



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

CENTRO DE NANOCIENCIAS Y
NANOTECNOLOGÍA

EFFECTO KERR EN EL MODELO DE RASHBA
FERROMAGNÉTICO

TESIS

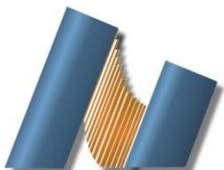
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
LICENCIADO EN NANOTECNOLOGÍA

P R E S E N T A:

GLEN ISAAC MACIEL GARCÍA

TUTOR DE TESIS

DR. JESÚS ALBERTO MAYTORENA CÓRDOVA



Ensenada Baja California a febrero 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

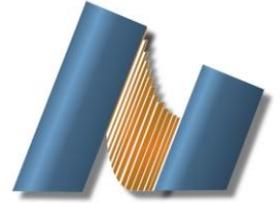
DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
CENTRO DE NANOCIENCIAS Y NANOTECNOLOGÍA



LICENCIATURA EN NANOTECNOLOGÍA
NANOESTRUCTURAS

EFFECTO KERR EN EL MODELO DE RASHBA FERROMAGNÉTICO

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE:
LICENCIADO EN NANOTECNOLOGÍA

PRESENTA:
GLEN ISAAC MACIEL GARCÍA

DIRECTOR DE TESIS
DR. JESÚS ALBERTO MAYTORENA CÓRDOVA

ENSENADA, BAJA CALIFORNIA FEBRERO 2020

Hago constar que el trabajo que presento es de mi autoría y que todas las ideas, citas textuales, datos, ilustraciones, gráficas, etc. sacados de cualquier obra o debidas al trabajo de terceros, han sido debidamente identificados y citados en el cuerpo del texto y en la bibliografía y acepto que en caso de no respetar lo anterior puedo ser sujeto de sanciones universitarias.

Afirmo que el material presentado no se encuentra protegido por derechos de autor y me hago responsable de cualquier reclamo relacionado con la violación de derechos de autor.

Glen Isaac Maciel García

*A Fabi, Ofe
mis papás, hermano
y Ari ♡*

Agradecimientos

Agradezco a todos aquellos que han formado parte de mi vida y que de un modo u otro contribuyeron para que me fuese posible terminara una carrera, pero sobre todo, que me hicieron crecer como persona.

A mi abuelita Ofe y mi primo Fabián, que aunque ya no están con nosotros y se encuentran descansando en un mejor lugar, forman parte de quien soy, espero algún día volver a verlos. A mi familia, mis padres sin los cuales nada de esto hubiese sido posible, mi hermano Elián a quien quiero mucho y de quien estoy muy orgulloso, aunque no le exprese mucho, los amo y siempre los llevaré en el corazón. A Ari, por apoyarme, tenerme paciencia, hacerme mucho más feliz de lo siquiera creí posible, mejor persona, inspirarme durante la escritura de este trabajo. Motivarme cada día a trabajar duro, mejorar, no darme por vencido, superarme, crecer y sobre todo por hacerme una mejor persona y concederme la dicha de soñar juntos, te amo hermosa. A mi prima Itzel, Rebe y mi tío Victor que siempre han estado ahí para mí.

A mis compañeros y amigos de la carrera: Santi, Jesús, Juan, Omar, Rocha, Christian, Noguerón, Etienne, Montse, Sofi, Ariadna, con los que durante alrededor de cuatro años compartí más que el salón de clases. A Genaro y Kevin, mis amigos y compañeros de servicio, por aguantarme y tenerme paciencia durante todos estos años. Al SAOM Lab: Roberto, Mimi, Julio, Machorro, Diego, Lorena, Ramón, Grace, Miriam, Alice, Angélica, por haberme acogido durante mi estancia en Ensenada, por tantos torneos, carnes asadas y ser mi familia de Ensenada. A Maytorena por darme la oportunidad de aprender, compartir parte de su conocimiento y amor por la ciencia conmigo, dirigir y tener paciencia en la escritura de este trabajo de tesis.

A la UNAM, que ha me ha acogido y sido mi casa desde que tengo memoria, desde que era niño en CU, hasta ahora en Ensenada, me llena de orgullo haber pertenecido, y poseer el honor de tener corazón azul, piel dorada, y poder llamarme puma. Pero sobre todo al país, mi hermoso y querido México, y al pueblo mexicano que me permitió estudiar una carrera universitaria.

Agradezco a la vida por todo lo que me a dado.

Resumen

Los fenómenos magneto-ópticos han sido utilizados en años recientes para el estudio de sistemas de baja dimensionalidad. Entre ellos destaca el efecto Kerr magneto-óptico, éste constituye una poderosa herramienta que ha permitido la investigación de diversas propiedades en metales, semiconductores magnéticos y superconductores. En los últimos años se ha utilizado ampliamente en aislantes topológicos, semimetales Weyl y grafeno.

En este trabajo se realiza una revisión de los fenómenos de actividad óptica natural y de efectos magneto-ópticos, presentando modelos para explicar de manera fenomenológica su origen. Se derivan expresiones de las amplitudes de Fresnel y ángulos de rotación de Kerr, para el problema de reflexión y refracción de ondas planas en un medio bidimensional entre dos dieléctricos.

Se repasa la interacción espín-órbita, específicamente el acoplamiento tipo Rashba, que opera como un campo magnético efectivo que rompe simetría de inversión temporal. Mostramos una analogía entre las propiedades de propagación transversales de un sistema clásico electromagnético ópticamente activo, y la interacción espín-órbita tipo Rashba en presencia de un campo magnético; como los que tienen lugar en sistemas cuánticos de baja dimensionalidad.

Así mismo se calcula el espectro de rotación de Kerr generado por un aislante topológico, el cual posee una estructura espectral en las energías umbrales de las transiciones ópticas. Se presenta el espectro de energías, contornos de Fermi, densidad conjunta de estados, conductividad óptica y su respectiva rotación de Kerr, para el modelo de Rashba ferromagnético. En donde se observa una conexión con el efecto Hall anómalo, ambos muestran sus valores máximos cuando la energía de Fermi se encuentra dentro de la brecha de energía.

Índice general

1. Introducción	1
2. Actividad óptica natural y efectos magneto-ópticos	5
2.1. Girotrópía	6
2.1.1. Actividad óptica natural	6
2.1.2. Modelo de un medio hecho de moléculas quirales	8
2.1.3. Modelo de dos átomos anisotrópicos	11
2.2. Efecto Faraday	14
2.2.1. Modelo clásico: osciladores armónicos y fuerza de Lorentz	15
2.2.2. Modelo cuántico: osciladores y ecuaciones de movimiento de Heisenberg	16
3. Reflexión y refracción en un material 2D entre dos dieléctricos	19
3.1. Amplitudes de Fresnel	19
3.2. Ángulo de Kerr	23
4. Interacción espín-órbita	25
4.1. Degeneración de espín	25
4.2. Interacción espín-órbita	26
4.3. Acoplamiento Rashba	26
5. Análogo electromagnético	31
5.1. Medio quiral con términos de Faraday	31
5.2. Relación de dispersión de ondas transversales	32
6. Efecto Kerr en un aislante topológico	37
6.1. Aislante topológico	37
6.2. Transiciones interbanda: conductividad óptica	39
6.3. Ángulo de Kerr como función de la frecuencia	41

7. Efecto Kerr en el Modelo de Rashba Ferromagnético	45
7.1. Modelo de Rashba ferromagnético	46
7.2. Densidad conjunta de estados	47
7.2.1. Contornos de Fermi	47
7.2.2. Densidad conjunta de estados	49
7.3. Conductividad óptica	51
7.4. Espectros de rotación de Kerr	52
8. Conclusiones	57
A. De Capítulo 2	59
A.1. Rotación modelo de moléculas quirales	59
A.2. Fuerza oscilador cuántico	60
Bibliografía	62

Introducción

“ciencia a formar de los universales,
reparando, advertido,
con el arte el defecto
de no poder con un intuitivo
conocer acto todo lo criado,
sino que, haciendo escala, de un concepto
en otro va ascendiendo grado a grado...”

Primero sueño, Sor Juana

La interacción entre luz y materia se ve afectada por el estado magnético del medio, e involucra la estructura electrónica de la materia. Este tipo de interacciones entre radiación electromagnética y materiales con polarización magnética dan lugar a los efectos *magneto-ópticos* (MO). Estos jugaron un papel clave en la historia del electromagnetismo, demostrando de forma experimental la teoría electromagnética de la luz. En 1845, Faraday descubrió que cuando un haz de luz linealmente polarizada se transmitía a través de vidrio en dirección paralela al campo magnético aplicado, la polarización rotaba. Este experimento fue el primero en demostrar la íntima relación entre el campo magnético y la luz, y dio origen a la magneto-óptica. Desde el descubrimiento de Faraday la magneto-óptica se ha convertido en un campo de investigación sumamente competitivo y fascinante, de gran importancia para la ciencia básica y aplicaciones. El efecto Faraday y su contraparte en reflexión, el efecto Kerr magneto-óptico, se usan ampliamente para detectar la magnetización de materiales. Por ejemplo, permiten determinar la magnetización superficial de películas delgadas ofreciendo una sensibilidad superior a otras técnicas.^{1,2}

1. INTRODUCCIÓN

En años recientes, estos efectos MO han sido utilizados en sistemas de baja dimensionalidad, un ejemplo es la primera observación del efecto Hall de espín mediante el efecto Kerr magneto-óptico.³ Además constituyen una poderosa herramienta que posibilita realizar mediciones de rompimiento de simetría de inversión temporal (TRS, por sus siglas en inglés),⁴ obtener información de estructuras de bandas, con las que se investigan propiedades como anisotropía magnética, polarización de espín, entre otras. La espectroscopía de Faraday y Kerr se ha usado ampliamente para el estudio de metales, semiconductores magnéticos, superconductores; y recientemente aislantes topológicos (TI, por sus siglas en inglés), semimetales Weyl (WS, por sus siglas en inglés) y grafeno.^{5,6,7}

El interés en TI, ha surgido puesto que poseen estados superficiales sin brecha, tipo Dirac, protegidos topológicamente, que son sensibles a perturbaciones que rompen TRS.⁴ La inversión de bandas, generada por un fuerte acoplamiento espín-órbita, puede dar lugar a TI.^{4,8} Cuando se rompe débilmente la TRS, se induce una brecha en los puntos Dirac y los estados superficiales presentan fuertes efectos MO. Esto ha conllevado al uso de fenómenos MO, como herramienta para la caracterización de estos materiales.^{4,9} Por ejemplo, la determinación de los ángulos de Kerr y Faraday es una de las técnicas de medición del efecto Hall cuántico superficial de TI.⁸

También se ha estudiado la rotación de Kerr y Faraday en WS.⁵ Se han encontrado rotaciones gigantes de la polarización en WS inclinados con TRS rota.⁷ Así mismo, se sabe que el grafeno en monocapa y multicapa produce rotación de Faraday^{10,11,12}, que se ha usado para distinguir distintos apilamientos de multicapas de grafeno¹³.

En este sentido, en el presente trabajo se estudia la dispersión energética de un gas bidimensional de electrones (2DEG, por sus siglas en inglés) que posee interacción espín-órbita (IEO) tipo Rashba y un campo magnético, rompiendo las simetrías espacial y temporal. Se lleva a cabo una analogía de éste, con un sistema clásico electromagnético, que posee propiedades de propagación transversales similares. Además se explora la rotación de polarización de la luz reflejada al incidir normal sobre la interfase de un TI en presencia de interacción de intercambio y vacío; y en un material bidimensional descrito por el modelo de Rashba ferromagnético, donde se rompen simultáneamente simetría de inversión espacial y temporal.

En el Capítulo 2 se habla de manera general acerca de la actividad óptica, profundizándose en los fenómenos de girotropía y efecto Faraday, presentando un par de modelos para cada fenómeno. Se derivan expresiones en el capítulo 3 para las amplitudes de Fresnel y los ángulos de rotación de Kerr, para el problema electromagnético de ondas planas que se reflejan en un medio bidimensional que separa dos medios dieléctricos. El capítulo 4 aborda el efecto de las simetrías temporal y espacial, sobre la degeneración del espín. Se discute de manera general

la IEO, posteriormente se llega a la IEO tipo Rashba, donde se habla acerca de las condiciones en que se presenta, y se estudia su relación de dispersión, eigenvectores y polarización de espín asociada. Por su parte, en el Capítulo 5 se presenta una analogía entre las relaciones de dispersión de un 2DEG con IEO Rashba en presencia de un campo magnético; y un medio isotrópico quiral. En el capítulo 6 se estudia el efecto Kerr en un aislante topológico en presencia de un campo de intercambio, y en el capítulo 7 se obtiene el espectro de rotación de Kerr para el modelo de Rashba ferromagnético. Finalmente en el Capítulo 8, se resumen y exponen las conclusiones y resultados de este trabajo.

Actividad óptica natural y efectos magneto-ópticos

But we also liked to seek out hidden trails and discovered many an unexpected view which was pleasing to our eyes; and when the one pointed it out to the other, and we admired it together, our joy was complete

David Hilbert

La rotación de la polarización óptica o girotropía es un fenómeno con diversos orígenes (simetrías, no localidad espacial, campos externos), generado como consecuencia de una distinta respuesta del sistema a la polarización circular derecha (RCP, por sus siglas en inglés) e izquierda (LCP, por sus siglas en inglés) de la luz y por ende forma parte de los fenómenos de *Actividad Óptica (AO)*. La girotropía se manifiesta como resultado de diferentes velocidades de propagación (o índices de refracción) de la LCP y RCP.

Existe una rotación natural generada sin necesidad de factores externos, cuyo origen reside en la no localidad espacial de la respuesta dieléctrica; y otra de naturaleza extrínseca, que tiene lugar como resultado de la acción de un agente externo usualmente un campo magnético, que origina fenómenos magneto-ópticos como la rotación Kerr y rotación de Faraday, entre otros.

En el presente capítulo se presenta la girotropía causada consecuencia de la dispersión espacial (sección 2.1), y dos modelos que permiten calcular explícitamente una constante girotópica. El primero de ellos estudia un medio hecho de moléculas (quirales) que carecen de simetría especular (subsección 2.1.1) y el otro se basa en átomos anisotrópicos (subsección 2.1.2). La sección 2.2 muestra

un modelo de osciladores armónicos (versión clásica y cuántica) en presencia de un campo magnético externo que permite extraer los índices de refracción correspondientes a LCP y RCP.

2.1. Girotropía

2.1.1. Actividad óptica natural

La no localidad espacial de la respuesta dieléctrica puede generarse como resultado de asimetría de las moléculas, explícitamente el rompimiento de la simetría especular (quiralidad)^{14,15,16}. En el espacio de Fourier $k\omega$ esto se manifiesta en la dependencia del tensor dieléctrico de el vector de onda. Un desarrollo en serie de Taylor permite escribir dicho tensor en la forma

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \epsilon(\omega)\delta_{\alpha\beta} + i\gamma_{\alpha\beta\gamma}k_\gamma + \gamma_{\alpha\beta\gamma\eta}k_\gamma k_\eta + \dots; \quad (2.1)$$

debe entenderse ésta suma como una serie en potencias de ka , donde a es un tamaño característico de las moléculas o entidades polarizables del medio. Dado que el factor complejo i aparece explícitamente debido al requerimiento de hermiticidad del tensor dieléctrico, bajo la suposición de que no hay disipación de energía electromagnética, y que el medio se considera homogéneo, entonces se debe cumplir además que $\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon_{\beta\alpha}(-\mathbf{k}, \omega)$. Esto tiene como consecuencia que $\epsilon_{\alpha\beta}(\omega) = \epsilon_{\beta\alpha}(\omega)$, $\gamma_{\alpha\beta\gamma} = -\gamma_{\beta\alpha\gamma}$, lo que permite escribir, a primer orden en ka ,

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \epsilon(\omega)\delta_{\alpha\beta} + if(\omega)e_{\alpha\beta\gamma}k_\gamma, \quad (2.2)$$

donde $f(\omega)$ (con unidades de longitud) es la llamada *constante girotrópica* y $e_{\alpha\beta\gamma}$ es el tensor totalmente antisimétrico de Levi-Cevita.

A continuación se considera una onda plana que se propaga en dirección de $\hat{\mathbf{z}}$, y asumiendo que ésta es una dirección de alta simetría, se implica que $\epsilon_{xx}(\omega) = \epsilon_{yy}(\omega) = \epsilon$, $\epsilon_{xy}(\omega) = \epsilon_{yx}(\omega) = 0$, $\epsilon_{xz}(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon_{yz}(\mathbf{k}, \omega) = 0$ y $E_z = 0$, lo que genera que las componentes del vector desplazamiento sean

$$D_x = \epsilon E_x + iGE_y \quad (2.3)$$

$$D_y = \epsilon E_y - iGE_x, \quad (2.4)$$

donde $G = f(\omega)e_{\alpha\beta\gamma}k_z$. Por otro lado, de las ecuaciones de Maxwell en el espacio $k\omega$

$$[k^2\delta_{ij} - k_i k_j - (\frac{\omega}{c})^2\epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega)]E_j = 0, \quad i, j = x, y, z. \quad (2.5)$$

Dado que $E_z = 0$ y $\mathbf{k} = k_z \hat{\mathbf{z}}$ el sistema de ecuaciones (2.5) se reduce al par

$$k_z^2 E_x - \frac{\omega^2}{c^2} (\epsilon E_x + iG E_y) = 0 \quad (2.6)$$

$$k_z^2 E_y - \frac{\omega^2}{c^2} (\epsilon E_y - iG E_x) = 0. \quad (2.7)$$

Los eigenvalores $k_z = q_{\pm}$ de este sistema son

$$q_{\pm} = \frac{\omega}{c} [\epsilon \mp G]^{1/2}. \quad (2.8)$$

Típicamente dado que los efectos de dispersión espacial son pequeños, tomaremos $G \ll \epsilon$ y por lo tanto los eigenvalores pueden escribirse como

$$q_{\pm} \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon} \mp \frac{\omega}{2c} \frac{G}{\sqrt{\epsilon}}. \quad (2.9)$$

Si consideramos $G = f k_z \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon}$, entonces $q_{\pm} = \frac{\omega}{c} n_{\pm}$,

$$n_{\pm} = \sqrt{\epsilon} \mp \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} f. \quad (2.10)$$

La existencia de estos dos eigenvalores significa que el campo que se propaga en el medio será la superposición de dos modos, uno con vector de onda q_+ y otro con vector de onda q_- , viajando a distintas velocidades n_+ y n_- , que son los índices de refracción de la LCP y RCP respectivamente. Los correspondientes eigenvectores son

$$E_{\pm} = \frac{E_0}{2} (\hat{\mathbf{x}} \mp i\hat{\mathbf{y}}) e^{iq_{\pm}z}, \quad (2.11)$$

y por lo tanto el campo eléctrico que se propaga en el medio se puede escribir como

$$\mathbf{E}(z) = \frac{E_0}{2} [(\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}) e^{iq_+z} + (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) e^{iq_-z}] \quad (2.12)$$

$$= E_0 e^{i\frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon}z} [\cos\theta(z)\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta(z)\hat{\mathbf{y}}], \quad (2.13)$$

donde el ángulo $\theta = -\frac{\omega}{2c} f z$ define la dirección del vector de polarización. Puede verse que ésta dirección cambia conforme avanza la onda, con una tasa dada por

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{\omega}{2c} (n_+ - n_-) \quad (2.14)$$

$$= -f \frac{\omega^2}{2c^2}. \quad (2.15)$$

La introducción del parámetro f representa una tercera constante óptica además de las tradicionales constante dieléctrica ϵ y permeabilidad magnética μ . Nieves

2. ACTIVIDAD ÓPTICA NATURAL Y EFECTOS MAGNETO-ÓPTICOS

y Pal¹⁷ discuten de una manera general la necesidad de introducir una tercera constante óptica ($\zeta = \frac{c}{\omega}f$) para describir las propiedades electromagnéticas de un medio isotrópico lineal, la cual permite explicar la actividad óptica y otros fenómenos desde un punto de vista macroscópico. Su discusión se basa en escribir la densidad de corriente inducida como la combinación lineal: $\mathbf{J}_{ind} = -i\frac{(\epsilon-1)}{4\pi}\omega\mathbf{E} + \frac{ic}{4\pi}(1-\mu^{-1})\mathbf{k} \times \mathbf{B} - \frac{i\zeta\omega}{4\pi}\mathbf{B}$, considerada ésta como la parametrización más general en términos de los parámetros materiales de un medio. A continuación mostramos dos modelos que permiten calcular la constante f , los índices de refracción n_{\pm} y la correspondiente rotación de la polarización.

