



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
POSGRADO EN ASTROFÍSICA  
ASTROFÍSICA TEÓRICA

Deflexión de rayos de luz en campos gravitacionales constantes: aplicaciones en agujeros  
negros

T E S I S  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS (ASTROFÍSICA)

PRESENTA:  
MILTON JAIR SANTIBÁÑEZ ARMENTA

TUTOR:  
DR. SERGIO MENDOZA RAMOS  
INSTITUTO DE ASTRONOMÍA

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:  
M. EN C. CHRISTINE PATRICIA ALLEN ARMIÑO  
INSTITUTO DE ASTRONOMÍA  
DR. ALAN MORGAN WATSON FORSTER  
INSTITUTO DE ASTRONOMÍA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO, ENERO 2020



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México, por ser mi segundo hogar estos últimos años.

Al Instituto de Astronomía de la UNAM, por brindarme apoyo para la elaboración de esta tesis y abrirme las puertas de sus instalaciones por estos últimos dos años.

Al Dr. Sergio Mendoza Ramos, mi asesor y director de tesis, por su dedicación, apoyo y paciencia que permitieron la elaboración de este trabajo.

A CONACyT por brindarme apoyo con una beca durante estos dos años (CVU 751147).

Tesis realizada con apoyos del proyecto de DGAPA-UNAM (No. PAPIIT IN112019) de la UNAM y de CONACyT (CB-2014-1 # 240512).



# Índice general

Agradecimientos	III
Notación	IX
Resumen	XI
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
§1.1. Deflexión de luz newtoniana . . . . .	1
§1.2. Eddington, la deflexión de la luz y las lentes gravitacionales . . . . .	3
§1.3. Sombras de agujeros negros (observaciones) . . . . .	4
§1.4. La métrica tridimensional, el vector $\mathbf{e}$ y el índice de refracción . . . . .	6
<b>2. Deflexión de la luz y de partículas</b>	<b>9</b>
§2.1. Ángulo de deflexión . . . . .	9
§2.2. Formula general para la deflexión de la luz . . . . .	10
§2.3. Ángulo de deflexión en simetría esférica . . . . .	12
<b>3. Sombras de agujeros negros</b>	<b>21</b>
§3.1. Colocación de las fuentes emisoras de rayos de luz . . . . .	21
§3.2. Colocación del visor . . . . .	23
§3.3. Conteo de fotones . . . . .	24
§3.4. Movimiento del visor . . . . .	26
§3.5. Lanzando los haces desde el visor . . . . .	27
§3.6. Imágenes . . . . .	29
<b>4. Conclusiones</b>	<b>35</b>

A. Vectores base en coordenadas esféricas	37
---	----

# Índice de figuras

1.1. Eclipse solar de 1919 . . . . .	3
1.2. Imagen de lente gravitacional ‘Gato de Cheshire’ . . . . .	4
1.3. Event Horizon Telescope . . . . .	5
1.4. Luminet’s Black Hole . . . . .	6
2.1. Esquema de la deflexión de un haz de luz . . . . .	10
2.2. Ángulo de deflexión vs ángulo de Eistein . . . . .	11
2.3. Ángulo de deflexión integrando trayectorias vs integrando $\beta$ . . . . .	15
2.4. Trayectoria de un haz de luz deflectado por un agujero negro. . . . .	16
2.5. Haz de luz absorbido por un agujero negro. . . . .	17
2.6. Trayectorias haces de luz deflectados por un agujero negro. . . . .	19
3.1. Anillo alrededor de un agujero negro. . . . .	22
3.2. Esquema de emisión de haces por una fuente puntual. . . . .	22
3.3. Esquema de haces detectados por un visor rectangular. . . . .	23
3.4. Representación del grosor del visor. . . . .	24
3.5. Visor seccionado en celdas. . . . .	25
3.6. Coordenada de una celda. . . . .	25
3.7. Esquema del visor inclinado . . . . .	27
3.8. Esquema del ancho del visor inclinado . . . . .	28
3.9. Anillo de 10 puntos visto a una distancia de $r = 5r_s$ . . . . .	29
3.10. Anillo de 100 puntos visto a una distancia de $r = 4r_s$ . . . . .	29
3.11. Anillo de 100 puntos visto a una distancia de $r = 5r_s$ . . . . .	30
3.12. Anillo de 100 puntos visto con un visor de forma inclinada . . . . .	30
3.13. Vista de un anillo a $30^\circ$ de inclinación. . . . .	31

3.14. Vista de un anillo a $10^\circ$ de inclinación. . . . .	32
3.15. Vista de un disco a $10^\circ$ de inclinación. . . . .	33

# Notación

En las teorías de gravitación existentes la notación empleada es diversa, por lo que no existe una convención universal de la misma. Por lo tanto, a continuación se describe la notación que se utilizará a lo largo de este texto.

El tensor métrico 4-dimensional del espacio-tiempo se denotará como  $g_{\mu\nu}$  con signatura  $(+, -, -, -)$  y el espacio de Minkowski como  $\eta_{\mu\nu}$ .

Los índices con valores de 0 a 3 se denotarán con letras griegas y los índices con valores de 1 a 3 se denotarán con letras latinas.

El elemento de volumen tridimensional en coordenadas cartesianas es  $d^3x = dx dy dz$ .

Los operadores gradiente y divergencia en el espacio tridimensional serán  $\nabla$  y  $\nabla \cdot$  respectivamente.



# Resumen

Basándonos en el hecho de que los rayos de luz son deflectados por campos gravitacionales (Einstein, 1916) y motivados por el resultado obtenido por el Event Horizon Telescope de la sombra del agujero negro de M87 (Collaboration, 2019) y simulaciones (Luminet (1978), Bisnovatyi-Kogan et al. (2019)) de discos de acreción alrededor de agujeros negros, se buscó encontrar ecuaciones de movimiento para los haces de luz que pudieran ser integradas de forma directa sobre las coordenadas espaciales del espacio-tiempo, sin necesidad de preocuparnos por la coordenada temporal. Se utilizó el principio de Fermat, el cual establece brevemente que la variación del tiempo en el marco de referencia de un haz de luz (un fotón) es cero (Poisson & Will, 2014). Dichas ecuaciones ya fueron encontradas anteriormente en el trabajo de Santibáñez (2018).

Las ecuaciones son muy generales, por lo que se obtuvieron sus expresiones más claras para un espacio-tiempo con simetría esférica, con las cuales se realizó un código que integra trayectorias de haces de luz dentro de un espacio-tiempo con métrica de Schwarzschild.

El código fue utilizado para encontrar sombras de intensidad de un anillo y observar estructuras tanto de anillos como de un disco de acreción, todas alrededor de un agujero negro de Schwarzschild.



# Capítulo 1

## Introducción

Se introducirá brevemente la historia de cómo se descubrió el efecto de la deflexión de haces de luz por medio de campos gravitacionales, desde el momento en que Newton hizo mención de ellos en su libro de Óptica (Newton, 1704), pasando por la formalización matemática básica de Einstein (1916) hasta llegar a la obtención observacional de un agujero negro supermasivo por el Event Horizon Telescope (Collaboration, 2019). Se abordará brevemente el formalismo matemático que será utilizado para poder analizar trayectorias de haces de luz distintas a las convencionales.

### §1.1. Deflexión de luz newtoniana

En el siglo XVIII, Isaac Newton construyó una teoría de la gravitación universal, la cual afirma que dos cuerpos masivos sienten entre sí una fuerza atractiva proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa (Newton et al., 1803). Dicha fuerza gravitacional está asociada con cuerpos masivos, pero ¿qué ocurriría con objetos que no tuvieran masa? El mismo Newton en su manuscrito de Óptica postuló que la luz tendría o debería ser atraída por la fuerza gravitacional en forma de un cuestionamiento (Newton, 1704); lo menciona de la siguiente manera:

**“Do not bodies act upon light at distance, and by their action bend its rays,  
and is not this action strongest at the least distance?”**

Daba a entender que él mismo tenía la corazonada de que la gravedad debería afectar a partículas sin masa como los fotones (aunque en aquel entonces Newton les llamara

corpúsculos), pero las herramientas matemáticas no eran suficientes como para siquiera tratar de explicarlo.

Años más tarde, en el año de 1801, Johann Georg von Soldner escribió lo que fué la primer descripción matemática de la deflexión de un haz de luz utilizando mecánica clásica citado en Jaki & Soldner (1978). Supongamos primero que tenemos una partícula masiva  $m$  que tiene una trayectoria recta con velocidad constante y que se aproxima desde infinito a otro cuerpo masivo  $M \gg m$ . La partícula recorre una trayectoria en forma de cónica alrededor de la masa  $M$  de manera que es deflectada un ángulo  $\delta$ . La excentricidad de dicha trayectoria cónica se puede escribir como

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2m^3M^2}}, \quad (1.1)$$

con  $E$  y  $L$  la energía y el momento lineal de la partícula  $m$  respectivamente. El ángulo  $\delta$  se puede escribir en función de la excentricidad como

$$\delta = \pi - 2 \arccos \frac{1}{\epsilon}, \quad (1.2)$$

de manera que si tomamos los valores de energía y momento lineal en el punto de máximo acercamiento ( $r_p, v_t$ ) a la masa  $M$  (perihelio) la excentricidad queda como:

$$\epsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{r_p v_t^2}{GM}\right)^2 - \frac{2r_p v_t^2}{GM}} = 1 - \frac{r_p v_t^2}{GM}, \quad (1.3)$$

y tomando que  $v_t \rightarrow c$ , se obtiene un ángulo de deflexión

$$\delta = \pi - 2 \arccos \left( \frac{GM/r_p c^2}{GM/r_p c^2 - 1} \right) \sim \frac{2GM}{c^2 r_p}. \quad (1.4)$$

Este resultado, es muy cercano al obtenido por Einstein casi un siglo después (Einstein, 1916), conocido como ángulo de Einstein para una masa puntual, y ha sido comprobado para ángulos pequeños

$$\alpha_E = \frac{4GM}{c^2 b}, \quad (1.5)$$

donde  $b$  es el parámetro de impacto.\*

---

\*De hecho Einstein (Einstein, 1907) obtuvo primero el mismo resultado que Soldner. Fué hasta 1916 (Einstein, 1916) que obtuvo el resultado correcto.

## §1.2. Eddington, la deflexión de la luz y las lentes gravitacionales

Uno de los resultados de la relatividad general es que un cuerpo masivo deforma el espacio-tiempo alrededor de él, provocando un cambio en la trayectoria de cualquier partícula. Dicho cambio en la trayectoria será mayor entre más cerca se encuentre del cuerpo masivo y tenderá a cero en infinito.

