano será el de \mathbb{R}^3 , escribimos

$$\Delta = \Delta_{g_\Sigma},$$

esto es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = C u^3$$

En el caso de la presente tesis, nos concentraremos en la existencia y unicidad de la solución al siguiente problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = \phi(u); & x \in \mathbb{R}^3 \text{ y } t \in \mathbb{R}_+ \\ t = 0 : & u = f(x), u_t = g(x). \end{cases} \quad (5.10)$$

Presentaremos la prueba que Fumioki Asakura dió en [2] pero revisaremos antes un poco sobre otros problemas de Cauchy relacionados con ecuaciones de onda (usaremos la notación de Asakura). En el caso homogéneo:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0; & x \in \mathbb{R}^3 \text{ y } t \in \mathbb{R}_+ \\ t = 0 : & u = f(x), u_t = g(x), \end{cases} \quad (5.11)$$

la solución global está dada por [5]:

$$u(x, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{|\xi|=1} g(x + t\xi) d\omega_\xi + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(t \int_{|\xi|=1} f(x + t\xi) d\omega_\xi \right),$$

donde $d\omega_\xi$ es el elemento de superficie sobre la esfera unitaria y ξ es un vector unitario. Si los datos iniciales tienen simetría esférica, esto es, si $f(x) = f(r)$ y $g(x) = g(r)$ con $r = |x|$ la solución se escribe como:

$$u(r, t) = \frac{1}{2r} [(r+t)f(r+t) + (r-t)f(r-t)] + \frac{1}{2r} \int_{|r-t|}^{r+t} \rho g(\rho) d\rho.$$

5.3. PROBLEMA DE YAMABE HIPERBÓLICO EN EL ESPACIO-TIEMPO DE MINKOWSKI

Para el problema inhomogéneo:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = w(x, t); & x \in \mathbb{R}^3 \text{ y } t \in \mathbb{R}_+ \\ t = 0 : u = u_t = 0, \end{cases} \quad (5.12)$$

la solución está dada por:

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^t (t - \tau) \int_{|\xi|=1} w(x + (t - \tau)\xi, \tau) d\omega_\xi d\tau.$$

Denotemos a la solución anterior como:

$$u = Lw.$$

Si los datos iniciales tienen simetría esférica, la solución toma la forma:

$$u(r, t) = \frac{1}{2r} \int_0^t \int_{|r-t+\tau|}^{r+t-\tau} \rho w(\rho, \tau) d\rho d\tau.$$

Antes de continuar debemos definir a los *multiíndices*.

Definición 5.13. *Un vector de la forma $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, donde cada α_i es un número entero no negativo, es llamado multiíndice de orden*

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Dado un multiíndice α , definimos

$$D_x^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u.$$

Las condiciones iniciales del problema homogéneo satisfacen el siguiente resultado [2]:

Teorema 5.14. *Sean $f \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ que satisfacen*

$$\sum_{|\alpha| \leq 2} |D_x^\alpha g(x)| + \sum_{|\alpha| \leq 3} |D_x^\alpha f(x)| \leq \frac{G}{(1+r)^k + 1}$$

5.3. PROBLEMA DE YAMABE HIPERBÓLICO EN EL ESPACIO-TIEMPO
DE MINKOWSKI

donde $G, k > 0$ y $r = |x|$. Entonces la solución al problema homogéneo satisface

$$|D_x^\alpha u(x, t)| \leq \begin{cases} \frac{CG}{(1+r+t)(1+|t-r|)^{k-1}}; & k > 1 \\ \frac{CG \log(2+t+r)}{1+t+r}; & k = 1 \\ \frac{CG}{(1+t+r)^k}; & 0 < k < 1 \end{cases}$$

para $|\alpha| \leq 2$, donde C depende únicamente de k .

Para resolver el problema (5.10), supondremos que $\phi(u)$ satisface

I $\phi \in C^2(\mathbb{R})$, $\phi(0) = \phi'(0) = \phi''(0) = 0$;

II Existen $p > 2$ y $B > 0$ tales que

$$|\phi''(u) - \phi''(v)| \leq \begin{cases} B|u - v|^{p-2} & \text{si } p < 3 \\ B|w|^{p-3}|u - v| & \text{si } p \geq 3 \end{cases}$$

para $|u|, |v| \leq 1$, $w = \max(|u|, |v|)$.

