



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Pares n -cotorsión en categorías abelianas

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
DOCTORA EN CIENCIAS

PRESENTA:

MINDY YANELI HUERTA PÉREZ

Director de tesis:

Dr. Octavio Mendoza Hernández
Instituto de Matemáticas

Miembros del comité tutor:

Dra. Edith Corina Sáenz Valadez
Facultad de Ciencias
Dr. Christof Geiss Hahn
Instituto de Matemáticas

Ciudad Universitaria, Cd. Mx. febrero 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

DEDICATORIA
A mi familia

Agradecimientos

Isaac Newton escribió en una carta a Robert Hooke, la siguiente frase: *“Si he visto más lejos es porque estoy sentado sobre los hombros de gigantes”*, haciendo mención a sus predecesores Copérnico, Galileo y Kepler.

Cito a continuación a quienes debo toda mi gratitud, aún sabiendo que todas las palabras que escribo no serán suficientes para agradecerles.

A mis padres, Memo y Nidia, por hacer de mi infancia los más bellos recuerdos, por darme todo el amor y cuidado que puede darse a un hijo, y por dejarme emprender este viaje hace 11 años. A mi hermano, Mon, por escucharme, cuidar de mi salud muchas veces y por mostrarme que nunca debes rendirte. Al Dr. Octavio Mendoza, por creer en este trabajo, por dedicarme parte de su tiempo y guiarme durante este proceso siempre siendo muy paciente. Al Dr. Marco A. Pérez, de quien aprendí mucho y le agradezco contestara cada una de mis dudas. Al Dr. Efrén Pérez, por mostrarme hacia donde ver y a quien acudir. A la Dra. Corina Saénz, por permitirme trabajar a su lado confiando siempre en que podría hacer un buen trabajo y creer en mí desde el principio. Al Dr. Christof Geiss, Dr. Valente Santiago y la Dra. Diana Avella, gracias por todas las veces que resolvieron mis dudas y por las sugerencias para mejorar de manera tan significativa esta tesis. A mis compañeros de doctorado: Víctor, Luis, Alejandro, Jorge, Mónica y Yadira, gracias por también ayudarme. A mis amigos, Anahi y Sergio, por hacer de mi adolescencia una etapa maravillosa y saber que puedo contar con ellos a pesar de los años y la distancia. A mi esposo, Germán, por darle equilibrio a mi vida y mostrarme que también existen otras cosas tan lindas como las matemáticas.

Agradezco también a CONACyT por la beca de maestría y doctorado, a la Sociedad Matemática Mexicana (SMM) y a la Fundación Sofía Kovalskaia (SK) por el apoyo que me brindó para la culminación de este proyecto, y al Instituto de Matemáticas por darme las facilidades y el apoyo para asistir a todos los congresos que solicité.

Ante todo, agradezco a Dios por permitirme terminar este ciclo al lado de todos los que amo.

¡Muchas gracias a todos!

Introducción

Antecedentes

El concepto de *par de cotorsión* fue presentado por Luigi Salce [Sal79] en la categoría de grupos abelianos y posteriormente estudiado por E. E. Enochs, O. M. G. Jenda y otros autores en los 90's. Un par de cotorsión es un par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, de clases de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} , que satisfacen las siguientes condiciones

- (1) $A \in \mathcal{A}$ si, y solo si, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, B) = 0$ para todo $B \in \mathcal{B}$ y;
- (2) $B \in \mathcal{B}$ si, y solo si, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, B) = 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

Si además, para cada $C \in \mathcal{C}$ existen sucesiones exactas cortas de la forma

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow C \rightarrow B' \rightarrow A' \rightarrow 0, \end{aligned}$$

donde $A, A' \in \mathcal{A}$ y $B, B' \in \mathcal{B}$, se dice que el par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es completo.

Muchos temas han utilizado los pares de cotorsión como una herramienta fundamental para obtener resultados; dentro de estos destacan: Teoría tilting [BET05], Teoría de Representación de Algebras de Artin [KS03] y el estudio de cubiertas y envolventes [EJ00, ELR01].

Quizá, uno de los pares cotorsión más famosos estudiados, es el par $(\mathcal{F}(R), (\mathcal{F}(R))^{\perp_1})$, donde $\mathcal{F}(R)$ es la subcategoría de R -módulos planos y $(\mathcal{F}(R))^{\perp_1}$ son los llamados R -módulos de cotorsión¹. Por mucho tiempo fue una pregunta abierta si este par era completo, y la prueba de dicha

¹Ver capítulo 1

completitud ayudó en gran parte a la resolución de “*La conjetura de la cubierta plana*”. Esta conjetura fue probada por L. Bican, R. El Bashir, y E. E. Enochs [BEBE01], aplicando algunas técnicas de categorías de módulos reinventadas por P. Eklof y J. Trlifaj en [ET01]. Entre los resultados desarrollados en paralelo destaca uno hecho por J. Xu quien demostró en [Xu96, Teorema 3.1.8], que la clase de todos los módulos izquierdos que tienen una precubierta plana especial es cerrada por extensiones cuando el anillo es coherente derecho. Más tarde, K. D. Akinci y R. Alizade generalizan este resultado para pares de cotorsión que satisfacen la condición HC en [AA02, Teorema 3.1].

Teorema 1. [AA02, Teorema 3.1] Sean $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ un par de cotorsión con HC y $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ una sucesión exacta. Si A y C tienen \mathcal{F} -precubiertas especiales, entonces B tiene una \mathcal{F} -precubierta especial. Más aún, si \mathcal{F} es cerrada por límites directos, entonces B tiene una \mathcal{F} -cubierta.

Hallar métodos como el anterior para encontrar preenvolventes y precubiertas, respecto a ciertas clases, se convertía en un tema de gran relevancia. Este es uno de los puntos de interés de esta tesis.

Por otra parte, en 1989, una importante rama del Algebra Homológica Relativa estaba siendo desarrollada por M. Auslander y R.-O. Buchweitz. Esta teoría, llamada “*Teoría de aproximación de Auslander-Buchweitz*” (*Teoría AB*) [AB89], consiste de métodos para obtener precubiertas y preenvolventes a través de generadores y cogeneradores de una subcategoría plena de una categoría abeliana. Tomando ventaja de esto, V. Becerril, O. Mendoza, M. A. Pérez y V. Santiago definieron, en el contexto más general que provee una categoría abeliana, la noción de *par de Frobenius* [BMPS19, Definición 2.5]. Utilizando tales pares, construyeron *pares de cotorsión relativos* [BMPS19, Definición 3.4] y probaron que existe una estrecha interacción entre ellos y otro concepto llamado *contexto de Auslander-Buchweitz* [BMPS19, Definición 5.1]. Dicha relación se describe en el siguiente Teorema.

Teorema 2. [BMPS19, Teorema 5.4] Sea \mathcal{C} una categoría abeliana. Consideremos

las siguientes clases de objetos en la categoría $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} &:= \{(\mathcal{X}, \omega) : (\mathcal{X}, \omega) \text{ es un par de Frobenius izquierdo en } \mathcal{C}\}, \\ \mathfrak{C} &:= \{(\mathcal{A}, \mathcal{B}) : (\mathcal{A}, \mathcal{B}) \text{ es un contexto débil izquierdo } AB \text{ en } \mathcal{C}\}, \\ \mathfrak{P} &:= \{(\mathcal{F}, \mathcal{G}) : (\mathcal{F}, \mathcal{G}) \text{ es un par de Thick}(\mathcal{F})\text{-cotorsión en } \mathcal{C} \text{ con } \text{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = 0\}.\end{aligned}$$

Entonces, las siguientes condiciones se cumplen:

(1) Existe una correspondencia biyectiva

$$\Phi : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{C} \text{ dada por } (\mathcal{X}, \omega) \mapsto (\mathcal{X}, \omega^\wedge),$$

con inversa

$$\Psi : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{F} \text{ dada por } (\mathcal{A}, \mathcal{B}) \mapsto (\mathcal{A}, \mathcal{A} \cap \mathcal{B}).$$

(2) $\mathfrak{C} = \mathfrak{P}$.

Otro concepto a considerar, y en el cual muchos resultados y ejemplos han sido inspirados, son los R -módulos Gorenstein proyectivos. En 1995, E. E. Enoch y O. M. G. Jenda definen en [EJ95] a los módulos *Gorenstein proyectivos*, estos módulos han sido ampliamente estudiados por varios autores (ver [Hol04, Iac16, MT11, EEG08, YL11b, BMS18, Xu17, Tam11, ELR01, Pér16], por ejemplo). En 2007, D. Bennis y N. Mahdou definen a los módulos *fuertemente Gorenstein proyectivos* [BM09, Definición 2.1], una clase situada entre los módulos proyectivos y Gorenstein proyectivos, y probaron que un R -módulo es Gorenstein proyectivo si, y solo si, es un sumando directo de un módulo fuertemente Gorenstein proyectivo. Tratando de generalizar ahora a los módulos fuertemente Gorenstein proyectivos, en [BM09], los autores presentan la noción de módulo *n -fuertemente Gorenstein proyectivo*, para cualquier entero $n \geq 1$. Ellos también dieron algunas caracterizaciones equivalentes en términos del anulamiento de ciertos grupos homológicos. En 2011, G. Zhao y Z. Huang, estudiaron en [ZH11] la relación entre módulos m -fuertemente Gorenstein proyectivos y n -fuertemente Gorenstein proyectivos cuando $m \neq n$, probando que para cualesquiera $m, n \geq 1$, la intersección entre estas clases coincide con la clase de los módulos (m, n) -fuertemente Gorenstein proyectivos, donde (m, n) denota el máximo común divisor de m y n . Dentro de otros resultados que obtuvieron están: la propiedad de ser proyectivo, para un

módulo n -fuertemente Gorenstein proyectivo, queda determinada por su auto-ortogonalidad, y que es posible obtener módulos 1-fuertemente Gorenstein proyectivos a partir de módulos n -fuertemente Gorenstein proyectivos. Los enunciamos a continuación más específicamente:

Teorema 3. [ZH11, Teorema 3.5]

$$m\text{-SGP}(R) \cap n\text{-SGP}(R) = (m, n)\text{-SGP}(R).$$

Proposición 4. [ZH11, Proposición 3.7] Sea $M \in \text{Mod}(R)$ un R -módulo n -fuertemente Gorenstein proyectivo y $n \geq 1$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

- (1) M es proyectivo;
- (2) $\text{Ext}_R^i(M, M) = 0$ para cualquier $i \geq 1$;
- (3) $\text{Ext}_R^i(M, M) = 0$ para cualquier $1 \leq i \leq n$.

Teorema 5. [ZH11, Teorema 3.9] Para cualquier $M \in \text{Mod}(R)$ y $n \geq 1$, los siguientes enunciados son equivalentes.

- (1) M es n -fuertemente Gorenstein proyectivo.
- (2) Existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} P_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0,$$

en $\text{Mod}(R)$, con P_i proyectivo, para cualquier $0 \leq i \leq n-1$, tal que $\bigoplus_{i=1}^n \text{Im } f_i$ es 1-fuertemente Gorenstein proyectivo.

- (3) Existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} P_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0,$$

en $\text{Mod}(R)$, con P_i proyectivo, para cualquier $0 \leq i \leq n-1$, tal que $\bigoplus_{i=1}^n \text{Im } f_i$ es Gorenstein proyectivo.

- (4) Existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} P_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0,$$

en $\text{Mod}(R)$, donde P_i tiene dimensión proyectiva finita, para cualquier $0 \leq i \leq n-1$, tal que $\bigoplus_{i=1}^n \text{Im } f_i$ es 1-fuertemente Gorenstein proyectivo.

(5) Existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} P_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0,$$

en $\text{Mod}(R)$, donde P_i tiene dimensión proyectiva finita, para cualquier $0 \leq i \leq n-1$, tal que $\bigoplus_{i=1}^n \text{Im } f_i$ es Gorenstein proyectivo.

Resumen de resultados de la tesis

Dentro de los resultados que desarrollamos en esta tesis, están las respectivas generalizaciones de lo previamente mencionado.

En el Capítulo 2, motivados por algunas propiedades que cumplen los módulos Gorenstein proyectivos e inyectivos sobre un anillo n -Iwanaga Gorenstein, presentamos el concepto de par de n -cotorsión izquierdo y derecho en una categoría abeliana \mathcal{C} . Dos clases \mathcal{A} y \mathcal{B} de objetos de una categoría abeliana \mathcal{C} forman un par de n -cotorsión izquierdo $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en \mathcal{C} si la relación de ortogonalidad $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ se satisface para índices $1 \leq i \leq n$, y si cada objeto de \mathcal{C} se puede resolver con objetos de \mathcal{A} cuyas sizigías tengan dimensión de \mathcal{B} -resolución a lo más $n-1$. Este concepto y su dual generalizan la noción de par de cotorsión completo, y tiene una interesante relación con aproximaciones izquierdas y derechas, especialmente con las que tienen la propiedad de factorización única. El propósito de este capítulo es describir varias propiedades de pares de n -cotorsión y establecer una relación con pares de cotorsión completos. También damos algunas aplicaciones en álgebra homológica relativa, que cubrirán el estudio de aproximaciones asociadas a módulos Gorenstein proyectivos, Gorenstein inyectivos, Gorenstein planos y complejos de cadenas, así como también subcategorías m -cluster tilting.

En la primera sección, nos dedicaremos a presentar los conceptos de par de n -cotorsión izquierdo y derecho y su relación con los pares de cotorsión completos. En la Proposición 2.5 y el Teorema 2.7, damos condiciones suficientes y necesarias para que un par de n -cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en \mathcal{C} forme un par de cotorsión completo $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_{n-1}^\wedge)$, donde \mathcal{B}_{n-1}^\wedge es la clase de objetos de \mathcal{C} con dimensión de \mathcal{B} -resolución $\leq n-1$.

En la segunda sección, estudiamos cómo construir cubiertas y envolventes de pares de n -cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en \mathcal{C} . También definimos un nuevo

tipo de aproximaciones, que llamamos $(\mathcal{A}, k, \mathcal{B})$ -precubiertas y *preenvolventes especiales*. Consideraremos la clase de objetos en \mathcal{C} con dichas aproximaciones y analizaremos algunas condiciones bajo las cuales la clase resulta cerrada por extensiones (ver Corolario 2.18). Más aún, dado un par de n -cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en \mathcal{C} , en los Corolarios 2.22 y 2.24 damos condiciones suficientes y necesarias para obtener precubiertas y envolventes de \mathcal{A} y \mathcal{B} que satisfacen la propiedad de factorización única. Para este punto, hacemos unas comparaciones con otras aproximaciones de cotorsión, como por ejemplo el notable estudio [CT08] hecho por S. Crivei y B. Torrecillas, donde los autores establecen varias condiciones equivalentes para una clase $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$, bajo las cuales un objeto en \mathcal{C} tiene una \mathcal{A} -envolvente que es un epimorfismo y una \mathcal{A} -cubierta que es un monomorfismo.

La Sección 3 se dedica a explicar lo que significa para un par de n -cotorsión izquierdo o derecho ser *hereditario*. Veremos en la Proposición 2.25 que un par de n -cotorsión coincide con el concepto usual de par de cotorsión completo y hereditario. Luego, proponemos una noción de ser hereditario que no es trivial para pares de n -cotorsión izquierdos o bien pares de n -cotorsión derechos.

En la Sección 4 presentamos aplicaciones y ejemplos de la teoría de n -cotorsión, desarrollada en las dos secciones anteriores, en el contexto de álgebra homológica Gorenstein relativa y subcategorías cluster-tilting. Veremos, en el Ejemplo 2.37 y la Proposición 2.38, que las clases $\mathcal{GP}(R)$ y $\mathcal{P}(R)$ de R -módulos Gorenstein proyectivos y proyectivos forman un par de n -cotorsión izquierdo siempre que R sea un anillo n -Iwanaga-Gorenstein o un anillo Gorenstein (en el sentido de [BR07a]). Más aún, damos caracterizaciones de anillos Gorenstein en términos de $(\mathcal{GP}(R), \mathcal{P}(R))$ y su dual $(\mathcal{I}(R), \mathcal{GI}(R))$, formado por las clases de R -módulos inyectivos y Gorenstein inyectivos. Como una aplicación en este marco, probamos que cada módulo en un anillo 2-Iwanaga-Gorenstein tiene una cubierta Gorenstein inyectiva con la propiedad de factorización única, y que la existencia de envolventes Gorenstein proyectivas implica la existencia de tales envolventes con la propiedad de factorización única (ver Corolarios 2.41 y 2.42). Un estudio análogo se hace para módulos Ding proyectivos y Ding inyectivos sobre un anillo, y además encontramos algunas condiciones de finitud para la dimensión global Ding proyectiva y Ding inyectiva de un anillo. Al final, estudiamos algunas consecuencias

de que las clases $\mathcal{F}(R)$ y $\mathcal{GF}(R)$ de módulos planos y Gorenstein planos formen un par de n -cotorsión izquierdo o derecho. Esto conduce por ejemplo a algunas caracterizaciones de anillos perfectos izquierdos con dimensión global Gorenstein plana nula (Proposición 2.52), y de anillos perfectos izquierdos que son también quasi-Frobenius (Proposición 2.53). Otro hecho interesante, acerca de los pares de la forma $(\mathcal{GF}(R), \mathcal{F}(R))$, es su relación con el par $(\mathcal{I}(R), \mathcal{GI}(R))$, mencionado antes, en términos del functor de dualidad de Pontryagin $M \mapsto M^+ := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ (ver los Teoremas 2.57 y 2.58). Además de sus aplicaciones en álgebra homológica Gorenstein, también estudiamos la interacción entre pares de n -cotorsión y subcategorías cluster tilting en el sentido de [Iya11]. Para una categoría abeliana \mathcal{C} con suficientes objetos proyectivos e inyectivos, damos una correspondencia biyectiva entre pares de n -cotorsión en \mathcal{C} , de la forma $(\mathcal{D}, \mathcal{D})$, y subcategorías $(n + 1)$ -cluster tilting de \mathcal{C} (ver Proposición 2.61 y Teorema 2.62).

En la última sección, mostramos como inducir pares de n -cotorsión izquierdos y derechos de complejos de cadena provenientes de un par de n -cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en una categoría abeliana \mathcal{C} . Estos pares inducidos involucran las clases $\tilde{\mathcal{A}}$ de \mathcal{A} -complejos, $\tilde{\mathcal{B}}$ de \mathcal{B} -complejos y $\text{dg}\tilde{\mathcal{A}}$ y $\text{dg}\tilde{\mathcal{B}}$ de complejos diferencialmente graduados de objetos en \mathcal{A} y \mathcal{B} , respectivamente. Los resultados que se presentan en esta sección fueron motivados por los trabajos de J. Gillespie [Gil04], y X. Yang y N. Ding [YD15], donde ellos probaron que cada par de cotorsión completo y hereditario $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ induce dos pares de cotorsión completos de complejos de cadena de la forma $(\tilde{\mathcal{A}}, \text{dg}\tilde{\mathcal{B}})$ y $(\text{dg}\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})$. En esta tesis se prueba que si alguno de dichos pares de complejos es de n -cotorsión izquierdo o derecho, entonces también lo es $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en \mathcal{C} , siempre que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ para cada $1 \leq i \leq n + 1$, extendiendo un resultado importante de [YD15].

En el Capítulo 3, el cual es el tema de un artículo en proceso, presentamos la noción de *par de cotorsión cortado* para dar una relativización de par de cotorsión completo. Por “relativización” nos referimos a: dado un par de clases de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} , estudiamos las propiedades de las respectivas clases para encontrar una subcategoría adecuada de \mathcal{C} donde el par pueda ser manejado como un par de cotorsión completo en ella. Un acercamiento a esta idea fue inspirado en [BMPS19] bajo el

concepto de *relative cotorsion pairs* donde los autores consideran pares de clases de objetos en una subcategoría gruesa de una categoría abeliana. En este trabajo, se levantará la condición de ser gruesa.

En la primera sección del Capítulo 3 presentamos la definición de par de cotorsión cortado (una descripción alternativa de esta noción puede encontrarse en la Proposición 3.5), construimos ejemplos de pares cortados con las clases de R -módulos Gorenstein proyectivos e injectivos y damos condiciones sobre la categoría $\text{Mod}(R)$ para que éstos sean pares de cotorsión en el sentido usual. También estudiamos su comportamiento al tomar uniones e intersecciones de cortes en las Proposiciones 3.6 y 3.7, y con esto, definimos el *corte más grande* de un par (A, B) para mostrar que esta clase es útil para describir una relación de ortogonalidad entre A y B a través del bifunctor $\text{Ext}_C^1(-, -)$ (ver Proposición 3.11). Al final, definimos qué significa que dos pares cortados sean “*compatibles*” con el propósito de formar nuevos pares cortados relacionados con sus clases (ver Proposición 3.13).

En la Sección 2, damos al principio resultados que serán una herramienta necesaria para el resto del mismo. Con el fin de llevar al contexto cortado, la línea de investigación desarrollada en [BMPS19], definimos los conceptos de *Par de Frobenius cortado* y *Contexto de Auslander-Buchweitz cortado* (Definiciones 3.29 y 3.40). De estos conceptos, daremos ejemplos y establecemos en el Teorema 3.34 y la Proposición 3.44 condiciones bajo las cuales los ejemplos son pares de Frobenius o contextos AB en el sentido de [BMPS19].

En la Sección 3, probamos que existen correspondencias entre las nociones arriba mencionadas (ver Teoremas 3.48 y 3.54) las cuales generalizan [BMPS19, Teorema 5.4].

En la última sección, abordamos algunos conceptos en álgebra homológica en el contexto de pares de cotorsión cortados. Dentro de los temas que estudiamos están: la teoría de Auslander-Buchweitz, la conjetura de la dimensión finitista y los pares de cotorsión en complejos de cadena. En la teoría de Auslander-Buchweitz, ver los Teoremas 3.58 y 3.62, probamos que el concepto de par de cotorsión cortado extiende la versión relativa en [BMPS19, Teoremas 3.6 y 3.7] y admite nuevos pares (ver Ejemplo 3.60). Para la conjetura de la dimensión finitista, reescribimos [CEG12, Teorema 3.2 y 3.4], un resultado de M. Cortés Izurdiaga, S. Estrada y P. A. Guil

Asensio, en términos de la existencia de ciertos pares de cotorsión cortados (ver las Proposiciones 3.66 y 3.69). Respecto a los pares de cotorsión en complejos de cadena, estudiamos cómo inducir un par de cotorsión cortado en $\text{Ch}(\mathcal{C})$ teniendo uno en \mathcal{C} , y de manera recíproca obtener un par en \mathcal{C} de un par de cotorsión cortado en $\text{Ch}(\mathcal{C})$. Al final de esta sección analizamos el par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, donde \mathcal{A} denota a la clase de R -módulos finitamente presentados y \mathcal{B} es la clase de los R -módulos absolutamente puros, y comentamos condiciones necesarias para que sea un par de cotorsión cortado a lo largo de $\text{mod}(R)$, la subcategoría de $\text{Mod}(R)$ de R -módulos finitamente generados.

En el Capítulo 4, el cual también es un artículo en proceso, seguimos el trabajo de D. Bennis y N. Mahdou en [BM09] respecto a módulos n -fuertemente Gorenstein proyectivos, proponemos dos definiciones: la primera que hemos llamado *objeto m -fuertemente $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -Gorenstein proyectivo débil* (Definición 4.2) y la segunda llamada *objeto m -fuertemente $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -Gorenstein proyectivo* (Definición 4.21) donde \mathcal{A} y \mathcal{B} son dos clases de objetos en \mathcal{C} y m es un entero positivo. Estas nociones extienden de cierta manera algunos resultados muy conocidos de los R -módulos n -fuertemente Gorenstein proyectivos. Ambas definiciones, a pesar de tener condiciones en común, utilizan argumentos distintos para probar resultados similares.

La Sección 1 del Capítulo 4, está dedicada a desarrollar la noción de objeto m -fuertemente $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -Gorenstein proyectivo débil. Damos una caracterización de la clase de los objetos m -fuertemente $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -Gorenstein proyectivos débiles cuando $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ para $i \geq 1$ (ver la Proposición 4.5). Dentro de los resultados que se desarrollan, damos en la Proposición 4.9, una caracterización de esta clase a través de la noción de objeto $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein proyectivo débil (ver [BMS18, Definición 3.11]). También probamos en la Proposición 4.13, que la auto-ortogonalidad de un objeto m -fuertemente $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -Gorenstein proyectivo débil exacto (Definición 4.30) tiene una fuerte relación con la clase \mathcal{A} . Por último, mostramos que la intersección entre clases de objetos m -fuertemente $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -Gorenstein proyectivos débiles es de nuevo una clase de este tipo (ver el Teorema 4.19), lo cual extiende un importante resultado [ZH11, Teorema 3.5] mencionado anteriormente.

En la Sección 2, mostramos que los resultados previamente mencio-

nados en la sección anterior, tienen su versión correspondiente para el concepto de objeto m -fuertemente $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -Gorenstein proyectivo (ver las Propositiones 4.24, 4.35 y el Teorema 4.40). Al final, damos algunas aplicaciones relacionadas con subcategorías cluster-tilting, pares GP-admisibles y pares de n -cotorsión.

Índice general

Agradecimientos	III
Introducción	V
1. PRELIMINARES	1
2. PARES DE n-COTORSION	5
2.1. Definiciones básicas	6
2.2. Cubiertas y envolventes a partir de pares de n -cotorsión . . .	10
2.3. n -Cotorsión y pares de cotorsión hereditarios	24
2.4. Aplicaciones y ejemplos	35
2.5. n -Cotorsión en $\text{Ch}(\mathcal{C})$	57
3. PARES DE COTORSION CORTADOS	73
3.1. Pares de cotorsión cortados	74
3.2. Pares de Frobenius y Contextos AB cortados	85
3.3. Correspondencias entre pares de cotorsión cortados	102
3.4. Aplicaciones	112
4. OBJETOS m-FUERTEMENTE $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-GORENSTEIN	127
4.1. Objetos m -fuertemente $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -Gorenstein proyectivos débiles	127
4.2. Objetos m -fuertemente $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -Gorenstein proyectivos	142
A. Apéndice	155
A.1. Álgebra Homológica	155
A.2. Anillos	156

A.3. Conjeturas Homológicas	158
A.4. Módulos	159
A.5. Objetos Gorenstein relativos en categorías abelianas	162
A.6. Pares de Cotorsión	164
A.7. Teoría de Auslander-Buchweitz	164
Bibliografía	166
Indice Alfabético	173

Capítulo 1

PRELIMINARES

Notación y convenciones

En este capítulo daremos algunos preliminares en dimensiones homológicas, ortogonalidad y aproximaciones.

A lo largo de este trabajo, \mathcal{C} siempre denotará una categoría abeliana (no necesariamente con suficientes objetos proyectivos e inyectivos) y el término anillo significará siempre anillo asociativo con uno. El principal ejemplo de tal categoría será la categoría $\text{Mod}(R)$ de R -módulos izquierdos y R -homomorfismos. Por un módulo M entenderemos un R -módulo izquierdo a menos que se especifique lo contrario. Los R -módulos derechos serán considerados como R -módulos izquierdos sobre el anillo opuesto R^{op} . También consideraremos la categoría $\text{Ch}(R)$ de complejos de R -módulos izquierdos y la categoría $\text{mod}(R)$ de R -módulos finitamente generados.

Cada subcategoría de \mathcal{C} es plena, y cualquier clase de objetos $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ será considerada como una subcategoría (plena) de \mathcal{C} . Si dos objetos C y D en \mathcal{C} son isomorfos, escribiremos $C \simeq D$. La notación $F \cong G$ será reservada para denotar la existencia de un isomorfismo natural entre dos funtores F y G . Los monomorfismos y epimorfismos en \mathcal{C} serán a veces denotados por \hookrightarrow y \twoheadrightarrow , respectivamente.

Los resultados presentados en este trabajo tienen su correspondiente versión dual, la cual omitiremos por simpleza.

Dimensión de resolución y coresolución

Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ una clase de objetos de \mathcal{C} . Dado un objeto $C \in \mathcal{C}$ y un entero no negativo $m \geq 0$, una \mathcal{B} -resolución de C de longitud m es una sucesión exacta

$$0 \rightarrow B_m \rightarrow B_{m-1} \rightarrow \cdots \rightarrow B_1 \rightarrow B_0 \rightarrow C \rightarrow 0$$

en \mathcal{C} , donde $B_k \in \mathcal{B}$ para cada entero $0 \leq k \leq m$. La *dimensión de resolución de C con respecto a \mathcal{B}* (o la *dimensión de \mathcal{B} -resolución de C*), denotada por $\text{resdim}_{\mathcal{B}}(C)$, se define como el menor entero no negativo $m \geq 0$ tal que C tiene una \mathcal{B} -resolución de longitud m . Si tal m no existe, escribiremos $\text{resdim}_{\mathcal{B}}(C) := \infty$.

Dualmente, tenemos los conceptos de \mathcal{B} -coresolución de C de longitud m y de *dimensión de coresolución de C con respecto a \mathcal{B}* , será denotada por $\text{coresdim}_{\mathcal{B}}(C)$.

Respecto a estas dos dimensiones homológicas, consideraremos frecuentemente las siguientes dos clases de objetos en \mathcal{C} :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_m^\wedge &:= \{C \in \mathcal{C} : \text{resdim}_{\mathcal{B}}(C) \leq m\}, \\ \mathcal{B}_m^\vee &:= \{C \in \mathcal{C} : \text{coresdim}_{\mathcal{B}}(C) \leq m\}. \end{aligned}$$

Ortogonalidad con respecto a funtores de extensión

En una categoría abeliana \mathcal{C} , podemos definir bifuntores de extensión en el sentido de Yoneda. Ver por ejemplo [Sie10] para más detalles del tema. Recordemos que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, Y)$ está definido como el grupo abeliano formado por clases de sucesiones exactas cortas $0 \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X \rightarrow 0$ bajo cierta relación de equivalencia. En caso de que trabajemos en la categoría $\text{Ch}(\mathcal{C})$ de complejos en \mathcal{C} , escribiremos $\text{Ext}_{\text{Ch}(\mathcal{C})}^i(-, -)$ como $\text{Ext}_{\text{Ch}}^i(-, -)$ por comodidad.

Dadas dos clases de objetos $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ y un entero $i \geq 1$, usaremos la notación $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ para decir que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(A, B) = 0$ para cada $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$. En caso de que $\mathcal{A} = \{M\}$ o $\mathcal{B} = \{N\}$, solo escribiremos $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(M, \mathcal{B}) = 0$ y $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, N) = 0$, respectivamente.

Recordemos que el *i -ésimo complemento ortogonal derecho* de \mathcal{A} se define como

$$\mathcal{A}^{\perp i} := \{N \in \mathcal{C} : \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, N) = 0\},$$

y el complemento ortogonal total derecho de \mathcal{A} como

$$\mathcal{A}^\perp := \bigcap_{i \geq 1} \mathcal{A}^{\perp_i}.$$

Dualmente, tenemos el i -ésimo complemento ortogonal izquierdo y el complemento ortogonal total izquierdo de \mathcal{B} , denotados por ${}^{\perp_i}\mathcal{B}$ y ${}^\perp\mathcal{B}$, respectivamente.

Aproximaciones

Sea \mathcal{A} una clase de objetos de \mathcal{C} . Un morfismo $f: A \rightarrow C$ es una \mathcal{A} -precubierta (o una \mathcal{A} -aproximación derecha de C) si $A \in \mathcal{A}$ y si para cada morfismo $f': A' \rightarrow C$ con $A' \in \mathcal{A}$, existe un morfismo $h: A' \rightarrow A$ tal que $f' = f \circ h$. Si además, en caso de que $A' = A$ y $f' = f$, la igualdad anterior solo puede completarse con automorfismos de A , entonces diremos que f es una \mathcal{A} -cubierta (o una \mathcal{A} -aproximación minimal derecha). Más aún, una \mathcal{A} -precubierta $f: A \rightarrow C$ de C es especial si $\text{Coker}(f) = 0$ y $\text{Ker}(f) \in \mathcal{A}^{\perp_1}$. Diremos que la clase \mathcal{A} es precubriente si cada objeto de \mathcal{C} tiene una \mathcal{A} -precubierta. Similarmente, tenemos los conceptos de clase cubriente y precubriente especial en \mathcal{C} . Dualmente, tenemos los conceptos de \mathcal{A} -preenvolventes (\mathcal{A} -aproximaciones izquierdas), \mathcal{A} -envolventes (\mathcal{A} -aproximaciones minimales izquierdas) y \mathcal{A} -preenvolventes especiales en \mathcal{C} , junto con las correspondientes nociones de clase preenvolvente, envolvente y preenvolvente especial.

Dimensiones Homológicas Relativas

Dada una clase $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ y $M \in \mathcal{C}$, la dimensión proyectiva de M relativa a \mathcal{X} se define como

$$\text{pd}_{\mathcal{X}}(M) := \min\{n \geq 0 : \text{Ext}_{\mathcal{C}}^j(M, \mathcal{X}) = 0 \text{ para toda } j > n\}.$$

Dualmente, denotamos por $\text{id}_{\mathcal{X}}(M)$ la dimensión inyectiva de M relativa a \mathcal{X} . Más aún, para cualquier clase $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{C}$, definimos

$$\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) := \sup\{\text{pd}_{\mathcal{X}}(Y) : Y \in \mathcal{Y}\} \text{ e } \text{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) := \sup\{\text{id}_{\mathcal{X}}(Y) : Y \in \mathcal{Y}\}.$$

Puede verse que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = \text{id}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$. Si $\mathcal{X} = \mathcal{C}$, escribiremos $\text{pd}(\mathcal{Y})$ e $\text{id}(\mathcal{Y})$.

Clases de interés

Se dice que \mathcal{X} es una clase *pre-resolvente* si es cerrada por extensiones y núcleos de epimorfismos entre objetos en \mathcal{X} . Una clase pre-resolvente se dice *resolvente* si contiene a $\mathcal{P}(\mathcal{C})$, la clase de objetos proyectivos en \mathcal{C} . Si las condiciones duales se cumplen, obtenemos los conceptos de clase *pre-corresolvente* y *corresolvente*. Una clase *gruesa a izquierda* (respectivamente, *gruesa a derecha*) es una clase pre-resolvente (respectivamente, pre-corresolvente) la cual es cerrada por sumandos directos en \mathcal{C} . Una clase es *gruesa* si es gruesa a izquierda y a derecha. Denotamos por $\text{Thick}(\mathcal{X})$, $\text{Thick}^-(\mathcal{X})$ y $\text{Thick}^+(\mathcal{C})$ la categoría más pequeña gruesa, gruesa a izquierda y gruesa a derecha de subcategorías de \mathcal{C} , respectivamente, que contengan a la clase \mathcal{X} .

Generadores y cogeneradores relativos

Sean \mathcal{X} y ω dos subcategorías de \mathcal{C} . Se dice que ω es \mathcal{X} -*inyectivo* si $\text{id}_{\mathcal{X}}(\omega) = 0$. La subcategoría ω es un *cogenerador relativo en \mathcal{X}* si $\omega \subseteq \mathcal{X}$ y para cualquier $X \in \mathcal{X}$ existe una sucesión exacta corta $0 \rightarrow X \rightarrow W \rightarrow X' \rightarrow 0$ con $W \in \omega$ y $X' \in \mathcal{X}$. Dualmente, tenemos las nociones de \mathcal{X} -*proyectivo* y *generador relativo en \mathcal{X}* . Con estos preliminares en mano, estamos listos para dar nuestra aproximación de cotorsión en categorías abelianas.

A lo largo de esta tesis, definiremos varios conceptos bilaterales. Por motivos prácticos, trabajaremos solo con la versión izquierda y no escribiremos los enunciados para la versión derecha.

Capítulo 2

PAIRES DE n -COTORSION

Dado un anillo n -Iwanaga-Gorenstein R , sabemos que si $\mathcal{GP}(R)$ denota la clase de R -módulos izquierdos Gorenstein proyectivos, y $\mathcal{P}(R)$ la clase de R -módulos izquierdos proyectivos, usando teoría de aproximación de Auslander-Buchweitz (ver [AB89, BMPS19] por ejemplo), podemos asegurar que para cada R -módulo izquierdo M existe un epimorfismo $\varphi : P \rightarrow M$ con $P \in \mathcal{GP}(R)$ cuyo núcleo tiene dimensión proyectiva finita exactamente $n-1$. Más aún, se tiene que la relación de ortogonalidad $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{GP}(R), \mathcal{P}(R)) = 0$ se satisface para cada $i \geq 1$. Nosotros estaremos interesados en considerar la última condición en un contexto más general y solo para índices $1 \leq i \leq n$.

En el presente capítulo, comprimimos las propiedades anteriores en el concepto de *par de n -cotorsión izquierdo*. En el contexto que provee una categoría abeliana \mathcal{C} , éstos estarán definidos por dos clases \mathcal{A} y \mathcal{B} de objetos de \mathcal{C} tales que: (1) \mathcal{A} es cerrada por sumandos directos, (2) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ para cada $1 \leq i \leq n$, y (3) para cada objeto $C \in \mathcal{C}$ existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow B_{n-1} \rightarrow B_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow B_1 \rightarrow B_0 \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow 0$$

con $A \in \mathcal{A}$ y $B_k \in \mathcal{B}$ para cada $0 \leq k \leq n-1$.

Este concepto y su dual, que llamaremos *par de n -cotorsión derecho*, representarán un acercamiento a lo que, a grosso modo, llamamos *cotorsión elevada*: esto es, el estudio de los posibles resultados de considerar dos

clases de objetos de \mathcal{C} que sean completas con respecto a la relación de ortogonalidad definida por el desvanecimiento del bifunctor $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(-, -)$ para índices más grandes $i > 1$. El caso $i = 1$, por otra parte, ya está cubierto por la teoría de pares de cotorsión completos, ampliamente considerados en campos como Álgebra Homológica Relativa o Teoría de Representaciones.

2.1. Definiciones básicas

La noción de par de cotorsión fue presentada por primera vez por L. Salce en [Sal79] y es el concepto análogo al de par de torsión donde el bifunctor $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -)$ es reemplazado por $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(-, -)$. A grosso modo, dos clases de objetos \mathcal{A} y \mathcal{B} , en una categoría abeliana \mathcal{C} , forman un par de cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ si son completos con respecto a la relación de ortogonalidad definida por el desvanecimiento del bifunctor $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(-, -)$. Específicamente, y para el propósito de este capítulo, es conveniente recordar este concepto de la siguiente manera.

Definición 2.1. Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos clases de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} . Decimos que \mathcal{A} y \mathcal{B} forman un par de cotorsión izquierdo completo $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en \mathcal{C} si $\mathcal{A} = {}^{\perp_1}\mathcal{B}$ y si para cada $C \in \mathcal{C}$ existe una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow 0,$$

con $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$. Dualmente, tenemos la noción de par de cotorsión derecho completo en \mathcal{C} . Finalmente, $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión completo en \mathcal{C} si es un par de cotorsión izquierdo y derecho completo en \mathcal{C} .

Notemos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión completo en \mathcal{C} si, y solo si, es a la vez un par de cotorsión izquierdo completo y un par de cotorsión derecho completo en \mathcal{C} . Se sabe también que para un par de cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en una categoría abeliana con suficientes proyectivos e inyectivos, $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión izquierdo completo si, y solo si, es un par de cotorsión derecho completo. Este resultado es comúnmente conocido como *Lema de Salce*.

Motivados por las propiedades de los módulos Gorenstein proyectivos e inyectivos sobre anillos Iwanaga-Gorenstein mencionadas previamente,

a continuación presentamos una versión “elevada” de pares de cotorsión, la cual cubre a los pares de cotorsión izquierdos y derechos completos en el sentido de la Definición 2.1, como casos particulares. Por “elevada” nos referimos a considerar la ortogonalidad con respecto a $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(-, -)$ para índices $i \geq 1$. Veremos también cómo algunas propiedades conocidas para pares de cotorsión pueden ser llevadas a este contexto elevado resultante de la Definición 2.2.

En todo este capítulo, $n > 0$ será un entero positivo.

Definición 2.2. Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos clases de objetos en \mathcal{C} . Decimos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de n -cotorsión izquierdo en \mathcal{C} si las siguientes condiciones se cumplen:

- (1) \mathcal{A} es cerrada por sumandos directos.
- (2) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ para cada $1 \leq i \leq n$.
- (3) Para cada objeto $C \in \mathcal{C}$, existe una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow K \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow 0$$

donde $A \in \mathcal{A}$ y $K \in \mathcal{B}_{n-1}^{\wedge}$.

Dualmente, decimos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de n -cotorsión derecho en \mathcal{C} si la condición (2) se satisface, \mathcal{B} es cerrada por sumandos directos, y si cada objeto de \mathcal{C} puede ser inmerso en un objeto de \mathcal{B} con conúcleo en \mathcal{A}_{n-1}^{\vee} . Finalmente, decimos que \mathcal{A} y \mathcal{B} forman un par de n -cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en \mathcal{C} si $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es a la vez un par de n -cotorsión izquierdo y un par de n -cotorsión derecho en \mathcal{C} .

Ejemplo 2.3. Denotaremos por $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ e $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ a las clases de objetos proyectivos e inyectivos de \mathcal{C} , respectivamente. Es claro que \mathcal{C} tiene suficientes proyectivos (respectivamente, suficientes inyectivos) si, y solo si, $(\mathcal{P}(\mathcal{C}), \mathcal{C})$ (respectivamente, $(\mathcal{C}, \mathcal{I}(\mathcal{C}))$) es un par de n -cotorsión en \mathcal{C} para cada $n \geq 1$.

En lo que resta de este capítulo, nos referiremos a $(\mathcal{P}(\mathcal{C}), \mathcal{C})$ y $(\mathcal{C}, \mathcal{I}(\mathcal{C}))$ como los pares de n -cotorsión *triviales* cuando \mathcal{C} tiene suficientes proyectivos e inyectivos. Presentaremos algunos ejemplos no triviales en la Sección 2.4.

Relación entre cotorsión y n -cotorsión

Es claro que los pares de 1-cotorsión izquierdos (respectivamente, derechos) coinciden con los pares de cotorsión izquierdos completos (respectivamente, derechos) en \mathcal{C} . Sin embargo, podemos decir más de la interacción entre pares de n -cotorsión y pares de cotorsión completos. Específicamente, estudiaremos bajo qué condiciones un par de cotorsión izquierdo completo induce un par de n -cotorsión izquierdo. Por otra parte, probaremos que cada par de n -cotorsión izquierdo induce un par de cotorsión izquierdo completo.

Empezaremos estableciendo bajo qué condiciones dos clases de objetos \mathcal{A} y \mathcal{B} forman un par de n -cotorsión izquierdo en \mathcal{C} . Para esto, necesitaremos el siguiente Lema.

Lema 2.4. *Para cualquier clase de objetos \mathcal{B} de \mathcal{C} , la siguiente contención es cierta:*

$$\bigcap_{i=1}^n {}^{\perp i} \mathcal{B} \subseteq {}^{\perp 1} \mathcal{B}_{n-1}^{\wedge}.$$

Demostración. Consideremos $C \in \mathcal{B}_{n-1}^{\wedge}$ y una \mathcal{B} -resolución de C de longitud $n - 1$,

$$\eta : 0 \rightarrow B_{n-1} \rightarrow B_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow B_1 \rightarrow B_0 \rightarrow C \rightarrow 0$$

donde $B_{k-1} \in \mathcal{B}$ para cada $1 \leq k \leq n - 1$. Entonces, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(X, B_{k-1}) = 0$ para cada $1 \leq i \leq n$ y cada $X \in \bigcap_{i=1}^n {}^{\perp i} \mathcal{B}$. Usando el Lema del Corrimiento A.3 en η , obtenemos el resultado. \square

Proposición 2.5. *Sea \mathcal{C} una categoría abeliana con suficientes inyectivos, y sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos clases de objetos de \mathcal{C} tales que $\mathcal{I}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{B}$. Entonces, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, \mathcal{B}_{n-1}^{\wedge}) = 0$ si, y solo si, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ para cada $1 \leq i \leq n$. En particular, $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_{n-1}^{\wedge})$ es un par de cotorsión izquierdo completo si, y solo si, $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de n -cotorsión izquierdo en \mathcal{C} .*

Demostración. El recíproco se sigue del Lema 2.4. Para la implicación directa, como \mathcal{C} tiene suficientes inyectivos e $\mathcal{I}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{B}$, para cada $(i - 1)$ -cosizigia inyectiva K de $B \in \mathcal{B}$ tenemos que $\text{resdim}_{\mathcal{B}}(K) \leq i - 1 \leq n - 1$ con $1 \leq i \leq n$. Luego, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, K) = 0$ ya que suponemos $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, \mathcal{B}_{n-1}^{\wedge}) = 0$. Por lo tanto, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, B) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, K) = 0$ para cada $B \in \mathcal{B}$ e $1 \leq i \leq n$. \square

En el recíproco de la Proposición 2.5, no usamos que \mathcal{C} tuviera suficientes injectivos o $\mathcal{I}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{B}$. De hecho, solo necesitamos un par de cotorsión izquierdo completo de la forma $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_{n-1}^\wedge)$. Antes de demostrar esto en el Teorema 2.7, probaremos las siguientes propiedades que son una consecuencia de la relación de ortogonalidad $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ con $1 \leq i \leq n$.

Proposición 2.6. *Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos clases de objetos de \mathcal{C} tales que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ para cada $1 \leq i \leq n$. Si $Y \in \mathcal{B}_k^\wedge$ con $0 \leq k \leq n-1$, entonces $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, Y) = 0$ para cada $1 \leq i \leq n-k$. En particular, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, \mathcal{B}_{n-1}^\wedge) = 0$.*

Demostración. El resultado es claro para el caso $n = 1$. Por lo que, podemos suponer que $n \geq 2$. La prueba se hará por inducción sobre k . El caso $k = 0$ también es claro, entonces consideraremos $1 \leq k \leq n-1$ para $n \geq 2$.

Sean $A \in \mathcal{A}$ y $Y \in \mathcal{B}_k^\wedge$. Para el caso $k = 1$, tenemos que $\text{resdim}_{\mathcal{B}}(Y) \leq 1$, y entonces existe una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow B_1 \rightarrow B_0 \rightarrow Y \rightarrow 0$$

con $B_0, B_1 \in \mathcal{B}$. Entonces, obtenemos una sucesión exacta

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(A, B_0) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(A, Y) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(A, B_1)$$

de grupos abelianos con $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(A, B_0) = 0$ y $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(A, B_1) = 0$ si $1 \leq i \leq n-1$. Por lo tanto, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(A, Y) = 0$ para cada $A \in \mathcal{A}, Y \in \mathcal{B}_1^\wedge$ e $1 \leq i \leq n-1$.

Ahora para el paso inductivo, supongamos que para cada objeto $Y' \in \mathcal{B}_k^\wedge$ con $1 \leq k < n-1$ (el caso $k = n-1$ se sigue del Lema 2.4), tenemos que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(A, Y') = 0$ para cada $1 \leq i \leq n-k$. Ahora bien, sea $Y \in \mathcal{C}$ un objeto con $\text{resdim}_{\mathcal{B}}(Y) \leq k+1$, entonces existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow Y' \rightarrow B \rightarrow Y \rightarrow 0$$

con $B \in \mathcal{B}$ y $\text{resdim}_{\mathcal{B}}(Y') \leq k$. Consideremos un entero $1 \leq i \leq n-(k+1)$. Entonces, tenemos una sucesión exacta

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(A, B) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(A, Y) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(A, Y')$$

de grupos abelianos donde $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(A, B) = 0$. Como $1 \leq i \leq n-(k+1)$ y $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(A, Y') = 0$ por hipótesis de inducción, obtenemos que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(A, Y) = 0$ para cada $1 \leq i \leq n-(k+1)$. \square

Teorema 2.7. Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos clases de objetos de \mathcal{C} . Entonces, las siguientes dos condiciones son equivalentes:

- (a) $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de n -cotorsión izquierdo en \mathcal{C} ;
- (b) $\mathcal{A} = \bigcap_{i=1}^n {}^{\perp} \mathcal{B}$ y para cualquier $C \in \mathcal{C}$ existe una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow K \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow 0,$$

con $A \in \mathcal{A}$ y $K \in \mathcal{B}_{n-1}^{\wedge}$.

Más aún, si alguna de las condiciones anteriores se cumple, entonces $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_{n-1}^{\wedge})$ es un par de cotorsión izquierdo completo en \mathcal{C} .

Demostración. Notemos que la implicación (b) \Rightarrow (a) es trivial. Probemos que (a) implica (b). Supongamos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de n -cotorsión izquierdo en \mathcal{C} . Entonces, por el Lema 2.4, obtenemos las siguientes contenciones

$$\mathcal{A} \subseteq \bigcap_{i=1}^n {}^{\perp} \mathcal{B} \subseteq {}^{\perp} (\mathcal{B}_{n-1}^{\wedge}).$$

Luego, solo necesitamos probar la contención $\mathcal{A} \supseteq {}^{\perp} (\mathcal{B}_{n-1}^{\wedge})$. Es suficiente notar que para cada $X \in {}^{\perp} (\mathcal{B}_{n-1}^{\wedge})$, existe un epimorfismo que se escinde $A \rightarrow X$ con núcleo en $\mathcal{B}_{n-1}^{\wedge}$. \square

Normalmente, dado un par de cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en \mathcal{C} , una pregunta natural es si $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es completo o hereditario, con el fin de construir \mathcal{A} -precubiertas y \mathcal{B} -preenvolventes especiales. Ahora, que ya hemos explorado la interacción entre cotorsión y cotorsión elevada, estudiaremos en la siguiente sección la relación entre pares de n -cotorsión izquierdos y derechos, y aproximaciones izquierdas y derechas respecto a las clases \mathcal{A} y \mathcal{B} . En la Sección 2.3, por otra parte, trataremos la propiedad de ser hereditario de pares de n -cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en el cual \mathcal{A} es una clase resolvente o \mathcal{B} una clase corresolvente.

2.2. Cubiertas y envolventes a partir de pares de n -cotorsión

Las aproximaciones han sido consideradas antes en el estudio de cotorsión elevada. Por ejemplo, en [CT08] S. Crivei y B. Torrecillas presen-

taron el concepto de \mathcal{A} -precubiertas n -especiales y \mathcal{B} -preenvolventes m -especiales (\mathcal{A} -precubiertas que son epimorfismos con núcleo en $\mathcal{A}^{\perp n}$, y \mathcal{B} -preenvolventes con conúcleo en ${}^{\perp m}\mathcal{B}$, respectivamente), y establecen condiciones bajo las cuales es posible obtener tales aproximaciones a partir de un (m, n) -par de cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ (esto es, $\mathcal{A} = {}^{\perp m}\mathcal{B}$ y $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{\perp n}$). Ver [CT08, Proposición 3.14 y Teorema 3.15].

En esta sección, estudiamos precubiertas y preenvolventes provenientes de un par de n -cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en una categoría abeliana \mathcal{C} . También definimos un nuevo tipo de aproximaciones que llamamos $(\mathcal{A}, k, \mathcal{B})$ -precubiertas y $(\mathcal{A}, k, \mathcal{B})$ -preenvolventes, como los análogos de precubiertas especiales y preenvolventes especiales provenientes de un par de cotorsión completo. Dentro de las propiedades de estos nuevos conceptos, probamos que la clase de objetos que tienen una $(\mathcal{A}, k, \mathcal{B})$ -precubierta es cerrada por extensiones si imponemos una condición de ortogonalidad en \mathcal{B} . Por último, estudiaremos algunas condiciones bajo las cuales los pares de n -cotorsión izquierdos y derechos son fuentes de precubiertas y preenvolventes con la propiedad de factorización única.

$(\mathcal{A}, k, \mathcal{B})$ -precubiertas y preenvolventes especiales

Una consecuencia del Teorema 2.7 es que los pares de n -cotorsión izquierdos y derechos son siempre una fuente de precubiertas y preenvolventes, como lo establece el siguiente resultado.

Proposición 2.8. *Si $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de n -cotorsión izquierdo en \mathcal{C} , entonces \mathcal{A} es una clase precubriente especial.*

Demostración. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de n -cotorsión izquierdo en \mathcal{C} . En particular, para cualquier $C \in \mathcal{C}$, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow K \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow 0,$$

donde $K \in \mathcal{B}_{n-1}^{\wedge}$ y $A \in \mathcal{A}$. Más aún, por el Teorema 2.7, obtenemos que $K \in \mathcal{B}_{n-1}^{\wedge} \subseteq \mathcal{A}^{\perp 1}$ y entonces $A \rightarrow C$ es una \mathcal{A} -precubierta especial de C . \square

Sin embargo, las precubiertas y preenvolventes especiales no son las únicas aproximaciones provenientes de pares de n -cotorsión izquierdos

y derechos. Bajo ciertas condiciones, podemos obtener más información acerca de las aproximaciones resultantes de la Proposición 2.8. Siguiendo ideas de [CT08] referente a la relación entre (m, n) -pares de cotorsión, precubiertas n -especiales y preenvolventes m -especiales, proponemos la siguiente familia de aproximaciones y estudiamos su relación con pares de n -cotorsión izquierdos y derechos.

Definición 2.9. Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos clases de objetos de \mathcal{C} , y k un entero positivo. Dado un objeto $C \in \mathcal{C}$, decimos que una \mathcal{A} -precubierta $f: A \rightarrow C$ de C es una $(\mathcal{A}, k, \mathcal{B})$ -precubierta especial si f es un epimorfismo y $\text{Ker}(f) \in \mathcal{B}_k^{\wedge_{-1}}$. La noción de $(\mathcal{A}, k, \mathcal{B})$ -preenvolvente especial se define de manera dual.

Observación 2.10.

- (1) Sea \mathcal{A} una clase de objetos de \mathcal{C} y $C \in \mathcal{C}$. Notemos que un morfismo $f: A \rightarrow C$ con $A \in \mathcal{A}$ es una \mathcal{A} -precubierta especial si, y solo si, es una $(\mathcal{A}, 1, \mathcal{A}^{\perp 1})$ -precubierta especial.
- (2) Cualquier $C \in \mathcal{C}$ admite una $(\mathcal{A}, n, \mathcal{B})$ -precubierta si $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de n -cotorsión izquierdo en \mathcal{C} .

El siguiente ejemplo se obtiene de [Hol04, Teorema 2.10].

Ejemplo 2.11. Dada una clase de módulos $\mathcal{Y} \subseteq \text{Mod}(R)$, decimos que un complejo de cadena $X = (X_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ es $\text{Hom}_R(-, \mathcal{Y})$ -acíclico si $\text{Hom}_R(X, Y) := (\text{Hom}_R(X_m, Y))_{m \in \mathbb{Z}}$ es un complejo exacto de grupos abelianos para cada $Y \in \mathcal{Y}$.

Recordemos que $\mathcal{GP}(R)$ denota la clase de R -módulos Gorenstein proyectivos, esto es, módulos $M \in \text{Mod}(R)$ tales que $M \simeq Z_0(\mathbf{P})$, para algún complejo exacto y $\text{Hom}_R(-, \mathcal{P}(R))$ -acíclico \mathbf{P} de módulos proyectivos. Los módulos Gorenstein inyectivos se definen dualmente, esto es, como ciclos de complejos exactos y $\text{Hom}_R(\mathcal{I}(R), -)$ -acíclicos de módulos inyectivos. La clase de R -módulos Gorenstein inyectivos la denotaremos por $\mathcal{GI}(R)$.

Recordemos que la dimensión Gorenstein proyectiva de un R -módulo M , la cual denotamos por $\text{Gpd}(M)$, se define como la dimensión de $\mathcal{GP}(R)$ -resolución de M , esto es,

$$\text{Gpd}(M) := \text{resdim}_{\mathcal{GP}(R)}(M).$$

La dimensión Gorenstein inyectiva de M , denotada por $\text{Gid}(M)$, se define de manera similar. Se sabe de [Hol04, Teorema 2.10] que cada R -módulo M con

dimensión Gorenstein proyectiva finita, digamos $\text{Gpd}(M) = m < \infty$, tiene una precubierta Gorenstein proyectiva especial cuyo núcleo tiene dimensión proyectiva a lo más $m - 1$, esto es, M tiene una $(\mathcal{GP}(R), m, \mathcal{P}(R))$ -precubierta especial.

En [AA02, Teorema 3.1], K. D. Akinci y R. Alizade probaron que para cada par de cotorsión hereditario $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en $\text{Mod}(R)$, la clase de objetos que tienen una \mathcal{A} -precubierta especial es cerrada por extensiones. En lo que sigue, generalizamos este resultado para $(\mathcal{A}, k, \mathcal{B})$ -precubiertas especiales. Denotaremos por $\text{Prec}^k(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ a la clase de todos los objetos $C \in \mathcal{C}$ que admiten una $(\mathcal{A}, k, \mathcal{B})$ -precubierta especial.

Teorema 2.12. *Sea n un entero positivo y $1 \leq k \leq \max(1, n - 1)$, y sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos clases de objetos de \mathcal{C} tales que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ para cada $1 \leq i \leq n$, o $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^2(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ si $n = 1$. Si \mathcal{A} y \mathcal{B}_{k-1}^\wedge son cerradas por extensiones, entonces también lo es $\text{Prec}^k(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.*

Demostración. La prueba se hará adaptando los argumentos en [AA02, Teorema 3.1] a nuestro contexto. Sea

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$$

una sucesión exacta corta en \mathcal{C} tal que $X, Z \in \text{Prec}^k(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Primero, consideremos una $(\mathcal{A}, k, \mathcal{B})$ -precubierta especial de Z , digamos una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow K^Z \xrightarrow{\beta^Z} A^Z \xrightarrow{\alpha^Z} Z \rightarrow 0,$$

con $K^Z \in \mathcal{B}_{k-1}^\wedge$ y $A^Z \in \mathcal{A}$. Tomando el pullback de $Y \rightarrow Z \leftarrow A^Z$ obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con columnas y renglones exactos:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & K^Z & \xlongequal{\quad} & K^Z \\
 & & \downarrow \tilde{\beta}^Z & & \downarrow \beta^Z \\
 X & \xrightarrow{\bar{f}} & E & \xrightarrow{\bar{g}} & A^Z \\
 \parallel & & \downarrow \tilde{\alpha}^Z & \mathbf{pb} & \downarrow \alpha^Z \\
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z
 \end{array} \tag{2.2.1}$$

Ahora consideremos una $(\mathcal{A}, k, \mathcal{B})$ -precubierta especial de X , digamos

$$0 \rightarrow K^X \xrightarrow{\beta^X} A^X \xrightarrow{\alpha^X} X \rightarrow 0,$$

con $A^X \in \mathcal{A}$ y $K^X \in \mathcal{B}_{k-1}^\wedge$. Obtenemos la siguiente sucesión exacta de grupos abelianos:

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A^Z, A^X) \xrightarrow{\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A^Z, \alpha^X)} \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A^Z, X) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^2(A^Z, K^X).$$

El morfismo $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A^Z, \alpha^X)$ es un epimorfismo ya que $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^2(A^Z, K^X) = 0$. Esta última igualdad se puede probar de la siguiente manera: para el caso $n = 1$, usamos que $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^2(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$. Si $n \geq 2$, por otra parte, se tiene que $k \leq n - 1$ y entonces $2 \leq n - k + 1$. Luego, por la Proposición 2.6, $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{B}_{k-1}^\wedge) = 0$ para $i = 1, 2$.

A partir de que $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A^Z, \alpha^X)$ es suprayectiva, podemos asegurar que para el renglón central

$$\eta: 0 \rightarrow X \xrightarrow{\bar{f}} E \xrightarrow{\bar{g}} A^Z \rightarrow 0,$$

existe una sucesión exacta corta

$$\eta': 0 \rightarrow A^X \xrightarrow{\hat{f}} A^Y \xrightarrow{\hat{g}} A^Z \rightarrow 0$$

tal que η se obtiene como el pushout de η' a lo largo de $\alpha^X: A^X \rightarrow X$:

$$\begin{array}{ccccc} K^X & \xlongequal{\quad} & K^X & & \\ \beta^X \downarrow & & \downarrow \bar{\beta}^X & & \\ A^X & \xrightarrow{\hat{f}} & A^Y & \xrightarrow{\hat{g}} & A^Z \\ \alpha^X \downarrow & \mathbf{po} & \downarrow \bar{\alpha}^X & & \parallel \\ X & \xrightarrow{\bar{f}} & E & \xrightarrow{\bar{g}} & A^Z \end{array} \quad (2.2.2)$$

Como $A^X, A^Z \in \mathcal{A}$ y \mathcal{A} es cerrada por extensiones, tenemos que $A^Y \in \mathcal{A}$. De las columnas centrales en los diagramas (2.2.1) y (2.2.2), obtenemos el

siguiente diagrama conmutativo con renglones y columnas exactas después de tomar el pullback de $K^Z \rightarrow E \leftarrow A^Y$:

$$\begin{array}{ccccc}
 K^X & \xlongequal{\quad} & K^X & & \\
 \tilde{f} \downarrow & & \downarrow \bar{\beta}^X & & \\
 K^Y & \xrightarrow{\beta^Y} & A^Y & \xrightarrow{\alpha^Y} & Y \\
 \tilde{g} \downarrow & \text{pb} & \downarrow \bar{\alpha}^X & & \parallel \\
 K^Z & \xrightarrow{\tilde{\beta}^Z} & E & \xrightarrow{\tilde{\alpha}^Z} & Y
 \end{array} \tag{2.2.3}$$

Notemos que $K^Y \in \mathcal{B}_{k-1}^\wedge$ ya que $K^X, K^Z \in \mathcal{B}_{k-1}^\wedge$ y \mathcal{B}_{k-1}^\wedge es cerrada por extensiones. Por lo tanto, usando que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, \mathcal{B}_{k-1}^\wedge) = 0$, se sigue que el renglón central de (2.2.3) es una $(\mathcal{A}, k, \mathcal{B})$ -precubierta especial de Y . \square

Observación 2.13. *La clausura por extensiones para la clase $\text{Prec}^n(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ no se considera en el resultado anterior. Esto se estudiará en la Sección 2.3.*

Para el Teorema 2.12 requerimos la hipótesis de que \mathcal{B}_{k-1}^\wedge sea cerrada por extensiones. En el siguiente resultado, damos una condición suficiente para garantizar esta propiedad.

