



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

GRAVEDAD LINEAL Y FORMALISMO DE ONDAS GRAVITACIONALES EN
TEORÍAS RELATIVISTAS DE LA GRAVITACIÓN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIATURA EN FÍSICA

P R E S E N T A :

HODEK MEALSTROM GARCÍA TAVERA

TUTOR

DR. MARCELO SALGADO



CIUDAD UNIVERSITARIA, Cd. Mx., 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

García
Tavera
Hodek Mealstrom
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
311108930

2. Datos del tutor

Dr.
Marcelo
Salgado
Rodríguez

3. Datos del sinodal 1

Dr.
Jerónimo Alonso
Cortez
Quezada

4. Datos del sinodal 2

Dr.
Miguel
Alcubierre
Moya

5. Datos del sinodal 3

Dr.
Yuri
Bonder
Grimberg

6. Datos del sinodal 4

Dr.
Juan Carlos
Degollado
Daza

7. Datos del trabajo escrito

Gravedad lineal y formalismo de ondas gravitacionales
en teorías relativistas de la gravitación
116 p
2019

«Sólo México es el mundo radicalmente ajeno a Europa que debe aceptar la fatalidad de la penetración total de Europa y decir las palabras y las formas de la vida, de la fe, europeas, aunque la sustancia de su vida y su fe sean de signo diverso [...] ¿Por qué vives en México? [...] ¿Por qué vivimos, chérie? ¿Por qué vivimos en una ciudad tan horrible, donde se siente uno enfermo, donde falta el aire, donde sólo debían habitar águilas y serpientes? [...] porque a lado de la cortesía repugnante y dominguera de la gente como tú hay la cortesía increíble de una criada o de un niño que vende esos mismo diarios enmerdeurs, porque a lado de esta costra de pus en la que vivimos hay unas gentes, ça va sans dire, increíblemente desorientadas y dulces y llenas de amor y de verdadera ingenuidad que ni siquiera tienen la maldad para pensar que son pisoteados; porque debajo de esta lepra americanizada y barata hay una carne viva, la carne más viva del mundo... y allá, en lo que dejamos, está lo mejor de lo que ustedes creen que es lo mejor, pero no lo mejor de lo que ustedes creen que es lo peor. Ça va?»

Carlos Fuentes

Resumen

La gravedad descrita por la teoría de la Relatividad General de Einstein ha sido probada exitosamente por una variedad de experimentos que van desde la escala del Sistema Solar hasta la escala cosmológica. Por ello, junto con el modelo estándar de la física de partículas, se reivindica como uno de los dos pilares de la física moderna. Pese a su éxito observacional, importantes problemas teóricos concernientes al llamado sector oscuro y a la imposibilidad de construir una teoría de gravedad cuántica que pueda explicar, por ejemplo, la predicción de singularidades, sugieren posibles modificaciones a la teoría. Más aún, notables fenómenos puramente gravitacionales como la existencia de agujeros negros y de radiación gravitacional son predicciones clave de la teoría de Einstein, ambas en el sector no-lineal de campo fuerte. Con la reciente detección directa de ondas gravitacionales originadas en la coalescencia de sistemas binarios de agujeros negros y estrellas de neutrones, información astrofísica sin precedentes de este sector se ha vuelto asequible. Por lo tanto, es de esperar que observaciones de ondas gravitacionales puedan ser utilizadas para buscar o constreñir posibles desviaciones a la Relatividad General en este régimen.

En este trabajo se revisa la teoría linealizada de la Relatividad General, en donde surgen de manera natural soluciones tipo onda, resultado de variaciones temporales del momento cuadrupolar de una distribución de materia. Es sabido que para establecer claramente una noción de energía y momento transportada por la radiación gravitacional originada por fuentes aisladas, las ecuaciones de campo deben de ser reescritas de tal manera que exhiban una contribución efectiva al tensor total de energía-momento debida a las ondas gravitacionales mismas, conocida como el *pseudo-tensor de energía-momento de las ondas gravitacionales*. Se presentan los métodos más utilizados en la literatura para construir tal objeto haciendo uso de teoría de perturbaciones a una métrica de fondo a segundo orden, al nivel de la acción y de las ecuaciones de campo, utilizando un enfoque distinto. A este respecto se realiza la expansión usando la diferencia entre dos operadores diferenciales asociados a la métrica completa y a la métrica de fondo respectivamente. También se hace uso de la conocida analogía con la teoría de Maxwell para denotar claramente las diferencias entre los modos físicos de propagación y los no físicos al tener fuentes de materia presentes. Incluso, se justifica el uso común de la llamada *norma sin traza-transversa* en la teoría lineal con presencia de materia, un hecho que se da por sentado y que recientemente ha causado cierta confusión. Finalmente, se extrapola el formalismo lineal a dos de las más estudiadas y conocidas teorías métrica alternativas de la gravedad: las teorías escalares-tensoriales y, en menor medida, a las teorías $f(R)$, cuyas predicciones, tales como modos de propagación extra esperan ser confirmados o constreñidos con la siguiente generación de detectores de ondas gravitacionales.

Abstract

Gravity as described by Einstein's theory of General Relativity has passed many experimental tests, from the Solar System scale to the cosmological one, with flying colors. For that, it stands together with the standard model of particle physics, among one of the two pillars of modern physics. Despite its observational success major theoretical issues concerning the so called dark sector and the inability to develop a theory of quantum gravity (that may alleviate e.g. its predictions of singularities) suggests that modifications to the theory could be possible. Moreover, outstanding pure gravitational phenomena such as the existence of black holes and of gravitational radiation are key predictions of Einstein's theory, both at the non-linear strong-field regime. With the recent direct detection of gravitational waves originated in the coalescence of binary black holes and neutron stars unprecedented astrophysical information of this regime have become available. Thus, is expected that gravitational waves observations could be used to search and constrain deviations from General Relativity in this regime.

In this work the linearized theory of General Relativity (where wave-like solutions arise naturally as a result of a time-varying quadrupole moment of a distribution of matter) is reviewed. It is well known that to clearly establish a meaningful notion of the energy and momentum carried away by gravitational radiation from isolated sources, the field equations must be rewritten to exhibit an effective contribution to the total energy-momentum tensor which comes from the gravitational waves themselves known as the *gravitational wave energy-momentum pseudotensor*. We present here the most used methods in the literature to construct such term requiring perturbation theory to a background metric up to second order both at level of the action and the field equations using a different approach. In this regard we fully develop the expansion using the difference between derivative operators, associated each one with the complete metric and the background metric respectively, as suggested by some authors. We also explore the well known analogy with Maxwell theory to denote clearly the difference between the propagating physical modes and the non-physical ones when matter sources are present. Moreover, we justify the widely use of the so called *Transverse-Traceless gauge* in the linearized theory in the presence of matter, a fact that has remained largely unnoticed, which recently caused some confusion. Finally, we extrapolate the linearized formalism to two of the most studied and well known alternative metric theories of gravity: the $f(R)$ theories and the scalar-tensor theories whose predictions such as extra propagating degrees of freedom are expected to be confirmed or constrained with the next generation of gravitational wave detectors.

Agradecimientos

Agradezco a mi madre y a mi padre, a mi padre y a mi madre, en ese orden, por permitirme arrebatarnos la vida. A mi hermana, quien en ruinas, sobre la inmensa culpa se levanta combatiente ante la verdad abrasadora y, por supuesto, a mi familia; insensato sería ser otro.

Le agradezco al Dr. Marcelo Salgado por sus valiosísimas palabras y por todo el apoyo brindado todo este tiempo. Asimismo a mi jurado por sus importantes comentarios. Agradezco al proyecto PAPIIT-IN111719 por la beca recibida este último año. Por supuesto también está agradecer a la UNAM y todo lo que ésta representa.

Entre tanto, resuenan también unos nombres, unas vidas de a poco arraigadas a la mía en algún momento u otros estos últimos años. ¿No acaso se sostienen de cada hombre todos los hombres? ¿No acaso hemos esperado con ansia la dicha de ver fulminada la barbarie y, en tanto, ver consumado el esfuerzo por dispersar la quietud de esta tierra? A todos ellos, Moisés, Toño, Fany, Karen, Miros, Brandon, Julio, J. Antonio, Ely...a Víctor...gracias.

A quien condenó todo tiempo perdido y todo mar iracundo, gracias Johas.

Finalmente estás tu *Holly*, turbulenta premura de oleaje, gracias por todo.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. La teoría de la Relatividad General	1
1.2. ¿Por qué teorías alternativas?	2
1.3. Radiación gravitacional en contraste con otros experimentos de la RG	4
1.4. Estructura de la tesis	6
1.5. Notación y convenciones	8
2. La Relatividad General y el formalismo perturbativo	9
2.1. Axiomas de la Relatividad General	9
2.2. Enfoques de aproximación en la Relatividad General	11
2.2.1. Aproximación post-newtoniana	13
2.2.2. Aproximación post-minkowskiana	13
Formulación de la RG de Landau-Lifshitz	14
2.3. Expansión alrededor de un fondo genérico	16
2.3.1. Expansión de la conexión y el tensor de curvatura	16
2.3.2. Expansión del tensor de Ricci	20
2.3.3. Expansión del escalar de Ricci	21
2.3.4. Expansión del tensor de Einstein	23
2.4. Pseudo-tensor de energía-momento de las OG	25
2.4.1. Á la Isaacson: in vacuo	26
2.4.2. Á la Isaacson: con materia	29
2.4.3. Forma explícita del pseudo-tensor de energía-momento de las OG	29
2.5. Comparación con el pseudo-tensor de Landau-Lifschitz	31
3. Radiación Gravitacional en la Relatividad General	33
3.1. Radiación Electromagnética	33
3.1.1. Ecuaciones de Maxwell	33
3.1.2. Libertad de norma en la teoría electromagnética	34
3.1.3. Descomposición en partes irreducibles del potencial electromagnético	36
3.1.4. Potencial electromagnético en la zona de onda lejana	38
3.1.5. Transformación a la norma transversa	40
3.1.6. Extracción de la parte transversa	41
3.2. Radiación gravitacional en la aproximación lineal	42
3.2.1. Ecuaciones linealizadas de Einstein	42
3.2.2. Libertad de norma en ausencia de fuentes	43
3.2.3. Libertad de norma en presencia de fuentes	45
3.2.4. Descomposición en partes irreducibles del potencial gravitacional	46
3.2.5. Potencial gravitacional en la zona de onda lejana	51
3.2.6. Extracción de la parte transversa y sin traza	53
3.3. Formalismo cuadrupolar	54
3.3.1. Flujo de energía y momento	54
3.4. Sistema binario newtoniano	57
3.4.1. Polarizaciones	60