Este efecto no sólo afecta a las partículas masivas sino también a partículas sin masa como lo son los fotones, y provoca lo que conocemos como deflexión de la luz debida a campos gravitacionales.

Dicho efecto llevó a Einstein a encontrar la ecuación (1.5) el cual nos muestra como encontrar el ángulo de deflexión de un haz de luz al pasar lo suficientemente cerca de un cuerpo masivo  $M$  que genera un campo gravitacional débil ( $\Phi/c^2 \ll 1$ ). En el caso de rayos de luz que rozan el limbo solar tiene un valor de 1.7 arcsec.

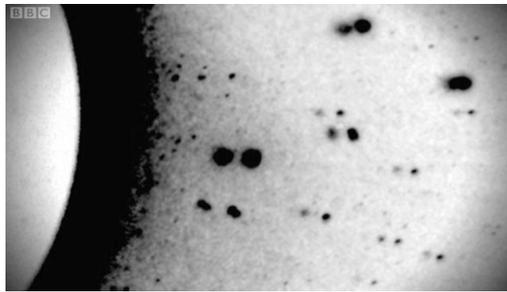


Figura 1.1: Placa fotográfica tomada por Eddington del eclipse solar de 1919 superpuesta a una imagen de la misma zona del cielo 6 meses después. Se ve como la posición de las estrellas ‘cercanas’ al sol es diferente en ambos casos. Imagen tomada de: <http://claesjohnson.blogspot.com/2011/09/bending-of-light-by-gravity.html>

En 1919, Arthur Eddington viajó a la Isla de Príncipe en África para fotografiar un eclipse total de sol, con el cual pudo ver la posición de las estrellas cercanas al limbo solar sin el problema de tener sobreexposición debida normalmente al mismo sol. La luz de estas estrellas seguía una trayectoria que pasaba muy cerca del sol y podrían ser observadas desde la tierra en el momento del eclipse. Al comparar la posición de estas estrellas en el cielo con la posición de las mismas 6 meses después Eddington se dió cuenta de que había discrepancia, como se muestra en la Figura 1.1.

Las mediciones de Eddington causaron muchas dudas en la comunidad astronómica,

pero aún así obtuvo como resultado que la luz era deflectada un ángulo de 1.6 arcsec, bastante similar al resultado teórico obtenido por Einstein, ver Dyson et al. (1920). A pesar de estas dudas, la comunidad astronómica en general aceptó el resultado sobre la deflexión de la luz por un campo gravitacional.

Hoy en día tenemos evidencias más claras de dicho fenómeno, mediante las lentes gravitacionales, los cuales son el abrillantamiento y enfocamiento de los rayos de luz producidos por acumulaciones grandes de masa (galaxias, cumulos de galaxias, etc), que deflectan la luz de un objeto que físicamente se encuentra más alejado con respecto a un observador fijo, como se ve en la Figura 1.2.

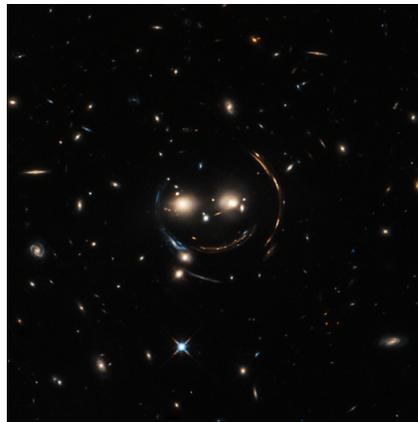


Figura 1.2: Grupo de galaxias distantes denominado el ‘gato de Cheshire’ cuya luz ha sido estirada y doblada por las grandes cantidades de masa contenidas en las galaxias del primer plano. La imagen fue tomada de: <http://chandra.harvard.edu/photo/2015/cheshirecat/>

### §1.3. Sombras de agujeros negros (observaciones)

Recientemente fué publicada por primera vez, una observación directa de un agujero negro supermasivo. Dicha imagen fué obtenida gracias a una gran colaboración de telescopios e institutos alrededor del mundo durante casi dos años, llamada ‘Event Horizon Telescope’ (Collaboration, 2019).

Para poder reconstruir la imagen fueron necesarios datos observacionales de varios observatorios y telescopios diferentes alrededor del mundo (ALMA, JCMT, etc), además de programas computacionales que sondearon las posibilidades de que dicha imagen fuera la

correcta, o la más cercana a la realidad, puesto que en principio, muchas imagenes distintas podían ser la representación de dicho agujero negro.

En la Figura 1.3 podemos observar la imagen que fué obtenida. En ella se puede observar que el agujero negro es literalmente una mancha negra en el centro de lo que parece ser material que está siendo acrecido hacia su interior.

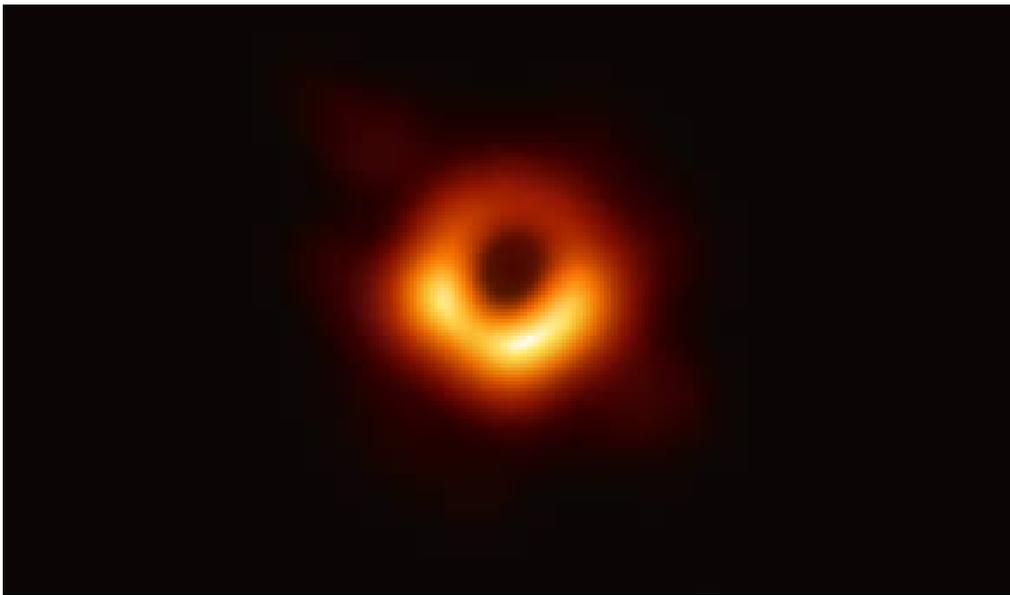


Figura 1.3: Imagen obtenida por el Event Horizon Telescope de la sombra del agujero negro supermasivo que se encuentra en el centro de M87.

La imagen obtenida por el Event Horizon Telescope fué aceptada gracias a su gran similitud con los resultados obtenidos hasta el momento por simulaciones numéricas, las cuales coinciden con los estudios de Luminet (1978), que se muestra en la Figura 1.4.

La simulación de Luminet fué hecha integrando la ecuación geodésica para cada trayectoria de luz, al igual que prácticamente todas las simulaciones que se hacen hoy en día. Pero hay otra forma de realizar esto, integrando las trayectorias de luz directamente, para lo cual requerimos un formalismo matemático distinto, el cual será mencionado en la siguiente sección.

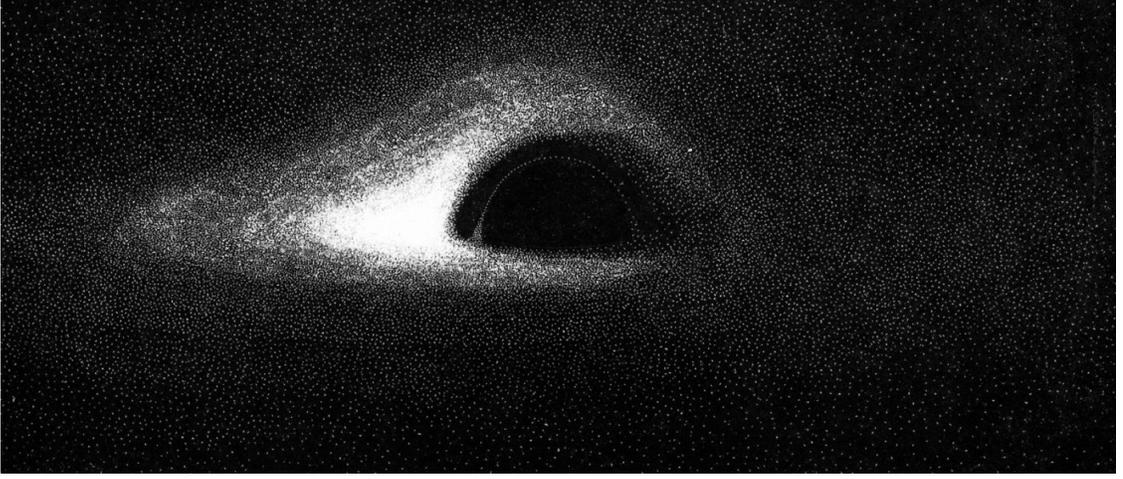


Figura 1.4: Simulación de un agujero negro de Kerr con un disco de acreción, realizada por Luminet (1978).

## §1.4. La métrica tridimensional, el vector $e$ y el índice de refracción

En relatividad general el intervalo 4-dimensional  $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$  donde  $g_{\mu\nu}$  es el tensor métrico, es una cantidad invariante, i.e., su valor es el mismo sin importar el sistema de coordenadas que se utilice. Dado que las mediciones físicas las realizamos en un espacio 3-dimensional a un tiempo dado, escribir las ecuaciones dependientes de dicho espacio es muy conveniente. Para esto escribimos el intervalo  $ds$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0i}dx^0 dx^i + g_{ik}dx^i dx^k, \\ &= \left( \sqrt{g_{00}} dx^0 + \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}} dx^i \right)^2 + \left( g_{ik} - \frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}} \right) dx^i dx^k, \\ &= \left( \sqrt{g_{00}} dx^0 + \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}} dx^i \right)^2 - dl^2, \end{aligned} \quad (1.6)$$

donde la longitud de arco Euclidiana es (Landau, 2013):

$$dl^2 := \left( -g_{ik} + \frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}} \right) dx^i dx^k = \gamma_{ik}dx^i dx^k, \quad (1.7)$$

con  $\gamma_{ik}$  el tensor métrico 3-espacial dado por:

$$\gamma_{ik} := \left( -g_{ik} + \frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}} \right). \quad (1.8)$$

Las trayectorias de luz viajan a una velocidad  $c$  que implica  $ds^2 = 0$ , a estas trayectorias se les llama “nulas”, por lo que de la ecuación (1.6) se obtiene:

$$dx^0 = -\frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i \pm \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} dl = \frac{1}{g_{00}} \left[ -g_{0i} \frac{dx^i}{dl} \pm \sqrt{g_{00}} \right] dl. \quad (1.9)$$

Definimos ahora el vector tangente a la trayectoria del haz de luz

$$e^i = dx^i/dl, \quad (1.10)$$

y el índice de refracción efectivo:

$$n := \frac{c}{dl/dt} = \frac{1}{g_{00}} \left[ -g_{0i} e^i + \sqrt{g_{00}} \right]. \quad (1.11)$$

Con el signo positivo en la ecuación (1.9), i.e., intervalos en el tiempo hacia el ‘futuro’, entonces la ecuación (1.9) toma la forma:

$$dx^0 = n dl. \quad (1.12)$$

Notemos que  $e_i = \gamma_{ik} e^k$ , por lo que:

$$e_i e^i = \gamma_{ik} e^k e^i = \gamma_{ik} \frac{dx^k}{dl} \frac{dx^i}{dl} = \frac{\gamma_{ik} dx^k dx^i}{dl^2} = 1, \quad (1.13)$$

de tal forma que el vector  $e^i$  es unitario.

