



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ASPECTOS GEOMÉTRICOS DE UN SISTEMA
CUÁNTICO DE ESPÍN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

MARTIN WIEDEMANN GUERRERO

TUTOR

DR. CHRYSOMALIS CHRYSOMALAKOS



CIUDAD UNIVERSITARIA, Cd.Mx., 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Wiedemann

Guerrero

Martín

5531134452

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

311272235

2. Datos del tutor

Dr.

Chryssomalis

Chryssomalakos

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Luis Fernando

Urrutia

Ríos

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Elías

Okón

Gurvich

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Yuri

Bonder

Grimberg

6. Datos del sinodal 4

Marco Antonio

Maceda

Santamaría

7. Datos del trabajo escrito

Aspectos Geométricos de un Sistema Cuántico de Espín

89 p

2020

Agradecimientos

Con este trabajo culmino una muy importante etapa en mi desarrollo profesional, la cual difícilmente hubiera conseguido sin muchas personas que son parte de mi vida. Definitivamente me siento en deuda con cada uno de ellos, pero por el momento lo menos que puedo hacer es expresarles mi gratitud.

Primeramente, y con argumentos de sobra, agradezco a mis padres. A mi mamá por formarme los valores y la esencia de la persona que ahora soy gracias al cuidado, cariño y bondad que me otorgó, y a mi papá por impulsar y fortalecer mi curiosidad; germinando en mí la semilla del conocimiento y la sabiduría.

Agradezco también a mis hermanos. A Jaime por enseñarme que ante la adversidad siempre se puede salir adelante y ser mejor persona cada día. A Iván por haber sido mi ejemplo a seguir y un gran amigo, y a Omar, quien ha sido mi más fiel acompañante de vida, por mostrarme que siempre va a existir alguien en quien pueda contar.

A mis abuelas, tíos y primos que, desde que tengo memoria, nos han brindado mucha ayuda. Particularmente agradezco a mi tía Liz, mi tía Emilia mi tía Juana y mi primo Luis por mostrar un gran cariño hacia a mí.

Muchas gracias a mi asesor, el Dr. Chryssomalis, por todo el tiempo, apoyo y sabiduría que me brindo en la realización de mi trabajo. Asimismo a mis sinodales, los doctores Luis Fernando Urrutia, Elías Okón, Yuri Bonder y Marco Antonio Maceda por aceptar formar parte de mi jurado y tomarse un espacio para leer mi escrito.

Un especial agradecimiento a Diana, a quien la vida puso en mi camino en una muy bonita casualidad, por todo el amor y experiencias que me ha brindado. Igualmente a su familia, a quienes ahora también considero mi familia, por todo el aprecio que me han mostrado.

Por supuesto agradezco a la UNAM, junto con todos sus trabajadores, por darme el espacio ideal y de excelente calidad que me permitió desarrollarme profesionalmente.

Finalmente, y no por eso menos importante, quiero agradecer a todos los grandes amigos que tengo. Sin duda ellos han sido una parte fundamental de mi vida. Especialmente quiero agradecer a Daniel (Zárate) por las inigualables experiencias que he vivido en su compañía y por ser un gran consejero de vida. A Alejandro, mi buen amigo de la infancia. A mis dos grandes amigas Mónica y Sandra. A Moisés, Brandon, Efrén, Ulises, Santiago, Saksevul, Alan, Daniela, Chema, Pancho, Nayeli, Aarón, Germán, Karla y Vianney.

Resumen

En este trabajo se introduce un enfoque geométrico de la mecánica cuántica y se discute el papel que toma el espacio proyectivo de Hilbert en el análisis del contenido físico de un sistema cuántico. Asimismo, con base en estas dos construcciones, se estudia la dinámica de un sistema de espín $s = 1$, exhibiendo detalladamente la manera en que se desarrolla esta formulación geométrica y las ventajas y sutilezas destacables que presenta esta visión.

Índice general

Resumen	IV
Introducción	1
1. Dinámica de un Electrón en un Campo Magnético	4
1.1. Hamiltoniano de interacción entre el espín y un campo magnético . . .	4
1.2. Cambio de coordenadas y solución a la ecuación de Schrödinger . . .	6
1.3. Evolución de los valores esperados del momento angular	11
1.4. Análisis y generalización del problema	16
2. Formulación Geométrica de la Mecánica Cuántica	18
2.1. Espacio de Kähler	19
2.2. Dinámica en la variedad de Kähler	25
2.3. El espacio proyectivo de Hilbert	34
3. Constelación de Majorana	35
3.1. Construcción de la constelación de Majorana	35
3.2. El espacio proyectivo a partir de la constelación de Majorana	38
3.3. Ejemplos de constelaciones	40
4. Formulación geométrica de un sistema cuántico de espín $s = 1$ en un campo magnético	43
4.1. Espacio proyectivo del sistema	44
4.2. La forma simpléctica heredada	49

4.3. Teorema de Darboux	53
4.4. Análisis de la dinámica en campos magnéticos	61
4.5. Matrices de Gell-Mann y dinámica en sistemas arbitrarios	68
5. Una Extraña Característica de los Estados Entrelazados	77
Conclusiones	82
Apéndice	84

Índice de figuras

1.1. Campo magnético oscilante.	5
1.2. Evolución de \bar{S} para tres estados en un campo magnético alineado al eje z	12
1.3. Estados en campo magnético oblicuo al eje z	13
1.4. Evolución del vector \bar{S} asociado al estado $ +\rangle$ en resonancia.	14
1.5. Evolución de \bar{S} para el estado $ \psi_{\frac{\pi}{3}}\rangle$ en resonancia.	15
1.6. Evolución de \bar{S} para estado paralelo al campo magnético en el sistema rotante.	16
3.1. Constelación del estado $ \Psi\rangle$ en un espacio de espín $s = 11/2$	40
3.2. Constelación de un estado con espín $s = 2$ tal que $c_2 = 0$ y $c_{-2} = 0$	40
3.3. Constelación de cuatro estados de la forma $ \Psi\rangle = (1, 1, \dots, 1, 1)$	41
3.4. Constelación de un estado con puntos distribuidos sobre la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$	42
4.1. Triángulo formado por las estrellas de una constelación arbitraria.	46
4.2.	46
4.3.	50
4.4. Evolución de la constelación de Majorana con hamiltoniano $\hat{H} = \gamma_3$ para seis condiciones iniciales distintas.	72
4.5. Evolución de la constelación para la condición inicial $(\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	73

4.6. Evolución de la constelación de Majorana con hamiltoniano $\hat{H} = \gamma_3$ con la condición inicial $P_1(0)$ y a la derecha gráfica paramétrica de los ángulos $(\alpha, \theta, \phi, \chi)$ en función del tiempo.	75
4.7. Evolución de la constelación con la condición inicial $P_2(0)$ y a la derecha gráfica paramétrica de los ángulos $(\alpha, \theta, \phi, \chi)$ en función del tiempo. .	75
4.8. Evolución de la constelación para la condición inicial $(\frac{\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	76

Introducción

Durante las últimas décadas uno de los principales problemas que ha surgido en la física es el de crear una teoría que unifique todas las demás. Sin duda, se ha logrado bastante, prueba de ello es la teoría cuántica de campos, que ha conseguido unificar parcialmente tres de las interacciones fundamentales: la fuerza electromagnética, la fuerza nuclear débil y la fuerza nuclear fuerte. Sin embargo, aún no existe una teoría satisfactoria que incluya la otra interacción fundamental, la gravitatoria.

Numerosas teorías han surgido para lograr ésto. Algunos de los intentos más famosos e importantes son, por ejemplo, la teoría de supercuerdas o la teoría M [1], cuyo enfoque principal consiste en crear una teoría cuántica de la gravedad. A pesar de los grandes esfuerzos y desarrollos de estas teorías aún se está lejos de conseguir esta unificación.

Existe un enfoque en cual se pretende abordar el problema desde otra perspectiva, y consiste en "geometrizar" la mecánica cuántica. Abhay Ashtekar (fundador principal de la teoría de la gravedad cuántica de bucles [2]) y T. Schilling en su artículo "Geometrical Formulation of Quantum Mechanics" [3] muestran el panorama que permite hacer esta formulación geométrica de la mecánica cuántica.

En la presente investigación se aborda el problema de dar una descripción geométrica de un sistema cuántico de espín, siguiendo la línea desarrollada en el artículo de Ashtekar y Schilling. Referencias complementarias sobre esta descripción geométrica se pueden encontrar en [4, 5, 6].

La estructura de este trabajo está compactada en cuatro capítulos; a continuación se dará un breve resumen de cada uno de ellos para mostrar la estructura general que se sigue en esta investigación.

En el capítulo primero se analiza un problema cuántico bien conocido, la descripción de un sistema de espín $s = 1/2$ inmerso en un campo magnético (ver [7, 8, 9]). Es aquí donde emerge la motivación del problema a resolver, pues se exhibe cómo un enfoque geométrico podría ser un buen punto de partida para ampliar el estudio del sistema de espín $1/2$ a otros más generales. Además, en el desarrollo de este capítulo sale a flote el porqué de la necesidad de trabajar en el espacio proyectivo de Hilbert para estudiar los sistemas cuánticos.

En los capítulos 2 y 3 se desarrollan las definiciones y conceptos necesarios para el entendimiento de este trabajo; así como las herramientas matemáticas que se utilizarán para lograr la descripción adecuada del formalismo geométrico.

El capítulo 2 está dedicado en su mayoría a exponer la formulación geométrica de la mecánica cuántica. Al final de este se introduce el espacio proyectivo de Hilbert. Naturalmente se utilizará un lenguaje afín con la geometría diferencial y simpléctica. Algunos libros estándares sobre estos temas son [10, 11, 12, 13]. También, como complemento, se pueden ver los siguientes tres escritos que fueron de bastante apoyo [14, 15, 16].

En el capítulo 3 se define la constelación de Majorana, la cual caracteriza los sistemas cuánticos por medio de puntos en la 2-esfera y se explica cómo esta caracterización se puede utilizar para representar el espacio proyectivo. El artículo original publicado por Majorana sobre este concepto puede verse en [17], también se puede consultar sobre esto en [18, 19, 20].

En el capítulo 4 es donde finalmente se expone y resuelve el problema principal de este trabajo: describir la dinámica de un sistema de espín $s = 1$ utilizando una formulación geométrica. Paralelo a esto se presenta un teorema fundamental, el teorema de Darboux, el cual muestra un marco canónico en el que siempre se puede abordar un problema en una variedad simpléctica. Referente al teorema, su desarrollo y demostración se puede consultar [21].

Por último, en el capítulo 5, mismo en donde concluye el desarrollo de esta investigación, como complemento a todo lo estudiado aquí, se plantea de una manera muy breve e introductoria un problema abierto que presentó (y no resolvió) Ingemar Bengtsson en su artículo titulado “A curious geometrical fact about entanglement” [22] en el cual muestra una característica geométrica de los estados entrelazados: Los estados maximalmente entrelazados forman una subvariedad lagrangiana mínima. Dicho problema se acopla perfectamente con los temas estudiados aquí, por lo que potencialmente representa un tentativo tema de investigación ulterior a este trabajo.

La mayor parte de lo presentado en este capítulo se basa en el artículo de Bengtsson [22], pero también puede consultarse [19] y [23] para información complementaria.

Capítulo 1

Dinámica de un Electrón en un Campo Magnético

El origen de este trabajo comienza con el análisis de un sistema físico bien conocido: un electrón que se encuentra en una región en la que hay un campo magnético variable. Es importante mencionar que el campo genera dos interacciones en el electrón, una está asociada al espín intrínseco de éste y la otra es debida a su movimiento en el espacio. Aquí nos concentraremos únicamente en la evolución del espín, la cual nos permitirá plantear la base para el desarrollo de esta investigación.

1.1. Hamiltoniano de interacción entre el espín y un campo magnético

Consideremos una región del espacio en la que hay un campo magnético que precesa con velocidad angular constante alrededor del eje z, cuya evolución está descrita por la siguiente expresión

$$\vec{B}(t) = (B \sin(\alpha) \cos(\omega t), B \sin(\alpha) \sin(\omega t), B \cos(\alpha)). \quad (1.1)$$

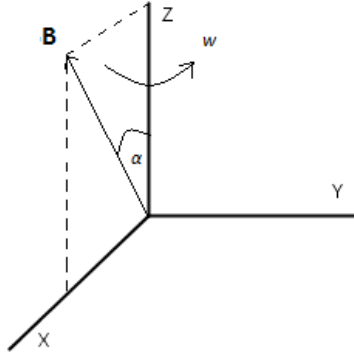


Figura 1.1: Campo magnético oscilante.

Supongamos ahora que colocamos un electrón en esta región. Éste, debido a su espín, posee un momento magnético intrínseco μ , el cual, interactúa con el campo magnético y genera un hamiltoniano de interacción igual a [24]

$$H = \bar{\mu} \cdot \bar{B}, \quad (1.2)$$

donde

$$\mu = \frac{e}{m_e} \hat{S}, \quad (1.3)$$

con \hat{S} el operador de espín

$$\hat{S} = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}. \quad (1.4)$$

Aquí $\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$ y $\hat{\sigma}_i$ son las matrices de Pauli

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

De este modo tenemos que la evolución del sistema está dada por la siguiente ecuación

$$i \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = \frac{e\hbar}{2m_e} (\bar{B} \cdot \hat{\sigma}) |\psi\rangle, \quad (1.6)$$

con $|\psi\rangle$ el espinor que describe el estado del electrón

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Por simplicidad utilizaremos unidades tales que $e = \hbar = m_e = 1$. Así, de la ecuación (1.2), tenemos que el hamiltoniano es

$$\hat{H} = \frac{B}{2} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & e^{-itw} \sin(\alpha) \\ e^{itw} \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

En la siguiente sección analizaremos la dinámica generada por este hamiltoniano.

1.2. Cambio de coordenadas y solución a la ecuación de Schrödinger

Para estudiar este sistema nos vamos a "parar" en un sistema de referencia donde el campo magnético esté fijo en el tiempo, es decir, un sistema que rota a velocidad angular igual a la de \bar{B} . Es evidente que la transformación adecuada es una rotación alrededor del eje z por un ángulo wt .

Los espinores, cuando el sistema de referencia es rotado un ángulo θ alrededor de un eje \bar{n} , transforman por medio de la siguiente regla

$$|\psi'\rangle = \hat{T} |\psi\rangle, \quad (1.9)$$

con \hat{T} dada por [25]

$$\hat{T} = e^{-i\frac{\theta}{2}\bar{n}\cdot\hat{\sigma}}. \quad (1.10)$$

Considerando que $\bar{n} = (0, 0, 1)$ y que $\theta = -wt$ tenemos

$$\hat{T} = e^{it\frac{w}{2}\hat{\sigma}_z} = I + it\frac{w}{2}\hat{\sigma}_z + \frac{(it\frac{w}{2}\hat{\sigma}_z)^2}{2!} + \frac{(it\frac{w}{2}\hat{\sigma}_z)^3}{3!} + \frac{(it\frac{w}{2}\hat{\sigma}_z)^4}{4!} + \dots \quad (1.11)$$

Reagrupando los términos pares e impares y considerando que $i^{2k} = (-1)^k$ y $(\hat{\sigma}_z)^{2k} = I$ obtenemos

$$\hat{T} = I \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{wt}{2}\right)^{2k} + i\hat{\sigma}_z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{wt}{2}\right)^{2k+1}. \quad (1.12)$$

Recordando que $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ y $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ obtenemos la siguiente expresión para \hat{T}

$$\hat{T} = I \cos\left(\frac{wt}{2}\right) + i\hat{\sigma}_z \sin\left(\frac{wt}{2}\right) = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}itw} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}itw} \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Reescribamos la ecuación de Schrodinger en el sistema de referencia definido por \hat{T} . Multiplicando la ecuación (1.9) por la matriz inversa, \hat{T}^{-1} , obtenemos

$$|\psi\rangle = \hat{T}^{-1} |\psi'\rangle, \quad (1.14)$$

donde es directo ver que

$$\hat{T}^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}itw} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}itw} \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Insertando ésto en la ecuación de Schrödinger se tiene

$$i\frac{\partial}{\partial t}(\hat{T}^{-1} |\psi'\rangle) = \hat{H}(\hat{T}^{-1} |\psi'\rangle). \quad (1.16)$$

Pero

$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{T}^{-1}|\psi'\rangle) = \frac{\partial \hat{T}^{-1}}{\partial t}|\psi'\rangle + \hat{T}^{-1}\frac{\partial |\psi'\rangle}{\partial t}; \quad (1.17)$$

así, sustituyendo la expresión anterior en (1.16) y despejando $i\frac{\partial |\psi'\rangle}{\partial t}$ se obtiene

$$i\frac{\partial |\psi'\rangle}{\partial t} = \left(\hat{T}\hat{H}\hat{T}^{-1} - i\hat{T}\frac{\partial \hat{T}^{-1}}{\partial t} \right) |\psi'\rangle. \quad (1.18)$$

La suma en el paréntesis del lado derecho de la ecuación (1.18) (que definiremos como \hat{H}') es el equivalente al hamiltoniano pero en el sistema de referencia rotante. El término $\hat{T}\hat{H}\hat{T}^{-1}$ no es más que la forma de \hat{H} en el sistema de referencia definido por la transformación \hat{T} , pero $i\hat{T}\frac{\partial \hat{T}^{-1}}{\partial t}$ es un término "ficticio" que aparece como consecuencia de describir el problema en dicho sistema no inercial. Al desarrollar y simplificar \hat{H}' tenemos

$$\hat{H}' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} B \cos(\alpha) - w & B \sin(\alpha) \\ B \sin(\alpha) & -B \cos(\alpha) + w \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Antes de resolver la evolución del sistema analicemos este hamiltoniano y comprobemos que es consistente con lo que esperábamos. La transformación fue preparada para observar a cada instante el campo magnético fijo en su posición inicial; que justo se encuentra en el plano $x - z$. Ésto explica por qué los términos H'_{12} y H'_{21} (que representan la contribución del campo magnético de las componentes x y y en el sistema de referencia rotante) ya no dependen del tiempo y además son reales, pues en este sistema la contribución del campo magnético en y es nula y en la dirección x es $B \sin(\alpha)$.

Los términos en la diagonal representan la contribución de la componente z del campo. En este caso, aparte de la contribución del campo original ($B \cos(\alpha)$), aparece un término ficticio, equivalente a un campo con magnitud $\frac{w}{2}$ en dirección $-\hat{z}$. Este término extra hace que los estados roten en el sistema rotante cuando se encuentran en reposo en el sistema de referencia original. Algunos casos se analizarán más adelante.

Regresando a la ecuación de Schrödinger tenemos que ésta toma la siguiente forma

$$i \begin{pmatrix} \dot{\psi}'_1 \\ \dot{\psi}'_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} B \cos(\alpha) - w & B \sin(\alpha) \\ B \sin(\alpha) & -B \cos(\alpha) + w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

en donde el punto arriba de una variable representa la derivada con respecto al tiempo de dicha variable.

