Universidad Nacional Autónoma
de México

Facultad de Ciencias

Unicidad de la métrica de Kerr

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

YANH VISSUET OLIVER

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco

CIUDAD DE MÉXICO 2020

1. Datos del alumno
Vissuet
Oliver
Yanh
68 34 48 13
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
415120887

2. Datos del tutor
Dr.
Oscar Alfredo
Palmas
Velasco

3. Datos del sinodal 1
Dr.
Francisco
Nettel
Rueda

4. Datos del sinodal 2
Dra.
María de los Ángeles
Sandoval
Romero

5. Datos del sinodal 3
Dr.
Didier Adán
Solis
Gamboa

6. Datos del sinodal 4
Dr.
Hernando
Quevedo
Cubillos

7. Datos del trabajo escrito
Unicidad de la métrica de Kerr
64 pp.
2019

Agradecimientos

He tenido la suerte de existir y convivir con seres de tanta luz que han iluminado mi camino, que me han mantenido con fuerza física, mental y espiritual. Sin ellos este trabajo no podría haber concluido.

Trataré de expresar el agradecimiento que siente mi alma.

A mis padres que me dieron la vida.

A mi madre que es la persona que más admiro en este mundo, mi maestra de vida y mi mejor amiga.

A mi hermana Kirehy que me ha inspirado todos los días de mi vida desde que nació.

A mi hermana Heidi por años de apoyo incondicional y mi maestra personal de vida.

A mi hermana Ingrid, que me ha ayudado y escuchado desde que nací, y por apoyarme con las ilustraciones de este trabajo.

A mi tía Tere, que es mi maestra de amor incondicional, y que me ha dado la fuerza y la astucia en mi carrera y en mi vida.

A la estrella de Aldebarán que me recuerda que la mente no tiene limites.

A mi tío Enrique Diez por enseñarme el amor por la ciencia, toda la inspiración y el apoyo que me ha dado.

A mi hermosa familia que me ha apoyado incondicionalmente en cada momento.

A mi maestra Deyanira que me enseñó cuál es la clave secreta del universo.

A mis grandes amigos, cada uno de ustedes me enseño lo que debía aprender, me motivaron y su apoyo fue fundamental para concluir este trabajo.

A Dr. Didier Solis por sugerirme el tema de esta tesis y las observaciones que me aporto.

A Dr. Francisco Nettel por todo el apoyo a la intuición física de este trabajo y por inspirarme en cada platica que tuvimos.

A mi asesor de tesis que me apoyó con tanta pasión, que me dio su confianza y me sigue enseñando a amar la geometría.

Gracias.

IR AL ENCUENTRO

El extraviado eterno, el meramente ingenuo,
ignora nuestras dudas y seguro avanza.
Nos dice sólo que este mundo es lleno
y son leyendas abismos y hondonadas.

¿Por qué pensar en otras dimensiones
que en las dos buenas y ya tan vulgares?
¿Podría vivir seguro aquí un ser humano?
¿Podría vivir aquí despreocupado?

Para alcanzar la paz una cosa pedimos:
¡Dejadnos borrar al menos una dimensión!
Porque si el extraviado está en lo cierto
y mirar el abismo es peligroso
la tercera dimensión es prescindible...
Hermann Hesse – El juego de abalorios

Índice general

Introducción

> *Los agujeros negros son los objetos macroscópicos más perfectos de la naturaleza que hay en el universo: los únicos elementos en su construcción son nuestros conceptos de espacio y tiempo. Y puesto que la teoría de la relatividad general proporciona una única familia de soluciones para sus descripciones, son también los objetos más simples. – Subrahmanyan Chandrasekhar*

En 1916 nuestro concepto de espacio y tiempo fue cambiado por Albert Einstein al crear la teoría de la relatividad general. Esta teoría de la gravedad nos dice que la materia y la energía curvan el espacio-tiempo y esta curvatura es lo que entendemos por gravedad. Entre varias predicciones que hace la teoría, una de las más interesantes es la existencia de los agujeros negros. Estos son regiones del espacio-tiempo que tienen una gran cantidad de materia acumulada en solo un punto de curvatura infinita de esta región. Si algún tipo de materia cae, ésta no podrá escapar. Incluso la luz, con su velocidad de 300000 kilómetros por segundo, no puede escapar de la inmensa gravedad que poseen dichas regiones. Por eso es que son negros, no se pueden ver.
El primer ejemplo que tenemos de un agujero negro fue descubierto meses después de la publicación de la relatividad general por el físico Karl Schwarzschild. Este agujero negro es una solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío y con simetría esférica. Sin embargo no se tenía bien claro qué era un agujero negro, hasta que en 1928 Subrahmanyan Chandrasekhar calculó lo grande que podía ser una estrella que fuera capaz de soportar su propia gravedad, una vez que hubiera gastado todo su combustible. Chandrasekhar calculó que una estrella fría de más de aproximadamente una vez y media la masa del sol no sería capaz de soportar su propia gravedad. Más tarde, en 1939 Robert Oppenheimer explicó que si una estrella masiva consumiera su combustible, el colapso gravitacional sería inminente hasta convertirse en un punto.

El colapso gravitacional quedó en el olvido a causa de la Segunda Guerra Mundial, hasta que en los sesentas, el interés por los problemas de gran escala resurgió por las observaciones astronómicas. En 1967, Werner Israel demostró que de acuerdo con la relatividad general, los agujeros negros que son estáticos y esféricos deben ser muy simples. Y en efecto, estos agujeros dependen sólo de su masa y dos agujeros negros con la misma masa son idénticos. Es decir, las soluciones a las ecuaciones de Einstein en el vacío con simetría esférica son únicas bajo ciertas condiciones de suavidad. Como la solución de Schwarzschild cumple con las condiciones anteriores, ésta es la única solución. En 1963, Roy Kerr encontró un conjunto de soluciones a las ecuaciones de la relatividad general que describen un agujero negro que no es estático. Estas soluciones son asintóticamente planas, es decir, lejos del agujero negro el espacio-tiempo es plano; de igual forma, éstas no dependen del tiempo y son simétricas respecto a un eje.

La comunidad se preguntó: ¿Cuántos tipos de soluciones a las ecuaciones de la relatividad general que sean asintóticamente planas, que no dependan del tiempo y tengan un eje de simetría existen?

Hubo avances por parte de Stephen Hawking, al demostrar que si un agujero negro no es estático, entonces tiene un eje de simetría; más tarde, en 1970 Brandon Carter demostró que soluciones a las ecuaciones de campo en el vacío que sean asintóticamente planas y tengan ambas simetrías sólo dependen de dos parámetros. Y los agujeros negros de Kerr están en términos de la masa m y el momento angular a. Entonces, se pensó que la solución de Kerr era la única a las ecuaciones de campo que cumplía las condiciones anteriores. Esto quedó como una conjetura hasta que en 1975, David Robinson demostró la unicidad de la métrica de Kerr.

Es el propósito de esta tesis presentar una demostración actual y auto contenida de dicha unicidad.

La estructura de esta tesis es como sigue. En el primer capítulo se verán todos los preliminares necesarios para reducir las ecuaciones de Einstein a partir de las simetrías. Se dará un breve repaso de las formas diferenciales para así definir el operador de Hodge y la codiferencial. También se dará una breve introducción a las ecuaciones de Einstein. En el segundo capítulo se estudiarán los campos de Killing y sus propiedades principales, se definirá el twist y la 1-forma de Ricci de un campo vectorial. La ecuación y el potencial de Ernst, fundamentales para la reducción de las ecuaciones, también se verán. Serán descritas las simetrías asociadas a los campos de Killing y su relación con la construcción de distribuciones integrables. En el capítulo final se estudiará las métricas en las que se puede dividir la métrica del espacio-tiempo, se estudiará la ecuacion de Ernst y finalmente en la última sección se demostrará la unicidad de la métrica de Kerr.

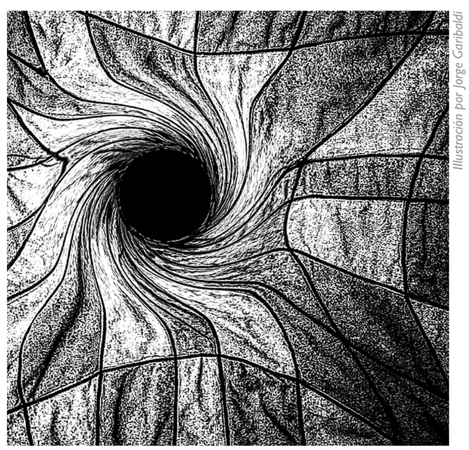

Figura 1: Ilustración de un agujero negro de Kerr.

Capítulo I
Preliminares

Con nuestros pensamientos construimos el mundo.
Habla o actúa con una mente pura
y la felicidad te seguirá
como tu misma sombra, inseparable.
Caminos paralelos | Dhammapada

En este capítulo se verán los preliminares necesarios para reducir las ecuaciones de Einstein a partir de las simetrías. Para esto se requiere un conocimiento general de formas diferenciales y la derivada exterior que se dará en la primera y segunda sección. En la tercera sección será definido el operador de Hodge. Se darán las propiedades de la derivada de Lie en la cuarta sección. Entrada la quinta sección, se hablará del teorema de Frobenius, debido a que se ocupará de manera imprescindible. En la última sección se verá una pequeña introducción a las ecuaciones de Einstein.

1.1 | Formas diferenciales

Las formas diferenciales surgen de una manera natural en la teoría de variedades de la geometría diferencial. Entre sus muchas aplicaciones al caso de la relatividad general, las formas nos sirven para hacer cálculos de manera más simple.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Si $\omega : V \times V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$ es un tensor k-covariante sobre V, decimos que ω es un tensor alternante si

$$\omega(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -\omega(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots v_k), \qquad v_i \in V.$$

El conjunto de tensores k-covariantes alternantes sobre V lo denotamos como $\Lambda^k(V^*)$ y es un subespacio del espacio vectorial de los tensores k-covariantes $T^k(V^*)$. Si tomamos una permutación $\sigma \in S_k$ y $\omega \in \Lambda^k(V^*)$, entonces

$$\omega(v_{\sigma(v_1)}, \ldots, v_{\sigma(v_k)}) = (sgn\, \sigma)\omega(v_1, \ldots, v_k),$$

donde $sgn\,\sigma$ es $+1$ si σ es par y -1 si σ es impar.

Definamos a la función $Alt : T(V^*) \to \Lambda^k(V^*)$ tal que para cada tensor k-covariante F,

$$(Alt\,F)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (sgn\,\sigma) F(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}).$$

Se puede ver que $Alt\,F$ es un tensor alternante y F es alternante si y sólo si $Alt\,F = F$. Con ésto en mente podemos definir uno de los productos más interesantes, el producto cuña. Sean $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ y $\eta \in \Lambda^l(V^*)$; definimos su producto cuña como

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(\omega \otimes \eta).$$

Es inmediato que $\omega \wedge \eta$ es un $(k+l)$-tensor alternante y que el producto cuña es bilineal sobre $\mathbb{R}$. Además, para $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ y $\eta \in \Lambda^l(V^*)$ se tiene que

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega.$$

Ahora, si $\{e_i\}$ es una base para V y $\{e^i\}$ es la base dual de V^*, los productos cuña $e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$ con $i_1 < \cdots < i_k$ forman una base para $\Lambda^k(V^*)$ y por tanto este espacio es de dimensión $n!/(k!(n-k)!)$ donde $n = \dim(V)$.

Dado un k-tensor alternante $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ y un vector $v \in V$ se define el producto interior por v como la función $i_v : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{k-1}(V^*)$ tal que

$$i_v\omega(v_1, \dots, v_{k-1}) = \omega(v, v_1, \dots, v_{k-1}).$$

Por convención, si ω es un 0-tensor, $i_v\omega = 0$. Se puede ver que $i_v \circ i_v\omega = 0$ y además, para $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ y $\eta \in \Lambda^l(V^*)$ se tiene que

$$i_v(\omega \wedge \eta) = (i_v\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (i_v\eta).$$

Si M es una variedad, recordemos que el haz de tensores covariantes se define como $T^kT^*M := \coprod T^k(T_pM^*)$, entonces el subhaz que consiste en tensores alternantes lo denotamos como Λ^kT^*M y un campo tensorial alternante sobre M lo llamamos una k-forma. El espacio de todas las k-formas sobre M lo denotamos $\Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^kT^*M)$.

Diremos que la variedad M es orientable si existe una n-forma ω no nula definida en M.

1.2 Derivada exterior

El operador más importante sobre formas diferenciales es la derivada exterior, que lo definiremos como sigue. Sea M una n-variedad suave y (x^i) una carta sobre M. Una k-forma ω tiene la siguiente expresión en coordenadas

$$\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \omega_{i_1\cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Entonces definimos la derivada exterior como el operador $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ que asocia a ω la forma

$$d\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1\cdots i_k}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

La derivada exterior tiene las siguientes propiedades:

Proposición 1.1 *Sea M una n-variedad; entonces*

(1) *d es lineal sobre $\mathbb{R}$.*

(2) *$d \circ d = 0$.*

(3) *Si $\omega \in \Omega^k(M)$ y $\eta \in \Omega^l(M)$, entonces*

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

(4) *Para $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$, df es la diferencial de f, dada por $df(X) = Xf$.*

En el siguiente capítulo se ocupará la siguiente manera de calcular la derivada exterior de una 1-forma.

Proposición 1.2 *Si ω es una 1-forma y X,Y son campos vectoriales, entonces*

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]).$$

Demostración. Dado que cualquier 1-forma se puede expresar como combinación lineal de términos de la forma udv para funciones diferenciables u y v, es suficiente suponer que ω se ve como $\omega = udv$. Sean X y Y dos campos vectoriales, entonces

$$d(udv)(X,Y) = (du \wedge dv)(X,Y) = du(X)dv(Y) - dv(X)du(Y) = XuYv - XvYu.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} X(udv(Y)) - Y(udv(X)) - udv([X,Y]) &= X(uYv) - Y(uXv) - u[X,Y]v \\ &= (XuYv + uXYv) - (YuXv + uYXv) - u(XYv - YXv) = XuYv - XvYu. \end{aligned}$$

□

1.3 | Operador $\star$

Si g es una métrica sobre M, sabemos que siempre podemos encontrar una base ortonormal para cada T_pM, de la forma $\{e_i\}$, tal que $g_p(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$ y ± 1 cuando $i = j$. También sabemos que el número de $+1$'s y -1's es independiente de la base ortonormal elegida. Si el número de $+1$'s es p y el número de -1's es q, decimos que la signatura de g es (p, q). Decimos que (M, g) es una variedad semi-riemanniana, destacando dos casos importantes: Si la signatura de la métrica es $(n, 0)$, donde $\dim(M) = n$, entonces g es una métrica riemanniana y (M, g) es una variedad riemanniana. Por otro lado, si la signatura es $(n-1, 1)$ decimos que la métrica g es lorentziana y que (M, g) es una variedad lorentziana.

Más adelante se necesitará el concepto de espacio-tiempo para representar al espacio de los eventos físicos dentro de la teoría de la relatividad. Decimos que (M, g) es un espacio-tiempo si es una variedad lorentziana de dimensión 4, conexa y tiempo-orientable. Una variedad lorentziana (M, g) es tiempo-orientable si existe un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ que es tipo tiempo.[1] Si M es tiempo-orientable, la elección de un campo vectorial tipo tiempo X fija una orientación temporal en M.

Aunque el objetivo de esta tesis es estudiar ciertos espacios-tiempo, enunciaremos algunos resultados en un contexto general.

Recordemos que en una variedad semi-riemanniana (M, g) podemos convertir vectores en 1-formas y al contrario. Definamos a $\hat{g} : TM \to TM^*$ tal que para toda $p \in M$ y v,$w \in T_pM$

$$\hat{g}(v)(w) = g_p(v, w).$$

A partir de este momento se usará la notación de Einstein, la cual indica que se omitirá el signo de suma Σ y se entenderá que cuando un índice se repite arriba y abajo, se interpretará como la suma con todos los valores que pueda tomar dicho índice. Y cuando no se repitan los indices arriba y abajo, no habrá una suma implícita. También se usará la siguiente notación: Si V es un espacio vectorial y $\epsilon^i, \epsilon^j \in V^*$, entonces

$$\epsilon^i \epsilon^j := \frac{1}{2}\left(\epsilon^i \otimes \epsilon^j + \epsilon^j \otimes \epsilon^i\right).$$

Dado un marco local (E_i) y su marco dual (ϵ^i), entonces podemos expresar de manera local a la métrica g como $g = g_{ij}\epsilon^i\epsilon^j$. Si $X = X^i E_i$ es un campo vectorial, entonces

$$\hat{g}(X) = \hat{g}(X)(E_i)\epsilon^i = g_{ij}X^j\epsilon^i.$$

Así la matriz de $\hat{g}$ en cualquier marco local, es la misma que la de g. Denotaremos a los componentes de $\hat{g}(X)$ como

$$X_j := g_{ij}X^i.$$

---

[1] Recordemos que en una variedad lorentziana hay tres formas de clasificar a los vectores tangentes. Un vector $v \in T_pM$ es tipo tiempo si $g(v, v) < 0$, tipo espacio si $g(v, v) > 0$ ó $v = 0$, nulo si $g(v, v) = 0$ y $v \neq 0$.