Todo este formalismo será de gran ayuda para poder analizar las trayectorias de haces de luz en el Capítulo 2.



## Capítulo 2

# Deflexión de la luz y de partículas

Se introducirá la definición matemática más aceptada para obtener un ángulo de deflexión en un espacio-tiempo constante y con simetría esférica en el plano de la trayectoria. Posteriormente se mencionará el resultado para obtener el ángulo de deflexión para cualquier espacio-tiempo constante encontrado por Santibáñez (2018), y se utilizará para realizar integraciones de haces de luz en simetría esférica en cualquier parte del espacio. Se obtienen así trayectorias de haces de luz alrededor de un agujero negro de Schwarzschild.

### §2.1. Ángulo de deflexión

Como ya mencionamos antes, la deflexión de la luz debida a un campo gravitacional es un cambio “aparente” en la dirección del haz, tal y como podemos ver en la Figura 2.1. Dicha deflexión puede medirse mediante el ángulo de deflexión  $\beta$ , el cual no es fácil de calcular. En el caso de tener un espacio estático con simetría esférica, Keeton & Petters (2005) obtuvieron una ecuación para el valor de dicho ángulo.

$$\beta = 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{[-g_{00}(r)g_{11}(r)]^{1/2}}{r \left[ \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 g_{00}(r_0) - g_{00}(r) \right]^{1/2}} dr - \pi. \quad (2.1)$$

Para obtener el ángulo  $\beta$  es necesario integrar de manera numérica la ecuación (2.1), ya que no se puede resolver analíticamente de manera general. La forma de comprobar que dicha integración es correcta es comparándola con el ángulo de Einstein (1.5) para ángulos muy pequeños. Para ello, requerimos utilizar un tensor métrico que sea esféricamente simé-

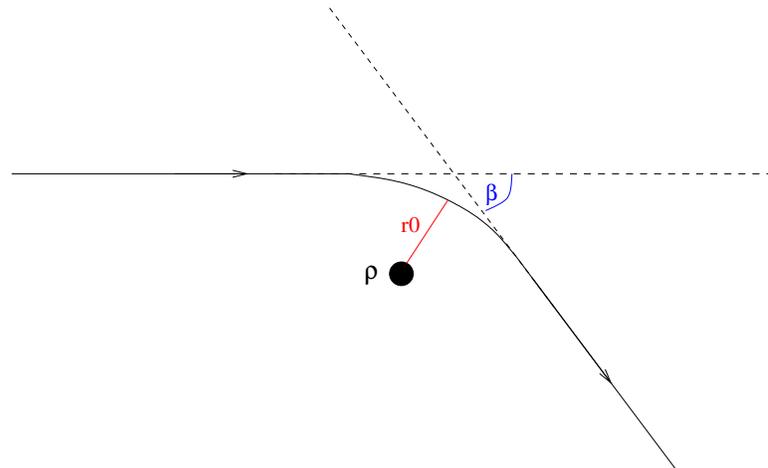


Figura 2.1: Esquema de la deflexión de un haz de luz generado por una fuente en el infinito y que pasa cerca de una distribución de masa  $\rho$ . Dicho haz experimenta una desviación de un ángulo  $\beta$  con respecto de su trayectoria inicial. Su trayectoria se supone simétrica con respecto a la recta definida desde el centro de la distribución de masa hasta el punto de mínima aproximación del haz de luz a dicha distribución, la cual tiene una magnitud  $r_0$ .

trico y con un campo gravitatorio generado por una masa puntual. La métrica que más se parece a la de una masa puntual es la de Schwarzschild, siempre y cuando nos encontremos a una distancia lo suficientemente lejana del radio de Schwarzschild  $r_s = 2GM/c^2$ . Siguiendo esta idea se realizó un programa en lenguaje C para integrar la ecuación (2.1) dentro de ese espacio-tiempo. Sin embargo, dicha ecuación puede llegar a tener polos, por lo que fue necesario utilizar funciones de las librerías GNU Scientific Libraries (GNU, 1996-2019) para poder realizar la integración. Los resultados para distintos valores de  $r_0$  (la distancia mínima de aproximación del haz de luz al centro de masa de la distribución de masa que genera el campo gravitacional), se muestran en la Figura ???. Así se demuestra que el resultado obtenido por Keeton & Petters (2005) es confiable y aceptable, por lo que será utilizado más adelante como base para comparar mediciones de ángulos de deflexión.

## §2.2. Formula general para la deflexión de la luz

Encontrar una fórmula completamente general para el ángulo de deflexión es un problema complicado, ya que la métrica del espacio-tiempo puede depender de las coordenadas, de

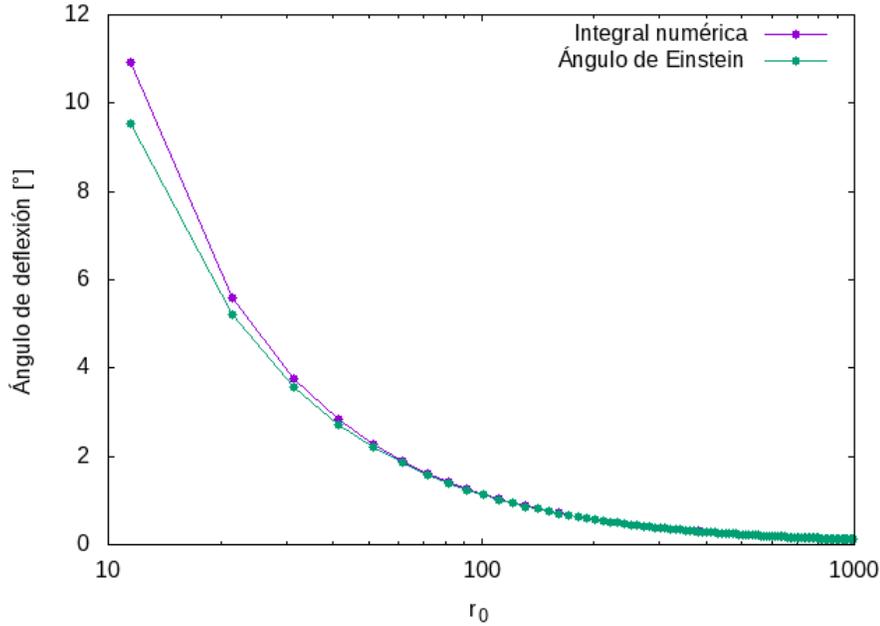


Figura 2.2: Comparación entre el ángulo de deflexión  $\beta$  obtenido integrando la ecuación (2.1) en un espacio-tiempo con métrica de Schwarzschild y  $\alpha_E$ , el calculado con la fórmula de Einstein (1.5).  $r_s$  es el radio de Schwarzschild del agujero negro.

campos escalares, vectoriales, etc. Por ello, la búsqueda en este caso será la de una fórmula general dentro de un espacio-tiempo constante, i.e.,

$$\partial_t g_{\mu\nu} = 0, \tag{2.2}$$

ya que de esta manera podemos eliminar cualquier dependencia del tensor métrico sobre la coordenada temporal.

Para poder encontrar dicha ecuación general del ángulo de deflexión hace falta tomar en cuenta el principio de Fermat (Schneider et al., 2012), el cual establece que el tiempo que tarda un haz de luz en recorrer una trayectoria entre dos puntos en el espacio es el mínimo posible, i.e.,

$$\delta t = \delta x^0 = 0. \tag{2.3}$$

Según la ecuación (1.12) esto implica que la variación del índice de refracción a lo largo

de la trayectoria del haz de luz es cero

$$\delta \int n dl = 0. \quad (2.4)$$

Mediante la definición del índice de refracción (1.11) y el hecho de que estamos en un espacio-tiempo constante, la ecuación (2.4) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\delta x^0 = \int \left[ \frac{\partial n}{\partial x^k} \delta x^k dl + n \delta(dl) \right]. \quad (2.5)$$

Con las definiciones del vector tangente al haz de luz (1.10) y la métrica 3-espacial (1.8) el resultado de hacer la variación sobre  $x^0$  da como resultado (Santibáñez, 2018)

$$\begin{aligned} \frac{de^q}{dl} &= \delta_p^q \frac{de^p}{dl} = \gamma^{kq} \gamma_{kp} \frac{de^p}{dl}, \\ &= \left[ \gamma^{kq} \frac{\partial \ln(n)}{\partial x^k} - \frac{\partial \ln(n)}{\partial x^i} e^i e^q \right] + \gamma^{kq} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k} e^i e^j - \frac{\partial \gamma_{kp}}{\partial x^m} e^m e^p \right], \end{aligned} \quad (2.6)$$

el cual es un sistema de 3 ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden de las coordenadas espaciales, las cuales deben ser integradas numéricamente para poder conocer la trayectoria del haz en cada punto del espacio tiempo.

### §2.3. Ángulo de deflexión en simetría esférica

Para poder encontrar el ángulo de deflexión de un haz de luz que es afectado por un campo gravitacional con las ecuaciones (2.6), nos apoyaremos del hecho de que lejos de la fuente (en infinito) que genera un campo gravitacional, el espacio-tiempo puede ser considerado plano, de manera que con un haz de luz emitido en infinito podemos hacer una comparación de sus vectores  $\mathbf{e}_i$  y  $\mathbf{e}_f$  antes de ser afectado por el campo gravitatorio y después de ser deflecionado por el mismo, respectivamente. Como ambos vectores definen un plano, el ángulo de deflección puede ser calculado por medio de la definición del producto punto en un espacio euclidiano de 3 dimensiones

$$\alpha = \frac{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_f}{|\mathbf{e}_f| |\mathbf{e}_f|}. \quad (2.7)$$

Tenemos así una forma directa y completamente general de encontrar el ángulo de deflección bajo cualquier teoría métrica constante. Es necesario integrar las ecuaciones (2.6)

para poder conocer los vectores tangentes inicial y final de un haz de luz.

