



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN

ANÁLISIS MULTIFRACTAL ROBUSTO DE LOS SISMOGRAMAS DE LOS TERREMOTOS
OCURRIDOS EL 7 Y 19 DE SEPTIEMBRE DE 2017 EN MÉXICO

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN

PRESENTA:
ALFONSO MURGA GUZMÁN

Directora de tesis:
DRA. SUEMI RODRÍGUEZ ROMO
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLÁN, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. ENERO, 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice.

Capítulo 1. Introducción, hipótesis, objetivos y motivación.....	1
1.1 Introducción.....	1
1.2 Hipótesis.....	3
1.3 Objetivo General.....	3
1.4 Objetivos particulares.....	3
1.5 Motivación.....	4
Capítulo 2. Terremotos.....	5
2.1 Introducción.....	5
2.2 Ondas sísmicas.....	5
2.2.1 Onda <i>P</i>	5
2.2.2 Onda <i>S</i>	6
2.2.3 Ondas Superficiales.....	8
2.2.4 Ondas Rayleigh.....	8
2.2.5 Ondas Love.....	9
2.3 Servicio Sismológico Nacional.....	9
2.3.1 Red Sismológica de Banda Ancha.....	10
2.4 Sismógrafos.....	12
2.5 Sismogramas.....	12
2.6 Las tres componentes del sismógrafo.....	14
2.8 Breve descripción de los terremotos a estudiar.....	15
2.8.1 Sismo de Tehuantepec (2017-09-07 M 8.2).....	15
2.8.2 Sismo de Puebla-Morelos (2017-09-19 M 7.1).....	16
2.9 Duración de un sismo.....	17
Capítulo 3. Fractales.....	20
3.1 Dimensión Fractal.....	20
3.2 Conjunto de Cantor (Georg Cantor, 1883).....	21
3.3 Curva Koch (Helge Von Koch, 1904).....	23
3.4 Triángulo de Sierpinski (Waclaw Sierpinski, 1915).....	26
3.5 Curva Peano (Giuseppe Peano, 1890).....	27
Capítulo 4. Multifractales.....	30
4.1 Exponente de Hurst.....	31

4.1.1 Correlaciones.....	33
4.2 Análisis de rango reescalado (R/S).....	34
4.3 Análisis de fluctuaciones sin tendencia.....	35
4.4 Análisis de fluctuaciones multifractales sin tendencia.....	36
4.5 Espectro multifractal.....	41
4.6 Conjunto de escalas (s).....	42
4.7 Resultados experimentales.....	43
4.7.1 Sismo de Tehuantepec, 2017-09-07, 23:49:18 hora local, M 8.2, Estación sismológica MCIG.....	44
4.7.2 Sismo de Puebla-Morelos, 2017-09-19, 13:14:40 hora local, M 7.1, Estación sismológica CGIG.....	51
4.8 Discusión del capítulo.....	57
Capítulo 5. Transformada Wavelet de Módulo Máximo.....	59
5.1 Transformada Wavelet (WT).....	59
5.2 Líneas máximas.....	62
5.3 Procedimiento para el análisis WTMM.....	64
5.4 Resultados Experimentales.....	65
5.4.1 Sismo de Tehuantepec, 2017-09-07, 23:49:18 hora local, M 8.2, Estación sismológica MCIG.....	66
5.4.2 Sismo de Puebla-Morelos, 2017-09-19, 13:14:40 hora local, M 7.1, Estación sismológica CGIG.....	70
5.5 Discusión del capítulo.....	75
Capítulo 6. Redes neuronales.....	76
6.1 Neuronas.....	77
6.2 Entrenamiento de una red neuronal.....	79
6.3 Propagación hacia atrás (BP).....	80
6.4 Redes Neuronales Recurrentes (RNR).....	82
6.4 Long Short-Term Memory (LSTM).....	84
6.4.1 Propagación hacia adelante en la LSTM.....	86
6.4.2 Propagación hacia atrás en la LSTM.....	86
6.5 Experimentación con LSTM.....	88
6.6 Discusión del capítulo.....	98
Capítulo 7. Conclusiones.....	100
Anexo I. Tratamiento de datos sísmicos.....	101

I.1. Adquisición de datos.	101
I.2. Lectura y manipulación de los archivos *.sac.....	103
I.3. Escalamiento.....	105
I.4 Delimitación y limpieza de los datos	106
Referencias bibliográficas.....	108

Capítulo 1. Introducción, hipótesis, objetivos y motivación.

1.1 Introducción.

Debido a la complejidad de los terremotos y de la necesidad de aumentar nuestra comprensión sobre el comportamiento de estos fenómenos de la naturaleza se han realizado diferentes tipos de estudios en ellos, como la creación de mapas lo más detallados posibles sobre las regiones propensas a sufrir actividad sísmica [1] o bien el de estudiar la distribución de las magnitudes de los terremotos intentando encontrar relaciones entre ellas. Por ejemplo, la ley de Gutenberg-Richter indica la existencia de una relación logarítmica entre la magnitud de los terremotos de una región y la cantidad de terremotos de dicha magnitud que habrá en esa región [2]. En su estudio de los terremotos del norte y sur de California, Lennartz y col. [3] concluyen que existen correlaciones a largo plazo tanto en magnitud como en recurrencia en el tiempo, las cuales pueden ser descritas mediante una ley de potencia con un exponente aproximado de 0.4. El término de *correlación* se tratará a detalle en el capítulo 4 y será un concepto que se retomará a lo largo de todo el trabajo presente.

Hay que hacer hincapié que según Mulargia y col. [4] los terremotos deben estar agrupados tanto en espacio como en tiempo, por lo que los estudios suelen basarse en catálogos de terremotos de zonas y fechas específicas. Valerie y col. [5] utilizaron en su estudio una base de datos mundial, encontrándose con que existe un efecto de memoria en la recurrencia de terremotos de ciertas magnitudes M .

Como ya hemos mencionado, existen relaciones logarítmicas capaces de describir algunos comportamientos de los terremotos, por lo que es normal querer aplicar en ellos metodologías fractales y multifractales propias de estudios en series temporales. Se le llama sistema multifractal a aquellos sistemas caracterizados por leyes de escalamiento con un número infinito de diferentes exponentes fractales. Las leyes de escalamiento deben ser válidas para el mismo rango del parámetro de escalas. Por ejemplo, Álvarez Ramírez y col. [6] realizaron un análisis de rango reescalado en los terremotos ocurridos al sur de México entre 1998 y 2011, encontraron que la sismicidad de la zona no es aleatoria, sino que tiene un comportamiento cíclico de aproximadamente un año, descrito gracias a las variaciones encontradas en el exponente de Hurst. Xingxing y col. [7] estudiaron los terremotos del suroeste de California ocurridos entre los años 1990 y 2010 creando así una serie de tiempo en la cual utilizaron el método de descomposición de modo empírico, mostrando que cada una de las componentes resultantes tenían comportamientos multifractales que dependen de las componentes de alta o baja frecuencia propias de las magnitudes de los sismos. Telesca y col. [8] realizaron un estudio entre sismos sucesivos de la zona centro de Italia, revisando la evolución multifractal de éstos, concluyeron que existe una disminución en la multifractalidad de las réplicas de un terremoto después del evento principal. Aggarwal y col. [9] utilizaron la secuencia de magnitudes de la zona de Kachchh en India occidental entre los años 2003 y 2012 realizando un análisis multifractales a un catálogo de terremotos con una magnitud mínima de 3.0, así como a un catálogo de las réplicas que existieron, concluyendo que ambos catálogos muestran comportamiento

multifractal. En años más recientes Sri Lakshmi y col. [10] realizaron tanto análisis fractales como multifractales al catálogo de terremotos ocurridos al noroeste de la India entre los años 1973 y 2016, reportan que la intensidad y recurrencia de los sismos en dicha región tenderá a aumentar en años futuros. Concluyen esto ya que el exponente de Hurst obtenido indica la existencia de un comportamiento de memoria de largo plazo en los eventos, además que los resultados también muestran multifractalidad, los autores relacionan este comportamiento multifractal con los diferentes cambios climáticos ocurridos en la región, así como a la dinámica de los bloques tectónicos que interactúan ahí.

Aunque los estudios realizados parecen centrarse principalmente en la relación de las magnitudes de los terremotos con la distribución de su ocurrencia, también es posible aplicar la metodología multifractal a las series temporales creadas a partir de las mediciones locales de los terremotos, mejor conocidas como sismogramas. Un sismograma es la representación de la respuesta del campo de ondas elásticas a la velocidad y los contrastes de densidad de las capas de roca o sedimentos a medida que la energía viaja a través del subsuelo y de la corteza terrestre, desde una fuente hasta un receptor. Por ejemplo, Godano y col. [11] utilizaron un catálogo de sismos de algunas regiones de Italia y Hawái mostrando que existe un comportamiento multifractal en ellos e indica que éste puede servir para un mejor agrupamiento o clasificación de los terremotos.

La investigación presentada aquí tiene como principal propósito la aplicación de metodologías de análisis multifractales a los datos obtenidos de la red de acelerómetros del Sistema Sismológico Nacional, específicamente de los sismos ocurridos los días 7 y 19 de septiembre del año 2017, esto con la finalidad de observar si una serie temporal multifractal tendrá un mejor o peor desempeño en técnicas de aprendizaje máquina, que una serie temporal que no muestre un comportamiento multifractal.

En la naturaleza se presentan sistemas muy complejos, que a simple vista muestran comportamientos que parecerían ser completamente aleatorios pero que en realidad tienen reglas de comportamiento que podemos estudiar. Esto se puede aplicar a los sismogramas y acelerogramas, que no son más que series temporales obtenidas de los sismos. El análisis multifractal nos ayudará en el análisis de su comportamiento y posiblemente a obtener patrones de estos eventos. Recordemos que la República Mexicana se encuentra en una de las zonas sísmicas más activas del mundo, conocida como el *cinturón de fuego del Pacífico*, esto debido a la interacción de 5 placas tectónicas en el territorio. Chiapas, Guerrero, Oaxaca, Michoacán, Colima y Jalisco son los estados más reincidentes en cuanto a sismos, y a pesar de no ser zona epicentral, la Ciudad de México se ha convertido en receptor sísmico de todos ellos, en parte por su cercanía y en parte por su tipo de suelo, originalmente lacustre.

Como complemento al análisis multifractal en el que se basará este estudio, utilizaremos en los sismogramas un modelo de aprendizaje automático conocido como red neuronal recurrente, el cual está encaminado a la búsqueda de patrones y predicción de datos en series temporales. Es interesante ver el comportamiento que tienen las redes neuronales al analizar datos que posean un comportamiento multifractal.

1.2 Hipótesis.

Uno de los primeros pasos al realizar un análisis multifractal en una serie de tiempo es el de calcular el exponente de *Hurst*, su importancia radica en que es un parámetro ya estandarizado en la literatura multifractal como un indicador del comportamiento general que posee la serie de tiempo analizada [6, 7, 9 y 10], según el valor que tome el exponente la serie se puede considerar como aleatoria, persistente o anti-persistente.

En base a lo ya explicado, si los datos obtenidos durante eventos sísmicos llegasen a presentar un comportamiento multifractal, debería ser posible crear un modelo de predicción basado en técnicas de aprendizaje automático, más específicamente, redes neuronales recurrentes.

Recordemos que en este trabajo no se analizará una distribución de sismos a lo largo de un periodo de tiempo, práctica común en estudios multifractales sobre sismos [2, 3, 5, 6, 7, 8, 9 y 10]. Nosotros analizaremos las series de tiempo creadas por los sismómetros durante los terremotos del 7 y 19 de septiembre del año 2017, por lo que el modelo propuesto no buscará la predicción de futuros sismos, sino que el modelo intentará demostrar que la existencia de correlaciones dentro de las series de tiempo pueden servir como un sistema discriminatorio que ayude en la selección de datos para el entrenamiento de metodologías de aprendizaje máquina, en nuestro caso se usará una red neuronal recurrente.

1.3 Objetivo General.

Apreciar el comportamiento de una metodología de predicción que utilice aprendizaje máquina al ser entrenada con series de tiempo tanto multifractales y no multifractales, para esto se realizará la predicción de un fragmento de un sismograma obtenido durante un terremoto por medio de aprendizaje automático, para esto se usará parte del propio sismograma para el entrenamiento y otra parte como conjunto de validación para realizar la predicción; como aprendizaje automático se usará una red neuronal recurrente entrenada con los sismogramas que hayan demostrado tener comportamiento multifractal, ya que este comportamiento indicaría que existen correlaciones dentro de la señal estudiada.

1.4 Objetivos particulares.

- ❖ Mostrar la presencia de correlaciones dentro de las fluctuaciones a micro y macro escala que existan en las mediciones tomadas de los terremotos señalados, mediante análisis multifractal de fluctuaciones sin tendencias (MFDFA) robusto, aplicando una heurística que ayude a mantener resultados persistentes en análisis futuros, ya que estos pueden tener variaciones dependiendo de las escalas que se elijan durante el análisis.

- ❖ Corroborar los resultados obtenidos mediante el MFDFA por medio de un análisis de transformada wavelet de módulo máximo (WTMM) para tener la completa certeza de estar en presencia de series de tiempo multifractales.
- ❖ Visualizar y clasificar los resultados de los análisis multifractales para poder diseñar y entrenar a la red neuronal que predecirá el comportamiento de un sismo.
- ❖ Emplear técnicas de aprendizaje de máquina basado en redes neuronales que pueda hacer uso de las correlaciones detectadas por los análisis multifractales para su entrenamiento.

1.5 Motivación.

Como ya se comentó durante la introducción, existen numerosos trabajos publicados donde se reporta el comportamiento multifractal que sigue la distribución de las magnitudes sísmicas en una zona geográfica específica durante un periodo de tiempo usualmente comprendido por varios años, sin embargo casi no existen trabajos donde se reporte un análisis multifractal de los sismogramas obtenidos durante eventos sísmicos específicos, tal es el caso de este trabajo, donde se estudiarán los sismogramas obtenidos de dos terremotos de gran magnitud con epicentros dentro de territorio mexicano y con solo 12 días de separación entre ellos. Utilizamos la metodología multifractal con el afán de ver el comportamiento que tuvieron estos eventos a lo largo de la república mexicana y entender si existen correlaciones, como se comportan éstas y establecer con ello modelos de los mismos. Esperamos que esto ayude en el futuro a encontrar relaciones entre estos sismos.

Del mismo modo, aunque la metodología multifractal no es un concepto nuevo, es posible hacer uso de heurísticas recientes que ayuden a estandarizar los resultados obtenidos evitando las discrepancias que existen al usar valores de escalas decididos por el criterio de cada investigador. Es por eso que en este trabajo se usará un vector de escalas de generación automática propuesto en el artículo de Sosa-Herrera y col. [26] descrito en el capítulo 4 del presente trabajo, con el afán de que se puedan usar los resultados obtenidos por los autores.

Ya que los análisis multifractales son descriptores del comportamiento interno de las series de tiempo al indicar si poseen dependencias internas entre sus datos (correlaciones) o si estos son de carácter aleatorio, se mostrará si es posible usar estas metodologías como sistema discriminatorio que ayude en la selección de datos para otro tipo de análisis; es por eso que se hará uso de una red neuronal recurrente que intente predecir datos de una misma serie temporal, que en nuestro caso serán series de carácter sísmico, esperando que esta red tenga un mejor desempeño con series de carácter multifractal.

Capítulo 2. Terremotos.

2.1 Introducción.

Las placas tectónicas siempre están en constante movimiento debido a que se encuentran flotando sobre la astenósfera que es una capa de la Tierra conformada por materiales visco elásticos, los cuales al ser calentados por el manto crean flujos, ya que el material caliente intentará subir a la superficie para liberar el calor interno y el material frío será desplazado hacia el interior de la tierra. Son estos flujos los que provocan el movimiento aleatorio de las placas y es en sus límites, justo donde hace contacto una placa con otra, que se generan enormes fuerzas de fricción, las cuales producen esfuerzos en los materiales de las placas. Es justo cuando los esfuerzos superan el límite elástico de las rocas, o llegan a vencer la fuerza de fricción de las placas, que se produce una ruptura, la cual libera de forma repentina y violenta toda la energía elástica acumulada. Esta energía se manifiesta de dos formas, primero como calor debido a la fricción de las rocas y segundo mediante ondas que se propagarán en todas direcciones del punto de ruptura por medio del material sólido y visco elástico de la tierra. En la corteza de la Tierra nosotros percibimos estas ondas en forma de vibraciones, a lo que le damos el nombre de *terremotos* o *sismos*.

2.2 Ondas sísmicas

Una onda se define como la propagación de energía a través de un medio debido a una perturbación en el sistema. En nuestro caso las fallas en las capas tectónicas crean estas perturbaciones, las cuales se propagan por medio de los materiales visco-elásticos de la tierra, desde su origen o foco hacia todas direcciones. Hay dos tipos principales de ondas sísmicas, las ondas internas o de cuerpo, que pueden propagarse por el interior de la tierra (ondas P y S) y las ondas superficiales, que viajan por su exterior (ondas Rayleigh y ondas Love).

2.2.1 Onda P.

Onda primaria, también llamada onda de compresión o longitudinal. En relación a las otras ondas sísmicas, éstas son las más rápidas, y por ello son las primeras en ser detectadas por las estaciones sísmicas. Estas ondas pueden viajar por cualquier material que pueda ser comprimido.

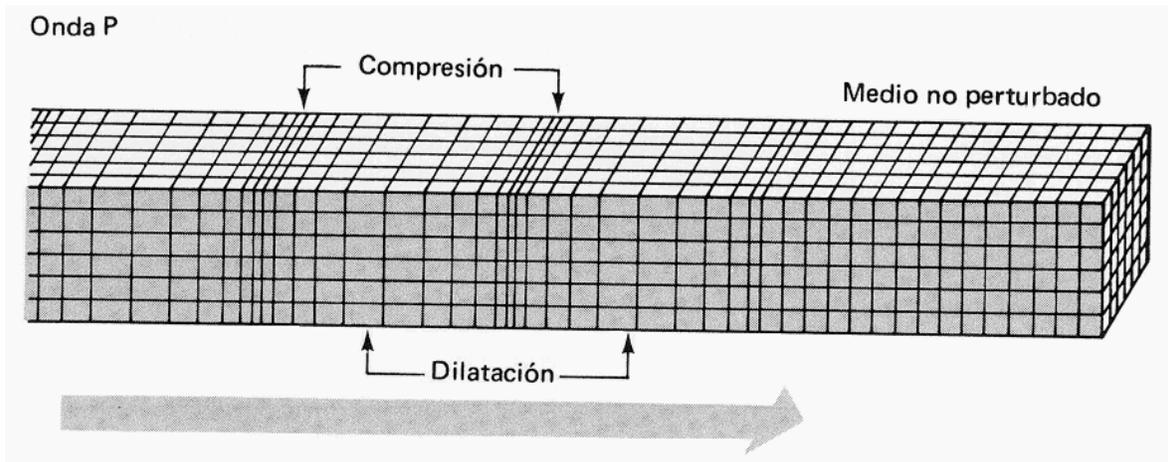


Figura 2.1. Representación del movimiento de compresión de una onda P en un medio.¹

Su movimiento consiste en una compresión y descompresión del volumen del material que usan para viajar en la misma dirección en la que viajan, este movimiento se puede visualizar en la figura 2.1. La ecuación que define a la onda P es:

$$\nabla^2 \Phi(x, t) = \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

El módulo $\Phi(x, t)$ está asociado a los desplazamientos por compresión, sin incluir movimientos rotatorios. La ecuación que define la velocidad a la que viajará esta onda está dada por:

$$v_p = \sqrt{\frac{k + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} \quad (2.2)$$

$v_p =$ Velocidad de la onda P
 $k =$ Módulo de compresibilidad del material
 $\mu =$ Módulo de rigidez
 $\rho =$ Densidad del medio

2.2.2 Onda S.

Onda secundaria, también llamada onda de corte o de cizalla. A diferencia de las ondas P, las ondas S únicamente viajarán por elementos sólidos, así que al chocar éstas con el núcleo externo de la Tierra son atenuadas hasta desaparecer, el núcleo externo se localiza entre el manto y el núcleo interno y a pesar de estar conformado principalmente por hierro y níquel su contextura es líquida, lo que significa que las estaciones sísmicas colocadas al extremo opuesto de la tierra de donde se origina el sismo, no detectarán este tipo de ondas.

¹ Actividades de matemáticas y física (25 de mayo de 2013). *Ondas Sísmicas*. Recuperado de: <http://wallgmat.blogspot.com/2013/05/ondas-sismicas.html>

Estas ondas oscilan de forma perpendicular a la dirección en la que viajan, una forma de visualizarlas sería como la onda que se crea al agitar el extremo de una cuerda y esa perturbación viaja a lo largo de la misma, esto puede visualizarse mejor en la figura 2.2. La ecuación de la onda es:

$$\nabla^2 \Gamma(x, t) = \frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2 \Gamma(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.3)$$

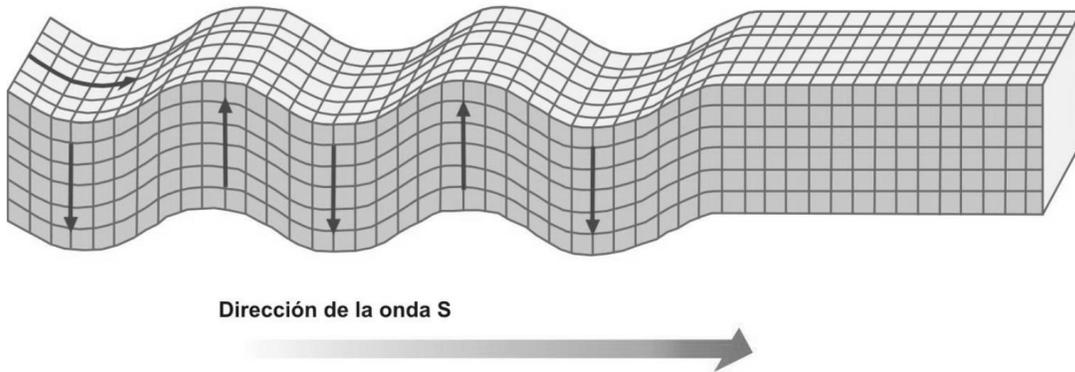


Figura 2.2. Representación del movimiento de cizalla de una onda S en un medio.²

De forma análoga el módulo $\Gamma(x, t)$ está asociado a movimientos que no incluyan cambios en el volumen del medio, es decir, a ondas de corte. La velocidad de la onda S está dada por:

$$v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad \begin{array}{l} v_s = \text{Velocidad de la onda S} \\ \mu = \text{Módulo de rigidez} \\ \rho = \text{Densidad del medio} \end{array} \quad (2.4)$$

Estas ondas además de no viajar por medios líquidos también resultan ser más lentas que las ondas P. Es gracias a este lapso de tiempo en el que una estación sísmica capta una onda P y después una onda S que se pueden hacer cálculos para determinar la distancia a la que se originó el sismo. La relación de velocidad entre la onda P y la onda S está dada por:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \left[\frac{2(1 - \sigma)}{1 - 2\sigma} \right]^{1/2} \quad (2.5)$$

Donde la relación de las velocidades está únicamente en función al coeficiente de Poisson (σ) del material. Y dado que para rocas este coeficiente es aproximadamente 0.25, nuestra relación podría expresarse como:

$$v_p \approx 1.7v_s \quad (2.6)$$

² Instituto Nacional de Prevención Sísmica –INPRES- (Sin fecha). *Terremotos*. Recuperado de: <http://contenidos.inpres.gov.ar/docs/Terremotos.pdf>

2.2.3 Ondas Superficiales

Estas ondas son creadas por la llegada de las ondas internas a la superficie de la Tierra. Este tipo de ondas se propagan de forma paralela a la superficie libre del medio. Se entiende como superficie libre a la interfase donde coexisten dos volúmenes siendo uno de ellos el vacío, para nosotros es la interfase entre la superficie de la Tierra y su atmósfera.

Estas ondas son más lentas que las ondas internas, pero por el otro lado son las ondas superficiales las que se consideran las más destructivas de todas. Su amplitud máxima, y por ende la energía que transporta, disminuye mientras sea mayor la profundidad de la falla. Básicamente existen solo dos tipos de ondas superficiales, las ondas Rayleigh y las ondas Love.

2.2.4 Ondas Rayleigh.

Estas ondas fueron propuestas en 1885 por el físico y matemático inglés John William Strutt, barón de Rayleigh. El movimiento de esta onda describe un movimiento elíptico de las partículas del material sobre un plano vertical, este movimiento tendrá un sentido inverso a la dirección de propagación de la energía, en la figura 2.3 podemos visualizar la dirección de propagación de la una onda Rayleigh y el movimiento inverso a la onda de las partículas en la superficie del medio en el que se propaga. Esto significa que las ondas Rayleigh tendrán componentes verticales y horizontales de movimiento, los cuales al ser detectados por las estaciones sismológicas serán plasmados en las tres componentes que integran a los sismogramas.

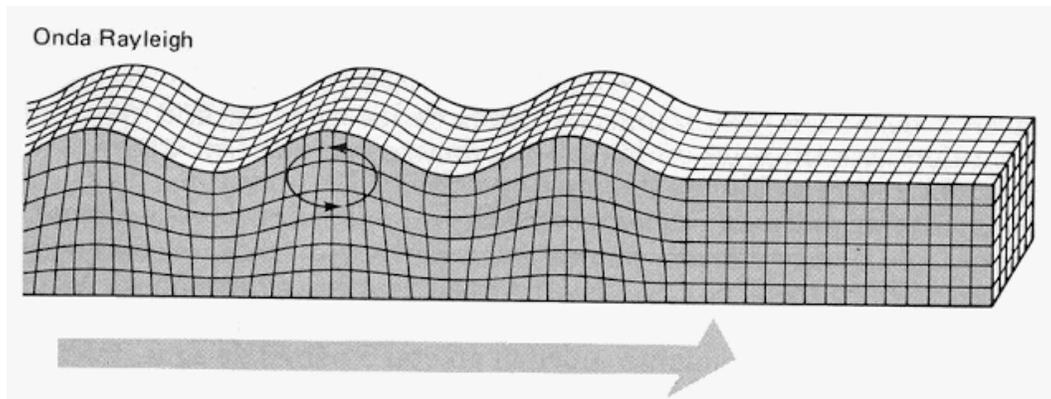


Figura 2.3. Representación del movimiento elíptico de una onda Rayleigh en la superficie de un medio.³

La velocidad de propagación de las ondas Rayleigh c en superficies libres con un coeficiente homogéneo de Poisson tiene un valor aproximado de 90% de la velocidad de la onda S y no depende de su frecuencia de onda:

$$c = 0.9194\beta \quad (2.7)$$

³ Actividades de matemáticas y física (25 de mayo de 2013). *Ondas Sísmicas*. Recuperado de: <http://wallgmat.blogspot.com/2013/05/ondas-sismicas.html>

2.2.5 Ondas Love.

Descritas matemáticamente por el matemático y geofísico Augustus Edward Hough Love en 1911, a diferencia de las ondas Raleigh, el movimiento que presentan estas ondas solamente poseen componentes horizontales, consiste en movimientos de partículas paralelos a la superficie y a la vez es perpendicular a la dirección en la que se esté propagando la onda, este movimiento se asemeja a la forma de desplazamiento de las serpientes, ejemplo de esta onda se puede observar en la figura 2.4.

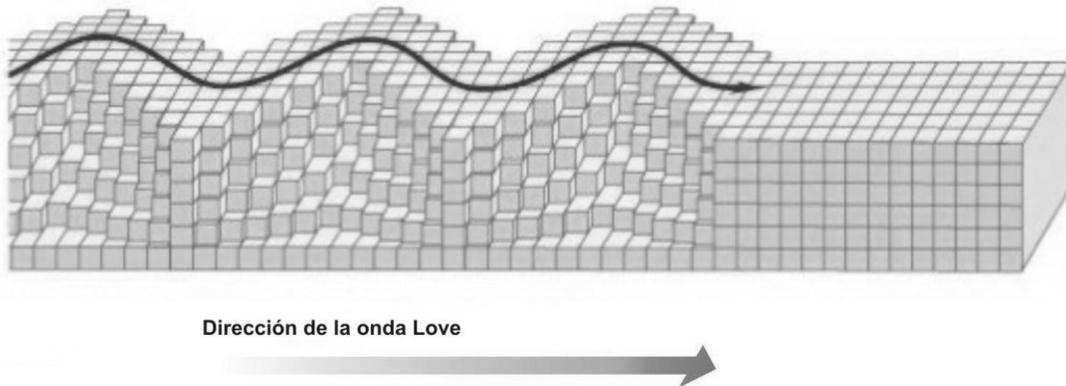


Figura 2.4. Representación del movimiento de las ondas Love durante un sismo.⁴

La velocidad de esta onda sigue siendo menor a la velocidad de las ondas internas, pero es ligeramente más rápida que la onda Rayleigh, por lo que será captada primero por las estaciones sísmicas, pero al no tener componentes verticales, esta onda únicamente se verá reflejada en los canales horizontales del sismograma.

2.3 Servicio Sismológico Nacional.

Las vibraciones en la superficie terrestre provocadas por todas estas ondas al propagarse desde una ruptura, es lo que conocemos como sismos o terremotos. La entidad encargada de *registrar, almacenar y distribuir* los datos de las mediciones del movimiento del terreno de la República Mexicana es el *Servicio Sismológico Nacional (SSN)* [12], esto lo logra mediante 102 estaciones sismológicas repartidas en 4 subredes: Red Sismológica de banda ancha, red sísmica del valle de México, red sísmica del volcán Tacaná y red sismológica convencional. Cada estación cuenta con uno o más sismógrafos con el afán de mantener un monitoreo continuo. Cabe mencionar que los datos que se emplearon en este estudio fueron proporcionados por esta institución permitiéndonos el acceso a la red sismológica de banda ancha de forma remota, todo lo concerniente a la adquisición y preparación de estos datos puede verse a detalle en el anexo I del presente trabajo.

⁴ Instituto Nacional de Prevención Sísmica –INPRES- (Sin fecha). *Terremotos*. Recuperado de: <http://contenidos.inpres.gov.ar/docs/Terremotos.pdf>

2.3.1 Red Sismológica de Banda Ancha

Actualmente esta red de estaciones sísmicas cuenta con 61 estaciones en operación distribuidas a lo largo de la República Mexicana en los estados con mayor actividad sísmica, en su mayoría en la costa del océano Pacífico y de Veracruz. En la tabla 1.1 tenemos la lista de las estaciones sísmicas pertenecientes a esta red que compartieron información empleada en este trabajo, de igual forma en la figura 2.5 podemos ver una aproximación de la localización de estas estaciones a lo largo del territorio de la República mexicana. De esta red se utilizaron los sismogramas que tuvieran una tasa de muestreo de 100 muestras por segundo, y gracias a la cooperación del SSN se obtuvieron las constantes de los equipos de medición para poder convertir los datos a escala de Gales contra tiempo (muestras), teniendo en cuenta que: $1 \text{ Gal} = 1 \text{ cm/s}^2$

Estación	Latitud	Longitud			
'AAIG'	21.968500	-102.380203	'MNIG'	25.609301	-100.285202
'ACIG'	19.980000	-99.480003	'MYIG'	20.948099	-89.639603
'ANIG'	21.053801	-104.520699	'NZIG'	30.373100	-109.554199
'ARIG'	18.280500	-100.347504	'OXIG'	17.072599	-96.733002
'BCIG'	27.233614	-98.633759	'PCIG'	15.704600	-93.218803
'CAIG'	17.048500	-100.267303	'PDIG'	25.040400	-105.396004
'CCIG'	16.281900	-92.136902	'PEIG'	15.998600	-97.147202
'CGIG'	30.365200	-107.977402	'PLIG'	18.392000	-99.502502
'CJIG'	19.499500	-105.043701	'PNIG'	16.392799	-98.127403
'CMIG'	17.091000	-94.883797	'PPIG'	19.067101	-98.628098
'CSIG'	26.836201	-108.371201	'PZIG'	17.091000	-94.883797
'DAIG'	17.021297	-99.650688	'RPIG'	21.884800	-99.982697
'DHIG'	20.300400	-99.035500	'SCIG'	18.966999	-91.186501
'FTIG'	17.907900	-98.132698	'SPIG'	31.046000	-115.466003
'GTIG'	23.066799	-99.169098	'SRIG'	27.319799	-112.240997
'HLIG'	17.830000	-97.803596	'SSIG'	24.816500	-107.144798
'HPIG'	26.936800	-105.664001	'TGIG'	16.778000	-93.122299
'HSIG'	29.019800	-110.949303	'THIG'	14.882300	-92.295799
'HUIG'	15.769200	-96.108299	'TJIG'	32.433701	-116.674797
'IGIG'	20.753000	-101.327797	'TLIG'	17.562700	-98.566498
'JRQG'	20.703699	-100.447098	'TOIG'	18.095600	-97.064499
'LNIG'	24.898100	-99.465599	'TPIG'	18.420200	-97.362000
'LVIG'	19.726200	-96.418602	'TSIG'	25.604900	-109.046501
'MAIG'	23.183901	-106.425598	'TUIG'	18.033701	-94.422501
'MBIG'	32.407200	-116.656403	'TXIG'	17.254299	-97.761200
'MCIG'	27.877100	-101.483597	'YAIG'	18.862499	-99.067001
'MEIG'	17.924900	-99.619698	'YOIG'	16.857800	-97.545898
'MMIG'	18.288500	-103.345596	'ZAIG'	22.769199	-102.567001
			'ZIIG'	17.606800	-101.464996

Tabla 1.1. Estaciones pertenecientes a la red sismológica de banda ancha del SSN utilizadas durante este estudio con su respectiva localización.



Figura 2.5. Localización aproximada de las estaciones de la red sísmológica de banda ancha de las que se obtuvo información para el estudio.⁵

⁵ Imágenes basadas de: <http://www.ssn.unam.mx/acerca-de/estaciones/>
 SSN (2019): Servicio Sísmológico Nacional, Instituto de Geofísica, Universidad Nacional Autónoma de México, México. URL: <http://www.ssn.unam.mx>, DOI: <https://doi.org/10.21766/SSNMX/SN/MX>.

2.4 Sismógrafos.

Son instrumentos que detectan, amplifican y almacenan la información del movimiento de los terremotos, así como todo movimiento que se pueda detectar en el lugar donde estén instalados. Usualmente se toma como sinónimo al sismógrafo con el sismómetro, siendo el sismómetro una parte del sismógrafo. El sismómetro es la parte sensitiva del instrumento, es el encargado de detectar las ondas emitidas por los movimientos terrestres más pequeños posibles. En las estaciones sísmicas también se hacen uso de acelerómetros, que como su nombre lo dice, detectan los cambios en las aceleraciones de la superficie de la tierra, mientras el sismómetro mide la velocidad del suelo. Sin importar el equipo que se esté utilizando, las mediciones serán transformadas a unidades de aceleración, en nuestro caso Gales, esta conversión depende de la tecnología del equipo que se esté usando y de su calibración. Los Gales son unidades de aceleración llamadas así en honor a Galileo Galilei. En la figura 2.6 vemos los equipos instalados en las estaciones sísmicas de la red sismológica de banda ancha del SSN

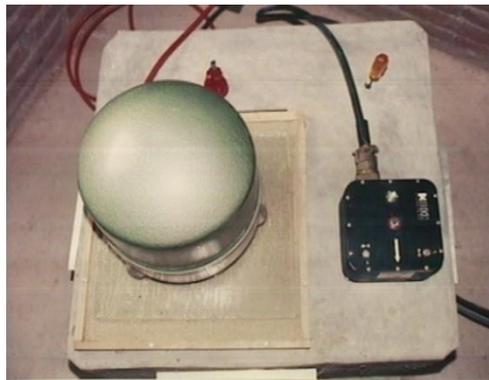


Figura 2.6. Las estaciones sismológicas del SSN cuentan con un equipo Sismómetro STS-2 (izquierda) y un acelerómetro FBA-23 (derecha).⁶

2.5 Sismogramas.

Un sismograma es la grabación del movimiento del suelo debido a un terremoto que ha detectado un sismógrafo, usualmente visualizamos a los sismogramas como gráficas de velocidad o aceleración contra tiempo. Estos antiguamente eran plasmados en tiempo real sobre papel, hoy en día la información se guarda en forma de tabla, en archivos digitales, usualmente de extensión *.sac.

Los archivos de extensión *.sac (Seismic Analysis Code) son archivos binarios diseñados precisamente para contener enormes cantidades de información. Estos archivos se componen de un encabezado, que contiene datos de la estación donde fue creado (nombre de la estación, nombre de la red a la que pertenece, latitud, longitud, entre otros), la fecha de la medición o periodo de tiempo en que se revisa la información (en formato yyyy/mm/dd,hh:mm:ss.ss) y el nombre del canal, que indica la familia del equipo, su banda de muestreo y la orientación del

⁶ SSN (2019): Servicio Sismológico Nacional, Instituto de Geofísica, Universidad Nacional Autónoma de México, México. URL: <http://www.ssn.unam.mx>, DOI: <https://doi.org/10.21766/SSNMX/SN/MX>. Imagen recuperada de: <http://www.ssn.unam.mx/acerca-de/estaciones/>

canal que se está midiendo. La otra parte que compone al archivo son todas las mediciones que se hicieron. Usualmente estos archivos se estudian con un programa llamado igualmente SAC, propiedad de las Instituciones Incorporadas a la Investigación Sismológica o IRIS por sus siglas en inglés [13], aunque hoy en día existen bibliotecas de acceso libre para Python y Matlab que nos permiten descryptar estos archivos para su manipulación, estas bibliotecas pueden conseguirse directamente del sitio web de IRIS.

Ya se comentó anteriormente que las diferentes ondas que componen a los terremotos poseen diferentes velocidades y comportamientos, estos serán plasmados en los sismogramas. En la figura 2.7 se puede ver cómo la primera onda en llegar al sismógrafo es la onda P, seguida de la onda S y al final las ondas superficiales, siendo éstas las de mayor amplitud. La diferencia de tiempo entre las ondas interiores nos permite calcular la distancia a la que se originó el terremoto del sismógrafo, mientras las ondas superficiales nos ayudan a calcular la magnitud del terremoto.

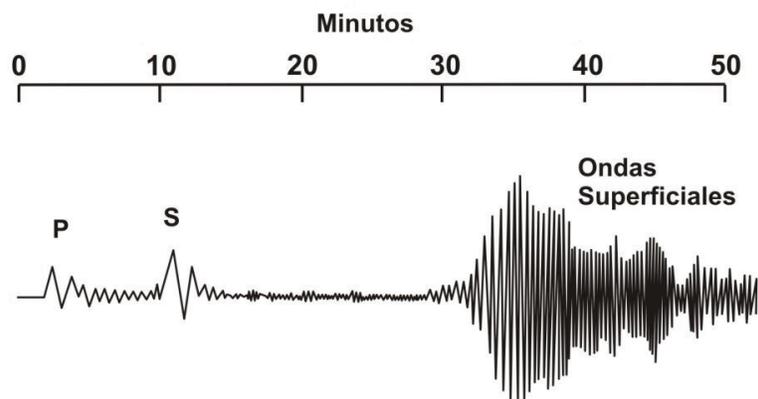


Figura 2.7 Tiempos de arribo de las diferentes ondas al sismógrafo.⁷

Ya que las estaciones sismológicas estarán en diferentes locaciones respecto al epicentro del terremoto, todas ellas marcarán diferentes tiempos de arribo para las ondas, lo que nos permite la triangulación del epicentro, ejemplo de este procedimiento puede verse en la figura 2.8. Esto también nos dice que mientras más cercanos estemos del epicentro será más complicado separar las ondas, ya que habrá poca diferencia de su llegada al sismógrafo, mientras que las estaciones más lejanas pueden no captar alguna onda. Pongamos de ejemplo una estación que esté en el lado opuesto del globo terráqueo a la falla, su sismógrafo podrá registrar la onda P, pero no la onda S ya que esta no podrá atravesar la parte líquida del núcleo de la Tierra.

⁷ Instituto Nacional de Prevención Sísmica –INPRES- (Sin fecha). *Terremotos*. Recuperado de: <http://contenidos.inpres.gov.ar/docs/Terremotos.pdf>

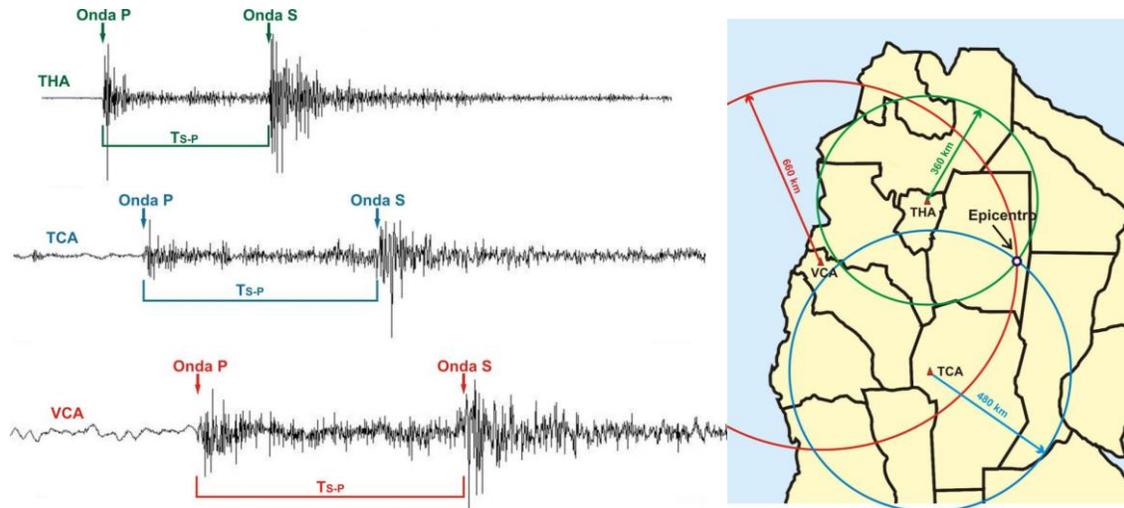


Figura 2.8. Cálculo del epicentro de un terremoto mediante 3 estaciones sismológicas.⁸

2.6 Las tres componentes del sismógrafo.

El principio básico de los sismómetros y acelerómetros se basa en la primera ley de Newton y van desde lo más simple como una masa unida a un resorte, hasta los actuales que utilizan electrónica para mejorar la respuesta a la frecuencia y detectar las diferentes amplitudes del sismo. Todos ellos tienen el mismo problema; realizan las mediciones en una única dirección lineal, cuando se ha dicho anteriormente que las ondas tienen movimientos en todas direcciones. La respuesta a este problema es sencilla, los sismógrafos o acelerómetros actuales poseen tres instrumentos separados para realizar las mediciones en cada uno de los ejes de un plano tridimensional X, Y, Z.

Cada uno de estos ejes recibe el nombre de Canal.

- El Canal N se encargará de medir los movimientos horizontales de las ondas en sentido Norte – Sur.
- El Canal E medirá el movimiento horizontal en sentido Este – Oeste.
- El Canal Z medirá los movimientos sobre la perpendicular al plano de la superficie libre.

Esto nos genera que existan tres sismogramas por instrumento, cada uno separado en su propio archivo sac. Además, recordando el comportamiento de las ondas, éstas se reflejarán más en alguno de los canales. La onda P cuyo movimiento consisten en la compresión y descompresión en el sentido en el que viaja la onda sísmica completa tendrá mayor presencia en el canal Z, mientras que la onda S tendrá mayor presencia en los canales N y E. Las ondas Love que solo poseen componentes horizontales no serán detectadas por el canal Z y las ondas Rayleigh al tener un comportamiento elíptico serán detectadas por todos los canales. En la figura 2.9 tenemos el ejemplo de las mediciones realizadas por cada uno de los canales de una estación sismológica para un terremoto.

⁸ Instituto Nacional de Prevención Sísmica –INPRES- (Sin fecha). *Cálculo del epicentro*. Recuperado de: <http://contenidos.inpres.gov.ar/docs/C%C3%A1lculo%20del%20epicentro.pdf>

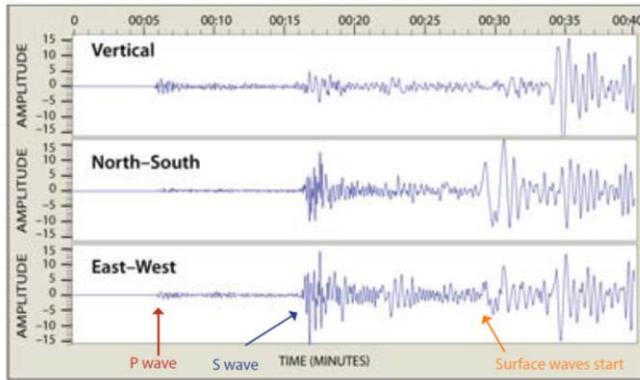


Figura 2.9. Ejemplificación de los tiempos de llegada y comportamientos de las diferentes ondas en los canales del sismógrafo.⁹

2.8 Breve descripción de los terremotos a estudiar.

Los terremotos son fenómenos imposibles de predecir, tanto en localización como en ocurrencia, es por eso que el tener a la mano no uno, sino dos terremotos de gran magnitud y que estén cercanos tanto en su localización geográfica como en su localización temporal llama a analizarlos para entender mejor su comportamiento y naturaleza en lo general.