Entonces

$$\hat{g}(X) = X_j \epsilon^j.$$

Decimos que $\hat{g}(X)$ se obtuvo de X "bajando el índice". Con esto en mente se denota a $\hat{g}(X)$ como $X^\flat$.

Como la matriz g_{ij} es no degenerada en cualquier punto, $\hat{g}$ es invertible y la matriz de $\hat{g}^{-1}$ es la inversa de la matriz g_{ij}, denotada como g^{ij}. En términos de un marco local, la función inversa $\hat{g}^{-1}$ se puede expresar como

$$\hat{g}^{-1}(\omega) = \omega^i E_i,$$

donde

$$\omega^i := g^{ij}\omega_j.$$

Si ω es una 1-forma, denotamos el campo vectorial $\hat{g}^{-1}(\omega)$ como $\omega^\sharp$. Decimos que se obtuvo de ω subiendo el índice.

1.3.1 Producto interior para las k-formas

El isomorfismo obtenido en la sección anterior permite inducir un producto interior para el espacio cotangente.

Supongamos que g es una métrica semi-riemanniana sobre M con signatura $(n-s, s)$ y sea $p \in M$. Podemos definir el siguiente producto interior sobre T_p^*M: Para $\omega, \eta \in T_p^*M$,

$$(\omega|\eta) = g(\omega^\sharp, \eta^\sharp).$$

En coordenadas, recordemos que $g_{kl}g^{ki} = g_{lk}g^{ki} = \delta_l^i$. Entonces

$$(\omega|\eta) = g^{ij}\omega_i\eta_j.$$

También podemos definir un producto interior para $\Omega^k(M)$:

Definición 1.3 *Sea (M, g) una n-variedad semi-riemanniana. Definimos un producto interior $(\cdot|\cdot) : \Omega^k(M) \times \Omega^k(M) \to \mathbb{R}$ como sigue: Si $\omega^1, \ldots, \omega^k$ y $\eta^1, \ldots, \eta^k$ son 1-formas, entonces*

$$(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k | \eta^1 \wedge \cdots \wedge \eta^k) = \det\Big(((\omega^i)^\sharp|(\eta^j)^\sharp)\Big).$$

Con este producto interior podemos construir el operador de Hodge. Este interesante operador surge de manera natural en electromagnetismo para entender la dualidad de las ecuaciones de Maxwell. En el capítulo siguiente el operador $\star$ será nuestra herramienta para resolver las ecuaciones de Einstein en el vacío.

Proposición 1.4 *Sea (M, g) una n-variedad semi-riemanniana orientable. Entonces existe una única n-forma η sobre M, que llamamos n-forma de volumen, que satisface*

$$\eta(E_1, \ldots, E_n) = 1$$

para cualquier marco local ortonormal orientado positivamente $\{E_i\}$.

Proposición 1.5 *Sea (M, g) una n-variedad semi-riemanniana orientable, con forma de volumen η. Entonces para cada $k = 0, \ldots, n$ existe un único isomorfismo lineal $\star : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$ tal que, para $\alpha, \beta \in \Omega^k(M)$,*

$$\alpha \wedge \star\beta = (\alpha|\beta)\eta. \tag{1.1}$$

Demostración. Por linealidad, basta definir $\star$ para un comarco ortonormal $\{e^i\}$ tal que $\eta = e^1 \wedge \cdots \wedge e^n$. Entonces $\{e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}\}$ es una base ortonormal para $\Omega^k(M)$.

Definamos al operador de Hodge como

$$\star\left(e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}\right) = \epsilon(i_1) \cdots \epsilon(i_k) sgn(\sigma) e^{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e^{i_n},$$

donde $\sigma(1, ..., n) = (i_1, ..., i_k, i_{k+1}, ..., i_n)$ y $\epsilon(i_j) := (e^{i_j}|e^{i_j})$.

Veamos que se cumple (1.1); de nuevo, basta ver qué ocurre para una base, de modo que consideramos $e^I = e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$ y $e^J = e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_k}$. Si $I \cap J \neq \varnothing$, entonces ambos lados de (1.1) se anulan:

$$e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} \wedge \star(e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_k}) = (e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}|e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_k})\eta = 0.$$

Por otro lado, si $J = I_{\hat{\sigma}}$, entonces $e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} = sgn(\hat{\sigma}) e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_k}$. Así

$$\begin{aligned}
&e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} \wedge \star(e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_k}) = \epsilon(j_1) \cdots \epsilon(j_k) sgn(\sigma) e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} \wedge (e^{j_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e^{j_n}) \\
&= sgn(\sigma) sgn(\hat{\sigma}) (e^{j_1}|e^{j_1}) \cdots (e^{j_k}|e^{j_k}) e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_k} \wedge (e^{j_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e^{j_n}) \\
&= (sgn(\hat{\sigma}) e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_k}|e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_k}) sgn(\sigma) e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_k} \wedge e^{j_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e^{j_n} \\
&= (e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}|e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_k}) e^1 \wedge \cdots \wedge e^n \\
&= (e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}|e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_k})\eta.
\end{aligned}$$

□

Veamos algunas propiedades más del operador de Hodge.

Proposición 1.6 *Sea (M, g) una n-variedad semi-riemanniana orientable, con forma de volumen η. Entonces*

$$\star(1) = \eta,$$
$$\star\eta = (-1)^s.$$

Demostración. Observemos que

$$\begin{aligned} 1 \wedge \star(1) &= \eta, \\ \eta \wedge \star\eta &= (\eta|\eta)\eta = (-1)^s\eta; \end{aligned}$$

entonces

$$\eta \wedge (\star\eta - (-1)^s) = 0,$$

por tanto $\star\eta = (-1)^s$.

$\square$

Lema 1.7 *Sea (M, g) una n-variedad semi-riemanniana orientable y sean $\alpha, \beta \in \Omega^p(M)$. Entonces*

$$(-1)^s(\alpha|\beta) = \star(\alpha \wedge \star\beta) = \star(\beta \wedge \star\alpha).$$

Proposición 1.8 *Sea (M, g) una n-variedad semi-riemanniana orientable. Entonces, para $\alpha \in \Omega^k(M)$,*

$$\star^2\alpha = (\star \circ \star)(\alpha) = (-1)^{k(n-k)+s}\alpha.$$

Demostración. Consideremos un comarco ortonormal $\{e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}\}$ de $\Omega^k(M)$. Veremos que

$$\star^2(e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}) = (-1)^{k(n-k)+s} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}.$$

Denotemos e^I y e^J como

$$\begin{aligned} e^I &= e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}, \\ e^J &= e^{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e^{i_n}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\star e^I = \epsilon(i_1) \cdots \epsilon(i_k) sgn(\sigma) e^J,$$

donde $\sigma(1, \ldots, n) = (i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}, \ldots, i_n)$. Por otro lado,

$$\star e^J = \epsilon(i_{k+1}) \cdots \epsilon(i_n) sgn(\delta) e^I$$

donde $\delta(1, \ldots, n) = (i_{k+1}, \ldots, i_n, i_1, \ldots, i_k)$. Observemos que $sgn(\sigma) = sgn(\sigma^{-1})$ y que $\delta \circ \sigma^{-1}(i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}, \ldots, i_n) = (i_{k+1}, \ldots, i_n, i_1, \ldots, i_k)$. Entonces

$$\begin{aligned} \star^2 e^I &= \star(\epsilon(i_1) \cdots \epsilon(i_k) sgn(\sigma) e^J) \\ &= \epsilon(i_1) \cdots \epsilon(i_k) sgn(\sigma) \star e^J \\ &= (e^I|e^I)(e^J|e^J) sgn(\sigma) sgn(\delta) e^I \\ &= \epsilon(i_1) \cdots \epsilon(i_k)\epsilon(i_{k+1}) \cdots \epsilon(i_n) sgn(\delta \circ \sigma^{-1}) e^I \\ &= (-1)^{k(n-k)+s} e^I. \end{aligned}$$

$\square$

Corolario 1.9 *Sea (M, g) un espacio-tiempo,entonces para $\alpha \in \Omega^k(M)$,*

$$\star^2\alpha = -(-1)^k\alpha.$$

En particular, esta expresión implica que el operador $\star$ es invertible y

$$\star^{-1}\alpha = -(-1)^k \star \alpha.$$

Proposición 1.10 *Sea (M, g) una n-variedad semi-riemanniana orientable y sean $\alpha, \beta \in \Omega^k(M)$. Entonces*

$$(\alpha|\beta) = (-1)^s(\star\alpha| \star \beta).$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned}(\alpha|\beta)\eta = (\alpha \wedge \star\beta) &= (-1)^{k(n-k)}(\star\beta \wedge \alpha)\\ &= (\star\beta \wedge (-1)^{k(n-k)}(-1)^{2s}\alpha)\\ &= (-1)^s(\star\beta \wedge \star^2\alpha)\\ &= (-1)^s(\star\beta| \star \alpha)\eta.\end{aligned}$$

□

1.3.2 Codiferencial

Sea M una variedad semi-riemanniana con signatura $(n - s, s)$. Definimos la codiferencial de la diferencial d como la función $d^* : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ tal que para $\alpha \in \Omega^k(M)$,

$$d^*\alpha = -(-1)^{n(k+1)+s} \star d \star \alpha.$$

En particular, si (M, g) es un espacio-tiempo y $\alpha \in \Omega^k(M)$,

$$d^*\alpha = \star d \star \alpha.$$

Definición 1.11 *Sea $\alpha \in \Omega^k(M)$. Definimos el laplaciano de α como*

$$\Delta\alpha = -\left(d^*d + dd^*\right)\alpha.$$

La codiferencial tiene las siguientes propiedades.

Proposición 1.12 *Sean (M, g) una n-variedad semi-riemanniana, $f \in \Omega^0(M)$ y $\alpha \in \Omega^k(M)$; entonces*

$$d^*f\alpha = fd^*\alpha - (-1)^{n(k+1)}(df|\alpha).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
d^* f\alpha &= -(-1)^{n(k+1)+s} \star d \star (f\alpha) \\
&= -(-1)^{n(k+1)+s} \star d(f \star \alpha) \\
&= -(-1)^{n(k+1)+s} \star (df \wedge \star\alpha + f d \star \alpha) \\
&= -(-1)^{n(k+1)+s} \star ((df|\alpha)\eta) + f d^*\alpha \\
&= -(-1)^{n(k+1)+s} (df|\alpha) \star (\eta) + f d^*\alpha \\
&= -(-1)^{n(k+1)} (df|\alpha) + f d^*\alpha
\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 1.13 *Sean (M, g) una n-variedad semi-riemanniana, X un campo vectorial y $\alpha \in \Omega^k(M)$, entonces*

$$i_X\alpha = (-1)^{n(k-1)+s} \star \left(X^\flat \wedge \star\alpha\right).$$

Demostración. Sean $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^{k-1}(M)$ y $\gamma : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ el operador definido como

$$(\gamma(\alpha)|\beta) = (\alpha|X^\flat \wedge \beta)$$

Notemos que este operador es único. Veamos que $\gamma(\alpha) = (-1)^{n(k-1)+s} \star \left(X^\flat \wedge \star\alpha\right)$

$$\begin{aligned}
\left(\star(X^\flat \wedge \star\alpha)\middle|\beta\right) &= (-1)^s \star \left(\star(X^\flat \wedge \star\alpha) \wedge \star\beta\right) \\
&= (-1)^s \star \left(\beta \wedge \star^2(X^\flat \wedge \star\alpha)\right)
\end{aligned}$$

Pero $\star^2(X^\flat \wedge \star\alpha) = (-1)^{(n-k+1)(n-(n-k+1))+s}(X^\flat \wedge \star\alpha)$, entonces

$$\begin{aligned}
\left(\star(X^\flat \wedge \star\alpha)\middle|\beta\right) &= (-1)^{(n-k+1)(n-(n-k+1))+s}(-1)^s \star \left(\beta \wedge X^\flat \wedge \star\alpha\right) \\
&= (-1)^{(n-k+1)(k-1)+s}(-1)^s \star \left(\alpha \wedge \star(\beta \wedge X^\flat)\right) \\
&= (-1)^{(n-k+1)(k-1)+s}(\alpha|\beta \wedge X^\flat) \\
&= (-1)^{(n-k+1)(k-1)+s}(-1)^{k-1}(\alpha|X^\flat \wedge \beta) \\
&= (-1)^{(n-k+1)(k-1)+s+k-1}(\gamma(\alpha)|\beta), \\
&= (-1)^{k(n-k)+s}(-1)^{-(k-1)^2+k-1}(\gamma(\alpha)|\beta) \\
&= (-1)^{k(n-k)+s}(\gamma(\alpha)|\beta).
\end{aligned}$$

Veamos que $(i_X\alpha|\beta) = (\alpha|X^\flat \wedge \beta)$. Sea $\{e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}\}$ una base ortonormal de $\Omega^k(M)$ y $\{E_i\}$ marco ortonormal de $\mathfrak{X}(M)$. Por linealidad basta demostrar que

$$(i_{E_j} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}|e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}) = (e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}|E_j^\flat \wedge e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_k})$$

Notemos que

$$\begin{aligned} i_{E_j} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}(e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}) =& e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}(E_j, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}) \\ =& (e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} | E_j^\flat \wedge e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}). \end{aligned}$$

Por otro lado, $i_{E_j} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}(e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}) = (i_{E_j} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} | e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_k})$, y así $(i_X \alpha | \beta) = (\alpha | X^\beta \wedge \beta)$. De lo anterior podemos concluir que $i_X \alpha = (-1)^{n(k-1)+s} \star \left(X^\flat \wedge \star\alpha\right)$.

□

Corolario 1.14 *Sean (M, g) un espacio-tiempo, X un campo vectorial y $\alpha \in \Omega^1(M)$, entonces*

$$\begin{aligned} i_X \alpha &= - \star \left(X^\flat \wedge \star\alpha\right) \\ i_X \star \alpha &= \star \left(\alpha \wedge X^\flat\right). \end{aligned}$$

Proposición 1.15 *Sean (M, g) un espacio-tiempo, X y Y campos vectoriales en M y $\alpha \in \Omega^1(M)$; entonces*

$$(X|Y)(\alpha|\alpha) = (X^\flat \wedge \alpha | Y^\flat \wedge \alpha) - (X^\flat \wedge \star\alpha | Y^\flat \wedge \star\alpha) = (i_X \alpha | i_Y \alpha) - (i_X \star \alpha | i_Y \star \alpha).$$

1.4 La derivada de Lie

Sea M una n-variedad suave, V un campo vectorial sobre M y θ_t el flujo de V. Si A es un tensor covariante sobre M, la derivada de Lie de A respecto a V es el tensor covariante $L_V A$ definido como

$$(L_V A)_p = \frac{d}{dt}|_{t=0} (\theta_t^* A)_p = \lim_{t \to 0} \frac{d(\theta_t)_p^* \left(A_{\theta_t(p)}\right) - A_p}{t}.$$

La derivada de Lie tiene las siguientes propiedades.

Proposición 1.16 *Sean M una variedad suave, $V \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in C^\infty(M)$; entonces*

$$\begin{aligned} L_V f &= V f, \\ L_V(fA) &= (L_V f)A + f L_V A, \end{aligned}$$

Proposición 1.17 *Sea M una variedad suave, $V \in \mathfrak{X}(M)$ y $\omega, \eta \in \Omega^k(M)$; entonces*

$$L_V(\omega \wedge \eta) = (L_V \omega) \wedge \eta + \omega \wedge (L_V \eta).$$

Proposición 1.18 *Sea M una variedad suave, $V \in \mathfrak{X}(M)$ y $\omega \in \Omega^k(M)$; entonces*

$$L_V \omega = i_V d\omega + d(i_V \omega).$$

Corolario 1.19 *Si $f \in C^\infty(M)$, entonces $L_V(df) = d(L_V f)$.*

1.5 Teorema de Frobenius

El teorema de Frobenius será fundamental para la resolución de las ecuaciones de Einstein.

Definición 1.20 *Sea M una variedad suave, una k-distribución D sobre M es un k-subhaz de TM.*

Definición 1.21 *Una distribución D es integrable si existe una subvariedad M tal que, para cada $p \in M$, $T_pM = D_p$. Cuando ésta exista, se le llama una variedad integral de D. Decimos que una distribución D es integrable sobre M si para cada punto de M, es elemento de una subvariedad integral de D.*

El teorema de Frobenius nos dice qué tenemos que pedirle a la distribución para que exista una subvariedad integral de M.

Definición 1.22 *Sea M una variedad suave y D una k-distribución suave sobre M, decimos que D es involutiva si para X, Y secciones locales de D, se tiene que $[X, Y]$ es una sección local de D.*

Definición 1.23 *Sea M una n-variedad suave y D una k-distribución. Decimos que una p-forma ω anula a D si para cualesquiera secciones locales de D, $X_1, \ldots, X_p$, se tiene que $\omega(X_1, \ldots, X_p) = 0$.*

Proposición 1.24 *Sean D una k-distribución suave sobre una n-variedad M y $\omega^1, \ldots, \omega^{n-k}$ 1-formas tales que anulan a D en un subconjunto abierto $U \subseteq M$. Entonces D es involutiva sobre U si y sólo si existen 1-formas $\alpha^i_j : i, j = 1, \ldots, n-k$ tal que para cada $i = 1, \ldots, n-k$ se tiene que*

$$d\omega^i = \sum_{j=1}^{n-k} \omega^j \wedge \alpha^i_j.$$

Por ultimo, el teorema de Frobenius.