Para resolver la ecuación diferencial anterior es necesario imponer una condición inicial. La más general corresponde a un estado arbitrario en el espacio de Hilbert de nuestro sistema de espín $1/2$.

Dada una base ortogonal cualquier estado, $|\psi\rangle$, puede escribirse como una combinación lineal de esta base. Si en particular consideramos la base formada por los eigenvectores del operador $\hat{\sigma}_z$ tenemos que

$$|\psi\rangle = (a + ib) |+\rangle + (c + id) |-\rangle = \begin{pmatrix} a + bi \\ c + di \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Considerando que los estados deben estar normalizados a la unidad y la invarianza al multiplicarlos por una fase podemos eliminar dos grados de libertad y escribir el estado de la siguiente forma

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\gamma} \end{pmatrix}, \quad (1.22)$$

donde $0 < \theta < \pi$ y $0 < \gamma < 2\pi$.

Esta representación nos permite identificar a cada estado con un punto de la 2-esfera, con la propiedad de que puntos diametralmente opuestos corresponden a dos estados ortogonales, correspondientes a la base formada por los eigenvectores de la proyección del operador de espín sobre la dirección que definen los dos puntos.

Con todo lo anterior tenemos que la evolución del sistema está regida por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\dot{\psi}'_1 &= \frac{i}{2} \left[(-B \cos(\alpha) + w) \psi'_1 - B \sin(\alpha) \psi'_2 \right], \\ \dot{\psi}'_2 &= \frac{i}{2} \left[-B \sin(\alpha) \psi'_1 + (B \cos(\alpha) - w) \psi'_2 \right], \\ |\psi(0)\rangle &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) \\ e^{i\gamma} \sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{1.23}$$

cuya solución exacta, ya en el sistema de referencia no primado, es

$$\psi_1 = e^{-\frac{1}{2}itw} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{t\Omega}{2}\right) + \frac{i \sin\left(\frac{t\Omega}{2}\right) (w \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - B \cos\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right))}{\Omega} \right), \tag{1.24}$$

$$\psi_2 = e^{\frac{1}{2}itw} \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{t\Omega}{2}\right) - \frac{i \sin\left(\frac{t\Omega}{2}\right) (w \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + B \sin\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right))}{\Omega} \right), \tag{1.25}$$

con

$$\Omega = \sqrt{B^2 - 2Bw \cos(\alpha) + w^2}.$$

En las ecuaciones (1.24) y (1.25) se puso $\gamma = 0$ debido a que resulta ser insustancial en la evolución del estado y hace menos manejables las ecuaciones.

1.3. Evolución de los valores esperados del momento angular

Con las ecuaciones (1.24) y (1.25), en principio, tenemos completa la descripción analítica del problema, pero, como puede verse, las expresiones no son muy sencillas de manipular algebraicamente y además no hay mucho que se pueda interpretar físicamente de éstas. Sin embargo, geoméricamente, el comportamiento del espín es relativamente fácil de estudiar y nos muestra características muy importantes del sistema.

Para poder mostrar esto es conveniente analizar la evolución de los valores esperados del espín en vez de estudiar directamente al estado. Consideremos el vector, \bar{S} , cuyas entradas son los valores esperados del espín en la dirección x , y y z , respectivamente

$$\bar{S}(t) = (S_x(t), S_y(t), S_z(t)), \quad (1.26)$$

donde

$$S_i(t) = \langle \psi(t) | \hat{S}_i | \psi(t) \rangle. \quad (1.27)$$

A continuación se muestran diagramas de distintos casos sobre la evolución del vector $\bar{S}(t)$ graficado paraméricamente.

- Campo magnético fijo en el eje z ($\alpha = 0$)

Este caso ocurre cuando el campo magnético es constante y apunta en dirección \hat{z} . Después de hacer todas las cuentas y simplificaciones (en mathematica) tenemos la siguiente expresión para el vector de estado $|\psi\rangle$ y para \bar{S}

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) \\ e^{iBt} \sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

$$\bar{S}(t) = (\sin(\theta) \cos(Bt), \sin(\theta) \sin(Bt), \cos(\theta)). \quad (1.29)$$

Nótese que S_z se mantiene constante en el tiempo y (S_x, S_y) traza una circunferencia con velocidad angular constante igual a B . Además el vector \bar{S} se mantiene a todo momento en la esfera unitaria.

En la siguiente figura se muestra un diagrama del comportamiento del vector $\bar{S}(t)$ para tres estados iniciales, $|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta_i}{2}) \\ \sin(\frac{\theta_i}{2}) \end{pmatrix}$, con $\theta_i = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}$ (representados por las respectivas flechas de color).

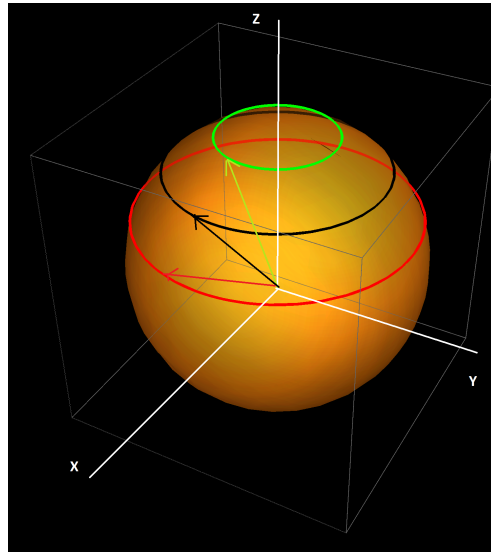


Figura 1.2: Evolución de \bar{S} para tres estados en un campo magnético alineado al eje z .

En esta configuración podemos imaginar que los electrones precesan alrededor del vector \bar{B} . Este comportamiento, como se esperaba, no depende de la orientación del campo. En la figura 1.3 se muestra la evolución nuevamente de los estados con $\theta_i = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}$ pero en el caso cuando el campo magnético forma un ángulo con el eje z de $\pi/3$ y $\pi/2$ radianes respectivamente y es (al igual que en el caso anterior) independiente del tiempo.

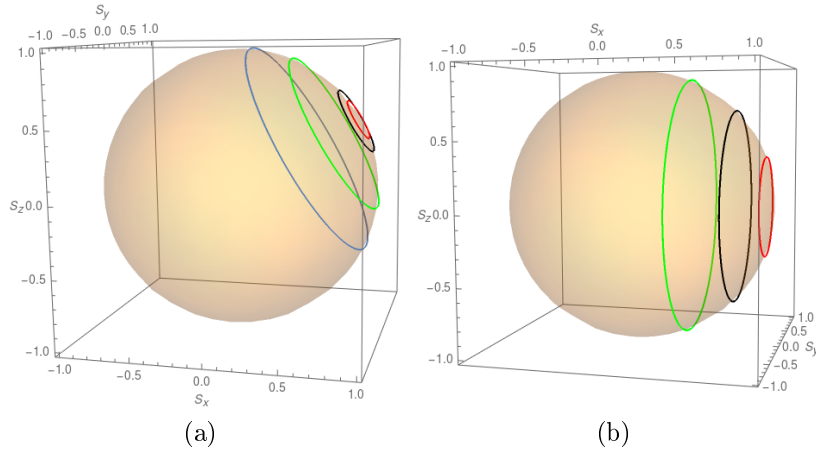


Figura 1.3: Estados en campo magnético oblicuo al eje z .

Observemos que en los dos casos de la figura anterior el vector \bar{S} precesa nuevamente alrededor del campo magnético. Este fenómeno es válido siempre, los electrones precesan alrededor de \bar{B} .

Analicemos ahora casos en donde el campo magnético depende del tiempo.

- En resonancia ($w = B \cos(\alpha)$) y estado inicial $|+\rangle$

Cuando la velocidad angular es tal que $w = B \cos(\alpha)$ ocurre algo muy interesante, pues como se puede ver de la ecuación (1.19) esta frecuencia es tal que en el sistema de referencia rotante la componente z del campo magnético es cero, de modo que este apunta en dirección \hat{x} visto desde el sistema no inercial.

Si consideramos $|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nuestro estado inicial tenemos que

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{2}Bt \sin(\alpha)\right) \\ -i \sin\left(\frac{1}{2}Bt \sin(\alpha)\right) e^{iBt \cos(\alpha)} \end{pmatrix}, \quad (1.30)$$

$$\bar{S} = (\sin(Bt \sin(\alpha)) \sin(Bt \cos(\alpha)), -\sin(Bt \sin(\alpha)) \cos(Bt \cos(\alpha)), \cos(Bt \sin(\alpha))). \quad (1.31)$$

De estas ecuaciones puede verse que después de un tiempo $t_r = \pi/B \sin \alpha$ el estado $|+\rangle$ habrá evolucionado al estado $|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

El siguiente diagrama muestra la evolución del vector \vec{S} de un tiempo $t = 0$ a $t = t_r$ para este estado.

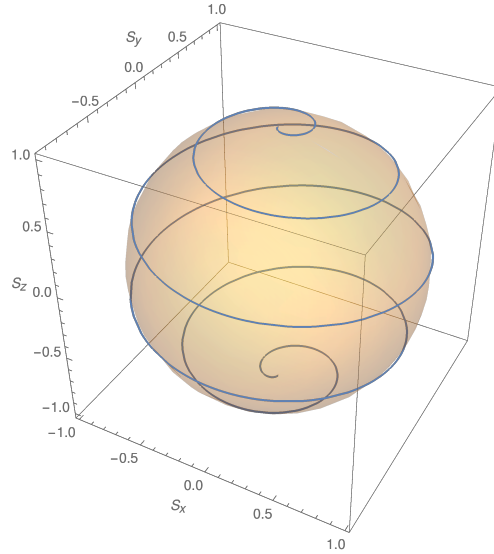


Figura 1.4: Evolución del vector \vec{S} asociado al estado $|+\rangle$ en resonancia.

El vector \vec{S} empieza en el polo norte y llega hasta el polo sur rodeando la esfera. Sigue esta trayectoria porque el campo magnético rota alrededor del eje z y \vec{S} va "siguiendo" al campo.

Veamos dos ejemplos más.

- En resonancia y estado inicial $|\psi_{\pi/3}\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) \end{pmatrix}$

Este ejemplo es muy similar al anterior, la única diferencia está en el estado inicial. La siguiente figura muestra la evolución del vector \vec{S} .

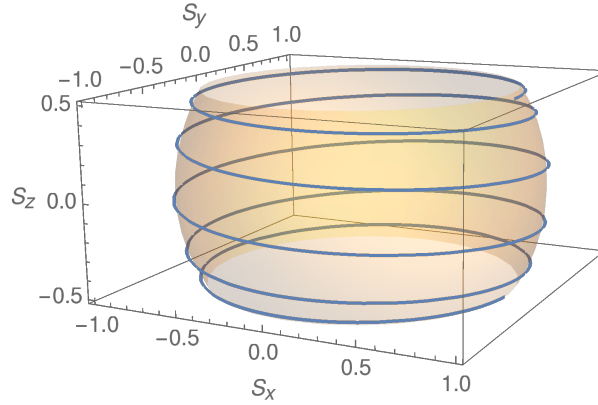


Figura 1.5: Evolución de \vec{S} para el estado $|\psi_{\pi/3}\rangle$ en resonancia.

Notemos que se tiene un comportamiento similar al anterior, pero en este caso el vector \vec{S} no recorre toda la esfera, sino que se queda acotado entre dos paralelos con altura respecto al ecuador de $\pm \cos(\pi/3)$.

- Estado inicial paralelo al campo magnético

Este estado fue preparado de modo que sea paralelo al campo magnético visto desde el sistema de referencia rotante en $t = 0$. En este sistema, la componente z del campo aparenta ser $B_z = \cos(\alpha) - w$ mientras que $B_x = \sin(\alpha)$ (ver ec. 1.19). De este modo se tiene que el estado inicial $|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$, con

$$\theta = \arctan(\sin(\alpha)/(\cos(\alpha) - w)) \quad (1.32)$$

es paralelo a \vec{B} en el sistema de referencia rotante. En la figura 1.6 se muestra la evolución de \vec{S} en rojo y el campo magnético en azul.

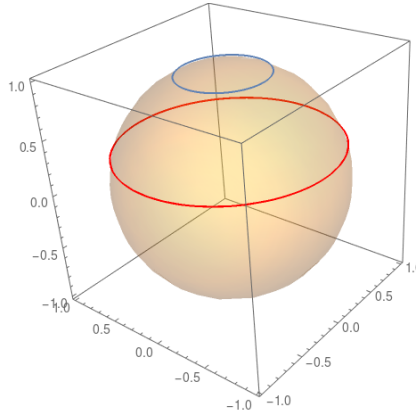


Figura 1.6: Evolución de \bar{S} para estado paralelo al campo magnético en el sistema rotante.

Como puede verse tanto \bar{S} y \bar{B} precesan alrededor del eje z. Esto es nuevamente consistente con lo esperado, pues un estado alineado al campo magnético debería quedarse estático; pero fue puesto así en el sistema rotante, por lo que al pasar al sistema original rotará a la par con el campo magnético, aunque ya en el sistema original, \bar{S} está más abajo que \bar{B} ; consecuencia de que se alineó con un campo "ficticio".

1.4. Análisis y generalización del problema

El desarrollo anterior sobre la dinámica de un sistema cuántico de espín 1/2 es el punto de partida para la posterior generalización del problema. Resaltemos los detalles de mayor relevancia sobre los cuales descansa la motivación del tema central de este trabajo.

El primero es que la dinámica del espín es esencialmente la misma en todos los casos, el electrón precesa alrededor del campo magnético. Si el campo varía con el tiempo igual precesará alrededor de éste pero a cada instante; por lo que estudiar el sistema únicamente con un campo magnético constante es suficiente para una descripción general del problema.

Otro detalle importante es que, aunque el espacio de Hilbert para un sistema de espín $1/2$ es, en principio, un sistema 4-dimensional, por medio de la condición de normalidad de los estados y la libertad en la fase de éstos pudimos reducir dos grados de libertad en el espacio. Esto último, evidentemente, es válido en cualquier sistema cuántico y lo que está en el fondo es que el contenido físico de un sistema está determinado totalmente por un espacio muy importante: el espacio proyectivo de Hilbert.

Por otro lado, el éxito en la resolución del problema se debió en gran medida a que estudiamos el sistema por medio de la evolución del vector \bar{S} , el cual, se mantenía siempre en la esfera unitaria y trazaba trayectorias fáciles de caracterizar. Es decir, logramos describir y resolver el problema utilizando un enfoque mayormente geométrico en lugar de algebraico.

Finalmente, en este caso particular resulta que el vector \bar{S} coincide con una representación cuántica de los sistemas en la cual los estados son identificados por medio de puntos en la esfera unitaria. Esto sugiere que es conveniente describir los sistemas en esta representación, conocida como la constelación de Majorana.

Lo anterior nos motiva a estudiar un sistema cuántico de espín $s = 1$ inmerso en un campo magnético constante, pero apoyándonos en la representación de Majorana y utilizando un formalismo bastante útil, que consiste en identificar el espacio de Hilbert con una variedad simpléctica; haciendo que el problema, inicialmente algebraico, se convierta en uno geométrico.

Capítulo 2

Formulación Geométrica de la Mecánica Cuántica

El proceso formal de describir un sistema cuántico en términos geométricos consiste esencialmente en transcribir el espacio de Hilbert y su correspondiente dinámica en términos del formalismo de la mecánica hamiltoniana.

Esto último podría parecer una regresión en el problema, pues estamos haciendo una formulación clásica de un problema cuántico, pero, en cierto modo, surge de manera natural y conceptualmente es un tratamiento muy útil e importante.

El punto de partida de la construcción es que el espacio de Hilbert de cualquier sistema cuántico puede ser identificado como una variedad de Kähler. Ésto inmediatamente permite dar una formulación geométrica de los postulados de la mecánica cuántica, la cual, aunque equivalente a la formulación algebraica, proporciona un enfoque distinto y cada una puede tener sus respectivas ventajas, dependiendo del contexto del problema.

Las herramientas y conceptos para hacer dicha formulación de manera precisa son avanzados y muy técnicos, así que solo se explicarán de manera introductoria, mencionando las ideas principales y sin entrar a detalle con todos los fundamentos matemáticos.

Las referencias básicas de este capítulo son [2, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16].

2.1. Espacio de Kähler

A continuación mostraremos la manera en que un espacio de Hilbert puede identificarse con una variedad de Kähler. Antes que nada, una variedad de Kähler es una variedad con tres estructuras mutuamente compatibles: una estructura compleja, una estructura riemanniana y una estructura simpléctica. Esta última, la estructura simpléctica, se obtiene cuando en una variedad se puede definir una 2-forma, Ω , que es cerrada y no degenerada [26]

- $d\Omega = 0$,
- Para todo $X \neq 0 \in M$ existe Y tal que $\Omega(X, Y) \neq 0$.

Consideremos el espacio de Hilbert y una base sobre este $\{|\sigma_k\rangle\}$. Sea ahora $|\Psi\rangle$ un ket arbitrario en el espacio

$$|\Psi\rangle = \sum_k \psi_k |\sigma_k\rangle, \quad (2.1)$$

donde $\psi_k = \psi_k^R + i\psi_k^I$. A cada ket le asociamos el siguiente objeto Ψ

$$|\Psi\rangle \rightarrow \Psi := \begin{pmatrix} \psi_1^R \\ \vdots \\ \psi_n^R \\ \psi_1^I \\ \vdots \\ \psi_n^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi^R \\ \Psi^I \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

El conjunto de todos estos elementos forman la variedad, que denotaremos como M , además, la elección de la base $\{|\sigma_k\rangle\}$ define las coordenadas locales de nuestra variedad [3]

$$\langle \sigma_k | \psi \rangle = (q_k + ip_k), \quad (2.3)$$

es decir, las variables $\{\psi_k^R, \psi_k^I\}$ son el conjunto de nuestras coordenadas y momentos generalizados, respectivamente.

La estructura compleja es adquirida por medio de un operador

$$J : M \rightarrow M, \quad (2.4)$$

que cumple la siguiente propiedad

$$J \begin{pmatrix} \Psi^R \\ \Psi^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Psi^I \\ \Psi^R \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Notemos que $J^2 = -I$; por lo que J toma el papel del número imaginario i .

La estructura simpléctica y riemanniana de la variedad son dotadas a través del producto interno definido en el espacio de Hilbert. Consideremos dos kets arbitrarios

$$|\Psi\rangle = \sum_k \psi_k |\sigma_k\rangle, \quad |\Phi\rangle = \sum_k \phi_k |\sigma_k\rangle. \quad (2.6)$$

Definimos a G y Ω como las matrices $2n \times 2n$ que hacen que se cumpla la siguiente ecuación

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \frac{1}{2} \Psi^T G \Phi + \frac{i}{2} \Psi^T \Omega \Phi, \quad (2.7)$$

donde Ψ y Φ están definidos como en la ecuación (2.2). Por las propiedades del producto interno se puede probar que G es un producto interior definido positivo no degenerado y por tanto define una estructura riemanniana en la variedad y también que Ω define una forma simpléctica en el espacio. Además, se puede mostrar que [19]

$$G_{ij} = \Omega_{ik} J_j^k, \quad (2.8)$$

y como se tiene que $J^2 = -I$ entonces la terna (J, G, Ω) forma un espacio de Kähler.

