



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

ESTUDIO DE LA POLARIZACIÓN EN EL PROCESO DE DISPERSIÓN DE
RADIACIÓN POR UNA PARTÍCULA CARGADA

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
EDGAR ANDRÉS SÁNCHEZ GARCÍA

TUTOR
FERNANDO MATÍAS MORENO YNTRIAGO
IFUNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
CARLOS VILLAREAL LUJÁN
IFUNAM

JOSÉ IGNACIO JIMÉNEZ MIER Y TERÁN
ICN

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., ENERO DE 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

A mi familia por creer ciegamente en mi capacidad. Al Posgrado en Ciencias Físicas por hacerme dudar de la misma. A Gabriela y Raúl por acompañarme en este proceso.

ESTUDIO DE LA POLARIZACIÓN EN EL PROCESO DE DISPERSIÓN DE RADIACIÓN POR UNA PARTÍCULA CARGADA

Edgar Andrés Sánchez García ¹

¹ Departamento de Física Teórica, IFUNAM.

edgarandres@fisica.unam.mx

En esta tesis se estudia el problema de la polarización en la dispersión de radiación por una partícula cargada desde la aproximación clásica no relativista y así también con el formalismo de la mecánica cuántica relativista. Para el primer caso, llamado dispersión de Thomson, se muestran diversos efectos de polarización, entre ellos se hace evidente que no es posible polarizar radiación cuando se encuentra despolarizada antes de la dispersión. Como resultado intermedio, se muestra un formalismo para el cálculo de amplitudes de transición para procesos que involucran partículas de Dirac, el cual llamamos *El método proyectivo*. En el segundo caso, que recibe el nombre de dispersión de Compton, se hace un análisis detallado de las propiedades de polarización del proceso, en particular se muestra que es posible producir polarización circular en los fotones cuando se emplean electrones polarizados, incluso cuando los fotones se encuentran totalmente despolarizados al inicio. Además, se muestra que es posible polarizar electrones despolarizados utilizando fotones circularmente polarizados y, contrario a lo que se encuentra actualmente en la literatura, el grado de polarización obtenible es comparable al que las fuentes modernas de producción de electrones polarizados pueden alcanzar, para energías del electrón dentro del rango actual de los sincrotrones.

Índice general

1. El espín: un resumen de su historia, uso e importancia en la física de altas energías.	11
1.1. Reseña histórica del espín.	11
1.2. Uso de partículas polarizadas en procesos de la física de altas energías.	15
1.3. Uso de electrones y positrones polarizados.	16
1.4. Mecanismos para obtener haces de electrones polarizados.	18
1.4.1. Fotoionización de átomos polarizados.	18
1.4.2. Fotoionización de átomos no polarizados por luz circularmente polarizada.	18
1.4.3. Difracción de electrones de baja energía.	19
1.4.4. Fotoemisión de GaAs.	19
1.4.5. Fenómeno de autopolarización; el efecto Sokolov-Ternov.	20
1.4.6. La polarización en el efecto Compton.	21
1.5. Polarimetría de electrones.	21
1.5.1. Dispersión de Mott	22
1.5.2. Dispersión de Möller	22
1.5.3. Dispersión de Compton	23
1.6. El efecto Compton y la polarización de las partículas.	24
2. La polarización de las partículas en la dispersión de radiación por partículas cargadas: la dispersión de Thomson y el efecto Compton.	27
2.1. La dispersión de Thomson.	28
2.1.1. Aproximación de baja energía.	28

2.2.	Dispersión de partículas de Dirac por fotones.	40
2.2.1.	Límite de baja energía.	44
3.	Técnicas espinoriales para el cálculo de amplitudes de transición para procesos que involucran partículas de Dirac.	47
3.1.	La completez de los espinores de Dirac.	48
3.2.	El método proyectivo para el cálculo de amplitudes: un esquema general.	51
3.2.1.	La base en reposo.	52
3.3.	El método proyectivo general.	57
3.4.	Abordar la técnica de espinores de Weyl mediante el método proyectivo.	58
3.5.	Abordar la técnica de espinores de helicidad mediante el método proyectivo.	62
3.6.	Cálculo de la amplitud para la dispersión de Compton.	65
3.6.1.	El método de espinores de helicidad.	65
3.6.2.	El método de espinores no masivos.	67
3.6.3.	El método proyectivo: La base en reposo.	68
3.6.4.	El método proyectivo: usando la propiedad invariante de Lorentz de la amplitud.	68
4.	Efectos de polarización en la dispersión de Compton con electrones no polarizados	71
4.1.	Valores analíticos de la sección: caso no polarizado y de polarización circular para los fotones.	71
4.2.	La polarización de los fotones.	75
4.3.	La sección de dispersión para el efecto Compton en algunos sistemas de referencia.	85
5.	Efectos de polarización en la dispersión de Compton con electrones polarizados	89
5.1.	Los términos de polarización en la sección.	90
5.2.	Asimetrías de polarización.	93

5.2.1.	Producción de polarización circular en los fotones dispersados.	94
5.2.2.	Determinación del grado de polarización circular en los fotones incidentes.	95
5.2.3.	Determinación de la polarización de los electrones incidentes. .	97
5.2.4.	Producción de polarización en los electrones dispersados. . . .	97
6.	Conclusiones	103
6.1.	Para la dispersión de Thomson.	103
6.2.	Para la dispersión de Compton.	103
6.3.	Para el método proyectivo para el cálculo de amplitudes de transición para procesos que involucran partículas de Dirac.	105
A.	Términos de la sección diferencial de dispersión dependientes de la polarización de los electrones	107

Capítulo 1

El espín: un resumen de su historia, uso e importancia en la física de altas energías.

En este capítulo se expone, de manera desglosada, el contexto y la justificación de la investigación realizada. El contexto del problema se presenta a manera de una breve recopilación histórica del espín, prestando particular atención al del electrón, seguida de una exposición resumida de algunos de los fenómenos de la física de altas energías que involucran polarización. Se hace énfasis en procesos en los que intervienen electrones y radiación, en especial en aquellos donde la polarización es relevante. A continuación, se enumeran algunos de los métodos para producir electrones polarizados así como para determinar su estado de polarización. Finalmente, se exponen los objetivos de la investigación.

1.1. Reseña histórica del espín.

Es natural pensar que la descripción del espín se haya dado por vez primera en relación con el electrón, puesto que de este último se conocieron más cosas antes que de alguna otra partícula. Además, el primer problema que infirió la existencia del electrón ya estaba cerca de los fenómenos de espín pues, históricamente, Zeeman y

Lorentz (1896) estimaron antes que nadie su razón carga masa [1], y si bien creyeron hallar esta relación para *iones*, resultados similares fueron reportados meses después por J. J. Thomson (1897) [1], esta vez sabiendo que las partículas en su estudio no eran los iones que se producían en la electrólisis. Así, hay que reconocer que el estudio del efecto Zeeman hizo uso de por lo menos dos conceptos (además del espín del electrón) fundamentales en la física moderna, el electrón en si mismo y la estructura electrónica en los átomos.

Sin embargo, la observación detallada de los espectros de los metales alcalinos, y la aparente “duplicidad” que presentaban, seguía metiendo en aprietos a los físicos teóricos de principios del siglo XX [2]. Basados en los postulados de Bohr-Sommerfeld, el razonamiento para describirla era bastante confuso. Fueron los estudios de los espectros de los metales alcalinos y alcalinoterreos llevados a cabo por Landé y Pauli [3], los que sugirieron que la duplicidad de los niveles se debía a una propiedad intrínseca del electrón más externo y no a alguna que fuera del resto del átomo, como se aceptaba hasta 1923 [3]. Para entonces, ya existían argumentos que apoyaban la hipótesis del momento magnético electrón de manera directa, aunque no captaron la atención de muchos. Estos fueron los propuestos por Compton [4] hace casi 100 años (1921): el efecto Richardson-Barnett que muestra un cociente carga-masa cercano al del electrón cuando en un sistema molecular se considera la magnetización por rotación [5], la difracción de rayos X por cristales magnéticos que sugiere el origen de la magnetización elemental de la materia en el electrón, y las trayectorias helicoidales que los electrones siguen en la cámara de Wilson.

Por otro lado, la idea del electrón que rota sobre su eje, portando un momento angular de $\hbar/2$, dando así lugar a un momento magnético, fue propuesta por Kronig a Pauli en 1925, y a pesar que esta hipótesis permitía explicar casi satisfactoriamente las mediciones experimentales de los espectros, Pauli la desdeñó y Kronig no la publicó [3]. Sin embargo, de manera independiente, y casi por error, Uhlenbeck y Goudsmit publicaron la idea del electrón rotante en 1925 [6, 7]. Pauli se siguió oponiendo a ella, hasta que Thomas incorporó efectos relativistas y pudo explicar de manera satisfactoria la estructura fina del hidrógeno en 1926 [8].

Siendo un gran avance en el entendimiento de los espectros, y por lo tanto de la misma estructura electrónica en los átomos, es interesante notar que a pesar que la mecánica matricial de Heisenberg se publicara en 1925 [9] y que la mecánica ondulatoria de Schrodinger saliera a la luz en 1926 [10–13], no estaba aún incluido el espín (ni la relatividad) en el formalismo cuántico. Fue poco tiempo después, en 1926, que se publicaron los modelos de Jordan, Heisenberg, Pauli y Darwin para describir este nuevo grado de libertad del electrón [14], siendo estas las primeras intenciones formales para incorporar el espín a la teoría cuántica.

A pesar de que estos intentos fueron serios, la descripción cuántica del espín seguía siendo insatisfactoria. El mismo Schrodinger, al perseguir el objetivo de obtener el espectro del hidrógeno y antes de publicar su ecuación, se había topado ya con una ecuación relativista, la cual, al no predecirlo correctamente, desechó. Este fue un ejemplo claro de lo poco que se sabía del espín del electrón y su naturaleza relativista en esas fechas [15]. No fue sino hasta 1928 que la ecuación capaz de predecir de manera natural la razón giromagnética del electrón $g = 2$, además de describir correctamente la estructura fina del átomo de hidrógeno, incluyendo la corrección de Thomas, fue propuesta por Dirac [16, 17].

En estos años, las bases de la Electrodinámica Cuántica (QED) estaban prácticamente completas. Existían cuantiosas contribuciones. Por ejemplo, en 1925, Born, Heisenberg y Jordan introdujeron el tratamiento de los grados de libertad de la radiación en una cavidad por medio de operadores y reglas de conmutación entre ellos [18]. Dirac, en 1927, había cuantizado el campo electromagnético [19], Jordan y Wigner habían usado en 1928 la segunda cuantización para abordar el principio de exclusión de Pauli [20], y de manera formal, junto con Von Neumann, mostraron la relación entre la segunda cuantización y las propiedades estadísticas de sistemas cuánticos [21]. Esto sugiere que desde entonces, las personas comenzaron a tener claridad en la relación íntima entre el espín y las teorías de campo.

En el área experimental, Stern y Gerlach habían observado ya, sin saber, la cuantización del espín del electrón en 1922 con su célebre experimento [22, 23]. Pauli, para explicar la estructura hiperfina, en 1924 ya había anticipado que el núcleo atómico

debía tener espín, o no ser esférico y, en 1927 Hund había desarrollado ya la teoría que predecía el espín del núcleo del hidrógeno [3]. De esta manera y en el mismo año, el análisis de Dennison del calor específico del hidrógeno a bajas temperaturas permitió deducir que el protón poseía espín $1/2$ [24]. También en 1927, Goudsmit y Back propusieron la idea del espín nuclear para resolver el problema de la estructura hiperfina del bismuto [25]. En 1930, Fermi obtuvo los momentos magnéticos de los núcleos de sodio y cesio, a partir de sus estructuras hiperfinas, empleando la ecuación de Dirac [14,26]. Tiempo después, en 1933, Stern y Estermann hallaron la razón giromagnética del protón $g = 2,5$ por medio de la deflexión de un haz molecular de hidrógeno [27–29]. Por resonancia magnética de haces de moléculas, en 1939, Rabi y sus colaboradores midieron con alta precisión los momentos magnéticos del protón y el deuterón [29,30]. Chadwick descubrió en 1932 el neutrón [31] y en 1940, también usando métodos de resonancia magnética, Álvarez y Bloch midieron directamente su momento magnético por primera vez [32].

En 1947, las mediciones de la estructura hiperfina del estado base del hidrógeno realizadas por Nafe, Nelson y Rabi [33,34] dieron lugar a que Breit sugiriera una desviación a la razón giromagnética propuesta por la ecuación de Dirac ($g=2$) [14,35]. Desde la década de los cuarenta, las correcciones a la razón giromagnética del electrón han forjado en cierta medida el desarrollo de las teorías de campo cuánticas y de partículas [36,37]. Uno puede apreciar esto cuando se escribe la anomalía de la razón giromagnética, $a = \frac{1}{2}(g - 2)$, en términos de las contribuciones de cada región del Modelo Estándar [14]

$$a = a^{\text{QED}} + a^{\text{QCD}} + a^{\text{electrodébil}}. \quad (1.1)$$

Numerosos experimentos se han llevado a cabo desde entonces para determinar el valor preciso de a [38–44]. Además, de manera conjunta, se hicieron importantes contribuciones teóricas relacionadas, por ejemplo la teoría de renormalización [45–49] y la violación de paridad [50–52]. Así mismo, estos estudios han incentivado la búsqueda de nuevos fenómenos físicos, como el momento dipolar eléctrico del electrón [53–55].

A partir de los años cincuentas, se llevaron a cabo una multitud de experimentos usando el espín de las partículas como elemento fundamental de análisis. Debido a que los fenómenos dependientes del espín existen en contextos muy variados, los campos de la ciencia que son susceptibles a los estudios de espín son muy diversos [56]. Sin embargo, a continuación trataremos de resumir algunas de las contribuciones más relevantes en el área de la Física de Altas Energías.

1.2. Uso de partículas polarizadas en procesos de la física de altas energías.

En 1951 se produjo por primera vez, después de varios esfuerzos, protones polarizados por el grupo de Heusinkveld [57–61]; a continuación se estudiaron diversos mecanismos para la producción de haces polarizados de protones, por ejemplo los reportados por los grupos encabezados por Bishop y Oxley [62, 63]. Así también, en la década de los 50, se llevaron a cabo numerosos estudios para producir haces de nucleones polarizados de alta energía [64–68]. En 1956 se predijo y en 1957 se observó la violación de paridad en Cobalto 60 [69, 70]. En 1958 se observó, haciendo uso de técnicas de polarización, que el neutrino tiene helicidad negativa [71]. La ecuación de Bargmann, Michel y Telegdi fue propuesta en 1959 [72], lo que permitiría estudiar fenómenos relacionados con la precesión del momento magnético (y eléctrico) de partículas con espín arbitrario en presencia de campo magnético [73–78].

Durante la década de los 60 se realizaron diversos experimentos para analizar las propiedades de polarización de los positrones productos del decaimiento del muón [79–81], se estudió y determinó experimentalmente con gran detalle la parte anómala del momento magnético del muón [82–87], así como la razón giromagnética del electrón [41, 42, 88–90]. También se analizaron propiedades de polarización del núcleo y sus efectos sobre la estructura fina del hidrógeno [91–95]. Además, se comenzaron a analizar las propiedades de polarización en la dispersión inelástica profunda [96].

En los años 70 del siglo XX, se dieron numerosas contribuciones a estos estudios

[97–105], ayudando a asociar el espín de los constituyentes del protón con el de los quarks [29]. Usando electrones polarizados, se probaron los modelos de partones del protón en 1976 [106–108] y se llevaron a cabo mediciones que muestran la violación de paridad en la dispersión por deuterio en 1978 [109]. Por otro lado, en 1973 se aceleró el primer haz estable de protones polarizados de alta energía en Argonne [110]. Múltiples experimentos de espín en colisiones de protones fueron llevados a cabo en esta época en Argonne, CERN y Fermilab [111–119]. A finales de esta década existieron múltiples esfuerzos en torno al desarrollo de la física de aceleradores con partículas polarizadas [120–125].

Durante la década de los años 80 se utilizaron haces de muones de alta energía, con alto grado de polarización, en una serie de experimentos en CERN, para estudiar de manera detallada la estructura de los nucleones [126–130]. Estos datos mostraban, entre otras cosas, que las contribuciones de espín de parte de los quarks al protón eran menores a lo esperado (violación de una regla de suma), dando lugar a la crisis del espín del protón [131, 132]. Alrededor de estas fechas, también se estudió la violación de paridad en interacciones hadrónicas utilizando observables de espín [133–135]. Para analizar fenómenos dependientes de espín en colisiones nucleón-antinucleón o antiprotón-nucleón, se desarrollaron las primeras técnicas para producir haces de antiprotones polarizados en esta década [136] y en las siguientes [137–142].

1.3. Uso de electrones y positrones polarizados.

Los electrones y positrones polarizados, por su parte, están incluidos en una amplia gama de propuestas, experimentos y proyectos que estudian fenómenos de espín. Por ejemplo, la violación de paridad en la dispersión de electrones medida en SLAC [109, 143], dio validez al modelo de Weinberg-Salam. Así también, algunas técnicas, como la dispersión inelástica profunda, mejoraron la precisión en las mediciones relacionadas con la estructura interna de los nucleones, gracias al incremento que se logró en el grado de polarización de las electrones [144–146]. En general, los observables de espín son fundamentales para analizar las estructuras de los nucleones, en particular son

cruciales para estudiar la interacción entre quarks y gluones [147]. Por otro lado, las mediciones del ángulo de mezcla débil han sido realizadas con gran precisión utilizando haces de electrones polarizados [148, 149]. Las colisiones de electrones y positrones polarizados también son empleadas en la búsqueda de física más allá del Modelo Estándar [150–152].

Sin embargo, debido al amplio rango de los fenómenos de espín electrónico, los experimentos que utilizan electrones polarizados son tan numerosos que comprenden otras áreas de la física. Por ejemplo, en el campo del estado sólido, el análisis de la dispersión de electrones polarizados por superficies, da información sobre la estructura de bandas de materiales magnéticos [153–155]. Estos trabajos en particular hacen uso de la difracción de electrones polarizados de baja energía (SPLEED, por sus siglas en inglés), la cual es una herramienta útil para estudiar superficies sólidas [156]. La espectroscopía inversa de fotoelectrones dependiente del espín es otra técnica que emplea electrones polarizados [157], permitiendo el análisis de la estructura de bandas en superficies sólidas [158].

Dada la gran variedad de campos donde el espín del electrón se utiliza como herramienta experimental, las fuentes que producen electrones, y positrones, polarizados son igualmente diversas, esto con el objetivo de satisfacer los requerimientos de cada configuración experimental. Por ejemplo, la emitancia, la corriente, la modulación de la magnitud de la polarización y la capacidad de modificar la estructura temporal del haz son características deseables en una fuente de electrones polarizados. Enseguida describimos brevemente algunas de ellas, sin embargo, la física y tecnología de los electrones polarizados es tratada con detalle en diversas partes de la bibliografía, por ejemplo en [56, 147, 159, 160].

1.4. Mecanismos para obtener haces de electrones polarizados.

1.4.1. Fotoionización de átomos polarizados.

En estas fuentes, los espines de los electrones de valencia de átomos alcalinos se polarizan por medio de un campo magnético externo. Después, la muestra se ioniza usando luz ultravioleta no polarizada, sin afectar la polarización de los electrones. Estos se aceleran en la dirección deseada y, finalmente, el haz pasa por una región con campo magnético constante, el cual define la dirección de cuantización de espín. Efectos estocásticos en los átomos, un ancho espectral demasiado amplio en la fuente de luz UV y el acoplamiento entre el espín nuclear y electrónico hacen que la polarización máxima posible ronde el 85 %. Una fuente así emite, por lo común, 2×10^9 electrones por pulso, los cuales tienen una duración de 1.6 microsegundos, con una frecuencia de repetición de 180 Hz. SLAC tuvo una fuente con estas características, cuya vida útil superó las 3000 horas en diversos experimentos [56, 161].

1.4.2. Fotoionización de átomos no polarizados por luz circularmente polarizada.

En estas fuentes se utilizan haces de átomos alcalinos no polarizados. Sobre ellos se hace incidir radiación polarizada circularmente. Gracias a reglas de selección dependientes de la helicidad de la luz, se favorecen las transiciones en las cuales el electrón emitido tiene una proyección definida de espín. Esta técnica presenta varios defectos, entre ellos está el bajo número de electrones emitidos, puesto que este efecto se encuentra cerca de un mínimo en la sección de dispersión; para obtener una cantidad de electrones por pulso del orden de la fuente anterior se suelen utilizar varios jets de átomos. Con esta fuente se logran grados de polarización que van del 65 % para rubidio, en pulsos con duración de nanosegundos y una frecuencia de repetición de 50 Hz, a un 90 % para cesio, con una frecuencia de repetición del orden de 1/minutos. La manera continua de operación da lugar a un gran ancho espectral, reflejándose

principalmente en el ímpetu, cuya dispersión supera en un orden de magnitud la de otras fuentes similares [56, 162].

1.4.3. Difracción de electrones de baja energía.

En estas fuentes se hacen incidir electrones sobre una placa de un material con núcleos pesados, por ejemplo oro. Durante la dispersión se presenta un acoplamiento entre el momento angular orbital y el espín del electrón, de tal forma que se dispersan de maneras diferentes los electrones con espines paralelos y antiparalelos al momento angular orbital. Un mecanismo similar es el que se encuentra detrás de la técnica SPLEED, lo cual permite usar datos que proporciona esta para obtener información sobre la dispersión polarizante. Fuentes que funcionan bajo este principio suelen tener un grado de polarización alrededor de 50 %, con corrientes del orden de micro amperes [56, 163].

1.4.4. Fotoemisión de GaAs.

Un método común para producir electrones polarizados se basa en la fotoemisión en películas, con estructuras semiconductoras, sujetas a tensión [164]. El proceso se basa en la fotoemisión de electrones en la banda de valencia a la banda de conducción. Dado que la radiación incidente tiene polarización circular, las reglas de selección permiten relacionar la helicidad de la misma con la dirección del espín del electrón emitido. Para lograr una afinidad electrónica negativa, y así los electrones puedan escapar al difundirse en la banda de conducción, las superficies de estos materiales están tratadas con diversos compuestos, por ejemplo cesio y oxígeno molecular [165]. Han pasado más de 40 años desde que se propusiera la fotoemisión en estos materiales como técnica para obtener electrones polarizados [166–168] y ahora, gracias a la alta corriente, alta polarización y facilidad para manipular la proyección de espín sin modificar los demás parámetros del haz, se emplea ampliamente en diversos laboratorios del mundo [147, 160, 165, 169, 170].

1.4.5. Fenómeno de autopolarización; el efecto Sokolov-Ternov.

Este mecanismo de polarización (transversal) aparece de manera espontánea en los electrones, o positrones, que circulan en un anillo de acumulación [171]. En esencia, hay una parte de la radiación emitida por las partículas que corresponde a transiciones entre estados con diferentes proyecciones de espín. La idea simplificada que se encuentra detrás es la de las transiciones dipolares magnéticas, en presencia de un campo constante, para ir al estado de menor energía; el espín de los electrones se orientan preferentemente de manera antiparalela al campo, mientras que los positrones alinean paralelamente su espín. La dinámica de estas transiciones da lugar a una polarización máxima posible en un anillo de acumulación, para una configuración ideal de imanes, de aproximadamente 92 % y un tiempo característico de polarización que depende de la energía de las partículas y el radio del anillo. En la Tabla 1.1 se listan algunos tiempos de polarización para diferentes sincrotrones. Detalles sobre este efecto se pueden encontrar en diversas fuentes bibliográficas, por ejemplo en [172, 173].

Tabla 1.1: [174].

Sincrotrón	Energía (GeV)	Tiempo de polarización (min.)
SPEAR	4	10
HERA	27,5	25
LEP	46,5	300
SLC (anillo de atenuamiento)	1,21GeV	15

Sin embargo, debido a fenómenos de depolarización, en la práctica sólo se han obtenido polarizaciones alrededor de 80 % [175]. Además, múltiples esfuerzos se han realizado para cambiar la dirección de polarización, dando lugar a diversos retos tecnológicos. Por ejemplo, ya que estos esquemas utilizan campos magnéticos extra, se introducen nuevos efectos de depolarización por emisión de radiación sincrotrón [176]. Por otro lado, la polarización por efecto Sokolov-Ternov y el efecto depolarizante por resonancias de espín han dado lugar a una de las técnicas más precisas para determinar la energía del haz [177, 178].

1.4.6. La polarización en el efecto Compton.

La polarización por efecto Compton ha sido planteada en diversos trabajos teóricos, algunos aprovechando la dependencia angular de la dispersión (selección de ímpetu) para diferentes estados de polarización del electrón [179–181], y otros hablando de la polarización de equilibrio de un haz de electrones en el campo de radiación [182–184]. Sin embargo, no ha sido reportado un intento exitoso de polarización por medio del efecto Compton, en parte debido a las complicaciones técnicas que este conlleva, entre ellas la baja intensidad asociada al orden de magnitud de la sección de dispersión del efecto Compton.

Sin embargo, se han presentado contradicciones alrededor del tema de la polarización de equilibrio entre los trabajos de Kotkin y sus colaboradores [182–184] y Potylitsyn [185, 186]. El primer grupo ha concluido que el grado máximo de polarización obtenible es de 0% para un haz de electrones en presencia de un campo de radiación de fotones circularmente polarizados, mientras que el segundo autor muestra que es posible obtener un porcentaje de polarización diferente de cero. Los trabajos que contemplan la dependencia angular del proceso no presentan el cálculo de la sección total de dispersión para el proceso, de tal forma que sólo muestran relaciones entre las polarizaciones de las partículas dependientes de la dirección de emisión, lo cual implica una reducción adicional en la intensidad del haz polarizado obtenible.

1.5. Polarimetría de electrones.

Además de ofrecer la posibilidad de obtener haces polarizados, los procesos de dispersión de electrones que presentan una dependencia pronunciada con la polarización de las partículas, permiten contemplar alternativas para la de detección y medición del estado de polarización electrónico. Dependiendo de las características de la dispersión, uno puede emplear técnicas con diferentes niveles de precisión, destrucción del haz o dificultad tecnológica. A continuación describimos las características de algunas de las técnicas de polarimetría más populares. Al igual que con las técnicas de producción de haces de electrones polarizados, existen numerosas fuentes bibliográficas

al respecto, por ejemplo [187–189].

1.5.1. Dispersión de Mott

Consiste en la dispersión de electrones de energía moderada por parte de un núcleo en reposo con carga conocida. El campo eléctrico producido por el núcleo da lugar a un campo magnético en el marco de referencia en reposo del electrón, cuando uno escribe la relación entre el campo magnético que se mide en el marco de referencia en reposo del electrón y el ímpetu del mismo, es posible identificar un acoplamiento del tipo espín-órbita en la interacción. Es así como la dispersión se vuelve dependiente del espín del electrón.

Estos polarímetros presentan al menos dos inconvenientes. El primero se refleja en la reducida región energética en la cual puede ser empleado de manera eficiente, ya que la sección de dispersión de Mott decrece cuando la energía del electrón aumenta, además de que el uso de electrones altamente energéticos aumenta los efectos de la estructura nuclear en la dispersión [190]. Típicamente se utiliza en haces con energías superiores a 0,05 MeV y por debajo de 10 MeV [187]. El segundo problema está relacionado con la proyección de espín que es posible analizar con esta dispersión. Desafortunadamente sólo es sensible a la componente transversal de la polarización respecto de la dirección del haz y, para analizar direcciones generales de polarización, se requiere extrapolar los resultados obtenidos. Por estos motivos, la dispersión de Mott se suele emplear para estudiar el estado de polarización de las partículas tan pronto salen de la fuente que las produce [191].

1.5.2. Dispersión de Möller

Este mecanismo utiliza las asimetrías dependientes de la polarización que presenta la dispersión elástica de electrones por electrones. A diferencia de la de Mott, esta dispersión presenta dependencia con los componentes de la polarización tanto transversal como paralelo a la dirección de propagación del haz. Debido a la dependencia con la polarización de los electrones dispersores, diversos retos tecnológicos

surgen alrededor de los mecanismos de polarización de estos electrones y sus efectos en la dispersión, así como de la óptica de electrones necesaria para reducir los errores sistemáticos [187].

A pesar de presentar una mejor eficiencia en regiones energéticas más altas que las típicas de los polarímetros de Mott, complicados sistemas de espectroscopía magnética y colimación deben ser empleados para poder detectar los electrones en la región cinemática de interés [191].

1.5.3. Dispersión de Compton

En general, la dispersión de Compton muestra relaciones entre las polarizaciones iniciales y finales de las partículas. Las asimetrías presentes en este fenómeno pueden ser empleadas para medir el grado de polarización de haces de electrones utilizando haces de fotones circularmente polarizados. La dispersión es versátil en el sentido que es sensible tanto al componente transversal como longitudinal de la polarización de los electrones, sin embargo, dado que la técnica se basa en el análisis de la distribución angular de las partículas dispersadas, aparecen múltiples retos en el proceso de detección de las mismas [191].

La eficiencia de esta técnica depende fuertemente de la energía del haz y también de la energía de los fotones dispersados, así que mediciones precisas de las energías de las partículas se requieren para poder emplear esta técnica de manera satisfactoria. Se suelen utilizar haces de fotones con longitudes de onda cortas y de alta intensidad para incrementar la eficiencia [192]. En comparación con las técnicas anteriores, esta se caracteriza por no ser invasiva y permitir el análisis del haz con la mínima destrucción de su estructura [193].

1.6. El efecto Compton y la polarización de las partículas.

En la discusión previa recalcamos que el uso de haces de electrones y positrones polarizados ha sido sugerido, simulado y estudiado dentro de la búsqueda de nueva física, no sólo en el área experimental sino también en la teórica, como se muestra por ejemplo en las referencias [194–197]. Así mismo, hemos mencionado que en las pruebas de precisión del Modelo Estándar, la polarización de las partículas es un tema fundamental [198–202], puesto que constituye una fuente importante de datos. Estas son razones que motivan los análisis de polarización de procesos elementales, como lo es el proceso de Compton.

Por otro lado, también hemos comentado que la dispersión de Compton es una herramienta útil para analizar los estados de polarización de las partículas involucradas, por lo tanto, es de esperar que existan múltiples trabajos sobre él. Por ejemplo, la medición de la polarización de los fotones se propone y reporta en [203–208], la producción de radiación con polarización circular y otros efectos de polarización de fotones se revisan en [179, 180, 209–213], el estudio y medición de la asimetría de espín así como la determinación de algunas relaciones entre polarizaciones de fotones y electrones se obtienen en [182, 183, 214–218], correcciones reales y virtuales se pueden encontrar en [219–223], y algunos ejemplos de técnicas de polarimetría de Compton se muestran en [206, 224, 225].

Además, en los últimos años se ha revivido el interés en el efecto Compton por diversos motivos, por ejemplo la producción de luz por medio de la retrodispersión. En estos estudios, se utilizan modelos teóricos y simulaciones para describir la colisión de Compton de la manera más realista posible y así obtener valores precisos de las propiedades de la luz dispersada, como el espectro, dispersión y brillantez espectral. Así, estos análisis se vuelven fundamentales antes de construir una fuente de luz basada en la dispersión de Compton inversa, ICS por sus siglas en inglés, como se puede ver en las referencias [226–232]. En esta área, resultaría muy útil tener una descripción detallada de las relaciones entre polarizaciones de las partículas.

Mucha de la literatura revisada estudia la distribución angular de las partículas polarizadas, sin embargo, no se considera en ninguna fuente algún análisis general de los efectos de polarización presentes en la dispersión total de Compton. Tampoco se han analizado con detalle las propiedades que este proceso hereda de las leyes fundamentales de la QED.

En esta tesis, el objetivo es analizar a profundidad los fenómenos de polarización presentes en el efecto Compton. En particular nos centramos en las propiedades de polarización, de todas las partículas involucradas, de la dispersión total. En otras palabras, nuestro objetivo es estudiar las relaciones entre los estados dependientes de la polarización, iniciales y finales, de la radiación y de los electrones. Además, se estudia la posibilidad de polarizar electrones por medio de esta interacción, y de esta manera contribuir a la discusión que existe sobre esto.

De esta forma, una revisión propia, detallada, e inédita hasta donde sabemos, del problema de la polarización de la radiación en la dispersión de Thomson se analiza en el capítulo dos. También en este capítulo se plantea el problema de la dispersión de Compton dependiente de las polarizaciones de las partículas. El desarrollo del formalismo teórico, propio e inédito, para analizar la polarización de los electrones se expone en el capítulo tres. En los capítulos cuarto y quinto se analizan y discuten ampliamente las propiedades de polarización de esta dispersión, los cuales son también resultados originales. Finalmente, las conclusiones aparecen en el capítulo seis.

Capítulo 2

La polarización de las partículas en la dispersión de radiación por partículas cargadas: la dispersión de Thomson y el efecto Compton.

En este capítulo trataremos el problema de la dispersión de radiación electromagnética por partículas cargadas desde el marco clásico y cuántico relativista. En particular se analizan detalladamente, y de manera original, las propiedades de polarización de la dispersión de Thomson.

Se plantea el problema de la dispersión de fotones por partículas de Dirac y se obtiene la sección de dispersión de Klein-Nishina. Además se enuncian algunas restricciones a la validez de nuestros resultados.

A lo largo de los cálculos de la dispersión de Thomson se adoptó una representación real para los campos eléctrico y magnético, además se utiliza el sistema de unidades cgs. A partir de la sección 2.2 y hasta el final de la tesis, se emplearon unidades naturales con la convención de Heaviside-Lorentz.

2.1. La dispersión de Thomson.

2.1.1. Aproximación de baja energía.

De acuerdo a la electrodinámica clásica, la dispersión de radiación monocromática por una partícula con carga e y masa m se desarrolla en dos etapas. En la primera, la dinámica de la partícula, determinada únicamente por el efecto del campo eléctrico de la radiación

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_1 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \rho) + \mathbf{E}_2 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad (2.1)$$

con $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = 0$, ρ una fase, \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 amplitudes constantes, \mathbf{k} el vector de onda y ω la frecuencia, al despreciar el efecto del campo magnético \mathbf{B} sobre ella, viene dada por la ecuación de movimiento

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E}, \quad (2.2)$$

para $\|\mathbf{v}\| \ll c$. Cuando la dispersión se analiza en un marco de referencia en el cual, la dirección de propagación de la radiación incidente coincide con la dirección inicial de la partícula, una de las componentes de la solución de la ecuación (2.2) es una superposición de movimientos no acelerado y oscilatorio

$$\mathbf{x}_\perp = -\frac{e\mathbf{E}}{m\omega'^2} + \mathbf{c} + \mathbf{d}t. \quad (2.3)$$

$$\mathbf{x}_\parallel = \mathbf{a} + \mathbf{b}t, \quad (2.4)$$

donde el subíndice \parallel hace referencia a la componente del vector \mathbf{x} paralela a la dirección de propagación inicial de la radiación $\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{\|\mathbf{k}\|}$, mientras que la componente perpendicular se denota con el subíndice \perp . Las condiciones iniciales se introducen mediante los vectores constantes \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} y \mathbf{d} , y además $\omega' = \|\mathbf{k}\|\|\mathbf{b}\| - \omega$.

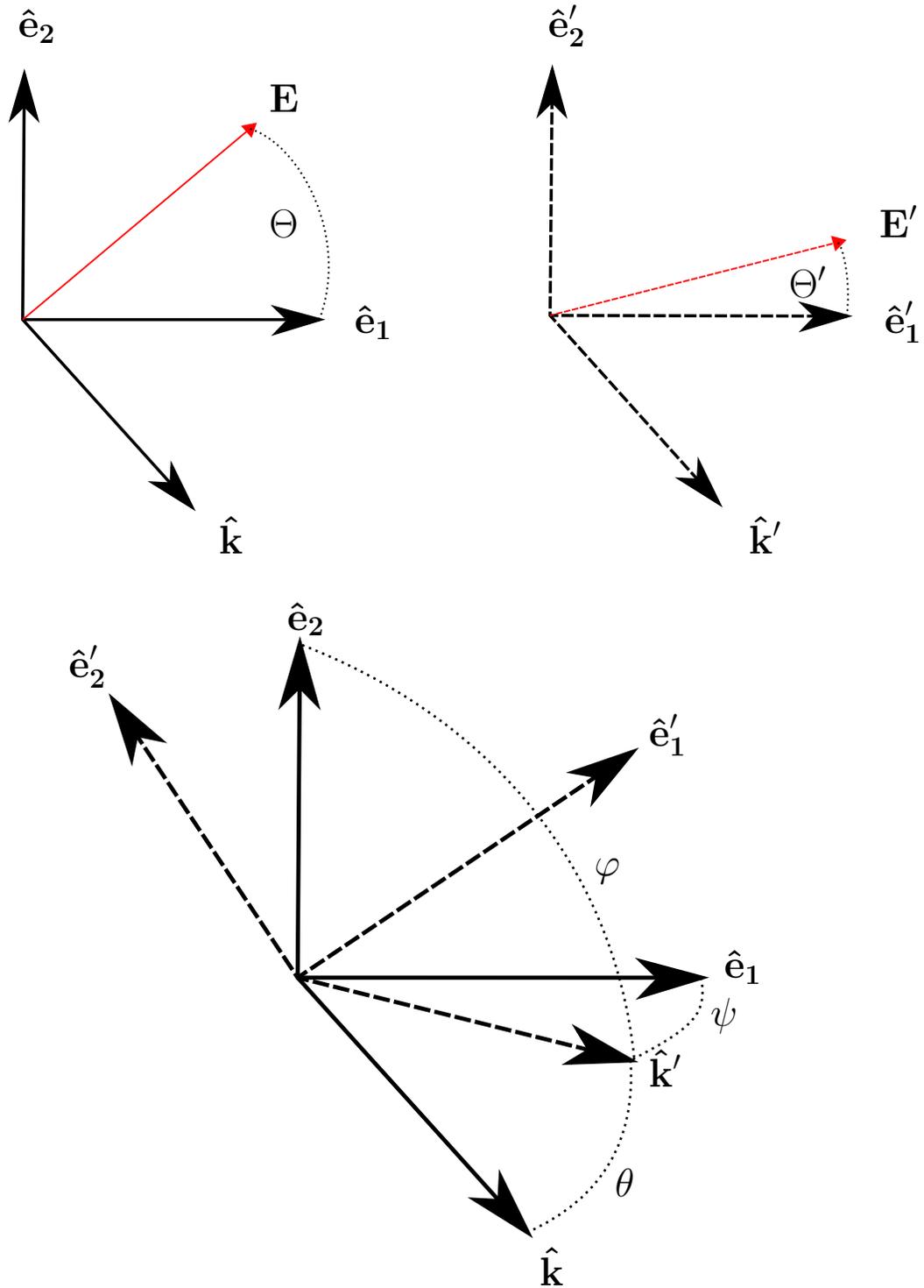


Figura 2-1: Esquemas que representan las direcciones de polarización y de propagación de los campos eléctricos incidente y de radiación. Arriba se muestra, para polarización lineal, los ángulos, Θ y Θ' , que hacen los campos eléctricos, incidente y radiado, respecto a los ejes \hat{e}_1 y \hat{e}'_1 , respectivamente. Abajo se muestra cómo el sistema coordenado final está orientado en general respecto al sistema inicial, en específico se muestran los ángulos que hace la dirección de radiación dispersada \hat{k}' con este sistema.

En la segunda etapa, debido a la aceleración $\ddot{\mathbf{x}}$ de la partícula, se obtiene la distribución angular de la energía media radiada por unidad de tiempo

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} = & \frac{c r_e^2}{4\pi} \overline{\|\mathbf{E}\|^2} \left(2 - (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{e}}_1)^2 \cos^2 \Theta - (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{e}}_2)^2 \sin^2 \Theta + \right. \\ & \left. + 2 \sin \rho \cos \Theta \sin \Theta \hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 \right), \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde $\hat{\mathbf{k}}' = \frac{\mathbf{k}'}{\|\mathbf{k}'\|}$ es un vector unitario en la dirección de la radiación dispersada, el promedio temporal $\overline{\|\mathbf{E}\|^2}$ y Θ , con $\cos \Theta = \frac{\|\mathbf{E}_1\|}{\sqrt{\|\mathbf{E}_1\|^2 + \|\mathbf{E}_2\|^2}}$ y $\sin \Theta = \frac{\|\mathbf{E}_2\|}{\sqrt{\|\mathbf{E}_1\|^2 + \|\mathbf{E}_2\|^2}}$ parametrizan la polarización de la radiación incidente, $r_e = \frac{e^2}{mc^2}$ es el radio clásico del electrón y $\hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{\mathbf{E}_1}{\|\mathbf{E}_1\|}$, $\hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{\mathbf{E}_2}{\|\mathbf{E}_2\|}$ es la base ortonormal de polarización para representar la polarización inicial de la radiación. En la Figura (2-1) se puede apreciar la relación de esta base con la base correspondiente a la radiación emitida.

Es interesante notar que, para obtener la expresión (2.5) uno no requiere la solución (2.3) y (2.4) de la ecuación de movimiento, ya que en la aproximación no relativista, la energía media emitida por unidad de tiempo por unidad de ángulo sólido depende tan sólo de la carga de la partícula y su aceleración, es decir, de la propia ecuación de movimiento (2.2). Dependencias angulares que provengan del estado inicial de la partícula, o de la velocidad de la misma, están ausentes aquí. A partir de esto uno puede concluir que cualquier efecto inercial no puede apreciarse en esta aproximación y, la ecuación de movimiento (2.2) es la única que dará la estructura angular a la energía media radiada por unidad de tiempo.

Por otro lado, la diferencia de fase entre las amplitudes y la frecuencia de oscilación del campo eléctrico, y magnético, de la radiación dispersada es la misma que la del campo \mathbf{E}

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' = & \frac{r_e}{R} \left((\hat{\mathbf{k}}' \cdot \mathbf{E}_1 \hat{\mathbf{k}}' - \mathbf{E}_1) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \rho) + \right. \\ & \left. + (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \mathbf{E}_2 \hat{\mathbf{k}}' - \mathbf{E}_2) \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \right), \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{B}' = \hat{\mathbf{k}}' \times \mathbf{E}', \quad (2.7)$$

siempre y cuando el desplazamiento de la partícula sea despreciable en comparación

con la distancia R a la cual se observa la radiación, dando como resultado el mismo espectro para la radiación emitida. Además, a partir la ecuación (2.6), es evidente que la polarización del campo eléctrico radiado coincide con la polarización incidente para direcciones de emisión perpendiculares al plano definido por $\hat{\mathbf{e}}_1$ y $\hat{\mathbf{e}}_2$ (dispersión paralela o antiparalela).