Teorema 1.25 (Frobenius) *Toda distribución involutiva es integrable.*

1.6 Ecuaciones de Einstein

En esta sección se dará una breve introducción a las ecuaciones de Einstein, ya que nuestro objetivo es demostrar la unicidad de una solución a estas ecuaciones. La relatividad general es muy amplia, usualmente se requiere de estudiar geometría riemanniana. y ya que se tienen las suficientes herramientas, se puede entrar de lleno al tema. En relatividad general se suele expresar todas las ecuaciones tensoriales en términos de componentes. Las ecuaciones de campo de Einstein se escriben, muy esquemáticamente como:

RICCI=MATERIA

Donde MATERIA es un tensor $(0,2)$-covariante llamado tensor de energía-momento que organiza toda la información pertinente acerca de la energía, la presión y momento de la materia y los campos electromagnéticos. Las ecuaciones de Einstein de manera formal son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}, \tag{1.2}$$

donde R es la curvatura escalar y T es un tensor de energía-momento. Notemos que si calculamos la traza a la ecuación anterior obtenemos

$$R^{\mu}_{\mu} - \frac{1}{2}g^{\mu}_{\mu}R = 8\pi T^{\mu}_{\mu}, \text{ de donde } R = -8\pi T^{\mu}_{\mu}.$$

Sustituyendo a R en la ecuación 1.2 y reordenando, tenemos que

$$R_{\mu\nu} = 8\pi\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^{\lambda}_{\lambda}\right). \tag{1.3}$$

El lado izquierdo de la ecuación anterior habla de la geometría y nos dice cómo se curva la variedad en la que estamos, en este caso un espacio-tiempo. Por otro lado la parte derecha nos habla de física y en el tensor T está contenida la información de cómo se distribuye la materia y la energía. En palabras del físico estadounidense John Archibald Wheeler,

> *la materia dice al espacio-tiempo cómo curvarse, y el espacio-tiempo dice a la materia cómo moverse.*

En la relatividad general, la materia y la energía son las causantes de la deformación del espacio. Las ecuaciones de Einstein forman un sistema de ecuaciones parciales no lineales acoplado para la métrica $g_{\mu\nu}$, entonces son muy difíciles de resolver dada la distribución de materia $T_{\mu\nu}$. Por suerte para nosotros, las ecuaciones se simplifican en el vacío, es decir, cuando no hay materia ($T_{\mu\nu} = 0$); las ecuaciones de Einstein 1.3 quedan como $R_{\mu\nu} = 0$. Así, estamos buscando soluciones que sean Ricci-planas.

Una solución a las ecuaciones anteriores es el espacio de Minkowski $\mathbb{R}^4_1$ con la métrica en coordenadas cartesianas (t, x, y, z)

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Imponiendo algunas simetrías al espacio-tiempo, como simetría esférica y simetría temporal, podemos resolver de manera analítica $R_{\mu\nu} = 0$. Éste es el caso de la métrica de Schwarzschild, la cual modela el campo gravitacional exterior de una masa esférica estática o un agujero negro esférico y estático. En coordenadas esféricas (t, r, θ, φ) la métrica se ve como

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2),$$

donde M se interpreta como la masa de la estrella o del agujero negro, Hay más ejemplos de soluciones analíticas a las ecuaciones de Einstein, pero aquí nos concentraremos en una solución particular, la métrica de Kerr. Se podría hacer una tesis sólo para describir su geometría, por lo que seré breve. La métrica de Kerr, al igual que la de Schwarzschild, puede modelar el campo gravitacional exterior a una masa esférica o un agujero negro, pero esta vez ya no es estática, ahora la estrella está rotando. Aquí supondremos de manera informal que estamos resolviendo las ecuaciones de Einstein en el vacío, en un espacio-tiempo con simetría temporal y simetría axial. Ya se verá en el siguiente capítulo que estas simetrías se reflejan en la existencia de campos de Killing. Pero ¡resolver las ecuaciones con estas simetrías no es la cosa más sencilla de hacer! La métrica en coordenadas esféricas (t, r, θ, φ) es

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \\ &+ \left[r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{\rho^2}\right] \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2 + 2\left(\frac{-2Mra \operatorname{sen}^2 \theta}{\rho^2}\right) dt d\varphi, \end{aligned}$$

donde M y a la masa de la estrella y a es la densidad de momento angular; además,

$$\begin{aligned} \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\ \Delta &= r^2 - 2Mr + a^2. \end{aligned}$$

Notemos que si $a = 0$ regresamos a la métrica de Schwarzschild. Por otro lado, si $M = 0$, entonces la métrica anterior se ve como

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{r^2 + a^2 \cos \theta^2}{r^2 + a^2} dr^2 + (r^2 + a^2 \cos \theta^2) d\theta^2 + (r^2 + a^2) \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2,$$

y bajo la transformación de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{r^2 + a^2} \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \\ y &= \sqrt{r^2 + a^2} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \\ z &= r \cos \varphi, \end{aligned}$$

se obtiene la métrica de Minkowski en coordenadas cartesianas.

También observemos que la métrica no depende de t y de φ, por lo que tiene **simetría temporal** y **simetría axial**. Esta solución la encontró por accidente el matemático neozelandés Roy Kerr en la década de 1960. Noten que sólo depende de dos parámetros, la masa M y la densidad de momento angular a.

Podemos pensar que en el momento en el que una estrella está colapsando, el agujero negro que se forme dependerá de varios parámetros, como la composición de la estrella, la estructura interna, la temperatura, etcétera; es decir, habría tantos agujeros negros distintos como estrellas en el universo, pero no es así. Los teoremas de no pelo limitan el número de cantidades físicas que determinan a un agujero negro. Si suponemos que la métrica del espacio-tiempo se comporta como la métrica de Minkowski cuando se aleja de la estrella que está colapsando y que posee además otras simetrías, mostraremos que las soluciones a las ecuaciones de Einstein en el vacío que describen a un agujero negro están determinadas sólo por dos parámetros, la masa M de la estrella y la densidad de momento angular a. Esto se da después del colapso gravitacional; antes de ese momento, la estrella depende de muchos parámetros (digamos, tiene mucho pelo), pero al colapsar toda esa información se pierde, y quedan solo dos parámetros, es decir no tiene pelo.

Capítulo II
Simetrías en el espacio-tiempo

> *Si tú [querido lector] te sientes aburrido con este tedioso método de cálculo, ten piedad de mí, que tuve que recorrerlo totalmente al menos con 70 repeticiones, con gran pérdida de tiempo; y no te sorprendas al saber que en estos momentos está a punto de transcurrir el quinto año desde que emprendí mi trabajo sobre Marte. – Johannes Kepler*

En la primera sección de este capítulo se verán algunas relaciones fundamentales de los campos de Killing, se definirá el twist y la 1-forma de Ricci; con estas relaciones se demostrará que la diferencial y el twist están dados en términos de la 1-forma de Ricci. La 1-forma, el potencial y la ecuación de Ernst se concretarán en la segunda sección. En la tercera sección serán descritas las simetrías que impondremos al espacio-tiempo; a saber, ser axisimétrico y estacionario. Con estas simetrías y sus campos de Killing asociados se construirá una distribución, la cual resultará integrable si el tensor de Ricci es nulo; esto es, si estamos resolviendo las ecuaciones de Einstein en el vacío. En la última sección se verán más identidades de Killing y se definirá la 2-forma de Killing.

2.1 | Campos de Killing

Definición 2.1 *Sean (M, g) una variedad semi-riemanniana y $K \in \mathfrak{X}(M)$. Decimos que K es un campo vectorial de Killing si*

$$L_K g = 0.$$

A partir de este momento se hará el siguiente abuso de notación: para un campo K ocuparemos la misma letra K para el dual $K^\flat$. En el caso de que K aparezca en un producto cuña, lo interpretaremos como su dual y en otro caso será el campo vectorial K.

Los campos de Killing tienen las siguientes propiedades.

Proposición 2.2 *Sean (M, g) una variedad semi-riemanniana y $K \in \mathfrak{X}(M)$; entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *K es un campo de Killing.*

(2) *Para $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, $Kg(V, W) = g([K, V], W) + g(V, [K, W])$.*

(3) *Para $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, $g(\nabla_V K, W) + g(\nabla_W K, V) = 0$.*

Recordemos que para $\alpha \in \Omega^k(M)$, se tiene que $dL_K\alpha = L_K d\alpha$; es decir, la derivada de Lie conmuta con la diferencial. Resulta que el operador de Hodge también conmuta con la derivada de Lie.

Lema 2.3 *Sean (M, g) una variedad semi-riemanniana orientable, $K \in \mathfrak{X}(M)$ un campo de Killing y $\alpha \in \Omega^1(M)$; entonces*

$$d^*K = 0, \text{ de modo que } \Delta K = -d^*dK. \tag{2.1}$$

$$\star L_K\alpha = L_K \star \alpha. \tag{2.2}$$

Demostración. Sea K un campo de Killing. Recordemos que la divergencia de un campo en una variedad se define como $div(K) = \star^{-1}d(i_K\eta)$, donde η es la forma de volumen. Además $i_K\eta = (-1)^{n(n-1)+s} \star (K \wedge \star\eta) = (-1)^{n(n-1)+2s} \star K = \star K$. Entonces

$$div(K) = \star^{-1}d(i_K\eta) = \star^{-1}d \star K = -d^*K.$$

Como K es de Killing, $div(K) = 0$, por tanto $d^*K = 0$.

Para demostrar (2.2), sea $\beta \in \Omega^1(M)$, entonces

$$\begin{aligned} L_K(\beta \wedge \star\alpha) &= L_K((\beta|\alpha)\eta) = (\beta|\alpha)L_K\eta + K(\beta|\alpha)\eta \\ &= (\beta|\alpha)div(K)\eta + (L_K\beta|\alpha)\eta + (\beta|L_K\alpha)\eta. \end{aligned}$$

Como K es un campo de Killing, $div(K) = 0$. Usando la Proposición 1.17, tenemos

$$L_K\beta \wedge \star\alpha + \beta \wedge L_K \star \alpha = (L_K\beta|\alpha)\eta + (\beta|L_K\alpha)\eta = L_K\beta \wedge \star\alpha + \beta \wedge \star L_K\alpha,$$

por lo que

$$\beta \wedge L_K \star \alpha = \beta \wedge \star L_K\alpha.$$

$\square$

Lema 2.4 *Sean (M, g) un espacio-tiempo, $K \in \mathfrak{X}(M)$ un campo de Killing y $\alpha \in \Omega^1(M)$; entonces*

$$d^*(K \wedge \alpha) + K \wedge d^*\alpha = -L_K\alpha. \tag{2.3}$$

Demostración. Usando la identidad de Cartan (1.18) y la Proposición 1.13, se tiene que

$$\begin{aligned}
\star L_K\alpha &= L_K \star \alpha \\
&= d\left(i_K \star \alpha\right) + i_K\left(d \star \alpha\right) \\
&= d\left(\star\left(\alpha \wedge K\right)\right) - \star\left(K \wedge \star d \star \alpha\right) \\
&= -d\left(\star\left(K \wedge \alpha\right)\right) - \star\left(K \wedge d^*\alpha\right) \\
&= -\star d^*\left(K \wedge \alpha\right) - \star\left(K \wedge d^*\alpha\right).
\end{aligned}$$

Usando la identidad (2.2) del lado izquierdo de la igualdad anterior, se concluye el resultado. $\square$

La forma de relacionar al tensor de Ricci con los campos de Killing para resolver las ecuaciones de Einstein es a través de la 1-forma de Ricci.

Definición 2.5 *Sean (M,g) una variedad semi-riemanniana orientable y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Definimos la 1-forma de Ricci $R(X)$ respecto a X como*

$$R(X) := R(X,\cdot).$$

El siguiente Teorema relaciona el laplaciano de un campo de Killing con la 1-forma de Ricci.

Teorema 2.6 *Sean (M,g) una variedad semi-riemanniana orientable y $K \in \mathfrak{X}(M)$ un campo de Killing; entonces*

$$\Delta K = -2R(K).$$

Demostración. Notemos que si K es un campo de Killing se tiene que $d^*K = 0$. Entonces debemos demostrar que

$$d^*dK = 2R(K).$$

Para la demostración usaremos algunas notaciones e identidades. Si F es un tensor suave de tipo (k,l), entonces la segunda derivada covariante $\nabla^2 F = \nabla(\nabla F)$ es un tensor suave de tipo $(k, l+2)$. Si X, Y son dos campos, la notación $\nabla^2_{X,Y}F$ denota $\nabla^2 F(\ldots, Y, X)$. Por otro lado, $\mathcal{R}(X,Y)^* : T^*M \to T^*M$ es la transformación dual del tensor de Riemann $\mathcal{R}(X,Y)$ definida como

$$\left(\mathcal{R}(X,Y)^*\beta\right)(Z) = \beta\left(\mathcal{R}(X,Y)Z\right),$$

donde β es una 1-forma y Z un campo. Entonces se tiene que

$$\nabla^2_{X,Y}\beta - \nabla^2_{Y,X}\beta = -\mathcal{R}(X,Y)^*\beta. \tag{2.4}$$

Para ω una 1-forma se tiene que

$$(d\omega)(X,Y) = (\nabla_X\omega)(X) - (\nabla_Y\omega)(X).$$

Si K es un campo de Killing, entonces

$$\nabla K(X,Y) = -\nabla K(Y,X). \tag{2.5}$$

Finalmente si $\{E_1,\ldots,E_n\}$ es un marco ortonormal, la codiferencial de α una 1-forma se puede expresar como

$$d^*\alpha = -\sum_{j=1}^{n} i_{E_j}\nabla_{E_j}\alpha.$$

Usando (2.5) se puede ver que

$$(\nabla^2_{Y,X}K)(Z) = -(\nabla^2_{Y,Z}K)(X).$$

Así sustituyendo en (2.4), se tiene que

$$(\nabla^2_{X,Y}K)(Z) + (\nabla^2_{Y,Z}K)(X) = -(\mathcal{R}(X,Y)^*K)(Z). \tag{2.6}$$

Si permutamos X, Y, Z de la identidad anterior, entonces

$$(\nabla^2_{Y,Z}K)(X) + (\nabla^2_{Z,X}K)(Y) = -(\mathcal{R}(Y,Z)^*K)(X) \tag{2.7}$$
$$(\nabla^2_{Z,X}K)(Y) + (\nabla^2_{X,Y}K)(Z) = -(\mathcal{R}(Z,X)^*K)(Y). \tag{2.8}$$

Sumando (2.6), (2.7) y restando (2.8) se tiene que

$$\begin{aligned}
2(\nabla^2_{Y,Z}K)(X) &= -K(\mathcal{R}(X,Y)Z + \mathcal{R}(Y,Z)X - \mathcal{R}(Z,X)Y) \\
&= 2K(\mathcal{R}(Z,X)Y) \\
&= 2g(\mathcal{R}(Z,X)Y,K).
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$(\nabla^2_{Y,Z}K)(X) = R(Z,X,Y,K) = R(Y,K,Z,X). \tag{2.9}$$

Para un marco ortonormal $\{E_1,\ldots,E_n\}$ de M, la 1-forma de Ricci de K se puede expresar como

$$R(K)(X) = R(K,X) = \sum_{j=1}^{n} R(E_j,K,X,E_j).$$

Entonces sustituyendo E_j en (2.9)

$$R(E_j,K,X,E_j) = (\nabla^2_{E_j,X}K)(E_j).$$

Ahora veamos que $(i_{E_j}\nabla_{E_j}dK)(X) = -2(\nabla^2_{E_j,X}K)(E_j)$:

$$
\begin{aligned}
(i_{E_j}\nabla_{E_j}dK)(X) =& (\nabla_{E_j}dK)(E_j,X)\\
=& E_j(dK(E_j,X)) - dK(\nabla_{E_j}E_j,X) - dK(E_j,\nabla_{E_j}X)\\
=& E_j((\nabla_{E_j}K)(X) - (\nabla_X K)(E_j)) - \Big[(\nabla_{\nabla_{E_j}E_j}K)(X) - (\nabla_X K)(\nabla_{E_j}E_j)\Big]\\
& - \Big[(\nabla_{E_j}K)(\nabla_{E_j}X) - (\nabla_{\nabla_{E_j}X}K)(E_j)\Big]\\
=& E_j((\nabla_{E_j}K)(X)) - (\nabla_{\nabla_{E_j}E_j}K)(X) - (\nabla_{E_j}K)(\nabla_{E_j}X)\\
& - \Big[E_j((\nabla_X K)(E_j)) - (\nabla_{\nabla_{E_j}X}K)(E_j) - (\nabla_X K)(\nabla_{E_j}E_j)\Big]\\
=& E_j((\nabla K)(X,E_j)) - (\nabla K)(\nabla_{E_j}X,E_j) - (\nabla K)(X,\nabla_{E_j}E_j)\\
& - \big[E_j((\nabla K)(E_j,X)) - (\nabla K)(\nabla_{E_j}E_j,X) - (\nabla K)(E_j,\nabla_{E_j}X)\big]\\
=& (\nabla_{E_j}\nabla K)(X,E_j) - (\nabla_{E_j}\nabla K)(E_j,X)\\
=& (\nabla^2_{E_j,E_j}K)(X) - (\nabla^2_{E_j,X}K)(E_j)\\
=& -(\nabla^2_{E_j,X}K)(E_j) - (\nabla^2_{E_j,X}K)(E_j)\\
=& -2(\nabla^2_{E_j,X}K)(E_j).
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$(i_{E_j}\nabla_{E_j}dK)(X) = -2(\nabla^2_{E_j,X}K)(E_j) = -2R(E_j,K,X,E_j).$$