Sea $A := \frac{B}{p(p-1)}$. Hagamos $v = 0$ en la condición II, entonces tendremos

$$|\phi''(u)| \leq \begin{cases} B|u|^{p-2} & \text{si } p < 3 \\ B|w|^{p-3}|u| & \text{si } p \geq 3 \end{cases}$$

se sigue que $w = |u|$ y además

$$|\phi''(u)| \leq Ap(p-1)|u|^{p-2}; \quad |u| \leq 1 \text{ y } p > 2. \quad (5.15)$$

Integrando ambos lados y recordando que

$$\left| \int f(x) dx \right| \leq \int |f(x)| dx,$$

se obtiene

5.3. PROBLEMA DE YAMABE HIPERBÓLICO EN EL ESPACIO-TIEMPO DE MINKOWSKI

$$|\phi'(u)| \leq Ap|u|^{p-1} \quad (5.16)$$

$$|\phi(u)| \leq A|u|^p. \quad (5.17)$$

Teorema 5.18. Si $\phi(u)$ satisface las condiciones I y II con $p > 1 + \sqrt{2}$ y si $f(x) \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $g(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$ satisfacen

$$\sum_{|\alpha| \leq 2} |D_x^\alpha g(x)| + \sum_{|\alpha| \leq 3} |D_x^\alpha f(x)| \leq \frac{G}{(1+r)^k + 1}$$

siempre existe una única solución C^2 al problema (5.10), para alguna G suficientemente pequeña.

Como $u = u(x, t)$, la solución al problema (5.10) debe satisfacer la siguiente identidad integral

$$u = u^0 + L(\phi(u)),$$

donde u^0 es la solución al problema homogéneo y L viene de la solución, $\bar{u} = Lw$ a la ecuación de onda no homogénea.

Proposición 5.19. Si $u \in C^0(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+)$ es tal que $D_x u, D_x^2 u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+)$ y satisface $u = u^0 + L(\phi(u))$, entonces u es la solución al problema (5.10).

Demostración. Como ϕ es de clase C^2 , entonces $w(x, t) = \phi(u(x, t))$ es una función continua con $D_x w$ y $D_x^2 w$ continuas. Por hipótesis tenemos

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= (u^0 + Lw)_{tt} - \Delta(u^0 + Lw) \\ &= (u_{tt}^0 - \Delta u^0) + (\bar{u}_t - \Delta \bar{u}) = w = \phi(u). \end{aligned}$$

□

Fumioki Asakura demuestra en [2] el siguiente lemma:

Lema 5.20. Sea $u(x, t) \in C^0(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+)$ tal que satisface, para $k > 0$, lo siguiente:

5.3. PROBLEMA DE YAMABE HIPERBÓLICO EN EL ESPACIO-TIEMPO
DE MINKOWSKI

$$|u(x, t)| \leq \begin{cases} \frac{M}{(1+t+r)(1+|r-t|)^{k-1}}; & k > 1 \\ \frac{M \log(2+t+r)}{(1+t+r)}; & k = 1 \\ \frac{M}{(1+t+r)^k}; & 0 < k < 1, \end{cases}$$

donde suponemos que $k > \frac{2}{p-1}$ y $p > 1 + \sqrt{2}$. Entonces existe C , independiente de $M > 0$, tal que

$$|(L|u|^p)(x, t)| \leq \begin{cases} \frac{CM^p}{(1+t+r)(1+|t-r|)^{p-2}}; & k > 1 + \frac{1}{p} \\ \frac{CM^p}{(1+t+r)(1+|t-r|)^{k-1}}; & 1 < k \leq 1 + \frac{1}{p} \\ \frac{CM^p}{(1+t+r)^k}; & 0 < k \leq 1, \end{cases}$$

También tenemos el siguiente corolario:

Corolario 5.21. Sea $u(x, t) \in C^0(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+)$ que satisfice

$$|u(x, t)| \leq \frac{M}{(1+t+r)(1+|t-r|)^{p-2}}.$$

Si $p > 1 + \sqrt{2}$, entonces existe $C > 0$ tal que

$$|(L|u|^p)(x, t)| \leq \frac{CM^p}{(1+t+r)(1+|t-r|)^{p-2}}.$$

Demostración. Hagamos $k = p - 1$. Luego, $p > 1 + \sqrt{2}$ implica

$$k = p - 1 > p > 1 + \sqrt{2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \sqrt{2} > \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

Por otra parte

5.3. PROBLEMA DE YAMABE HIPERBÓLICO EN EL ESPACIO-TIEMPO DE MINKOWSKI

$$1 + \frac{1}{p} < 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

Tenemos que $k > 1 + \frac{1}{p}$. El resultado se sigue directamente del lema.

