



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

ALIANZAS DEFENSIVAS EN GRÁFICAS  
CIRCULANTES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIA

P R E S E N T A:

PAULA SANDRA ESPINOSA ZAMORA

DIRECTOR DE TESIS:

DRA. MARTHA GABRIELA ARAUJO PARDO

CIUDAD DE MÉXICO      2020





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



1. Datos del alumno

Espinosa  
Zamora  
Paula Sandra  
55 58 10 08 07  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Actuaría  
300073757

2. Datos del tutor

Dra  
Martha Gabriela  
Araujo  
Pardo

3. Datos del sinodal 1

Dra  
Mucuy-Kak del Carmen  
Guevara  
Aguirre

4. Datos del sinodal 2

Dra  
Mika  
Olsen

5. Datos del sinodal 3

Dr  
Juan José  
Montellano  
Ballesteros

6. Datos del sinodal 4

Dr  
Diego Antonio  
González  
Moreno

7. Datos del trabajo escrito

Alianzas defensivas en gráficas circulantes  
68 p  
2020



# Agradecimientos

Agradezco a Dios permitirme estar y estar bien.

Agradezco a la UNAM por la oportunidad de estudiar en Ciencias.

Agradezco a la Dra. Gaby por su gran paciencia y por todas las clases brindadas.

Agradezco al Jurado por la revisión de este trabajo y por sus aportaciones.

Agradezco a mi mamá Tere y a mi papá Polo, por todo lo que me han dado y por que toda la vida me han apoyado en los proyectos que inicio.

Agradezco a toda mi familia y a mis amigos, presentes y también a los que ya no están, por el ánimo a continuar adelante.

Finalmente, agradezco a mi esposo Raymundo y a mis hijos David y Matías por todo el apoyo y por ser mi motor en la vida.



# Índice general

Agradecimientos	v
Indice de figuras	IX
Introducción	XI
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Preliminares . . . . .	1
<b>2. Alianzas</b>	<b>13</b>
2.1. Número Alianza Defensiva . . . . .	15



2.2. Alianzas defensivas en gráficas regulares . . . . .	18
2.3. Propiedades en alianzas defensivas . . . . .	24
2.4. Alianzas defensivas fuertes en gráficas regulares . . . . .	33
<b>3. Alianzas defensivas en gráficas circulantes</b>	<b>35</b>
3.1. Propiedades de una gráfica circulante . . . . .	37
3.2. Alianzas en gráficas circulantes . . . . .	41
3.2.1. Alianzas en gráficas circulantes de grados pequeños. . . . .	45
3.2.2. Alianzas en gráficas circulantes de grado 6 . . . . .	47
<b>Conclusiones</b>	<b>63</b>
<b>Trabajo Futuro</b>	<b>65</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>67</b>

# Indice de figuras

1.1 Aristas en $G$ y aristas en $G_1$ en la prueba del teorema 1.6 .....	10
2.1 Gráfica 1-regular.....	19
2.2 Alianza defensiva de gráfica 1-regular.....	19
2.3 Gráfica 2-regular.....	21
2.4 Alianza defensiva de gráfica 2-regular.....	21
2.5 Gráfica 3-regular.....	21
2.6 Alianza defensiva de gráfica 3-regular.....	21
2.7 Gráfica 4-regular.....	23
2.8 Alianza defensiva de gráfica 4-regular.....	23

2.9	Gráfica 5-regular.....	24
2.10	Alianza defensiva de gráfica 5-regular.....	24
2.11	Conjunto alianza inducido $S_{(6,6)}$ con sucesión de grados asociada.....	29
2.12	Conjunto alianza inducido $S_{(7,6)}$ con sucesión de grados asociada.....	30
2.13	Conjunto alianza inducido $S_{(8,6)}$ y conjunto alianza inducido $S_{(8,7)}$ .....	32
3.1	Ejemplo de gráficas circulantes.....	36
3.2	Gráfica circulante $C_{12}(1, 4)$ con su latiz de representación.....	40
3.3	Gráfica circulante $C_{12}(1, 4)$ , con alianza defensiva formada por el conjunto $\{0, 1, 4, 5\}$ .....	43
3.4	Gráfica circulante $C_{12}(1, 4, 5)$ , con alianza defensiva formada por el conjunto $\{0, 1, 4, 5, 9\}$ .....	44
3.5	$\langle\{0, a, b, -a\}\rangle \cong K_4$ , subgráfica inducida de $C_n(\pm 2a, \pm(b - a), \pm(b + a))$ .....	49
3.6	$\langle\{0, a, b, c\}\rangle \cong K_4$ subgráfica inducida de $C_n(\pm(a - b), \pm(b - c), \pm(c - a))$ .....	49

# Introducción

El presente trabajo consiste de un estudio sobre la estructura y propiedades de ciertos subconjuntos de vértices de una gráfica llamados *alianzas*. El trabajo se enmarca dentro de la teoría de gráficas y está basado en el artículo “Defensive Alliances in Circulant Graphs”, publicado en 2014 y cuyas autoras son Gabriela Araujo Pardo y Eulalia Barrière [1].

El estudio de alianzas fue introducido en 2004 por P. Kristiansen, S.M. Hedetniemi, y S.T. Hedetniemi [7]. Existen diferentes tipos de *alianzas* dependiendo del número de vecinos que tiene cada vértice del conjunto dentro y fuera de él, así pues existen alianzas defensivas, ofensivas y duales. En este trabajo nos enfocamos en las alianzas defensivas, las cuales se caracterizan porque cada vértice del conjunto alianza tiene más o igual número de vecinos dentro del conjunto que fuera de él.

Una alianza podemos entenderla como una colección de elementos que tienen característi-

cas en común o que tienen propiedades similares de entre todos los elementos de la colección. Ejemplos de alianzas puede ser un grupo de empresas con los mismos intereses económicos, una red de caminos comunicados entre sí, un grupo de personas unidas por una amistad en común, un grupo de plantas perteneciendo a la misma familia botánica, un grupo de usuarios de Twitter que siguen o son seguidos entre ellos o un grupo de usuarios de Facebook compartiendo una actividad en común. Por ejemplo, Facebook puede ser visto como una enorme red, o gráfica, en donde cada usuario es un vértice y dos vértices son conectados si son amigos. Con esta idea, una alianza defensiva en Facebook se puede pensar como una colección de usuarios (o vértices) teniendo más amigos dentro de la colección que fuera de ella.

El propósito de este trabajo es exponer qué son las alianzas defensivas, encontrar o bien caracterizar las alianzas defensivas primero en gráficas regulares y después en gráficas circulantes.

En la primera parte del trabajo introducimos los conceptos necesarios de teoría de gráficas, en la segunda parte definimos el *número alianza*, que es el mínimo cardinal de una alianza, así como iniciamos su estudio en gráficas regulares, y mostramos algunos resultados sobre este número. Debido a que la dificultad de caracterizar una alianza en una gráfica se hace mayor conforme se incrementan los parámetros de orden y grado de la gráfica, este

trabajo estudia las alianzas defensivas en gráficas regulares de grado a lo más 6, muestra resultados específicos de alianzas defensivas para estas gráficas, así como presenta cotas inferiores y superiores para el número alianza.

Finalmente buscamos alianzas defensivas en gráficas circulantes, encontrando cotas inferiores y superiores para el número alianza en gráficas circulantes hasta con tres generadores.

En particular destacamos que la presente introducción está escrita bajo el enfoque que aparece en [3].



# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Preliminares

En este capítulo daremos las definiciones y resultados necesarios de teoría de gráficas, que utilizaremos a lo largo de esta tesis.

Una *gráfica*  $G$  consta de un conjunto finito no vacío de vértices, denotado por  $V(G)$ , y un conjunto de aristas, denotado por  $E(G)$ , el cual consiste de parejas de elementos de  $V(G)$ , a los elementos del conjunto  $E(G)$  les llamamos aristas de  $G$ . Denotamos a la gráfica como  $G = (V(G), E(G))$ .



El *orden* de la gráfica  $G$  es el número de vértices de la gráfica, lo denotamos por  $n$ , entonces  $n = |V(G)|$  y el *tamaño* de la gráfica  $G$  es el número de aristas de la gráfica, por lo que  $m = |E(G)|$ .  $G(n, m)$  denota una gráfica de orden  $n$  y tamaño  $m$ .

Decimos que los vértices  $u, v \in V(G)$  son *adyacentes*, lo denotamos como  $u \sim v$ , si existe una arista  $e \in E(G)$  en donde  $e$  es la pareja  $uv$ , denotada como  $e = uv$ , también podemos decir que los vértices  $u$  y  $v$  son vecinos uno del otro. En tal caso, también decimos que el vértice  $u$  y la arista  $e$  son *incidentes* uno del otro, así como el vértice  $v$  y la arista  $e$  lo son. Distintas aristas incidentes con un vértice común son aristas adyacentes.

Definimos a la *vecindad* del vértice  $u$  como el conjunto de vecinos de  $u$  y se denota por  $N_G(u) = \{v \in V \mid uv \in E(G)\}$ . Y la *vecindad cerrada* de  $u$  es  $N_G[u] = N_G(u) \cup \{u\}$ .

El *grado* de un vértice  $u$  es la cardinalidad de su vecindad y se denota por  $deg_G(u)$ , entonces  $deg_G(u) = |N_G(u)|$ . Llamamos *grado mínimo* de la gráfica, al menor grado de un vértice  $u \in V(G)$  y lo denotamos como  $\delta(G) = \min\{deg_G(u) \mid u \in V(G)\}$ . El *grado máximo* de la gráfica es el mayor grado de un vértice  $u$  y lo denotamos como  $\Delta(G) = \max\{deg_G(u) \mid u \in V(G)\}$ . Para un vértice  $u \in V(G)$ ,  $0 \leq \delta(G) \leq deg_G(u) \leq \Delta(G) \leq n - 1$ . Si  $deg_G(u) = 0$  decimos que  $u$  es un *vértice aislado*, si  $deg_G(u) = n - 1$ , entonces  $u$  es adyacente a cada vértice de la gráfica. Decimos que un *vértice*  $u$  es *par* si su grado es par; si su grado es impar lo llamamos *vértice impar*.

Definimos un *camino* como la sucesión de vértices, tal que, vértices consecutivos en la sucesión son adyacentes. Decimos que el *camino es abierto* si empieza en un vértice y termina en otro y un *camino es cerrado* si empieza y termina en el mismo vértice. Si un camino no repite aristas, lo denominamos *paseo*. Si un camino no repite vértices ni aristas lo llamamos *trayectoria*, denotada por  $P_n$ , en donde  $n$  indica el orden de la trayectoria. La longitud de una trayectoria es el número de aristas que se recorren, se denota por  $long(P_n)$  y en este caso es  $long(P_n) = n - 1$ .

Un camino cerrado que no repite vértices ni aristas a excepción del primer y último vértice es un *ciclo* y lo denotamos como  $C_n$ , en donde  $n$  indica el orden del ciclo. El ciclo más pequeño es un triángulo y tiene orden 3. Llamamos el *cuello* de  $G$  al ciclo de longitud mínima de la gráfica, denotado como  $g(G)$ . Al ciclo de longitud máxima lo llamamos *circunferencia* de  $G$  y lo denotamos como  $l_c(G)$ .

Dada una gráfica  $G = (V, E)$  decimos que la gráfica  $G$  es *regular* si  $\delta(G) = \Delta(G)$ . Si para cada vértice de  $G$ ,  $deg_G(v) = r$  con  $0 \leq r \leq n - 1$ , entonces  $G$  es *r-regular*, o bien  $G$  es regular de grado  $r$ .

Denotamos por  $K_n$  a una *gráfica completa* con  $n$  vértices y todas las  $\binom{n}{2}$  aristas posibles están presentes. Una gráfica  $G$  es una *gráfica bipartita* si  $V(G)$  puede ser particionada en dos subconjuntos  $U$  y  $W$ , llamados *conjuntos partitas*, tal que cada arista de  $G$  une un

vértice de  $U$  con un vértice de  $W$ .

Una gráfica  $S$  es una subgráfica de  $G$ , es decir  $S \subseteq G$ , si  $V(S) \subseteq V(G)$  y  $E(S) \subseteq E(G)$ .

Si  $S \neq G$ , entonces  $S$  es una *subgráfica propia* de  $G$ . Una subgráfica  $S$  es una *subgráfica inducida* y se denota por  $\langle S \rangle_G$ , cuando para  $u, v \in V(S)$  y  $uv \in E(G)$ , entonces  $uv \in E(S)$ .

Una subgráfica propia de una gráfica  $G$  puede ser obtenida quitando vértices y aristas desde  $G$ .  $G - e$  denota una subgráfica de  $G$  donde el conjunto de aristas consiste de todas las aristas de  $G$  excepto  $e$ .  $G + e$  denota una gráfica con un conjunto de vértice  $V(G)$  y un conjunto de arista  $E(G) \cup \{e\}$ .

Dado un conjunto de vértices  $S \subseteq V(G)$ , la vecindad de un vértice  $u \in V(S)$  es  $N_S(u) = \{v \in S \mid uv \in E(G)\}$ , o bien  $N_S(u) = N_G(u) \cap S$ . Denotamos el complemento de  $S$  en  $V$  como  $\bar{S}$ , por lo que  $N_G(u) = N_S(u) \cup N_{\bar{S}}(u)$ . El límite de  $S$  es el conjunto  $\partial(S) = \cup_{u \in S} N_G(u) - S$ .

Decimos que una gráfica  $G$  es *conexa*, si para todo  $u, v \in V(G)$ , existe una  $uv$ -trayectoria.

Decimos que la gráfica es *disconexa* si no es conexa.

Dada una gráfica conexa de orden  $n$  y dos vértices  $u$  y  $v \in V(G)$ , decimos que la distancia entre  $u$  y  $v$  es la longitud más pequeña de cualquier  $uv$ -trayectoria en  $G$  y es denotada

como  $d(u, v) = k$ . Una  $uv$ -trayectoria de longitud  $d(u, v)$  es llamada una  $uv$ -geodésica. El diámetro de  $G$ , denotado como  $diám(G)$ , es la máxima distancia que existe entre dos vértices de  $G$ .

A continuación se enuncia el teorema 1.1 conocido como el primer teorema de Teoría de Gráficas o bien el teorema del saludo de mano, el cual nos da un resultado basándonos en el grado de los vértices.

**Teorema 1.1** (El teorema del saludo de mano) *Si  $G$  es una gráfica de tamaño  $m$ , entonces:*

$$\sum_{u \in V(G)} deg(u) = 2m.$$

*Demostración.* Si sumamos los grados de los vértices de  $G$ , cada arista de  $G$  es contada dos veces, una vez por cada uno de sus dos vértices incidentes.