Lema 2.14. *Sean k un entero positivo y \mathcal{B} una clase de objetos de \mathcal{C} cerrada por extensiones. Si $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{B}, \mathcal{B}_{k-1}^\wedge) = 0$, entonces \mathcal{B}_{k-1}^\wedge es cerrada por extensiones.*

Demostración. Consideremos una sucesión exacta corta en \mathcal{C}

$$\eta: 0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0,$$

con $X, Z \in \mathcal{B}_{k-1}^\wedge$. Probaremos que $\text{resdim}_{\mathcal{B}}(Y) \leq \text{resdim}_{\mathcal{B}}(Z)$. Para probar esto, usaremos inducción en $m := \text{resdim}_{\mathcal{B}}(X)$.

- Para el caso inicial, supongamos $m = 0$. Si $\text{resdim}_{\mathcal{B}}(Z) = 0$, se sigue que $Y \in \mathcal{B}$ y entonces $\text{resdim}_{\mathcal{B}}(Y) = 0 = \text{resdim}_{\mathcal{B}}(Z)$, ya que \mathcal{B} es cerrada por extensiones. Podemos suponer que $\text{resdim}_{\mathcal{B}}(Z) \geq 1$. Entonces, existe una sucesión exacta

$$\delta: 0 \rightarrow Z' \rightarrow B_0 \rightarrow Z \rightarrow 0,$$

donde $\text{resdim}_{\mathcal{B}}(Z') + 1 = \text{resdim}_{\mathcal{B}}(Z)$ y $B_0 \in \mathcal{B}$. Tomando el pullback de $Y \rightarrow Z \leftarrow B_0$ obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones y columnas exactas:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z' & \xlongequal{\quad} & Z' \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 X & \longrightarrow & L & \longrightarrow & B_0 \\
 \parallel & & \downarrow & \text{pb} & \downarrow \\
 X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z
 \end{array} \tag{2.2.4}$$

Notemos que $L \in \mathcal{B}$, ya que \mathcal{B} es cerrada por extensiones. Luego, de la columna central en (2.2.4), obtenemos la desigualdad $\text{resdim}_{\mathcal{B}}(Y) \leq 1 + \text{resdim}_{\mathcal{B}}(Z') = \text{resdim}_{\mathcal{B}}(Z)$. Por lo tanto, tenemos $Y \in \mathcal{B}_{k-1}^{\wedge}$.

- Para el paso inductivo, sea $1 \leq m \leq k - 1$. Supongamos que para cualquier sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow X' \rightarrow Y' \rightarrow Z' \rightarrow 0,$$

con $X', Z' \in \mathcal{B}_{k-1}^{\wedge}$ y $\text{resdim}_{\mathcal{B}}(X') < m$ se tiene que $\text{resdim}_{\mathcal{B}}(Y') \leq \text{resdim}_{\mathcal{B}}(Z')$.

Ahora para Z que aparece en η , consideremos una sucesión exacta corta como δ . Tomemos el pullback de $Y \rightarrow Z \leftarrow B_0$ para construir un diagrama como en (2.2.4), y consideremos el renglón central y columna central resultantes:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon: 0 &\rightarrow X \rightarrow L \rightarrow B_0 \rightarrow 0, \\
 \tau: 0 &\rightarrow Z' \rightarrow L \rightarrow Y \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Como $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{B}, \mathcal{B}_{k-1}^{\wedge}) = 0$, la sucesión ε se escinde, y entonces $L = X \oplus B_0$. Por otra parte, consideremos una sucesión exacta corta

$$\varepsilon': 0 \rightarrow X' \rightarrow B_1 \rightarrow X \rightarrow 0$$

con $B_1 \in \mathcal{B}$ y $\text{resdim}_{\mathcal{B}}(X') + 1 = \text{resdim}_{\mathcal{B}}(X)$, y formemos la sucesión exacta

$$\varepsilon'': 0 \rightarrow X' \rightarrow B_1 \oplus B_0 \rightarrow X \oplus B_0 \rightarrow 0$$

sumando a ε' la identidad en B_0 . Ahora, tomemos el pullback de $Z' \rightarrow X \oplus B_0 \leftarrow B_1 \oplus B_0$ para obtener el siguiente diagrama conmutativo con renglones y columnas exactas:

$$\begin{array}{ccccc}
 X' & \xlongequal{\quad} & X' & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 Y' & \longrightarrow & B_1 \oplus B_0 & \longrightarrow & Y \\
 \downarrow & \text{pb} & \downarrow & & \parallel \\
 Z' & \longrightarrow & X \oplus B_0 & \longrightarrow & Y
 \end{array} \tag{2.2.5}$$

Notemos que $X', Z' \in \mathcal{B}_{k-1}^\wedge$ y $\text{resdim}_{\mathcal{B}}(X') < m$ en la primera columna de (2.2.5), entonces podemos aplicar hipótesis de inducción para concluir que $\text{resdim}_{\mathcal{B}}(Y') \leq \text{resdim}_{\mathcal{B}}(Z')$. Por otra parte, $B_1 \oplus B_0 \in \mathcal{B}$ y entonces tenemos que

$$\text{resdim}_{\mathcal{B}}(Y) \leq \text{resdim}_{\mathcal{B}}(Y') + 1 \leq \text{resdim}_{\mathcal{B}}(Z') + 1 = \text{resdim}_{\mathcal{B}}(Z).$$

Por lo tanto, $Y \in \mathcal{B}_{k-1}^\wedge$.

□

La condición $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{B}, \mathcal{B}_{k-1}^\wedge) = 0$ en el Lema 2.14 podría parecer difícil de satisfacer para una clase $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ cerrada por extensiones. Sin embargo, podemos encontrar clases que satisfacen esta condición, tales como las subcategorías m -rígidas. Siguiendo [Iya11, Definición 1.1], para un entero $m \geq 1$, decimos que una subcategoría $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ es m -rígida si $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{D}, \mathcal{D}) = 0$ para cada $0 < i < m$.

Probaremos la siguiente caracterización de subcategorías m -rígidas la cual involucra las hipótesis del Lema 2.14.

Proposición 2.15. *Si \mathcal{D} es m -rígida para algún $m \geq 2$, entonces la igualdad $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{D}, \mathcal{D}_{k-1}^\wedge) = 0$ se cumple para cada $1 \leq k \leq m - 1$. Más aún, si \mathcal{C} tiene suficientes inyectivos e $\mathcal{I}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{D}$, entonces la implicación contraria también se cumple. Esto es, si existe $m \geq 2$ tal que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{D}, \mathcal{D}_{k-1}^\wedge) = 0$ para cada $1 \leq k \leq m - 1$, entonces \mathcal{D} es m -rígida.*

Demostración. La implicación directa se sigue por la Proposición 2.6. Ahora, para el recíproco donde \mathcal{C} tiene suficientes inyectivos e $\mathcal{I}(R) \subseteq \mathcal{D}$, supongamos que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{D}, \mathcal{D}_{k-1}^\wedge) = 0$ para cada $0 \leq k-1 \leq m-2$. Para $0 < i < m$, tenemos que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(D, D') \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(D, K)$ donde $D, D' \in \mathcal{D}$ y K es una $(i-1)$ -cosizigia inyectiva de D' . Notemos que $K \in \mathcal{D}_{i-1}^\wedge$, y entonces por hipótesis se sigue que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(D, K) = 0$, esto es, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(D, D') = 0$. Por lo tanto, \mathcal{D} es m -rígida. \square

Corolario 2.16. *Sea \mathcal{D} una clase m -rígida cerrada por coproductos finitos y con $m \geq 2$. Entonces, la clase \mathcal{D}_k^\wedge es cerrada por extensiones, para cada $0 \leq k \leq m-2$.*

Demostración. Notemos que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{D}, \mathcal{D}) = 0$ y que \mathcal{D} sea cerrada por coproductos finitos implica que \mathcal{D} es cerrada por extensiones. Entonces, el resultado se sigue del Lema 2.14 y la Proposición 2.15. \square

Observación 2.17. *Bajo las hipótesis del Teorema 2.12, dada una sucesión exacta corta*

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$$

donde X y Z tienen una $(\mathcal{A}, n, \mathcal{B})$ -precubierta especial, digamos

$$\begin{aligned} \rho_X: 0 &\rightarrow B_{n-1}^X \xrightarrow{\beta_{n-1}^X} B_{n-2}^X \rightarrow \cdots \rightarrow B_1^X \xrightarrow{\beta_1^X} B_0^X \xrightarrow{\beta_0^X} A^X \xrightarrow{\alpha^X} X \rightarrow 0, \\ \rho_Z: 0 &\rightarrow B_{n-1}^Z \xrightarrow{\beta_{n-1}^Z} B_{n-2}^Z \rightarrow \cdots \rightarrow B_1^Z \xrightarrow{\beta_1^Z} B_0^Z \xrightarrow{\beta_0^Z} A^Z \xrightarrow{\alpha^Z} Z \rightarrow 0, \end{aligned}$$

es posible en algunos casos construir una $(\mathcal{A}, n, \mathcal{B})$ -precubierta especial de Y compatible con ρ_X y ρ_Z , esto es, una sucesión exacta

$$\rho_Y: 0 \rightarrow B_{n-1}^Y \xrightarrow{\beta_{n-1}^Y} B_{n-2}^Y \rightarrow \cdots \rightarrow B_1^Y \xrightarrow{\beta_1^Y} B_0^Y \xrightarrow{\beta_0^Y} A^Y \xrightarrow{\alpha^Y} Y \rightarrow 0$$

junto con un diagrama conmutativo con renglones y columnas exactas:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 B_{n-1}^X & \xrightarrow{\beta_{n-1}^X} & B_{n-2}^X & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & B_1^X & \xrightarrow{\beta_1^X} & B_0^X & \xrightarrow{\beta_0^X} & A^X & \xrightarrow{\alpha^X} & X \\
 \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_{n-2} & & & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow \hat{f} & & \downarrow f \\
 B_{n-1}^Y & \xrightarrow{\beta_{n-1}^Y} & B_{n-2}^Y & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & B_1^Y & \xrightarrow{\beta_1^Y} & B_0^Y & \xrightarrow{\beta_0^Y} & A^Y & \xrightarrow{\alpha^Y} & Y \\
 \downarrow g_{n-1} & & \downarrow g_{n-2} & & & & \downarrow g_1 & & \downarrow g_0 & & \downarrow \hat{g} & & \downarrow g \\
 B_{n-1}^Z & \xrightarrow{\beta_{n-1}^Z} & B_{n-2}^Z & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & B_1^Z & \xrightarrow{\beta_1^Z} & B_0^Z & \xrightarrow{\beta_0^Z} & A^Z & \xrightarrow{\alpha^Z} & Z
 \end{array} \tag{2.2.6}$$

Para probar esta afirmación, necesitamos un análogo de pares de cotorsión hereditarios para pares de n -cotorsión izquierdos, los cuales serán presentados en la Sección 2.3.

Por ahora, podemos mostrar el caso $n = 1$. Esto es, dadas dos clases de objetos A y B en \mathcal{C} , cerradas por extensiones, tales que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^2(A, B) = 0$. Siguiendo la prueba del Teorema 2.12, tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$$

donde X y Z tienen \mathcal{A} -precubiertas especiales con núcleo en \mathcal{B} , digamos:

$$\begin{aligned}
 \rho_X: 0 &\rightarrow B^X \xrightarrow{\beta^X} A^X \xrightarrow{\alpha^X} X \rightarrow 0, \\
 \rho_Z: 0 &\rightarrow B^Z \xrightarrow{\beta^Z} A^Z \xrightarrow{\alpha^Z} Z \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

De los diagramas (2.2.1), (2.2.2) y (2.2.3), construimos el siguiente diagrama conmutativo con renglones y columnas exactas:

$$\begin{array}{ccccc}
 B^X & \xrightarrow{\beta^X} & A^X & \xrightarrow{\alpha^X} & X \\
 \tilde{f} \downarrow & & \hat{f} \downarrow & & \downarrow f \\
 B^Y & \xrightarrow{\beta^Y} & A^Y & \xrightarrow{\alpha^Y} & Y \\
 \tilde{g} \downarrow & & \hat{g} \downarrow & & \downarrow g \\
 B^Z & \xrightarrow{\beta^Z} & A^Z & \xrightarrow{\alpha^Z} & Z
 \end{array} \tag{2.2.7}$$

Veamos que (2.2.7) conmuta:

$$\begin{aligned}
 \beta^Y \circ \tilde{f} &= \bar{\beta}^X = \hat{f} \circ \beta^X && (\text{por (2.2.3) y (2.2.2)}), \\
 \alpha^Y \circ \hat{f} &= \tilde{\alpha}^Z \circ \bar{\alpha}^X \circ \hat{f} = \tilde{\alpha}^Z \circ \bar{f} \circ \alpha^X = f \circ \alpha^X && (\text{por (2.2.3), (2.2.2) y (2.2.1)}), \\
 \beta^Z \circ \tilde{g} &= \bar{g} \circ \tilde{\beta}^Z \circ \tilde{g} = \bar{g} \circ \bar{\alpha}^X \circ \beta^Y = \hat{g} \circ \beta^Y && (\text{por (2.2.1), (2.2.3) y (2.2.2)}), \\
 \alpha^Z \circ \hat{g} &= \alpha^Z \circ \bar{g} \circ \bar{\alpha}^X = g \circ \tilde{\alpha}^Z \circ \bar{\alpha}^X = g \circ \alpha^Y && (\text{por (2.2.2), (2.2.1) y (2.2.3)}).
 \end{aligned}$$

Corolario 2.18. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de n -cotorsión izquierdo en \mathcal{C} con $n \geq 2$, tal que:

- (i) \mathcal{B} es cerrada por coproductos finitos en \mathcal{C} , y
- (ii) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{B}, \mathcal{B}_{k-1}^{\wedge}) = 0$ para cualquier $1 \leq k \leq \max(1, n-1)$.

Entonces, la clase $\text{Prec}^k(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es cerrada por extensiones para cualquier $1 \leq k \leq \max(1, n-1)$.

Demostración. Primero, notemos que como \mathcal{B} es cerrada por coproductos finitos en \mathcal{C} y $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{B}, \mathcal{B}_0^{\wedge}) = 0$, se sigue que \mathcal{B} es cerrada por extensiones. Más aún, del Lema 2.14 obtenemos que $\mathcal{B}_{k-1}^{\wedge}$ es cerrada por extensiones. Por otra parte, el Teorema 2.7 nos permite concluir que \mathcal{A} es también cerrada por extensiones. Por lo tanto, el Teorema 2.12 nos da el resultado. \square

n -Cotorsión y aproximaciones con la propiedad de factorización única

Ahora estudiaremos la relación entre cotorsión elevada y aproximaciones con la propiedad de factorización única. Este tema ha sido abordado en otros contextos de cotorsión elevada. Por ejemplo, Crivei y Torrecillas consideraron (m, n) -pares de cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en categorías de Grothendieck \mathcal{G} con suficientes proyectivos, y estudiaron algunas condiciones bajo las cuales es posible obtener precubiertas especiales con la propiedad de factorización única. A saber, ellos probaron en [CT08, Teorema 3.15], entre otras caracterizaciones, que cada objeto en \mathcal{G} tiene una $\mathcal{A}^{\perp_{n+1}}$ -preenvolvente con la propiedad de factorización única si, y solo si, $\mathcal{G} = \mathcal{A}^{\perp_{n+1}}$.

Recordemos que una \mathcal{A} -precubierta $f: A \rightarrow C$ de $C \in \mathcal{C}$ tiene la *propiedad de factorización única* si para cada morfismo $f': A' \rightarrow C$ con $A' \in \mathcal{A}$ existe un único morfismo $h: A' \rightarrow A$ tal que $f' = f \circ h$. La noción de

\mathcal{A} -preenvolvente con la propiedad de factorización única se define de manera dual.

La importancia de la propiedad de factorización única radica en sus aplicaciones, las cuales van desde la descripción de ciertas categorías de módulos, a caracterizaciones de anillos que involucran su dimensión global o su dimensión débil. Una de estas aplicaciones tiene relación con la existencia de envolventes planas. Específicamente, J. Asensio Mayor y J. Martínez Hernández probaron en [AM93, Proposición 2.1] que para cualquier anillo R , cada módulo tiene una envolvente plana con la propiedad de factorización única si, y solo si, R es coherente derecho y con dimensión débil $\text{wd}(R) \leq 2$. La versión dual de este resultado fue probada por L. Mao y N. Ding en [MD07b, Corolario 2.4], esto es, la última condición es también equivalente a decir que cada R -módulo derecho tiene una cubierta absolutamente pura con la propiedad de factorización única. Una pregunta interesante acerca de la clase $\mathcal{AP}(R)$ de R -módulos absolutamente puros (también conocidos como R -módulos FP-inyectivos) es si ésta es cerrada por límites directos. L. Mao y N. Ding también probaron en [MD07a, Proposición 6.7] que si cada módulo tiene una cubierta absolutamente pura con la propiedad de factorización única, entonces $\mathcal{AP}(R)$ es cerrada por límites directos. Hay también otras caracterizaciones de la dimensión débil de anillos coherentes que envuelve la propiedad de factorización única con respecto a envolventes planas y proyectivas (ver [Din96, Corolarios 3.4 y 3.9], también por Ding).

En las siguientes líneas, damos otras condiciones, dentro del contexto de pares de n -cotorsión, bajo las cuales podemos obtener aproximaciones con la propiedad de factorización única. Los resultados obtenidos en esta dirección serán aplicados en la Sección 2.3 para decir más acerca de [MD07b, Corolario 2.4] de L. Mao y N. Ding, y en la Sección 2.4 en el campo de Álgebra Homológica Gorenstein, donde extendemos algunos resultados respecto a envolventes Gorenstein proyectivas y cubiertas Gorenstein inyectivas con la propiedad de factorización única.

Recordemos que las clases \mathcal{B}_k^\wedge juegan un papel importante en el concepto de par de n -cotorsión izquierdo $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en categorías abelianas. En el estudio de aproximaciones con la propiedad de factorización única, necesitaremos considerar las clases \mathcal{A}_k^\wedge en su lugar. Empecemos probando las siguientes dos propiedades.

Proposición 2.19. *Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos clases de objetos de \mathcal{C} tales que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ para cada $1 \leq i \leq n$. Entonces, la contención $\mathcal{A}_k^\wedge \subseteq {}^{\perp_{k+1}}\mathcal{B}$ es cierta para cada $0 \leq k \leq n - 1$.*

Demostración. Usaremos inducción sobre k . El caso $k = 0$ es claro. Supongamos que $k \geq 1$ y que la contención $\mathcal{A}_j^\wedge \subseteq {}^{\perp_{j+1}}\mathcal{B}$ es cierta para cada $0 \leq j < k \leq n - 1$. Sea $M \in \mathcal{A}_k^\wedge$. Consideremos una sucesión exacta corta

$$\eta: 0 \rightarrow K \rightarrow A \rightarrow M \rightarrow 0$$

con $A \in \mathcal{A}$ y $K \in \mathcal{A}_{k-1}^\wedge$. Por hipótesis de inducción, $K \in {}^{\perp_k}\mathcal{B}$. Luego, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(K, \mathcal{B}) = 0$. Aplicando $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{B})$ a η , obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(K, \mathcal{B}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{k+1}(M, \mathcal{B}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{k+1}(A, \mathcal{B})$$

de grupos abelianos donde $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{k+1}(A, \mathcal{B}) = 0$ ya que $0 \leq k \leq n - 1$. Por lo tanto, $M \in {}^{\perp_{k+1}}\mathcal{B}$ y la contención $\mathcal{A}_k^\wedge \subseteq {}^{\perp_{k+1}}\mathcal{B}$ es cierta. \square

Proposición 2.20. *Las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier par de n -cotorsión izquierdo $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en \mathcal{C} :*

- (a) $\mathcal{A} = {}^{\perp_1}\mathcal{B}$.
- (b) La igualdad ${}^{\perp_{k+1}}\mathcal{B} = \mathcal{A}_k^\wedge$ se cumple para cada $0 \leq k \leq n - 1$.

Demostración. La implicación (b) \Rightarrow (a) se sigue tomando $k := 0$, ya que $\mathcal{A}_0^\wedge = \mathcal{A}$.

Ahora, si suponemos la condición (a), el caso $k = 0$ es claro. Entonces, podemos suponer que $k \geq 1$. La contención $\mathcal{A}_k^\wedge \subseteq {}^{\perp_{k+1}}\mathcal{B}$ se sigue por la Proposición 2.19. Para la otra contención $\mathcal{A}_k^\wedge \supseteq {}^{\perp_{k+1}}\mathcal{B}$, consideremos un objeto $M \in {}^{\perp_{k+1}}\mathcal{B}$. Como \mathcal{A} es precubriente, por la Proposición 2.8, podemos construir una sucesión exacta de la forma

$$0 \rightarrow K \rightarrow A_{k-1} \rightarrow \cdots \rightarrow A_1 \rightarrow A_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

donde $A_j \in \mathcal{A}$ para cada $0 \leq j \leq k - 1$. Usando que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ para cada $1 \leq i \leq n$, junto el Lema del Corrimiento, obtenemos que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(K, \mathcal{B}) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{k+1}(M, \mathcal{B}) = 0$ y entonces $K \in {}^{\perp_1}\mathcal{B} = \mathcal{A}$. Por lo tanto, $M \in \mathcal{A}_k^\wedge$. \square

Observación 2.21. *Dado un par de n -cotorsión izquierdo $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en \mathcal{C} , uno se puede preguntar por los posibles casos donde la condición (a) de la proposición anterior se satisface.*

La situación más obvia es cuando $n = 1$, ya que obtenemos por el Teorema 2.7 que $\mathcal{A} = {}^{\perp 1}\mathcal{B}$, esto es, tenemos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión izquierdo completo en \mathcal{C} .

La igualdad $\mathcal{A} = {}^{\perp 1}\mathcal{B}$ no es necesariamente cierta si $n \geq 2$, como por ejemplo en el par de n -cotorsión izquierdo $(\mathcal{GP}(R), \mathcal{P}(R))$ en $\text{Mod}(R)$, con R un anillo n -Iwanaga-Gorenstein, considerado al principio de la Sección 2.4. Sin embargo, en el caso donde \mathcal{B} es cerrada por conúcleos de monomorfismos entre objetos de \mathcal{B} , sí se tiene que $\mathcal{A} = {}^{\perp 1}\mathcal{B}$.

En efecto, la inclusión $\mathcal{A} \subseteq {}^{\perp 1}\mathcal{B}$ se sigue de la condición $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$. Por otra parte, la hipótesis en \mathcal{B} implica que $\mathcal{B}_{n-1}^{\wedge} \subseteq \mathcal{B}$. Sea $C \in {}^{\perp 1}\mathcal{B}$. Como $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de n -cotorsión izquierdo, existe una sucesión exacta

$$\eta : 0 \rightarrow K \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow 0,$$

donde $K \in \mathcal{B}$ y $A \in \mathcal{A}$. Luego, η se escinde y entonces $C \in \mathcal{A}$, probando que $\mathcal{A} = {}^{\perp 1}\mathcal{B}$.

En [CT08, dual de Proposición 3.3], S. Crivei y B. Torrecillas probaron que para cualquier clase de objetos \mathcal{B} de \mathcal{C} , en una categoría abeliana con suficientes proyectivos \mathcal{C} , si cada objeto de \mathcal{C} tiene una ${}^{\perp k+1}\mathcal{B}$ -precubierta con la propiedad de factorización única, entonces $\mathcal{C} = {}^{\perp k+1}\mathcal{B}$. Este hecho se extiende en el siguiente resultado usando la Proposición 2.20. Más aún, veremos que las consecuencias de que la igualdad $\mathcal{A} = {}^{\perp 1}\mathcal{B}$ se cumpla para un par de n -cotorsión izquierdo $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en \mathcal{C} tienen un fuerte impacto en cómo \mathcal{C} puede ser descrita en términos de dimensiones homológicas relativas.

Corolario 2.22. *Sea \mathcal{C} una categoría abeliana con suficientes proyectivos, y $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de n -cotorsión izquierdo en \mathcal{C} . Si la igualdad $\mathcal{A} = {}^{\perp 1}\mathcal{B}$ se cumple, entonces las siguientes condiciones son equivalentes, para cualquier entero $0 \leq k \leq n - 1$:*

- (a) *Cada objeto en \mathcal{C} tiene una ${}^{\perp k+1}\mathcal{B}$ -precubierta con la propiedad de factorización única.*
- (b) *$\text{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) \leq k$.*

$$(c) \mathcal{C} = {}^{\perp_{k+1}}\mathcal{B}.$$

Demostración. Se sigue de [CT08, dual de Proposición 3.3] y la Proposición 2.20. \square

Observación 2.23. *La equivalencia (a) \Leftrightarrow (c) del Corolario 2.22 también es demostrada en [CT08, dual de Teorema 3.7] bajo diferentes condiciones. A saber, los autores trabajan en el caso donde \mathcal{C} es una categoría de Grothendieck con suficientes proyectivos. También la clase \mathcal{B} no necesita ser parte de un par de n -cotorsión en esta referencia.*

El Corolario 2.22 establece algunas condiciones bajo las cuales es posible construir, a partir de un par de n -cotorsión izquierdo de la forma $({}^{\perp_1}\mathcal{B}, \mathcal{B})$, aproximaciones derechas con la propiedad de factorización única. Respecto a aproximaciones izquierdas, tenemos lo siguiente.

Corolario 2.24. *Sea \mathcal{C} una categoría abeliana con suficientes proyectivos y $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de n -cotorsión izquierdo con $n \geq 3$. Si la igualdad $\mathcal{A} = {}^{\perp_1}\mathcal{B}$ se cumple, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) *Cada objeto en \mathcal{C} tiene una \mathcal{A} -envolvente con la propiedad de factorización única.*
- (b) *Cada objeto en \mathcal{C} tiene una \mathcal{A} -envolvente y $\text{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) \leq 2$.*

Demostración. Primero, por la Proposición 2.8, tenemos que \mathcal{A} es una clase precubriente especial. Más aún, por el Teorema 2.7, $\mathcal{A} = {}^{\perp_1}\mathcal{B} \subseteq {}^{\perp_i}\mathcal{B}$ para $i = 2, 3$ ya que $n \geq 3$. Luego, por la Proposición 2.20 tenemos que ${}^{\perp_3}\mathcal{B} = \mathcal{A}_2^{\wedge}$. Por lo tanto, el resultado se sigue de [CT08, dual de Teorema 3.16]. \square

2.3. n -Cotorsión y pares de cotorsión hereditarios

En esta sección analizamos los pares de n -cotorsión (izquierdos o derechos) $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en \mathcal{C} donde \mathcal{A} es una clase resolvente o \mathcal{B} una clase correzolvente. Esto, será presentado en tres enfoques. Primero, estudiamos la relación entre pares de n -cotorsión (izquierdos y derechos) y pares de cotorsión hereditarios. Veremos que los únicos pares de n -cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ con \mathcal{A} resolvente son precisamente los pares de cotorsión completos y hereditarios. Luego, estudiaremos los pares de cotorsión hereditarios $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$

que satisfacen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, y daremos algunas caracterizaciones de ellos. Esto nos permitirá mostrar que el único par de n -cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ con \mathcal{A} resolvente y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ es el par de n -cotorsión trivial $(\mathcal{P}(\mathcal{C}), \mathcal{C})$ del Ejemplo 2.3. Lo anterior sugiere que ser hereditario en cotorsión elevada debe ser una noción unilateral. En la última parte de esta sección proponemos el concepto de par de n -cotorsión izquierdo hereditario, y probamos que para tales pares la clase $\text{Prec}^n(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es cerrada por extensiones (ver la Observación 2.13). Este resultado nos ayudará a construir ciertos pares de n -cotorsión de complejos de cadena de un par de n -cotorsión en \mathcal{C} .

Recordemos que un par de cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en una categoría abeliana \mathcal{C} es *hereditario* si \mathcal{A} es resolvente y \mathcal{B} corresolvente. El término *resolvente* significa que \mathcal{A} es cerrada por extensiones y por núcleos de epimorfismos entre sus objetos, y que la clase $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ de objetos proyectivos de \mathcal{C} está contenida en \mathcal{A} . La noción de clase corresolvente se define de manera dual.

Se sabe que en una categoría abeliana \mathcal{C} con suficientes inyectivos (por ejemplo una categoría de Grothendieck), para cualquier par de cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en \mathcal{C} , \mathcal{B} es corresolvente si, y solo si, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^2(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$. Dualmente, la última condición es también equivalente a que \mathcal{A} sea una clase resolvente cuando \mathcal{C} tiene suficientes proyectivos. Para pares de n -cotorsión, con $n \geq 2$, obtenemos una equivalencia similar sin tener o bien suficientes proyectivos o bien suficientes inyectivos, como lo muestra el siguiente resultado.

Proposición 2.25. *Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos clases de objetos de \mathcal{C} , y $n \geq 2$ un entero positivo. Consideremos las siguientes condiciones.*

- (a) $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de n -cotorsión en \mathcal{C} y \mathcal{B} es una clase corresolvente.
- (b) $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de n -cotorsión en \mathcal{C} y \mathcal{A} es una clase resolvente.
- (c) $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión completo y hereditario en \mathcal{C} .

Entonces, las condiciones (a) y (b) son equivalentes, y cualquiera de ellas implica (c). Si además, \mathcal{C} tiene suficientes proyectivos o inyectivos, entonces (c) también implica (a) y (b).

Demostración. Primero probemos que (a) y (b) son equivalentes. Supongamos que (a) se satisface, entonces $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de n -cotorsión con

\mathcal{B} corresolvente. Por el Teorema 2.7, $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_{n-1}^\wedge)$ es un par de cotorsión izquierdo completo, donde $\mathcal{B}_{n-1}^\wedge = \mathcal{B}$ ya que \mathcal{B} es corresolvente. Se sigue que $\mathcal{A} = {}^\perp\mathcal{B}$, y luego es claro que $\mathcal{P}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}$ y que \mathcal{A} es cerrada por extensiones.

(*) Para probar que \mathcal{A} es cerrada por núcleos de epimorfismos entre objetos de \mathcal{A} , supongamos que

$$0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta con $A_2, A_3 \in \mathcal{A}$. Para cada $B \in \mathcal{B}$, tenemos una sucesión exacta

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A_2, B) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A_1, B) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^2(A_3, B),$$

donde $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A_2, B) = 0$ y $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^2(A_3, B) = 0$ ya que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de n -cotorsión con $n \geq 2$. Se sigue que $A_1 \in {}^\perp\mathcal{B} = \mathcal{A}$. Por lo tanto, \mathcal{A} es resolvente. La prueba de (b) \Rightarrow (a) es similar.

Notemos que si suponemos (a) o (b), obtenemos un par de cotorsión izquierdo y derecho completo $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, esto es, un par de cotorsión completo en \mathcal{C} , el cual es hereditario.

Ahora, supongamos que (c) se cumple y que \mathcal{C} tiene suficientes proyectivos o inyectivos. Veamos que esto implica $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ para cada $i \geq 1$. En efecto, consideremos el caso en que \mathcal{C} tiene suficientes inyectivos. Luego, tenemos que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(A, B) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, K)$ donde $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$ y K es una $(i-1)$ -cosizigia inyectiva de B . Dado que \mathcal{B} es corresolvente se sigue que $K \in \mathcal{B}$ y $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, K) = 0$. Por lo tanto, repitiendo el procedimiento en (*) podemos concluir (c) \Rightarrow (a) y (c) \Rightarrow (b). \square

Notemos que la proposición anterior básicamente dice que no hay mucha esperanza en encontrar un par de n -cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en una categoría de Grothendieck con \mathcal{A} resolvente (y \mathcal{B} corresolvente) que no sea de hecho un par de cotorsión completo y hereditario. En la Sección 2.4, encontraremos algunos ejemplos de n -cotorsión que no provienen de tales pares de cotorsión.

Una primera aplicación de la Proposición 2.25 tiene que ver con extender el resultado [MD07a, Proposición 6.7] acerca de la existencia de cubiertas absolutamente puras con la propiedad de factorización única. Para precisar esto, necesitamos recordar algunos conceptos.

Sea R un anillo y $M \in \text{Mod}(R)$ un R -módulo. Recordemos que M es *absolutamente puro* (o *FP-inyectivo*) si $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(F, M) = 0$ para cada módulo $F \in \text{Mod}(R)$ finitamente presentado. En lo que sigue, denotaremos por $\mathcal{AP}(R)$ a la clase de R -módulos absolutamente puros. La *dimensión absolutamente pura* de M , denotada por $\text{apd}(M)$, se define como el menor entero no negativo $m \geq 0$ tal que $\text{Ext}_R^{m+1}(F, M) = 0$ para cada módulo $F \in \text{Mod}(R)$ finitamente presentado, o equivalentemente, como

$$\text{apd}(M) = \text{coresdim}_{\mathcal{AP}(R)}(M).$$

La *dimensión global absolutamente pura (izquierda)* de R , denotada por $\text{gl.APD}(R)$, se define como el supremo

$$\text{gl.APD}(R) := \sup\{\text{apd}(M) : M \in \text{Mod}(R)\}.$$

Los conceptos duales son la *dimensión plana* de M y la *dimensión global débil* de R , denotadas por $\text{fd}(M)$ y $\text{wd}(R)$, respectivamente.

Corolario 2.26. *Para cualquier anillo R con $\text{gl.APD}(R^{\text{op}}) \leq 2$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (a) *R es un anillo coherente derecho.*
- (b) *Cada R -módulo derecho tiene una cubierta absolutamente pura con la propiedad de factorización única.*

Más aún, si algunas de las condiciones anteriores se cumple, entonces $\text{wd}(R) \leq 2$ y la clase $\mathcal{AP}(R^{\text{op}})$ es cerrada por límites directos.

Demostración. Por una parte, si R es un anillo coherente derecho, entonces de [MD07a, Proposición 3.6] y [Pin08, Corolario 2.7], tenemos que $({}^{\perp 1}\mathcal{AP}(R^{\text{op}}), \mathcal{AP}(R^{\text{op}}))$ es un par de cotorsión completo y hereditario en $\text{Mod}(R^{\text{op}})$ y que cada R -módulo tiene una cubierta absolutamente pura. Luego, por la Proposición 2.25 y el dual del Corolario 2.24 tenemos la implicación (a) \Rightarrow (b). La implicación contraria, por otra parte, se sigue de [MD07a, Observación 6.8]. Finalmente, la segunda parte es consecuencia de [MD07a, Teorema 6.6 y Proposición 6.7]. \square

Corolario 2.27. *Para cualquier anillo R , las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) Cada R -módulo tiene una envolvente plana con la propiedad de factorización única.
- (b) Cada R -módulo tiene una envolvente plana y $\text{wd}(R) \leq 2$.
- (c) R es un anillo coherente derecho con $\text{wd}(R) \leq 2$.

Demostración. De [MD07a, Teorema 3.4], Proposición 2.25 y Corolario 2.24 tenemos la equivalencia (a) \Leftrightarrow (b), mientras que (a) \Leftrightarrow (c) se sigue de [AM93, Proposición 2.1]. \square

Otra aplicación de la Proposición 2.25, junto con la Proposición 2.20 y su dual, tiene que ver con descripciones para las clases \mathcal{A}_n^\wedge y \mathcal{B}_m^\vee provenientes de un par de cotorsión completo y hereditario $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Corolario 2.28. *Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de cotorsión completo y hereditario en una categoría \mathcal{C} con suficientes proyectivos e inyectivos. Entonces, para cualquier par de enteros $m, n \geq 0$, las igualdades $\mathcal{A}^{\perp_{m+1}} = \mathcal{B}_m^\vee$ y ${}^{\perp_{n+1}}\mathcal{B} = \mathcal{A}_n^\wedge$ son ciertas.*

Ahora, estudiaremos los pares de n -cotorsión que satisfacen la condición $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.

Proposición 2.29. *Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de n -cotorsión en \mathcal{C} . Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.
- (b) $\mathcal{C} = \mathcal{B}_n^\wedge$.
- (c) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}_{n-1}^\vee, \mathcal{A}) = 0$.

Demostración. Primero probemos (a) \Leftrightarrow (b). La implicación (a) \Rightarrow (b) se sigue de la Definición 2.2. Ahora bien, supongamos que (b) $\mathcal{C} = \mathcal{B}_n^\wedge$ se satisface, y sea $A \in \mathcal{A}$. Entonces, A es isomorfo a la imagen de un epimorfismo de \mathcal{B} con núcleo en \mathcal{B}_{n-1}^\wedge . Por la Proposición 2.6, este epimorfismo se escinde, y por lo tanto $A \in \mathcal{B}$ ya que \mathcal{B} es cerrada por sumandos directos. Finalmente, la equivalencia (a) \Leftrightarrow (c) se sigue del dual del Teorema 2.7. \square

Podemos usar la proposición anterior para probar la siguiente generalización [AA02, Observación 2.4] de K. D. Akinci y R. Alizade.

Corolario 2.30. *Para un par de cotorsión completo y hereditario $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, en una categoría abeliana \mathcal{C} las siguientes condiciones son equivalentes.*

- (a) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.
- (b) $\mathcal{C} = \mathcal{B}$.
- (c) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0$.
- (d) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathcal{C})$.

Demostración. Notemos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de 1-cotorsión en \mathcal{C} con $\mathcal{B}_1^\wedge = \mathcal{B}$ y $\mathcal{A}_1^\vee = \mathcal{A}$. Luego, por la Proposición 2.29 tenemos las equivalencias entre (a), (b) y (c). La equivalencia entre (b) y (d), por otra parte, se sigue de las igualdades ${}^{\perp 1}\mathcal{C} = \mathcal{P}(\mathcal{C})$ y $\mathcal{P}(\mathcal{C})^{\perp 1} = \mathcal{C}$. \square

Observación 2.31.

- (1) *Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de n -cotorsión en una categoría abeliana \mathcal{C} , con $n \geq 2$ y \mathcal{A} resolvente (o \mathcal{B} corresolvente). Entonces, por la Proposición 2.25, sabemos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión completo y hereditario en \mathcal{C} . Luego, por el Corolario 2.30, tenemos las equivalencias*

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C} = \mathcal{B} \Leftrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathcal{C}).$$

- (2) *Lo anterior implica que, en una categoría abeliana \mathcal{C} con suficientes proyectivos e inyectivos, el único par de n -cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ con \mathcal{A} resolvente que satisface $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ es el par de n -cotorsión trivial $(\mathcal{P}(\mathcal{C}), \mathcal{C})$.*

Estamos ahora listos para proponer la siguiente definición unilateral de par de n -cotorsión hereditario.

Definición 2.32. *Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de n -cotorsión izquierdo en \mathcal{C} . Decimos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es **hereditario** si $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n+1}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$. Los pares de n -cotorsión derechos hereditarios se definen de la misma manera.*

Podemos notar la siguiente propiedad para los pares de n -cotorsión izquierdos hereditarios.

Proposición 2.33. *Si $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de n -cotorsión izquierdo hereditario en \mathcal{C} , entonces la clase \mathcal{A} es resolvente.*

Demostración. Notemos por el Teorema 2.7 que $\mathcal{A} = \bigcap_{i=1}^n {}^{\perp i}\mathcal{B}$. Entonces, es claro que \mathcal{A} es cerrada por extensiones y que $\mathcal{P}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}$. Finalmente, si

$$0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta en \mathcal{C} con $A_2, A_3 \in \mathcal{A}$, entonces tenemos una sucesión exacta

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(A_2, B) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(A_1, B) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(A_3, B)$$

de grupos abelianos donde $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(A_2, B) = 0$ y $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(A_3, B) = 0$ para cada $1 \leq i \leq n$ ya que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es hereditario. Se sigue que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(A_1, B) = 0$ para cada $1 \leq i \leq n$ y $B \in \mathcal{B}$, esto es, $A_1 \in \bigcap_{i=1}^n {}^{\perp i}\mathcal{B} = \mathcal{A}$, y entonces \mathcal{A} es cerrada por núcleos de epimorfismos entre sus objetos. \square

Observación 2.34. *Notemos por la proposición anterior y su dual, esto es, $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de n -cotorsión (izquierdo y derecho) hereditario, entonces \mathcal{A} es resolvente y \mathcal{B} corresolvente. Entonces, el Teorema 2.7 y su dual implican que $\mathcal{A} = {}^{\perp 1}(\mathcal{B}_{n-1}^{\wedge})$ y $\mathcal{B} = (\mathcal{A}_{n-1}^{\vee})^{\perp 1}$, donde $\mathcal{B}_{n-1}^{\wedge} = \mathcal{B}$ y $\mathcal{A}_{n-1}^{\vee} = \mathcal{A}$. Por lo tanto, $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión completo y hereditario en \mathcal{C} . El recíproco de este hecho es claramente cierto en el caso donde \mathcal{C} tiene suficientes proyectivos e inyectivos.*

Teorema 2.35. *Sea $n \geq 2$ un entero positivo y $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de n -cotorsión izquierdo hereditario en \mathcal{C} con \mathcal{B} cerrada por extensiones y tal que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{B}, \mathcal{B}_{n-1}^{\wedge}) = 0$. Sea*

$$\eta: 0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$$

una sucesión exacta corta en \mathcal{C} donde X y Z tienen una $(\mathcal{A}, n, \mathcal{B})$ -precubierta especial ρ_X y ρ_Z como en la Observación 2.17. Entonces, Y tiene una $(\mathcal{A}, n, \mathcal{B})$ -precubierta especial ρ_Y compatible con ρ_X y ρ_Z en el sentido que hace conmutar el diagrama en (2.2.6). En particular, la clase $\text{Prec}^n(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es cerrada por extensiones.

Demostración. Para un mejor entendimiento de los argumentos que presentamos a continuación, solo probaremos el caso $n = 2$. Los casos más generales $n > 2$ se siguen inductivamente.

Dado que tenemos dos sucesiones exactas cortas

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow K^X &\xrightarrow{i^X} A^X \xrightarrow{\alpha^X} X \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow K^Z &\xrightarrow{i^Z} A^Z \xrightarrow{\alpha^Z} Z \rightarrow 0, \end{aligned}$$

donde $A^X, A^Z \in \mathcal{A}$ y $K^X, K^Z \in \mathcal{B}_1^\wedge$, también tenemos dos sucesiones exactas

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow B_1^X &\xrightarrow{\beta_1^X} B_0^X \xrightarrow{\gamma^X} K^X \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow B_1^Z &\xrightarrow{\beta_1^Z} B_0^Z \xrightarrow{\gamma^Z} K^Z \rightarrow 0, \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

con $B_0^X, B_0^Z, B_1^X, B_1^Z \in \mathcal{B}$. Siguiendo los mismos argumentos dados en la prueba del Teorema 2.12, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones y columnas exactas:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & X & \xlongequal{\quad} & X \\ & & & & \downarrow f' & & \downarrow f \\ B_1^Z & \xrightarrow{\hat{\beta}_1^Z} & B_0^Z & \xrightarrow{\hat{\beta}_0^Z} & Y' & \xrightarrow{\hat{\alpha}^Z} & Y \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow g' & \mathbf{pb} & \downarrow g \\ B_1^Z & \xrightarrow{\beta_1^Z} & B_0^Z & \xrightarrow{\beta_0^Z} & A^Z & \xrightarrow{\alpha^Z} & Z \end{array} \tag{2.3.2}$$

(donde $\beta_0^Z := i^Z \circ \gamma^Z$)

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & K^X & \xlongequal{\quad} & K^X \\ & & & & \downarrow i^X & & \downarrow \bar{i}^X \\ & & & & A^X & \xrightarrow{\hat{f}} & A^Y & \xrightarrow{\hat{g}} & A^Z \\ & & & & \downarrow \alpha^X & \mathbf{po} & \downarrow \bar{\alpha}^X & & \parallel \\ & & & & X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & A^Z \end{array} \tag{2.3.3}$$

(donde $A^Y \in \mathcal{A}$ ya que \mathcal{A} es cerrada por extensiones)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & K^X & \xlongequal{\quad} & K^X & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow \bar{i}^X & & \\
 B_1^Z & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & A^Y & \xrightarrow{\alpha^Y} & Y \\
 \parallel & & \downarrow & \text{pb} & \downarrow \bar{\alpha}^X & & \parallel \\
 B_1^Z & \xrightarrow{\hat{\beta}_1^Z} & B_0^Z & \xrightarrow{\hat{\beta}_0^Z} & Y' & \xrightarrow{\tilde{\alpha}^Z} & Y
 \end{array} \tag{2.3.4}$$

Como $B_0^Z \in \mathcal{B}$, $K^X \in \mathcal{B}_1^\wedge$ y $\text{Ext}_C^1(\mathcal{B}, \mathcal{B}_1^\wedge) = 0$, la columna $K^X \twoheadrightarrow Q \twoheadrightarrow B_0^Z$ se escinde y entonces $Q \simeq B_0^Z \oplus K^X$. Luego, el diagrama (2.3.4) se puede reescribir como:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & K^X & \xlongequal{\quad} & K^X & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow \bar{i}^X & & \\
 B_1^Z & \xrightarrow{\quad} & B_0^Z \oplus K^X & \xrightarrow{\begin{pmatrix} a & \bar{i}^X \end{pmatrix}} & A^Y & \xrightarrow{\alpha^Y} & Y \\
 \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} \text{id}_{B_0^Z} & 0 \end{pmatrix} & & \downarrow \bar{\alpha}^X & & \parallel \\
 B_1^Z & \xrightarrow{\hat{\beta}_1^Z} & B_0^Z & \xrightarrow{\hat{\beta}_0^Z} & Y' & \xrightarrow{\tilde{\alpha}^Z} & Y
 \end{array} \tag{2.3.5}$$

La existencia del morfismo $a: B_0^Z \rightarrow A^Y$ es una consecuencia de la construcción pullback, y satisface la relación

$$\bar{\alpha}^X \circ a = \hat{\beta}_0^Z. \tag{2.3.6}$$

Más aún, siguiendo los argumentos que muestran la conmutatividad del diagrama (2.2.7) en la Observación 2.17, tenemos el siguiente diagrama

conmutativo con renglones y columnas exactas:

$$\begin{array}{ccccc}
 K^X & \xrightarrow{\tilde{f}} & K^Y & \xrightarrow{\tilde{g}} & K^Z \\
 i^X \downarrow & & i^Y \downarrow & & i^Z \downarrow \\
 A^X & \xrightarrow{\hat{f}} & A^Y & \xrightarrow{\hat{g}} & A^Z \\
 \alpha^X \downarrow & & \alpha^Y \downarrow & & \alpha^Z \downarrow \\
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z
 \end{array} \tag{2.3.7}$$

Por otra parte, sumando la identidad $\text{id}_{B_0^Z}$ a la sucesión (2.3.1), obtenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow B_1^X \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ \beta_1^X \end{pmatrix}} B_0^Z \oplus B_0^X \xrightarrow{\begin{pmatrix} \text{id}_{B_0^Z} & 0 \\ 0 & \gamma^X \end{pmatrix}} B_0^Z \oplus K^X \rightarrow 0.$$

Ahora bien, tomemos el pullback de $B_1^Z \rightarrow B_0^Z \oplus K^X \leftarrow B_0^Z \oplus B_0^X$ para obtener el siguiente diagrama conmutativo con renglones y columnas exactas:

$$\begin{array}{ccccc}
 B_1^X & \xlongequal{\quad\quad\quad} & B_1^X & & \\
 f_1 \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_1^X \end{pmatrix} & & \\
 B_1^Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \beta_1^Z \circ g_1 \\ b \end{pmatrix}} & B_0^Z \oplus B_0^X & \xrightarrow{(c \quad \tilde{f} \circ \gamma^X)} & K^Y \\
 g_1 \downarrow & \text{pb} & \downarrow \begin{pmatrix} \text{id}_{B_0^Z} & 0 \\ 0 & \gamma^X \end{pmatrix} & & \parallel \\
 B_1^Z & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \beta_1^Z \\ 0 \end{pmatrix}} & B_0^Z \oplus K^X & \xrightarrow{(c \quad \tilde{f})} & K^Y
 \end{array} \tag{2.3.8}$$

donde $b: B_1^Y \rightarrow B_0^X$ y $c: B_0^Z \rightarrow K^Y$ son morfismos dados por la construcción pullback y satisfacen las siguientes relaciones:

$$b \circ f_1 = \beta_1^X, \tag{2.3.9}$$

$$c \circ \beta_1^Z = 0. \tag{2.3.10}$$

Finalmente, formemos el siguiente diagrama con renglones y columnas exactas:

$$\begin{array}{ccccccc}
 B_1^X & \xrightarrow{\beta_1^X} & B_0^X & \xrightarrow{\beta_0^X} & A^X & \xrightarrow{\alpha^X} & X \\
 \downarrow f_1 & \textcircled{1} & \downarrow \left(\begin{array}{c} 0 \\ \text{id}_{B_0^X} \end{array} \right) & \textcircled{2} & \downarrow \hat{f} & \textcircled{3} & \downarrow f \\
 B_1^Y & \xrightarrow{\left(\begin{array}{c} \beta_1^Z \circ g_1 \\ b \end{array} \right)} & B_0^Z \oplus B_0^X & \xrightarrow{\left(\begin{array}{c} a \\ \hat{f} \circ \beta_0^X \end{array} \right)} & A^Y & \xrightarrow{\alpha^Y} & Y \\
 \downarrow g_1 & \textcircled{4} & \downarrow \left(\begin{array}{c} \text{id}_{B_0^Z} \\ 0 \end{array} \right) & \textcircled{5} & \downarrow \hat{g} & \textcircled{6} & \downarrow g \\
 B_1^Z & \xrightarrow{\beta_1^Z} & B_0^Z & \xrightarrow{\beta_0^Z} & A^Z & \xrightarrow{\alpha^Z} & Z
 \end{array} \quad (2.3.11)$$

donde $\beta_0^X := i^X \circ \gamma^X$. La conmutatividad de los cuadrados $\textcircled{3}$ y $\textcircled{6}$ se tiene por el diagrama (2.3.7), mientras que para $\textcircled{2}$ y $\textcircled{4}$ es clara. Veamos que los cuadrados restantes también conmutan:

$\textcircled{1}$ Tenemos por la primera igualdad en (2.3.9) que

$$\left(\begin{array}{c} \beta_1^Z \circ g_1 \\ b \end{array} \right) \circ f_1 = \left(\begin{array}{c} \beta_1^Z \circ g_1 \circ f_1 \\ b \circ f_1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \beta_1^X \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \text{id}_{B_0^X} \end{array} \right) \circ \beta_1^X.$$

$\textcircled{5}$ Usando el diagrama (2.3.3), tenemos que $\hat{g} = g' \circ \bar{\alpha}^X$, y entonces $\hat{g} \circ a = g' \circ \bar{\alpha}^X \circ a$, donde $\bar{\alpha}^X \circ a = \hat{\beta}_0^Z$ por (2.3.6) y $g' \circ \hat{\beta}_0^Z = \beta_0^Z$ por (2.3.2). Luego,

$$\begin{aligned}
 \hat{g} \circ \left(\begin{array}{c} a \\ \hat{f} \circ \beta_0^X \end{array} \right) &= \left(\hat{g} \circ a \quad \hat{g} \circ \hat{f} \circ \beta_0^X \right) = \left(g' \circ \hat{\beta}_0^Z \quad 0 \right) \\
 &= \left(\beta_0^Z \quad 0 \right) = \beta_0^Z \circ \left(\begin{array}{c} \text{id}_{B_0^Z} \\ 0 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Notemos que $B_0^Z \oplus B_0^X, B_1^Y \in \mathcal{B}$ ya que \mathcal{B} es cerrada por extensiones. Por lo tanto, el renglón central de (2.3.11) es una $(\mathcal{A}, 2, \mathcal{B})$ -precubierta especial compatible con ρ_X y ρ_Z . \square

Observación 2.36. Podemos incluir el caso $n = 1$ en el teorema anterior, donde la hipótesis $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = 0$ no se requiere (ver Observación 2.17).

2.4. Aplicaciones y ejemplos

A continuación presentamos algunos ejemplos de pares de n -cotorsión (izquierdos y derechos) junto con algunas aplicaciones, las cuales están relacionadas con la caracterización de ciertos anillos así como también con encontrar cubiertas y envolventes con la propiedad de factorización única.

Para esto, necesitamos tener en cuenta un par de consideraciones. Denotaremos las dimensiones proyectiva e inyectiva de un objeto C en una categoría abeliana \mathcal{C} por $\text{pd}(C)$ y $\text{id}(C)$, respectivamente. Recordemos que $\text{pd}(C)$ está definida como el menor entero no negativo $m \geq 0$ tal que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C, C) = 0$ para cada $i > m$. Si tal m no existe, escribimos $\text{pd}(C) := \infty$. Notemos que si \mathcal{C} tiene suficientes proyectivos, entonces $\text{pd}(C)$ coincide con la dimensión de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ -resolución de C . Similarmente $\text{id}(C)$, definida de manera dual, coincide con la dimensión de $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ -corresolución de C en el caso donde \mathcal{C} tiene suficientes inyectivos.

Módulos Gorenstein proyectivos

Recordemos las clases $\mathcal{GP}(R)$ y $\mathcal{GI}(R)$ de R -módulos Gorenstein proyectivos y Gorenstein inyectivos del Ejemplo 2.11. Sobre un anillo arbitrario R , se sabe por [Hol04, Teorema 2.5] que $\mathcal{GP}(R)$ es cerrada por sumandos directos. Por otra parte, de [Hol04, Proposición 2.3] tenemos que $\text{Ext}_R^i(C, P) = 0$ para cada $C \in \mathcal{GP}(R)$, $P \in \mathcal{P}(R)$ e $i \geq 1$. Entonces $(\mathcal{GP}(R), \mathcal{P}(R))$ es un par de n -cotorsión izquierdo en $\text{Mod}(R)$ si, y solo si, cada módulo tiene una precubierta Gorenstein proyectiva especial cuyo núcleo tiene dimensión proyectiva a lo más $n-1$. La elección más obvia de un anillo R sobre el cual la última condición se cumple, es cuando R es un anillo n -Iwanaga-Gorenstein, esto es, R es un anillo noetheriano izquierdo y derecho con $\text{id}({}_R R) = \text{id}(R_R) = n$, donde ${}_R R$ denota a R como R -módulo izquierdo y R_R como R -módulo derecho, respectivamente. En tales anillos R , se sabe que cada módulo tiene dimensión Gorenstein proyectiva a lo más n . Por lo tanto, tenemos el siguiente ejemplo de un par de n -cotorsión izquierdo, el cual es también consecuencia de la Proposición 2.25, [Hov02, Teorema 8.3] y [Hol04, Teorema 2.5].

Ejemplo 2.37. *Sea R un anillo n -Iwanaga-Gorenstein con $n \geq 1$. Entonces, $(\mathcal{GP}(R), \mathcal{P}(R))$ es un par de n -cotorsión izquierdo y $(\mathcal{I}(R), \mathcal{GI}(R))$ es un par*

de n -cotorsión derecho en $\text{Mod}(R)$.

Para el caso $n = 0$, un anillo 0-Iwanaga-Gorenstein es justo un anillo quasi-Frobenius (o un anillo QF) por [Bla11, Proposición 10.2.14] de Bland (esto es, R es noetheriano izquierdo y derecho, y R es un R -módulo inyectivo, o equivalentemente, $\mathcal{P}(R) \subseteq \mathcal{I}(R)$ [Rot09, Proposición 4.39]). Más aún, $\mathcal{P}(R) = \mathcal{I}(R)$ y $\mathcal{P}(R^{\text{op}}) = \mathcal{I}(R^{\text{op}})$ por [Bla11, Proposición 10.2.15], si R es un anillo QF, y entonces cada módulo en $\text{Mod}(R)$ es Gorenstein proyectivo. Luego, en el caso $n = 0$, $(\mathcal{GP}(R), \mathcal{P}(R))$ y $(\mathcal{I}(R), \mathcal{GI}(R))$ coinciden con los pares de cotorsión triviales $(\text{Mod}(R), \mathcal{I}(R))$ y $(\mathcal{P}(R), \text{Mod}(R))$, respectivamente.

El ejemplo anterior no es necesariamente una equivalencia. De hecho, hay condiciones un poco más generales para R bajo las cuales el par $(\mathcal{GP}(R), \mathcal{P}(R))$ es todavía un par de n -cotorsión izquierdo en $\text{Mod}(R)$. Estas condiciones involucran las siguientes dos dimensiones homológicas:

$$\text{pd}(\mathcal{I}(R)) := \sup\{\text{pd}(I) : I \in \mathcal{I}(R)\}, \quad (2.4.1)$$

$$\text{id}(\mathcal{P}(R)) := \sup\{\text{id}(P) : P \in \mathcal{P}(R)\}. \quad (2.4.2)$$

Recordemos de [BR07b, Definiciones 2.1 and 2.5] que un anillo R es Gorenstein izquierdo si $\text{Mod}(R)$ es una categoría Gorenstein, esto es, si $\text{pd}(\mathcal{I}(R))$ e $\text{id}(\mathcal{P}(R))$ son ambas finitas. Cada anillo n -Iwanaga-Gorenstein es un anillo Gorenstein, sin embargo, el recíproco no es necesariamente cierto.

A continuación tenemos la siguiente caracterización y propiedades de anillos Gorenstein en términos de pares de n -cotorsión izquierdos y derechos que involucran a las clases $\mathcal{GP}(R)$, $\mathcal{GI}(R)$, $\mathcal{P}(R)$ e $\mathcal{I}(R)$, las dimensiones homológicas (2.4.1) y (2.4.2), y las dimensiones homológicas globales Gorenstein. Recordemos que la *dimensión global Gorenstein proyectiva (izquierda)* de un anillo R esta definida como el supremo

$$\text{gl.GPD}(R) := \sup\{\text{Gpd}(M) : M \in \text{Mod}(R)\}.$$

Dualmente, tenemos la *dimensión global Gorenstein inyectiva* $\text{gl.GID}(R)$ de R .

Proposición 2.38. *Las siguientes condiciones se satisfacen para cualquier anillo R :*

- (1) *Si $(\mathcal{GP}(R), \mathcal{P}(R))$ es un par de n -cotorsión izquierdo en $\text{Mod}(R)$, entonces*

$$\text{gl.GPD}(R) = \text{id}(\mathcal{P}(R)) \leq n.$$

Dualmente, si $(\mathcal{I}(R), \mathcal{GI}(R))$ es un par de m -cotorsión derecho en $\text{Mod}(R)$, entonces

$$\text{gl.GID}(R) = \text{pd}(\mathcal{I}(R)) \leq m.$$

(2) Los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a) R es un anillo Gorenstein izquierdo que no es QF.
- (b) Existen enteros $n, m \geq 1$ tales que $(\mathcal{GP}(R), \mathcal{P}(R))$ es un par de n -cotorsión izquierdo y $(\mathcal{I}(R), \mathcal{GI}(R))$ es un par de m -cotorsión derecho en $\text{Mod}(R)$.

Más aún, si alguna de las condiciones anteriores se cumple, podemos elegir

$$n = m = \text{id}(\mathcal{P}(R)) = \text{pd}(\mathcal{I}(R)).$$

Demostración. Probemos primero (1). Supongamos que $(\mathcal{GP}(R), \mathcal{P}(R))$ es un par de n -cotorsión izquierdo en $\text{Mod}(R)$. Entonces, cada módulo tiene dimensión Gorenstein proyectiva a lo más n . Se sigue de [BMS18, Corolario 5.19] que $\text{gl.GPD}(R) = \text{id}(\mathcal{P}(R)) \leq n$.

Ahora para (2), probemos la implicación (a) \Rightarrow (b). Si R es un anillo Gorenstein que no es QF, tenemos que ambas $\text{pd}(\mathcal{I}(R))$ y $\text{id}(\mathcal{P}(R))$ son finitas. Por [BR07b, Proposición VII.1.3 (vi)], tenemos $\text{pd}(\mathcal{I}(R)) = \text{id}(\mathcal{P}(R))$. Luego, sea $n := \text{id}(\mathcal{P}(R))$ y notemos que $n \geq 1$ ya que R no es QF. Las primeras dos condiciones de la Definición 2.2 se conocen para las clases $\mathcal{GP}(R)$ y $\mathcal{P}(R)$. Por [BR07b, Teorema VII.2.2 (γ)], tenemos que cada módulo tiene dimensión Gorenstein proyectiva a lo más n . Luego, la condición restante (3) de la Definición 2.2 se sigue tomando $\mathcal{X} = \mathcal{GP}(R)$ y $\omega = \mathcal{P}(R)$ en [BMPS19, Teorema 2.8]. De manera similar, se puede probar que $(\mathcal{I}(R), \mathcal{GI}(R))$ es un par de n -cotorsión derecho en $\text{Mod}(R)$.

Finalmente, la implicación contraria (b) \Rightarrow (a) en el inciso (2) se sigue de la parte (1). \square

Para las siguientes observaciones, recordemos que un R -módulo $M \in \text{Mod}(R)$ es *Gorenstein plano* si $M \simeq Z_0(F)$, donde $F = (F_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ es un complejo exacto de R -módulos planos tales que para cada R -módulo derecho inyectivo $E \in \mathcal{I}(R^{\text{op}})$, el complejo inducido de grupos abelianos

$$E \otimes_R F = \cdots \rightarrow E \otimes_R F_1 \rightarrow E \otimes_R F_0 \rightarrow E \otimes_R F_{-1} \rightarrow \cdots$$

es exacto. Denotaremos a la clase de R -módulos Gorenstein planos por $\mathcal{GF}(R)$.

Observación 2.39. *Mencionaremos algunas consecuencias cuando $(\mathcal{I}(R), \mathcal{GI}(R))$ es un par de n -cotorsión derecho para algún $n \geq 1$, y algunas de ellas relacionadas con $\mathcal{GF}(R)$:*

- (1) *Si R es un anillo coherente derecho, entonces el dual de Pontrjagin $M^+ := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ de cada R -módulo izquierdo Gorenstein inyectivo $M \in \text{Mod}(R)$ es un R -módulo derecho Gorenstein plano. Para esto, consideremos el valor*

$$\text{fd}(\mathcal{I}(R)) := \sup\{\text{fd}(I) : I \in \mathcal{I}(R)\} \leq \text{pd}(\mathcal{I}(R)).$$

Como $(\mathcal{I}(R), \mathcal{GI}(R))$ es un par de n -cotorsión derecho, tenemos por la Proposición 2.38 que $\text{fd}(\mathcal{I}(R)) \leq n$. Entonces, [Iac16, Teorema 4] implica que $M^+ \in \mathcal{GF}(R^{\text{op}})$ para cada $M \in \mathcal{GI}(R)$.