Entonces

$$(d^*dK)(X) = -\sum_{j=1}^{n}(i_{E_j}\nabla_{E_j}dK)(X) = 2\sum_{j=1}^{n}R(E_j,K,X,E_j) = 2R(K)(X).$$

Y así

$$\Delta K = -2R(K).$$

$\square$

Definición 2.7 *Sean (M,g) una variedad semi-riemanniana orientable y K un campo de Killing. Definimos la norma y el twist de K, como la función $N \in \Omega^0(M)$ y la 1-forma $\omega \in \Omega^1(M)$*

$$N := (K \mid K)\,, \qquad \omega := \frac{1}{2}\star(K\wedge dK)$$

Lema 2.8 *Sea (M,g) un espacio-tiempo y K un campo de Killing tal que $N \neq 0$. Entonces*

$$-dK = \frac{1}{N}\left[2\star(K\wedge\omega) + K\wedge dN\right], \tag{2.10}$$

$$(dK|dK) = (dN|dN) - (\omega|\omega). \tag{2.11}$$

Demostración. Usaremos las identidades de la derivada exterior en la proposición 1.1 y del operador de Hodge de la proposición 1.13. Veamos que $i_K(K \wedge dK) = -2 \star (K \wedge \omega)$ y $i_K dK = -dN$:

$$i_K(K \wedge dK) = -\star(K \wedge \star(K \wedge dK)) = -2 \star (K \wedge \frac{1}{2} \star (K \wedge dK)) = -2 \star (K \wedge \omega).$$

Por otro lado, para un campo X se tiene que

$$\begin{aligned}(i_K dK)(X) &= (dK)(K, X) \\ &= KK(X) - XK(K) - K([K, X]) \\ &= Kg(K, X) - g(K, [K, X]) - Xg(K, K) \\ &= -XN \\ &= -(dN)(X).\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}N^{-1}[2 \star (K \wedge \omega) + K \wedge dN] &= N^{-1}[-i_K(K \wedge dK) - K \wedge i_K dK] \\ &= N^{-1}[-i_K K \wedge dK] \\ &= -N^{-1}[i_K K dK] \\ &= -N^{-1}(N dK) = -dK.\end{aligned}$$

Con lo cual se demuestra (2.10).

Veamos qué ocurre con la segunda igualdad:

$$\begin{aligned}N\,(dK \mid dK) &= N\left(-N^{-1}\,[2 \star (K \wedge \omega) + K \wedge dN] \mid -N^{-1}\,[2 \star (K \wedge \omega) + K \wedge dN]\right) \\ &= N^{-1}\,[4\,(\star(K \wedge \omega) \mid \star(K \wedge \omega)) + 2(2 \star (K \wedge \omega)|K \wedge dN) + (K \wedge dN|K \wedge dN)].\end{aligned}$$

Ahora notemos que $(K|\omega) = 0$:

$$\begin{aligned}(K|\omega)\eta &= -K \wedge \star\left(\frac{1}{2} \star (K \wedge dK)\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(K \wedge \star^2(K \wedge dK)\right) \\ &= \frac{1}{2}\,(K \wedge K \wedge dK) = 0.\end{aligned}$$

Como $(\alpha|\beta)\eta = -(\star\alpha| \star \beta)\eta$,

$$\begin{aligned}4\,(\star\,(K \wedge \omega) \mid \star\,(K \wedge \omega)) &= -4\,((K \wedge \omega) \mid (K \wedge \omega)) \\ &= -4\left[(K|K)(\omega|\omega) - (K|\omega)^2\right] \\ &= -4(K|K)(\omega|\omega) \\ &= -4N(\omega|\omega).\end{aligned}$$

Veamos que $(\star(K\wedge\omega)|K\wedge dN)=0$:

$$(\star(K\wedge\omega)|K\wedge dN)\,\eta=-K\wedge dN\wedge\star^2(K\wedge\omega)=K\wedge dN\wedge K\wedge\omega=0.$$

Para el tercer término, notemos que $(K|dN)=0$:

$$(K|dN)=(K|d(K|K))=(K|L_Kg(K,K))=(K|0)=0,$$

por lo que

$$(K\wedge dN|K\wedge dN)=(K|K)(dN|dN)-(K|dN)^2=(K|K)(dN|dN)=N(dN|dN).$$

Así,

$$\begin{aligned}N\,(dK\mid dK)&=N^{-1}\left[4\left(\star(K\wedge\omega)\mid\star(K\wedge\omega)\right)\right]\\&\quad+N^{-1}\left[(2\star(K\wedge\omega)|K\wedge dN)+(K\wedge dN|K\wedge dN)\right]\\&=N^{-1}\left[-4N(\omega|\omega)+N(dN|dN)\right]\\&=(dN|dN)-4(\omega|\omega).\end{aligned}$$

□

Teorema 2.9 *Sea (M,g) un espacio-tiempo una variedad orientable. La derivada exterior $d\omega$, la codiferencial $d^*\omega$ y la norma $(\omega|\omega)$ del twist están dadas en términos de la 1-forma de Ricci como*

$$\begin{aligned}d\omega&=\star(K\wedge R(K))\\d^*\omega&=-2N^{-1}(\omega|dN)\\(\omega|\omega)&=\frac{1}{4}\left[(dN|dN)-N\Delta N-2NR(K,K)\right].\end{aligned}$$

Demostración. Veamos la primera igualdad. Para $\alpha\in\Omega^k(M)$ se tiene que $\star^2\alpha=-(-1)^k\alpha$ y por el lema 2.3

$$\begin{aligned}2d\omega&=2d\left(\frac{1}{2}\star(K\wedge dK)\right)\\&=-\left(-d\star(K\wedge dK)\right)\\&=-\star^2 d\star(K\wedge dK)&&(2.12)\\&=-\star d^*(K\wedge dK)\\&=\star L_K dK+\star(K\wedge d^*dK)\,.&&(2.13)\end{aligned}$$

Además, por definición, $\Delta K=-d^*dK$ y $L_KdK=dL_KK=0$, así que por la ecuación (2.13),

$$\star L_KdK-\star(K\wedge -d^*dK)=-\star(K\wedge\Delta K)\,.$$

Por el Lema 2.3, $\Delta K = -2R(K)$; entonces

$$d\omega = \star\left(K \wedge R(K)\right).$$

Veamos la segunda igualdad. Por el Lema 2.8,

$$\begin{aligned}
d(N^{-1}K) &= d(N^{-1}) \wedge K + N^{-1}dK \\
&= -N^{-2}dN \wedge K + N^{-1}dK \\
&= -N^{-2}dN \wedge K + N^{-2}\left[2\star(K \wedge \omega) - K \wedge dN\right] \\
&= N^{-2}\left(-dN \wedge K + dN \wedge K - 2\star(K \wedge \omega)\right) \\
&= N^{-2}\left(-2\star(K \wedge \omega)\right) \\
&= -2\star\left(K \wedge \frac{\omega}{N^2}\right).
\end{aligned}$$

Además,

$$L_K N = KN = Kg(K,K) = g([K,K],K) + g(K,[K,K]) = 0.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
L_K\omega &= L_K\left(\frac{1}{2}\star(K \wedge dK)\right) \\
&= \frac{1}{2}\star L_K(K \wedge dK) \\
&= \frac{1}{2}\star\left(L_K K \wedge dK + K \wedge L_K dK\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por otro lado, por el mismo lema 2.8 y el hecho de que $L_K N = L_K\omega = 0$,

$$\begin{aligned}
K \wedge d^*(N^{-2}\omega) &= -d^*(K \wedge N^{-2}\omega) - L_K(N^{-2}\omega) \\
&= -d^*(K \wedge N^{-2}\omega) - L_K(N^{-2})\omega - N^{-2}L_K\omega \\
&= -d^*(K \wedge N^{-2}\omega) + (2N^{-3}L_K N)\omega - N^{-2}L_K\omega \\
&= -d^*(K \wedge N^{-2}\omega).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
K \wedge d^*(N^{-2}\omega) &= -d^*\left(K \wedge \frac{\omega}{N^2}\right)\\
&= \frac{1}{2}d^*\left(2\star^2\left(K \wedge \frac{\omega}{N^2}\right)\right)\\
&= -\frac{1}{2}d^*\star\left(-2\star\left(K \wedge \frac{\omega}{N^2}\right)\right)\\
&= -\frac{1}{2}d^*\star d(N^{-1}K)\\
&= -\frac{1}{2}\star d\star^2 d(N^{-1}K)\\
&= \frac{1}{2}\star d^2(N^{-1}K)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

por lo que

$$Kd^*(N^{-2}\omega) = K \wedge d^*(N^{-2}\omega) = 0, \quad d^*(N^{-2}\omega) = 0.$$

Entonces por la Proposición 1.1,

$$0 = d^*(N^{-2}\omega) = N^{-2}d\omega - (d(N^{-2})|\omega) = N^{-2}d\omega + 2N^{-3}(dN|\omega).$$

Así,

$$d\omega = -2\frac{(dN|\omega)}{N}.$$

En seguida se demostrará la tercera igualdad. Se puede notar que $\Delta N = -d^*dN$ y $dN = -i_K dK = \star(K \wedge \star dK)$. Ahora,

$$\begin{aligned}
-\Delta N &= d^*\star(K \wedge \star dK)\\
&= \star d\star^2(K \wedge \star dK)\\
&= \star d(K \wedge \star dK)\\
&= \star(dK \wedge \star dK - K \wedge d\star dK)\\
&= \star((dK|dK)\eta - K \wedge \star^2 d\star dK)\\
&= \star((dK|dK)\eta + K \wedge \star\Delta K)\\
&= \star((dK|dK)\eta + (K|\Delta K)\eta)\\
&= (dK|dK) + (K|\Delta K)\\
&= \frac{1}{N}\left[(dN|dN) - 4(\omega|\omega)\right] + (K|\Delta K).
\end{aligned}$$

Entonces, ya que $R(K,K) = (K|R(K))$,

$$\begin{aligned}
(\omega|\omega) &= \frac{1}{4}\left[(dN|dN) - N\Delta N + N(K| - 2R(K))\right]\\
&= \frac{1}{4}\left[(dN|dN) - N\Delta N - 2NR(K,K)\right].
\end{aligned}$$

$\square$

2.2 | 1-forma de Ernst

En electroestática, dada una distribución de carga se quiere resolver la siguiente ecuación

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0},$$

donde $\vec{E}$ es el campo eléctrico. $\vec{E}$ tiene tres componentes, entonces hay que resolver tres ecuaciones, una para cada componente. Pero podemos reducirla a encontrar una función. Pues si $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$, existe una función ϕ, tal que $\vec{E} = -\nabla\phi$. A la función ϕ se le llama potencial eléctrico y hay una manera de calcularla. Así reducimos el problema de encontrar tres componentes a sólo uno. De manera parecida se hará para reducir las ecuaciones de Einstein.

El Teorema 2.9 establece la relación entre la diferencial de el twist y la 1-forma de Ricci. Recordemos de la sección 1.6 que si estamos en el vacío, las ecuaciones de Einstein se reducen a $R_{\mu\nu} = 0$. Entonces, si el tensor de Ricci es nulo, la 1-forma de Ricci también lo es y por tanto $d\omega = 0$. El Lema de Poincaré nos dice que existe una función Y tal que $\omega = dY$. Más aún, si $N = (K|K)$, sabemos que $ddN = 0$, de modo que existe una función f, tal que $df = dN$. El físico Frederick J. Ernst encontró una ecuación diferencial para determinar a f y Y. Si logramos determinarlos, podemos hallar al twist ω y a la norma N.

En el siguiente capítulo, una de nuestras incógnitas será uno de los componentes de la métrica g de nuestro espacio-tiempo (M, g). Resultará ser la norma y el twist del campo de Killing correspondiente a la simetría axial. Así, la idea de la demostración de la unicidad de la métrica del espacio-tiempo M, con las simetrías impuestas, es reducir las ecuaciones de Einstein en términos de la norma del campo asociado a la simetría axial y la función Y tal que $dY = \omega$, sujetas a la ecuación de Ernst, para luego suponer que existen otras funciones $\hat{f}$ y $\hat{Y}$ que satisfacen la ecuación de Ernst y demostrar que $\hat{f} = f$ y $\hat{Y} = Y$.

Dadas $\alpha, \omega \in \Omega^k(M)$, decimos que $\xi := \alpha + i\omega$ es una k-forma compleja. Definimos el producto exterior de $\xi = \alpha + i\omega$ y $\zeta = \varphi + i\psi$ de la siguiente manera:

$$\xi \wedge \zeta := (\alpha + i\omega) \wedge (\varphi + i\psi) = (\alpha \wedge \varphi - \omega \wedge \psi) + i(\alpha \wedge \psi + \omega \wedge \varphi).$$

La derivada exterior d y el operador estrella $\star$ opera sobre ξ de manera natural como
$d\xi = d\alpha + id\omega$ y $\star\xi = \star\alpha + i \star \omega$. Se puede verificar que

$$\xi \wedge \zeta = (\xi|\zeta)\eta.$$

Definición 2.10 *Sean (M, g) una variedad semi-riemanniana orientable, $K \in \mathfrak{X}(M)$ un campo de Killing, N la norma y ω el twist de K. Definimos la 1-forma compleja de Ernst como*

$$\mathcal{E} = -dN + 2i\omega.$$

Proposición 2.11 *Sea (M, g) un espacio-tiempo. Entonces para la 1-forma de Ernst se cumple lo siguiente:*

$$d\mathcal{E} = 2i \star (K \wedge R(K)), \tag{2.14}$$

$$d^*\mathcal{E} - N^{-1}(\mathcal{E}|\mathcal{E}) = -2(K|R(K)). \tag{2.15}$$

Demostración. Por el Teorema 2.9,

$$d\mathcal{E} = d(-dN + 2i\omega) = 2id\omega = 2i \star (K \wedge R(K)).$$

Para la segunda igualdad,

$$\begin{aligned} d^*\mathcal{E} &= d^*(-dN + 2i\omega) \\ &= -d^*dN + 2id^*\omega \\ &= \Delta N + 2i(-2N^{-1}(\omega|dN)) \\ &= \Delta N - 4iN^{-1}(\omega|dN). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} d^*\mathcal{E} - N^{-1}(\mathcal{E}|\mathcal{E}) &= d^*\mathcal{E} - N^{-1}\left[(-dN + 2i\omega| - dN + 2i\omega)\right] \\ &= d^*\mathcal{E} - N^{-1}\left[(dN|dN) - 4i(dN|\omega) - (\omega|\omega)\right] \\ &= \Delta N - 4iN^{-1}(\omega|dN) - N^{-1}(dN|dN) + 4iN^{-1}(dN|\omega) + N^{-1}(\omega|\omega) \\ &= \Delta N - N^{-1}(dN|dN) + N^{-1}(\omega|\omega) \\ &= -2(K|R(K)). \end{aligned}$$

□

Teorema 2.12 *(Lema de Poincaré). Si U es un subconjunto abierto estrellado de $\mathbb{R}^n$, entonces cada 1-forma cerrada en U es exacta.*

Corolario 2.13 *Sea M una variedad diferenciable orientable y $\omega \in \Omega^1(M)$ cerrada, entonces cualquier punto en M tiene una vecindad donde ω es exacta.*

Teorema 2.14 *Sea M una variedad orientable. Si $d\mathcal{E} = 0$, entonces existe $E \in \Omega^0(M)$ tal que $\mathcal{E} = dE$.*

Definición 2.15 *Definimos el potencial de Ernst como la función compleja E, tal que*

$$\mathcal{E} = dE.$$

Si $X = (m|m)$ es la norma del campo de Killing asociado a la simetría axial y $\omega_m = 1/2 \star (m \wedge dm)$, entonces si $d\mathcal{E} = d(-dX + 2i\omega_m) = 0$, existe $E = f + iY$ tal que $dE = \mathcal{E}$. Por tanto $f = -X$. Más adelante usaremos estos resultados para el campo m, el cual es tipo espacio y así $X = (m|m) > 0$ fuera del eje I.

En el siguiente lema se da la ecuación de Ernst.

Lema 2.16 *Sea (M, g) una variedad semi-riemanniana orientable. Para el potencial de Ernst y el tensor $Ric = 0$ se tiene que*

$$\Delta E = 2\frac{(dE|dE)}{E + \bar{E}}.$$

Demostración. Tomando en cuenta que $N = -Re(E)$,

$$\Delta E = -d^* dE = -d^* \mathcal{E} = N^{-1}(dE|dE) = 2\frac{(dE|dE)}{E + \bar{E}}.$$

□

La ecuación del Lema 2.16, se llama la **ecuación de Ernst**. Si resolvemos la ecuación de Ernst y encontramos a $E = -X + iY$, entonces tenemos a $X = (m|m)$ y a $\omega_m = 1/2dY$. En el capítulo III se verá que es posible reducir los 10 componentes de las ecuaciones de Einstein $g_{\mu\nu}$ a sólo dos incógnitas X y Y.

