



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO DE PROPIEDADES FÍSICAS DE UNA NUEVA
REPRESENTACIÓN DE ESTADOS DE ESPÍN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

ROGELIO TOBAR DE LA CRUZ

TUTOR

DR. CHRYSSOMALIS CHRYSSOMALAKOS



CIUDAD UNIVERSITARIA, Cd. Mx., 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Tobar, de la Cruz, Rogelio:

51 26 63 22

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

310324403

2. Datos del tutor

Dr.

Chryssomalis

Chryssomalakos

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Jerónimo Alonso

Cortez

Quezada

4. Datos del sinodal 2

Dra.

Andrea

Valdés

Hernández

5. Datos del sinodal 3

Dr.

José Alberto

Martín

Ruiz

6. Datos del sinodal 4

Dr.

Mariano

Chernicoff

Minsberg

7. Datos del trabajo escrito

Estudio de propiedades físicas de una nueva representación de estados de espín

67 P.

2020

Resumen

El tratamiento matemático del espín parte de la introducción de una base para la proyección de éste en las diferentes direcciones del espacio; en el caso de espín $1/2$ es usual tomar como base a los eigenestados del espín en z a partir de los cuales es posible expresar al resto de eigenestados y operadores. La existencia de estas bases permite representar cualquier estado de espín como una combinación lineal de sus elementos, con coeficientes en general complejos. En espín $1/2$ los coeficientes de esta combinación lineal, debido a la condición de normalización y la libertad de fase, hacen posible caracterizar a los estados como órbitas en S^3 .

Una forma de entender al espín, es mediante su comportamiento en un sistema conocido, para este propósito es natural que el sistema conste de un campo magnético, ya sea constante o variable. En el caso de un campo magnético constante las soluciones a la ecuación de Schrödinger indican que el espín precesa en torno a la dirección del campo, mientras que para un campo variable que rota con velocidad angular w en torno a un eje, el valor esperado del espín va en espiral sobre una esfera de radio $1/2$ y el área que barre depende de la frecuencia de rotación del campo magnético, exhibiendo así la existencia de una frecuencia de resonancia para la cual el valor esperado del espín cubre la totalidad de la esfera.

Un elemento recurrente en el estudio del espín son las constelaciones de Majorana que consisten en puntos distribuidos sobre la esfera unitaria. Dichos puntos provienen de la asociación de los coeficientes del estado de espín con los coeficientes de un polinomio, el llamado polinomio de Majorana. Las raíces de este polinomio son enviadas del plano complejo a la esfera unitaria mediante proyección estereográfica, constituyendo una representación del estado de espín original. Esta representación tiene la propiedad de

que una rotación del estado en la base original se traduce en la misma rotación en la constelación de Majorana, lo que permite identificar simetrías del estado.

En los párrafos anteriores se ha expuesto una idea común, y es que los estados de espín admiten distintas representaciones que pueden conectarse entre sí y revelar características del estado. El objetivo principal de esta tesis es construir una representación de estados de espín mediante estados del oscilador armónico tridimensional (SHO3D), e indagar sobre la relación entre las cantidades físicas de la representación y del estado. Para este propósito se han analizado los grupos y álgebras de Lie con el fin de encontrar representaciones a partir del álgebra que satisfacen, en este caso el álgebra de $SU(2)$. Antes de abordar el caso tridimensional se pasa por una representación 2D construida a partir de las matrices de Pauli y los operadores de creación y aniquilación del oscilador armónico bidimensional, considerando osciladores independientes orientados paralelos a la base canónica de \mathbb{R}^2 , en ésta se ha notado que una rotación del estado reproduce una rotación por la mitad del ángulo en la representación, para rotaciones en torno al eje z . En el camino a la representación SHO3D ha sido necesario incluir el formalismo de la matriz de densidad y las matrices de polarización, éstas últimas han permitido obtener la representación de la acción de $SU(2)$ sobre matrices $n \times n$ y la descomposición en esta base determinó los coeficientes para la representación. Con base en lo anterior la representación SHO3D fue contruida definiendo tres operadores que satisfacen el álgebra de $SU(2)$. A partir de ellos, un estado base y los coeficientes de la descomposición en matrices de polarización se obtuvo la representación mencionada. Ésta rota de igual forma que el estado de espín y tiene valor esperado del momento lineal igual a cero, debido a que las funciones de onda son reales. Posteriormente se buscó alguna relación entre las cantidades habituales: energía, momento lineal, posición y el valor esperado de espín; pero no hubo relación alguna, así que se recurrió a analizar alguna otra cantidad física. Inicialmente se buscó relacionar el enredamiento cuántico del estado de espín con la energía de la representación SHO3D, esto se hizo a partir de dos definiciones de enredamiento; la primera como la mínima distancia del estado al subespacio de estados separables y la segunda a través de la entropía de Shannon. Con la primera definición no hubo

relación alguna mientras que con la segunda se consiguió una relación monótona pero aún poco clara.

Finalmente se exploró la idea de la anticoherencia; en este punto fue crucial el trabajo de D. Baguette y J. Martin quienes desarrollaron una serie de medidas de anticoherencia sobre una base axiomática que permite asociar un número entre 0 y 1 a un estado de espín de acuerdo a su nivel de anticoherencia, siendo 0 un estado coherente y 1 uno anticoherente de orden t , donde t es un entero para el cual el valor esperado de la k -ésima potencia de $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}$ es independiente de \mathbf{n} para todo k menor que t , siendo $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$ representaciones irreducibles de dimensión $2j + 1$ de los operadores de espín y \mathbf{n} un vector unitario real.

Haciendo pruebas con una de las medidas de anticoherencia (anticoherencia basada en pureza) y la representación SHO3D se encontró que la energía de la representación es proporcional a una combinación lineal de las anticoherencias linealmente independientes de orden k , con k menor que $t = 2s$, siendo s el espín. Esto se ha comprobado para espines 1, 3/2, 2 y 5/2; el caso general no ha sido abordado, pero debido a lo distintos que son los caminos involucrados en la obtención de la representación SHO3D y las medidas de anticoherencia se cree que este comportamiento se cumple para todo espín s y es un tema que podría desarrollarse en el futuro.

Índice general

Resumen	II
1. Conceptos fundamentales	3
1.1. Sistemas de espín $1/2$	3
1.2. Espín $1/2$ en un campo magnético variable	6
1.2.1. Espín inicialmente orientado en la dirección del campo magnético	12
1.3. Constelaciones de Majorana	13
1.3.1. Proyección estereográfica desde el polo sur	14
1.3.2. Pruebas de mapeos estado-constelación	14
1.3.3. Rotación de estados de espín arbitrario	17
2. Representación de Schwinger y SHO3D.	18
2.1. Grupos y álgebras de Lie	18
2.1.1. Representación de $SU(2)$ con matrices 2×2	19
2.1.2. Representación de Schwinger de $SU(2)$ con estados del oscilador armónico bidimensional	20
2.1.3. Representación de Schwinger de $SU(2)$ con excitaciones circulares del oscilador armónico bidimensional	23
2.2. Representación de $SU(2)$ sobre matrices $n \times n$	26
2.2.1. Descomposición de la matriz de densidad en la base de las matrices de polarización	27
2.2.2. Representaciones: suma directa y producto tensorial	28
2.2.3. Obtención de la representación de $SU(2)$ sobre matrices $n \times n$	29

2.3. Representación de estados de espín mediante estados del oscilador armónico tridimensional (SHO3DR)	33
3. Propiedades de la representación SHO3D	35
3.0.1. Gráficas de las representaciones de estados de espín mediante estados de SHO3D	35
3.0.2. Rotación de los estados de espín y rotación de los estados SHO3D	39
4. Propiedades físicas de SHO3DR	42
4.0.1. Descripción de sistemas de espín mediante productos tensoriales de espín $1/2$	42
4.0.2. Enredamiento cuántico	43
4.0.3. Relación entre enredamiento y energía para un estado de espín 1	45
4.1. Coherencia y anticoherencia en sistemas de espín	47
4.1.1. Definición axiomática de medidas de anticoherencia para estados de espín puros	48
4.1.2. Medidas de anticoherencia basadas en la pureza	49
4.2. Anticoherencia en sistemas de espín y energía de la representación SHO3D	50
4.2.1. Pruebas de la relación entre anticoherencia y espín	50
5. Conclusiones	63

Índice de figuras

1.1. Curvas obtenidas al mapear estereográficamente las órbitas obtenidas al rotar tres estados distintos sobre la 3-esfera. Esto se hizo tomando el estado original, descomponiéndolo de acuerdo a la ecuación (1.4) y mapeando la órbita usando la ecuación (1.5).	5
1.2. Se muestran las curvas juntas primero por pares y al final todas, como puede apreciarse se encuentran entrelazadas.	6
1.3. Se observa el comportamiento de la probabilidad de medir el espín arriba $ \psi_+ ^2$ o abajo $ \psi_- ^2$ para una frecuencia de rotación del campo magnético de $\omega_1 = 0.92$, al evolucionar al sistema durante $t = 200$. . .	9
1.4. Se muestra la evolución de la "orientación" espacial del espín (línea roja) encajada en una esfera de radio $1/2$ centrada en el origen, para $\omega_1 = 0.92$. Como puede verse el espín se mantiene en una zona limitada y centrada en el punto $(0,0,1/2)$	9
1.5. Se observa el comportamiento de la probabilidad de medir el espín arriba $ \psi_+ ^2$ o abajo $ \psi_- ^2$ para una frecuencia de rotación del campo magnético de $\omega_2 = 0.99$, al evolucionar al sistema durante $t = 1000$. . .	10
1.6. Se muestra la evolución de la "orientación" espacial del espín (línea roja) encajada en una esfera de radio $1/2$ centrada en el origen, para $\omega_2 = 0.99$. En este caso el espín se mueve en una zona más amplia llegando a abarcar la mitad de la esfera, con el movimiento centrado en el punto $(0,0,1/2)$	10

1.7. Se observa el comportamiento de la probabilidad de medir el espín arriba $|\psi_+|^2$ o abajo $|\psi_-|^2$ para una frecuencia de rotación del campo magnético de $\omega_3 = 1$, al evolucionar al sistema durante $t = 1000$ 11

1.8. Se muestra la evolución de la “orientación” espacial del espín (línea roja) encajada en una esfera de radio $1/2$ centrada en el origen, para $\omega_3 = 1$. Ahora el espín se mueve por toda la esfera partiendo del punto $(0,0,1/2)$ y consiguiendo llegar a $(0,0,-1/2)$ 11

1.9. Se muestra la evolución de la “orientación” espacial del espín (línea roja) encajada en una esfera de radio $1/2$ centrada en el origen, para una frecuencia de $\omega = 0.05$ al evolucionar durante $t = 63$. Puede observarse que $\langle \vec{S} \rangle$ describe una cicloide en torno al círculo que sigue el campo magnético. 13

1.10. Constelación de Majorana del estado $|A\rangle$ de la ecuación (1.27) 15

1.11. Constelaciones de un Hexaedro y Tetraedro en S^2 16

1.12. Constelación de un Octaedro en S^2 16

2.1. Diagrama de apoyo para la representación de Schwinger. El par de números que etiquetan a cada punto son los números cuánticos del oscilador 2D y las diagonales contienen estados degenerados. 21

2.2. Representación de Schwinger, mediante funciones de onda del oscilador armónico bidimensional (SHO2D), de los estados obtenidos a partir de las constelaciones de un tetraedro, hexaedro, octaedro y dodecaedro. Graficando directamente la función de onda. 22

2.3. Representación de Schwinger, mediante funciones de onda de excitaciones circulares del oscilador armónico bidimensional, de los estados obtenidos a partir de las constelaciones de un tetraedro y hexaedro. Graficando la norma al cuadrado de la función de onda. 25

2.4. Representación de Schwinger, mediante funciones de onda de excitaciones circulares del oscilador armónico bidimensional, de los estados obtenidos a partir de las constelaciones de un octaedro y dodecaedro. Graficando la norma al cuadrado de la función de onda. 25

3.1. Representación del estado de espín $1/2: |+\rangle$ mediante estados del SHO3D. Tomando la superficie de nivel que corresponde a la función de onda de la ecuación (3.1) igualada a 0.00001 36

3.2. Representación del estado de espín $1/2: |-\rangle$ mediante estados del SHO3D. Tomando la superficie de nivel que corresponde a la función de onda de la ecuación (3.2) igualada a 0.00001 36

3.3. Representación del estado de espín $1/2: \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - i|-\rangle)$ mediante estados del SHO3D. Tomando la superficie de nivel que corresponde a la función de onda de la ecuación (3.3) igualada a 0.00001 37

3.4. Representación del estado de espín $1: |1, 1\rangle$ mediante estados del SHO3D. Tomando la superficie de nivel que corresponde a la función de onda de la ecuación (3.4) igualada a 0.00001 37

3.5. Representación del estado de espín $1: \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 1\rangle - i|1, -1\rangle)$ mediante estados del SHO3D. Tomando la superficie de nivel que corresponde a la función de onda de la ecuación (3.5) igualada a 0.00001 38

3.6. Representación de los estados de espín $1/2: |+\rangle$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - i|-\rangle)$, siendo el segundo una rotación del primero en torno al eje x por un ángulo de 90 grados. Tomando las superficies de nivel que corresponden a las funciones de onda igualadas a 0.00001 39

3.7. Representación de los estados de espín $1/2: \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - i|-\rangle)$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}(-i|+\rangle + |-\rangle)$, siendo el segundo una rotación del primero en torno al eje z por un ángulo de 180 grados. Tomando las superficies de nivel que corresponden a las funciones de onda igualadas a 0.00001 40

3.8. Representación de los estados de espín 1: $ 1, 1\rangle$ y $\frac{1}{2} (1, 1\rangle - \sqrt{2} 1, 0\rangle - 1, -1\rangle)$, siendo el segundo una rotación del primero en torno al eje x por un ángulo de 90 grados. Tomando las superficies de nivel que corresponden a las funciones de onda igualadas a 0.00001	40
3.9. Representación de los estados de espín 1: $\frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1\rangle - i 1, -1\rangle)$ y $\frac{1}{\sqrt{2}} (-i 1, 1\rangle + 1, -1\rangle)$, siendo el segundo una rotación del primero en torno al eje z por un ángulo de 90 grados. Tomando las superficies de nivel que corresponden a las funciones de onda igualadas a 0.00001	41
4.1.	46
4.2. Energía Vs Enredamiento	47
4.3. Constelación de Majorana de espín 1 formada por dos estrellas contenidas en el plano xz y formando un ángulo α respecto a z	51
4.4.	52
4.5. Energía Vs Anticoherencia	53
4.6. Constelación de Majorana de un estado de espín 3/2 formada por dos estrellas contenidas en el plano xz y formando un ángulo α respecto a z , más una estrella colocada arbitrariamente con orientación dada por θ_1 y ϕ_1	54
4.7. En estas graficas se han tomado $\theta_1 = 0, \phi_1 = \pi/2$. En b) la curva azul es la anticoherencia de orden 1, mientras que la verde es de orden 2	55
4.8. Energía Vs Anticoherencia. En esta gráfica se han tomado $\theta_1 = 0, \phi_1 = \pi/2$. La línea morada corresponde a la anticoherencia de orden 1 y la línea negra a la anticoherencia de orden 2.	56
4.9. Constelación de Majorana de un estado de espín 2 formada por dos estrellas contenidas en el plano xz y formando un ángulo α respecto a z , más dos estrellas colocadas arbitrariamente con orientación dada por $\theta_1, \phi_1, \theta_2$ y ϕ_2 respectivamente.	56

4.10. En estas gráficas se han tomado $\theta_1 = \pi/4, \phi_1 = \pi/4, \theta_2 = \pi/8, \phi_2 = \pi/6$. En b) la curva azul es la anticonherencia de orden 1, la verde de orden 2 y la negra de orden 3. 57

4.11. Energía Vs Anticonherencia. En esta gráfica se han tomado $\theta_1 = \pi/4, \phi_1 = \pi/4, \theta_2 = \pi/8, \phi_2 = \pi/6$. La curva azul es la anticonherencia de orden 1, la verde de orden 2, la negra de orden 3 y la naranja de orden 4. . . 58

4.12. Energía Vs $(38 A1 + 10 A2 + 99)/35$. En esta gráfica se han tomado $\theta_1 = \pi/4, \phi_1 = \pi/4, \theta_2 = \pi/8, \phi_2 = \pi/6$ 59

4.13. Constelación de Majorana de un estado de espín $5/2$ formada por dos estrellas contenidas en el plano xz y formando un ángulo α respecto a z , más tres estrellas colocadas en el polo norte. 60

4.14. En b) la curva amarilla es la anticonherencia de orden 1, la azul de orden 2, la negra de orden 3 y la verde de orden 4. 61

4.15. Energía Vs Anticonherencia. La curva amarilla es la anticonherencia de orden 1, la azul de orden 2, la negra de orden 3 y la verde de orden 4. 61

4.16. Energía Vs $(1146 + 495 A1 + 200 A2)/378$ 62

Introducción

Históricamente el estudio del espín comenzó con el experimento de Stern-Gerlach en 1921. Este inicialmente no poseía una explicación teórica hasta que en 1926 S.Goudsmit y G.Uhlenbeck propusieron la idea del *Momento angular intrínseco*. Fue W.Pauli quien postuló la existencia de una propiedad cuántica bivaluada, sin análogo clásico y realizó el primer tratamiento matemático del espín, mostrando así la importancia de tratar de esta manera a esta nueva cantidad. Otra contribución importante vino de la mano de Ettore Majorana en 1932, quien ideó una representación geométrica del espín a través de puntos distribuidos en la esfera unitaria, dicha representación es de gran utilidad para identificar simetrías.

A lo largo de los años el estudio de los estados de espín ha sido de gran interés, por un lado por ser una cantidad sin análogo clásico y también debido a la existencia de aplicaciones, siendo una de las más destacables la computación cuántica. En este contexto los llamados *estados coherentes* han recibido particular atención, por ser considerados los estados más parecidos a un estado clásico, en cuanto al valor esperado.

En contraparte a los estados coherentes existen los *estados anticoherentes* caracterizados por tener mayor información direccional, siendo así los estados “menos clásicos”. Esta característica los vuelve interesantes pues maximizan los efectos cuánticos.

En este trabajo de investigación se aborda la construcción de una nueva representación de estados de espín a partir de funciones de onda del oscilador armónico cuántico tridimensional y se estudian sus propiedades físicas. Para este propósito el trabajo ha sido dividido en 4 capítulos en los que se exponen los conceptos fundamentales, las herramientas matemáticas, el camino seguido para obtener la representación y finalmente un conjunto de pruebas donde se estudian las propiedades físicas.

En el capítulo 1 se comienza exponiendo el tratamiento usual de los estados de espín siguiendo a J.J.Sakurai [1] y se estudia someramente un enfoque geométrico [2]. Posteriormente se analiza un problema conocido: espín en un campo magnético variable (véanse [3], [4], [5] y [6]) y se introducen las constelaciones de Majorana [7] como una

herramienta útil para identificar simetrías [8], seguido de un análisis de la rotación de espín (véanse [9], [10], [11] y [12]).