2.1.2. Modelo de un medio hecho de moléculas quirales

Consideremos un medio hecho de moléculas quirales formado por dobles hélices rígidas de radio a , paso h y carga por unidad de longitud $\pm\rho$, orientadas de forma aleatoria, como se muestra en la figura (2.1).

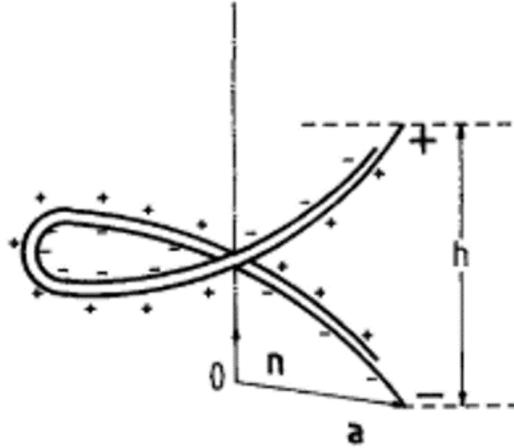


Figura 2.1: Modelo de molécula de doble hélice.¹⁶

Este modelo, presentado por G.E. Vekstein en 1996,¹⁶ permite calcular la constante girotrópica f . Estas moléculas se encuentran sujetas a la acción de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$, lo que genera un desplazamiento relativo de las hélices que puede describirse como

$$\Delta = \beta \int_0^L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{R}, \quad (2.16)$$

donde β es un coeficiente fenomenológico que depende de la elasticidad de la molécula, $d\mathbf{R}$ es un elemento de longitud a lo largo de la hélice de la molécula y $L = \sqrt{h^2 + (2\pi a)^2}$ es la longitud de la hélice. La posición de un punto dentro de la molécula esta dada por el vector

$$\mathbf{R}(\varphi) = \hat{\mathbf{n}} \frac{h}{2\pi} \varphi + \mathbf{a} \cos \varphi + (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{a}) \sin \varphi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (2.17)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ y \mathbf{a} se indican en la figura ($\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{a} = 0$). Cuando $h = 0$ la molécula adquiere la forma de un anillo circular y cuando $a = 0$ la molécula se convierte en un alambre recto de longitud h , en ambos casos perdiendo su propiedad quiral. Si el tamaño de las moléculas es mucho más pequeño que la longitud de onda λ del campo ($ka, kh \ll 1$) entonces el campo eléctrico puede aproximarse por la expresión $\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} (1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$. En tal caso el desplazamiento relativo Δ está dado por la integral

$$\begin{aligned} \Delta(h, a) &= \beta \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ 1 + i[(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{n}})h \frac{\varphi}{2\pi} + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}) \cos \varphi + \mathbf{k} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{a}) \sin \varphi] \right. \\ &\quad \left. \cdot \left\{ \hat{\mathbf{n}} \frac{h}{2\pi} - \mathbf{a} \sin \varphi + (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{a}) \cos \varphi \right\} \right. \\ &= \beta e^{-i\omega t} \left\{ h(\mathbf{E}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}}) + i(\mathbf{E}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}})(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \frac{h^2}{2} + i(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{a})(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{n}})h \right. \\ &\quad \left. - i\pi(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{a})\mathbf{k} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{a}) + i\pi(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})\mathbf{E}_0 \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{a}) \right\}. \quad (2.18) \end{aligned}$$

Como sugiere la figura, el desplazamiento relativo de la hélice de carga positiva respecto a la de carga negativa da lugar a una acumulación de carga de signo opuesto en los extremos, $q = \pm \rho \Delta$, lo que se traduce en un momento dipolar inducido,

$$\mathbf{d} = |q|h\hat{\mathbf{n}} = \rho h \Delta \hat{\mathbf{n}}, \quad (2.19)$$

y en un momento dipolar magnético igual a

$$\mathbf{m} = \frac{I}{c} \pi a^2 \mathbf{n} = \frac{-i\omega \rho \Delta}{c} \pi a^2 \mathbf{n}, \quad (2.20)$$

donde $I = d|q|/dt = \rho d\Delta/dt = -i\omega \rho \Delta$ es la corriente que fluye por la hélice. La contribución de todas las moléculas que forman el medio origina una polarización $\mathbf{P} = N \langle \mathbf{d} \rangle$ y una magnetización $\mathbf{M} = N \langle \mathbf{m} \rangle$, donde N es la densidad de moléculas por unidad de volumen, y $\langle \dots \rangle$ indica un promedio sobre todas las posibles orientaciones de las moléculas. Las expresiones (2.19) y (2.20) contienen el producto $\Delta(h, \mathbf{a})\hat{\mathbf{n}}$, y por tanto debe tomarse el promedio sobre las direcciones de \mathbf{a} , que cae en el plano perpendicular a $\hat{\mathbf{n}}$, y sobre las direcciones de $\hat{\mathbf{n}}$. Se puede demostrar que para $\hat{\mathbf{n}}$ fijo (ver Apéndice A.1)

$$\langle a_\alpha \rangle = 0, \quad \langle a_\beta a_\mu \rangle = \frac{a^2}{2} (\delta_{\beta\mu} - n_\beta n_\mu), \quad (2.21)$$

2. ACTIVIDAD ÓPTICA NATURAL Y EFECTOS MAGNETO-ÓPTICOS

y para $\hat{\mathbf{n}}$ aleatorio

$$\langle n_\alpha \rangle = 0 \quad \langle n_\alpha n_\beta \rangle = \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \quad \langle n_\alpha n_\beta n_\gamma \rangle = 0. \quad (2.22)$$

En conjunto se tiene entonces que

$$\langle \Delta \mathbf{n} \rangle_{a,n} = \frac{\beta e^{-i\omega t}}{3} [h \mathbf{E}_0 + i\pi a^2 \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0]. \quad (2.23)$$

Las expresiones resultantes para la polarización y magnetización inducidas son

$$\mathbf{P} = \frac{1}{3} N \rho h \beta e^{-i\omega t} [h \mathbf{E}_0 + i\pi a^2 \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0] \quad (2.24)$$

$$\mathbf{M} = \frac{-i\omega N \rho \pi a^2 \beta h}{3c} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad (2.25)$$

donde en las segunda expresión hemos ignorado un término de segundo orden en k . Conviene notar que la polarización no sólo tiene una componente a lo largo del campo, que involucra a h pero no al radio a , sino también una componente perpendicular $\sim ka$, que involucra al radio a pero no a h , a través de la sección transversal de la hélice cilíndrica (2.17). La corriente inducida puede obtenerse de la expresión

$$\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + c(\nabla \times \mathbf{M}) = -i\omega \mathbf{P} + ic(\mathbf{k} \times \mathbf{M}), \quad (2.26)$$

la cual se reduce a

$$\mathbf{j} = -\frac{i\omega N \beta \rho}{3} [h^2 \mathbf{E}_0 + i2\pi a^2 \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0] e^{-i\omega t}. \quad (2.27)$$

De nuevo, es posible identificar una componente longitudinal $\mathbf{J}_L(h) \parallel \mathbf{E}_0$ y una componente transversal $\mathbf{J}_T(ka) \perp \mathbf{E}_0$. El tensor de conductividad eléctrica es por lo tanto

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{-i\omega N \beta \rho}{3} [h^2 \delta_{\alpha\beta} + i2\pi a^2 e_{\alpha\beta\gamma} k_\gamma]. \quad (2.28)$$

A través de la relación $\epsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{\alpha\beta}$, la respuesta dieléctrica puede escribirse como la ecuación (2.2) donde

$$\epsilon = 1 + \frac{4\pi N h^2 \beta \rho}{3} \quad (2.29)$$

$$f = -\frac{8\pi^2 N \beta \rho h a^2}{3}. \quad (2.30)$$

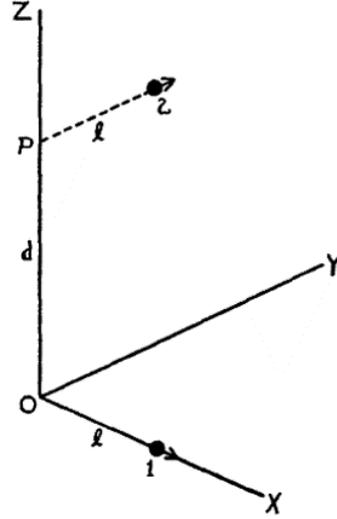


Figura 2.2: Modelo de átomos anisotrópicos.¹⁸

Efectivamente, la constante dieléctrica (2.29) refleja la respuesta longitudinal de las moléculas (de polarizabilidad $\alpha = \beta\rho h^2/3$), mientras que la constante girotrópica f involucra el grado en que la molécula es quiral, en virtud de que se anula si $a \rightarrow 0$ o $h \rightarrow 0$, como se comentó anteriormente. La comparación entre estas constantes refleja la medida de rompimiento de la simetría especular,

$$\frac{f/a}{\epsilon - 1} \frac{2\pi a}{h} \sim \frac{\text{perímetro}}{\text{altura}}. \quad (2.31)$$

A partir de la ecuación (2.14) se puede obtener la rotación de la polarización..

2.1.3. Modelo de dos átomos anisotrópicos

S. Chandrasekhar propuso en 1956 un modelo sencillo de dos átomos anisotrópicos¹⁸ para obtener los índices de refracción n_+ , n_- (2.10) y la rotación (2.14). En el modelo las moléculas que conforman el medio están hechas de dos átomos con polarizabilidad α , ubicados (figura 2.2) en

$$\mathbf{r}_1 = l\hat{\mathbf{x}} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{r}_2 = l\hat{\mathbf{y}} + d\hat{\mathbf{z}}, \quad (2.33)$$

donde la polarizabilidad del átomo 1 es paralela a $\hat{\mathbf{x}}$, mientras que la del átomo 2 es paralela a $\hat{\mathbf{y}}$. Los átomos se encuentran en presencia del campo eléctrico de

2. ACTIVIDAD ÓPTICA NATURAL Y EFECTOS MAGNETO-ÓPTICOS

luz RCP que se propaga en dirección $\hat{\mathbf{z}}$,

$$\mathbf{E}(z, t) = (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}})E_0 e^{i(k_z z - \omega t)}. \quad (2.34)$$

En éste modelo suponemos que en el átomo 1 se induce el momento dipolar $\mathbf{p}_1 = p_x \hat{\mathbf{x}}$ y en el átomo 2 $\mathbf{p}_2 = p_y \hat{\mathbf{y}}$, de modo que

$$p_x = \alpha[\mathbf{E}(\mathbf{r}_1) + \mathbf{E}_{dip2}(\mathbf{r}_1)]_x \quad (2.35)$$

$$p_y = \alpha[\mathbf{E}(\mathbf{r}_2) + \mathbf{E}_{dip1}(\mathbf{r}_2)]_y, \quad (2.36)$$

donde el primer término del lado derecho corresponde al dipolo inducido por el campo externo, y el segundo al inducido por el campo \mathbf{E}_{dip} del dipolo vecino. Los campos dipolares son

$$\mathbf{E}_\mu(\mathbf{r}_\nu) = \frac{3(\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\mu)[\mathbf{p}_\mu \cdot (\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\mu)]}{|\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\mu|^5} - \frac{\mathbf{p}_\mu}{|\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\mu|^3}, \quad \mu, \nu = 1, 2, \quad (2.37)$$

de donde los campos requeridos en (2.35) y (2.36) resultan

$$E_{2,x}(l, 0, 0) = \frac{-3l^2}{D^5} p_y \quad (2.38)$$

$$E_{1,y}(0, l, d) = \frac{-3l^2}{D^5} p_x, \quad (2.39)$$

y

$$E_x = E_0 \cos(\omega t) \quad (2.40)$$

$$E_y = E_0 \sin(kd - \omega t), \quad (2.41)$$

con $D = \sqrt{2l^2 + d^2}$. Hay que notar que las expresiones de los campos dipolares inducidos (2.37) son aquellas propias de una situación estática, aproximación que es válida cuando $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \ll \lambda$ (campo cercano). Sustituyendo en (2.35) y (2.36) se obtiene que

$$p_x = \alpha E_0 \cos \omega t - \alpha^2 \frac{3l^2}{D^5} E_0 \sin(kd - \omega t) \quad (2.42)$$

$$p_y = \alpha E_0 \sin(kd - \omega t) - \alpha^2 \frac{3l^2}{D^5} E_0 \cos \omega t, \quad (2.43)$$

donde hemos supuesto que $(\alpha(3l^2/D^5))^2 \ll 1$. Tomando en cuenta que $kd \ll 1$ y que por lo tanto $\cos kd \approx 1$, $\sin kd \approx kd$, $kd \sin(kd - \omega t) \approx -\sin \omega t$, éstas ecuaciones se reescriben como

$$p_x = \left[\left(\alpha - \alpha^2 \frac{3l^2}{D^5} kd \right) \cos \omega t + \alpha^2 \frac{3l^2}{D^5} kd \sin \omega t \right] E_0 \quad (2.44)$$

$$p_y = \left[\left(\alpha - \alpha^2 \frac{3l^2}{D^5} kd \right) \sin (kd - \omega t) - \alpha^2 \frac{3l^2}{D^5} kd \cos (kd - \omega t) \right] E_0. \quad (2.45)$$

En las expresiones anteriores se observa que los dipolos se encuentran constituidos por dos componentes, una en fase con el campo eléctrico y otra desfasada $\pi/2$. Lo mismo sucede para las polarizabilidades que se obtienen a partir de (2.44) y (2.45), y se escriben como

$$\alpha_x = \left(\alpha - \alpha^2 \frac{3l^2}{D^5} kd \right) - j \frac{3l^2}{D^5} \alpha^2 \quad (2.46)$$

$$\alpha_y = \left(\alpha - \alpha^2 \frac{3l^2}{D^5} kd \right) + j \frac{3l^2}{D^5} \alpha^2, \quad (2.47)$$

donde j refleja el desfase. Se considera que el medio posee N pares de dipolos por unidad de volumen, distribuidos de manera aleatoria. Se toma las moléculas de tal forma que el segmento \overline{OP} es paralelo a \hat{z} y el vector \mathbf{r}_1 toma cualquier dirección sobre el plano xy , lo que implica que el promedio de la polarizabilidad sobre todas las direcciones (ϕ) para RCP (2.34) sea

$$\langle \alpha \rangle_{\phi}^+ = \alpha_x \langle \cos^2 \phi \rangle + \alpha_y \langle \sin^2 \phi \rangle \quad (2.48)$$

$$= \frac{1}{2} (\alpha_x + \alpha_y) = \alpha - \alpha^2 \frac{3l^2}{D^5} kd. \quad (2.49)$$

En conjunto éstas moléculas con polarizabilidad (2.48), constituyen una polarización macroscópica

$$P_i = N \langle \alpha \rangle_{\phi}^+ E_i^{loc} = N \langle \alpha \rangle_{\phi}^+ \left(E_i + \frac{4\pi}{3} P_i \right), \quad i = x, y, \quad (2.50)$$

en donde se considera que el campo que siente la molécula E^{loc} , es el campo macroscópico $\mathbf{E}(z, t)$ menos la contribución del campo de la molécula en cuestión. Al reescribir (2.50) se llega a la ecuación de Clausius-Mossotti¹⁹, que para nuestro caso se escribe

$$\frac{n_+^2 - 1}{n_+^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} N \langle \alpha \rangle_{\phi}^+. \quad (2.51)$$

Cuando se lleva acabo el desarrollo anterior para el caso de luz LCP, se obtiene una polarizabilidad

$$\langle \alpha \rangle_{\phi}^- = \alpha + \alpha^2 \frac{3l^2}{D^5} kd, \quad (2.52)$$

2. ACTIVIDAD ÓPTICA NATURAL Y EFECTOS MAGNETO-ÓPTICOS

y la correspondiente ecuación de Clausius-Mossotti es

$$\frac{n_-^2 - 1}{n_-^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} N \langle \alpha \rangle_\phi^- \quad (2.53)$$

Estos resultados nos permiten llegar a

$$n_+^2 - n_-^2 = 2\bar{n}(n_+ - n_-) \quad (2.54)$$

$$= 8\pi N \left(\frac{\bar{n}^2 + 2}{3} \right)^2 \alpha^2 \frac{3l^2}{D^5} kd, \quad (2.55)$$

con $k = \frac{\omega}{c}\bar{n}$, en donde se ha supuesto que $\bar{n} = \frac{n_+ + n_-}{2}$ y $(n_+^2 + n_-^2) \approx 2\bar{n}^2$. Bajo la aproximación $(\bar{n}^2 + 2)/3 \approx 1$, usando (2.54) y (2.55) se llega a

$$n_+ - n_- = 12\pi N \frac{\omega}{c} \alpha^2 \frac{l^2 d}{D^5}. \quad (2.56)$$

Debido a que los átomos anisotrópicos se pueden encontrar orientados de manera aleatoria, se agrega un factor de $1/3$ al obtener la rotación mediante la ecuación (2.14),

$$\frac{d\theta}{dz} = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 2\pi N \alpha^2 \frac{l^2 d}{D^5}. \quad (2.57)$$

La constante de actividad óptica f se obtiene a partir de (2.14) y (2.57) y se escribe como

$$f = -4\pi N \alpha^2 \frac{l^2 d}{(d^2 + 2l^2)^{5/2}}, \quad (2.58)$$

la cual depende del número de pares de átomos anisotrópicos, el medio (α) y una razón geométrica. Si pensamos que el par de átomos se encuentra contenido en una caja con base l^2 y altura d , la razón geométrica relaciona el volumen de la caja con la longitud de su diagonal; cuando $l \rightarrow 0$ o $d \rightarrow 0$, $f \rightarrow 0$.¹⁸

2.2. Efecto Faraday

La presencia de campo magnético estático en un material genera un rompimiento de la simetría de inversión temporal (TRS, por sus siglas en inglés), causando que la respuesta de la luz RCP y LCP que se propaga sea distinta, lo que conlleva a que cada polarización tenga distintos índices de refracción y por consiguiente la polarización rote; éste fenómeno se conoce bajo el nombre de *efecto Faraday*. Para que haya rompimiento de TRS es necesario que alguna componente de la dirección de la luz este en la del campo magnético.

El efecto Faraday es un fenómeno similar a la actividad óptica natural con una diferencia importante: si se invierte la dirección de propagación la rotación de la polarización se invierte cancelando el efecto rotatorio, mientras que en el efecto Faraday la inversión de la dirección de propagación no invierte la rotación, sino que se suma.^{15,20}

También se tiene el efecto de rotación de la polarización en el fenómeno de refracción en una interfase; tanto la luz reflejada como la transmitida pueden presentar dicha rotación.