La forma simpléctica, Ω , nos permitirá formular una dinámica (en el espíritu de la mecánica hamiltoniana) equivalente a la dinámica generada por la ecuación de Schrödinger en el espacio de Hilbert.

La métrica G , por otro lado, contiene información cuántica que no tiene equivalente clásico. Ésto se debe a que está asociada con el producto de Jordan entre los operadores del espacio de Hilbert, por lo que está relacionada, por ejemplo, con el principio de incertidumbre de Heisenberg o el colapso de la función de onda ocurrido durante el proceso de medición [3]. En este trabajo no nos concentraremos en esta parte sino en todo lo referente a la forma simpléctica.

Para familiarizarnos con los conceptos previos veamos un ejemplo particular; estudiemos el espacio de Kähler para un sistema de espín $s = 1/2$.

Espacio de Kähler para $s = 1/2$

Consideremos un sistema con espín $s = 1/2$ y sea $|\Psi\rangle$ un ket arbitrario

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1^R + i\psi_1^I \\ \psi_2^R + i\psi_2^I \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Por conveniencia etiquetaremos las partes real e imaginaria con índices del uno al cuatro para así escribir al ket de la siguiente manera

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 + i\psi_3 \\ \psi_2 + i\psi_4 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

De este modo tenemos que el elemento asociado al ket en la variedad de Kähler es

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Para definir al operador J notemos lo siguiente

$$|i\Psi\rangle := i|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} -\psi_3 + i\psi_1 \\ -\psi_4 + i\psi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Se sigue que

$$i\Psi = \begin{pmatrix} -\psi_3 \\ -\psi_4 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Lo anterior nos sugiere definir a J de la siguiente manera

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Bajo esta definición se cumple que $J^2 = -I$.

Para encontrar G y Ω consideremos el siguiente ket $|\Phi\rangle = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_3 \\ \phi_2 + i\phi_4 \end{pmatrix}$ y escribamos el producto interno entre $|\Psi\rangle$ y $|\Phi\rangle$ de la forma sugerida en la ecuación (2.7)

$$\langle\Psi|\Phi\rangle = \frac{1}{2}(2\psi_1\phi_1 + 2\psi_2\phi_2 + 2\psi_3\phi_3 + 2\psi_4\phi_4) + \frac{i}{2}(2\psi_1\phi_3 + 2\psi_2\phi_4 - 2\psi_3\phi_1 - 2\psi_4\phi_2). \quad (2.15)$$

Por inspección es fácil concluir que las expresiones para G y Ω son

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I, \quad (2.16)$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -2J. \quad (2.17)$$

Notemos que estas definiciones son consistentes con la ecuación (2.8) ya que

$$\Omega J = -2J^2 = 2I = G. \quad (2.18)$$

Por último, construyamos los operadores análogos a las matrices de Pauli; empecemos con σ_y . Se tiene que

$$|\sigma_y \Psi\rangle := \sigma_y |\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_4 - i\psi_2 \\ -\psi_3 + i\psi_1 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

De aquí obtenemos

$$\sigma_y \Psi = \begin{pmatrix} \psi_4 \\ -\psi_3 \\ -\psi_2 \\ \psi_1 \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

y por lo tanto

$$\sigma_y \rightarrow \Sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

De manera análoga tenemos

$$\sigma_x \Psi = \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_1 \\ \psi_4 \\ \psi_3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ -\psi_2 \\ \psi_3 \\ -\psi_4 \end{pmatrix}; \quad (2.22)$$

y entonces

$$\Sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix}, \quad \Sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Con lo anterior ya tenemos completa la estructura de nuestra variedad, pues recordemos que las matrices de Pauli, junto con la identidad, son una base para el conjunto de los operadores hermitianos en el espacio de Hilbert.

El ejemplo previo muestra cómo obtener la estructura del espacio, pero para finalizar la construcción evidentemente nos falta describir la dinámica de un sistema en dicho espacio. Ésto es precisamente lo que desarrollaremos en la siguiente sección.

2.2. Dinámica en la variedad de Kähler

Ya descrita la estructura de la variedad de Kähler analicemos la dinámica en el espacio.

En la mecánica hamiltoniana los observables están identificados por funciones reales. A cada función, f , se le asocia un campo vectorial hamiltoniano, X_f , el cual está determinado por la forma simpléctica de acuerdo a la siguiente definición:

Decimos que X_f es el campo vectorial hamiltoniano de f si para todo campo vectorial Y se cumple [4]

$$df(Y) = \Omega(X_f, Y). \quad (2.24)$$

De lo anterior, en coordenadas locales (ver apéndice A), se tiene que

$$X_f^\mu = -(\Omega^{-1})^{\mu\nu} df_\nu. \quad (2.25)$$

Otra definición importante es la del corchete de Poisson de las funciones f y g

$$\{f, g\} = \Omega(X_f, X_g). \quad (2.26)$$

En particular si H es el hamiltoniano del sistema se tiene que la dinámica del sistema viene descrita por el flujo de éste, es decir, la trayectoria del sistema, $\Psi(t)$, satisface la ecuación diferencial

$$\dot{\Psi} = X_H. \quad (2.27)$$

Por otro lado, en la visión algebraica, la evolución del sistema está regida por la ecuación de Schrödinger

$$i \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi\rangle. \quad (2.28)$$

Si hacemos la identificación de cada término por su correspondiente en la variedad tendríamos que la ecuación equivalente de Schrödinger tomaría la siguiente forma

$$J \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \tilde{H} \Psi, \quad (2.29)$$

o equivalentemente

$$\dot{\Psi} = -J \tilde{H} \Psi. \quad (2.30)$$

Nótese que estamos usando el símbolo " \wedge " arriba de H para denotar al hamiltoniano en el espacio de Hilbert y " \sim " para denotar el hamiltoniano en la variedad de Kähler.

Escribamos al operador \hat{H} de la forma más general posible en alguna base arbitraria

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} H_{11}^R + H_{11}^I & H_{12}^R + iH_{12}^I & \dots & H_{1n}^R + iH_{1n}^I \\ H_{21}^R + iH_{21}^I & H_{22}^R + iH_{22}^I & \dots & H_{2n}^R + iH_{2n}^I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1}^R + iH_{n1}^I & H_{n2}^R + iH_{n2}^I & \dots & H_{nn}^R + iH_{nn}^I \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Con desarrollos análogos a los hechos en el análisis de espín 1/2, se puede mostrar que \tilde{H} , el hamiltoniano en la variedad, y el operador J tienen la siguiente forma

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} H_{11}^R & H_{12}^R & \dots & H_{1n}^R & -H_{11}^I & -H_{12}^I & \dots & -H_{1n}^I \\ H_{12}^R & H_{22}^R & \dots & H_{2n}^R & -H_{21}^I & -H_{22}^I & \dots & -H_{2n}^I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1}^R & H_{n2}^R & \dots & H_{nn}^R & -H_{n1}^I & -H_{n2}^I & \dots & -H_{nn}^I \\ H_{11}^I & H_{12}^I & \dots & H_{1n}^I & H_{11}^R & H_{12}^R & \dots & H_{1n}^R \\ H_{21}^I & H_{22}^I & \dots & H_{2n}^I & H_{12}^R & H_{22}^R & \dots & H_{2n}^R \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1}^I & H_{n2}^I & \dots & H_{nn}^I & H_{n1}^R & H_{n2}^R & \dots & H_{nn}^R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Re}[\hat{H}] & -\text{Im}[\hat{H}] \\ \text{Im}[\hat{H}] & \text{Re}[\hat{H}] \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Reescribiendo la ecuación (2.31) con estas definiciones tenemos

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi}_1^R \\ \dot{\psi}_2^R \\ \vdots \\ \dot{\psi}_n^R \\ \dot{\psi}_1^I \\ \dot{\psi}_2^I \\ \vdots \\ \dot{\psi}_n^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11}^I & H_{12}^I & \dots & H_{1n}^I & H_{11}^R & H_{12}^R & \dots & H_{1n}^R \\ H_{21}^I & H_{22}^I & \dots & H_{2n}^I & H_{12}^R & H_{22}^R & \dots & H_{2n}^R \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1}^I & H_{n2}^I & \dots & H_{nn}^I & H_{n1}^R & H_{n2}^R & \dots & H_{nn}^R \\ -H_{11}^R & -H_{12}^R & \dots & -H_{1n}^R & H_{11}^I & H_{12}^I & \dots & H_{1n}^I \\ -H_{12}^R & -H_{22}^R & \dots & -H_{2n}^R & H_{21}^I & H_{22}^I & \dots & H_{2n}^I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -H_{n1}^R & -H_{n2}^R & \dots & -H_{nn}^R & H_{n1}^I & H_{n2}^I & \dots & H_{nn}^I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1^R \\ \psi_2^R \\ \vdots \\ \psi_n^R \\ \psi_1^I \\ \psi_2^I \\ \vdots \\ \psi_n^I \end{pmatrix},$$

con lo que obtenemos las siguientes ecuaciones que codifican la evolución del sistema en M de manera equivalente al espacio de Hilbert

$$\begin{aligned}
 \dot{\psi}_1^R &= \sum_1^n (H_{1i}^I \psi_i^R + H_{1i}^R \psi_i^I), \\
 &\vdots \\
 \dot{\psi}_n^R &= \sum_1^n (H_{ni}^I \psi_i^R + H_{ni}^R \psi_i^I), \\
 \dot{\psi}_1^I &= \sum_1^n (-H_{1i}^R \psi_i^R + H_{1i}^I \psi_i^I), \\
 &\vdots \\
 \dot{\psi}_n^I &= \sum_1^n (-H_{ni}^R \psi_i^R + H_{ni}^I \psi_i^I).
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

La cuestión inmediata que surge es si siempre es posible definir una función, $H : M \rightarrow \mathbf{R}$, cuyo campo vectorial hamiltoniano defina un flujo que reproduzca las ecuaciones anteriores. Con ésto tendríamos que la dinámica en el espacio de Hilbert se puede traducir de manera totalmente equivalente al espacio de Kähler.

Resulta que siempre es posible encontrar esta función hamiltoniana y probaremos que justo resulta ser el valor esperado del operador \hat{H} [3]

$$H = \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = \Psi^T \tilde{H} \Psi. \tag{2.35}$$

Explícitamente:

$$H = \left(\psi_1^R, \dots, \psi_n^R, \psi_1^I, \dots, \psi_n^I \right) \begin{pmatrix} H_{11}^R & \dots & H_{1n}^R & -H_{11}^I & \dots & -H_{1n}^I \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1}^R & \dots & H_{nn}^R & -H_{n1}^I & \dots & -H_{nn}^I \\ H_{11}^I & \dots & H_{1n}^I & H_{11}^R & \dots & H_{1n}^R \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1}^I & \dots & H_{nn}^I & H_{n1}^R & \dots & H_{nn}^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1^R \\ \vdots \\ \psi_n^R \\ \psi_1^I \\ \vdots \\ \psi_n^I \end{pmatrix}. \tag{2.36}$$

Desarrollando se tiene

$$H = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\psi_i^R H_{ij}^R \psi_j^R - \psi_i^R H_{ij}^I \psi_j^I + \psi_i^I H_{ij}^I \psi_j^R + \psi_i^I H_{ij}^R \psi_j^I). \quad (2.37)$$

Ahora, si elegimos las coordenadas $(\psi_1^R, \psi_2^R, \dots, \psi_n^R, \psi_1^I, \psi_2^I, \dots, \psi_n^I)$ la forma simpléctica toma la siguiente expresión

$$\Omega = 2(d\psi_1^R \wedge d\psi_1^I + d\psi_2^R \wedge d\psi_2^I + \dots + d\psi_n^R \wedge d\psi_n^I). \quad (2.38)$$

O en forma matricial

$$\Omega = 2 \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}; \quad (2.39)$$

con inversa

$$\Omega = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Así, considerando que

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial \psi_1^R}, \dots, \frac{\partial H}{\partial \psi_n^R}, \frac{\partial H}{\partial \psi_1^I}, \dots, \frac{\partial H}{\partial \psi_n^I} \right), \quad (2.41)$$

el campo vectorial hamiltoniano de H (ver (2.25)) se ve como

$$X_H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \psi_1^I} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial \psi_n^I} \\ -\frac{\partial H}{\partial \psi_1^R} \\ \vdots \\ -\frac{\partial H}{\partial \psi_n^R} \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

Por otro lado, derivando (2.37) con respecto a ψ_k^R

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \psi_k^R} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\delta_{ik} H_{ij}^R \psi_j^R + \psi_i^R H_{ij}^R \delta_{kj} - \delta_{ik} H_{ij}^I \psi_j^I + \psi_i^I H_{ij}^I \delta_{jk}) \\ &= \sum_{i=1}^n [(H_{ki}^R + H_{ik}^R) \psi_i^R - (H_{ki}^I - H_{ik}^I) \psi_i^I]. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Pero sabemos que \hat{H} debe ser hermitiano, de modo que

$$H_{ik}^R = H_{ki}^R, \quad H_{ik}^I = -H_{ki}^I. \quad (2.44)$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial H}{\partial \psi_k^R} = 2 \sum_{i=1}^n [H_{ki}^R \psi_i^R - H_{ki}^I \psi_i^I]. \quad (2.45)$$

De manera totalmente análoga al derivar con respecto a ψ_k^I se obtiene

$$\frac{\partial H}{\partial \psi_k^I} = 2 \sum_{i=1}^n [H_{ki}^R \psi_i^I + H_{ki}^I \psi_i^R]. \quad (2.46)$$

Sustituyendo (2.45) y (2.46) en la expresión para X_f tenemos

$$X_H = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n [H_{1i}^R \psi_i^I + H_{1i}^I \psi_i^R] \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n [H_{ni}^R \psi_i^I + H_{ni}^I \psi_i^R] \\ \sum_{i=1}^n [-H_{1i}^R \psi_i^R + H_{1i}^I \psi_i^I] \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n [-H_{ni}^R \psi_i^R + H_{ni}^I \psi_i^I] \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

y de la ecuación (2.27)

$$\dot{\Psi} = X_H$$

la dinámica del sistema queda descrita en las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
 \dot{\psi}_1^R &= \sum_1^n (H_{1i}^T \psi_i^I + H_{1i}^I \psi_i^R), \\
 &\vdots \\
 \dot{\psi}_n^R &= \sum_1^n (H_{ni}^R \psi_i^R + H_{ni}^I \psi_i^I), \\
 \dot{\psi}_1^I &= \sum_1^n (-H_{1i}^R \psi_i^R + H_{1i}^I \psi_i^I), \\
 &\vdots \\
 \dot{\psi}_n^I &= \sum_1^n (-H_{ni}^R \psi_i^R + H_{ni}^I \psi_i^I).
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

¡Qué son exactamente las mismas de la ecuaciones de (2.34)! Es decir, la ecuación $\dot{\Psi} = X_H$ con $H = \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle$ es completamente equivalente a la ecuación de Schrödinger.

Nuevamente, para aterrizar ideas, analicemos el caso de $s = 1/2$ con un campo magnético paralelo al eje z .

Dinámica para $s = 1/2$

Consideremos un sistema de espín $s = 1/2$ inmerso en un campo magnético uniforme en dirección z . Por la ecuación (1.2) tenemos que $\hat{H} = \frac{B}{2} \sigma_z$. Calculemos el valor esperado de este hamiltoniano

$$H = \Psi^T \tilde{H} \Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) \begin{pmatrix} B/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \frac{B}{2} (\psi_1^2 - \psi_2^2 + \psi_3^2 - \psi_4^2). \tag{2.49}$$

De lo anterior tenemos

$$dH = B \begin{pmatrix} \psi_1 & -\psi_2 & \psi_3 & -\psi_4 \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

Para conocer el campo vectorial hamiltoniano de H es necesario saber la expresión de la forma simpléctica y su inversa. Como ya se vio anteriormente se tiene

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.52)$$

por lo que el campo hamiltoniano de H es

$$X_H = -\Omega^{-1}dH = \frac{B}{2} \begin{pmatrix} \psi_3 \\ -\psi_4 \\ -\psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

Así, de (2.27) ($\dot{\Psi} = X_H$) obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \frac{B}{2}\psi_3, \\ \dot{\psi}_2 &= -\frac{B}{2}\psi_4, \\ \dot{\psi}_3 &= -\frac{B}{2}\psi_1, \\ \dot{\psi}_4 &= \frac{B}{2}\psi_2. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Con la ecuación de Schrödinger las ecuaciones de evolución serían

$$i \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi\rangle; \quad (2.55)$$

o sea

$$i \begin{pmatrix} \dot{\psi}_1 + i\dot{\psi}_3 \\ \dot{\psi}_2 + i\dot{\psi}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B/2 & 0 \\ 0 & -B/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 + i\psi_3 \\ \psi_2 + i\psi_4 \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

Desarrollando y multiplicando por $-i$ tenemos

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi}_1 + i\dot{\psi}_3 \\ \dot{\psi}_2 + i\dot{\psi}_4 \end{pmatrix} = \frac{B}{2} \begin{pmatrix} \psi_3 - i\psi_1 \\ -\psi_4 + i\psi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.57)$$

lo cual, igualando las partes real e imaginaria de cada lado de la ecuación, implica las mismas ecuaciones de (2.54).

Para concluir este nuevo formalismo falta analizar un importante detalle que tiene que ver con el espacio que realmente contiene la información física del sistema. Recordemos que el espacio de Hilbert en mecánica cuántica contiene más estados de los que realmente nos interesa estudiar, pues todos los estados que difieren en alguna constante multiplicativa tienen exactamente la misma información física. Resulta que los elementos del espacio proyectivo asociado al espacio vectorial de Hilbert, que a partir de ahora lo llamaremos como espacio proyectivo de Hilbert, están relacionados unívocamente con los estados puros del sistema, por lo que es sumamente conveniente estudiar este espacio. En la siguiente sección definiremos detalladamente este espacio.

2.3. El espacio proyectivo de Hilbert

El espacio de Hilbert en mecánica cuántica tiene cierta redundancia en lo que se refiere al contenido físico del sistema, pues en realidad todos los estados que difieren en alguna constante multiplicativa representan físicamente el mismo estado; por esta razón es conveniente trabajar en un espacio que solo contenga a los estados puros, el cual, resulta coincidir con el espacio proyectivo de Hilbert.

La primera restricción es considerar únicamente al subespacio H_n conformado por los estados que cumplan la condición

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1. \quad (2.58)$$

Lo anterior no es otra cosa que la conocida condición de normalización. Ésto no determina completamente al ket $|\psi\rangle$, pues éste puede ser multiplicado por cualquier número de la forma $\lambda = e^{ia}$ y nuevamente tenemos que representa el mismo estado. Es decir, los estados cuánticos son independientes de factores de fase globales.

