



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**LA TRANSFORMADA DE FOURIER EN  $\mathbb{R}^n$ , EN  
GRUPOS ABELIANOS FINITOS Y APLICACIONES**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
MATEMÁTICO**

**P R E S E N T A:**

**SERGIO ROSADO ZÚÑIGA**



**DIRECTOR DE TESIS:  
DRA. MAGALI LOUISE MARIE FOLCH  
GABAYET  
CIUDAD DE MÉXICO, 2020**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Datos del alumno

Rosado  
Zúñiga  
Sergio  
5517053695  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
310309110

Datos del tutor

Dra.  
Magali Louise Marie  
Folch  
Gabayet

Datos del sinodal 1

Dr.  
Francisco Javier  
Torres  
Ayala

Datos del sinodal 2

Dr.  
Carlos  
Hernandez  
Garciadiego

Datos del sinodal 3

M. en C.  
Raybel Andrés  
García  
Ancona

Datos del sinodal 4

Dr.  
Frank Patrick  
Murphy  
Hernandez

Datos del trabajo escrito.

La transformada de Fourier en  $\mathbb{R}^n$ , en grupos abelianos finitos y aplicaciones.  
117 p  
2020

## Agradecimientos

Agradezco a mis padres por la comprensión, apoyo y respeto que me han brindado toda mi vida, por dejarme recorrer mi propio camino y siempre incitarme a ser mejor estudiante y persona. También a mis amigos y familiares que me dieron su ayuda cuando más la necesité pues gracias a ellos he podido seguir avanzando a pesar de los tropiezos y problemas que han surgido en el camino.

Quiero agradecer en particular a mi profesora Magali Folch, por darme la oportunidad de poder hacer mi tesis bajo su asesoría, por la oportunidad de asistir a dos escuelas de análisis, por todos los años que tuve la dicha de tomar sus clases y, junto a los profesores Frank Murphy, Raybel Ancona y José Ríos Montes, por enseñarme lo bellas y complejas que pueden ser las matemáticas e incitarme a querer investigar cada vez más sobre ellas.

Por último agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México por todos los años de estudios que me han proporcionado desde mi formación en preparatoria hasta el final de mi carrera, sin sus programas de difusión en ciencias, becas, y programas educativos no habría podido conocer la carrera de matemáticas.

## Índice general

Introducción	1
Capítulo 1. Transformada de Fourier en $\mathbb{R}^n$	3
1. Transformada de Fourier de funciones en $L^1(\mathbb{R}^n)$ .	3
2. La Clase de Schwartz y las distribuciones temperadas.	14
3. La transformada de Fourier en $L^p(\mathbb{R}^n)$ $1 \leq p \leq 2$ .	26
Capítulo 2. Transformada de Fourier en grupos abelianos finitos	31
1. El espacio $L^2$ de grupos abelianos finitos.	32
2. Transformada de Fourier en grupos abelianos finitos.	36
Capítulo 3. Teorema de incertidumbre de Heisenberg	47
1. Incertidumbre de Heisenberg en $\mathbb{R}$ .	47
2. Teorema de incertidumbre de Heisenberg para grupos abelianos finitos.	53
Capítulo 4. Gráficas de Cayley sobre $\mathbb{Z}_n$	73
1. Gráficas con vértices finitos y su matriz adjunta.	73
2. Espectro de las gráficas de Cayley en $\mathbb{Z}_n$ .	77
Apéndice A. Teoremas clásicos de Análisis.	85
Apéndice B. Teoremas de aproximación de la identidad.	89
Apéndice C. Teorema de las tres líneas de Hadamard.	99
Apéndice D. Teorema de interpolación de Riesz-Thorin.	103
Bibliografía.	112

## Introducción

Desde que fue utilizada por primera vez la transformada de Fourier por el matemático Jean Baptiste Joseph Fourier se ha desarrollado extensamente la teoría referente a ésta, pues la transformada de Fourier en los espacios  $L^p(\mathbb{R}^n)$  y su análogo en los grupos abelianos finitos ha probado ser extremadamente útil en las aplicaciones de procesamiento de señales e imágenes, en el análisis de fenómenos en mecánica cuántica y la resolución de problemas discretos de la teoría de códigos autocorrectores, por nombrar algunos.

El principal objetivo de este trabajo es poder definir la transformada de Fourier en los espacios  $L^p(\mathbb{R}^n)$  con  $1 \leq p \leq 2$  y en los grupos abelianos finitos, probar las propiedades más importantes que cumple en estos espacios y mostrar su utilidad con aplicaciones en la Física y en teoría de Gráficas.

En el primer capítulo se definirá la transformada de Fourier en  $L^1(\mathbb{R}^n)$  correspondiente al espacio de las funciones Lebesgue integrables en  $\mathbb{R}^n$  y se probarán las propiedades más importantes que cumple en este espacio. Después se definirá la clase de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  y se mostrará que es densa en los espacios  $L^p(\mathbb{R}^n)$  con  $1 \leq p < \infty$ , para poder extender la transformada de Fourier a todo el espacio  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Finalmente se extenderá a los espacios  $L^p(\mathbb{R}^n)$  para  $1 \leq p \leq 2$  y se probará la desigualdad de Hausdorff-Young .

En el capítulo 2 se definirá el análogo a la transformada de Fourier en el espacio  $L^2(G)$  correspondiente a las funciones  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  donde  $G$  es un grupo abeliano finito cualquiera. A esta versión se le llamará transformada de Fourier discreta (TFD) y se mostrarán las relaciones que esta induce entre un grupo y su dual.

Ya desarrollada la teoría necesaria, se probará el teorema de incertidumbre de Heisenberg y su versión discreta mejor conocida como el principio de incertidumbre de Donoho-Stark, que da una cota superior para el orden de un grupo abeliano finito  $G$ , además se hará énfasis sobre qué funciones cumplen la igualdad en cada una de las incertidumbres.

Para finalizar, se considerará un caso especial de las gráficas de Cayley y se demostrará que gran parte de la información que se puede obtener de estas gráficas está estrechamente relacionada con la TFD, facilitando su cálculo y manejo.



## CAPÍTULO 1

### Transformada de Fourier en $\mathbb{R}^n$

La transformada de Fourier tiene varias propiedades fundamentales que la hacen no solamente una herramienta muy útil en el contexto de las ecuaciones diferenciales parciales (EDP), sino también en muchos otros ámbitos de las matemáticas como en combinatoria, teoría de probabilidad o incluso en física e ingeniería por el estudio de propagación de ondas.

Una de ellas está relacionada con el comportamiento de la transformada de Fourier con respecto a los operadores de derivación, pues si  $\hat{f}$  denota la transformada de Fourier de  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  y suponiendo que  $\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , se tiene que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^\wedge(\xi) = 2\pi i \xi_j \hat{f}(\xi).$$

Otra aplicación de la transformada de Fourier sería en la localización de características de imágenes, pues se utiliza para realizar correlaciones. Por ejemplo, si se desea encontrar la letra “a” en una imagen que contenga texto, se establece un patrón (sección de la imagen con la característica de búsqueda deseada) con la letra “a”. Posteriormente se obtiene la correlación de la imagen patrón y la imagen original rotando  $180^\circ$  la imagen patrón y utilizando una técnica basada en la transformada de Fourier. Para obtener coincidencias en la imagen se utiliza la transformada de Fourier y la transformada de Fourier inversa, estos resultados se pueden consultar en [EE].

En este capítulo se desglosarán las propiedades fundamentales de la transformada de Fourier en el espacio  $L^1(\mathbb{R}^n)$  y se buscará extender la transformada a los espacios  $L^p(\mathbb{R}^n)$  donde  $1 \leq p \leq 2$ .

#### 1. Transformada de Fourier de funciones en $L^1(\mathbb{R}^n)$ .

Recordando que  $L^1(\mathbb{R}^n)$  es el espacio de las funciones  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  Lebesgue integrables, se define la transformada de Fourier como sigue.

1.1. **Definición.** Dadas una función  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  y  $\xi \in \mathbb{R}^n$  la transformada de Fourier de  $f$  se define como:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} dm_x ,$$

con  $m_x$  la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$  y  $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \cdots + x_n\xi_n$ .

Puesto que  $|f(x)e^{-2\pi i(x \cdot \xi)}| \leq |f(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ , entonces la transformada de Fourier está bien definida para toda  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Más aun, la transformada abre sumas y saca escalares como se puede ver a continuación.

**1.2. Proposición.** La transformada de Fourier es lineal, es decir:

Dadas  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$(\alpha f + g)^\wedge = \alpha \hat{f} + \hat{g} \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

**Demostración**

Sean  $\alpha \in \mathbb{C}$  y  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , entonces

$$\begin{aligned} (\alpha f + g)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\alpha f + g)(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dm_x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \alpha f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} + g(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dm_x \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dm_x + \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dm_x \\ &= \alpha \hat{f}(\xi) + \hat{g}(\xi) = (\alpha \hat{f} + \hat{g})(\xi). \end{aligned}$$

Otras de las propiedades fundamentales que cumple la transformada de Fourier son las siguientes:

**1.3. Teorema.** Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  entonces

$$\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \hat{f} \text{ es continua} \quad \text{y}$$

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

**Demostración**

Sea  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , se afirma que  $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , es decir  $\hat{f}$  está acotada c.d.s. (casi donde sea).

Puesto que  $|e^{-2\pi i(x \cdot \xi)}| = 1 \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n$ ,

entonces

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)}| dm_x = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dm_x \\ |\hat{f}(\xi)| &\leq \|f\|_1 < \infty, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  y  $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ .

Ahora se demostrará que para cualquier  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  la transformada de Fourier de  $f$  es continua.

Sea  $\xi \in \mathbb{R}^n$  entonces

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \left| \hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi) \right| \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot (\xi + h)} dm_x - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dm_x \right| \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} \left( e^{-2\pi i x \cdot h} - 1 \right) dm_x \right| \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \left| e^{-2\pi i x \cdot h} - 1 \right| dm_x. \end{aligned}$$

Haciendo  $F_h(x) = f(x) (e^{-2\pi i x \cdot h} - 1)$  se tiene que para toda  $h \in \mathbb{R}^n$

$$|F_h(x)| \leq 2|f(x)|.$$

Así por el teorema de convergencia dominada descrito en A.3

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |F_h(x)| dm_x = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{h \rightarrow 0} |F_h(x)| dm_x.$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left| \hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi) \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{h \rightarrow 0} |f(x)| \left| e^{-2\pi i x \cdot h} - 1 \right| dm_x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| |e^0 - 1| dm_x = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\hat{f}$  es una función continua.

Como se mencionó anteriormente, la transformada de Fourier goza de un repertorio de propiedades muy importantes que vale la pena mencionar y serán de mucha relevancia en las siguientes secciones.

A continuación se demostrarán algunas de las propiedades más importantes de la transformada de Fourier.

### Propiedades

Dadas  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  y  $\xi, h \in \mathbb{R}^n$

1.4.  $(f * g)^\wedge = \hat{f} \hat{g}$  donde  $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dm_y$ .

1.5.  $(\tau_h f)^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{2\pi i \xi \cdot h}$ , donde  $\tau_h f(x) = f(x + h)$ .

1.6. Si  $g_\lambda(x) = \lambda^{-n} f(\lambda^{-1}x)$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$  entonces  $\hat{g}_\lambda(\xi) = \hat{f}(\lambda\xi)$ .

1.7.  $\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^\wedge(\xi) = 2\pi i \xi_j \hat{f}(\xi)$ , suponiendo que  $\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

1.8.  $(-2\pi i \sigma_j f)^\wedge(\xi) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}(\xi)$ , suponiendo que  $\sigma_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , donde  $(\sigma_j f)(x) = x_j f(x)$ .

Esta última propiedad indica que las derivadas parciales de la transformada de Fourier en una función  $f$  existen si  $\sigma_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  para cada  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

## Pruebas

### 1.5

Sean  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  y  $h \in \mathbb{R}^n$ , entonces

$$(\tau_h f)^\wedge(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_h f)(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dm_x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+h) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dm_x,$$

haciendo el cambio de variable  $u = x+h$ , se tiene que

$$\begin{aligned} (\tau_h f)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{-2\pi i (u-h) \cdot \xi} dm_u \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{-2\pi i u \cdot \xi} e^{2\pi i h \cdot \xi} dm_u = \int_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{-2\pi i u \cdot \xi} dm_u e^{2\pi i h \cdot \xi} \\ &= \hat{f}(\xi) e^{2\pi i h \cdot \xi} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

### 1.4

En un inicio hay que ver que si  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  entonces  $(f * g) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

Sea  $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  definida como

$$h(x, y) = |f(y)| |g(x-y)| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

como se tiene que  $\mathbb{R}^n$  con la medida de Lebesgue es  $\sigma$ -finito y como  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  entonces  $h$  es medible en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  y se cumplen las hipótesis del teorema de Tonelli descrito en A.1, sobre  $h$ .

Entonces las funciones

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} h_x(y) dm_y = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |g(x-y)| dm_y, \\ G(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} h^y(x) dm_x = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |g(x-y)| dm_x \end{aligned}$$

son medibles y

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(x) dm_x = \int_{\mathbb{R}^n} G(y) dm_y,$$

así se tiene que

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) dm_x \right| = \\ & \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) dm_y dm_x \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |g(x - y)| dm_y dm_x \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} F(x) dm_x = \int_{\mathbb{R}^n} G(y) dm_y \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |g(x - y)| dm_x dm_y \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left( \int_{\mathbb{R}^n} |g(x - y)| dm_x \right) dm_y \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \|g\|_1 dm_y \\ & = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty. \end{aligned}$$

Lo anterior indica que  $(f * g) \in L^1(\mathbb{R}^n)$  pero también indica que la función  $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  definida como  $H(x, y) = f(x)g(x - y)$  es integrable en  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Ahora, como  $(f * g) \in L^1(\mathbb{R}^n)$  entonces se puede calcular su transformada de Fourier como sigue

$$\begin{aligned} (f * g)\hat{(\xi)} &= \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dm_x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) dm_y \right] e^{-2\pi i x \cdot \xi} dm_x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dm_y dm_x. \end{aligned}$$

Considerando la función  $e_\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $e_\xi(x) = e^{-2\pi i x \cdot \xi}$ , se tiene que  $|H e_\xi| = |H|$  y como  $H$  es integrable en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , entonces se cumplen las hipótesis del teorema de Fubini descrito en A.2 para la función  $(H e_\xi)$ .

Así aplicando el teorema de Fubini se tiene que

$$\begin{aligned} (f * g)\hat{(\xi)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dm_x dm_y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left( \int_{\mathbb{R}^n} g(x - y) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dm_x \right) dm_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left( \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_{-y}g)(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dm_x \right) dm_y, \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) (\tau_{-y}g)^\wedge(\xi) dm_y
\end{aligned}$$

entonces por 1.5,

$$\begin{aligned}
(f * g)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \hat{g}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot (-y)} dm_y \\
&= \hat{g}(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i \xi \cdot y} dm_y = \hat{g}(\xi) \hat{f}(\xi),
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$(f * g)^\wedge(\xi) = (\hat{f}\hat{g})(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

### 1.6

Supóngase  $g_\lambda(x) = \lambda^{-n} f(\lambda^{-1}x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \quad$  entonces

$$\hat{g}_\lambda(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} g_\lambda(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dm_x = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^{-n} f(\lambda^{-1}x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dm_x,$$

haciendo el cambio de variable con  $G(x) = u = x\lambda^{-1}$

$$\det(D(G)) = \lambda^{-n}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\hat{g}_\lambda(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{-2\pi i (\lambda u) \cdot \xi} dm_u \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{-2\pi i u \cdot (\lambda \xi)} dm_u = \hat{f}(\lambda \xi).
\end{aligned}$$

### 1.7

Primero se demuestra la propiedad para  $n = 1$ .

Como  $\frac{d}{dx} f \in L^1(\mathbb{R})$ , por el teorema A.4 y el teorema fundamental del cálculo, se tiene que para toda  $x \in \mathbb{R}^+$  (análogamente para  $x \in \mathbb{R}^-$ )

$$\int_{[0,x]} f'(s) dm_s = \int_0^x f'(s) ds = f(x) - f(0),$$

por lo que el  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  existe.

Por otro lado, se tiene que  $f \in L^1(\mathbb{R})$  y es continua. Sea  $L = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ , si  $L \neq 0$  y  $\epsilon = \frac{L}{3}$  entonces existe  $N_\epsilon \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall x > N_\epsilon$

$$0 < |f(x) - L| < \left| \frac{L}{3} \right|,$$

por lo que

$$0 < \left| \frac{2L}{3} \right| < |f(x)| \quad \forall x > N_\epsilon.$$

Así se tiene que

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dm_x \geq \int_{|x| > N_\epsilon} |f(x)| dm_x \geq \left| \frac{2L}{3} \right| m(\{x \mid |x| > N_\epsilon\}) = \infty,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

Con lo dicho anteriormente se calcula la transformada de Fourier de  $\frac{df}{dx} \in L^1(\mathbb{R})$ , entonces

$$\left( \frac{df}{dx} \right)^\wedge(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{df}{dx}(x) e^{-2\pi i x \xi} dm_x,$$

integrando por partes se tiene que

$$\begin{aligned} \left( \frac{df}{dx} \right)^\wedge(\xi) &= \\ \lim_{b \rightarrow \infty} [f(b)e^{-2\pi i b \xi} - f(-b)e^{2\pi i b \xi}] - \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} (-2\pi i \xi) dm_x &= \\ = 2\pi i \xi \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dm_x &= \\ = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Ahora, sea  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , entonces

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^\wedge(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dm_x,$$

como  $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , si se considera a la función  $e_\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  definida como  $e_\xi(x) = e^{-2\pi i x \cdot \xi}$  entonces  $\left( \frac{\partial f}{\partial x_j} e_\xi \right) \in L^1(\mathbb{R}^n)$  y se puede aplicar el teorema de Fubini. Por notación se tomará  $y_j \in \mathbb{R}^{n-1}$  como  $y_j = (x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$  entonces

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dm_{x_j} \right) dm_{y_j} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[ \left( \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n e^{-2\pi i x_k \xi_k} \right) \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{-2\pi i x_j \xi_j} dm_{x_j} \right] dm_{y_j}, \end{aligned}$$

y por el caso en una dimensión se tiene que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[ \left( \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n e^{-2\pi i x_k \xi_k} \right) \int_{\mathbb{R}} (2\pi i \xi_j) f(x) e^{-2\pi i x_j \xi_j} dm_{x_j} \right] dm_{y_j} \\ &= 2\pi i \xi_j \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dm_{x_j} \right) dm_{y_j}. \end{aligned}$$

Como  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $(f e_\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$  y se puede aplicar el teorema de Fubini, por lo que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^\wedge(\xi) = 2\pi i \xi_j \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dm_x = 2\pi i \xi_j \hat{f}(\xi).$$

### 1.8

Antes de demostrar 1.8 es importante tener en cuenta lo siguiente.

Observación (1).

Supóngase  $f \in L^1(\mathbb{R})$  y  $\sigma f \in L^1(\mathbb{R})$ , con  $\sigma f(x) = xf(x)$ .

Dadas  $h, \xi \in \mathbb{R}$   $h \neq 0$ , se definen las siguientes funciones:

$$e_y(x) = e^{-2\pi i xy} = e_x(y) \quad , \quad \gamma_{h,\xi}(x) = f(x) e_\xi(x) \frac{e_h(x) - 1}{h}.$$

Se afirma que  $\{\gamma_{h,\xi}\}$  cumple las hipótesis del T.C.D. descrito en A.3 cuando  $h$  tiende a 0.

Primero se tiene que para  $h \in \mathbb{R}$

$$|\gamma_{h,\xi}(x)| = \left| f(x) e_\xi(x) \frac{e_h(x) - 1}{h} \right| \leq \frac{2}{|h|} |f(x)|,$$

entonces  $\gamma_{h,\xi} \in L^1(\mathbb{R}) \quad \forall h \in \mathbb{R}$ .

Además, por definición de derivada se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e_x(h+0) - e_x(0)}{h} &= \frac{de_x}{dy}(0) \\ &= -2\pi i x e_x(0) = -2\pi i x. \end{aligned}$$

Por la definición de límite, dada  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta(\epsilon) \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\forall |h| < \delta(\epsilon)$

$$\left| \frac{e_x(h+0) - e_x(0)}{h} - (-2\pi i x) \right| < \epsilon,$$

entonces

$$\left| \frac{e_x(h+0) - e_x(0)}{h} \right| < \epsilon + 2\pi|x|.$$

Así dada  $\epsilon \leq 1$ , existe  $\delta(\epsilon) \in \mathbb{R}^+$  tal que

$$\begin{aligned} |\gamma_{h,\xi}(x)| &= \left| f(x) e_\xi(x) \frac{e_h(x) - 1}{h} \right| \leq |f(x)| \left| \frac{e_x(h+0) - e_x(0)}{h} \right| \\ &< |f(x)| |1 + 2\pi x| = |f(x)| + |2\pi x f(x)|. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\{\gamma_{h,\xi}\}$  cumple las hipótesis del teorema de convergencia dominada cuando  $h$  tiende a 0.

Demostración de 1.8.

Caso  $n = 1$ .

Supóngase  $f \in L^1(\mathbb{R})$  y  $\sigma f \in L^1(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)}{h} = \\ &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x (\xi + h)} dm_x - \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dm_x \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} \left( \frac{e^{-2\pi i x h} - 1}{h} \right) dm_x = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \gamma_{h,\xi}(x) dm_x, \end{aligned}$$

así por la observación (1) se puede aplicar el teorema de convergencia dominada, por lo que

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)}{h} = \int_{\mathbb{R}} \lim_{h \rightarrow 0} \gamma_{h,\xi}(x) dm_x \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{e^{-2\pi i x h} - 1}{h} \right) dm_x = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} (-2\pi i x) dm_x \\ &= \int_{\mathbb{R}} (-2\pi i \sigma f)(x) e^{-2\pi i x \xi} dm_x = (-2\pi i \sigma f)^\wedge(\xi). \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\hat{f}$  es diferenciable, y

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi}(\xi) = (-2\pi i \sigma f)^\wedge(\xi).$$

Caso general.

Sea  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\sigma_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , donde  $\sigma_j f(x) = x_j f(x)$ ,

entonces

$$\begin{aligned} (-2\pi i \sigma_j f)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (-2\pi i \sigma_j f)(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dm_x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} -2\pi i x_j f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dm_x. \end{aligned}$$

Tomando  $e_\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  como  $e_\xi(x) = e^{-2\pi i x \cdot \xi}$ , se tiene que  $[-2\pi i (\sigma_j f) e_\xi] \in L^1(\mathbb{R}^n)$  pues  $(\sigma_j f) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Entonces se puede aplicar el teorema de Fubini. Por notación se tomará  $y_j \in \mathbb{R}^{n-1}$  como  $y_j = (x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$ , entonces

$$\begin{aligned} (-2\pi i \sigma_j f)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} (-2\pi i \sigma_j f)(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dm_{x_j} dm_{y_j} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[ \left( \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n e^{-2\pi i x_k \xi_k} \right) \int_{\mathbb{R}} -2\pi i x_j f(x) e^{-2\pi i x_j \xi_j} dm_{x_j} \right] dm_{y_j}. \end{aligned}$$

Así por el caso de una dimensión  $\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^n)$  y

$$\begin{aligned} &(-2\pi i \sigma_j f)^\wedge(\xi) = \\ &\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[ \left( \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n e^{-2\pi i x_k \xi_k} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right) \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x_j \xi_j} dm_{x_j} \right] dm_{y_j} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dm_{x_j} dm_{y_j}. \end{aligned}$$

Así por el teorema de Fubini

$$(-2\pi i \sigma_j f)^\wedge(\xi) = \left( \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right) \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dm_x = \left( \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j} \right) (\xi).$$

Para poder demostrar el siguiente lema es necesario utilizar el hecho de que  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  es denso en los espacios  $L^p(\mathbb{R}^n)$ . Este resultado y la teoría necesaria para demostrarlo se desarrolla en el apéndice B.

1.9. **Lema.** Lema de Riemann-Lebesgue.

Para toda  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

**Demostración.**

Sea  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  tal que  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  entonces  $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^n)$  y  $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$ .

Así, por 1.7  $\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^\wedge(\xi) = 2\pi i \xi_j \hat{f}(\xi)$  es decir

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi)| &= \frac{\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^\wedge(\xi)\right|}{2\pi|\xi_j|} \\ &\leq \frac{\left\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\|_1}{2\pi|\xi_j|}. \end{aligned}$$

Además, se observa que  $|\xi|$  tiende a infinito si y sólo si  $|\xi_k|$  tiende a infinito para al menos un  $k \in \{1, \dots, n\}$ , por lo que existe  $j \in \{1, \dots, n\}$  tal que

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\hat{f}(\xi)| \leq \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi|\xi_j|} \left\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\|_1 = 0,$$

entonces

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

Por último, sea  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  y  $\epsilon > 0$ . Por B.5  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  es denso en  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , entonces existe  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que

$$\|f - g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)| dm_x < \frac{\epsilon}{2}.$$

Así

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dm_x = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - g(x)) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dm_x + \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dm_x, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - g(x)) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dm_x + \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dm_x \right| \\ |\hat{f}(\xi)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)| dm_x + \left| \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dm_x \right| \\ |\hat{f}(\xi)| &< \frac{\epsilon}{2} + |\hat{g}(\xi)|. \end{aligned}$$

Como  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , por lo anterior se tiene que  $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\hat{g}(\xi)| = 0$ . Por lo que existe  $N_\epsilon \in \mathbb{N}$  tal que para toda  $|\xi| > N_\epsilon$   $|\hat{g}(\xi)| < \frac{\epsilon}{2}$ , entonces

$$|\hat{f}(\xi)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \forall |\xi| > N_\epsilon.$$

Por lo tanto  $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$ .

■

## 2. La Clase de Schwartz y las distribuciones temperadas.

Gracias a las propiedades de la transformadas de Fourier, las EDP lineales con coeficientes constantes se reducen a ecuaciones algebraicas lineales de transformadas de Fourier. En efecto se puede considerar el ejemplo del Laplaciano:

Sea  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{\partial^k u}{\partial x_j^k} \in L^1(\mathbb{R}^n)$

recordando que  $\Delta u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$  entonces, si

$$-\Delta u = f,$$

se toma la transformada de Fourier para observar que

$$(-\Delta u)^\wedge(\xi) = \left( - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \right)^\wedge(\xi),$$

entonces por 1.7 y linealidad de la transformada,

$$\begin{aligned} (-\Delta u)^\wedge(\xi) &= - \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \right)^\wedge(\xi) \\ &= - \sum_{j=1}^n (-2\pi i \xi_j)^2 \hat{u}(\xi) = 4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u}(\xi). \end{aligned}$$

Así se tiene de manera casi inmediata una expresión en términos de la transformada de Fourier  $\hat{u}$  de la solución  $u$ :

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{4\pi^2 |\xi|^2}.$$

Pero, para obtener la solución es necesario invertir la transformada de Fourier. Este ejemplo se desarrolla de una manera más amplia en [DJ].

En esta sección se analizará la clase de Schwartz,  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , pues en este espacio se puede definir la transformada de Fourier y ver que es un operador lineal continuo de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Además en este espacio se podrá definir una inversa para la transformada.

**1.10. Definición.** Una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  está en la clase de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , si es infinitamente diferenciable y todas sus derivadas son de decrecimiento rápido, es decir:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$$

$$\rho_{\alpha, \beta}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty ,$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha &= (a_1, a_2, \dots, a_n), & \beta &= (b_1, b_2, \dots, b_n) \\ |\beta| &= b_1 + b_2 + \dots + b_n & x^\alpha &= x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} \\ y \quad D^\beta f(x) &= \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial x_1^{b_1} \dots \partial x_n^{b_n}}(x) . \end{aligned}$$

Por una parte se tiene que  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , la clase de las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto, pertenecen a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  sin embargo hay funciones como  $e^{-|x|^2}$  que no tienen soporte compacto pero sí pertenecen a la clase de Schwartz.

La colección  $\{\rho_{\alpha, \beta}\}$  es una familia numerable de seminormas en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  e inducen una topología para el espacio:

Una sucesión  $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  converge a cero si y sólo si  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{\alpha, \beta}(\phi_k) = 0 .$$

En [RW] se tiene la construcción de la topología formada por seminormas y se demuestra que con esta topología  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  es un espacio de Fréchet.

Al espacio de operadores lineales y continuos  $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$  se le denota por  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  y recibe el nombre del espacio de las distribuciones temperadas.