2.3 Espacios-tiempo estacionarios y axisimétricos

Sea (M, g) un espacio-tiempo. En esta sección se hará notar que si el espacio-tiempo tiene suficientes simetrías, su métrica queda determinada por menos funciones. Las condiciones que se impondrán son: que M sea estacionario y axisimétrico, lo que quiere decir de manera intuitiva, que la métrica g no depende del tiempo y que M tiene la simetría de un trompo.

Definición 2.17 *Sea (M, g) un espacio-tiempo. Decimos que M es estacionario si existe un campo de Killing tipo tiempo.*

Definición 2.18 *Sea (M, g) un espacio-tiempo. Decimos que M es axisimétrico, si existe un campo de Killing tipo espacio tal que sus curvas integrales son cerradas y el conjunto de puntos donde el campo es cero es difeomorfo a $\mathbb{R}^2$.*

Si el espacio-tiempo tiene simetría axial, entonces intuitivamente tiene un eje.

Definición 2.19 *Sea (M, g) un espacio-tiempo axisimétrico. El conjunto de puntos donde el campo de Killing es cero se llama el eje y lo denotaremos como $I = \{p \in M | m_p = 0\}$.*

Definición 2.20 *Decimos que un espacio-tiempo M es estacionario-axisimétrico (EA), si es estacionario, axisimétrico y sus campos de Killing conmutan.*

Si tenemos un espacio-tiempo que es axisimétrico y estacionario, los campos de Killing asociados a estas simetrías pueden conmutar o no. En el caso de que no conmuten, Carter [3] demostró que a partir de los dos campos de Killing que no conmutan se puede construir un nuevo campo de Killing tipo tiempo, que sí conmuta con el campo asociado a la simetría axial, entonces la tercera condición de la definición 2.20 se tiene garantizada.

Sea M un espacio-tiempo EA. Como M es estacionario existe un campo de Killing tipo tiempo que denotaremos como k y por ser axisimétrico existe un campo de Killing tipo espacio que denotaremos como m.

Ahora, se precisará cual es la clave de reducir los 10 componentes de la métrica $g_{\mu\nu}$ a sólo 6. Se va a construir una distribución con los campos k y m.

Para cada $p \in M \setminus I$, sea $D_p \subseteq T_pM$ definida como sigue

$$D_p = \langle\{k_p, m_p\}\rangle.$$

Así definimos la 2-distribución $D = \bigcup_{p\in M} D_p$. Como k y m son campos de Killing suaves tenemos que D es suave. Además como los campos de Killing conmutan, D es integrable. Ahora sea $D_p^\perp$ el complemento ortogonal de D_p, definimos la 2-distribución como $D^\perp = \bigcup_{p\in M} D_p^\perp$.

Lema 2.21 (Lema 10.35, [10]) *Sea (M, g) un espacio-tiempo EA. Entonces la 2-distribución $D^\perp$ es suave.*

Ahora vamos a ver una caracterización para saber cuándo la distribución $D^\perp$ es integrable. Denotaremos a el twist de k como ω_k y al twist de m como ω_m.

Lema 2.22 *Sea (M, g) un espacio-tiempo EA. Entonces la 2-distribución $D^\perp$ es integrable si y sólo si*

$$(m|\omega_k) = (k|\omega_m) = 0.$$

Demostración. Por el Teorema de Frobenius $D^\perp$ es integrable si y sólo si $D^\perp$ es involutiva y por la Proposición 1.24 $D^\perp$ es involutiva si y sólo si existen 1-formas $\alpha_i \in \Omega^1(M)$ tales que

$$dk = \alpha_1 \wedge k + \alpha_2 \wedge m, \qquad dm = \alpha_3 \wedge k + \alpha_4 \wedge m;$$

lo anterior pasa si y sólo si

$$dk \wedge k \wedge m = 0, \qquad dm \wedge k \wedge m = 0.$$

Por otro lado,

$$(k|\omega_m)\eta = k \wedge \star\omega_m = \frac{1}{2}k \wedge \star^2(m \wedge dm) = \frac{1}{2}k \wedge m \wedge dm = 0.$$

Por lo que $(k|\omega_m) = 0$. De la misma forma se tiene que $(m|\omega_k) = 0$.

□

El Teorema anterior es central para simplificar las ecuaciones de Einstein en el vacío para un espacio EA. Se va a demostrar que si el tensor de Ricci es nulo, entonces la distribución $D^\perp$ es integrable.

Un espacio-tiempo estacionario es estático si $dk \wedge k = 0$, donde k es el campo de Killing tipo tiempo. La condición anterior implica que la distribución ortogonal a k es integrable. Una situación parecida ocurre cuando imponemos la simetría axial.

Definición 2.23 *Sea (M, g) un espacio-tiempo EA, decimos que M es circular si $D^\perp$ es integrable.*

La siguiente definición involucra al tensor de Ricci.

Definición 2.24 *Sea (M, g) un espacio-tiempo EA. Decimos que M es Ricci-circular si*

$$m \wedge k \wedge R(k) = k \wedge m \wedge R(m) = 0.$$

Lema 2.25 *Sea (M, g) un espacio-tiempo EA. Entonces M es Ricci-circular si y sólo si*

$$i_m \star (k \wedge R(k)) = i_k \star (m \wedge R(m)) = 0.$$

Demostración. Basta notar que $i_m \star (k \wedge R(k)) = \star(m \wedge k \wedge R(k)) = 0$.

□

Teorema 2.26 *Sea (M, g) un espacio-tiempo EA. Entonces M es Ricci-circular si y sólo si M es circular.*

Demostración. Supongamos que M es circular; entonces por el Lema 2.22, $(m|\omega_k) = (k|\omega_m) = 0$ y

$$i_k\omega_m = -\star (k \wedge \star\omega_m) = -\star ((k|\omega_m)\eta)) = (k|\omega_m) \star (-\eta) = (k|\omega_m).$$

Por otro lado, tomando en cuenta que $L_k\omega_m = 0$, por el Corolario 1.19 y la proposición 1.18, $L_k\omega_m = di_k\omega_m + i_k d\omega_m$, tenemos que

$$0 = d(k|\omega_m) = di_k\omega_m = -i_k d\omega_m = -i_k \star (k \wedge R(k)),$$

por lo que M es Ricci-circular.

Ahora supongamos que M es Ricci-circular, veamos que $(m|\omega_k) = (k|\omega_m) = 0$. De la definición de que M es axisimétrico, tenemos que el conjunto donde se anula el campo de Killing m es no vacío y de la igualdad anterior se tiene que $d(k|\omega_m) = 0$, así $(k|\omega_m)$ es constante y para un punto en el eje se tiene que $(k|\omega_m) = 0$; de manera análoga mostramos que $(m|\omega_k) = 0$, por tanto M es circular.

□

Corolario 2.27 *Sea (M, g) un espacio-tiempo EA y $Ric = 0$, entonces M es circular.*

Si (M, g) es un espacio-tiempo circular, entonces las distribuciones $D^\perp$ y D son integrables; así, para cada punto $p \in M$, existe $\Sigma \subseteq M$ subvariedad integral de $D^\perp$ y existe $\Gamma \subseteq M$ subvariedad integral de la distribución D. Notemos que para cada $p \in \Sigma$, k_p es tipo tiempo y por tanto el espacio tangente $T_p\Sigma = D_p^\perp$ es tipo tiempo, como $T_p\Gamma = D_p = (D^\perp)^\perp$ se tiene que $T_p\Gamma$ es tipo espacio. Así podemos definir una métrica lorentziana en Σ como la restricción de la métrica g al espacio tangente tipo tiempo $T_p\Sigma$, es decir $\sigma = g|_{T_p\Sigma}$, también tenemos una métrica riemanniana en Γ definida como la restricción de g al espacio tangente $T_p\Gamma$ $\gamma = g|_{T_p\Gamma}$. Así (Σ, σ) es una 2-subvariedad con métrica lorentziana y (Γ, γ) es una 2-subvariedad con métrica riemanniana.

Los siguientes resultados nos permitirán ver a M, localmente, como el producto de Σ y Γ.

Teorema 2.28 *Sean (M,g) un espacio-tiempo circular, k y m los campos de Killing asociados a las simetrías y $p \in M$. Entonces existe un sistema coordenado (t,φ,x^2,x^3) tal que $\partial_t|_p = k_p$, $\partial_\varphi|_p = m_p$. Más aún, g se expresa como*

$$g = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\varphi}dtd\varphi + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 + \gamma_{ij}dx^i dx^j, \tag{2.16}$$

donde $\gamma_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$.

Demostración. Como M es circular, para cada $p \in M$, existe una subvariedad integral Γ de $D^\perp$. Sea una carta $(U,(y^i))$ centrada en p de Γ, tal que $\Gamma \cap U = \{p \in M | y^0(p) = y^2(p) = 0\}$. Además $T_pM = D_p \oplus D_p^\perp = span(k_p, m_p, \frac{\partial}{\partial y^2}, \frac{\partial}{\partial y^3})$. Sea θ^k, θ^m los flujos de k y m respectivamente. Supongamos también que $\theta^k \circ \theta^m$ está definido en U. Como el resultado es local se puede suponer que $M = \mathbb{R}^4_1$ y que los campos m y k están definidos en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^4_1$. Definamos $\Omega = \{(x^2,x^3) \in \mathbb{R}^2 : (0,0,x^2,x^3) \in U\}$ y $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \Omega \to U$ tal que

$$\Phi(t,\varphi,x^2,x^3) = \theta^k_t \circ \theta^m_\varphi((0,0,x^2,x^3)).$$

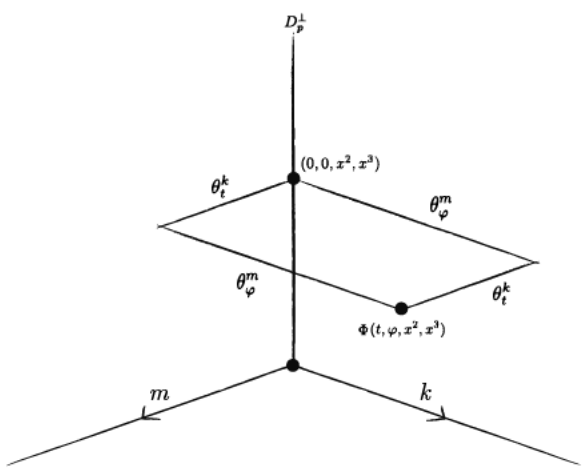

Figura 2.1: El sistema coordenado Φ.

Veamos que $\partial_t|_p$ está Φ-relacionado con $k_{\Phi(p)}$; sea $s_0 \in \mathbb{R}^2 \times \Omega$. Entonces

$$\begin{aligned} d\Phi_{s_0}\left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{s_0}\right) f &= \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{s_0} (f \circ \Phi)\left(t_0, \varphi_0, x_0^2, x_0^3\right), \\ &= \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{s_0} f(\theta^k_{t_0} \circ \theta^m_{\varphi_0}((0,0,x_0^2,x_0^3)), \end{aligned}$$

Por otro lado para cada $q \in M$, $t \to (\theta_t^k)(q)$ es una curva integral de k; por tanto,

$$d\Phi_{s_0}\left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{s_0}\right) f = k_{\Phi(s_0)} f$$

Como los campos k y m cumplen que $[k,m]=0$, entonces $\theta_t^k \circ \theta_\varphi^m = \theta_\varphi^m \circ \theta_t^k$, por tanto de manera análoga se prueba que

$$d\Phi_{s_0}\left(\left.\frac{\partial}{\partial \varphi}\right|_{s_0}\right) f = m_{\Phi(s_0)} f$$

Por tanto para $s_0 = 0$, se tiene que $d\Phi_0\left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_0\right) = k_p$ y $d\Phi_0\left(\left.\frac{\partial}{\partial \varphi}\right|_0\right) = m_p$, además

$$d\Phi_0\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_0\right) = \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p \qquad i = 2, 3.$$

Así $d\Phi$ manda la base $\{\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_0, \left.\frac{\partial}{\partial \varphi}\right|_0, \left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_0, \left.\frac{\partial}{\partial x^3}\right|_0\}$ de $T_0\mathbb{R}^4_1$ a la base $\{k_p, m_p, \frac{\partial}{\partial y^2}, \frac{\partial}{\partial y^3}\}$ de T_pM. Por el Teorema de la función inversa Φ es un difeomorfismo en una vecindad del origen, y $\Psi = \Phi^{-1}$ es el sistema coordenado deseado. Además ya que $k = \partial_t$ y $m = \partial_\varphi$, se tiene que

$$\begin{aligned} \partial_t g_{ij} &= 0, \\ \partial_\varphi g_{ij} &= 0. \end{aligned}$$

Y tomando en cuenta que los flujos de los campos de Killing son isometrías locales, entonces Φ es una isometría local. Además,

$$\begin{aligned} 0 &= g\left(k, \frac{\partial}{\partial y^i}\right) \\ &= g\left(d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right) \\ &= g\left(d\theta^k \circ d\theta^m\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), d\theta^k \circ d\theta^m\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right) \\ &= g\left(d\theta^m\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), d\theta^m\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right) = g\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right). \end{aligned}$$

Por tanto g se ve como en (2.16)

□

Definamos a las métricas σ y γ como

$$\begin{aligned} \sigma &:= g_{tt}dt^2 + 2g_{t\varphi}dtd\varphi + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2, \\ \gamma &:= \gamma_{ij}dx^i dx^j. \end{aligned}$$

Denotamos los componentes de σ como $\sigma_{ab} = g_{ab}$, $a, b = t, \varphi$.

2.4 Más identidades de Killing

En esta sección se pretende relacionar al tensor de Ricci con la norma del producto cuña de los campos de Killing asociados a las simetrías. La identidad más importante es la que se demuestra en el corolario 2.20.

Definición 2.29 *Sean (M, g) un espacio-tiempo EA y k, m sus campos de Killing. Definimos la 2-forma de Killing y el cuadrado de su norma como*

$$\Omega := k \wedge m \quad y \quad \mathcal{N} := -(\Omega|\Omega).$$

Proposición 2.30 *Las condiciones de integrabilidad $(k|\omega_m) = (m|\omega_k) = 0$ son equivalentes a*

$$\star\Omega \wedge \star d\Omega = 0.$$

Además lo anterior implica que

$$(d\mathcal{N}|d\mathcal{N}) + \mathcal{N}(d\Omega|d\Omega) = 0.$$

Demostración. Se puede notar que

$$L_k\Omega = L_k k \wedge m + k \wedge L_k m = 0.$$

De manera análoga se tiene que $L_m\Omega = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \star d\Omega \wedge \star\Omega &= \star(dk \wedge m - k \wedge m) \wedge \star\Omega && (2.17)\\ &= i_m(\star dk) \wedge \star\Omega - i_k(\star dm) \wedge \star\Omega. && (2.18) \end{aligned}$$

Además, las siguientes igualdades se cumplen para k y m:

$$\begin{aligned} i_m(\star dk \wedge \star\Omega) &= i_m(\star dk) \wedge \star\Omega + \star dk \wedge i_k \star \Omega\\ &= i_m(\star dk) \wedge \star\Omega + \star dk \wedge \star(k \wedge \Omega)\\ &= i_m(\star dk) \wedge \star\Omega, \end{aligned}$$

y

$$\star dk \wedge \star\Omega = \Omega \wedge \star^2 dk = -dk \wedge \Omega.$$

Así, la igualdad (2.18) queda como

$$\begin{aligned} \star d\Omega \wedge \star\Omega &= i_m(\star dk \wedge \star\Omega) - i_k(\star dm \wedge \star\Omega)\\ &= -i_m(dk \wedge \Omega) + i_K(dm \wedge \Omega)\\ &= 2i_m\left(m \wedge \star^2 \frac{1}{2}(dk \wedge k)\right) + 2i_k\left(k \wedge \star^2 \frac{1}{2}(dm \wedge m)\right)\\ &= 2i_m(m \wedge \star\omega_k) + 2i_k(k \wedge \star\omega_m)\\ &= 2i_m((m|\omega_k)\eta) + 2i_k((k|\omega_m)\eta)\\ &= 0. \end{aligned}$$

Para la segunda igualdad, de la definición del operador de Hodge, se tiene que

$$\begin{aligned}
\Omega \wedge \star\Omega &= (\Omega|\Omega)\eta \\
\star(\Omega \wedge \star\Omega) &= -(\Omega|\Omega) \\
d \star (\Omega \wedge \star\Omega) &= -d(\Omega|\Omega) \\
d \star (\Omega \wedge \star\Omega) &= d\mathcal{N} \\
\star d^*(\Omega \wedge \star\Omega) &= d\mathcal{N}.
\end{aligned}$$

Por otro lado por el lema 2.3

$$d^*(m \wedge \star\Omega) + m \wedge d^*(\star\Omega) = -L_k \star \Omega = 0.$$

Además

$$\begin{aligned}
d^*(k \wedge m \wedge \star\Omega) + k \wedge d^*(m \wedge \star\Omega) &= -L_k(m \wedge \star\Omega) \\
d^*(k \wedge m \wedge \star\Omega) - k \wedge m \wedge d^*(\star\Omega) &= -L_k m \wedge \star\Omega - m \wedge L_k \star \Omega \\
\star d^*(\Omega \wedge \star\Omega) + \star(\Omega \wedge \star d\Omega) &= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$d\mathcal{N} = \star d^*(\Omega \wedge \star\Omega) = - \star (\Omega \wedge \star d\Omega). \tag{2.19}$$