□

Definamos una norma para funciones $u \in C^0(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+)$

$$\|u\|_k = \begin{cases} \sup_{x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0} (1 + t + |x|)(1 + |t - |x||)^{k_0 - 1} |u(x, t)| & \text{si } k > 1 \\ \sup_{x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0} \frac{1 + t + |x|}{\log(2 + t + |x|)} |u(x, t)| & \text{si } k = 1 \\ \sup_{x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0} (1 + t + |x|)^k |u(x, t)| & \text{si } 0 < k < 1. \end{cases}$$

donde $k_0 = \min(k, p - 1)$. Recordemos que $\log(x) \leq x - 1$ para $x > 0$. Entonces

$$\log(2 + t + |x|) \leq 1 + t + |x|,$$

por lo que

$$|u(x, t)| \leq \frac{(1 + t + |x|)}{\log(2 + t + |x|)} |u(x, t)|.$$

Se tiene que

$$|u| \leq \|u\|_k, \tag{5.22}$$

donde los casos $k > 1$ y $0 < k < 1$ son triviales. Notemos que:

5.3. PROBLEMA DE YAMABE HIPERBÓLICO EN EL ESPACIO-TIEMPO DE MINKOWSKI

$$\|u\|^\theta \|v\|^{1-\theta} = \begin{cases} \sup_{x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0} (1+t+|x|)(1+|t-|x||)^{k_0-1} |u|^\theta |v|^{1-\theta} & \text{si } k > 1 \\ \sup_{x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0} \frac{1+t+|x|}{\log(2+t+|x|)} |u|^\theta |v|^{1-\theta} & \text{si } k = 1 \\ \sup_{x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0} (1+t+|x|)^k |u|^\theta |v|^{1-\theta} & \text{si } 0 < k < 1, \end{cases}$$

por lo que también se cumple

$$\|u^\theta v^{1-\theta}\|_k \leq \|u\|_k^\theta \|v\|_k^{1-\theta}; \quad u, v \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 1. \quad (5.23)$$

Usando el Lema 5.20 y el Corolario 5.21, se pueden probar las siguiente desigualdades

$$\|L|u|^p\|_k \leq C \|u\|_k^p \quad (5.24)$$

$$\|L|u|^{\theta p} |v|^{(1-\theta)p}\|_k \leq C \|u\|_k^{\theta p} \|v\|_k^{(1-\theta)p}. \quad (5.25)$$

Introduzcamos ahora el espacio de funciones

$$Z_k = \{u \in C^0(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+) \mid D_x u, D_x^2 u \in C^0(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+) \text{ y } \|D_x^\alpha u\| < \infty \text{ para } |\alpha| \leq 2\}.$$

El espacio Z_k es completo respecto a la norma:

$$\|u\|_k = \sum_{|\alpha| \leq 2} \|D_x^\alpha u\|_k.$$

Usaremos la siguiente notación:

$$\|\cdot\| := \|\cdot\|_k$$

$$Z_k := Z.$$

La prueba del Teorema 5.18, consistirá en lo siguiente:

5.3. PROBLEMA DE YAMABE HIPERBÓLICO EN EL ESPACIO-TIEMPO DE MINKOWSKI

1. Se definirá una sucesión de funciones que satisfacen la identidad integral del Teorema 5.18.
2. Luego se probará que cada elemento de la sucesión está en el espacio Z .
3. Finalmente se prueba que la sucesión es una sucesión de Cauchy:
 - Se obtienen estimados para $\|u_{n+1} - u_n\|$ y $\|D_j u_{n+1} - D_j u_n\|$
 - Con los estimados obtenidos y las hipótesis del Teorema, se prueba que cada término $\|D_j D_k u_{n+1} - D_j D_k u_n\|$ es menor que alguna constante y entonces, por como se definió la norma $\|\cdot\|_k$, la sucesión será de Cauchy.