Un operador lineal  $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$  pertenece a  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T(\phi_k) = 0$$

siempre que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = 0$ , donde  $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

Para un mayor desarrollo de esta teoría se recomienda [DJ].

Para continuar con la transformada de Fourier es muy importante ver la función  $f(x) = e^{-\pi|x|^2}$ , pues esta función pertenece a la clase de Schwartz y su transformada de Fourier resulta ser ella misma lo que la hace muy útil y práctica, como se demuestra a continuación.

1.11. **Proposición.** Si  $f(x) = e^{-\pi|x|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ , entonces

$$\hat{f}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

**Demostración.**

Primero se toma el caso de una variable .

Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  infinitamente diferenciable en todo  $\mathbb{R}$ , entonces por el teorema de existencia y unicidad descrito en [MB], la ecuación diferencial

$$g'(x) + (2\pi x)g(x) = 0$$

con valor inicial  $g(0) = 1$ , tiene solución y esta es única .

Se observa que la función  $e^{-\pi x^2}$  es solución a la ecuación diferencial, pues  $e^{-\pi(0)^2} = e^0 = 1$ , y

$$\left(e^{-\pi x^2}\right)' = -2\pi x \left(e^{-\pi x^2}\right) .$$

Sea  $u(x) = e^{-\pi x^2}$ , entonces  $u$  y  $\sigma u$  pertenecen a  $L^1(\mathbb{R})$ , por lo que:

$$\begin{aligned} -i[u'(x) + 2\pi x u(x)] &= 0 \\ (-i[u' + 2\pi x u])^\wedge(\xi) &= (0)^\wedge(\xi) \\ -i(u')^\wedge(\xi) + (-2\pi i x u)^\wedge(\xi) &= 0 , \end{aligned}$$

entonces por 1.7 y 1.8

$$\begin{aligned} -i(2\pi i \xi \hat{u}(\xi)) + (\hat{u})'(\xi) &= 0 \\ (\hat{u})'(\xi) + 2\pi \xi \hat{u}(\xi) &= 0 , \end{aligned}$$

es decir,  $\hat{u}$  es solución de la ecuación diferencial  $g'(x) + 2\pi x g(x) = 0$  .

Evaluando en cero se tiene lo siguiente:

$$(\hat{u}(0))^2 = \left( \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-2\pi i(0) \cdot x} dm_x \right)^2$$

$$= \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dm_x \right)^2 .$$

Por Fubini,

$$(\hat{u}(0))^2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x^2+y^2)} dm_x dm_y$$

cambiando a coordenadas polares

$$(\hat{u}(0))^2 = \int_{[0,\infty]} \int_{[0,2\pi]} r e^{-\pi(r^2)} dm_\theta dm_r = 2\pi \int_{[0,\infty]} r e^{-\pi(r^2)} dm_r,$$

y haciendo el cambio de variable  $v = \pi r^2$  se tiene que

$$\begin{aligned} (\hat{u}(0))^2 &= \int_{[0,\infty]} e^{-v} dm_v \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} -e^{-u} - (-e^0) = 1. \end{aligned}$$

Pero la solución de la ecuación era única para el valor inicial  $g(0) = 1$ , entonces  $u = \hat{u} \dots (1)$ .

Tomando en cuenta lo anterior: sea  $f(x) = e^{-\pi|x|^2}$  con  $x \in \mathbb{R}^n$ , entonces

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} dm_x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2} e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} dm_x = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi(x \cdot x)} e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} dm_x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{(-\pi x) \cdot x + (-2\pi i \xi) \cdot x} dm_x = \int_{\mathbb{R}^n} e^{x \cdot [-\pi x - 2\pi i \xi]} dm_x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n e^{-x_j(\pi x_j + 2\pi i \xi_j)} dm_x = \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-y(\pi y + 2\pi i \xi_j)} dm , \end{aligned}$$

la última igualdad pasa por el Teorema de Fubini donde  $dm$  es la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}$  y se integra sobre  $y$ , entonces

$$\hat{f}(\xi) = \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-y(\pi y + 2\pi i \xi_j)} dm = \prod_{j=1}^n \hat{u}(\xi_j) ,$$

por (1)  $\hat{u}(\xi) = u(\xi)$  , entonces

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^n \hat{u}(\xi_j) &= \prod_{j=1}^n u(\xi_j) \\ &= e^{-\pi(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2)} = e^{-\pi|\xi|^2} = f(\xi) . \end{aligned}$$

■

Con lo anterior en mente, se pueden demostrar propiedades que la transformada de Fourier cumple en la clase de Schwartz y que son fundamentales para el desarrollo de la transformada de Fourier en otros espacios.

1.12. **Teorema.** La transformada de Fourier es un operador continuo de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  tal que dadas  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

1.13.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)dm_x = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)g(\xi)dm_\xi$$

y

1.14.

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i x \cdot \xi} dm_\xi .$$

La ecuación 1.14 se refiere a la fórmula de inversión.

Prueba del teorema 1.12.

Para comenzar se demostrará que si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  entonces  $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , para esto se necesita lo siguiente:

Para toda  $\gamma \in \mathbb{N}^n$ , y definiendo  $(\sigma_\gamma f)(x) = x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n} f(x)$ , se tiene que

- (1)  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$ , con  $p \in [1, \infty]$ .
- (2) Si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  entonces  $(D^\gamma f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .
- (3) Si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  entonces  $(\sigma_\gamma f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

Prueba de (1)

Sea  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  y  $p \in [1, \infty)$ , entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dm_x = \int_{[-1,1]^n} |f(x)|^p dm_x + \int_R |f(x)|^p dm_x$$

donde  $R = \mathbb{R}^n / [-1, 1]^n$ .

Sea  $\alpha = (m, m, \dots, m)$  con  $m > \frac{2}{p}$  fijo para cada  $p$ , como  $f \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$

$$|f(x)| \leq \rho_{0,0}(f) < \infty, \quad |x^\alpha f(x)| \leq \rho_{\alpha,0}(f) < \infty,$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dm_x &= \int_{[-1,1]^n} |f(x)|^p dm_x + \int_R |x^\alpha f(x)|^p |x^{-\alpha}|^p dm_x \\ &\leq \int_{[-1,1]^n} (\rho_{0,0}(f))^p dm_x + \int_R (\rho_{\alpha,0}(f))^p |x^{-\alpha}|^p dm_x \\ &< (2^n)(\rho_{0,0}(f))^p + (\rho_{\alpha,0}(f))^p \int_R |x^{-\beta}| dm_x \end{aligned}$$

donde  $\beta = (2, 2, \dots, 2)$ , como  $\int_R |x^{-\beta}| dm_x = C < \infty$ , entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dm_x < (2^n)(\rho_{0,0}(f))^p + C(\rho_{\alpha,0}(f))^p < \infty,$$

por lo que  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , con  $p \in [1, \infty)$ .

Sea  $f \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$ , entonces

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| = \rho_{0,0}(f) < \infty,$$

por lo que  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Prueba de (2)

Sea  $f \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$ , y  $\gamma \in \mathbb{N}^n$ , entonces  $\forall \beta \in \mathbb{N}^n$

$$D^\beta(D^\gamma f)(x) = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}} \left( \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x_1^{\gamma_1} \dots \partial x_n^{\gamma_n}} f(x) \right).$$

Como  $f$  es infinitamente diferenciable las derivadas parciales conmutan, es decir:

$$D^\beta(D^\gamma f)(x) = \frac{\partial^{|\beta|+|\gamma|} f(x)}{\partial x_1^{\beta_1+\gamma_1} \dots \partial x_n^{\beta_n+\gamma_n}}.$$

Así  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta (D^\gamma f)(x) \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^{\beta+\gamma} f(x) \right| = \rho_{\alpha, (\beta+\gamma)}(f) < \infty.$$

Por lo tanto  $D^\gamma f \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$ .

Prueba de (3)

Para comenzar, se toma el caso en una dimensión.

Sea  $g \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$ , y  $(\sigma g)(x) = xg(x)$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m} xg(x) &= \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \left( g(x) + x \frac{d}{dx} g(x) \right) \\ &= \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} (g(x)) + \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} \left( \frac{d}{dx} g(x) + x \frac{d^2}{dx^2} g(x) \right) \\ &= 2 \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} (g(x)) + \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} \left( x \frac{d^2}{dx^2} g(x) \right) \\ &\quad \vdots \\ &= m \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} (g(x)) + x \frac{d^m}{dx^m} g(x). \end{aligned}$$

Entonces  $\forall a, b \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^a D^b (\sigma g)(x) \right| &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^a D^b (xg(x)) \right| \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^a (m D^{m-1} g(x)) + x^a x D^m g(x) \right| \\ &\leq m \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^a D^{m-1} g(x) \right| + \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^{a+1} D^m g(x) \right| \\ &= m \rho_{a, (m-1)}(g) + \rho_{(a+1), m}(g) < \infty, \end{aligned}$$

por lo tanto  $\sigma g \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$ .

Ahora, sea  $(\sigma_k f)(x) = x^k f(x) \quad \forall k \in \mathbb{N}$ , entonces se hará inducción sobre  $k$ , donde el caso base  $k = 1$  corresponde al caso  $\sigma f$  visto anteriormente.

Supóngase entonces que  $\sigma_k f \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$ , así

$$(\sigma_{k+1} f)(x) = x^{k+1} f(x) = x^k x f(x) = (\sigma_k (\sigma f))(x).$$

Por la base de inducción  $\sigma f \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$  entonces por hipótesis de inducción  $(\sigma_k (\sigma f)) \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$ , por lo tanto  $\sigma_k f \in \mathbb{S}(\mathbb{R}) \quad \forall k \in \mathbb{N}$ .

En el caso de varias dimensiones se tiene lo siguiente.

Sean  $f \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$  y  $\gamma \in \mathbb{N}^n$ , se define para cada  $k \in \{1, \dots, n\}$  a  $e_k \in \mathbb{N}^n$  como el vector que en la  $k$ -ésima coordenada es 1 y en el resto es cero. Entonces para cada  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  y para cada  $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta (\sigma_{\gamma_k e_k} f)(x) \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^{\beta - \beta_k} g_k(x) \right|$$

donde

$$g_k(x) = \frac{\partial^{\beta_k}}{x_k^{\beta_k}} (\sigma_{\gamma_k e_k} f)(x).$$

Así, para probar que  $\sigma_{\gamma_k e_k} f \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$  es suficiente probar que  $g_k \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$  para toda  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

Como  $f \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$ , por el caso de una dimensión

$$(\sigma_{\gamma_k e_k} f)(x) = x_k^{\gamma_k} f(x)$$

pertenece a la clase de Schwartz, entonces por (2)

$$g_k = \frac{\partial^{\beta_k}}{x_k^{\beta_k}} (\sigma_{\gamma_k e_k} f) \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^n).$$

Así  $(\sigma_{\gamma_k e_k} f) \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$  para toda  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

Por otra parte, como

$$\sigma_\gamma f(x) = x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n} f(x),$$

se definen

$$\begin{aligned} h_0(x) &= x_n^{\gamma_n} f(x) = (\sigma_{\gamma_n e_n} f)(x) \\ h_1(x) &= x_{n-1}^{\gamma_{n-1}} h_0(x) = (\sigma_{\gamma_{n-1} e_{n-1}} h_0)(x) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$h_k(x) = x_{n-k}^{\gamma_{n-k}} h_{k-1}(x) = (\sigma_{\gamma_{n-k} e_{n-k}} h_{k-1})(x),$$

para toda  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ . Cabe observar que

$$h_{n-1}(x) = (\sigma_{\gamma_1 e_1} h_{n-2})(x) = \sigma_\gamma f(x).$$

Como  $f \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$  por el caso anterior se tiene que  $h_0 = (\sigma_{\gamma_n e_n} f) \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$ , de manera similar, como  $h_0 \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$  entonces  $h_1 = (\sigma_{\gamma_{n-1} e_{n-1}} h_0) \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$ , así sucesivamente se tiene que  $h_{n-1}(x) \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$ , por lo tanto  $\sigma_\gamma f \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$ .

En 1.8 se observa que la diferenciabilidad de  $\hat{f}$  depende únicamente de que  $\sigma_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  con  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , sin embargo para cualquier función  $f \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$

se tiene por (3) que  $(\sigma_\gamma f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n) \forall \gamma \in \mathbb{N}^n$ , entonces  $\hat{f}$  es infinitamente diferenciable y por 1.7 y 1.8 se tiene la siguiente igualdad:

$$\xi^\alpha D^\beta \hat{f}(\xi) = C^{-1}(D^\alpha \sigma_\beta f)\hat{f}(\xi),$$

donde  $C = (-1)^{|\beta|}(2\pi i)^{(|\alpha|-|\beta|)}$ . Así

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi^\alpha D^\beta \hat{f}(\xi)| &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |C^{-1}(D^\alpha \sigma_\beta f)\hat{f}(\xi)| \\ &= |C^{-1}| \|(D^\alpha \sigma_\beta f)\hat{f}\|_\infty \leq |C^{-1}| \|(D^\alpha \sigma_\beta f)\|_1, \end{aligned}$$

lo cual implica que  $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

Para demostrar que la transformada de Fourier es continua basta ver que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\phi_k) = 0$  siempre que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k = 0$ .

Por definición si  $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  es una sucesión tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k = 0,$$

entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{\alpha, \beta}(\phi_k) = 0, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Ahora, por (2) y (3) se tiene que  $D^\alpha \sigma_\beta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , entonces considerando lo anterior y por (1), para toda  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  y  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi^\alpha D^\beta \hat{f}(\xi)| &\leq |C^{-1}| \|(D^\alpha \sigma_\beta f)\|_1 \\ &< |C^{-1}| [ (2^n)(\rho_{0,0}(D^\alpha \sigma_\beta f)) + C'(\rho_{M,0}(D^\alpha \sigma_\beta f)) ] \\ &= |C^{-1}| \left[ (2^n) \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha \sigma_\beta f| + C' \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |x^M D^\alpha \sigma_\beta f| \right]. \end{aligned}$$

donde  $C'$  es una constante y  $M = (m, m, \dots, m)$  con  $m > 2$  fijo.

Más aun, si  $e_1, \dots, e_n$  son los elementos de la base canonica de  $\mathbb{R}^n$ , entonces

$$\begin{aligned} &D^\alpha \sigma_\beta f(x) \\ &= \sum_{\eta_1=0}^{\beta_1} \dots \sum_{\eta_n=0}^{\beta_n} (A_{\eta_1, \dots, \eta_n}) x^{\beta - (\eta_1 e_1 + \dots + \eta_n e_n)} D^{\alpha - (\eta_1 e_1 + \dots + \eta_n e_n)} f(x), \end{aligned}$$

donde  $A_{\eta_1, \dots, \eta_n} = \binom{\beta_1}{\eta_1} \binom{\beta_2}{\eta_2} \dots \binom{\beta_n}{\eta_n} (\alpha^{\eta_1 e_1 + \dots + \eta_n e_n})$ .

Por lo tanto para toda  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  y  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$

$$\begin{aligned} & \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha \sigma_\beta f| \\ & \leq \sum_{\eta_1=0}^{\beta_1} \dots \sum_{\eta_n=0}^{\beta_n} |A_{\eta_1, \dots, \eta_n}| \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |x^{\beta - (\eta_1 e_1 + \dots + \eta_n e_n)} D^{\alpha - (\eta_1 e_1 + \dots + \eta_n e_n)} f(x)| \\ & = \sum_{\eta_1=0}^{\beta_1} \dots \sum_{\eta_n=0}^{\beta_n} |A_{\eta_1, \dots, \eta_n}| \rho_{\beta - (\eta_1 e_1 + \dots + \eta_n e_n), \alpha - (\eta_1 e_1 + \dots + \eta_n e_n)}(f) < \infty. \end{aligned}$$

De la misma forma

$$\begin{aligned} & \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |x^M D^\alpha \sigma_\beta f| \\ & = \sum_{\eta_1=0}^{\beta_1} \dots \sum_{\eta_n=0}^{\beta_n} |A_{\eta_1, \dots, \eta_n}| \rho_{M + \beta - (\eta_1 e_1 + \dots + \eta_n e_n), \alpha - (\eta_1 e_1 + \dots + \eta_n e_n)}(f) < \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\rho_{\alpha, \beta}(\mathcal{F}(\phi_k))$  está acotado por una combinación lineal finita de seminormas de  $f$ , entonces  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{\alpha, \beta}(\mathcal{F}(\phi_k)) = 0$  siempre que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k = 0.$$

Así la transformada de Fourier es un operador continuo de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  en si mismo.

Prueba de 1.13,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x) dm_x = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) g(\xi) dm_\xi.$$

Por definición de la transformada de Fourier, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x) dm_x & = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-2\pi i(x \cdot y)} dm_y dm_x \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(y) e^{-2\pi i(x \cdot y)} dm_y dm_x. \end{aligned}$$

Como  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , se puede ver que  $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $H(x, y) = f(x)g(y)e^{-2\pi i(x \cdot y)}$  es integrable, pues  $|H(x, y)| = |f(x)||g(y)|$ . Entonces se puede aplicar el teorema de Fubini, así

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x) dm_x & = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(y) e^{-2\pi i(x \cdot y)} dm_x dm_y \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i(x \cdot y)} dm_x dm_y = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \hat{f}(y) dm_y. \end{aligned}$$

Prueba de 1.14.

Tomando  $h(x) = \lambda^{-n}g(\lambda^{-1}x)$  con  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  se tiene por 1.13 que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{h}(x)dm_x = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)h(\xi)dm_\xi ,$$

además por 1.6

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(\lambda x)dm_x = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\lambda^{-n}g(\lambda^{-1}\xi)dm_\xi .$$

Nótese que haciendo un cambio de variables en la integral de la izquierda, tomando  $\lambda x = y$ , se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(\lambda x)dm_x = \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda^{-1}y)\hat{g}(y)\lambda^{-n}dm_y ,$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda^{-1}y)\hat{g}(y)\lambda^{-n}dm_y &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\lambda^{-n}g(\lambda^{-1}\xi)dm_\xi \\ \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda^{-1}y)\hat{g}(y)dm_y &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)g(\lambda^{-1}\xi)dm_\xi \\ \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda^{-1}y)\hat{g}(y)dm_y &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)g(\lambda^{-1}\xi)dm_\xi \quad \dots (1) . \end{aligned}$$

Como  $f, g \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $\hat{f}, \hat{g} \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$ . Además

$$|f(\lambda^{-1}y)\hat{g}(y)| \leq \|f\|_\infty |\hat{g}(y)| \quad \forall \lambda > 0$$

y

$$|\hat{f}(\xi)g(\lambda^{-1}\xi)| \leq \|g\|_\infty |\hat{f}(\xi)| \quad \forall \lambda > 0$$

entonces por el teorema de convergencia dominada

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda^{-1}y)\hat{g}(y)dm_y = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda^{-1}y)\hat{g}(y)dm_y$$

y

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)g(\lambda^{-1}\xi)dm_\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi)g(\lambda^{-1}\xi)dm_\xi .$$

Más aún, como  $f$  y  $g$  son continuas, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda^{-1}y)\hat{g}(y)dm_y = \int_{\mathbb{R}^n} f(0)\hat{g}(y)dm_y$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi)g(\lambda^{-1}\xi)dm_\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)g(0)dm_\xi .$$

Por lo anterior y la ecuación (1) , se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(0)\hat{g}(y)dm_y = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)g(0)dm_\xi$$

$$f(0) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(y)dm_y = g(0) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)dm_\xi ,$$

tomando  $g(x) = e^{-\pi|x|^2}$  y por lema 1.11

$$f(0) \int_{\mathbb{R}^n} g(y)dm_y = g(0) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)dm_\xi$$

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)dm_\xi .$$

Entonces 1.14 se cumple para  $x = 0$ . Reemplazando  $f$  por  $\tau_x f$ , y por 1.5

$$f(x) = (\tau_x f)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_x \hat{f})(\xi)dm_\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i(x \cdot \xi)}dm_\xi .$$

■

Además tomando  $\tilde{f}(x) = f(-x)$  se obtiene el siguiente corolario.

1.15. **Corolario.** Para  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $(\hat{f})^\wedge = \tilde{f}$ .

Esto indica que la transformada de Fourier es de periodo 4, es decir, el operador aplicado 4 veces es el operador identidad.

### Demostración

$$(\hat{f})^\wedge(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)e^{-2\pi i(x \cdot \xi)}dm_\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i[(-x) \cdot \xi]}dm_\xi ,$$

entonces por 1.14

$$(\hat{f})^\wedge(x) = f(-x) = \tilde{f}(x) ,$$

por lo anterior se deduce que

$$\left(\hat{f}\right)^{-1}(x) = \left(\left(\hat{f}\right)^\wedge\right)^\wedge(x) .$$

Con el resultado 1.15 se muestra que existe la inversa de la transformada de Fourier en la clase de Schwartz, esto es bastante conveniente pues en la siguiente sección se demostrará que existe una extensión para la transformada de Fourier en los espacios  $L^p(\mathbb{R}^n)$   $1 \leq p \leq 2$ .

### 3. La transformada de Fourier en $L^p(\mathbb{R}^n)$ $1 \leq p \leq 2$ .

En los capítulos anteriores se mostraron una gran cantidad de propiedades que cumple la transformada de Fourier en el espacio de Schwartz y en  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . Estas propiedades son de gran utilidad en muchas áreas de la matemática y física por lo que se busca extenderlas a espacios más generales. Este capítulo se centrará en extender la transformada de Fourier a los espacios de medida  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p \leq 2$ .

Para comenzar es importante saber que el espacio  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  es denso en  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

1.16. **Proposición.**  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  es denso en  $L^p(\mathbb{R}^n)$   $\forall p \in [1, \infty)$ .

#### **Demostración**

Por el teorema B.5,  $L_p(\mathbb{R}^n) = \overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)}$  con la topología de  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

Por lo tanto, como  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  y  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$   $\forall p \in [1, \infty)$ , entonces

$$L^p(\mathbb{R}^n) = \overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} \subseteq \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \subseteq \overline{L^p(\mathbb{R}^n)} = L^p(\mathbb{R}^n) \quad \forall p \in [1, \infty).$$

Así se tiene que  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  es denso en  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

Saber que el espacio de Schwartz es denso en  $L^p(\mathbb{R}^n)$  es muy importante pues este resultado permite extender la definición de la transformada de Fourier a  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Más aun, se demostrará que la transformada de Fourier es una isometría en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

1.17. **Teorema.** Existe una extensión de la transformada de

Fourier  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  tal que

$$\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2 .$$

A la identidad  $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$  también se le conoce como teorema de Plancherel.

#### **Demostración**

Primero se demostrará el teorema de Plancherel para  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

Dadas  $f, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  sea  $g = \widehat{\widehat{h}}$  entonces

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\xi) &= \left(\widehat{\widehat{h}}\right)^\wedge(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\widehat{h}}(x) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} dm_x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\left(\widehat{h}(x)\right) e^{2\pi i(x \cdot \xi)}} dm_x = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} \left(\widehat{h}(x)\right) e^{2\pi i(x \cdot \xi)} dm_x}.\end{aligned}$$

Aplicando el teorema de inversión sobre  $h$  se sigue que

$$\widehat{g}(\xi) = \overline{\widehat{h(\xi)}} = \widehat{h}(\xi),$$

y por 1.13 se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \widehat{h} = \int_{\mathbb{R}^n} f \widehat{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} g = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} \widehat{\widehat{h}}.$$

Tomando  $f = h$  entonces

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2 \quad \text{para } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Sea  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , como  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  es denso en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , entonces existe una sucesión  $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  que converge a  $f$  en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , es decir,

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tal que, si } k > N_\epsilon, \text{ entonces } \|f - \phi_k\|_2 < \epsilon.$$

Así se define entonces la extensión de la transformada de Fourier en  $L^2(\mathbb{R}^n)$  como

$$\mathcal{F}(f) := \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{\phi}_k,$$

donde el límite se toma en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Para ver que  $\mathcal{F}$  está bien definida se probará que el límite anterior existe y no depende de la elección de  $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ .

Puesto que  $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es convergente en  $L^2(\mathbb{R}^n)$  entonces  $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy, así dada  $\epsilon > 0$  existe  $N_\epsilon \in \mathbb{N}$  tal que si  $l, m > N$

$$\|\phi_l - \phi_m\|_2 < \epsilon.$$

Como  $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  entonces  $(\phi_l - \phi_m) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  y por el teorema de Plancherel en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  se tiene que

$$\|\widehat{\phi}_l - \widehat{\phi}_m\|_2 = \|(\phi_l - \phi_m)^\wedge\|_2 = \|\phi_l - \phi_m\|_2 < \epsilon,$$

por lo tanto  $\{\widehat{\phi}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , y como  $L^2(\mathbb{R}^n)$  es completo, entonces  $\{\widehat{\phi}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es convergente en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Ahora, sean  $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  sucesiones en  $\mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$  tales que cada una converge a  $f$  en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , es decir:

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$  tal que si  $k > N$

$$\|\phi_k - f\|_2 < \frac{\epsilon}{2}, \quad \|\varphi_k - f\|_2 < \frac{\epsilon}{2}$$

entonces

$$\begin{aligned} \|\hat{\phi}_k - \hat{\varphi}_k\|_2 &= \|(\phi_k - \varphi_k)\hat{\cdot}\|_2 \\ &= \|\phi_k - \varphi_k\|_2 \leq \|\phi_k - f\|_2 + \|\varphi_k - f\|_2 < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Así  $\lim_{k \rightarrow \infty} (\hat{\phi}_k - \hat{\varphi}_k) = 0$ , es decir,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\phi}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\varphi}_k$$

por lo que  $\mathcal{F}$  está bien definida.

Cabe observar que  $\mathcal{F}$  es una extensión de la transformada de Fourier que se definió al inicio del capítulo pues dada una función  $\phi \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$  la sucesión  $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$  definida por  $\phi_k = \phi \quad \forall k \in \mathbb{N}$ , indica que

$$\mathcal{F}(\phi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\phi}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\phi} = \hat{\phi}.$$

Ya habiendo visto que  $\mathcal{F}$  es una extensión bien definida de la transformada de Fourier se puede mostrar el teorema de Plancherel para funciones en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Sea  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  y  $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k = f$  en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Por propiedades de la norma

$$|\|\phi_k\|_2 - \|f\|_2| \leq \|\phi_k - f\|_2,$$

entonces

$$\|f\|_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\phi_k\|_2.$$

Así se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \|\phi_k\|_2^2 - \|f\|_2^2 \right| &= \lim_{k \rightarrow \infty} (|\|\phi_k\|_2 - \|f\|_2| |\|\phi_k\|_2 + \|f\|_2|) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} |\|\phi_k\|_2 - \|f\|_2| \lim_{k \rightarrow \infty} |\|\phi_k\|_2 + \|f\|_2| \\ &= (0)(2\|f\|_2) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\phi_k\|_2^2 = \|f\|_2^2$ .

De la misma forma, por definición de la transformada de Fourier  $\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}^n)$  y  $\{\hat{\phi}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\phi}_k = \mathcal{F}(f)$  en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , por lo que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{\phi}_k\|_2^2 = \|\mathcal{F}(f)\|_2^2.$$

Así por el teorema de Plancherel para funciones en  $\mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$  se tiene que

$$\|\mathcal{F}(f)\|_2^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{\phi}_k\|_2^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\phi_k\|_2^2 = \|f\|_2^2.$$

Lo anterior indica que  $\mathcal{F}$  es un operador lineal acotado en  $L^2(\mathbb{R}^n)$  entonces  $\mathcal{F}$  es continua en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Así se tiene un análogo al teorema 1.15, pues si se define  $\tilde{f}(x) = f(-x)$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\mathcal{F}(f) &= \mathcal{F}\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\phi}_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}\left(\hat{\phi}_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\hat{\phi}_k\right)^\wedge \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\phi}_k = \tilde{f}, \end{aligned}$$

entonces  $\mathcal{F}$  es de periodo 4. Se define  $\mathcal{F}^{-1} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  como

$$\mathcal{F}^{-1}(f) := \mathcal{F}^3(f) = \mathcal{F}(\tilde{f}),$$

donde  $\mathcal{F}^3$  es  $\mathcal{F}$  aplicada tres veces, por lo que  $\mathcal{F}^{-1}$  es un operador lineal y continuo en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . ■

Con estos resultados se podrá mostrar que la transformada de Fourier se puede definir en los espacios  $L^p(\mathbb{R}^n)$  con  $p \in [1, 2]$ . Para ello es necesario el teorema de interpolación de Riesz-Thorin el cual se prueba en el apéndice D, pues muestra la relación que se mantiene entre espacios  $L^p(\mathbb{R}^n)$  cuando se tiene un operador lineal continuo  $T$ .