Así tomando en cuenta que, para $\alpha, \beta \in \Omega^p(M)$ se tiene que $(\alpha|\beta)\eta = \alpha \wedge \star\beta = \beta \wedge \star\alpha = -(\star\alpha| \star \beta)\eta$.

$$\begin{aligned}
(d\mathcal{N}|d\mathcal{N}) &= -(\star d\mathcal{N}| \star d\mathcal{N}) \\
&= -(\star^2(\Omega \wedge \star d\Omega)| \star^2 (\Omega \wedge \star d\Omega)) \\
&= -(\Omega \wedge \star d\Omega|\Omega \wedge \star d\Omega).
\end{aligned}$$

De la identidad (2.19)

$$\begin{aligned}
(d\mathcal{N}|d\mathcal{N}) &= -(\Omega \wedge \star d\Omega|\Omega \wedge \star d\Omega) \\
&= -(\star d\Omega| \star d\Omega)(\Omega|\Omega) - (\star d\Omega \wedge \star\Omega| \star d\Omega \wedge \star\Omega) \\
&= -\mathcal{N}(d\Omega|d\Omega).
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.31 *Sean k y m dos campos de Killing tales que $[k, m] = 0$. Si $X = (m|m)$, $W = (m|k)$ y $V = -(k|k)$, entonces*

$$\begin{aligned}
&(\Omega|\Delta\Omega) = 2\left[2WR(m, k) + VR(m, m) - XR(k, k)\right], \\
&\Delta(\Omega|\Omega) = (d\Omega|d\Omega) + (\Omega|\Delta\Omega).
\end{aligned}$$

Demostración. Se puede notar que

$$\begin{aligned} dd^*\Omega &= dd^*(k \wedge m) \\ &= d(-L_k m - k \wedge d^* m) \\ &= -d(k \wedge d^* m) \\ &= -dk \wedge d^* m + k \wedge dd^* m \\ &= 0. \end{aligned}$$

La última igualdad se da por el Lema 2.3.

$$\begin{aligned} d^* d\Omega &= d^* d(k \wedge m) \\ &= d^*(dk \wedge m - k \wedge dm) \\ &= d^*(m \wedge dk) - d^*(k \wedge dm) \\ &= -L_m dk - m \wedge d^* dk + L_k dm + k \wedge d^* dm \\ &= m \wedge \Delta k - k \wedge \Delta m. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \Delta\Omega &= -d^* d\Omega - dd^*\Omega \\ &= -d^* d\Omega \\ &= k \wedge \Delta m - m \wedge \Delta k. \end{aligned}$$

Entonces se obtiene la primera identidad

$$\begin{aligned} (\Omega|\Delta\Omega) &= (k \wedge m | k \wedge \Delta m - m \wedge \Delta k) \\ &= (k \wedge m | k \wedge \Delta m) - (k \wedge m | m \wedge \Delta k) \\ &= (k|k)(m|\Delta m) - (k|m)(k|\Delta m) + (m|m)(k|\Delta k) - (k|m)(m|\Delta k) \\ &= (k|k)(m|\Delta m) + (m|m)(k|\Delta k) - (k|m)[(k|\Delta m) + (m|\Delta k)]. \end{aligned}$$

Se recuerda que $(m|\Delta k) = (m| - 2R(k)) = -2R(m,k)$.

$$\begin{aligned} (\Omega|\Delta\Omega) &= -2(k|k)R(m,m) - 2(m|m)R(k,k) - (k|m)[-2R(k,m) - 2R(m,k)] \\ &= 2[2WR(m,k) + VR(m,m) - XR(k,k)]. \end{aligned}$$

Para la segunda igualdad,

$$\begin{aligned} \Delta(\Omega|\Omega) &= d^* d\mathcal{N} \\ &= \star d \star (- \star (\star d\Omega \wedge \Omega)) \\ &= - \star d(\Omega \wedge \star d\Omega) \\ &= - \star (d\Omega \wedge \star d\Omega + \Omega \wedge d \star d\Omega) \\ &= - \star (d\Omega \wedge \star d\Omega + \Omega \wedge - \star^2 d \star d\Omega) \\ &= - \star (d\Omega \wedge \star d\Omega + \Omega \wedge \star \Delta\Omega) \\ &= - \star ((d\Omega|d\Omega)\eta + (\Omega|\Delta\Omega)\eta) \\ &= (d\Omega|d\Omega) + (\Omega|\Delta\Omega). \end{aligned}$$

□

Corolario 2.32 *Sean k y m dos campos de Killing que conmutan ($[k,m]=0$) y que además satisfacen $k\wedge m\wedge dm = m\wedge k\wedge dk = 0$. Sea $\mathcal{N} = -(k\wedge m|k\wedge m)$. Entonces*

$$(k|k)R(m,m) - 2(m|k)R(m,k) + (m|m)R(m,m) = \frac{1}{2}\left[\Delta\mathcal{N} - \frac{(d\mathcal{N}|d\mathcal{N})}{\mathcal{N}}\right]. \tag{2.20}$$

Demostración. De las proposiciones 2.30 y 2.31, se tiene que

$$\begin{aligned}(k|k)R(m,m) - 2(m|k)R(m,k) + (m|m)R(m,m) &= -\frac{1}{2}(\Omega|\Delta\Omega)\\ &= \frac{1}{2}[\Delta\mathcal{N} + (d\Omega|d\Omega)]\\ &= \frac{1}{2}\left[\Delta\mathcal{N} - \frac{(d\mathcal{N}|d\mathcal{N})}{\mathcal{N}}\right].\end{aligned}$$

□

Capítulo III
Unicidad de la métrica de Kerr

En concreto, David Robinson y yo demostramos el teorema de no pelo, según el cual un agujero negro se estabilizaría en un estado caracterizado por solo dos números: la masa y la rotación. De nuevo, indicaba que los agujeros negros tenían entropía porque muchas estrellas diferentes podían colapsar para producir un agujero negro de la misma masa y rotación.
– Stephen Hawking

En los capítulos pasados se derivaron las identidades básicas para los espacios estacionarios y axisimétricos. En general las identidades demostradas se usan para deducir la métrica de Kerr, pero aquí sólo se ocuparán para reducir las ecuaciones de Einstein en el vacío. En la primera sección se estudiará la métrica σ de la 2-variedad Σ del capítulo anterior. En la segunda sección se verá a la métrica g en términos del tensor de Ricci y la 1-forma de Ernst. La sección tres se ocupará de las ecuaciones de campo. Se resolverá la ecuacion de Ernst en la cuarta sección. Se definirá qué se entiende por solución de Kerr con parámetros a y m. Se demostrará el teorema principal de esta tesis en la ultima sección.

3.1 | La métrica

En el capítulo anterior se demostró que si (M, g) es un espacio-tiempo EA circular, para cualquier punto $p \in M$ existe un sistema coordenado (t, φ, x^2, x^3) tal que $\partial_t|_p = k_p$, $\partial_\varphi|_p = m_p$, y g se expresa como

$$g = \sigma_{tt} dt^2 + 2\sigma_{t\varphi} dt d\varphi + \sigma_{\varphi\varphi} d\varphi^2 + \gamma.$$

Entonces la métrica σ se puede ver en coordenadas (t, φ) como

$$\sigma = -V dt^2 + 2W dt d\varphi + X d\varphi^2, \tag{3.1}$$

donde $-V = \sigma_{tt} = \sigma(k, k)$, $W = \sigma_{t\varphi} = \sigma(k, m)$, $X = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma(m, m)$.

Ahora se reescribirá la métrica (3.1) en términos de dos funciones, definidas como sigue.

Definición 3.1 *Sea (M, g) un espacio-tiempo EA circular. Las funciones ρ y A se definen como*

$$\rho^2 := (VX + W^2), \qquad A := \frac{W}{X}.$$

Entonces, σ se puede reescribir como

$$\sigma = -\frac{\rho^2}{X}dt^2 + X(d\varphi + Adt)^2.$$

Por el Teorema 2.28, de los diez componentes de la métrica $g_{\mu\nu}$, aún quedan por determinar seis: ρ, A, X y los tres componentes de γ.

En la sección 2.4 se definió a $\Omega := k \wedge m$ y a $\mathcal{N} := (\Omega|\Omega)$, entonces

$$-\mathcal{N} = -(k \wedge m|k \wedge m) = -((k|k)(m|m) - (k|m)^2) = VX + W^2 = \rho^2 = -\det(\sigma). \tag{3.2}$$

La función ρ determina por completo la región donde se va a probar la unicidad para la métrica de Kerr. Esta región es el exterior de Kerr y a su frontera la llamaremos horizonte.

Definición 3.2 *Sea (M, g) un espacio-tiempo EA circular. Definimos al exterior de Kerr como*

$$\langle\langle \mathcal{M} \rangle\rangle = \{p \in M | \rho_p > 0\}.$$

y el horizonte como $\mathcal{H} = \{p \in M | \rho_p = 0\}$.

3.2 Factorización de la métrica

Nuestro objetivo es demostrar el siguiente Teorema.

Teorema 3.3 *Sea (M, g) un espacio-tiempo EA circular tal que g se expresa como*

$$g = -\frac{\rho^2}{X}dt^2 + X(d\varphi + Adt)^2 + \gamma.$$

Entonces, las funciones ρ y X satisfacen

$$\begin{aligned} \rho^{-1} d^*_\gamma(\rho\mathcal{E}) =& X^{-1}(\mathcal{E}|\mathcal{E}) - 2R(m, m), \\ \frac{1}{\rho}\Delta_\gamma \rho =& -\sigma^{ab}R_{ab}, \end{aligned}$$

donde d^*_γ y Δ_γ denotan la codiferencial y el laplaciano de la métrica γ.

El siguiente lema nos dice cómo se expresa la codiferencial de una k-forma y el laplaciano de una función suave. Se usará la notación $\sqrt{g} = \sqrt{|\det(g_{ij})|}$ para el determinante de una métrica g.

Lema 3.4 *Sean (M,g) un espacio-tiempo EA circular, $\alpha \in \Omega^1(M)$ y $f \in \Omega^0(M)$. Entonces*

$$\begin{aligned} d^*\alpha =& d^*_\gamma \alpha - \rho^{-1}(d\rho|\alpha), \\ \Delta f =& \Delta_\gamma f + \rho^{-1}(d\rho|df). \end{aligned}$$

donde d^*_γ y Δ_γ denotan la codiferencial y el laplaciano en la métrica γ.

Demostración. Recordemos que si α es una 1-forma, entonces

$$d^*\alpha = -\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\nu(\sqrt{g}g^{\mu\nu}\alpha_\mu).$$

Notemos que $\sqrt{g} = \sqrt{\sigma}\sqrt{\gamma} = \rho\sqrt{\gamma}$ y $g^{\nu\mu} = \gamma^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu}$; por tanto,

$$\begin{aligned} d^*\alpha &= -\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\nu(\sqrt{g}g^{\mu\nu}\alpha_\mu) \\ &= -\frac{1}{\rho\sqrt{\gamma}}\partial_\nu(\rho\sqrt{\gamma}g^{\mu\nu}\alpha_\mu) \\ &= -\frac{1}{\rho\sqrt{\gamma}}\left[\rho\partial_\nu(\sqrt{\gamma}g^{\mu\nu}\alpha_\mu) + (\sqrt{\gamma}g^{\mu\nu}\alpha_\mu)\partial_\nu\rho\right] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_i(\sqrt{\gamma}\gamma^{ij}\alpha_j) - \frac{1}{\rho}g^{\mu\nu}\alpha_\mu\partial_\nu\rho \\ &= d^*_\gamma\alpha - \rho^{-1}(d\rho|\alpha). \end{aligned}$$

Si aplicamos lo anterior para $f \in \Omega^0(M)$ a la diferencial df, tenemos

$$\Delta f = -d^*(df) = -d^*_\gamma(df) + \rho^{-1}(d\rho|df) = \Delta_\gamma f + \rho^{-1}(d\rho|df).$$

□

Ahora sí, mostraremos el Teorema 3.3.

Demostración. Para la primera igualdad se tiene que, de la ecuación de Ernst (2.15), para $N = X = g(m,m) = \sigma(m,m)$,

$$d^*\mathcal{E} - X^{-1}(\mathcal{E}|\mathcal{E}) = -2(m|R(m)) = -2R(m,m),$$

de modo que

$$d^*\mathcal{E} = d^*_\gamma\mathcal{E} - \rho^{-1}(d\rho|\mathcal{E}) = \rho^{-1}d^*_\gamma(\rho\mathcal{E}) = X^{-1}(\mathcal{E}|\mathcal{E}) - 2R(m,m),$$

y por el Lema 3.4 tenemos que

$$d^*\mathcal{E} = d^*_\gamma(\mathcal{E}) - \rho^{-1}(d\rho|\mathcal{E}) = \rho^{-1}d^*_\gamma(\rho\mathcal{E}).$$

Por tanto,

$$\rho^{-1}d^*_\gamma(\rho\mathcal{E}) = X^{-1}(\mathcal{E}|\mathcal{E}) - 2R(m,m).$$

Para demostrar la segunda igualdad, de la ecuación (2.20) y del Corolario 2.32 tenemos

$$(k|k)R(m,m) - 2(m|k)R(m,k) + (m|m)R(k,k) = \frac{1}{2}\left[\Delta\mathcal{N} - \frac{(d\mathcal{N}|d\mathcal{N})}{\mathcal{N}}\right].$$

Dado que $\mathcal{N} = -\rho^2$, entonces

$$-VR_{\varphi\varphi} - 2WR_{t\varphi} + XR_{tt} = \frac{1}{2}\left[-\Delta\rho^2 + \frac{(d\rho^2|d\rho^2)}{\rho^2}\right].$$

Calculando el lado derecho de la igualdad anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[-2\rho\Delta\rho - 2(d\rho|d\rho) + 4(d\rho|d\rho)\right] &= -\rho\Delta\rho + (d\rho|d\rho)\\ &= -\rho(\Delta_\gamma\rho + \rho^{-1}(d\rho|d\rho)) + (d\rho|d\rho)\\ &= -\rho\Delta_\gamma\rho.\end{aligned}$$

La última igualdad se da por el Lema 3.4.

Por otro lado, se tiene que $\sigma^{ab}R_{ab} = \frac{1}{\rho^2}\left[-VR_{\varphi\varphi} - 2WR_{t\varphi} + XR_{tt}\right]$. Así por lo anterior tenemos que

$$\frac{1}{\rho}\Delta_\gamma\rho = -\,\sigma^{ab}R_{ab}.$$

□

Como el tensor de Ricci es cero y $d\mathcal{E} = 0$ entonces existe $E \in \Omega^0(M)$ tal que $dE = \mathcal{E}$; por tanto tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.5 *Sea (M, g) un espacio-tiempo EA circular en el vacío; entonces*

$$\rho^{-1}d^*_\gamma(\rho dE) = X^{-1}(dE|dE) \quad y \quad \Delta_\gamma\rho = 0.$$

Así, en este caso ρ es armónica. Por otro lado, como ρ está definida en una carta, se puede suponer que se encuentra definida en un conjunto simplemente conexo, por lo que existe su conjugada armónica z, tal que $\Delta_\gamma z = 0$ y $(d\rho|d\rho) = (dz|dz)$. Con esto en mente podemos usar a ρ y a z como coordenadas de tal manera que la métrica γ se vea como

$$\gamma = \lambda(d\rho^2 + dz^2),$$

donde λ es una función que se puede determinar si se conoce el potencial de Ernst.

La ecuación de Ernst se puede ver de manera dual, pues

$$d^*_\gamma(\rho dE) = d^*dE - (d\rho|dE) = -\rho\nabla\cdot(\nabla E) - = \gamma(\nabla\rho, \nabla E) = -\nabla\cdot(\rho\nabla E),$$

y para la parte derecha se tiene que

$$\rho X^{-1}(dE|dE) = \rho X^{-1}\gamma(\nabla E, \nabla E) = \rho X^{-1}|\nabla E|^2.$$

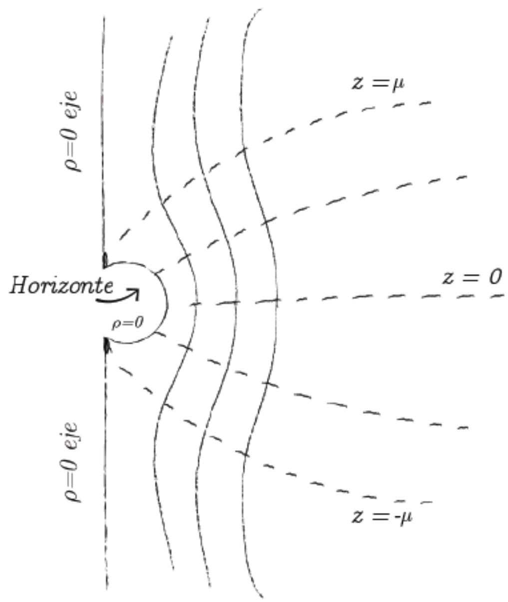

Figura 3.1: Plano de la 2-subvariedad Γ. Las líneas continuas corresponden a ρ constante y las líneas punteadas representan z constante.

