

Ref.
44



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

GRAFICAS DE COMPETENCIA

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRA EN CIENCIAS
(M A T E M A T I C A S)
P R E S E N T A

VIRGINIA URRUTIA GALICIA



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

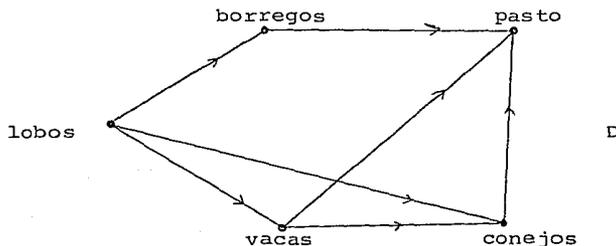
El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

	pag.
Introducción	1
C A P I T U L O 1	
Nociones Preliminares	4
C A P I T U L O 2	
2.1 Digráficas Acíclicas cuya Gráfica de Competencia es una Gráfica de Intervalos	11
2.2 Algunas Cotas para el Número de Competencia	19
C A P I T U L O 3	
Caracterización de Gráficas de Competencia de Digráficas Arbitrarias y de Digráficas Acíclicas ...	43
C A P I T U L O 4	
4.1 Algunos Resultados Nuevos	58
4.2 Gráficas de Enemigos Comunes	70
REFERENCIAS	75

I N T R O D U C C I O N

Joel Cohen [2], en 1968 definió la noción de competencia en un ecosistema, a partir de redes alimenticias, en la cuál dos especies compiten si y sólo si éstas tienen una especie en común de la cuál se alimentan ambas. Por ejemplo:

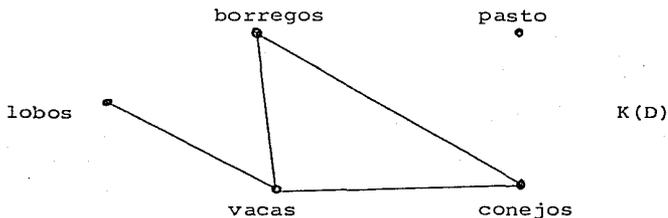


En la red alimenticia D , los borregos, las vacas y los conejos están en competencia.

Una gráfica dirigida acíclica D , cuyo conjunto de vértices representan las especies de un ecosistema y tal que una flecha está dirigida de un vértice u hacia un vértice v si y sólo si u se alimenta de v , es llamada red alimenticia.

Si D es una red alimenticia, la gráfica de competencia asociada a D , denotada por $K(D)$, es la gráfica cuyo conjunto de vértices es el mismo que de D y tal que u y v son adyacentes si

y sólo si w vértice de D , tal que (u,w) y (v,w) son flechas de D . Para el ejemplo anterior, la siguiente gráfica es su gráfica de competencia.



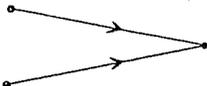
De los trabajos de Cohen y sus colaboradores, a partir de redes alimenticias reales, las cuáles resultaron ser siempre acíclicas, se obtuvo que las gráficas de competencia asociadas a dichas redes eran siempre gráficas de intersección de intervalos en la recta real. Se preguntaron si dicho resultado reflejaba un hecho ecológico importante o era simplemente un accidente. Así trataron de buscar condiciones necesarias y suficientes para determinar cuando una digráfica tiene como gráfica de competencia a una gráfica de intervalos.

En el capítulo 2, se han dado condiciones necesarias y suficientes para que una digráfica tenga como gráfica de competencia a una gráfica de intervalos. Se dan también algunas cotas para el número de competencia, el cuál se define como el mínimo número de puntos aislados que se le agregan a una gráfica para que ésta junto con los puntos aislados sea una gráfica de

competencia. Estos últimos resultados están dados en términos de cubiertas por clanes de las aristas de G .

En el capítulo 3, se extiende la noción de competencia a digráficas que pueden tener lazos y ciclos dirigidos. Se caracterizan a estas gráficas de competencia así como a las gráficas de competencia de digráficas acíclicas.

Por último, en el capítulo 4, se dan algunas relaciones entre las gráficas de competencia y las gráficas para las cuales, existen orientaciones en las que la siguiente digráfica es una subdigráfica inducida prohibida.



Es intuitivamente claro porque surge la relación entre las dos nociones. Esto sirvió para poder caracterizar aquellas gráficas que son de competencia, utilizando este tipo de orientaciones sobre ellas mismas y determinar en algunos casos si la gráfica de competencia obtenida es de intervalos o de subárboles de un árbol.

C A P I T U L O 1
Nociones Preliminares

Definición 1.1 Una gráfica G es un conjunto $V(G) \neq \emptyset$ de objetos llamados vértices y un conjunto $E(G)$ de parejas no ordenadas $\{u, v\}$ de elementos de $V(G)$ llamadas aristas

Cuando sea claro del contexto, escribiremos sólo V y E en lugar de $V(G)$ y $E(G)$ respectivamente.

Si $\{u, v\}$ es un elemento de $E(G)$ escribiremos solamente uv .

Definición 1.2 Un lazo es una arista uv tal que $u=v$

Definición 1.3 Dos vertices u y v son adyacentes si y sólo si uv es una arista de la gráfica.

Definición 1.4 Dos aristas e_1 y e_2 son adyacentes si y sólo si e_1 y e_2 tienen un vértice en común.

Definición 1.5 El grado de un vértice, denotado por $gr(v)$, es el número de aristas que inciden con v .

Definición 1.6 Definimos la vecindad abierta de v , y la denotamos por $N(v)$ de la siguiente manera:

$$N(v) = \{u \in V(G) / uv \in E(G)\}$$

Definición 1.7 Definimos la vecindad cerrada de v y la denotamos por $\bar{N}(v)$ de la siguiente manera:

$$\bar{N}(v) = N(v) \cup \{v\}$$

Definición 1.8 Si entre dos vértices u y v de una gráfica existe más de una arista, decimos que la gráfica tiene aristas múltiples.

Definición 1.9 Una gráfica simple es aquella gráfica que no tiene lazos ni aristas múltiples.

Definición 1.10 Decimos que una gráfica es finita si tanto el conjunto de vértices como el conjunto de aristas es finito.

Definición 1.11 Un ciclo en una gráfica G es una sucesión de vértices y aristas de G , tal que $v_i \neq v_j$ si $i \neq j$ y e_i incide en v_{i-1} y v_i para toda $i=1, \dots, n$.

Definición 1.12 Una gráfica H es una subgráfica de G si y sólo si $V(H) \subseteq V(G)$ y si uv es una arista de H entonces uv es una arista de G .

Definición 1.13 Si G es una gráfica y $V' \subseteq V(G)$, a la subgráfica de G , cuyo conjunto de vértices es V' y cuyo conjunto de aristas, es el conjunto de aristas de G que tienen ambos extremos en V' es llamada subgráfica inducida de G .

Definición 1.14 Una subgráfica generadora H de G es una subgráfica de G tal que $V(H) = V(G)$.

Definición 1.15 Si G es una gráfica y $E' \subseteq E(G)$, a la subgráfica de G , cuyo conjunto de vértices es el conjunto de extremos de las aristas de E' y cuyo conjunto de aristas es E' es llamada, subgráfica inducida de G por E'

Definición 1.16 Un clan de G es un subconjunto C de $V(G)$ tal que la subgráfica inducida de G por C es una gráfica completa, es decir, cualesquiera dos vértices de C son adyacentes.

Definición 1.17 Un clan C de G es llamado maximal si no existe C' clan de G tal que $C \subset C'$.

Definición 1.18 Una (v_0, v_n) -trayectoria T de G es una sucesión de vértices de G , v_0, v_1, \dots, v_n tal que v_{i-1} y v_i son adyacentes, para toda $i=1, \dots, n$.

Definición 1.19 Una gráfica G es conexa, si para cualquier par de vértices u y v de $V(G)$, existe una (u, v) -trayectoria.

Definición 1.20 Dada una familia de conjuntos $F = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$, definimos G , la gráfica de intersección de F de la siguiente forma:

G es la gráfica cuyo conjunto de vértices es v_1, \dots, v_n tales que v_i y v_j son adyacentes en G si y sólo si $C_i \cap C_j \neq \emptyset$.

Definición 1.21 Una gráfica dirigida D es un conjunto $V(D) \neq \emptyset$ de objetos llamados vértices y un conjunto $F(D)$ de pares ordenados (u,v) de elementos de $V(D)$ llamados flechas.

Si (u,v) es una flecha de una gráfica dirigida D es frecuente denotarlo por " $u \rightarrow v$ " y decimos que la flecha va de u hacia v , que la flecha incide hacia v o que la flecha incide desde u . Por conveniencia, también abreviaremos gráfica dirigida por digráfica.

La definición de subdigráfica se da de manera análoga a la de subgráfica.

Definición 1.22 La frontera o vecindad exterior de un vértice v de una digráfica D , denotada por $N^+(v)$, está definida de la siguiente manera:

$$N^+(v) = \left\{ u \in V(D) \ / \ (v,u) \in F(D) \right\}$$

Definición 1.23 La frontera o vecindad interior de un vértice v de una digráfica D , denotado por $N^-(v)$, está definido por:

$$N^-(v) = \left\{ u \in V(D) \ / \ (u,v) \in F(D) \right\}$$

Definición 1.24 Un vértice v de $V(D)$ es llamado sumidero si cualquier flecha que tiene a v como extremo es de la forma (u,v) , con u elemento de $V(D)$.

Definición 1.25 Un vértice v de $V(D)$ es llamado fuente si cualquier flecha que tiene a v como extremo es de la

forma (u,v) , con u elemento de $V(D)$.

Definición 1.26 Si G es una gráfica, una orientación de G es la digráfica D obtenida a partir de G de la siguiente manera:

Los arcos (u,v) ó (v,u) están en D si y sólo si uv está en $E(G)$.

Definición 1.27 Un ciclo dirigido de D es una sucesión $v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, v_{n-1}, a_n, v_0$ de vértices y flechas de D tales que $v_i \neq v_j$ si $i \neq j$ y $a_i = (v_{i-1}, v_i)$ está en $F(D)$ para toda $i=1, \dots, n$.

Definición 1.28 Si una digráfica G no contiene ciclos dirigidos, la llamaremos digráfica acíclica.

Definición 1.29 Si D es una digráfica, definimos la gráfica de competencia $K(D)$ de D como la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V(D)$ tal que u y v son adyacentes en $K(D)$ si y sólo si existe w en $V(D)$ tal que (u,w) y (v,w) son flechas de D .

Definición 1.30 Decimos que una gráfica G es gráfica de competencia, si existe D digráfica tal que $K(D)=G$.

Enunciaremos algunos teoremas sin demostración, que serán utilizados en secciones posteriores.

Teorema 1.1 ([1])

Si D es una digráfica acíclica entonces existe una numeración v_1, v_2, \dots, v_n de los vértices de D tal que si (v_i, v_j) está en $F(D)$ entonces $i < j$

Teorema 1.2 (Gilmore y Hoffman [7])

Si G es una gráfica entonces G es la gráfica de intersección de una familia de intervalos de la recta real si y sólo si los clanes maximales de G pueden ser ordenados linealmente de tal forma que, para todo vértice v de G , los clanes maximales que lo contienen ocurren consecutivamente.

Definición 1.31 Una gráfica G es llamada triangulada si todo ciclo de longitud mayor o igual a 4 tiene una cuerda esto es, una arista que une a dos vértices no consecutivos del ciclo.

Estas gráficas también han sido llamadas cordales, de circuitos rígidos y gráficas de eliminación perfecta.

Definición 1.32 Un vértice v de G es llamado simplicial si la subgráfica inducida en G por $N(v)$ es completa.

Definición 1.33 Sea G una gráfica y v_1, v_2, \dots, v_n una numeración de los vértices de G . Decimos que tal nume-

ración es un esquema de eliminación perfecto si cada v_i es un vértice simplicial de la subgráfica inducida en G por

$$v_i, v_{i+1}, \dots, v_n \quad .$$

Teorema 1.3 (Fulkerson y Gross [7])

Sea G una gráfica no dirigida, entonces G es triangulada si y sólo si G tiene un esquema de eliminación perfecto. Más aún cualquier vértice simplicial puede empezar dicho esquema.

Teorema 1.4 (Gavril F. [7])

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) G es una gráfica triangulada
- ii) G es la gráfica de intersección de una familia de subárboles de un árbol.