En el caso de una métrica con simetría esférica, las ecuaciones (2.6) a evolucionar son:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dl^2} &= \frac{de^r}{dl} = -\frac{1}{g_{rr}} \left[ \frac{d \log n}{dr} + (e^r)^2 \frac{d \log n}{dr} + \frac{1 + g_{rr} (e^r)^2}{r} + \frac{(e^r)^2}{2} \frac{dg_{rr}}{dr} \right], \\ \frac{d^2 \theta}{dl^2} &= \frac{de^\theta}{dl} = (e^\varphi)^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{2e^r e^\theta}{r} - e^r e^\theta \frac{d \log n}{dr}, \\ \frac{d^2 \varphi}{dl^2} &= \frac{de^\varphi}{dl} = -2e^\theta e^\varphi \cot \theta - \frac{2e^r e^\varphi}{r} - e^r e^\varphi \frac{d \log n}{dr}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

La evolución de un haz de luz es única y puede ser integrada si conocemos el punto donde fué emitido y la dirección inicial del mismo. Así que para evolucionar dichas trayectorias de luz se resuelven las ecuaciones (2.8) con el método de Euler, de la siguiente manera

$$\begin{aligned} e_{(n+1)}^k &= e_{(n)}^k + \left. \frac{de^k}{dl} \right|_{(n)} dl, \\ x_{(n+1)}^k &= x_{(n)}^k + \left. \frac{dx^k}{dl} \right|_{(n)} dl = x_{(n)}^k + e_{(n)}^k dl, \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde el subíndice entre paréntesis indica el número de paso en la evolución de la geodésica.

Es importante mencionar que éste método para obtener las trayectorias de haces de luz es completamente nuevo, ya que se utilizan las ecuaciones (2.8) en lugar de la ecuación geodésica. Con la única particularidad de que sólo son válidas en un espacio tiempo constante.

El punto de emisión se toma como un punto en el espacio a un tiempo dado, mientras que la dirección inicial esta dada por el vector  $e^k$  al momento de la emisión. Dicho vector  $e^k$  puede estar definido en cualquier sistema coordenado, por lo que se hará en coordenadas cartesianas para mayor entendimiento y claridad. Para evitar confusiones se utilizará una notación distinta para el vector  $e^k$  en coordenadas cartesianas, el cual será llamado  $\tau^k$ .

Utilizando las ecuaciones (A.7) la transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas del vector  $e^k$  queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
e_{(0)}^r &= \sin \theta \cos \theta \tau^x + \sin \theta \sin \varphi \tau^y + \cos \theta \tau^z, \\
e_{(0)}^\theta &= \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} \tau^x + \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} \tau^y - \frac{\sin \theta}{r} \tau^z, \\
e_{(0)}^\varphi &= -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \tau^x + \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \tau^y,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

mientras que la transformación inversa es

$$\begin{aligned}
\tau^x &= e^r \sin \theta \cos \varphi + r e^\theta \cos \theta \cos \varphi - r e^\varphi \sin \theta \sin \varphi, \\
\tau^y &= e^r \sin \theta \sin \varphi + r e^\theta \cos \theta \sin \varphi + r e^\varphi \sin \theta \cos \varphi, \\
\tau^z &= e^r \cos \theta + r e^\theta \sin \theta.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

De esta manera podemos conocer la trayectoria de un haz de luz, en particular sus condiciones iniciales y finales y con la ecuación (2.7) podemos encontrar el ángulo de deflexión respectivo. Dicha forma de calcular ángulos de deflexión no tiene una contraparte analítica con la cual pueda ser comparada, por lo que la mejor forma de comprobarla es contrastando sus resultados con el valor obtenido al resolver numéricamente la ecuación (2.1) y con el ángulo de Einstein. Para hacerlo utilizaremos de nuevo la métrica de un espacio-tiempo de Schwarzschild. En la Figura 2.3 podemos observar dicha comparación.

Para obtener los resultados de la Imagen 2.3, se colocaron las fuentes de los haces de luz en puntos en infinito (aproximados por  $x = -1000$ ) con coordenadas  $z$  mayores que el radio de Schwarzschild (que en este caso se tomó como  $r_s = 1$ ), y con vectores tangentes iniciales  $(1,0,0)$  en coordenadas cartesianas.

El programa realizado para integrar las trayectorias de los haces de luz está hecho de tal manera que evoluciona el haz desde un punto inicial hasta un punto final. Estos dos puntos son los únicos sobre los que tenemos total control, de manera que la distancia  $r_0$  a la que pasen los haces de luz (en este caso del agujero negro), se desconoce a priori. Sin embargo, al momento de integrar la trayectoria podemos conocerla, ya que está dada por el valor de la coordenada  $r$  durante toda la evolución, siempre y cuando el haz no sea absorbido por el agujero negro, en cuyo caso la evolución de la trayectoria se detiene. En la Figura 2.4 se puede observar la trayectoria de un haz de luz deflectado por el agujero negro que se obtiene como resultado del programa.

En caso de que los haces de luz tengan trayectorias muy cercanas al agujero negro, es posible que éstos sean absorbidos por él, como puede observarse en la Figura 2.5.

Como resultado final del programa que integra las trayectorias de luz, en la Figura 2.6

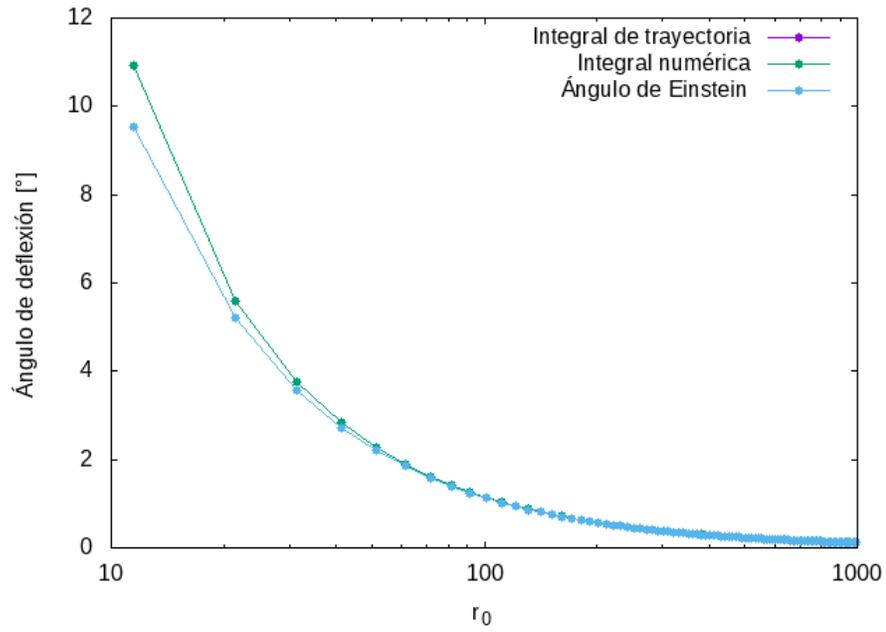


Figura 2.3: Comparación entre el ángulo de deflexión  $\alpha$  calculado al integrar la trayectoria de un haz de luz con las ecuaciones (2.8),  $\beta$  el obtenido integrando la ecuación (2.1) en un espacio-tiempo con métrica de Schwarzschild y  $\alpha_E$  el ángulo de Einstein respectivo.  $r_s$  es el radio de Schwarzschild del agujero negro.

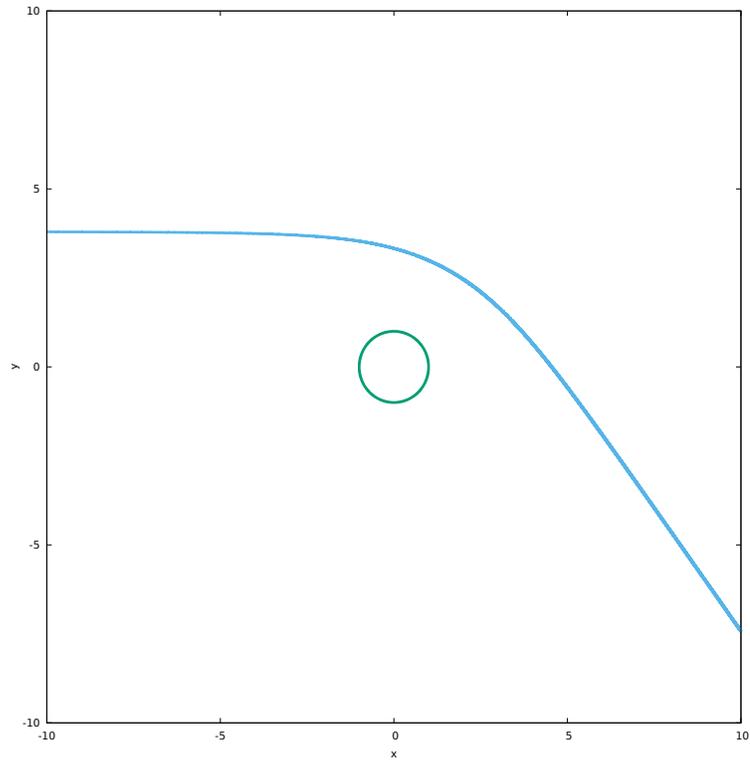


Figura 2.4: Resultado de la evolución de la trayectoria de un de luz emitido en infinito ( $x = -1000$ ,  $y = 4$ ,  $z = 0$ ), con vector tangente inicial  $(1, 0, 0)$  siendo deflectado por un agujero negro con  $r_s = 1$ , representado por un anillo de radio 1.