Por tanto

$$\nabla \cdot (\rho \nabla E) + \frac{\rho}{X} |\nabla E|^2 = 0.$$

Así, se tiene lo siguiente:

Corolario 3.6 *Sea (M, g) un espacio-tiempo EA, con $Ric = 0$. Entonces M es circular y g se expresa como*

$$g = -\frac{\rho^2}{X} dt^2 + X(d\varphi + A dt)^2 + \lambda(d\rho^2 + dz^2).$$

Las funciones X, A y λ, se obtienen del potencial $E = -X + iY$, que está sujeto a la condición

$$\nabla \cdot (\rho \nabla E) + \frac{\rho}{X} |\nabla E|^2 = 0. \tag{3.3}$$

3.3 Las ecuaciones de campo

Ahora se deducirán las ecuaciones de campo de Einstein en términos de las funciones X y Y.

Sustituyendo $E = -X + iY$ en (3.3) y desarrollando, tenemos

$$-\nabla \cdot (\rho \nabla X) + i\nabla \cdot (\rho \nabla Y) + \frac{\rho}{X}\left[|\nabla X|^2 - 2i\gamma(\nabla X, \nabla Y) - |\nabla Y|^2\right] = 0.$$

Separando la parte real y la imaginaria,

$$-\nabla \cdot (\rho \nabla X) + \frac{\rho}{X}\left[|\nabla X|^2 - |\nabla Y|^2\right] = 0, \tag{3.4}$$

$$\nabla \cdot (\rho \nabla Y) + \frac{\rho}{X}\left[-2\gamma(\nabla X, \nabla Y)\right] = 0. \tag{3.5}$$

La identidad (3.5) se puede multiplicar por X^{-2} y tomar en cuenta que $\nabla(X^{-2}) = -2\frac{\nabla X}{X^3}$:

$$\nabla \cdot (\rho \nabla Y)X^{-2} + \rho\gamma(\nabla(X^{-2}), \nabla Y) = 0 \tag{3.6}$$

$$\nabla \cdot (\rho X^{-2} \nabla Y) = 0 \tag{3.7}$$

Por otro lado, se multiplica la identidad (3.4) por X^{-2}

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\rho \nabla X)X^{-2} - \frac{\rho}{X^3}\left[|\nabla X|^2 - |\nabla Y|^2\right]& \\ &= \nabla \cdot (\rho \nabla X)X^{-2} - \frac{\rho}{X^3}\left[2|\nabla X|^2 - |\nabla X|^2 - |\nabla Y|^2\right] \\ &= \nabla \cdot (\rho \nabla X)X^{-2} - 2\frac{\rho}{X^3}|\nabla X|^2 + \frac{\rho}{X^3}(|\nabla X|^2 + |\nabla Y|^2) \\ &= \nabla \cdot (\rho X^{-2} \nabla X) + \frac{\rho}{X^3}(|\nabla X|^2 + |\nabla Y|^2).\end{aligned}$$

Si se define a $e(X, Y)$ y $f(X, Y)$ como

$$\begin{aligned} e(X, Y) &:= \nabla \cdot (\rho X^{-2} \nabla X) + \frac{\rho}{X^3}(|\nabla X|^2 + |\nabla Y|^2), \\ f(X, Y) &:= \nabla \cdot (\rho X^{-2} \nabla Y), \end{aligned}$$

entonces la ecuación de Ernst es equivalente al par de ecuaciones

$$e(X, Y) = 0, \tag{3.8}$$

$$f(X, Y) = 0. \tag{3.9}$$

3.4 Solución de la ecuación de Ernst

La función $\rho = VX + W^2$ está definida en el exterior de Kerr. Además, como el conjunto de puntos donde m se anula es no vacío, se tiene que $X = g(m, m) = 0$, por lo que $\rho = 0$ en el eje y el horizonte.

Por tanto es conveniente introducir las coordenadas esferoidales prolatas

$$\rho^2 = \mu^2(x^2 - 1)(1 - y^2), \qquad z = \mu xy,$$

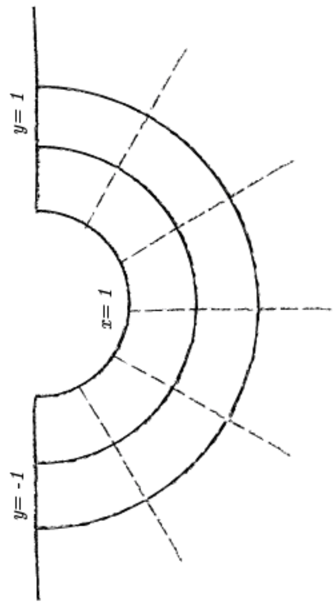

Figura 3.2: Plano de la 2-subvariedad Γ. Las líneas continuas corresponden a x constante y las líneas punteadas representan y constante.

donde μ es una constante positiva. La constante anterior es un parámetro de escala de las coordenadas y algo sorprendente es que en términos de las coordenadas anteriores se puede encontrar una solución muy sencilla a la ecuación de Ernst (3.3)

La métrica γ queda como

$$\gamma = \Omega\left(\frac{dx^2}{x^2-1} + \frac{dy^2}{1-y^2}\right),$$

donde Ω es una función que depende de x y y.

Es posible encontrar una solución lineal a la ecuación (3.3). Si definimos a ϵ como

$$\epsilon = \frac{1+E}{1-E},$$

entonces $X = \frac{1-|\epsilon|^2}{|1+\epsilon|^2}$ y la ecuación (3.3) se puede expresar como

$$\nabla\cdot(\rho\nabla\epsilon) = \frac{-2\rho\bar{\epsilon}|\nabla\epsilon|^2}{1-|\epsilon|^2}. \tag{3.10}$$

La ecuación de Ernst es invariante bajo cambios conformes en la métrica, por lo que podemos olvidarnos de la función Ω. En términos de la métrica

$$\gamma = \left(\frac{dx^2}{x^2-1} + \frac{dy^2}{1-y^2}\right)$$

la ecuación (3.10) se puede ver como:

$$\partial_x\left[(x^2-1)\partial_x\epsilon\right] + \partial_y\left[(1-y^2)\partial_y\epsilon\right] = -2\bar{\epsilon}(1-|\epsilon|^2)\left[(x^2-1)(\partial_x\epsilon)^2 + (1-y^2)(\partial_y\epsilon)^2\right].$$

Una solución general a la ecuación anterior que es lineal en x y en y es

$$\epsilon = px + iqy \qquad p, q \in \mathbb{R}, \quad p^2+q^2=1.$$

Después de algunas implicaciones físicas y bastante álgebra, se llega a la métrica de Kerr en términos de las coordenadas x y y.

Si definimos a $m := \frac{\mu}{p}$, $a := \frac{\mu q}{p}$ y hacemos el cambio de coordenadas

$$r = m(1+px), \qquad \cos\theta = y,$$

entonces la métrica de Kerr toma la forma usual

$$\begin{aligned} ds^2 = &\left(-1 + \frac{2m}{\Xi^2}\right)dt^2 + \frac{\Xi^2}{\Delta}dr^2 + \Xi^2 d\theta^2 \\ &+ \left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2 \operatorname{sen}^2\theta}{\Xi^2}\right)\operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2 + 2\left(\frac{-2mra\operatorname{sen}^2\theta}{\Xi^2}\right)dtd\varphi, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \Xi^2 &:= r^2 + a^2\cos^2\theta, \\ \Delta &:= r^2 - 2mr + a^2. \end{aligned}$$

No es la intención de esta tesis dar a conocer todos los detalles de cómo se obtiene la solución de Kerr. Basta decir que Kerr la obtuvo de otra manera. La forma en que obtuvimos la solución fue a partir de principios básicos como simetrías e imponer condiciones a nuestro espacio-tiempo. Las cantidades m y a tienen una interpretación física: m se interpreta como la masa del agujero negro que se encuentra en la singularidad y a se interpreta como una densidad de momento angular, una cantidad que se conserva y nos dice la velocidad a la que gira el agujero negro. Se puede notar que la métrica de Kerr depende sólo de dos parámetros, estos son la masa m y la densidad de momento angular a. Como ya se mencionó en la introducción, el objetivo de esta tesis es demostrar que si hay dos agujeros negros con la misma masa m y la misma densidad de momento angular a, estos son idénticos. Otra idea importante es el concepto de un espacio-tiempo asintóticamente plano. La idea es que muy lejos de la fuente de curvatura, es decir la masa, el espacio-tiempo es plano. Este comportamiento asintótico se puede notar en las métricas de Schwarzschild y Kerr. Para la métrica de Kerr se tiene que

$$ds^2 = -\left[-1 + \frac{2M}{r} + \mathcal{O}(r^{-2})\right]dt^2 - \left[\frac{4J}{r}\operatorname{sen}^2\theta + \mathcal{O}(r^{-2})\right]dtd\varphi \tag{3.11}$$

$$+ \left[1 + \mathcal{O}(r^{-1})\right]\left(dr^2 + r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2)\right), \tag{3.12}$$

cuando $r \to \infty$ y $J = ma$.

El producto de la masa m por la densidad de momento angular a se interpreta como el momento angular del agujero negro. A esta cantidad la denotamos como J.

En términos de las coordenadas esferoidales prolatas, el comportamiento asintótico de la métrica de Kerr (3.11) para las funciones X y Y adquiere la forma

$$X = (1 - y^2)x^2 + \mathcal{O}(x),$$
$$Y = 2Jy(3 - y^2) + \mathcal{O}(x^{-1}),$$

cuando $x \to \infty$.

Una última observación de gran importancia es la relación entre la masa m y la densidad de momento a. ¿Qué pasa si $m^2 < a^2$? En este caso no existe el horizonte de sucesos y la singularidad es desnuda. Cuando $m = a$, se tiene un único horizonte. Finalmente, el caso que nos interesa es cuando $m^2 > a^2$: Aquí existen dos horizontes y regiones más interesantes como la ergosfera.

Si $\epsilon(x, y) = px + iqy$, con $p^2 + q^2 = 1$, es solución de la ecuación de Ernst (3.10) y $m = \frac{\mu}{p}$ y $a = \frac{\mu q}{p}$, entonces

$$m^2 - a^2 = \mu^2,$$

por lo que $m^2 > a^2$.

3.5 Solución de Kerr con parámetro m y a

Es momento de definir lo que se entiende por una solución de Kerr con parámetros a y m.

En la definición 3.2 se definió el exterior $\langle\langle\mathcal{M}\rangle\rangle$ y el horizonte de Kerr $\mathcal{H}$. En términos de las coordenadas x y y, el horizonte se ve como

$$\mathcal{H} = \{\ (x, y) \mid x = 1, y = \pm 1\ \}.$$

Definición 3.7 *Decimos que (X, Y, m, a) es una solución de Kerr a las ecuaciones de Einstein en el vacío, estacionaria, axisimétrica y asintóticamente plana con parámetros a y m si satisface las siguientes condiciones:*

- *X y Y son soluciones a las ecuaciones* (3.8) *y* (3.9).
- *X y Y están definidas en el horizonte $\mathcal{H} = \{(x, y) | x = 1, y = \pm 1\}$.*
- *X y Y tienen el siguiente comportamiento asintótico cuando $x \to \infty$:*

$$X = (1 - y^2)x^2 + \mathcal{O}(x),$$
$$Y = 2Jy(3 - y^2) + \mathcal{O}(x^{-1}).$$

- $m^2 > a^2$.

Definición 3.8 *Decimos que una solución de Kerr (X, Y, m, a), está determinada por la masa m y densidad de momento angular a, si para cualquier otra solución de Kerr $(\hat{X}, \hat{Y}, m, a)$, se tiene que $X = \hat{X}$ y $Y = \hat{Y}$.*

3.6 Unicidad de la métrica de Kerr

Como motivación de la demostración del Teorema principal de esta sección recordaremos una demostración clásica de unicidad de la solución a una ecuación diferencial parcial.

Supongamos que queremos mostrar la unicidad del problema de Cauchy de la ecuación de Laplace. Recordemos que si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado, y $u \in C^\infty(U)$, entonces el problema de Cauchy es el siguiente:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } U, \\ u = 0 & \text{en } \partial U. \end{cases}$$

Suponemos que existen dos soluciones u_1 y u_2 y definimos $u := u_2 - u_1$. Entonces $\Delta u = 0$ en U y se tiene que

$$0 = \int_{\partial U} (u\nabla u) \cdot \boldsymbol{n} dS = \int_U \nabla \cdot (u\nabla u) = \int_U u\Delta u + \int_U |\nabla u|^2,$$

así, $\nabla u = 0$ en U, y como $u = 0$ en ∂U, se tiene que $u_1 = u_2$.

La demostración del resultado principal de esta tesis, la afirmación sobre la unicidad de la métrica de Kerr, será muy parecida a la demostración anterior. Es momento de enunciar este resultado:

Teorema 3.9 (Robinson, 1975) *Las soluciones de Kerr a las ecuaciones de Einstein en el vacío, estacionarias, axisimétricas y asintóticamente planas están determinadas por la masa y la densidad de momento angular.*

Demostración. Supongamos que existen dos soluciones de Kerr

$$(X_1, Y_1, a, m) \quad \text{y} \quad (X_2, Y_2, a, m)$$

con masa m y densidad de momento angular a y veamos que en realidad son iguales.

Como (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) son soluciones de Kerr, tienen el siguiente comportamiento asintótico cuando $x \to \infty$:

$$\begin{aligned} X_1 &= (1 - y^2)x^2 + \mathcal{O}(x), \\ Y_1 &= 2Jy(3 - y^2) + \mathcal{O}(x^{-1}), \\ X_2 &= (1 - y^2)x^2 + \mathcal{O}(x), \\ Y_2 &= 2Jy(3 - y^2) + \mathcal{O}(x^{-1}). \end{aligned}$$

Definamos

$$\begin{aligned} f_1 &:= f(X_1, Y_1), \quad f_2 := f(X_2, Y_2), \\ e_1 &:= e(X_1, Y_1), \quad e_2 := e(X_2, Y_2), \\ \Pi X &:= X_1 X_2, \quad \Sigma X := X_1 + X_2, \\ \Delta Y &:= Y_2 - Y_1, \quad \Delta X := X_2 - X_1. \end{aligned}$$

Entonces, por las condiciones asintóticas se tiene que $\Delta X \to 0$ y $\Delta Y \to 0$ cuando $x \to \infty$. Lo que se busca es una identidad de Green como en la motivación al principio de la sección, algo de la forma

$$\text{Divergencia}(\Delta X, \Delta Y) = \text{Términos no negativos}(\Delta X, \Delta Y),$$

para luego integrar a ambos lados. Usaremos que la integral del lado derecho se anula para obtener que todos los términos del lado derecho también se anularán.

Para construir dicha identidad, se debe jugar con las ecuaciones f_1, f_2, e_1 y e_2 para obtener un término que involucre a la divergencia.