En el capítulo 2 se exponen las herramientas matemáticas necesarias para la construcción de la representación de espín y se construyen un par de éstas, la primera la representación de Schwinger y por último la representación por funciones de onda del oscilador armónico cuántico tridimensional (SHO3DR). En el camino ha sido necesario introducir las álgebras de Lie, el grupo $SU(2)$, la acción de éste sobre matrices $n \times n$, las matrices de densidad y de polarización, así como algunos teoremas relacionados con la teoría de representaciones (véanse [13], [14], [15], [16], [17] y [18]). Por su parte, para la representación de Schwinger fueron útiles las siguientes referencias [19], [20], [21] y [22] mientras que para SHO3DR se pueden consultar las notas de N.Wheeler [23].

Una vez construida la representación SHO3D en el capítulo 3 se muestran gráficas para diferentes estados, se exponen algunas de sus propiedades y se hacen pruebas con rotaciones.

En el capítulo 4 se aborda el problema central de este trabajo, tomando como base la descripción de sistemas de espín arbitrario (s) como productos tensoriales de espín $1/2$ [24], el enredamiento cuántico y la anticoherencia. Inicialmente se hicieron pruebas con la medida de enredamiento definida en [25] [26] y luego con la entropía de Shannon [27], buscando una posible relación con la energía de SHO3DR. Por último se abordó el concepto de anticoherencia con base en el trabajo de D.Baguette y J.Martin (véanse [28], [29] y [30]) y se realizaron varias pruebas para relacionarlo con la energía de SHO3D.

Capítulo 1

Conceptos fundamentales

1.1. Sistemas de espín 1/2

Un estado arbitrario de un sistema de espín 1/2 puede expresarse de la siguiente forma

$$|\alpha\rangle = C_+|+\rangle + C_-|-\rangle, \quad (1.1)$$

tomando como base los eigenvectores del operador de espín S_z , con $S_z|\pm\rangle = \pm 1/2|\pm\rangle$ y $\hbar = 1$. Los coeficientes C_{\pm} en general son complejos y su módulo al cuadrado es la probabilidad de encontrar al sistema en el estado $|\pm\rangle$ después de aplicar el operador S_z .

Los eigenvectores del operador S_z pueden representarse de la siguiente forma

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ |-\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

en este caso los operadores de espín son

$$S_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_x, \quad S_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_y,$$

$$S_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_z, \quad (1.3)$$

con $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ las matrices de Pauli.

Como se sabe, se puede calcular el valor esperado de cualquiera de los tres operadores de espín S_x, S_y, S_z realizando la siguiente operación $\langle \alpha | S_x | \alpha \rangle, \langle \alpha | S_y | \alpha \rangle, \langle \alpha | S_z | \alpha \rangle$. Si se realizan muchos experimentos determinando en cada caso el valor de los operadores de espín aplicados a $|\alpha\rangle$ se puede caracterizar al estado asignándole una dirección, en la que al realizar la medición del espín el resultado sea siempre 1/2 [1].

Por otro lado, considerando a los coeficientes $C_+ = x + iy$ y $C_- = w + iz$ la restricción $|C_+|^2 + |C_-|^2 = 1$ se traduce en la relación $x^2 + y^2 + w^2 + z^2 = 1$ lo que indica que los puntos (x, y, w, z) se encuentran sobre la superficie de una 3-esfera encajada en \mathbb{R}^4 .

Si ahora se toma un estado

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} C_+ \\ C_- \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

y se rota con $|\alpha\rangle' = e^{i\eta} |\alpha\rangle$ resulta que los estados rotados se encuentran sobre un círculo máximo encajado en \mathbb{R}^4 , esto se puede ver debido a que $\frac{d^2|\alpha\rangle'}{d\eta^2} = -e^{i\eta} |\alpha\rangle$, dicha relación exhibe que la aceleración es antiparalela al vector de posición en todo punto de la órbita dando como resultado que esta sea un círculo.

Para cada estado se tiene una órbita de acuerdo a lo anterior, donde η es el parámetro que la describe, con estas órbitas se puede cubrir la totalidad de S^3 sin que se intersecten entre ellas [2].

Además éstas pueden ser mapeadas a \mathbb{R}^3 mediante proyección estereográfica usando las relaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \frac{x \cos \eta - y \sin \eta}{1 - w \sin \eta - z \cos \eta}, \\ \mathbf{Y} &= \frac{x \sin \eta + y \cos \eta}{1 - w \sin \eta - z \cos \eta}, \\ \mathbf{Z} &= \frac{w \cos \eta - z \sin \eta}{1 - w \sin \eta - z \cos \eta}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Considerando los siguientes casos, se puede visualizar el comportamiento descrito anteriormente:

- Caso 1: $|\alpha\rangle = \frac{1+i}{2}|+\rangle + \frac{1-i}{2}|-\rangle$
- Caso 2: $|\alpha\rangle = \frac{3+4i}{\sqrt{50}}|+\rangle + \frac{3-4i}{\sqrt{50}}|-\rangle$
- Caso 3: $|\alpha\rangle = \frac{2}{\sqrt{13}}|+\rangle + \frac{3i}{\sqrt{13}}|-\rangle$.

Las órbitas proyectadas estereográficamente se muestran en la figura 1.1, además en la figura 1.2 se muestran graficadas en pares y juntas, en donde puede apreciarse que las curvas están entrelazadas.

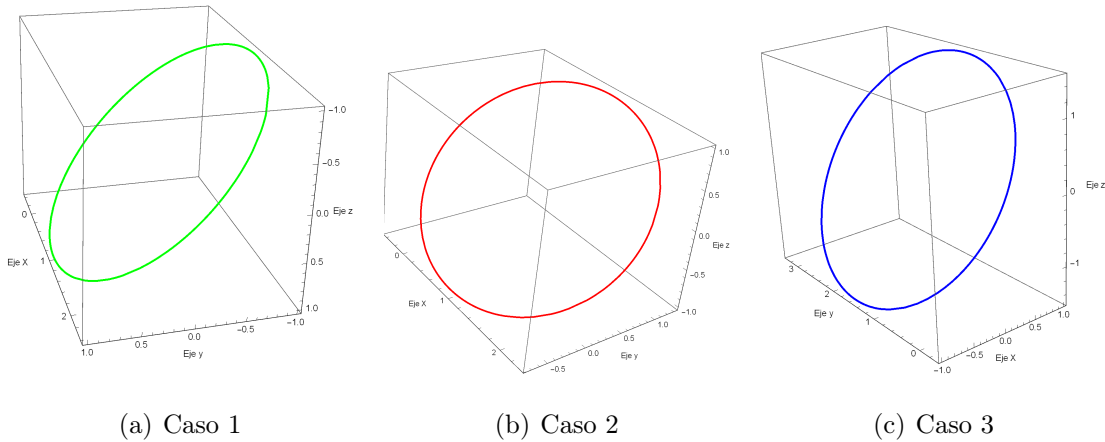


Figura 1.1: Curvas obtenidas al mapear estereográficamente las órbitas obtenidas al rotar tres estados distintos sobre la 3-esfera. Esto se hizo tomando el estado original, descomponiéndolo de acuerdo a la ecuación (1.4) y mapeando la órbita usando la ecuación (1.5).

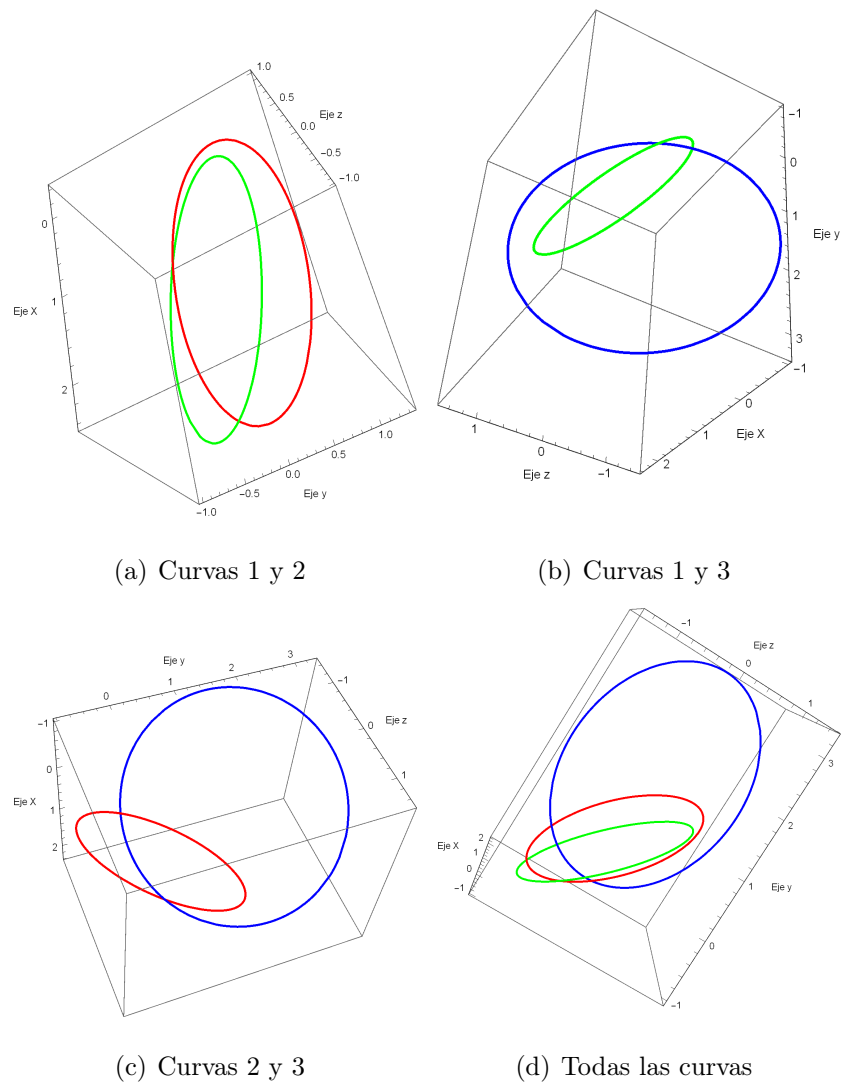


Figura 1.2: Se muestran las curvas juntas primero por pares y al final todas, como puede apreciarse se encuentran entrelazadas.

1.2. Espín 1/2 en un campo magnético variable

Con el fin de entender el comportamiento del espín en un sistema físico se resolverá el caso de espín 1/2 en un campo magnético que rota en el plano xy , observando qué ocurre con el valor esperado del espín a medida que el sistema evoluciona en el tiempo, primero con el espín “orientado” en la dirección positiva del eje- z y posteriormente con la condición inicial de que “apunte” en la dirección del campo magnético al comenzar

la evolución.

El hamiltoniano para el sistema en cuestion es [3][4]

$$\mathcal{H} = \vec{B} \cdot \vec{S}. \quad (1.6)$$

Ahora, se toma un campo magnético que varía de la siguiente forma

$$\vec{B}(t) = (B_1 \cos \omega t, B_1 \sin \omega t, B_0), \quad (1.7)$$

y el espín “orientado” inicialmente en la dirección positiva del eje z. De acuerdo a lo anterior el hamiltoniano se convierte en

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} B_0 & B_1 e^{-i\omega t} \\ B_1 e^{i\omega t} & -B_0 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Se propone como solución un espinor de la forma

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_+(t) \\ \psi_-(t) \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

la ecuación a resolver es

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi}_+(t) \\ \dot{\psi}_-(t) \end{pmatrix} = -i\mathcal{H} \begin{pmatrix} \psi_+(t) \\ \psi_-(t) \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

con condiciones iniciales $\psi_+ = 1$, $\psi_- = 0$. Para resolver el problema se cambia de sistema a uno que gire con el campo magnético, esto se realiza mediante una transformación unitaria dada por [5]

$$u(t) = e^{-i\omega t \sigma_z / 2} = \begin{pmatrix} e^{-i\omega t / 2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t / 2} \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

realizando la sustitución $\psi = u\psi'$ se llega a

$$\dot{\psi}' = -i(u^{-1}\mathcal{H}u - iu^{-1}\dot{u})\psi', \quad (1.12)$$

donde el término $u^{-1}\mathcal{H}u - iu^{-1}\dot{u}$ es el hamiltoniano en el sistema primado. De esto se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{\psi}'_+ &= -\frac{i}{2} [(B_0 - \omega)\psi'_+ + B_1\psi'_-], \\ \dot{\psi}'_- &= -\frac{i}{2} [(\omega - B_0)\psi'_- + B_1\psi'_+], \end{aligned} \quad (1.13)$$

con soluciones

$$\begin{aligned} \psi'_+(t) &= \frac{i(\omega - B_0)}{2\gamma} \sin \gamma t + \cos \gamma t, \\ \psi'_-(t) &= -\frac{iB_1}{2\gamma t} \sin \gamma t, \\ \gamma &= \frac{1}{2} \sqrt{(B_0 - \omega)^2 + B_1^2}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Para obtener las soluciones en el sistema original basta con rotar el espinor anterior, haciendo esto resulta:

$$\begin{aligned} \psi_+(t) &= e^{-i\omega t/2} \psi'_+(t), \\ \psi_-(t) &= e^{i\omega t/2} \psi'_-(t). \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$(1.16)$$

Por otro lado, se tienen las siguientes expresiones para los valores esperados de la proyección de espín en cada uno de los ejes [6]

$$\langle S_x \rangle = \text{Re}[\psi_-^* \psi_+], \quad \langle S_y \rangle = \text{Im}[\psi_-^* \psi_+], \quad \langle S_z \rangle = \frac{1}{2} (|\psi_+|^2 - |\psi_-|^2). \quad (1.17)$$

A continuación se visualizará el comportamiento del sistema con los siguientes valores para el campo magnético $B_0 = 1$, $B_1 = 0.01$ y tres valores distintos para la frecuencia

$\omega_1 = 0.92$, $\omega_2 = 0.99$ y $\omega_3 = 1$.

Con $\omega_1 = 0.92$ se tiene el comportamiento expuesto en la figura 1.3 para la probabilidad de medir el espín arriba o abajo

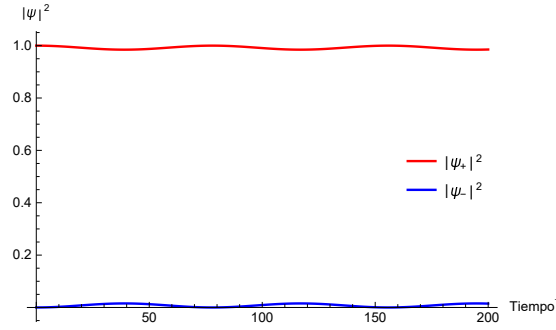


Figura 1.3: Se observa el comportamiento de la probabilidad de medir el espín arriba $|\psi_+|^2$ o abajo $|\psi_-|^2$ para una frecuencia de rotación del campo magnético de $\omega_1 = 0.92$, al evolucionar al sistema durante $t = 200$.

Mientras que el comportamiento de $\langle \vec{S} \rangle$ puede observarse en la figura 1.4 al evolucionar al sistema durante $t_1 = 30$

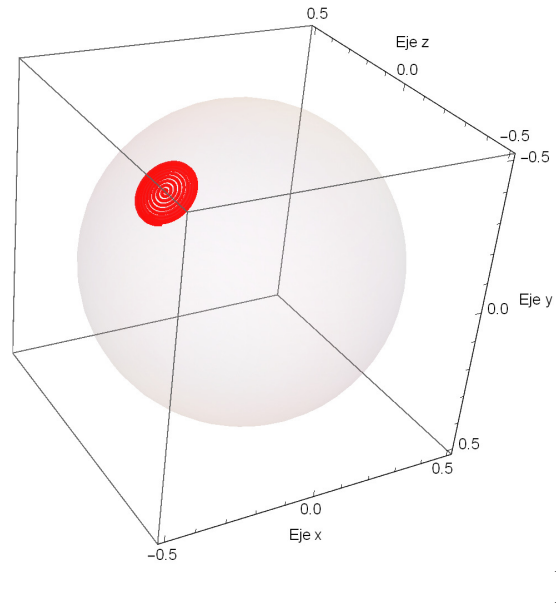


Figura 1.4: Se muestra la evolución de la “orientación” espacial del espín (línea roja) encajada en una esfera de radio $1/2$ centrada en el origen, para $\omega_1 = 0.92$. Como puede verse el espín se mantiene en una zona limitada y centrada en el punto $(0,0,1/2)$

Para $\omega_2 = 0.99$ se observa el comportamiento en la figura 1.5

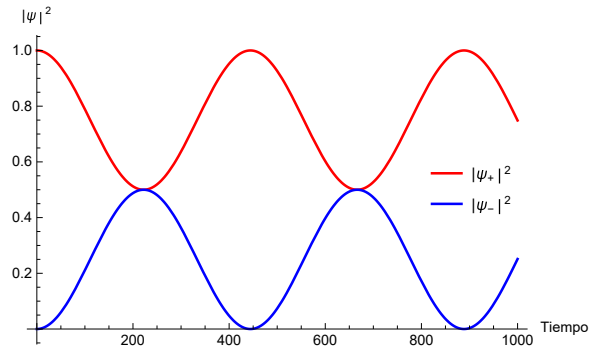


Figura 1.5: Se observa el comportamiento de la probabilidad de medir el espín arriba $|\psi_+|^2$ o abajo $|\psi_-|^2$ para una frecuencia de rotación del campo magnético de $\omega_2 = 0.99$, al evolucionar al sistema durante $t = 1000$.

Mientras que $\langle \vec{S} \rangle$ se visualiza en la figura 1.6, al evolucionar al sistema durante $t_2 = 200$

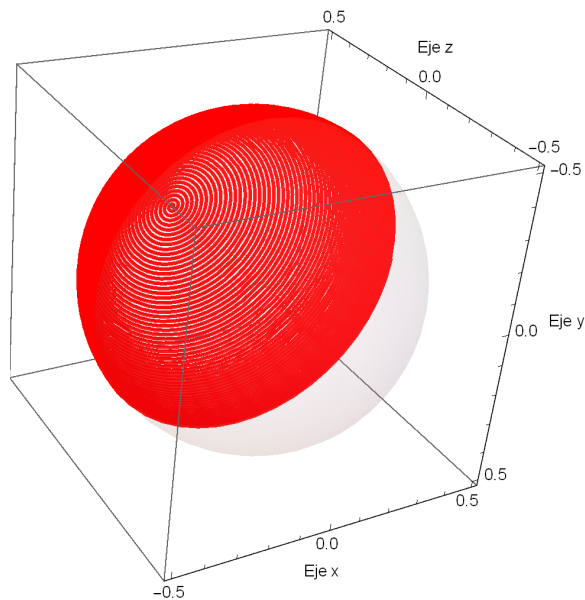


Figura 1.6: Se muestra la evolución de la "orientación" espacial del espín (línea roja) encajada en una esfera de radio $1/2$ centrada en el origen, para $\omega_2 = 0.99$. En este caso el espín se mueve en una zona más amplia llegando a abarcar la mitad de la esfera, con el movimiento centrado en el punto $(0,0,1/2)$.