Se toma una sucesión de funciones $\{u_k\}$, definidas como

$$u_0 := u^0, \quad u_{n+1} = u^0 + L(\phi(u_n)).$$

Tenemos que,

$$\|u_{n+1}\| = \|u^0 + L(\phi(u_n))\| \leq \|u^0\| + \|L(\phi(u_n))\| \leq \|u^0\| + A\|L|u_n|^p\| \leq \|u^0\| + AC\|u_n\|^p,$$

del Teorema 5.14 y la definición de la norma k , se sigue

$$\|D_x^\alpha u^0\| \leq CG \quad \text{para } |\alpha| \leq 2.$$

Elegiremos una G suficientemente pequeña tal que u^0 satisfaga

$$2^p p AC \|u^0\|^{p-1} \leq 1, \quad \|u^0\| \leq \frac{1}{2}. \quad (5.26)$$

Por inducción sobre n , se probará que se cumple:

$$\|u_n\| \leq 2\|u^0\| \leq 1. \quad (5.27)$$

Para $n = 0$ lo anterior es válido. Si suponemos que (5.27) se vale para n , restará ver que la expresión es válida para $n + 1$; para ello tenemos que:

$$\|u_{n+1}\| \leq \|u^0\| + AC\|u_n\|^p \leq \|u^0\| + 2^p AC\|u^0\|^p$$

5.3. PROBLEMA DE YAMABE HIPERBÓLICO EN EL ESPACIO-TIEMPO
DE MINKOWSKI

$$= (1 + 2^p AC \|u^0\|^{p-1}) \|u^0\| \leq 2 \|u^0\| \leq 1,$$

de modo que (5.27) es válida para toda $n > 0$.

Si derivamos en u_{n+1} en x^j tendremos que:

$$\begin{aligned} D_j u_{n+1} &= D_j(u^0 + L(\phi(u_n))) = D_j u^0 + D_j L(\phi(u_n)) \\ &= D_j u^0 + L(D_j \phi(u_n)) = D_j u^0 + L(\phi'(u_n) D_j u_n). \end{aligned}$$

Como $\|u_n\| \leq 1$

$$\begin{aligned} \|D_j u_{n+1}\| &\leq \|D_j u^0\| + Ap \|L|u_n|^{p-1} |D_j u_n|\| \\ &\leq \|D_j u^0\| + Ap \|L|u_n|^{p\theta} |D_j u_n|^{p(1-\theta)}\|, \end{aligned}$$

con $\theta = \frac{p-1}{p}$. Usando (5.24) y (5.25) encontramos que

$$\begin{aligned} \|D_j u_{n+1}\| &\leq \|D_j u^0\| + ApC \|u_n\|^{\theta p} \|D_j u_n\|^{p(1-\theta)} \leq \|D_j u^0\| + ApC \|u_n\|^{p-1} \|D_j u_n\| \\ &\leq CG + 2^{p-1} ApC \|u^0\|^{p-1} \|D_j u_n\| \leq CG + \frac{1}{2} \|D_j u_n\|, \end{aligned}$$

de modo que:

$$\|D_j u_n\| \leq C_1 \quad \text{para toda } n \text{ y una constante } C_1.$$

Si hacemos:

$$\begin{aligned} D_j D_k u_{n+1} &= D_j D_k [u^0 + L(\phi(u_n))] \\ &= D_j D_k u^0 + L(D_j D_k (\phi(u_n))) \\ &= D_j D_k u^0 + L(D_j (\phi'(u_n) D_k u_n)) \\ &= D_j D_k u^0 + L(\phi''(u_n) D_j u_n D_k u_n + \phi'(u_n) D_j D_k u_n) \\ &= D_j D_k u^0 + L(\phi''(u_n) D_j u_n D_k u_n) + L(\phi'(u_n) D_j D_k u_n), \end{aligned}$$

5.3. PROBLEMA DE YAMABE HIPERBÓLICO EN EL ESPACIO-TIEMPO DE MINKOWSKI

entonces,

$$\begin{aligned} \|D_j D_k u_{n+1}\| &\leq \|D_j D_k u^0\| + \|L(\phi''(u_n) D_j u_n D_k u_n)\| + \|L(\phi'(u_n) D_j D_k u_n)\| \\ &\leq CG + \frac{1}{2} \|D_j D_k u_n\| + \|L(\phi''(u_n) D_j u_n D_k u_n)\|. \end{aligned}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} \|L(\phi''(u_n) D_j u_n D_k u_n)\| &\leq Ap(p-1)C \|u_n\|^{p-2} \|D_j u_n\| \|D_k u_n\| \\ &\leq 2^{p-2} Ap(p-2)CC_1^2, \end{aligned}$$

por lo que

$$\|D_j D_k u_{n+1}\| \leq CG + \frac{1}{2} \|D_j D_k u_n\| + 2^{p-2} Ap(p-2)CC_1^2,$$

o bien:

$$\|D_j D_k u_{n+1}\| \leq C_2.$$

Por lo tanto, cada u_n pertenece a Z . Para probar que la sucesión es de Cauchy, Asakura demuestra lo siguiente:

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq \frac{1}{2} \|u_n - u_{n-1}\|.$$

Con lo que obtiene, aplicando recursivamente la expresión anterior, que:

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \|u_1 - u^0\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (\|u_1\| + \|u^0\|) \leq 3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

5.3. PROBLEMA DE YAMABE HIPERBÓLICO EN EL ESPACIO-TIEMPO DE MINKOWSKI

Del mismo modo, estima lo siguiente:

$$\|D_j u_{n+1} - D_j u_n\| \leq \frac{1}{2} \|D_j u_n - D_j u_{n-1}\| + C_3 (1/2)^n.$$

Utilizando de manera recursiva la desigualdad anterior, se llega a:

$$\begin{aligned} \|D_j u_{n+1} - D_j u_n\| &\leq (1/2)^n \|D_j u_1 - D_j u_0\| + n C_3 (1/2)^n \\ &\leq (1/2)^n (\|D_j u_1\| + \|D_j u_0\|) + n C_3 (1/2)^n \\ &\leq (1/2)^{n-1} C_1 + n C_3 (1/2)^n. \end{aligned}$$

Para estimar $\|D_j D_k u_{n+1} - D_j D_k u_n\|$, se tienen dos casos. El primero es el caso $p \geq 3$ (esto pues se debe tratar con términos que incluyen $|\phi''(u_n) - \phi''(u_{n-1})|$), para el cual Asakura muestra que:

$$\begin{aligned} \|D_j D_k u_{n+1} - D_j D_k u_n\| &\leq 2pAC \|u^0\|^{p-1} \|D_j D_k u_n - D_j D_k u_{n-1}\| \\ &\quad + 2^{p-2} p(p-1)AC \|u^0\|^{p-2} \|u_n - u_{n-1}\| \|D_j D_k u_{n-1}\| \\ &\quad + \|u^0\|^{p-2} \|u_n - u_{n-1}\| \|D_j D_k u_{n-1}\| \\ &\quad + \|u^0\|^{p-2} \|D_j u_n - D_j u_{n-1}\| \|D_k u_n\| \\ &\quad + \|u^0\|^{p-2} \|D_j u_n\| \|D_k u_n - D_k u_{n-1}\| \\ &\quad + \|u^0\|^{p-3} \|u_n - u_{n-1}\| \|D_j u_{n-1}\| \|D_k u_{n-1}\| \\ &\leq (1/2) \|D_j D_k u_n - D_j D_k u_{n-1}\| + C_4 n (1/2)^{n-1} \end{aligned}$$

donde C_4 es una constante.

En el caso $p < 3$ se llega a un resultado similar, salvo que el término

$$\|u^0\|^{p-3} \|u_n - u_{n-1}\| \|D_j u_{n-1}\| \|D_k u_{n-1}\|,$$

de la expresión anterior, es sustituido por

$$\|u_n - u_{n-1}\|^{p-2} \|D_j u_{n-1}\| \|D_k u_{n-1}\|.$$

5.3. PROBLEMA DE YAMABE HIPERBÓLICO EN EL ESPACIO-TIEMPO DE MINKOWSKI

En cualquier caso, se debe aplicar recursivamente la expresión obtenida. Para el caso $p \geq 3$ se tiene entonces que

$$\|D_j D_k u_{n+1} - D_j D_k u_n\| \leq (1/2)^{n-1} C_2 + C_4 n^2 (1/2)^{n-1} = (1/2)^n \chi + \xi n^2 (1/2)^n,$$

con ξ y χ constantes. Para que la sucesión sea de Cauchy se deberá cumplir que para toda $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda m y n , si $m, n > N$, se satisface

$$\|u_n - u_m\|_k = \sum_{|\alpha| \leq 2} \|D_x^\alpha u_n - D_x^\alpha u_m\|_k < \epsilon.$$