□

**Corolario 1.2** *Toda gráfica tiene un número par de vértices impares.*

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica de tamaño  $m$ . Dividimos  $V(G)$  en dos subconjuntos  $V_1$

y  $V_2$ , donde  $V_1$  consiste de los vértices impares de  $G$  y  $V_2$  consiste de los vértices pares de  $G$ . Por el teorema del saludo de mano tenemos que:

$$\sum_{u \in V(G)} \deg(u) = \sum_{u \in V_1} \deg(u) + \sum_{u \in V_2} \deg(u) = 2m.$$

El número  $\sum_{u \in V_2} \deg(u)$  es par ya que es una suma de números enteros pares. Entonces

$$\sum_{u \in V_1} \deg(u) = 2m - \sum_{u \in V_2} \deg(u)$$

Debido a que cada factor de la  $\sum_{u \in V_1} \deg(u)$  es impar y la suma es par, podemos concluir que el número de sumandos es par y por lo tanto el número de vértices de grado impar es par.

□

**Teorema 1.3** *Si una gráfica de orden  $n$  contiene un vértice de grado  $n - 1$ , entonces  $G$  es conexa.*

*Demostración.* Supongamos que  $\deg_G(w) = n - 1$ , para  $w \in V(G)$ . Entonces  $w$  es adyacente a todos los vértices de  $G$ . Para mostrar que  $G$  es conexa, necesitamos probar que

para cualquier  $u, v \in G$  existe una  $uv$ -trayectoria. Esto es cierto si algunos de los dos de  $u$  o  $v$  es  $w$ . Si ninguno de  $u$  o  $v$  es  $w$ , como  $w$  es adyacente a ambos, entonces existe una  $uvw$ -trayectoria por lo que  $G$  es conexa.  $\square$

**Teorema 1.4** *Sea  $G$  una gráfica de orden  $n$ . Si,*

$$\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n - 1$$

*para cualesquiera dos vértices no adyacentes  $u$  y  $v$  de  $G$ , entonces  $G$  es conexa y  $\text{diam}(G) \leq 2$ .*

*Demostración.* Mostraremos que entre cualquier par de vértices hay una trayectoria de longitud a lo más 2. Sean  $u, v \in V(G)$ . Si  $uv \in E(G)$ , entonces  $(u, v)$  es una trayectoria. Entonces asumiremos que  $uv \notin E(G)$ . Sabemos por hipótesis que  $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n - 1$ , esto implica que debe haber un vértice  $w$  que es adyacente a ambos a  $u$  y  $v$ ; por lo tanto  $(u, w, v)$  es una trayectoria en  $G$ .  $\square$

**Corolario 1.5** *Si  $G$  es una gráfica de orden  $n$  con  $\delta(G) \geq (n - 1)/2$ , entonces  $G$  es conexa*

*Demostración.* Para cada dos vértices no adyacentes  $u$  y  $v$  de  $G$ ,

$$\deg(u) + \deg(v) \geq \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} = n-1$$

Por el teorema 1.4  $G$  es conexa. □

Hemos podido ver que los parámetros de orden y tamaño de una gráfica nos proporcionan mucha información acerca de ella, así como el grado de los vértices. Si los grados de los vértices de una gráfica  $G$  son listados en una sucesión  $s$ , entonces  $s$  es llamada *sucesión de grados* de  $G$ . Una sucesión finita no creciente de números enteros no negativos es llamada *sucesión gráfica*, o bien *gráfica*, si es la sucesión de grados de alguna gráfica. El siguiente teorema nos ayuda a saber cuándo una sucesión de grados es gráfica.

**Teorema 1.6** (*Teorema de Havel-Hakimi*)

Una sucesión no creciente  $s : d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$  (con  $n \geq 2$ ) de enteros no negativos, donde  $d_1 \geq 1$ , es gráfica si y sólo si la sucesión:

$$s_1 : d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n.$$

es gráfica.

*Demostración.* Probaremos la necesidad. Supongamos que  $s_1$  es gráfica, entonces hay un gráfica  $G_1$  de orden  $n - 1$ , con sucesión de grados  $(d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$  y  $V(G_1) = \{v_2, v_3, \dots, v_n\}$ , tal que,  $\deg_G(v_i) = d_i - 1$  para  $2 \leq i \leq d_1 + 1$  y  $\deg_G(v_i) = d_i$  para  $d_1 + 2 \leq i \leq n$ .

Construimos una gráfica  $G$  desde  $G_1$  agregando un nuevo vértice  $v_1$ , con  $\deg_G(v_1) = d_1$ ,  $G = G_1 \cup \{v_1\}$  y agregamos las aristas  $v_1v_i$  para  $2 \leq i \leq d_1 + 1$ , entonces la sucesión de grados de  $G$  es  $s = (d_1, d_2, \dots, d_{d_1+1}, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$  y  $\deg_G(v_i) = d_i$  para  $1 \leq i \leq n$ , que es gráfica.

Probaremos la suficiencia. Ahora asumiremos que  $s$  es gráfica, es decir que es la sucesión de grados de una gráfica  $G$ . Vamos a demostrar que existe  $G$  tal que contiene un vértice  $v_1$  de grado  $d_1$  que es adyacente a los vértices  $\{v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}\}$  cuyos grados son  $(d_2, d_3, \dots, d_{d_1+1})$ . Supongamos lo contrario, que no hay una gráfica con sucesión de grados  $s$  que contiene un vértice de grado  $d_1$  que es adyacente a los vértices de grado  $d_2, d_3, \dots, d_{d_1+1}$ . De entre todas las gráficas con sucesión de grados  $s$ , sea  $G$  una gráfica con  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$  tal que  $\deg_G(v_i) = d_i$  para  $1 \leq i \leq n$  y la suma de los grados de los vertices adyacentes a  $v_1$  es máxima.

Como  $v_1$  no es adyacente a los vértices que tienen grado  $d_2, d_3, \dots, d_{d_1+1}$ , es decir, no es adyacente a los vértices que tienen los mayores grados de la gráfica, existe un vértice  $v_r$ ,



con  $2 \leq r \leq d_1 + 1$ , tal que  $v_1$  no es adyacente a  $v_r$  y existe un vértice  $v_s$ , con  $s > d_1 + 1$ , tal que  $v_1$  es adyacente a  $v_s$ , como  $\deg_G(v_r) \geq \deg_G(v_s)$  entonces existe un vértice  $v_t$  tal que  $v_t$  es adyacente a  $v_r$  pero no a  $v_s$ . Sea  $G_1$  una gráfica obtenida desde  $G$  reemplazando las aristas  $v_1v_s$  y  $v_rv_t$  por las aristas  $v_1v_r$  y  $v_s v_t$ , como se muestra en la figura 1.1. Entonces  $G$  y  $G_1$  tienen el mismo conjunto de vértices y los grados de cada vértice son preservados, es decir  $s$  es sucesión de grados de  $G$  y de  $G_1$ , sin embargo en  $G_1$ ,  $v_s$  es adyacente a  $v_1$  por lo que la suma de los grados de los vértices adyacentes a  $v_1$  en  $G_1$  es mayor que en  $G$ , lo que es una contradicción.

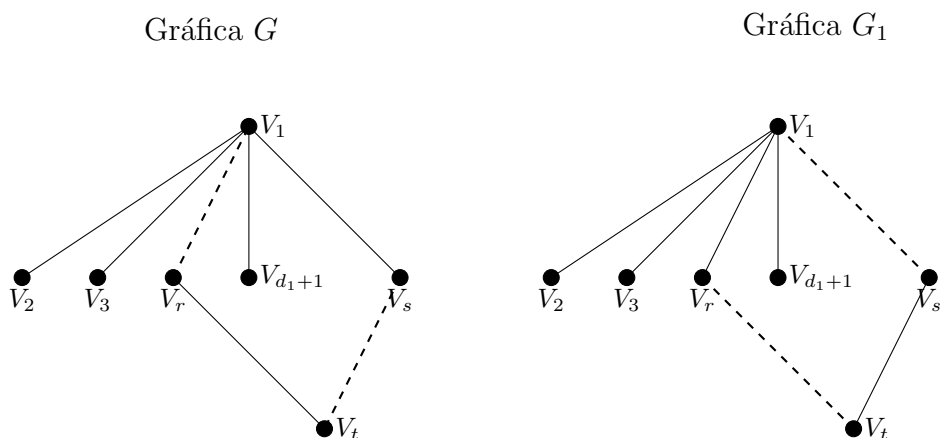


Figura 1.1: Aristas en  $G$  y aristas en  $G_1$  en la prueba del teorema 1.6

□

Dos gráficas  $G$  y  $H$  son isomorfas, si existe una correspondencia uno a uno  $\phi$  desde  $V(G)$

a  $V(H)$  tal que  $uv \in E(G)$  si y solo si  $\phi(u)\phi(v) \in E(H)$ . En este caso,  $\phi$  es llamado un *isomorfismo* desde  $G$  a  $H$ . Así, si  $G$  y  $H$  son gráficas isomorfas entonces decimos que  $G$  es isomorfa a  $H$  y lo denotamos como  $G \cong H$ .

En la tercera parte de este estudio se aborda el tema de gráficas circulares, a continuación daremos la definición de máximo común divisor, el cuál utilizaremos en dicho apartado.

**Definición 1.7** Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$ , donde al menos uno de  $a, b \neq 0$ . Entonces,  $c \in \mathbb{Z}^+$  se denomina *máximo común divisor* (mcd) de  $a, b$  si

- a)  $c|a, c|b$  (es decir,  $c$  es un divisor común de  $a$  y  $b$ ), y
- b) para cualquier divisor común  $d$  de  $a, b$  se tiene que  $d|c$ .



# Capítulo 2

## Alianzas

En este capítulo damos la definición de alianza defensiva y mencionamos algunas propiedades en estos conjuntos. Definimos el número alianza defensiva como el mínimo cardinal de un conjunto alianza, mostrando cotas para este número e iniciamos el estudio de alianzas defensivas en gráficas regulares.

Una alianza es un subconjunto  $S$  de vértices de una gráfica, la cuál se clasifica de acuerdo a la cardinalidad de la vecindad de sus vértices. Existen alianzas defensivas y alianzas ofensivas, aunque este trabajo se limita al estudio de las alianzas defensivas, a continuación definimos tanto las alianzas defensivas como las alianzas ofensivas.

**Definición 2.1.** Sea  $G$  una gráfica de orden  $n$  y tamaño  $m$ , un conjunto no vacío  $S \subseteq V(G)$  es una **alianza defensiva** de  $G$ , si para cada  $v \in S$  se cumple que:

$$|N_S[v]| \geq |N_{\bar{S}}(v)| \quad (1)$$

Llamaremos a esta desigualdad, condición alianza defensiva. Y si para cada  $v \in S$  se cumple la desigualdad estricta, entonces decimos que la *alianza defensiva es fuerte*, o bien que la alianza cumple la condición alianza defensiva fuerte.

**Definición 2.2.** Sea  $G$  una gráfica de orden  $n$  y tamaño  $m$ , un conjunto no vacío  $S \subseteq V(G)$  es una **alianza ofensiva** de  $G$ , si para cada  $v \in \partial(S)$  se cumple que:

$$|N_S[v]| \geq |N_{\bar{S}}(v)| \quad (2)$$

en donde  $\partial(S) = \cup_{v \in S} N_G(v) - S$ .

Si para cada  $v \in \partial(S)$  se cumple la desigualdad estricta, entonces decimos que la *alianza ofensiva es fuerte*.

Llamamos a una alianza defensiva u ofensiva como *alianza defensiva u ofensiva crítica* si

ninguno de sus subconjuntos propios es una alianza del mismo tipo.

Si la alianza defensiva u ofensiva cumple las condiciones de un conjunto dominante total, es decir que cada vértice de la gráfica es adyacente a por lo menos un vértice de  $S$ , entonces decimos que la alianza defensiva u ofensiva es *global*. Y llamamos a una alianza *dual* si es una alianza defensiva y ofensiva al mismo tiempo.

## 2.1. Número Alianza Defensiva

Dentro del estudio de alianzas defensivas en una gráfica  $G$ , nos interesa determinar aquellos conjuntos que cumplen la condición alianza defensiva y que tienen la característica de tener una cardinalidad mínima, así como aquellos conjuntos alianza cuya cardinalidad es máxima, y con ello establecer cotas inferiores y cotas superiores para la cardinalidad de los conjuntos alianza.

En este sentido definimos el **número alianza defensiva**, denotado por  $a(G)$ , como la cardinalidad mínima del conjunto alianza defensiva y el **número superior alianza defensiva**, denotado por  $A(G)$ , como la cardinalidad máxima del conjunto alianza defensiva.

Para una gráfica  $G$ , consideremos las siguientes clases:  $\mathcal{A}(G)$ , la clase de alianzas defensivas

críticas y  $\hat{\mathcal{A}}(G)$ , la clase de alianzas defensivas críticas fuertes. Definimos:

- a. El número alianza defensiva de  $G$ ,

$$a(G) = \text{mín}\{|S| : S \in \mathcal{A}(G)\}$$

- b. El número superior alianza defensiva de  $G$ ,

$$A(G) = \text{máx}\{|S| : S \in \mathcal{A}(G)\}$$

- c. Número alianza defensiva fuerte de  $G$ ,

$$\hat{a}(G) = \text{mín}\{|S| : S \in \hat{\mathcal{A}}(G)\}$$

- d. Número superior alianza defensiva fuerte de  $G$ ,

$$\hat{A}(G) = \text{máx}\{|S| : S \in \hat{\mathcal{A}}(G)\}$$

Como primer resultado para el número alianza defensiva podemos decir que, dado que en una alianza defensiva  $S$  la cardinalidad de la vecindad de cada uno de sus vértices es mayor o igual en  $S$  que la cardinalidad de su vecindad en el complemento (condición alianza defensiva), entonces deducimos que el número alianza defensiva es mayor que la parte entera de la mitad del grado mínimo de una gráfica más uno, considerando a el

vértice mismo, y que es menor que el techo de la mitad del orden de la gráfica, ya que con ello, los vértices de  $G$  de grado máximo tienen una vecindad mayor en  $S$  que en  $\bar{S}$ , considerando que  $0 \leq \deg_G(u) \leq n - 1$ .

$$\left\lfloor \frac{\delta_G}{2} \right\rfloor + 1 \leq a(G) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \quad (3)$$

Y para el número alianza defensiva fuerte, como buscamos que estrictamente la vecindad de los vértices del conjunto alianza sea mayor en  $S$  que en  $\bar{S}$ , entonces tiene cota inferior el techo de la mitad del grado mínimo de la gráfica más uno, considerando el vértice mismo, y como cota superior la parte entera de la mitad del orden de la gráfica más el mismo.

$$\left\lceil \frac{\delta_G}{2} \right\rceil + 1 \leq \hat{a}(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \quad (4)$$

El número alianza de una gráfica  $G$  está también relacionado con el cuello de  $G$ , como lo veremos en la siguiente proposición.