Por último, con $\omega_3 = 1$ se tiene la grafica mostrada en la figura 1.7

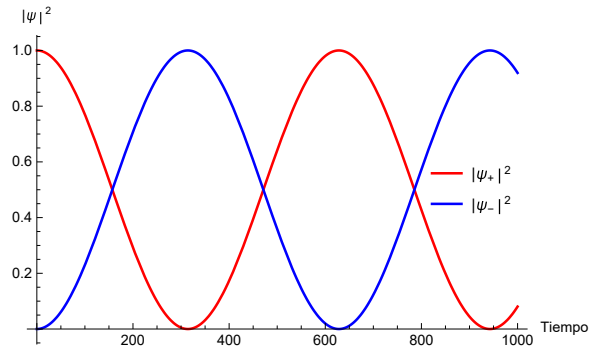


Figura 1.7: Se observa el comportamiento de la probabilidad de medir el espín arriba $|\psi_+|^2$ o abajo $|\psi_-|^2$ para una frecuencia de rotación del campo magnético de $\omega_3 = 1$, al evolucionar al sistema durante $t = 1000$.

Por su parte, $\langle \vec{S} \rangle$ se muestra en la figura 1.8, al evolucionar al sistema durante $t_3 = 500$

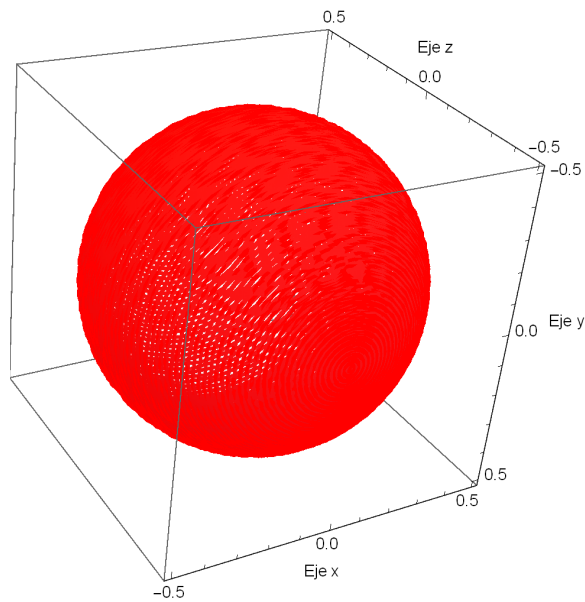


Figura 1.8: Se muestra la evolución de la “orientación” espacial del espín (línea roja) encajada en una esfera de radio $1/2$ centrada en el origen, para $\omega_3 = 1$. Ahora el espín se mueve por toda la esfera partiendo del punto $(0,0,1/2)$ y consiguiendo llegar a $(0,0,-1/2)$.

1.2.1. Espín inicialmente orientado en la dirección del campo magnético

Ya se analizó el caso en el que el espín está inicialmente orientado en la dirección positiva del eje z , en adelante se tratará el caso en el que el espín está inicialmente alineado con el campo magnético, para ello se usará la siguiente expresión para el espinor

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

que rotado en coordenadas esféricas se ve como

$$\psi' = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) e^{-i\theta/2} \\ \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) e^{i\theta/2} \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Puesto que el campo magnético se encuentra inicialmente en el plano xz se obtienen las siguientes relaciones $\theta = 0$, $\phi = \arctan \frac{B_1}{B_0 - \omega}$; el término $B_0 - \omega$ aparece debido a que este es el campo que se observa en el sistema rotado

Considerando un campo magnético como el descrito en la ecuación (1.7) con los valores de $B_1 = 1/2$ y $B_0 = 1$, se tienen las condiciones iniciales

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} \cos\left[\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{0.5}{0.95}\right)\right] \\ \sin\left[\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{0.5}{0.95}\right)\right] \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

que aplicadas a las ecuaciones (1.13) conducen a

$$\begin{aligned} \psi'_+(t) &= 0.970803 \cos \gamma t - \frac{0.970803i (B_0 - \omega + 0.23679B_1)}{2\gamma} \sin \gamma t, \\ \psi'_-(t) &= 0.229877 \cos \gamma t + \frac{0.229877i (B_0 - \omega - 4.22315B_1)}{2\gamma} \sin \gamma t, \\ \gamma &= \frac{1}{2} \sqrt{(B_0 - \omega)^2 + B_1^2}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

por lo tanto la solución al problema es

$$\begin{aligned}\psi_+(t) &= e^{-i\omega t/2}\psi'_+(t), \\ \psi_-(t) &= e^{i\omega t/2}\psi'_-(t).\end{aligned}\tag{1.22}$$

En este caso el comportamiento de $\langle \vec{S} \rangle$ se visualiza en la figura 1.9.

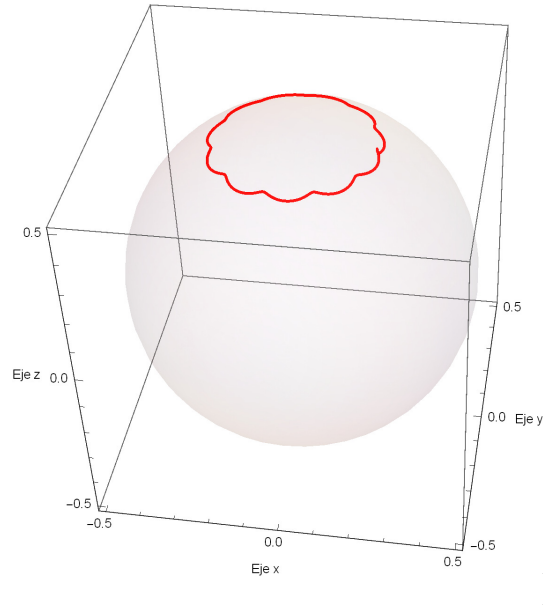


Figura 1.9: Se muestra la evolución de la “orientación” espacial del espín (línea roja) encajada en una esfera de radio $1/2$ centrada en el origen, para una frecuencia de $\omega = 0.05$ al evolucionar durante $t = 63$. Puede observarse que $\langle \vec{S} \rangle$ describe una cicloide en torno al círculo que sigue el campo magnético.

1.3. Constelaciones de Majorana

Partiendo del hecho de que un estado de espín s , $|\psi\rangle$, puede ser escrito como una combinación lineal de las proyecciones $|s, m\rangle$, es decir

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-s}^s \psi_m |s, m\rangle,\tag{1.23}$$

se puede construir con los coeficientes el siguiente polinomio

$$P_{|\psi\rangle}(\zeta) = \sum_{m=-s}^s (-1)^{s-m} \sqrt{\binom{2s}{s-m}} \psi_m \zeta^{s+m}. \quad (1.24)$$

Las raíces de este polinomio corresponden a puntos en el plano complejo que, al ser mapeados mediante proyección estereográfica a S^2 , generan una distribución bien definida de puntos conocida como constelacione de Majorana. Esta representación de estados de espín por constelaciones en S^2 cumple que una rotación del estado se convierte en la misma rotación de la constelación en la esfera, por lo que es útil para identificar simetrías. Esta idea fue expuesta por Ettore Majorana en 1932 [7].

1.3.1. Proyección estereográfica desde el polo sur

Dado un punto sobre la esfera $\vec{r} = (x, y, z)$ su proyección estereográfica desde el polo sur corresponde al punto

$$(\gamma, \xi) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right), \quad (1.25)$$

por lo que se pueden mapear puntos en \mathbb{C} a S^2 , simplemente invirtiendo la relación (1.25), mediante [8]

$$\begin{aligned} x &= \frac{2\gamma}{1 + \gamma^2 + \xi^2}, \\ y &= \frac{2\xi}{1 + \gamma^2 + \xi^2}, \\ z &= \frac{1 - \gamma^2 - \xi^2}{1 + \gamma^2 + \xi^2}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

1.3.2. Pruebas de mapeos estado-constelación

Con el fin de visualizar la representación de Majorana, se han realizado algunas pruebas, donde primero se obtiene la constelación de un estado y posteriormente a partir de constelaciones de 3 sólidos platónicos se generan sus estados correspondien-

tes. La constelación del siguiente estado se muestra en la figura 1.10

$$|A\rangle = (1 + 2i, 2 - i, 3 + i, 4, 5 - 0.5i, 6 + 2i, 3 - 4i), \quad (1.27)$$

las entradas del vector que representa a este estado corresponde a los coeficientes ψ_m de la ecuación (1.23) y los puntos sobre la esfera corresponden a la proyección de las raíces de la ecuación (1.24).

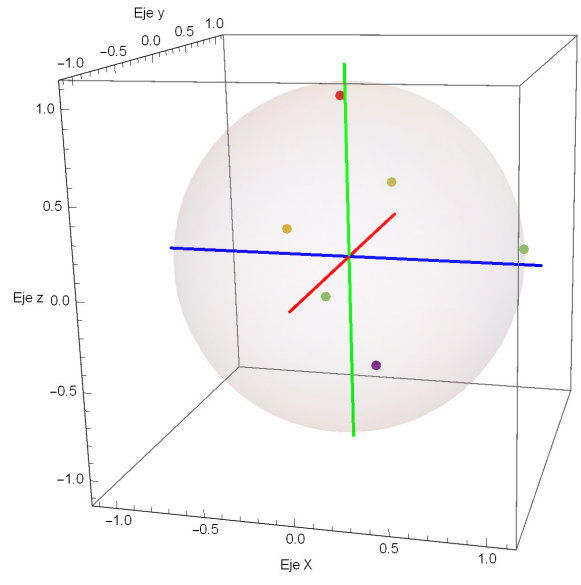


Figura 1.10: Constelación de Majorana del estado $|A\rangle$ de la ecuación (1.27)

Por otro lado, se ha realizado el proceso inverso, yendo de las constelaciones de un Tetraedro, Hexaedro y Octaedro (veáanse las figuras 1.11 y 1.12) a sus estados correspondientes en la base $\{|s, m\rangle\}$. Para esto primero se enviaron los puntos de cada constelación al plano complejo con proyección estereográfica $\{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n\}$ con ellos se generó un polinomio a partir de la siguiente multiplicación

$$P_{|\psi\rangle}(\zeta) = (\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2) \cdots (\zeta - \zeta_n), \quad (1.28)$$

finalmente del polinomio obtenido se leyeron los coeficientes del estado de acuerdo a la ecuación (1.24). El proceso descrito define al estado a partir de la constelación salvo un factor de fase.

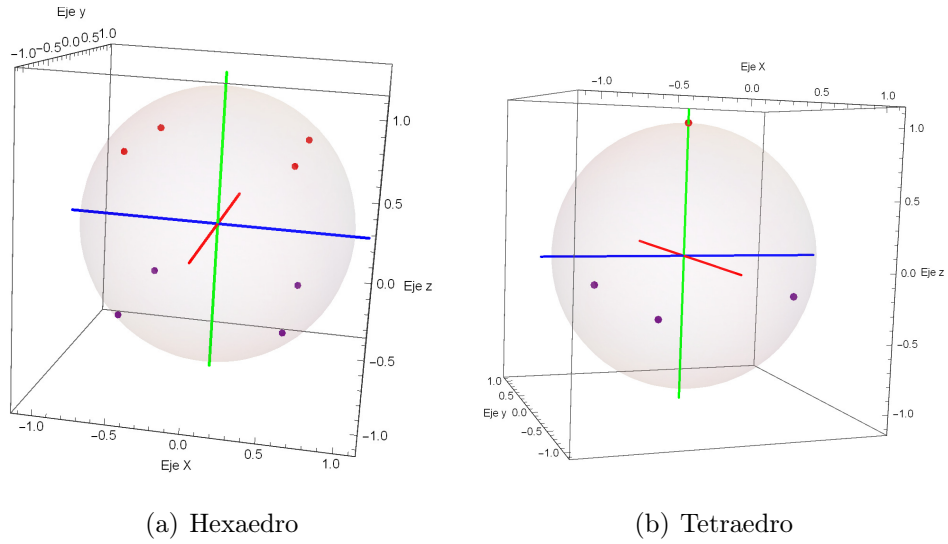


Figura 1.11: Constelaciones de un Hexaedro y Tetraedro en S^2 .

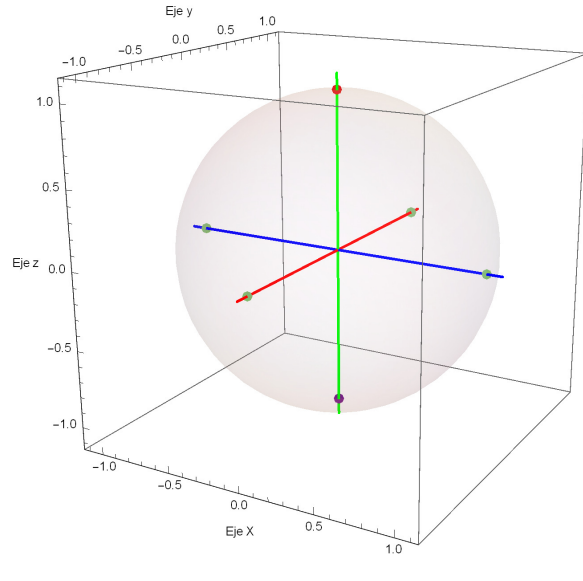


Figura 1.12: Constelación de un Octaedro en S^2

Los estados obtenidos para estas constelaciones son:

1. Hexaedro: $\frac{1}{2}(\sqrt{\frac{5}{6}}, 0, 0, 0, \sqrt{\frac{7}{3}}, 0, 0, 0, \sqrt{\frac{5}{6}})$
2. Tetraedro: $(0, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{3}})$
3. Octaedro: $(0, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, 0, 0, \sqrt{\frac{5}{6}})$

1.3.3. Rotación de estados de espín arbitrario

Para encontrar la forma de rotar un estado de espín s , se considera a $S_{\pm} = S_x \pm iS_y$ y su acción sobre la base $|s, m\rangle$ [9]

$$\begin{aligned} S_+|s, m\rangle &= \sqrt{(s-m)(s+m+1)}|s, m+1\rangle, \\ S_-|s, m\rangle &= \sqrt{(s+m)(s-m+1)}|s, m-1\rangle, \end{aligned} \quad (1.29)$$

empleando como base los eigenestados de S_z representados por [10]

$$|s, s\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |s, s-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \dots \quad |s, -s\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.30)$$

se puede representar a S_{\pm} y S_z mediante las matrices

$$S_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2s} & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \sqrt{2(2s-1)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & \sqrt{2s} \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad S_- = S_+^\dagger, \quad S_z = \begin{pmatrix} s & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & s-1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -s \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

Además, mediante las relaciones $S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$ y $S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$ es posible calcular la matriz de espín $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$.

Finalmente la matriz de rotación buscada es [11][12]:

$$R(\alpha, \hat{n}, s) = e^{-i\alpha\hat{n}\cdot\vec{S}}, \quad (1.32)$$

donde α es el ángulo por el cual se realiza la rotación y \vec{n} el vector unitario normal al plano de rotación.

Capítulo 2

Representación de Schwinger y SHO3D.

2.1. Grupos y álgebras de Lie

Será necesario definir algunos conceptos para entender la representación de Schwinger.

Grupo de Lie Es una variedad diferencial M con un producto asociativo, es decir $m : M \times M \rightarrow M$ tal que para todo $g, g_1, g_2, g_3 \in M$ se cumple:

1. $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$
2. Existe $e \in M$ tal que $eg = ge = g$
3. Existe g^{-1} tal que $gg^{-1} = g^{-1}g = e$

con el producto e inverso dados por funciones suaves.

Producto de Lie Es un producto definido en un espacio vectorial V que satisface lo siguiente, para todo $u, v, w \in V$:

1. $v \cdot w = -w \cdot v$
2. $v \cdot (u \cdot w) + u \cdot (w \cdot v) + w \cdot (v \cdot u) = 0.$

(V, \cdot) forman un **Álgebra de Lie**. Esta álgebra es no conmutativa.

Constantes de estructura Sean $T_a, T_b, T_c \in (V, \cdot)$; se llama constantes de estructura a los reales f_{ab}^c que satisfacen lo siguiente:

$$T_a \cdot T_b = f_{ab}^c T_c. \quad (2.1)$$

Además, si $\rho(T)$ es una representación de los elementos de un álgebra de Lie, se cumple que

$$[\rho(T_a), \rho(T_b)] = f_{ab}^c \rho(T_c). \quad (2.2)$$

Representaciones equivalentes Dada $\rho(T)$ una representación de los elementos de un álgebra de Lie y u una matriz invertible, el producto

$$\rho'(T) = u\rho(T)u^{-1}, \quad (2.3)$$

es una representación equivalente de los elementos del álgebra, adicionalmente a la clase de equivalencia de todas las representaciones $\rho(T)$ que se relacionan por (3.3) se le conoce como *clase de conjugación* [13].

2.1.1. Representación de $SU(2)$ con matrices 2×2

Es sabido que el álgebra de $SU(2)$ consiste de elementos (e_1, e_2, e_3) que satisfacen

$$\begin{aligned} e_1 \cdot e_2 &= ie_3, \\ e_1 \cdot e_3 &= -ie_2, \\ e_2 \cdot e_3 &= ie_1, \end{aligned} \quad (2.4)$$

por lo que puede ser representado con matrices 2×2 empleando las matrices de Pauli mediante la siguiente identificación

$$S_x = \frac{\sigma_x}{2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
S_y &= \frac{\sigma_y}{2} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}, \\
S_z &= \frac{\sigma_z}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Dichas matrices satisfacen el álgebra de $SU(2)$ [14]

$$[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}S_k. \tag{2.6}$$

2.1.2. Representación de Schwinger de $SU(2)$ con estados del oscilador armónico bidimensional

Considérense dos osciladores armónicos independientes; para cada uno de ellos existen operadores de creación y aniquilación, definidos en términos de los operadores de posición y momento:

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{\sqrt{2}}(r + ip), \\
a^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}(r - ip).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Estos operadores satisfacen $[a, a^\dagger] = 1$. Con los operadores de cada oscilador se puede generar una representación de $SU(2)$ mediante los siguientes productos [19]

$$\begin{aligned}
\Sigma_x &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_x^\dagger & a_y^\dagger \end{pmatrix} \sigma_x \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}, \\
\Sigma_y &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_x^\dagger & a_y^\dagger \end{pmatrix} \sigma_y \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}, \\
\Sigma_z &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_x^\dagger & a_y^\dagger \end{pmatrix} \sigma_z \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{2.8}$$

esto permite asociar estados de espín con estados del oscilador armónico 2D, lo que se conoce como representación de Schwinger.

