



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

FACULTAD DE INGENIERÍA

Estudio hidrodinámico para  
diferentes nanofluidos en un  
microcanal con confinamiento  
poroso

TESIS

Que para obtener el título de  
Ingeniero Mecánico

P R E S E N T A

Francisco Fernando Hernández Figueroa

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Ian Guillermo Monsivais Montoliu



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2020



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



## Resumen

En el presente trabajo se analiza numéricamente los diferentes perfiles de velocidad para un microcanal rectangular con confinamiento poroso para diferentes modelos de viscosidad de nanofluidos. Se parte de introducir tres modelos de viscosidades con densidad constante y otro con un modelo de viscosidad con densidad variable que nos describen a los nanofluidos a través de la ecuación de momentum conocida como Brinkman-Forchheimer extensión de Darcy. El objetivo principal que se busca en el trabajo es lograr frenar el flujo de velocidad a través del microcanal con confinamiento poroso, variando las propiedades de los presentes modelos de viscosidad de nanofluidos y las propiedades del medio poroso con la finalidad de utilizar este análisis hidrodinámico en estudios posteriores en los cuales se pueda obtener una mejor disipación de calor para aplicaciones que involucran intercambiadores de calor, además de observar qué propiedades de los nanofluidos y del medio poroso influyen en el comportamiento de la velocidad.

Las diferentes soluciones numéricas se obtuvieron a través del software de código libre Freefem ++ usando el método de elementos finitos(FEM).

## Abstract

In the present work the different velocity profiles for a rectangular microchannel with porous confinement for different nanofluid viscosity models are analyzed numerically. We start by introducing three viscosity models with constant density and another with a viscosity model with variable density that describes nanofluids through the moment equation known as Brinkman Forchheimer extension of Darcy. The main objective that is sought in the work is to be able to stop the flow of velocity through the microchannel with porous confinement, varying the properties of the present models of nanofluid viscosity and the properties of the porous medium in order to use this hydrodynamic analysis in subsequent studies in which better heat dissipation can be obtained for applications involving heat exchangers, in addition to observing that properties of nanofluids and the porous medium influence the velocity behavior.

The different numerical solutions are obtained through the free code software Freefem ++ using the finite element method (FEM).

# Agradecimientos

Me gustaría expresar mi dedicación del presente trabajo a mis padres y abuelos que me guiaron durante toda mi vida; me motivaron para alcanzar mis objetivos y logros.

Quiero agradecer a todos mis amigos, pareja y colegas que estuvieron a lo largo del proceso de realización de este trabajo. De igual manera, quiero agradecer a mi tutor Ian Monsiváis por las incontables horas dedicadas en su orientación y apoyo. Mil gracias a los demás profesores que se tomaron el tiempo en recibirme y explicarme cualquier tipo de duda presentada en el transcurso del proyecto.

Así mismo expresé mi total agradecimiento a la Facultad de Ingeniería y la Universidad Nacional Autónoma de México por todo el conocimiento y experiencias brindadas durante mi formación académica.

Esta tesis se elaboro gracias al patrocinio otorgado por la DGAPA (UNAM) mediante el proyecto PAPIIT-IA104119, titulado: Fenómenos conjugados de la transferencia de calor en microcanales.

# Nomenclatura

Símbolo	Término	Unidades SI
$\rho_{nf}$	Densidad del nanofluido	$\frac{kg}{m^3}$
$Da$	Parámetro de Darcy	<i>adimensional</i>
$u$	Vector velocidad	$\frac{m}{s}$
$P$	Presión	$Pa$
$K$	Permeabilidad del medio poroso	$m^2$
$x$	Dirección horizontal	$m$
$y$	Dirección vertical	$m$
$F$	Coefficiente de arrastre de Forchheimer	<i>adimensional</i>
$\mu_{nf}$	Viscosidad Dinámica del nanofluido	$\frac{kg}{m \cdot s}$
$\phi$	Porosidad del medio poroso	<i>adimensional</i>
$\nabla$	Operador Nabla	$\frac{1}{m}$
$\mu_{eff}$	Viscosidad efectiva del medio poroso	$\frac{kg}{m \cdot s}$
$U_{\infty}$	Velocidad de corriente libre	$\frac{m}{s}$
$L$	Longitud del microcanal	$m$
$X$	Dirección horizontal adimensional	<i>adimensional</i>
$H$	Altura del microcanal	$m$
$Y$	Dirección vertical adimensional	<i>adimensional</i>
$u^*$	Velocidad adimensional	<i>adimensional</i>
$\Lambda_F$	Parámetro inercial	<i>adimensional</i>
$\nu_{nf}$	Viscosidad cinemática nanofluido	$\frac{m^2}{s}$
$Cf$	Coefficiente de fricción	<i>adimensional</i>
$\tau_w$	Esfuerzo cortante	$\frac{kg}{ms^2}$
$\tau_w^*$	Esfuerzo cortante adimensional	<i>adimensional</i>
$Re$	Número de Reynolds	<i>adimensional</i>
$\mu_{fb}$	Viscosidad dinámica de fluido base	$\frac{kg}{m \cdot s}$
$\varphi$	Concentración de volumen de nanopartículas	%
$T$	Temperatura del nanofluido	$^{\circ}C$
$d_p$	Diámetro de nanopartícula.	$nm$
$D$	Diámetro Hidráulico	$m$
$Cf^*$	Coefficiente de fricción adimensional al modelo físico	<i>adimensional</i>
$\rho_{fb}$	Densidad fluido base	$\frac{kg}{m^3}$
$\rho_{np}$	Densidad de nanopartícula	$\frac{kg}{m^3}$
$\rho^*$	Correlación de densidad relativa	<i>adimensional</i>
$h$	Espesor de pared	$m$

Símbolo	Término	Unidades SI
<i>H<sub>2</sub>O</i>	Compuesto químico de Agua	-
<i>Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub></i>	Compuesto químico de Oxido de Aluminio	-
<i>CuO</i>	Compuesto químico de Oxido de Cobre	-
<i>SiO<sub>2</sub></i>	Compuesto químico de Oxido de Silicio	-
<i>ZnO</i>	Compuesto químico de Oxido de Zinc	-



# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>8</b>
1.1. Alcances y Objetivos . . . . .	12
<b>2. Formulación del problema</b>	<b>13</b>
2.1. Ecuaciones gobernantes . . . . .	13
2.2. Condiciones de frontera y velocidad de corriente libre . . . . .	14
2.3. Análisis Adimensional . . . . .	15
2.4. Ecuación de momentum, condiciones de frontera y parámetros en su forma adimensional. . . . .	16
2.5. Reducción de la ecuación de momentum y solución analítica. . . . .	18
2.6. Inyección de nanofluidos al modelo físico. . . . .	19
<b>3. Modelo Numérico.</b>	<b>22</b>
3.1. Formulación variacional. . . . .	23
<b>4. Resultados.</b>	<b>26</b>
4.1. Modelo de Brinkman . . . . .	28
4.2. Modelo de Nguyen . . . . .	31
4.3. Modelo de Jang et al. . . . .	36
4.4. Modelo de Brinkman con densidad variable. . . . .	39
<b>5. Conclusiones.</b>	<b>44</b>
<b>I Apéndice I Ecuación de momentum</b>	<b>46</b>
<b>II Apéndice II Apéndice de Figuras</b>	<b>49</b>

# 1. Introducción

A lo largo de las últimas décadas, la micro y nano-tecnología han adquirido un enorme interés debido al auge de los sistemas microelectromecánicos (MEMS). Debido a lo anterior, ha sido necesario la fabricación de microcanales para construir sistemas integrados de refrigeración y enfriamiento[16].

Se ha estudiado que al incrustar medios porosos en los microcanales, se puede aumentar la relación de volumen del flujo. Se informa que el rendimiento térmico de un intercambiador de calor micro poroso es más alto que el de un microcanal convencional. Lo que el confinamiento de medios porosos en un microcanal parece ser un método prometedor de eliminación de alto flujo de calor en dispositivos miniaturizados[6].

Por medio poroso se refiere a un material que consiste en una matriz sólida con un vacío interconectado (poros) que puede permitir el flujo de calor y masa, se supone que la matriz sólida es rígida (la situación habitual). La interconexión del vacío (los poros) permite el flujo de uno o más fluidos a través del material[2]. En un medio poroso natural, la distribución de los poros con respecto a la forma y el tamaño es irregular. Ejemplos de medios porosos naturales son arena de playa, arenisca, piedra caliza, madera, etc. vistos en la Fig. [2]

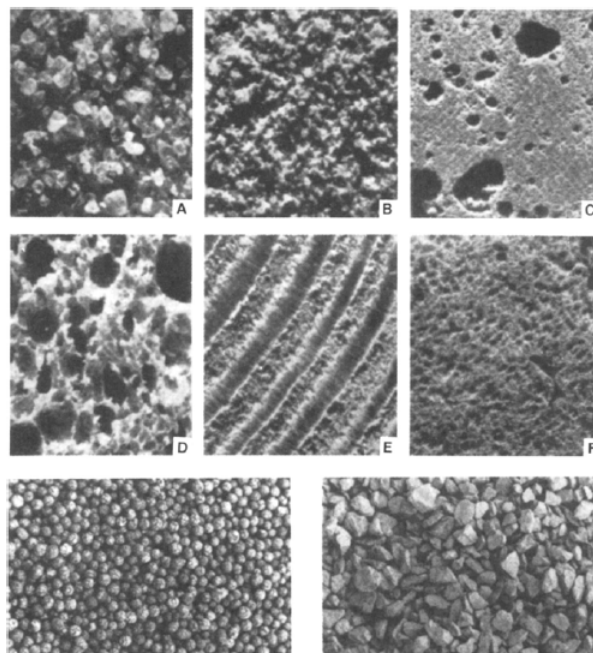


Figura 1: Ejemplos de medios porosos( A) arena de playa, B) arenisca, C) piedra caliza, D) pan de centeno, E) madera, y F) pulmón humano)[2].

Una parte fundamental para el flujo de la velocidad en los medios porosos es la porosidad( $\phi$ )

que se define como la fracción del volumen total del medio que está ocupado por el espacio vacío[2]. En 1856 Henry Darcy sobre la hidrología del suministro de agua y sus experimentos sobre el flujo unidireccional en estado estable en un medio uniforme reveló una proporcionalidad entre el caudal y la diferencia de presión aplicada[2]. Expresado de la siguiente ecuación.

$$u = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$$

Donde  $K$  es la permeabilidad del medio poroso; la permeabilidad es la propiedad de la matriz porosa que caracteriza el flujo de fluidos a través de la matriz porosa por la aplicación de un gradiente de presión;  $\mu$  se define como la viscosidad dinámica y  $\frac{\partial P}{\partial x}$  el gradiente de presión en la dirección  $x$ . La ecuación de Darcy ha sido verificada por los resultados de muchos experimentos[2]. Esta ecuación en analogía con la ecuación de Navier-Stokes. Señalo que la inclusión del término  $(\nabla \cdot u)u$  era inapropiada porque elevó el orden (con respecto a las derivadas espaciales) de la ecuación diferencial, y esto era inconsistente cuando se utilizaba la ecuación de Darcy[2].

La ecuación de Darcy es lineal en la velocidad de filtración se cumple cuando es suficientemente pequeña. En la práctica, "suficientemente pequeño" significa que el número de Reynolds basado en un diámetro de poro, es de unidad de orden o menor, el hecho de que el arrastre debido a obstáculos sólidos ahora es comparable con el arrastre de la superficie debido a la fricción. La modificación de la ecuación de Darcy se muestra de la siguiente manera[2].

$$\nabla P = -\frac{\mu}{K}u - \frac{\rho f F}{K^{\frac{1}{2}}} |u|u$$

Se presenta el termino de arrastre de Forchheimer( $F$ ) debido a esto la anterior ecuación, declarada como ecuación de Forchheimer, es la transición del flujo de la velocidad a escala de poro, el coeficiente  $F$  varía con la velocidad. Una alternativa a la ecuación de Darcy con los términos inerciales omitidos, lleva a la modificación de la ecuación de Brinkman[2].

$$\nabla P = -\frac{\mu}{K}u + \mu e f f \nabla^2 u$$

Ahora se presentan dos términos viscosos,  $\mu e f f$  es la viscosidad efectiva y  $\mu$  la viscosidad dinámica. En la ecuación de Brinkman se muestra el primero término de Darcy y el segundo termino es análogo al término laplaciano que aparece en la ecuación de Navier-Stokes.

La aplicación de la dinámica de fluidos en medios porosos es muy vasta en diferentes campos de estudios, como lo es en recuperación de petróleo, en donde se permite desplazar un líquido por otro en presencia de una tercera fase, en áreas como la biología para el transporte de fluidos en plantas o en semillas; penetración de agua en suelos y aplicaciones médicas, en el área de textiles se puede presentar en el comportamiento de prendas en presencia de líquidos, en la construcción en la penetración de agua dentro de concretos o pastas de cemento, en la industria de alimentos en el área de cocción; filtración de bebidas con proceso de fermentación, etc.[2]

Sin embargo, la elección del fluido de trabajo también es de suma importancia. La baja conductividad térmica del fluido plantea una limitación principal para el rendimiento de un disipador térmico, se ha determinado que la agregación de partículas a través de un fluido convencional(nanofluido); los fluidos convencionales en el presente trabajo se llaman fluidos base, un fluido base puede ser agua, aceite, entre otros, se ha logrado que estos fluidos con agregación de partículas tengan mejoras significativas en la conductividad térmica[6]. Es debido a mencionar que la conductividad térmica de un material sólido es mayor a la de un fluido. Por esto, se toman nanopartículas de diferentes materiales que se mezclan con el fluido base de trabajo con el fin de incrementar la conductividad térmica del fluido de trabajo. Entre los materiales más comúnmente usados se incluyen metales químicamente estables (oro, cobre), óxidos metálicos ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ,  $\text{SiO}_2$ ,  $\text{TiO}_2$ ,  $\text{ZnO}$ ,  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ,  $\text{CuO}$ ,  $\text{MgO}$ ), carburos metálicos ( $\text{SiC}$ ), nitruros metálicos ( $\text{AlN}$ ,  $\text{SiN}$ ), el carbono en sus diversas formas (diamante, grafito, nanotubos de carbono)[18].

El estudio de los nanofluidos se ha visto en mayor auge en los últimos años debido a sus aplicaciones en tan diversas áreas de investigación como en transferencia de calor o tecnologías de refrigerantes, en microelectrónica, MEMS, microfluídica, medicina y numerosos sistemas de gestión térmica[4]. Pero, ¿qué es un nanofluido? Se denomina nanofluido a suspensiones de materiales de partículas sólidas de tamaño nanométrico (metálicos o no metálicos) en fluidos base[1].

La terminología de nanofluido fue primera vez implementada por Choi, quien reveló en una publicación donde se realizó un estudio de la mejora en la conductividad térmica en fluidos base en inmersión de nanopartículas; mencionó que la mezcla homogeneizada de nanopartículas en fracciones bajas de volumen y fluidos convencionales aumenta notablemente el rendimiento térmico [1]. Con el desarrollo de la nanotecnología se hizo posible la producción de partículas de tamaños entre 1 a 100 nanómetros (*nm*) conocidas como nanopartículas, una comparación de la dimensión de éstas con objetos conocidos se muestra en la Fig. 2.

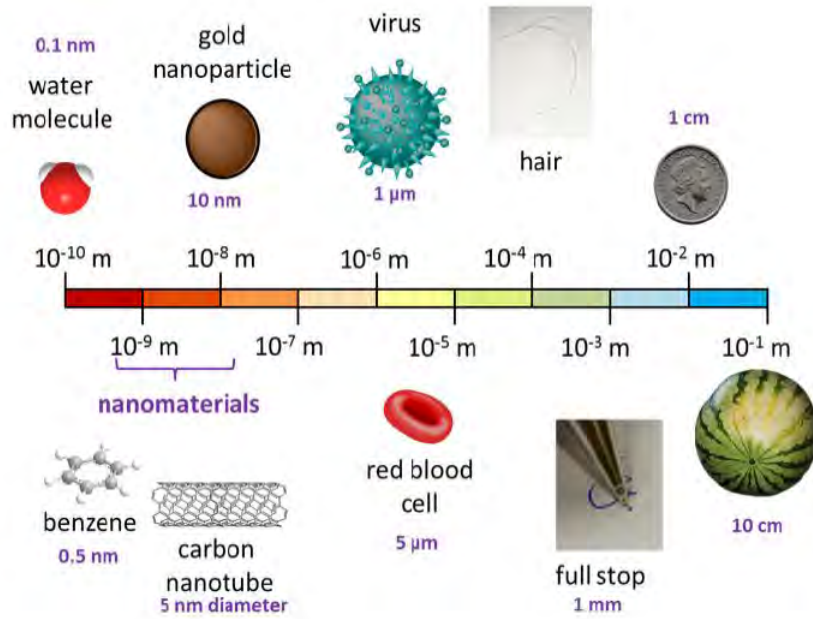


Figura 2: Comparación de partículas nanométricas en diferentes escalas[15].

El tamaño de las partículas que se introducen en el fluido base es clave en la estabilidad de los nanofluidos. Cualquier suspensión de sólidos en un líquido, en presencia del campo gravitatorio, tiende a separarse. Un proceso que se conoce con el término de sedimentación. Sin embargo, la sedimentación tiene efectos adversos en los nanofluidos, ya que modifica sus propiedades y la formación de depósitos sólidos puede impedir su uso práctico. La sedimentación de partículas está gobernada por la ley de Stokes, que nos da la velocidad de caída de una partícula. En el caso de suspensiones de nanopartículas, la combinación del tamaño pequeño y el movimiento browniano dan lugar a suspensiones altamente estables durante periodos extensos de tiempo, sin observarse sedimentación[15].

En la mecánica de fluidos se pueden crear gráficas de perfiles de cualquier variable escalar (presión, temperatura, densidad, etc.), el presente trabajo se verá involucrada la gráfica del perfil de velocidad. Se debe observar que como la velocidad es una cantidad vectorial, se suele trazar la gráfica de la magnitud de la velocidad o de una de las componentes del vector velocidad como función de la distancia en alguna dirección deseada[10]. Existen diversas formas de obtener estas gráficas (experimental, analítica, numérica).

En el caso de microcanales la reducción de tamaño de un microcanal conduce a una mejora en la relación superficie y volumen, el problema se vuelve intrínseco al transporte de termofluidos de microescala que reside en la caída de presión significativa que varía inversamente a la escala de longitud de la sección transversal de los micro dispositivos[3].

Para el presente trabajo tomando en cuenta que existe un contenido basto relacionado en la literatura, el trabajo se tomó inspiración debido al estudio realizado por K. Vafai

y S. J. Kim (1989) donde estudiaron el obtener una solución analítica para los efectos termodinámicos e hidrodinámicos de la convección forzada en un canal confinado por un medio poroso.

## 1.1. Alcances y Objetivos

El objetivo de la tesis es desarrollar el problema del flujo de la velocidad de un nanofluido a través de un microcanal rectangular con confinamiento poroso, con porosidad y permeabilidad constante, del cual se deriva un modelo numérico tomando en cuenta las condiciones de frontera correspondientes. Se sabe que los nanofluidos tienen un alto rendimiento en la conducción térmica, por otro lado los medios porosos tienden a generar una oposición al flujo de la velocidad, la idea es encontrar una manera eficiente de frenar a los nanofluidos a través del medio poroso para mejorar la disipación de calor, aunado a esto observar el comportamiento hidrodinámico del nanofluido a comparación de un fluido convencional y observar las diferencias o similitudes que se pueden presentar variando las propiedades físicas de los nanofluidos como del medio poroso.

Para estudios posteriores al presente trabajo, sera incluir la ecuación de la energía en el modelo de estudio, además de considerar la variación de la temperatura en las paredes del microcanal, introducir el modelo de conductividad térmica de nanofluidos, variar la permeabilidad y porosidad del medio poroso que serán aprovechadas para la resolución numérica que brinda el programa de Freefem ++.

