



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
CIENCIAS FÍSICAS

CAMPOS INTERACTUANDO EN LA VECINDAD DE  
AGUJEROS NEGROS

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS FÍSICAS

PRESENTA:

JUAN CARLOS RIVAS GONZÁLEZ

TUTOR:

DRA. NORA EVA BRETÓN BÁEZ,  
CINVESTAV ZACATENCO

CIUDAD DE MÉXICO, ENERO 2020



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Resumen

El principal objetivo de este trabajo de tesis es determinar los efectos sobre un campo escalar masivo y cargado en el espacio-tiempo creado por un agujero negro de Born-Infeld. En particular estudiar los modos cuasinormales que surgen en esta interacción y si favorece la aparición de inestabilidades superradiantes, en las frecuencias del campo escalar. El campo escalar obedece la ecuación de Klein-Gordon, la cual se resuelve en el espacio curvo del agujero negro.

Para ello en el capítulo uno se introduce la solución de las ecuaciones de Einstein acopladas con la electrodinámica no lineal de Born-Infeld, como una generalización al agujero negro de Reissner-Nordstrom. Enseguida en el capítulo dos se determina la solución a la ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar masivo y cargado en el espacio curvo generado por el agujero negro de Born-Infeld y se calculan los modos cuasi normales del campo prueba. De tal forma que en el capítulo tres se muestran los resultados de las frecuencias reales e imaginarias, así como los efectos al variar los principales parámetros del sistema, en búsqueda de la configuración de valores para el parámetro de Born-Infeld,  $b$ , la carga eléctrica del agujero negro,  $Q$ , y el momento angular del campo escalar,  $l$ , que favorecen la aparición de modos superradiantes. Por último se plantea, al final de la tesis la sección de conclusiones, donde se explica la necesidad de darle seguimiento al trabajo de investigación, contemplando correcciones que harán el modelo mas realista.

# Dedicatoria y Agradecimientos

## Agradecimientos

Sí es cierto que en la naturaleza hay patrones implícitos. Entonces doy gracias a Dios por las matemáticas que permiten descifrarlos.

Mi especial agradecimiento al posgrado en ciencias físicas de la UNAM , al CONACYT por todo el apoyo brindado y a mi tutora la Dra. Nora Eva Bretón Báez del CINVESTAV mi mayor respeto y gratitud, ya que en todo momento mostró interés en aclarar mis dudas y guiar el trabajo de Tesis.

## Dedicatoria

**A las personas que me han hecho una mejor persona y que con el andar de la vida me han llenado de un conjunto infinito de felicidad: Mi hijo Emiliano Rivas Arellano que tanto amo, a mi mujer que en mas de una ocasión ha sido mi fuerza y me ha ayudado a levantarme y a quien amo mucho Diana Janet Arellano Romano y por último la persona que más admiro y con quien estoy infinitamente agradecido mi mamá María Guadalupe González Molina que con sacrificios me guío, educó y formó todo lo que ahora soy. En conjunto mi familia determina lo que soy, seguiré siendo y quién me da la fuerza e inspiración para día con día salir adelante a los retos que se me presentan.**

Abuelito Fili ojalá supiera como acceder a la intersección entre la vida material y el mundo del espíritu para abrazarte nuevamente y agradecerte todo lo que en vida me enseñaste e hiciste por mi!!.

Mi enorme gratitud a mi familia por todo el apoyo, sacrificio y tiempo alejados, que me ha costado sacar este trabajo de tesis. Pero sobre todo gracias por estar ahí cuando más los he necesitado. Gracias!!.

Juan Carlos Rivas González

Enero 2020

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Dedicatoria y Agradecimientos</b>	<b>II</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
§1.1 Modos quasi normales en un sistema físico . . . . .	1
§1.2 Antecedentes . . . . .	2
§1.3 Trabajos previos . . . . .	2
§1.3.1 Reissner-Nordstrom . . . . .	3
§1.3.2 Born-Infeld . . . . .	3
§1.4 Modos superradiantes . . . . .	4
§1.5 Descripción del problema . . . . .	5
<b>2 Solución a la ecuación de Klein-Gordon</b>	<b>7</b>
§2.1 Resolviendo las perturbaciones mediante la ecuación de Klein-Gordon . . .	7
§2.1.1 Potencial efectivo en el espacio-tiempo estático de Born-Infeld . . . . .	8
§2.2 Método WKB para el cálculo de los modos normales $\omega_r$ y $\omega_i$ . . . . .	11
§2.2.1 Solucion a sexto orden por Sai Iyer . . . . .	12
<b>3 Análisis de resultados</b>	<b>14</b>
15	
§3.1.1 Frecuencias reales vs b . . . . .	15
§3.1.2 Frecuencias imaginarias vs b . . . . .	16
17	
§3.2.1 Frecuencias reales vs Q . . . . .	17
§3.2.2 Frecuencias imaginarias vs Q . . . . .	18
19	
§3.3.1 Frecuencias reales vs l . . . . .	19
§3.3.2 Frecuencias complejas vs l . . . . .	20
§3.4 Notas aclaratorias . . . . .	21
§3.4.1 Existencia del potencial de enlace . . . . .	21
§3.4.2 Descomposición en modos cuasi normales . . . . .	21
<b>4 Conclusiones</b>	<b>23</b>
§4.1 Perspectivas a futuro . . . . .	24

# Índice de figuras

2.1	.....	10
2.2	.....	11
3.1	.....	15
3.2	.....	16
3.3	.....	17
3.4	.....	18
3.5	.....	19
3.6	.....	20

# Capítulo 1

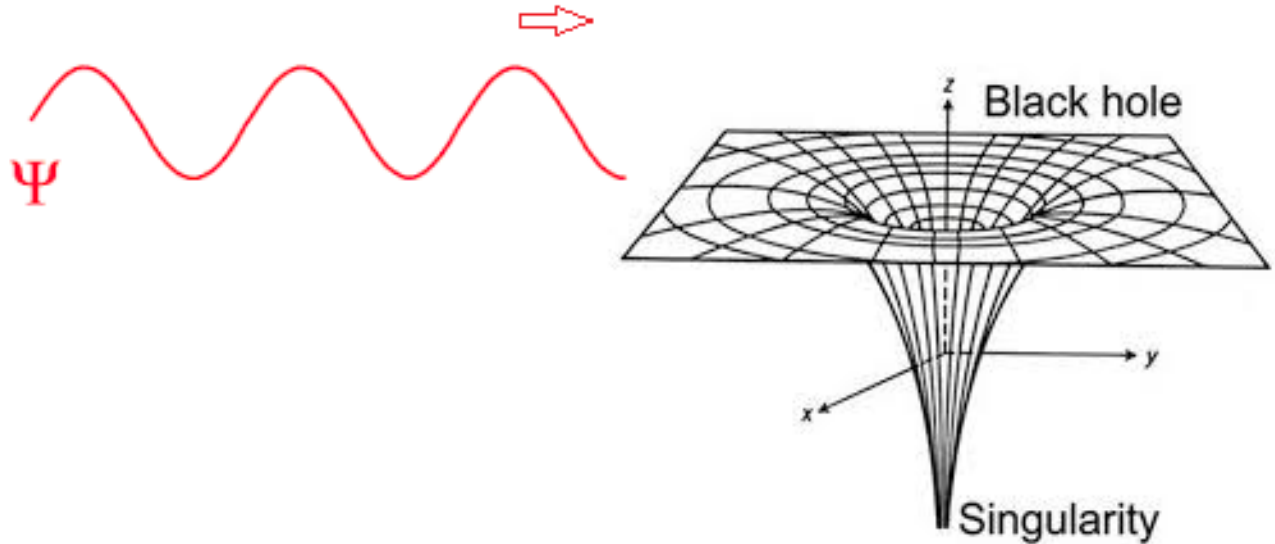
## Introducción

Entender los agujeros negros como interpretación de algunas soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein, requiere de cierto grado de abstracción, ya que por la naturaleza no lineal de las ecuaciones, los sistemas físicos que emergen de la teoría suelen desafiar a la razón. Esta es la motivación principal de este trabajo de tesis, explorar un tipo particular de solución a las ecuaciones de campo de Einstein; el agujero negro estático, masivo y cargado de Born-Infeld, capaz de generar campos eléctricos no lineales. Para interactuar con el agujero negro, se contempla un campo de prueba escalar  $\psi$ , con masa y carga en las cercanías del horizonte de eventos y se analizan los efectos sobre los modos cuasi normales de la perturbación, después de interactuar con el potencial efectivo que genera el campo gravitacional del agujero negro. Se busca inducir un tipo de inestabilidades que en la literatura se conocen como modos superradiantes, ya que esta dispersión superradiante permite extraer energía del agujero negro.

### 1.1. Modos cuasi normales en un sistema físico

Es común encontrar en la naturaleza sistemas oscilantes, los cuales tienen preferencias por vibrar de una u otra forma, a este tipo de vibraciones particulares se les llama modos normales de un sistema. Esta idea de los modos normales cobra fuerza si se recuerda que todo sistema que es perturbado, tiende a regresar a su estado de equilibrio liberando energía durante el proceso. Esto implica un cambio en la energía de los modos normales del sistema oscilante debido a la perturbación, es entonces cuando los modos normales buscan regresar a su estado base liberando energía durante el proceso, lo cual ocurre en un tiempo finito y determinado.

