



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN ASTROFÍSICA

ASTROFÍSICA OBSERVACIONAL

MASAS DINÁMICAS DE ESTRELLAS DE BAJA MASA EN BINARIAS  
ESPECTROSCÓPICAS DE DOBLE LÍNEA CON DATOS DE APOGEE

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRA EN CIENCIAS (ASTROFÍSICA)

PRESENTA:

ELIZABETH MORENO HILARIO

DRA. YILEN GÓMEZ MAQUEO CHEW  
INSTITUTO DE ASTRONOMÍA

MÉXICO, CIUDAD DE MÉXICO, FEBRERO 2020



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por brindarme los recursos para realizar mis estudios de maestría. Al Instituto de Astronomía de la UNAM, por otorgarme todas las facilidades durante mi estadía en este recinto. Investigación realizada gracias al apoyo del Programa UNAM-PAPIIT IN-107518.

Este trabajo no habría sido lo que es de no ser por el apoyo de mi asesora, la Dra. Yilen Gómez Maqueo Chew. Gracias por tu confianza, por tus consejos, por tu paciencia y por todo lo que me has enseñado. Trabajar contigo me ha hecho crecer como investigadora y como persona.

Agradezco a mi sínodo evaluador, por su tiempo al revisar esta tesis y por sus valiosos comentarios que han enriquecido increíblemente mi trabajo. Gracias Dra. Gloria Koenigsberger, Dr. Carlos del Burgo, Dra. Christine Allen, Dr. Rafael Costero y Dra. Maria Cruz Gálvez, por enseñarme a expresar mejor mis ideas y la ciencia detrás de mi trabajo.

Quiero dedicar unas palabras a todas las personas que me han acompañado en este camino, tanto a las que me han hecho el recorrido más difícil porque me han hecho más fuerte, como a las que me han dado ánimos y lo han hecho más llevadero.

Agradezco a mi familia, quienes a la distancia continúan confiando en mis habilidades y apoyando mis decisiones.

Tania, Abel y Milton, agradezco el haber compartido este camino con ustedes ya que ha sido la mejor forma de mantener la paz mental y la motivación para continuar con nuestro recorrido.

Eunice Pérez, gracias por haberme impulsado más de lo que podrías imaginar. Por estar a mi lado en los momentos difíciles, por regalarme siempre de esa perspectiva tan tuya, llena de inocencia,

curiosidad y creatividad.

Eliab Canul, gracias por todo. Porque después de todo estuviste conmigo.

René Ortega y Sheila Flores, gracias por las noches de baile y de charlas de todo tipo. Por compartir conmigo más de una cerveza y por siempre brindarme un consejo cuando lo necesitaba.

Mayra Valerdi, gracias por las risas y por los momentos que hemos compartido. Por haberme regalado la experiencia de ir a observar y ver el mejor cielo que he visto jamás.

Veronica Gómez Llanos, gracias por convertirme en mi cómplice al compartir conmigo las risas, frustraciones y el llanto cuando era necesario, por tu increíble amistad y por cuidarme incluso de mí misma.

Alejandro Aroche, agradezco tu amistad y el apoyo incondicional que me has dado, gracias por tu compañía, por creer en mí y por animarme.

Manuel Chimal, gracias por ser mi torre de control cuando me encontraba vulnerable. Por estar al pendiente de mí y por las lecciones de coraje.

Alejandro Aguayo, gracias por estar siempre presente y atento, por las pláticas frecuentes acompañadas de cigarros para desahogar el estrés, por escucharme y enseñarme tanto con tus consejos. Gracias por tus abrazos y esa alegría que siempre me contagias.

Andrés Sixtos, gracias por las increíbles pláticas, por la música compartida, por siempre escuchar lo que tengo que decir, por los viajes, el café y los cigarros. Por iluminar mis ratos oscuros con tu cariño y tus consejos.

Romina Petrucci y Emiliano Jofré, gracias por su comprensión y cariño, por sus consejos, por las deliciosas comidas que hemos compartido. Gracias por acogerme y ser un hogar para mí. Por las tardes de té y por devolverme la confianza en mí misma.

# Índice general

<b>Índice general</b>	<b>I</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Binarias Visuales . . . . .	5
1.2. Binarias Espectroscópicas . . . . .	5
1.3. Binarias Eclipsantes . . . . .	6
<b>2. Muestra de sistemas binarios</b>	<b>8</b>
2.1. Selección de la muestra . . . . .	8
2.1.1. Propiedades físicas conocidas para cada sistema binario . . . . .	9
<b>3. Espectros de APOGEE</b>	<b>11</b>
<b>4. Determinación de velocidades radiales</b>	<b>16</b>
4.1. Preparación de los espectros . . . . .	19
4.1.1. Espectros observados . . . . .	20
4.1.2. Espectros sintéticos . . . . .	20
4.1.3. Incertidumbres asociadas a las mediciones de velocidad radial . . . . .	23
4.1.4. Resultados de las mediciones de velocidades radiales . . . . .	25
<b>5. Ajustes de las curvas de velocidad radial</b>	<b>32</b>
5.1. Ajustes preliminares con RVFIT . . . . .	32
5.2. Ajustes con PHOEBE . . . . .	35
<b>6. Resultados y Discusión</b>	<b>49</b>

II	<i>Índice general</i>
7. Conclusiones	58
A. Derivación matemática de TODCOR	60

# Capítulo 1

## Introducción

Las estrellas M son las más comunes en el vecindario solar y en toda la galaxia (Chabrier & Baraffe 2000; Winters et al. 2015). Por otra parte, son las estrellas más frías en la Galaxia. Poseen temperaturas efectivas entre  $2,300 \text{ K} \leq T_{\text{eff}} \leq 3,900 \text{ K}$  (Rajpurohit et al. 2013). Son además, las más pequeñas con radios en el intervalo de  $0.1 R_{\odot} \leq R \leq 0.6 R_{\odot}$  (Reid & Hawley 2005) y también son las menos masivas con un intervalo de masas entre  $0.07 M_{\odot} \leq M \leq 0.6 M_{\odot}$  (Chabrier et al. 2000; Allard et al. 2011; Baraffe et al. 2015).

Las estrellas M radían el máximo de su emisión en longitudes de onda infrarrojas, entre  $1 \mu\text{m}$  y  $2.5 \mu\text{m}$  (Reid & Hawley 2005). Por lo cual, al observarlas en el intervalo óptico encontramos un brillo bajo, especialmente para las estrellas M de masa más baja. Entonces, como son estrellas no tan brillantes y pequeñas, son difíciles de observar.

Nuestro conocimiento sobre las propiedades fundamentales de las estrellas M, proviene principalmente de:

- Estrellas solas, cercanas, con radios medidos por interferometría (e.g., Boyajian et al. 2014) lo que nos permite tener mediciones de la luminosidad y la metalicidad, pero no de las masas.
- Binarias eclipsantes M + M (e.g., Morales et al. 2009) que nos permiten hacer mediciones directas de las masas y radios para ambas componentes y sus temperaturas relativas, pero no de las temperaturas de cada una de las estrellas. Además, las metalicidades son difíciles de derivar debido a la complejidad de los espectros de este tipo de sistemas.



Las estrellas de tipo solar (FGK) hasta 25 pc, con masas entre 0.7 y 1.3  $M_{\odot}$ , forman parte de sistemas múltiples con una frecuencia del  $44 \pm 6\%$  (dos Santos et al. 2017). Es decir, una ligera mayoría de todas las estrellas de tipo solar están en realidad solas, como el Sol. Aún con esta multiplicidad relativamente baja, estas estrellas son lo suficientemente frecuentes como para producir grandes muestras estadísticamente robustas y, aunque son relativamente brillantes y fáciles de observar, su contraste de luminosidad con cualquier compañera estelar es relativamente modesto (Duchêne & Kraus 2013).

Cada estrella en el universo puede ser descrita a partir de sus parámetros fundamentales, que son la temperatura efectiva  $T_{\text{eff}}$ , metalicidad  $[\text{Fe}/\text{H}]$ , gravedad superficial  $g$ , luminosidad  $L$ , radio  $R$  y masa  $M$ . No todos estos parámetros son independientes: por ejemplo el logaritmo de la gravedad superficial  $g$  se calcula de  $R$  y  $M$  (ecuación 4.5 de esta tesis); la luminosidad de  $R$  y  $T_{\text{eff}}$  (ecuación 3.1 de esta tesis). Dichos parámetros son cruciales para entender los procesos físicos que ocurren en cada estrella. En particular, las medidas de metalicidad de las estrellas M son inexactas; las bajas temperaturas y las complejas moléculas presentes en sus atmósferas dificultan la medición de sus metalicidades utilizando técnicas que se han usado comúnmente para estrellas similares al Sol (Mann et al. 2014) y por tanto, la inferencia de otros parámetros fundamentales como la gravedad superficial se vuelven poco confiables (Jao et al. 2008). Para intentar resolver este problema, existen trabajos con diferentes enfoques en la medición de la metalicidad; uno de ellos es la extrapolación de los valores de metalicidad de estrellas FGK en sistemas binarios con compañeras estelares M, con el objetivo de desarrollar una malla de calibración de metalicidades basada en características espectrales y fotométricas de las estrellas M (Mann et al. 2013, 2014).

Los sistemas binarios estelares son en general buenos laboratorios para estudiar a las estrellas ya que, como se forman de la misma nube de gas, comparten ciertas propiedades como edad y metalicidad. Un sistema binario estelar es uno de los resultados más comunes del proceso de formación estelar. Las teorías de formación estelar han ido cambiando con los diferentes trabajos de investigación que se han realizado. De hecho, por un tiempo los modelos de formación estelar nos decían que el Sol debería tener una compañera estelar de baja masa. El estudio realizado por Duquennoy & Mayor (1991) sobre la multiplicidad de estrellas similares al Sol, mostró que nuestro sol es un poco inusual al estar solo. Existen varias teorías sobre de la formación de estrellas binarias

y múltiples en la literatura. Los mecanismos de formación se pueden dividir aproximadamente en tres categorías (Kratte 2011):

1. Procesos mediados por los núcleos moleculares de las nubes de gas.

La fragmentación de los núcleos moleculares de las nubes a medida que sufren un colapso gravitacional es el mecanismo preferido para explicar la formación de la mayoría de los sistemas estelares binarios y múltiples (Bate 2004).

2. Procesos mediados por discos protoestelares.

Si un sistema binario está rodeado por un disco, de la torca gravitacional de la binaria se transfiere momento angular, de la órbita al disco, haciendo que ambas componentes estelares se unan en espiral (Artymowicz et al. 1991; Bate & Bonnell 1997), formando así estrellas binarias cercanas. Estas interacciones con el disco circumbinario son muy eficientes. Incluso los discos de baja masa, que tendrían un momento angular menor que los discos más masivos, pueden tener un efecto significativo con el tiempo (Pringle 1991)

3. Procesos de interacción dinámica de pocos cuerpos.

Las interacciones dinámicas entre estrellas pueden conducir a la evolución orbital de un sistema binario de distintas formas. Si la velocidad orbital de la binaria es mayor que la velocidad del objeto entrante mientras todavía se encuentra lejos, la binaria sobrevivirá el encuentro (Hut & Bahcall 1983). Sin embargo, varios resultados son posibles. La binaria puede simplemente perder energía y momento angular debido al objeto entrante. Por otra parte, si el encuentro entre el objeto entrante y el sistema binario ocurre lo suficientemente cerca, se formará un sistema múltiple inestable. Su evolución caótica generalmente conducirá a la expulsión del objeto menos masivo. Si el objeto expulsado era una componente original de la binaria, el efecto neto de esta interacción dinámica es una interacción de intercambio de componentes (Bate 2004).

Según el trabajo de investigación más reciente de multiplicidad estelar Duchêne & Kraus (2013), desde las enanas marrones hasta las estrellas de tipo solar, la multiplicidad parece ser una función suave de la masa de la estrella primaria, tanto en términos de frecuencia de multiplicidad como de la distribución de los parámetros orbitales clave (periodo orbital y excentricidad), lo que sugiere

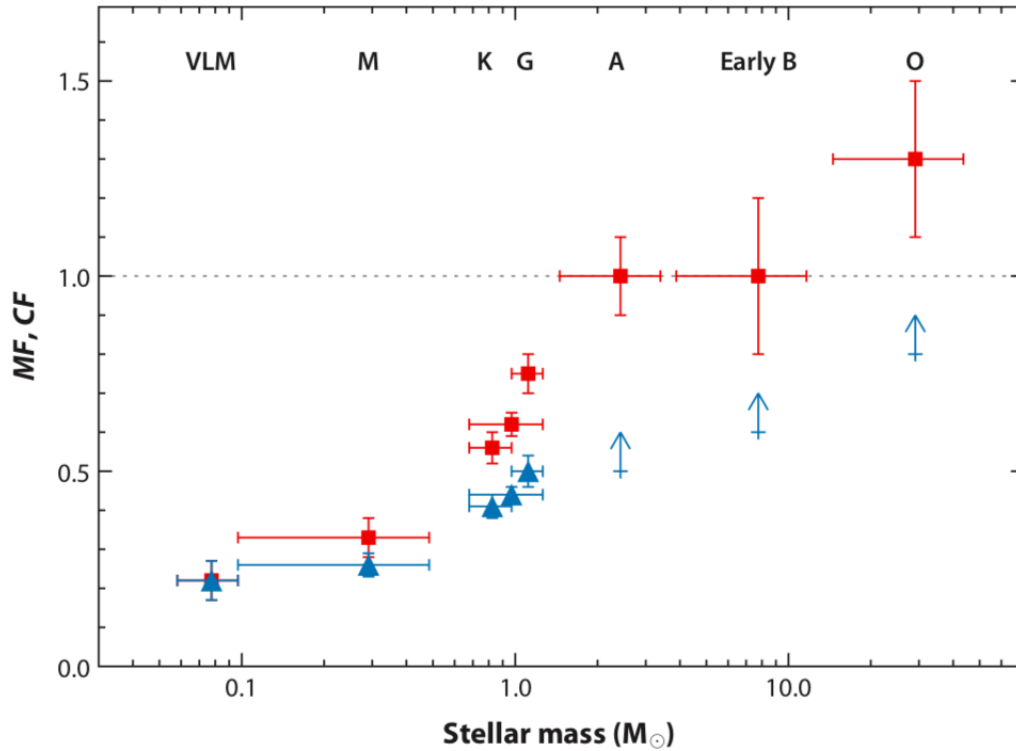


Figura 1.1: Dependencia de la fracción de sistemas múltiples en una población o la frecuencia de multiplicidad, con la masa de la componente estelar primaria para estrellas de secuencia principal y objetos de campo de muy baja masa. Las barras de error horizontales representan el intervalo de masa aproximado para cada población. Figura tomada de Duchêne & Kraus (2013).

un proceso de formación similar en estrellas con masas  $M_* \leq 1.5 M_{\odot}$ . Los cuatro sistemas binarios que se estudian en este trabajo de investigación caen dentro de este intervalo de masas, por lo cual nos es posible probar lo que encuentran estos autores, utilizando nuestros resultados. En la figura 1.1, tomada de Duchêne & Kraus (2013), se muestra la multiplicidad general de las estrellas de secuencia principal, la cual es una función a trozos y monótonica de la masa estelar.

La masa de una estrella es el parámetro más determinante en la vida y evolución de ésta. Sin embargo, sólo puede determinarse directamente para algunas estrellas en sistemas binarios y múltiples. Para la mayoría de las estrellas aisladas se debe inferir de otros parámetros observables como la luminosidad, la composición química y el estado evolutivo. Por esta razón, los sistemas binarios estelares nos proporcionan los mejores y únicos medios para determinar directamente las masas de las estrellas.

Existen distintos tipos de estrellas binarias. Las estrellas que se estudian en el presente trabajo de investigación son estrellas en sistemas binarios eclipsantes y espectroscópicos de doble línea, donde la componente primaria es una estrella tipo solar y la componente secundaria una estrella tipo M (véase el Capítulo 2). Nuestro proyecto de investigación estudia esta muestra de sistemas binarios analizándola como binarias espectroscópicas de doble línea. El objetivo principal es medir las masas dinámicas de las componentes estelares de cada uno de nuestros sistemas binarios analizando las curvas de velocidades radiales (véase el Capítulo 4). El tener las mediciones de las masas dinámicas nos permite ampliar la base observacional para probar qué tan buenos son los modelos de formación y evolución estelar. Cabe mencionar que un estudio completo requiere de una muestra estadísticamente representativa.

En las siguientes secciones, damos una breve introducción a las estrellas binarias visuales, binarias espectroscópicas de doble línea y binarias eclipsantes, así como cuál es la información que podemos obtener de ellas.

## 1.1. Binarias Visuales

Las binarias visuales son estrellas que en el cielo se ven muy cercanas entre sí, están a la misma distancia de nosotros y se encuentran ligadas gravitacionalmente. Sus movimientos mutuos orbitales son observables, y los periodos de una órbita completa van desde un año hasta miles de años. Para estas binarias, las masas se pueden determinar si el periodo es lo suficientemente corto como para ser observado, si se conoce el semieje mayor  $a$  y si se conoce la distancia al sistema. Sin embargo, la distancia debe ser conocida con gran precisión ya que un error del 7% en la paralaje del sistema conduce a una incertidumbre del 20% en las masas (Lucy 2014).

## 1.2. Binarias Espectroscópicas

Los sistemas binarios se conforman de dos estrellas que están ligadas gravitacionalmente y por tanto están orbitando una alrededor de la otra. Aunque comparten parámetros tales como edad

y metalicidad, las masas de sus componentes estelares no son necesariamente iguales (Andersen 1991).

Las binarias espectroscópicas son estrellas en las cuales se detecta un efecto Doppler en sus líneas espectrales. Analizando estos desplazamientos de las líneas espectrales en función del tiempo, podemos obtener información del periodo orbital y de las velocidades radiales de las componentes en el sistema binario y así construir su curva de velocidad radial.

Del análisis de la curva de velocidad radial, podemos obtener las masas dinámicas de cada componente y el cociente de luminosidades (ver Capítulo 5).

Cuando observamos líneas espectrales provenientes de la componente primaria y además líneas de la estrella secundaria en un mismo espectro, tenemos un sistema binario espectroscópico de doble línea. Si solamente se observa una línea espectral o el espectro de una componente, hablamos entonces de binarias espectroscópicas de una línea.

En el caso de binarias espectroscópicas de doble línea, es posible identificar por separado las líneas que son de la estrella primaria y las que son de la estrella secundaria. Esto nos permite medir las velocidades radiales de cada una de las estrellas y así se obtienen dos curvas de velocidad radial; cada una corresponde a una componente estelar de la binaria.

### 1.3. Binarias Eclipsantes

Las binarias eclipsantes, son estrellas que se interponen de manera periódica entre el observador y la otra componente cuando se observan de canto o con un ángulo de inclinación pequeño respecto a la línea de visión. Este tipo de binarias se detectan por la variación de la magnitud aparente del sistema en sus curvas de luz.

La curva de luz es la intensidad de la luz recibida del sistema en función del tiempo. De la duración de los eclipses obtenemos la información del radio de las estrellas; de la forma de los eclipses obtenemos la inclinación de su órbita y si además tenemos la profundidad relativa de ambos eclipses en distintas longitudes de onda, es posible conocer el cociente de luminosidades y temperaturas.

Al tener sistemas binarios donde las estrellas son binarias eclipsantes y binarias espectroscópicas, podemos hacer un análisis de tanto las curvas de luz como de las curvas de velocidades radiales para así determinar las propiedades fundamentales de las estrellas, sin depender de modelos de evolución estelar ni de la distancia, ya que solamente utilizamos la geometría del sistema y movimiento orbital para obtener dicha información.