C A P I T U L O · 2

2.1 Digráficas Acíclicas cuya Gráfica de Competencia es una Gráfica de Intervalos

Los primeros resultados que obtuvo Joel Cohen a partir de redes alimenticias reales, es que éstas, tienen como gráfica de competencia a una gráfica de intervalos. Tales redes alimenticias reales resultaron ser siempre acíclicas. A partir de éstas dos observaciones, se trataron de buscar condiciones necesarias y suficientes para que una digráfica acíclica D tenga como gráfica de competencia a una gráfica de intervalos .

Es por ésto que, en este capítulo trabajaremos sólo con gráficas de competencia de digráficas acíclicas simples.

Definición 2.1.1 Si D es una digráfica y v_1, \dots, v_n son los vértices de D , la matriz de adyacencia A de D , es la matriz (a_{ij}) tal que $a_{ij} = 1$ si (v_i, v_j) está en $F(D)$ y $a_{ij} = 0$ en cualquier otro caso.

Definición 2.1.2 Si D es una digráfica y A su matriz de adyacencia, la gráfica de renglones de A , denotada por $GR(A)$, es la gráfica cuyo conjunto de vértices son los renglones de A y en la cuál dos renglones son adyacentes si y sólo si existe una columna de A en la cuál, ambos renglones tienen entradas distintas de cero.

Es claro que si D es una digráfica y A su matriz de adyacencia entonces $K(D) = GR(A)$.

¿ Podemos a partir de la estructura de A determinar si $K(D)$ es de intervalos ? .

Definición 2.1.3 Si D es una digráfica y A su matriz de adyacencia, decimos que A tiene la propiedad de los unos consecutivos si para cualquier renglón de A , las entradas distintas de cero son consecutivas.

Teorema 2.1.1 (J.R. Lundgren y J.S. Maybee [10])

Si A es una matriz con la propiedad de los unos consecutivos entonces $G = GR(A)$ es la gráfica de intersección de una familia de intervalos de la recta real.

Demostración

Sean C_1, \dots, C_n los clanes de G correspondientes a las columnas de A .

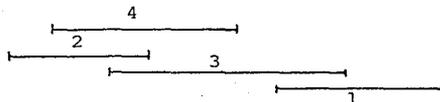
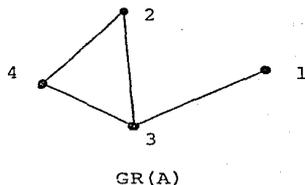
Si v es un vértice de G y v está en alguno de los clanes definimos $J(v) = [i, j]$, donde i es primer entero tal que v está en C_i y j es el entero más grande tal que v está en C_j . Para cada uno de los vértices v que no están en ninguno de los clanes, asignamos un intervalo diferente de la forma $[k, k]$ con $k > n$.

Como A tiene la propiedad de los unos consecutivos, es fácil ver que $J = \left\{ J(v) / v \in V(G) \right\}$ es una familia de inter-

valos de la recta real, tal que G es la gráfica de intersección de J .

El siguiente ejemplo muestra que el recíproco del teorema es falso.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Corolario 2.1.2 (J.R. Lundgren y J.S. Maybee [10])

Sea D una digráfica. Si los vértices de D pueden ser numerados de tal manera que si v está en V , entonces los vértices de $N^+(v)$ están numerados consecutivamente, entonces la gráfica de competencia de D es una gráfica de intervalos.

Demostración

Sea D una digráfica tal que sus vértices están numerados como lo indica el teorema.

Sea A la matriz de adyacencia de D . Claramente A tiene

la propiedad de los unos consecutivos, por lo tanto, por el teorema 2.1.1, $GR(A)$ es una gráfica de intervalos.

Definición 2.1.4 Una estrella interior de una digráfica D , es la subdigráfica inducida por las flechas de la forma (v_i, v) , para v fija.

Definición 2.1.5 Decimos que una numeración de una cubierta de estrellas interiores es consecutiva, si siempre que un vértice v esté en C_i y C_j con $i < j$ entonces v está en C_m para toda m tal que $i < m < j$

Corolario 2.1.3 (J.R. Lundgren y J.S. Maybee [10])

Si la cubierta de estrellas interiores de una digráfica G tiene una numeración consecutiva entonces la gráfica de competencia de D es una gráfica de intervalos.

Definición 2.1.6 Sea D una digráfica. Un conjunto $S = \{C_1, \dots, C_r\}$ tal que $C_i \subseteq V$ será llamado una cubierta de competencia de D si las siguientes condiciones se cumplen:

- i) Si v_i y v_j están en C_m entonces existe un vértice v_k tal que (v_i, v_k) y (v_j, v_k) son flechas de D .
- ii) Si (v_i, v_k) y (v_j, v_k) son flechas de D entonces v_i y v_j están en C_m , para alguna m .

Observación 2.1.4 La cubierta de estrellas interiores induce una cubierta de competencia.

Teorema 2.1.5 (J.R. Lundgren y J.S.Maybee [10])

La gráfica de competencia G de una digráfica D es una gráfica de intervalos si y sólo si D tiene una cubierta de competencia S consecutiva.

Demostración

Sea G la gráfica de competencia de una digráfica D .

Suponga que G es una gráfica de intervalos.

El conjunto S de clanes maximales de G cubren todas las aristas de G y claramente es una cubierta de competencia de D . Además por un resultado de Gilmore y Hoffman (Teo. 1.2) los clanes maximales de G pueden ser numerados de tal forma que si v es un vértice de G , los clanes maximales de G que lo contienen son consecutivos.

Para demostrar la suficiencia del teorema, supongamos que D tiene una cubierta de competencia $S = \{ C_1, \dots, C_r \}$ la cuál es consecutiva. Entonces, cada C_i es un clan en G también y como además S es una cubierta de competencia de D , entonces S cubre todas las aristas de G . Por lo tanto podemos usar el mismo método empleado en el teorema 2.1.1 para demostrar que G es una gráfica de intervalos.

El siguiente teorema caracteriza aquellas digráficas que tienen como gráfica de competencia a una gráfica de intervalos, utilizando ciertas subdigráficas inducidas.

Definición 2.1.7 Un subconjunto H de $V(G)$ es llamado sumidero, si la subdigráfica inducida por H tiene la siguiente propiedad:

Si v está en H y (v,u) es una flecha de D entonces u está en H .

Teorema 2.1.6 (J.E. Cohen [3])

Una digráfica acíclica D tiene como gráfica de competencia a una gráfica de intervalos si y sólo si todo sumidero de D tiene como gráfica de competencia a una gráfica de intervalos.

Demostración

La suficiencia del teorema es obvia, ya que D es sumidero de sí misma.

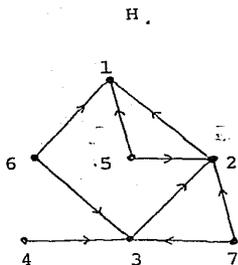
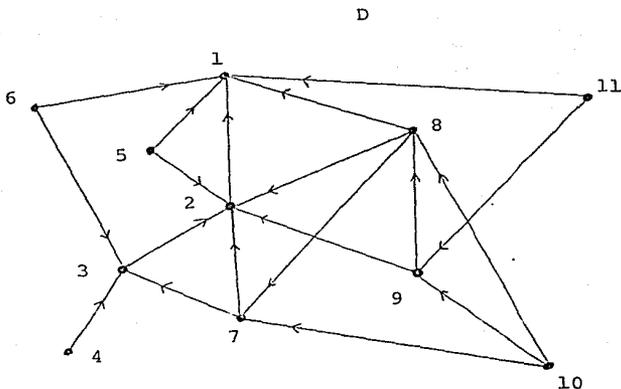
Supóngase ahora que D es una digráfica acíclica, tal que su gráfica de competencia $K(D)$ es de intervalos.

Sea H un sumidero de D y $K(H)$ su correspondiente gráfica de competencia.

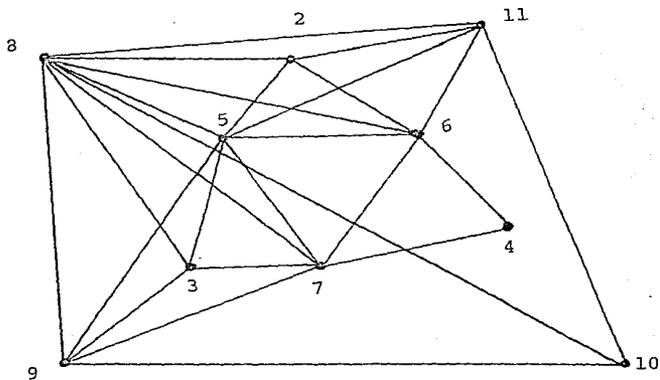
Sean u y v vértices de $K(H)$ y supongamos que u es adyacente a v en $K(D)$, entonces existe w en $V(D)$ tal que (u,w) y (v,w) son flechas de D .

Ya que u y v están en $V(H)$ y H es un sumidero se sigue que w está en H y por lo tanto u es adyacente a v en $K(H)$. Así $K(H)$ es subdigráfica inducida de $K(D)$ y como $K(D)$ es de intervalos y toda subgráfica inducida de una gráfica de intervalos es de intervalos, se sigue que $K(H)$ es de intervalos.

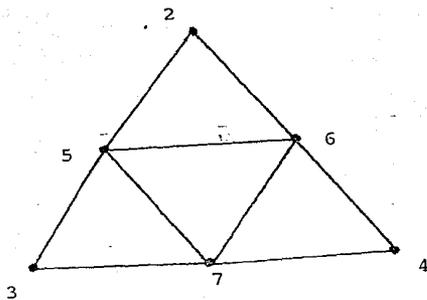
La siguiente figura muestra un ejemplo de una digráfica D y un sumidero H de D tal que $K(H)$ no es de intervalos, por lo tanto $K(D)$ no es de intervalos.



1 •



K(D)



K(H)

2.2 Algunas Cotas para el Número de Competencia

Decimos que una gráfica G es una gráfica de competencia, si ésta puede ser obtenida como gráfica de competencia de alguna digráfica acíclica.

Si D es una digráfica acíclica, entonces existe en D un vértice v que es sumidero (teorema 1.1), por lo tanto v es un vértice aislado en $K(D)$ y de ahí que toda gráfica de competencia tiene al menos un vértice aislado, así no toda gráfica es gráfica de competencia.

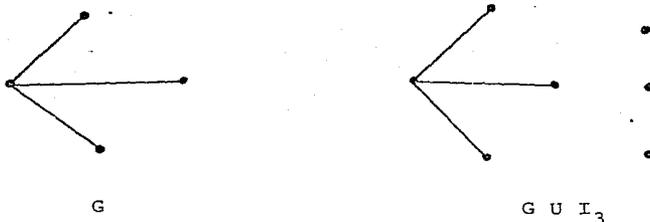
No obstante si empezamos con cualquier gráfica G , agregándole a ésta un número adecuado de vértices aislados obtenemos una gráfica que es de competencia. Para ver esto tomemos una gráfica G tal que $|E(G)| = \xi$. Construyamos la siguiente digráfica D :

$$V(D) = V(G) \cup \{x_e \mid e \in E(G)\}$$

Si $e=ab$ es una arista de G entonces (a, x_e) y (b, x_e) son arcos de D .

Claramente G junto con los x_1, x_2, \dots, x_ξ vértices aislados es la gráfica de competencia de D .

A la gráfica que obtenemos a partir de G al agregarle m vértices aislados, la denotamos por $G \cup I_m$. Ver el siguiente ejemplo.



Definición 2.2.1 El número de competencia de una gráfica G es la mínima m tal que $G \cup I_m$ es una gráfica de competencia, y lo denotamos por $k(G)$.

Si G es ya una gráfica de competencia, entonces $k(G)=0$.

Definición 2.2.2 Decimos que C_1, C_2, \dots, C_m es una cubierta por clanes de $E(G)$, si C_i es un clan de G para $i=1, \dots, m$ y es tal que si uv es una arista de G entonces u y v están en alguna C_i .

Denotaremos por $i(G)$ al número de clanes que tiene una cubierta por clanes de $E(G)$ de cardinalidad mínima.

Proposición 2.2.1 (Robert J. Opsut [11])

Para cualquier gráfica G , $k(G) \geq i(G) - |V(G)| + 2$

Demostración

Sean $n = |V(G)|$, $i = i(G)$, $k = k(G)$.

Sea D una digráfica acíclica tal que $K(D) = G \cup I_k$

Por teorema 1.1 , como D es acíclica , existe una numeración de sus vértices v_1, v_2, \dots, v_{n+k} tal que si (v_r, v_s) está en $F(D)$ entonces $r < s$. Claramente no inciden flechas hacia v_1 y a lo más incide una flecha hacia v_2 .

Es claro también que $N^-(v_s)$ es un clan de $G \cup I_k$ para $s=3,4,\dots,n+k$ y por lo tanto $N^-(v_s)$ es un clan de G .