La característica principal de los modos normales de un sistema oscilante, es que los elementos del sistema tienen la misma frecuencia y una misma fase. Cuando las frecuencias características son perturbadas al interactuar con otro sistema en consecuencia aumentan su energía por un tiempo determinado, para después disiparse y regresar a su estado de equilibrio liberando parte de esa energía durante el proceso, a estas frecuencias se les conoce en la literatura como **modos cuasi normales**. Esta liberación de energía es importante en este trabajo de tesis, ya que se desea analizar qué tan viable es extraer energía del agujero negro de Born-Infeld, perturbando los modos cuasi normales del campo escalar  $\psi$ . Cuando



el sistema no es cerrado, entonces se habla de un modo cuasi normal. En este trabajo de tesis se hace referencia a este tipo de modos, ya que después de perturbar el campo escalar  $\psi$ , con el potencial efectivo de Born-Infeld, se espera el surgimiento de inestabilidades en las frecuencias reales e imaginarias del campo de prueba, debido a un potencial de enlace que amplifique las frecuencias para después decaer con el tiempo, a estos modos se les conoce en la literatura como **modos superradiantes**.

## 1.2. Antecedentes

Max Born y Leopold Infeld, generalizaron la teoría clásica y lineal del electromagnetismo de Maxwell, proponiendo una teoría consistente en 1934, con un lagrangiano del que se deriva una electrodinámica no lineal y sin divergencias. Una particularidad importante del lagrangiano antes mencionado es que tiene analogías con el lagrangiano de electrodinámica cuántica (QED), el cual se relaciona con la polarización del vacío. Regresando al lagrangiano de Born-Infeld, se sabe que remueve las divergencias que aparecen conforme se aproxima al origen de la carga, logrando con esto que el valor del campo eléctrico y la energía, cuando el radio está localizado en el origen de la carga, sea finita y alcance un valor máximo. Esta teoría evita el problema de las autoenergías infinitas para las cargas puntuales imponiendo a los campos, una cota superior determinada por el parámetro  $b \sim 10^{20} \frac{m}{V}$ , que se refiere a la intensidad máxima que puede tener el campo eléctrico del sistema.

## 1.3. Trabajos previos

La métrica de Born-Infeld generalizó la solución esférica y con masa de Schwarzschild, así como la solución esférica de Reissner-Nordstrom masiva y cargada, que en ambos casos son soluciones estáticas [6].



### 1.3.1. Reissner-Nordstrom

El agujero negro de Reissner-Nordstrom (R-N), es la solución estática y esférica de las ecuaciones acopladas de Einstein-Maxwell. Esta solución describe campos gravitatorios, generados por cuerpos estáticos masivos, cargados y que generan campos eléctricos lineales que van en dirección radial. Al identificar el Lagrangiano característico del sistema:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{RN}} = \sqrt{|g|} \left[ \frac{1}{2\kappa} R - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} \right], \quad (1.1)$$

donde  $g = \det|g_{\mu\nu}|$ ,  $\kappa = 8\pi G$ ,  $R$  el escalar de curvatura y al variar la acción respecto al tensor métrico se obtienen las ecuaciones de Einstein y al variar la acción respecto al potencial electromagnético se obtienen las ecuaciones de Maxwell, las cuales al resolverlas se obtiene el campo eléctrico clásico  $\mathcal{F}_{tr} = E(r) = \frac{Q}{r^2}$ , además de la estructura espacio-temporal del agujero negro R-N [10], descrita por la siguiente métrica,

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.2)$$

con  $f(r)$  la función métrica R-N:

$$f(r) = f_{RN} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}. \quad (1.3)$$

### 1.3.2. Born-Infeld

Como se mencionó anteriormente la solución de Born e Infeld (B-I), generaliza el trabajo de R-N. Proponiendo el siguiente lagrangiano en 1934, el cual resuelve las singularidades que se heredan de la teoría clásica del electromagnetismo de Maxwell, conforme uno se aproxima al origen de la carga [11]:

$$\mathcal{L}_{BI} = 4b^2 \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{F}{2b^2} + \frac{G^2}{16b^4}} \right) \quad (1.4)$$

donde

$$\begin{aligned} F &= F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2(B^2 - E^2) \\ G &= \tilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \vec{E} \cdot \vec{B}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

son los invariantes electromagnéticos, además  $\tilde{F}_{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$  y  $b \sim 10 \frac{20}{V_{olt}} \frac{m}{m}$  el valor máximo del campo en el origen de la carga. Enseñada de la acción de Einstein-Born-Infeld

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{g} (R - \mathcal{L}_{BI}) \quad (1.6)$$

su consecuente solución estática i) la métrica de Born-Infeld

$$ds_{BI}^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1.7)$$

así como ii) el potencial electromagnético

$$A_t = QI(r), \quad (1.8)$$

donde  $f_{BI}$  es la función métrica de Born-Infeld y tiene la forma:

$$f = f_{BI} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{2}{3}r^2b^2 \left[ 1 - \sqrt{1 + \frac{Q^2}{b^2r^4}} \right] + \frac{4Q^2}{3r}I(r) \quad (1.9)$$

con

$$I(r) = \int_r^\infty \left[ \frac{Q^2}{b^2} + s^4 \right]^{-1/2} ds = \frac{1}{r} {}_2F_1 \left[ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{5}{4}; -\frac{Q^2}{b^2r^4} \right] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b}{Q}} F \left[ \arccos \left( \frac{r^2 - \frac{Q}{b}}{r^2 + \frac{Q}{b}} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right]. \quad (1.10)$$

La función  ${}_2F_1 \left[ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{5}{4}; -\frac{Q^2}{b^2r^4} \right]$  es la función hipergeométrica y  $F \left[ \arccos \left( \frac{r^2 - \frac{Q}{b}}{r^2 + \frac{Q}{b}} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$  es la función elíptica de Legendre. Una característica importante de la función métrica  $f_{BI}$  es que en el límite de "b" grandes,  $f_{BI} \rightarrow f_{RN}$  y entonces se recupera la solución de R-N del electromagnetismo de Maxwell.

## 1.4. Modos superradiantes

En el 2013 [9] J. C. Degollado usando la métrica R-N (1.2), la función métrica R-N (1.3) y la ecuación de Klein-Gordon con el campo escalar  $\psi = e^{-i\omega t} \sum_{l,m} Y_l^m(\theta, \phi) R_l(r)/r$ , obtiene la ecuación tipo Schrodinger:

$$\left[ -\frac{d^2}{dr^{*2}} + V(r) \right] R_l(r) = \omega^2 R_l(r), \quad (1.11)$$

donde  $r^*$  es el radio tortuga y  $V(r)$  es el potencial efectivo:

$$V(r) = \frac{2qQ\omega}{r} - \frac{q^2Q^2}{r^2} + f_{RN} \left( \frac{l(l+1)}{r^2} + \mu^2 + \frac{f'(r)}{r} \right). \quad (1.12)$$

Entonces resuelve numéricamente la ecuación (1.11), imponiendo las condiciones de campo escalar entrante en el infinito con  $R_l \sim e^{-i(\omega - \omega_c)r^*}$  así como el valor de la función radial  $R_l(r_m) = 0$  en el radio espejo  $r_m$ , este radio espejo es una hipótesis con sentido matemático que se introduce para confinar el agujero negro, dentro de una cavidad esférica de radio  $r_m$ . Con estas condiciones de frontera en las cercanías del horizonte de eventos, logra calcular las frecuencias reales e imaginarias del campo  $\psi$  masivo y cargado dentro de la cavidad esférica y logra generar **inestabilidades superradiantes**. Por esta razón es imperativo

analizar el agujero negro de B-I, en búsqueda de inestabilidades superradiantes análogas a las que surgen en el caso R-N.

De acuerdo con el trabajo de Hod 2015 [8], la existencia de **dispersión superradiantes** para un agujero negro cargado como el de Reissner-Nordstrom (RN) exige que se cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

1. La extracción de energía coulombiana proveniente del agujero negro cargado debido a la amplificación superradiante del campo escalar en el régimen  $\omega < \frac{qQ}{r_+}$ , donde  $q$  es la carga asociada al campo escalar,  $Q$  la carga del agujero negro y  $r_+$  el radio externo del horizonte de eventos.
2. La existencia de una barrera de potencial de enlace y en la región externa al agujero negro que impida que la energía extraída se escape hacía infinito. Este potencial de enlace debe estar separado del horizonte de eventos y tiene la función de atrapar y amplificar las resonancias que se generen del campo escalar en la región externa al agujero negro.

Como ejemplo de dispersión superradiante se encuentra la figura 2 en el atrabajo de Lehner del 2016 [14], donde se observa la evolución de las frecuencias reales en el tiempo. La gráfica muestra diferentes modos donde sus valores reales de las frecuencias del campo escalar, no satisfacen las condiciones de modos superradiantes y decaen rápidamente. Por otra parte en esa misma gráfica se observa que los modos con frecuencias reales bajas son inestables y crecen exponencialmente. Con el tiempo estos modos superradiantes comienzan a extraer energía de la carga y la masa del agujero negro para entonces comenzar a decaer y ser reabsorbidos por el agujero negro. Esto significa que la extracción de energía del agujero negro continua hasta que el modo fundamental deja de crecer.