**Proposición 2.1.1** *Sea  $G$  una gráfica con  $\delta_G \leq 4$ , entonces:*

$$g(G) \leq a(G).$$

*Demostración.* Por contradicción. Supongamos que existe  $S$  una alianza defensiva de  $G$  con  $a(G) \leq g(G)$ . Como  $g(G) \geq 3$ , entonces existe un vértice  $v \in S$ , tal que  $\deg_S(v) \leq 1$ , y donde  $\deg_{\bar{S}}(v) \geq \deg_G(v) - 1$ . Si  $\delta_G \leq 4$ , entonces  $\deg_{\bar{S}}(v) \geq 3$ , es decir  $N_S[v] \leq N_{\bar{S}}(v)$ . Contradicción, por que  $S$  no cumple la condición alianza defensiva para ser alianza defensiva de  $G$ . □

## 2.2. Alianzas defensivas en gráficas regulares

En este apartado iniciamos el estudio de alianzas defensivas en gráficas regulares. A continuación presentamos algunos resultados de [2], que nos serán útiles para el siguiente capítulo, así como presentamos algunos ejemplos de alianzas defensivas para gráficas regulares de grado menor o igual a 5.

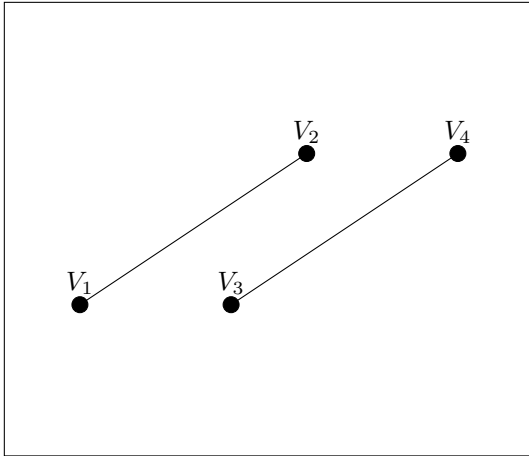


Figura 2.1:

Gráfica 1-regular

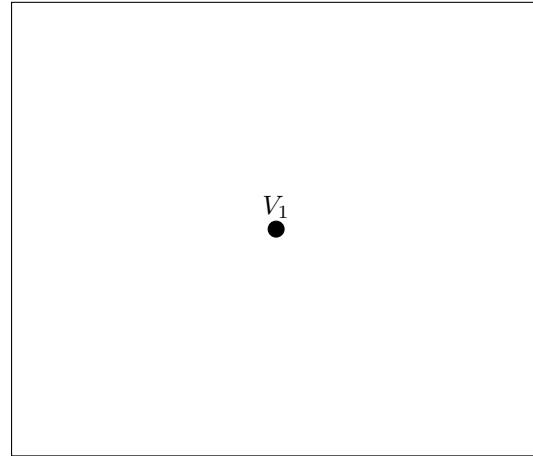


Figura 2.2:

Alianza defensiva de gráfica 1-regular

**Gráfica regular de grado 1.** Ejemplo de una gráfica regular de grado 1 lo podemos observar en la figura 2.1, en ella vemos como cada vértice es adyacente a sólo un vértice de la gráfica. En una gráfica 1-regular cualquiera de sus vértices es alianza defensiva, ya que con sólo tomar un vértice se cumple la condición alianza defensiva, es decir  $a(G) = 1$ . Así mismo el número superior alianza defensiva es 1 ya que es el máximo cardinal del conjunto en el cual la alianza no contiene un subconjunto propio que sea alianza defensiva, entonces  $a(G) = A(G) = 1$ . La figura 2.2 muestra una alianza defensiva de la gráfica 1-regular.

Para el número alianza defensiva fuerte, es necesario cumplir la desigualdad estricta de la condición alianza defensiva, por lo que  $\hat{a}(G) = 2$  y este cardinal es el mismo para el número superior alianza defensiva fuerte ya que no se puede tomar otro vértice que sea de grado

1 y que cumpla la desigualdad estricta en dicha condición, por lo que  $\hat{a}(G) = \hat{A}(G) = 2$ .

**Gráfica regular de grado 2.** En una gráfica  $G$  regular de grado 2, ver figura 2.3, por los parámetros mostrados en (3) de la sección 2.1, al menos debemos tomarnos 2 vértices para formar una alianza defensiva, y este es el máximo cardinal del conjunto alianza ya que de ampliarlo se contendrían subconjuntos propios que son alianzas defensivas, por lo que  $a(G) = A(G) = 2$ . Al tomar conjuntos de cardinalidad 2, la alianza satisface la desigualdad estricta en la condición alianza defensiva y es el máximo cardinal del conjunto que no contiene subconjuntos propios que sean alianza defensiva fuerte, por lo que  $a(G) = A(G) = \hat{a}(G) = \hat{A}(G) = 2$ . Una alianza defensiva de la gráfica 2-regular de la figura 2.3, es por ejemplo el conjunto  $\{v_1, v_3\}$ , ver figura 2.4.

**Gráfica regular de grado 3.** La figura 2.5 muestra ejemplo de una gráfica 3-regular. El número alianza defensiva es 2, ya que es el mínimo cardinal del conjunto alianza que satisface la igualdad en la condición alianza defensiva, este cardinal es el mismo para el número superior alianza defensiva ya que al tomarnos otro vértice el conjunto contendría una alianza defensiva, por lo que  $a(G) = A(G) = 2$ .

Para cumplir la desigualdad estricta en la condición alianza defensiva, para el número

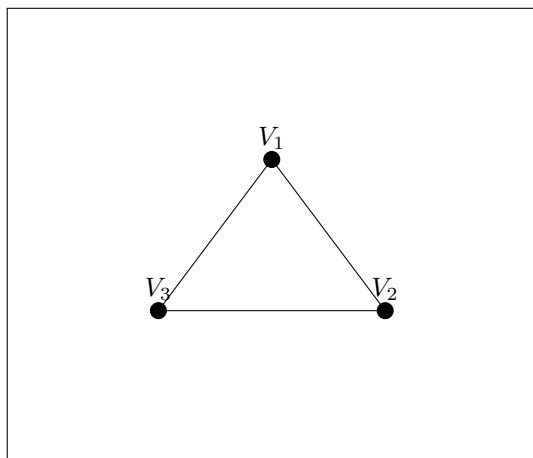


Figura 2.3:

Gráfica 2-regular

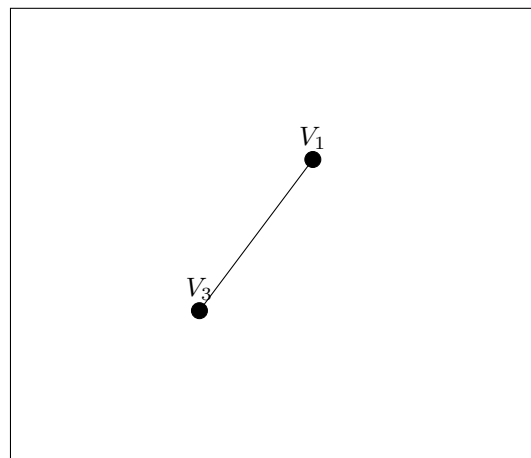


Figura 2.4:

Alianza defensiva de gráfica 2-regular

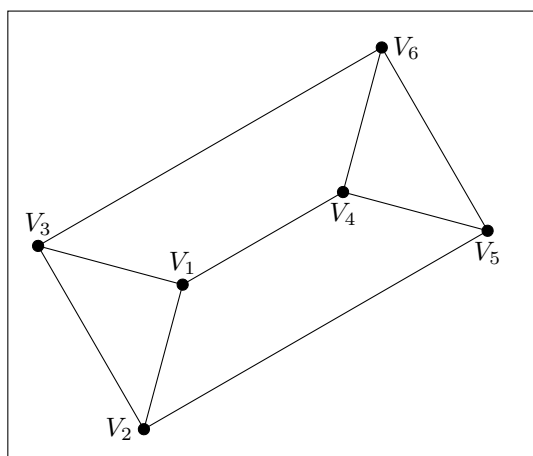


Figura 2.5:

Gráfica 3-regular

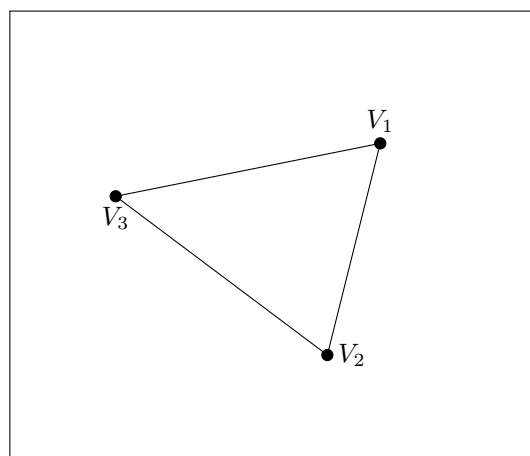


Figura 2.6:

Alianza defensiva de gráfica 3-regular

alianza defensiva fuerte  $\hat{a}(G)$  basta con encontrar el ciclo inducido de longitud mínima de la gráfica es decir el cuello, por lo que  $\hat{a}(G) = g(G)$  y para el número superior alianza defensiva basta con encontrar el ciclo inducido de longitud máxima,  $\hat{A}(G) = l_c(G)$ . Los vértices  $\{v_1, v_2, v_3\}$  muestran el cuello de la gráfica 3-regular de la figura 2.5, los cuáles son alianza defensiva fuerte, ver figura 2.6.

**Gráfica regular de grado 4.** Para una gráfica regular de grado 4, la mínima cardinalidad del conjunto alianza se obtiene con el ciclo de longitud mínima de la gráfica, por lo que el número alianza defensiva es el cuello de  $G$ , aún más, se alcanza una desigualdad estricta en la condición alianza defensiva, es decir, en una gráfica  $G$  regular de grado 4 el número alianza defensiva y el número alianza defensiva fuerte son iguales,  $a(G) = \hat{a}(G) = g(G)$ . La figura 2.7 muestra un ejemplo de una gráfica 4-regular y la figura 2.8 muestra una alianza de esta.

Y para el número superior alianza defensiva, el ciclo de longitud máxima de la gráfica es la máxima cardinalidad del conjunto, y dado que la desigualdad de la condición alianza defensiva es estricta, este es el mismo para el número superior alianza defensiva fuerte,  $A(G) = \hat{A}(G) = l_c(G)$ .

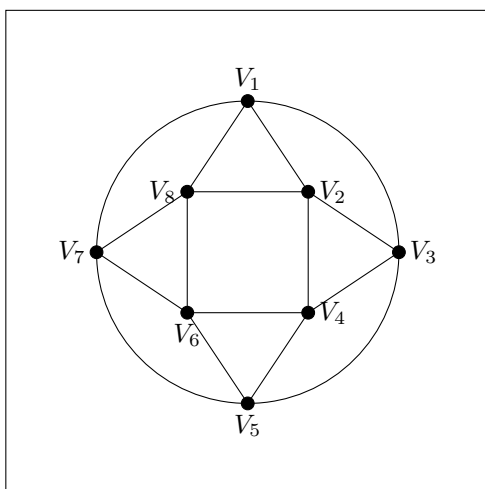


Figura 2.7:

Gráfica 4-regular

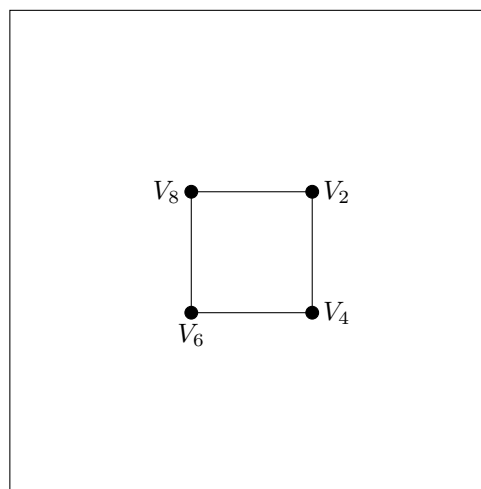


Figura 2.8:

Alianza defensiva de gráfica 4-regular

**Gráfica regular de grado 5.** En una gráfica regular de grado 5, el número alianza defensiva se alcanza con el ciclo de longitud mínima, ya que la vecindad cerrada de cada vértice en  $S$  es igual a la vecindad de los vértices en  $\bar{S}$ , con ello se satisface la condición alianza defensiva, entonces  $a(G) = g(G)$  y el número superior alianza defensiva se alcanza con el ciclo de longitud máxima  $A(G) = l_c(G)$ . En la figura 2.9 podemos ver un ejemplo de una gráfica 5-regular y la figura 2.10 muestra una alianza defensiva de esta.

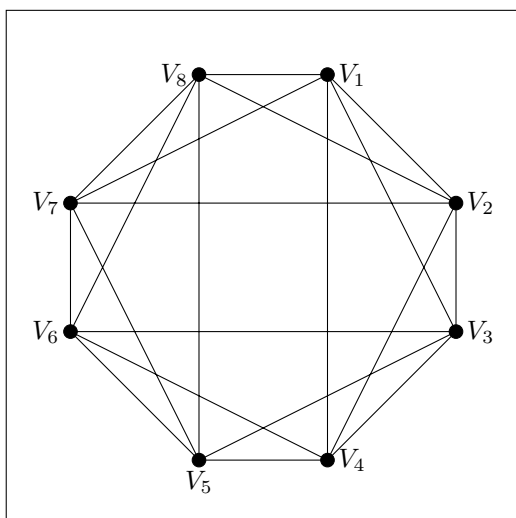


Figura 2.9:

Gráfica 5–regular

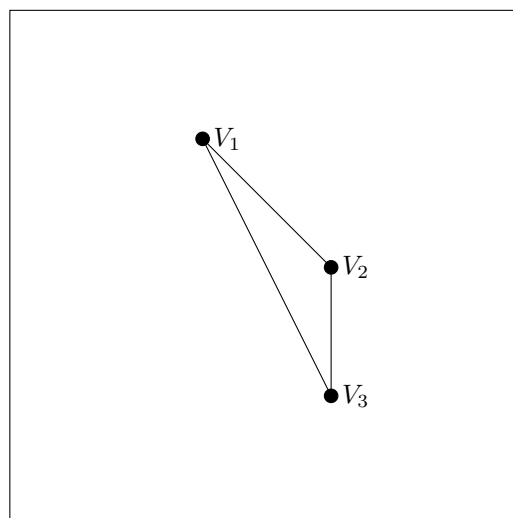


Figura 2.10:

Alianza defensiva de gráfica 5–regular

### 2.3. Propiedades en alianzas defensivas

Dada una gráfica  $G = (V(G), E(G))$  y  $S \subset V(G)$ , decimos que  $v \in S$  es *defendido* en  $S$  si satisface la condición alianza defensiva (1) del capítulo 2. Así mismo  $v$  es *fuertemente defendido* en  $S$ , si se satisface la desigualdad estricta de la condición alianza defensiva.

Las siguientes propiedades derivan de la definición de alianza defensiva, alianza defensiva fuerte y de los parámetros mostrados en (3) y (4) de la sección 2.1.