- (2) *Si R es un anillo Noetheriano izquierdo y coherente derecho, entonces ambas dimensiones $\text{pd}(\mathcal{I}(R))$ e $\text{id}(\mathcal{P}(R))$ son finitas. En efecto, ya sabemos que $\text{pd}(\mathcal{I}(R)) \leq n$ por la Proposición 2.38. Ahora bien, sea P un R -módulo proyectivo. Entonces, por [Fie71, Teorema 2.2], tenemos que $\text{id}(P) = \text{fd}(P^+)$, donde P^+ es un R^{op} -módulo inyectivo. Por el inciso anterior (1), se sigue que $\text{id}(P) = \text{fd}(P^+) \leq n$, y entonces $\text{id}(\mathcal{P}(R)) \leq n$.*
- (3) *Si R es un anillo Noetheriano izquierdo y derecho, entonces $\mathcal{GI}(R)$ es una clase cubriente y $\mathcal{GF}(R)$ es una clase preenvolvente. Esto se sigue por la parte (1) de la Proposición 2.38 y [Iac16, Teorema 4].*
- (4) *Si M es un módulo con dimensión inyectiva finita, entonces M tiene dimensión proyectiva finita a lo más n . En efecto, sea $M \in \mathcal{I}(R)^{\vee}$. Entonces, por [BMS18, Lema 2.6], obtenemos que $\text{pd}(M) \leq \text{pd}(\mathcal{I}(R)^{\vee}) = \text{pd}(\mathcal{I}(R)) \leq n$.*
- (5) *Por (4) y [BR07b, Proposición VII.1.3(iii)], se sigue que la dimensión finitista inyectiva grande de R es finita. Específicamente,*

$$\text{FID}(R) := \sup\{\text{id}(M) : M \text{ tiene dimensión inyectiva finita}\} \leq n.$$

En lo que resta de esta sección, mencionaremos algunas consecuencias de la Sección 2.2. Muchos de nuestros comentarios a continuación tienen que ver con aproximaciones derechas e izquierdas respecto a las clases $\mathcal{GP}(R)$ y $\mathcal{GI}(R)$ con la propiedad de factorización única. Empezamos con la siguiente aplicación del Corolario 2.22 en el contexto de Álgebra Homológica Gorenstein.

Corolario 2.40. *Sea R un anillo n -Iwanaga-Gorenstein con $n \geq 1$. Entonces, las siguientes igualdades se cumplen:*

$$(1) \text{Mod}(R) = \mathcal{GP}(R)_n^\wedge = {}^{\perp n}(\mathcal{P}(R)_{n-1}^\wedge).$$

$$(2) \text{Mod}(R) = \mathcal{GI}(R)_n^\vee = (\mathcal{I}(R)_{n-1}^\vee)^{\perp n}.$$

Demostración. Probaremos solamente el caso Gorenstein proyectivo (1). Primero, por el Ejemplo 2.37 tenemos que $(\mathcal{GP}(R), \mathcal{P}(R))$ es un par de n -cotorsión izquierdo. Entonces, por la Proposición 2.38 (1), la primera igualdad $\text{Mod}(R) = \mathcal{GP}(R)_n^\wedge$ es cierta. La igualdad $\text{Mod}(R) = {}^{\perp n}(\mathcal{P}(R)_{n-1}^\wedge)$, por otra parte, se seguirá de la condición (c) en el Corolario 2.22 después de probar que $\mathcal{GP}(R) = {}^{\perp 1}(\mathcal{P}(R)_{n-1}^\wedge)$ y que $(\mathcal{GP}(R), \mathcal{P}(R)_{n-1}^\wedge)$ es un par de $(n+1)$ -cotorsión izquierdo en $\text{Mod}(R)$. Lo primero se sigue de que $(\mathcal{GP}(R), \mathcal{P}(R))$ es un par de n -cotorsión izquierdo y por el Teorema 2.7, mientras que lo segundo se sigue notando la inclusión $\mathcal{P}(R)_{n-1}^\wedge \subseteq (\mathcal{P}(R)_{n-1}^\wedge)_n^\wedge$. \square

Se sabe que cada módulo sobre un anillo n -Iwanaga-Gorenstein tiene una cubierta Gorenstein inyectiva (ver, por ejemplo [EJ00, Teorema 11.1.3]). Podemos hacer una afirmación más fuerte en el caso $n = 2$, por el Corolario 2.24.

Corolario 2.41. *Sea R un anillo 2-Iwanaga-Gorenstein. Entonces, cada módulo tiene una cubierta Gorenstein inyectiva con la propiedad de factorización única.*

Demostración. Del dual de la prueba del Corolario 2.40, para el caso $n = 2$, podemos notar que $(\mathcal{I}(R)_1^\vee, \mathcal{GI}(R))$ es un par de 3-cotorsión derecho que satisface la igualdad $\mathcal{GI}(R) = (\mathcal{I}(R)_1^\vee)^{\perp 1}$. Entonces, el resultado se sigue por el dual del Corolario 2.24, ya que sobre un anillo 2-Iwanaga-Gorenstein, cada módulo tiene dimensión Gorenstein inyectiva a lo más 2. \square

La existencia de envolventes Gorenstein proyectivas con la propiedad de factorización única, por otra parte, ha sido estudiada por L. Mao en [Mao18]. L. Mao establece una serie de condiciones equivalentes bajo las cuales un módulo finitamente generado sobre un anillo R tiene una envolvente Gorenstein proyectiva con la propiedad de factorización única [Mao18, Teorema 3.7]. Para módulos (no necesariamente finitamente generados) sobre un anillo 2-Iwanaga-Gorenstein, podemos decir que si cada módulo tiene una envolvente Gorenstein proyectiva, entonces siempre podemos encontrar una envolvente Gorenstein proyectiva con la propiedad de factorización única.

Corolario 2.42. *Sea R un anillo 2-Iwanaga-Gorenstein. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

- (1) *Cada módulo tiene una envolvente Gorenstein proyectiva.*
- (2) *Cada módulo tiene una envolvente Gorenstein proyectiva con la propiedad de factorización única.*

Demostración. Se sigue del Corolario 2.24 notando que $(\mathcal{GP}(R), \mathcal{P}(R))$ es un par de 3-cotorsión izquierdo en $\text{Mod}(R)$ sobre cualquier anillo R 2-Iwanaga-Gorenstein. \square

Módulos Ding proyectivos

En lo que sigue, denotaremos por $\mathcal{F}(R)$ a la clase de R -módulos planos. Recordemos de [Gil10, Definición 3.7] que un R -módulo M es *Ding proyectivo* (también llamado Gorenstein plano fuerte en [DLM09]) si $M = Z_0(\mathcal{P})$ para algún complejo exacto y $\text{Hom}_R(-, \mathcal{F}(R))$ -acíclico \mathcal{P} de módulos proyectivos. Dualmente, los *módulos Ding inyectivos* se definen como ciclos de complejos exactos y $\text{Hom}_R(\mathcal{AP}(R), -)$ -acíclicos de módulos inyectivos. Denotaremos a las clases de R -módulos Ding proyectivos y Ding inyectivos por $\mathcal{DP}(R)$ y $\mathcal{DI}(R)$, respectivamente.

Después de una cuidadosa revisión de los resultados citados en [Hol04], en el ejemplo anterior, podemos asegurar que los mismos resultados pueden ser llevados al contexto de módulos Ding proyectivos. Específicamente, uno puede demostrar que, sobre un anillo arbitrario R , la clase $\mathcal{DP}(R)$ es cerrada por sumandos directos y que $\text{Ext}_R^i(C, F) = 0$ para cada

$C \in \mathcal{DP}(R)$, $F \in \mathcal{F}(R)$ e $i \geq 1$. Los enunciados duales son ciertos para las clases $\mathcal{DI}(R)$ y $\mathcal{AP}(R)$. Por otra parte, la condición (3) en la Definición 2.2 y su dual son válidos para ciertos anillos definidos por J. Chen y N. Ding [DC93, DC96]. Estos anillos se conocen como *anillos n -FC* (o *anillos Ding-Chen*): R es un anillo n -FC si es coherente izquierdo y derecho, y $\text{apd}({}_R R) = \text{apd}(R_R) = n$, donde ${}_R R$ denota a R como R -módulo izquierdo y R_R como R -módulo derecho, respectivamente.

De manera similar a las dimensiones Gorenstein proyectiva y Gorenstein inyectiva, la *dimensión Ding proyectiva* y la *dimensión Ding inyectiva* de un módulo $M \in \text{Mod}(R)$, denotadas por $\text{Dpd}(M)$ y $\text{Did}(M)$, se definen como la dimensión de $\mathcal{DP}(R)$ -resolución y la dimensión de $\mathcal{DI}(R)$ -corresolución de M , respectivamente. Para estas dos dimensiones homológicas, no es verdad en general que la igualdad $\text{Mod}(R) = \mathcal{DP}(R)_n^\wedge$ sea cierta para R un anillo n -FC. Un ejemplo de tal anillo R para el cual $\text{Mod}(R) \neq \mathcal{DP}(R)_n^\wedge$ es construido por J. Wang en [Wan17, Ejemplo 3.3]. Se sigue que no siempre tenemos el análogo Ding proyectivo del Ejemplo 2.37. De hecho, la condición $\text{Mod}(R) = \mathcal{DP}(R)_n^\wedge$ es suficientemente fuerte para garantizar la existencia de $(\mathcal{DP}(R), \mathcal{F}(R))$ como par de n -cotorsión izquierdo en $\text{Mod}(R)$.

Para el resto de esta sección, recordemos que las *dimensiones globales Ding proyectiva* y *Ding inyectiva* de un anillo R están definidas como:

$$\begin{aligned} \text{gl.DPD}(R) &= \sup\{\text{Dpd}(M) : M \in \text{Mod}(R)\}, \\ \text{gl.DID}(R) &= \sup\{\text{Did}(M) : M \in \text{Mod}(R)\}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.43. Sean $n \geq 1$ un entero y R un anillo con $\text{gl.DPD}(R) \leq n$. Entonces, el par $(\mathcal{DP}(R), \mathcal{F}(R))$ es un par de n -cotorsión izquierdo en $\text{Mod}(R)$. En efecto, por los comentarios anteriores, es suficiente probar que para cada módulo $M \in \text{Mod}(R)$ existe un epimorfismo $P \twoheadrightarrow M$ con $P \in \mathcal{DP}(R)$ y núcleo en $\mathcal{F}(R)_{n-1}^\wedge$. Esto se sigue tomando $\mathcal{X} = \mathcal{DP}(R)$ y $\omega := \mathcal{P}(R) \subseteq \mathcal{F}(R)$ en [BMPS19, Teorema 2.8], ya que $\text{Dpd}(M) \leq n$.

Podemos obtener caracterizaciones de anillos regulares Von Neumann considerando la situación en la cual $(\mathcal{DP}(R), \mathcal{F}(R))$ es un par de n -cotorsión izquierdo y derecho en $\text{Mod}(R)$.

Proposición 2.44. Para cualquier anillo R , las siguientes condiciones son equivalentes.

- (a) $(\mathcal{DP}(R), \mathcal{F}(R))$ es un par de n -cotorsión en $\text{Mod}(R)$ y $\mathcal{DP}(R) \subseteq \mathcal{F}(R)$.
 (b) R es un anillo regular Von Neumann (esto es, $\mathcal{F}(R) = \text{Mod}(R)$).

Demostración. En efecto, supongamos que (a) se cumple. Entonces, usando que la clase $\mathcal{DP}(R)$ es resolvente, obtenemos (b) de la Observación 2.31 (2).

Supongamos ahora que $\mathcal{F}(R) = \text{Mod}(R)$. Para demostrar (a), es suficiente probar que $\mathcal{DP}(R) = \mathcal{P}(R)$. Notemos que en este caso, podemos elegir cualquier $n \geq 1$. Sea $M \in \mathcal{DP}(R)$. Entonces, existe una sucesión exacta

$$\eta: 0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow M' \rightarrow 0,$$

donde $P \in \mathcal{P}(R)$ y $M' \in \mathcal{DP}(R)$. Como $\mathcal{F}(R) = \text{Mod}(R)$, se sigue que $\text{Hom}_R(\eta, M)$ es exacto y entonces η se escinde, probando que $M \in \mathcal{P}(R)$. \square

En el siguiente resultado damos algunas condiciones de finitud para la dimensión global Ding inyectiva $\text{gl.DID}(R)$ de cualquier anillo R .

Lema 2.45. *Para cualquier anillo R , los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (a) $(\mathcal{I}(R)^\vee, \mathcal{DI}(R))$ es un par de cotorsión completo y hereditario en $\text{Mod}(R)$ y $\text{pd}(\mathcal{I}(R)) < \infty$.
 (b) $\mathcal{DI}(R) = \mathcal{I}(R)^\perp$ y $\text{pd}(\mathcal{I}(R)) < \infty$.
 (c) $\text{gl.DID}(R) < \infty$.

Más aún, si alguna de las condiciones anteriores se cumple, entonces

$$\text{gl.DID}(R) = \text{pd}(\mathcal{AP}(R)) = \text{pd}(\mathcal{I}(R)).$$

Demostración. Usaremos libremente la notación y resultados de [BMS18]. Notemos que el par $(\mathcal{AP}(R), \mathcal{I}(R))$ es GI-admisibles y WGI-admisibles [BMS18, Definiciones 3.6 y 4.5]. Entonces, por el dual de [BMS18, Corolarios 5.7 y 5.12 (c2)], el resultado se sigue. \square

Motivados por el Ejemplo 2.43, presentamos la siguiente familia de anillos.

Definición 2.46. *Un anillo R es Ding finito izquierdo si $\text{gl.DPD}(R) < \infty$ y $\text{gl.DID}(R) < \infty$.*

Proposición 2.47. *Si un anillo R es Ding finito izquierdo, entonces los siguientes enunciados se cumplen:*

- (1) $(\mathcal{DP}(R), \mathcal{P}(R)^\wedge)$ y $(\mathcal{I}(R)^\vee, \mathcal{DI}(R))$ son pares de cotorsión completos y hereditarios.
- (2) $\mathcal{DP}(R) = {}^\perp \mathcal{P}(R)$ y $\mathcal{DI}(R) = \mathcal{I}(R)^\perp$.
- (3) $\text{pd}(\mathcal{I}(R))$ y $\text{id}(\mathcal{P}(R))$ son finitas, y

$$\text{gl.DID}(R) = \text{pd}(\mathcal{AP}(R)) = \text{pd}(\mathcal{I}(R)) = \text{id}(\mathcal{P}(R)) = \text{gl.DPD}(R) = \text{id}(\mathcal{F}(R)).$$

Demostración. Se sigue del Lema 2.45, [BMS18, Corolario 5.18] y [BR07b, Proposición VII.1.3 (vi)]. \square

Observación 2.48.

1. *Por la Proposición 2.47, notemos que cada anillo Ding finito izquierdo es Gorenstein izquierdo en el sentido de [BR07b].*
2. *En caso de que (3) se cumpla en la Proposición 2.47, tenemos que $\text{gl.DPD}(R)$ también coincide con la dimensión global Gorenstein izquierda (ver [BM10, Teorema 1.1] y [MT11, Teorema 3.2]).*
3. *Sea R un anillo Ding Chen. Por [Yan12] se tiene que $\text{gl.DPD}(R) = \text{gl.DID}(R)$. Esto último puede incluir el caso donde $\text{gl.DPD}(R) = \infty$ y $\text{gl.DID}(R) = \infty$. Luego, no siempre cada anillo Ding Chen es Ding finito izquierdo como lo muestra J. Wang en [Wan17, Ejemplo 3.3].*

El siguiente resultado es el análogo Ding Chen de la Proposición 2.38.

Proposición 2.49. *Las siguientes condiciones se cumplen para cualquier anillo R :*

- (1) *Si $(\mathcal{DP}(R), \mathcal{P}(R))$ es un par de n -cotorsión izquierdo en $\text{Mod}(R)$, entonces*

$$\text{gl.DPD}(R) = \text{id}(\mathcal{P}(R)) \leq n.$$

Dualmente, si $(\mathcal{I}(R), \mathcal{DI}(R))$ es un par de m -cotorsión derecho en $\text{Mod}(R)$, entonces

$$\text{gl.DID}(R) = \text{pd}(\mathcal{I}(R)) \leq m.$$

(2) Los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a) R es Ding finito izquierdo con $\text{gl.DPD}(R) = \text{gl.DID}(R) = n \geq 1$.
- (b) Existen enteros $n, m \geq 1$ tales que $(\mathcal{DP}(R), \mathcal{P}(R))$ es un par de n -cotorsión izquierdo $(\mathcal{I}(R), \mathcal{DI}(R))$ es un par de m -cotorsión derecho en $\text{Mod}(R)$.

Más aún, si alguna de las condiciones anteriores se cumple, podemos elegir

$$n = m = \text{id}(\mathcal{P}(R)) = \text{pd}(\mathcal{I}(R)).$$

Demostración. (1) Supongamos que $(\mathcal{DP}(R), \mathcal{P}(R))$ es un par de n -cotorsión izquierdo en $\text{Mod}(R)$. Entonces, cada módulo tiene dimensión Ding proyectiva a lo más n . Se sigue de [BMS18, Corolario 5.18] que $\text{gl.DPD}(R) = \text{id}(\mathcal{P}(R)) \leq n$. Para el caso de los módulos Ding inyectivos, usamos el Lema 2.45.

(2) Primero veamos la implicación (a) \Rightarrow (b). Si R es un anillo Ding finito izquierdo con $\text{gl.DPD}(R) = \text{gl.DID}(R) = n \geq 1$, tenemos por la Proposición 2.47 (c) que $1 \leq n = \text{pd}(\mathcal{I}(R)) = \text{id}(\mathcal{P}(R)) < \infty$. Más aún, las primeras dos condiciones de la Definición 2.2 son muy conocidas para las clases $\mathcal{DP}(R)$ y $\mathcal{P}(R)$. Notemos que cada módulo tiene dimensión Ding proyectiva a lo más n . Luego, la condición (3) en la Definición 2.2 se sigue considerando $\mathcal{X} := \mathcal{DP}(R)$ y $\omega := \mathcal{P}(R)$ en [BMPS19, Teorema 2.8]. De manera similar, se puede probar que $(\mathcal{I}(R), \mathcal{DI}(R))$ es un par de n -cotorsión derecho en $\text{Mod}(R)$. Finalmente, la implicación contraria (b) \Rightarrow (a) se sigue de la parte (1). \square

Módulos Gorenstein planos

Ya hemos mencionado en la Sección 2.2 caracterizaciones de ciertos anillos las cuales consideran su dimensión global. En este ejemplo, dado un anillo perfecto izquierdo R , encontraremos condiciones equivalentes para las cuales R resulta ser un anillo Quasi-Frobenius o con dimensión global Gorenstein proyectiva nula. Estas condiciones involucran pares de

n -cotorsión izquierdos y derechos formados con las clases $\mathcal{F}(R)$ y $\mathcal{GF}(R)$ de R -módulos planos y Gorenstein planos.

La *dimensión Gorenstein plana* de un R -módulo $M \in \text{Mod}(R)$, la cual denotaremos por $\text{Gfd}(M)$, se define como la dimensión de $\mathcal{GF}(R)$ -resolución de M , esto es,

$$\text{Gfd}(M) := \text{resdim}_{\mathcal{GF}(R)}(M).$$

Se define la *dimensión global Gorenstein plana* de R como el valor

$$\text{gl.Gfd}(R) := \sup\{\text{Gfd}(M) : M \in \text{Mod}(R)\}.$$

En los siguientes resultados, analizaremos la situación donde $(\mathcal{F}(R), \mathcal{GF}(R))$ es un par de n -cotorsión izquierdo o derecho en $\text{Mod}(R)$.

Proposición 2.50. *Las siguientes condiciones son equivalentes, para cualquier anillo R y cualquier entero $n \geq 1$.*

- (a) $(\mathcal{F}(R), \mathcal{GF}(R))$ es un par de n -cotorsión izquierdo en $\text{Mod}(R)$.
- (b) $\text{Ext}_R^1(\mathcal{F}(R), \mathcal{GF}(R)) = 0$ y $\text{gl.Gfd}(R) \leq n$.

Demostración. La implicación (a) \Rightarrow (b) es clara. Ahora supongamos que la condición (b) se satisface. Se sabe que la clase $\mathcal{F}(R)$ es cerrada por sumandos directos. Más aún, usando que $\mathcal{F}(R)$ es resolvente, la condición $\text{Ext}_R^1(\mathcal{F}(R), \mathcal{GF}(R)) = 0$ implica que $\text{Ext}_R^i(\mathcal{F}(R), \mathcal{GF}(R)) = 0$ para cada $1 \leq i \leq n$. En efecto, sea $F \in \mathcal{F}(R)$ y

$$\eta : 0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow F \rightarrow 0$$

una sucesión exacta con $P \in \mathcal{P}(R)$. Como $\mathcal{F}(R)$ es resolvente, $K \in \mathcal{F}(R)$. Aplicando el funtor $\text{Hom}_R(-, G)$ con $G \in \mathcal{GF}(R)$ a η , obtenemos la sucesión exacta

$$0 = \text{Ext}_C^i(P, G) \rightarrow \text{Ext}_C^i(K, G) \rightarrow \text{Ext}_C^{i+1}(F, G) \rightarrow \text{Ext}_C^{i+1}(P, G) = 0.$$

Luego, $\text{Ext}_C^{i+1}(F, G) \cong \text{Ext}_C^i(K, G) = 0$ para todo $i \geq 1$ ya que $K \in \mathcal{F}(R)$.

Recientemente fue probado por Šaroch and Šťovíček en [ŠŠ18, Corolario 3.12] que la clase $\mathcal{GF}(R)$ es cerrada por extensiones para cualquier anillo R (esto es, cualquier anillo R es GF-cerrado). En particular, de [BMPS19, Proposición 6.17] se sigue que $\omega := \mathcal{F}(R) \cap \mathcal{F}(R)^{\perp 1}$ es un

cogenerador relativo en $\mathcal{X} := \mathcal{GF}(R)$. Entonces, por [BMPS19, Teorema 2.8], para cada $M \in \text{Mod}(R)$, tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0,$$

donde $G \in \mathcal{GF}(R)$ y $K \in (\mathcal{F}(R) \cap \mathcal{F}(R)^{\perp 1})_{n-1}^{\wedge}$, ya que $\text{Gfd}(M) \leq n$. Por otra parte, de la definición de $\mathcal{GF}(R)$, obtenemos otra sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow G' \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0,$$

donde $F \in \mathcal{F}(R)$ y $G' \in \mathcal{GF}(R)$. Tomando el pullback de $K \rightarrow G \leftarrow F$, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones y columnas exactas:

$$\begin{array}{ccccc} G' & \xlongequal{\quad} & G' & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & M \\ \downarrow & \text{pb} & \downarrow & & \parallel \\ K & \longrightarrow & G & \longrightarrow & M \end{array} \quad (2.4.3)$$

Por [Ben09, Teorema 2.11] de Bennis, podemos notar que $\text{Gfd}(E) \leq n - 1$. Por lo tanto, el renglón central en (2.4.3) completa la prueba de que $(\mathcal{F}(R), \mathcal{GF}(R))$ es un par de n -cotorsión izquierdo. \square

Si ahora suponemos que $(\mathcal{F}(R), \mathcal{GF}(R))$ es un par de n -cotorsión derecho, podemos mostrar que R es un anillo perfecto izquierdo y un anillo IF izquierdo. Recordemos de [Col75] que R es un *anillo IF izquierdo* si cada R -módulo izquierdo inyectivo es plano. Antes de probar la afirmación anterior respecto al par $(\mathcal{F}(R), \mathcal{GF}(R))$, daremos la siguiente caracterización de anillos IF en términos de su dimensión global Gorenstein plana.

Lema 2.51. *Sea R un anillo. Si $\text{gl.Gfd}(R) = 0$, entonces R es un anillo IF izquierdo. Si además $\text{gl.Gfd}(R^{op}) = 0$, entonces la implicación contraria también es cierta. Más aún, si R es conmutativo, entonces R es un anillo IF si, y solo si, $\text{gl.Gfd}(R) = 0$.*

Demostración. Supongamos primero que $\text{gl.Gfd}(R) = 0$ y sea E un módulo inyectivo. Entonces, E es también Gorenstein plano. Luego, existe una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow N \rightarrow 0$$

con $F \in \mathcal{F}(R)$ y $N \in \mathcal{GF}(R)$, la cual se escinde ya que E es inyectivo. Se sigue que E es plano. Por lo tanto, R es un anillo IF izquierdo.

Ahora, supongamos que R es un anillo IF izquierdo con $\text{gl.Gfd}(R^{\text{op}}) = 0$. Entonces, R es también un anillo IF derecho. Para cada $M \in \text{Mod}(R)$, notemos que podemos encontrar un complejo de cadena

$$F_{\bullet} = \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow E^0 \rightarrow E^1 \rightarrow \cdots$$

donde $M = \text{Ker}(E^0 \rightarrow E^1)$, $P_i \in \mathcal{P}(R)$ y $E^j \in \mathcal{I}(R)$, para cada $i, j \geq 0$. Este es un complejo de módulos planos, ya que cada inyectivo es plano. Más aún, R -módulos derechos inyectivos son también planos, y entonces $E \otimes_R F_{\bullet}$ es exacto, para cada $E \in \mathcal{I}(R^{\text{op}})$ inyectivo. \square

Proposición 2.52. *Las siguientes condiciones son equivalentes, para cualquier anillo R .*

- (a) $(\mathcal{F}(R), \mathcal{GF}(R))$ es un par de n -cotorsión derecho en $\text{Mod}(R)$, para algún entero $n \geq 1$.
- (b) R es un anillo perfecto izquierdo y $\text{gl.Gfd}(R) = 0$.

En el caso de que R sea conmutativo, tenemos que R es un anillo perfecto izquierdo y un anillo IF si, y solo si, existe un entero $n \geq 1$ tal que $(\mathcal{F}(R), \mathcal{GF}(R))$ es un par de n -cotorsión derecho en $\text{Mod}(R)$.

Demostración. Primero, notemos que la implicación (b) \Rightarrow (a) es clara. Para probar (a) \Rightarrow (b), supongamos que existe un entero $n \geq 1$ tal que $(\mathcal{F}(R), \mathcal{GF}(R))$ es un par de n -cotorsión derecho en $\text{Mod}(R)$. Entonces, para cada $M \in \text{Mod}(R)$ existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \rightarrow G \rightarrow F^0 \rightarrow F^1 \rightarrow \cdots \rightarrow F^{n-2} \rightarrow F^{n-1} \rightarrow 0$$

con $G \in \mathcal{GF}(R)$ y $F^k \in \mathcal{F}(R)$, para cada $0 \leq k \leq n-1$. Como la clase $\mathcal{GF}(R)$ es resolvente por [ŠŠ18, Corolario 3.12], tenemos que M es Gorenstein plano, y por tanto $\text{gl.Gfd}(R) = 0$. Ahora, sea F un R -módulo plano, y

consideremos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow F \rightarrow 0,$$

con P proyectivo. Notemos que la sucesión anterior se escinde ya que $\text{Ext}_R^1(\mathcal{F}(R), \text{Mod}(R)) = 0$, y entonces F es proyectivo. Por lo tanto, R es un anillo perfecto izquierdo con $\text{gl.Gfd}(R) = 0$. \square

Dos resultados interesantes se obtienen si intercambiamos los papeles de las clases $\mathcal{F}(R)$ y $\mathcal{GF}(R)$, esto es, si analizamos las consecuencias de suponer que $(\mathcal{GF}(R), \mathcal{F}(R))$ es un par de n -cotorsión izquierdo o derecho en $\text{Mod}(R)$.

Proposición 2.53. *Para cualquier anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) $(\mathcal{GF}(R), \mathcal{F}(R))$ es un par de n -cotorsión derecho en $\text{Mod}(R)$, para algún entero $n \geq 1$.
- (b) R es un anillo perfecto izquierdo y QF.

Demostración. Primero probaremos la implicación (a) \Rightarrow (b). El primer paso será mostrar que cada módulo es Gorenstein plano. En efecto, para cada $M \in \text{Mod}(R)$, tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow G^0 \rightarrow G^1 \rightarrow \dots \rightarrow G^{n-2} \rightarrow G^{n-1} \rightarrow 0$$

con $F \in \mathcal{F}(R)$ y $G^k \in \mathcal{GF}(R)$ para cada $0 \leq k \leq n-1$, ya que $(\mathcal{GF}(R), \mathcal{F}(R))$ es un par de n -cotorsión derecho. Usando que $\mathcal{GF}(R)$ es resolvente [ŠŠ18, Corolario 3.12], obtenemos que M es Gorenstein plano. Ahora, del dual del Teorema 2.7, obtenemos que $\mathcal{F}(R) = (\mathcal{GF}(R)_{n-1}^\vee)^{\perp 1} = \text{Mod}(R)^{\perp 1} = \mathcal{I}(R)$. Por otra parte, para cada módulo plano F tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow F' \rightarrow P \rightarrow F \rightarrow 0$$

con P proyectivo y F' plano (por tanto inyectivo). Luego, esta sucesión se escinde, y entonces F es proyectivo. Por lo tanto, $\mathcal{P}(R) = \mathcal{F}(R) = \mathcal{I}(R)$. Esto implica que R es perfecto izquierdo y QF.

Ahora bien, probemos que (b) implica (a). Supongamos que R es perfecto izquierdo y QF. Entonces, tenemos que las siguientes condiciones

se satisfacen: (i) $\mathcal{P}(R) = \mathcal{F}(R) = \mathcal{I}(R)$ y (ii) $\mathcal{I}(R^{\text{op}}) = \mathcal{P}(R^{\text{op}}) \subseteq \mathcal{F}(R^{\text{op}})$. Afirmamos que $\mathcal{GF}(R) = \text{Mod}(R)$. En efecto, para cualquier $M \in \text{Mod}(R)$, podemos construir un complejo exacto

$$\eta : \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \cdots ,$$

donde $P_i \in \mathcal{P}(R)$ e $I^j \in \mathcal{I}(R)$, para cualesquiera $i, j \geq 0$, y $M = \text{Ker}(I^0 \rightarrow I^1)$. De la condición (i), obtenemos que η es un complejo exacto de módulos planos, y aplicando (ii), se sigue que el complejo $E \otimes \eta$ es exacto, para cualquier $E \in \mathcal{I}(R^{\text{op}})$ inyectivo. Luego, $M \in \mathcal{GF}(R)$. Una vez demostrada la igualdad $\mathcal{GF}(R) = \text{Mod}(R)$, se puede probar fácilmente que $(\mathcal{GF}(R), \mathcal{F}(R))$ es un par de 1-cotorsión derecho en $\text{Mod}(R)$, ya que $\mathcal{I}(R) = \mathcal{F}(R)$. \square

Ahora consideraremos el último escenario donde $(\mathcal{GF}(R), \mathcal{F}(R))$ es un par de n -cotorsión izquierdo en $\text{Mod}(R)$. Recordemos que para un anillo arbitrario R , el functor de dualidad de Pontryagin $(-)^+ : \text{Mod}(R) \rightarrow \text{Mod}(R^{\text{op}})$ envía cada R -módulo plano a un R^{op} -módulo inyectivo (ver [EJ00, Teorema 3.2.9] de Enochs y Jenda), y cada R -módulo Gorenstein plano a un R^{op} -módulo Gorenstein inyectivo (ver por ejemplo [Hol04, Teorema 3.6] o [MP11, Proposición 4.4]).

Recordemos también que para cada $N \in \text{Mod}(R^{\text{op}})$ existe una *sucesión exacta pura*

$$\rho_N : 0 \rightarrow N \rightarrow N^{++} \rightarrow N^{++}/N \rightarrow 0, \quad (2.4.4)$$

esto es, $\rho_N \otimes_R M$ es exacta para cada $M \in \text{Mod}(R)$ (ver [EJ00, Proposición 5.3.9]).

Proposición 2.54. *Sea R un anillo sobre el cual $(\mathcal{GF}(R), \mathcal{F}(R))$ es un par de n -cotorsión izquierdo en $\text{Mod}(R)$ para algún entero $n \geq 1$. Entonces, $\text{Gid}(N^{++}) \leq n$ para cada $N \in \text{Mod}(R^{\text{op}})$. Si además, R es un anillo noetheriano conmutativo con complejo dualizante, entonces $\text{gl.GID}(R^{\text{op}}) \leq n$.*

Demostración. Sea $N \in \text{Mod}(R^{\text{op}})$ y consideremos su módulo característico $N^+ \in \text{Mod}(R)$. Como $(\mathcal{GF}(R), \mathcal{F}(R))$ es un par de n -cotorsión izquierdo en $\text{Mod}(R)$ para algún $n \geq 1$, podemos encontrar una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow N^+ \rightarrow 0$$

donde G es R -módulo Gorenstein plano y $\text{fd}(K) \leq n - 1$. Entonces, tenemos la siguiente sucesión exacta para N^{++} :

$$0 \rightarrow N^{++} \rightarrow G^+ \rightarrow K^+ \rightarrow 0.$$

donde G^+ es Gorenstein inyectivo y $\text{id}(K^+) \leq n - 1$ por los comentarios anteriores. Por lo tanto, $\text{Gid}(N^{++}) \leq n$ para todo $N \in \text{Mod}(R^{\text{op}})$.

Ahora, supongamos que R es un anillo noetheriano conmutativo con complejo dualizante. Bajo estas hipótesis, se sabe que la clase $\mathcal{GI}(R^{\text{op}})_n^\vee$ de módulos con dimensión Gorenstein inyectiva $\leq n$ es cerrada por submódulos puros por [HJ09, Lema 2.5 (b) y Teorema 3.1]. Por otra parte, para cada $N \in \text{Mod}(R^{\text{op}})$ existe una sucesión exacta pura canónica

$$0 \rightarrow N \rightarrow N^{++} \rightarrow N^{++}/N \rightarrow 0,$$

donde $\text{Gid}(N^{++}) \leq n$ por la primera parte. Se sigue que $\text{Gid}(N) \leq n$ para cada $N \in \text{Mod}(R^{\text{op}})$. \square

El enunciado dual del resultado anterior se cumple en caso de que R sea un anillo noetheriano izquierdo y derecho.

Proposición 2.55. *Sean R un anillo y $n \geq 1$ un entero. Si R es noetheriano izquierdo y derecho y $(\mathcal{I}(R^{\text{op}}), \mathcal{GI}(R^{\text{op}}))$ es un par de n -cotorsión derecho en $\text{Mod}(R^{\text{op}})$, entonces $\text{Gfd}(M^{++}) \leq n$ para cada $M \in \text{Mod}(R)$.*

Demostración. Recordemos que en un anillo noetheriano izquierdo y derecho R , un R -módulo derecho es inyectivo si, y solo si, su dual de Pontryagin es plano. Más aún, por la Observación 2.39 (1) tenemos que N^+ es un R -módulo Gorenstein plano, para cualquier $N \in \text{Mod}(R^{\text{op}})$ Gorenstein inyectivo. Usando estos dos hechos, el resto de la prueba se sigue como en la Proposición 2.54. \square

Consideraremos de nuevo la dimensión global Gorenstein plana izquierda de R , pero ahora en el caso donde $(\mathcal{GF}(R), \mathcal{F}(R))$ es un par de n -cotorsión izquierdo.

Proposición 2.56. *Las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier anillo R y cualquier entero $n \geq 1$:*

- (a) $(\mathcal{GF}(R), \mathcal{F}(R))$ es un par de n -cotorsión izquierdo en $\text{Mod}(R)$.

(b) $\text{Ext}_R^1(\mathcal{GF}(R), \mathcal{F}(R)) = 0$ y $\text{gl.Gfd}(R) \leq n$.

Demostración. La implicación (a) \Rightarrow (b) es clara. Ahora, supongamos que (b) se satisface. La condición $\text{Ext}_R^i(\mathcal{GF}(R), \mathcal{F}(R)) = 0$ para cada $1 \leq i \leq n$ se sigue como en la Proposición 2.50 ya que $\mathcal{GF}(R)$ es resolvente. Más aún, $\mathcal{GF}(R)$ es cerrada por sumandos directos por [ŠŠ18, Corolario 3.12]. El resto de la implicación se sigue aplicando de nuevo [BMPS19, Teorema 2.8], como en la prueba de la Proposición 2.50. \square

Las Proposiciones 2.54 y 2.56 no son las únicas consecuencias de que $(\mathcal{GF}(R), \mathcal{F}(R))$ forme un par de n -cotorsión izquierdo en $\text{Mod}(R)$. Para el resto de esta sección, estudiaremos otros posibles resultados de esta suposición, respecto a la relación entre las clases $\mathcal{F}(R)$, $\mathcal{GF}(R)$, $\mathcal{I}(R^{\text{op}})$ y $\mathcal{GI}(R^{\text{op}})$ vía el funtor de dualidad de Pontryagin $(-)^+$. A saber, nos enfocaremos en lo siguiente:

- (1) Buscar condiciones bajo las cuales sea posible encontrar un entero $k \geq 1$ tal que $(\mathcal{I}(R^{\text{op}}), \mathcal{GI}(R^{\text{op}}))$ sea un par de k -cotorsión derecho en $\text{Mod}(R^{\text{op}})$, siempre que $(\mathcal{GF}(R), \mathcal{F}(R))$ sea un par de n -cotorsión izquierdo en $\text{Mod}(R)$.
- (2) Ver si el proceso inverso es posible, esto es, si existe $k \geq 1$ para el cual $(\mathcal{GF}(R), \mathcal{F}(R))$ es un par de k -cotorsión izquierdo en $\text{Mod}(R)$, suponiendo que $(\mathcal{I}(R^{\text{op}}), \mathcal{GI}(R^{\text{op}}))$ es un par de n -cotorsión derecho en $\text{Mod}(R^{\text{op}})$.

Teorema 2.57. *Sea R un anillo y supongamos que $(\mathcal{GF}(R), \mathcal{F}(R))$ es un par de n -cotorsión izquierdo en $\text{Mod}(R)$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

- (a) $m := \sup\{\text{Gid}(N^{++}/N) : N \in \text{Mod}(R^{\text{op}})\} < \infty$.
- (b) $(\mathcal{I}(R^{\text{op}}), \mathcal{GI}(R^{\text{op}}))$ es un par de $(k+1)$ -cotorsión derecho en $\text{Mod}(R^{\text{op}})$ para algún entero $k \geq 1$.

Más aún, si alguna de las condiciones anteriores se cumple, podemos elegir $k = \max\{n, m\}$.

Demostración. Para la primera implicación, sea $k := \max\{n, m\}$. Es suficiente probar que, para cada $N \in \text{Mod}(R^{\text{op}})$, podemos encontrar un monomorfismo a un objeto en $\mathcal{GI}(R^{\text{op}})$ cuyo conúcleo tiene dimensión inyectiva a lo más k . Considera la sucesión exacta pura canónica ρ_N de (2.4.4).

Por la Proposición 2.54, obtenemos que $\text{Gid}(N^{++}) \leq k$. Esto último, junto con la condición (a) implica que $\text{Gid}(N) \leq k + 1$ (ver [MP11, Proposición 2.15]). Por lo tanto, (b) se sigue por [BMPS19, dual del Teorema 2.8].

Recíprocamente, si $(\mathcal{I}(R^{\text{op}}), \mathcal{GI}(R^{\text{op}}))$ es un par de $(k + 1)$ -cotorsión derecho para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces $\text{Gid}(N) \leq k + 1$ y $\text{Gid}(N^{++}) \leq n$ para cada $N \in \text{Mod}(R^{\text{op}})$. Usando [MP11, Proposición 2.15] de nuevo, obtenemos que $\text{Gid}(N^{++}/N) \leq \max\{k, n\}$. \square

Teorema 2.58. *Sea R un anillo noetheriano izquierdo y derecho, y supongamos que $(\mathcal{I}(R^{\text{op}}), \mathcal{GI}(R^{\text{op}}))$ es un par de n -cotorsión derecho en $\text{Mod}(R^{\text{op}})$. Entonces, $\text{gl.Gfd}(R) \leq n$. Más aún, las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) $\text{Ext}_R^1(\mathcal{GF}(R), \mathcal{F}(R)) = 0$.
- (b) $(\mathcal{GF}(R), \mathcal{F}(R))$ es un par de Frobenius izquierdo en $\text{Mod}(R)$ (ver Definición 3.28).
- (c) $(\mathcal{GF}(R), \mathcal{F}(R))$ es un par de k -cotorsión izquierdo en $\text{Mod}(R)$ para algún entero $k \geq 1$.

Si alguna de las condiciones anteriores se satisface, podemos elegir $k = n$. Más aún,

$$\text{gl.Gfd}(R) = \text{id}(\mathcal{F}(R)).$$

Demostración. Para la primera parte, sea $M \in \text{Mod}(R)$ y consideremos la sucesión exacta pura canónica

$$\rho_M: 0 \rightarrow M \rightarrow M^{++} \rightarrow M^{++}/M \rightarrow 0,$$

donde $\text{Gfd}(M^{++}) \leq n$ por la Proposición 2.55. Por otra parte, por [HJ09, Lema 2.5 (a) y Teorema 3.1], tenemos que la clase $\mathcal{GF}(R)_n^\wedge$ es cerrada por submódulos puros, y entonces de ρ_M obtenemos que $\text{Gfd}(M) \leq n$.

Ahora, probemos la equivalencia entre (a), (b) y (c).

- (a) \Rightarrow (b): De [ŠŠ18, Corolario 3.12], sabemos que $\mathcal{GF}(R)$ es la clase izquierda de un par de cotorsión hereditario en $\text{Mod}(R)$. Luego, la condición $\text{Ext}_R^1(\mathcal{GF}(R), \mathcal{F}(R)) = 0$ implica que $\text{Ext}_R^i(\mathcal{GF}(R), \mathcal{F}(R)) = 0$ para cualquier $i \geq 1$. Por lo tanto, $\mathcal{F}(R)$ es un cogenerador relativo $\mathcal{GF}(R)$ -inyectivo en $\mathcal{GF}(R)$. Finalmente, es claro que $\mathcal{F}(R)$ es cerrada por sumandos directos, probando (b).
- (b) \Rightarrow (c): Supongamos que (b) se satisface. Como $\mathcal{GF}(R)_n^\wedge = \text{Mod}(R)$, tenemos por [BMPS19, Teorema 2.10] que

$$\text{gl.Gfd}(R) = \text{pd}_{\mathcal{F}(R)}(\text{Mod}(R)) = \text{id}(\mathcal{F}(R)).$$

Más aún, para cualquier $M \in \text{Mod}(R)$ obtenemos por [BMPS19, Teorema 2.8] una sucesión exacta

$$0 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0,$$

donde $G \in \mathcal{GF}(R)$ y $K \in \mathcal{F}(R)_{n-1}^\wedge$.

- (c) \Rightarrow (a): Se sigue de la definición. □

Subcategorías Cluster tilting

Siguiendo [Iya11, Definición 1.1], para un entero $m \geq 1$, decimos que una subcategoría $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ es m -cluster tilting si es una clase precubriente y preenvolvente, y las siguientes igualdades se cumplen

$$\mathcal{D} = \bigcap_{0 < i < m} {}^{\perp i} \mathcal{D} = \bigcap_{0 < i < m} \mathcal{D}^{\perp i}.$$

Observación 2.59. Notemos que si \mathcal{D} es una subcategoría m -cluster tilting (con $m \geq 2$) de una categoría abeliana \mathcal{C} con suficientes proyectivos e inyectivos, entonces las \mathcal{D} -precubiertas y las \mathcal{D} -preenvolventes son especiales, ya que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{D}, \mathcal{D}) = 0$.

En este ejemplo, probamos que una subcategoría \mathcal{D} de una categoría abeliana \mathcal{C} es una subcategoría $(n+1)$ -cluster tilting si, y solo si, ésta forma un par de n -cotorsión de la forma $(\mathcal{D}, \mathcal{D})$.

Lema 2.60. Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} clases de objetos de \mathcal{C} tales que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ para cualquier entero $1 \leq i \leq n$. Si la contención

$$\bigcap_{i=1}^m {}^{\perp i}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{B},$$

se cumple para algún entero $1 \leq m \leq n$, entonces $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.

Demostración. Sea m un entero con $1 \leq m \leq n$ y tal que $\bigcap_{i=1}^m {}^{\perp i}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Entonces, tenemos las siguientes contenciones:

$$\mathcal{A} \subseteq \bigcap_{i=1}^m {}^{\perp i} \mathcal{B} \subseteq \bigcap_{i=1}^m {}^{\perp i} (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}.$$

Por lo tanto, el resultado se sigue. \square

Proposición 2.61. *Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de n -cotorsión en \mathcal{C} . Entonces, las siguientes condiciones se cumplen.*

(1) *Si existe un entero $1 \leq m \leq n$ tal que las igualdades*

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \bigcap_{i=1}^m {}^{\perp i} (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \bigcap_{i=1}^m (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^{\perp i}$$

son ciertas, entonces $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ y la clase $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ es precubriente especial y preenvolvente especial.

(2) *La clase $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ es una subcategoría $(n + 1)$ -cluster tilting si, y solo si, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.*

Demostración. El inciso (1) se sigue del Lema 2.60, la Proposición 2.8 y sus duales.

La implicación directa del enunciado en (2) es una consecuencia del inciso (1). Ahora, para el recíproco del inciso (2), supongamos que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Entonces, por la Proposición 2.8 y su dual, obtenemos que \mathcal{A} es una clase precubriente especial y una clase preenvolvente especial. Luego, es suficiente probar que $\mathcal{A} = \bigcap_{i=1}^n {}^{\perp i} \mathcal{A} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{A}^{\perp i}$, lo cual se sigue del Teorema 2.7 (2) y su dual. \square

Con los resultados anteriores, estamos listos para dar la siguiente caracterización de subcategorías $(n + 1)$ -cluster tilting.

Teorema 2.62. *Sea \mathcal{C} una categoría abeliana con suficientes proyectivos e injectivos. Entonces, para cualquier subcategoría $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ y cualquier entero $n \geq 1$, los siguientes enunciados son equivalentes.*

(a) *$(\mathcal{D}, \mathcal{D})$ es un par de n -cotorsión en \mathcal{C} .*

(b) *\mathcal{D} es una subcategoría $(n + 1)$ -cluster tilting de \mathcal{C} .*

Más aún, en caso de que alguna de las condiciones anteriores se cumpla, tenemos que $\mathcal{C} = \mathcal{D}_n^\wedge = \mathcal{D}_n^\vee$.

Demostración. La implicación (a) \Rightarrow (b) se sigue por la Proposición 2.61. Ahora, supongamos que \mathcal{D} es una subcategoría $(n+1)$ -cluster tilting de \mathcal{C} . Entonces, tenemos que \mathcal{D} es cerrada por sumandos directos y $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{D}, \mathcal{D}) = 0$ para cada entero $1 \leq i \leq n$. El resultado se seguirá después de probar las igualdades $\mathcal{C} = \mathcal{D}_n^\wedge = \mathcal{D}_n^\vee$.

Por la Observación 2.59, para cualquier $M \in \mathcal{C}$ podemos considerar una sucesión exacta

$$\eta: 0 \rightarrow K_0 \rightarrow D_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0,$$

donde f_0 es una \mathcal{D} -precubierta especial. Después de aplicar el funtor $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(D, -)$ a η , con $D \in \mathcal{D}$, obtenemos

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(D, K_0) = 0 \text{ y } \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(D, K_0) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(D, M) \text{ para cada } 1 \leq i \leq n-1. \quad (2.4.5)$$

Inductivamente podemos construir una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow D_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} D_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow D_1 \xrightarrow{f_1} D_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0, \quad (2.4.6)$$

donde $D_i \in \mathcal{D}$ y $K_i := \text{Im}(f_i)$ para cada $0 \leq i \leq n-1$, y tal que las siguientes relaciones se cumplen:

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(D, K_n) &= 0, \\ \text{Ext}_{\mathcal{C}}^2(D, K_n) &\cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(D, K_{n-1}) = 0, \\ \text{Ext}_{\mathcal{C}}^3(D, K_n) &\cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^2(D, K_{n-1}) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(D, K_{n-2}) = 0, \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(D, K_n) &\cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n-1}(D, K_{n-1}) \cong \cdots \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(D, K_1) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, obtenemos que $K_n \in \bigcap_{i=1}^n \mathcal{D}^{\perp i} = \mathcal{D}$ y entonces $M \in \mathcal{D}_n^\wedge$. Dualmente, podemos mostrar que $M \in \mathcal{D}_n^\vee$. \square

Otro hecho interesante acerca de subcategorías $(n+1)$ -cluster tilting \mathcal{D} es que n es el entero más grande para el cual la condición $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(\mathcal{D}, \mathcal{D}) = 0$ se cumple, en el sentido de que si la condición $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n+1}(\mathcal{D}, \mathcal{D}) = 0$ se satisface, fuerza a que \mathcal{C} sea una categoría de Frobenius. Precisaremos esto en el siguiente resultado.

Proposición 2.63. Sean $n \geq 1$ y \mathcal{D} una subcategoría $(n+1)$ -cluster tilting de una categoría abeliana \mathcal{C} con suficientes proyectivos e inyectivos. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n+1}(\mathcal{D}, \mathcal{D}) = 0$.
- (b) $\mathcal{P}(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$.
- (c) $\mathcal{I}(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$.
- (d) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{D}, \mathcal{D}) = 0$ para cada $i \geq 1$.

Demostración. Es suficiente probar que (a) implica (b) y (c). Supongamos que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n+1}(\mathcal{D}, \mathcal{D}) = 0$. Por la Proposición 2.6, tenemos que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{D}, \mathcal{D}_n^\wedge) = 0$, y como $\mathcal{C} = \mathcal{D}_n^\wedge$ por la prueba del Teorema 2.62, obtenemos la contención $\mathcal{D} \subseteq {}^{\perp_1}\mathcal{C} = \mathcal{P}(\mathcal{C})$. Dualmente, podemos también mostrar que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}^{\perp_1} = \mathcal{I}(\mathcal{C})$ es cierta. Por otra parte, sabemos que $\mathcal{P}(\mathcal{C}) \cup \mathcal{I}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{D}$, ya que $\bigcap_{1 \leq i \leq n} {}^{\perp_i}\mathcal{D} = \mathcal{D} = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \mathcal{D}^{\perp_i}$. Por lo tanto, $\mathcal{P}(\mathcal{C}) = \mathcal{D} = \mathcal{I}(\mathcal{C})$. \square

Observación 2.64. El Teorema 2.62 puede formar un ejemplo no trivial de un par de n -cotorsión. A saber, sea \mathcal{D} una subcategoría $(n+1)$ -cluster tilting de una categoría abeliana \mathcal{C} , con suficientes proyectivos e inyectivos. Entonces, por el Teorema 2.62 y la Observación 2.31 (2), $(\mathcal{D}, \mathcal{D})$ es el par de n -cotorsión trivial (esto es, $\mathcal{D} = \mathcal{P}(\mathcal{C})$) si, y solo si, \mathcal{D} es resolvente.

Usando el Teorema anterior y [Iya11, Teorema 1.6], obtenemos el siguiente ejemplo. Recordemos que un álgebra A es *autoinyectiva* si $A_A \in \text{Mod}(A^{\text{op}})$ es inyectivo.

Ejemplo 2.65. Sea Λ una R -álgebra de Artin. Notemos que la categoría $\text{mod}(\Lambda)$, de Λ -módulos izquierdos finitamente generados, es una categoría abeliana con suficientes proyectivos e inyectivos, es bien sabido que cada Λ -módulo finitamente generado tiene una cubierta proyectiva finitamente generada y una envolvente inyectiva finitamente generada.

- (1) Si $\text{gl.dim}(\Lambda) \leq n+1$ y $\text{mod}(\Lambda)$ tiene un objeto $(n+1)$ -cluster tilting T , entonces existe un único par de n -cotorsión en $\text{mod}(\Lambda)$ de la forma $(\mathcal{D}, \mathcal{D})$, donde $\mathcal{D} := \text{add}(T)$ es la clase de sumandos directos de coproductos finitos de copias de T . En este caso, notemos que \mathcal{D} es resolvente si, y solo si, $\mathcal{D} = \text{add}(\Lambda)$.
- (2) Si Λ no es autoinyectiva teniendo un objeto $(n+1)$ -cluster tilting T , necesariamente se tiene que $\text{Ext}_{\Lambda}^{n+1}(T, T) \neq 0$ y $\mathcal{P}(\Lambda) \cup \mathcal{I}(\Lambda) \subsetneq \text{add}(T)$.

2.5. n -Cotorsión en $\text{Ch}(\mathcal{C})$

La última sección de este capítulo está dedicada a estudiar pares de n -cotorsión en $\text{Ch}(\mathcal{C})$ la categoría de complejos de cadena de objetos en \mathcal{C} . En la primera parte, caracterizamos algunas familias de pares de n -cotorsión de complejos en términos de pares de n -cotorsión en \mathcal{C} . En la segunda parte de esta sección, estudiaremos cómo inducir pares de n -cotorsión de complejos de un par de n -cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en \mathcal{C} . Los complejos involucrados en estos pares de n -cotorsión son los \mathcal{A} -complejos, \mathcal{B} -complejos, y los complejos diferencialmente graduados considerados por Gillespie en [Gil04].

A continuación establecemos la notación necesaria para la categoría $\text{Ch}(\mathcal{C})$. Dado un complejo de cadena $X \in \text{Ch}(\mathcal{C})$ con diferenciales $\partial_m^X : X_m \rightarrow X_{m-1}$, denotamos sus ciclos y fronteras en \mathcal{C} por $Z_m(X) := \text{Ker}(\partial_m^X)$ y $B_m(X) := \text{Im}(\partial_{m+1}^X)$, respectivamente.

Usando también la notación de [Gil08, Sección 3]. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de n -cotorsión en $\text{Ch}(\mathcal{C})$. El símbolo \mathcal{A}' denotará la clase de objetos $M \in \mathcal{C}$ tales que $M = A_m$ para algún $A \in \mathcal{A}$ y algún $m \in \mathbb{Z}$. La clase \mathcal{B}' se define de manera similar.

Motivados por [Gil08, Definición 3.4], proponemos lo siguiente.

Definición 2.66. *Un par de n -cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en $\text{Ch}(\mathcal{C})$ es ortogonal grado a grado si para cada par de enteros $i, j \in \mathbb{Z}$ tenemos las siguientes relaciones:*

$$(a) \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A_i, Y_j) = 0 \text{ si } A \in \mathcal{A} \text{ y } Y \in \mathcal{B}_{n-1}^{\wedge}, \text{ y}$$

$$(b) \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X_i, B_j) = 0 \text{ si } X \in \mathcal{A}_{n-1}^{\vee} \text{ y } B \in \mathcal{B}.$$

Dado un objeto $M \in \mathcal{C}$ y un entero $m \in \mathbb{Z}$, el m -ésimo complejo disco centrado en M es el complejo de cadena denotado por $D^m(M)$, tal que M aparece en los grados m y $m-1$, y 0 en los demás. La única diferencial no cero es la identidad en M . El m -ésimo complejo esfera centrado en M , por otra parte, es el complejo de cadena $S^m(M) \in \text{Ch}(\mathcal{C})$ con M en la m -ésima componente y 0 en las demás.

La primera relación que notamos entre n -cotorsión en $\text{Ch}(\mathcal{C})$ y n -cotorsión en \mathcal{C} está descrita en el siguiente resultado, el cual es la versión n -cotorsión de [Gil08, Lema 3.5].

Lema 2.67. *Sea \mathcal{C} una categoría abeliana con suficientes inyectivos. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes para cualquier par de n -cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en $\text{Ch}(\mathcal{C})$:*

- (a) $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es ortogonal grado a grado.
- (b) Si $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$, entonces $D^m(A_i) \in \mathcal{A}$ y $D^n(B_j) \in \mathcal{B}$ para cualesquiera $m, n, i, j \in \mathbb{Z}$.
- (c) $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ es un par de n -cotorsión en \mathcal{C} .

Demostración. Probemos las implicaciones (a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a).

- (a) \Rightarrow (b): Sea $A \in \mathcal{A}$ y $Y \in \mathcal{B}_{n-1}^\wedge$. Por [Gil04, Lema 3.1] tenemos que

$$\text{Ext}_{\text{Ch}}^1(D^m(A_i), Y) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A_i, Y_m) = 0$$

donde $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A_i, Y_m) = 0$ por la condición (a). Luego, $D^m(A_i) \in {}^{\perp_1}(\mathcal{B}_{n-1}^\wedge) = \mathcal{A}$ por el Teorema 2.7. De manera similar, podemos probar que $D^n(B_j) \in \mathcal{B}$ para cualesquiera $j, n \in \mathbb{Z}$ si $B \in \mathcal{B}$.

- (b) \Rightarrow (c): Probemos que $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ es un par de n -cotorsión izquierdo en \mathcal{C} suponiendo (b).

Veamos primero que \mathcal{A}' es cerrada por sumandos directos. Sea $N \in \mathcal{A}'$ y M un sumando directo de A . Entonces, $N = A_m$ para algún complejo $A \in \mathcal{A}$ y algún $m \in \mathbb{Z}$. Notemos que $D^0(A_m) \in \mathcal{A}$ por la condición (b), y que $D^0(M)$ es un sumando directo de $D^0(A_m)$. Como \mathcal{A} es cerrada por sumandos directos por hipótesis, tenemos que $D^0(M) \in \mathcal{A}$, esto es, $M \in \mathcal{A}'$. Por lo tanto, \mathcal{A}' es cerrada por sumandos directos.

Ahora mostremos que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}', \mathcal{B}') = 0$ para cada $1 \leq i \leq n$. Por la Proposición 2.5, como \mathcal{C} tiene suficientes inyectivos, la condición anterior es equivalente a probar que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}', (\mathcal{B}')_{n-1}^\wedge) = 0$. Así, sea $M \in \mathcal{A}'$ y $N \in (\mathcal{B}')_{n-1}^\wedge$. Por la condición (b), podemos notar que $D^0(M) \in \mathcal{A}$ y $D^1(N) \in \mathcal{B}_{n-1}^\wedge$. Luego, usando [Gil04, Lema 3.1], obtenemos

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M, N) \cong \text{Ext}_{\text{Ch}}^1(D^0(M), D^1(N)) = 0,$$

donde la última igualdad se sigue por la Proposición 2.5. Por lo tanto, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}', (\mathcal{B}')_{n-1}^\wedge) = 0$.

Finalmente, mostremos que para cada objeto $C \in \mathcal{C}$ existe una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow C \rightarrow 0$$

donde $M \in \mathcal{A}'$ y $N \in (\mathcal{B}')_{n-1}^\wedge$. Para esto, consideremos el complejo esfera $S^0(C) \in \text{Ch}(\mathcal{C})$. Como $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de n -cotorsión en $\text{Ch}(\mathcal{C})$, existe una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow Y \rightarrow A \rightarrow S^0(C) \rightarrow 0$$

donde $A \in \mathcal{A}$ y $Y \in \mathcal{B}_{n-1}^\wedge$. Entonces, en grado 0 tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow C \rightarrow 0$$

donde $M = A_0 \in \mathcal{A}'$ y $N = Y_0 \in (\mathcal{B}')_{n-1}^\wedge$.

Lo anterior prueba que $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ es un par de n -cotorsión izquierdo en \mathcal{C} . De manera similar, uno puede mostrar que $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ es también un par de n -cotorsión derecho en \mathcal{C} . Por lo tanto, (c) se sigue.

- (c) \Rightarrow (a): Es claro por las igualdades $\mathcal{A}' = {}^{\perp 1}((\mathcal{B}')_{n-1}^\wedge)$ y $\mathcal{B}' = ((\mathcal{A}')_{n-1}^\vee)^{\perp 1}$.

□

En lo que sigue, necesitamos considerar el subgrupo $\text{Ext}_{\text{dw}}^1(X, Y)$ de $\text{Ext}_{\text{Ch}}^1(X, Y)$ formado por las clases de sucesiones exactas cortas

$$0 \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X \rightarrow 0$$

en $\text{Ch}(\mathcal{C})$ que se escinden grado a grado, esto es,

$$0 \rightarrow Y_m \rightarrow Z_m \rightarrow X_m \rightarrow 0$$

se escinde en \mathcal{C} para cada $m \in \mathbb{Z}$.

Recordemos también que dados un complejo de cadena $X \in \text{Ch}(\mathcal{C})$ y un entero $k \in \mathbb{Z}$, la k -ésima suspensión de X es el complejo $X[k] \in \text{Ch}(\mathcal{C})$ cuyas componentes son $(X[k])_m := X_{m-k}$ y con diferenciales $\partial_m^{X[k]} := (-1)^k \partial_{m-k}^X$.

El siguiente resultado corresponde a [Gil08, Proposición 3.7] en el contexto de pares de n -cotorsión. Daremos una caracterización para la clase \mathcal{A} en cada par de n -cotorsión ortogonal grado a grado $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en $\text{Ch}(\mathcal{C})$.

Proposición 2.68. *Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de n -cotorsión ortogonal grado a grado en $\text{Ch}(\mathcal{C})$ (donde \mathcal{C} es una categoría abeliana con suficientes inyectivos), y sea*

$(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ el correspondiente par de n -cotorsión en \mathcal{C} del Lema 2.67. Si \mathcal{B} es cerrada por suspensiones, entonces \mathcal{A} coincide con la clase de todos los complejos $A \in \text{Ch}(\mathcal{C})$ para los cuales $A_m \in \mathcal{A}'$ para cada $m \in \mathbb{Z}$, y tal que cada morfismo de complejos $A \rightarrow Y$ es nulo homotópico siempre que $Y \in \mathcal{B}_{n-1}^\wedge$.

Demostración. Supongamos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de n -cotorsión en $\text{Ch}(\mathcal{C})$ con \mathcal{B} cerrada por suspensiones. Notemos que lo último implica que \mathcal{B}_{n-1}^\wedge es también cerrada por suspensiones.