Después de algunas manipulaciones algebraicas se llega a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{2\Delta Y}{\Pi X}\left\{f_1 X_1^2 - f_2 X_2^2\right\} = -\nabla \cdot \left(\frac{\rho}{\Pi X}\nabla(\Delta Y^2)\right) + \frac{\rho}{\Pi X}\{&2|\nabla Y_1|^2 + 2|\nabla Y_2|^2 - 4\nabla Y_1 \cdot \nabla Y_2 \\ &- \frac{2\Delta Y}{X_1}\nabla X_1 \cdot \nabla Y_1 + \frac{2\Delta Y}{X_2}\nabla X_2 \cdot \nabla Y_2 \\ &- \frac{2\Delta Y}{X_1}\nabla X_1 \cdot \nabla Y_2 + \frac{2\Delta Y}{X_2}\nabla X_2 \cdot \nabla Y_1\}. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \frac{2\Delta X}{\Pi X}\left\{e_1 X_1^2 - e_2 X_2^2\right\} = -\nabla \cdot \left(\frac{\rho}{\Pi X}\nabla(\Delta X^2)\right) + \frac{\rho}{\Pi X}\{&2|\nabla X_1|^2 + 2|\nabla X_2|^2 - 2|\nabla Y_1|^2 - 2|\nabla Y_2|^2 \\ &- \frac{2X_2}{X_1}\nabla X_1 \cdot \nabla X_2 - \frac{2X_1}{X_2}\nabla X_1 \cdot \nabla X_2 \\ &+ \frac{2X_2}{X_1}|\nabla Y_1|^2 + \frac{2X_1}{X_2}|\nabla Y_2|^2\}. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \Delta Y^2\left(\frac{e_1}{X_2} + \frac{e_2}{X_1}\right) = \nabla \cdot \left(\frac{\rho \Delta Y^2}{\Pi X^2}\nabla(\Delta Y^2)\right) + \frac{\rho}{\Pi X}\Bigg\{&-\frac{2\Delta Y}{X_1}\nabla Y_2 \cdot \nabla X_1 \\ &- \frac{2\Delta Y}{X_2}\nabla Y_2 \cdot \nabla X_2 + \frac{2\Delta Y}{X_1}\nabla Y_1 \cdot \nabla X_1 + \frac{2\Delta Y}{X_2}\nabla Y_1 \cdot \nabla X_2 \\ &+ \frac{\Delta Y^2}{X_1^2}|\nabla Y_1|^2 + \frac{\Delta Y^2}{X_2}|\nabla Y_2|^2 + \Delta Y^2\left(\frac{\nabla \Pi X}{\Pi X}\right)^2\Bigg\}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\Delta X^2\left(\frac{e_1}{X_2}+\frac{e_2}{X_1}\right)=\nabla\cdot\left(\frac{\rho\Delta X^2}{\Pi X^2}\nabla(\Delta X^2)\right)+\frac{\rho}{\Pi X}\left\{-|\nabla X_2|^2-|\nabla X_1|^2+\left(\frac{X_2}{X_1}\right)^2|\nabla X_1|^2\right.$$
$$\left.+\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^2|\nabla X_2|^2+\left(\frac{\Delta X}{X_1}\right)^2|\nabla Y_1|^2+\left(\frac{\Delta X}{X_2}\right)^2|\nabla Y_2|^2\right\}.$$

Como X_1, Y_1, X_2, Y_2 satisfacen (3.8) y (3.9), se tiene que $f_1=f_2=e_1=e_2=0$; entonces

$$\frac{2\Delta Y}{\Pi X}\left\{f_1X_1^2-f_2X_2^2\right\}+\frac{2\Delta X}{\Pi X}\left\{e_1X_1^2-e_2X_2^2\right\}+\Delta Y^2\left(\frac{e_1}{X_2}+\frac{e_2}{X_1}\right)+\Delta X^2\left(\frac{e_1}{X_2}+\frac{e_2}{X_1}\right)=0.$$

Y así, después de reordenar términos y completar cuadrados, se obtiene la identidad deseada:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot&\left[\rho\nabla\left(\frac{(\Delta X)^2+(\Delta Y)^2}{\Pi X}\right)\right]\\&=\frac{\rho}{\Pi X}\left[\frac{\Delta Y}{X_1}\nabla Y_1+\frac{X_1}{X_2}\nabla X_2-\nabla X_1\right]^2+\frac{\rho}{\Pi X}\left[\frac{\Delta Y}{X_2}\nabla Y_2-\frac{X_2}{X_1}\nabla X_1+\nabla X_2\right]^2\\&\quad+\frac{\rho}{2\Pi X}\left[\left(\frac{\nabla Y_2}{X_2}-\frac{\nabla Y_1}{X_1}\right)\Sigma X-\left(\frac{\nabla X_2}{X_2}+\frac{\nabla X_1}{X_1}\right)\Delta Y\right]^2\\&\quad+\frac{\rho}{2\Pi X}\left[\left(\frac{\nabla Y_2}{X_2}+\frac{\nabla Y_1}{X_1}\right)\Delta X-\left(\frac{\nabla X_2}{X_2}+\frac{\nabla X_1}{X_1}\right)\Delta Y\right]^2.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Ahora se verá que

$$\int_\Gamma\nabla\cdot\left(\rho\nabla\left(\frac{(\Delta X)^2+(\Delta Y)^2}{\Pi X}\right)\right)=0.$$

Sea $\epsilon>0$, notemos que

$$\lim_{\epsilon\to\infty}\int_{[-1,1]\times[1,1+\epsilon]}\nabla\cdot\left(\rho\nabla\left(\frac{(\Delta X)^2+(\Delta Y)^2}{\Pi X}\right)\right)\sqrt{\det(\gamma)}\,dx\,dy=0$$

Si se denota $f:=((\Delta X)^2+(\Delta Y)^2)/\Pi X$,

$$\nabla\cdot(\rho\nabla f)\sqrt{\det(\gamma)}=\sqrt{\det(\gamma)}\left[\frac{1}{\sqrt{\det(\gamma)}}\partial_\nu\left(\sqrt{\det(\gamma)}\gamma^{\nu\mu}\rho\partial_\mu f\right)\right].$$

Como $\rho=\mu/\sqrt{\det(\gamma)}$, se tiene que

$$\nabla\cdot(\rho\nabla f)\sqrt{\det(\gamma)}=\mu\partial_\nu(\gamma^{\nu\mu}\partial_\mu f).$$

Entonces

$$\int_{[-1,1]\times[1,1+\epsilon]} \nabla\cdot\left(\rho\nabla\left(\frac{(\Delta X)^2+(\Delta Y)^2}{\Pi X}\right)\right)\sqrt{\det(\gamma)}dxdy = \int_{[-1,1]\times[1,1+\epsilon]} \left[\mu\partial_\nu(\gamma^{\nu\nu}\partial_\nu f)\right]dxdy$$

Denotemos $h(x,y) := \partial_x f(x,y)$ y $g(x,y) = \partial_y f(x,y)$; entonces

$$\begin{aligned}\int_{[-1,1]\times[1,1+\epsilon]} &\left[\mu\partial_\nu(\gamma^{\nu\nu}\partial_\nu f)\right]\,dx\,dy\\ &= \mu\int_{[-1,1]\times[1,1+\epsilon]}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2-1)h(x,y)+\frac{\partial}{\partial y}(1-y^2)g(x,y)\right]\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Si $Q := (x^2-1)h(x,y)$ y $P := (y^2-1)g(x,y)$, entonces por el teorema de Green se tiene que

$$\int_{[-1,1]\times[1,1+\epsilon]}\left[\frac{\partial}{\partial x}Q-\frac{\partial}{\partial y}P\right]dxdy = \int_{\partial([-1,1]\times[1,1+\epsilon])}\big[Pdx+Qdy\big].$$

La frontera de la región donde se está integrando se puede parametrizar con la siguiente curva $\gamma : [a_0,a_4]\to\mathbb{R}^2$:

$$\gamma(t)=\begin{cases}(\gamma_1(t),-1), & \text{si}\quad a_0\le t\le a_1,\\ (\epsilon+1,\gamma_2(t)), & \text{si}\quad a_1\le t\le a_2,\\ (\gamma_3(t),1), & \text{si}\quad a_2\le t\le a_3,\\ (1,\gamma_4(t)), & \text{si}\quad a_3\le t\le a_4.\end{cases}$$

donde $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, $\gamma_3(t)$ y $\gamma_4(t)$ son funciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

La integral anterior queda como

$$\begin{aligned}\mu\int_{\partial([-1,1]\times[1,1+\epsilon])}\big[Pdx+Qdy\big] &= \mu\int_{a_1}^{a_2}\left[(\epsilon+1)^2-1\right]h(\epsilon+1,\gamma_2(t))dt\\ &= \mu\left[(\epsilon+1)^2-1\right]\int_{a_1}^{a_2}h(\epsilon+1,\gamma_2(t))dt.\end{aligned}$$

Entonces

$$\left[(\epsilon+1)^2-1\right]\left|\int_{a_1}^{a_2}h(\epsilon+1,\gamma_2(t))dt\right| \le \left[(\epsilon+1)^2-1\right]\int_{a_1}^{a_2}|h(\epsilon+1,\gamma_2(t))|dt.$$

Se puede ver que

$$\begin{aligned}\Delta X^2 &= \mathcal{O}(x^2),\\ \Delta Y^2 &= \mathcal{O}(x^{-2}),\\ \Pi X &= \mathcal{O}(x^4).\end{aligned}$$

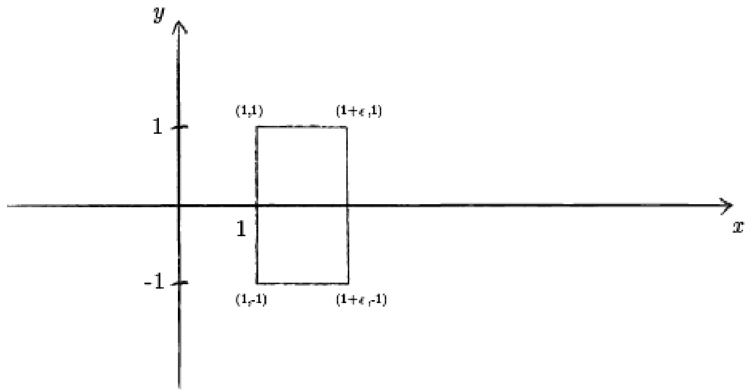

Figura 3.3: Región donde se está integrando

Por tanto

$$f = \frac{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2}{\Pi X} = \mathcal{O}(X^{-4}).$$

Si obtenemos la derivada respecto a x, se tiene que

$$h = \partial_x f = \mathcal{O}(X^{-5}).$$

Entonces

$$\left[(\epsilon+1)^2 - 1\right] \int_{a_1}^{a_2} |h(\epsilon+1, \gamma_2(t))| dt \leq C \frac{(\epsilon+1)^2 - 1}{(\epsilon+1)^5}.$$

que tiende a cero cuando $\epsilon \to \infty$. Así,

$$\int_\Gamma \nabla \cdot \left(\rho \nabla \left(\frac{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2}{\Pi X} \right) \right) = 0.$$

Por la identidad (3.13),

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \frac{\rho}{\Pi X} \left[\frac{\Delta Y}{X_1} \nabla Y_1 + \frac{X_1}{X_2} \nabla X_2 - \nabla X_1 \right]^2 + \frac{\rho}{\Pi X} \left[\frac{\Delta Y}{X_2} \nabla Y_2 - \frac{X_2}{X_1} \nabla X_1 + \nabla X_2 \right]^2 \\ + \frac{\rho}{2\Pi X} \left[\left(\frac{\nabla Y_2}{X_2} - \frac{\nabla Y_1}{X_1} \right) \Sigma X - \left(\frac{\nabla X_2}{X_2} + \frac{\nabla X_1}{X_1} \right) \Delta Y \right]^2 \\ + \frac{\rho}{2\Pi X} \left[\left(\frac{\nabla Y_2}{X_2} + \frac{\nabla Y_1}{X_1} \right) \Delta X - \left(\frac{\nabla X_2}{X_2} + \frac{\nabla X_1}{X_1} \right) \Delta Y \right]^2 = 0 \end{aligned}$$

y podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\frac{\rho}{\Pi X}\left[\frac{\Delta Y}{X_1}\nabla Y_1+\frac{X_1}{X_2}\nabla X_2-\nabla X_1\right]^2&=0,\\
\frac{\rho}{\Pi X}\left[\frac{\Delta Y}{X_2}\nabla Y_2-\frac{X_2}{X_1}\nabla X_1+\nabla X_2\right]^2&=0,\\
\frac{\rho}{2\Pi X}\left[\left(\frac{\nabla Y_2}{X_2}-\frac{\nabla Y_1}{X_1}\right)\Sigma X-\left(\frac{\nabla X_2}{X_2}+\frac{\nabla X_1}{X_1}\right)\Delta Y\right]^2&=0,\\
\frac{\rho}{2\Pi X}\left[\left(\frac{\nabla Y_2}{X_2}+\frac{\nabla Y_1}{X_1}\right)\Delta X-\left(\frac{\nabla X_2}{X_2}+\frac{\nabla X_1}{X_1}\right)\Delta Y\right]^2&=0,
\end{aligned}$$

lo cual se puede reescribir como

$$\Delta Y X_2\nabla Y_1+X_1^2\nabla X_2-\Pi X\nabla X_1=0, \tag{3.14}$$

$$\Delta Y X_1\nabla Y_2-X_2^2\nabla X_1+\Pi X\nabla X_2=0, \tag{3.15}$$

$$\left(X_1\nabla Y_2-X_2\nabla Y_1\right)\Sigma X=\nabla\Pi X\Delta Y, \tag{3.16}$$

$$\nabla\Pi X\Delta X=\nabla\Pi X\Delta Y. \tag{3.17}$$

De las últimas dos igualdades podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\left(X_1\nabla Y_2-X_2\nabla Y_1\right)\Sigma X&=\Pi X\Delta X,\\
X_1^2\nabla Y_2&=X_2^2\nabla Y_1.
\end{aligned}$$

Por tanto, de la identidad (3.17) usando la identidad anterior tenemos que

$$\nabla\Pi X\Delta Y=\nabla\Pi X\Delta X=\Pi X(\nabla\Delta Y)\quad \text{y}\quad \nabla\Pi X\Delta Y-\Pi X(\nabla\Delta Y)=0,$$

por lo que

$$\nabla\left(\frac{\Delta Y}{\Pi X}\right)=0.$$

De la ecuación anterior se tiene que $\Delta Y=k\Pi X$; pero cuando $x\to\infty$, $\Delta Y\to 0$; entonces $k\Pi X=0$; como $\Pi X\neq 0$, se tiene

$$Y_2=Y_1.$$

Por otro lado, de la identidad (3.14) y tomando en cuenta que $Y_1=Y_2$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\Delta Y X_2\nabla Y_1+X_1^2\nabla X_2-\Pi X\nabla X_1&=0\\
X_1(X_1\nabla X_2-X_2\nabla X_1)&=0\\
\nabla\left(\frac{X_1}{X_2}\right)&=0.
\end{aligned}$$

Así, de manera análoga a como se demostró que $Y_1 = Y_2$, se tiene que $X_2 = X_1$. Por lo tanto, las soluciones de Kerr están determinadas por la masa y la densidad de momento angular.

$\square$

Una observación más. Si $Y = 0$, entonces el twist satisface $2\omega_k = dY = 0$, y por tanto $dk \wedge k = 0$; es decir, el espacio-tiempo es estático, por lo que $a = 0$ y la simetría sería esférica. Entonces como corolario del teorema anterior, se puede decir que los agujeros negros estáticos y con simetría esférica sólo dependen de la masa. Este resultado es el Teorema de Israel, el cual establece que *la métrica de Schwarzschild es la única solución que representa agujeros negros estáticos*, sin suponer la simetría axial.

3.6.1 Conclusiones

El objetivo principal de esta tesis fue demostrar el siguiente teorema:

Teorema 3.10 (Robinson, 1975) *Las soluciones de Kerr a las ecuaciones de Einstein en el vacío, estacionarias, axisimétricas y asintóticamente planas están determinadas por la masa y la densidad de momento angular.*

Para demostrarlo se usan las simetrías temporales y espaciales, las cuales se reflejan en la existencia de ciertos campos de Killing. Dichas simetrías son importantes pues nos permitieron simplificar las ecuaciones de campo de Einstein. Para esto, se construyó dos distribuciones complementarias, cuya integrabilidad dependía de ciertas condiciones sobre el tensor de Ricci. Para este caso particular, el tensor de Ricci es nulo. Así se logra en un cierto sentido diagonalizar la métrica del espacio-tiempo (M, g). La ecuación de Ernst nos permitió reducir de seis incógnitas de la métrica a sólo dos. Finalmente supusimos que existían dos soluciones y mediante un método parecido para demostrar la unicidad a la ecuación de laplace, se demostró la unicidad de la métrica de Kerr.

El teorema de Robinson se enmarca dentro de una línea de teoremas de unicidad de modelos de espacios-tiempo, donde imponemos condiciones naturales sobre nuestro espacio (una variedad), que se reducen a ciertos tipos de ecuaciones diferenciales parciales. Otro de los teoremas clásicos en este sentido es el teorema de Birkhoff. En los casos en que nuestra variedad es compacta, imitamos las pruebas usuales de la unicidad de soluciones a la ecuación de Laplace integrando sobre dicha variedad. En el caso no compacto, es natural imponer condiciones de comportamiento asintótico, que en el caso del problema de unicidad de espacios-tiempo suelen ser del tipo “Minkowski en infinito” o condiciones similares. Aunque hemos explorado un resultado clásico, es importante destacar que en la actualidad se siguen estudiando y demostrando resultados en esta línea de investigación, de la que apenas hemos tocado la superficie.

Bibliografía

[1] Baez J., Muniain J. (1994), *Gauge Fields, Knots and Gravity*, World Scientific Publishing Company.

[2] Carter B. (1969), *Killing Horizons and Orthogonally Transitive Groups in Space-Time. J. Math. Phys.* 10: 70-81.

[3] Carter B. (1970), *The Commutation Property of a Stationary Axisymmetric System. Comm. Math. Phys.* 17: 233-238.

[4] Carter B. (2010), *Republication of: Black hole equilibrium states. Part II. General theory of stationary black hole states. Gen. Rel. Grav.* 42: 653-744.

[5] Carter B. (1971), *Axisymmetric Black Hole Has Only Two Degrees of Freedom. Phys. Rev. Lett.* 26: 331-332.

[6] Chandrasekhar S. (1983), *The Mathematical Theory of Black Holes*, Clarendon Press.

[7] Chruściel P., Galloway G., Pollack D. (2010), *Mathematical general relativity: a sampler.* arXiv:1004.1016 [gr-qc].

[8] Ernst F. J. (1968), *New Formulation of the Axially Symmetric Gravitational Field Problem. Phys. Rev.* 167: 1175-1178.

[9] Israel W. (1967), *Event Horizons in Static Vacuum Space-Times. Phys. Rev.* 164: 1776-1779.

[10] Lee J. (2013), *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer.

[11] Lee J. (2018), *Introduction to Riemannian Manifolds*, Springer.

[12] Heusler M. (1996), *Black Hole Uniqueness Theorems*, Cambridge University Press.

[13] O'Neill B. (1986), *Semi-Riemannian Geometry with Applications to General Relativity*, Academic Press.

[14] Robinson D. (1975), *Uniqueness of the Kerr Black Hole, Phys. Rev. Lett.* 34: 905-906.

[15] Robinson D. (2012), *Four decades of black hole uniqueness theorems. King's Coll. London, Dept. Math.*

[16] Sánchez H., Palmas O. (2007), *Geometría Riemanniana.* Las prensas de ciencias, UNAM.

[17] Wald R. M. (1984), *General Relativity.* Univ. of Chicago Press.