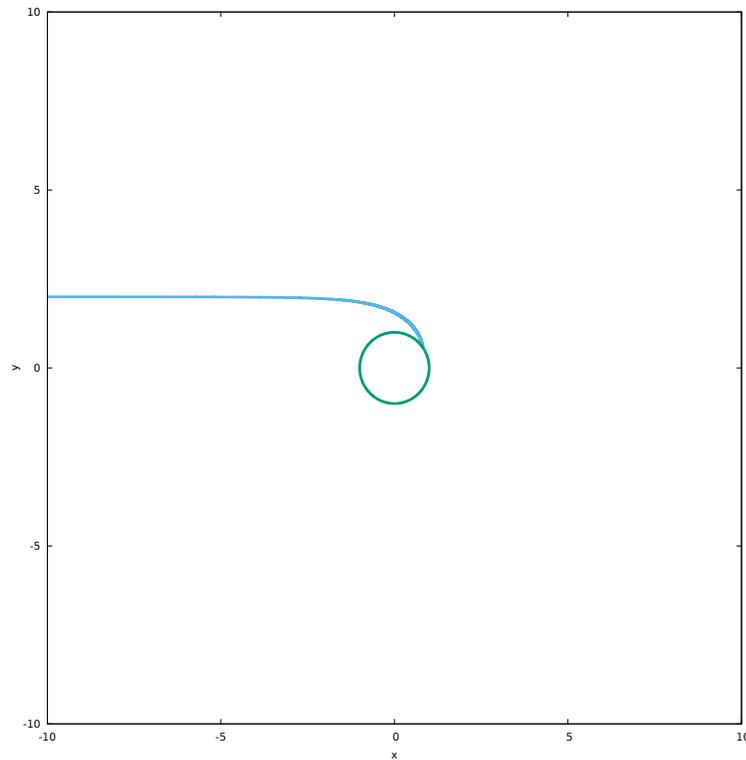


Figura 2.5: Resultado de la evolución de la trayectoria de un de luz emitido en infinito ( $x = -1000$ ,  $y = 2.5$ ,  $z = 0$ ), con vector tangente inicial  $(1, 0, 0)$  siendo atraído y absorbido por un agujero negro con  $r_s = 1$ , representado por un anillo de radio 1.

podemos observar 6 trayectorias de luz distintas, así como el comportamiento de cada una de ellas.

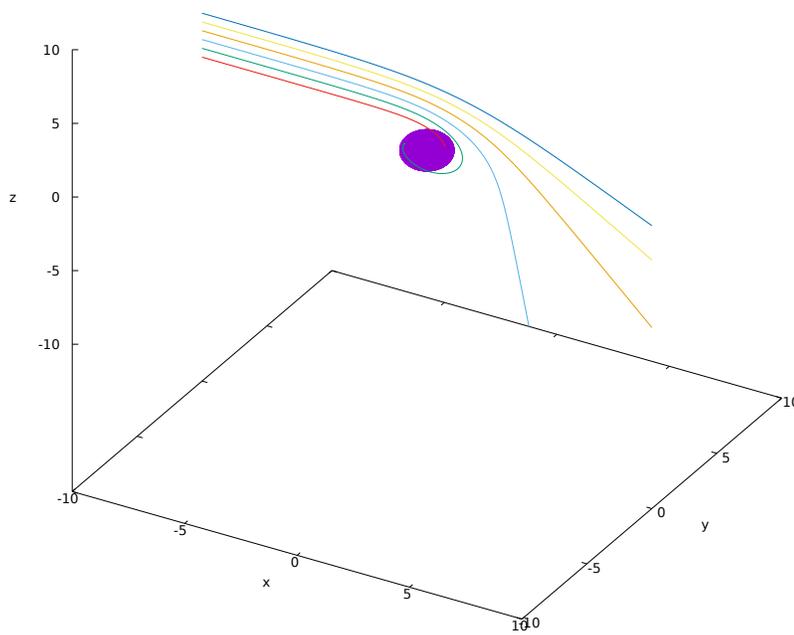


Figura 2.6: Resultado de la evolución de 6 trayectorias de luz emitidas en infinito ( $x = -1000$ ,  $y = 0$ ), con vector tangente inicial  $(1, 0, 0)$  y con distintos valores iniciales en  $z$ , de abajo hacia arriba  $z = 2, 2.6, 3.2, 3.8, 4.4, 5.6$  siendo deflectados y/o absorbidos por un agujero negro con  $r_s = 1$ , representado por un cascaron esférico de radio 1.



## Capítulo 3

# Sombras de agujeros negros

Se utiliza el programa creado para integrar trayectorias de haces de luz para obtener las sombras de un anillo que se encuentra alrededor de un agujero negro de Schwarzschild. Se describe paso a paso el desarrollo necesario para obtener dichas sombras, poniendo énfasis en el visor que será el encargado de detectar los haces de luz que buscamos ver.

### §3.1. Colocación de las fuentes emisoras de rayos de luz

Lo primero que hay que hacer es definir de qué manera estarán distribuidas las fuentes de emisión de haces de luz, ya que cada una se considerará como un punto en el espacio que emitirá un número determinado de haces en distintas direcciones, de manera que cada haz tendrá un vector tangente inicial  $e^k$  distinto.

La estructura que analizaremos será por comodidad y sin ningún motivo en particular, un anillo alrededor del agujero negro que estará constituido por un número específico de puntos  $n_{puntos}$ . El anillo estará colocado a 2 radios de Schwarzschild del agujero negro sin ninguna razón en particular, sólo se hace por facilidad de visualización, como se ve en la Figura 3.1.

Para definir la dirección en la que serán emitidos los haces de luz emplearemos un sistema coordenado primado en cada fuente, de manera que los vectores serán emitidos variando las coordenadas  $0 < \theta' < \pi$  y  $0 < \varphi' < 2\pi$  de manera uniforme, de forma similar a como se muestra en la Figura 3.2

Los vectores con los que serán emitidos los haces de luz deben ser unitarios, por lo que se definen de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \tau^x &= \sin \theta' \cos \varphi' \\
 \tau^y &= \sin \theta' \sin \varphi' \\
 \tau^z &= \cos \theta'
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

de donde podemos obtener el vector  $e^k$  con las ecuaciones (2.10).

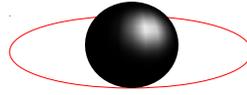


Figura 3.1: Diagrama esquemático que muestra la forma en que se colocará en  $r = 2r_s$  un anillo emisor de luz alrededor de un agujero negro (representado por un cascarón esférico con  $r = r_s$ ).

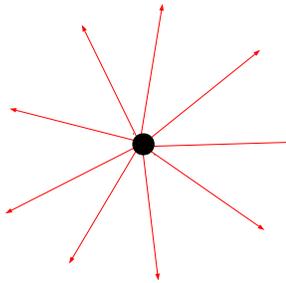


Figura 3.2: Esquema aproximado de una fuente de luz emitiendo haces de luz en varias direcciones.

### §3.2. Colocación del visor

Una vez construida la estructura que buscaremos ver, requerimos colocar un visor estático en el tiempo, a través del cual podremos observar una “imagen”, la cual estará constituida por todos los fotones que logren impactar en ella. El visor será una superficie en 2 dimensiones espaciales, i.e., no debe tener grosor tridimensional, por lo que inicialmente se tomará como un plano en una posición fija donde podremos detectar los haces de luz que la crucen, como se muestra en la Figura 3.3.

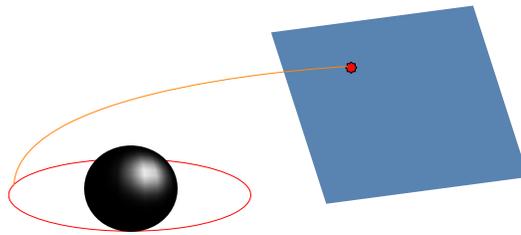


Figura 3.3: Esquema que muestra como hipotéticamente un haz de luz emitido en un anillo alrededor del agujero negro sigue una trayectoria, de tal manera que detecta por el visor colocado arbitrariamente.

Definir el visor computacionalmente resulta no ser tan sencillo, ya que idealmente lo que necesitaríamos es que la evolución del haz de luz fuera de forma continua hasta que “choque” con el visor, i.e., cuando las coordenadas del haz de luz sean iguales a las de algún punto del mismo. En nuestro caso la evolución es de forma discreta, por lo que un haz de luz que cruza el visor no necesariamente cumple con la condición de tener las mismas coordenadas espaciales que éste. Es necesario definir un grosor del visor  $\Delta x$ , de modo que si un punto de la trayectoria del haz de luz durante su evolución, se encuentra dentro de este grosor (como se puede ver en la Figura 3.4), se supondrá que el haz “chocó” con el visor.

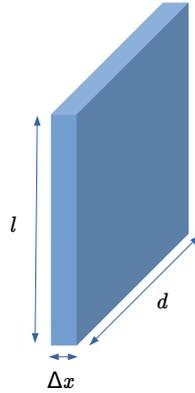


Figura 3.4: Representación del grosor que debe tener el visor, en este caso rectangular de área  $ld$ , para poder detectar los haces de luz. Es necesario que  $\Delta x \ll l, d$ .

### §3.3. Conteo de fotones

El último paso a realizar para obtener una imagen es el conteo de fotones que llegan al visor. Para ello, primero requerimos dividir el visor en pequeñas celdas de tamaño  $\Delta x \Delta d \Delta l$ , de manera que si un foton se detecta en alguna de éstas, podamos tomarlo como una cuenta, como se ve en la Figura 3.5. Así obtenemos un número de fotones detectados por cada una de las celdas.

Para realizar el conteo de fotones lo que se hace es que cada vez que uno de ellos intersecta una celda, se imprimen las coordenadas  $(d, l)$  de la celda en el sistema de referencia del visor en lugar de las del fotón, i.e., al finalizar el programa estarán impresas las coordenadas de cada celda un número de veces igual al número de trayectorias de luz que hayan intersectado a la misma. De esta manera se realiza un conteo de cuantas veces aparecen escritas las coordenadas de una celda, asociando ese número como una densidad de flujo de fotones. Las coordenadas de cada celda se toman como las del punto medio de la misma en el sistema de referencia del visor, como se muestra en la Figura 3.6.

Posteriormente, sólo se realiza el conteo de fotones que fueron detectados en cada celda y eso lo tomamos como un valor de densidad, el cual se grafica en un diagrama de contorno de densidades, para poder observar una imagen.