Más aún
$$\left\{ N^-(v_s) \right\}_{s=3}^{n+k}$$

es una cubierta por clanes de $E(G)$, por lo tanto

$$i(G) \leq n + k - 2$$

es decir

$$k(G) \geq i(G) - |V(G)| + 2$$

Si una gráfica G no tiene clanes de cardinalidad 3 entonces $i(G) = |E(G)|$, de esta observación y de la proposición anterior tenemos:

Proposición 2.2.2 (Fred S. Roberts [12])

Si G es una gráfica sin clanes de cardinalidad 3 entonces $k(G) \geq |E(G)| - |V(G)| + 2$.

Proposición 2.2.3 (Robert J. Opsut [11])

Para cualquier gráfica G , $k(G) \leq i(G)$

Demostración

Sea $i = i(G)$ y K_1, K_2, \dots, K_i una cubierta por clanes de $E(G)$.

Sea D la digráfica cuyos vértices son los vértices de $G \cup I_i$. Denotaremos por x_1, x_2, \dots, x_i a los vértices aislados de $G \cup I_i$.

Si v está en K_s entonces (v, x_s) es una flecha de D

D es una digráfica acíclica y $K(D) = G \cup I_i$ por lo tanto $k(G) \leq i(G)$.

Definición 2.2.2 Si G es una gráfica, a una colección de clanes de G , $\{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ la llamaremos una cubierta por clanes de $V(G)$, si cada vértice de G está en alguna C_i .

Denotaremos por $\theta(G)$ al mínimo número de elementos de una cubierta por clanes de $V(G)$.

Proposición 2.2.4 (Robert J. Opsut [11])

Para cualquier gráfica G , $k(G) \geq \min_{v \in V(G)} \theta(N(v))$

Demostración

Sea $k = k(G)$ y D una digráfica acíclica tal que $K(D) = G \cup I_k$.

Sea x_1, x_2, \dots, x_k los k vértices aislados aumentados a G . Sea D' la subdigráfica de D inducida por $V(G)$.

Como D es acíclica, existe un vértice z , tal que $N(z) = \emptyset$ en D' , por lo tanto, cualquier flecha que incida desde z en D debe entrar a alguna x_i , ésto implica que $N^+(z) \subseteq N^-(x_1) \cup \dots \cup N^-(x_k)$ por lo tanto

$$N^-(x_1), \dots, N^-(x_k)$$

forma una cubierta por clanes de $N(z)$, por lo tanto

$$\min_{v \in V(G)} \theta(N(v)) \leq \theta(N(z)) \leq k$$

Proposición 2.2.5 (Fred S. Roberts [12])

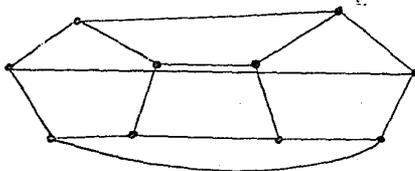
Para todo entero positivo k , existe una gráfica G tal que $k(G) > k$.

Demostración

Considerense 2 copias de C_k , el ciclo con k vértices $k \geq 4$. Unanse por una arista, vértices correspondientes de las 2 copias de C_k (véase la siguiente figura)

La gráfica resultante G no tiene clanes de 3 elementos tiene $3k$ aristas y $2k$ vértices, por la proposición 2.2.2

$$k(G) \geq 3k - 2k + 2 = k + 2 > k$$



Daremos ahora un algoritmo para construir una digráfica D a partir de una gráfica dada G , tal que $K(D) = G \cup I_m$ para alguna m .

Definición 2.2.3 Si G es una gráfica y v es un vértice de G , $G \Delta v$ denotará a la subgráfica inducida por $V(G) - v$, menos las aristas de la subgráfica inducida por $N(v)$.

Sea G una gráfica y v_1, v_2, \dots, v_n una numeración de los vértices de G .

A partir de esta numeración, definimos la siguiente sucesión de gráficas G_1, \dots, G_n

$$i) G_1 := G$$

$$ii) G_i := G_{i-1} \Delta v_{i-1}$$

Denotaremos por $N_i(v_i)$ a $N(v_i)$ en G_i .

Al mínimo número de clanes que cubren las aristas de $N(v)$ lo denotaremos por $Y(v)$ y si $N(v) = \emptyset$ entonces $Y(v) = 0$.

Denotaremos por Y_i a $Y(v_i)$ en G_i y por

$$K_{i-1}^i, \dots, K_{iY_i}^i$$

a los clanes que cubren las aristas de $N_i(v_i)$.

Si $N_i(v_i) = \emptyset$ entonces $Y_i = 0$ y no existen tales clanes.

Dada una gráfica y una numeración de sus vértices,

digamos v_1, v_2, \dots, v_n , el siguiente algoritmo construirá una digráfica D tal que $K(D) = G \cup I_m$ para alguna m .

ALGORITMO 2.2.1

PASO 1 :

Sea D_1 la digráfica tal que $V(D)$ es el conjunto de vértices de D_1 , junto con los nuevos vértices $x_{1_1}, \dots, x_{1_{Y_1}}$

Si $Y_1 = 0$, entonces no agregamos nuevos vértices.

Las flechas de D_1 son las flechas que inciden desde los vértices de K_{1_j} hacia x_{1_j} y (v_1, x_{1_j}) . Así el vértice v_1 está en competencia con los vértices de $N(v_1)$ en D_1 y los vértices de $N(v_1)$ están en competencia en D_1 si y sólo si ellos están en competencia en $G = G_1$, es decir, dos vértices u y v compiten en D_1 si y sólo si u y v están en G y la arista uv está en G pero no en G_2 .

Sea $h_1 = Y_1$; h_1 cuenta el número de vértices nuevos que fueron introducidos.

PASO 2 :

Sean $A_1 = \{v_1^-\}$ y $g_1 = |A_1|$.

Note que D_1 no tiene flechas de la forma (v, v_1) , esto es, no hay flechas que incidan hacia vértices de A_1 o de $V(G_1)$.

PASO 3 :

Extenderemos la digráfica D_1 a otra digráfica D_2 , introduciendo nuevos vértices $x_{2_1}, x_{2_2}, \dots, x_{2_{y_2}}$ a D_1

Si $Y_2 = 0$ no introducimos nuevos vértices.

El vértice v_1 , puede ser usado en lugar de x_{2_1} .

Agregamos las flechas que van de v_2 y los vértices de K_{2_j} hacia x_{2_j} en D_2 . Tenemos ahora lo siguiente:

v_2 está en competencia con los vértices de $N(v_2)$ y dos vértices u y v en $N(v_2)$ están en competencia si y sólo si u y v son adyacentes en G_2 . Así u y v están en competencia en D_2 si y sólo si u y v son vértices de G y u está en G pero no en G_3 .

Si h_2 es el número de vértices nuevos introducidos a D_1 entonces

$$h_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } Y_2 = 0 \text{ ó si } Y_2 \leq g_1 = 1 \\ Y_2 - g_1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

PASO 4 :

Sea A_2 , el conjunto obtenido de A_1 quitando el vértice v_1 si éste fué usado en el paso 3 y aumentando el vértice v_2 .

$$\text{Sea } g_2 = |A_2|$$

Nótese que D_2 no tiene flechas que incidan hacia los vértices de A_2 o de $V(G_2)$.

Supongamos que D_{i-1} ha sido construida de tal manera que no hay flechas que incidan hacia vértices de A_{i-1} o hacia vértices de $V(G_{i-1})$ y que u y v están en competencia en D_{i-1} si y sólo si u y v están en G y uv es una arista de G pero no de G_i .

Extenderemos la digráfica D_{i-1} a otra D_i introduciendo $x_{i_1}, \dots, x_{i_{y_i}}$ vértices nuevos a D_{i-1} . Si $y_i = 0$ no introduciremos nuevos vértices a D_{i-1} .

Se deberán usar los vértices de A_{i-1} como x_{i_k} hasta donde sea posible.

Agregamos además las flechas que van de los vértices de K_{i_j} hacia x_{i_j} y de v_i hacia x_{i_j} .

En la digráfica D_i así construida, el vértice v_i está en competencia con los vértices de $N_i(v_i)$ y dos vértices u y v en $N_i(v_i)$ están en competencia si y sólo si u y v son adyacentes en G_i .

Por lo tanto u y v están en competencia en D_i si y sólo si u y v están en $V(G)$ y uv es una arista de G pero no de G_{i+1} .

Si h_i es el número de vértices nuevos aumentados a D_{i-1} entonces

$$h_i = \begin{cases} 0 & \text{si } y_i = 0 \text{ ó } y_i \leq g_{i-1} \\ y_i - g_{i-1} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

PASO $2i$:

Sea A_i el conjunto de vértices obtenidos al tomar de A_{i-1} los vértices que no fueron usados en el paso 2_{i-1} y el vértice v_i .

$$\text{Sea } g_i = |A_i|$$

Obsérvese que D_i no tiene flechas que incidan hacia vértices del conjunto A_i o hacia vértices de $V(G_i)$.

La digráfica $D = D_{n-1}$ es tal que D_i establece exactamente la competencia entre dos vértices que son adyacentes en G_i pero no en G_{i+1} por lo tanto, D establece exactamente la competencia entre 2 vértices u y v si y sólo si u y v son vértices de G y uv es una arista de G .

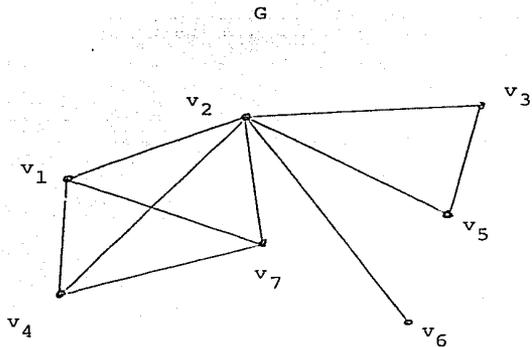
D es además acíclica, ya que cualquier flecha de D que va de un vértice de D_i a un vértice que no está en D_i .

El número de vértices aumentados a D a partir de G , está dado por $h_1 + \dots + h_{n-1} = k$. Entre los k vértices aumentados, claramente no hay competencia y por lo tanto $G \cup I_k$ es la gráfica de competencia de D , es decir $k(G) = k$

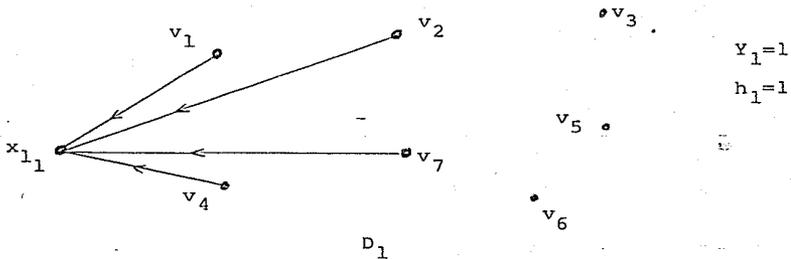
El siguiente es un ejemplo del algoritmo anterior.

El siguiente es un ejemplo del algoritmo anterior.

Tómese la siguiente gráfica G.



Paso 1

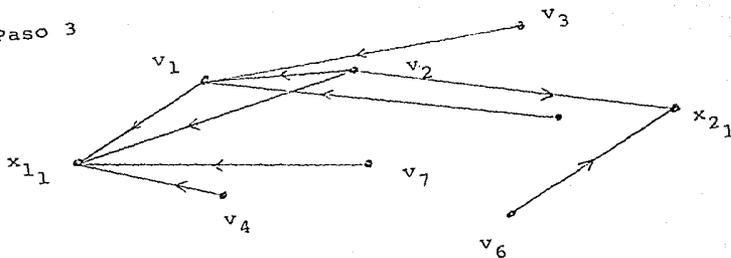


Paso 2

$$A_1 = \{v_1\}$$

$$g_1 = 1$$

Paso 3



$$Y_2 = 2$$

$$D_2$$

$$h_2 = 1$$

Paso 4

$$A_2 = \{v_2\}$$

$$g_2 = 1$$

Paso 5

$$Y_3 = 0$$

$$h_3 = 0$$

por lo tanto

$$D_3 = D_2$$

Paso 6

$$A_3 = \{v_2, v_3\}$$

$$g_3 = 2$$

Paso 7

$$Y_4 = 0$$

$$h_4 = 0$$

por lo tanto $D_4=D_3$

Paso 8

$$A_4 = \{v_2, v_3, v_4\} \quad g_4=3$$

Paso 9

$$Y_5=0, \quad h_5=0 \quad y \quad D_5=D_4$$

Paso 10

$$A_5 = \{v_2, v_3, v_4, v_5\} \quad g_5=4$$

Paso 11

$$Y_6=0 \quad h_6=0 \quad y \quad D_6=D_5$$

Paso 12

$$A_6 = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \quad g_6=5$$

Paso 13

$$Y_7=0 \quad h_7=0 \quad y \quad D_7=D_6$$

Paso 14

$$A_7 = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\} \quad g_7=6$$

Hemos obtenido, aplicando el algoritmo anterior a la gráfica G , que la digráfica $D:=D_7$ es tal que $K(D)=G$, es decir el número de competencia, $k(G)$ es menor o igual a $h_1+h_2+h_3+h_4+h_5+h_6+h_7=2$ Ésto es

$$k(G) \leq 2$$

Definición 2.2.4 Si G es una gráfica y v_1, \dots, v_n numeración P de los vértices de G , definimos $m(G, P)$ como sigue:

$$m(G, P) = h_1 + \dots + h_{n-1}$$

con h_i como en el algoritmo anterior.