La radiación emitida en la dirección $\hat{\mathbf{e}}_1$, si la radiación incidente se encuentra polarizada elípticamente y $\mathbf{E}_2 \neq 0$, estará polarizada linealmente en la dirección $\hat{\mathbf{e}}_2$. De igual manera, para radiación incidente con polarización elíptica y $\mathbf{E}_1 \neq 0$, la radiación emitida en la dirección $\hat{\mathbf{e}}_2$ quedará polarizada linealmente en la dirección $\hat{\mathbf{e}}_1$. La radiación emitida en el plano perpendicular a $\hat{\mathbf{e}}_2$, omitiendo las direcciones paralela y antiparalela a $\hat{\mathbf{e}}_1$, quedará elípticamente polarizada en general y el cociente de las magnitudes de los ejes mayor y menor de la elipse de polarización es función del ángulo de emisión

$$\kappa = \sqrt{\frac{\frac{\text{sen } \Psi}{\tan \Theta} \left(\frac{\text{sen } \Psi}{\tan \Theta} \sqrt{1+r^2} + \sqrt{\left(\frac{\text{sen } \Psi}{\tan \Theta}\right)^2 (1+r^2) - r^2} \right) + \sqrt{1+r^2} - 1}{\frac{\text{sen } \Psi}{\tan \Theta} \left(\frac{\text{sen } \Psi}{\tan \Theta} \sqrt{1+r^2} - \sqrt{\left(\frac{\text{sen } \Psi}{\tan \Theta}\right)^2 (1+r^2) - r^2} \right) + \sqrt{1+r^2} + 1}}, \quad (2.8)$$

con $r = \frac{\text{sen}^2 \Psi \text{sen } 2\rho}{\tan^2 \Theta - \text{sen}^2 \Psi \cos 2\rho}$, $\tan \Theta = \frac{\|\mathbf{E}_2\|}{\|\mathbf{E}_1\|}$ y Ψ es el ángulo que hace la radiación dispersada, en el plano $\hat{\mathbf{e}}_1\text{-}\hat{\mathbf{k}}$, respecto al eje $\hat{\mathbf{e}}_1$. Para la radiación emitida en el plano perpendicular a $\hat{\mathbf{e}}_1$ (plano $\hat{\mathbf{k}}\text{-}\hat{\mathbf{e}}_2$), el cociente de las magnitudes de los ejes mayor y menor de la elipse de polarización se obtiene a partir de la ecuación (2.8) haciendo la sustitución $\text{sen } \Psi \rightarrow \frac{1}{\text{sen } \Psi}$. El producto del cociente (2.8) y $\text{sen}^2 \rho$ se encuentra graficado en la Figura (2-2) como función de Ψ , para algunos valores de la fase ρ de la radiación incidente y diferentes valores del cociente $\frac{\|\mathbf{E}_2\|}{\|\mathbf{E}_1\|}$. La Figura 2-3 muestra este mismo producto, pero para la radiación emitida en el plano perpendicular a la dirección $\hat{\mathbf{e}}_1$. Uno puede observar que este cociente no depende fuertemente de la fase inicial de la radiación, a diferencia de la dependencia marcada que presenta con el cociente de las amplitudes iniciales del campo eléctrico en las direcciones $\hat{\mathbf{e}}_1$ y $\hat{\mathbf{e}}_2$.

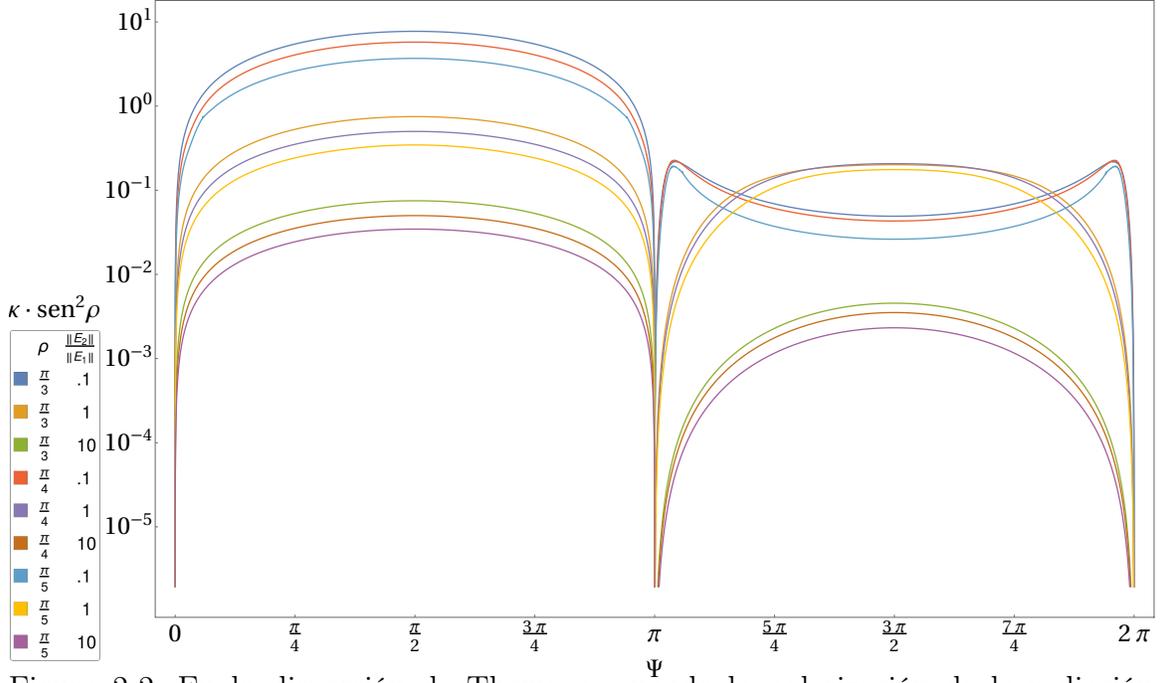


Figura 2-2: En la dispersión de Thomson, cuando la polarización de la radiación incidente es elíptica, con amplitudes $\|\mathbf{E}_1\|$ y $\|\mathbf{E}_2\|$ en las direcciones ortogonales $\hat{\mathbf{e}}_1$ y $\hat{\mathbf{e}}_2$, y diferencia de fase $\rho + \pi/2$ entre estas amplitudes, la radiación dispersada en el plano perpendicular a $\hat{\mathbf{e}}_2$ quedará polarizada elípticamente en general. Esta figura muestra el cociente de las magnitudes de los ejes mayor y menor de la elipse de polarización cómo función del ángulo Ψ que la radiación dispersada hace con el eje $\hat{\mathbf{e}}_1$ para algunos valores de ρ y $\frac{\|\mathbf{E}_2\|}{\|\mathbf{E}_1\|}$.

Para la radiación emitida en el plano perpendicular a la dirección $\hat{\mathbf{e}}_2$, el ángulo Ω que los ejes principales de la elipse de polarización de la radiación dispersada hacen respecto de los ejes $\hat{\mathbf{e}}_1$ y $\hat{\mathbf{k}}$ se puede calcular con la expresión

$$\tan^2 \Omega = \frac{\tan^2 \Theta \sqrt{\sin^4 \Psi + \tan^4 \Theta - 2 \tan^2 \Theta \sin^2 \Psi \cos 2\rho} - \tan^2 \Theta + \sin^2 \Psi \cos 2\rho}{\sin^2 \Psi \sqrt{\sin^4 \Psi + \tan^4 \Theta - 2 \tan^2 \Theta \sin^2 \Psi \cos 2\rho} + \tan^2 \Theta \cos 2\rho - \sin^2 \Psi}, \quad (2.9)$$

mientras que, para la radiación emitida en el plano perpendicular a la dirección $\hat{\mathbf{e}}_1$, la expresión se obtiene a partir de la fórmula (2.9) haciendo la sustitución $\sin \Psi \rightarrow \frac{1}{\sin \Psi}$. La Figura (2-4) muestra la dependencia de la expresión (2.9) con el ángulo de dispersión Ψ para algunos valores de la fase ρ y el cociente de amplitudes $\tan \Theta = \frac{\|\mathbf{E}_2\|}{\|\mathbf{E}_1\|}$. La Figura 2-5 muestra esta misma dependencia, pero para la radiación emitida en el plano perpendicular a la dirección $\hat{\mathbf{e}}_1$. Uno puede observar que esta relación no depende fuertemente de la fase inicial de la radiación, a diferencia de la dependencia marcada que presenta con el cociente $\frac{\|\mathbf{E}_2\|}{\|\mathbf{E}_1\|}$.

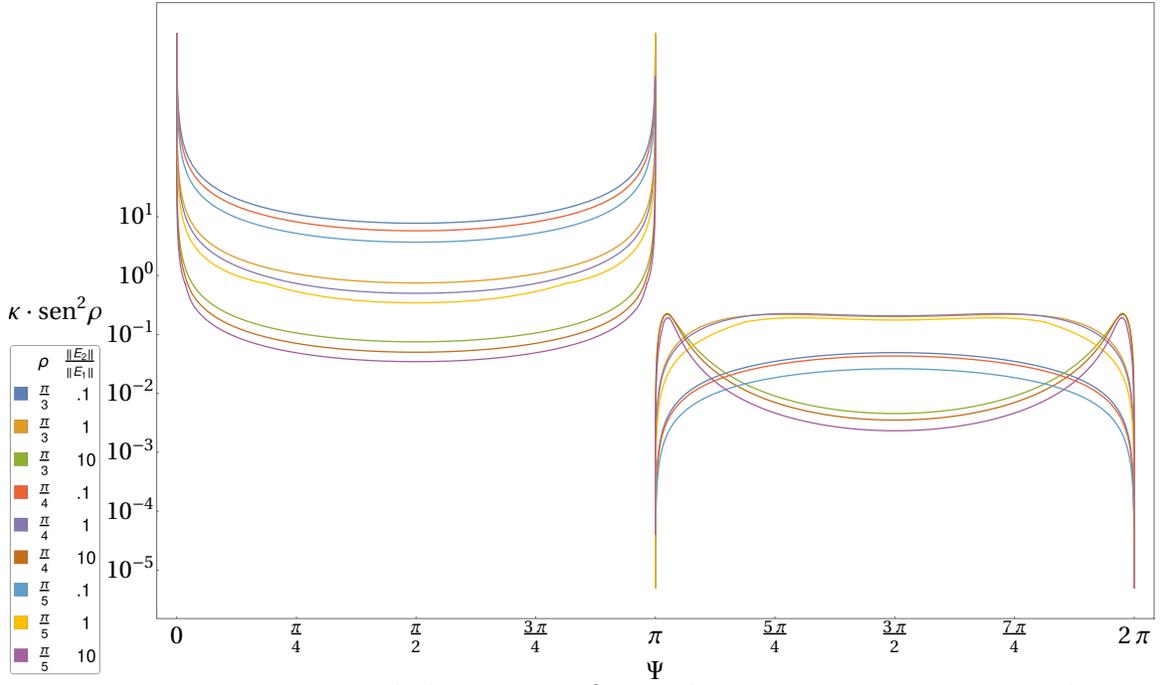


Figura 2-3: La misma cantidad que se grafica en la Figura 2-2, pero para radiación emitida en el plano $\hat{\mathbf{k}}-\hat{\mathbf{e}}_2$. Aquí Ψ es el ángulo que la radiación hace con el eje $\hat{\mathbf{k}}$.

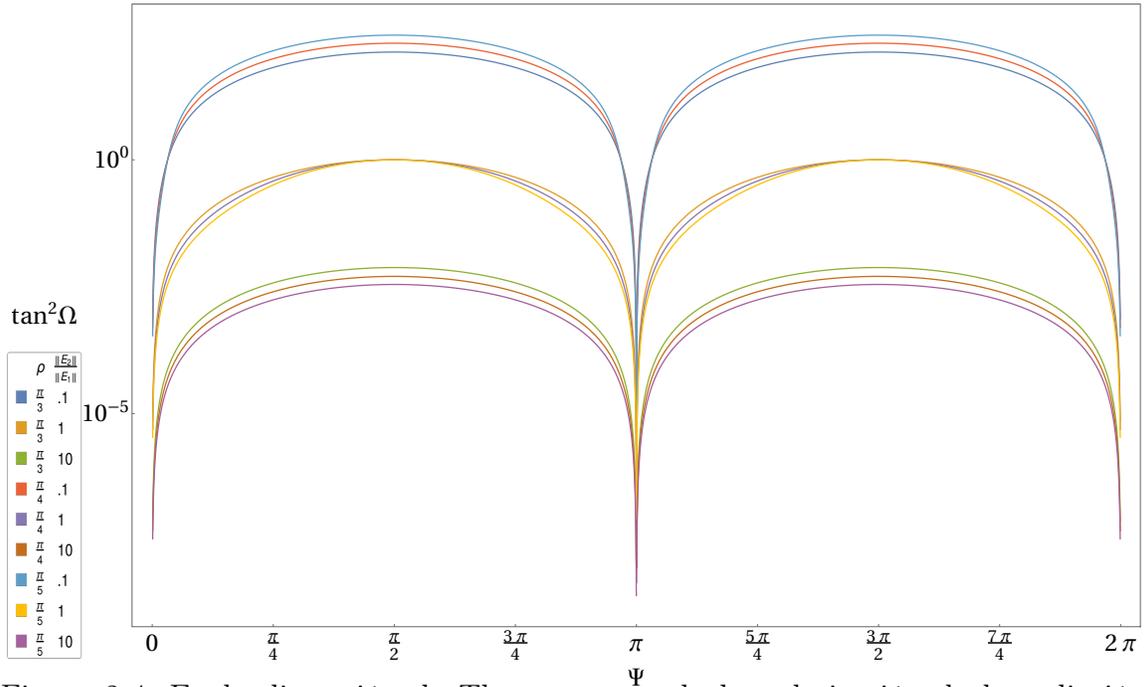


Figura 2-4: En la dispersión de Thomson, cuando la polarización de la radiación incidente es elíptica, con amplitudes $\|\mathbf{E}_1\|$ y $\|\mathbf{E}_2\|$ en las direcciones ortogonales $\hat{\mathbf{e}}_1$ y $\hat{\mathbf{e}}_2$, y diferencia de fase $\rho + \pi/2$ entre estas amplitudes, la radiación dispersada en el plano perpendicular a $\hat{\mathbf{e}}_2$ quedará polarizada elípticamente en general. Esta figura muestra la dependencia del cuadrado de la tangente del ángulo de inclinación de la elipse de polarización respecto de los ejes $\hat{\mathbf{e}}_1$ y $\hat{\mathbf{k}}$ como función del ángulo de dispersión Ψ respecto del eje $\hat{\mathbf{e}}_1$ para algunos valores de ρ y del cociente $\tan \Theta = \frac{\|\mathbf{E}_2\|}{\|\mathbf{E}_1\|}$.

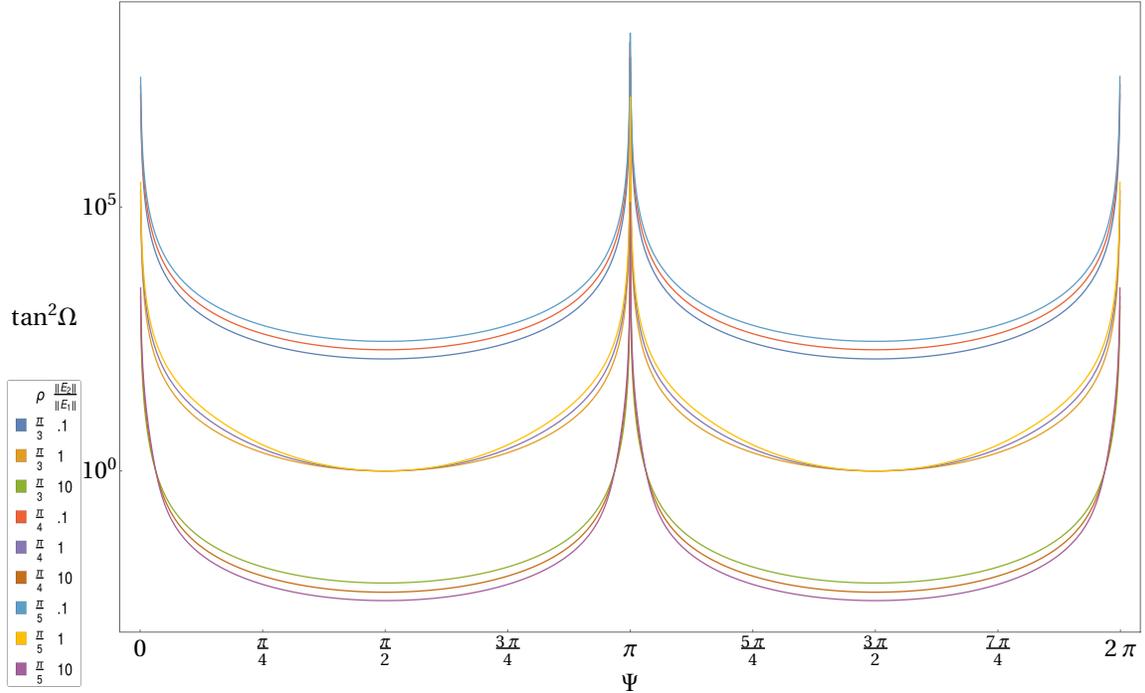


Figura 2-5: La misma cantidad que se grafica en la Figura 2-4, pero para radiación emitida en el plano $\hat{\mathbf{k}}\text{-}\hat{\mathbf{e}}_2$. Aquí Ψ es el ángulo que la radiación hace con el eje $\hat{\mathbf{k}}$.

En particular se puede notar que, cuando la radiación incidente se encuentra polarizada circularmente, la polarización del campo radiado es elíptica en general. En este caso, uno medirá polarización circular en dos situaciones, cuando las direcciones de emisión sean perpendiculares a $\hat{\mathbf{e}}_1$ y cuando lo sean a $\hat{\mathbf{e}}_2$.

Cuando la polarización incidente es lineal, se encuentra radiación polarizada linealmente en la dirección $\hat{\mathbf{e}}'_2 = \frac{\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{k}}'}{\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{k}}')^2}}$ para aquellas direcciones de emisión que cumplen

$$\frac{\tan \psi \sen \psi}{\cos \varphi} = \pm \frac{\|\mathbf{E}_2\|}{\|\mathbf{E}_1\|} = \pm \tan \Theta, \quad (2.10)$$

con $\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 = \cos \psi$ y $\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 = \cos \varphi$ (ver Figura 2-1). Algunas direcciones de emisión, que cumplen con la restricción (2.10), para diferentes valores del ángulo de polarización inicial Θ , aparecen en la Figura 2-6.

Así también, la radiación queda linealmente polarizada en la dirección $\hat{\mathbf{e}}'_1 = \frac{\hat{\mathbf{k}}' \times \hat{\mathbf{e}}_2}{\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{k}}')^2}}$ cuando la dirección de emisión cumple

$$\frac{\tan \varphi \sen \varphi}{\cos \psi} = \pm \frac{\|\mathbf{E}_1\|}{\|\mathbf{E}_2\|} = \pm \cot \Theta. \quad (2.11)$$

Algunas direcciones de emisión, que cumplen con la restricción (2.11), para diferentes valores del ángulo de polarización inicial Θ , aparecen en la Figura 2-7.

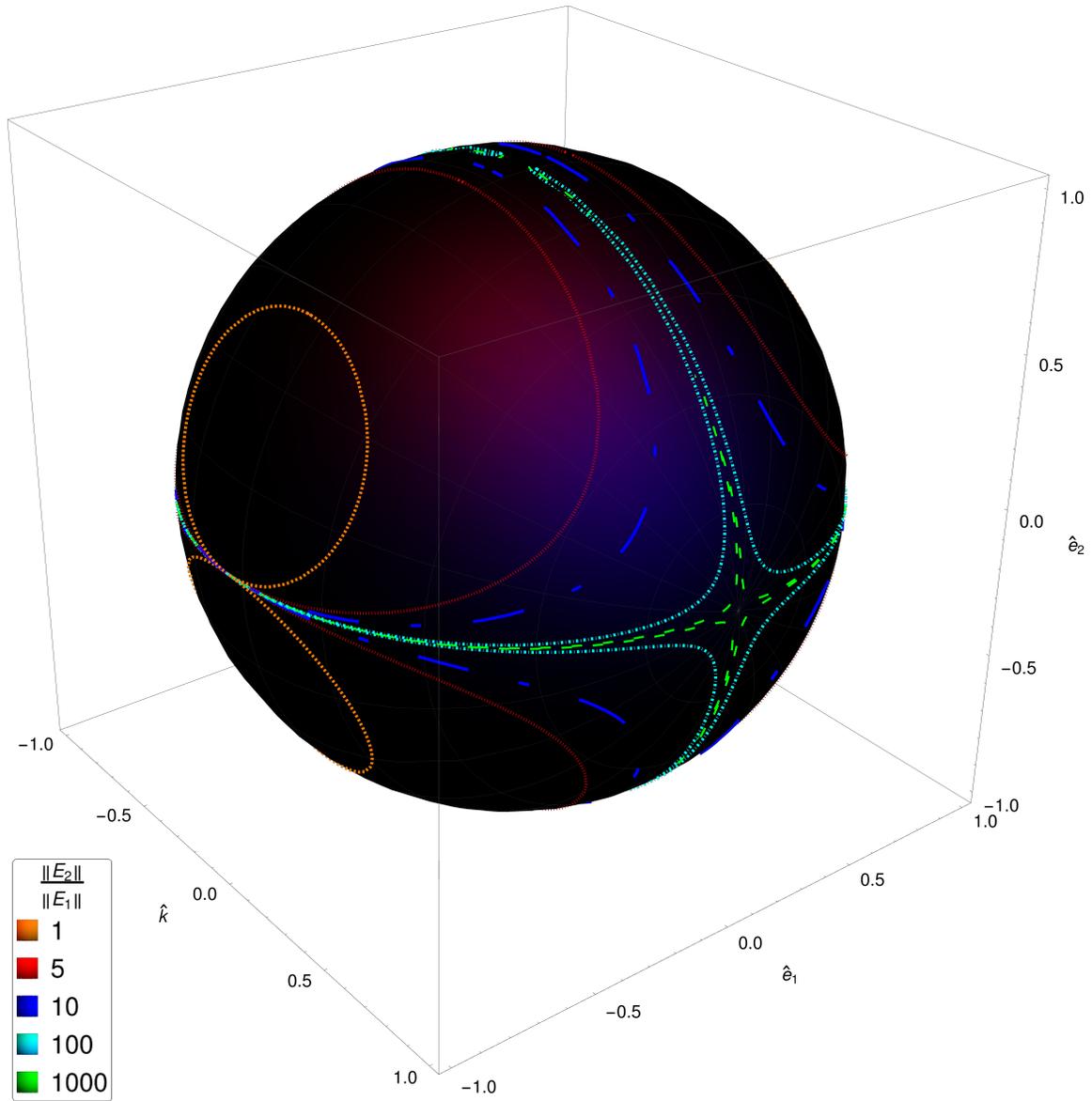


Figura 2-6: En la dispersión de Thomson, cuando la polarización de la radiación incidente es lineal, se espera una relación entre la dirección de emisión y la polarización de la radiación dispersada. Esta figura muestra curvas a lo largo de las cuales la polarización de la radiación dispersada tiene la dirección \hat{e}'_2 , correspondiendo cada una a diferentes direcciones $\Theta = \arctan \frac{\|E_2\|}{\|E_1\|}$ de la polarización inicial.

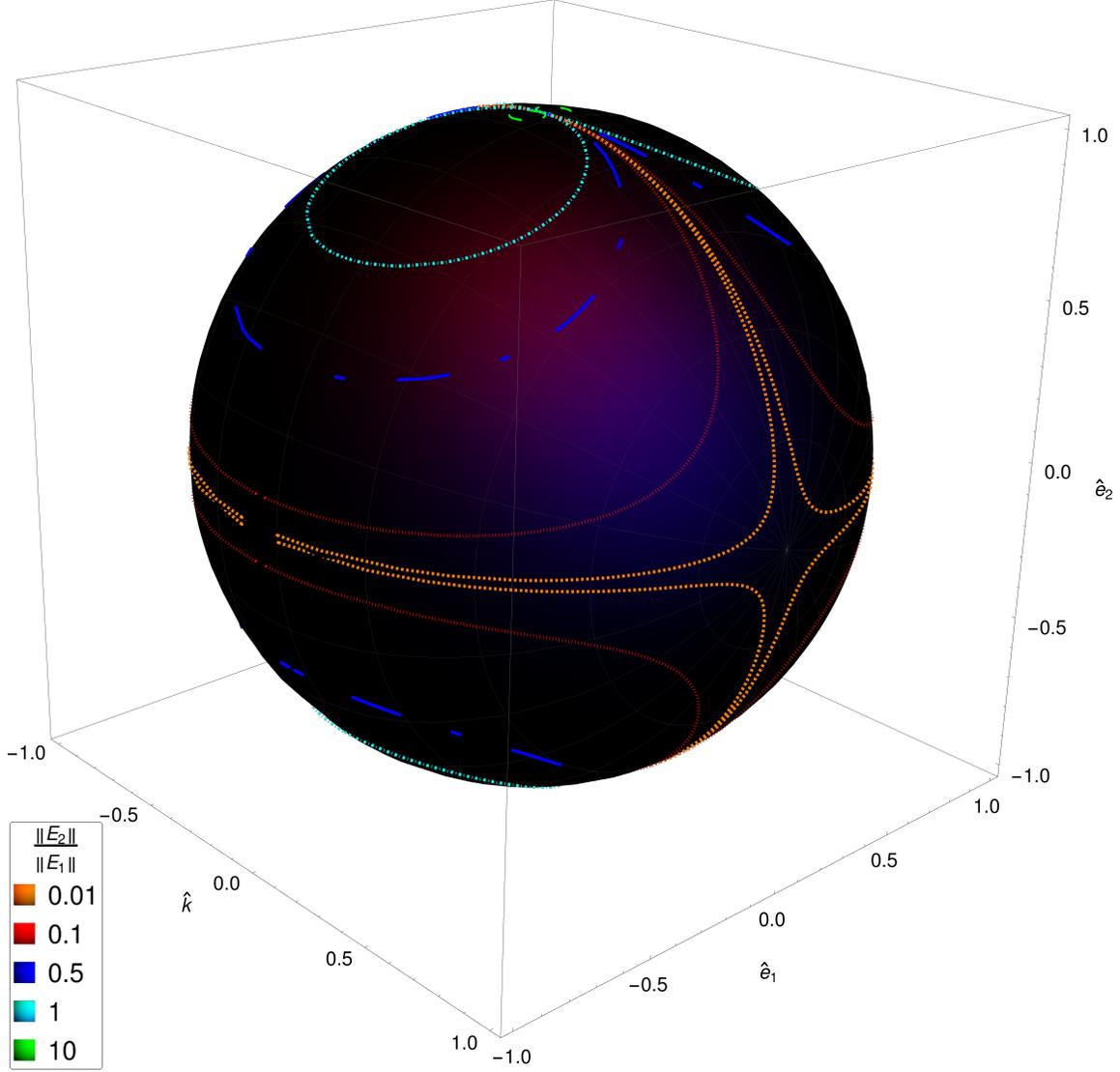


Figura 2-7: En la dispersión de Thomson, cuando la polarización de la radiación incidente es lineal, se espera una relación entre la dirección de emisión y la polarización de la radiación dispersada. Esta figura muestra curvas a lo largo de las cuales la polarización de la radiación dispersada tiene la dirección \hat{e}_1'' , correspondiendo cada una a diferentes direcciones $\Theta = \arctan \frac{\|\mathbf{E}_2\|}{\|\mathbf{E}_1\|}$ de la polarización inicial.

Por otro lado, a partir de la expresión (2.5) se puede obtener la sección diferencial de dispersión efectiva para este proceso

$$\frac{d}{d\Omega}\sigma = r_e^2 \left(\frac{\|\mathbf{E}_1\|^2 \sin^2 \psi + \|\mathbf{E}_2\|^2 \sin^2 \varphi + 2\|\mathbf{E}_1\|\|\mathbf{E}_2\| \cos \psi \cos \varphi \sin \rho}{\|\mathbf{E}_1\|^2 + \|\mathbf{E}_2\|^2} \right), \quad (2.12)$$

y a partir de dicha expresión uno calcula la sección total efectiva

$$\sigma_T = \frac{8\pi r_e^2}{3}, \quad (2.13)$$

la cual se conoce como sección de dispersión de Thomson. La expresión (2.13) nos dice que cuando no se contempla la polarización de la radiación dispersada, la dispersión total efectiva no depende de la polarización inicial de las partículas.

Lo anterior es una consecuencia de que ningún fenómeno que dependa de manera individual de las polarizaciones inicial y final, por separado, pueda emerger en esta dispersión. En el capítulo 4 veremos que efectos que dependen de manera individual de los estados de polarización inicial y final, por separado, están presentes en la dispersión de Compton.

En particular es interesante notar que cuando se promedia sobre la polarización inicial de la radiación, al ser dispersada por la carga, el proceso no dará lugar a polarización neta en la radiación. Esta propiedad de la dispersión también es diferente cuando uno considera a la partícula cargada como una partícula de Dirac.

En la dispersión de Thomson se pueden estudiar las relaciones entre las direcciones de emisión y los diferentes tipos de polarización de la radiación incidente y emitida. Por ejemplo, cuando la radiación incidente está polarizada elípticamente y se quiere detectar radiación dispersada con polarización circular, la sección diferencial efectiva es

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\Omega}\sigma(\lambda', \lambda) = & \frac{r_e^2}{2} \frac{\|\mathbf{E}_1\|^2 \sin^2 \psi + \|\mathbf{E}_2\|^2 \sin^2 \varphi + 2\|\mathbf{E}_1\|\|\mathbf{E}_2\| \cos \psi \cos \varphi \sin \rho}{\|\mathbf{E}_1\|^2 + \|\mathbf{E}_2\|^2} + \\ & -\lambda' \frac{r_e^2}{4(\|\mathbf{E}_1\|^2 + \|\mathbf{E}_2\|^2)} \left(\|\mathbf{E}_1\|^2 \sin^2 \psi (\sin^2 \rho - \cos^2 \rho) + \|\mathbf{E}_2\|^2 \left(\sin^2 \varphi - 2 \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \psi} \right) + \right. \\ & \left. + 2\|\mathbf{E}_1\|\|\mathbf{E}_2\| (\cos \psi \cos \varphi \sin \rho + \cos \theta \cos \rho) \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde λ' y λ indican las direcciones en las cuales el campo eléctrico de la radiación dispersada e incidente rotan sobre sus respectivos planos de polarización (helicidad de la radiación), de tal manera que es antihoraria para $\lambda' = 1$ y horaria para $\lambda' = -1$

cuando uno observa de frente la radiación dispersada. La helicidad de la radiación incidente viene dada por el valor de la fase $\rho = 0, \pi$ y, bajo el mismo esquema de observación, es antihoraria para $\rho = 0$ ($\lambda = 1$) y horaria para $\rho = \pi$ ($\lambda = -1$). La expresión (2.14) da lugar a la sección total efectiva para esta caso particular

$$\sigma(\lambda', \lambda) = \frac{1}{2}\sigma_T + \lambda' \frac{2\pi r_e^2}{3} \left(\frac{\|\mathbf{E}_1\|^2(\cos^2 \rho - \text{sen}^2 \rho) + 2\|\mathbf{E}_2\|^2}{\|\mathbf{E}_1\|^2 + \|\mathbf{E}_2\|^2} \right). \quad (2.15)$$

En esta fórmula uno puede apreciar que la dispersión total efectiva de Thomson para radiación, tanto incidente como dispersada, polarizada circularmente, depende de la helicidad. Esto indica que un efecto de asimetría de helicidad se obtendrá de la dispersión de Thomson. Como veremos en el capítulo 4, esta asimetría es diferente para la dispersión de Compton. La Figura 2-8 muestra la dependencia de la asimetría a la que la fórmula (2.15) da lugar, como función del cociente $\frac{\|\mathbf{E}_2\|}{\|\mathbf{E}_1\|}$, para distintos valores de la fase ρ .

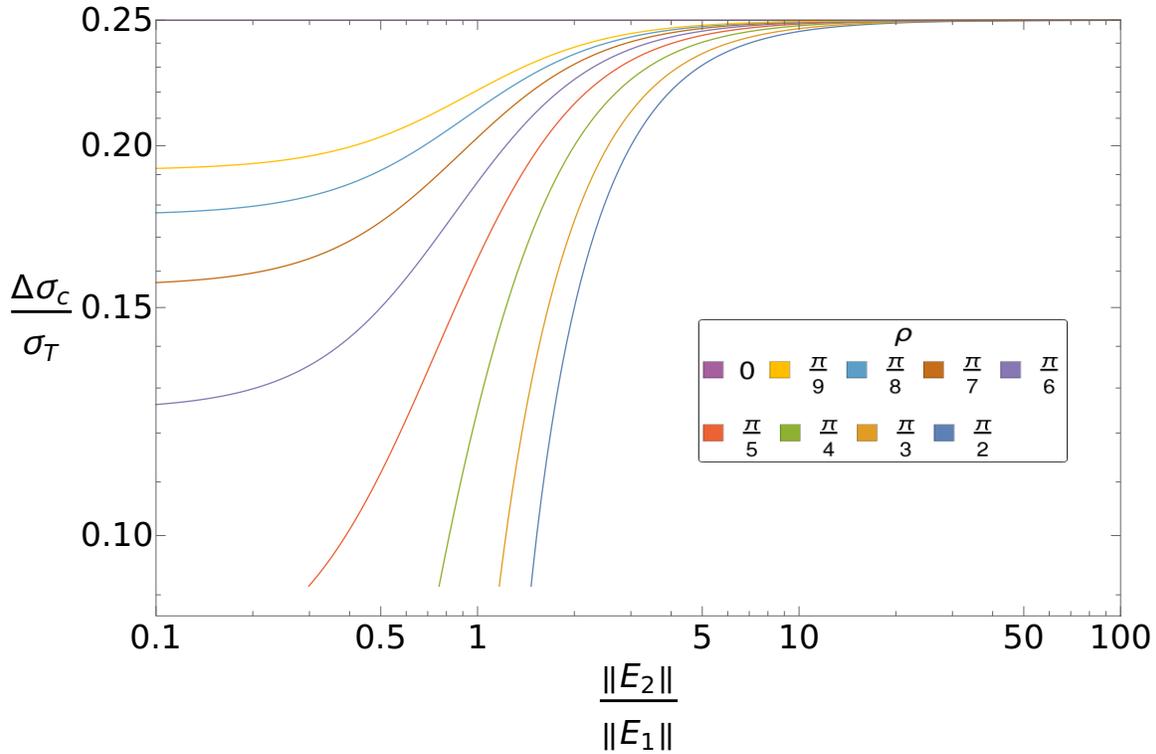


Figura 2-8: Asimetría de helicidad en la dispersión total efectiva de Thomson. Las curvas se grafican como función del cociente $\frac{\|\mathbf{E}_2\|}{\|\mathbf{E}_1\|}$, y se distinguen por tener diferentes valores de la fase ρ de la radiación incidente.

De manera similar, uno puede calcular la asimetría para la dispersión entre estados linealmente polarizados. No obstante, hay que definir de manera adecuada una base de polarización lineal para la polarización dispersada, por ejemplo la siguiente

$$\hat{\epsilon}'_1 = \frac{\hat{\mathbf{k}}' \cdot \mathbf{E}_1 \hat{\mathbf{k}}' - \mathbf{E}_1}{\|\hat{\mathbf{k}}' \cdot \mathbf{E}_1 \hat{\mathbf{k}}' - \mathbf{E}_1\|}, \quad \hat{\epsilon}'_2 = \hat{\mathbf{k}}' \times \hat{\epsilon}'_1, \quad (2.16)$$

si Ω' es el ángulo que hace la dirección de la polarización respecto al eje $\hat{\epsilon}'_1$, uno obtiene la asimetría

$$A(\Omega', \Omega) = \frac{2\|\mathbf{E}_1\| - \|\mathbf{E}_2\|^2}{2(\|\mathbf{E}_1\|^2 + \|\mathbf{E}_2\|^2)} (\cos^2 \Omega' - \sin^2 \Omega'). \quad (2.17)$$

La Figura 2-9 muestra la dependencia de esta asimetría con el valor del cociente de amplitudes $\frac{\|\mathbf{E}_2\|}{\|\mathbf{E}_1\|}$, para diferentes valores del ángulo Ω' . Como veremos en el capítulo 4, existe una asimetría de este tipo en la dispersión de Compton.

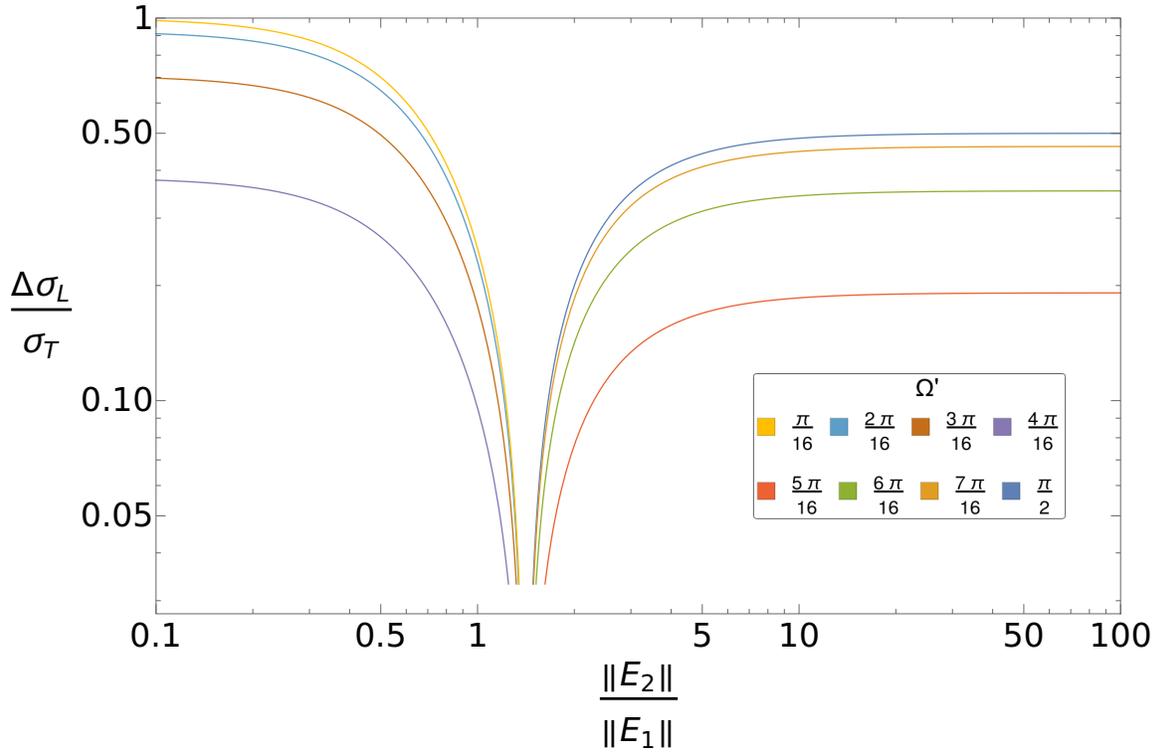


Figura 2-9: Asimetría de polarización lineal en la dispersión total efectiva de Thomson. Las curvas se grafican como función del cociente $\frac{\|\mathbf{E}_2\|}{\|\mathbf{E}_1\|}$, y se distinguen por tener diferentes valores del ángulo Ω' que la polarización de la radiación dispersada hace con $\hat{\epsilon}'_1$.

2.2. Dispersión de partículas de Dirac por fotones.

Según las reglas de la QED el efecto Compton, la absorción de un fotón por un electrón para la posterior reemisión por el electrón, se representa con el diagrama de Feynman mostrado en la Figura 2-10, a partir del cual se deduce la amplitud de transición a primer orden no nulo [233–236]

$$\mathfrak{M}(\epsilon', s', \epsilon, s) = -ie^2 \bar{u}(p', s') \left(\not{\epsilon}'^* \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m} \not{\epsilon} + \not{\epsilon} \frac{1}{\not{p} - \not{k}' - m} \not{\epsilon}'^* \right) u(p, s), \quad (2.18)$$

donde m es la masa del electrón, $k = k(1, \hat{\mathbf{k}})$, $k' = k'(1, \hat{\mathbf{k}}')$ son los 4-vectores de energía e ímpetu para el fotón inicial y final respectivamente, con $\hat{\mathbf{k}}$ y $\hat{\mathbf{k}}'$ vectores unitarios de tres componentes en la dirección del fotón incidente y dispersado. p y p' son los 4-vectores de energía e ímpetu del electrón incidente y dispersado respectivamente y ϵ , ϵ' son los 4-vectores que representan sus respectivas polarizaciones, los cuales usaremos en una representación compleja para tratar estados de polarización elíptica de manera sencilla.