Sin perdida de generalidad, las imágenes fueron obtenidas tomando un espacio-tiempo

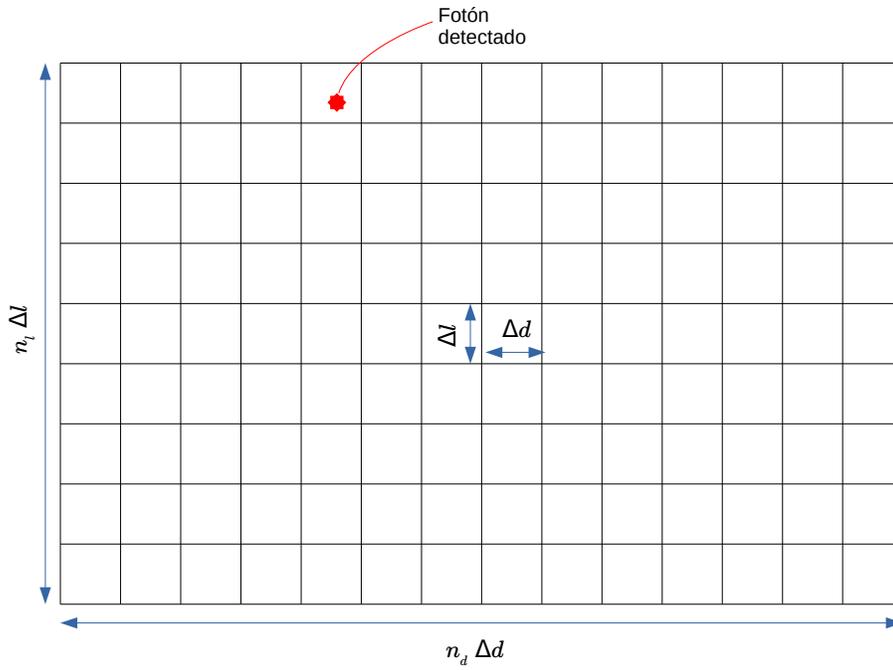


Figura 3.5: Fotón detectado en una celda del visor, el cual esta dividido en  $n_d * n_l$  celdas, todas con la misma área  $\Delta d \Delta l$ .

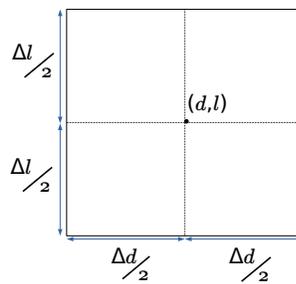


Figura 3.6: La coordenada de cada celda en el plano  $d, l$  se toma como el punto medio de la misma.

de Schwarzschild con  $r_s = 1$ , colocando el anillo a un radio  $r = 2$  en el plano ecuatorial de un sistema coordenado esférico, o lo que es lo mismo, en el plano  $xy$  si usamos coordenadas cartesianas.

Para evitar complicaciones en la definición de los límites espaciales del visor, éste se colocó de manera perpendicular al eje  $x$  a distintas distancias del agujero negro (para ver el anillo de canto), y de manera perpendicular al eje  $z$  (para ver el anillo de frente). Las imágenes resultantes pueden verse en las Figuras 3.9, 3.10 y 3.11.

### §3.4. Movimiento del visor

Colocar el visor de canto o de frente al anillo son dos posiciones fáciles de definir computacionalmente. Por otro lado, para colocar el visor de forma inclinada se debe tener cuidado para que quede en una posición tal que el centro del mismo esté apuntando perpendicularmente hacia el centro del agujero negro, como podemos ver en la Figura 3.7.

Basándonos en la Figura 3.7 podemos definir la ecuación de una recta en el plano  $xz$  sobre la que debe colocarse el visor. Como la ecuación general de una recta es

$$z = m x + b,$$

resulta que

$$m = \frac{(z_{max} - z_{min})}{(x_{min} - x_{max})}, \quad \text{y} \quad b = z_{min} - m x_{min}.$$

Notemos que los valores de  $x_{min}$ ,  $x_{max}$ ,  $z_{min}$  y  $z_{max}$  ahora acotan el visor de manera diferente, ya no son los límites máximos y mínimos como tal, sino que definen la recta acotada sobre la que estará el visor.

Para escribir la condición relacionada al espesor del visor dentro del programa, utilizaremos una  $0 < \varepsilon \ll 1$  de manera que ahora las condiciones para tomar en cuenta al haz de luz serán

$$x_{min} < x_0 < x_{max},$$

$$y_{min} < y_0 < y_{max},$$

$$m(x_0 - \varepsilon) + b < z_0 < m(x_0 + \varepsilon) + b.$$

como se muestra en la Figura 3.8.

El resultado de una vista del anillo con un visor inclinado podemos verlo en la Figura

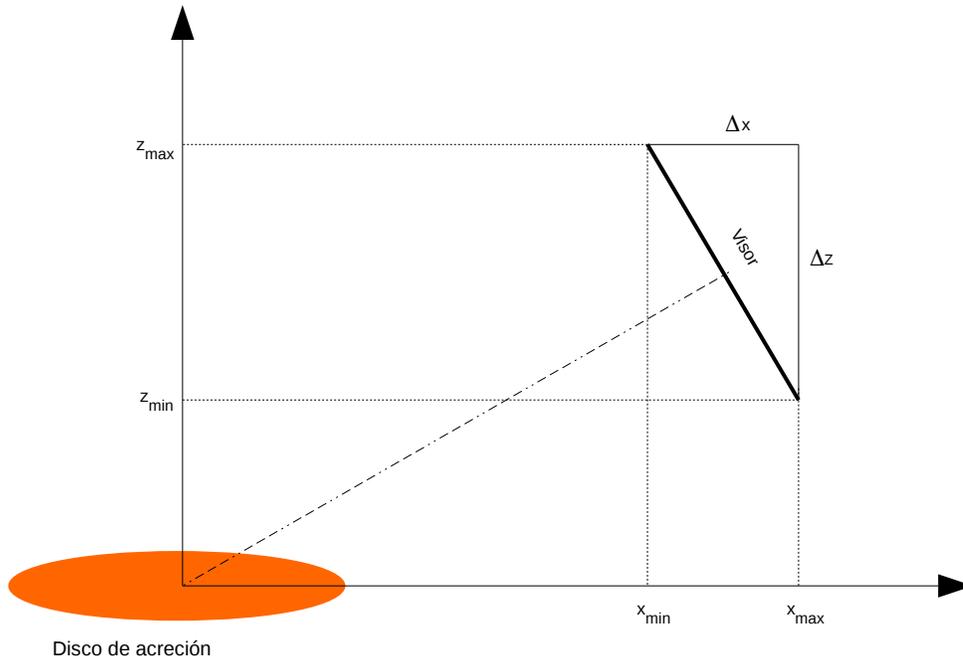


Figura 3.7: Se muestra cómo debe ser colocado el visor de manera que pueda recibir de manera óptima los rayos de luz. Se muestra una proyección sobre el plano  $xz$  del visor mientras que el disco de acreción se coloca sólo de manera esquemática.

3.12.

### §3.5. Lanzando los haces desde el visor

Hasta el momento lo que se ha hecho es lanzar los haces de luz desde la fuente, que en este caso es un anillo alrededor del agujero negro. El resultado de esto son mapeos de intensidad de luz que muestran como se vería el anillo desde el visor. El problema con esto es que no se alcanza a ver la estructura como tal del anillo, ya que los rayos de luz se coliman demasiado en el centro, lo que provoca un efecto de sobreexposición.

Para lograr ver la estructura del anillo, lo que se hizo fué modificar la forma en la que emitimos los haces de luz; en lugar de ser emitidos desde la fuente, fueron emitidos desde

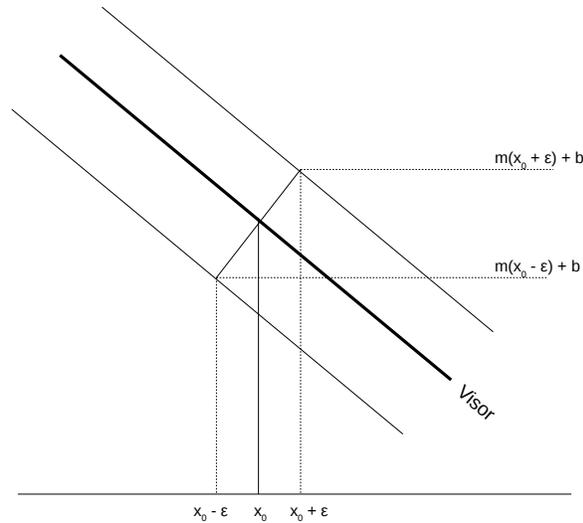


Figura 3.8: Ancho del visor que será tomado para considerar si un haz de luz lo atraviesa.

el visor de forma perpendicular al mismo. Con la partición en celdas de la Figura 3.5, se emitió un fotón por cada celda y se evolucionó, de manera que si la trayectoria del fotón coincidía en algún punto con la estructura del anillo  $\pm\epsilon > 0$  dicha celda tomaba el valor de 10 (se supuso un valor de densidad constante, sólo como referencia); en caso contrario, la celda permanecía con un valor de 0. Para tener éxito fué necesario que el visor estuviera localizado a una distancia  $\gg r_s$ , ya que de esta manera podemos garantizar que la mayoría de haces de luz llegan al visor de forma perpendicular al plano de éste (Figuras 3.13 y 3.14).

La trayectoria de cada haz fué evolucionada de manera independiente y para evitar que fuera infinita, dicha evolución sólo era detenida si ocurría una de dos cosas: si el haz se alejaba del agujero negro una distancia mayor a la que estaba el visor o si el haz era absorbido por el agujero negro. Con este método se lograron obtener las imágenes de las Figuras 3.13 y 3.14, donde se puede ver la estructura del anillo alrededor del agujero negro para distintos ángulos de inclinación del visor.

Ya con la estructura del anillo, el último paso fue obtener la estructura de todo un disco de acreción, la cual podemos observar en la Figura 3.15.

§3.6. Imágenes

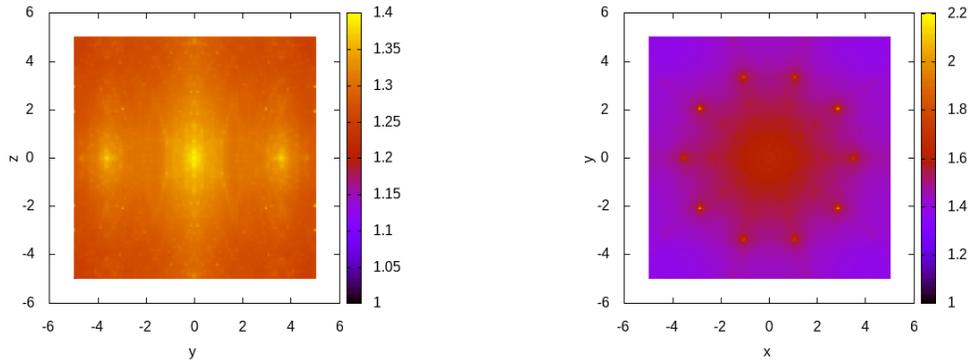


Figura 3.9: Mapeo de la densidad de fotones normalizada generado por un anillo compuesto por 10 puntos distribuidos uniformemente a un radio  $r = 2$ , dentro de un campo gravitacional generado por un agujero negro de Schwarzschild con  $r_s = 1$ . Se muestra una vista de canto (izquierda) y una vista superior (derecha), ambas colocadas a una distancia de  $r = 5r_s$ .