## 1.5. Descripción del problema

Conocida la métrica del espacio-tiempo de Born-Infeld (1.7) y (1.9), se hace interactuar el campo escalar masivo y cargado  $\psi$ , con el potencial efectivo del agujero negro de Born-Infeld ( $V_{BI}$ ), el cual se calcula acoplando el campo escalar con la ecuación de Klein-Gordon (2.1). Entonces se analiza si  $V_{BI}$  satisface la condición de potencial enlace y posteriormente se analiza el efecto sobre las frecuencias reales  $\omega_{Re}$  e imaginarias  $\omega_{Im}$  del campo de prueba  $\psi$ , en busca de los modos superradiantes. Por último se varían los parámetros del sistema como la carga del agujero negro  $Q$ , el momento angular  $l$  y el parámetro de Born-Infeld  $b$ , en búsqueda de las condiciones físicas que favorezcan la aparición de las inestabilidades superradiantes en el caso que se cumplan las dos condiciones la amplificación de las frecuencias y la aparición del potencial enlace. Para ello en el siguiente capítulo se calculan las derivadas del potencial efectivo y se implementa la aproximación WKB a sexto orden para obtener los modos cuasi normales del campo escalar  $\psi$ . Entonces se calculan los radios en donde ocurren los máximos del potencial efectivo y después se evalúan en estos puntos las derivadas de  $V_{BI}$ , y se computan las frecuencias reales  $\omega_{Re}$  e imaginarias  $\omega_{Im}$  del campo escalar. Paso seguido se realiza un análisis cualitativo de los modos cuasi normales variando los  $Q$ ,  $b$  y  $l$ , así como el valor del cociente  $\frac{q}{\mu}$ , para poder mapear en el

capítulo tres los patrones de cada una de las gráficas de  $\omega_{Re}$  y  $\omega_{Im}$ , de esta forma evaluar si aparecen modos superradiantes en nuestro caso.

# Capítulo 2

## Solución a la ecuación de Klein-Gordon

Como se mostró en el trabajo de J.C. Degollado del 2013 [9], es posible obtener dispersión superradiante al imponer la condición de potencial de enlace fuera del agujero negro R-N. Este potencial de enlace presenta un mínimo en el cual se amplifican las frecuencias reales del campo escalar y surgen los modos superradiantes. En este trabajo de tesis con el afán de generar las inestabilidades superradiantes, se analiza cómo evolucionan los modos normales del campo en presencia del potencial efectivo de B-I. Para ello se necesita saber si el potencial efectivo B-I, cumple la condición de potencial de enlace, por lo cual **i)** en el siguiente capítulo se calcula la forma análoga en el caso del agujero negro B-I del potencial efectivo, para después **ii)** analizar si presenta o no la condición de tener un mínimo, tomando en cuenta que en este trabajo no se incluye la constante cosmológica ( $\Lambda = 0$ ) como factor dentro del potencial efectivo y además no se impone la condición de radio espejo tomada en cuenta por Juan Carlos Degollado [9]. Por último pese a que aún no se sabe si el potencial efectivo B-I, presenta o no la condición de tener un mínimo se **iii)** aprovecha que el potencial efectivo actúa como una barrera de potencial para el campo escalar, con lo cual se justifica el uso de las técnicas de la mecánica cuántica para implementar la aproximación WKB a sexto orden que desarrollo Iyer en 1987 [2], para entonces calcular las frecuencias reales  $\omega_{Re}$  e imaginarias  $\omega_{Im}$  de los modos cuasi normales del campo escalar  $\psi$  en presencia del potencial efectivo del agujero negro de Born-Infeld.

### 2.1. Resolviendo las perturbaciones mediante la ecuación de Klein-Gordon

Para resolver las frecuencias reales  $\omega_{Re}$  e imaginarias  $\omega_{Im}$  del campo escalar  $\psi$ , primero se calcula la forma del potencial efectivo  $V_{BI}$  representado en un espacio tiempo estático donde la constante cosmológica tiene el valor ( $\Lambda = 0$ ), para esto se acopla el campo escalar  $\psi$  con la ecuación de Klein-Gordon.

### 2.1.1. Potencial efectivo en el espacio-tiempo estático de Born-Infeld

Se considera la ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar  $\psi$ , masivo y cargado en un espacio-tiempo curvo generado por el agujero negro de Born-Infeld:

$$\left[ (\nabla_v - iqA_v)(\nabla^v - iqA^v) - \mu^2 \right] \psi = 0. \quad (2.1)$$

Si  $\psi$  es un campo escalar sucede que  $A_v \nabla^v \psi = A^v \nabla_v \psi$  y  $\nabla_v \rightarrow \partial_v$ , entonces podemos reescribir la ecuación (2.1) usando  $\nabla_v A^v = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_v (\sqrt{-g} A^v)$  y con la forma esférica del laplaciano:

$$\nabla_v \nabla^v \psi = \frac{1}{r^2} \partial_r [\Delta(r) \partial_r \psi] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\theta [\sin(\theta) \partial_\theta \psi] - \frac{m^2}{r^2 \sin^2 \theta} \psi + \frac{\omega^2 r^2}{\Delta(r)} \psi \quad (2.2)$$

y si además se supone que el agujero negro es esféricamente simétrico se tiene que  $A^v = g^{vn} A_n = g^{tt} A_t$ , entonces usando la metrica de B-I

$$g^{vn} = \text{diag} \left[ -\frac{r^2}{\Delta(r)}, \frac{\Delta(r)}{r^2}, \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}, \frac{1}{r^2} \right] \quad (2.3)$$

reescribimos la ecuación de Klein-Gordon como:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \partial_r [\Delta(r) \partial_r \psi] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta [\sin \theta \partial_\theta \psi] - \frac{m^2}{r^2 \sin^2 \theta} \psi + \frac{\omega^2 r^2}{\Delta(r)} \psi \\ & - iq \left[ 2A^t \partial_t \psi + \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[ \partial_t (\sqrt{-g} A^t) \right] \psi \right] - \left[ q^2 A_t A^t + \mu^2 \right] \psi = 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

para el caso de Born-Infeld

$$A_t = Q \int_r^\infty \left[ \frac{Q^2}{b^2} + s^4 \right]^{-1/2} ds \quad (2.5)$$

$$A^t = g^{tt} A_t = -\frac{r^2}{\Delta(r)} \left[ Q \int_r^\infty \left[ \frac{Q^4}{b^4} + s^4 \right]^{-1/2} ds \right] \quad (2.6)$$

por lo que la ecuación (2.4) toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \partial_r [\Delta(r) \partial_r \psi] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta [\sin \theta \partial_\theta \psi] - \frac{m^2}{r^2 \sin^2 \theta} \psi + \frac{\omega^2 r^2}{\Delta(r)} \psi \\ & - iq \left[ -\frac{2r^2}{\Delta(r)} I(r) \right] \partial_t \psi - \left[ \frac{-q^2 r^2}{\Delta(r)} I^2(r) + \mu^2 \right] \psi = 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

entonces sustituyendo la forma completa del campo escalar

$$\psi = e^{-i\omega t} e^{im\phi} S_{lm}(\theta) \frac{R_{lm}(r)}{r}, \quad (2.8)$$

separamos la ec. (2.7), dividiendola entre  $e^{-i\omega t} e^{im\phi}$  y despues reagrupando los términos para obtener el desacoplamiento de las partes angular y radial:

$$\begin{aligned} & \frac{R_{lm}(r)}{r} \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{\sin\theta} \partial_\theta \left[ \sin\theta \partial_\theta S_{lm}(\theta) \right] - S_{lm}(\theta) \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] + \\ & S_{lm}(\theta) \left[ \frac{1}{r^2} \partial_r \left[ \Delta(r) \partial_r \frac{R_{lm}(r)}{r} \right] + \frac{\omega^2 r^2}{\Delta(r)} \frac{R_{lm}(r)}{r} + \right. \\ & \left. 2q\omega r^2 \frac{I(r)}{\Delta(r)} \frac{R_{lm}(r)}{r} + q^2 r^2 \frac{I^2(r)}{\Delta(r)} \frac{R_{lm}(r)}{r} - \mu^2 \frac{R_{lm}(r)}{r} \frac{1}{r^2} \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

de donde se reconoce la ecuación angular  $\left[ \frac{1}{\sin\theta} \partial_\theta \left[ \sin\theta \partial_\theta S_{lm}(\theta) \right] - S_{lm}(\theta) \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] = -l(l+1)S_{lm}(\theta)$ , por lo cual se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \left[ \Delta(r) \partial_r^2 \left[ \frac{R_{lm}(r)}{r} \right] + \Delta'(r) \partial_r \left[ \frac{R_{lm}(r)}{r} \right] \right] + \\ & \left[ \frac{r^2}{\Delta(r)} \left[ \omega^2 + 2q\omega I(r) + q^2 I^2(r) \right] - \frac{l(l+1)}{r^2} - \mu^2 \right] \frac{R_{lm}(r)}{r} = 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

que se puede reescribir en la siguiente forma usando la siguiente igualdad

$$\frac{\Delta(r)}{r^2} \left[ -\frac{2R'_{lm}}{r} + \frac{2R_{lm}}{r^2} \right] + \frac{\Delta'(r)}{r^2} \left[ R'_{lm} - \frac{R_{lm}}{r} \right] = \left[ \frac{\Delta(r)}{r^2} \right]' \left[ R'_{lm} - \frac{R_{lm}}{r} \right]:$$

$$\frac{\Delta(r)}{r^2} R''_{lm} + \left[ \frac{\Delta(r)}{r^2} \right]' \left[ R'_{lm} - \frac{R_{lm}}{r} \right] + \left[ \frac{r^2}{\Delta(r)} \left[ \omega^2 + 2q\omega I(r) + q^2 I^2(r) \right] - \frac{l(l+1)}{r^2} - \mu^2 \right] R_{lm} = 0. \quad (2.11)$$