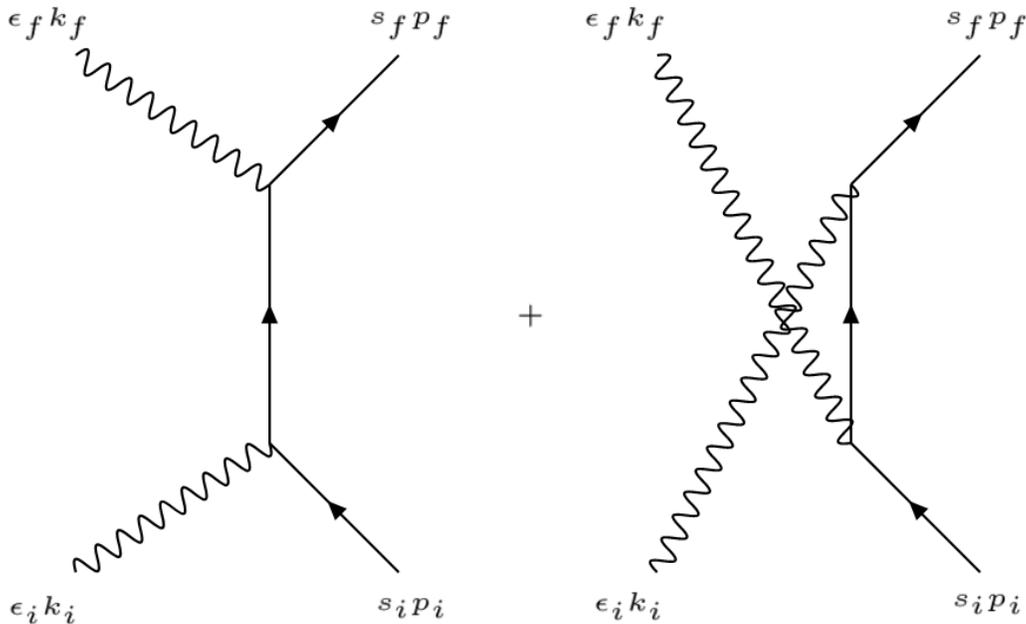


Figura 2-10: Diagrama de Feynman para la dispersión de Compton.

Usando la ecuación 2.18 se calcula la sección total de dispersión invariante [233, 237]

$$\sigma = \int_{\mathbf{p}'} \int_{\mathbf{k}'} (2\pi)^4 \frac{m^2}{2p \cdot k} |\mathfrak{M}|^2 \delta^4(p' + k' - p - k) \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3 E'} \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3 2k'}, \quad (2.19)$$

donde E' y k' son las energías del fotón y electrón dispersados. Para evidenciar la dependencia del proceso con las polarizaciones de las partículas, conviene escribir la amplitud invariante como

$$\mathfrak{M} = -ie^2 \bar{u}(p', s') \Gamma(\epsilon', \epsilon) u(p, s), \quad (2.20)$$

que, después de realizar paso algebraicos, queda en la forma

$$\mathfrak{M}(\epsilon', s', \epsilon, s) = -ie^2 \bar{u}(p', s') \left(\frac{2\epsilon \cdot p \not{\epsilon}'^* - \not{\epsilon}'^* \not{\epsilon} k}{s - m^2} - \frac{2\epsilon \cdot p' \not{\epsilon}'^* + \not{k} \not{\epsilon} \not{\epsilon}'^*}{m^2 - u} \right) u(p, s). \quad (2.21)$$

Para reducir el número de matrices gama en la expresión anterior, se emplea la ecuación $\not{p}u(p, s) = mu(p, s)$, la conservación de ímpetu-energía $p + k = p' + k'$ y la identidad de matrices gama $\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta = g^{\alpha\beta} \gamma^\delta - g^{\alpha\delta} \gamma^\beta + g^{\beta\delta} \gamma^\alpha + i\varepsilon^{\alpha\beta\delta\mu} \gamma^5 \gamma_\mu$. Después de ordenar los términos, la expresión del término de interacción Γ queda

$$\begin{aligned} \Gamma &= \left(\frac{(s - u)(-\epsilon \cdot \epsilon'^* \not{k} + \epsilon'^* \cdot k \not{\epsilon}) + 2t\epsilon \cdot p' \not{\epsilon}'^*}{(m^2 - u)(s - m^2)} + \frac{2\epsilon \cdot k' \not{\epsilon}'^*}{s - m^2} \right) + \\ &+ it \frac{\epsilon_i^\alpha \epsilon'^{\beta} k^\delta \varepsilon_{\alpha\beta\delta\mu} \gamma^5 \gamma^\mu}{(s - m^2)(m^2 - u)}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde además se han usado las variables de Mandelstam

$$\begin{aligned} s &= (p + k)^2, \\ u &= (p - k')^2, \\ t &= (k - k')^2, \\ s + u + t &= 2m^2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

De esta manera, la expresión (2.21) se reduce a

$$\mathfrak{M}(\epsilon', s', \epsilon, s) = -ie^2 \bar{u}(p', s') (\not{V} + \gamma^5 \not{A}) u(p, s), \quad (2.24)$$

con

$$\mathbb{V}^\mu = \frac{(s-u)(-\epsilon \cdot \epsilon'^* k^\mu + \epsilon'^* \cdot k \epsilon^\mu) + 2t\epsilon \cdot p' \epsilon'^{* \mu}}{(m^2-u)(s-m^2)} + \frac{2\epsilon \cdot k' \epsilon'^{* \mu}}{s-m^2}, \quad (2.25)$$

$$\mathbb{A}^\mu = it \frac{\epsilon_\alpha \epsilon'_\beta{}^* k_\delta \epsilon^{\alpha\beta\delta\mu}}{(m^2-u)(s-m^2)}. \quad (2.26)$$

Es importante notar que la expresión (2.24), a pesar de ser compacta y manejable, aún no muestra de manera explícita la dependencia con las variables de espín. Además, la representación en la que se encuentra aún no permite obtener su expresión analítica con facilidad. El capítulo siguiente se dedica a este problema y en lo que resta de este, nos concentraremos en exponer algunas características generales de esta dispersión.

Las integrales de espacio fase en la expresión (2.19) se pueden resolver con ayuda de la identidad $\frac{d^3 \mathbf{p}'}{2E'} = \int_{p'_0} d^4 p' \delta(p'^2 - m^2) \theta(E')$, resultando

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_{\mathbf{k}'} \int_{p'} 4\pi \frac{m^2}{4p \cdot k} |\mathfrak{M}|^2 \delta^4(p' + k' - p - k) \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3 k'} d^4 p' \delta(p'^2 - m^2) \theta(E') \\ &= \int_{\Omega'} \int_0^{E+k} \frac{1}{8\pi^2} \frac{m^2}{p \cdot k} |\mathfrak{M}|^2 \delta((p+k-k')^2 - m^2) k' dk' d\Omega' \\ &= \int_{\Omega'} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{m^2 k'^2}{(p \cdot k)^2} |\mathfrak{M}|^2 d\Omega', \quad (2.27) \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la relación de Compton $k' = \frac{p \cdot k}{p \cdot k' + k \cdot k'}$ para la energía del fotón dispersado, y la notación de 4-vector $\check{k}' = (1, \hat{\mathbf{k}}')$. Para calcular las últimas integrales en la expresión (2.27) usaremos su condición de cantidad invariante de Lorentz (aunque no lo muestra de manera manifiesta). Si uno se sitúa en el marco de referencia donde el electrón se encuentra inicialmente en reposo, la amplitud (2.24) reduce su extensión. El marco de referencia que se había elegido para obtener la expresión (2.27) es lo suficientemente general como para tomar directamente la energía inicial del electrón como la energía en reposo $E = m$. Si uno quiere hallar una expresión

manifiestamente covariante después de hacer las integrales, lo que hay que hacer es escribir todas las variables en términos de cantidades invariantes, en este caso en términos de las variables de Mandelstam. Si se pretende estudiar con detalle una situación cinemática específica, por ejemplo alguna configuración de laboratorio relevante, estas variables deberán ser reescritas en términos de cantidades definidas en ese marco en particular.

Mediante este esquema, y usando la norma de radiación, $\epsilon = (0, \hat{\epsilon})$ and $\epsilon' = (0, \hat{\epsilon}')$, la amplitud (2.24) se escribe

$$\mathfrak{M}(\hat{\mathbf{s}}'_F, \hat{\epsilon}', \hat{\mathbf{s}}, \hat{\epsilon}) = -i \frac{e^2}{2m} (a \phi'^{\dagger} \phi + i \phi'^{\dagger} \bar{\sigma} \cdot \bar{b} \phi) = -i \frac{e^2}{2m} M(\hat{\mathbf{s}}'_F, \hat{\epsilon}', \hat{\mathbf{s}}, \hat{\epsilon}) \quad (2.28)$$

donde hemos usado las técnicas espinoriales de la referencia [238], y que expondremos en el siguiente capítulo. Los espinores de dos componentes ϕ' , ϕ tienen dirección de cuantización paralela a los vectores de polarización final $\hat{\mathbf{s}}'_F$ e inicial $\hat{\mathbf{s}}$ respectivamente, los cuales están definidos en sus respectivos marcos de referencia en reposo; el porqué del subíndice F será explicado con detalle en el capítulo 5. La notación a y \bar{b} se usa para

$$a = a(\hat{\epsilon}', \hat{\epsilon}) = \frac{m}{(m^2 - u)(s - m^2)\sqrt{4m^2 - t}} \left(-(s - u)^2 \hat{\epsilon}'^* \cdot \hat{\epsilon} + 2t \hat{\epsilon}'^* \cdot \mathbf{k} \hat{\epsilon} \cdot \mathbf{k}' \right), \quad (2.29)$$

$$\bar{b} = \bar{b}(\hat{\epsilon}', \hat{\epsilon}) = \frac{1}{\sqrt{4m^2 - t}} \left((\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \times \left(-\hat{\epsilon}'^* \cdot \hat{\epsilon} \hat{\mathbf{k}} + \hat{\epsilon}'^* \cdot \hat{\mathbf{k}} \hat{\epsilon} - \hat{\epsilon}'^* \cdot \hat{\epsilon} \hat{\mathbf{k}}' + \hat{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{k}}' \hat{\epsilon}'^* \right) \right. \\ \left. - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\epsilon}'^* \times \hat{\epsilon} - \hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\epsilon}'^* \times \hat{\epsilon})(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \right), \quad (2.30)$$

donde se ha hecho explícita la dependencia con la polarización de los fotones con $a = a(\hat{\epsilon}', \hat{\epsilon})$ y $\bar{b} = \bar{b}(\hat{\epsilon}', \hat{\epsilon})$.

Si uno toma la expresión de la amplitud (2.28), la usa en la derivada de la ecuación (2.27), suma sobre las polarizaciones del electrón final y promedia sobre las del inicial, la sección diferencial de dispersión sin dependencia con las polarizaciones de

los electrones es obtenida

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\Omega}\sigma(\hat{\epsilon}', \hat{\epsilon}) &= \frac{1}{2} \sum_{\hat{s}', \hat{s}} \frac{\alpha^2}{4m^2} \left(\frac{k'}{k}\right)^2 \left(|a|^2 |\phi'^{\dagger} \phi|^2 + |\phi'^{\dagger} \bar{\sigma} \cdot \bar{b} \phi|^2 + i(a^* \phi^{\dagger} \phi' \phi'^{\dagger} \bar{\sigma} \cdot \bar{b} \phi - a \phi'^{\dagger} \phi \phi^{\dagger} \bar{\sigma} \cdot \bar{b}^* \phi') \right) \\ &= \frac{\alpha^2}{4m^2} \left(\frac{k'}{k}\right)^2 \left(|a|^2 + |\bar{b}|^2 \right) = \frac{\alpha^2}{4m^2} Y^2 (2\Theta(\hat{\epsilon}', \hat{\epsilon}) + X (1 + \Phi(\hat{\epsilon}', \hat{\epsilon})) - 2), \end{aligned} \quad (2.31)$$

con la constante de estructura fina $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$, el cociente de las energías de los fotones final e inicial $Y = \frac{k'}{k} = \frac{1}{1 + \frac{k}{m}(1 - \cos\theta)}$, el ángulo de dispersión $\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}' = \cos\theta$, y las cantidades invariantes $X = \frac{p \cdot k}{p \cdot k'} + \frac{p \cdot k'}{p \cdot k}$, $\Theta(\hat{\epsilon}', \hat{\epsilon}) = |\epsilon'^* \cdot \epsilon|^2 + |\epsilon' \cdot \epsilon|^2$ y $\Phi(\hat{\epsilon}', \hat{\epsilon}) = |\epsilon'^* \cdot \epsilon|^2 - |\epsilon' \cdot \epsilon|^2$. A pesar que la variable Y no es un escalar de Lorentz, y tampoco la ecuación (2.31), uno puede construir la sección diferencial de dispersión invariante de Lorentz

$$\frac{d}{dt}\sigma(\hat{\epsilon}', \hat{\epsilon}) = -\frac{\alpha^2}{8m^2 k^2} \int_0^{2\pi} d\phi' (2\Theta(\hat{\epsilon}', \hat{\epsilon}) + X (1 + \Phi(\hat{\epsilon}', \hat{\epsilon})) - 2), \quad (2.32)$$

donde t se encuentra definida en (2.23).

2.2.1. Límite de baja energía.

La ecuación (2.32) permite describir con facilidad el comportamiento de la dispersión de Compton, dependiente de las polarizaciones de los fotones en los límites de baja y alta energía (ver siguiente subsección) del centro de masa. Para evaluar la integral en la fórmula (2.32), es conveniente escribir X , Θ y Φ en el sistema del electrón incidente en reposo, para poder tomar el límite de baja energía del centro de masa. En este sistema, esta condición se reduce a tomar el límite $\frac{k}{m} \rightarrow 0$, lo cual implica que $X \rightarrow 2$ y la fórmula (2.32) se reduce a

$$\frac{d}{dt}\sigma(\hat{\epsilon}', \hat{\epsilon}) = -\frac{\alpha^2}{2m^2 k^2} \int_0^{2\pi} d\phi' |\epsilon'^* \cdot \epsilon|^2. \quad (2.33)$$

Si uno elije estudiar fotones linealmente polarizados, y se hace uso de las bases de polarización mostradas en la Figura 2-1, la expresión (2.33) conduce a

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\cos\theta}\sigma(\hat{\epsilon}', \hat{\epsilon}) = & -\frac{\pi\alpha^2}{m^2} \left(\cos^2 \Omega' \cos^2 \Omega (2 - \sin^2 \theta) + \sin^2 \Omega \cos^2 \Omega' (2 - \sin^2 \theta - I_1) + \right. \\ & \left. + \sin^2 \Omega' \sin^2 \Omega I_1 + 4 \sin \Omega' \cos \Omega' \sin \Omega \cos \Omega \cos \theta \right), \end{aligned} \quad (2.34)$$

con $I_1 = \frac{1}{\pi\sqrt{\sin^2\theta-1}} \left(\log(\sin^2\theta - 1) + 2 \log\left(-\frac{1}{\sqrt{\sin^2\theta-1}}\right) \right)$. Apartir de la expresión (2.34) es posible obtener la sección total de dispersión

$$\sigma(\hat{\epsilon}', \hat{\epsilon}) = \frac{8\pi r_e^2}{3} \left(\cos^2 \Omega' \cos^2 \Omega + \frac{1}{4} \sin^2 \Omega \cos^2 \Omega' + \frac{3}{4} \sin^2 \Omega' \sin^2 \Omega \right), \quad (2.35)$$

la cual coincide con la fórmula de Thomson (2.12) cuando se suma sobre las polarizaciones de las partículas.

Detalles sobre los efectos de polarización que emergen de la amplitud serán estudiados en los capítulos 4 y 5. Teniendo en cuenta las necesidades de este estudio, el desarrollo de un esquema de tratamiento y análisis de las variables de polarización del electrón se muestra en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Técnicas espinoriales para el cálculo de amplitudes de transición para procesos que involucran partículas de Dirac.

En la teoría de Dirac, el estudio de observables dependientes del espín y los análisis de procesos de órdenes superiores requieren del cálculo de amplitudes de transición complicadas, por ejemplo las estudiadas en los trabajos [239–246]. Esto sucede porque dichas amplitudes involucran, en general, un gran número de partículas de Dirac, acopladas mediante términos de interacción con muchas matrices gama [247–250], haciendo que los métodos tradicionales de cálculo sean poco recomendables.

La estructura algebraica de las amplitudes de transición incentivan el uso de métodos audaces y poderosos para obtener sus valores analíticos. Las técnicas modernas para el cálculo de amplitudes han sido mejoradas, particularmente para procesos con muchas partículas [251–254] y usualmente optimizadas para implementaciones de cómputo [255–258]. Sin embargo, muchas de estas técnicas están enfocadas en estados de helicidad para fermiones [259–267] y sólo algunas se consideran herramientas de análisis para direcciones generales de espín [268].

Por otro lado, la complejidad matemática de estos formalismos oscurece el contenido físico de la interacción y los resultados no siempre se pueden analizar con facilidad. Además, la abundancia de técnicas y métodos de cálculo de amplitudes de Dirac conlleva múltiples convenciones, notaciones y otras particularidades que lejos de enriquecer la discusión, introduce dificultades adicionales, haciendo complicado comparar incluso la misma amplitud de transición tan sólo por haberla calculado por métodos distintos.

En este capítulo desarrollaremos técnicas originales para calcular valores analíticos de amplitudes de procesos que involucran partículas de Dirac. El objetivo es obtener una técnica de cálculo que de forma eficiente, clara y sin ambigüedades, permita extraer la información que aportan las variables de polarización en los procesos para estados generales de espín. Además, esta técnica ofrece un camino en el cual se pueden comparar de manera directa dos o más métodos de cálculo con relativamente poco esfuerzo.

3.1. La completez de los espinores de Dirac.

La ecuación de Dirac para una partícula libre de masa m

$$(\not{p} - \epsilon m) \psi_\epsilon(x) = 0, \quad (3.1)$$

donde $\epsilon = \pm 1$ es el signo de la energía [233], hace uso de dos representaciones diferentes del grupo de Lorentz. En primer lugar, la ley de transformación del operador 4-vectorial $\hat{p}^\mu = i \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right)$ es la establecida por la representación vectorial del grupo. Luego encontramos la ley de transformación de los espinores de Dirac presentes en la solución de la ecuación (3.1) (objetos de cuatro componentes), la cual es establecida por la representación espinorial masiva del grupo de Lorentz. A saber, para energía positiva y negativa, las soluciones de onda plana para la ecuación (3.1) son

$$\psi_+(x) = u(p, s) e^{-ip \cdot x}, \quad \psi_-(x) = v(p, s) e^{ip \cdot x}, \quad (3.2)$$

respectivamente, donde $x^\mu = (t, \bar{x})$, $u(p, s)$ es un espinor de Dirac de energía positiva y $v(p, s)$ es el de energía negativa. La energía E y el ímpetu de tres componentes \bar{p} forman el 4-ímpetu $p^\mu = (E, \bar{p})$ el cual, junto con el 4-espín $s^\mu = (s^0, \bar{s})$, satisfacen las propiedades $p^2 = m^2$, $s \cdot p = 0$ y $s^2 = -1$.

El operador \not{p} contiene las matrices de Dirac γ^μ que, gracias a la invarianza de Lorentz de la ecuación de Dirac, transforman como un objeto 4-vectorial y espinorial masivo a la vez. Para apreciar completamente lo que esto implica, es útil recalcar las propiedades de los espinores de Dirac.

Los espinores $u(p, \pm s)$ y $v(p, \pm s)$ satisfacen el conjunto de ecuaciones propias

$$\not{p}u(p, \pm s) = m u(p, \pm s), \quad \not{p}v(p, \pm s) = -m v(p, \pm s), \quad (3.3)$$

$$\gamma^5 \not{s} u(p, \pm s) = \pm u(p, \pm s), \quad \gamma^5 \not{s} v(p, \pm s) = \pm v(p, \pm s),$$

y constituyen una base completa para cualquier espinor de cuatro componentes, i.e., un espinor de Dirac arbitrario $w(p', s')$, con 4-ímpetu p' , 4-espín s' y masa m' se puede desarrollar de la forma

$$w(p', s') = \sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) w(p', s') - \sum_s v(p, s) \bar{v}(p, s) w(p', s'), \quad (3.4)$$

donde se ha usado la notación $\bar{U}(p, s) = U^\dagger(p, s) \gamma^0$ para representar el adjunto del espinor $U(p, s)$.

Es interesante notar que el desarrollo (3.4) no mezcla espinores de ambas energías cuando se emplea como base completa espinores con el mismo ímpetu. Esto quiere decir que en la representación de $u(p, s')$ o $v(p, s')$ los únicos términos diferentes de cero serán $\bar{u}(p, s)u(p, s')$ o $\bar{v}(p, s)v(p, s')$, respectivamente.

La ortogonalidad entre los espinores $u(p, s)$ y $v(p, s')$ es evidente en el marco de referencia donde se hallan en reposo, ahí los espinores de Dirac con diferentes signos de energía son mutuamente ortogonales, sin importar la dirección en la que el espín se encuentre cuantizado. Usando una transformación de Lorentz $S(\bar{\beta})$, uno puede escribir

el espinor en reposo en términos del espinor de ímpetu $\bar{p} = \bar{\beta} E$, entonces la igualdad

$$\bar{v}(p, s)u(p, s') = \bar{v}(p, s)S(-\bar{\beta})S(\bar{\beta})u(p, s') = \bar{v}(p_0, s_0)u(p_0, s'_0) = 0, \quad (3.5)$$

es evidente, además esto muestra que la ortogonalidad se mantiene en cualquier marco de referencia. También, la fórmula (3.4) se puede demostrar tomando como eje central su estructura totalmente covariante, como se hace en la referencia [233], y esto sugiere que su uso dará lugar a expresiones covariantes.

La regla de transformación de las matrices de Dirac [233] se puede apreciar con el enfoque que la ecuación (3.4) permite. Usando esta última, uno puede demostrar el desarrollo

$$\gamma^\mu = \sum_{rr'} C_{rr'}^\mu(Q, Q') \omega_r(Q, S) \bar{\omega}_{r'}(Q', S'), \quad (3.6)$$

donde $r, r' = 1, 2, 3, 4$, el espinor $\omega_r(Q, S) = u(Q, (-1)^{r+1}S)$, para $r = 1, 2$; y $\omega_r(Q, S) = v(Q, (-1)^r S)$, para $r = 3, 4$. La expresión (3.6) muestra una doble composición de (diferentes) representaciones del grupo de Lorentz. Mientras los coeficientes $C_{rr'}^\mu(Q, Q')$ transforman de acuerdo a la representación 4-vectorial, el operador $\omega_r(Q, S) \bar{\omega}_{r'}(Q', S')$ es un objeto puramente espinorial (masivo), transformando con la representación espinorial de Dirac del grupo de Lorentz. Se pueden hacer algunas observaciones sobre esto. Primero, la elección de las variables dinámicas Q y S puede parecer ambigua, sin embargo no es así. Esto se sigue de las constricciones que las ecuaciones (3.3) imponen sobre los espinores que forman la base completa. Segundo, las propiedades de antihermiticidad y anticonmutación de las matrices gama se cumplen usando la expresión (3.6) a pesar de no ser trivial. Tercero, se pueden encontrar expresiones análogas a (3.6) pero para productos de matrices gama, tales como γ^5 , $\gamma^5 \gamma^\mu$ y $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$.

Un operador espinorial general \mathbf{O} será covariante si su ley de transformación bajo el grupo de Lorentz es de la forma $\mathbf{O}' = \mathbf{S} \mathbf{O} \mathbf{S}^{-1}$. Cuando \mathbf{O} se escribe como

$$\mathbf{O} = s + p\gamma^5 + v_\mu \gamma^\mu + a_\mu \gamma^5 \gamma^\mu + \Omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}, \quad (3.7)$$

la covarianza se cumple si s , p , v^μ , a^μ y $\Omega^{\mu\nu}$ son objetos que transforman bajo la representación 4-vectorial como cantidades escalar, pseudo-escalar, vector, axial-vector y tensorial, respectivamente. Si un operador covariante actúa sobre algún espinor $\omega_r(Q)$, un nuevo espinor $\mathbf{O}\omega_r(Q)$ es obtenido. En general, este espinor no es un estado propio de las ecuaciones (3.3), pero se puede expresar como una combinación lineal de una base completa. Esta idea es fundamental, como veremos en las subsecciones siguientes, para desarrollar un esquema de cálculo de amplitudes, eficiente y suficientemente general como para que otros métodos de cálculo se puedan formular a través él.

3.2. El método proyectivo para el cálculo de amplitudes: un esquema general.

Una amplitud de Dirac es un elemento de matriz del operador (usualmente covariante) Γ . La naturaleza de escalar de Lorentz de esta amplitud es evidente cuando uno la escribe explícitamente. Por ejemplo, para espinores de energía positiva, se escribe como

$$M(p', s', p, s) = \bar{u}(p', s')\Gamma u(p, s). \quad (3.8)$$

El propósito principal de las técnicas espinoriales es obtener el valor analítico de la expresión (3.8), o análogas a ella, en términos de elementos simples, tales como el producto punto entre dos 4-vectores o el hipervolumen generado por 4-vectores $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}a_\alpha b_\beta c_\gamma d_\delta$ (donde $\varepsilon_{0123} = +1$ es el símbolo de Levi-Civita con cuatro índices). Un truco común para obtener este cálculo se basa en reescribir la ecuación (3.8) como

$$M(p', s', p, s) = \text{tr } u(p, s)\bar{u}(p', s')\Gamma. \quad (3.9)$$

Esta manera de proceder tiene la ventaja de mostrar explícitamente los dos objetos covariantes que forman la amplitud. Además, usando las propiedades de las trazas de las matrices gama, es posible obtener una expresión analítica para la amplitud.

Mientras que el operador Γ usualmente se encuentra desarrollado, o se puede poner fácilmente, como se muestra en la ecuación (3.7), el operador $u(p, s)\bar{u}(p', s')$ no está escrito así y además es complicado en general escribirlo de esta forma. La descomposición del operador $u(p, s)\bar{u}(p', s')$ de acuerdo a la ecuación (3.7), o a desarrollos similares (procedimientos generales para desarrollar un operador en términos de covariantes bilineales se pueden encontrar, por ejemplo, en las referencias [269–271]), presenta inconvenientes. En primer lugar, el procedimiento requiere una cantidad considerable de trabajo, las expresiones obtenidas no son tan compactas como uno quisiera y no se reducen de manera trivial a funciones, explícitamente covariantes, de p', s', p y s . Por otro lado, los elementos resultantes no tienen una interpretación física directa, restando así claridad al resultado final y complicando el análisis subsecuente. Para enfrentarnos a esto, en la siguiente sección proponemos una base espinorial específica que ayuda a superar estas dificultades.

3.2.1. La base en reposo.

En el marco en reposo de los espinores de Dirac, podemos reescribir las ecuaciones (3.3) como

$$\begin{aligned} (\not{\epsilon} + (-1)^\epsilon) \Phi_{\epsilon\tau}(\mathfrak{s}) &= 0, \\ (\gamma^5 \not{\epsilon} + (-1)^\tau) \Phi_{\epsilon\tau}(\mathfrak{s}) &= 0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

con los espinores en reposo $\Phi_{11}(\mathfrak{s}) = S(\bar{\beta})u(p, s)$, $\Phi_{12}(\mathfrak{s}) = S(\bar{\beta})u(p, -s)$, $\Phi_{22}(\mathfrak{s}) = S(\bar{\beta})v(p, -s)$, $\Phi_{21}(\mathfrak{s}) = S(\bar{\beta})v(p, s)$ y los 4-vectores $\mathfrak{q}^\mu = \frac{1}{m}\Lambda^{\mu\nu}(\bar{\beta})p_\nu = (1, \bar{0})$, $\mathfrak{s}^\mu = \Lambda^{\mu\nu}(\bar{\beta})s_\nu = (0, \hat{\mathfrak{s}})$. La matriz $\Lambda(\bar{\beta})$ es la representación 4-vectorial de la transformación de Lorentz a un marco que se mueve con velocidad $\bar{\beta}$, i.e., el marco donde los espinores están en reposo.

Se puede ver que la representación de los espinores de Dirac en la referencia [233] permite una descomposición proyectiva de los espinores de Dirac en términos de los

espinores en reposo

$$\begin{aligned}
u(p, s) &= \sqrt{\frac{2m}{E+m}} u(p, s) \bar{u}(p, s) \Phi_{11}(s), \\
u(p, -s) &= \sqrt{\frac{2m}{E+m}} u(p, -s) \bar{u}(p, -s) \Phi_{12}(s), \\
v(p, -s) &= -\sqrt{\frac{2m}{E+m}} v(p, -s) \bar{v}(p, -s) \Phi_{22}(s), \\
v(p, s) &= -\sqrt{\frac{2m}{E+m}} v(p, s) \bar{v}(p, s) \Phi_{21}(s).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Hay que notar que las expresiones (3.11) se deducen fácilmente usando la representación estandar de las matrices gama [233]. Estas expresiones mantienen su validez en cualquier otra representación dado que dos representaciones diferentes de las matrices gama, γ^μ y $\tilde{\gamma}^\mu$, son equivalentes ante transformaciones de similaridad [272].

Usando las expresiones (3.11), la ecuación (3.9) toma la forma

$$M(p', s', p, s) = \sqrt{\frac{2m'}{E'+m'}} \sqrt{\frac{2m}{E+m}} \text{tr} \Phi_{11}(s) \bar{\Phi}_{11}(s') P_{++}(p', s') \Gamma P_{++}(p, s), \tag{3.12}$$

donde ambas partículas pueden tener diferentes masas y el operador $P_{\alpha\beta}(p, s) = \Pi(\alpha, p) \Sigma(\beta, s) = \Sigma(\beta, s) \Pi(\alpha, p)$ consta de los proyectores de energía y espín, $\Pi(\alpha, p) = \frac{\alpha \not{p} + m}{2m}$ y $\Sigma(\beta, s) = \frac{\beta \gamma^5 \not{s} + 1}{2}$, respectivamente, coincidiendo con los de energía y espín positivos para $\alpha = \beta = +1$. Una amplitud de transición para un proceso entre un espinor inicial con signo de energía $\alpha = (-1)^{\epsilon+1}$ y valor propio de espín en su marco en reposo $(-1)^{\epsilon+\tau} = \beta (-1)^{\epsilon+1}$, y un espinor final con signo de energía $\alpha' = (-1)^{\epsilon'+1}$ y valor propio de espín en su marco en reposo $(-1)^{\epsilon'+\tau'} = \beta' (-1)^{\epsilon'+1}$ se escribe como

$$\begin{aligned}
M(\epsilon', p', \tau', s', \epsilon, p, \tau, s) &= \\
&= (-1)^{\epsilon'+\epsilon} \sqrt{\frac{2m'}{E'+m'}} \sqrt{\frac{2m}{E+m}} \text{tr} \Phi_{\epsilon\tau}(s) \bar{\Phi}_{\epsilon'\tau'}(s') P_{\alpha'\beta'}(p', s') \Gamma P_{\alpha\beta}(p, s).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Para que la expresión (3.13) sea útil, se requiere el uso del operador $\Phi_{\epsilon\tau}(s) \bar{\Phi}_{\epsilon'\tau'}(s')$ en forma de la expansión de la ecuación (3.7). Esta tarea es más sencilla que el trabajo

que se requiere para obtener la expresión de $u(p, s)\bar{u}(p', s')$; la razón se encuentra en la simplificación que el marco en reposo introduce, particularmente para el desarrollo de operadores. Para apreciar esto conviene notar que los espinores de cuatro componentes $\Phi_{\epsilon\tau}$ se pueden construir como dos pares de estados propios de operadores de momento angular, con momento angular total igual a $1/2$, cada par para un álgebra distinta.

Esto se puede ver de la ecuación de espín en (3.10)

$$\gamma^5\bar{\gamma} \cdot \hat{s} \Phi_{\epsilon\tau}(\mathbf{s}) = (-1)^\tau \Phi_{\epsilon\tau}(\mathbf{s}). \quad (3.14)$$

La ecuación (3.14) implica, a través de la ecuación de valores propios $\gamma^0\Phi_{\epsilon\tau}(\mathbf{s}) = -(-1)^\epsilon\Phi_{\epsilon\tau}(\mathbf{s})$, que los espinores $\Phi_{\epsilon 1}(\mathbf{s})$ y $\Phi_{\epsilon 2}(\mathbf{s})$ son estados propios del operador $-\frac{1}{2}\gamma^0\gamma^5\bar{\gamma} \cdot \hat{s} = \bar{\mathbf{J}} \cdot \hat{s}$ con valores propios $-(-1)^\epsilon/2$ y $+(-1)^\epsilon/2$ respectivamente. Los operadores $\bar{\mathbf{J}}$ cumplen las relaciones de conmutación de los operadores de momento angular,

$$[-\gamma^0\gamma^5\gamma^i, -\gamma^0\gamma^5\gamma^j] \Phi_{\epsilon\tau}(\mathbf{s}) = -[\gamma^i, \gamma^j] \Phi_{\epsilon\tau}(\mathbf{s}) = 2i\varepsilon^{ijk}(-\gamma^0\gamma^5\gamma^k)\Phi_{\epsilon\tau}(\mathbf{s}), \quad (3.15)$$

sin embargo los operadores $\gamma^0\bar{\mathbf{J}}$ no las satisfacen. Usando los proyectores $\mathbf{P}_\epsilon = \frac{1-(-1)^\epsilon\gamma^0}{2}$, uno puede descomponer esta álgebra como la suma directa de dos representaciones $\bar{\mathbf{J}}_1 = \mathbf{P}_1\bar{\mathbf{J}}$ y $\bar{\mathbf{J}}_2 = \mathbf{P}_2\bar{\mathbf{J}}$, de tal manera que

$$\bar{\mathbf{J}} = \bar{\mathbf{J}}_1 + \bar{\mathbf{J}}_2, \quad (3.16)$$

y $[\mathbf{J}_1^l, \mathbf{J}_2^m] = 0 \forall l, m$. Esto muestra que los espinores de cuatro componentes (de Dirac) $\Phi_{\epsilon\tau}$ forman una base para una representación completamente reducible del grupo $SU(2) \otimes SU(2)$.

De la ecuación (3.16) y la definición de \mathbf{P}_ϵ , un operador que actúa en un subespacio de espinores de energía definida ϵ se puede descomponer en términos de una base de operadores con cuatro elementos $\mathbf{V}_\epsilon^k = \{\mathbf{P}_\epsilon, \bar{\mathbf{J}}_\epsilon\}$, $k = 0, 1, 2, 3$. De esta manera, es

posible desarrollar $\Phi_{\epsilon\tau}(\mathfrak{s})\bar{\Phi}_{\epsilon\tau'}(\mathfrak{s}')$ como

$$\Phi_{\epsilon\tau}(\mathfrak{s})\bar{\Phi}_{\epsilon\tau'}(\mathfrak{s}') = \sum_k -(-1)^\epsilon c_{\epsilon\tau\tau'}^k \mathbf{V}_\epsilon^k, \quad (3.17)$$

donde no hay suma sobre los índices ϵ , y los coeficientes $c_{\epsilon\tau\tau'}^k = c_{\epsilon\tau\tau'}^k(\mathfrak{s}, \mathfrak{s}')$ se obtendrán como establece la expresión $c_{\epsilon\tau\tau'}^k(\mathfrak{s}, \mathfrak{s}') = -(-1)^\epsilon \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{V}_\epsilon^k \Phi_{\epsilon\tau}(\mathfrak{s})\bar{\Phi}_{\epsilon\tau'}(\mathfrak{s}')$. Existe una representación de las matrices gama en la cual las ecuaciones (3.14) se reducen a las ecuaciones propias de dos componentes $\frac{1}{2}\hat{\mathfrak{s}} \cdot \bar{\sigma} \phi_{\epsilon\tau} = (-1)^{\epsilon+\tau} \frac{1}{2} \phi_{\epsilon\tau}$ y, si utilizamos la parametrización $\hat{\mathfrak{s}} = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$ para el vector de espín de tres componentes en reposo, los coeficientes se pueden obtener de manera sencilla hasta una fase global

$$\begin{aligned} c_{111}^0 &= c_{222}^0 = c_{122}^{0*} = c_{211}^{0*} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\vartheta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \cos \frac{\vartheta'}{2} e^{i\frac{\varphi'}{2}} + \sin \frac{\vartheta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} \sin \frac{\vartheta'}{2} e^{-i\frac{\varphi'}{2}} \right), \\ c_{111}^1 &= c_{222}^1 = -c_{122}^{1*} = -c_{211}^{1*} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\vartheta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \sin \frac{\vartheta'}{2} e^{-i\frac{\varphi'}{2}} + \sin \frac{\vartheta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} \cos \frac{\vartheta'}{2} e^{i\frac{\varphi'}{2}} \right), \\ c_{111}^2 &= c_{222}^2 = -c_{122}^{2*} = -c_{211}^{2*} = \frac{i}{2} \left(\cos \frac{\vartheta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \sin \frac{\vartheta'}{2} e^{-i\frac{\varphi'}{2}} - \sin \frac{\vartheta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} \cos \frac{\vartheta'}{2} e^{i\frac{\varphi'}{2}} \right), \\ c_{111}^3 &= c_{222}^3 = -c_{122}^{3*} = -c_{211}^{3*} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\vartheta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \cos \frac{\vartheta'}{2} e^{i\frac{\varphi'}{2}} - \sin \frac{\vartheta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} \sin \frac{\vartheta'}{2} e^{-i\frac{\varphi'}{2}} \right), \\ c_{121}^0 &= c_{212}^0 = -c_{112}^{0*} = -c_{221}^{0*} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\vartheta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} \sin \frac{\vartheta'}{2} e^{-i\frac{\varphi'}{2}} - \sin \frac{\vartheta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \cos \frac{\vartheta'}{2} e^{i\frac{\varphi'}{2}} \right), \\ c_{121}^1 &= c_{212}^1 = c_{112}^{1*} = c_{221}^{1*} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\vartheta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} \cos \frac{\vartheta'}{2} e^{i\frac{\varphi'}{2}} - \sin \frac{\vartheta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \sin \frac{\vartheta'}{2} e^{-i\frac{\varphi'}{2}} \right), \\ c_{121}^2 &= c_{212}^2 = c_{112}^{2*} = c_{221}^{2*} = -\frac{i}{2} \left(\cos \frac{\vartheta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} \cos \frac{\vartheta'}{2} e^{i\frac{\varphi'}{2}} + \sin \frac{\vartheta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \sin \frac{\vartheta'}{2} e^{-i\frac{\varphi'}{2}} \right), \\ c_{121}^3 &= c_{212}^3 = c_{112}^{3*} = c_{221}^{3*} = -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\vartheta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} \sin \frac{\vartheta'}{2} e^{-i\frac{\varphi'}{2}} + \sin \frac{\vartheta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \cos \frac{\vartheta'}{2} e^{i\frac{\varphi'}{2}} \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

La expresión (3.17) se puede escribir de manera que la covarianza sea explícita

$$\Phi_{\epsilon\tau}(\mathfrak{s})\bar{\Phi}_{\epsilon\tau'}(\mathfrak{s}') = -(-1)^\epsilon \check{c} \cdot q + \not{\epsilon} - (-1)^\epsilon i \gamma^5 \sigma^{\mu\nu} q_\mu \not{c}_\nu + \gamma^5 \not{c}, \quad (3.19)$$

con los 4-vectores $\check{c}^\mu = \check{c}^\mu(\epsilon, \tau, \tau') = \frac{1}{2}(c_{\epsilon\tau\tau'}^0, \bar{0})$, $\not{c}^\mu = \not{c}^\mu(\epsilon, \tau, \tau') = \frac{1}{2}(0, c_{\epsilon\tau\tau'}^1, c_{\epsilon\tau\tau'}^2, c_{\epsilon\tau\tau'}^3)$

$$y q^\mu = \frac{q^\mu + q'^\mu}{2}.$$

El desarrollo del operador $\Phi_{\epsilon\tau}(\mathfrak{s})\bar{\Phi}_{\epsilon'\tau'}(\mathfrak{s}')$, para $\epsilon \neq \epsilon'$, se puede obtener haciendo uso del operador γ^5 . Después de multiplicar la primera ecuación en (3.10) por γ^5 , la energía cambia de signo pero el valor propio del espín lo mantiene

$$\begin{aligned} \not{q} \gamma^5 \Phi_{\epsilon\tau}(\mathfrak{s}) &= (-1)^\epsilon \gamma^5 \Phi_{\epsilon\tau}(\mathfrak{s}), \\ \bar{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathfrak{s}} \gamma^5 \Phi_{\epsilon\tau}(\mathfrak{s}) &= (-1)^{\epsilon+\tau} \frac{1}{2} \gamma^5 \Phi_{\epsilon\tau}(\mathfrak{s}). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Uno puede notar que, hasta una fase no física, los operadores (3.19) transforman con γ^5 como

$$\begin{aligned} \gamma^5 \Phi_{11}(\mathfrak{s}) \bar{\Phi}_{1\tau'}(\mathfrak{s}') &\rightarrow \Phi_{22}(\mathfrak{s}) \bar{\Phi}_{1\tau'}(\mathfrak{s}'), \\ \gamma^5 \Phi_{12}(\mathfrak{s}) \bar{\Phi}_{1\tau'}(\mathfrak{s}') &\rightarrow \Phi_{21}(\mathfrak{s}) \bar{\Phi}_{1\tau'}(\mathfrak{s}'), \\ \Phi_{1\tau}(\mathfrak{s}) \bar{\Phi}_{11}(\mathfrak{s}') \gamma^5 &\rightarrow -\Phi_{1\tau}(\mathfrak{s}) \bar{\Phi}_{22}(\mathfrak{s}'), \\ \Phi_{1\tau}(\mathfrak{s}) \bar{\Phi}_{12}(\mathfrak{s}') \gamma^5 &\rightarrow -\Phi_{1\tau}(\mathfrak{s}) \bar{\Phi}_{21}(\mathfrak{s}'). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Es importante notar que las ecuaciones (3.13), (3.18) and (3.19) no tienen fases arbitrarias; esto es importante cuando uno está interesado en las fases relativas de un proceso con muchas partículas.