Para solucionar esa ambigüedad entre los estados definimos la siguiente relación de equivalencia \sim

$$\psi \sim \phi \quad \text{si y solo si} \quad \psi = e^{ia}\phi, \quad (2.59)$$

y definimos el espacio

$$\mathcal{H} := H_n / \sim. \quad (2.60)$$

A dicho espacio se le conoce como el espacio proyectivo de Hilbert y es al que consideramos como el espacio real de Hilbert, pues tiene todo el contenido físico del sistema.

Con lo anterior ya estamos en condiciones de estudiar nuestro sistema de espín usando este enfoque simpléctico de la mecánica cuántica que hemos desarrollado en el presente capítulo, pero antes de hacerlo desarrollaremos otro concepto que está íntimamente relacionado con el espacio proyectivo de un sistema genérico de espín y que nos ayudará mucho en el análisis que haremos.

Capítulo 3

Constelación de Majorana

La constelación de Majorana ofrece una visión geométrica que es bastante útil para estudiar un sistema de espín en el espacio proyectivo. Consiste en caracterizar un estado arbitrario de espín s por una configuración única de $2s$ puntos sobre la 2-esfera. Ésta es una imagen que hace que un espacio de Hilbert de alta dimensión sea más fácil de comprender. Veamos cómo se construye dicha constelación.

3.1. Construcción de la constelación de Majorana

Consideremos un estado arbitrario $|\psi\rangle$ de espín s y desarrollémoslo en la base dada por los eigenvectores del operador \hat{S}_z

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-s}^s c_m |s, m\rangle. \quad (3.1)$$

Para encontrar la constelación de Majorana de $|\psi\rangle$ en la base $|s, m\rangle$ le asociamos al estado un polinomio con variable auxiliar compleja z , conocido como el polinomio de Majorana, $P_{|\psi\rangle}(z)$, el cual se define de la siguiente manera

$$P_{|\psi\rangle}(z) = \sum_{m=-s}^s (-1)^{s-m} \sqrt{\binom{2s}{s-m}} c_m z^{m+s}. \quad (3.2)$$

Notemos que (salvo unas excepciones que analizaremos a continuación) $P_{|\psi\rangle}(z)$ es un polinomio con coeficientes complejos de grado $2s$.

Sean $w_k = a_k + ib_k$ con $k = 1, \dots, 2s$ las $2s$ raíces de $P_{|\psi\rangle}(z)$. Cada una de las estas raíces puede ser mapeada a un único punto en la esfera unitaria por medio de la proyección estereográfica desde el polo sur

$$P_k = \left(\frac{2a_k}{1 + a_k^2 + b_k^2}, \frac{2b_k}{1 + a_k^2 + b_k^2}, \frac{1 - a_k^2 - b_k^2}{1 + a_k^2 + b_k^2} \right).$$

Estos $2s$ puntos en la esfera, que se conocen como estrellas del estado, definen la constelación de $|\psi\rangle$ en la base $|s, m\rangle$.

Existen estados particulares en los que su polinomio de Majorana no es de grado $2s$ y por tanto hay problemas al definir su constelación. Ilustremos con un ejemplo. Consideremos el siguiente estado en un sistema de espín 1

$$|\Phi\rangle = c_0 |1, 0\rangle + c_{-1} |1, -1\rangle. \quad (3.3)$$

Como $s = 1$ su constelación debería de consistir en dos estrellas, pero observemos que $c_1 = 0$ y por tanto el polinomio de Majorana será de grado 1; por lo que su constelación tendrá un solo punto en la esfera. La solución a este problema la obtenemos observando que si en el estado anterior tomamos $c_1 = \epsilon$ y hacemos tender $\epsilon \rightarrow 0$ el módulo de una de las raíces del polinomio de Majorana de dicho estado tenderá a infinito, por lo que el punto en la esfera asociado a esta raíz estará cada vez más cerca del polo sur. Por lo anterior, si $c_1 = 0$ añadimos un punto situado en el polo sur de la esfera a la constelación.

Lo dicho previamente nos sugiere cómo se debe manejar el problema para los casos generales que son similares.

Consideremos un estado en un sistema de espín s

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-s}^s c_m |s, m\rangle \quad (3.4)$$

tal que $c_s = c_{s-1} = \dots = c_{s-k} = 0$. Ésto implica que el polinomio de Majorana

de $|\Psi\rangle$ es de grado $2s - k$ y por tanto tendrá únicamente $2s - k$ raíces. De manera análoga al caso anterior, si hacemos que cada uno de estos k coeficientes tienda a cero tendremos que el mismo número de raíces irán al infinito; por lo que k puntos en la constelación estarán más y más cerca del polo sur. Por lo tanto, si un estado es tal que $c_s = c_{s-1} = \dots = c_{s-k} = 0$ la constelación de dicho estado consistirá en los $2s - k$ puntos en la esfera correspondientes a las raíces del polinomio de Majorana y k puntos situados en el polo sur.

Entre otras, una propiedad muy interesante de la constelación de Majorana es la siguiente.

Supongamos un estado arbitrario, $|\psi\rangle$, expresado en la base de los eigenvectores de \hat{S}_z y consideremos una rotación del espacio físico tal que el vector \bar{z} va a dar al vector \bar{n} . Esta nueva dirección (al igual que las direcciones \bar{z} , \bar{y} y \bar{x}) tiene asociado un operador \hat{S}_n , el cual induce una nueva base $|s, m\rangle'$ en el espacio de Hilbert, de modo que

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-s}^s d_m |s, m\rangle'. \quad (3.5)$$

Resulta que cuando $|\psi\rangle$ se rota en el espacio de Hilbert su constelación (la cual será diferente porque estará asociada a la base $|s, m\rangle'$) se rota en el espacio físico [19].

Ésto evidentemente es una gran ventaja con respecto a la visión del estado en el espacio de Hilbert, pues la matriz de transformación entre estas dos bases es de dimensión $(2s + 1) \times (2s + 1)$, la cual, para valores de espín mayores a 2, suele ser muy difícil de calcular.

3.2. El espacio proyectivo a partir de la constelación de Majorana

Si tenemos un conjunto de $2s$ puntos arbitrarios en la 2-esfera, con una construcción análoga pero en sentido opuesto se puede encontrar el vector de estado en el espacio de Hilbert correspondiente a dicha distribución de puntos. El procedimiento sería el siguiente:

Dado un conjunto $\{(x_k, y_k, z_k)\}$ de $2s$ estrellas podemos mapear éstas al plano complejo por medio de la función inversa de la proyección estereográfica

$$w_k = \frac{x_k}{z_k + 1} + \frac{iy_k}{z_k + 1},$$

después generamos el polinomio cuyas raíces son precisamente estos $2s$ puntos en el plano. Así, identificando coeficientes, podemos encontrar el estado asociado a las $2s$ estrellas.

Lo anterior nos permite identificar el espacio proyectivo de Hilbert por medio de la constelación de Majorana [19], es decir, para un sistema dado, cada constelación puede identificarse con uno y solo un elemento del espacio proyectivo. Lo anterior es evidente ya que, por construcción, la constelación de un estado $|\psi\rangle$ es exactamente la misma que la de todos los estados de la forma $a|\psi\rangle$ con a un número complejo arbitrario.

Veamos un ejemplo para aclarar esto y que nos servirá más adelante.

Consideremos un sistema con espín $s = 1$ y la constelación de un estado arbitrario. Como estamos en $s = 1$ la constelación consiste en dos puntos, P_1 y P_2 , en la 2-esfera, los cuales los podemos escribir de la siguiente forma general

$$\begin{aligned} P_1 &= (\sin \theta_1 \cos \phi_1, \sin \theta_1 \sin \phi_1, \cos \theta_1), \\ P_2 &= (\sin \theta_2 \cos \phi_2, \sin \theta_2 \sin \phi_2, \cos \theta_2). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Ahora bien, por medio del procedimiento que se mencionó previamente llegamos a

que el estado (ya normalizado) asociado a esta constelación de dos puntos es

$$|\psi\rangle = \frac{e^{i\rho}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \\ e^{i\phi_1} \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) + e^{i\phi_2} \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \\ \sqrt{2} e^{i(\phi_1+\phi_2)} \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

La expresión anterior define el mapeo de inclusión del subconjunto de los estados normalizados, H_n , al espacio de Hilbert. El espacio proyectivo de Hilbert, \mathcal{H} , se define como el conjunto de todas las clases de equivalencia de la relación donde dos elementos están relacionados si difieren solo por una fase. De este modo, podemos utilizar un elemento de cada clase de equivalencia para representar el espacio proyectivo de Hilbert.

Si elegimos arbitrariamente $\rho = 0$ (o cualquier otro valor) el conjunto de parámetros reales $(\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2)$ identifica unívocamente el espacio proyectivo, con el siguiente mapeo de proyección

$$\pi : H_n \rightarrow \mathcal{H},$$

$$\pi(|\psi(\rho, \theta_i, \phi_i)\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \\ e^{i\phi_1} \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) + e^{i\phi_2} \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \\ \sqrt{2} e^{i(\phi_1+\phi_2)} \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Observemos que, a diferencia de un estado arbitrario de $s = 1$, el número de grados de libertad es cuatro en lugar de seis.

Lo siguiente que se debe hacer es encontrar la expresión de la forma simpléctica asociada a este espacio, para así poder proseguir con el análisis de la dinámica del sistema, pero dejaremos esto para el siguiente capítulo y concluiremos el presente analizando cualitativamente unos pocos ejemplos sobre las constelaciones de Majorana.

3.3. Ejemplos de constelaciones

Para finalizar este capítulo mostraremos ejemplos de algunas constelaciones. Cuando el estado esté en un espacio de dimensión muy alta denotaremos a $|\Psi\rangle = c_s |s, s\rangle + c_{s,s-1} |s, s-1\rangle, \dots, c_{-s} |s, -s\rangle$ como $|\Psi\rangle = (c_s, c_{s-1}, \dots, c_{-s})$.

- $|\Psi\rangle = (2 + i, 3, 4, 7 - 3i, 1, -1, 1 - 2i, 2i, 1 + 5i, 0, -i - 1, 2)$

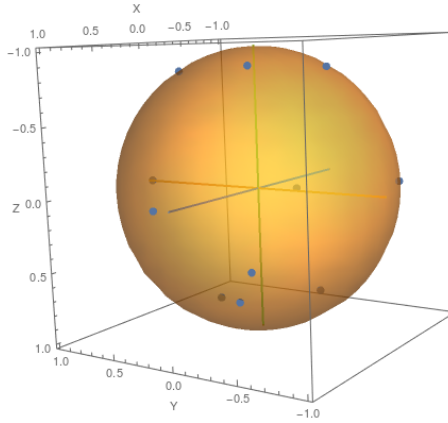


Figura 3.1: Constelación del estado $|\Psi\rangle$ en un espacio de espín $s = 11/2$.

En la figura anterior se muestra la constelación de un estado de espín $s = 11/2$. Nótese que dicha constelación consta de $2s = 11$ puntos sobre la esfera unitaria.

- $|\Psi\rangle = (4 - 10i) |2, 1\rangle + 10 |2, 0\rangle + (8 + i) |2, -1\rangle$

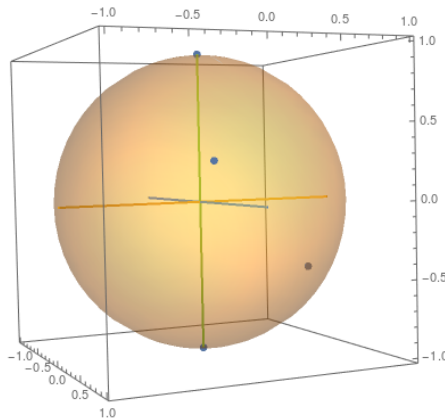


Figura 3.2: Constelación de un estado con espín $s = 2$ tal que $c_2 = 0$ y $c_{-2} = 0$.

En 3.2 se muestra la constelación de un estado de espín $s = 2$ tal que $c_2 = 0$ y $c_{-2} = 0$ por lo que, como puede verse en la figura, en su constelación tiene un punto en el polo sur y en el polo norte.

Existen estados en los que la constelación tiene un patrón bastante curioso, en las siguientes figuras se muestran cinco estados representativos de dicho patrón.

- Estados de la forma $|\Psi\rangle = (1, 1, \dots, 1, 1)$ para $s = 7/2, 10, 50, 150$

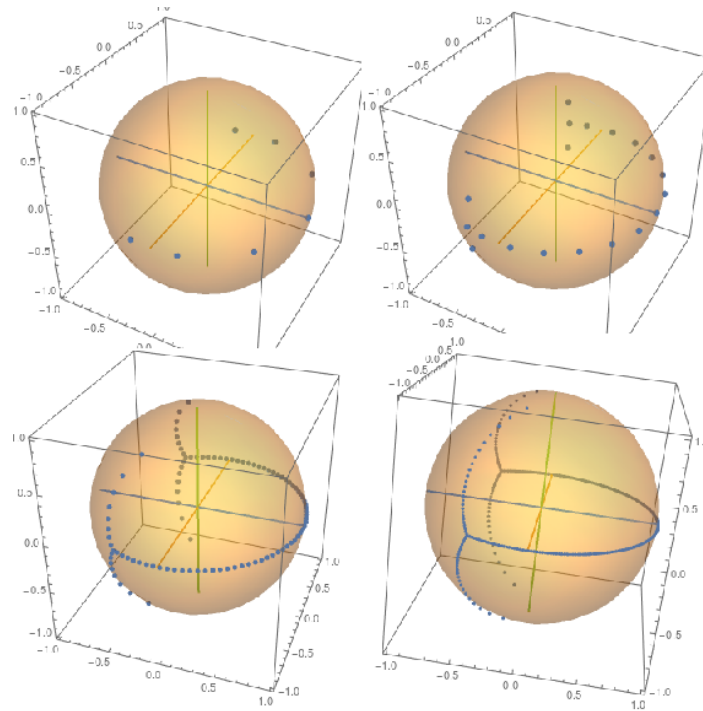


Figura 3.3: Constelación de cuatro estados de la forma $|\Psi\rangle = (1, 1, \dots, 1, 1)$.

- $|\Psi\rangle = (3 \cos(i) + 2i \sin(i) : 1 \leq i \leq 60)$

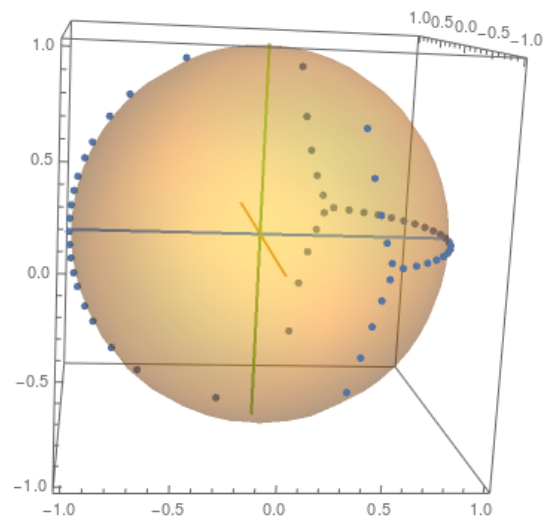


Figura 3.4: Constelación de un estado con puntos distribuidos sobre la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

En estas últimas ilustraciones vemos que la constelación de los respectivos estados consta de puntos distribuidos en el ecuador de la esfera y eventualmente éstos se van abriendo formando dos ramas simétricas. La naturaleza de este extraño e interesante fenómeno está fuera de los propósitos de este trabajo, pero se muestra a modo de ejemplo. Podría tratarse simplemente de una patología (o maravilla) matemática de los polinomios complejos o alguna propiedad interesante de los sistemas cuánticos aún desconocida.

Capítulo 4

Formulación geométrica de un sistema cuántico de espín $s = 1$ en un campo magnético

En el capítulo 3 vimos la manera en la que el espacio de Hilbert puede identificarse como una variedad de Kähler, en la cual, por medio de la forma simpléctica inherente al espacio y los valores de expectación de los operadores, desarrollamos una dinámica equivalente a la de la mecánica cuántica. Después discutimos sobre la importancia de trabajar en el espacio proyectivo, pues ahí tenemos una descripción pura de los estados físicos de los sistemas.

Por otro lado, en el capítulo pasado vimos como la constelación de Majorana nos permite estudiar un sistema cuántico de espín directamente en el espacio proyectivo de Hilbert.

Es claro que ya tenemos toda la teoría para poder hacer la descripción de cualquier sistema cuántico con esta formulación geométrica de la mecánica cuántica y precisamente ésto es lo que haremos aquí, vamos a desarrollar la dinámica de un sistema de espín $s = 1$ inmerso en un campo magnético usando este enfoque.

4.1. Espacio proyectivo del sistema

En esta sección vamos a construir el espacio proyectivo de Hilbert, para después poder analizar la dinámica. Consideremos un sistema de espín $s = 1$; en el capítulo 3 ya hicimos la construcción del espacio de Kähler para un sistema de espín $s = 1/2$, la construcción en este caso es enteramente análoga.

Sea $|\Psi\rangle$ un estado arbitrario en el espacio de Hilbert

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 + i\psi_4 \\ \psi_2 + i\psi_5 \\ \psi_3 + i\psi_6 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Denotamos como Ψ su respectivo elemento en la variedad, el cual tiene la siguiente forma

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Considerando las coordenadas $(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6)$, la forma simpléctica del espacio se ve como

$$\Omega = d\psi_1 \wedge d\psi_4 + d\psi_2 \wedge d\psi_5 + d\psi_3 \wedge d\psi_6, \quad (4.3)$$

cuya expresión matricial es

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Lo anterior define la estructura del espacio de Hilbert como una variedad real, pero recordemos que el espacio que realmente nos interesa es el espacio proyectivo de Hilbert.

En la sección 3.2 vimos que podíamos representar a cada punto del espacio proyectivo eligiendo un elemento de cada clase de equivalencia, en particular los elementos

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \\ e^{i\phi_1} \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) + e^{i\phi_2} \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \\ \sqrt{2} e^{i(\phi_1+\phi_2)} \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

identifican al espacio \mathcal{H} con las cuatro coordenadas $(\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2)$ correspondientes a las dos estrellas de las constelaciones de Majorana.

Desafortunadamente al intentar escribir la forma simpléctica para el espacio proyectivo en estas coordenadas las expresiones algebraicas son muy largas, haciendo que la dinámica no se pueda estudiar.

Para solucionar ésto describiremos el espacio proyectivo apoyándonos nuevamente en la constelación de Majorana pero desde otra perspectiva. Esencialmente vamos a hacer un cambio de coordenadas, el cual, presentará dos ventajas:

La primera es que el análisis algebraico será mucho más sencillo.

Y la segunda es que las nuevas coordenadas se ajustan mejor al contexto del problema, ayudándonos principalmente a interpretar los resultados de manera más eficaz.

La forma de definir nuestras nuevas coordenadas para el espacio proyectivo es la siguiente.