3.4.2. Potencia radiada	65
4. Teorías Alternativas	71
4.1. Teorías escalares-tensoriales	71
4.2. Expansión alrededor de un fondo genérico	74
4.3. Pseudo-tensor de energía-momento de las OG	76
4.4. Radiación gravitacional en TET	78
4.4.1. Límite lineal	78
4.4.2. Descomposición en partes irreducibles	79
4.4.3. Formalismo multipolar en las TET	83
4.5. Sobre la radiación dipolar y monopolar en TET	85
4.6. Teorías $f(R)$	87
5. Conclusiones	89
A. Apéndice 1	93
A.1. Métrica inversa	93
A.2. Expansión del determinante	93
A.3. Existencia de las coordenadas armónicas	95
B.	97
B.1. Regiones de onda	97
B.2. Solución a la ecuación de onda	97
B.3. Descomposición de un tensor en sus partes irreducibles	98
B.4. Descomposición en partes irreducibles en EM (caso masivo)	99
C.	101
C.1. Promedios	101
C.2. Formalismo a partir de la acción perturbada	102

Capítulo 1

Introducción

En esta introducción se discute el estado del arte de la teoría de la Relatividad General, los problemas que enfrenta y el papel de los experimentos de detección de ondas gravitacionales en teorías alternativas de la gravitación, tema central de este trabajo.

1.1. La teoría de la Relatividad General

La Relatividad General (RG), una teoría sobre el espacio-tiempo, es la teoría relativista de la gravitación (aceptada) más simple [40]. Bajo la perspectiva de dicha teoría, se asume al espacio-tiempo como un ente geométrico cuya dinámica es compatible, por medio de las ecuaciones de campo de Einstein, con el contenido de materia descrito por el tensor de energía-momento. La conexión entre la geometría del espacio-tiempo y la gravitación se sintetiza en el principio de equivalencia. A saber, las trayectorias de cuerpos en caída libre en presencia de un campo gravitacional son independientes de su estructura y composición interna. Dichas trayectorias resultan ser las curvas naturales que seguiría un cuerpo en una geometría curva (geodésicas). En el plano experimental, el principio de equivalencia destaca como uno de los principios de la naturaleza probados con mayor precisión [168], de ahí su lugar como sustento conceptual, no sólo para la gravitación newtoniana o la RG, sino para la noción, más amplia, de que el espacio-tiempo es curvo.¹ Por lo anterior, la gravitación se entiende unívocamente como un fenómeno de curvatura o, en otras palabras, los efectos de la gravedad deben de ser equivalentes a los efectos producidos por la geometría de un espacio-tiempo curvo.

La afirmación de que la RG es la teoría «aceptada» actualmente se sustenta en su notable consistencia con la naturaleza. De hecho, se reivindica como una de la teorías físicas más exitosas en el sentido de que a partir de ésta se derivan numerosas predicciones tanto a nivel del sistema solar como a escala cosmológica, las cuales han sido comprobadas una a una con notable precisión tras la fundación de la teoría. En efecto, desde la expedición por el eclipse solar de 1919 hasta las modernas observaciones de sistemas binarios, la RG ha prevalecido como *la* teoría de la gravedad frente a un variado influjo de experimentos (para un reciente repaso, ver [33, 129, 166, 168, 170]).

¹En específico es el Principio de Equivalencia de Einstein (PEE) al que se está haciendo referencia. Debido a que no existe consenso en la comunidad, existen diversas formulaciones [69]. En particular Will [168] establece al PEE como la sujeción de tres enunciados: (i) el principio de equivalencia débil se cumple (igualdad entre masas inerciales y gravitacionales), (ii) el resultado de cualquier experimento local y no gravitacional es independiente de la velocidad propia del marco de referencia en caída libre en el que es realizado y (iii) el resultado de cualquier experimento no gravitacional es independiente de donde y cuando se realice. Como tal, el PEE no sólo proporciona una base fundacional para la teorías métricas de la gravedad [156], la clase de teorías de la gravitación de la cual la RG forma parte, sino que su comprobación experimental, en razón de que predicciones propias de distintas teorías reflejan discrepancias en sus estructuras, permite delinear un enfoque eficiente para determinar los límites físicos de posibles teorías de la gravedad (violaciones al PEE en el régimen de campo débil no han sido encontradas, las cotas experimentales más recientes apuntan a su validez en al menos una parte en 10^{15} [168]). Desde esta perspectiva el PEE es la base fundacional de cualquier teoría de gravedad [92].

Por otra parte, si bien la RG concierne solamente a fenómenos gravitacionales, la notable implicación sobre la relación de estos con la materia prescribe una inconsistencia. Por un lado, la RG es una teoría puramente clásica y, por otro, la materia a nivel fundamental es cuántica. Explícitamente, mientras el «lado izquierdo» de las ecuaciones de Einstein contiene la información de la interacción gravitacional, es decir, la geometría del espacio-tiempo, el «lado derecho» circunscribe, en el tensor de energía-momento, todo el contenido material correspondiente a las interacciones no-gravitacionales (electromagnética, débil y fuerte), las cuales son, en conjunto, descritas coherentemente por el formalismo de teoría cuántica de campos, enmarcado bajo el modelo estándar de la física de partículas (ME). Así, las ecuaciones de Einstein predisponen una inherente conjunción fundamental de ambas teorías; teorías que en principio son fundamentalmente distintas. Al igual que la RG, el carácter experimental de la física de altas energías sitúa al ME como la teoría estándar en relación a las interacciones no-gravitacionales, pues sus predicciones han sido, hasta el momento, comprobadas también con notable precisión [124]. Dicha circunstancia pareciera indicar, de manera prematura, a la comprensión fundamental de la naturaleza como completa, pues ambas teorías, la RG y el ME, sustentan una descripción acorde con la naturaleza. Dicha conclusión es sin embargo incorrecta. A pesar de los éxitos de ambas teorías existen argumentos teóricos y fenomenológicos para considerar ambas teorías como «incompletas».²

1.2. ¿Por qué teorías alternativas?

El argumento más ambicioso, en la dirección teórica, se asocia con la promesa de una teoría fundamental para todas las interacciones, esto es, una descripción unificada para todas. Por consistencia con el ME, una formulación «cuántica» de la gravedad se torna razonable (para algunos incluso, necesaria). Dentro de este esquema, además de incorporar una reinterpretación al espacio-tiempo en sí, se espera que se resuelva el problema de las singularidades encontradas en múltiples soluciones a las ecuaciones de la RG [160]. Se cree ampliamente que una teoría de gravedad cuántica prohíbe tales situaciones no-físicas ocurridas en el límite de campos gravitacionales infinitamente grandes (o bien donde la curvatura es también infinita) [41]. Entre otras cosas, las motivaciones para un esquema cuántico de la gravedad suponen a la RG como una teoría no fundamental limitada genéricamente a la escala de Planck, o bien, a altas energías. Dada la incompatibilidad de conceptos entre la RG y el ME (o de manera más fundamental, la mecánica cuántica), los esfuerzos por concebir una teoría de gravedad cuántica totalmente consistente han resultado, hasta el momento, infructuosos [106].

En la dirección fenomenológica u observacional, la contundente evidencia sobre la expansión acelerada del universo (notablemente las supernova Ia tipo [14]), la medición del fondo cósmico de microondas [110] y estudios detallados de estructura de larga escala apuntan a una constante cosmológica con valor no nulo ($\Lambda \neq 0$) [125]. Si bien, la inclusión de dicho término no representa una desviación a la RG, pues puede ser incorporado fácilmente como una constante en la acción de Einstein-Hilbert, sí significa, desde una perspectiva física, aceptar el problema del llamado «sector oscuro». El consenso general de la cosmología estándar (Λ CDM) sostiene que el universo debería estar aproximadamente conformado en un 95 % por material «oscuro» para ser compatible con las observaciones [11]. Los mejores modelos afirman que aproximadamente el 25 % de este material oscuro está representado por una forma de materia no-relativista y no-interactuante llamada *materia oscura*, mientras que el porcentaje restante corresponde a una forma de densidad de energía asociada con una ecuación de estado

²No se repasaran aquí los problemas teóricos, conceptuales y fenomenológicos que enfrenta el ME (e.g. el problema de la jerarquía débil), pues no es el propósito de esta tesis. El lector puede referir a cualquier seminal trabajo en la física de partículas para ello [124]. No obstante, es indispensable identificar su relación con el sector gravitacional y sus consecuencias observacionales.

negativa de nombre *energía oscura*. Nótese que el nombre asociado a este sector indica la incapacidad de entender, en términos descriptivos y de origen, a la materia y energía oscura. Intentos por detectarla directamente han resultado infructuosos (ver e.g. [140]).³ Del mismo modo se han propuesto candidatos para ocupar el lugar de la materia oscura como neutrinos estériles, entre otros, no obstante, dichos modelos no han encontrados pruebas experimentales para ser sustentados. En esta misma línea, es en el modelo estándar de la cosmología donde subyacen serios problemas conceptuales, entre los cuales está el *problema de la constante cosmológica* («¿Por qué el valor observado de la constante cosmológica es tan pequeño en unidades de Planck?») y el llamado *problema de la coincidencia* («¿Por qué la densidad de energía asociada a la constante cosmológica tiene un valor tan cercano a la densidad de materia en el presente?»). Desde luego, dentro del marco de Λ CDM se ha explorado la posibilidad de resolver estos problemas; por ejemplo, por medio de mecanismos de selección a partir de una distribución de valores para Λ . Sin embargo, Weinberg mostró que, dentro del marco de la RG, no es posible obtener una solución dinámica para la constante cosmológica [163]. Más aún, es muy probable que correcciones ultravioleta a la RG se «filtren» como correcciones infrarrojas a escalas cosmológicas (para un repaso de las dificultades en el régimen cosmológico que enfrenta la RG ver e.g. [59, 101]). De esta manera, la inclusión del término cosmológico es, esencialmente, una prescripción *ad hoc*. Aunque esta hipótesis resulte congruente con las observaciones, no posee sustento alguno para considerarla como una «constante» fundamental de la naturaleza.⁴

Como queda expuesto en las consideraciones anteriores, éstas sugieren la necesidad de modificaciones a bajas y altas energías, a una o ambas teorías (la RG y el ME) y, por extensión, a ambas como teorías incompletas genéricamente. Dicha circunstancia implica dos enfoques posibles: las búsqueda de extensiones al ME, o bien, extensiones a la misma RG. En esta tesis se opta por éste último.