2.2.1. Modelo clásico: osciladores armónicos y fuerza de Lorentz

Los osciladores clásicos y la fuerza de Lorentz, permiten construir un modelo simple para obtener n_- y n_+ .^{21,22} El modelo toma en cuenta un medio compuesto de osciladores armónicos uniformemente distribuidos, cada uno de ellos con carga q y masa m , en presencia de un campo magnético externo constante $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$. Un campo óptico se propaga en este medio en dirección $\hat{\mathbf{z}}$,

$$\mathbf{E}(z, t) = E_{0x}e^{i(kz-\omega t)}\hat{\mathbf{x}} + E_{0y}e^{i(kz-\omega t)}\hat{\mathbf{y}}. \quad (2.59)$$

Si se supone que no hay fuerzas de amortiguamiento, sino sólo una fuerza restauradora $-m\omega_0^2\mathbf{r}$, la ecuación de movimiento de cada oscilador es

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) - m\omega_0^2\mathbf{r}. \quad (2.60)$$

La solución de tipo armónico: $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0e^{-i\omega t}$, requiere que se cumpla la ecuación algebraica

$$(\omega_0^2 - \omega^2)\mathbf{r} = \frac{q}{m}\mathbf{E} - i\omega\omega_c\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{z}}, \quad (2.61)$$

donde $\omega_c = \frac{qB}{mc}$. Tomando en cuenta un medio que posee N dipolos por unidad de volumen, la ecuación de movimiento se puede traducir a una ecuación de movimiento para la polarización $\mathbf{P} = Nq\mathbf{r}$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)\mathbf{P} + i\omega\omega_c\mathbf{P} \times \hat{\mathbf{z}} = \frac{Nq^2}{m}\mathbf{E} \quad (2.62)$$

Si tomamos el producto vectorial de (2.62) con $\hat{\mathbf{z}}$ tenemos

$$\mathbf{P} \times \hat{\mathbf{z}} = \frac{i\omega\omega_c}{\omega_0^2 - \omega^2}\mathbf{P} + \frac{Nq^2}{m[\omega_0^2 - \omega^2]}\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{z}}, \quad (2.63)$$

2. ACTIVIDAD ÓPTICA NATURAL Y EFECTOS MAGNETO-ÓPTICOS

al sustituir en (2.62) se encuentra

$$\mathbf{P} = \frac{q^2 N}{m} \left[\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2 \omega_c^2} \mathbf{E} - i \frac{\omega \omega_c}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2 \omega_c^2} \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{z}} \right]. \quad (2.64)$$

Debido a que ésta expresión se puede escribir como $P_i = \chi_{ij} E_j$, y usando la relación $\epsilon_{ij} = \delta_{ij} + 4\pi \chi_{ij}$ se obtiene

$$\epsilon_{ij}(\omega, B) = \epsilon(\omega) \delta_{ij} + i \eta e_{ijz} \quad i, j = x, y \quad (2.65)$$

donde

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi N q^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2 \omega_c^2} \quad (2.66)$$

$$\eta(\omega) = -\frac{4\pi N q^2}{m} \frac{\omega \omega_c}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2 \omega_c^2}. \quad (2.67)$$

Si observamos (2.65) vemos que posee la misma forma de (2.2) donde la dispersión espacial generaba una rotación, sin embargo ahora es un factor externo el que la causa ($\eta \propto B$). Si el campo (2.59) es LCP $n_+^2 = \epsilon - \eta$ y si es RCP $n_-^2 = \epsilon + \eta$, e implica que los índices de refracción sean

$$n_{\pm} = \sqrt{1 + \frac{4\pi N q^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 \mp \omega \omega_c)}}. \quad (2.68)$$

De manera similar a como se hizo en la sección 2.1

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{4\pi N q^2}{m} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \frac{\omega \omega_c}{\omega_0^2 - \omega^2 - \omega \omega_c}. \quad (2.69)$$

De nuevo, vemos que la rotación depende de aquello que rompe simetría: la quiralidad en el caso de los modelos moleculares anteriores, y el campo magnético en éste.

2.2.2. Modelo cuántico: osciladores y ecuaciones de movimiento de Heisenberg

El modelo que se presenta para obtener la rotación de polarización producida por el efecto Faraday, es equivalente al de la sección anterior, sin embargo se utiliza enfoque cuántico en lugar de clásico para determinar la posición de las cargas.²¹ Se considera el Hamiltoniano de un oscilador con carga q y masa m_0 ,

en presencia de un campo $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$, y el campo eléctrico de luz que se propaga en $\hat{\mathbf{z}}$ dado por

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{1}{2} (E_{0x}e^{-i(kz-\omega t)}\hat{\mathbf{x}} + E_{0y}e^{-i(kz-\omega t)}\hat{\mathbf{y}}), \quad (2.70)$$

este hamiltoniano es

$$\hat{H} = \frac{[\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, z, t)]^2}{2m_0} + \frac{1}{2}m_0\omega_0^2|\mathbf{r}|^2. \quad (2.71)$$

Para determinar el potencial vectorial \mathbf{A} , se usa la norma de Coulomb ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$), considerando que el potencial escalar es cero, y recordando que \mathbf{A} debe satisfacer

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (2.72)$$

se encuentra que \mathbf{A} se puede separar en dos componentes \mathbf{A}_E y \mathbf{A}_B , que dependen del campo eléctrico y magnético, respectivamente y están dados por

$$\mathbf{A}_E(z, t) = \frac{c}{i\omega} (E_{0x}e^{i(kz-\omega t)}\hat{\mathbf{x}} + E_{0y}e^{i(kz-\omega t)}\hat{\mathbf{y}}) \quad (2.73)$$

$$\mathbf{A}_B(\mathbf{r}) = -\frac{B}{2}[y\hat{\mathbf{x}} - x\hat{\mathbf{y}}]. \quad (2.74)$$

Por otro lado se utilizan las ecuaciones de movimiento de Heisenberg, para conocer la evolución temporal de los operadores de posición y momento

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{i\hbar}[\mathbf{p}, \hat{H}] \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{i\hbar}[\mathbf{r}, \hat{H}], \quad (2.75)$$

que una vez desarrolladas (ver apéndice A.2) son

$$\dot{p}_x = -m_0\omega_0^2x + \frac{qBp_y}{2m_0c} - \frac{q^2E_yB}{2m_0ci\omega} - \frac{q^2B^2}{4m_0c^2}x \quad (2.76)$$

$$\dot{p}_y = -m_0\omega_0^2y - \frac{qBp_x}{2m_0c} + \frac{q^2E_xB}{2m_0ci\omega} - \frac{q^2B^2}{4m_0c^2}y \quad (2.77)$$

y

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m_0} - \frac{qE_x}{m_0i\omega} + \frac{qB}{2m_0c}y \quad (2.78)$$

$$\dot{y} = \frac{p_y}{m_0} - \frac{qE_y}{m_0i\omega} - \frac{qB}{2m_0c}x, \quad (2.79)$$

con $E_x = E_{0x}e^{i(kz-\omega t)}$ y $E_y = E_{0y}e^{i(kz-\omega t)}$. Se derivan los operadores de posición (2.78) y (2.79), y se sustituye en ellos (2.76) y (2.77), llegando a

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = -\omega_0^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{q}{m_0} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} - \omega_c \begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad (2.80)$$

que es equivalente a (2.61). Lo desarrollado en la sección anterior es válido, no obstante es importante aclarar que para ello se debe obtener el valor de expectativa de los operadores de posición derivados.

Reflexión y refracción en un material 2D entre dos dieléctricos

En este capítulo consideraremos el problema electromagnético de reflexión y refracción de ondas plana en un medio bidimensional (2D) que separa dos medios dieléctricos, de acuerdo a la geometría que se muestra en la figura (3.1), y se derivan expresiones para las amplitudes de Fresnel y los ángulos de rotación de Kerr. El material que se encuentra en la interfase está caracterizado por su respectivo tensor de conductividad y las expresiones derivadas pueden aplicarse para cualquier material 2D (grafeno, gases de electrones bidimensionales (2DEG, por sus siglas en inglés), aislantes topológicos, sistemas de Dirac, etc.).

3.1. Amplitudes de Fresnel

Se utilizan ondas planas armónicas del tipo $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ con $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, que satisfacen la ecuación de Helmholtz $(\nabla + \frac{\omega^2 n^2}{c^2})\mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$, cuyo vector de onda \mathbf{k} se encuentra contenido en el plano xz . Lo anterior permite escribir los campos de manera más sencilla.

El campo eléctrico incidente $\mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^i e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$ que viaja en un medio con constante dieléctrica ϵ_1 , se escribe como la combinación lineal de la polarización s (transversal eléctrico TE) y p (transversal magnético TM)

$$\mathbf{E}^i = E_p^i \hat{\mathbf{p}}^i + E_s^i \hat{\mathbf{s}}, \quad (3.1)$$

donde el vector de onda y vector unitario de polarización p incidentes son

$$\mathbf{k}^i = k_0 \sqrt{\epsilon_1} \hat{\mathbf{k}}^i = k_0 \sqrt{\epsilon_1} (\sin \theta_i \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta_i \hat{\mathbf{z}}) \quad \hat{\mathbf{p}}^i = \hat{\mathbf{k}}^i \times \hat{\mathbf{s}} = \cos \theta_i \hat{\mathbf{x}} - \sin \theta_i \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.2)$$

3. REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN EN UN MATERIAL 2D ENTRE DOS DIELECTRICOS

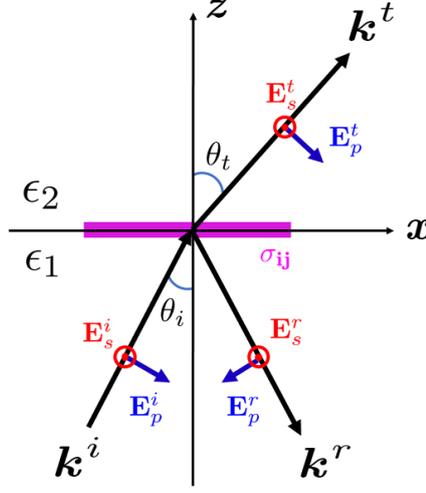


Figura 3.1: Reflexión y refracción de ondas planas en un medio bidimensional entre dos dieléctricos.

con $k_0 = \frac{\omega}{c}$ y vector unitario de polarización s , $\hat{s} = -\hat{y}$. El respectivo campo magnético incidente está determinado por $\mathbf{B}^i(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}^i e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$

$$\mathbf{B}^i = \frac{1}{k_0} \mathbf{k}^i \times \mathbf{E}^i = \sqrt{\epsilon_1} (E_s^i \hat{\mathbf{p}}^i - E_p^i \hat{\mathbf{s}}). \quad (3.3)$$

De manera similar los campos eléctrico y magnético reflejado son

$$\mathbf{E}^r = E_p^r \hat{\mathbf{p}}^r + E_s^r \hat{\mathbf{s}} \quad \mathbf{B}^r = \frac{1}{k_0} \mathbf{k}^r \times \mathbf{E}^r = \sqrt{\epsilon_1} (E_s^r \hat{\mathbf{p}}^r - E_p^r \hat{\mathbf{s}}), \quad (3.4)$$

donde

$$\mathbf{k}^r = k_0 \sqrt{\epsilon_1} \hat{\mathbf{k}}^r = k_0 \sqrt{\epsilon_1} (\sin \theta_i \hat{\mathbf{x}} - \cos \theta_i \hat{\mathbf{z}}) \quad \hat{\mathbf{p}}^r = \hat{\mathbf{k}}^r \times \hat{\mathbf{s}} = -\cos \theta_i \hat{\mathbf{x}} - \sin \theta_i \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.5)$$

Los campos transmitidos se pueden escribir

$$\mathbf{E}^t = E_p^t \hat{\mathbf{p}}^t + E_s^t \hat{\mathbf{s}} \quad \mathbf{B}^t = \frac{1}{k_0} \mathbf{k}^t \times \mathbf{E}^t = \sqrt{\epsilon_2} (E_s^t \hat{\mathbf{p}}^t - E_p^t \hat{\mathbf{s}}), \quad (3.6)$$

con

$$\mathbf{k}^t = k_0 \sqrt{\epsilon_2} \hat{\mathbf{k}}^t = k_0 \sqrt{\epsilon_2} (\sin \theta_t \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta_t \hat{\mathbf{z}}) \quad \hat{\mathbf{p}}^t = \hat{\mathbf{k}}^t \times \hat{\mathbf{s}} = \cos \theta_t \hat{\mathbf{x}} - \sin \theta_t \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.7)$$

donde el ángulo transmitido θ_t se obtiene mediante la ley de Snell: $\sqrt{\epsilon_1} \sin \theta_i = \sqrt{\epsilon_2} \sin \theta_t$.

Las condiciones de frontera en la interfase ($z = 0$) para los campos (incidente, reflejado, transmitido) que acabamos de escribir son

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot [\epsilon_2 \mathbf{E}^t - \epsilon_1 (\mathbf{E}^i + \mathbf{E}^r)] = 4\pi\sigma_s(\omega) \quad (3.8)$$

$$\hat{\mathbf{z}} \times [\mathbf{E}^t - (\mathbf{E}^i + \mathbf{E}^r)] = 0 \quad (3.9)$$

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot [\mathbf{B}^t - (\mathbf{B}^i + \mathbf{B}^r)] = 0 \quad (3.10)$$

$$\hat{\mathbf{z}} \times [\mathbf{B}^t - (\mathbf{B}^i + \mathbf{B}^r)] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_s(\omega), \quad (3.11)$$

y debido a la ecuación de continuidad se debe satisfacer $k_x J_{s,i}(\omega) = \omega\sigma_s(\omega)$. Al sustituir los campos en las condiciones de frontera se obtiene

$$\sqrt{\epsilon_1}(E_p^i + E_p^r) - \sqrt{\epsilon_2}E_p^t = \frac{4\pi}{c} J_{s,x}(\omega) \quad (3.12)$$

$$E_s^i + E_s^r = E_s^t \quad (3.13)$$

$$\frac{k_z^i}{k^i}(E_p^i - E_p^r) = \frac{k_z^t}{k^t}E_p^t \quad (3.14)$$

$$k_z^i(E_s^i - E_s^r) - k_z^t E_s^t = \frac{4\pi}{c} k_0 J_{s,y}(\omega), \quad (3.15)$$

donde k_z^i y k_z^t , son las componentes $\hat{\mathbf{z}}$ de los vectores de onda incidente y transmitido. En este sistema $J_{s,i} = \sigma_{ij}E_j(z=0)$ siendo $E_x(z=0) = E_x^i(0) + E_x^r(z=0) = E_x^t(0)$ y $E_y(z=0) = E_y^i(0) + E_y^r(z=0) = E_y^t(0)$, esto implica

$$J_{s,x}(\omega) = \sigma_{xx}(\omega) \frac{k_z^t}{k_z} E_p^t + \sigma_{xy}(\omega) E_s^t = \sigma_{xx}(\omega) \frac{k_z^t}{k_z} (E_p^i - E_p^r) + \sigma_{xy}(\omega) (E_s^i + E_s^r)$$

$$J_{s,y}(\omega) = \sigma_{yx}(\omega) \frac{k_z^t}{k_z} E_p^t + \sigma_{yy}(\omega) E_s^t = \sigma_{yx}(\omega) \frac{k_z^t}{k_z} (E_p^i - E_p^r) + \sigma_{yy}(\omega) (E_s^i + E_s^r),$$

es importante darse cuenta que si $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 0$, el sistema (3.12)-(3.15) se desacopla. Si se usa (3.13) y (3.14), en (3.12) y (3.15) se llega al sistema matricial $\mathbb{M}\mathbf{E}^r = \mathbb{F}\mathbf{E}^i$

$$\begin{pmatrix} M_{pp} & M_{ps} \\ M_{sp} & M_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_p^r \\ E_s^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{pp} & F_{ps} \\ F_{sp} & F_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_p^i \\ E_s^i \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

donde los coeficientes son

$$M_{pp} = \epsilon_2 k_z^i + \epsilon_2 k_z^t + 4\pi \frac{\sigma_{xx}}{\omega} k_z^i k_z^t \quad (3.17)$$

$$M_{ps} = -\frac{4\pi}{c} \sigma_{xy} k_z^t \quad (3.18)$$

$$M_{sp} = -\frac{4\pi}{c} \frac{\sigma_{xy}}{\sqrt{\epsilon_1}} k_z^t \quad (3.19)$$

$$M_{ss} = k_z^i + k_z^t + \frac{4\pi}{c} k_0 \sigma_{yy}, \quad (3.20)$$

3. REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN EN UN MATERIAL 2D ENTRE DOS DIELECTRICOS

y

$$F_{pp} = \epsilon_2 k_z^i - \epsilon_2 k_z^t + 4\pi \frac{\sigma_{xx}}{\omega} k_z^i k_z^t \quad (3.21)$$

$$F_{ps} = \frac{4\pi}{c} \sigma_{xy} k_z^t \quad (3.22)$$

$$F_{sp} = -\frac{4\pi}{c} \frac{\sigma_{yx}}{\sqrt{\epsilon_1}} k_z^t \quad (3.23)$$

$$F_{ss} = k_z^i - k_z^t - \frac{4\pi}{c} k_0 \sigma_{yy}. \quad (3.24)$$

Es conveniente organizar el problema en forma matricial, para ello escribimos

$$\begin{pmatrix} E_s^r \\ E_p^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{ss} & r_{sp} \\ r_{ps} & r_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_s^i \\ E_p^i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} E_s^t \\ E_p^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{ss} & t_{sp} \\ t_{ps} & t_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_s^i \\ E_p^i \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

donde los coeficientes de Fresnel $r_{\mu\nu}$, $t_{\mu\nu}$ denotan la magnitud de los campos que corresponden a polarización ν incidente y polarización reflejada (r) y transmitida (t) μ . Usando (3.16) se encuentra que

$$\begin{pmatrix} r_{ss} & r_{sp} \\ r_{ps} & r_{pp} \end{pmatrix} = \mathbb{M}^{-1} \mathbb{F} \quad (3.26)$$

y los coeficientes de Fresnel en reflexión son

$$\begin{aligned} r_{pp} &= \frac{(\epsilon_2 k_z^i - \epsilon_1 k_z^t + 4\pi \frac{\sigma_{xx}}{\omega} k_z^i k_z^t)(k_z^i + k_z^t + \frac{4\pi}{c} \frac{\omega}{c} \sigma_{yy}) - (\frac{4\pi}{c})^2 \sigma_{xy} \sigma_{yx} k_z^i k_z^t}{(\epsilon_2 k_z^i + \epsilon_1 k_z^t + 4\pi \frac{\sigma_{xx}}{\omega} k_z^i k_z^t)(k_z^i + k_z^t + \frac{4\pi}{c} \frac{\omega}{c} \sigma_{yy}) - (\frac{4\pi}{c})^2 \sigma_{xy} \sigma_{yx} k_z^i k_z^t} \\ r_{sp} &= -\frac{\frac{8\pi}{c} \sigma_{yx} \sqrt{\epsilon_1} k_z^i k_z^t}{(\epsilon_2 k_z^i + \epsilon_1 k_z^t + 4\pi \frac{\sigma_{xx}}{\omega} k_z^i k_z^t)(k_z^i + k_z^t + \frac{4\pi}{c} \frac{\omega}{c} \sigma_{yy}) - (\frac{4\pi}{c})^2 \sigma_{xy} \sigma_{yx} k_z^i k_z^t} \\ r_{ps} &= -\frac{\frac{8\pi}{c} \sigma_{xy} \sqrt{\epsilon_1} k_z^i k_z^t}{(\epsilon_2 k_z^i + \epsilon_1 k_z^t + 4\pi \frac{\sigma_{xx}}{\omega} k_z^i k_z^t)(k_z^i + k_z^t + \frac{4\pi}{c} \frac{\omega}{c} \sigma_{yy}) - (\frac{4\pi}{c})^2 \sigma_{xy} \sigma_{yx} k_z^i k_z^t} \\ r_{ss} &= \frac{(\epsilon_2 k_z^i + \epsilon_1 k_z^t + 4\pi \frac{\sigma_{xx}}{\omega} k_z^i k_z^t)(k_z^i - k_z^t - \frac{4\pi}{c} \frac{\omega}{c} \sigma_{yy}) + (\frac{4\pi}{c})^2 \sigma_{xy} \sigma_{yx} k_z^i k_z^t}{(\epsilon_2 k_z^i + \epsilon_1 k_z^t + 4\pi \frac{\sigma_{xx}}{\omega} k_z^i k_z^t)(k_z^i + k_z^t + \frac{4\pi}{c} \frac{\omega}{c} \sigma_{yy}) - (\frac{4\pi}{c})^2 \sigma_{xy} \sigma_{yx} k_z^i k_z^t}. \end{aligned}$$

Cuando $\sigma_{ij} = 0$ estas expresiones se reducen a los muy conocidos coeficientes de Fresnel del problema de refracción en una interface entre dos dieléctricos²³. Notese también que cuando $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx}$ se obtiene $r_{sp} = r_{ps}$. Un caso en particular relevante es el de incidencia normal, $\theta_i = 0$, $k_z^i = k_i = k_0 \sqrt{\epsilon_1}$ y $k_z^t = k^t = k_0 \sqrt{\epsilon_2}$,

en cual las expresiones anteriores se reducen a

$$r_{pp} = \frac{(\sqrt{\epsilon_2} - \sqrt{\epsilon_1} + \frac{4\pi}{c}\sigma_{xx})(\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2} + \frac{4\pi}{c}\sigma_{yy}) - (\frac{4\pi}{c})^2\sigma_{xy}\sigma_{yx}}{(\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1} + \frac{4\pi}{c}\sigma_{xx})(\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2} + \frac{4\pi}{c}\sigma_{yy}) - (\frac{4\pi}{c})^2\sigma_{xy}\sigma_{yx}} \quad (3.27)$$

$$r_{sp} = -\frac{\frac{8\pi}{c}\sigma_{yx}\sqrt{\epsilon_1}}{(\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1} + \frac{4\pi}{c}\sigma_{xx})(\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2} + \frac{4\pi}{c}\sigma_{yy}) - (\frac{4\pi}{c})^2\sigma_{xy}\sigma_{yx}} \quad (3.28)$$

$$r_{ps} = -\frac{\frac{8\pi}{c}\sigma_{yx}\sqrt{\epsilon_1}}{(\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1} + \frac{4\pi}{c}\sigma_{xx})(\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2} + \frac{4\pi}{c}\sigma_{yy}) - (\frac{4\pi}{c})^2\sigma_{xy}\sigma_{yx}} \quad (3.29)$$

$$r_{ss} = \frac{(\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1} + \frac{4\pi}{c}\sigma_{xx})(\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2} - \frac{4\pi}{c}\sigma_{yy}) - (\frac{4\pi}{c})^2\sigma_{xy}\sigma_{yx}}{(\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1} + \frac{4\pi}{c}\sigma_{xx})(\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2} + \frac{4\pi}{c}\sigma_{yy}) - (\frac{4\pi}{c})^2\sigma_{xy}\sigma_{yx}}. \quad (3.30)$$