Definición 2.2.5 Si G es una gráfica entonces $m(G) = \min \{ m(G, P) / P \text{ es una numeración de } V(G) \}$ es llamado el número de eliminación de G .

Teorema 2.2.6 (Fred S. Roberts [12])

Si G es una gráfica entonces $k(G) \leq m(G)$.

Corolario 2.2.7 (Fred S. Roberts [12])

Supóngase que v_1, \dots, v_n es una numeración de los vértices de una gráfica G tal que :

i) v_1 es un vértice de $G_1 = G$

ii) v_i es un vértice simplicial de $G_i = G_{i-1} \Delta v_{i-1}$

entonces $k(G) \leq 1$

Demostración

Suponga que G tiene una numeración P de sus vértices con las propiedades del teorema.

Claramente $Y_i = 1$ para toda i , excepto para aquellas i tales que v_i es un vértice aislado en G_i .

Más aún, $h_i = 1$ para la primera i , tal que $Y_i = 1$ y $h_i = 0$ en otro caso.

Por lo tanto $m(G; P)$ es cero ó uno y así $k(G) \leq 1$

Corolario 2.2.8 (Fred S. Roberts [12])

Toda gráfica triangular G es tal que $k(G) \leq 1$

Demostración

Por teorema 1.2.3 G tiene un esquema de eliminación perfecto. Aplicando el algoritmo 2.2.1 a este esquema se obtiene el resultado deseado.

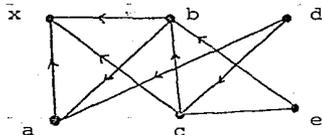
Corolario 2.2.9 (Fred S. Roberts [12])

Si G es una gráfica de intervalos entonces $k(G) \leq 1$

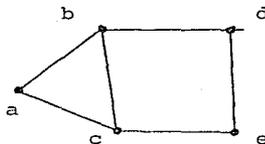
Demostración

Como G es una gráfica de intervalos entonces G es una gráfica de circuitos rígidos o triangulada [7] por lo tanto por corolario anterior $k(G) \leq 1$

El siguiente ejemplo , muestra una gráfica G con $k(G) \leq 1$ pero que no es de circuitos rígidos y una gráfica H con $k(H) \leq 1$ pero que no tiene una numeración de sus vértices del tipo descrito en el corolario 2.2.7.

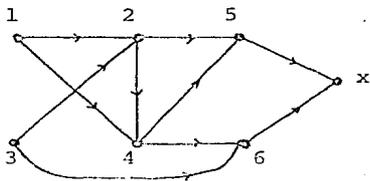


D

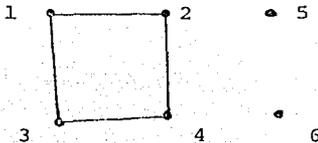


G

$$K(D) = G \cup I_1$$



D'



H

$$K(D') = H \cup I_1$$

Teorema 2.2.10 (Fred S. Roberts [12])

Si G es conexa, $|V(G)| > 1$ y G sin clanes de 3 elementos entonces $k(G) = m(G) = |E(G)| - |V(G)| + 2$

Para probar este teorema, demostraremos los siguientes lemas .

Lema 2.2.11 (Fred S. Roberts [12])

Si G es conexa, $|V(G)| > 1$ y G no tiene clanes de 3 elementos entonces existe un v\u00e9rtice v en G tal que $G \Delta v$ es conexa.

Demostraci\u00f3n

Como G no tiene clanes de 3 elementos , $G \Delta v$ es igual a $G - v$, para toda v en $V(G)$.

Si T es un árbol generador de G , entonces cualquier vértice v de grado 1 en T tiene la propiedad deseada.

Lema 2.2.12 (Fred S. Roberts [12])

Supóngase que v_1, \dots, v_n es una numeración P de los vértices de G , por lo tanto v_2, \dots, v_n es una numeración P_2 de los vértices de $G_2 = G \Delta v_1$ entonces

Si $m(G_2, P_2) > 0$, tenemos que

$$m(G, P) = Y_1 + m(G_2, P_2) - 1$$

donde Y_1 es el mínimo número de clanes que cubren a $E(N(v_1))$

Demostración

En la numeración P , h_1 es igual a Y_1 .

El primer término distinto de cero h_i en la numeración P_2 se reduce en uno al calcular $m(G, P)$, ya que v_1 se puede utilizar, dicho término $h_i \neq 0$ existe porque $m(G_2, P_2) > 0$

El resto de las h_i , obtenidas a partir de P_2 permanecen iguales, por lo tanto $m(G, P)$ es igual a $Y_1 + m(G_2, P_2) - 1$.

Teorema 2.2.10 (Fred S. Roberts [12])

Si G es conexa, $|V(G)| > 1$ y sin clanes de 3 elementos entonces $k(G) = m(G) = |E(G)| - |V(G)| + 2$

Demostración

En vista de la proposición 2.2.2 y el teorema 2.2.6 es suficiente demostrar que

$$m(G) \leq k(G) \leq |E(G)| - |V(G)| + 2$$

La demostración se hará por inducción sobre el número de vértices.

Si $|V(G)| = 2$ entonces G tiene una sola arista y

$$k(G) = m(G) = |E(G)| - |V(G)| + 2 = 1$$

Supóngase que el teorema se cumple para una gráfica con $n-1$ vértices, $n > 2$

Sea G tal que $|V(G)| = n$ con las propiedades del teorema.

Por lema 2.2.11 en G existe un vértice v tal que $G \Delta v$ es conexa.

$$\text{Sean } v_1 = v \text{ y } G_2 = G \Delta v_1$$

$$\text{Como } |V(G)| > 2 \text{ entonces } |V(G_2)| > 1$$

Sean v_2, v_3, \dots, v_n una numeración P_2 de los vértices de G_2 tal que $m(G_2, P_2) = m(G_2)$.

Como G_2 tiene más de un vértice y es conexa por hipótesis de inducción, $m(G_2, P_2) > 0$ (es decir G_2 no es de competencia)

Más aún G_2 es conexa y no tiene clanes de tres elementos.

Considere v_1, \dots, v_n la numeración P obtenida de la numeración P_2 y el vértice v_1 .

Por lema 2.2.12 y la hipótesis de inducción

$$\begin{aligned} m(G, P) &= Y_1 + m(G_2, P_2) - 1 \\ &= Y_1 + m(G_2) - 1 \\ &= Y_1 + (|E(G)| - |V(G)| + 2) - 1 \end{aligned}$$

por lo tanto $m(G) = Y_1 + |E(G_2)| - |V(G_2)| + 1$

Como G no tiene clanes de tres elementos $N(v_1)$ no tiene aristas, por lo tanto $|E(G_2)| = |E(G)| - Y_1$ y $|V(G_2)| = |V(G)| + 1$, es decir

$$m(G, P) = |E(G)| - |V(G)| + 2$$

por lo tanto

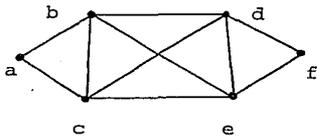
$$k(G) \leq m(G) \leq m(G, P) = |E(G)| - |V(G)| + 2 \leq k(G)$$

Corolario 2.2.11 (Fred S. Roberts [12])

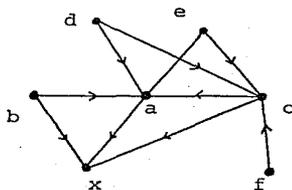
Para todo ciclo C_m , $m \geq 3$, el ciclo de m vértices, $k(C_m) = 2$

Roberts conjeturó que $m(G) = k(G)$, sin embargo Robert J. Opsut [5] encontró el siguiente contraejemplo.

Considérense las siguientes gráficas



G



D

$G \cup I_1$ es la gráfica de competencia de D y por lo tanto $k(G) \leq 1$

Mostraremos ahora que $m(G, P) \geq 2$ para cualquier numeración P .

Supongamos que $m(G, P) \leq 1$ para alguna numeración P .

Entonces, como $Y_1(b) = Y_1(d) = Y_1(c) = Y_1(e) = 2$ tenemos que empezar con a o con f (para aumentar el menor número posible de puntos). Sin pérdida de generalidad, empezamos con $a_1 = a$. Sea $Y_1 = 1$. Debemos entonces aumentar un vértice a $V(G)$ para construir D_1 , como la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V(G) \cup \{x_{11}\}$ y cuyo conjunto de flechas es

$$F(D_1) = \left\{ (v, x_{11}) / v \in N(a) \right\} \cup \left\{ (a, x_{11}) \right\}$$

$$\text{Sea } G_2 = G \Delta a_1 \quad \text{y} \quad A_1 = \{a\}, \quad h_1 = Y_1 = 1$$

Como $Y_2(d) = Y_2(e) = 3$, debemos elegir b, c, f para evitar aumentar más vértices nuevos.

Nuevamente sin pérdida de generalidad $a_2 = b$.

Como $Y_2(b) = 1$, utilizaremos a_2 para generar D_2 la siguiente digráfica:

$$V(D_2) = V(D_1)$$

$$F(D_2) = F(D_1) \cup \left\{ (v, a_1) / v \in N(a_2) \right\} \cup \left\{ (a_2, a_1) \right\}$$

$$\text{Sea } G_3 = G_2 \Delta a_2 \quad \text{y} \quad A_2 = \{a_2\}$$

Como $Y_2(b) \leq |A_2|$ entonces $h_2 = 0$

Elegir a_3 es indiferente en G_3 , ya que

$$Y_3(c) = Y_3(e) = Y_3(d) = Y_3(f) = 2$$

y aumentaremos un nuevo vértice para construir D_3 , por lo tanto $h_3 = 1$ y de ésta forma a G se le aumentarán al

menos dos vértices nuevos, es decir $m(G, P) \geq 2$ para cualquier numeración P de los vértices de G .

Definición 2.2.6 Sea G una gráfica no vacía. La gráfica de líneas, $L(G)$, de G es la gráfica asociada a G tal que existe una correspondencia uno-a-uno entre los vértices de $L(G)$ y las aristas de G tales que dos vértices de $L(G)$ son adyacentes si y sólo si las correspondientes aristas en G son adyacentes.

Lema 2.2.12 (Robert J. Opsut [11])

Para cada vértice v de una gráfica de líneas $\Theta(N(v)) \leq 2$. En particular una gráfica de líneas no tiene como subgráfica inducida a $K_{1,3}$.

Lema 2.2.13 ([8])

Cualquier subgráfica inducida o generada de una gráfica de líneas es una gráfica de líneas.

Teorema 2.2.14 (Robert J. Opsut [11])

Si G es una gráfica de líneas entonces $k(G) \leq 2$ y $k(G) = 2$ si y sólo si $\Theta(N(v)) = 2$ para toda v en $V(G)$.

Demostración

La demostración se hará por inducción sobre el número de vértices.

Es claro que si $|V(G)| = 1$, entonces $k(G) \leq 1$.

Supongamos que $|V(G)| = n$ y que toda gráfica de

lineas con menos de n vértices cumplen el teorema.

CASO 1 .- Existe un vértice v tal que $\Theta(N(v)) = 0$, es decir, v es un vértice aislado. Entonces por lema 2.2.13, $G-v$ es también gráfica de líneas y por lo tanto $k(G-v) \leq 2$ y $k(G-v) = 2$ si y sólo si $\Theta(N_{G-v}(z)) = 2$ para toda $z \in V(G-v)$.