Modificar a la RG es un proyecto ambicioso, tanto más cuando ésta es acorde con una gran cantidad de experimentos y observaciones, la ventana a una teoría alternativa resulta angosta.⁵ De ese modo, cualquier modificación debería, en principio, ser consistente con las predicciones de la RG ya probadas y, al mismo tiempo, ser capaz de explicar las inconsistencias expuestas anteriormente. Este planteamiento concibe la búsqueda de posibles desviaciones a la RG no como una mera exploración, sino como una base argumentativa (teórica y observacional) en torno a teorías alternativas de la gravedad. Dicho de otro modo, modificar a la RG en regímenes donde en principio podría no ser consistente, o bien, no válida, abre la posibilidad de justificar una teoría más completa que la RG y, en cierto grado, permite una reinterpretación a las posibles desviaciones de la RG (fuertemente constreñidas por los experimentos y observaciones actuales [168]).

Ahora bien, en un sentido histórico la incursión en teorías modificadas no estuvo motivada en ningún sentido por alguna consideración experimental o fenomenológica. Tan pronto como apareció la teoría de Einstein, Weyl (1919) y Eddington (1923) comenzaron a considerar modificaciones a la misma, sujetas en lo general a una curiosidad, o bien, para cuestionar a la RG

³Una de las motivaciones principales que sustentan a la materia oscura son las anomalías en las curvas de rotación de galaxias. Si no se asume un componente de materia oscura no es posible explicarlas. Cabe señalar sin embargo la reciente detección de dos galaxias que no poseen materia oscura [70], el descubrimiento propone serias dificultades a MOND [29], una teoría alternativa que modifica la teoría de Newton a escalas galácticas con el propósito de evitar introducir a la materia oscura; de ser ciertas las conclusiones, esta teoría quedaría totalmente descartada y, paradójicamente, se tendría una prueba de la existencia de dicho componente oscuro.

⁴A esta cuestión se agrega la notable discrepancia en los valores de Λ . El valor observado de Λ discrepa en al menos 120 ordenes de magnitud de su contra-parte teórica proveniente del ME [163].

⁵Aunado a esto, la RG es considerada la «única» teoría interactuante de una partícula sin masa de helicidad-2 [161]. Asimismo, es—hasta donde las observaciones lo confirman—la única teoría que satisface el principio de equivalencia fuerte (PEF; la distinción entre el PEE y el PEF es la inclusión de cuerpos con auto-interacción gravitacional). En razón de lo anterior, cualquier teoría métrica que no sea la RG, implica forzosamente la introducción de grados de libertad auxiliares [168].

recién establecida. No fue hasta la segunda mitad del siglo XX cuando, con el propósito de cuantizar a la RG por métodos genéricos, se consideró la inclusión de términos de curvatura de mayor orden en la acción de Einstein-Hilbert. En este punto, con el propósito de incorporar el principio de Mach en la RG, C. Brans y R. H. Dicke formulaban la primera teoría escalar-tensorial [43]. A la par de las antes mencionadas, varios candidatos para teorías de gravedad fueron propuestos.⁶ La proliferación de dichas formulaciones, articuladas esencialmente por argumentos teóricos, produjo la necesidad de un marco teórico tras el «renacimiento de la RG»,⁷ el formalismo Paramétrico Post-Newtoniano (PPN) [167, 168], cuyo aparato teórico abrió nuevas vías de comparación y análisis al confrontar a teorías modificadas con observaciones astrofísicas de vanguardia como el láser de alcance lunar, ondas de radio y, en 1974, el púlsar binario de Hulse y Taylor [94, 95, 151, 152]. Tal formalismo ha sido el punto de referencia de cómo las teorías alternativas deben de ser evaluadas. Como consecuencia de este enfoque, se constatan dos posibles escenarios. Por un lado, se asume a la RG como una hipótesis nula y se opta por buscar desviaciones genéricas; anticipando a que la sensibilidad de los experimentos sea suficiente para restringir el tamaño de las desviaciones, o bien, apuntar a posibles inconsistencias. Por otro lado, es posible partir de un modelo de gravedad modificada en particular, desarrollar sus ecuaciones y soluciones con el propósito de postular ciertas observables que entonces podrían o no estar de acuerdo con el experimento. En ambos, es la jerarquía del experimento la que domina.

Teniendo en cuenta lo anterior, si algún esquema de gravedad modificada se encuentra mejor situado respecto a la RG, en el sentido de que es capaz de explicar con mayor naturalidad algún fenómeno gravitacional (e.g. el sector oscuro), o bien, alguno que no sea predicho por la RG, éste se contextualiza como plausible. Esta es, precisamente, la primera motivación de esta tesis. Reconocer que no existe razón a priori para escoger a la RG por encima de otras teorías, alberga la notable posibilidad de evitar un sesgo teórico en el análisis de nuevas observaciones y con ello, potenciales descubrimientos y, al mismo tiempo, enriquecer el corpus que representa el sector gravitacional en la física moderna.

1.3. Radiación gravitacional en contraste con otros experimentos de la RG

En el segundo párrafo de esta introducción se mencionaba la notable consistencia de la RG con los experimentos. Este planteamiento prescribe ciertos matices que hay que tener en cuenta. En primer lugar, la correspondencia entre predicción teórica y comprobación experimental, a la que es sujeta la RG, se ve limitada al régimen gravitacional en el cual las observaciones y experimentos son realizados. En específico, el paradigma experimental de la física gravitacional (hasta antes de la primera década del siglo XXI) concierne al régimen cuasi-estacionario cuasi-lineal de campo débil de la RG. Esto es, regiones donde la magnitud del campo gravitacional es débil en relación a la masa-energía del sistema, las velocidades características son pequeñas relativas a la velocidad de la luz y el campo gravitacional es estacionario o cuasi-estacionario relativo al tamaño característico del sistema [173]. En contraste, en el sector gravitacional de campo fuerte, vital para el entendimiento de objetos compactos, como estrellas de neutrones y agujeros negros, así como del universo temprano, el progreso en términos observacionales ha sido insuficiente [33, 129, 166].

Las dificultades encontradas en este sector, se pueden dilucidar en dos argumentos. El primero de ellos, concierne a la naturaleza propia de los fenómenos que ocurren en este régimen,

⁶Para un revisión histórica ver e.g. [139]. Breves discusiones también se encuentran en [59, 128, 143].

⁷Emblemático período sucedido en los sesenta, en el que las predicciones teóricas, anteriores a la década, y notables descubrimientos astrofísicos (cuásares, púlsares, radiación cósmica de fondo) delinearon un lugar común [169].

pues son en lo general complejos e intempestivos, lo cual hace la detección limpia y adecuada de observables sumamente difícil. El segundo argumento es reflejo de la no existencia de un marco teórico para cuantificar desviaciones en las predicciones de la RG en este sector. Este último planteamiento se desprende de la confusión en la comunidad respecto a cómo vincular experimentos y observaciones que tienen lugar en distintos regímenes gravitacionales. Por ejemplo, los experimentos de laboratorio, del sistema solar así como las observaciones de pulsares binarios,⁸ pese a ser «pruebas de precisión», éstas son asociadas a constreñir parámetros del formalismo PPN, pues dan acceso a las primeras correcciones de la dinámica newtoniana. Sin embargo, no es obvio cómo estas constricciones se adscriben en el régimen cosmológico o en el sector de campo fuerte. Recientemente se ha propuesto un marco teórico para tratar de responder a esta cuestión [24]. La conclusión es que en efecto, las pruebas cosmológicas, de PPN y del sector de campo fuerte distan en varios ordenes de magnitud.⁹ Lo anterior resulta de carácter importantísimo para teorías modificadas, pues no es claro para una teoría alternativa que es bien comportada en el sector cosmológico el tener soluciones viables a escalas estelares y viceversa [59, 143]. Más aún, este y otros anteriores intentos por cuantificar distintas pruebas a la RG adjudican como núcleo central para cuantificar sus desviaciones al sector gravitacional de campo fuerte [26, 35, 129].

En este sentido, los experimentos de detección de ondas gravitacionales (OG), una de las más notables consecuencias teóricas de la RG,¹⁰ se revelan como cruciales para la física gravitacional. Las recientes detecciones [2–7, 9] por las colaboraciones LIGO [1] y VIRGO [10], además de confirmar de manera directa la existencia de OG,¹¹ representan un hito de la astronomía observacional, en el sentido de que éstas distan, en múltiples maneras, de las observaciones «convencionales».

Es sabido que la detección directa de OG se distingue de otros experimentos gravitacionales al confrontar directamente el sector «completo» de campo fuerte,¹² donde la gravedad es altamente no-lineal e inherentemente dinámica [137, 168, 173]. Entre otros aspectos, debido a su naturaleza, las OG se «propagan», esencialmente, sin «impedimento» alguno desde su fuente, lo que implica que en la misma onda se codifica la naturaleza de la fuente. Más aún, las OG existen en ausencia de radiación electromagnética, lo cual permite la observación de fenómenos sin contra-parte electromagnética (e.g. la coalescencia de agujeros negros [2, 61]). De esta manera, las recientes detecciones de OG, originadas por coalescencias de objetos compactos, se perfilan como la antesala a una nueva era en la astrofísica observacional y, por extensión, en la física gravitacional.