## 2. Formulación del problema

En la Fig.3 se describe gráficamente el modelo físico a estudiar en dos dimensiones, se describe el modelo en un microcanal rectangular asumiendo que las propiedades del medio poroso y el nanofluido son homogéneas e isotrópicas, el nanofluido es distribuido uniformemente por todo el medio poroso. La línea intermedia del modelo físico muchas veces es llamada región de entrada hidrodinámica donde es la región desde la entrada del microcanal hasta el punto en el que la capa límite emerge en la línea central[10]. Además de considerar al modelo físico como un sistema bidimensional(2D) con un sistema de coordenadas rectangular (x,y). El canal tiene una altura de  $H$  y una longitud  $L$ , de manera que ( $H \ll L$ ). El espesor de las paredes del microcanal ( $h$ ) es mucho menor que  $H$ .

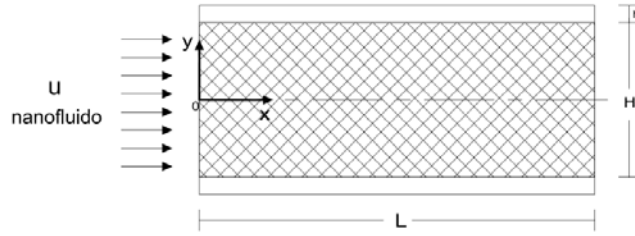


Figura 3: Flujo de un nanofluido a través de un microcanal con confinamiento poroso

### 2.1. Ecuaciones gobernantes

Para la descripción de la ecuación de momentum para el transporte de nanofluidos sobre el medio poroso el análisis queda en la ecuación que describe el modelo de Brinkman-Forchheimer extensión de Darcy[1], el cual tiene la siguiente forma.

$$\rho_{nf} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + (\nabla \cdot u)u \right] = -\nabla P + \mu e f f \nabla^2 u - \left( \frac{\mu_{nf} \phi u}{K} + \frac{\rho_{nf} F \phi |u|u}{K^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (1)$$

Tomando en cuenta el análisis presente para el confinamiento de un medio poroso en un microcanal del modelo físico Fig. 3 las fuerza de gravedad en el nanofluido se ven despreciadas para la Ec. (1). Considerando un flujo de velocidad unidireccional  $x$  la ecuación de continuidad es igual a cero  $\nabla \cdot u = 0$  por lo cual se desprecian los términos inerciales del fluido y se asume una aceleración convectiva insignificante, un flujo completamente desarrollado  $\frac{\partial}{\partial x} = 0$  por el cual se considera en estado estable el sistema de análisis, considerando un estado estacionario  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ , se asume un flujo incompresible; la permeabilidad y porosidad constante.

Desarrollando el análisis de forma bidimensional, las derivadas parciales toman la siguiente forma.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

La viscosidad efectiva queda de la siguiente manera.

$$\mu_{eff} = \frac{\mu_{nf}}{\phi}.$$

Además de la viscosidad del fluido el medio poroso tiene un papel muy importante en el comportamiento en el cambio del campo del flujo de la velocidad, asumiendo los anteriores argumentos queda de la siguiente manera la Ec. (1)[3].

$$0 = -\nabla P + \frac{\mu_{nf}}{\phi} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\mu_{nf}}{K} u - \frac{\rho_{nf} \phi F}{K^{\frac{1}{2}}} u^2 \quad (3)$$

## 2.2. Condiciones de frontera y velocidad de corriente libre

Para obtener la solución analítica como numérica hay que establecer las condiciones de frontera correspondientes; la primera condición es de simetría  $\frac{du}{dy} |_{y=0} = 0$ , donde se describe un problema simétrico respecto al eje  $x$ ,  $y$  en el microcanal donde se presenta a través de una condición de frontera tipo Neumann, para la segunda condición es de no deslizamiento donde  $\bar{u}(y = H) = 0$  asume que la velocidad en todos los puntos en la superficie del canal son igual a cero siendo una condición del tipo Dirichlet[5].

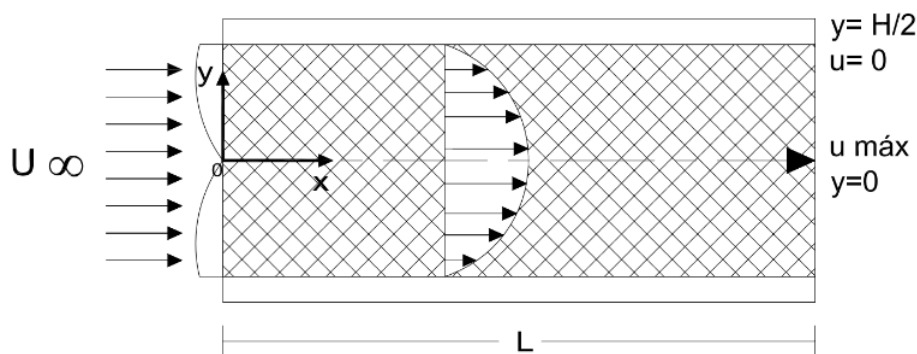


Figura 4: Velocidad de corriente libre por medio de un gradiente de presión constante a través de un microcanal con confinamiento poroso.



El flujo se mueve por un gradiente de presión dado, tenemos que el gradiente de presión  $-\nabla P = -\frac{\partial P}{\partial x}$ , para la Ec. (4) el análisis se asume un gradiente de presión constante fuera de la capa límite hidrodinámica del microcanal donde la velocidad  $u = U_\infty$  como se muestra en la Fig. 4, se debe considerar que el desarrollo de la capa límite hidrodinámica en microcanales con confinamiento poroso tiene un desarrollo mucho más rápido que un microcanal sin confinamiento; el gradiente de presión queda de la siguiente forma[9].

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\mu_{nf}U_\infty}{K} - \frac{\rho_{nf}F\phi U_\infty^2}{K^{\frac{1}{2}}} \quad (4)$$

La Ec(4). muestra el gradiente de presión requerido para mantener la velocidad de corriente libre ( $U_\infty$ ) en equilibrio de la resistencia de la matriz solida del medio poroso. Al combinar la Ec. (3) y Ec. (4) se sustituye el gradiente de presión y la ecuación de momentum se reduce. Por razones de simplicidad el desarrollo de la ecuación de momentum con la velocidad de corriente libre se encuentra en el Apéndice I(Ecuación de momentum).

$$\frac{\mu_{nf}}{\phi} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = \frac{\mu_{nf}}{K} (u - U_\infty) + \frac{\rho_{nf}F\phi}{K^{\frac{1}{2}}} (u^2 - U_\infty^2) \quad (5)$$

### 2.3. Análisis Adimensional

Esquema de la descripción de las variables adimensionales en la Fig. 5. Debido a la condición de simetría planteada anteriormente el microcanal permite representar el mismo comportamiento en el centro del microcanal cuando de  $Y = 0$  a  $Y = H = \frac{H}{2}$  esto permite generar el mismo tipo de comportamiento en la dirección del eje  $X$ .

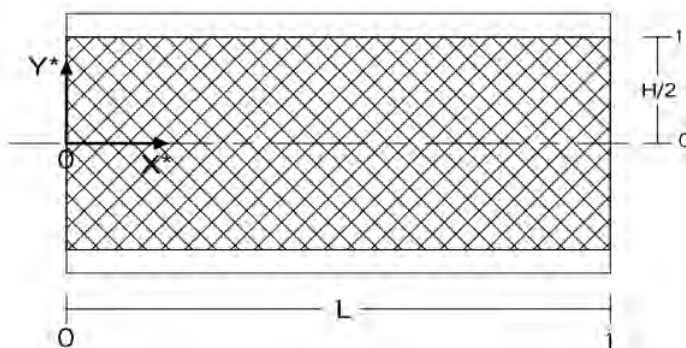


Figura 5: Esquema adimensional del modelo físico.

Para la ecuación obtenida anteriormente se propone la siguiente escala adimensional[5].

$$X = \frac{x}{L} \quad (6)$$

$$u^* = \frac{u}{U_\infty} \quad (7)$$

$$Y = \frac{y}{\frac{H}{2}} \quad (8)$$

Para las direcciones  $x$ ,  $y$  su adimensionalización corresponde a las longitudes características de cada dirección  $H$ ,  $L$ . Las anteriores ecuaciones nos permiten describir de mejor manera la física del problema y así obtener una resolución numérica de mayor eficiencia.

#### 2.4. Ecuación de momentum, condiciones de frontera y parámetros en su forma adimensional.

La adimensionalización de la velocidad es muy importante para así obtener el resultado hidrodinámico al problema, en este caso con manipulaciones algebraicas la derivada parcial cuadrática de la Ec. (9) por medio de la escala adimensional tomamos el valor del vector velocidad como  $u = U_\infty u^*$ ; queda de la siguiente manera la derivada parcial en derivadas totales.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{du}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left( \frac{du}{dy} \frac{dY}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left( \frac{du}{dY} \left( \frac{1}{\frac{H}{2}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\frac{H}{2}} \frac{d}{dy} \left( \frac{du}{dY} \right) = \frac{1}{\frac{H}{2}} \frac{d}{dy} \left( \frac{du}{dy} \right) \frac{dY}{dy} = \frac{1}{\frac{H}{2}} \frac{d^2 u}{dY^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U_\infty}{\frac{H}{2}} \frac{d^2 u^*}{dY^2} \quad (9)$$

Con la Ec. (9) la Ec. (5) de momentum queda de la siguiente manera. El desarrollo de la Ec. 10 se encuentra en el Apéndice I.

$$\frac{U_\infty \mu_{nf}}{\phi \frac{H^2}{2}} \frac{d^2 u^*}{dY^2} = \frac{\mu_{nf} U_\infty}{K} (u^* - 1) + \frac{\rho_{nf} F \phi U_\infty^2}{K^{\frac{1}{2}}} (u^{*2} - 1) \quad (10)$$

Se consideran los siguientes parámetros adimensionales para la ecuación de momentum[5].

$$Da = \frac{K}{\phi \frac{H^2}{2}}$$

$$\Lambda_F = \frac{\phi^{\frac{3}{2}} F U_\infty}{\nu_F}$$

$$Re = \frac{\rho_{nf} U_\infty \frac{H}{2}}{\mu_{nf}}$$

El termino del parámetro inercial ( $\Lambda_F$ ) describe el efecto de las propiedades del nanofluido a través de la velocidad de corriente libre considerando el efecto de la porosidad y el coeficiente de arrastre de Forchheimer. Para términos de simplicidad se utilizara la viscosidad cinemática  $\nu_{nf} = \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}}$ .

Partiendo de la ley de viscosidad de Newton el coeficiente de fricción y el esfuerzo cortante en su forma no adimensional se define de la siguiente manera[6]. El desarrollo del  $Cf$  en su forma adimensional( $Cf^*$ ) al problema se encuentra en el Apéndice I.

$$Cf = \frac{2\tau_w}{\rho_{nf} U_\infty^2}; \quad \tau_w = \mu_{nf} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \Big|_{Y=\frac{H}{2}}$$

En su forma adimensional el esfuerzo cortante y coeficiente de fricción quedan de la siguiente manera:

$$\tau_w^* = \frac{\mu_{nf} U_\infty}{H} \frac{du^*}{dY} \Big|_{Y=1} \quad (11)$$

$$Cf^* = \frac{2}{Re} \frac{du^*}{dY} \Big|_{Y=1} \quad (12)$$

Para que exista congruencia con el modelo físico se debe expresar en su forma adimensional las condiciones de frontera.

Condición de simetría.

$$\frac{du}{dy} \Big|_{Y=0} = 0$$

Condición de simetría en su forma adimensional.

$$\frac{du^*}{dY} \Big|_{Y=0} = 0$$

Condición de no deslizamiento.

$$u\left(y = \frac{H}{2}\right) = 0$$

Condición de no deslizamiento en su forma adimensional.

$$u^*\left(Y = \frac{H}{2} = 1\right) = 0$$

## 2.5. Reducción de la ecuación de momentum y solución analítica.

De la Ec. (10) se introducen los parámetros adimensionales correspondientes para la reducción de esta misma, la ecuación de momentum queda de la siguiente manera:

$$\frac{d^2u^*}{dY^2} = Da^{-1}(u^* - 1) + \Lambda_F Da^{-\frac{1}{2}}(u^{*2} - 1) \quad (13)$$

El desarrollo de la reducción de la Ec. (13) se encuentra en el Apéndice I.

La Ec. (13) se introducirá numéricamente por medio de Freefem ++ para obtener los perfiles de velocidad y lograr el resultados hidrodinámico al problema. En el artículo de

Vafai, Kambiz & Kim, S.J se brinda una solución analítica introduciendo en el microcanal no nanofluidos, a través de varias manipulaciones algebraicas la integración final para obtener la velocidad queda de la siguiente manera[9].

$$u^* = 1 - \frac{A + B}{A} \operatorname{sech}^2 [D (Y + C1)] \quad (14)$$

$$A = \frac{2}{3} \Lambda_F Da^{-\frac{1}{2}}$$

$$B = Da^{-1} + \frac{4}{3}$$

$$D = \frac{\sqrt{A + B}}{A}$$

Para  $C1$  se aplica la condición de no deslizamiento adimensional en las paredes del microcanal.

$$C1 = -\frac{1}{D} \operatorname{sech}^{-1} \sqrt{\frac{A}{A + B}} - 1$$

## 2.6. Inyección de nanofluidos al modelo físico.

La viscosidad dinámica es vital en los nanofluidos como lo es la conductividad térmica hay menos estudios que discuten sobre la viscosidad dinámica de los nanofluidos en comparación con los estudios que se han centrado en la conductividad térmica, se han descrito demasiados modelos en función de expresar la efectividad que tiene la viscosidad dinámica en el papel de los nanofluidos. Diversos estudios han sido relacionando en base a métodos experimentales, de manera numérica, teórica, etc. que se han introducido para investigar su efecto sobre la viscosidad de los nanofluidos[1].

Para agregar los nanofluidos en el trabajo presente se debe introducir por medio del  $\Lambda_F$  específicamente aplicando el modelo de la viscosidad dinámica del nanofluido, se introducirán los modelos correspondientes[1], considerando una densidad constante para las nanopartículas y para el fluido base.

El primer modelo de viscosidad dinámica es el modelo de Brinkman de 1952, es una modificación del modelo de viscosidad dinámica de Einstein de 1906;  $\mu_{nf} = \mu_{fb} (1 + 2.5\varphi)$  para una  $\varphi \leq 5\%$  [1]. La ecuación modificada incluyo la concentración del volumen de nanopartículas( $\varphi$ ), la viscosidad dinámica de nanopartículas y del fluido base. Para así obtener el siguiente modelo de viscosidad dinámica.

$$\frac{\mu_{nf}}{\mu_{fb}} = \frac{1}{(1 - \varphi)^{2.5}} \quad (15)$$

El segundo modelo de viscosidad dinámica es propuesto por Nguyen en 2007, surge apartir de la investigación experimental de proponer una correlación del efecto acoplado entre la temperatura ( $T$ ) y la concentración del volumen de nanoparticulas ( $\varphi$ ) en la viscosidad dinámica de un nanofluido[11]. De lo cual se llega al siguiente modelo.

$$\frac{\mu_{nf}}{\mu_{fb}} = 2.1275 - 0.0215T + 0.00027T^2 \quad (16)$$

El siguiente modelo de viscosidad dinámica es propuesto por Jang et al. en 2007. En modificación al modelo propuesto por Einstein.[12]

$$\frac{\mu_{nf}}{\mu_{fb}} = (1 + 2.5\varphi) \left[ 1 + \eta \frac{d_p^{-2\varepsilon}}{D} \varphi^{\frac{2}{3}(\varepsilon+1)} \right] \quad (17)$$

Donde  $\varepsilon = -\frac{1}{4}$  y  $\eta = 280$  que son constantes empíricas de las nanopartículas, además de presentar en el modelo el tamaño del diámetro de nanopartículas ( $d_p$ ) inmersas en el fluido base, la concentración del volumen de nanopartículas( $\varphi$ ) y el diámetro hidráulico del microcanal( $D$ ) [6].

Respectivamente la clasificación de los nanofluidos estudiados será ordenada de la siguiente manera.

Modelos	Viscosidad dinámica nanofluido.
Brinkman	$\frac{\mu_{nf}}{\mu_{fb}} = \frac{1}{(1-\varphi)^{2.5}}$
Nguyen	$\frac{\mu_{nf}}{\mu_{fb}} = 2.1275 - 0.0215T + 0.00027T^2$
Jang et al.	$\frac{\mu_{nf}}{\mu_{fb}} = (1 + 2.5\varphi) \left[ 1 + \eta \frac{d_p^{-2\varepsilon}}{D} \varphi^{\frac{2}{3}(\varepsilon+1)} \right]$

Para el cuarto modelo de comparación se introducirá el modelo de densidad de nanofluidos junto con el modelo de viscosidad de Brinkman Ec.(15).

$$\rho_{nf} = \rho_{fb}(1 - \varphi) + \rho_{np}\varphi \quad (18)$$

Se ha demostrado que los datos experimentales sobre las mediciones de densidad no son suficientes para varios nanofluidos a diferentes niveles, a la par que se ha demostrado que la densidad varía respecto a la temperatura, de manera alterna se ha llevado acabo mediciones exhaustivas para obtener densidad y proporcionar datos, así como para verificar la aplicabilidad de la ecuación (que también se conoce como teoría de la mezcla para varios nanofluidos). [13]

Actualmente la Ec. (18) se considera el modelo de densidad a usar para realizar estudios en el área de nanofluidos. Para establecer un modelo de estudio con densidad variable se obtuvo correlaciones de densidad ( $\rho^*$ ) para diferentes tipos de nanopartículas inmersas en agua, las cuales se emplearan en el trabajo presente.

Material de nanopartículas inmerso agua	$\rho^*$
<i>Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> - H<sub>2</sub>O</i>	3.977
<i>CuO - H<sub>2</sub>O</i>	6.511
<i>SiO<sub>2</sub> - H<sub>2</sub>O</i>	2.2039
<i>ZnO - H<sub>2</sub>O</i>	5.6100

### 3. Modelo Numérico.

Un basto número de publicaciones dan diversas soluciones empleando métodos numéricos para medios porosos y nanofluidos en las cuales se abordan diferentes problemas. Muchas publicaciones abordan el problema con múltiples herramientas computacionales se utilizan tales como ANSYS, OpenFOAM, FluidSim, Commsol CFD, etc.

Para el presente trabajo se empleo el software Freefem ++ para la resolución de la ecuación de momentum y coeficiente de fricción. Freefem ++ es un software libre de alto nivel para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales parciales en dos y tres dimensiones, que resuelve a través del uso del método de elemento finito(FEM por sus siglas inglés), en los cuales se pueden resolver diversos problemas físicos de dinámica de fluidos, biología, transferencia de calor, etc.

El método (FEM) es un procedimiento de aproximación para la solución de ecuaciones diferenciales, con condiciones en la frontera y condiciones iniciales, del tipo que se presentan en problemas de ingeniería, física y matemática. El procedimiento básicamente envuelve la división del dominio en muchas pequeñas regiones, llamadas "elementos", convenientemente distribuidas, las cuales pueden ser de forma triangular, cuadrilátera, etc., y usando una interpolación para describir el comportamiento de estos subdominios. Un número satisfactorio de puntos, llamados "nodos", son especificados para cada elemento y a cada uno de ellos le corresponde un valor de la variable o las variables de la ecuación diferencial, que se obtiene interpolando dentro de cada elemento[17].

Freefem ++ tiene diversas funciones como un generador de malla automático avanzado, capaz de adaptarse a una malla a posterior, tiene un resolvidor diferencial elíptico de propósito general que esta interconectado con algoritmos de soluciones rápidas como lo son UMFPACK, SuperLU, MUMPS, Crout, Cholesky, etc. Resuelve problemas iterativos prescritos por el usuario con el lenguaje de alto nivel que maneja. Tiene una gran diversidad de elementos finitos triangulares, incluyendo elementos discontinuos[9].