Revisemos los términos de la forma $\|D_j D_k u_n - D_j D_k u_m\|$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $m > n$, tendremos que

$$\begin{aligned} & \|D_j D_k u_n - D_j D_k u_m\| \\ &= \|D_j D_k u_n - D_j D_k u_{n+1} + D_j D_k u_{n+1} + \dots + D_j D_k u_{m-1} - D_j D_k u_n\| \\ &= \|D_j D_k u_n - D_j D_k u_{n+1}\| + \|D_j D_k u_{n+1} - D_j D_k u_{n+2}\| + \\ & \quad \dots + \|D_j D_k u_{m-1} - D_j D_k u_m\| \\ &\leq [\chi + n^2 \xi][1/2]^n + [\chi + (n+1)^2 \xi][1/2]^{n+1} + \\ & \quad \dots + [\chi + (m-1)^2 \xi][1/2]^{m-1} \\ &= \chi (1/2)^{n-1} \sum_{i=1}^{m-1} (1/2)^i + \xi \sum_{j=n}^{m-1} j^2 (1/2)^j. \end{aligned}$$

Podemos encargarnos de la primera suma de la misma forma en que lo haríamos con una serie geométrica, con lo cual tendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \|D_j D_k u_n - D_j D_k u_m\| \\ &\leq \chi (1/2)^{n-1} (1 - (1/2)^{m-n}) + \xi \sum_{j=n}^{m-1} j^2 (1/2)^j \\ &< \chi (1/2)^{n-1} + \xi \sum_{j=n}^{m-1} j^2 (1/2)^j. \end{aligned}$$

5.3. PROBLEMA DE YAMABE HIPERBÓLICO EN EL ESPACIO-TIEMPO DE MINKOWSKI

Para el segundo término debemos notar que conforme corre j , los términos de la suma se van haciendo más pequeños. Entonces, podemos hacer $\|D_j D_k u_n - D_j D_k u_m\|$ tan pequeño como sea necesario si elegimos N , en la definición de sucesión de Cauchy, suficientemente grande. La elección sobre qué tan grande debemos tomar N dependerá de la ϵ dada. El caso $p < 3$ es análogo. Por lo anterior, la sucesión $\{u_n\}$ es de Cauchy en Z .

Al ser Z un espacio completo, la sucesión $\{u_n\}$ debe converger a una función u en Z tal que $D_x^\alpha u_n$ converge a $D_x^\alpha u$ para $|\alpha| \leq 2$. Por la forma en que se construyó la sucesión debe satisfacer la identidad integral del Teorema 5.18, por lo tanto u es solución del problema planteado en (5.10).

Kong De-Xing y Liu Qi [11], aprovechan el trabajo de Asakura y se restringen al problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = \phi(u); & x \in \mathbb{R}^3 \text{ y } t \in \mathbb{R}_+ \\ t = 0 : & u = f(x) > 0, u_t = g(x), \end{cases} \quad (5.28)$$

donde, a diferencia de 5.10, piden que $f(x) > 0$. Kong De-Xing y Liu Qi imponen también la condición

$$g(x) - |\nabla f(x)| > 0.$$

Utilizando lo anterior y la identidad integral del Teorema 5.18

$$u = u^0 + L(\phi(u))$$

Kong De-Xing y Liu Qi [11] muestran, para el caso en que la curvatura escalar asociada a \bar{g} es positiva, que

$$\begin{aligned} u &= \frac{t}{4\pi} \int_{|\xi|=1} g(x + t\xi) d\omega_\xi + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(t \int_{|\xi|=1} f(x + t\xi) d\omega_\xi \right) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_0^t (t - \tau) \int_{|\xi|=1} w(x + (t - \tau)\xi, \tau) d\omega_\xi d\tau > 0. \end{aligned}$$

La solución al problema de tipo Yamabe planteado sobre el espacio-tiempo de Minkowski de dimensión $(3 + 1)$ sí tiene solución.

Conclusión Final

El problema de tipo Yamabe planteado sobre el espacio-tiempo de Minkowski tiene solución, esto es, siempre es posible encontrar una métrica con curvatura constante (positiva) que sea conforme a la métrica del espacio-tiempo de Minkowski. El espacio-tiempo resultante de la transformación conforme tendrá la misma estructura causal que el espacio-tiempo de Minkowski.

El problema es trivial en el caso en que la curvatura escalar, k , de la métrica conforme es nula; esto debido a la curvatura escalar del espacio-tiempo de Minkowski. Aunado a lo anterior, las ecuaciones diferenciales que resultarían del problema de Yamabe corresponderían al caso homogéneo y su solución es bien conocida [5].