**Propiedad 2.3.1** Sea  $G = (V, E)$  una gráfica y  $v \in S \subset V(G)$ . Si  $d_G(v) = 2k$ ,  $v$  es defendido en  $S$  si y sólo si,  $d_S(v) \geq k$ . Aún más la condición alianza defensiva fuerte es equivalente a la condición alianza defensiva, es decir,  $v$  es defendido en  $S$  si y sólo si, este es fuertemente defendido en  $S$ .

**Propiedad 2.3.2** Sea  $G = (V, E)$  una gráfica y  $v \in S \subset V(G)$ . Si  $d_G(v) = 2k + 1$ ,  $v$  es defendido en  $S$  si y sólo si,  $d_S(v) \geq k$ ;  $v$  es fuertemente defendido en  $S$ , si y sólo si,  $d_S(v) \geq k + 1$ .

**Propiedad 2.3.3** Si  $G$  es  $d$ -regular, entonces  $S$  es una alianza en  $G$  si y sólo si,  $S$  induce una subgráfica de grado mínimo  $\delta_S \geq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ ;  $S$  es una alianza fuerte en  $G$  si y sólo si, esta induce una subgráfica de grado mínimo  $\delta_S \geq \lceil \frac{d}{2} \rceil$ .

Como vimos en las alianzas defensivas para gráficas regulares de orden menor o igual a 5, en cada una de las gráficas se satisfacen las propiedades mencionadas. En la gráfica  $G$  1-regular la alianzas defensivas son los vértices. Las alianzas críticas fuertes en una gráfica  $G$  1-regular o 2-regular y las alianzas críticas en una gráfica 2-regular o 3-regular son las aristas. Las alianzas críticas fuertes en una gráfica 3-regular o 4-regular y las alianzas críticas en una gráfica 4-regular o 5-regular son los ciclos inducidos.



**Definición 2.3.4** El *conjunto alianza inducido*  $(k, d)$ , es el conjunto de gráficas  $H$  de orden  $k$ , grado mínimo  $\delta_H \geq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ , y grado máximo  $\Delta_H \leq d$ , y que no contiene subgráficas propias de grado mínimo mayor que  $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ . Denotamos este conjunto como  $S_{(k,d)}$ .

Similarmente, el *conjunto alianza fuerte inducido*  $(k, d)$ , es el conjunto de gráficas  $H$  de orden  $k$ , de grado mínimo  $\delta_H \geq \lceil \frac{d}{2} \rceil$  y grado máximo  $\Delta_H \leq d$ , y que no contiene subgráficas propias de grado mínimo mayor que  $\lceil \frac{d}{2} \rceil$ . Denotamos este conjunto como  $\hat{S}_{(k,d)}$ .

Así por ejemplo, para la gráfica  $G$  regular de grado 1 y orden  $n$ , el conjunto alianza inducido  $(1, 1)$ ,  $S_{(1,1)} = \{v_i\}$  para  $1 \leq i \leq n$ . En la gráfica  $G$  regular de grado 2, el conjunto alianza inducido  $S_{(1,2)} = \emptyset$ ,  $S_{(2,2)} = \{K_2\}$  y si  $k \geq 3$ , entonces  $S_{(k,2)} = \emptyset$ . Para la gráfica  $G$  regular de grado 3 tiene como conjuntos alianza inducido  $S_{(1,3)} = \emptyset$ ,  $S_{(2,3)} = \{K_2\}$  y para  $k \geq 3$ ,  $S_{(k,3)} = \emptyset$ . Para la gráfica  $G$  regular de grado 4, los conjuntos alianza inducido  $S_{(1,4)} = \emptyset$ ,  $S_{(2,4)} = \emptyset$ ,  $S_{(3,4)} = \{K_3\}$ , y para  $k \geq 3$ ,  $S_{(k,4)} = \{C_k\}$ . Y en la gráfica  $G$  regular de grado 5, los conjuntos alianza inducido  $S_{(1,5)} = \emptyset$ ,  $S_{(2,5)} = \emptyset$ ,  $S_{(3,5)} = \{K_3\}$ , y si  $k \geq 3$ , entonces  $S_{(k,4)} = \{C_k\}$ .

**Proposición 2.3.5** Si  $G$  es  $d$ -regular, entonces  $S$  es alianza crítica de  $G$  de cardinalidad  $k$  si sólo si,  $\langle S \rangle_G \in S_{(k,d)}$ .

El conjunto alianza inducido  $(k, d)$ ,  $S_{(k,d)}$ , lo definimos como el conjunto de gráficas  $H$  de orden  $k$  con  $\delta_H \geq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$  y  $\Delta_H \leq d$ . Para  $S$ , alianza crítica de  $G$ , por la desigualdad (3) tenemos que  $\delta_H \geq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ . Al pedir que  $S$  sea crítica estamos pidiendo que no tenga subgráficas que sean alianzas, es decir que no haya subgráficas que tengan grado mínimo mayor a  $\delta_H \geq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ , por lo que  $\langle S \rangle_G \in S_{(k,d)}$ .

Notemos que al indicar que la alianza sea de cardinalidad  $k$  estamos definiendo a las subgráficas inducidas de un grado mínimo dado, esta familia puede ser descrita bajo sus posibles secuencias de grados.

**Definición 2.3.6** Una *sucesión admisible*  $s = (d_1, d_2, \dots, d_k)$  es una  $(k, d)$ -*sucesión admisible*, si hay una gráfica  $G_S$  en  $S_{(k,d)}$  con sucesión de grados  $s$ .

En las alianzas defensivas para las gráficas  $d$ -regulares que hemos analizado hasta el momento, se han determinado los grados de los vértices de la alianza, por lo que se ha indicado una sucesión de grados de la alianza defensiva.

Bajo la proposición 2.3.5 y definición 2.3.6 de esta sección, continuamos el estudio de alianzas defensivas en las gráficas 6-regulares.

Dada una gráfica regular de grado 6, la cardinalidad de las alianzas defensivas críticas de

$G$ , determina los grados de la sucesión asociada a  $S$  como subgráfica. Por la condición (3) de la sección 2.1, sabemos que las alianzas defensivas de una gráfica 6-regular son aquellas que grado mínimo mayor o igual a 3, por lo que su cardinalidad es mayor o igual a 4.

Para  $|S| = 4$ , una alianza defensiva de cardinalidad 4, únicamente tiene asociada la sucesión de grados  $(3, 3, 3, 3)$ , entonces  $\langle S \rangle = K_4$ . No se puede vincular otra sucesión de grados ya que si tratáramos de disminuir el grado de los vértices, la alianza no cumpliría la condición alianza defensiva (1) del capítulo 2, por otro lado no podemos incrementar el grado de los vértices ya que por el Teorema de Havel-Hakimi, la sucesión no sería gráfica, entonces  $S_{(4,6)} = \{K_4\}$ .

Para  $|S| = 5$ , una alianza defensiva de cardinalidad 5 sólo tiene asociada una sucesión de grados  $(4, 3, 3, 3, 3)$ , entonces  $\langle S \rangle = W_4$ . No podemos incrementar o disminuir el grado de los vértices y que se siga cumpliendo la condición alianza defensiva y además sea gráfica. Entonces  $S_{(5,6)} = \{W_4\}$ .

**Proposición 2.3.7** Dada una gráfica 6-regular, el conjunto alianza inducido  $S_{(6,6)}$  es:

$$S_{(6,6)} = \{C_3 \times K_2, K_{3,3}, (C_3 \times K_2) + e, K_{3,3} + e, \bar{C}_4 + \bar{K}_2, W_5\}.$$

Las sucesiones de grados asociadas a las gráficas del conjunto  $S_{(6,6)}$  son:  $(3,3,3,3,3,3)$ ,  $(4,4,3,3,3,3)$  y  $(5,3,3,3,3,3)$ . En la figura 2.11 se muestran las graficas asociadas. No podemos incluir a las sucesiones:  $(4,4,4,4,3,3)$ ,  $(5,5,3,3,3,3)$  y  $(5,5,5,5,5,5)$  ya que no son alianzas defensivas críticas, ni tampoco a las sucesiones:  $(4,4,4,4,4,4)$  y  $(5,5,5,5,3,3)$  ya que no son gráficas.

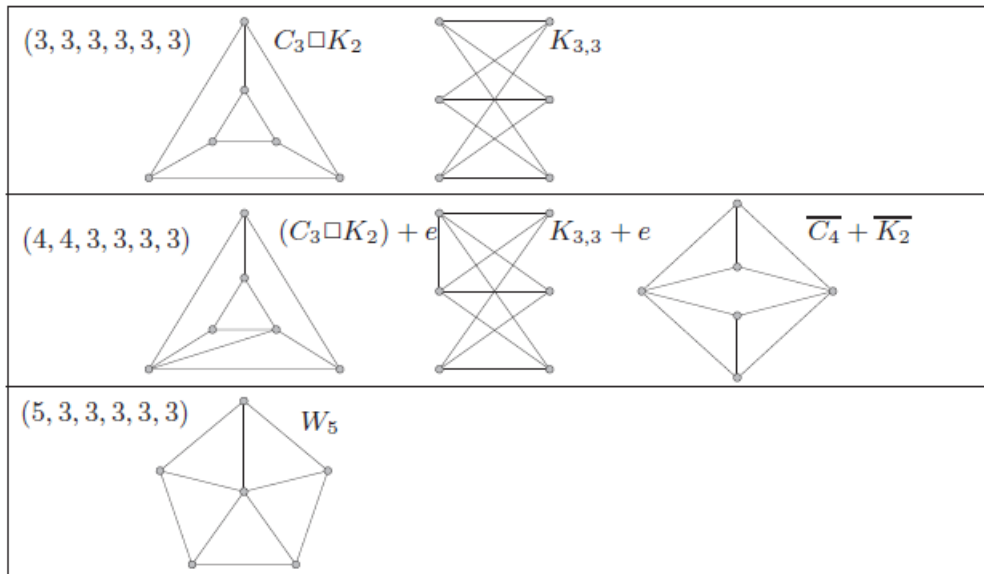


Figura 2.11: Conjunto alianza inducido  $S_{(6,6)}$ , con sucesión de grados asociada.

**Proposición 2.3.8** El conjunto alianza inducido  $(7, 6)$ ,  $S_{(7,6)}$ , contiene exactamente las 15 gráficas de la figura 2.12.

Las únicas sucesiones de grados que son gráficas y que cumplen la condición alianza defen-

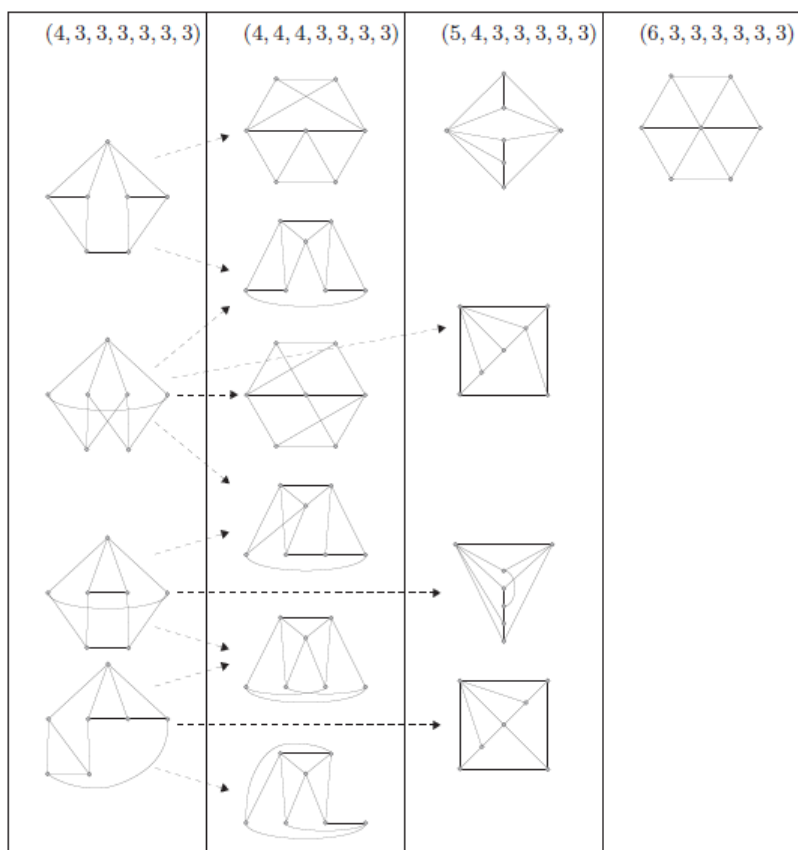


Figura 2.12: Conjunto alianza inducido  $S_{(7,6)}$ , con sucesión de grados asociada.

siva y que por lo tanto están asociadas a las gráficas del conjunto  $S_{(7,6)}$  son:  $(4, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$ ,  $(4, 4, 4, 3, 3, 3, 3)$ ,  $(5, 4, 3, 3, 3, 3, 3)$  y  $(6, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$ . En la figura 2.12 se muestran las gráficas inducidas asociadas a estas sucesiones de grados.

**Corolario 2.3.9** Sea  $G = (V, E)$  una gráfica 6-regular.

- $a(G) = 4 \Leftrightarrow K_4$  es una subgráfica inducida de  $G$ .
- $a(G) = 5 \Leftrightarrow W_4$  es una subgráfica inducida de  $G$  y  $K_4$  no lo es.
- $a(G) = 6 \Leftrightarrow$  algunas gráficas en  $S_{(6,6)}$  son una subgráfica inducida de  $G$ , y ninguna  $K_4$  o  $W_4$  lo son.
- $a(G) = 7 \Leftrightarrow$  algunas gráficas en  $S_{(7,6)}$  son una subgráfica inducida de  $G$ , y ninguna  $K_4$  o  $W_4$ , ni ninguna de las gráficas en  $S_{(6,6)}$  lo son.

Como hemos podido ver el número de gráficas en  $S_{(m,6)}$  incrementa con la cardinalidad de  $m$ . Mediante este análisis se puede obtener la siguiente afirmación.

**Afirmación 2.3.10.** El conjunto alianza inducido  $S_{(8,6)}$  contiene exactamente las 65 gráficas de la figura 2.13.