⁸Aunque las observaciones de pulsares binarios son reconocidas como pruebas en el régimen de campo fuerte, lo son en el sentido de que confirman la correcta descripción del movimiento de objetos compactos por un régimen perturbativo post-newtoniano, en particular cuantifican desviaciones de la RG en el sector cuasi-estacionario de campo fuerte [127, 144]. Los experimentos con pulsares se utilizan comúnmente para colocar cotas a violaciones del PEE en objetos con auto-interacción gravitacional, cotas a violaciones en la invarianza local de Lorentz y, por supuesto, cotas a la emisión de radiación cuadrupolar [166].

⁹Baker et al [24], propusieron una representación bidimensional de un «espacio de parámetros de gravedad», en el cual se correlacionan una amplia gama de experimentos gravitacionales (presentes y futuros) por medio del potencial gravitacional al cual son sujetos y su «curvatura» asociada (por medio del escalar Kretschmann).

¹⁰En el intersticio de las soluciones generales a las ecuaciones de campo, Einstein derivó en 1916 soluciones aproximadas, esto es, soluciones a la teoría linealizada en vacío, que se propagan a la velocidad de la luz y satisfacen una ecuación tipo onda [79]. Dichas soluciones son las llamadas OG y se interpretan como perturbaciones al espacio-tiempo de Minkowski.

¹¹Durante el período que separa a la teorización de las OG y a su detección directa, numerosas controversias tuvieron lugar. Las más notables son la famosa *controversia del cuadrupolo* y las supuestas detecciones tempranas de J. Weber. Sobre estas controversias referimos a [54, 60, 102, 103, 167], brevísimos ensayos se encuentran también en [128, 154, 168]. Es importante tener en cuenta el papel de estos acontecimientos en el desarrollo teórico y experimental de la radiación gravitacional. Irónicamente, fueron estos los que dieron pie al notable desarrollo del área y, por consiguiente, a la «culminación» con la detección directa en 2015 [155].

¹²En este sector las masas adquieren velocidades cercanas a la de la luz ($v \sim c$), el espacio-tiempo circundante es altamente dinámico y curvado. Ejemplos de este sector son la coalescencia de objetos compactos [38, 61]

A este respecto, es sabido que en teorías alternativas de la gravitación, las OG se propagan con polarizaciones adicionales, cada una con velocidades, atenuaciones y masas efectivas potencialmente distintas a las predichas por la RG [59, 168, 173]. Las consecuencias de estas implicaciones han sido confrontadas con las recientes detecciones en el sector cosmológico (ver e.g. [15, 28]). Más aún, dichos resultados experimentales son consistentes con el hecho de que, en efecto, las OG se propagan a la velocidad de la luz; dicho resultado limita en gran medida el abanico de posibles teorías alternativas [36]. A pesar de estos resultados, debido a la prematura etapa en el ámbito de la detección de OG, mucho trabajo queda por hacer. En las subsecuentes décadas, los experimentos de OG aparecen como tópico central para confrontar a la RG, en el antes discutido sector de campo fuerte, con teorías modificadas.

Lo anterior constituye la segunda motivación de este trabajo. La exploración teórica y, por consiguiente, las implicaciones inmediatas propias del sector de OG en teorías alternativas, se advierten indispensables conforme cuantiosos y más precisos experimentos sean realizados. En específico se vuelve aún más relevante el entender claramente las posibles modificaciones inducidas por una teoría extendida en la morfología de las propias OG.

1.4. Estructura de la tesis

La literatura en el tópico de radiación gravitacional es vasta [38, 46, 58, 83, 107, 112, 128, 154]. Lo es también la referida a teorías alternativas [51, 59, 143]. Más que exponer de manera canónica el tema, el enfoque de este trabajo propone, en primer lugar, partir de (a) una revisión del formalismo matemático que deriva en la famosa fórmula cuadrupolar de las OG, dando considerable atención a tópicos que, por lo general, se toman como «totalmente» entendidos (e.g. la relación de los modos TT con la fuente). La importancia del formalismo cuadrupolar se sustenta en su uso al analizar períodos orbitales de púlsares binarios [127, 141, 144, 151, 166] al estar relacionada con la energía radiada por la emisión de OG. En segundo lugar, (b) extender dicho formalismo a las teorías escalares-tensoriales [63] y las teorías $f(R)$ [143]. Esta elección radica en que ambas son las teorías métricas más simples y más estudiadas y, en consecuencia, se presentan como serias candidatas a una teoría de gravedad modificada.

Como se puede colegir de lo anterior, la tesis está dividida en dos partes. En la primera se aborda exclusivamente a las OG en la RG, mientras que la segunda confiere a las teorías alternativas. En el Capítulo 2 se expone el formalismo de perturbaciones a la métrica alrededor de un fondo genérico, con el propósito de explorar las diversas derivaciones del pseudo-tensor de energía momento de las OG. En el Capítulo 3 se explora la relación entre los grados radiativos de la teoría lineal y la libertad de norma, partiendo de un análisis de la teoría EM. En la segunda parte de esta tesis se abordan a las teorías alternativas de la gravitación, en particular se extiende el formalismo de los capítulos anteriores a teorías escalares-tensoriales y, en menor medida, a teorías $f(R)$.

En términos generales, este estudio pretende subrayar puntualmente las distinciones entre las predicciones de la RG y de las teorías alternativas en lo que a radiación gravitacional concierne. Desarrollos en curso de la tercera generación de detectores (espaciales y terrestres, ver e.g. [8, 19, 86]) anticipan, en un futuro cercano, la era de observación multibandas de OG (i.e. un rango de frecuencias de detección más amplio). Derivado de ésta, se espera una disminución de errores estadísticos en las futuras detecciones, mientras que los estudios numéricos y semi-analíticos prometen reducir sistemáticamente el modelado en la forma de onda [34, 90]. En consecuencia, conforme la cantidad y precisión de las observaciones crezca, será posible colocar cotas más robustas a teorías modificadas, o bien, considerar a la RG como una aproximación a una teoría de la gravitación más general, en el posible caso en donde las predicciones de ésta última difieran de la primera [55].

1.5. Notación y convenciones

Se sigue en lo que resta del trabajo la notación adoptada por Wald [160]. El espacio-tiempo está representado por una variedad M 4-dimensional con una métrica lorentziana g_{ab} de signatura $(-+++)$. El tensor de Riemann se toma como

$$R_{abc}{}^d \omega_d = (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \omega_c, \quad (1.1)$$

donde ∇_a es la derivada covariante sin torsión asociada a la métrica g_{ab} . El determinante de la métrica es g . Se usa las unidades geométricas ($G = c = 1$), a menos que se indique lo contrario. El tensor de Einstein se define como

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R. \quad (1.2)$$

Se adopta la notación compacta de índices simétricos y anti-simétricos, es decir,

$$A_{(ab)} = \frac{1}{2} (A_{ab} + A_{ba}), \quad (1.3a)$$

$$A_{[ab]} = \frac{1}{2} (A_{ab} - A_{ba}). \quad (1.3b)$$

De acuerdo a Wald [160], dados cualesquiera dos operadores derivada $\tilde{\nabla}_a$ y ∇_a existe un campo tensorial $C^c{}_{ab}$ llamado *conexión* tal que

$$(\nabla_a - \tilde{\nabla}_a) \omega_b = -C^c{}_{ab} \omega_c. \quad (1.4)$$

Para un campo tensorial arbitrario se tiene la siguiente identidad

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) T^{c_1 \dots c_k}{}_{d_1 \dots d_l} = - \sum_{i=1}^k R_{abe}{}^{c_1} T^{c_1 \dots e \dots c_k}{}_{d_1 \dots d_l} + \sum_{j=1}^l R_{abd_j}{}^e T^{c_1 \dots c_k}{}_{d_1 \dots e \dots d_l} \quad (1.5)$$

Capítulo 2

La Relatividad General y el formalismo perturbativo

La RG es una teoría no lineal; lo son también las teorías métricas de la gravedad. La complejidad que resulta en integrar cantidades relacionadas con la curvatura es bien conocida, sin embargo, ello no ha sido impedimento alguno para poder conocer soluciones que se acoplen a la realidad física. Tal como se verá más adelante, la construcción del Pseudo-Tensor de Energía-Momento de las Ondas Gravitacionales (PTEM OG) en RG requiere ya de por sí perturbaciones a una métrica de fondo hasta segundo orden. El extraer los frentes de onda también implica poner en práctica métodos de aproximación que mejoren de a poco la precisión de los modelos teóricos. En este capítulo se repasa de manera breve estos métodos de aproximación enfocados sólo a la física de OG. Por lo demás, se introduce un formalismo totalmente general para obtener las cantidades de curvatura perturbadas relevantes a lo subsecuente de este trabajo.

2.1. Axiomas de la Relatividad General

Como quedó acordado en la introducción precedente, no se repasarán los conceptos básicos de topología y geometría diferencial que se adscriben a la RG.¹³ No obstante, con el objeto de introducir formalmente a la RG, a fin de más tarde señalar con mayor claridad las distinciones entre esta última y la teorías alternativas consideradas, conviene recordar (en forma axiomática) sus principios fundamentales [160].