Este teorema es de gran ayuda, pues permite demostrar la desigualdad de Hausdorff-Young de una manera muy breve.

**1.18. Corolario.** Desigualdad de Hausdorff-Young.

Sea  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p \leq 2$  y  $p' = \frac{p}{p-1}$ , entonces  $\hat{f} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$  y

$$\|\hat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p.$$

**Demostración**

Sea  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  con  $p \in [1, 2]$ . Como en teoremas anteriores ya se probó el resultado para los casos  $p = 1$  y  $p = 2$ , se tomará entonces  $1 < p < 2$ .

Por 1.3 y por 1.17 se tiene que

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1 \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad \|\hat{g}\|_2 = \|g\|_2 \quad \forall g \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Esto quiere decir que la transformada de Fourier es un operador de tipo  $(1, \infty)$  y de tipo  $(2, 2)$  por lo que se puede aplicar el teorema de interpolación de Riesz-Thorin con los siguientes valores:

$$\begin{aligned} p_0 = 1 \quad p_1 = 2 \quad q_0 = \infty \quad q_1 = 2 \\ K_0 = K_1 = 1. \end{aligned}$$

Haciendo  $p = p_t$  entonces se deducen los valores de  $t$  y  $q_t$  como sigue

$$t = 2 \left(1 - \frac{1}{p}\right), \quad q_t = \left(\frac{p}{p-1}\right) = p'.$$

Entonces por el teorema de interpolación de Riesz-Thorin se tiene que:

$$\begin{aligned} \hat{f} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n) \\ \text{y} \\ \|\hat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p. \end{aligned}$$

■

Es importante observar que esta desigualdad necesita que  $1 < p < 2$ , de lo contrario  $t > 1$  y ya no se cumplirían hipótesis del teorema de interpolación de Riesz-Thorin. En el caso de que  $p$  sea mayor que 2 siempre existirá una función  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  tal que su transformada de Fourier es una distribución pero no una función, este resultado se puede ver en [SW].

## CAPÍTULO 2

### **Transformada de Fourier en grupos abelianos finitos**

La transformada de Fourier discreta (TFD) aparece cuando se quieren calcular las series clásicas de Fourier e integrales de senos y cosenos. Además, hay muchos problemas discretos que pueden ser resueltos con la TFD, por ejemplo el estudio de valores propios de matrices adjuntas de gráficas, el procesamiento de imágenes digitales o la teoría de códigos autocorrectores, la cual es necesaria para mandar y recibir imágenes de marte a la tierra.

En particular la TFD se utiliza comunmente en el proceso digital de señales y otros campos relacionados a analizar las frecuencias que contiene una señal muestreada o resolver ecuaciones diferenciales parciales.

Cabe aclarar que la TFD es una función, mientras que la transformada rápida de Fourier (TRF) se refiere a una familia específica de algoritmos para calcular la TFD. Estos algoritmos son muy importantes para llevar a cabo operaciones como convoluciones o multiplicaciones de grandes números enteros eficientemente.

En este capítulo se desarrollará la teoría referente al espacio de funciones con dominio  $G$  y codominio  $\mathbb{C}$  donde  $G$  es un grupo abeliano finito. Se hará énfasis en el grupo dual de  $G$  para así poder definir la transformada de Fourier y mostrar la relación que hay entre un grupo abeliano finito y su grupo dual.

## 1. El espacio $L^2$ de grupos abelianos finitos.

Antes de dar la definición de la TFD es importante ver algunas propiedades del espacio que corresponde a las funciones  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , donde  $G$  es un grupo abeliano finito.

Dado un conjunto finito  $A$ , al conjunto de todas las funciones  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  se le llamará  $L^2(A)$ . Se puede observar que este conjunto es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$  con la suma usual de funciones, además estará dotado con un producto escalar como se muestra a continuación.

**2.1. Definición.** Dado  $A$  un conjunto finito se define la función  $\langle \cdot, \cdot \rangle : L^2(A) \times L^2(A) \rightarrow \mathbb{C}$  de la siguiente manera:

Para cualesquiera  $f, g \in L^2(A)$ ,

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x \in A} f(x) \bar{g}(x).$$

Esta función está bien definida al ser  $A$  un conjunto finito pues siempre se obtendrá una suma finita de elementos de  $\mathbb{C}$ .

**2.2. Proposición.** Para cualquier conjunto finito  $A$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es un producto escalar de  $L^2(A)$ .

### Demostración

Dados  $A$  un conjunto finito,  $a \in \mathbb{C}$  y  $f, g, h \in L^2(A)$ , entonces

i)

$$\begin{aligned} \langle af + g, h \rangle &= \sum_{x \in A} (af(x) + g(x)) \bar{h}(x) \\ &= \sum_{x \in A} af(x) \bar{h}(x) + \sum_{x \in A} g(x) \bar{h}(x) \\ &= a \sum_{x \in A} f(x) \bar{h}(x) + \sum_{x \in A} g(x) \bar{h}(x) \\ &= a \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle f, ag + h \rangle &= \sum_{x \in A} f(x) \overline{(ag(x) + h(x))} \\ &= \sum_{x \in A} f(x) \overline{ag(x)} + \sum_{x \in A} f(x) \bar{h}(x) \\ &= \bar{a} \sum_{x \in A} f(x) \overline{g(x)} + \sum_{x \in A} f(x) \bar{h}(x) \\ &= \bar{a} \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle . \end{aligned}$$

ii)

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x \in A} f(x) \overline{g(x)} = \overline{\sum_{x \in A} \overline{f(x)} g(x)} = \overline{\langle g, f \rangle}.$$

iii)

$$\langle f, f \rangle = \sum_{x \in A} f(x) \overline{f(x)} = \sum_{x \in A} |f(x)|^2 \geq 0,$$

además  $\langle f, f \rangle = 0$  si y sólo si  $f = 0$ .

Adicionalmente se dirá que dos funciones  $f, g \in L^2(A)$  son ortogonales si  $\langle f, g \rangle = 0$ .

Con lo anterior se tiene que para todo conjunto finito  $A$ , el espacio  $L^2(A)$  admite un producto escalar que induce a la vez (como se demuestra en [FS]) la siguiente norma

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{x \in A} |f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Así, dado  $G$  un grupo abeliano finito, se tiene que las funciones  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  forman un espacio vectorial con producto interno. Además se puede mostrar una base de este espacio. Para poder seguir avanzando es importante ver la siguiente definición.

**2.3. Definición.** Dado  $G$  un grupo abeliano finito tal que  $G = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$ , se define  $\delta_{a_k} \in L^2(G)$ ,  $\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  como

$$\delta_{a_k}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_k = x \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}.$$

Con estas funciones es fácil ver que, en el caso de que  $G$  sea un grupo abeliano finito, el espacio  $L^2(G)$  tiene una base ortonormal finita.

**2.4. Proposición.** Sea  $G$  un grupo abeliano finito tal que  $G = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$ , entonces  $\{\delta_{a_0}, \dots, \delta_{a_{n-1}}\}$  es una base ortonormal de  $L^2(G)$ .

**Demostración**

Sea  $f \in L^2(G)$ , entonces existen  $b_0, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{C}$  tal que

$$\begin{aligned} f(a_0) &= b_0 \\ f(a_1) &= b_1 \\ &\vdots \\ f(a_{n-1}) &= b_{n-1} \end{aligned}$$

entonces

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j \delta_{a_j}(x),$$

así  $\{\delta_{a_0}, \dots, \delta_{a_{n-1}}\}$  es generador del espacio  $L^2(G)$ .

Además se tiene que  $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$

$$\|\delta_{a_k}\|^2 = \langle \delta_{a_k}, \delta_{a_k} \rangle$$

$$= \sum_{x \in G} \delta_{a_k}(x) \overline{\delta_{a_k}(x)} = \sum_{x \in G} |\delta_{a_k}(x)|^2 = |\delta_{a_k}(a_k)|^2 = 1,$$

por lo que, si  $k, j \in \{0, \dots, n-1\}$   $k \neq j$ ,

$$\langle \delta_{a_k}, \delta_{a_j} \rangle = \sum_{x \in G} \delta_{a_k}(x) \overline{\delta_{a_j}(x)} = 0,$$

entonces  $\{\delta_{a_0}, \dots, \delta_{a_{n-1}}\}$  es ortonormal.

Por último se observa que es linealmente independiente.

Sean  $b_0, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{C}$  y supóngase que

$$\forall x \in G, \quad \sum_{k=0}^{n-1} b_k \delta_{a_k}(x) = 0.$$

Entonces para cada  $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} b_k \delta_{a_k}(a_j) = b_j = 0.$$

Por lo tanto el conjunto  $\{\delta_{a_0}, \dots, \delta_{a_{n-1}}\}$  es linealmente independiente.

Otra propiedad interesante de los espacios  $L^2(G)$  es que se puede definir una operación convolución que conserva relaciones entre los elementos de  $L^2(G)$  con una base ortonormal del mismo.

Para todo grupo abeliano finito  $G$  se adoptará la notación del grupo abeliano  $\mathbb{Z}$  para definir la operación del grupo y su inverso. Con esta notación en mente se define la convolución como sigue.

**2.5. Definición.** Sean  $f, g \in L^2(G)$  con  $G$  un grupo abeliano finito. La convolución  $*$  :  $L^2(G) \times L^2(G) \rightarrow \mathbb{C}$  se define como:

$$(f * g)(x) = \sum_{y \in G} f(y)g(x - y),$$

donde  $x \in G$ .

**2.6. Proposición.** Sea  $G$  un grupo abeliano finito, dados  $f, g, h \in L^2(G)$ , entonces:

- a)  $f * g = g * f$ .
- b)  $f * (g * h) = (f * g) * h$ .

Y para cualesquiera  $a, b \in G$ ,

- c)  $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$ .
- d)  $(f * \delta_a)(x) = f(x - a)$ .

Antes de demostrar la proposición nótese que dado un valor fijo  $k \in G$  se tiene que

$$\sum_{(x-k) \in G} f(x) = \sum_{x \in G} f(x) = \sum_{x \in G} f(x - k),$$

pues únicamente hay una cantidad finita de elementos sumados en distinto orden, la cual no se altera por ser  $G$  un grupo abeliano finito.

### Demostración

a)

$$(f * g)(x) = \sum_{y \in G} f(y)g(x - y),$$

Sea  $z = x - y$ , entonces

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \sum_{(x-z) \in G} f(x - z)g(z) \\ &= \sum_{z \in G} g(z)f(x - z) = (g * f)(x). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} (f * (g * h))(x) &= \sum_{y \in G} f(y)(g * h)(x - y) \\ &= \sum_{y \in G} f(y) \sum_{z \in G} g(z)h(x - y - z) \end{aligned}$$

Sea  $w = z + y$ , entonces

$$\begin{aligned}
(f * (g * h))(x) &= \sum_{y \in G} f(y) \sum_{(w-y) \in G} g(w-y)h(x-w) \\
&= \sum_{y \in G} f(y) \sum_{w \in G} g(w-y)h(x-w) \\
&= \sum_{y \in G} \sum_{w \in G} f(y)g(w-y)h(x-w) \\
&= \sum_{w \in G} \left( \sum_{y \in G} f(y)g(w-y) \right) h(x-w) \\
&= \sum_{w \in G} (f * g)(w)h(x-w) = ((f * g) * h)(x) .
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
(\delta_a * \delta_b)(x) &= \sum_{y \in G} \delta_a(y)\delta_b(x-y) \\
&= \delta_a(a)\delta_b(x-a) + \sum_{\substack{y \in G \\ y \neq a}} \delta_a(y)\delta_b(x-y) \\
&= \delta_b(x-a) \\
&= \delta_{a+b}(x) .
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
(f * \delta_a)(x) &= \sum_{y \in G} f(y)\delta_a(x-y) \\
&= \sum_{y \in G} f(y)\delta_{a-x}(-y) = \sum_{y \in G} f(y)\delta_{x-a}(y) \\
&= f(x-a) .
\end{aligned}$$

## 2. Transformada de Fourier en grupos abelianos finitos.

Para extender los resultados de la transformada de Fourier se usa un corolario del teorema fundamental de los grupos abelianos finitos el cual afirma que si  $G$  es un grupo abeliano finito entonces

$$G \cong S(d_1) \oplus S(d_2) \oplus \cdots \oplus S(d_r),$$

donde  $r \geq 1$ ,  $d_1, \dots, d_r$  son enteros mayores a 1 tales que  $\forall k \in \{1, \dots, r-1\} \quad d_k | d_{k+1}$  y  $S(d_k)$  es un grupo cíclico de orden  $d_k$ .

Además los enteros  $d_1, \dots, d_r$  están definidos de manera única con respecto a  $G$ , es decir si  $x \in G \cong \bigoplus_{k=1}^r S(d_k)$ , entonces  $x \cong (x_1, \dots, x_r)$  con

$x_j \in S(d_j)$  y esta expresión será única.

La demostración de este resultado se puede encontrar en [RJ] o en [TA].

Para continuar es importante observar que el conjunto  $\mathbb{T} = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1\}$  es un grupo abeliano con la multiplicación usual de los complejos, para así definir lo siguiente.

**2.7. Definición.** Dado  $G$  un grupo abeliano finito, el dual de  $G$  se define como:

$$\hat{G} = \{\chi : G \rightarrow \mathbb{T} \mid \chi \text{ es un morfismo de grupos}\}.$$

A los elementos de  $\hat{G}$  se les llama caracteres de  $G$ .

El dual de un grupo es también un grupo abeliano con la multiplicación usual de funciones, pues para todo  $\chi, \psi, \phi \in \hat{G}$ ,  $a \in G$ , se tiene

1)

$$(\chi\psi)(a) = \chi(a)\psi(a) \in \mathbb{T}.$$

2)

$$\begin{aligned} ((\chi\psi)\phi)(a) &= (\chi(a)\psi(a))\phi(a) \\ &= \chi(a)\psi(a)\phi(a) = \chi(a)(\psi(a)\phi(a)) \\ &= (\chi(\psi\phi))(a). \end{aligned}$$

3) Tomando la función  $1_G : G \rightarrow \mathbb{T}$ , tal que  $1_G(a) = 1$  para toda  $a \in G$ , entonces

$$\chi 1_G(a) = \chi(a)1_G(a) = \chi(a), \quad 1_G \chi(a) = 1_G(a)\chi(a) = \chi(a).$$

4) Para toda  $\chi \in \hat{G}$   $\chi^{-1} = \frac{1}{\chi}$  ya que  $\frac{1}{\chi(a)} \in \mathbb{T} \quad \forall a \in G$  y

$$\chi \chi^{-1}(a) = \chi(a)\chi^{-1}(a) = \frac{\chi(a)}{\chi(a)} = 1.$$

Entonces  $\hat{G}$  es grupo, y como  $(\chi\psi)(a) = \chi(a)\psi(a) = \psi(a)\chi(a) = (\psi\chi)(a)$ , también es abeliano.

Con la teoría descrita hasta ahora ya se puede construir la transformada de Fourier para el caso general de grupos abelianos finitos.

2.8. **Definición.** Dada  $f \in L^2(G)$  su transformada de Fourier es un elemento de  $L^2(\hat{G})$  tal que

$$\hat{f}(\chi) = \sum_{a \in G} f(a) \overline{\chi(a)} = \langle f, \chi \rangle$$

con  $\chi \in \hat{G}$ .

### Propiedades de la TFD

Dados  $f, g \in L^2(G)$ ,  $\chi \in \hat{G}$  y  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

2.9. (Linealidad)  $(\alpha f + g)\hat{(\chi)} = \alpha \hat{f}(\chi) + \hat{g}(\chi)$ .

2.10. (Convolución)  $(f * g)\hat{(\chi)} = \hat{f}(\chi) \hat{g}(\chi)$ .

2.11. (Inversión)

$$f(x) = \frac{1}{|\hat{G}|} \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi) \chi(x) = \frac{1}{|\hat{G}|} \sum_{\chi \in \hat{G}} \langle f, \chi \rangle \chi(x).$$

Es decir, la TFD es un operador lineal  $\mathcal{F}$  que transforma convolución en multiplicación, y tiene una inversa en términos de la TFD y del tamaño del grupo.

A continuación se probarán las propiedades de la TFD.

### Pruebas

Sean  $f, g \in L^2(G)$   $\alpha \in \mathbb{C}$

2.9

$$\begin{aligned} (\alpha f + g)\hat{(\chi)} &= \sum_{a \in G} (\alpha f + g)(a) \overline{\chi(a)} \\ &= \sum_{a \in G} \left( \alpha f(a) \overline{\chi(a)} + g(a) \overline{\chi(a)} \right) \\ &= \alpha \sum_{a \in G} f(a) \overline{\chi(a)} + \sum_{a \in G} g(a) \overline{\chi(a)} \\ &= \alpha \hat{f}(\chi) + \hat{g}(\chi). \end{aligned}$$

2.10

$$\begin{aligned}
(f * g)^\wedge(\chi) &= \sum_{a \in G} (f * g)(a) \overline{\chi(a)} \\
&= \sum_{a \in G} \sum_{y \in G} f(y) g(a - y) \overline{\chi(a)} \\
&= \sum_{y \in G} f(y) \left( \sum_{a \in G} g(a - y) \overline{\chi(a)} \right)
\end{aligned}$$

sea  $b = a - y$ ,

$$\begin{aligned}
(f * g)^\wedge(\chi) &= \sum_{y \in G} f(y) \left( \sum_{(b-y) \in G} g(b) \overline{\chi(b+y)} \right) \\
&= \sum_{y \in G} f(y) \left( \sum_{b \in G} g(b) \overline{\chi(b)} \right) \overline{\chi(y)} \\
&= \sum_{y \in G} f(y) \overline{\chi(y)} \hat{g}(\chi) \\
&= \hat{f}(\chi) \hat{g}(\chi).
\end{aligned}$$

Para demostrar 2.11 es necesario ver el siguiente resultado.

2.12. **Lema.** Dado  $G$  un grupo abeliano finito, si  $a \in G$  entonces

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(a) = |\hat{G}| \delta_{0_G}(a),$$

donde  $0_G$  representa el elemento neutro de  $G$ .

### Demostración

En primer lugar se tiene que ver que la suma está bien definida.

Como  $G$  es un grupo abeliano finito entonces por el teorema fundamental de los grupos abelianos finitos, enunciado al inicio del capítulo,

$$G \cong S(d_1) \oplus S(d_2) \oplus \cdots \oplus S(d_r).$$

Así, para cada  $a \in G$ , existe  $x \in \bigoplus_{k=1}^r S(d_k)$ , tal que

$$a \cong x = (x_1, \cdots, x_r) \quad \text{con} \quad x_j \in S(d_j).$$

Se tiene entonces que

$$d_r x = d_r(x_1, \cdots, x_r) = (d_r x_1, \cdots, d_r x_r),$$

pero  $d_k \mid d_r \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, r\}$ , entonces

$$d_r a_k = 0_S \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, r\},$$

donde  $0_S$  es el neutro del grupo  $\bigoplus_{k=1}^r S(d_k)$ . Esto implica que  $d_r x = 0_S$  y a su vez que  $d_r a = 0_G$  el elemento neutro del grupo  $G$ .

Con esto en mente se tiene que para cada  $\chi \in \hat{G}$ ,  $a \in G$

$$1 = \chi(0_G) = \chi(d_r a) = \chi(a)^{d_r}$$

y como  $\chi(a) \in \mathbb{T}$ , entonces  $\chi(a)$  es una  $d_r$ -raíz de la unidad para todo elemento  $a \in G$  y  $\chi \in \hat{G}$ . Esto indica que el conjunto

$$H = \left\{ c \in \mathbb{T} \mid c = \chi(x), x \in G, \chi \in \hat{G} \right\}$$

consta de sólo una cantidad finita de elementos.

Por lo tanto sólo existe una cantidad finita de funciones posibles con dominio  $G$  y codominio  $H$ , así  $\hat{G}$  es finito y la suma está bien definida.

Ahora, si  $a = 0_G$  se tiene que  $\chi(a) = 1 \quad \forall \chi \in \hat{G}$ , entonces

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(a) = \sum_{\chi \in \hat{G}} 1 = |\hat{G}| \delta_{0_G}(a).$$

Además se observa que si  $a \neq 0_G$  entonces existe  $\chi_1 \in \hat{G}$  tal que  $\chi_1(a) \neq 1$ , pues de no ser cierto, el subgrupo generado por  $a$  sería un grupo abeliano finito de dos o más elementos cuyo dual tiene un elemento único, pero esto es una contradicción, pues siempre se puede encontrar una raíz de la unidad que sea elemento de  $\hat{G}$  distinta de  $1_G$  dados dos o más elementos.

Así se tiene que, si  $a \neq 0_G$  entonces existe  $\chi_1 \in \hat{G}$  tal que  $\chi_1(a) \neq 1$ , por lo que

$$\begin{aligned} \chi_1(a) \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(a) &= \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi_1(a) \chi(a) \\ &= \sum_{\chi \in \hat{G}} (\chi_1 \chi)(a). \end{aligned}$$

En consecuencia, si se toma  $\beta = \chi_1 \chi$  para cada  $\chi \in \hat{G}$

$$\chi_1(a) \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(a) = \sum_{\chi^{-1} \beta \in \hat{G}} \beta(a) = \sum_{\beta \in \hat{G}} \beta(a)$$

y como  $\chi_1(a) \neq 1$  entonces  $\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(a) = 0$ , así

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(a) = |\hat{G}| \delta_0(a).$$

**2.13. Corolario.** Dado  $G$  un grupo abeliano finito, si  $a, b \in G$  entonces

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(a) \overline{\chi(b)} = |\hat{G}| \delta_a(b).$$

### Demostración

Sea  $z = a - b$ , entonces

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(a) \overline{\chi(b)} = \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(a - b) = \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(z).$$

Así por el lema 2.12

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(z) = |\hat{G}| \delta_0(z) = |\hat{G}| \delta_0(a - b).$$

Por lo que

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(a) \overline{\chi(b)} = |\hat{G}| \delta_0(a - b) = |\hat{G}| \delta_a(b).$$

### Demostración de 2.11.

Se tiene en primer lugar que

$$f(x) = \sum_{a \in G} f(a) \delta_a(x).$$

Así por el corolario 2.13

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{a \in G} f(a) \frac{1}{|\hat{G}|} \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(x) \overline{\chi(a)} \\ &= \frac{1}{|\hat{G}|} \sum_{a \in G} \sum_{\chi \in \hat{G}} f(a) \chi(x) \overline{\chi(a)} \\ &= \frac{1}{|\hat{G}|} \sum_{\chi \in \hat{G}} \left( \sum_{a \in G} f(a) \overline{\chi(a)} \right) \chi(x) \\ &= \frac{1}{|\hat{G}|} \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi) \chi(x). \end{aligned}$$

Para continuar se hará énfasis en los grupos abelianos finitos más simples, es decir, los grupos cociente  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  con  $n \in \mathbb{N}$  a los cuales se les llamará  $\mathbb{Z}_n$ .

Estos grupos son de gran importancia pues todo grupo cíclico finito  $S$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}_n$  donde  $n = |S|$ , con el isomorfismo  $\phi : S \rightarrow \mathbb{Z}_n$  dado por  $\phi(a) = [1]_n$  donde  $a$  es un generador de  $S$  y  $[1]_n$  es la clase de equivalencia del 1 en  $\mathbb{Z}_n$ .

Así se tiene que si  $G$  es un grupo abeliano finito entonces

$$G \cong \bigoplus_{k=1}^r S_{d_k} \cong \bigoplus_{k=1}^r \mathbb{Z}_{d_k}.$$

Además la caracterización dada por el teorema fundamental de grupos abelianos finitos es única, entonces se trabajará con el supuesto de que

$$G = \bigoplus_{k=1}^r \mathbb{Z}_{d_k},$$

es decir,  $\forall a \in G \quad a = (a_1, \dots, a_r)$ , donde  $a_j \in \mathbb{Z}_{d_j} \quad \forall j \in \{1, \dots, r\}$ .

Así, recordando que  $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$  con  $x \in \mathbb{R}$ , se puede definir la siguiente función.

**2.14. Definición.** Dado  $a \in \mathbb{Z}_n$  se define  $e_a : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C}$  como

$$e_a(x) = e^{\left(\frac{2\pi i a x}{n}\right)} \quad \forall x \in \mathbb{Z}_n.$$

Esta función cumple varias propiedades, por ejemplo:

Si  $a, x, y \in \mathbb{Z}_n$

$$\begin{aligned} e_a(x+y) &= e^{\left(\frac{2\pi i a(x+y)}{n}\right)} \\ &= e^{\left(\frac{2\pi i a x}{n}\right)} e^{\left(\frac{2\pi i a y}{n}\right)} \\ &= e_a(x) e_a(y) \end{aligned}$$

y que

$$e_a(x) = e^{\left(\frac{2\pi i a x}{n}\right)} = e^{\left(\frac{2\pi i x a}{n}\right)} = e_x(a).$$

Cabe destacar que  $e_a$  está bien definida para toda  $a$  en  $\mathbb{Z}_n$  por no depender de la congruencia de clases en  $\mathbb{Z}_n$ .

Esto pasa debido a que si  $y \equiv x \pmod{n}$  entonces  $y = x + nk$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ , así

$$e_a(y) = e_a(x + nk) = e_a(x) e_a(nk) = e_a(x) e_a(0) = e_a(x).$$

Análogamente si  $b \equiv a \pmod n$  entonces  $b = a + nk$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$  y se tiene que

$$e_b(x) = e_x(b) = e_x(a) = e_a(x).$$

Con lo anterior se puede observar que  $\{e_a \mid a \in \mathbb{Z}_n\}$  es un grupo de morfismos del grupo aditivo  $\mathbb{Z}_n$  en el multiplicativo  $\mathbb{T}$ . A continuación se muestra que en realidad todos los caracteres de  $\mathbb{Z}_n$  son de esta forma.

### 2.15. Proposición.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \hat{\mathbb{Z}}_n = \{e_a \mid a \in \mathbb{Z}_n\}.$$

#### Demostración

Si  $\chi \in \hat{\mathbb{Z}}_n$  entonces  $\forall x \in [a]_n$  ( $[a]_n$  denotará la clase de equivalencia de  $a$  en  $\mathbb{Z}_n$ )  $\chi(a) = \chi(x)$ , pues el morfismo no depende del representante. Entonces

$$\chi(a) = \chi(a + nk) = \chi(a)\chi(nk) \quad \forall a \in \mathbb{Z}_n,$$

eso quiere decir que  $\chi(nk) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ .

Por lo anterior, se puede afirmar que  $\forall x \in \mathbb{Z}_n$ ,  $\chi(x)$  es una raíz  $n$ -ésima de la unidad en  $\mathbb{C}$ , entonces  $\exists a \in \mathbb{Z}$  tal que

$$\chi(1) = e^{\frac{-2\pi ia}{n}} = e_a(1).$$

Como  $\mathbb{Z}_n$  es un conjunto bien ordenado entonces se puede hacer inducción sobre la variable del morfismo  $\chi$ .

Base de inducción:

$\chi(0) = 1 = e_a(0)$  y  $\chi(1) = e_a(1)$  por lo anterior.

Supóngase que  $\chi(k) = e_a(k)$ , hasta alguna  $k \in \mathbb{Z}_n$ , entonces

$$\chi(k+1) = \chi(k)\chi(1) = e_a(k)e_a(1) = e_a(k+1),$$

por lo que

$$\forall \chi \in \hat{\mathbb{Z}}_n \quad \exists a \in \mathbb{Z}_n \text{ tal que } \chi = e_a.$$

Así los caracteres de  $G$  están parametrizados por  $a \in \mathbb{Z}_n$ , entonces se puede concluir que  $\hat{\mathbb{Z}}_n \cong \mathbb{Z}_n$  vía el isomorfismo  $f : \mathbb{Z}_n \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}_n$  con regla de correspondencia  $f(a) = e_a$ .

A los grupos que son isomorfos a su propio dual se les llama autodual.

2.16. **Definición.** Dado un grupo abeliano finito  $G$  cualquiera y  $a \in G$ , se define  $e_a : G \rightarrow \mathbb{T}$  como la función tal que para toda  $x \in G$

$$e_a(x) = e_{a_1}(x_1)e_{a_2}(x_2) \cdots e_{a_r}(x_r),$$

con  $e_{a_k}(x_k) = e^{\frac{2\pi i a_k x_k}{d_k}}$ .

2.17. **Proposición.**  $e_a$  es un caracter para toda  $a \in G$ .