Los resultados que se enuncian para las gráficas 6-regulares se pueden extender como resultado previo para las gráficas 7-regulares. El conjunto  $(8,7)$ -alianza inducido,  $S_{(8,7)}$ , contiene exactamente las gráficas en  $S_{(8,6)}$ , más  $W_7$ . Para resumir tenemos:

$$S_{(6,7)} = S_{(6,6)}, S_{(7,7)} = S_{(7,6)}, S_{(8,7)} = S_{(8,6)} \cup \{W_7\}$$

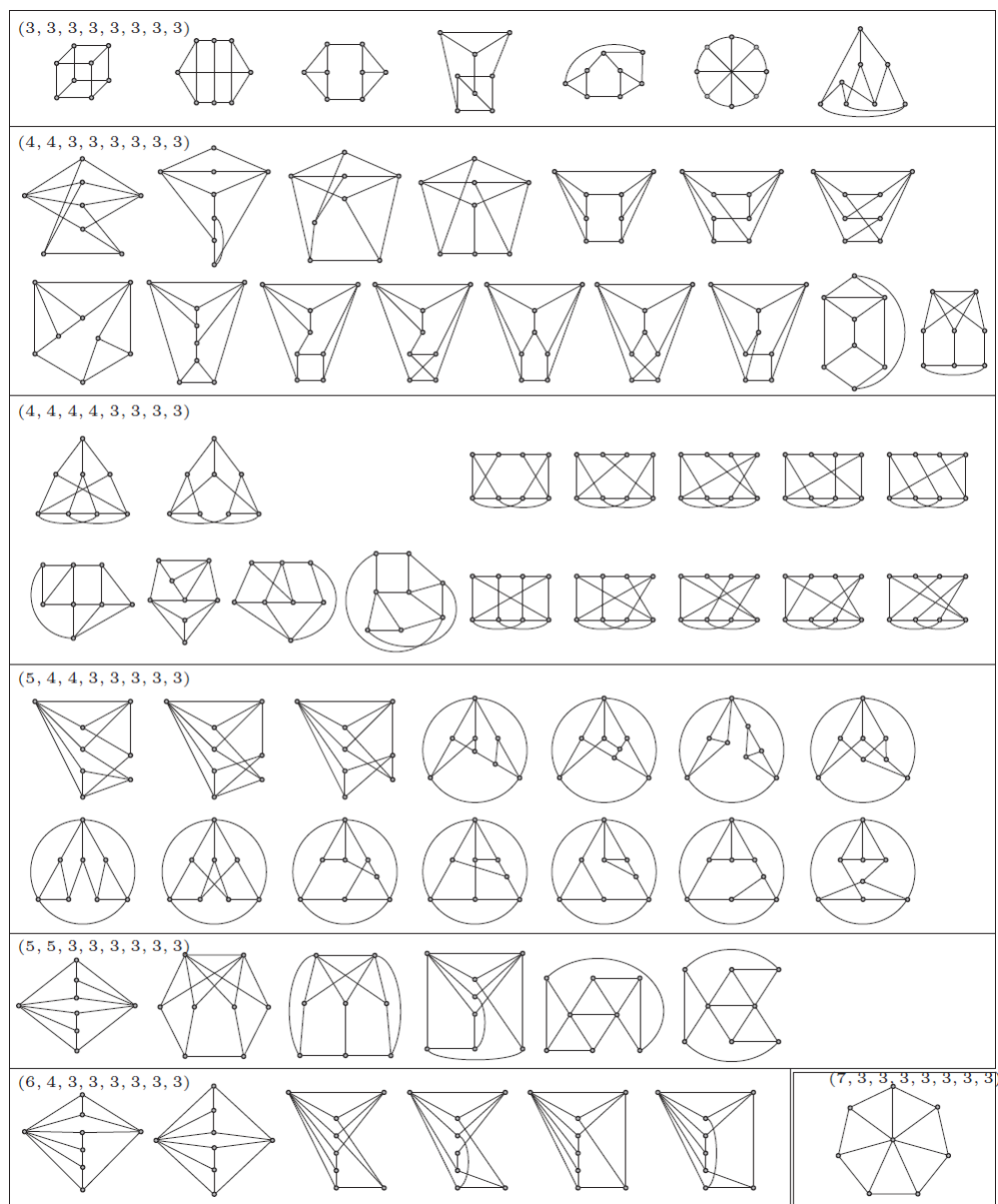


Figura 2.13: Conjunto alianza inducido  $S_{(8,6)}$  y conjunto alianza inducido  $S_{(8,7)}$ .

Notemos que el conjunto  $S_{(8,7)} \setminus S_{(8,6)}$  contiene sólo la gráfica  $W_7$ .

## 2.4. Alianzas defensivas fuertes en gráficas regulares

Hemos podido ver que las alianzas defensivas y las alianzas defensivas fuertes coinciden si  $G$  es  $d$ -regular y si  $d$  es par. Si  $d$  es impar, el conjunto alianza defensiva es un conjunto de vértices que induce una subgráfica con grado mínimo al menos  $\frac{d-1}{2}$  y grado máximo a lo más  $d$ , mientras que el conjunto alianza defensiva fuerte induce una subgráfica con grado mínimo al menos  $\frac{d+1}{2}$  y grado máximo a lo más  $d$ .

En la primera parte de este capítulo hemos especificado las alianzas defensivas fuertes para gráficas  $d$ -regulares con  $d \leq 4$ . A continuación mostramos algunos resultados para gráficas: 5- regulares, 6- regulares y 7- regulares.

**Gráfica regular de grado 5.** De acuerdo a la definición 2.3.4 de la sección 2.3, tenemos que  $\hat{S}_{(m,5)}$ , es el conjunto de gráficas de grado mínimo al menos 3 y grado máximo a lo más 5. Entonces si  $m \leq 6$ ,  $\hat{S}_{(m,5)} = S_{(m,6)}$ . Para  $m = \{7, 8\}$  tenemos que eliminar de  $S_{(m,6)}$  las gráficas con grado máximo 6. Para ser precisos,  $\hat{S}_{(7,5)} = S_{(7,6)} \setminus \{W_6\}$  y  $\hat{S}_{(8,5)}$  contiene las 59 gráficas en  $S_{(8,6)}$ , quitando las de grado máximo 6, figura 2.13.

**Gráfica regular de grado 6.** Debido a que  $d$  es par, tenemos que  $\hat{S}_{(m,6)} = S_{(m,6)}$ .



**Gráfica regular de grado 7.** Una gráfica está en  $\hat{S}_{(m,7)}$  si tiene grado mínimo 4 y grado máximo a lo más 7, y no contiene subgráficas isomórfas a las gráficas en  $\hat{S}_{(m',7)}$ , para cualquier  $4 \leq m' < m$ . En este caso, no tenemos algún resultado acerca del conjunto alianzas fuertes  $(m, 7)$ -inducidas desde el conjunto de alianzas  $(m, 7)$ -inducidas.

## Capítulo 3

# Alianzas defensivas en gráficas circulantes

Al estudiar las alianzas defensivas en gráficas regulares hemos observado que la dificultad de determinar las alianzas de una gráfica se hace mayor al incrementar los parámetros de orden y grado de la misma, por esta razón nos enfocaremos al estudio de alianzas defensivas en un tipo de gráficas en particular: *las gráficas circulantes*, que si bien son gráficas regulares se caracterizan también por ser simétricas. Las gráficas circulantes han sido estudiadas en distintos problemas de teoría de gráficas y por eso nos pareció natural estudiar sus alianzas.

**Definición 3.1 (Gráfica circulante de orden  $n$  con generadores  $(c_1, c_2, \dots, c_d)$ )** La gráfica circulante de orden  $n$  con generadores  $(c_1, c_2, \dots, c_d)$  es la gráfica  $G = C_n(c_1, c_2, \dots, c_d)$  con vértices en el conjunto  $\mathbb{Z}_n$  y adyacencias definidas por  $v \sim v \pm c_i$  para cada  $v \in \mathbb{Z}_n$  y para  $i = 1, \dots, d$ .

Observación: La notación usual para una gráfica circulante con generadores  $(c_1, c_2, \dots, c_d)$  es  $C_n(\pm c_1, \pm c_2, \dots, \pm c_d)$ , pero debido a que sólo estamos trabajando con gráficas no dirigidas usaremos simplemente la notación  $C_n(c_1, c_2, \dots, c_d)$ , asumiendo que tanto  $c_i$  y  $-c_i$  están en el conjunto generador. Por ejemplo en la figura 3.1 mostramos dos gráficas circulantes  $C_9(1, 3)$  y  $C_{11}(1, 4)$ , estas gráficas fueron elejidas al azar.

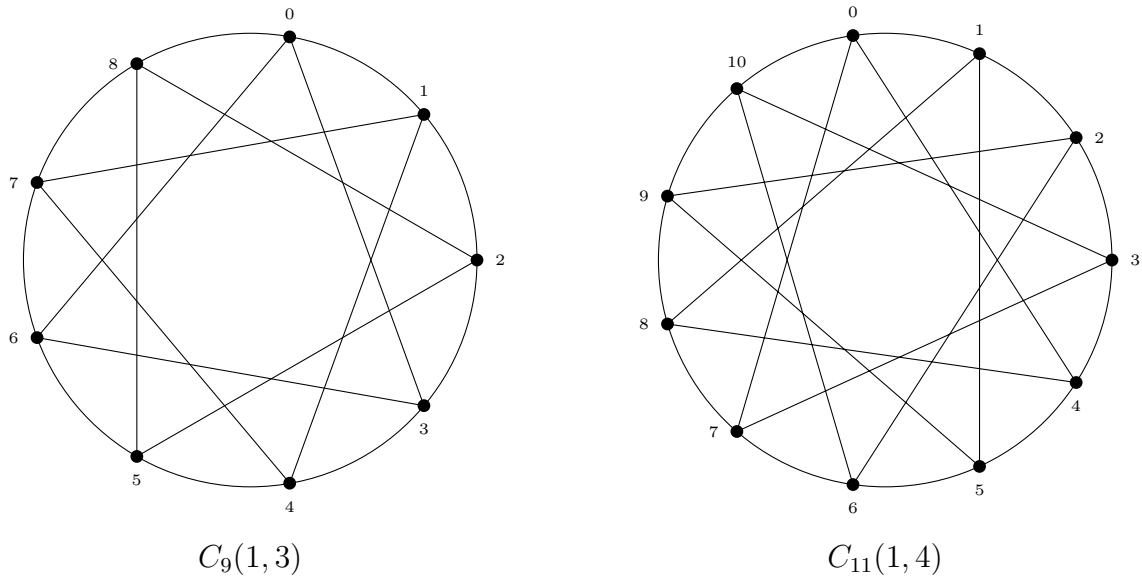


Figura 3.1: Ejemplo de gráficas circulantes.

Dada una gráfica circulante es posible permutar el conjunto de generadores y obtenemos una gráfica circulante isomorfa a la primera, de la misma manera si cambiamos los signos de un subconjunto arbitrario de  $\{c_1, c_2, \dots, c_d\}$ , obtenemos una gráfica isomorfa.

### 3.1. Propiedades de una gráfica circulante

1. La gráfica circulante  $C_n(c_1, \dots, c_d)$  es conexa si y solo si  $\text{mcd}(c_1, \dots, c_d, n) = 1$ . Si  $\text{mcd}(c_1, \dots, c_d, n) = m$  entonces  $C_n(c_1, \dots, c_d)$  es isomorfa a  $m$  copias de la gráfica circulante conexa  $C_{\frac{n}{m}}(\frac{c_1}{m}, \frac{c_2}{m}, \dots, \frac{c_d}{m})$ . Entonces podemos restringir nuestro estudio al caso de gráficas circulantes conexas y por lo tanto siempre asumiremos la condición de conexidad  $\text{mcd}(c_1, c_2, \dots, c_d, n) = 1$
2. Si  $\frac{n}{2} \notin \{c_1, c_2, \dots, c_d\}$ , entonces  $C_n(c_1, c_2, \dots, c_d)$  es  $2d$ -regular.
3. Si  $\frac{n}{2} \in \{c_1, c_2, \dots, c_d\}$ , entonces  $C_n(c_1, c_2, \dots, c_d)$  es  $(2d - 1)$ -regular.
4. Si  $\lambda \in \mathbb{Z}_n^*$  entonces  $C_n(c_1, c_2, \dots, c_d) \cong C_n(\lambda \cdot c_1, \lambda \cdot c_2, \dots, \lambda \cdot c_d)$ . Este tipo de isomorfismo es llamado Isomorfismo-Adám. En particular si uno de los generadores de la gráfica circulante, digamos  $c_1$  es invertible, entonces podemos siempre asumir que esto es igual a 1. Y entonces,

$$C_n(c_1, c_2, \dots, c_d) \cong C_n(1, c'_2, \dots, c'_d)$$

donde  $c'_i = c_1^{-1} \cdot c_i$ , para  $i = 2, \dots, d$ .

5. Toda gráfica circulante es vértice simétrica. Para cada  $v \in \mathbb{Z}_n$  la función  $f_v : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$  que manda a la arista  $\{u, u + c\}$  en la arista  $\{u + v, u + v + c\}$ , para cualquier  $u \in \mathbb{Z}_n$  y  $c$  en el conjunto de generadores, es un automorfismo de  $C_n(c_1, c_2, \dots, c_d)$ .
6. Una gráfica circulante  $C_n(c_1, c_2, \dots, c_d)$  contiene triángulos si, para algún  $i, j$  y  $k$  por pares distintos,  $\pm c_i \pm c_j \pm c_k = 0$ , o  $2c_i \pm c_j = 0$ , o  $3c_i = 0$ , con las sumas y productos módulo  $n$ .

En el artículo estudiado en este trabajo los autores encuentran alianzas en gráficas circulantes usando unas interesantes representaciones de las mismas por medio de latices. A continuación describiremos dichas representaciones:

**Latiz de representación.** Sea  $C_n(c_1, c_2, \dots, c_d)$  una gráfica circulante y consideremos la latiz entera infinita  $d$ -dimensional  $\mathbb{Z}^d$ , con las adyacencias usuales:

$$(x_1, \dots, x_i, \dots, x_d) \sim (x_1, \dots, x_i \pm 1, \dots, x_d)$$

para  $i = 1, \dots, d$ .

Asignaremos a cada vértice de esta latiz una etiqueta relacionada con la gráfica circulante antes mencionada de la siguiente manera:

$$\ell(x_1, \dots, x_d) = x_1 \cdot c_1 + x_2 \cdot c_2 + \dots + x_d \cdot c_d$$

Llamaremos a este número "la etiqueta de  $v$ ". Nótese que este etiquetado no es una función inyectiva, es decir el conjunto  $\ell^{-1}(v)$  es un conjunto infinito de puntos de  $\mathbb{Z}^d$ , más aún como se verá en el siguiente ejemplo,  $\ell^{-1}(v)$  es una sublatiz de  $\mathbb{Z}^d$ , además si  $v, w \in \mathbb{Z}_n$ , las latices  $\ell^{-1}(v)$  y  $\ell^{-1}(w)$  son isomorfas. En la figura 3.2 se muestra ejemplo de la gráfica circulante  $C_{12}(1, 4)$  y su latiz de representación, notemos que como en este ejemplo la latiz de representación es una malla de  $2 \times 2$ ; en ella se resalta los ejes coordenados, y el punto  $(0, 0)$  está como es usual en la intersección de los mismos, además el entero  $\ell(x_1, x_2)$  aparece indicado dentro de cada vértice, por ejemplo el punto  $(0, 0)$  bajo el etiquetado  $\ell(0, 0)$  corresponde al vértice "0", así  $\ell(1, 0) = 1$ ,  $\ell(0, 1) = 4$  y  $\ell(1, 1) = 5$ , podemos ver que en la latiz de representación y bajo el etiquetado se conservan las adyacencias y no adyacencias de los vértices de la gráfica circulante.