Una parte importante para la solución de cualquier tipo de problema para Freefem ++ se requiere la descripción del problema en su forma variacional, una vez obtenido el problema en su forma adimensional, pasa a ser desarrollado en su forma variacional.

Para el presente trabajo en la solución de la ecuación de momentum se selecciono un tipo de malla, llamada malla estructurada con cien nodos a lo largo y cien nodos a lo ancho, se le llama malla estructurada por seguir un patrón reticular a lo largo de toda la geometría. Particularmente una malla estructurada de tipo triangular con un dominio rectangular[8]. Los elementos se encuentran espaciados y distribuidos de forma homogénea a lo ancho y



largo del canal, la solución esta programada para que guarde la solución de cada uno de sus nodos para valores constantes en  $X$  y  $Y$ , en múltiplos de 0.1.

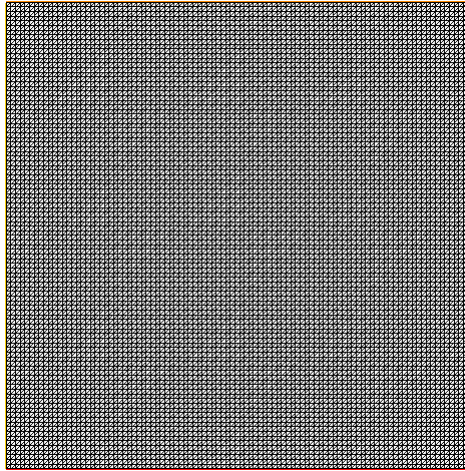


Figura 6: Malla estructurada para descripción del microcanal.

Dicho anteriormente la paquetería de Freefem ++ cuenta con una amplia selección de métodos numéricos por medio del FEM para la solución de un problema. Para el problema se opto por utilizar el método de UMFPACK.

## UMFPACK

UMFPACK también conocido como método de factorización multifrontal de Gauss LU. El método se refiere a que no es relevante si la matriz de coeficientes es simétrica o tiene un comportamiento aleatorio, por lo cual genera un comportamiento iterativo con mayor utilidad para la resolución de la ecuación de momentum Ec. 13.

### 3.1. Formulación variacional.

En Freefem ++ para que pueda ser capaz de resolver las ecuaciones de cualquier problema es necesario plantearlas a través del calculo variacional o formulación débil. De esta manera la formulación débil nos proporciona una mejor integración entre las ecuaciones, condiciones de frontera y el dominio de análisis. Para obtener una mayor eficiencia computacional la condición de simetría se puede realizar un análisis para la mitad del canal de  $Y = 0$  a  $Y = \frac{H}{2} = 1$  esto permite generar el mismo tipo de comportamiento en la dirección del eje  $X$ . En la formulación débil el dominio de análisis sera expresado como  $\Omega$ , el diferencial del área de la región  $\Omega$  se abrevia de la siguiente manera  $d\Omega = dXdY$ . La variable auxiliar en el análisis es expresada como  $u_w$ .

## Ecuación de momentum en su forma variacional.

Es importante declarar un criterio de convergencia para la Ec. 13 que para este caso es de  $1 \times 10^{-6}$ , a pesar de estar resulta en un estado estacionario, es necesario renovar las variables en cada iteración del sistema por lo cual se vera implementado una discretización temporal, para el termino de la segunda derivada se ocupo el teorema integral de Green e integración por partes para reducir el orden de la derivada[7]. La ecuación toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \bar{u}_w + \frac{\partial u^*}{\partial Y} \frac{\partial \bar{u}_w}{\partial Y} \right) d\Omega = \\ & -Da^{-1} \iint_{\Omega} (u^* - 1) \bar{u}_w d\Omega \\ & -\Lambda_F Da^{-\frac{1}{2}} \iint_{\Omega} (u^{*2} - 1) \bar{u}_w d\Omega \end{aligned}$$

Es necesario discretizar la parte temporal para lograr que los incrementos de tiempo sean controlados y se puedan definir los criterios de convergencia, así la siguiente ecuación en su forma semidiscreta se puede expresar de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left( \frac{\bar{u}^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right) \bar{u}_w d\Omega + \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial u^{*n+1}}{\partial Y} \frac{\partial \bar{u}_w}{\partial Y} \right) d\Omega = \\ & -Da^{-1} \iint_{\Omega} (u^{*n+1} - 1) \bar{u}_w d\Omega \\ & -\Lambda_F Da^{-\frac{1}{2}} \iint_{\Omega} (u^{*n+1} u^{*n} - 1) \bar{u}_w d\Omega \\ & + \iint_{\Omega} \frac{\bar{u}^{*n+1} - u^{*n}}{\Delta t} \bar{u}_w d\Omega \end{aligned}$$

Una vez obtenida la formulación variacional al problema y teniendo en cuenta la adimensionalización del sistema Freefem ++ puede generar la solución. La Fig. 7 se muestra una comparación de la solución analítica y la solución numérica obtenida por Freefem ++.

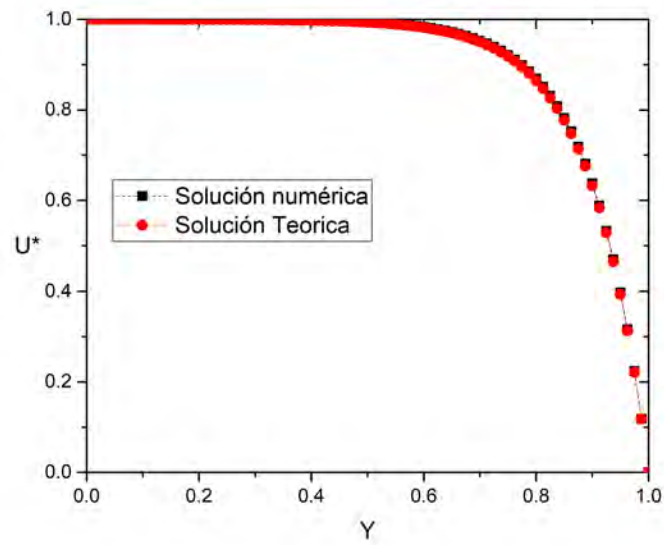


Figura 7: Solución analítica comparada con la solución numérica de la Ec. 13.

La formulación variacional permite reducir el orden de las derivadas, en el presente trabajo la ecuación de momentum ya adimensionalizada muestra una derivada de segundo orden al aplicar la formulación débil la ecuación queda con la derivada en un primer orden. Para la formulación variacional a Freefem ++ permite que su resolución sea más eficiente.

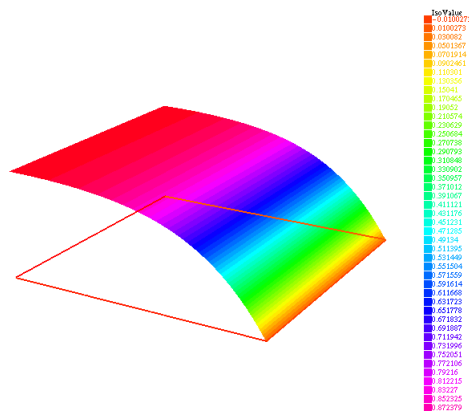


Figura 8: Interfaz gráfica de Freefem ++; solución de  $u^*$ .

En la Fig.8 se muestra la gráfica de la velocidad en la interfaz de Freefem ++.

## 4. Resultados.

Para esta sección se presentan los resultados correspondientes previos a la solución numérica de la ecuación de momentum presentada en la sección anterior. Se parte del orden presentado en la tabla anterior para tres modelos con densidad constante y un modelo aunado a un modelo de densidad variable con ayuda de gráficos para su respectivo análisis. La comparación hidrodinámica se ve afectada numéricamente en el cambio de los diferentes parámetros adimensionales ( $Da$ ,  $\Lambda_F$ ,  $Re$ ) propuestos anteriormente.

El objetivo principal es variar y observar la influencia de cada parámetro adimensional en el comportamiento hidrodinámico de cada nanofluido dentro del microcanal. Además de observar el comportamiento del coeficiente de fricción en la pared del microcanal para cada modelo variando sus respectivos parámetros. En la resolución de las gráficas se debe considerar que debido a la condición de simetría planteada anteriormente cuando  $Y = 0$  y  $Y = \frac{H}{2} = 1$  permite generar comportamiento simétrico en la dirección del eje  $X$ , por lo cual las gráficas se ven gráficas desde el centro del canal.

Para generar una comparación ideal para observar la influencia hidrodinámica y el coeficiente de fricción del nanofluido a través del medio poroso se generarán las siguientes gráficas de diferentes parámetros de Darcy ( $Da$ ) y del parámetro inercial ( $\Lambda_F$ ) usando solamente un fluido base sin inmersión de nanopartículas.

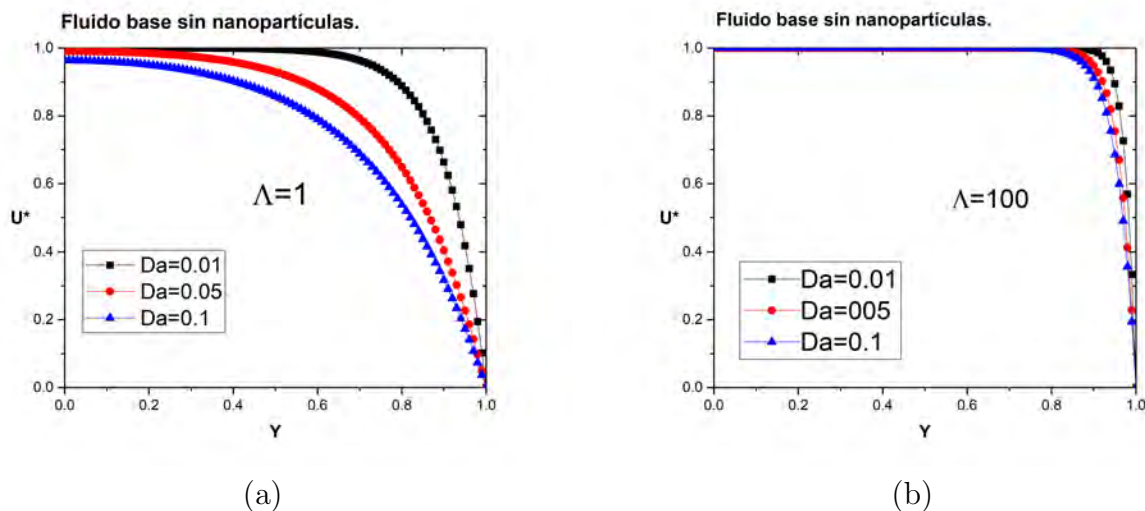


Figura 9: Variación de diferentes valores  $Da$  con parámetros inerciales de  $\Lambda_f = 1$  y  $\Lambda_f = 100$  para un fluido base sin inmersión de nanopartículas.

Para un parámetro inercial fijo ( $\Lambda_F = 1$  y  $\Lambda_F = 100$ ) y variando diferentes valores para el parámetro de Darcy, se observa un comportamiento semejante en el desarrollo del perfil de velocidades para un parámetro inercial alto como se muestra en la Fig. 9(a) y Fig. 9(b),

en cambio para un parámetro inercial más pequeño tienden a tener un comportamiento con un perfil de velocidades en forma parabólica.

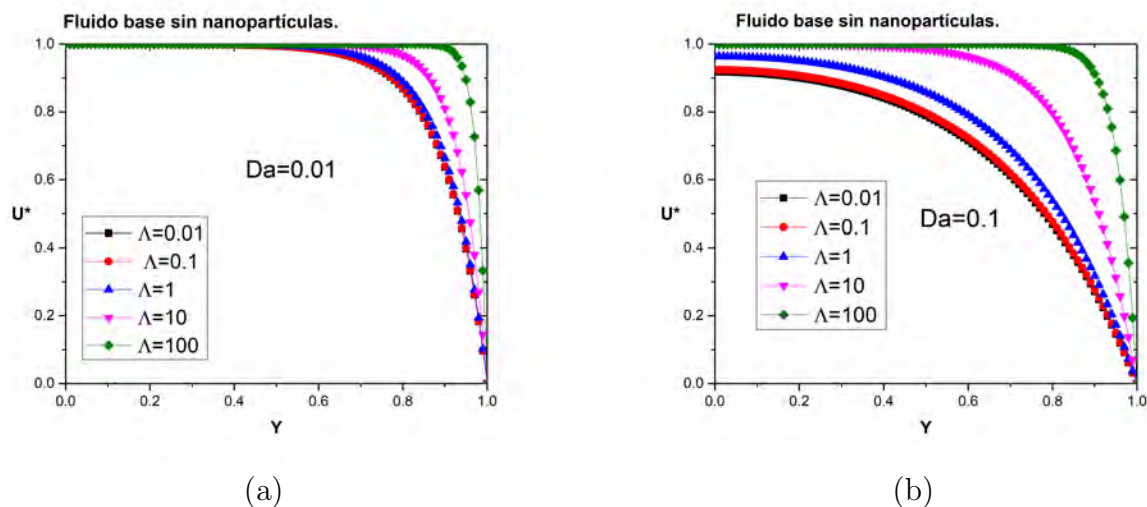


Figura 10: Variación de diferentes valores  $\Lambda_F$  con parámetros inerciales de  $Da = 0.01$  y  $Da = 0.1$  para un fluido base sin inmersión de nanopartículas.

El perfil de velocidades disminuye a medida que el parámetro inercial se es más significativo. En un parámetro de Darcy para las Fig. 10(a) y Fig. 10(b) para un medio poroso con un valor de Darcy alto, no solo influye el parámetro de Darcy en el desarrollo óptimo del perfil de velocidad depende notablemente del parámetro inercial; sin embargo, esta tendencia en el comportamiento se vuelve débil para un medio poroso con un valor de Darcy más pequeño, es decir, el perfil de velocidad se vuelve independiente del parámetro inercial a medida que disminuye el parámetro de Darcy del medio poroso[10].

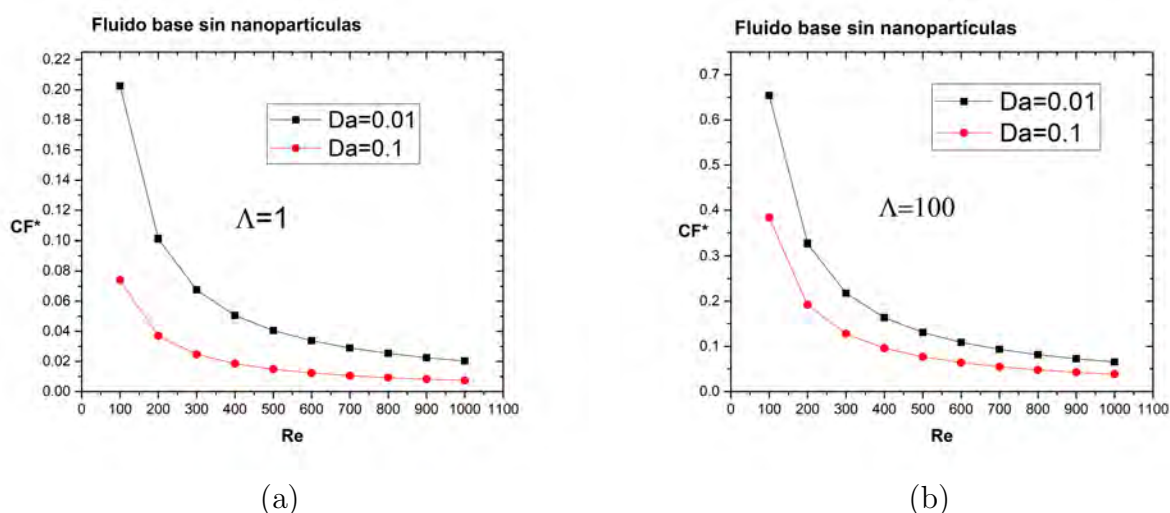


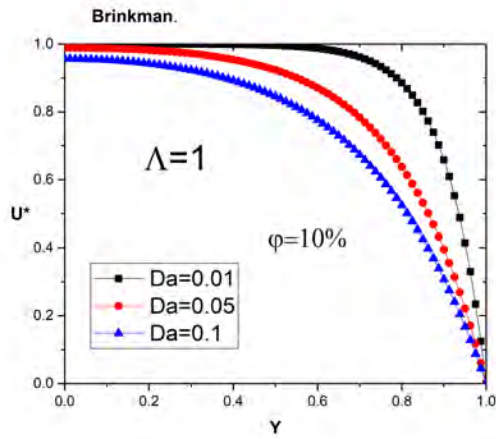
Figura 11: Coeficiente de fricción variando diferentes parámetros de  $Da$  y  $\Lambda_F$  para diferentes valores de  $Re(0$  a  $1000)$  para un fluido base sin inmersión de nanopartículas.

En las gráficas de las Fig. 11(a) y Fig. 11(b) el coeficiente de fricción ( $Cf^*$ ) se encuentra en función del número de Reynolds ( $Re$ ) propuesto anteriormente, se gráfico el  $Cf^*$  para diferentes números de Reynolds, variando las propiedades físicas del medio poroso. Una consecuencia de la condición de no-deslizamiento es que todos los perfiles de velocidades deben tener valores de cero respecto a la superficie en los puntos de contacto entre un fluido y la pared del microcanal. En las gráficas presentadas el parámetro inicial se vuelve el parámetro con mayor importancia en los cambios de comportamiento del coeficiente de fricción en las gráficas de la Fig. 11(a) y 11(b), el parámetro de Darcy muestra la oposición del fluido a través de la matriz porosa y de la pared del microcanal; para un parámetro de Darcy pequeño ( $Da \leq 0.01$ ) la permeabilidad afectara en menor manera a la oposición del fluido en la pared del microcanal debido a esto el paso del fluido en la pared hará un aumento en el  $Cf^*$ , en cambio para un parámetro de Darcy más grande se genera una mayor oposición entre el fluido y la pared del microcanal lo cual permite una disminución en los valores del  $Cf^*$ . A la vez que el Reynolds va creciendo el  $Cf^*$  va formando un comportamiento semejante. Para Reynolds con valores grandes el  $Cf^*$  recibe una tendencia parecida y muy cerca de valores a cero; en cambio se es observado que los grandes coeficientes de fricción son debido a números bajos de Reynolds.

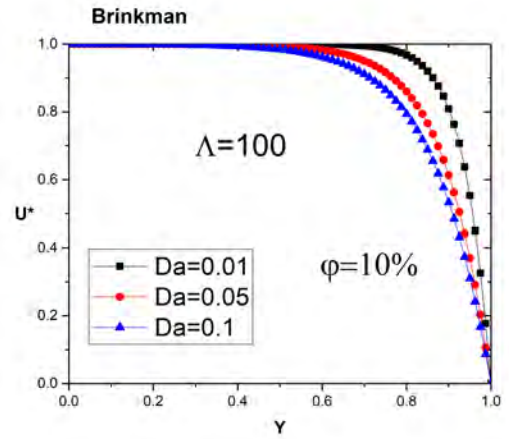
Por simplicidad en muchos resultados que se muestran a continuación se observan comportamientos similares en los perfiles de velocidad, por lo que no es necesario entrar en más detalle, las gráficas se encuentran en la sección Apéndice II(Apéndice de Figuras).

#### 4.1. Modelo de Brinkman

Para esta sección por medio de la ecuación de momentum se introducirá la Ec.(15) propuesta unas secciones anteriores y se variaran diferentes parámetros de  $Da$  y  $\Lambda_F$  para observar el comportamiento del nanofluido en el desarrollo de los perfiles de velocidad , además de observar el efecto de la concentración de volumen de nanopartículas ( $\varphi$ ) en la velocidad.