Para el caso en que la curvatura de la métrica conforme es distinta de cero, la solución puede ser muy complicada pues se imponen condiciones muy restrictivas sobre los datos iniciales del problema de Cauchy planteado. Luego se imponen más condiciones para garantizar que la solución es positiva, tanto así que vale la pena cuestionarse sobre si existen funciones que satisfagan todas las condiciones impuestas. En [11] se da un ejemplo de funciones que satisfacen las condiciones

$$\begin{cases} \sum_{|\alpha| \leq 2} |D_x^\alpha g(x)| + \sum_{|\alpha| \leq 3} |D_x^\alpha f(x)| \leq \frac{G}{(1+r)^k + 1} \\ g(x) - |\nabla f(x)| > 0, \end{cases} \quad (5.29)$$

lo cual nos hace ver que la solución de la ecuación diferencial del problema de Yamabe que se mostró, es viable.

Es posible que el factor conforme que relaciona a las métricas \bar{g} y g tenga una forma complicada, esto en vista de la identidad integral

$$u = u^0 + L(\phi(u)).$$

El problema de tipo Yamabe presentado en esta tesis es, en realidad, un caso muy particular restringido al espacio-tiempo de Minkowski de dimensión $(3 + 1)$. El problema de Yamabe Lorentziano consiste en determinar si es posible encontrar, dada una variedad Lorentziana (M^n, g) con métrica de signatura $(-, + \dots, +)$, una métrica de curvatura constante que sea conforme a la métrica g . A pesar de lo anterior, bien valdría la pena estudiar la geometría de espacios físicos distintos al espacio-tiempo de Minkowski con la esperanza de encontrar condiciones que permitieran acercarse a una respuesta al problema de Yamabe Lorentziano, o bien dar una respuesta para variedades de alguna dimensión concreta.

Bibliografía

- [1] Aretakis, S., *Lecture Notes on General Relativity*, Columbia University, 2013.
- [2] Asakura, F., *Existence of a global solution to a semi-linear wave equation with slowly decreasing initial data in three space dimensions*, *Communications in Partial Differential Equations*, 11:13, 1459-1487, 1986.
- [3] Aubin, T., *Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire*, *J. Math. Pures Appl.* 55, 269-296. 1972.
- [4] Carroll S. M., *Lecture Notes on General Relativity*. Columbia University, 1997.
- [5] Courant, R., and Hilbert, D., *Methods of Mathematical Physics, Vol. 2*, Interscience Pub., 1966.
- [6] Einstein, A., *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*.(German) [*On the electrodynamics of moving bodies*]. *Analen der Physik*, 17, 891-921. 1905.
- [7] Einstein, A., *Relativity: The Special and General Theory*. New York: Henry Holt, 1920.
- [8] Lawrence, C. E., *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society. 1998

-
- [9] Ginoux, N., *About the Lorentzian Yamabe problem*, Geom. Dedicata, 174,287. 2015.
- [10] Hawking, S. & Ellis, G., *The large scale structure of space-time*(Cambridge Monographs on Mathematical Physics). Cambridge: Cambridge University Press. 1973.
- [11] Kong De-Xing & Liu Qi., *Hyperbolic Yamabe problem*. Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities, 32, 147. 2017.
- [12] Lee, J. M., *Manifolds and Differential Geometry*. American Mathematical Society. 2009.
- [13] Lee, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*.Springer-Verlag New York. 2000.
- [14] Lee, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds* Second Edition.Springer-Verlag New York. 2012.
- [15] Lee, J. M. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Springer-Verlag New York. 1997.
- [16] Lee, J. M. and Parker T. H., *The Yamabe Problem*. Bulletin of the AMS, vol. 17 no.1, 1987.
- [17] Møller J. M., *Riemannian Geometry*. Columbia University, 2005.
- [18] Neumayer, R., *The Yamabe Problem*. Northwestern University, 2018.
- [19] Schoen, R., *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*, J. Diff. Geom. 20, 479-495. 1984
- [20] Schutz, B., *A First Course in General Relativity* Second edition. Cambridge:Cambridge University Press. 2009.

[21] Wald, R. M., *General relativity*. University of Chicago Press, 1984.

[22] Yamabe, H., *On a Deformation of Riemannian Structures on Compact Manifolds*, Osaka Math Journal, 12,21-37. 1960.