En el estudio de las alianzas utilizaremos subconjuntos de la latiz que son justamen-

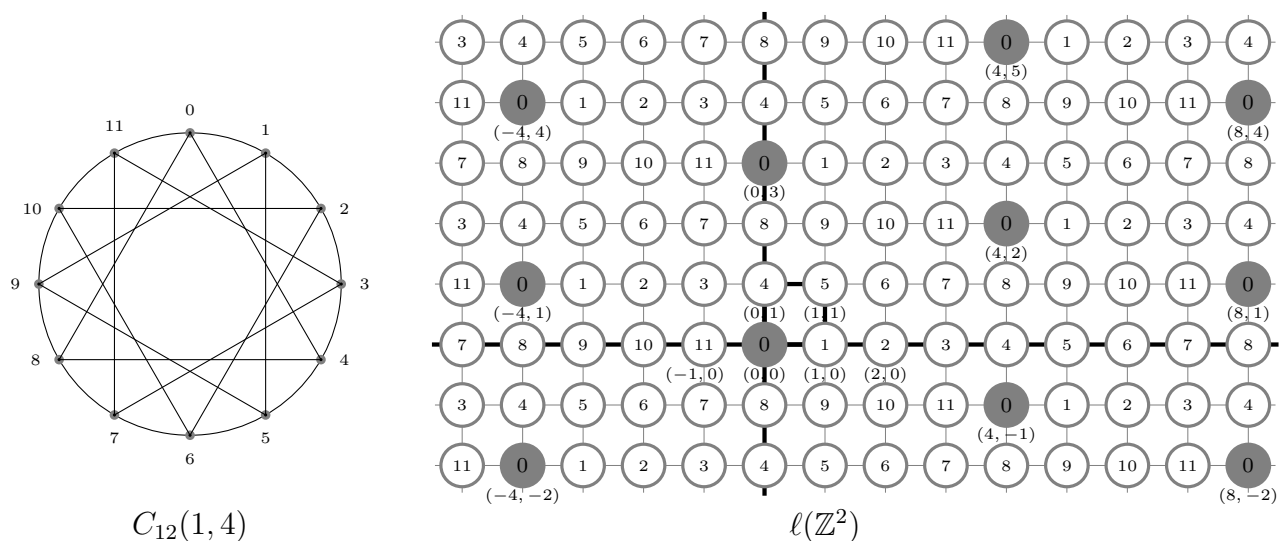


Figura 3.2: Gráfica circulante  $C_{12}(1, 4)$  con su latiz de representación.

te hipercubos de dimensión  $d$  en  $\mathbb{Z}^d$ ; en particular el conjunto  $\{0, 1\}^d$  es el conjunto de vectores de longitud  $d$  ( $d$ -adas) y entradas con 0's y 1's, por ejemplo:  $\{0, 1\}^2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ ,  $\{0, 1\}^3 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ .

Notemos entonces que estos subconjuntos o hipercubos  $d$ -dimensional descomponen a la latiz infinita  $d$ -dimensional en hipercubos de cardinalidad  $2^d$ . Por ejemplo  $\{0, 1\}^2$  descompone a la latiz 2-dimensional en cuadrados,  $\{0, 1\}^3$  descompone a la latiz 3-dimensional en cubos y así sucesivamente.

## 3.2. Alianzas en gráficas circulantes

Basándonos en la latiz de representación para una gráfica circulante veremos los primeros límites del número alianza.

**Proposición 3.2.** *Sea  $G = C_n(c_1, c_2, \dots, c_d)$  una gráfica circulante con  $d$  generadores.*

1. *Si  $\delta_G = 2d$ , i.e.  $\frac{n}{2} \notin \{c_1, c_2, \dots, c_d\}$ , entonces el número alianza de  $G$  satisface*

$$d + 1 \leq a(G) \leq 2^d.$$

2. *Si  $\delta_G = 2d - 1$ , i.e.  $\frac{n}{2} \in \{c_1, c_2, \dots, c_d\}$ , entonces el número alianza de  $G$  satisface*

$$d \leq a(G) \leq 2^{d-1}.$$

*Demostración.* En el primer caso como  $\frac{n}{2} \notin \{c_1, c_2, \dots, c_d\}$ , por la desigualdad (3) de la sección 2.1, tenemos que  $a(G) \geq d + 1$ .

Para el límite superior  $a(G) \leq 2^d$ , mostraremos que  $S = \ell(\{0, 1\}^d)$  es una alianza defensiva de  $G$  de  $|S| \leq 2^d$ . En la representación geométrica de la latiz de dimensión  $d$  decíamos que esta puede descomponerse en hipercubos de dimensión  $d$ , los cuáles podemos definirlos mediante el conjunto  $S = \ell(\{0, 1\}^d)$ , con cardinalidad  $2^d$ . En  $S$  cada vértice tiene al menos



$d$  vecinos, sin embargo ya que el etiquetado  $\ell$  no es una función inyectiva es posible que algunas de las  $d$ -adas tengan bajo  $\ell$  la misma etiqueta por lo que  $|S| \leq 2^d$ .

En el segundo caso que es si  $\frac{n}{2} \in \{c_1, c_2, \dots, c_d\}$ , podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $\frac{n}{2} = c_d$ . Entonces el conjunto  $S = \ell(\{0, 1\}^{d-1} \times \{0\})$ , es decir los  $d$ -adas con coordenadas en  $\{0, 1\}$  con cero en la última entrada es una alianza defensiva de  $G$  de cardinalidad  $|S| \leq 2^{d-1}$ . Como en el caso anterior, cada vértice en  $S$  tiene al menos  $d - 1$  vecinos en  $S$ , y  $S$  contiene  $2^{d-1}$   $d$ -adas. Como  $\ell$  no es una función inyectiva, algunas de las  $d$ -adas pueden ser asignadas al mismo vértice. Entonces  $|S| \leq 2^{d-1}$ .

□

A continuación daremos dos ejemplos para ilustrar lo expuesto en la proposición 3.2 de esta sección.

**Ejemplo 1.** En la gráfica circulante  $C_{12}(1, 4)$ , figura 3.3, podemos ver que  $\delta_G = 4$ . Entonces, de acuerdo a la proposición 3.2 de esta sección, el número alianza defensiva  $a(G)$ , que es el mínimo cardinal del conjunto alianza, está entre  $3 \leq a(G) \leq 4$ . Por ejemplo el conjunto  $\{0, 4, 8\}$  es alianza defensiva, ya que cada vértice tiene al menos 2 vecinos dentro del conjunto, por lo que  $a(G) = 3$ . Notemos que el conjunto  $S = \ell(\{0, 1\}^2)$

que está definido por los vértices:  $\ell(0, 0) = 0$ ,  $\ell(1, 0) = 1$ ,  $\ell(0, 1) = 4$  y  $\ell(1, 1) = 5$ , induce una alianza que corresponde a los vértices  $\{0, 1, 4, 5\}$ , que si bien este conjunto alianza no es el de cardinalidad mínima para  $C_{12}(1, 4)$  también cumple la condición alianza defensiva.

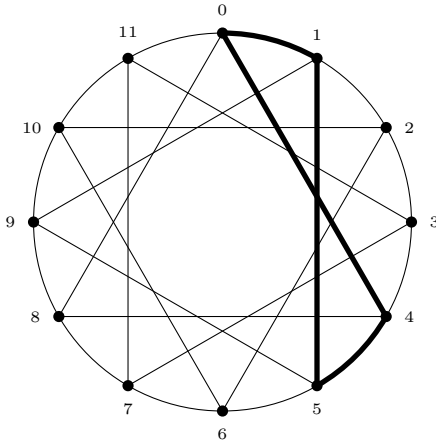


Figura 3.3: Gráfica circulante  $C_{12}(1, 4)$ , con alianza defensiva formada por el conjunto  $\{0, 1, 4, 5\}$ .

**Ejemplo 2.** En la gráfica circulante  $C_{12}(1, 4, 5)$ ,  $\delta_G = 6$ . De acuerdo a la proposición 3.2 de esta sección, el número alianza defensiva  $a(G)$  está entre  $4 \leq a(G) \leq 8$ .

El conjunto de vértices  $S = \ell(\{0, 1\}^3)$  está definido por:  $\ell(0, 0, 0) = 0$ ,  $\ell(0, 0, 1) = 5$ ,  $\ell(0, 1, 0) = 4$ ,  $\ell(0, 1, 1) = 9$ ,  $\ell(1, 0, 0) = 1$ ,  $\ell(1, 0, 1) = 6$ ,  $\ell(1, 1, 0) = 5$  y  $\ell(1, 1, 1) = 10$ , sin embargo en el etiquetado vemos que  $\ell(1, 1, 0) = \ell(0, 0, 1) = 5$  por lo que los vértices de  $S = \ell(\{0, 1\}^3)$  son  $\{0, 1, 4, 5, 6, 9, 10\}$ . Como podemos ver en la figura 3.3, en este conjunto

encontramos la alianza defensiva inducida por los vértices  $\{0, 1, 4, 5, 9\}$ , en donde cada vértice tiene al menos 3 vecinos en el conjunto, por lo que para  $C_{12}(1, 4, 5)$  el número alianza  $a(G) = 5$ . Notemos que aunque  $4 \leq a(G) \leq 8$ , para que  $a(G)$  fuera igual a 4, en la gráfica circulante tendríamos que tener una subgráfica isomorfa a  $K_4$ , lo cuál no hay. Notemos también que el conjunto alianza  $\{0, 1, 4, 5, 9\}$  es isomorfo a una gráfica  $W_4$ .

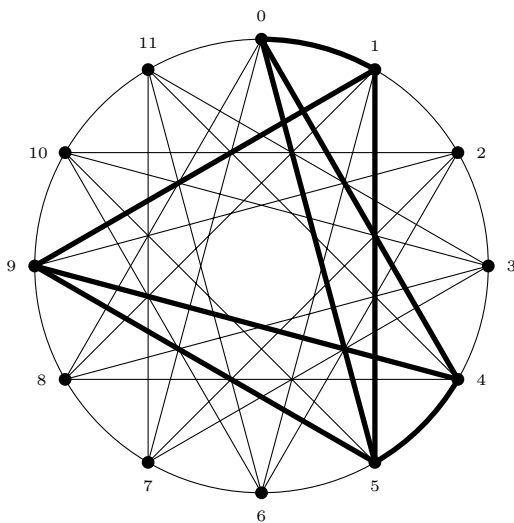


Figura 3.4: Gráfica circulante  $C_{12}(1, 4, 5)$ , con alianza defensiva formada por el conjunto

$$\{0, 1, 4, 5, 9\}.$$

### 3.2.1. Alianzas en gráficas circulantes de grados pequeños.

Resumiendo un poco los resultados hasta ahora analizados tenemos que en gráficas circulantes con 1 y 2 generadores:

1. Si  $G = C_n(c_1) \cong C_n$  es el  $n$ -ciclo. En este caso, los números alianzas son  $a(G) = \hat{a}(G) = 2$ . Las alianzas defensivas y las alianzas defensivas fuertes de  $G$  son las aristas.
2. Si  $G = C_n(c_1, c_2)$  es una gráfica 3-regular si y sólo si  $n$  es par,  $n = 2m$  y  $c_2 = m$ . En este caso  $G \cong C_{2m}(1, m)$  o bien  $G \cong C_{2m}(2, m)$ . Los números alianzas son  $a(G) = 2$  y  $\hat{a}(G) = g(G)$ . Si  $G$  contiene triángulos, entonces  $\hat{a}(G) = 3$  si y solo si  $n = 4$ , lo que implica que  $G \cong K_4$ , y si  $n = 6$  entonces  $G \cong C_6(2, 3)$ . En los casos restantes,  $\hat{a}(G) = g(G) = 4$ .

Si  $G$  contiene triángulos por la propiedad 6 de gráficas circulantes, apartado 3.1 del presente capítulo, esto sucede si  $\pm c_i \pm c_j \pm c_k = 0$ , o  $2c_i \pm c_j = 0$ , o  $3c_i = 0$ . Como sólo tenemos dos generadores los únicos casos posibles son  $2c_i \pm c_j = 0$  o  $3c_i = 0$ .

- a) Caso 1. Caso en el que  $2c_i \pm c_j = 0$ . Si  $c_1 = r$  entonces  $c_2 = 2r$  y  $n = 2(2r) = 4r$  con lo que  $C_{4r}(r, 2r) \cong C_4(1, 2) \cong K_4$ .

- b) Caso 2. Caso en el que  $3c_i = 0$ . Si  $c_1 = 2r$  tenemos que  $3c_1 = 6r = n$  y  $c_2 = \frac{n}{2}$  entonces  $c_2 = \frac{6r}{2} = 3r$  por lo que  $G \cong C_{6r}(2r, 3r) \cong C_6(2, 3)$ .

Si  $G$  no tiene triángulos entonces  $\hat{a}(G) = g(G) = 4$ , por ejemplo el ciclo  $C_4$  formado por los vértices  $\{0, c_1, \frac{n}{2}, c_1 + \frac{n}{2}\}$  es una alianza. Entonces en una gráfica 3-regular las alianzas críticas son las aristas y las alianzas críticas fuertes son los ciclos inducidos.

3. Si  $G = C_n(c_1, c_2)$ , con  $c_2 \neq \frac{n}{2}$ , es una gráfica 4-regular, por lo que  $a(G) = \hat{a}(G) = g(G)$ . En este caso,  $G$  contiene triángulos si y solo si  $c_2 = 2c_1$ , es decir,  $G \cong C_n(1, 2)$ , o bien  $n = 3m$  y  $c_2 = \pm m$ , es decir,  $G \cong C_{3m}(1, m)$  o bien  $G \cong C_{3m}(3, m)$ .

Si  $G \cong C_n(1, 2)$ ,  $G \cong C_{3m}(1, m)$  o  $G \cong C_{3m}(3, m)$ , entonces  $a(G) = \hat{a}(G) = 3$ . De otra manera  $a(G) = \hat{a}(G) = 4$ .

**Gráficas circulantes de grado 5.** Sea  $G = C_{2m}(a, b, m)$  una gráfica circulante de grado 5. Desde que  $\delta = 5$  entonces  $2m \geq 6$ . Si  $2m = 6$  tenemos que  $G = K_6$  y por las ecuaciones (3) y (4) de la sección 2.1, el número alianza  $a(K_6) = 3$  y  $\hat{a}(K_6) = 4$ . Entonces asumiremos que  $2m \geq 8$ . Los límites obtenidos nos dan los siguientes valores  $a(G) = g(G) \leq 4$ .