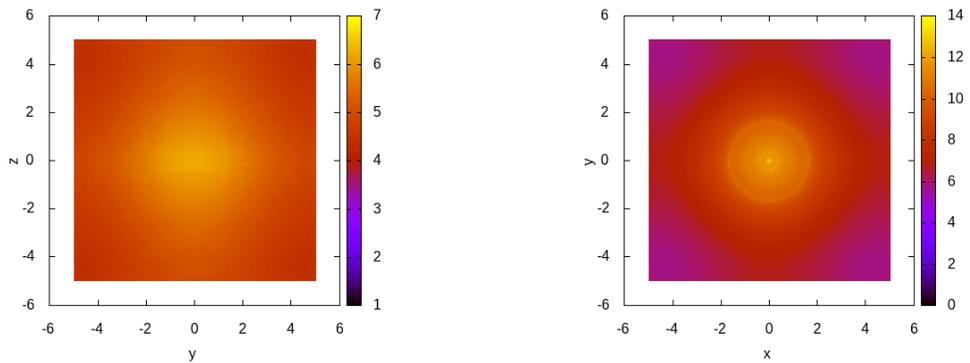


Figura 3.10: Mapeo de la densidad de fotones normalizada generado por un anillo compuesto por 100 puntos distribuidos uniformemente a un radio  $r = 2$ , dentro de un campo gravitacional generado por un agujero negro de Schwarzschild con  $r_s = 1$ . Se muestra una vista de canto (izquierda) y una vista superior (derecha), ambas colocadas a una distancia de  $r = 4r_s$ .

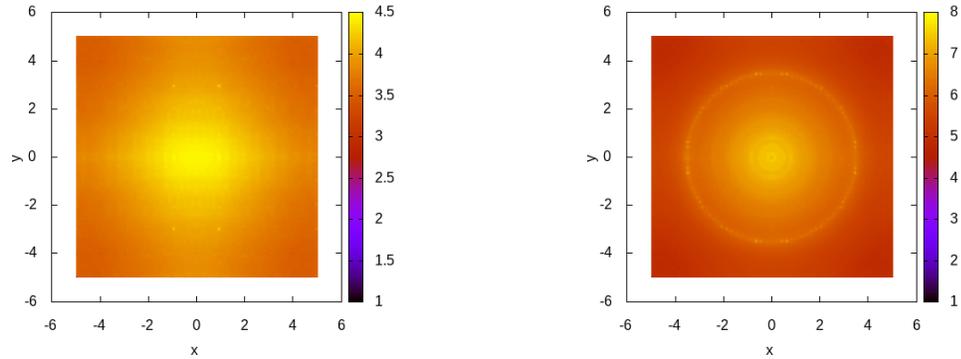


Figura 3.11: Mapeo de la densidad de fotones normalizada generado por un anillo compuesto por 100 puntos distribuidos uniformemente a un radio  $r = 2$ , dentro de un campo gravitacional generado por un agujero negro de Schwarzschild con  $r_s = 1$ . Se muestra una vista de canto (izquierda) y una vista superior (derecha), ambas colocadas a una distancia de  $r = 5r_s$ .

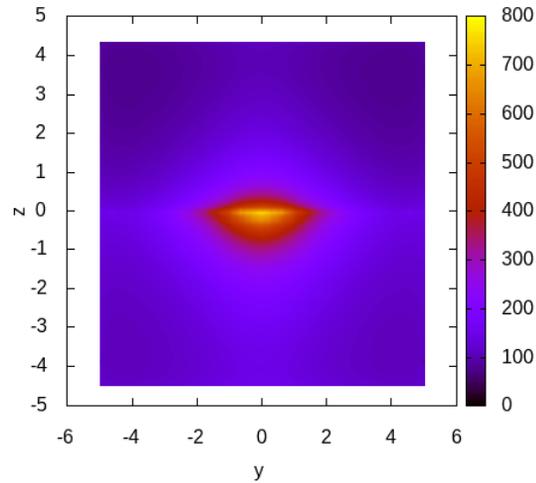


Figura 3.12: Mapeo de la densidad de fotones normalizada generado por un anillo compuesto por 100 puntos distribuidos uniformemente a un radio  $r = 2$ , dentro de un campo gravitacional generado por un agujero negro de Schwarzschild con  $r_s = 1$ . Se muestra una vista con un visor inclinado; el visor está colocado a una distancia aproximada de  $r = 4.33r_s$ .

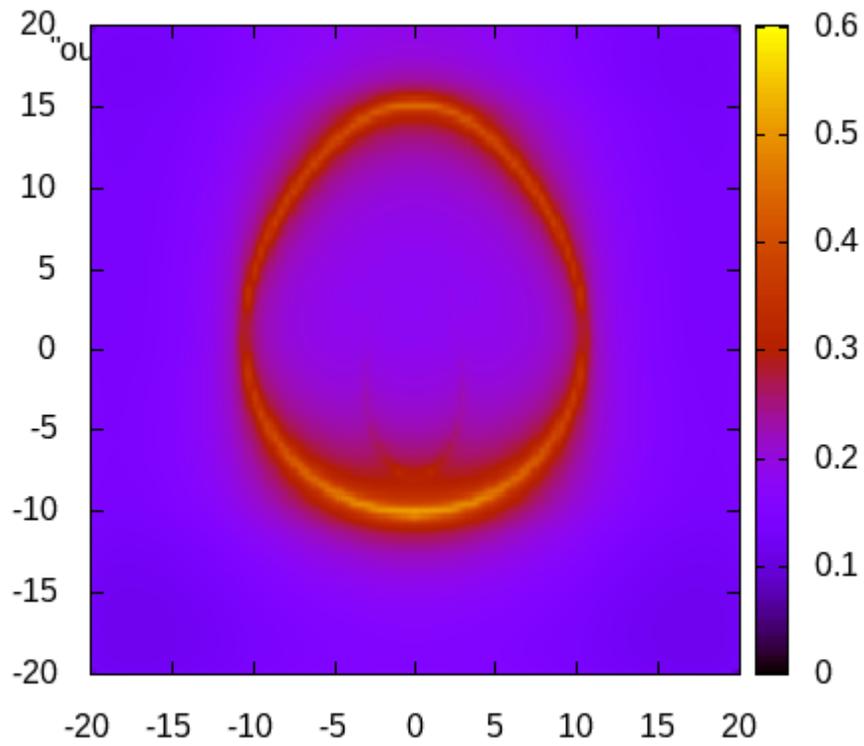


Figura 3.13: Vista de un anillo que se encuentra en  $r = 10 r_s$  con el visor colocado a una distancia de  $1000 r_s$  y con  $30^\circ$  de inclinación del plano del anillo.

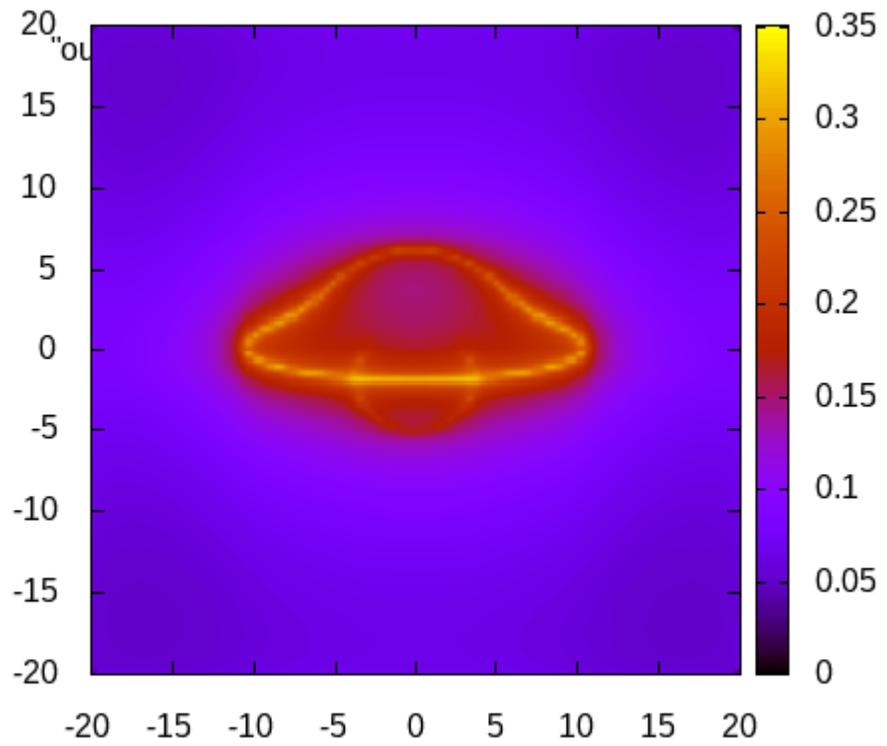


Figura 3.14: Vista de un anillo que se encuentra en  $r = 10 r_s$  con el visor colocado a una distancia de  $1000 r_s$  y con  $10^\circ$  de inclinación del plano del anillo.

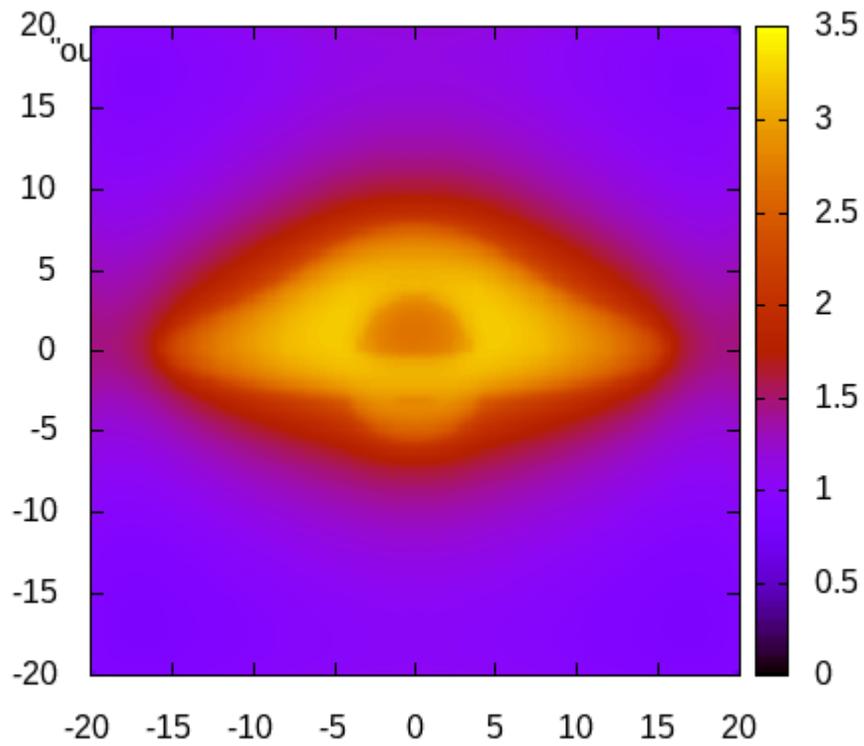


Figura 3.15: Vista de un disco que se encuentra entre  $r = 3 r_s$  y  $r = 15 r_s$  con  $0.2 r_s$  de grosor, con el visor colocado a una distancia de  $1000 r_s$  y con  $10^\circ$  de inclinación del plano del disco.