Para estudiar las estrellas de manera rigurosa, es necesario determinar sus propiedades tan precisamente como sea posible, usando el mínimo número de suposiciones. Existen numerosos estudios basados en estrellas en sistemas binarios, los cuales nos proporcionan una base para continuar estudiando binarias estelares. Por ejemplo, en el trabajo de Martin et al. (1998), se muestra que la forma más directa para obtener masas estelares de estrellas individuales sin calibraciones externas (como diagramas color-magnitud o relaciones de masa-luminosidad), es a través de sistemas binarios. Y es por esto que este trabajo de investigación es importante, porque somos capaces de medir las masas dinámicas de las estrellas directamente.

# Capítulo 2

## Muestra de sistemas binarios

En este capítulo detallamos cómo se seleccionó la muestra de binarias que se utiliza en esta tesis.

La muestra de sistemas binarios utilizada en el presente trabajo fue seleccionada en un trabajo previo, presentado como póster en la conferencia Cool Stars 19 (en Junio 2016), y realizado por Y. Gómez Maqueo Chew y L. Hebb. En el trabajo previo, se estudiaron estos mismos sistemas como binarias espectroscópicas de una sola línea siguiendo la metodología de Gómez Maqueo Chew et al. (2014). Para el trabajo de investigación de esta tesis, estudiamos estos sistemas binarios como binarias espectroscópicas de doble línea.

### 2.1. Selección de la muestra

Se seleccionaron 4 sistemas binarios eclipsantes (EB) del catálogo de Kepler EB<sup>1</sup> (Kirk et al. 2016), compuestos por una estrella tipo F y una M. Esta selección buscó las siguientes características:

- Que fueran binarias eclipsantes separadas (en inglés “detached”), es decir, que la separación orbital fuera significativamente más grande que el tamaño físico de las estrellas.

Esto fue primeramente seleccionado con la categoría de “morphology” que hicieron en el catálogo. Esta clasificación morfológica está descrita en Matijević et al. (2012). Y como

---

<sup>1</sup><http://keplerebs.villanova.edu/>

Kepler ID	$R_1$ ( $R_\odot$ )	$T_{\text{eff},1}$ (K)	[Fe/H] (dex)	$R_2$ ( $R_\odot$ )	$T_{\text{eff},2}$ (K)
6448768	2.28	6020	-0.27	0.496	3701
6523216	2.20	5750	-0.86	0.299	3302
6698670	1.08	5585	-0.26	0.210	2883
7037540	1.24	5700	-0.30	0.204	2735

Tabla 2.1: Propiedades físicas reportadas en el trabajo de Y. Gómez Maqueo Chew y L. Hebb para los 4 sistemas binarios de la muestra.

regla general, se seleccionaron objetos del catálogo con valor de morfología  $c < 0.5$ , como lo sugiere el artículo. Además, revisaron a ojo las curvas de luz, para asegurarse que fueran verdaderamente binarias eclipsantes separadas.

- Que los eclipses primarios, cuando la secundaria está eclipsando a la estrella primaria, fueran de fondo plano, lo cual implica que la estrella secundaria es mucho más pequeña que la estrella primaria, pues la secundaria entra por completo en el disco de la primaria.
- Que tuvieran observaciones del SDSS (Sloan Digital Sky Survey) con el espectrógrafo APOGEE (véase el Capítulo 3), con buena cobertura de fase, de la cual fuera posible derivar la masa de la estrella secundaria y,
- Que se conozcan las propiedades atmosféricas de la estrella primaria (temperatura y la metalicidad del sistema) derivadas a partir de los espectros de APOGEE (García Pérez et al. 2016).

De esta búsqueda resultaron los cuatro sistemas listado en la tabla 2.1.

### 2.1.1. Propiedades físicas conocidas para cada sistema binario

Nuestro objetivo científico es caracterizar las estrellas de los 4 sistemas binarios presentados anteriormente, en los cuales la primaria es una estrella tipo solar (FG) y la secundaria una estrella de baja masa tipo M.



Kepler ID	Periodo (d)	$\sigma_{\text{Periodo}}$ (d)	T0 (BJD)	$\sigma_{\text{T0}}$ (BJD)
6448768	16.4867982	0.0000599	2454981.090131	0.052970
6523216	14.3131559	0.0000485	2454956.906624	0.072463
6698670	10.8158902	0.0000325	2454962.075695	0.203079
7037540	14.4059109	0.0000629	2455294.236375	0.043946

Tabla 2.2: Periodos y T0s de los cuatro sistemas binarios de la muestra. (Kirk et al. 2016)

Para el proyecto de investigación de esta tesis, fue necesario tomar algunos de los datos ya reportados, tales como el valor de la temperatura y la metalicidad (véase la tabla 2.1). Otros datos conocidos que he utilizado de estos objetos, son sus periodos y sus épocas de tránsitos, los cuales se muestran en la tabla 2.2, y fueron obtenidos del catálogo de Kepler (Kirk et al. 2016).

# Capítulo 3

## Espectros de APOGEE

En este capítulo damos una breve introducción al espectrógrafo APOGEE y describimos los espectros utilizados en este trabajo.

Del análisis de los espectros estelares, podemos obtener información de los parámetros físicos de la estrella, tales como:

- **La temperatura efectiva ( $T_{\text{eff}}$ )** de la estrella es el parámetro dominante que tiene influencia en la forma de los espectros. Es la temperatura de la superficie estelar, calculada suponiendo un cuerpo negro perfecto que irradia la misma cantidad de energía por unidad de área, de forma que:

$$L = 4\pi R_*^2 \sigma T_{\text{eff}}^4, \quad (3.1)$$

donde  $\sigma$  es la constante de Stefan-Boltzmann.

- **La gravedad superficial ( $\log(g)$ )** de la estrella, es la aceleración gravitacional que experimenta una partícula en la superficie de la estrella. Este parámetro influye en las formas de las líneas espectrales.
- **La metalicidad  $[M/H]$**  de la estrella, nos indica la abundancia de elementos químicos más pesados que el helio respecto a la abundancia del hidrógeno, comparada con la del Sol, en escala logarítmica. Este parámetro influye en la intensidad de las líneas espectrales de elementos más pesados que el helio. Una metalicidad  $[M/H] = 0$ , corresponde a abundancias

solares;  $[M/H] = -1$  significa que la estrella tiene 10 veces menos metales que el Sol, y  $[M/H] = 1$  significa que la estrella tiene 10 veces más metales que el Sol.

- **La velocidad rotacional**  $v_{\text{rot}}$  de la estrella gobierna la cantidad de ensanchamiento de las líneas espectrales. Se refiere a la velocidad de rotación en el ecuador de la estrella.
- **Las velocidades radiales** de la estrella. La longitud de onda en la que se detectan las líneas conocidas de emisión y absorción se puede utilizar para medir el desplazamiento al rojo o al azul de la componente radial de la velocidad de la estrella observada.

El instrumento llamado Apache Point Observatory Galaxy Evolution Experiment (APOGEE), es uno de los proyectos pertenecientes al programa del Sloan Digital Sky Survey (SDSS) y está situado en el telescopio Sloan Foundation de 2.5m, en el Observatorio de Apache Point situado en las montañas de la Sierra del Sacramento en Sunspot, Nuevo México, Estados Unidos.

APOGEE es un espectrógrafo multiobjeto que trabaja en el infrarrojo cercano (NIR), alimentado con fibras ópticas, alojado en un criostato al vacío. Puede observar hasta 300 objetos simultáneamente, produciendo espectros con un poder de resolución  $R \sim 22,500$ . El poder de resolución de un espectrógrafo está definido como sigue (ver ecuación 4.14; Trypsteen & Walker 2017),

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}, \quad (3.2)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda y  $\Delta\lambda$  es el intervalo más pequeño de longitud de onda que puede resolverse por el instrumento y se define como la resolución espectral. Es de suma importancia para nuestro análisis, que en el espectro puedan resolverse tanto las líneas de la estrella primaria como las de la secundaria, sobre todo porque tenemos binarias espectroscópicas de doble línea y la componente de la secundaria es muy débil. Con espectros que cumplan esto, podemos medir cómo se mueven las estrellas en sus órbitas a partir de los desplazamientos de las líneas espectrales para ambas estrellas. Por esta razón necesitamos una resolución relativamente alta y con APOGEE esto es posible.

Los detalles del diseño del instrumento se pueden encontrar en Wilson et al. (2010) y Wilson et al. (2012). Típicamente el instrumento alcanza una relación señal a ruido por píxel de 100 ( $\Delta\lambda \sim 0.1-0.17 \text{ \AA}$ ) en una estrella con  $H=11$  en una visita o exposición, de una hora de integración

total. La mayoría de las estrellas son observadas por un mínimo de tres noches consecutivas, de tal forma que las binarias de periodos cortos puedan ser identificadas.

El objetivo científico principal de este catastro es estudiar la Galaxia a partir de mediciones de velocidad radial y abundancias químicas de aproximadamente  $10^5$  estrellas gigantes rojas, cubriendo distintas partes de la Galaxia tales como el bulbo, disco, barra y halo. Además, incluye una amplia variedad de proyectos científicos; uno de ellos es el catastro de binarias eclipsantes de Kepler, que viene descrito en la sección de los programas auxiliares al catastro principal de APOGEE (ver Zasowski et al. 2013).

El programa auxiliar de binarias eclipsantes se dedicó a monitorear los sistemas de binarias eclipsantes de Kepler para derivar sus relaciones de masa dinámica. El conjunto de datos Kepler es una fuente valiosa de binarias eclipsantes, ya que proporciona fotometría casi continua y de muy alta precisión (Caldwell et al. 2010), que se ha utilizado para detectar miles de binarias eclipsantes con una amplia gama de parámetros estelares y períodos orbitales (Prša et al. 2011). En combinación con la espectroscopía continua para medir velocidades radiales precisas, estas estrellas binarias eclipsantes nos permiten obtener restricciones empíricas de gran utilidad para los modelos estelares que se desarrollen de ahora en adelante, para verificar la precisión de los mismos (del Burgo & Allende Prieto 2018). Es por esto que en esta tesis utilizamos los espectros adquiridos por APOGEE pertenecientes a este proyecto auxiliar.

El “pipeline” del procesamiento de datos de APOGEE está descrito en Nidever et al. (2015). Algunos de los pasos de este proceso de reducción incluyen calibración de longitud de onda, sustracción de las líneas del cielo, corrección de líneas telúricas y medición de velocidades radiales para todos los espectros adquiridos. El pipeline también produce espectros ya procesados o reducidos para cada observación de un objeto astronómico, así como un espectro combinado que suma todas las observaciones de un mismo objeto para maximizar el cociente señal ruido resultante. Nuestro análisis se centró en los espectros individuales de cada fuente. Estos espectros son denominados “Visit spectra” dentro de la documentación de APOGEE. Con estos espectros contamos con típicamente 25 observaciones tomadas en distintos días para cada uno de los sistemas binarios y para cada observación medimos las velocidades radiales. El espectrógrafo APOGEE consta de tres arreglos de detectores. Si bien la cobertura general abarca de 1.51 a 1.70 micras, existen pequeños espacios

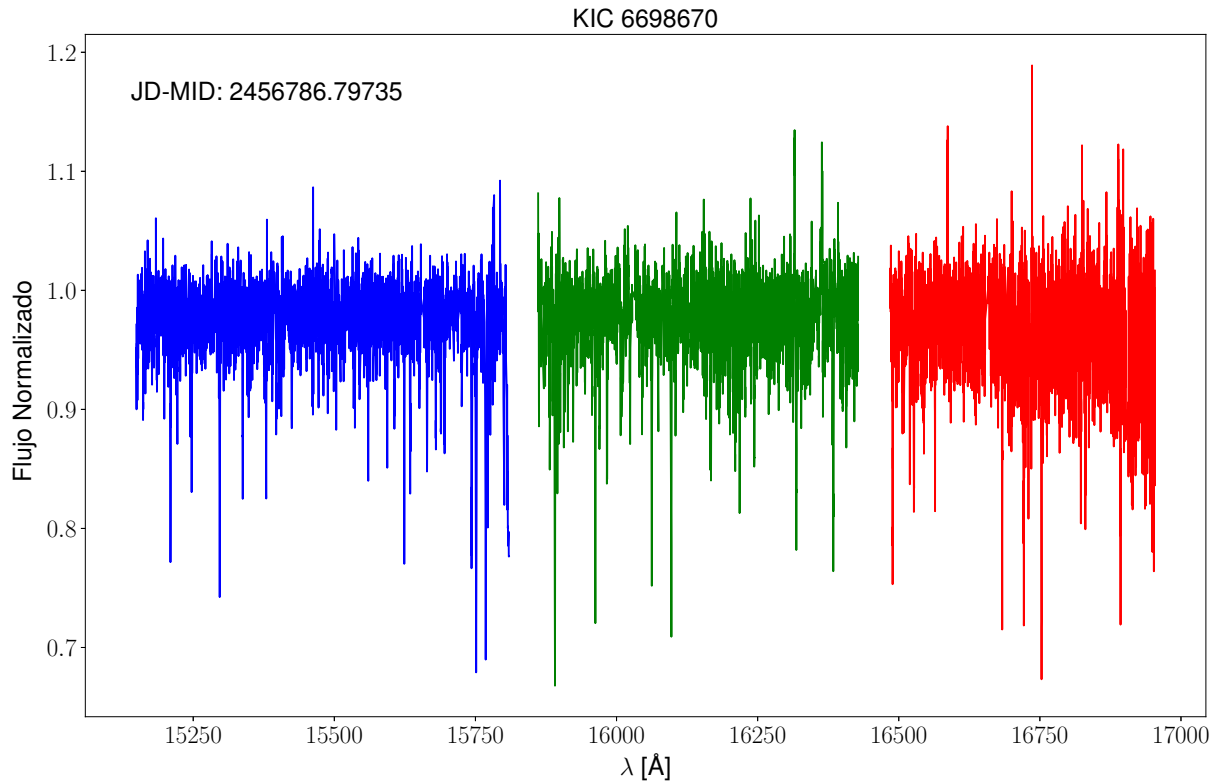


Figura 3.1: Flujos normalizados de los tres chips provenientes de los tres arreglos de detectores de APOGEE (azul, verde y rojo).

entre los detectores, lo cual genera espacios vacíos en la cobertura en la longitud de onda. Los tres arreglos de detectores proporcionan la siguiente cobertura de longitud de onda: azul ( $1.514 - 1.518 \mu\text{m}$ ), verde ( $1.585 - 1.644 \mu\text{m}$ ), y rojo ( $1.647 - 1.696 \mu\text{m}$ ) (Wilson et al. 2019). Van desde las longitudes de onda más cortas a las más largas. En la figura 3.1 mostramos cómo se ve el espectro de una visita para uno de nuestros sistemas binarios. Es muy claro identificar cada uno de los chips provenientes de cada arreglo de detectores. El espectro mostrado está normalizado a flujo igual a uno y le hemos aplicado una máscara de líneas del cielo y líneas telúricas para tener un espectro más limpio.

Los espectros de los sistemas binarios con los que trabajamos fueron obtenidos de la primera entrega de datos o “data release” del SDSS-IV, DR13 (Albaret et al. 2017) el cual contiene tanto nuevos datos tomados entre julio de 2014 y julio de 2015, como una mejor reducción de todos los datos tomados previamente, ya que todas las publicaciones o entregas de datos son acumulativas. En cuanto al catastro de APOGEE el DR13 brevemente incluye lo siguiente: todos los datos

de APOGEE se volvieron a reducir con una sustracción telúrica mejorada y se analizaron con un nuevo “pipeline” y una malla sintética que incluye el ensanchamiento por rotación como un parámetro para los espectros de estrellas enanas y se extiende a estrellas más frías,  $T = 3500$  K.

Otra de las razones importantes por las que utilizamos espectros de APOGEE es por su poder de resolución, que como ya mencionamos anteriormente, para APOGEE es de  $R \sim 22500$ . Además, APOGEE tiene una precisión en la medición de velocidades radiales de  $\sim 200$  m/s.

# Capítulo 4

## Determinación de velocidades radiales

En este capítulo explicamos qué son las velocidades radiales, cómo y con qué herramientas las obtenemos y, además, mostramos los resultados de las mediciones de velocidad radial obtenidos para cada uno de nuestros sistemas binarios.

La velocidad radial es la componente de la velocidad de un objeto a lo largo de la línea de visión del observador, de tal forma que la velocidad radial nos indica la velocidad a la que el objeto y el observador se acercan o alejan entre sí. En el caso de los sistemas binarios y sistemas múltiples, los desplazamientos periódicos de las líneas espectrales con respecto a sus longitudes de onda en reposo se deben a la componente radial de la velocidad orbital con respecto al baricentro del sistema.

Para determinar la velocidad radial de una estrella, utilizamos el efecto Doppler no relativista, dado por la siguiente ecuación,

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v}{c}, \quad (4.1)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda de la línea observada,  $\lambda_0$  es la longitud de onda en reposo,  $v$  es la velocidad radial de la estrella y  $c$  la velocidad de la luz.

Una vez que tenemos el espectro observado de una estrella, medimos los cambios en las longitudes de onda. Si la diferencia entre la longitud de onda de la línea espectral y la línea en reposo es negativa, significa que la estrella se está acercando al observador, es decir que tiene un corrimiento

al azul, y si la diferencia es positiva, la estrella se está alejando, entonces tiene un corrimiento al rojo.

Para la medición de las velocidades radiales utilizamos funciones de correlación cruzada. Este método es ampliamente utilizado en astronomía para medir velocidades radiales (e.g., Bonfils et al. 2018; Bouchy et al. 2013; Sozzetti et al. 2006). En este método, el espectro observado se correlaciona con un espectro de referencia y el valor máximo resultante de la función de correlación cruzada, nos da el diferencial de la velocidad del espectro observado con respecto al de referencia. El espectro de referencia puede estar basado en un espectro real (Baranne et al. 1996) o un espectro sintético (Morse et al. 1991).

Una función de correlación cruzada (CCF, por sus siglas en inglés) es una técnica que surgió para el análisis de señales en la ingeniería y está ampliamente discutida en Jenkins & Watts (1968). En esta técnica se comparan dos señales,  $f(n)$  y  $g(n)$ , y como resultado se obtiene en qué lugar del espacio en el que están descritas se parecen más. En otras palabras, si son series de tiempo, una función de correlación cruzada indica en qué tiempo las dos series tienen la mayor correlación.

La función de correlación cruzada se calcula de la siguiente forma,

$$c(n) = \sum_m f(m)g(m - n) \quad (4.2)$$

Lo anterior significa que la función de correlación cruzada es igual a la suma de los productos de los correspondientes pares de puntos, mientras se va desplazando una de las señales.

Para emplear la técnica de las funciones de correlación cruzada, utilizamos el espectro observado del objeto que estamos estudiando (en este caso sabemos que es un sistema binario de doble línea) y un espectro sintético de referencia tomado de la biblioteca de espectros sintéticos de alta resolución de PHOENIX (Husser et al. 2013). El cálculo de la función de correlación cruzada se hace tomando el espectro en reposo y desplazándolo en longitud de onda, para así encontrar el desfase o corrimiento que existe entre ambos espectros. El valor máximo de la función de correlación cruzada, corresponde al punto donde el desplazamiento del espectro sintético y el observado hace que ambos se correlacionen mejor. Usando este desplazamiento y la ecuación 4.1, encontramos el valor de la velocidad radial  $v$  en km/s.