2.8.1 Sismo de Tehuantepec (2017-09-07 M 8.2)

Ocurrido el día 7 de septiembre de 2017, a las 23:49:18 horas (hora local), se localizó en el Golfo de Tehuantepec, a 133 km al suroeste de Pijijiapan, Chiapas. Este Terremoto alcanzó una magnitud M8.2, su epicentro se localizó a 14.761° latitud N y - 94.103° longitud W, con una profundidad de 45.9 km, en la figura 2.10 podemos apreciar la localización del epicentro de este terremoto.

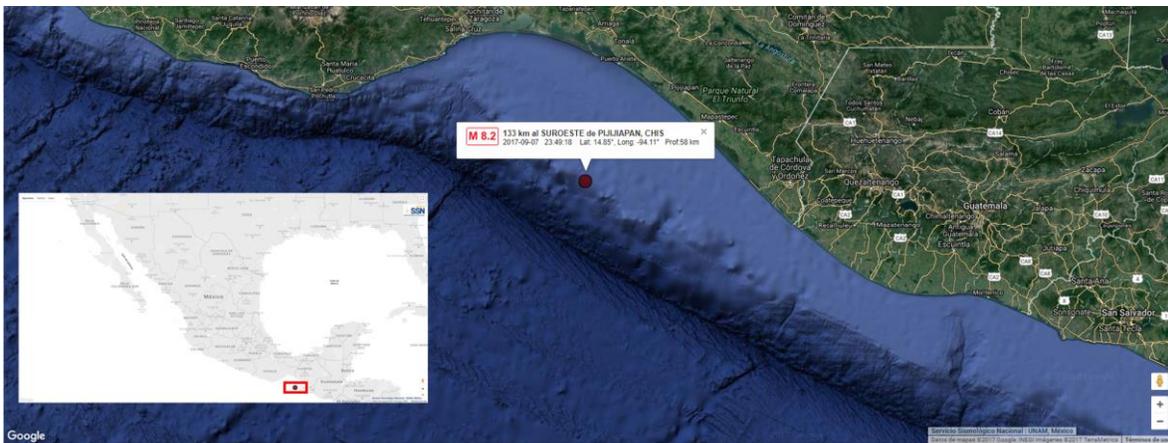


Figura 2.10. Epicentro del sismo de Tehuantepec.¹⁰

⁹ Incorporated Research Institutions for Seismology -IRIS- (2019, junio 20). *3-Component Seismogram Records Seismic-wave Motion*. Recuperado de: <http://wallgmat.blogspot.com/2013/05/ondas-sismicas.html>

¹⁰ Servicio Sismológico Nacional -SSN- (2017, noviembre 28). *Reporte especial: Sismo de Tehuantepec (2017-09-07 23:49 M/w 8.2)*. Recuperado de: http://www.ssn.unam.mx/sismicidad/reportes-especiales/2017/SSNMX_rep_esp_20170907_Tehuantepec_M82.pdf

Se considera un sismo intraplaca. En la región donde tuvo lugar este evento la placa de Cocos subduce a la placa de Norteamérica y Caribe. En la figura 2.11 se da un estimado visual de la intensidad con la que el sismo golpeó al territorio nacional (generado por el Instituto de Ingeniería de la UNAM) donde se puede ver que las ciudades costeras de la región fueron las más afectadas por el terremoto, Juchitán, Ixtepec y Tehuantepec entre otras.

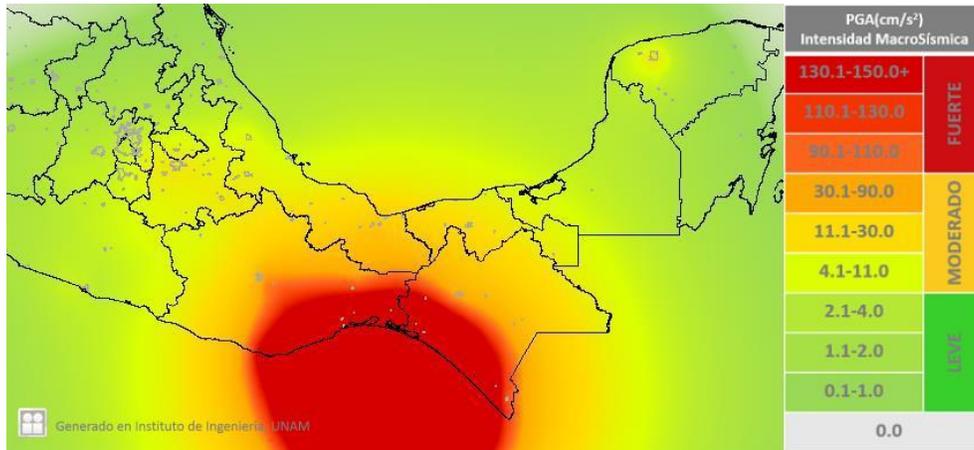


Figura 2.11 Intensidades del terremoto del sismo de Tehuantepec.¹¹

2.8.2 Sismo de Puebla-Morelos (2017-09-19 M 7.1)

Ocurrió el día 19 de septiembre de 2017, a las 13:14:40 horas (hora local), se localizó a 12 km al suroeste de Axichiapan, entre los estados de Puebla y Morelos, y a 120 km de la Ciudad de México. Este terremoto alcanzó una magnitud M7.1, su epicentro se localizó a 18.40° latitud N y -98.72° longitud W, con una profundidad de 57 km, en la figura 2.12 podemos visualizar el epicentro de este terremoto.

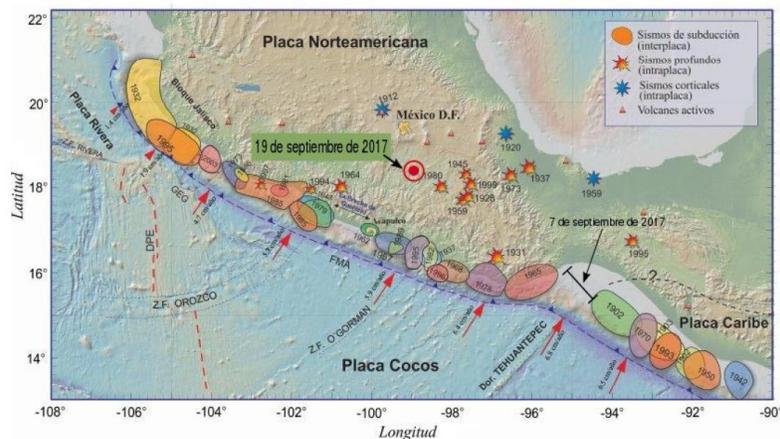


Figura 2.12. Epicentro del terremoto de Puebla-Morelos.¹²

¹¹ Servicio Sismológico Nacional -SSN- (2017, noviembre 28). *Reporte especial: Sismo de Tehuantepec (2017-09-07 23:49 Mw 8.2)*. Recuperada de: http://www.ssn.unam.mx/sismicidad/reportes-especiales/2017/SSNMX_rep_esp_20170907_Tehuantepec_M82.pdf

¹² Servicio Sismológico Nacional -SSN- (2017, septiembre 25). *Reporte especial: Sismo del día 19 de Septiembre de 2017, Puebla-Morelos (M7.1)*. Recuperada de: http://www.ssn.unam.mx/sismicidad/reportes-especiales/2017/SSNMX_rep_esp_20170919_Puebla-Morelos_M71.pdf

En cuanto a su intensidad, en la figura 2.13 se puede apreciar que el impacto máximo que se pudo sentir por las personas se centra entre los estados de Puebla, Morelos y Guerrero.

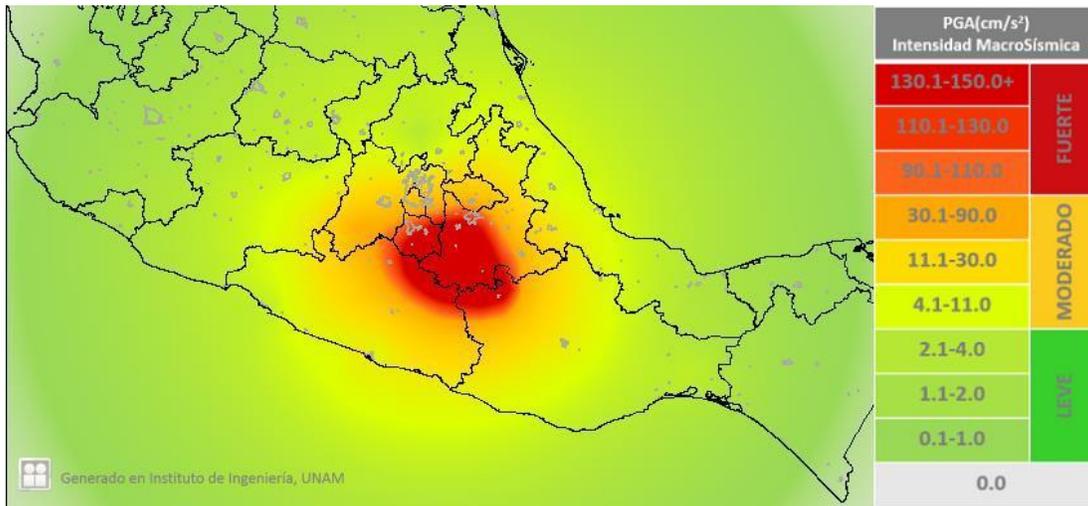


Figura 2.13. Intensidades detectadas del terremoto de Puebla-Morelos.¹³

2.9 Duración de un sismo

Cuando se habla de la duración de un sismo o terremoto se tiene que tomar en consideración que podemos tener varios puntos de referencia, por ejemplo, la duración que medirá un ser humano será considerablemente menor a la de un instrumento de medición. Pero incluso con los instrumentos de medición adecuados, las mediciones tendrán variaciones dependiendo del lugar donde se encuentren, debido a que las ondas tendrán diferentes tiempos de llegada. Técnicamente la duración de un terremoto, hecha con los instrumentos adecuados, dependerá de:

- La distancia a la que nos encontremos del epicentro
- El tipo del terreno
- El tipo de construcción donde nos encontremos

Es por esto que el SSN no suele informar este dato sobre los terremotos, ya que no es un valor fijo. Pese a esto, algunos medios de comunicación toman la duración de los terremotos estudiados en esta tesis de 3 minutos¹⁴.

¹³ Servicio Sismológico Nacional -SSN- (2017, septiembre 25). *Reporte especial: Sismo del día 19 de Septiembre de 2017, Puebla-Morelos (M7.1)*. Recuperado de: http://www.ssn.unam.mx/sismicidad/reportes-especiales/2017/SSNMX_rep_esp_20170919_Puebla-Morelos_M71.pdf

¹⁴ Información obtenida de páginas web de los noticieros Azteca América y el Heraldo de México.

J. Ruiz, (08 de septiembre de 2018). *Los videos más impactantes del terremoto en México*. Azteca América. Recuperado de: <https://www.aztecaamerica.com/notas/noticias/267335/los-videos-mas-impactantes-del-terremoto-en-mexico>.

Por Heraldo de México (19 de septiembre de 2018). *#19deSeptiembre 1985 y 2017: Los terremotos que unieron a México*. Recuperado de: <http://bit.ly/2xwTuYk>

Para nuestro estudio hemos tomado como inicio del evento un umbral de 4.1 Gales que según el SSN está relacionado a un sismo de intensidad moderada y sería el inicio del choque de la onda P con el instrumento de medición. Anterior a ese umbral los datos serán considerados como ruido ambiental. Como final de la serie temporal se tomaron los lapsos de 3, 10 y 15 minutos. El umbral de tres minutos está basado en los artículos periodísticos encontrados en internet. El umbral de 10 minutos, aunque elegido de forma empírica mostró abarcar la mayoría de los sismogramas proporcionados por el SSN al momento de ser graficados con esta ventana de tiempo. Duraciones mayores a 15 minutos para el umbral ya no tendrán sentido, ya que las ondas del sismo se habrían disipado teniendo en su mayoría mediciones ambientales propias de cada estación sísmica, ocasionando que los resultados que se obtuvieran de estas ventanas de tiempo ya no fueran de carácter multifractal. De esto se hablará más a fondo en el capítulo 4 del presente trabajo. En la figura 2.14 ejemplificamos estas tres ventanas de tiempo en cada uno de los canales para algunos sismogramas usados en este trabajo.

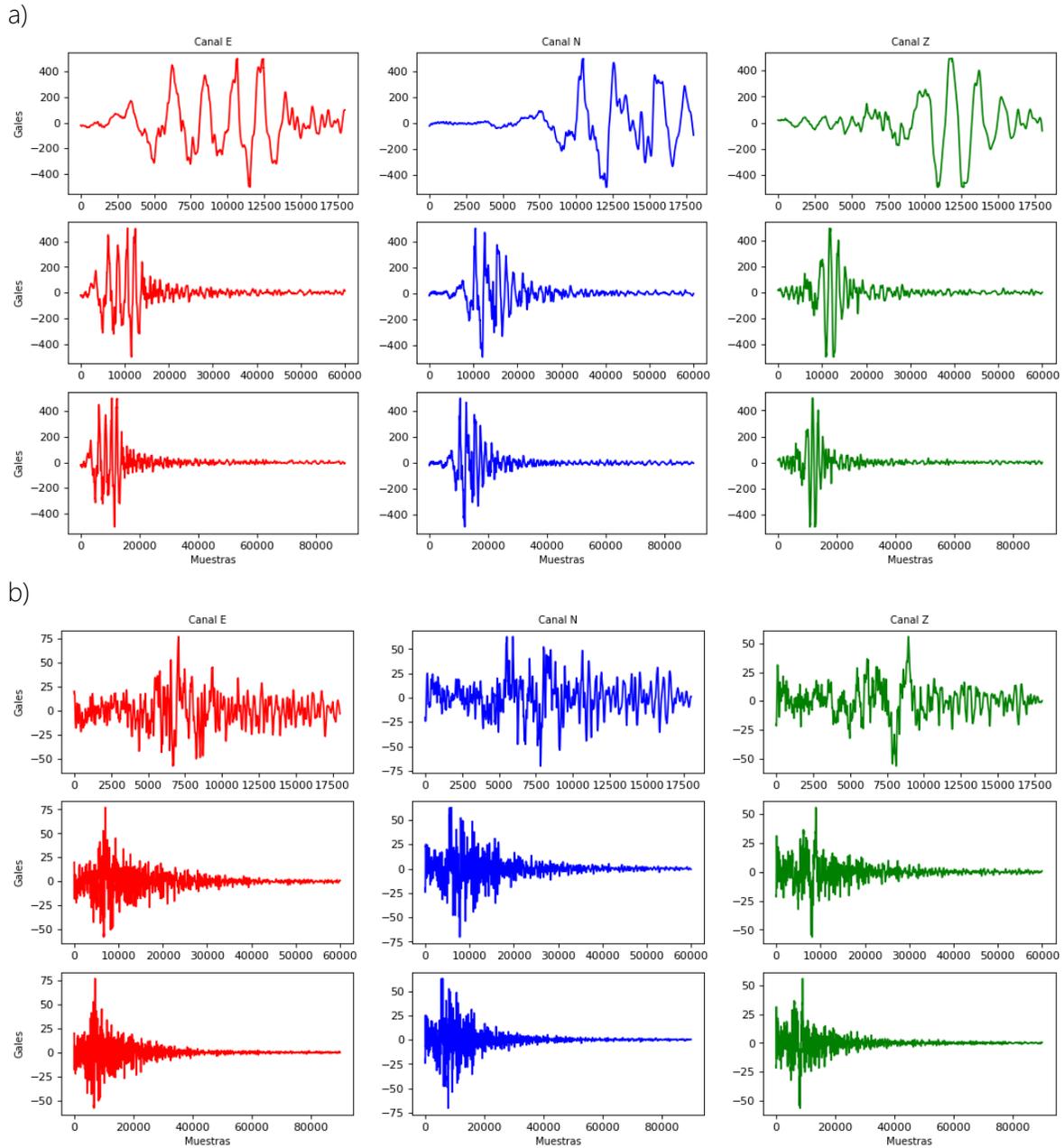


Figura 2.14. Sismogramas de la estación AAIG, a) del día 7 de septiembre de 2017, b) del día 19 de septiembre de 2017. Cada fila corresponde a los lapsos de 3, 10 y 15 minutos respectivamente, a partir de que se detecta el choque de la onda P en el canal Z.

Capítulo 3. Fractales.

Estamos acostumbrados a utilizar la geometría euclidiana para poder cuantificar los diferentes fenómenos naturales con los que nos encontramos cotidianamente, esto mediante mediciones de longitudes, áreas o volúmenes según sea el caso. A estos elementos de la geometría euclidiana se les asignan dimensiones, las cuales se miden con números enteros. El primer elemento con el que nos topamos es el *punto*, el cual carece de longitud, área o volumen, se considera que tiene una dimensión 0. La dimensión 1 corresponde a las *curvas*, las cuales son consideradas sucesiones infinitas de puntos, la dimensión 2 pertenece a las *superficies*, mientras los *volúmenes* poseen dimensión 3. Todos estos elementos son objetos ideales concebidos por la mente humana para poder modelar el mundo que le rodea, pero es tanta la diversidad de formas en la naturaleza que comienzan a aparecer figuras geométricas irregulares, las cuales están en puntos intermedios entre las dimensiones geométricas a las que estamos acostumbrados, estas figuras geométricas reciben el nombre de "fractales" del latín *fractus* (irregular, fragmentado) ya que sus dimensiones están definidas por medio de números fraccionarios.

Algunas figuras geométricas fractales pueden generarse por medio de algoritmos iterativos generalmente de pasos sencillos, pero que al final crean figuras geométricas de gran complejidad. Este proceso les otorga a estos fractales propiedades de auto semejanza y de multiescala. Esto se puede corroborar al hacer acercamientos a la figura geométrica creada, ya que veremos que el mismo patrón se repetirá una y otra vez dentro de la figura geométrica.

3.1 Dimensión Fractal.

Como ya se mencionó, a diferencia de una geometría euclidiana, una geometría fractal no cuenta con una dimensión entera, sino fraccionaria, mejor conocida como "Dimensión Fractal" (DF). Esta dimensión fractal se vuelve un indicador de que tan irregular es una geometría fractal inmersa en una dimensión euclidiana [14], siendo las dimensiones euclidianas aquellas que podemos medir mediante números enteros.

Benoit B. Mandelbrot [15] mostró que muchas de las estructuras naturales que tienen una aparente gran complejidad, como lo son las montañas, las líneas costeras, las nubes e incluso ciertos eventos a lo largo del tiempo, están caracterizados por geometrías fractales, la dimensión fractal muchas veces está relacionada con el fenómeno del que se esté hablando.

Existen varios métodos para obtener la dimensión fractal, uno de los más utilizados es el método del "Box Counting" debido principalmente a su simplicidad. El método consiste en recubrir en su totalidad a la figura en cuestión con un conjunto A de cuadros de escala r . En la figura 3.1 se ejemplifica este método al utilizar cuadros cada vez más pequeños para recubrir la costa de Gran Bretaña. El número N_r será la menor cantidad de cuadros A necesarios para cubrir la figura (la costa) en su totalidad, cuando la escala r de los cuadros tiende a cero. La dimensión fractal se obtiene entonces mediante la ecuación (3.1)

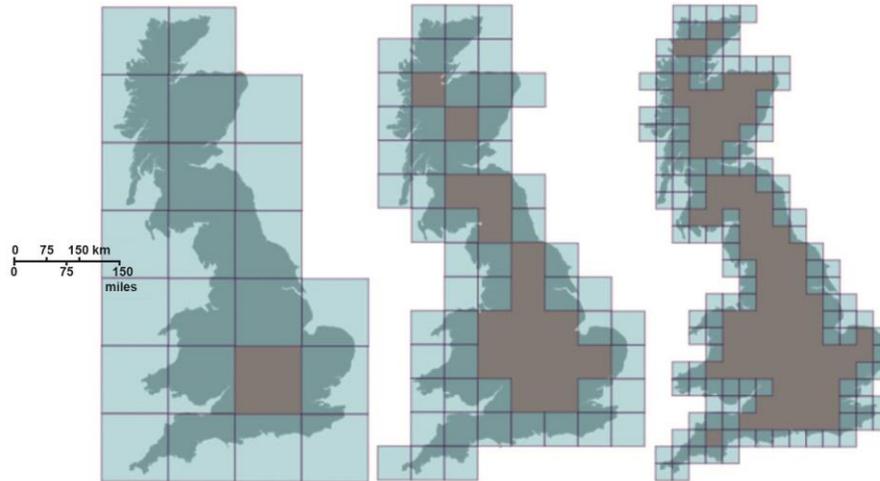


Figura 3.1. Box counting aplicado a la costa de Gran Bretaña.¹⁵

$$DF = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(N_r)}{\log(1/r)} \quad (3.1)$$

A continuación, se procede a obtener la dimensión fractal de algunas de las figuras fractales determinísticas más conocidas, como ejercicio didáctico.

3.2 Conjunto de Cantor (Georg Cantor, 1883)

Las figuras fractales que se describirán a continuación se construyen mediante algoritmos iterativos capaces de extenderse infinitamente, por lo que solo realizaremos iteraciones suficientes para visualizar la figura fractal resultante y obtener su respectiva dimensión fractal.

Empecemos con uno de los fractales más sencillos de crear, el *conjunto de Cantor*, que nos muestra las características de los fractales. Se construye a partir de una línea recta de cualquier longitud L que se considerará como la unidad. Esta línea se segmentará en tres partes iguales para después proceder a remover la sección media. Esta será la primera iteración del conjunto de cantor, y puede verse en la figura 3.2.



Figura 3.2. Iteración 1 del conjunto de Cantor.

¹⁵ Kris Gurung (agosto 2017). *Fractal Dimension in Architecture: An Exploration of Spatial Dimension*. Imagen recuperada de: <https://www.researchgate.net/publication/326305093>

Para las siguientes iteraciones de construcción seguiremos seccionando y removiendo la parte media para cada una de las líneas remanentes. En la figura 3.3 vemos hasta la cuarta iteración del *conjunto de cantor*, las líneas punteadas son guías para mantener el orden y apreciar que se ha eliminado la parte media de cada segmento restante en cada iteración.

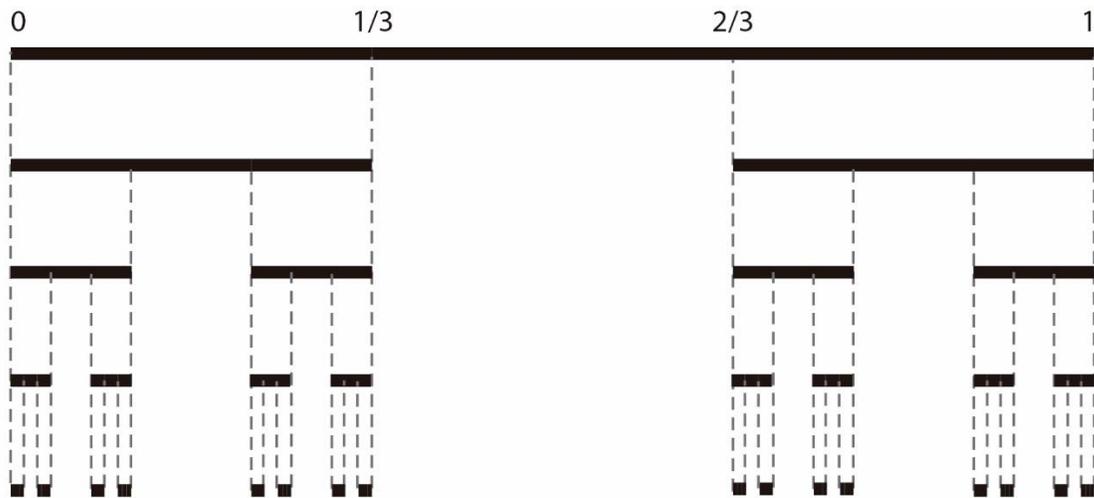


Figura 3.3. Iteración 4 del Conjunto de Cantor.

Es en la cuarta iteración donde nuestro fractal se asemeja más a un conjunto de puntos que a una línea, podemos observar la multiescala y la auto semejanza del fractal, ya que si hacemos un acercamiento nos encontraremos con nuestra figura inicial, pero reducida considerablemente en tamaño, figura 3.4. Podemos repetir el proceso cuantas veces se desee, siempre obteniendo la figura inicial mediante acercamientos.

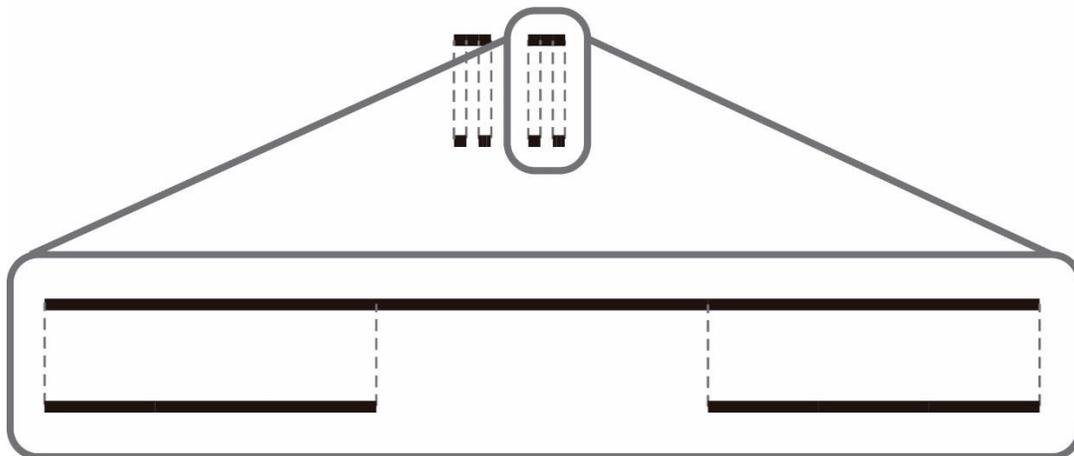


Figura 3.4. Acercamiento a la tercera y cuarta iteración.

Como se puede notar, para el paso n la cantidad de segmentos habrá crecido en 2^n y al mismo tiempo, la longitud original de la línea se habrá reducido en $(2/3)^n$. De esta forma cuando $n \rightarrow \infty$ se habrá creado un fractal, una geometría compuesta por una infinidad de segmentos

carentes de longitud. Es aquí cuando podemos apreciar que su dimensión no puede ser cero, al no ser un punto, pero tampoco puede ser de dimensión uno al no ser una línea, por tanto, su dimensión debe de estar en un punto intermedio.

Como ya se mencionó, al cabo de n pasos tendremos 2^n segmentos, estos son los segmentos mínimos necesarios para cubrir toda la figura. Y cada uno de estos segmentos tendrá una longitud de $(1/3)^n$ de la longitud de la línea que le precede, esta será la escala de reducción. Al usar el método de Box Counting tenemos su dimensión fractal:

$$DF_{Cantor} = \frac{\log(2)}{\log(1/\frac{1}{3})} = 0.6309$$

3.3 Curva Koch (Helge Von Koch, 1904)

El proceso de construcción de la curva Koch consiste en tomar el segmento medio de una línea recta dividida en tres secciones iguales, y dibujar un triángulo equilátero en éste. En la figura 3.5 se puede ver que la primera iteración de la figura fractal posee una longitud de $4/3$ la longitud de la línea original. Este proceso se llevará a cabo para cada una de las líneas que componen la nueva figura en cada uno de los pasos de construcción.

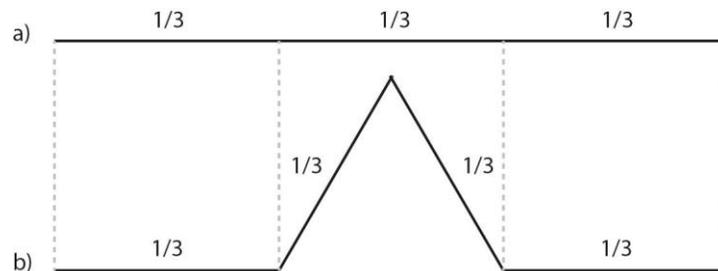


Figura 3.5. a) Línea donde se construirá la curva Koch.
b) Primera iteración de la curva Koch

En la figura 3.6 se separó mediante colores la segunda iteración de la curva Koch para que se pueda apreciar que la figura obtenida en la iteración uno es replicada en cada uno de sus segmentos, este procedimiento se repite en todos los segmentos que componen a cada una de las nuevas figuras, incrementando en cada iteración la longitud de la curva.

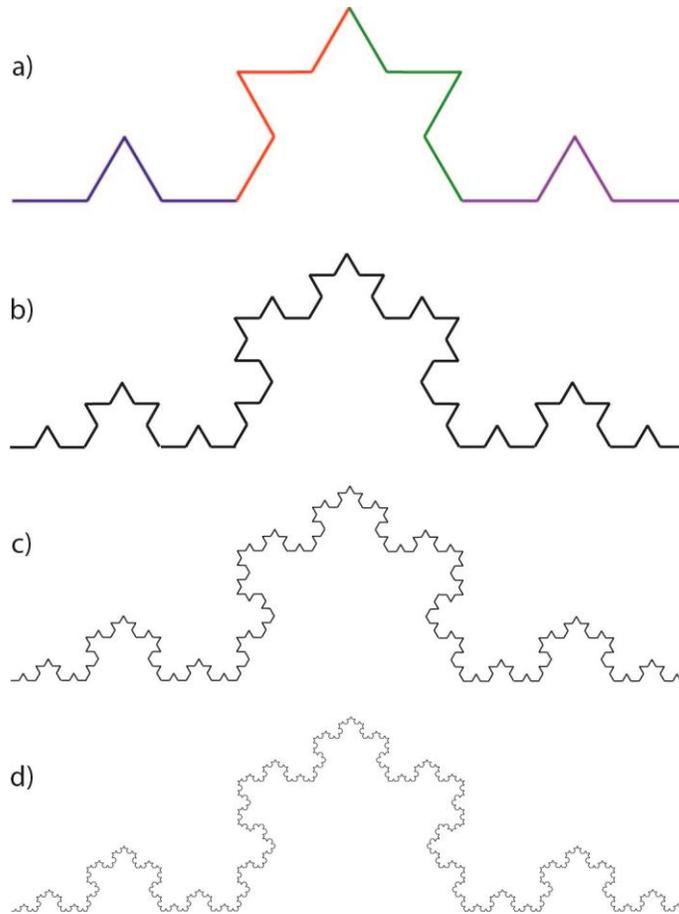


Figura 3.6. Iteraciones 2 (a), 3 (b), 4 (c) y 5 (d) de la curva Koch

Para $n \rightarrow \infty$ tendremos una curva que posee una longitud infinita, ya que crece a una relación $(4/3)^n$, pero al mismo tiempo esta figura estará acotada en los límites de la línea original. Esto nos indica que su dimensión no puede ser uno al ser algo más que una simple curva, pero debe ser menor a 2 al no ser una superficie.

Para cada uno de los pasos n el número de segmentos necesarios para cubrir la figura será de 4^n , mientras que la longitud de cada uno de estos segmentos se reduce en una tercera parte de la longitud de su predecesor, esto es $r = (1/3)^n$. Por lo que su dimensión fractal estaría definida por:

$$DF_{Koch} = \lim_{n \rightarrow \infty} - \frac{\log(4^n)}{\log(3^{-n})} = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 1.2618$$

En uno de los artículos de Benoît Mandelbrot [16], se nos muestra que el perímetro que logremos medir de las costas de Inglaterra dependerá de qué tan larga sea nuestra "regla" (escala mínima) que usemos para medir. Si medimos toda la costa usando una regla de una milla de longitud y después usamos una regla con una longitud de un kilómetro, nuestra segunda medición será mayor que la primera, esto debido a que mientras más pequeña sea nuestra escala mínima de medición tendremos más posibilidades de entrar en pequeñas secciones que antes

estaban bloqueadas por la supuesta línea recta. Ya que esta escala mínima puede tender a infinito y depende enteramente de nuestras limitaciones físicas, la medición que tomemos será más y más grande cada vez. Esto se puede explicar claramente por medio de una figura fractal, llamada isla koch, donde las limitaciones físicas no existen.

El proceso de construcción que utilizamos para la isla Koch (también llamada copo de nieve) puede aplicarse a un triángulo equilátero, usando el proceso de construcción de la curva a cada uno de los lados del triángulo, figura 3.7.

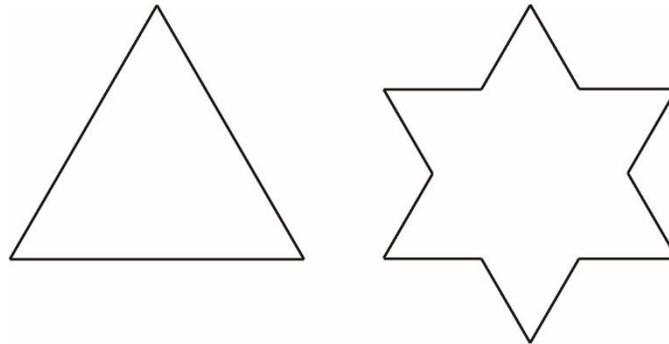


Figura 3.7. Izquierda) Figura base para la construcción de la Isla Koch, Derecha) Primera iteración de la isla Koch.

Para el paso n de construcción la longitud del perímetro de la isla Koch habrá crecido en una proporción $3(4/3)^n$, por lo que en el momento que $n \rightarrow \infty$ tendremos una figura que posee un perímetro infinito, pero con un área finita, como se muestra en la figura 3.8.

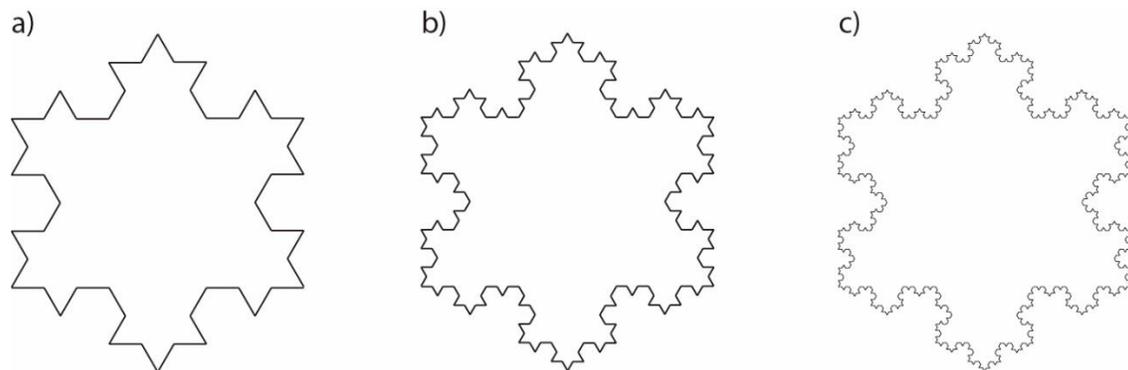


Figura 3.8. Iteraciones 2 (a), 3 (b) y 4 (c) de la isla Koch, se puede observar que el perímetro crecerá más y más en cada iteración.

De forma parecida a la curva Koch, para el paso n los triángulos se habrán replicado $3 \cdot 4^n$, mientras que la longitud de cada uno de estos segmentos se reducirá en un factor $r = (1/3)^n$ con respecto a la línea que le precede. Su dimensión fractal será:

$$DF_{\text{Copo de nieve}} = \lim_{n \rightarrow \infty} - \frac{\log(3 \cdot 4^n)}{\log(3^{-n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(3) + n \cdot \log(4)}{n \cdot \log(3)} = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 1.2618$$

Ya que el método de producción es el mismo que el de la curva Koch, no es de extrañarse que la curva Koch y la isla Koch compartan la misma dimensión fractal. En este caso la figura no cuenta con una dimensión igual a 2 ya que, a pesar de contar con un área, su perímetro tiende a crecer al infinito.

3.4 Triángulo de Sierpinski (Waclaw Sierpinski, 1915)

La figura base de este fractal es un triángulo cualquiera, este se dividirá en 4 triángulos iguales, tomando como referencia los puntos medios de cada uno de los lados. El siguiente paso consiste en eliminar el triángulo central de la figura, esto podemos visualizarlo en la figura 3.9. Este procedimiento de construcción se aplicará a cada uno de los nuevos triángulos en cada nuevo paso.

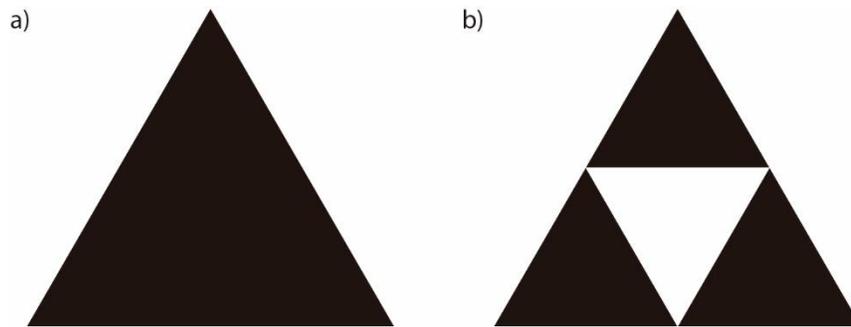


Figura 3.9. a) Triángulo que servirá de base. b) Iteración 1 del fractal de Sierpinski.

A medida que aumente el número de pasos, se puede apreciar que el área de la figura fractal se estará reduciendo en $1/4$ con respecto a su línea anterior. De esta forma cuando $n \rightarrow \infty$ nuestra figura fractal carecerá de área, pero esta no habrá desaparecido, ya que dejará una sucesión de puntos tras de sí, tal como se muestra en la iteración 5 de la figura 3.10.

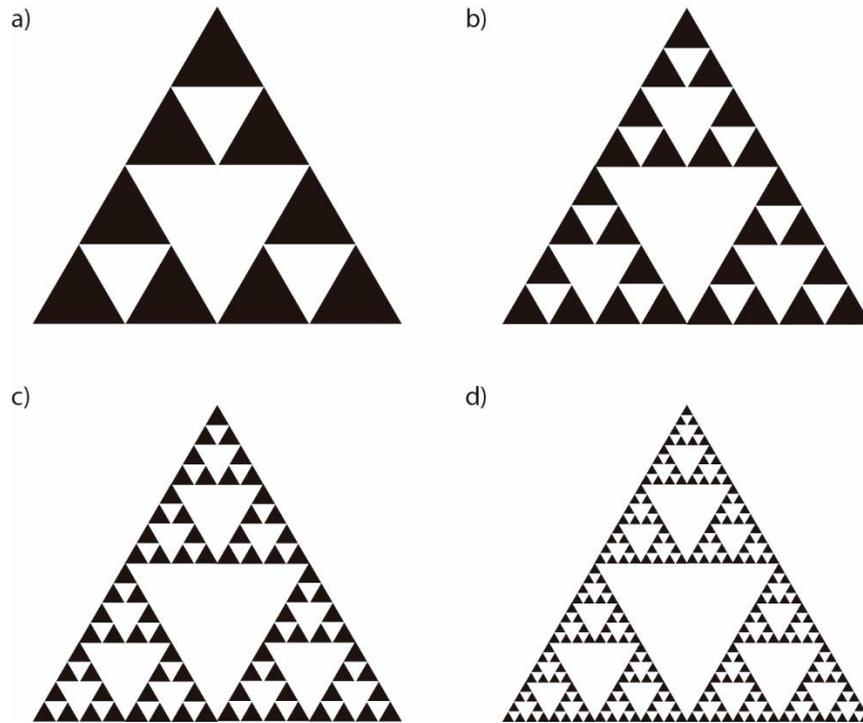


Figura 3.10. Fractal de Sierpinski iteraciones 2 (a), 3 (b), 4 (c) y 5 (d). El área se ha reducido en gran medida, el proceso se puede continuar.

Para calcular la dimensión fractal del triángulo de Sierpinski debemos analizar nuevamente el paso n , donde tendremos 3^n copias del triángulo original, cada una de estas copias tendrá una reducción de $r = (1/2)^n$ respecto de su triángulo anterior en la construcción. Por tanto, su dimensión fractal será:

$$DF_{Sierpinski} = \lim_{n \rightarrow \infty} - \frac{\log(3^n)}{\log(2^{-n})} = \frac{\log(3)}{\log(2)} = 1.5849$$

3.5 Curva Peano (Giuseppe Peano, 1890)

En 1890, Giuseppe Peano [17] se dio a la tarea de crear una curva que "rellenara" por completo el área que poseía un cuadrado. Para su construcción tomaremos un cuadrado que dividiremos en 9 secciones iguales. Nuestra curva deberá pasar por el centro de cada cuadro sin cortarse a sí misma y sin salirse del cuadro, la forma más sencilla es la que se muestra en la figura 3.11.

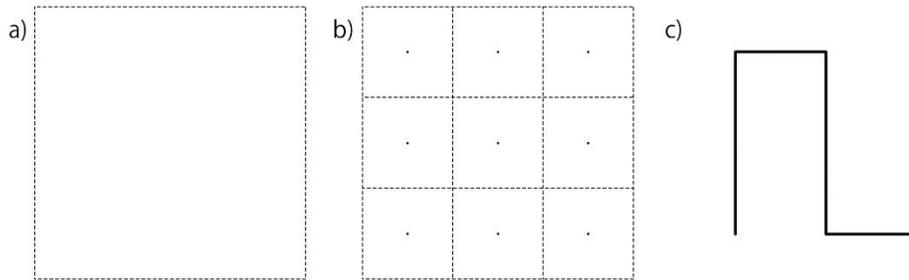


Figura 3.11. a) Cuadro base que será "llenado" por la curva. b) Se divide en 9 cuadros iguales, la curva pasará por el centro de estos. c) Primera iteración de la curva Peano.

Como se puede apreciar no importando dónde comencemos la curva, esta mantendrá la misma forma, aunque gire sobre sí misma. A diferencia de los fractales anteriores, aquí no construiremos sobre la figura que obtuvimos en la primera iteración, lo que se hará será tomar el procedimiento ya visto y escalarlo, esto al tomar cada uno de los 9 cuadros iniciales y dividirlos a su vez en 9 cuadros más pequeños. Nuestra curva hará el mismo recorrido que en la primera iteración para cada uno de los 9 subconjuntos, podemos visualizar este procedimiento en la figura 3.12.

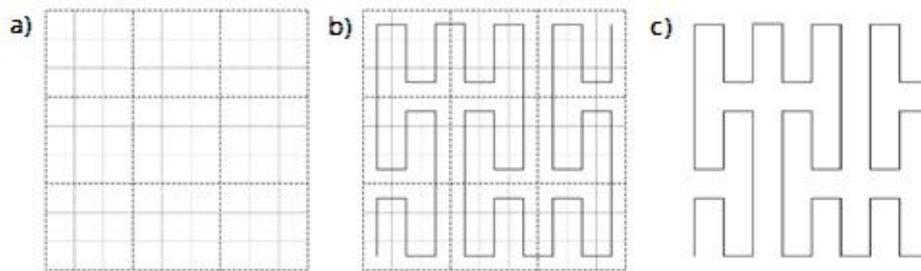


Figura 3.12. Procedimiento para la iteración 2: a) Subdivisión de cada uno de los 9 cuadros iniciales, b) Recorrido de la curva Peano a través de los nuevos cuadros, c) Iteración 2 de la curva Peano.

Al tener diferentes puntos de inicio en cada uno de los 9 cuadros, nuestra curva comienza a tener simetrías y auto similitudes, ya comienza a verse como un fractal.