- I. El espacio-tiempo está representado por una variedad suave M 4-dimensional dotada con una métrica lorentziana g_{ab} . Es común referir al espacio-tiempo como el par (M, g_{ab}) .
- II. El espacio-tiempo está dotado con un operador derivada ∇ compatible con g_{ab} ($\nabla_c g_{ab} = 0$) y sin torsión (i.e. $\nabla_{[a} \nabla_{b]} f = 0, \forall f : M \rightarrow \mathbb{R}$)
- III. Se satisface el PEE. En consecuencia, todas las partículas de prueba libres (puntual, sin espín y sin auto-interacción gravitacional) siguen las geodésicas asociadas a g_{ab} .
- IV. Se satisface el Principio de Covarianza General. Es decir, la métrica g_{ab} es la única cantidad asociada al espacio-tiempo presente en las leyes de la física. En consecuencia las ecuaciones de la física deben de estar expresadas en términos de tensores asociados a M , o más precisamente, a su correspondiente espacio tangente.
- V. Las ecuaciones de campo deben de ser lineales en las segundas derivadas de g_{ab} .¹⁴

¹³El lector puede consultar e.g. [53, 115, 160].

¹⁴Formalmente conocidas en la literatura matemática como ecuaciones parciales cuasilineales, es decir, lineales en las segundas derivadas de la métrica pero no lineales en las derivadas del mismo orden.

VI. La materia está asociada con el tensor de energía-momento T_{ab} , el cual, debe conservarse y, además, ser fuente de curvatura.

De este modo, la interacción gravitacional sujeta a estos axiomas debe de satisfacer las ecuaciones de campo de Einstein [77],¹⁵

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 8\pi T_{ab}, \quad (2.1)$$

donde R_{ab} es el tensor de Ricci y R es la contracción de este último con g_{ab} conocido como el escalar de Ricci. Cabe mencionar que algunos de estos axiomas pueden ser relajados para dar pie a teorías alternativas como se verá en el Capítulo 4. Las ecuaciones (2.1)¹⁶ expresan la relación entre la curvatura del espacio-tiempo (lado izquierdo) y la materia (lado derecho). La una es fuente de la otra y viceversa. Por otro lado, las identidades de Bianchi (ver e.g. [53, 160]), en consonancia con las ecuaciones de campo (2.1), implican

$$\nabla^a T_{ab} = 0; \quad (2.2)$$

la nula divergencia del tensor de energía-momento. Este resultado se reivindica como una ley de conservación para T_{ab} . Las ecuaciones (2.2) confieren suma importancia a la RG, pues determinan la ecuaciones de movimiento de los campos de materia contenidos en T_{ab} . Bajo esta propiedad se recupera el PEE. En ese sentido, en la RG la dinámica de los campos de materia no puede ser arbitraria, sino que, necesariamente es gobernada por las ecuaciones de conservación (2.2).

Como sucede con la mayoría de teorías de campo invariantes ante difeomorfismos, las ecuaciones (2.1) aceptan una formulación lagrangiana, es decir, pueden ser derivadas de la variación de una acción. En el caso de la RG la acción es la de Einstein-Hilbert:¹⁷

$$S_{RG} = S_G[g_{ab}] + S_M[g_{ab}, \psi] = \int \left[R(g_{ab}) + \frac{16\pi}{\sqrt{-g}} \mathcal{L}_M(g_{ab}, \psi) \right] \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.3)$$

donde \mathcal{L}_m es la densidad lagrangiana asociada a los campos de materia representados esquemáticamente y colectivamente por ψ (e.g. los campo del ME de la física de partículas y/o materia oscura). La variación de (2.3) respecto al tensor métrico resulta en las ecuaciones de campo (2.1), donde

$$T_{ab} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g^{ab}}, \quad (2.4)$$

bajo la condición de que la acción sea estacionaria (i.e. $\delta(S_{RG} + S_m) = 0$). El axioma IV, en particular, al exigir la invariancia de la acción S_M bajo difeomorfismos, implica la ley de conservación (2.2). Asimismo, el axioma II asegura a la métrica como la única estructura independiente del espacio-tiempo. Ahora bien, al considerar teorías métricas alternativas a la RG lo que se busca es modificar a las ecuaciones de campo manteniendo y relajando ciertos

¹⁵En general para problemas a escalas cosmológicas es necesario tener en cuenta a la constante cosmológica Λ en las Ecs. (2.1), sin embargo, para efectos de la presente tesis no se tendrá en cuenta. A este respecto, cabe señalar que no ha sido sino hasta los recientes trabajos de Ashtekar, Bonga, and Kesavan [22, 23] donde se ha extendido el formalismo de radiación gravitacional con la inclusión de Λ .

¹⁶El plural en «ecuaciones» se justifica al notar que es un conjunto de 10 ecuaciones diferenciales parciales, no lineales, acopladas para las diez componentes independientes de g_{ab} [160].

¹⁷Es importante traer a cuenta el Teorema de Lovelock (TL) (ver e.g., [59]), el cual establece que «las únicas ecuaciones de campo $E_{ab}[\mathcal{L}] = 0$ de segundo orden en g_{ab} posibles obtenidas en cuatro dimensiones a partir de un lagrangiano de la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}(g_{ab})$ corresponden a $E_{ab} = \alpha \sqrt{-g}[R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R] + \lambda \sqrt{-g}g_{ab}$ con α y λ constantes». El TL implica que para construir teorías métricas de la gravedad cuyas ecuaciones de campo difieran de las de la RG es necesario considerar por lo menos: (i) otros campos aparte del tensor métrico, (ii) derivadas de de mayor orden en la métrica, (iii) aumentar la dimensión del espacio-tiempo o (iv) no localidad. Es decir, la esencia de las teorías alternativas.

axiomas (ver Capítulo 3). Dichos cambios se traducen, por lo general, en cambios a la acción (2.3).

2.2. Enfoques de aproximación en la Relatividad General

Las ecuaciones de campo de la RG son genuinamente complicadas. Dada su naturaleza matemática (ver nota 16) no existen métodos generales para obtener soluciones y, aunque soluciones exactas han sido encontradas, no todas gozan de inmediata interpretación física [147]. Pese a esto, es posible, como en todas las áreas de la física, partir de una solución bien conocida y considerar pequeñas desviaciones a ésta como soluciones aproximadas.

Este enfoque es precisamente el que adoptó Einstein [80] al considerar la aproximación de campo débil de la RG

$$g_{ab} = \eta_{ab} + \lambda h_{ab}, \quad (2.5)$$

donde h_{ab} representa una desviación «pequeña» ($\lambda \ll 1$) a la métrica del espacio plano η_{ab} . La introducción de esta suposición en la ecuaciones de campo (2.1) resulta en la teoría linealizada de la RG, también conocida como la aproximación de campo débil, la cual será presentada más adelante para construir el formalismo cuadripolar (ver Sección 3.2). Linealizar la teoría implica, por un lado, recuperar el límite newtoniano y, por otro, la existencia de OG. Por compatibilidad con los principios de la relatividad especial, cualquier cambio a una fuente de campo gravitacional debe ser comunicado a observadores distantes teniendo como límite la velocidad de la luz. En la RG estos «cambios» que se propagan son precisamente las OG.

Sin embargo, dada la no linealidad no es posible, en lo general, establecer una distinción clara entre la parte de la métrica que representa a la onda y el resto de la métrica. Dicho de otro modo, en situaciones realistas la métrica perturbada no es la de Minkowski, como sugiere (2.5), sino que puede ser un «fondo» arbitrario. Como consecuencia de esta restricción sólo en ciertas aproximaciones se puede definir claramente a la radiación gravitacional:¹⁸

- Teoría linealizada.
- Perturbaciones a una métrica de fondo.
- Aproximaciones analíticas: aproximaciones post-newtonianas, post-minkowskianas, expansión en términos de la razón de masas (*small mass-ratio expansion*), teoría de campo efectivo (EFT por sus siglas en inglés) [38, 47, 52]

El esquema más simple es el de la teoría linealizada y es al que está enfocado este trabajo. Sin embargo, bajo este esquema, la condición referente al transporte de energía y momento por las OG [42, 154] es ambigua (ver Sección 2.4). El argumento es el siguiente:

En la teoría lineal las OG se entienden como perturbaciones a una métrica plana, con lo que queda implícita la suposición de campo débil. Así, queda manifiesta de antemano su no aplicabilidad al verdadero sector de OG, el de campo fuerte. Aunado a esto, al linealizar a la RG, quedan excluidas inherentemente las no linealidades. Consecuentemente, se pierde la posibilidad de describir a la interacción del campo gravitacional consigo mismo.

Al retomar este último punto, queda claro que en cualquier aproximación lineal se tiene la incapacidad de describir los subsecuentes cambios en la geometría del espacio-tiempo

¹⁸Cabe señalar que existe una clase de espacios-tiempo axialmente simétricos conocidos como Ondas de Brill (ver e.g. Alcubierre [12, p.395]). Son soluciones fuertemente no lineales a las ecuaciones completas de campo, en el sentido de que no aparecen en ningún contexto de perturbaciones como la clase de OG estudiadas en este trabajo.

conforme la energía de las OG es transportada desde la fuente hasta regiones asintóticas (i.e. detectores). Lo anterior, en razón de que en la RG, cualquier forma de energía, incluida la asociada a las OG, contribuye a la curvatura del espacio-tiempo. Por lo tanto, parece razonable, si no esencial, permitir que el espacio-tiempo de fondo sea dinámico y, además posibilitar, de manera efectiva, la inclusión de las no-linealidades de la teoría, para poder definir de manera clara la energía asociada a las OG, lo que en el lenguaje de la RG se traduce en definir un tensor de energía-momento asociado a estas. En particular, son los métodos perturbativos los que permiten la construcción de dicho objeto.