3.2. Ángulo de Kerr

A incidencia normal ($k_z^r = k^i$, $k_x = 0$) el ángulo de rotación de la polarización de luz reflejada es

$$\theta_K = \frac{1}{2}(\theta_- - \theta_+), \quad (3.31)$$

donde θ_- y θ_+ son los ángulos de rotación, respecto al eje x , de los vectores eléctricos de luz LCP y RCP respectivamente. La expresión (3.31) está dada por lo tanto por

$$\theta_K = \frac{1}{2}[\arg E_-^r - \arg E_+^r] \quad (3.32)$$

$$= \frac{1}{2}[\arg(E_x^r + iE_y^r) + \arg(E_x^r + iE_y^r)] \quad (3.33)$$

$$= \frac{1}{2} \arg\left(\frac{1 + i\chi_K}{1 - i\chi_K}\right), \quad (3.34)$$

con $\chi_K = \frac{E_y^r}{E_x^r}$. La expresión (3.34) puede reescribirse como

$$\tan 2\theta_K = \frac{\text{Im } z}{\text{Re } z}, \quad z = \frac{1 + i\chi_K}{1 - i\chi_K}. \quad (3.35)$$

Para polarización p

$$\chi_K^p = -\frac{r_{sp}}{r_{pp}}, \quad \tan 2\theta_K = \frac{2 \text{Re } \chi_K^p}{1 - |\chi_K^p|^2}, \quad (3.36)$$

y para polarización s

3. REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN EN UN MATERIAL 2D ENTRE DOS DIELÉCTRICOS

$$\chi_K^s = -\frac{r_{ps}}{r_{ss}}, \quad \tan 2\theta_K = \frac{2 \operatorname{Re} \chi_K^s}{1 - |\chi_K^s|^2}. \quad (3.37)$$

Puede notarse que

- $\chi_K^p \propto -\sigma_{yx}(\omega)$ y $\chi_K^s \propto \sigma_{xy}(\omega)$, de modo que $\theta_K = 0$ si las componentes Hall se anulan.
- Si $|\chi_K| \ll 1$ entonces $\theta_K \approx \operatorname{Re} \chi_K$.
- A incidencia normal si $\sqrt{\epsilon_2} \gg \sqrt{\epsilon_1} + (4\pi/c)\sigma_{xx}$, $r_{pp} \approx 1$ y $\chi_K^p \approx -r_{sp}$

Interacción espín-órbita

“It appears to be one of the few places in physics where there is a rule which can be stated very simply, but for which no one has found a simple and easy explanation ”

Richard Feynman

En el capítulo 2 se mostró cómo un campo magnético origina diferentes índices de refracción para cada componente de polarización circular. El rompimiento de simetría de inversión temporal (TRS, por sus siglas en inglés) introduce componentes no diagonales al tensor dieléctrico, responsables del efecto Faraday. En este contexto, en el presente capítulo se discute brevemente el efecto del acoplamiento espín-órbita de Rashba, que opera como un campo magnético efectivo que rompe la degeneración de espín, en virtud de falta de simetría de inversión espacial (IS, por sus siglas en inglés), pero conservando TRS.

Brevemente, se presenta un repaso del papel que desempeñan la IS y TRS sobre la degeneración de espín (sección 4.1), subsecuentemente se aborda la interacción espín-órbita (IEO) (sección 4.2), específicamente se realiza una discusión entorno al acoplamiento Rashba (sección 4.3).

4.1. Degeneración de espín

La degeneración de espín es resultado del efecto conjunto de las simetrías de inversión temporal y espacial.^{24,25} El carácter antiunitario del operador de inversión temporal \hat{T} , en conjunto con el Teorema de Kramers, el cual dice que si el operador hermitiano H conmuta con un operador antiunitario ϑ , que cumple $\vartheta^2 = -\mathbf{I}$, entonces el eigenvalor de H es al menos doblemente degenerado²⁶.

4. INTERACCIÓN ESPÍN-ÓRBITA

Implica que para un sistema con espín $1/2$ que posee inversión temporal existen un mínimo de dos eigenestados con la misma energía, lo que se expresa como

$$\varepsilon_{\uparrow}(\mathbf{k}) = \varepsilon_{\downarrow}(-\mathbf{k}), \quad (4.1)$$

en donde la inversión de simetría temporal genera un cambio en el vector de onda $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ e invierte el espín. La simetría de inversión espacial $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$, causa otra degeneración que se expresa de la forma

$$\varepsilon_{\uparrow}(\mathbf{k}) = \varepsilon_{\uparrow}(-\mathbf{k}). \quad (4.2)$$

La combinación de (4.1) y (4.2) tiene como consecuencia

$$\varepsilon_{\uparrow}(\mathbf{k}) = \varepsilon_{\downarrow}(\mathbf{k}), \quad (4.3)$$

una degeneración en las energías para los dos estados de espín.^{22,24,25,27,28,29}

Existen diversos mecanismos para romper la degeneración de espín, la manera más conocida es el efecto Zeeman en donde se rompe TRS. Cuando ésta simetría se encuentra presente, la IEO ofrece un mecanismo alternativo, a través del rompimiento de simetría de inversión espacial. Por ejemplo, en gases electrónicos 2D o pozos cuánticos en heteroestructuras semiconductoras, tal rompimiento puede lograrse con un pozo de confinamiento espacialmente asimétrico. Este es el origen de una importante contribución de acoplamiento espín-órbita en sistemas de baja dimensionalidad, denominada acoplamiento Rashba.³⁰

4.2. Interacción espín-órbita

La interacción espín-órbita aparece en el hamiltoniano como resultado de una aproximación no relativista de la ecuación de Dirac, y tiene la forma

$$H_{SO} = -\frac{\hbar}{4m_0^2c^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \times \nabla V, \quad (4.4)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el vector de las matrices de Pauli. Ésta se puede entender como la interacción entre el espín y el campo magnético efectivo que siente el electrón en su marco de referencia, desde donde el movimiento del núcleo, constituye una corriente eléctrica que produce un campo magnético.^{25,31}

4.3. Acoplamiento Rashba

En sistemas cuasi-bidimensionales como heteroestructuras semiconductoras, i.e. la interfase GaAs/AlGaAs,³¹ cuando el potencial que los confina no es simétri-

co a lo largo de la dirección de crecimiento, propiedad que se conoce como asimetría de inversión estructural (SIA, por sus siglas en inglés), se origina al acoplamiento espín-órbita de Rashba.³² Éste genera el desdoblamiento de las bandas de energía, lo cual se puede ver como el resultado conjunto del campo eléctrico macroscópico y microscópico de los núcleos atómicos. Para comprender de manera general el efecto de la SIA, se puede usar la aproximación de la función envolvente, que describe los estados electrónicos en presencia de campos eléctricos y magnéticos con pequeños cambios en la escala de la constante de red. En ésta aproximación la función de onda se encuentra dada por el producto entre las rápidas oscilaciones periódicas de la red, descritas por las funciones de Bloch, y una función envolvente con lenta variación. Donde la SIA genera que la parte de Bloch sienta los campos atómicos y la función envolvente el entorno macroscópico en que se encuentra.²⁵

Rashba y Bychkov propusieron que al considerar el campo eléctrico interfacial en dirección \hat{z} , el acoplamiento espín-órbita se describe a través del hamiltoniano

$$H_R = \alpha_R \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{k} \times \hat{z}), \quad (4.5)$$

donde α_R es el coeficiente de Rashba que depende del material y del campo eléctrico local percibido por el electrón.^{33,34} En diversos materiales con distintas densidades electrónicas se han estimado valores de $\alpha_R = 0.6 \times 10^{-11}$ eVm, $\alpha_R = 4 \times 10^{-11}$ eVm y $\alpha_R = 3 \times 10^{-12}$ eVm.^{32,35} El hamiltoniano total se escribe como

$$H(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} + \alpha_R \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{k} \times \hat{z}), \quad (4.6)$$

siendo m^* la masa efectiva, (4.6) posee una forma tipo Zeeman en \mathbf{k} , con campo espín-órbita $\alpha_R \mathbf{k} \times \hat{z}$. Para resolver el problema de eigenvalores se diagonaliza el hamiltoniano con el operador³⁶

$$U = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\phi} \\ e^{i\phi} & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

donde ϕ , corresponde al ángulo azimutal del campo magnético espín-órbita. El hamiltoniano diagonalizado es

$$H'(\mathbf{k}) = U H U^\dagger \quad (4.8)$$

$$= (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{d}}) \left[\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \alpha_R (\mathbf{k} \times \hat{z}) \right] (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{d}}) \quad (4.9)$$

$$= \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \alpha_R k \sigma_z \quad (4.10)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \alpha_R k & 0 \\ 0 & \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \alpha_R k \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

4. INTERACCIÓN ESPÍN-ÓRBITA

de donde se extraen las eigenenergías

$$\varepsilon_\lambda(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \lambda \alpha_R k \quad \lambda = \pm 1, \quad (4.12)$$

mismas que se pueden escribir alternativamente como

$$\varepsilon_\lambda(k) = \frac{\hbar^2}{2m^*} (k + \lambda k_R)^2 - \varepsilon_R, \quad (4.13)$$

en donde $k_R = \frac{m^* \alpha_R}{\hbar^2}$ y $\varepsilon_R = \frac{\hbar^2}{2m^*} k_R^2$. En la figura (4.2a) se muestra el espectro de energía para un sistema con IEO Rashba y en la figura (4.2b) su proyección en uno de los ejes, que se compara con las energías del electrón libre, lo que permite observar claramente el rompimiento de la degeneración del espín.

Por otro lado la ecuación de Shrödinger se puede escribir $H'(\mathbf{k}) |\psi'_\lambda\rangle = \varepsilon_\lambda(\mathbf{k}) |\psi'_\lambda\rangle$, reduciendo el problema de eigenvalores a

$$\sigma_z |\psi'_\lambda\rangle = \pm |\psi'_\lambda\rangle, \quad (4.14)$$

de donde es claro que $|\psi'_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $|\psi'_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, y por tanto los eigenestados ($|\psi_\lambda\rangle = U^\dagger |\psi'_\lambda\rangle$) son

$$|\psi_+\rangle = U^\dagger \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

$$|\psi_-\rangle = U^\dagger \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\phi} \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{i\phi} \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

El valor esperado del operador de espín en el estado $|\psi_\lambda\rangle$ proporciona la orientación del espín (figura 4.1), es decir su dirección en el estado $|\psi_\lambda\rangle$, apunta en la dirección del campo espín-órbita

$$\langle \psi_\lambda | \mathbf{S} | \psi_\lambda \rangle = \frac{\hbar}{2} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\psi_\lambda} \quad (4.17)$$

$$= -\lambda \frac{\hbar}{2} \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{k}), \quad (4.18)$$

con $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \hat{\mathbf{y}}$.

Si al hamiltoniano de Rashba (4.6) se le añade un término que rompa simetría de inversión temporal, como por ejemplo un campo magnético \mathbf{B} , las bandas de energía presentarán adicionalmente una brecha energética. En tal caso tenemos

$$H = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \left[(\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}}) + \frac{g}{2} \mu_B \mathbf{B} \right], \quad (4.19)$$

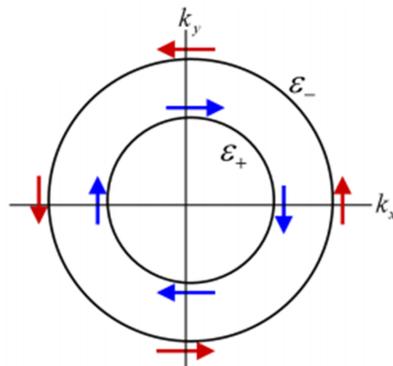


Figura 4.1: Esquema de contornos de Fermi y la distribución de los estados de espín.³²

donde g es el factor giromagnético y μ_B el magnetón de Bohr. Las correspondientes dispersiones son ahora

$$\varepsilon_\lambda(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} + \lambda(\alpha_R^2 k^2 + \xi^2 B^2)^{1/2} \quad (4.20)$$

usando $\xi = \frac{g}{2}\mu_B$. De (4.20) resulta evidente que en ausencia de \mathbf{B} se recupera la dispersión energética para IEO Rashba, mientras que en el caso opuesto donde únicamente hay \mathbf{B} , la dispersión de energía se desplaza hacia arriba y abajo (dependiendo del espín) respecto a la del electrón libre, lo cual es típico del efecto Zeeman (figura 4.2c).

En el caso donde se presentan simultáneamente la IEO Rashba y \mathbf{B} (rompiendo tanto IS como TRS), las dispersiones energéticas poseen elementos de los dos casos anteriores, donde la IEO Rashba genera el desplazamiento de las parábolas con respecto a los vectores de onda, y \mathbf{B} abre un brecha ($\propto B$), lo cual se observa en la figura (4.2d). El hamiltoniano con la forma (4.19) ha sido estudiado en diversos contextos. En el capítulo 6 se retoma dicho hamiltoniano en lo que respecta a efectos magneto-ópticos.

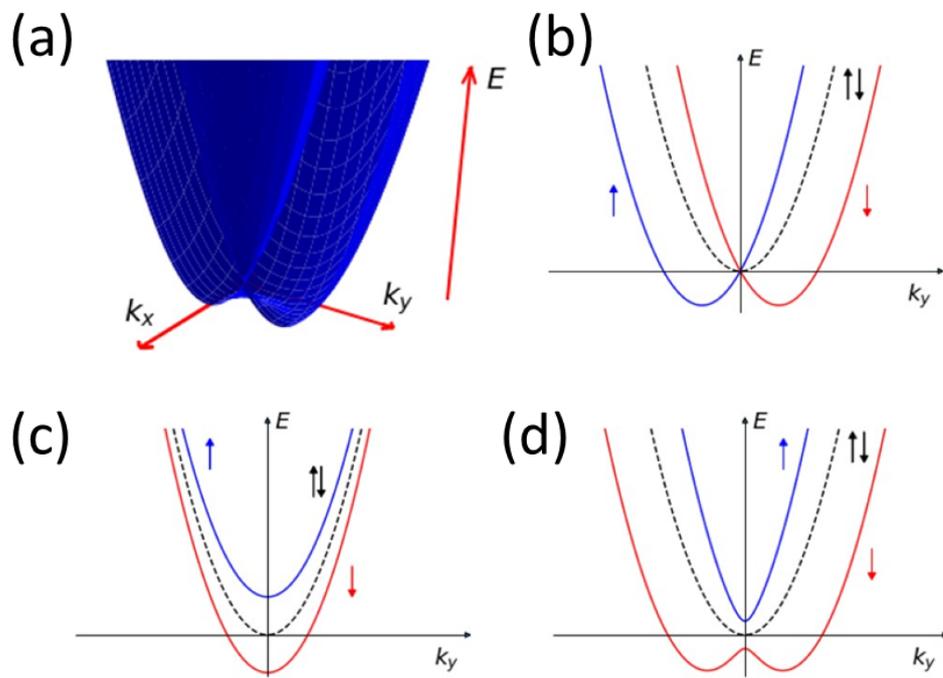


Figura 4.2: (a) Bandas de energía de un 2DEG + IEO Rashba, $\Delta = 0$. Sección $\epsilon_{\pm}(0, k_y)$ cuando (b) $\alpha_R \neq 0$, $\Delta = 0$, (c) $\alpha_R = 0$, $\Delta \neq 0$ y (d) $\alpha_R \neq 0$, $\Delta \neq 0$. La línea punteada corresponde al caso $\alpha_R = 0$, $\Delta = 0$

Análogo electromagnético

“Physics is mathematical not because we know so much about the physical world, but because we know so little: it is only its mathematical properties that we can discover.”

B. Russell, Outline of Philosophy

En este capítulo se muestra un análogo electromagnético del gas electrónico con acoplamiento Rashba considerado en el capítulo anterior. Esta analogía, presentada por V. Yannopapas (2011)³⁷, constituye un ejemplo más de las posibilidades que ofrecen los cristales fotónicos, motivado por el comportamiento electrónico en sistemas semiconductores de baja dimensionalidad. La analogía se establece al considerar la propagación en un medio quiral (dispersión espacial) que posee componentes de Faraday en su tensor dieléctrico (rompimiento de TRS).

Se considera un medio con un tensor dieléctrico que tiene términos lineales en k , como en la ecuación (2.2), y términos de Faraday, como en la ecuación (2.65), y se calcula la relación de dispersión de modos normales.

5.1. Medio quiral con términos de Faraday

Consideremos un medio isotrópico quiral que no posee TRS, con una ecuación constitutiva dada por

$$D_i(\omega, \mathbf{k}) = \epsilon_{ij}(\omega)E_j + i\gamma(\mathbf{E} \times \mathbf{k})_i, \quad (5.1)$$

$$\epsilon_{ij}(\omega) = \begin{pmatrix} \epsilon(\omega) & i\eta & 0 \\ -i\eta & \epsilon(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon(\omega) \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

5. ANÁLOGO ELECTROMAGNÉTICO

La ecuación constitutiva (5.1) define

$$\epsilon_{ij}(\omega) = \epsilon(\omega)\delta_{ij} + i\gamma e_{ijk}k_k + i\eta e_{ijz} \quad i, j, k = x, y, z \quad (5.3)$$

$$= \begin{pmatrix} \epsilon(\omega) & i(\eta + \gamma k_z) & -i\gamma k_y \\ -i(\eta + \gamma k_z) & \epsilon(\omega) & i\gamma k_x \\ i\gamma k_y & -i\gamma k_x & \epsilon(\omega) \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Si $\eta = 0$, la situación física corresponde a la propagación en un medio quiral como el discutido en la sección 2.1; si $\gamma = 0$, tenemos el caso de propagación en un medio en el que habrá rotación de Faraday, como vimos en la sección 2.2. Como ya se comentó, este medio combina la presencia de dispersión espacial y el efecto debido al rompimiento de simetría TRS.

5.2. Relación de dispersión de ondas transversales

En ausencia de fuentes externas y para un medio no magnético, las ecuaciones de Maxwell conducen a la ecuación de onda

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{D}. \quad (5.5)$$

Considerando solución del tipo ondas planas transversales ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$) en el espacio de Fourier $k\omega$ ésta ecuación se reescribe como

$$D_i = \left(\frac{kc}{\omega}\right)^2 E_i, \quad i = x, y, z. \quad (5.6)$$

La comparación con (5.4) implica el sistema de ecuaciones homogéneo

$$\left[\epsilon(\omega)\delta_{ij} + i\gamma e_{ijk}k_k + i\eta e_{ijz} - \left(\frac{kc}{\omega}\right)^2 \right] E_j = 0. \quad (5.7)$$

La relación de dispersión buscada queda entonces determinada por la condición de determinante nulo:

$$\begin{vmatrix} \epsilon(\omega) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} & i(\eta + \gamma k_z) & -i\gamma k_y \\ -i(\eta + \gamma k_z) & \epsilon(\omega) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} & i\gamma k_x \\ i\gamma k_y & -i\gamma k_x & \epsilon(\omega) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0, \quad (5.8)$$

De (5.8) se encuentran dos relaciones de dispersión que satisfacen la ecuación de onda para el medio, una de ellas es la de un medio isotrópico homogéneo:

$$\epsilon(\omega) = \frac{k^2 c^2}{\omega^2}, \quad (5.9)$$

y la otra describe un medio isotrópico quiral que rompe TRS

$$\left[\epsilon(\omega) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right]^2 - \gamma^2 (k_x^2 + k_y^2) - (\eta + \gamma k_z)^2 = 0. \quad (5.10)$$

Si se considera un sistema bidimensional con $k_z = 0$, la relación de dispersión se reduce a

$$\epsilon(\omega) = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \pm \sqrt{\gamma^2 k^2 + \eta^2}, \quad (5.11)$$

Esta expresión sugiere una analogía formal entre la relación constitutiva (5.1) y el Hamiltoniano de Rashba con brecha energética (4.19). La parte diagonal $\epsilon(\omega)$ describe la propagación en el espacio libre y correspondería al término $\hbar^2 k^2 / 2m$. El término de dispersión espacial γ correspondería al acoplamiento espín-órbita, y el parámetro η determinaría la brecha energética. Existe una analogía óptica \leftrightarrow electrónica de este tipo, demostrada experimentalmente entre la propagación de luz en un medio con índice de refracción graduado, y un medio con efecto Hall anómalo via IEO.³⁸

Con el propósito de ejemplificar, tomaremos la función dieléctrica de Drude $\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega}$, donde ω_p es una frecuencia característica. La relación $\omega(k)$ (5.11) es entonces

$$\omega = \sqrt{\frac{k^2 c^2 + \omega_p^2}{1 \pm \sqrt{\gamma^2 k^2 + \eta^2}}}, \quad (5.12)$$

En la figura (5.1) se muestran las curvas $\omega(\mathbf{k})$ cuando (a) $\gamma = 0, \eta \neq 0$ (b) $\gamma \neq 0, \eta = 0$ y (c) $\gamma \neq 0, \eta \neq 0$. Puede apreciarse la similitud de las curvas con el caso cuántico mostrado en la figura (4.2). La contribución descrita por η rompe TRS y se abre una brecha. Por su parte el coeficiente de girotropía γ causa un desdoblamiento en frecuencia a través de un corrimiento en el vector de onda, de manera análoga al corrimiento causado por el “campo magnético” de Rashba.