Consideremos las dos estrellas de una constelación arbitraria y construyamos el triángulo cuyos vértices son estas dos estrellas y el origen, como se muestra en la siguiente figura

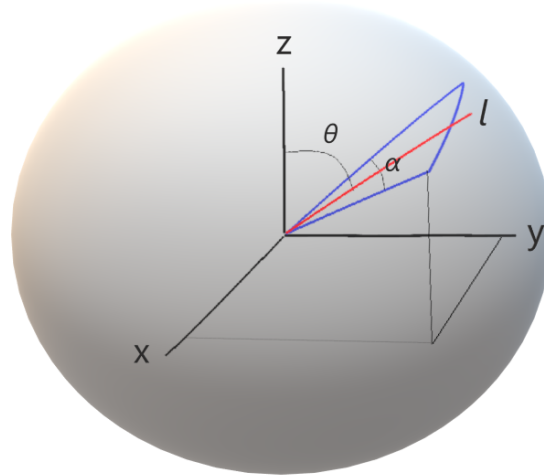


Figura 4.1: Triángulo formado por las estrellas de una constelación arbitraria.

Si imaginamos a este triángulo como un cuerpo rígido plano (es decir que está contenido en un plano), siempre podemos hacer una rotación, R , que lo coloque en una configuración simétrica al eje z y tal que el plano al que pertenece el cuerpo sea paralelo al plano $y - z$, como se ilustra en la siguiente figura.

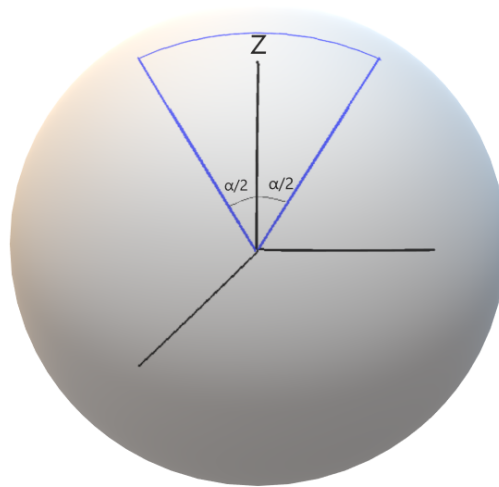


Figura 4.2

Para lograr la configuración anterior a partir de la configuración arbitraria de la figura 4.1 son suficientes tres ángulos (θ, ϕ, χ) , tales que:

ϕ es el ángulo con respecto al eje x que hace la recta en la cual se debe rotar el cuerpo rígido un ángulo θ para que la mediana l (ver fig 4.1) coincida con el eje z . Definamos esta transformación como T_1 . Una vez en esta configuración χ es el ángulo que se debe rotar el cuerpo con respecto al eje z para que éste se encuentre en el plano $y - z$. Llamemos a esta otra transformación T_2 .

La forma matemática para las rotaciones T_1 y T_2 las encontraremos usando la siguiente expresión [25]

$$\hat{T} = e^{-i\theta(\hat{n} \cdot \hat{S})}, \quad (4.6)$$

donde θ es el ángulo que se rota a través de la recta que apunta en dirección del vector unitario \hat{n} y \hat{S} es el operador vectorial de momento angular.

La siguiente importante propiedad de las matrices de momento angular para $s = 1$ es fundamental para el cálculo explícito de (4.6)

$$\hat{\sigma}_i^{2k+1} = \hat{\sigma}_i. \quad (4.7)$$

Para T_1 tenemos que $\hat{n}_1 = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$ y para T_2 , $\hat{n}_2 = (0, 0, 1)$; lo que implica que

$$T_1 = \begin{pmatrix} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\frac{e^{i\phi}\sin(\theta)}{\sqrt{2}} & e^{2i\phi}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \frac{e^{-i\phi}\sin(\theta)}{\sqrt{2}} & \cos(\theta) & -\frac{e^{i\phi}\sin(\theta)}{\sqrt{2}} \\ e^{-2i\phi}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & \frac{e^{-i\phi}\sin(\theta)}{\sqrt{2}} & \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} e^{-i\chi} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\chi} \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Por lo tanto, la rotación que lleva al estado en la configuración de la figura 4.1 al de la figura 4.2 es la composición de las dos transformaciones

$$R = T_2 T_1. \quad (4.10)$$

El hecho de que cada constelación de Majorana (y por tanto cada estado en el espacio proyectivo) esté identificada unívocamente por los cuatro ángulos $(\alpha, \theta, \phi, \chi)$ nos permite elegir a éstos como coordenadas locales para el espacio \mathcal{H} .

Dicho lo anterior, prosigamos con la forma general de un estado $|\psi\rangle$ en las coordenadas $(\alpha, \theta, \phi, \chi)$.

Lo primero que necesitamos identificar es la expresión de un estado normalizado cuya constelación de Majorana es tal como la de la figura 4.2. Las estrellas se pueden expresar en términos de α de la siguiente manera

$$\begin{aligned} p_1 &= (0, \sin \alpha, \cos \alpha), \\ p_2 &= (0, -\sin \alpha, \cos \alpha); \end{aligned} \quad (4.11)$$

con lo que obtenemos que el estado correspondiente es el siguiente

$$|\psi_0\rangle = \frac{e^{i\rho}}{\sqrt{\cos(2\alpha) + 3}} \begin{pmatrix} 1 + \cos(\alpha) \\ 0 \\ 1 - \cos(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Después aplicamos la inversa de la rotación R a $|\psi_0\rangle$ para obtener la expresión general de nuestro estado $|\psi\rangle(\alpha, \theta, \phi, \chi) = R^{-1} |\psi_0\rangle = (T_1^{-1} \cdot T_2^{-1}) |\psi_0\rangle$

$$|\psi\rangle = \frac{e^{i(\rho-\chi)}}{\sqrt{\cos(2\alpha) + 3}} \begin{pmatrix} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) (\cos(\theta) - 1) e^{-2i\phi} + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) (\cos(\theta) + 1) e^{2i\chi} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\phi} [(\cos(\alpha) + 1) e^{2i(\chi+\phi)} + 1 - \cos(\alpha)] \sin(\theta) \\ \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) (\cos(\theta) + 1) + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) (\cos(\theta) - 1) e^{2i(\chi+\phi)} \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

La ecuación anterior define el mapeo de inclusión, g , del subconjunto de los estados normalizados, $|\psi\rangle_n$, al espacio de Hilbert.

$$g : H_n \rightarrow H$$

$$g(|\psi\rangle_n) = \frac{e^{i(\rho-\chi)}}{\sqrt{\cos(2\alpha) + 3}} \begin{pmatrix} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) (\cos(\theta) - 1)e^{-2i\phi} + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) (\cos(\theta) + 1)e^{2i\chi} \\ \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\phi} [(\cos(\alpha) + 1)e^{2i(\chi+\phi)} + 1 - \cos(\alpha)] \sin(\theta) \\ \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) (\cos(\theta) + 1) + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) (\cos(\theta) - 1)e^{2i(\chi+\phi)} \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Nuevamente podemos utilizar un elemento representativo de cada clase de equivalencia para construir el espacio proyectivo de Hilbert. Tomando $\rho = 0$ tenemos que $(\alpha, \theta, \phi, \chi)$ representan coordenadas para el espacio proyectivo de Hilbert; con el siguiente mapeo de proyección

$$\pi : H_n \rightarrow \mathcal{H}$$

$$\pi(|\psi\rangle_n) = \frac{e^{-i\chi}}{\sqrt{\cos(2\alpha) + 3}} \begin{pmatrix} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) (\cos(\theta) - 1)e^{-2i\phi} + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) (\cos(\theta) + 1)e^{2i\chi} \\ \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\phi} [(\cos(\alpha) + 1)e^{2i(\chi+\phi)} + 1 - \cos(\alpha)] \sin(\theta) \\ \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) (\cos(\theta) + 1) + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) (\cos(\theta) - 1)e^{2i(\chi+\phi)} \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Con estas dos funciones ya podemos definir formalmente la forma simpléctica en el espacio proyectivo de Hilbert

4.2. La forma simpléctica heredada

La forma simpléctica intrínseca del espacio de Hilbert heredada del producto interno tiene la expresión canónica (ec. (4.3)) cuando está definida en las variables ψ_i . Sin embargo, ya explicamos que el espacio donde se encuentran los estados puros del sistema es en el espacio proyectivo, por lo tanto es necesario definir una forma simpléctica en este espacio.

Existe una manera natural de definir una estructura simpléctica en \mathcal{H} a partir de Ω . Consideremos los mapeos de inclusión y de proyección definidos en (4.14) y (4.15). Primero podemos obtener la expresión de la forma simpléctica en H_n a través del pullback de la función g

$$g^*\Omega = \Omega_{\alpha\beta} \frac{\partial g^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial g^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu, \quad (4.16)$$

donde $x^\mu = (\rho, \alpha, \theta, \phi, \chi)$.

Cuando se obtiene la expresión de la forma simpléctica en el espacio H_n ocurre un detalle remarcable, la forma simpléctica no depende de la fase, es decir, es degenerada en la dirección de ρ . Lo anterior nos permite garantizar la existencia de una forma simpléctica, $\Omega_{\mathcal{H}}$, en el espacio proyectivo de Hilbert cuyo pullback a través de la función de proyección coincide precisamente con $g^*\Omega$ [3], ésto es

$$\pi^*\Omega_{\mathcal{H}} = g^*\Omega. \quad (4.17)$$

El siguiente diagrama muestra visualmente la relación que hay entre las formas simplécticas y los respectivos espacios

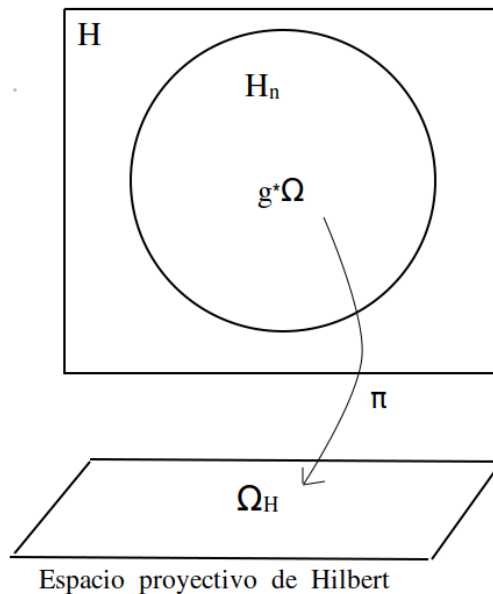


Figura 4.3

Regresando a nuestro caso, de (4.16) obtenemos que la forma simpléctica en H_n es

$$g^*\Omega = -\frac{16 \sin^3(\alpha)(\cos(\theta) - 1)}{(\cos(2\alpha) + 3)^2} d\alpha \wedge d\phi + \frac{16 \sin^3(\alpha)}{(\cos(2\alpha) + 3)^2} d\alpha \wedge d\chi - \frac{8 \cos(\alpha) \sin(\theta)}{\cos(2\alpha) + 3} d\theta \wedge d\phi. \quad (4.18)$$

O matricialmente:

$$g^*\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{8 \sin^3(\phi_1)(\cos(\phi_2)-1)}{(\cos(2\phi_1)+3)^2} & -\frac{8 \sin^3(\phi_1)}{(\cos(2\phi_1)+3)^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4 \sin(\phi_2) \cos(\phi_1)}{\cos(2\phi_1)+3} & 0 \\ 0 & -\frac{8 \sin^3(\phi_1)(\cos(\phi_2)-1)}{(\cos(2\phi_1)+3)^2} & -\frac{4 \sin(\phi_2) \cos(\phi_1)}{\cos(2\phi_1)+3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8 \sin^3(\phi_1)}{(\cos(2\phi_1)+3)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Nótese que en efecto esta expresión no muestra dependencia en la variable ρ tal como tenía que ocurrir. Gracias a ésto podemos definir la forma simpléctica en el espacio proyectivo, $(\alpha, \theta, \phi, \chi)$, simplemente eliminando todo lo referente a ρ en las ecuaciones anteriores

$$\Omega_{\mathcal{M}}(\alpha, \theta, \phi, \chi) = g^*\Omega. \quad (4.20)$$

Con las siguiente expresión matricial

$$\Omega_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{8 \sin^3(\alpha)(\cos(\theta)-1)}{(\cos(2\alpha)+3)^2} & -\frac{8 \sin^3(\alpha)}{(\cos(2\alpha)+3)^2} \\ 0 & 0 & \frac{4 \cos(\alpha) \sin(\theta)}{\cos(2\alpha)+3} & 0 \\ -\frac{8 \sin^3(\alpha)(\cos(\theta)-1)}{(\cos(2\alpha)+3)^2} & -\frac{4 \cos(\alpha) \sin(\theta)}{\cos(2\alpha)+3} & 0 & 0 \\ \frac{8 \sin^3(\alpha)}{(\cos(2\alpha)+3)^2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

y con inversa igual a

$$(\Omega_{\mathcal{M}})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{(\cos(2\alpha)+3)^2}{8 \sin^3(\alpha)} \\ 0 & 0 & -\frac{\cos(2\alpha)+3}{4 \cos(\alpha) \sin(\theta)} & -\frac{(\cos(2\alpha)+3) \tan(\frac{\theta}{2})}{4 \cos(\alpha)} \\ 0 & \frac{\cos(2\alpha)+3}{4 \cos(\alpha) \sin(\theta)} & 0 & 0 \\ -\frac{(\cos(2\alpha)+3)^2}{8 \sin^3(\alpha)} & \frac{(\cos(2\alpha)+3) \tan(\frac{\theta}{2})}{4 \cos(\alpha)} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

En la sección 2.2 se mostró la manera como la forma simpléctica Ω y la función hamiltoniana, H , permiten conocer la dinámica del sistema, codificada en la siguiente ecuación

$$\dot{\Psi} = -\Omega^{-1}dH. \quad (4.23)$$

La ecuación anterior es general, pero cuando se trabaja en coordenadas canónicas la forma simpléctica toma la forma estándar y así (4.23) implica las ecuaciones de Hamilton.

Un costo de trabajar en el espacio proyectivo es que la forma simpléctica restringida, $\Omega_{\mathcal{M}}$, deja de tener la forma canónica y las ecuaciones de evolución suelen complicarse. Sin embargo es posible mostrar, por medio de un importante resultado en la geometría simpléctica, conocido como el teorema de Darboux, que, localmente, en toda variedad existen coordenadas que hacen que la forma simpléctica sea canónica. La siguiente sección está planeada para explicar este teorema y mostrar la manera en cómo se encuentran estas coordenadas especiales.

4.3. Teorema de Darboux

El teorema de Darboux es un resultado fundamental en la geometría simpléctica y se nombra así en reconocimiento del matemático francés Jean Gaston Darboux que lo estableció en 1882.

El teorema esencialmente afirma que todas las variedades simplécticas son localmente simplectomórficas, es decir, que son homeomorfas con el espacio lineal simpléctico (\mathbb{R}, Ω_0) dotado de la forma simpléctica canónica Ω_0 .

El enunciado formal, cuya demostración está fuera de los propósitos de este trabajo, pero puede consultarse en [21] dice lo siguiente:

Teorema de Darboux

Sea (\mathcal{M}, Ω) una variedad simpléctica con Ω la respectiva 2-forma simpléctica y consideremos un punto arbitrario $a \in \mathcal{M}$. Entonces existe un entorno alrededor de a en el que se puede elegir un sistema de coordenadas $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ tal que la Ω tiene la forma canónica

$$\Omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i. \tag{4.24}$$

Lo anterior, en términos físicos, básicamente nos dice que en un entorno alrededor de cualquier punto en la variedad podemos encontrar un conjunto de coordenadas canónicas.

Un interesante contraste (y analogía) que vale la pena mencionar ocurre con la situación en la geometría riemanniana, en la cual en cada punto podemos encontrar coordenadas donde, en dicho punto, la métrica coincide con la euclidiana, pero en general, no es posible que suceda en todo un entorno como pasa en la geometría simpléctica.

Ya mencionamos que no probaremos el teorema de Darboux, pero vale la pena mostrar cómo se construyen las coordenadas canónicas alrededor de un punto arbitrario.

Construcción de las coordenadas canónicas

El algoritmo que permite construir las coordenadas canónicas alrededor de un punto x_0 es el siguiente:

Sea $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ un sistema de coordenadas no canónico en una variedad simpléctica. Queremos construir, a partir de éste, un sistema de coordenadas $\bar{p} = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ que sí sea canónico.

La primera coordenada, p_1 , la elegimos como cualquier función diferenciable de las coordenadas $p_1 = p_1(\bar{x})$ con la única condición de que su diferencial sea distinto de cero en el punto x_0 .

Para definir la coordenada q_1 consideremos el campo vectorial hamiltoniano, P_1 , correspondiente a p_1 (ver ecs. (2.24) y (2.25))

$$P_1 = -\Omega^{-1} dp_1. \quad (4.25)$$

Como $P_1(a) \neq 0$ podemos construir un hiperplano, N , que pase por x_0 y que no contenga al vector $P_1(a)$ (en particular cualquier superficie transversal a $P_1(a)$ cumple ésto).

Consideremos ahora el flujo hamiltoniano $P_1^t(y)$ que se obtiene al resolver la ecuación diferencial

$$\dot{\bar{x}}(t) = P_1 \quad (4.26)$$

con condición inicial $\bar{x}(0) = y$.

Definimos a q_1 como el valor del parámetro t tal que la curva $P_1^t(y)$ con $y \in N$ alcanza un punto arbitrario $z \in \mathcal{M}$. Por resultados elementales en la teoría de ecuaciones diferenciales la función está bien definida y es diferenciable en un entorno alrededor de x_0 .

Ya que por construcción $q_1 = 0$ sobre N y además su derivada en dirección de P_1 es igual a uno tendremos que el corchete de Poisson de q_1 y p_1 será igual a uno, o sea, serán coordenadas canónicas [21].

Para la construcción p_2 y q_2 consideramos la subvariedad \mathcal{M}_2 que obtenemos al

imponer las constricciones $p_1 = p_1(x_0) = cte$ y $q_1 = q_1(x_0) = 0$ y operamos de manera totalmente análoga en este subespacio para definir p_2 y q_2 , trabajando con la forma simpléctica restringida a esta subvariedad.

Ya encontradas p_2 y q_2 debemos extenderlas a todo el espacio, pues solo están definidas en \mathcal{M}_2 . La extensión se hace de la siguiente manera.

Cada punto $z \in \mathcal{M}$ alrededor de x_0 puede ser alcanzado a través del flujo $P_1^s Q_1^t$ por un único punto $w \in \mathcal{M}_2$, es decir, para $z \in \mathcal{M}$ existe un único $w \in \mathcal{M}_2$ tal que

$$z = P_1^s Q_1^t(w). \quad (4.27)$$

Despejando w en términos de z encontramos las variables p_1 y q_1 extendidas.

La recursión del algoritmo previo permite encontrar todas la p_k y q_k .

El procedimiento anterior nos permitirá encontrar coordenadas canónicas para la forma simpléctica $\Omega_{\mathcal{M}}$ de nuestro problema, lo cual será muy útil para describir la dinámica del sistema.