Como una aplicación elemental de las expresiones (3.13) y (3.19), podemos escribir la amplitud de transición para un operador vectorial $\mathbf{\Gamma} = v_\mu \gamma^\mu$, para espinores de la misma energía, como

$$\begin{aligned}
M(\epsilon, p', \tau', s', \epsilon, p, \tau, s) = & \\
= \frac{1}{4mm'} \sqrt{\frac{2m'}{E' + m'}} \sqrt{\frac{2m}{E + m}} & \left(-(-1)^\epsilon \check{c} \cdot q(-1)^{\tau'} i[s'p'vp] - (-1)^{\tau'+\epsilon+\tau} m\langle p's'vs \rangle - (-1)^\tau i[p'vsp] - (-1)^\epsilon m p' \cdot v + \right. \\
& -(-1)^\epsilon m' p \cdot v + (-1)^{\tau'+\tau+\epsilon} m' \langle s'vps \rangle - (-1)^{\tau'+\tau} \langle \check{c}p's'vps \rangle + (-1)^{\tau'+\epsilon} im[\check{c}p's'v] + \langle \check{c}p'vp \rangle - (-1)^{\epsilon+\tau} im[\check{c}p'vs] + \\
& -(-1)^{\tau'+\epsilon} im'[\check{c}s'vp] + (-1)^{\tau'+\tau} m'm \langle \check{c}s'vs \rangle - (-1)^{\tau+\epsilon} im'[\check{c}vps] + m'm \check{c} \cdot v - (-1)^{\tau'+\tau} i[[\check{c}p's'vps]] + i[\check{c}p'vp] + \\
& +(-1)^{\tau'+\epsilon} m \langle \check{c}p's'v \rangle - (-1)^{\epsilon+\tau} m \langle \check{c}p'vs \rangle - (-1)^{\tau'+\epsilon} m' \langle \check{c}s'vp \rangle + (-1)^{\tau'+\tau} im'm[\check{c}s'vs] - (-1)^{\tau+\epsilon} m' \langle \check{c}vps \rangle + \\
& +(-1)^\epsilon ((-1)^{\tau'} \langle \langle q\check{c}p's'vp \rangle \rangle - (-1)^{\epsilon+\tau'+\tau} im[[q\check{c}p's'vs]] + (-1)^\tau \langle \langle q\check{c}p'vps \rangle \rangle + (-1)^{\tau'+\epsilon+\tau} im'[[\check{c}s'vps]] + \\
& \left. -(-1)^\epsilon im[q\check{c}p'v] - (-1)^{\tau'} m'm \langle q\check{c}s'v \rangle - (-1)^\epsilon im'[q\check{c}vp] + (-1)^\tau m'm \langle q\check{c}vs \rangle \right), \tag{3.22}
\end{aligned}$$

con la notación $[abcd] = \varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} a^{\mu_1} b^{\mu_2} c^{\mu_3} d^{\mu_4}$, $[[abcdef]] = -a \cdot b[cdef] + a \cdot c[bdef] - b \cdot c[adef] + d \cdot e[abcf] - d \cdot f[abce] + e \cdot f[abcd]$, $\langle abcd \rangle = a \cdot b \cdot c \cdot d - a \cdot c \cdot b \cdot d + a \cdot d \cdot b \cdot c$, $\langle \langle abcdef \rangle \rangle = a \cdot b \langle cdef \rangle - a \cdot c \langle bdef \rangle + a \cdot d \langle bcef \rangle - a \cdot e \langle bcdf \rangle + a \cdot f \langle bcde \rangle$. Sin embargo, usando las fórmulas (3.13), (3.18), (3.19) y (3.21), es posible realizar los cálculos analíticos para cualquier amplitud de transición mediante una metodología sistematizada. Sin embargo, estas fórmulas son un caso particular de un método proyectivo mucho más general.

3.3. El método proyectivo general.

Cuando uno trata un cálculo analítico de una amplitud, como el que muestra la ecuación (3.13), implementar una base específica puede ser útil para optimizar el procedimiento en general. Particularmente, la base en reposo es una herramienta poderosa para obtener una amplitud dependiente de espín. Un término de interacción específico Γ podría ser tratado de manera exitosa con la elección de una base espinorial adecuada. Tal base se usará en la generalización de la fórmula (3.13)

$$M(\alpha' p', \beta' s', \alpha p, \beta s) = \tag{3.23}$$

$$\sum_{rr'} \kappa_r \kappa_{r'} c_{r'}^*(Q', S'; \alpha' p', \beta' s') c_r(Q, S; \alpha p, \beta s) \text{tr } \omega_r(Q, S) \bar{\omega}_{r'}(Q', S') \Gamma,$$

donde los espinores $\omega_r(Q, S)$ fueron definidos en la sección 3.1 y la notación de los proyectores de espín-energía es usada, con

$$\begin{aligned} c_r(Q, S; +p, \beta s) &= \bar{\omega}_r(Q, S) u(p, \beta s), \\ c_r(Q, S; -p, \beta s) &= \bar{\omega}_r(Q, S) v(p, \beta s). \end{aligned} \tag{3.24}$$

La fórmula (3.23) refleja la propiedad central del método proyectivo. A pesar de que fue escrita para una base espinorial general, muestra que la cantidad de trabajo requerido se puede reducir, además de que las expresiones finales serán explícitamente covariantes. En lugar de trabajar con el módulo cuadrado de la amplitud $|M|^2$, la fórmula (3.23) nos permite utilizar la amplitud de transición M en sí, sin hacer uso de cantidades no físicas o no involucradas directamente con el problema, y utilizando una descomposición de la amplitud de transición original en términos de las amplitudes elementales $\bar{\omega}_{r'}(Q', S') \Gamma \omega_r(Q, S)$. En las siguientes secciones veremos cómo se puede emplear esta metodología para formular las técnicas de cálculo basadas en espinores de Weyl y de helicidad.

3.4. Abordar la técnica de espinores de Weyl mediante el método proyectivo.

Una base completa de espinores de Dirac posee la simetría dada por el operador γ^5 . Multiplicando las ecuaciones (3.3) por γ^5 uno muestra que el espinor $\gamma^5 \omega_r(Q, S)$ también es solución de las mismas ecuaciones. En realidad el espinor $\gamma^5 \omega_r(Q, S)$ corresponde a una energía de signo κ_r con signo de espín $-\delta_r$, en la forma

$$\not{p} \gamma^5 \omega_r(Q, S) = -\kappa_r \not{m} \gamma^5 \omega_r(Q, S), \quad \gamma^5 \not{\epsilon} \gamma^5 \omega_r(Q, S) = -\eta_r \gamma^5 \omega_r(Q, S), \tag{3.25}$$

con $\kappa_r = +1$, $\eta_r = +1$ para $r = 1, 2$ y $\kappa_r = -1$, $\eta_r = -1$ para $r = 3, 4$. Esto es una consecuencia de la transformación CPT sobre la parte espinorial de la

función de onda (3.2). Nada impide que se use un conjunto de 8 espinores masivos $\{\omega_r(Q, S), \gamma^5 \omega_r(Q, S)\}$, linealmente dependientes, para formar una base sobre-completa [273].

Existe más de una forma para reducir este conjunto a una base completa. Por ejemplo, las combinaciones lineales $\omega_r(Q, S) \pm \gamma^5 \omega_{r+2}(Q, S)$, con $r = 1, 2$, forman una base completa. Sin embargo, unas combinaciones lineales particularmente útiles son

$$W_\lambda^{(r)} = W_\lambda^{(r)}(Q, S) = \frac{1}{2} (1 + \lambda \gamma^5) \omega_r(Q, S), \quad (3.26)$$

con $\lambda = \pm 1$. Los ocho estados (3.26) ya no son estados propios de la ecuación (3.6), sin embargo ahora cumplen

$$\gamma^5 W_\lambda^{(r)} = \lambda W_\lambda^{(r)}, \quad (3.27)$$

y con una elección adecuada de los factores de fase, tienen las propiedades no triviales de ortogonalidad

$$\bar{W}_{\lambda'}^{(r')} W_\lambda^{(r)} = \frac{\kappa_r}{2} \delta_{-\lambda' \lambda} (\delta_{r' r} + \lambda (\delta_{r' r+2} + \delta_{r'+2 r})). \quad (3.28)$$

Las ecuaciones (3.26), (3.27) y (3.28) sugieren que se puede realizar una descomposición del espacio espinorial masivo en términos de dos espacios complementarios. Este enfoque salta a la vista cuando uno reinterpreta la ecuación (3.26) como el resultado de usar los operadores de proyección quiral $\mathbf{p}_\lambda = \frac{1+\lambda\gamma^5}{2}$ sobre el estado $\omega_r(Q, S)$. Efectivamente, un operador \mathbf{O} se puede escribir como la suma directa de dos operadores, los cuales actúan, por separado, sobre los subespacios \mathbf{p}_λ y $\mathbf{p}_{-\lambda}$. Esto se puede ver explícitamente en cada una de las descomposiciones de los operadores covariantes

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &\rightarrow \mathbf{s} \mathbf{p}_\lambda + \mathbf{s} \mathbf{p}_{-\lambda}, \\ \mathbf{p} \gamma^5 &\rightarrow \mathbf{p} \mathbf{p}_\lambda \gamma^5 \mathbf{p}_\lambda + \mathbf{p} \mathbf{p}_{-\lambda} \gamma^5 \mathbf{p}_{-\lambda}, \\ v_\mu \gamma^\mu &\rightarrow v_\mu \mathbf{p}_{-\lambda} \gamma^\mu \mathbf{p}_\lambda + v_\mu \mathbf{p}_\lambda \gamma^\mu \mathbf{p}_{-\lambda}, \\ a_\mu \gamma^5 \gamma^\mu &\rightarrow a_\mu \mathbf{p}_{-\lambda} \gamma^5 \gamma^\mu \mathbf{p}_\lambda + a_\mu \mathbf{p}_\lambda \gamma^5 \gamma^\mu \mathbf{p}_{-\lambda}, \\ \Omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} &\rightarrow \Omega_{\mu\nu} \mathbf{p}_\lambda \sigma^{\mu\nu} \mathbf{p}_\lambda + \Omega_{\mu\nu} \mathbf{p}_{-\lambda} \sigma^{\mu\nu} \mathbf{p}_{-\lambda}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

y esto quiere decir que dos bases independientes se pueden construir, una para cada subespacio.

Denotaremos un estado propio general de la ecuación (3.27) como π_λ^ζ . La base respectiva será generada cuando la ecuación para el número cuántico ζ se encuentre y la degeneración de los estados π_λ^ζ sea eliminada. Dado el conmutador $[\alpha^i, \gamma^5] = 0$, uno puede imponer la ecuación

$$\bar{\mathbf{k}} \cdot \bar{\alpha} \pi_\lambda^\zeta = \zeta k_0 \pi_\lambda^\zeta, \quad (3.30)$$

donde $k^2 = (\zeta k_0)^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 = 0$, $k_0 > 0$ y $\zeta = \pm 1$. La ecuación (3.30) se conoce como la ecuación de Weyl y puede ser interpretada como una restricción dinámica sobre los espinores $\pi_\lambda^\zeta = \pi_\lambda^\zeta(k)$. Dada la condición $k^2 = 0$, es común usar el término *espinores no masivos* para designar a los estados π_λ^ζ .

Como consecuencia de lo anterior, usando los espinores $\pi_\lambda^{+1}, \pi_\lambda^{-1}$ se puede construir una base para el subespacio \mathbf{p}_λ , mientras que el subespacio $\mathbf{p}_{-\lambda}$ tendrá la base $\pi_{-\lambda}^{+1}, \pi_{-\lambda}^{-1}$. No obstante, las reglas de ortogonalidad ahora toman la forma

$$\bar{\pi}_{\lambda'}^{\zeta'} \pi_\lambda^\zeta = \frac{1}{2} \delta_{\zeta'\zeta} \delta_{-\lambda'\lambda}, \quad (3.31)$$

donde hemos usado la normalización de los estados (3.26), implicando así que el desarrollo de cualquier operador definido en cualquiera de los dos subespacios será

$$\mathbf{O}_\lambda = \sum_{\zeta'\zeta} C_{\lambda\zeta'\zeta}^{\mathbf{O}} \pi_\lambda^{\zeta'} \bar{\pi}_{-\lambda}^\zeta. \quad (3.32)$$

Los signos λ distintos en los espinores de la expresión (3.32) son necesarios para cumplir con la relación (3.31). Esto es una evidencia de que para poder desarrollar tanto el operador \mathbf{O} (actuando sobre el espacio espinorial masivo), como el espinor $\omega_r(Q, S)$, se requieren los cuatro espinores de Weyl π_λ^ζ . La razón principal detrás de la forma de la ecuación (3.32) se encuentra en la estructura que tiene la relación de ortogonalidad entre los espinores. La covarianza de la ecuación (3.31) introduce el operador γ^0 , el cual no conmuta con γ^5 .

Entonces, una expresión covariante para el desarrollo de un espinor w en términos de espinores de Weyl es

$$w = 2 \sum_{\zeta} \pi_{\lambda}^{\zeta} \bar{\pi}_{-\lambda}^{\zeta} w + 2 \sum_{\zeta} \pi_{-\lambda}^{\zeta} \bar{\pi}_{\lambda}^{\zeta} w, \quad (3.33)$$

donde w puede ser un espinor masivo o sin masa.

La ecuación (3.33) es útil para elegir una base completa a partir de los ocho estados propios (3.25) pero, como se puede ver, no hay una manera única de hacer esto. La ecuación (3.29) puede ayudar en esta labor. La combinación de cantidades dinámicas $k_{\mathfrak{t}} = p + \mathfrak{t} m s$, con $\mathfrak{t} = \pm 1$, son dos 4-vectores luminoides no ortogonales. Si uno aplica los operadores $\not{k}_{\mathfrak{t}}$ a los estados (3.25), se obtiene

$$\not{k}_{\mathfrak{t}} W_{\lambda}^{(r)} = (\not{p} + \mathfrak{t} m \not{s}) W_{\lambda}^{(r)} = m (\kappa_r - \lambda \mathfrak{t} \eta_r) W_{-\lambda}^{(r)}. \quad (3.34)$$

Una propiedad notable de los operadores $\not{k}_{\mathfrak{t}}$ se observa en el lado derecho de la ecuación (3.34), puesto que imponiendo la condición $\kappa_r - \lambda \mathfrak{t} \eta_r = 0$, es posible establecer una ecuación del tipo Weyl sobre los estados (3.25).

Por ejemplo, si escogemos explícitamente la base $W_{\lambda}^{(R)}$ con $R = 1, 2$, dos de los espinores, $W_{+1}^{(1)}$ y $W_{-1}^{(2)}$, satisfacen una ecuación de Weyl con \not{k}_{+1} , mientras los otros dos, $W_{-1}^{(1)}$ y $W_{+1}^{(2)}$, cumplen con una ecuación similar con \not{k}_{-1} . Se pueden hacer otras selecciones, por ejemplo la que se encuentra en la referencia [256]. Podemos cambiar la etiqueta $(R) \rightarrow R$, para que de esta manera las reglas de ortogonalidad entre los espinores se reduzcan a

$$\bar{W}_{\lambda'}^R W_{\lambda}^R = \frac{1}{2} \delta_{R'R} \delta_{-\lambda'\lambda}. \quad (3.35)$$

El desarrollo de cualquier espinor w , masivo o sin masa, se puede escribir como

$$w = 2 \sum_R W_{\lambda}^R \bar{W}_{-\lambda}^R w + 2 \sum_R W_{-\lambda}^R \bar{W}_{\lambda}^R w. \quad (3.36)$$

Como aplicación elemental de la fórmula (3.36), los espinores de Dirac en términos

de espinores no masivos se escriben

$$\begin{aligned}
u(p, s) &= W_{+1}^1 + W_{-1}^1, \\
u(p, -s) &= W_{+1}^2 + W_{-1}^2, \\
v(p, -s) &= W_{+1}^1 - W_{-1}^1, \\
v(p, s) &= W_{+1}^2 - W_{-1}^2,
\end{aligned} \tag{3.37}$$

donde se han usado las mismas variables dinámicas $Q = p$, $S = s$ en la fórmula (3.36); esto quiere decir que $W_\lambda^R = W_\lambda^R(q, s)$ en la expresión (3.37). Otra aplicación de la fórmula (3.36) es la expresión para una amplitud de transición con una interacción de tipo vectorial, $\mathbf{\Gamma} = v_\mu \gamma^\mu$, en términos de espinores de Weyl

$$M(r', p', s', r, p, s) = v_\mu \left(\bar{W}_{+1}^{\rho'} \gamma^\mu W_{+1}^\rho + \kappa_{r'} \kappa_r \bar{W}_{-1}^{\rho'} \gamma^\mu W_{-1}^\rho \right), \tag{3.38}$$

con $\rho = r + \kappa_r - 1$, y $W_{\lambda'}^{\rho'} = W_{\lambda'}^{\rho'}(p', s')$. Un procedimiento similar al usado en la sección 3.2.1 se puede aplicar para obtener fórmulas cerradas para los términos $\bar{W}_\lambda^{\rho'} \gamma^\mu W_\lambda^\rho$, sin embargo, es conveniente usar una forma explícita de los espinores W_λ^ρ y calcularlos directamente, lo cual no haremos aquí.

3.5. Abordar la técnica de espinores de helicidad mediante el método proyectivo.

Un espinor de helicidad [274] $w_\kappa^h(p, s_h)$, con signo de la energía $\kappa = \pm 1$, se define a través de las ecuaciones

$$\not{p} w_\kappa^h(p, s_h) = \kappa m w_\kappa^h(p, s_h), \quad \frac{\bar{\mathbf{p}} \cdot \bar{\Sigma}}{|\bar{\mathbf{p}}|} w_\kappa^h(p, s_h) = h w_\kappa^h(p, s_h), \tag{3.39}$$

con $\Sigma^k = \epsilon^{klm} \sigma^{lm}$, el signo de la helicidad $h \pm 1$, y el 4-vector de espín-helicidad

$$s_h = \left(\frac{|\bar{\mathbf{p}}|}{m}, \frac{\mathbf{E}}{m} \hat{\mathbf{p}} \right). \tag{3.40}$$

La segunda ecuación en (3.39) no es covariante y uno debe ser precavido al emplearla. Esta ecuación se puede escribir de una forma aparentemente covariante

$$\gamma^5 \not{s}_h w_\kappa^h(p, s_h) = \kappa h w_\kappa^h(p, s_h), \quad (3.41)$$

en cuya deducción se han empleado las dos ecuaciones en (3.39). Si uno sólo contempla las transformaciones de Lorentz que no invierten la dirección del ímpetu \bar{p} , la ecuación (3.41) es una expresión covariante. El análisis que sigue se restringe a este caso.

Es útil definir la base asociada en reposo de helicidad para un espinor de helicidad $w_\kappa^h(p, s_h)$

$$\Phi_\kappa^h(\hat{p}) = S(\bar{\beta}) w_\kappa^h(p, s_h) = \left(\cosh \frac{\chi}{2} - h \gamma^5 \sinh \frac{\chi}{2} \right) w_\kappa^h(p, s_h). \quad (3.42)$$

Se puede establecer una correspondencia entre las notaciones de las bases $\Phi_\kappa^h(\hat{p})$ y $\Phi_{\epsilon\tau}(\hat{p})$ en la forma $\Phi_{11} \rightarrow \Phi_{+1}^+$, $\Phi_{12} \rightarrow \Phi_{+1}^-$, $\Phi_{21} \rightarrow \Phi_{-1}^-$, $\Phi_{22} \rightarrow \Phi_{-1}^+$. La definición (3.42) nos permite escribir la amplitud de transición para un operador Γ , para estados de helicidad final $w_{\kappa'}^h(p', s'_h)$ e inicial $w_\kappa^h(p, s_h)$ como

$$\begin{aligned} M(\kappa' p', s'_h, \kappa p, s) = & \cosh \frac{\chi'}{2} \cosh \frac{\chi}{2} M_{\kappa'\kappa}^{h'h} + h' \sinh \frac{\chi'}{2} \cosh \frac{\chi}{2} M_{-\kappa'\kappa}^{h'h} + h \cosh \frac{\chi'}{2} \sinh \frac{\chi}{2} M_{\kappa'-\kappa}^{h'h} + \\ & + h' h \sinh \frac{\chi'}{2} \sinh \frac{\chi}{2} M_{-\kappa'-\kappa}^{h'h}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

donde se ha usado la notación $M_{\kappa'\kappa}^{h'h} = \bar{\Phi}_{\kappa'}^{h'} \Gamma \Phi_\kappa^h$ y la transformación CPT (ver ecuación (3.20)).

Los elementos $M_{\kappa'\kappa}^{h'h}$ se pueden obtener usando el formalismo desarrollado en la sección (3.2), en particular usando las fórmulas (3.19) y (3.21). Por ejemplo, cuando se usa la fórmula (3.43) para calcular una amplitud con una interacción vectorial,

$\Gamma = v_\mu \gamma^\mu$, obtenemos

$$M(\kappa p', s'_{h'}, \kappa p, s_h) = 4 \left(\cosh \frac{\chi'}{2} \cosh \frac{\chi}{2} \check{c}(\epsilon_\kappa, \tau_{\kappa h}, \tau_{\kappa h'}) \cdot v + h' \sinh \frac{\chi'}{2} \cosh \frac{\chi}{2} \check{c}(\epsilon_\kappa, \tau_{\kappa h}, \tau_{\kappa h'}) \cdot v + \right. \\ \left. + h \cosh \frac{\chi'}{2} \sinh \frac{\chi}{2} \check{c}(\epsilon_\kappa, \tau_{\kappa h}, \tau_{\kappa h'}) \cdot v + h' h \sinh \frac{\chi'}{2} \sinh \frac{\chi}{2} \check{c}(\epsilon_{-\kappa}, \tau_{-\kappa h}, \tau_{-\kappa h'}) \cdot v \right), \quad (3.44)$$

$$M(-\kappa p', s'_{h'}, \kappa p, s_h) = 4 \left(\cosh \frac{\chi'}{2} \cosh \frac{\chi}{2} \check{c}(\epsilon_\kappa, \tau_{\kappa h}, \tau_{\kappa h'}) \cdot v + h' \sinh \frac{\chi'}{2} \cosh \frac{\chi}{2} \check{c}(\epsilon_\kappa, \tau_{\kappa h}, \tau_{\kappa h'}) \cdot v + \right. \\ \left. + h \cosh \frac{\chi'}{2} \sinh \frac{\chi}{2} \check{c}(\epsilon_{-\kappa}, \tau_{-\kappa h}, \tau_{-\kappa h'}) \cdot v + h' h \sinh \frac{\chi'}{2} \sinh \frac{\chi}{2} \check{c}(\epsilon_\kappa, \tau_{\kappa h}, \tau_{\kappa h'}) \cdot v \right), \quad (3.45)$$

con $\epsilon_\kappa = \frac{3-\kappa}{2}$ y $\tau_{\kappa h} = \frac{3-\kappa h}{2}$.

La fórmula (3.42) se puede utilizar para expresar un espinor general $\omega_r(Q, S)$ en términos de la base asociada en reposo de helicidad

$$\omega_r(Q, S) = \kappa_r \left(\left(\cosh \frac{\chi}{2} K_{\kappa_r r}^h + h \sinh \frac{\chi}{2} K_{-\kappa_r r}^h \right) \left(\cosh \frac{\chi}{2} \Phi_{\kappa_r}^h + h \sinh \frac{\chi}{2} \Phi_{-\kappa_r}^h \right) + \right. \\ \left. + \left(\cosh \frac{\chi}{2} K_{\kappa_r r}^{-h} - h \sinh \frac{\chi}{2} K_{-\kappa_r r}^{-h} \right) \left(\cosh \frac{\chi}{2} \Phi_{\kappa_r}^{-h} - h \sinh \frac{\chi}{2} \Phi_{-\kappa_r}^{-h} \right) \right), \quad (3.46)$$

donde la base espinorial de helicidad w_κ^h posee el mismo 4-vector de ímpetu $q^\mu = Q^\mu = (Q_0, \bar{Q})$, y $K_{\kappa_r r}^h = \bar{\Phi}_{\kappa_r}^h(\hat{Q})\omega_r(Q, S)$. En la práctica, es más fácil evaluar los símbolos $K_{\kappa_r r}^h$ directamente, usando alguna representación particular de los espinores.

Por último, la siguiente fórmula muestra una amplitud de transición para estados generales de espín para un operador de interacción arbitrario Γ en términos de estados

de helicidad

$$\begin{aligned}
M(r', p', s', r, p, s) = & \kappa_{r'} \kappa_r \left(a_{\kappa_{r'} r'}^{h'}(\chi') a_{\kappa_r r}^h(\chi) \left(\cosh \frac{\chi'}{2} \cosh \frac{\chi}{2} M_{\kappa_{r'} \kappa_r}^{h' h} + h' \sinh \frac{\chi'}{2} \cosh \frac{\chi}{2} M_{-\kappa_{r'} \kappa_r}^{h' h} + \right. \right. \\
& + h \cosh \frac{\chi'}{2} \sinh \frac{\chi}{2} M_{\kappa_{r'} - \kappa_r}^{h' h} + h' h \sinh \frac{\chi'}{2} \sinh \frac{\chi}{2} M_{-\kappa_{r'} - \kappa_r}^{h' h} \left. \right) + a_{\kappa_{r'} r'}^{-h'}(\chi') a_{\kappa_r r}^h(\chi) \left(\cosh \frac{\chi'}{2} \cosh \frac{\chi}{2} M_{\kappa_{r'} \kappa_r}^{-h' h} - \right. \\
& - h' \sinh \frac{\chi'}{2} \cosh \frac{\chi}{2} M_{-\kappa_{r'} \kappa_r}^{-h' h} + h \cosh \frac{\chi'}{2} \sinh \frac{\chi}{2} M_{\kappa_{r'} - \kappa_r}^{-h' h} - h' h \sinh \frac{\chi'}{2} \sinh \frac{\chi}{2} M_{-\kappa_{r'} - \kappa_r}^{-h' h} \left. \right) + \\
& + a_{\kappa_{r'} r'}^{h'}(\chi') a_{\kappa_r r}^{-h}(\chi) \left(\cosh \frac{\chi'}{2} \cosh \frac{\chi}{2} M_{\kappa_{r'} \kappa_r}^{h' - h} + h' \sinh \frac{\chi'}{2} \cosh \frac{\chi}{2} M_{-\kappa_{r'} \kappa_r}^{h' - h} - h \cosh \frac{\chi'}{2} \sinh \frac{\chi}{2} M_{\kappa_{r'} - \kappa_r}^{h' - h} - \right. \\
& - h' h \sinh \frac{\chi'}{2} \sinh \frac{\chi}{2} M_{-\kappa_{r'} - \kappa_r}^{h' - h} \left. \right) + a_{\kappa_{r'} r'}^{-h'}(\chi') a_{\kappa_r r}^{-h}(\chi) \left(\cosh \frac{\chi'}{2} \cosh \frac{\chi}{2} M_{\kappa_{r'} \kappa_r}^{-h' - h} - h' \sinh \frac{\chi'}{2} \cosh \frac{\chi}{2} M_{-\kappa_{r'} \kappa_r}^{-h' - h} - \right. \\
& \left. - h \cosh \frac{\chi'}{2} \sinh \frac{\chi}{2} M_{\kappa_{r'} - \kappa_r}^{-h' - h} + h' h \sinh \frac{\chi'}{2} \sinh \frac{\chi}{2} M_{-\kappa_{r'} - \kappa_r}^{-h' - h} \right) \Big),
\end{aligned} \tag{3.47}$$

donde se ha usado la notación $a_{\kappa_r r}^h(\chi) = \cosh \frac{\chi}{2} K_{\kappa_r r}^h + h \sinh \frac{\chi}{2} K_{-\kappa_r r}^h$.

3.6. Cálculo de la amplitud para la dispersión de Compton.

Mostramos a continuación, usando las técnicas espinoriales y la expresión (2.24), el valor analítico de la amplitud para el proceso de Compton con distintas bases.

3.6.1. El método de espinores de helicidad.

Usando las fórmulas (3.18) y (3.44), la amplitud de helicidad para este proceso es

$$\begin{aligned}
M(p', s'_h, p, s_h) = & -4ie^2 \left(\cosh \frac{\chi'}{2} \cosh \frac{\chi}{2} (\check{c}(1, \tau_{+1h}, \tau_{+1h'}) \cdot \mathbb{V} - \mathfrak{c}(1, \tau_{+1h}, \tau_{+1h'}) \cdot \mathbb{A}) + \right. \\
& + h' \sinh \frac{\chi'}{2} \cosh \frac{\chi}{2} (\mathfrak{c}(1, \tau_{+1h}, \tau_{+1h'}) \cdot \mathbb{V} - \check{c}(1, \tau_{+1h}, \tau_{+1h'}) \cdot \mathbb{A}) + \\
& + h \cosh \frac{\chi'}{2} \sinh \frac{\chi}{2} (\mathfrak{c}(1, \tau_{+1h}, \tau_{+1h'}) \cdot \mathbb{V} - \check{c}(1, \tau_{+1h}, \tau_{+1h'}) \cdot \mathbb{A}) + \\
& \left. + h' h \sinh \frac{\chi'}{2} \sinh \frac{\chi}{2} (\check{c}(2, \tau_{-1h}, \tau_{-1h'}) \cdot \mathbb{V} - \mathfrak{c}(2, \tau_{-1h}, \tau_{-1h'}) \cdot \mathbb{A}) \right).
\end{aligned} \tag{3.48}$$

En la ecuación (3.48) se pueden observar tres partes bien diferenciadas: los elementos cinemáticos relativistas presentes en las funciones hiperbólicas, las direcciones de espín presentes en los términos ζ^μ , $\check{\zeta}^\mu$ y los elementos dinámicos \mathbb{V}^μ , \mathbb{A}^μ que contienen la información propia de la dispersión. Esta separación podría ser útil, por ejemplo, analizando regiones cinemáticas de interés, como la del límite de alta energía del centro de masa, para la cual el proceso preserva helicidad. Si uno hace las aproximaciones $\cosh \frac{\chi}{2} \approx \cosh \frac{\chi'}{2}$ y $\sinh \frac{\chi}{2} \approx \sinh \frac{\chi'}{2}$ en la ecuación (3.48), se obtiene fácilmente el resultado conocido $M(p', s'_{-h}, p, s_h) = 0$. Existen varios sistemas para los cuales este límite es relevante, por ejemplo los de las fuentes de luz por efecto Compton inverso (los detalles de esta máquina se encuentran en sitios diversos, por ejemplo en [275]). Entonces, en este límite la ecuación (3.48) queda

$$M(p', s'_h, p, s_h) = -4ie^2 (\cosh \chi (\check{\zeta}(1, \tau_{+1h}, \tau_{+1h}) \cdot \mathbb{V} - \zeta(1, \tau_{+1h}, \tau_{+1h}) \cdot \mathbb{A}) + h \sinh \chi (\zeta(1, \tau_{+1h}, \tau_{+1h}) \cdot \mathbb{V} - \check{\zeta}(1, \tau_{+1h}, \tau_{+1h}) \cdot \mathbb{A})) . \quad (3.49)$$

Usando las expresiones (2.24), (2.25), (2.26) y la fórmula (3.47), la amplitud para direcciones generales de espín se escribe

$$M(r', p', s', r, p, s) = \left(a_{+1r'}^{h'}(\chi') a_{+1r}^h(\chi) \left(\cosh \frac{\chi'}{2} \cosh \frac{\chi}{2} M_{+1+1}^{h'h} + h' \sinh \frac{\chi'}{2} \cosh \frac{\chi}{2} M_{-1+1}^{h'h} + h \cosh \frac{\chi'}{2} \sinh \frac{\chi}{2} M_{+1-1}^{h'h} + h'h \sinh \frac{\chi'}{2} \sinh \frac{\chi}{2} M_{-1-1}^{h'h} \right) + a_{+1r'}^{-h'}(\chi') a_{+1r}^h(\chi) \left(\cosh \frac{\chi'}{2} \cosh \frac{\chi}{2} M_{+1+1}^{-h'h} - h' \sinh \frac{\chi'}{2} \cosh \frac{\chi}{2} M_{-1+1}^{-h'h} + h \cosh \frac{\chi'}{2} \sinh \frac{\chi}{2} M_{+1-1}^{-h'h} - h'h \sinh \frac{\chi'}{2} \sinh \frac{\chi}{2} M_{-1-1}^{-h'h} \right) + a_{+1r'}^{h'}(\chi') a_{+1r}^{-h}(\chi) \left(\cosh \frac{\chi'}{2} \cosh \frac{\chi}{2} M_{+1+1}^{h'-h} + h' \sinh \frac{\chi'}{2} \cosh \frac{\chi}{2} M_{-1+1}^{h'-h} - h \cosh \frac{\chi'}{2} \sinh \frac{\chi}{2} M_{+1-1}^{h'-h} - h'h \sinh \frac{\chi'}{2} \sinh \frac{\chi}{2} M_{-1-1}^{h'-h} \right) + a_{+1r'}^{-h'}(\chi') a_{+1r}^{-h}(\chi) \left(\cosh \frac{\chi'}{2} \cosh \frac{\chi}{2} M_{+1+1}^{-h'-h} - h' \sinh \frac{\chi'}{2} \cosh \frac{\chi}{2} M_{-1+1}^{-h'-h} - h \cosh \frac{\chi'}{2} \sinh \frac{\chi}{2} M_{+1-1}^{-h'-h} + h'h \sinh \frac{\chi'}{2} \sinh \frac{\chi}{2} M_{-1-1}^{-h'-h} \right) \right) , \quad (3.50)$$

con $M_{+1+1}^{h'h} = -4ie^2 (\check{\zeta}(1, \tau_{+1h}, \tau_{+1h'}) \cdot \mathbb{V} - \zeta(1, \tau_{+1h}, \tau_{+1h'}) \cdot \mathbb{A})$, $M_{-1-1}^{h'h} = -4ie^2 (\check{\zeta}(2, \tau_{-1h}, \tau_{-1h'}) \cdot \mathbb{V} - \zeta(2, \tau_{-1h}, \tau_{-1h'}) \cdot \mathbb{A})$ y $M_{-1+1}^{h'h} = M_{+1-1}^{h'h} = -4ie^2 (\zeta(1, \tau_{+1h}, \tau_{+1h'}) \cdot \mathbb{V} - \check{\zeta}(1, \tau_{+1h}, \tau_{+1h'}) \cdot \mathbb{A})$.

3.6.2. El método de espinores no masivos.

Usando las ecuaciones (3.36) y (3.38), la amplitud es

$$M(r', p', s', r, p, s) = -ie^2 \left((\nabla_\mu - \mathbb{A}_\mu) \bar{W}_{+1}^{r'} \gamma^\mu W_{+1}^r + (\nabla_\mu + \mathbb{A}_\mu) \bar{W}_{-1}^{r'} \gamma^\mu W_{-1}^r \right). \quad (3.51)$$

Como ya lo hemos mencionado, es fácil obtener expresiones para $\bar{W}_\lambda^{r'} \gamma^\mu W_\lambda^r$ usando una representación explícita de los espinores. Por ejemplo, si uno usa la representación estandar [233], el primer elemento se ve de la forma

$$\begin{aligned} \bar{W}_\lambda^{r'} \gamma^0 W_\lambda^r &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \sqrt{\frac{E'+m}{2m}} \left(a^r a^{r'*} \left(1 + \frac{\lambda p_z}{E+m} + \frac{\lambda p'_z}{E'+m} + \frac{p'_z p_z + (p'_x - ip'_y)(p_x + ip_y)}{(E+m)(E'+m)} \right) + \right. \\ &+ b^r b^{r'*} \left(1 - \frac{\lambda p_z}{E+m} - \frac{\lambda p'_z}{E'+m} + \frac{p'_z p_z + (p'_x + ip'_y)(p_x - ip_y)}{(E+m)(E'+m)} \right) + \lambda b^r a^{r'*} \left(\frac{p_x - ip_y}{E+m} + \frac{p'_x - ip'_y}{E'+m} + \right. \\ &+ \lambda \frac{p'_z(p_x - ip_y) - p_z(p'_x - ip'_y)}{(E+m)(E'+m)} \left. \right) + \lambda a^r b^{r'*} \left(\frac{p_x + ip_y}{E+m} + \frac{p'_x + ip'_y}{E'+m} + \lambda \frac{p_z(p'_x + ip'_y) - p'_z(p_x + ip_y)}{(E+m)(E'+m)} \right) \left. \right), \end{aligned} \quad (3.52)$$

donde $a^1 = e^{-i\frac{\varrho}{2}} A$, $a^2 = -e^{-i\frac{\varrho}{2}} B^*$, $b^1 = e^{i\frac{\varrho}{2}} B$, $b^2 = e^{i\frac{\varrho}{2}} A^*$ y [276]

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{1 - \gamma\beta_3 s^0 + \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} s_1 + \frac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} s_2 + \left(1 + \frac{(\gamma-1)(\beta_3)^2}{\beta^2}\right) s_3}{2}} \\ B &= \sqrt{\frac{1 + \gamma\beta_3 s^0 - \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} s_1 - \frac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} s_2 - \left(1 + \frac{(\gamma-1)(\beta_3)^2}{\beta^2}\right) s_3}{2}}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\tan \varrho = \frac{-\gamma\beta_2 s^0 + \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} s_1 + \frac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} s_3 + \left(1 + \frac{(\gamma-1)\beta_2^2}{\beta^2}\right) s_2}{-\gamma\beta_1 s^0 + \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} s_2 + \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} s_3 + \left(1 + \frac{(\gamma-1)\beta_1^2}{\beta^2}\right) s_1}, \quad (3.54)$$

con $\bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\bar{\mathbf{p}}}{E}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $s^0 = \frac{\bar{\beta} \cdot \hat{\mathbf{s}}}{\sqrt{1-(\bar{\beta} \cdot \hat{\mathbf{s}})^2}}$ y $\bar{\mathbf{s}} = (s_1, s_2, s_3) = \frac{\hat{\mathbf{s}}}{\sqrt{1-(\bar{\beta} \cdot \hat{\mathbf{s}})^2}}$.

3.6.3. El método proyectivo: La base en reposo.

Con la ayuda de la expresiones (3.19), (3.21) y (3.22), la amplitud se escribe como

$$\begin{aligned}
M(1, p', \tau', s', 1, p, \tau, s) = & \\
= \frac{-ie^2}{4mm'} \sqrt{\frac{2m'}{E' + m'}} \sqrt{\frac{2m}{E + m}} & \left(\check{c} \cdot q(-(-1)^{\tau'} i[s'p'\mathbb{V}p] + (-1)^{\tau'+\tau} m\langle p's'\mathbb{V}s \rangle - (-1)^\tau i[p'\mathbb{V}sp] + m p' \cdot \mathbb{V} + \right. \\
& + m' p \cdot \mathbb{V} - (-1)^{\tau'+\tau} m' \langle s'\mathbb{V}ps \rangle) - (-1)^{\tau'+\tau} \langle \check{c}p's'\mathbb{V}ps \rangle - (-1)^{\tau'} im[\check{c}p's'\mathbb{V}] + \langle \check{c}p'\mathbb{V}p \rangle + (-1)^\tau im[\check{c}p'\mathbb{V}s] + \\
& + (-1)^{\tau'} im'[\check{c}s'\mathbb{V}p] + (-1)^{\tau'+\tau} m'm \langle \check{c}s'\mathbb{V}s \rangle + (-1)^\tau im'[\check{c}\mathbb{V}ps] + m'm \check{c} \cdot \mathbb{V} - (-1)^{\tau'+\tau} i[[\check{c}p's'\mathbb{V}ps]] + i[\check{c}p'\mathbb{V}p] \\
& - (-1)^{\tau'} m \langle \check{c}p's'\mathbb{V} \rangle + (-1)^\tau m \langle \check{c}p'\mathbb{V}s \rangle + (-1)^{\tau'} m' \langle \check{c}s'\mathbb{V}p \rangle + (-1)^{\tau'+\tau} im'm[\check{c}s'\mathbb{V}s] + (-1)^\tau m' \langle \check{c}\mathbb{V}ps \rangle + \\
& - ((-1)^{\tau'} \langle \langle q\check{c}p's'\mathbb{V}p \rangle \rangle + (-1)^{\tau'+\tau} im[[q\check{c}p's'\mathbb{V}s]] + (-1)^\tau \langle \langle q\check{c}p'\mathbb{V}ps \rangle \rangle - (-1)^{\tau'+\tau} im'[[\check{c}s'\mathbb{V}ps]] + \\
& + im[q\check{c}p'\mathbb{V}] - (-1)^{\tau'} m'm \langle q\check{c}s'\mathbb{V} \rangle + im'[q\check{c}\mathbb{V}p] + (-1)^\tau m'm \langle q\check{c}\mathbb{V}s \rangle) + (-1)^\tau m \langle \check{c}p'\mathbb{A}s \rangle + \\
& \check{c} \cdot q(-(-1)^{\tau'} \langle s'p'\mathbb{A}p \rangle + (-1)^{\tau'+\tau} im[p's'\mathbb{A}s] + (-1)^\tau \langle p'\mathbb{A}sp \rangle + (-1)^{\tau'} m'm s' \cdot \mathbb{A} + \\
& + (-1)^\tau m'm s \cdot \mathbb{A} - (-1)^{\tau'+\tau} im'[s'\mathbb{A}ps]) + (-1)^{\tau'+\tau} i[[\check{c}p's'\mathbb{A}ps]] + (-1)^{\tau'} m \langle \check{c}p's'\mathbb{A} \rangle + i[\check{c}p'\mathbb{A}p] + \\
& + (-1)^{\tau'} m' \langle \check{c}s'\mathbb{A}p \rangle + (-1)^{\tau'+\tau} im'm[\check{c}s'\mathbb{A}s] - (-1)^\tau m' \langle \check{c}\mathbb{A}ps \rangle - m'm \check{c} \cdot \mathbb{A} + (-1)^{\tau'+\tau} \langle \langle \check{c}p's'\mathbb{A}ps \rangle \rangle + \langle \check{c}p'\mathbb{A}p \rangle \\
& + (-1)^{\tau'} im[\check{c}p's'\mathbb{A}] + (-1)^\tau im[\check{c}p'\mathbb{A}s] + (-1)^{\tau'} im'[\check{c}s'\mathbb{A}p] + (-1)^{\tau'+\tau} m'm \langle \check{c}s'\mathbb{A}s \rangle - (-1)^\tau im'[\check{c}\mathbb{A}ps] + \\
& - ((-1)^{\tau'} i[[q\check{c}p's'\mathbb{A}p]] + (-1)^{\tau'+\tau} m \langle \langle q\check{c}p's'\mathbb{A}s \rangle \rangle - (-1)^\tau i[[q\check{c}p'\mathbb{A}ps]] + (-1)^{\tau'+\tau} m' \langle \langle q\check{c}s'\mathbb{A}ps \rangle \rangle + \\
& \left. - m \langle q\check{c}p'\mathbb{A} \rangle + (-1)^{\tau'} im'm[q\check{c}s'\mathbb{A}] + m' \langle q\check{c}\mathbb{A}p \rangle + (-1)^\tau im'm[q\check{c}\mathbb{A}s] \right). \tag{3.55}
\end{aligned}$$

Los 4-vectores \check{c}^μ y \check{c}'^μ se construyen, usando las ecuaciones (3.53) y (3.54), mediante la correspondencia

$$A \rightarrow \cos \frac{\vartheta}{2}, \quad B \rightarrow \sin \frac{\vartheta}{2}, \quad \varrho \rightarrow \varphi. \tag{3.56}$$

3.6.4. El método proyectivo: usando la propiedad invariante de Lorentz de la amplitud.

Ya que la amplitud (2.24) es un escalar de Lorentz, podemos calcular su valor analítico en el marco de referencia donde el electrón se encuentra inicialmente en reposo.