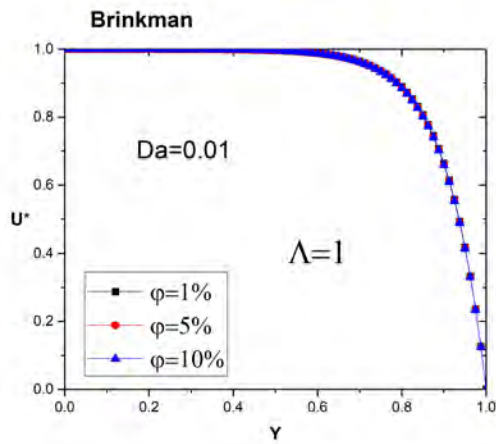


(a)

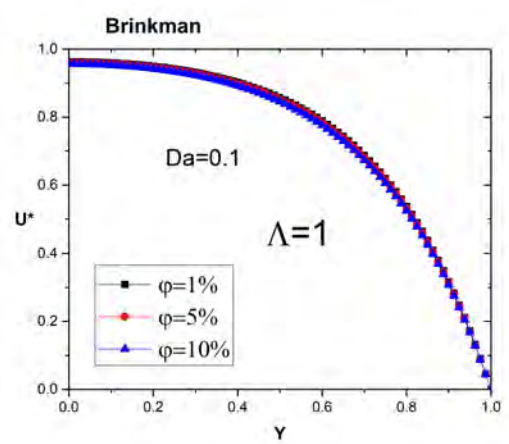


(b)

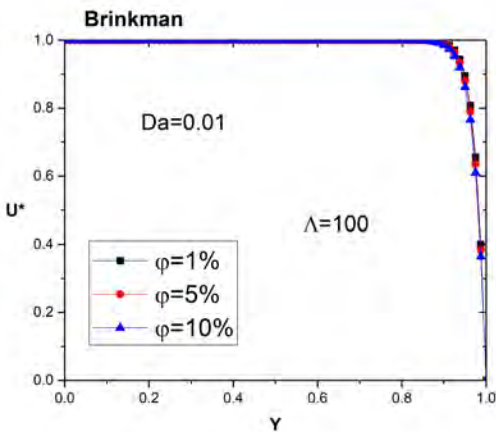
Figura 12: Variación de diferentes parámetros de Darcy ( $Da$ ) para el modelo de viscosidad de Brinkman, variando  $\Lambda_F$ .



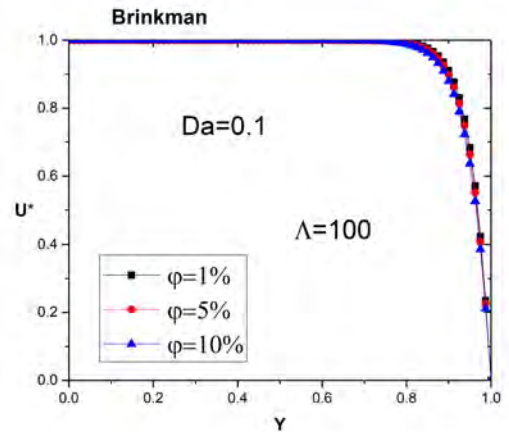
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 13: Variación de la fracción volumetrica ( $\varphi$ ) para diferentes parámetros de  $Da$  y  $\Lambda_F$ .

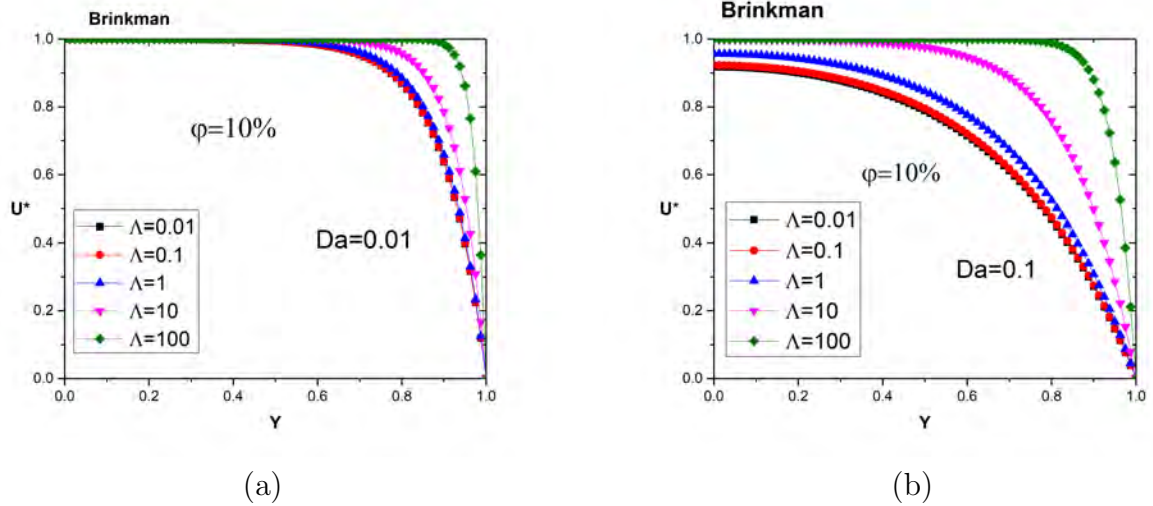
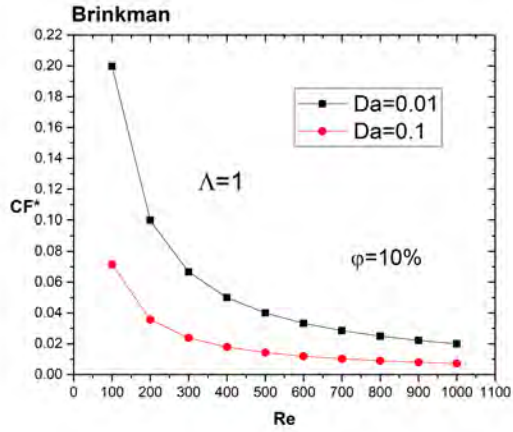


Figura 14: Variación de diferentes parámetros inerciales para el modelo de Brinkman, fijando valores de  $Da$  y  $\varphi$ .

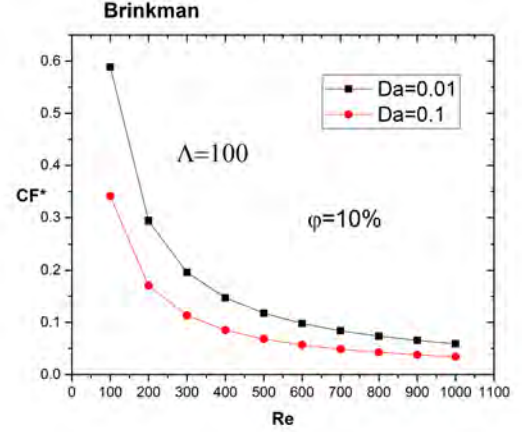
Lo anterior prueba que existen mínimas variaciones o casi nulas respecto a  $\varphi$  con el modelo de Brinkman, lo cual prueba que para diferentes valores de  $\varphi$  los perfiles de velocidad no sufren modificaciones; los resultados se encuentran anexados a las gráficas del Apéndice II, lo cual se puede concluir que las propiedades viscosas del nanofluido tiene menor peso que las propiedades físicas del medio poroso para la velocidad, el parámetro de Darcy y el parámetro inercial predominan en los cambios del desarrollo del perfil de velocidad. En la Fig. 13 muestra que para parámetros de Darcy altos ( $Da \geq 0.01$ ) y parámetros inerciales pequeños ( $\Lambda_F \leq 100$ ) se logra obtener una un efecto de frenado en la velocidad del nanofluido.

Al comparar con las gráficas de no nanofluidos Fig. 9-11 se observa que existen variaciones mínimas respecto al modelo de viscosidad de Brinkman Fig 12-15.





(a)



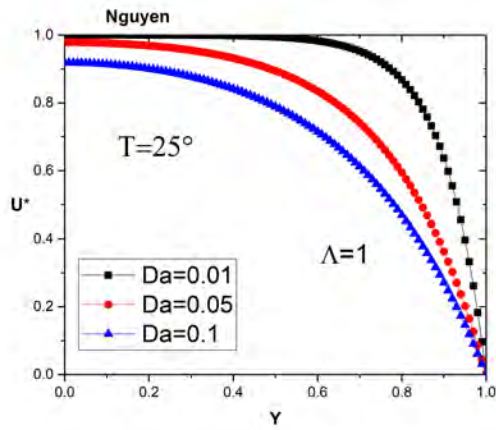
(b)

Figura 15: Coeficiente de fricción variando diferentes parámetros  $Da$  y  $\Lambda_F$  para diferentes valores de  $Re$  (0 a 1000) para el modelo de viscosidad de Brinkman.

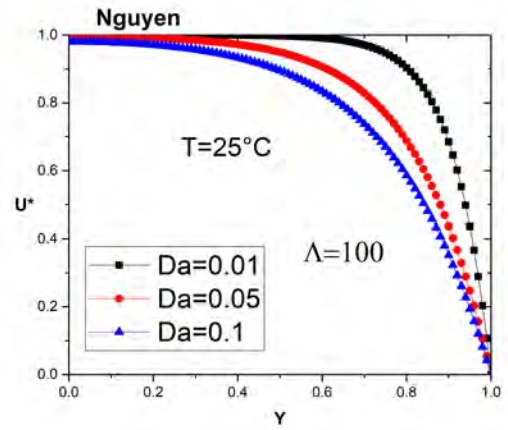
Lo anterior muestra que en comparación a las gráficas mostradas en la Fig. 14. El parámetro inercial vuelve a tomar el papel predominante en el comportamiento de las gráficas de la Fig. 15. El efecto del parámetro inercial ( $\Lambda_F = 100$ ) en la Fig. 15(b) en comparación con la Fig. 15(a) sufre una mínima variación.

## 4.2. Modelo de Nguyen

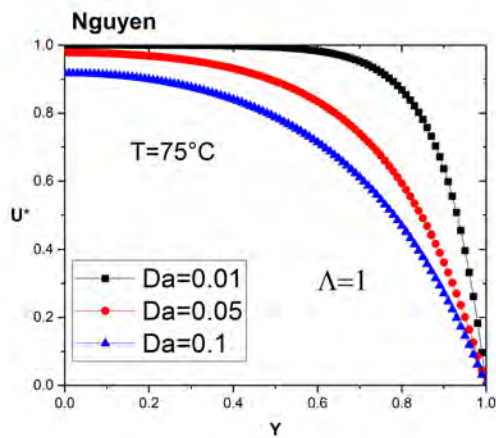
En el caso del modelo de Nguyen Ec. (16) el modelo de viscosidad sera comparada por medio de la correlación que existe entre temperatura y concentración del volumen de nanopartículas ( $T$  de  $25^\circ\text{C}$  a  $75^\circ\text{C}$ ) tomando en cuenta que el microcanal se encuentre en un estado isotérmico.



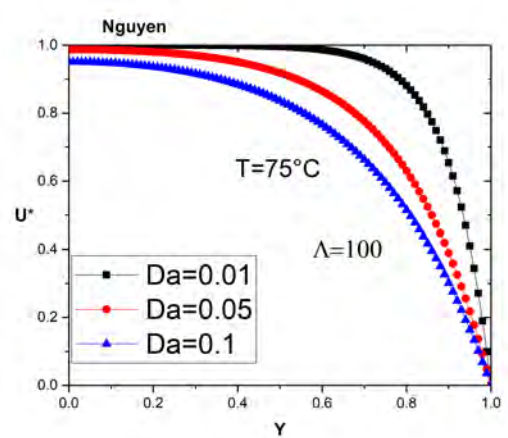
(a)



(b)



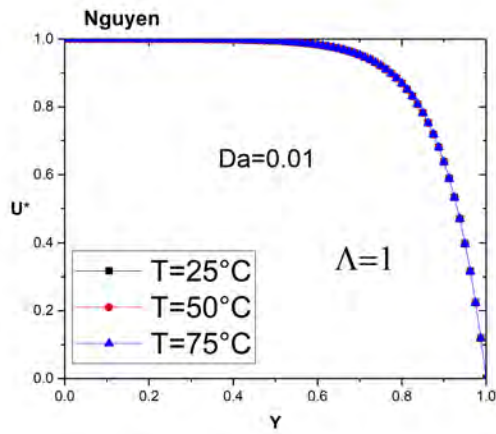
(c)



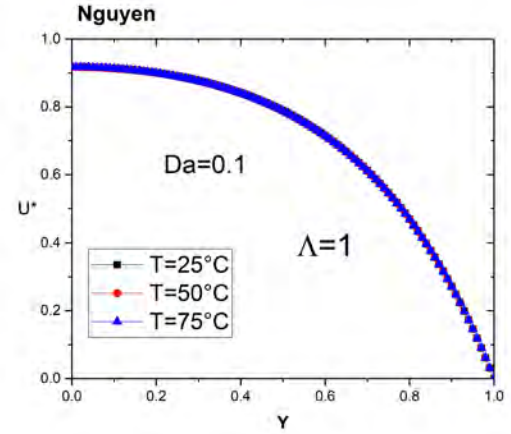
(d)

Figura 16: Variación de diferentes parámetros de Darcy para el modelo de Nguyen. Fijando valores en la temperatura de  $T$  de  $25^{\circ}\text{C}$  y  $75^{\circ}\text{C}$  y un parámetro inercial  $\Lambda_F$  de 1 a 100.

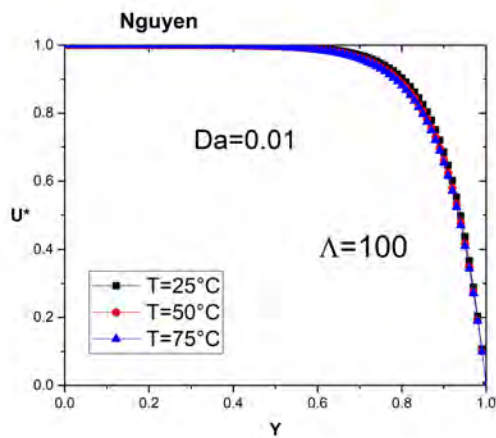
Nuevamente se vuelve a corroborar un efecto de frenado en la velocidad observado en la Fig. 16 para una  $T = 25^{\circ}\text{C}$ , un  $Da = 0.1$  y un  $\Lambda_F = 1$  logra disminuir la velocidad, donde las propiedades del medio poroso influyen más en el perfil de velocidades.



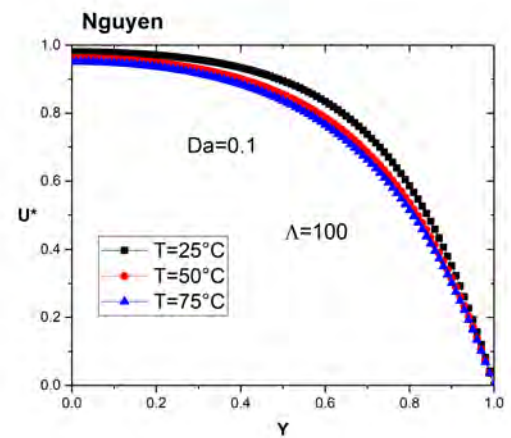
(a)



(b)



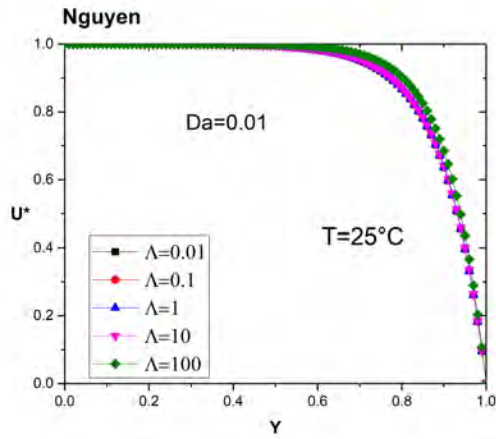
(c)



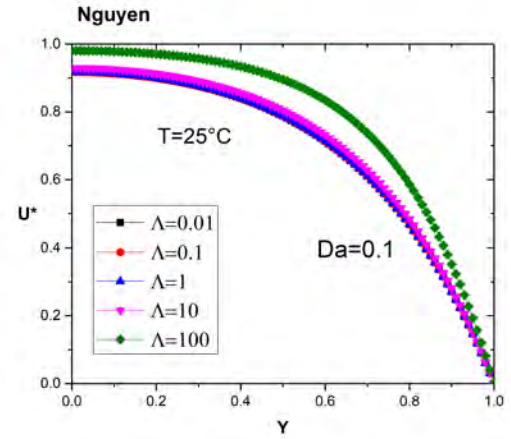
(d)

Figura 17: Variación de diferentes temperaturas para el modelo de Nguyen.

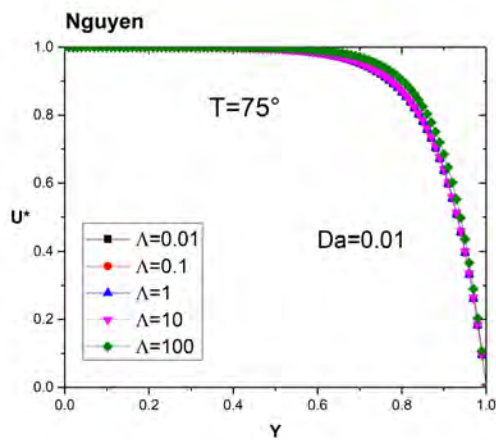
Respecto a las gráficas de la Fig. 17 se vuelve a mostrar que las propiedades de la viscosidad del nanofluido vuelve a no ser tan trascendentes en el efecto de la velocidad. Aunque para la Fig. 17(d) muestra que el perfil de velocidad sufre una variación mínima para temperaturas mayores a  $25^{\circ}\text{C}$  con un  $\Lambda_F=100$  y un  $Da = 0.1$ .



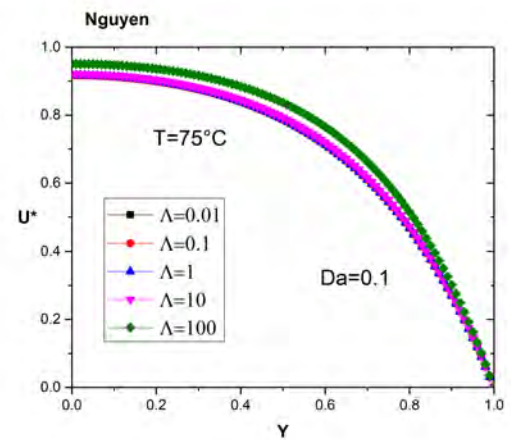
(a)



(b)



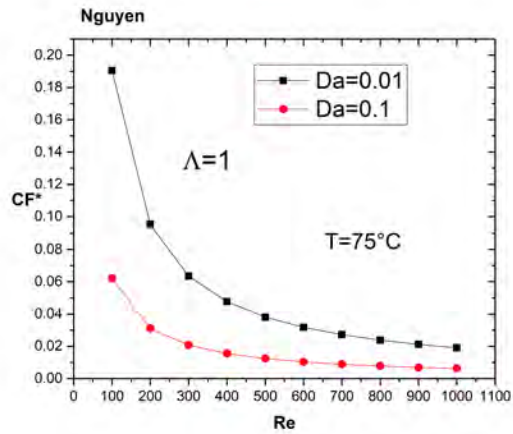
(c)



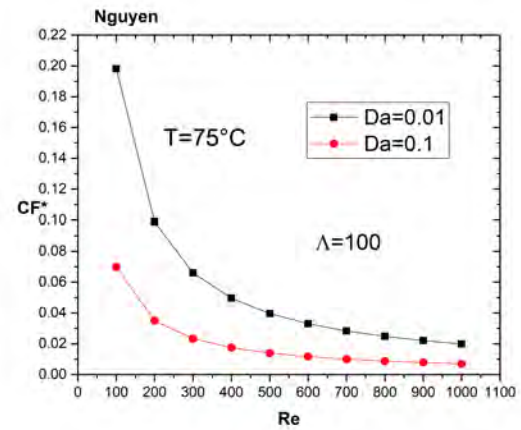
(d)

Figura 18: Variación de diferentes valores Darcy y temperatura, fijando valores del parámetro inercial para el modelo de Nguyen.