Denotemos por \mathcal{X} a la clase de complejos $X \in \text{Ch}(\mathcal{C})$ con $X_m \in \mathcal{A}'$ y tales que cada morfismo de complejos $X \rightarrow Y$ es nulo homotópico si $Y \in \mathcal{B}_{n-1}^\wedge$. Mostremos que $\mathcal{A} = \mathcal{X}$ usando la igualdad $\mathcal{A} = {}^{\perp_1} \mathcal{B}_{n-1}^\wedge$ del Teorema 2.7.

- $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{X}$: Sea $X \in \mathcal{X}$ y $Y \in \mathcal{B}_{n-1}^\wedge$. Como $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ es un par de n -cotorsión por el Lema 2.67, tenemos que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X_m, Y_m) = 0$ para cada $m \in \mathbb{Z}$, y entonces $\text{Ext}_{\text{Ch}}^1(X, Y) = \text{Ext}_{\text{dw}}^1(X, Y)$. Por otra parte, $\text{Ext}_{\text{dw}}^1(X, Y) \cong \text{Hom}_{\text{Ch}}(X, Y[1]) / \sim$ por [Gil04, Lema 2.1], donde \sim representa la relación de homotopía en complejos. Como $X \in \mathcal{X}$ y $Y[1] \in \mathcal{B}_{n-1}^\wedge$ con \mathcal{B}_{n-1}^\wedge cerrada por suspensiones, tenemos que $\text{Hom}_{\text{Ch}}(X, Y[1]) / \sim = 0$, y por tanto $\text{Ext}_{\text{Ch}}^1(X, Y) = 0$. Luego, tenemos que $X \in \mathcal{A}$.
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$: Sea $A \in \mathcal{A}$ y $Y \in \mathcal{B}_{n-1}^\wedge$. Tenemos que

$$0 = \text{Ext}_{\text{Ch}}^1(A, Y[-1]) \supseteq \text{Ext}_{\text{dw}}^1(A, Y[-1]) \cong \text{Hom}_{\text{Ch}}(A, Y) / \sim .$$

ya que $Y[-1] \in \mathcal{B}_{n-1}^\wedge$. Luego, se sigue que cada morfismo de complejos $A \rightarrow Y$ es nulo homotópico si $Y \in \mathcal{B}_{n-1}^\wedge$.

Ahora, sea $N \in (\mathcal{B}')_{n-1}^\wedge$ y notemos que $D^{m+1}(N) \in \mathcal{B}_{n-1}^\wedge$ por el Lema 2.67. Entonces, tenemos que

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A_m, N) \cong \text{Ext}_{\text{Ch}}^1(A, D^{m+1}(N)) = 0,$$

esto es, $A_m \in {}^{\perp_1}[(\mathcal{B}')_{n-1}^\wedge] = \mathcal{A}'$ (por el Lema 2.67 y el Teorema 2.7).

Por lo tanto, tenemos que $A_m \in \mathcal{A}'$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. □

Mostraremos ahora cómo inducir pares de n -cotorsión que involucran a ciertas familias de complejos de un par de n -cotorsión en \mathcal{C} . Estas familias serán presentadas a continuación en la definición 2.69, la cual sigue ideas de [Gil04, Definición 3.3].

Para el resto de esta sección, será importante recordar que $\text{Ch}(\mathcal{C})$ está dotada con un funtor *Hom interno* $\mathcal{H}om(-, -)$ definido como sigue: para cada $X, Y \in \text{Ch}(\mathcal{C})$, $\mathcal{H}om(X, Y)$ es el complejo de cadenas de grupos abelianos definido como:

$$\mathcal{H}om(X, Y)_m := \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_k, Y_{m+k})$$

para cada $m \in \mathbb{Z}$, y cuyas diferenciales están dadas por $f \mapsto \partial^Y \circ f - (-1)^m f \circ \partial^X$ (ver [Gar99] de García Rozas, por ejemplo). Se sabe que cada morfismo de complejos $X \rightarrow Y$ es nulo homotópico si, y solo si, el complejo $\mathcal{H}om(X, Y)$ es exacto.

Definición 2.69. Sea \mathcal{X} una clase de objetos de \mathcal{C} . Un complejo de cadenas $X \in \text{Ch}(\mathcal{C})$ es:

- (1) un complejo (con términos) en \mathcal{X} (o un \mathcal{X} -complejo grado a grado) si $X_m \in \mathcal{X}$ para cada $m \in \mathbb{Z}$;
- (2) un \mathcal{X} -complejo si X es exacto y $Z_m(X) \in \mathcal{X}$ para cada $m \in \mathbb{Z}$.

Denotaremos por $\text{Ch}(\mathcal{X})$ a la clase de complejos en \mathcal{X} , y por $\tilde{\mathcal{X}}$ a la clase de \mathcal{X} -complejos.

Ahora bien, sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos clases de objetos en \mathcal{C} tales que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$. Podemos definir dos nuevas familias de complejos a partir de $\text{Ch}(\mathcal{A})$, $\tilde{\mathcal{A}}$, $\text{Ch}(\mathcal{B})$ y $\tilde{\mathcal{B}}$.

- (3) Decimos que un complejo $X \in \text{Ch}(\mathcal{C})$ es $\mathcal{H}om(-, \tilde{\mathcal{B}})$ -acíclico en $\text{Ch}(\mathcal{A})$ si $X \in \text{Ch}(\mathcal{A})$ y si $\mathcal{H}om(X, \mathcal{B})$ es un complejo exacto de grupos abelianos siempre que $\mathcal{B} \in \tilde{\mathcal{B}}$.
- (4) Los complejos $\mathcal{H}om(\tilde{\mathcal{A}}, -)$ -acíclicos en $\text{Ch}(\mathcal{B})$ se definen dualmente, esto es, como aquellos complejos $Y \in \text{Ch}(\mathcal{B})$ tales que $\mathcal{H}om(\mathcal{A}, Y)$ es exacto para cada $\mathcal{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$.

Denotaremos por $\text{Ch}_{\text{acy}}(\mathcal{A}; \tilde{\mathcal{B}})$ a la clase de complejos $\mathcal{H}om(-, \tilde{\mathcal{B}})$ -acíclicos en $\text{Ch}(\mathcal{A})$. Dualmente, $\text{Ch}_{\text{acy}}(\tilde{\mathcal{A}}; \mathcal{B})$ denotará la clase de complejos $\mathcal{H}om(\tilde{\mathcal{A}}, -)$ -acíclicos en $\text{Ch}(\mathcal{B})$.

Observación 2.70.

- (1) Si \mathcal{X} es una clase de objetos en \mathcal{C} cerrada por extensiones, entonces $\tilde{\mathcal{X}} \subseteq \text{Ch}(\mathcal{X})$.
- (2) Si $X \in \tilde{\mathcal{X}}$, entonces $X[k] \in \tilde{\mathcal{X}}$ para cada $k \in \mathbb{Z}$.
- (3) Si $0 \in \mathcal{X}$, entonces $D^m(X) \in \tilde{\mathcal{X}}$ para cada $X \in \mathcal{X}$ y $m \in \mathbb{Z}$.
- (4) En caso donde $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión en \mathcal{C} , los complejos $\text{Hom}(-, \tilde{\mathcal{B}})$ -acíclicos en $\text{Ch}(\mathcal{A})$ y $\text{Hom}(\tilde{\mathcal{A}}, -)$ -acíclicos en $\text{Ch}(\mathcal{B})$ son llamados en [Gil04] \mathcal{A} -complejos diferencialmente graduados y \mathcal{B} -complejos diferencialmente graduados, denotados por $\text{dg}\tilde{\mathcal{A}}$ y $\text{dg}\tilde{\mathcal{B}}$, respectivamente. Como puede haber más de dos pares $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ de clases de objetos en \mathcal{C} que satisfacen la condición $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$, preferimos usar la terminología en la Definición 2.69 para evitar confusión.

En efecto, podemos encontrar un ejemplo para $\text{Ch}_{\text{acy}}(\mathcal{A}; \tilde{\mathcal{B}})$ donde \mathcal{A} y \mathcal{B} no forman un par de cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en \mathcal{C} . Este es el caso para las clases $\mathcal{A} := \mathcal{DP}(R)$ y $\mathcal{B} := \mathcal{F}(R)$ de módulos Ding proyectivos y planos. Por [YLL13, Teorema 3.7], un complejo de cadenas en un anillo arbitrario R es Ding proyectivo si, y solo si, es $\text{Hom}(-, \widetilde{\mathcal{F}(R)})$ -acíclico en $\text{Ch}(\mathcal{DP}(R))$. Teniendo en mente que $\widetilde{\mathcal{F}(R)}$ es precisamente la clase de complejos planos.

- (5) Si $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$, \mathcal{B} es cerrada por extensiones y $0 \in \mathcal{A}$, entonces $S^m(\mathcal{A}) \in \text{Ch}_{\text{acy}}(\mathcal{A}; \tilde{\mathcal{B}})$ para cada $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$ y $m \in \mathbb{Z}$ [Gil08, Lema 4.2].

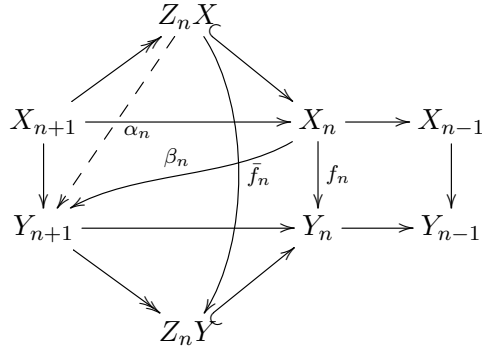
El siguiente resultado describe los morfismos entre \mathcal{A} -complejos y \mathcal{B} -complejos simplificando las hipótesis en [Gil04, Lema 3.9] si cumple cierta relación de ortogonalidad entre las clases \mathcal{A} y \mathcal{B} . En el siguiente lema, para cualquier complejo exacto X escribiremos la factorización de ∂_n^X a través de $B_{n+1}X = Z_nX$ como $\partial_n^X = l_n^X e_n^X$.

Lema 2.71. Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos clases de objetos en \mathcal{C} . Si $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ y \mathcal{B} es cerrada por extensiones, entonces cada morfismo de un \mathcal{A} -complejo a un \mathcal{B} -complejo es nulo homotópico.

Demostración. Sea $f = (f_n)_{n \in \mathbb{Z}} : X \rightarrow Y$ un morfismo en $\text{Ch}(\mathcal{C})$ con $X \in \tilde{\mathcal{A}}$ y $Y \in \tilde{\mathcal{B}}$. Veamos que existe un morfismo $g := (g_n)_{n \in \mathbb{Z}} : X \rightarrow Y$ en $\text{Ch}(\mathcal{C})$ homotópico a f y tal que $\partial_{n+1}^Y g_{n+1} = 0 = g_n \partial_{n+1}^X$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

En efecto, consideremos $\bar{f}_n : Z_n X \rightarrow Z_n Y$ dado por la propiedad universal del núcleo, esto es, \bar{f}_n satisface $f_n l_{n+1}^X = l_{n+1}^Y \bar{f}_n$.

(*) Aplicando $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z_n X, -)$ a $\eta : 0 \rightarrow Z_{n+1} Y \rightarrow Y_{n+1} \rightarrow Z_n Y \rightarrow 0$ y usando que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ obtenemos un morfismo $\alpha_n : Z_n X \rightarrow Y_{n+1}$ tal que $e_{n+1}^Y \alpha_n = \bar{f}_n$. Similarmente, considerando $\eta' : 0 \rightarrow Z_n X \rightarrow X_n \rightarrow Z_{n-1} X \rightarrow 0$ y aplicando $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y_{n-1})$ obtenemos $\beta_n : X_n \rightarrow Y_{n+1}$ tal que $\beta_n l_{n+1}^X = \alpha_n$.



Definimos $g_n := f_n - (\partial_{n+1}^Y \beta_n + \beta_{n-1} \partial_n^X)$ y $g := (g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Como

$$\begin{aligned}
 g_n \partial_{n+1}^X &= f_n \partial_{n+1}^X - (\partial_{n+1}^Y \beta_n + \beta_{n-1} \partial_n^X) \partial_{n+1}^X \\
 &= f_n \partial_{n+1}^X - \partial_{n+1}^Y \beta_n \partial_{n+1}^X \\
 &= \partial_{n+1}^Y f_{n+1} - \partial_{n+1}^Y \beta_n \partial_{n+1}^X \\
 &= \partial_{n+1}^Y f_{n+1} - \partial_{n+1}^Y (\partial_{n+2}^Y \beta_{n+1} + \beta_n \partial_{n+1}^X) \\
 &= \partial_{n+1}^Y g_{n+1}
 \end{aligned}$$

tenemos que g es un morfismo de complejos y es claro que $g \sim f$. Más

aún,

$$\begin{aligned}
g_n \partial_{n+1}^X &= f_n \partial_{n+1}^X - \partial_{n+1}^Y \beta_n \partial_{n+1}^X \\
&= f_n \partial_{n+1}^X - \partial_{n+1}^Y \beta_n l_{n+1}^X e_{n+1}^X \\
&= f_n \partial_{n+1}^X - \partial_{n+1}^Y \alpha_n e_{n+1}^X \\
&= f_n \partial_{n+1}^X - l_{n+1}^Y e_{n+1}^Y \alpha_n e_{n+1}^X \\
&= f_n \partial_{n+1}^X - l_{n+1}^Y \bar{f}_n e_{n+1}^X \\
&= f_n \partial_{n+1}^X - f_n l_{n+1}^X e_{n+1}^X \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Luego, $\partial_{n+1}^Y g_{n+1} = 0 = g_n \partial_{n+1}^X$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Veamos que $g \sim 0$. En efecto, como $\partial_n^Y g_n = 0$ existe $\tilde{g}_n : X_n \rightarrow Z_n Y$ tal que $l_{n+1}^Y \tilde{g}_n = g_n$. Luego, $\tilde{g}_n \partial_{n+1}^X = 0$ y $B_n X = Z_n X \subseteq \text{Ker}(\tilde{g}_n)$. La última contención implica que existe $\bar{g}_n : X_n / Z_n X \rightarrow Z_n Y$ tal que $\tilde{g}_n = \bar{g}_n \pi$ donde $\pi : X_n \rightarrow X_n / Z_n X$ es la proyección natural. Ahora bien, como existe un isomorfismo $h : Z_{n-1} \rightarrow X_n / Z_n X$ tal que $h e_n^X = \pi$, podemos considerar $\hat{g}_n := \bar{g}_n h$ y usando el argumento dado en (*) obtenemos un morfismo $\delta_n : Z_{n-1} X \rightarrow Y_{n+1}$ tal que $e_{n+1}^Y \delta_n = \hat{g}_n$.

Finalmente, comprobemos que $\delta := (\delta_n e_n^X)_{n \in \mathbb{Z}}$ es una homotopía de g a 0. En efecto,

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1}^Y \delta_n e_n^X + \delta_{n-1} e_{n-1}^X \partial_n^X &= l_{n+1}^Y e_{n+1}^Y \delta_n e_n^X = l_{n+1}^Y \hat{g}_n e_n^X \\
&= l_{n+1}^Y \bar{g}_n h e_n^X = l_{n+1}^Y \bar{g}_n \pi \\
&= l_{n+1}^Y \tilde{g}_n = g_n.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f \sim 0$. □

Antes de inducir pares de cotorsión a partir de un par de n -cotorsión en \mathcal{C} , probemos las siguientes relaciones de ortogonalidad entre las clases (1), (2), (3) y (4) en la Definición 2.69. Recordemos que \mathcal{C} tiene *suficientes \mathcal{X} -objetos*, para alguna clase \mathcal{X} de objetos de \mathcal{C} , si cada objeto de \mathcal{C} es imagen de un epimorfismo de un objeto en \mathcal{X} . El siguiente lema requiere menos hipótesis que en [Gil04, Proposición 3.6].

Lema 2.72. *Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos clases de objetos en \mathcal{C} . Entonces, los siguientes enunciados se cumplen:*

(1) Si $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$, entonces

$$\text{Ext}_{\text{Ch}}^1(\text{Ch}_{\text{acy}}(\mathcal{A}; \tilde{\mathcal{B}}), \tilde{\mathcal{B}}) = 0 \quad \text{y} \quad \text{Ext}_{\text{Ch}}^1(\tilde{\mathcal{A}}, \text{Ch}_{\text{acy}}(\tilde{\mathcal{A}}; \mathcal{B})) = 0.$$

(2) Si $0 \in \mathcal{A}$, entonces $Z_m(Y) \in \mathcal{A}^{\perp 1}$ para cada $Y \in (\text{Ch}_{\text{acy}}(\mathcal{A}; \widetilde{\mathcal{A}^{\perp 1}}))^{\perp 1}$ y para cada $m \in \mathbb{Z}$. Más aún, si \mathcal{C} tiene *suficientes \mathcal{A} -objetos*, entonces Y es un $\mathcal{A}^{\perp 1}$ -complejo.

(3) Si $0 \in \mathcal{B}$, entonces ${}^{\perp 1}\tilde{\mathcal{B}} \subseteq \text{Ch}_{\text{acy}}({}^{\perp 1}\mathcal{B}; \tilde{\mathcal{B}})$.

Demostración.

(1) Supongamos que la relación $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ es cierta, y sean $A \in \text{Ch}_{\text{acy}}(\mathcal{A}; \tilde{\mathcal{B}})$ y $B \in \tilde{\mathcal{B}}$. Veamos que $\text{Ext}_{\text{Ch}}^1(A, B) = 0$. Consideremos el subgrupo $\text{Ext}_{\text{dw}}^1(A, B) \subseteq \text{Ext}_{\text{Ch}}^1(A, B)$. Sabemos que $A_m \in \mathcal{A}$ para cada $m \in \mathbb{Z}$. Por otra parte, tenemos sucesiones exactas cortas

$$0 \rightarrow Z_m(B) \rightarrow B_m \rightarrow Z_{m-1}(B) \rightarrow 0$$

con $Z_{m-1}(B), Z_m(B) \in \mathcal{B}$ y entonces $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A_m, B_m) = 0$ para cada $m \in \mathbb{Z}$. Esto implica que $\text{Ext}_{\text{dw}}^1(A, B) = \text{Ext}_{\text{Ch}}^1(A, B)$. Ahora bien, para mostrar que $\text{Ext}_{\text{dw}}^1(A, B) = 0$, usaremos el isomorfismo

$$\text{Ext}_{\text{dw}}^1(A, B) \cong H_0(\mathcal{H}om(A, B[1]))$$

de [Gil04, Lema 2.1]. Como el complejo $\mathcal{H}om(A, B[1])$ es exacto se tiene que $H_0(\mathcal{H}om(A, B[1])) = 0$. Por lo tanto, $\text{Ext}_{\text{Ch}}^1(A, B) = 0$. La prueba de $\text{Ext}_{\text{Ch}}^1(\tilde{\mathcal{A}}, \text{Ch}_{\text{acy}}(\tilde{\mathcal{A}}; \mathcal{B})) = 0$ se hace de manera similar.

- (2) Sean $Y \in (\text{Ch}_{\text{acy}}(\mathcal{A}; \widetilde{\mathcal{A}^{\perp 1}}))^{\perp 1}$, y consideremos $Z_m(Y)$ y $A \in \mathcal{A}$. Veamos que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, Z_m(Y)) = 0$. Por Gillespie [Gil08, Lema 4.2] sabemos que existe un monomorfismo

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, Z_m(Y)) \rightarrow \text{Ext}_{\text{Ch}}^1(S^m(A), Y).$$

Luego, será suficiente probar que $S^m(A) \in \text{Ch}_{\text{acy}}(\mathcal{A}; \widetilde{\mathcal{A}^{\perp 1}})$. Es claro que $S^m(A) \in \text{Ch}(\mathcal{A})$ ya que $0, A \in \mathcal{A}$. Ahora bien, sea $B \in \widetilde{\mathcal{A}^{\perp 1}}$. Por [Gil04, Lema 2.1], para cada $m \in \mathbb{Z}$ tenemos que

$$\text{H}_i(\text{Hom}(S^m(A), B)) \cong \text{Ext}_{\text{dw}}^1(S^m(A), B[-i-1]).$$

Notemos que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1((S^m(A))_k, (B[-i-1])_k) = 0$ para cada $k \neq m$ y $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1((S^m(A))_m, (B[-i-1])_m) = \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, B_{m+i+1})$ en el caso $k = m$. Dado que B es un complejo exacto con ciclos en $\mathcal{A}^{\perp 1}$, podemos probar que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, B_{m+i+1}) = 0$ de manera análoga como en la parte (1). Luego, se sigue que

$$\text{Ext}_{\text{dw}}^1(S^m(A), B[-i-1]) = \text{Ext}_{\text{Ch}}^1(S^m(A), B[-i-1]).$$

Usando de nuevo [Gil08, Lema 4.2] y que B es exacto, obtenemos un isomorfismo

$$\text{Ext}_{\text{Ch}}^1(S^m(A), B[-i-1]) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, Z_m(B[-i-1])),$$

donde $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, Z_m(B[-i-1])) = 0$. Entonces, $\text{H}_i(\text{Hom}(S^m(A), B)) = 0$ para cada $i \in \mathbb{Z}$, es decir, $\text{Hom}(S^m(A), B)$ es un complejo exacto. Luego, $S^m(A) \in \text{Ch}_{\text{acy}}(\mathcal{A}; \widetilde{\mathcal{A}^{\perp 1}})$, y por lo tanto $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, Z_m(Y)) = 0$.

Ahora, supongamos que \mathcal{C} tiene suficientes \mathcal{A} -objetos. Como ya sabemos que Y tiene ciclos en $\mathcal{A}^{\perp 1}$, basta probar que Y es un complejo exacto, esto es, la igualdad $Z_m(Y) = B_m(Y)$ se cumple para cada $m \in \mathbb{Z}$. La contención $B_m(Y) \subseteq Z_m(Y)$ es clara. Para la otra contención, consideremos un epimorfismo $f_m: A \rightarrow Z_m(Y)$ con $A \in \mathcal{A}$ ya que \mathcal{C} tiene suficientes \mathcal{A} -objetos. Esto induce un morfismo de cadenas $\tilde{f}: S^m(A) \rightarrow Y$ dado por $\tilde{f}_m := l_m^Y \circ f_m$ y 0 en otro caso, donde l_m^Y es la inclusión $Z_m(Y) \hookrightarrow Y_m$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{Ch}}(S^m(A), Y) / \sim &\cong \text{H}_0(\text{Hom}(S^m(A), Y)) \\ &\cong \text{Ext}_{\text{dw}}^1(S^m(A), Y[-1]) \\ &\subseteq \text{Ext}_{\text{Ch}}^1(S^m(A), Y[-1]), \end{aligned}$$

donde $\text{Ext}_{\text{Ch}}^1(S^m(A), Y[-1]) = 0$ ya que $\text{Ext}_{\text{Ch}}^1(S^m(A), Y[-1]) \cong \text{Ext}_{\text{Ch}}^1((S^m(A))[1], Y) = \text{Ext}_{\text{Ch}}^1(S^{m+1}(A), Y)$ y además $S^{m+1}(A) \in \text{Ch}_{\text{acy}}(\mathcal{A}; \widetilde{\mathcal{A}}^{\perp 1})$ (por la Observación 2.70 (5)). Luego, \tilde{f} es nulo homotópico, y entonces existe un morfismo $D_{m+1}: A \rightarrow Y_{m+1}$ tal que $\partial_{m+1}^Y \circ D_{m+1} = l_m^Y \circ f_m$ lo cual implica que $Z_m(Y) \subseteq B_m(Y)$, ya que f_m es un epimorfismo.

- (3) Finalmente, veamos la contención ${}^{\perp 1}(\tilde{\mathcal{B}}) \subseteq \text{Ch}_{\text{acy}}({}^{\perp 1}\mathcal{B}; \tilde{\mathcal{B}})$. Sea $X \in {}^{\perp 1}\tilde{\mathcal{B}}$. Probemos primero que $X_m \in {}^{\perp 1}\mathcal{B}$ para cada $m \in \mathbb{Z}$. Sea $B \in \mathcal{B}$. Sabemos que $D^{m+1}(B) \in \tilde{\mathcal{B}}$ por la Observación 2.70 (3), entonces

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X_m, B) \cong \text{Ext}_{\text{Ch}}^1(X, D^{m+1}(B)) = 0$$

debido a que $X \in {}^{\perp 1}\tilde{\mathcal{B}}$.

Ahora probemos que $\mathcal{H}om(X, B)$ es un complejo exacto de grupos abelianos para cada $B \in \tilde{\mathcal{B}}$. Tenemos isomorfismos naturales

$$H_m(\mathcal{H}om(X, B)) \cong \text{Ext}_{\text{dw}}^1(X, B[-m-1]) = \text{Ext}_{\text{Ch}}^1(X, B[-m-1]) = 0$$

donde $\text{Ext}_{\text{dw}}^1(X, B[-m-1]) = \text{Ext}_{\text{Ch}}^1(X, B[-m-1])$ se sigue como en (1), y $B[-m-1] \in \tilde{\mathcal{B}}$ por la Observación 2.70 (2).

□

Con estos resultados, estamos listos para mostrar cómo inducir pares de n -cotorsión en $\text{Ch}(\mathcal{C})$ que involucran a las clases $\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}, \text{Ch}_{\text{acy}}(\mathcal{A}; \tilde{\mathcal{B}})$ y $\text{Ch}_{\text{acy}}(\tilde{\mathcal{A}}; \mathcal{B})$ de un par de n -cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en \mathcal{C} y viceversa.

Teorema 2.73. *Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos clases de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} con suficientes inyectivos, tales que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ y \mathcal{B} es cerrada por extensiones que contiene a los inyectivos de \mathcal{C} . Si $(\text{Ch}_{\text{acy}}(\mathcal{A}; \tilde{\mathcal{B}}), \tilde{\mathcal{B}})$ o $(\tilde{\mathcal{A}}, \text{Ch}_{\text{acy}}(\tilde{\mathcal{A}}; \mathcal{B}))$ es un par de n -cotorsión izquierdo en $\text{Ch}(\mathcal{C})$, entonces $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de n -cotorsión izquierdo en \mathcal{C} .*

Demostración. Supongamos primero que $(\text{Ch}_{\text{acy}}(\mathcal{A}; \tilde{\mathcal{B}}), \tilde{\mathcal{B}})$ es un par de n -cotorsión izquierdo en $\text{Ch}(\mathcal{C})$. Por la Proposición 2.5, basta probar que $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_{n-1}^{\wedge})$ es un par de cotorsión izquierdo completo en \mathcal{C} .

Podemos aplicar la Proposición 2.5 en el contexto de $\text{Ch}(\mathcal{C})$, notando que $\text{Ch}(\mathcal{C})$ tiene suficientes inyectivos y que $\tilde{\mathcal{B}}$ contiene a los complejos inyectivos. Luego, $(\text{Ch}_{\text{acy}}(\mathcal{A}; \tilde{\mathcal{B}}), \tilde{\mathcal{B}}_{n-1}^\wedge)$ es un par de cotorsión izquierdo completo en $\text{Ch}(\mathcal{C})$. En particular, la clase $\text{Ch}_{\text{acy}}(\mathcal{A}; \tilde{\mathcal{B}})$ es cerrada por extensiones y sumandos directos, y entonces \mathcal{A} también lo es por la Observación 2.70 (5).

- (i) Primero probemos que para cada $C \in \mathcal{C}$, podemos construir una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow N \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow 0$$

con $A \in \mathcal{A}$ y $N \in \mathcal{B}_{n-1}^\wedge$. Para el complejo $S^0(C)$, tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow S^0(C) \rightarrow 0$$

donde $X \in \text{Ch}_{\text{acy}}(\mathcal{A}; \tilde{\mathcal{B}})$ y $Y \in \tilde{\mathcal{B}}_{n-1}^\wedge$, ya que $(\text{Ch}_{\text{acy}}(\mathcal{A}; \tilde{\mathcal{B}}), \tilde{\mathcal{B}}_{n-1}^\wedge)$ es un par de cotorsión izquierdo completo en $\text{Ch}(\mathcal{C})$. Entonces, tomemos $A = X_0$ y $N = Y_0$. Notemos que $N \in \mathcal{B}_{n-1}^\wedge$ debido a que \mathcal{B} es cerrada por extensiones.

- (ii) Ahora, probemos la igualdad $\mathcal{A} = {}^{\perp 1}\mathcal{B}_{n-1}^\wedge$. Sea $A \in \mathcal{A}$ y $N \in \mathcal{B}_{n-1}^\wedge$. Consideremos los complejos $S^0(A)$ y $D^1(N)$. Tenemos que $S^0(A) \in \text{Ch}_{\text{acy}}(\mathcal{A}; \tilde{\mathcal{B}})$ y $D^1(N) \in \tilde{\mathcal{B}}_{n-1}^\wedge$ por la Observación 2.70. Con esto y junto con [Gil08, Lema 4.2], obtenemos que

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, N) = \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, Z_0(D^1(N))) \cong \text{Ext}_{\text{Ch}}^1(S^0(A), D^1(N)) = 0.$$

Entonces, la contención $\mathcal{A} \subseteq {}^{\perp 1}\mathcal{B}_{n-1}^\wedge$ se cumple. Por otra parte, para cada $M \in {}^{\perp 1}\mathcal{B}_{n-1}^\wedge$ hay una sucesión exacta

$$0 \rightarrow N \rightarrow A \rightarrow M \rightarrow 0$$

con $A \in \mathcal{A}$ y $N \in \mathcal{B}_{n-1}^\wedge$. Luego, tenemos que M es un sumando directo de A , ya que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M, N) = 0$. Así, $M \in \mathcal{A}$.

Por lo tanto, (i) y (ii) muestran que $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_{n-1}^\wedge)$ es un par de cotorsión izquierdo completo en \mathcal{C} . Podemos concluir lo mismo si suponemos ahora que $(\tilde{\mathcal{A}}, \text{Ch}_{\text{acy}}(\tilde{\mathcal{A}}; \mathcal{B}))$ es un par de n -cotorsión izquierdo. \square

La implicación contraria del resultado anterior es cierta suponiendo condiciones extras sobre el par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ y sobre \mathcal{C} . Para mostrar esto, necesitaremos el siguiente resultado [YD15, Lema 2.1] de X. Yang y N. Ding cuya prueba se puede adaptar a nuestro contexto. Recordemos que \mathcal{C} es una categoría es bicompleta si tiene límites y colímites arbitrarios.

Lema 2.74. *Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de clases de objetos en una categoría abeliana bicompleta \mathcal{C} con suficientes \mathcal{A} -objetos tales que \mathcal{B} es cerrada por extensiones y satisfacen $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$. Entonces, para cada complejo $X \in \text{Ch}(\mathcal{C})$, existe una sucesión exacta corta*

$$0 \rightarrow X \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow 0$$

con E complejo exacto y $A \in \text{Ch}_{\text{acy}}(\mathcal{A}; \tilde{\mathcal{B}})$.

Teorema 2.75. *Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos clases de objetos en una categoría abeliana bicompleta \mathcal{C} tales que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ y \mathcal{B} es cerrada por extensiones.*

- (1) *Si $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de 1-cotorsión izquierdo hereditario en \mathcal{C} , entonces $(\text{Ch}_{\text{acy}}(\mathcal{A}; \tilde{\mathcal{B}}), \tilde{\mathcal{B}})$ es un par de 1-cotorsión izquierdo en $\text{Ch}(\mathcal{C})$. Para $n \geq 2$ y en caso de que \mathcal{C} tiene suficientes inyectivos y \mathcal{B} contiene a los inyectivos de \mathcal{C} , si $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de n -cotorsión izquierdo hereditario en \mathcal{C} y $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{B}, \mathcal{B}_{n-1}^{\wedge}) = 0$, entonces $(\text{Ch}_{\text{acy}}(\mathcal{A}; \tilde{\mathcal{B}}), \tilde{\mathcal{B}})$ es un par de n -cotorsión izquierdo en $\text{Ch}(\mathcal{C})$.*
- (2) *Supongamos que \mathcal{C} tiene suficientes inyectivos. Si $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de 1-cotorsión izquierdo hereditario en \mathcal{C} , entonces $(\tilde{\mathcal{A}}, \text{Ch}_{\text{acy}}(\tilde{\mathcal{A}}; \mathcal{B}))$ es un par de 1-cotorsión izquierdo en $\text{Ch}(\mathcal{C})$. Para $n \geq 2$, si \mathcal{B} contiene a los inyectivos de \mathcal{C} y $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de n -cotorsión izquierdo hereditario en \mathcal{C} con $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{B}, \mathcal{B}_{n-1}^{\wedge}) = 0$, entonces $(\tilde{\mathcal{A}}, \text{Ch}(\mathcal{B}))$ es un par de n -cotorsión izquierdo en $\text{Ch}(\mathcal{C})$.*

Demostración. Probaremos el caso $n \geq 2$, el caso $n = 1$ se sigue de manera similar.

Para la parte (1), al igual que en la prueba del Teorema 2.73, la idea es usar la Proposición 2.5 para mostrar que $(\text{Ch}_{\text{acy}}(\mathcal{A}; \tilde{\mathcal{B}}), \tilde{\mathcal{B}}_{n-1}^{\wedge})$ es un par de cotorsión izquierdo completo en $\text{Ch}(\mathcal{C})$.

- (i) Primero, veamos que para cada complejo exacto $X \in \text{Ch}(\mathcal{C})$ podemos construir una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow X \rightarrow 0$$

con $A \in \text{Ch}_{\text{acy}}(\mathcal{A}; \tilde{\mathcal{B}})$ y $B \in \tilde{\mathcal{B}}_{n-1}^\wedge$. Para cada $m \in \mathbb{Z}$ tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow Z_m(X) \rightarrow X_m \rightarrow Z_{m-1}(X) \rightarrow 0.$$

Como $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de n -cotorsión izquierdo, cada $Z_m(X)$ tiene una A -precubierta con núcleo en \mathcal{B}_{n-1}^\wedge . Por el Teorema 2.35, de estas A -precubiertas podemos construir una sucesión exacta

$$0 \rightarrow B_m^{n-1} \rightarrow B_m^{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow B_m^1 \rightarrow B_m^0 \rightarrow A_m \rightarrow X_m \rightarrow 0$$

compatible con ellas, tales que $A_m \in \mathcal{A}$ y $B_k \in \mathcal{B}$ para cada $0 \leq k \leq n-1$. Luego, para cada $m \in \mathbb{Z}$ tenemos un diagrama conmutativo como en (2.2.6). Conectando estos diagramas obtenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow B^{n-1} \rightarrow B^{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow B^1 \rightarrow B^0 \rightarrow A \rightarrow X \rightarrow 0$$

en $\text{Ch}(\mathcal{C})$ con $A \in \tilde{\mathcal{A}} \subseteq \text{Ch}_{\text{acy}}(\mathcal{A}; \tilde{\mathcal{B}})$ (ver Lema 2.71) y $B^k \in \tilde{\mathcal{B}}$ para cada $0 \leq k \leq n-1$.

Para el caso general, consideremos X un complejo. Por el Lema 2.74 y el caso anterior podemos construir el siguiente diagrama pullback

$$\begin{array}{ccccc}
 B & \xlongequal{\quad} & B & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 A' & \longrightarrow & A_0 & \longrightarrow & A \\
 \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 X & \longrightarrow & E & \longrightarrow & A
 \end{array} \quad (2.5.1)$$

pb

con $A_0, A \in \text{Ch}_{\text{acy}}(\mathcal{A}; \tilde{\mathcal{B}})$, E complejo exacto y $B \in \tilde{\mathcal{B}}_{n-1}^\wedge$. Como $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es hereditario la clase \mathcal{A} es resolvente y entonces $A' \in \text{Ch}(\mathcal{A})$. Además, considerando el renglón central de (2.5.1) y por [Rot09, Teorema 6.10], tenemos que $\text{Hom}(A', B)$ es exacto para cada $B \in \tilde{\mathcal{B}}$. Luego, $A' \in \text{Ch}_{\text{acy}}(\mathcal{A}; \tilde{\mathcal{B}})$. Luego, la primera columna en (2.5.1) es la sucesión buscada para X .

- (ii) Veamos que se cumple la igualdad $\text{Ch}_{\text{acy}}(\mathcal{A}; \tilde{\mathcal{B}}) = {}^{\perp 1}(\tilde{\mathcal{B}}_{n-1}^{\wedge})$. La contención \supseteq se sigue usando la parte (i) y notando que si \mathcal{A} es cerrada por sumandos directos, entonces $\text{Ch}_{\text{acy}}(\mathcal{A}; \tilde{\mathcal{B}})$ también lo es. Para la contención contraria, como $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, \mathcal{B}_{n-1}^{\wedge}) = 0$ se sigue que $\text{Ch}_{\text{acy}}(\mathcal{A}; \tilde{\mathcal{B}}) \subseteq {}^{\perp 1}(\tilde{\mathcal{B}}_{n-1}^{\wedge})$ por el Lema 2.72.

Por lo tanto, $(\text{Ch}_{\text{acy}}(\mathcal{A}; \tilde{\mathcal{B}}), \tilde{\mathcal{B}}_{n-1}^{\wedge})$ es un par de cotorsión izquierdo completo en $\text{Ch}(\mathcal{C})$.

Para la prueba respecto al par $(\tilde{\mathcal{A}}, \text{Ch}(\mathcal{B}))$, solo necesitamos probar que cada complejo es la imagen de un epimorfismo de un objeto en $\tilde{\mathcal{A}}$ con núcleo en $\text{Ch}(\mathcal{B})_{n-1}^{\wedge}$. Sea $X \in \text{Ch}(\mathcal{C})$. Como \mathcal{C} tiene suficientes injectivos, existe una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow I \rightarrow E \rightarrow X \rightarrow 0$$

donde E es exacto e I es un complejo inyectivo diferencialmente graduado (ver [YD15, Lema 2.1]). Por otra parte, notemos que de la prueba de (1) y dado que E es exacto, existe una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow K^0 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow 0$$

donde $A \in \tilde{\mathcal{A}}$ y $K^0 \in \tilde{\mathcal{B}}_{n-1}^{\wedge}$. Tomando el pullback de $I \rightarrow E \leftarrow A$ obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones y columnas exactas

$$\begin{array}{ccccc}
 K^0 & \xlongequal{\quad} & K^0 & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 K & \longrightarrow & A & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & \text{pb} & \downarrow & & \parallel \\
 I & \longrightarrow & E & \longrightarrow & X
 \end{array} \tag{2.5.2}$$

como \mathcal{B} es cerrada por extensiones, por el Lema 2.71 se tiene que $\tilde{\mathcal{B}} \subseteq \text{Ch}_{\text{acy}}(\tilde{\mathcal{A}}; \mathcal{B})$. Luego, $I \in \text{Ch}_{\text{acy}}(\tilde{\mathcal{A}}; \mathcal{B})$ y $K^0 \in \text{Ch}_{\text{acy}}(\tilde{\mathcal{A}}; \mathcal{B})_{n-1}^{\wedge}$. Por el Lema 2.14, sabemos que $\mathcal{B}_{n-1}^{\wedge}$ es cerrada por extensiones, y entonces $K \in \text{Ch}(\mathcal{B})_{n-1}^{\wedge}$. Para el caso $n = 1$, se tiene que $K \in \text{Ch}_{\text{acy}}(\tilde{\mathcal{A}}; \mathcal{B})$ ya que \mathcal{B} es cerrada por extensiones y $K^0, I \in \text{Ch}_{\text{acy}}(\tilde{\mathcal{A}}; \mathcal{B})$. \square

Observación 2.76.

- (1) Del Teorema anterior obtenemos los pares de 1-cotorsión izquierdos hereditarios

$$(\text{Ch}(\mathcal{P}(R); \widetilde{\text{Mod}}(R)), \widetilde{\text{Mod}}(R)) \text{ y } (\widetilde{\mathcal{P}}(R), \text{Ch}(\widetilde{\mathcal{P}}(R); \text{Mod}(R)))$$

donde $\widetilde{\text{Mod}}(R)$ es la clase de complejos exactos, $\widetilde{\mathcal{P}}(R)$ coincide con la clase de complejos proyectivos y $\text{Ch}(\mathcal{P}(R); \widetilde{\text{Mod}}(R))$ es la clase de complejos de cadena proyectivos diferencialmente graduados. Nótese también que $\widetilde{\mathcal{P}}(R)$ es parte de otro par de 1-cotorsión izquierdo $(\widetilde{\mathcal{P}}(R), \text{Ch}(R))$.

- (2) Sea R un anillo Gorenstein que no es QF. Los resultados mencionados en la Sección 2.4 para módulos Gorenstein también son ciertos en el contexto de $\text{Ch}(R)$. Por otro lado, sabemos de [YL11b, Teorema 2.2] que la clase de complejos de cadena Gorenstein proyectivos coincide con la clase $\text{Ch}(\mathcal{GP}(R))$. Se sigue que tenemos un par de n -cotorsión en $\text{Ch}(R)$ de la forma $(\text{Ch}(\mathcal{GP}(R)), \widetilde{\mathcal{P}}(R))$. Luego, la condición de \mathcal{B} contiene a los inyectivos que se requiere en el Teorema 2.75 es suficiente pero no necesaria.

Observaciones similares también son ciertas para las clases de complejos Gorenstein inyectivos e inyectivos. Más aún, por [YL12, Teorema 3.11] y [ŠŠ18, Corolario 3.12], tenemos que un complejo $X \in \text{Ch}(R)$ es Gorenstein plano si, y solo si, cada X_m es un módulo Gorenstein plano. Luego, los resultados en la Sección 2.4 para las clases $\mathcal{GF}(R)$, $\mathcal{GI}(R)$ y $\mathcal{F}(R)$ pueden ser llevados a las clases $\text{Ch}(\mathcal{F}(R))$, $\text{Ch}(\mathcal{I}(R))$ y $\widetilde{\mathcal{F}}(R)$ de complejos Gorenstein planos, Gorenstein inyectivos y planos, respectivamente.

Capítulo 3

PARES DE COTORSION CORTADOS

Dadas dos clases de objetos \mathcal{A} y \mathcal{B} en un categoría abeliana \mathcal{C} , no siempre se obtiene que el par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ sea un par de cotorsión completo en \mathcal{C} . Por ejemplo, si $\mathcal{A} = \mathcal{GP}(R)$ denota la clase de R -módulos izquierdos Gorenstein proyectivos en $\text{Mod}(R)$, la clase \mathcal{B} queda completamente determinada siendo $\mathcal{B} = \mathcal{GP}(R)^{\perp 1}$ y bajo ciertas condiciones extras (R sea un anillo n -Iwanaga Gorenstein, por ejemplo) podemos garantizar completitud. Sin embargo, si cambiamos \mathcal{B} por $\mathcal{P}(R)^\wedge$, la clase de R -módulos con dimensión proyectiva finita, usando Teoría de Auslander-Buchweitz, se puede probar que cada R -módulo M con dimensión Gorenstein proyectiva finita, tiene una precubierta Gorenstein proyectiva cuyo núcleo tiene dimensión proyectiva finita (ver [AB89, BMPS19]). Más aún, la igualdad $\mathcal{GP}(R) \cap \mathcal{P}(R)^\wedge = {}^{\perp 1}(\mathcal{P}(R)^\wedge) \cap \mathcal{P}(R)^\wedge$ se satisface [BMPS19, Sección 6.1]. Entonces, si prestamos atención solo en la clase de R -módulos con dimensión proyectiva finita, $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, con $\mathcal{A} = \mathcal{GP}(R)$ y $\mathcal{B} = \mathcal{P}(R)^\wedge$, puede trabajarse como un par de cotorsión izquierdo completo en ella. En este capítulo, presentamos la noción de *par de cotorsión cortado* con el fin de extender este comportamiento en una categoría abeliana \mathcal{C} .

3.1. Pares de cotorsión cortados

A continuación, presentamos una noción “más general” de par de cotorsión, la cual depende de dos clases de objetos y una subcategoría de \mathcal{C} . En nuestro contexto, “más general” significa que dadas dos clases \mathcal{A} y \mathcal{B} en \mathcal{C} , podemos trabajar el par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ como si fuera un par de cotorsión completo en una subcategoría \mathcal{S} de \mathcal{C} . Este concepto cubre los pares de cotorsión izquierdos y derechos completos en la Definición 2.1 como casos particulares tomando $\mathcal{S} = \mathcal{C}$. Veremos cómo algunas propiedades de pares de cotorsión completos son llevadas a este contexto resultante de la siguiente definición.

Definición 3.1. Sean \mathcal{S} , \mathcal{A} y \mathcal{B} clases de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} . Decimos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión izquierdo cortado a lo largo de \mathcal{S} si las siguientes condiciones se satisfacen:

- (a) \mathcal{A} es cerrada por sumandos directos;
- (b) $\mathcal{A} \cap \mathcal{S} = {}^{\perp_1} \mathcal{B} \cap \mathcal{S}$;
- (c) Para cada $S \in \mathcal{S}$ existe una sucesión exacta corta $0 \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow S \rightarrow 0$, con $B \in \mathcal{B}$ y $A \in \mathcal{A}$.

Dualmente, definimos par de cotorsión derecho cortado a lo largo de \mathcal{S} . Finalmente, $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión cortado a lo largo de \mathcal{S} si es a la vez un par de cotorsión izquierdo y derecho cortado a lo largo de \mathcal{S} .

Observación 3.2. En caso de que \mathcal{A} y \mathcal{B} sean subclases de \mathcal{S} y \mathcal{S} sea una subcategoría gruesa de \mathcal{C} , la Definición 3.1 coincide con el concepto de par de cotorsión relativo dado en [BMPS19, Definición 3.4].

Un ejemplo interesante puede construirse con la clase de módulos Gorenstein proyectivos sobre un anillo R .

Ejemplo 3.3. Para cualquier anillo R , tenemos que los pares $(\mathcal{GP}(R), \mathcal{P}(R)^\wedge)$ y $(\mathcal{P}(R), \mathcal{GP}(R)^{\perp_1})$ son pares de cotorsión cortados a lo largo de $\mathcal{GP}(R)^\wedge$ y $\mathcal{P}(R)^\wedge$, respectivamente.

En efecto, por [BMPS19, Sección 6.1] sabemos que la igualdad $\mathcal{GP}(R) \cap \mathcal{P}(R)^\wedge = \mathcal{P}(R)$ es cierta.

- $(\mathcal{GP}(R), \mathcal{P}(R)^\wedge)$ es un par de cotorsión cortado a lo largo de $\mathcal{GP}(R)^\wedge$.
Las clases anteriores son cerradas por sumandos directos por [Hol04, Teorema 2.5] y la completitud se sigue directamente de [BMPS19, Teorema

2.8]. Más aún, usando la completitud a izquierda para $M \in {}^{\perp_1}(\mathcal{P}(R)^\wedge) \cap \mathcal{GP}(R)^\wedge$, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0$$

con $G \in \mathcal{GP}(R)$ y $H \in \mathcal{P}(R)^\wedge$ la cual se escinde ya que $M \in {}^{\perp_1}(\mathcal{P}(R)^\wedge)$. Luego, $M \in \mathcal{GP}(R)$. Así, obtenemos ${}^{\perp_1}(\mathcal{P}(R)^\wedge) \cap \mathcal{GP}(R)^\wedge \subseteq \mathcal{GP}(R)$ mientras que la contención \supseteq se sigue de [Hol04, Teorema 2.20]. Por lo tanto, la igualdad $\mathcal{GP}(R) = {}^{\perp_1}(\mathcal{P}(R)^\wedge) \cap \mathcal{GP}(R)^\wedge$ se cumple. Por otra parte, usando la completitud a derecha para $M \in \mathcal{GP}(R)^{\perp_1} \cap \mathcal{GP}(R)^\wedge$, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \rightarrow H' \rightarrow G' \rightarrow 0$$

con $G' \in \mathcal{GP}(R)$ y $H' \in \mathcal{P}(R)^\wedge$ la cual se escinde ya que $M \in \mathcal{GP}(R)^{\perp_1}$. Entonces, $M \in \mathcal{P}(R)^\wedge$. Es decir, $\mathcal{GP}(R)^{\perp_1} \cap \mathcal{GP}(R)^\wedge \subseteq \mathcal{P}(R)^\wedge$. Más aún, la igualdad $\mathcal{P}(R)^\wedge = \mathcal{GP}(R)^{\perp_1} \cap \mathcal{GP}(R)^\wedge$ también se satisface por [Hol04, Teorema 2.20].

- $(\mathcal{P}(R), \mathcal{GP}(R)^{\perp_1})$ es un par de cotorsión cortado a lo largo de $\mathcal{P}(R)^\wedge$.
Es claro que ambas clases son cerradas por sumandos directos. Ahora bien, la completitud se sigue del hecho de que $\mathcal{P}(R)$ es un generador relativo en $\mathcal{P}(R)^\wedge$ y por la contención $\mathcal{P}(R)^\wedge \subseteq \mathcal{GP}(R)^{\perp_1}$ [Hol04, Teorema 2.20]. Más aún, de la contención anterior obtenemos

$$\mathcal{P}(R)^{\perp_1} \cap \mathcal{P}(R)^\wedge \subseteq \mathcal{P}(R)^\wedge = \mathcal{GP}(R)^{\perp_1} \cap \mathcal{P}(R)^\wedge.$$

Por otra parte, como $\mathcal{P}(R) \subseteq \mathcal{GP}(R)$ se sigue que

$$\mathcal{GP}(R)^{\perp_1} \cap \mathcal{P}(R)^\wedge \subseteq \mathcal{P}(R)^{\perp_1} \cap \mathcal{P}(R)^\wedge.$$

Luego, obtenemos la igualdad $\mathcal{GP}(R)^{\perp_1} \cap \mathcal{P}(R)^\wedge = \mathcal{P}(R)^{\perp_1} \cap \mathcal{P}(R)^\wedge$. Veamos ahora que ${}^{\perp_1}(\mathcal{GP}(R)^{\perp_1}) \cap \mathcal{P}(R)^\wedge = \mathcal{P}(R)$. La contención \supseteq es clara. Por otra parte, como $\mathcal{P}(R)^\wedge \subseteq \mathcal{GP}(R)^\wedge$, por [BMPS19, Teorema 2.8], para cada $M \in {}^{\perp_1}(\mathcal{GP}(R)^{\perp_1}) \cap \mathcal{P}(R)^\wedge$ existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0$$

con $H \in \mathcal{P}(R)^\wedge \subseteq \mathcal{GP}(R)^{\perp_1}$ y $G \in \mathcal{GP}(R)$. Notemos que la sucesión anterior se escinde ya que $M \in {}^{\perp_1}(\mathcal{GP}(R)^{\perp_1})$ y así, $M \in \mathcal{GP}(R) \cap \mathcal{P}(R)^\wedge = \mathcal{P}(R)$. Por lo tanto, la igualdad $\mathcal{P}(R) = \mathcal{P}(R) \cap \mathcal{P}(R)^\wedge = {}^{\perp_1}(\mathcal{GP}(R)^{\perp_1}) \cap \mathcal{P}(R)^\wedge$ también es cierta.

Notemos que los dos ejemplos anteriores, en general, no son pares de cotorsión completos en $\text{Mod}(R)$. La siguiente proposición establece bajo qué condiciones lo son.

Proposición 3.4. *Para un anillo R , los siguientes enunciados se cumplen.*

- (a) $(\mathcal{GP}(R), \mathcal{P}(R)^\wedge)$ es un par de cotorsión completo en $\text{Mod}(R)$ si, y solo si, $\text{Mod}(R) = \mathcal{GP}(R)^\wedge$.
- (b) $(\mathcal{P}(R), \mathcal{GP}(R)^{\perp 1})$ es un par de cotorsión completo en $\text{Mod}(R)$ si, y solo si, $\mathcal{P}(R) = \mathcal{GP}(R)$, es decir, si es el par de cotorsión trivial.

Demostración. (a) Supongamos que $(\mathcal{GP}(R), \mathcal{P}(R)^\wedge)$ es un par de cotorsión completo en $\text{Mod}(R)$. Entonces, para cada $M \in \text{Mod}(R)$, existe una sucesión exacta corta $0 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0$, con $H \in \mathcal{P}(R)^\wedge \subseteq \mathcal{GP}(R)^\wedge$ y $G \in \mathcal{GP}(R)$. Luego, $\text{Mod}(R) \subseteq \mathcal{GP}(R)^\wedge$.

Supongamos ahora que $\text{Mod}(R) = \mathcal{GP}(R)^\wedge$. Entonces, por [BMPS19, Teorema 2.8], para cada $M \in \text{Mod}(R)$, existen dos sucesiones exactas

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow M \rightarrow H' \rightarrow G' \rightarrow 0 \end{aligned}$$

con $G, G' \in \mathcal{GP}(R)$ y $H, H' \in \mathcal{P}(R)^\wedge$. Por lo tanto, la completitud del par se sigue directamente de las sucesiones anteriores. Más aún, usando estas sucesiones y el hecho de que las clases son cerradas por sumandos directos, obtenemos las contenciones ${}^{\perp 1}(\mathcal{P}(R)^\wedge) \subseteq \mathcal{GP}(R)$ y $\mathcal{GP}(R)^{\perp 1} \subseteq \mathcal{P}(R)^\wedge$. Por otra parte, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{GP}(R), \mathcal{P}(R)^\wedge) = 0$ por [Hol04, Teorema 2.20], lo cual implica que $\mathcal{GP}(R) \subseteq {}^{\perp 1}(\mathcal{P}(R)^\wedge)$ y $\mathcal{P}(R)^\wedge \subseteq \mathcal{GP}(R)^{\perp 1}$. Luego, las igualdades $\mathcal{GP}(R) = {}^{\perp 1}(\mathcal{P}(R)^\wedge)$ y $\mathcal{P}(R)^\wedge = \mathcal{GP}(R)^{\perp 1}$ se satisfacen. Por lo tanto, $(\mathcal{GP}(R), \mathcal{P}(R)^\wedge)$ es un par de cotorsión completo en $\text{Mod}(R)$.

(b) Supongamos que $(\mathcal{P}(R), \mathcal{GP}(R)^{\perp 1})$ es un par de cotorsión completo en $\text{Mod}(R)$. Como $\mathcal{GP}(R)^{\perp 1} = \mathcal{P}(R)^{\perp 1} = \text{Mod}(R)$, tenemos que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{GP}(R), \text{Mod}(R)) = 0$. Luego, $\mathcal{P}(R) \subseteq \mathcal{GP}(R) \subseteq {}^{\perp 1}\text{Mod}(R) = \mathcal{P}(R)$. Por lo tanto, $\mathcal{GP}(R) = \mathcal{P}(R)$.

Ahora bien, supongamos $\mathcal{GP}(R) = \mathcal{P}(R)$. Entonces, $(\mathcal{P}(R), \mathcal{GP}(R)^{\perp 1}) = (\mathcal{P}(R), \mathcal{P}(R)^{\perp 1}) = (\mathcal{P}(R), \text{Mod}(R))$ el cual es un par de cotorsión completo en $\text{Mod}(R)$. \square

En [BMPS19, Proposición 3.5], los autores dieron una caracterización de pares de cotorsión relativos. Para obtener una versión más general de este resultado para cortes de cotorsión, fijemos la siguiente notación:

Para cada morfismo $f : X \rightarrow Y$ en \mathcal{C} , escribiremos las siguientes transformaciones naturales de Hom como:

$$\begin{aligned} f^*(-) &:= \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, f) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y) \quad \text{y} \\ f_*(-) &:= \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, -) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, -) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) \end{aligned}$$

respectivamente.

Proposición 3.5. *Sean \mathcal{S} , \mathcal{A} y \mathcal{B} clases de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} . Consideremos las siguientes condiciones:*

- (a) \mathcal{A} es cerrada por sumandos directos;
- (b) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A} \cap \mathcal{S}, \mathcal{B}) = 0$;
- (c) Para cada $S \in \mathcal{S}$, existe un epimorfismo $\varphi : A \rightarrow S$, con $A \in \mathcal{A}$ y $\text{Ker}(\varphi) \in \mathcal{B}$, tal que la siguiente sucesión es exacta en la categoría $[\mathcal{C}^{\text{op}}, \text{Ab}]$ de funtores aditivos:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \Big|_{\mathcal{A} \cap \mathcal{S}} \xrightarrow{\varphi^*(-)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, S) \Big|_{\mathcal{A} \cap \mathcal{S}} \rightarrow 0.$$

Entonces, $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión izquierdo cortado a lo largo de \mathcal{S} si, y solo si, \mathcal{A} y \mathcal{B} satisfacen (a), (b) y (c).

Demostración. Por una parte, sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos clases de objetos que satisfacen (a), (b) y (c). Es suficiente probar la igualdad $\mathcal{A} \cap \mathcal{S} = {}^{\perp 1}\mathcal{B} \cap \mathcal{S}$. La contención \subseteq se sigue de (b). Para la contención contraria ${}^{\perp 1}\mathcal{B} \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$, sea $X \in {}^{\perp 1}\mathcal{B} \cap \mathcal{S}$. Como se supone (c), hay una sucesión exacta $0 \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow X \rightarrow 0$, con $B \in \mathcal{B}$ y $A \in \mathcal{A}$, la cual se escinde debido a que $X \in {}^{\perp 1}\mathcal{B}$ y entonces $X \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$.

Por otra parte, supongamos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión izquierdo cortado a lo largo de \mathcal{S} . Entonces, $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ satisface (a) por definición, y (b) se sigue de $\mathcal{A} \cap \mathcal{S} = {}^{\perp 1}\mathcal{B} \cap \mathcal{S}$. Ahora, veamos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ satisface (c). Sean $S \in \mathcal{S}$ y $\eta : 0 \rightarrow B \rightarrow A \xrightarrow{\varphi} S \rightarrow 0$ una sucesión exacta corta con $B \in \mathcal{B}$ y $A \in \mathcal{A}$. Aplicando $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, -)$ a η , se obtiene la sucesión exacta

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, A) \xrightarrow{\varphi^*(Y)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, S) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(Y, B)$$

donde $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(Y, B) = 0$ siempre que $Y \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$. Luego,

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \big|_{\mathcal{A} \cap \mathcal{S}} \xrightarrow{\varphi^*(-)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, S) \big|_{\mathcal{A} \cap \mathcal{S}} \longrightarrow 0.$$

es exacta. Por lo tanto, $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ satisface (a), (b) y (c). \square

Propiedades

En esta sección, estudiaremos algunas propiedades de los pares de cotorsión cortados. Los siguientes resultados son consecuencia de la Definición 3.1.

Proposición 3.6. *Sean $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de cotorsión izquierdo cortado a lo largo de \mathcal{S} en una categoría abeliana \mathcal{C} , y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{S}$. Entonces, $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión izquierdo cortado a lo largo de \mathcal{X} .*

Demostración. Se sigue directamente de la Definición 3.1 ya que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{S}$. \square

Proposición 3.7. *Sea $\{\mathcal{S}_i\}_{i \in I}$ una familia no vacía de clases de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} . Entonces, $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión izquierdo cortado a lo largo de $\mathcal{S} := \bigcup_{i \in I} \mathcal{S}_i$ si, y solo si, $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión izquierdo cortado a lo largo de \mathcal{S}_i , para todo $i \in I$.*

Demostración. Primero, supongamos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión izquierdo cortado a lo largo de \mathcal{S}_i , para todo $i \in I$. Notemos que las condiciones (a) y (c) de Definición 3.1 se satisfacen. Ahora, veamos que $\mathcal{A} \cap \mathcal{S} = {}^{\perp 1}\mathcal{B} \cap \mathcal{S}$. Como $\mathcal{A} \cap \mathcal{S}_i = {}^{\perp 1}\mathcal{B} \cap \mathcal{S}_i$ para todo $i \in I$, tenemos que

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{S} = \bigcup_{i \in I} (\mathcal{A} \cap \mathcal{S}_i) = \bigcup_{i \in I} ({}^{\perp 1}\mathcal{B} \cap \mathcal{S}_i) = {}^{\perp 1}\mathcal{B} \cap \mathcal{S}.$$

La implicación contraria se sigue de la Proposición 3.6. \square

Ejemplo 3.8. *Para cualquier anillo R , tenemos que $({}^{\perp 1}\mathcal{GI}(R), \mathcal{GI}(R))$ es un par de cotorsión cortado a lo largo de $\mathcal{GI}(R)^{\vee}$.*

En efecto, por la Proposición 3.7 y su dual, es suficiente probar que el par $({}^{\perp 1}\mathcal{GI}(R), \mathcal{GI}(R))$ es un par de cotorsión cortado a lo largo de $\mathcal{GI}(R)_n^{\vee}$, para cualquier $n \geq 0$, ya que $\mathcal{GI}(R)^{\vee} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{GI}(R)_n^{\vee}$.

Primero, notemos que $\mathcal{GI}(R)$ es cerrada por sumandos directos. Más aún, por los duales de [BMPS19, Teorema 2.8 y Teorema 2.10], para cualquier $M \in \mathcal{GI}(R)_n^\vee$ existen dos sucesiones exactas

$$\begin{aligned}\eta : 0 \rightarrow M \rightarrow I \rightarrow F \rightarrow 0, \\ \eta' : 0 \rightarrow I' \rightarrow F' \rightarrow M \rightarrow 0\end{aligned}$$

donde $I, I' \in \mathcal{GI}(R)$, $\text{id}(F) \leq n - 1$ y $\text{id}(F') \leq n$, y $\text{Ext}_C^1(E, N) = 0$ para cualquier R -módulo izquierdo E con dimensión inyectiva finita y para cualquier $N \in \mathcal{GI}(R)$. Luego, la completitud se sigue de estos resultados.

Ahora, probemos que la igualdad $({}^{\perp 1}\mathcal{GI}(R))^{\perp 1} \cap \mathcal{GI}(R)_n^\vee = \mathcal{GI}(R)$ es cierta. Por una parte, la contención \supseteq es clara. Para la contención contraria, usando la sucesión anterior η , para cualquier $M \in ({}^{\perp 1}\mathcal{GI}(R))^{\perp 1} \cap \mathcal{GI}(R)_n^\vee$, se tiene que η se escinde y luego $M \in \mathcal{GI}(R)$ ya que $\mathcal{GI}(R)$ es cerrada por sumandos directos. Como para el par dado, el inciso (b) de la Definición 3.1 se cumple trivialmente, obtenemos que $({}^{\perp 1}\mathcal{GI}(R), \mathcal{GI}(R))$ es un par de cotorsión cortado a lo largo de $\mathcal{GI}(R)_n^\vee$, para cualquier $n \geq 0$.