Para entender la representación de Schwinger se usará el diagrama de la figura 2.1; como se puede notar existen diagonales señaladas con colores que contienen algunos puntos etiquetados por dos números. Estos son los números cuánticos de estados del oscilador 2D y los puntos sobre una diagonal corresponden a estados degenerados, el número de estados degenerados sobre una diagonal crece a medida que se está más lejos del origen y se corresponde con el crecimiento del número de elementos de la base $|s, m\rangle$ a medida que el espín aumenta. Por ello es posible establecer una correspondencia unívoca entre un estado de espín expresado en la base $|s, m\rangle$ y una combinación lineal de estados degenerados del oscilador 2D.

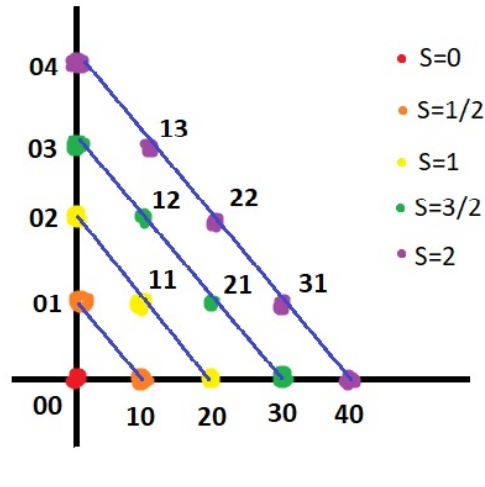


Figura 2.1: Diagrama de apoyo para la representación de Schwinger. El par de números que etiquetan a cada punto son los números cuánticos del oscilador 2D y las diagonales contienen estados degenerados.

Así, un estado de espín s queda asociado con un estado del oscilador armónico bidimensional, a través de los coeficientes de la combinación lineal (γ_k) , de la siguiente forma [20]:

$$|\psi\rangle = \sum_{k=-s}^s \gamma_k |s, k\rangle \quad \longleftrightarrow \quad |\phi_{xy}\rangle = \sum_{k=-s}^s \gamma_k \phi_{s-k}(x) \phi_{s+k}(y) \quad (2.9)$$

donde ϕ_n es la función de onda que corresponde al n -ésimo estado excitado del osci-

lador armónico unidimensional.

En la figura 2.2 se encontrarán las gráficas de las funciones de onda obtenidas con la ecuación (2.9) para 4 constelaciones de Majorana.

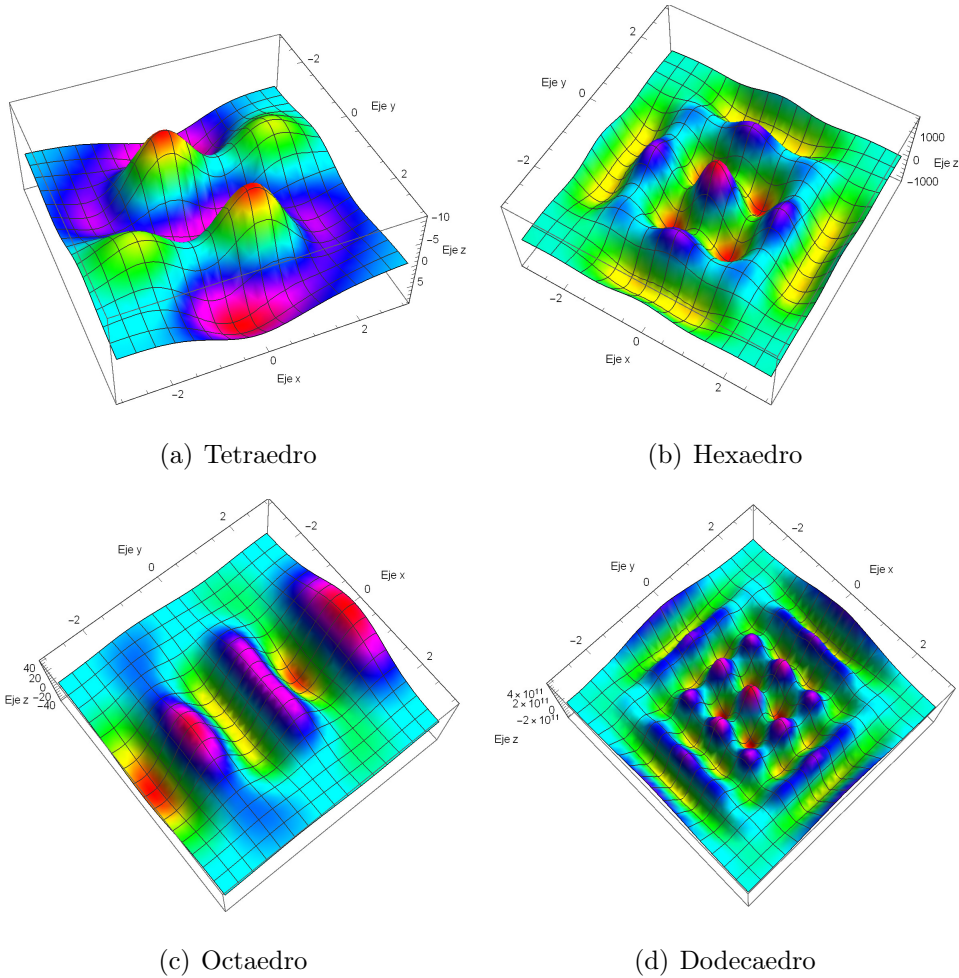


Figura 2.2: Representación de Schwinger, mediante funciones de onda del oscilador armónico bidimensional (SHO2D), de los estados obtenidos a partir de las constelaciones de un tetraedro, hexaedro, octaedro y dodecaedro. Graficando directamente la función de onda.

2.1.3. Representación de Schwinger de $SU(2)$ con excitaciones circulares del oscilador armónico bidimensional

Se comienza definiendo los siguientes operadores

$$\begin{aligned} a_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x - ia_y), & a_+^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x^\dagger + ia_y^\dagger), \\ a_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x + ia_y), & a_-^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x^\dagger - ia_y^\dagger), \end{aligned} \quad (2.10)$$

nuevamente, los productos

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_+^\dagger & a_-^\dagger \end{pmatrix} \sigma_x \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix}, \\ J_y &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_+^\dagger & a_-^\dagger \end{pmatrix} \sigma_y \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix}, \\ J_z &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_+^\dagger & a_-^\dagger \end{pmatrix} \sigma_z \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

generan una representación de $SU(2)$.

Los operadores de creación y aniquilación pueden ser expresados en la representación de variables de posición de la siguiente forma

$$\begin{aligned} a_x^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \partial_x), & a_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x + \partial_x), \\ a_y^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}(y - \partial_y), & a_y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(y + \partial_y), \end{aligned} \quad (2.12)$$

con ello se puede reexpresar a J_z como

$$J_z = \frac{1}{2}(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-) = \frac{i}{2}(x\partial_y - y\partial_x). \quad (2.13)$$

Este último resultado indica que una rotación, generada por J_z al estado de espín, por un ángulo α , se traduce en una rotación por $\alpha/2$ en los estados de excitaciones rotacionales del oscilador armónico bidimensional. Dichos estados se obtienen mediante

la siguiente expresión:

$$|n_+, n_-\rangle = \frac{(a_+^\dagger)^{n_+} (a_-^\dagger)^{n_-}}{\sqrt{n_+! n_-!}} |0, 0\rangle. \quad (2.14)$$

El cambio de variable $w = x + iy$ ayuda a realizar los cálculos de los estados, con esto se obtiene

$$\begin{aligned} a_+ &= \frac{1}{2}\bar{w} + \partial_w, & a_+^\dagger &= \frac{1}{2}w - \partial_{\bar{w}}, \\ a_- &= \frac{1}{2}w + \partial_{\bar{w}}, & a_-^\dagger &= \frac{1}{2}\bar{w} - \partial_w, \end{aligned} \quad (2.15)$$

teniendo como estado base a

$$|0, 0\rangle = e^{-x^2/2} e^{-y^2/2} = e^{-w\bar{w}/2}. \quad (2.16)$$

En las figuras 2.3 y 2.4 se visualiza el módulo al cuadrado de las funciones de onda obtenidas con esta representación, mismas que se muestran a continuación, excepto la del dodecaedro debido a su extensión.

$$\begin{aligned} \psi_{tetra}(x, y) &= \frac{1}{72} e^{\frac{1}{2}(-x^2-y^2)} (9x^4 - 12ix^3y - 6x^2(y^2 + 4) \\ &\quad + 4ixy(12 - 5y^2) - 7y^4 + 24y^2) \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \psi_{hexa}(x, y) &= e^{\frac{1}{2}(-x^2-y^2)} (99x^8 + 28x^6(13y^2 - 56) \\ &\quad + 14x^4(47y^4 - 336y^2 + 504) + 28x^2(13y^6 - 168y^4 + 504y^2 - 336) \\ &\quad + 99y^8 - 1568y^6 + 7056y^4 - 9408y^2 + 2352)/(96768) \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \psi_{octa}(x, y) &= \frac{1}{72} e^{\frac{1}{2}(-x^2-y^2)} (x^5 + ix^4y - 2x^3(3y^2 + 1) - 6ix^2y(y^2 - 1) \\ &\quad + xy^2(y^2 + 6) + iy^3(y^2 - 2)) \end{aligned} \quad (2.19)$$

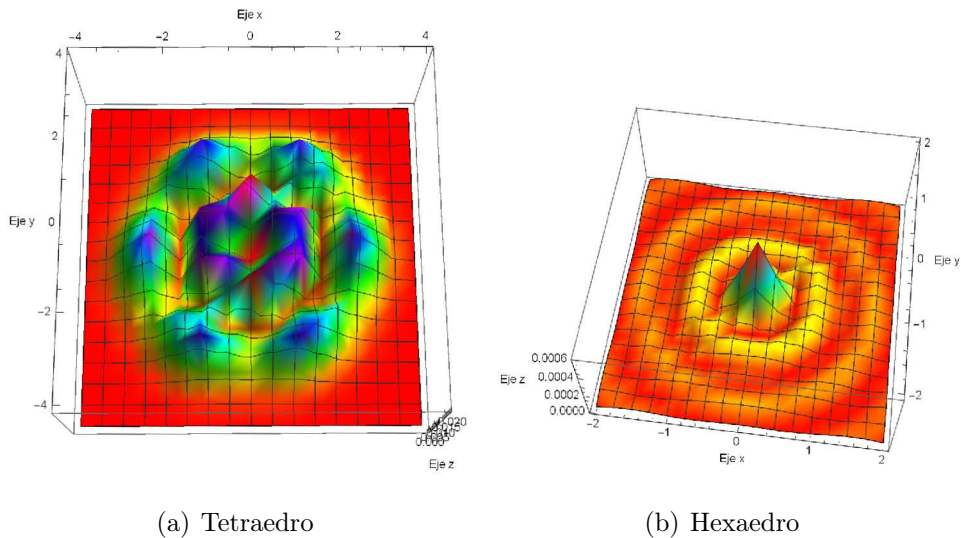


Figura 2.3: Representación de Schwinger, mediante funciones de onda de excitaciones circulares del oscilador armónico bidimensional, de los estados obtenidos a partir de las constelaciones de un tetraedro y hexaedro. Graficando la norma al cuadrado de la función de onda.

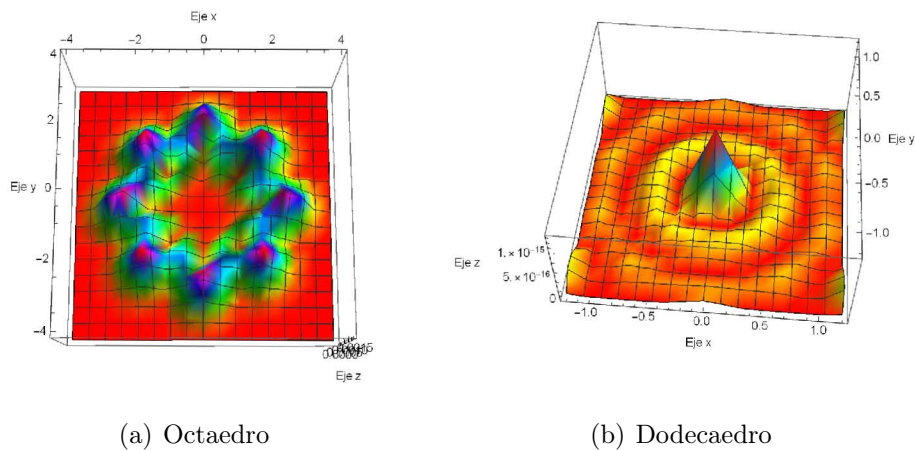


Figura 2.4: Representación de Schwinger, mediante funciones de onda de excitaciones circulares del oscilador armónico bidimensional, de los estados obtenidos a partir de las constelaciones de un octaedro y dodecaedro. Graficando la norma al cuadrado de la función de onda.

2.2. Representación de $SU(2)$ sobre matrices $n \times n$

Se parte del valor esperado de un operador A , expresado como

$$\langle \psi | A | \psi \rangle = \psi_i^* A_{ij} \psi_j = A_{ji} \psi_i \psi_j^*, \quad (2.20)$$

donde ψ_i son los elementos del vector de estado y A_{ij} los elementos de la matriz asociada al operador A , además se supone suma sobre índices repetidos.

Si se define la matriz $\rho_{ij} = \psi_i \psi_j^*$, es posible escribir lo anterior mediante la traza, es decir $\langle \psi | A | \psi \rangle = \text{Tr}(\rho A)$. A la matriz ρ se le conoce como matriz de densidad y tiene las siguientes propiedades:

1. ρ es hermitiana; $\rho^\dagger = \rho$,
2. $\text{Tr}(\rho) = 1$,
3. $\rho^2 = \rho$ (para estados puros).

Para generalizar el concepto de la matriz de densidad es necesario introducir estados mixtos, estos son una combinación lineal de estados puros. Una forma de pensar en ellos es como una mezcla de gases conformada por partes preparadas en estados diferentes ($|\psi_n\rangle$), mezcladas en distintas proporciones; así existen P_n asociadas a $|\psi_n\rangle$ que son la probabilidad clásica de encontrar al estado en términos de su proporción respecto a la mezcla total. Para los estados mixtos, la matriz de densidad se define como [15]

$$\rho = \sum P_k \rho_k, \quad (2.21)$$

donde $\rho_k = |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$ y el valor de expectación de un operador se obtiene mediante

$$\langle A \rangle = \sum P_k \langle \psi_k | A | \psi_k \rangle. \quad (2.22)$$

2.2.1. Descomposición de la matriz de densidad en la base de las matrices de polarización

Dada $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$, esta puede ser escrita en la base canónica de matrices $n \times n$, dada por

$$(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}, \quad (2.23)$$

donde $i, j, k, l \in (1, 2, \dots, n)$, es decir:

$$A = \sum A_{ij}E_{ij}. \quad (2.24)$$

Como se vio anteriormente, para cualquier dimensión n , es posible generar una representación $R_n[g]$ de $SU(2)$ por matrices $n \times n$. Por medio de estas matrices se puede encontrar la acción de $SU(2)$ sobre matrices $n \times n$

$$A' = R_n[g]AR_n^{-1}[g]. \quad (2.25)$$

Esta relación puede ser escrita como $A'_{ij} = (RAR^{-1})_{ij} = R_{ia}A_{ab}R_{bj}^{-1} = T_{ijab}A_{ab}$ donde $T_{ijab} = R_{ia}R_{bj}^{-1}$ y se suma sobre índices repetidos.

Resulta que, mediante esta acción, las entradas de la matriz A' son una combinación lineal de las entradas de A , lo que permite escribir

$$\begin{pmatrix} A'_{11} \\ A'_{12} \\ \vdots \\ A'_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n^2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n^2 1} & \vdots & m_{n^2 n^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ \vdots \\ A_{nn} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ \vdots \\ A_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

En este caso, por la estructura de la matriz M , las entradas de A se mezclan entre si para obtener las de A' . Pero, existe una base en el espacio vectorial de las matrices $n \times n$ en la cual se pueden reescribir estas matrices de tal forma que exista una separación entre las entradas que se mezclan. Lo anterior se detalla a continuación:

Primero, considérese un sistema de espin s , para el que la matriz de densidad será

una matriz $(2s + 1) \times (2s + 1)$. Para esta matriz existe una base, la de las *Matrices de polarización*, en la que la transformación dada por la acción adjunta y escrita en la forma de la ecuación (2.23) se puede separar en conjuntos de elementos que no se mezclan entre sí, es decir; en representaciones irreducibles de la acción de $SU(2)$. Esto se manifiesta en la estructura de la matriz M como bloques [16].

Para encontrar la representación irreducible de la acción de $SU(2)$ en matrices $n \times n$ se usará la forma en que se reescribe la matriz de densidad en la nueva base $\{T_{lm}\}$, que es la siguiente

$$A = \sum_{l=0, m=-l, \dots, l}^{2s} A_{lm} T_{lm}, \quad (2.27)$$

2.2.2. Representaciones: suma directa y producto tensorial

Dada una representación $R[g]$ esta debe cumplir que $R[g_1 g_2] = R[g_1] R[g_2]$, de ello se desprende que una vez que se obtiene una representación R existen dos más, generadas a partir de ella, a saber \bar{R} y $(R^{-1})^T$.

Por otro lado, dadas dos representaciones R_1 y R_2 , es posible generar dos nuevas representaciones a partir de éstas, mediante la *suma directa* y el *producto tensorial*.

Suma directa: la suma directa puede visualizarse de la siguiente forma

$$R_1 \oplus R_2 = \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

si R_1 es de dimensión m y R_2 de dimensión n , entonces $R_1 \oplus R_2$ es dimensión $m + n$.

Producto tensorial: el producto tensorial se puede visualizar como sigue

$$R_1 \otimes R_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay & bx & by \\ az & aw & bz & bw \\ cx & cy & dx & dw \\ cz & cw & dz & dw \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

En componentes se ve como $(A \otimes B)_{iajb} = A_{ij} B_{ab}$, con $A \in \mathcal{M}_{m \times m}$ y $B \in \mathcal{M}_{n \times n}$, así $A \otimes B \in \mathcal{M}_{nm \times nm}$.

Por su parte, el producto tensorial de dos vectores se escribe como $(u \otimes w)_{ia} = u_i w_a$. Además, la acción de las nuevas matrices sobre los vectores queda de la siguiente forma

$$[(A \otimes B)(v \otimes w)]_{ij} = (A \otimes B)_{iajb}(v \otimes w)_{ab}, \quad (2.30)$$

por lo tanto $(A \otimes B)(v \otimes w) = Av \otimes Bw$ [17].

Teorema: Sean $\rho_1(g)$ y $\rho_2(g)$ dos representaciones que actúan sobre los espacios V y W , respectivamente, y sea $\varphi : V \rightarrow W$, un mapeo entre estos espacios. Entonces φ también actúa sobre el espacio de los mapeos lineales entre los espacios V y W de la siguiente forma [18]:

$$(g \triangleright \varphi)V = \rho_2(g) \triangleright \varphi(\rho_1^{-1}(g)V) = \varphi'V, \quad (2.31)$$

con $\varphi' = \rho_1(g)\varphi\rho_2^{-1}$ y \triangleright denotando a la acción del grupo.