Parámetro	Intervalo	Tamaño de paso
Teff [K]	3,500 - 5,000	500
	5,000 - 10,000	1,000
	10,000 - 25,000	5,000
$\log(g)$	2.0 - 5.0	1.5
[Fe/H]	-2 - +0	1

Tabla 4.1: Intervalos de los parámetros de la malla RV Mini-Grid de APOGEE

En un principio, el espectro sintético fue tomado de una malla llamada RV Mini-grid, creada por APOGEE. En la tabla 4.1 mostramos los parámetros estelares y los intervalos que cubre la malla RV Mini-grid.

El espectro sintético se elige de tal forma que sea lo más parecido al del objeto que estamos estudiando. Para esto, es necesario conocer la temperatura efectiva de la estrella, su gravedad superficial y su metalicidad; entonces tomamos un espectro sintético creado con estos valores de dichos parámetros. Desafortunadamente, las funciones de correlación cruzada no encontraban correlación entre los espectros observados y los sintéticos, por lo cual no lográbamos medir las velocidades radiales de las estrellas utilizando la RV Mini-grid. Por esta razón, optamos por utilizar la biblioteca de espectros sintéticos de alta resolución de PHOENIX (Husser et al. 2013), ya que está compuesta de una malla más fina en comparación con la de APOGEE. Los intervalos de los parámetros estelares de la malla de PHOENIX se muestran en la tabla 4.2.

Parámetro	Intervalo	Tamaño de paso
Teff [K]	2,300 - 7,000	100
	7,000 - 12,000	200
$\log(g)$	-4.0 - -2.0	1.0
	-2.0 - +1.0	0.5
[Fe/H]	-0.2 - +1.2	0.2

Tabla 4.2: Intervalos de los parámetros de la malla de PHOENIX (Husser et al. 2013).

Para desarrollar la metodología y las herramientas de código necesarias para este proyecto de investigación, nos centramos en KIC 6698670, uno de los sistemas binarios de nuestra muestra (véase el Capítulo 2). Sabemos que la estrella primaria es una estrella tipo solar y la secundaria es una estrella tipo M. El espectro observado del sistema contiene en un mismo espectro las líneas de ambas componentes, pero las líneas de la componente secundaria son menos intensas debido a su luminosidad intrínsecamente menor. Es por esto que, para poder obtener ambas curvas de velocidad radial de las estrellas, optamos por utilizar la técnica de funciones de correlación cruzada en dos dimensiones llamada TODCOR, la cual fue desarrollada por Zucker & Mazeh (1994). La derivación matemática del algoritmo de TODCOR se puede encontrar en el Apéndice A. Mediante este procedimiento, esencialmente calculamos de manera simultánea las funciones de correlación cruzada entre el espectro observado y dos espectros de referencia, una para cada una de las componentes estelares, y así obtenemos dos mediciones de velocidad radial por cada espectro observado. Además de calcular las CCFs de cada componente estelar, se optimiza el cociente de luminosidad entre los dos espectros de referencia para cada punto de la CCF en 2D. De esta forma, las curvas de velocidades radiales de ambas estrellas pueden medirse. Para utilizar este algoritmo, realizamos nuestra propia implementación de TODCOR en el lenguaje de programación Python.

Antes de obtener las funciones de correlación cruzada, lo que hicimos fue preparar los espectros tanto observados de la binaria espectroscópica, como los de referencia. Con esta preparación nos asegurábamos no sólo de tener espectros limpios sino también de que estuvieran en las mismas unidades de flujo para que, por ejemplo, al hacer las funciones de correlación cruzada, la comparación fuera coherente. En la siguiente sección se explica en detalle el proceso de preparación de los espectros que llevamos a cabo.

## 4.1. Preparación de los espectros

Para calcular la función de correlación cruzada, previamente preparábamos los espectros, tanto los observados de la binaria espectroscópica como los de los sintéticos. El proceso de preparación de todos los espectros fue el siguiente:

### 4.1.1. Espectros observados

- Enmascaramos los espectros observados, quitando los píxeles malos y las líneas telúricas.

Al descargar los espectros observados de la base de datos de APOGEE, los espectros se ven como se muestra en la figura 4.1a. Como podemos observar, el espectro tiene líneas de emisión muy intensas que no provienen de las estrellas del sistema binario, sino que corresponden a píxeles malos, líneas del cielo y a líneas telúricas. Si no removemos estas líneas, al utilizar nuestro código de TODCOR se introduce ruido en las funciones de correlación cruzada y esto nos impide encontrar la correlación entre los espectros y por tanto no podemos medir las velocidades radiales; es por esto que las enmascaramos. Una vez enmascaradas, el espectro se ve mucho más limpio, es decir, libre de todas las líneas que no son intrínsecas de las estrellas, como se muestra en la figura 4.1b.

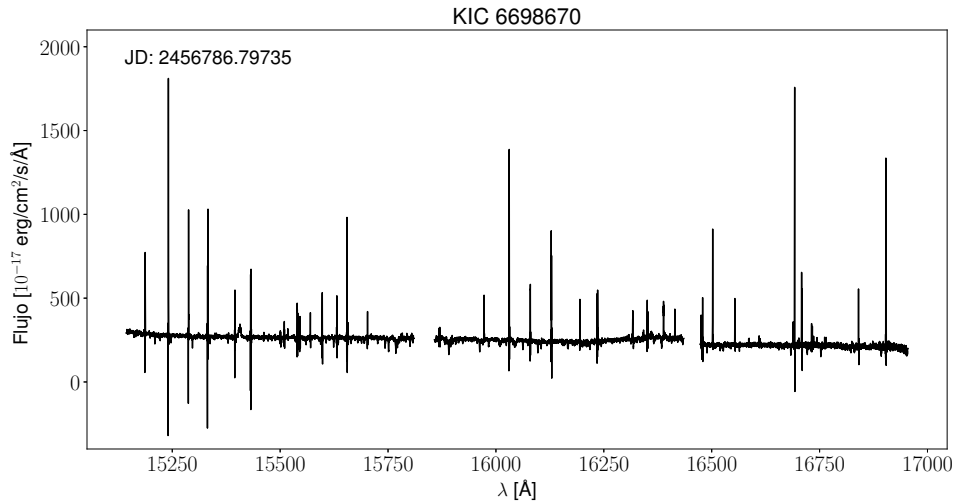
- Normalizamos los espectros observados, haciendo uso del software iSpec (Blanco-Cuaresma et al. 2014).

Una vez enmascarados nuestros espectros, lo que hacemos es normalizarlos para llevar las unidades del flujo a uno, esto porque no tenemos los espectros calibrados fotométricamente. En la figura 4.1c se muestra el espectro normalizado para la misma visita que he mostrado en los pasos anteriores. Para normalizar los espectros utilizamos 300 splines de grado 1 y una resolución de 22,500 que es justamente la resolución de APOGEE.

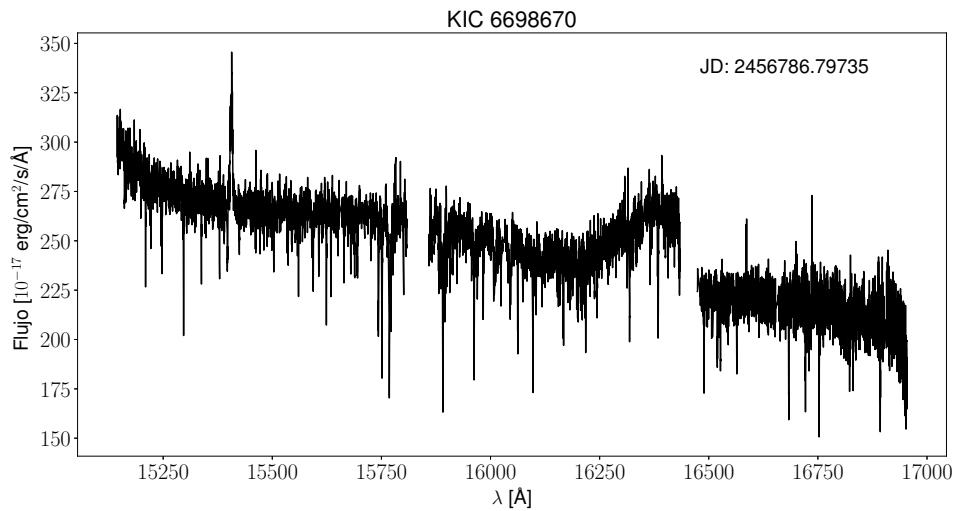
### 4.1.2. Espectros sintéticos

- Seleccionamos los espectros de referencia a utilizar dentro de nuestras rutinas para calcular las funciones de correlación cruzada.

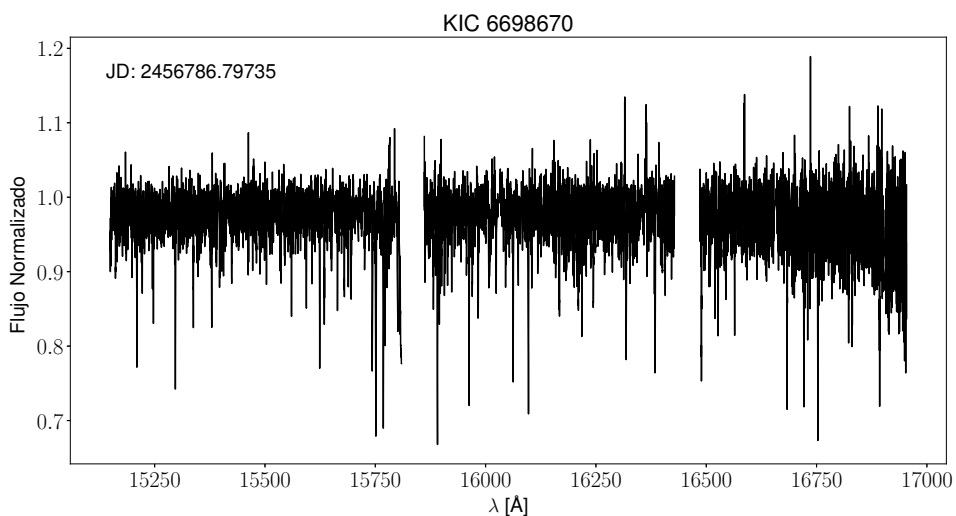
Para la selección de los espectros sintéticos tanto para la estrella primaria como para la secundaria, es necesario conocer los valores de tres parámetros: la temperatura efectiva, la metalicidad y la gravedad superficial. Para los valores de temperatura y metalicidad tomé los reportados del proceso de reducción de APOGEE, los cuales se muestran en el Capítulo 2. Para el de la gravedad superficial fue necesario hacer un pequeño cálculo. Dicho cálculo



(a) Espectro de una visita del sistema binario KIC 6698670.



(b) Espectro de una visita del sistema binario KIC 6698670 con las líneas del cielo, telúricas y los píxeles malos ya enmascarados.



(c) Espectro normalizado de una visita del sistema binario KIC 6698670 una vez enmascaradas las líneas del cielo, las líneas telúricas y los píxeles malos.

Figura 4.1: Proceso de preparación de los espectros observados de APOGEE.

implicaba tener conocimiento del radio de la estrella, el cual también tomé de los parámetros reportados en el Capítulo 2.

Suponiendo que las estrellas son esféricas, el cálculo de la gravedad superficial de una estrella,  $g$ , está directamente dada por la masa (en unidades de masas solares) y el radio de la estrella (en unidades de un radio solar):

$$g = g_{\odot} \frac{M}{R^2}; \quad (4.3)$$

o de manera logarítmica,

$$\log g = \log M - 2 \log R + \log(g_{\odot}). \quad (4.4)$$

Sustituyendo el valor numérico del logaritmo de la gravedad superficial del Sol, tenemos que,

$$\log g = \log M - 2 \log R + 4.437. \quad (4.5)$$

El cálculo de la gravedad superficial lo realizamos para cada componente estelar del sistema binario.

- Los espectros sintéticos de PHOENIX abarcan longitudes de onda desde 500 hasta 55,000Å. Dada la cobertura en longitud de onda de APOGEE, no es necesario todo el espectro de PHOENIX, por lo que los espectros sintéticos fueron restringidos en longitud de onda de 15091 Å a 16995Å. En otras palabras, APOGEE condiciona el intervalo de longitud de onda y es lógico recortar los espectros de referencia de acuerdo a esta cobertura.

Al descargar los espectros de la base de datos de PHOENIX, los espectros se ven como el que se muestra en la figura 4.2a.

Cuando hacemos la reducción del intervalo de longitud de onda, el espectro se ve como se muestra en la figura 4.2b.

- Normalizamos los espectros de referencia para que estuvieran en las mismas unidades de flujo que los objetos observador y que las funciones de correlación cruzada, fueran consistentes. El espectro normalizado y con el intervalo de longitud de onda reducido se ve como se muestra en la figura 4.2c
- Enmascaramos los espectros de referencia de ambas componentes estelares, de modo que las líneas que sí estamos encontrando, es decir, las que menos se confunden con el ruido de

los espectros, se encontrarán mejor. Al hacer esto nos enfocamos más en las máscaras de la secundaria, pues sus líneas espectrales son las que más se confunden con el ruido de los espectros observados.

Luego de haber realizado los pasos anteriores, podemos correr nuestras rutinas de Python entre las cuales se incluyen el cálculo de las funciones de correlación cruzada en una dimensión, el algoritmo de TODCOR, un código que obtiene las fases a partir de las fechas julianas de cada espectro observado, dos rutinas correspondientes al cálculo de incertidumbres (véase la Sección 4.1.3) y un código más para generar las gráficas con los resultados de las mediciones de velocidades radiales de ambas componentes estelares. Al final obtenemos las mediciones de velocidades radiales tanto para la primaria como para la secundaria.

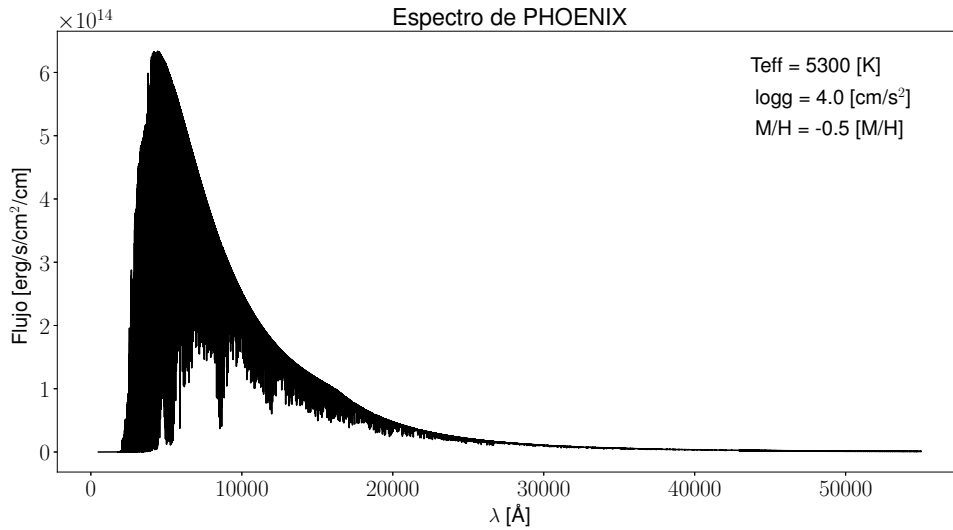
Ya que se tienen las mediciones de las velocidades radiales, aplicamos la corrección baricéntrica, como la describen Wright & Eastman (2014) que, a grandes rasgos, es la corrección de las velocidades radiales al sistema de referencia del baricentro del Sistema Solar. Esta corrección es necesaria para eliminar las incertidumbres debidas, principalmente, a la rotación y movimiento orbital de la Tierra.

### 4.1.3. Incertidumbres asociadas a las mediciones de velocidad radial

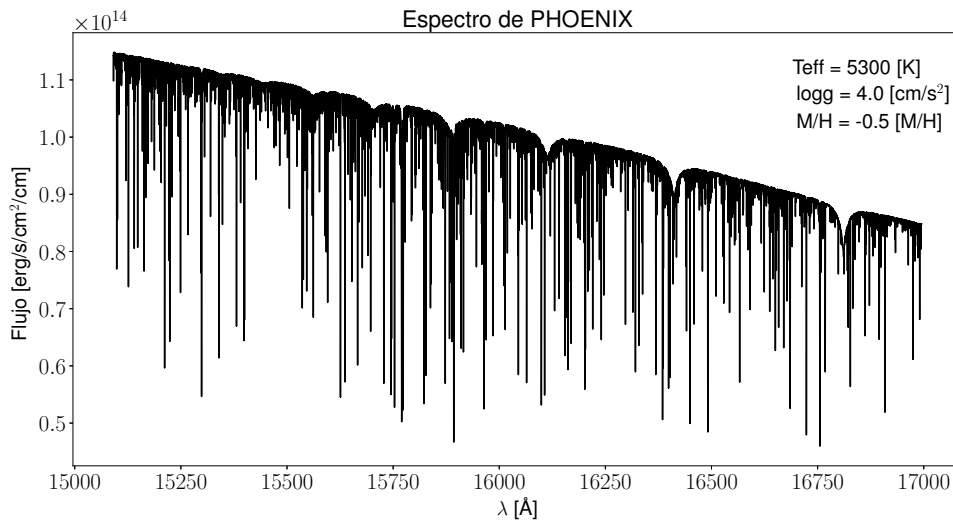
El método para la determinación de incertidumbres en las CCFs que utilizamos es el que proponen Tonry & Davis (1979). De acuerdo al análisis que se presenta en el artículo de Zucker & Mazeh (1994), es posible utilizar este método, a pesar de que fue propuesto para obtener las incertidumbres de una función de correlación cruzada en una dimensión, pues medir el error para una CCF en dos dimensiones es equivalente a encontrarlo en 1D.

Tonry & Davis (1979) proponen un procedimiento para encontrar el error en la posición y el ancho del pico de la CCF. Ellos explican que dado que la CCF debe ser simétrica alrededor del pico principal, la parte antisimétrica o componente antisimétrica de la CCF debe ser el resultado del ruido de la CCF y puede ser usada para estimar incertidumbres.

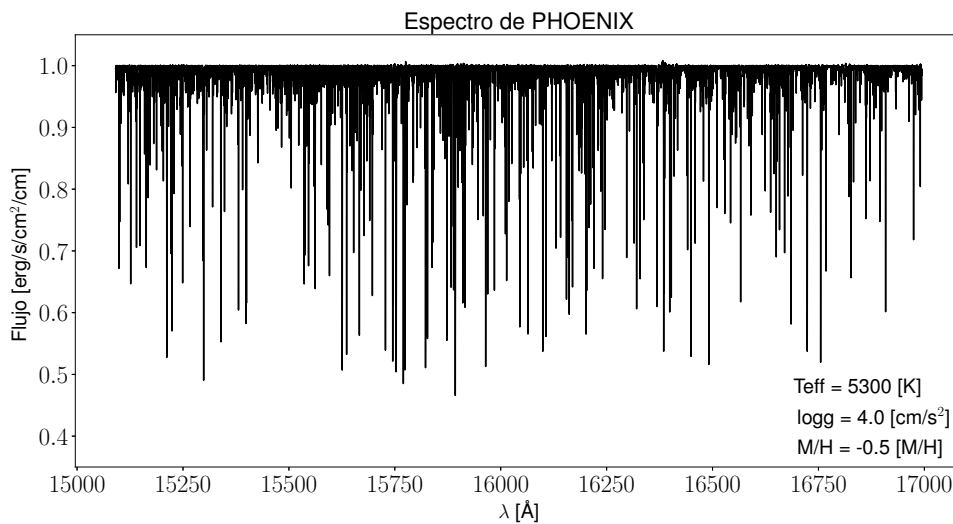
La estimación de incertidumbres se hace de la siguiente forma:



(a) Espectro sintético utilizado en la función de correlación cruzada para la componente estelar primaria.