Es bastante ilustrativo (y educativo) mostrar paso por paso (excluyendo los cálculos algebraicos) cómo encontrar las variables, pues, como suele ocurrir en muchas situaciones, la práctica es bastante distinta a la teoría.

Nuestra construcción comienza con la elección del punto alrededor del cual encontraremos coordenadas canónicas, consideremos (por conveniencia) el siguiente punto

$$x_0 = (\alpha_0, \theta_0, \phi_0, \chi_0) = \left(\frac{\pi}{4}, 0, 0, 0 \right). \quad (4.28)$$

Éste punto representa una configuración en la constelación de Majorana como la de la figura 4.2.

Hay dos detalles sutiles y bastante significativos a la hora de aplicar el teorema de Darboux, el primero es la elección de las coordenadas p_i . En principio, esta elección es totalmente arbitraria y cualquiera funciona. Sin embargo, una elección inteligente podría simplificar bastante el problema (incluso podría ser la diferencia entre hacer el problema soluble o no).

Eligamos a p_1 una función arbitrara de α , esto es

$$p_1 = h(\alpha). \quad (4.29)$$

De lo anterior tenemos

$$P_1 = -\Omega_{\mathcal{M}}^{-1} dp_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{(\cos(2\alpha)+3)^2 h'(\alpha)}{8 \sin^3(\alpha)} \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

El segundo punto sutil es la elección del hiperplano, pues cada elección define un conjunto distinto de coordenadas canónicas. Lo más natural es elegir un hiperplano que sea transversal a P_1 . En nuestro caso es fácil ver que la superficie definida por la ecuación $\chi = 0$ cumple esto. Consideremos entonces un punto arbitrario en este plano $y = (\alpha(0), \theta(0), \phi(0), 0)$ y resolvamos la ecuación diferencial (4.26) con y como condición inicial

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{(\cos(2\alpha)+3)^2 h'(\alpha)}{8 \sin^3(\alpha)} \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

Al resolver la ecuación y despejando el parámetro t obtenemos la coordenada q_1

$$q_1 = -\frac{8\chi \sin^3(\alpha)}{(\cos(2\alpha) + 3)^2 h'(\alpha)}. \quad (4.32)$$

El campo hamiltoniano de q_1 (que se necesitará más adelante) es

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{h'(\alpha)} \\ -\frac{2 \sin^2(\alpha) \tan(\alpha) \tan(\frac{\theta}{2})}{(\cos(2\alpha)+3)h'(\alpha)} \\ 0 \\ \chi \left(\frac{(\sin(2\alpha)+12 \cot(\alpha))h'(\alpha) - h''(\alpha)}{\cos(2\alpha)+3} \right) \frac{1}{h'(\alpha)^2} \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Ahora nos restringimos a la superficie definida por $p_1 = p_1(x_0) = h(\frac{\pi}{4})$ y $q_1 = q_1(x_0) = 0$, lo que implica que $\alpha = \frac{\pi}{4}$ y $\chi = 0$; es decir, nos fijamos en la superficie, \mathcal{M}_2 , definida por el siguiente mapeo

$$r : \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{M}$$

$$r(\theta, \psi) = \left(\frac{\pi}{4}, \theta, \phi, 0\right).$$

Así obtenemos que la forma simpléctica restringida en \mathcal{M}_2 obtenida por el pullback de r es

$$\Omega_{\mathcal{M}}^{-1}|_{p_1(x_0), q_1(x_0)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3}\sqrt{2}\sin(\theta) \\ -\frac{2}{3}\sqrt{2}\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

con inversa

$$\left(\Omega_{\mathcal{M}}^{-1}|_{p_1(x_0), q_1(x_0)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3\csc(\theta)}{2\sqrt{2}} \\ \frac{3\csc(\theta)}{2\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

Definimos a p_2 de la siguiente manera

$$p_2 = \tilde{\theta}. \quad (4.36)$$

La tilde en la variable es para recordar que son variables definidas en el espacio restringido y no en todo \mathcal{M} . Operando de manera totalmente análoga obtenemos la siguiente expresión para q_2

$$q_2 = \frac{2}{3}\sqrt{2}\tilde{\phi}\sin(\tilde{\theta}). \quad (4.37)$$

Para finalizar la construcción de las coordenadas canónicas falta extender p_2 y q_2 a toda la variedad. Sea w un punto arbitrario en la variedad restringida, entonces w tiene la siguiente forma genérica

$$w = \left(\frac{\pi}{4}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi}, 0\right).$$

Calculemos el flujo $P_1^s Q_1^t(w)$. Calculemos primero $Q_1^t(w)$, es decir, el flujo a través de Q_1 con condición inicial $y = w$:

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{h'(\alpha)} \\ -\frac{2 \sin^2(\alpha) \tan(\alpha) \tan(\frac{\theta}{2})}{(\cos(2\alpha)+3)h'(\alpha)} \\ 0 \\ \frac{\chi \left(\frac{(\sin(2\alpha)+12 \cot(\alpha))h'(\alpha)}{\cos(2\alpha)+3} - h''(\alpha) \right)}{h'(\alpha)^2} \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Es precisamente en este paso donde una elección adecuada de h permite la solución satisfactoria del problema. Primeramente, es muy importante analizar el sistema de ecuaciones y hacer simplificaciones evidentes, por ejemplo, es inmediato lo siguiente

$$h(\alpha) = -t + C, \quad (4.39)$$

$$\phi = \tilde{\phi}. \quad (4.40)$$

Otra simplificación, quizá no muy evidente, pero que es muy importante es que

$$\chi = 0. \quad (4.41)$$

Esto se deduce al observar que al hacer la integración de la cuarta ecuación diferencial obtenemos algo de la siguiente forma

$$\chi = C e^{\int (\text{funcion de } t) dt}, \quad (4.42)$$

de modo que al insertar la condición inicial $\chi(0) = 0$ necesariamente $C = 0$.

La única ecuación que requiere integración no trivial es la segunda

$$\dot{\theta} = -\frac{2 \sin^2(\alpha) \tan(\alpha) \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{(\cos(2\alpha) + 3)h'(\alpha)}. \quad (4.43)$$

Ésta ecuación se puede simplificar considerablemente si definimos $h(\alpha)$ de modo que

$$h(\alpha)' = \frac{2 \sin^2(\alpha) \tan(\alpha)}{\cos(2\alpha) + 3}. \quad (4.44)$$

Es decir, con esta definición la dependencia de α desaparece, lo cual hace que la integración nuevamente sea muy sencilla.

Al integrar y hacer todas las simplificaciones correspondientes obtenemos

$$p_1 = h(\alpha) = \log\left(\frac{\cos(2\alpha) + 3}{\cos(\alpha)}\right) \quad (4.45)$$

y

$$Q_1^t(w) = \left(\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{9e^{2t} - 8} + 3e^t}{2\sqrt{2}}\right), 2 \sin^{-1}\left(\sqrt[4]{2}\sqrt{3}e^{t/2} \sqrt{\frac{\cos(\alpha)}{\cos(2\alpha) + 3}} \sin\left(\frac{\tilde{\theta}}{2}\right)\right), \tilde{\phi}, 0 \right). \quad (4.46)$$

Procediendo de manera similar podemos calcular $P_1^s Q_1^t(w) = P_1^s(Q_1^t(w))$ encontrando el flujo a través de P_1 tomando como condición inicial $Q_1^t(w)$. El resultado arroja

$$(\alpha, \theta, \phi, \chi) = P_1^s Q_1^t(w) = \left(\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{9e^{2t} - 8} + 3e^t}{2\sqrt{2}}\right), 2 \sin^{-1}\left(\sqrt[4]{2}\sqrt{3}e^{t/2} \sqrt{\frac{\cos(\alpha)}{\cos(2\alpha) + 3}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right), \phi, \frac{s(\cos(2\alpha) + 3)}{4 \cos(\alpha)} \right). \quad (4.47)$$

Resolviendo para $\tilde{\theta}$ y $\tilde{\phi}$ y sustituyendo en (4.36) y (4.37), así como la expresión obtenida para la función h tenemos las siguientes ecuaciones finales para las coordenadas canónicas

$$p_2 = 2 \sin^{-1} \left(\sqrt[4]{2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{\cos(\alpha)}{\cos(2\alpha) + 3}} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right), \quad (4.48)$$

$$q_2 = 4 \cdot 2^{3/4} \phi \sqrt{\frac{\cos(\alpha)}{3 \cos(2\alpha) + 9}} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \sqrt{1 - \frac{3\sqrt{2} \cos(\alpha) \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}{\cos(2\alpha) + 3}}, \quad (4.49)$$

$$p_1 = \log \left(\frac{\cos(2\alpha) + 3}{\cos(\alpha)} \right), \quad (4.50)$$

$$q_1 = -\frac{4\chi \cos(\alpha)}{\cos(2\alpha) + 3}. \quad (4.51)$$

Con inversas

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{1}{4} \left(\sqrt{e^{2p_1} - 16} + e^{p_1} \right) \right), \quad (4.52)$$

$$\theta = 2 \sin^{-1} \left(\frac{e^{\frac{p_1}{2}} \sin \left(\frac{p_2}{2} \right)}{\sqrt[4]{2} \sqrt{3}} \right), \quad (4.53)$$

$$\phi = \frac{3q_2 \csc(p_2)}{2\sqrt{2}}, \quad (4.54)$$

$$\chi = -\frac{1}{4} e^{p_1} q_1. \quad (4.55)$$

Las variables (p_1, p_2, q_1, q_2) definen el sistema de coordenadas donde $\Omega_{\mathcal{M}}$ tiene la forma canónica. Teniendo ésto podemos estudiar la dinámica del sistema, lo cual, se hará detalladamente en la siguiente sección.

4.4. Análisis de la dinámica en campos magnéticos

En este capítulo, al fin, llegamos al desenlace de este trabajo, pues ya desarrollamos todas las herramientas para hacer la descripción geométrica de un sistema de espín $s = 1$ en un campo magnético. Tenemos dos alternativas para abordar el problema, la primera es usando directamente las coordenadas $(\alpha, \theta, \phi, \chi)$ y la otra con las coordenadas que obtuvimos del teorema de Darboux. Recordemos que en ambas situaciones la dinámica está regida por la misma ecuación

$$\dot{\Psi} = -\Omega^{-1}dH. \quad (4.56)$$

La ventaja que presentan las coordenadas de Darboux (p_1, p_2, q_1, q_2) con respecto a las coordenadas $(\alpha, \theta, \phi, \chi)$ es que la forma simpléctica tiene la expresión canónica; lo que simplifica considerablemente la ecuación anterior (de hecho coincide con las ecuaciones de Hamilton). En contraste, las coordenadas angulares presentan la ventaja de que son más naturales, en el sentido de que caracterizan directamente la configuración del sistema, propiedad que no tienen las coordenadas de Darboux cuyo significado físico es más oculto.

Analizaremos la dinámica con las dos coordenadas y veremos cuáles arrojan mejores resultados.

Análisis con las coordenadas $(\alpha, \theta, \phi, \chi)$

Para estas coordenadas ya tenemos que la forma simpléctica y su respectiva inversa (ecs. (4.21) y (4.22)) son

$$\Omega_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{8 \sin^3(\alpha)(\cos(\theta)-1)}{(\cos(2\alpha)+3)^2} & -\frac{8 \sin^3(\alpha)}{(\cos(2\alpha)+3)^2} \\ 0 & 0 & \frac{4 \cos(\alpha) \sin(\theta)}{\cos(2\alpha)+3} & 0 \\ -\frac{8 \sin^3(\alpha)(\cos(\theta)-1)}{(\cos(2\alpha)+3)^2} & -\frac{4 \cos(\alpha) \sin(\theta)}{\cos(2\alpha)+3} & 0 & 0 \\ \frac{8 \sin^3(\alpha)}{(\cos(2\alpha)+3)^2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.57)$$

$$(\Omega_{\mathcal{M}})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{(\cos(2\alpha)+3)^2}{8 \sin^3(\alpha)} \\ 0 & 0 & -\frac{\cos(2\alpha)+3}{4 \cos(\alpha) \sin(\theta)} & -\frac{(\cos(2\alpha)+3) \tan(\frac{\theta}{2})}{4 \cos(\alpha)} \\ 0 & \frac{\cos(2\alpha)+3}{4 \cos(\alpha) \sin(\theta)} & 0 & 0 \\ -\frac{(\cos(2\alpha)+3)^2}{8 \sin^3(\alpha)} & \frac{(\cos(2\alpha)+3) \tan(\frac{\theta}{2})}{4 \cos(\alpha)} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.58)$$

Conociendo la forma simpléctica $\Omega_{\mathcal{M}}$ solo falta definir la función hamiltoniana, H , para describir la dinámica del sistema.

Por simplicidad y por consideraciones hechas en el capítulo uno, nos vamos a concentrar en sistemas con campos magnéticos constantes

$$B = (B_x, B_y, B_z). \quad (4.59)$$

De la ecuación (1.2) obtenemos el hamiltoniano de interacción en el espacio de Hilbert

$$\hat{H} = \bar{\mu} \cdot \bar{B} = \begin{pmatrix} B_z & \frac{B_x - iB_y}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{B_x + iB_y}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{B_x - iB_y}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{B_x + iB_y}{\sqrt{2}} & -B_z \end{pmatrix}, \quad (4.60)$$

y de (2.35) podemos encontrar el hamiltoniano en el espacio de Kähler ($H = \Psi^T \tilde{H} \Psi$)

$$H = \sqrt{2} [(\psi_2 (\psi_1 + \psi_3) + \psi_5 (\psi_4 + \psi_6)) B_x + ((\psi_1 - \psi_3) \psi_5 + \psi_2 (\psi_6 - \psi_4)) B_y] \\ + (\psi_1^2 - \psi_3^2 + \psi_4^2 - \psi_6^2) B_z. \quad (4.61)$$

Debemos expresar este último en términos de las coordenadas angulares, identificando las partes real e imaginarias de la ecuación (4.15) obtenemos la expresión de cada ψ_i en términos de $(\alpha, \theta, \phi, \chi)$ y así

$$H = \frac{4 \cos(\alpha) [B_y \sin(\theta) \cos(\phi) - B_x \sin(\theta) \sin(\phi) + B_z \cos(\theta)]}{\cos(2\alpha) + 3}. \quad (4.62)$$

Éste es el hamiltoniano más general (en el caso de campos magnéticos constantes). En realidad estudiando el caso particular en el que el campo magnético apunta en dirección z (tomando $B_x = B_y = 0$) tenemos toda la información sobre la dinámica en campos magnéticos constantes, pues si hay un campo magnético apuntando en otra dirección siempre podemos elegir un sistema de referencia en el que el eje z coincida con dicha dirección. Sin embargo, es ilustrativo mostrar algunos casos particulares.

- Campo magnético paralelo al eje z ($B_x = 0 = B_y$)

En este caso la expresión para el hamiltoniano toma la siguiente forma

$$H = \frac{4B_z \cos(\alpha) \cos(\theta)}{\cos(2\alpha) + 3}. \quad (4.63)$$

De la ecuación (2.27) tenemos que la dinámica del sistema está regida por la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \\ -B_z \end{pmatrix}. \quad (4.64)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0, \\ \theta &= \theta_0, \\ \phi &= \phi_0 + B_z t, \\ \chi &= \chi_0 - B_z t. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Cualitativamente el comportamiento descrito por las ecuaciones anteriores es muy simple y de hecho es idéntico al del espín $s = 1/2$ descrito en el primer capítulo: las estrellas precesan alrededor del campo magnético con velocidad angular constante. La diferencia es que aquí hay dos estrellas precesando en lugar

de una. Como consecuencia los ángulos α y θ se mantienen constantes. Es importante mencionar que la sencillez en la caracterización de la dinámica en este caso se debe en gran medida a una elección adecuada de sistema coordenado.

Veamos otros dos ejemplos

- Campo magnético paralelo al eje x ($B_z = 0 = B_y$)

El hamiltoniano en este caso es

$$H = \frac{4B_x \cos(\alpha) \sin(\theta) \sin(\phi)}{\cos(2\alpha) + 3}, \quad (4.66)$$

y por lo tanto

$$(\dot{\alpha}, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\chi}) = (0, B_x \cos(\phi), B_x \cot(\theta) \sin(\phi), -B_x \sin(\phi) \tan(\theta/2)). \quad (4.67)$$

- Campo magnético arbitrario

Si colocamos el campo magnético orientado en una dirección arbitraria obtenemos el hamiltoniano de la ecuación (4.62) y las ecuaciones diferenciales a resolver son

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= 0, \\ \dot{\theta} &= B_x \cos(\phi) + B_y \sin(\phi), \\ \dot{\phi} &= [B_y \cos(\phi) - B_x \sin(\phi)] \cot(\theta) - B_z, \\ \dot{\chi} &= \tan(\theta/2) [B_y \cos(\phi) - B_x \sin(\phi)] + B_z. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de los dos casos anteriores no es sencillo, sin embargo, hay un hecho compartido en todos los casos, $\dot{\alpha} = 0$. Es decir, α siempre se mantiene constante. Ésto nos muestra una característica muy importante de estos sistemas: la evolución generada por campos magnéticos en un sistema de espín $s = 1$ es tal que siempre mantienen invariante la forma geométrica creada por las dos estrellas.

Análisis con las coordenadas de Darboux (p_1, p_2, q_1, q_2)

En estas coordenadas, al encontrar la expresión para la forma simpléctica, tenemos que ésta es

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.69)$$

justo como debía de suceder, pues el teorema de Darboux asegura esto.

Con esta Ω la dinámica del sistema tiene la forma estándar de las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{\Psi} = -\Omega^{-1}dH = \left(\frac{\partial H}{\partial q_1}, \frac{\partial H}{\partial q_2}, -\frac{\partial H}{\partial p_1}, -\frac{\partial H}{\partial p_2} \right); \quad (4.70)$$

o sea

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= \frac{\partial H}{\partial q_1}, \\ \dot{p}_2 &= \frac{\partial H}{\partial q_2}, \\ \dot{q}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial p_1}, \\ \dot{q}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial p_2}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Analicemos los mismos casos que hicimos con las coordenadas $(\alpha, \theta, \phi, \chi)$.

■ Campo magnético paralelo al eje z

Debemos pasar del hamiltoniano en las coordenadas angulares a las coordenadas (p_1, p_2, q_1, q_2) ; ésto se hace por medio de las transformaciones obtenidas en la sección anterior (ecs. (4.52-4.55)). Así tenemos lo siguiente

$$H = 4e^{-p_1} + \frac{2}{3}\sqrt{2}(\cos(p_2) - 1). \quad (4.72)$$

Por lo que la dinámica del sistema está regida por la siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= 0, \\ \dot{p}_2 &= 0, \\ \dot{q}_1 &= 4e^{-p_1}, \\ \dot{q}_2 &= \frac{2}{3}\sqrt{2}\sin(p_2). \end{aligned} \tag{4.73}$$

Se sigue que p_1 y p_2 son constantes y q_1 y q_2 varían de manera lineal con el tiempo. Si además observamos las ecuaciones (4.48-4.51) de $p_1 = cte$ obtenemos que $\alpha = cte$ y de $p_2 = cte$ se tiene que θ también es constante, tal como debía suceder.