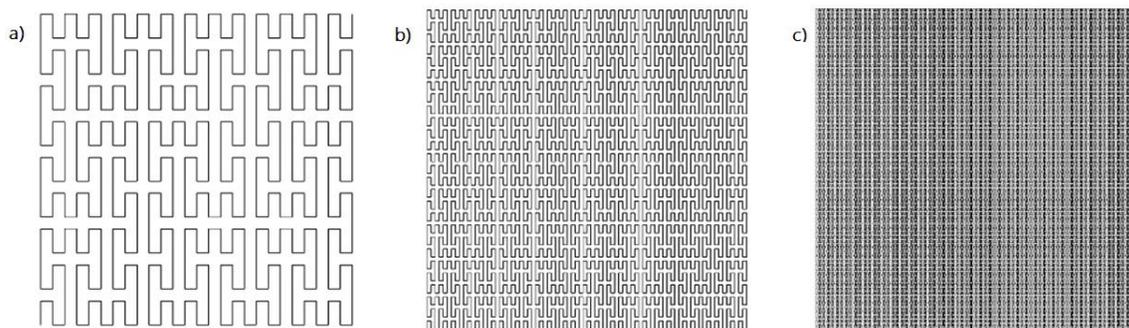


Figura 3.13. Iteraciones 3 (a), 4 (b) y 5 (c) de la curva Peano

En la figura 3.13 podemos ver cómo la curva Peano crece en longitud con cada iteración y comienza a abarcar más y más del cuadro donde está inmersa a pesar de reducir el ancho de la línea con la que se dibuja. En la figura 3.14 ampliamos la quinta iteración de la curva Peano mostrada en la figura 3.13, con iteraciones mayores sería muy complicado visualizar los detalles de la curva en formato impreso.

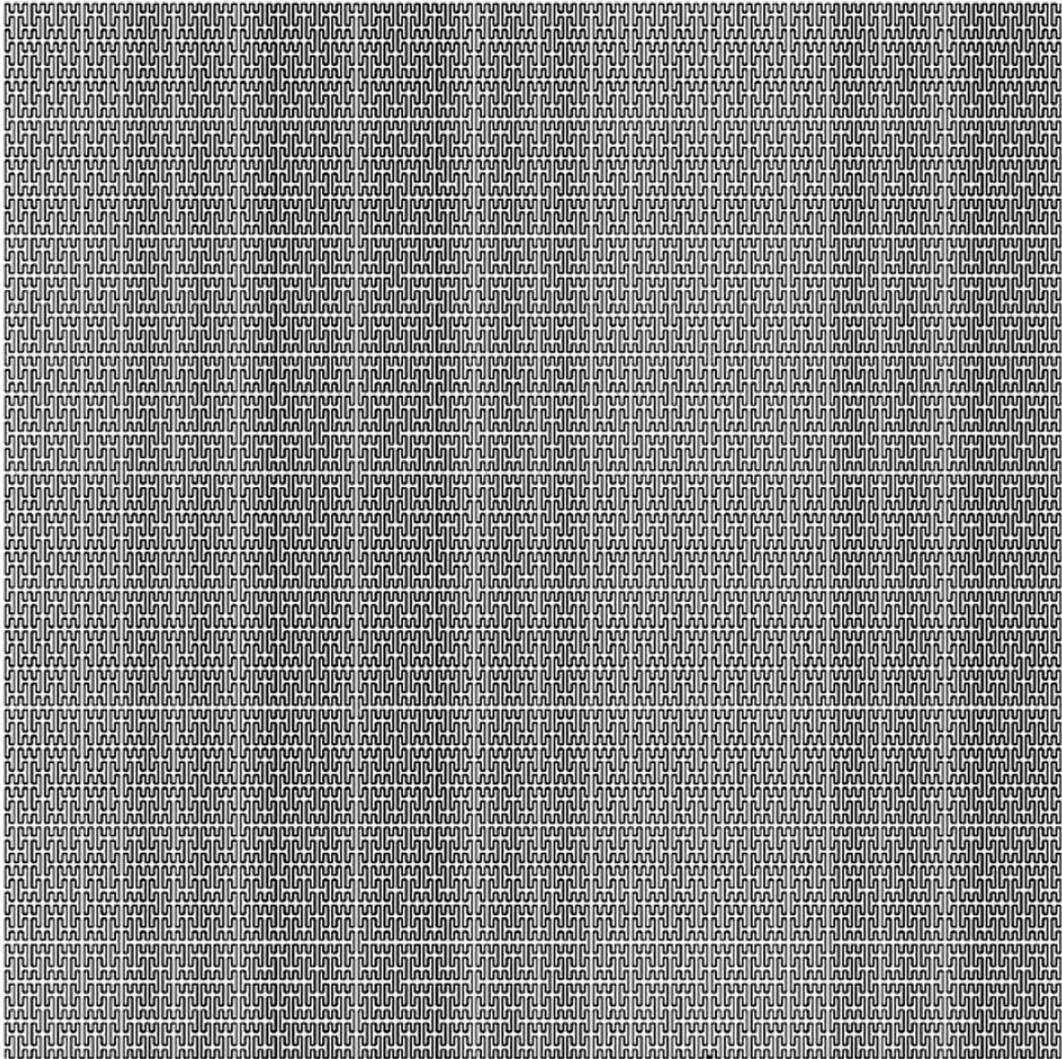


Figura 3.14. Iteración 5 de la curva Peano ampliada. Imágenes creadas por dibujo vectorial.

Llegados a este punto podemos hablar de la dimensión fractal que le corresponde, ya que al ser una línea, su dimensión debería ser de 1, pero en $n \rightarrow \infty$, nuestra curva habrá “rellenado” el cuadro que la contiene, aunque nunca en su totalidad, por lo que su dimensión fractal se considera la del cuadro, $DF_{Peano} \approx 2$ [17].

Capítulo 4. Multifractales.

Al hablar de fractales en el tercer capítulo se mencionó que estos poseen las propiedades de multiescala y de la auto semejanza o auto similitud. Por ejemplo, en el fractal de Cantor podemos tomar cualquiera de los fragmentos obtenidos en cualquiera de las iteraciones n y al reescalarlo al tamaño de la figura original obtendremos esa misma figura con la posibilidad de seguir haciendo las iteraciones de construcción del fractal infinitamente.

Algo así observó Mandelbrot en 1958 [15]. Al trabajar para IBM hizo un estudio del ruido que se presentaba en los cables telefónicos necesarios para transmitir información entre ordenadores, se encontró que al graficar el ruido este se presentaba de igual forma no teniendo en cuenta la escala del tiempo, Figura 4.1.



Figura 4.1. Ruido registrado por Mandelbrot en líneas telefónicas. Imagen obtenida de [15].

Al aplicar la auto similitud a diferentes escalas r podemos ver que la dimensión fractal se mantiene constante en cada una de ellas. Usaremos estos conceptos en series temporales para encontrar que algunas tienen propiedades de memoria a largo y corto plazo.

Encontrarnos con fractales perfectos en la vida real es extremadamente complicado, tomemos de ejemplo el caso de la costa de Inglaterra, figura 3.1, donde se aplica el método "Box Counting" para obtener su dimensión fractal. Al tener n cuadros de escala r todos serán diferentes entre sí, las medidas que podremos obtener en cada uno de los cuadros serán irregulares en cualquiera de las escalas. Pero si las irregularidades son estadísticamente iguales para todas las escalas, podemos comenzar a hablar ya no de *fractales*, si no de *multifractales*. Ya que tendremos diferentes dimensiones fractales dependiendo de la escala en la que estemos trabajando, en realidad tendremos un número infinito de dimensiones fractales, pero todas ellas deben ser válidas para la escala en la que se trabaje.

Esto hace que la dimensión fractal que describe a la figura geométrica o serie temporal se relacione con el concepto *medida* (comúnmente llamados *measures* en inglés) [18].

4.1 Exponente de Hurst.

La forma más sencilla de describir la dimensión fractal es mediante el *exponente de Hurst* (H). Al ser un exponente, la forma más común de obtenerlo es mediante una ley potencial o ley de escalamiento, esta es una relación matemática entre dos variables de interés, las cuales estarán relacionadas entre sí por una ecuación de la siguiente forma:

$$y(x) = kx^H \quad (4.1)$$

Donde x y y son las variables en estudio, k es una constante de escalamiento y H es el exponente de la ley potencial, en nuestro caso será llamado *exponente de Hurst*. Si tuviéramos una tabla con los valores correspondientes a las variables x y y , podríamos realizar un ajuste de modelo mediante regresión lineal, donde el valor de la pendiente que obtengamos corresponderá al valor del exponente de *Hurst*.

El exponente de Hurst está directamente relacionado a la dimensión fractal (D) para un conjunto de datos estadísticamente auto similares. Una de sus funciones es indicarnos el grado de *rugosidad* de una serie temporal. Un exponente de Hurst pequeño tiene una dimensión fractal alta y una función más rugosa, mientras que un exponente de Hurst más grande tiene una dimensión fractal más baja y una función más lisa. El exponente de Hurst y la dimensión fractal están relacionados por la siguiente fórmula:

$$D = 2 - H \quad (4.2)$$

En la figura 4.2 se muestran como ejemplo las gráficas de movimientos Brownianos en vertical $V_H(t)$ en un lapso de tiempo t para diferentes dimensiones fractales (D) y exponentes de Hurst (H) [19], también se puede apreciar a lo que nos referimos con *rugosidad* en la serie temporal. También se puede visualizar la ley de escalamiento que relaciona nuestras variables mediante el exponente de Hurst (H), en este caso el desplazamiento en función del tiempo.

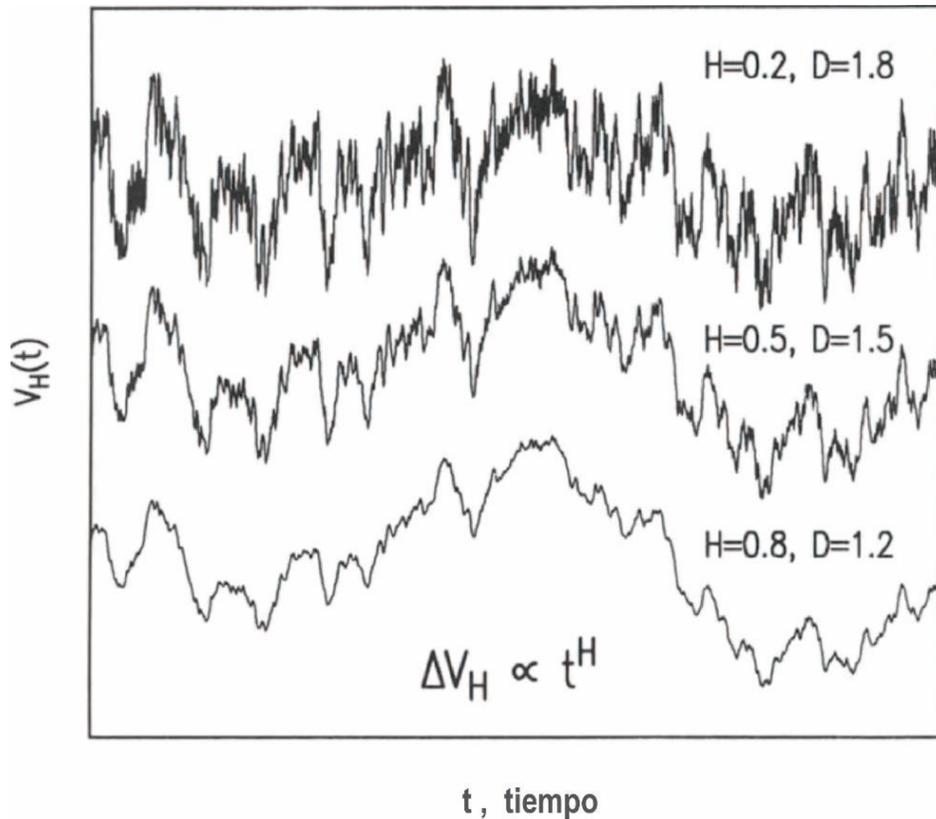


Figura 4.2. Movimientos Brownianos $V_H(t)$ en un lapso de tiempo t , con distintos valores de H y D . Imagen obtenida de [19].

Dentro de la literatura en la que se estudia o se emplea el análisis multifractal, el exponente de Hurst es considerado como un indicador de la existencia de correlaciones dentro de una serie temporal [6, 7, 10 y 20]. Así mismo, en base a estos artículos se sabe que para:

- $H > 0.5$ La serie es persistente, existen correlaciones. Esto quiere decir que existirá un efecto de memoria a largo plazo, ya que es probable que el valor que la serie tome en un futuro lapso de tiempo $t + x$ dependa de valor que tenga en t . Si la serie mantiene un comportamiento creciente, lo más probable es que se conserve así en futuros lapsos de tiempo, y si cambia a un comportamiento decreciente, este será de forma gradual, este comportamiento les otorga un aspecto no tan rugoso.
- $H = 0.5$ La serie es ruido Gaussiano, su comportamiento es aleatorio, la serie no posee memoria de ningún tipo.
- $H < 0.5$ La serie temporal es anti-persistente o anti-correlacionada. Aquí el comportamiento variará inversamente, una tendencia creciente estará seguida de una decreciente y viceversa, además que tienden a querer regresar a su valor de origen. Esto crea series con aspectos muy irregulares o rugosos.

4.1.1 Correlaciones.

Como ya se dijo, el exponente de Hurst será nuestro principal indicador de la presencia de correlaciones dentro de las series temporales que estemos analizando. Al analizar series temporales mediante las metodologías multifractales que se verán en este trabajo, el lector puede percatarse que uno de los primeros pasos es siempre el de eliminar las tendencias determinísticas que existan dentro de la serie temporal, el análisis de rango reescalado lo hace mediante la sustracción de la media, el análisis de fluctuaciones multifractales sin tendencia emplea ajustes de polinomios y el análisis de transformada wavelet de módulo máximo emplea la naturaleza de sus ondeletas para este mismo fin. Al hacer esto terminamos con una serie de datos que parecerían ser de naturaleza aleatoria entre ellos, a pesar de esto se llega a dar el caso donde el comportamiento entre los datos que componen a la serie temporal resultante se ve afectado por dependencias que existen entre estos mismos datos, en este caso podemos decir que la serie posee *correlaciones* [21].

Si consideramos un grupo de n variables aleatorias, la asociación que nos indica si dos variables x y y interactúan entre ellas estaría dada por:

$$\rho(x, y) = \frac{E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)]}{\sigma_x \sigma_y} \quad (4.3)$$

Donde:

- $\rho(x, y)$ Es la correlación existente entre x y y .
- E Media de una variable, dada por su valor promedio en la población n . Por ejemplo la media de una variable z estaría denotada por $E(z) = \mu$.
- μ_x, μ_y Medias de x y y respectivamente.
- σ_x, σ_y Varianzas de x y y respectivamente. Recordemos que $\sigma^2(x) = E[(x - \mu)^2]$.

El valor que puede tomar la correlación está estandarizado en un intervalo de $[-1, 1]$, lo que permite una fácil interpretación del comportamiento que tendrán las variables entre ellas. Por consiguiente, tenemos que:

- $\rho(x, y) = +1$ Existe una relación lineal perfecta positiva.
- $\rho(x, y) = 0$ No existe una relación lineal.
- $\rho(x, y) = -1$ Existe una relación lineal perfecta negativa.

El concepto de correlación puede transferirse a las series de tiempo donde se convertiría en un indicador de como los datos secuenciales de la serie se afectan unos a otros, llamándose ahora *correlación serial* o *autocorrelación*.

Una serie temporal tendrá una autocorrelación ρ_k entre datos secuenciales separados por un número de k pasos en el tiempo, descrita por:

$$\rho_k = \frac{E[(x_t - \mu)(x_{t+k} - \mu)]}{\sigma^2} \quad (4.4)$$

Siendo así que estas correlaciones existentes dentro de la serie temporal le estarían dando el efecto de *memoria a largo plazo*, ya que los datos que la componen tendrán dependencias entre ellos.

4.2 Análisis de rango reescalado (R/S).

Introducido por Harold Edwin Hurst [22] en 1951 para la optimización de las reservas de agua del río Nilo y utilizado por Mandelbrot [23] en 1963 para el análisis de series de tiempo, el análisis R/S pretende mostrar la existencia o ausencia de correlaciones de largo alcance (*long-range correlation*) en series temporales, encontrando la relación que existe entre los valores máximos y mínimos acumulados en distintas ventanas de tiempo y su respectiva desviación estándar.

Sea una serie de tiempo $x(i)$ con N elementos en ella, la dividiremos en v número de ventanas (o segmentos $\langle x \rangle$) cada una de tamaño T (esta será nuestra escala), las ventanas no deberán estar superpuestas, donde $v = \text{int} \left(\frac{N}{T} \right)$

Para cada uno de estos segmentos se debe de calcular su media:

$$\langle x \rangle_v = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T x_{v,i} \quad (4.5)$$

Crearemos series cumulativas o *perfiles* (y_v), para cada una de las ventanas:

$$y_v(i) = \sum_{i=1}^T (x_{v,i} - \langle x \rangle_v) \quad (4.6)$$

La razón de sustraer la media local en los perfiles, es la de eliminar las tendencias que persistan en los datos de las ventanas.

Se calcula el rango de desviaciones acumuladas:

$$R_v(T) = \max_{1 \leq t \leq T} (y_v(i)) - \min_{1 \leq t \leq T} (y_v(i)) \quad (4.7)$$

Y su respectiva desviación estándar

$$S_v(T) = \left\{ \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (x_{v,i} - \langle x \rangle_v)^2 \right\}^{1/2} \quad (4.8)$$

Por último, si es que existe un comportamiento de crecimiento exponencial entre las escalas T contra su respectivo rango reescalado R/S , debería ser posible obtener la función de fluctuación $F(T)$, promediando el rango de reescalado de todos los segmentos:

$$F(T) = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v \frac{R_v(T)}{S_v(T)} \sim T^H \quad (4.9)$$

Podemos ver que la relación $F(T) \sim T^H$ tiene la forma que mencionamos en la ecuación (4.1), donde H será el exponente de Hurst, el cual es nuestro indicador de existencia de correlaciones en la serie temporal para las distintas escalas que pueda tomar T , recordando que $T \gg 1$.

4.3 Análisis de fluctuaciones sin tendencia.

También llamado DFA (por sus siglas en inglés) es un método ampliamente estudiado para la detección de correlaciones en series temporales. A diferencia del análisis R/S este método se basa en un perfil global y la eliminación de tendencias locales. Entendamos por *tendencia* al comportamiento característico que presentarán los datos dentro de cada uno de los segmentos del perfil, el cual puede ser representado mediante una línea obtenida por ajuste polinomial.

Nuevamente partiendo de nuestra serie temporal $x(i)$ de N elementos, calcularemos de forma global la media y crearemos un solo perfil mediante una suma cumulativa.

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(i) \quad (4.10)$$

$$y(i) = \sum_{i=1}^N [x(i) - \langle x \rangle] \quad (4.11)$$

La cantidad de escalas a usar, su tamaño mínimo y máximo, así como el espaciamiento entre ellas será tema de estudio más adelante. Por el momento usaremos n_s número de escalas s para ejemplificar el análisis, hay que tener en cuenta que los siguientes pasos del proceso se repetirán para cada una de las escalas.

El perfil se dividirá en n número de segmentos (o ventanas y_v) no superpuestas, cada segmento será del tamaño de la escala s con la que se esté trabajando. Siendo entonces $n = \text{int}\left(\frac{N}{s}\right)$, $v = 1, \dots, n$ y $y_v = \{y_1, y_2, \dots, y_s\}$.

El siguiente paso es la eliminación de tendencias en cada uno de los segmentos, esto se logra mediante la sustracción del polinomio de ajuste de grado m para cada segmento, al que llamaremos $y_{FIT,v}^m(i)$. El grado del polinomio dictará la tendencia a eliminar de los segmentos: lineal ($m = 1$), cuadrática ($m = 2$), cúbica ($m = 3$) o mayor, usualmente se menciona el grado del polinomio de ajuste al final de las siglas del análisis, DFA m (por ejemplo: DFA1, DFA2, DFA3).

$$Y_v(i) = y_v(i) - y_{FIT,v}^m(i) \quad (4.12)$$

De cada nuevo segmento obtendremos la fluctuación media cuadrática por medio de la varianza.

$$F_v^2(s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s Y_v(i)^2 \quad (4.13)$$

La función de fluctuación se obtiene mediante la raíz cuadrada del promedio de la fluctuación media cuadrática $F_v^2(s)$ de todos los segmentos v :

$$F(s) = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n F_v^2(s) \right\}^{1/2} \sim s^h \quad (4.14)$$

Al final obtendremos una tabla de valores de $F(s)$ contra s . Si existen correlaciones en la serie de tiempo, $F(s)$ debería incrementarse a medida que se incrementa s , siguiendo la ley potencial $F(s) \sim s^h$. El exponente h puede ser calculado mediante un ajuste lineal logarítmico entre los valores obtenidos de $F(s)$ con sus respectivas escalas s , donde la pendiente h será un buen estimado de H [24].

4.4 Análisis de fluctuaciones multifractales sin tendencia.

Hasta ahora se ha calculado un estimado de la dimensión fractal mediante el exponente de Hurst, el cual demostraría un comportamiento estadísticamente fractal en ellas, al dar indicios de correlaciones en el comportamiento de la serie de tiempo. Esto mediante una función de fluctuación F en función de diferentes ventanas de escala s .

En la figura 4.3 vemos el ejemplo de 3 series de tiempo teóricas a las que se les aplicó un análisis DFA2, donde la escala s adquirió los valores de [16, 32, 64, 128, 256, 512 y 1024]. Se puede observar que el valor de F se incrementa al aumentar s , al final mediante una regresión lineal de todos los puntos que obtuvimos de calcular $F(s)$ en función de las escalas s , obtendremos el

valor de la pendiente, que será el valor estimado del exponente de Hurst H . En el caso de series que tengan un comportamiento de ruido blanco (Gaussiano) la pendiente tenderá a 0.5, en series con existencia de correlaciones la pendiente será $H > 0.5$ y en series con anti-correlaciones tendremos $H < 0.5$.

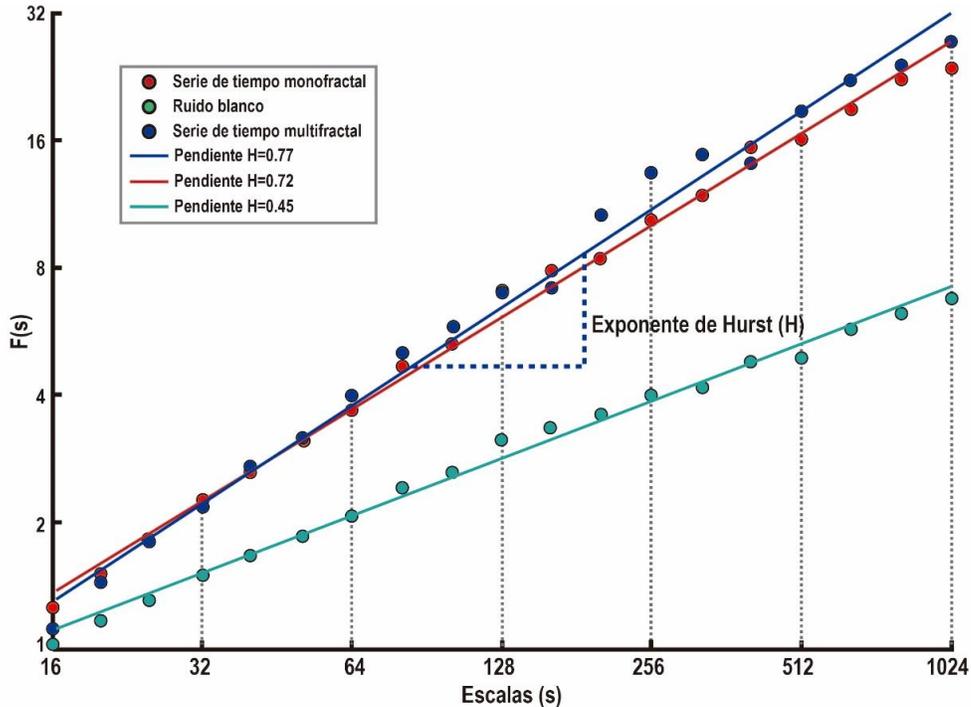


Figura 4.3. Función de fluctuación contra escalas $F(s) \sim s^H$. Imagen obtenida de [24]

Pero además es posible que existan correlaciones locales dentro de las diferentes escalas de tiempo, a micro escala y macro escala por así decirlo, y son precisamente estas correlaciones locales las que diferenciarán a series *fractales* de series *multifractales*. Además, hasta ahora hemos calculado la función media cuadrática $F^2(s)$ mediante la varianza, dejando otros momentos estadísticos fuera del análisis. Si vemos la figura 4.3 nos damos cuenta que el análisis DFAM no puede diferenciar entre una serie fractal y una multifractal, nuevamente requerimos de otras medidas que nos den un panorama más completo.

El análisis de fluctuaciones multifractales sin tendencia o MFDFA por sus siglas en inglés, propuesto por Kantelhardt en 2002 [25] tiene en cuenta estos aspectos y da una nueva medida multifractal. El procedimiento consta de 5 pasos aplicados a una serie de tiempo $x(i)$ de N elementos.

Paso 1: Al igual que en el análisis DFAM el procedimiento comienza con la media y el perfil de la serie a estudiar, fórmulas (4.10) y (4.11), y nuevamente requeriremos de un conjunto de escalas s .

Paso 2: El siguiente paso consistiría en segmentar el perfil en n número de segmentos y_v , pero a menos que la división N/s fuera exacta para todas las escalas, es común que algunos elementos

finales $y(i)$ no sean tomados en cuenta. Para evitar esta omisión de información crearemos otra serie de segmentos, pero esta vez comenzando desde el extremo opuesto de la serie, será un análisis de ida y vuelta por decirlo de una forma coloquial, por lo que tendremos una cantidad total de $2n$ segmentos.

Paso 3: Para cada uno de los segmentos y_v realizaremos un ajuste de polinomio por mínimos cuadrados $y_{FIT,v}$, el cual nos servirá para la eliminación de las tendencias locales, aplicando esto a la ecuación (4.13) obtenemos:

$$F^2(v, s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{ y[(v-1)s + i] - y_{FIT,v}(i) \}^2 \quad (4.15)$$

Para $v = 1, \dots, n$.

$$F^2(v, s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{ y[N - (v-n)s + i] - y_{FIT,v}(i) \}^2 \quad (4.16)$$

Para $v = (n+1), \dots, 2n$.

Paso 4: Una serie de tiempo monofractal puede describirse mediante una sola dimensión fractal, ya que las correlaciones entre sus datos conservan sus propiedades sin importar la escala, en comparación, las series de tiempo multifractales requieren más de una dimensión fractal para poder ser descritas, ya que poseen diferentes correlaciones locales [24] dentro de las fluctuaciones a escalas extremadamente pequeñas y escalas extremadamente grandes, por lo que el comportamiento de las series multifractales tendrá variaciones dependiendo de la escala con que se estudie. Como las series de tiempo monofractales carecen de este tipo de fluctuaciones, obtienen una distribución normal que puede ser descrita mediante la varianza, la cual posee un momento estadístico $q = 2$. Cada momento estadístico representa una característica de una serie de tiempo compuesta de variables aleatorias, como la media ($q = 1$) y la varianza ($q = 2$), y aunque no se conozca el nombre de cada uno de estos momentos, el análisis multifractal debe extenderse a todos los momentos de orden q , tomando en cuenta no solo los valores enteros de q sino también los fraccionarios, ya que estamos hablando de multifractales.

Aunque tampoco hay un estándar para el intervalo de valores que debe tomar q , usaremos el observado en [24] y [26] que va desde -5 a 5. Según Espen A. [24] los momentos estadísticos q negativos amplificarán a los segmentos de variaciones extremadamente pequeñas que estén dentro de las series de tiempo multifractales haciendo que tengan mayor influencia durante el análisis. De igual modo, los momentos estadísticos positivos, amplificarán segmentos de variaciones extremadamente grandes durante el análisis. El valor $q = 0$ se considera como un valor neutro, que tendrá igual influencia de las fluctuaciones grandes y pequeñas.

Es así que la ecuación (4.14) quedaría de la siguiente forma:

$$F_q(s) = \left\{ \frac{1}{2n} \sum_{v=1}^{2n} [F^2(s, v)]^{q/2} \right\}^{1/q} \quad (4.17)$$

Para valores de $q \neq 0$.

$$F_0(s) = \exp \left\{ \frac{1}{4n} \sum_{v=1}^{2n} \ln[F^2(s, v)] \right\} \quad (4.18)$$

Para $q = 0$, esto para evitar una indeterminación en la función de fluctuación.

Paso 5: Para cada uno de nuestros momentos q debemos obtener la ley de escalamiento de $F_q(s)$ contra s , mediante una regresión logarítmica, con la finalidad de obtener su respectiva pendiente H_q . Según Kantelhardt y col. [25] si una serie de tiempo tiene correlaciones a largo plazo, los valores de $F_q(s)$ deben incrementarse a medida que aumenten los valores de s , siguiendo la ley de escalamiento siguiente:

$$F_q(s) \sim s^{H_q} \quad (4.19)$$

Momentos (q)	-5	F ₋₅ (16)	F ₋₅ (32)	F ₋₅ (64)	F ₋₅ (128)	F ₋₅ (256)	F ₋₅ (512)	F ₋₅ (1024)	H ₋₅	}
	-4	F ₋₄ (16)	F ₋₄ (32)	F ₋₄ (64)	F ₋₄ (128)	F ₋₄ (256)	F ₋₄ (512)	F ₋₄ (1024)	H ₋₄	
	-3	F ₋₃ (16)	F ₋₃ (32)	F ₋₃ (64)	F ₋₃ (128)	F ₋₃ (256)	F ₋₃ (512)	F ₋₃ (1024)	H ₋₃	
	-2	F ₋₂ (16)	F ₋₂ (32)	F ₋₂ (64)	F ₋₂ (128)	F ₋₂ (256)	F ₋₂ (512)	F ₋₂ (1024)	H ₋₂	
	-1	F ₋₁ (16)	F ₋₁ (32)	F ₋₁ (64)	F ₋₁ (128)	F ₋₁ (256)	F ₋₁ (512)	F ₋₁ (1024)	H ₋₁	
	0	F ₀ (16)	F ₀ (32)	F ₀ (64)	F ₀ (128)	F ₀ (256)	F ₀ (512)	F ₀ (1024)	H ₀	
	1	F ₁ (16)	F ₁ (32)	F ₁ (64)	F ₁ (128)	F ₁ (256)	F ₁ (512)	F ₁ (1024)	H ₁	
	2	F ₂ (16)	F ₂ (32)	F ₂ (64)	F ₂ (128)	F ₂ (256)	F ₂ (512)	F ₂ (1024)	H ₂	
	3	F ₃ (16)	F ₃ (32)	F ₃ (64)	F ₃ (128)	F ₃ (256)	F ₃ (512)	F ₃ (1024)	H ₃	
	4	F ₄ (16)	F ₄ (32)	F ₄ (64)	F ₄ (128)	F ₄ (256)	F ₄ (512)	F ₄ (1024)	H ₄	
	5	F ₅ (16)	F ₅ (32)	F ₅ (64)	F ₅ (128)	F ₅ (256)	F ₅ (512)	F ₅ (1024)	H ₅	
		16	32	64	128	256	512	1024		

Escalas (s)

Figura 4.4. Visualización del origen del H_q con escalas de [16, 32, 64, 128, 256, 1024] y una q con rango de -5 a 5.

Al tener en cuenta todos los momentos estadísticos H_q recibirá el nombre de *exponente de Hurst generalizado*. Si graficáramos H_q contra q , veríamos que existe un comportamiento decreciente de H_q conforme aumenta el valor de q , este comportamiento es característico de las series *multifractales* y es una forma de saber que estamos en presencia de una de ellas, lo que

indicaría la existencia de correlaciones dentro de la serie de tiempo, ya que tendríamos un conjunto de dimensiones fractales capaces de describir a la serie temporal en sus diferentes escalas, todas estas dimensiones relacionadas por la misma ley de escalamiento.

En la figura 4.4 nuevamente aparecen ejemplificados los comportamientos de 3 series de tiempo, como ya se había mencionado, las series *monofractales* tienen una distribución normal descrita por la varianza, el valor del exponente de Hurst que obtengamos de $q = 2$ dará una descripción general del comportamiento fractal de la serie, ya que no existen fluctuaciones locales que influyan en su comportamiento, es por esto que el análisis en diferentes momentos estadísticos de una serie *monofractal* arrojará valores de H_q constantes al que tendrá en $q = 2$, cabe mencionar que para $q = 2$ la ecuación (4.17) será equivalente a la ecuación (4.14).

Las series de ruido Gaussiano también mantendrán valores constantes y además muy bajos en su exponente de Hurst generalizado, por lo que podemos diferenciar los tres comportamientos mediante la gráfica de $H_q(q)$ vs q .

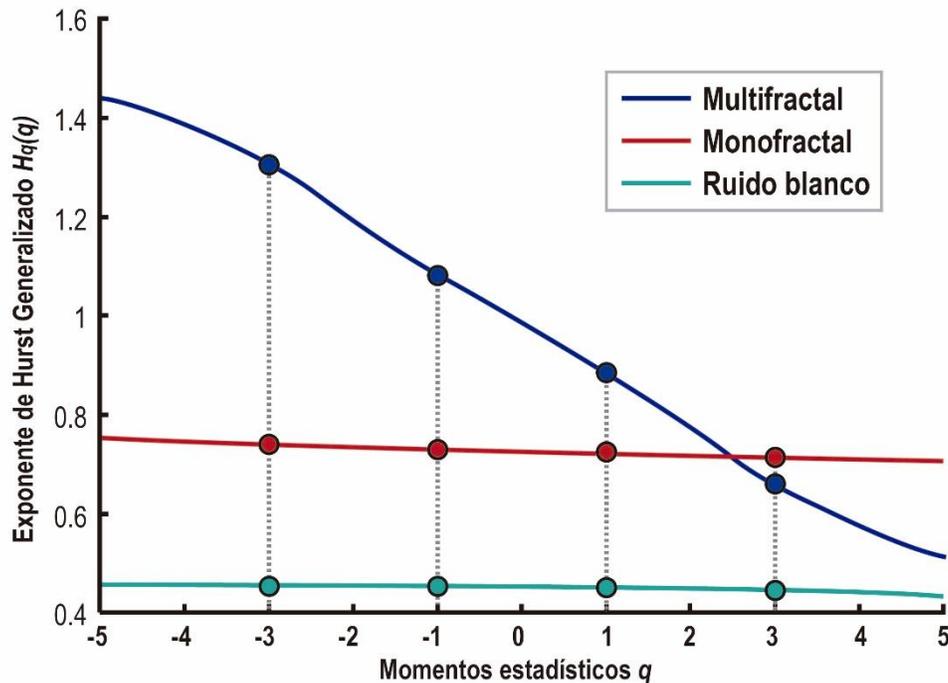


Figura 4.5. Exponente de Hurst Generalizado $H_q(q)$ contra momentos estadísticos q . Imagen obtenida de [24]

4.5 Espectro multifractal.

El exponente de Hurst generalizado H_q es solo una de las formas de parametrizar las series multifractales, existe el formalismo [25] de expresar el comportamiento mediante el exponente de escalamiento $\tau(q)$, ambos exponentes están relacionados por la expresión:

$$\tau(q) = qH_q - 1 \quad (4.20)$$

Ya que las series de tiempo monofractales mantiene un H constante, son independientes de q y su dimensión fractal puede ser obtenida mediante la ecuación (4.2), para el caso de las series multifractales su *dimensión multifractal generalizada* puede obtenerse mediante la relación:

$$D(q) = \frac{\tau(q)}{q-1} = \frac{qH_q - 1}{q-1} \quad (4.21)$$

El cambio de exponente [25] es para obtener, mediante una transformada de Legendre, el exponente de singularidad α y la función de singularidad $f(\alpha)$.

$$\alpha = \tau'(q) \quad \text{y} \quad f(\alpha) = q\alpha - \tau(q) \quad (4.22)$$

Como su nombre lo indica cada α representa una singularidad dentro de las fluctuaciones [26], mientras $f(\alpha)$ nos indica con qué fuerza se presenta. La medida $f(\alpha)$ sería nuestro equivalente a D para el estudio de las series multifractales. La gráfica resultante de $f(\alpha)$ contra α es conocida como *espectro multifractal*, al estar formado de las pendientes de $\tau(q)$ este tiene la forma distintiva de un arco invertido, donde la diferencia que hay entre las alfas máxima y mínima es conocida como el *ancho del espectro multifractal*. En el caso de series monofractales o series compuestas de ruido, los arcos serán pequeños a comparación de arcos de series multifractales, esto se puede apreciar en la figura 4.6. Además, como se verá en capítulos posteriores, series de tiempo que no tengan características multifractales no presentarán curvas cóncavas, sino que su grafica tendederá a deformar el arco perdiendo así su concavidad en la curva $f(\alpha)$ vs α . El espectro multifractal será otra de las medidas que usaremos para diferenciar series de tiempo multifractales durante el estudio de las series sísmicas.

Un espectro multifractal perfecto tendría un arco simétrico, con una $f(\alpha)$ máxima posicionada en un exponente de singularidad llamado α_0 [18]. Las diferencias que existan dentro del arco se deberán a las fluctuaciones locales [24], un espectro que no es afectado por las fluctuaciones locales con magnitudes pequeñas será más alargado a la izquierda, mientras un espectro que no sea afectado por fluctuaciones locales de magnitudes grandes será más alargado a la derecha.

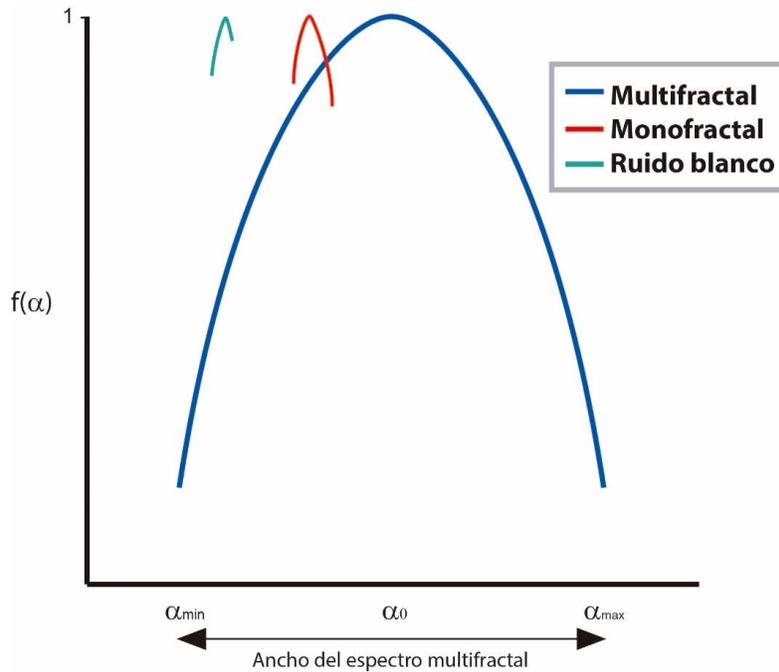


Figura 4.6 Espectro multifractal obtenido de graficar $f(\alpha)$ contra α . Imagen obtenida de [24]

4.6 Conjunto de escalas (s).

Kantelhardt en la referencia [27] nos indica que el valor que puede tomar la escala máxima usada en los análisis MFDFA y DFA no debe ser mayor a $\frac{1}{4}$ del total de los elementos que conformen a la serie de tiempo, pero no existe una indicación de la cantidad de escalas a usar o el incremento que debe existir entre ellas. Por ejemplo, en [24] se utiliza un conjunto de 6 escalas de base 2 con un incremento exponencial binario, mientras que [25] hace uso de escalas de potencias de base 10. Esto puede llevar a inconsistencias en los resultados entre estudios de una misma serie temporal, aun aplicando la misma metodología. Se decidió entonces hacer uso de un *conjunto de escalas auto generado* propuesto en [26] para el estudio multifractal de los sismogramas estudiados aquí.

Partiendo de una serie de tiempo x compuesta de N elementos, nuestro conjunto de escalas auto-generado constará de 10 escalas s de base binaria. Recordemos que nuestra escala máxima debe estar limitada a un cuarto de N , por lo que el exponente que genere esta escala está dado por:

$$Exp_{MAX} = \left\lceil \log_2 \left(\frac{N}{4} \right) \right\rceil \quad (4.23)$$

El exponente mínimo estará dado por:

$$Exp_{min} = \lfloor \log_2 16 \rfloor = 4 \quad (4.24)$$

Las escalas faltantes se obtendrán mediante un espaciado uniforme entre los exponentes máximo y mínimo, esto puede lograrse mediante una función comúnmente llamada *linspace* encontrada tanto en Matlab como en numpy de Python. Esta función requiere como datos de entrada los límites mínimo y máximo del arreglo, así como el número de muestras que deberá calcular en el intervalo de los límites.

$$\mathbf{Exponentes} = \mathbf{linspace}(Exp_{min}, Exp_{MAX}, 10) \quad (4.25)$$

En caso de exponente fraccionario, la escala tomará el valor entero superior después de elevar la base 2, por lo que nuestro conjunto de escalas quedaría formado por:

$$S = [2^{Exp1}, 2^{Exp2}, 2^{Exp3}, 2^{Exp4}, 2^{Exp5}, 2^{Exp6}, 2^{Exp7}, 2^{Exp8}, 2^{Exp9}, 2^{Exp10}] \quad (4.26)$$

4.7 Resultados experimentales.

Como ya se dijo en el capítulo 1 se aplicó el análisis MFDDFA a los datos sísmicos obtenidos durante los terremotos ocurridos los días 7 y 19 de septiembre del año 2017, esto para buscar la existencia de correlaciones multifractales en los datos correspondientes.

La red de banda ancha del SSN proporcionó la información obtenida por 54 de las estaciones sísmológicas sobre el terremoto del día 7 de septiembre de 2017, entregando en total 161 archivos de extensión SAC, faltando la información concerniente al canal vertical de la estación PNIG y a su vez para el terremoto del día 19 de septiembre proporcionó la información de 54 estaciones con otros 161 archivos de extensión SAC, pero en esta ocasión fue la estación PDIG quien tuvo falta de información en su canal vertical. Ya que el análisis MFDDFA se aplica a series temporales de una dimensión, manejaremos cada uno de los canales de las estaciones por separado, los canales faltantes simplemente se omitirán del estudio, ya que no obstaculizan el análisis.

Cada uno de los canales constituye una serie temporal de muestras contra Gales, recordando que los Gales son unidades de aceleración utilizadas en análisis sísmicos con la equivalencia de 1 Gal = 1 cm/s². La información fue solicitada con el muestreo máximo que proporcionan los equipos de la red, que consiste en 100 muestras por segundo. Debido a que se decidió usar ventanas de 3, 10 y 15 minutos a partir de la detección de la onda P, cada una de las estaciones contará con series temporales de 18,000 datos, 60,000 datos y 90,000 datos para cada uno de sus canales. Lo que equivale a 966 análisis MFDDFA entre la información de ambas fechas.

Teniendo en cuenta las secciones 4.4 y 4.5 del trabajo, definiremos como un resultado *positivo*, en cuanto a comportamiento multifractal, aquella serie temporal sísmica que al graficar su exponente de Hurst generalizado Hq contra los momentos q muestren una pendiente monótonamente decreciente, pero además deberán mostrar una curva cóncava bien definida al graficar su espectro multifractal $f(\alpha)$, este como ya se mencionó puede estar más alargado en alguna de sus mitades, pero no debe mostrar deformaciones como torceduras o más de una cresta. De tal forma toda gráfica que no cumpla con estos criterios será tomada como un resultado *negativo*.

4.7.1 Sismo de Tehuantepec, 2017-09-07, 23:49:18 hora local, M 8.2, Estación sismológica MCIG

A continuación, en las figuras de la 4.7 a la 4.16, se muestran algunos de los análisis que salieron positivos teniendo en cuenta el comportamiento de la gráfica del exponente de Hurst generalizado y su espectro multifractal. Además, se mostrará cómo es que la ventana de tiempo afecta a los resultados al generar deformaciones en las gráficas.

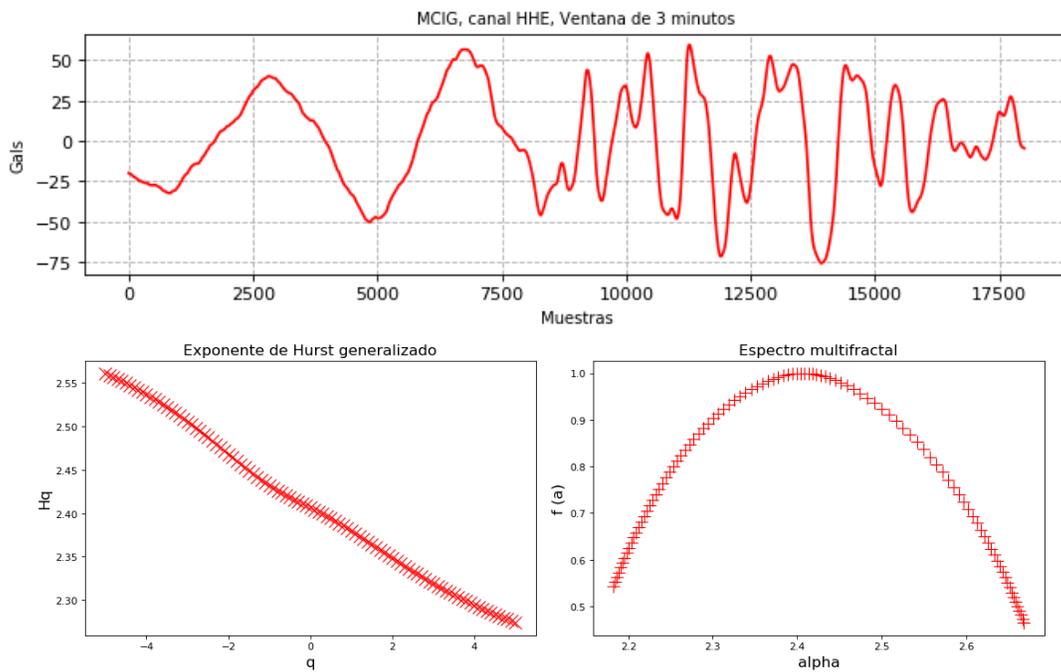


Figura 4.7. Análisis MFDFA positivo, sismograma de la estación MCIG del canal E con ventana de 3 minutos.