(b) Intervalo de longitud de onda reducido para el espectro sintético utilizado en la función de correlación cruzada para la componente estelar primaria.



(c) Espectro sintético de PHOENIX, con el intervalo de longitud de onda reducido y normalizado.

Figura 4.2: Proceso de preparación de los espectros sintéticos de PHOENIX.

- Se selecciona el pico más alto que resulta de la CCF.
- Se ajusta una curva Gaussiana a dicho pico.
- Se calcula el ancho total a media altura o FWHM por sus siglas en inglés.

Si la varianza de la parte antisimétrica es,

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [c(\delta + j) - c(\delta - j)], \quad (4.6)$$

entonces, el ruido tendrá la mitad de esta varianza,

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{2} \sigma_a^2. \quad (4.7)$$

Una forma de medir qué tan lejos está el pico por encima del ruido es a través del cociente,

$$R = \frac{h}{\sqrt{2}\sigma_n}, \quad (4.8)$$

donde  $h$  es la altura del pico de la CCF. El error es entonces,

$$\epsilon = \frac{N}{(4)(2B)} \frac{1}{1 + R}. \quad (4.9)$$

Los autores sugieren que el valor de  $B$  se tome como el número de onda al cual la transformada de Fourier de la CCF decae la mitad de su valor máximo. Si  $\omega$  es el ancho del pico, entonces,

$$\epsilon = \frac{3}{8} \frac{\omega}{1 + R}. \quad (4.10)$$

El error entonces depende del ancho del pico de la CCF resultante, pues los picos ruidosos se asumen como un espectro de potencias similar al de la CCF por sí sola.

#### 4.1.4. Resultados de las mediciones de velocidades radiales

Los resultados de las mediciones de velocidad radial, para cada uno de los sistemas binarios de nuestra muestra se reportan en las tablas 4.3, 4.4, 4.5 y 4.6 y además, en las figuras 4.3, 4.4, 4.5 y 4.6 se muestran nuestras mediciones de velocidad radial con sus incertidumbres asociadas.



Tabla 4.3: Mediciones de velocidades radiales para el sistema binario KIC 6523216

Visita	Época (-2400000JD)	$v_{\text{prim}} (\frac{km}{s})$	$\sigma_{\text{prim}} (\frac{km}{s})$	$v_{\text{sec}} (\frac{km}{s})$	$\sigma_{\text{sec}} (\frac{km}{s})$
1	56557.73097	41.3904	0.02609	-61.1095	0.1304
2	56559.72097	25.1136	0.01736	—	—
3	56560.71874	15.4755	0.12633	48.4755	0.8429
4	56584.63091	41.7744	0.04231	-59.2255	0.3156
5	56585.62946	47.2268	0.08574	-72.2731	0.6396
6	56757.89316	42.7892	0.04448	-71.7107	0.3406
7	56758.90247	35.8433	0.18926	-51.1566	0.5753
8	56760.9058	17.4541	0.06025	41.9541	0.3012
9	56761.87286	12.5382	0.45273	79.5382	0.1995
10	56762.8686	4.5905	0.08944	110.0905	2.3379
11	56763.88108	3.1244	0.03719	113.1244	0.2888
12	56783.83465	35.2439	0.03679	-37.2560	0.2453
13	56784.82095	40.7194	0.11161	-54.7805	0.1881
14	56785.82438	42.6727	0.07922	-73.3272	0.4484
15	56786.79735	41.6526	0.04359	-66.3473	0.3179
16	56787.8082	34.5926	0.03323	-32.9073	0.5661
17	56788.84189	23.4989	0.24900	—	—
18	56812.74399	36.2645	0.09591	—	—
19	56814.75319	42.9689	0.14002	-69.0310	0.7001
20	56815.7832	39.2794	0.08393	-56.2205	2.6105
21	56816.76392	32.1579	0.08110	-9.8420	0.6869
22	56817.75959	21.5116	0.10147	22.0116	0.3167
23	56818.76215	12.3530	0.06384	58.8530	0.3192
24	56819.75975	6.6990	0.46261	—	—
25	56820.75351	3.0482	0.06546	105.0482	1.3935

Tabla 4.4: Mediciones de velocidades radiales para el sistema binario KIC 7037540

Visita	Época (-2400000 JD)	$v_{\text{prim}} (\frac{km}{s})$	$\sigma_{\text{prim}} (\frac{km}{s})$	$v_{\text{sec}} (\frac{km}{s})$	$\sigma_{\text{sec}} (\frac{km}{s})$
1	56557.73097	-19.7126	0.1436	—	—
2	56559.72097	-21.9980	0.1254	-113.4980	0.1783
3	56560.71874	-26.1406	0.1146	—	—
4	56584.63091	-26.4810	0.0305	-83.9810	1.5246
5	56585.62946	-22.5355	0.1063	-114.0355	0.7997
6	56757.89316	-24.4974	0.1374	-93.9974	0.1821
7	56758.90247	-16.9364	0.2164	-118.9364	0.3032
8	56760.9058	-20.8122	0.0693	-121.3122	0.2074
9	56761.87286	-24.7227	0.3632	-90.7227	0.3612
10	56762.8686	-28.6637	0.0854	-74.6637	0.6968
11	56763.88108	-33.6225	0.1127	—	—
12	56783.83465	-39.3555	0.1504	-0.3555	0.2655
13	56784.82095	-32.8727	0.1120	-43.8727	0.4200
14	56785.82438	-27.9114	0.0416	-71.4114	0.2911
15	56786.79735	-23.9248	0.1956	-103.9248	0.2732
16	56787.8082	-20.9764	0.1395	-121.4764	0.9946
17	56788.84189	-21.5608	0.2516	-134.0608	0.3550
18	56812.74399	-39.1103	0.1556	-8.6104	0.5063
19	56814.75319	-29.8904	0.1595	-64.8905	1.5246
20	56815.7832	-25.0712	0.1500	-107.5712	0.1500
21	56816.76392	-21.6860	0.2848	—	—
22	56817.75959	-20.3251	0.2022	—	—
23	56818.76215	-21.9763	0.1844	-105.9763	0.1710
24	56819.75975	-25.1231	0.2863	—	—
25	56820.75351	-30.7669	0.1055	-61.2670	0.2195

Tabla 4.5: Mediciones de velocidades radiales para el sistema binario KIC 6448768

Visita	Época (-24,00000 JD)	$v_{\text{prim}} (\frac{km}{s})$	$\sigma_{\text{prim}} (\frac{km}{s})$	$v_{\text{sec}} (\frac{km}{s})$	$\sigma_{\text{sec}} (\frac{km}{s})$
1	56557.73097	39.6019	0.1741	-25.3980	0.3717
2	56559.72097	48.8053	0.0685	-47.6946	0.2861
3	56560.71874	50.1571	0.1726	-53.8428	1.2556
4	56584.63091	2.2022	0.1238	77.7022	0.2691
5	56585.62946	10.6438	0.0489	52.1438	0.5204
6	56757.89316	49.7930	0.1164	-56.7069	0.3996
7	56758.90247	47.3583	0.1479	-50.6416	0.1785
8	56760.9058	36.4908	0.1038	-11.5091	0.3163
9	56761.87286	14.5838	0.1568	—	—
10	56762.8686	-9.8532	0.2489	110.6467	0.6407
11	56763.88108	-12.3080	0.1549	128.1919	1.2556
12	56783.83465	14.0144	0.1012	—	—
13	56784.82095	19.4987	0.1097	33.9987	1.3749
14	56785.82438	25.4616	0.2049	13.4616	0.5551
15	56786.79735	31.9494	0.0769	3.9494	1.2556
16	56787.8082	35.8992	0.0923	-7.6007	0.1451
17	56788.84189	41.3164	0.1159	-29.1835	0.3794
18	56812.74399	-12.2354	0.1762	131.2645	0.6787
19	56814.75319	-2.0184	0.1728	88.9815	0.4819
20	56815.7832	5.2992	0.1722	74.7992	0.6554
21	56816.76392	15.6825	0.2021	—	—
22	56817.75959	19.0416	0.1597	—	—
23	56818.76215	25.8885	0.0731	18.3885	1.2485
24	56819.75975	31.7396	0.0587	1.7396	0.3416
25	56820.75351	35.5937	0.1750	-14.9062	0.5587

Tabla 4.6: Mediciones de velocidades radiales para el sistema binario KIC 6698670

Visita	Época (-2400000 JD)	$v_{\text{prim}} (\frac{km}{s})$	$\sigma_{\text{prim}} (\frac{km}{s})$	$v_{\text{sec}} (\frac{km}{s})$	$\sigma_{\text{sec}} (\frac{km}{s})$
1	56557.73097	-41.2697	0.1017	-19.7697	1.3651
2	56559.72097	-23.0665	0.1674	-96.5665	0.2105
3	56560.71874	-19.2149	0.1463	-139.2149	0.1657
4	56584.63091	-38.6849	0.0786	—	—
5	56585.62946	-46.7443	0.1098	10.7557	1.2331
6	56757.89316	-40.8258	0.0507	-22.8258	0.2898
7	56758.90247	-47.7595	0.1245	—	—
8	56760.9058	-51.6251	0.1442	38.3749	0.3604
9	56761.87286	-52.5313	0.1944	25.4687	0.1511
10	56762.8686	-44.4675	0.0583	—	—
11	56763.88108	-35.4212	0.1006	—	—
12	56783.83465	-47.5717	0.1025	—	—
13	56784.82095	-42.0859	0.2264	-22.5859	0.4429
14	56785.82438	-33.1213	0.1492	-73.6213	0.1290
15	56786.79735	-23.6320	0.1444	-112.6320	0.7392
16	56787.8082	-18.1804	0.1106	-141.1840	1.0453
17	56788.84189	-25.2612	0.0751	-102.7612	0.2004
18	56812.74399	-47.7672	0.1742	—	—
19	56814.75319	-53.5459	0.0733	41.4541	0.1998
20	56815.7832	-51.2259	0.1557	34.2742	1.2455
21	56816.76392	-45.8406	0.0824	—	—
22	56817.75959	-37.9794	0.0809	-36.9794	0.1309
23	56818.76215	-28.1304	0.0848	-80.1304	0.1840
24	56819.75975	-20.2772	0.0898	-128.2771	1.3475
25	56820.75351	-21.4211	0.0581	-139.4211	1.7407

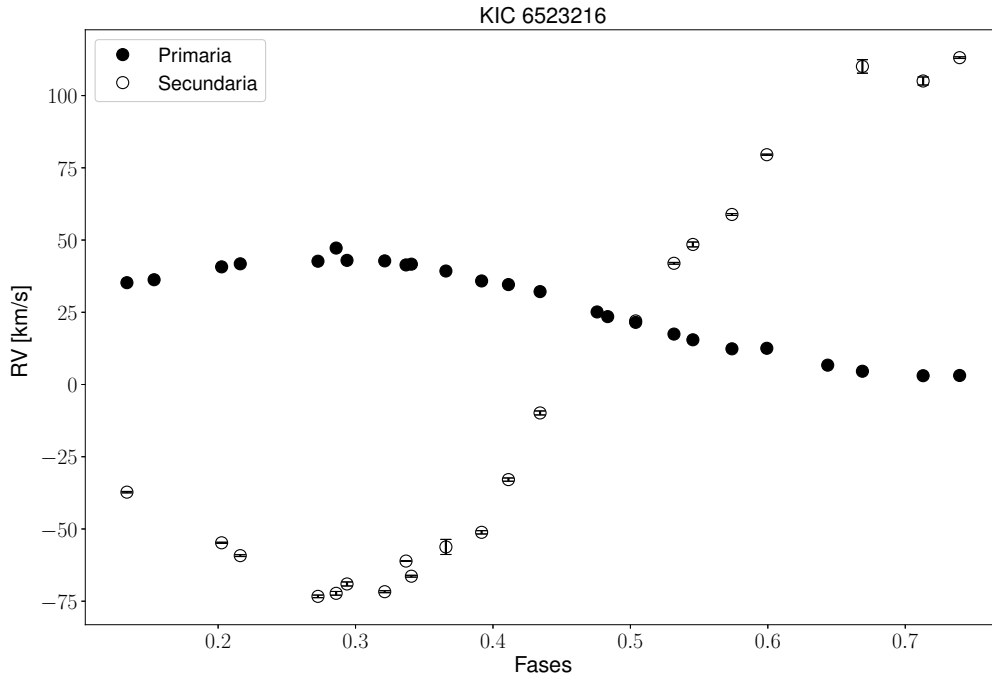


Figura 4.3: Resultados de las mediciones de velocidades radiales para KIC 6523216. Las barras de error son más pequeñas que el tamaño de los puntos para ambas componentes estelares.

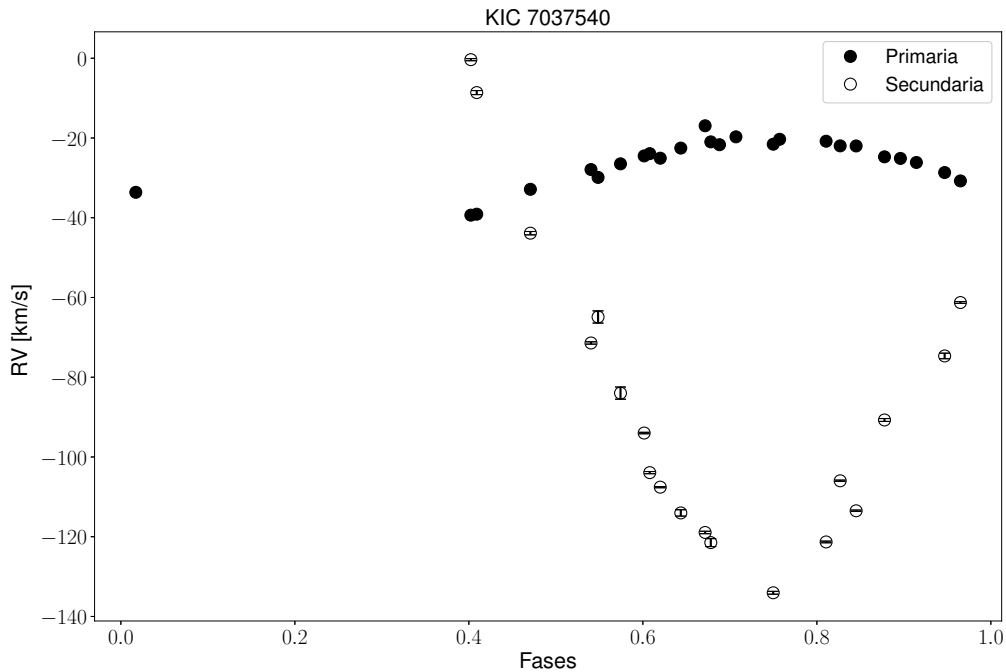


Figura 4.4: Resultados de las mediciones de velocidades radiales para KIC 7037540. Las barras de error son más pequeñas que el tamaño de los puntos para ambas componentes estelares. De 0.0 a 0.4 en fase no hay datos observados.

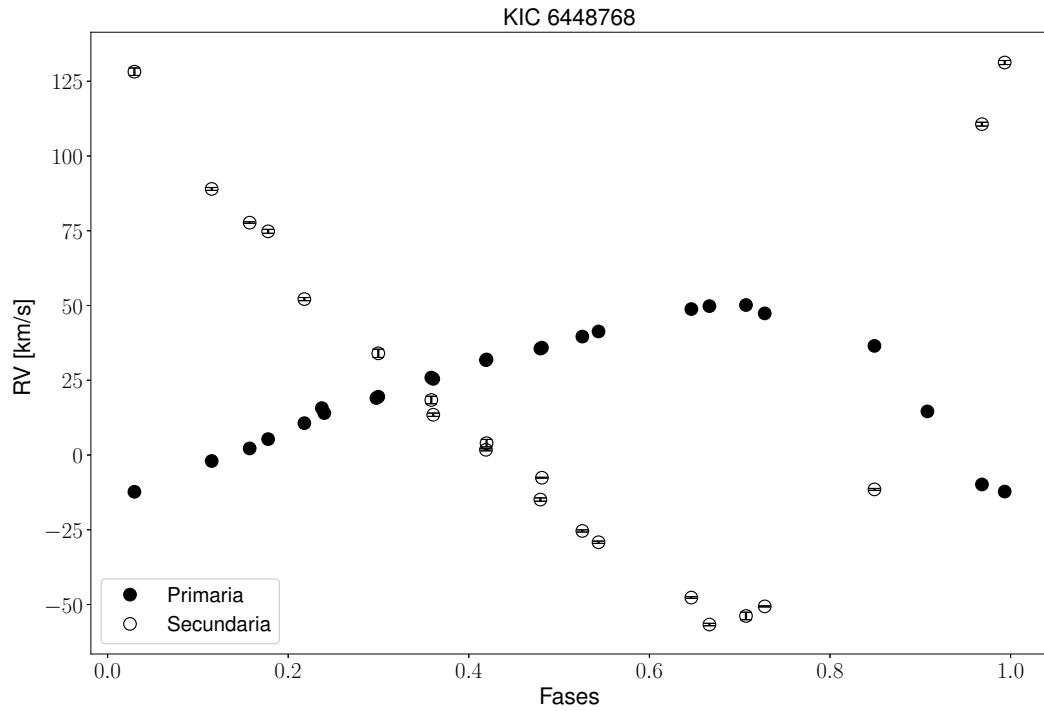


Figura 4.5: Resultados de las mediciones de velocidades radiales para KIC 6448768. Las barras de error son más pequeñas que el tamaño de los puntos para ambas componentes estelares.

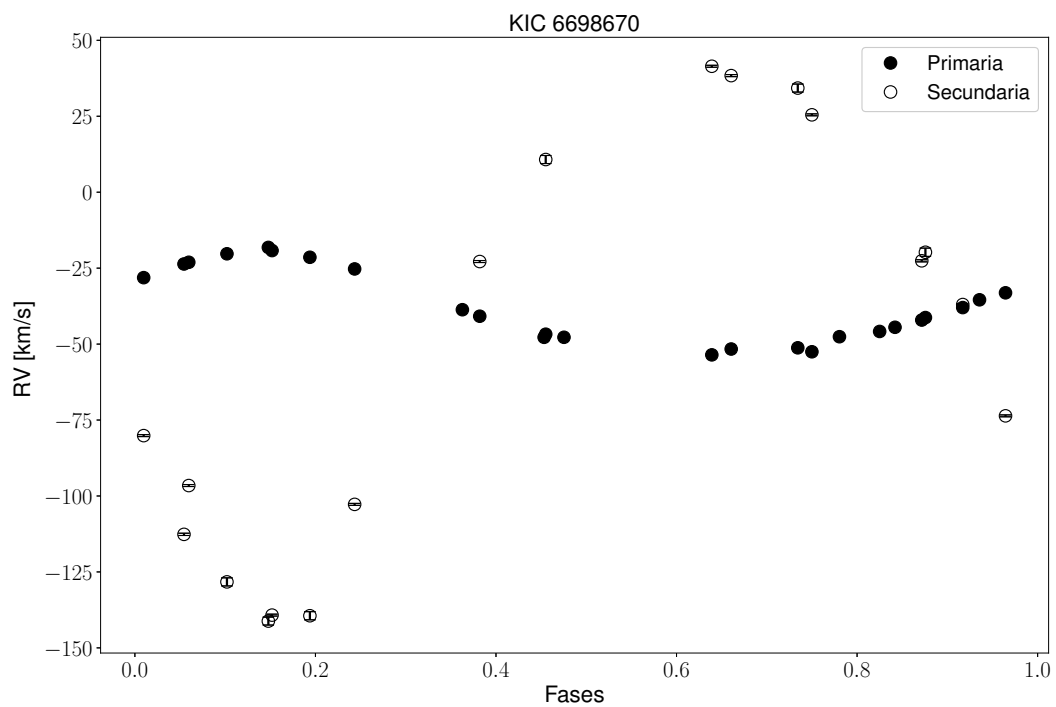


Figura 4.6: Resultados de las mediciones de velocidades radiales para KIC 6698670. Las barras de error son más pequeñas que el tamaño de los puntos para ambas componentes estelares.