Sea D^* la digráfica tal que $K(D^*) = (G-v) \cup I_2$
 Supóngase que $I_2 = \{a, b\}$. Sea D la digráfica con conjunto de vértices $V(D) = V(G) \cup I_2$ y conjunto de flechas $F(D) = F(D^*) - \left\{ (x, a) / (x, a) \in F(D^*) \right\} \cup \left\{ (x, v) / (x, a) \in F(D^*) \right\}$

es decir reemplazamos a por v . Claramente D es acíclica y $G \cup I_1$ es la gráfica de competencia para D . Así $k(G) \leq 1$

CASO 2 .- Existe un vértice v tal que $\Theta(N(v)) = 1$

Sea $N(v) = \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$, $s \neq 0$ ya que $\Theta(N(v)) \neq 0$. Como $K_{1,3}$ no es subgráfica inducida de G entonces $\Theta(N(x_j) - N(v)) \leq 1$, de otra forma, si y, z están en $N(x_j)$, y, z no están en $N(v)$ y yz no está en $E(G)$, entonces x_j, y, z, v forman una $K_{1,3}$ en G .

Sea $G' = G - \{v, x_1, x_2, \dots, x_{s-1}\}$, por lema 2.2.13 G' es una gráfica de líneas y en G' , $\Theta(N(x_s)) \leq 1$

Por hipótesis de inducción y ya que en G' , $\Theta(N(x_s))$ es menor o igual que uno, existe una digráfica D^* tal que

$K(D^*) = G' \cup I_1$.

Sea $I_1 = \{a\}$

$$\begin{aligned}
& \text{Construyamos la digráfica } D \text{ con } V(D) = V(G) \cup I_1 \\
& \text{y } F(D) = F(D^*) - \left\{ (w, a) / (w, a) \text{ esté en } F(D^*) \right\} \\
& U \left\{ (w, x_{s-1}) / (w, a) \text{ está en } F(D^*) \right\} \\
& U \left(\begin{array}{c} s-1 \\ \cup \\ j=2 \end{array} \left\{ (x_j, x_{j-1}), (y, x_{j-1}) / y \in N(x_j) - \bar{N}(v) \right\} \right) \\
& U \left\{ (x_1, v) \right\} \quad U \left\{ (y, v) / y \in N(x_1) - \bar{N}(v) \right\} \\
& U \left\{ (v, b) \right\} \quad U \left\{ (x_j, b) / x_j \in N(v) \right\} .
\end{aligned}$$

es decir reemplazamos a con x_{s-1} , usamos x_{j-1} para generar las adyacencias de x_j que no están en $\bar{N}(v)$, usamos v para las de x_1 que no están en $\bar{N}(v)$ y agregamos el vértice b para las adyacencias en $\bar{N}(v)$.

Por lo tanto $G \cup I_1$ es la gráfica de competencia de D y como D es acíclica, $k(G) \leq 1$.

CASO 3 .- Cada vértice v es tal que $\theta(N(v)) = 2$

Sea G^* tal que G es la gráfica de líneas de G^* .

Elegimos v cualquier vértice de G . Sea $q_1 q_2$ la arista correspondiente a v en G^* .

Sea $N(v) = \{x_1, x_2, \dots, x_s, y_1, y_2, \dots, y_p\}$ donde x_j corresponde a la arista $q_1 d_j$ y y_r corresponde a $q_2 t_r$.

Entonces $N(x_j) \sim \bar{N}(v)$ es un clan K_j donde

$$K_j = \left\{ w / w = d_j t_m \text{ para alguna } t_m \right\}$$

En particular en $G' = G - \{v, x_1, \dots, x_{s-1}\}$

$\theta(N(v)) \leq 1$.

Como G' es una gráfica de líneas, por hipótesis de

inducción, existe una digráfica D^* tal que $K(D^*) = G \cup I_1$

Sea a el vértice aislado. Sea D la digráfica tal que

$$V(D) = V(G) \cup I_2 \text{ donde } I_2 = \{ b, c \} \text{ y}$$

$$F(D) = F(D^*) - \{ (w, a) / (w, a) \in F(D) \}$$

$$\cup \{ (w, x_{s-1}) / (w, a) \in F(D^*) \}$$

$$\cup \left(\begin{array}{c} s-1 \\ \cup \\ j=2 \end{array} \left\{ (w, x_{j-1}) / w=x_j \text{ o } w \in K_j \right\} \right)$$

$$\cup \left\{ (w, v) / w=x_1 \text{ o } w \in K_1 \right\}$$

$$\cup \left\{ (x_j, b) / j = 1, 2, \dots, s \right\}$$

$$\cup \left\{ (y_r, c) / r = 1, 2, \dots, p \right\}$$

$$\cup \left\{ (v, b), (v, c) \right\}$$

Es fácil ver que D es acíclica y $G \cup I_2$ es la gráfica de competencia para D y por lo tanto $k(G) \leq 2$.

Por la proposición 2.2.4, como cada vértice de G tiene $\theta(N(v)) = 2$ entonces $k(G) \geq 2$ y por lo tanto $k(G) = 2$.

C A P I T U L O 3

Caracterización de Gráficas de Competencia
de Digráficas Arbitrarias y
de Digráficas Acíclicas

Una caracterización de las gráficas de competencia, fue dada por R.D. Dutton y R.C. Brigham [5], sin embargo, ésta fue dada para gráficas de competencia de digráficas que pueden tener ciclos dirigidos y lazos. Más tarde F.S. Roberts y J.E. Stief [13] lograron dar una caracterización de las gráficas de competencia de digráficas sin lazos.

Teorema 3.1 (R.D. Dutton y R.C. Brigham [5])

G es una gráfica de competencia de una digráfica D, posiblemente con lazos y ciclos dirigidos si y sólo si $i(G) \leq n$, donde n es el número de vértices de la gráfica.

Demostración

Sean G una gráfica y D una digráfica tales que $K(D) = G$

Definamos para $1 \leq i \leq n$ el siguiente conjunto

$$C_i = \left\{ v_j / (v_j, v_i) \in F(D) \right\}$$

Claramente cada C_j es un clan de \bar{G} y C_1, \dots, C_n

forman una cubierta por clanes de $E(G)$, por lo tanto

$$i(G) \leq n$$

Supongamos ahora que G es una gráfica tal que $i(G) \leq n$

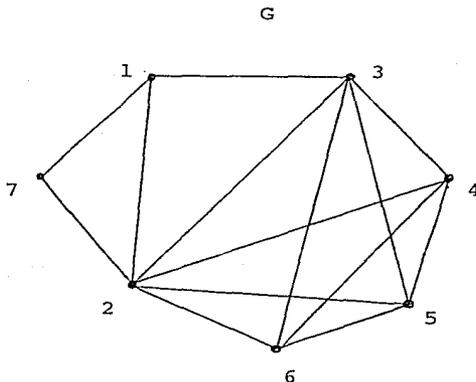
Sea $\{ C_1, \dots, C_k \}$ una cubierta por clanes de

$E(G)$ con $k \leq n$.

Sea D con $V(D) = V(G)$ y tal que (v_i, v_j) está en $F(D)$ si y sólo si v_i está en C_j .

Es claro que G es la gráfica de competencia de D .

El siguiente es un ejemplo del teorema anterior.



Una gráfica G y una numeración de sus vértices.

$S = \{C_1, C_2, C_3\}$ es una cubierta por clanes de $E(G)$

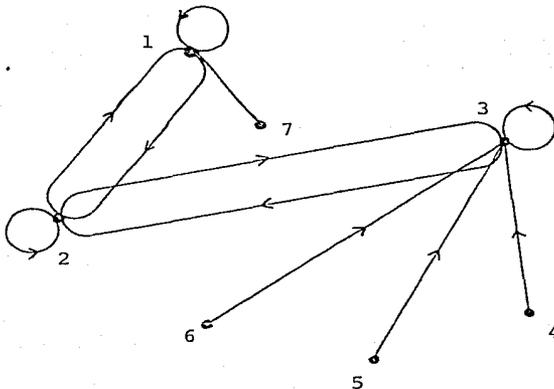
donde:

$$C_1 = \{1, 7, 2\}$$

$$C_2 = \{1, 2, 3\}$$

$$C_3 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

A partir de S construimos la siguiente digráfica:



D tal que $K(D)=G$

Para gráficas de competencia de digráficas acíclicas dieron la siguiente caracterización.

Teorema 3.2 (R.D. Dutton y R.C. Brigham [5])

Las siguientes afirmaciones son equivalentes para una gráfica G con n vértices.

a) G es la gráfica de competencia de una digráfica acíclica D

b) G tiene una numeración de sus vértices v_1, \dots, v_n tal que existen C_1, \dots, C_n clanes de G tales que

i) v_i está en C_j implica $i < j$

ii) C_1, \dots, C_n forman una cubierta por clanes de $E(G)$.

c) G tiene una cubierta por clanes de $E(G)$

$\{ C'_1, C'_2, \dots, C'_{n-2} \}$ tal que $|C'_1 \cup \dots \cup C'_j| \leq j+1$
para $1 \leq j \leq n-2$.

Demostración

Verificaremos que a) implica b)

Sean G una gráfica y D una digráfica acíclica tal que $K(D) = G$.

Sea v_1, \dots, v_n una numeración de los vértices de G tal que si (v_i, v_j) entonces $i < j$, dicha numeración existe por teorema 1.1.

Sea $C_j = \{ v_i / (v_i, v_j) \in F(D) \}$, $1 \leq j \leq n$

Es claro que cada C_j es un clan de G y cumple las condiciones

del inciso ii) de b) . Note que algunas C_j pueden ser vacíos.

Mostraremos ahora que b) implica c)

Sean G una gráfica y v_1, \dots, v_n una numeración de los vértices de G tal que existe una colección de los clanes de G , $\{C_1, \dots, C_n\}$ con las siguientes propiedades :-

i) si $v_i \in C_j$ entonces $i < j$

ii) $\{C_1, \dots, C_n\}$ es una cubierta por clanes de $E(G)$

Claramente i) implica que C_1 y C_2 no tienen aristas de G . Por lo tanto definamos los siguientes conjuntos :

$$C'_i := C_{i+2}$$

Es claro que $\{C'_1, \dots, C'_{n-2}\}$ es una cubierta de $E(G)$

Para $1 \leq j \leq n-2$ si $v_i \in C'_1 \cup \dots \cup C'_j$ por inciso i) tenemos que $i < j+2$ y por lo tanto $i \leq j+1$ esto es

$$|C'_1 \cup C'_2 \cup \dots \cup C'_j| \leq j+1 \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq n-2$$

Finalmente mostraremos que c) implica a) .

Sea $\{C'_1, \dots, C'_{n-2}\}$ una cubierta de $E(G)$ tal que

$$|C'_1 \cup C'_2 \cup \dots \cup C'_j| \leq j+1 \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq n-2$$

Numeremos los vértices de G de la siguiente manera :

Sea v_n un vértice que no esté en

$$\bigcup_{i=1}^{n-2} C'_i$$

sabemos que tal vértice existe ya que por hipótesis

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n-2} C'_i \right| \leq n-1$$

Sea v_{n-1} un vértice que no esté en

$$\bigcup_{i=1}^{n-3} C_i$$

Nuevamente por hipótesis existe tal vértice, etc.

Finalmente numeraremos arbitrariamente v_1 y v_2 a los dos vértices restantes.

Sea D la digráfica tal que $V(D) = \{v_1, \dots, v_n\}$
 y $F(D) = \{(v_i, v_j) \mid v_i \in C_{j-2}\}$

Es fácil ver que $G = K(D)$ y que si (v_i, v_j) está en $F(D)$ entonces $i \leq j-1$ es decir $i < j$, por lo tanto es acíclica D .

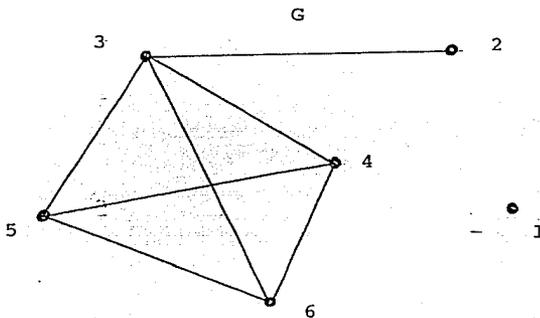
El siguiente teorema es equivalente al anterior.

Teorema 3.3 (J.R. Lundgren y J.S. Maybee [9])

Una gráfica G con n vertices es una gráfica de competencia de una digráfica acíclica si y sólo si G tiene una numeración de sus vértices v_1, \dots, v_n tal que existe una cubierta por clanes $\{C_1, \dots, C_n\}$ de $E(G)$ tal que si $v_i \in C_j$ entonces $i > j$. Ver siguiente figura.