El resultado seguirá siendo general ya que es posible reescribir todas las variables en algún otro marco de referencia empleando transformaciones de Lorentz. Usando la ecuación (3.23) y la invarianza de la amplitud (2.24), obtenemos

$$M(p', s', p, s) = -ie^2 (a \text{tr } \phi \phi'^{\dagger} + i \text{tr } \phi \phi'^{\dagger} \bar{\sigma} \cdot \bar{b}). \quad (3.57)$$

Los espinores (de dos componentes) ϕ' , ϕ tienen sus direcciones de cuantización de espín definidas por el vector de tres componentes de espín en el sistema en reposo del electrón final \hat{s}' e inicial \hat{s} , respectivamente. La notación a y \bar{b} es para

$$a = \frac{m}{(m^2 - u)(s - m^2)\sqrt{4m^2 - t}} \left(-(s - u)^2 \hat{\epsilon}_f^* \cdot \hat{\epsilon}_i + 2t \hat{\epsilon}_f^* \cdot \bar{\mathbf{k}}_i \hat{\epsilon}_i \cdot \bar{\mathbf{k}}_f \right), \quad (3.58)$$

$$\bar{b} = \frac{1}{\sqrt{4m^2 - t}} \left((\bar{\mathbf{k}}_f - \bar{\mathbf{k}}_i) \times \left(-\hat{\epsilon}_f^* \cdot \hat{\epsilon}_i \hat{\mathbf{k}}_i + \hat{\epsilon}_f^* \cdot \hat{\mathbf{k}}_i \hat{\epsilon}_i - \hat{\epsilon}_f^* \cdot \hat{\epsilon}_i \hat{\mathbf{k}}_f + \hat{\epsilon}_f^* \cdot \hat{\mathbf{k}}_f \hat{\epsilon}_i \right) + \right. \quad (3.59) \\ \left. - (\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \hat{\epsilon}_f^* \times \hat{\epsilon}_i - \hat{\mathbf{k}}_f \cdot \hat{\epsilon}_f^* \times \hat{\epsilon}_i) (\bar{\mathbf{k}}_f - \bar{\mathbf{k}}_i) \right),$$

donde hemos utilizado la norma de radiación $\epsilon = (0, \hat{\epsilon})$. Dado que la dependencia con las variables de espín, $\phi \phi'^{\dagger}$, están separadas claramente de cualquier otro tipo de términos, la expresión (3.57) será útil para llevar a cabo el análisis de polarización en los siguientes capítulos.

Capítulo 4

Efectos de polarización en la dispersión de Compton con electrones no polarizados

A continuación se estudia la dependencia de la expresión (2.27) con la polarización de los fotones. Se muestran expresiones analíticas de la sección de dispersión total para estados de polarización elíptica de los fotones, sin considerar la de los electrones, en términos de cantidades invariantes de Lorentz. Se incluyen gráficas de cada uno de los términos de polarización de la sección de dispersión. Así también se muestran las asimetrías que emergen de estas expresiones. Se obtienen los términos de polarización de la sección para configuraciones cinemáticas específicas y se incluyen algunas de sus respectivas gráficas.

4.1. Valores analíticos de la sección: caso no polarizado y de polarización circular para los fotones.

Hay dos resultados que se pueden extraer fácilmente de la expresión 2.31. Primero, si uno estudia estados linealmente polarizados para los fotones, lo cual implica

$\Theta(\hat{\epsilon}', \hat{\epsilon}) \rightarrow 2(\epsilon' \cdot \epsilon)^2$, $\Phi(\hat{\epsilon}', \hat{\epsilon}) \rightarrow 0$, la sección diferencial se reduce a

$$\frac{d}{d\Omega'} \sigma_{KN}(\hat{\epsilon}', \hat{\epsilon}) = \frac{\alpha^2}{4m^2} Y^2 (4(\epsilon' \cdot \epsilon)^2 + X - 2), \quad (4.1)$$

esta expresión es la fórmula de Klein-Nishina. Por otro lado, si se suponen estados circularmente polarizados para los fotones, mediante el uso de vectores de tres componentes para representar la polarización y la dirección de propagación (ver figura (2-1)), uno puede construir dos bases ortonormales (una por cada fotón) para el espacio físico de tres dimensiones, por ejemplo $\{\hat{\epsilon}, \hat{\epsilon}^*, \hat{\mathbf{k}}\}$ y $\{\hat{\epsilon}', \hat{\epsilon}'^*, \hat{\mathbf{k}}'\}$. Estas bases permiten escribir la fórmula (2.31) de forma cerrada sin la necesidad de escoger un sistema coordinado particular. Usando estas bases, se encuentra que $\Theta(\hat{\epsilon}', \hat{\epsilon}) \rightarrow \Theta_{\lambda', \lambda} = \frac{1+\cos^2\theta}{2}$ es una función exclusiva del ángulo de dispersión y $\Phi(\hat{\epsilon}', \hat{\epsilon}) \rightarrow \Phi_{\lambda', \lambda} = \lambda' \lambda \cos\theta$, es proporcional al producto de las helicidad de los fotones $\lambda', \lambda = \pm 1$. Usando este resultado, y alineando la dirección de propagación del fotón incidente con el eje \hat{z} , se obtiene la sección de dispersión dependiente de la helicidad

$$\begin{aligned} \sigma_{\lambda', \lambda} &= \frac{\alpha^2}{4m^2} \int_{\Omega'} Y^2 (2\Theta_{\lambda', \lambda} + X(1 + \Phi_{\lambda', \lambda}) - 2) d\Omega' = \frac{\pi\alpha^2}{2m^2} \int_0^\pi \left(\left[1 + \lambda' \lambda \left(1 + \frac{m}{k} \right) \right] Y^3 + \right. \\ &+ \frac{m}{k} \left[2 - \lambda' \lambda + \frac{m}{k} \right] Y^2 + \left[1 - \frac{2m}{k} \left(1 + \frac{m}{k} \right) + \lambda' \lambda \left(1 + \frac{m}{k} \right) \right] Y + \frac{m}{k} \left[\frac{m}{k} - \lambda' \lambda \right] \left. \right) \sin\theta' d\theta' \\ &= \frac{\pi\alpha^2}{2m^2} \left(2 \left[1 + \lambda' \lambda \left(1 + \frac{m}{k} \right) \right] \frac{mk + k^2}{(m + 2k)^2} + \left[2 + \frac{m}{k} - \lambda' \lambda \right] \frac{2m}{m + 2k} + \right. \\ &+ 2 \left[\frac{m}{k} - \lambda' \lambda \right] + \left. \left[1 + \left(\lambda' \lambda - \frac{2m}{k} \right) \left(1 + \frac{m}{k} \right) \right] \ln \left(\frac{m + 2k}{m} \right) \right) \frac{m}{k}. \quad (4.2) \end{aligned}$$

Una expresión similar a (4.2), pero usando estados de polarización lineal para los fotones, se puede encontrar en la bibliografía [236]. Si se toma la suma sobre la polarización final del fotón, y se promedia sobre la inicial, la fórmula (4.2) da lugar a la sección de dispersión totalmente despolarizada y, tomando el limite de fotones

suaves, se obtiene la sección de Thomson

$$\sigma_{NP} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda', \lambda} \sigma_{\lambda', \lambda} \approx \sigma_T = \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2}. \quad (4.3)$$

Ya que la fórmula (4.2) no contiene términos donde aparezcan individualmente las helicidades de los fotones, no se espera que esta dispersión, empleando electrones no polarizados, pueda polarizar circularmente la radiación dispersada; esto se analiza a fondo en la siguiente subsección. Lo anterior es cierto, a menos que se considere la relación de la polarización de la radiación emitida con su dirección de emisión, lo cual, como mencionamos antes, disminuye la intensidad del haz obtenible. Las secciones de dispersión para diferentes configuraciones de polarización (σ_{++} , σ_{+-}), normalizadas a la sección de Thomson, y la asimetría a la que dan lugar, se muestran en la figura 4-1. Se puede observar que, haciendo incidir un haz de fotones totalmente polarizado, en la dispersión total uno medirá despolarización en los fotones y, sólomente en el límite de alta energía del centro de masa se tendrá conservación de la polarización circular.

Para altas energías del fotón, la asimetría tiende al cociente

$$\lim_{k \gg m} A \rightarrow \frac{\ln \frac{m+2k}{m} - \frac{3}{2}}{\ln \frac{m+2k}{m} + \frac{1}{2}}, \quad (4.4)$$

por lo cual, es razonable suponer que la asimetría tenderá lentamente a 1 con el incremento en la escala de energía.

A continuación, mediante el formalismo de Fano [277], se analiza la dependencia de la sección diferencial de dispersión (2.31) con la polarización de los fotones, en particular se obtienen expresiones para los términos de polarización de la sección de dispersión respectiva en términos de cantidades invariantes de Lorentz. Además, se muestran algunas restricciones sobre los efectos de polarización que podemos esperar.

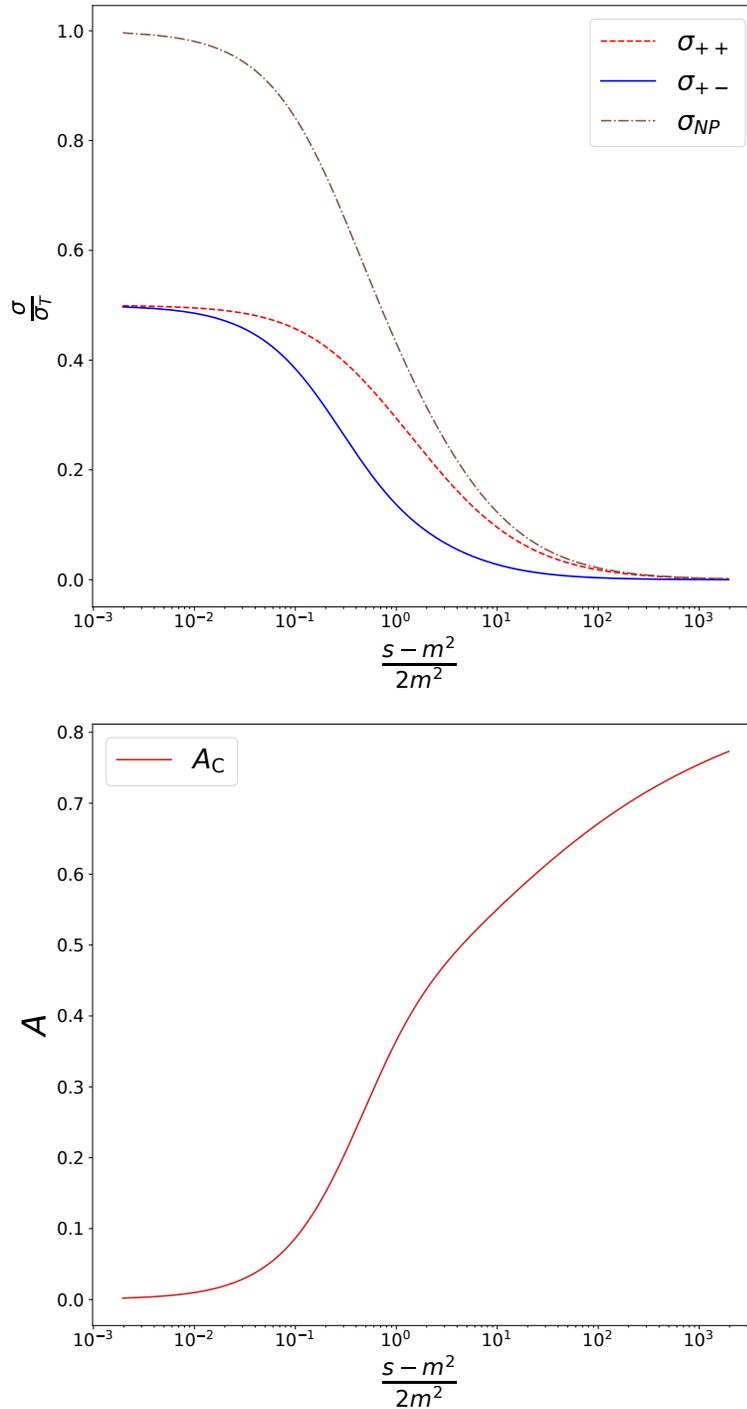


Figura 4-1: Para fotones circularmente polarizados, arriba se encuentra la sección de dispersión para el efecto Compton, normalizada a la sección de Thomson, graficada como función de la cantidad invariante $\frac{s-m^2}{2m^2}$, la cual se reduce al cociente $\frac{k}{m}$ en el marco en reposo del electrón inicial. Abajo, la asimetría de helicidad como función de la misma variable.

4.2. La polarización de los fotones.

La amplitud de transición, entre estados de fotones con polarizaciones elípticas, se puede escribir como una combinación lineal de los elementos de matriz de la expresión (2.28), calculados con alguna base de polarización. Si uno trabaja con la base linealmente polarizada (que consta de los cuatro vectores unitarios de tres componentes) $\hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2, \hat{\mathbf{r}}'_1, \hat{\mathbf{r}}'_2$, los elementos de matriz de la amplitud se obtienen cuando uno usa $\hat{\mathbf{r}}_1$ o $\hat{\mathbf{r}}_2$ para la dirección de polarización del estado inicial del fotón, y $\hat{\mathbf{r}}'_1$ o $\hat{\mathbf{r}}'_2$ para el estado final en la expresión (2.28). Usando la notación de la ecuación (2.28), los elementos de matriz se pueden etiquetar $M(\hat{\mathbf{S}}'_F, \hat{\mathbf{r}}'_l, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{r}}_m)$, con $l, m = 1, 2$. Ahora, es necesario que cualquier estado de polarización ξ se pueda representar usando esta esquema, por ejemplo, si $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector real unitario de tres componentes sobre el plano de polarización, el estado asociado ξ_L debe representar un fotón linealmente polarizado en la dirección $\hat{\mathbf{n}} = a\hat{\mathbf{r}}_1 + b\hat{\mathbf{r}}_2$, con a y b parámetros reales, y $a^2 + b^2 = 1$. La dirección $\hat{\mathbf{e}}_\lambda = a\hat{\mathbf{r}}_1 + b\hat{\mathbf{r}}_2$, con $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = \frac{i\lambda}{\sqrt{2}}$, y $\lambda = \pm 1$, se asociará con estados circularmente polarizados.

Usando esta base de polarización, una amplitud para polarizaciones elípticas es

$$\begin{aligned} M(\hat{\mathbf{S}}'_F, \hat{\mathbf{e}}', \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{e}}) &= a'^* a M(\hat{\mathbf{S}}'_F, \hat{\mathbf{r}}'_1, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{r}}_1) + a'^* b M(\hat{\mathbf{S}}'_F, \hat{\mathbf{r}}'_1, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{r}}_2) + \\ &+ b'^* a M(\hat{\mathbf{S}}'_F, \hat{\mathbf{r}}'_2, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{r}}_1) + b'^* b M(\hat{\mathbf{S}}'_F, \hat{\mathbf{r}}'_2, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{r}}_2) = \xi'^\dagger \mathbf{M} \xi, \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde se ha empleado la notación

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M(\hat{\mathbf{S}}'_F, \hat{\mathbf{r}}'_1, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{r}}_1) & M(\hat{\mathbf{S}}'_F, \hat{\mathbf{r}}'_1, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{r}}_2) \\ M(\hat{\mathbf{S}}'_F, \hat{\mathbf{r}}'_2, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{r}}_1) & M(\hat{\mathbf{S}}'_F, \hat{\mathbf{r}}'_2, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{r}}_2) \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \xi' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Cuando uno calcula el módulo cuadrado de la expresión (4.5), aparece de manera natural la matriz de densidad $\rho = \xi \xi^\dagger = \frac{1 + \bar{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{P}}}{2}$, donde $\bar{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ son las matrices de Pauli, y $\bar{\mathbf{P}}$ es el vector de polarización, el cual puede estar asociado a un estado puro linealmente $\bar{\mathbf{L}}$, circularmente $\bar{\mathbf{C}}$ o elípticamente $\bar{\mathbf{E}}$ polarizado, y a estados parcialmente polarizados cuando se contemplen sumas incoherentes de estados puros de polarización ($|\bar{\mathbf{P}}| < 1$). Por ejemplo, si uno usa la representación de las matrices de

Pauli en la cual σ_1 es diagonal, un estado puro, linealmente polarizado en la dirección $\hat{\mathbf{n}}$, tendrá la matriz de densidad $\rho_L = \xi_L \xi_L^\dagger = \frac{1+\bar{\sigma}\cdot\bar{\mathbf{L}}}{2}$, con vector de polarización $\bar{\mathbf{L}} = (a^2 - b^2, 2ab, 0)$.

Con este formalismo, los vectores $\hat{\mathbf{r}}'_1 = (0, 1, 0)$, $\hat{\mathbf{r}}'_2 = (-\cos\theta, 0, \sin\theta)$, $\hat{\mathbf{k}}' = (\sin\theta, 0, \cos\theta)$, $\hat{\mathbf{r}}_1 = (0, 1, 0)$, $\hat{\mathbf{r}}_2 = (-1, 0, 0)$, $\hat{\mathbf{k}} = (0, 0, 1)$ se emplearon para calcular los elementos de matriz $M(\hat{\mathbf{s}}'_F, \hat{\mathbf{r}}'_l, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{r}}_m)$. A pesar de esta elección específica, ya que la amplitud (2.28) es un escalar de Lorentz, cualquier resultado obtenido a partir de ella se podrá, en principio, reescribir para condiciones cinemáticas generales. Uno puede intuir lo anterior sabiendo que siempre existe una serie de transformaciones de Lorentz que permiten pasar del sistema de referencia donde la colisión ocurre en un plano (ver Figura 4-2) a un sistema más general, donde la dispersión no sea necesariamente de esta forma. También, una nueva base de polarización lineal siempre se puede formular como una rotación sobre el plano de polarización, de manera que la nueva base se escribirá como una combinación lineal de los elementos de la antigua base $\hat{\mathbf{r}}'_1$, $\hat{\mathbf{r}}'_2$, $\hat{\mathbf{r}}_1$ y $\hat{\mathbf{r}}_2$.

Así, podemos escribir la sección diferencial de dispersión para estados de polarización elíptica de los fotones, sin contemplar las polarizaciones de los electrones, como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{8m^2} Y^2 \sum_{\hat{\mathbf{s}}_f, \hat{\mathbf{s}}_i} \text{Tr} \rho' \mathbf{M} \rho \mathbf{M}^\dagger = \frac{\alpha^2}{64m^2} Y^2 \sum_{\hat{\mathbf{s}}_f, \hat{\mathbf{s}}_i} (|M_0|^2 + |\bar{M}|^2 + (\bar{A} - \bar{B}) \cdot \bar{P}' + \quad (4.7)$$

$$+(\bar{A} + \bar{B}) \cdot \bar{P} + \bar{P}' \times \bar{P} \cdot \bar{D} + (|M_0|^2 - |\bar{M}|^2) \bar{P}' \cdot \bar{P} + \bar{P}' \cdot \bar{M} \bar{P} \cdot \bar{M}^* + \bar{P}' \cdot \bar{M}^* \bar{P} \cdot \bar{M}),$$

con

$$\begin{aligned} M_0 &= M(\hat{\mathbf{s}}'_F, \hat{\mathbf{r}}'_1, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{r}}_1) + M(\hat{\mathbf{s}}'_F, \hat{\mathbf{r}}'_2, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{r}}_2), \\ \bar{M} &= (M(\hat{\mathbf{s}}'_F, \hat{\mathbf{r}}'_1, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{r}}_1) - M(\hat{\mathbf{s}}'_F, \hat{\mathbf{r}}'_2, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{r}}_2), M(\hat{\mathbf{s}}'_F, \hat{\mathbf{r}}'_1, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{r}}_2) + M(\hat{\mathbf{s}}'_F, \hat{\mathbf{r}}'_2, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{r}}_1), \\ &\quad iM(\hat{\mathbf{s}}'_F, \hat{\mathbf{r}}'_1, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{r}}_2) - iM(\hat{\mathbf{s}}'_F, \hat{\mathbf{r}}'_2, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{r}}_1)), \\ \bar{A} &= M_0 \bar{M}^* + M_0^* \bar{M}, \\ \bar{B} &= i\bar{M}^* \times \bar{M}, \end{aligned}$$

$$\bar{D} = iM_0 \bar{M}^* - iM_0^* \bar{M}.$$

Perpendicular al plano de dispersión

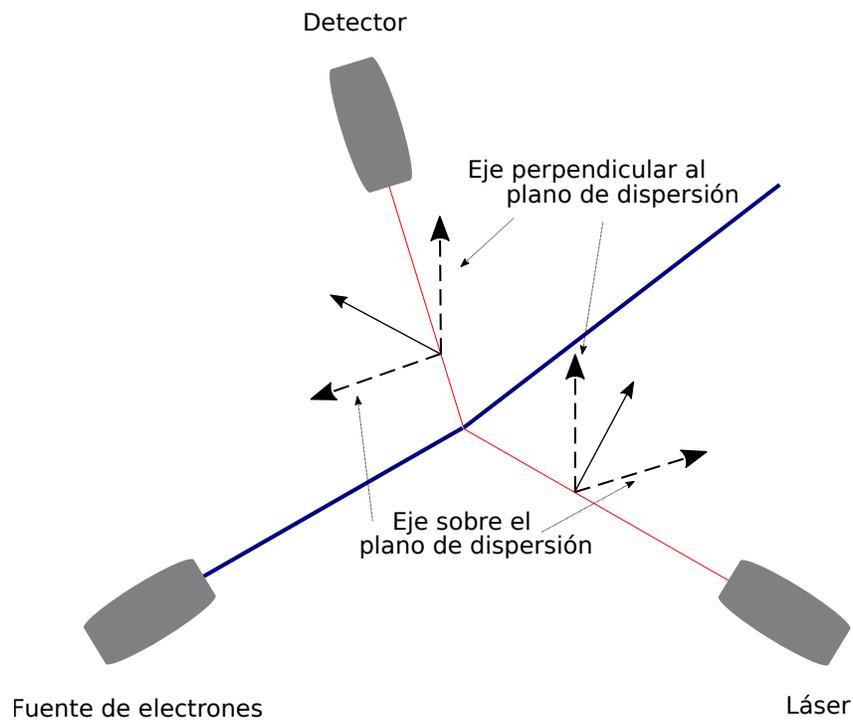
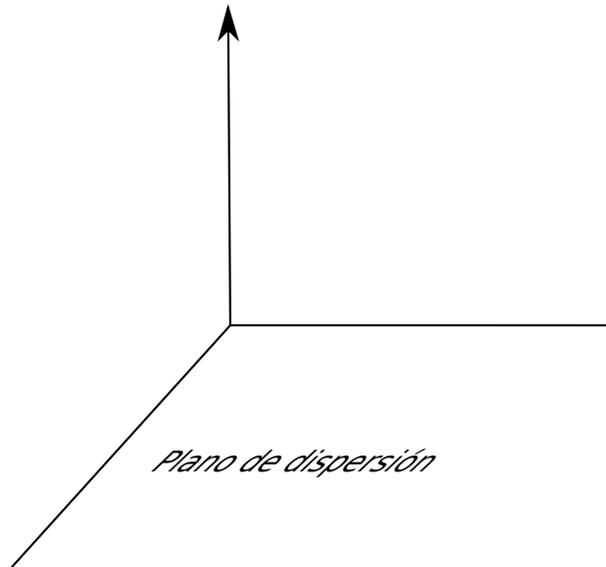


Figura 4-2: Arriba se esquematiza el plano de dispersión y la dirección perpendicular a él. Abajo se encuentra un esquema de la dispersión; la dispersión ocurre sobre el plano de la hoja. Las flechas sólidas representan direcciones lineales de polarización; los ejes del plano de polarización se representan por medio de flechas discontinuas, una de las cuales se encuentra sobre el plano de dispersión (ver arriba), el otro eje es perpendicular al plano de dispersión.

Antes de realizar la suma y el promedio sobre estados finales e iniciales respectivamente, la fórmula (4.7) contienen mucha información, alguna de la cual, como ciertas relaciones entre polarizaciones de fotones y electrones, será analizada en el siguiente capítulo. No obstante, aquí nos centraremos en la sección de dispersión total para electrones no polarizados

$$\sigma(\bar{\mathbf{P}}', \bar{\mathbf{P}}) = \frac{1}{2}\sigma_{NP} + \bar{\mathbf{P}}' \cdot \bar{\sigma}_{\bar{\mathbf{P}}'} + \bar{\mathbf{P}} \cdot \bar{\sigma}_{\bar{\mathbf{P}}} + \bar{\mathbf{P}}' \cdot \bar{\bar{\sigma}}_{\bar{\mathbf{P}}', \bar{\mathbf{P}}} \bar{\mathbf{P}}. \quad (4.8)$$

En la ecuación (4.8), el primer término corresponde a la mitad de la sección de dispersión no polarizada, los términos segundo y tercero son la parte de la sección que presenta únicamente dependencia, de manera separada, con el vector de polarización final o inicial, respectivamente, y serán interpretados como efectos de polarización dependientes únicamente de una de las partículas, es decir, son efectos que no muestran relaciones entre los estados de polarización de las partículas,

$$\bar{\sigma}_{\bar{\mathbf{P}}'}^1 = \bar{\sigma}_{\bar{\mathbf{P}}}^1 = \sigma_L = \frac{\pi\alpha^2}{m^2} \left(-2 + \left[1 + \frac{m}{k} \right] \ln \left(\frac{m+2k}{m} \right) \right) \frac{m^2}{k^2}, \quad (4.9)$$

$$\bar{\sigma}_{\bar{\mathbf{P}}'}^2 = \bar{\sigma}_{\bar{\mathbf{P}}}^2 = 0, \quad (4.10)$$

$$\bar{\sigma}_{\bar{\mathbf{P}}'}^3 = \bar{\sigma}_{\bar{\mathbf{P}}}^3 = 0, \quad (4.11)$$

con $\bar{\sigma}_{\bar{\mathbf{P}}'} = (\bar{\sigma}_{\bar{\mathbf{P}}'}^1, \bar{\sigma}_{\bar{\mathbf{P}}'}^2, \bar{\sigma}_{\bar{\mathbf{P}}'}^3)$ y $\bar{\sigma}_{\bar{\mathbf{P}}} = (\bar{\sigma}_{\bar{\mathbf{P}}}^1, \bar{\sigma}_{\bar{\mathbf{P}}}^2, \bar{\sigma}_{\bar{\mathbf{P}}}^3)$. El último término en la ecuación (4.8) depende tanto del vector de polarización inicial como del final y corresponde a las relaciones entre los estados de polarización de las partículas. Dichas relaciones están representadas por la matriz $\bar{\bar{\sigma}}_{\bar{\mathbf{P}}', \bar{\mathbf{P}}}$ con elementos

$$\bar{\bar{\sigma}}_{\bar{\mathbf{P}}', \bar{\mathbf{P}}}^{11} = \sigma_{LL1} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2} \frac{m}{k} \left(\frac{2k}{m+2k} + 2\frac{m}{k} - \frac{m}{k} \left(1 + \frac{m}{k} \right) \ln \left(\frac{m+2k}{m} \right) \right), \quad (4.12)$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{\bar{\mathbf{P}}', \bar{\mathbf{P}}}^{22} = \sigma_{LL2} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2} \frac{m}{k} \left(2\frac{m+k}{m+2k} - \frac{m}{k} \ln \left(\frac{m+2k}{m} \right) \right), \quad (4.13)$$

$$\bar{\sigma}_{\bar{P}',\bar{P}}^{33} = \sigma_{CC} = \frac{\pi\alpha^2 m}{2m^2 k} \left(2 \left(\frac{m+k}{m+2k} \right)^2 - \frac{2m}{m+2k} - 2 + \left(1 + \frac{m}{k} \right) \ln \left(\frac{m+2k}{m} \right) \right), \quad (4.14)$$

$$\bar{\sigma}_{\bar{P}',\bar{P}}^{lm} = 0 \quad \forall l \neq m, \quad (4.15)$$

de tal manera que la notación del último término en la ecuación (4.8) representa el producto escalar entre el vector $\bar{\sigma}_{\bar{P}',\bar{P}}$ y el vector \bar{P}' . La fórmula (4.8) se reduce, para estados linealmente polarizados, a la expresión de Klein-Nishina y a la fórmula (4.2) para estados circularmente polarizados. También, ella permite estudiar la dispersión con estados de polarización parcial.

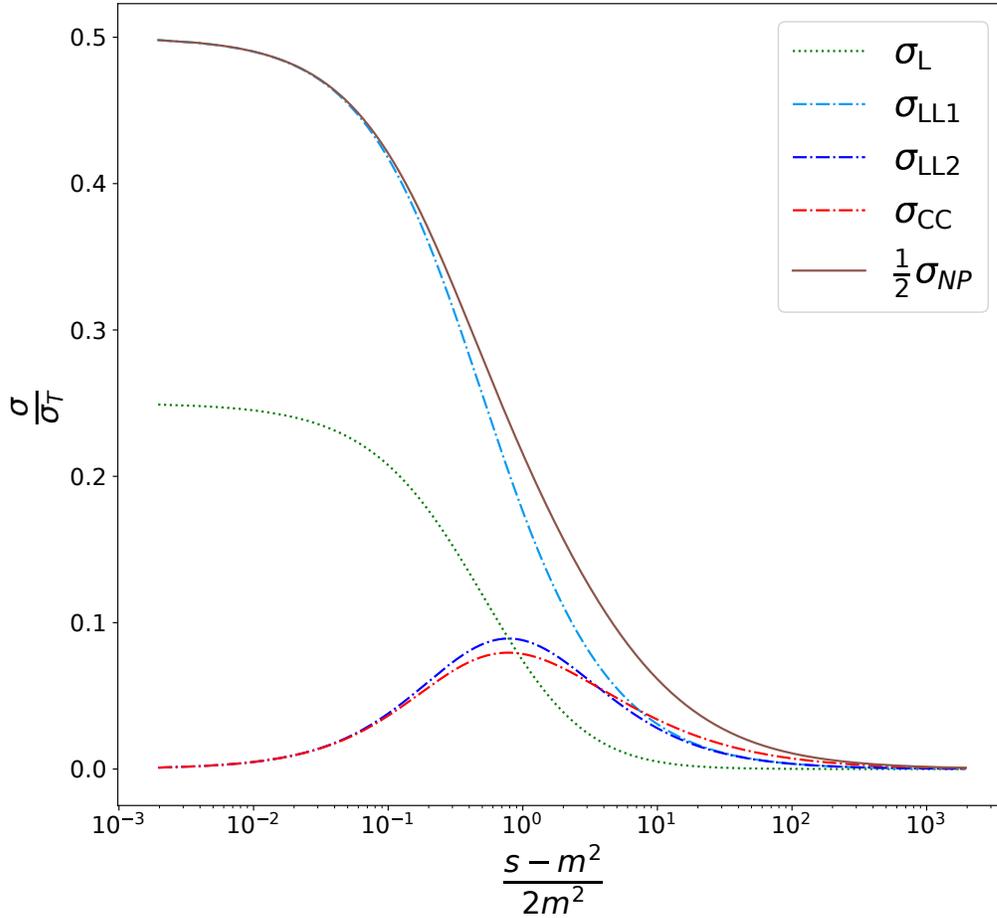


Figura 4-3: Diferentes efectos de polarización en la dispersión de Compton, normalizados a la sección de Thomson, graficados como función de la cantidad invariante $\frac{s-m^2}{2m^2}$.

Los componentes de la sección de dispersión están graficados en la figura 4-3 como función de la cantidad invariante $\frac{s-m^2}{2m^2}$, la cual, expresándola en términos de canti-

dades definidas en el marco de referencia donde el electrón se encuentra inicialmente en reposo, se reduce al cociente de la energía del fotón entre la energía en reposo del electrón. Uno puede ver que, para energías del fotón pequeñas en comparación con la energía en reposo del electrón, el factor que introduce efectos de polarización lineal que dependen de manera individual con los estados de polarización de cada partícula, σ_L , es del orden de magnitud de la sección no polarizada. La dependencia de la sección de dispersión con estos efectos y los respectivos vectores de polarización, muestra que el proceso promueve la polarización lineal en la dirección perpendicular al plano de dispersión. Los efectos de polarización lineal que relacionan los estados de polarización inicial y final de los fotones están representados por las curvas σ_{LL1} y σ_{LL2} ; la figura muestra que la magnitud de σ_{LL1} y σ_{NP} son del mismo orden y, para bajas energías del fotón, σ_{LL1} tiende a la mitad del valor de la sección de Thomson. Como se puede apreciar en la figura 4-3, σ_{LL2} no tiene el mismo comportamiento. El efecto de polarización que relaciona estados circularmente polarizados está representado por la curva σ_{CC} .

A partir de las ecuaciones (4.8)-(4.15) y la Figura 4-3 se pueden deducir fenómenos de polarización interesantes. Algunos de ellos los podemos establecer en las siguientes aseveraciones

1. La dispersión total de Compton no dará lugar a fotones circularmente polarizados si las partículas antes de la dispersión no están polarizadas.
2. Si uno no mide la polarización final de los fotones, y no toma en cuenta las relaciones entre estados de polarización de fotones y electrones, la dispersión total es idéntica cuando se hace incidir un haz de fotones no polarizados que cuando se hacen incidir fotones con polarización circular.
3. Si uno mide la polarización final de los fotones, aún sin tomar en cuenta las relaciones entre estados de polarización de fotones y electrones, se puede distinguir la dispersión total de fotones incidentes con polarización circular de la dispersión total para fotones incidentes con algún otro estado puro de polarización.

4. Utilizando electrones no polarizados, es posible distinguir la dispersión total de fotones incidentes con direcciones diferentes de polarización lineal, aún sin emplear las relaciones existentes con su polarización final.
5. Utilizando electrones y fotones no polarizados, la dispersión total de Compton dará lugar a fotones con polarización lineal, siendo máximo el efecto para la dirección de polarización perpendicular al plano de dispersión.

Las primeras dos oraciones se pueden concluir a partir de propiedades fundamentales de la teoría. Para esto, es necesario notar que, tanto el grado de polarización de los fotones dispersados, como la sensibilidad de la dispersión total con la polarización de los fotones incidentes, están relacionadas con las respectivas asimetrías. Para la producción de fotones circularmente polarizados en la dispersión total, usando un haz de electrones no polarizados, la diferencia de fotones dispersados con polarización circular con helicidad $+1$ menos los dispersados con helicidad -1 es proporcional a $\sigma(\bar{C}_+) - \sigma(\bar{C}_-)$ (ver ecuación (4.8)). Si esta asimetría es diferente de cero, debe de existir un término $\sigma_{\bar{C}}$ en la sección. Pero, si este proceso de polarización es posible, la sección de dispersión $\sigma(\bar{C})$ debe ser invariante bajo transformaciones de paridad Π . Si σ_0 denota la parte no polarizada de la sección de dispersión, tenemos

$$\Pi(\sigma(\bar{C})) = \Pi(\sigma_0 + \bar{C} \cdot \sigma_{\bar{C}}) = \sigma_0 + (-\bar{C}) \cdot \sigma_{\bar{C}} \neq \sigma(\bar{C}), \quad (4.16)$$

lo cual es una contradicción. Entonces, un proceso como este no puede ser posible. El caso de la independencia de la dispersión total con la polarización circular del estado inicial, una propiedad interesante del efecto Compton, se prueba de manera análoga.

Para intuir la tercera oración se puede hacer uso de la Figura 4-3. Ahí se observa que cada uno de los términos que relacionan estados de polarización inicial y final son distintos, en particular el comportamiento del término que relaciona los estados de polarización circular (curva roja) es característico. Aunque la curva azul tenga un comportamiento similar, hay que recordar que ese término es sólo uno de los componentes de la manera más general en la cual puede haber relaciones entre estados linealmente polarizados. Poder distinguir los datos experimentales de las dispersiones

totales dependerá de la elección de una dirección de medición de polarización lineal que no sea a un ángulo de 45° con el eje perpendicular al plano de dispersión.

La últimas dos aseveraciones se siguen de la dependencia de la sección de dispersión con las componentes, inicial y final, por separado, del vector de polarización que representa la diferencia de la intensidad del campo eléctrico en la dirección perpendicular al plano de dispersión menos la intensidad del campo eléctrico en el plano de dispersión. El factor que introduce esta dependencia es σ_L . Se puede observar en la Figura 4-3 que esta sensibilidad, es decir, la dependencia de la dispersión total con este componente de polarización es mayor para energías del fotón incidente pequeñas en comparación con la energía en reposo del electrón, como ya se había mencionado. Sin embargo, es notable que el efecto Compton puede polarizar linealmente un haz de fotones no polarizados, aún cuando no se utilicen electrones polarizados. Como mostramos en el Capítulo 2, clásicamente este efecto no se espera.

Existen tres diferentes efectos fundamentales de asimetría, relacionados con las diferentes relaciones que los componentes de la sección de dispersión representan. Primero, el efecto de polarización relacionado con las componentes, inicial y final, por separado, del vector de polarización que representan la diferencia de la intensidad del campo eléctrico en la dirección perpendicular al plano de dispersión menos la intensidad del campo eléctrico en el plano de dispersión. Este da lugar a la asimetría $A_L = \frac{2\sigma_L}{\sigma_{NP}}$, la cual muestra una medida de la polarización lineal que la dispersión de Compton dará al fotón si uno utiliza electrones no polarizados; como se puede ver en la Figura 4-4, este efecto tiende a cero cuando la energía del fotón aumenta.

Segundo, el efecto que surge de la relación de estados de polarización lineal inicial y final, como la diferencia de la dispersión cuando la polarización lineal en la dirección perpendicular al plano de dispersión es conservada, menos la dispersión cuando la polarización lineal en direcciones sobre el plano de dispersión es conservada, como se establece en la expresión $A_{L_1-L_1} = \frac{\sigma(L'_1, L_1) - \sigma(-L'_1, -L_1)}{\sigma(L'_1, L_1) + \sigma(-L'_1, -L_1)}$. En la Figura 4-4 se observa que el comportamiento de esta asimetría es similar al de A_L .

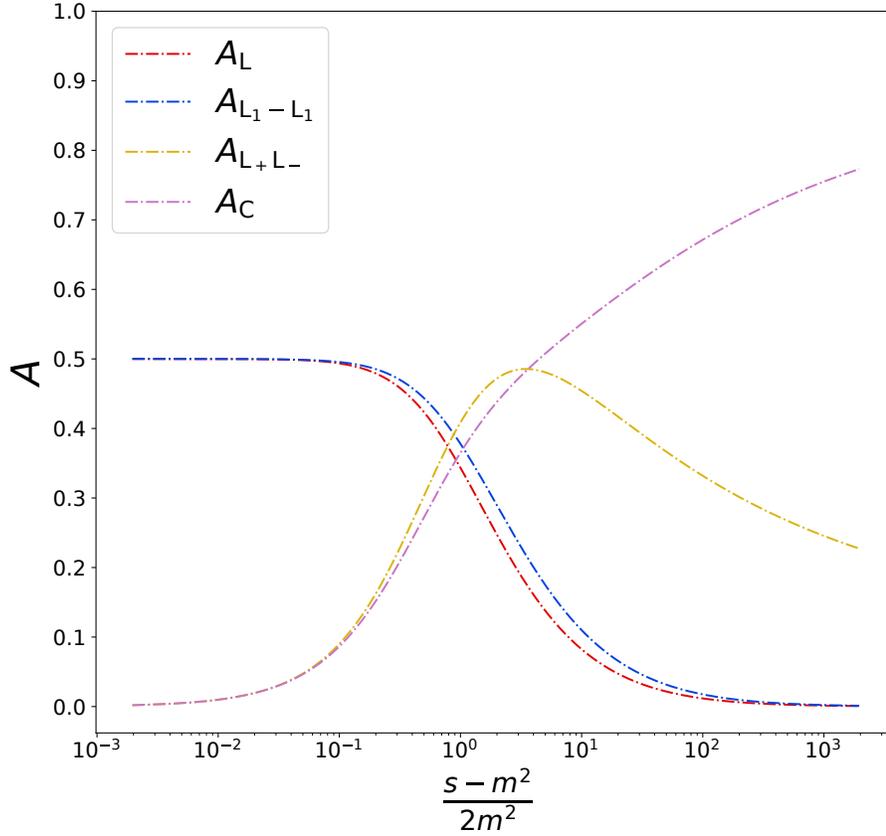


Figura 4-4: Diferentes efectos de asimetría en la dispersión de Compton graficados como función de la cantidad invariante $\frac{s-m^2}{2m^2}$.

El tercer efecto está relacionado con la diferencia de la dispersión cuando la polarización lineal en las direcciones que hacen 45° con el eje $\hat{\mathbf{r}}_1$ (perpendicular al plano de dispersión) es conservada, menos la dispersión con transiciones entre el estado de polarización lineal que hace 45° con el eje $\hat{\mathbf{r}}_1$ y el estado de polarización lineal que hace 45° con la antípoda del mismo eje. Esta asimetría viene dada por la fórmula $A_{L_+L_-} = \frac{\sigma(L'_2, L_2) - \sigma(L'_2, -L_2)}{\sigma(L'_2, L_2) + \sigma(L'_2, -L_2)} = \frac{\sigma(-L'_2, -L_2) - \sigma(L'_2, -L_2)}{\sigma(-L'_2, -L_2) + \sigma(L'_2, -L_2)} = \frac{2\sigma_{LL2}}{\sigma_{NP}}$.