Una vez se ha estudiado la dispersión energética del medio, uno se puede preguntar acerca del problema de reflexión y refracción de ondas para éste sistema en bulto, en consonancia con lo desarrollado en el capítulo 3. Se encuentra que para el problema de una interfase, el sistema con ecuación constitutiva (5.1) para ondas transversales, no tiene solución. Uno se enfrenta a un sistema de 4 ecuaciones y 6 incógnitas. Para que el sistema sea soluble deben considerarse modos longitudinales y transversales, y/o un medio anisotrópico, como lo hace Stefan

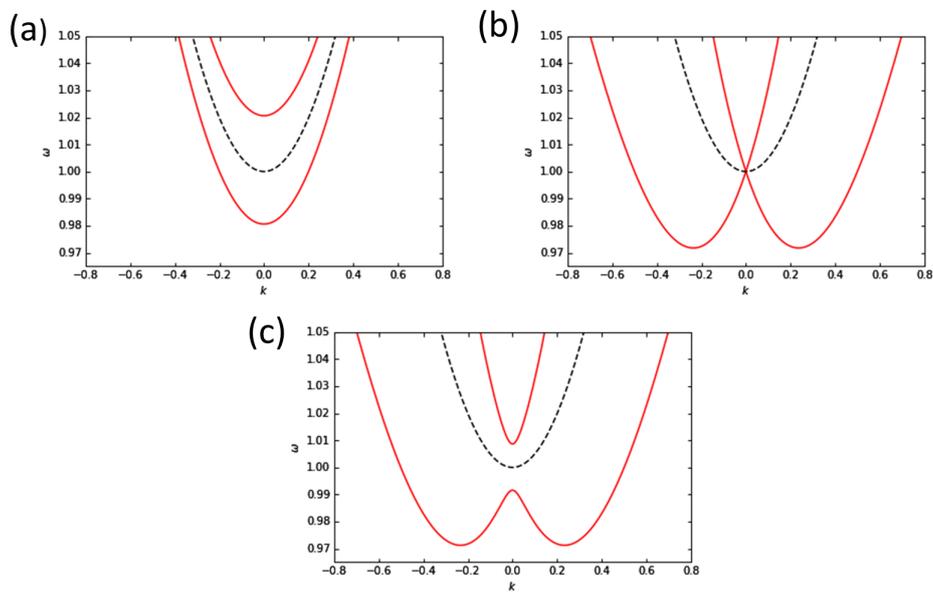


Figura 5.1: Relación de dispersión de modos electromagnéticos de un medio isotrópico quiral con brecha de energía. (a) $\gamma = 0, \eta \neq 0$ (b) $\gamma \neq 0, \eta = 0$ y (c) $\gamma \neq 0, \eta \neq 0$. La línea punteada corresponde a la propagación libre ($\gamma = 0, \eta = 0$). Se considera $\gamma\omega_p/c = 0.2$ y $\eta = 0.004$

Visnovsky en el capítulo 1 de *Optics in Magnetic Multilayers and Nanostructures*.³⁹ Lo anterior permite establecer relaciones entre los campos transmitidos, reduciendo el número de incógnitas y por ende el problema tiene solución.

Efecto Kerr en un aislante topológico

Los fenómenos magneto-ópticos básicos se clasifican según la orientación entre el vector de onda de propagación de la luz y el vector de campo magnético, se ha visto cómo el efecto Faraday sucede en una geometría en la que estos son paralelos. Esta clase de fenómenos se pueden generar bajo la acción de cualquier agente que cause un rompimiento de la simetría de inversión temporal y no solo a través de la aplicación de un campo magnético; por ejemplo, la interacción con un sustrato magnético puede ser suficiente. Un ejemplo notable es el reportado por Tse et al.,⁴ en el que combinan dos aislantes topológicos bidimensionales con brecha energética y energía de Fermi dentro de ésta, para formar una película delgada. Como resultado de las múltiples reflexiones internas de las ondas, la rotación Kerr resultante alcanza una magnitud dos órdenes mayor respecto al caso de una sola interface.

En este capítulo empleamos las fórmulas de Fresnel derivadas en el capítulo 3, para calcular el ángulo de Kerr para una sola interface formada por un aislante topológico 2D como el considerado por Tse et al.⁴ No es nuestro propósito discutir la naturaleza topológica de los estados del sistema bidimensional (2D), sino mostrar los elementos que entran en juego en el tensor de conductividad óptica y cómo ésta información microscópica, las transiciones inter e intrabanda, permite explicar el espectro del ángulo de Kerr.

6.1. Aislante topológico

Consideremos un sistema 2D que constituye la interface entre dos dieléctricos, como en la figura (3.1), cuyo hamiltoniano es

$$H(\mathbf{k}) = \hbar\nu\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \Delta\sigma_z, \quad (6.1)$$

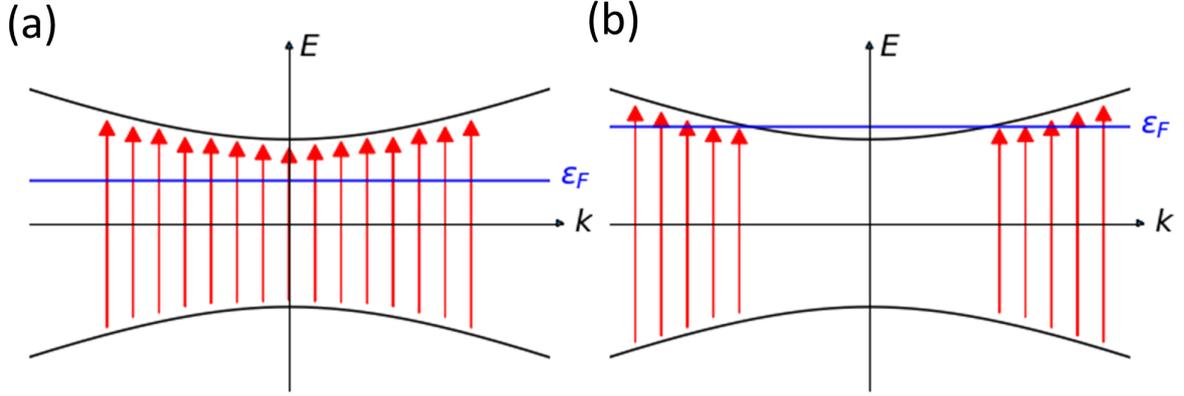


Figura 6.1: Bandas de energía para un sistema 2D de dos niveles, $\epsilon_+(k)$, $\epsilon_-(k) = -\epsilon_+(k)$, y transiciones ópticas permitidas cuando (a) $|\epsilon_F| < \Delta$ y (b) $\epsilon_F > \Delta$

donde $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$, ν es la velocidad de Fermi y $\boldsymbol{\sigma}$ es el vector de matrices de Pauli correspondientes al espín electrónico. El primer término a la derecha corresponde a bandas de energía con una dispersión lineal en el momento k (conos de Dirac que se tocan en el punto $k = 0$). El término $\Delta\sigma_z$ (tomaremos $\Delta > 0$) introduce una brecha energética y representa cualquier mecanismo que rompa la simetría de inversión temporal, no necesariamente un campo magnético, pues otros medios son posibles, como la interacción de intercambio con un sustrato magnético.

El hamiltoniano (6.1) es un modelo genérico mínimo que captura el comportamiento de baja energía de estados de superficie, que presenta una conductividad Hall $\sigma_{xy}(0)$ cuantizada en ausencia de campo magnético externo, debida a la estructura topológica de las bandas (número de Chern no nulo). Las eigenenergías del sistema

$$\epsilon_{\pm}(k) = \pm\sqrt{(\hbar\omega)^2k^2 + \Delta^2}, \quad (6.2)$$

consisten en dos bandas con curvatura opuesta, separadas por una brecha absoluta, de ancho 2Δ en el punto $k = 0$, como se muestra en la figura (6.1).

El escenario de las transiciones interbanda es distinto según la posición del nivel de Fermi ϵ_F , lo que debe manifestarse en la respuesta óptica del medio. Efectivamente, el espectro de absorción, la densidad conjunta de estados, la reflexión, transmisión, y la rotación Kerr, se verán afectadas por el espacio de momento y energía disponible para transiciones interbanda.

6.2. Transiciones interbanda: conductividad óptica

De acuerdo a las formulas (3.36) y (3.37), es necesario calcular las amplitudes de Fresnel $r_{\mu\nu}$ para determinar el espectro de rotación Kerr, esto requiere a su vez conocer el tensor $\sigma_{ij}(\omega)$. No presentaremos aquí el cálculo de dicho tensor, solo mostraremos el resultado final para cada componente, tal y como resulta de la evaluación de la fórmula de Kubo en el formalismo de la Teoría de Respuesta Lineal.^{4,40} Es conveniente analizar primero la densidad conjunta de estados de este par de bandas, que se define como

$$J_{+-}(\omega) = \int' \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \delta(\varepsilon_+(k) - \varepsilon_-(k) - \hbar\omega) \quad (6.3)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int' dk k \delta(2\sqrt{(\hbar\nu)^2 k^2 + \Delta^2} - \hbar\omega). \quad (6.4)$$

Ésta función permite obtener el número de transiciones verticales posibles separadas por una energía $\hbar\omega$ entre $\varepsilon_-(k)$ y $\varepsilon_+(k)$. La prima en la integral restringe la región de integración para los puntos en el espacio \mathbf{k} tales que $\varepsilon_-(k) < \varepsilon_F < \varepsilon_+(k)$, lo que define la zona del espacio \mathbf{k} disponible para transiciones verticales.

Usando la propiedad de la delta de Dirac

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g(x)|_{x=x_i}}, \quad g(x_i) = 0, \quad (6.5)$$

encontramos que la densidad conjunta de estados es

$$J_{+-}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\hbar\omega}{(2\hbar\nu)^2}, \quad k_1 \leq k'(\omega) \leq k_2, \quad (6.6)$$

donde $k'(\omega) = \frac{1}{\hbar\nu} \sqrt{(\frac{\hbar\omega}{2})^2 - \Delta^2}$. Donde k_1 y k_2 delimitan los puntos en el espacio \mathbf{k} en los que se efectúan las transiciones. Cuando $|\varepsilon_F| < \Delta$, $k_1 = 0$, $k_2 = \infty$ (figura 7.2a), y se impone la restricción $\hbar\omega \geq 2\varepsilon_F$; para $|\varepsilon_F| > \Delta$, $k_1 = k_F^+$, $k_2 = \infty$ (figura 7.2b) y se restringe a $\hbar\omega \geq 2\Delta$. De modo que (6.6) se puede escribir de la forma

$$J_{+-}(\omega) = \frac{\hbar\omega}{8\pi(\hbar\nu)^2} \Theta[\hbar\omega - 2\max\{|\varepsilon_F|, \Delta\}], \quad (6.7)$$

siendo $\Theta(x)$ la función escalón de Heaviside, donde el factor $\Theta[\hbar\omega - 2\max\{|\varepsilon_F|, \Delta\}]$ expresa lo ilustrado en la figura (6.1), el umbral de transiciones interbanda en función de la energía de Fermi.

6. EFECTO KERR EN UN AISLANTE TOPOLÓGICO

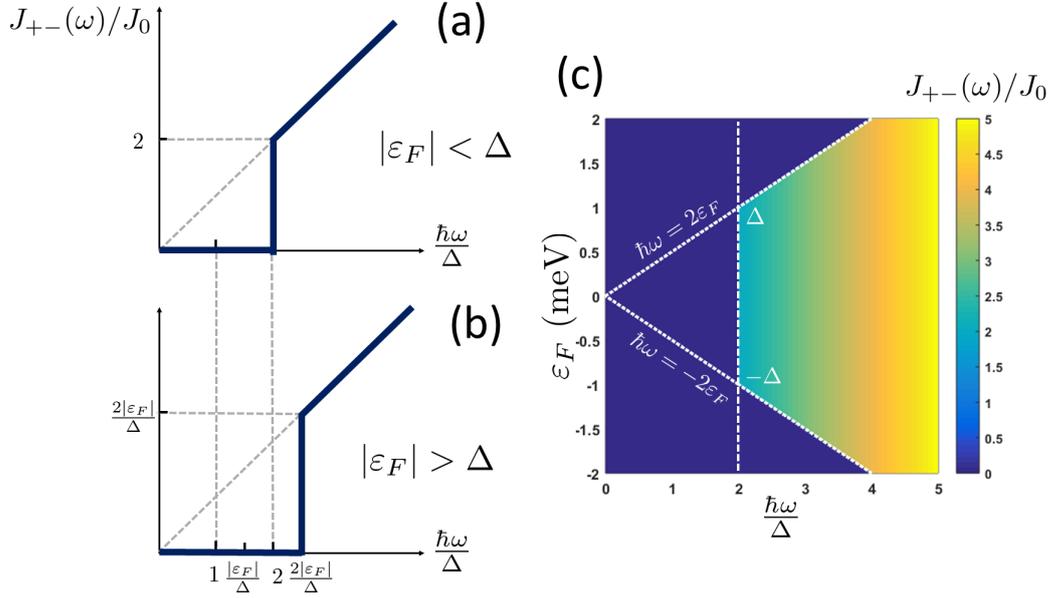


Figura 6.2: Densidad conjunta de estados del modelo (6.1), cuando (a) $|\epsilon_F| < \Delta$, (b) $|\epsilon_F| > \Delta$ y (d) $J_{+-}(\omega, \epsilon_F)$. $J_0 = \Delta/8\pi(\hbar\nu)^2$.

La conductividad óptica, contiene ésta información, de acuerdo a la Teoría de Respuesta Lineal dentro del contexto de teoría de perturbaciones, involucra una suma sobre estados ocupados (disponibles para realizar transiciones) $\sum_{\mathbf{k}, \lambda=\pm} [f(\epsilon_\lambda) - f(\epsilon_{-\lambda})]$ ¹, los típicos denominadores resonantes $\frac{1}{\hbar\omega + \epsilon_\lambda - \epsilon_{-\lambda}}$ y el producto de cada elemento de matriz que da información de la “intensidad de oscilador” de cada transición

$$M_{ij}^\lambda(\mathbf{k}) = \langle \lambda | e\nu_i | -\lambda \rangle \langle -\lambda | e\nu_j | \lambda \rangle, \quad (6.8)$$

donde $e\nu_i$ es el operador de corriente. Estos factores surgen de un promedio cuántico y termoestadístico, que en conjunto determinan la forma de la conductividad, esquemáticamente

$$\sigma_{ij}(\omega) \sim e^2 \sum_{\mathbf{k}, \lambda=\pm} \frac{M_{ij}^\lambda(\mathbf{k})}{\hbar\omega + \epsilon_\lambda - \epsilon_{-\lambda}}, \quad (6.9)$$

con $M_{ij}^\lambda(k) \sim (\dots)([\hbar\nu]^2 k^2 + \Delta^2)\delta_{ij} + (\dots)[\hbar\nu]^2 \Delta e_{ijz}$, donde el término $\propto \Delta e_{ijz}$ refleja cómo el rompimiento de TRS es responsable de la aparición de componentes transversales (Hall) σ_{xy} , $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx}$ en el tensor σ_{ij} . Esto causa que las amplitudes de Fresnel $r_{sp}, r_{ps} \neq 0$, e implica un valor no nulo del ángulo de Kerr θ_K .

¹ $f(\epsilon_\lambda(\mathbf{k}))$ es la distribución de Fermi-Dirac

El resultado exacto para el sistema 2D descrito por el hamiltoniano (6.1), es⁴¹

$$\text{Re}\{\sigma_{xx}(\omega)\} = \sigma_0\pi\frac{1}{16}\left[1 + \left(\frac{2\Delta}{\hbar\omega}\right)^2\right]\Theta[\hbar\omega - 2\text{máx}\{|\varepsilon_F|, \Delta\}] \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} \text{Im}\{\sigma_{xx}(\omega)\} = \sigma_0\left[\left(\frac{\varepsilon_F^2 - \Delta^2}{4|\varepsilon_F|}\right)\Theta(|\varepsilon_F| - \Delta) + \frac{\Delta^2}{4\hbar\omega}\left(\frac{1}{\text{máx}\{|\varepsilon_F|, \Delta\}}\right) \right. \\ \left. + \frac{1}{16}\left[1 + \left(\frac{2\Delta}{\hbar\omega}\right)^2\right]f(\omega)\right], \quad (6.11) \end{aligned}$$

para la componente longitudinal ($\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$), donde $\sigma_0 = e^2/\pi\hbar$; por simplicidad se ha omitido la contribución longitudinal intrabanda. Es posible demostrar que $\sigma_{xx}(0) = 0$, lo que revela un comportamiento de aislante. En lo que respecta a las componentes Hall, $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} \propto \Delta$

$$\text{Re}\{\sigma_{xy}(\omega)\} = \sigma_0\frac{\Delta}{4\hbar\omega}f(\omega) \quad (6.12)$$

$$\text{Im}\{\sigma_{xy}(\omega)\} = -\sigma_0\pi\frac{\Delta}{4\hbar\omega}\Theta(\hbar\omega - 2\text{máx}\{|\varepsilon_F|, \Delta\}), \quad (6.13)$$

donde

$$f(\omega) = -\ln\left|\frac{\hbar\omega + 2\text{máx}\{|\varepsilon_F|, \Delta\}}{\hbar\omega - 2\text{máx}\{|\varepsilon_F|, \Delta\}}\right|. \quad (6.14)$$

6.3. Ángulo de Kerr como función de la frecuencia

Una vez que se ha determinado el tensor $\sigma_{ij}(\omega)$, se poseen los elementos necesarios para obtener la rotación de Kerr del vector de polarización de la luz reflejada en el sistema 2D (6.1). En la figura (6.3) se muestra el ángulo $\theta_K(\omega)$ para varios valores de ε_F , normalizada a ε_c . Siguiendo a Tse et al.⁴, tomaremos incidencia desde el vacío (ε_1) sobre un medio con $\varepsilon_2 = 29$, $\Delta = 20$ meV, $\nu = 5 \times 10^5$ m/s, $\varepsilon_c = 175$ meV, parámetros correspondientes al aislante topológico Bi_2Se_3 . La energía de Fermi toma los valores: $\varepsilon_F = 16$ meV $< \Delta$ (azul), $\varepsilon_F = 18$ meV $< \Delta$ (cuadrados morados), $\varepsilon_F = 23$ meV $> \Delta$ (rojo), $\varepsilon_F = 41$ meV $> \Delta$ (negro). Cuando $\varepsilon_F < \Delta$ (figura 6.1a, línea azul y cuadrados morados figura 6.3), hay un pico en $\hbar\omega = 2\Delta$, el umbral de las transiciones interbanda como vimos en la J_{+-} (6.7, figura 6.2a), cuyo origen puede rastrear en el logaritmo natural (6.14); la posición de éste pico no depende de ε_F . Si $|\varepsilon_F| > \Delta$, en correspondencia con la $J_{+-}(\omega)$ (6.7, figura 6.2b), se observa un corrimiento en la posición del pico, ubicándose en el umbral $\hbar\omega = 2\varepsilon_F$ en cada caso ($\varepsilon_F = 23$ meV y $\varepsilon_F = 41$ meV).