### Demostración

Sean  $a, x, y \in G$

i) Como  $e_{a_k}(x_k) = e^{\frac{2\pi i a_k x_k}{d_k}} \in \mathbb{T} \quad \forall k \in \{1, \dots, r\}$ , entonces

$$e_a(x) = e_{a_1}(x_1)e_{a_2}(x_2) \cdots e_{a_r}(x_r) \in \mathbb{T}.$$

ii)

$$\begin{aligned} e_a(x+y) &= e_{a_1}(x_1+y_1) \cdots e_{a_r}(x_r+y_r) \\ &= e_{a_1}(x_1)e_{a_1}(y_1) \cdots e_{a_r}(x_r)e_{a_r}(y_r) \\ &= e_{a_1}(x_1) \cdots e_{a_r}(x_r)e_{a_1}(y_1) \cdots e_{a_1}(y_1) \\ &= e_a(x)e_a(y). \end{aligned}$$

Además es conveniente observar que

$$\begin{aligned} e_a(-x) &= e_{a_1}(-x_1) \cdots e_{a_r}(-x_r) \\ &= (e_{a_1}(x_1))^{-1} \cdots (e_{a_r}(x_r))^{-1} = (e_a(x))^{-1}. \end{aligned}$$

De una manera análoga al caso en  $\mathbb{Z}_n$  se puede demostrar cómo son todos los elementos de  $\hat{G}$  para un grupo  $G$  abeliano finito cualquiera.

2.18. **Teorema.** Dado  $G$  un grupo abeliano finito

$$\hat{G} = \{e_a \mid a \in G\}.$$

### Demostración

Para iniciar es importante recordar que por 2.7 y 2.12,  $G$  y  $\hat{G}$  son grupos abelianos finitos, entonces  $G = \{a_1, \dots, a_n\}$  y  $\hat{G} = \{\chi_1, \dots, \chi_m\}$ , así por la proposición 2.4 se tiene que

$$\{\delta_{a_1}, \dots, \delta_{a_n}\}, \quad \{\delta_{\chi_1}, \dots, \delta_{\chi_m}\}$$

son bases de  $L^2(G)$  y  $L^2(\hat{G})$  respectivamente.

Por otra parte, la TFD es una transformación lineal biyectiva de  $L^2(G)$  a  $L^2(\hat{G})$ , así que

$$\{\hat{\delta}_{a_1}, \dots, \hat{\delta}_{a_n}\}$$

es una base de  $L^2(\hat{G})$ , por lo que

$$|\{\hat{\delta}_{a_1}, \dots, \hat{\delta}_{a_n}\}| = |\{\delta_{\chi_1}, \dots, \delta_{\chi_m}\}|$$

por ser bases del mismo espacio, esto implica que  $\hat{G}$  debe tener  $n$  elementos distintos, por lo que  $|G| = |\hat{G}|$ .

Por otra parte, por 2.17, se tiene que  $U_G = \{e_a \mid a \in G\}$  es un conjunto de caracteres de  $G$ , entonces  $U_G \subseteq \hat{G}$ , sin embargo cada  $\chi \in U_G$  está parametrizado por un elemento  $a \in G$  es decir, la función  $f : G \rightarrow U_G$  tal que  $f(a) = e_a$ , es una función biyectiva lo cual implica que  $|G| = |U_G|$ , y como  $|G| = |\hat{G}|$  entonces  $\hat{G} = \{e_a \mid a \in G\}$ .

Con lo anterior se tiene que los caracteres de  $G$  están parametrizados por elementos de  $G$ , entonces se puede concluir que  $\hat{G} \cong G$  vía el isomorfismo  $f : G \rightarrow \hat{G}$  con regla de correspondencia  $f(a) = e_a$ . ■

Gracias a este teorema se puede reescribir la formula de inversión de la TFD, quedando así de la siguiente manera:

$$f(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi) \chi(x).$$

Por último se prueba que hay un análogo de la igualdad de Parseval o teorema de Plancherel. Ésta será una propiedad importante para la teoría de la transformada de Fourier discreta.

**2.19. Teorema.** Igualdad de Parseval o teorema de Plancherel.  
Para  $f \in L^2(G)$  se cumple que:

$$\langle f, f \rangle = \frac{1}{|G|} \langle \hat{f}, \hat{f} \rangle .$$

### Demostración

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{f}, \hat{f} \rangle &= \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi) \overline{\hat{f}(\chi)} \\
 &= \sum_{\chi \in \hat{G}} \left( \sum_{b \in G} f(b) \bar{\chi}(b) \right) \overline{\left( \sum_{c \in G} f(c) \bar{\chi}(c) \right)} \\
 &= \sum_{\chi \in \hat{G}} \left( \sum_{b \in G} f(b) \bar{\chi}(b) \right) \left( \sum_{c \in G} \overline{f(c)} \chi(c) \right) \\
 &= \sum_{\chi \in \hat{G}} \sum_{b \in G} \sum_{c \in G} f(b) \overline{f(c)} \chi(c) \chi(-b) \\
 &= \sum_{\chi \in \hat{G}} \sum_{b \in G} \sum_{c \in G} f(b) \overline{f(c)} \chi(c) \overline{\chi(b)} \\
 &= \sum_{b \in G} \sum_{c \in G} f(b) \overline{f(c)} \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(c) \overline{\chi(b)}.
 \end{aligned}$$

Por el corolario 2.13

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{f}, \hat{f} \rangle &= \sum_{b \in G} \sum_{c \in G} f(b) \overline{f(c)} |G| \delta_b(c) \\
 &= |G| \sum_{b \in G} f(b) \overline{f(b)} = |G| \langle f, f \rangle.
 \end{aligned}$$

■

## CAPÍTULO 3

### Teorema de incertidumbre de Heisenberg

#### 1. Incertidumbre de Heisenberg en $\mathbb{R}$ .

El principio de incertidumbre de Heisenberg se puede ver desde dos puntos de vista diferentes ya sea como una característica distintiva de la mecánica cuántica o un teorema de análisis armónico. En el caso del análisis armónico se puede sintetizar de la siguiente manera: “una función no nula y su transformada de Fourier no pueden estar perfectamente localizadas”.

En cambio, si se traduce al campo de la mecánica cuántica, este principio establece que un par de variables canónicas conjugadas, tales como la posición y el momento (velocidad instantánea), no pueden determinarse en ningún estado cuántico.

El principio de incertidumbre ha influido directamente en algunas áreas del análisis, notablemente en:

*i)* El estudio de las propiedades de una función impuestas por restricciones en el soporte o las propiedades de decaimiento de su transformada de Fourier.

*ii)* La construcción de bases ortonormales o marcos en  $L^2$  cuyos elementos y transformadas están bien localizadas.

*iii)* Una inmensidad de resultados analíticos a la teoría de telecomunicaciones y al análisis de señal.

#### 3.1. Teorema. (Incertidumbre de Heisenberg).

Si  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  y cumple la condición de normalización:

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dm_x = 1 ,$$

entonces

$$\left( \int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dm_x \right) \left( \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 dm_\xi \right) \geq \frac{1}{16\pi^2} .$$

La igualdad se mantiene si y sólo si

$$\psi(x) = Ae^{-Bx^2} \quad \text{donde } B > 0 \text{ y } |A|^2 = \sqrt{\frac{2B}{\pi}}.$$

De hecho se tiene que:

$$\left( \int_{\mathbb{R}} (x - x_0)^2 |\psi(x)|^2 dm_x \right) \left( \int_{\mathbb{R}} (\xi - \xi_0)^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 dm_\xi \right) \geq \frac{1}{16\pi^2} \quad \forall x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}.$$

### **Demostración**

Para empezar se debe observar que como  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  entonces  $\bar{\psi}, |\psi|^2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , además cumple la condición de normalización por lo que

$$1 = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dm_x.$$

Así integrando por partes tomando  $u = |\psi|^2 \quad dv = 1$ , se tiene que

$$1 = \lim_{b \rightarrow \infty} (b|\psi(b)|^2) - \lim_{b \rightarrow \infty} (-b|\psi(-b)|^2) - \int_{\mathbb{R}} x \frac{d}{dx} |\psi(x)|^2 dm_x,$$

y como  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  entonces

$$\lim_{b \rightarrow \infty} (b|\psi(b)|^2) = \lim_{b \rightarrow \infty} (-b|\psi(-b)|^2) = 0,$$

por lo que

$$1 = - \int_{\mathbb{R}} x \frac{d}{dx} |\psi(x)|^2 dm_x.$$

Por lo anterior se tiene entonces que

$$\begin{aligned} 1 &= \left| - \int_{\mathbb{R}} x(\psi\bar{\psi})'(x) dm_x \right| = \left| - \int_{\mathbb{R}} x(\psi'\bar{\psi})(x) + x(\psi\bar{\psi}')(x) dm_x \right| \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}} |x| |\psi(x)| |\psi'(x)| dm_x \\ &\leq 2 \left( \int_{\mathbb{R}} |x|^2 |\psi(x)|^2 dm_x \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2 dm_x \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{1}$$

La última desigualdad es la desigualdad de Hölder para  $p, p' = 2$ , pues como  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  entonces  $\psi', x\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ .

Además por 1.7 y el teorema de Plancherel descrito en 1.17

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2 dm_x \right)^{\frac{1}{2}} &= \|\psi'\|_2 = \|(\psi')^\wedge\|_2 = \left( \int_{\mathbb{R}} |(\psi')^\wedge(\xi)|^2 dm_\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}} |2\pi\xi \hat{\psi}(\xi)|^2 dm_\xi \right)^{\frac{1}{2}} = 2\pi \left( \int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 dm_\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Entonces se tiene que

$$2 \left( \int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dm_x \right)^{\frac{1}{2}} 2\pi \left( \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 dm_\xi \right)^{\frac{1}{2}} \geq 1$$

$$\left( \int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dm_x \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 dm_\xi \right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{4\pi}$$

$$\left( \int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dm_x \right) \left( \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 dm_\xi \right) \geq \frac{1}{16\pi^2} .$$

La segunda desigualdad del teorema se obtiene reemplazando a  $\psi(x)$  de la desigualdad anterior por  $\phi(x) = g_{\xi_0}(x) \tau_{x_0} \psi(x)$  donde  $g_{\xi_0}(x) = e^{-2\pi i x \xi_0}$  y  $(\tau_y \psi)(x) = \psi(x + y)$ .

Se puede observar fácilmente que  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , además  $|\phi(x)| = |\psi(x + x_0)| \quad \forall x \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\int_{\mathbb{R}} |\phi(x)| dm_x = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x + x_0)| dm_x = \int_{\mathbb{R}} |\psi(u)| dm_u = 1 ,$$

así que  $\phi$  cumple la condición de normalización.

Primero se calculará lo siguiente:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\xi) &= (g_{\xi_0} \tau_{x_0} \psi)^\wedge(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g_{\xi_0}(x) \tau_{x_0} \psi(x) e^{-2\pi i x \xi} dm_x = \int_{\mathbb{R}} \tau_{x_0} \psi(x) e^{-2\pi i x (\xi + \xi_0)} dm_x \\ &= (\tau_{x_0} \psi)^\wedge(\xi + \xi_0), \end{aligned}$$

entonces por 1.5

$$\hat{\phi}(\xi) = \hat{\psi}(\xi + \xi_0) e^{-2\pi i \xi x_0},$$

así se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 |\hat{\phi}(\xi)|^2 dm_\xi = \int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 |\hat{\psi}(\xi + \xi_0)|^2 dm_\xi ,$$

haciendo el cambio de variable  $u = \xi + \xi_0$

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 |\hat{\phi}(\xi)|^2 dm_\xi = \int_{\mathbb{R}} |u - \xi_0|^2 |\hat{\psi}(u)|^2 dm_u .$$

Asimismo, haciendo un cambio de variables análogo al anterior, ( $y = x + x_0$ ), se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^2 |\phi(x)|^2 dm_x = \int_{\mathbb{R}} |y - x_0|^2 |\psi(y) e^{-2\pi i (y - x_0) \cdot \xi_0}|^2 dm_y$$

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^2 |\phi(x)|^2 dm_x = \int_{\mathbb{R}} |y - x_0|^2 |\psi(y)|^2 dm_y.$$

Entonces por el primer resultado

$$\left( \int_{\mathbb{R}} x^2 |\phi(x)|^2 dm_x \right) \left( \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{\phi}(\xi)|^2 dm_\xi \right) \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

Por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}} |x - x_0|^2 |\psi(x)|^2 dm_x \int_{\mathbb{R}} |\xi - \xi_0|^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 dm_\xi \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

Para mostrar qué funciones cumplen la igualdad en el teorema de incertidumbre de Heisenberg se tomará una función  $\psi \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$  tal que

$$\left( \int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dm_x \right) \left( \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 dm_\xi \right) = \frac{1}{16\pi^2}.$$

Esto implica la igualdad en varias desigualdades del inicio de la prueba, en particular

$$1 = 2 \left( \int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dm_x \right)^{\frac{1}{2}} 2\pi \left( \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 dm_\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Además por la desigualdad de Hölder aplicada en (1) se tiene que

$$\begin{aligned} 1 &\leq 2 \left( \int_{\mathbb{R}} |x|^2 |\psi(x)|^2 dm_x \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2 dm_x \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2 \left( \int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dm_x \right)^{\frac{1}{2}} 2\pi \left( \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 dm_\xi \right)^{\frac{1}{2}} = 1 \end{aligned}$$

lo cual implica que las funciones  $\sigma\psi$  y  $\psi'$  cumplen la igualdad de la desigualdad de Hölder en el caso  $p, p' = 2$  (mejor conocida como la desigualdad de Cauchy-Schwarz) lo cual implica que existe  $s \in \mathbb{C}$  tal que

$$\psi'(x) = sx\psi(x).$$

Por lo tanto

$$\psi'(x) + (-sx)\psi(x) = 0,$$

entonces

$$\psi(x) = Ae^{\frac{sx^2}{2}} \quad A \in \mathbb{C}.$$

Para este resultado se recomienda ver **[MB]** y **[BW]**.

Por otra parte, como  $\psi$  cumple la igualdad en la desigualdad de la incertidumbre de Heisenberg entonces (1) tiene que ser igualdad, es decir,

$$1 = 2 \int_{\mathbb{R}} |x| |\psi(x)| |\psi'(x)| dm_x.$$

También  $\psi$  cumple por hipótesis que

$$1 = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dm_x,$$

entonces integrando por partes

$$\begin{aligned} 1 &= - \int_{\mathbb{R}} x (\psi'(x)\bar{\psi}(x) + \psi(x)\bar{\psi}'(x)) dm_x \\ &= -2 \int_{\mathbb{R}} x \Re(\bar{\psi}(x)\psi'(x)) dm_x \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}} |x| |\Re(\bar{\psi}(x)\psi'(x))| dm_x \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}} |x| |\bar{\psi}(x)\psi'(x)| dm_x, \end{aligned}$$

pues para todo  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| \geq |\Re(z)|$ , donde  $\Re(z)$  es la parte real de  $z$ .

Lo anterior indica que la igualdad en (1) se da si y sólo si

$$|\bar{\psi}(x)\psi'(x)| = |\Re(\bar{\psi}(x)\psi'(x))|,$$

por lo que  $\forall x \in \mathbb{R}$   $\bar{\psi}(x)\psi'(x) \in \mathbb{R}$ .

Entonces

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x)\psi'(x) &= -sx \overline{\left(Ae^{\frac{sx^2}{2}}\right)} Ae^{\frac{sx^2}{2}} \\ &= -sx^2 |A| \left|e^{\frac{sx^2}{2}}\right| \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

por lo tanto  $s \in \mathbb{R}$ . Además, como  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , entonces  $s < 0$ .

Por lo que  $\psi(x) = Ae^{\frac{s}{2}x^2}$  con  $A \in \mathbb{C}$  y  $\frac{s}{2} < 0$ .

Con la finalidad de simplificar los siguientes calculos se tomará  $B = \frac{-s}{2}$  para que  $\psi(x) = Ae^{-Bx^2}$  con  $A \in \mathbb{C}$  y  $B > 0$ .

Como  $\psi$  cumple la condición de normalización, sustituyendo se obtiene que

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dm_x \\ &= \int_{\mathbb{R}} |A|^2 |e^{-Bx^2}|^2 dm_x = |A|^2 \int_{\mathbb{R}} e^{-2Bx^2} dm_x. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable  $u = \sqrt{\frac{2B}{\pi}} x$ , se tiene que

$$1 = |A|^2 \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{\pi}{2B}} e^{-\pi u^2} dm_u$$

$$\sqrt{\frac{2B}{\pi}} = |A|^2 \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi u^2} dm_u$$

$$|A|^2 = \sqrt{\frac{2B}{\pi}}.$$

Ahora se supondrá que  $\psi(x) = Ae^{-Bx^2}$  con  $B > 0$  y  $|A|^2 = \sqrt{\frac{2B}{\pi}}$ , además, por construcción de  $A$ , se tiene que  $\psi$  cumple la condición de normalización.

Así, se observa que para toda  $a > 0$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-ax^2} dm_x &= \int_{\mathbb{R}} x (xe^{-ax^2}) dm_x \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{b}{-2a} e^{-ab^2} \right) - \left( \frac{-b}{-2a} e^{-a(-b)^2} \right) \right] - \frac{1}{-2a} \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dm_x \\ &= \frac{1}{2a} \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dm_x, \end{aligned}$$

y haciendo el cambio de variables  $u = \sqrt{\frac{a}{\pi}}x$

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-ax^2} dm_x = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi u^2} dm_u = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \dots (2).$$

Como  $\hat{\psi}(\xi) = A\sqrt{\frac{\pi}{B}} e^{-\frac{\pi^2 \xi^2}{B}}$ , entonces por (2)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 dm_{\xi} &= \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |A|^2 \frac{\pi}{B} \left| e^{-\frac{\pi^2 \xi^2}{B}} \right|^2 dm_{\xi} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{B}} \int_{\mathbb{R}} \xi^2 e^{-\frac{2\pi^2 \xi^2}{B}} dm_{\xi} = \sqrt{\frac{2\pi}{B}} \frac{1}{2\frac{2\pi^2}{B}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{2\pi^2}{B}}} = \frac{B}{4\pi^2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dm_x &= \int_{\mathbb{R}} x^2 |A|^2 |e^{-Bx^2}|^2 dm_x \\ &= \sqrt{\frac{2B}{\pi}} \int_{\mathbb{R}} x (xe^{-2Bx^2}) dm_x = \sqrt{\frac{2B}{\pi}} \frac{1}{4B} \sqrt{\frac{\pi}{2B}} = \frac{1}{4B}. \end{aligned}$$

Así

$$\left( \int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dm_x \right) \left( \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 dm_{\xi} \right) = \frac{1}{4B} \frac{B}{4\pi^2} = \frac{1}{16\pi^2}$$

■

## 2. Teorema de incertidumbre de Heisenberg para grupos abelianos finitos.

En esta sección se demuestra el teorema de incertidumbre de Donoho-Stark para grupos abelianos finitos. Este teorema se considera el análogo en grupos abelianos finitos del teorema de incertidumbre de Heisenberg demostrado anteriormente. Un resultado que cabe destacar de este teorema es que otorga una cota superior para el orden de cualquier grupo abeliano finito  $G$ .

Antes de enunciar el teorema es necesario recordar qué es el soporte de una función.

**3.2. Definición.** Si  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  se define el soporte de  $f$  como:

$$\text{sop}(f) = \{x \in G : f(x) \neq 0\}.$$

Además es necesario tener en mente la norma que se dió de  $L^2(G)$  en el capítulo 2

$$\|f\|_2 = \left( \sum_{a \in G} |f(a)|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

y la función  $\|\cdot\|_\infty : L^2(G) \rightarrow \mathbb{C}$  definida como:

$$\|f\|_\infty = \sup_{a \in G} |f(a)|.$$

Esta última también es una norma pues para todo grupo abeliano finito  $G$  está bien definida y si  $f \in L^2(G)$

- i)  $\sup_{a \in G} |f(a)| \geq 0$ .
- ii)  $\sup_{a \in G} |f(a)| = 0$  si y solamente si  $f(a) = 0 \quad \forall a \in G$ .
- iii)  $\sup_{a \in G} |cf(a)| = |c| \sup_{a \in G} |f(a)| \quad \forall c \in \mathbb{C}$ .

**3.3. Teorema.** (Incertidumbre de Donoho-Stark).

Sea  $G$  un grupo abeliano finito, con grupo dual  $\hat{G}$ .

Si  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  y  $f$  no es idénticamente cero ( $f \not\equiv 0$ ),

$$|\text{sop}(f)| |\text{sop}(\hat{f})| \geq |G|.$$

### Demostración

Primero se ve que para toda  $f \in L^2(G)$

$$\begin{aligned}\|f\|_2^2 &= \sum_{a \in G} |f(a)|^2 = \sum_{a \in \text{sop}(f)} |f(a)|^2 \\ &\leq \sum_{a \in \text{sop}(f)} \|f\|_\infty^2 = \|f\|_\infty^2 |\text{sop}(f)|,\end{aligned}$$

entonces

$$\|f\|_2^2 \leq \|f\|_\infty^2 |\text{sop}(f)| \quad \dots (1).$$

Ahora, usando la transformada inversa de la transformada de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi) \chi(x),$$

como  $|\chi(x)| = 1$ , entonces  $|f(x)| \leq \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \hat{G}} |\hat{f}(\chi)| \quad \forall x \in G$ ,

entonces  $\frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \hat{G}} |\hat{f}(\chi)|$  es cota superior de  $\{|f(x)| : x \in G\}$ , es decir,

$$\|f\|_\infty \leq \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \hat{G}} |\hat{f}(\chi)|.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz se tiene que

$$\|f\|_\infty \leq \frac{1}{|G|} \left( \sum_{\chi \in \hat{G}} |\hat{f}(\chi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{\chi \in \text{sop}(\hat{f})} 1 \right)^{\frac{1}{2}},$$

entonces

$$\|f\|_\infty^2 \leq \frac{1}{|G|^2} \|\hat{f}\|_2^2 |\text{sop}(\hat{f})|,$$

además, por el teorema de Plancherel descrito en 2.19, se tiene la siguiente desigualdad

$$\|f\|_\infty^2 \leq \frac{1}{|G|} \|f\|_2^2 |\text{sop}(\hat{f})| \quad \dots (2).$$

Combinando las desigualdades (1) y (2) se obtiene que

$$\|f\|_2^2 \leq \frac{1}{|G|} \|f\|_2^2 |\text{sop}(f)| |\text{sop}(\hat{f})|,$$

y como  $f \neq 0$ , entonces  $\|f\|_2^2 \neq 0$ , y se tiene que

$$1 \leq \frac{1}{|G|} |\text{sop}(f)| |\text{sop}(\hat{f})|,$$

es decir,

$$|G| \leq |\text{sop}(f)| |\text{sop}(\hat{f})|.$$

■

De la misma manera que en la sección anterior, se pueden determinar aquellas funciones que cumplen la igualdad en el teorema de incertidumbre de Donoho-Stark para grupos abelianos finitos sin embargo para poder mostrar dichas funciones es necesario desarrollar un poco más de teoría alrededor del siguiente conjunto.

**3.4. Definición.** El complemento ortogonal de un conjunto  $S \subseteq G$  denotado por  $S^\perp$  se define como

$$S^\perp := \{\alpha \in \hat{G} \mid \alpha(x) = 1 \quad \forall x \in S\}.$$

Se puede observar que el complemento ortogonal es un subconjunto de  $\hat{G}$  que consiste en todos los caracteres triviales en  $S$ . Además si  $S$  es subgrupo de  $G$ , entonces  $S^\perp$  será un subgrupo de  $\hat{G}$ , pues dados  $\alpha, \beta \in S^\perp$  se tiene que  $\alpha\beta^{-1} \in \hat{G}$  y para toda  $x \in S$

$$\alpha\beta^{-1}(x) = \alpha(x)\beta^{-1}(x) = 1(1)^{-1} = 1,$$

por lo que  $S^\perp$  es subgrupo de  $\hat{G}$ .

**3.5. Definición.** Dado  $G$  grupo abeliano finito y  $A$  un subconjunto cualquiera de  $G$ , se define la función indicadora  $1_A : G \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}.$$

Con esta función se pueden observar las siguientes relaciones entre un conjunto y su complemento ortogonal.

**3.6. Lema.** Sea  $H$  un subgrupo de  $G$ . Entonces

i)  $\hat{1}_H = |H|1_{H^\perp}$ .

ii)  $|H||H^\perp| = |G|$ .

**Demostración**

i) Por definición se tiene que

$$\hat{1}_H(\xi) = \sum_{x \in G} 1_H(x)\overline{\xi(x)} = \sum_{x \in H} \overline{\xi(x)}.$$

Por un lado se tiene que si  $\xi \in H^\perp$  entonces  $\overline{\xi(x)} = 1$  para toda  $x \in H$ , por lo que

$$\hat{1}_H(\xi) = \sum_{x \in H} 1 = |H|,$$

En cambio si  $\xi \notin H^\perp$  entonces existe  $y \in H$  tal que  $\overline{\xi(y)} \neq 1$ .

Sea  $z = x - y$  para cada  $x \in H$  entonces

$$\sum_{x \in H} \overline{\xi(x)} = \overline{\xi(y)} \sum_{x \in H} \overline{\xi(x - y)},$$

pero  $H$  es subgrupo, entonces

$$\sum_{x \in H} \overline{\xi(x - y)} = \sum_{z \in H} \overline{\xi(z)}$$

cuando  $y \in H$ , por lo que  $\sum_{x \in H} \overline{\xi(x)} = 0$ .

Así, si  $\xi \notin H^\perp$

$$\hat{1}_H(\xi) = \sum_{x \in G} 1_H \overline{\xi(x)} = \sum_{x \in H} \overline{\xi(x)} = 0.$$

Por lo tanto

$$\hat{1}_H(\xi) = \begin{cases} |H| & \text{si } \xi \in H^\perp \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}.$$

es decir  $\hat{1}_H = |H|1_{H^\perp}$ .

ii) Como  $H$  subgrupo de  $G$ , entonces

$$\begin{aligned} |H| &= \sum_{x \in H} 1_H(x) \\ &= \sum_{x \in H} |1_H(x)|^2 \\ &= \sum_{x \in G} |1_H(x)|^2 \\ &= \|1_H\|^2, \end{aligned}$$

por el teorema de Plancherel (2.23), se tiene que

$$\|1_H\|^2 = \frac{1}{|G|} \|\hat{1}_H\|^2,$$

por lo que

$$\begin{aligned}
|H| &= \frac{1}{|G|} \|\hat{1}_H\|^2 \\
&= \frac{1}{|G|} |H|^2 \|\mathbf{1}_{H^\perp}\|^2 \\
&= \frac{|H|^2}{|G|} \sum_{\xi \in \hat{G}} |\mathbf{1}_{H^\perp}(\xi)|^2 \\
&= \frac{|H|^2}{|G|} \sum_{\xi \in H^\perp} 1 \\
&= \frac{|H|^2}{|G|} |H^\perp|.
\end{aligned}$$

Así se tiene que  $|H| = \frac{|H|^2}{|G|} |H^\perp|$ , por lo tanto

$$|G| = |H| |H^\perp|.$$

Gracias a estos resultados se puede ver que si  $H$  es un subgrupo de  $G$  entonces  $H^\perp$  es isomorfo al grupo cociente  $G/H$ . Esto pasa por que  $\varphi : H^\perp \rightarrow G/H$ , dado por  $\varphi(e_a) = [a]_H$  donde  $[a]_H$  es la clase de equivalencia de  $a$  sobre  $H$ , es un morfismo inyectivo y  $\frac{|G|}{|H|} = |H^\perp|$ .

Dada una función  $f$  es importante observar sus traslaciones y modulaciones pues el soporte de estos está estrechamente relacionado con el soporte de  $f$ .

**3.7. Definición.** Dado  $G$  un grupo abeliano finito,  $\forall a \in G$ ,  $\alpha \in \hat{G}$  y  $f \in L^2(G)$ , se definen

$$\begin{aligned}
\tau_a f(x) &:= f(x - a) \\
M_\alpha f(x) &:= \alpha(x) f(x),
\end{aligned}$$

además se puede observar que

$$\begin{aligned}
\tau_\alpha \hat{f}(\xi) &:= \hat{f}(\xi \alpha^{-1}) \\
M_a \hat{f}(\xi) &:= \xi(a) \hat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

Cabe mencionar que  $M_a$  está bien definido, pues por 2.18 se tiene que  $G \cong \hat{G} \cong (G^\wedge)$ .