## Capítulo 4

# Conclusiones

Utilizando las ecuaciones (2.6) encontradas por Santibáñez (2018) se obtuvieron las ecuaciones de evolución para un haz de luz en un espacio tiempo constante con simetría esférica (2.8), las cuales se integraron con el método de Euler mediante un programa escrito en lenguaje C. Los resultados fueron graficados utilizando gnuplot (gnu, 2019).

Para mostrar que el programa es funcional se calcularon los ángulos de deflexión de haces emitidos en infinito, afectados por el campo gravitacional de un agujero negro de Schwarzschild ubicado en el origen. Se compararon con el ángulo de deflexión calculado al integrar la ecuación de (Keeton & Petters, 2005) para simetría esférica y con el ángulo de Einstein, véase Tabla (1.5).

Teniendo el programa ya funcional se utilizó para obtener sombras de agujeros negros. Se colocó un visor rectangular a cierta distancia del centro del agujero, el cual detectaba todos los fotones que lograban llegar provenientes de un anillo situado alrededor del agujero negro que emitía fotones radialmente en todas direcciones. Se obtuvieron, entre otras imágenes, las Figuras 3.9, 3.10, 3.11 y 3.12.

Para lograr ver la estructura alrededor del agujero negro se integraron las trayectorias de haces emitidos observadas desde el visor colocado a una distancia lejana en comparación con el radio de Schwarzschild. De esta manera, la trayectoria se integra en sentido contrario, dando por hecho que los haces son emitidos (o llegan) perpendicularmente al plano del visor. Se obtuvieron las imágenes de las Figuras 3.13, 3.14 y 3.15, las cuales son muy similares a las obtenidas por Luminet (1978).

Las imágenes resultantes de integrar las trayectorias de haces emitidos desde el anillo alrededor del agujero negro corresponden a mapas de intensidad luminosa, ya que no es

posible ver una estructura bien definida. Este tipo de mapas pueden ser muy útiles en caso de que lo que se busque sea analizar variaciones en la intensidad de un disco de acreción o si se busca incluir interacciones físicas o procesos de emisión.

Las imágenes resultantes de integrar las trayectorias de haces emitidos desde el visor nos ayudan a ver el efecto de un campo gravitacional sobre cualquier estructura que se encuentre alrededor del mismo.

El programa obtiene las trayectorias de los haces de luz integrando ecuaciones diferenciales de segundo orden sobre las coordenadas (2.6). Como trabajo futuro se pueden encontrar las ecuaciones de movimiento para una partícula masiva e integrarlas de manera similar. Se obtiene así un efecto que podríamos llamar “deflexión de partículas masivas”. De esta manera se podrá obtener, por ejemplo, sombras de agujeros negros con neutrinos.

Otra aplicación futura es evolucionar las ecuaciones con teorías de gravedad modificada (Barrientos et al. (2018), Bernal et al. (2015), etc.), de manera que obtengamos efectos de lentes gravitacionales para poder contrastarlas con las observaciones, y confirmar o descartar que las teorías puedan explicar dichos efectos sin la necesidad de materia oscura.

## Apéndice A

# Vectores base en coordenadas esféricas

La transformación de coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$  a coordenadas cartesianas es

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\z &= r \cos \theta.\end{aligned}\tag{A.1}$$

Con la definición de los vectores base para un espacio curvo (Riley et al., 2006)

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i},\tag{A.2}$$

y el vector posición  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , resulta que para coordenadas esféricas

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_r &= \partial_r \mathbf{r} = \partial_r (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \\ \mathbf{u}_\theta &= \partial_\theta \mathbf{r} = \partial_\theta (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) = (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta), \\ \mathbf{u}_\varphi &= \partial_\varphi \mathbf{r} = \partial_\varphi (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) = (-r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, 0),\end{aligned}\tag{A.3}$$

de marea que si escribimos el vector posición de la forma  $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$  donde  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , podemos obtener que

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_x &= \partial_x \mathbf{r} = \partial_x(r) \mathbf{u}_r + r \partial_x \mathbf{u}_r = \partial_x(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \mathbf{u}_r + r \partial_x \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right), \\
&= \frac{x}{r} \mathbf{u}_r + r \left( \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}, -\frac{xy}{r^3}, -\frac{xz}{r^3} \right) = \frac{x}{r} \mathbf{u}_r + \left( 1 - \frac{x^2}{r^2}, -\frac{xy}{r^2}, -\frac{xz}{r^2} \right), \\
&= \sin \theta \cos \varphi \mathbf{u}_r + (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi, -\sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi, -\sin \theta \cos \theta \cos \varphi), \\
&= \sin \theta \cos \varphi \mathbf{u}_r \\
&\quad + (1 - (1 - \cos^2 \theta) \cos^2 \varphi, - (1 - \cos^2 \theta) \sin \varphi \cos \varphi, -\sin \theta \cos \theta \cos \varphi), \\
&= \sin \theta \cos \varphi \mathbf{u}_r \\
&\quad + (1 - \cos^2 \theta + \cos^2 \theta \cos^2 \varphi, \cos^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \cos \varphi, -\sin \theta \cos \theta \cos \varphi), \\
&= \sin \theta \cos \varphi \mathbf{u}_r \\
&\quad + \cos \theta \cos \varphi (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta) + \sin \varphi (\sin \varphi, -\cos \varphi, 0), \\
&= \sin \theta \cos \varphi \mathbf{u}_r + \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} \mathbf{u}_\theta - \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \mathbf{u}_\varphi.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_y &= \sin \theta \sin \varphi \mathbf{u}_r + \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} \mathbf{u}_\theta + \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \mathbf{u}_\varphi, \\
\mathbf{u}_z &= \cos \theta \mathbf{u}_r + \frac{\sin \theta}{r} \mathbf{u}_\theta.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

De manera que si tenemos un vector escrito en ambos sistemas coordenados

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y + a_z \mathbf{u}_z = a_r \mathbf{u}_r + a_\theta \mathbf{u}_\theta + a_\varphi \mathbf{u}_\varphi, \tag{A.6}$$

mediante las ecuaciones (A.4) y (A.5), la transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas resulta ser

$$\begin{aligned}
a_r &= \sin \theta \cos \theta a_x + \sin \theta \sin \varphi a_y + \cos \theta a_z, \\
a_\theta &= \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} a_x + \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} a_y - \frac{\sin \theta}{r} a_z, \\
a_\varphi &= -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} a_x + \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} a_y.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

# Bibliografía

1996-2019. *GSL*. URL <https://www.gnu.org/software/gsl/doc/html>.

2019. *gnuplot*. URL <http://www.gnuplot.info/>.

BARRIENTOS, E., LOBO, F. S., MENDOZA, S., OLMO, G. J. & RUBIERA-GARCIA, D., 2018. Metric-affine f(R,T) theories of gravity and their applications. *Physical Review D*, **97**(10). ISSN 2470-0029. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.97.104041>.

BERNAL, T., LÓPEZ-CORONA, O. & MENDOZA, S., 2015. Dynamics of clusters of galaxies with extended  $f(\chi) = \chi^{3/2}$  gravity.

BISNOVATYI-KOGAN, G. S., TSUPKO, O. Y. & PERLICK, V., 2019. Shadow of black holes at local and cosmological distances.

COLLABORATION, T. E. H. T., 2019. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole.

DYSON, F. W., EDDINGTON, A. S. & DAVIDSON, C., 1920. A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, **220**, 291–333. ISSN 02643952. URL <http://www.jstor.org/stable/91137>.

EINSTEIN, A., 1907. On the relativity principle and the conclusions drawn from it.

EINSTEIN, A., 1916. The foundation of the general theory of relativity.

JAKI, S. & SOLDNER, J., 1978. *Johann Georg Von Soldner and the Gravitational Bending of Light: With an English Translation of His Essay on it Published in 1801*,

- [*On the Deviation of Light Ray from Its Motion Along a Straight Line Trough the Attraction of a Celestial Body which it Passes Close By*]. Plenum Press. URL <https://books.google.com.mx/books?id=nQtdHQAAAJ>.
- KEETON, C. R. & PETERS, A. O., 2005. Formalism for testing theories of gravity using lensing by compact objects. I. Static, spherically symmetric case. *Phys. Rev.*, **D72**, 104006.
- LANDAU, L., 2013. *The Classical Theory of Fields*. COURSE OF THEORETICAL PHYSICS. Elsevier Science. ISBN 9781483293288. URL <https://books.google.com.mx/books?id=HudbAwwAAQBAJ>.
- LUMINET, J., 1978. Image of a spherical black hole with thin accretion disk. *Astronomy and Astrophysics*, **75**(1-2).
- NEWTON, I., 1704. *Opticks, Or a Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colours of Light: Also Two Treatises of the Species and Magnitude of Curvilinear Figures*. Smith and Walford. URL <https://books.google.com.mx/books?id=mxhfAAAAcAAJ>.
- NEWTON, I., MOTTE, A. & DAVIS, W., 1803. *The Mathematical Principles of Natural Philosophy*. No. v. 3 in *The Mathematical Principles of Natural Philosophy*. H.D. Symond. URL <https://books.google.com.mx/books?id=Mt5WAAAAAAAJ>.
- POISSON, E. & WILL, C., 2014. *Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic*. Cambridge University Press. ISBN 9781107032866. URL <https://books.google.com.mx/books?id=PZ5cAwAAQBAJ>.
- RILEY, K., HOBSON, M. & BENICE, S., 2006. *Mathematical Methods for Physics and Engineering: A Comprehensive Guide*. Cambridge University Press. ISBN 9781139450997. URL <https://books.google.com.mx/books?id=Mq1n1EKhNcsC>.
- SANTIBÁÑEZ, M. J., 2018. Tesis licenciatura: Análisis perturbativo en gravitación extendida astrofísica relativista. URL <http://132.248.9.195/ptd2018/enero/0769648/Index.html>.
- SCHNEIDER, P., EHLERS, J. & FALCO, E., 2012. *Gravitational Lenses*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer New York. ISBN 9781461227564. URL <https://books.google.com.mx/books?id=WB7nBwAAQBAJ>.