- Campo magnético paralelo al eje x ($B_z = 0 = B_y$)

El hamiltoniano en este caso es

$$H = -\frac{2}{3}2^{3/4}e^{-\frac{p_1}{2}}\sin\left(\frac{p_2}{2}\right)\sqrt{\sqrt{2}e^{p_1}(\cos(p_2) - 1) + 12}\sin\left(\frac{3q_2\csc(p_2)}{2\sqrt{2}}\right), \tag{4.74}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= 0, \\ \dot{p}_2 &= \frac{e^{-\frac{p_1}{2}}\sqrt{\sqrt{2}e^{p_1}(\cos(p_2) - 1) + 12}\sec\left(\frac{p_2}{2}\right)\cos\left(\frac{3q_2\csc(p_2)}{2\sqrt{2}}\right)}{2^{3/4}}, \\ \dot{q}_1 &= \frac{4\ 2^{3/4}e^{-\frac{p_1}{2}}\sin\left(\frac{p_2}{2}\right)\sin\left(\frac{3q_2\csc(p_2)}{2\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{\sqrt{2}e^{p_1}(\cos(p_2) - 1) + 12}}, \end{aligned} \tag{4.75}$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_2 = & \left\{ e^{-\frac{p_1}{2}} \left(3q_2 \left(\sqrt{2}e^{p_1} (\cos(p_2) - 1) + 12 \right) \cos(p_2) \csc\left(\frac{p_2}{2}\right) \sec^2\left(\frac{p_2}{2}\right) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \cos\left(\frac{3q_2 \csc p_2}{2\sqrt{2}}\right) - 16 \cos\left(\frac{p_2}{2}\right) \left(e^{p_1} (\cos(p_2) - 1) + 3\sqrt{2} \right) \sin\left(\frac{3q_2 \csc p_2}{2\sqrt{2}}\right) \right) \right\} \\ & \times \left\{ 6 \cdot 2^{3/4} \sqrt{\sqrt{2}e^{p_1} (\cos(p_2) - 1) + 12} \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Aunque se conserva el hecho relevante de que $\dot{p}_1 = 0$ y por tanto α es constante, las expresiones obtenidas con las coordenadas de Darboux son por mucho más complicadas que la de las coordenadas $(\alpha, \theta, \phi, \chi)$ por lo que al menos en este problema particular un conjunto de coordenadas canónicas no simplifica la resolución del problema.

4.5. Matrices de Gell-Mann y dinámica en sistemas arbitrarios

El análisis previo se limita a casos donde el hamiltoniano del sistema es generado únicamente por la presencia de campos magnéticos. A pesar de que son situaciones de gran interés experimental y teórico, son muy particulares. En esta sección explicaremos la manera de construir hamiltonianos generales.

Cualquier hamiltoniano en un sistema de espín $s = 1$ puede ser identificado por una matriz 3×3 hermitiana. Lo anterior implica que el espacio de todas las matrices que potencialmente representan un hamiltoniano es 9-dimensional.

Por otro lado, para conocer el espectro energético de un sistema es suficiente diagonalizar el hamiltoniano y fijarse en los valores propios. Considerando esto y el conocido hecho de que la elección del cero de la energía es totalmente arbitrario tenemos que siempre podemos sumar un múltiplo de la matriz identidad al hamiltoniano sin alterar el sistema. Esta propiedad nos permite considerar únicamente el conjunto de todas las matrices hermitianas de traza nula para representar todos los posibles hamiltonianos del espacio.

Las matrices de Gell-Mann son una colección de ocho matrices hermitianas de traza nula que representan una base para el conjunto de los hamiltonianos posibles de un sistema de espín $s = 1$. Esto es, cualquier hamiltoniano puede escribirse como una combinación lineal de estas ocho matrices, mostradas a continuación.

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Éstas generalizan las matrices de Pauli usadas en los sistemas de $s = 1/2$.

Sean A y B dos elementos arbitrarios del espacio de matrices hermitianas y de traza nula. Definimos el siguiente producto escalar

$$(A, B) := \frac{1}{2} \text{tr}(A \cdot B). \quad (4.76)$$

Resulta que las matrices de Gell-Mann son ortonormales bajo este producto escalar [27], es decir, cumplen la siguiente relación

$$\frac{1}{2} \text{tr}(\lambda_i \cdot \lambda_j) = \delta_{ij}. \quad (4.77)$$

Con las matrices λ_i podemos estudiar la dinámica en sistemas de espín $s = 1$ en casos arbitrarios. La forma más general de escribir un hamiltoniano en el espacio de Hilbert es la siguiente

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^8 a_i \lambda_i, \quad (4.78)$$

con cada $a_i \in \mathbb{C}$.

Ya conocemos el efecto de hamiltonianos provenientes de campos magnéticos; vemos que éstos rotan las estrellas de la constelación alrededor del campo manteniendo constante el ángulo α . Como estos casos ya están bien caracterizados es conveniente omitir su efecto para estudiar el caso general. Esto se puede hacer utilizando la ortonormalidad de las matrices de Gell-Mann.

Por la ecuación (1.2) sabemos que los hamiltonianos generados por campos magnéticos son combinaciones lineales de las matrices de momento angular de espín 1. De este modo, para no considerar su efecto en el hamiltoniano, es suficiente imponer las siguientes tres condiciones

$$\begin{aligned}(\hat{\sigma}_x, \hat{H}) &= \frac{1}{2} \text{tr} \left(\hat{\sigma}_x \cdot \sum_{i=1}^8 a_i \lambda_i \right) = 0, \\(\hat{\sigma}_y, \hat{H}) &= \frac{1}{2} \text{tr} \left(\hat{\sigma}_y \cdot \sum_{i=1}^8 a_i \lambda_i \right) = 0, \\(\hat{\sigma}_z, \hat{H}) &= \frac{1}{2} \text{tr} \left(\hat{\sigma}_z \cdot \sum_{i=1}^8 a_i \lambda_i \right) = 0.\end{aligned}\tag{4.79}$$

Las ecuaciones anteriores imponen las siguientes restricciones en los coeficientes de la ecuación (4.78)

$$\begin{aligned}a_6 &= -a_1, \\a_7 &= -a_2, \\a_8 &= -\frac{1}{\sqrt{3}}a_3,\end{aligned}\tag{4.80}$$

las cuales permiten construir el subespacio generado por las siguientes cinco matrices $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5\}$, que corresponde al subespacio ortogonal a los hamiltonianos procedentes de campos magnéticos

$$\begin{aligned}\gamma_1 = \lambda_1 - \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_2 = \lambda_2 - \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\gamma_3 = \lambda_1 - \frac{\lambda_8}{\sqrt{3}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$\gamma_4 = \lambda_4, \quad \gamma_5 = \lambda_5.$$

A continuación analizaremos la dinámica con algunos hamiltonianos particulares. Usaremos las coordenadas $(\alpha, \theta, \phi, \chi)$, pues, al igual que en los casos anteriores, las ecuaciones de evolución son considerablemente más simples con respecto a las ecuaciones obtenidas con las coordenadas de Darboux.

El caso más simple resulta al considerar

$$\hat{H} = \gamma_3. \tag{4.81}$$

Éste toma la siguiente expresión en el espacio proyectivo

$$H = \frac{1}{6} \left(1 + 3 \cos(2\theta) - \frac{12 \sin^2(\alpha) \sin^2(\theta) \cos(2(\chi + \phi))}{\cos(2\alpha) + 3} \right). \tag{4.82}$$

Con este hamiltoniano, las ecuaciones de evolución son

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{1}{2} (\cos(2\alpha) + 3) \csc(\alpha) \sin^2(\theta) \sin(2(\chi + \phi)), \\ \dot{\theta} &= -\sin(\alpha) \tan(\alpha) \sin(\theta) \cos(\theta) \sin(2(\chi + \phi)), \\ \dot{\phi} &= -\frac{1}{2} \sec(\alpha) \cos(\theta) (2 \sin^2(\alpha) \cos(2(\chi + \phi)) + \cos(2\alpha) + 3), \\ \dot{\chi} &= 2 \cot(\alpha) \csc(\alpha) \sin^2(\theta) \cos(2(\chi + \phi)) + \\ &\quad \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta) (2 \sin(\alpha) \tan(\alpha) \cos(2(\chi + \phi)) + (\cos(2\alpha) + 3) \sec(\alpha)). \end{aligned}$$

Observemos que en este caso, como se esperaba, ya hay variación en α . Desafortunadamente las ecuaciones diferenciales son muy complicadas de resolver. Aún así, podemos resolver numéricamente las ecuaciones y mostrar gráficas de la evolución de la constelación de Majorana con distintas condiciones iniciales.

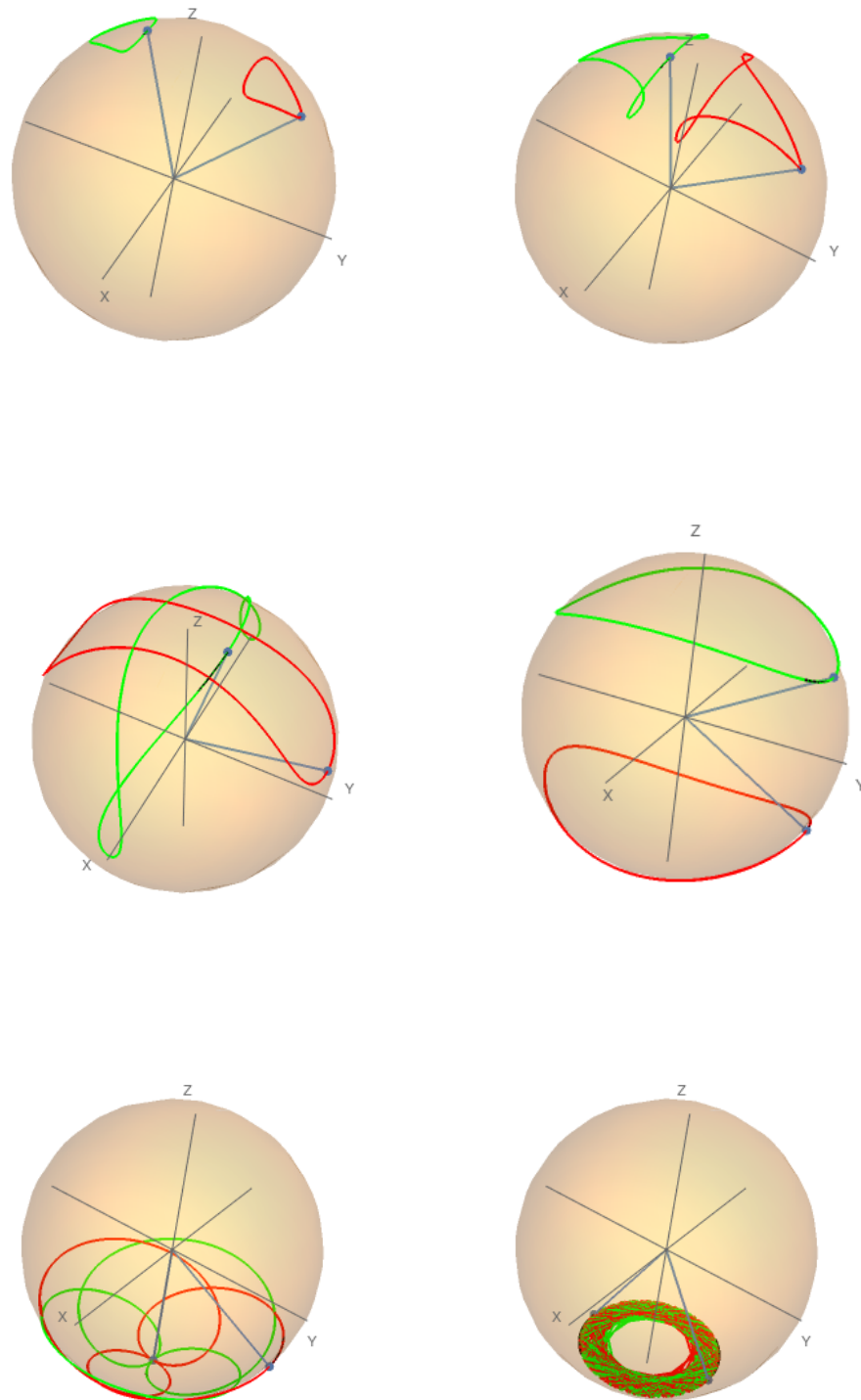


Figura 4.4: Evolución de la constelación de Majorana con hamiltoniano $\hat{H} = \gamma_3$ para seis condiciones iniciales distintas.

Las seis figuras anteriores, de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha, corresponden a las siguientes condiciones iniciales

$$(\alpha(0), \theta(0), \phi(0), \chi(0)) = \left(\frac{\pi}{6}, \theta_i, 0, 0 \right), \quad (4.83)$$

con $\theta_i = -\pi/16, -\pi/9, -\pi/4, -\pi/2, -5\pi/6, -\pi$. Gráficamente estas condiciones representan la configuración de la figura 4.2 rotada θ_i grados a través del eje x . Los puntos azules en cada gráfica es la configuración inicial del sistema.

En las gráficas se puede observar que las trayectorias que trazan las estrellas de la constelación son cerradas, además, cuando la condición inicial es muy próxima a $(\frac{\pi}{6}, 0, 0, 0)$ las estrellas trazan trayectorias cerradas cada vez más pequeñas, mientras que se van haciendo trayectorias más complejas cuando la condición inicial se acerca a $(\frac{\pi}{6}, -\pi, 0, 0)$.

Otra característica muy importante es que, en general, la evolución depende casi exclusivamente de la posición relativa de las estrellas con respecto al eje z . Por ejemplo, la evolución con la condición inicial $(\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, mostrada en la siguiente figura, es esencialmente la misma que la de la condición $(\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{4}, 0, 0)$

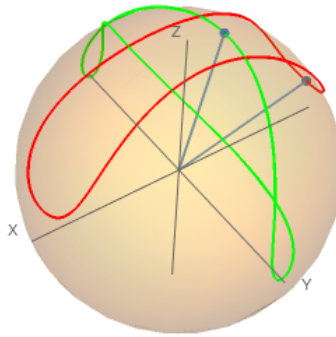


Figura 4.5: Evolución de la constelación para la condición inicial $(\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Analicemos otro sistema.

Con el hamiltoniano que estudiaremos a continuación sucede un fenómeno contrario al que obtuvimos con campos magnéticos, pues, en algunos casos particulares, únicamente hay variación en la coordenada α .

Consideremos el hamiltoniano

$$\hat{H} = \gamma_1, \quad (4.84)$$

el cual implica el siguiente H en el espacio proyectivo

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}(\cos(2\phi_1) + 3)} \left[4 \sin(\phi_2) \sin(2(\phi_3 + \phi_4)) \sin^2(\phi_1) \cos(\phi_3) - \sin(2\phi_2) \sin(\phi_3) (\cos(2\phi_1) + 2 \sin^2(\phi_1) \cos(2(\phi_3 + \phi_4)) + 3) \right]. \quad (4.85)$$

Con este hamiltoniano tenemos la siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= (\cos(2\alpha) + 3) \csc(\alpha) (\sin(2\theta) \sin(\phi) \sin(2(\chi + \phi)) + 2 \sin(\theta) \cos(\phi) \cos(2(\chi + \phi))), \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{2} \sec(\alpha) \cos(\theta) \cos(\phi) (\cos(2(\alpha - \chi - \phi)) + \cos(2(\alpha + \chi + \phi)) + 2 \cos(2\alpha) - \\ &\quad 2 \cos(2(\chi + \phi)) + 6) - 2 \sin(\alpha) \tan(\alpha) \cos(2\theta) \sin(\phi) \sin(2(\chi + \phi)), \\ \dot{\phi} &= 2 \sin(\alpha) \tan(\alpha) \cot(\theta) \cos(\phi) \sin(2(\chi + \phi)) - \\ &\quad \sec(\alpha) \cos(2\theta) \csc(\theta) \sin(\phi) (2 \sin^2(\alpha) \cos(2(\chi + \phi)) + \cos(2\alpha) + 3), \\ \dot{\chi} &= 4 \cot \alpha \csc \alpha (\sin(2\theta) \sin(\phi) \cos(2(\chi + \phi)) - 2 \sin \theta \cos \phi \sin(2(\chi + \phi))) + \sec(\alpha) \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &\quad (\cos(2\theta) \sin(\phi) (2 \sin^2 \alpha \cos(2(\chi + \phi)) + \cos(2\alpha) + 3) - 2 \sin^2(\alpha) \cos \theta \cos \phi \sin(2(\chi + \phi))). \end{aligned}$$

En las siguientes dos figuras se muestran la evolución del sistema para las dos siguientes condiciones iniciales

$$\begin{aligned} P_1(0) &= \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, 0, 0 \right), \\ P_2(0) &= \left(\frac{\pi}{6}, \pi, 0, 0 \right). \end{aligned} \quad (4.86)$$

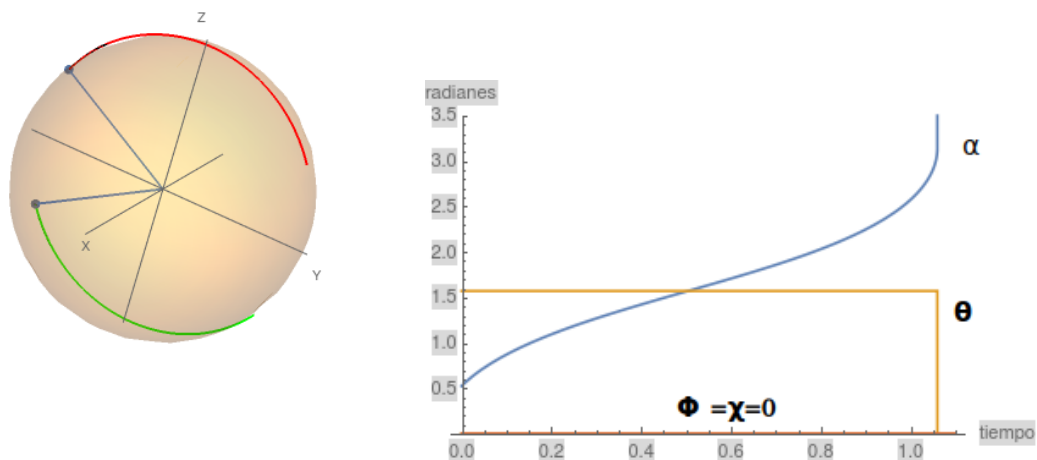


Figura 4.6: Evolución de la constelación de Majorana con hamiltoniano $\hat{H} = \gamma_3$ con la condición inicial $P_1(0)$ y a la derecha gráfica paramétrica de los ángulos $(\alpha, \theta, \phi, \chi)$ en función del tiempo.