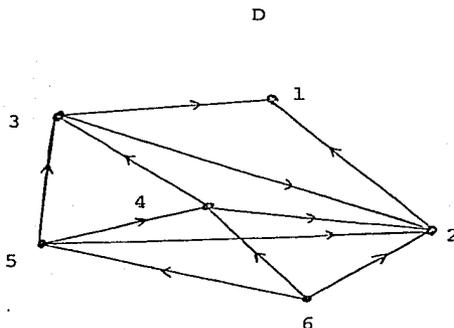
Caracterizaremos ahora aquellas gráficas G tales que $k(G) \leq 1$.

Ejemplo:



G con una numeración de sus vértices $1, 2, \dots, 6$ y una cubierta por clanes de $E(G)$, $C_1 = \{2, 5\}$, $C_2 = \{3, 4, 5, 6\}$, $C_3 = \{4, 5\}$, $C_4 = \{5, 6\}$, $C_5 = \{6\}$, $C_6 = \emptyset$ tal que si $i \in C_j$ entonces $i > j$.

A partir de la numeración de los vértices de la gráfica G y de la cubierta por clanes de G dada, construimos, como en el teorema 3.3, la siguiente digráfica acíclica D.



Teorema 3.4 (J.R. Lundgren y J.S. Maybee [9])

Si G es una gráfica con n puntos entonces $k(G) \leq 1$ si y sólo si existe una cubierta de $E(G)$ $\{C_1, \dots, C_n\}$ y una sucesión de puntos v_1, \dots, v_n tales que si $v_i \in C_j$ entonces $i \geq j$.

Demostración

Supongamos que $k(G) \leq 1$

Si $k(G) = 0$, el resultado se sigue del teorema anterior.

Si $k(G) = 1$, entonces existe una digráfica acíclica D tal que $K(D) = G \cup I_1$

Sea b el vértice aislado aumentado a G .

Por teorema anterior existe una cubierta por clanes $E(K(D))$, $\{C_1, \dots, C_{n+1}\}$ y una numeración de sus vértices u_1, \dots, u_{n+1} tal que si $u_i \in C_j$ entonces $i \geq j$

Es claro que C_{n+1} es vacío y u_1 es aislado en $K(D)$, por lo tanto $G \cong K(D) - \{u_1\}$. La colección $\{C_1, \dots, C_n\}$ es una cubierta por clanes de $K(D) - \{b\}$ y la numeración de $V(G)$, $v_i := u_{i+1}$ para $i=1, \dots, n$, satisface las condiciones del teorema.

Para demostrar la necesidad del teorema, suponga que $\{C_1, \dots, C_n\}$ es una cubierta por clanes de $E(G)$ y que v_1, \dots, v_n es una numeración de sus vértices tal que si $v_i \in C_j$ entonces $i \geq j$

Si definimos $G_1 := G \cup \{u_1\}$, $u_i := v_{i-1}$

para $i = 2, \dots, n+1$ y $C_{n+1} = \emptyset$ entonces se satisfacen las condiciones del teorema anterior y por lo tanto G_1 es gráfica de competencia de alguna digráfica acíclica D es decir $k(G) \leq 1$

El teorema que sigue tiene una prueba similar al anterior.

Teorema 3.5 (J.R. Lundgren y J.S. Maybee [9])

Si G es una gráfica con n vértices y $m \leq n$ entonces $k(G) \leq m$ si y sólo si $E(G)$ tiene una cubierta por clanes $\{C_1, \dots, C_n\}$ y una numeración de $V(G)$, a_1, a_2, \dots, a_n tal que si $a_i \in C_j$ entonces $i \geq j - m + 1$.

El siguiente teorema debido a F.S. Roberts y a J.E. Steif [9] caracteriza a las gráficas de competencia G para las cuáles existe una digráfica D sin lazos, tal que $K(D) = G$. Para ver ésto, demostraremos el siguiente teorema y lema.

Teorema 3.6 (Fred S. Roberts y J.E. Steif [13])

G es una gráfica de competencia de una digráfica sin lazos si y sólo si existe $\{C_1, \dots, C_p\}$ una cubierta por clanes de $E(G)$ tal que si $D_i = V(G) - C_i$ entonces para la familia (D_1, \dots, D_p) existe $\{v_1, \dots, v_p\} \subseteq V(G)$ tal que $v_i \in V(D_i)$ para $1 \leq i \leq p$ y $v_i \neq v_j$ si $i \neq j$.

Demostración

Suponga que para (D_1, \dots, D_p) existe $\{v_1, \dots, v_p\}$ subconjunto de $V(G)$ tal que si v_i está en D_i para $1 \leq i \leq p$ y $v_i \neq v_j$ si $i \neq j$.

Sea D la digráfica tal que $V(D) = V(G)$ y (v_i, v_j) está en $F(D)$ si y sólo si $v_i \in C_j$.

Claramente D no tiene lazos pues v_i no está en C_i , ya que v_i está en $D_i = V(G) - C_i$ y además $K(D) = G$.

Sea G una gráfica para la cuál existe una digráfica D sin lazos tal que $K(D) = G$.

Sean v_1, \dots, v_n los vértices de D .

Definamos $C_i = \{v / (v, v_j) \in F(D)\}$ para $i = 1, \dots, n$.

Cada C_i es un clan de G y $\{C_1, \dots, C_n\}$ es una cubierta por clanes de $E(G)$, más aún $v_i \notin C_i$ ya que D no tiene lazos.

Sea $D_i = V(G) - C_i$ para $i = 1, \dots, n$.

Para la familia (D_1, \dots, D_n) , el conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$ es tal que $v_i \in D_i$ para $i = 1, \dots, n$ y $v_i \neq v_j$ si $i \neq j$, por lo tanto se cumple la suficiencia del teorema.

Definición 3.1 Una k -formación es una colección T_1, T_2, \dots, T_k de subconjuntos de $\{1, 2, \dots, k-1\}$ tal que $T_i \not\subseteq \bigcup_{j \neq i} T_j$.

Lema 3.7 (Fred S. Roberts y J.E. Steif [13])

Para $k \geq 2$ no existen k -formaciones .

Demostración

La demostración se hará por inducción sobre k

Si $k = 2$, los únicos subconjuntos de $\{1\}$ son el \emptyset y $\{1\}$ y claramente éstos no forman una 2-formación.

Supongamos que para $k-1$ no existen $k-1$ -formaciones y que para k si existen k -formaciones .

Sea T_1, \dots, T_k una k -formación , por lo tanto T_k no está contenida en $\bigcup_{j \neq k} T_j$, por lo tanto algún elemento de T_k no está en ninguna T_j con $j \neq k$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que este elemento es precisamente $k-1$

$$\text{Sea } T'_i = T_i - \{k-1\}$$

Probaremos que T'_1, \dots, T'_{k-1} es una $k-1$ -formación
Claramente cada T'_i es subconjunto de $1, 2, \dots, k-2$ y suponiendo que

$$T'_i \subseteq \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k-1} T'_j$$

tenemos :

$$T_i \subseteq T'_i \cup \{k-1\} \subseteq \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k-1} T'_j \cup \{k-1\} \subseteq \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k T_j$$

donde la última contención se sigue porque $k-1$ está en T_k

por lo tanto T'_1, \dots, T'_{k-1} es una $k-1$ -formación lo cuál es imposible y por lo tanto no existen k -formaciones.

Teorema 3.8 (Fred S. Roberts y J.E. Steif [13])

Si $|V(G)| = n$ entonces

G es una gráfica de competencia de una digráfica sin lazos si y sólo si $G \neq K_2$ y $i(G) \leq n$.

Demostración

Si $G \neq K_2$, es fácil ver que G no es la gráfica de competencia de una digráfica sin lazos y por lo tanto $G \neq K_2$.

Supongamos que $i(G) > |V(G)|$, por teorema anterior G no puede ser la gráfica de competencia de una digráfica que no tiene lazos.

Para probar la suficiencia del teorema, supongamos que $G \neq K_2$ y que $i(G) \leq n$

Sea $\{C_1, \dots, C_p\}$ una cubierta por clanes de $E(G)$ tal que $p \leq n$.

Si $p = 0$ entonces G no tiene aristas y el resultado es obvio.

Suponga que $p = 1$, entonces C_1 es el conjunto de vértices de G menos algunos vértices aislados y por lo tanto G es igual a K_m más vértices aislados. Es fácil mostrar que G es la gráfica de competencia de una digráfica sin lazos ya que $G \neq K_2$.

Supongamos que $1 < p \leq n$

$$\text{Sea } Q = \sum_{i=1}^p |C_i|$$

Demostraremos por inducción sobre Q que si p es un número fijo tal que $1 < p \leq n$ entonces si G tiene una cubierta de p clanes de $E(G)$ y Q es como lo definimos entonces G es la gráfica de competencia de una digráfica sin lazos.

Si $Q = 0$ entonces todos los clanes de C_i son vacíos, por lo tanto G no tiene aristas y claramente G es la gráfica de competencia de una digráfica sin lazos.

Supóngase que el resultado es válido para una cubierta con p clanes tal que

$$\sum_{i=1}^p |C_i| < Q$$

Sea $\{C_1, \dots, C_p\}$ una cubierta por clanes de $E(G)$ con p elementos tal que

$$\sum_{i=1}^p |C_i| = Q$$

Sea $D_i = V(G) - C_i$, $i = 1, \dots, p$

Para la familia (D_1, \dots, D_p) demostraremos usando el teorema de Hall (ver [8]) que existe $\{x_1, \dots, x_p\}$ subconjunto de $V(G)$ tal que $x_i \in D_i$ para $i = 1, \dots, p$ y $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.

El teorema de Hall asegura la existencia del subconjunto $\{x_1, \dots, x_p\}$ para la familia (D_1, \dots, D_p) si y sólo si para toda $k = 1, \dots, p$

$$|D_{i_1} \cup D_{i_2} \cup \dots \cup D_{i_k}| \geq k$$

Supongamos que para alguna subfamilia de $(D_i)_{i=1}^p$

$$(D_{i_1}, \dots, D_{i_k})$$

tenemos que

$$|D_{i_1} \cup D_{i_2} \cup \dots \cup D_{i_k}| < k$$

Si $k = 1$ entonces $D_{i_1} = \emptyset$ y $C_{i_1} = V(G)$ por lo

tanto $G = K_n$, como $G \neq K_2$, claramente G es la gráfica de competencia de una digráfica sin lazos.

Supongamos que $k \geq 2$ y que $\{D_{i_1} \cup \dots \cup D_{i_k}\}$ es igual a $\{x_1, x_2, \dots, x_L\}$ con $L < k$.

$$\text{Sea } W = V - \{x_1, x_2, \dots, x_L\}$$

Note que $W \subseteq C_{i_j}$ para toda j y que como $L < k \leq p \leq |V(G)|$ entonces $W \neq \emptyset$.

Cada C_{i_j} , $j = 1, 2, \dots, k$ es de la forma $W \cup T_{i_j}$

$$\text{donde } T_{i_j} \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_L\}$$

Si para toda r en $\{1, 2, \dots, k\}$, T_{i_r} no está contenido en $\bigcup_{j \neq r} T_{i_j}$, entonces $T_{i_1}, T_{i_2}, \dots, T_{i_k}$

es una k -formación, lo cuál es imposible por el lema anterior ya que $k \geq 2$.

Por lo tanto, para alguna r , $T_{i_r} \subseteq \bigcup_{j \neq r} T_{i_j}$

Defina $C'_i = C_i$ si $i \neq i_r$ y $C'_i = T_{i_r}$ si $i = i_r$

Note que T_{i_r} es un clan por ser subconjunto de C_{i_r} .

Las únicas aristas que están en C_{i_r} pero no en T_{i_r} son las aristas ww' con w, w' elementos de W o wx con w elemento de W y x elemento de T_{i_r} , pero cada arista ww' es tal que w, w' están en C'_{i_j} para $j \neq r$ y una de tales C'_{i_j} existe ya que $k \geq 2$.

Cada arista wx está en alguna C_{i_j} , $j \neq r$ ya que w está en toda C_{i_j} y x está en alguna C_{i_j} $j \neq r$.

Así $\{C'_1, \dots, C'_p\}$ es una cubierta clanes de $E(G)$ de p elementos con $p \leq |V(G)|$. Además,

$$\sum_{i=1}^p |C'_i| < \sum_{i=1}^p |C_i|$$

ya que $W \neq \emptyset$ y por lo tanto $T_{i_r} \subsetneq C_{i_r}$.

Por hipótesis de inducción, la existencia de los clanes C'_1, \dots, C'_p implican que G es una gráfica de competencia de una digráfica sin lazos.