Entonces si sustituimos  $f = f(r) = \frac{\Delta(r)}{r}$  se obtiene la ecuación radial por resolver, que describe al campo escalar  $\psi$  en las cercanías del horizonte de eventos del agujero negro de Born-Infeld:

$$-f \left[ f R''_{lm} + f' R'_{lm} \right] + \left[ -2q\omega I(r) - q^2 I^2(r) + f \left[ \frac{f'}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \mu^2 \right] \right] R_{lm} = \omega^2 R_{lm}, \quad (2.12)$$

la ecuación (2.12) se reconoce como una ecuación tipo Schrödinger por lo que el potencial efectivo de Born-Infeld es

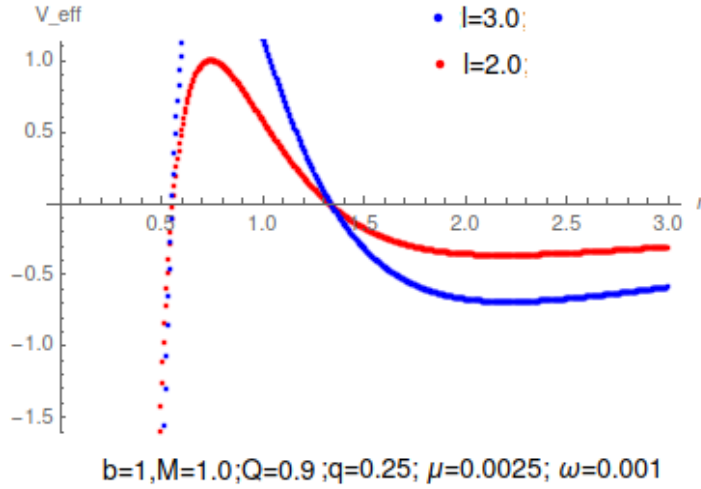


Figura 2.1:

Potencial efectivo de B-I como función de  $r$  y para diferentes valores del momento angular  $l$ .

$$V^{BI} = -2q\omega I(r) - q^2 I^2(r) + f \left[ \frac{f'}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \mu^2 \right], \quad (2.13)$$

donde la función métrica de Born-Infeld  $f = f_{BI}$  tiene la forma de la ecuaciones (1.9) y (1.10). En la figura 2.1, las gráficas del potencial efectivo (2.13) para diferentes valores del momento angular  $l$ . También en la figura 2.2, se observan las gráficas del potencial efectivo B-I, para diferentes valores de la carga  $Q$ .

Como se menciona en el capítulo anterior, una de las condiciones que favorecen la aparición de modos superradiantes es que exista un potencial de enlace fuera del agujero negro, Un ejemplo de este mínimo, se muestra en el trabajo del 2017 [13] donde se muestra la gráfica del potencial efectivo de Born-Infeld-de Sitter con el valor  $\Lambda = 0.5$  para la constante cosmológica, con lo cual en la figura 6 del mismo trabajo se observa un mínimo en la gráfica del potencial efectivo el cual se encuentra fuera del agujero negro y después del horizonte de eventos, entonces cumple las condiciones para la aparición de las inestabilidades superradiantes que buscamos en nuestro caso, sin embargo se observa en las figuras 2.1 y 2.2 que esta condición no ocurre al graficar el potencial efectivo (2.13), lo que hace poco probable que bajo estas condiciones aparezcan los **modos superradiantes** en el caso del agujero negro de Born-Infeld con la constante cosmológica  $\Lambda = 0$ . Por tanto al ilustrar el potencial efectivo (2.13) se obtiene que 1) no hay mínimo y 2) que es una barrera de potencial, lo cual justifica usar las técnicas de la mecánica cuántica como la aproximación WKB para resolver los modos cuasi normales del campo escalar en presencia del potencial efectivo B-I el cual además no presenta la condición de potencial enlace.

En la siguiente sección se usan los resultados de aproximación WKB para resolver las frecuencias en la ecuación (2.12) con la función métrica de Born-Infeld (1.9), para después determinar los valores de las frecuencias reales e imaginarias en los radios donde el potencial



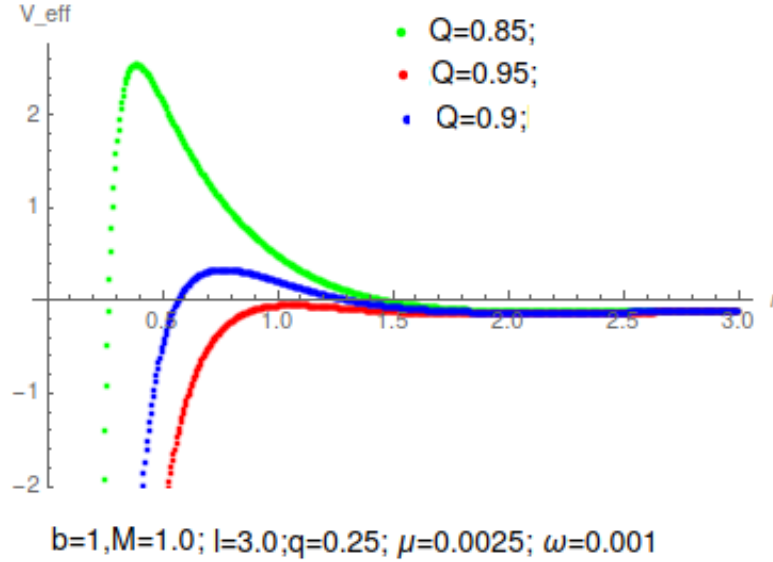


Figura 2.2:

Potencial efectivo B-I como función de  $r$  y para diferentes valores de la carga  $Q$  del agujero negro.

efectivo  $V^{BI}$  es máximo.

## 2.2. Método WKB para el cálculo de los modos normales $\omega_r$ y $\omega_i$

En 1987 Sai Iyer derivó una expresión para el cálculo de las frecuencias reales y complejas de una perturbación  $\psi$ , en el espacio-tiempo del agujero negro de Schwarzschild [2]. Para ello implementó una técnica semianalítica: la aproximación WKB a sexto orden, cabe mencionar que este resultado recupera los datos obtenidos en el caso de los modos normales de baja vibración. Por este motivo se implementa esta aproximación al caso del agujero negro de B-I, ya que en este trabajo se analizan valores de  $b$  pequeños, puesto que en el límite conforme  $b$  aumenta más o menos a partir de 3 y hasta  $\infty$ , se recupera el caso del agujero negro R-N, es decir:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \mathcal{L}_{BI} = \lim_{b \rightarrow \infty} 4b^2 \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{F}{2b^2} + \frac{G^2}{16b^4}} \right) \sim 4b^2 \left( -1 + 1 - \frac{F}{4b^2} + \dots \right) = -F = \mathcal{L}_{\mathcal{M}}, \quad (2.14)$$

donde  $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$  es el lagrangiano de Maxwell implementado en el caso R-N.

### 2.2.1. Solucion a sexto orden por Sai Iyer

Como se mostró anteriormente el problema de calcular las frecuencias  $\omega_{Re}$  y  $\omega_{Im}$  del campo escalar  $\psi$ , después de haber interactuado con el horizonte de eventos del agujero negro de B-I, se reduce a la ecuación tipo Schrodinger (2.12), que también se ve de la siguiente forma:

$$-\frac{d^2}{dr^{*2}}R_{lm} + [V^{BI} - \omega^2]R_{lm} = 0, \quad (2.15)$$

donde  $-\frac{d^2}{dr^{*2}}R_{lm} = -f[fR''_{lm} + f'R'_{lm}]$ ,  $r^* = \int \frac{dr}{f(r)}$  es el radio tortuga y  $V^{BI}$  el potencial efectivo B-I. Entonces para resolver la ecuación (2.15) se divide el problema de interacción  $\psi$  con  $V^{BI}$  en tres regiones:

- i) Donde el campo  $\psi$  es entrante y  $V^{BI} = 0$ ,
- ii) La región de interacción donde  $V^{BI} \neq 0$ ,
- iii) La región de  $\psi$  es saliente con  $V^{BI} = 0$ .

De esta forma las funciones de la region i) y iii) se deben unir con la región ii) donde el potencial es de la forma  $V^{BI}$  entonces para obtener la solución en la región ii) se supone una distancia pequeña entre las regiones i) y iii), para poder generar los modos normales bajos y realizar en la región ii) una expansión en series de Taylor a sexto orden y al rededor del radio máximo. Entonces con las condiciones de frontera que surgen al conectar la solución saliente en iii) con la solución de la región ii), se obtiene la siguiente expresión para las frecuencias reales e imaginarias:

$$\omega^2 = [V_0 + (-2V_0'')^{1/2} \Lambda] - i\left(n + \frac{1}{2}\right) (-2V_0'')^{1/2} (1 + \Omega), \quad (2.16)$$

por tanto

$$\begin{aligned} \omega_R &= [V_0 + (-2V_0'')^{1/2} \Lambda] \\ \omega_I &= -\left(n + \frac{1}{2}\right) (-2V_0'')^{1/2} (1 + \Omega), \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde los polinomios  $\Lambda$  y  $\Omega$  tienen la siguiente forma

$$\Lambda = \frac{1}{\sqrt{-2V_0''}} \left[ \frac{1}{8} \left[ \frac{V_0^{(4)}}{V_0''} \right] \left( \frac{1}{4} + \alpha^2 \right) - \frac{1}{288} \left[ \frac{V_0'''}{V_0''} \right]^2 (7 + 60\alpha^2) \right], \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \Omega = & \frac{1}{-2V_0''} \left[ \frac{5}{6912} \left[ \frac{V_0''''}{V_0''} \right]^4 (77 + 188\alpha^2) - \frac{1}{384} \left[ \frac{V_0''''^2 V_0^{(4)}}{V_0''^3} \right] (51 + 100\alpha^2) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2304} \left[ \frac{V_0^{(4)}}{V_0''} \right] (67 + 68\alpha^2) + \frac{1}{288} \left[ \frac{V_0'''' V_0^{(5)}}{V_0''^2} \right] (19 + 28\alpha^2) - \frac{1}{288} \left[ \frac{V_0^{(6)}}{V_0''} \right] (5 + 4\alpha^2) \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

con  $V_0$  el potencial efectivo BI evaluado en el punto donde la derivada del potencial efectivo  $V_0'$  es máxima. Las cantidades  $V_0''$ ,  $V_0'''$ ,  $V_0''''$ ,  $V_0^{(4)}$ ,  $V_0^{(5)}$  y  $V_0^{(6)}$ , son las derivadas de orden mayor del potencial efectivo  $V^{BI}$  y además:

$$\begin{aligned} \alpha & \equiv n + \frac{1}{2} \\ n & = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots, Re(\omega) > 0 \\ -1, -2, -3, \dots, Re(\omega) < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.20)$$