En la figura 4.7 existe una tendencia monótonamente decreciente en la gráfica del H_q contra q y existe un arco casi perfecto en el espectro multifractal, esto nos indica la presencia de correlaciones en la serie de tiempo con afectaciones tanto de fluctuaciones pequeñas como grandes, es por estas razones que se considerará como positivo al análisis MFDFA de esta serie de tiempo.

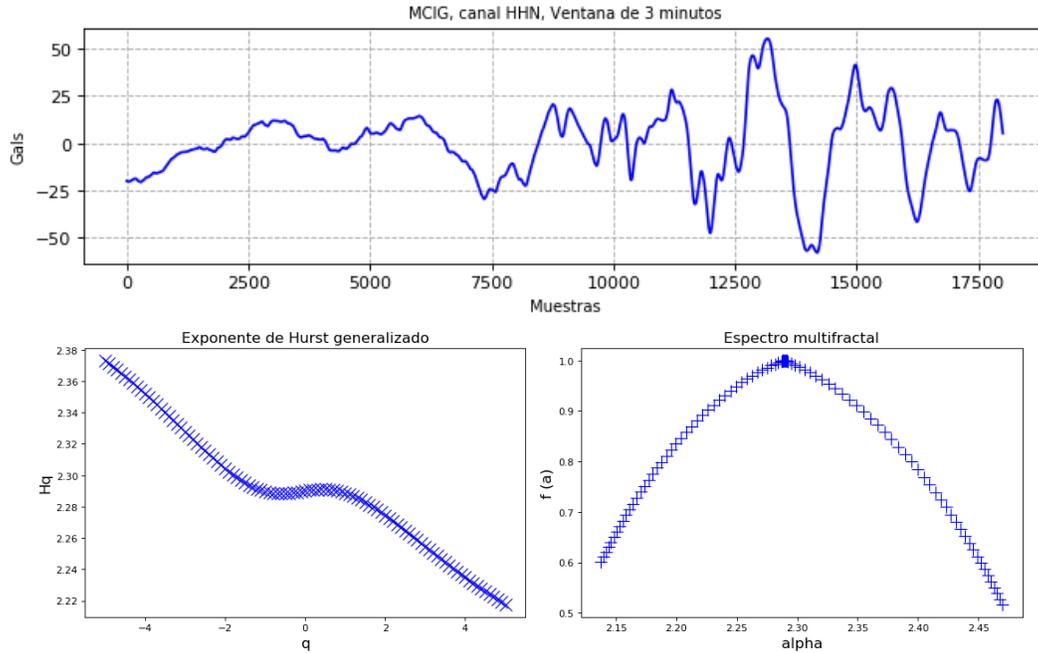


Figura 4.8. Análisis MFDFA negativo, sismograma de la estación MCIG del canal N con ventana de 3 minutos.

En la figura 4.8 existe un pequeño asentamiento en valores cercanos a $q = 0$ de la gráfica Hq vs q , además el espectro también tiende a agruparse cerca de su valor máximo, por lo que no es completamente seguro que se trate de un comportamiento multifractal en este canal, por lo que no puede considerarse un resultado positivo, aun así éstas figuras tienden a mejorar en ventanas de mayor amplitud, por lo que puede tratarse de alguna omisión de datos que genere estas deformidades o bien a desviaciones estándar muy altas en la correspondiente base de datos.

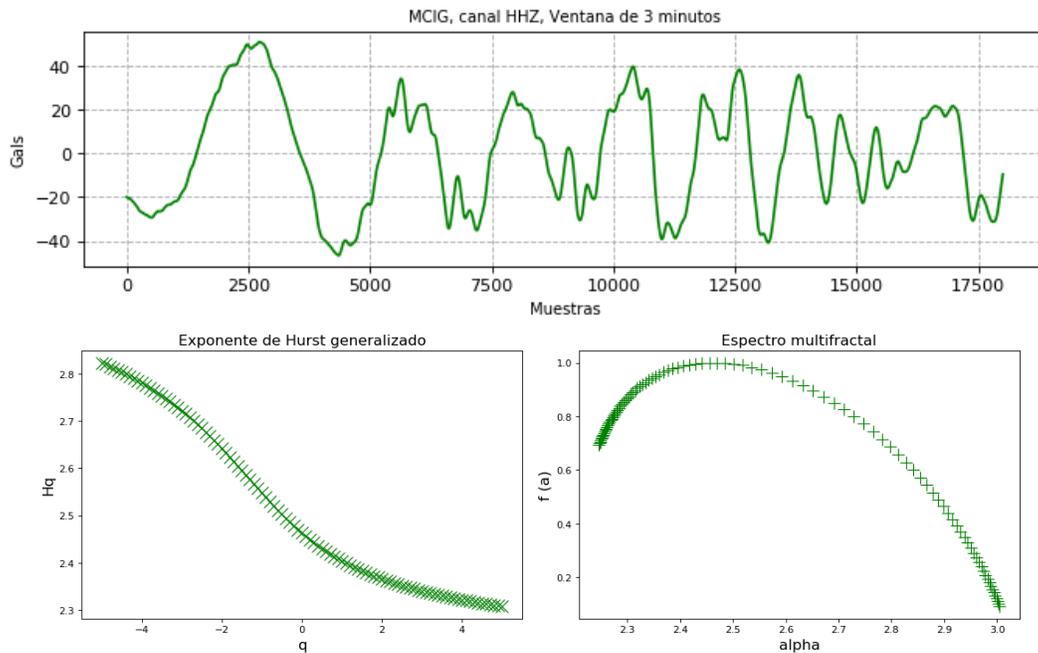


Figura 4.9. Análisis MFDFA positivo, sismograma de la estación MCIG del canal Z con ventana de 3 minutos.

En la figura 4.9 El canal Z muestra un espectro multifractal con forma aceptable a pesar de ser más alargado a la derecha, como ya se mencionó esto indicaría que el canal Z es menos susceptible a fluctuaciones locales de magnitudes pequeñas y su gráfica H_q vs q no presenta asentamientos, aunque no es del todo recta, este tipo de resultados se considerara positivo, aun así, se debe tener en cuenta la misma consideración de la figura 4.8 y revisar las otras ventanas de tiempo de esta estación para ver la evolución de las gráficas en sus canales.

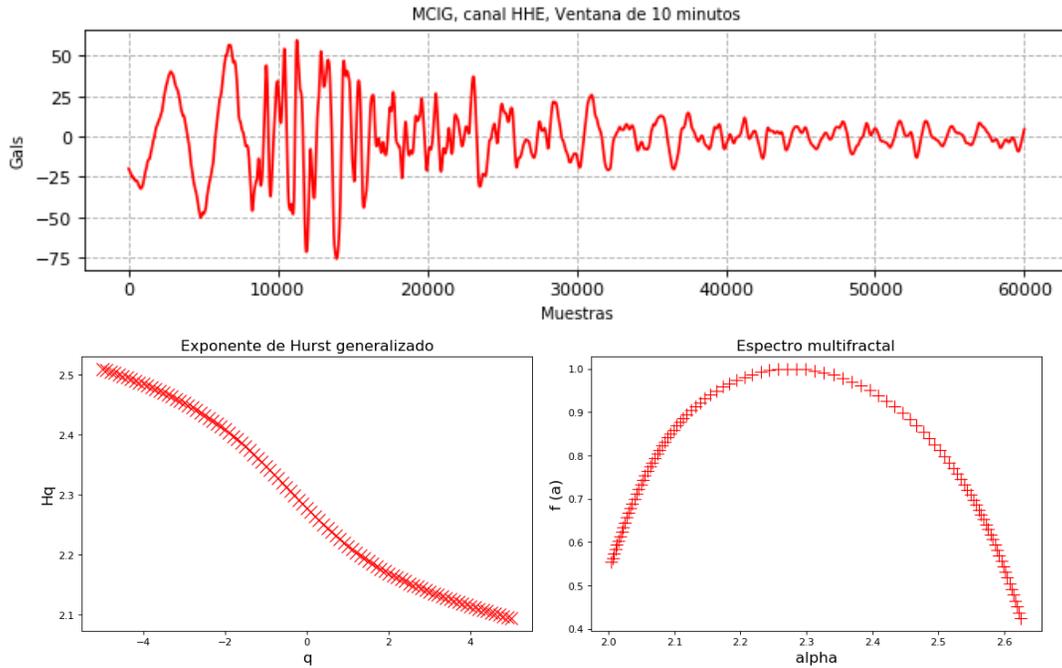


Figura 4.10. Análisis MFDFA positivo, sismograma de la estación MCIg del canal E con ventana de 10 minutos.

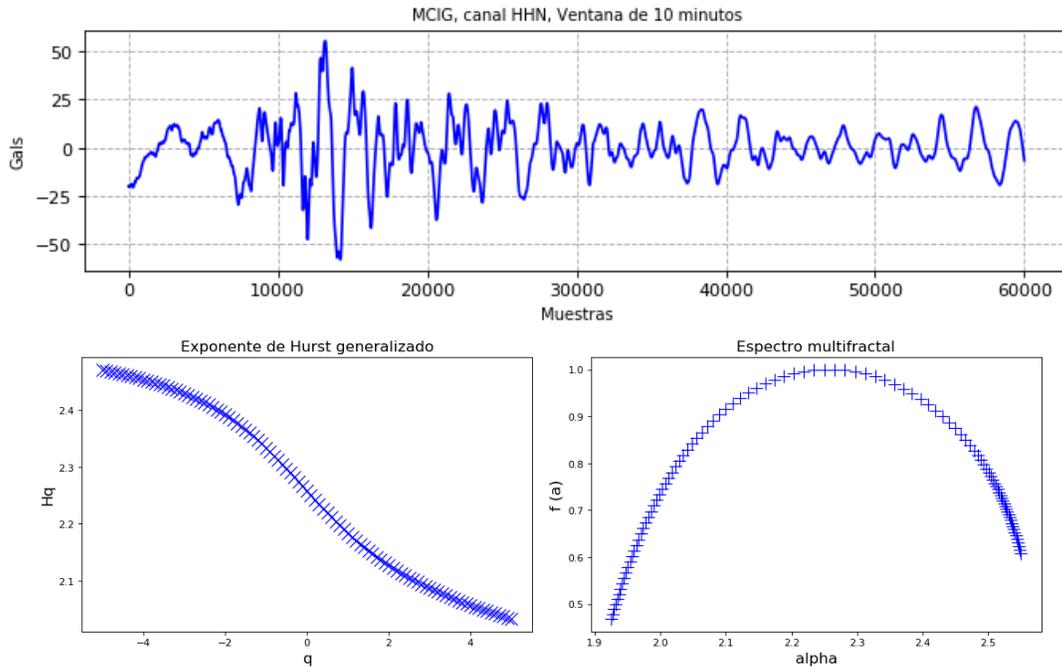


Figura 4.11. Análisis MFDFA positivo, sismograma de la estación MCIg del canal N con ventana de 10 minutos.

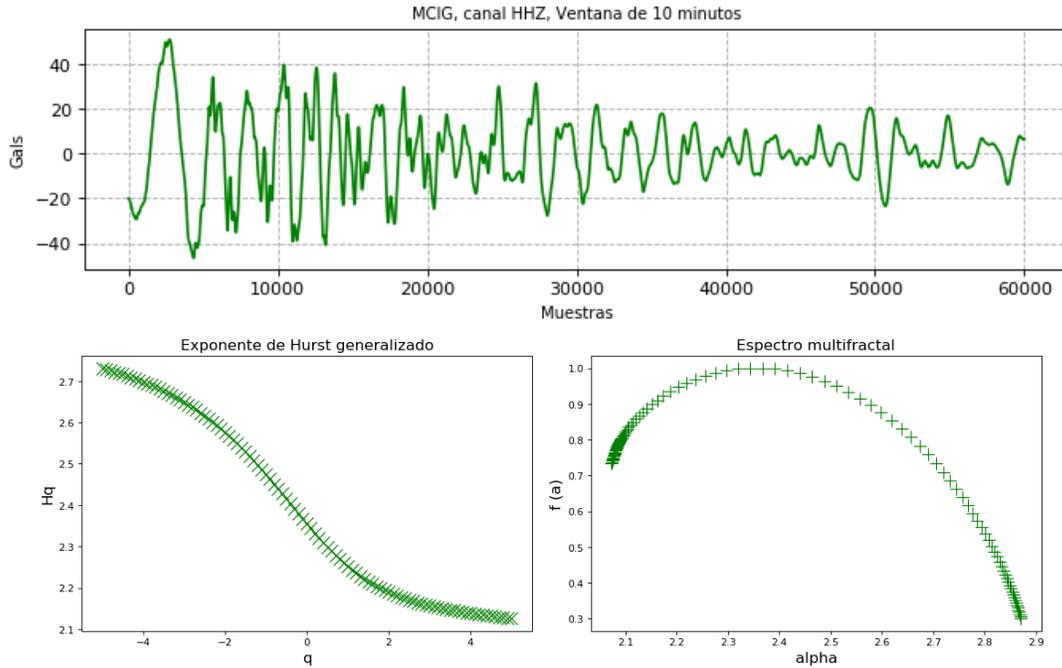


Figura 4.12. Análisis MFDFA positivo, sismograma de la estación MCIg del canal Z con ventana de 10 minutos.

En la figura 4.10 el espectro se mantiene bien definido pero la pendiente deja de ser totalmente recta, aun así, se considera como positivo. En la figura 4.12 el resultado es persistente con el obtenido en la figura 4.9, por lo que será considerado también positivo.

Mientras las figuras 4.10 y 4.12 mantienen un comportamiento similar a las figuras 4.7 y 4.9 respectivamente, podemos ver cómo el espectro y la pendiente de la figura 4.11 tienen una mejora en comparación a los vistos en la figura 4.8, además de mostrar un espectro más largo de su lado izquierdo, las deformaciones vistas en la figura 4.8 han desaparecido por lo que este resultado se considera positivo. Cabe aclarar que este efecto no sucede en todos los sismogramas.

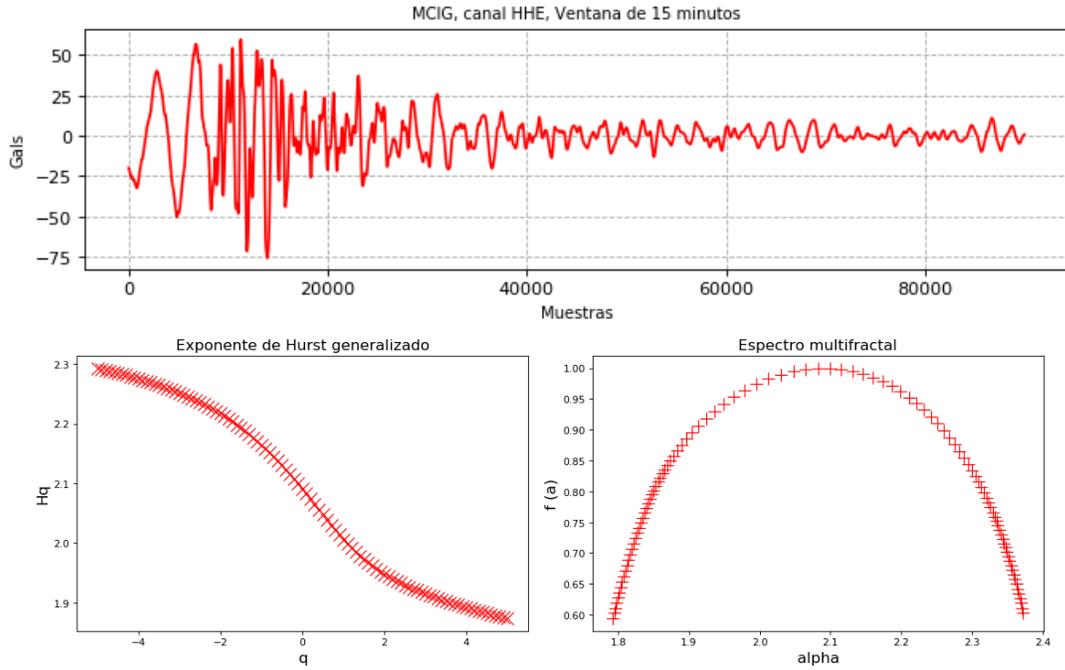


Figura 4.13. Análisis MFDFA positivo, sismograma de la estación MCIg del canal E con ventana de 15 minutos.

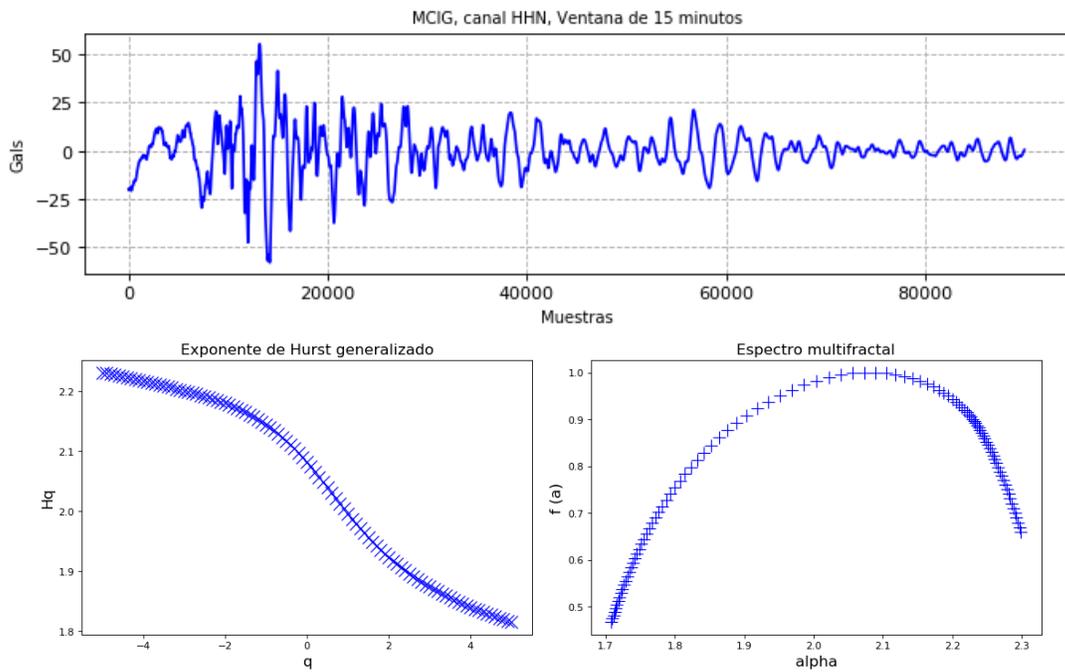


Figura 4.14. Análisis MFDFA positivo, sismograma de la estación MCIg del canal N con ventana de 15 minutos.

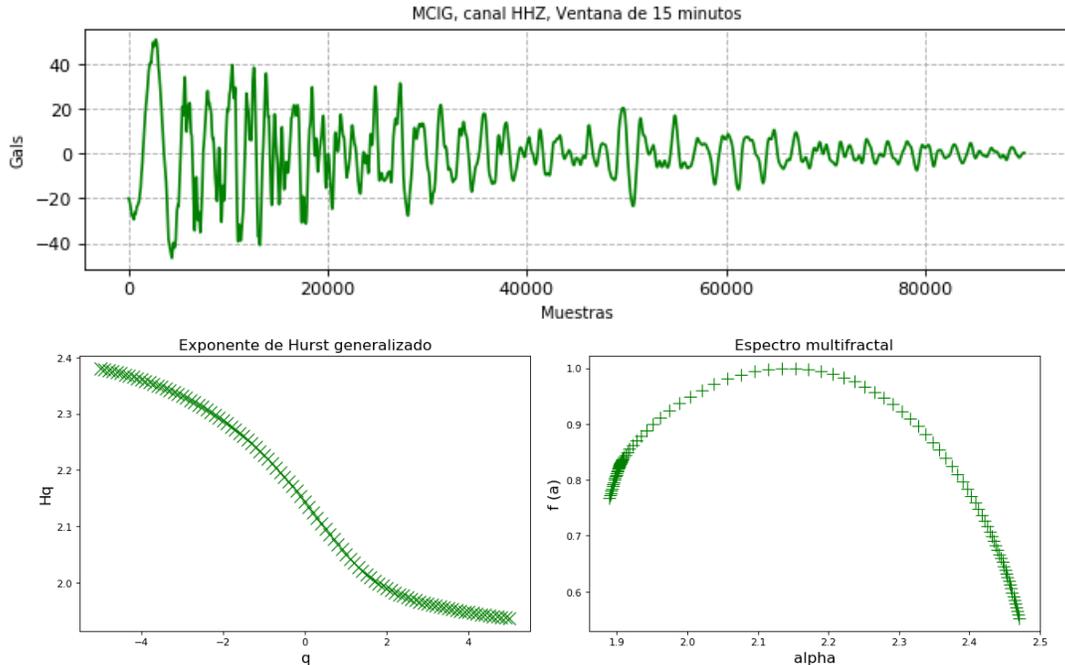


Figura 4.15. Análisis MFDFA negativo, sismograma de la estación MCIG del canal Z con ventana de 15 minutos.

En la ventana de 15 minutos el canal HHE (Figura 4.13) aún se conserva un espectro multifractal distinguible, aunque es notoria la deformación que comienza a tener, ya que a diferencia del espectro visto en la figura 4.10 este es más cuadrado en sus extremos. Aun así, lo consideraremos como resultado positivo, pero con reservas.

Las deformaciones son más claras en las figuras 4.14 y 4.15, donde los espectros multifractales son más asimétricos y las deformaciones son mayormente notorias en los extremos de las curvas, además que las gráficas del exponente de Hurst generalizado dejan de ser totalmente decrecientes. El espectro de la figura 4.14 también será considerado positivo, pero el espectro de la figura 4.15 se considerará negativo ya que su deformación es muy marcada.

Todo lo anterior probablemente se deba a que estamos integrando cada vez más ruido a la serie temporal, ya que para ventanas mayores a 15 minutos las gráficas se deformaban al punto que la pendiente y el espectro no eran distinguibles. Para ejemplificar esto en la figura 4.16 se presenta una serie donde las mediciones con mayor amplitud parecieran estar concentradas aproximadamente en las primeras 15 mil muestras del sismograma, las cuales deben corresponder a la onda P, onda S y ondas superficiales del terremoto, las aproximadas 45 mil muestras posteriores del sismograma parecieran mostrar un comportamiento más estable del suelo donde se ubica la estación BCIG, recordemos que no es posible decir a ciencia cierta en que momento termina un terremoto, pero series temporales con formas parecidas a este ejemplo muestran un espectro multifractal y una gráfica del exponente de Hurst generalizado con deformaciones, perdiéndose completamente la concavidad del espectro multifractal y la pendiente del exponente de Hurst.

Aunque se pudieran delimitar exactamente los datos pertenecientes al terremoto en todos los canales, esto no es garantía de que se obtengan series de tiempo multifractales, durante este estudio muchos de los análisis resultaron negativos para todas las ventanas de tiempo, un buen ejemplo se ve en la figura 4.16 donde no se cumple ninguno de los criterios mencionados para considerar un resultado como positivo, podemos ver que la gráfica del exponente de Hurst generalizado no genera una recta decreciente y el espectro multifractal está completamente deformado.

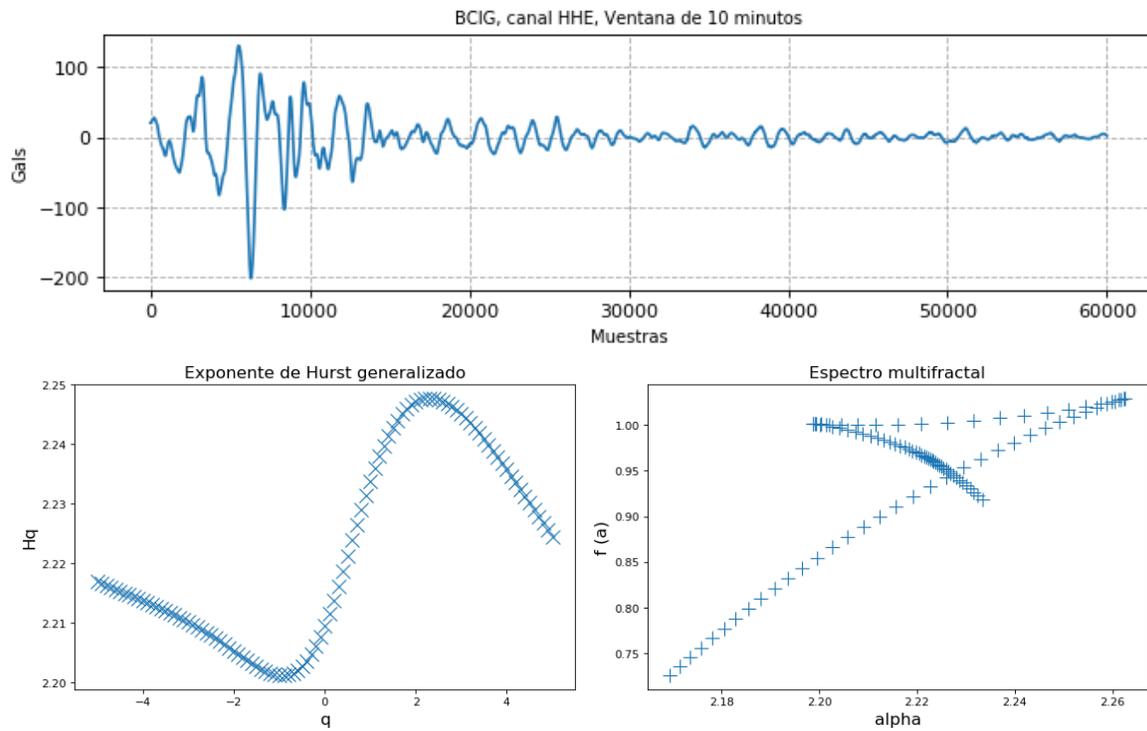


Figura 4.16. Ejemplo de un resultado considerado negativo.

4.7.2 Sismo de Puebla-Morelos, 2017-09-19, 13:14:40 hora local, M 7.1, Estación sismológica CGIG

De igual forma presentamos algunos de los resultados positivos obtenidos del segundo sismo importante de septiembre de 2017.

Al comparar la figura 4.17 contra la figura 4.9 del sismo anterior, nos percatamos que poseen formas similares, aunque el espectro multifractal de la figura 4.17 posee una curva mejor definida, por lo que se toma como un resultado positivo. La figura 4.18 también tiene una pendiente decreciente y un espectro multifractal cóncavo, así que se considera como resultado positivo para el canal N.

Al igual que la figura 4.7, la figura 4.19 muestra una gráfica decreciente casi recta en el exponente de Hurst generalizado y un espectro multifractal bien definido, aunque no totalmente simétrico, nuevamente se considera un resultado positivo.

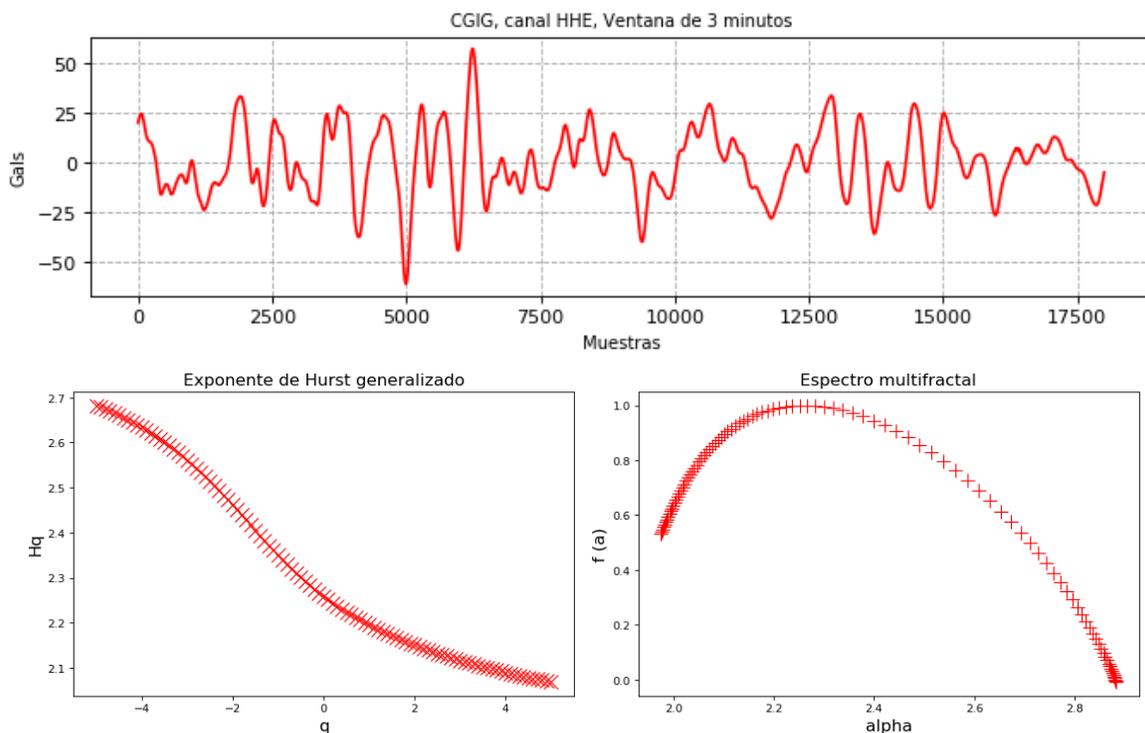


Figura 4.17. Análisis MFDFA positivo, sismograma de la estación CGIG del canal E con ventana de 3 minutos.

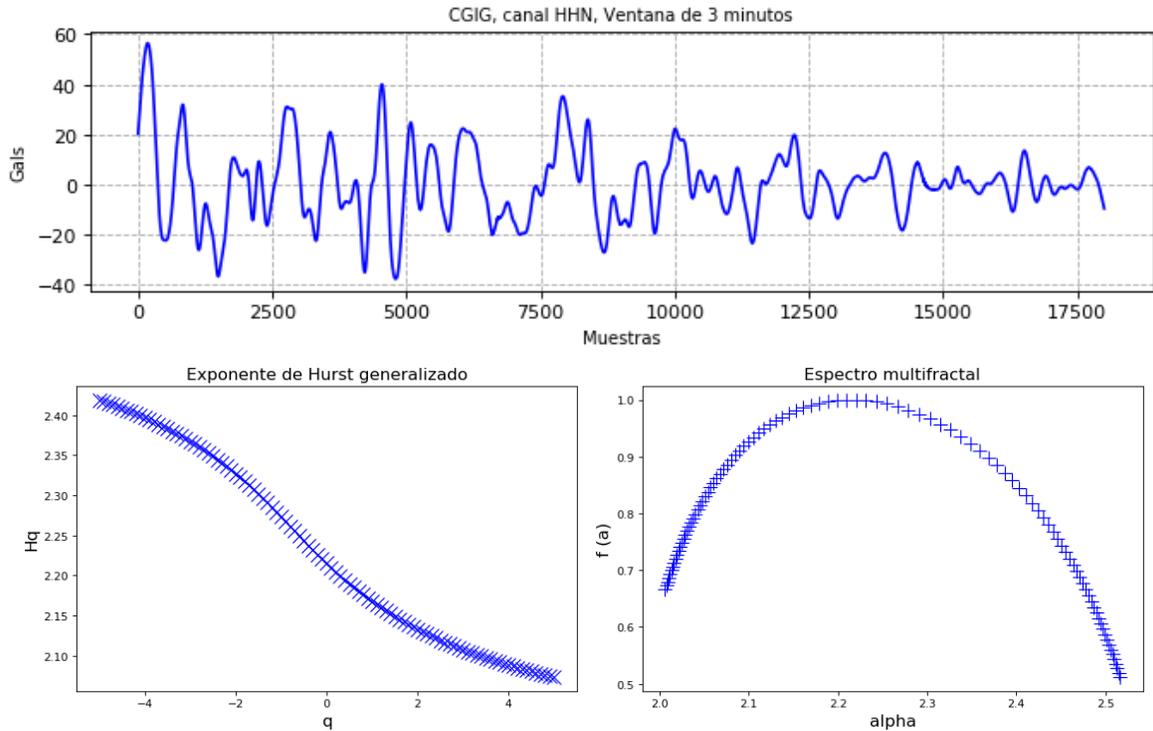


Figura 4.18. Análisis MFDFA positivo, sismograma de la estación CGIG del canal N con ventana de 3 minutos.

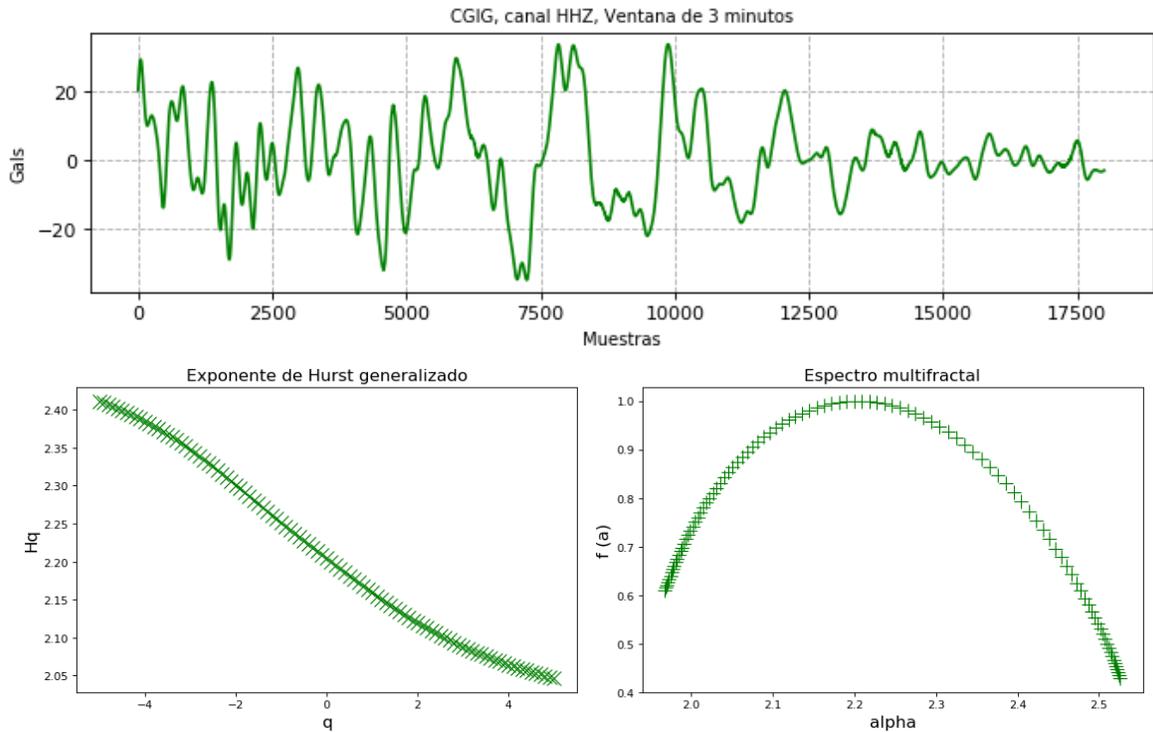


Figura 4.19. Análisis MFDFA positivo, sismograma de la estación CGIG del canal Z con ventana de 3 minutos.

En comparación a las figuras 4.7, 4.8 y 4.9 este terremoto dio positivo en su análisis MFDFA en los tres canales a la vez, al menos para esta estación, aunque hay que recordar que los resultados son muy variables entre las estaciones, ya que hablamos de dos eventos que, aunque fueron cercanos, no poseen exactamente las mismas características.

Para la ventana de tiempo 10 minutos podemos ver en la figura 4.20 que aún se conservan las características vistas en la figura 4.17, por lo cual se considera como un resultado positivo. Esto mismo se puede aplicar a la figura 4.21 en comparación a la figura 4.18.

A diferencia de la figura 4.19, en la figura 4.22 la gráfica del exponente H_q deja de ser completamente recta pero aun es decreciente, además el espectro comienza a marcarse cerca de su punto medio, pero sigue siendo cóncavo, por lo que se considera como un resultado positivo.

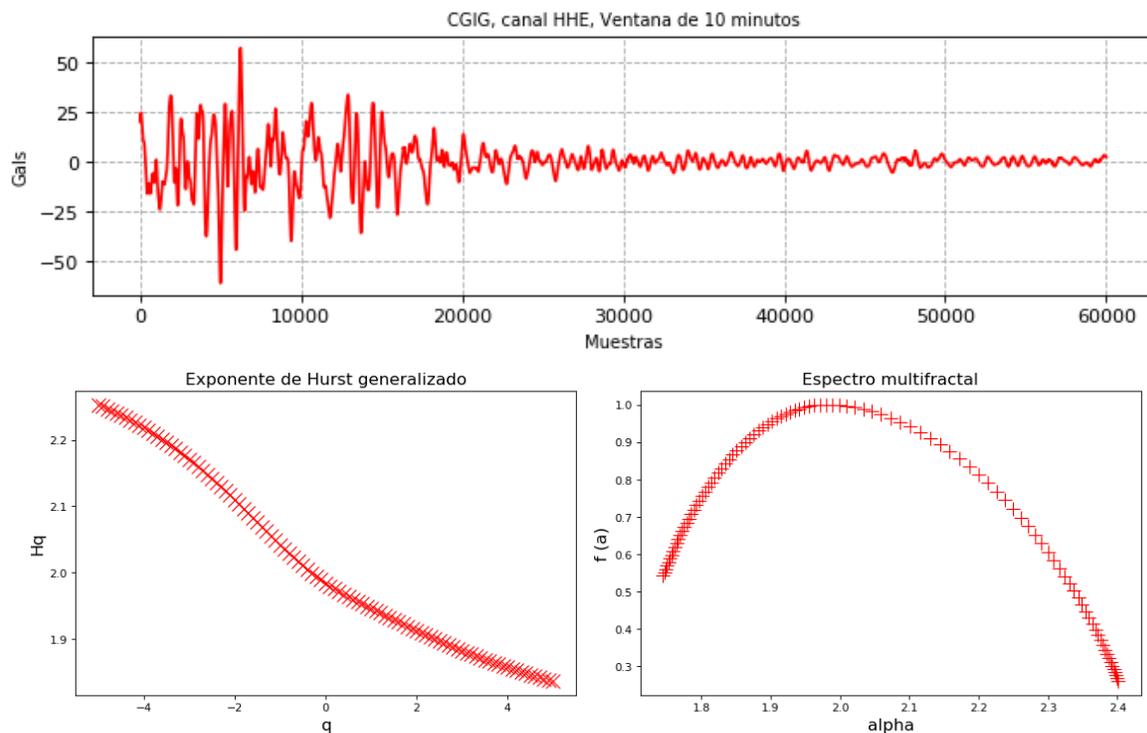


Figura 4.20. Análisis MFDFA positivo, sismograma de la estación CGIG del canal E con ventana de 10 minutos.

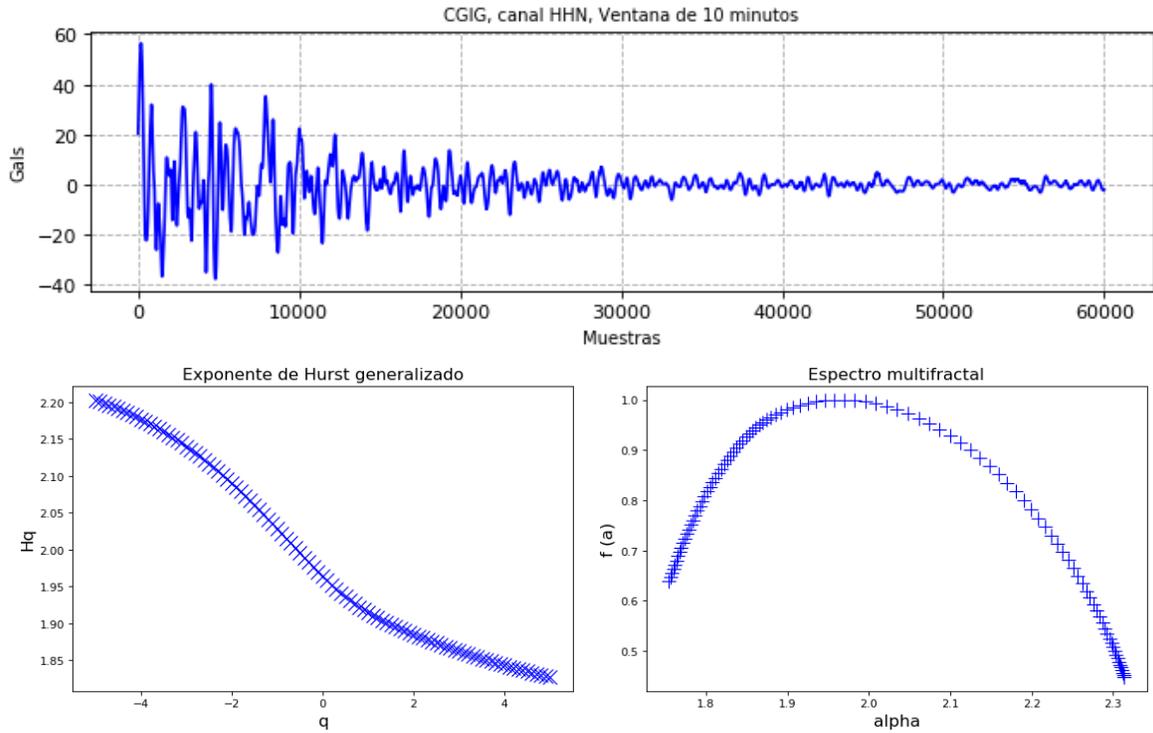


Figura 4.21. Análisis MFDFA positivo, sismograma de la estación CGIG del canal N con ventana de 10 minutos.

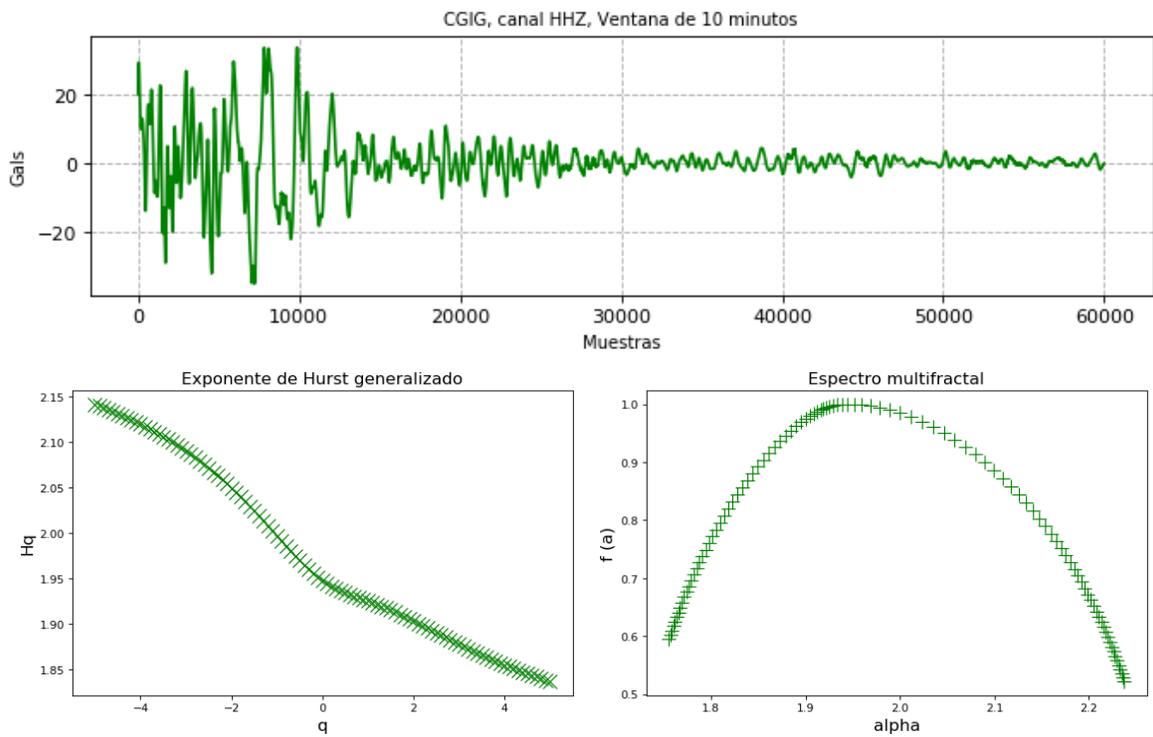


Figura 4.22. Análisis MFDFA positivo, sismograma de la estación CGIG del canal Z con ventana de 10 minutos.