6. EFECTO KERR EN UN AISLANTE TOPOLÓGICO

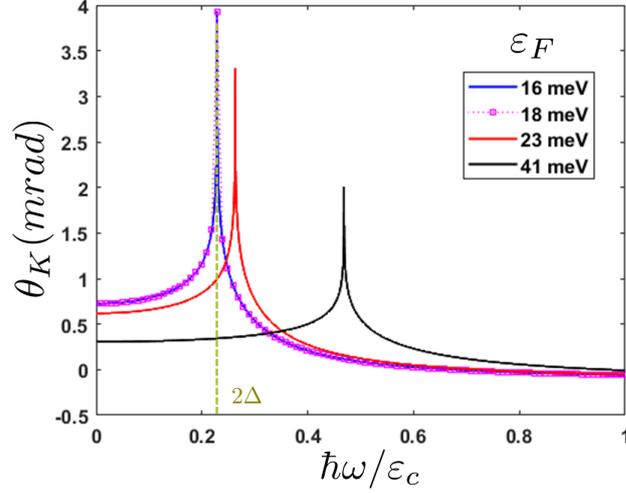


Figura 6.3: Rotación de Kerr $\theta_K(\omega)$ por reflexión en un aislante topológico 2D, para varios valores del nivel de Fermi. Se toma $\epsilon_1 = 1$ y $\epsilon_2 = 29$, y parámetros del material Bi_2Se_3 .⁴

Este cálculo reproduce la figura 1 del trabajo de Tse et al.⁴ en el caso de una sola interface. Cabe recordar aquí, que además del notable incremento reportado de hasta dos órdenes de magnitud en θ_K en la configuración de película delgada, estos autores encontraron que a bajas frecuencias la rotación de Kerr es “gigante”, $\sim -\pi/2$.

La figura (6.4) muestra la función $\theta_K(\omega; \epsilon_F, \Delta)$. En (a) el valor de Δ está fijo y se presenta su dependencia en ϵ_F . Se observa que para $\epsilon < \Delta$ la principal contribución tiene lugar en $\hbar\omega = 2\Delta$, mientras que para $\epsilon_F > \Delta$ el pico se corta a energías más altas. En (b) se mantiene fija la energía de Fermi y se presenta el espectro de rotación como función de Δ . De manera similar al caso anterior cuando $\epsilon_F < \Delta$ hay un corrimiento a mayores energías. Además se observa que $\theta_K \propto \Delta$, lo cual es esperado dado que $\sigma_{xy} \propto \Delta$.

El aspecto punteado de la figura (6.4) es de naturaleza numérica y podría evitarse introduciendo fenomenológicamente una vida media (pequeña) en los estados, pero el comportamiento cualitativo resultante sería similar. se debe a que no se consideraron procesos de disipación del momento del electrón, i.e impurezas,^{9,36} sin embargo el comportamiento de $\theta_K(\omega; \epsilon_F, \Delta)$ no se ve afectado.

En el siguiente capítulo se agrega un término de energía cinética $\sim k^2$ para estudiar la rotación de Kerr en el modelo de Rashba ferromagnético.

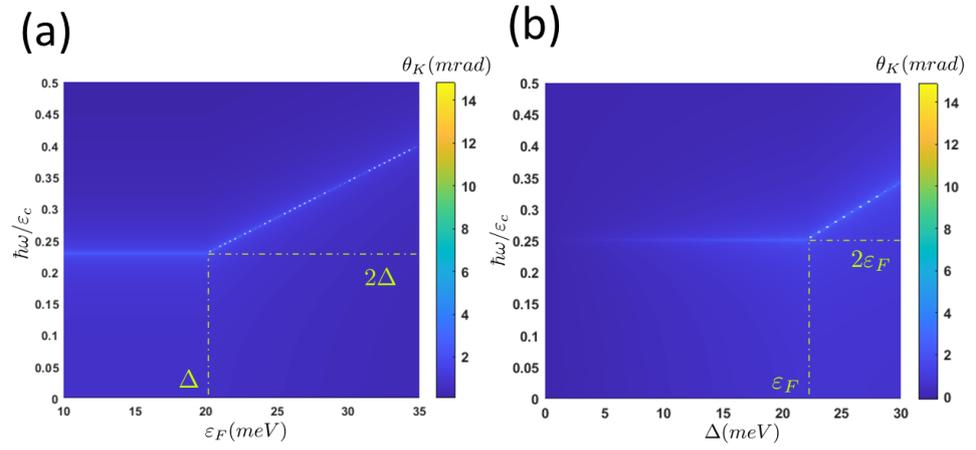


Figura 6.4: Rotación de Kerr $\theta_K(\omega; \epsilon_F, \Delta)$, (a) $\Delta = 20$ meV y (b) $\epsilon_F = 22$ meV.

Efecto Kerr en el Modelo de Rashba Ferromagnético

El hamiltoniano de Rashba (4.6) corresponde a estados tales que en el límite de la conductividad Hall interbanda se anula. Sin embargo, esto no es así en un material ferromagnético en presencia de IEO. Efectivamente, el llamado Efecto Hall Anómalo (AHE, por sus siglas en inglés), esto es, la generación de una corriente transversal en un ferromagnético en respuesta a un campo eléctrico, representa la versión “no cuantizada” del efecto Hall cuántico. Tras muchos años de investigación se ha encontrado que este efecto se debe a una contribución intrínseca (que puede ser significativa en muestras limpias) y una extrínseca debida a diferentes mecanismos de interacción con impurezas.⁴² Debido a que el mecanismo intrínseco es relativamente fácil de evaluar por ser independiente del efecto de impurezas, su contribución ha sido estudiada mediante cálculos de primeros principios o en base a modelos de hamiltonianos efectivos. Uno de estos modelos ha sido el denominado “ferromagnetic 2D Rashba model” (modelo de Rashba 2D ferromagnético), cuyo Hamiltoniano tiene la forma (4.19)

$$H(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \alpha(\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}}) \cdot \boldsymbol{\sigma} + \Delta\sigma_z, \quad (7.1)$$

donde 2Δ corresponde a la energía de la brecha que resulta de la interacción de intercambio con impurezas magnéticas⁴³. Se ha reconocido que (7.1) representa un modelo mínimo que captura los elementos básicos necesarios para describir la contribución intrínseca al AHE (i.e. una curvatura de Berry no nula en la vecindad de la brecha).⁴² Por otra parte, este modelo también resulta útil para describir el comportamiento de un gas electrónico 2D con acoplamiento Rashba en presencia de cualquier mecanismo que rompa la simetría de inversión temporal.^{42,43}

En este capítulo, tras presentar el tensor de conductividad del modelo (7.1),

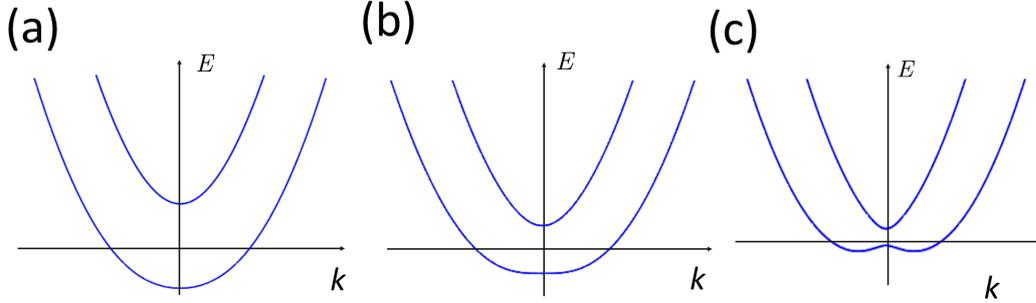


Figura 7.1: Bandas de energía para $\varepsilon_{\pm}(k)$ (a) $\varepsilon_R < \Delta$, (b) $\varepsilon_R \sim \Delta$ y (c) $\varepsilon_R > \Delta$.

tal y como se obtiene de la fórmula de Kubo (cuyo cálculo no se incluye en este trabajo), se calcula el espectro de rotación Kerr en base al formalismo electromagnético mostrado en el capítulo 2.

7.1. Modelo de Rashba ferromagnético

El espectro de energía del hamiltoniano (7.1) presenta una brecha de magnitud 2Δ en el punto $k = 0$ y no una brecha absoluta, como sucede en el caso del ejemplo estudiado en el capítulo anterior. Esto se debe a la presencia del término de energía cinética $\varepsilon_0(k_x, k_y) = \hbar^2 k^2 / 2m$. Las bandas de energía están dadas ahora por

$$\varepsilon_{\pm}(k) = \varepsilon_0(k) \pm d(k), \quad d(k) = \sqrt{\alpha_R^2 k^2 + \Delta^2}, \quad (7.2)$$

donde $k = |\mathbf{k}| = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$. Puede verse sin embargo que la diferencia de energía $\varepsilon_+(k) - \varepsilon_-(k) = 2d(k)$ tiene la misma forma que en aquél caso. Ahora el espectro consiste en dos bandas de la forma que se muestra en la figura (7.1). Cuando $\varepsilon_R < \Delta$ (figura 7.1a) la banda $\varepsilon_-(k)$ presenta un mínimo absoluto $-\Delta$ en $k = 0$, donde $\varepsilon_R = m\alpha_R^2/\hbar^2$ es una energía característica de la interacción Rashba. Por otra parte, cuando $\varepsilon_R > \Delta$ (figura 7.1b) la rama $\varepsilon_-(k)$ desarrolla ahora un máximo local $-\Delta$ en $k = 0$ y dos mínimos $\varepsilon_{min} = -(\varepsilon_R^2 + \Delta^2)/2\varepsilon_R$ en el círculo $\varepsilon_0(k) = (\varepsilon_R^2 - \Delta^2)/2\varepsilon_R$.

Hemos comentado que este modelo puede describir el comportamiento de un gas electrónico bidimensional en presencia de acoplamiento espín-órbita y sujeto a una interacción de intercambio, y no solo de un material ferromagnético. De

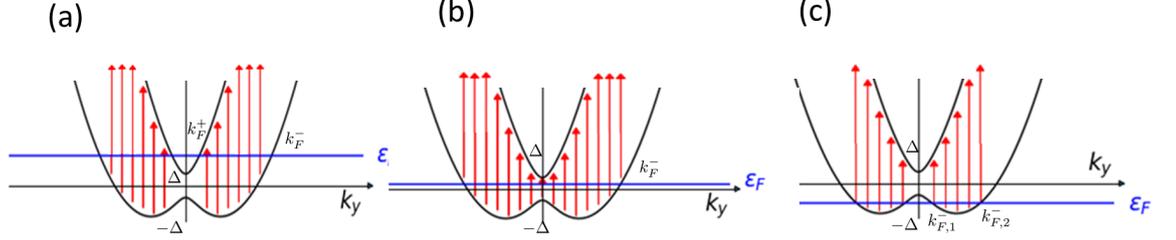


Figura 7.2: Transiciones ópticas permitidas para (a) $\varepsilon_F > \Delta$, (b) $|\varepsilon_F| < \Delta$ y (c) $\varepsilon_m < \varepsilon_F < -\Delta$, cuando $\varepsilon_R > \Delta$.

hecho, Culcer et al.,⁴³ en 2003, usaron el modelo para calcular la conductividad Hall de $\sigma_{xy}(0)$ en el contexto de materiales paramagnéticos con estructuras tipo wurtzita y tipo zincblenda, encontrando valores “aproximadamente cuantizados”. Una ligera variante del hamiltoniano (7.1) ha sido estudiado en el contexto del fenómeno de polarización de espín inducido por una corriente eléctrica⁴⁴ o por un gradiente de temperatura⁴⁵, en donde el término de interacción de intercambio es de la forma $J\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{M}$, siendo \mathbf{M} la magnetización de un sustrato magnético en que se encuentra depositado un gas 2D electrónico.

En este capítulo nos referiremos al efecto Kerr “en el modelo ferromagnético de Rashba” pero se podría decir igualmente “de un gas 2D con acoplamiento Rashba e interacción de intercambio”.

7.2. Densidad conjunta de estados

7.2.1. Contornos de Fermi

Esta forma de las bandas abre varias posibilidades en el escenario de las transiciones ópticas permitidas. Para ilustrar este punto, consideremos la situación cuando $\varepsilon_R > \Delta$ (figura 7.2). Los contornos de Fermi, definidos por las ecuaciones $\varepsilon_{\pm}(k_F^{\pm}) = \varepsilon_F$, dependen de la posición del nivel ε_F respecto a la brecha 2Δ . Será conveniente en lo que sigue definir las energías

$$\hbar\omega_{\pm} = 2 \left(\sqrt{\varepsilon_R^2 + \Delta^2 + \text{sgn}(\varepsilon_F)2\varepsilon_R|\varepsilon_F| \mp \varepsilon_R} \right). \quad (7.3)$$

1. Cuando $\varepsilon_F > \Delta$ (figura 7.2a), el nivel de Fermi interseca a las dos superfi-

7. EFECTO KERR EN EL MODELO DE RASHBA FERROMAGNÉTICO

cies $\varepsilon_{\pm}(k)$ generando dos círculos¹ de radio

$$k_F^{\pm} = \frac{1}{\alpha_R} \left(\sqrt{\varepsilon_R^2 + \Delta^2 + 2\varepsilon_R\varepsilon_F \mp \varepsilon_R + \Delta} \right)^{1/2} \left(\sqrt{\varepsilon_R^2 + \Delta^2 + 2\varepsilon_R\varepsilon_F \mp \varepsilon_R - \Delta} \right)^{1/2}. \quad (7.4)$$

En este caso, en términos de k_F^{\pm} ,

$$\varepsilon_{\lambda}(k) = \varepsilon_F + \frac{\hbar^2}{2m} (k - k_F^{\pm})(k + k_F^{\mp}). \quad (7.5)$$

Estas líneas de Fermi pertenecen a diferentes bandas y por ello la orientación de espín en cada una ellas es opuesta. La diferencia de energía $\varepsilon_+(k) - \varepsilon_-(k) = 2d(k)$ en cada círculo de Fermi es $2d(k_F^{\pm}) = \hbar\omega_{\pm}$.

2. Si el nivel de Fermi cae dentro de la brecha, $|\varepsilon_F| < \Delta$, existe entonces un sólo contorno de Fermi², de radio

$$k_F^- = \frac{1}{\alpha_R} \left(\sqrt{\varepsilon_R^2 + \Delta^2 + 2\varepsilon_R\varepsilon_F + \varepsilon_R + \Delta} \right)^{1/2} \left(\sqrt{\varepsilon_R^2 + \Delta^2 + 2\varepsilon_R\varepsilon_F + \varepsilon_R - \Delta} \right)^{1/2}, \quad (7.6)$$

generado por la intersección con $\varepsilon_-(k)$. La diferencia con la línea de Fermi k_F^- en (7.4) es que ahora ε_F puede tomar valores negativos. La banda de helicidad negativa puede escribirse alternativamente como

$$\varepsilon_-(k) - \varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} (k - k_F^-) \left(k + k_F^- - \frac{2m\alpha_R}{\hbar^2} \right); \quad (7.7)$$

nótese que si $k < k_F^-$ entonces $\varepsilon_-(k) < \varepsilon_F$ (figura 6.2b). En este caso, $2d(k_F^-) = \hbar\omega_-$.

3. Cuando $\varepsilon_R > \Delta$, una tercera situación es posible: si $\varepsilon_{min} < \varepsilon_F < -\Delta$, habrá

¹Con ecuaciones $\varepsilon_0(k_x^{\pm}, k_y^{\pm}) = \frac{(\hbar\omega_{\pm}/2)^2 - \Delta^2}{2\varepsilon_R} = \varepsilon_F \mp \frac{\hbar\omega_{\pm}}{2}$.

²El círculo con ecuación $\varepsilon_0(k_x^-, k_y^-) = \frac{(\hbar\omega_-/2)^2 - \Delta^2}{2\varepsilon_R} = \frac{\hbar\omega_-}{2} + \varepsilon_F$.

dos curvas de Fermi circulares¹ de radios $k_{F,1}^-$ y $k_{F,2}^-$ ($> k_{F,1}^-$)

$$k_{F,1}^- = \frac{1}{\alpha_R} \left(\varepsilon_R - \sqrt{\varepsilon_R^2 + \Delta^2 - 2\varepsilon_R|\varepsilon_F|} + \Delta \right)^{1/2} \left(\varepsilon_R - \sqrt{\varepsilon_R^2 + \Delta^2 - 2\varepsilon_R|\varepsilon_F|} - \Delta \right)^{1/2}$$

$$k_{F,2}^- = \frac{1}{\alpha_R} \left(\sqrt{\varepsilon_R^2 + \Delta^2 - 2\varepsilon_R|\varepsilon_F|} + \varepsilon_R + \Delta \right)^{1/2} \left(\sqrt{\varepsilon_R^2 + \Delta^2 - 2\varepsilon_R|\varepsilon_F|} + \varepsilon_R - \Delta \right)^{1/2} .$$

la diferencia con los contornos (7.4) es que ahora su helicidad es la misma pues pertenecen a la misma banda $\varepsilon_-(k)$. La separación de energía es en cada caso

$$2d(k_{F,1}^-) = 2 \left(\varepsilon_R - \sqrt{\varepsilon_R^2 + \Delta^2 - 2\varepsilon_R|\varepsilon_F|} \right) = -\hbar\omega_+ \quad (7.10)$$

$$2d(k_{F,2}^-) = 2 \left(\sqrt{\varepsilon_R^2 + \Delta^2 - 2\varepsilon_R|\varepsilon_F|} + \varepsilon_R \right) = \hbar\omega_- . \quad (7.11)$$

No olvidar que $-\hbar\tilde{\omega}_+ > 0$ en éste caso.

7.2.2. Densidad conjunta de estados

Con esta información, mediante un cálculo directo, similar al mostrado en el capítulo anterior, la densidad conjunta de estados, definida por la expresión (6.3) da como resultado

$$J_{+-}(\omega) = \frac{\hbar\omega}{8\pi\alpha_R^2} \Theta(1 - |\eta|) \quad (7.12)$$

$$= D_0 \frac{1}{8} \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_R} \Theta(1 - |\eta|) , \quad (7.13)$$

donde $D_0 = m/(\pi\hbar^2)$ es la densidad de estados del sistema degenerado en espín ($\alpha_R = \Delta = 0$), $D_0(\varepsilon) = D_0\Theta(\varepsilon)$. La condición $|\eta| \leq 1$ significa que:

1. Si $\varepsilon_F > \Delta$: $2(\sqrt{\varepsilon_R^2 + \Delta^2 + 2\varepsilon_R\varepsilon_F} - \varepsilon_R) \leq \hbar\omega \leq 2(\sqrt{\varepsilon_R^2 + \Delta^2 + 2\varepsilon_R\varepsilon_F} + \varepsilon_R)$, o bien, en notación más corta $\hbar\omega_+ \leq \hbar\omega \leq \hbar\omega_-$.