C A P I T U L O 4

Algunos Resultados Nuevos

En este capítulo estudiaremos a las gráficas de competencia G a partir de ciertas orientaciones sobre G misma. Las orientaciones utilizadas serán B_1 -orientaciones y en términos de ellas determinaremos si G es gráfica de competencia o no.

Otra noción obtenida a partir de redes alimenticias reales, es la noción de "enemigos comunes" y a partir de ésta, se define a la gráfica de enemigos comunes de la siguiente manera:

Los vértices de la gráfica de enemigos comunes son las especies del ecosistema y dos vértices u y v son adyacentes si y sólo si existe una especie w , en la red alimenticia, que se alimenta tanto de u como de v .

Resultados similares a los obtenidos sobre gráficas de competencia, serán establecidos para gráficas de enemigos comunes.

Notación.- Si G es una gráfica y D es una orientación de G , denotaremos en esta sección por \vec{G} a la digráfica D .

El siguiente resultado caracteriza a las gráficas de competencia en términos de gráficas B_1 -orientables.

Definición 4.1.1 Una digráfica D está B_1 -orientada si y sólo si para cualesquiera tres vértices u, v, w en $V(D)$ tales que (u, w) y (v, w) están en $F(D)$ se sigue que (u, v) ó (v, u) está en $F(D)$.

Definición 4.1.2 Decimos que una gráfica es B_1 -orientable si existe una orientación D de G tal que D está B_1 -orientada.

Proposición 4.1.1 (R. Espinosa, J. Urrutia
y V. Urrutia-Galicia)

\vec{G} está B_1 -orientada si y sólo si $K(\vec{G})$ es subgráfica de G .

Demostración

Supongamos que \vec{G} está B_1 -orientada

Sea $uv \in E(K(\vec{G}))$, por lo tanto existe w en $V(\vec{G})$ tal que (u, w) y (v, w) están en $F(\vec{G})$, como \vec{G} está B_1 -orientada por lo tanto (u, v) ó (v, u) están en $F(\vec{G})$ de ahí que uv está en G .

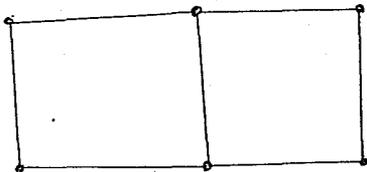
Para demostrar la necesidad de la proposición, suponemos que $K(\vec{G}) \subseteq G$

Sean u, v, w elementos de $V(\vec{G})$ tales que (u, v) y (w, v) están en $F(\vec{G})$, por lo tanto uw está en $E(K(\vec{G}))$, de ahí que

uw esté en G y por lo tanto (u,w) ó (w,u) están en $F(\vec{G})$
 ésto es , D está B_1 -orientada.

El siguiente es un ejemplo que muestra una gráfica G que no es B_1 -orientable y por lo tanto para ninguna orientación D sobre G , se tiene que $K(D)$ es subgráfica de G .

G



Teorema 4.1.2 (R. Espinosa, J. Urrutia
 y V. Urrutia-Galicia)

Sea G una gráfica y \vec{G} una orientación de G entonces
 $K(\vec{G})=G$ si y sólo si \vec{G} está B_1 -orientada y para todo v en
 $V(\vec{G})$ la subdigráfica inducida por $N_{\vec{G}}^+(v)$ no contiene sumideros .

Demostración

Supongamos que $K(\vec{G})=G$, entonces por proposición anterior \vec{G} está B_1 -orientada.

Sea v en $V(\vec{G})$ y u en $N^+(v)$. Por lo tanto uv está en G y de ahí que uv esté en $K(\vec{G})$, pero entonces existe w en $V(\vec{G})$ tal que (v,w) y (u,w) están en $F(\vec{G})$, por lo tanto u no es sumidero en $N^+(v)$.

Para probar la parte de la suficiencia del teorema observemos que por la proposición anterior $E(K(\vec{G})) \subseteq E(\vec{G})$

Sea uv una arista de G , sin pérdida de generalidad (v,u) está en $F(\vec{G})$. Como u no puede ser sumidero en $N^+(v)$, existe w en $N^+(v)$ tal que (u,w) está en \vec{G} , pero también $(v,w) \in F(\vec{G})$ y \vec{G} está B_1 -orientada entonces (u,v) ó (v,u) está en $F(\vec{G})$ por lo tanto uv está en G . De ahí que $E(G) \subseteq E(K(\vec{G}))$ y así $G = K(\vec{G})$

Corolario 4.1.3 (R. Espinosa, J. Urrutia
V. Urrutia-Galicia)

Si G es B_1 -orientable entonces G es una gráfica de competencia .

Demostración

Sea G una gráfica y \vec{G} una B_1 -orientación de G .

Sea D la digráfica definida como sigue :

$$V(D) = V(\vec{G})$$

$$F(D) = F(\vec{G}) \cup \left\{ (v,v) / v \in V(\vec{G}) \right\}$$

Claramente para todo v en $V(D)$, $N^+(v)$ no contiene sumideros y está B_1 -orientada, por teorema 4.1.2 tenemos que $K(D) = G$.

Este último resultado nos proporciona una amplia variedad de gráficas que son gráficas de competencia, como son las gráficas de intersección de subárboles de un árbol las gráficas de intervalos y las gráficas arco circulares, ya que éstas son B_1 -orientables.

Además desde el punto de vista práctico es útil, pues existe un algoritmo de reconocimiento eficiente de gráficas B_1 -orientables.

Ejemplo

Sean C y C' 3-ciclos dirigidos y \vec{G} la digráfica cuyo conjunto de vértices es $V(C) \times V(C')$ y en la cuál (u,v) y (u',v') son adyacentes en \vec{G} si y sólo si (u,u') ó $u=u'$ y (v,v') .

Es fácil ver que $K(\vec{G}) = G$.

Definición 4.1.3 Una digráfica D , se dice que está B_1^* -orientada si D está B_1 -orientada y no tiene ciclos dirigidos.

Definición 4.1.4 Si una gráfica G es tal que existe una orientación D de G , la cuál está B_1^* -orientada entonces se dice que es B_1^* -orientable.

Proposición 4.1.4 (R. Espinosa, J. Urrutia
y V. Urrutia-Galicia)

Sea G una gráfica y \vec{G} una orientación de G , entonces si \vec{G} está B_1^* -orientada entonces $K(\vec{G})$ es B_1^* -orientable.

Demostración

Como \vec{G} está B_1 -orientada entonces por proposición 4.1.1 es subgráfica de G .

Denotemos por $\vec{K}(\vec{G})$ a la digráfica obtenida al dar a $K(\vec{G})$ la siguiente orientación :

Si uv está en $K(\vec{G})$ entonces (u,v) está en $\vec{K}(\vec{G})$ si y sólo si (u,v) está en \vec{G} .

Como \vec{G} no contiene ciclos dirigidos, $\vec{K}(\vec{G})$ tampoco puede contenerlos .

Mostraremos ahora que $\vec{K}(\vec{G})$ está B_1 -orientada.

Sean u,v,w vertices de $\vec{K}(\vec{G})$ tales que (u,w) y (v,w) están en $\vec{K}(\vec{G})$.

Por lo tanto (u,w) y (v,w) están en \vec{G} y de ahí que uv está en $K(\vec{G})$, ésto quiere decir que $\vec{K}(\vec{G})$ está B_1 -orientada ya que (u,v) ó (v,u) están en $\vec{K}(\vec{G})$.

Corolario 4.1.5 (R. Espinosa, J. Urrutia
y V. Urrutia-Galicia)

Si D es B_1^* -orientable entonces $K(D)$ es triangulada .

Corolario 4.1.6 (R. Espinosa, J. Urrutia
y V. Urrutia-Galicia)

Si D está B_1^* -orientada entonces $K(D)$ es la gráfica de intersección de subárboles de un árbol.

Demostración

Se sigue inmediatamente del teorema 1.4 y del corolario anterior.

Gráficas de Intervalos
Orientadas

Una gráfica de intervalos G , es la gráfica de intersección de una familia I de intervalos en la recta real.

Supongamos que $I = \{ I_1, I_2, \dots, I_n \}$ es la familia de intervalos, numerados de tal manera que si $I_i = [a_i, b_i]$ y $I_j = [a_j, b_j]$ son dos intervalos de I con $i < j$ entonces $a_i < a_j$. A partir de I podemos obtener una orientación \vec{G} de G de la siguiente manera :

(v_i, v_j) si y sólo si $a_j \in I_i$

A la orientación \vec{G} de G , definida de esta forma, la llamaremos gráfica de intervalos orientada.

Proposición 4.1.7 (J. Urrutia)

Si \vec{G} es una gráfica de intervalos orientada entonces \vec{G} está B_1^* -orientada.

Demostración

Sean v_i, v_j, v_k vértices de \vec{G} tales que (v_i, v_k) y (v_j, v_k) están en \vec{G} , por lo tanto $a_k \in I_i$ y $a_k \in I_j$, es decir, $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ y de ahí que (v_i, v_j) ó (v_j, v_i) , por lo tanto \vec{G} está B_1 -orientada.

Supongamos que \vec{G} tiene un ciclo dirigido. Claramente siempre podemos reenumerar los vértices de \vec{G} de modo que el ciclo sea de la forma $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_n, v_1)$. Se sigue que $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < a_1$ lo cuál es una contradicción, por lo tanto \vec{G} no contiene ciclos dirigidos.

Lema 4.1.8 (R. Espinosa, J. Urrutia

y V. Urrutia-Galicia)

Sea \vec{G} una digráfica acíclica y v una fuente de \vec{G} . Sea $G' = G - v$ y sea \vec{G}' la orientación de G' inducida de \vec{G} . Entonces $K(\vec{G}')$ es subgráfica inducida de $K(\vec{G})$.

Demostración

Por demostrar que para cualesquiera dos vértices u, w en $V(G')$, uw está en $E(K(\vec{G}'))$ si y sólo si uw está en $E(K(\vec{G}))$. Si uw está en $E(K(\vec{G}'))$ entonces existe x en $V(G')$ tal que (u, x) y (w, x) , por lo tanto uw está en $E(K(\vec{G}))$. Por otra parte si uw es arista de $K(\vec{G})$ entonces existe x en $V(G)$ tal que (u, x) y (w, x) , pero $x \neq v$, pues v es fuente de \vec{G} una digráfica acíclica, por lo tanto x está en $V(G')$ y de ahí que uw está en $E(K(\vec{G}'))$.

Teorema 4.1.9 (R. Espinosa, J. Urrutia
y V. Urrutia-Galicia)

Si \vec{G} es gráfica de intervalos orientada entonces $K(\vec{G})$ es gráfica de intervalos.

Demostración

Mostraremos por inducción sobre $n = |V(G)|$ que si \vec{G} es una gráfica de intervalos orientada a partir de $I = \{I_1, \dots, I_n\}$ donde $I_i = [a_i, b_i]$ $i=1, \dots, n$ entonces $K(\vec{G})$ es la gráfica de intersección de $I' = \{I_1', \dots, I_n'\}$ en la cuál cada intervalo $I_i' = [a_i', b_i']$ correspondiente a un vértice no aislado en $K(\vec{G})$ es tal que $a_i' = a_i$.

Si $n=1$ entonces $K(\vec{G}) = G$

Supongamos la afirmación cierta para toda gráfica de intervalos orientada con a lo más n vértices .

Sea \vec{G} una gráfica de intervalos orientada a partir de $I = \{I_1, \dots, I_{n+1}\}$.

Si G no es conexa, entonces podemos aplicar la hipótesis de inducción a cada componente de G y concluir que $K(G)$ es de intervalos . Si G es conexa , entonces v_1 el vértice correspondiente a I_1 es la única fuente de G .

Sea $G' = G - v_1$ y \vec{G}' la orientación de G' inducida por \vec{G} . Por la proposición 4.1.7. y el lema 4.1.8 tenemos que $K(\vec{G}') = K(\vec{G}) - v_1$. Además por hipótesis de inducción $K(\vec{G}')$ es la gráfica de intersección de $I' = \{I_2', \dots, I_{n+1}'\}$ en la cuál cada intervalo $I_i' = [a_i', b_i']$ correspondiente a un

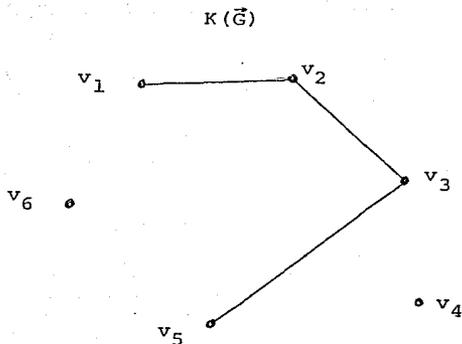
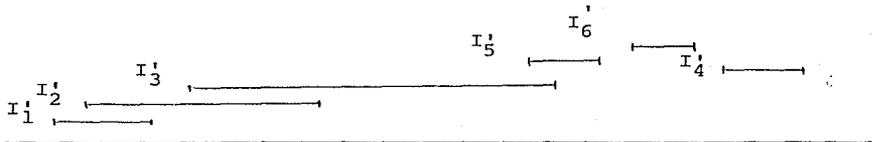
vértice no aislado en $K(\vec{G}')$ es tal que $a_1' = a_1$.