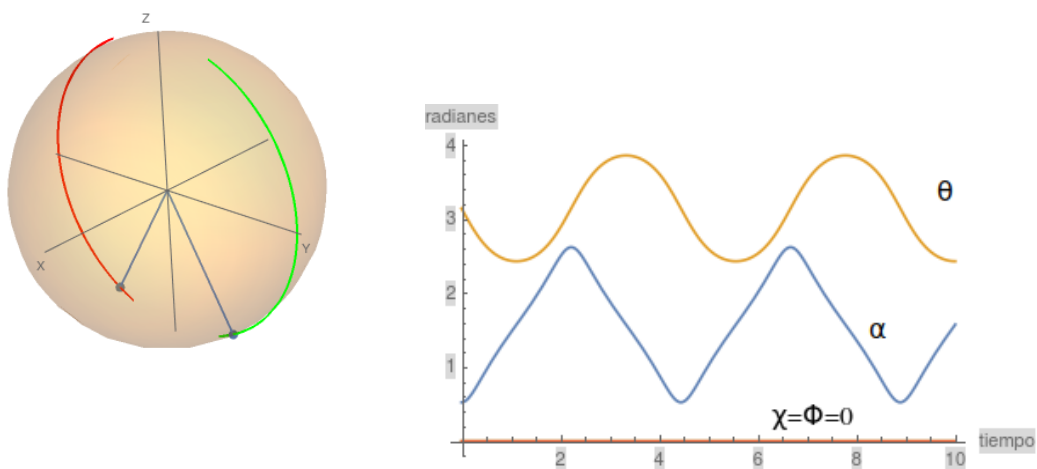


Figura 4.7: Evolución de la constelación con la condición inicial $P_2(0)$ y a la derecha gráfica paramétrica de los ángulos $(\alpha, \theta, \phi, \chi)$ en función del tiempo.

La primer gráfica muestra un ejemplo donde la coordenada α varía con el tiempo de manera casi lineal, mientras que las demás coordenadas se mantienen constantes; situación contraria a lo que sucedía en campos magnéticos, donde la única variable que se mantenía constante era α . Sin embargo, aproximadamente en $t = 1,1$ hay una singularidad y las variables α y θ se van a infinito.

La segunda gráfica también muestra un comportamiento muy interesante. Nuevamente las variables ϕ y χ se mantienen constante, pero α y θ varían de manera periódica muy similar a las función seno y coseno.

Ya solo como ejemplo mostraremos una gráfica más correspondiente a la condición inicial $P_3(0) = (\frac{\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ que presenta un comportamiento curioso

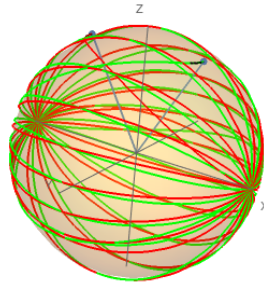


Figura 4.8: Evolución de la constelación para la condición inicial $(\frac{\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Los ejemplos anteriores muestran que existen sistemas con hamiltonianos que no provienen de campos magnéticos cuya evolución es muy compleja y a la vez interesante. Se podría seguir analizando la evolución de distintos sistemas, pero las expresiones para las ecuaciones de evolución son, en la mayoría de los casos, extremadamente complicadas. Lo anterior no quiere decir que solo en campos magnéticos se pueda tener una descripción sencilla del espín, simplemente las coordenadas con las que se está trabajando podrían no ser las adecuadas, pues éstas se eligieron motivadas por un caso particular con campos magnéticos, por lo que es de esperar que en casos más generales no sean las ideales. Aún así, un análisis puramente numérico nos permitió ver algunos aspectos geométricos útiles y bastante visuales sobre cómo es la evolución de un sistema de espín $s = 1$ en situaciones generales.

Capítulo 5

Una Extraña Característica de los Estados Entrelazados

En este capítulo, con el cual finalizamos este trabajo, presentaremos brevemente un problema que complementa y extiende todo lo que se ha desarrollado y permitirá plantear el marco para posibles investigaciones posteriores. Se trata de un hecho curioso sobre los estados entrelazados, introducido en el artículo “A curious geometrical fact about entanglement” de Ingemar Bengtsson [22].

Consideremos dos sistemas, A y B , que no interaccionan entre ellos; con respectivos espacios de Hilbert, H_A y H_B . El espacio de Hilbert del sistema compuesto, H , se puede describir por el producto tensorial de estos dos espacios

$$H = H_A \otimes H_B. \quad (5.1)$$

Si $\{|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_n\rangle\}$ es una base para A y $\{|\phi_1\rangle, \dots, |\phi_m\rangle\}$ es una base para B entonces el sistema compuesto es de dimensión $n \times m$ y se puede construir la siguiente base $\{|\psi_i\rangle \otimes |\phi_j\rangle\}$ con $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m$. De este modo, un estado general en H se puede representar de la siguiente forma

$$|\xi\rangle = \sum_{ij} c_{ij} |\psi_i\rangle \otimes |\phi_j\rangle. \quad (5.2)$$

Decimos que un estado es separable si se puede escribir como el producto tensorial de dos vectores $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ en H_A y H_B , respectivamente

$$|\xi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle. \quad (5.3)$$

Lo anterior implica que

$$|\xi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = \left(\sum_i c_i^A |\psi_i\rangle\right) \otimes \left(\sum_j c_j^B |\phi_j\rangle\right) = \sum_{ij} c_i^A c_j^B |\psi_i\rangle \otimes |\phi_j\rangle. \quad (5.4)$$

Por lo que un estado es separable si todos sus coeficientes, c_{ij} , se pueden descomponer de la siguiente manera

$$c_{ij} = c_i^A c_j^B. \quad (5.5)$$

En contraparte, decimos que un estado está entrelazado si éste no es un estado separable.

Por ejemplo, pensemos en un sistema compuesto de dos espines $s = 1/2$ y consideremos los siguientes estados

$$|\xi\rangle = |+\rangle \otimes |+\rangle,$$

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle).$$

Es claro que el primero es un estado separable. Sin embargo, con el segundo estado no existe ningún par de estados tales que su producto tensorial de $|\chi\rangle$.

Existe una manera de clasificar el enredamiento cuántico a través de un importante concepto en mecánica cuántica; la matriz de densidad. A continuación definiremos rápidamente esta matriz y la manera en que ésta caracteriza a los estados entrelazados. Para estudiar detalladamente lo anterior ver [19, 22, 23].

Decimos que un estado es puro si puede ser descrito por un vector de estado único. Por otro lado, un estado mixto es aquel que se encuentra en una combinación estadística de estados puros.

Consideremos un estado mixto preparado mediante la combinación estadística de los estados puros $|i\rangle$ con respectivo peso w_i . La descripción de un sistema físico en términos de una matriz de densidad es la descripción cuántica más general que se dispone. Esta última se define de la siguiente manera [25]

$$\hat{\rho} = \sum_i w_i |i\rangle \langle i|. \quad (5.6)$$

Consideremos ahora un estado arbitrario en $H = H_A \otimes H_B$ donde la dimensión de los dos espacios es igual ($n = m$) y escribámoslo de la siguiente forma

$$|\xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i \sum_j c_{ij} |\psi_i\rangle \otimes |\phi_j\rangle; \quad (5.7)$$

entonces la matriz de densidad del sistema puede escribirse en la forma [23]

$$\rho_{ij,kl} = \frac{1}{N} c_{ij} c_{kl}^*. \quad (5.8)$$

Supongamos que estamos interesados únicamente en el sistema A , entonces la matriz de densidad relevante, ρ^A , es la traza parcial de ρ . Ésto es

$$\rho_{ik}^A = \sum_j \rho_{ij,kj}. \quad (5.9)$$

Dos casos extremos pueden suceder; si los estados son separables (y por tanto están bien definidos los estados de cada subsistema) tenemos que el rango de ρ^A es uno.

Por otro lado, si sucede que

$$\rho^A = \frac{1}{N}I \quad (5.10)$$

entonces, aunque el estado global sea conocido, no disponemos de información acerca de los estados de cada subsistema [23]. Un estado como el anterior se dice que está maximalmente entrelazado.

Lo anterior, en particular, implica que un estado está maximalmente entrelazado si se cumple que

$$c \cdot c^\dagger = I. \quad (5.11)$$

Observemos que la ecuación anterior implica que c es un elemento del grupo $U(n)$.

Trasladémonos ahora al espacio proyectivo del producto tensorial, \mathbf{CP}^{n^2-1} . Aquí es donde viven los estados puros del sistema H . Como en el espacio proyectivo la fase es irrelevante resulta que el subconjunto de los estados maximalmente entrelazados es isomorfo a [22]

$$SU(n)/Z_n \in \mathbf{CP}^{n^2-1}, \quad (5.12)$$

y por lo tanto

$$\dim[SU(n)/Z_n] = n^2 - 1 = \frac{1}{2}\dim[\mathbf{CP}^{n^2-1}]. \quad (5.13)$$

Además en este subconjunto la forma simpléctica restringida es tal que [22]

$$\Omega|_{SU(n)/Z_n} = 0. \quad (5.14)$$

Es decir, tenemos que el conjunto de los estados maximalmente entrelazados tiene dimensión igual a la mitad de la dimensión del espacio total y también que la forma simpléctica restringida a este conjunto es cero.

Una subvariedad que cumple estas dos propiedades es conocida como subvariedad lagrangiana. Para los físicos estas subvariedades son conocidas como espacios de configuración.

Si un sistema es descrito por coordenadas canónicas (p_i, q_i) entonces el subespacio generado por las q_i resulta ser lagrangiano.

La pregunta concreta que se hace Ingemar Bengtsson en su artículo es la siguiente:

¿Cuál es el significado físico de que los estados maximalmente entrelazados representen una subvariedad mínima lagrangiana del espacio de los estados puros?

Una posible manera de abordar el problema es utilizar el teorema de Darboux en \mathbf{CP}^{n^2-1} . Ésto nos permitiría definir un conjunto de coordenadas canónicas (p_i, q_i) en el espacio y así la subvariedad lagrangiana de los estados maximalmente entrelazados correspondería al subespacio definido por las ecuaciones $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 0$.

Con lo anterior se puede proseguir a estudiar la dinámica y analizar la evolución de los estados entrelazados.

Conclusiones

Después de desarrollar y explicar los fundamentos teóricos y las herramientas matemáticas donde descansa la formulación geométrica de la mecánica cuántica, así como introducir el espacio proyectivo como el espacio en el cual viven los estados cuánticos puros, se logró dar una explicación analítica y descriptiva de la evolución de un sistema cuántico de espín $s = 1$.

El hecho más destacable de este análisis es que cuando el estado es puesto en una región con un campo magnético éste mantiene simetrías geométricas relacionadas con la posición relativa de las estrellas de su respectiva constelación de Majorana. Lo anterior ayudó en el estudio y caracterización de este sistema cuántico y sugiere que la representación de Majorana podría ser un buen punto de partida para facilitar la comprensión de la dinámica de situaciones cuánticas más generales.

Otro hecho importante es que en esta formulación el teorema de Darboux siempre nos da un conjunto privilegiado de coordenadas que permite analizar los sistemas de una manera canónica. Sin embargo, el análisis realizado en el capítulo 4 pone en evidencia que estas coordenadas no siempre permiten la simplificación del problema, por lo que una elección astuta de las coordenadas en las que se decidirá trabajar puede marcar gran diferencia en un análisis satisfactorio del problema.

Finalmente, el último capítulo muestra una sugerente dirección a seguir posterior a lo estudiado en este trabajo, ya que expone un problema no trivial y de potencial relevancia física que es perfectamente asequible con lo que se desarrolló en este trabajo. Además, junto con todos los resultados obtenidos, exhibe que el enfoque geométrico pone de manifiesto propiedades y características de los sistemas cuánticos bastante novedosas e importantes que, en general, se mantienen ocultas en la formulación algebraica estándar de la mecánica cuántica. Esto da un indicio de la importancia del planteamiento geométrico seguido en este trabajo, el cual podría permitir avances significativos en la estructura conceptual y axiomática de la mecánica cuántica y genera un prometedor marco para conseguir la tan anhelada y buscada unificación de la teoría cuántica y gravitatoria.

Apéndice

A. Vectores y formas en coordenadas locales

La definición de un vector o en general de un tensor es independiente del sistema de coordenadas. Sin embargo, al hacer cálculos específicos siempre se debe seleccionar un sistema particular de coordenadas.

Sea M una variedad y $(q_1, \dots, q_n, q_{n+1}, \dots, q_{2n})$ un sistema de coordenadas para M . En estas coordenadas tenemos que los conjuntos $\{\frac{\partial}{\partial q_\mu}\}$ y $\{dq_\mu\}$ son base para los vectores y las 1-formas, respectivamente. Así, la expresión general para un vector, V , y una 1-forma, w , es

$$V = X^\mu \frac{\partial}{\partial q_\mu}, \quad (5.15)$$

$$w = a_\mu dq_\mu, \quad (5.16)$$

en donde se está usando la convención de la suma de Einstein.

La acción de un elemento de la base de las 1-formas sobre un elemento de la base de los vectores es

$$dq_\mu \left(\frac{\partial}{\partial q_\nu} \right) = \delta_{\mu\nu}. \quad (5.17)$$

Por lo anterior, considerando la linealidad de las 1-formas, tenemos que la acción de una 1-forma arbitraria sobre un vector es

$$\begin{aligned}
 w(V) &= a_\mu dq_\mu \left(X^\nu \frac{\partial}{\partial q_\nu} \right) \\
 &= a_\mu X^\nu dq_\mu \left(\frac{\partial}{\partial q_\nu} \right) \\
 &= a_\mu X^\mu.
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Si f es una función de la variedad a los reales, $f = f(q_i)$, definimos su diferencial como la siguiente 1-forma

$$df := \frac{\partial f}{\partial q_\mu} dq_\mu. \tag{5.19}$$

De estas definiciones se puede obtener la ecuación (2.25) a partir de (2.24), como se muestra a continuación.

Sea $Y = Y^\nu \frac{\partial}{\partial q_\nu}$ un vector arbitrario y X_f el campo vectorial hamiltoniano de f . De (2.24) se tiene

$$df(Y) = \Omega(X_f, Y). \tag{5.20}$$

La 2-forma Ω la podemos escribir de la siguiente forma

$$\Omega = \Omega_{\mu\nu} dq_\mu \otimes dq_\nu, \tag{5.21}$$

donde, por definición, se tiene

$$\Omega(V, U) = \Omega_{\mu\nu} dq_\mu(V) dq_\nu(U); \tag{5.22}$$

luego, de (7.7), se sigue

$$Y^\mu \frac{\partial f}{\partial q_\mu} = \Omega_{\mu\nu} X_f^\mu Y^\nu, \tag{5.23}$$

o equivalentemente

$$\left(\frac{\partial f}{\partial q_\nu} - \Omega_{\mu\nu} X_f^\mu \right) Y^\nu = 0. \quad (5.24)$$

Como lo anterior es válido para todo vector Y entonces lo que está dentro del paréntesis del lado izquierdo debe ser cero, por lo que

$$\frac{\partial f}{\partial q_\nu} = \Omega_{\mu\nu} X_f^\mu. \quad (5.25)$$

Multiplicando por $\Omega^{\nu\alpha}$ (la inversa de Ω) obtenemos

$$X_f^\alpha = \Omega^{\nu\alpha} \frac{\partial f}{\partial q_\nu}. \quad (5.26)$$

Considerando que la forma simpléctica (y su inversa) son antisimétricas podemos reescribir la ecuación anterior como

$$X_f^\alpha = -\Omega^{\alpha\nu} \frac{\partial f}{\partial q_\nu}. \quad (5.27)$$

Bibliografía

- [1] K. Becker, M. Becker, and J. H. Schwarz, *String theory and M-theory: A modern introduction*. Cambridge University Press, 2006.
- [2] A. Ashtekar, “Gravity and the quantum,” *New Journal of Physics*, vol. 7, no. 1, p. 198, 2005.
- [3] A. Ashtekar and T. A. Schilling, “Geometrical formulation of quantum mechanics,” in *On Einstein’s Path*, pp. 23–65, Springer, 1999.
- [4] H. Heydari, “Geometric formulation of quantum mechanics,” *arXiv preprint arXiv:1503.00238*, 2015.
- [5] J. Clemente-Gallardo, “The geometrical formulation of quantum mechanics,” *Rev. Real Acad. Ciencias Zaragoza*, vol. 67, pp. 51–103, 2012.
- [6] T. W. Kibble, “Geometrization of quantum mechanics,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 65, no. 2, pp. 189–201, 1979.
- [7] D. J. Griffiths, *Introduction to quantum mechanics*. Pearson international edition (Pearson Prentice Hall, 2005), 2010.
- [8] J. J. Sakurai, J. Napolitano, *et al.*, *Modern quantum mechanics*, vol. 185. Pearson Harlow, 2014.
- [9] R. Littlejohn, *Notes 14 Spins in Magnetic Fields*. University of California, Berkeley, 2014.
- [10] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*. CRC Press, 2003.

- [11] T. Frankel, *The geometry of physics: an introduction*. Cambridge university press, 2011.
- [12] C. Nash and S. Sen, *Topology and geometry for physicists*. Elsevier, 1988.
- [13] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*. Princeton University Press, 2017.
- [14] B. Rink, “Lecture notes on geometric mechanics and dynamics,” 2007.
- [15] J. Powell, “Aspects of symplectic geometry in physics,”
- [16] A. C. Da Silva and A. C. Da Salva, *Lectures on symplectic geometry*, vol. 3575. Springer, 2001.
- [17] E. Majorana, “Atomi orientati in campo magnetico variabile,” *Il Nuovo Cimento (1924-1942)*, vol. 9, no. 2, pp. 43–50, 1932.
- [18] C. Chryssomalakos, E. Guzmán-González, and E. Serrano-Ensástiga, “Geometry of spin coherent states,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 51, no. 16, p. 165202, 2018.
- [19] I. Bengtsson and K. Życzkowski, *Geometry of quantum states: an introduction to quantum entanglement*. Cambridge university press, 2017.
- [20] N. Wheeler, “Majorana representation of higher spin states,” *Reed College Physics Department*, 2000.
- [21] V. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*. Springer Verlag, 1989.
- [22] I. Bengtsson, “A curious geometrical fact about entanglement,” in *AIP Conference Proceedings*, vol. 962, pp. 34–38, AIP, 2007.
- [23] I. Bengtsson, J. Brännlund, and K. ŻYCZKOWSKI, “Cp n, or, entanglement illustrated,” *International Journal of Modern Physics A*, vol. 17, no. 31, pp. 4675–4695, 2002.

- [24] “C/cs/phys 191 spin precession,” *Algebra, Spin*.
- [25] L. De La Peña, *Introducción a la mecánica cuántica*. Fondo de Cultura económica, 2014.
- [26] I. Duranza Rodríguez, “Geometría simpléctica y mecánica analítica,” 2015.
- [27] “Properties of the gell-mann matrices,” *Physics 251*, Spring 2017.