En comparación al modelo de Brinkman Fig. 14 el parámetro inercial no tiene grandes efectos en los perfiles de velocidad como se muestra para el modelo de Nguyen Fig. 18

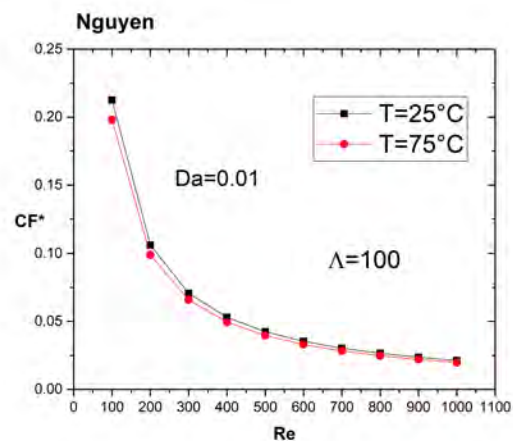


(a)

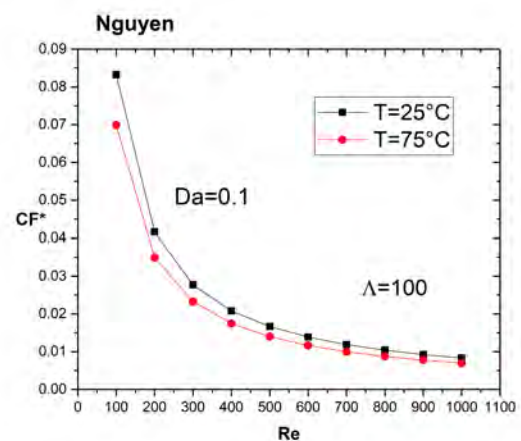


(b)

Figura 19: Coeficiente de fricción variando diferentes parámetros  $Da$  y  $\Lambda_F$  para diferentes valores de  $Re$  (0 a 1000) en el modelo de viscosidad de Nguyen.



(a)



(b)

Figura 20: Coeficiente de fricción variando diferentes parámetros  $T$  y  $\Lambda_F$  para diferentes valores de  $Re$  (0 a 1000) en el modelo de viscosidad de Nguyen

Se puede apreciar que el  $Cf^*$  de la comparación entre las Fig. 19(a) y Fig. 19 (b) que el parámetro inercial vuelve a ser poco influyente en sus cambios presentado en los resultados anteriores. La influencia del parámetro de Darcy presenta una variación en el  $Cf^*$  debido a que para un Darcy pequeño la influencia de la permeabilidad será mucho mas grande en el nanofluido.

En las gráficas Fig. 20(a) y Fig. 20(b) se puede observar que el  $Cf^*$  no cambia considerablemente para temperaturas mayores a  $25^\circ\text{C}$ , se decidió mostrar estos resultados debido al resultado obtenido en la gráfica de la Fig. 17(d) ya que existen pequeñas variaciones entre los valores del  $Cf^*$  como función de la temperatura. Sin embargo se puede mostrar

que para valores del parámetro de Darcy pequeños los valores que proporciona el  $Cf^*$  son valores mucho más significativos que para valores Darcy altos.

Las anteriores gráficas Fig. 16-20 en comparación con las gráficas mostradas en para no nanofluidos Fig 9-11, muestra que el efecto que tiene el  $\Lambda_F$  en los perfiles de velocidad varia, para  $\Lambda_F = 100$  para el modelo de Nguyen muestra en el desarrollo de los perfiles de velocidad tiende a generar un perfil en forma parabólica, mientras que para el modelo de no nanofluidos el perfil de velocidad se vuelve más pronunciado; sin embargo el  $\Lambda_F$  muestra más variaciones para los no nanofluidos. El efecto del parámetro de Darcy es notorio que para valores de  $Da \geq 0.01$  se muestra que la velocidad logra disminuir de la misma manera que para los no nanofluidos.

Para el caso del  $Cf^*$  para el modelo de Nguyen Fig. 20 se observan valores semejantes que a la Fig. 11(a) en donde se puede afirmar de la misma manera que el efecto del  $\Lambda_F$  no es muy significativo como lo es para los no nanofluidos.

### 4.3. Modelo de Jang et al.

La Ec. (17) define el modelo de Jang et al. este modelo presenta una variable interesante para analizar, el diámetro de nanopartícula ( $dp$ ), donde se puede verificar si el tamaño o forma de las nanopartículas presentan un efecto adverso al flujo de la velocidad. Cabe destacar que para efectos de estabilidad de los nanofluidos es un criterio fundamental, ya que si el nanofluido es inestable, las nanopartículas se aglomerarán de modo que tendrán una mayor tendencia a sedimentar lo que producirá una reducción en las propiedades térmicas e hidrodinámicas. Además, la sedimentación de partículas puede generar una obstrucción en microcanales en caso de utilizarlas en dispositivos electrónicos pequeños [14].

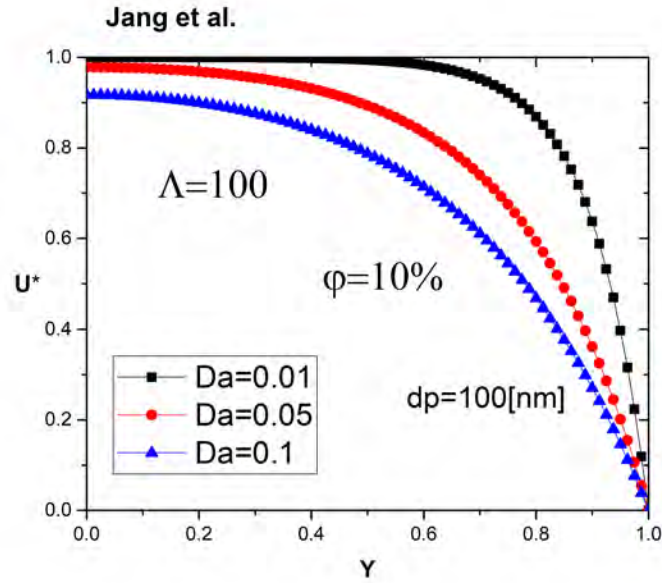
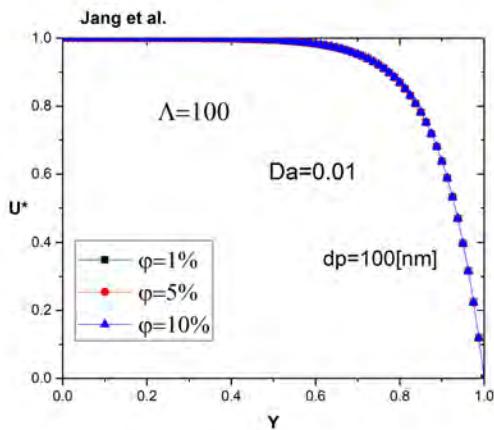
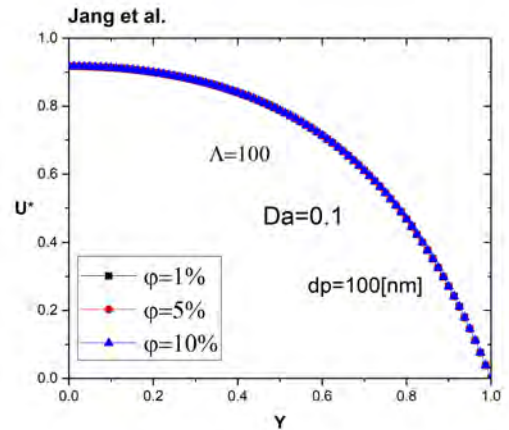


Figura 21: Visualización del efecto de diferentes parámetros ( $Da$ ,  $\varphi$ ,  $dp$ ,  $\Lambda_F$ ) para el modelo de Jang et al.



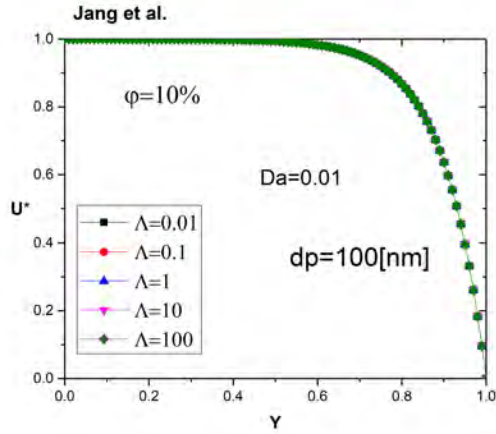
(a)



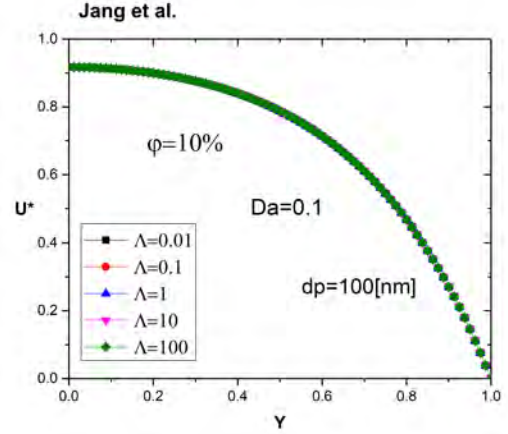
(b)

Figura 22: Variación de diferentes concentraciones de volumen de nanopartículas ( $\varphi$ ) comparando el comportamiento de los diferentes parámetros ( $Da(0.01$  a  $0.1)$ ,  $dp(100$  nm),  $\Lambda_F(1$  a  $100)$ ) en el modelo de Jang et al.

Para términos de simplicidad se abrevio en la Apéndice II los resultados semejantes. Se observa en las gráficas de la Fig. 22 y Fig. 21 que el parámetro de Darcy es el único parámetro que permite modificaciones en los perfiles de velocidad. En comparación a los modelos anteriores predomina una tendencia parecida en el desarrollo de forma parabólica de los perfiles de velocidades con el modelo de Nguyen.

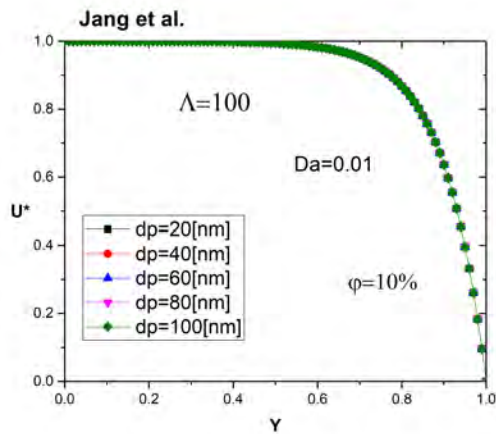


(a)

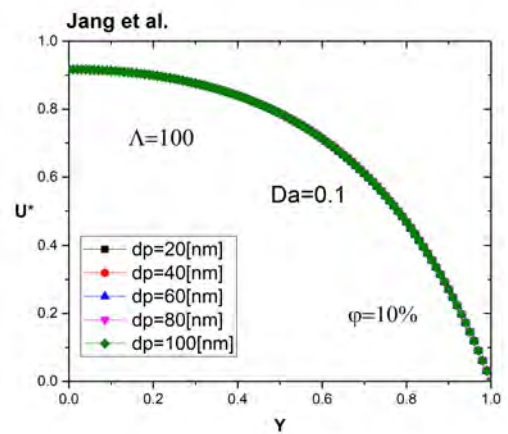


(b)

Figura 23: Variación de diferentes parámetros inerciales comparando el comportamiento de los diferentes parámetros ( $Da(0.01$  a  $0.1)$ ,  $dp(20$  nm a  $100$  nm),  $\varphi(10\%)$ ) para el modelo de Jang et al.



(a)



(b)

Figura 24: Variación de diferentes diámetros de nanopartícula ( $dp$ ) para el modelo de Jang et al.

Se puede concluir de las gráficas de la Fig. 23 que el parámetro que genera una alteración en la velocidad es el parámetro de Darcy en todas las gráficas de velocidad anteriores, en observación a los resultados propuestos en la Fig. 24 es que se puede concluir que la forma, tamaño y concentración volumétrica de nanopartículas no tienen influencia en el fenómeno hidrodinámico como se muestra para el modelo de Jang et al. y los anteriores modelos de viscosidad dinámica; en el modelo de Jang et al. el  $dp$  no muestra ninguna variación en la velocidad del nanofluido.



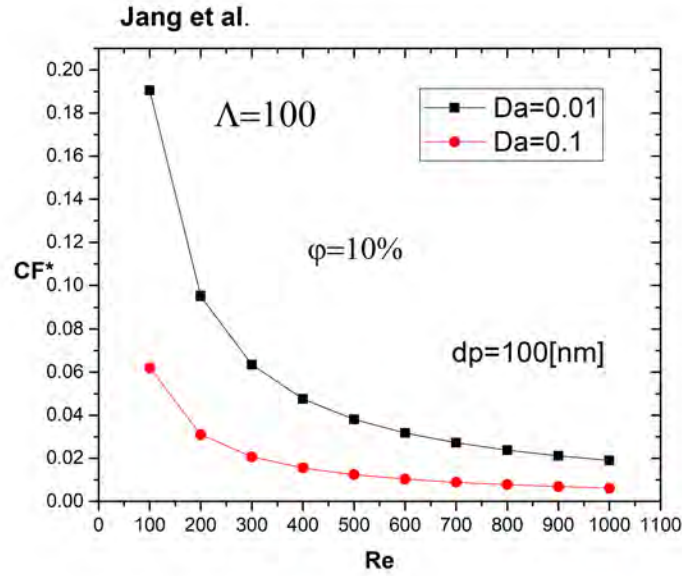
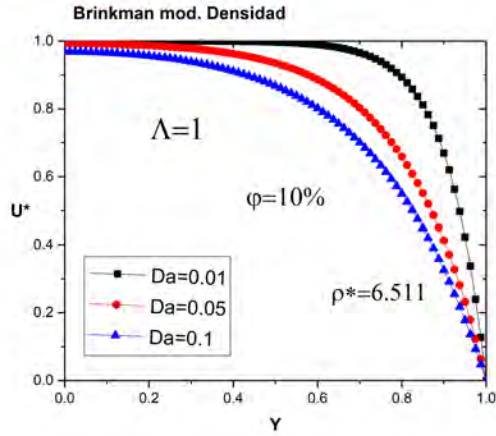


Figura 25: Coeficiente de fricción variando el parámetro de Darcy para el modelo de Jang et al.

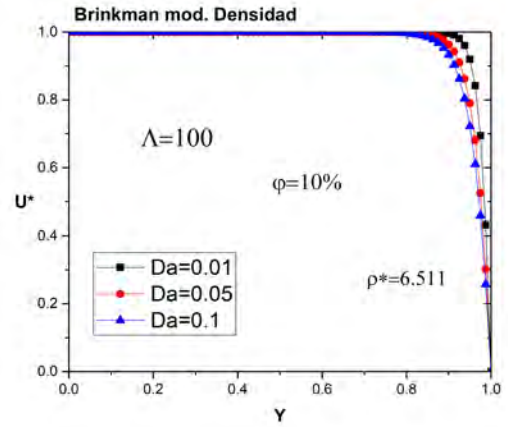
Debido a la relación de las gráficas anteriores Fig. 21-24 del parámetro de Darcy muestra de la misma manera que el parámetro de Darcy es el único parámetro que tiene influencia en los perfiles de velocidad, el modelo de Jang et al. Fig. 25 de igual manera muestra valores muy similares en comparación al modelo de Nguyen Fig. 20 en el  $Cf^*$ .

#### 4.4. Modelo de Brinkman con densidad variable.

Para el siguiente modelo de estudio se introduce el concepto de densidad variable por medio del modelo de densidad mencionado anteriormente Ec.(18) y sus respectivas correlaciones de densidades relativas( $\rho^*$ ); además de variar los parámetros correspondientes( $Da$ ,  $\varphi$ ,  $\Lambda_F$ ).

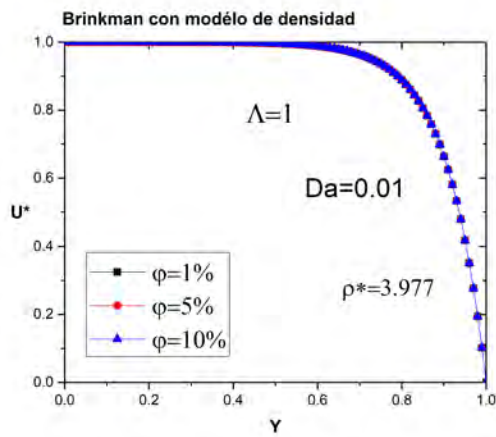


(a)

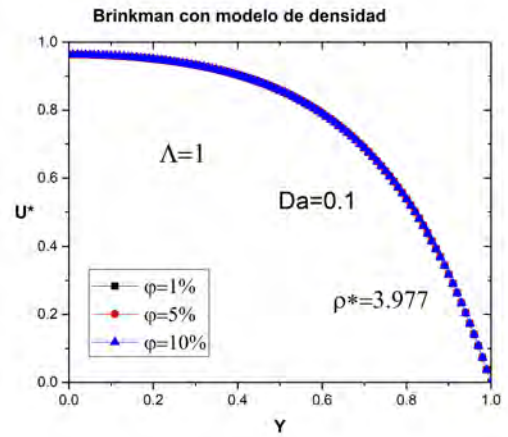


(b)

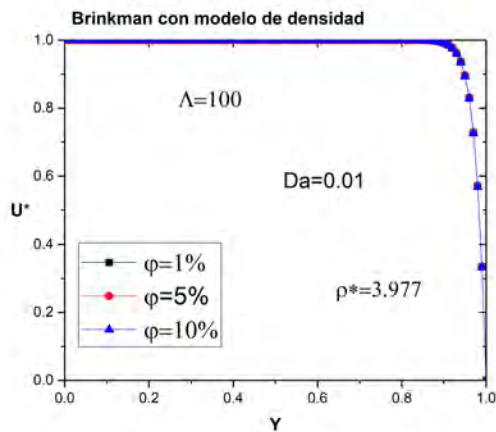
Figura 26: Variación de diferentes número de Darcy para el modelo de Brinkman con densidad variable, evaluando diferentes valores de  $\rho^*$  ( 6.511),  $\varphi$  ( 10%) y  $\Lambda_F$ (1 y 100).



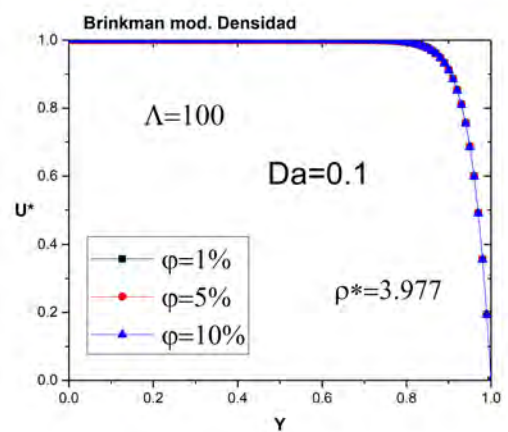
(a)



(b)

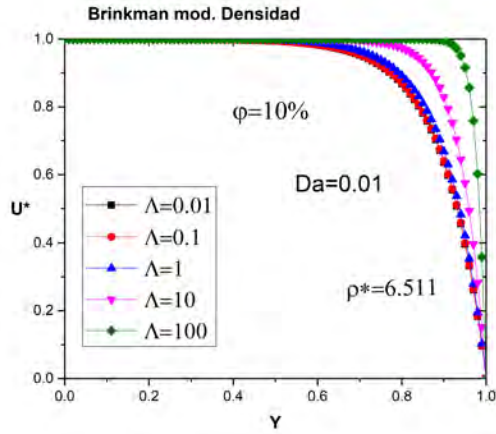


(c)

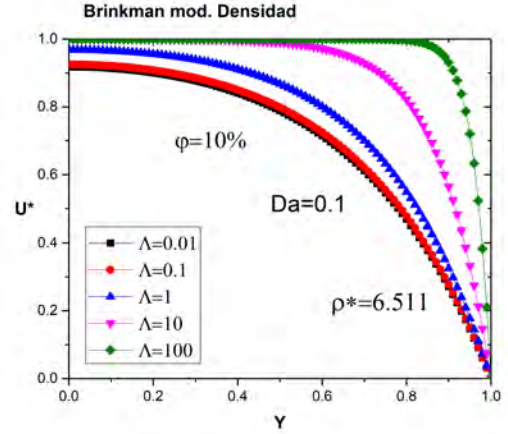


(d)

Figura 27: Variación de diferentes concentraciones de volumen de nanopartículas para el modelo de Brinkman con densidad variable( $\rho^* = 3.977$ ).