**3.8. Proposición.** Dado  $G$  un grupo abeliano finito,  $\forall a \in G$ ,  $\alpha \in \hat{G}$  y  $f \in L^2(G)$ ,

$$\begin{aligned}
(\tau_a f)^\wedge(\xi) &= M_{-a} \hat{f}(\xi) \\
(M_\alpha f)^\wedge(\xi) &= \tau_\alpha \hat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

**Demostración**

$$\begin{aligned}
(\tau_a f)^\wedge(\xi) &= \sum_{x \in G} \tau_a f(x) \overline{\xi(x)} \\
&= \sum_{x \in G} f(x-a) \overline{\xi(x)} = \sum_{x \in G} f(x) \overline{\xi(x+a)} \\
&= \sum_{x \in G} f(x) \overline{\xi(x)} \xi(-a) \\
&= \hat{f}(\xi) \xi(-a) = M_{-a} \hat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(M_\alpha f)^\wedge(\xi) &= \sum_{x \in G} M_\alpha f(x) \overline{\xi(x)} \\
&= \sum_{x \in G} \alpha(x) f(x) \overline{\xi(x)} \\
&= \sum_{x \in G} f(x) \overline{\xi(x) \alpha^{-1}(x)} = \hat{f}(\xi \alpha^{-1}) \\
&= \tau_\alpha \hat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

Cabe mencionar que para toda  $a \in G$  y  $\alpha \in \hat{G}$

$$|\text{sop } f| = |\text{sop}(\tau_a f)| \quad \text{y} \quad \text{sop } f = \text{sop}(M_\alpha f).$$

Con esto en mente se puede demostrar el siguiente lema.

**3.9. Lema.** Dada  $f \in L^2(G)$ , si  $f \neq 0$ , entonces para algún  $x_0 \in G$  y  $\alpha_0 \in \hat{G}$

- $0 \in \text{sop}(\tau_{-x_0} M_{\alpha_0^{-1}} f)$
- $\chi_0 = 1_G \in \text{sop}(\tau_{-x_0} M_{\alpha_0^{-1}} f)^\wedge$ .

**Demostración**

Como  $f \neq 0$  entonces existe  $x_0 \in G$  tal que  $f(x_0) \neq 0$  y existe  $\alpha_0 \in \hat{G}$  tal que  $\hat{f}(\alpha_0) \neq 0$ .

Considerando que

$$\tau_{-x_0} M_{\alpha_0^{-1}} f(x) = \tau_{-x_0}(\alpha_0^{-1}(x) f(x)) = \alpha_0^{-1}(x+x_0) f(x+x_0),$$

entonces

$$\tau_{-x_0} M_{\alpha_0^{-1}} f(0) = \alpha_0^{-1}(x_0) f(x_0) \neq 0$$

por lo que  $0 \in \text{sop}(\tau_{-x_0} M_{\alpha_0^{-1}} f)$ .

Ahora, tomando  $\xi \in \hat{G}$  se tiene que

$$\begin{aligned}
(\tau_{-x_0}M_{\alpha_0^{-1}}f)^\wedge(\xi) &= \sum_{x \in G} \tau_{-x_0}M_{\alpha_0^{-1}}f(x)\overline{\xi(x)} \\
&= \sum_{x \in G} \alpha_0^{-1}(x+x_0)f(x+x_0)\overline{\xi(x)} \\
&= \sum_{x \in G} f(x+x_0)\overline{\alpha_0(x+x_0)\xi(x)} \\
&= \sum_{x \in G} f(x)\overline{\alpha_0(x)\xi(x-x_0)} \\
&= \xi(x_0) \sum_{x \in G} f(x)\overline{\alpha_0(x)\xi(x)} \\
&= \xi(x_0)\hat{f}(\alpha\xi)
\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
(\tau_{-x_0}M_{\alpha_0^{-1}}f)^\wedge(\chi_0) &= \chi_0(x_0)\hat{f}(\chi_0\alpha_0) \\
&= \hat{f}(\alpha_0) \neq 0.
\end{aligned}$$

Entonces  $\chi_0 \in \text{sop}(\tau_{-x_0}M_{\alpha_0^{-1}}f)^\wedge$ .

Con lo anterior se puede observar la siguiente proposición

**3.10. Proposición.** Dados  $G$  un grupo abeliano finito y  $f \in L^2(G)$  tal que  $0 \in \text{sopf}$ ,  $\chi_0 = 1_G \in \text{sopf}^\wedge$  y  $\text{sopf}$  es subgrupo de  $G$ , entonces se tiene que  $|\text{sopf}||\text{sopf}^\wedge| = |G|$  si y solamente si  $f = C1_H$  donde  $H$  es un subgrupo de  $G$  y  $C$  es una constante en los complejos no cero.

### Demostración

Primero se supondrá que  $|\text{sopf}||\text{sopf}^\wedge| = |G|$ . Por hipótesis  $0 \in \text{sopf}$  y  $\chi_0 \in \text{sopf}^\wedge$ .

Si el conjunto  $\text{sopf} = B$  es un subgrupo de  $G$ , entonces por el lema 3.6

$$|B||B^\perp| = |G|.$$

Más aun,  $\text{sopf}^\wedge = B^\perp$  pues para cada  $\alpha \in \hat{G}$  y  $\beta \in B^\perp$

$$\hat{f}(\alpha\beta) = \sum_{x \in G} f(x)\overline{\alpha(x)\beta(x)},$$

como  $\text{sopf} = B$  y  $\beta(x) = 1$  para toda  $x \in B$ . Entonces

$$\begin{aligned}\hat{f}(\alpha\beta) &= \sum_{x \in B} f(x) \overline{\alpha(x)\beta(x)} = \sum_{x \in B} f(x) \overline{\alpha(x)} \\ &= \sum_{x \in G} f(x) \overline{\alpha(x)} = \hat{f}(\alpha).\end{aligned}$$

Hay que notar que  $\chi_0(a) = 1 \quad \forall a \in B$ , por lo que  $\chi_0 \in B^\perp$ , así tomando  $\alpha = \chi_0$  en la ecuación anterior, se tiene

$$\hat{f}(\beta) = \hat{f}(\chi_0) \quad \forall \beta \in B^\perp,$$

por hipótesis  $\chi_0 \in \text{sopf} \hat{f}$  entonces  $\hat{f}(\chi_0) \neq 0$ , esto implica que  $\hat{f}$  es una constante no cero en  $B^\perp$ , así  $B^\perp \subseteq \text{sopf} \hat{f}$ .

Como se supuso que  $B$  es un subgrupo, entonces por el lema 3.6  $|B||B^\perp| = |G|$ , y por hipótesis  $|\text{sopf} f| |\text{sopf} \hat{f}| = |G|$ , entonces  $|\text{sopf} \hat{f}| = |B^\perp|$ , por lo que

$$\text{sopf} \hat{f} = B^\perp.$$

Por otro lado, como  $\text{sopf} \hat{f} = B^\perp$  y  $\hat{f}$  es constante en  $B$  entonces  $\hat{f} = C1_{B^\perp}$  para alguna  $C \in \mathbb{C}$ , además por el lema 3.6 se tiene que si  $g = 1_B$  entonces  $\hat{g} = 1_{B^\perp}|B|$ . Así recordado que la TFD es una biyección entre  $G$  y  $\hat{G}$  se tiene que existe una  $c \in \mathbb{C}$  con  $c \neq 0$  tal que  $f = c1_B$ .

Por otra parte si  $f = 1_H$  donde  $H$  es un subgrupo de  $G$ , por definición de función identificadora,  $\text{sopf} f = H$ .

Por el lema 3.6 i)

$$\hat{1}_H(\alpha) = |H|1_{H^\perp}(\alpha),$$

entonces  $|\text{sopf} \hat{1}_H| = |H^\perp|$ , y por el lema 3.6 ii), se tiene que  $|H||H^\perp| = |G|$ , por lo que

$$|\text{sopf} f| |\text{sopf} \hat{f}| = |G|.$$

■

Esta proposición indica que dada  $f \in L^2(G)$  si  $\text{sopf} f$  es subgrupo de  $G$  entonces  $f$  cumplirá la igualdad de la incertidumbre de Donoho-Stark si y sólo si  $f$  es una traslación o modulación de un múltiplo de la función identificadora de un subgrupo de  $G$ .

Sin embargo se puede demostrar que dadas las condiciones de la proposición anterior  $\text{sopf} f$  es un subgrupo de  $G$ , es decir, que no es necesaria esta hipótesis para el teorema. Para probar esto es necesario primero observar el caso de grupos cíclicos.

3.11. **Teorema.** Dado  $G$  un grupo finito cíclico y  $f \in L^2(G)$  tal que  $0 \in \text{sopf}$ ,  $\chi_0 = 1_G \in \text{sopf}$  y  $|\text{sopf}| |\widehat{\text{sopf}}| = |G|$  entonces  $\text{sopf}$  es subgrupo de  $G$ .

### Demostración

Todo grupo cíclico finito  $G$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}_n$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ , por lo que se supondrá que  $G = \mathbb{Z}_n$ .

Sean  $M = |\widehat{\text{sopf}}|$  y  $z_j \in \widehat{\text{sopf}}$  para toda  $1 \leq j \leq M$ . Entonces para cada  $0 \leq p \leq n - M$  y  $1 \leq k \leq M$  se define

$$w_k^{(p)} = f(p + k).$$

Además aplicando la formula de inversión de la TFD se tiene que

$$\begin{aligned} w_k^{(p)} &= \sum_{\xi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\xi) \xi(p + k) \\ &= \sum_{\xi \in \widehat{\text{sopf}}} \widehat{f}(\xi) \xi(p + k) \\ &= \sum_{j=1}^M \widehat{f}(z_j) z_j(p + k). \end{aligned}$$

Sean

$$\begin{aligned} u &= (\widehat{f}(z_1), \widehat{f}(z_2), \dots, \widehat{f}(z_M)), \\ w^{(p)} &= (w_1^{(p)}, w_2^{(p)}, \dots, w_M^{(p)}), \end{aligned}$$

entonces  $w^{(p)} = Zu$ , donde  $Z$  es la matriz cuadrada compleja de  $M$  renglones tal que cada entrada  $Z_{kj} = (z_j)^{p+k}(1) = z_j(p + k)$ .

Se quiere mostrar que  $w^{(p)} \neq 0$ , pues por ser  $G$  cíclico esto implicaría que  $f$  no tiene  $M$  ceros consecutivos en  $G$  es decir, para cualquier  $x \in \text{sopf}(f)$ , existe  $y \in \text{sopf}(f)$  tal que  $x = y + c$  con  $0 < c \leq M$ , o en otras palabras, que están separados por  $M - 1$  elementos.

Como  $u = (\widehat{f}(z_1), \widehat{f}(z_2), \dots, \widehat{f}(z_M))$  y  $z_j \in \widehat{\text{sopf}}$ , se sabe que  $u \neq 0$ , entonces para probar que  $w^{(p)} \neq 0$ , sólo se tiene que mostrar que  $\det(Z) \neq 0$ .

Como

$$Z = \begin{pmatrix} (z_1(1))^{p+1} & \dots & (z_M(1))^{p+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (z_1(1))^{p+M} & \dots & (z_M(1))^{p+M} \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned}\det(Z) &= (z_1(1))^{p+1} \dots (z_M(1))^{p+1} \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (z_1(1))^{M-1} & \dots & (z_M(1))^{M-1} \end{pmatrix} \\ &= (z_1(1))^{p+1} \dots (z_M(1))^{p+1} \det(V).\end{aligned}$$

Se puede observar que la matriz  $V$  es la transpuesta de una matriz de Vandermonde, es decir

$$V^t = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \dots & \alpha_1^{M-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 \dots & \alpha_2^{M-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & \alpha_M & \alpha_M^2 \dots & \alpha_M^{M-1} \end{bmatrix}$$

donde  $\alpha_j = z_j(1)$  para todo  $j \in \{1, 2, \dots, M\}$ , por lo que basta con calcular  $\det(V^t)$ .

Como la resta de múltiplos de columnas no afecta el determinante entonces se restará a cada columna  $C_j$  la columna  $(\alpha_j C_{j-1})$  para toda  $j \in \{2, \dots, M\}$  así

$$\begin{aligned}\det(V^t) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & (\alpha_2 - \alpha_1) & \alpha_2^2 - (\alpha_2 \alpha_1) & \dots & \alpha_2^{M-1} - (\alpha_2^{M-2} \alpha_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (\alpha_M - \alpha_1) & \alpha_M^2 - (\alpha_M \alpha_1) & \dots & \alpha_M^{M-1} - (\alpha_M^{M-2} \alpha_1) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & (\alpha_2 - \alpha_1) & \alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) & \dots & \alpha_2^{M-2}(\alpha_2 - \alpha_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (\alpha_M - \alpha_1) & \alpha_M(\alpha_M - \alpha_1) & \dots & \alpha_M^{M-2}(\alpha_M - \alpha_1) \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Calculando el determinante queda entonces solo el determinante de una matriz  $(M-1) \times (M-1)$  así

$$\begin{aligned}\det(V^t) &= \begin{vmatrix} (\alpha_2 - \alpha_1) & \alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) & \dots & \alpha_2^{M-2}(\alpha_2 - \alpha_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_M - \alpha_1) & \alpha_M(\alpha_M - \alpha_1) & \dots & \alpha_M^{M-2}(\alpha_M - \alpha_1) \end{vmatrix} \\ &= (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1) \dots (\alpha_M - \alpha_1) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 \dots & \alpha_2^{M-2} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 \dots & \alpha_3^{M-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & \alpha_M & \alpha_M^2 \dots & \alpha_M^{M-2} \end{vmatrix},\end{aligned}$$

y repitiendo el proceso se obtiene que

$$|\det(V^t)| = \prod_{1 \leq k < j \leq M} (\alpha_j - \alpha_k).$$

Por lo tanto

$$\det(Z) = (z_1(1))^{p+1} \dots (z_M(1))^{p+1} \prod_{1 \leq k < j \leq M} (z_j(1) - z_k(1))$$

y como  $z_j \neq z_k$  si  $j \neq k$ , entonces  $\det(Z) \neq 0$ , así  $w^{(p)} \neq 0$  para toda  $0 \leq p \leq n - M$ . Lo que muestra que el soporte de  $f$  no tiene  $M$  ceros consecutivos.

Así,  $|\text{sop}(f)| = \frac{n}{M}$  y  $0 \in \text{sop}(f)$  entonces

$$\text{sop}(f) = \{x_1, x_2, \dots, x_{\frac{n}{M}}\}$$

donde  $0 = x_1$ .

Como todos los elementos del soporte de  $f$  están separados a lo más por  $M - 1$  elementos, entonces  $\forall k \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{M}\}$

$$x_{k+1} \equiv x_k + c_k \pmod{n}, \quad 0 < c_k \leq M,$$

donde  $x_{\frac{n}{M}+1} \equiv x_1 \pmod{n}$ .

Esto implica que

$$x_{k+1} \equiv x_1 + \sum_{l=1}^k c_l \pmod{n}$$

para toda  $k \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{M}\}$ , por lo que

$$0 = x_1 \equiv x_{\frac{n}{M}} + c_{\frac{n}{M}} \equiv \sum_{l=1}^{\frac{n}{M}} c_l \pmod{n}.$$

En cambio si existieran dos elementos separados por menos de  $M - 1$  elementos entonces existiría  $j \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{M}\}$  tal que  $c_j < M$ , por lo que

$$\sum_{l=1}^{\frac{n}{M}} c_l < \frac{n}{M} M = n,$$

lo cual es una contradicción.

Por lo tanto todos los elementos del soporte están separados exactamente por  $M - 1$  elementos, así se tiene que

$$\text{sop}(f) = \{0, M, 2M, \dots, \left(\frac{n}{M} - 1\right) M\},$$

el cual es un subgrupo de  $G$ . ■

Con lo anterior se puede demostrar la igualdad de la incertidumbre para cualquier grupo abeliano finito, por lo que se puede replantear el teorema de incertidumbre de Donoho-Stark como sigue.

**3.12. Teorema.** (Incertidumbre de Donoho-Stark)

Sean  $G$  un grupo abeliano finito y  $f \in L^2(G)$ .

- a) Si  $f \neq 0$ , entonces  $|sopf||sopf\hat{f}| \geq |G|$
- b) Si  $|sopf||sopf\hat{f}| = |G|$ ,  $0 \in sopf$  y  $1_G \in sopf\hat{f}$ , entonces  $sopf$  es un subgrupo de  $G$ .

Para mayor referencia de este teorema véase [MOT].

El punto a) ya se demostró en 3.3 sin embargo se dará otra prueba donde se mostrarán algunas desigualdades que son necesarias para demostrar b).

### Demostración

Procediendo por inducción fuerte sobre el número de elementos de  $G$  se tiene que el paso base  $|G| = 1$  o  $|G| = 2$  corresponde al caso en que  $G$  es cíclico el cual se probó en 3.11. Se supondrá entonces que para todo grupo abeliano finito  $A$  tal que  $|A| \leq n$  se cumplen a) y b).

Suponiendo que  $|G| = n + 1$  entonces se tienen dos casos, cuando  $G$  es cíclico y cuando no lo es. En el caso de ser cíclico  $G$  cumple con a) y b), entonces se supondrá que existen dos subgrupos  $B, C \subseteq G$  no triviales tal que  $G = B \oplus C$ . Entonces por hipótesis de inducción se tiene que tanto  $B$  como  $C$  cumplen con a) y b), además por 2.18 y el teorema fundamental de los grupos abelianos finitos, se tiene que  $\hat{G} = \hat{B} \times \hat{C}$ , es decir, para todo  $\eta \in \hat{G}$  existen  $\beta \in \hat{B}$ , y  $\gamma \in \hat{C}$  tal que  $\eta = \beta \times \gamma$ . Por otra parte para cada  $\beta \in \hat{B}$ ,  $\gamma \in \hat{C}$  se considerarán a  $\beta_G, \gamma_G \in \hat{G}$  como los morfismos tal que para cada  $b \in B$  y  $c \in C$

$$\beta_G(b) = \beta(b), \quad \beta_G(c) = 1$$

y

$$\gamma_G(c) = \gamma(c), \quad \gamma_G(b) = 1,$$

con el fin de poder expresar a  $\eta$  como multiplicación de elementos en  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$ , es decir  $\eta = \beta_G \gamma_G$ .

Ahora, para toda  $f \in L^2(G)$ ,  $c \in C$  y  $\beta \in \hat{B}$  se define  $f_c : B \rightarrow \mathbb{C}$  como

$$f_c(b) = f(b + c) \quad \forall b \in B$$

y  $g_\beta : C \rightarrow \mathbb{C}$  como

$$g_\beta(c) = \hat{f}_c(\beta) \quad \forall c \in C.$$

En particular para cada  $\gamma \in \hat{C}$  se tiene que

$$g_\beta(\gamma) = \hat{f}(\beta_G \gamma_G) \tag{D1}$$

pues

$$\begin{aligned} \hat{g}_\beta(\gamma) &= \sum_{c \in C} g_\beta(c) \overline{\gamma(c)} = \sum_{c \in C} \hat{f}_c(\beta) \overline{\gamma(c)} \\ &= \sum_{c \in C} \sum_{b \in B} f_c(b) \overline{\beta(b) \gamma(c)} \\ &= \sum_{c \in C} \sum_{b \in B} f(b+c) \overline{\beta(b) \gamma(c)} \\ &= \sum_{(b+c) \in B \oplus C} f(b+c) \overline{\beta_G(b+c) \gamma_G(b+c)} \\ &= \sum_{a \in G} f(a) \overline{\beta_G(a) \gamma_G(a)} \\ &= \hat{f}(\beta_G \gamma_G). \end{aligned}$$

Sean

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{\beta \in \hat{B} \mid g_\beta \neq 0\} \\ \mathcal{C} &= \{c \in C \mid f_c \neq 0\}, \end{aligned}$$

con  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_l\}$  y  $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ . Como  $\mathcal{C} \subseteq C$  y  $\text{sopf}_{c_j} \subseteq B$  para  $1 \leq j \leq l$ , se puede tomar  $c$  tal que  $\text{sopf}_c$  tenga cardinalidad mínima. Con esta elección, arreglando las evaluaciones de  $f$  de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} f_{c_1}(b_1) & \dots & f_{c_l}(b_1) \\ f_{c_1}(b_2) & \dots & f_{c_l}(b_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{c_1}(b_k) & \dots & f_{c_l}(b_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(b_1 + c_1) & \dots & f(b_1 + c_l) \\ f(b_2 + c_1) & \dots & f(b_2 + c_l) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(b_k + c_1) & \dots & f(b_k + c_l) \end{pmatrix},$$

se sigue que

$$|\mathcal{C}| |\text{sopf}_c| \leq |\text{sopf}|.$$

Entonces

$$|\text{sopf}_c| \leq \frac{|\text{sopf}|}{|\mathcal{C}|}, \tag{D2}$$

y por la hipótesis de inducción

$$|\text{sopf}_c \hat{f}_c| \geq \frac{|B|}{|\text{sopf}_c|}, \quad (D3)$$

así de  $D2$  y  $D3$  se deduce que

$$|\text{sopf}_c \hat{f}_c| \geq \frac{|B||C|}{|\text{sopf}|}. \quad (D4)$$

Notese que  $\text{sopf}_c \hat{f}_c \subseteq \mathcal{B}$ , entonces

$$|\text{sopf}_c \hat{f}_c| \leq |\mathcal{B}|, \quad (D5)$$

además para cada  $\beta \in \mathcal{B}$

$$\text{sop } g_\beta \subseteq \mathcal{C}. \quad (D6)$$

Por hipótesis de inducción  $|\text{sop } g_\beta| |\text{sop } \hat{g}_\beta| \geq |C|$  entonces por  $D6$

$$|\text{sop } \hat{g}_\beta| \geq \frac{|C|}{|\text{sop } g_\beta|} \geq \frac{|C|}{|C|}. \quad (D7)$$

Como  $\hat{G} = \hat{B} \times \hat{C}$ , por  $D1$  se tiene que si  $\eta \in \text{sopf}$  con  $\eta = \gamma_G \beta_G$ ,  $\beta \in \hat{B}$ ,  $\gamma \in \hat{C}$ , entonces

$$\hat{f}(\eta) = \hat{g}_\beta(\gamma) \neq 0$$

por lo que  $\beta \in \mathcal{B}$  y  $\gamma \in \text{sop } \hat{g}_\beta$ .

Por otra parte si  $\eta \in \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} \text{sop } \hat{g}_\beta \times \{\beta\}$ , entonces  $\eta = \gamma \times \beta = \gamma_G \beta_G$  para alguna  $\beta \in \mathcal{B}$  y  $\gamma \in \text{sop } \hat{g}_\beta \subseteq \hat{C}$ . Entonces por  $D1$

$$\hat{f}(\eta) = \hat{f}(\gamma_G \beta_G) = \hat{g}_\beta(\gamma) \neq 0,$$

por lo tanto  $\eta \in \text{sopf}$ .

Por lo anterior entonces se tiene que

$$\text{sopf} = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} \text{sop } \hat{g}_\beta \times \{\beta\},$$

así

$$|\text{sopf}| = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} |\text{sop } \hat{g}_\beta| \geq \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \frac{|C|}{|C|} = |\mathcal{B}| \frac{|B|}{|C|}, \quad (D8)$$

donde la desigualdad se sigue de  $D7$ .

De  $D4$  y  $D5$  se puede obtener lo siguiente:

$$|\text{sopf}| \geq \frac{|B||C|}{|\text{sopf}_c \hat{f}_c|} \geq |B| \frac{|C|}{|\mathcal{B}|}. \quad (D9)$$

Combinando  $D8$  y  $D9$  se tiene

$$|sopf||sopf\hat{f}| \geq |B||C| = |G|,$$

esto verifica el punto *a*) del teorema.

Ahora se supondrá que se tiene la igualdad en *a*),  $0 \in sopf$  y  $1_G \in sopf\hat{f}$ .

Lo primero que hay que notar es que la igualdad en *a*) fuerza las igualdades en *D8* y *D9* que a su vez implican la igualdad en *D4*, *D5*, *D6* y *D7*. Además la igualdad en *D4* implica la igualdad en *D2* y *D3* por lo que se tiene lo siguiente

$$|sopf_c| = \frac{|sopf|}{|C|}, \quad (S1)$$

$$|sopf_c||sopf\hat{f}_c| = |B|, \quad (S2)$$

$$sopf\hat{f}_c = \mathcal{B}, \quad (S3)$$

$$sopg_\beta = \mathcal{C}, \quad (S4)$$

$$|sopg_\beta||sop\hat{g}_\beta| = |C|. \quad (S5)$$

Asimismo

$$1_B \in \mathcal{B} \quad \text{y} \quad 0 \in \mathcal{C} \quad (S6)$$

pues por *D1*

$$\left. \begin{array}{l} \hat{g}_{1_B}(1_C) = \hat{f}(1_G) \neq 0 \\ f_0(0) = f(0) \neq 0 \end{array} \right\} \quad (S7)$$

Cabe mencionar que la igualdad en *D2* implica que

$$|sopf| = |C||sopf_c| = \sum_{x \in C} |sopf_c| \leq \sum_{x \in C} |sopf_x| = |sopf|$$

por lo que  $|sopf_x| = |sopf_c|$  para todo elemento  $x \in C$ , pues se había tomado a  $c$  con soporte mínimo.

Ahora, por *S3*, *S6* y *S7* se tiene que  $0 \in sopf_0$  y  $1_B \in sopf\hat{f}_0$  entonces por *S2* e hipótesis de inducción, se tiene que  $sopf_0$  es un subgrupo de  $B$ . Así se puede observar de *S2* y 3.6 que

$$|B| = |sopf\hat{f}_0||sopf_0|$$

y

$$|B| = |(sopf_0)^\perp||sopf_0|,$$

entonces

$$|sopf\hat{f}_0| = |(sopf_0)^\perp|.$$

Además se tiene que para toda  $\phi \in (\text{sop } f_0)^\perp$

$$\begin{aligned}\hat{f}_0(\phi) &= \sum_{b \in B} f_0(b) \overline{\phi(b)} = \sum_{b \in \text{sop } f_0} f_0(b) \overline{\phi(b)} \\ &= \sum_{b \in \text{sop } f_0} f_0(b) \overline{1_B(b)} = \sum_{b \in B} f_0(b) \overline{1_B(b)} = \hat{f}_0(1_B) = g_{1_B}(0),\end{aligned}$$

y como  $1_B \in \text{sop } \hat{f}_0$  entonces  $g_{1_B}(0) \neq 0$  por lo tanto  $\phi \in \text{sop } \hat{f}_0$  y  $\text{sop } \hat{f}_0 = (\text{sop } f_0)^\perp$  es un subgrupo de  $\hat{B}$ . Por lo tanto  $S3$  implica que  $B$  es un subgrupo de  $\hat{B}$  y por 3.10

$$\hat{f}_0 = K_0 1_B \tag{S8}$$

para alguna constante  $K_0 \in \mathbb{C}$ .

Por otra parte  $|\text{sop}(g_{1_B})| |\text{sop}(\hat{g}_{1_B})| = |C|$ , además por lo anterior  $g_{1_B}(0) = \hat{f}_0(1_B) \neq 0$ , y por  $S7$   $\hat{g}_{1_B}(1_C) = \hat{f}(1_G) \neq 0$ . Entonces por hipótesis de inducción  $\text{sop}(g_{1_B}) = C$  es un subgrupo de  $C$  y

$$g_{1_B}(c) = g_{1_B}(0) = L_1 1_C \tag{S9}$$

para alguna constante  $L_1 \in \mathbb{C}$ .

También, por 3.6,  $S2$  y  $S3$  se tiene que

$$|\text{sop } f_c| |\text{sop } \hat{f}_c| = |B|$$

y

$$|(\text{sop } \hat{f}_c)^\perp| |\text{sop } \hat{f}_c| = |B|.$$

Por 3.9 para toda  $f_c \in L^2(B)$ , existe un elemento  $a_c \in B$  tal que

$$0 \in \text{sop } \tau_{a_c} f_c = \text{sop } f_c - a_c,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}0 &= x - a_c \\ x &= a_c,\end{aligned}$$

es decir,  $a_c \in \text{sop } f_c$ .