El sustento de una teoría de perturbaciones en la RG se puede justificar bajo dos premisas [148]. En primer lugar, muchos fenómenos relativistas son en efecto, característicos de una magnitud pequeña, razón por la cual pueden ser modelados con perturbaciones a primer orden, tal es el caso de la teoría linealizada o procesos en la vecindad de un agujero negro. La segunda razón concierne a cuestiones de estabilidad [56, 131]. Por ejemplo, cuando un agujero es perturbado, éste evoluciona hasta un estado de equilibrio; como resultado se encuentra la emisión de algún tipo de radiación (gravitacional, electromagnética, etc.).¹⁹

Como ya se había mencionado antes, el problema básico en el estudio de las ondas gravitacionales refiere a la relación existente entre la forma asintótica de la onda gravitacional h_{ab} generada por alguna fuente aislada, en la localización de un detector situado en la zona de onda de la fuente, con el contenido de la fuente, i.e. su tensor de energía-momento T_{ab} . Por ejemplo, para el caso de un sistema de gravitacional de dos cuerpos con masa reducida μ y masa total M se obtiene, por el teorema del virial, la siguiente relación:

$$\frac{1}{2}\mu v^2 \sim \frac{1}{2} \frac{G\mu M}{r}, \quad (2.6)$$

con lo que

$$\frac{v^2}{c^2} \sim \frac{GM}{rc^2} \ll 1. \quad (2.7)$$

donde v es la velocidad típica de las fuentes y r es la distancia al sistema en cuestión. Ambos parámetros,²⁰ resultan ser pequeños para sistemas dominados por la interacción gravitacional cuyas velocidades son lentas y los campos gravitacionales son débiles por lo que pueden ser utilizados en como parámetros de expansión en las ecuaciones de campo. Por el contrario, para sistemas cuya dinámica no está dominada por interacciones no gravitacionales los parámetros se pueden considerar independientes. Además, en la zona de onda se puede considerar un parámetro más, a decir,

$$\frac{\lambda_c}{L_c}, \quad (2.8)$$

donde λ_c es una longitud característica de la OG y L_c es una longitud asociada al espacio-tiempo en el que se propaga la onda. Estos tres parámetros, dan lugar a tres formalismos de aproximación altamente relacionados, en el sentido de que estos pueden ser utilizados simultáneamente. Estos formalismos permiten la resolución de las ecuaciones de campo iterativamente, y se especializan en la propagación y producción de OG. Estos son (i) la aproximación post-newtoniana (ii) la aproximación post-minkowskiana y (iii) expansiones alrededor de un fondo genérico. Para efectos de esta tesis, se discuten brevemente (i) y (ii), mientras que en la mayor parte de este capítulo se estudia a (iii). A orden dominante, cuando la auto-interacción

¹⁹La teoría de perturbaciones de agujeros es un amplio y activo tema [49, 57, 89, 136]. La radiación gravitacional emitida por perturbaciones a esta clase de objetos es comúnmente descrita en tres etapas. (i) *burst of radiation*, (ii) *ringdown*, (iii) *tail-decay*. Las señales consecuentes de la fase (ii) son las que se detectaron recientemente [3, 4, 6, 9].

²⁰Comúnmente a $\frac{GM}{rc^2}$ se le conoce como el parámetro de expansión de campo débil, mientras que a v/c se le conoce como el parámetro de de velocidad-lenta.

gravitacional es despreciable, el espacio-tiempo de fondo es plano, y la dinámica de las fuentes es descrita en términos de la gravedad newtoniana los tres formalismos coinciden.

2.2.1. Aproximación post-newtoniana

En lo que concierne a las fuentes de OG capaces de ser detectadas por interferómetros terrestres y espaciales [61], notablemente, sistemas binarios compuestos por estrellas de neutrones o agujeros negros, el entendimiento del problema de dos cuerpos en RG, necesario para la generación de OG, ha mejorado notablemente. El método analítico más refinado es la llamada aproximación post-newtoniana. Esta aproximación hace uso de expansiones v/c en las cantidades relevantes para las ecuaciones de campo. En particular, es útil para describir de manera muy precisa la fase *inspiral* de coalescencia de objetos compactos.²¹ Por definición, esta aproximación es válida bajo las suposiciones de campo gravitacional débil y movimiento lento dentro de las fuentes (i.e. el movimiento orbital de un sistema binario, en particular con orbitas cerradas), con lo que queda limitada a la zona cercana a la fuente. De ahí su limitación a, por ejemplo, incluir las condiciones de frontera en el infinito, que determinan la fuerza de reacción de radiación en la ecuación de movimiento de la fuente. Los métodos post-newtonianos trascienden el objetivo de este trabajo, sin embargo, su importancia yace en la necesidad de mayores órdenes en esta expansión en el análisis de OG emitidas por objetos compactos.²² Dicho de otro modo, conforme el orden de precisión aumente, la identificación de los parámetros asociados a los objetos en coalescencias mejoran, con lo que se tiene una mejor noción de la naturaleza de cada cuerpo.²³

2.2.2. Aproximación post-minkowskiana

Esta aproximación, en contraste con la post-newtoniana, es válida sobre todo el espacio-tiempo, siempre y cuando la fuente tenga auto-interacción gravitacional débil. Es decir, en este enfoque, a diferencia de la teoría linealizada, la auto-interacción gravitacional no se desprecia. La aproximación post-minkowskiana tiene un carácter más fundamental que la post-newtoniana, en el sentido de que cada coeficiente de una expansión del primer tipo, puede ser expandido también en una expansión del segundo tipo. Lo anterior en razón de que la «teoría» post-minkowskiana subyace en una reformulación exacta de las ecuaciones de campo (2.1), a decir, la formulación de Landau-Lifshitz de la RG, discutida más adelante.

Los cimientos de la expansión post-minkowskiana son los siguientes. En primer lugar, la magnitud del campo gravitacional es medida por la constante G ,²⁴ por lo que la expansión a las ecuaciones de campo es realizada en potencias de G . A orden cero en esta expansión, no hay campo gravitacional y sólo se encuentra el espacio-tiempo de Minkowski. A primer orden, la primera corrección en G a la métrica de Minkowski representa el campo gravitacional y se recupera a la teoría linealizada. Conforme más órdenes de G sean tomados en cuenta la precisión en la solución a las ecuaciones de campo aumenta.

²¹Se cree que los sistemas binarios formados por objetos compactos como estrellas de neutrones o agujeros negros son las principales fuente de emisión de radiación gravitacional. Conforme radían OG el sistema pierde momento angular y energía orbital. Para compensar estas pérdidas los sistemas binarios incrementan su frecuencia orbital y el semieje mayor de su orbita. Conforme estos parámetros incrementan la emisión de OG aumenta hasta llegar a la última fase de coalescencia dividida en tres subfases (*inspiral*, *merger* y *ringdown*), que producen una señal detectable [61, 112].

²²La razón es que a ordenes mayores en c , además de la obvia dificultad técnica asociada, mayores efectos como términos de *back-reaction* o *tail-terms*, son tomados en cuenta.

²³El estado del arte de este método de aproximación se encuentra en el orden 4PN (se dice que la expansión es de orden $(n/2)$ PN si existe una corrección de orden $(1/c^n)$) [32]. Para un repaso detallado de este enfoque ver e.g. [38, 65, 128, 132]

²⁴Específicamente el parámetro tendría que ser GM/rc^2 , sin embargo, especificar antes de realizar la expansión los valores de M y r no es conveniente, es por ello que la expansión se realiza en G .

A continuación se dará un breve repaso de los resultados más importantes de esta formulación, pues como se verá más adelante estos resultados deben empatar con los de este trabajo en el límite lineal de ambos.

Formulación de la RG de Landau-Lifshitz

La formulación de Landau-Lifshitz, o las ecuaciones relajadas de Einstein (ver e.g. [46, 107, 112, 128] para los detalles técnicos de esta formulación), intercambia el papel de variable dinámica de la métrica usual g_{ab} a la llamada métrica gótica inversa

$$g^{ab} = \sqrt{-g}g^{ab}; \quad (2.9)$$

una densidad tensorial. Bajo esta suposición las ecuaciones de Einstein (2.1) toman la forma

$$\partial_c \partial_d H^{abcd} = \frac{16\pi G}{c^4} (T^{ab} + t_{LL}^{ab}), \quad (2.10)$$

donde ∂_a es el operador derivada asociado a la métrica plana. El lado izquierdo de (2.10), es construido a partir de la también densidad tensorial $H^{abcd} \equiv g^{ab}g^{cd} - g^{ad}g^{bc}$, la cual satisface las mismas simetrías del tensor de Riemann.²⁵ En virtud de dichas simetrías se cumple la identidad

$$\partial_b \partial_c \partial_d H^{abcd} = 0 \quad (2.11)$$

Asimismo, en el lado derecho de (2.10), aparece el tensor de energía-momento usual y tiene lugar un nuevo término,

$$\begin{aligned} (-g)t_{LL}^{ab} \equiv & \frac{1}{16\pi} \left\{ \partial_c g^{ab} \partial_d g^{cd} - \partial_c g^{ac} \partial_d g^{bd} + \frac{1}{2} g^{ab} g_{cd} \partial_e g^{cf} \partial_f g^{de} - g^{ac} g_{df} \partial_e g^{bf} \partial_c g^{de} \right. \\ & - g^{bc} g_{df} \partial_e g^{af} \partial_c g^{de} + g_{cd} g^{fe} \partial_f g^{ac} \partial_e g^{bd} \\ & \left. \frac{1}{8} (2g^{ac} g^{bd} - g^{ab} g^{cd}) (2g_{ef} g_{gh} - g_{fg} g_{eh}) \partial_c g^{eh} \partial_d g^{fg} \right\}, \quad (2.12) \end{aligned}$$

el *pseudo-tensor de energía-momento de Landau-Lifshitz* (PTLL), llamado así porque, en efecto, no transforma como un tensor bajo transformaciones de coordenadas arbitrarias. Las ecuaciones de campo expresadas en la forma (2.10) permiten interpretar a este término como una contribución efectiva de la distribución de energía del campo gravitacional en el espacio-tiempo sumada a la contribución de materia del lado derecho. Este hecho se refuerza al notar que dicho pseudo-tensor es cuadrático en $\partial_a g^{cd}$, como es de esperar en un tensor de energía-momento.²⁶ La ley de conservación usual (2.2) se traduce, haciendo uso de (2.11), en

$$\partial_b [(-g)(T^{ab} + t_{LL}^{ab})] = 0. \quad (2.13)$$

Ahora bien, hasta el momento no se ha realizado ninguna aproximación; simplemente se han reformulado de manera exacta a las ecuaciones de campo. Aunado a esto, es importante recalcar las limitantes de dicha formulación. Su utilidad confiere sólo a situaciones en donde, en primer lugar, las coordenadas x^α sean ligeras deformaciones a las coordenadas lorentzianas del espacio-tiempo plano y, en segundo lugar, g^{ab} difiera ligeramente de la métrica de minowski. Si alguna de las anteriores suposiciones no se tomará en cuenta, los cálculos serían,

²⁵Se han restaurado las unidades para tener claro el lugar de los parámetros de expansión.