Existen efectos de asimetría más generales cuando uno contempla estados de fotones elípticamente polarizados. Por ejemplo, al considerar la dispersión de un estado incidente de polarización elíptica representado por la dirección $\hat{\mathbf{e}}(x, y) = \cos x \hat{\mathbf{r}}_1 + e^{iy} \sin x \hat{\mathbf{r}}_2$ y medir la radiación dispersada con el estado de polarización elíptica representado por la dirección $\hat{\mathbf{e}}'(x', y') = \cos x' \hat{\mathbf{r}}'_1 + e^{iy'} \sin x' \hat{\mathbf{r}}'_2$, la sección de dispersión posee una asimetría de intercambio de parámetros $(x, y) \leftrightarrow (x', y')$ en los

estados de polarización. En la figura 4-5 se muestran estas asimetrías de intercambio para la fase $y = y' = \pi/2$ y amplitudes parametrizadas con los ángulos x para el estado inicial y x' para el final, de tal manera que con $x = x' = \pi/4$ se tienen estados con polarización circular, esto para energías de fotón de 10 KeV, 100 KeV, 1 MeV y 10 MeV. La figura sugiere que la asimetría incrementa cuando la energía reduce su valor.

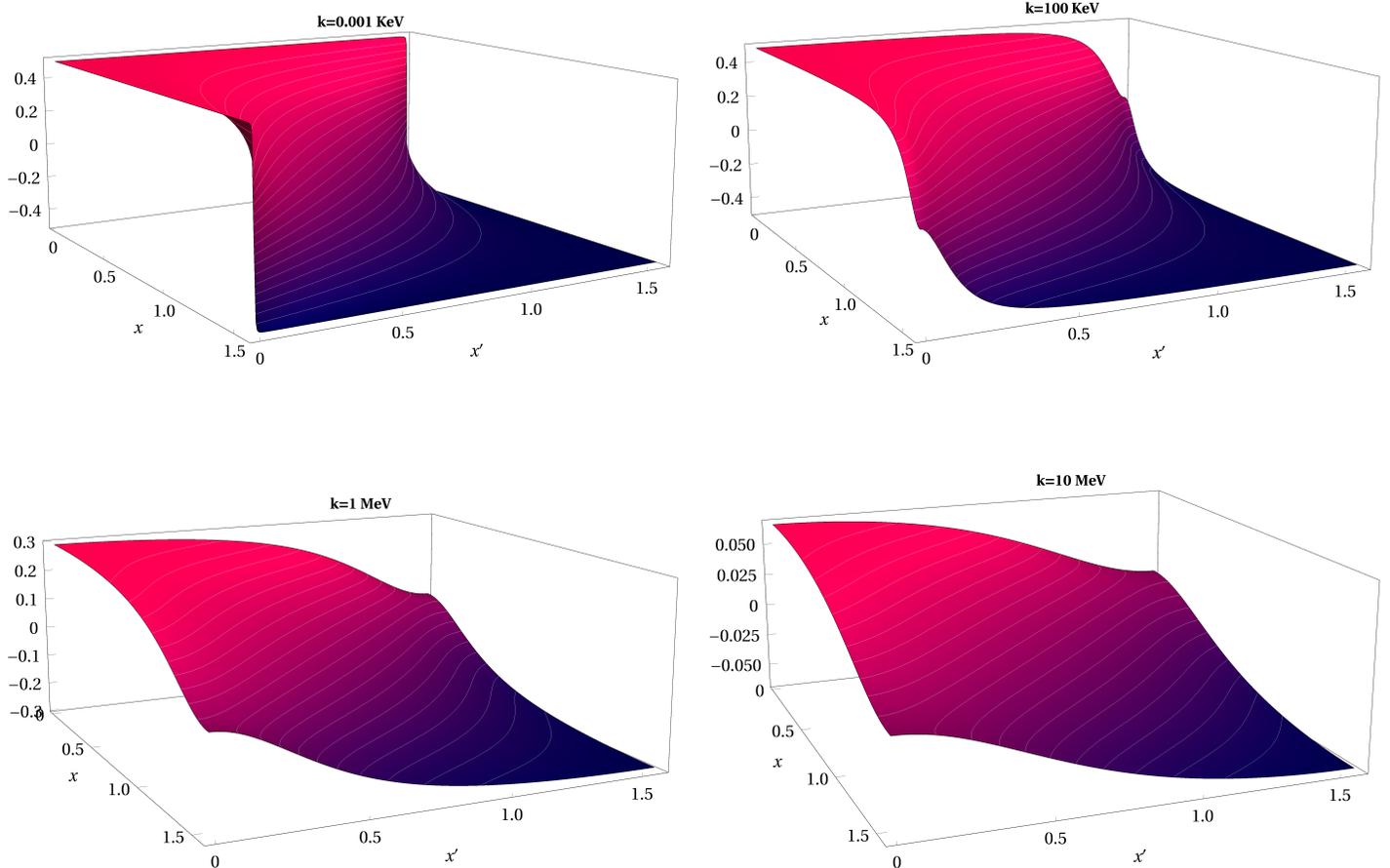


Figura 4-5: Estas gráficas muestran el valor de la asimetría en la dispersión de Compton entre dos estados ortogonales de polarización elíptica, para las energías de fotón 10 KeV, 100 KeV, 1 MeV y 10 MeV, graficados como función de los ángulos x y x' que parametrizan los tamaños relativos de los ejes de la elipse de polarización.

4.3. La sección de dispersión para el efecto Compton en algunos sistemas de referencia.

Las expresiones (4.2) y (4.8)-(4.15), dado que son escalares de Lorentz, se pueden escribir en términos de cantidades invariantes. La variable de Mandelstam $s = m^2 + 2mk$ es la única cantidad dinámica invariante que queda en estas ecuaciones, entonces es posible escribir estas expresiones en la forma

$$\sigma_{NP} = \frac{2\pi\alpha^2}{s - m^2} \left(\frac{s^2 - m^4}{2s^2} + \frac{8m^2}{s - m^2} + \ln \frac{s}{m^2} \right), \quad (4.17)$$

$$\sigma_L = \frac{4\pi\alpha^2}{s - m^2} \left(-\frac{2m^2}{s - m^2} + \frac{m^2(s + m^2)}{(s - m^2)^2} \ln \frac{s}{m^2} \right), \quad (4.18)$$

$$\sigma_{LL1} = \frac{2\pi\alpha^2}{s - m^2} \left(\frac{s - m^2}{s} + \frac{4m^2}{s - m^2} - 2\frac{m^2(s + m^2)}{(s - m^2)^2} \ln \frac{s}{m^2} \right), \quad (4.19)$$

$$\sigma_{LL2} = \frac{2\pi\alpha^2}{2m^2} \left(\frac{s + m^2}{s} - 2\frac{m^2}{s - m^2} \ln \frac{s}{m^2} \right), \quad (4.20)$$

$$\sigma_{CC} = \frac{\pi\alpha^2}{2m^2} \left(\frac{(s + m^2)^2}{2s^2} - 2\frac{m^2}{s} - 2 + \frac{s + m^2}{s - m^2} \ln \frac{s}{m^2} \right). \quad (4.21)$$

Empleando estas fórmulas, nuestros resultados se pueden analizar en algún sistema de referencia particular. Por ejemplo, en la configuración de laboratorio, donde el electrón incide con velocidad $\boldsymbol{\beta} = \beta\hat{\boldsymbol{\beta}}$ (y posee energía $E_L = \gamma m = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}$), la energía del fotón es $q = k_L = \frac{k}{\gamma(1-\beta \cos \vartheta)}$ y la colisión ocurre a un ángulo ϑ , la sección de dispersión dependiente de la helicidad de los fotones, para electrones no polarizados, se escribe

$$\begin{aligned} \sigma_{\lambda',\lambda} = & \frac{\pi\alpha^2}{2m\gamma q(1 + \beta \cos \vartheta)} \left(2 \left[1 + \lambda'\lambda \frac{\gamma q(1 + \beta \cos \vartheta) + m}{\gamma q(1 + \beta \cos \vartheta)} \right] \frac{m\gamma q(1 + \beta \cos \vartheta) + (\gamma q(1 + \beta \cos \vartheta))^2}{(m + 2\gamma q(1 + \beta \cos \vartheta))^2} \right. \\ & + \left[2 + \frac{m}{\gamma q(1 + \beta \cos \vartheta)} - \lambda'\lambda \right] \frac{2m}{m + 2\gamma q(1 + \beta \cos \vartheta)} + 2 \left[\frac{m}{\gamma q(1 + \beta \cos \vartheta)} - \lambda'\lambda \right] \\ & \left. + \left[1 + \left(\lambda'\lambda - \frac{2m}{\gamma q(1 + \beta \cos \vartheta)} \right) \left(\frac{\gamma q(1 + \beta \cos \vartheta) + m}{\gamma q(1 + \beta \cos \vartheta)} \right) \right] \ln \left(\frac{m + 2\gamma q(1 + \beta \cos \vartheta)}{m} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

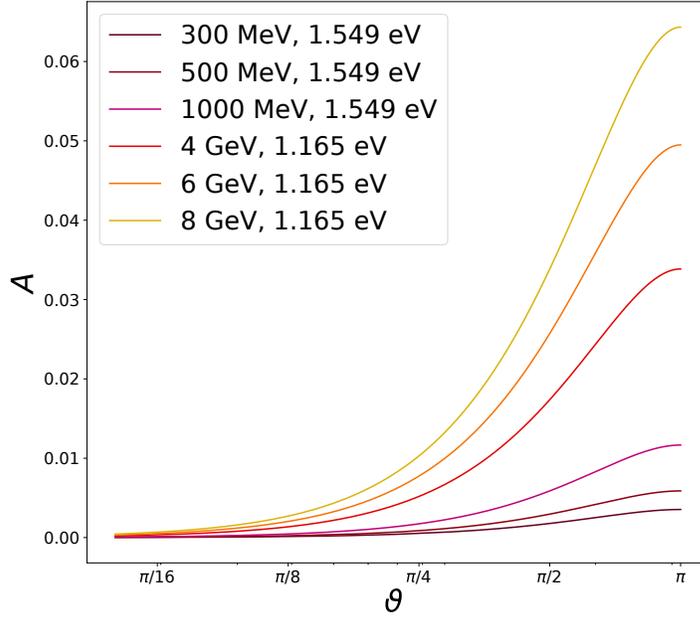


Figura 4-6: Asimetría circular para la dispersión de Compton, graficada como función del ángulo de colisión ϑ para diferentes configuraciones cinemáticas.

La Figura 4-6 muestra cómo es que la asimetría circular, que emerge de la expresión (4.22), depende del ángulo de colisión, para energías del electrón de 300 MeV, 500 MeV, 1 GeV, 4 GeV, 6 GeV y 8 GeV, y energías del fotón de 1.165 eV y 1.549 eV (algunos de estos valores son usados en las referencias [230] y [278]). Esta figura sugiere que el ángulo óptimo para maximizar el efecto de la asimetría es π radianes (colisión de frente) y, el efecto aumenta cuando la escala de energía de las partículas también aumenta.

De manera similar, uno puede obtener la asimetría de polarización lineal, que emerge de la dependencia de la sección con los estados de polarización de cada partícula por separado, para la configuración cinemática descrita arriba

$$A_L = \frac{-\frac{2m}{\gamma q(1+\beta \cos \vartheta)} + \frac{m\gamma(1-\beta \cos \vartheta)}{q} \left(1 + \frac{m\gamma(1-\beta \cos \vartheta)}{q}\right) \ln \left(\frac{m+2\gamma q(1+\beta \cos \vartheta)}{m}\right)}{\frac{q(m\gamma(1-\beta \cos \vartheta)+q)}{(m\gamma(1-\beta \cos \vartheta)+2q)^2} + \frac{2m}{\gamma q(1+\beta \cos \vartheta)} + \ln \left(\frac{m+2\gamma q(1+\beta \cos \vartheta)}{m}\right)}. \quad (4.23)$$

Los mismos parámetros utilizados en la Figura 4-6 son empleados en la Figura 4-7 para exhibir la dependencia de la ecuación (4.23) con el ángulo de colisión. Ahí se

observa que el efecto de asimetría aumenta cuando el ángulo de colisión tiende a cero (colisión por atrás) y disminuye con el aumento de las energías de las partículas, sin embargo, todos estos cambios son del orden del uno por ciento de la asimetría total y probablemente este efecto no se pueda medir en la práctica.

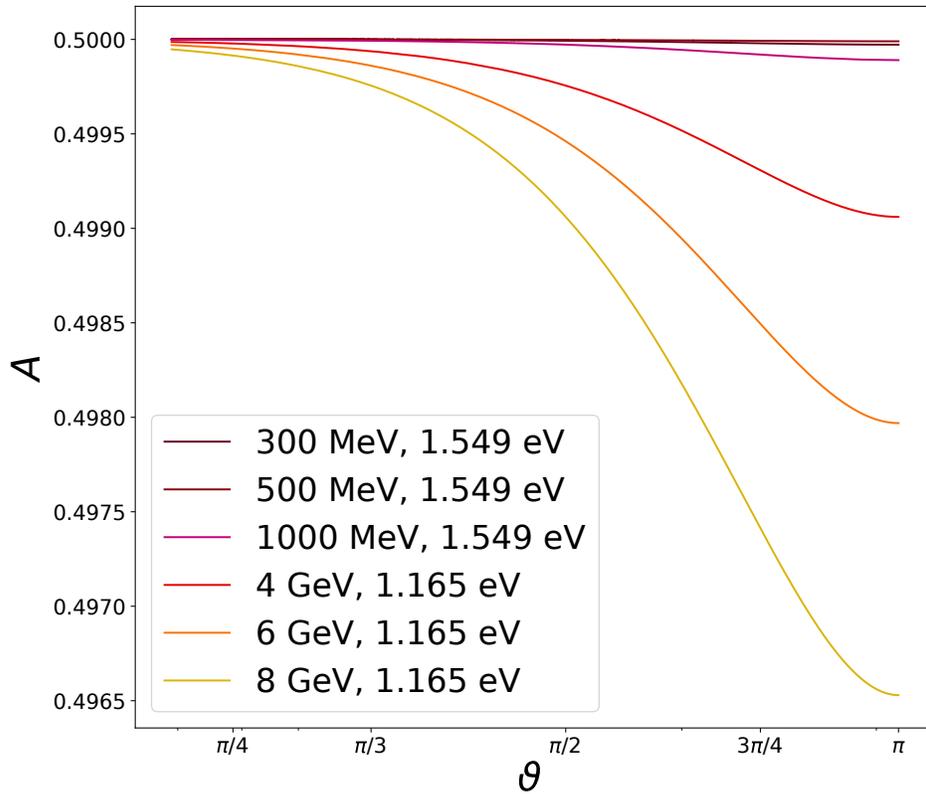


Figura 4-7: Asimetría de polarización lineal, dependiente de los estados de polarización de cada partícula por separado, para la dispersión de Compton con electrones no polarizados, graficada como función del ángulo de colisión ϑ para diferentes configuraciones cinemáticas.

Abajo mostramos los valores de la sección de dispersión no polarizada y la asimetría circular para algunas configuraciones de laboratorio (algunos de estos valores son usados en la referencia [223]). Los valores de la sección de dispersión obtenidos en este cálculo analítico son en esencia los mismos que aquellos presentados en el trabajo numérico [223] .

q(eV)	γm (GeV)	Sección (mb)	A	Sección [223] (mb)
1.549				
	0.3	660,553	0,00005	-
	0.5	657,473	0,0059	-
	1.0	649,933	0,0117	-
1.165				
	4.0	621,794	0,0339	621,80
	6.0	602,729	0,0495	602,74
	8.0	585,16	0,0643	585,17

Capítulo 5

Efectos de polarización en la dispersión de Compton con electrones polarizados

A continuación mostraremos y analizaremos las correlaciones entre polarizaciones de fotones y electrones. Se expone el procedimiento, en particular el relacionado con las variables de polarización de electrones, para obtener los elementos de la sección de dispersión. Empleamos las técnicas espinoriales desarrolladas en el capítulo 3 para tratar los términos de espín, además continuaremos utilizando el formalismo de Fano para expresar elementos de matriz de la amplitud (2.28) para polarización elíptica de los fotones.

Se analizan y discuten algunos efectos de polarización, de electrones y fotones, que emergen en la dispersión de Compton. En particular, la detección y producción de polarización en electrones usando fotones circularmente polarizados, y la detección y producción de polarización circular en fotones usando electrones polarizados. Se muestran gráficas de algunas asimetrías relacionadas con estos procesos.

Los términos de la sección diferencial de dispersión, para direcciones generales de espín, se muestran en el apéndice, sin embargo, en todos los casos los componentes de la sección total los obtenemos sólo numéricamente.

5.1. Los términos de polarización en la sección.

Antes de realizar el promedio sobre los estados de espín inicial y la suma sobre los finales, la expresión de la sección diferencial de dispersión (4.7) contiene la información que nos interesa discutir en este capítulo. Sin embargo, dada la complejidad en la estructura de la sección total de dispersión

$$\begin{aligned} \sigma(s', \bar{\mathbf{P}}', s, \bar{\mathbf{P}}) = & \frac{1}{4}\sigma_{NP} + \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{P}}' \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\bar{\mathbf{P}}'} + \bar{\mathbf{P}} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\bar{\mathbf{P}}} + \bar{\mathbf{P}}' \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\bar{\mathbf{P}}'\bar{\mathbf{P}}}) + \sigma(s', s) + \\ & + \bar{\mathbf{P}}' \cdot (\bar{\boldsymbol{\sigma}}'_{\bar{\mathbf{P}}'}(s') + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\bar{\mathbf{P}}'}(s) + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\bar{\mathbf{P}}'}(s', s)) + \bar{\mathbf{P}} \cdot (\bar{\boldsymbol{\sigma}}'_{\bar{\mathbf{P}}}(s') + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\bar{\mathbf{P}}}(s) + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\bar{\mathbf{P}}}(s', s)) + \sigma(s'; \bar{\mathbf{P}}', \bar{\mathbf{P}}) + \\ & + \sigma(s; \bar{\mathbf{P}}', \bar{\mathbf{P}}) + \bar{\mathbf{P}}' \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\bar{\mathbf{P}}'\bar{\mathbf{P}}}(s', s)\bar{\mathbf{P}}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

emplearemos la invarianza de cada uno de sus términos para reducir sus extensiones y así los cálculos sean más sencillos. Por este motivo, es conveniente hacer aclaraciones sobre nuestra convención y notación para transformar cantidades de un sistema de referencia a otro.

Aplicaremos la misma idea del capítulo anterior, según la cual los elementos de la sección (5.1) se calculan en el sistema donde el electrón incidente se encuentra en reposo, que denotaremos por \mathbf{S} , y al final las cantidades obtenidas las escribiremos nuevamente en el sistema de laboratorio, que representaremos con \mathbf{S}^L , donde la colisión es entre un fotón y un electrón con 4-vectores de energía momento $k_L = k_L(1, \hat{\mathbf{k}}_L)$ y $p_L = (E_L, \mathbf{p}_L)$, y polarizaciones $\bar{\mathbf{P}}_L$ y s_L , respectivamente. Puesto que en el sistema \mathbf{S} la dispersión está contenida en un plano (plano de dispersión), es posible utilizar transformaciones de Lorentz entre sistemas de referencia cuyos planos de dispersión se traslapan para analizar, y simplificar, el problema. En la Figura 5-1 se muestra de manera esquemática esta observación.

En el sistema \mathbf{S} , $k = k(1, \hat{\mathbf{k}})$ y $k' = k'(1, \hat{\mathbf{k}})$ son los 4-vectores de energía e ímpetu del fotón incidente y dispersado respectivamente, $p = (m, 0)$ y $p' = (E', \mathbf{p}')$ son los 4-vectores de energía e ímpetu del electrón incidente y dispersado respectivamente. Las polarizaciones de los fotones incidente y dispersado están representadas por los 4-vectores ϵ y ϵ' . Dado que en mecánica cuántica relativista, el uso de operadores

de espín, la obtención de sus estados propios y la interpretación de estas soluciones sólo es posible en el marco de referencia donde el electrón se encuentra en reposo [233,234,279], es conveniente expresar las direcciones de polarización de los electrones, incidente y dispersado, en sus respectivos sistemas en reposo. De esta manera, si queremos expresar el 4-vector de espín s' del electrón dispersado en el sistema S , en términos del 4-vector $s'_F = (0, \hat{s}'_F)$ en el sistema S^F , lo haremos por medio de la expresión

$$s' = \Lambda(-\mathbf{p}') s'_F, \quad (5.2)$$

donde $\Lambda(\mathbf{p}')$ es la transformación de Lorentz que va del sistema S al S^F .

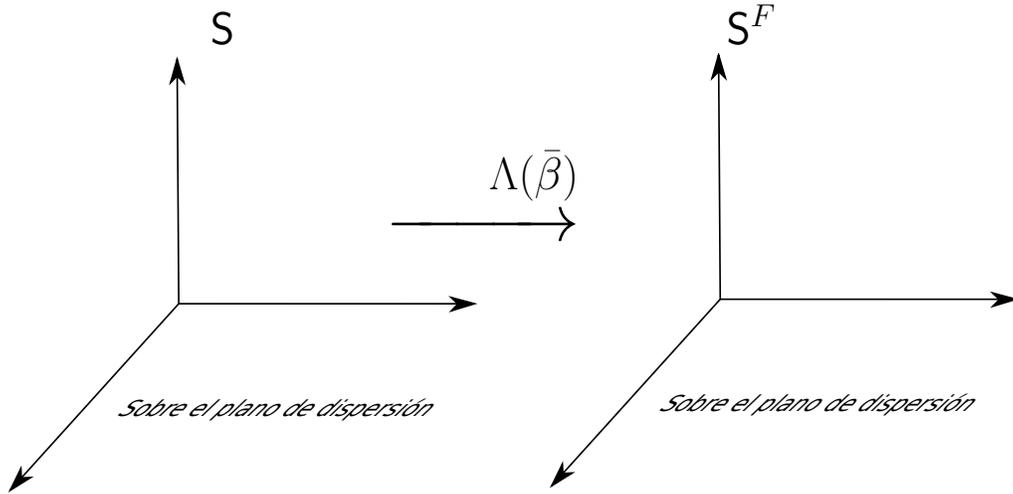


Figura 5-1: El problema se puede estudiar con transformaciones de Lorentz entre sistemas de referencia cuyos planos de dispersión son coplanares.

Por otro lado, ya que nos interesa calcular las asimetrías de espín, es conveniente escribir el vector de tres componentes \hat{s}'_F en términos de sus componentes paralela $\hat{s}'_{\parallel F}$ y perpendicular $\hat{s}'_{\perp F}$ al movimiento del electrón final, los cuales tienen componentes sobre el plano de dispersión y en dirección perpendicular a él. La dirección más general que el espín puede tener se puede desarrollar de la forma

$$\hat{s}'_F = \cos x' \hat{\mathbf{p}}' + \cos y' \hat{\mathbf{r}}_1 + \cos z' \hat{\mathbf{p}}' \times \hat{\mathbf{r}}_1, \quad (5.3)$$

donde hemos ocupado la notación del capítulo anterior, correspondiendo el primer término del lado derecho de la igualdad a la componente paralela al movimiento del electrón dispersado, y el segundo y tercer término son las componentes perpendiculares al movimiento. De manera análoga, la dirección más general del espín del electrón incidente se puede desarrollar de la forma

$$\hat{\mathbf{s}} = \cos x \hat{\mathbf{p}}_L + \cos y \hat{\mathbf{r}}_1 + \cos z \hat{\mathbf{p}}_L \times \hat{\mathbf{r}}_1. \quad (5.4)$$

Ahora, ya habíamos mencionado que el elemento de matriz

$$M(\hat{\mathbf{S}}'_F, \hat{\mathbf{r}}'_l, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{r}}_m) = \phi_F^{\dagger}(\hat{\mathbf{S}}'_F) \left(\mathbb{1}_s a(\hat{\mathbf{r}}'_l, \hat{\mathbf{r}}_m) + i \bar{\sigma}_s \cdot \bar{b}(\hat{\mathbf{r}}'_l, \hat{\mathbf{r}}_m) \right) \phi(\hat{\mathbf{s}}), \quad (5.5)$$

contiene la dependencia de las variables de polarización de los electrones en los espinores de dos componentes ϕ y ϕ'_F , los cuales satisfacen las ecuaciones de valores propios

$$\frac{1}{2} \bar{\sigma}_s \cdot \hat{\mathbf{s}} \phi_\zeta = \frac{\zeta}{2} \phi_\zeta, \quad (5.6)$$

$$\frac{1}{2} \bar{\sigma}_s \cdot \hat{\mathbf{S}}'_F \phi'_{\zeta'F} = \frac{\zeta'}{2} \phi'_{\zeta'F}, \quad (5.7)$$

y, si hacemos uso de la base $\hat{\mathbf{p}}'$, $\hat{\mathbf{r}}_1$, $\hat{\mathbf{p}}' \times \hat{\mathbf{r}}_1$ y $\hat{\mathbf{p}}_L$, $\hat{\mathbf{r}}_1$, $\hat{\mathbf{p}}_L \times \hat{\mathbf{r}}_1$, y de la representación de las matrices de Pauli donde σ_s^1 es diagonal, una posible parametrización de los mismos es

$$\phi_+ = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{-iw/2} \\ \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) e^{iw/2} \end{pmatrix}, \quad \phi_- = \begin{pmatrix} \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) e^{-iw/2} \\ -\cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{iw/2} \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

$$\phi'_{+F} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{x'}{2}\right) e^{-iw'/2} \\ \text{sen}\left(\frac{x'}{2}\right) e^{iw'/2} \end{pmatrix}, \quad \phi'_{-F} = \begin{pmatrix} \text{sen}\left(\frac{x'}{2}\right) e^{-iw'/2} \\ -\cos\left(\frac{x'}{2}\right) e^{iw'/2} \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

con $\tan w = \frac{\cos z}{\cos y}$ y $\tan w' = \frac{\cos z'}{\cos y'}$. De esta forma, la matriz de densidad para estos estados se escribe

$$\rho_\zeta(\hat{\mathbf{s}}) = \phi_\zeta \phi_\zeta^\dagger = \frac{1 + \bar{\sigma}_s \cdot \hat{\mathbf{s}}}{2}, \quad (5.10)$$

$$\rho_{\zeta'}(\hat{\mathbf{S}}'_F) = \phi'_{\zeta'F} \phi_{\zeta'F}^\dagger = \frac{1 + \bar{\sigma}_s \cdot \hat{\mathbf{S}}'_F}{2}. \quad (5.11)$$

Así, los productos entre elementos de matriz (5.5) contenidos en los términos de la expresión (5.1), se desarrollan en la forma

$$\begin{aligned}
M(\hat{\mathbf{s}}'_F, \hat{\mathbf{r}}'_l, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{r}}_m) M^*(\hat{\mathbf{s}}'_F, \hat{\mathbf{r}}'_r, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{r}}_s) &= \left(a_{lm} \phi_F^\dagger \phi + i \phi_F^\dagger \bar{\sigma}_s \cdot \bar{b}_{lm} \phi \right) \left(a_{rs}^* \phi^\dagger \phi'_F - i \phi \bar{\sigma}_s \cdot \bar{b}_{rs}^* \phi'^\dagger \right) = \\
&= a_{lm} a_{rs}^* \mathbb{T}r \varrho_\zeta(\hat{\mathbf{s}}) \varrho_{\zeta'}(\hat{\mathbf{s}}'_F) + i a_{rs}^* \mathbb{T}r \varrho_\zeta(\hat{\mathbf{s}}) \varrho_{\zeta'}(\hat{\mathbf{s}}'_F) \bar{\sigma}_s \cdot \bar{b}_{lm} - i a_{lm} \mathbb{T}r \varrho_{\zeta'}(\hat{\mathbf{s}}'_F) \varrho_\zeta(\hat{\mathbf{s}}) \bar{\sigma}_s \cdot \bar{b}_{rs}^* + \\
&\quad + \mathbb{T}r \varrho_\zeta(\hat{\mathbf{s}}) \bar{\sigma}_s \cdot \bar{b}_{rs}^* \varrho_{\zeta'}(\hat{\mathbf{s}}'_F) \bar{\sigma}_s \cdot \bar{b}_{lm} = \\
&= \frac{1}{2} \left(a_{lm} a_{rs}^* (1 + \hat{\mathbf{s}}'_F \cdot \hat{\mathbf{s}}) + \bar{b}_{lm} \cdot \bar{b}_{rs}^* (1 - \hat{\mathbf{s}}'_F \cdot \hat{\mathbf{s}}) + \hat{\mathbf{s}}'_F \cdot \bar{b}_{lm} \hat{\mathbf{s}} \cdot \bar{b}_{rs}^* + \hat{\mathbf{s}}'_F \cdot \bar{b}_{rs}^* \hat{\mathbf{s}} \cdot \bar{b}_{lm} + \right. \\
&\quad \left. + a_{rs}^* \bar{b}_{lm} \cdot \hat{\mathbf{s}}'_F \times \hat{\mathbf{s}} + a_{lm} \bar{b}_{rs}^* \cdot \hat{\mathbf{s}}'_F \times \hat{\mathbf{s}} + i [a_{rs}^* (\hat{\mathbf{s}} \cdot \bar{b}_{lm} + \hat{\mathbf{s}}'_F \cdot \bar{b}_{lm}) - \right. \\
&\quad \left. - a_{lm} (\hat{\mathbf{s}} \cdot \bar{b}_{rs} + \hat{\mathbf{s}}'_F \cdot \bar{b}_{rs})] + i [\hat{\mathbf{s}}'_F \cdot \bar{b}_{lm} \times \bar{b}_{rs}^* + \hat{\mathbf{s}} \cdot \bar{b}_{rs}^* \times \bar{b}_{lm}] \right). \tag{5.12}
\end{aligned}$$

Se obtuvieron las expresiones analíticas de cada uno de los términos en la ecuación (5.1) hasta antes de su integración utilizando la fórmula (5.12), las cuales se encuentran en el apéndice.

5.2. Asimetrías de polarización.

En particular, para la dispersión total, estudiamos los fenómenos que permiten producir y detectar polarización en los electrones dispersados e incidentes, respectivamente, así como producir y detectar polarización circular en los fotones dispersados e incidentes, respectivamente. Los resultados, de manera implícita, dependen de la energía del fotón incidente y del ángulo de colisión en el sistema de laboratorio, o de la energía del fotón incidente en el sistema en reposo del electrón incidente.

Si la partícula en cuestión (electrón o fotón) puede tener un estado de polarización \mathfrak{X} , el respectivo grado de polarización para dichas partículas dispersadas será cuantificado por la dispersión total de partículas con estados de polarización \mathfrak{X} , menos la dispersión total de partículas con estados de polarización $-\mathfrak{X}$ (siendo este el estado de polarización ortogonal a \mathfrak{X}), dividido entre la dispersión total de partículas con estados de polarización \mathfrak{X} más la dispersión total de partículas con estados de

polarización $-\mathfrak{X}$. De manera que tenemos los siguientes casos.

5.2.1. Producción de polarización circular en los fotones dispersados.

Ya habíamos mostrado que en la dispersión total no es posible polarizar (o aumentar el grado de polarización) circularmente los fotones cuando se emplean electrones no polarizados. Sin embargo, este fenómeno de polarización es posible cuando se utilizan electrones incidentes polarizados. El grado de polarización en cuestión es

$$P(\lambda') = 2 \frac{\bar{P}'(\lambda') \cdot \bar{\sigma}_{\bar{P}'\bar{P}} \bar{P} + 2\bar{P}'(\lambda') \cdot \bar{\sigma}_{\bar{P}'}(s) + 2\sigma(s; \bar{P}'(\lambda'), \bar{P})}{\sigma_{NP} + 2\bar{P} \cdot \bar{\sigma}_{\bar{P}} + 4\bar{P} \cdot \bar{\sigma}_{\bar{P}}(s)}, \quad (5.13)$$

donde la notación $\bar{P}'(\lambda') = (0, 0, \lambda')$ quiere decir que se está midiendo polarización circular, en el estado final, con signo de helicidad λ' . Uno puede apreciar en la expresión (5.13) que aún cuando el haz de fotones iniciales esté totalmente despolarizado, esto es $\bar{P} = \bar{0}$, será posible producir polarización circular.

La Figura 5-2 muestra el valor absoluto del grado de polarización obtenido, en la dispersión total, para un haz de fotones totalmente despolarizados, como función de la energía de los fotones incidentes en el sistema en reposo del electrón incidente, para un haz de electrones totalmente polarizado, con diferentes valores del ángulo x que estas direcciones de polarización hacen con $\hat{\mathbf{k}}$, en el plano de polarización definido por esta dirección y la perpendicular al plano de dispersión.

Uno puede observar que, cuando se estudia el caso de colisión de frente, se tienen estados de helicidad para los electrones cuando el ángulo es $x = 0$, el cual da lugar a un mayor grado de polarización de los fotones. La Figura 5-2 sugiere que en el límite de alta energía, existe una transferencia total de momento angular entre el electrón y el fotón.

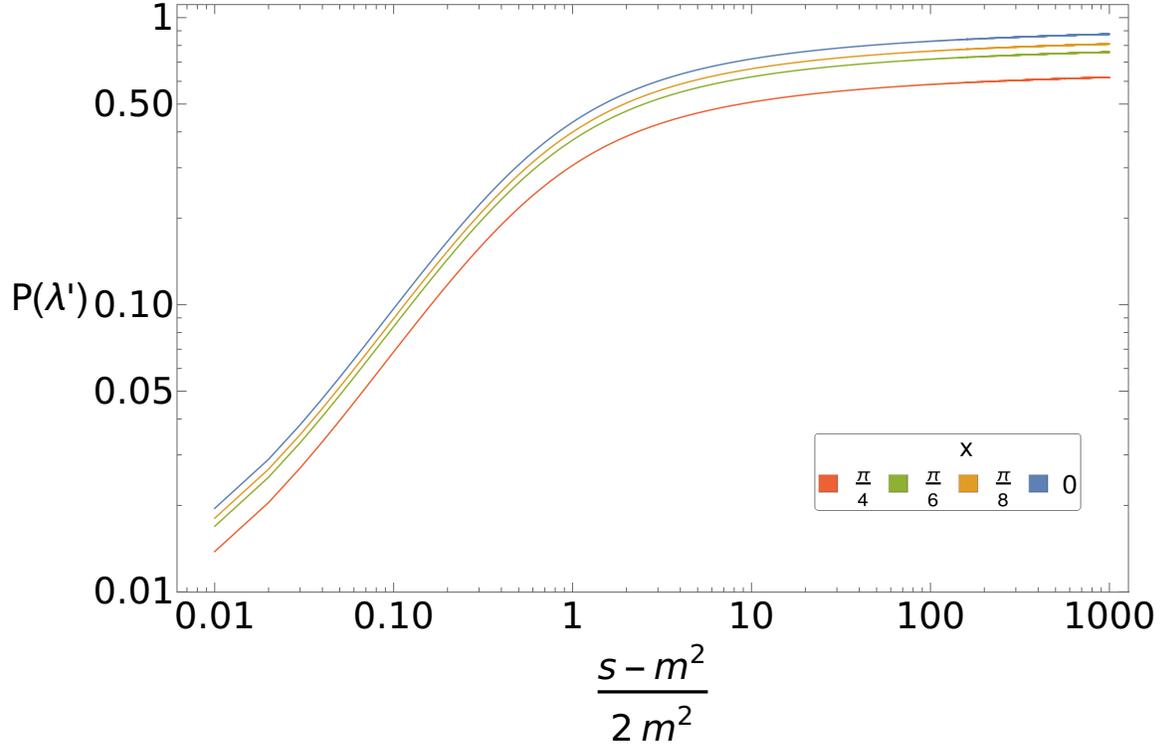


Figura 5-2: En la dispersión total de Compton es posible polarizar circularmente los fotones dispersados utilizando electrones polarizados. Las curvas muestran el valor absoluto del grado de polarización circular, para un haz totalmente polarizado de electrones y fotones incidentes totalmente despolarizados, como función de la cantidad invariante $\frac{s-m^2}{2m^2}$. Se distinguen por tener diferentes valores del ángulo x que la polarización de los electrones hace con $\hat{\mathbf{k}}$, en el plano de polarización definido por esta dirección y la perpendicular al plano de dispersión.

5.2.2. Determinación del grado de polarización circular en los fotones incidentes.

Cuando uno usa electrones polarizados inicialmente, la sensibilidad de la dispersión de Compton se extiende a estados de fotones con polarización circular. La diferencia de la dispersión total del haz de fotones, cuando se utilizan electrones totalmente polarizados, con signo de polarización $+1$ menos el caso con signo de polarización -1 , para alguna dirección de polarización $\hat{\mathbf{s}}$, se puede determinar experimentalmente para un determinado valor de la energía del fotón, y en general para un ángulo de colisión.

Llamando $A(\hat{s}, \vartheta)$ a esta cantidad, la polarización del haz de fotones viene dada por

$$P(\lambda) = A(\hat{s}, \vartheta) \frac{\sigma_{NP}}{4\bar{P}(\lambda) \cdot \bar{\sigma}_P(\hat{s})}. \quad (5.14)$$

La Figura 5-3 muestra el cociente $\frac{4\bar{P}(\lambda) \cdot \bar{\sigma}_P(\hat{s})}{\sigma_{NP}}$ como función de la energía de los fotones incidentes en el sistema en reposo del electrón incidente, cuando se utiliza un haz de electrones totalmente polarizado, con diferentes valores del ángulo χ que esta dirección de polarización hace con $\hat{\mathbf{k}}$, en el plano de polarización definido por esta dirección y la perpendicular al plano de dispersión. Se puede apreciar, dados los valores que toma este cociente, que este procedimiento será más eficiente para altas energías del centro de masa.

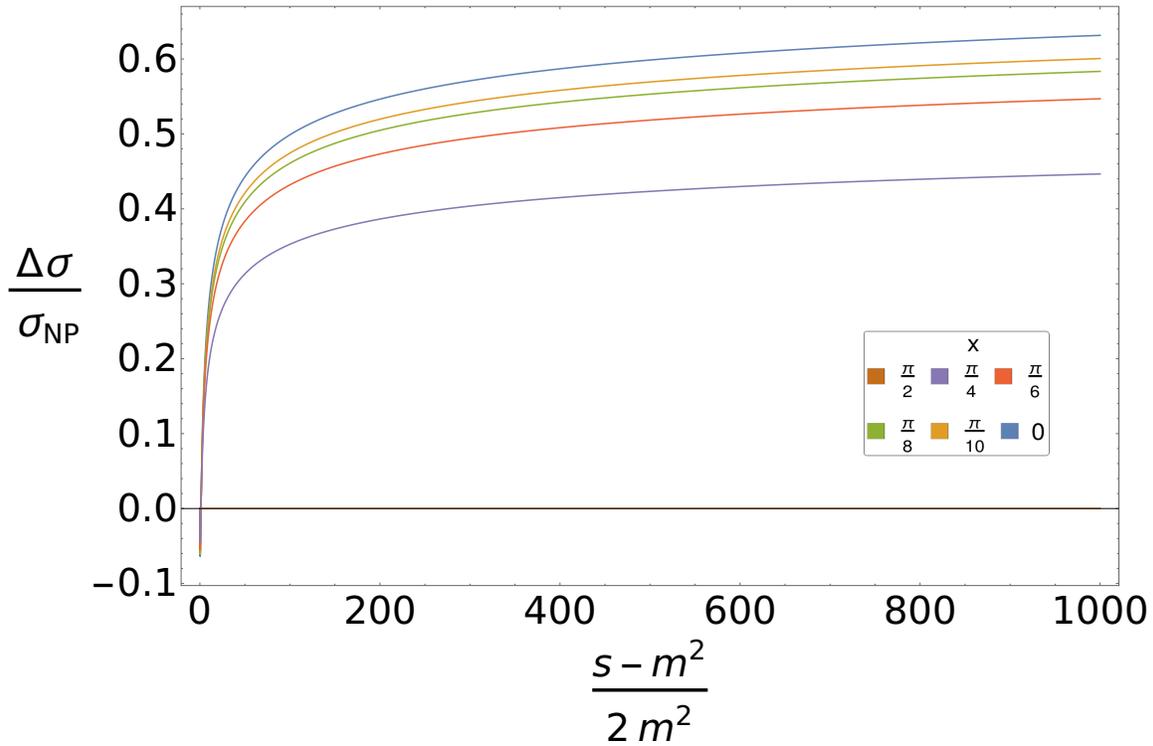


Figura 5-3: La dispersión total de Compton depende del grado de polarización circular de los fotones incidentes cuando se utilizan electrones polarizados. Estas curvas muestran el valor absoluto del cociente $\frac{4\bar{P}(\lambda) \cdot \bar{\sigma}_P(\hat{s})}{\sigma_{NP}}$, para un haz totalmente polarizado de electrones, como función de la cantidad invariante $\frac{s-m^2}{2m^2}$, y se distinguen por tener diferentes valores del ángulo χ que la polarización de los electrones hace con $\hat{\mathbf{k}}$, en el plano de polarización definido por esta dirección y la perpendicular al plano de dispersión.

5.2.3. Determinación de la polarización de los electrones incidentes.

Usando fotones circularmente polarizados, es posible cuantificar la polarización de los electrones incidentes. La diferencia de la dispersión del haz de electrones, cuando se utilizan fotones con helicidad $+1$ menos el caso con helicidad -1 se puede determinar experimentalmente para un determinado valor de la energía del fotón, y en general para un ángulo de colisión. Llamando $A(k_L, \vartheta)$ a esta cantidad, la polarización del haz de electrones en la dirección \hat{s} viene dada por

$$P(\hat{s}) = A(k_L, \vartheta) \frac{\sigma_{NP}}{4\bar{P}(+1) \cdot \bar{\sigma}_{\bar{P}}(\hat{s})}. \quad (5.15)$$

Hay que hacer notar que el factor que acompaña a $A(k_L, \vartheta)$ es el mismo que aparece en la expresión (5.14) para $\lambda = +1$.