Así para toda  $a \in \left[ (\text{sop } \hat{f})^\perp + a_c \right]$ ,  $a = b + a_c$  con  $b \in (\text{sop } \hat{f})^\perp$  y por la transformada de Fourier inversa

$$\begin{aligned}
f_c(a) &= f_c(b + a_c) = \frac{1}{|B|} \sum_{\beta \in \hat{B}} \hat{f}_c(\beta) \beta(b + a_c) \\
&= \frac{1}{|B|} \sum_{\beta \in \text{sop } \hat{f}} \hat{f}_c(\beta) \beta(b) \beta(a_c) \\
&= \frac{1}{|B|} \sum_{\beta \in \text{sop } \hat{f}} \hat{f}_c(\beta) \beta(a_c) \\
&= \frac{1}{|B|} \sum_{\beta \in \hat{B}} \hat{f}_c(\beta) \beta(a_c) \\
&= f_c(a_c) \neq 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $b + a_c \in \text{sop } f_c$  lo cual implica que  $\text{sop } f_c = (\text{sop } \hat{f}_c)^\perp$ .

Cabe mencionar que se puede considerar que  $\mathcal{B}^\perp \subseteq B$  pues por la observación en 3.7,  $\mathcal{B}^\perp \subseteq (\hat{B})^\perp \cong B$ . Entonces  $\text{sop } f_c$  es una traslación del subgrupo  $(\text{sop } \hat{f}_c)^\perp = \mathcal{B}^\perp$ , y tomando la traslación  $\phi : C \rightarrow B$  con  $\phi(0) = 0$  tal que  $\phi(c) = a_c$  se tiene que

$$\text{sop } f_c = \mathcal{B}^\perp + \phi(c) \quad c \in \mathcal{C}. \quad (\text{S10})$$

Así dada  $\beta \in \mathcal{B}$

$$\begin{aligned}
\hat{f}_c(\beta) &= \sum_{b \in B} f_c(b) \overline{\beta(b)} \\
&= \sum_{k \in \mathcal{B}^\perp} f_c(k + \phi(c)) \overline{\beta(k) \beta(\phi(c))} \\
&= \overline{\beta(\phi(c))} \sum_{k \in \mathcal{B}^\perp} f_c(k + \phi(c)) \\
&= \overline{\beta(\phi(c))} \sum_{k \in \mathcal{B}^\perp} f_c(k + \phi(c)) 1_B(k + \phi(c)).
\end{aligned}$$

Como la suma es sobre los elementos del soporte de  $f_c$  entonces

$$\begin{aligned}
\hat{f}_c(\beta) &= \overline{\beta(\phi(c))} \sum_{b \in B} f_c(b) 1_B(b) \\
&= \overline{\beta(\phi(c))} \hat{f}_c(1_B) = \overline{\beta(\phi(c))} g_{1_B}(c)
\end{aligned}$$

pero por S8  $g_{1_B}(c) = g_{1_B}(0)$  para toda  $c \in \mathcal{C}$ . Por lo tanto

$$\hat{f}_c(\beta) = \overline{\beta(\phi(c))} g_{1_B}(c) = \overline{\beta(\phi(c))} g_{1_B}(0). \quad (\text{S11})$$

De manera similar por 3.6,  $S_4$  y  $S_5$  se tiene que

$$|\text{sop } g_\beta| |\text{sop } \hat{g}_\beta| = |C|$$

y

$$|\text{sop } g_\beta| |(\text{sop } g_\beta)^\perp| = |C|$$

entonces por 3.9  $\text{sop } \hat{g}_\beta$  es una traslación del grupo  $C^\perp$ , así existe una traslación  $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow C^\perp$  tal que  $\text{sop } \hat{g}_\beta = C^\perp \varphi(\beta)$  por lo que para toda  $\gamma \in \text{sop } \hat{g}_\beta$  se tiene que  $\gamma = \alpha(\beta)\varphi(\beta)$  con  $\alpha \in C^\perp$ .

Aplicando la inversa de la transformada de Fourier sobre  $g_\beta$  y por  $D1$  se tiene que dadas  $c \in C$   $\beta \in \mathcal{B}$

$$\begin{aligned} g_\beta(c) &= \frac{1}{|C|} \sum_{\gamma \in \hat{C}} \hat{g}_\beta(\gamma) \gamma(c) \\ &= \frac{1}{|C|} \sum_{\gamma \in \hat{C}} \hat{f}(\beta_G \gamma_G) \gamma_G(c) \beta_G(c) \\ &= \frac{1}{|C|} \sum_{\gamma \in \hat{C}} M_c \hat{f}(\beta_G \gamma_G), \end{aligned}$$

donde  $M_c \hat{f}$  es la modulación de  $f$  definida en 3.7.

Así por 3.8

$$\begin{aligned} g_\beta(c) &= \frac{1}{|C|} \sum_{\gamma \in \hat{C}} (\tau_{-c} f)^\wedge(\beta_G \gamma_G) \\ &= \frac{1}{|C|} \sum_{\gamma \in \hat{C}} \sum_{x \in G} f(x+c) \overline{(\beta_G \gamma_G)(x)} \\ &= \frac{1}{|C|} \sum_{\gamma \in \hat{C}} \sum_{(b+c') \in B \oplus C} f(b+c'+c) \overline{\beta(b) \gamma(c')} \\ &= \frac{1}{|C|} \sum_{\gamma \in \hat{C}} \sum_{(b+d) \in B \oplus C} f(b+d) \overline{\beta(b) \gamma_G(d) \gamma(-c)} \end{aligned}$$

donde  $d = c + c'$ .

Ahora, por S9  $\hat{f}_0 = K_0 1_B$  para alguna constante  $K_0 \in \mathbb{C}$  por lo que  $g_{1_B}(0) = \hat{f}_0(1_B) = \hat{f}_0(\beta) = g_\beta(0)$  para toda  $\beta \in \mathcal{B}$ , entonces

$$\begin{aligned}
&= \overline{\gamma(-c)} \frac{1}{|C|} \sum_{\gamma \in \hat{C}} \sum_{x \in G} f(x) \overline{(\beta_G \gamma_G)(x)} \\
&= \gamma(c) \frac{1}{|C|} \sum_{\gamma \in \hat{C}} \hat{f}(\beta_G \gamma_G) \\
&= \gamma(c) \left( \frac{1}{|C|} \sum_{\gamma \in \hat{C}} \hat{g}_\beta(\gamma) \gamma(0) \right) \\
&= \gamma(c) g_\beta(0) = \alpha(c) (\varphi(\beta))(c) g_{1_B}(0) \\
&= (\varphi(\beta))(c) g_{1_B}(0).
\end{aligned}$$

Así tomando  $\gamma_\beta = \overline{\varphi(\beta)}$  se tiene que  $\gamma_\beta \in \hat{C}$  y

$$g_\beta(c) = \overline{\gamma_\beta(c)} g_{1_B}(0), \quad (\text{S12})$$

por lo que combinando S11 y S12 se puede deducir la siguiente igualdad

$$\beta(\phi(c)) = \gamma_\beta(c) \quad \beta \in \mathcal{B}, \quad c \in \mathcal{C}.$$

Para  $\beta \in \mathcal{B}$  y  $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$  se tiene que

$$\begin{aligned}
&\beta(\phi(c_1) + \phi(c_2) - \phi(c_1 + c_2)) \\
&= \beta(\phi(c_1)) \beta(\phi(c_2)) \beta(\phi(c_1 + c_2))^{-1} \\
&= \gamma_\beta(c_1) \gamma_\beta(c_2) \gamma_\beta(c_1 + c_2)^{-1} \\
&= \gamma_\beta(0) = 1,
\end{aligned}$$

por lo tanto para cualesquiera  $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$

$$\phi(c_1) + \phi(c_2) - \phi(c_1 + c_2) \in \mathcal{B}^\perp. \quad (\text{S13})$$

Se puede ver por S10 que

$$\begin{aligned}
sopf &= \bigcup_{c \in \mathcal{C}} sopf_c \times \{c\} \\
&= \bigcup_{c \in \mathcal{C}} (\mathcal{B}^\perp + \phi(c)) \times \{c\}
\end{aligned}$$

que es cerrado bajo suma pues dados  $b_1, b_2 \in \mathcal{B}^\perp$  y  $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned}
S &= ((b_1 + \phi(c_1)) \times c_1) + ((b_2 + \phi(c_2)) \times c_2) \\
&= (b_1 + b_2 + \phi(c_1) + \phi(c_2)) \times (c_1 + c_2)
\end{aligned}$$

y por S13  $\phi(c_1) + \phi(c_2) - \phi(c_1 + c_2) \in \mathcal{B}^\perp$ . Entonces existe  $b' \in \mathcal{B}^\perp$  tal que

$$\phi(c_1) + \phi(c_2) = b' + \phi(c_1 + c_2).$$

Entonces

$$S = ((b_1 + b_2 + b') + \phi(c_1 + c_2)) \times (c_1 + c_2).$$

Por lo tanto  $\text{sof}$  es un subgrupo de  $G$ . ■

## CAPÍTULO 4

### Gráficas de Cayley sobre $\mathbb{Z}_n$

Las gráficas de Cayley son gráficas que se pueden construir a partir de un grupo  $G$  y de un subconjunto  $S \subseteq G$  con ciertas relaciones. El uso de tales gráficas para el análisis de propiedades de grupos finitos fue popularizado por Cayley a finales del siglo XIX.

Hoy día, estas gráficas han sido estudiadas ampliamente para resolver problemas de teoría de los números (como encontrar ciertas cotas), problemas computacionales, problemas en combinatoria, etc.

El estudio de estas gráficas forma parte de la teoría algebraica de gráficas, que es el área de las matemáticas encargada de estudiar las gráficas mediante las matrices asociadas a estas. Una de las más importantes es la matriz adjunta  $Ad$  de la gráfica. Sin embargo, como la matriz adjunta depende del orden en que se consideran los vértices, es importante saber aquellas propiedades que son invariantes bajo permutaciones de sus filas y columnas. Posiblemente las más conocidas de tales propiedades son las relacionadas con el espectro de la matriz adjunta.

La teoría espectral es muy útil y usada hoy en día. Por ejemplo, los coeficientes del polinomio característico obtenido de la matriz  $Ad$  y su espectro, reflejan propiedades estructurales de la gráfica, como el número de vértices, aristas y triángulos de la misma. El segundo valor propio más grande de una gráfica provee información sobre su expansión y propiedades de aleatoriedad. El valor más pequeño proporciona información acerca de su número de independencia y número cromático.

El objetivo de este capítulo es considerar un caso especial de las gráficas de Cayley, en donde el conjunto de vértices estará definido por el grupo  $\mathbb{Z}_n$  con  $n \in \mathbb{N}$  y se demostrará que sus valores propios están determinados por la TFD, facilitando su cálculo y manejo.

#### 1. Gráficas con vértices finitos y su matriz adjunta.

A continuación se darán las nociones básicas necesarias de teoría de gráficas para este capítulo, sin embargo, si se quiere profundizar en la teoría de gráficas se recomienda [AW]

4.1. **Definición.** Una gráfica  $X$  es una pareja ordenada  $(V, A)$  donde:

- $V$  es un conjunto finito no vacío.

- $A$  es un conjunto de parejas no ordenadas de elementos de  $V$ .

A los elementos de  $V$  se les llama vértices de la gráfica y a los elementos de  $A$  se les llama aristas de la gráfica.

Dada una gráfica  $X$  los vértices se denotarán por  $V(X)$  y las aristas por  $A(X)$ . Además al número de vértices se le denomina orden y al número de aristas tamaño.

**4.2. Definición.** Se dice que dos vértices  $x, y \in V(X)$  son adyacentes si  $\{x, y\} \in A(X)$ .

Para cada  $x, y \in X$  se denotará por  $x \sim y$  cuando  $y$  sea adyacente a  $x$ .

Obsérvese que, por la definición de arista, las aristas no estarán dirigidas, pues  $\{x, y\} = \{y, x\}$  para cualesquiera  $x, y \in V(X)$  adyacentes.

### Ejemplos

- La gráfica trivial  $X(\{*\}, \emptyset)$  consta de un único vértice y ninguna arista.
- la gráfica

$$X(\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}\{a, c\}\{a, d\}\{b, c\}\{b, d\}\{c, d\}\})$$

se puede representar con dibujos distintos como se observa a continuación.



FIGURA 1

**4.3. Definición.** Al número de aristas adyacentes a un vértice  $x$  se le llama grado, y se denota como  $d_X(x)$  o  $d(x)$ .

Se dice que gráfica  $X$  es  $k$ -regular si para todo vértice  $x \in V(X)$ ,  $d(x) = k$ .

**4.4. Definición.** Dada una gráfica  $X$ , un camino  $W$  es una sucesión de vértices consecutivos en  $W$  que son adyacentes en  $X$ , es decir:

$$W = (x_1 x_2 \dots x_n) \text{ tal que } x_i \in V(X) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad y \\ \{x_i, x_{i+1}\} \in A(X) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}.$$

Se dice que dos caminos son diferentes si no coinciden como sucesiones. A los caminos que no repiten vértices se les llama trayectorias.

Dados  $x, y \in V(X)$  se le llamará "x - y trayectoria", a una trayectoria que empiece en  $x$  y termine en  $y$ . Se dirá que  $X$  es conexa si para cualquier par de vértices  $x, y \in V(X)$  existe una  $x - y$  trayectoria.

Un  $k$ -ciclo será un camino de  $k$  aristas que no repite aristas ni vértices a excepción del primer y último vértice que serán el mismo.

**4.5. Definición.** Una gráfica de Cayley se define como la gráfica  $X(\mathbb{Z}_n, S')$  donde  $n \in \mathbb{N}$  y

$$S' = \{\{x, y\} \mid x = y \pm s, \ x, y \in \mathbb{Z}_n, s \in S\},$$

con  $S \subseteq \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$  tal que si  $s \in S$  entonces  $-s \in S$ .

Por ejemplo,  $X(\mathbb{Z}_n, S')$  es un  $n$ -ciclo si  $S = \{\pm 1 \text{ mod } n\}$ , pues cada  $x \in \mathbb{Z}_n$  está relacionado con  $(x + 1) \text{ mod } n$ .

Nótese que si  $S$  no tiene generadores de  $\mathbb{Z}_n$ , puede no ser conexa, un ejemplo de esto es la gráfica  $X(\mathbb{Z}_8, S')$ , con  $S = \{\pm 2 \text{ mod } n\}$ .

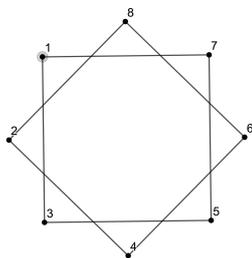


FIGURA 2

La matriz adjunta de una gráfica tiene mucha información sobre los grados de los vértices y otras propiedades importantes.

**4.6. Definición.** Sea  $X$  una gráfica, donde  $V(X) = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Se define a la matriz adjunta  $Ad$  como la matriz  $n \times n$  tal que

$$Ad_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \in A(X) \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo:  
 Dada la gráfica de Cayley  $X(\mathbb{Z}_6, S')$ ,  $S = \{\pm 2, \pm 3 \text{ mod } 6\}$

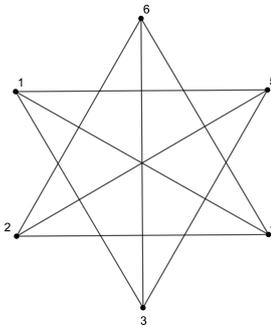


FIGURA 3

se tiene que su matriz adjunta está dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Otro tipo de información que es interesante sobre una gráfica  $X$  es el comportamiento de funciones con dominio  $V(X)$  e imagen en  $\mathbb{C}$ , en particular es interesante saber cómo se comportan estas funciones con respecto a las aristas. Así se define lo siguiente:

**4.7. Definición.** Dada una gráfica  $X$ , se define el operador adjunto  $A : L^2(V(X)) \rightarrow L^2(V(X))$  sobre  $f \in L^2(V(X))$  para cada  $x \in V(X)$  como

$$A(f)(x) = \sum_{x \sim y} f(y),$$

donde  $x \sim y$  significa que  $y$  es adyacente a  $x$ .

Cabe destacar que este operador es lineal pues para cualesquiera  $f, g \in L^2(V(X))$  y para toda  $a \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} A(af + g)(x) &= \sum_{x \sim y} (af + g)(y) = \sum_{x \sim y} af(y) + g(y) \\ &= a \sum_{x \sim y} f(y) + \sum_{x \sim y} g(y) = aA(f)(x) + A(g)(x). \end{aligned}$$

**4.8. Observación.** Se puede ver que para cualquier gráfica  $X$ , si  $V(X) = \{v_1, \dots, v_n\}$ , entonces se puede identificar a  $f \in L^2(V(X))$  con el vector columna  $F = (f(v_1), \dots, f(v_n))^t$ . Gracias a esto, se tiene una relación entre la matriz adjunta de la gráfica  $X$  y el operador adjunto, vía elementos de  $L^2(V(X))$ , como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} Ad \cdot F &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(v_1) \\ f(v_2) \\ \vdots \\ f(v_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} f(v_j) \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} f(v_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} f(v_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{v_1 \sim y} f(y) \\ \sum_{v_2 \sim y} f(y) \\ \vdots \\ \sum_{v_n \sim y} f(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(f)(v_1) \\ A(f)(v_2) \\ \vdots \\ A(f)(v_n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**4.9. Observación.** Para una gráfica de Cayley  $X(\mathbb{Z}_n, S')$  el operador adjunto de la gráfica es un operador de convolución pues

$$Af(x) = \sum_{x \sim z} f(z) = \sum_{y \in S} f(y - x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}_n} \delta_S(y) f(x - y) = f * \delta_S(x).$$

## 2. Espectro de las gráficas de Cayley en $\mathbb{Z}_n$ .

En la sección anterior se definió al operador adjunto de una gráfica y se mostraron algunas relaciones que tiene con la matriz adjunta de la misma por lo que es de interés observar cómo se comporta este operador con respecto a los vértices de una gráfica.

En general dado  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita y  $T : V \rightarrow V$  un operador lineal, se busca la base  $\beta$  más adecuada de  $V$  para hacer a la matriz asociada de  $T$ ,  $[T]_\beta$ , lo más simple posible. Para lograr esto es muy importante obtener los valores propios y vectores propios de dicho operador.

Dado  $V$  un espacio vectorial con un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , se dice que un operador  $T : V \rightarrow V$  es normal si  $T(T^*) = (T^*)T$  donde  $T^*$  es el operador adjunto de  $T$ , es decir, el único operador tal que  $\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^*w \rangle \quad \forall v, w \in V$ . En el caso de que  $T = T^*$ , a  $T$  se le llamará operador autoadjunto.

La existencia y unicidad de  $T^*$  se demuestran en [FS].

Recordando que  $L^2(K)$  es un espacio vectorial con producto escalar para todo conjunto finito  $K$ , se tiene el siguiente resultado.

**4.10. Proposición.** El operador adjunto  $A$  descrito en 4.7 es un operador autoadjunto.

**Demostración**

Sean  $X$  una gráfica y  $f, g \in L^2(V(X))$

Se define  $\eta_y : V(X) \rightarrow \mathbb{C}$  como sigue:

$$\eta_y(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \sim y \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \langle A(f), g \rangle &= \sum_{x \in V(X)} A(f)(x) \overline{g(x)} = \sum_{x \in V(X)} \left( \sum_{y \sim x} f(y) \right) \overline{g(x)} \\ &= \sum_{x \in V(X)} \sum_{y \sim x} f(y) \overline{g(x)} = \sum_{x \in V(X)} \sum_{y \in V(X)} f(y) \overline{g(x)} \eta_x(y) \\ &= \sum_{y \in V(X)} \sum_{x \in V(X)} f(y) \overline{g(x)} \eta_y(x) = \sum_{y \in V(X)} \sum_{y \sim x} f(y) \overline{g(x)} \\ &= \sum_{y \in V(X)} f(y) \sum_{y \sim x} \overline{g(x)} = \sum_{y \in V(X)} f(y) \overline{\sum_{y \sim x} g(x)} \\ &= \sum_{y \in V(X)} f(y) \overline{A(g)}(y) = \langle f, A(g) \rangle . \end{aligned}$$

Esto implica que  $A$  es normal pues por ser autoadjunto  $A^* = A$ . Gracias a esto se tiene el siguiente resultado.

**4.11. Teorema.** Sean  $V$  un espacio vectorial con producto interno, complejo, y dimensionalmente finito, y  $T$  un operador lineal en  $V$ . Entonces  $T$  es normal si y sólo si  $V$  tiene una base ortonormal formada por vectores propios de  $T$ .

Este teorema y su demostración se encuentran en [FS].

Así, se tiene entonces que existe una base  $\beta$  ortonormal de  $L^2(V(X))$  formada por vectores propios del operador adjunto, es decir  $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  donde

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases}$$

Además si  $v \in L^2(V(X))$  se tiene su expansión de Fourier

$$v = \sum_{j=1}^n \langle v, v_j \rangle v_j,$$

por lo que

$$A(v) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle v, v_j \rangle v_j.$$

Para mayor referencia sobre series de Fourier se recomienda [ER] y para mayor información sobre valores propios y el espectro de operadores se puede verificar [FS] y [KE].

Como se observó en 4.9 para una gráfica de Cayley el operador adjunto es un operador de convolución, así que es común preguntarse si tiene alguna relación con la transformada de Fourier pues ésta abre la convolución en multiplicación. La respuesta es que tanto el operador adjunto como la matriz adjunta de una gráfica de Cayley están relacionadas con la transformada de Fourier como se observa a continuación.

**4.12. Teorema.** Dada una gráfica de Cayley  $X(\mathbb{Z}_n, S')$  con  $S \subseteq \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ , los valores propios de la matriz adjunta de la gráfica son de la forma

$$\mathcal{F}(\delta_S)(e_a) = \sum_{s \in S} e^{\frac{-2\pi i a s}{n}}$$

para alguna  $a \in \mathbb{Z}_n$ .

### Demostración

En el segundo capítulo se demostró que dado  $G$  un grupo abeliano finito, la transformada de Fourier es un operador lineal de  $L^2(G)$  en  $L^2(G)$ , entonces se puede obtener su matriz asociada con respecto a la base canónica de  $L^2(G)$ .

Para calcularla es necesario recordar que por 2.15 todo elemento de  $\hat{\mathbb{Z}}_n$  es de la forma  $e_x$  con  $x \in \mathbb{Z}_n$ , entonces para toda  $k \in \mathbb{Z}_n$  y  $e_x \in \hat{\mathbb{Z}}_n$

$$\mathcal{F}(\delta_k)(e_x) = \hat{\delta}_k(e_x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}_n} \delta_k(y) \overline{e_x(y)} = \overline{e_x(k)} = \overline{e_k(x)}.$$

Ahora tomando la base canónica de  $L^2(\mathbb{Z}_n)$ ,  $\delta = \{\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}\}$ , se tiene que

$$\hat{\delta}_k(x) = \overline{e_k(x)} = \overline{e_0(k)}\delta_0(x) + \overline{e_1(k)}\delta_1(x) + \dots + \overline{e_{n-1}(k)}\delta_{n-1}(x).$$

Así la matriz asociada a la transformada de Fourier con respecto a la base  $\delta$ ,  $[\mathcal{F}]_\delta$ , será la matriz

$$[\mathcal{F}]_\delta = \begin{pmatrix} \overline{e_0(0)} & \cdots & \overline{e_0(n-1)} \\ \overline{e_1(0)} & \cdots & \overline{e_1(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{e_{n-1}(0)} & \cdots & \overline{e_{n-1}(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Si  $\Phi = n^{-1/2}[\mathcal{F}]_\delta$ , se puede observar que  $\Phi^{-1} = \overline{\Phi}^t$  pues  $\Phi^t = \Phi$  y por 2.13 se tiene que

$$\begin{aligned} (\Phi \overline{\Phi})_{jk} &= n^{-1/2} n^{-1/2} \sum_{x=0}^{n-1} \overline{e_j(x)} e_k(x) = n^{-1} \sum_{x=0}^{n-1} \overline{e_x(j)} e_x(k) \\ &= n^{-1} \sum_{\chi \in \hat{\mathbb{Z}}_n} \overline{\chi(j)} \chi(k) = \delta_j(k). \end{aligned}$$

Por otra parte la matriz adjunta de la gráfica de Cayley  $X(Z_n, S')$  es la matriz con entradas

$$Ad_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \sim v_j \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así, recordando que dos vértices  $x, y$  son adjuntos si existe  $s \in S$  tal que  $x = y \pm s$ , se tiene que la matriz adjunta es

$$\begin{aligned} Ad &= \begin{pmatrix} \delta_S(0-0) & \delta_S(1-0) & \cdots & \delta_S(n-1-0) \\ \delta_S(0-1) & \delta_S(1-1) & \cdots & \delta_S(n-1-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_S(0-(n-1)) & \delta_S(1-(n-1)) & \cdots & \delta_S(n-1-(n-1)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \delta_S(0) & \delta_S(1) & \cdots & \delta_S(n-1) \\ \delta_S(-1) & \delta_S(0) & \cdots & \delta_S(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_S(1-n) & \delta_S(2-n) & \cdots & \delta_S(0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Con todo lo anterior se afirma que  $\Phi Ad \Phi^{-1}$  es una matriz diagonal, pues

$$\Phi Ad \Phi^{-1} = n^{-1/2} \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} \overline{e_0(k)} \delta_S(0-k) & \cdots & \sum_{k=0}^{n-1} \overline{e_0(k)} \delta_S((n-1)-k) \\ \sum_{k=0}^{n-1} \overline{e_1(k)} \delta_S(0-k) & \cdots & \sum_{k=0}^{n-1} \overline{e_1(k)} \delta_S((n-1)-k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=0}^{n-1} \overline{e_{n-1}(k)} \delta_S(0-k) & \cdots & \sum_{k=0}^{n-1} \overline{e_{n-1}(k)} \delta_S((n-1)-k) \end{pmatrix} \Phi^{-1}$$

$$\begin{aligned}
&= n^{-1/2} \left( \begin{array}{ccc} \sum_{s \in S} \overline{e_0(-s)} & \cdots & \sum_{s \in S} \overline{e_0((n-1)-s)} \\ \sum_{s \in S} \overline{e_1(-s)} & \cdots & \sum_{s \in S} \overline{e_1((n-1)-s)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{s \in S} \overline{e_{n-1}(-s)} & \cdots & \sum_{s \in S} \overline{e_{n-1}((n-1)-s)} \end{array} \right) \Phi^{-1} \\
&= n^{-1} \left( \begin{array}{ccc} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s \in S} \overline{e_0(m-s)} e_0(m) & \cdots & \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s \in S} \overline{e_0(m-s)} e_{n-1}(m) \\ \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s \in S} \overline{e_1(m-s)} e_0(m) & \cdots & \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s \in S} \overline{e_1(m-s)} e_{n-1}(m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s \in S} \overline{e_{n-1}(m-s)} e_0(m) & \cdots & \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s \in S} \overline{e_{n-1}(m-s)} e_{n-1}(m) \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Además por 2.13 se cumple que para toda  $\alpha, \beta \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s \in S} \overline{e_\alpha(m-s)} e_\beta(m) &= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s \in S} e_\alpha(s-m) e_\beta(m) \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s \in S} e_\alpha(s) e_\alpha(-m) e_\beta(m) \\
&= \sum_{s \in S} e^{\frac{2\pi i \alpha s}{n}} \sum_{m=0}^{n-1} \overline{e_m(\alpha)} e_m(\beta) = \sum_{s \in S} e^{\frac{2\pi i \alpha s}{n}} \sum_{\chi \in \hat{\mathbb{Z}}_n} \overline{\chi(\alpha)} \chi(\beta) \\
&= \sum_{s \in S} e^{\frac{2\pi i \alpha s}{n}} (n \delta_\alpha(\beta)) = \sum_{s \in S} e^{-\frac{2\pi i \alpha s}{n}} (n \delta_\alpha(\beta)),
\end{aligned}$$

por lo que todos los términos fuera de la diagonal serán cero, entonces

$$\Phi Ad \Phi^{-1} = n^{-1} \left( \begin{array}{ccc} n \sum_{s \in S} e^{-\frac{2\pi i 0 s}{n}} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & n \sum_{s \in S} e^{-\frac{2\pi i (n-1) s}{n}} \end{array} \right)$$

$$\Phi Ad \Phi^{-1} = \begin{pmatrix} \sum_{s \in S} e^{\frac{-2\pi i 0s}{n}} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{s \in S} e^{\frac{-2\pi i(n-1)s}{n}} \end{pmatrix}.$$

Por lo anterior se puede concluir que los valores propios de la matriz  $Ad$  son de la forma

$$\sum_{s \in S} e^{\frac{-2\pi ias}{n}},$$

con  $a \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . ■

**4.13. Corolario.** Dada una gráfica de Cayley  $X(\mathbb{Z}_n, S')$  con  $S \subseteq \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ , los valores propios del operador adjunto de la gráfica son de la forma

$$\mathcal{F}(\delta_S)(e_a) = \sum_{s \in S} e^{\frac{-2\pi ias}{n}}$$

para alguna  $a \in \mathbb{Z}_n$ .