²⁶La interpretación de t_{LL}^{ab} como una contribución energética no debe de tomarse muy literal. En la RG no existe como tal una noción de densidad de energía localizada del campo gravitacional, en particular si se adoptan las coordenadas normales de Riemann, t_{LL}^{ab} resulta ser nulo. En palabras de Poisson & Will [128], «The literature abounds with attempts to introduce *the* energy-momentum tensor for the gravitational field. Such an object does not exist; do not prey to false prophets.»

por lo demás, muy extensos e innecesarios. De ahí, su justificación como punto de partida para la aproximación de campo débil. Dada la libertad de coordenadas (ver apéndice A.3), es común la introducción del potencial gravitacional

$$h^{ab} \equiv \eta^{ab} - g^{ab}, \quad (2.14)$$

el cuál coincide en el límite lineal con la perturbación \bar{h}^{ab} (introducida más adelante en la Sección 2.3.4, ver Ec. (2.68)),²⁷ e imponer la condición de coordenadas armónicas

$$\partial_b h^{ab} = 0, \quad (2.15)$$

que en el límite lineal se reduce a la condición de norma usual de Lorenz. La imposición de las ecuaciones (2.14),(2.15), introduce en la elección del sistema de coordenadas una estructura de Minkowski, al contener de manera explícita a la métrica plana η^{ab} . De ahí su utilidad al tratar con campos gravitaciones débiles. Con la imposición de (2.14) y (2.15) en las ecuaciones de campo (2.10), éstas se simplifican a

$$\square h_{ab} = -\frac{16\pi G}{c^4} \tau_{ab}; \quad (2.16)$$

un sistema quasi-lineal hiperbólico de ecuaciones diferenciales, donde

$$\tau^{ab} \equiv (-g)(T^{ab} + t_{LL}^{ab} + t_H^{ab}), \quad (2.17)$$

es el *pseudo-tensor de energía momento efectivo*,²⁸ el término

$$(-g)t_H^{ab} = \frac{1}{16\pi} \left(\partial_c h^{ad} \partial_d h_c^b - h^{cd} \partial_c \partial_d h^{ab} \right), \quad (2.18)$$

representa una contribución de norma y $\square = \eta_{ab} \partial^a \partial^b$ es el D'Alambertiano en espacio plano usual. Así, la ecuación (2.16) representa una «ecuación de onda»²⁹ para el potencial gravitacional h^{ab} . Por la condición de norma (2.15), se puede probar $\partial^a [(-g)t_{ab}^H]$ y, por consiguiente,

$$\partial^a \tau_{ab} = 0. \quad (2.19)$$

La ecuación de onda (2.16) y las dos condiciones (2.15), (2.19), son la base de la expansión post-minkowskiana al proponer la expansión

$$h^{ab} = Gk_{(1)}^{ab} + G^2 k_{(2)}^{ab} + G^3 k_{(3)}^{ab} + \dots, \quad (2.20)$$

sustituirla en la ecuación (2.16) e igualar términos del mismo orden de G . Las expresiones expuestas anteriormente serán confrontadas más adelante en su límite lineal. Sin embargo, se entrevé ya la naturaleza de onda en las ecuaciones de campo. La resolución de las ecuaciones de campo (2.16) al hacer uso de la expansión (2.20) es demandante técnicamente. La implementación de la solución conlleva por lo general el uso de desarrollos multipolares y los de los armónicos simétricos sin traza, entre otros [38, 112]. El propósito de incluir brevemente este formalismo es, por una parte, notar su relación con el cómputo de OG para el sector en donde

²⁷Algunos autores como L. Blanchet [38] y M. Maggiore [112] optan por definir a h^{ab} con un signo menos global, esto es: $h^{ab} \equiv g^{ab} - \eta^{ab}$, razón por la cual la identificación con \bar{h}^{ab} conlleva un signo menos extra que hay que tener en cuenta para confrontar los cálculos.

²⁸El pseudo-tensor de energía momento de efectivo y el pseudo-tensor de Landau-Lifshitz difieren del actual PTEM OG, las diferencias se puntualizan en la sección 2.4

²⁹Hay que tener en cuenta que (2.16) no es del todo una ecuación de onda pues en τ^{ab} aparecen también derivadas parciales de h_{ab} .

la teoría linealizada deja de ser válida y, por otra, confrontar en específico a las Ecs. (2.12), (2.19) y (2.18) con el computo del PTEM OG con teoría de perturbaciones (ver Sección 2.5).

2.3. Expansión alrededor de un fondo genérico

Esta sección describe el esquema de aproximación más relevante para este trabajo: la expansión alrededor de un fondo genérico. Por las razones mencionadas anteriormente, concierne principalmente a la cuestión de energía y momento de las OG, extender la expansión (2.5) a segundo orden es necesario. La implementación de esta expansión comúnmente se omite o bien se proporciona simplemente el resultado [53, 122, 160]. Por ejemplo, en [112] se hace uso de un sistema de coordenadas donde la conexión asociada a la métrica de fondo es nula. Más aún, en toda la literatura revisada, se omiten sin razón alguna términos de curvatura que aparecen a primer y segundo orden de la expansión. El origen y forma de dichos términos omitidos será mostrado más adelante explícitamente.

La finalidad del cálculo es en sí expandir el tensor de Einstein (1.2) hasta segundo orden en la métrica, por lo que primero se expanden a segundo orden cantidades como la conexión, el tensor de Riemann, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci para posteriormente utilizar dichos resultados en la expresión completa del tensor de Einstein. Es importante recalcar que en este cálculo no se utiliza ninguna condición de norma, esto con el propósito de esclarecer el origen de cada término. El resultado explícito del tensor de Einstein expandido a segundo orden coincide en parte con el reportado en [66, 67, 91], con la ligera diferencia de que en ambos casos se está tomando $T_{ab} = 0$.

2.3.1. Expansión de la conexión y el tensor de curvatura

Generalmente cuando se habla de perturbaciones a un espacio-tiempo de fondo es posible adoptar de manera intuitiva tres distintos puntos de vista, al final equivalentes [148]. La perturbación a (M, g) puede ser pensada como: el proceso de cambio de un espacio-tiempo (M, g) a otro ligeramente diferente (M', g') , como una medida de la diferencia entre (M, g) y (M', g') , o pensar a (M', g') como el resultado de un cambio ligeramente significativo a (M, g) . Adoptaremos el último enfoque, en el sentido de que lo que estamos considerando es una familia uniparamétrica de espacios-tiempo $(M_\lambda, g_{ab}(\lambda))$.³⁰ Consideremos una familia uniparamétrica de métricas $g_{ab}(\lambda)$, donde λ es un parámetro adimensional que mide la perturbación, de tal manera que a segundo orden en λ ,

$$g_{ab}(\lambda) = \tilde{g}_{ab} + \lambda h_{ab}^{(1)} + \lambda^2 h_{ab}^{(2)}, \quad (2.21)$$

donde claramente se tiene la igualdad

$$g_{ab}(0) \equiv \tilde{g}_{ab}, \quad (2.22)$$

siendo \tilde{g}_{ab} una métrica de fondo genérica. Cabe señalar que se adopta la convención de «subir» y «bajar» índices con \tilde{g}_{ab} . De esta manera, cualquier tensor dependiente de la métrica puede ser expresado como una expansión en λ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} T[g_{ab}(\lambda)] &= T[\tilde{g}_{ab} + \lambda h_{ab}^{(1)} + \lambda^2 h_{ab}^{(2)}] \\ &= \tilde{T}[\tilde{g}_{ab}] + \lambda \dot{T}[\tilde{g}_{ab}, h_{ab}^{(1)}] + \frac{\lambda^2}{2} \ddot{T}[\tilde{g}_{ab}, h_{ab}^{(1)}, h_{ab}^{(2)}] + \mathcal{O}(\lambda^3), \end{aligned} \quad (2.23)$$

³⁰Para estudios más formales acerca de esta clase de perturbaciones referimos a [45, 65, 87, 117–119, 148]. Los cálculos están basados principalmente en la ideas de Geroch y Wald [88, 160], aunque el método también aparece sugerido en [12].

donde para simplificar la notación se ha definido

$$\left. \frac{d}{d\lambda} T \right|_{\lambda=0} \equiv \dot{T}, \quad \left. \frac{d^2}{d\lambda^2} T \right|_{\lambda=0} \equiv \ddot{T}. \quad (2.24)$$

Por otra parte, de manera esquemática cada tensor puede ser visualizado como

$$T(\lambda) = \tilde{T} + \lambda T^{(1)} + \lambda^2 T^{(2)}. \quad (2.25)$$

La expresión (2.25) se adopta para empatar los cálculos con los de la literatura, los cuales siempre son expresados con el factor 1/2 que acompaña al término de segundo orden de la ecuación (2.23). Así, se sigue de contrastar a (2.23) con (2.25) la identificación

$$T^{(1)} = \dot{T}, \quad T^{(2)} = \frac{1}{2} \ddot{T}. \quad (2.26)$$

Ahora bien, si se considera la teoría con la métrica no perturbada .i.e., el espacio-tiempo x ($M_\lambda, g_{ab}(\lambda)$), a la métrica $g_{ab}(\lambda)$ estará asociado un operador derivada ${}^\lambda \nabla_a$ (i.e. ${}^\lambda \nabla_c g_{ab}(\lambda) = 0$). Dado que se desea conocer el comportamiento de las cantidades de curvatura respecto al orden más bajo de la perturbación, esto es, respecto a la métrica de fondo \tilde{g}_{ab} , conviene notar que a ésta última también estará asociado un operador derivada $\tilde{\nabla}_a$ (i.e. $\tilde{\nabla}_c \tilde{g}_{ab} = 0$). Así, por la propiedad (1.4), la diferencia de ambos operadores es proporcional a una conexión $C^c{}_{ab}(\lambda)$, esto es,

$$({}^\lambda \nabla_a - \tilde{\nabla}_a) \omega_b = -C^c{}_{ab}(\lambda) \omega_c, \quad (2.27)$$

donde ω_a es un tensor genérico tipo (0, 1). Así, la conexión queda totalmente definida y toma la forma

$$C^c{}_{ab}(\lambda) = \frac{1}{2} g^{cd}(\lambda) (\tilde{\nabla}_a g_{bd}(\lambda) + \tilde{\nabla}_b g_{ad}(\lambda) - \tilde{\nabla}_d g_{ab}(\lambda)), \quad (2.28)$$

con $g^{ab}(\lambda)$ la métrica inversa a segundo orden en λ dada por (ver apéndice A) :

$$g^{ab}(\lambda) = \tilde{g}^{ab} - \lambda h^{(1)ab} + \lambda^2 (h_c^{(1)a} h^{(1)cb} - h^{(2)ab}). \quad (2.29)$$