5.2.4. Producción de polarización en los electrones dispersados.

También es posible producir polarización en los electrones, por medio de la dispersión total, cuando se utilizan fotones circularmente polarizados. El grado de polarización que se puede producir en un evento de dispersión es

$$P(\hat{s}'_F) = 2 \frac{\sigma(s', s) + 2\bar{P} \cdot \bar{\sigma}'_{\bar{P}}(s')}{\sigma_{NP} + 4\bar{P} \cdot \bar{\sigma}_{\bar{P}}(s)} \quad (5.16)$$

De esta fórmula se sigue que es posible producir polarización en el haz de electrones, incluso cuando el haz de electrones se encuentra totalmente despolarizado. La Figura 5-4 muestra el grado de polarización obtenible, cuando el haz incidente de electrones se encuentra totalmente despolarizado, para algunos valores del ángulo x' que hace la dirección de la misma con el eje \hat{p}' , en el plano definido por esta dirección y la perpendicular al plano de dispersión. Se puede apreciar que el grado de polarización obtenible, para los ángulos considerados con excepción de $\pi/2$, es mayor al 50 por

ciento, para energías del fotón incidente mayores a 25 MeV en el sistema en reposo del electrón incidente, además, recordando que con $\alpha' = 0$ se tienen estados de helicidad para los electrones dispersados, se puede observar que este tipo de polarización es la más favorecida por este proceso polarizante, ya que la polarización supera el 80 por ciento para esta energía. Se puede observar que no se pueden polarizar electrones en la dirección perpendicular al plano de dispersión con este mecanismo (ángulo $\alpha' = \pi/2$). Finalmente, esta figura sugiere que en el límite de alta energía existe una transferencia total de momento angular entre el fotón y el electrón.

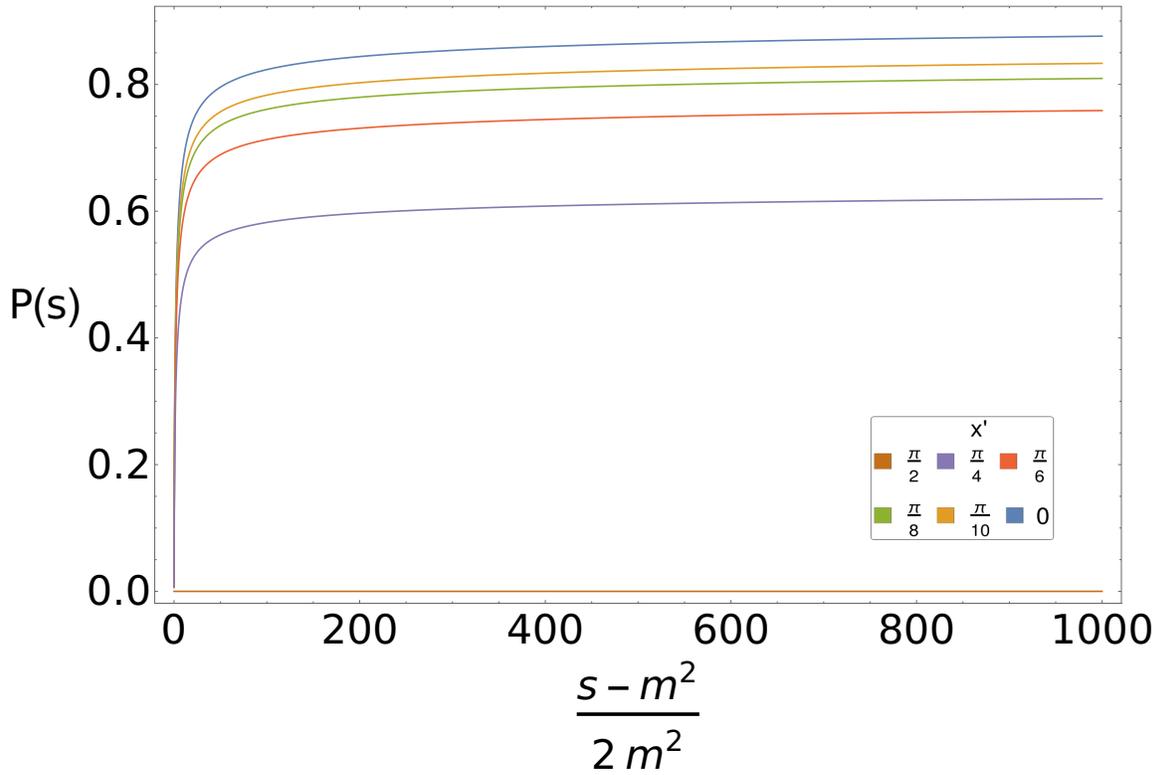


Figura 5-4: En la dispersión total de Compton es posible polarizar los electrones dispersados utilizando fotones polarizados circularmente. Las curvas muestran el valor absoluto del grado de polarización, utilizando un haz de fotones totalmente polarizados circularmente, como función de la cantidad invariante $\frac{s-m^2}{2m^2}$, y se distinguen por tener diferentes valores del ángulo α' que la polarización de los electrones hace con la dirección de emisión $\hat{\mathbf{p}}'$, en el plano de polarización definido por esta dirección y la perpendicular al plano de dispersión.

Para un proceso con múltiples eventos de dispersión, todos descritos por la fórmula (5.1), de un haz incidente de fotones totalmente polarizados circularmente, por un

haz de electrones parcialmente polarizados y representado por la matriz de densidad

$$\varrho = w_+ \varrho_+ + w_- \varrho_-, \quad (5.17)$$

donde w_+ es el porcentaje de electrones en el estado puro de espín ϱ_+ , w_- el porcentaje de electrones en el estado puro de espín ϱ_- y la polarización $P = w_+ - w_-$, la matriz de densidad (5.17) cambiará en el tiempo. Sus elementos de matriz al tiempo $t + dt$ dependerán de los elementos al tiempo t de la forma

$$w_+(t + dt) = w_+(t) + P(s' = +, s = -, \lambda) dt w_-(t) - P(s' = -, s = +, \lambda) dt w_+(t), \quad (5.18)$$

$$w_-(t + dt) = w_-(t) + P(s' = -, s = +, \lambda) dt w_+(t) - P(s' = +, s = -, \lambda) dt w_-(t), \quad (5.19)$$

donde $P(s' = \kappa', s = \kappa, \lambda)$ es la probabilidad de transición por unidad de tiempo del estado de espín inicial s con proyección κ , al ser dispersado por un haz de fotones totalmente polarizados con helicidad λ , al estado de espín s' con proyección κ' .

Si uno supone constante la cantidad de electrones en el haz y además un haz con densidad media de fotones n , resolviendo las ecuaciones (5.18) y (5.19), la polarización de este sistema en función del tiempo resulta

$$P(t) = P(\infty) + 2(w_+(0) - \tau P(s' = +, s = -, \lambda))e^{-t/\tau}, \quad (5.20)$$

donde $w_+(0)$ es el porcentaje de electrones en el estado ρ_+ al tiempo $t = 0$, el tiempo característico es

$$\tau = \frac{1}{P(s' = +, s = -, \lambda) + P(s' = -, s = +, \lambda)}, \quad (5.21)$$

y la polarización de equilibrio $P(\infty)$, ya que la probabilidad $P(s', s, \lambda)$ es proporcional a la sección de dispersión $\sigma(s', s, \lambda) = \sum_{\bar{P}'} \sigma(s', \bar{P}', s, \bar{P} = \lambda)$, resulta

$$P(\infty) = \frac{\sigma(s' = +, s = -, \lambda) - \sigma(s' = -, s = +, \lambda)}{\sigma(s' = +, s = -, \lambda) + \sigma(s' = -, s = +, \lambda)}. \quad (5.22)$$

La figura (5-5) muestra la polarización de equilibrio, para las direcciones paralela al movimiento de los electrones (estados de helicidad) y perpendicular al plano de dispersión, como función de la cantidad invariante $\frac{s-m^2}{2m^2}$. Uno puede observar que la polarización de equilibrio para estados de helicidad alcanza un máximo en una región de media energía y tiende a cero con el aumento de energía. En contraste, la polarización de equilibrio en la dirección perpendicular al plano de dispersión siempre es nula. Hay que notar que el trabajo de Kotkin y sus colaboradores [184], muestra que la polarización de equilibrio para estados de helicidad de este sistema es nula en el límite de alta energía del centro de masa. No encontramos en la literatura un análisis general de este sistema, lo que hace este un resultado novedoso y que, en principio, podría resultar interesante como método polarizante de electrones.

Por otro lado, la figura (5-6) muestra el producto de la densidad de fotones en el haz por el tiempo característico para alcanzar la polarización de equilibrio, para estados de helicidad, como función de la cantidad invariante $\frac{s-m^2}{2m^2}$.

Si uno aproxima $\frac{s-m^2}{2m^2} \approx 4$ para el punto donde se alcanza el valor máximo de la polarización de equilibrio (de aproximadamente 55 %), suponiendo una colisión de frente de un haz monocromático de electrones de energía 5 GeV con un haz monocromático de fotones, la energía de los mismos debe ser 100 eV. Además, si uno supone una densidad media de 10^{16} fotones por unidad de volumen en el haz, el tiempo característico para alcanzar este grado de polarización es del orden de 10^{-10} s.

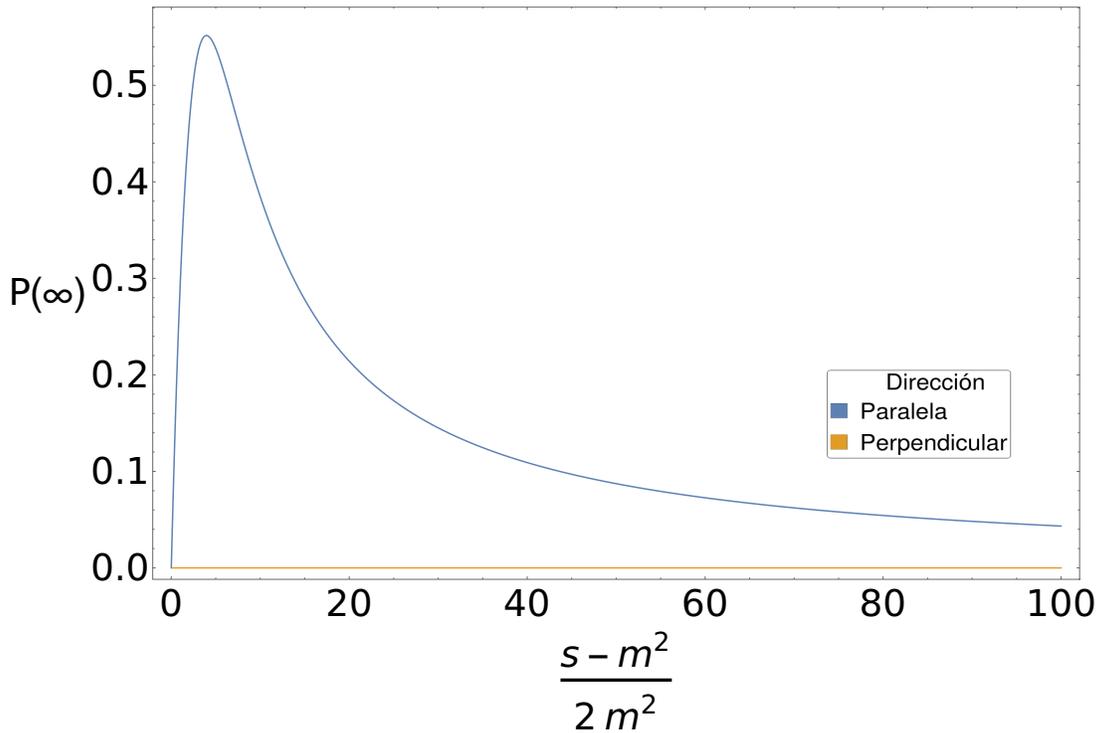
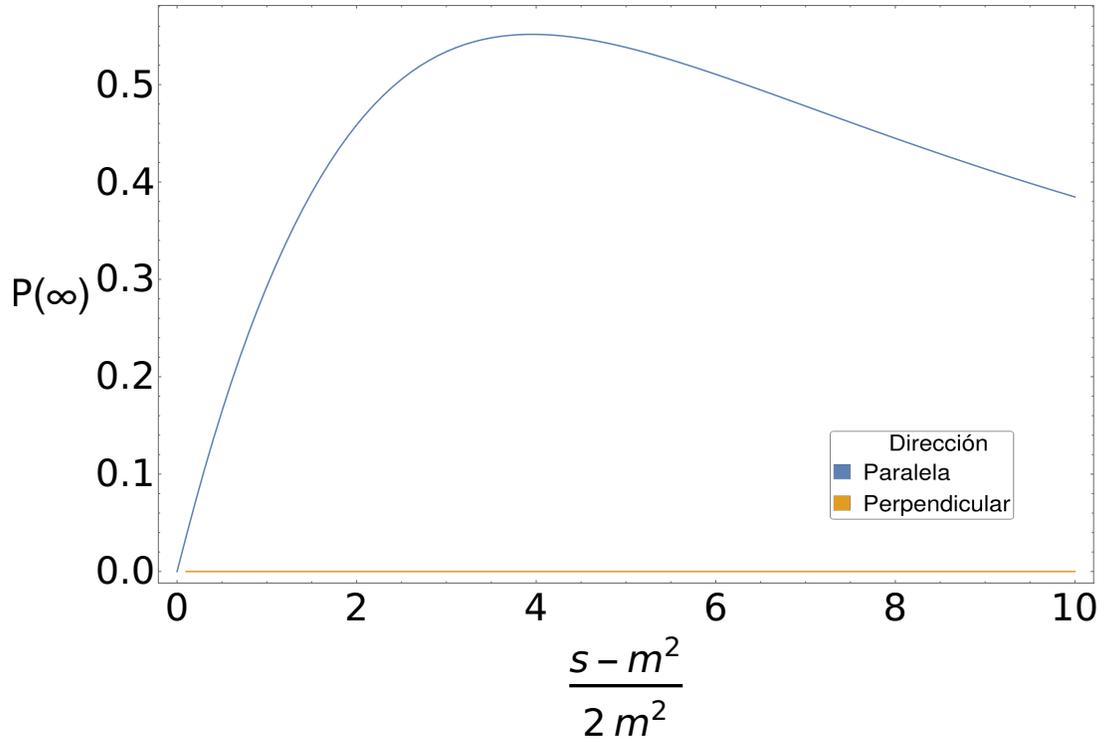


Figura 5-5: En la dispersión total de Compton es posible polarizar los electrones dispersados utilizando fotones polarizados circularmente. Las curvas muestran el valor absoluto de la polarización de equilibrio, utilizando un haz con densidad media de fotones n totalmente polarizados circularmente, como función de la cantidad invariante $\frac{s-m^2}{2m^2}$, para direcciones de polarización paralela al ímpetu de los electrones y perpendicular al plano de polarización. En la gráfica superior se visualiza el intervalo horizontal de 0 a 10, mientras que la inferior el intervalo horizontal de 0 a 100

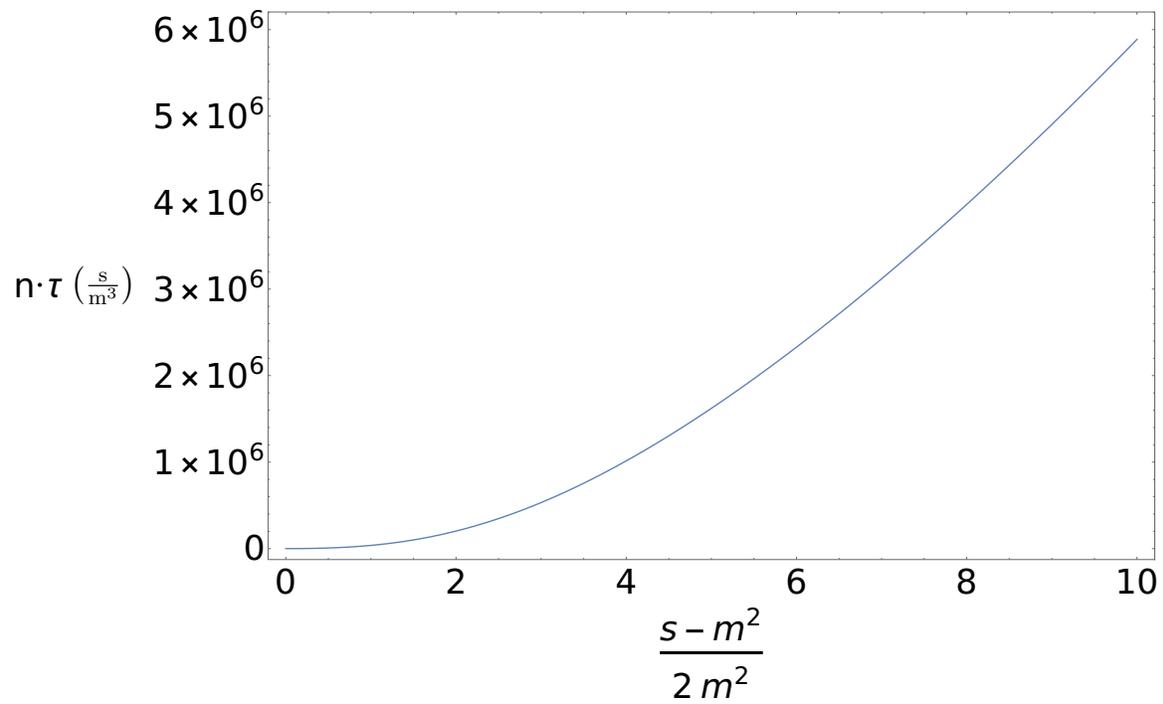


Figura 5-6: Esta curva muestra el producto del tiempo característico para alcanzar la polización de equilibrio para estados de helicidad por la densidad media de fotones en el haz n , como función de la cantidad invariante $\frac{s-m^2}{2m^2}$.

Capítulo 6

Conclusiones

6.1. Para la dispersión de Thomson.

La dispersión de Thomson muestra múltiples correlaciones entre la dirección de dispersión y el estado de polarización de esta radiación.

En la dispersión total, no hay ningún fenómeno de polarización que dependa de manera individual con los estados de polarización de la radiación incidente o dispersada. En la dispersión total, tampoco es posible polarizar radiación que originalmente se encontraba despolariada. La dispersión de Thomson de radiación circularmente polarizada presenta una asimetría de helicidad de la radiación dispersada. Así también presenta una asimetría en la dispersión de radiación linealmente polarizada.

6.2. Para la dispersión de Compton.

La dispersión total de Compton no dará lugar a fotones circularmente polarizados si las partículas antes de la dispersión no están polarizadas.

Si uno no mide la polarización final de los fotones, y no toma en cuenta las correlaciones entre estados de polarización de fotones y electrones, la dispersión total es idéntica cuando se hace incidir un haz de fotones no polarizados que cuando se hacen incidir fotones con polarización circular.

Si uno mide la polarización final de los fotones, aún sin tomar en cuenta las

correlaciones entre estados de polarización de fotones y electrones, se puede distinguir la dispersión total de fotones incidentes con polarización circular de la dispersión total para fotones incidentes con algún otro estado puro de polarización. Además, utilizando electrones no polarizados, es posible distinguir la dispersión total de fotones incidentes con diferentes direcciones de polarización lineal, aún sin emplear las correlaciones existentes con su polarización final. Estas dos propiedades podrían tener potencial aplicación en el desarrollo de nuevas versiones de un polarímetro de Compton.

Utilizando electrones y fotones no polarizados, la dispersión total de Compton dará lugar a fotones con polarización lineal, siendo máximo el efecto para la dirección de polarización perpendicular al plano de dispersión.

En general, existen asimetrías generales para estados de polarización elíptica en la dispersión total de Compton con electrones no polarizados.

Por otro lado, es posible aumentar el grado de polarización circular de un haz de fotones utilizando la dispersión de Compton con electrones polarizados. Incluso, si el haz de fotones se encuentra originalmente despolarizado, es posible producir polarización mediante este efecto. En este caso, para un evento de dispersión, el grado de polarización obtenible tiende al cien por ciento lentamente con el aumento en la escala de energía del fotón incidente en el sistema en reposo del electrón incidente, aunque es cercano al 80 por ciento para un valor de 10 MeV de esta energía.

Es posible determinar el grado de polarización circular de un haz de fotones utilizando la dispersión de Compton con electrones polarizados. La fórmula (5.14) sugiere un método para hacerlo. También es posible determinar el grado de polarización de un haz de electrones utilizando la dispersión de Compton con fotones circularmente polarizados, la fórmula (5.15) sugiere un método para hacerlo.

La dispersión total de Compton permite polarizar electrones cuando se emplean fotones circularmente polarizados. Se obtiene una polarización de equilibrio, para un proceso con múltiples eventos de dispersión, de aproximadamente 55 %, para estados de helicidad del electrón, para una energía del fotón incidente de 100 KeV y electrones de energía 5 GeV, ambos en el sistema de laboratorio, en una colisión de frente. El tiempo característico para este proceso es del orden de centenas de picosegundos

cuando un supone una densidad del orden de 10^{16} fotones por unidad de volumen en el haz. Este resultado constituye un análisis más amplio del trabajo de Kotkin y sus colaboradores [184], y a pesar que en el límite de altas energías coincide con él, en esta región cinemática no está reportado en la literatura hasta ahora.

6.3. Para el método proyectivo para el cálculo de amplitudes de transición para procesos que involucran partículas de Dirac.

La noción de operador espinorial ayuda a entender la importancia de la relación de completitud de la base de espinores masivos.

Por otro lado, el método proyectivo permite calcular amplitudes de transición para procesos que involucran partículas de Dirac, sin requerir de la introducción de cantidades no relacionadas con el problema en cuestión. Esto evita la aparición de factores de fase innecesarios. Los formalismos para el cálculo de amplitudes de transición basados en espinores de helicidad y en espinores no masivos se pueden formular con el método proyectivo. Además, este método permite utilizar las simetrías que estas bases espinoriales poseen, ayudando a entender mejor estos formalismos.

El método proyectivo evita la aparición de posibles singularidades provenientes de una mala parametrización de los espinores.

Al utilizar la base de espinores en reposo, el método proyectivo permite obtener expresiones cerradas, para las amplitudes, explícitamente covariantes. En consecuencia, este método permitió obtener expresiones analíticas compactas y manejables para las amplitudes de transición para el problema de Compton. Gracias a él, la mayor parte del análisis de esta tesis fue posible.

Apéndice A

Términos de la sección diferencial de dispersión dependientes de la polarización de los electrones

Empleando el método de cálculo mostrado en la página 93, usando las variables de Mandelstam s , t y $u = 2m^2 - t - s$, el ángulo de dispersión θ en el sistema en reposo del electrón incidente, y los vectores de polarización $\hat{\mathbf{s}}'_F$ y $\hat{\mathbf{s}}$ para los electrones final e inicial respectivamente, los componentes de la sección diferencial de dispersión quedan de la forma

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \sigma_{NP} + \frac{d}{dt} \sigma(\hat{\mathbf{s}}'_F, \hat{\mathbf{s}}) = -\frac{\pi\alpha^2}{8(s-m^2)^2} (|M_0|^2 + |\bar{M}|^2) = \\
 & = -\frac{\pi\alpha^2}{2(s-m^2)^2} \left(1 + \left(1 + \frac{2m^2t}{(s-m^2)(s+t-m^2)} \right)^2 + \frac{t^2}{(s-m^2)(s+t-m^2)} + \right. \\
 & \left. + \hat{\mathbf{s}}'_F \cdot \hat{\mathbf{s}} \left(1 + \left(1 + \frac{2m^2t}{(s-m^2)(s+t-m^2)} \right)^2 + \left(\frac{t(2s+t-2m^2)^2}{(4m^2-t)(s-m^2)(s+t-m^2)} \right) \left(1 + \frac{m^2t}{(s-m^2)(s+t-m^2)} \right) \right) + \right. \\
 & \left. + \hat{\mathbf{s}}'_F \cdot \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \frac{\left(\frac{4m^2t}{(s-m^2)(s+t-m^2)} \right) \left(1 + \frac{2m^2t}{(s-m^2)(s+t-m^2)} \right) (s-m^2)^2 - t(4m^2-t)}{4m^2(4m^2-t)} + \right. \\
 & \left. + \hat{\mathbf{s}}'_F \cdot \hat{\mathbf{k}}' \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{k}}' \frac{\left(\frac{4m^2t}{(s-m^2)(s+t-m^2)} \right) \left(1 + \frac{2m^2t}{(s-m^2)(s+t-m^2)} \right) (s+t-m^2)^2 - t(4m^2-t)}{4m^2(4m^2-t)} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\hat{\mathbf{s}}'_F \times \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}}' \frac{(2s+t-2m^2) \left(2 + \frac{2m^2t}{(s-m^2)(s+t-m^2)}\right)}{4m^2-t} - \hat{\mathbf{s}}'_F \cdot \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{k}}' \frac{\left(t^2 + \frac{2m^2t^3}{(s-m^2)(s+t-m^2)}\right)}{4m^2(4m^2-t)} + \\
& + \hat{\mathbf{s}}'_F \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}}' \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}}' \frac{(2s+t-2m^2)^2}{4m^2(4m^2-t)} - \hat{\mathbf{s}}'_F \cdot \hat{\mathbf{k}}' \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \frac{\left(t^2 + \frac{2m^2t^3}{(s-m^2)(s+t-m^2)}\right)}{4m^2(4m^2-t)} \Bigg).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sigma_{\mathbb{P}}^1 + \frac{d}{dt} \sigma_{\mathbb{P}}^1(\hat{\mathbf{s}}'_F, \hat{\mathbf{s}}) = -\frac{\pi\alpha^2}{8(s-m^2)^2} (M_0 \bar{M}_1^* + M_0^* \bar{M}_1 + i(\bar{M}^* \times \bar{M})_1) = \\
& = -\frac{\pi\alpha^2}{2(s-m^2)^2} \left(\hat{\mathbf{s}}''_f \times \hat{\mathbf{s}}'_i \cdot \hat{\mathbf{k}}'_i \times \hat{\mathbf{k}}'_f \frac{(2s+t-2m^2) \left(\frac{m^2t}{(s-m^2)(s+t-m^2)}\right)}{2m^2} + \right. \\
& + \left. \left(1 - \left(1 + \frac{2m^2t}{(s-m^2)(s+t-m^2)}\right)^2\right) (1 + \hat{\mathbf{s}}''_f \cdot \hat{\mathbf{s}}'_i) + \hat{\mathbf{s}}''_f \cdot \hat{\mathbf{k}}'_i \hat{\mathbf{s}}'_i \cdot \hat{\mathbf{k}}'_i \frac{(s-m^2)^2 \left(1 + \frac{2m^2t}{(s-m^2)(s+t-m^2)}\right) \left(\frac{t}{(s-m^2)(s+t-m^2)}\right) - t}{m^2(4m^2-t)} + \right. \\
& + \left. \hat{\mathbf{s}}''_f \cdot \hat{\mathbf{k}}'_f \hat{\mathbf{s}}'_i \cdot \hat{\mathbf{k}}'_f \frac{m^2t - (s+t-m^2)^2 \left(1 + \frac{2m^2t}{(s-m^2)(s+t-m^2)}\right) \left(\frac{m^2t}{(s-m^2)(s+t-m^2)}\right)}{m^2(4m^2-t)} + \right. \\
& + \left. \hat{\mathbf{s}}''_f \cdot \hat{\mathbf{k}}'_i \hat{\mathbf{s}}'_i \cdot \hat{\mathbf{k}}'_f \frac{\left(\frac{2m^2t}{(s-m^2)(s+t-m^2)}\right) t(2s+t-2m^2)}{m^2(4m^2-t)} + \hat{\mathbf{s}}''_f \cdot \hat{\mathbf{k}}'_f \hat{\mathbf{s}}'_i \cdot \hat{\mathbf{k}}'_i \frac{\left(\frac{2m^2t}{(s-m^2)(s+t-m^2)}\right) t(2s+t-2m^2)}{m^2(4m^2-t)} \Bigg).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \sigma_{\mathbb{P}}^2(\hat{\mathbf{s}}'_F, \hat{\mathbf{s}}) = -\frac{\pi\alpha^2}{8(s-m^2)^2} (M_0 \bar{M}_2^* + M_0^* \bar{M}_2 + i(\bar{M}^* \times \bar{M})_2) = \\
& = -\frac{\alpha^2}{2(s-m^2)^2} \left(\hat{\mathbf{s}}''_f \times \hat{\mathbf{s}}'_i \cdot \left(\hat{\mathbf{k}}'_i(m^2-u) + \hat{\mathbf{k}}'_f(s-m^2)\right) \frac{(1-\cos\theta')}{4m^2} + \right. \\
& + \hat{\mathbf{s}}''_f \times \hat{\mathbf{s}}'_i \cdot \left(\hat{\mathbf{k}}'_i(s-m^2)(-4m^2(1+2\cos\theta') + t\cos\theta') + \right. \\
& + \left. \hat{\mathbf{k}}'_f(m^2-u)(4m^2+t\cos\theta')\right) \frac{(1-\cos\theta')}{4m^2(4m^2-t)} + \\
& + \left(\hat{\mathbf{s}}''_f \cdot \hat{\mathbf{k}}'_i \times \hat{\mathbf{k}}'_f \hat{\mathbf{s}}'_i \cdot (\hat{\mathbf{k}}'_f(m^2-u) - \hat{\mathbf{k}}'_i(s-m^2)) \right) \frac{(1-\cos\theta')(u-s)}{4m^2(4m^2-t)} + \\
& + \left(\hat{\mathbf{s}}'_i \cdot \hat{\mathbf{k}}'_i \times \hat{\mathbf{k}}'_f \hat{\mathbf{s}}''_f \cdot (\hat{\mathbf{k}}'_f(m^2-u) - \hat{\mathbf{k}}'_i(s-m^2)) \right) \frac{(1-\cos\theta')(u-s)}{4m^2(4m^2-t)} \Bigg).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\boldsymbol{\sigma}_{\mathbb{P}}^3(\hat{\mathbf{s}}'_F) + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\sigma}_{\mathbb{P}}^3(\hat{\mathbf{s}}) &= -\frac{\pi\alpha^2}{8(s-m^2)^2} (M_0\bar{M}_3^* + M_0^*\bar{M}_3 + i(\bar{M}^* \times \bar{M})_3) = \\
&= -\frac{\pi\alpha^2}{2(s-m^2)^2} \left(-\hat{\mathbf{s}}'_i \cdot \left(\hat{\mathbf{k}}'_i(s-m^2) \cos\theta' + \hat{\mathbf{k}}'_f(m^2-u) \right) \frac{(1-\cos\theta')}{2m^2} - \right. \\
&\quad \left. -\hat{\mathbf{s}}''_f \cdot \left(\hat{\mathbf{k}}'_i(s-m^2) \cos\theta' + \hat{\mathbf{k}}'_f(m^2-u) \right) \frac{(1-\cos\theta')}{2m^2} + \right. \\
&\quad \left. +\hat{\mathbf{s}}''_f \cdot \left(\hat{\mathbf{k}}'_i(s-m^2) - \hat{\mathbf{k}}'_f(m^2-u) \right) \frac{(s-u)\sin^2\theta'}{2m^2(4m^2-t)} \right).
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}\boldsymbol{\sigma}_{\mathbb{P}'}^1 + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\sigma}_{\mathbb{P}'}^1(\hat{\mathbf{s}}'_F, \hat{\mathbf{s}}) = -\frac{\pi\alpha^2}{8(s-m^2)^2} (M_0\bar{M}_1^* + M_0^*\bar{M}_1 - i(\bar{M}^* \times \bar{M})_1) =$$

$$= -\frac{\pi\alpha^2}{2(s-m^2)^2} \left(\hat{\mathbf{s}}''_f \times \hat{\mathbf{s}}'_i \cdot \hat{\mathbf{k}}'_i \times \hat{\mathbf{k}}'_f \frac{(2s+t-2m^2)\left(\frac{m^2t}{(s-m^2)(s+t-m^2)}\right)}{2m^2} + \right.$$

$$+ \left(1 - \left(1 + \frac{2m^2t}{(s-m^2)(s+t-m^2)} \right)^2 \right) \frac{(1 + \hat{\mathbf{s}}''_f \cdot \hat{\mathbf{s}}'_i) - \hat{\mathbf{s}}''_f \cdot \hat{\mathbf{k}}'_i \hat{\mathbf{s}}'_i \cdot \hat{\mathbf{k}}'_i \frac{(s-m^2)^2 \left(1 + \frac{2m^2t}{(s-m^2)(s+t-m^2)} \right) \left(\frac{t}{(s-m^2)(s+t-m^2)} \right) - t}{m^2(4m^2-t)}}{m^2(4m^2-t)}$$

$$- \frac{\hat{\mathbf{s}}''_f \cdot \hat{\mathbf{k}}'_i \hat{\mathbf{s}}'_i \cdot \hat{\mathbf{k}}'_f \frac{m^2t - (s+t-m^2)^2 \left(1 + \frac{2m^2t}{(s-m^2)(s+t-m^2)} \right) \left(\frac{m^2t}{(s-m^2)(s+t-m^2)} \right)}{m^2(4m^2-t)}$$

$$- \frac{\hat{\mathbf{s}}''_f \cdot \hat{\mathbf{k}}'_i \hat{\mathbf{s}}'_i \cdot \hat{\mathbf{k}}'_f \left(\frac{2m^2t}{(s-m^2)(s+t-m^2)} \right) t(2s+t-2m^2)}{m^2(4m^2-t)} - \frac{\hat{\mathbf{s}}''_f \cdot \hat{\mathbf{k}}'_f \hat{\mathbf{s}}'_i \cdot \hat{\mathbf{k}}'_i \left(\frac{2m^2t}{(s-m^2)(s+t-m^2)} \right) t(2s+t-2m^2)}{m^2(4m^2-t)} \Bigg).$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\sigma}_{\mathbb{P}'}^2(\hat{\mathbf{s}}'_F, \hat{\mathbf{s}}) = -\frac{\pi\alpha^2}{8(s-m^2)^2} (M_0\bar{M}_2^* + M_0^*\bar{M}_2 - i(\bar{M}^* \times \bar{M})_2) =$$

$$= -\frac{\pi\alpha^2}{2(s-m^2)^2} \left(\hat{\mathbf{s}}''_f \times \hat{\mathbf{s}}'_i \cdot \left(\hat{\mathbf{k}}'_i(u-m^2) + \hat{\mathbf{k}}'_f(m^2-s) \right) \frac{(1-\cos\theta')}{4m^2} + \right.$$

$$+ \hat{\mathbf{s}}''_f \times \hat{\mathbf{s}}'_i \cdot \left(-\hat{\mathbf{k}}'_i(s-m^2)(4m^2+t\cos\theta') + \right.$$