**Demostración.**

Como se observó en 4.8, al asociar cualquier elemento  $f \in L^2(\mathbb{Z}_n)$  con el vector columna  $F = (f(v_1), \dots, f(v_n))^t$  se tiene que el  $j$ -ésimo renglón de la matriz  $Ad F$  es igual al operador adjunto evaluado en  $j$ , es decir

$$(Ad F)_{j+1} = Af(j) \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Así se tiene que si  $f$  es un vector propio de  $A$  con valor propio  $\lambda$ , entonces  $F$  será un vector propio de la matriz  $Ad$  pues

$$(Ad F)_{j+1} = Af(j) = \lambda f(j) \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, n-1\},$$

además se observa que todo valor propio  $\lambda$  del operador adjunto será valor propio de la matriz  $Ad$ .

Por 4.12 se tiene que si  $\lambda$  es valor propio de la matriz adjunta de la gráfica de Cayley  $X(\mathbb{Z}_n, S')$ , entonces

$$\lambda = \sum_{s \in S} e^{\frac{-2\pi ias}{n}},$$

por lo tanto los valores propios del operador adjunto son de la forma

$$\mathcal{F}\delta_S(e_a) = \sum_{s \in S} e^{\frac{-2\pi ias}{n}}$$

para alguna  $a \in \mathbb{Z}_n$ .

Gracias a este teorema es muy fácil identificar cuales son los valores propios del operador adjunto de una gráfica de Cayley

**Ejemplo:**

Si  $S = \{\pm 1 \bmod n\}$  los valores propios del operador adjunto  $A$  en  $X(\mathbb{Z}_n, S')$  son:

$$\begin{aligned} \sum_{s \in S} e^{\frac{2\pi i a s}{n}} &= e^{\frac{2\pi i a}{n}} + e^{\frac{2\pi i a(-1)}{n}} \\ &= \cos\left(\frac{2\pi a}{n}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi a}{n}\right) + \cos\left(\frac{-2\pi a}{n}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi a}{n}\right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{2\pi a}{n}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto los valores propios son de la forma  $2 \cos\left(\frac{2\pi a}{n}\right)$  para alguna  $a \in \mathbb{Z}_n$ .

**4.14. Proposición.** Los vectores propios del operador autoadjunto  $A$  de una gráfica de Cayley son las funciones  $f(x) = e_{-a}(x)$ .

**Demostración**

Sean  $S \subseteq \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ ,  $X(\mathbb{Z}_n, S')$  una gráfica de Cayley y  $f$  un valor propio del operador adjunto  $A$ , entonces

$$Af(x) = \lambda f(x),$$

por 4.13

$$\lambda = \sum_{s \in S} e^{\frac{-2\pi i m s}{n}} = \sum_{s \in S} e_a(s)$$

para algún  $a \in \mathbb{Z}_n$ , entonces

$$\begin{aligned} Af(x) &= \sum_{s \in S} e_a(s) f(x) \\ \sum_{s \in S} f(x-s) &= \sum_{s \in S} e_a(s) f(x) \\ \sum_{s \in S} f(x-s) - e_a(s) f(x) &= 0, \end{aligned}$$

como esto pasa para toda  $x \in \mathbb{Z}_n$  entonces  $f(x-s) = e_a(s) f(x)$  para toda  $s \in S$ .

Nótese que la función  $g(x) = e_{-a}(x)$  satisface la igualdad para toda  $x \in \mathbb{Z}_n$ , pues

$$\begin{aligned} g(x-s) &= e_{-a}(x-s) \\ &= e_a(s) e_{-a}(x) \\ &= e_a(s) g(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto si  $f$  es un valor propio del operador adjunto con valor propio  $\sum_{s \in S} e^{\frac{-2\pi i m s}{n}}$  para algún  $a$  en  $\mathbb{Z}_n$ , entonces  $f = e_{-a}$ . ■

## Teoremas clásicos de Análisis.

Dado un conjunto  $Z = X \times Y$ , si  $f$  es una función definida de  $Z$  a  $\bar{\mathbb{C}}$  y  $x \in X$ , entonces la  $x$ -sección de  $f$  será la función  $f_x$  definida en  $Y$  por

$$f_x(y) = f(x, y) \quad y \in Y.$$

Análogamente si  $y \in Y$  la  $y$ -sección de  $f$  será la función  $f^y$  definida en  $X$  por

$$f^y(x) = f(x, y) \quad x \in X.$$

### A.1. Teorema. Teorema de Tonelli

Sean  $(X, \mu)$  y  $(Y, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finitos y  $F : Z \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  una función medible no negativa donde  $\bar{\mathbb{R}}$  son los reales extendidos y  $(Z, \pi)$  es el espacio de medida dado por el producto de los espacios  $X$  y  $Y$ . Entonces las funciones  $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  y  $g : Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  definidas por

$$f(x) = \int_Y F_x(y) d\nu, \quad g(y) = \int_X F^y(x) d\mu$$

son medibles y

$$\int_X f(x) d\mu = \int_Z F(x, y) d\pi = \int_Y g(y) d\nu.$$

En otros símbolos

$$\int_X \left( \int_Y F(x, y) d\nu \right) d\mu = \int_Z F(x, y) d\pi = \int_Y \left( \int_X F(x, y) d\mu \right) d\nu.$$

Este teorema y su demostración se pueden encontrar en [BR].

### A.2. Teorema. Teorema de Fubini

Sean  $(X, \mu)$  y  $(Y, \nu)$  espacios  $\sigma$ -finitos y sea  $\pi$  la medida producto de  $\mu$  con  $\nu$  en  $Z = X \times Y$ .

Si  $F \in L^1(Z)$  entonces  $F_x \in L^1(Y)$  y  $F^y \in L^1(X)$ , para casi toda  $x \in X, y \in Y$ . Las funciones definidas c.d.s.

$$f(x) = \int_Y F_x d\nu, \quad g(y) = \int_X F^y d\mu$$

están en  $L^1(X)$ ,  $L^1(Y)$  respectivamente, y

$$\int_X f d\mu = \int_Z F d\pi = \int_Y g d\nu,$$

en otros símbolos

$$\int_X \left[ \int_Y F d\nu \right] d\mu = \int_Z F d\pi = \int_Y \left[ \int_X F d\mu \right] d\nu.$$

La demostración de este teorema se puede consultar en [FG].

### A.3. Teorema. Teorema de convergencia dominada.

Sean  $X$  un espacio medible con medida  $\mu$  y  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones integrables que convergen casi donde sea a una función  $f$ .

Si existe una función integrable  $g$  tal que  $|f_k(x)| \leq g(x)$  c.d.s.  $\forall k \in \mathbb{N}$ , entonces  $f$  es medible,  $f$  es integrable y

$$\int f d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k d\mu.$$

Este teorema y su demostración se pueden encontrar en [BR].

### A.4. Teorema. (H. Lebesgue)

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada, entonces

a)  $f$  es Riemann integrable si y sólo si  $f$  es continua c.d.s. con respecto a la medida de Lebesgue.

b) Si  $f$  es Riemann integrable, entonces  $f$  es Lebesgue integrable y la integral de Riemann  $\int_a^b f(x)dx$ , será igual a la integral de Lebesgue  $\int_{[a,b]} f(x)dm_x$ , es decir

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dm_x.$$

La demostración de este teorema se puede encontrar en [GG].

### A.5. Proposición. Sean $p$ y $q$ exponentes conjugados y $\mu$ una medida en $X$ .

Sea  $g$  una función  $\mu$  medible en  $X$  tal que  $fg \in L^1(X)$  para toda  $f$  en el espacio  $\Sigma$  de funciones simples que se desvanecen fuera de un conjunto de medida finita. Suponga que

$$M_q(g) = \sup \left\{ \left| \int_X fg d\mu \right| : f \in \Sigma, \|f\|_p = 1 \right\}$$

es finito. Se supondrá además que  $S_g = \{x \in X \mid g(x) \neq 0\}$  es  $\sigma$ -finito o que  $\mu$  es semifinita. Entonces

$$g \in L^q(X) \text{ y } M_q(g) = \|g\|_q.$$

La demostración de este teorema se encuentra en [FG].

**A.6. Teorema.** Lemma de Urysohn

Sea  $X$  un espacio normal. Si  $A$  y  $B$  son subconjuntos de  $X$  cerrados y ajenos, entonces existe  $f \in C(X, [0, 1])$  el espacio de las funciones continuas de  $X$  en el  $[0, 1]$ , tal que  $f(x) = 0$  para toda  $x \in A$  y  $f(x) = 1$  para toda  $x \in B$ .

La demostración de este teorema y su generalización se encuentran en [FG].

**A.7. Teorema.** Sean  $(X, S, \mu)$  un espacio de medida,  $p \in [1, +\infty)$  fijo y  $(f_n)$  una sucesión de funciones que convergen a  $f$  en  $L^p(X, S, \mu)$ , entonces  $f_n$  converge en medida a  $f$ .

La demostración de este teorema se encuentra en [GG].

**A.8. Definición.** Sea  $(X, S, \mu)$  un espacio de medida y  $(f_n)$  una sucesión de funciones medibles. Decimos que  $(f_n)$  es de Cauchy en medida (o fundamentalmente en medida), denotado  $C.\mu$ . si para todo  $\epsilon > 0$

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \mu(\{x \in X \mid |f_m(x) - f_n(x)| \geq \epsilon\}) = 0.$$

Cabe mencionar que si  $(f_n)$  converge en medida a  $f$ , entonces  $(f_n)$  es  $C.\mu$ .

**A.9. Teorema.** (F. Riesz - H. Weyl). Sean  $(X, S, \mu)$  un espacio de medida y  $(f_n)$  de  $C.\mu$ .

Entonces  $f_n$  converge a  $f$  en medida y existe una subsucesión  $(f_{n_k}) \subseteq (f_n)$  tal que  $f_{n_k}$  converge a  $f$  c.d.s.

La demostración de este teorema se encuentra en [**GG**].

## Teoremas de aproximación de la identidad.

Se considerará a  $C_c(\mathbb{R}^n)$  el espacio de las funciones continuas  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  con soporte compacto.

Sea  $\mu$  una medida de Borel en  $X$  y  $E \subseteq X$  un conjunto de Borel cualquiera, la medida  $\mu$  se llamará regular exterior si

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) \mid E \subseteq U, U \text{ abierto}\}$$

y la medida  $\mu$  se llamará regular interior si

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq E, K \text{ compacto}\},$$

si  $\mu$  es regular exterior e interior en todos los conjuntos de Borel, a  $\mu$  se le llamará regular.

En [GG] se demuestra que la medida de Lebesgue es una medida regular, con esto en mente se demostrará lo siguiente.

**B.1. Proposición.**  $C_c(\mathbb{R}^n)$  es denso en  $L^p(\mathbb{R}^n)$  con la medida de Lebesgue para toda  $1 \leq p < \infty$ .

### Demostración.

Como las funciones simples son densas en  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , es suficiente mostrar que para todo conjunto de Borel  $E$  con  $\mu(E) < \infty$ ,  $\chi_E$  puede ser aproximada en  $L^p(X)$  por elementos de  $C_c(X)$ .

Dado  $\epsilon > 0$  como la medida de Lebesgue es regular y  $\mathbb{R}^n$  es  $\sigma$ -finito, se puede escoger un compacto  $K \subseteq E$  y un abierto  $U$  con  $E \subseteq U$  tal que  $\mu(U \setminus K) < \epsilon$ . Así por el lemma de Urysohn se puede escoger  $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\chi_K \leq f \leq \chi_U$ , entonces

$$\|\chi_E - f\|_p \leq \mu(U \setminus K)^{\frac{1}{p}} < \epsilon^{\frac{1}{p}}.$$

Para mayor referencia véase [FG].

Ahora se necesitarán las condiciones de diferenciación para el desarrollo de la transformada de Fourier, así que se definirá lo siguiente.

Dada una función  $K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  y  $\epsilon > 0$  se denota por  $\{K_\epsilon\}$  a la familia de funciones que cumplen que

$$K_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} K\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

B.2. **Lema.** Si  $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , dada  $\epsilon > 0$  la familia  $\{K_\epsilon\}$  cumple

i)

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_\epsilon(x) dm_x = \int_{\mathbb{R}^n} K(x) dm_x.$$

ii) Para cada  $\delta > 0$  fijo

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \delta} |K_\epsilon(x)| dm_x = 0.$$

### Demostración

Para demostrar i) basta hacer el cambio de variable  $u = \frac{x}{\epsilon}$ , pues

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_\epsilon(x) dm_x = \int_{\mathbb{R}^n} \epsilon^{-n} K\left(\frac{x}{\epsilon}\right) dm_x = \int_{\mathbb{R}^n} K(u) dm_u.$$

Para probar ii) se fija  $\delta > 0$  y haciendo el mismo cambio de variable se tiene que

$$\int_{|x| > \delta} |K_\epsilon(x)| dm_x = \int_{|x| > \delta} \epsilon^{-n} \left| K\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right| dm_x = \int_{|u| > \frac{\delta}{\epsilon}} |K(u)| dm_u.$$

Esta última integral tiende a 0 cuando  $\epsilon$  tiende a cero, para mostrar esto se afirma lo siguiente:

Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{|x| > k} |f(x)| dm_x = 0.$$

Para demostrar la afirmación hay que observar que:

Como  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dm_x < \infty,$$

además

$$\int_{|x| > k} |f(x)| dm_x = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \chi_{|x| > k}(x) dm_x.$$

Sea  $f_k = f \chi_{A_k}$  donde  $A_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| > k\}$ , entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = 0, \quad |f_k(x)| \leq |f(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{N},$$

y como  $f$  es integrable entonces se puede aplicar el teorema de convergencia dominada, así

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dm_x = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k dm_x = 0.$$

Y entonces así para cualquier  $\delta > 0$ , se tiene que

$$\int_{|x| > \delta} |K_\epsilon(x)| dm_x = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|u| > \frac{\delta}{\epsilon}} |K(u)| dm_u = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{|u| > \eta} |K(u)| dm_u = 0.$$

A las familias de funciones  $\{K_\epsilon\}$  se les conoce como aproximaciones de la identidad, pues si  $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$  se puede aproximar cualquier función  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  via convolución como a continuación se demuestra.

**B.3. Teorema.** Sean  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  con  $1 \leq p < \infty$  y  $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(x) dm_x = 1.$$

entonces la función  $f_m = f * K_{m^{-1}}$  converge a  $f$  en  $L^p(\mathbb{R}^n)$  es decir

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f\|_p = 0.$$

### Demostración

Por *i*) de B.2 se tiene que para todo  $\epsilon > 0$

$$f(x) = f(x) \int_{\mathbb{R}^n} K_\epsilon(t) dm_t = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) K_\epsilon(t) dm_t$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} |f_{\epsilon^{-1}}(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t) K_\epsilon(t) dm_t - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) K_\epsilon(t) dm_t \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-t) - f(x)] K_\epsilon(t) dm_t \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)| |K_\epsilon(t)| dm_t \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)| |K_\epsilon(t)|^{\frac{1}{p}} |K_\epsilon(t)|^{\frac{1}{q}} dm_t \end{aligned}$$

donde  $q$  es tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , ( $\frac{1}{q} = 0$  si  $\frac{1}{p} = 1$ ).

Aplicando la desigualdad de Hölder con los exponentes  $p$  y  $q$ , se obtiene que

$$|f_{\epsilon^{-1}}(x) - f(x)| \leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)|^p |K_\epsilon(t)| dm_t \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |K_\epsilon(t)| dm_t \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Elevando ambos miembros de la desigualdad a la  $p$  y después intengrando se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} |f_{\epsilon^{-1}}(x) - f(x)|^p dm_x \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)|^p |K_\epsilon(t)| dm_t \right) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |K_\epsilon(t)| dm_t \right)^{\frac{p}{q}} dm_x, \\ & = \|K\|^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)|^p |K_\epsilon(t)| dm_t dm_x. \end{aligned}$$

En esta última integral se tienen funciones no negativas por lo que se puede aplicar el teorema de Tonelli, así se puede cambiar el orden de integración para obtener que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f_{\epsilon^{-1}}(x) - f(x)|^p dm_x & \leq \|K\|^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)|^p |K_\epsilon(t)| dm_x dm_t \\ & = \|K\|^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^n} |K_\epsilon(t)| \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)|^p dm_x \right) dm_t, \end{aligned}$$

$$\text{Sea } \phi(t) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)|^p dm_x = \|\tau_{-t}f - f\|_p^p.$$

Se tiene que

$$\|f - f_{\epsilon^{-1}}\|_p^p \leq \|K\|_1^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^n} |K_\epsilon(t)| \phi(t) dm_t.$$

Para  $\delta > 0$  se escribe

$$I_\epsilon = \int_{\mathbb{R}^n} |K_\epsilon(t)| \phi(t) dm_t = A_{\epsilon,\delta} + B_{\epsilon,\delta}$$

donde

$$\begin{aligned} A_{\epsilon,\delta} & = \int_{|t| < \delta} |K_\epsilon(t)| \phi(t) dm_t, \\ B_{\epsilon,\delta} & = \int_{|t| \geq \delta} |K_\epsilon(t)| \phi(t) dm_t. \end{aligned}$$

Primero se demostrará que la traslación es continua en  $L^p(\mathbb{R}^n)$  es decir

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\tau_{-t}f - f\|_p = 0.$$

Dado  $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$  existe un compacto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  tal que si  $|t| < 1$

$$\begin{aligned} \|\tau_{-t}g - g\|_p^p & = \int_{\mathbb{R}^n} |\tau_{-t}g(x) - g(x)|^p dm_x \\ & = \int_A |g(x-t) - g(x)|^p dm_x. \end{aligned}$$

Como  $g$  es continua en  $A$  y  $m(A) < \infty$ , entonces existe  $\delta > 0$  tal que si  $|x + t - x| = |t| < \delta$  entonces  $|g(x - t) - g(x)| < \frac{\epsilon}{(m(A))^{\frac{1}{p}} 3}$ , por lo que si se toma  $|t| < \delta$  entonces

$$\|\tau_{-t}g - g\|_p < \left( \int_A \left( \frac{\epsilon}{(m(A))^{\frac{1}{p}} 3} \right)^p dm_x \right)^{\frac{1}{p}} = \left( m(A) \frac{\epsilon^p}{m(A) 3^p} \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{\epsilon}{3}.$$

Ahora, si  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  entonces por B.1 existe  $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\|f - g\|_p < \frac{\epsilon}{3}$ , así, tomando  $|t|$  lo suficientemente pequeña

$$\begin{aligned} \|\tau_{-t}f - f\|_p &= \|\tau_{-t}f - \tau_{-t}g + \tau_{-t}g - g + g - f\|_p \\ &\leq \|\tau_{-t}f - \tau_{-t}g\|_p + \|\tau_{-t}g - g\|_p + \|g - f\|_p \\ &= \|f - g\|_p + \|\tau_{-t}g - g\|_p + \|f - g\|_p \\ &= \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned}$$

por lo que la traslación es continua en  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

Por lo anterior, dado  $\eta > 0$  se puede elegir  $\delta > 0$  tal que si  $|t| < \delta$

$$\phi(t) = \|\tau_{-t}f - f\|_p^p < \frac{\eta}{2\|K\|_1^{\frac{p}{q}+1}},$$

así

$$\begin{aligned} A_{\epsilon,\delta} &= \int_{|t|<\delta} |K_\epsilon(t)| \phi(t) dm_t < \frac{\eta}{2\|K\|_1^{\frac{p}{q}+1}} \int_{|t|<\delta} |K_\epsilon(t)| dm_t \\ &\leq \frac{\eta}{2\|K\|_1^{\frac{p}{q}}}. \end{aligned}$$

Es conveniente observar que por la desigualdad de Minkowski,  $\phi$  es una función acotada, de hecho

$$\begin{aligned} (\phi(t))^{\frac{1}{p}} &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)|^p dm_x \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t)|^p dm_x \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dm_x \right)^{\frac{1}{p}} = 2\|f\|_p \end{aligned}$$

de modo que  $\|\phi\|_\infty \leq (2\|f\|_1)^p = C$ , entonces

$$B_{\epsilon,\delta} = \int_{|t|\geq\delta} |K_\epsilon(t)| \phi(t) dm_t \leq C \int_{|t|\geq\delta} |K_\epsilon(t)| dm_t,$$

además por *ii*) de B.2 se tiene que para toda  $\eta > 0$  existe  $\epsilon > 0$  tal que

$$\int_{|t| \geq \delta} |K_\epsilon(t)| dm_t < \frac{\eta}{2C \|K\|_1^{\frac{p}{q}}},$$

así

$$B_{\epsilon, \delta} < \frac{\eta}{2 \|K\|_1^{\frac{p}{q}}}.$$

entonces  $\forall \eta \in \mathbb{R}$ , y  $\forall m \in \mathbb{N}$  tal que  $m > \epsilon^{-1}$ ,

$$\|f - f_m\|_p^p \leq \|K\|_1^{\frac{p}{q}} I_{m^{-1}} < \eta.$$

■

Para mayor referencia sobre los teoremas anteriores se recomienda [NP].

**B.4. Proposición.** Sean  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

- i) Si  $f$  y  $g$  tienen soporte compacto, entonces  $f * g$  tiene soporte compacto.
- ii) Si  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  entonces  $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

#### Demostración

*i*) Sean  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  con soporte compacto, el soporte de  $f * g$  se denota por

$$\text{sop}(f * g) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f * g(x) \neq 0\}}.$$

Si  $x \in \text{sop}(f * g)$  entonces

$$0 \neq f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dm_y = \int_{\text{sop}(g)} f(x - y)g(y)dm_y,$$

pero esto pasa si y solamente si

$$z = (x - y) \in \text{sop}(f).$$

Además como  $y \in \text{sop}(g)$  entonces

$$x = (z + y) \in \text{sop}(f) + \text{sop}(g)$$

así

$$\text{sop}(f * g) \subseteq \text{sop}(f) + \text{sop}(g).$$

Como  $\text{sop}(f * g)$  es cerrado y la suma de compactos es compacto entonces  $\text{sop}(f * g)$  es compacto.

*ii*) Primero se toma el caso para una dimensión.

Sean  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  tal que  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ .

Por el teorema del valor medio, dada  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  y  $a, b \in \mathbb{R}$ , existe  $c \in [a, b]$  tal que

$$\phi'(c) = \frac{\phi(b) - \phi(a)}{b - a}.$$

Sean  $x, y \in \mathbb{R}$  y  $m \in \mathbb{N}^+$ . Tomando  $a = x - y$ ,  $b = x - y + \frac{1}{m}$  y  $\phi(z) = f(z) - f(a) \forall z \in \mathbb{R}$ , se tiene que existe  $c \in [a, b]$  tal que

$$\phi'(c) = \frac{\phi(b) - \phi(a)}{b - a} = \frac{f(b) - f(a) - (f(a) - f(a))}{b - a},$$

es decir,

$$f'(c) = \frac{f(x - y + \frac{1}{m}) - f(a)}{\frac{1}{m}}.$$

Como  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  entonces  $f' \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  y alcanza su máximo y mínimo valor en conjuntos compactos, por lo que

$$|f'(c)| \leq \max_{z \in \text{sop}(f')} |f'(z)|.$$

Ahora

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f * g)(x + h) - (f * g)(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x - y + h) - f(x - y)}{h} g(y) dm_y \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x - y + \frac{1}{m}) - f(x - y)}{\frac{1}{m}} g(y) dm_y. \end{aligned}$$

Por lo anterior

$$\left| \frac{f(x - y + \frac{1}{m}) - f(x - y)}{\frac{1}{m}} \right| |g(y)| \leq \max_{z \in \text{sop}(f')} |f'(z)| |g(y)|.$$

Además  $g \in L^1(\mathbb{R})$ , entonces aplicando el teorema de la convergencia dominada descrito en A.3 se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f * g)(x + h) - (f * g)(x)}{h} &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{f(x - y + \frac{1}{m}) - f(x - y)}{\frac{1}{m}} g(y) dm_y \\ &= \int_{\mathbb{R}} f'(x - y) g(y) dm_y = (f' * g)(x). \end{aligned}$$

Caso general.

Sean  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  tal que  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  y  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

Entonces  $\frac{\partial f}{\partial x_k} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  por lo que  $(g * \frac{\partial f}{\partial x_k})$  está bien definido, así por 1.4 se puede aplicar el teorema de Fubini. Por notación se tomará

$w_k \in \mathbb{R}^{n-1}$  como  $w_k = (y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_n)$ , entonces por el caso de una dimensión

$$\begin{aligned} \left(g * \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)(x) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} g(y) \frac{\partial f}{\partial x_k}(x-y) dm_{y_k} dm_{w_k} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{\mathbb{R}} g(y) f(x-y) dm_{y_k} dm_{w_k} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) f(x-y) dm_{y_k} dm_{w_k} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} (g * f)(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto  $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

**B.5. Teorema.**  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  es denso en  $L^p(\mathbb{R}^n) \quad \forall p \in [1, \infty)$ .

**Demostración.**

Sea  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $(1 \leq p < \infty)$  y  $\epsilon > 0$ , entonces existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n - R_N} f(x) dm_x < \frac{\eta}{2},$$

donde  $R_N = [-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]^n$ , la caja de  $n$  dimensiones con lados de largo  $N$ .

Se define  $g(x) = f(x)\chi_{R_N}(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , entonces  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , tiene soporte compacto y  $\|g - f\|_1 \leq \frac{\eta}{2}$ .

$$\begin{aligned} \text{Tomando } A &= \left( \int_{[-1,1]^n} e^{\frac{-1}{1-t^2}} dm_t \right)^{-1}, \text{ sea} \\ K(x) &= \begin{cases} Ae^{\frac{-1}{1-x^2}} & \text{si } x \in [-1, 1]^n \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}, \end{aligned}$$

esta función es infinitamente diferenciable y tiene soporte compacto, además

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(x) dm_x = \int_{[-1,1]^n} Ae^{\frac{-1}{1-x^2}} dm_x = (A)(A)^{-1} = 1.$$

Así, considerando la familia  $\{K_\epsilon\}$  se tiene por B.3 que existe  $\epsilon > 0$  tal que

$$\|(g * K_\epsilon) - g\|_p \leq \frac{\eta}{2}.$$

Por lo tanto dada  $\eta > 0$  existen  $N \in \mathbb{N}, \epsilon > 0$  tales que

$$\|(g * K_\epsilon) - f\|_p \leq \|(g * K_\epsilon) - g\|_p + \|g - f\|_p < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta,$$

además para toda  $\epsilon > 0$   $K_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  entonces  $\forall \epsilon > 0$ ,  
 $(g * K_\epsilon) \in C_c^\infty$  es decir, cualquier función en  $L^p(\mathbb{R}^n)$  se puede  
aproximar con funciones en  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , por lo tanto  $\overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} = L^p(\mathbb{R}^n)$ . ■



## Teorema de las tres líneas de Hadamard.

C.1. **Teorema.** Teorema de las tres líneas de Hadamard.

Sea  $F$  una función continua, acotada, complejo valuada en la tira  $S = \{x + iy = z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{R}\}$  y analítica en el interior de  $S$ .

Si  $|F(iy)| \leq m_0$  y  $|F(1 + iy)| \leq m_1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\forall z \in S, \quad |F(z)| = |F(x + iy)| \leq m_0^{1-x} m_1^x.$$

Para mayor referencia de este teorema vease [SW].

### Demostración

Sean  $F$  una función que cumple las hipótesis del teorema y  $m_0, m_1$  estrictamente positivas. Entonces tomando  $G(z) = \frac{F(z)}{m_0^{1-z} m_1^z}$  se tiene que

$$\begin{aligned} |G(iy)| &= \frac{|F(iy)|}{m_0^{1-iy} m_1^{iy}} \leq \frac{m_0}{m_0} = 1, \\ |G(1 + iy)| &= \frac{|F(1 + iy)|}{m_0^{1-(1+iy)} m_1^{1+iy}} \leq \frac{m_1}{m_1} = 1. \end{aligned}$$

Como  $F, m_0^{z-1}, m_1^{-z}$  son funciones continuas, acotadas y analíticas en el interior de  $S$ , entonces  $G$  cumple las hipótesis del teorema para  $m_0 = m_1 = 1$ , esto permite reducir el problema pues si el teorema se cumple para estos valores entonces  $|G(z)| \leq 1 \quad \forall z \in S$ , lo que implica que

$$\frac{|F(z)|}{|m_0^{1-z} m_1^z|} = \frac{|F(z)|}{m_0^{1-x} m_1^x} \leq 1,$$

así  $|F(z)| \leq m_0^{1-x} m_1^x$ , lo cual demostraría el teorema.