Para la ventana de 15 minutos, mientras el canal E de la figura 4.23 mejora en cuanto a forma, los otros canales comienzan a tener perturbaciones, caso muy parecido al sismo analizado anteriormente. Otra cosa que se puede apreciar, es que a diferencia de lo observado en las figuras 4.7, 4.10 y 4.13, las figuras 4.17, 4.20 y 4.23 parecen ser más constantes a lo largo de las ventanas de tiempo usadas en este trabajo.

En la figura 4.24 se puede ver cómo la curva del espectro multifractal comienza ser más persistente en ciertas partes de la curva, pero conservando aún la forma cóncava.

Al comparar la figura 4.25 con las figuras 4.19 y 4.22 podemos ver cómo ventanas mayores a 15 minutos comenzarán a deformar las gráficas al punto de no tener resultados positivos en el análisis multifractal.

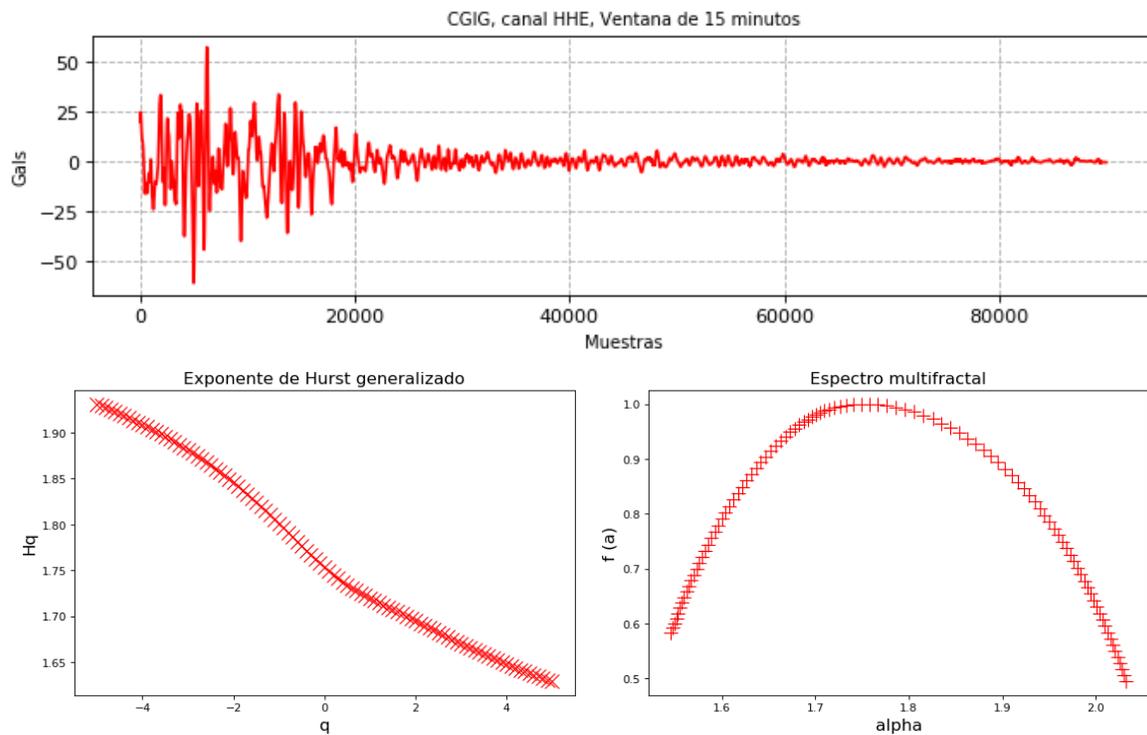


Figura 4.23. Análisis MF DFA positivo, sismograma de la estación CGIG del canal E con ventana de 15 minutos.

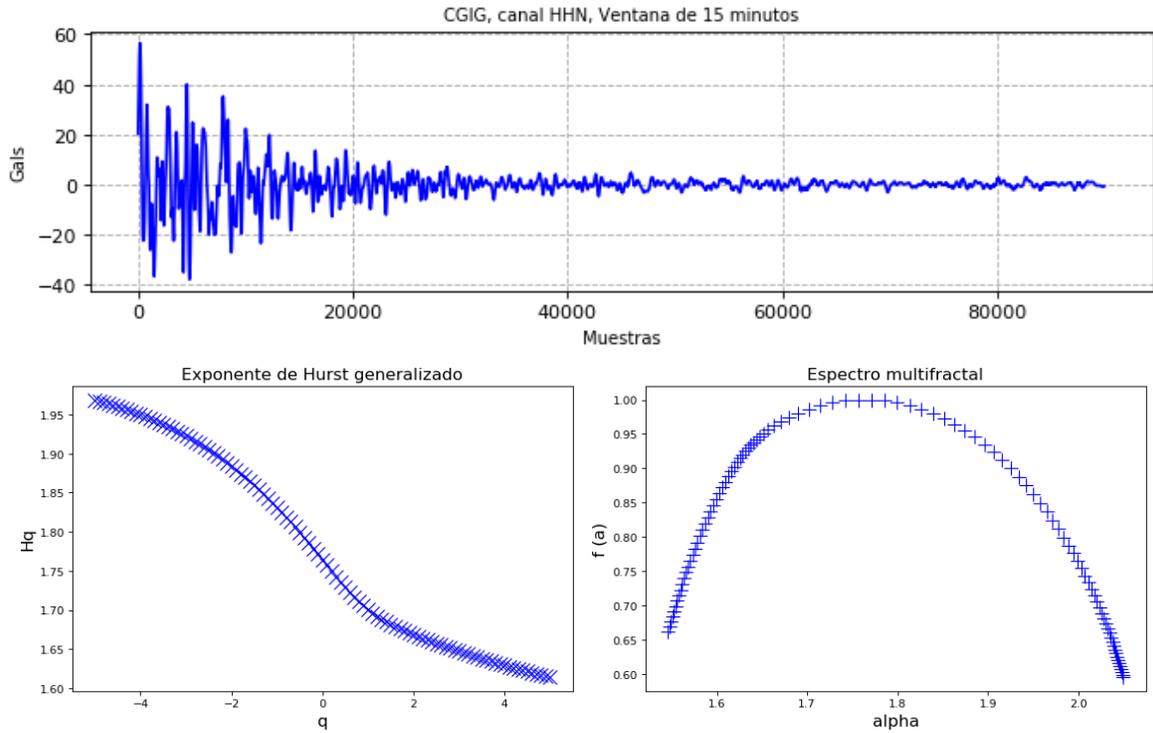


Figura 4.24 Análisis MFDFA positivo, sismograma de la estación CGIG del canal N con ventana de 15 minutos.

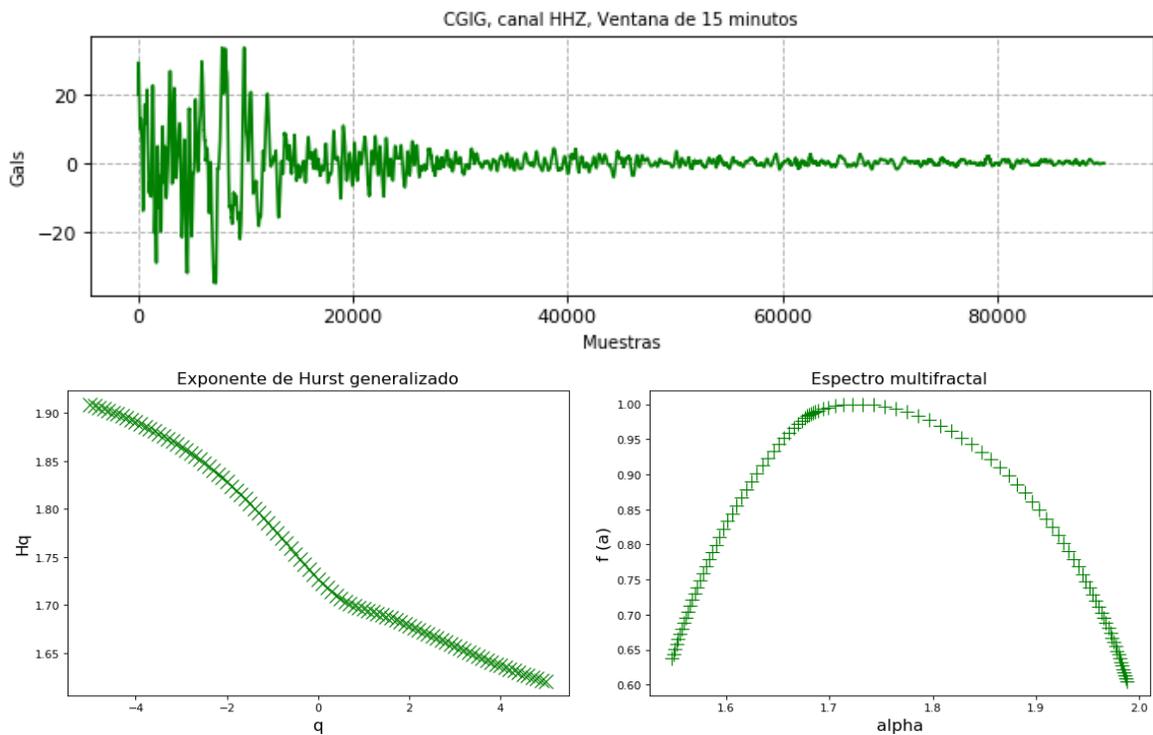


Figura 4.25. Análisis MFDFA positivo, sismograma de la estación CGIG del canal Z con ventana de 15 minutos.

A diferencia de lo sucedido en la figura 4.16, las figuras 4.23, 4.24 y 4.25 aún conservan rastros de ser series multifractales en sus gráficas, aunque las perturbaciones que se notan pueden ser indicativas que en ventanas mayores a 15 minutos las gráficas se deformarán en esos puntos. Queda abierto el problema de la correcta delimitación de los datos sísmicos, ya que la ventana necesaria para un espectro bien formado y una pendiente con un decremento monótono varía de estación en estación.

Para nuestro estudio tomaremos solamente las series dentro de nuestras 3 ventanas de tiempo que tengan un claro comportamiento multifractal, como se ha venido diciendo a lo largo del trabajo un comportamiento multifractal es un indicador de la existencia de correlaciones dentro de esas series temporales. Recordemos que se aplicó este análisis a 966 series temporales por lo que resulta impráctico mostrar todas las gráficas obtenidas de forma impresa y solo mostramos algunos casos como ejemplos.

4.8 Discusión del capítulo.

Los terremotos son fenómenos geofísicos complejos, el presente estudio pretende crear un mejor entendimiento de estos haciendo uso de análisis multifractales como punto de partida y usando como casos de estudio los sismos de Tehuantepec y de Puebla-Morelos ocurridos en el año 2017. Como se mencionó al inicio del capítulo el exponente de Hurst por sí solo sirve como un indicativo del comportamiento general de la serie de tiempo que se esté analizando, dándonos a entender si su comportamiento es persistente, anti-persistente o completamente aleatorio; pero ya que estas relaciones internas en la serie de tiempo pueden cambiar dependiendo de la escala con la que se esté haciendo el análisis se requiere pensar en la posibilidad que estas series sean de carácter multifractal.

Como era de esperarse, de las 966 series obtenidas entre las mediciones de ambas fechas, no todas resultaron cumplir con los parámetros que establecimos para que pudieran ser consideradas como series multifractales, aun así, muchas de ellas siguen correctamente con este comportamiento, por lo que podemos deducir que al menos dentro de estas series existen correlaciones de largo plazo lo que dotaría a estas series de una memoria en su comportamiento, esta premisa formará la base para el resto del estudio.

De lo primero que nos podemos dar cuenta es que el espectro multifractal cambiará dependiendo de la ventana de tiempo usada para delimitar la serie temporal. Variaciones que poco a poco deformarán el espectro multifractal hasta no poder contemplarlo como un resultado aceptable, este comportamiento puede observarse en las figuras 4.8 y 4.11. Esto puede significar que una buena delimitación de los datos pertinentes únicamente al sismo (evitando información anterior a la onda P y posterior a las ondas superficiales propias del terremoto) podría mejorar el resultado obtenido, aunque este trabajo tendría que hacerse de forma independiente para cada una de las series a analizar, recordemos que la delimitación realizada en este trabajo fue hecha mediante el empleo de las ventanas de tiempo de 3, 10 y 15 minutos.

En el artículo de Xingxing Fan y Min Lin [7] se establece que los terremotos de mayor magnitud contienen una mayor cantidad de componentes de baja frecuencia lo que crearía espectros multifractales alargados a la derecha ya que serían menos sensibles a las fluctuaciones locales de magnitudes grandes [24], sin embargo, dentro de los resultados obtenidos podemos ver espectros alargados en dirección opuesta e incluso espectros casi simétricos, esto nos lleva a pensar que los resultados dependen del tipo de terreno que la onda haya tenido que atravesar para poder llegar al sismómetro y no tanto de la magnitud de este.

Capítulo 5. Transformada Wavelet de Módulo Máximo.

El análisis MFDFA nos indica que realmente existen correlaciones multifractales dentro de los sismogramas en estudio, aun así al no haber otro estudio de este tipo que utilice esta misma base de datos no tenemos forma de corroborar que lo obtenido hasta ahora sea fiable, es por esto que requerimos algún método que nos sirva para verificar que nuestros resultados obtenidos sean correctos, es decir, un análisis paralelo que nos asegure la existencia de las correlaciones que buscamos, la alternativa elegida es la Transformada Wavelet de Módulo Máximo (*wavelet transform modulus maxima*, WTMM). Pawel O. y col. [28] nos muestran que el análisis MFDFA es más confiable en estudios donde no se sabe si las señales analizadas poseen o no propiedades monofractales o multifractales, además que los valores que tome q no le presentan ningún problema, a diferencia del análisis WTMM que puede mostrar falsos positivos en multifractalidad cuando q toma valores con un rango muy amplio. También concluyen que la metodología MFDFA es la más indicada al analizar series temporales con longitudes cercanas a los 10,000 datos. Por otro lado, la ondeleta madre que seleccionemos afectará en gran medida los resultados obtenidos mediante WTMM, a pesar de sus deficiencias esta metodología también está diseñada para el análisis de series de tiempo y ha sido ampliamente utilizada en diferentes campos de estudios, por ejemplo, en secuencias de DNA [29], señales médicas [30], información del mercado de valores [29], por mencionar algunas.

A diferencia del MFDFA, el análisis WTMM puede aplicarse a información de más de una dimensión [31] y ofrece espectros multifractales con menos deformaciones, por otro lado, su implementación no es tan amigable ni automática como en el MFDFA [28].

5.1 Transformada Wavelet (WT).

Haciendo una analogía a la transformada de Fourier donde obteníamos información en el dominio de la frecuencia para una función o serie que estuviera en el dominio del tiempo, la WT nos entrega información en función de escalas y traslaciones, esto al comparar la señal original contra una función adaptable llamada *wavelet* u *ondeleta* (ψ). La wavelet será escalada y se desplazará a lo largo de la serie de tiempo para hacer la comparación de la wavelet contra el fragmento correspondiente de la serie, hasta cubrirla en su totalidad, este procedimiento se repite para un conjunto de escalas s . La función que describe esta transformada es:

$$WT_{\psi}[f](t_0, s) = \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t - t_0}{s}\right) dt \quad (5.1)$$

Donde $f(t)$ es la función de interés en el dominio del tiempo, s es la escala, t_0 es el desplazamiento que tendrá la wavelet a lo largo de la función, ψ es llamada la wavelet madre, mientras $\psi(t - t_0/s)$ son consideradas wavelets hijas de ψ , la información resultante WT estará en función de las escalas usadas y del tiempo, esta información suele representarse mediante un gráfico representado en la figura 5.1, donde cada cuadro mostrará el comportamiento de la serie en esa porción escala-tiempo que lo contiene, para una apreciación visual se suele asignar una

escala de colores a los valores que tomará el gráfico, un ejemplo de esto es la figura 5.2, la cual se obtuvo al aplicar la WT al sismograma observado en la figura 4.12.

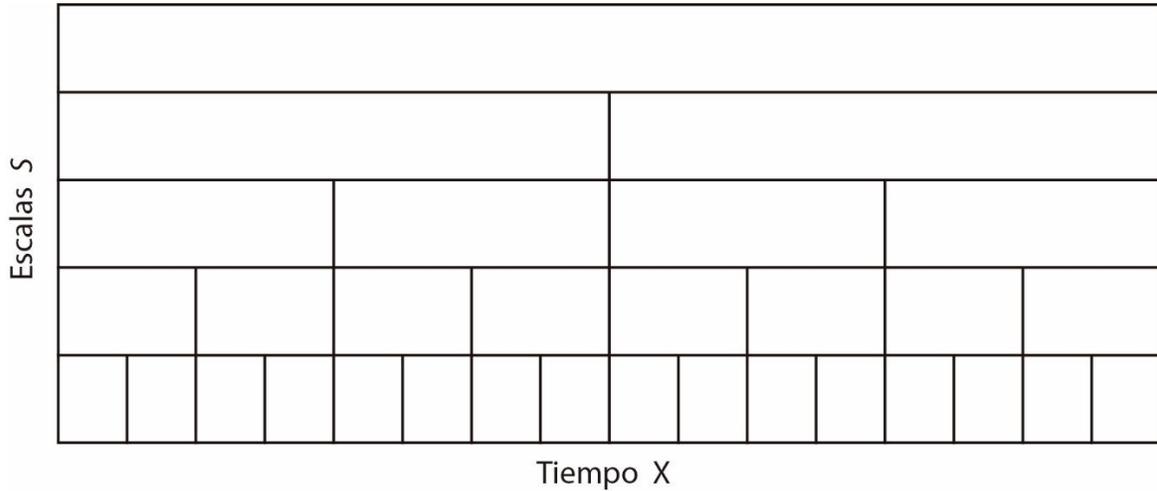


Figura 5.1 Representación gráfica de la información obtenida de la TW.

De acuerdo con Stephane Mallat y col. [32] para que una función $\psi(t)$ se considere como una wavelet admisible, su transformada de Fourier $\hat{\psi}(w)$ debe cumplir con la siguiente condición:

$$\int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{w} dw = \int_{-\infty}^0 \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw = C_{\psi} < \infty \quad (5.2)$$

Lo que implica que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (5.3)$$

Una característica importante de las wavelets es la de poder eliminar comportamientos o tendencias polinomiales de grado n , al utilizar wavelets cuyo $n + 1$ momento de desvanecimiento sea cero [30]. Recordemos que el MFDFA realizaba esto por medio de ajustes de polinomios por mínimos cuadrados locales para después sustraerlos de la señal original. El m -ésimo momento de desvanecimiento está dado por la ecuación (5.4), se considera que se *desvanece* cuando la integral es cero.

$$\int t^m \psi(t) dt \quad (5.4)$$

El número de momentos de desvanecimiento indica el orden de la wavelet y la suavidad de ésta, además mientras más momentos tenga, será más precisa al representar una señal compleja [32]. En este estudio se utilizó la ondeleta *Ricker*, mejor conocida como *sombrero mexicano*, representada en la figura 5.3, la cual posee dos momentos de desvanecimiento, además de ser ampliamente utilizada en estudios de WTMM con señales complejas [29], [30], [33].

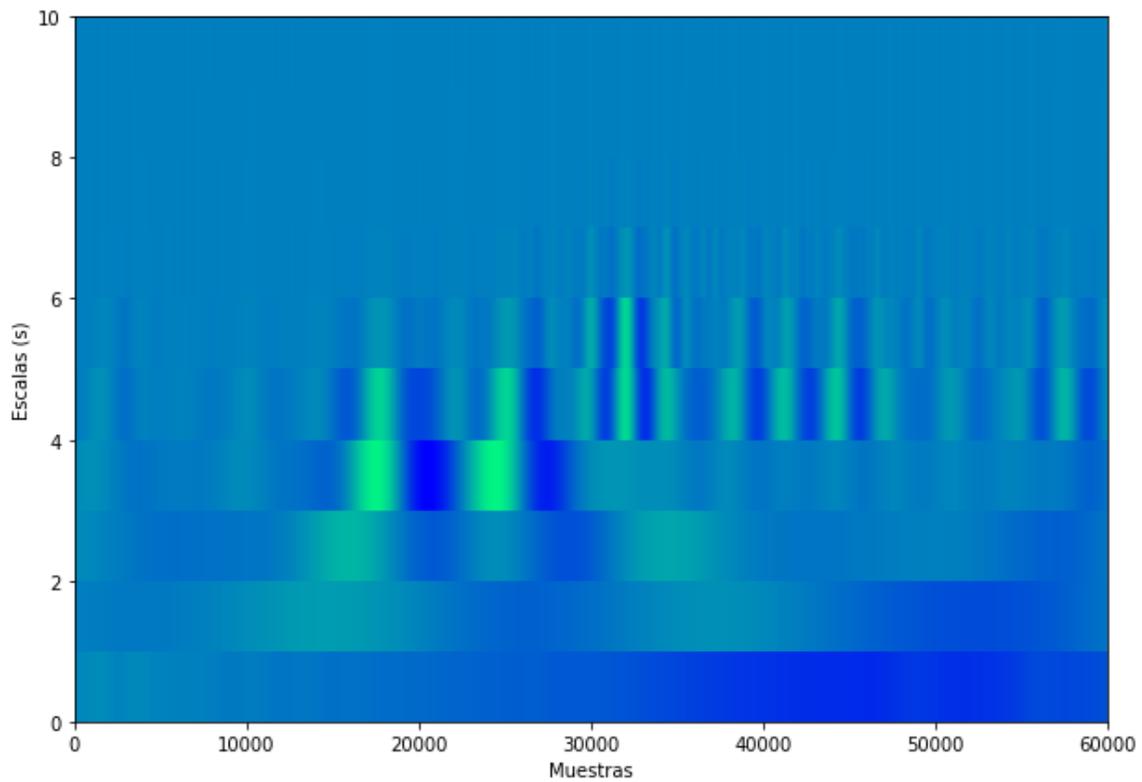


Figura 5.2 Transformada Wavelet del sismograma con fecha del 07 de septiembre del 2017 de la estación MCI, canal Z, ventana de tiempo de 10 minutos, aplicando la Wavelet del sombrero mexicano.

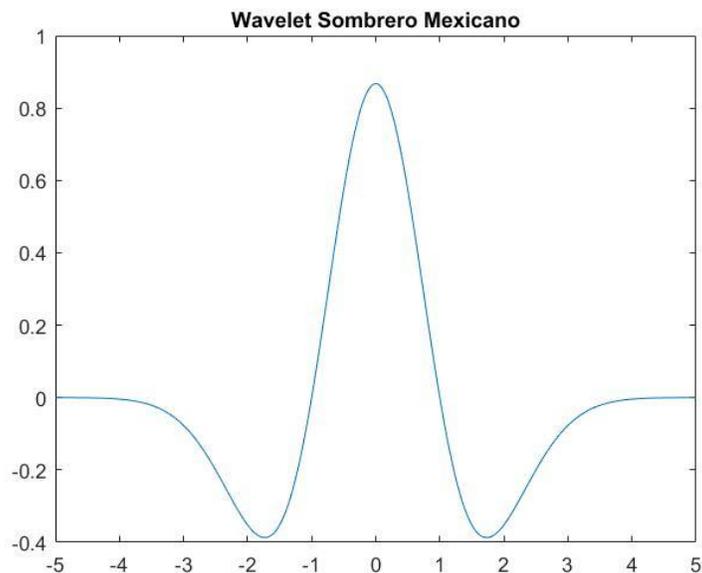


Figura 5.3 Sombrero mexicano también conocido como Ricker wavelet. Esta wavelet se puede generar en Matlab mediante la función $[PSI,X] = mexihat(LB,UB,N)$ donde LB y UB son los límites de la cuadrícula N, entregando la función wavelet en PSI dentro de la cuadrícula X.

5.2 Líneas máximas.

El análisis WTMM no utiliza toda la información obtenida de la WT, sino que emplea un esqueleto obtenido a través de ésta, constituido por las *líneas máximas* de la WT, estas líneas detectan singularidades dentro de la señal y son estas singularidades las que brindarán la información multifractal de la estructura, es por esto que el análisis recibe el nombre de Módulo Máximo.

Si la función $f(u)$ posee una singularidad en un punto u , significa que no será diferenciable en este punto, entonces haremos uso del exponente de Lipschitz para caracterizar el comportamiento de dicha singularidad.

La WT busca las variaciones bruscas que tenga una señal $f(u)$, cuando los cambios son suaves, los valores que tome la WT tendrán valores pequeños, en cambio, cuando la señal presenta cambios abruptos o singularidades, los valores que tomará la WT serán grandes, generando puntos máximos dentro de la WT obtenida.

Dado que la regularidad local de Lipschitz de una señal $f(u)$ en un punto u depende de la caída de los valores de la WT a medida que usamos las escalas s , el siguiente paso es utilizar en lugar de todos los valores de la WT solamente aquellos puntos donde la transformada wavelet presente máximos locales. Es decir, puntos (u_0, s_0) que cumplan:

$$\frac{\partial WT(u_0, s_0)}{\partial u} = 0 \quad (5.5)$$

En el artículo de Pan Du y col. [33] se presenta una metodología práctica para la creación de estas líneas por medio de la identificación y enlace de los máximos locales existentes dentro de una WT de la función que estemos analizando, recordemos que la WT está en función del tiempo y de las escalas, por lo que tendremos que movernos a través de ambas dimensiones en busca de los máximos locales. Comenzando desde la escala superior s de la WT, se localizarán los máximos locales dentro de una ventana corrediza de tamaño proporcional al de la región del soporte de la wavelet en la escala en que se esté trabajando, una vez identificados los máximos locales de la escala s , estos se irán enlazando individualmente al máximo local más próximo de la escala $s - 1$, dejando un umbral de búsqueda entre ellos. Los máximos locales libres de la escala $s - 1$ serán tomados como nuevos puntos iniciales de nuevas líneas máximas. Este procedimiento se repite hasta llegar a la escala inferior. En la figura 5.4 podemos ver los máximos locales de la transformada wavelet mostrada en la figura 5.2, y en la figura 5.5 vemos una superposición de ambas gráficas.

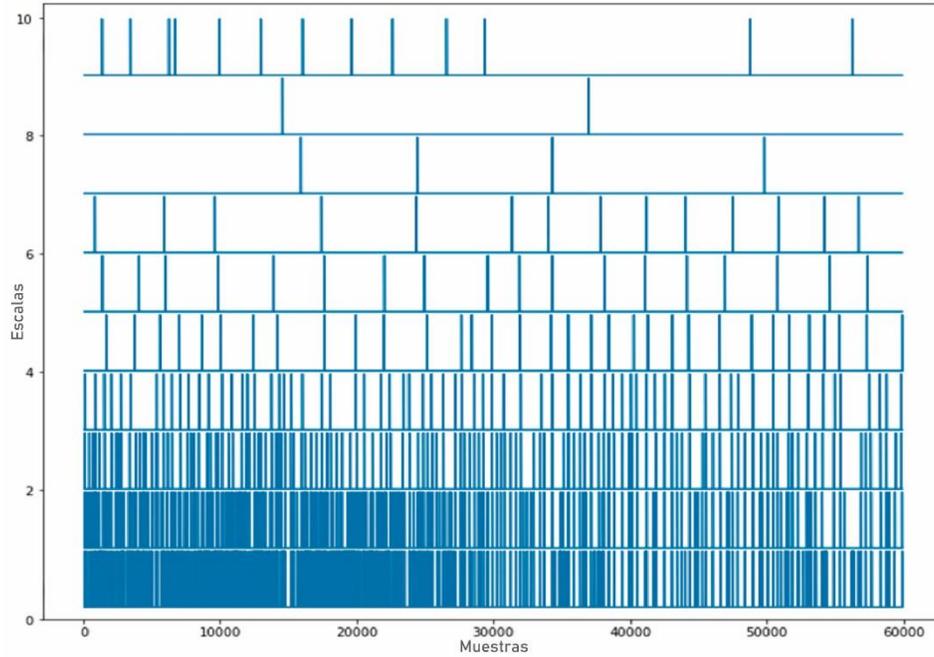


Figura 5.4. Máximos locales de la transformada wavelet de la figura 5.2.

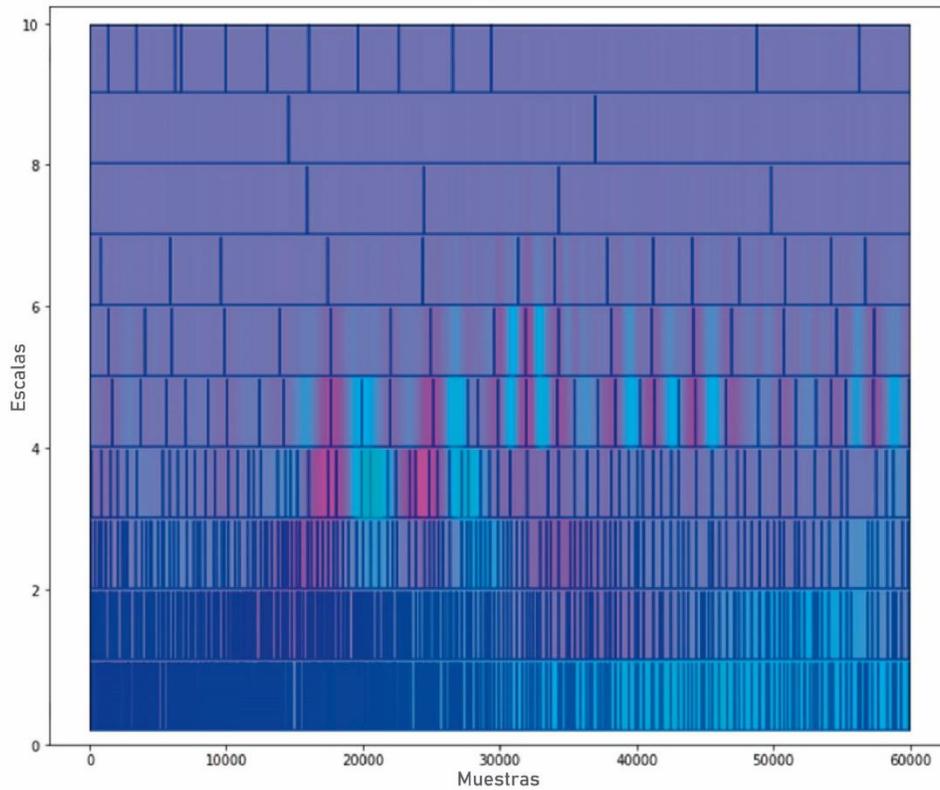


Figura 5.5. Superposición de la WT y sus máximos locales.

5.3 Procedimiento para el análisis WTMM.

En esta sección se explicará el procedimiento a seguir para encontrar la ley de potencia propia del análisis WTMM y la forma de cómo interpretar los resultados para saber si una serie es o no multifractal. Este procedimiento tiene las siguientes etapas:

Primero: Partiendo de una serie temporal x de N elementos, aplicaremos una TW a la información, con una wavelet madre ψ de soporte compacto [30]. De acuerdo con Pawel O. y col. [28] las wavelets madre ψ^n , obtenidas al derivar n -veces la función Gaussiana $e^{-x/2}$ pueden remover tendencias como lo harían polinomios del orden $(n - 1)$ en el análisis MFDFA y gracias a la metodología de Pan Du y col. [33] podemos detectar los máximos locales dentro de la WT que obtengamos. Para la selección de escalas utilizaremos nuevamente el algoritmo descrito en la sección 4.6 propuesto por Jesús A. Sosa y col. [26].

$$WT_{\psi}[f](x_0, s) = \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi\left(\frac{x - x_0}{s}\right) dx \quad (5.6)$$

Segundo: Crear el conjunto de líneas máximas $\mathcal{L}(s)$ de la WT, que servirá de esqueleto para el siguiente paso, además son estas líneas las que detectan la información multifractal de la serie de tiempo. Nuestra ecuación (5.5) quedaría entonces:

$$\mathcal{L}(s) = \left\{ x, \frac{\partial (x \mapsto WT_{\psi}[f](x, s))}{\partial x} = 0 \right\} \quad (5.7)$$

Tercero: Para cada una de las líneas máximas l pertenecientes a $\mathcal{L}(s)$ se hará una sumatoria de sus valores, para obtener la función de partición Z en dominio de las escalas s y los momentos estadísticos q , por medio de la ecuación:

$$Z_q(s) = \sum_{l \in \mathcal{L}(s)} \left(\sup_{\substack{(x, s') \in l \\ s' \leq s}} |WT_{\psi}[f](x, s')| \right)^q \quad (5.8)$$

Cuarto: Encontrar la relación de escalamiento:

$$Z_q(s) \sim s^{\tau_q} \quad (5.9)$$

A diferencia del análisis MFDFA donde encontrábamos la existencia de correlaciones por medio del exponente de Hurst generalizado, ecuación (4.19), en la metodología WTMM se busca el exponente de escalamiento τ_q de la transformada de Legendre, ambos exponentes se relacionan por medio de la ecuación (4.20). Como se puede notar, si se desea encontrar H_q la ecuación se vuelve muy inestable en valores de q cercanos a cero, es común que se trabaje

directamente con τ_q para la diferenciación de series multifractales y monofractales en esta metodología.

Una serie *monofractal* mostrará una gráfica de τ_q contra q de carácter lineal con una pendiente H , esto porque el exponente de Hurst es constante en cualquier momento estadístico manteniendo siempre la misma inclinación, recordemos la gráfica de la figura 4.5. En cambio, una serie *multifractal* tendrá fluctuaciones en su pendiente, siendo más visibles en valores cercanos a $q = 0$, ya que en esta ocasión la pendiente H sí dependerá del momento, creando una línea curvada que indicaría un comportamiento multifractal de la serie y por ende la existencia de correlaciones a largo plazo. Ejemplos de estas curvas se muestran en la 5.6.

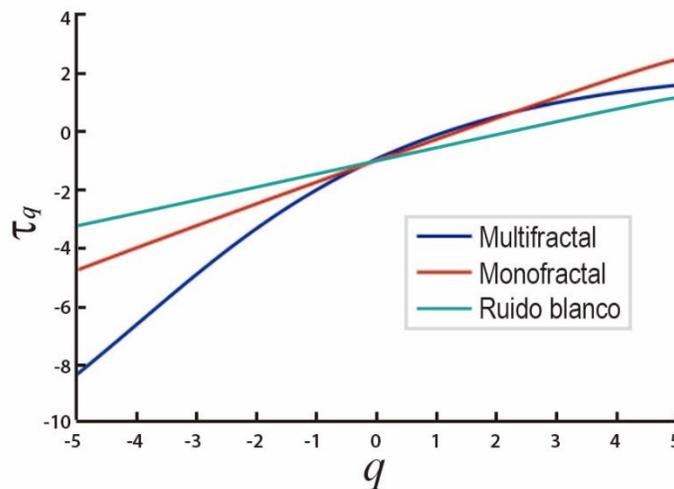


Figura 5.6. Comportamiento gráfico de τ_q ante series monofractales, multifractales y de ruido blanco. Imagen obtenida de [24]

De igual forma que en MFDFA es posible generar un espectro multifractal calculando el exponente de singularidad α y la función de singularidad $f(\alpha)$ mediante las ecuaciones (4.22). De acuerdo a lo establecido en el capítulo 4.7 de este trabajo, un espectro multifractal con una curvatura cóncava obtenido a través del análisis WTMM se tomaría como un resultado *positivo* para este análisis, además esta será la comprobación que aseguraría que nuestros sismogramas poseen correlaciones a largo plazo.

5.4 Resultados Experimentales.

Como se esperaba, el análisis WTMM confirmó que nuestras series de tiempo tienen un comportamiento multifractal, y al igual que en el análisis MFDFA, el análisis WTMM se ve afectado por nuestras ventanas de tiempo. Además, se pudo observar que el análisis MFDFA tiende a ser más sencillo en su procedimiento y es menos propenso a indeterminaciones durante el proceso de análisis, por ejemplo, del análisis de las series del día 7 de septiembre de la estación MCIG con ventana de 3 minutos, los resultados MFDFA de los canales E y Z mostraron arcos bien definidos en su espectro, indicio de multifractalidad, resultados confirmados por WTMM, figuras 5.7 y 5.8, mientras que el canal N mostraba un arco ligeramente deformado además que el

comportamiento del exponente de Hurst generalizado no seguía un decaimiento continuo, figura 4.8, en el caso del WTMM el análisis creó indeterminaciones durante su proceso, tomaremos esto como la confirmación que el canal N realmente no tiene un comportamiento multifractal. Afortunadamente para las ventanas de 10 y 15 minutos los resultados fueron concordantes en ambos análisis, figuras 5.9 – 5.14.

En las figuras 4.17 a la 4.25 se comentaron los resultados de MFDFA de la estación CGIG el día 19 de septiembre, en las figuras 5.15 a 5.23 se muestra la comparación con los resultados del análisis WTMM. Ya que nuestros resultados obtenidos vía MFDFA son respaldados por el WTMM, podemos pasar a la siguiente fase de este estudio, que es el uso de las correlaciones a largo plazo.

5.4.1 Sismo de Tehuantepec, 2017-09-07, 23:49:18 hora local, M 8.2, Estación sismológica MCIG

Gracias al resultado observado en la figura 5.7 podemos confirmar el resultado que consideramos positivo obtenido en el análisis MFDFA visto en la figura 4.7.

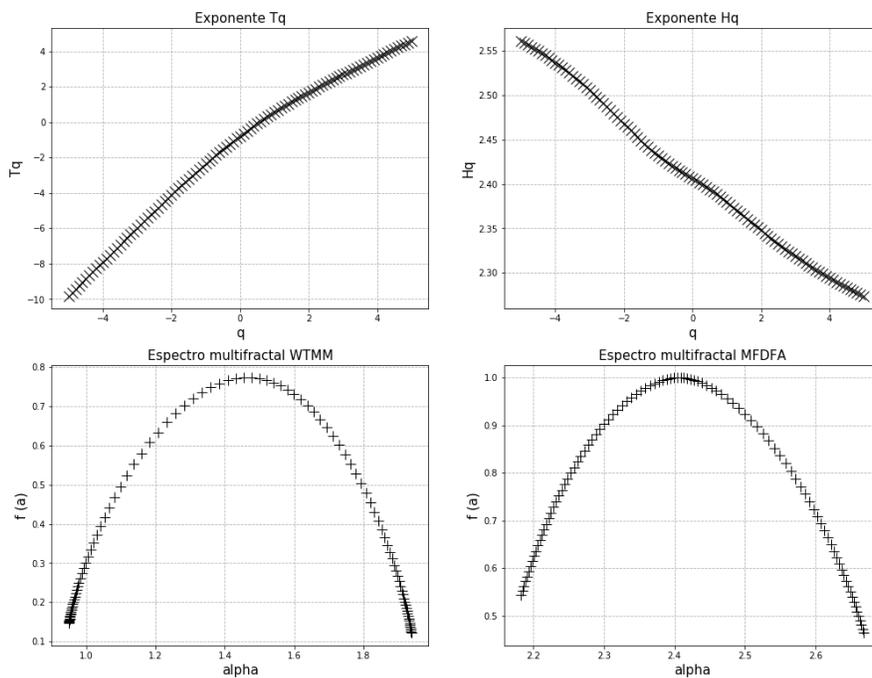


Figura 5.7 Estación MCIG, Canal HHE, Ventana 3 minutos.

En la siguiente figura, aunque los espectros no son iguales parecieran llevar la misma tendencia de alargarse a la derecha, pero conservando una curva definida, podemos confirmar el resultado positivo.

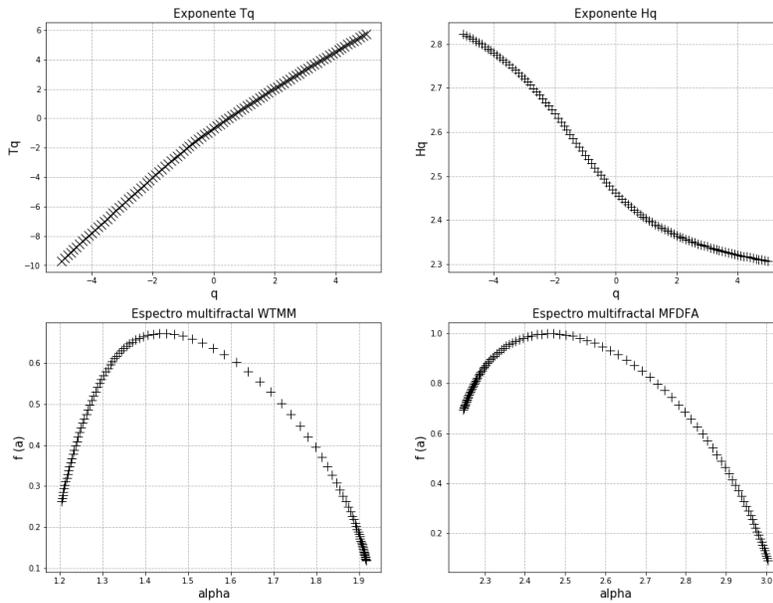


Figura 5.8 Estación MCI, Canal HHZ, Ventana 3 minutos.

En la figura 5.9 el espectro WTMM tiene curvatura cóncava y la gráfica de τ_q muestra el cambio de dirección que se esperaba, indicativos de una serie multifractal. También se puede concluir que la recta del exponente Hq no tiene que ser completamente recta, como se puede ver en la figura 5.14.

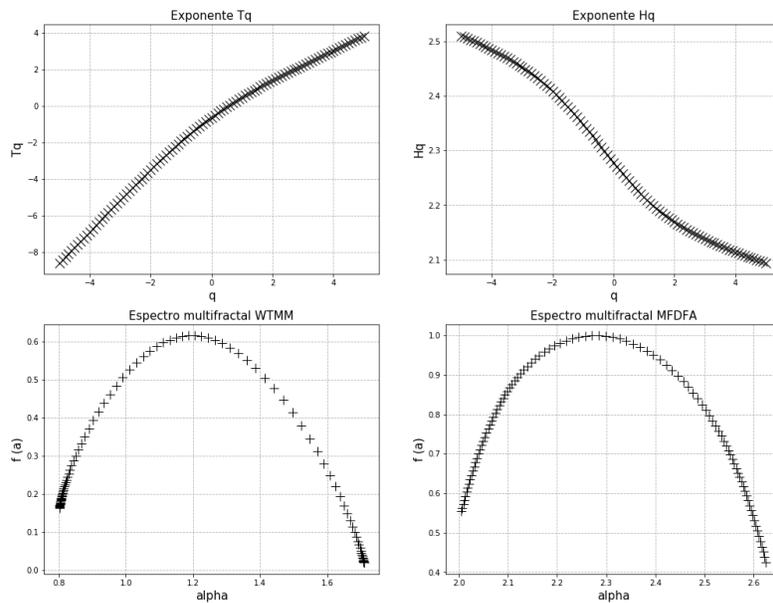


Figura 5.9 Estación MCI, Canal HHE, Ventana 10 minutos.

En la figura 5.10 se confirma el resultado positivo del análisis MFDFA, mientras que en la figura 5.11 las dudas que teníamos de los resultados obtenidos por MFDFA son disipadas por el análisis WTMM, considerando entonces como multifractal a su respectivo sismograma.