En este trabajo se estudia el caso  $n = 0$  ya que es el modo fundamental y más intenso; adicionalmente, los cálculos son más sencillos. Con este valor en el siguiente capítulo se calculan las derivadas de  $V^{BI}$  entonces usando (2.17), (2.18), (2.19) y (2.20) se analizan y grafican las frecuencias reales e imaginarias usando *Mathematica*. Posteriormente, mediante un análisis gráfico variando la carga del agujero negro  $Q$ , el número entero  $l$  y el parámetro de Born-Infeld  $b$ , se buscan los valores óptimos para los parámetros de tal forma que se amplifiquen los modos cuasi normales y favorezca la aparición de modos superradiantes, en el caso que estos existan bajo estas condiciones ya que como se sabe en nuestro caso no se cumple la condición de potencial enlace. Entonces como consecuencia poder caracterizar la interacción entre el campo escalar  $\psi$  y el potencial efectivo del agujero negro B-I con ( $\Lambda = 0$ ), como un sistema físico generador o no de modos superradiantes.

# Capítulo 3

## Análisis de resultados

En la sección anterior se introducen las ecuaciones (2.17), (2.18), (2.19) y (2.20) que nos permiten calcular las frecuencias reales  $\omega_{Re}$  e imaginarias  $\omega_{Im}$  del campo escalar  $\psi$ . También se sabe que en nuestro caso de estudio no ocurre la condición para el potencial efectivo de tener un mínimo; por tanto es de esperarse que los modos cuasi normales  $\omega_R$  y  $\omega_I$  no logren amplificarse hasta lograr la condición de dispersión superradiante. Sin embargo se hará el análisis de las frecuencias calculadas al variar los parámetros  $b$ ,  $Q$  y  $l$ , por lo que antes que otra cosa cabe preguntarse qué significado físico tienen las frecuencias y qué pasa cuando estas frecuencias aumentan o disminuyen:

$\omega_R \rightarrow$  La parte real de las frecuencias corresponden a la oscilación de los campos al rededor del punto máximo del potencial efectivo:

- Por lo que si aumenta o disminuye su valor afecta la velocidad angular de la perturbación.

$\omega_I \rightarrow$  La parte imaginaria de las frecuencias es equivalente al inverso  $\frac{1}{\tau}$  donde  $\tau$  corresponde al tiempo de relajación de la perturbación:

- Si  $\omega_I$  aumenta entonces  $\tau$  es menor y más rapido se amortigua la perturbación.
- Si  $\omega_I$  disminuye entonces  $\tau$  es mayor y le toma mas tiempo a la perturbación amortiguar.

Enseguida se analizan los efectos sobre los modos cuasi normales de  $\psi$ , en las cercanías del horizonte de eventos del agujero negro de B-I, para saber que tanto se pueden ampliar los modos cuasi normales del campo escalar  $\psi$ , aunque debido a la falta del potencial de enlace se espera que el tiempo de relajación sea bastante corto en comparación con los sistemas físicos que cumplen las condiciones que generan los modos superradiantes

### 3.1. Evolución de las frecuencias variando el parámetro $b$

Como se menciona en el trabajo [9] para el agujero negro R-N dentro de una cavidad esférica, surgen modos superradiantes que satisfacen solo una de las siguientes condiciones: i) La existencia de un potencial de captura fuera del agujero negro ó ii) la existencia de amplificación superradiante en los campos eléctricos; esto es importante porque en este trabajo no se imponen las mismas condiciones de frontera (radio espejo) fuera del agujero negro. Otro resultado importante del mismo trabajo asegura que los modos superradiantes satisfacen la condición para las frecuencias imaginarias  $\omega_{Im} > 0$  además de tener un máximo. Para obtener esta máxima amplificación del campo escalar  $\psi$  se requiere: i) que el agujero negro sea extremal y ii) que  $\psi$  tenga propiedades semejantes a las de un haz de luz  $\{q, \mu\} \rightarrow 0$  pero con la mayor carga posible. El caso extremal surge cuando el horizonte externo es igual al interno  $Q = M$  para R-N y es independiente de la carga que tiene el campo escalar que perturba el agujero negro.

Enseguida se analizan las frecuencias reales  $\omega_R$  e imaginarias  $\omega_I$ , evaluadas en los radios máximos del potencial y al variar los parámetros  $b$ ,  $Q$  y  $l$ . Entonces se caracteriza el agujero negro de B-I, al no estar sujeto a un radio espejo como generador o no de modos superradiantes.

#### 3.1.1. Frecuencias reales vs $b$

En las figuras 3.1 y 3.2, se observan las frecuencias reales e imaginarias de  $\psi$  como función del parámetro de Born-Infeld  $b$  y para diferentes valores de la carga  $Q$  del agujero negro B-I:

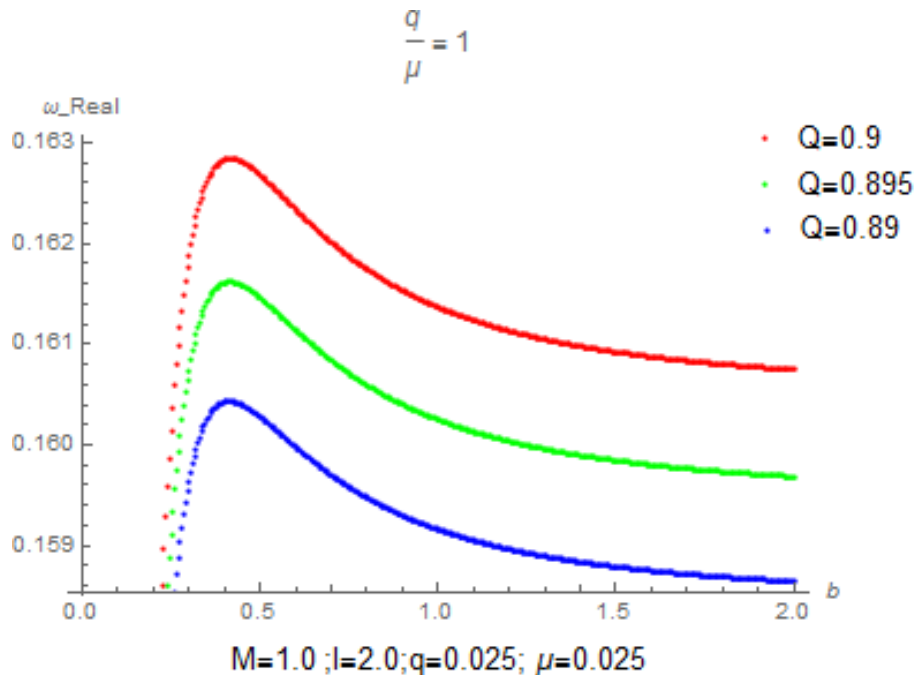


Figura 3.1:  
Frecuencias reales vs  $b$ , para diferentes valores de la carga  $Q$ .

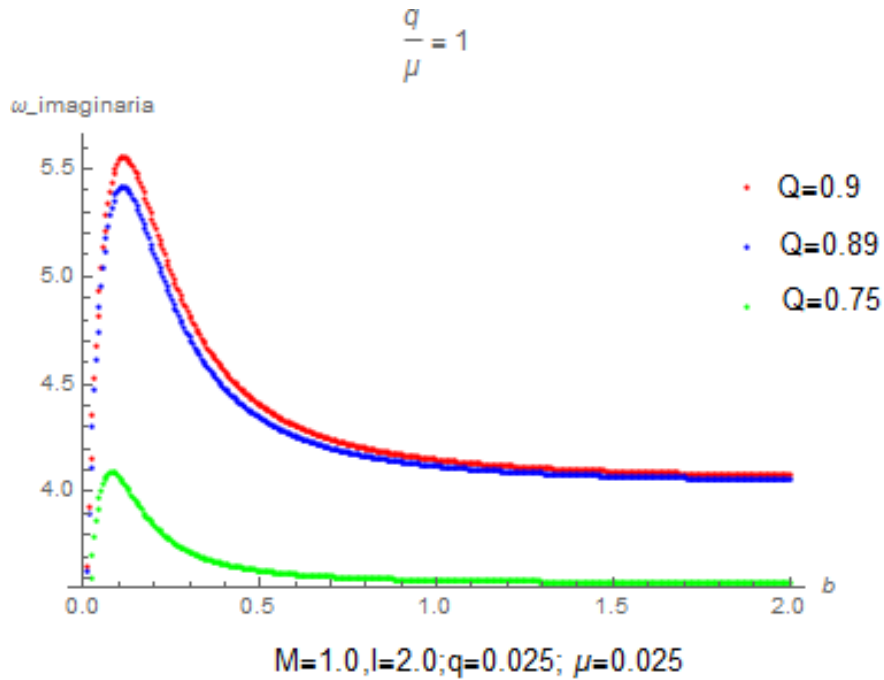
3.1.2. Frecuencias imaginarias vs  $b$ 

Figura 3.2:

Frecuencias imaginarias vs  $b$ , para diferentes valores de la carga  $Q$ .