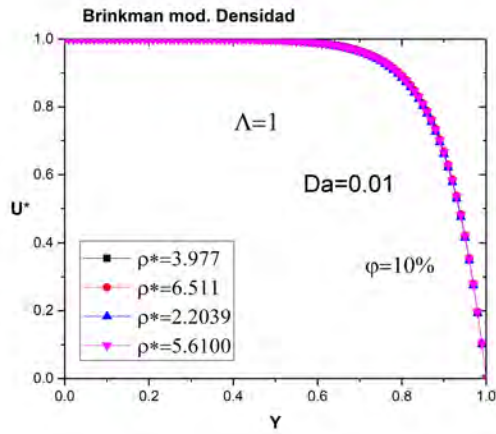
(a)



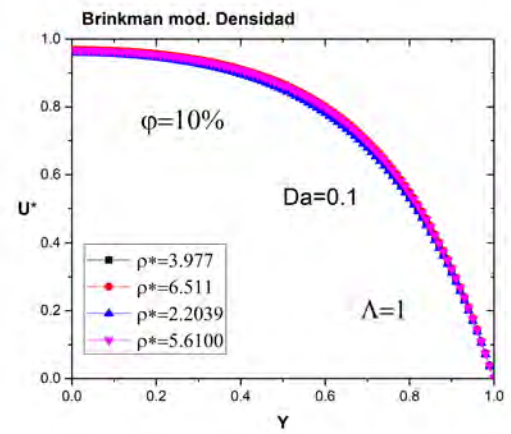
(b)

Figura 28: Variación de diferentes parámetros inerciales para el modelo de Brinkman con densidad variable.

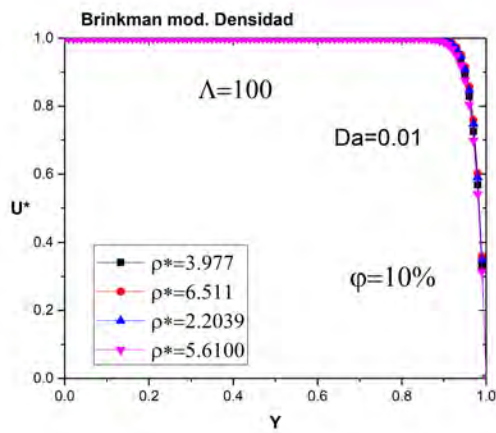
A manera de simplicidad las gráficas de las Fig. 26-29 las soluciones semejantes se encuentran en la sección Parte II, muestran únicamente las variaciones correspondientes de los valores de  $\varphi$  y  $\rho^*$  debido a que no altera los perfiles de velocidad, en general se presenta un comportamiento semejante al modelo de viscosidad dinámica de Brinkman con densidad constante; las parámetros relacionados al medio poroso influyen de gran manera en las alteraciones así como también en los perfiles de velocidad.



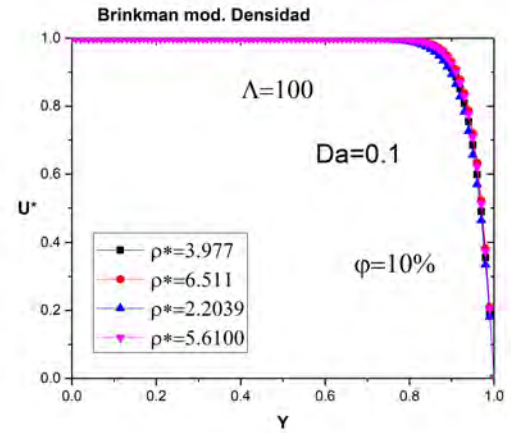
(a)



(b)



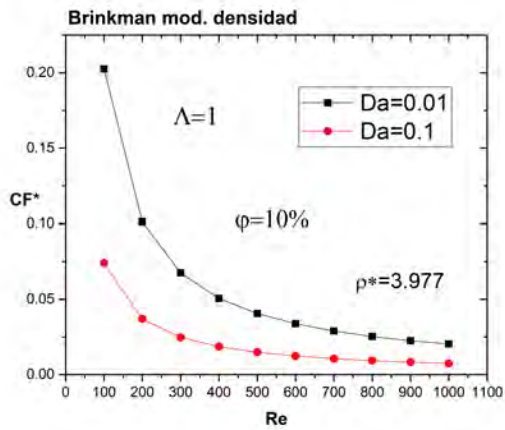
(c)



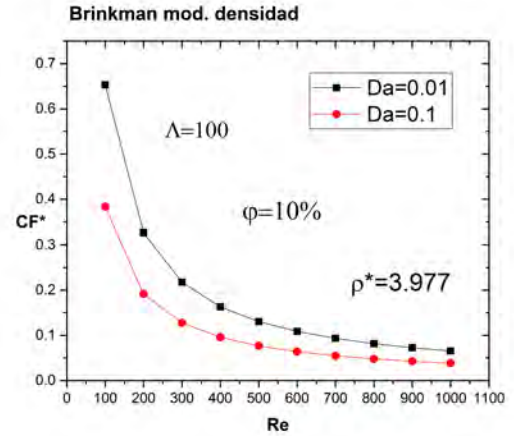
(d)

Figura 29: Variación de diferentes correlaciones de densidades para el modelo de Brinkman con densidad variable.

En la Fig. 29 se puede observar que la velocidad es independiente de la densidad ya que no se muestran alteraciones al variar el parámetro de correlación de densidad relativa para el modelo de Brinkman.



(a)



(b)

Figura 30: Variación de diferentes parámetros de  $Da$  para el coeficiente de fricción en el modelo de Brinkman con densidad variable.

Sin embargo muy parecido a la Fig. 15 del modelo de Brinkman con densidad constante toma valores semejantes a la Fig. 30, debido a que la densidad no tuvo influencia en los perfiles de velocidad. De lo cual se puede concluir que la densidad es independiente de la viscosidad y no influye en el desarrollo de la velocidad. Por lo tanto se obtienen los mismos resultados en comparación al modelo de Brinkman con densidad constante.

## 5. Conclusiones.

En este trabajo se presentaron soluciones gráficas a través de un análisis numérico del comportamiento hidrodinámico y el coeficiente de fricción para el flujo de un nanofluido en un confinamiento poroso. De las propiedades físicas de los nanofluidos, se demostró que el comportamiento del flujo de la velocidad era independiente de estas, en la cual las variaciones que se presentaron eran mínimas o nulas. La  $\varphi$  era importante considerar dentro de un rango establecido de 1% y 10%. Ya que como se menciona en la sección de resultados para el modelo de viscosidad de Jang et al. el efecto del volumen de agregado de nanopartículas puede ser muy importante para efectos de sedimentación entre partículas, además que para una conductiva térmica alta debe de haber una separación entre partículas para evitar choques entre estas, numéricamente se comprobó que Freefem ++ es capaz de resolver para valores mayores de la  $\varphi$  al 10%, no obstante, la física del problema pierde coherencia y muestra que los perfiles de velocidad tomaban los mismos valores que para  $\varphi \leq 10\%$ , experimentalmente puede repercutir en el funcionamiento de un micro-dispositivo pero numéricamente el aglomerado de partículas presentaba los mismos efectos hidrodinámicos. De igual manera es evidente concluir que el tamaño, forma, etc. de las nanopartículas son poco influyentes en el efecto hidrodinámico para todos los modelos de viscosidades estudiados. De la misma forma para densidades variables el modelo de densidad no mostró ninguna variación en los efectos de la velocidad se puede concluir que la densidad es independiente para el flujo de la velocidad dentro del microcanal. Además de considerar la influencia hidrodinámica predomina más en las propiedades de los medios porosos.

Para las propiedades del medio poroso, se mostró grandes resultados hidrodinámicos, ya que la influencia de la oposición al nanofluido debido a la matriz porosa toma una gran relevancia en el estudio hidrodinámico, los parámetros de  $Da$  y  $\Lambda_F$  eran influyentes en el comportamiento de la velocidad, ciertas variaciones se presentaron en el caso del modelo de Jang et al. que mostró una independencia en los efectos del parámetro inercial, mientras que para el parámetro de  $Da$  fue influyente en todos los modelos estudiados, en su mayoría los perfiles de velocidad se vuelven independientes del parámetro inercial a medida que disminuye el parámetro de Darcy del medio poroso. La disminución del número de Darcy disminuye significativamente la efectividad del flujo de nanofluidos, lo que para el confinamiento poroso en un microcanal valores de  $Da \geq 0.1$  lo vuelven rangos limitados de la permeabilidad en el frenado del flujo de los nanofluidos en la matriz porosa.

Los resultados proporcionados al comportamiento del flujo de nanofluidos en microcanales confinados muestran un mayor coeficiente de fricción en comparación con los coeficientes de fricción planteado para fluidos base sin inmersión de nanopartículas. La estructuración

de nanopartículas derivadas del efecto de confinamiento poroso también puede ser un factor influyente que contribuya a los altos coeficientes de fricción observados. Los grandes coeficientes de fricción observados en números bajos de Reynolds pueden explicarse por el confinamiento poroso y del agregado de nanopartículas, lo que resulta en una mayor resistencia a fluir.

A su vez lo que se plantea como objetivo; se puede concluir que se logro demostrar que es posible realizar un frenado en el desarrollo de la velocidad a través de microcanales por medio de las propiedades del medio poroso.

## Parte I

# Apéndice I Ecuación de momentum

## Ecuación de momentum introduciendo la velocidad de corriente libre

Partiendo de la Ec. (4) introduciendo la velocidad de corriente libre para un gradiente de presión constante.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\mu_{nf}U_{\infty}}{K} - \frac{\rho_{nf}F\phi U_{\infty}^2}{K^{\frac{1}{2}}}$$

En combinación con la Ec.(3)

$$0 = -\nabla P + \frac{\mu_{nf}}{\phi} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\mu_{nf}}{K} u - \frac{\rho_{nf}\phi F}{K^{\frac{1}{2}}} u^2$$

Sustituyendo el gradiente de presión de la Ec. (4) en la Ec.(3) para obtener la Ec. (5).

$$\begin{aligned} 0 &= -\left(-\frac{\mu_{nf}U_{\infty}}{K} - \frac{\rho_{nf}F\phi U_{\infty}^2}{K^{\frac{1}{2}}}\right) + \frac{\mu_{nf}}{\phi} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\mu_{nf}}{K} u - \frac{\rho_{nf}\phi F}{K^{\frac{1}{2}}} u^2 \\ 0 &= \frac{\mu_{nf}U_{\infty}}{K} + \frac{\rho_{nf}F\phi U_{\infty}^2}{K^{\frac{1}{2}}} + \frac{\mu_{nf}}{\phi} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\mu_{nf}}{K} u - \frac{\rho_{nf}\phi F}{K^{\frac{1}{2}}} u^2 \end{aligned}$$

La Ec. (5) queda de la siguiente manera.

$$\frac{\mu_{nf}}{\phi} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = \frac{\mu_{nf}}{K} (u - U_{\infty}) + \frac{\rho_{nf}F\phi}{K^{\frac{1}{2}}} (u^2 - U_{\infty}^2)$$

## Ecuación adimensional de momentum

Partiendo de la descomposición de la derivada parcial Ec.(9);  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U_{\infty}}{H^2} \frac{d^2 u^*}{dY^2}$  y la velocidad adimensional de la Ec.(7), se utiliza el valor de  $u$  como  $u = U_{\infty} u^*$ . Para descomponer la Ec.(5).



$$\frac{\mu_{nf}}{\phi} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = \frac{\mu_{nf}}{K} (u - U_\infty) + \frac{\rho_{nf} F \phi}{K^{\frac{1}{2}}} (u^2 - U_\infty^2)$$

$$\frac{\mu_{nf}}{\phi} \left( \frac{U_\infty}{\frac{H^2}{2}} \frac{d^2 u^*}{dY^2} \right) = \frac{\mu_{nf}}{K} (U_\infty u^* - U_\infty) + \frac{\rho_{nf} F \phi}{K^{\frac{1}{2}}} \left[ (U_\infty u^*)^2 - U_\infty^2 \right]$$

Una vez agregado las ecuaciones planteadas anteriormente se llegó a la Ec. (9).

$$\frac{U_\infty \mu_{nf}}{\phi \frac{H^2}{2}} \frac{d^2 u^*}{dY^2} = \frac{\mu_{nf} U_\infty}{K} (u^* - 1) + \frac{\rho_{nf} F \phi U_\infty^2}{K^{\frac{1}{2}}} (u^{*2} - 1)$$

## Coeficiente de fricción adimensional al problema de estudio $Cf^*$

Partiendo del  $Cf$  y  $T_w$  la discretización de la derivada parcial del esfuerzo cortante Ec. (11) queda de la siguiente manera.

$$Cf = \frac{2\tau_w}{\rho_{nf} U_\infty^2}; \quad \tau_w = \mu_{nf} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \Big|_{Y=\frac{H}{2}}$$

$$\tau_w^* = \frac{\mu_{nf} U_\infty}{\frac{H}{2}} \frac{du^*}{dY} \Big|_{Y=1}$$

$$Cf^* = \frac{2 \left( \frac{\mu_{nf} U_\infty}{\frac{H}{2}} \frac{du^*}{dY} \Big|_{Y=1} \right)}{\rho_{nf} U_\infty^2}$$

$$Cf^* = 2 \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf} U_\infty^2 \left( \frac{H}{2} \right)} \frac{du^*}{dY} \Big|_{Y=1}$$

Sabiendo que el número de Reynolds es  $Re = \frac{\rho_{nf} U_\infty \frac{H}{2}}{\mu_{nf}}$ . La Ec. (12) queda de la siguiente manera:

$$Cf^* = \frac{2}{Re} \frac{du^*}{dY} \Big|_{Y=1}$$

## Reducción de la ecuación de momentum

Partiendo de la Ec. (9) aplicando los parámetros adimensionales de  $Da$  y  $\Lambda_F$ .

$$Da = \frac{K}{\phi \frac{H}{2}}$$

$$\Lambda_F = \frac{\phi^{\frac{3}{2}} F U_\infty}{\nu_F}$$

$$\frac{U_\infty \mu_{nf}}{\phi \frac{H}{2}} \frac{d^2 u^*}{dY^2} = \frac{\mu_{nf} U_\infty}{K} (u^* - 1) + \frac{\rho_{nf} F \phi U_\infty^2}{K^{\frac{1}{2}}} (u^{*2} - 1)$$

Se multiplica por ambos lados de la Ec. (9) el valor de  $\left(\frac{K}{\mu_{nf} U_\infty}\right)$

$$\left(\frac{K}{\mu_{nf} U_\infty}\right) \frac{U_\infty \mu_{nf}}{\phi \frac{H}{2}} \frac{d^2 u^*}{dY^2} = \left(\frac{K}{\mu_{nf} U_\infty}\right) \frac{\mu_{nf} U_\infty}{K} (u^* - 1) + \left(\frac{K}{\mu_{nf} U_\infty}\right) \frac{\rho_{nf} F \phi U_\infty^2}{K^{\frac{1}{2}}} (u^{*2} - 1)$$

$$Da \frac{d^2 u^*}{dY^2} = (u^* - 1) + \frac{K^{\frac{1}{2}} \rho_{nf} F \phi U_\infty}{\mu_{nf}} (u^{*2} - 1)$$

$$\nu_{nf} = \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}}$$

$$\frac{K^{\frac{1}{2}} \rho_{nf} F \phi U_\infty}{\mu_{nf}} = \frac{F \phi}{\nu_{nf}} \left(\frac{U_\infty}{K^{\frac{1}{2}}}\right) \left(\frac{\sqrt{\phi}}{\sqrt{\phi}}\right) \left(\frac{H}{2}\right) =$$

$$\frac{F \phi^{\frac{3}{2}} U_\infty}{\nu_{nf}} \left(\frac{H}{2}\right) \frac{K^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\phi}} = \Lambda_F Da$$

Por medio de las manipulaciones algebraicas anteriores se obtienen la agregación de los parámetros adimensionales para la Ec. (13).

$$Da \frac{d^2 u^*}{dY^2} = (u^* - 1) + \Lambda_F Da (u^{*2} - 1)$$

$$\frac{d^2 u^*}{dY^2} = Da^{-1} (u^* - 1) + \Lambda_F Da^{-\frac{1}{2}} (u^{*2} - 1)$$

## Parte II

# Apéndice II Apéndice de Figuras

Como se menciona en las secciones anteriores muchos comportamientos en las gráficas fueron similares debido a que las propiedades físicas de los nanofluidos no tenían variaciones en la velocidad; las gráficas se muestran en esta sección.

En la Fig. 31 y Fig. 32, se muestra el comportamiento semejante entre las gráficas obtenidas en la Fig.12 y Fig. 14, mostrando que el efecto de la variación de la  $\varphi$  no afecta en el perfil de velocidades en el modelo de viscosidad dinámica de Brinkman.

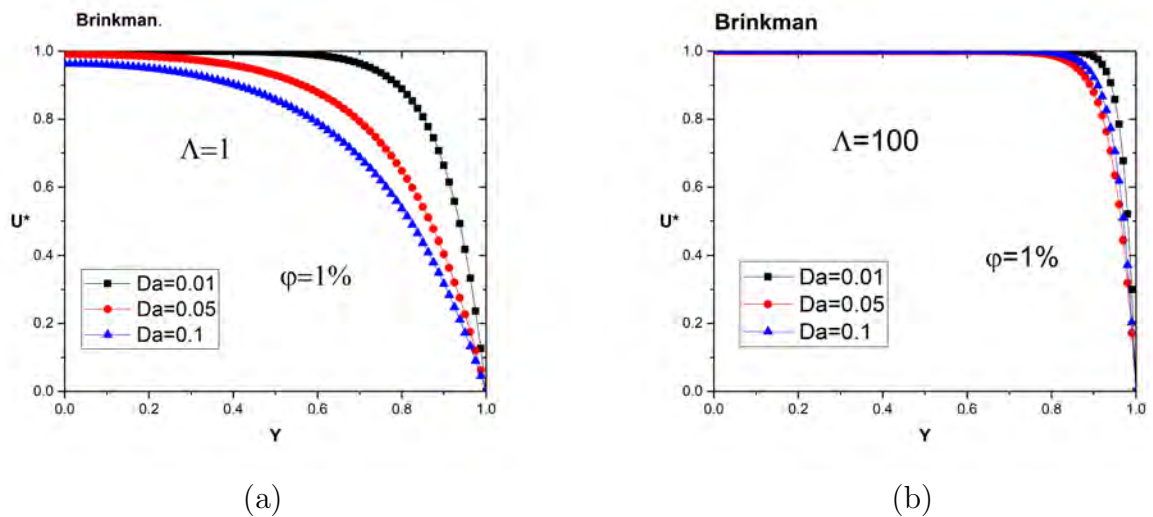


Figura 31: Variación de diferentes parámetros de Darcy para el modelo de viscosidad de Brinkman, observando el comportamiento de  $\varphi = 1\%$

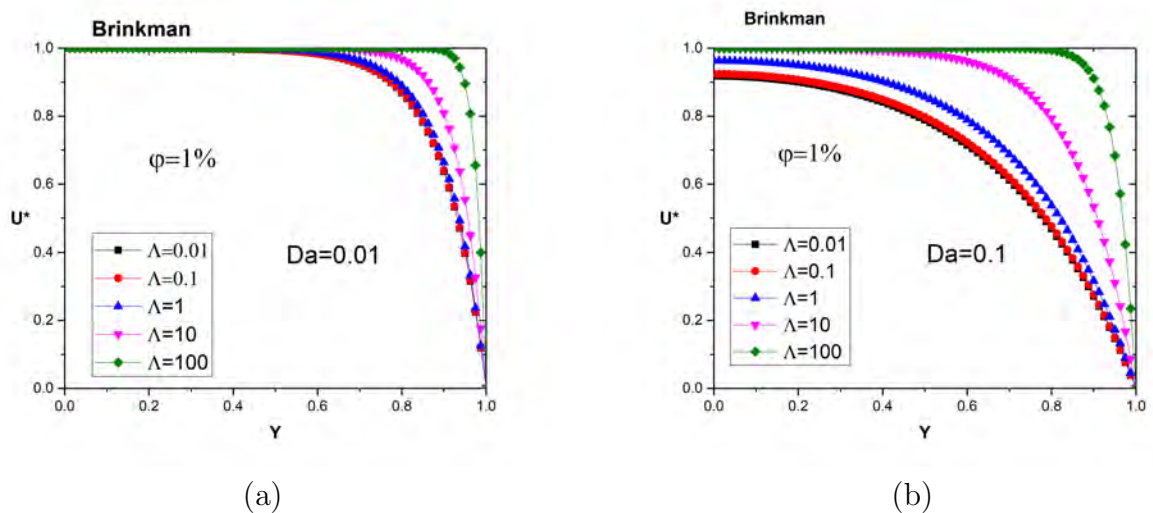


Figura 32: Variación de diferentes parámetros inerciales para el modelo de viscosidad de Brinkman, fijando valores de  $Da$  y  $\varphi = 1\%$ .