Sea  $F$  tal que cumple las hipótesis del teorema de las tres líneas para  $m_0 = m_1 = 1$ . Se quiere mostrar que  $\forall z \in S, \quad |F(z)| \leq 1$ .

Es importante notar que si  $\lim_{|y| \rightarrow \infty} f(x+iy) = 0$  uniformemente para  $0 \leq x \leq 1$ , entonces se puede encontrar  $y_0 > 0$  tal que  $|F(x+iy)| \leq 1$  para  $|y| \geq y_0$ , por otra parte para toda  $z$  en la frontera del rectángulo  $A$  con vértices  $iy_0, 1+iy_0, 1-iy_0, -iy_0$  se tiene que  $|F(z)| \leq 1$ . Así por el principio del máximo

$$|F(z)| < \max_{w \in \partial A} |F(w)| \leq 1,$$

para todo  $z$  en el interior de  $A$ , lo que terminaría la demostración.

En general se puede aplicar este resultado a las funciones

$$F_n(z) = F(z)e^{\frac{z^2-1}{n}} \quad n \in \mathbb{N},$$

y como  $F$  es acotada

$$|F_n(z)| = |F(x+iy)| |e^{\frac{-y^2}{n}} e^{\frac{x^2-1}{n}}| \leq M |e^{\frac{-y^2}{n}}|$$

con  $M \in \mathbb{R}$ . Entonces  $|F_n(z)|$  tiende a cero cuando  $y$  tiende a infinito uniformemente para  $0 \leq x \leq 1$ , además

$$|F_n(iy)| \leq 1 \quad |F_n(1+iy)| \leq 1$$

pues para toda  $y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$   $|e^{\frac{-y^2}{n}}| \leq 1$ . Así

$$|F_n(iy)| = |F(iy)| |e^{\frac{-y^2}{n}}| |e^{\frac{0-1}{n}}| \leq |F(iy)| \leq 1,$$

$$|F_n(1+iy)| = |F(1+iy)| |e^{\frac{-y^2}{n}}| \leq |F(1+iy)| \leq 1.$$

Por lo tanto  $|F_n(z)| \leq 1 \quad \forall z \in S$  y haciendo tender  $n$  a infinito se obtiene la desigualdad deseada.

Para el caso en que  $m_0 = 0$  o  $m_1 = 0$  se tiene lo siguiente.

Sean S.P.G.  $F$  una función que cumple las hipótesis del teorema,  $m_0 = 0$  y  $m_1 \neq 0$ . En particular se tendrá que  $|F(iy)| \leq \epsilon \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}$  por lo que aplicando el teorema de las tres líneas

$$\forall z \in S \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}, \quad |F(z)| = |F(x+iy)| \leq m_0^{1-x} m_1^x \leq \epsilon^{1-x} m_1^x.$$

Así tomando  $0 \leq x < 1$  y  $K = \max\{1, m_1\}$  se tiene que para toda  $\epsilon > 0$

$$|F(x+iy)| \leq \epsilon^{1-x} K.$$

Lo cual implica que  $|F(x+iy)| = 0 \quad \forall x \in [0, 1) \quad y \in \mathbb{R}$ , sin

embargo  $F$  es continua en  $S$ , por lo que  $F(1 + iy) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$   
es decir  $F \equiv 0$ . ■



## Teorema de interpolación de Riesz-Thorin.

**D.1. Definición.** Un operador lineal  $T$  definido en un espacio vectorial  $A \subseteq L^p(X, M, \mu)$  es de tipo  $(p, q)$  sobre  $A$  con norma  $K_{pq} < \infty$ , si  $T(f) \in L^q(Y, N, \nu)$  y para todo  $f \in A$

$$\|T(f)\|_q \leq K_{pq} \|f\|_p.$$

Si  $A = L^p(X, M, \mu)$ , simplemente se dirá que  $T$  es de tipo  $(p, q)$  con constante  $K_{pq}$ , lo cual es equivalente a decir que  $T$  es un operador acotado o continuo de  $L^p(X, M, \mu)$  en  $L^q(Y, N, \nu)$  con norma  $\|T\|_{pq} \leq K_{pq}$ .

**D.2. Teorema.** Interpolación de Riesz-Thorin.

Sean  $(X, M, \mu)$  y  $(Y, N, \nu)$  espacios de medida,  $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ , y para  $0 < t < 1$  se definen  $p$  y  $q$  como sigue:

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

En el caso de que  $q_0 = q_1 = \infty$  se supondrá además que  $\nu$  es  $\sigma$ -finita.

Si  $T$  es un operador definido de  $L^{p_0}(X, M, \mu) + L^{p_1}(X, M, \mu)$  en  $L^{q_0}(Y, N, \nu) + L^{q_1}(Y, N, \nu)$  tal que

$$\|Tg\|_{q_0} \leq K_0 \|g\|_{p_0} \quad \forall g \in L^{p_0}(X, M, \mu)$$

y

$$\|Th\|_{q_1} \leq K_1 \|h\|_{p_1} \quad \forall h \in L^{p_1}(X, M, \mu),$$

entonces

$$\|Tf\|_{q_t} \leq K_0^{1-t} K_1^t \|f\|_{p_t} \quad \forall f \in L^{p_t}(X, M, \mu).$$

Es decir: si  $T$  es un operador de tipo  $(p_i, q_i)$  con norma  $K_i$   $i \in \{0, 1\}$ , entonces  $T$  es del tipo  $(p_t, q_t)$  con norma  $K_t \leq K_0^{1-t} K_1^t$ . Para mayor referencia de este teorema véase [SW] o [FG].

### Demostración

Sean  $\Sigma_X$  (respectivamente  $\Sigma_Y$ ) el espacio de funciones simples en  $X$  (respectivamente  $Y$ ) que se desvanecen fuera de un conjunto de medida finita. Entonces

$\Sigma_X \subseteq L^p(X, M, \mu)$  para toda  $p$  y  $\Sigma_X$  es denso en  $L^p(X, M, \mu)$  para  $p < \infty$ , similarmente para  $\Sigma_Y$ .

Sean  $f \in \Sigma_X$  y  $0 < t < 1$  entonces por A.5 se tiene que  $T(f) \in L^{q_t}(Y, N, \nu)$  y

$$\|T(f)\|_{q_t} = \sup \left\{ \left| \int_Y T(f)g \, d\nu \right| : g \in \Sigma_Y, \quad \|g\|_{q'_t} = 1 \right\},$$

donde  $q'_t$  es el exponente conjugado de  $q_t$ .

Nótese que  $Tf \in L^{q_0} \cap L^{q_1}$ , entonces  $\{y : Tf(y) \neq 0\}$  debe ser  $\sigma$ -finito exepcto cuando  $q_0 = q_1 = \infty$ . Además para toda  $g \in \Sigma_Y$  con  $\|g\|_{q'_t} = 1$  se tiene que

$$\left| \int_Y T(f)g \, d\nu \right| \leq \|Tf\|_{q_1} + \|Tf\|_{q_0},$$

por lo que las hipótesis del teorema A.5 se satisfacen.

Entonces es suficiente mostrar que el valor absoluto de cada integral

$$I = \int_Y T(f)g \, d\nu$$

es menor o igual a  $K_0^{1-t}K_1^t \|f\|_{p_t}$ .

Dividiendo por  $\|f\|_{p_t}$ , siempre y cuando  $\|f\|_{p_t} \neq 0$ , se puede reducir el caso cuando  $\|f\|_{p_t} = 1$ .

Sean  $\alpha_j = \frac{1}{p_j}, \beta_j = \frac{1}{q_j}$ , con  $j \in \{0, 1\}$ .

Haciendo  $\alpha(z) = (1-z)\alpha_0 + z\alpha_1$  y  $\beta(z) = (1-z)\beta_0 + z\beta_1$  donde  $z \in \mathbb{C}$ , se tiene que  $\alpha(j) = \alpha_j, \beta(j) = \beta_j, j \in \{0, 1\}$ ,  $\alpha(t) = \frac{1}{p_t}$  y  $\beta(t) = \frac{1}{q_t}$  para  $0 < t < 1$ .

Sean entonces

$$f = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{E_j}, \quad g = \sum_{k=1}^n b_k \chi_{F_k}$$

funciones simples que satisfacen las condiciones anteriores. Suponiendo que  $p_t < \infty$  y  $q_t > 1$ , entonces  $\alpha(t) > 0$  y  $\beta(t) < 1$ .

Así, tomando  $a_j = |a_j|e^{i\theta_j}$  y  $b_k = |b_k|e^{i\varphi_k}$ , se define

$$f_z = \sum_{j=1}^m |a_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha(t)}} e^{i\theta_j} \chi_{E_j}$$

$$g_z = \sum_{k=1}^n |b_k|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta(t)}} e^{i\varphi_k} \chi_{F_k},$$

para  $z \in \mathbb{C}$ .

Uno entonces obtiene la función

$$F(z) = \int_Y T(f_z) g_z d\nu,$$

de la cual, por las definiciones de  $f_z$  y  $g_z$ , se sigue que

$$\begin{aligned} f_t &= \sum_{j=1}^m |a_j|^{\frac{\alpha(t)}{\alpha(t)}} e^{i\theta_j} \chi_{E_j} = \sum_{j=1}^m |a_j| e^{i\theta_j} \chi_{E_j} = f \\ g_t &= \sum_{k=1}^n |b_k|^{\frac{1-\beta(t)}{1-\beta(t)}} e^{i\varphi_k} \chi_{F_k} = \sum_{k=1}^n |b_k| e^{i\varphi_k} \chi_{F_k} = g, \end{aligned}$$

entonces

$$F(t) = \int_Y T(f_t) g_t d\nu = \int_Y T(f) g d\nu = I.$$

Además, por la linealidad de  $T$ , se observa que

$$F(z) = \sum_{j,k}^{m,n} |a_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha(t)}} |b_k|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta(t)}} \gamma_{jk},$$

donde

$$\gamma_{jk} = e^{i(\theta_j \varphi_k)} \int_Y T(\chi_{E_j}) \chi_{F_k} d\nu.$$

Cabe observar que  $|a_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha(t)}}$ ,  $|b_k|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta(t)}}$  son funciones enteras porque  $|a_j|$  y  $|b_k|$  carecen de parte imaginaria, entonces  $F(z)$  es una función entera por ser suma finita de productos finitos de funciones enteras.

Se tiene además que si se restringe  $F$  a la tira

$$S = \{x + iy = z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{R}\},$$

entonces

$$\left| |a_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha(t)}} |b_k|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta(t)}} e^{i(\theta_j \varphi_k)} \right| = |a_j|^{\frac{\alpha(x)}{\alpha(t)}} |b_k|^{\frac{1-\beta(x)}{1-\beta(t)}},$$

y como  $0 \leq x \leq 1$ , la norma de cada sumando es acotada. Así, si se muestra que  $|F(iy)| \leq K_0$  y  $|F(1 + iy)| \leq K_1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$ , entonces la desigualdad deseada,  $I \leq K_0^{1-t} K_1^t$ , será una consecuencia inmediata del teorema de las tres líneas, el cual se demuestra en el apéndice C.

Se pueden obtener ambas estimaciones. Para ello se observa inicialmente que, como

$$\alpha(iy) = \alpha_0 + iy(\alpha_1 - \alpha_0),$$

$$1 - \beta(iy) = (1 - \beta_0) - iy(\beta_1 - \beta_0),$$

$$\frac{q'_t}{q'_0} = \left(1 - \frac{1}{q_0}\right) \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{q_t}}\right) = \frac{1 - \beta_0}{1 - \beta(t)},$$

entonces

$$\frac{\alpha(iy)}{\alpha(t)} = \frac{\alpha_0}{\alpha(t)} + iy \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha(t)} = iy \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha(t)} + \frac{p_t}{p_0},$$

$$\frac{1 - \beta(iy)}{1 - \beta(t)} = \frac{1 - \beta_0}{1 - \beta(t)} + \frac{-iy(\beta_1 - \beta_0)}{1 - \beta(t)} = \frac{-iy(\beta_1 - \beta_0)}{1 - \beta(t)} + \frac{q'_t}{q'_0}.$$

Como  $f$  y  $g$  son funciones simples, todos los sumandos de cada función son independientes entre ellos, entonces

$$\begin{aligned} |f| &= \sum_{j=1}^m |a_j| \chi_{E_j}, & \arg(f) &= \sum_{j=1}^m \theta_j \chi_{E_j}, \\ |g| &= \sum_{k=1}^n |b_k| \chi_{F_j}, & \arg(g) &= \sum_{k=1}^n \varphi_j \chi_{F_j}. \end{aligned}$$

De la misma manera

$$\begin{aligned} |f_{iy}| &= \sum_{j=1}^m |a_j|^{\frac{\alpha(iy)}{\alpha(t)}} \chi_{E_j} = |f|^{\frac{\alpha(iy)}{\alpha(t)}}, & \arg(f_{iy}) &= \arg(f), \\ |g_{iy}| &= \sum_{k=1}^n |b_k|^{\frac{1-\beta(iy)}{1-\beta(t)}} \chi_{F_j} = |g|^{\frac{1-\beta(iy)}{1-\beta(t)}}, & \arg(g_{iy}) &= \arg(g). \end{aligned}$$

Así tomando los conjugados  $q'_0, q'_t$  de  $q_0, q_t$  respectivamente y por lo anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} |f_{iy}|^{p_0} &= \left| e^{i \arg(f)} |f|^{\frac{iy(\alpha_1 - \alpha_0)}{\alpha(t)}} |f|^{\frac{p_t}{p_0}} \right|^{p_0} = |f|^{p_t}, \\ |g_{iy}|^{q'_0} &= \left| e^{i \arg(g)} |g|^{\frac{-iy(\beta_1 - \beta_0)}{1-\beta(t)}} |g|^{\frac{q'_t}{q'_0}} \right|^{q'_0} = |g|^{q'_t}, \end{aligned}$$

entonces aplicando la desigualdad de Hölder y por el hecho de que  $T$  es de tipo  $(p_0, q_0)$  con norma  $K_0$

$$\begin{aligned} |F_{iy}| &\leq \|T(f_{iy})\|_{q_0} \|g_{iy}\|_{q'_0} \leq K_0 \|f_{iy}\|_{p_0} \|g_{iy}\|_{q'_0} \\ &= K_0 \left( \int_X |f|^{p_t} d\mu \right)^{\frac{1}{p_0}} \left( \int_Y |g|^{q'_t} d\nu \right)^{\frac{1}{q_0}} = K_0 \|f\|_{p_t}^{(p_t/p_0)} \|g\|_{q'_t}^{(q'_t/q'_0)} = K_0. \end{aligned}$$

Haciendo un cálculo similar se mostrará que  $|F(1 + iy)| \leq K_1$ .

Primero se observa que

$$\begin{aligned} \alpha(1 + iy) &= \alpha_1 + iy(\alpha_1 - \alpha_0), \\ 1 - \beta(1 - iy) &= (1 - \beta_1) - iy(\beta_1 - \beta_0), \\ \frac{q'_t}{q'_1} &= \left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{q_t}}\right) = \frac{1 - \beta_1}{1 - \beta(t)}. \end{aligned}$$

Así se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(1 + iy)}{\alpha(t)} &= \frac{\alpha_1}{\alpha(t)} + iy \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha(t)} = iy \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha(t)} + \frac{p_t}{p_1}, \\ \frac{1 - \beta(1 + iy)}{1 - \beta(t)} &= \frac{1 - \beta_1}{1 - \beta(t)} + \frac{-iy(\beta_1 - \beta_0)}{1 - \beta(t)} = \frac{-iy(\beta_1 - \beta_0)}{1 - \beta(t)} + \frac{q'_t}{q'_1}. \end{aligned}$$

Como  $f$  y  $g$  son funciones simples, por el mismo argumento que en el caso  $z = iy$

$$\begin{aligned} |f_{1+iy}| &= \sum_{j=1}^m |a_j|^{\frac{\alpha(1+iy)}{\alpha(t)}} \chi_{E_j} = |f|^{\frac{\alpha(1+iy)}{\alpha(t)}}, \quad \arg(f_{1+iy}) = \arg(f), \\ |g_{1+iy}| &= \sum_{k=1}^n |b_k|^{\frac{1-\beta(1+iy)}{1-\beta(t)}} \chi_{F_j} = |g|^{\frac{1-\beta(1+iy)}{1-\beta(t)}}, \quad \arg(g_{1+iy}) = \arg(g). \end{aligned}$$

Así tomando los conjugados  $q'_1, q'_t$  de  $q_1, q_t$  respectivamente, y por lo anterior, se tiene que

$$|f_{1+iy}|^{p_1} = \left| e^{i \arg(f)} |f|^{\frac{iy(\alpha_1 - \alpha_0)}{\alpha(t)}} |f|^{\frac{p_t}{p_1}} \right|^{p_1} = |f|^{p_t},$$

$$|g_{1+iy}|^{q'_1} = \left| e^{i \arg(g)} |g|^{\frac{-iy(\beta_1 - \beta_0)}{1 - \beta(t)}} |g|^{\frac{q'_t}{q'_1}} \right|^{q'_1} = |g|^{q'_t}.$$

Entonces aplicando la desigualdad de Hölder y por el hecho de que  $T$  es de tipo  $(p_1, q_1)$  con norma  $K_1$

$$\begin{aligned} \|F_{1+iy}\| &\leq \|T(f_{1+iy})\|_{q_1} \|g_{1+iy}\|_{q'_1} \leq K_1 \|f_{1+iy}\|_{p_1} \|g_{1+iy}\|_{q'_1} \\ &= K_1 \left( \int_X |f|^{p_t} d\mu \right)^{\frac{1}{p_1}} \left( \int_Y |g|^{q'_t} d\nu \right)^{\frac{1}{q'_1}} = K_1 \|f\|_{p_t}^{(p_t/p_1)} \|g\|_{q'_t}^{(q'_t/q'_1)} = K_1. \end{aligned}$$

Así se puede concluir que  $\|T(f)\|_{q_t} \leq K_0^{1-t} K_1^t$  para toda función simple  $f$ .

En el caso de la desigualdad para  $f \in L^p(X, M, \mu)$  en general, se mostrará que existe  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sucesión de funciones simples, tales que  $f_n$  converge a  $f$  en  $L^p(X, M, \mu)$  y  $T(f_n)$  converge a  $T(f)$  c.d.s., es decir, para toda  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|f_n - f\|_p < \epsilon, \quad |T(f_n)(x) - T(f)(x)| < \epsilon \quad \forall x \in X/A$$

donde  $A$  es un conjunto de medida cero.

Si este es el caso, aplicando el lema de Fatou y el resultado que se obtuvo de las funciones simples, entonces

$$\|T(f)\|_q \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T(f_n)\|_q \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (K_0^{1-t} K_1^t \|f_n\|_p) = K_0^{1-t} K_1^t \|f\|_p,$$

y el teorema estaría demostrado.

Se supondrá que  $f > 0$  (se considerarán las partes positivas y negativas de  $Re\{f\}$  y de  $Im\{f\}$  de manera separada).

Después de renombrar, si es necesario, se puede suponer que  $p_0 \leq p_1$ , así  $p_0 \leq p_t \leq p_1$ . Sean  $f^0$  y  $f^1$  las truncaciones de  $f$  definidas por

$$f^0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) > 1 \\ 0 & \text{si } f(x) \leq 1 \end{cases}$$

y  $f^1 = f - f^0$ . Además, como  $(f^0)^{p_0} \leq f^{p_t}$  y  $(f^1)^{p_1} \leq f^{p_t}$  se tiene que  $f^0 \in L^{p_0}(X, M, \mu)$  y  $f^1 \in L^{p_1}(X, M, \mu)$ .

Si  $\{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de familias simples no negativas que convergen a  $f$  de manera monótona, se sigue del teorema de convergencia monótona que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|g_m - f\|_{p_t} = 0.$$

Por la misma razón  $\|g_m^0 - f^0\|_{p_0}$  y  $\|g_m^1 - f^1\|_{p_1}$  tienden a cero cuando  $m$  tiende a infinito, donde  $g_m^0$  y  $g_m^1$  son las truncaciones obtenidas de  $g_m$  de la misma manera en que  $f^0$  y  $f^1$  se obtuvieron de  $f$ .

Ya que  $T$  es de tipo  $(p_0, q_0)$  y  $(p_1, q_1)$  se tiene que

$$\|T(g_m^0) - T(f^0)\|_{q_0} \rightarrow 0, \quad \|T(g_m^1) - T(f^1)\|_{q_1} \rightarrow 0$$

cuando  $m$  tiende a infinito.

Así por A.7 y A.9 existe una subsucesión de  $\{T(g_m^0)\}$ ,  $\{T(g_{m_k}^0)\}$ , convergente casi donde sea a  $T(f^0)$ , y considerando sólo los índices  $m_k$  involucrados en  $\{T(g_{m_k}^0)\}$ , se puede encontrar una subsucesión  $\{g_{m_n}\}$  con  $m_n \in \{m_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , tal que  $\{T(g_{m_n}^1)\}$  converge casi donde sea a  $T(f^1)$ .

Haciendo  $f_n = g_{m_n}^0 + g_{m_n}^1$  se tiene la subsucesión  $\{f_n\}$  que satisface las propiedades deseadas:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{p_t} = 0$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(f_n)(x) = T(f^0)(x) + T(f^1)(x) = T(f)(x) \quad c.d.s.$$

Por último se necesita remover las restricciones  $\alpha(t) > 0$  y  $\beta(t) < 1$ , sin embargo, los casos excluidos, son más simples que los ya considerados.

Si  $\alpha(t) = 0$  y  $\beta(t) = 1$  entonces  $p_t = \infty$ ,  $q_t = 1$ , y además una de las parejas  $(p_0, q_0)$ ,  $(p_1, q_1)$ , debe ser  $(\infty, 1)$  por lo que la desigualdad se cumple por hipótesis.

Como

$$\frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1},$$

se tiene por convexidad que  $\frac{1}{q_t}$  toma valores entre  $\frac{1}{q_0}$  y  $\frac{1}{q_1}$ , por lo que si  $\alpha(t) > 0$  y  $\beta(t) = 1$  entonces  $\frac{1}{q_0} = 1$  o  $\frac{1}{q_1} = 1$ .

Si  $\frac{1}{q_0} = 1$ , entonces

$$\begin{aligned} 1 &= 1 - t + \frac{t}{q_1} \\ t &= \frac{t}{q_1} \\ 1 &= \frac{1}{q_1}, \end{aligned}$$

así  $q_0, q_1 = 1$ .

Si  $\frac{1}{q_1} = 1$ , entonces

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1-t}{q_0} + t \\ 1-t &= \frac{1-t}{q_0} \\ 1 &= \frac{1}{q_0}, \end{aligned}$$

así  $q_0, q_1 = 1$ .

Tomando esto en cuenta si se sustituye en la prueba anterior a  $g_z$  por  $g$  se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} |F_{iy}| &\leq \|T(f_{iy})\|_{q_0} \|g\|_{q'_0} \leq K_0 \|f_{iy}\|_{p_0} \|g\|_{q'_0} \\ &= K_0 \left( \int_X |f|^{p_t} d\mu \right)^{\frac{1}{p_0}} \|g\|_{q'_t} = K_0 \|f\|_{p_t}^{(p_t/p_0)} = K_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |F_{1+iy}| &\leq \|T(f_{1+iy})\|_{q_1} \|g\|_{q'_1} \leq K_1 \|f_{1+iy}\|_{p_1} \|g\|_{q'_1} \\ &= K_1 \left( \int_X |f|^{p_t} d\mu \right)^{\frac{1}{p_1}} \|g\|_{q'_t} = K_1 \|f\|_{p_t}^{(p_t/p_1)} = K_1, \end{aligned}$$

por lo que la prueba que se dió anteriormente sigue siendo válida.

Análogamente

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1},$$

entonces por convexidad  $\frac{1}{p_t}$  toma valores entre  $\frac{1-t}{p_0}$  y  $\frac{t}{p_1}$  por lo que si  $\alpha(t) = 0$  y  $\beta(t) < 1$  entonces  $\frac{1}{p_0} = 0$  o  $\frac{1}{p_1} = 0$ .

Si  $\frac{1}{p_0} = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + \frac{t}{p_1} \\ 0 &= \frac{t}{p_1}, \end{aligned}$$

así  $p_0, p_1 = \infty$ .

Si  $\frac{1}{p_1} = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1-t}{p_0} + 0 \\ 0 &= \frac{1-t}{p_0}, \end{aligned}$$

así  $p_0, p_1 = \infty$ .

Tomando esto en cuenta si se sustituye en la prueba anterior a  $f_z$  por  $f$  se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} |F_{iy}| &\leq \|T(f)\|_{q_0} \|g_{iy}\|_{q'_0} \leq K_0 \|f\|_{p_0} \|g_{iy}\|_{q'_0} \\ &= K_0 \|f\|_{p_t} \left( \int_Y |g|^{q'_t} d\nu \right)^{\frac{1}{q_0}} = K_0 \|g\|_{q'_t}^{(q'_t/q_0)} = K_0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |F_{1+iy}| &\leq \|T(f)\|_{q_1} \|g_{1+iy}\|_{q'_1} \leq K_1 \|f\|_{p_1} \|g_{1+iy}\|_{q'_1} \\ &= K_1 \|f\|_{p_t} \left( \int_Y |g|^{q'_t} d\nu \right)^{\frac{1}{q_1}} = K_1 \|g\|_{q'_t}^{(q'_t/q_1)} = K_1. \end{aligned}$$

por lo que la prueba que se dió anteriormente sigue siendo válida, lo cual completa la demostración del teorema de Riesz-Thorin. ■

## Bibliografía

- [AW] Arthur T. White, *Graphs, Groups and Surfaces*, (revised and enlarged edition), NORTH-HOLLAND, Amsterdam, (1984).
- [BR] Bartle R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, (Wiley Classics Library Edition), John Wiley & Sons, Inc., New York, (1995).
- [BW] Boyce William E. y DiPrima Richard C., *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, (10th ed.), John Wiley & Sons, Inc., United States of America, (2012).
- [DJ] Duoandikoetxea Javier, *Fourier Analysis*, (1st. ed.) American Mathematical Society, United States, (2001).
- [EE] Esqueda Elizondo, José Jaime, Palafox Maestre, Luis Enrique, *Fundamentos de procesamiento de imágenes*, (1ra. edición), Universidad Autónoma de Baja California, Mexicali, Baja California, (2005).
- [ER] Elias M. Stein, Rami Shakarchi, *Fourier Analysis: An Introduction*, (1st. ed.), Cambridge University Press, Cambridge, (2003).
- [FG] Folland Gerald B., *Real Analysis: modern techniques and their applications*, (2nd ed.), John Wiley & Sons, Inc., New York, (1999).
- [FS] Friedberg Stephen H., Insel Arno R. J., Spence, Lawrence E., *Linear Algebra*, (4th. ed.), Pearson, New Jersey, (2002).
- [GG] Grabinsky Guillermo, *Teoría de la medida*, (1ra. edición), Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, México, Distrito Federal, (2013).
- [KE] Kreyszig Erwin, *Introductory Functional Analysis With Applications*, John Wiley & Sons, Inc., United States Of America, (1978).
- [MB] Braun Martin, *Differential equations and their applications*, (3rd. ed.), Springer-Verlag, New York, (1941).
- [MOT] Matusiak E., Özaydin, M. y Przebinda T., *The Donoho-Stark uncertainty principle for a finite abelian group*, Acta Math. Univ. Comenianae, Vol. LXXIII(2) 155-160, (2004).
- [NP] De Napoli Pablo L., *Notas de Análisis Real*, (versión 2019.0), (2019).  
Recuperado de [mate.dm.uba.ar/~pdenapo/apuntes-analisis-real/notas\\_de\\_real.pdf](http://mate.dm.uba.ar/~pdenapo/apuntes-analisis-real/notas_de_real.pdf)

- [RJ] Rotman Joseph J., *Advanced Modern Algebra*, (1st. ed.), Prentice Hall, (2002).
- [RW] Rudin Walter, *Functional Analysis*, (2nd ed.), McGraw-Hill, Singapore, (1991).
- [SW] Elias M. Stein, Guido L. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, (1st. ed.), Princeton University Press, Princeton, New Jersey, (1971).
- [TA] Terras Audrey, *Fourier Analysis on Finite Groups ad Aplication*, (1st. ed.), Cambidge University Press, Cambridge, (1999).