Colorario: Si $V=W$ entonces $\varphi' = \rho(g)\varphi\rho^{-1}(g)$

2.2.3. Obtención de la representación de $SU(2)$ sobre matrices

$n \times n$

La matriz M de la ecuación (3.23), que relaciona las componentes de A' con las de A , escritas en un vector columna, puede ser obtenida a partir de la representación de $SU(2)$ en el espacio de matrices $n \times n$ (el mismo para A) de la siguiente manera

$$M = R_n[g] \otimes (R_n^{-1}[g])^T. \quad (2.32)$$

Luego, se toman las matrices $\{T_{lm}\}$, que descomponen a M . Dichas matrices aparecen en Mathematica ordenadas por espín $\{(T_{00}), (T_{11}, T_{10}, T_{1-1}), \dots\}$. Y a partir de la relación

$$T_{lm} = \sum_{ij} Q_{lm(ij)} E_{ij}, \quad (2.33)$$

se obtiene la matriz Q , que cambia de base a $\{T_{lm}\}$.

Por lo que, la representación irreducible de $SU(2)$ en matrices $n \times n$ queda como

$$M' = QMQ^{-1}. \quad (2.34)$$

Representación de $SU(2)$ sobre matrices 2×2

En este caso la representación de $SU(2)$ por una matriz 2×2 es la siguiente:

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\alpha}{2}) - \cos(\phi) \sin(\frac{\alpha}{2}) & -e^{-i\theta} \sin(\frac{\alpha}{2}) \\ -e^{i\theta} \sin(\frac{\alpha}{2}) & \cos(\frac{\alpha}{2}) + \cos(\phi) \sin(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

donde θ, ϕ son ángulos que definen al vector normal respecto al que se realiza la rotación en coordenadas esféricas y α es el ángulo por el que se rota.

Por su parte las matrices de polarización para $s = \frac{1}{2}$ son

$$\begin{aligned} T_{00} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, & T_{11} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ T_{10} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, & T_{1-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

A partir de esto se obtiene la matriz de cambio de base

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Así la representación de $SU(2)$ sobre matrices 2×2 es

$$M' = Q[R(\alpha) \otimes (R^{-1}(\alpha))^T]Q^{-1},$$

Con entradas:

$$M'_{11} = 1,$$

$$\begin{aligned}
M'_{12} &= M'_{13} = M'_{14} = M'_{21} = M'_{31} = M'_{41} = 0, \\
M'_{22} &= (\cosh(\frac{\alpha}{2}) - \cos(\phi) \sinh(\frac{\alpha}{2}))^2, \\
M'_{23} &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\theta} (\sin(2\phi) \sinh^2(\frac{\alpha}{2}) - \sin(\phi) \sinh(\alpha)), \\
M'_{24} &= e^{-2i\theta} \sin^2(\phi) \sinh^2(\frac{\alpha}{2}), \\
M'_{32} &= \sqrt{2} e^{i\theta} \sin(\phi) \sinh(\frac{\alpha}{2}) (-\cosh(\frac{\alpha}{2}) + \cos(\phi) \sinh(\frac{\alpha}{2})), \\
M'_{33} &= \cosh^2(\frac{\alpha}{2}) - \cos(2\phi) \sinh^2(\frac{\alpha}{2}), \\
M'_{34} &= -\sqrt{2} e^{-i\theta} \sin(\phi) \sinh(\frac{\alpha}{2}) (\cosh(\frac{\alpha}{2}) + \cos(\phi) \sinh(\frac{\alpha}{2})), \\
M'_{42} &= e^{2i\theta} \sin^2(\phi) \sinh^2(\frac{\alpha}{2}), \\
M'_{43} &= -\sqrt{2} e^{i\theta} \sin(\phi) \sinh(\frac{\alpha}{2}) (\cosh(\frac{\alpha}{2}) + \cos(\phi) \sinh(\frac{\alpha}{2})), \\
M'_{44} &= (\cosh(\frac{\alpha}{2}) + \cos(\phi) \sinh(\frac{\alpha}{2}))^2.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Representación de $SU(2)$ sobre matrices 3×3

La representación de $SU(2)$ por una matriz 3×3 es

$$\begin{aligned}
R_{11} &= (\cos(\frac{\alpha}{2}) - i \cos(\phi) \sin(\frac{\alpha}{2}))^2, \\
R_{12} &= -\sqrt{2} e^{-i\theta} \sin(\phi) \sin(\frac{\alpha}{2}) (i \cos(\frac{\alpha}{2}) + \cos(\phi) \sin(\frac{\alpha}{2})), \\
R_{13} &= -e^{-2i\theta} \sin^2(\phi) \sin^2(\frac{\alpha}{2}), \\
R_{21} &= -\sqrt{2} e^{i\theta} \sin(\phi) \sin(\frac{\alpha}{2}) (i \cos(\frac{\alpha}{2}) + \cos(\phi) \sin(\frac{\alpha}{2})), \\
R_{22} &= \cos^2(\frac{\alpha}{2}) + \cos(2\phi) \sin^2(\frac{\alpha}{2}), \\
R_{23} &= \sqrt{2} e^{-i\theta} \sin(\phi) \sin(\frac{\alpha}{2}) (-i \cos(\frac{\alpha}{2}) + \cos(\phi) \sin(\frac{\alpha}{2})), \\
R_{31} &= -e^{2i\theta} \sin^2(\phi) \sin^2(\frac{\alpha}{2}), \\
R_{32} &= \sqrt{2} e^{i\theta} \sin(\phi) \sin(\frac{\alpha}{2}) (-i \cos(\frac{\alpha}{2}) + \cos(\phi) \sin(\frac{\alpha}{2})), \\
R_{33} &= (\cos(\frac{\alpha}{2}) + i \cos(\phi) \sin(\frac{\alpha}{2}))^2.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

donde θ, ϕ son ángulos que definen al vector normal respecto al que se realiza la rotación en coordenadas esféricas y α es el ángulo por el que se rota.

Mientras que las matrices de polarización para $s = 1$ son

$$\begin{aligned}
T_{00} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, T_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_{10} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \\
T_{1-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, T_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_{21} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
T_{20} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, T_{2-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, T_{2-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.40)
\end{aligned}$$

Por lo que la matriz de cambio de base es

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

A partir de esto es posible obtener una matriz análoga a la de la ecuación (2.36) para el caso 3×3 .

2.3. Representación de estados de espín mediante estados del oscilador armónico tridimensional (SHO3DR)

A partir del análisis realizado en las secciones anteriores se generalizará la representación de estados de espín a estados del oscilador armónico en tres dimensiones. [21]

Para ello se comienza definiendo los siguientes operadores

$$\begin{aligned} L_+ &= \sqrt{2} \left(a_z^\dagger a_- - a_+^\dagger a_z \right), \\ L_- &= \sqrt{2} \left(a_-^\dagger a_z - a_z^\dagger a_+ \right), \\ L_z &= a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Empleando nuevamente el cambio de variable $w = x + iy$ los operadores de ascenso se ven como

$$a_+^\dagger = \frac{1}{2}w - \partial_{\bar{w}}, \quad a_z^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(z - \partial_z), \quad a_-^\dagger = \frac{1}{2}\bar{w} - \partial_w \quad (2.43)$$

Si etiquetamos a los estados del SHO3D mediante $|n_+n_zn_-\rangle$ resulta que el operador L_- aniquila al estado $|00s\rangle$, siendo este

$$|00s\rangle = \frac{1}{\sqrt{s!}} (a_-^\dagger)^s [\pi^{-3/4} e^{-\frac{1}{2}(z^2+w\bar{w})}]. \quad (2.44)$$

Así que tomándolo como estado base se puede generar un mutiplete de estados mediante la aplicación sucesiva de L_+ , empleando la expresión

$$L_+ = 2z\partial_{\bar{w}} - w\partial_z. \quad (2.45)$$

Este mutiplete resulta tener $2s + 1$ elementos, luego de aplicar $2s$ -veces a L_+ , lo que nos permite realizar la asociación con un estado de espín s .

Para comenzar, se toma la matriz de densidad de un estado de espín (ρ) y se expresa en la base de las matrices de polarización, lo que nos arroja una lista de coeficientes asociados a cada matriz. Dicha lista puede descomponerse como:

$$\rho = ((\rho_{00}), (\rho_{11}, \rho_{10}, \rho_{1-1}), \dots), \quad (2.46)$$

donde se ha etiquetado las ρ 's de acuerdo a la proyección de espín con la que están asociadas.

Con base en lo anterior, se puede expresar la función de onda asociada al estado de espín como [22] [23]

$$|\psi\rangle_s \rightarrow \psi_{SHO3D}(x, y, z) = \sum_{k=0}^{2s} \sum_{l=-k}^k \rho_{kl} L_+^{k+l} |00s\rangle. \quad (2.47)$$

Capítulo 3

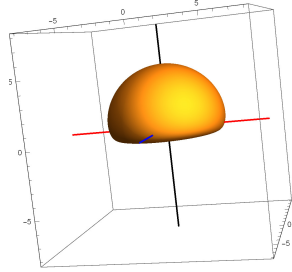
Propiedades de la representación SHO3D

3.0.1. Gráficas de las representaciones de estados de espín mediante estados de SHO3D

A continuación se muestran las gráficas obtenidas para las representaciones de algunos estados obtenidos a partir de la ecuación (2.45), en todas ellas los ejes aparecen señalados por líneas de colores, a saber; eje- x (rojo), eje- y (azul) y eje- z (negro). Las funciones obtenidas de SHO3DR resultaron ser reales por lo que lo expuesto en las gráficas son superficies de nivel correspondientes a un valor fijo de la densidad de probabilidad de 0.00001.

Estado 1: $|+\rangle$, espín 1/2

$$\psi_1(x, y, z) = \frac{(2z + \sqrt{2}) e^{\frac{1}{2}(-x^2 - y^2 - z^2)}}{2\pi^{3/4}} \quad (3.1)$$

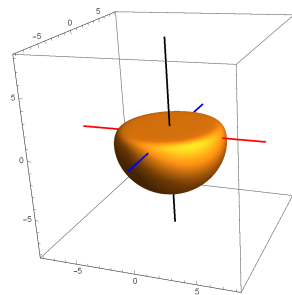


(a) Estado 1

Figura 3.1: Representación del estado de espín 1/2: $|+\rangle$ mediante estados del SHO3D. Tomando la superficie de nivel que corresponde a la función de onda de la ecuación (3.1) igualada a 0.00001

Estado 2: $|-\rangle$, espín 1/2

$$\psi_2(x, y, z) = \frac{(\sqrt{2} - 2z) e^{\frac{1}{2}(-x^2 - y^2 - z^2)}}{2\pi^{3/4}} \quad (3.2)$$

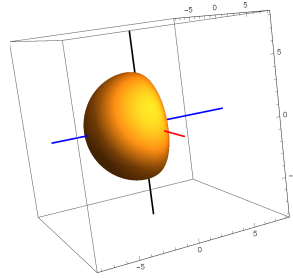


(a) Estado 2

Figura 3.2: Representación del estado de espín 1/2: $|-\rangle$ mediante estados del SHO3D. Tomando la superficie de nivel que corresponde a la función de onda de la ecuación (3.2) igualada a 0.00001

Estado 3: $\frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle - i|-\rangle)$, espín 1/2

$$\psi_3(x, y, z) = \frac{(\sqrt{2} - 2y) e^{\frac{1}{2}(-x^2 - y^2 - z^2)}}{2\pi^{3/4}} \quad (3.3)$$

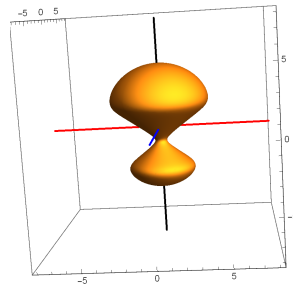


(a) Estado 3

Figura 3.3: Representación del estado de espín 1/2: $\frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle - i|-\rangle)$ mediante estados del SHO3D. Tomando la superficie de nivel que corresponde a la función de onda de la ecuación (3.3) igualada a 0.00001

Estado 4: $|1, 1\rangle$, espín 1

$$\psi_4(x, y, z) = \frac{e^{\frac{1}{2}(-x^2 - y^2 - z^2)} (-\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}y^2 + 2(z(\sqrt{2}z + 3) + \sqrt{3}))}{6\pi^{3/4}} \quad (3.4)$$

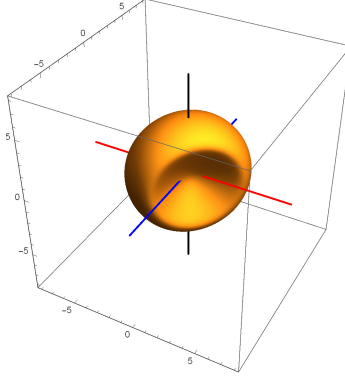


(a) Estado 4

Figura 3.4: Representación del estado de espín 1: $|1, 1\rangle$ mediante estados del SHO3D. Tomando la superficie de nivel que corresponde a la función de onda de la ecuación (3.4) igualada a 0.00001

Estado 5: $\frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 1\rangle - i|1, -1\rangle)$, espín 1

$$\psi_5(x, y, z) = \frac{e^{\frac{1}{2}(-x^2-y^2-z^2)} (2(\sqrt{2}z^2 + \sqrt{3}) - \sqrt{2}(x^2 - 6xy + y^2))}{6\pi^{3/4}} \quad (3.5)$$



(a) Estado 5

Figura 3.5: Representación del estado de espín 1: $\frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 1\rangle - i|1, -1\rangle)$ mediante estados del SHO3D. Tomando la superficie de nivel que corresponde a la función de onda de la ecuación (3.5) igualada a 0.00001

En los estados de espín 1/2 de las pruebas 1, 2 y 3 se puede notar que la SHO3DR captura la “dirección” del estado de espín pues el estado $|+\rangle$ es representado por una superficie casi enteramente contenida sobre el plano xy con $z > 0$, mientras que $|-\rangle$ aparece como una superficie contenida casi en su totalidad debajo del plano xy con $z < 0$ y con una concavidad opuesta a la de $|+\rangle$. Por su parte $\frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle - i|-\rangle)$ se ve como una superficie contenida en la parte negativa del eje y y delimitada por el plano xz , por lo que estas tres pruebas preservan la “orientación” del espín al pasar de la representación estándar a la SHO3DR. Para los estados de espín 1 de las pruebas 4 y 5 esta asociación con la “dirección” del espín no es tan directa como en el caso de espín 1/2, pero sí puede notarse que las superficies obtenidas reflejan una distribución de la densidad de probabilidad de acuerdo a la “orientación” del estado, así la densidad de probabilidad para el estado $|1, 1\rangle$ está más cargada en la parte positiva del eje z mientras que para $\frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 1\rangle - i|1, -1\rangle)$ la distribución respecto a este eje es simétrica

entre $z < 0$ y $z > 0$.

3.0.2. Rotación de los estados de espín y rotación de los estados SHO3D

En las siguientes figuras se comparan las gráficas de las representaciones de los estados originales con las de los estados luego de sufrir una rotación, nuevamente los ejes aparecen señalados por líneas de colores, a saber; eje- x (rojo), eje- y (azul) y eje- z (negro).

Rotación del estado 1:

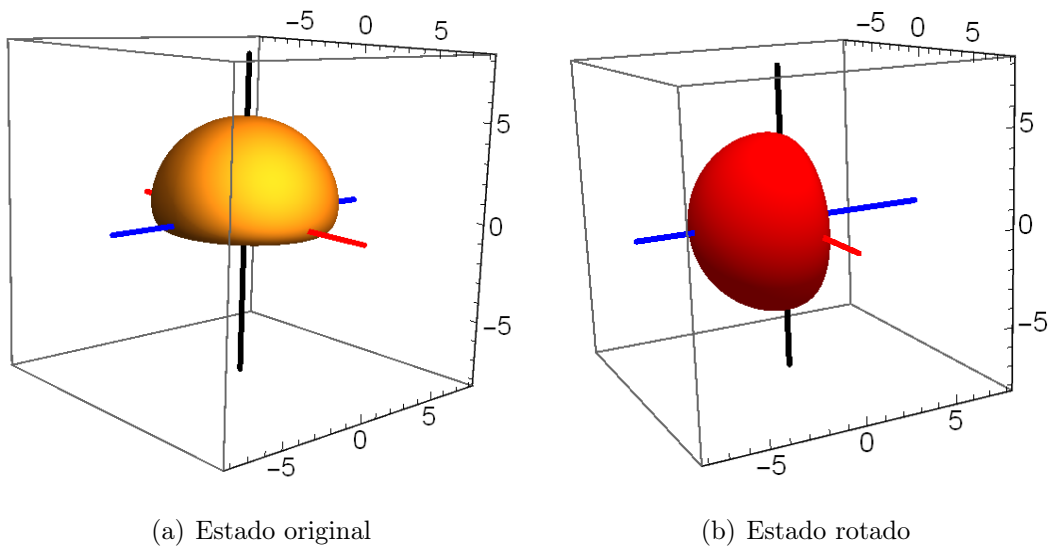


Figura 3.6: Representación de los estados de espín $1/2$: $|+\rangle$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - i|-\rangle)$, siendo el segundo una rotación del primero en torno al eje x por un ángulo de 90 grados. Tomando las superficies de nivel que corresponden a las funciones de onda igualadas a 0.00001

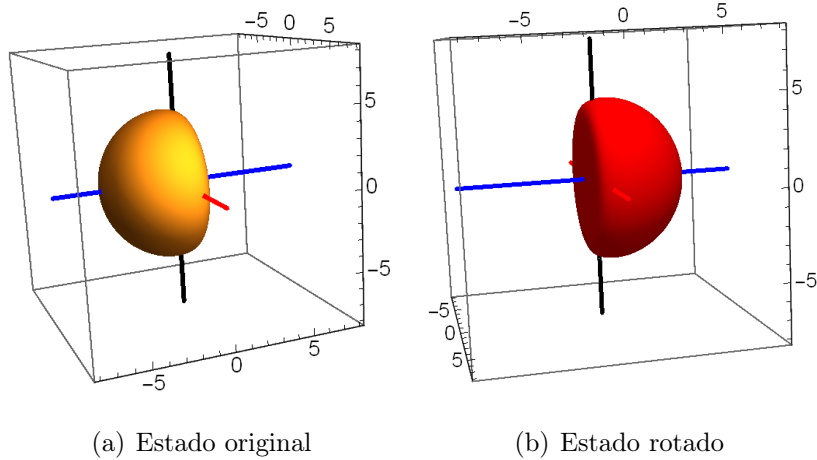
Rotación del estado 3:


Figura 3.7: Representación de los estados de espín 1/2: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - i|-\rangle)$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}(-i|+\rangle + |-\rangle)$, siendo el segundo una rotación del primero en torno al eje z por un ángulo de 180 grados. Tomando las superficies de nivel que corresponden a las funciones de onda igualadas a 0.00001

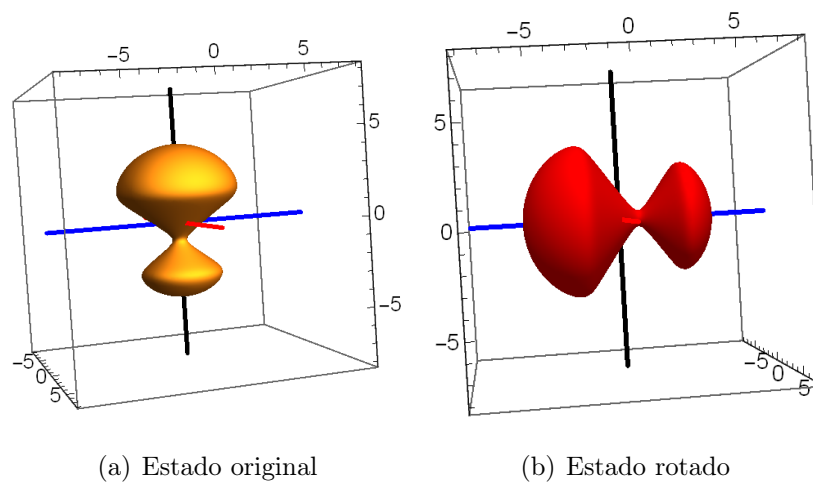
Rotación del estado 4:


Figura 3.8: Representación de los estados de espín 1: $|1,1\rangle$ y $\frac{1}{2}(|1,1\rangle - \sqrt{2}|1,0\rangle - |1,-1\rangle)$, siendo el segundo una rotación del primero en torno al eje x por un ángulo de 90 grados. Tomando las superficies de nivel que corresponden a las funciones de onda igualadas a 0.00001

Rotación del estado 5:

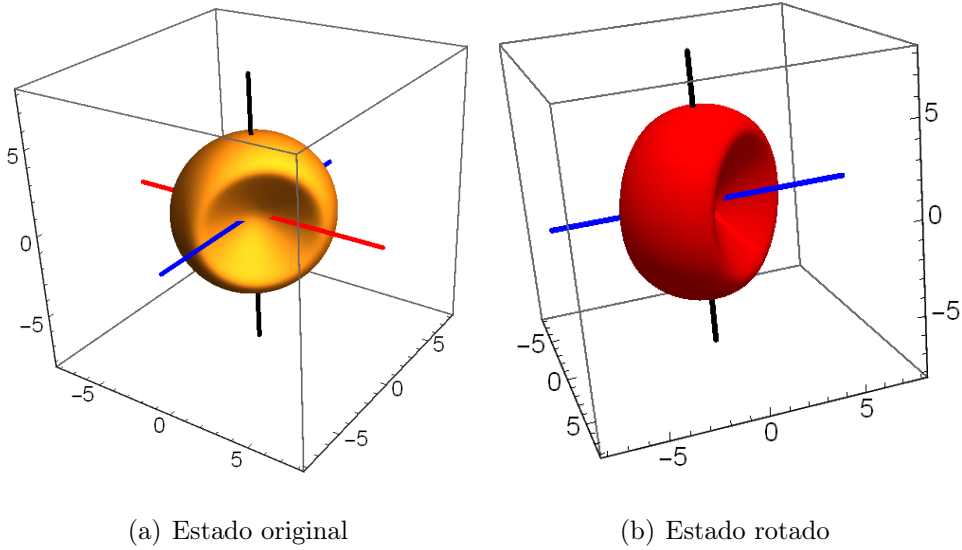


Figura 3.9: Representación de los estados de espín 1: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 1\rangle - i|1, -1\rangle)$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}(-i|1, 1\rangle + |1, -1\rangle)$, siendo el segundo una rotación del primero en torno al eje z por un ángulo de 90 grados. Tomando las superficies de nivel que corresponden a las funciones de onda igualadas a 0.00001

En las pruebas anteriores se muestra que las superficies de nivel de densidad de probabilidad constante de SHO3DR rotan de igual manera que los estados de espín y preservan su forma, siendo similar a lo que ocurre con las constelaciones de Majorana.

Capítulo 4

Propiedades físicas de SHO3DR

Ahora que se tiene la representación de estados de espín mediante estados del oscilador armónico tridimensional y se conocen algunas de las propiedades de esta representación, vale la pena preguntarse; ¿existe alguna relación entre las cantidades físicas medidas en la base estandar de espín y las medidas en SHO3DR?

Para empezar, podríamos preguntarnos por la posición, el momento lineal o la energía. En el caso del momento lineal, éste queda descartado puesto que es cero para todas las funciones SHO3D, debido a que las funciones de onda son reales lo que vuelve cero la integral:

$$\langle \vec{P} \rangle = \int \psi^* (-i\nabla) \psi dv. \quad (4.1)$$

En el caso del valor esperado del espín $\langle \vec{S} \rangle$ y el valor esperado de la posición $\langle \vec{r} \rangle$ de la representación SHO3D, no se ha encontrado alguna relación. Por lo que se ha trabajado con la energía, para ello es necesario presentar algunos conceptos nuevos.

4.0.1. Descripción de sistemas de espín mediante productos tensoriales de espín 1/2

Dado un sistema de espín arbitrario (s), éste puede ser descrito mediante el producto tensorial de $2s$ sistemas de espín 1/2, considerando sólo el subespacio simétrico ante intercambio de partículas, el cual es invariante ante rotaciones. Como ejemplo

de esto, pensemos en espín 1, para este caso se tiene la siguiente asociación [24]

$$\begin{aligned} |1, 1\rangle &\rightarrow |++\rangle, \\ |1, 0\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle + |-+\rangle), \\ |1, -1\rangle &\rightarrow |--\rangle, \end{aligned} \tag{4.2}$$

así, un estado de espín 1 $|\psi\rangle = a_1|1, 1\rangle + a_0|1, 0\rangle + a_{-1}|1, -1\rangle$ puede representarse como $|\psi\rangle = a_1|++\rangle + a_0\frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle) + a_{-1}|--\rangle$.

De manera similar, el tratamiento de un sistema de espín $s = 3/2$ se da por la siguiente asociación

$$\begin{aligned} \left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle &\rightarrow |+++\rangle, \\ \left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} (|++-\rangle + |+-+\rangle + |-++\rangle), \\ \left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} (|+--\rangle + |--+\rangle + |-+-\rangle), \\ \left|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle &\rightarrow |---\rangle. \end{aligned} \tag{4.3}$$

A partir de este punto es fácil notar que la asociación de las proyecciones de espín con los productos tensoriales de espín 1/2 se da mediante la simetrización de los estados cuya suma aritmética de espín 1/2 corresponde a la proyección de espín en z del estado en cuestión, más la normalización apropiada.

4.0.2. Enredamiento cuántico

Se tratará al enredamiento cuántico mediante la idea de **estados separables**. Decimos que un estado puro es separable cuando puede escribirse como el producto tensorial de dos estados puros. Por ejemplo, el estado $|++\rangle = |+\rangle \otimes |+\rangle$ es separable, mientras que $(1/\sqrt{2})(|+-\rangle + |-+\rangle)$ no lo es. Entonces, se considera que los estados que son factorizables no tienen enredamiento, mientras que aquellos que no lo son, sí lo tienen. Siguiendo este razonamiento, se puede cuantificar el enredamiento como la mínima distancia del estado no factorizable en cuestión a los estados que sí

son factorizables. Dicha distancia puede expresarse matemáticamente de la siguiente forma [25] [26]

$$D(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = \arccos |\langle\psi|\phi\rangle|, \quad (4.4)$$

donde D es el llamado ángulo de Bures, ψ es el estado en cuestión y ϕ es el estado factorizable.

Otra forma de pensar al enredamiento es mediante la idea de Shannon, que puede resumirse de la siguiente manera [27] [31]:

1. Dado un estado de espín s ($|\psi\rangle$), se obtiene su expresión en términos del producto tensorial de $2s$ estados de espín $1/2$.
2. Se calcula la matriz de densidad del estado en términos de la base de espines $1/2$ (ρ).
3. Se encuentra la traza parcial de esta matriz, respecto a uno de los subsistemas de espín (matriz reducida ρ_{red}).
4. Luego se obtienen los eigenvalores de la matriz ρ_{red} (λ_i).
5. Finalmente se calcula el enredamiento como:

$$Enredamiento(|\psi\rangle) = - \sum_i \lambda_i \ln(\lambda_i), \quad (4.5)$$

esta cantidad es conocida como la entropía de Shannon correspondiente al estado $|\psi\rangle$.

Vale la pena mencionar que el ángulo de Bures y la entropía de Shannon se anulan para estados separables.

4.0.3. Relación entre enredamiento y energía para un estado de espín 1

Sin pérdida de generalidad, se describe al estado a partir de su constelación de Majorana tomando dos estrellas en el plano xz , caracterizadas por un único ángulo α . Esto es posible porque cualquier otro estado se puede obtener como una rotación del estado descrito anteriormente. Con esto en mente, el estado se caracteriza a partir de la constelación de la siguiente forma:

- 1 Primero se obtienen los puntos del plano complejo a los que se mapean las estrellas

$$\begin{aligned} \text{primera estrella : } (\sin \alpha, 0, \cos \alpha) &\rightarrow \left(\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}, 0 \right) = z_1 \\ \text{segunda estrella : } (\sin(-\alpha), 0, \cos(-\alpha)) &\rightarrow \left(\frac{-\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}, 0 \right) = z_2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

2. Con estos puntos se genera un polinomio en z -complejo

$$(z - z_1)(z - z_2) = z^2 + \frac{\cos \alpha - 1}{\cos \alpha + 1}. \quad (4.7)$$

3. Del resultado anterior y la expresión del polinomio de Majorana se obtiene:

$$\psi_1 = 1, \quad \psi_0 = 0, \quad \psi_{-1} = \frac{\cos \alpha - 1}{\cos \alpha + 1}. \quad (4.8)$$

Entonces el estado puede escribirse como

$$|\psi\rangle = |++\rangle + \frac{\cos \alpha - 1}{\cos \alpha + 1} |--\rangle, \quad (4.9)$$

la matriz de densidad reducida es

$$\rho_{red} = \frac{1}{1 + a^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

donde $a = \frac{\cos \alpha - 1}{\cos \alpha + 1}$. Finalmente, el enredamiento en función de α es

$$\text{Enredamiento}(\alpha) = -\frac{(\cos \alpha - 1)^2 \ln \left(\frac{(\cos \alpha - 1)^2}{2(\cos^2 \alpha + 1)} \right)}{2(\cos^2 \alpha + 1)} - \frac{(\cos \alpha + 1)^2 \ln \left(\frac{(\cos \alpha + 1)^2}{2(\cos^2 \alpha + 1)} \right)}{2(\cos^2 \alpha + 1)}. \quad (4.11)$$

En este caso también fue posible encontrar una expresión analítica para la energía en función de α . Para este propósito se usó el hecho de que dado un estado SHO3D de la forma

$$\psi = \sum_i a_i \psi_{n_{xi}, n_{yi}, n_{zi}}, \quad (4.12)$$

la energía se puede calcular de acuerdo a

$$E = \sum_i |a_i|^2 \left(n_{xi} + n_{yi} + n_{zi} + \frac{3}{2} \right). \quad (4.13)$$

Obteniendo así, la siguiente expresión

$$\text{Energía}(\alpha) = \frac{8}{(\cos(2\alpha) + 3)^2} - \frac{4}{\cos(2\alpha) + 3} + \frac{17}{6}. \quad (4.14)$$

Se analizó el comportamiento de la energía y enredamiento en función del ángulo y luego el del enredamiento respecto a la energía

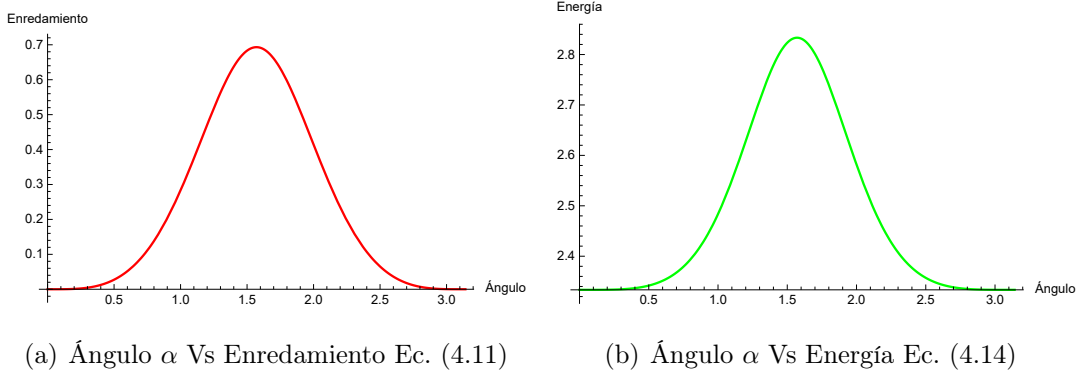


Figura 4.1:

La figura 4.1 sugiere que la energía de SHO3DR se comporta igual que el enredamiento, pero al graficarlos juntos (véase figura 4.2) se observa simplemente una

relación monotonamente creciente. Puesto que el ángulo α cuantifica la separación entre las estrellas, el comportamiento expuesto en la figura 4.1 señala que la mayor separación entre las estrellas maximiza tanto la energía como el enredamiento y a medida que estas son más próximas la energía y enredamiento disminuyen.

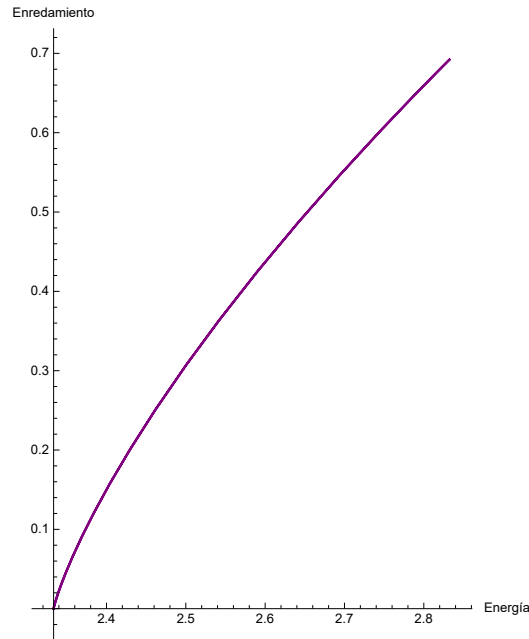


Figura 4.2: Energía Vs Enredamiento

4.1. Coherencia y anticoherencia en sistemas de espín

Los estados cuasi-clásicos o coherentes fueron introducidos por primera vez en el estudio del oscilador armónico cuántico. Estos son estados que minimizan la desigualdad de Heisenberg para posición y momento, a la vez que tienen la misma dispersión en energía cinética y potencial. En el caso de un sistema de espín arbitrario j , o en general, cualquiera sistema cuántico con tres observables J_i ($i = x, y, z$) que satisfacen las relaciones de conmutación del momento angular $[J_i, J_k] = i\epsilon_{jkl}J_l$ (con ϵ_{jkl} el símbolo de Levi-Civita y $\hbar = 1$) los estados coherentes están definidos como aquellos estados puros para los cuales la norma del valor de expectación del operador de espín

es máximo e igual a j . De manera más precisa, si $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$ son las representaciones irreducibles de dimensión $2j + 1$ de los operadores de espín, entonces para cualquier estado coherente de espín j , se tiene que $\langle \mathbf{J} \rangle = j\mathbf{n}$ con \mathbf{n} un vector unitario real. Al igual que su contraparte clásica, están caracterizados por una dirección \mathbf{n} . Además, todos los estados de espín coherentes están relacionados mediante un rotación de espín.

En contraposición a los estados de espín coherentes, los estados menos coherentes pueden ser caracterizados por tener valor de expectación de espín igual a cero. De alguna forma se puede decir que son estados menos direccionales, en este sentido son estados menos clásicos. La definición general de anticoherencia es la siguiente: Decimos que un estado puro de espín j $|\psi_j\rangle$ es anticoherente a orden t , o t -anticoherente, si $\langle (\mathbf{J} \cdot \mathbf{n})^k \rangle$ es independiente del vector unitario \mathbf{n} para $k = 1, \dots, t$, donde $\langle \cdot \rangle \equiv \langle \psi_i | \cdot | \psi_i \rangle$ [28]. Se sigue de la definición que las rotaciones de espín preservan el orden de anticoherencia de un estado de espín y que cualquier estado t -anticoherente es necesariamente t' -anticoherente para $t' < t$. En particular, todos los estados anticoherentes son 1-anticoherentes [32].

4.1.1. Definición axiomática de medidas de anticoherencia para estados de espín puros

Dado un estado puro de espín j $|\psi_j\rangle$ y t un entero positivo, se define una medida de anticoherencia de orden t (o t -anticoherencia) para estados puros de espín j como una función positiva $\mathcal{A}_t(|\psi_j\rangle)$ que satisface el siguiente conjunto mínimo de condiciones:

- i. $\mathcal{A}_t(|\psi_j\rangle) = 0 \iff |\psi_j\rangle$ es coherente.
- ii. $\mathcal{A}_t(|\psi_j\rangle) = 1 \iff |\psi_j\rangle$ es t -anticoherente.
- iii. $\mathcal{A}_t(|\psi_j\rangle) \in [0, 1]$ para cualquier $|\psi_j\rangle$.
- iv. $\mathcal{A}_t(|\psi_j\rangle)$ es invariante bajo cambios globales de fase y rotaciones de espín arbitrarias.

Las primeras tres condiciones aseguran que los estados coherentes y t -anticoherentes son los únicos que minimizan y maximizan, respectivamente, cualquier medida de anticonherencia de orden t . La última condición garantiza que el valor tomado por las medidas de anticonherencia no dependa de un sistema de coordenadas particular. Esto es equivalente a la igualdad

$$\mathcal{A}_t(|\psi_j\rangle) = c \quad \rightarrow \quad \mathcal{A}_t(e^{i\alpha} R_{\mathbf{n}}(\theta)|\psi_j\rangle) = c \quad (4.15)$$

para cualquier $\theta, \alpha \in \mathbb{R}$, $c \in [0, 1]$ y $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$.