Corolario 3.9. Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos clases de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} . Entonces, $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión completo en \mathcal{C} si, y solo si, existe una familia $\{\mathcal{S}_i\}_{i \in I}$ de clases de objetos en \mathcal{C} tales que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión cortado a lo largo de \mathcal{S}_i para todo $i \in I$ y $\mathcal{C} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{S}_i$.

La Proposición 3.7 motiva la siguiente definición.

Definición 3.10. Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} clases de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} . Denotamos por $\text{Cuts}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ a la colección de todas las subclases \mathcal{S} en \mathcal{C} tales que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión izquierdo cortado a lo largo de \mathcal{S} . En caso $\text{Cuts}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \neq \emptyset$, podemos definir el corte más grande izquierdo de $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$

$$\mathbb{S}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \bigcup_{\mathcal{S} \in \text{Cuts}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \mathcal{S}.$$

Denotamos por $\mathcal{E}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ a la clase de todos los objetos $D \in \mathcal{C}$ que admiten una sucesión exacta de la forma $0 \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow 0$, donde $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$. También tenemos las clases $\mathcal{E}_r(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ de todos los objetos $D \in \mathcal{C}$ que admiten una sucesión exacta de la forma $0 \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow 0$, donde $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$, y $\mathcal{E}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \mathcal{E}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \cap \mathcal{E}_r(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Dualmente, definimos la clase de cortes derechos $\text{Cuts}_r(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ y el corte más grande derecho $\mathbb{S}_r(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Finalmente, tenemos las clases de cortes $\text{Cuts}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \text{Cuts}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \cap \text{Cuts}_r(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ y el corte más grande $\mathbb{S}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \bigcup_{\mathcal{S} \in \text{Cuts}(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \mathcal{S}$.

Notemos que, por la Proposición 3.7 y su dual, tenemos que $\mathbb{S}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \text{Cuts}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $\mathbb{S}_r(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \text{Cuts}_r(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ y $\mathbb{S}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \text{Cuts}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. En la siguiente proposición, veremos que $\mathbb{S}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ describe una relación de ortogonalidad entre \mathcal{A} y \mathcal{B} siempre que $\mathbb{S}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ coincida con $\mathcal{E}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Proposición 3.11. *Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} clases de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} tales que $\text{Cuts}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \neq \emptyset$ y $0 \in \mathcal{B}$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes.*

- (a) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$.
- (b) $\mathbb{S}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathcal{E}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.
- (c) $\mathcal{E}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \text{Cuts}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.
- (d) $\mathcal{A} = {}^{\perp_1}\mathcal{B} \cap \mathcal{E}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Demostración. Notemos primero que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, ya que $0 \in \mathcal{B}$. Por lo tanto, $\mathcal{A} \cap \mathcal{E}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathcal{A}$. Por otra parte, es claro que $\mathbb{S}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \subseteq \mathcal{E}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

(a) \Rightarrow (b): Supongamos que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$. Ahora, sea $X \in \mathcal{E}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Probaremos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión izquierdo cortado a lo largo de $\mathcal{S} := \mathbb{S}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \cup \{X\}$. Para esto, solo necesitamos probar el inciso (b) en la Definición 3.1.

Consideremos los siguientes dos casos:

- $X \in \mathcal{A}$. Como $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ entonces $X \in {}^{\perp_1}\mathcal{B}$. Luego,

$$\mathcal{A} \cap \{X\} = \{X\} = {}^{\perp_1}\mathcal{B} \cap \{X\}.$$

- $X \notin \mathcal{A}$. Como $X \in \mathcal{E}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, existe una sucesión exacta corta

$$\eta : 0 \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow X \rightarrow 0,$$

con $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$ la cual no se escinde ya que $X \notin \mathcal{A}$. Entonces, $X \notin {}^{\perp_1}\mathcal{B}$. Por lo tanto,

$$\mathcal{A} \cap \{X\} = \emptyset = {}^{\perp_1}\mathcal{B} \cap \{X\}.$$

En ambos casos, obtenemos la igualdad $\mathcal{A} \cap \{X\} = {}^{\perp_1}\mathcal{B} \cap \{X\}$. Por lo tanto, $\mathcal{A} \cap (\mathbb{S}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \cup \{X\}) = {}^{\perp_1}\mathcal{B} \cap (\mathbb{S}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \cup \{X\})$ y entonces $\mathbb{S}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \cup \{X\} = \mathbb{S}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, probando que $\mathbb{S}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathcal{E}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

(b) \Rightarrow (c) y (d) \Rightarrow (a): es trivial.

(c) \Rightarrow (d): Supongamos que $\mathcal{E}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \text{Cuts}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Entonces, $\mathcal{A} = \mathcal{A} \cap \mathcal{E}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = {}^{\perp 1}\mathcal{B} \cap \mathcal{E}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. \square

Definición 3.12. Sean $\mathcal{S} \in \text{Cuts}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ y $\mathcal{S}' \in \text{Cuts}(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ en un categoría abeliana \mathcal{C} . Decimos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ y $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ son compatibles a izquierda (respectivamente, a derecha) con respecto a \mathcal{S} y \mathcal{S}' si las siguientes condiciones se satisfacen:

(a) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, \mathcal{B}') = 0$ y $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}', \mathcal{B}) = 0$;

(b) $\mathcal{A} \cap \mathcal{S}' = \mathcal{A}' \cap \mathcal{S}$ (respectivamente, $\mathcal{B} \cap \mathcal{S}' = \mathcal{B}' \cap \mathcal{S}$).

Decimos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ y $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ son compatibles si son compatibles a izquierda y a derecha.

Proposición 3.13. Sean $\mathcal{S}_1 \in \text{Cuts}(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)$ y $\mathcal{S}_2 \in \text{Cuts}(\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2)$ en una categoría abeliana \mathcal{C} . Si $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)$ y $(\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2)$ son compatibles a izquierda con respecto a \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 , entonces $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \in \text{Cuts}_\ell(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)$.

Demostración. Es claro que (a) y (c) en la Definición 3.1 se satisfacen para $\mathcal{S} := \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$. Por lo que es suficiente probar la igualdad $(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) \cap (\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2) = {}^{\perp 1}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) \cap (\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)$.

Notemos primero que ${}^{\perp 1}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) = {}^{\perp 1}\mathcal{B}_1 \cap {}^{\perp 1}\mathcal{B}_2$. Ahora, sea $X \in {}^{\perp 1}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) \cap (\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)$. Entonces,

$$X \in {}^{\perp 1}\mathcal{B}_i \cap \mathcal{S}_i = \mathcal{A}_i \cap \mathcal{S}_i \subseteq (\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) \cap (\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)$$

para algún $i \in \{1, 2\}$. Por lo tanto, la contención \supseteq es cierta.

Por otra parte, sea $X \in (\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) \cap (\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)$. Entonces, $X \in \mathcal{A}_i \cap \mathcal{S}_j$ para algún $i, j \in \{1, 2\}$. Tenemos dos casos:

- Caso $i = j$: Como $(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i)$ es un par de cotorsión cortado a lo largo de \mathcal{S}_i para algún $i \in \{1, 2\}$, por la condición (a) en la Definición 3.12, obtenemos $X \in {}^{\perp 1}\mathcal{B}_1 \cap {}^{\perp 1}\mathcal{B}_2$ y entonces $X \in {}^{\perp 1}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) \cap (\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)$.
- Caso $i \neq j$: Por la Definición 3.12 (b), tenemos que $X \in \mathcal{A}_i \cap \mathcal{S}_j = \mathcal{A}_j \cap \mathcal{S}_i$. Más aún, por la Definición 3.12 (a), sabemos que $\mathcal{A}_i \subseteq {}^{\perp 1}\mathcal{B}_j$ y $\mathcal{A}_j \subseteq {}^{\perp 1}\mathcal{B}_i$. Por lo tanto, $X \in {}^{\perp 1}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) \cap (\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)$.

\square

Ejemplo 3.14. Para cualquier anillo R , $(\mathcal{GP}(R), \mathcal{GP}(R)^{\perp 1})$ es un par de cotorsión cortado a lo largo de $\mathcal{GP}(R)^\wedge$.

En efecto, los argumentos dados en el Ejemplo 3.3 muestran que $(\mathcal{GP}(R), \mathcal{P}(R)^\wedge)$ y $(\mathcal{P}(R), \mathcal{GP}(R)^{\perp 1})$ son pares compatibles. Entonces, por la Proposición 3.13 y su dual, $(\mathcal{GP}(R), \mathcal{GP}(R)^{\perp 1})$ es un par de cotorsión cortado a lo largo de $\mathcal{GP}(R)^\wedge$.

Se puede probar de otra manera que $(\mathcal{GP}(R), \mathcal{GP}(R)^{\perp 1})$ es un par de cotorsión cortado a lo largo de $\mathcal{GP}(R)^\wedge$. Para esto, usaremos la siguiente proposición.

Proposición 3.15. Sean \mathcal{S}, \mathcal{A} y \mathcal{B} clases de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} , y sea $\omega := \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Se consideran las siguientes condiciones:

- (a) \mathcal{B} es cerrada por sumandos directos;
- (b) \mathcal{A} es cerrada por extensiones y sumandos directos;
- (c) $\omega \cap \mathcal{S}$ es un cogenerador relativo en \mathcal{A} ;
- (d) $(\omega \cap \mathcal{S})^\wedge \subseteq \mathcal{B}$;
- (e) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A} \cap \mathcal{S}, \mathcal{B}) = 0$ y $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, \mathcal{B} \cap \mathcal{S}) = 0$.

Si \mathcal{A} y \mathcal{B} satisfacen todas las condiciones anteriores, entonces $\mathcal{A}^\wedge \cap \mathcal{S} \in \text{Cuts}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Demostración. Primero probaremos la siguiente contención

$$\mathcal{A}^\wedge \subseteq \mathcal{E}_r(\mathcal{A}, (\omega \cap \mathcal{S})^\wedge). \quad (3.1.1)$$

En efecto, sea $M \in \mathcal{A}^\wedge$. Procedemos por inducción en $n := \text{resdim}_{\mathcal{A}}(M)$. Si $n = 0$, la inclusión se sigue por la condición (c). Por lo que podemos suponer que $n \geq 1$.

Sea $\eta : 0 \rightarrow L \rightarrow A_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ una sucesión exacta, con $\text{resdim}_{\mathcal{A}}(L) = n - 1$ y $A_0 \in \mathcal{A}$. Por la hipótesis de inducción, existe una sucesión exacta corta $\eta' : 0 \rightarrow L \rightarrow K \rightarrow A \rightarrow 0$ con $K \in (\omega \cap \mathcal{S})^\wedge$ y $A \in \mathcal{A}$. Entonces, de η y η' podemos construir el siguiente diagrama pushout

$$\begin{array}{ccccc} L & \longrightarrow & A_0 & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ & \text{po} & & & \\ K & \longrightarrow & E & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ A & \xlongequal{\quad} & A & & \end{array} \quad (3.1.2)$$

Notemos que $E \in \mathcal{A}$ ya que A_0, A pertenecen a \mathcal{A} y suponemos (b). Entonces, por (c), obtenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{array}{ccccc}
 K & \xrightarrow{\quad} & E & \longrightarrow & M \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 K & \xrightarrow{\quad} & W & \longrightarrow & F \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & A' & \equiv & A'
 \end{array} \tag{3.1.3}$$

donde $W \in \omega \cap \mathcal{S}$ y $A' \in \mathcal{A}$. Luego, $F \in (\omega \cap \mathcal{S})^\wedge$. Por lo tanto, la última columna de (3.1.3) es la sucesión que estábamos buscando para mostrar que $M \in \mathcal{E}_r(\mathcal{A}, (\omega \cap \mathcal{S})^\wedge)$.

Notemos que del segundo renglón en (3.1.2) y (d) también tenemos que para $M \in \mathcal{A}^\wedge$ con $n := \text{resdim}_{\mathcal{A}}(M) \geq 1$, hay una sucesión exacta corta

$$\eta'' : 0 \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow M \rightarrow 0$$

con $B \in \mathcal{B}$ y $A \in \mathcal{A}$, mientras que para el caso $n = 0$ tenemos que η'' existe ya que $0 \in \mathcal{B}$ por (a). Entonces, obtenemos la siguiente contención

$$\mathcal{A}^\wedge \subseteq \mathcal{E}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B}). \tag{3.1.4}$$

Por lo tanto, de (3.1.1), (d) y (3.1.4), obtenemos que $\mathcal{A}^\wedge \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Luego, la completitud de $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en $\mathcal{A}^\wedge \cap \mathcal{S}$ se sigue. Más aún, usando la completitud, (a) y (b), obtenemos las contenciones ${}^{\perp 1}\mathcal{B} \cap \mathcal{A}^\wedge \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{A}^\wedge \cap \mathcal{S}$ y $\mathcal{A}^{\perp 1} \cap \mathcal{A}^\wedge \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{A}^\wedge \cap \mathcal{S}$. De hecho, estas contenciones son igualdades por (e). Por lo tanto, $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión cortado a lo largo de $\mathcal{A}^\wedge \cap \mathcal{S}$. \square

Ejemplo 3.16. Para cualquier anillo R , $(\mathcal{GP}(R), \mathcal{GP}(R)^{\perp 1})$ es un par de cotorsión cortado a lo largo de $\mathcal{GP}(R)^\wedge$.

Para probar esto, veamos que todas las condiciones en la Proposición 3.15 se satisfacen tomando $\mathcal{A} := \mathcal{GP}(R)$, $\mathcal{B} := \mathcal{GP}(R)^{\perp 1}$ y $\mathcal{S} := \text{Mod}(R)$.

Notemos que, por la definición de R -módulo Gorenstein proyectivo, tenemos que $\mathcal{P}(R)$ es un cogenerador relativo en $\mathcal{GP}(R)$. Esto es, para cada $M \in \mathcal{GP}(R)$,

existe una sucesión exacta corta $\eta : 0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow M' \rightarrow 0$ con $P \in \mathcal{P}(R)$ y $M' \in \mathcal{GP}(R)$. Entonces, obtenemos $\omega = \mathcal{GP}(R) \cap \mathcal{GP}(R)^{\perp 1} = \mathcal{P}(R)$.

Es claro que las condiciones (a) y (e) se satisfacen, mientras que (c) es cierta ya que $\omega = \mathcal{P}(R)$. Además, (b) se sigue de [Hol04, Teorema 2.5] y $\mathcal{P}(R)^\wedge \subseteq \mathcal{GP}(R)^{\perp 1}$ de [Hol04, Teorema 2.22]. Por lo tanto, $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión cortado a lo largo de $\mathcal{GP}(R)^\wedge$.

Observación 3.17. De la Proposición 3.6 y el Ejemplo 3.16 obtenemos que $(\mathcal{GP}(R), \mathcal{GP}(R)^{\perp 1})$ es un par de cotorsión cortado a lo largo de $\mathcal{P}(R)^\wedge$ debido a $\mathcal{P}(R)^\wedge \subseteq \mathcal{GP}(R)^\wedge$.

A continuación, construimos un ejemplo usando pares de cotorsión completos y hereditarios en la categoría de R -módulos izquierdos. Para esto, recordemos la siguiente definición en [BMS18].

Definición 3.18. [BMS18, Definición 3.2] Sean \mathcal{X} y \mathcal{Y} clases de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} . Una $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -resolución completa izquierda es un complejo exacto

$$\eta : \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow X^0 \rightarrow X^1 \rightarrow \cdots$$

con $X_i, X^i \in \mathcal{X}$ y tal que el complejo $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\eta, Y)$ es exacto para cualquier $Y \in \mathcal{Y}$. Diremos que $M := \text{Im}(X_0 \rightarrow X^0)$ es un objeto $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein proyectivo o un $GP_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}$ -objeto. La clase de todos los $GP_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}$ -objetos será denotada por $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}(\mathcal{C})$ o $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}$. También diremos que \mathcal{X} es la clase de aproximación y \mathcal{Y} es la clase de prueba en $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}$.

Ejemplo 3.19. Para cualquier par de cotorsión completo y hereditario $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ en $\text{Mod}(R)$, se tiene que $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}, \mathcal{Y})$ es un par de cotorsión cortado a lo largo de \mathcal{X}^\wedge , donde $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$.

Para probar esto, mostremos que las condiciones en la Proposición 3.15 se cumplen si tomamos $\mathcal{A} := \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}$, $\mathcal{B} := \mathcal{Y}$ y $\mathcal{S} := \mathcal{X}^\wedge$.

En efecto, por [Xu17, Lema 4.1 (2),(4)], tenemos las igualdades $\mathcal{Y} \cap \mathcal{S} = \omega^\wedge$ y $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)} \cap \mathcal{S} = \mathcal{X}$. Luego, $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)} \cap \mathcal{Y} \cap \mathcal{S} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)} \cap \omega^\wedge = \omega$ por [Xu17, Lema 4.1 (1)]. Ahora,

- (a) \mathcal{Y} es cerrada por sumandos directos debido a que es la mitad derecha de un par de cotorsión.
- (b) $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}$ es cerrada por extensiones y sumandos directos por [Xu17, Proposición 3.7].

(c) Para cada $A \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}$, existe una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow A \rightarrow P \rightarrow A' \rightarrow 0,$$

con $P \in \omega$ y $A' \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}$ por [Xu17, Lemas 3.5 y 4.1 (1)].

(d) La contención $\omega^\wedge \subseteq \mathcal{Y}$ es cierta ya que \mathcal{Y} es una clase corresolvente.

(e) Por último, tenemos que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)} \cap \mathcal{S}, \mathcal{Y}) = \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$ y $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}, \mathcal{Y} \cap \mathcal{S}) = \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}, \omega^\wedge) = 0$ por [Xu17, Lema 4.1 (1)].

Por lo tanto, podemos concluir que $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}, \mathcal{Y})$ es un par de cotorsión cortado a lo largo de \mathcal{X}^\wedge .

Observación 3.20. En general, $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}, \mathcal{Y})$ podría no ser un par de cotorsión cortado a lo largo de $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}^\wedge$. De hecho, lo es si, y solo si, $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)} = \mathcal{X}$.

En efecto, supongamos que $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}, \mathcal{Y})$ es un par de cotorsión cortado a lo largo de $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}^\wedge$. Entonces, tenemos que

$$\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)} = {}^{\perp 1} \mathcal{Y} \cap \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}^\wedge = \mathcal{X} \cap \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}^\wedge = \mathcal{X}$$

debido a $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}$ (ver [Xu17, Lema 4.1]).

Por otra parte, si $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)} = \mathcal{X}$ entonces $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}, \mathcal{Y}) = (\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ el cual es un par de cotorsión completo y hereditario en $\text{Mod}(R)$. Por lo tanto, $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}, \mathcal{Y})$ es un par de cotorsión cortado a lo largo de $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}^\wedge$.

3.2. Pares de Frobenius y Contextos AB cortados

A continuación, demostramos algunos lemas técnicos que serán de gran utilidad para desarrollar la noción de par \mathcal{S} -Frobenius y de \mathcal{S} -contexto AB. Desde ahora, \mathcal{C}^2 denotará la categoría $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$.

Lema 3.21. Sean \mathcal{C} una categoría abeliana y $Z \in \mathcal{C}$. Entonces, $Z \cong \text{Coker}(\nabla)$, donde $\nabla := \begin{pmatrix} \text{id}_Z \\ \text{id}_Z \end{pmatrix} : Z \rightarrow Z \oplus Z$ es el morfismo codiagonal.

Demostración. Notemos que se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Z & \xlongequal{\quad} & Z \\ & \searrow \nabla & \nearrow \pi \\ & Z \oplus Z & \end{array}$$

donde π es la proyección natural en la primera variable. Luego, por el Lema de la Serpiente, obtenemos la sucesión exacta

$$0 = \text{Ker}(\text{id}_Z) \rightarrow \text{Ker}(\pi) \rightarrow \text{Coker}(\nabla) \rightarrow \text{Coker}(\text{id}_Z) = 0.$$

Por lo tanto, $Z \cong \text{Coker}(\nabla)$. \square

Lema 3.22. Sean ω y \mathcal{S} clases de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} tales que ω es cerrada por extensiones y $\omega \cap \mathcal{S}$ es un generador relativo en ω . Sean $M \in \mathcal{C}$, $n \geq 1$ y una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow E_n \xrightarrow{f_n} W_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_2} W_1 \xrightarrow{f_1} W_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0,$$

con $E_{j+1} := \text{Ker}(f_j)$ y $W_j \in \omega$, para todo $0 \leq j \leq n-1$. Entonces, existen sucesiones exactas

$$0 \rightarrow G_j \rightarrow X_{j+1} \rightarrow E_{j+1} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \eta_j : 0 \rightarrow X_{j+1} \rightarrow F_j \rightarrow X_j \rightarrow 0,$$

donde $X_0 := M$, $F_j \in \omega \cap \mathcal{S}$ y $G_j \in \omega$, para todo $0 \leq j \leq n-1$.

Demostración. Usando que $\omega \cap \mathcal{S}$ es un generador relativo en ω , podemos construir el siguiente diagrama conmutativo con renglones y columnas exactas

$$\begin{array}{ccccc} G_0 & \xlongequal{\quad} & G_0 & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ X_1 & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ E_1 & \longrightarrow & W_0 & \longrightarrow & M \end{array} \quad (3.2.1)$$

con $G_0 \in \omega$ y $F_0 \in \omega \cap \mathcal{S}$. Luego, la primera columna y el segundo renglón en (3.2.1) son las sucesiones deseadas para $j = 0$.

Ahora, supongamos que para $j \geq 1$ existe una sucesión exacta $0 \rightarrow G_{j-1} \rightarrow X_j \rightarrow E_j \rightarrow 0$ con $G_{j-1} \in \omega$. Procedemos de la siguiente manera para obtener $\eta_j : 0 \rightarrow X_{j+1} \rightarrow F_j \rightarrow X_j \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow G_j \rightarrow X_{j+1} \rightarrow E_{j+1} \rightarrow 0$ con $F_j \in \omega \cap \mathcal{S}$ y $G_j \in \omega$.

Tomando el pullback de $X_j \rightarrow E_j$ y $W_j \rightarrow E_j$, obtenemos el siguiente diagrama exacto y conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & G_{j-1} & \xlongequal{\quad} & G_{j-1} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 E_{j+1} & \xrightarrow{\quad} & F'_j & \longrightarrow & X_j \\
 \parallel & & \downarrow & \text{pb} & \downarrow \\
 E_{j+1} & \xrightarrow{\quad} & W_j & \longrightarrow & E_j
 \end{array} \tag{3.2.2}$$

donde $F'_j \in \omega$, ya que $G_{j-1}, W_j \in \omega$ y ω es cerrada por extensiones. Usando de nuevo que $\omega \cap \mathcal{S}$ es un generador relativo en ω , tenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones y columnas exactas

$$\begin{array}{ccccc}
 & & G_j & \xlongequal{\quad} & G_j \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 X_{j+1} & \xrightarrow{\quad} & F_j & \longrightarrow & X_j \\
 \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 E_{j+1} & \xrightarrow{\quad} & F'_j & \longrightarrow & X_j
 \end{array} \tag{3.2.3}$$

con $G_j \in \omega$ y $F_j \in \omega \cap \mathcal{S}$. Entonces, la primera columna y el segundo renglón en (3.2.3) son las sucesiones que se estaban buscando. Continuando con este procedimiento, obtenemos las sucesiones deseadas para todo $0 \leq j \leq n - 1$. \square

Lema 3.23. *Sea ω una clase de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} tal que ω es cerrada por extensiones. Si $0 \rightarrow W \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ es una sucesión exacta en \mathcal{C} con $W \in \omega$ y $C \in \omega^\wedge$, entonces $B \in \omega^\wedge$ y $\text{resdim}_\omega(B) \leq \text{resdim}_\omega(C)$.*

Demostración. La prueba se sigue como en el caso inicial del Lema 2.14. \square

Lema 3.24. *Sean ω y \mathcal{S} clases de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} tales que ω es cerrada por extensiones y $\omega \cap \mathcal{S}$ es un generador relativo ω -proyectivo en ω . Entonces, los siguientes enunciados se cumplen.*

- (a) $\omega \cap \mathcal{S}$ es un generador relativo ω^\wedge -proyectivo en ω^\wedge . Más aún, para cualquier $M \in \omega^\wedge$ con $\text{resdim}_\omega(M) \geq 1$, existe una sucesión exacta $0 \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$ tal que $F \in \omega \cap \mathcal{S}$ y $\text{resdim}_\omega(K) = \text{resdim}_\omega(M) - 1$.
- (b) ω^\wedge es cerrada por extensiones.
- (c) Si ω es cerrada por sumandos directos, entonces ω^\wedge es cerrada por sumandos directos.
- (d) Si ω es cerrada por isomorfismos y \mathcal{S} es cerrada por núcleos de epimorfismos y conúcleos de monomorfismos entre sus objetos, entonces $\omega^\wedge \cap \mathcal{S} = (\omega \cap \mathcal{S})^\wedge$.

Demostración. (a) Primero, veamos que $\omega \cap \mathcal{S}$ es un generador relativo en ω^\wedge . Para esto, usaremos inducción en $n := \text{resdim}_\omega(M)$ para $M \in \omega^\wedge$.

Si $n = 0$ entonces $M \cong W$ para algún $W \in \omega$. Como $\omega \cap \mathcal{S}$ es un generador relativo en ω , existe una sucesión exacta $\eta : 0 \rightarrow W' \rightarrow W_0 \rightarrow W \rightarrow 0$ con $W' \in \omega$ y $W_0 \in \omega \cap \mathcal{S}$. Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{array}{ccccccc} \eta : 0 & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & W_0 & \longrightarrow & W & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \downarrow \cong & & \\ \eta' : 0 & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & W_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

el cual da una sucesión exacta η' para M , y entonces el resultado se sigue para este caso.

Sea $n \geq 1$. Entonces, hay una sucesión exacta

$$0 \rightarrow W_n \rightarrow W_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow W_1 \rightarrow W_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

último isomorfismo, construimos el siguiente diagrama pullback

$$\begin{array}{ccccc}
 E_1 & \xlongequal{\quad} & E_1 & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 S & \longrightarrow & W_0 \oplus P & \twoheadrightarrow & B \\
 \downarrow & \text{pb} & \downarrow & & \parallel \\
 K & \longrightarrow & A \oplus P & \twoheadrightarrow & B.
 \end{array} \tag{3.2.5}$$

Considerando la primera columna en el diagrama anterior y usando que $\text{resdim}_\omega(E_1) = \text{resdim}_\omega(A) - 1$, obtenemos por hipótesis de inducción que $S \in \omega^\wedge$. Notemos que $W_0 \oplus P \in \omega$ ya que ω es cerrada por extensiones (en particular, por coproductos finitos). Entonces, el segundo renglón en (3.2.5) es una ω -resolución de B y por lo tanto $B \in \omega^\wedge$.

(c) Supongamos que $C := C_1 \oplus C_2 \in \omega^\wedge$ y sea $m := \text{resdim}_\omega(C) < \infty$. Probemos por inducción en m , que $C_1 \in \omega^\wedge$. Notemos que ω^\wedge es cerrada por isomorfismos. Más aún, podemos suponer que $m \geq 1$, ya que ω es cerrada por sumandos directos.

- Caso inicial:

Por el inciso (a), existe una sucesión exacta corta $0 \rightarrow Z_1 \rightarrow Z_0 \rightarrow C \rightarrow 0$ con $Z_0 \in \omega \cap \mathcal{S}$ y $Z_1 \in \omega$. Luego, para $i = 1, 2$, tenemos una sucesión exacta

$$\eta_i: 0 \rightarrow K_i \rightarrow Z_0 \rightarrow C_i \rightarrow 0.$$

Tomando la suma directa de η_1 y η_2 , obtenemos una sucesión exacta corta

$$\eta_1 \oplus \eta_2: 0 \rightarrow K_1 \oplus K_2 \rightarrow Z_0 \oplus Z_0 \rightarrow C \rightarrow 0,$$

donde $Z_0 \oplus Z_0 \in \omega$ ya que ω es cerrada por extensiones. Considere-

mos el siguiente diagrama conmutativo y exacto (ver Lema 3.21):

$$\begin{array}{ccccc}
 \eta: & & Z_1 & \longrightarrow & Z_0 & \longrightarrow & C \\
 & & \downarrow k & & \downarrow \nabla & & \parallel \\
 \eta_1 \oplus \eta_2: & & K_1 \oplus K_2 & \longrightarrow & Z_0 \oplus Z_0 & \longrightarrow & C \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \frac{\eta_1 \oplus \eta_2}{\eta}: & & \text{Coker}(k) & \xrightarrow{\sim} & Z_0, & &
 \end{array}$$

donde k es el morfismo inducido por la propiedad universal del núcleo. Usando que ω es cerrada por extensiones, obtenemos $K_1 \oplus K_2 \in \omega$ y así $K_1, K_2 \in \omega$ ya que ω es cerrada por sumandos directos. Por lo tanto, $\text{resdim}_\omega(C_1) \leq 1$.

• Caso $m > 1$:

Supongamos que, para cada $D \in \mathcal{C}$ tal que $\text{resdim}_\omega(D) < m$, todos sus sumandos directos pertenecen a ω^\wedge . De (a), existe una sucesión exacta

$$\eta: 0 \rightarrow K \rightarrow Z_0 \rightarrow C \rightarrow 0,$$

con $Z_0 \in \omega \cap \mathcal{S}$ y $\text{resdim}_\omega(K) < \text{resdim}_\omega(C)$. Entonces, para $i = 1, 2$, tenemos una sucesión exacta

$$\eta_i: 0 \rightarrow K_i \rightarrow Z_0 \rightarrow C_i \rightarrow 0.$$

Procediendo como en el caso inicial, obtenemos una sucesión exacta

$$\eta': 0 \rightarrow K \rightarrow K_1 \oplus K_2 \rightarrow Z \rightarrow 0,$$

con $Z \in \omega \cap \mathcal{S}$. Notemos que, por el inciso (a), η' se escinde ya que $\text{pd}_{\omega^\wedge}(\omega \cap \mathcal{S}) = 0$ y entonces $K_1 \oplus K_2 \cong K \oplus Z$. Luego, $\text{resdim}_\omega(K_1 \oplus K_2) = \text{resdim}_\omega(K \oplus Z) \leq \text{resdim}_\omega(K) < m$, ya que ω es cerrada por coproductos finitos y $Z \in \omega$. Finalmente, por hipótesis de inducción $K_1 \in \omega^\wedge$. Por lo tanto, $C_1 \in \omega^\wedge$.

(d) Como \mathcal{S} es cerrada por conúcleos de monomorfismos entre sus objetos, es claro que $(\omega \cap \mathcal{S})^\wedge \subseteq \omega^\wedge \cap \mathcal{S}$. Por otra parte, sea $M \in \omega^\wedge \cap \mathcal{S}$ y

$$0 \rightarrow W_n \rightarrow W_{n-1} \rightarrow W_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow W_1 \rightarrow W_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

una ω -resolución de M . Si $n = 0$, el resultado se sigue debido a que ω es cerrada por isomorfismos. Ahora bien, supongamos que $n \geq 1$. Como \mathcal{S} es cerrada por núcleos de epimorfismos entre sus objetos, por el Lema 3.22, existen sucesiones exactas cortas $\eta_j : 0 \rightarrow X_{j+1} \rightarrow F_j \rightarrow X_j \rightarrow 0$ con $X_j \in \mathcal{S}$ y $F_j \in \omega \cap \mathcal{S}$ para todo $0 \leq j \leq n-1$. Más aún, $X_n \in \omega \cap \mathcal{S}$ ya que $G_{n-1}, E_n := W_n \in \omega$ y ω es cerrada por extensiones. Entonces,

$$0 \rightarrow X_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

es una $(\omega \cap \mathcal{S})$ -resolución de M . Por lo tanto, $M \in (\omega \cap \mathcal{S})^\wedge$. \square

Lema 3.25. Sean ω, \mathcal{S} dos clases de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} y

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

una sucesión exacta corta con $A \in \omega_n^\wedge$ y $C \in \omega$. Si una de las siguientes dos condiciones se satisfacen:

- (1) ω es cerrada por extensiones y sumandos directos en \mathcal{C} , y $\omega \cap \mathcal{S}$ un generador relativo ω -proyectivo en ω ;
- (2) ω es cerrada por coproductos finitos con $\text{id}_\omega(\omega) = 0$,

entonces $B \in \omega_n^\wedge$ para cada $n \geq 0$.

Demostración. (1) Sea $\eta : 0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$ una sucesión exacta corta en \mathcal{C} con $A \in \omega^\wedge$ y $C \in \omega$. Supongamos que $\text{resdim}_\omega(A) \leq n$. Entonces, existe una ω -resolución finita para A de longitud n , digamos

$$\rho : 0 \rightarrow X_n \xrightarrow{f_n} X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \xrightarrow{f_1} X_0 \xrightarrow{f_0} A \rightarrow 0$$

con $X_k \in \omega$ para cada $0 \leq k \leq n$. Por otra parte, como $\omega \cap \mathcal{S}$ es un generador relativo en ω , existe una sucesión exacta corta

$$\xi : 0 \rightarrow X \xrightarrow{k} W \xrightarrow{p} C \rightarrow 0$$

con $W \in \omega \cap \mathcal{S}$ y $X \in \omega$. De ρ y ξ , construiremos una ω -resolución finita de B usando un procedimiento similar al *Lema de la Herradura*.

Primero, como $\omega \cap \mathcal{S}$ es ω -proyectivo y $A \in \omega^\wedge$, se tiene por [MS06, Lema 2.13] que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(W, A) = 0$, y entonces existe un morfismo $r: W \rightarrow B$ tal que $p = \beta \circ r$. Usando la propiedad universal del coproducto, obtenemos que existe un único morfismo

$$h_0 := \left(\alpha \circ f_0 \quad r \right) : X_0 \oplus W \rightarrow B$$

tal que $h_0 \circ i_{X_0} = \alpha \circ f_0$ y $h_0 \circ i_W = r$, donde $i_{X_0}: X_0 \hookrightarrow X_0 \oplus W$ y $i_W: W \hookrightarrow X_0 \oplus W$ son las inclusiones naturales del coproducto $X_0 \oplus W$. Usando esta propiedad universal de nuevo, tenemos que $\beta \circ h_0 = p \circ \pi_W$, donde $\pi_W: X_0 \oplus W \rightarrow W$ es la proyección natural en W asociada al biproducto $X_0 \oplus W$.

Ahora consideremos la inclusión natural $i_{X_1}: X_1 \hookrightarrow X_1 \oplus X$ y la proyección natural $\pi_X: X_1 \oplus X \rightarrow X$ en X . Entonces existe un único morfismo

$$h_1 := \left(\begin{array}{cc} f_1 & 0 \\ 0 & k \end{array} \right) : X_1 \oplus X \rightarrow X_0 \oplus W$$

tal que $h_1 \circ i_{X_1} = i_{X_0} \circ f_1$ y $\pi_W \circ h_1 = k \circ \pi_X$. Luego, tenemos la siguiente ω -resolución de B :

$$0 \rightarrow X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_2 \rightarrow X_1 \oplus X \xrightarrow{h_1} X_0 \oplus W \xrightarrow{h_0} B \rightarrow 0$$

que aparece en el renglón central del siguiente diagrama conmutativo con renglones y columnas exactas:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 X_n & \xrightarrow{f_n} & X_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_2 & \xrightarrow{f_2} & X_1 & \xrightarrow{f_1} & X_0 & \xrightarrow{f_0} & A \\
 \parallel & & \parallel & & & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \alpha \\
 X_n & \xrightarrow{f_n} & X_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_2 & \xrightarrow{h_2} & X_1 \oplus X & \xrightarrow{h_1} & X_0 \oplus W & \xrightarrow{h_0} & B \\
 \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \beta \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{k} & W & \xrightarrow{p} & C
 \end{array}$$

(2) Primero, notemos que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C, \omega^\wedge) = 0$ para cada $i > 0$ debido a [MS06, dual de Lema 2.13]. Luego, la sucesión exacta $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ se

escinde, y entonces $B \simeq A \oplus C$. Por una parte, tenemos una sucesión exacta

$$\xi: 0 \rightarrow W_n \rightarrow W_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow W_1 \rightarrow W_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

donde $W_i \in \omega$ para cada $0 \leq i \leq n$. Por otra parte, consideremos el complejo

$$D^0(C): 0 \rightarrow 0 \rightarrow C \xrightarrow{\text{id}_C} C \rightarrow 0.$$

Tomando la suma directa $\xi \oplus D^0(C)$, obtenemos una sucesión exacta corta

$$\xi \oplus D^0(C): 0 \rightarrow W_n \rightarrow W_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow W_1 \rightarrow W_0 \oplus C \rightarrow B \rightarrow 0$$

la cual es una ω -resolución de B , ya que ω es cerrada por coproductos finitos. \square

Observación 3.26. Usando el Lema anterior, podemos dar otra prueba del Lema 3.24 (c).

En efecto, supongamos las hipótesis del Lema 3.24 (c). Sean $C := C_1 \oplus C_2 \in \omega^\wedge$ y $m := \text{resdim}_\omega(C) < \infty$. Al igual que en la prueba del Lema 3.24 podemos suponer que $m \geq 1$. Consideremos

$$\eta: 0 \rightarrow K \rightarrow Z_0 \rightarrow C \rightarrow 0,$$

con $Z_0 \in \omega$ y $\text{resdim}_\omega(K) < \text{resdim}_\omega(C)$. Procediendo como en el caso $m > 1$, obtenemos una sucesión exacta corta

$$\eta': 0 \rightarrow K \rightarrow K_1 \oplus K_2 \rightarrow Z \rightarrow 0,$$

con $Z \in \omega$. Usando el Lema 3.25 obtenemos que $\text{resdim}_\omega(K_1 \oplus K_2) < m$. Luego, continuando con la prueba el resultado se sigue.

Observación 3.27. Notemos que si cambiamos la propiedad “ser cerrada por coproductos finitos” por “ser cerrada por extensiones y sumandos directos” en el inciso (2) del Lema anterior, este inciso es consecuencia del anterior tomando $S := C$.

Con estos resultados, estamos listos para dar la definición de par de S -Frobenius. Primero recordemos la definición de par de Frobenius izquierdo en [BMPS19].

Definición 3.28. [BMPS19, Definición 2.5] Sea (\mathcal{X}, ω) un par de clases de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} . Decimos que (\mathcal{X}, ω) es un par de Frobenius izquierdo en \mathcal{C} si $\mathcal{X} = \text{Thick}^-(\mathcal{X})$, ω es un cogenerador relativo \mathcal{X} -inyectivo en \mathcal{X} , y ω es cerrada por sumandos directos en \mathcal{C} . Se dice que un par de Frobenius izquierdo (\mathcal{X}, ω) es fuerte si ω es también un generador relativo \mathcal{X} -proyectivo en \mathcal{X} . Dualmente, decimos que un par (ν, \mathcal{Y}) de clases de objetos en \mathcal{C} es un par de Frobenius derecho en \mathcal{C} si $\mathcal{Y} = \text{Thick}^+(\mathcal{Y})$, ν es un generador relativo \mathcal{Y} -proyectivo en \mathcal{Y} , y ν es cerrada por sumandos directos en \mathcal{C} . Si además, ν es también un cogenerador relativo \mathcal{Y} -inyectivo en \mathcal{Y} , se dice que (ν, \mathcal{Y}) es un par de Frobenius derecho fuerte.

Definición 3.29. Sea \mathcal{X}, ω y \mathcal{S} clases de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} . Decimos que (\mathcal{X}, ω) es un par de \mathcal{S} -Frobenius izquierdo en \mathcal{C} si satisface las siguientes condiciones:

- (a) $\mathcal{X} = \text{Thick}^-(\mathcal{X})$.
- (b) $(\mathcal{X} \cap \mathcal{S}, \omega \cap \mathcal{S})$ es un par de Frobenius izquierdo en \mathcal{C} .
- (c) $\omega \cap \mathcal{S}$ es un generador relativo ω -proyectivo en ω .
- (d) ω es cerrada por extensiones y sumandos directos.

Dualmente, tenemos la noción de par de \mathcal{S} -Frobenius derecho (ν, \mathcal{Y}) en \mathcal{C} .

Observación 3.30. Notemos que [BMPS19, Definición 2.5] se obtiene de la Definición 3.29 haciendo $\mathcal{S} := \mathcal{C}$.

Ejemplo 3.31. Para cualquier anillo R , el par $(\mathcal{X}, \omega) := (\text{Mod}(R), \mathcal{P}(R)^\wedge)$ es un par de $\mathcal{GP}(R)$ -Frobenius izquierdo (ver [BMPS19, Sección 6.1]) el cual no necesariamente es un par de Frobenius izquierdo en \mathcal{C} .

Observación 3.32. Sea (\mathcal{X}, ω) un par de \mathcal{S} -Frobenius izquierdo en una categoría abeliana \mathcal{C} . Entonces, los siguientes enunciados se cumplen.

- (1) $\omega \cap \mathcal{S}$ es cerrada por extensiones y coproductos finitos. En efecto, se sigue de Definición 3.29(b) y [BMPS19, Proposición 2.7 (2)].
- (2) ω es cerrada por isomorfismos por la condición (d) en Definición 3.29.

(3) Los enunciados del Lema 3.24 son ciertos si \mathcal{S} es cerrada por núcleos de epimorfismos y conúcleos de monomorfismos entre sus objetos.

El ejemplo anterior puede verse como un caso particular si consideramos clases resolventes cerradas por coproductos.

Ejemplo 3.33. Sean R un anillo e \mathcal{Y} una clase resolvente de $\text{Mod}(R)$ cerrada por coproductos. Entonces, $(\text{Mod}(R), \mathcal{Y}^\wedge)$ es un par de $\mathcal{GP}_{(\mathcal{P}(R), \mathcal{Y})}$ -Frobenius izquierdo.

En efecto, sean $(\mathcal{X}, \omega) := (\text{Mod}(R), \mathcal{Y}^\wedge)$ y $\mathcal{S} := \mathcal{GP}_{(\mathcal{P}(R), \mathcal{Y})}$. Primero, por [Tam11, Proposición 3.9] tenemos que $\omega \cap \mathcal{S} := \mathcal{Y}^\wedge \cap \mathcal{GP}_{(\mathcal{P}(R), \mathcal{Y})} = \mathcal{P}(R)$.

Ahora bien, la condición (a) en la Definición 3.29 es clara. Para probar las condiciones (d) y (c), notemos que $\mathcal{P}(R)$ es un generador relativo \mathcal{Y} -proyectivo en \mathcal{Y} ya que \mathcal{Y} es una clase resolvente y $\text{Mod}(R)$ tiene suficientes proyectivos. Más aún, sabemos que \mathcal{Y} es cerrada por sumandos directos por [Hol04, Proposición 1.4]. Luego, del Lema 3.24, tenemos que \mathcal{Y}^\wedge es cerrada por extensiones y sumandos directos, y $\mathcal{P}(R)$ es un generador relativo \mathcal{Y}^\wedge -proyectivo en \mathcal{Y}^\wedge . Finalmente, de [Tam11, Teorema 3.11, Observación 3.6 y Proposición 3.8], obtenemos que $(\mathcal{X} \cap \mathcal{S}, \omega \cap \mathcal{S}) = (\mathcal{GP}_{(\mathcal{P}(R), \mathcal{Y})}, \mathcal{P}(R))$ es un par de Frobenius izquierdo.

El siguiente teorema establece condiciones en el par anterior para que sea un par de Frobenius izquierdo en $\text{Mod}(R)$.

Teorema 3.34. Sean R un anillo e \mathcal{Y} una clase de objetos en $\text{Mod}(R)$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) $(\text{Mod}(R), \mathcal{Y}^\wedge)$ es un par de Frobenius izquierdo en $\text{Mod}(R)$;
- (b) $\mathcal{Y}^\wedge = \mathcal{I}(R)$.

En caso de que alguna de las condiciones anteriores se cumpla, si \mathcal{Y} es una clase resolvente entonces R es un anillo quasi-Frobenius.

Demostración. (a) \Rightarrow (b): Como $\text{id}(\mathcal{Y}^\wedge) = 0$ se sigue que $\mathcal{Y}^\wedge \subseteq \mathcal{I}(R)$. El siguiente paso es mostrar $\mathcal{I}(R) \subseteq \mathcal{Y}^\wedge$. Sea $I \in \mathcal{I}(R)$. Como \mathcal{Y}^\wedge es un cogenerador relativo en $\text{Mod}(R)$, existe una sucesión exacta $0 \rightarrow I \rightarrow W \rightarrow M \rightarrow 0$ con $W \in \mathcal{Y}^\wedge$ la cual se escinde debido a que $I \in \mathcal{I}(R)$. Luego, $I \in \mathcal{Y}^\wedge$.

(b) \Rightarrow (a): Notemos que $(\text{Mod}(R), \mathcal{Y}^\wedge) = (\text{Mod}(R), \mathcal{I}(R))$ el cual es evidentemente un par de Frobenius izquierdo en $\text{Mod}(R)$.

Si además, \mathcal{Y} es una clase resolvente se tienen las contenciones $\mathcal{P}(R) \subseteq \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Y}^\wedge = \mathcal{I}(R)$. Luego, R es un anillo quasi-Frobenius por [Rot09, Proposición 4.39]. \square

Centrando nuestra atención en la prueba anterior, notamos que este resultado puede ser extendido a un contexto más general. Específicamente, cuando \mathcal{C} es una categoría abeliana. Para esto, necesitaremos la siguiente definición.

Definición 3.35. Sean \mathcal{X} e \mathcal{Y} clases de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} . La clase de \mathcal{X} -inyectivos en \mathcal{Y} , denotada por $\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})$, se define como:

$$\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) := \{Y \in \mathcal{Y} : \text{id}_{\mathcal{X}}(Y) = 0\}.$$

Proposición 3.36. Sea \mathcal{C} una categoría abeliana y sea $(\mathcal{X}, \omega) \subseteq \mathcal{C}^2$ tal que $\omega^\wedge \subseteq \mathcal{X}$, $\mathcal{X} = \text{Thick}^-(\mathcal{X})$, ω es cerrada por sumandos directos y un cogenerador relativo en \mathcal{X} . Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a) $(\mathcal{X}, \omega^\wedge)$ es un par de Frobenius izquierdo;
- (b) $\omega = \mathcal{I}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$.

Más aún, si una de las condiciones anteriores se cumple, entonces $\omega = \omega^\wedge$.

Demostración. Supongamos que $(\mathcal{X}, \omega^\wedge)$ es un par de Frobenius izquierdo. En particular, $0 = \text{id}_{\mathcal{X}}(\omega^\wedge) = \text{id}_{\mathcal{X}}(\omega)$ y entonces (\mathcal{X}, ω) es un par de Frobenius izquierdo. Usando [AB89, Lema 3.7], obtenemos $\omega = \mathcal{I}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$.

Por otra parte, si $\omega = \mathcal{I}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$ entonces $\text{id}_{\mathcal{X}}(\omega) = 0$. Luego, (\mathcal{X}, ω) es un par de Frobenius izquierdo. Como $\omega^\wedge \subseteq \mathcal{X}$, por [AB89, Lema 3.7], tenemos $\omega = \mathcal{X} \cap \omega^\wedge = \omega^\wedge$. \square

El segundo contexto, donde el Ejemplo 3.31 puede ser visto como un caso particular, es considerando pares de cotorsión completos y hereditarios en $\text{Mod}(R)$.

Ejemplo 3.37. Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par de cotorsión completo y hereditario en $\text{Mod}(R)$ y sea $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. Entonces, $(\text{Mod}(R), \omega^\wedge)$ es un par de $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}$ -Frobenius en $\text{Mod}(R)$.

En efecto, notemos que ω es cerrada por extensiones, sumandos directos y coproductos finitos debido a que $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es un par de cotorsión. Más aún, como

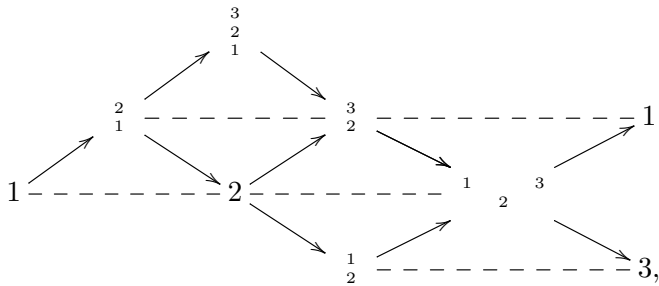
$(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es hereditario y completo, por el Lema 3.24, también tenemos que ω es un generador relativo ω^\wedge -proyectivo en ω^\wedge , y ω^\wedge es cerrada por extensiones y sumandos directos. Ahora bien, de [Xu17, Lema 4.1 y Proposición 3.7], obtenemos la igualdad $\omega^\wedge \cap \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)} = \omega$, ω es un cogenerador relativo $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}$ -inyectivo en $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}$ y $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)} = \text{Thick}^-(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)})$. Por lo que, podemos concluir que $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}, \omega)$ es un par de Frobenius izquierdo.

Todos los ejemplos presentados hasta ahora fueron considerando una clase resolvente \mathcal{S} . A continuación, damos un ejemplo que no cumple esta propiedad.

Ejemplo 3.38. [ZX19, Ejemplo 5.3]. Sea A el cociente de k -álgebra de caminos dada por el carcaj

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xleftarrow{\gamma} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} 3,$$

con relaciones $\alpha\beta = 0 = \beta\alpha$. Los A -módulos proyectivos inescindibles son $\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$ y $\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}$. Los A -módulos inyectivos inescindibles son $\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$ y 3 . El carcaj de Auslander-Reiten de $\text{mod}(A)$, la categoría de los A -módulos izquierdos finitamente generados, es



donde los dos vértices 1 representan el mismo módulo simple.

Sea $\mathcal{X} := \text{add}(1 \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus 2 \oplus \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix})$. Entonces \mathcal{X} es cerrada por extensiones y una subcategoría de Frobenius de $\text{mod}(A)$. Más aún, la clase de objetos proyectivos-inyectivos en \mathcal{X} es la siguiente $\mathcal{P}(\mathcal{X}) = \text{add}(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix})$.

Afirmamos que $(\text{mod}(A), \mathcal{P}(\mathcal{X}))$ es un par de \mathcal{X} -Frobenius izquierdo en $\text{mod}(A)$. Notemos primero que \mathcal{X} no es una clase resolvente en $\text{mod}(A)$ debido a que no contiene a todos los A -módulos proyectivos inescindibles.

Por una parte, es fácil ver que (a), (c) y (d) de la Definición 3.29 se cumplen ya que $\mathcal{P}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{P}(A)$, y \mathcal{X} es cerrada por extensiones y sumandos directos. Entonces, solo necesitamos probar que $(\mathcal{X}, \mathcal{P}(\mathcal{X}))$ es un par de Frobenius izquierdo.

Primero, probemos $\mathcal{X} = \text{Thick}^-(\mathcal{X})$. Como \mathcal{X} es cerrada por extensiones es suficiente probar que es cerrada por núcleos de epimorfismos entre sus objetos. Sea $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ una sucesión exacta en $\text{mod}(A)$ con $Y, Z \in \mathcal{X}$. Usando que \mathcal{X} tiene suficientes proyectivos, podemos construir el siguiente diagrama pullback

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z' & \xlongequal{\quad} & Z' \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 X & \longrightarrow & L & \longrightarrow & P \\
 \parallel & & \downarrow & \text{pb} & \downarrow \\
 X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z
 \end{array} \tag{3.2.6}$$

con $P \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ y $Z' \in \mathcal{X}$. Notemos que $L \in \mathcal{X}$ debido a que \mathcal{X} es cerrada por extensiones, y Y y Z' pertenecen a \mathcal{X} . Más aún, como $\mathcal{P}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{P}(A)$ el segundo renglón en (3.2.6) se escinde y entonces $L \cong X \oplus P$. Luego, $X \in \mathcal{X}$ ya que \mathcal{X} es cerrada por sumandos. Las condiciones restantes para ser un par de Frobenius izquierdo se siguen del hecho de que \mathcal{X} es una subcategoría de Frobenius de $\text{mod}(A)$.

A continuación, presentamos el concepto de \mathcal{S} -contexto de Auslander-Buchweitz (\mathcal{S} -contexto AB) y damos algunos ejemplos relacionados a pares de cotorsión completos y hereditarios. Al final, damos ciertas condiciones para que estos ejemplos sean contextos de Auslander-Buchweitz. Empecemos con la siguiente definición en [BMPS19].

Definición 3.39. [BMPS19, Definición 5.1] Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de clases de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} , y sea $\omega := \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Decimos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un precontexto de Auslander-Buchweitz débil izquierdo (precontexto AB débil izquierdo) en \mathcal{C} si:

- (a) El par (\mathcal{A}, ω) es un par de Frobenius izquierdo en \mathcal{C} ;

(b) $\mathcal{B} = \text{Thick}^+(\mathcal{B})$.

Si además:

- $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ satisface $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}^\wedge$, entonces decimos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un contexto AB débil izquierdo en \mathcal{C} ;
- $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ satisface $\mathcal{A}^\wedge = \mathcal{C}$, entonces decimos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un contexto AB izquierdo en \mathcal{C} .

Las nociones de precontexto AB débil derecho, contexto AB débil derecho y contexto AB derecho se definen dualmente.

En la siguiente definición, proponemos una generalización de la definición anterior tomando $\mathcal{S} := \mathcal{C}$.

Definición 3.40. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de clases de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} , y sea $\omega := \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Decimos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un \mathcal{S} -precontexto de Auslander-Buchweitz débil izquierdo (\mathcal{S} -precontexto AB débil izquierdo) en \mathcal{C} si:

- (a) El par (\mathcal{A}, ω) es un par de \mathcal{S} -Frobenius izquierdo;
- (b) $\mathcal{B} \cap \mathcal{S} = \text{Thick}^+(\mathcal{B} \cap \mathcal{S})$.

Si además, $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ satisface $\mathcal{B} \cap \mathcal{S} \subseteq (\mathcal{A} \cap \mathcal{S})^\wedge$, entonces decimos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un \mathcal{S} -contexto AB débil izquierdo en \mathcal{C} . Dualmente, tenemos las nociones de \mathcal{S} -precontexto AB débil derecho en \mathcal{C} y \mathcal{S} -contexto AB débil derecho.

Observación 3.41. Dado $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \subseteq \mathcal{C}^2$, un \mathcal{S} -contexto AB débil izquierdo en una categoría abeliana \mathcal{C} , se tiene que $(\mathcal{A} \cap \mathcal{S}, \mathcal{B} \cap \mathcal{S})$ es un contexto AB débil izquierdo. Luego, $(\mathcal{A} \cap \mathcal{S}, \mathcal{B} \cap \mathcal{S})$ es un par de $\text{Thick}(\mathcal{A} \cap \mathcal{S})$ -cotorsión con $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{S}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{S}) = 0$ y $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{S})^\wedge = \mathcal{B} \cap \mathcal{S}$ [BMPS19, Definición 3.4 y Proposición 5.5 (1)].

Ejemplo 3.42. Sea R un anillo. Entonces, para cualquier par de cotorsión completo y hereditario $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ en $\text{Mod}(R)$, los pares $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y $(\mathcal{G}\mathcal{P}_{(\mathcal{X}, \omega)}, \mathcal{Y})$ son \mathcal{X}^\wedge -contextos AB débiles izquierdos en $\text{Mod}(R)$, donde $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$.

En efecto, para el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, la condición (a) en la Definición 3.40 se sigue del hecho de que $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es un par de cotorsión completo y hereditario en $\text{Mod}(R)$, mientras que (b) se debe a [Xu17, Lema 4.1]. La contención restante $\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}^\wedge \subseteq (\mathcal{X} \cap \mathcal{X}^\wedge)^\wedge$ para ser un \mathcal{X}^\wedge -contexto AB débil izquierdo es clara.

Ahora bien, veamos que $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\omega)}, \mathcal{Y})$ satisface todas las condiciones en la Definición 3.40 tomando $\mathcal{S} := \mathcal{X}^\wedge$.

En efecto, por [Xu17, Lema 4.1 (2),(4), (3)], tenemos las igualdades

$$\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\omega)} \cap \mathcal{S} = \mathcal{X} \quad \text{y} \quad \omega^\wedge = \mathcal{Y} \cap \mathcal{S} = \text{Thick}^+(\mathcal{Y} \cap \mathcal{S}).$$

Luego, $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\omega)} \cap \mathcal{Y} \cap \mathcal{S} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\omega)} \cap \omega^\wedge = \omega$ por [Xu17, Lema 4.1 (1)] y $\mathcal{Y} \cap \mathcal{S} = \omega^\wedge \subseteq \mathcal{S} = (\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\omega)} \cap \mathcal{S})^\wedge$. Entonces, es suficiente mostrar que $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\omega)}, \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\omega)} \cap \mathcal{Y})$ es un par de \mathcal{S} -Frobenius izquierdo en $\text{Mod}(R)$.

Por una parte, de [Xu17, Proposición 3.7], tenemos que $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\omega)}$ es gruesa a izquierda y entonces $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\omega)} \cap \mathcal{Y}$ es cerrada por extensiones y sumandos directos. Ahora bien, como $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es un par de cotorsión completo y hereditario, obtenemos que $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\omega)} \cap \mathcal{S}, \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\omega)} \cap \mathcal{Y} \cap \mathcal{S}) = (\mathcal{X}, \omega)$ es un par de Frobenius izquierdo. Entonces, falta revisar que ω es un generador relativo $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\omega)} \cap \mathcal{Y})$ -proyectivo en $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\omega)} \cap \mathcal{Y}$. En efecto, como $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es un par de cotorsión completo, para cada $M \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\omega)} \cap \mathcal{Y}$ hay una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow M' \rightarrow X \rightarrow M \rightarrow 0$$

con $X \in \omega \subseteq \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\omega)}$ y $M' \in \mathcal{Y}$. Usando de nuevo [Xu17, Lema 4.1 y Proposición 3.7] tenemos que $M' \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\omega)} \cap \mathcal{Y}$ y esto implica que ω es un generador relativo en $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\omega)} \cap \mathcal{Y}$. Más aún, como $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es hereditario, también tenemos que $\text{pd}_{\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\omega)} \cap \mathcal{Y}}(\omega) = 0$. Entonces, ω es un generador relativo $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\omega)} \cap \mathcal{Y})$ -proyectivo en $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\omega)} \cap \mathcal{Y}$. Por lo tanto, $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\omega)}, \mathcal{Y})$ es un \mathcal{S} -contexto AB débil izquierdo en $\text{Mod}(R)$.

Observación 3.43. En general, para un anillo R , la clase de R -módulos Gorenstein proyectivos no coincide con la clase de R -módulos proyectivos [Tam11, Ejemplo 3.7]. En este caso, los pares anteriores, dados por el par de cotorsión completo y hereditario $(\mathcal{P}(R), \text{Mod}(R))$ en $\text{Mod}(R)$, son diferentes.

Proposición 3.44. Sean R un anillo, $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par de cotorsión completo y hereditario en $\text{Mod}(R)$, y sea $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes.

- (a) $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\omega)}, \mathcal{Y})$ es un contexto AB débil izquierdo en $\text{Mod}(R)$.
- (b) $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}^\wedge$.

(c) $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es un contexto AB débil izquierdo en $\text{Mod}(R)$.

Más aún, si alguna de las condiciones anteriores se satisface entonces $\mathcal{X} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}$.

Demostración. (a) \Rightarrow (b): Por [BMPS19, Proposición 5.5] se tiene la igualdad $\text{id}_{\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}}(\mathcal{Y}) = 0$. Luego,

$$\mathcal{X} \subseteq \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)} \subseteq {}^{\perp 1}\mathcal{Y} = \mathcal{X}$$

y entonces $\mathcal{X} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}$. Por lo tanto, $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}^{\wedge} = \mathcal{X}^{\wedge}$.

(b) \Rightarrow (a): Bajo las hipótesis de que $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es un par de cotorsión hereditario y (b), tenemos que $\mathcal{Y} = \text{Thick}^+(\mathcal{Y})$ y $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}^{\wedge} \subseteq \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}^{\wedge}$. Entonces, solo necesitamos probar que $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}, \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)} \cap \mathcal{Y})$ es un par de Frobenius izquierdo. Para probar este hecho, veamos que $\omega = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)} \cap \mathcal{Y}$. En efecto, de [Xu17, Lema 4.1] y (b), tenemos las siguientes inclusiones

$$\omega \subseteq \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)} \cap \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)} \cap \mathcal{X}^{\wedge} = \mathcal{X}.$$

Entonces, $\omega \subseteq \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)} \cap \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \omega$ y la igualdad es cierta. Finalmente, de [Xu17, Lema 4.1 y Proposición 3.7], obtenemos que $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}, \omega)$ es un par de Frobenius izquierdo.

Por otra parte, es claro que (b) y (c) son equivalentes. \square

3.3. Correspondencias entre pares de cotorsión cortados

En esta sección, consideraremos una subcategoría \mathcal{S} , en una categoría abeliana \mathcal{C} . Primero daremos una correspondencia entre pares de Frobenius cortados y contextos AB cortados. Para esto, definimos dos relaciones de equivalencia; una en la clase de los pares de \mathcal{S} -Frobenius izquierdos, otra en la clase de los \mathcal{S} -contextos AB débiles izquierdos y probamos que existe una correspondencia biyectiva entre las clases de equivalencia que inducen estas relaciones. Empezaremos probando el siguiente lema el cual es la versión en el contexto cortado de una parte en [BMPS19, Teorema 3.6].

Lema 3.45. Sean \mathcal{X}, ω y \mathcal{S} clases de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} , tales que ω es cerrada por extensiones e isomorfismos, $\omega \cap \mathcal{S}$ es un generador relativo en ω , $\omega \cap \mathcal{S}$ es cerrada por sumandos directos, $\omega \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{S}$, $\mathcal{X} \cap \mathcal{S}$ es cerrada por núcleos de epimorfismos entre sus objetos y $\text{id}_{\mathcal{X} \cap \mathcal{S}}(\omega \cap \mathcal{S}) = 0$. Entonces,

$$\omega \cap \mathcal{S} = \mathcal{X} \cap \omega^\wedge \cap \mathcal{S}.$$

En particular, si (\mathcal{X}, ω) es un par de \mathcal{S} -Frobenius izquierdo entonces la igualdad anterior se cumple.