# Capítulo 5

## Ajustes de las curvas de velocidad radial

En este capítulo damos una breve introducción a PHOEBE<sup>1</sup>, que es el código que utilizamos para hacer los modelos de las curvas de velocidad radial de nuestras estrellas binarias y describimos cómo hicimos los ajustes de las curvas de velocidad radial.

### 5.1. Ajustes preliminares con RVFIT

Una vez obtenidas las mediciones de velocidad radial, discutidas en el Capítulo 4, lo primero que hicimos fue utilizar RVFIT (Iglesias-Marzoa et al. 2015) para ajustar las curvas de velocidad radial de nuestros sistemas binarios.

RVFIT<sup>2</sup> es un código para ajustar velocidades radiales de binarias estelares y exoplanetas, utilizando un método de minimización global llamado “adaptive simulated annealing” (ASA), el cual converge rápidamente a un mínimo de solución global sin la necesidad de proporcionar valores de parámetros preliminares. Lo utilizamos precisamente porque no necesita que tengamos conocimiento previo de algún valor aproximado de los parámetros a ajustar en las curvas de velocidad radial. Además, proporciona el conjunto completo de parámetros de manera congruente, es decir, los límites en los que busca el valor de cada parámetro tienen sentido físico, y además los ajustes

---

<sup>1</sup><http://phoebe-project.org/>

<sup>2</sup><http://www.cefca.es/people/~riglesias/index.html>

Tabla 5.1: Parámetros del ajuste de la curva de velocidad radial del sistema binario KIC 6698670 con RVFIT

Parámetros Ajustados		
P (d)	10.815890	$\pm 0.000000$
$T_p$ (HJD/BJD)	2454962.07570	$\pm 0.00000$
$e$	0.10186500	$\pm 0.00101200$
omega (deg)	75.964814	$\pm 0.0618620$
gama (km/s)	-39.026882	$\pm 0.018541$
K1 (km/s)	17.337862	$\pm 0.030118$
K2 (km/s)	84.970512	$\pm 0.142379$
Parámetros Derivados		
$M_1 \sin^3(i)$ ( $M_\odot$ )	0.98120453	$\pm 0.00442376$
$M_2 \sin^3(i)$ ( $M_\odot$ )	0.20021050	$\pm 0.00072889$
$q = M_2/M_1$	0.20404563	$\pm 0.00049247$
$a_1 \sin(i)$ ( $R_\odot$ )	3.6858340	$\pm 0.0064142$
$a_2 \sin(i)$ ( $R_\odot$ )	18.063773	$\pm 0.030326$
$a \sin(i)$ ( $R_\odot$ )	21.749607	$\pm 0.030997$

se hacen teniendo en cuenta las incertidumbres de los datos de observación.

El conjunto de parámetros que ajusta RVFIT para un conjunto de datos dado de una binaria espectroscópica de doble línea, es  $[P, T_p, e, \omega, \gamma, K1, K2]$ , donde  $P$  es el periodo,  $T_p$  el tiempo en el que la estrella pasa por el periastro,  $e$  la excentricidad orbital,  $\omega$  el argumento de periastro,  $\gamma$  la velocidad del centro de masas o velocidad sistémica y, por último,  $K1$  y  $K2$  son las semiamplitudes de las curvas de velocidad radial para la estrella primaria y la secundaria, respectivamente.

En la figura 5.1 se muestra el resultado del ajuste obtenido con RVFIT para el sistema binario KIC 6698670. Tanto los parámetros ajustados como las cantidades derivadas de ellos, con sus incertidumbres asociadas, se muestran en la tabla 5.1.

Como podemos observar, este ajuste no es conveniente, ya que la curva de velocidad radial cal-



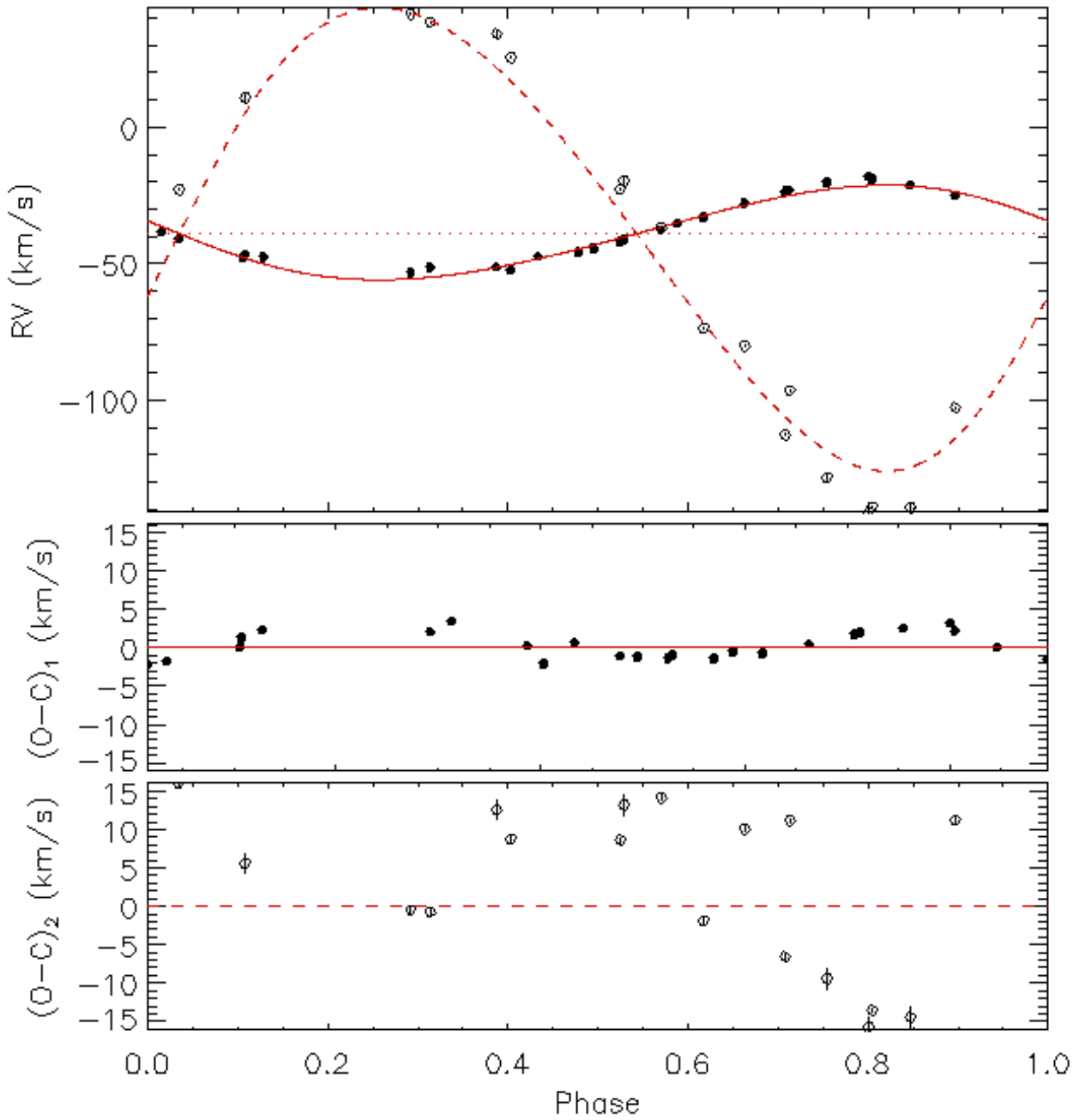


Figura 5.1: Ajuste preliminar a la curva de velocidad radial del sistema binario KIC 6698670. Este ajuste tuvo una  $\chi^2 = 19602.655$ , y la media cuadrática (rms) de la curva para la primaria y para la secundaria fueron respectivamente  $\text{rms}_1 = 1.7266$  km/s y  $\text{rms}_2 = 10.8114$  km/s. Gráfica tomada del resultado de RVFIT luego de correr el código.

culada mediante los parámetros ajustados no pasa por todas las mediciones de velocidad radial dentro del error de cada dato, como se esperaría en un buen ajuste. Esta deficiencia es notable en el diagrama O-C en los paneles inferiores de la figura. Además, la media cuadrática del ajuste para la componente secundaria, tiene un valor un poco alto ( $\text{rms}_2 = 10.8114 \text{ km/s}$ ). Este problema al ajustar las curvas de velocidad radial con RVFIT se presentó para todos los sistemas binarios. Por esta razón, optamos por utilizar PHOEBE, que es un código más complejo y completo para analizar estrellas en sistemas binarios, del cual damos una breve introducción en la siguiente sección.

## 5.2. Ajustes con PHOEBE

PHOEBE (PHysics Of Eclipsing BinariEs) es un código abierto para el modelado de estrellas binarias eclipsantes; reproduce y ajusta curvas de luz y curvas de velocidad radial; aborda ambos problemas incorporando la física faltante al incrementar la fidelidad computacional. (Prša et al. 2016a)

PHOEBE no sólo contiene un sistema mucho más complejo para describir a las estrellas binarias eclipsantes, incluyendo física como los efectos de reflexión y de oscurecimiento al limbo, entre otros, sino que también es menos costoso computacionalmente por la forma en la que está escrito.

Al utilizar PHOEBE, podemos crear un sistema binario que estará definido y tendrá en cuenta todos los valores de los parámetros que aparecen en las tablas de las componentes estelares 5.2, de la órbita del sistema binario 5.3 y del sistema binario 5.4. Es decir, en la tabla de las componentes estelares se tienen en cuenta los parámetros físicos de cada estrella, como su masa, radio, temperatura, etc. En la tabla de la órbita del sistema binario se listan los parámetros que definen las órbitas de la binaria, como la inclinación, la excentricidad, etc. Finalmente, en la tabla del sistema binario se muestran los parámetros del sistema en sí, como la velocidad del centro de masas o sistémica, la distancia, entre otros.

Entonces, lo que hicimos en este trabajo fue revisar cada uno de los parámetros y cambiar el valor, dado por defecto, de aquellos que causaban un efecto importante en nuestro modelado de curvas de velocidad radial. Por ejemplo, cambiamos la temperatura y la metalicidad de nuestras binarias

pero dejamos el valor que por defecto del efecto de reflexión, que tiene en cuenta la temperatura a la que están nuestras estrellas y el hecho de que ambas tienen una envoltura convectiva.

De todos los parámetros físicos que utiliza PHOEBE para crear o definir un sistema binario, a los únicos que les cambiamos el valor por defecto fueron: la temperatura efectiva  $T_{\text{eff}}$  de cada componente estelar, la metalicidad (que se asume la misma para ambas estrellas), el tiempo de referencia  $t_0$  y el periodo. Estos parámetros están marcados en negritas en las tablas 5.2, 5.3 y 5.4

Una vez que definíamos nuestro sistema binario en PHOEBE, creamos un código para ajustar los modelos de las curvas de velocidad radial utilizando EMCEE<sup>3</sup> (Foreman-Mackey et al. 2013) que es una implementación en Python<sup>4</sup> de uno de los métodos de muestreo de Monte Carlo con Cadenas de Markov (MCMC, por sus siglas en inglés), llamado “Ensembler Sampler” afín invariante de Goodman & Weare (2010).

El modelo de la curva de velocidad radial que intentamos ajustar es la ecuación de las órbitas Keplerianas de velocidad radial para estrellas binarias espectroscópicas de doble línea. Asumiendo incertidumbres Gaussianas en las mediciones, la función que nuestro algoritmo pretende minimizar es la  $\chi^2$ . La función de  $\chi^2$  está dada por,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N_i} \left( \frac{v_{\text{obs},i} - v_{\text{mod},i}}{\sigma_i} \right)^2 + \sum_{j=1}^{N_j} \left( \frac{v_{\text{obs},j} - v_{\text{mod},j}}{\sigma_j} \right)^2, \quad (5.1)$$

donde  $N_i$  y  $N_j$  son el número de mediciones de velocidad radial de las componentes primaria y secundaria, y  $v_{\text{obs},i}$  y  $v_{\text{obs},j}$ , y  $\sigma_i$  y  $\sigma_j$  son las velocidades medidas de cada componente y sus incertidumbres asociadas. Además,  $v_{\text{mod},i}$  y  $v_{\text{mod},j}$  corresponden a las velocidades radiales encontradas en nuestro modelo físico con cada modelo de PHOEBE.

Para cada ajuste de la curva de velocidad radial, tenemos 5 parámetros libres que son, la excentricidad, el argumento de periastro, la velocidad sistémica, el semieje mayor por el seno de la inclinación y el cociente de masas.

Hicimos cada uno de los ajustes de las curvas de velocidad radial, utilizando 16 “walkers” o caminantes que exploran el espacio de parámetros por 5,000 iteraciones. Luego de cada corrida,

<sup>3</sup><https://emcee.readthedocs.io/en/stable/>

<sup>4</sup>Python Language Reference, versión 3.6. Disponible en <http://www.python.org>

Tabla 5.2: Parámetros de las componentes estelares de PHOEBE que describen un sistema binario eclipsante y que se toman en cuenta al hacer los modelos de curvas de luz y curvas de velocidad radial

Parámetro	Valor por defecto	Descripción del parámetros	Unidades
requiv	1.0	Radio equivalente	$R_{\odot}$
requiv_max	2.0133	Valor crítico (máximo) del radio equivalente para una morfología dada	$R_{\odot}$
<b>teff</b>	6000.0	<b>Temperatura efectiva media</b>	$K$
<b>abun</b>	0.0	<b>Metalicidad</b>	
syncpar	1.0	Parámetro de sincronidad	
period	1.0	Periodo de rotación	d
freq	6.283185	Frecuencia de rotación	rad/d
pitch	0.0	Ángulo de inclinación del eje de rotación estelar respecto al eje de rotación orbital	$^{\circ}$
yaw	0.0	Ángulo de desviación del eje de rotación estelar respecto al eje de rotación orbital	$^{\circ}$
incl	90.0	Inclinación del eje de rotación estelar	$^{\circ}$
long_an	0.0	Longitud de nodo ascendente (ecuador) de la estrella	$^{\circ}$
gravb_bol	0.32	Abrillantamiento gravitacional bolométrico	
irrad_frac_refl_bol	0.6	Cociente de luz bolométrica incidente que se refleja (calentando sin redistribución)	
irrad_frac_lost_bol	0.4	Cociente de luz bolométrica incidente que se pierde o se ignora	
ld_func_bol	logarithmic	Modelo de oscurecimiento al limbo	
ld_coeffs_bol	array([0.5,0.5])	Coefficientes de oscurecimiento al limbo	
mass	0.9988	Masa	$M_{\odot}$

Tabla 5.3: Parámetros de PHOEBE para las componentes orbitales que se toman en cuenta al hacer los modelos de curvas de velocidad radial

Parámetro	Valor por defecto	Descripción del parámetros	Unidades
<b>period</b>	1.0	<b>Periodo orbital</b>	d
freq	6.283185	Frecuencia orbital	rad/d
dpdt	0.0	Variación anual del periodo	s/yr
per0	0.0	Argumento de periaastro	°
dperdt	0.0	Precesión anual del periaastro	°/yr
ecc	0.0	Excentricidad	
<b>t0_perpass</b>	-0.25	<b>Día cero en el pasaje del periaastro de la primaria</b>	d
t0_supconj	0.0	Día cero en la conjunción superior de la primaria	d
t0_ref	0.0	Día cero de referencia para la primaria	d
mean_anom	89.9999	Anomalía media	°
incl	90.0	Ángulo de inclinación orbital	°
q	1.0	Cociente de masas	
sma	5.3	Semieje mayor de la órbita	$R_{\odot}$
long_an	0.0	Longitud de nodo ascendente	°
asini	5.3	Semieje mayor proyectado	$R_{\odot}$
ecosw	0.0	Excentricidad por el coseno del argumento de periaastro	
esinw	0.0	Excentricidad por el seno del argumento de periaastro	

Tabla 5.4: Parámetros de PHOEBE de los sistemas binarios que se toman en cuenta al hacer los modelos de curvas de velocidad radial

Parámetro	Valor por defecto	Descripción del parámetros	Unidades
<b>t0</b>	0.0	<b>Tiempo al que todos los valores están referidos</b>	d
ra	0.0	Ascensión recta	°
dec	0.0	Declinación	°
epoch	J200	Época de las coordenadas	
distance	1.0	Distancia al sistema	km
vgamma	0.0	Velocidad sistémica	km/s

hacíamos una depuración de 3500 datos y después tomábamos la mediana de las distribuciones para encontrar el valor de cada parámetro que minimizaba nuestra función de  $\chi^2$ .

Finalmente, calculamos las incertidumbres tomando los percentiles 16 y 84 de las distribuciones obtenidas. Y esto lo hicimos así porque dichos percentiles corresponden a tomar  $\pm 1\sigma$  de las distribuciones Gaussianas.

Ya que se ha descrito cómo hicimos los ajustes utilizando PHOEBE y el algoritmo de EMCEE, haremos una pequeña pausa y discutiremos otro factor por el cual los ajustes de las curvas de velocidad radial que hemos obtenido no han sido los mejores. Si observamos los ajustes encontrados con RVFIT (véase la Sección 5.1), es intuitivo pensar que las incertidumbres que obtuvimos para las mediciones de velocidad radial están subestimadas. Es por esto, que calculamos la  $\chi^2_{\text{reducida}}$  siguiendo la definición de Andrae et al. (2010). La  $\chi^2_{\text{reducida}}$  está dada por:

$$\chi^2_{\text{reducida}} = \frac{\chi^2}{k} \quad (5.2)$$

donde  $\chi^2$  es la resultante del ajuste obtenido a las mediciones de velocidad radial y  $k$  es el número de grados de libertad, que se encuentra de la siguiente forma: para  $N$  datos y  $P$  parámetros a encontrar para el ajuste, el número de grados de libertad es  $k = N - P$ . Por lo tanto, la  $\chi^2_{\text{reducida}}$  la podemos calcular de la siguiente forma,

$$\chi^2_{\text{reducida}} = \frac{\chi^2}{N - P} \quad (5.3)$$

Nosotras optamos por utilizar esta cantidad porque nos permite (Andrae et al. 2010):

- **Evaluar un modelo.** Si el modelo ajustado a los datos nos da un valor de  $\chi_{\text{reducida}}^2 > 1$ , se considera que tenemos un ajuste “malo”, mientras que si  $\chi_{\text{reducida}}^2 < 1$ , se considera que tenemos un sobreajuste.
- **Estimación de incertidumbres.** Dado un ajuste obtenido para los datos dados, tomamos la  $\chi^2$  resultante y calculamos la  $\chi_{\text{reducida}}^2$ . Luego se reescalan las incertidumbres de los datos, de modo que el valor de  $\chi_{\text{reducida}}^2$  sea exactamente igual a uno.