4.1.2. Medidas de anticonherencia basadas en la pureza

Se empleará una medida de anticonherencia construida a partir de lo siguiente. Primero, se considera un sistema de espín arbitrario s , este será representado como el producto tensorial de $2s$ sistemas de espín $1/2$, obteniendo de ello un estado $|\psi_s\rangle$. Se construye la matriz de densidad de este estado $\rho = |\psi_s\rangle\langle\psi_s|$ y se calculan trazas parciales de ella hasta obtener una matriz de $(t+1) \times (t+1)$ $\rho_t = tr_{1\dots 2s-t}(|\psi_s\rangle\langle\psi_s|)$. La pureza de ρ_t , para cualquier t es:

$$R_t(|\psi_s\rangle) \equiv tr(\rho_t^2) = \sum_{i=1}^{t+1} \lambda_i^2, \quad (4.16)$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_{t+1}$ son los eigenvalores de la matriz ρ_t . A partir de la pureza se puede definir una medida de t -anticonherencia como sigue

$$\mathcal{A}_t^R(|\psi_s\rangle) = \frac{t+1}{t} [1 - R_t(|\psi_s\rangle)]. \quad (4.17)$$

Esta medida es la entropía lineal reescalada $S_L = 1 - R_t$ del estado reducido ρ_t así que $\mathcal{A}_t^R \in [0, 1]$. La entropía de Von Neumann $S = -tr(\rho_t \ln \rho_t)$ también puede ser usada como una medida de anticonherencia basada en el entrelazamiento del sistema bipartita t y $2s - t$ [33].

Vale la pena mencionar que existe una simetría en las $R_t(|\psi_s\rangle)$ y es que

$$R_t(|\psi_s\rangle) = R_{2s-t}(|\psi_s\rangle), \quad (4.18)$$

lo que ocasiona que $\mathcal{A}_t^R(|\psi_s\rangle) \sim \mathcal{A}_{2s-t}^R(|\psi_s\rangle)$, cuando esto ocurra se dirá que las anticonherencias son linealmente dependientes.

4.2. Anticoherencia en sistemas de espín y energía de la representación SHO3D

Al igual que se compararon el enredamiento de un sistema de espín con la energía de la SHO3DR, ahora se estudiará la relación con la anticoherencia. Es de esperarse que exista una relación, pues al menos en el caso del enredamiento había monotonía al compararlas y la medida de anticoherencia empleada es básicamente el enredamiento reescalado.

4.2.1. Pruebas de la relación entre anticoherencia y espín

Para las siguientes pruebas se emplearán estados identificados mediante sus constelaciones de Majorana, es decir; dada una constelación de Majorana se obtendrá el estado en la base habitual de eigenestados de S_z y con este se trabajará para obtener la anticoherencia y la energía.

Se empleará la siguiente representación de un estado general de espín 1/2

$$|\psi\rangle_{1/2} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi} \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

donde los ángulos θ, ϕ coinciden con los ángulos en coordenadas esféricas e identifican la dirección de la estrella correspondiente al estado en la representación de Majorana. A partir de una constelación de Majorana de espín s se obtendrán $2s$ estados de espín

como el de la ecuación (4.18), mediante sus productos tensoriales se genera el estado

$$|\psi\rangle_s = |\psi_1\rangle_{1/2} \otimes \cdots \otimes |\psi_{2s}\rangle_{1/2}, \quad (4.20)$$

y la matriz de densidad

$$\rho_s = |\psi\rangle_{ss}\langle\psi|. \quad (4.21)$$

Con esta matriz ρ_s se genera la representación SHO3D, se calcula la energía y la anticoherencia de acuerdo a lo expuesto en las secciones anteriores.

Prueba 1

Para esta prueba se usó un estado de espín 1, como se sabe, en este caso la constelación de Majorana posee dos estrellas. Mismas que se tomaron en el plano xz , formando un ángulo α con el eje z y simétricas respecto a este, como se muestra en la figura 4.3

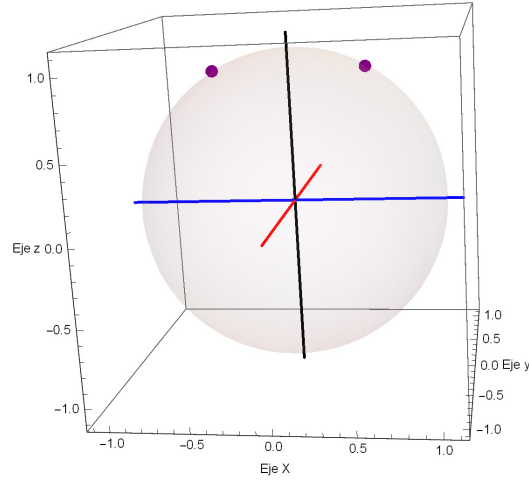


Figura 4.3: Constelación de Majorana de espín 1 formada por dos estrellas contenidas en el plano xz y formando un ángulo α respecto a z .

Los estados que corresponden a esta constelación son

$$|\psi\rangle_1 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}, \quad |\psi\rangle_2 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ -\sin(\alpha/2) \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Se han obtenido las siguientes expresiones para la anticoherencia y la energía en

función del ángulo α

$$A_1(\alpha) = \frac{4 \sin^4(\alpha)}{(\cos(2\alpha) + 3)^2},$$

$$E(\alpha) = \frac{8}{(\cos(2\alpha) + 3)^2} - \frac{4}{\cos(2\alpha) + 3} + \frac{17}{6}. \quad (4.23)$$

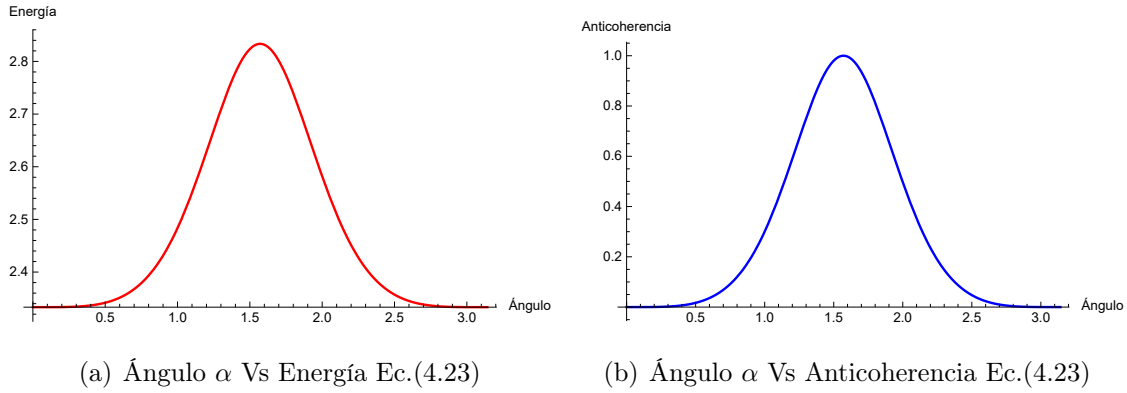


Figura 4.4:

En la figura 4.4 es notorio que el comportamiento de la energía y anticoherencia son similares, esta relación puede visualizarse mejor en la figura 4.5. Las gráficas de la figura 4.4 son muy similares a las de la figura 4.1 donde se trataba al enredamiento, esto es debido a que esta medida de anticoherencia es el enredamiento reescalado.

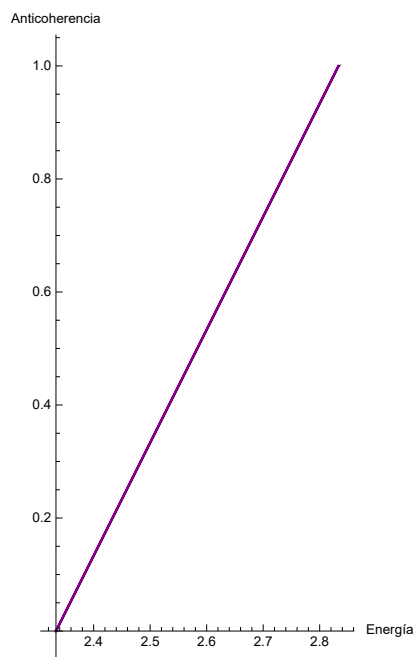


Figura 4.5: Energía Vs Anticoherencia

Prueba 2

En esta prueba se ha empleado la misma constelación de la prueba anterior más una estrella colocada arbitrariamente sobre la esfera unitaria, constituyendo un estado de espín 3/2, de acuerdo a la figura 4.6

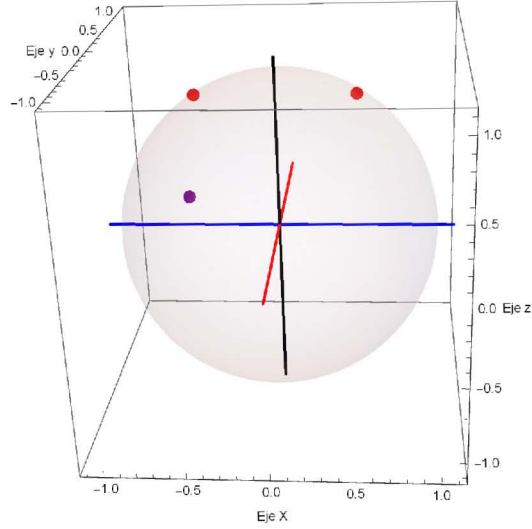


Figura 4.6: Constelación de Majorana de un estado de espín 3/2 formada por dos estrellas contenidas en el plano xz y formando un ángulo α respecto a z , más una estrella colocada arbitrariamente con orientación dada por θ_1 y ϕ_1 .

Los estados correspondientes a esta constelación son

$$|\psi\rangle_1 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}, \quad |\psi\rangle_2 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ -\sin(\alpha/2) \end{pmatrix}, \quad |\psi\rangle_3 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1/2) \\ \sin(\theta_1/2)e^{i\phi_1} \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

De estos estados se han obtenido expresiones de anticoherencia y energía. En las ecuaciones (4.24) y (4.25) se muestran A_1 y E , la A_2 se ha omitido puesto que es un múltiplo de A_1 debido a la simetría expuesta anteriormente, misma que puede visualizarse en la figura 4.7 (b)

$$A_1(\alpha, \theta_1, \phi_1) = [48 \sin^2(\alpha)(\cos(2\alpha) + 3) \sin^2(\theta_1) \cos(2\phi_1) - 112 \cos(\alpha - \theta_1) + 28 \cos(2(\alpha - \theta_1)) - 16 \cos(3\alpha - \theta_1) - 112 \cos(\alpha + \theta_1) + 28 \cos(2(\alpha + \theta_1))]$$

$$-3 \cos(2(2\alpha + \theta_1)) - 16 \cos(3\alpha + \theta_1) - 3 \cos(4\alpha - 2\theta_1) - 88 \cos(2\alpha) \\ + 46 \cos(4\alpha) + 14 \cos(2\theta_1) + 234] / [144(2 \cos(\alpha) \cos(\theta_1) + \cos(2\alpha) + 3)^2], \quad (4.25)$$

$$E(\alpha, \theta_1, \phi_1) = [72 \sin^2(\alpha) \sin^2(\theta_1) \cos(2\phi_1) + 4 \cos(2\alpha) \\ (6 \sin^2(\alpha) \sin^2(\theta_1) \cos(2\phi_1) + 200 \cos(\alpha) \cos(2\theta_1) + 59 \cos(2\theta_1) + 353) \\ + 2400 \cos(\alpha) \cos(\theta_1) + \cos(4\alpha)(127 - 3 \cos(2\theta_1)) \\ + 215 \cos(2\theta_1) + 2301] / [80(2 \cos(\alpha) \cos(\theta_1) + \cos(2\alpha) + 3)^2]. \quad (4.26)$$

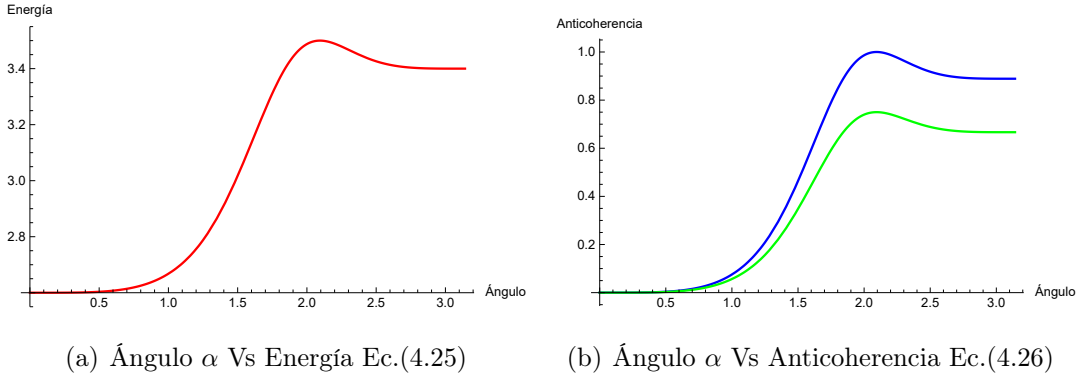


Figura 4.7: En estas graficas se han tomado $\theta_1 = 0, \phi_1 = \pi/2$. En b) la curva azul es la anticoherencia de orden 1, mientras que la verde es de orden 2

Nuevamente el comportamiento de la energía y anticoherencia es similar y termina por verificarse su relación en la figura 4.8. En este caso puede notarse que la separación entre las estrellas determina inicialmente el aumento en la energía y anticoherencia, pero ya no existe la simetría observada en la prueba 1, donde a medida que volvían a juntarse la energía disminuía. Esto se debe a que la tercera estrella rompe con esa simetría en la separación, pues su presencia establece una diferencia entre las constelaciones para $\alpha < \pi/2$ y $\alpha > \pi/2$

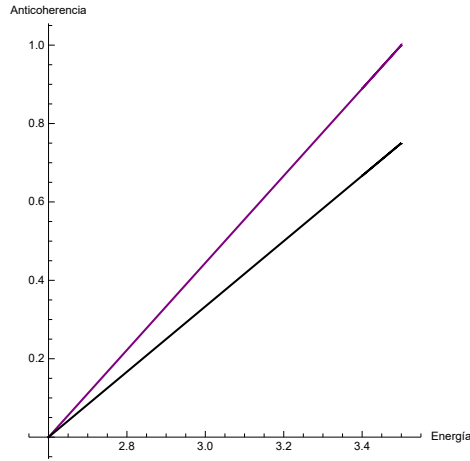


Figura 4.8: Energía Vs Anticoherencia. En esta gráfica se han tomado $\theta_1 = 0, \phi_1 = \pi/2$. La línea morada corresponde a la anticoherencia de orden 1 y la línea negra a la anticoherencia de orden 2.

Prueba 3

Para esta prueba se añade otra estrella con orientación arbitraria en la esfera unitaria, determinada por los ángulos θ_2 y ϕ_2 , como se muestra en la figura 4.9

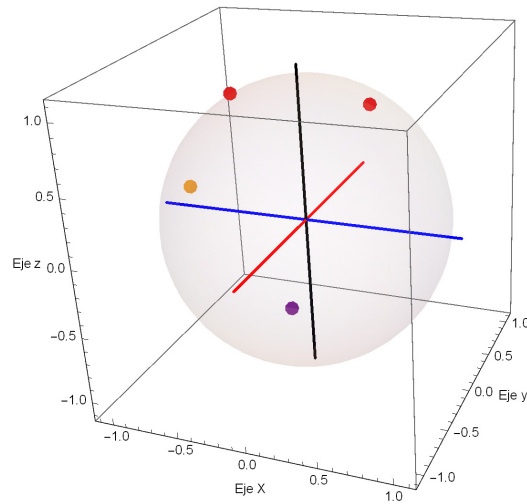


Figura 4.9: Constelación de Majorana de un estado de espín 2 formada por dos estrellas contenidas en el plano xz y formando un ángulo α respecto a z , más dos estrellas colocadas arbitrariamente con orientación dada por $\theta_1, \phi_1, \theta_2$ y ϕ_2 respectivamente.

Así, se tienen los estados

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle_1 &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}, & |\psi\rangle_2 &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ -\sin(\alpha/2) \end{pmatrix}, \\
 |\psi\rangle_3 &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1/2) \\ \sin(\theta_2/2)e^{i\phi_1} \end{pmatrix}, & |\psi\rangle_4 &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_2/2) \\ \sin(\theta_2/2)e^{i\phi_2} \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

En este caso no se incluyen las expresiones analíticas de la energía y anticoherencia debido a que son bastante extensas, pero aún así es posible visualizar su comportamiento en la figura 4.10

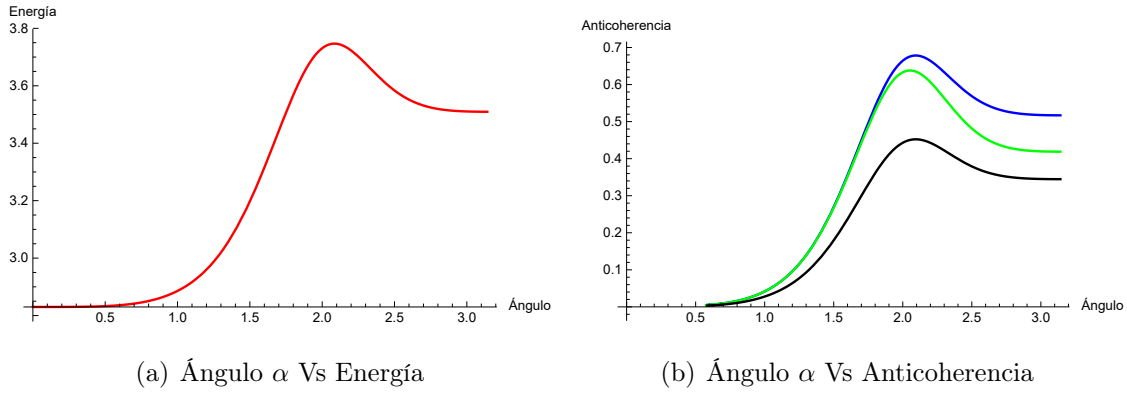


Figura 4.10: En estas gráficas se han tomado $\theta_1 = \pi/4$, $\phi_1 = \pi/4$, $\theta_2 = \pi/8$, $\phi_2 = \pi/6$. En b) la curva azul es la anticoherencia de orden 1, la verde de orden 2 y la negra de orden 3.

Aquí las curvas de energía y anticoherencia parecen similares por separado pero al comparar entre anticoherencias se puede notar que existe cierta diferencia, particularmente en la anticoherencia de orden 2. Esto nuevamente se explica debido a la simetría en las trazas parciales, pero se traduce en la pérdida de la relación directa entre energía y anticoherencias, misma que puede apreciarse en la figura 4.11

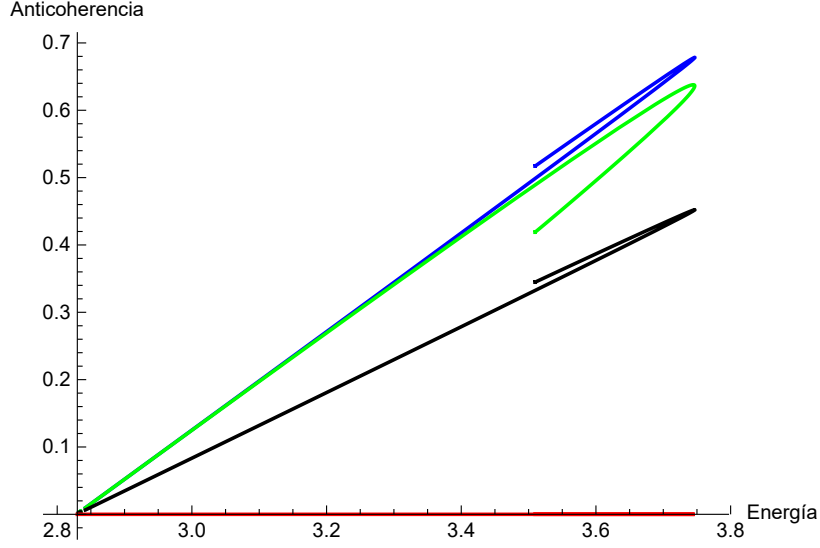


Figura 4.11: Energía Vs Anticoherencia. En esta gráfica se han tomado $\theta_1 = \pi/4$, $\phi_1 = \pi/4$, $\theta_2 = \pi/8$, $\phi_2 = \pi/6$. La curva azul es la anticoherencia de orden 1, la verde de orden 2, la negra de orden 3 y la naranja de orden 4.