En la Fig. 33-36 el modelo de Jang et al. muestra la misma tendencia en la variación del  $\Lambda_F$ ,  $\varphi$  y  $d_p$ . Por lo que se concluye que el parámetro con mayor influencia es el parámetro de  $Da$ .

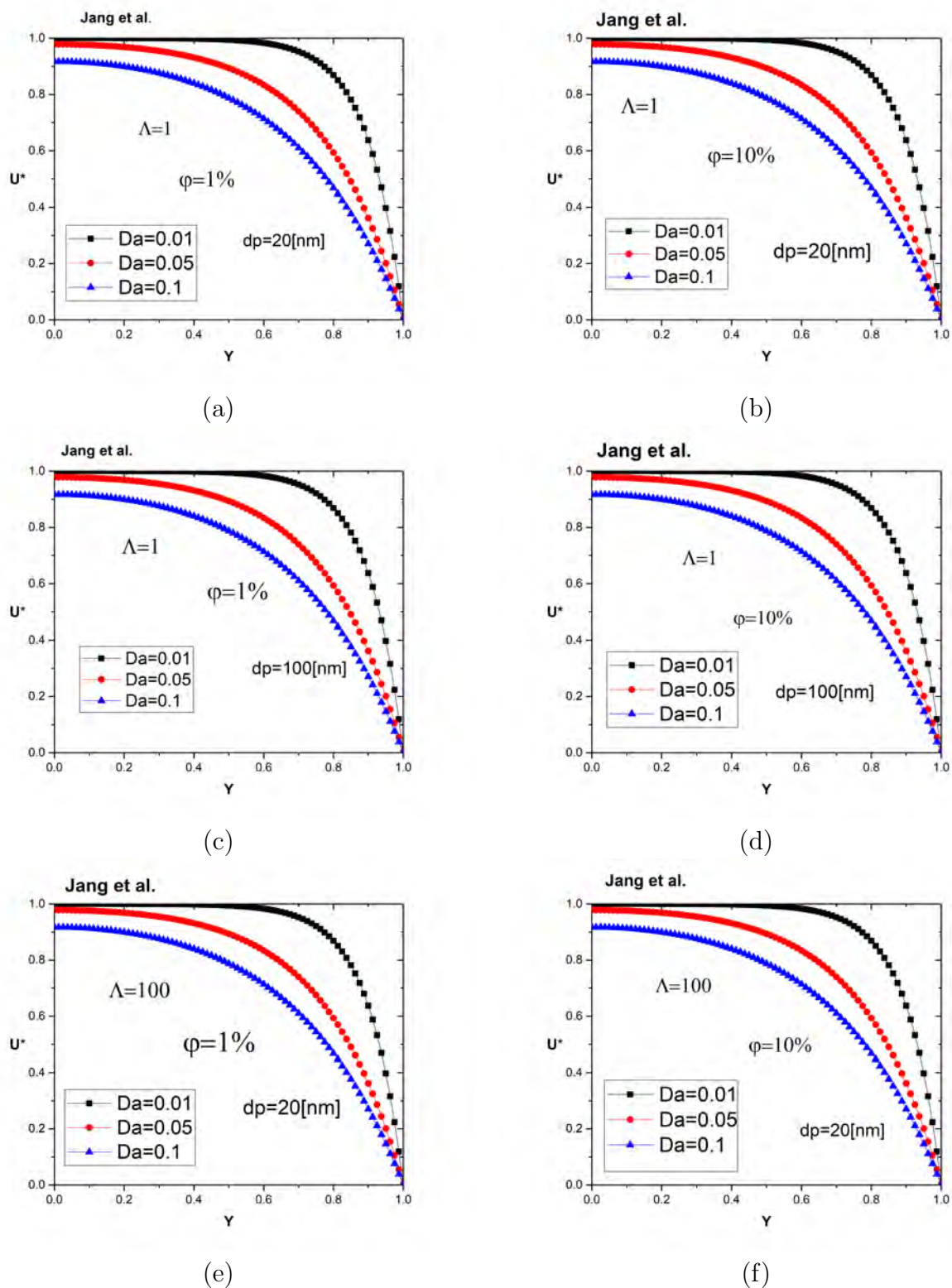
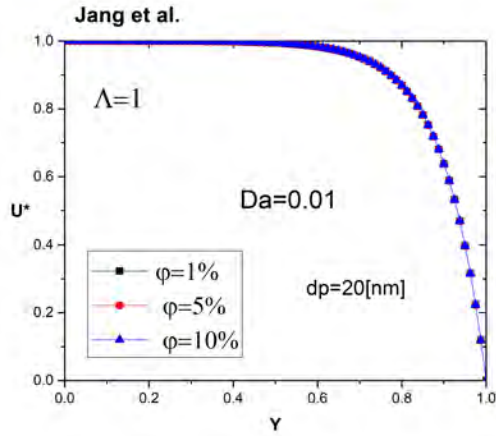
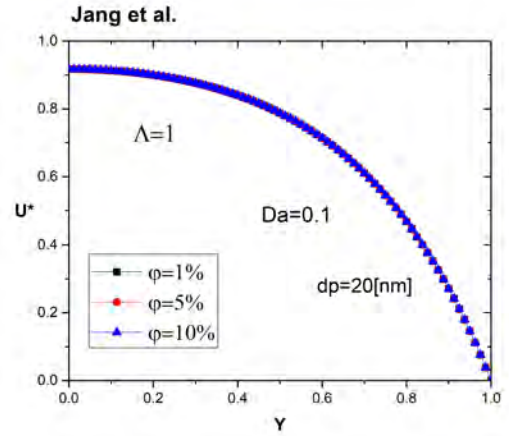


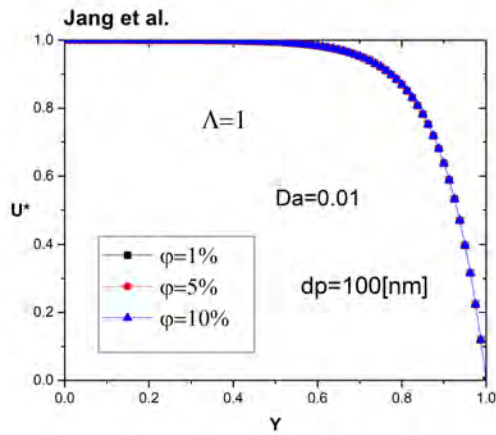
Figura 33: Variación de diferentes parámetros de Darcy para el modelo de Jang et al. Observando los efectos del ( $d_p$ ,  $\Lambda_F$ ,  $\varphi$ ).



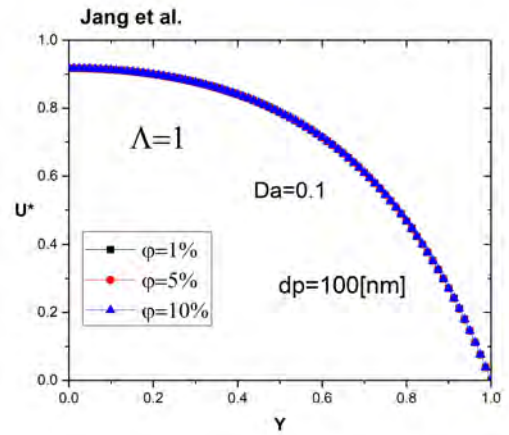
(a)



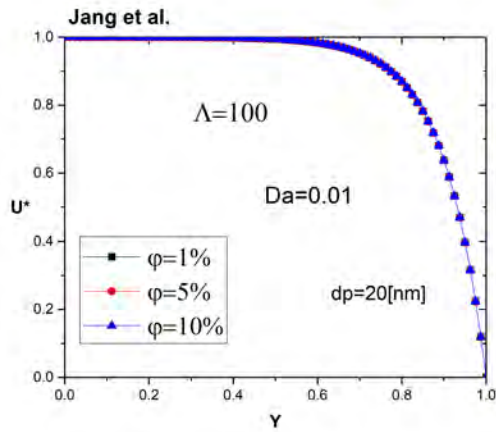
(b)



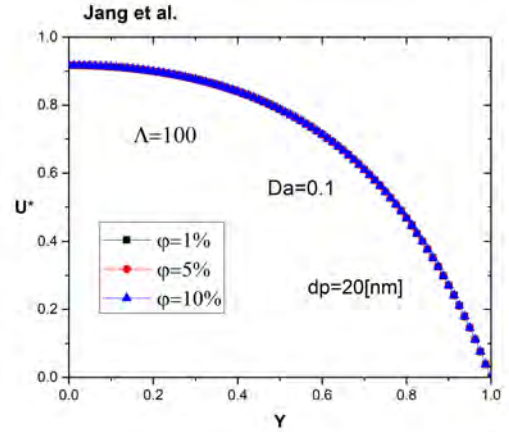
(c)



(d)

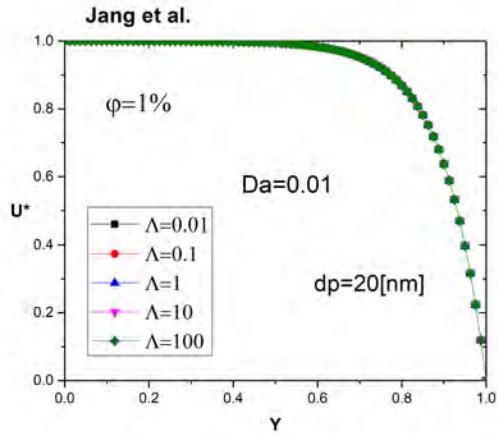


(e)

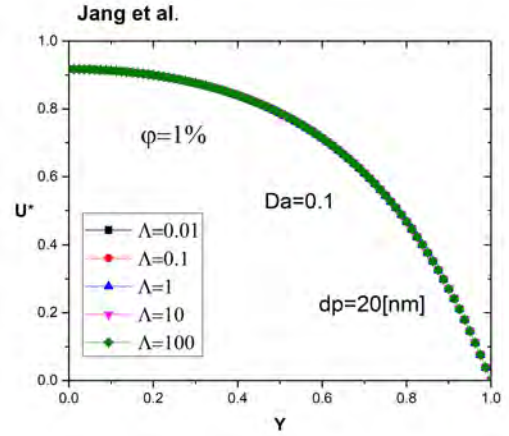


(f)

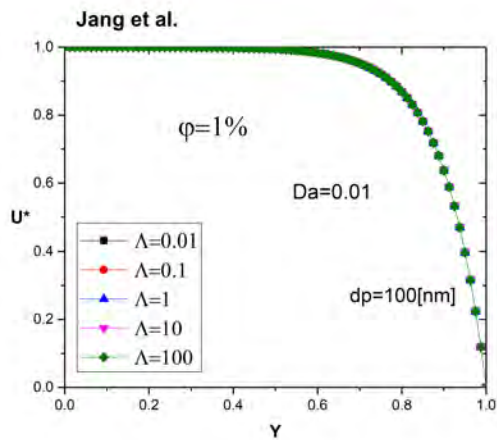
Figura 34: Variación de diferentes concentraciones de volumen de nanopartículas ( $\phi$ ) comparando el comportamiento de los diferentes parámetros  $Da$  (0.01 a 0.1),  $d_p$  (20 nm a 100 nm) y  $\Lambda_F$  (1 a 100) en el modelo de Jang et al.



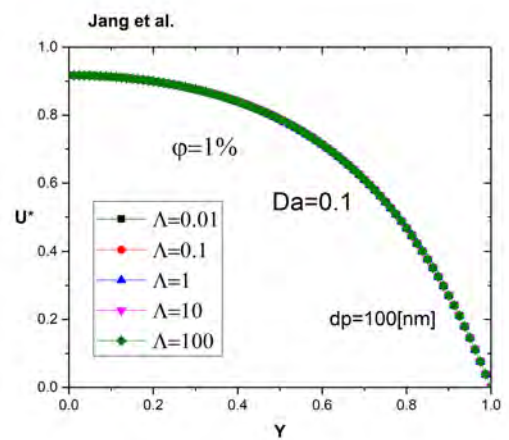
(a)



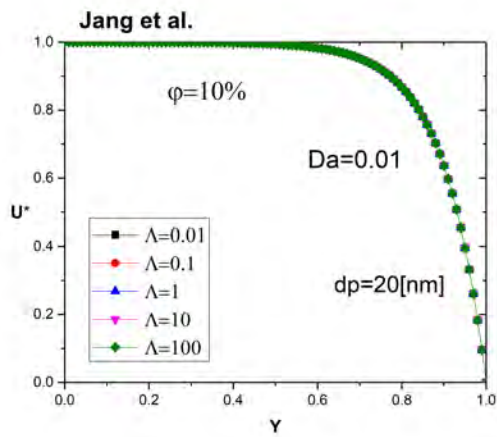
(b)



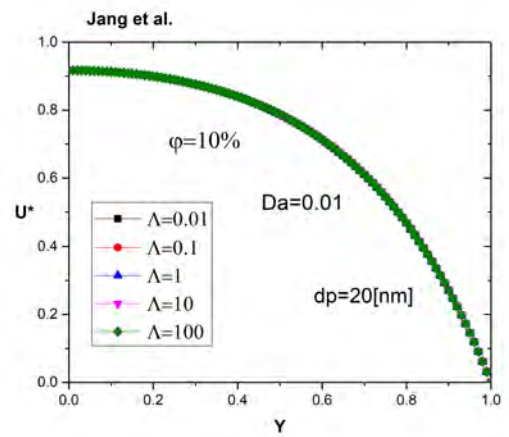
(c)



(d)

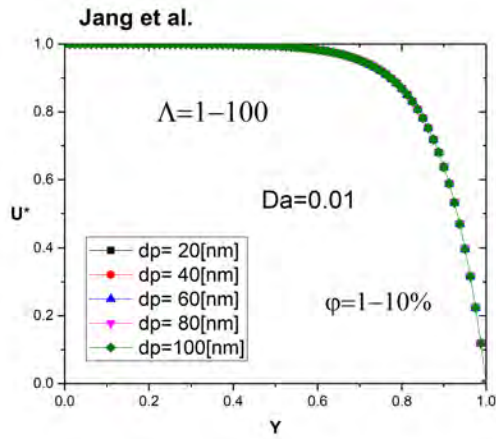


(e)

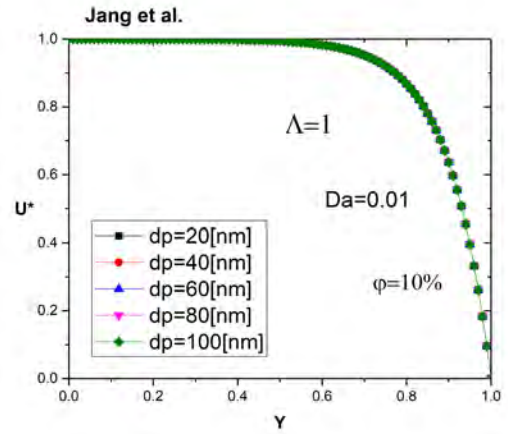


(f)

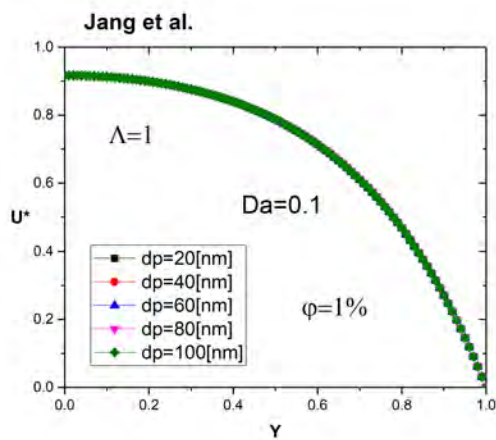
Figura 35: Variación de diferentes parámetros inerciales comparando el comportamiento de los diferentes parámetros  $Da$  (0.01 a 0.1),  $d_p$  (20 nm a 100 nm), (1% a 10%)  $\phi$  para el modelo de Jang et al.



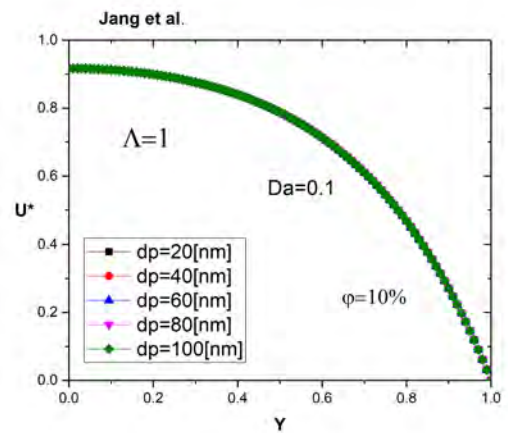
(a)



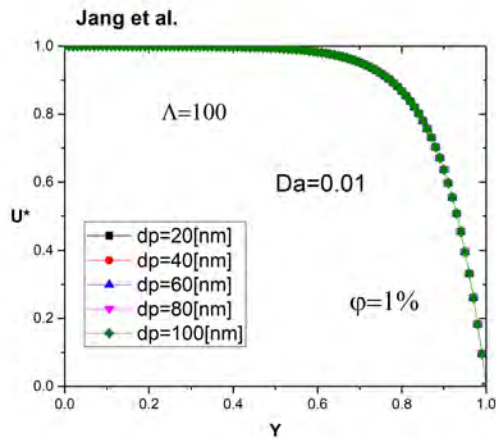
(b)



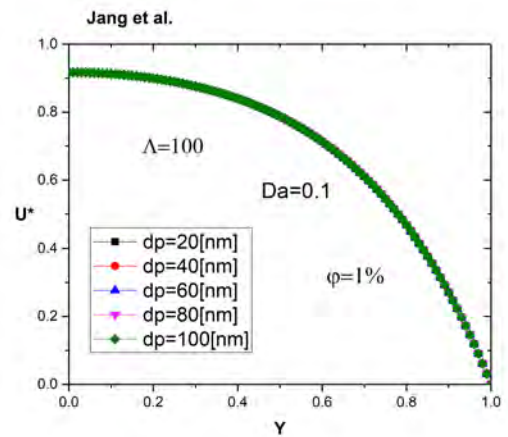
(c)



(d)



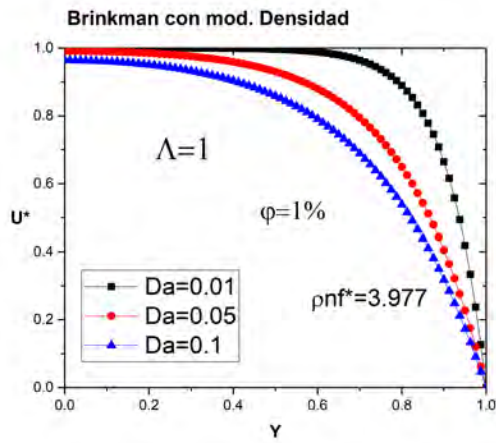
(e)



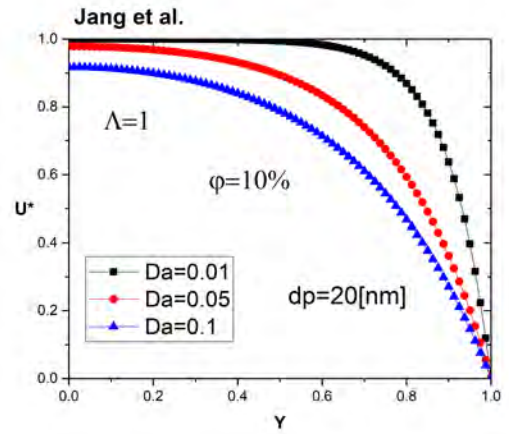
(f)

Figura 36: Variación de diferentes diámetros de nanopartícula para el modelo de Jang et al.