Entonces, procedimos a hacer la renormalización de nuestras incertidumbres para las mediciones de velocidad radial y después volvimos a utilizar PHOEBE y el algoritmo de EMCEE descritos previamente, para encontrar los nuevos ajustes de las curvas de velocidad radial para nuestras binarias. En las tablas 5.5, 5.6, 5.7 y 5.8 mostramos las mediciones de velocidad radial para nuestra muestra de sistemas binarios; las incertidumbres reportadas aparecen ya actualizadas luego de la renormalización.

En las figuras 5.2, 5.3, 5.4 y 5.5, se muestran los mejores modelos de la curva de velocidad radial que ajustamos.

Tabla 5.5: Mediciones de velocidades radiales para el sistema binario KIC 6523216, con sus incertidumbres renormalizadas

Visita	Época (-2400000 JD)	$v_{\text{prim}} (\frac{\text{km}}{\text{s}})$	$\sigma_{\text{prim}} (\frac{\text{km}}{\text{s}})$	$v_{\text{sec}} (\frac{\text{km}}{\text{s}})$	$\sigma_{\text{sec}} (\frac{\text{km}}{\text{s}})$
1	56557.73097	41.3904	0.3584	-61.1095	1.7925
2	56559.72097	25.1136	0.2384	—	—
3	56560.71874	15.4755	1.7353	48.4755	11.5820
4	56584.63091	41.7744	0.5812	-59.2255	4.3373
5	56585.62946	47.2268	1.1778	-72.2731	8.7885
6	56757.89316	42.7892	0.6110	-71.7107	4.6799
7	56758.90247	35.8433	2.5997	-51.1566	7.9046
8	56760.9058	17.4541	0.8277	41.9541	4.1395
9	56761.87286	12.5382	6.2189	79.5382	2.7423
10	56762.8686	4.5905	1.2286	110.0905	32.1229
11	56763.88108	3.1244	0.5109	113.1244	3.9692
12	56783.83465	35.2439	0.5054	-37.2560	3.3711
13	56784.82095	40.7194	1.5331	-54.7805	2.5854
14	56785.82438	42.6727	1.0882	-73.3272	6.1615
15	56786.79735	41.6526	0.5987	-66.3473	4.3685
16	56787.8082	34.5926	0.4565	-32.9073	7.7792
17	56788.84189	23.4989	3.4203	—	—
18	56812.74399	36.2645	1.3175	—	—
19	56814.75319	42.9689	1.9233	-69.0310	9.6191
20	56815.7832	39.2794	1.1529	-56.2205	35.8684
21	56816.76392	32.1579	1.1140	-9.8420	9.4377
22	56817.75959	21.5116	1.3939	22.0116	4.3526
23	56818.76215	12.3530	0.8769	58.8530	4.3858
24	56819.75975	6.6990	6.3545	—	—
25	56820.75351	3.0482	0.8992	105.0482	19.1463



Tabla 5.6: Mediciones de velocidades radiales para el sistema binario KIC 7037540, con sus incertidumbres renormalizadas

Visita	Época (-2400000 JD)	$v_{\text{prim}} (\frac{km}{s})$	$\sigma_{\text{prim}} (\frac{km}{s})$	$v_{\text{sec}} (\frac{km}{s})$	$\sigma_{\text{sec}} (\frac{km}{s})$
1	56557.73097	-19.7126	1.2789	—	—
2	56559.72097	-21.9980	1.1168	-113.4980	8.5284
3	56560.71874	-26.1406	1.0211	—	—
4	56584.63091	-26.4810	0.2716	-83.9810	72.9095
5	56585.62946	-22.5355	0.9468	-114.0355	38.2454
6	56757.89316	-24.4974	1.2238	-93.9974	8.7108
7	56758.90247	-16.9364	1.9272	-118.9364	14.5004
8	56760.9058	-20.8122	0.6170	-121.3122	9.9204
9	56761.87286	-24.7227	3.2343	-90.7227	17.2748
10	56762.8686	-28.6637	0.7608	-74.6637	33.3223
11	56763.88108	-33.6225	1.0037	—	—
12	56783.83465	-39.3555	1.3398	-0.3555	12.6977
13	56784.82095	-32.8727	0.9979	-43.8727	20.0890
14	56785.82438	-27.9114	0.3707	-71.4114	13.9237
15	56786.79735	-23.9248	1.7420	-103.9248	13.0693
16	56787.8082	-20.9764	1.2427	-121.4764	47.5650
17	56788.84189	-21.5608	2.2410	-134.0608	16.9776
18	56812.74399	-39.1103	1.3855	-8.6104	24.2161
19	56814.75319	-29.8904	1.4204	-64.8905	72.9095
20	56815.7832	-25.0712	1.3357	-107.5712	7.1761
21	56816.76392	-21.6860	2.5359	—	—
22	56817.75959	-20.3251	1.8010	—	—
23	56818.76215	-21.9763	1.6425	-105.9763	8.1794
24	56819.75975	-25.1231	2.5495	—	—
25	56820.75351	-30.7669	0.9401	-61.2670	10.4969

Tabla 5.7: Mediciones de velocidades radiales para el sistema binario KIC 6448768, con sus incertidumbres renormalizadas

Visita	Época (-2400000 JD)	$v_{\text{prim}} (\frac{\text{km}}{\text{s}})$	$\sigma_{\text{prim}} (\frac{\text{km}}{\text{s}})$	$v_{\text{sec}} (\frac{\text{km}}{\text{s}})$	$\sigma_{\text{sec}} (\frac{\text{km}}{\text{s}})$
1	56557.73097	39.6019	8.8003	-25.3980	16.1233
2	56559.72097	48.8053	3.4629	-47.6946	12.4085
3	56560.71874	50.1571	8.7247	-53.8428	54.4528
4	56584.63091	2.2022	6.2576	77.7022	11.6725
5	56585.62946	10.6438	2.4715	52.1438	22.5707
6	56757.89316	49.7930	5.8820	-56.7069	17.3306
7	56758.90247	47.3583	7.4747	-50.6416	7.7434
8	56760.9058	36.4908	5.2465	-11.5091	13.7203
9	56761.87286	14.5838	7.9232	—	—
10	56762.8686	-9.8532	12.5804	110.6467	27.7878
11	56763.88108	-12.3080	7.8284	128.1919	54.4528
12	56783.83465	14.0144	5.1144	—	—
13	56784.82095	19.4987	5.5433	33.9987	59.6265
14	56785.82438	25.4616	10.3529	13.4616	24.0759
15	56786.79735	31.9494	3.8857	3.9494	54.4528
16	56787.8082	35.8992	4.6636	-7.6007	6.2933
17	56788.84189	41.3164	5.8602	29.1835	16.4559
18	56812.74399	-12.2354	8.9041	31.2645	29.4366
19	56814.75319	-2.0184	8.7348	88.9815	20.8999
20	56815.7832	5.2992	8.7011	74.7992	28.4264
21	56816.76392	15.6825	10.2157	—	—
22	56817.75959	19.0416	8.0700	—	—
23	56818.76215	25.8885	3.6951	18.3885	54.1448
24	56819.75975	31.7396	2.9689	1.7396	14.8145
25	56820.75351	35.5937	8.8470	-14.9062	24.2305

Tabla 5.8: Mediciones de velocidades radiales para el sistema binario KIC 6698670, con sus incertidumbres renormalizadas

Visita	Época (-2400000 JD)	$v_{\text{prim}} (\frac{km}{s})$	$\sigma_{\text{prim}} (\frac{km}{s})$	$v_{\text{sec}} (\frac{km}{s})$	$\sigma_{\text{sec}} (\frac{km}{s})$
1	56557.73097	-41.2697	0.8975	-19.7697	31.4488
2	56559.72097	-23.0665	1.4770	-96.5665	7.3962
3	56560.71874	-19.2149	1.2907	-139.2149	7.2932
4	56584.63091	-38.6849	0.6937	—	—
5	56585.62946	-46.7443	0.9690	10.7557	30.4861
6	56757.89316	-40.8258	0.4475	-22.8258	7.5791
7	56758.90247	-47.7595	1.0988	—	—
8	56760.9058	-51.6251	1.2719	38.3749	7.7416
9	56761.87286	-52.5313	1.7154	25.4687	7.2594
10	56762.8686	-44.4675	0.5143	—	—
11	56763.88108	-35.4212	0.8872	—	—
12	56783.83465	-47.5717	0.9045	—	—
13	56784.82095	-42.0859	1.9976	-22.5859	7.9316
14	56785.82438	-33.1213	1.3160	-73.6213	7.2085
15	56786.79735	-23.6320	1.2742	-112.6320	8.6143
16	56787.8082	-18.1804	0.9760	-141.1840	30.0535
17	56788.84189	-25.2612	0.6623	-102.7612	7.3729
18	56812.74399	-47.7672	1.5369	—	—
19	56814.75319	-53.5459	0.6467	41.4541	7.3717
20	56815.7832	-51.2259	1.3736	34.2742	30.5149
21	56816.76392	-45.8406	0.7268	—	—
22	56817.75959	-37.9794	0.7134	-36.9794	7.2129
23	56818.76215	-28.1304	0.7484	-80.1304	7.3352
24	56819.75975	-20.2772	0.7926	-128.2771	30.7499
25	56820.75351	-21.4211	0.5119	-139.4211	30.9645

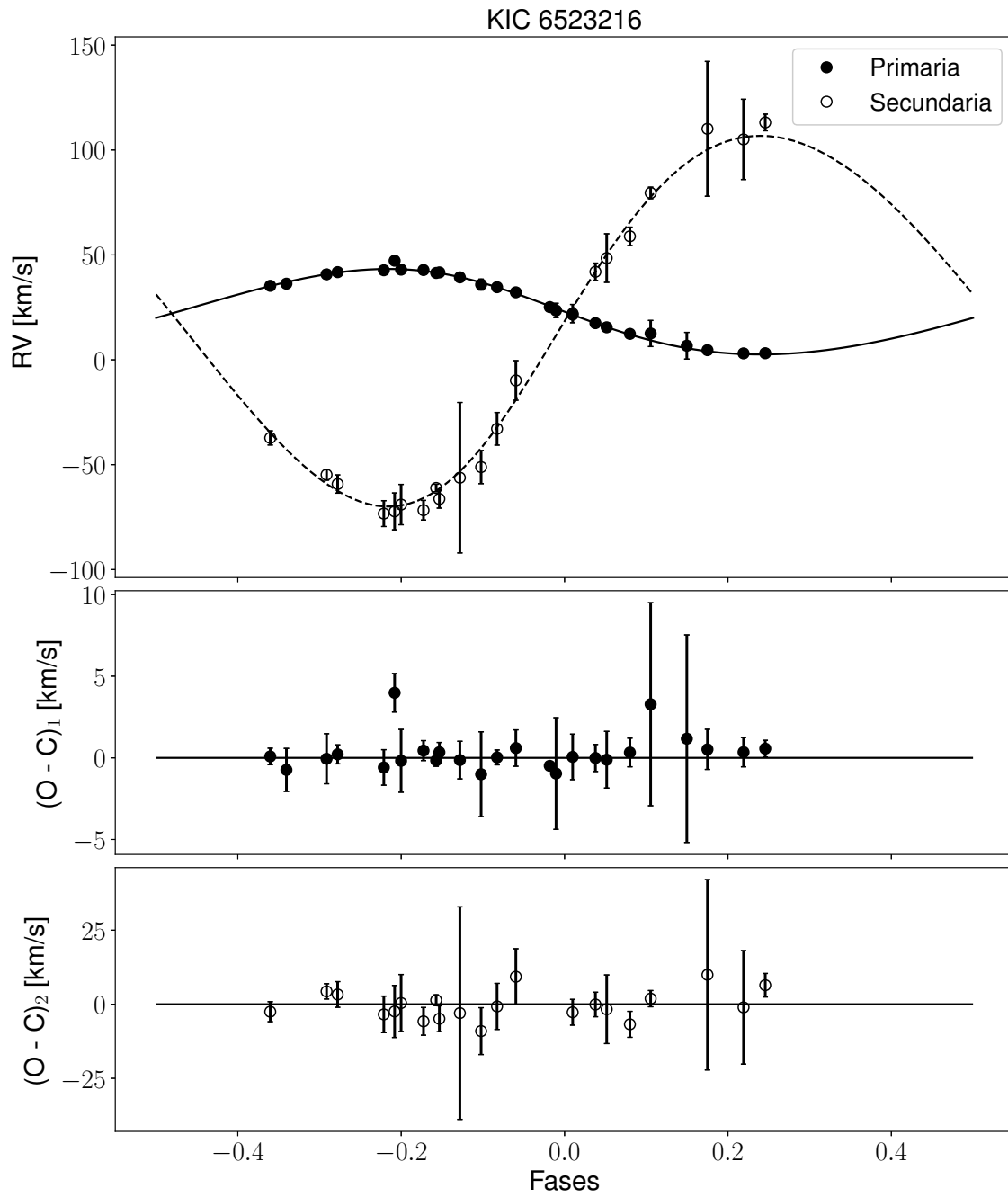


Figura 5.2: Modelo de la curva de velocidad radial para el sistema binario KIC 6523216. Residuales de las curvas de velocidad radial, diferencia entre el valor observado y el calculado.

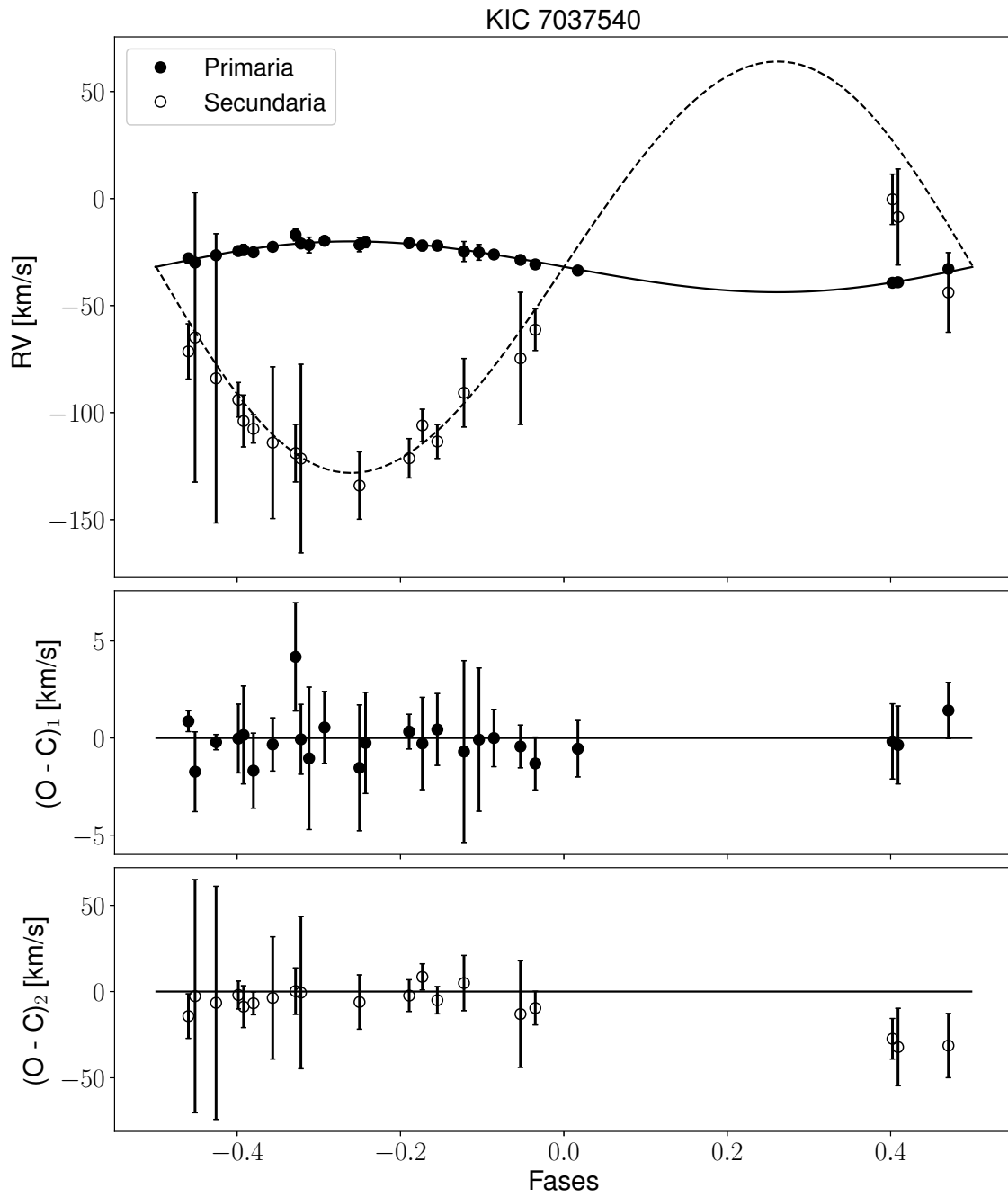


Figura 5.3: Modelo de la curva de velocidad radial para el sistema binario KIC 7037540. Residuales de las curvas de velocidad radial, diferencia entre el valor observado y el calculado.

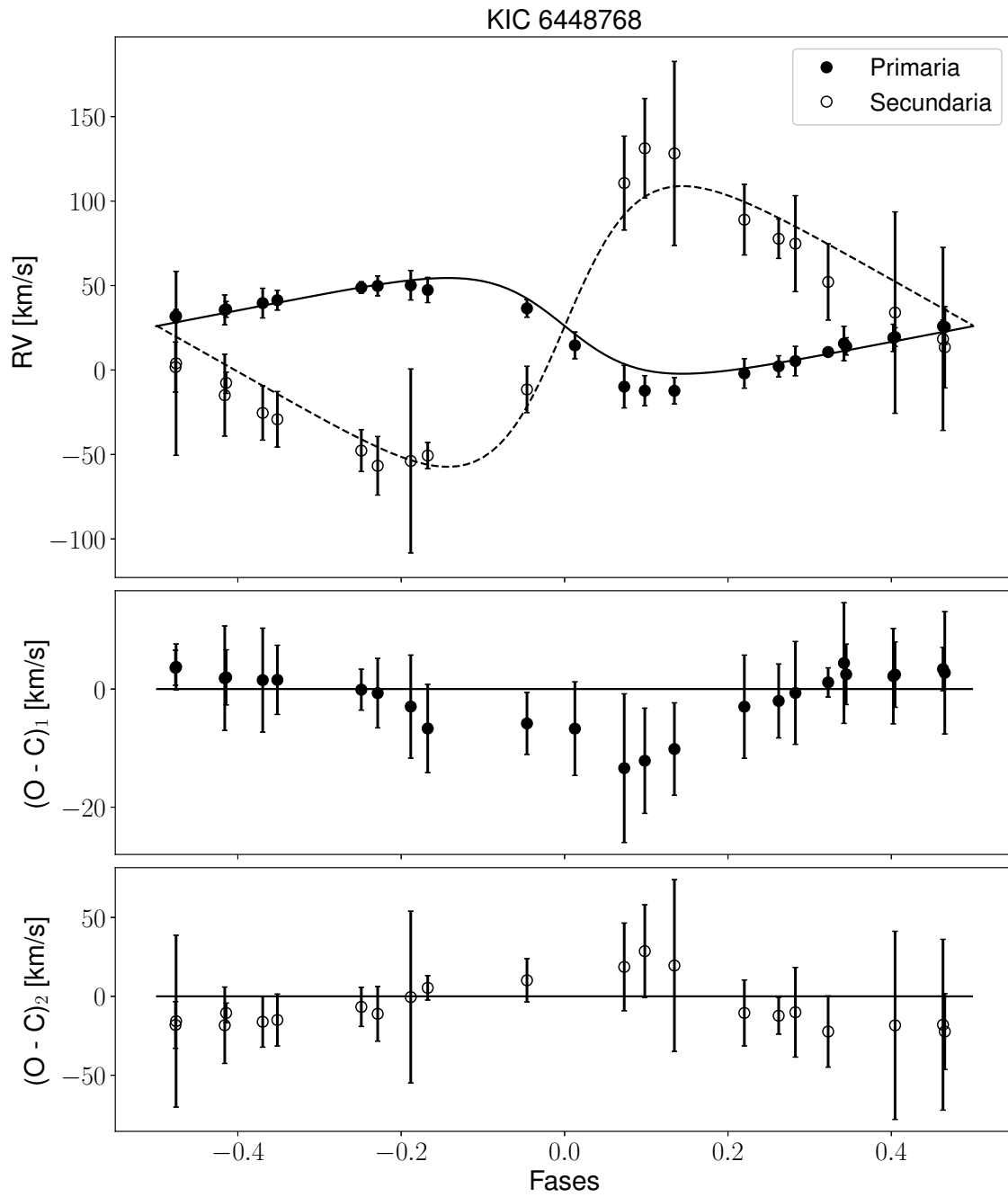


Figura 5.4: Modelo de la curva de velocidad radial para el sistema binario KIC 6448768. Residuales de las curvas de velocidad radial, diferencia entre el valor observado y el calculado.