En la figura 3.1 se observa como aumentan las amplitudes de las frecuencias reales hasta alcanzar valores máximos al rededor de valores para  $b \sim 0.5$  para entonces decaer en infinito. También se observa que la velocidad angular de la perturbación aumenta cuando  $Q$  aumente y alcanza valores límites conforme  $Q \rightarrow M = 1$ , que corresponde al caso extremal. En la figura 3.2, se observan localizados los máximos de las frecuencias imaginarias al rededor de valores pequeños de  $b$  y su amplitud aumenta conforme aumenta la carga del agujero negro  $Q$ , además, en todos los casos se satisface la condición  $\omega_I > 0$  lo cual esta de acuerdo con el trabajo de J. C. Degollado [9] respecto a la aparición de modos superradiantes. Otro detalle importante es que las frecuencias complejas como funcion de  $b$  son asintóticas, lo cual indica que le tom mas tiempo a la perturbación amortiguar y alcanzan sus máximos para valores de  $b$  grandes.

## 3.2. Evolución de las frecuencias variando el parámetro $Q$

En las figuras 3.3 y 3.4, las frecuencias reales e imaginarias de  $\psi$  como función de la carga del agujero negro  $Q$  y para diferentes valores del parámetro  $b$  de Born-Infeld:

### 3.2.1. Frecuencias reales vs $Q$

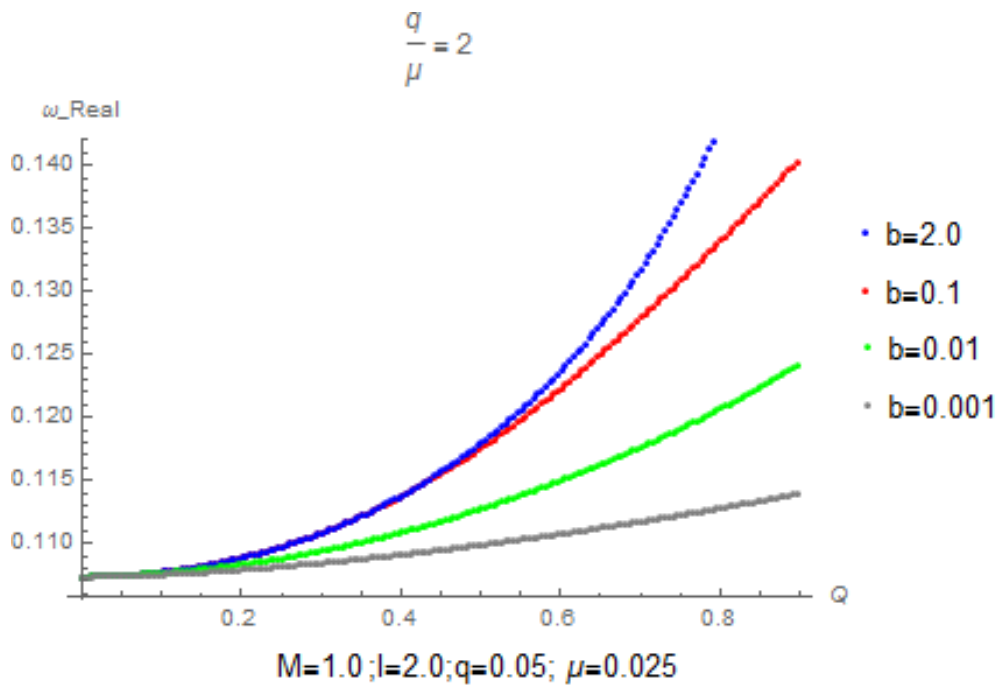


Figura 3.3:  
Frecuencias reales vs  $Q$ , para diferentes valores del parámetro  $b$ .

En la figura 3.3, se muestra la gráfica de las frecuencias reales al variar la carga  $Q$  y se observan funciones positivas crecientes, además se observa como aumentan las velocidad del momento angular de la perturbación conforme aumenta el valor de  $b$ , en este punto es importante cuestionarse sí: Alcanza un máximo el crecimiento de las frecuencias reales del campo escalar  $\psi$ ?, así como el significado físico que implica que los modos reales crezcan continuamente.

### 3.2.2. Frecuencias imaginarias vs $Q$

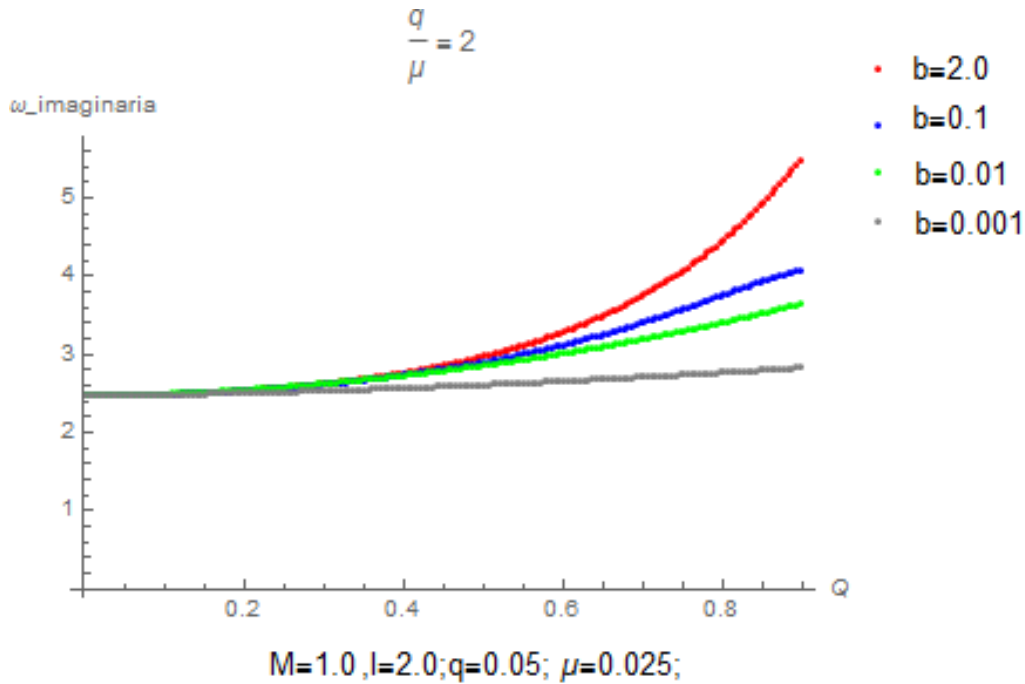


Figura 3.4:  
Frecuencias imaginarias vs  $Q$ , para diferentes valores del parámetro  $b$ .

En la figura 3.4 es notorio el comportamiento creciente de las frecuencias imaginarias a partir de valores de la carga del agujero negro  $Q \sim 0.5$ , también se observa un valor mínimo de las frecuencias imaginarias en  $\omega_I \sim 2.5$  y la disminución del tiempo de relajación del campo  $\psi$  conforme el valor de  $b$  aumenta, sin embargo se alcanza a observar un ligero decrecimiento para  $b = 0.1$  cuando el valor de  $Q \rightarrow 1$  lo cual evidencia la condición del caso extremal al aumentar la carga  $Q$  del agujero negro. Por otro lado se observa el aumento en las amplitudes de las frecuencias imaginarias conforme los valores de  $b$  aumentan esto es importante ya que mientras aumenta el valor de  $b$ , el tiempo de relajación es más lento y la posible extracción de energía del agujero negro de B-I, en caso de surgir modos superradiantes sería más lenta.



### 3.3. Evolución de las frecuencias variando el parámetro $l$

En las figuras 3.5 y 3.6, se aprecian las frecuencias reales e imaginarias de  $\psi$  como función del momento angular de la perturbación  $l$  y al variar el valor de la carga del agujero negro  $Q$ :

#### 3.3.1. Frecuencias reales vs $l$

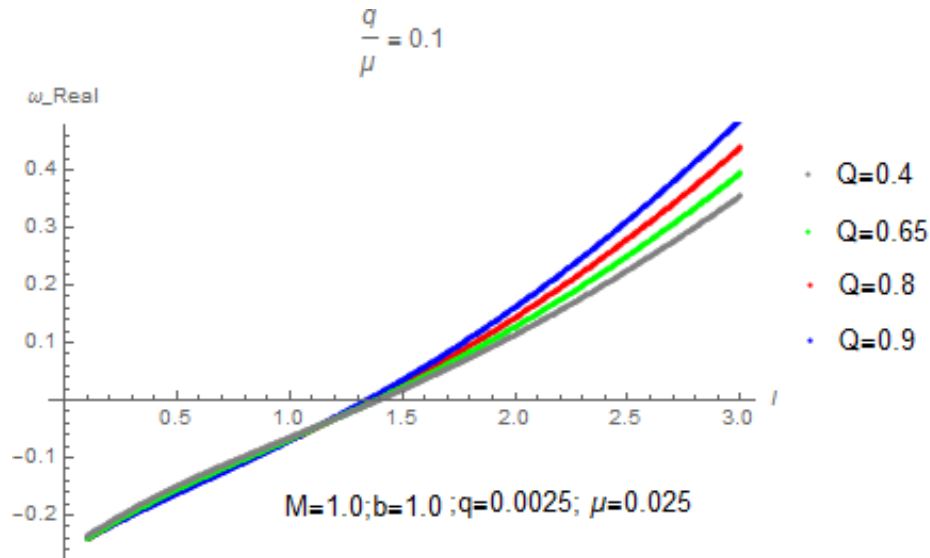


Figura 3.5:

Frecuencias reales vs  $l$ , para diferentes valores de la carga del agujero negro  $Q$ .