1. Si  $G$  contiene triángulos, entonces  $g(G) = a(G) = 3$ , esto sucede si y solo si  $a+b = m$ , o  $m = 2m'$  es par y  $b = \pm m'$ , o  $m = 3m'$  y  $b = \pm 2m'$ . La condición de conexidad,

$\text{mcd}(a, b, m, 2m) = 1$ , implica que estos tres casos corresponden a  $G \cong C_{2m}(1, 2, m)$ ,  $G \cong C_{4m'}(1, m', 2m')$  y  $G \cong C_{6m'}(1, 2m', 3m')$  respectivamente.

2. De otra manera,  $g(G) = a(G) = 4$ .

### 3.2.2. Alianzas en gráficas circulares de grado 6

En gráficas circulares con 3 generadores,  $C_n(a, b, c)$  con  $\frac{n}{2} \notin \{a, b, c\}$ , desde que  $\delta = 6$ ,  $n \geq 7$ . Si  $n = 7$  entonces  $C_n(a, b, c) = K_7$  y las ecuaciones (3) y (4) de la sección 2.1, implican que  $a(K_7) = \hat{a}(K_7) = 4$ . Por lo que asumiremos que  $n \geq 8$ .

Recordemos que con la proposición 3.2 de esta sección,  $4 \leq a(G) \leq 8$  y también que  $G$  contiene triángulos si y sólo si:

$$a + b + c = 0 \pmod{n}, 2a + b = 0 \pmod{n}, \text{ o } 3c = 0 \pmod{n}$$

En el capítulo anterior vimos que  $S_{(4,6)} = \{K_4\}$ ,  $S_{(5,6)} = \{W_4\}$ ,  $S_{(6,6)} = \{C_3 \times K_2, K_{3,3}, (C_3 \times K_2) + e, K_{3,3} + e, \bar{C}_4 + \bar{K}_2, W_5\}$ , y  $S_{(7,6)}$  contiene exactamente las 15 gráficas de la figura 2.12. Notemos que toda gráfica en  $S_{(7,6)}$  contiene triángulos y que la única gráfica que no tiene triángulos en  $S_{(6,6)}$  es  $K_{3,3}$ .

En el resto de la sección, se da una clasificación de las gráficas circulares 6-regular de acuerdo con su número alianza, mostrando las alianzas que son alianzas mínimas de estas gráficas. En resumen veremos que todas las gráficas circulares de la forma  $G = C_n(a, b, c)$  que contiene triángulos el valor del número alianza varía desde 4 hasta 7, o bien en el caso de que  $G$  no tenga triángulos, si contiene a  $K_{3,3}$  entonces  $a(G) = 6$  y en otro caso entonces  $a(G) = 8$  y la alianza mínima es el cubo  $Q_3$ . Antes de dar el teorema de clasificación completo, probaremos algunos lemas.

En los siguientes lemas se usa la propiedad de que una gráfica circular es vértice simétrica y también que una gráfica circular es isomorfa a cualquier gráfica circular obtenida por una permutación de sus generadores.

**Lema 3.3** Si  $G = C_n(a, b, c)$  es 6-regular entonces  $a(G) = 4$  si y sólo si  $G \cong C_n(1, 2, 3)$ .

*Demostración.* Asumamos que  $G = C_n(a, b, c)$  contiene una subgráfica isomorfa a  $K_4$ . Ya que  $G$  es vértice simétrica, podemos fijar a 0 en cualquiera de los vértices de la gráfica  $K_4$  inducida y entonces el conjunto de vértices que induce  $K_4$  es, dada la permutación de generadores,  $\{0, a, b, -a\}$  o  $\{0, a, b, c\}$ , ver figura 3.5 y figura 3.6. A continuación analizaremos estos casos.





$n = 6m'$ , lo que implica finalmente que  $a + b = 3m' = \pm c$ , es decir  $c = \frac{n}{2}$ , lo cual no es posible. Si de lo contrario  $b - a = c$ , entonces  $b + a = -b$ , esto implica que  $2b = -a = 2a$  que implica que  $a = b$ . En ambos casos tenemos una contradicción.

b) Si  $2a = b$  entonces  $b - a = a$  y entonces  $a + b = 3a = \pm c$ , esto implica que  $G \cong C_n(a, 2a, 3a) \cong C_n(1, 2, 3)$ .

c) Si  $2a = c$  implica que  $b - a = -b$  (no puede ser  $b - a = \pm a$  ya que si  $b - a = a$  entonces  $b = 0$ , si  $b - a = -a$  entonces  $2a = b$  pero partíamos de que  $2a = c$ ) esto es,  $2b = a$ , y entonces  $a + b = 3b$ . Esto implica que  $b, 2b, 3b$  y  $4b$  son todos generadores de  $G$  y esta es una contradicción si  $n \geq 7$ , ya que entonces la gráfica circulante tendría  $\delta_G > 6$ .

2. Caso si  $\langle\{0, a, b, c\}\rangle \cong K_4$ , entonces todos los enteros  $\pm(a - b), \pm(b - c), \pm(c - a)$  son generadores de  $G$ . Vamos primero a estudiar cuál de los generadores es igual a  $c - a$ . Los casos  $c - a = c$  y  $c - a = -a$  son ambos imposibles ya que implican que  $a$  o  $c$  son iguales a 0. Entonces,  $c - a \in \{a, \pm b, c\}$ .

a) Si  $c - a = a$  entonces  $c = 2a$ . Ahora,  $c - b$  sólo puede ser igual a  $-a$  o  $-c$  ( $c - b$  no puede ser igual a  $b$ , ya que entonces  $2b = c$ ,  $2a = 2b$  y entonces  $a = b$  lo cual es imposible). Si  $c - b = -a$  obtenemos  $3a = b$ , esto implica

que  $C_n(a, 2a, 3a) \cong C_n(1, 2, 3)$ . El caso  $c - b = -c$  implica que  $2c = 4a = b$  y entonces  $b - a = 3a$ . Por lo que  $a, 2a, 3a$  y  $4a$  son todos generadores de  $G$  y esto es una contradicción si  $n \geq 7$ , ya que tendríamos una gráfica con  $\delta_G > 6$ .

- b) Si  $c - a = b$  entonces  $a + b = c$  y  $b - c = a$ . Ahora,  $a - b$  sólo puede ser igual a  $-a$  o  $b$ . Si  $a - b = -a$  entonces  $2a = b$  y  $3a = c$ , lo que implica que  $C_n(a, 2a, 3a) \cong C_n(1, 2, 3)$ . Si  $a - b = b$  entonces  $a = 2b$  y  $3b = c$ , lo que implica que  $C_n(2b, b, 3b) \cong C_n(1, 2, 3)$ . Ambos casos implican  $G \cong C_n(1, 2, 3)$ .
- c) Si  $c - a = -b$  implica que  $a - b = c$  y  $c - b$  sólo puede ser igual a  $b$  o  $-c$ . Si  $c - b = b$  entonces  $2b = c$  y  $a = 3b$  lo que implica que  $C_n(3b, b, 2b) \cong C_n(1, 2, 3)$ . Si  $c - b = -c$  entonces  $b = 2c$  y  $a = 3c$  lo que implica que  $C_n(3c, 2c, c) \cong C_n(1, 2, 3)$ . Como en el caso anterior, ambos casos implican que  $G \cong C_n(1, 2, 3)$ .
- d)  $c - a = -c$  entonces  $2c = a$ . Ahora,  $c - b$  sólo puede ser igual  $-a$  o  $b$ . Si  $c - b = -a$  entonces  $3c = b$ , esto implica que  $G \cong C_n(2c, 3c, c) \cong C_n(1, 2, 3)$ . Si de lo contrario  $c - b = b$ , entonces  $2b = c$  y por lo tanto  $a = 4b$ . Esto implica que  $b, 2b, 3b$  y  $4b$  son todos generadores de  $G$  y esto es una contradicción si  $n \geq 7$ .

Por lo que todos los casos posibles llevan a que  $G \cong C_n(1, 2, 3)$ .

□

**Lema 3.4** Si  $G = C_n(a, b, c)$  es 6-regular, entonces  $a(G)=5$  si y sólo si  $G \cong C_{3m}(a, m - a, m)$  o  $G \cong C_n(1, 2, 4)$ .

*Demostración.* Asumamos que  $G = C_n(a, b, c)$  contiene una subgráfica inducida isomorfa a  $W_4$  y que  $G$  no contiene subgráficas isomorfas a  $K_4$ . Por simetría, podemos asumir sin pérdida de generalidad que cada  $\langle \{0, \pm a, \pm b\} \rangle \cong W_4$  o  $\langle \{0, \pm a, b, c\} \rangle \cong W_4$ . Esto es, cada  $\langle \{\pm a, \pm b\} \rangle \cong C_4$  o  $\langle \{\pm a, b, c\} \rangle \cong C_4$ . Para cada caso hay dos posibilidades, analicemos estos cuatro casos:

1. Caso si  $\langle \{0, \pm a, \pm b\} \rangle \cong W_4$  y  $(a, b, -a, -b, a)$  es un 4-ciclo inducido. Esto implica que  $\pm(b - a)$  y  $\pm(b + a)$  son generadores de  $G$ . En este caso,  $b - a \in \{a, -b, c\}$ . Si  $b - a = a$  entonces  $b = 2a$ ,  $b + a = c$ , por lo que  $3a = c$  esto es  $C_n(a, 2a, 3a) \cong C_n(1, 2, 3)$ . Si  $b - a = -b$  entonces  $a = 2b$ , luego  $b + a = c$  por lo que  $3b = c$ , esto es  $C_n(2b, b, 3b) \cong C_n(1, 2, 3)$ . Si  $b - a = c$  entonces  $b + a = -b$ , con lo cual  $2b = a$  y  $c = 3b$ , por lo que  $C_n(2b, b, 3b) \cong C_n(1, 2, 3)$ . Entonces en los tres casos  $G \cong C_n(1, 2, 3)$  que satisfacen  $a(G) = 4$ .
2. Caso si  $\langle \{0, \pm a, \pm b\} \rangle \cong W_4$  y  $(a, b, -b, -a, a)$  es un 4-ciclo inducido. Esto implica que  $\pm(b - a)$ ,  $\pm 2a$  y  $\pm 2b$  son generadores de  $G$ . En este caso,  $2a \in \{-a, \pm b, c\}$ .
  - a) Si  $2a = -a$  se implica que  $n = 9m$  y  $a = 3m$ ,  $b = m$ ,  $c = 2m$  con lo cual

$G \cong C_9(1, 2, 3)$ , que satisface  $a(G) = 4$ , o  $G$  es desconexa.

- b) Si  $2a = b$  se implica que  $G \cong (1, 2, 4)$ .
- c) Si  $2a = -b$  se implica que  $G \cong (1, 2, 3)$ , lo que satisface que  $a(G) = 4$ .
- d) Si  $2a = c$  sólo es posible si  $b - a = -b$ , y esto implica  $G \cong C_n(1, 2, 4)$ .

En los casos posibles,  $G \cong C_n(1, 2, 4)$ .

3. Si  $\langle \{0, \pm a, b, c\} \rangle \cong W_4$  y  $(a, b, -a, c, a)$  es un 4-ciclo inducido. Esto implica que  $\pm(b - a)$ ,  $\pm(b + a)$ ,  $\pm(c - a)$  y  $\pm(c + a)$  son generadores de  $G$ . En este caso,  $b - a \in \{a, -b, \pm c\}$ . Por lo que:

- a) Si  $b - a = a$  se implica que  $2a = b$  y  $b + a = 3a$ ;
- b) Si  $b - a = -b$  se implica que  $2b = a$  y  $b + a = 3b$ ;
- c) Si  $b - a = c$  obtenemos que  $b + a$  sólo puede ser igual a  $-b$  y entonces  $3b = c$ ; y
- d) Si  $b - a = -c$  obtenemos que  $b + a$  sólo puede ser igual a  $-b$  y entonces  $3b = -c$ .

Entonces cualquiera de estos cuatro casos implica que  $G \cong C_n(1, 2, 3)$ , que satisfacen  $a(G) = 4$ .

4. Si  $\langle \{0, \pm a, b, c\} \rangle \cong W_4$  y  $(a, b, c, -a, a)$  es un 4-ciclo inducido. Esto implica que  $\pm(b - a)$ ,  $\pm 2a$ , y  $\pm(c + a)$  son generadores de  $G$ . En este caso,  $2a \in \{-a, \pm b, \pm c\}$ , y obtenemos:

a) Si  $2a = -a$  y  $b - c = \pm a$  se implica que  $G \cong C_{3m}(a, m - a, m)$ ;

b) Si  $2a = -a$  y  $b - c = -b$  se implica que  $G \cong C_n(1, 2, 4)$ ;

c) Si  $2a = b$  y  $b - c = -b$  se implica que  $G \cong C_n(1, 2, 4)$ ; y

d) Si  $2a = -c$  y  $b - c = c$  se implica que  $G \cong C_n(1, 2, 4)$ .

Los casos restantes dan valores imposibles para los generadores o implican que  $G \cong$

$C_n(1, 2, 3)$ , lo que satisface  $a(G) = 4$ .

□

Los siguientes dos lemas caracterizan a las alianzas defensivas de una gráfica circulante de grado 6 que no contienen  $K_4$  o  $W_4$ . Estas gráficas satisfacen que  $6 \leq a(G) \leq 8$ . El lema 3.5 comprende las gráficas que contienen triángulos, y el lema 3.6 comprende las gráficas que no tiene triángulos.

**Lema 3.5** Si  $G = C_n(a, b, c)$  contiene un triángulo y  $a(G) > 5$ , entonces se cumple una de las siguientes condiciones.

1. Si  $3c = 0 \pmod{n}$ ; entonces  $n = 3m$  y  $G \cong C_{3m}(a', b', m)$  con  $a' + b' \neq m$ , pero  $G \not\cong C_n(1, 2, 4)$ . En este caso,  $C_3 \times K_2$  es una subgráfica inducida de  $G$ . Entonces

$$a(G) = 6.$$

2. Si  $2a + b = 0 \pmod{n}$ ; entonces  $G = C_n(a, -2a, c)$ , pero  $G \not\cong C_n(1, 2, 3)$  y  $G \not\cong C_n(1, 2, 4)$ . En este caso,  $C_3 \times K_2$  es una subgráfica inducida de  $G$ . Entonces  $a(G) = 6$ .

3. Si  $a + b + c = 0 \pmod{n}$ ; entonces  $G \not\cong C_n(1, 2, 3)$  y hay dos posibilidades:

a) Si  $G \cong C_{2m}(a, m - a, m - 2a)$  y esta tiene un  $\bar{C}_4 + \bar{K}_2$  inducido, entonces

$$a(G) = 6.$$

b) De otra manera, ninguna de las gráfica en  $S_{(6,6)}$  es una subgráfica inducida de  $G$ , pero  $G$  contiene  $W_6$ , entonces  $a(G) = 7$ .