Ancho del espectro = $2\varepsilon_R$

¹Con ecuaciones

$$\varepsilon_0(k_{x,1}^-, k_{y,1}^-) = \frac{(\hbar\omega_+/2)^2 - \Delta^2}{2\varepsilon_R} = \frac{\hbar\omega_+}{2} - |\varepsilon_F| \quad (7.8)$$

$$\varepsilon_0(k_{x,2}^-, k_{y,2}^-) = \frac{(\hbar\omega_-/2)^2 - \Delta^2}{2\varepsilon_R} = \frac{\hbar\omega_-}{2} - |\varepsilon_F| . \quad (7.9)$$

7. EFECTO KERR EN EL MODELO DE RASHBA FERROMAGNÉTICO

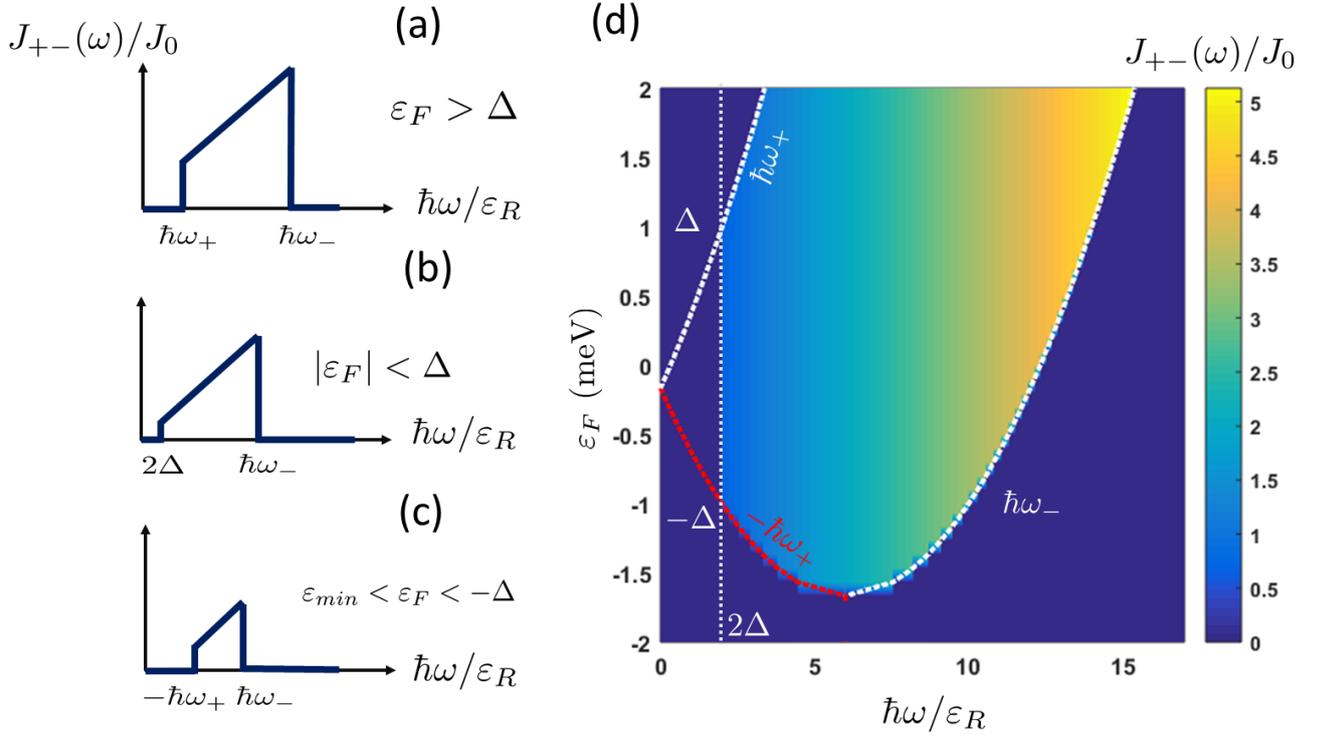


Figura 7.3: Densidad conjunta de estados del modelo (7.1) para (a) $\varepsilon_F > \Delta$, (b) $|\varepsilon_F| < \Delta$, (c) $\varepsilon_{min} < \varepsilon_F < -\Delta$ cuando $\varepsilon_R > \Delta$ y (d) $J_{+-}(\omega, \varepsilon_F)$. $J_0 = D_0/8$.

2. Si $|\varepsilon_F| < \Delta$: $2\Delta \leq \hbar\omega \leq 2(\sqrt{\varepsilon_R^2 + \Delta^2 + 2\text{sgn}(\varepsilon_F)\varepsilon_R|\varepsilon_F|} + \varepsilon_R)$, esto es $2\Delta \leq \hbar\omega \leq \hbar\omega_-$.
Ancho del espectro = $2\sqrt{\varepsilon_R^2 + \Delta^2 + 2\text{sgn}(\varepsilon_F)\varepsilon_R|\varepsilon_F|} + 2\varepsilon_R - 2\Delta = \hbar\omega_- - 2\Delta$.
3. Si $\varepsilon_{min} \leq \varepsilon_F \leq -\Delta$: $2(\varepsilon_R - \sqrt{\varepsilon_R^2 + \Delta^2 - 2\varepsilon_R|\varepsilon_F|}) \leq \hbar\omega \leq 2(\sqrt{\varepsilon_R^2 + \Delta^2 - 2\varepsilon_R|\varepsilon_F|} + \varepsilon_R)$, es decir $-\hbar\omega_+ \leq \hbar\omega \leq \hbar\omega_-$.
Ancho del espectro = $2\sqrt{\varepsilon_R^2 + \Delta^2 - 2\varepsilon_R|\varepsilon_F|} = \hbar(\omega_- + \omega_+)$.

La figura (7.3) presenta la densidad conjunta de estados $J_{+-}(\omega)$ para varios valores de la energía de Fermi. De acuerdo a lo anticipado por la figura (7.2), la densidad de pares de estados conectados por transiciones verticales depende sensiblemente de la existencia de una brecha de energía y de la posición del nivel de Fermi respecto a ésta. Esto se manifiesta como un corrimiento relativo de los espectros y en un cambio del ancho espectral en cada caso.

7.3. Conductividad óptica

De manera similar al aislante topológico se requiere conocer el tensor $\sigma_{ij}(\omega)$ para obtener el espectro de rotación de Kerr. La formula de Kubo da como resultado⁴¹: $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx}$

1. Cuando $\varepsilon_F > \Delta$ (figura 7.2a):

$$\text{Re } \sigma_{xx}(\omega) = \sigma_0 \pi \frac{1}{16} \left[1 + \left(\frac{2\Delta}{\hbar\omega} \right)^2 \right] \Theta(1 - |\eta|) \quad (7.14)$$

$$\text{Im } \sigma_{xx}(\omega) = \sigma_0 \left\{ \frac{\varepsilon_R + 2\varepsilon_F}{2\hbar\omega} + \frac{1}{16} \left[1 + \left(\frac{2\Delta}{\hbar\omega} \right)^2 \right] \ln \left| \frac{(\omega + \omega_-)(\omega - \omega_+)}{(\omega - \omega_-)(\omega + \omega_+)} \right| \right\} \quad (7.15)$$

$$\text{Re } \sigma_{xy}(\omega) = \frac{\sigma_0}{8} \left(\frac{2\Delta}{\hbar\omega} \right) \ln \left| \frac{(\omega + \omega_-)(\omega - \omega_+)}{(\omega - \omega_-)(\omega + \omega_+)} \right| \quad (7.16)$$

$$\text{Im } \sigma_{xy}(\omega) = -\frac{\sigma_0 \pi}{8} \left(\frac{2\Delta}{\hbar\omega} \right) \Theta(1 - |\eta|) , \quad (7.17)$$

donde la condición $|\eta| < 1$ significa $\hbar\omega_+ \leq \hbar\omega \leq \hbar\omega_-$.

2. Para $|\varepsilon_F| < \Delta$ (figura 7.2b):

$$\text{Re } \sigma_{xx}(\omega) = \sigma_0 \pi \frac{1}{16} \left[1 + \left(\frac{2\Delta}{\hbar\omega} \right)^2 \right] \Theta(1 - |\eta|) \quad (7.18)$$

$$\text{Im } \sigma_{xx}(\omega) = \sigma_0 \left\{ \frac{2\varepsilon_F + \varepsilon_R + \Delta + \sqrt{\varepsilon_R^2 + \Delta^2 + 2\varepsilon_R\varepsilon_F}}{4\hbar\omega} + \frac{1}{16} \left[1 + \left(\frac{2\Delta}{\hbar\omega} \right)^2 \right] \ln \left| \frac{(\omega + \omega_-)(\omega - 2\Delta)}{(\omega - \omega_-)(\omega + 2\Delta)} \right| \right\} \quad (7.19)$$

$$\text{Re } \sigma_{xy}(\omega) = \frac{\sigma_0}{8} \left(\frac{2\Delta}{\hbar\omega} \right) \ln \left| \frac{(\omega + \omega_-)(\omega - 2\Delta)}{(\omega - \omega_-)(\omega + 2\Delta)} \right| \quad (7.20)$$

$$\text{Im } \sigma_{xy}(\omega) = -\frac{\sigma_0 \pi}{8} \left(\frac{2\Delta}{\hbar\omega} \right) \Theta(1 - |\eta|) , \quad (7.21)$$

donde $|\eta| < 1 \Rightarrow 2\Delta \leq \hbar\omega \leq \hbar\omega_-$.

7. EFECTO KERR EN EL MODELO DE RASHBA FERROMAGNÉTICO

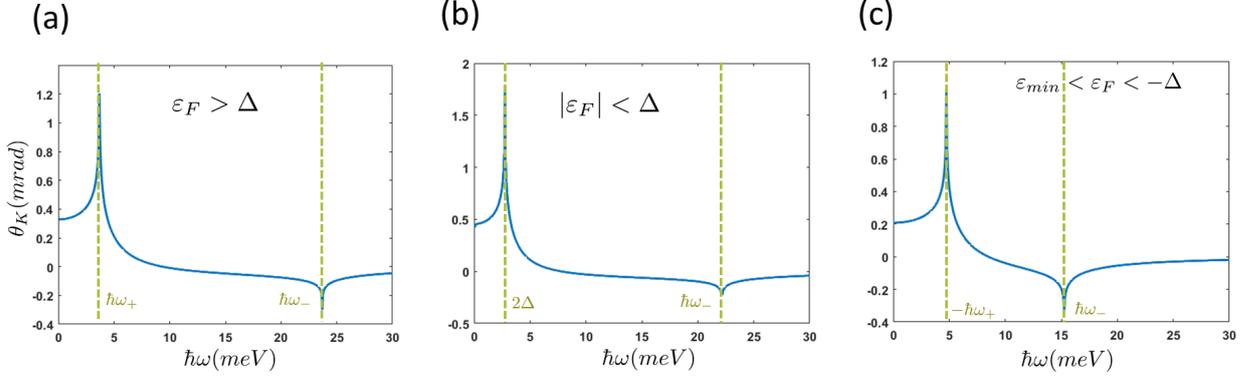


Figura 7.4: Rotación de Kerr para gas electrónico bidimensional con acoplamiento Rashba para (a) $\varepsilon_F > \Delta$, (b) $|\varepsilon_F| < \Delta$ y (c) $\varepsilon_{min} < \varepsilon_F < -\Delta$ cuando $\varepsilon_R > \Delta$.

3. Finalmente para $\varepsilon_{min} \leq \varepsilon_F \leq -\Delta$ (figura 7.2c):

$$\text{Re } \sigma_{xx}(\omega) = \sigma_0 \pi \frac{1}{16} \left[1 + \left(\frac{2\Delta}{\hbar\omega} \right)^2 \right] \Theta(1 - |\eta|) \quad (7.22)$$

$$\text{Im } \sigma_{xx}(\omega) = \sigma_0 \left\{ \frac{\sqrt{\varepsilon_R^2 + \Delta^2 - 2\varepsilon_R|\varepsilon_F|}}{2\hbar\omega} + \frac{1}{16} \left[1 + \left(\frac{2\Delta}{\hbar\omega} \right)^2 \right] \ln \left| \frac{(\omega + \omega_-)(\omega + \omega_+)}{(\omega - \omega_-)(\omega - \omega_+)} \right| \right\} \quad (7.23)$$

$$\text{Re } \sigma_{xy}(\omega) = \frac{\sigma_0}{8} \left(\frac{2\Delta}{\hbar\omega} \right) \ln \left| \frac{(\omega + \omega_-)(\omega + \omega_+)}{(\omega - \omega_-)(\omega - \omega_+)} \right| \quad (7.24)$$

$$\text{Im } \sigma_{xy}(\omega) = -\frac{\sigma_0 \pi}{8} \left(\frac{2\Delta}{\hbar\omega} \right) \Theta(1 - |\eta|), \quad (7.25)$$

donde $|\eta| < 1 \Rightarrow -\hbar\omega_+ \leq \hbar\omega \leq \hbar\omega_-$. Recordamos que $\varepsilon_F < 0$ en este caso.

7.4. Espectros de rotación de Kerr

En la figura (7.4) se muestra el espectro de rotación de Kerr según la posición del nivel de Fermi. Por simplicidad tomamos $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, y $\varepsilon_R \sim 5$ meV (interface LaAlO₃/SrTiO₃⁴⁶), $\Delta = 1.38$ meV y $\varepsilon_F = 2$ meV (figura 7.4a), 1 meV (figura 7.4b), -2 meV (figura 7.4c).

De manera análoga al espectro del aislante topológico discutido en el capítulo anterior, podemos ver en cada caso que existen picos en $\theta_K(\omega)$ en las energías correspondientes a los umbrales de transiciones interbanda permitidas, sólo que ahora hay dos en virtud de la naturaleza de la estructura de bandas (figura 6.1 vs figura 7.2) y su magnitud es un orden más pequeña. La separación entre picos depende de la energía de Fermi siguiendo el comportamiento mostrado por la densidad conjunta de estados. El cambio de signo en los picos está relacionado con los factores logarítmicos de la conductividad óptica y por el hecho de que $|\omega_+| < \omega_-$: por ejemplo, para $\varepsilon_F > \Delta$, estos factores serían $\sim (1/\omega) \ln(\omega - \omega_+)$ y $-(1/\omega) \ln(\omega - \omega_-)$.

La figura (7.5) presenta la función $\theta_K(\omega; \varepsilon_R)$ en forma de mapa de colores, para Δ fijo y tres valores representativos de ε_F . En la figura (7.5a), se aprecia que el espectro tiene una mayor magnitud en $\omega = \omega_+$, que depende de la energía de Rashba (7.3). El pico invertido en $\omega = \omega_-$ es más débil y se marca con la función $\omega_-(\varepsilon_R)$. En cambio cuando $|\varepsilon_F| < \Delta$ (figura 7.5b), el máximo de $\theta_K(\omega, \varepsilon_R)$ está en la energía mínima de las transiciones intrabanda, que coincide con la magnitud 2Δ de la brecha, y por ello se observa como una línea horizontal, independiente de ε_R . Si la energía de Fermi cae por debajo de la brecha (figura 7.5c), la situación es cualitativamente similar, aunque ahora los picos siguen la dependencia de las frecuencias umbrales $-\omega_+(\varepsilon_R)$ y $\omega_-(\varepsilon_R)$.

Resulta instructivo analizar los espectros $\theta_K(\omega; \varepsilon_F)$ y $\theta_K(\omega; \Delta)$. La figura (7.6) muestra estas funciones para valores fijos de (a) Δ y ε_R , y (b) ε_F y ε_R . En la figura (7.6a) puede verse que la rotación de Kerr como función de ε_F es significativa en las energías umbrales $-\omega_+(\varepsilon_F)$, $\omega_-(\varepsilon_F)$, 2Δ , como ya se ha comentado. La señal máxima está en el intervalo $|\varepsilon_F| < \Delta$. Este comportamiento recuerda lo que sucede en la conductividad Hall dc en el modelo de Rashba ferromagnético (7.1) del efecto Hall anómalo intrínseco, donde $-\sigma_{xy}(0)$ alcanza su valor máximo $\approx e^2/2\hbar$ cuando el nivel de Fermi cae dentro de la brecha. Esto es resultado del rompimiento de la simetría de inversión temporal introducido por el término $\propto \Delta$, pero también juega un papel la contribución espín-órbita, que conecta los grados de libertad espín y orbital.¹ Efectivamente el elemento de matriz no diagonal $M_{xy} \propto \alpha_R^2 \Delta$, ingrediente necesario en el cálculo de la conductividad óptica (6.9), se anula si α_R o Δ es cero. Puede afirmarse, por lo tanto, que el espectro de rotación de Kerr representa una alternativa óptica para poner de manifiesto el papel de las propiedades intrínsecas,² de naturaleza geométrica o topológica, de la estructura de bandas.

El espectro de la figura (7.6b), se muestra de otra manera lo mismo, en la vecindad de $\varepsilon_F = \Delta$. Como función de Δ , vemos una línea de magnitud máxima

¹Nótese que si $\varepsilon_R = 0$, entonces $\omega_- = \omega_+ = \Delta$ y en tal caso σ_{xy} se anula.

²En lenguaje de Berry: una curvatura de Berry no nula y máxima en la vecindad de la brecha

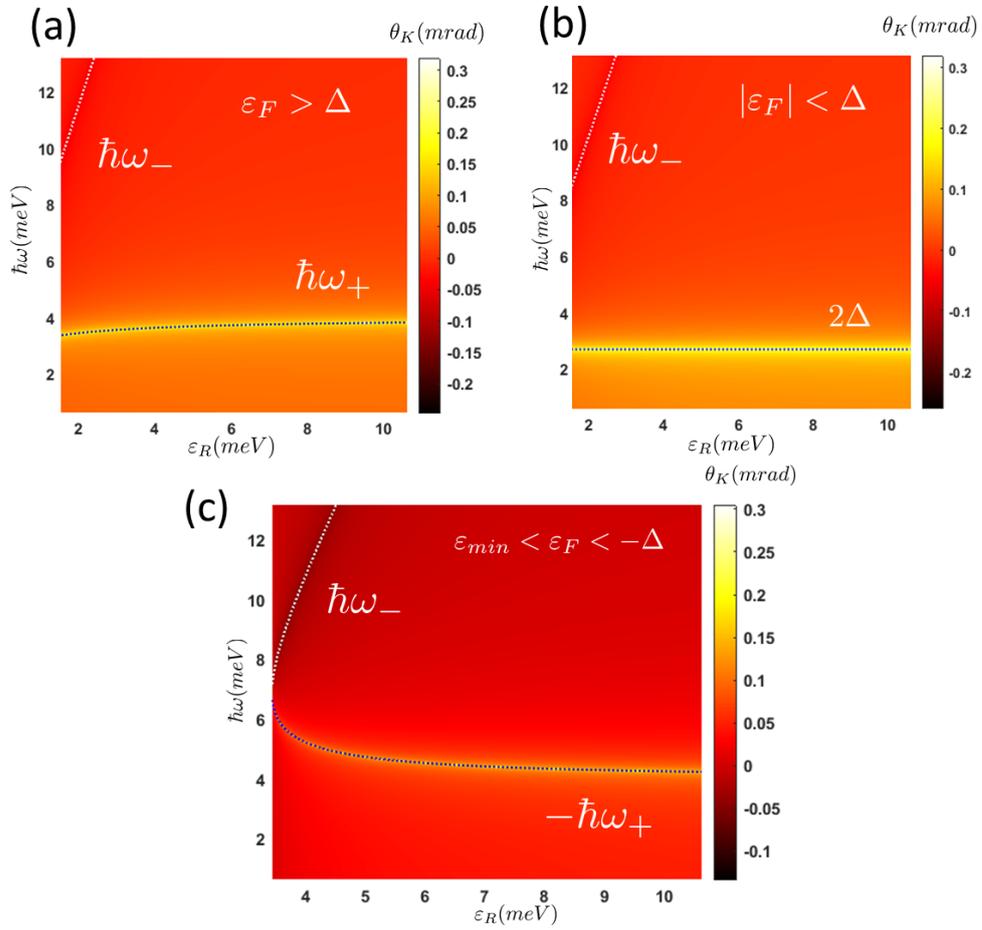


Figura 7.5: Espectro de rotación de Kerr $\theta(\omega, \varepsilon_R)$ para $\Delta = 1.38$ meV y ε_F (a) 2 meV, (b) 1 meV y (c) -2 meV.

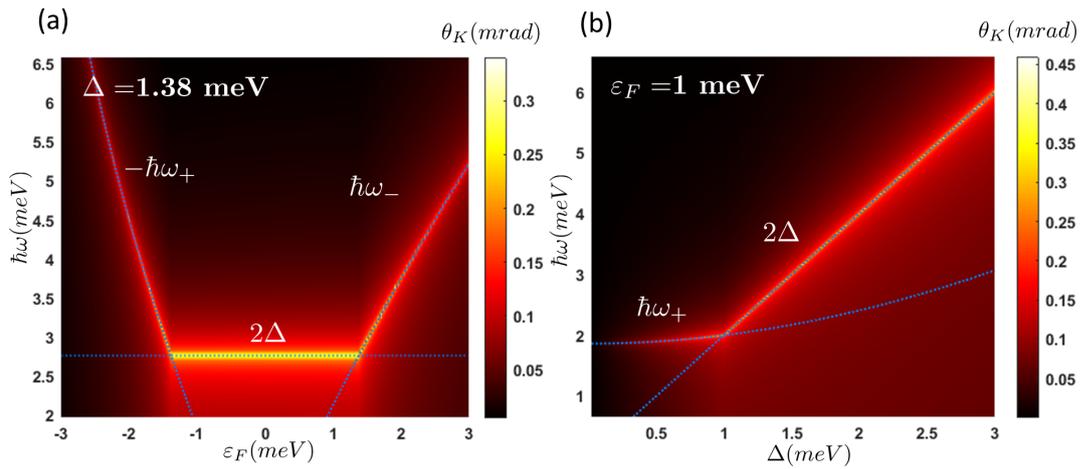


Figura 7.6: Rotación de Kerr de 2DEG con IEO Rashba y campo de intercambio, en vacío con (a) $\Delta=1.38$ meV y (b) $\varepsilon_F=1$ meV constantes

a lo largo de la línea recta de pendiente 2 cuando el nivel de Fermi cae en la brecha, y una señal concentrada en $\omega_+(\Delta)$ cuando cae por arriba, Cuando $\Delta \rightarrow 0$, $r_{ps} \propto \sigma_{xy}(\omega) \rightarrow 0$ y entonces $\theta_K(\omega, \Delta \rightarrow 0) \rightarrow 0$, lo que se aprecia como una franja oscura en la figura.