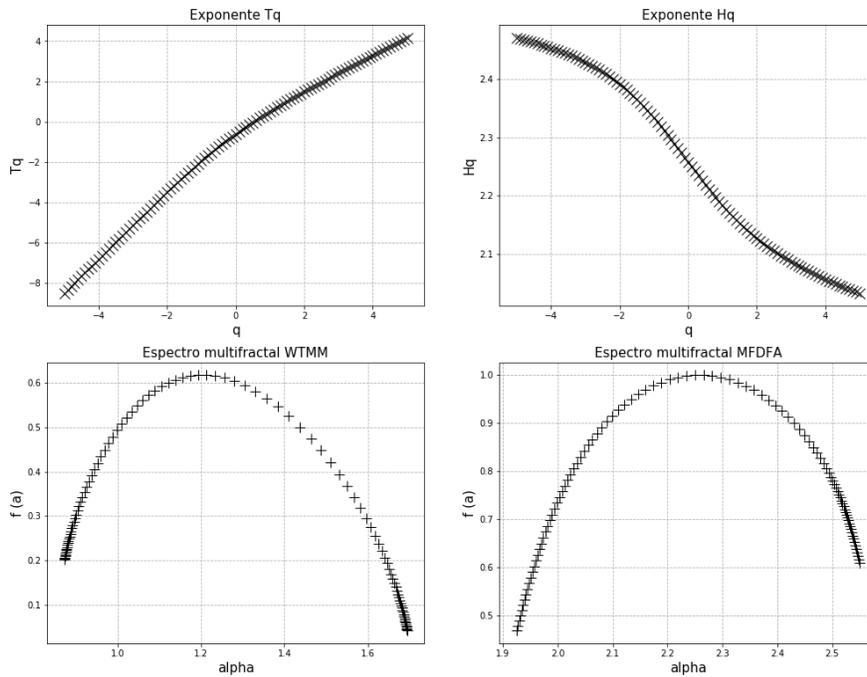


Figura 5.10 Estación MCIG, Canal HHN, Ventana 10 minutos.

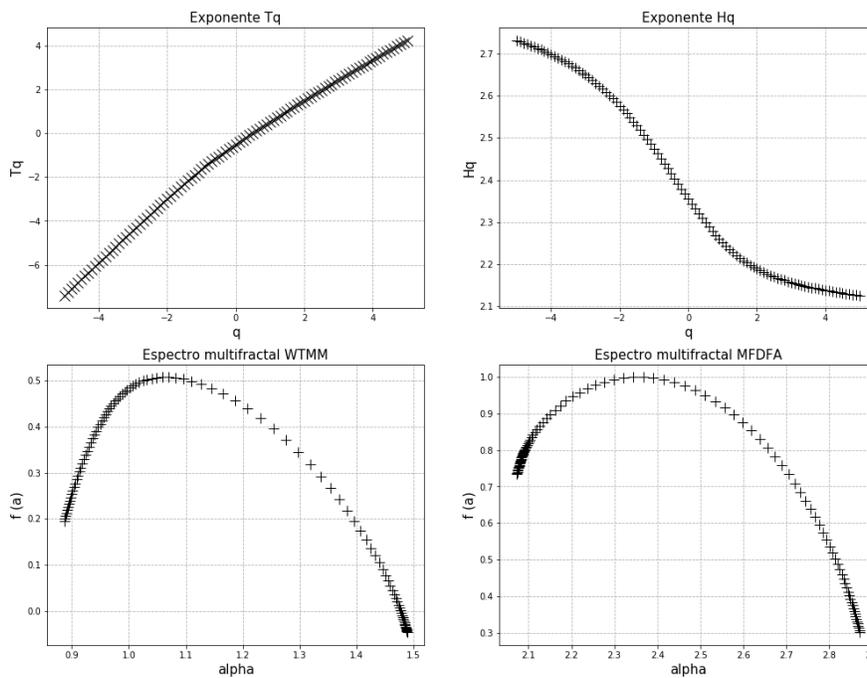


Figura 5.11 Estación MCIG, Canal HHZ, Ventana 10 minutos.

En la figura 5.12 podemos notar que mientras el espectro multifractal creado mediante MFDFA tiene un aspecto más simétrico, el espectro multifractal creado por WTMM es más alargado a la derecha, esto se nota mejor en la figura 5.14.

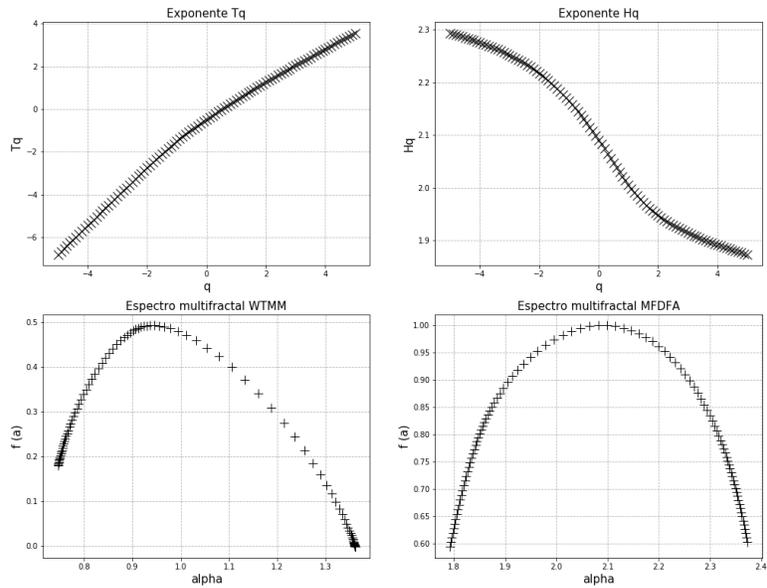


Figura 5.12 Estación MCI, Canal HHE, Ventana 15 minutos.

El resultado de la figura 5.13 no es completamente claro, ya que mientras los resultados obtenidos por WTMM (izquierda) indican un resultado positivo, las deformaciones observables en los resultados del análisis MFDFA (derecha) nos haría pensar en un resultado negativo, además que el espectro de MFDFA esta alargado a la izquierda mientras el espectro de WTMM esta alargado a la derecha.

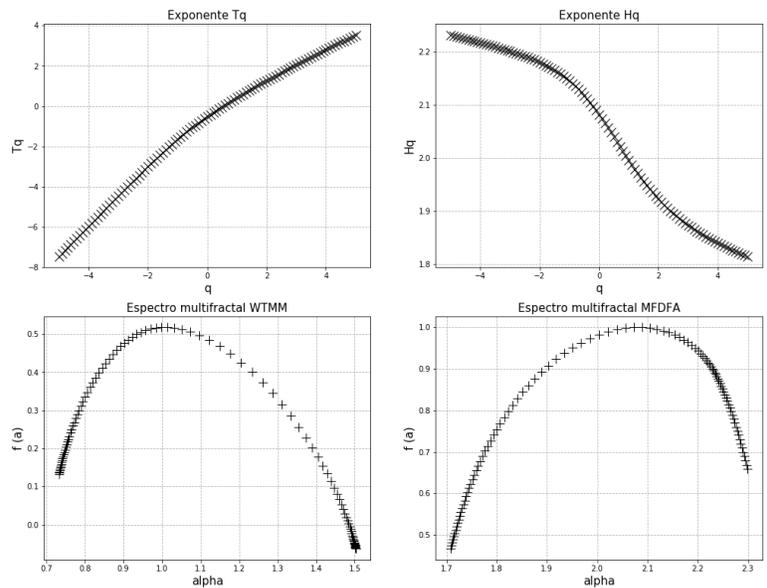


Figura 5.13 Estación MCI, Canal HHN, Ventana 15 minutos.

La figura 5.14 sería la confirmación de un resultado negativo, las deformaciones son muy marcadas en ambos espectros.

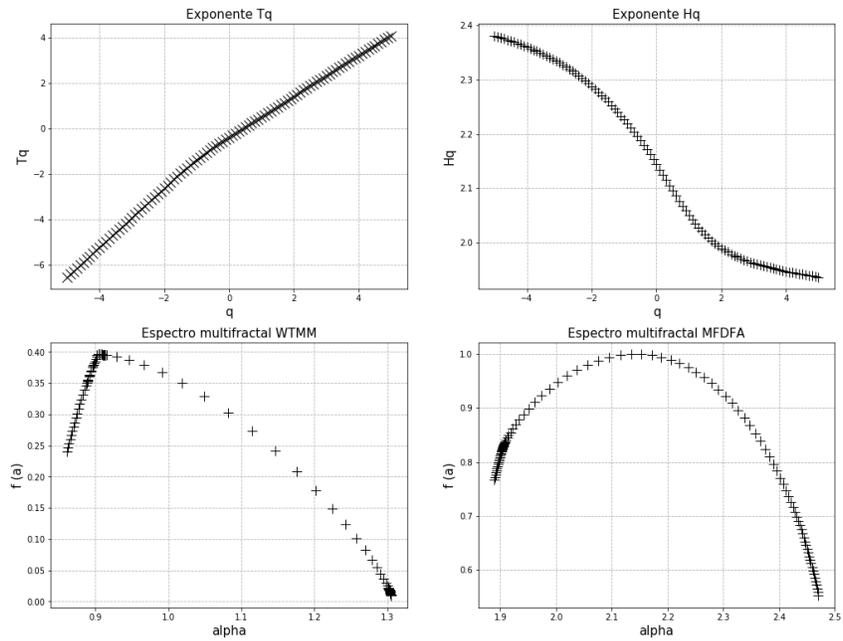


Figura 5.14 Estación MCIg, Canal HHZ, Ventana 15 minutos.

5.4.2 Sismo de Puebla-Morelos, 2017-09-19, 13:14:40 hora local, M 7.1, Estación sismológica CGIG

Nuevamente la figura 5.15 muestra la confirmación de un resultado positivo para ambos análisis.

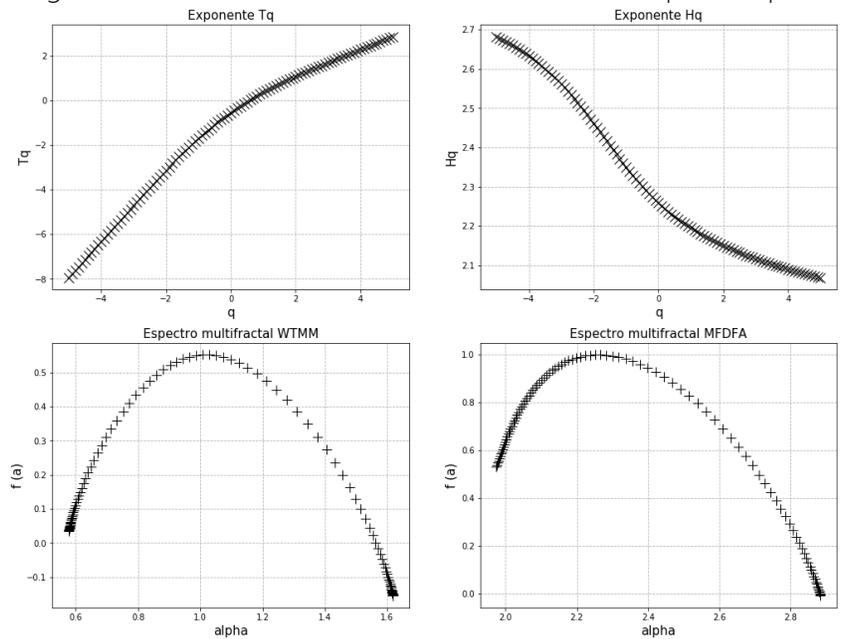


Figura 5.15 Estación CGIG, Canal HHE, Ventana 3 minutos.

Las figuras 5.16 y 5.17 son confirmaciones de resultados positivos. Aunque cabe mencionar que lo mostrado en la figura 5.17 sería un ejemplo de un resultado positivo ideal, las 4 gráficas tienen sus formas bien definidas y ambos espectros están alargados a la derecha.

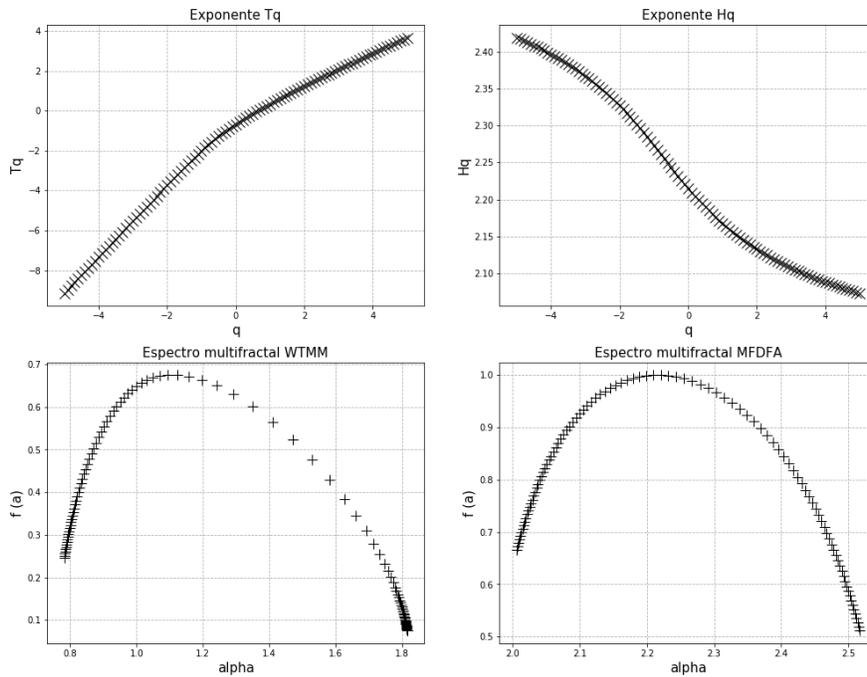


Figura 5.16 Estación CGIG, Canal HHN, Ventana 3 minutos.

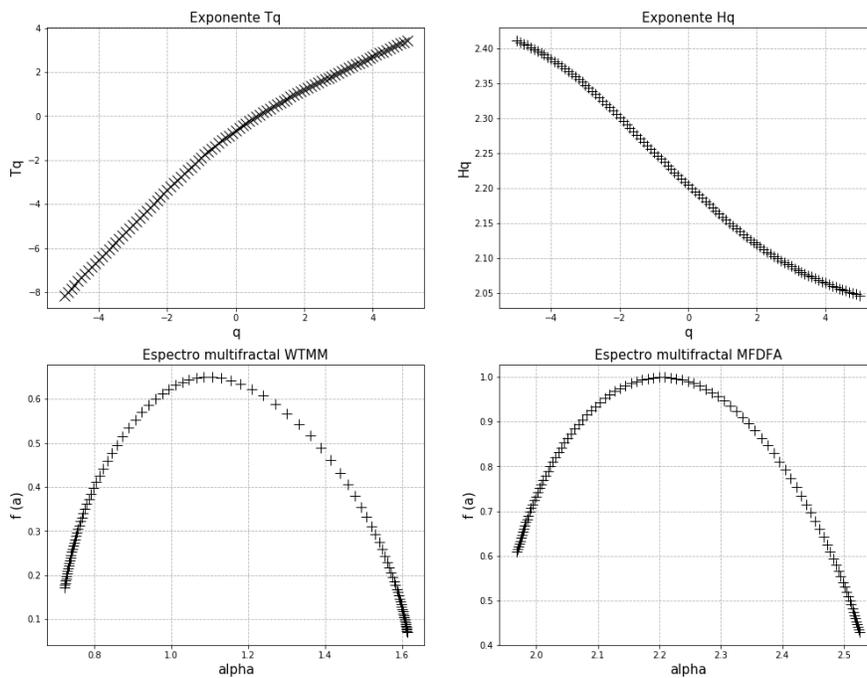


Figura 5.17 Estación CGIG, Canal HHZ, Ventana 3 minutos

Las figuras 5.18 y 5.19 también se consideran como positivos, y conservan el comportamiento de las figuras 5.15 y 5.16 respectivamente.

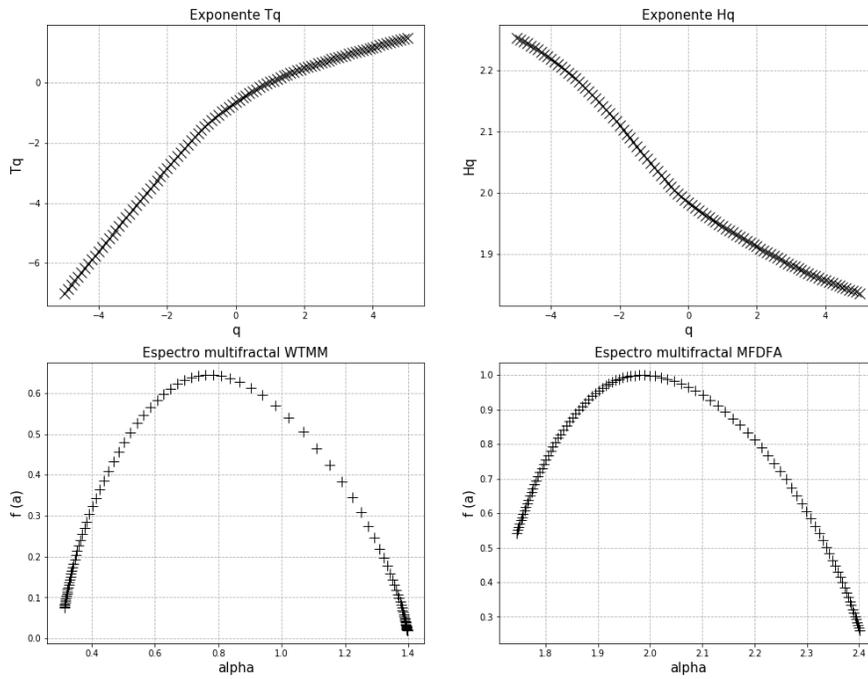


Figura 5.18 Estación CGIG, Canal HHE, Ventana 10 minutos.

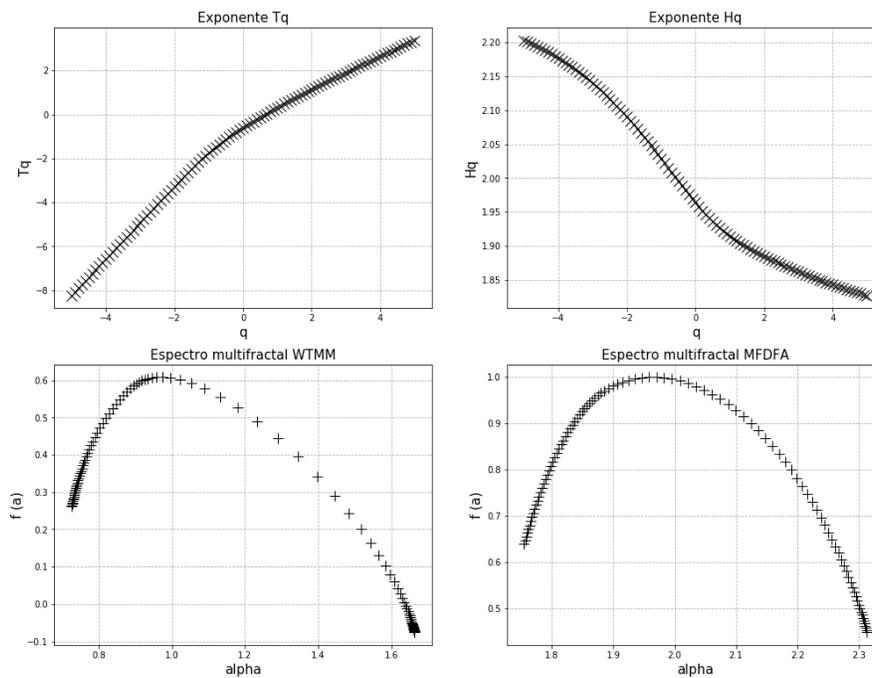


Figura 5.19 Estación CGIG, Canal HHN, Ventana 10 minutos.

Las deformaciones en el espectro son visualmente más claras en el análisis WTMM de la figura 5.20, esto al ver cómo su espectro deja de ser una curva continua.

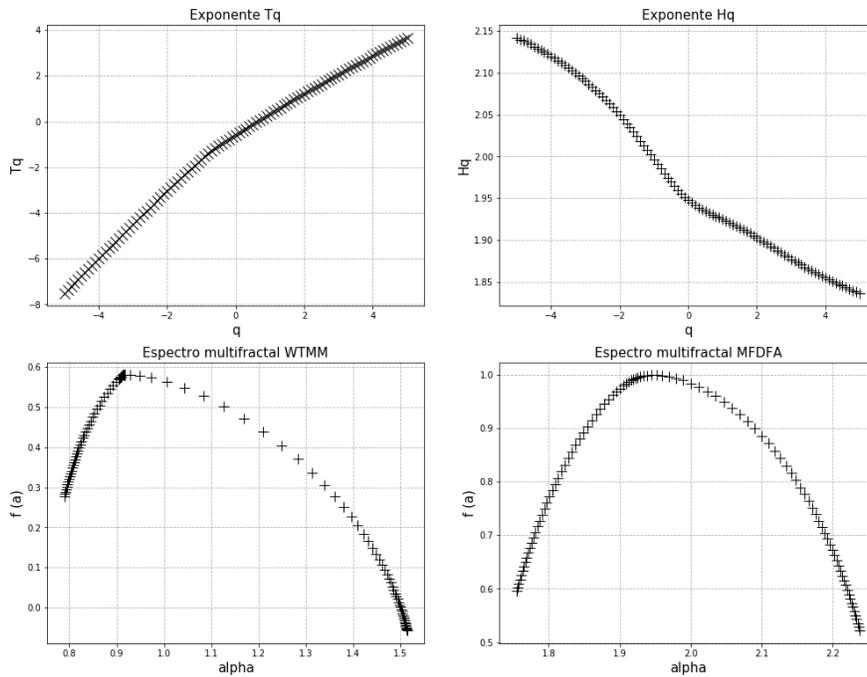


Figura 5.20 Estación CGIG, Canal HHZ, Ventana 10 minutos

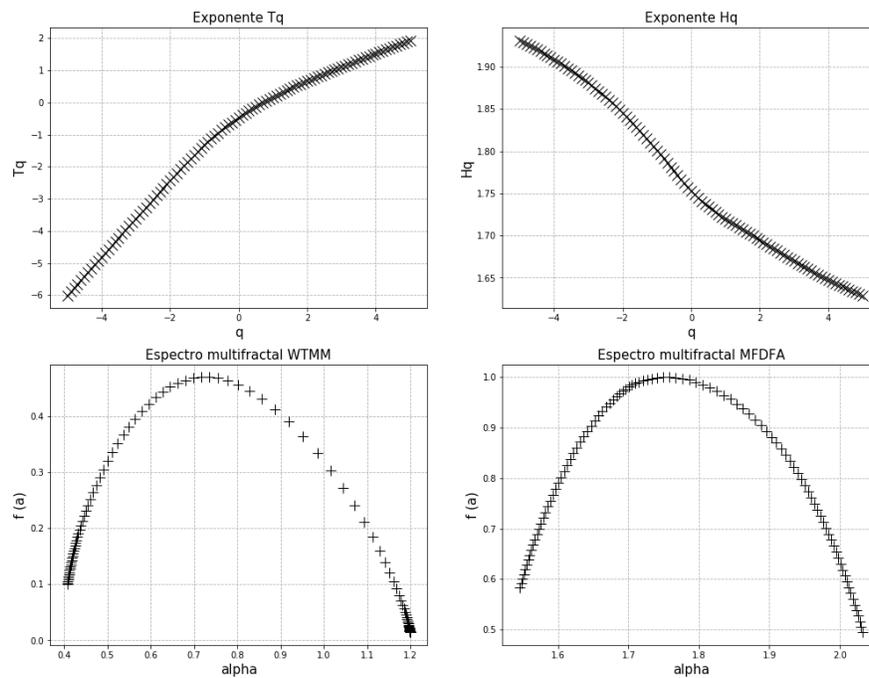


Figura 5.21 Estación CGIG, Canal HHE, Ventana 15 minutos. Confirmación de un resultado positivo

Parecido a lo visto en la figura 5.20, en la figura 5.22 el espectro de WTMM dejó de ser una curva continua, además el espectro de MFDFA pareciera concentrarse en un punto, tomaremos este resultado como negativo. Del mismo modo, la figura 5.23 muestra la confirmación de un resultado negativo en ambos análisis.

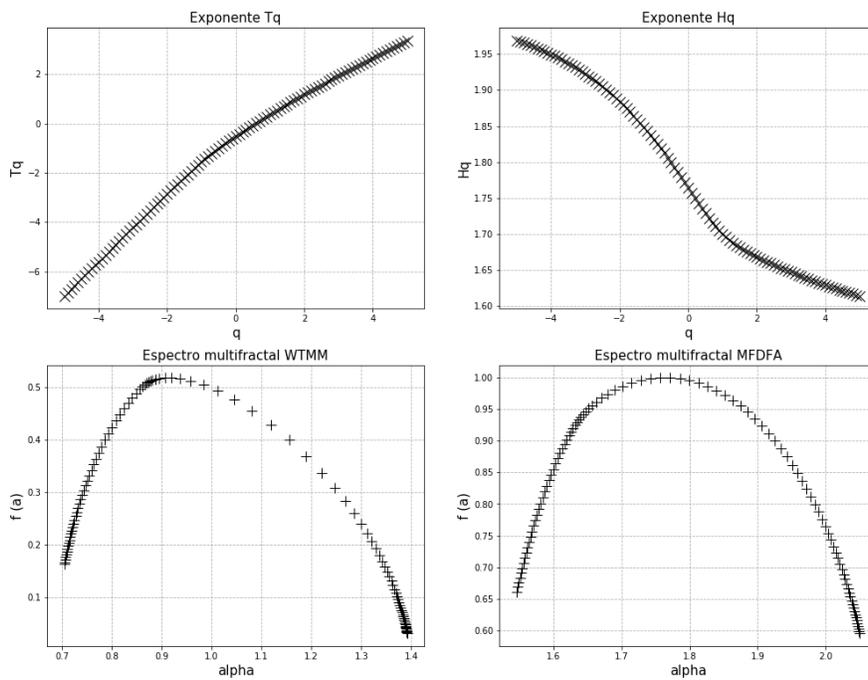


Figura 5.22 Estación CGIG, Canal HHN, Ventana 15 minutos.

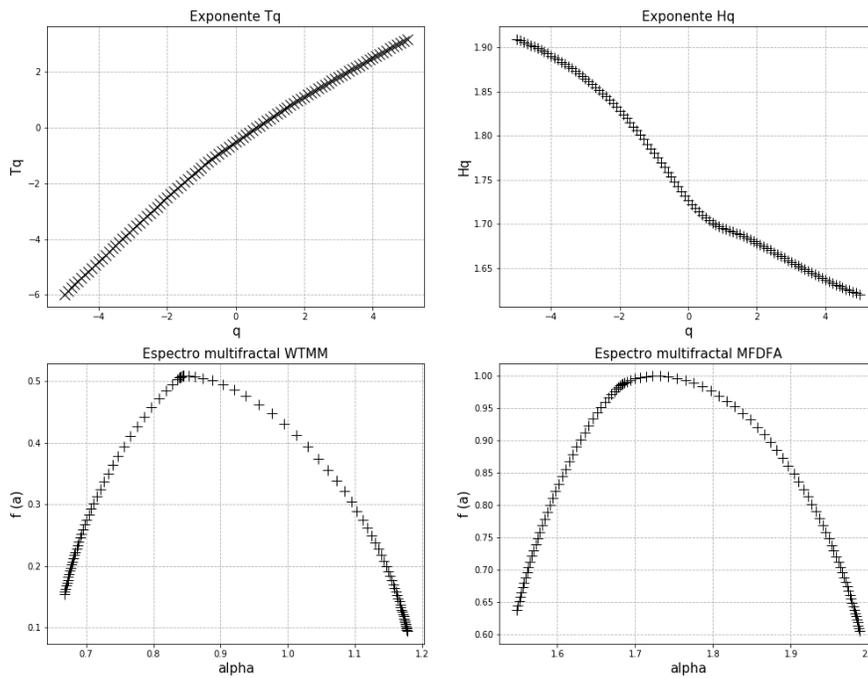


Figura 5.23 Estación CGIG, Canal HHZ, Ventana 15 minutos.

5.5 Discusión del capítulo.

En este capítulo se ha descrito la metodología del análisis WTMM en afán de tener un estudio en paralelo que valide los resultados obtenidos mediante el análisis MFDFA estudiada en el capítulo anterior. Ambas metodologías abordan el mismo problema por medio de enfoques diferentes y muestran el comportamiento fractal de las series numéricas mediante exponentes de escalamiento igualmente distintos pero equivalentes, el exponente de Hurst para el análisis MFDFA donde buscamos una gráfica con una línea monótonamente decreciente y el exponente de Legendre para el análisis WTMM en cuya gráfica buscamos una línea con curvatura en momentos estadísticos q cercanos a 0, aun así en ambos análisis es posible llegar a la gráfica del espectro multifractal, principal indicador de la presencia de multifractalidad dentro de las series temporales.

Satisfactoriamente los resultados experimentales obtenidos del análisis WTMM aplicado, comprueban la presencia de un comportamiento multifractal en los sismogramas estudiados, asegurando así un comportamiento de memoria a largo plazo dentro de ellos. Concluimos esto ya que el espectro multifractal cumple con las características descritas en el capítulo 4.

En la mayoría de los casos ambos espectros obtenidos ya sea por MFDFA o WTMM presentan una forma similar, ya sea alargados al mismo costado dependiendo del tipo de fluctuaciones al que sean más susceptibles. Ejemplos claros de estos espectros pueden verse en las figuras 5.11 y 5.16, o bien con espectros simétricos mostrando una heterogeneidad en las componentes de la serie de tiempo, un ejemplo sería la figura 5.7, e incluso llegan a mostrar deformaciones parecidas conforme se cambian las ventanas de tiempo, figuras 5.14 y 5.23. Como ya se comentó estas deformaciones parecen eliminarse con la implementación de una ventana de tiempo adecuada al sismograma en estudio, posiblemente porque la información no propia del terremoto atenúa el análisis las correlaciones existentes haciéndolas imperceptibles. Este comportamiento podría utilizarse para una mejor delimitación de los sismos en estudios futuros.

A pesar de lo ya comentado, también encontramos espectros con inclinación opuesta, como los que se pueden ver en las figuras 5.10 y 5.13, en este caso pareciera que cada uno de los análisis es más susceptible a un tipo diferente de fluctuación local, en un intento de explicar este comportamiento se podría experimentar con otros tipos de ondeletas buscando la más conveniente para implementar en los sismogramas. Aunque no queda claro a que se debe esta diferencia en los espectros podemos seguir tomando este resultado como positivo ya que cumple con los parámetros ya mencionados.

Capítulo 6. Redes neuronales.

Los análisis MF DFA y WTMM hasta ahora realizados, arrojaron que algunos de los sismogramas presentan comportamiento multifractal, esto como ya se comentó en el capítulo 4, nos estaría indicando que dichos sismogramas contienen correlaciones dentro de ellos o dicho de otra forma su comportamiento se ve afectado por efectos de memoria a largo plazo a diferentes escalas, y no solo por eventos aleatorios. El siguiente paso en este estudio es intentar la predicción del comportamiento de alguno de los sismogramas multifractales mediante un modelo computacional, el cual será alimentado con parte de la información del sismograma para que este pueda aprender de las correlaciones internas existentes y con ellas pueda calcular una fracción de los datos del mismo.

En el libro de Pardo Merino y col. [34] se nos indica que para que un modelo de regresión lineal sea considerado válido debe cumplir con la condición de la *linealidad*, entendiendo este concepto como la relación lineal entre la variable dependiente y la variable independiente. Pero ¿son los sismos lineales o no lineales? Desde el punto de vista de la geometría fractal un sistema que pueda ser descrito por una única dimensión fractal en todas sus escalas es considerado como un sistema *monofractal*, pero un sistema donde se requiera más de una dimensión fractal para poder describirlo a través de sus escalas es considerado como un sistema *multifractal*, siendo estos sistemas los que se encuentran normalmente en la naturaleza [35]. Recordemos que los sistemas multifractales son estudiados a través del espectro multifractal obtenido de $f(\alpha)$ vs α , el cual no sigue un comportamiento lineal. Tanto los resultados obtenidos en los capítulos 4 y 5 del presente trabajo, como los resultados obtenidos de diferentes experimentos a lo largo de la Tierra [7, 8, 9, 10, 11] muestran que la sismicidad sigue comportamientos multifractales, lo que nos lleva a concluir que un modelo de regresión lineal no es lo más conveniente a ser utilizado en este tipo de series de tiempo; los sismogramas.

A pesar de lo ya descrito sigue siendo posible aplicar la metodología de regresión lineal a un sistema no-lineal, pero debemos preguntarnos si esto es conveniente para el estudio presente. En el artículo de Pombeiro y col. [36] se hace una comparativa entre una regresión lineal y una red neuronal al analizar un modelo de consumo de energía eléctrica de comportamiento no-lineal comprendido por 3,381 mediciones, esto con el afán de lograr predecir el comportamiento de este modelo, al final los autores concluyen que la red neuronal tiene un mayor desempeño que la regresión lineal para modelos no-lineales, tomando como parámetros de comparación el error absoluto medio y el error cuadrático medio.

Se vuelve obvio que un modelo de regresión lineal clásico no podrá con la tarea de crear un modelo que prediga el comportamiento tan complejo de un sismo, es aquí donde entran las redes neuronales, con su capacidad de aprender en base a entrenamientos con datos reales debería ser posible crear una red que prediga al menos parcialmente el comportamiento del sismo.

Entonces después de utilizar las metodologías multifractales para discriminar las series temporales sísmicas que poseen correlaciones en sus datos de las que no las poseen, utilizaremos

las primeras para el entrenamiento de una red neuronal recurrente (RNR) ya que estas redes, gracias a su arquitectura, pueden hacer uso tanto de la información de entrada como de los resultados que ha obtenido anteriormente a lo largo del análisis que esté realizando, dándoles un efecto de memoria, la cual se puede usar para la predicción de datos en series temporales.

6.1 Neuronas.

Las Redes Neuronales (RN) son modelos computacionales basados en la biología del sistema nervioso, su principal ventaja está en que pueden aprender a realizar su tarea por medio de la experiencia obtenida con entrenamiento. Así como en el modelo biológico, la base de estas redes es la *neurona* o *perceptrón*, figura 6.1, esta es una unidad básica de procesamiento de información que consta de los siguientes elementos:

- a) Señales de entrada, y_m . Es la información que recibirá la neurona, bien pueden ser los datos con los que se estén trabajando, así como información recibida por neuronas de capas anteriores.
- b) Bias o polarización, b_k . Es una señal de entrada externa, cada neurona recibe una señal de Bias, la cual siempre mantiene valores de 1 o -1, dependiendo si se desea incrementar o disminuir a la función de activación.
- c) Pesos o sinapsis, w_{kj} . En el modelo biológico las conexiones entre neuronas reciben el nombre de sinapsis, durante el aprendizaje, estas sinapsis se engrosan o adelgazan para mejorar o bloquear la comunicación entre las neuronas, este comportamiento es emulado mediante números dispuestos al azar entre la neurona del modelo computacional y las señales de entrada. Es mediante el entrenamiento de las redes, que estos números se irán actualizando para que la red cumpla con la función por la que fue creada. En cuanto a nomenclatura w_{kj} nos indica que el peso w conecta a la señal de entrada y_j con la neurona k . La señal de polarización b_k cuenta con su propia sinapsis w_{b_k} , y debido a que b_k es una señal unitaria, el valor que tomará esta señal dentro de la neurona depende completamente de su peso, por lo que suele tomarse a b_k igual a w_{b_k} .
- d) Sumador, Z . Se requiere de una operación sumatoria que combine las señales de entrada con sus respectivos pesos, este valor está definido por:

$$Z_k = \sum_{j=1}^m w_{kj} y_j + b_k \quad (6.1)$$

- e) Función de Activación, f_k . Es la encargada de dar el nuevo valor de salida y_k , en base a la información dispuesta por el sumador. El valor de la señal de salida está delimitado por la función de activación, también se les suele llamar *funciones de aplastamiento*. Las neuronas únicamente poseen una señal de salida y_k , aunque esta suele estar conectada a todas las

neuronas de capas superiores. Existen varias funciones de activación, en este trabajo solo se utilizaron 2, las cuales se describen a continuación:

- Función de activación sigmoidea: Es una de las funciones de activación que comúnmente se encuentran en redes neuronales. Posee una forma de "S" acotada entre los valores de 0 y 1 para valores cercanos a $-\infty$ y ∞ respectivamente. Su valor de salida está dado por la expresión:

$$y_k = f_k(Z_k) = \sigma_k(Z_k) = \frac{1}{e^{-Z_k} + 1} \quad (6.2)$$

- Función de activación tangente hiperbólica: Posee la misma apariencia de "S" que la sigmoidea pero sus valores se encuentran acotados de -1 a 1. Las gráficas de ambas funciones de activación pueden verse en la figura 6.2.

$$y_k = f_k(Z_k) = \tanh_k(Z_k) = \frac{e^{Z_k} - e^{-Z_k}}{e^{Z_k} + e^{-Z_k}} \quad (6.3)$$

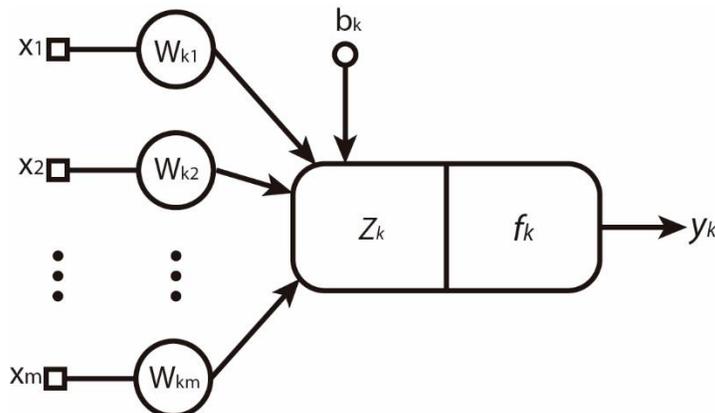


Figura 6.1. Modelo de una neurona k . Imagen basada en [37].

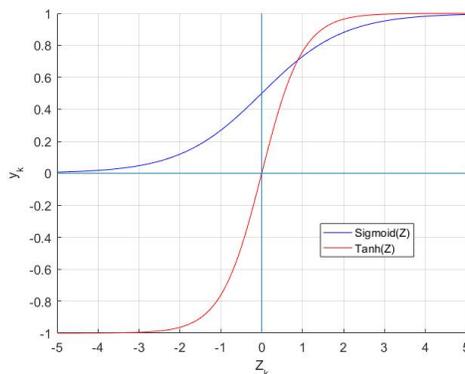


Figura 6.2. Señales de salida y_k de las funciones de activación sigmoidea y \tanh .

Una de las arquitecturas más simples en RN es la Red Multicapa de Perceptrones (MLP, multilayer perceptron). Como su nombre lo indica, la MLP está constituida por una capa de

neuronas de entrada, una capa de neuronas de salida y al menos una capa oculta de neuronas. Entre dos capas contiguas, las salidas de las neuronas de la primera capa se encuentran conectadas a todas las entradas de las neuronas de la siguiente capa, cada una de estas conexiones cuenta con su respectiva sinapsis.

Las neuronas de las capas de entrada son únicamente distribuidoras, encargadas de pasar las señales de entrada a la siguiente capa oculta, por lo que estas no poseen pesos en sus entradas ni señales de polarización. Las neuronas en las capas ocultas, así como en la capa de salida funcionan de acuerdo a las ecuaciones (6.2) o (6.3). La cantidad de neuronas en las capas de salida depende de las variables que se desean calcular, se establece una neurona de salida por cada una de las variables de salida.

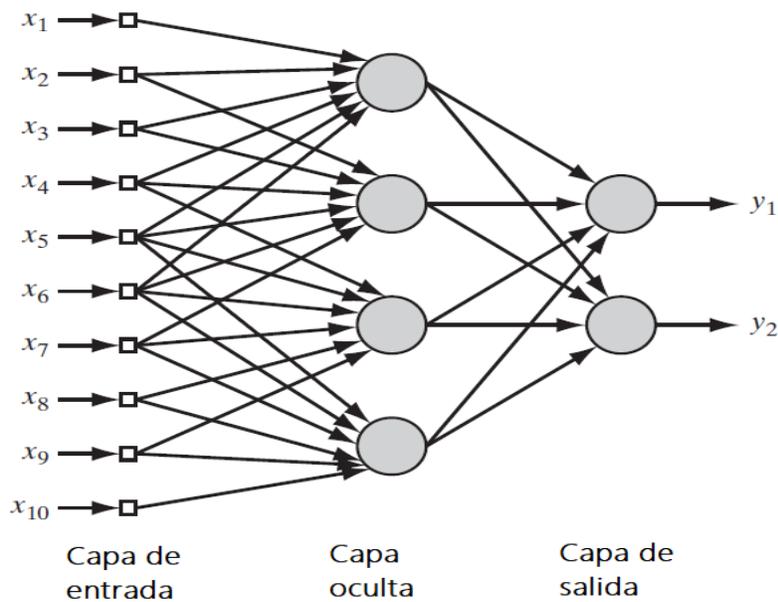


Figura 6.3. Ejemplo de una MLP de tres capas, imagen obtenida de [37].

6.2 Entrenamiento de una red neuronal.

Antes de comenzar el entrenamiento de una red, debemos hacer una separación en los datos que tenemos disponibles para trabajar, de las cuales conocemos su comportamiento, en nuestro caso serán las mediciones de los diferentes sismogramas que resultaron positivos en detectar multifractalidad. Esta información se separa en dos partes: el *conjunto de entrenamiento* y el *conjunto de validación*, los cuales suelen ser tablas de n señales de entrada x_n contra m señales de salida y_m , de las que conocemos sus valores. La mayor cantidad de la información se suele utilizar en el *conjunto de entrenamiento*, ya que este es el empleado para entrenar la red. El *conjunto de validación* se compone de información que no será vista por la red, sino hasta después de finalizado el entrenamiento, este conjunto se utiliza para comprobar qué tan precisa es nuestra red al realizar predicciones en series de tiempo, en base a lo que aprendió durante su entrenamiento.

La fase de entrenamiento de la red neuronal se compone de los siguientes pasos:

- I. Los valores de todas las sinapsis \mathbf{w} , así como los pesos de las polarizaciones \mathbf{b} se inicializan con números al azar. Aunque si se disponen pesos de entrenamientos pasados es posible utilizarlos.
- II. *Propagación hacia adelante* (o FP por sus siglas en inglés). Se toma al azar y sin repetir, uno de los renglones de la tabla del *conjunto de entrenamiento* y se evalúan las salidas de la RN con los valores de entrada seleccionados.
- III. *Cálculo del error*. Al tener pesos seleccionados al azar es normal que los valores iniciales de las salidas de la RN disten mucho de los valores esperados y es necesario saber qué tan alejado está nuestro modelo de la realidad. Ya que nuestra red se basa en el modelo propuesto por Félix A. Gers y col. [38] y del cual hablaremos en el capítulo 6.4, usaremos el error medio cuadrático, para un conjunto de salidas i :

$$E = \frac{1}{2} \sum_i e_i^2; \quad e_i = y_i - t_i \quad (6.4)$$

Donde E es el error calculado, t_i es el valor del conjunto de entrenamiento y y_i es el valor obtenido de la red.

- IV. *Propagación hacia atrás* (o BP por sus siglas en inglés). En esta etapa se actualizan todos los pesos de la RN con el propósito de minimizar la función de error (6.4). Este tema se tratará más a detalle en el siguiente apartado.

Los pasos 2, 3 y 4 se repiten hasta abarcar en su totalidad la información del conjunto de entrenamiento, esto se conoce como una *época*. El entrenamiento usualmente consiste en miles de épocas, esto hasta que el error sea suficientemente bajo.

6.3 Propagación hacia atrás (BP).

Primero se debe hacer una analogía con la propagación hacia adelante, en esta partíamos de valores de entrada, los cuales recorrían las conexiones entre las neuronas para obtener los valores de salida de la capa oculta, estos valores de igual forma recorrían las demás interconexiones repitiendo el proceso en todas las capas hasta obtener los valores de la capa de salida. En la propagación hacia atrás partimos del error obtenido en (6.4) y recorriendo el camino inverso usamos este error para poder actualizar el valor de todos los pesos \mathbf{w} comenzando con los pesos de la capa de salida.

Según Haykin [37] la forma de actualizar los pesos es mediante la expresión:

$$\mathbf{w}(t + 1) = \mathbf{w}(t) - \eta g(t) \quad (6.5)$$

Donde $\mathbf{w}(t + 1)$ es el valor actualizado del peso, $\mathbf{w}(t)$ es el valor actual del peso, η es una constante llamada *factor de aprendizaje* y $\mathbf{g}(t)$ es un vector de gradiente. Al tomar la dirección negativa del gradiente (descenso por el gradiente) se intenta hacer converger a los valores \mathbf{w} , a valores donde el error e disminuya en cada uno de los ciclos de la propagación hacia atrás.

El factor de aprendizaje η afecta la convergencia del descenso por el gradiente, si es demasiado pequeño la función se ve sobrecargada y la convergencia es extremadamente lenta o nula. Por el contrario, si el factor de aprendizaje es muy grande, la trayectoria que seguirá el descenso por el gradiente puede comenzar a oscilar cerca de valores óptimos de minimización, pero nunca llegar a ellos.