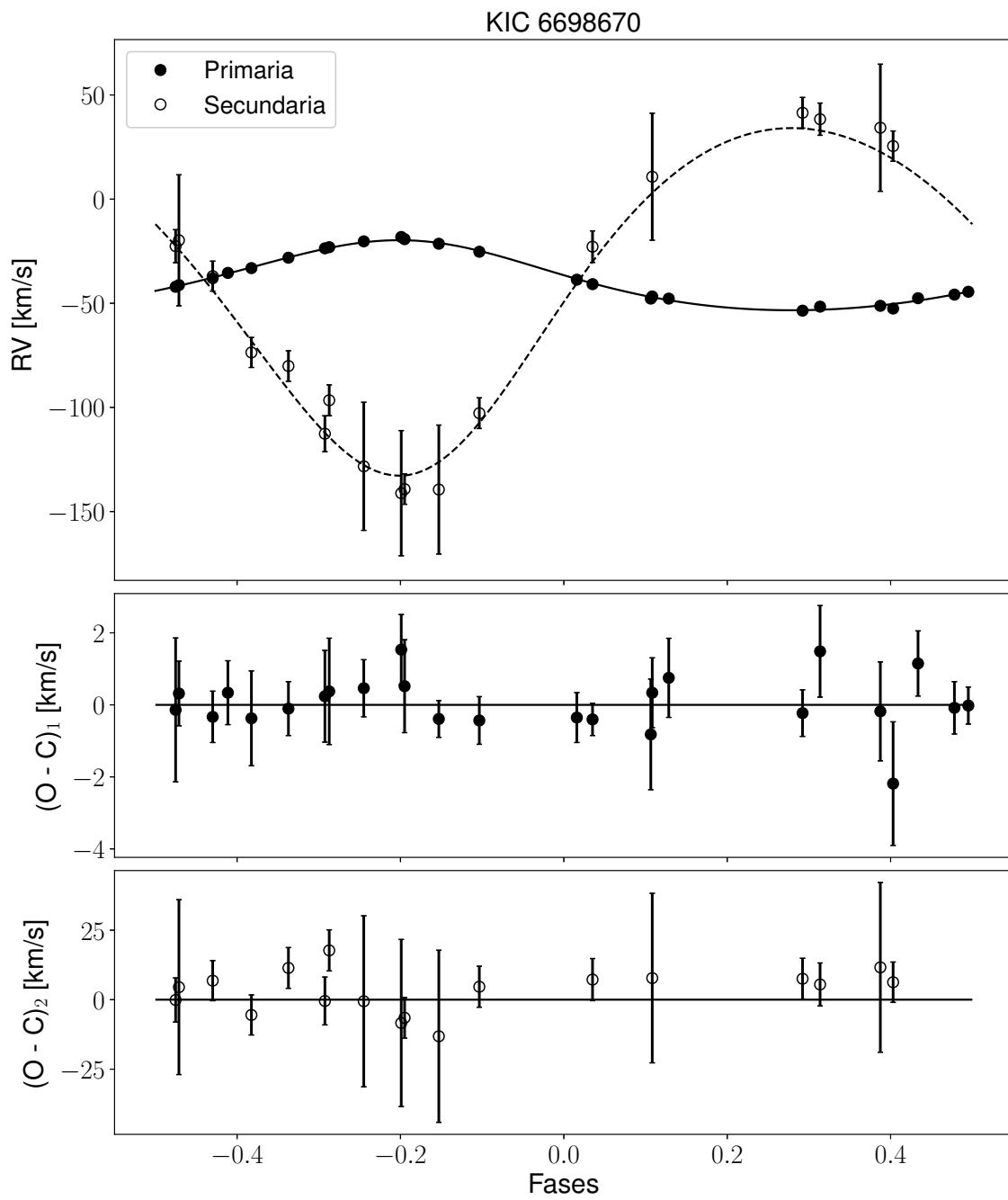


Figura 5.5: Modelo de la curva de velocidad radial para el sistema binario KIC 6698670. Residuales de las curvas de velocidad radial, diferencia entre el valor observado y el calculado.

# Capítulo 6

## Resultados y Discusión

En este capítulo presentamos los parámetros físicos derivados a partir de los modelos de las curvas de velocidad radial y sus incertidumbres asociadas. Además, ponemos en contexto nuestros sistemas binarios con otros sistemas binarios estelares de la literatura, para comparar nuestros resultados con los de otros estudios similares.

A partir de los ajustes obtenidos previamente (véase la Sección 5.2) y de los parámetros ajustados, podemos derivar otras cantidades físicas a partir de las ecuaciones que presentamos a continuación para binarias espectroscópicas de doble línea, las cuales utilizan las constantes nominales reportadas en Prša et al. (2016b).

Aunque nuestra muestra de estrellas consiste únicamente de cuatro binarias eclipsantes y espectroscópicas de doble línea, en este trabajo de investigación hemos analizado nuestras estrellas únicamente como binarias espectroscópicas de doble línea y es por esta razón que las masas dinámicas de las componentes estelares no se pueden determinar en este momento, pero lo que sí podemos derivar, es una cota mínima de las masas dinámicas. Para las masas dinámicas estelares  $M_1$  y  $M_2$ , en unidades  $M_\odot$ , tenemos las siguientes ecuaciones:

$$M_{1,2} \sin^3(i) = 1.036149 \times 10^{-7} K_{2,1} (K_1 + K_2)^2 P(1 - e^2)^{3/2}. \quad (6.1)$$

Para los tamaños orbitales proyectados  $a_1$  y  $a_2$ , en unidades  $R_\odot$ ,

$$a_{1,2} \sin(i) = 0.01976569 K_{1,2} P(1 - e^2)^{1/2}. \quad (6.2)$$



Y finalmente, para el semieje mayor  $a = a_1 + a_2$ , en unidades  $R(\odot)$ ,

$$a \sin(i) = 0.01976569 (K_1 + K_2) P(1 - e^2)^{1/2}. \quad (6.3)$$

Para el cálculo de las incertidumbres de cada parámetro derivado, hicimos la propagación de incertidumbres utilizando tanto la mediana de las distribuciones para los parámetros ajustados como sus incertidumbres asociadas, tomando la media de  $\pm 1\sigma$  de la distribución de cada parámetro.

En las tablas 6.1, 6.2, 6.3 y 6.4 mostramos, para cada sistema binario de nuestra muestra, los parámetros que quedaron fijos a lo largo de los ajustes, los parámetros ajustados y los derivados con sus incertidumbres asociadas.

Utilizando nuestras mediciones de las masas dinámicas mínimas de las binarias de la muestra, podemos explorar un poco más el intervalo de masas que esperamos para cada componente estelar. Dado que nuestras binarias son binarias eclipsantes, podemos determinar los límites para la inclinación orbital, dentro de los cuales las binarias se eclipsarán. Consideremos la binaria eclipsante mostrada en la figura 6.1. La aproximación más simple para binarias eclipsantes es la de una variación regular de luz, causada por una de las estrellas pasando directamente en frente de su compañera, vista desde la Tierra. Para estos casos se cumple que  $i \simeq 90^\circ$ ; más específicamente,  $\cos(i) < R/a$ , donde  $R$  es la suma de los radios estelares y  $a$  es la separación de las estrellas. Dada la dependencia con  $1/a$  en esta condición, los eclipses son extremadamente improbables para binarias muy separadas. Típicamente se tienen los límites de  $i > 87^\circ$  y  $a \simeq 20 R$  para que ocurra un eclipse (Smith 1995).

Tomando este límite en la inclinación orbital, podemos dar un intervalo para las masas dinámicas de las estrellas de la muestra. En la tabla 6.5 se reportan los intervalos de masas dinámicas esperados para nuestras binarias, tomando el límite de  $i > 87^\circ$  para la inclinación orbital.

De los resultados obtenidos, notamos que tres de los sistemas binarios de nuestra muestra (KIC 6523216, KIC 7037540 y KIC 6698670) se encuentran en órbitas con excentricidades bajas, mientras que uno de ellos (KIC 6448768) tiene una órbita excéntrica con  $e = 0.3413^{+0.05101}_{-0.0463}$ . En la figura 6.2 se muestra la relación periodo-excentricidad para nuestros sistemas binarios. Los círculos vacíos corresponden a las binarias de nuestra muestra y los círculos negros son sistemas binarios de dos Santos et al. (2017).

Tabla 6.1: Parámetros del ajuste de la curva de velocidad radial del sistema binario KIC 6523216

Parámetros Fijos		
P (d)	14.313157	$\pm 0.000002$
T <sub>p</sub> (HJD/BJD)	2456001.767851	$\pm 0.000107$
T <sub>eff, 1</sub>	5750	—
T <sub>eff, 2</sub>	3302	—
[Fe/H]	-0.86	—
Parámetros Ajustados		
e	0.08112	+0.00552 -0.0050
omega (deg)	59.1483	+4.88171 -5.2976
gama (km/s)	22.06372	+0.1299 -0.1321
q = M <sub>2</sub> /M <sub>1</sub>	0.2304	+0.0026 -0.0029
asin( <i>i</i> ) (R <sub>⊙</sub> )	30.6569	+0.2311 -0.2437
Parámetros Derivados		
K1 (km/s)	20.3623	$\pm 0.3868$
K2 (km/s)	88.3591	$\pm 1.2820$
M <sub>1</sub> sin <sup>3</sup> ( <i>i</i> ) (M <sub>⊙</sub> )	1.5336	$\pm 0.0438$
M <sub>2</sub> sin <sup>3</sup> ( <i>i</i> ) (M <sub>⊙</sub> )	0.3534	$\pm 0.0110$
a <sub>1</sub> sin( <i>i</i> ) (R <sub>⊙</sub> )	5.7417	$\pm 0.1091$
a <sub>2</sub> sin( <i>i</i> ) (R <sub>⊙</sub> )	24.9152	$\pm 0.3616$

Tabla 6.2: Parámetros del ajuste de la curva de velocidad radial del sistema binario KIC 7037540

Parámetros Fijos		
P (d)	14.405858	$\pm 0.000002$
T <sub>p</sub> (HJD/BJD)	2455294.236375	$\pm 0.043946$
T <sub>eff, 1</sub>	5700	—
T <sub>eff, 2</sub>	2735	—
[Fe/H]	-0.30	—
Parámetros Ajustados		
e	0.03159	$+0.01256$ $-0.0129$
omega (deg)	-87.2933	$+4.2500$ $-1.95734$
gama (km/s)	-31.8471	$+0.1937$ $-0.2082$
q = M <sub>2</sub> /M <sub>1</sub>	0.1235	$+0.0052$ $-0.00561$
asin( <i>i</i> ) (R <sub>⊙</sub> )	30.6805	$+0.8472$ $-0.8482$
Parámetros Derivados		
K1 (km/s)	11.8573	$\pm 0.8079$
K2 (km/s)	95.9453	$\pm 4.9886$
M <sub>1</sub> sin <sup>3</sup> ( <i>i</i> ) (M <sub>⊙</sub> )	1.6618	$\pm 0.1781$
M <sub>2</sub> sin <sup>3</sup> ( <i>i</i> ) (M <sub>⊙</sub> )	0.2053	$\pm 0.0238$
a <sub>1</sub> sin( <i>i</i> ) (R <sub>⊙</sub> )	3.3745	$\pm 0.2299$
a <sub>2</sub> sin( <i>i</i> ) (R <sub>⊙</sub> )	27.3059	$\pm 1.4198$

Tabla 6.3: Parámetros del ajuste de la curva de velocidad radial del sistema binario KIC 6448768

Parámetros Fijos		
P (d)	16.486796	$\pm 0.000002$
T <sub>p</sub> (HJD/BJD)	2455640.562697	$\pm 0.000135$
T <sub>eff, 1</sub>	6020	—
T <sub>eff, 2</sub>	3701	—
[Fe/H]	-0.27	—
Parámetros Ajustados		
e	0.3413	$+0.05101$ $-0.0463$
omega (deg)	89.4912	$+0.3863$ $-0.8783$
gama (km/s)	26.0365	$+0.8185$ $-0.8055$
q = M <sub>2</sub> /M <sub>1</sub>	0.3411	$+0.0228$ $-0.0234$
asin( <i>i</i> ) (R <sub>⊙</sub> )	34.1385	$+1.3762$ $-1.5411$
Parámetros Derivados		
K1 (km/s)	28.3505	$\pm 3.02162$
K2 (km/s)	83.1012	$\pm 6.8375$
M <sub>1</sub> sin <sup>3</sup> ( <i>i</i> ) (M <sub>⊙</sub> )	1.4645	$\pm 0.2449$
M <sub>2</sub> sin <sup>3</sup> ( <i>i</i> ) (M <sub>⊙</sub> )	0.4995	$\pm 0.0901$
a <sub>1</sub> sin( <i>i</i> ) (R <sub>⊙</sub> )	8.6839	$\pm 0.9398$
a <sub>2</sub> sin( <i>i</i> ) (R <sub>⊙</sub> )	25.4544	$\pm 2.1485$

Tabla 6.4: Parámetros del ajuste de la curva de velocidad radial del sistema binario KIC 6698670

Parámetros Fijos		
P (d)	10.8158903	$\pm 0.0000007$
T <sub>p</sub> (HJD/BJD)	2454962.075695	$\pm 0.203079$
T <sub>eff, 1</sub>	5585	—
T <sub>eff, 2</sub>	2883	—
[Fe/H]	-0.26	—
Parámetros Ajustados		
e	0.131425	+0.004538 -0.004254
omega (deg)	13.558466	+3.858338 -4.061938
gama (km/s)	-38.684499	+0.116569 -0.122142
q = M <sub>2</sub> /M <sub>1</sub>	0.201476	+0.005698 -0.005501
asin( <i>i</i> ) (R <sub>⊙</sub> )	21.263005	+0.452527 -0.452260
Parámetros Derivados		
K1 (km/s)	16.824503	$\pm 0.752044$
K2 (km/s)	83.506191	$\pm 2.923342$
M <sub>1</sub> sin <sup>3</sup> ( <i>i</i> ) (M <sub>⊙</sub> )	0.917742	$\pm 0.063908$
M <sub>2</sub> sin <sup>3</sup> ( <i>i</i> ) (M <sub>⊙</sub> )	0.184903	$\pm 0.013864$
a <sub>1</sub> sin( <i>i</i> ) (R <sub>⊙</sub> )	3.565604	$\pm 0.159394$
a <sub>2</sub> sin( <i>i</i> ) (R <sub>⊙</sub> )	17.697401	$\pm 0.619629$

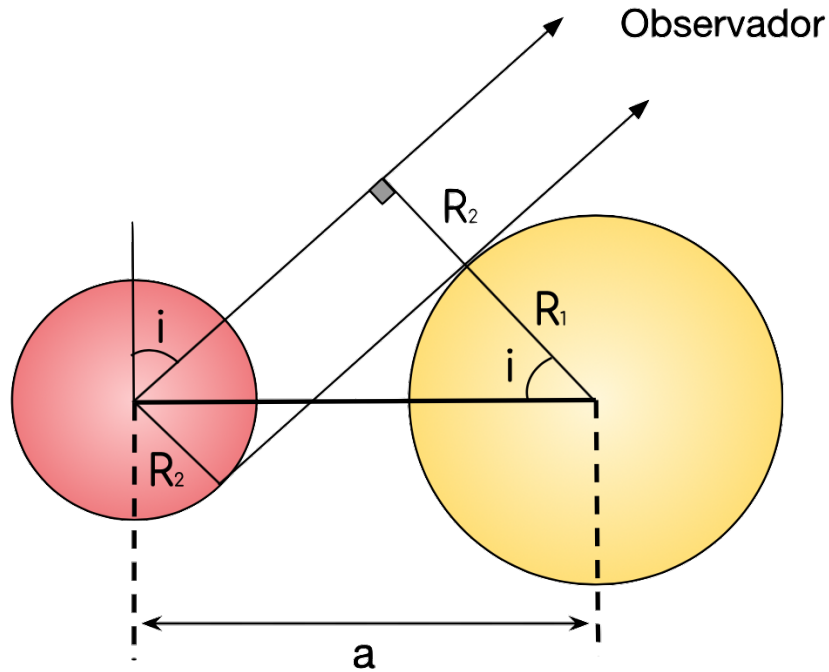


Figura 6.1: Límites de eclipses para un sistema binario cuyas estrellas tienen radios  $R_1$  y  $R_2$  y separación angular  $a$ .

Como se espera, los sistemas que tienen periodos relativamente cortos, al compararlos con la muestra de binarias de dos Santos et al. (2017), presentan órbitas de baja excentricidad, mientras que las binarias de periodos largos muestran un intervalo más amplio de excentricidad.

Estudios previos de la relación de periodo-excentricidad para estrellas binarias nos dicen que los sistemas con periodos orbitales por debajo de 10 días tienden a tener excentricidades cercanas a cero, mientras que aquellas con periodos entre 10 y 1000 días siguen una distribución aproximadamente plana de excentricidades (Kjurkchieva et al. 2016), un efecto que se debe a las escalas de tiempo para la circularización de las órbitas. De acuerdo con Duquennoy & Mayor (1991), la distribución de excentricidades en los sistemas con un periodo  $P > 1000$  d es una función solamente de la energía, y no depende de  $P$  (ver la figura 5 en Duquennoy y Mayor).