Demostración. La contención $\omega \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{X} \cap \omega^\wedge \cap \mathcal{S}$ se sigue de la inclusión $\omega \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{S}$. Para la contención contraria, sean $M \in \mathcal{X} \cap \omega^\wedge \cap \mathcal{S}$ y

$$0 \rightarrow W_n \rightarrow W_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow W_1 \rightarrow W_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

una ω -resolución de M . Si $n = 0$ entonces $M \in \omega \cap \mathcal{S}$ ya que ω es cerrada por isomorfismos. Por lo que, podemos suponer que $n \geq 1$. Ahora, como $\mathcal{X} \cap \mathcal{S}$ es cerrada por núcleos de epimorfismos entre sus objetos, por el Lema 3.22 tenemos sucesiones exactas

$$\eta_j : 0 \rightarrow X_{j+1} \rightarrow F_j \rightarrow X_j \rightarrow 0,$$

donde $X_0 = M$ y $X_j \in \mathcal{X} \cap \mathcal{S}$ para todo $1 \leq j \leq n-1$. Notemos que $X_n \in \omega \cap \mathcal{S}$ debido a que $G_{n-1}, E_n := W_n \in \omega$. Luego, η_{n-1} se escinde y $X_{n-1} \in \omega \cap \mathcal{S}$ ya que $\text{id}_{\mathcal{X} \cap \mathcal{S}}(\omega \cap \mathcal{S}) = 0$ y $\omega \cap \mathcal{S}$ es cerrada por sumandos directos. Usando de nuevo el argumento anterior, obtenemos $X_j \in \omega \cap \mathcal{S}$ para todo $1 \leq j \leq n$. Por lo tanto, $\eta_0 : 0 \rightarrow X_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ se escinde y entonces $M \in \omega \cap \mathcal{S}$. \square

Ejemplo 3.46. Usando [BMPS19, Proposición 6.1] sabemos que el par $(\mathcal{X}, \omega) := (\text{Mod}(R), \mathcal{P}(R))$ es un par de $\mathcal{S} := \mathcal{GP}(R)$ -Frobenius izquierdo en $\text{Mod}(R)$, para cualquier anillo R . Notemos que la igualdad $\mathcal{X} \cap \omega^\wedge = \omega$ no necesariamente es cierta mientras que $\mathcal{X} \cap \omega^\wedge \cap \mathcal{S} = \omega \cap \mathcal{S}$ lo es por el Lema 3.45.

A partir de ahora, $\mathfrak{F}_{\mathcal{S}}$ y $\mathfrak{C}_{\mathcal{S}}$ denotarán a la clase de los pares de \mathcal{S} -Frobenius izquierdos y a la clase de los \mathcal{S} -contextos AB débiles izquierdos, respectivamente.

Definición 3.47. Sean \mathcal{S} una clase de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} . Sean $(\mathcal{X}, \omega), (\mathcal{X}', \omega') \in \mathfrak{F}_{\mathcal{S}}$, y $(\mathcal{A}, \mathcal{B}), (\mathcal{A}', \mathcal{B}') \in \mathfrak{C}_{\mathcal{S}}$. Decimos que:

(a) (\mathcal{X}, ω) está \mathcal{S} -relacionado a (\mathcal{X}', ω') en \mathfrak{F}_S si $\mathcal{X} \cap \mathcal{S} = \mathcal{X}' \cap \mathcal{S}$ y $\omega \cap \mathcal{S} = \omega' \cap \mathcal{S}$. En tal caso, escribimos $(\mathcal{X}, \omega) \sim_{\mathfrak{F}} (\mathcal{X}', \omega')$.

(b) $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ está \mathcal{S} -relacionado a $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ en \mathfrak{C}_S si $\mathcal{A} \cap \mathcal{S} = \mathcal{A}' \cap \mathcal{S}$ y $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{S} = \mathcal{A}' \cap \mathcal{B}' \cap \mathcal{S}$. En tal caso, escribimos $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \sim_{\mathfrak{C}} (\mathcal{A}', \mathcal{B}')$.

Notemos que $\sim_{\mathfrak{F}}$ y $\sim_{\mathfrak{C}}$ son relaciones de equivalencia. Denotamos por $[\mathcal{X}, \omega]_{\mathfrak{F}}$ a la clase de equivalencia de (\mathcal{X}, ω) en $\mathfrak{F}_S / \sim_{\mathfrak{F}}$. Similarmente, $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]_{\mathfrak{C}}$ denotará a la clase de equivalencia de $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en $\mathfrak{C}_S / \sim_{\mathfrak{C}}$.

El siguiente resultado es una generalización de [BMPS19, Teorema 5.4].

Teorema 3.48. *Sea \mathcal{S} una clase de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} , cerrada por núcleos de epimorfismos y conúcleos de monomorfismos entre sus objetos. Entonces, existe una correspondencia biyectiva*

$$\Phi_S : \mathfrak{F}_S / \sim_{\mathfrak{F}} \longrightarrow \mathfrak{C}_S / \sim_{\mathfrak{C}} \text{ dada por } [\mathcal{X}, \omega]_{\mathfrak{F}} \mapsto [\mathcal{X}, \omega^\wedge]_{\mathfrak{C}},$$

con inversa

$$\Psi_S : \mathfrak{C}_S / \sim_{\mathfrak{C}} \longrightarrow \mathfrak{F}_S / \sim_{\mathfrak{F}} \text{ dada por } [\mathcal{A}, \mathcal{B}]_{\mathfrak{C}} \mapsto [\mathcal{A}, \mathcal{A} \cap \mathcal{B}]_{\mathfrak{F}}.$$

Demostración. Primero, probemos que Φ_S y Ψ_S están bien definidas.

Por una parte, para Ψ_S , se sigue que $(\mathcal{A}, \mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \in \mathfrak{F}_S$ por la definición de \mathcal{S} -contexto AB débil izquierdo y es claro que Ψ_S no depende de representantes.

Por otra parte, Φ_S no depende de representantes por el Lema 3.45. Ahora, probemos que si $(\mathcal{X}, \omega) \in \mathfrak{F}_S$ entonces $(\mathcal{X}, \omega^\wedge) \in \mathfrak{C}_S$. Necesitamos probar:

1. $(\mathcal{X}, \mathcal{X} \cap \omega^\wedge)$ es un par de \mathcal{S} -Frobenius izquierdo.

(a) Se sigue que $\mathcal{X} = \text{Thick}^-(\mathcal{X})$ por la definición de par de \mathcal{S} -Frobenius izquierdo.

(b) Por el Lema 3.45 tenemos que $(\mathcal{X} \cap \mathcal{S}, \mathcal{X} \cap \omega^\wedge \cap \mathcal{S}) = (\mathcal{X} \cap \mathcal{S}, \omega \cap \mathcal{S})$ el cual es un par de Frobenius izquierdo debido a que $(\mathcal{X}, \omega) \in \mathfrak{F}_S$.

(c) Sea $M \in \mathcal{X} \cap \omega^\wedge$. Del Lema 3.24 (a), hay una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow M' \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$$

con $P \in \omega \cap \mathcal{S}$ y $M' \in \omega^\wedge$. Como $\mathcal{X} = \text{Thick}^-(\mathcal{X})$ y $\omega \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{S}$, obtenemos que $M' \in \mathcal{X} \cap \omega^\wedge$. De nuevo, por Lema 3.24 (a), se tiene que $\text{pd}_{\omega^\wedge}(\omega \cap \mathcal{S}) = 0$. Entonces, $\omega \cap \mathcal{S}$ es un generador relativo $(\mathcal{X} \cap \omega^\wedge)$ -proyectivo en $\mathcal{X} \cap \omega^\wedge$.

(d) Como $(\mathcal{X}, \omega) \in \mathfrak{F}_\mathcal{S}$, tenemos por la Observación 3.32 (3) que los enunciados del Lema 3.24 son ciertos para ω y \mathcal{S} . Entonces, usando que $\mathcal{X} = \text{Thick}^-(\mathcal{X})$, obtenemos que $\mathcal{X} \cap \omega^\wedge$ es cerrada por extensiones y sumandos directos.

2. $\omega^\wedge \cap \mathcal{S} = \text{Thick}^+(\omega^\wedge \cap \mathcal{S})$ y $\omega^\wedge \cap \mathcal{S} \subseteq (\mathcal{X} \cap \mathcal{S})^\wedge$.

Por [BMPS19, Teorema 5.4] obtenemos que $(\omega \cap \mathcal{S})^\wedge = \text{Thick}^+(\omega \cap \mathcal{S})^\wedge$ y $\omega \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{S}$ debido a que $(\mathcal{X} \cap \mathcal{S}, \omega \cap \mathcal{S})$ es un par de Frobenius izquierdo. Ahora, usando que $(\mathcal{X}, \omega) \in \mathfrak{F}_\mathcal{S}$, tenemos por la Observación 3.32 (3) y el Lema 3.24 (d) que $\omega^\wedge \cap \mathcal{S} = (\omega \cap \mathcal{S})^\wedge$. Luego, $\omega^\wedge \cap \mathcal{S} = \text{Thick}^+(\omega^\wedge \cap \mathcal{S})$ y $\omega^\wedge \cap \mathcal{S} = (\omega \cap \mathcal{S})^\wedge \subseteq (\mathcal{X} \cap \mathcal{S})^\wedge$.

Finalmente, probemos que $\Psi_\mathcal{S}$ y $\Phi_\mathcal{S}$ son inversas una de otra.

Por una parte, sea $(\mathcal{X}, \omega) \in \mathfrak{F}_\mathcal{S}$. Entonces,

$$\Psi_\mathcal{S} \circ \Phi_\mathcal{S}([\mathcal{X}, \omega]_{\mathfrak{F}}) = \Psi_\mathcal{S}([\mathcal{X}, \omega^\wedge]_{\mathfrak{C}}) = [\mathcal{X}, \mathcal{X} \cap \omega^\wedge]_{\mathfrak{F}} = [\mathcal{X}, \omega]_{\mathfrak{F}},$$

donde la igualdad $[\mathcal{X}, \mathcal{X} \cap \omega^\wedge]_{\mathfrak{F}} = [\mathcal{X}, \omega]_{\mathfrak{F}}$ es cierta por el Lema 3.45.

Por otra parte, sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathfrak{C}_\mathcal{S}$. Entonces,

$$\Phi_\mathcal{S} \circ \Psi_\mathcal{S}([\mathcal{A}, \mathcal{B}]_{\mathfrak{C}}) = \Phi_\mathcal{S}([\mathcal{A}, \mathcal{A} \cap \mathcal{B}]_{\mathfrak{F}}) = [\mathcal{A}, (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^\wedge]_{\mathfrak{C}} = [\mathcal{A}, \mathcal{B}]_{\mathfrak{C}},$$

donde la última igualdad se sigue del Lema 3.45 y el hecho de que $(\mathcal{A}, \mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \in \mathfrak{F}_\mathcal{S}$. \square

Ejemplo 3.49. Sean R un anillo, $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par de cotorsión completo y hereditario en $\text{Mod}(R)$ y $\mathcal{S} := \mathcal{X}^\wedge$. Sabemos por el Ejemplo 3.42 que $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}, \mathcal{Y})$ son \mathcal{S} -contextos AB débiles izquierdos que están \mathcal{S} -relacionados en $\mathfrak{C}_\mathcal{S}$, donde $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ y \mathcal{S} es una subcategoría gruesa de $\text{Mod}(R)$ [BMPS19, Sección 6.1]. Por lo tanto, del Teorema 3.48, tenemos que $[\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}, \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)} \cap \mathcal{Y}]_{\mathfrak{F}} = [\mathcal{X}, \omega]_{\mathfrak{F}}$.

La segunda parte de esta sección, está dedicada a probar que existe una correspondencia biyectiva entre contextos AB cortados y pares de cotorsión cortados relacionados a una subcategoría gruesa \mathcal{S} de \mathcal{C} . De igual manera como en la primera parte, definimos una relación de equivalencia pero ahora en la clase de pares de cotorsión cortados a lo largo de la subcategoría más pequeña gruesa que contiene a la clase izquierda del par, junto con algunas condiciones extras que dependen de \mathcal{S} . Para presentar la segunda correspondencia que mencionamos, daremos primero los siguientes resultados relacionados a pares de cotorsión cortados. El siguiente lema generaliza algunos resultados de [BMPS19].

Lema 3.50. *Sean \mathcal{C} una categoría abeliana y $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ un par de cotorsión cortado a lo largo de $\text{Thick}(\mathcal{F})$, con $\text{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = 0$. Entonces, los siguientes enunciados se cumplen.*

- (a) $(\mathcal{F}, \mathcal{F} \cap \mathcal{G})$ es un par de Frobenius izquierdo en \mathcal{C} .
- (b) $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathcal{F}^{\perp_1} \cap \mathcal{F} = \mathcal{F} \cap (\mathcal{F} \cap \mathcal{G})^{\wedge}$, $(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})^{\wedge} = \mathcal{F}^{\perp} \cap \mathcal{F}^{\wedge}$ y $\mathcal{F}^{\wedge} = \text{Thick}(\mathcal{F})$.
- (c) $(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})^{\wedge} = \mathcal{G} \cap \text{Thick}(\mathcal{F})$.

Demostración. (a) Para probar que $(\mathcal{F}, \mathcal{F} \cap \mathcal{G})$ es un par de Frobenius izquierdo, necesitamos mostrar que:

- (1) $\mathcal{F} = \text{Thick}^{-}(\mathcal{F})$;
- (2) $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ es un cogenerador relativo \mathcal{F} -inyectivo en \mathcal{F} ;
- (3) $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ es cerrada por sumandos directos en \mathcal{C} .

Primero, como $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un par de cotorsión cortado a lo largo de $\text{Thick}(\mathcal{F})$, tenemos que la igualdad $\mathcal{F} = {}^{\perp_1}\mathcal{G} \cap \text{Thick}(\mathcal{F})$ se cumple. Por lo tanto, \mathcal{F} es cerrada por extensiones y sumandos directos en \mathcal{C} . El hecho de que \mathcal{F} es cerrada por núcleos de epimorfismos entre sus objetos se sigue de $\text{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = 0$. En efecto, sea

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

con $B, C \in \mathcal{F}$. Sea $G \in \mathcal{G}$. Entonces tenemos una sucesión exacta

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(B, G) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, G) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^2(C, G)$$

donde $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(B, G) = 0$ y $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^2(C, G) = 0$ ya que $\text{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = 0$. Luego, $A \in {}^{\perp 1}\mathcal{G}$. Por otra parte, $A \in \text{Thick}(\mathcal{F})$ debido a que $\text{Thick}(\mathcal{F})$ es gruesa y $B, C \in \mathcal{F} \subseteq \text{Thick}(\mathcal{F})$. Por lo tanto, $A \in {}^{\perp 1}\mathcal{G} \cap \text{Thick}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$, probando (1).

Para la parte (2), la condición $\text{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = 0$ implica que $\text{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) = 0$. Entonces, es suficiente probar que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ es un cogenerador relativo en \mathcal{F} . Sea $F \in \mathcal{F}$. Usando que $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un par de cotorsión cortado a lo largo de $\text{Thick}(\mathcal{F})$, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow F' \rightarrow 0$$

con $G \in \mathcal{G}$ y $F' \in \mathcal{F}$. Más aún, $G \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ ya que \mathcal{F} es cerrada por extensiones. Por lo tanto, (2) se sigue. Finalmente, de la igualdad $\mathcal{G} \cap \text{Thick}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}^{\perp 1} \cap \text{Thick}(\mathcal{F})$, obtenemos que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathcal{F}^{\perp 1} \cap \mathcal{F}$. Por lo tanto, (3) se sigue de (1).

(b) Ya hemos probado, en el inciso anterior, que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathcal{F}^{\perp 1} \cap \mathcal{F}$. El resto de las igualdades se obtienen de (a) y [BMPS19, Teoremas 2.11 y 3.6].

(c) Como $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un par de cotorsión cortado a lo largo de $\text{Thick}(\mathcal{F})$, por el inciso (b), tenemos que

$$(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})^{\wedge} = \mathcal{F}^{\perp} \cap \mathcal{F}^{\wedge} \subseteq \mathcal{F}^{\perp 1} \cap \mathcal{F}^{\wedge} = \mathcal{F}^{\perp 1} \cap \text{Thick}(\mathcal{F}) = \mathcal{G} \cap \text{Thick}(\mathcal{F}).$$

Por otra parte, por el inciso (b) y la condición $\text{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = 0$ obtenemos que

$$\mathcal{G} \cap \text{Thick}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}^{\perp} \cap \text{Thick}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}^{\perp} \cap \mathcal{F}^{\wedge} = (\mathcal{F} \cap \mathcal{G})^{\wedge}.$$

Por lo tanto, se sigue (c). □

Lema 3.51. *Sean \mathcal{S} una subcategoría gruesa de una categoría abeliana \mathcal{C} y $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ un par de cotorsión cortado a lo largo de $\text{Thick}(\mathcal{F})$, con $\text{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = 0$. Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \cap \mathcal{S}$ es un cogenerador y generador relativo en $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, entonces $(\mathcal{F}, \mathcal{F} \cap \mathcal{G})$ es un par de \mathcal{S} -Frobenius izquierdo en \mathcal{C} .*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \cap \mathcal{S}$ es un cogenerador y generador relativo en $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Necesitamos mostrar que las condiciones de (a) a (d) en la Definición 3.29, se cumplen para $\mathcal{X} := \mathcal{F}$ y $\omega := \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.

En efecto, las condiciones (a) y (d) se satisfacen por el Lema 3.50. Ahora, $\text{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = 0$ implica que $\text{id}_{\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \cap \mathcal{S}}(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) = 0$ y $\text{id}_{\mathcal{F} \cap \mathcal{S}}(\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \cap \mathcal{S}) = 0$. En particular, (c) se cumple.

Probemos que (b) se cumple, esto es, $(\mathcal{F} \cap \mathcal{S}, \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \cap \mathcal{S})$ es un par de Frobenius izquierdo en \mathcal{C} . Notemos primero que $\mathcal{F} \cap \mathcal{S} = \text{Thick}^-(\mathcal{F} \cap \mathcal{S})$ debido a que \mathcal{F} y \mathcal{S} son subcategorías gruesas izquierdas de \mathcal{C} . Más aún, por el Lema 3.50 (b), tenemos que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \cap \mathcal{S} = \mathcal{F}^{\perp 1} \cap \mathcal{F} \cap \mathcal{S}$ y así $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \cap \mathcal{S}$ es cerrada por sumandos directos en \mathcal{C} . Finalmente, como $\text{id}_{\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \cap \mathcal{S}}(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) = 0$, es suficiente probar que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \cap \mathcal{S}$ es un cogenerador relativo en $\mathcal{F} \cap \mathcal{S}$. Sea $F \in \mathcal{F} \cap \mathcal{S}$. Por la completitud relativa de $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow F' \rightarrow 0$$

con $G \in \mathcal{G}$ y $F' \in \mathcal{F}$. Más aún, $G \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ ya que \mathcal{F} es cerrada por extensiones. Usando que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \cap \mathcal{S}$ es un cogenerador relativo en $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, podemos construir el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{array}{ccccc}
 F & \xrightarrow{\quad} & G & \longrightarrow & F' \\
 \parallel & & \downarrow & \text{po} & \downarrow \\
 F & \xrightarrow{\quad} & L & \longrightarrow & K \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & G' & \xlongequal{\quad} & G'
 \end{array} \tag{3.3.1}$$

con $L \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \cap \mathcal{S}$ y $G' \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Notemos que $K \in \mathcal{F} \cap \mathcal{S}$ debido a que \mathcal{F} es cerrada por extensiones y \mathcal{S} es una subcategoría gruesa de \mathcal{C} . Luego, el segundo renglón en (3.3.1) es la sucesión buscada para F . Por lo tanto, el resultado se sigue. \square

Definición 3.52. Sean $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ y $(\mathcal{F}', \mathcal{G}')$ pares de cotorsión cortados a lo largo de $\text{Thick}(\mathcal{F})$ y $\text{Thick}(\mathcal{F}')$, respectivamente, en una categoría abeliana \mathcal{C} . Para $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$ fija, decimos que $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ está \mathcal{S} -relacionado a $(\mathcal{F}', \mathcal{G}')$, denotado por $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \sim_{\mathfrak{P}} (\mathcal{F}', \mathcal{G}')$, si $\mathcal{F} \cap \mathcal{S} = \mathcal{F}' \cap \mathcal{S}$ y $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \cap \mathcal{S} = \mathcal{F}' \cap \mathcal{G}' \cap \mathcal{S}$.

Nótese que la definición anterior induce una relación de equivalencia. En las siguientes líneas, $[\mathcal{F}, \mathcal{G}]_{\mathfrak{P}}$ denotará la clase de equivalencia de $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ respecto a esta relación.

Definición 3.53. Para cualquier subcategoría gruesa \mathcal{S} de una categoría abeliana \mathcal{C} , consideramos la clase

$$\mathfrak{P}_{\mathcal{S}} := \left\{ (\mathcal{F}, \mathcal{G}) \subseteq \mathcal{C}^2 : \begin{array}{l} \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \cap \mathcal{S} \text{ es un generador y cogenerador relativo} \\ \text{en } \mathcal{F} \cap \mathcal{G}, \text{Thick}(\mathcal{F}) \in \text{Cuts}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \text{ e } \text{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = 0 \end{array} \right\}$$

Teorema 3.54. Para una categoría abeliana \mathcal{C} y una subcategoría gruesa $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$, existe una correspondencia biyectiva

$$\Lambda_{\mathcal{S}} : \mathfrak{P}_{\mathcal{S}} / \sim_{\mathfrak{P}} \longrightarrow \mathfrak{C}_{\mathcal{S}} / \sim_{\mathfrak{C}} \quad \text{dada por } [\mathcal{F}, \mathcal{G}]_{\mathfrak{P}} \mapsto [\mathcal{F}, (\mathcal{F} \cap \mathcal{G})^{\wedge}]_{\mathfrak{C}},$$

con inversa

$$\Upsilon_{\mathcal{S}} : \mathfrak{C}_{\mathcal{S}} / \sim_{\mathfrak{C}} \longrightarrow \mathfrak{P}_{\mathcal{S}} / \sim_{\mathfrak{P}} \quad \text{dada por } [\mathcal{A}, \mathcal{B}]_{\mathfrak{C}} \mapsto [\mathcal{A} \cap \mathcal{S}, \mathcal{B} \cap \mathcal{S}]_{\mathfrak{P}}.$$

Demostración. Primero, probemos que $\Lambda_{\mathcal{S}}$ y $\Upsilon_{\mathcal{S}}$ están bien definidas.

Por una parte, supongamos que $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \sim_{\mathfrak{P}} (\mathcal{F}', \mathcal{G}')$. Por el Lema 3.51 y el Teorema 3.48, tenemos que $(\mathcal{F}, (\mathcal{F} \cap \mathcal{G})^{\wedge})$ y $(\mathcal{F}', (\mathcal{F}' \cap \mathcal{G}')^{\wedge})$ son \mathcal{S} -contextos AB débiles izquierdos en \mathcal{C} . Más aún, por el Lema 3.50 tenemos las igualdades

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \cap \mathcal{S} = \mathcal{F} \cap (\mathcal{F} \cap \mathcal{G})^{\wedge} \cap \mathcal{S} \quad \text{y} \quad \mathcal{F}' \cap \mathcal{G}' \cap \mathcal{S} = \mathcal{F}' \cap (\mathcal{F}' \cap \mathcal{G}')^{\wedge} \cap \mathcal{S}.$$

Luego, $[\mathcal{F}, (\mathcal{F} \cap \mathcal{G})^{\wedge}]_{\mathfrak{C}} = [\mathcal{F}', (\mathcal{F}' \cap \mathcal{G}')^{\wedge}]_{\mathfrak{C}}$ y entonces $\Lambda_{\mathcal{S}}$ no depende de representantes. Por lo tanto, $\Lambda_{\mathcal{S}}$ está bien definida.

Por otra parte, de la correspondencia dada en $\Upsilon_{\mathcal{S}}$, y de las definiciones de $\sim_{\mathfrak{P}}$ y $\sim_{\mathfrak{C}}$ se sigue que $\Upsilon_{\mathcal{S}}$ no depende de representantes. Ahora bien, sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathfrak{C}_{\mathcal{S}}$. Notemos que la primera condición de la clase $\mathfrak{P}_{\mathcal{S}}$ se cumple trivialmente para el par $(\mathcal{A} \cap \mathcal{S}, \mathcal{B} \cap \mathcal{S})$ mientras que las condiciones restantes $\text{Thick}(\mathcal{A} \cap \mathcal{S}) \in \text{Cuts}(\mathcal{A} \cap \mathcal{S}, \mathcal{B} \cap \mathcal{S})$ y $\text{id}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{S}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{S}) = 0$ se siguen por la Observación 3.41. Por lo tanto, $\Upsilon_{\mathcal{S}}$ está bien definida.

Finalmente, veamos que $\Lambda_{\mathcal{S}}$ y $\Upsilon_{\mathcal{S}}$ son inversas una de otra. Sea $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \mathfrak{P}_{\mathcal{S}}$. Entonces,

$$\Upsilon_{\mathcal{S}} \Lambda_{\mathcal{S}}([\mathcal{F}, \mathcal{G}]_{\mathfrak{P}}) = \Upsilon_{\mathcal{S}}([\mathcal{F}, (\mathcal{F} \cap \mathcal{G})^{\wedge}]_{\mathfrak{C}}) = [\mathcal{F} \cap \mathcal{S}, (\mathcal{F} \cap \mathcal{G})^{\wedge} \cap \mathcal{S}]_{\mathfrak{P}},$$

donde $[\mathcal{F} \cap \mathcal{S}, (\mathcal{F} \cap \mathcal{G})^{\wedge} \cap \mathcal{S}]_{\mathfrak{P}} = [\mathcal{F}, \mathcal{G}]_{\mathfrak{P}}$ por el Lema 3.50 (b).

$$\begin{array}{ccc} & [\mathcal{F}, (\mathcal{F} \cap \mathcal{G})^{\wedge}]_{\mathfrak{C}} & \\ \nearrow \Lambda_{\mathcal{S}} & & \searrow \Upsilon_{\mathcal{S}} \\ [\mathcal{F}, \mathcal{G}]_{\mathfrak{P}} & \xlongequal{\quad\quad\quad} & [\mathcal{F} \cap \mathcal{S}, (\mathcal{F} \cap \mathcal{G})^{\wedge} \cap \mathcal{S}]_{\mathfrak{P}} \end{array}$$

Ahora, sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un \mathcal{S} -contexto AB débil izquierdo. Entonces,

$$\Lambda_{\mathcal{S}}\Upsilon_{\mathcal{S}}([\mathcal{A}, \mathcal{B}]_{\mathcal{C}}) = \Lambda_{\mathcal{S}}([\mathcal{A} \cap \mathcal{S}, \mathcal{B} \cap \mathcal{S}]_{\mathfrak{P}}) = [\mathcal{A} \cap \mathcal{S}, (\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{S})^{\wedge}]_{\mathcal{C}},$$

donde $[\mathcal{A} \cap \mathcal{S}, (\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{S})^{\wedge}]_{\mathcal{C}} = [\mathcal{A} \cap \mathcal{S}, \mathcal{B} \cap \mathcal{S}]_{\mathcal{C}} = [\mathcal{A}, \mathcal{B}]_{\mathcal{C}}$ por la Observación 3.41.

$$\begin{array}{ccc} & [\mathcal{A} \cap \mathcal{S}, \mathcal{B} \cap \mathcal{S}]_{\mathfrak{P}} & \\ \Upsilon_{\mathcal{S}} \nearrow & & \searrow \Lambda_{\mathcal{S}} \\ [\mathcal{A}, \mathcal{B}]_{\mathcal{C}} & \xlongequal{\quad\quad\quad} & [\mathcal{A} \cap \mathcal{S}, \mathcal{B} \cap \mathcal{S}]_{\mathcal{C}} \end{array}$$

Por lo tanto, el resultado se sigue. \square

Observación 3.55. Considerando el caso $\mathcal{S} := \mathcal{C}$ obtenemos lo siguiente.

- (1) La clase $\mathfrak{C}_{\mathcal{C}}$ coincide con la clase de los contextos AB débiles izquierdos en \mathcal{C} . Más aún, para cualesquiera $(\mathcal{A}, \mathcal{B}), (\mathcal{A}', \mathcal{B}') \in \mathfrak{C}_{\mathcal{C}}$, tenemos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \sim_{\mathcal{C}} (\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ si, y solo si, $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ y $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{A}' \cap \mathcal{B}'$ si, y solo si, $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ y $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ por [BMPS19, Teorema 5.4 y Proposición 5.5]. Por lo tanto, cada clase de equivalencia en $\mathfrak{C}_{\mathcal{C}} / \sim_{\mathcal{C}}$ tiene un solo elemento y

$$\Upsilon_{\mathcal{C}} : \mathfrak{C}_{\mathcal{C}} / \sim_{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathfrak{P}_{\mathcal{C}} / \sim_{\mathfrak{P}} \quad \text{está dada por} \quad [\mathcal{A}, \mathcal{B}]_{\mathcal{C}} \mapsto [\mathcal{A}, \mathcal{B}]_{\mathfrak{P}}.$$

- (2) La clase $\mathfrak{P}_{\mathcal{C}}$ coincide con la clase

$$\{(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \subseteq \mathcal{C}^2 : \text{Thick}(\mathcal{F}) \in \text{Cuts}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \text{ e } \text{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = 0\}$$

y para cualesquiera $(\mathcal{F}, \mathcal{G}), (\mathcal{F}', \mathcal{G}') \in \mathfrak{P}_{\mathcal{C}}$ tenemos que $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \sim_{\mathfrak{P}} (\mathcal{F}', \mathcal{G}')$ si, y solo si, $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ y $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathcal{F}' \cap \mathcal{G}'$. Más aún, por el Lema 3.50, se tiene que $(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})^{\wedge} = \mathcal{G} \cap \text{Thick}(\mathcal{F})$. Por lo tanto,

$$\Lambda_{\mathcal{C}} : \mathfrak{P}_{\mathcal{C}} / \sim_{\mathfrak{P}} \longrightarrow \mathfrak{C}_{\mathcal{C}} / \sim_{\mathcal{C}} \quad \text{está dada por} \quad [\mathcal{F}, \mathcal{G}]_{\mathfrak{P}} \mapsto [\mathcal{F}, \mathcal{G} \cap \text{Thick}(\mathcal{F})]_{\mathcal{C}}.$$

- (3) Sea $\mathfrak{P}_{\mathcal{C}}|_{\text{rel}}$ la subclase de $\mathfrak{P}_{\mathcal{C}}$ cuyos elementos son los pares $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ en $\mathfrak{P}_{\mathcal{C}}$ que satisfacen $\mathcal{G} \subseteq \text{Thick}(\mathcal{F})$. Entonces, $\mathfrak{P}_{\mathcal{C}}|_{\text{rel}}$ coincide con la clase

$$\left\{ (\mathcal{F}, \mathcal{G}) \subseteq \mathcal{C}^2 : \begin{array}{l} (\mathcal{F}, \mathcal{G}) \text{ es un par de Thick}(\mathcal{F})\text{-cotorsión en } \mathcal{C} \\ \text{e } \text{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = 0 \end{array} \right\}$$

(ver [BMPS19, Definición 3.4]). De nuevo, por el Lema 3.50, para cualesquiera $(\mathcal{F}, \mathcal{G}), (\mathcal{F}', \mathcal{G}') \in \mathfrak{P}_{\mathcal{C}}|_{rel}$ tales que $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \sim_{\mathfrak{P}} (\mathcal{F}', \mathcal{G}')$, se tienen las siguientes igualdades $\mathcal{G} = (\mathcal{F} \cap \mathcal{G})^{\wedge} = (\mathcal{F}' \cap \mathcal{G}')^{\wedge} = \mathcal{G}'$. Es decir, cada clase de equivalencia en $\mathfrak{P}_{\mathcal{C}}|_{rel} / \sim_{\mathfrak{P}}$ tiene un solo elemento y la restricción

$$\Lambda_{\mathcal{C}} : \mathfrak{P}_{\mathcal{C}}|_{rel} / \sim_{\mathfrak{P}} \longrightarrow \mathfrak{C}_{\mathcal{C}} / \sim_{\mathfrak{C}} \text{ está dada por } [\mathcal{F}, \mathcal{G}]_{\mathfrak{P}} \mapsto [\mathcal{F}, \mathcal{G}]_{\mathfrak{C}},$$

lo cual muestra a [BMPS19, Teorema 5.4 (2)] como un caso particular del Teorema 3.54.

Ejemplo 3.56.

- (1) Sea R un anillo. Por el Ejemplo 3.3, sabemos que los pares $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := (\mathcal{GP}(R), \mathcal{P}(R)^{\wedge})$ y $(\mathcal{F}', \mathcal{G}') := (\mathcal{P}(R), \mathcal{GP}(R)^{\perp_1})$ son pares de cotorsión cortados a lo largo de $\mathcal{GP}(R)^{\wedge}$ y $\mathcal{P}(R)^{\wedge}$, respectivamente. Más aún, escribiendo $\mathcal{S} := \mathcal{P}(R)^{\wedge}$, obtenemos que ambos pares satisfacen todas las condiciones de la clase $\mathfrak{P}_{\mathcal{S}}$ en la Definición 3.53 (ver [MP11, Proposición 3.14]). Entonces,

$$\begin{array}{ccc} & [\mathcal{GP}(R), \mathcal{P}(R)^{\wedge}]_{\mathfrak{C}} & \\ \Lambda_{\mathcal{S}} \nearrow & & \searrow \Upsilon_{\mathcal{S}} \\ [\mathcal{GP}(R), \mathcal{P}(R)^{\wedge}]_{\mathfrak{P}} & \equiv \equiv \equiv & [\mathcal{P}(R), \mathcal{P}(R)^{\wedge}]_{\mathfrak{P}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & [\mathcal{P}(R), \mathcal{P}(R)^{\wedge}]_{\mathfrak{C}} & \\ \Lambda_{\mathcal{S}} \nearrow & & \searrow \Upsilon_{\mathcal{S}} \\ [\mathcal{P}(R), \mathcal{GP}(R)^{\perp_1}]_{\mathfrak{P}} & \equiv \equiv \equiv & [\mathcal{P}(R), \mathcal{P}(R)^{\wedge}]_{\mathfrak{P}} \end{array}$$

- (2) Sean $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par de cotorsión completo y hereditario en una categoría abeliana \mathcal{C} y $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. Consideremos los pares $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y $(\mathcal{GP}(\mathcal{X}, \omega), \mathcal{Y})$ como \mathcal{X}^{\wedge} -contextos AB débiles izquierdos (ver Ejemplo 3.42). Entonces,

$$\begin{array}{ccc} & [\mathcal{X}, \mathcal{Y} \cap \mathcal{X}^{\wedge}]_{\mathfrak{P}} & \\ \Upsilon_{\mathcal{S}} \nearrow & & \searrow \Lambda_{\mathcal{S}} \\ [\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_{\mathfrak{C}} & \equiv \equiv \equiv & [\mathcal{X}, \omega^{\wedge}]_{\mathfrak{C}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & [\mathcal{X}, \mathcal{Y} \cap \mathcal{X}^\wedge]_{\mathfrak{P}} & \\
 \nearrow \gamma_S & & \searrow \Lambda_S \\
 [\mathcal{G}\mathcal{P}_{(\mathcal{X}, \omega), \mathcal{Y}}]_{\mathfrak{C}} & \xlongequal{\quad\quad\quad} & [\mathcal{X}, \omega^\wedge]_{\mathfrak{C}}
 \end{array}$$

3.4. Aplicaciones

Teoría de Auslander-Buchweitz

Previamente hemos mencionado que en [BMPS19] los autores consideran una noción relativa de pares de cotorsión (a saber, pares de \mathcal{S} -cotorsión) pero con más restricciones comparada con la que presentamos en esta sección. Un ejemplo de tal par de \mathcal{S} -cotorsión es construido de las nociones de cogenerador relativo en Teoría de aproximación de Auslander-Buchweitz. A continuación especificamos condiciones bajo las cuales obtenemos pares de cotorsión cortados usando Teoría AB y construiremos tales pares con cogeneradores relativos inyectivos y generadores relativos proyectivos. Empezaremos con el caso inyectivo.

Proposición 3.57. *Sea ω una clase de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} , cerrada por extensiones y sumandos directos en \mathcal{C} , y tal que $\text{id}_\omega(\omega) = 0$. Entonces ω^\wedge es cerrada por sumandos directos en \mathcal{C} .*

Demostración. El resultado se sigue, como en el Lema 3.24(c), considerando $\mathcal{S} := \mathcal{C}$. \square

En [BMPS19, Teorema 3.6], los autores prueban que si (\mathcal{X}, ω) es un par de Frobenius izquierdo, entonces $(\mathcal{X}, \omega^\wedge)$ es un par de \mathcal{X}^\wedge -cotorsión. El siguiente teorema establece el mismo resultado en el contexto cortado.

Teorema 3.58. *Sean \mathcal{X} y ω dos clases de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} . Si \mathcal{X} es cerrada por extensiones y sumandos directos en \mathcal{C} , y ω es un cogenerador relativo \mathcal{X} -inyectivo en \mathcal{X} , entonces $\mathcal{X}^\wedge \in \text{Cuts}_\ell(\mathcal{X}, \omega^\wedge)$. Si además, ω es cerrada por extensiones y sumandos directos en \mathcal{C} , entonces $\mathcal{X}^\wedge \in \text{Cuts}_r(\mathcal{X}, \omega^\wedge)$.*

Demostración. Por hipótesis \mathcal{X} es cerrada por sumandos directos en \mathcal{C} . Más aún, por [AB89, Teorema 1.1], para cada $C \in \mathcal{X}^\wedge$, existen dos sucesiones

exactas cortas:

$$\eta: 0 \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow C \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \epsilon: 0 \rightarrow C \rightarrow Y' \rightarrow X' \rightarrow 0$$

con $X, X' \in \mathcal{X}$ y $Y, Y' \in \omega^\wedge$.

Veamos que $\mathcal{X} \cap \mathcal{X}^\wedge = {}^{\perp 1}(\omega^\wedge) \cap \mathcal{X}^\wedge$, esto es, $\mathcal{X} = {}^{\perp 1}(\omega^\wedge) \cap \mathcal{X}^\wedge$. Como ω es \mathcal{X} -inyectivo, tenemos por [MS06, dual de Lema 2.13] que $\text{Ext}_C^1(X, Y) = 0$ para cada $Y \in \omega^\wedge$ y $X \in \mathcal{X}$, y entonces la contención \subseteq es cierta. Ahora, sea $C \in {}^{\perp 1}(\omega^\wedge) \cap \mathcal{X}^\wedge$ y consideremos una sucesión exacta corta η como arriba. Como $C \in {}^{\perp 1}(\omega^\wedge)$, tenemos que η se escinde y entonces C es un sumando directo de $X \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $C \in \mathcal{X}$ y obtenemos la igualdad.

Para la segunda parte, supongamos que ω es cerrada por extensiones y sumandos directos en \mathcal{C} . Por la Proposición 3.57, tenemos que ω^\wedge es cerrada por sumandos directos. Entonces, solo falta probar la igualdad $\omega^\wedge \cap \mathcal{X}^\wedge = \mathcal{X}^{\perp 1} \cap \mathcal{X}^\wedge$, esto es, $\omega^\wedge = \mathcal{X}^{\perp 1} \cap \mathcal{X}^\wedge$. La contención \subseteq se sigue usando de nuevo [MS06, dual de Lema 2.13]. Ahora, sea $C \in \mathcal{X}^{\perp 1} \cap \mathcal{X}^\wedge$ y consideremos una sucesión exacta corta ϵ como arriba. Notemos que ϵ se escinde ya que $C \in \mathcal{X}^{\perp 1}$. Luego, C es un sumando directo de un objeto en ω^\wedge . Por lo tanto, $C \in \omega^\wedge$. \square

Observación 3.59. *La diferencia entre el Teorema 3.58 y la aproximación desarrollada en [BMPS19], usando pares de Frobenius, es que la subcategoría \mathcal{X}^\wedge no es necesariamente gruesa. Este hecho, que no se necesita en el contexto de pares cortados, se deduce de la condición de que si $(\mathcal{X}, \omega^\wedge)$ es un par de Frobenius izquierdo, entonces \mathcal{X} es una subcategoría gruesa izquierda.*

Ejemplo 3.60. *Sean R un anillo y $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := (\mathcal{GI}(R), \mathcal{I}(R))$. Se sabe que la clase $\mathcal{GI}(R)$ de R -módulos Gorenstein inyectivos es gruesa derecha (ver por ejemplo [MP11, Proposición 2.10]). Por el Teorema anterior, tenemos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := (\mathcal{GI}(R), \mathcal{I}(R))$ es un par de cotorsión cortado a lo largo de $\mathcal{GI}(R)$.*

Ahora trabajaremos el caso proyectivo. Mostraremos que si ω es un generador relativo \mathcal{X} -proyectivo en \mathcal{C} , donde ω es cerrada por sumandos directos, entonces $(\omega, \mathcal{X}^\wedge)$ es un par de cotorsión cortado a lo largo de \mathcal{X}^\wedge .

Proposición 3.61. *Sea \mathcal{X} una clase de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} cerrada por extensiones y sumandos directos en \mathcal{C} , y ω' un generador relativo \mathcal{X} -proyectivo en \mathcal{C} . Entonces, \mathcal{X}^\wedge es cerrada por sumandos directos.*

Demostración. El resultado se sigue, como en el Lema 3.24 (c), considerando $\omega := \mathcal{X}$ y $\mathcal{S} := \omega'$. \square

Teorema 3.62. Sean \mathcal{X} y ω dos clases de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} . Si \mathcal{X} es cerrada por extensiones y sumandos directos en \mathcal{C} , ω es cerrada por sumandos directos en \mathcal{C} y un generador relativo \mathcal{X} -proyectivo en \mathcal{X} , entonces $\mathcal{X}^\wedge \in \text{Cuts}(\omega, \mathcal{X}^\wedge)$.

Demostración. Por hipótesis y la Proposición 3.61, tenemos que ω y \mathcal{X}^\wedge son cerradas por sumandos directos en \mathcal{C} . Probemos la igualdad $\omega \cap \mathcal{X}^\wedge = {}^{\perp_1}(\mathcal{X}^\wedge) \cap \mathcal{X}^\wedge$, esto es, $\omega = {}^{\perp_1}(\mathcal{X}^\wedge) \cap \mathcal{X}^\wedge$ ya que $\omega \subseteq \mathcal{X}$. La inclusión \subseteq es clara ya que ω es \mathcal{X} -proyectivo (ver [MS06, Lema 2.13]). Ahora bien, sea $C \in {}^{\perp_1}(\mathcal{X}^\wedge) \cap \mathcal{X}^\wedge$. Entonces, existe una sucesión exacta corta

$$\xi: 0 \rightarrow K \rightarrow X \rightarrow C \rightarrow 0$$

con $X \in \mathcal{X}$ y $K \in \mathcal{X}^\wedge$. Como $C \in {}^{\perp_1}(\mathcal{X}^\wedge)$, tenemos que ξ se escinde y entonces C es un sumando directo de X . Se sigue por hipótesis que $C \in \mathcal{X}$. Luego, como ω es un generador en \mathcal{X} , existe una sucesión exacta corta

$$\eta: 0 \rightarrow X' \rightarrow W \rightarrow C \rightarrow 0$$

con $W \in \omega$ y $X' \in \mathcal{X}$. De nuevo, usando que $C \in {}^{\perp_1}(\mathcal{X}^\wedge)$, tenemos que η se escinde, y así C es un sumando directo de W . Por lo tanto, $C \in \omega$.

Es clara la igualdad $\mathcal{X}^\wedge \cap \mathcal{X}^\wedge = \omega^{\perp_1} \cap \mathcal{X}^\wedge$ y también la completitud a derecha. Para probar la completitud a izquierda, sean $C \in \mathcal{X}^\wedge$ y $n = \text{resdim}_{\mathcal{X}}(C)$. Entonces, tenemos una sucesión exacta corta

$$\eta': 0 \rightarrow K \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$$

donde $X \in \mathcal{X}$ y $\text{resdim}_{\mathcal{X}}(K) \leq n - 1$. Como ω es un generador relativo en \mathcal{X} , existe una sucesión exacta corta

$$\rho: 0 \rightarrow X' \xrightarrow{i} W \xrightarrow{p} X \rightarrow 0$$

con $W \in \omega$ y $X' \in \mathcal{X}$. Tomando el pullback de α y p obtenemos el siguiente

diagrama conmutativo y exacto:

$$\begin{array}{ccccc}
 X' & \xlongequal{\quad} & X' & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 W' & \twoheadrightarrow & W & \twoheadrightarrow & C \\
 \downarrow & \text{pb} & \downarrow & & \parallel \\
 K & \twoheadrightarrow & X & \twoheadrightarrow & C
 \end{array}$$

Veamos que $W' \in \mathcal{X}^\wedge$. Sea

$$0 \rightarrow X_{n-1} \rightarrow X_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow K \rightarrow 0$$

una \mathcal{X} -resolución finita de K de longitud $n - 1$. Tomando el pullback de $W' \rightarrow K$ y $X_0 \rightarrow K$ obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones y columnas exactas:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & & X' & \xlongequal{\quad} & X' & \\
 & & & & & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 X_{n-1} & \twoheadrightarrow & X_{n-2} & \twoheadrightarrow & \cdots & \twoheadrightarrow & X_1 & \twoheadrightarrow & X'_0 & \twoheadrightarrow & W' \\
 \parallel & & \parallel & & & & \parallel & & \downarrow & \text{pb} & \downarrow \\
 X_{n-1} & \twoheadrightarrow & X_{n-2} & \twoheadrightarrow & \cdots & \twoheadrightarrow & X_1 & \twoheadrightarrow & X_0 & \twoheadrightarrow & K
 \end{array}$$

el cual genera una \mathcal{X} -resolución finita de W' (notemos que $X'_0 \in \mathcal{X}$ ya que \mathcal{X} es cerrada por extensiones). Por lo tanto, concluimos que $(\omega, \mathcal{X}^\wedge)$ es completo izquierdo. \square

La Conjetura de la dimensión finitista

Dentro de las conjeturas homológicas estudiadas hoy en día, probablemente la *Conjetura de la dimensión finitista* es la más importante, ya que ésta implica la validez de otras conjeturas, tales como la *Condición Nunke*¹ y la

¹Ver Apéndice A

Conjetura de Nakayama generalizada. La Conjetura de dimensión finitista fue establecida por H. Bass en 1960 [Bas60] y dice que la *dimensión finitista pequeña* de un álgebra de Artin es siempre finita. Este problema permanece abierto todavía, pero ha sido resuelto en varios casos particulares, como por ejemplo:

- En 1991 por E. L. Green y B. Zimmermann-Huisgen, para álgebras de Artin con radical al cubo cero [GZH91].
- En 1991 por E. L. Green, E. Kirkman y J. Kuzmanovich, para álgebras monomiales de dimensión finita sobre un campo [GKK91].
- En 2005 por K. Igusa y G. Todorov, para álgebras de Artin con dimensión de representación finita ≤ 3 [IT05].

Dado un anillo R , las dimensiones finitistas grande y pequeña de R están definidas, respectivamente, como sigue

$$\begin{aligned} \text{Findim}(R) &:= \sup\{\text{pd}(M) : M \in \text{Mod}(R) \text{ y } \text{pd}(M) < \infty\}, \\ \text{findim}(R) &:= \sup\{\text{pd}(M) : M \in \text{mod}(R) \text{ y } \text{pd}(M) < \infty\}. \end{aligned}$$

Algunos ejemplos de pares de cotorsión cortados nacen en el contexto de las dimensiones finitistas grande y pequeña. En las siguientes líneas, mencionaremos ejemplos de pares de cotorsión cortados correspondientes a ciertas dimensiones, y probaremos una caracterización de la conjetura en términos de pares de cotorsión cortados. Para esta meta, referimos al artículo [CEG12] de M. Cortés Izurdiaga, S. Estrada y P. A. Guil Asensio. Empecemos dando la notación y resultados en los que nos apoyaremos.

Un par de cotorsión $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ en $\text{Mod}(R)$ es *cogenerado* por una clase de módulos \mathcal{X} si $\mathcal{X}^{\perp 1} = \mathcal{G}$. Cuando esta clase \mathcal{X} es un conjunto, se sabe que cada módulo tiene una \mathcal{F} -precubierta especial y una \mathcal{G} -preenvolvente especial [GT06, Teorema 3.2.1]. En este caso, el par de cotorsión es completo.

Sean n un entero positivo y M un R -módulo izquierdo, una *n -presentación finita* de M es una sucesión exacta de la forma

$$F_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

donde F_i es un R -módulo izquierdo finitamente generado y libre para cada $0 \leq i \leq n$. En este caso, M se dice que es *finitamente n -presentado*. Denotamos por $\text{FP}_n(R)$ a la subcategoría de todos los R -módulos que tienen una n -presentación finita y por $\text{FP}_\infty(R)$ a la subcategoría de R -módulos

que tienen una resolución de R -módulos libres finitamente generados, esto es, $M \in \text{FP}_\infty(R)$ si existe una sucesión exacta

$$\cdots \rightarrow F_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

donde F_i es un R -módulo izquierdo finitamente generado y libre para cada $i \geq 0$.

Observación 3.63. *Notemos que la condición “ser libre” en la definición de la clase $\text{FP}_\infty(R)$ puede cambiarse por “ser proyectivo”. En efecto, esto se sigue de aplicar el truco de Eilenberg [Pas91, Proposición 18.1] en su versión para R -módulos finitamente generados (esto es, si P es un R -módulo proyectivo finitamente generado, entonces existe un R -módulo P' tal que $P \oplus P'$ es libre y de rango finito).*

Observación 3.64. *Bajo ciertas condiciones sobre R se puede asegurar que la clase $\text{FP}_\infty(R)$ coincide con $\text{mod}(R)$, la clase de R -módulos finitamente generados, por ejemplo, si R es un anillo Noetheriano.*

A continuación, recolectamos varias propiedades que usaremos en la dimensión finitista y pares cortados.

Proposición 3.65. *Sean R un anillo y $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ un par de cotorsión hereditario cogenerado por un conjunto. Entonces, los siguientes enunciados se cumplen*

- (1) [CEG12, Proposición 1.11] *Para $M \in \text{Mod}(R)$, se tiene que $\text{pd}_{\mathcal{G}}(M) \leq n$ si, y solo si, $M \in \mathcal{F}_n^\wedge$.*
- (2) [CEG12, dual de Proposición 1.11 y la Observación 1.6] *Para $M \in \text{Mod}(R)$, se tiene que $\text{fibdim}_{\mathcal{G}}(M) \leq n$ si, y solo si, $M \in \mathcal{G}_n^\vee$.*
- (3) [CEG12, Teorema 2.2 y Corolario 2.7] *$({}^{\perp 1}(\mathcal{B}^{<\infty}), \mathcal{B}^{<\infty})$ y $({}^{\perp 1}\mathcal{B}, \mathcal{B})$ son pares de cotorsión hereditarios cogenerados por un conjunto, donde $\mathcal{B}^{<\infty} := (\mathcal{P}(R)^\wedge \cap \text{FP}_\infty(R))^{\perp 1}$ y $\mathcal{B} := (\mathcal{P}(R)^\wedge)^{\perp 1}$.*

En lo que sigue, consideraremos el par $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := (\mathcal{P}(R), \text{Mod}(R))$ el cual es cogenerado por el conjunto $\{R\}$. Usando la Proposición 3.65 y [CEG12, Teorema 3.2] podemos dar la siguiente caracterización cuando $\text{Findim}(R) < \infty$.

Proposición 3.66. *Para un anillo R , $\mathcal{B} := (\mathcal{P}(R)^\wedge)^{\perp_1}$ y un entero no negativo n , los siguientes enunciados son equivalentes.*

- (1) $\text{Findim}(R) \leq n$.
- (2) $(\mathcal{P}(R)_n^\wedge \cup {}^{\perp_1}\mathcal{B}) \in \text{Cuts}_\ell(\mathcal{P}(R)_n^\wedge, \mathcal{B})$.
- (3) Existe $\mathcal{S} \subseteq \text{Mod}(R)$ tal que $\mathcal{S} \in \text{Cuts}_r(\mathcal{P}(R), \mathcal{B}_n^\vee)$ con $R^{(R)} \in \mathcal{S}$.
- (4) $\mathcal{P}(R)_n^\wedge = {}^{\perp_1}\mathcal{B}$.

Demostración.

- (1) \Rightarrow (4): Por [CEG12, Teorema 3.2], sabemos que (1) es equivalente a que la contención ${}^{\perp_1}\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(R)_n^\wedge$ sea cierta. Luego, $\mathcal{P}(R)_n^\wedge \subseteq \mathcal{P}(R)^\wedge \subseteq {}^{\perp_1}\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(R)_n^\wedge$. Por lo tanto, obtenemos la igualdad $\mathcal{P}(R)_n^\wedge = {}^{\perp_1}\mathcal{B}$.
- (4) \Rightarrow (2): Como suponemos (4), tenemos que $(\mathcal{P}(R)_n^\wedge, \mathcal{B}) = ({}^{\perp_1}\mathcal{B}, \mathcal{B})$ el cual es un par de cotorsión completo y hereditario en $\text{Mod}(R)$ por la Proposición 3.65(3). En particular, es un par de cotorsión cortado para cualquier clase de objetos en $\text{Mod}(R)$.
- (2) \Rightarrow (4): Es consecuencia de la condición (b) en la Definición 3.1.
- (4) \Rightarrow (1): Usando de nuevo [CEG12, Teorema 3.2] tenemos que (1) es equivalente a ${}^{\perp_1}\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(R)_n^\wedge$.
- (1) \Rightarrow (3): Por [CEG12, Teorema 3.2] y la Proposición 3.65, tenemos que $\mathcal{B}_n^\vee = \text{Mod}(R)$. Entonces, $(\mathcal{P}(R), \mathcal{B}_n^\vee) = (\mathcal{P}(R), \text{Mod}(R))$ y claramente es un par de cotorsión derecho cortado a lo largo de $\mathcal{S} := \text{Mod}(R)$.
- (3) \Rightarrow (1): Supongamos (3). En particular, $\mathcal{B}_n^\vee \cap \mathcal{S} = (\mathcal{P}(R))^{\perp_1} \cap \mathcal{S} = \mathcal{S}$. Luego, $R^{(R)} \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}_n^\vee$ lo que es equivalente a $\text{fibdim}_{\mathcal{B}}(R^{(R)}) \leq n$ por la Proposición 3.65(2). De nuevo, por [CEG12, Teorema 3.2] obtenemos que $\text{Findim}(R) \leq n$.

□

Corolario 3.67. *Sea R un anillo perfecto izquierdo y coherente derecho, y sea $\mathcal{B} := (\mathcal{P}(R)^\wedge)^{\perp_1}$. Entonces, $\text{Findim}(R) \leq n$ si, y solo si, existe $\mathcal{S} \subseteq \text{Mod}(R)$ tal que $\mathcal{S} \in \text{Cuts}_r(\mathcal{P}(R), \mathcal{B}_n^\vee)$, con $R \in \mathcal{S}$.*

Demostración. Se sigue de [CEG12, Corolario 3.3] y la Proposición 3.66. \square

La referencia [CEG12, Teorema 3.4] es útil para establecer el siguiente resultado de la Conjetura de la dimensión finitista pequeña. Para esto, damos la siguiente definición.

Definición 3.68. *Sea R un anillo. La FP-dimensión finitista pequeña de R es*

$$\text{FPfindim}(R) := \sup\{\text{pd}(M) : M \in \mathcal{P}(R)^\wedge \cap \text{FP}_\infty(R)\}.$$

Proposición 3.69. *Para un anillo R , $\mathcal{B}^{<\infty} := (\mathcal{P}(R)^\wedge \cap \text{FP}_\infty(R))^{\perp_1}$ y un entero no negativo n , los siguientes enunciados son equivalentes.*

- (1) $\text{FPfindim}(R) \leq n$.
- (2) $(\mathcal{P}(R)_n^\wedge \cup {}^{\perp_1}(\mathcal{B}^{<\infty})) \cap \text{FP}_\infty(R) \in \text{Cuts}_\ell(\mathcal{P}(R)_n^\wedge, \mathcal{B}^{<\infty})$.
- (3) Existe $\mathcal{S} \subseteq \text{Mod}(R)$ tal que $\mathcal{S} \in \text{Cuts}_r(\mathcal{P}(R), (\mathcal{B}^{<\infty})_n^\vee)$ con $R^{(R)} \in \mathcal{S}$.
- (4) $\mathcal{P}(R)_n^\wedge \cap \text{FP}_\infty(R) = {}^{\perp_1}(\mathcal{B}^{<\infty}) \cap \text{FP}_\infty(R)$.

Demostración.

(1) \Rightarrow (4): Supongamos que $\text{FPfindim}(R) \leq n$. Por [CEG12, Teorema 3.4] se tienen las inclusiones $\mathcal{P}(R)^\wedge \cap \text{FP}_\infty(R) \subseteq {}^{\perp_1}(\mathcal{B}^{<\infty}) \cap \text{FP}_\infty(R) \subseteq \mathcal{P}(R)_n^\wedge \cap \text{FP}_\infty(R)$. Luego, $\mathcal{P}(R)_n^\wedge \cap \text{FP}_\infty(R) = {}^{\perp_1}(\mathcal{B}^{<\infty}) \cap \text{FP}_\infty(R)$. Por lo tanto, se sigue (4).

(4) \Rightarrow (2): Como suponemos (4), solo falta justificar la condición (c) en la Definición 3.1. En efecto, por (4) también tenemos que $(\mathcal{P}(R)_n^\wedge \cup {}^{\perp_1}(\mathcal{B}^{<\infty})) \cap \text{FP}_\infty(R) = \mathcal{P}(R)_n^\wedge \cap \text{FP}_\infty(R) \subseteq \mathcal{P}(R)_n^\wedge$. Luego, la completitud a izquierda se sigue de la última contención.

(2) \Rightarrow (4): Se sigue de la condición (b) en la Definición 3.1.

(4) \Rightarrow (1): Veamos que se cumple la condición (2) en [CEG12, Teorema 3.4], esto es, que $\text{pd}(M) \leq n$ para cada $M \in {}^{\perp_1}(\mathcal{B}^{<\infty})$. Como el par de cotorsión $({}^{\perp_1}(\mathcal{B}^{<\infty}), \mathcal{B}^{<\infty})$ es cogenerado por un conjunto, (ver [CEG12, Sección 2]), se tiene que los módulos en ${}^{\perp_1}(\mathcal{B}^{<\infty})$ son sumandos directos de módulos $(\mathcal{P}(R)^\wedge \cap \text{FP}_\infty(R))$ -filtrados. Sea N

un R -módulo $(\mathcal{P}(R)^\wedge \cap \text{FP}_\infty(R))$ -filtrado y M un sumando directo de N . Entonces existe un número ordinal $\lambda > 0$ y una familia $\{N_\alpha : \alpha < \lambda\}$ de R -módulos izquierdos tales que:

- $N = \bigcup_{\alpha < \lambda} N_\alpha$,
- $M_\alpha \subseteq M_{\alpha+1}$ para cada $\alpha + 1 < \lambda$,
- $N_0, N_{\alpha+1}/N_\alpha \in \mathcal{P}(R)^\wedge \cap \text{FP}_\infty(R)$ para cada $\alpha + 1 < \lambda$,
- $N_\beta = \bigcup_{\alpha < \beta} N_\alpha$ para cada ordinal límite $\beta < \lambda$.

Como $\mathcal{P}(R)^\wedge \cap \text{FP}_\infty(R) \subseteq {}^{\perp_1}(\mathcal{B}^{<\infty}) \cap \text{FP}_\infty(R) = \mathcal{P}(R)_n^\wedge \cap \text{FP}_\infty(R)$, obtenemos que $\text{pd}(N_0) \leq n$ y $\text{pd}(N_{\alpha+1}/N_\alpha) \leq n$ para cada $\alpha + 1 < \lambda$. Luego, N esta filtrado por la clase $\mathcal{P}(R)_n^\wedge$. Usando [Aus55, Proposición 3], tenemos que la clase $\mathcal{P}(R)_n^\wedge$ es cerrada por filtraciones, y entonces $N \in \mathcal{P}(R)_n^\wedge$. Se sigue que $\text{pd}(M) \leq n$ para cada $M \in {}^{\perp_1}(\mathcal{B}^{<\infty})$, lo cual es equivalente a $\text{FPfindim}(R) \leq n$ [CEG12, Teorema 3.4].

(1) \Rightarrow (3): De [CEG12, Teorema 3.4] y la Proposición 3.65, obtenemos que $(\mathcal{B}^{<\infty})_n^\vee = \text{Mod}(R)$. Entonces, $(\mathcal{P}(R), (\mathcal{B}^{<\infty})_n^\vee) = (\mathcal{P}(R), \text{Mod}(R))$ y claramente es un par de cotorsión derecho cortado a lo largo de $\mathcal{S} := \text{Mod}(R)$.

(3) \Rightarrow (1): Supongamos (3). En particular, $(\mathcal{B}^{<\infty})_n^\vee \cap \mathcal{S} = (\mathcal{P}(R))^{\perp_1} \cap \mathcal{S} = \mathcal{S}$. Luego, $R^{(R)} \in \mathcal{S} \subseteq (\mathcal{B}^{<\infty})_n^\vee$. Por la Proposición 3.65, esto es equivalente a $\text{fibdim}_{\mathcal{B}^{<\infty}}(R^{(R)}) \leq n$. Por lo tanto, $\text{findim}(R) \leq n$ [CEG12, Teorema 3.4].

□

Corolario 3.70. Sean R un anillo coherente izquierdo y $\mathcal{B}^{<\infty} := (\mathcal{P}(R)^\wedge \cap \text{FP}_\infty(R))^{\perp_1}$. Entonces, $\text{FPfindim}(R) \leq n$ si, y solo si, existe $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{S} \in \text{Cuts}_r(\mathcal{P}(R), (\mathcal{B}^{<\infty})_n^\vee)$ con $R \in \mathcal{S}$.

Demostración. Se sigue de [CEG12, Corolario 3.5] y la Proposición 3.69. □

Corolario 3.71. Para un anillo artiniiano R , los siguientes enunciados se cumplen.