$$\left. \left. + \hat{\mathbf{k}}'_f(m^2-u)(4m^2(1+2\cos\theta') - t\cos\theta') \right) \frac{(1-\cos\theta')}{4m^2(4m^2-t)} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\hat{\mathbf{s}}_f'' \cdot \hat{\mathbf{k}}_i' \times \hat{\mathbf{k}}_f' \hat{\mathbf{s}}_i' \cdot (\hat{\mathbf{k}}_f'(m^2 - u) - \hat{\mathbf{k}}_i'(s - m^2)) \right) \frac{(1 - \cos \theta')(u - s)}{4m^2(4m^2 - t)} + \\
& + \left(\hat{\mathbf{s}}_i' \cdot \hat{\mathbf{k}}_i' \times \hat{\mathbf{k}}_f' \hat{\mathbf{s}}_f'' \cdot (\hat{\mathbf{k}}_f'(m^2 - u) - \hat{\mathbf{k}}_i'(s - m^2)) \right) \frac{(1 - \cos \theta')(u - s)}{4m^2(4m^2 - t)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \boldsymbol{\sigma}_{\bar{\mathbf{P}}'}^3(\hat{\mathbf{s}}_F) + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\sigma}_{\bar{\mathbf{P}}'}^3(\hat{\mathbf{s}}) &= -\frac{\pi \alpha^2}{8(s - m^2)^2} (\mathbf{M}_0 \bar{\mathbf{M}}_3^* + \mathbf{M}_0^* \bar{\mathbf{M}}_3 - i(\bar{\mathbf{M}}^* \times \bar{\mathbf{M}})_3) = \\
&= -\frac{\pi \alpha^2}{2(s - m^2)^2} \left(-\hat{\mathbf{s}}_i' \cdot (\hat{\mathbf{k}}_i'(s - m^2) + \hat{\mathbf{k}}_f'(m^2 - u) \cos \theta') \frac{(1 - \cos \theta')}{2m^2} - \right. \\
&\quad \left. -\hat{\mathbf{s}}_f'' \cdot (\hat{\mathbf{k}}_i'(s - m^2) + \hat{\mathbf{k}}_f'(m^2 - u) \cos \theta') \frac{(1 - \cos \theta')}{2m^2} + \right. \\
&\quad \left. + \hat{\mathbf{s}}_f'' \cdot (\hat{\mathbf{k}}_i'(s - m^2) - \hat{\mathbf{k}}_f'(m^2 - u)) \frac{(s - u) \sin^2 \theta'}{2m^2(4m^2 - t)} \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\sigma}_{\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{P}}}^{11} + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\sigma}_{\bar{\mathbf{P}}'\bar{\mathbf{P}}}^{11}(\hat{\mathbf{s}}_F, \hat{\mathbf{s}}) &= -\frac{\pi \alpha^2}{8(s - m^2)^2} (|\mathbf{M}'_0|^2 - |\bar{\mathbf{M}}'|^2 + 2|\bar{\mathbf{M}}'_1|^2) = \\
&= -\frac{\alpha^2}{2(s - m^2)^2} \left(1 + \cos^2 \theta' - \hat{\mathbf{s}}_f'' \times \hat{\mathbf{s}}_i' \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}}' \frac{(1 + \cos \theta')(s - u)}{4m^2 - t} + \right. \\
&+ \hat{\mathbf{s}}_f'' \cdot \hat{\mathbf{k}}_i' \times \hat{\mathbf{k}}_f' \hat{\mathbf{s}}_i' \cdot \hat{\mathbf{k}}_i' \times \hat{\mathbf{k}}_f' \frac{(s - u)^2}{4m^2(4m^2 - t)} + (\hat{\mathbf{s}}_f'' \cdot \hat{\mathbf{k}}_i' \hat{\mathbf{s}}_i' \cdot \hat{\mathbf{k}}_i' + \hat{\mathbf{s}}_f'' \cdot \hat{\mathbf{k}}_f' \hat{\mathbf{s}}_i' \cdot \hat{\mathbf{k}}_f') \frac{t}{4m^2} + \\
&\quad \left. + (\hat{\mathbf{s}}_f'' \cdot \hat{\mathbf{k}}_i' \hat{\mathbf{s}}_i' \cdot \hat{\mathbf{k}}_f' + \hat{\mathbf{s}}_f'' \cdot \hat{\mathbf{k}}_f' \hat{\mathbf{s}}_i' \cdot \hat{\mathbf{k}}_i') \frac{t^2 \cos \theta'}{4m^2(4m^2 - t)} + \right. \\
&\quad \left. + (\hat{\mathbf{s}}_f'' \cdot \hat{\mathbf{k}}_i' \hat{\mathbf{s}}_i' \cdot \hat{\mathbf{k}}_i'(s - m^2)^2 + \hat{\mathbf{s}}_f'' \cdot \hat{\mathbf{k}}_f' \hat{\mathbf{s}}_i' \cdot \hat{\mathbf{k}}_f'(u - m^2)^2) \frac{(1 - \cos \theta') \cos \theta'}{2m^2(4m^2 - t)} + \right. \\
&\quad \left. + \hat{\mathbf{s}}_f'' \cdot \hat{\mathbf{s}}_i' \left(1 + \cos^2 \theta' - \frac{(1 - \cos \theta')^2 t}{4m^2} + \frac{(1 + \cos \theta')^2 t}{4m^2 - t} \right) \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\sigma}_{\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{P}}}^{22} + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\sigma}_{\bar{\mathbf{P}}'\bar{\mathbf{P}}}^{22}(\hat{\mathbf{s}}_F, \hat{\mathbf{s}}) &= -\frac{\pi \alpha^2}{8(s - m^2)^2} (|\mathbf{M}'_0|^2 - |\bar{\mathbf{M}}'|^2 + 2|\bar{\mathbf{M}}'_2|^2) = \\
&= -\frac{\alpha^2}{2(s - m^2)^2} \left(2 \cos \theta' + \hat{\mathbf{s}}_f'' \cdot \hat{\mathbf{s}}_i' \left(2 \cos \theta' + \frac{(1 - \cos \theta')^2 t}{4m^2} + \frac{(1 + \cos \theta')^2 t}{4m^2 - t} \right) - \right. \\
&\quad \left. -\hat{\mathbf{s}}_f'' \times \hat{\mathbf{s}}_i' \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}}' \frac{(1 + \cos \theta')(s - u)}{4m^2 - t} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \hat{\mathbf{s}}_f'' \cdot \hat{\mathbf{k}}_i' \times \hat{\mathbf{k}}_f' \hat{\mathbf{s}}_i' \cdot \hat{\mathbf{k}}_i' \times \hat{\mathbf{k}}_f' \frac{(s-u)^2}{4m^2(4m^2-t)} + (\hat{\mathbf{s}}_f'' \cdot \hat{\mathbf{k}}_i' \hat{\mathbf{s}}_i' \cdot \hat{\mathbf{k}}_i' + \hat{\mathbf{s}}_f'' \cdot \hat{\mathbf{k}}_f' \hat{\mathbf{s}}_i' \cdot \hat{\mathbf{k}}_f') \frac{t}{4m^2} + \\
& + (\hat{\mathbf{s}}_f'' \cdot \hat{\mathbf{k}}_i' \hat{\mathbf{s}}_i' \cdot \hat{\mathbf{k}}_f' + \hat{\mathbf{s}}_f'' \cdot \hat{\mathbf{k}}_f' \hat{\mathbf{s}}_i' \cdot \hat{\mathbf{k}}_i') \frac{t^2 \cos \theta' + 4m^2 t (1 - \cos \theta')}{4m^2(4m^2-t)} + \\
& + (\hat{\mathbf{s}}_f'' \cdot \hat{\mathbf{k}}_i' \hat{\mathbf{s}}_i' \cdot \hat{\mathbf{k}}_i' (s-m^2)^2 + \hat{\mathbf{s}}_f'' \cdot \hat{\mathbf{k}}_f' \hat{\mathbf{s}}_i' \cdot \hat{\mathbf{k}}_f' (u-m^2)^2) \frac{1 - \cos \theta'}{2m^2(4m^2-t)} \Big).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sigma_{\bar{P}'\bar{P}}^{33} + \frac{d}{dt} \sigma_{\bar{P}'\bar{P}}^{33}(\hat{\mathbf{S}}_F, \hat{\mathbf{S}}) = -\frac{\pi\alpha^2}{8(s-m^2)^2} (|\bar{\mathbf{M}}_0'|^2 - |\bar{\mathbf{M}}'|^2 + 2|\bar{\mathbf{M}}_3'|^2) = \\
& = -\frac{\alpha^2}{4(s-m^2)^2} \left(2 \cos \theta' + \frac{t(-1 + \cos \theta') \cos \theta'}{2m^2} + \hat{\mathbf{s}}_f'' \cdot \hat{\mathbf{s}}_i' \left(\frac{\sin^2 \theta' t}{4m^2} + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2 \cos \theta' + \frac{(1 + \cos \theta')^2 t}{4m^2 - t} \right) - \hat{\mathbf{s}}_f'' \times \hat{\mathbf{s}}_i' \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}}' \frac{(1 + \cos \theta')(s-u)}{4m^2 - t} + \right. \\
& \left. + \hat{\mathbf{s}}_f'' \cdot \hat{\mathbf{k}}_i' \times \hat{\mathbf{k}}_f' \hat{\mathbf{s}}_i' \cdot \hat{\mathbf{k}}_i' \times \hat{\mathbf{k}}_f' \frac{(s-u)^2}{4m^2(4m^2-t)} - (\hat{\mathbf{s}}_f'' \cdot \hat{\mathbf{k}}_i' \hat{\mathbf{s}}_i' \cdot \hat{\mathbf{k}}_i' + \hat{\mathbf{s}}_f'' \cdot \hat{\mathbf{k}}_f' \hat{\mathbf{s}}_i' \cdot \hat{\mathbf{k}}_f') \frac{t}{4m^2} + \right. \\
& \left. + (\hat{\mathbf{s}}_f'' \cdot \hat{\mathbf{k}}_i' \hat{\mathbf{s}}_i' \cdot \hat{\mathbf{k}}_f' + \hat{\mathbf{s}}_f'' \cdot \hat{\mathbf{k}}_f' \hat{\mathbf{s}}_i' \cdot \hat{\mathbf{k}}_i') \left(\frac{t \cos \theta'}{2m^2} + \frac{t^2 \cos \theta' - 4m^2 t (1 + \cos \theta')}{4m^2(4m^2-t)} \right) + \right. \\
& \left. + (\hat{\mathbf{s}}_f'' \cdot \hat{\mathbf{k}}_i' \hat{\mathbf{s}}_i' \cdot \hat{\mathbf{k}}_i' (s-m^2)^2 + \hat{\mathbf{s}}_f'' \cdot \hat{\mathbf{k}}_f' \hat{\mathbf{s}}_i' \cdot \hat{\mathbf{k}}_f' (u-m^2)^2) \frac{\cos \theta' - 1}{2m^2(4m^2-t)} \Big).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \sigma_{\bar{P}'\bar{P}}^{12}(\hat{\mathbf{S}}_F, \hat{\mathbf{S}}) = -\frac{\pi\alpha^2}{8(s-m^2)^2} (i\bar{\mathbf{M}}_0' \bar{\mathbf{M}}_3'^* - i\bar{\mathbf{M}}_0'^* \bar{\mathbf{M}}_3' + \bar{\mathbf{M}}_1' \bar{\mathbf{M}}_2'^* + \bar{\mathbf{M}}_1'^* \bar{\mathbf{M}}_2') = \\
& = -\frac{\alpha^2}{2(s-m^2)^2} \left(\hat{\mathbf{s}}_f'' \times \hat{\mathbf{s}}_i' \cdot \left((\hat{\mathbf{k}}_f' (m^2 - u) - \hat{\mathbf{k}}_i' (s - m^2)) \frac{(1 - \cos \theta')^2}{2m^2} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\hat{\mathbf{k}}_f' \left((s - m^2) + (u - m^2) \cos \theta' \right) + \hat{\mathbf{k}}_i' \left(-(s - m^2) \cos \theta' + (m^2 - u) \right) \right) \frac{(1 + \cos \theta')}{4m^2 - t} \right) - \\
& \left. - \hat{\mathbf{s}}_F' \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}}' \hat{\mathbf{s}} \cdot \left(\hat{\mathbf{k}}_f' \left((s - m^2) + (u - m^2) \cos \theta' \right) + \hat{\mathbf{k}}_i' \left(-(s - m^2) \cos \theta' + (m^2 - u) \right) \right) \frac{(s - u)}{4m^2(4m^2 - t)} - \right. \\
& \left. - \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}}' \hat{\mathbf{s}}_F' \cdot \left(\hat{\mathbf{k}}_f' \left((s - m^2) + (u - m^2) \cos \theta' \right) + \hat{\mathbf{k}}_i' \left(-(s - m^2) \cos \theta' + (m^2 - u) \right) \right) \frac{(s - u)}{4m^2(4m^2 - t)} \Big).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sigma_{\bar{P}'\bar{P}}^{21}(\hat{\mathbf{s}}'_F, \hat{\mathbf{s}}) &= -\frac{\pi\alpha^2}{8(s-m^2)^2} (-iM_0\bar{M}_3^* + iM_0^*\bar{M}_3 + \bar{M}'_1\bar{M}'_2^* + \bar{M}'_1^*\bar{M}'_2) = \\
&= -\frac{\alpha^2}{2(s-m^2)^2} \hat{\mathbf{s}}''_f \times \hat{\mathbf{s}}'_i \cdot \left((\hat{\mathbf{k}}'_f(m^2-u) - \hat{\mathbf{k}}'_i(s-m^2)) \frac{(1-\cos\theta')^2}{2m^2} - \right. \\
&- \left(\hat{\mathbf{k}}'_f \left((s-m^2) + (u-m^2)\cos\theta' \right) + \hat{\mathbf{k}}'_i \left(-(s-m^2)\cos\theta' + (m^2-u) \right) \right) \frac{(1+\cos\theta')}{4m^2-t} \Big) + \\
&+ \hat{\mathbf{s}}'_F \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}}' \hat{\mathbf{s}} \cdot \left(\hat{\mathbf{k}}'_f \left((s-m^2) + (u-m^2)\cos\theta' \right) + \hat{\mathbf{k}}'_i \left(-(s-m^2)\cos\theta' + (m^2-u) \right) \right) \frac{(s-u)}{4m^2(4m^2-t)} + \\
&+ \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}}' \hat{\mathbf{s}}'_F \cdot \left(\hat{\mathbf{k}}'_f \left((s-m^2) + (u-m^2)\cos\theta' \right) + \hat{\mathbf{k}}'_i \left(-(s-m^2)\cos\theta' + (m^2-u) \right) \right) \frac{(s-u)}{4m^2(4m^2-t)} \Big).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sigma(\hat{\mathbf{s}}'_F; \bar{P}'_1, \bar{P}_3) + \frac{d}{dt}\sigma(\hat{\mathbf{s}}; \bar{P}'_1, \bar{P}_3) &= -\frac{\pi\alpha^2}{8(s-m^2)^2} (-iM_0\bar{M}_2^* + iM_0^*\bar{M}_2 + \bar{M}'_1\bar{M}'_3^* + \bar{M}'_1^*\bar{M}'_3) = \\
&= -\frac{\pi\alpha^2}{2(s-m^2)^2} \left((\hat{\mathbf{s}}''_f + \hat{\mathbf{s}}'_i) \cdot \left(\left(\hat{\mathbf{k}}'_i \left((s-m^2)\cos\theta' - (m^2-u) \right) + \right. \right. \right. \\
&+ \left. \left. \hat{\mathbf{k}}'_f \left((m^2-u)\cos\theta' - (s-m^2) \right) \right) \frac{(1-\cos\theta')}{4m^2} - \left(\hat{\mathbf{k}}'_f(m^2-u) - \hat{\mathbf{k}}'_i(s-m^2) \right) \frac{1-\cos^2\theta}{4m^2-t} \right) + \\
&+ (\hat{\mathbf{s}}''_f - \hat{\mathbf{s}}'_i) \cdot \left(\hat{\mathbf{k}}'_f \left((s-m^2) + (u-m^2)\cos\theta' \right) + \hat{\mathbf{k}}'_i \left(-(s-m^2)\cos\theta' + (m^2-u) \right) \right) \frac{(1-\cos\theta')(s-u)}{4m^2(4m^2-t)} \Big).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sigma(\hat{\mathbf{s}}'_F; \bar{P}'_3, \bar{P}_1) + \frac{d}{dt}\sigma(\hat{\mathbf{s}}; \bar{P}'_3, \bar{P}_1) &= -\frac{\pi\alpha^2}{8(s-m^2)^2} (iM_0\bar{M}_2^* - iM_0^*\bar{M}_2 + \bar{M}'_1\bar{M}'_3^* + \bar{M}'_1^*\bar{M}'_3) = \\
&= -\frac{\pi\alpha^2}{2(s-m^2)^2} \left((\hat{\mathbf{s}}''_f + \hat{\mathbf{s}}'_i) \cdot \left(\left(\hat{\mathbf{k}}'_i \left((s-m^2)\cos\theta' - (m^2-u) \right) + \right. \right. \right. \\
&+ \left. \left. \hat{\mathbf{k}}'_f \left((m^2-u)\cos\theta' - (s-m^2) \right) \right) \frac{(1-\cos\theta')}{4m^2} + \left(\hat{\mathbf{k}}'_f(m^2-u) - \hat{\mathbf{k}}'_i(s-m^2) \right) \frac{1-\cos^2\theta}{4m^2-t} \right) + \\
&- (\hat{\mathbf{s}}''_f - \hat{\mathbf{s}}'_i) \cdot \left(\hat{\mathbf{k}}'_f \left((s-m^2) + (u-m^2)\cos\theta' \right) + \hat{\mathbf{k}}'_i \left(-(s-m^2)\cos\theta' + (m^2-u) \right) \right) \frac{(1-\cos\theta')(s-u)}{4m^2(4m^2-t)} \Big).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sigma(\hat{\mathbf{s}}'_F; \bar{\mathbf{P}}'_2, \bar{\mathbf{P}}_3) + \frac{d}{dt}\sigma(\hat{\mathbf{s}}; \bar{\mathbf{P}}'_2, \bar{\mathbf{P}}_3) &= -\frac{\pi\alpha^2}{8(s-m^2)^2} (iM_0\bar{M}_1^* - iM_0^*\bar{M}_1 + \bar{M}'_2\bar{M}'_3 + \bar{M}'_2^*\bar{M}'_3) = \\ &= -\frac{\pi\alpha^2}{2(s-m^2)^2} \left((\hat{\mathbf{s}}''_f - \hat{\mathbf{s}}'_i) \cdot \hat{\mathbf{k}}'_i \times \hat{\mathbf{k}}'_f \frac{t(1-\cos\theta')}{4m^2} + (\hat{\mathbf{s}}''_f + \hat{\mathbf{s}}'_i) \cdot \hat{\mathbf{k}}'_i \times \hat{\mathbf{k}}'_f \frac{(s-u)(1-\cos\theta')}{4m^2} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sigma(\hat{\mathbf{s}}'_F; \bar{\mathbf{P}}'_3, \bar{\mathbf{P}}_2) + \frac{d}{dt}\sigma(\hat{\mathbf{s}}; \bar{\mathbf{P}}'_3, \bar{\mathbf{P}}_2) &= -\frac{\pi\alpha^2}{8(s-m^2)^2} (-iM_0\bar{M}_1^* + iM_0^*\bar{M}_1 + \bar{M}'_2\bar{M}'_3 + \bar{M}'_2^*\bar{M}'_3) = \\ &= -\frac{\pi\alpha^2}{2(s-m^2)^2} \left((\hat{\mathbf{s}}''_f - \hat{\mathbf{s}}'_i) \cdot \hat{\mathbf{k}}'_i \times \hat{\mathbf{k}}'_f \frac{t(1-\cos\theta')}{4m^2} - (\hat{\mathbf{s}}''_f + \hat{\mathbf{s}}'_i) \cdot \hat{\mathbf{k}}'_i \times \hat{\mathbf{k}}'_f \frac{(s-u)(1-\cos\theta')}{4m^2} \right). \end{aligned}$$

Todos los términos no mostrados valen cero.

Bibliografía

- [1] J. Buchwald, A. Warwick, *Histories of the Electron: The Birth of Microphysics*, Dibner Institute studies in the history of science and technology (MIT Press, 2004).
- [2] P. Forman, *Isis* **59**, 156 (1968).
- [3] S. Tomonaga, S. Tomonaga, T. Oka, *The Story of Spin*, A Pacific Basin Institute book (University of Chicago Press, 1997).
- [4] A. H. Compton, *Journal of the Franklin Institute* **192**, 145 (1921).
- [5] S. J. Barnett, *Phys. Rev.* **6**, 239 (1915).
- [6] G. E. Uhlenbeck, S. Goudsmit, *Die Naturwissenschaften* **13**, 953 (1925).
- [7] S. A. Goudschmidt, G. H. Uhlenbeck, *Nature* **117**, 264 (1926).
- [8] L. H. Thomas, *Nature* **117**, 514 (1926).
- [9] W. Heisenberg, *Z. Phys.* **33**, 879 (1925).
- [10] E. Schrodinger, *Annalen Phys.* **386**, 109 (1926). [Annalen Phys.81,no.Ser.IV,109(1926)].
- [11] E. Schrodinger, *Annalen Phys.* **384**, 489 (1926). [Annalen Phys.79,no.Ser.IV,489(1926)].
- [12] E. Schrodinger, *Annalen Phys.* **385**, 437 (1926). [Annalen Phys.80,no.Ser.IV,437(1926)].

- [13] E. Schrodinger, *Annalen Phys.* **384**, 361 (1926). [Annalen Phys.79,no.Ser.IV,361(1926)].
- [14] E. D. Commins, *Annual Review of Nuclear and Particle Science* **62**, 133 (2012).
- [15] P. A. M. Dirac (1975).
- [16] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A117**, 610 (1928).
- [17] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A118**, 351 (1928).
- [18] M. Born, W. Heisenberg, P. Jordan, *Z. Phys.* **35**, 557 (1926).
- [19] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A114**, 243 (1927).
- [20] P. Jordan, E. P. Wigner, *Z. Phys.* **47**, 631 (1928).
- [21] P. Jordan, J. von Neumann, E. P. Wigner, *Annals Math.* **35**, 29 (1934).
- [22] W. Gerlach, O. Stern, *Z. Phys.* **8**, 110 (1922).
- [23] F. Weinert, *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics* **26**, 75 (1995).
- [24] D. M. Dennison, R. H. Fowler, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* **115**, 483 (1927).
- [25] S. Goudsmit, E. Back, *Zeitschrift für Physik* **43**, 321 (1927).
- [26] E. Fermi, *Zeitschrift für Physik* **60**, 320 (1930).
- [27] I. Estermann, O. Stern, *Zeitschrift für Physik* **85**, 17 (1933).
- [28] I. Estermann, R. Frisch, O. Stern, *Nature* **132**, 169 (1933).
- [29] R. G. Milner, *PoS PSTP2013*, 003 (2013).
- [30] J. M. B. Kellogg, I. I. Rabi, N. F. Ramsey, J. R. Zacharias, *Phys. Rev.* **56**, 728 (1939).

- [31] J. Chadwick, *Nature* **129**, 312 (1932).
- [32] L. W. Alvarez, F. Bloch, *Phys. Rev.* **57**, 111 (1940).
- [33] J. E. Nafe, E. B. Nelson, I. I. Rabi, *Phys. Rev.* **71**, 914 (1947).
- [34] J. E. Nafe, E. B. Nelson, *Phys. Rev.* **73**, 718 (1948).
- [35] G. Breit, *Phys. Rev.* **72**, 984 (1947).
- [36] S. Schweber, *Qed and the Men who Made it* (University Press, 1999).
- [37] B. L. Roberts, W. J. Marciano, *Lepton Dipole Moments* (WORLD SCIENTIFIC, 2009).
- [38] P. Kusch, H. M. Foley, *Phys. Rev.* **72**, 1256 (1947).
- [39] S. Koenig, A. G. Prodell, P. Kusch, *Phys. Rev.* **83**, 687 (1951).
- [40] R. Beringer, M. A. Heald, *Phys. Rev.* **95**, 1474 (1954).
- [41] A. A. Schupp, R. W. Pidd, H. R. Crane, *Phys. Rev.* **121**, 1 (1961).
- [42] D. T. Wilkinson, H. R. Crane, *Phys. Rev.* **130**, 852 (1963).
- [43] B. Odom, D. Hanneke, B. D'Urso, G. Gabrielse, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 030801 (2006).
- [44] D. Hanneke, S. Fogwell, G. Gabrielse, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 120801 (2008).
- [45] J. B. French, V. F. Weisskopf, *Phys. Rev.* **75**, 1240 (1949).
- [46] N. M. Kroll, W. E. Lamb, *Phys. Rev.* **75**, 388 (1949).
- [47] S.-I. Tomonaga, J. R. Oppenheimer, *Phys. Rev.* **74**, 224 (1948).
- [48] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **73**, 416 (1948).
- [49] R. P. Feynman, *Phys. Rev.* **74**, 1430 (1948).
- [50] T. D. Lee, C. N. Yang, *Phys. Rev.* **104**, 822 (1956).

- [51] A. Love, G. Ross, D. Nanopoulos, *Nuclear Physics B* **49**, 513 (1972).
- [52] R. N. Cahn, F. J. Gilman, *Phys. Rev. D* **17**, 1313 (1978).
- [53] D. F. Nelson, A. A. Schupp, R. W. Pidd, H. R. Crane, *Phys. Rev. Lett.* **2**, 492 (1959).
- [54] T. S. Stein, J. P. Carrico, E. Lipworth, M. C. Weisskopf, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 741 (1967).
- [55] J. J. Hudson, *et al.*, *Nature* **473**, 493 (2011).
- [56] R. Celotta, D. Pierce (Academic Press, 1980), vol. 16 of *Advances in Atomic and Molecular Physics*, pp. 101 – 157.
- [57] M. Hamermesh, J. Schwinger, *Phys. Rev.* **69**, 145 (1946).
- [58] M. Hamermesh, *Phys. Rev.* **75**, 1766 (1949).
- [59] C. L. Critchfield, D. C. Dodder, *Phys. Rev.* **76**, 602 (1949).
- [60] J. V. Lepore, *Phys. Rev.* **79**, 137 (1950).
- [61] M. Heusinkveld, G. Freier, *Phys. Rev.* **85**, 80 (1952).
- [62] G. Bishop, J. Westhead, G. Preston, H. Halban, *Nature* **170**, 113 (1952).
- [63] C. L. Oxley, *et al.*, *Phys. Rev.* **91**, 419 (1953).
- [64] L. Wolfenstein, *Annual Review of Nuclear Science* **6**, 43 (1956).
- [65] R. J. Blin-Stoyle, *Proceedings of the Physical Society. Section A* **64**, 700 (1951).
- [66] A. Simon, T. A. Welton, *Phys. Rev.* **90**, 1036 (1953).
- [67] R. K. Adair, S. E. Darden, R. E. Fields, *Phys. Rev.* **96**, 503 (1954).
- [68] H. B. Willard, J. K. Bair, J. D. Kington, *Phys. Rev.* **95**, 1359 (1954).
- [69] T. D. Lee, C. N. Yang, *Phys. Rev.* **104**, 254 (1956).

- [70] C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes, R. P. Hudson, *Phys. Rev.* **105**, 1413 (1957).
- [71] M. Goldhaber, L. Grodzins, A. W. Sunyar, *Phys. Rev.* **109**, 1015 (1958).
- [72] V. Bargmann, L. Michel, V. L. Telegdi, *Phys. Rev. Lett.* **2**, 435 (1959).
- [73] D. Berley, G. Gidal, *Phys. Rev.* **118**, 1086 (1960).
- [74] G. Charpak, *et al.*, *Il Nuovo Cimento (1955-1965)* **22**, 1043 (1961).
- [75] G. Charpak, *et al.*, *Il Nuovo Cimento (1955-1965)* **37**, 1241 (1965).
- [76] M. Ceschia, *Phys. Rev. D* **2**, 2555 (1970).
- [77] F. Combley, F. Farley, E. Picasso, *Physics Reports* **68**, 93 (1981).
- [78] L. Deck, *et al.*, *Phys. Rev. D* **28**, 1 (1983).
- [79] L. Dick, L. Feuvrais, M. Spighel, *Physics Letters* **7**, 150 (1963).
- [80] A. Buhler, *et al.*, *Physics Letters* **7**, 368 (1963).
- [81] S. Bloom, *et al.*, *Physics Letters* **8**, 87 (1964).
- [82] R. L. Garwin, D. P. Hutchinson, S. Penman, G. Shapiro, *Phys. Rev.* **118**, 271 (1960).
- [83] B. L. Roberts, *SciPost Phys. Proc.* p. 32 (2019).
- [84] G. Charpak, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **6**, 128 (1961).
- [85] G. Charpak, *et al.*, *Physics Letters* **1**, 16 (1962).
- [86] J. Bailey, *et al.*, *Physics Letters B* **28**, 287 (1968).
- [87] J. Aldins, T. Kinoshita, S. J. Brodsky, A. J. Dufner, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 441 (1969).
- [88] S. D. Drell, H. R. Pagels, *Phys. Rev.* **140**, B397 (1965).

- [89] J. A. Mignaco, E. Remiddi, *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)* **60**, 519 (1969).
- [90] B. E. Lautrup, E. de Rafael, *Phys. Rev.* **174**, 1835 (1968).
- [91] S. B. Crampton, D. Kleppner, N. F. Ramsey, *Phys. Rev. Lett.* **11**, 338 (1963).
- [92] C. K. Iddings, *Phys. Rev.* **138**, B446 (1965).
- [93] S. Fenster, R. K uberle, Y. Nambu, *Physics Letters* **19**, 513 (1965).
- [94] R. Faustov, *Nuclear Physics* **75**, 669 (1966).
- [95] S. D. Drell, J. D. Sullivan, *Phys. Rev.* **154**, 1477 (1967).
- [96] J. D. Bjorken, *Phys. Rev.* **148**, 1467 (1966).
- [97] J. D. Bjorken, *Phys. Rev. D* **1**, 1376 (1970).
- [98] L. G alfi, J. Kuti, A. Patk ss, *Physics Letters B* **31**, 465 (1970).
- [99] G. Domokos, S. Kovesi-Domokos, E. Schonberg, *Phys. Rev. D* **3**, 1191 (1971).
- [100] A. J. G. Hey, J. E. Mandula, *Phys. Rev. D* **5**, 2610 (1972).
- [101] C. E. Carlson, W.-K. Tung, *Phys. Rev. D* **5**, 721 (1972).
- [102] J. Cleymans, *Phys. Rev. D* **6**, 814 (1972).
- [103] F. E. Close, F. J. Gilman, I. Karliner, *Phys. Rev. D* **6**, 2533 (1972).
- [104] J. Ellis, R. Jaffe, *Phys. Rev. D* **9**, 1444 (1974).
- [105] M. Anselmino, *Phys. Rev. D* **19**, 2803 (1979).
- [106] C. Nash, *Nuclear Physics B* **31**, 419 (1971).
- [107] E. W. Colglazier, R. Rajaraman, *Phys. Rev. D* **10**, 334 (1974).
- [108] M. J. Alguard, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 1261 (1976).
- [109] C. Prescott, *et al.*, *Physics Letters B* **77**, 347 (1978).

- [110] L. G. Ratner, T. K. Khoe, *IEEE Transactions on Nuclear Science* **20**, 217 (1973).
- [111] M. Albrow, *et al.*, *Nuclear Physics B* **23**, 445 (1970).
- [112] E. F. Parker, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **31**, 783 (1973).
- [113] G. Hicks, *et al.*, *Phys. Rev. D* **12**, 2594 (1975).
- [114] W. de Boer, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **34**, 558 (1975).
- [115] I. Auer, *et al.*, *Physics Letters B* **67**, 113 (1977).
- [116] J. R. O'Fallon, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 733 (1977).
- [117] E. Biegert, *et al.*, *Physics Letters B* **73**, 235 (1978).
- [118] M. Borghini, *et al.*, *Phys. Rev. D* **17**, 24 (1978).
- [119] I. P. Auer, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **41**, 1436 (1978).
- [120] Y. S. Derbenev, *et al.*, *Part. Accel.* **8**, 115 (1978).
- [121] E. Courant, Polarized proton acceleration, *Tech. rep.*, Brookhaven National Lab., Upton, NY (USA); State Univ. of New York, Stony Brook (1978).
- [122] Y. S. Derbenev, A. Skrinsky, A. Kondratenko, *Part. Accel.* **9**, 247 (1979).
- [123] D. Gustavson, *et al.*, *Nuclear Instruments and Methods* **165**, 177 (1979).
- [124] Y. S. Derbenev, A. M. Kondratenko, *AIP Conference Proceedings* **51**, 292 (1979).
- [125] B. W. Montague, *AIP Conf. Proc.* **51**, 129 (1979).
- [126] O. Allkofer, *et al.*, *Nuclear Instruments and Methods* **179**, 445 (1981).
- [127] J. Aubert, *et al.*, *Physics Letters B* **161**, 203 (1985).

- [128] V. Hughes, *et al.*, Measurement of the spin dependent structure functions of the neutron and proton, *Tech. rep.* (1988).
- [129] T. Sloan, G. Smadja, R. Voss, *Physics Reports* **162**, 46 (1988).
- [130] G. Baum (1989).
- [131] J. Ashman, *et al.*, *Physics Letters B* **206**, 364 (1988).
- [132] K. P. SchÅijler, *AIP Conference Proceedings* **187**, 177 (1989).
- [133] E. G. Adelberger, W. C. Haxion, *Annual Review of Nuclear and Particle Science* **35**, 501 (1985).
- [134] W. Haeberli, *Canadian Journal of Physics* **66**, 485 (1988).
- [135] J. Alberi, *et al.*, *Canadian Journal of Physics* **66**, 542 (1988).
- [136] E. Steffens, *AIP Conference Proceedings* **1008**, 1 (2008).
- [137] B. Schoch, *The European Physical Journal A* **43**, 5 (2009).
- [138] D. Grzonka, K. Kilian, D. MÅühl, W. Oelert, T. Sefzick, *Journal of Physics: Conference Series* **295**, 012171 (2011).
- [139] K. KILIAN, D. GRZONKA, D. MÅÜHL, W. OELERT, *International Journal of Modern Physics A* **26**, 757 (2011).
- [140] B. Wojtsekhowski, *Journal of Physics: Conference Series* **295**, 012128 (2011).
- [141] D. Grzonka, K. Kilian, D. Möhl, W. Oelert, T. Sefzick, *Hyperfine Interactions* **213**, 183 (2012).
- [142] D. Grzonka, *et al.*, *Acta Phys. Polon.* **B46**, 191 (2015).
- [143] C. Prescott, *et al.*, *Physics Letters B* **84**, 524 (1979).
- [144] P. L. Anthony, *et al.*, *Phys. Rev. D* **54**, 6620 (1996).

- [145] P. Anthony, *et al.*, *Physics Letters B* **553**, 18 (2003).
- [146] A. J. R. Puckett, *et al.*, *Phys. Rev. C* **85**, 045203 (2012).
- [147] A. V. Subashiev, Yu. A. Mamaev, Yu. P. Yashin, J. E. Clendenin, *Phys. Low Dimen. Struct.* **1**, 1 (1999).
- [148] T. A. C. T. D. C. T. L. C. T. O. C. T. S. C. T. L. E. W. G. T. S. Electroweak, H. F. Groups, *Physics Reports* **427**, 257 (2006).
- [149] K. Kumar, S. Mantry, W. Marciano, P. Souder, *Annual Review of Nuclear and Particle Science* **63**, 237 (2013).
- [150] J. A. Bagger, *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements* **62**, 23 (1998). Proceedings of the Fifth International Conference on Supersymmetries in Physics.
- [151] A. Bagneid, *The European Physical Journal C* **54**, 547 (2008).
- [152] I. DorÅaner, S. Fajfer, A. Greljo, J. Kamenik, N. KoÅanik, *Physics Reports* **641**, 1 (2016). Physics of leptoquarks in precision experiments and at particle colliders.
- [153] D. T. Pierce, R. J. Celotta, J. Unguris, H. C. Siegmann, *Phys. Rev. B* **26**, 2566 (1982).
- [154] J. Unguris, D. T. Pierce, R. J. Celotta, *Phys. Rev. B* **29**, 1381 (1984).
- [155] H.-J. Elmers, *Spin-polarized Low Energy Electron Diffraction* (American Cancer Society, 2007).
- [156] R. Loth, W. Eckstein, *Physics Letters* **20**, 390 (1966).
- [157] J. Unguris, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1047 (1982).
- [158] P. Eickholt, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 136402 (2018).
- [159] J. Kessler, *Polarized electrons*, vol. 1 (Springer Science & Business Media, 2013).

- [160] D. T. Pierce, *Atomic, Molecular, and Optical Physics: Charged Particles*, F. Dunning, R. G. Hulet, eds. (Academic Press, 1995), vol. 29 of *Methods in Experimental Physics*, pp. 1 – 38.
- [161] V. W. Hughes, R. L. Long, M. S. Lubell, M. Posner, W. Raith, *Phys. Rev. A* **5**, 195 (1972).
- [162] P. F. Wainwright, M. J. Alguard, G. Baum, M. S. Lubell, *Review of Scientific Instruments* **49**, 571 (1978).
- [163] M. R. O’Neill, M. Kalisvaart, F. B. Dunning, G. K. Walters, *Phys. Rev. Lett.* **34**, 1167 (1975).
- [164] T. Maruyama, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2376 (1991).
- [165] J. K. Bae, L. Cultrera, P. DiGiacomo, I. Bazarov, *Applied Physics Letters* **112**, 154101 (2018).
- [166] E. Garwin, D. Pierce, H. Siegmann, *Helv. Phys. Acta* **47**, 18 (1974).
- [167] G. Lampel, C. Weisbuch, *Solid State Communications* **16**, 877 (1975).
- [168] D. T. Pierce, F. Meier, P. ZÄijrcher, *Applied Physics Letters* **26**, 670 (1975).
- [169] R. Alley, *et al.*, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* **365**, 1 (1995).
- [170] V. Guidi, *Hyperfine Interactions* **127**, 455 (2000).
- [171] A. A. Sokolov, I. M. Ternov, *Soviet Physics Doklady* **8**, 1203 (1964).
- [172] A. A. Sokolov, *RADIATION FROM RELATIVISTIC ELECTRONS* (1986).
- [173] J. D. Jackson, *Reviews of Modern Physics* **48**, 417 (1976).
- [174] M. L. Swartz, *Conf. Proc.* **C8708101**, 83 (1987).

- [175] J. Buon, K. Steffen, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* **245**, 248 (1986).
- [176] D. Barber, *et al.*, *Physics Letters B* **343**, 436 (1995).
- [177] R. Assmann, *et al.*, Polarization studies at lep in 1993, *Tech. rep.*, CM-P00061204 (1994).
- [178] L. Arnaudon, *et al.*, *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields* **66**, 45 (1995).
- [179] F. Lipps, H. Tolhoek, *Physica* **20**, 385 (1954).
- [180] H. A. Tolhoek, *Rev. Mod. Phys.* **28**, 277 (1956).
- [181] A. POTYLITSYN, *IS IT POSSIBLE TO OBTAIN POLARIZED POSITRONS DURING MULTIPLE COMPTON BACKSCATTERING PROCESS?*.
- [182] G. Kotkin, H. Perlt, V. Serbo, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* **404**, 430 (1998).
- [183] G. Kotkin, S. Polityko, V. Serbo, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* **405**, 30 (1998).
- [184] G. L. Kotkin, V. G. Serbo, V. I. Telnov, *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **6**, 011001 (2003).
- [185] A. P. Potylitsyn, *Submitted to: Phys. Rev. Lett.* (2000).
- [186] A. P. Potylitsyn, *Submitted to: Nucl. Instrum. Meth. A* (2002).
- [187] E. Chudakov, *AIP Conference Proceedings* **1563**, 29 (2013).
- [188] C. K. Sinclair, *PoS PSTP2013*, 033 (2013).

- [189] K. Aulenbacher, E. Chudakov, D. Gaskell, J. Grames, K. D. Paschke, *International Journal of Modern Physics E* **27**, 1830004 (2018).
- [190] T. J. Gay, F. B. Dunning, *Review of Scientific Instruments* **63**, 1635 (1992).
- [191] K. Aulenbacher, E. Chudakov, D. Gaskell, J. Grames, K. D. Paschke, *International Journal of Modern Physics E* **27**, 1830004 (2018).
- [192] M. Placidi, R. Rossmannith, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* **274**, 79 (1989).
- [193] I. Passchier, *et al.*, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* **414**, 446 (1998).
- [194] A. Dubnickova, S. DubniÄŤka, M. P. Rekaló **109**, 241 (1996).
- [195] G. I. Gakh, E. Tomasi-Gustafsson, *Nucl. Phys.* **A771**, 169 (2006).
- [196] G. Moortgat-Pick, *et al.*, *Physics Reports* **460**, 131 (2008).
- [197] G. FÄŤldt, *Eur. Phys. J.* **A52**, 141 (2016).
- [198] A. Bravar, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2626 (1996).
- [199] V. Dmitriev, A. Milstein, V. Strakhovenko, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms* **266**, 1122 (2008).
- [200] S. Arnold, A. Metz, M. Schlegel, *Phys. Rev. D* **79**, 034005 (2009).
- [201] Y. N. Uzikov, J. Haidenbauer, *Journal of Physics: Conference Series* **295**, 012087 (2011).
- [202] Y. X. Zhao, *et al.*, *Phys. Rev. C* **90**, 055201 (2014).
- [203] S. B. Gunst, L. A. Page, *Phys. Rev.* **92**, 970 (1953).

- [204] D. B. Beard, M. E. Rose, *Phys. Rev.* **108**, 164 (1957).
- [205] H. Schopper, *Nuclear Instruments* **3**, 158 (1958).
- [206] L. W. FAGG, S. S. HANNA, *Rev. Mod. Phys.* **31**, 711 (1959).
- [207] A. S. Raju, J. R. Rao, V. Lakshminarayana, *Journal of Physics A: General Physics* **1**, 251 (1968).
- [208] R. Moreh, Y. Birenbaum, O. Shahal, *Nuclear Physics A* **275**, 445 (1977).
- [209] A. Wightman, *Phys. Rev.* **74**, 1813 (1948).
- [210] R. H. Milburn, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 75 (1963).
- [211] B. Neumcke, H. J. Meister, *Zeitschrift für Physik* **192**, 162 (1966).
- [212] A. B. Kukanov, A. A. Amer, *Soviet Physics Journal* **10**, 64 (1967).
- [213] I. Goldman, V. Khoze, *Physics Letters B* **29**, 426 (1969).
- [214] S. C. Miller, R. M. Wilcox, *Phys. Rev.* **124**, 637 (1961).
- [215] P. Bock, *Physics Letters B* **30**, 628 (1969).
- [216] P. Bock, *Nuclear Physics A* **177**, 289 (1971).
- [217] P. Christillin, E. Remiddi, *Lettere al Nuovo Cimento (1969-1970)* **4**, 525 (1970).
- [218] P. Bock, *Lettere al Nuovo Cimento (1971-1985)* **1**, 157 (1971).
- [219] L. M. Brown, R. P. Feynman, *Phys. Rev.* **85**, 231 (1952).
- [220] A. Góngora-T, R. G. Stuart, *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields* **42**, 617 (1989).
- [221] H. Veltman, *Phys. Rev. D* **40**, 2810 (1989).
- [222] M. L. Swartz, *Phys. Rev. D* **58**, 014010 (1998).
- [223] A. Denner, S. Dittmaier, *Nuclear Physics B* **540**, 58 (1999).

- [224] E. G. Beltrametti, S. Vitale, *Il Nuovo Cimento Series 10* **9**, 289 (1958).
- [225] S. Tashenov, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* **640**, 164 (2011).
- [226] P. Tomassini, *et al.*, *IEEE Transactions on Plasma Science* **36**, 1782 (2008).
- [227] V. Petrillo, *et al.*, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* **693**, 109 (2012).
- [228] K. Krajewska, F. Cajiao Vélez, J. Z. Kamiński, *Phys. Rev. A* **91**, 062106 (2015).
- [229] H. Shimizu, *et al.*, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* **772**, 26 (2015).
- [230] G. A. Krafft, *et al.*, *Phys. Rev. Accel. Beams* **19**, 121302 (2016).
- [231] C. Curatolo, I. Drebot, V. Petrillo, L. Serafini, *Phys. Rev. Accel. Beams* **20**, 080701 (2017).
- [232] N. Ranjan, *et al.*, *Phys. Rev. Accel. Beams* **21**, 030701 (2018).
- [233] J. D. Bjorken, S. D. Drell, *Relativistic quantum mechanics*, International series in pure and applied physics (McGraw-Hill, New York, NY, 1964).
- [234] V. BERESTETSKII, E. LIFSHITZ, L. PITAEVSKII, *Quantum Electrodynamics (Second Edition)*, V. BERESTETSKII, E. LIFSHITZ, L. PITAEVSKII, eds. (Butterworth-Heinemann, Oxford, 1982), pp. 62 – 117, second edition edn.
- [235] W. Greiner, J. Reinhardt, *Quantum Electrodynamics*, Physics and astronomy online library (Springer, 2003).
- [236] M. Kaku, *Quantum Field Theory: A Modern Introduction* (Oxford University Press, 1993).

- [237] V. Berestetskii, E. Lifshitz, L. Pitaevskiĭ, *Quantum Electrodynamics*, Course of theoretical physics (Butterworth-Heinemann, 1982).
- [238] M. M. E. Sánchez, *Revista Mexicana de Física* **65**, 639 (2019).
- [239] W. Giele, E. Glover, D. A. Kosower, *Nuclear Physics B* **403**, 633 (1993).
- [240] W. Hollik, B. Kniehl, E. Scherbakova, O. Veretin, *Nuclear Physics B* **900**, 576 (2015).
- [241] N. Orlando, *Nuclear and Particle Physics Proceedings* **258-259**, 11 (2015).
- [242] B. Ward, S. Majhi, A. Mukhopadhyay, S. Yost, *Nuclear and Particle Physics Proceedings* **258-259**, 19 (2015).
- [243] S. Biswas, R. Frederix, E. Gabrielli, B. Mele, *Nuclear and Particle Physics Proceedings* **273-275**, 721 (2016).
- [244] S. Dawson, A. Ismail, *Phys. Rev. D* **98**, 093003 (2018).
- [245] A. Ballestrero, E. Maina, G. Pelliccioli, *Journal of High Energy Physics* **2018**, 170 (2018).
- [246] F. Herzog, *et al.*, *Physics Letters B* **790**, 436 (2019).
- [247] V. Barger, J. Ohnemus, R. J. N. Phillips, *International Journal of Modern Physics A* **04**, 617 (1989).
- [248] M. Arai, N. Okada, K. Smolek, V. Šimák, *Phys. Rev. D* **75**, 095008 (2007).
- [249] M. Baumgart, B. Tweedie, *Journal of High Energy Physics* **2013**, 72 (2013).
- [250] The ATLAS collaboration, *et al.*, *Journal of High Energy Physics* **2017**, 113 (2017).
- [251] R. Kleiss, *Nuclear Physics B* **241**, 61 (1984).
- [252] A. Ballestrero, E. Maina, *Physics Letters B* **350**, 225 (1995).

- [253] C.-F. Qiao, *Phys. Rev. D* **67**, 097503 (2003).
- [254] V. V. Andreev, *Physics of Atomic Nuclei* **66**, 383 (2003).
- [255] F. Berends, P. Daverveldt, R. Kleiss, *Nuclear Physics B* **253**, 441 (1985).
- [256] R. Kleiss, W. J. Stirling, *Nuclear Physics B* **262**, 235 (1985).
- [257] A. Góngora-T, R. G. Stuart, *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields* **42**, 617 (1989).
- [258] D. Mañótre, P. Mastrolia, *Computer Physics Communications* **179**, 501 (2008).
- [259] P. D. Causmaecker, R. Gastmans, W. Troost, T. T. Wu, *Physics Letters B* **105**, 215 (1981).
- [260] P. D. Causmaecker, R. Gastmans, W. Troost, T. T. Wu, *Nuclear Physics B* **206**, 53 (1982).
- [261] F. Berends, *et al.*, *Nuclear Physics B* **206**, 61 (1982).
- [262] F. Berends, *et al.*, *Nuclear Physics B* **239**, 382 (1984).
- [263] G. Passarino, *Phys. Rev. D* **28**, 2867 (1983).
- [264] F. Berends, *et al.*, *Nuclear Physics B* **239**, 395 (1984).
- [265] R. Vega, J. Wudka, *Phys. Rev. D* **53**, 5286 (1996).
- [266] H. K. Dreiner, H. E. Haber, S. P. Martin, *Physics Reports* **494**, 1 (2010).
- [267] L. Niu, S. Mao, L. Gang, G. Jian-You, *International Journal of Theoretical Physics* **54**, 2813 (2015).
- [268] V. V. Andreev, *Phys. Rev. D* **62**, 014029 (2000).
- [269] M. Hofri, A. Peres, *Nuclear Physics* **59**, 618 (1964).
- [270] M. Moreno, *Journal of Mathematical Physics* **26**, 576 (1985).

- [271] C. Lorcé, *Phys. Rev. D* **97**, 016005 (2018).
- [272] R. H. Good, *Rev. Mod. Phys.* **27**, 187 (1955).
- [273] D. J. Rowe, *Journal of Mathematical Physics* **10**, 1774 (1969).
- [274] M. Jacob, G. Wick, *Annals of Physics* **7**, 404 (1959).
- [275] G. A. Krafft, G. Priebe, *Reviews of Accelerator Science and Technology* **03**, 147 (2010).
- [276] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics* (Wiley, New York, NY, 1999), third edn.
- [277] U. Fano, *Phys. Rev.* **93**, 121 (1954).
- [278] I. Ghebregziabher, B. A. Shadwick, D. Umstadter, *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **16**, 030705 (2013).
- [279] E. Leader, *Spin in Particle Physics*, Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology (Cambridge University Press, 2001).