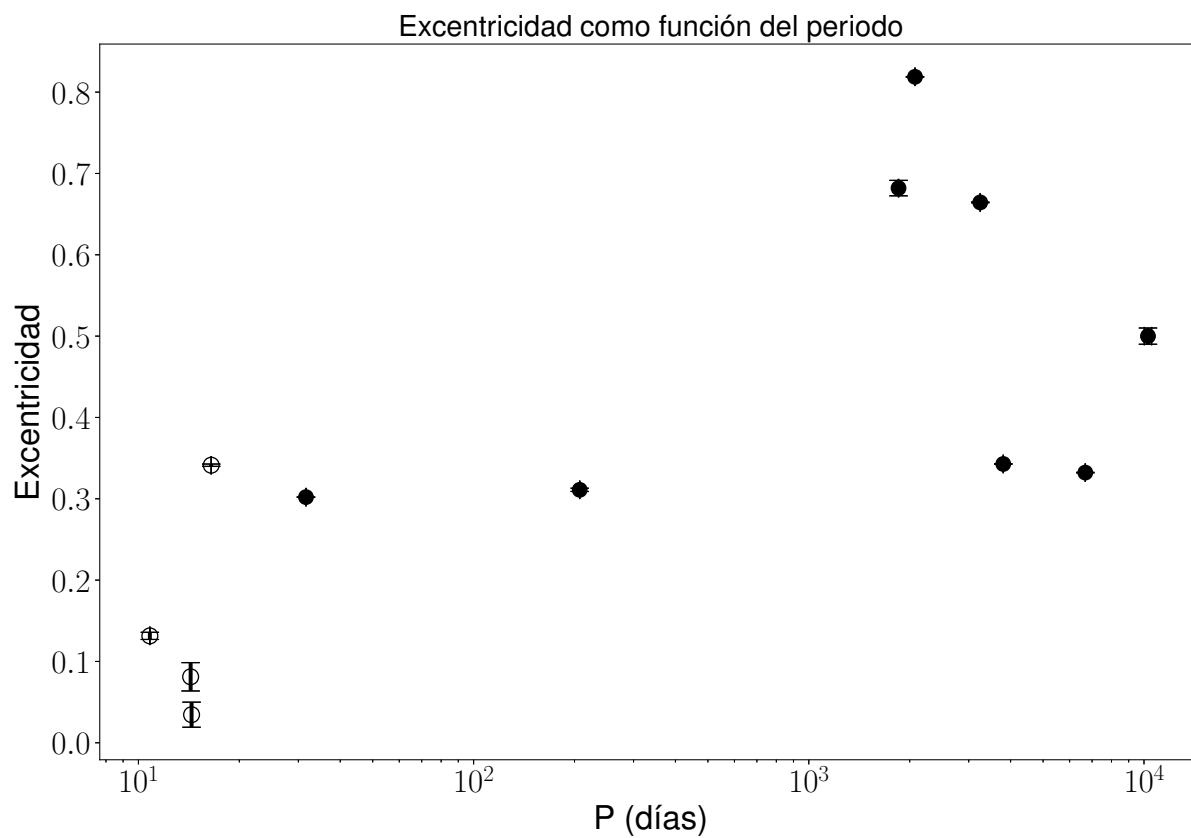


Figura 6.2: Excentricidad  $e$  como función del periodo  $P$ . Los círculos vacíos corresponden a las binarias de nuestra muestra y los círculos negros son sistemas binarios estudiados por dos Santos et al. (2017).

Tabla 6.5: Intervalos de masas dinámicas para las componentes estelares de las binarias estudiadas

KIC 6523216	$1.5399 M_{\odot} \leq M_1 \leq 1.5336 M_{\odot}$ $0.3549 M_{\odot} \leq M_2 \leq 0.3534 M_{\odot}$
KIC 7037540	$1.6687 M_{\odot} \leq M_1 \leq 1.6618 M_{\odot}$ $0.2061 M_{\odot} \leq M_2 \leq 0.2053 M_{\odot}$
KIC 6448768	$1.4705 M_{\odot} \leq M_1 \leq 1.4645 M_{\odot}$ $0.5016 M_{\odot} \leq M_2 \leq 0.4995 M_{\odot}$
KIC 6698670	$0.9215 M_{\odot} \leq M_1 \leq 0.9177 M_{\odot}$ $0.1857 M_{\odot} \leq M_2 \leq 0.1849 M_{\odot}$



# Capítulo 7

## Conclusiones

1. Obtuvimos las masas dinámicas de nuestra muestra de sistemas binarios de forma directa, ya que únicamente utilizamos las mediciones de velocidades radiales y los ajustes a las curvas de velocidad radial, y no fue necesario asumir nada sobre nuestras componentes estelares, ni hacer uso de modelos de evolución estelar, en cada sistema binario. La precisión con la que están dadas las masas es excelente (  $< 1\%$  ); a pesar de que se supone que  $i > 87^\circ$ , que es muy razonable dado que son binarias eclipsantes claramente separadas.
2. Estudiamos la relación periodo-excentricidad de nuestras binarias y encontramos que nuestros sistemas binarios, que tienen periodos entre 10 y 17 días, presentan órbitas de bajas excentricidades con excepción del sistema binario KIC 6448768, cuya excentricidad es de  $e = 0.3413$ . En caso de tener binarias de periodos más largos, esperaríamos un intervalo más amplio de excentricidad.
3. Este trabajo de investigación se basa en medir las velocidades radiales de las componentes estelares en cada una de las binarias espectroscópicas de doble línea, y del ajuste a las curvas de velocidad radial medimos una cota mínima de las masas dinámicas pero no las absolutas. Nuestro trabajo a futuro incluye analizar las curvas de luz de nuestras binarias, que además son binarias eclipsantes. Con este análisis podemos medir los radios estelares y la inclinación orbital de las binarias sin depender de ningún modelo. Y, por lo tanto, las masas con excelente precisión.

4. La medición directa de las masas dinámicas para las estrellas M nos permite mejorar los modelos de evolución estelar, al poner mejores restricciones en los parámetros fundamentales que para este tipo de estrellas son bastante difíciles de obtener (Kuznetsov et al. 2019).

# Apéndice A

## Derivación matemática de TODCOR

La técnica de correlación cruzada en dos dimensiones, llamada TODCOR, fue presentada por Zucker & Mazeh (1994). TODCOR requiere dos espectros de referencia, cada uno de ellos morfológicamente parecido a una de las componentes en el sistema binario. En esta metodología, la función de correlación cruzada es ahora una función de dos efectos Doppler o, equivalentemente, de dos velocidades radiales. Así, las curvas de velocidades radiales de ambas estrellas pueden obtenerse.

Las ecuaciones que seguimos están dadas de la siguiente forma:

Sea  $f(n)$  el espectro observado cuyo desplazamiento Doppler vamos a encontrar mediante la función de correlación cruzada, con un  $g(n)$  que es el espectro de referencia estacionario o con desplazamiento cero.

La función de correlación cruzada unidimensional de Tonry & Davis (1979) es,

$$C_{f,g}(s) = \frac{\sum_n f(n)g(n-s)}{N\sigma_f\sigma_g}, \quad (\text{A.1})$$

donde  $N$  es el número de celdas en el espectro, y las sigmas son las medias cuadráticas del espectro dadas por:

$$\sigma_f^2(s) = \frac{1}{N} \sum_n f(n)^2. \quad (\text{A.2})$$

Ahora, para el algoritmo de las funciones de correlación cruzada en 2D, tenemos que encontrar la correlación entre  $f(n)$  y los dos espectros de referencia, uno para la componente primaria y otro

para la secundaria, con dos corrimientos Doppler diferentes,  $s_1$  y  $s_2$ :

$$g_1(n - s_1) + \alpha g_2(n - s_2), \quad (\text{A.3})$$

donde  $\alpha$  es el cociente de intensidades de las dos estrellas, que por ahora consideraremos conocido.

Entonces, como una extensión de la ecuación de CCF en 1D, tenemos:

$$R_{f,g_1,g_2}(s_1, s_2, \alpha) = \frac{\sum_n f(n)[g_1(n - s_1) + \alpha g_2(n - s_2)]}{N\sigma_f\sigma_g(s_1, s_2)}, \quad (\text{A.4})$$

donde

$$\sigma_g^2(s_1, s_2) = \frac{1}{N} \sum_n [g_1(n - s_1) + \alpha g_2(n - s_2)]^2. \quad (\text{A.5})$$

El numerador de la ecuación de R puede escribirse como sigue:

$$\sum_n f(n)g_1(n - s_1) + \alpha \sum_n f(n)g_2(n - s_2). \quad (\text{A.6})$$

Ahora, para el denominador, notemos lo siguiente:

$$\sigma_g^2(s_1, s_2) = \frac{1}{N} \left[ \sum_n g_1^2(n - s_1) + 2\alpha \sum_n g_1(n - s_1)g_2(n - s_2) + \alpha^2 \sum_n g_2^2(n - s_2) \right] \quad (\text{A.7})$$

$$= \sigma_{g_1}^2 + 2\frac{\alpha}{N} \sum_n g_1(n - s_1)g_2(n - s_2) + \alpha^2 \sigma_{g_2}^2. \quad (\text{A.8})$$

El primer y tercer sumandos incluyen los términos de las medias cuadráticas de los espectros de referencia individuales. El segundo sumando tiene exactamente la misma forma que el numerador de la ecuación para una CCF en 1D. De esto se sigue que

$$R_{f,g_1,g_2}(s_1, s_2, \alpha) = \frac{\sum_n f(n)g_1(n - s_1) + \alpha \sum_n f(n)g_2(n - s_2)}{N\sigma_f \sqrt{\sigma_{g_1}^2 + 2\alpha/N \sum_n g_1(n)g_2[n - (s_2 - s_1)] + \alpha^2 \sigma_{g_2}^2}}. \quad (\text{A.9})$$

Ahora, por simplicidad, definimos lo siguiente:

$$C_1(s_1) \equiv \frac{1}{N\sigma_f\sigma_{g_1}} \sum_n f(n)g_1(n - s_1), \quad (\text{A.10})$$

$$C_2(s_2) \equiv \frac{1}{N\sigma_f\sigma_{g_2}} \sum_n f(n)g_2(n - s_2), \quad (\text{A.11})$$

$$c_{12}(s_2 - s_1) \equiv \frac{1}{N\sigma_{g_1}\sigma_{g_2}} \sum_n g_1(n)g_2[n - (s_2 - s_1)]. \quad (\text{A.12})$$

Utilizando esto llegamos a:

$$R_{f,g_1,g_2}(s_1,s_2,\alpha) = \frac{\sigma_{g_1}C_1(s_1) + \alpha\sigma_{g_2}C_2(s_2)}{\sqrt{\sigma_{g_1}^2 + 2\alpha\sigma_{g_1}\sigma_{g_2}C_{12}(s_2 - s_1) + \alpha^2\sigma_{g_2}^2}} = \frac{C_1(s_1) + \alpha'C_2(s_2)}{\sqrt{1 + 2\alpha'C_{12}(s_2 - s_1) + \alpha'^2}},$$

donde

$$\alpha' \equiv \left( \frac{\sigma_{g_2}}{\sigma_{g_1}} \right) \alpha.$$

Hasta aquí hemos asumido que el cociente de las intensidades de las dos componentes se conoce. Ahora discutiremos el caso en que no sea así. Queremos elegir, para cada corrimiento  $s_1$  y  $s_2$ , el valor de  $\alpha$  que maximiza la correlación entre  $f(n)$  y la combinación lineal de  $g_1$  y  $g_2$ . Esto significa que elegimos, para cada  $s_1$  y  $s_2$ , el valor de  $\alpha$  para el cual  $R$  alcanza su máximo. El valor de  $\alpha$  que da la máxima correlación es:

$$\hat{\alpha}(s_1, s_2) = \left( \frac{\sigma_{g_1}}{\sigma_{g_2}} \right) \left[ \frac{C_1(s_1)C_{12}(s_2 - s_1) - C_2(s_2)}{C_2(s_2)C_{12}(s_2 - s_1) - C_1(s_1)} \right],$$

y la correlación, para este valor de  $\alpha$ , es como sigue:

$$R_{f,g_1,g_2}[s_1, s_2, \hat{\alpha}(s_1, s_2)] = \sqrt{\frac{C_1^2(s_1) - 2C_1(s_1)C_2(s_2)C_{12}(s_2 - s_1) + C_2^2(s_2)}{1 - c_{12}^2(s_2 - s_1)}}.$$

Esta es una expresión compacta para la correlación, en la cual los dos espectros de referencia tienen un peso similar. En resumen, tenemos que calcular 3 funciones de correlación cruzada y luego aplicar la ecuación encontrada de  $\hat{\alpha}$  a un subdominio del plano  $(s_1, s_2)$ .

# Bibliografía

- Albaret, F. D., Allende Prieto, C., Almeida, A., et al. 2017, *Astrophysical Journal, Supplement*, 233, 25
- Allard, F., Homeier, D., & Freytag, B. 2011, in *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Vol. 448, 16th Cambridge Workshop on Cool Stars, Stellar Systems, and the Sun, ed. C. Johns-Krull, M. K. Browning, & A. A. West, 91
- Andersen, J. 1991, *Astron. & Astrophys., Reviews*, 3, 91
- Andrae, R., Schulze-Hartung, T., & Melchior, P. 2010, arXiv e-prints [[arXiv]1012.3754]
- Artymowicz, P., Clarke, C. J., Lubow, S. H., & Pringle, J. E. 1991, *Astrophysical Journal, Letters*, 370, L35
- Baraffe, I., Homeier, D., Allard, F., & Chabrier, G. 2015, *Astron. & Astrophys.*, 577, A42
- Baranne, A., Queloz, D., Mayor, M., et al. 1996, *Astron. & Astrophys., Supplement*, 119, 373
- Bate, M. R. 2004, in *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica Conference Series*, Vol. 21, *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica Conference Series*, ed. C. Allen & C. Scarfe, 175–183
- Bate, M. R. & Bonnell, I. A. 1997, *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.*, 285, 33
- Blanco-Cuaresma, S., Soubiran, C., Heiter, U., & Jofré, P. 2014, *Astron. & Astrophys.*, 569, A111
- Bonfils, X., Almenara, J.-M., Cloutier, R., et al. 2018, *Astron. & Astrophys.*, 618, A142
- Bouchy, F., Díaz, R. F., Hébrard, G., et al. 2013, *Astron. & Astrophys.*, 549, A49
- Boyajian, T. S., von Braun, K., van Belle, G., et al. 2014, *Astrophysical Journal*, 790, 166

- Caldwell, D. A., van Cleve, J. E., Jenkins, J. M., et al. 2010, in Proc. SPIE, Vol. 7731, Space Telescopes and Instrumentation 2010: Optical, Infrared, and Millimeter Wave, 773117
- Chabrier, G. & Baraffe, I. 2000, Annual Review of Astron and Astrophys, 38, 337
- Chabrier, G., Baraffe, I., Allard, F., & Hauschildt, P. 2000, Astrophysical Journal, 542, 464
- del Burgo, C. & Allende Prieto, C. 2018, Mon. Not. of the Royal Astron. Soc., 479, 1953
- dos Santos, L. A., Meléndez, J., Bedell, M., et al. 2017, Mon. Not. of the Royal Astron. Soc., 472, 3425
- Duchêne, G. & Kraus, A. 2013, Annual Review of Astron and Astrophys, 51, 269
- Duquennoy, A. & Mayor, M. 1991, Astron. & Astrophys., 248, 485
- Foreman-Mackey, D., Hogg, D. W., Lang, D., & Goodman, J. 2013, Public. of the Astron. Soc. Pac., 125, 306
- García Pérez, A. E., Allende Prieto, C., Holtzman, J. A., et al. 2016, Astronomical Journal, 151, 144
- Goodman, J. & Weare, J. 2010, Communications in Applied Mathematics and Computational Science, Vol. 5, No. 1, p. 65-80, 2010, 5, 65
- Husser, T.-O., Wende-von Berg, S., Dreizler, S., et al. 2013, Astron. & Astrophys., 553, A6
- Hut, P. & Bahcall, J. N. 1983, Astrophysical Journal, 268, 319
- Iglesias-Marzoa, R., López-Morales, M., & Jesús Arévalo Morales, M. 2015, Public. of the Astron. Soc. Pac., 127, 567
- Jao, W.-C., Henry, T. J., Beaulieu, T. D., & Subasavage, J. P. 2008, Astronomical Journal, 136, 840
- Jenkins, G. M. & Watts, D. G. 1968, Spectral analysis and its applications
- Kirk, B., Conroy, K., Prša, A., et al. 2016, Astronomical Journal, 151, 68
- Kjurkchieva, D., Vasileva, D., & Dimitrov, D. 2016, Astronomical Journal, 152, 189

- Kratter, K. M. 2011, in *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Vol. 447, *Evolution of Compact Binaries*, ed. L. Schmidtbreick, M. R. Schreiber, & C. Tappert, 47
- Kuznetsov, M. K., del Burgo, C., Pavlenko, Y. V., & Frith, J. 2019, *Astrophysical Journal*, 878, 134
- Lucy, L. B. 2014, *Astron. & Astrophys.*, 563, A126
- Mann, A. W., Brewer, J. M., Gaidos, E., Lépine, S., & Hilton, E. J. 2013, *Astronomical Journal*, 145, 52
- Mann, A. W., Deacon, N. R., Gaidos, E., et al. 2014, *Astronomical Journal*, 147, 160
- Martin, C., Mignard, F., Hartkopf, W. I., & McAlister, H. A. 1998, *Astron. & Astrophys., Supplement*, 133, 149
- Matijević, G., Prša, A., Orosz, J. A., et al. 2012, *Astronomical Journal*, 143, 123
- Morales, J. C., Ribas, I., Jordi, C., et al. 2009, *Astrophysical Journal*, 691, 1400
- Morse, J. A., Mathieu, R. D., & Levine, S. E. 1991, *Astronomical Journal*, 101, 1495
- Nidever, D. L., Holtzman, J. A., Allende Prieto, C., et al. 2015, *Astronomical Journal*, 150, 173
- Pringle, J. E. 1991, *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.*, 248, 754
- Prša, A., Batalha, N., Slawson, R. W., et al. 2011, *Astronomical Journal*, 141, 83
- Prša, A., Conroy, K. E., Horvat, M., et al. 2016a, *Astrophysical Journal, Supplement*, 227, 29
- Prša, A., Harmanec, P., Torres, G., et al. 2016b, *Astronomical Journal*, 152, 41
- Rajpurohit, A. S., Reylé, C., Allard, F., et al. 2013, *Astron. & Astrophys.*, 556, A15
- Reid, I. N. & Hawley, S. L. 2005, *New light on dark stars : red dwarfs, low-mass stars, brown dwarfs*
- Smith, R. C. 1995, *Observational Astrophysics*
- Sozzetti, A., Latham, D. W., Torres, G., et al. 2006, in *Bulletin of the American Astronomical Society*, Vol. 38, *American Astronomical Society Meeting Abstracts*, 1213



- Tonry, J. & Davis, M. 1979, *Astronomical Journal*, 84, 1511
- Trypsteen, M. F. M. & Walker, R. 2017, *Spectroscopy for Amateur Astronomers: Recording, Processing, Analysis and Interpretation* (Cambridge University Press)
- Wilson, J. C., Hearty, F., Skrutskie, M. F., et al. 2010, in *Proc. SPIE*, Vol. 7735, *Ground-based and Airborne Instrumentation for Astronomy III*, 77351C
- Wilson, J. C., Hearty, F., Skrutskie, M. F., et al. 2012, in *Proc. SPIE*, Vol. 8446, *Ground-based and Airborne Instrumentation for Astronomy IV*, 84460H
- Wilson, J. C., Hearty, F. R., Skrutskie, M. F., et al. 2019, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 131, 055001
- Winters, J. G., Hambly, N. C., Jao, W.-C., et al. 2015, *VizieR Online Data Catalog*, 514
- Wright, J. T. & Eastman, J. D. 2014, *Public. of the Astron. Soc. Pac.*, 126, 838
- Zasowski, G., Johnson, J. A., Frinchaboy, P. M., et al. 2013, *Astronomical Journal*, 146, 81
- Zucker, S. & Mazeh, T. 1994, *Astrophysical Journal*, 420, 806