Según la ecuación (6.5) la declaración para la corrección del error sería:

$$\Delta \mathbf{w}(t) = \mathbf{w}(t + 1) - \mathbf{w}(t) = -\eta \mathbf{g}(t) \quad (6.6)$$

Para un peso w_{ji} de la capa l , la corrección del peso $\Delta w_{ji}(t)$ está definida por la *regla Delta*:

$$\Delta w_{ji}^l(t) = \eta \delta_j^l(t) y_i^{(l-1)}(t) \quad (6.7)$$

Las neuronas de las capa de salida L recibirán el error calculado en (6.4) durante la propagación hacia atrás, por lo que su gradiente local $\delta_k(t)$ está definido por:

$$\delta_k^L(t) = e_k^L(t) f_k'(Z_k^L(t)) \quad \text{Neurona } k, \text{ capa de salida } L \quad (6.8)$$

Las neuronas en las capas ocultas recibirán el error acarreado por medio de los gradientes locales de las k neuronas de la capa superior a ellas, por lo que:

$$\delta_j^l(t) = f_j'(Z_j^l(t)) \sum_k \delta_k^{(l+1)}(t) w_{kj}^{(l+1)}(t) \quad \text{Neurona } j, \text{ capa oculta } l \quad (6.9)$$

Donde $f_j'(Z_j^l(t))$ es la derivada de la función de activación de la neurona. Entonces en base a la regla delta, la ecuación (6.5) para la actualización de los pesos sinápticos de cualquier capa l , donde $l \leq L$, quedaría de la siguiente forma:

$$w_{ji}^l(t + 1) = w_{ji}^l(t) + \eta \delta_j^l(t) y_i^{(l-1)}(t) \quad (6.10)$$

6.4 Redes Neuronales Recurrentes (RNR).

Como ya se mencionó, la principal característica de una RNR es la de poseer memoria, esto les permite a estas redes el poder reconocer patrones establecidos por los datos de entrenamiento dentro de series temporales y, por tanto, poder predecir el comportamiento de estas, esto las vuelve el perfecto candidato para analizar las series temporales sísmicas que hemos señalado como multifractales. Serán las RNR quienes buscarán y aprenderán los patrones escondidos en las series multifractales y al final predecirán parte de su comportamiento esperando que sean las series de carácter multifractal las que muestren una mejor predicción en estas redes.

El funcionamiento del MLP es simple, ingresamos información – obtenemos información, todo en base a los pesos sinápticos de la red, pero ¿qué sucede si creamos un ciclo de realimentación entre las capas ocultas de la red? Esto crea un efecto de memoria en la red, algo parecido a la memoria que se crea en circuitos biestables a través de la realimentación, pero la red aún conserva su ventaja de aprendizaje por medio del entrenamiento.

Una Red Neuronal Recurrente (RNR o RNN por sus siglas en inglés) básica es precisamente una MLP con retroalimentación, esto implica:

- Los datos realimentados también estarán completamente interconectados a las neuronas de la primera capa oculta, por lo que poseerán sus propios pesos sinápticos.
- Los valores iniciales de la realimentación en $t = 0$ serán cero.
- La red ya no se considera del todo una red, ahora se le conoce como *bloque de memoria*.
- La realimentación le permite a la información conservarse entre un paso t a un paso $t + 1$, creando el efecto de memoria. Esto dota a la red de la capacidad de darle mayor o menor importancia a la información que recibe en t , en base a la información que recibió en pasos anteriores.
- Estas redes son ideales para el análisis de series temporales, como análisis lingüístico, estudios de mercado y en el caso de esta tesis, series temporales de datos sísmicos.

Un ejemplo de esta arquitectura es la red Elman [39] diseñada para el análisis lingüístico, figura 6.4, a pesar de que esta arquitectura no se usará en este trabajo, es una buena forma de visualizar una RNR básica para entender su funcionamiento.

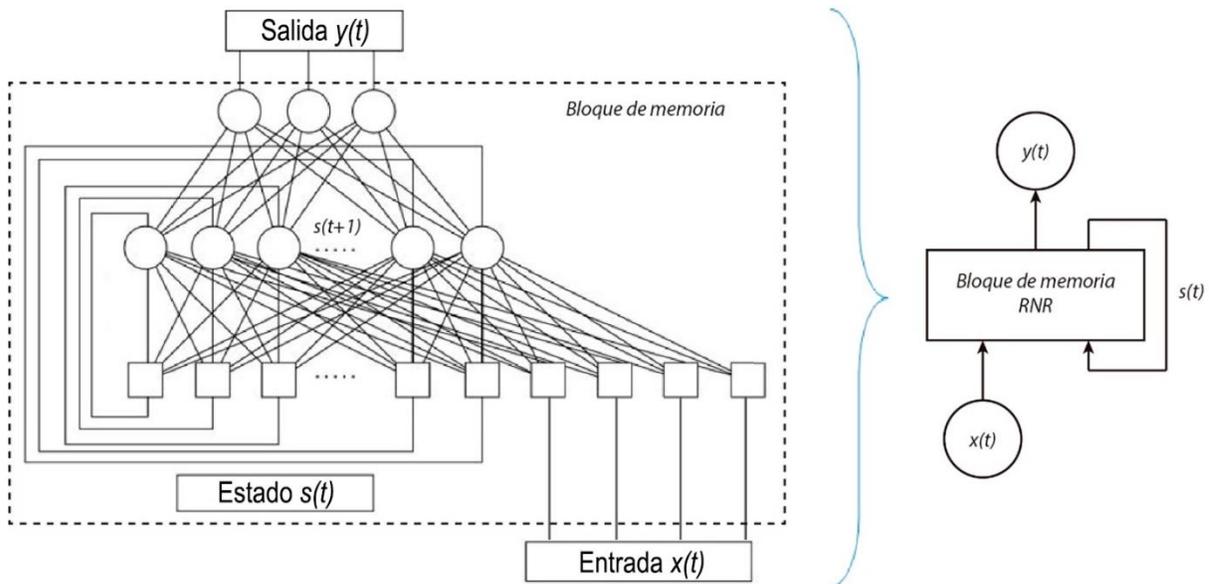


Figura 6.4. RNR Elman de una capa oculta (izquierda), obtenida de [40]. Simplificación de la red en forma de bloque de memoria (derecha).

Una forma simplificada de ver a la RNR es como un bloque de memoria con realimentación para cualquier tiempo t ; ya que este bloque es afectado por estados anteriores a t y afecta a estados posteriores a t , puede visualizarse como un tren de bloques de memoria que compartirán su información a lo largo del proceso. El tener acceso a información de estados anteriores por medio de una señal de estado $s(t)$ le permite a la red decidir qué tan relevante es la información de entrada en t .

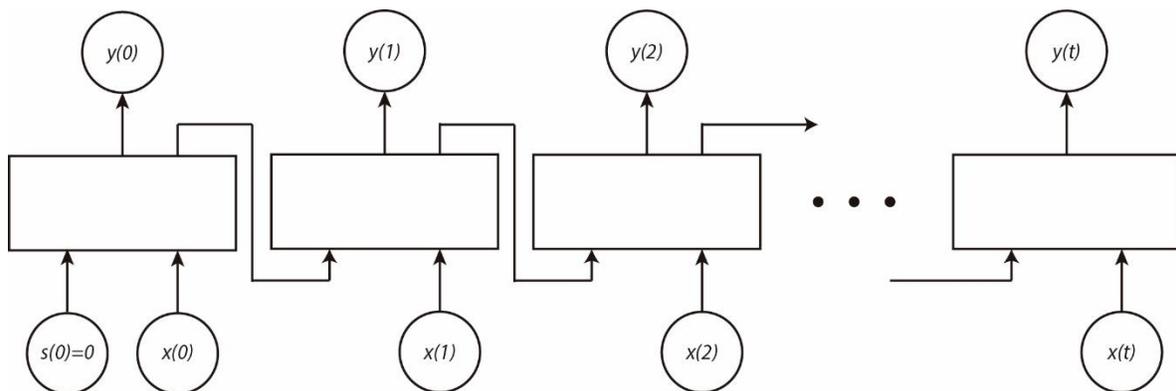


Figura 6.5 Tren de bloques de memoria

El funcionamiento no dista mucho de una MLP, en la propagación para adelante la información de entrada se propagará a lo largo de toda la arquitectura de la red para obtener una medición de y , pero tendrá información de entrada extra a través del estado $s(t)$ el cual cuenta con sus propios pesos sinápticos. Al mismo tiempo de obtener la salida se obtiene el valor del estado, el cual se propagará al siguiente paso o bloque de memoria.

Al tener únicamente una señal de salida, estas redes solo pueden predecir un paso t a la vez, después de haber leído todas las señales de entrada. Si se requiere la predicción de un lapso de tiempo $t + n$, se eliminará el primer dato de entrada $x(0)$ y se agregará como nuevo dato de entrada al tren de bloques a la $y(t)$ calculada anteriormente, para poder predecir un nuevo valor $t + 1$. Como se puede ver, estaríamos saltando el tren de bloques n pasos hasta poder completar la predicción en el lapso de tiempo que querramos.

La red aquí utilizada cuenta solo con una señal de salida, por lo que esta red solo puede predecir un valor a futuro en el tiempo t , esto después de haber leído todas las señales de entrada consecutivas. Pero ya que requerimos predecir no solo un dato en el futuro, sino un grupo de datos consecutivos de la serie temporal, la red tendrá que predecir de uno a uno los nuevos datos. Primero leerá las señales de entrada originales para poder predecir el dato consecutivo a estas, para la siguiente predicción, se desechará el primer dato de entrada $x(0)$ de los datos de entrada originales y el grupo será completado al agregar al final de este el dato recientemente predicho por la red, usándolo como nueva señal de entrada para realizar la predicción del segundo dato, este proceso se repetirá hasta completar las predicciones consecutivas necesarias, al final el conjunto resultante será comparado con el conjunto de validación para revisar el comportamiento que sigue la red después de ser entrenada.

Para el entrenamiento se obtendrá un error para cada uno de los tiempos t por medio de la ecuación (6.4), estos errores se propagarán comenzando por el último paso t hasta llegar a $t = 0$, usando el descenso por el gradiente y la regla delta, ecuaciones (6.8), (6.9) y (6.10). Ya que estamos propagando el error no solo en la red, sino que además lo propagamos en todos los pasos, la propagación recibe el nombre de *propagación hacia atrás a través del tiempo* (BPTT por sus siglas en inglés).

El problema que presenta esta red radica precisamente en la BPTT, ya que para propagar el error éste debe ser multiplicado varias veces por la regla delta, no solo en la red, si no ahora a lo largo del tiempo, esto provoca que el gradiente se extinga deteniendo el aprendizaje de la red. Es por esto que estas redes no funcionan correctamente con información que requiere de una memoria de largo plazo, ya que suele olvidar la información que recibe en los primeros pasos de t . Este es un problema para el procesamiento de los sismogramas, y por lo tanto se requiere de una arquitectura más robusta.

6.4 Long Short-Term Memory (LSTM).

Introducida en 1997 [41] y mejorada en el 2000 [38], la arquitectura de Memoria a Largo Plazo o Long Short-Term Memory ofrece una RNR capaz de recordar información por periodos largos de tiempo y así poder aprender de las correlaciones existentes en la información, el modelo LSTM propuesto por Félix A. Gers y col. [38] en el que se basa este trabajo puede visualizarse en la figura 6.6. Esta red no solo es capaz de decidir qué información es importante para ella, además tiene la capacidad de *olvidar* información dentro de su *estado* si lo considera necesario. Hay que recordar que el *estado* es el ciclo de realimentación dentro de una RNR y es considerado la memoria de la misma, en el caso de la LSTM el *estado* es ahora afectado por diferentes elementos

que le permiten no solamente retener información, sino que ahora puede modificarla e incluso olvidarla si así lo considera la red, recibiendo ahora el nombre de *célula de estado* $sc(t)$.

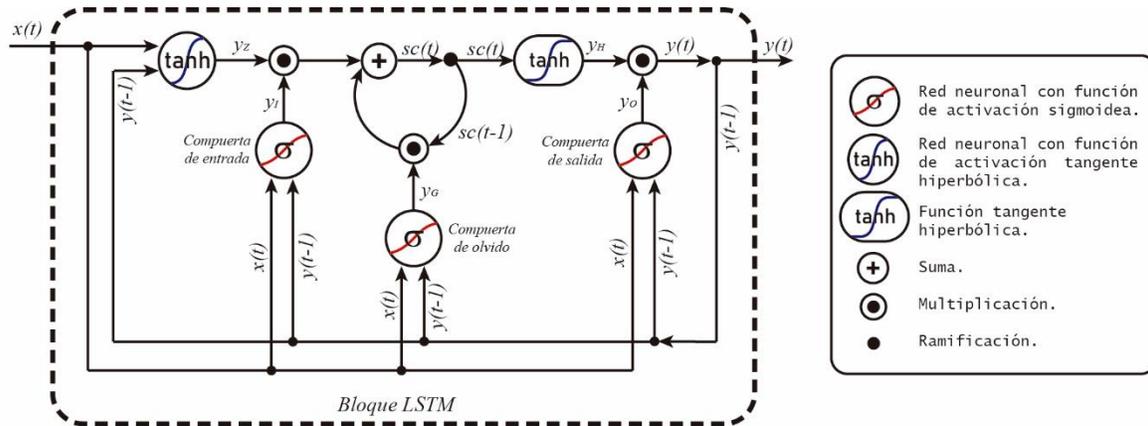


Figura 6.6. Arquitectura de un bloque de memoria LSTM con un único bloque de estado $sc(t)$.

Si se ve como un bloque de memoria, su funcionamiento es igual al descrito en la figura 6.5, es en su funcionamiento interno donde cambia completamente. El bloque LSTM cuenta con 3 RN con función de activación sigmoidea, ya que su salida está acotada entre 0 y 1, estas redes servirán de *compuertas*, decidiendo qué información dejará pasar a la *célula de estado*, si la información es relevante su salida será cercana a 1, si por el contrario es información sin importancia, su salida será cercana a 0. La RN de activación tanh y la función tanh, cumplirán con *dimensionar* la información, así como de proponer nuevos datos que puedan afectar la memoria. Pero la mayor ventaja del bloque LSTM radica en el ciclo que utiliza para la actualización de su memoria, que consta de la ya comentada *célula de estado* $sc(t)$, la cual es una conexión auto-recurrente encargada de preservar la información a través del paso del tiempo y de todo el conjunto de operaciones que regulan la lectura-escritura de la memoria de sc , este ciclo es conocido como *carrusel del error constante* (CEC).

Todas las compuertas (y_I, y_G, y_O) y la red y_Z tienen como señales de entrada la información proporcionada en $x(t)$ mas la información de la retroalimentación de la salida anterior $y(t - 1)$, ambas señales de entrada estarán completamente conectadas a las neuronas de la primera capa oculta, por lo que poseerán pesos propios más los respectivos pesos de polarización, los cuales se inicializan con -1 para la compuerta y_G y +1 para las compuertas y_I y y_O . La función y_H tendrá como señal de entrada al sc actualizado. Todas las redes mantienen sus neuronas aisladas una de otra tomando decisiones de forma individual durante el forward propagation.

La *compuerta de olvido* y_G aprende a *reiniciar* u *olvidar* la memoria almacenada en el bloque LSTM una vez que esta ya no es útil, aunque no lo hace de forma inmediata, si no gradual gracias a la adaptabilidad de la RN. La *compuerta de entrada* y_I decide con qué valores será actualizado sc , estos valores son creados y dimensionados por y_Z . El CEC se compone de todas estas señales más los estados pasados de sc para poder mantener una memoria de largo plazo, conservando únicamente la información que considera útil a lo largo del tiempo. La función y_H preparará la

información de salida en base a la memoria, mientras la compuerta y_o contralará la información $y(t)$ que salga del bloque.

6.4.1 Propagación hacia adelante en la LSTM.

Así como una RN clásica propaga la información de forma ordenada a través de sus capas, el bloque LSTM tendrá un flujo de información ordenado a través de sus diferentes elementos, comenzando con la compuerta de entrada, pasando por la compuerta de olvido y terminando con la compuerta de salida, incluyendo las operaciones necesarias de cada bloque para su funcionamiento. Un bloque LSTM se rige por las fórmulas que se presentan a continuación, siguiendo el orden en que se presentan:

$$Z_{Z,c_j^v}(t) = \sum_m^m w_{c_j^v m} [y_m(t-1), x_m(t)] \quad y_Z(t) = f_Z \left(Z_{Z,c_j^v}(t) \right) = \text{Tanh}_Z \left(Z_{Z,c_j^v}(t) \right) \quad (6.11)$$

$$Z_{I,j}(t) = \sum_m^m w_{I,jm} [y_m(t-1), x_m(t)] \quad y_{I,j}(t) = f_{I,j} \left(Z_{I,j}(t) \right) = \sigma_{I,j} \left(Z_{I,j}(t) \right) \quad (6.12)$$

$$Z_{G,j}(t) = \sum_m^m w_{G,jm} [y_m(t-1), x_m(t)] \quad y_{G,j}(t) = f_{G,j} \left(Z_{G,j}(t) \right) = \sigma_{G,j} \left(Z_{G,j}(t) \right) \quad (6.13)$$

$$S_{c_j^v}(t) = y_{G,j}(t) S_{c_j^v}(t-1) + y_{I,j}(t) y_Z(t) \quad \text{con } S_{c_j^v}(0) = 0 \quad (6.14)$$

$$y_H(t) = f_H \left(S_{c_j^v}(t) \right) = \text{Tanh}_H \left(S_{c_j^v}(t) \right) \quad (6.15)$$

$$Z_{O,j}(t) = \sum_m^m w_{O,jm} [y_m(t-1), x_m(t)] \quad y_{O,j}(t) = f_{O,j} \left(Z_{O,j}(t) \right) = \sigma_{O,j} \left(Z_{O,j}(t) \right) \quad (6.16)$$

$$y(t) = y_{O,j}(t) y_H(t) \quad (6.17)$$

Donde:

- m Rango de las unidades de entrada (neuronas en capas ocultas y unidades de entrada).
- j Índice del bloque de memoria.
- v Índice de la *célula de estado* en el bloque j .
- c_j^v *Célula de estado* v del bloque j .
- w_{lm} Peso sináptico que conecta m con l .
- t Tiempo en pasos discretos ($t = 0, 1, 2, \dots$)

6.4.2 Propagación hacia atrás en la LSTM.

El entrenamiento de la compuerta de salida y_o se realiza de la forma clásica, primero se calcula el error que se deberá propagar por medio de la ecuación (6.4), la regla delta y su gradiente siguen la misma forma de (6.7) y (6.8). Además, ya que todas las células de estado v afectan al bloque de memoria j se requiere una sumatoria de ellos, donde k indexa a la salida. Quedando entonces:

$$\Delta w_{O,jm}(t) = \eta \delta_{O,j}(t) y_m(t) \quad (6.18)$$

$$\delta_k(t) = e_k(t) f'_k(Z_k(t)) \quad (6.19)$$

$$\delta_{O,j}(t) = f'_{O,j}(Z_{O,j}(t)) \left(\sum_{v=1}^{S_j} s_{c_j^v}(t) \sum_k w_{kc_j^v} \delta_k(t) \right) \quad (6.20)$$

Las redes faltantes se entrenan mediante un *aprendizaje recurrente en tiempo real (RTRL)*, a diferencia de la BP donde la actualización de los pesos es al final de un ciclo de FP, en RTRL los pesos se deben actualizar al mismo tiempo que la red ejecuta el FP. En nuestro caso el CEC debe ser dotado de 3 parciales que se deben ir actualizando en cada paso:

$$\frac{\partial s_{c_j^v}(t)}{\partial w_{c_j^v m}} = \frac{\partial s_{c_j^v}(t-1)}{\partial w_{c_j^v m}} y_{G,j}(t) + f'_z(Z_{Z,c_j^v}(t)) y_{I,j}(t) y_m(t-1) \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial s_{c_j^v}(t)}{\partial w_{I,jm}} = \frac{\partial s_{c_j^v}(t-1)}{\partial w_{I,jm}} y_{G,j}(t) + f_z(Z_{Z,c_j^v}(t)) f'_{I,j}(Z_{I,j}(t)) y_m(t-1) \quad (6.22)$$

$$\frac{\partial s_{c_j^v}(t)}{\partial w_{G,jm}} = \frac{\partial s_{c_j^v}(t-1)}{\partial w_{G,jm}} y_{G,j}(t) + s_{c_j^v}(t-1) f'_{G,j}(Z_{G,j}(t)) y_m(t-1) \quad (6.23)$$

El estado inicial seria:

$$\frac{\partial s_{c_j^v}(t=0)}{\partial w_{lm}} = 0 \quad \text{para } l \in \{G, I, c_j^v\}$$

Requerimos además calcular el estado interno del error de la *célula de estado*:

$$e_{s_{c_j^v}}(t) = y_{O,j}(t) \left(\sum_k w_{kc_j^v} \delta_k(t) \right) \quad (6.24)$$

Finalmente, la actualización de los pesos de la red de entrada, de la compuerta de entrada y de la compuerta de olvido, estarán dados respectivamente por:

$$\Delta w_{c_j^v m}(t) = \eta e_{s_{c_j^v}}(t) \frac{\partial s_{c_j^v}(t)}{\partial w_{c_j^v m}} \quad (6.25)$$

$$\Delta w_{I,jm}(t) = \eta \sum_{v=1}^{S_j} e_{s_{c_j^v}}(t) \frac{\partial s_{c_j^v}(t)}{\partial w_{I,jm}} \quad (6.26)$$

$$\Delta w_{G,jm}(t) = \eta \sum_{v=1}^{s_j} e_{s_{c_j^v}}(t) \frac{\partial s_{c_j^v}(t)}{\partial w_{G,jm}} \quad (6.27)$$

6.5 Experimentación con LSTM.

La implementación de la red neuronal se hizo por medio de la plataforma TensorFlow de Python, ya que tiene soporte para redes de arquitectura LSTM basadas en [38] además de las ventajas que se tienen al utilizar código libre. La arquitectura como ya se dijo está basada en el artículo de Félix A. Gers y col. [38], estando compuesta de redes simples de una capa oculta.

En cuanto a la información para el entrenamiento de la LSTM se utilizaron los sismogramas trabajados en los capítulos 4 y 5 cuyo espectro multifractal diera positivo en los tres canales propios del sismómetro, siguiendo las consideraciones mencionadas en la sección 4.7 del trabajo. Ya que estas series poseen correlaciones en sus datos.

07 de septiembre de 2017			19 de septiembre de 2017		
3 minutos	10 minutos	15 minutos	3 minutos	10 minutos	15 minutos
HLIG	AAIG	AAIG	ARIG	AAIG	AAIG
HPIG	CAIG	CAIG	CAIG	CGIG	ANIG
HSIG	CJIG	CJIG	CGIG	CGIG	CCIG
LNIG	DAIG	DAIG	CSIG	HUIG	CGIG
MAIG	GTIG	FTIG	DAIG	IGIG	IGIG
MBIG	HLIG	GTIG	HSIG	OXIG	ZAIG
MNIG	HPIG	HLIG	HUIG	PLIG	
NZIG	JRQG	HPIG	IGIG	TGIG	
OXIG	LNIG	JRQG	JRQG	THIG	
PZIG	MCIG	LNIG	MBIG	TPIG	
SPIG	MMIG	MCIG	MEIG	TUIG	
SRIG	NZIG	MMIG	MMIG	YAIG	
TJIG	OXIG	MYIG	OXIG	ZAIG	
TOIG	PDIG	NZIG	PCIG		
YOIG	PZIG	OXIG	PEIG		
	SSIG	PZIG	PLIG		
	TLIG	SSIG	PNIG		
	TOIG	TLIG	SCIG		
	YAIG	YAIG	SRIG		
	YOIG	YOIG	SSIG		
	ZIIG	ZIIG	THIG		
			TLIG		
			TPIG		

Tabla 6.1. Estaciones elegidas para la implementación de la LSTM.

A cada uno de los canales de las estaciones se les aplicó un entrenamiento de LSTM, por lo que el conjunto de entrenamiento y el conjunto de validación se obtuvo a partir de cada uno de ellos.

Para la creación del conjunto de validación, en cada una de las pruebas con el bloque LSTM se reservaron entre 100 y 500 de los datos finales de las series temporales, estos datos no serán utilizados por el bloque LSTM durante su entrenamiento. Recordemos que los sismogramas fueron creados con una tasa de 100 muestras por segundo, por lo que el bloque LSTM estaría realizando predicciones de entre 1 y 5 segundos.

El conjunto de entrenamiento se compone de toda la información restante en el sismograma. Para cada uno de los ciclos de entrenamiento de la red se tomaron *conjuntos de prueba* tomados del conjunto de entrenamiento, el dato inicial del conjunto de prueba es seleccionado al azar, a partir de este dato inicial se tomaron los datos consecutivos a este, hasta crear un conjunto de prueba que tenga la misma cantidad de datos que el conjunto de validación designado anteriormente, además se tomara el siguiente dato inmediato al conjunto de prueba, este dato extra es la salida que la red deberá predecir y del cual obtendremos el error en cada ciclo de entrenamiento. Ya que el uso del conjunto de entrenamiento es al azar, no podemos hablar de épocas, sino de un *número de iteraciones de entrenamiento* el cual debía ser lo suficientemente grande para abarcar la mayoría del conjunto de entrenamiento, pero sin llegar al sobre entrenamiento.

Ya que el conjunto de validación fue creado con los datos finales de la serie de tiempo, se usarán los datos finales del conjunto de entrenamiento como las entradas iniciales durante el proceso de validación, proceso en el cual se hará la predicción del conjunto de validación, ya que son datos que la red nunca tocó durante su entrenamiento.

Las redes iniciales contaron con 400 neuronas en la entrada de la célula de estado, con un factor de aprendizaje de 0.003 y con 3000 épocas para su entrenamiento. Lamentablemente esta topología resulto ser ineficaz para las series temporales de 10 y 15 minutos. El entrenamiento con series de 15 minutos solo arrojó errores no computables (NaN) para los errores calculados durante el entrenamiento, las series de 10 minutos arrojaron algunos errores aceptables, pero durante la predicción, mostraron tener un comportamiento completamente diferente al esperado.

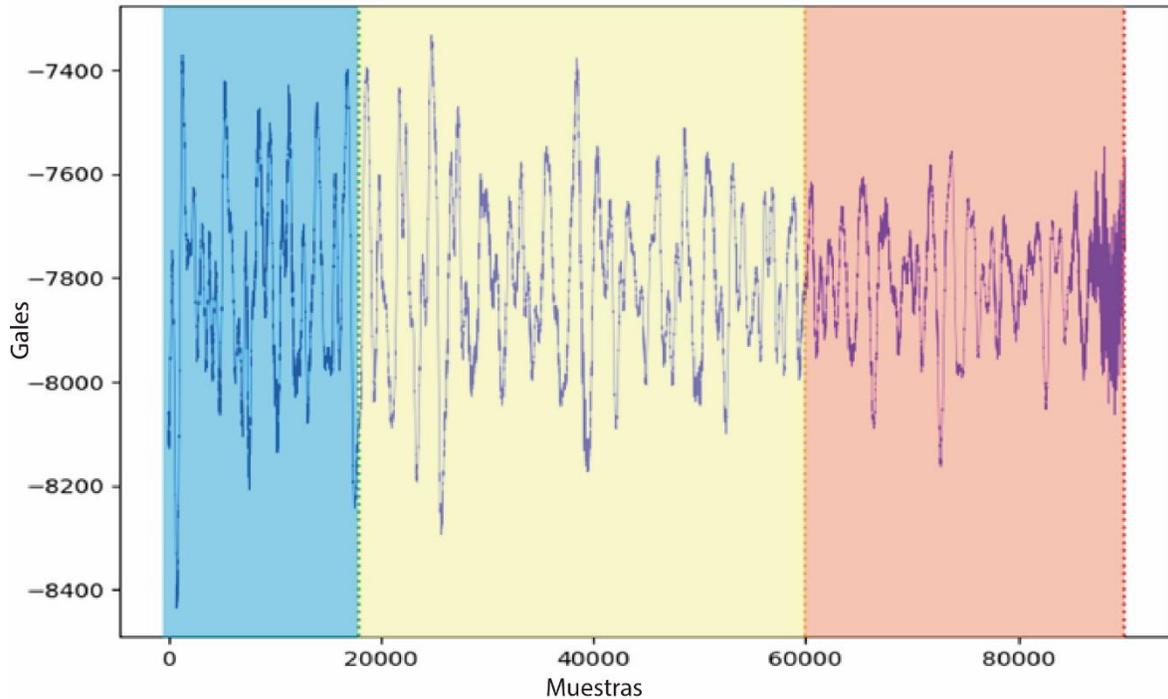


Figura 6.7 Sismograma de la estación OXIG del 07 de septiembre del 2017, ventana de 3 minutos (bloque azul), 10 minutos (se extiende hasta el bloque amarillo) y de 15 minutos (se extiende hasta el bloque rojo). La sección azul es la óptima para la experimentación.

Fue con las series de 3 minutos que la red comenzó a tener comportamientos aceptables ya que con esta cantidad de información es que la LSTM diseñada pudo procesar los datos sin incidir en errores no computables, permitiendo un entrenamiento más estable, figura 6.7. Debido a que un diseño más robusto para la RNR (por ejemplo, la inclusión de múltiples bloques LSTM) o el incremento en las épocas de entrenamiento de la red significaba también un incremento bastante considerable en el tiempo de cómputo, elevándose de 5 horas hasta casi 24 horas, utilizando un equipo con procesador Intel Core i7 Quad-core, 12 Gb Memoria RAM DDR4 y tarjeta gráfica NVIDIA GeForce GTX 960M con 640 Núcleos CUDA., por lo que se optó por experimentar con las series de 3 minutos. Siendo las estaciones OXIG, HPIG y PLIG las que mejores resultados arrojaron con respecto al error calculado y la predicción hecha al final.

A continuación, se presenta una tabla con las variaciones de la arquitectura de la red LSTM que dieron mejores resultados en cuanto al error medio cuadrático (MSE) de la ecuación (6.4).

Fecha	Estación	Canal	Neuronas Sc	Muestras Predicción	Factor de aprendizaje	Muestras Sismograma	Iteraciones	MSE
07/09/2019	HPIG	HHE	200	100	0.03	60000	3000	0.000003
07/09/2019	HPIG	HHE	200	300	0.03	60000	4000	0.00001
07/09/2019	HPIG	HHE	300	300	0.03	60000	3000	0.051608
07/09/2019	HPIG	HHE	200	350	0.03	60000	3000	0.026444
07/09/2019	HPIG	HHE	200	700	0.03	60000	3000	0.000204
07/09/2019	HPIG	HHN	200	100	0.03	60000	3000	0.000001
07/09/2019	HPIG	HHN	400	500	0.03	3500	3000	0.038691
07/09/2019	HPIG	HHZ	200	100	0.03	60000	3000	0.000029
07/09/2019	HPIG	HHZ	400	500	0.03	60000	3000	0.065008
07/09/2019	OXIG	HHE	200	100	0.03	18000	4000	0.004933
07/09/2019	OXIG	HHE	200	150	0.03	18000	4000	0.000127
07/09/2019	OXIG	HHE	400	300	0.03	18000	3000	0.022158
07/09/2019	OXIG	HHE	200	300	0.03	18000	4000	0.000651
07/09/2019	OXIG	HHE	200	400	0.03	18000	3000	0.015183
07/09/2019	OXIG	HHE	400	500	0.03	18000	3000	0.055211
07/09/2019	OXIG	HHE	400	700	0.03	18000	3000	0.00002
07/09/2019	OXIG	HHE	200	600	0.03	18000	3000	0.000029
07/09/2019	OXIG	HHE	400	700	0.03	18000	3000	0.219966
07/09/2019	OXIG	HHE	400	700	0.03	18000	5000	0.01695
07/09/2019	PLIG	HHE	200	100	0.03	18000	3000	0.000022
19/09/2019	PLIG	HHE	200	100	0.03	18000	3000	0.000023
19/09/2019	PLIG	HHE	400	300	0.003	18000	5000	0.001082
19/09/2019	PLIG	HHE	400	300	0.003	18000	6000	0.000017
19/09/2019	PLIG	HHE	400	400	0.003	18000	5000	0.000004
19/09/2019	PLIG	HHE	400	500	0.03	7500	3000	0.026151
19/09/2019	PLIG	HHE	400	500	0.03	7500	6000	0.025641
19/09/2019	PLIG	HHN	400	300	0.003	18000	4000	0.000005
19/09/2019	PLIG	HHZ	400	300	0.003	18000	4000	0.000004
19/09/2019	PLIG	HHZ	400	500	0.03	18000	3000	0.007543
19/09/2019	PLIG	HHZ	400	500	0.03	7500	3000	0.00906

Tabla 6.2. Variaciones en la arquitectura del bloque LSTM, con el error obtenido al final del entrenamiento.

La red que logró una predicción del comportamineto final del sismo contaba con 200 neuronas en Sc, un factor de aprendizaje fijado en 0.03, con un conjunto de validación de 100 muestras (1 segundo), la cual fue entrenada con la información de la estación OXIG, canal E del día 7 de septiembre por 3000 iteraciones de entrenamiento. La figura 6.8 muestra la predicción obtenida por la red, mientras la figura 6.9 muestra la localización de los datos predichos por el bloque LSTM mediante el conjunto de validación.

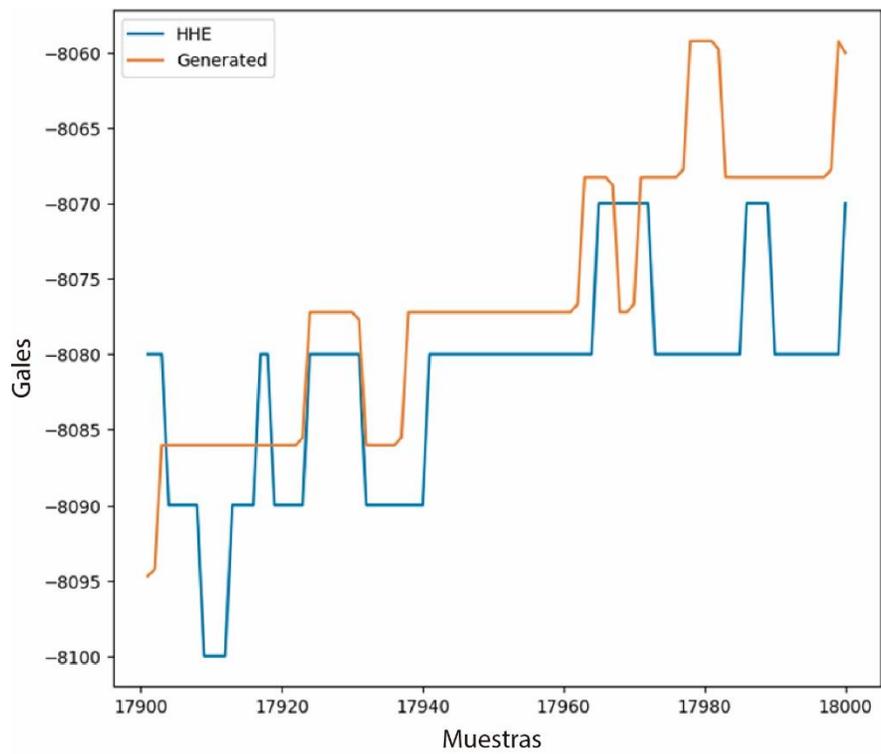


Figura 6.8 Predicción obtenida con la LSTM

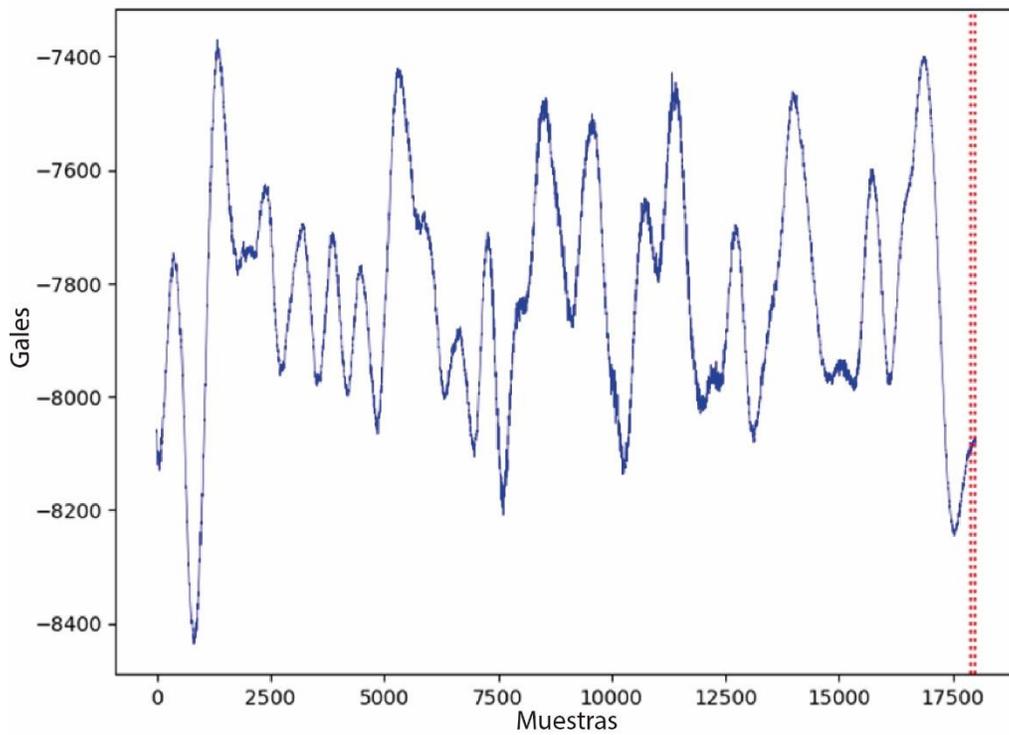


Figura 6.9 El conjunto de validación se encuentra entre las dos líneas punteadas, la información restante del sismograma pertenece al conjunto de entrenamiento.

Ya que se intenta hacer una predicción de sucesos que pasan en un lapso de tiempo muy corto, se copió la arquitectura de la red pasada para observar con qué ventana de tiempo era posible realizar la predicción, no se utilizaron los pesos que ya se habían obtenido, ya que significaría hacer predicciones con información ya aprendida por la red anterior, es por eso que cada nueva red se creó con pesos aleatorios nuevos. La ventana de tiempo mínima obtenida para la creación del conjunto de entrenamiento consta de 12000 muestras, 2 minutos. En la figura 6.10 se presenta la predicción hecha por la red, nuevamente se usaron los datos de la estación OXIG, canal E del día 7 de septiembre, la red fue entrenada con 3000 épocas y en este caso, aunque el conjunto de datos de validación sigue siendo de 100 muestras, podemos ver la reducción en el conjunto de entrenamiento en la figura 6.11, además ya que el conjunto de entrenamiento se redujo, el nuevo conjunto de validación estará conformado por los siguientes 100 datos consecutivos al conjunto de entrenamiento reducido.

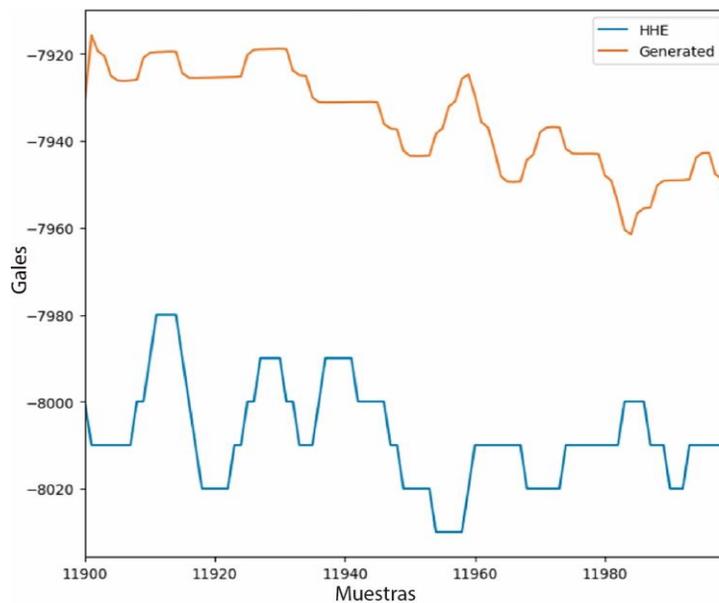


Figura 6.10 Predicción de la red, con conjunto de entrenamiento de 2 minutos

Al comparar las figuras 6.8 y 6.10 podemos notar que lo obtenido por el bloque LSTM no es igual al conjunto de validación reservado para cada caso, pero en ambas figuras la señal predicha por el bloque parece emular la forma del conjunto de validación, al menos visualmente hablando, en contraste podemos ver a la figura 6.12 en la cual la señal predicha no parece seguir la forma del conjunto de validación. El comportamiento que observamos en las figuras 6.8 y 6.10 nos dicen que estos bloques de memoria creados a partir de redes neuronales tienen la capacidad de predicción que estamos buscando, ya que se estaría haciendo uso de la memoria a largo plazo detectada por el análisis multifractal en los sismogramas para que los bloques puedan aprender de la misma serie. Otra característica apreciable es el desfase que existe en la figura 6.10, ya que se redujo el conjunto de entrenamiento para ella es comprensible que sea menos exacta que la predicción obtenida en la figura 6.8.

La figura 6.12 se obtuvo al aplicar el bloque LSTM al sismograma obtenido del terremoto ocurrido el 7 de septiembre del 2017, por medio de la estación OXIG en su canal E, usando la ventana de 3 minutos para delimitarlo. El conjunto de validación empleó 400 muestras, el bloque LSTM contaba con 200 neuronas en Sc y el entrenamiento consto de 3000 épocas con un factor de aprendizaje de 0.03.

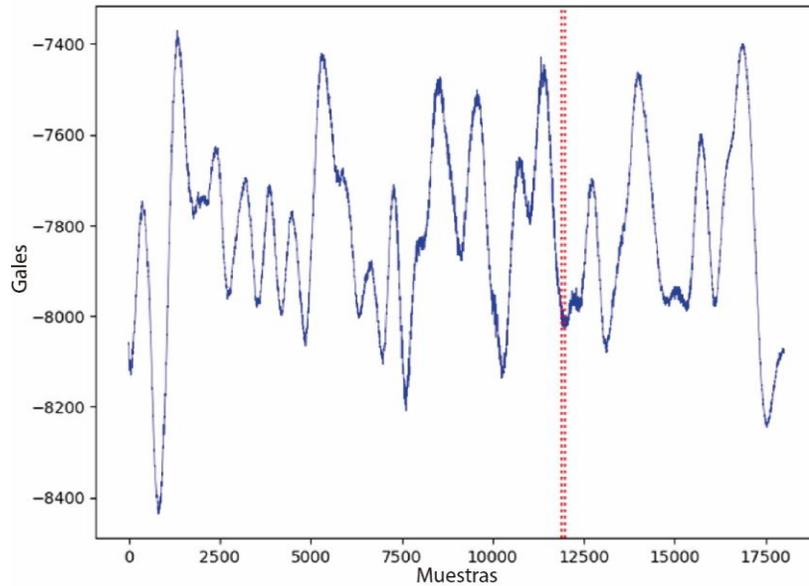


Figura 6.11 Nuevo conjunto de validación, línea punteada.

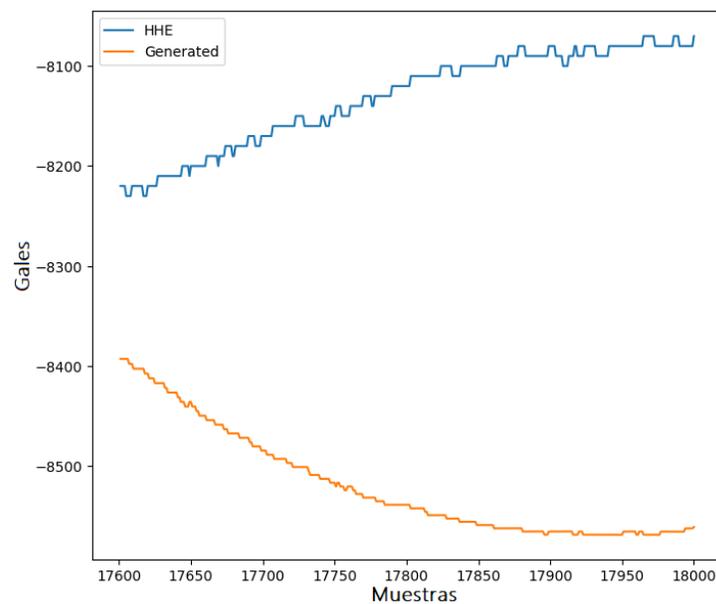


Figura 6.12. Predicción errónea de un conjunto de validación hecha por un bloque LSTM. La línea azul es grafica del sismograma del canal E, la línea naranja es la predicción generada por el bloque LSTM.