Para generalizar la relación energía-anticoherencia se deduce que no hay una relación directa con cada anticoherencia sino con una combinación lineal de éstas, misma que comienza a ser visible a partir de este punto, donde aparecen anticoherencias linealmente independientes debido al aumento de la dimensión de la matriz de densidad que se traduce en varias trazas parciales que no coinciden.

Para verificar esta hipótesis se planteó la existencia de una relación lineal energía-anticoherencias de la siguiente forma

$$E = \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_3, \quad (4.28)$$

luego se evaluaron 3 estados dados por los valores de $\theta_1 = \pi/4$, $\phi_1 = \pi/4$, $\theta_2 = \pi/8$, $\phi_2 = \pi/6$ y $\alpha = \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\}$. Con ello se obtuvo un sistema lineal 3×3 y se resolvió para las γ 's encontrando en este caso la relación:

$$E(\alpha) = [38A_1(\alpha) + 10A_2(\alpha) + 99]/35. \quad (4.29)$$

El comportamiento de esta relación se visualiza en la figura 5.12

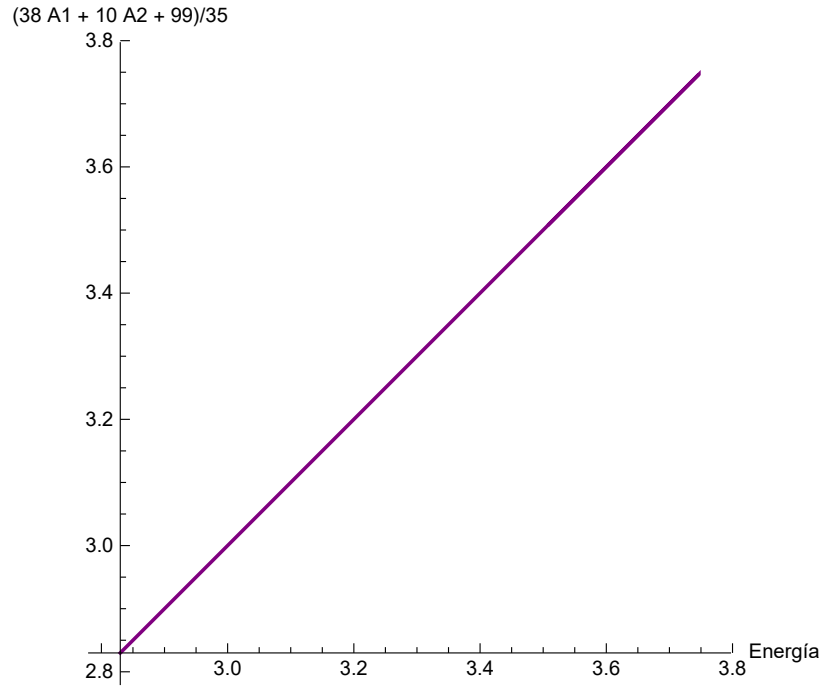


Figura 4.12: Energía Vs $(38 A_1 + 10 A_2 + 99)/35$. En esta gráfica se han tomado $\theta_1 = \pi/4, \phi_1 = \pi/4, \theta_2 = \pi/8, \phi_2 = \pi/6$.

Prueba 4

Aquí se tomarán tres estrellas en el polo norte y dos en el plano xz formando un ángulo α con el eje z , una en la dirección positiva del eje x y la otra en la negativa, de acuerdo a la figura 4.13

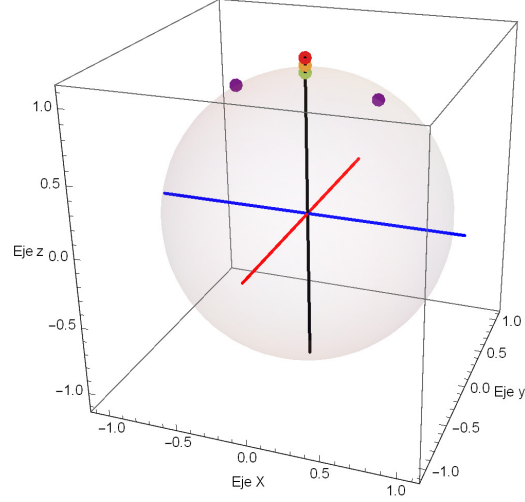


Figura 4.13: Constelación de Majorana de un estado de espín $5/2$ formada por dos estrellas contenidas en el plano xz y formando un ángulo α respecto a z , más tres estrellas colocadas en el polo norte.

En este caso los estados son

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle_1 &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}, & |\psi\rangle_2 &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ -\sin(\alpha/2) \end{pmatrix}, \\
 |\psi\rangle_3 &= |\psi\rangle_4 = |\psi\rangle_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Es posible obtener expresiones compactas para las anticonherencias independientes y la energía:

$$\begin{aligned}
 A_1(\alpha) &= \frac{64 \sin^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) (188 \cos(\alpha) + 53(\cos(2\alpha) + 3))}{25(36 \cos(\alpha) + 11(\cos(2\alpha) + 3))^2}, \\
 A_2(\alpha) &= \frac{18 \sin^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) (764 \cos(\alpha) + 209(\cos(2\alpha) + 3))}{25(36 \cos(\alpha) + 11(\cos(2\alpha) + 3))^2},
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

$$E(\alpha) = \frac{2 \left(743 \tan^8\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 14350 \tan^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 47750 \right)}{315 \left(\tan^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 10 \right)^2}. \tag{4.32}$$

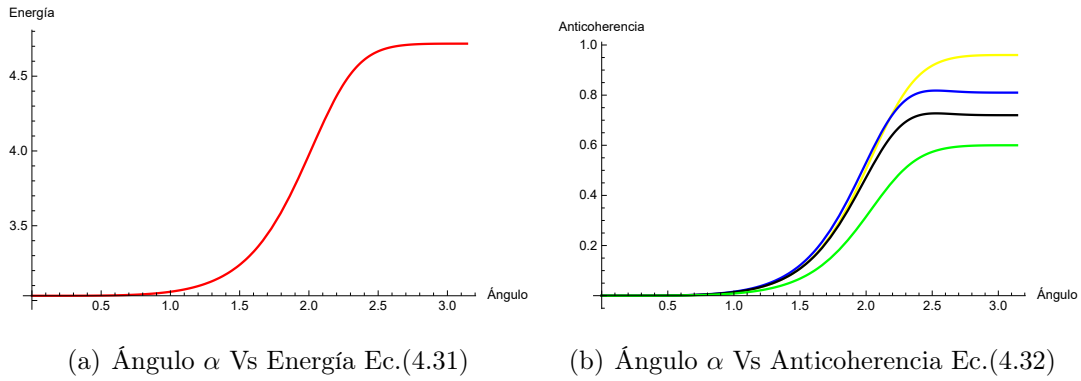


Figura 4.14: En b) la curva amarilla es la anticoherencia de orden 1, la azul de orden 2, la negra de orden 3 y la verde de orden 4.

Al igual que en la prueba 3 existen un par de anticoherencias independientes como puede apreciarse en la figura 4.14 (b). Lo que se traduce, nuevamente, en un comportamiento anómalo de las curvas energía-anticoherencia expuesto en la figura 4.15

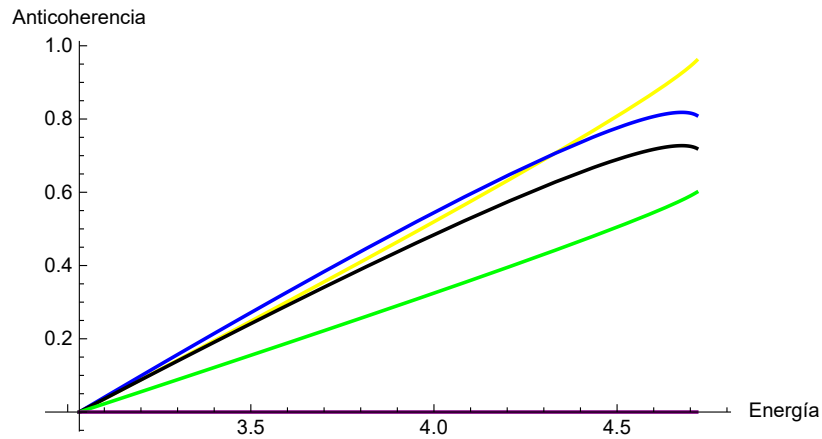


Figura 4.15: Energía Vs Anticoherencia. La curva amarilla es la anticoherencia de orden 1, la azul de orden 2, la negra de orden 3 y la verde de orden 4.

La propuesta de una combinación lineal de las anticoherencias mostrada en la ecuación (4.27) es válida nuevamente, debido a que sólo hay dos anticoherencias independientes. Y tras realizar el mismo proceso que en la prueba 3 con $\alpha = \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\}$

se obtuvo

$$E(\alpha) = [495A_1(\alpha) + 200A_2(\alpha) + 1146]/378. \quad (4.33)$$

El comportamiento de esta relación se observa en la figura 4.16

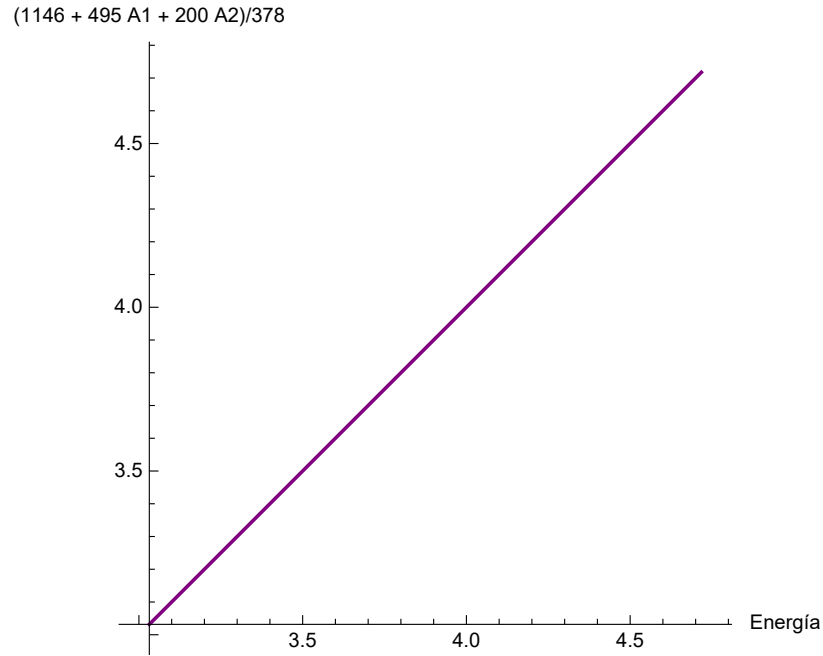


Figura 4.16: Energía Vs $(1146 + 495 A1 + 200 A2)/378$

En este punto se ha verificado la hipótesis de que la energía de SHO3DR es proporcional a una combinación lineal de las antioherencias independientes para 4 familias de estados de espín 1, 3/2, 2 y 5/2. Debido a la naturaleza de los cálculos empleados para obtener la energía y las antioherencias esta relación no es nada trivial, así que es posible pensar que se cumpla para cualquier estado de espín s .

Capítulo 5

Conclusiones

A lo largo del desarrollo de este trabajo se han expuesto cinco representaciones de estados de espín, a saber: la representación canónica en la base $\{|s, m\rangle\}$, la representación de Majorana, las representaciones de Schwinger con estados del oscilador armónico cuántico 2D y con excitaciones rotacionales y finalmente la representación con estados del oscilador armónico cuántico tridimensional (SHO3DR). Mientras se trabajaba con ellas ha sido posible tomar ventaja de las simetrías del estado que exponían y encontrar relaciones entre estas.

La investigación de esta tesis se centró en el estudio de la SHO3DR, que mostró que sus curvas de distribución de probabilidad constante preservan la “orientación” del estado de espín en la base canónica, en el caso de espín $1/2$, y reflejan el comportamiento del valor esperado $\langle \vec{S} \rangle$ para espín más alto. Además, una rotación en el estado de espín se traduce en la misma rotación en estas curvas de distribución de probabilidad constante, mismas que preservan las dimensiones y forma luego de ser rotadas, asemejándose en este sentido a las constelaciones de Majorana.

Por otro lado, se describieron sistemas de espín arbitrario como productos tensoriales de sistemas de espín $1/2$ lo que abrió la posibilidad de tratar propiedades como el enredamiento cuántico y la anticoherencia a partir de la noción de estados separables y el formalismo de la matriz de densidad, para trabajar con la anticoherencia se usó el trabajo de D.Baguette y J.Martin quienes desarrollaron una serie de medidas de anticoherencia a distintos ordenes, algo a destacar de estas es que algunas resultan

ser múltiplos de las de otro orden.

Haciendo uso de familias uniparamétricas de estados obtenidos a partir de constelaciones de Majorana caracterizadas por la separación de sus estrellas, se encontró que el enredamiento, la anticoherencia y la energía de SHO3DR dependen de la separación de las estrellas para un sistema de espín 1 y en general dependen de la forma de la constelación, siendo las constelaciones con mayor separación o aleatoriedad en la distribución de sus estrellas las que maximizan las cantidades antes mencionadas.

Siguiendo esta línea se dedujo una posible relación entre el valor esperado de la energía de SHO3DR y una combinación lineal de las anticoherencias linealmente independientes, dicha posibilidad fue expuesta luego de realizar un conjunto de pruebas con varios estados, en las cuales se evidenció este comportamiento.

Aún así, este trabajo no es concluyente con esta relación pero abre el camino para una futura investigación.

Bibliografía

- [1] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics (Revised Edition)*. Addison-Wesley, 1994.
- [2] H. Bacry. Orbits of the rotation group on spin states. *Journal of Mathematical Physics*, 15(10):1686–1688, 1974.
- [3] M.Sarovar B. Whaley, K.Young. *C/CS/Phys 191 Lecture 12: Spin Precession*. University of California, Berkeley, 2003.
- [4] R.Littlejohn. *Phys 221AB Notes 14: Spin in Magnetic Fields*. University of California, Berkeley, 2019.
- [5] R.Littlejohn. *Phys 221AB Notes 12: Rotations in Quantum Mechanics, and Rotations of Spin 1/2 Systems*. University of California, Berkeley, 2019.
- [6] M.Sarovar B. Whaley, K.Young. *C/CS/Phys 191 Lecture 13: Spin manipulation by resonance*. University of California, Berkeley, 2008.
- [7] E.Majorana. Atomi orientati in campo magnetico variabile. *Nuovo Cimento*, 9:43, 1932.
- [8] N.Wheeler. *Majorana representation of higher spin states*. Reed College Physics Department, September 2000.
- [9] R.Littlejohn. *Phys 221AB Notes 13: Representations of the Angular Momentum Operators and Rotations*. University of California, Berkeley, 2019.
- [10] T. Frankel. *The Geometry of Physics*. Cambridge University Press, 1997.

- [11] N.Wheeler. *Remarks concerning the explicit construction of spin matrices for arbitrary spin*. Reed College Physics Department, August 2000.
- [12] T. L. Curtright, D. B. Fairlie, and C. K. Zachos. A Compact Formula for Rotations as Spin Matrix Polynomials. *SIGMA*, 10:084, August 2014.
- [13] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Institute of Physics Publishing, 1990.
- [14] R.Gilmore. *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications*. New York: Wiley, 1974.
- [15] J. von Neumann. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, 1955.
- [16] R.Littlejohn. *Phys 221AB Notes 14: Irreducible Tensor Operators and the Wigner-Eckart Theorem*. University of California, Berkeley, 2019.
- [17] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry I*. J. Wiley, 1963.
- [18] M.Hamermesh. *Group theory and its application to physical problems*. Dover, New York, 1989.
- [19] F.M. Mejía and V. Pleitez. Schwinger's oscillator method, supersymmetric quantum mechanics and massless particles. *Enseño de Física*, 24:41, 2002.
- [20] J.Schwinger. *On angular momentum*, in L.C.Biedenharn and H. van Dam (eds), *Quantum Theory of Angular Momentum*. Academic Press, 1965.
- [21] Y.Ding and M. Xu. Oscillator model of spin. *Department of Physics, Shandong University, Jinan 250100, China*.
- [22] N. Mukunda R. Simon A. Zampini S. Chaturvedi, G. Marmo. The Schwinger representation of a group: Concept and applications. *Reviews in Mathematical Physics*, 18(8):887–912, 2006.

- [23] N.Wheeler. *Comments concerning Julian Schwinger's "On Angular Momentum"*. Reed College Physics Department, October 2000.
- [24] O. Giraud, D. Braun, D. Baguette, T. Bastin, and J. Martin. Tensor representation of spin states. *Phys Rev Lett*, 114:080401, 2015.
- [25] V. Vedral and M.B. Plenio. Entanglement measures and purification procedures. *Phys. Rev.*, A 57:1619, 1998.
- [26] A.Shimony. Degree of entanglement. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 755:675–679, 1995.
- [27] C.E. Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell Sys. Tech. J.*, 27:379,623, 1948.
- [28] D. Baguette, T. Bastin, and J. Martin. Multiqubit symmetric states with maximally mixed one-qubit reductions. *Phys. Rev. A*, 90:032314, 2014.
- [29] D. Baguette and J. Martin. Anticoherence measures for pure spin states. *Phys. Rev. A*, 96:032304, 2017.
- [30] J. Zimba. Anticoherent spin states via the Majorana representation. *Electronic Journal of Theoretical Physics*, 3(10):143–156, 2006.
- [31] I. Bengtsson and K. Życzkowski. *Geometry of Quantum States (2nd Ed.)*. Cambridge Univesrity Press, 2017.
- [32] J. Zimba. Anticoherent spin states via the Majorana representation. *EJTP*, 3(10):143–156, 2006.
- [33] D. Baguette and J. Martin. Anticoherence measures for pure spin states. *Phys. Rev.*, A, 96(3):032304, 2017.