- (1) $\text{Findim}(R) = n$ si, y solo si, n es el menor entero positivo tal que existe $\mathcal{S} \subseteq \text{Mod}(R)$, con $R \in \mathcal{S}$, y $(\mathcal{P}(R), \mathcal{B}_n^\vee)$ es un par de cotorsión derecho cortado a lo largo de \mathcal{S} .

(2) $\text{findim}(R) = n$ si, y solo si, n es el menor entero positivo tal que existe $\mathcal{S} \subseteq \text{Mod}(R)$, con $R \in \mathcal{S}$, y $(\mathcal{P}(R), (\mathcal{B}^{<\infty})_n^\vee)$ es un par de cotorción derecho cortado a lo largo de \mathcal{S} .

Demostración. Se sigue de [CEG12, Corolario 3.6], Proposición 3.66 y Proposición 3.69, ya que al ser R artiniiano se tiene que $\text{FP}_\infty(R) = \text{mod}(R)$. \square

Figura 3.1: Esquema ilustrativo de la Proposición 3.66

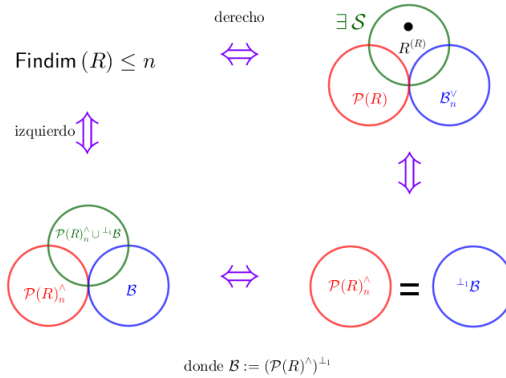
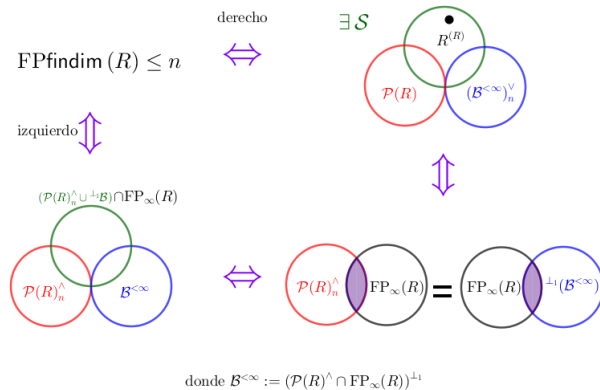


Figura 3.2: Esquema ilustrativo de la Proposición 3.69



Pares cortados inducidos en complejos de cadena

En esta sección, inducimos pares de cotorsión en complejos de cadena en el sentido de Gillespie [Gil04, Gil08] dentro del contexto de pares cortados. A saber, consideramos un par cortado $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en una categoría abeliana \mathcal{C} a lo largo de una subcategoría $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$, y estudiamos condiciones para \mathcal{S} bajo las cuales es posible construir pares cortados en $\text{Ch}(\mathcal{C})$. En [Gil04, Proposición 3.6], se prueba que si $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión en \mathcal{C} con suficientes \mathcal{A} -objetos y suficientes \mathcal{B} -objetos, entonces $(\tilde{\mathcal{A}}, \text{dg}\tilde{\mathcal{B}})$ y $(\text{dg}\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})$ son pares de cotorsión en $\text{Ch}(\mathcal{C})$, donde $\text{dg}\tilde{\mathcal{A}}$ y $\text{dg}\tilde{\mathcal{B}}$ denotan las clases de complejos diferencialmente graduados asociados al par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ (ver la Observación 2.70). En el contexto cortado, necesitamos determinar la subcategoría de $\text{Ch}(\mathcal{C})$ en la cual las clases $\tilde{\mathcal{A}}$, $\text{Ch}_{\text{acy}}(\tilde{\mathcal{A}}; \tilde{\mathcal{B}})$, $\tilde{\mathcal{B}}$ y $\text{Ch}_{\text{acy}}(\mathcal{A}; \tilde{\mathcal{B}})$ formen un par de cotorsión cortado. Una buena propuesta para esta subcategoría viene de [YL11a, Lema 3.4], donde los autores prueban que si $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión completo y hereditario en $\text{Ch}(R)$, con R un anillo, entonces cada complejo exacto tiene una $\tilde{\mathcal{A}}$ -precubierta especial y una $\tilde{\mathcal{B}}$ -preenvolvente especial. Esto sugiere que la clase $\tilde{\mathcal{S}}$ puede ser considerada como posible corte. A continuación, estudiamos las condiciones para \mathcal{A} , \mathcal{B} y \mathcal{S} bajo las cuales los pares $(\tilde{\mathcal{A}}, \text{Ch}_{\text{acy}}(\tilde{\mathcal{A}}; \tilde{\mathcal{B}}))$ y $(\text{Ch}_{\text{acy}}(\mathcal{A}; \tilde{\mathcal{B}}), \tilde{\mathcal{B}})$ son pares de cotorsión cortados a lo largo de $\tilde{\mathcal{S}}$.

Proposición 3.72. *Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos clases de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} , cerradas por extensiones y tales que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ para cada $i = 1, 2$. Entonces, los siguientes enunciados se cumplen para cualquier $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$.*

- (1) Si $\mathcal{S} \in \text{Cuts}_{\ell}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en \mathcal{C} , entonces $\tilde{\mathcal{S}} \in \text{Cuts}_{\ell}(\tilde{\mathcal{A}}, \text{Ch}_{\text{acy}}(\tilde{\mathcal{A}}; \tilde{\mathcal{B}}))$ en $\text{Ch}(\mathcal{C})$.
- (2) Si $\tilde{\mathcal{S}} \in \text{Cuts}_{\ell}(\tilde{\mathcal{A}}, \text{Ch}_{\text{acy}}(\tilde{\mathcal{A}}; \tilde{\mathcal{B}}))$ en $\text{Ch}(\mathcal{C})$ y $0 \in \mathcal{S}$, entonces $\mathcal{S} \in \text{Cuts}_{\ell}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en \mathcal{C} .

Demostración. (1) Es claro que la clase $\tilde{\mathcal{A}}$ es cerrada por sumandos directos. Además, siguiendo la prueba de la Observación 2.17, obtenemos para cada $S \in \tilde{\mathcal{S}}$ una sucesión exacta en $\text{Ch}(\mathcal{C})$ de la forma

$$\eta_S : 0 \rightarrow B^{\bullet} \rightarrow A^{\bullet} \rightarrow S \rightarrow 0$$

donde $A^{\bullet} \in \tilde{\mathcal{A}}$ y $B^{\bullet} \in \tilde{\mathcal{B}} \subseteq \text{Ch}_{\text{acy}}(\tilde{\mathcal{A}}; \tilde{\mathcal{B}})$. Por lo que es suficiente probar la igualdad $\tilde{\mathcal{A}} \cap \tilde{\mathcal{S}} = {}^{\perp 1}(\text{Ch}_{\text{acy}}(\tilde{\mathcal{A}}; \tilde{\mathcal{B}})) \cap \tilde{\mathcal{S}}$. Por una parte, considerando

η_S como arriba, para $S \in {}^{\perp 1}(\text{Ch}_{\text{acy}}(\tilde{\mathcal{A}}; \mathcal{B})) \cap \tilde{\mathcal{S}}$, tenemos que η_S se escinde y así $S \in \tilde{\mathcal{A}} \cap \tilde{\mathcal{S}}$. Por lo que, la contención \supseteq es cierta. Para la otra contención \subseteq , dado que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$, tenemos por el Lema 2.72(1), $\text{Ext}_{\text{Ch}}^1(\tilde{\mathcal{A}}, \text{Ch}_{\text{acy}}(\tilde{\mathcal{A}}; \mathcal{B})) = 0$. Por lo tanto, $\tilde{\mathcal{A}} \cap \tilde{\mathcal{S}} \subseteq {}^{\perp 1}(\text{Ch}_{\text{acy}}(\tilde{\mathcal{A}}; \mathcal{B})) \cap \tilde{\mathcal{S}}$.

(2) Veamos primero que \mathcal{A} es cerrada por sumandos directos. Sea $A = A_1 \oplus A_2$ con $A \in \mathcal{A}$. Como $D^0(A_1) \oplus D^0(A_2) = D^0(A) \in \tilde{\mathcal{A}}$ y $\tilde{\mathcal{A}}$ es cerrada por sumandos directos, se tiene que $D^0(A_i) \in \tilde{\mathcal{A}}$ para cada $i = 1, 2$. Luego, $A_i \in \mathcal{A}$ para cada $i = 1, 2$.

Probemos la condición (c) en la Definición 3.1. Sea $S \in \mathcal{S}$. Notemos que $D^0(S) \in \tilde{\mathcal{S}}$ ya que $0 \in \mathcal{S}$. Como $\tilde{\mathcal{S}} \in \text{Cuts}_{\ell}(\tilde{\mathcal{A}}, \text{Ch}_{\text{acy}}(\tilde{\mathcal{A}}; \mathcal{B}))$ en $\text{Ch}(\mathcal{C})$, existe una sucesión exacta corta $\eta_S : 0 \rightarrow B^{\bullet} \rightarrow A^{\bullet} \rightarrow D^0(S) \rightarrow 0$ en $\text{Ch}(\mathcal{C})$, con $A^{\bullet} \in \tilde{\mathcal{A}}$ y $B^{\bullet} \in \text{Ch}_{\text{acy}}(\tilde{\mathcal{A}}; \mathcal{B})$. Entonces, la completitud a izquierda se sigue considerando la 0-ésima entrada, $\eta_S^0 : 0 \rightarrow B_0 \rightarrow A_0 \rightarrow S \rightarrow 0$, ya que \mathcal{A} es cerrada por extensiones.

Finalmente, veamos que $\mathcal{A} \cap \mathcal{S} = {}^{\perp 1}\mathcal{B} \cap \mathcal{S}$. Por una parte, sea $S \in {}^{\perp 1}\mathcal{B} \cap \mathcal{S}$. Por lo anterior, existe η_S^0 como arriba, la cual se escinde debido a que $S \in {}^{\perp 1}\mathcal{B} \cap \mathcal{S}$. Luego, $S \in \mathcal{A}$ ya que \mathcal{A} es cerrada por sumandos directos. Por otra parte, para la contención \subseteq , usamos que $\mathcal{A} \subseteq {}^{\perp 1}\mathcal{B}$. \square

Proposición 3.73. *Sean \mathcal{A} , \mathcal{B} y \mathcal{S} clases de objetos, en una categoría abeliana \mathcal{C} , con \mathcal{A} cerrada por extensiones y $0 \in \mathcal{S}$. Si $\tilde{\mathcal{S}} \in \text{Cuts}_{\ell}(\tilde{\mathcal{A}}, \text{Ch}_{\text{acy}}(\tilde{\mathcal{A}}; \mathcal{B}))$ en $\text{Ch}(\mathcal{C})$ y $D^1(B) \in \text{Ch}_{\text{acy}}(\tilde{\mathcal{A}}; \mathcal{B})$ para cada $B \in \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{S} \in \text{Cuts}_{\ell}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en \mathcal{C} .*

Demostración. Veamos que $\mathcal{A} \cap \mathcal{S} = {}^{\perp 1}\mathcal{B} \cap \mathcal{S}$. Para probar la contención \subseteq , sean $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$ y $B \in \mathcal{B}$. Por [Gil04, Lema 3.1] y la Proposición 3.5, se tiene que

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, B) \cong \text{Ext}_{\text{Ch}}^1(D^0(A), D^1(B)) = 0$$

debido a que $D^0(A) \in \tilde{\mathcal{A}} \cap \tilde{\mathcal{S}}$ y $D^1(B) \in \text{Ch}_{\text{acy}}(\tilde{\mathcal{A}}; \mathcal{B})$. El resto de la prueba se sigue como en la Proposición 3.72. \square

Pregunta abierta

Sea $\mathcal{S} := \text{mod}(R)$ la subcategoría de $\text{Mod}(R)$ de R -módulos finitamente generados. Consideremos las clases

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &:= \{M \in \text{Mod}(R) : M \text{ es finitamente presentado}\} = \text{FP}_1(R), \\ \mathcal{B} &:= \{N \in \text{Mod}(R) : N \text{ es absolutamente puro}\} = (\text{FP}_1(R))^{\perp 1}.\end{aligned}$$

Esto es, un R -módulo izquierdo N es *absolutamente puro* si $\text{Ext}_R^1(M, N) = 0$ para cada R -módulo $M \in \text{FP}_1(R)$. Para estudiar bajo que condiciones $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión cortado a lo largo de $\text{mod}(R)$, necesitamos recordar algunas nociones de presentación de módulos.

La *dimensión de presentación* de M está definida como el mayor entero n para el cual existe una n -presentación finita de M , esto es:

$$\lambda(M) := \sup\{n \geq 0 : \text{existe una } n\text{-presentación finita de } M\}.$$

En el caso de que M no sea finitamente generado, escribimos $\lambda(M) := -1$.

Dada una sucesión exacta corta $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ en $\text{Mod}(R)$, podemos calcular la dimensión de presentación de cualquiera de los módulos A , B y C si conocemos la dimensión de presentación de los otros dos. Esto puede verse a detalle en [Gla89, Teorema 2.1.2]. Podemos aplicar este resultado para probar que \mathcal{A} es cerrada por sumandos directos en $\text{Mod}(R)$. En efecto, sea A' un sumando directo de $A \in \mathcal{A}$. Entonces, existe una sucesión exacta corta que se escinde $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$, y en este caso, se tiene que $\lambda(A) = \inf\{\lambda(A'), \lambda(A'')\}$. Por lo que A' también es finitamente presentado. Por otra parte, es claro que los módulos absolutamente puros son cerrados bajo sumandos directos, ya que son el complemento ortogonal derecho de \mathcal{A} .

La condición (b) en la Definición 3.1 para el par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, es una consecuencia del siguiente resultado, cuya prueba puede encontrarse en [Gla89, Teorema 2.1.10] y es enunciado literalmente.

Teorema 3.74. *Sean R un anillo y M un R -módulo finitamente generado que satisface $\text{Ext}_R^1(M, N) = 0$ para todos los módulos absolutamente puros N . Entonces M es un R -módulo finitamente presentado.*

El teorema anterior puede reescribirse como la igualdad $\mathcal{A} = {}^{\perp 1}\mathcal{B} \cap \mathcal{S}$, con $\mathcal{S} := \text{mod}(R)$, ya que cada módulo finitamente presentado es finitamente generado. Por otra parte, es claro que la igualdad $\mathcal{B} \cap \mathcal{S} = \mathcal{A}^{\perp 1} \cap \mathcal{S}$ se cumple.

Pares de cotorsión cortados de la forma anterior pueden construirse de manera similar para cada $n > 1$. Esto se debe a la siguiente generalización de [Gla89, Teorema 2.1.10] probada en [BP17, Lema 5.2] por D. Bravo y M. A. Pérez.

Lema 3.75. *Sea R un anillo y $n \geq 1$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes para cada $M \in \text{Mod}(R)$.*

- (i) *M es finitamente $(n-1)$ -presentado y $\text{Ext}_R^1(M, N) = 0$ para cada módulo FP_n -inyectivo N .*
- (ii) *M es finitamente n -presentado.*

La clase de módulos FP_n -inyectivos se define de manera similar a los absolutamente puros, esto es, un R -módulo izquierdo N es FP_n -inyectivo si $\text{Ext}_R^1(M, N) = 0$ para cada R -módulo izquierdo M que sea finitamente n -presentado.

Entonces, si definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{S}' &:= \{M \in \text{Mod}(R) : M \text{ es finitamente } (n-1)\text{-presentado}\}, \\ \mathcal{A}' &:= \{M \in \text{Mod}(R) : M \text{ es finitamente } n\text{-presentado}\}, \\ \mathcal{B}' &:= \{N \in \text{Mod}(R) : N \text{ es } \text{FP}_n\text{-inyectivo}\}, \end{aligned}$$

tenemos que las condiciones (a) y (b) de la Definición 3.1 se cumplen para el par $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ y \mathcal{S}' en $\text{Mod}(R)$.

En general, no sabemos si los pares $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ y $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ cumplen la condición (c) de la Definición 3.1, pero mencionaremos algunos hechos relacionados al par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Se sabe por [BP17, Corolario 4.2] que cada R -módulo izquierdo (y en particular cada R -módulo izquierdo finitamente generado) tiene una ${}^{\perp 1}\mathcal{B}$ -precubierta especial y una \mathcal{B} -preenvolvente especial. Con respecto a precubiertas, tenemos que para cada $S \in \mathcal{S}$ existe una sucesión exacta corta $\eta: 0 \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow S \rightarrow 0$ con $A \in {}^{\perp 1}\mathcal{B}$ y $B \in \mathcal{B}$. Como el par de cotorsión $({}^{\perp 1}\mathcal{B}, \mathcal{B})$ es cogenerado por un conjunto (ver [BP17, Proposición 4.1]) tenemos que ${}^{\perp 1}\mathcal{B}$ coincide con la clase de sumandos directos de módulos \mathcal{A} -filtrados, y entonces A es un sumando directo

de uno de estos módulos. Por lo que la completitud se reduce a saber para cuales anillos R la clase de módulos finitamente presentados es cerrada por filtraciones, o si es posible restringirnos a una subclase de \mathcal{S} en la cual afirmemos que A en η es finitamente presentado.

Capítulo 4

OBJETOS m -FUERTEMENTE $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -GORENSTEIN

En este capítulo, presentamos dos definiciones con el propósito de generalizar el comportamiento de los R -módulos n -fuertemente Gorenstein proyectivos mostrado en [ZH11]. Antes de dar las definiciones con las que trabajaremos, establezcamos la siguiente notación para fines prácticos.

Sean un entero $m \geq 1$ y sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de clases de objetos en \mathcal{C} . Supongamos que para $M \in \mathcal{C}$ existe una sucesión exacta

$$\eta_M : 0 \rightarrow M \xrightarrow{f_m} A_{m-1} \xrightarrow{f_{m-1}} A_{m-2} \rightarrow \cdots \rightarrow A_1 \xrightarrow{f_1} A_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0, \quad (4.0.1)$$

donde $A_i \in \mathcal{A}$ para cada $0 \leq i \leq m - 1$. Definimos $L_0(M) := M$ y $L_i := L_i(M) := \text{Ker}(f_{i-1}) = \text{Im}(f_i)$ para cada $1 \leq i \leq m$. Notemos que $L_m := L_m(M) = \text{Im}(f_m) \cong M$.

4.1. Objetos m -fuertemente $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -Gorenstein proyectivos débiles

Empecemos recordando la definición de D. Bennis y N. Mahdou que buscamos generalizar a lo largo de esta sección.

Definición 4.1. [BM09, Definición 2.1] Sea n un entero positivo. Un R -módulo M es n -fuertemente Gorenstein proyectivo (o un R -módulo n -SGP) si existe

una sucesión exacta de R -módulos

$$\eta : 0 \rightarrow M \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

donde cada P_i es proyectivo y tal que $\text{Hom}_R(\eta, Q)$ permanece exacto siempre que Q sea un R -módulo proyectivo. Denotamos por n -SGP(R) a la subcategoría de $\text{Mod}(R)$ que consiste de los R -módulos n -fuertemente Gorenstein proyectivos.

Teniendo lo anterior en mente, proponemos la siguiente definición.

Definición 4.2. Sean $m \geq 1$ y $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de clases de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} . Decimos que $M \in \mathcal{C}$ es un objeto m -fuertemente $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -Gorenstein proyectivo débil (o un objeto m -SWG $\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$) si $M \in {}^\perp \mathcal{B}$ y existe una sucesión exacta η_M como en (4.0.1), donde $\text{Im}(f_i) \in {}^\perp \mathcal{B}$ para cada $1 \leq i \leq m - 1$. Denotamos a la clase de todos los objetos m -fuertemente $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -Gorenstein proyectivos débiles por $\text{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}$.

Observación 4.3. Algunas consecuencias de la Definición 4.2 son las siguientes:

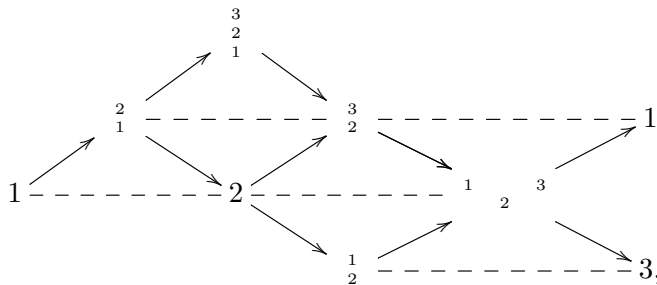
- (1) $\text{Im}(f_i) \in \text{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}$ para cada $1 \leq i \leq m$ si $M \in \text{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}$.
- (2) En caso $\mathcal{A} = \mathcal{B} := \mathcal{P}(R)$, tenemos que la clase $\text{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}$ está contenida en m -SGP(R) para cualquier $m \geq 1$. De hecho, se tiene la igualdad. En efecto, cualquier $M \in m$ -SGP(R) es un R -módulo Gorenstein proyectivo por [ZH11, Teorema 3.9]. Luego, $M \in {}^\perp \mathcal{P}(R)$ e $\text{Im}(f_i) \in {}^\perp \mathcal{P}(R)$ para cada $1 \leq i \leq m - 1$ [Hol04, Proposición 2.3].
- (3) Si \mathcal{A} es cerrada por coproductos finitos, entonces $\text{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}$ también lo es.

En general, la contención $\text{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)} \subseteq m$ -SGP(R) podría no ser una igualdad en $\text{Mod}(R)$ como lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.4. Retomaremos [ZX19, Ejemplo 5.3]. Sea A el cociente de la k -álgebra de caminos dada por el carcaj

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} 2 \xleftarrow{\gamma} 3,$$

con relaciones $\alpha\beta = 0 = \beta\alpha$. Los A -módulos proyectivos inescindibles tienen la siguiente estructura $P(1) = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$, $P(2) = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$ y $P(3) = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$. Los A -módulos inyectivos inescindibles tienen la siguiente estructura $I(1) = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$, $I(2) = \begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ & 2 \end{smallmatrix}$ y $I(3) = 3$. El carcaj de Auslander-Reiten de $\text{mod}(A)$, la categoría de los A -módulos izquierdos finitamente generados, es



donde los dos vértices 1 representan el mismo módulo simple.

Sea $\mathcal{X} := \text{add}(1 \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus 2 \oplus \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix})$. Entonces \mathcal{X} es cerrada por extensiones y una subcategoría de Frobenius de $\text{mod}(A)$. Más aún, la clase de objetos proyectivos-inyectivos en \mathcal{X} es la siguiente $\mathcal{P}(\mathcal{X}) = \text{add}(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix})$.

Denotemos por $P(i)$ al A -módulo proyectivo inescindible correspondiente al vértice i y consideremos $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := (\mathcal{P}(\mathcal{X}), \mathcal{P}(\mathcal{X}))$. Notemos que, en este ejemplo, cada objeto en $\text{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}$ es un A -módulo m -fuertemente Gorenstein proyectivo ya que $P(3)$ es inyectivo y que $P(3)$ es un A -módulo 1-fuertemente Gorenstein proyectivo.

Afirmamos que $P(3) \notin \text{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}$ para todo entero $m \geq 1$. En efecto, si $P(3) \in \text{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}$ para algún entero $m \geq 1$, entonces existe una sucesión exacta corta

$$\eta : 0 \rightarrow P(3) \rightarrow A_{m-1} \rightarrow L_{m-1}(M) \rightarrow 0,$$

con $A_{m-1} \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$. Luego, η se escinde ya que $P(3)$ es también un A -módulo inyectivo. Por lo tanto, $P(3) \in \mathcal{X}$ debido a que \mathcal{X} es cerrada por sumandos directos, lo cual es una contradicción.

El siguiente resultado caracteriza a la clase $\text{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}$, cuando se tiene una relación de ortogonalidad entre las clases \mathcal{A} y \mathcal{B} .

Proposición 4.5. *Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de clases de objetos, en una categoría abeliana \mathcal{C} , con $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ para $i \geq 1$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes, para cualquier $M \in \text{Mod}(R)$ y cualquier entero $m \geq 1$.*

(1) $M \in \text{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}$.

(2) Existe una sucesión exacta

$$\eta_M : 0 \rightarrow M \xrightarrow{f_m} A_{m-1} \xrightarrow{f_{m-1}} A_{m-2} \rightarrow \cdots \rightarrow A_1 \xrightarrow{f_1} A_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0,$$

con $A_i \in \mathcal{A}$, para $0 \leq i \leq m-1$, y tal que $\text{Im}(f_s) \in {}^\perp\mathcal{B}$ para algún $1 \leq s \leq m-1$.

Demostración. La implicación (1) \Rightarrow (2) es clara. Veamos (2) \Rightarrow (1). Notemos primero que $M \cong \text{Im}(f_m) \cong \text{Im}(f_0)$ y que tenemos sucesiones exactas cortas

$$\eta_j : 0 \rightarrow \text{Im}(f_{j+1}) \rightarrow A_j \rightarrow \text{Im}(f_j) \rightarrow 0$$

para $0 \leq j \leq m-1$. Aplicando $\text{Hom}(-, B)$, con $B \in \mathcal{B}$, a la sucesión anterior y usando que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$, obtenemos que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\text{Im}(f_{j+1}), B) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(\text{Im}(f_j), B)$ para $i \geq 1$. Luego, se tiene que $\text{Im}(f_{j+1}) \in {}^\perp\mathcal{B}$ para cada $s \leq j \leq m-1$. En particular, $M \cong \text{Im}(f_0) \cong \text{Im}(f_m) \in {}^\perp\mathcal{B}$. Ahora bien, aplicando $\text{Hom}(-, B)$ con $B \in \mathcal{B}$ a η_0 y repitiendo el procedimiento anterior, podemos concluir también que $\text{Im}(f_{j+1}) \in {}^\perp\mathcal{B}$ para cada $0 \leq j \leq s-1$ \square

Objetos $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -Gorenstein débiles

G. Zhao y Z. Huang estudiaron en [ZH11, Teorema 3.9], la relación entre módulos m -fuertemente Gorenstein proyectivos y módulos Gorenstein proyectivos. Específicamente, ellos probaron que, para cualquier módulo m -fuertemente Gorenstein proyectivo, es posible obtener un módulo 1-fuertemente Gorenstein proyectivo el cual es también un módulo Gorenstein proyectivo [ZH11, Teorema 3.9]. Recientemente, en [BMS18], V. Bercerril, O. Mendoza y V. Santiago definieron el concepto de objeto $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein proyectivo débil, para dos clases de objetos \mathcal{X} y \mathcal{Y} en una categoría abeliana \mathcal{C} , generalizando las nociones de objetos Gorenstein proyectivos, Ding-proyectivos, Gorenstein AC-proyectivos y Cohen-Macaulay,

entre otros. En esta sección, probaremos que el Teorema de G. Zhao y Z. Huang se puede extender usando las nociones de objeto m -fuertemente $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -Gorenstein proyectivo débil y objeto $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein proyectivo débil. Comencemos recordando la siguiente definición en [BMS18].

Definición 4.6. [BMS18, Definición 3.11] Sean \mathcal{C} una categoría abeliana y $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{C}^2$. Para $M \in \mathcal{C}$, decimos que M es un objeto $WGP_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}$ (o un objeto $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein proyectivo débil) si $M \in {}^\perp \mathcal{Y}$ y existe una sucesión exacta

$$\xi : 0 \rightarrow M \rightarrow X^0 \rightarrow X^1 \rightarrow \dots,$$

con $X^i \in \mathcal{X}$ y $\text{Im}(X^i \rightarrow X^{i+1}) \in {}^\perp \mathcal{Y}$ para cualquier $i \geq 0$. Definimos la subclase $WGP_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}$ de \mathcal{C} cuyos elementos son los objetos $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein proyectivos débiles.

Observación 4.7. Para cualquier entero $m \geq 1$ y cualquier par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ de clases de objetos en \mathcal{C} , se cumple la contención $SWG\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)} \subseteq WGP_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$.

Lema 4.8. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de clases de objetos en \mathcal{C} . Si $WGP_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$ es cerrada por extensiones, entonces también es cerrada por sumandos directos.

Demostración. Sea $A \oplus C = B \in WGP_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$. De la definición de la clase $WGP_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$, tenemos que $\mathcal{A} \in {}^\perp \mathcal{B}$ y existe una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow B \rightarrow X_0 \rightarrow E_0 \rightarrow 0,$$

donde $X_0 \in \mathcal{A}$ y $E_0 \in WGP_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$. Luego, podemos construir el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & C' \\
 & & & & \downarrow \\
 A & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & K_0 \\
 \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\
 B & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & E_0 \\
 \downarrow & & & & \\
 & & & & C
 \end{array} \tag{4.1.1}$$

y por el Lema de la Serpiente tenemos que $C \cong C'$. Considerando la tercera columna en (4.1.1) y sumando la identidad en A obtenemos una sucesión exacta corta de la forma

$$0 \rightarrow A \oplus C' \rightarrow A \oplus K_0 \rightarrow E_0 \rightarrow 0,$$

donde $A \oplus C' \cong A \oplus C = B$ y $E_0 \in \mathcal{WGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \subseteq {}^\perp \mathcal{B}$, y así $K_0 \in {}^\perp \mathcal{B}$. Dado que $\mathcal{WGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$ es cerrada por extensiones tenemos que $A \oplus K_0 \in \mathcal{WGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$. Usando que $A \oplus K_0 \in \mathcal{WGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$, construimos el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \bar{C} \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & K_1 \\
 K_0 & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & K_1 \\
 \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\
 A \oplus K_0 & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & E_1 \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 & & & & A
 \end{array} \tag{4.1.2}$$

con $E_1 \in \mathcal{WGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$, $X_1 \in \mathcal{A}$ y $A \cong \bar{C}$. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow A \oplus K_0 \rightarrow K_1 \oplus K_0 \rightarrow E_1 \rightarrow 0.$$

Como $E_1, A \oplus K_0 \in \mathcal{WGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$, tenemos que $K_1 \oplus K_0 \in \mathcal{WGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \subseteq {}^\perp \mathcal{B}$. Por lo tanto, $K_1 \in {}^\perp \mathcal{B}$. Ahora bien, podemos hacer el mismo procedimiento con $K_1 \oplus K_0$, que hicimos con $A \oplus K_0$, para obtener la sucesión deseada

$$0 \rightarrow A \rightarrow X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \cdots .$$

□

Proposición 4.9. *Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de clases de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} , con \mathcal{A} cerrada por coproductos finitos. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes, para cualquier $M \in \text{Mod}(R)$ y cualquier entero $m \geq 1$.*

(1) $M \in \mathcal{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}$.

(2) Existe una sucesión exacta

$$\eta_M : 0 \rightarrow M \xrightarrow{f_m} A_{m-1} \xrightarrow{f_{m-1}} A_{m-2} \rightarrow \cdots \rightarrow A_1 \xrightarrow{f_1} A_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0,$$

con $A_j \in \mathcal{A}$, para cada $0 \leq j \leq m-1$, y tal que $\bigoplus_{j=1}^m \text{Im}(f_j) \in \mathcal{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, 1)}$.

(3) Existe una sucesión exacta

$$\eta_M : 0 \rightarrow M \xrightarrow{f_m} A_{m-1} \xrightarrow{f_{m-1}} A_{m-2} \rightarrow \cdots \rightarrow A_1 \xrightarrow{f_1} A_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0,$$

con $A_j \in \mathcal{A}$, para cada $0 \leq j \leq m-1$, y tal que $\bigoplus_{j=1}^m \text{Im}(f_j) \in \mathcal{W}\mathcal{G}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$.

Si además, $\mathcal{W}\mathcal{G}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$ es cerrada por extensiones y $\mathcal{W}\mathcal{G}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \cap \mathcal{A}^\wedge = \mathcal{A}$, entonces las condiciones anteriores son también equivalentes a:

(4) Existe una sucesión exacta

$$\eta_M : 0 \rightarrow M \xrightarrow{f_m} A_{m-1} \xrightarrow{f_{m-1}} A_{m-2} \rightarrow \cdots \rightarrow A_1 \xrightarrow{f_1} A_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0,$$

con $A_j \in \mathcal{A}^\wedge$, para cada $0 \leq j \leq m-1$, y tal que $\bigoplus_{j=1}^m \text{Im}(f_j) \in \mathcal{W}\mathcal{G}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$.

Demostración.

(1) \Rightarrow (2): Sea $M \in \mathcal{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}$. Entonces, $M \in {}^\perp\mathcal{B}$ y existe una sucesión exacta

$$\eta_M : 0 \rightarrow M \xrightarrow{f_m} A_{m-1} \xrightarrow{f_{m-1}} A_{m-2} \rightarrow \cdots \rightarrow A_1 \xrightarrow{f_1} A_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0,$$

donde $A_i \in \mathcal{A}$ para cada $0 \leq i \leq m-1$ y $\text{Im}(f_i) \in {}^\perp\mathcal{B}$ para $1 \leq i \leq m-1$. Luego, para $1 \leq i \leq m-1$, tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Im}(f_i) \xrightarrow{\alpha_i} A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} A_0 \xrightarrow{f_m f_0} A_{m-1} \xrightarrow{f_{m-1}} \cdots \xrightarrow{f_{i+1}} A_i \xrightarrow{f_i} \text{Im}(f_i) \rightarrow 0.$$

Considerando la suma de estas sucesiones exactas, junto con η_M , obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^m \text{Im}(f_i) \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{i=0}^{m-1} A_i \xrightarrow{f} A_{m-1} \oplus A_0 \oplus \cdots \oplus A_{m-1} \longrightarrow \cdots,$$

donde $\alpha = \text{diag}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ y $f = \text{diag}\{f_m f_0, f_1, \dots, f_{m-1}\}$. Luego, existe una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^m \text{Im}(f_i) \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{i=0}^{m-1} A_i \longrightarrow \text{Im}(f) \rightarrow 0$$

donde $\text{Im}(f) \cong \bigoplus_{i=1}^m \text{Im}(f_i)$ y $\bigoplus_{i=1}^m \text{Im}(f_i) \in {}^\perp \mathcal{B}$, lo cual implica que $\bigoplus_{i=1}^m \text{Im}(f_i) \in \mathcal{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, 1)}$.

(2) \Rightarrow (3): Supongamos que $\bigoplus_{j=1}^m \text{Im}(f_j) \in \mathcal{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, 1)}$. Entonces, existe una sucesión exacta corta

$$\eta : 0 \rightarrow \bigoplus_{j=1}^m \text{Im}(f_j) \xrightarrow{\iota} A_0 \xrightarrow{\rho} \bigoplus_{j=1}^m \text{Im}(f_j) \rightarrow 0,$$

con $A_0 \in \mathcal{A}$ y tal que $\bigoplus_{j=1}^m \text{Im}(f_j) \in {}^\perp \mathcal{B}$. Luego, usando η podemos construir una sucesión exacta

$$\eta' : 0 \rightarrow \bigoplus_{j=1}^m \text{Im}(f_j) \rightarrow A_0 \xrightarrow{\iota\rho} A_0 \xrightarrow{\iota\rho} A_0 \rightarrow \dots$$

como en la Definición 4.6.

(3) \Rightarrow (1): Basta probar que $M \in {}^\perp \mathcal{B}$ y que $\text{Im}(f_j) \in {}^\perp \mathcal{B}$, para cada $1 \leq j \leq m-1$. Sin embargo, esto se sigue de la contención $\mathcal{WG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \subseteq {}^\perp \mathcal{B}$ y de que $M \cong \text{Im}(f_m)$.

Para la segunda parte, supongamos que $\mathcal{WG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \cap \mathcal{A}^\wedge = \mathcal{A}$ y que $\mathcal{WG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$ es cerrada por extensiones.

(4) \Rightarrow (3): Por el Lema 4.8, $\mathcal{WG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$ es cerrada por sumandos directos. Luego, $\text{Im}(f_j) \in \mathcal{WG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$, para cada $1 \leq j \leq m$. Considerando las sucesiones exactas $\eta_j : 0 \rightarrow \text{Im}(f_{j+1}) \rightarrow A_j \rightarrow \text{Im}(f_j) \rightarrow 0$, y usando de nuevo que $\mathcal{WG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$ es cerrada por extensiones, obtenemos que $A_j \in \mathcal{WG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \cap \mathcal{A}^\wedge = \mathcal{A}$ para cada $1 \leq j \leq m-1$. Por lo tanto, (3) se cumple.

(3) \Rightarrow (4): es clara. \square

Corolario 4.10. *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par de cotorsión completo y hereditario en una categoría abeliana \mathcal{C} y sea $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes, para cualquier $M \in \text{Mod}(R)$ y cualquier entero $m \geq 1$.*

- (1) $M \in \mathcal{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{X}, \omega, m)}$.

(2) Existe una sucesión exacta

$$\eta_M : 0 \rightarrow M \xrightarrow{f_m} A_{m-1} \xrightarrow{f_{m-1}} A_{m-2} \rightarrow \cdots \rightarrow A_1 \xrightarrow{f_1} A_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0,$$

con $A_j \in \mathcal{X}$, para cada $0 \leq j \leq m-1$, y tal que $\bigoplus_{j=1}^m \text{Im}(f_j) \in \text{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{X}, \omega, 1)}$.

(3) Existe una sucesión exacta

$$\eta_M : 0 \rightarrow M \xrightarrow{f_m} A_{m-1} \xrightarrow{f_{m-1}} A_{m-2} \rightarrow \cdots \rightarrow A_1 \xrightarrow{f_1} A_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0,$$

con $A_j \in \mathcal{X}$, para cada $0 \leq j \leq m-1$, y tal que $\bigoplus_{j=1}^m \text{Im}(f_j) \in \text{WGP}_{(\mathcal{X}, \omega)}$.

(4) Existe una sucesión exacta

$$\eta_M : 0 \rightarrow M \xrightarrow{f_m} A_{m-1} \xrightarrow{f_{m-1}} A_{m-2} \rightarrow \cdots \rightarrow A_1 \xrightarrow{f_1} A_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0,$$

con $A_j \in \mathcal{X}^\wedge$, para cada $0 \leq j \leq m-1$, y tal que $\bigoplus_{j=1}^m \text{Im}(f_j) \in \text{WGP}_{(\mathcal{X}, \omega)}$.

Demostración. El resultado se sigue notando que las igualdades $\text{WGP}_{(\mathcal{X}, \omega)} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}$ y $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)} \cap \mathcal{X}^\wedge = \mathcal{X}$ son ciertas por [BMS18, Teorema 3.32 y Corolario 4.15 (c)], y que $\text{WGP}_{(\mathcal{X}, \omega)}$ es una subcategoría gruesa izquierda de \mathcal{C} [BMS18, Corolario 3.33]. \square

Relaciones de ortogonalidad

En [ZH11], G. Zhao y Z. Huang probaron que la condición de ser proyectivo, para un módulo m -fuertemente Gorenstein proyectivo, depende de la auto-ortogonalidad del módulo. Esto es, un R -módulo m -fuertemente Gorenstein proyectivo M es proyectivo si, y solo si, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(M, M) = 0$ para todo $i \geq 1$ [ZH11, Proposición 3.7]. En esta sección, probamos que el resultado de G. Zhao y Z. Huang tiene una versión para un par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ de clases de objetos en \mathcal{C} . Específicamente, probaremos que podemos reemplazar la clase de objetos proyectivos por \mathcal{A} , si existe una relación de auto-ortogonalidad en ella y elegimos adecuadamente una subclase de objetos en $\text{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}$. Empezamos definiendo la subclase de $\text{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}$ que usaremos para dar la generalización de este resultado.

Definición 4.11. Sean $m \geq 1$ y $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de clases de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} . La clase de los objetos m -fuertemente $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -Gorenstein proyectivos débiles exactos, denotada por $\mathcal{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{ex}$, es

$$\mathcal{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{ex} := \mathcal{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)} \cap \mathcal{A}^\perp.$$

Observación 4.12. Si $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathcal{C})$, entonces $\mathcal{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{ex} = \mathcal{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}$ para cualquier clase \mathcal{B} de objetos en \mathcal{C} .

Proposición 4.13. Sean m, n enteros tales que $1 \leq m \leq n$, y sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de clases de objetos, en una categoría abeliana \mathcal{C} , con \mathcal{A} cerrada por sumandos directos y $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0$, para cada $1 \leq i \leq n$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes, para cualquier $M \in \mathcal{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{ex}$.

- (1) $M \in \mathcal{A}$.
- (2) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(M, M) = 0$ para cada $1 \leq i \leq m$.
- (3) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(M, M) = 0$ para cada $1 \leq i \leq n$.

Demostración. Las implicaciones (1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) son claras. Solo necesitamos probar (2) \Rightarrow (1). En efecto, sea η_M como en (4.0.1). Consideremos la sucesión exacta

$$\eta_1 : 0 \rightarrow L_1(M) \rightarrow A_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Aplicando el funtor $\text{Hom}(-, M)$ a η_1 , obtenemos la siguiente sucesión exacta de grupos abelianos

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(A_0, M) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(L_1(M), M) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(M, M) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(A_0, M).$$

Luego, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(L_1(M), M) = 0$ para cada $1 \leq i \leq m - 1$, ya que $M \in \mathcal{A}^\perp$ y $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(M, M) = 0$ para cada $1 \leq i \leq m$. Ahora bien, repitiendo el argumento anterior con la sucesión exacta

$$\eta_2 : 0 \rightarrow L_2(M) \rightarrow A_1 \rightarrow L_1(M) \rightarrow 0,$$

y usando que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(L_1(M), M) = 0$, para cada $1 \leq i \leq m - 1$, tenemos que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(L_2(M), M) = 0$, para cada $1 \leq i \leq m - 2$. En general, continuando con este procedimiento, obtenemos que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(L_j(M), M) = 0$ para cada

$1 \leq j \leq m - 1$ y para cada $1 \leq i \leq m - j$. En particular, para $j = m - 1$, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(L_{m-1}(M), M) = 0$. Entonces, la sucesión exacta

$$\eta_m : 0 \rightarrow M \rightarrow A_{m-1} \rightarrow L_{m-1}(M) \rightarrow 0$$

se escinde, y por lo tanto $M \in \mathcal{A}$, ya que \mathcal{A} es cerrada por sumandos directos. \square

Notemos que la prueba anterior funciona incluso cuando $n = \infty$. Gracias a esto, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.14. *Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de clases de objetos, en una categoría abeliana \mathcal{C} , con \mathcal{A} cerrada por sumandos directos y $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0$ para $i \geq 1$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes, para cualquier entero $m \geq 1$ y cualquier $M \in \text{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{\text{ex}}$.*

- (1) $M \in \mathcal{A}$.
- (2) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(M, M) = 0$ para cada $1 \leq i \leq m$.
- (3) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(M, M) = 0$ para cada $i \geq 1$.

Intersecciones

Las clases de R -módulos m -fuertemente Gorenstein proyectivos tienen un buen comportamiento tomando intersecciones. A saber, la intersección entre dos de ellas es de nuevo una clase de este tipo. En esta sección, probamos un resultado similar al de G. Zhao y Z. Huang [ZH11, Teorema 3.5] en nuestro nuevo contexto.

Lema 4.15. *Sean m, n enteros tales que $1 \leq m \leq n$ y sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de clases de objetos, en una categoría abeliana \mathcal{C} , con $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0$ para cada $1 \leq i \leq n$. Consideremos η_M como en (4.0.1). Entonces,*

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, L_j(M)) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(\mathcal{A}, L_{j+1}(M)),$$

para cada $0 \leq j \leq m - 1$ y cada $1 \leq i \leq n - 1$. En particular, si $M \in \mathcal{A}^\perp$ entonces $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, L_j(M)) = 0$, para cada $0 \leq j \leq m$.

Demostración. Consideremos η_M , como en (4.0.1), y sean

$$\eta_j : 0 \rightarrow L_{j+1}(M) \rightarrow A_j \rightarrow L_j(M) \rightarrow 0,$$

las sucesiones exactas que aparecen en η_M , con $0 \leq j \leq m-1$. Notemos que $L_0(M) = M = L_m(M)$. Aplicando $\text{Hom}(A, -)$, con $A \in \mathcal{A}$, a cada sucesión exacta, obtenemos la siguiente sucesión exacta de grupos abelianos

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(A, A_j) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(A, L_j(M)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(A, L_{j+1}(M)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(A, A_j).$$

Luego, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(A, L_j(M)) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(A, L_{j+1}(M))$, para cada $1 \leq i \leq n-1$, ya que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0$, para cada $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto, la primera parte se sigue.

Para la segunda parte, de los isomorfismos anteriores, obtenemos el siguiente arreglo

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, L_{m-1}) & \cong & \text{Ext}_{\mathcal{C}}^2(A, M) \\ & \vdots & \vdots \\ \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, L_1) & \cong \cdots \cong & \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n-1}(A, L_{m-1}) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A, M) \\ \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, M) & \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^2(A, L_1) \cong \cdots \cong & \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A, L_{m-1}) \\ & \vdots & \vdots \\ \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n-1}(A, M) & \cong & \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A, L_1), \end{array}$$

y la siguiente cadena de isomorfismos de grupos abelianos

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(A, L_j(M)) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(A, L_{j+1}(M)) \cong \cdots \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{m-j+i}(A, L_m(M)),$$

para $j \geq 1$. Por lo que, podemos concluir que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(A, L_j(M)) = 0$ para cada $1 \leq i \leq n-1$, debido a que $L_m(M) = M \in \mathcal{A}^\perp$. \square

Lema 4.16. Sean $n \geq 1$ y $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de clases de objetos, en una categoría abeliana \mathcal{C} , con \mathcal{A} cerrada por coproductos finitos y $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0$, para cada $1 \leq i \leq n$. Para cualesquiera k, m enteros tales que $1 \leq k \leq m \leq n$, $k \nmid m$ y $m = rk + s$, con $0 < s < k$, usando la notación en (4.0.1), si $M \in \text{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, k)}^{ex} \cap \text{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{ex}$ entonces existen $A, A' \in \mathcal{A}$ tales que $M \oplus A = L_{rk}(M) \oplus A'$.

Demostración. Sean

$$\begin{aligned} \eta_M &: 0 \rightarrow M \rightarrow A_{m-1} \rightarrow \cdots \rightarrow A_0 \rightarrow M \rightarrow 0, \\ \eta'_M &: 0 \rightarrow M \rightarrow A'_{k-1} \rightarrow \cdots \rightarrow A'_0 \rightarrow M \rightarrow 0, \end{aligned}$$

sucesiones exactas como en (4.0.1). Consideremos el siguiente diagrama pullback

$$\begin{array}{ccccc} & & L_1(M) & \xlongequal{\quad} & L_1(M) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ L'_1(M) & \longrightarrow & E_0 & \longrightarrow & A_0 \\ & & \downarrow & \text{pb} & \downarrow \\ L'_1(M) & \longrightarrow & A'_0 & \longrightarrow & M. \end{array}$$

Por la Proposición 4.15, tenemos que $L'_1(M) \oplus A_0 = E_0 = L_1(M) \oplus A'_0$.

Ahora bien, usando que $L'_1(M) \oplus A_0 = L_1(M) \oplus A'_0$ y tomando, por una parte, la suma directa de las sucesiones exactas $0 \rightarrow L_2(M) \rightarrow A_1 \rightarrow L_1(M) \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow A'_0 \rightarrow A'_0 \rightarrow 0$; y por otra parte, la suma directa de $0 \rightarrow L'_2(M) \rightarrow A'_1 \rightarrow L'_1(M) \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow A_0 \rightarrow A_0 \rightarrow 0$, construimos el siguiente diagrama pullback

$$\begin{array}{ccccc} & & L_2(M) & \xlongequal{\quad} & L_2(M) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ L'_2(M) & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & A_1 \oplus A'_0 \\ & & \downarrow & \text{pb} & \downarrow \\ L'_2(M) & \longrightarrow & A'_1 \oplus A_0 & \longrightarrow & L_1(M) \oplus A'_0. \end{array}$$

De nuevo, por la Proposición 4.15, obtenemos $L'_2(M) \oplus A_1 \oplus A'_0 = E_1 = L_2(M) \oplus A'_1 \oplus A_0$. Continuando con este procedimiento, tenemos que $L'_k(M) \oplus \tilde{A}^{(k-1)} = E_k = L_k(M) \oplus A^{(k-1)}$, donde $\tilde{A}^{(k-1)}$ y $A^{(k-1)}$ pertenecen a \mathcal{A} . Notemos que $L'_k(M) \simeq M$. Entonces, si $r > 1$, podemos empezar de nuevo este procedimiento, tomando $L'_{k+i}(M) := L'_i(M)$ y considerando como sucesión inicial la sucesión exacta $0 \rightarrow L'_{k+1}(M) \rightarrow A'_0 \rightarrow M \rightarrow 0$.

Luego, tenemos que $L'_{2k}(M) \oplus \tilde{A}^{(2k-1)} = E_{2k} = L_{2k}(M) \oplus A^{(2k-1)}$, donde $\tilde{A}^{(2k-1)}$ y $A^{(2k-1)}$ pertenecen a \mathcal{A} . Una vez más, tenemos que $L'_{2k}(M) = L'_k(M) \simeq M$. Si $r > 2$, podemos continuar con este procedimiento, definiendo $L'_{2k+i}(M) := L'_i(M)$. Después de r pasos, obtenemos el resultado deseado. \square

Observación 4.17. En caso, $k \mid m$ y $m = kr$ se tiene que

$$SWG\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, k)}^{ex} \subseteq SWG\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{ex}.$$

En efecto, esto se sigue considerando η_M como en (4.0.1) y "pegándola" r veces.

Proposición 4.18. Sean $n \geq 1$ y $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de clases de objetos, en una categoría abeliana \mathcal{C} , con $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0$ para cada $1 \leq i \leq n$. Para cualesquiera k, m enteros tales que $1 \leq k \leq m \leq n$, $k \nmid m$ y $m = rk + s$, con $0 < s < k$, si \mathcal{A} es una clase pre-resolvente, entonces

$$SWG\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, k)}^{ex} \cap SWG\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{ex} \subseteq SWG\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, s)}^{ex}.$$

Demostración. Notemos primero que, como \mathcal{A} es cerrada por extensiones, también es cerrada por coproductos finitos.

Sea $M \in SWG\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, k)}^{ex} \cap SWG\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{ex}$. Por el Lema 4.16, podemos construir el siguiente diagrama pullback

$$\begin{array}{ccccc} & & A' & \xlongequal{\quad} & A' \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ L_{rk+1}(M) & \xrightarrow{\quad} & X & \xrightarrow{\quad} & M \oplus A \\ & & \downarrow & \text{pb} & \downarrow \\ & & A_{rk} & \xrightarrow{\quad} & L_{rk}(M), \\ & & \parallel & & \\ & & L_{rk+1}(M) & \xrightarrow{\quad} & A_{rk} \end{array}$$

con $A, A' \in \mathcal{A}$. Notemos que $X \in \mathcal{A}$, ya que \mathcal{A} es cerrada por extensiones.

Ahora bien, consideremos el siguiente diagrama pullback

$$\begin{array}{ccccc}
 L_{rk+1}(M) & \twoheadrightarrow & Y & \longrightarrow & M \\
 \parallel & & \downarrow & \text{pb} & \downarrow \\
 L_{rk+1}(M) & \twoheadrightarrow & X & \longrightarrow & M \oplus A \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & A & \xlongequal{\quad} & A,
 \end{array}$$

donde $Y \in \mathcal{A}$, debido a que \mathcal{A} es una clase pre-resolvente. Por lo tanto, obtenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \rightarrow A_{m-1} \rightarrow \cdots \rightarrow A_{kr+1} \rightarrow Y \rightarrow M \rightarrow 0,$$

y podemos concluir que $M \in \mathcal{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, s)}^{ex}$. □

Teorema 4.19. Sean $n \geq 1$ y $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de clases de objetos, en una categoría abeliana \mathcal{C} , con $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0$, para cada $1 \leq i \leq n$. Para cualesquiera k, m enteros tales que $1 \leq k \leq m \leq n$, si \mathcal{A} es una clase pre-resolvente, entonces

$$\mathcal{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, k)}^{ex} \cap \mathcal{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{ex} = \mathcal{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, d)}^{ex},$$

donde d denota el máximo común divisor de k y m .

Demostración. Supongamos que \mathcal{A} es una clase pre-resolvente y sea d el máximo común divisor de k y m . En el caso, $k \mid m$, el resultado se sigue por la Observación 4.17.

Supongamos que $k \nmid m$ y $m = r_0k + s_0$, donde $0 < s_0 < k$. Por la Proposición 4.18, tenemos que

$$\mathcal{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, k)}^{ex} \cap \mathcal{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{ex} \subseteq \mathcal{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, s_0)}^{ex}.$$

En caso, $s_0 \mid k$, el resultado se sigue de nuevo por la Observación 4.17. Supongamos que $s_0 \nmid k$ y que $k = r_1s_0 + s_1$, donde $0 < s_1 < s_0 < k \leq n$. Luego, usando de nuevo la Proposición 4.18, obtenemos las siguientes inclusiones:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, k)}^{ex} \cap \mathcal{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{ex} &\subseteq \mathcal{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, k)}^{ex} \cap \mathcal{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, s_0)}^{ex} \\
 &\subseteq \mathcal{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, s_1)}^{ex}.
 \end{aligned}$$

Continuando con el procedimiento anterior, existe un entero $t > 0$ tal que $s_t = r_{t+2}s_{t+1}$ y $s_{t+1} = d$. Entonces,

$$SWG\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, s_t)}^{ex} \cap SWG\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, s_{t+1})}^{ex} \subseteq SWG\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, s_{t+1})}^{ex}.$$

Por lo tanto,

$$SWG\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, k)}^{ex} \cap SWG\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{ex} \subseteq \cdots \subseteq SWG\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, d)}^{ex}$$

Por otra parte, como d divide a k y a m , la contención contraria también se cumple por la Observación 4.17. \square

Corolario 4.20. Sean $n \geq 2$ y $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de clases de objetos, en una categoría abeliana \mathcal{C} , con $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0$, para cada $1 \leq i \leq n$. Si \mathcal{A} es una clase pre-resolvente, entonces

$$SWG\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n-1)}^{ex} \cap SWG\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n)}^{ex} = SWG\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, 1)}^{ex}.$$

En particular,

$$\bigcap_{m \geq 2} SWG\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{ex} = SWG\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, 1)}^{ex}.$$

Demostración. La primera igualdad se sigue del Teorema 4.19. Para la segunda parte, notemos que $SWG\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, 1)}^{ex} \subseteq SWG\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{ex}$, para cada $m \geq 1$. Por otra parte, si $n \geq 2$, se tiene que

$$\bigcap_{m \geq 2} SWG\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{ex} \subseteq SWG\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n-1)}^{ex} \cap SWG\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n)}^{ex} = SWG\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, 1)}^{ex}.$$

\square

4.2. Objetos m -fuertemente $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -Gorenstein proyectivos

En esta sección, presentamos una definición que extiende el concepto de R -módulo n -fuertemente Gorenstein proyectivo de otra manera. Probaremos que varios resultados de la sección anterior se obtienen en este nuevo contexto. Específicamente, veremos que existen versiones de la Proposición 4.9, la Proposición 4.13 y el Teorema 4.19 adaptadas a esta noción. Comencemos dando la definición que trabajaremos a lo largo de la sección.

Definición 4.21. Sean $m \geq 1$ y $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de clases de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} . Decimos que $M \in \mathcal{C}$ es un objeto m -fuertemente $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -Gorenstein proyectivo (o un objeto m -SGP $_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$) si existe una sucesión exacta η_M , como en (4.0.1), y tal que η_M es $\text{Hom}(-, B)$ -acíclico, para cualquier $B \in \mathcal{B}$. Denotamos a la clase de todos los objetos m -fuertemente $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -Gorenstein proyectivos por $\text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}$.

Observación 4.22. Algunas consecuencias de la Definición 4.21 son las siguientes:

- (1) Con la notación en (4.0.1), si $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ y $M \in \text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}$, entonces $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(L_i(M), B) = 0$, para cada $1 \leq i \leq m$ y cada $B \in \mathcal{B}$. En efecto, este hecho se sigue de que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ y η_M es $\text{Hom}(-, B)$ -acíclico, para cada $B \in \mathcal{B}$.
- (2) $\text{SWGSP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)} \subseteq \text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)} \subseteq \text{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$, para cualquier entero $m \geq 1$. Más adelante, veremos en la Proposición 4.44 que la primera contención puede ser estricta.
- (3) Si \mathcal{A} es cerrada por coproductos finitos, entonces $\text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}$ también lo es y $\mathcal{A} \subseteq \text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}$, para cualquier entero $m \geq 1$. En efecto, sea $A \in \mathcal{A}$. Consideremos la sucesión exacta que se escinde

$$\eta : 0 \rightarrow A \rightarrow A \oplus A \rightarrow A \rightarrow 0.$$

Notemos que η es $\text{Hom}(-, B)$ -acíclico, para cada $B \in \mathcal{B}$, ya que η se escinde. Luego, $\mathcal{A} \subseteq \text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, 1)} \subseteq \text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}$.

- (4) $\text{Im}(f_i) \in \text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}$, para cada $1 \leq i \leq m$, si $M \in \text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}$.
- (5) Para cualquier anillo R y cualquier entero $m \geq 1$, la clase $\text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}$ coincide con la clase de R -módulos m -fuertemente Gorenstein proyectivos si $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{P}(R)$.

Objetos $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -Gorenstein

Para dar la versión de la Proposición 4.9 en este nuevo contexto, necesitamos el siguiente resultado en [BMS18].

Proposición 4.23. [BMS18, Proposición 3.14] *Sea \mathcal{C} una categoría abeliana. Para cualquier par $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \subseteq \mathcal{C}^2$, los siguientes enunciados se cumplen.*

- (1) *Si $\text{pd}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) = 0$, entonces $\mathcal{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \subseteq \mathcal{WGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \subseteq {}^{\perp}\mathcal{B}$.*
- (2) *Si $0 \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \subseteq \mathcal{WGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$, entonces $\text{pd}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) = 0$.*

El siguiente resultado es una generalización de [ZH11, Teorema 3.9].

Proposición 4.24. *Sea un entero $m \geq 1$ y sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de clases de objetos, en una categoría abeliana \mathcal{C} , con \mathcal{A} cerrada por coproductos finitos y $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$, para cada $i \geq 1$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

- (1) *$M \in \mathcal{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}$.*
- (2) *Existe una sucesión exacta*

$$\eta_M : 0 \rightarrow M \xrightarrow{f_m} A_{m-1} \xrightarrow{f_{m-1}} A_{m-2} \rightarrow \cdots \rightarrow A_1 \xrightarrow{f_1} A_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0,$$

con $A_j \in \mathcal{A}$, para cada $0 \leq j \leq m-1$, y tal que $\bigoplus_{j=1}^m \text{Im}(f_j) \in \mathcal{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, 1)}$.

- (3) *Existe una sucesión exacta*

$$\eta_M : 0 \rightarrow M \xrightarrow{f_m} A_{m-1} \xrightarrow{f_{m-1}} A_{m-2} \rightarrow \cdots \rightarrow A_1 \xrightarrow{f_1} A_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0,$$

con $A_j \in \mathcal{A}$, para cada $0 \leq j \leq m-1$, y tal que $\bigoplus_{j=1}^m \text{Im}(f_j) \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$.

Demostración.

(1) \Rightarrow (2) Siguiendo la prueba de la Proposición 4.9, obtenemos una sucesión exacta corta de la forma

$$\eta : 0 \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^m \text{Im}(f_j) \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{j=0}^{m-1} A_j \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^m \text{Im}(f_j) \longrightarrow 0.$$

Por la Observación 4.22(1), tenemos que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\bigoplus_{j=1}^m \text{Im}(f_j), B) = 0$, para cualquier $B \in \mathcal{B}$, y en consecuencia, η es $\text{Hom}(-, B)$ -acíclico para cualquier $B \in \mathcal{B}$. Por lo tanto, $\bigoplus_{j=1}^m \text{Im}(f_j) \in \mathcal{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, 1)}$.

(2) \Rightarrow (3) Supongamos que $\bigoplus_{j=1}^m \text{Im}(f_j) \in \mathcal{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, 1)}$. Entonces, existe una sucesión exacta corta

$$\eta : 0 \rightarrow \bigoplus_{j=1}^m \text{Im}(f_j) \xrightarrow{\iota} A_0 \xrightarrow{\rho} \bigoplus_{j=1}^m \text{Im}(f_j) \rightarrow 0,$$

con $A_0 \in \mathcal{A}$, y tal que η es $\text{Hom}(-, B)$ -acíclico, para cualquier $B \in \mathcal{B}$. Luego, usando η , podemos construir una sucesión exacta

$$\eta' : \cdots \rightarrow A_0 \xrightarrow{\iota\rho} A_0 \xrightarrow{\iota\rho} A_0 \rightarrow \cdots$$

como en la Definición 3.18.

(3) \Rightarrow (1) Por la Proposición 4.23, tenemos que $\bigoplus_{j=1}^m \text{Im}(f_j) \in {}^\perp \mathcal{B}$, ya que $\bigoplus_{j=1}^m \text{Im}(f_j) \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$ y $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$, para cada $i \geq 1$. En particular, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\text{Im}(f_j), \mathcal{B}) = 0$ para cada $1 \leq j \leq m$. Luego, η_M es $\text{Hom}(-, B)$ -acíclico, para cada $B \in \mathcal{B}$. Por lo tanto, $M \in \mathcal{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}$. \square

La proposición anterior se extiende, con otro inciso, cuando se consideran pares GP-admisibles que cumplen cierta condición. Para probar esto, recordemos la siguiente definición de [BMS18].

Definición 4.25. [BMS18, Definición 3.1] Sea \mathcal{C} una categoría abeliana. Un par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ de clases de objetos en \mathcal{C} es GP-admisible débil si $\text{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) = 0$ y tiene suficientes \mathcal{X} -objetos en \mathcal{C} (esto es, si para cualquier $C \in \mathcal{C}$ existe un epimorfismo $X \rightarrow C$ con $X \in \mathcal{X}$). Si además, el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ satisface las siguientes dos condiciones

- (a) \mathcal{X} y \mathcal{Y} son cerradas por coproductos finitos en \mathcal{C} , y \mathcal{X} es cerrada por extensiones;
- (b) $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ es un cogenerador en \mathcal{X} ;

decimos que $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es GP-admisible.