Es interesante notar que en la figura 3.5 aparecen funciones similares crecientes y que para aproximadamente  $l > 1.4$  las frecuencias reales toman valores positivos con sus máximos localizados en  $l = 3$  y la mayor amplificación se alcanza conforme el valor de la carga  $Q$  aumenta. Esto es congruente ya que nos dice que conforme el valor  $l$  aumenta la velocidad angular del campo  $\psi$  al rededor del punto máximo del potencial efectivo también aumenta hasta alcanzar su máximo valor conforme  $Q \rightarrow M$ , lo cual corresponde con el caso extremal.

### 3.3.2. Frecuencias complejas vs $l$

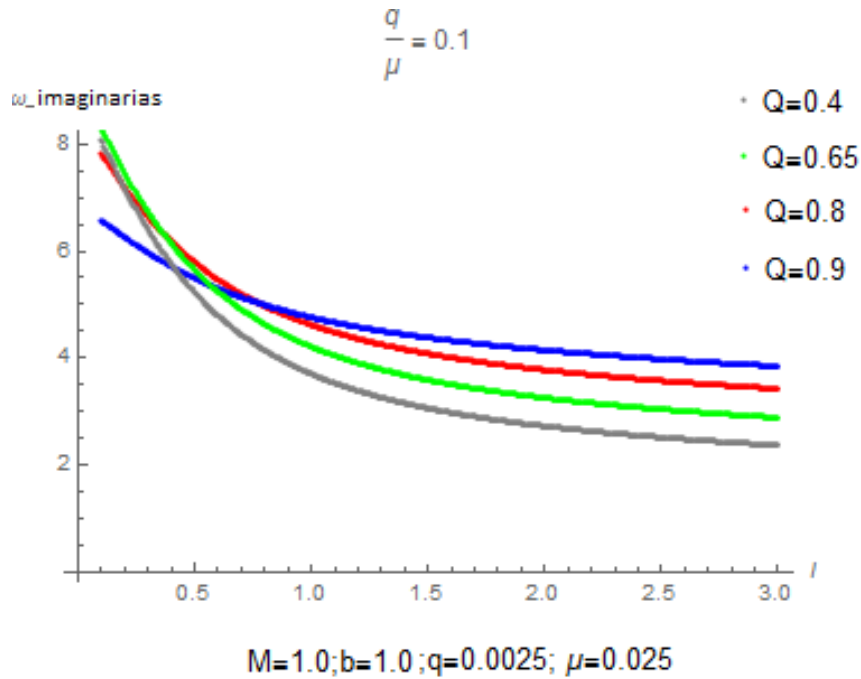


Figura 3.6:

Frecuencias complejas vs  $l$ , para diferentes valores de la carga del agujero negro  $Q$ .

En la figura 3.6 se pueden apreciar funciones decrecientes y nos dicen que los tiempos de relajación de la perturbación son grandes para valores de  $l > \frac{1}{2}$ . También se aprecia la disminución de la frecuencia imaginaria conforme disminuye el valor de  $Q$  y otro dato interesante es que los valores máximos de las frecuencias complejas se localizan para valores de  $l < 1$ , lo cual confirma el resultado del trabajo [9], donde se menciona que en el caso  $l = 1$  se espera que la inestabilidad superradiante sea mas fuerte.

En resumen los resultados son coherentes con las condiciones descritas en los trabajos anteriores donde analizan los modos superradiantes en el caso R-N, por ejemplo se observan casos cuando las frecuencias reales, como función de  $b$  toman valores positivos y alcanzan sus máximos a partir de valores de  $b \sim 0.5$ . En cuanto a las frecuencias complejas se cumple la condición  $\omega_I > 0$  conforme  $Q \rightarrow M$  es decir en el caso extremal y además en el caso B-I se pueden localizar los máximos de las frecuencias complejas para valores pequeños de  $b$ , lo cual es congruente con el límite que nos dice que para valores de  $b$  grandes se recupera el caso R-N. Otro resultado importante que vale la pena destacar reporta que cuando las frecuencias imaginarias dependen de  $Q$  y aumentan cerca del valor extremal lo cual refuerza la aparición de modos superradiantes de acuerdo con los trabajos antes mencionados de J. C. Degollado y la disminución de los tiempos de relajación de la perturbación conforme  $b$  aumenta. Por último se aprecia como se favorece la velocidad angular del campo escalar  $\psi$ , conforme aumenta la carga del agujero negro y además se observa que cerca del valor  $l = 1$  se alcanzan los máximos valores de las frecuencias imaginarias, lo cual también está de acuerdo con los resultados de los trabajos antes mencionados y que se encuentran en las referencias bibliográficas.

## 3.4. Notas aclaratorias

### 3.4.1. Existencia del potencial de enlace

Al no imponer la condición de radio espejo fuera del agujero negro BI, tal y como lo hizo Juan Carlos Degollado [9] y por haber realizado el cálculo del potencial efectivo BI, con el valor de la constante cosmológica  $\Lambda = 0$ , no se logró una de las condiciones necesarias para generar modos superradiantes: el potencial de enlace. Por esta razón se considera en trabajos futuros satisfacer esta condición, para poder realizar un análisis cuantitativo de la energía que es posible extraer del agujero negro BI de Sitter debido a la dispersión superradiante generada.

### 3.4.2. Descomposición en modos cuasi normales

Otro punto sensible del trabajo de tesis se encuentra en el tensor de energía-momento, ya que como a continuación se muestra este tiende a infinito conforme el campo eléctrico  $E$  se aproxima al valor límite del parámetro  $b$  de Born-Infeld. El tensor de energía-momento del campo Born-Infeld de un agujero negro en general para electromagnetismo no lineal es el siguiente:

$$4\pi T_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\mathcal{F}} F_{\mu}^{\alpha} F_{\alpha\nu} + \left( G\mathcal{L}_G - \mathcal{L}_{\mathcal{BI}} \right) g_{\mu\nu} \quad (3.1)$$

donde  $\mathcal{L}_G(F, G)$  es el lagrangiano de Born-Infeld (1.4) del campo electromagnético no lineal con  $F = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  y  $G = F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu}$ , los invariantes de campo electromagnético, entonces la traza de  $T_{\mu\nu}$  es:

$$T^{\alpha}_{\alpha} = \mathcal{L}_{\mathcal{F}} F + G\mathcal{L}_G - \mathcal{L}_{\mathcal{BI}} = -\frac{b^2 \left[ b^2 - 2E^2 - \sqrt{b^4 - b^2 E^2} \right]}{\sqrt{b^4 - b^2 E^2}}, \quad (3.2)$$

ya que  $g^t_t = g^{tt} g_{tt} = g^{t\alpha} g_{\alpha t} = 1$  y además se ha considerado  $B = 0$  entonces  $G = 0$ , y  $F = -\frac{E^2}{2}$ , siendo  $E$  el campo eléctrico que para el caso del agujero negro B-I tiene la siguiente forma

$$E = F_{tr} = \frac{d}{dr} A_t = -\frac{Q}{\sqrt{r^4 + \frac{Q^2}{b^2}}} \quad (3.3)$$

con  $A_t$  el potencial (1.8), por tanto las componentes del tensor de energía-momento para el campo de B-I es:

$$4\pi T_{\mu\nu} = -\frac{b^2}{\sqrt{b^4 - b^2 E^2}} F_{\mu}^{\alpha} F_{\alpha\nu} + \left( b^2 - \sqrt{b^4 - b^2 E^2} \right) g_{\mu\nu} \quad (3.4)$$

donde  $g_{\mu\nu}$  tiene las componentes inversas respecto a la métrica (2.13). Se puede observar que el tensor de energía momento de B-I (3.4) tanto la densidad de energía (3.2) como la

presión radial son finitas en el horizonte. Sin embargo (3.4) es singular cuando  $b^4 - b^2 E^2 = 0$  y esto ocurre cuando el valor del campo eléctrico tiene el valor  $E = b$ , es decir conforme  $E$  se aproxima al valor límite del parámetro  $b$ ; razón por lo cual la teoría de Born-Infeld impone la restricción  $E < b$ . Por tanto **(i)** el sistema es inestable en las cercanías al agujero negro, lo cual hace pensar que el campo escalar  $\psi$  en los alrededores del agujero negro por sí mismo no es estable. Por otro lado hay que distinguir cuando se trabaja en la coordenada "r" y en la coordenada tortuga "r\*", ya que el comportamiento es diferente, **(ii)** cuando se trabaja en la coordenada "r" el potencial en el horizonte de eventos es infinito. Por esta razón se impone la condición de frontera, de ondas entrantes en el horizonte y salientes en infinito, con lo cual se logra que la coordenada tortuga "r\*" en el horizonte de eventos vaya a  $-\infty$  y en ese punto la función  $e^{-i\omega r^*}$  satisface la ecuación (2.15), **(iii)** sin embargo aunque el problema esta resuelto matemáticamente, sigue sin resolverse la singularidad en el horizonte de eventos puesto que lo único que se esta haciendo es mandar este punto singular hacia infinito. De esta forma queda claro que usar el campo escalar  $\psi$ , como campo de prueba para generar inestabilidades superradiantes tal y como como se ha hecho en trabajos previos [9], genera una situación física inestable en las cercanías del horizonte de eventos del agujero negro por los puntos (i), (ii) y (iii). Esto justifica la necesidad de introducir una herramienta que se conoce en la literatura como **soporte compacto** que nos va permitir generar una versión del campo de prueba  $\psi$  estable, en el horizonte de eventos como una **descomposición en modos cuasi normales** que se puede implementar en futuros trabajos para el cálculo de modos superradiantes.