Podemos suponer además sin pérdida de generalidad, que todo intervalo en I' correspondiente a un vértice aislado en $K(\vec{G}')$ y no adyacente a v_1 en $K(\vec{G})$, se encuentra a la derecha de todos los intervalos no aislados en $K(\vec{G})$. A partir de esta familia I' de $K(\vec{G}')$ trataremos de encontrar una familia I tal que $K(\vec{G})$ es la gráfica de intersección de I .

Sea $I_1' = [a_1', b_1']$ tal que $a_1' = a_1$ y b_1' está un poco hacia la izquierda de a_k' donde $I_k' = [a_k', b_k']$ es el primer intervalo que aparece en I' tal que v_k no es adyacente a v_1 en $K(\vec{G})$. Supongamos que existe I_j' tal que v_j es adyacente a v_1 en $K(\vec{G})$ y tal que $a_k' < a_j'$.

Por lo tanto $a_k < a_j$. Como v_1 es adyacente a v_j en $K(G)$ y G es B_1 -orientable entonces v_1 es adyacente a v_j en G y así $I_1 \cap I_j \neq \emptyset$. Además $a_1 < a_k < a_j$ por lo tanto $I_1 \cap I_k \neq \emptyset$ y así v_1 es adyacente a v_k en G . Ahora bien, como v_1 y v_k no son adyacentes en $K(\vec{G})$ y v_1 es fuente de \vec{G} se sigue que v_k es sumidero en $N^+(v_1)$. Además como v_k no es aislado en $K(\vec{G}')$ y $a_k < a_j$ entonces v_k no es sumidero en \vec{G} , de ahí que existe v_m en $V(G)$ tal que (v_k, v_m) está en \vec{G} y como v_k es sumidero en $N^+(v_1)$ entonces $v_m \notin N^+(v_1)$ en \vec{G} . Más aún v_j es adyacente a v_1 en G , por serlo en $K(\vec{G})$, entonces $a_j < a_m$, por lo tanto $a_1 < a_k < a_j < a_m$. Pero como $I_k \cap I_m \neq \emptyset$, entonces $I_k \cap I_j \neq \emptyset$ y como $a_k < a_j$ entonces (v_k, v_j) está en G . Además (v_1, v_j) es decir v_1 y v_k son adyacentes en $K(G)$, lo cuál es una contradicción.

$K(\vec{G})$, la gráfica de competencia de G , es la gráfica de intersección de la familia $I' = \{I'_1, I'_2, \dots, I'_6\}$ donde I' es obtenida a partir de I , manteniendo fijos los extremos izquierdos de cada uno de los intervalos, excepto posiblemente aquellos que corresponden a vertices adyacentes a v_1 en G pero aislados en $K(\vec{G})$.



4.2 Gráficas de Enemigos Comunes

Definición 4.2.1 La gráfica de enemigos comunes de D es la gráfica que tiene a $V(D)$ como conjunto de vértices, en la cuál uv está en $E(EC(D))$, las aristas de la gráfica de enemigos comunes, si y sólo si existe w en $V(D)$ tal que (w,u) , (w,v) son flechas de D .

Definición 4.2.2 Decimos que una digráfica D está B_2 -orientada si para cualesquiera tres vértices u,w,v de $V(D)$ tales que si (w,u) (w,v) están en $F(D)$ entonces (u,v) ó (v,u) están en $F(D)$.

Definición 4.2.3 Decimos que una digráfica D está B_2^* -orientada si D está B_2 -orientada y además no contiene ciclos dirigidos.

Definición 4.2.4 Si \vec{G} es una orientación de G , definimos \overleftarrow{G} como la digráfica obtenida a partir de \vec{G} al invertir las direcciones de las flechas de \vec{G} .

Es claro que: \overleftarrow{G} está B_1 -orientada si y sólo si \vec{G} está B_2 -orientada.

También es fácil ver que $K(\overleftarrow{G}) = EC(\vec{G})$ para cualquier orientación \vec{G} de G .

De éstas dos últimas observaciones obtenemos los siguientes resultados duales, a los obtenidos para gráficas

de competencia .

Los siguientes resultados fueron obtenidos también por R. Espinosa, J. Urrutia y V. Urrutia-Gálvez .

Proposición 4.2.1

\vec{G} está B_2 -orientada si y sólo si $EC(\vec{G})$ es subgráfica de G .

Teorema 4.2.2

Sea G una gráfica y \vec{G} una orientación de G entonces $EC(\vec{G}) = G$ si y sólo si \vec{G} está B_2 -orientada y para todo v en $V(\vec{G})$, la subgráfica inducida por $N^-(v)$ no contiene fuentes.

Corolario 4.2.3

Si \vec{G} está B_2 -orientada entonces G es gráfica de enemigos comunes .

Proposición 4.2.4

Si \vec{G} es una B_2^* -orientación de G entonces $EC(\vec{G})$ es B_2^* -orientable

Corolario 4.2.5

Si \vec{G} está B_2^* -orientada entonces $EC(\vec{G})$ es triangulada.

Corolario 4.2.6

Si \vec{G} está B_2^* -orientada entonces $EC(\vec{G})$ es gráfica de intersección de subárboles de un árbol.

Definición 4.2.1 Una digráfica D está $B_1B_2^*$ -orientada si D está B_1^* -orientada y B_2^* -orientada.

El siguiente resultado nos dá una clase importante de gráficas de intervalos orientadas.

Teorema 4.2.7

Si \vec{G} está $B_1B_2^*$ -orientada entonces \vec{G} es una gráfica de intervalos orientada.

Demostración

Demostraremos por inducción sobre $n=|V(G)|$ que si \vec{G} está $B_1B_2^*$ -orientada, entonces existe una colección de intervalos unitarios I (intervalos de longitud 1), tal que \vec{G} es la gráfica de intersección de I , orientada a partir de I .

El caso $n=1$ es obvio.

Supongamos ahora la afirmación cierta para toda digráfica $B_1B_2^*$ -orientada con a lo más n vértices.

Sea \vec{G} una digráfica $B_1B_2^*$ -orientada tal que $|V(G)| = n+1$.

Si G no es conexa podemos aplicar la hipótesis de inducción a cada componente de G para concluir que \vec{G} es una gráfica de intervalos orientada.

Si G es conexa, sea v_1 la única fuente de \vec{G} .

Sea $G' = G - v_1$. Como \vec{G} está B_2 -orientada y v_1 es fuente de \vec{G} , tenemos que G' es conexa.

Sea \vec{G}' la orientación de G' inducida por \vec{G} , por lo tanto \vec{G}' está $B_1 B_2^*$ -orientada y $|V(G')| = n$, de ahí que por hipótesis de inducción existe una colección de intervalos unitarios $I' = \{I_2, I_3, \dots, I_{n+1}\}$, donde $I_i = [a_i, b_i]$ $i=2, \dots, n+1$. tal que \vec{G}' es la gráfica de intersección de I' , orientada a partir de I' .

$$\text{Sea } J = \left\{ I_i \in I' / v_i \in N^+(v_1) \text{ en } \vec{G}' \right\} \text{ y sean}$$

$$a_j = \min \left\{ a_i / I_i \in J \right\} \quad \text{y}$$

$$a_k = \max \left\{ a_i / I_i \in J \right\}$$

Como (v_1, v_j) , (v_1, v_k) y \vec{G} está B_2 -orientada, se sigue que v_j y v_k son adyacentes en G ; como además $a_j < a_k$, tenemos que $a_k < b_j$.

$$\text{Sea} \quad \xi = \frac{(b_j - a_k)}{2} \quad \text{y definamos } a_1 = a_j - \xi \text{ y } b_1 = b_j + \xi$$

por lo tanto $I_1 = [a_1, b_1]$ es un intervalo unitario.

$$\text{Sea } J' = \left\{ I_i \in I' - J / a_i < a_j \right\}$$

$$\text{Supongamos que } J' \neq \emptyset \text{ y sea } a_m = \max \left\{ a_i / I_i \in J' \right\}$$

Como G' es conexa y todos los intervalos en I' son unitarios, tenemos que $I_m \cap I_j \neq \emptyset$ por lo tanto (v_m, v_j) está en $F(\vec{G})$.

Por otra parte como (v_1, v_j) y \vec{G} está B_1 -orientada, tenemos que v_1 y v_m son adyacentes en G , como además v_1 es fuente en \vec{G} se sigue que $v_m \in N^+(v_1)$, lo cual es una contradicción, por lo tanto $J' = \emptyset$.

Supongamos que existe $I_i \in I' - J$ tal que $I_1 \cap I_i \neq \emptyset$

como $a_1 < a_j < a_i < b_1 < b_j$, tenemos que $a_i \in I_j$, de ahí que (v_i, v_j) , como además (v_1, v_j) y \vec{G} está B_1 -orientada, tenemos que (v_1, v_i) ; por lo tanto $I_i \in J$, lo cual es una contradicción, de ahí que $I_1 \cap I_i = \emptyset$ para cada $I_i \in I' - J$.

Por último si $I_i \in J$, entonces $a_1 < a_j < a_i < a_k < b_1$, es decir $a_i \in I_1$, de ahí que $I = \{I_1, I_2, \dots, I_{n+1}\}$ es una colección de intervalos unitarios tal que \vec{G} es la gráfica de intersección de I , orientada a partir de I .

Corolario 4.2.8 (R. Espinosa, J. Urrutia
y V. Urrutia-Galicia)

Si \vec{G} está $B_1 B_2^*$ -orientada entonces tanto $K(\vec{G})$ como $EC(\vec{G})$ son gráficas de intervalos .

Demostración

Si \vec{G} está $B_1 B_2^*$ -orientada entonces por teorema 4.2.7 \vec{G} es una gráfica de intervalos orientada, de ahí que por teorema 4.1.9 $K(\vec{G})$ es gráfica de intervalos .

Por otra parte \vec{G} está también $B_1 B_2^*$ -orientada, por lo tanto $K(\vec{G}) = EC(\vec{G})$ es gráfica de intervalos .

R E F E R E N C I A S

- [1] Behsad M., Chartrand G., Lesniak-Foster L. Graphs & Digraphs. Prindle, Weber & Schmidt International Series.
- [2] J.E. Cohen, Interval Graphs and Food Webs. A Finding and a Problem. Rand Corporation Document 17696-PR, Santa Mónica CA (1968).
- [3] J.E. Cohen, Food Webs and Niche Space, Princeton University Press, Princeton (1978).
- [4] L. Danzer and B. Grunbaum, Intersection Properties of Boxes in R^d . Mimeographed, Department of Mathematics, University of Washington, Seattle, August 1967.
- [5] R.D. Dutton and R.C. Brigham. A Characterization of Competition Graphs. Discrete Appl. Math. 6 (1983) pp 315-317.
- [6] Gavril F. The Intersection Graphs of Subtrees in Trees are Exactly the Chordal Graphs. Journal Comb. Theory. B 16 (1977) pp 199-208.
- [7] M.C. Golombic, Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs, Academic Press, 1980.
- [8] F.H. Harary (1969) Graph Theory, Addison-Wesley, Reading, MA.

- [9] J.R. Lundgren and J.S. Maybee, A characterization of Graphs of Competition Number m . Discrete Applied Mathematics 6 (1983) pp319-322. North Holland.
- [10] J.R. Lundgren and J.S. Maybee, Food Webs with Interval Competition Graphs., Graphs and Applications Proceedings of the First Colorado Symposium on Graph Theory. Ed. John Wiley and Sons 1985, pp 245-256.
- [11] Robert J. Opsut, On the Computation of the Competition Number of a Graph. Siam J. Alg. Disc. Meth. Vol 3, No. 4, december 1982.
- [12] Fred S. Roberts, Food Webs, Competition Graphs and the Toxicity of Ecological Phase Space. Theory and Applications of Graphs. In America's Bicentennial Year, Lecture Notes in Mathematics 642, Y Alavi and D. Lick, eds., Springer Verlag, New York, pp. 447-490.
- [13] Fred S. Roberts and J.E. Stief, A Characterization of Competition Graphs of Arbitrary Digraphs. Discrete Applied Math. 6 (1983) pp. 323-326. North Holland.