En conjunto, estos resultados y su comprensión con los correspondientes en un material 2D estudiado en el capítulo anterior, ilustran cómo los detalles de la estructura de bandas, tales como su curvatura, la existencia de brechas, simetrías, determinan (a través de su dependencia de parámetros materiales) el espacio de momento y las energías disponibles para transiciones interbanda (e intrabanda) que fijan a su vez el tipo de respuesta óptica (el tensor de conductividad) y por tanto la propiedades ópticas en general.

Sería interesante extender este estudio al caso de una película delgada en donde cada interface correspondieran a un medio bidimensional descrito por el hamiltoniano (7.1), a la manera como hicieron Tse et al.⁴ con aislantes topológicos.

Conclusiones

Este trabajo ha tenido como uno de sus objetivos últimos el cálculo del efecto Kerr en un medio bidimensional que combina los efectos de interacción espín-órbita tipo Rashba y el rompimiento de la simetría de inversión temporal. Estos dos elementos están en la base de una gran variedad de fenómenos cuánticos en sistemas de baja dimensionalidad en una diversidad de sistemas tales como pozos, alambres y puntos cuánticos, grafeno, aislantes topológicos, semimetales de Weyl, dicalcogenuros de metales de transiciones, y sistemas tipo Dirac en general. Para tal propósito empleamos un hamiltoniano modelo famoso por su relativa simplicidad y su capacidad para explicar el origen del efecto Hall anómalo intrínseco, un efecto cuya elucidación requirió muchos años y que es una especie de efecto Hall cuántico pero no cuantizado. Este hamiltoniano, conocido como Modelo de Rashba ferromagnético, está parametrizado por la energía característica del acoplamiento espín-órbita de Rashba (ε_R) y por una brecha energética (2Δ).

En esta tesis realizamos un estudio a frecuencia finita de la rotación de la polarización óptica por reflexión, y para ello se realizó primero una revisión de los fenómenos de actividad óptica natural (girotropía) y de efectos magneto-ópticos tales como la rotación Faraday, debidos a la dispersión espacial de un medio y al rompimiento de simetría de inversión temporal causado por un campo magnético externo. Se revisaron algunos modelos de materiales formados por moléculas quirales (Vekstein,1996) o por átomos anisotrópicos (Chandrasekhar,1956), y por osciladores armónicos sujetos a fuerza de Lorentz (Berman,2010), con el propósito ilustrar en cada uno el origen físico de la constante de actividad óptica y de los índices de refracción diferentes según el estado de polarización circular de la luz.

Existe un análogo electromagnético entre el espectro de energía de un gas electrónico 2D magnetizado con interacción espín-órbita y la relación de dispersión de modos normales de un medio con términos de Faraday y de girotropía en su respuesta dieléctrica (Yannopoulos, 2011).

Esta tesis contiene también la teoría electromagnética del problema de re-

8. CONCLUSIONES

flexión y refracción en un medio bidimensional entre dos medios dieléctricos. Se obtienen expresiones generales de las amplitudes de Fresnel que determinan la matriz de reflexión así como las fórmulas para obtener el ángulo de rotación de Kerr, tanto para el caso transversal magnético como transversal eléctrico. De este modo, se presenta la formulación electromagnética completa susceptible de ser aplicada a cualquier sistema 2D del que se requiere su tensor de conductividad óptica $\sigma_{ij}(\omega)$.

Para ilustrar este formalismo, se calcula el espectro de rotación Kerr generado por reflexión en un aislante topológico. Este ejercicio reproduce uno de los resultados reportados en un artículo relevante donde se explora cómo una película delgada puede producir un efecto Kerr gigante. A su vez este ejercicio permite analizar la densidad conjunta de estados como paso previo a la comprensión de los elementos relevantes que entran en el cálculo de la conductividad óptica tal y como se obtiene de evaluar la fórmula de Kubo dentro del formalismo de la Teoría de Respuesta Lineal. Dicha densidad revela el conjunto de transiciones interbanda verticales posibles en función de la frecuencia y de la posición del nivel de Fermi ε_F respecto a la brecha energética. Efectivamente, el resultado muestra que el espectro de rotación Kerr tiene estructura espectral precisamente a las energías umbrales de las transiciones ópticas cuando el nivel de Fermi cae por arriba o por debajo o en la brecha.

A continuación, en el último capítulo se presenta el modelo de Rashba ferromagnético, su espectro de energías, los contornos de Fermi, la densidad conjunta de estados, la conductividad óptica y el correspondiente espectro de rotación Kerr. Se comparan estas propiedades con el caso de la interface formada por un aislante topológico. Notablemente, el ángulo Kerr $\theta_K(\omega; \varepsilon_F, \Delta)$ alcanza su valor máximo cuando el nivel de Fermi cae dentro de la brecha, $|\varepsilon_F| < \Delta$, hecho que conecta con el efecto Hall anómalo, en el que la conductividad Hall dc $\sigma_{xy}(0)$, aunque no es un múltiplo entero del quantum de conductancia, toma su máximo valor precisamente en la brecha de energía. El cálculo vuelve patente cómo es necesaria la presencia conjunta de la interacción espín-órbita y el mecanismo responsable de la existencia de una brecha, para lograr un efecto Kerr no nulo.

En conjunto, más allá de los detalles cuantitativos, la comparación entre los resultados del modelo con aislante topológico y los del modelo de Rashba ferromagnético, constituye un buen ejemplo de cómo los detalles de una estructura de bandas determinan el espectro de transiciones ópticas permitidas, lo que a su vez se refleja en las propiedades ópticas en general y por lo tanto en el carácter de diversos fenómenos ópticos. En particular, ilustra también el interés continuo en fenómenos como el efecto Kerr, que constituye una herramienta óptica complementaria a los métodos de transporte, sensible a propiedades sutiles tales como las derivadas de una curvatura de Berry no nula, de la presencia o ausencia de simetría de inversión temporal y del acoplamiento espín-órbita.

A.1. Rotación modelo de moléculas quirales

Se considera un $\hat{\mathbf{n}}$ fijo que es vector unitario del sistema coordenado n, l, m , y perpendicular al vector \mathbf{a} ($a_n = 0$), el cual escribirse en coordenadas x, y, z a través de una matriz de rotación A , lo que se expresa como

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_x & l_y & l_z \\ m_x & m_y & m_z \\ n_x & n_y & n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_l \\ \alpha_m \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

siendo γ_i la proyección de γ en i ; donde se cumple que $A^T A = I$ lo cual a su vez implica que

$$l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j = \delta_{ij}. \quad (\text{A.2})$$

Usando (A.1), tomando en cuenta que $a_n = 0$ se puede escribir

$$a_i = a_l l_i + a_m m_i. \quad (\text{A.3})$$

ésta última nos permite escribir

$$a_i a_j = a_l^2 l_i l_j + a_m^2 m_i m_j, \quad (\text{A.4})$$

es importante notar que $l_i m_j = -l_j m_i$.

El promedio sobre el plano se encuentra dado por

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dots) d\theta, \quad (\text{A.5})$$

esto implica que

$$\langle a_i \rangle = \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos \theta' + \sin \theta') d\theta' \quad (\text{A.6})$$

$$= 0 \quad (\text{A.7})$$

y

$$\langle a_i a_j \rangle = \frac{1}{2\pi} l_i l_j \int_0^{2\pi} a^2 \cos^2 \theta' d\theta' + \frac{1}{2\pi} m_i m_j \int_0^{2\pi} a^2 \sin^2 \theta' d\theta' \quad (\text{A.8})$$

$$= \frac{a^2}{2} (l_i l_j + m_i m_j) \quad (\text{A.9})$$

$$= \frac{a^2}{2} (\delta_{ij} - n_i n_j) \quad (\text{A.10})$$

A.2. Fuerza oscilador cuántico

Las ecuaciones de movimiento de Heisenberg para la posición y el momento se desarrollan, y se escriben como

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{p}, \frac{p^2}{2m_0} + \frac{1}{2m_0} (\frac{q}{c})^2 A^2 - \frac{q}{2m_0 c} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}) + \frac{1}{2} m_0 \omega_0^2 r^2] \quad (\text{A.11})$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{r}, \frac{p^2}{2m_0} + \frac{1}{2m_0} (\frac{q}{c})^2 A^2 - \frac{q}{2m_0 c} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}) + \frac{1}{2} m_0 \omega_0^2 r^2], \quad (\text{A.12})$$

para resolverlas es conveniente reescribir el potencial vectorial (2.73) como

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, z, t) = \mathbf{A}_E + \mathbf{A}_B = (\frac{c}{i\omega} E_x - \frac{B}{2} y) \hat{\mathbf{x}} + (\frac{c}{i\omega} E_y + \frac{B}{2} x) \hat{\mathbf{y}}, \quad (\text{A.13})$$

donde $E_x = E_{0x} e^{ikz - \omega t}$ y $E_y = E_{0y} e^{ikz - \omega t}$. Primero se resuelve el momento (A.11), cuyo primer conmutador es $[\mathbf{p}, p^2/2m_0] = 0$, el segundo se escribe como

$$\frac{1}{i\hbar} \frac{q^2}{2m_0 c^2} [\mathbf{p}, A^2] = -\frac{q^2}{2m_0 c^2} \nabla A^2 \quad (\text{A.14})$$

$$= -\frac{q^2}{2m_0 c^2} [(\frac{2cE_y B}{i\omega} + \frac{B^2 x}{2}) \hat{\mathbf{x}} + (\frac{-2cE_x B}{i\omega} + \frac{B^2 y}{2}) \hat{\mathbf{y}}] \quad (\text{A.15})$$

el tercero que involucra los productos escalares entre el potencial vectorial y momento, se reduce a

$$-\frac{q}{2m_0 c} [\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}] = -\frac{q}{2m_0 c} ([p_x, A_y] p_y + p_y [p_x, A_y]) \hat{\mathbf{x}} \quad (\text{A.16})$$

$$+ (p_x [p_y, A_x] + [p_y, A_x] p_x) \hat{\mathbf{y}} \\ = \frac{q}{2m_0 c} i\hbar B [p_y \hat{\mathbf{x}} - p_x \hat{\mathbf{y}}], \quad (\text{A.17})$$

y el último conmutador es

$$\frac{1}{2i\hbar} m_0 \omega_0^2 [\mathbf{p}, x^2 + y^2] = -m_0 \omega_0^2 (x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}}); \quad (\text{A.18})$$

una vez se conoce el valor de todos los conmutadores se obtiene (2.76) y (2.77). Se prosigue a efectuar el mismo procedimiento para la posición (A.12), que se reduce a

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2m_0i\hbar}[\mathbf{r}, \mathbf{p}^2 - \frac{q}{c}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p})], \quad (\text{A.19})$$

ya que los otros dos conmutadores que se muestran en (A.12) son cero, y los dos restantes son

$$[\mathbf{r}, \mathbf{p}^2] = [\mathbf{r}, \mathbf{p}]\mathbf{p} + \mathbf{p}[\mathbf{r}, \mathbf{p}] = 2i\hbar\mathbf{p} \quad (\text{A.20})$$

y

$$[\mathbf{r}, p_x A_x + p_y A_y + A_x p_x + A_y p_y] = 2i\hbar(A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}}), \quad (\text{A.21})$$

se obtienen (2.78) y (2.79).

Bibliografía

- [1] A. Zvezdin, y V.Kotov. *Modern Magnetooptics and Magnetooptical Materials (Condensed Matter Physics)*. (CRC Press,1997). [1](#)
- [2] Taskeya, Haider. *A Review of Magneto-Optic Effects and Its Application*. International Journal of Electromagnetics and Applications. **7**(1), 17-24 (2017). [1](#)
- [3] Y. Kato, R.Myers, A. Gossard y D. Awschalom. *Observation of the spin hall effect in semiconductors*. Science **306** (5703), 1910–1913 (2004). [2](#)
- [4] K. Tse y H. MacDonald. *Giant magneto-optical kerr effect and universal faraday effect in thin-film topological insulators*. Phys. Rev. Lett., **105**, 057401 (2010). [2](#), [37](#), [39](#), [41](#), [42](#), [55](#)
- [5] M. Kargarian, M. Randeria y N. Trivedi. *Theory of kerr and faraday rotations and linear dichroism in topological weyl semimetals*. Scientific Reports, **5** (1) (2015). [2](#)
- [6] A. Mukherjee, T. Ellis, M. Arik, P. Taheri, E. Oliverio, P. Fowler, G. Tischler, Y. Liu, R. Glaser, L. Myers-Ward, L. Tedesco, R. Eddy, K. Gaskill, H. Zeng, G. Wang y J. Cerne. *Giant magneto-optical kerr enhancement from films on SiC due to the optical properties of the substrate*. Phys. Rev. B, **99**, 085440 (2019). [2](#)
- [7] K. Sonowal, A. Singh y A. Agarwal. *Giant optical activity and kerr effect in type-i and type-ii weyl semimetals*. Physical Review B, **100** 8 (2019). [2](#)
- [8] K. Tse y H. MacDonald. *Magneto-optical and magnetoelectric effects of topological insulators in quantizing magnetic fields*. Phys. Rev. B, **82**, 161104 (2010). [2](#)
- [9] K. Tse y H. MacDonald. *Magneto-optical faraday and kerr effects in topological insulator films and in other layered quantized hall systems*. Phys. Rev. B, **84** 205327 (2011). [2](#), [42](#)
- [10] I. Crassee, J. Levallois, A.L. Walter, M. Ostler, A. Bostwick, E. Rotenberg, T. Seyller, D. van der Marel y A.B. Kuzmenko. *Giant faraday rotation in single- and multilayer graphene*. Nature Physics, **7** (2011). [2](#)
- [11] H.-C. Mertins, C. Jansing, M. Krivenkov, A. Varykhalov, O. Rader, H. Wahab, H. Timmers, A. Gaupp, A. Sokolov, M. Tesch y P. M. Oppeneer.

- Giant magneto-optical faraday effect of graphene on co in the soft x-ray range.* Phys. Rev. B, **98**, 064408 (2018). [2](#)
- [12] R. Shimano, G. Yumoto, J. Y. Yoo, R. Matsunaga, S. Tanabe, H. Hibino, T. Morimoto y H. Aoki. *Quantum faraday and Kerr rotations in graphene.* Nature Communications, **4** 1 (2013). [2](#)
- [13] C. T. Ellis, A. V. Stier, M.-H. Kim, J. G. Tischler, E. R. Glaser, R. L. Myers-Ward, J. L. Tedesco, C. R. Eddy, D. K. Gaskill y J. Cerne. *Magneto-optical fingerprints of distinct graphene multilayers using the giant infrared kerr effect.* Scientific Reports, **3**, 3143 (2013). [2](#)
- [14] Barron, L. *Molecular Ligth Scattering and Optical Activity.* (Cambridge University Press, 2016). [6](#)
- [15] P. Halevi. *Spatial Dispersion in Solids and Plasmas.* (North-Holland, 1992). [6](#), [15](#)
- [16] G. E. Vekstein. *On the natural optical activity in an isotropic medium: An exactly solvable model.* Am. J. Phys., **64**(5), 607 – 610 (1996). [6](#), [8](#)
- [17] J. F. Nieves y P. B. Pal. *Third electromagnetic constant of an isotropic medium.* Am. J. Phys., **62** 207 (1994). [8](#)
- [18] S. Chandrasekhar. *Simple Model for Optical Activity.* Am. J. Phys., **24** (7), 503 (1956). [11](#), [14](#)
- [19] A. Zangwill. *Modern Electrodynamics.* (Cambridge Press, Cambridge, UK, 2013). [13](#)
- [20] Dominik Floess y Harald Giessen. *Nonreciprocal hybrid magnetoplasmonics.* Rep. Prog. Phys., **81** 116401 (2018). [15](#)
- [21] P. R. Berman. *Optical Faraday rotation.* Am. J. Phys., **78** (3), 270–276 (2010). [15](#), [16](#)
- [22] M. Schwartz. *Principles of Electrodynamics.* (Dover Publications, Berlin, Heidelberg, 1987). [15](#), [26](#)
- [23] D. Jackson. *Classical electrodynamics.* (Wiley, 1999). [22](#)
- [24] K. Charles. *Quantum Theory of Solids.* (Jhon Wiley and Sons, USA, 1996). [25](#), [26](#)

BIBLIOGRAFÍA

- [25] R. Winkler. *Spin–Orbit Coupling Effects in Two-Dimensional Electron and Hole Systems*, volume 191 of *Springer Tracts in Modern Physics*. (Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2003). [25](#), [26](#), [27](#)
- [26] T. Miyao y Spohn, Herberthy. *Spectral analysis of the semirelativistic Pauli–Fierz hamiltonian*. *Journal of Functional Analysis*, **256**, 7, 2123–2156 (2009). [25](#)
- [27] O. Ledesma. *Fase geométrica en sistema cuasi-bidimensionales con acoplamiento espín-órbita*. UNAM, (2018). [26](#)
- [28] D. Mildred, D. Gene y S. Ado. *Group Theory: Application to the Physics of Condensed Matter*. (Springer, 2008). [26](#)
- [29] J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. (Addison-Wesley, USA, 1994). [26](#)
- [30] S. J. Papadakis y E. P. De Poortere. *The effect of spin splitting on the metallic behavior of a two-dimensional system*. *Science*, **283**, 2056 (1999) [26](#)
- [31] R. Hanson. *Spins in few-electron quantum dots*. *Rev. Mod. Phys*, **79**, 1217–1265 (2007). [26](#)
- [32] Priscilla, Iglesias. *Efectos termoespintrónicos en heteroestructuras semiconductoras con interacción espín-órbita*. CICESE, (2016). [27](#), [29](#)
- [33] S. Bandyopadhyay y M. Cahay. *Introduction to Spintronics*. (CRC Press, Cambridge, UK, 2016). [27](#)
- [34] A. Manchon, H. C. Koo, J. Nitta, S.M. Frolov y R.A. Duine. *New perspectives for Rashba spin – orbit coupling*. *Nature Materials* **14**, 871–882 (2015). [27](#)
- [35] J. Nitta, A. Tatsushi, T. Hideaki y E. Takatomo. *Gate Control of Spin-Orbit Interaction in an Inverted $\text{In}_{0.53}\text{Ga}_{0.47}\text{As}/\text{In}_{0.52}\text{Al}_{0.48}\text{As}$ Heterostructure*. *Phys. Rev. Lett.*, **95**, 165444 (1997). [27](#)
- [36] Albino, Daniel. *Efecto de la orientacion cristalografica en la conductividad Hall de espin y fase de Berry de un gas electronico con interaccion espin-orbita*. CICESE, (2018). [27](#), [42](#)
- [37] V. Yannopoulos. *Photonic analog of a spin-polarized system with rashba spin-orbit coupling*. *Phys. Rev. B*, **83**, 113101 (2011). [31](#)
- [38] K. Bliokh, A. Niv, V. Kleiner y E. Hasman. *of spinning light*. *Nature Photonics*, **2**(12), 748–753 (2008). [33](#)

- [39] Stefan, Visnovsky. *Optics in Magnetic Multilayers and Nanostructures*. (CRC Press, 2006). [35](#)
- [40] G. Guiliani y G. Vignale. *The Electron Liquid Paradigm in condensed Matter Physics*. (Ios Press, 2005) [39](#)
- [41] Maytorena, Jesús. Notas . [41](#), [51](#)
- [42] X. Di, M. Chang y Q. Niu. *Berry phase effects on electronic properties*. Rev. Mod. Phys., **82**, 1959 (2010). [45](#)
- [43] D. Culcer, A. MacDonald y Q. Niu. *Anomalous hall effect in paramagnetic two-dimensional systems*. Physical Review B, **68**(4), (2003) [45](#), [47](#)
- [44] A. Dyrdal, J. Barnas, V. K. Dugaev. *Current-induced spin polarization of a magnetized two-dimensional electron gas with Rashba spin-orbit interaction*. Physical Review B , 95(24), 245302 (2017). [47](#)
- [45] A. Dyrdal, J. Barnas, V. K. Dugaev, J. Berakdar. *Thermally induced spin polarization in a magnetized two-dimensional electron gas with Rashba spin-orbit interaction*. Physical Review B , **98**(7), 075307 (2018). [47](#)
- [46] S. Singh y A. Romero. *Giant tunable Rashba spin splitting in a two-dimensional BiSb monolayer and in BiSb/AlN heterostructures*. Phys. Rev. B., **78**, 1335 (2017). [52](#)