En el capítulo 4 expusimos cuales serían nuestros criterios para declarar como aceptables a los espectros multifractales obtenidos, además de exponer varios ejemplos de ellos en los resultados experimentales del capítulo 4 y 5 (figuras 4.7 a 4.25 y figuras 5.7 a 5.23), tomando como no aceptables a los espectros ($f(\alpha)$ vs α) que no muestren una concavidad hacia abajo bien definida.

En base a estos criterios, el bloque LSTM utilizado en las figuras 6.8 y 6.10 parece tener la capacidad de predicción que buscamos al analizar los sismogramas con un comportamiento multifractal, lo que nos indicaría la existencia de una memoria a largo plazo y la capacidad del bloque LSTM para poder aprender de ella para hacer predicciones. Abordaremos en los siguientes párrafos lo que ocurriría si este mismo bloque LSTM analizara las series de tiempo no multifractales.

Se han tomado para estos experimentos las series de tiempo de los sismogramas cuyos espectros multifractales presentarán visualmente deformaciones en su curvatura, como rizo o picos. Todas ellas fueron analizadas por la misma arquitectura LSTM anteriormente descrita, que serían 200 neuronas en la célula de estado con un factor de aprendizaje de 0.03, haciendo uso de un conjunto de validación de 100 datos finales de la serie temporal a analizar, el bloque fue entrenado con 3000 iteraciones en cada uno de los casos. Estos datos pueden verse reflejados en la tabla 6.3.

Fecha	Estación	Canal	Muestras del Sismograma	EMC
07/09/2019	ACIG	HHE	18001	0.011741
07/09/2019	ACIG	HHN	18001	0.004175
07/09/2019	ACIG	HHZ	18001	0.000089
07/09/2019	ANIG	HHE	18001	0.000003
07/09/2019	ANIG	HHN	18001	0.000086
07/09/2019	ANIG	HHZ	18001	0.000002
07/09/2019	CSIG	HHE	18001	0.001993
07/09/2019	CSIG	HHN	18001	0.001842
07/09/2019	CSIG	HHZ	18001	0.000598
07/09/2019	IGIG	HHE	18001	0.000006
07/09/2019	IGIG	HHN	18001	0.000112
07/09/2019	IGIG	HHZ	18001	0.000164
07/09/2019	SCIG	HHE	18001	0.000014
07/09/2019	SCIG	HHN	18001	0.000235
07/09/2019	SCIG	HHZ	18001	0.000271
07/09/2019	ZAIG	HHE	18001	0.000057
07/09/2019	ZAIG	HHN	18001	0.018929
07/09/2019	ZAIG	HHZ	18001	0.000418
07/09/2019	ACIG	HHN	60001	0.000001
07/09/2019	ACIG	HHZ	60001	0.002321

07/09/2019	ANIG	HHE	60001	0.001998
07/09/2019	ANIG	HHN	60001	0.000001
07/09/2019	ANIG	HHZ	60001	0.000451
07/09/2019	CSIG	HHE	60001	0.000378
07/09/2019	CSIG	HHN	60001	0.000011
07/09/2019	CSIG	HHZ	60001	0.000009
07/09/2019	IGIG	HHE	60001	0.000005
07/09/2019	IGIG	HHN	60001	0.003111
07/09/2019	IGIG	HHZ	60001	0.000225
07/09/2019	SCIG	HHE	60001	0.000185
07/09/2019	SCIG	HHN	60001	0.003318
07/09/2019	SCIG	HHZ	60001	0.000004
07/09/2019	ZAIG	HHE	60001	0.032793
07/09/2019	ZAIG	HHN	60001	0.000379
07/09/2019	ZAIG	HHZ	60001	0.000018
19/09/2019	MAIG	HHE	18001	0.050344
19/09/2019	MAIG	HHN	18001	0.000337
19/09/2019	MAIG	HHZ	18001	0.000001
19/09/2019	TSIG	HHE	18001	0.000011
19/09/2019	TSIG	HHZ	18001	0.000133
19/09/2019	ZIIG	HHE	18001	0.000406
19/09/2019	ZIIG	HHN	18001	0.009164
19/09/2019	ZIIG	HHZ	18001	0.000037
19/09/2019	MAIG	HHE	60001	0.000003
19/09/2019	MAIG	HHN	60001	0.000092
19/09/2019	MAIG	HHZ	60001	0.000012
19/09/2019	TSIG	HHE	60001	0.000006
19/09/2019	TSIG	HHN	60001	0.022897
19/09/2019	TSIG	HHZ	60001	0.00245
19/09/2019	ZIIG	HHE	60001	0.000025
19/09/2019	ZIIG	HHN	60001	0.000002
19/09/2019	ZIIG	HHZ	60001	0.00023

Tabla 6.3. Series de tiempo no-multifractales utilizadas para entrenar un bloque LSTM. Se muestra el error mínimo cuadrado obtenido al final de cada entrenamiento.

Aunque el error mínimo cuadrado obtenido por el bloque LSTM es en algunos casos incluso menor que el calculado en el ejemplo de la figura 6.8, el bloque fue incapaz de predecir el conjunto de validación en las series sin multifractalidad. De igual forma se presentará como ejemplo una de las series temporales no multifractales para visualizar el comportamiento del bloque. En la figura 6.13 podemos ver los espectros multifractales obtenidos el día 19 de septiembre del año 2017 de la estación MAIG de su canal HHN, con una ventana de tiempo de 3 minutos, visualmente podemos apreciar que los espectros no cumplen con la forma cóncava deseada, siendo más notorio en el espectro conseguido mediante el análisis MF DFA.

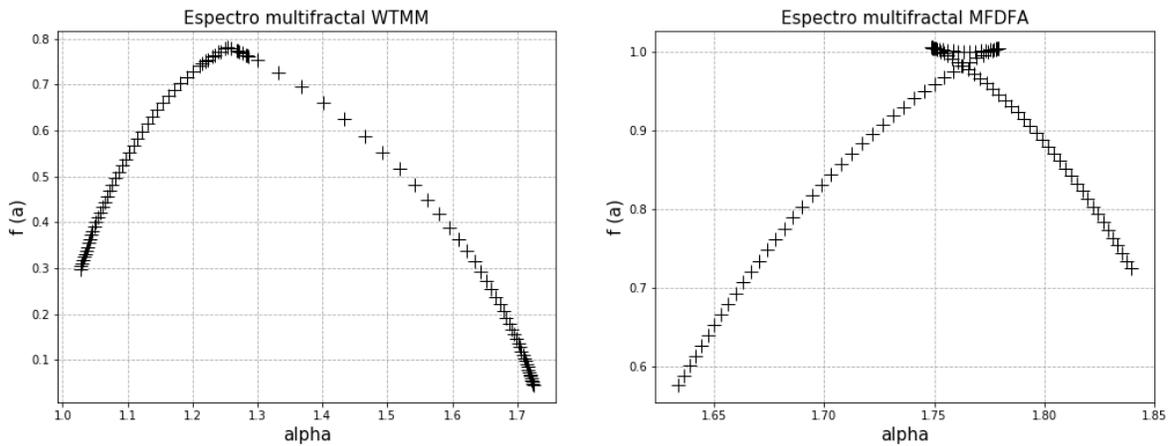


Figura 6.13. Espectros obtenidos de la estación MAIG, del canal HHN, del día 19 de septiembre de 2017, su forma irregular indica que el sismograma analizado no posee multifractalidad.

De forma análoga a lo realizado en el experimento de la figura 6.8, de los 18000 datos del sismograma, se apartaron los 100 datos finales para ser usados de conjunto de validación, equivalentes a 1 segundo en tiempo. El resultado predicho por el bloque LSTM se puede ver en la figura 6.14, aunque el bloque pareciera reaccionar al inicio de la predicción, este se queda estancado rápidamente a diferencia de lo visto en la figura 6.8.

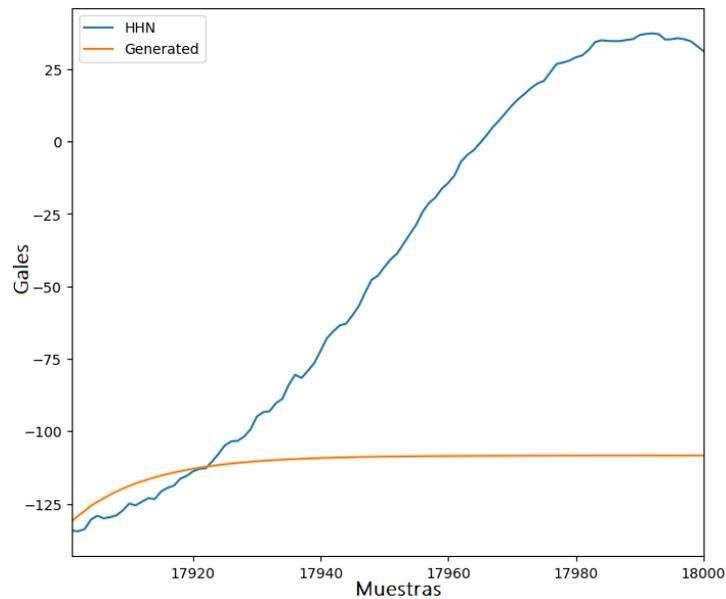


Figura 6.14. Predicción hecha por el bloque LSTM de la serie no multifractal obtenida de la estación MAIG canal N. La línea azul corresponde a la gráfica del sismograma, la línea naranja corresponde a la predicción del bloque LSTM.

Se repitió el experimento con la misma serie de tiempo, pero en esta ocasión dejando 500 datos para el conjunto de validación esperando que el bloque reaccionara de diferente manera, pero parece conservar el mismo comportamiento, figura 6.15.

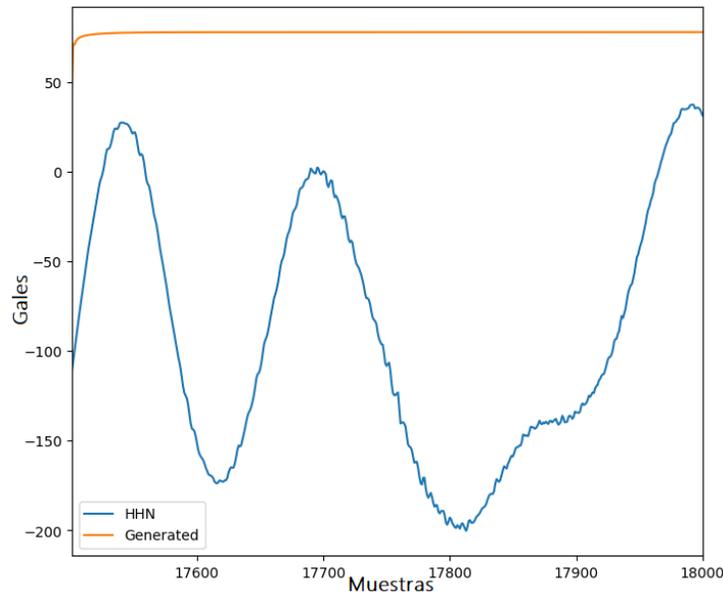


Figura 6.15. Predicción de la serie no multifractal obtenida de la estación MAIG por el bloque LSTM, con un conjunto de validación de 500 datos finales.

Estos resultados de momento serán tomados como satisfactorios ya que el bloque no parece tener la capacidad de predecir el conjunto de validación deseado, mostrando así que una serie de tiempo no multifractal carecería de la capacidad de ser utilizada por una red neuronal recurrente para su predicción, ya que no posee memoria a largo plazo en las fluctuaciones a diferentes escalas.

6.6 Discusión del capítulo.

En capítulos anteriores hemos utilizado los distintos análisis multifractales como metodologías discriminatorias para separar las series temporales que indican tener un comportamiento de memoria a largo plazo de las series que indican ser de comportamiento aleatorio, el siguiente paso es utilizar el poder computacional para poder detectar y utilizar las correlaciones que existen en los sismogramas. Para esto se eligió utilizar un bloque de LSTM, el cual es un conjunto de redes neuronales y operaciones entre la información obtenida de estas redes, este bloque fue alimentado con los diferentes tipos de sismogramas, buscando lograr la predicción de los datos finales de sus series temporales.

Se logró entonces la predicción de un segundo de información, equivalente a las 100 muestras finales de la serie temporal observada en la figura 6.9, comprobando así la capacidad de predicción dentro de series temporales creadas por los terremotos. Aun así, saltan a la vista algunas limitaciones que habrá que tomar en cuenta para futuros experimentos. Por ejemplo mientras mayor sea la cantidad de datos finales a predecir, los resultado obtenidos se van alejando de la realidad, recordemos que la forma en la que trabaja nuestra LSTM es prediciendo

un solo dato a la vez, el cual es tomado para predecir el dato siguiente a éste y así sucesivamente hasta abarcar la totalidad de la información buscada. La desventaja de este modelo es que en cada paso de la predicción siempre habrá un error, estos se irán acumulando, por decirlo así, alejando en cada paso a la predicción de la realidad. Se propondría utilizar una arquitectura más robusta, por ejemplo bloques LSTM apilados, Wu y col. [42] comentan que en base a su experiencia 4 bloques apilados de LSTM llegan a ser suficientes para una buena predicción. Un incremento en el número de bloques solo alentaría el proceso y contribuiría a que el gradiente usado por los pesos de la RNR caiga a valores tan pequeños que se detendría el entrenamiento de la red, ya que los valores de los pesos no podrían cambiar eficazmente durante la propagación hacia atrás. Aunado a todo esto habría que recordar que también será conveniente mejorar el hardware con el que se trabaje. Este estudio se realizó en un equipo con Procesador Intel Core i7 Quad-core, 12 Gb Memoria RAM DDR4 y Tarjeta gráfica NVIDIA GeForce GTX 960M con 640 Núcleos CUDA.

Relacionado a esto cabe señalar que los sismogramas se aplicaron de forma individual al bloque LSTM para poder ver el comportamiento que este presentaba con los distintos tipos de series de tiempo con los que trabajo (multifractales y no multifractales), buscando las diferencias en los resultados obtenidos para poder validar nuestra hipótesis de si un comportamiento multifractal puede servir como método discriminatorio en la selección de datos para el entrenamiento de la red. Como trabajo a futuro se podría separar la base de datos en dos grupos, series de tiempo multifractales y no multifractales, para que los bloques LSTM intentaran predecir una parte más extensa de los sismogramas al tener más información de la cual puedan aprender, pero como ya se comentó, esto implicaría una arquitectura más robusta, así como un equipo de cómputo con mayores recursos de hardware.

Los experimentos realizados en sismogramas cuyo espectro multifractal no cumplía con los lineamientos descritos en el capítulo 4 y que presentaban deformaciones notorias en ellos también fueron analizados mediante la red que mostró el mejor comportamiento en cuanto a predicción, en todos ellos el resultado no llegó a la predicción final deseada, tendiendo a crear líneas con un crecimiento casi logarítmico o mostrando visualmente comportamientos completamente diferentes a los esperados. Esto nos lleva una vez más a concluir que es posible la detección y uso de las correlaciones detectadas por los análisis multifractales combinados con técnicas y modelos de aprendizaje máquina.

Capítulo 7. Conclusiones.

En esta investigación se hizo un análisis del comportamiento de los terremotos por medio de análisis multifractales con el afán de comprobar la existencia de correlaciones internas en estas señales de tiempo de apariencia aleatoria, lo que indicaría un efecto de memoria a largo plazo en ellas el cual debería ser posible de modelar.

Lo que se puede apreciar es que el resultado en el espectro multifractal cambia dependiendo de la ventana de tiempo con que se observe al sismograma. Teniendo mejores espectros multifractales en aquellos sismogramas donde se puede apreciar la llegada de la onda de choque y que exista un lapso lo suficientemente largo de tiempo para que el sismograma vuelva a estabilizarse. Esto puede indicar que la multifractalidad depende de todo el conjunto de ondas que componen al sismo (principales y superficiales) y no únicamente de alguna de ellas.

Aunque el comportamiento de los terremotos es complejo, el análisis multifractal nos indica la presencia de correlaciones en algunas de las mediciones tomadas por los sismogramas. Es en base a estos resultados que se hizo la selección de los datos que servirían para el entrenamiento de las redes neuronales.

Se logró entrenar una red neuronal del tipo LSTM para la predicción del comportamiento de uno de los sismos estudiados, lo que estaría confirmando la existencia de la memoria a largo plazo detectada por el análisis multifractal. Además, se logró realizar una predicción con una ventana de tiempo menor a las originalmente planteadas, que fueron de 3, 10 y 15 minutos.

Como posible trabajo a futuro se debe estudiar qué medidas multifractales, como el ancho del espectro o la forma de la curva son los que tienen mayor relación con la predicción del comportamiento de series de tiempo. Además, ya que se hizo una clasificación de los resultados multifractales en base a lo definido en el capítulo 4.7 sobre cuales espectros multifractales se consideran positivos y cuales negativos, sería posible usar esta clasificación para la creación de otro modelo de aprendizaje máquina que clasifique automáticamente las series multifractales o que ajuste la ventana de tiempo para tener un arco bien formado.

Aunque la predicción de la señal sísmica que se logró puede ser considerada pequeña en comparación a la cantidad de información que se requiere para poder hacerla (17,900 muestras para lograr la predicción de 100 datos finales) la importancia de este hecho radica en que se está logrando la comprobación de un efecto de memoria en las series de tiempo creadas a partir de mediciones sísmicas, por medio de análisis multifractal. Este hecho se puede traducir en modelos de mayor exactitud para los sismogramas.

Anexo I. Tratamiento de datos sísmicos.

I.1. Adquisición de datos.

Objetivo: adquirir la información de las estaciones del Servicio Sismológico Nacional (SSN) pertinente a las fechas del estudio.

Requerimientos:

- Ordenador con sistema operativo Linux
- Archivo de acceso "SSNstp" proporcionado por el SSN

Procedimiento:

1._En la carpeta donde se almacene el archivo SSNstp abrir una terminal y acceder como superusuario.

2._Para acceder a la red de datos de SSN teclear el siguiente comando:
>>>./SSNstp

3._Se desplegará el siguiente menú:

```
STP: Connected to mase.gps.caltech.edu

*****
* Servicio Sismologico Nacional *
* Instituto de Geofisica *
* UNAM *
* Mexico *
* SSN Server *
* Please Cite Use of Data With *
* doi:10.21766/SSNMX/SN/MX *
*****
```

```
STP>
revisa >>help win para dudas
```

WIN Command:

```
WIN net sta chan time_on time_off
net - network code (i.e. TO)
sta - station code (i.e. AMAC)
chan - seed channel name (i.e. HHZ)
time_on - date/time of start of record
time_off - date/time of end of record
```

```
STP>
```

4._Algunas consideraciones a tener en cuenta:

- El sistema STP funciona con el Tiempo Universal Coordinado (UTC).
- Se deberán indicar los límites temporales en los cuales deseamos adquirir los datos de las estaciones.
- No todas las estaciones tienen los datos completos.
- Cada consulta arrojará un archivo de extensión *.SAC por cada canal de la estación consultada.
- El tamaño de estos archivos dependerá de la ventana de tiempo que solicitemos al sistema.

- Los archivos descargados serán tablas de series de tiempo sin escala, son solo mediciones eléctricas que dependen de la calibración del sismómetro, la escala se le dará en pasos posteriores.
- La forma de especificar tiempo se muestra a continuación y puede ser intercambiable en los comandos del STP:

FMT	Especificación:	Descripción:
1	ssssssssss.sssu	UT segundos, la 'u' es literal
2	yyyymmddhhmmss.sss	decimal codificado año-mes-día
3	yyyy/mm/dd,hh:mm:ss.sss	año-mes-día con '/'
4	yyyy,mm,dd,hh:mm:ss.sss	año-mes-día con ','
5	yyyy/jjj,hh:mm:ss.sss	año-j_día con '/'
6	yyyy, jjj, hh:mm:ss.sss	año-j_día con ','

5._ Si se desea consultar qué estaciones disponen de información en una determinada fecha se puede usar el siguiente comando:

Por ejemplo, información de la fecha 2018/02/16,23:39:39.0

```
STP> avail 2018/02/16,23:39:39.0
```

```
IG.AAIG.HHE IG.AAIG.HHN IG.AAIG.HHZ
IG.ACIG.HHE IG.ACIG.HHN IG.ACIG.HHZ
IG.ANIG.HHE IG.ANIG.HHN IG.ANIG.HHZ
.....
.....
.....
```

6._Comandos para la obtención de datos.

6.1) Para descargar la información de una determinada estación, para uno solo de sus canales.

Ejemplo:

```
Sismo: 19 de septiembre 2017
Magnitud: 7.1
Horario de ocurrencia (UTC): 18:14:38
Ventana de tiempo: de -5 minutos a + 30 minutos del suceso
Estación: PPIG, Popocatépetl, Estado de México
Seed Channel Name: HHZ, componente vertical (Z), con el máximo muestreo del sensor. La Z puede ser sustituida por N para obtener la componente norte-sur o por E para la componente este-oeste del sismograma.
```

```
STP> WIN IG PPIG HHZ 2017/09/19,18:09:38.00 2017/09/19,18:44:38.00
```

6.2) Para descargar la información de una determinada estación con las tres componentes.

```
STP> WIN IG PPIG HH_ 2017/09/19,18:09:38.00 2017/09/19,18:44:38.00
```

Este comando creará en la carpeta donde se esté trabajando un archivo para cada uno de las componentes del sismograma.

6.3) Para descargar la información disponible de todas las estaciones de la red en una misma ventana de tiempo.

```
STP> WIN IG % HH_ 2017/09/19,18:09:38.00 2017/09/19,18:44:38.00
```

Este comando creará un archivo para cada una de las componentes de cada una de las estaciones con información disponible.

7._ El nombre de los archivos descargados estará compuesto de la siguiente manera:

```
FECHA(aaaamddhmmss).RED(IG).ESTACIÓN.CANAL.sac  
i.e. 20170919180938.IG.PPIG.HHZ.sac
```

I.2. Lectura y manipulación de los archivos *.sac

Objetivo: Debido a que la información dentro de los archivos SAC es demasiado extensa en ocasiones, esta se encuentra en un formato especial para este tipo de archivos, por tal motivo no se puede acceder a su información por medio de programas comunes como lo son lectores de texto o lectores de hojas de cálculo.

Aun así, existen varias librerías del tipo opensource que permiten acceder a esta información, así como un programa específicamente creado para la manipulación de estos archivos también llamado SAC. Aquí se hablará solamente de una de esas librerías.

Requerimientos:

- Matlab versión 2.0.9
- Librería irisFetch.m [13]

Procedimiento:

1._ Agregamos la librería irisFetch.m a nuestra carpeta de raíz en Matlab, en caso de tenerla en otro directorio podemos direccionar por medio del comando "addpath"

```
>> addpath('C:\Dirección_de_la_carpeta_con_la_librería')
```

2._ Cargar la información de un archivo SAC a una variable de Matlab.

Si los archivos SAC se encuentran en la carpeta donde se está trabajando no es necesario indicar toda la dirección, con el nombre del archivo es suficiente.

```
Variable = irisFetch.SAC2Trace('C:\Dirección\Nombre_del_archivo.sac');  
i.e. Trazo = irisFetch.SAC2Trace('20170908044400.IG.AAIG.HHE.sac');
```

3._ La variable obtendrá todas las mediciones dentro de la ventana de tiempo, así como los datos de la estación donde se obtuvieron. Algunos de los datos serían:

- 1) Red (IG en nuestro caso)
- 2) Estación
- 3) Canal (HHZ, HHN, HHE)
- 4) Latitud

- 5) Longitud
- 6) Elevación
- 7) Profundidad
- 8) Azimut
- 9) Información (Serie temporal en forma de tabla de datos)
- 10) Conteo de Datos
- 11) Muestreo por segundo
- 12) Inicio de Ventana (startTime)
- 13) Final de Ventana (endTime)

Los apartados de la variable que no contienen ningún tipo de información no son mencionados en esta lista.

4._ Ya que nuestro análisis posterior será por medio de Python y además de momento no requerimos los datos de localización de la estación procederemos a guardar las mediciones en archivos de texto.

4.1) Crearemos una variable que contendrá el nombre del archivo mediante el nombre de la estación de origen y su canal.

```
>> Estación=Variable.station(1:4);
>> Canal= Variable.channel(1:3);
>> NombreArchivo=[Estación '_' Canal '.txt'];
```

4.2) Abriremos/Crearemos el archivo txt que contendrá la información.

```
>> fid = fopen(NombreArchivo,'wt');
```

4.3) Guardaremos los datos de Variable.data en el txt, sin nada extra

```
>> if fid > 0
>>     fprintf(fid,'%d \n', Variable.data);
>>     fclose(fid); % Cerramos el TXT
```

Mediante el nombre de la carpeta separaremos los datos por la fecha de la información que estos guardan.

5._ Hay que mencionar que la librería irisFetch tiene más funciones que permiten desde la graficación de la información agradando la fecha, hora y datos de la estación, o la obtención de información de ciertas redes, siempre teniendo los permisos pertinentes. Para más información se recomienda consultar el manual en la página de la librería [13].

i.e. Código para indicar el tiempo UTC en el sismograma:

```
>>sampletimes=linspace(Variable.startTime,Variable.endTime,Variable.
sampleCount);
>> plot(sampletimes,Variable.data);
>> datetick;
>> grid on
>> grid minor
```

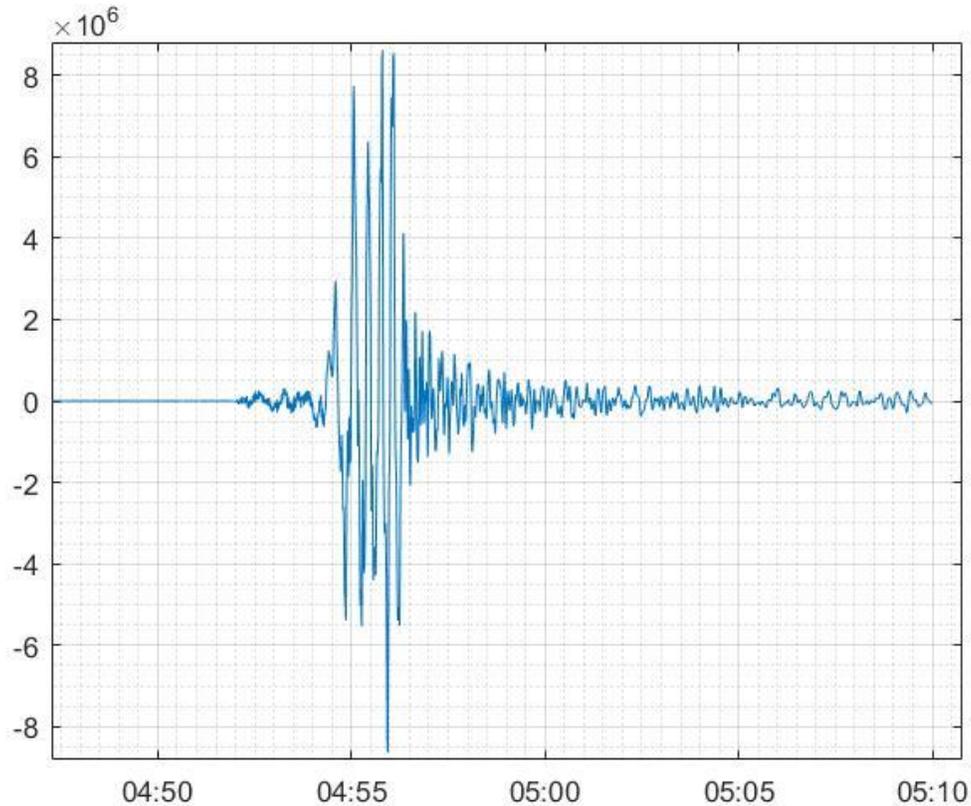


Figura i.1 Sismograma de archivo SAC leído con irisFetch, tiempo contra medición eléctrica.

Para ventanas de tiempo más grandes al código mostrará fechas además de la hora.

I.3. Escalamiento

Objetivo: La información obtenida de la red del SSN es información sin escala, por así decir son solamente las mediciones eléctricas de los sismómetros en las estaciones, estas dependen de la calibración y configuración de cada aparato, es por eso que estas mediciones deben transformarse a Galileos (GALS) que es una unidad de aceleración equivalente a un centímetro sobre un segundo al cuadrado (cm/s^2).

Requerimientos:

- Matlab versión 2.0.9
- Biblioteca irisFetch.m
- La respuesta instrumental de cada estación. Ya sea una tabla de información con las respuestas instrumentales de cada estación en la red o bien un archivo con esta respuesta para cada una de las estaciones.

Tanto los archivos requeridos como las constantes de conversión se nos proporcionaron por el SSN, la diferencia entre ellas radica en que para los archivos individuales se requiere de un programa desarrollado por las Instituciones Incorporadas a la Investigación Sismológica (IRIS), mientras

la tabla de conversión es información de texto. Según el SSN el resultado variará muy poco entre ambos métodos.

Procedimiento: Como se utilizó Matlab se empleó la tabla con las repuestas instrumentales en formato de texto, en esta tabla se encuentran los nombres de las centrales sismológicas pertenecientes a la red de banda ancha del SSN, así como su constante de respuesta instrumental. No se tiene mayor problema que el multiplicar los datos obtenidos mediante el sistema STP del SSN, por su respectiva constante instrumental, dependiendo de la estación sismológica que proporcione dicha información.

% Constantes instrumentales de los equipos sismológicos por los datos de su respectiva estación:

```

if      strcmp(q, 'CCIG') || strcmp(q, 'CJIG') || strcmp(q, 'OXIG') || ...
        strcmp(q, 'ZIIG') || strcmp(q, 'PNIG') || strcmp(q, 'MAIG') || ...
        strcmp(q, 'TGIG') || strcmp(q, 'YAIG')
    Sismograma=(1/540)*variable.data;
elseif  strcmp(q, 'LVIG') || strcmp(q, 'LPIG') || strcmp(q, 'MOIG') || ...
        strcmp(q, 'TLIG') || strcmp(q, 'TPIG') || strcmp(q, 'HLIG') || ...
        strcmp(q, 'TJIG') || strcmp(q, 'TUIG')
    Sismograma = ((1/2)*(1/540))* variable.data;
elseif  strcmp(q, 'DHIG') || strcmp(q, 'MEIG') || strcmp(q, 'PPIG') || ...
        strcmp(q, 'ZAIG') || strcmp(q, 'ARIG')
    Sismograma = ((1/4)*(1/540))* variable.data;
elseif  strcmp(q, 'MMIG') || strcmp(q, 'HUIG') || strcmp(q, 'PCIG') || ...
        strcmp(q, 'PEIG') || strcmp(q, 'FTIG') || strcmp(q, 'TOIG') || ...
        strcmp(q, 'CRIG') || strcmp(q, 'CMIG') || strcmp(q, 'THIG') || ...
        strcmp(q, 'CAIG') || strcmp(q, 'ZIIG')
    Sismograma =0.00022763* variable.data;
elseif  strcmp(q, 'PZIG') || strcmp(q, 'YOIG') || strcmp(q, 'SPIG') || ...
        strcmp(q, 'SRIG') || strcmp(q, 'TSIG') || strcmp(q, 'ANIG') || ...
        strcmp(q, 'CGIG') || strcmp(q, 'HSIG') || strcmp(q, 'TXIG')
    Sismograma =0.0001166* variable.data;
elseif  strcmp(q, 'JRQG') || strcmp(q, 'AAIG') || strcmp(q, 'MNIG') || ...
        strcmp(q, 'IGIG') || strcmp(q, 'SCIG') || strcmp(q, 'PDIG')
    Sismograma =0.0000583* variable.data;
elseif  strcmp(q, 'LNIG') || strcmp(q, 'RPIG') || strcmp(q, 'PLIG') || ...
        strcmp(q, 'MYIG')
    Sismograma =0.000029* variable.data;
elseif  strcmp(q, 'ACIG') || strcmp(q, 'BCIG') || strcmp(q, 'CSIG') || ...
        strcmp(q, 'HPIG') || strcmp(q, 'DAIG') || strcmp(q, 'GTIG') || ...
        strcmp(q, 'MBIG') || strcmp(q, 'MCIG') || strcmp(q, 'NZIG') || ...
        strcmp(q, 'SSIG')
    Sismograma =0.00004* variable.data; % CTE EMPIRICA DEL SSN
else
    fprintf('Estación No Encontrada! %s \n', q)
end

```

I.4 Delimitación y limpieza de los datos

Objetivo: los archivos del SSNstp son proporcionados mediante ventanas de tiempo definidas por el mismo usuario, el sistema no aísla los eventos sísmicos por decirlo así, además el horario en que se presenta un sismo depende de la localización de la estación y de la localización del foco del sismo. Ya que el análisis multifractal fallará con demasiada información

basura que no pertenezca al sismo es necesario aislarlo en cada uno de los archivos SAC obtenidos.

Requerimientos:

- Información sísmica en GAL
- Software para manipular series de tiempo.

Procedimiento:

Una separación manual de las diferentes ondas de un sismograma resulta ser, en la mayoría de los casos, muy complicada, se requiere un proceso automatizado. Según el SSN en los informes que presenta sobre los terremotos ocurridos en México un sismo moderado se presenta a partir de los 4.1 Gales, así que se tomará este valor como un umbral que marcará la llegada de la onda P al sensor de la estación.

Nuevamente el tiempo que dura el sismo parece variar entre las estaciones por lo que se tomaron 3 ventanas de tiempo a partir del umbral de inicio, para darle suficiente rango al sismo para medirlo en su totalidad.

Estas ventanas de tiempo fueron de:

- 3 minutos - 18,000 muestras.
- 10 minutos - 60,000 muestras.
- 15 minutos - 90,000 muestras.

En cuanto a la limpieza de la información, por lo general el sismograma se suele pasar por un filtro que elimine todo el ruido que pueda generar el sismómetro por las lecturas ambientales. Ya que nuestro análisis multifractal es capaz de diferenciar entre señales fractales, multifractales y ruido, no es necesario hacer esta limpieza. Pero si en un futuro se desea filtrar la señal, en [43] se explican procedimientos aplicables a los sismogramas mediante Matlab, incluido el filtrado de la señal.

PGA(cm/s ²) Intensidad MacroSísmica	
130.1-150.0+	FUERTE
110.1-130.0	
90.1-110.0	
30.1-90.0	MODERADO
11.1-30.0	
4.1-11.0	
2.1-4.0	LEVE
1.1-2.0	
0.1-1.0	
0.0	

Escala de intensidad del SSN

Referencias bibliográficas.

- [1] J. G. Tanner y K. M. Shedlock, *Seismic hazard maps of Mexico, the Caribbean, and Central and South America*, Tectonophysics vol. 390 (2004), pp. 159–175. <https://doi.org/10.1016/j.tecto.2004.03.033>
- [2] Stein, S. y Wysession, M., (2003). *An Introduction to Seismology, Earthquakes, and Earth Structure*, Kundli, India, Blackwell Publishing.
- [3] S. Lennartz, V. N. Livina, A. Bunde y S. Havlin, *Long-term memory in earthquakes and the distribution of interoccurrence times*, Europhys. Lett. 81 (2008) 69001. <http://dx.doi.org/10.1209/0295-5075/81/69001>.
- [4] F. Mulargia y R. J. Geller, *The physics of complex systems: applications to earthquake, Earthquake Science And Seismic Risk Reduction*, Kluwer Academic Publishers (2003), pp. 102–147. <http://dx.doi.org/10.1007/978-94-010-0041-3>, SBN: 978-1-4020-1778-0
- [5] V. N. Livina, S. Havlin, y A. Bunde, *Memory in the occurrence of earthquakes*, Phys. Rev. Lett. 95 (20) (2005) 208501. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.208501>.
- [6] J. Alvarez-Ramirez, J. C. Echeverria, A. Ortiz-Cruz y E. Hernandez, *Temporal and spatial variations of seismicity scaling behavior in Southern México*, Journal of Geodynamics 54 (2012), pp. 1-12. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jog.2011.09.001>.
- [7] X. Fan y M. Lin, *Multiscale multifractal detrended fluctuation analysis of earthquake magnitude series of Southern California*, Physica A 479 (2017), pp. 225–235. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2017.03.003>
- [8] L. Telesca, V. Lapenna y M. Macchiato, *Multifractal fluctuations in seismic interspike series*, Physica A 354 (2005), pp. 629–640. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2005.02.053>.
- [9] S. K. Aggarwal, M. Lovallo, P. K. Khan, B. K. Rastogi y L. Telesca, *Multifractal detrended fluctuation analysis of magnitude series of seismicity of Kachchh region, Western India*, Physica A 426 (2015), pp. 56-62. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2015.01.049>.
- [10] S. S. Lakshmi y P. Banerjee, *Dynamic Multifractality of Seismic Activity in Northeast India*, Pure Applied Geophysics 176 (2019), pp. 1561–1577. <https://doi.org/10.1007/s00024-018-02087-y>
- [11] C. Godano y V. Caruso, *Multifractal analysis of earthquake catalogues*, Geophysical Journal International 121, Issue 2 (1995), pp. 385–392. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-246X.1995.tb05719.x>.

- [12] SSN (2019): Servicio Sismológico Nacional, Instituto de Geofísica, Universidad Nacional Autónoma de México, México. URL: <http://www.ssn.unam.mx>, DOI: <https://doi.org/10.21766/SSNMX/SN/MX>
- [13] Incorporated Research Institutions for Seismology (IRIS). (2019, junio 20). Materials provided by the IRIS Education and Public Outreach Program have been used in this study. The facilities of the IRIS Consortium are supported by the National Science Foundation under Cooperative Agreement EAR-1261681. <https://www.iris.edu/hq/>
- [14] V. de W. Spinadel. *Geometría fractal y geometría euclidiana*. Revista Educación y Pedagogía, Vol. 15, No. 35, (2003), pp. 83-91. ISSN 0121-7593
- [15] "Fractals - Hunting the Hidden Dimension". 2008 WGBH Educational Foundation and The Catticus Corporation. Producida y dirigida por: M. Schwarz and B. Jersey.
- [16] B. B. Mandelbrot. *How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension*. Science, vol 156 (3775). (1967), pp. 636-638.
- [17] B. B. Mandelbrot, "Ch. 7: Harnessing the Peano Monster Curves", The Fractal Geometry of Nature, (1982). W. H. Freeman and Company.
- [18] C. J. G. Evertsz and B. B. Mandelbrot, *Multifractal Measures*, Chaos and Fractals: Springer Verlag, New York (1992), pp. 922–953.
- [19] M. F. Barnsley, R. L. Devaney, B. B. Mandelbrot, H. O. Peitgen, D. Saupe, R. F. Voss. (1988). *The Science of Fractal Images*. New York, Springer-Verlag. DOI: 10.1007/978-1-4612-3784-6
- [20] G. Cao, L. Y. He, J. Cao. (2018). *Long Memory Methods and Comparative Analysis*. Multifractal Detrended Analysis Method and Its Application in Financial Markets. Singapore, Springer, pp. 7-20. DOI: 10.1007/978-981-10-7916-0
- [21] Anderson, D. R., Sweeney, D. J. y Williams, T. A. (2008). Estadística para administración y economía. México, D.F., Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.
- [22] H.E. Hurst. *Long-term storage capacity of reservoirs*. Transactions of American Society of Civil Engineers. (1951). 55:400-410.
- [23] B.B. Mandelbrot. *New methods in statistical economics*. (1963). J. Polit. Econ. 71, pp. 142–440
- [24] E. A. F. Ihlen, *Introduction to multifractal detrended fluctuation analysis in Matlab*. (2012). Frontiers in Physiology, Vol. 3, Article 141. DOI=10.3389/fphys.2012.00141. <https://www.frontiersin.org/article/10.3389/fphys.2012.00141>

- [25] J. W. Kantelhardt, S. A. Zschiegner, E. K. B, A. Bunde, S. Havlin and H. E. Stanley. *Multifractal Detrended Fluctuation Analysis of Nonstationary Time Series*. Phys A (2002), pp. 316-87
- [26] J. A. Sosa-Herrera, S. Rodríguez-Romo. *Kernel density approach to error estimation of MF-DFA measures on time series*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications (2019). Vol 26. DOI: 10.1016/j.physa.2019.04.099
- [27] J. W. Kantelhardt, *Fractal and Multifractal Time Series*. In: Meyers R. (eds) Encyclopedia of Complexity and Systems Science. Springer, Berlin, Heidelberg (2015). <https://doi.org/10.1007/978-3-642-27737-5>
- [28] P. Oświecimka, J. Kwapień, S. Drozd. *Wavelet versus Detrended Fluctuation Analysis of multifractal structures*. Phys. Rev. E, Volume 75, Issue 1 (2006), Sp-016103. DOI:10.1103/PhysRevE.74.016103
- [29] Arneodo, B. Audit, N. Decoster, J.-F. Muzy, C. Vaillant. *Wavelet Based Multifractal Formalism: Applications to DNA Sequences, Satellite Images of the Cloud Structure, and Stock Market Data*. The Science of Disasters: Climate Disruptions, Heart Attacks, and Market Crashes. Springer Berlin Heidelberg (2002), pp. 26-102. ISBN=" 978-3-642-62531-2"
- [30] E. Gerasimova, B. Audit, S.-G. Roux, A. Khalil, O. Gileva, F. Argoul, O. Naimark, A. Arneodo. *A Wavelet-Based Method for Multifractal Analysis of Medical Signals: Application to Dynamic Infrared Thermograms of Breast Cancer*. Nonlinear Dynamics of Electronic Systems. Springer International Publishing (2014), pp. 288-300. ISBN="978-3-319-08672-9"
- [31] H. Salat, R. Murcio, E. Arcautea. *Multifractal methodology*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Volume 473 (2017), pp. 467-487. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.01.041>
- [32] S. Mallat y W.L. Hwang, (1992), *Singularity detection and processing with wavelets*, IEEE Transactions on Information Theory, Volume: 38, Issue: 2, pp. 617 - 643, DOI: 10.1109/18.119727
- [33] P. Du, W. A. Kibbe, S. M. Lin. *Improved peak detection in mass spectrum by incorporating continuous wavelet transform-based pattern matching*. Journal Bioinformatics, Volume 22, Issue 17 (2006), pp. 2059-2065. Doi:10.1093/bioinformatics/btl355
- [34] Pardo Merino, A y Ruiz Díaz, M. A., (2005). *Análisis de datos con SPSS 13 Base*, España, Madrid: McGraw-Hill.
- [35] B.B. Mandelbrot, (1989). *Multifractal measures, especially for the Geophysicist*. Pure and Appl. Geophys., 131, pp. 5-42.

- [36] H. Pombeiro, R. Santos, P. Carreira, C. Silva y J. M. C. Sousa, *Comparative assessment of low-complexity models to predict electricity consumption in an institutional building: Linear regression vs. fuzzy modeling vs. neural networks*, Energy and Buildings Volume 146, (2017), pp. 141-151. <https://doi.org/10.1016/j.enbuild.2017.04.032>
- [37] S. Haykin. *Neural Networks and Learning Machines*. Upper Saddle River, New Jersey, 3a Ed: Prentice Hall (2009)
- [38] F. A. Gers, J. Schmidhuber, F. Cummins. *Learning to forget: Continual prediction with LSTM*. Neural Computation, vol. 12, no. 10 (2000), pp. 2451–2471.
- [39] J. L. Elman, *Finding structure in time*. COGNITIVE SCIENCE, vol. 14, num. 2 (1990), pp 179-211.
- [40] G. Dreyfus, *Neural Networks: Methodology and Applications*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 2005.
- [41] S. Hochreiter, J. Schmidhuber. *Long Short-Term Memory*. Neural Comput. Vol 9, Num 8. (1997), pp. 1735-1780. Doi:10.1162/neco.1997.9.8.1735
- [42] Y. Wu, Mi. Schuster, Z. Chen, Q. V. Le, M. Norouzi, W. Macherey, M. Krikun, Y. Cao, Q. Gao, K. Macherey, J. Klingner, A. Shah, M. Johnson, X. Liu, Ł. Kaiser, S. Gouws, Y. Kato, T. Kudo, H. Kazawa, K. Stevens, G. Kurian, N. Patil, W. Wang, C. Young, J. Smith, J. Riesa, A. Rudnick, O. Vinyals, G. Corrado, M. Hughes y J. Dean, *Google's Neural Machine Translation System: Bridging the Gap between Human and Machine Translation*, pp. 1-23 (2016). arXiv:1609.08144v2
- [43] C. O. J. Tintaya. *PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES SÍSMICAS CON MATLAB*. Revista de Investigación de Física. Vol. 10 Num. 2 (2007), pp. 45-50. ISSN 1605-7744