Proposición 4.26. Sean $m \geq 1$ y $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par GP-admisible en una categoría abeliana \mathcal{C} tal que $\mathcal{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \cap \mathcal{A}^\wedge = \mathcal{A}$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes.

- (1) $M \in \mathcal{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}$.

(2) Existe una sucesión exacta

$$\eta_M : 0 \rightarrow M \xrightarrow{f_m} A_{m-1} \xrightarrow{f_{m-1}} A_{m-2} \rightarrow \cdots \rightarrow A_1 \xrightarrow{f_1} A_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0,$$

con $A_j \in \mathcal{A}^\wedge$, para cada $0 \leq j \leq m-1$, y tal que $\bigoplus_{j=1}^m \text{Im}(f_j) \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$.

Demostración. Por una parte, supongamos que las hipótesis en (2) se cumplen. De [BMS18, Corolario 3.33] tenemos que $\mathcal{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$ es gruesa izquierda, y como $\bigoplus_{j=1}^m \text{Im}(f_j) \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$, se sigue que $\text{Im}(f_j) \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$, para cada $1 \leq j \leq m$. Notemos que $M \cong \text{Im}(f_m) \cong \text{Im}(f_0)$. Luego, de cada sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Im}(f_{j+1}) \rightarrow A_j \rightarrow \text{Im}(f_j) \rightarrow 0,$$

obtenemos que $A_j \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \cap \mathcal{A}^\wedge = \mathcal{A}$, para cada $0 \leq j \leq m-1$. Por lo que la condición (3) de la Proposición 4.24 se satisface y así (1) se sigue.

Por otra parte, (1) \Rightarrow (2) se sigue de la Proposición 4.24. \square

Observación 4.27. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de clases de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} . Entonces, una de las siguientes dos condiciones son suficientes para obtener la igualdad $\mathcal{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \cap \mathcal{A}^\wedge = \mathcal{A}$:

- (1) el par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es GP-admisibles en \mathcal{C} , \mathcal{A} es $\mathcal{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$ -inyectivo y una clase cerrada por sumandos directos;
- (2) $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = (\mathcal{X}, \omega)$ donde $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$, para algún par de cotorsión completo y hereditario $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ en \mathcal{C} .

En efecto, para (1), usamos [BM09, Corolario 4.15 (c)] para obtener $\mathcal{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \cap \mathcal{A}^\wedge = \mathcal{A}$. Por otra parte, si (2) se satisface, por [Xu17, Lema 4.1 (4)] obtenemos esta igualdad.

Corolario 4.28. Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par de cotorsión completo y hereditario en $\text{Mod}(R)$ y sea $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes, para cualquier entero $m \geq 1$.

- (1) $M \in \mathcal{SGP}_{(\mathcal{X}, \omega, m)}$.

(2) Existe una sucesión exacta

$$\eta_M : 0 \rightarrow M \xrightarrow{f_m} X_{m-1} \xrightarrow{f_{m-1}} X_{m-2} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \xrightarrow{f_1} X_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0,$$

con $X_j \in \mathcal{X}$, para cada $0 \leq j \leq m - 1$, y tal que $\bigoplus_{j=1}^m \text{Im}(f_j) \in \mathcal{SGP}_{(\mathcal{X}, \omega, 1)}$.

(3) Existe una sucesión exacta

$$\eta_M : 0 \rightarrow M \xrightarrow{f_m} X_{m-1} \xrightarrow{f_{m-1}} X_{m-2} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \xrightarrow{f_1} X_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0,$$

con $X_j \in \mathcal{X}$, para cada $0 \leq j \leq m - 1$, y tal que $\bigoplus_{j=1}^m \text{Im}(f_j) \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}$.

(4) Existe una sucesión exacta

$$\eta_M : 0 \rightarrow M \xrightarrow{f_m} Z_{m-1} \xrightarrow{f_{m-1}} Z_{m-2} \rightarrow \cdots \rightarrow Z_1 \xrightarrow{f_1} Z_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0,$$

con $Z_j \in \mathcal{X}^\wedge$, para cada $0 \leq j \leq m - 1$, y tal que $\bigoplus_{j=1}^m \text{Im}(f_j) \in \mathcal{SGP}_{(\mathcal{X}, \omega, 1)}$.

(5) Existe una sucesión exacta

$$\eta_M : 0 \rightarrow M \xrightarrow{f_m} Z_{m-1} \xrightarrow{f_{m-1}} Z_{m-2} \rightarrow \cdots \rightarrow Z_1 \xrightarrow{f_1} Z_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0,$$

con $Z_j \in \mathcal{X}^\wedge$, para cada $0 \leq j \leq m - 1$, y tal que $\bigoplus_{j=1}^m \text{Im}(f_j) \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}$.

Demostración. Si $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es un par de cotorsion completo y hereditario en $\text{Mod}(R)$, entonces (\mathcal{X}, ω) es un par GP-admisibles. Más aún, de la Observación 4.27 se tiene que $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)} \cap \mathcal{X}^\wedge = \mathcal{X}$. Usando que $\mathcal{SGP}_{(\mathcal{X}, \omega, 1)} \subseteq \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \omega)}$, concluimos el resultado por las Proposiciones 4.24 y 4.26. \square

En general, la clase $\mathcal{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}$ podría no ser cerrada por sumandos directos. Podemos ilustrar mejor este hecho con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.29. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := (\mathcal{P}(\mathcal{X}), \mathcal{P}(\mathcal{X}'))$ como en el Ejemplo 4.4. Denotamos por $S(i)$ al A -módulo simple correspondiente al vértice i .

Notemos que para $S(1)$ tenemos la siguiente sucesión exacta

$$\eta : 0 \rightarrow S(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(1) \rightarrow S(1) \rightarrow 0,$$

donde $S(1), S(2) \in {}^{\perp 1}\mathcal{B}$, ya que \mathcal{X} es una subcategoría de Frobenius de $\text{mod}(A)$. Luego, η es $\text{Hom}(-, B)$ -acíclico, para cualquier $B \in \mathcal{B}$. Por lo tanto, $S(1) \in \text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, 2)}$; y por la Proposición 4.24, tenemos que $S(1) \oplus S(2) \in \text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, 1)}$.

Afirmamos que $S(1) \notin \text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, 1)}$. En efecto, si $S(1) \in \text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, 1)}$, entonces existe una sucesión exacta

$$\eta : 0 \rightarrow S(1) \rightarrow P \rightarrow S(1) \rightarrow 0,$$

con $P \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$. Usando el carcaj de Auslander-Reiten de $\text{mod}(A)$ y la fórmula de Auslander-Reiten [ASS06, IV.2 Lema 2.12], se tiene que $\text{Ext}_A^1(S(1), S(1)) = 0$. Por lo tanto, η se escinde y entonces $S(1) \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$, lo cual es una contradicción.

Relaciones de Ortogonalidad

Para la versión de la Proposición 4.13 en términos de la Definición 4.21, necesitamos primero definir el análogo de la clase $m\text{-SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{\text{ex}}$. Comencemos dando la definición que usaremos a lo largo de esta sección.

Definición 4.30. Sean $m \geq 1$ y $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de clases de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} . Decimos que $M \in \mathcal{C}$ es un objeto m -fuertemente $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -Gorenstein proyectivo exacto (o un objeto $m\text{-SG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}^{\text{ex}}$) si existe una sucesión exacta η_M , como en (4.0.1), y tal que η_M es $\text{Hom}(-, B)$ -acíclico, para cualquier $B \in \mathcal{B}$ y $\text{Hom}(A, -)$ -acíclico, para cualquier $A \in \mathcal{A}$. Denotamos por $\text{SG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{\text{ex}}$ a la clase de todos los objetos m -fuertemente $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -Gorenstein proyectivos exactos.

Observación 4.31.

- (1) En caso, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathcal{C})$ tenemos que $\text{SG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{\text{ex}} = \text{SG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}$, para cualquier clase \mathcal{B} de objetos en \mathcal{C} .
- (2) Si \mathcal{A} es cerrada por coproductos finitos, entonces

$$\mathcal{A} \subseteq \text{SG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{\text{ex}} \subseteq \text{SG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)} \subseteq \mathcal{G}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}.$$

En efecto, la prueba se sigue como en la Observación 4.22 y las definiciones.

Lema 4.32. Sean $m \geq 1$ y $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de clases de objetos, en una categoría abeliana \mathcal{C} , con $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0$. Si $M \in \text{SG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{\text{ex}}$, se tiene que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, L_{j+1}(M)) = 0$, para cada $0 \leq j \leq m - 1$.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{A}$. Consideremos la sucesión exacta

$$\eta_j : 0 \rightarrow L_{j+1}(M) \rightarrow A_j \xrightarrow{\alpha_j} L_j(M) \rightarrow 0,$$

con $0 \leq j \leq m-1$, como en (4.0.1). Aplicando el funtor $\text{Hom}(A, -)$ a η_j y usando que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0$, tenemos la sucesión exacta

$$\text{Hom}(A, A_j) \xrightarrow{\alpha_j^*} \text{Hom}(A, L_j(M)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, L_{j+1}(M)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, A_j) = 0,$$

donde $\alpha_j^* := \text{Hom}(A, \alpha_j)$ es un epimorfismo ya que η_M es $\text{Hom}(A, -)$ -acíclico, para cada $A \in \mathcal{A}$. Por lo tanto, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, L_{j+1}(M)) = 0$ y el resultado se cumple. \square

Proposición 4.33. Sean m, n enteros tales que $1 \leq m \leq n$ y sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de clases de objetos, en una categoría abeliana \mathcal{C} , con $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0$, para cada $1 \leq i \leq n$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes, para cualquier $M \in \mathcal{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}$.

$$(1) M \in \mathcal{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{ex}.$$

$$(2) M \in \bigcap_{i=1}^n \mathcal{A}^{\perp i}.$$

En particular, $\mathcal{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{ex} \subseteq \bigcap_{i=1}^n \mathcal{A}^{\perp i}$.

Demostración. Usando la notación en (4.0.1), por el Lema 4.15, se tiene que $M \in \bigcap_{i=1}^n \mathcal{A}^{\perp i}$ si, y solo si, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, L_j(M)) = 0$, para cada $1 \leq j \leq m$ y cada $A \in \mathcal{A}$. Por lo que, la implicación (1) \Rightarrow (2) se sigue del Lema 4.32. Por otra parte, supongamos (2) y sea η_M como en (4.0.1). Entonces, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, L_j(M)) = 0$, para cada $1 \leq j \leq m$ y cada $A \in \mathcal{A}$. Luego, se sigue que η_M es $\text{Hom}(\mathcal{A}, -)$ -acíclico. Por lo tanto, $M \in \mathcal{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{ex}$. \square

Corolario 4.34. Sean m, n enteros tales que $1 \leq m \leq n$ y sea \mathcal{D} una subcategoría $(n+1)$ -cluster tilting en una categoría abeliana \mathcal{C} . Entonces, $\mathcal{SGP}_{(\mathcal{D}, \mathcal{D}, m)}^{ex} = \mathcal{D}$.

Demostración. Sea $D \in \mathcal{D}$. Notemos que podemos construir una sucesión exacta corta de la forma

$$0 \rightarrow D \rightarrow D \oplus D \rightarrow D \rightarrow 0,$$

la cual es $\text{Hom}(\mathcal{D}, -)$ -acíclica y $\text{Hom}(-, \mathcal{D})$ -acíclica ya que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{D}, \mathcal{D}) = 0$. Por lo que, se tiene la contención

$$\mathcal{D} \subseteq \text{SGP}_{(\mathcal{D}, \mathcal{D}, 1)}^{\text{ex}} \subseteq \text{SGP}_{(\mathcal{D}, \mathcal{D}, m)}^{\text{ex}}.$$

Finalmente, la otra contención se sigue de la Proposición 4.33. \square

Proposición 4.35. *Sean m, n enteros tales que $1 \leq m \leq n$, y sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de clases de objetos, en una categoría abeliana \mathcal{C} , con \mathcal{A} cerrada por sumandos directos y $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0$, para cada $1 \leq i \leq n$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes, para cualquier $M \in \text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{\text{ex}}$.*

- (1) $M \in \mathcal{A}$.
- (2) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(M, M) = 0$ para cada $1 \leq i \leq m$.
- (3) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(M, M) = 0$ para cada $1 \leq i \leq n$.

Demostración. La prueba se sigue, como en la Proposición 4.13, usando la Proposición 4.33 y reemplazando la condición $M \in \mathcal{A}^\perp$ por $M \in \bigcap_{i=1}^n \mathcal{A}^{\perp i}$. \square

Al igual que en la Proposición 4.13, el resultado se puede extender cuando $n = \infty$. El siguiente corolario es una generalización de [ZH11, Proposición 3.7].

Corolario 4.36. *Sean $m \geq 1$ y $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de clases de objetos, en una categoría abeliana \mathcal{C} , con \mathcal{A} cerrada por sumandos directos y $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0$, para todo $i \geq 1$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes, para cualquier $M \in \text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{\text{ex}}$.*

- (1) $M \in \mathcal{A}$.
- (2) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(M, M) = 0$ para cada $1 \leq i \leq m$.
- (3) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(M, M) = 0$ para cada $i \geq 1$.

Intersecciones

El propósito de esta sección es dar la versión del Teorema 4.19 en el contexto de los objetos m -fuertemente $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -Gorenstein proyectivos. Empecemos con el siguiente lema.

Lema 4.37. *Sean $n \geq 1$ y $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de clases de objetos, en una categoría abeliana \mathcal{C} , con \mathcal{A} cerrada por coproductos finitos y $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0$, para cada $1 \leq i \leq n$. Para cualesquiera k, m enteros tales que $1 \leq k \leq m \leq n$, $k \nmid m$ y $m = rk + s$, con $0 < s < k$, usando la notación en (4.0.1), si $M \in \text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, k)}^{\text{ex}} \cap \text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{\text{ex}}$, entonces existen $A, A' \in \mathcal{A}$ tales que $M \oplus A = L_{rk}(M) \oplus A'$.*

Demostración. Se sigue usando el Lema 4.32, en lugar de la Proposición 4.15, en la prueba de la Proposición 4.16. \square

Observación 4.38. *En caso $k \mid m$ y $m = kr$, se tiene que*

$$\text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, k)}^{\text{ex}} \subseteq \text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{\text{ex}}.$$

En efecto, esto se sigue considerando η_M como en (4.0.1) y “pegándola” r veces.

El siguiente resultado es una generalización de [ZH11, Proposición 3.4].

Proposición 4.39. *Sean $n \geq 1$ y $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de clases de objetos, en una categoría abeliana \mathcal{C} , con $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0$, para cada $1 \leq i \leq n$. Para cualesquiera k, m enteros tales que $1 \leq k \leq m \leq n$, $k \nmid m$ y $m = rk + s$, con $0 < s < k$, si \mathcal{A} es una clase pre-resolvente, entonces*

$$\text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, k)}^{\text{ex}} \cap \text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{\text{ex}} \subseteq \text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, s)}^{\text{ex}}.$$

Demostración. La prueba es análoga a la dada en la Proposición 4.18 reemplazando el Lema 4.16 por el Lema 4.37. \square

El siguiente Teorema es una generalización de [ZH11, Teorema 3.5].

Teorema 4.40. *Sean $n \geq 1$ y $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de clases de objetos, en una categoría abeliana \mathcal{C} , con $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0$, para cada $1 \leq i \leq n$. Para cualesquiera k, m enteros tales que $1 \leq k \leq m \leq n$, si \mathcal{A} es una clase pre-resolvente, entonces*

$$\text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, k)}^{\text{ex}} \cap \text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{\text{ex}} = \text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, d)}^{\text{ex}},$$

donde d denota el máximo común divisor de k y m .

Demostración. La prueba hecha en el Teorema 4.19 funciona reemplazando la Observación 4.17 por la Observación 4.38, y la Proposición 4.18 por la Proposición 4.39. \square

Corolario 4.41. Sean $n \geq 2$ y $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de clases de objetos, en una categoría abeliana \mathcal{C} , con $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0$, para cada $1 \leq i \leq n$. Si \mathcal{A} es una clase pre-resolvente, entonces

$$\text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n-1)}^{\text{ex}} \cap \text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n)}^{\text{ex}} = \text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, 1)}^{\text{ex}}.$$

En particular,

$$\bigcap_{m \geq 2} \text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{\text{ex}} = \text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, 1)}^{\text{ex}}.$$

Demostración. La prueba se sigue como en el Corolario 4.20, usando el Teorema 4.40. \square

Ejemplo 4.42. En el Ejemplo 4.29, probamos que $S(1) \in \text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, 2)}$ y $S(1) \notin \text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, 1)}$. Más aún, la sucesión η considerada ahí es $\text{Hom}(A, -)$ -acíclica, para cada $A \in \mathcal{A}$, ya que $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathcal{X})$ y η es una sucesión exacta en \mathcal{X} . Por lo que, $S(1) \in \text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, 2)}^{\text{ex}}$. Dado que $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ es una clase pre-resolvente (ver el Ejemplo 3.38), por el Teorema 4.40 obtenemos que $S(1) \notin \text{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{\text{ex}}$, para cualquier entero impar $m \geq 1$.

Observación 4.43. Notemos que la implicación contraria del Corolario 4.41 no necesariamente es cierta. En efecto, por el Corolario 4.34, para cualquier subcategoría $(n+1)$ -cluster tilting de \mathcal{C} , tenemos que el par $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := (\mathcal{D}, \mathcal{D})$ satisface la igualdad en el Corolario 4.41. Sin embargo, \mathcal{D} podría no ser una clase resolvente (ver la Observación 2.64).

Terminamos esta sección mencionando algunos hechos y resultados relacionados con subcategorías cluster-tilting, pares GP-admisibles y pares de n -cotorsión.

Proposición 4.44. Sean $n \geq 1$ y \mathcal{D} una subcategoría $(n+1)$ -cluster tilting de una categoría abeliana \mathcal{C} , con suficientes proyectivos e inyectivos. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.

- (1) Existe un entero $m \geq 1$ tal que $\text{SWG}_{(\mathcal{D}, \mathcal{D}, m)} = \text{SG}_{(\mathcal{D}, \mathcal{D}, m)}$.

$$(2) \mathcal{D} = \mathcal{P}(\mathcal{C}) = \mathcal{I}(\mathcal{C}).$$

En particular, si alguna de las condiciones anteriores se cumple, entonces \mathcal{C} es una categoría de Frobenius.

Demostración. (1) \Rightarrow (2): Por la Observación 4.22, tenemos las siguientes contenciones

$$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{SGP}_{(\mathcal{D}, \mathcal{D}, m)} = \mathcal{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{D}, \mathcal{D}, m)} \subseteq {}^\perp\mathcal{D}.$$

En particular $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{D}, \mathcal{D}) = 0$, para cada $i \geq 1$. Luego, el resultado se sigue por la Proposición 2.63.

(2) \Rightarrow (1): Notemos que la inclusión $\mathcal{SWG}\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)} \subseteq \mathcal{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}$ es cierta, para cualquier par de clases de objetos $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Por otra parte, si $\mathcal{D} = \mathcal{I}(\mathcal{C})$, cualquier objeto $M \in \mathcal{SGP}_{(\mathcal{D}, \mathcal{D}, m)}$ satisface las condiciones en la Definición 4.2. Por lo tanto, se tiene la igualdad para cualquier $m \geq 1$. \square

Proposición 4.45. *Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par GP-admisible en una categoría abeliana \mathcal{C} . Entonces, para cualquier entero $m \geq 1$, se tienen las siguientes igualdades*

$$\mathcal{SGP}_{(\mathcal{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}, \mathcal{B}, m)} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}^\wedge)} = \mathcal{SGP}_{(\mathcal{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}, \mathcal{B}^\wedge, m)}.$$

Demostración. Sea $m \geq 1$. Por [BMS18, Teorema 3.32] tenemos que el par $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}, \mathcal{B})$ es GP-admisible y $\mathcal{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}^2 := \mathcal{GP}_{(\mathcal{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}, \mathcal{B})} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$. Entonces,

$$\mathcal{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \subseteq \mathcal{SGP}_{(\mathcal{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}, \mathcal{B}, m)} \subseteq \mathcal{GP}_{(\mathcal{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}, \mathcal{B})} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$$

por la Observación 4.22 (3). Por otra parte, de [BMS18, Teorema 3.34 (a)], sabemos que el par $(\mathcal{A}, \mathcal{B}^\wedge)$ es GP-admisible y $\mathcal{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}^\wedge)}$ como consecuencia de [BMS18, Observación 3.13 y Proposición 3.16]. Finalmente, el resultado se sigue aplicando la primera igualdad al par GP-admisible $(\mathcal{A}, \mathcal{B}^\wedge)$. \square

Teorema 4.46. *Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de clases de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} . Entonces, los siguientes enunciados se cumplen.*

(1) *Si $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par GP-admisible en \mathcal{C} y $\omega := \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ es cerrada por sumandos directos, entonces*

$$\omega = \mathcal{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{ex} \cap \mathcal{B} = \mathcal{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)} \cap \mathcal{B} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \cap \mathcal{B},$$

para cualquier entero $m \geq 1$. En particular, si $\mathcal{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \subseteq \mathcal{B}$, entonces

$$\omega = \mathcal{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{ex} = \mathcal{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}.$$

(2) Si m, n son enteros tales que $1 \leq m \leq n$ y $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0$, para cada $1 \leq i \leq n$, entonces

$$\mathcal{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{ex} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{A}^{\perp i} \cap \mathcal{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}.$$

En particular, si $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathcal{C})$, entonces $\mathcal{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{ex} = \mathcal{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}$, para cualquier entero $m \geq 1$.

Demostración. (1) Por la Observación 4.31, tenemos que

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{ex} \subseteq \mathcal{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)} \subseteq \mathcal{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}.$$

Luego, $\omega \subseteq \mathcal{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{ex} \cap \mathcal{B} \subseteq \mathcal{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)} \cap \mathcal{B} \subseteq \mathcal{GP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \cap \mathcal{B} = \omega$, donde la última igualdad se sigue de [BMS18, Corolario 3.25 y Teorema 3.32].

Por otra parte, (2) se sigue de la Proposición 4.33. \square

Corolario 4.47. *Sea \mathcal{C} una categoría abeliana, con suficientes proyectivos, y sea \mathcal{B} una clase de objetos en \mathcal{C} cerrada por sumandos directos y coproductos finitos. Entonces, para cualquier entero $m \geq 1$, se cumplen las siguientes igualdades*

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{B} = \mathcal{SGP}_{(\mathcal{P}(\mathcal{C}), \mathcal{B}, m)}^{ex} \cap \mathcal{B} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{P}(\mathcal{C}), \mathcal{B})} \cap \mathcal{B}.$$

Demostración. Bajo las hipótesis, obtenemos que el par $(\mathcal{P}(\mathcal{C}), \mathcal{B})$ es un par GP-admisibles, con $\omega := \mathcal{P}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{B}$ cerrada por sumandos directos. Luego, por Teorema 4.46 obtenemos el resultado \square

Corolario 4.48. *Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par GP-admisibles en una categoría abeliana \mathcal{C} , con $\omega := \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ cerrada por sumandos directos. Si $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de n -cotorsión derecho y $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0$ para cada $1 \leq i \leq n$, entonces $\mathcal{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{ex} = \omega$, para cada $1 \leq m \leq n$.*

Demostración. Como $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de n -cotorsión derecho, se sigue del dual del Teorema 2.7 que $\mathcal{B} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{A}^{\perp i}$. Por lo tanto, por el Teorema 4.46,

$$\omega = \mathcal{B} \cap \mathcal{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{A}^{\perp i} \cap \mathcal{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)} = \mathcal{SGP}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, m)}^{ex}.$$

\square

Apéndice A

Apéndice

En esta sección recopilamos los conceptos y resultados que utilizamos a lo largo de esta tesis dando las referencias donde pueden ser consultados.

A.1. Álgebra Homológica

Lema A.1 (Lema de la Serpiente). *Sea \mathcal{C} una categoría abeliana. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en \mathcal{C}*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \alpha \downarrow & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Entonces, existe una sucesión exacta en \mathcal{C}

$$0 \rightarrow \text{Ker}(\alpha) \rightarrow \text{Ker}(\beta) \rightarrow \text{Ker}(\gamma) \rightarrow \text{Coker}(\alpha) \rightarrow \text{Coker}(\beta) \rightarrow \text{Coker}(\gamma) \rightarrow 0.$$

Demostración. Ver [Rot09, Teorema 6.12]. \square

Definición A.2. *Sean \mathcal{C} una categoría abeliana, con suficientes proyectivos e inyectivos, y $M \in \mathcal{C}$. Consideremos*

$$P_M = \cdots P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \xrightarrow{f_0} M \xrightarrow{f_{-1}} 0 \quad (\text{A.1.1})$$

una resolución proyectiva de M . Para cada $i \geq 0$, la i -ésima sizigia de M en \mathbf{P}_M , la cual denotaremos por $\Omega_{\mathbf{P}_M}^i(M)$, es

$$\Omega_{\mathbf{P}_M}^i(M) := \text{Ker}(f_{i-1}).$$

$\Omega^i(M)$ denotará a la clase de todas las i -ésimas sizigias de M . Esto es,

$$\Omega^i(M) := \{\Omega_{\mathbf{P}_M}^i(M) : \mathbf{P}_M \text{ es una resolución proyectiva de } M\}.$$

Dualmente, para cada $i \geq 0$ y cada corresolución inyectiva \mathbf{I}_M de M , denotaremos por $\Omega_{\mathbf{I}_M}^{-i}(M)$ a la i -ésima cosizigia de M en \mathbf{I}_M y por $\Omega^{-i}(M)$ a la clase de todas las i -ésimas cosizigias de M .

Lema A.3 (Lema del Corrimiento). *Sean \mathcal{C} una categoría abeliana, con suficientes proyectivos e inyectivos, y $k, n > 0$. Se tienen los siguientes enunciados.*

$$(1) \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n+k}(M, N) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(X, N) \text{ para todo } X \in \Omega^n(M).$$

$$(2) \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n+k}(M, N) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(M, Y) \text{ para todo } Y \in \Omega^{-n}(N).$$

Demostración. Ver [Arg17, Lema 1.33] o [Rot09, Proposición 8.5]. □

A.2. Anillos

Definición A.4 ([Rot09]). *Sea R un anillo. Decimos que:*

1. R es artiniiano izquierdo (respectivamente, derecho) si R es un R -módulo izquierdo (respectivamente, derecho) que satisface la condición descendente de cadena. Es decir, decimos que un R -módulo izquierdo (respectivamente, derecho) M satisface la condición descendente de cadena si para cada cadena descendente de submódulos

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots$$

existe un entero n , donde $M_n = M_{n+i}$, para todo $i \geq 1$.

2. R es noetheriano izquierdo (respectivamente, derecho) si cada ideal izquierdo (respectivamente, derecho) en R es finitamente generado.

3. R es coherente izquierdo (respectivamente, derecho) si cada ideal izquierdo en R (respectivamente, derecho) finitamente generado es finitamente presentado.
4. R es perfecto izquierdo si cada R -módulo tiene una cubierta proyectiva, o equivalentemente, cada R -módulo plano es proyectivo (ver [Bas60, Teorema P]).

Definición A.5. [Rot09] Sea R un anillo.

- (1) La dimensión global proyectiva izquierda de R es:

$$lpD(R) := \sup\{\text{pd}(A) : A \in \text{Mod}(R)\}.$$

- (2) La dimensión global inyectiva izquierda de R es:

$$liD(R) := \sup\{\text{id}(B) : B \in \text{Mod}(R)\}.$$

- (3) La dimensión débil izquierda de R es:

$$lwD(R) := \sup\{\text{fd}(A) : A \in \text{Mod}(R)\}.$$

donde $\text{pd}(A)$, $\text{id}(A)$ y $\text{fd}(A)$ denotan la dimensión proyectiva, inyectiva y plana de A , respectivamente.

Teorema A.6. [Rot09, Teorema 8.14] Para cualquier anillo R se tiene $lpD(R) = liD(R)$.

Teorema A.7. [Rot09, Teorema 8.19] Para cualquier anillo R se tiene $lwD(R) = lwD(R^{\text{op}})$.

Definición A.8. [Rot09] Sea R un anillo.

- (1) La dimensión global izquierda de R es:

$$lD(R) := lpD(R) = liD(R).$$

- (2) La dimensión débil de R es:

$$wD(R) := lwD(R) = lwD(R^{\text{op}}).$$

A.3. Conjeturas Homológicas

Sea A una k -álgebra de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado k . Denotamos por $\text{mod}(A)$ a la categoría de A -módulos izquierdos finitamente generados. Denotamos por $D = \text{Hom}_k(-, k)$ la dualidad estándar con respecto al campo. Entonces $D(A_A)$ es un cogenerador inyectivo para $\text{mod}(A)$. Sea $\mathcal{I} \subseteq \text{mod}(A)$ la subcategoría plena que contiene a los A -módulos inyectivos finitamente generados. Sea $K^b(\mathcal{I})$ la categoría de homotopía de complejos acotados sobre \mathcal{I} . Sea $D^b(A)$ la categoría derivada de complejos acotados sobre $\text{mod}(A)$. Consideramos $K^b(\mathcal{I})$ como una subcategoría plena de $D^b(A)$. Definimos $K^b(\mathcal{I})^{\perp 0} := \{X \in D^b(A) \mid \text{Hom}(I, X) = 0, \text{ para todo } I \in K^b(\mathcal{I})\}$.

Lo siguiente es una lista que muestra la conocida jerarquía de algunas de las conjeturas homológicas.

(1) **Conjetura de Auslander:** Sea $M \in \text{mod}(A)$. Entonces, existe algún $n_M \geq 0$ tal que cumple lo siguiente: Supongamos que para $N \in \text{mod}(A)$ existe $n_{M,N} \geq 0$ tal que $\text{Ext}^i(M, N) = 0$ para todo $i \geq n_{M,N}$. Entonces, $\text{Ext}^i(M, N) = 0$ para todo $i \geq n_M$. (resultó ser falsa, ver [Sma06]).

(2) **Conjetura de la dimensión finitista pequeña:**

$$\text{findim}(A) := \sup\{\text{pd}(M) : M \in \text{mod}(A) \text{ y } \text{pd}(M) < \infty\} < \infty.$$

(3) **Conjetura del anulamiento:** $K^b(\mathcal{I})^{\perp 0} = 0$.

(4) **La condición de Nunke:** Para un A -módulo M , existe $i \geq 0$ tal que $\text{Ext}_A^i(D(A_A), M) \neq 0$.

(5) **Conjetura de Nakayama generalizada:** Para un A -módulo simple S , existe $i \geq 0$ tal que $\text{Ext}_A^i(D(A_A), S) \neq 0$.

(6) **Conjetura de Nakayama:** Si en una resolución inyectiva minimal de A

$$0 \rightarrow A \rightarrow I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots$$

todos los I_j son proyectivos, entonces A es una álgebra autoinyectiva.

Para un anillo R , denotamos por $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ (respectivamente, $(\mathcal{A}^{<\infty}, \mathcal{B}^{<\infty})$) al par de cotorsión cogenerado por la clase $\mathcal{P}(R)^\wedge$ (respectivamente, $\mathcal{P}(R)^\wedge \cap \text{FP}_\infty(R)$).

Teorema A.9. [CEG12, Teorema 3.2] *Para un anillo R y un número natural n , las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- (1) $\text{Findim}(R) \leq n$.
- (2) $\text{pd}(A) \leq n$, para cada $A \in \mathcal{A}$.
- (3) $\text{coresdim}_{\mathcal{B}}(M) \leq n$, para cada $M \in \text{Mod}(R)$.
- (4) $\text{coresdim}_{\mathcal{B}}(R^{(R)}) \leq n$.

Teorema A.10. [CEG12, Teorema 3.4] *Para un anillo R y un número natural n , las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- (1) $\text{FPfindim}(R) \leq n$.
- (2) $\text{pd}(A) \leq n$, para cada $A \in \mathcal{A}^{<\infty}$.
- (3) $\text{coresdim}_{\mathcal{B}^{<\infty}}(M) \leq n$, para cada $M \in \text{Mod}(R)$.
- (4) $\text{coresdim}_{\mathcal{B}^{<\infty}}(R^{(R)}) \leq n$.

A.4. Módulos

Definición A.11. [Rot09] Sean R un anillo. Decimos que:

- (1) $M \in \text{Mod}(R^{\text{op}})$ es plano si $M \otimes_R \square$ es un funtor exacto; esto es, si

$$0 \rightarrow B' \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} B'' \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta de R -módulos izquierdos, entonces

$$0 \rightarrow M \otimes_R B' \xrightarrow{1_M \otimes i} M \otimes_R B \xrightarrow{1_M \otimes p} M \otimes_R B'' \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta de grupos abelianos.

(2) $M \in \text{Mod}(R)$ es finitamente presentado si existe una sucesión exacta

$$R^m \rightarrow R^n \rightarrow M \rightarrow 0,$$

con $n, m \in \mathbb{N}$.

Definición A.12. [Rot09] Un anillo R tiene la condición IBN (invariant basis number) si $R^m \cong R^n$ como R -módulos implica $m = n$. Si R satisface la condición IBN, entonces el número de elementos en una base de un R -módulo libre F es llamado el rango de F y es denotado por $\text{rank}(F)$.

Módulos n -fuertemente Gorenstein proyectivos

Definición A.13. [BM09, Definición 2.1] Sean R un anillo y n un entero positivo. Un R -módulo M es n -fuertemente Gorenstein proyectivo (o un R -módulo n -SGP), si existe una sucesión exacta de R -módulos

$$\eta : 0 \rightarrow M \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

donde cada P_i es proyectivo y tal que $\text{Hom}_R(\eta, Q)$ permanece exacto siempre que Q sea un R -módulo proyectivo. Denotamos por $n\text{-SGP}(R)$ a la subcategoría de $\text{Mod}(R)$ que consiste de los R -módulos n -fuertemente Gorenstein proyectivos.

Teorema A.14. [BMS18, Teorema 3.5]

$$m\text{-SGP}(R) \cap n\text{-SGP}(R) = (m, n)\text{-SGP}(R)$$

donde (m, n) denota el máximo común divisor de m y n .

Proposición A.15. [BMS18, Proposición 3.7] Sean R un anillo, $n \geq 1$ y $M \in \text{Mod}(R)$ un R -módulo n -fuertemente Gorenstein proyectivo. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes.

- (1) M es proyectivo.
- (2) $\text{Ext}_R^i(M, M) = 0$ para cualquier $i \geq 1$.
- (3) $\text{Ext}_R^i(M, M) = 0$ para cualquier $1 \leq i \leq n$.

Teorema A.16. [ZH11, Teorema 3.9] Para cualquier anillo R , $M \in \text{Mod}(R)$ y $n \geq 1$, los siguientes enunciados son equivalentes.

(1) M es n -fuertemente Gorenstein projectivo.

(2) Existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} P_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0,$$

en $\text{Mod}(R)$, con P_i projectivo, para cualquier $0 \leq i \leq n - 1$, tal que $\bigoplus_{i=1}^n \text{Im } f_i$ es 1-fuertemente Gorenstein projectivo.

(3) Existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} P_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0,$$

en $\text{Mod}(R)$, con P_i projectivo, para cualquier $0 \leq i \leq n - 1$, tal que $\bigoplus_{i=1}^n \text{Im } f_i$ es Gorenstein projectivo.

(4) Existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} P_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0,$$

en $\text{Mod}(R)$, donde P_i tiene dimensión proyectiva finita, para cualquier $0 \leq i \leq n - 1$, tal que $\bigoplus_{i=1}^n \text{Im } f_i$ es 1-fuertemente Gorenstein projectivo.

(5) Existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} P_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0,$$

en $\text{Mod}(R)$, donde P_i tiene dimensión proyectiva finita, para cualquier $0 \leq i \leq n - 1$, tal que $\bigoplus_{i=1}^n \text{Im } f_i$ es Gorenstein projectivo.

Corolario A.17. [ZH11, Corolario 3.6]

$$n\text{-SGP}(R) \cap (n + 1)\text{-SGP}(R) = 1\text{-SGP}(R).$$

En particular,

$$\bigcap_{n \geq 2} n\text{-SGP}(R) = 1\text{-SGP}(R).$$

A.5. Objetos Gorenstein relativos en categorías abelianas

Definición A.18. [BMS18, Definición 3.1] Un par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ de clases de objetos, en una categoría abeliana \mathcal{C} , es GP-admisibile débil si $\text{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) = 0$ y \mathcal{X} es \mathcal{X} -epic en \mathcal{C} (esto es, si para cualquier $C \in \mathcal{C}$ existe un epimorfismo $X \rightarrow C$ con $X \in \mathcal{X}$). Si además, el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ satisface las siguientes dos condiciones

- (a) \mathcal{X} y \mathcal{Y} son cerradas por coproductos finitos en \mathcal{C} , y \mathcal{X} es cerrada por extensiones;
- (b) $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ es un cogenerador en \mathcal{X} ;

decimos que $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es GP-admisibile.

Observación A.19. [BMS18, Observación 3.13] Para cualquier $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{C}^2$, se tiene que $\text{WGP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} = \text{WGP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^\wedge)}$.

Proposición A.20. [BMS18, Proposición 3.16] Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par GP-admisibile débil en una categoría abeliana \mathcal{C} . Entonces, para $M \in \mathcal{C}$, las siguientes condiciones son equivalentes.

- (a) $M \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}$.
- (b) $M \in {}^\perp \mathcal{Y}$ y existe una sucesión exacta $\varepsilon : 0 \rightarrow M \rightarrow X^0 \rightarrow X^1 \rightarrow \dots$, con $X^i \in \mathcal{X}$ y tal que ε es $\text{Hom}(-, Y)$ -acíclico, para cualquier $Y \in \mathcal{Y}$.
- (c) $M \in \text{WGP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}$.

Corolario A.21. [BMS18, Corolario 3.25] Sean $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par GP-admisibile en una categoría abeliana \mathcal{C} y $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. Entonces, los siguientes enunciados son ciertos.

- (a) La clase ω es cerrada por extensiones, un cogenerador relativo $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}$ -inyectivo en $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}$ y $\text{id}_\omega(\omega) = 0$.
- (b) Si ω es cerrada por sumandos directos en \mathcal{C} , entonces $\omega = \mathcal{Y} \cap \text{WGP}_{(\omega, \mathcal{Y})}$.

Teorema A.22. [BMS18, Teorema 3.32] Sean $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par GP-admisibile en una categoría abeliana \mathcal{C} y $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. Entonces, el par $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}, \mathcal{Y})$ es GP-admisibile y

$$\text{WGP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} = \text{WGP}_{(\omega, \mathcal{Y})} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}^2 = \text{WGP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}^2.$$

Corolario A.23. [BMS18, Corolario 3.33] Si $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es un par GP-admisibile en una categoría abeliana \mathcal{C} , entonces $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}$ es una subcategoría gruesa izquierda de \mathcal{C} .

Teorema A.24. [BMS18, Teorema 3.34] Para un par GP-admisibile $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ en una categoría abeliana \mathcal{C} y $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$, los siguientes enunciados se cumplen.

- (a) Los pares $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}, \mathcal{Y})$, $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}, \omega)$ y $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^\wedge)$ son GP-admisibles.
- (b) Sea \mathcal{Y} cerrada por sumandos directos en \mathcal{C} y $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}$. Entonces, $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}, \mathcal{Y})$ es un par de Frobenius izquierdo, los elementos en \mathcal{Y} son sumandos directos de objetos en \mathcal{X} y \mathcal{Y}^\wedge es una subcategoría gruesa derecha.
- (c) Si ω es cerrada por sumandos directos en \mathcal{C} , entonces $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} \cap \mathcal{Y} = \omega$.
- (d) Si $\mathcal{Y}^\wedge, \omega$ y $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}^\wedge$ son cerradas por sumandos directos en \mathcal{C} , entonces

$$\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^\wedge)} \quad \text{y} \quad \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} \cap \mathcal{Y}^\wedge = \omega = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}^\wedge.$$

Corolario A.25. [BMS18, Corolario 4.15] Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par GP-admisibile en una categoría abeliana \mathcal{C} . Entonces, los siguientes enunciados son ciertos.

- (a) Si \mathcal{Y} es cerrada por sumandos directos en \mathcal{C} , entonces
 - (a1) $\text{Gpd}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}(M) = \text{pd}_{\mathcal{Y}}(M) = \text{pd}_{\mathcal{Y}^\wedge}(M)$, para cualquier $M \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}^\wedge$,
 - (a2) $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}^\wedge \cap \perp \mathcal{Y} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}^\wedge \cap \perp (\mathcal{Y}^\wedge)$.
- (b) Si $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ es cerrada por sumandos directos en \mathcal{C} , entonces
 - (b1) $\text{Gpd}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}(M) = \text{pd}_\omega(M) = \text{pd}_{\omega^\wedge}(M) \quad \forall M \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}^\wedge$,
 - (b2) $\text{Gpd}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}(M) = \text{resdim}_\omega(M) = \text{pd}_\omega(M) = \text{pd}_{\omega^\wedge}(M)$, para cualquier $M \in \omega^\wedge$,
 - (b3) $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} \cap \omega^\wedge = \omega$ y $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}^\wedge \cap \perp \omega = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}^\wedge \cap \perp (\omega^\wedge)$.
- (c) Si \mathcal{X} es GP-inyectivo y cerrada por sumandos directos en \mathcal{C} , entonces
 - (c1) $\text{Gpd}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}(M) = \text{resdim}_{\mathcal{X}}(M) = \text{pd}_{\mathcal{X}}(M) = \text{pd}_{\mathcal{X}^\wedge}(M)$, para cualquier $M \in \mathcal{X}^\wedge$,
 - (c2) $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} \cap \mathcal{X}^\wedge = \mathcal{X}$.

A.6. Pares de Cotorsión

Lema A.26 (Lema de García-Rozas). *Sean \mathcal{C} una categoría abeliana, con suficientes proyectivos e injectivos, y $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de cotorsión en \mathcal{C} . Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1) \mathcal{A} es resolvente,
- (2) \mathcal{B} es corresolvente,
- (3) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(A, B) = 0$ para todo $i \geq 1$, $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$.

Demostración. Ver [Arg17, Lema 2.19] o [Gar99]. □

A.7. Teoría de Auslander-Buchweitz

Definición A.27. *Sea (\mathcal{X}, ω) un par de clases de objetos en una categoría abeliana \mathcal{C} . Se dice que ω es \mathcal{X} -inyectivo si $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{X}, \omega) = 0$ para $i \geq 1$. Decimos que ω es un cogenerador relativo en \mathcal{X} si $\omega \subseteq \mathcal{X}$ y para cualquier $X \in \mathcal{X}$ existe una sucesión exacta corta*

$$0 \rightarrow X \rightarrow W \rightarrow X' \rightarrow 0,$$

con $W \in \omega$ y $X' \in \mathcal{X}$. Dualmente, tenemos la noción de \mathcal{X} -proyectivo y generador relativo en \mathcal{X} .

Pares de Frobenius en categorías abelianas

Definición A.28. [BMPS19, Definición 3.4] *Sea \mathcal{S} una categoría gruesa de una categoría abeliana \mathcal{C} , y \mathcal{F} y \mathcal{G} dos subcategorías de \mathcal{S} (pensadas como categorías exactas). Decimos que $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un par de \mathcal{S} -cotorsión izquierdo en \mathcal{C} si $\mathcal{F} = {}^{\perp_{1, \mathcal{S}}} \mathcal{G} := {}^{\perp_1} \mathcal{G} \cap \mathcal{S}$ y si para cada objeto $S \in \mathcal{S}$ existe una sucesión exacta corta*

$$0 \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow S \rightarrow 0,$$

con $F \in \mathcal{F}$ y $G \in \mathcal{G}$. Similarmente, tenemos las definiciones de par de \mathcal{S} -cotorsión derecho en \mathcal{C} . Finalmente, $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un par de \mathcal{S} -cotorsión si es ambos un par de \mathcal{S} -cotorsión izquierdo y derecho en \mathcal{C} .

Teorema A.29. [BMPS19, Teorema 5.4] Sea \mathcal{C} una categoría abeliana. Consideremos las siguientes clases de objetos en la categoría \mathcal{C}^2 :

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} &:= \{(\mathcal{X}, \omega) : (\mathcal{X}, \omega) \text{ es un par de Frobenius izquierdo en } \mathcal{C}\}, \\ \mathfrak{C} &:= \{(\mathcal{A}, \mathcal{B}) : (\mathcal{A}, \mathcal{B}) \text{ es un contexto débil izquierdo AB en } \mathcal{C}\}, \\ \mathfrak{P} &:= \{(\mathcal{F}, \mathcal{G}) : (\mathcal{F}, \mathcal{G}) \text{ es un par de Thick}(\mathcal{F})\text{-cotorsión en } \mathcal{C} \text{ con } \text{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = 0\}.\end{aligned}$$

Entonces, las siguientes condiciones se cumplen:

(1) Existe una correspondencia biyectiva

$$\Phi : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{C} \text{ dada por } (\mathcal{X}, \omega) \mapsto (\mathcal{X}, \omega^\wedge),$$

con inversa

$$\Psi : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{F} \text{ dada por } (\mathcal{A}, \mathcal{B}) \mapsto (\mathcal{A}, \mathcal{A} \cap \mathcal{B}).$$

(2) $\mathfrak{C} = \mathfrak{P}$.

Bibliografía

- [AA02] K. D. Akinci and R. Alizade. Special precovers in cotorsion theories. *Proc. Edinb. Math. Soc.* (2), 45(2):411–420, 2002.
- [AB89] M. Auslander and R.-O. Buchweitz. The homological theory of maximal Cohen-Macaulay approximations. *Mém. Soc. Math. France (N.S.)*, (38):5–37, 1989. Colloque en l’honneur de Pierre Samuel (Orsay, 1987).
- [AM93] J. Asensio Mayor and J. Martínez Hernández. On flat and projective envelopes. *J. Algebra*, 160(2):434–440, 1993.
- [Arg17] A. Argudín. Módulos Tilting de Dimensión Proyectiva Finita. Master’s thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2017.
- [ASS06] I. Assem, D. Simson, and A. Skowroński. *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1*, volume 65 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006. Techniques of representation theory.
- [Aus55] M. Auslander. On the dimension of modules and algebras (III). Global dimension. *Nagoya Math. J.*, 9:67–77, 1955.
- [Bas60] H. Bass. Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 95:466–488, 1960.
- [BEBE01] L. Bican, R. El Bashir, and E. E. Enochs. All modules have flat covers. *Bull. London Math. Soc.*, 33(4):385–390, 2001.

- [Ben09] D. Bennis. Rings over which the class of Gorenstein flat modules is closed under extensions. *Comm. Algebra*, 37(3):855–868, 2009.
- [BET05] S. Bazzoni, P. C. Eklof, and J. Trlifaj. Tilting cotorsion pairs. *Bull. London Math. Soc.*, 37(5):683–696, 2005.
- [Bla11] P. E. Bland. *Rings and their modules*. Berlin: Walter de Gruyter, 2011.
- [BM09] D. Bennis and N. Mahdou. A generalization of strongly Gorenstein projective modules. *J. Algebra Appl.*, 8(2):219–227, 2009.
- [BM10] D. Bennis and N. Mahdou. Global Gorenstein dimensions. *Proc. Am. Math. Soc.*, 138(2):461–465, 2010.
- [BMPS19] V. Becerril, O. Mendoza, M. A. Pérez, and V. Santiago. Frobenius pairs in abelian categories. Correspondences with cotorsion pairs, exact model categories, and Auslander-Buchweitz contexts. *J. Homotopy Relat. Struct.*, 14(1):1–50, 2019.
- [BMS18] V. Becerril, O. Mendoza, and V. Santiago. Relative gorenstein objects in abelian categories. *Preprint. arXiv:1810.08524*, 2018.
- [BP17] D. Bravo and M. A. Pérez. Finiteness conditions and cotorsion pairs. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 221(6):1249–1267, 2017.
- [BR07a] A. Beligiannis and I. Reiten. *Homological and Homotopical Aspects of Torsion Theories*, volume 883 of *Memoirs of the American Mathematical Society*. American Mathematical Society, 2007.
- [BR07b] A. Beligiannis and I. Reiten. Homological and Homotopical Aspects of Torsion Theories. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 188(883):viii+207, 2007.
- [CEG12] M. Cortés Izurdiaga, S. Estrada, and P. A. Guil Asensio. A model structure approach to the finitistic dimension conjectures. *Math. Nachr.*, 285(7):821–833, 2012.

- [Col75] R. R. Colby. Rings which have flat injective modules. *J. Algebra*, 35:239–252, 1975.
- [CT08] S. Crivei and B. Torrecillas. On some monic covers and epic envelopes. *Arab. J. Sci. Eng. Sect. C Theme Issues*, 33(2):123–135, 2008.
- [DC93] N. Ding and J. Chen. The flat dimensions of injective modules. *Manuscripta Math.*, 78(2):165–177, 1993.
- [DC96] N. Ding and J. Chen. Coherent rings with finite self-*FP*-injective dimension. *Comm. Algebra*, 24(9):2963–2980, 1996.
- [Din96] N. Ding. On envelopes with the unique mapping property. *Comm. Algebra*, 24(4):1459–1470, 1996.
- [DLM09] N. Ding, Y. Li, and L. Mao. Strongly Gorenstein flat modules. *J. Aust. Math. Soc.*, 86(3):323–338, 2009.
- [EEG08] E. E. Enochs, S. Estrada, and J. R. García Rozas. Gorenstein categories and Tate cohomology on projective schemes. *Math. Nachr.*, 281(4):525–540, 2008.
- [EJ95] E. E. Enochs and O. M. G. Jenda. Gorenstein injective and projective modules. *Math. Z.*, 220(4):611–633, 1995.
- [EJ00] E. E. Enochs and O. M. G. Jenda. *Relative Homological Algebra*, volume 30 of *De Gruyter Expositions in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2000.
- [ELR01] E. E. Enochs and J. A. López Ramos. *Gorenstein flat modules*. Nova Science Publishers, Inc., Huntington, NY, 2001.
- [ET01] P. C. Eklof and J. Trlifaj. How to make Ext vanish. *Bull. London Math. Soc.*, 33(1):41–51, 2001.
- [Fie71] D. J. Fieldhouse. Character modules. *Comment. Math. Helv.*, 46:274–276, 1971.
- [Gar99] J. R. García Rozas. *Covers and envelopes in the category of complexes of modules*. Boca Raton, FL: Chapman and Hall/CRC, 1999.

- [Gil04] J. Gillespie. The flat model structure on $\text{Ch}(R)$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356(8):3369–3390, 2004.
- [Gil08] J. Gillespie. Cotorsion pairs and degreewise homological model structures. *Homology Homotopy Appl.*, 10(1):283–304, 2008.
- [Gil10] J. Gillespie. Model structures on modules over Ding-Chen rings. *Homology Homotopy Appl.*, 12(1):61–73, 2010.
- [GKK91] E. L. Green, E. Kirkman, and J. Kuzmanovich. Finitistic dimension of finite-dimensional monomial algebras. *J. Algebra*, 136(1):37–50, 1991.
- [Gla89] S. Glaz. *Commutative Coherent Rings*, volume 1371 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, first edition, 1989.
- [GT06] R. Göbel and J. Trlifaj. *Approximations and Endomorphism Algebras of Modules*. De Gruyter Expositions in Mathematics. De Gruyter, 2006.
- [GZH91] E. L. Green and B. Zimmermann-Huisgen. Finitistic dimension of Artinian rings with vanishing radical cube. *Math. Z.*, 206(4):505–526, 1991.
- [HJ09] H. Holm and P. Jørgensen. Cotorsion pairs induced by duality pairs. *J. Commut. Algebra*, 1(4):621–633, 2009.
- [Hol04] H. Holm. Gorenstein homological dimensions. *J. Pure Appl. Algebra*, 189(1-3):167–193, 2004.
- [Hov02] M. Hovey. Cotorsion pairs, model category structures, and representation theory. *Math. Z.*, 241(3):553–592, 2002.
- [Iac16] A. Iacob. Gorenstein injective covers and envelopes over rings that satisfy the Auslander condition. *Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.)*, 85(1):165–172, 2016.
- [IT05] K. Igusa and G. Todorov. On the finitistic global dimension conjecture for Artin algebras. *Representations of Algebras and Related Topics, Fields Inst. Commun.*, 45:201–204, 2005.

- [Iya11] O. Iyama. Cluster tilting for higher Auslander algebras. *Adv. Math.*, 226(1):1–61, 2011.
- [KS03] H. Krause and Øyvind Solberg. Applications of cotorsion pairs. *J. London Math. Soc. (2)*, 68(3):631–650, 2003.
- [Mao18] L. Mao. Rings satisfying every finitely generated module has a Gorenstein projective (pre)envelope. *Communications in Algebra*, 46(5):2010–2022, 2018.
- [MD07a] L. Mao and N. Ding. Envelopes and covers by modules of finite FP-injective and flat dimensions. *Comm. Algebra*, 35(3):833–849, 2007.
- [MD07b] L. Mao and N. Ding. Weak global dimension of coherent rings. *Comm. Algebra*, 35(12):4319–4327, 2007.
- [MP11] F. Meng and Q. Pan. \mathcal{X} -Gorenstein projective and \mathcal{Y} -Gorenstein injective modules. *Hacet. J. Math. Stat.*, 40(4):537–554, 2011.
- [MS06] O. Mendoza and C. Saenz. Tilting Categories with applications to Stratifying Systems. *Journal of Algebra*, 302:419–449, 2006.
- [MT11] N. Mahdou and M. Tamekkante. Strongly Gorenstein flat modules and dimensions. *Chin. Ann. Math., Ser. B*, 32(4):533–548, 2011.
- [Pas91] D. S. Passman. *A course in ring theory*. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1991.
- [Pér16] M. A. Pérez. *Introduction to Abelian Model Structures and Gorenstein Homological Dimensions*. Monographs and Research Notes in Mathematics. CRC Press. Taylor and Francis, 2016.
- [Pin08] K. Pinzon. Absolutely pure covers. *Comm. Algebra*, 36(6):2186–2194, 2008.
- [Rot09] J. J. Rotman. *An introduction to homological algebra*. Universitext. Springer, New York, second edition, 2009.

- [Sal79] L. Salce. Cotorsion theories for abelian groups. In *Symposia Mathematica, Vol. XXIII (Conf. Abelian Groups and their Relationships to the Theory of Modules, INDAM, Rome, 1977)*, pages 11–32. Academic Press, London-New York, 1979.
- [Sie10] D. Sieg. *A Homological Approach to the Splitting Theory of PLS-spaces*. PhD thesis, Universität Trier, Universitätsring 15, 54296 Trier, 2010.
- [Sma06] S. Smalø. Local limitations of the ext functor do not exist. *Bull. London Math. Soc.*, 38(1):97–98, 2006.
- [ŠŠ18] J. Šaroch and J. Šťovíček. Singular compactness and definability for Σ -cotorsion and Gorenstein modules. *Preprint. arXiv: 1804.09080v2*, 2018.
- [Tam11] M. Tamekkante. \mathcal{X} -Gorenstein projective modules. *International Scholarly Research Network, ISNR Algebra*, Article ID 270814, 10 pages, doi: 10.5402/2011/270814, 2011.
- [Wan17] J. Wang. Ding projective dimension of Gorenstein flat modules. *Bull. Korean Math. Soc.*, 54(6):1935–1950, 2017.
- [Xu96] J. Xu. *Flat covers of modules*, volume 1634 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [Xu17] A. Xu. Gorenstein Modules and Gorenstein Model Structures. *Glasg. Math. J.*, 59(3):1–19, 2017.
- [Yan12] G. Yang. Homological properties of modules over Ding-Cheng rings. *J. Korean Math. Soc.*, 49(1):31–47, 2012.
- [YD15] X. Yang and N. Ding. On a question of gillespie. *Forum Math.*, 27(6):3205–3231, 2015.
- [YL11a] G. Yang and Z. Liu. Cotorsion pairs and model structures on $\text{Ch}(R)$. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 54:783–797, 2011.
- [YL11b] X. Yang and Z. Liu. Gorenstein projective, injective, and flat complexes. *Commun. Algebra*, 39(5):1705–1721, 2011.

- [YL12] G. Yang and Z. Liu. Stability of Gorenstein flat categories. *Glasg. Math. J.*, 54(1):177–191, 2012.
- [YLL13] G. Yang, Z. Liu, and L. Liang. Model structures on categories of complexes over Ding-Chen rings. *Commun. Algebra*, 41(1):50–69, 2013.
- [ZH11] G. Zhao and Z. Huang. n -strongly Gorenstein projective, injective and flat modules. *Comm. Algebra*, 39(8):3044–3062, 2011.
- [ZX19] P. Zhang and BL. Xiong. Separated monic representations II: Frobenius subcategories and RSS equivalences. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 372:981–1021, 2019.

Índice alfabético

- $(\mathcal{A}, k, \mathcal{B})$ -precubierta especial, 12
- $(\mathcal{A}, k, \mathcal{B})$ -preenvolvente especial, 12
- $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -resolución completa
 - izquierda, 84
- $GP_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}$ -objeto, 84
- \mathcal{A} -aproximación
 - derecha, 3
 - izquierda, 3
 - minimal derecha, 3
 - minimal izquierda, 3
- \mathcal{A} -cubierta, 3
- \mathcal{A} -envolvente, 3
- \mathcal{A} -precubierta, 3
 - especial, 3
- \mathcal{A} -preenvolvente, 3
 - especial, 3
- \mathcal{S} -contexto
 - AB débil derecho, 100
 - AB débil izquierdo, 100
- \mathcal{S} -precontexto
 - AB débil derecho, 100
 - AB débil izquierdo, 100
- \mathcal{S} -relacionado a, 104, 108
- \mathcal{X} -inyectivo, 164
- \mathcal{X} -complejo, 61
- \mathcal{X} -inyectivo, 4
- i -ésima sizigia, 156
- i -complemento ortogonal
 - derecho, 2
 - izquierdo, 3
- k -ésima suspensión, 59
- m -ésima esfera, 58
- m -ésimo disco, 57
- n -presentación finita, 116
- álgebra autoinyectiva, 56
- $\text{Hom}_R(-, \mathcal{Y})$ -acíclico, 12
- anillo
 - n -FC, 41
 - n -Iwanaga-Gorenstein, 35
 - IF izquierdo, 46
 - artiniano, 156
 - coherente, 157
 - Ding Chen, 41
 - Ding finito izquierdo, 43
 - GF-cerrado, 45
 - Gorenstein izquierdo, 36
 - noetheriano, 156
 - perfecto, 157
 - Quasi-frobenius, 36
 - Von Neumann, 42
- categoría
 - bicompleta, 69
- clase
 - $\text{FP}_\infty(R)$, 117

- \mathcal{X} -epic, 162
- $FP_n(R)$, 116
- de aproximación, 84
- de prueba, 84
- gruesa, 4
- gruesa derecha, 4
- gruesa izquierda, 4
- corresolvente, 4
- cubriente, 3
- envolvente, 3
- pre-corresolvente, 4
- pre-resolvente, 4
- precubriente, 3
- precubriente especial, 3
- preenvolvente, 3
- preenvolvente especial, 3
- resolvente, 4, 25
- cogenerador relativo, 4, 164
- compatible, 81
 - derecha, 81
 - izquierda, 81
- complejo
 - con términos en, 61
 - ortogonal grado a grado, 57
- complemento ortogonal total
 - derecho, 3
 - izquierdo, 3
- contexto
 - AB débil derecho, 100
 - AB débil izquierdo, 100
 - AB derecho, 100
 - AB izquierdo, 100
- corresolución, 2
- corte más grande, 80
 - derecho, 80
 - izquierdo, 79
- dimensión
 - global débil, 27
 - global Ding inyectiva, 41
 - global Ding proyectiva, 41
 - global Gorenstein inyectiva, 36
 - global Gorenstein plana, 45
 - global Gorenstein proyectiva, 36
 - inyectiva, 35
 - inyectiva relativa a, 3
 - proyectiva, 35
 - proyectiva relativa a, 3
 - corresolución, 2
 - débil, 157
 - Ding proyectiva, 41
 - global, 157
 - global absolutamente pura, 27
 - global inyectiva, 157
 - global proyectiva, 157
 - Gorenstein inyectiva, 13
 - Gorenstein plana, 45
 - Gorenstein proyectiva, 12
 - plana, 27
 - resolución, 2
- Hom interno, 61
- Lema
 - de la Serpiente, 155
 - del corrimiento, 156
 - García Rozas, 164
- módulo
 - n -SGP, 127, 160
 - FP_n -inyectivo, 125
 - absolutamente puro, 124
 - finitamente n -presentado, 116
 - absolutamente puro, 27

- Ding inyectivo, 40
- Ding proyectivo, 40
- finitamente presentado, 160
- Gorenstein inyectivo, 12
- Gorenstein plano, 37
- Gorenstein proyectivo, 12
- plano, 159
- objeto
 - $m\text{-SGP}_{(A,B)}$, 143
 - $m\text{-SGP}_{(A,B)}^{ex}$, 148
 - $m\text{-SWG}_{(A,B)}$, 128
- par
 - GP-admisible, 145, 162
 - GP-admisible débil, 145, 162
- par de
 - cotorsión cogenerado, 116
 - \mathcal{S} -Frobenius derecho, 95
 - \mathcal{S} -Frobenius izquierdo, 95
 - n -cotorsión, 7
 - n -cotorsión derecho, 7
 - n -cotorsión hereditario, 29
 - n -cotorsión izquierdo, 7
 - cotorsión completo, 6
 - cotorsión cortado, 74
 - cotorsión derecho completo, 6
 - cotorsión derecho cortado, 74
 - cotorsión hereditario, 25
 - cotorsión izquierdo completo, 6
 - cotorsión izquierdo cortado, 74
 - Frobenius derecho, 95
 - Frobenius derecho fuerte, 95
 - Frobenius izquierdo, 95
 - Frobenius izquierdo fuerte, 95
- precontexto
 - AB débil derecho, 100
 - AB débil izquierdo, 99
 - propiedad de factorización única, 20
 - resolución, 2
 - subcategoría
 - m -cluster tilting, 53
 - m -rígida, 17
 - sucesión exacta pura, 49
 - suficientes \mathcal{X} -objetos, 65