Como se mencionó anteriormente el campo escalar  $\psi$  diverge y no representa una solución genuina a las ecuaciones de Einstein en el horizonte de eventos, esto se debe a que el campo de prueba no esta bien definido en todo el espacio-tiempo especialmente en el horizonte de eventos. Para resolver este proeblama en el trabajo [5] de 1988, Sudarsky introduce una forma generalizada en forma de una distribución entonces considera un funcional en el espacio de funciones de prueba  $X = C_0^\infty(M)$  con funciones  $f$  de derivada infinita de soporte compacto en M y define para toda  $f$  en  $X$ :

$$\left\langle \psi, f \right\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{D^1(\epsilon)} -\frac{C}{r-r_0} f \sqrt{|g|} d^4(x) + \int_{D^2(\epsilon)} -\frac{C}{r-r_0} f \sqrt{|g|} d^4(x) \right\}, \quad (3.5)$$

donde el horizonte de eventos se encuentra localizado  $r_0$ ,  $D^1(\epsilon) = \{x \in M | r(x) > r_0 + \epsilon\}$  y  $D^2(\epsilon) = \{x \in M | r(x) > r_0 - \epsilon\}$ . Entonces demuestra que la distribución con  $\psi$

$$\left\langle \nabla_v \nabla^v \psi, f \right\rangle \equiv \left\langle \psi, \nabla_v \nabla^v f \right\rangle = 0 \quad (3.6)$$

es solución a la ecuación escalar (2.2) para toda  $f$  en  $X$ , usando la propiedad para las funciones  $f$  de soporte compacto y la continuidad de sus derivadas. Por tanto la distribución (3.5) es solución a la ecuación escalar y genera la posibilidad de calcular los modos superradiantes del agujero negro de Born-Infeld con un campo de prueba valido en el horizonte de eventos.

# Capítulo 4

## Conclusiones

Recapitulando, se retomaron resultados característicos de los diferentes tipos de agujeros negros a los que se les han calculado sus modos superradiantes como en el caso R-N. En el capítulo dos se analiza el potencial efectivo BI y se concluye que no satisface la condición de potencial enlace, básico para la aparición de los modos superradiantes. Por otro lado se obtiene la ecuación tipo *Schrödinger* por resolver y la solución a las frecuencias reales  $\omega_{Re}$  e imaginarias  $\omega_{Im}$  del campo escalar de prueba masivo  $\mu$  y cargado  $q$ , en los alrededores del horizonte de eventos del agujero negro B-I, para lo cual se implementó el método WKB a sexto orden. Por último en el tercer capítulo se presentan los resultados y análisis de los valores calculados para los modos cuasi normales de los parámetros  $b$ ,  $Q$  y  $l$ . Por último se identifican modos que se amplifican sin embargo se disipan rápidamente. Aunado a eso se identificó que en el caso del agujero negro B-I estudiado no existe la condición de potencial enlace, por tanto no existen las condiciones que favorecen la aparición de las inestabilidades superradiantes.

De los resultados que se presentan en el capítulo anterior, se puede concluir lo siguiente:

1.  $\omega_I$  crecientes para valores pequeños de  $b$ , hasta alcanzar un máximo. Estas frecuencias imaginarias indican un tiempo de relajación mayor después de alcanzar el máximo y por tanto se amortiguan más rápidamente que en el caso del agujero negro R-N encerrado dentro de una cavidad esférica.
2. Que las frecuencias reales crezcan significa que las perturbaciones oscilan más rápidamente al rededor del máximo del potencial y esto puede ocurrir al aumentar el valor de la carga del agujero negro  $Q$ .
3. Cuando las frecuencias imaginarias dependen de  $b$ , se encontró que conforme crece  $Q$ , las amplitudes también crecen y tienen máximos localizados para  $b$  pequeñas.
4. Las frecuencias complejas como función de  $Q$  son valores  $Im(\omega) > 0$  y satisfacen la condición para el surgimiento de modos superradiantes y se aprecian valores máximos cerca del caso extremal.
5. La velocidad angular del campo escalar aumenta conforme la carga del agujero negro y cerca del valor  $l = 1$  surgen valores  $Re(\omega) > 0$ , lo cual es consistente con [2] donde

se dice que cuando se satisface  $l = 1$  se alcanza la máxima amplificación de la frecuencia imaginaria del campo escalar.

De la interacción entre: i) el campo de prueba escalar  $\psi$  masivo ( $\mu$ ) y con la mayor carga ( $q$ ) posible con ii) el agujero negro libre, esférico cargado ( $Q$ ), masivo ( $M$ ) y estático en un espacio tiempo descrito por la métrica B-I, permite que el campo escalar en las cercanías del horizonte de eventos del agujero negro tenga valores positivos en las frecuencias complejas en el caso extremal pero con tiempos de relajación menores en comparación con las inestabilidades superradiantes en el caso del agujero negro R-N.

## 4.1. Perspectivas a futuro

Para confirmar la aparición de los modos superradiantes se propone: **i)** imponer la condición de potencial enlace en el caso del agujero negro B-I de Sitter, es decir para valores de la constante cosmológica  $\Lambda \neq 0$ , entonces comparar con los patrones de los modos superradiantes halladas en otros casos y hacer un posterior análisis numérico que nos permita comparar las magnitudes de los modos superradiantes así como los tiempos de relajación de las inestabilidades en los casos cuando  $\Lambda = 0$  y  $\Lambda \neq 0$ , esto va permitir entender como se puede generar la mayor amplificación de los modos superradiantes y en consecuencia lograr la mayor extracción de energía del agujero negro de Born-Infeld. **ii)** Para desarrollar un modelo realista y valido en todos los puntos del espacio incluso en el horizonte de eventos, se propone realizar los calculos del capítulo dos, no con el campo escalar  $\psi$  pero sí con una descomposición en modos cuasi normales en la forma de la distribución  $\langle \psi, f \rangle$  con  $f$  funciones de derivada infinita y de soporte compacto para eliminar las singularidades al trabajar en el horizonte de eventos. Por último **iii)** también se puede contemplar para futuros trabajos una metrica donde el sistema permita la aparición de campos magnéticos  $B \neq 0$  y de esta forma analizar las magnitudes de las amplificaciones, tiempos de disipación de los modos superradiantes y cuantificar la energía que se puede extraer de un agujero negro con estas características.

# Bibliografía

- [1] Robert M. Wald. *General Relativity*. THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS, (1984), Chapter 6, 148~158.
- [2] Sai Iyer. *Black-hole normal modes: A WKB approach. II. Schwarzschild black holes*. PHYSICAL REVIEW D, 35 (1987), pp. 3632~3636.
- [3] Piotr Bizon and Robert M. Wald. *The  $n = 1$  colored black hole is unstable..* PHYSICS LETTERS B, 267 (1991), pp. 173~174.
- [4] D. Sudarsky, Atsushi Higuchi and George E. A. Matsas. *Do static sources outside a Schwarzschild black hole radiate?..* PHYSICAL REVIEW D, VOLUME 56, NUMBER 10.
- [5] D. Sudarsky and T. Zannias. *Spherical black holes cannot support scalar hair..* PHYSICAL REVIEW D, VOLUME 58 (1998), 087502, pp. 173~174.
- [6] Nora Bretón. *Geodesic structure of the Born-Infeld black hole*. Class. Quantum Grav., 19 (2002), pp. 601~612.
- [7] R. A. Konoplya. *Quasinormal behavior of the  $D$ -dimensional Schwarzschild black hole and the higher order WKB approach*. PHYSICAL REVIEW D 68 (2003), pp. 024018 1 – 8.
- [8] Shahar Hod. *Stability of the extremal Reissner-Nordström black hole to charged scalar*. PHYSICS LETTERS B, 713 (2012), pp. 505~5089.
- [9] Juan Carlos Degollado. *Rapid growth of superradiant instabilities for charged black holes in a cavity*. PHYSICAL REVIEW D, 35 (2013), pp. 063003 1~7.
- [10] Juan Carlos Degollado. *Time evolution of superradiant instabilities for charged black holes in a cavity*. PHYSICAL REVIEW D, 89 (2014), pp. 063005 1~9.
- [11] Nora Bretón. *Energy Extraction from the Einstein-Born-Infeld Black Hole*. arXiv:1611.08584v1, (2016), pp. 1~10.
- [12] Nora Bretón and L. A. López. *Quasinormal modes of nonlinear electromagnetic black holes from unstable null geodesics*. PHYSICAL REVIEW D 94, 104008 (2016), pp. 1~10.

- [13] Nora Bretón and Tyler Clark. *Quasinormal modes and absorption cross-sections of Born–Infeld–de Sitter black holes*. International Journal of Modern Physics D 26 (2017) 1750112 (27 pages).
- [14] Pablo Bosch, Stephen R. Green and Luis Lehner. *Nonlinear Evolution and Final Fate of Charged Anti–de Sitter Black Hole Superradiant Instability*. PHYSICAL REVIEW LETTERS 116, 141102 (2016).