*Demostración.* Los tres casos que se exponen en este lema corresponden a los tres casos para los cuáles  $G$  contiene triángulos.

1. Caso si  $3c = 0$ , entonces  $n = 3m$  y  $G \cong C_{3m}(a', b', m)$ . Aún más, si  $a' + b' = m$ , tenemos que  $G \cong C_{3m}(a', m - a', m)$ . El lema 3.4 dice que ambas  $C_{3m}(a', m - a', m)$  y  $C_n(1, 2, 4)$  contienen a  $W_4$ . De otra forma  $\langle \{0, m, -m, a', m + a', -m + a'\} \rangle \cong C_3 \times K_2$ , si  $a' + b' \neq m$ .
2. Caso si  $2a + b = 0$ . Entonces  $G = C_n(a, -2a, c)$ . Desde que  $a(G) > 5$ , sabemos que

$G \not\cong C_n(1, 2, 3)$  y  $G \not\cong C_n(1, 2, 4)$ . También podemos ver que si  $n = 3m$ ,  $C_{3m}(a, 2a, c)$  no puede ser isomorfa a  $C_{3m}(a', m - a', m)$ . Aún más  $\langle \{0, a, 2a, c, a + c, 2a + c\} \rangle \cong C_3 \times K_2$ .

3. Caso si  $a + b + c = 0$ , entonces la condición  $a(G) > 5$  implica que  $G \not\cong C_n(1, 2, 3)$ . Tenemos que si  $S = \{0, \pm a, \pm b, \pm c\}$ , entonces  $\langle S \rangle \cong W_6$  y entonces  $6 \leq a(G) \leq 7$ . Las adyacencias en  $\langle S \rangle$  están dadas por  $d_S(0) = 6$ , y  $(a, -b, c, -a, b, -c, a)$  es un 6-ciclo.

Entonces  $a(G) = 6$  es una de las gráficas en:

$$S_{(6,6)} = \{C_3 \times K_2, K_{3,3}, (C_3 \times K_2) + e, K_{3,3} + e, \bar{C}_4 + \bar{K}_2, W_5\}$$

es una subgráfica inducida de  $G$  (ver Proposición 2.3.7 de la sección 2.3). Primero probaremos que ninguna de las gráficas  $W_5$ ,  $K_{3,3}$ ,  $K_{3,3} + e$ ,  $C_3 \times K_2$ , o  $(C_3 \times K_2) + e$  pueden ser subgráficas inducidas de  $G$ .

- a) Si hay una subgráfica inducida isomorfa a  $W_5$ , por simetría podemos asumir que sus vértices de grado 5 es 0. Ahora, dada una permutación de los generadores, podemos asumir que  $W_5 \cong \langle \{0, a, -b, c, -a, b\} \rangle$ , esto implica que  $a$  y  $b$  son adyacentes. Pero entonces  $K_4 \cong \langle \{0, a, b, -c\} \rangle$  es una subgráfica inducida de  $G$ , lo que es una contradicción.

b) Si algún  $K_{3,3}$  o  $K_{3,3} + e$  es isomorfo a una subgráfica inducida de  $G$ , podemos asumir sin pérdida de generalidad, que esta gráfica es inducida por el conjunto  $\{0, a, b, c, x, y\}$ , donde  $x$  y  $y$  están a distancia 2 desde 0 y ambos son adyacentes a  $a, b$  y  $c$ . Si  $x \asymp y$ , entonces la subgráfica inducida es  $K_{3,3}$ , y si  $x \sim y$ , entonces la subgráfica inducida es  $K_{3,3} + e$ .

Dadas algunas simetrías y permutaciones de los generadores, vemos que cualquiera  $x = a - b \asymp y = a - c$  o  $x = a - b \sim y = 2a$ . Hay tres posibles valores para  $a - b$ :

- 1) Si  $a - b = c - a$  se implica  $3a = 0$ , que corresponde al caso 1,
- 2) Si  $a - b = c - b$  se implica  $a = c$ , esto es imposible, y
- 3) Si  $a - b = 2c$  implica  $2a = c$  y  $3a = -b$ , esto corresponde a  $G \cong C_n(1, 2, 3)$ .

c) Si  $C_3 \times K_2$  es isomorfo a una subgráfica inducida de  $G$ , podemos asumir sin pérdida de generalidad, que los triángulos en esta gráfica son  $T_1 = \{0, a, -c\}$  y  $T_2 = \{2a, x, y\}$ , con cualquier  $x \sim 0$  y  $y \sim -c$ , o  $x \sim -c$  y  $y \sim 0$ . Podemos ver eso, hasta las simetrías,  $x = 3a$ , y  $y = 2a - c$  o  $y = 2a - b$ . Un análisis cuidadoso muestra que ninguno de los casos es posible.

d) Si  $(C_3 \times K_2) + e$  es isomorfo a una subgráfica inducida de  $G$ , podemos asumir sin pérdida de generalidad, que esta subgráfica es inducida por el conjunto  $\{0, a, -b, c, -a, y\}$ , con  $y$  un vecino común de  $a, c$  y  $-a$ . Podemos ver que esto



implica que  $y \in \{2c, c-a\} \cap \{2a, a-c\} \cap \{c-a, -2a, b-a\}$ , lo cuál es imposible.

Ahora vamos a suponer que  $G$  contiene una subgráfica inducida isomorfa a  $\bar{C}_4 + \bar{K}_2$ .

Sea  $\{0, x, y, z, t, w\}$  su conjunto de vértices y  $x \sim y, z \sim t$  los vecinos de 0 en esta

subgráfica inducida. Podemos asumir sin pérdida de generalidad, que  $\{x, y, z, t\} =$

$\{a, \pm b, -c\}$  o  $\{x, y, z, t\} = \{\pm a, \pm b\}$ . En el primer caso tenemos que  $w = a - b = b - c$

y  $3b = 0$ , lo que corresponde al Caso 1. De otra manera si  $w = a - b = b - a$ ,

entonces  $2(b - a) = 0$ , esto implica que  $n = 2m, b = m + a$  y  $c = -m - 2a$ . Entonces

$G \cong C_{2m}(a, m - a, m - 2a)$ .

□

**Lema 3.6** Sea  $G = C_n(a, b, c)$  una gráfica 6-regular y sin triángulos.  $K_{3,3}$  es una subgráfica inducida de  $G$ , si y sólo si  $G \cong C_n(1, 3, 5)$ , en este caso,  $a(G) = 6$ . De otra manera la alianza mínima de  $G$  es el cubo  $Q_3$  y entonces  $a(G) = 8$ .

*Demostración.* Recordemos que la única gráfica libre de triángulos en  $S_{(4,6)} \cup S_{(5,6)} \cup S_{(6,6)} \cup S_{(7,6)}$  es  $K_{3,3}$ . Aún más si  $G = C_n(a, b, c)$  es 6-regular, por la proposición 3.2 de esta sección, el conjunto de vértices  $\{0, a, b, c, a + b, a + c, b + c, a + b + c\}$  induce una alianza de cardinalidad a lo más 8 que, si  $G$  no tiene triángulos es isomorfa al cubo  $Q_3$ .

Para probar el lema, sólo necesitamos mostrar que  $G$  no tiene triángulos, contiene un  $K_{3,3}$  inducido si  $G \cong C_n(1, 3, 5)$ . Nótese que en  $C_n(1, 3, 5)$ , el conjunto  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  induce una subgráfica isomorfa a  $K_{3,3}$ .

Asumamos que  $G$  tiene una subgráfica inducida  $K_{3,3}$ . Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que  $K_{3,3}$  es inducida por  $\{0, a, b, c, x, y\}$ , con  $x$  y  $y$  vecinos en común de  $a, b$  y  $c$ , a distancia 2 desde 0, o  $\{0, a, b, -a, x, y\}$ , con  $x$  y  $y$  vecinos comunes de  $a, b$  y  $-a$ , a distancia 2 desde 0 (sólo la primera posibilidad puede ser válida siempre que  $x$  y  $y$  estén bien elegidos). Otra vez por simetría,  $x \in \{2a, a + b, a - b\}$ . Para cada posible valor de  $x$  tenemos que ver que valores son posible para  $y$  y cómo determinan la gráfica  $G$ .

1. Caso si  $x = 2a$ , desde que  $b$  y  $c$  son adyacentes a  $x$ , tenemos que  $2a - b$  y  $2a - c$  están ambos en  $\{\pm a, \pm b, \pm c\}$ . En este caso,  $2a - b$  sólo puede ser igual a  $-a$ , y  $\pm c$ . Podemos ver que  $2a - b = -a$  implica que  $3a = b$  y  $2a - b = -c$  da que  $G \cong C_n(1, 3, 5)$ . Si  $2a - b = -c$ , entonces  $2a - c$  puede ser solo igual a  $a$ , esto implica que  $b = -3a$ ,  $c = -5a$  y nuevamente,  $G \cong C_n(1, 3, 5)$ . Por otro lado, si  $2a - b = c$  entonces  $2a - c = b$ , tenemos que distinguir los casos de acuerdo a los valores de  $y$ . Se puede ver que  $y \in \{a \pm b, a \pm c\}$ . Algunos de estos casos son imposibles los posibles nuevamente dan que  $G \cong C_n(1, 3, 5)$ .
2. Caso si  $x = a + b$ , entonces sólo tenemos que considerar los casos  $y \in \{a - b, a \pm c\}$ .

Las únicas posibilidades válidas dan que  $G \cong C_n(1, 3, 5)$ .

3. Caso si  $x = a - b$ , entonces sólo necesitamos considerar el caso  $y = a - c$ . Este caso puede ser reducido por simetría a los casos anteriores.

Entonces hemos mostrado que la única gráfica circulante de grado 6 libre de triángulos, con una subgráfica inducida  $K_{3,3}$  es isomorfa a  $G \cong C_n(1, 3, 5)$ .

□

**Teorema 3.7** . El número alianza de  $G = C_n(a, b, c)$ , la gráfica circulante de 6 grados y orden  $n \geq 8$  es:

1.  $a(G) = 4 \Leftrightarrow G \cong C_n(1, 2, 3)$  o  $G \cong C_n(1, 2, 4)$ .
2.  $a(G) = 5 \Leftrightarrow G \cong C_{3m}(a, m - a, m)$ .
3.  $a(G) = 6 \Leftrightarrow G$  contiene triángulos y estos son isomorfos a una de las gráficas  $C_{3m}(a, b, m)$ , con  $a + b \neq m$ ,  $C_{2m}(m - 2c, m + c, c)$ ,  $C_{4m}(m, b, -m - b)$ ,  $C_n(1, 3, 4)$ ,  $C_n(a, -2a, c)$ , pero  $G$  no es isomorfa a  $C_n(1, 2, 3)$  ni a  $C_n(1, 2, 4)$ ; o  $G$  es libre de triángulos y es isomorfa a  $C_n(1, 3, 5)$  o  $C_n(1, 5, 7)$ .

4.  $a(G) = 7 \Leftrightarrow G \cong C_n(a, b, -(a + b))$ , pero  $G$  no es isomorfa a cualquiera de las gráficas  $C_{2m}(m - 2c, m + c, c)$ ,  $C_{4m}(m, b, -m, -b)$ ,  $C_n(1, 3, 4)$ .
5.  $a(G) = 8 \Leftrightarrow G$  es libre de triángulos y no es isomorfa a  $C_n(1, 3, 5)$  ni a  $C_n(1, 5, 7)$ .

*Demostración.* La demostración esta dada en los lemas 3.3, 3.4, 3.5 y 3.6.

□



# Conclusiones

En el estudio de alianzas defensivas buscamos aquellos conjuntos de vértices de una gráfica  $G$  que cumplen la condición de tener más o igual número de vecinos dentro del conjunto que fuera de él. El iniciar el tema de alianzas defensivas con ejemplos de alianzas en gráficas regulares nos introdujo de una manera sencilla a dicho estudio, vimos resultados concretos y nos pudimos percatar de que en gráficas regulares de grado par, el número alianza defensiva y el número alianza defensiva fuerte coinciden. Enunciamos propiedades en alianzas defensivas de acuerdo a la paridad del grado de la gráfica regular, estas propiedades junto con la definición de conjunto alianza inducido y la sucesión de grados de una gráfica dieron lugar a la construcción de las alianzas defensivas en una gráfica  $G$  regular de grado 6.

En el último capítulo nos adentramos al estudio de alianzas defensivas en gráficas circu-

lantes, las cuáles se caracterizan por ser regulares y muy simétricas, aquí vimos reflejados algunos de los resultados obtenidos en las alianzas de gráficas regulares. Por medio de la latiz de representación obtuvimos límite inferior y superior para gráficas circulantes 6-regulares. Finalmente abordamos una clasificación de gráficas circulantes 6-regulares de acuerdo a la cardinalidad del conjunto alianza.

# Trabajo Futuro

A continuación se proponen los siguientes problemas sobre alianzas en gráficas circulantes que podrían ser la continuación del trabajo aquí presentado:

1. Uno de los resultados mostrados fue que si una gráfica  $G$  pertenece al conjunto de gráficas circulantes de grado 6,  $C_n(a, b, c)$  entonces el número alianza de  $G$  está acotado por  $4 \leq a(G) \leq 8$ . Planteamos buscar estas cotas para el número alianza de gráficas circulantes de mayor grado.
2. Asumiendo que los límites de la proposición 3.2 del capítulo 3 son justos para  $G = C_n(c_1, c_2, \dots, c_d)$  ¿Cuál sería un límite inferior para  $n$  tal que  $a(G) = 2^d$  o bien  $a(G) = 2^{d-1}$  si  $\frac{n}{2} \in \{c_1, c_2, \dots, c_d\}$ ?
3. Hasta el momento hemos analizado las alianzas defensivas para gráficas circulantes con  $\delta \leq 6$ . ¿Qué sucede con las alianzas ofensivas para estas gráficas?





# Bibliografía

- [1] G. Araujo-Pardo, L.Barrière, Defensive alliances in circulant graphs. *Ars Combinatorial* 115 (2014) 115-138.
- [2] G. Araujo-Pardo, L.Barrière, Defensive alliances in regular graphs. *Ars Combinatorial* 115 (2014) 35-54.
- [3] D. Ali Mojdeh, B. Samadi, I. Gonzalez-Yero, Global defensive k-alliances in directed graphs: combinatorial and computational issues. *RAIRO-Operations Research*. Enviado.
- [4] G. Chartrand and P. Zhang, *A first course in graph theory*. Dover Publications Inc, USA (2012).
- [5] R. P. Grimaldi, *Matemáticas discreta y combinatoria*. Addison-Wesley Iberoamericana, México (1989).

- [6] J. L. Gross, J. Yellen, Graph Theory and its applications. Chapman & Hall/CRC, USA (2006).
- [7] P. Kristiansen, S.M. Hedetniemi, and S.T. Hedetniemi, Alliances in graphs. Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 74 (2004) 154-177.
- [8] A. T. White, Graphs, groups and surfaces. Michigan USA (1984).