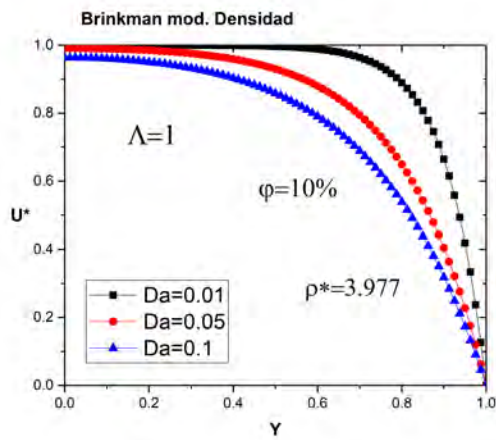
En la Fig. 37-40 el modelo de Brinkman con densidad variable, muestra que los valores de la  $\rho^*$  y  $\varphi$  son independientes en el desarrollo de los diferentes perfiles de velocidad, obteniendo valores semejantes al modelo de Brinkman con densidad constante.



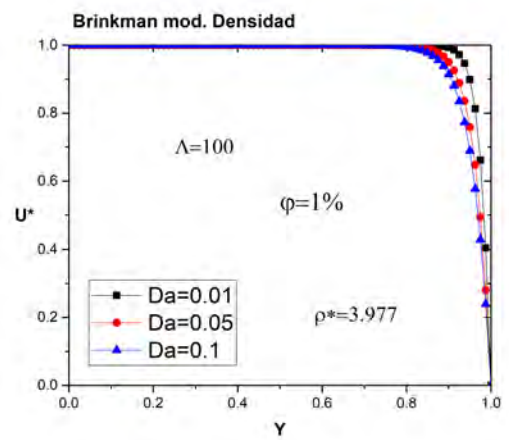
(a)



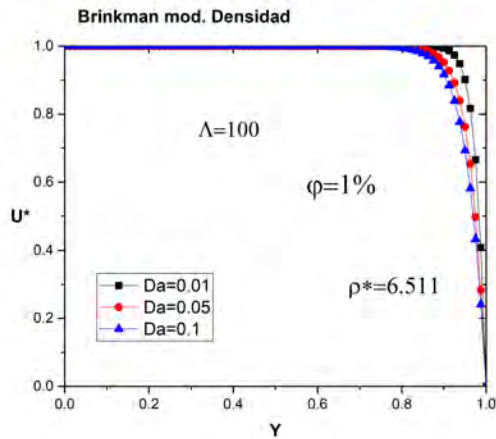
(b)



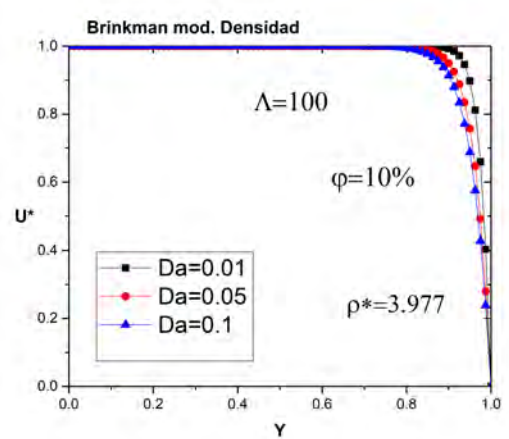
(c)



(d)



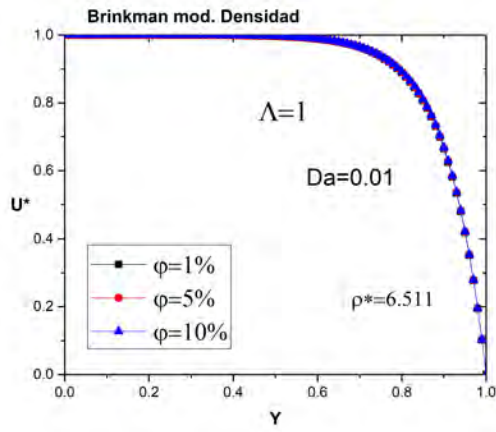
(e)



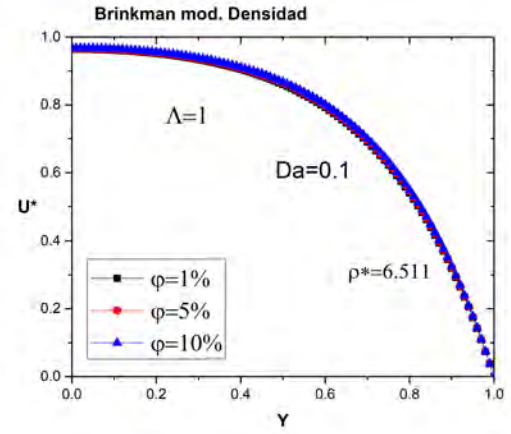
(f)

Figura 37: Variación de diferentes parámetros de Darcy para el modelo de Brinkman con densidad variable, evaluando diferentes valores de  $\rho^*$  (3.977 y 6.511),  $\rho$  (1% y 10%) y  $\Lambda_F$  (1 y 100)

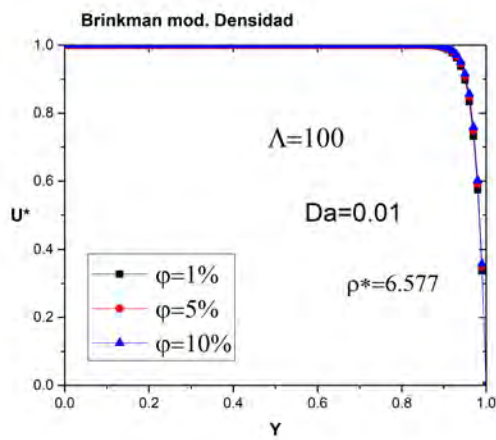




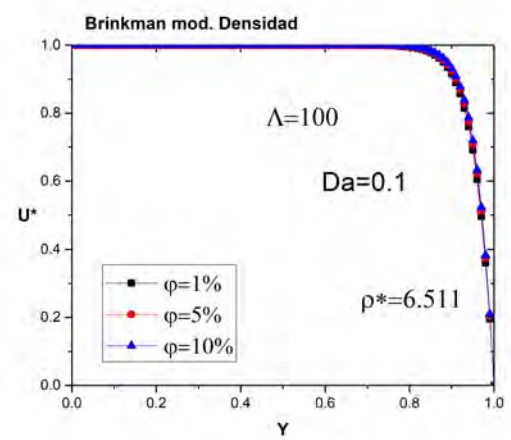
(a)



(b)

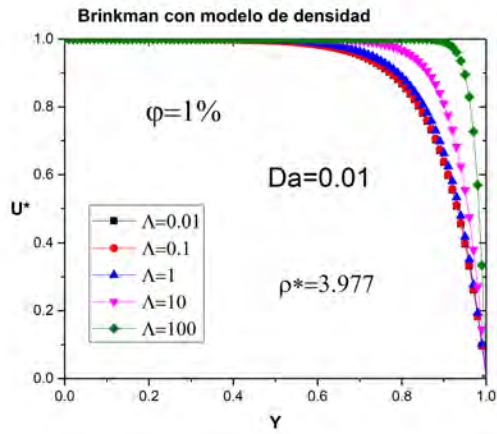


(c)

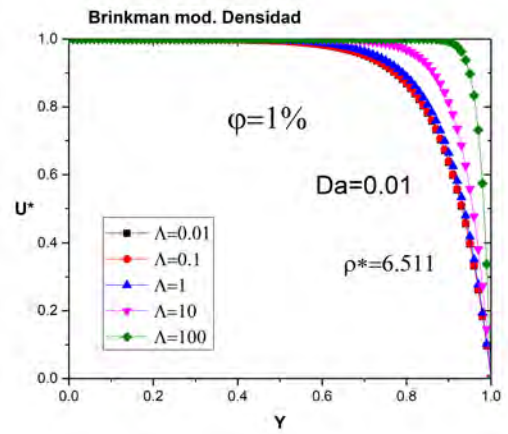


(d)

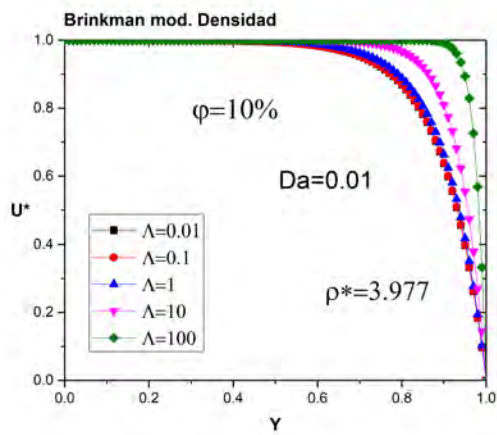
Figura 38: Variación de diferentes concentraciones de volumen de nanopartículas para el modelo de Brinkman con densidad variable ( $\rho^* = 6.511$ ).



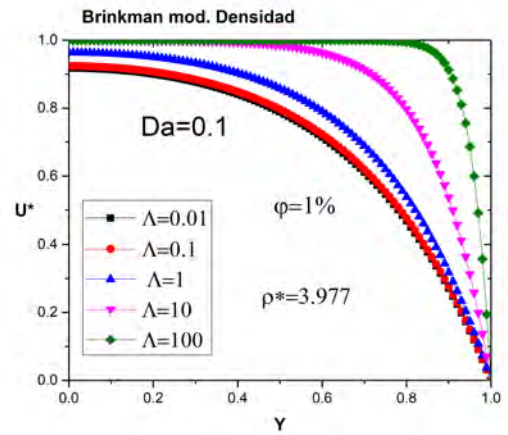
(a)



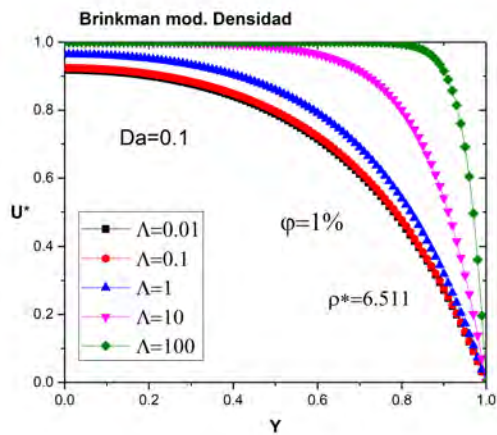
(b)



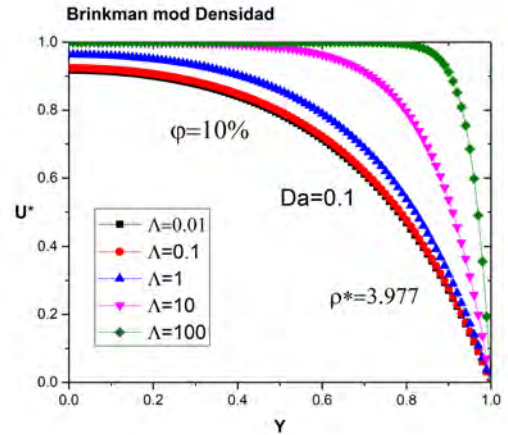
(c)



(d)

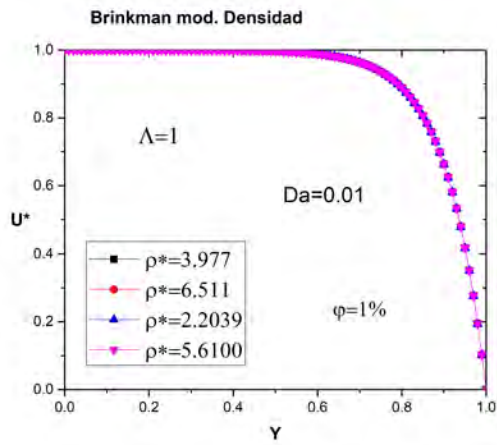


(e)

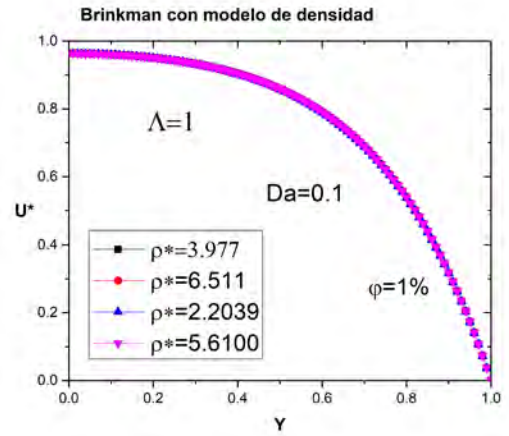


(f)

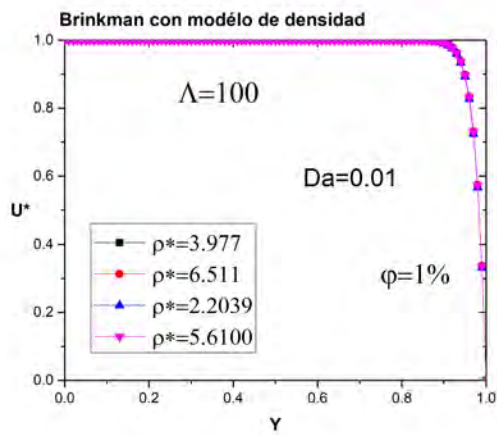
Figura 39: Variación de diferentes concentraciones de volumen de nanopartículas para el modelo de Brinkman con densidad variable ( $\rho^* = 3.977$  y  $\rho^* = 6.511$ ).



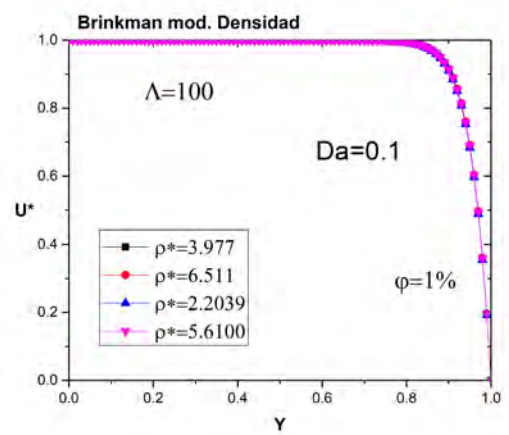
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 40: Variación de diferentes correlaciones de densidades para el modelo de Brinkman con densidad variable

## Referencias

- [1] A. Alawi, Omer & Che Sidik, Nor Azwadi & Hong, Wei Xian & Hao Kean, Tung & Kazi, S.N.. (2017). Thermal conductivity and viscosity models of metallic oxides nanofluids. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 116. 1314–1325. 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.09.133.
- [2] Nield, Donald & Bejan, A. (2006). *Convection in Porus Media*. (3ra ed.). New York: Springer Science Business Media, Inc
- [3] Gaikwad, Harshad & Mondal, Pranab & Wongwises, Somchai. (2017). Non-linear drag induced entropy generation analysis in a microporous channel: The effect of conjugate heat transfer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 108. 2217-2228. 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.01.041.
- [4] Murshed, S M Sohel & Estellé, Patrice. (2017). A state of the art review on viscosity of nanofluids. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. 76. 1134-1152. 10.1016/j.rser.2017.03.113. .. (1989). Forced Convection in a Channel Filled With a Porous Medium: An Exact Solution. *Journal of Heat Transfer (Transactions of the ASME (American Society of Mechanical Engineers), Series C); (United States)*. 111:4. 10.1115/1.3250779.
- [5] Yazdi, MohammadEftekhari & Aghamajidi, Mohammad & Dinarvand, Saeed & Pop, Ioan. (2018). Tiwari-Das nanofluid model for magnetohydrodynamics (MHD) natural-convective flow of a nanofluid adjacent to a spinning down-pointing vertical cone. *Propulsion and Power Research*. 7. 10.1016/j.jprr.2018.02.002.
- [6] Ting, Tiew Wei & Hung, Yew & Guo, Ningqun. (2015). Entropy generation of viscous dissipative nanofluid flow in thermal non-equilibrium porous media embedded in microchannels. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 81. 862-877. 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.11.006.
- [7] Ruiz Díaz, José Antonio, Análisis numérico de los efectos termoviscosos de un flujo electroosmótico en un microcanal. Tesis de lic. Facultad de Ingeniería-UNAM, 2019
- [8] Hecht F. New development in Freefem++. En: *Jorunal of Numerical Mathematics*(2012).
- [9] Vafai, Kambiz & Kim, S.J.. (1989). Forced Convection in a Channel Filled With a Porous Medium: An Exact Solution. *Journal of Heat Transfer (Transactions of the ASME (American Society of Mechanical Engineers), Series C); (United States)*. 111:4. 10.1115/1.3250779.

- [10] Cengel, Yunus A. y Cimbala, John M.(2007), Mecánica de Fluidos, Fundamentos y Aplicaciones. (1ra ed.), México, Mc Graw Hill.
- [11] Nguyen, C. & Desgranges, F. & Galanis, Nicolas & Roy, Gilles & Mare, Thierry & Boucher, S. & Mintsa, H.. (2008). Viscosity data for Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-water nanofluid-hysteresis: is heat transfer enhancement using nanofluids reliable?. International Journal of Thermal Sciences - INT J THERM SCI. 47. 103-111. 10.1016/j.ijthermalsci.2007.01.033.
- [12] Jang, Seok & Lee, Ji-Hwan & Hwang, Kyo & Choi, Stephen. (2008). Particle concentration and tube size dependence of viscosities of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-water nanofluids flowing through micro- and minitubes. Applied Physics Letters. 91. 243112 - 243112. 10.1063/1.2824393.
- [13] Said, Zafar & Saidur, Rahman. (2017). Thermophysical Properties of Metal Oxides Nanofluids. 10.5772/65610.
- [14] F. Yu et al., “Dispersion stability of thermal nanofluids”, Prog. Nat. Sci. Mater. Int., vol. 27, no 5, pp. 531–542, 2017.
- [15] Campos Leyton, Carlos Andrés, EFECTO DE DISTINTOS NANOFLUIDOS EN LA ABSORCIÓN DE RADIACIÓN SOLAR. Tesis de lic. Facultad de ciencias físicas y matematicas-Universidad de Chile, 2018
- [16] D. B Tuckerman. Heat transfer micro-structures for integrated circuits, Lawrence Livermore National Laboratory, USA, page 5315, 1984
- [17] Naranjo Lazaro, Carlos, Aplicación de elementos finitos a problemas de termofluidos. Tesis de mtría. Facultad de Ingeniería Mécanica y Electrica. Universidad Autonoma e Nuevo Leon, 1999
- [18] Vélez Agudelo, Catalina, Conductividades térmicas de sistemas con cambio de fase: nanofluidos y nanocompuestos. Tesis de Dr. Facultad de Ciencias Físicas. Universidad Complutense de Madrid, 2018.