Fija la conexión, el tensor de Riemann asociado a $g_{ab}(\lambda)$, de acuerdo con (1.1), se define a través de

$$2{}^\lambda \nabla_{[a} {}^\lambda \nabla_{b]} \omega_c = R_{abc}{}^d(\lambda) \omega_d. \quad (2.30)$$

Con esto en mente, es fácil notar que es posible expresar a $R_{abc}{}^d(\lambda)$ en términos de la conexión $C^c{}_{ab}(\lambda)$, teniendo en cuenta la relación entre $\tilde{\nabla}_a$ y ${}^\lambda \nabla_a$ dada por la ecuación (2.27). En pocas palabras, expandir el lado izquierdo de (2.30) permite expresar a $R_{abc}{}^d(\lambda)$ en cantidades asociadas únicamente a la métrica de fondo \tilde{g}_{ab} . Para ello se desarrolla un término del lado derecho de (2.30),

$$\begin{aligned} {}^\lambda \nabla_a {}^\lambda \nabla_b \omega_c &= \tilde{\nabla}_a ({}^\lambda \nabla_b \omega_c) - C^f{}_{ab} {}^\lambda \nabla_f \omega_c - C^f{}_{ac} {}^\lambda \nabla_b \omega_f \\ &= \tilde{\nabla}_a (\tilde{\nabla}_b \omega_c - C^d{}_{bc} \omega_d) - C^f{}_{ab} {}^\lambda \nabla_f \omega_c - C^f{}_{ac} (\tilde{\nabla}_b \omega_f - C^d{}_{bf} \omega_d) \\ &= \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \omega_c - \omega_d \tilde{\nabla}_a C^d{}_{bc} - C^d{}_{bc} \tilde{\nabla}_a \omega_d - C^f{}_{ab} {}^\lambda \nabla_f \omega_c - C^f{}_{ac} \tilde{\nabla}_b \omega_f - C^f{}_{ac} C^d{}_{bf} \omega_d, \end{aligned}$$

con lo que antisimetrizando en los índices a y b se obtiene el tensor de curvatura en términos de la conexión,

$$R_{abc}{}^d(\lambda) \omega_d = (\tilde{R}_{abc}{}^d - 2\tilde{\nabla}_{[a} C^d{}_{b]c}(\lambda) + 2C^f{}_{c[a}(\lambda) C^d{}_{b]f}(\lambda)) \omega_d, \quad (2.31)$$

donde $\tilde{R}_{abc}{}^d$ es el tensor de Riemann asociado a la métrica de fondo \tilde{g}_{ab} , es decir.

$$2\tilde{\nabla}_{[a}\tilde{\nabla}_{b]}\omega_c = \tilde{R}_{abc}{}^d\omega_d. \quad (2.32)$$

En última instancia se requiere que todas las cantidades estén expresadas en términos de $h_{ab}^{(1)}$ y $h_{ab}^{(2)}$. Por esta razón, es conveniente expresar a la conexión $C^c{}_{ab}(\lambda)$ en función de ambas perturbaciones, pues ambas aparecen en el lado derecho de (2.31). Así, sustituyendo a la métrica perturbada (2.21) y su inversa (2.29) en la conexión (2.28) se obtiene

$$\begin{aligned} C^c{}_{ab}(\lambda) &= \frac{1}{2}g^{cd}(\lambda)\left[\tilde{\nabla}_a(\lambda h_{bd}^{(1)} + \lambda^2 h_{bd}^{(2)}) + \tilde{\nabla}_b(\lambda h_{ad}^{(1)} + \lambda^2 h_{ad}^{(2)}) - \tilde{\nabla}_d(\lambda h_{ab}^{(1)} + \lambda^2 h_{ab}^{(2)})\right] \\ &= \frac{\lambda}{2}g^{cd}(\lambda)[2\tilde{\nabla}_{(a}h_{b)d}^{(1)} - \tilde{\nabla}_d h_{ab}^{(1)}] + \frac{\lambda^2}{2}g^{cd}(\lambda)[2\tilde{\nabla}_{(a}h_{b)d}^{(2)} - \tilde{\nabla}_d h_{ab}^{(2)}] \\ &= \lambda\left\{\frac{1}{2}\tilde{g}^{cd}[2\tilde{\nabla}_{(a}h_{b)d}^{(1)} - \tilde{\nabla}_d h_{ab}^{(1)}]\right\} \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{2}\left\{-h^{(1)cd}[2\tilde{\nabla}_{(a}h_{b)d}^{(1)} - \tilde{\nabla}_d h_{ab}^{(1)}] + \tilde{g}^{cd}[2\tilde{\nabla}_{(a}h_{b)d}^{(2)} - \tilde{\nabla}_d h_{ab}^{(2)}]\right\} + \mathcal{O}(\lambda^3), \end{aligned} \quad (2.33)$$

donde en la primera línea se utilizó el hecho de que $\tilde{\nabla}_a\tilde{g}_{bc} = 0$, mientras que en la segunda y última línea se agruparon términos del mismo orden en λ . Más aún, de la expresión (2.33) se sigue inmediatamente que $C^c{}_{ab}(0) = 0$.

Hasta aquí, se tienen, por un lado, la expansión explícita de la conexión (Ec. (2.33)) en términos de las perturbaciones $h_{ab}^{(1)}$ y $h_{ab}^{(2)}$ y, por otro, el tensor de Riemann como función de ésta última (Ec. (2.31)). Ahora bien, de acuerdo a la expansión (2.23) es necesario calcular primeras y segundas derivadas respecto al parámetro λ de la cantidad a expandir en cuestión. De ese modo, la primera y segunda derivada (evaluadas en $\lambda = 0$) de la conexión C_{ab} se siguen inmediatamente de (2.33) y toman la forma

$$\dot{C}^c{}_{ab} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{cd}[2\tilde{\nabla}_{(a}h_{b)d}^{(1)} - \tilde{\nabla}_d h_{ab}^{(1)}], \quad (2.34)$$

$$\ddot{C}^c{}_{ab} = {}^1\dot{C}^c{}_{ab} + {}^2\dot{C}^c{}_{ab}, \quad (2.35)$$

respectivamente; por comodidad se ha separado a la conexión (2.35) en una parte dependiente solamente de $h_{ab}^{(1)}$ y otra en $h_{ab}^{(2)}$,

$${}^1\ddot{C}^c{}_{ab} = -h^{(1)cd}[2\tilde{\nabla}_{(a}h_{b)d}^{(1)} - \tilde{\nabla}_d h_{ab}^{(1)}], \quad {}^2\ddot{C}^c{}_{ab} = \tilde{g}^{cd}[2\tilde{\nabla}_{(a}h_{b)d}^{(2)} - \tilde{\nabla}_d h_{ab}^{(2)}], \quad (2.36)$$

respectivamente. Expresada la descomposición de la conexión en sus múltiples ordenes en λ sigue calcular el tensor de Riemann a primer orden, a partir de (2.31), en términos de la misma:

$$\begin{aligned} \dot{R}_{abc}{}^d &= -2\tilde{\nabla}_{[a}\dot{C}^d{}_{b]c} + 2\dot{C}^f{}_{c[a}C^d{}_{b]f} + 2C^f{}_{c[a}\dot{C}^d{}_{b]f} \\ &= -2\tilde{\nabla}_{[a}\dot{C}^d{}_{b]c} \\ &= \frac{\tilde{g}^{df}}{2}\left[-\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_c h_{bf}^{(1)} - \tilde{\nabla}_b\tilde{\nabla}_f h_{ac}^{(1)} + \tilde{\nabla}_b\tilde{\nabla}_c h_{af}^{(1)} + \tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_f h_{bc}^{(1)} - 2\tilde{\nabla}_{[a}\tilde{\nabla}_{b]}h_{cf}^{(1)}\right] \\ &= \frac{\tilde{g}^{df}}{2}\left[-\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_c h_{bf}^{(1)} - \tilde{\nabla}_b\tilde{\nabla}_f h_{ac}^{(1)} + \tilde{\nabla}_b\tilde{\nabla}_c h_{af}^{(1)} + \tilde{\nabla}_f\tilde{\nabla}_a h_{cb}^{(1)} + 2\tilde{\nabla}_{[a}\tilde{\nabla}_{f]}h_{bc}^{(1)} - 2\tilde{\nabla}_{[a}\tilde{\nabla}_{b]}h_{cf}^{(1)}\right] \\ &= \frac{\tilde{g}^{df}}{2}\left[-\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_c h_{bf}^{(1)} - \tilde{\nabla}_b\tilde{\nabla}_f h_{ac}^{(1)} + \tilde{\nabla}_b\tilde{\nabla}_c h_{af}^{(1)} + \tilde{\nabla}_f\tilde{\nabla}_a h_{cb}^{(1)}\right] + {}^1Y_{abc}{}^d. \end{aligned} \quad (2.37)$$

En la primera línea se ha calculado la primera derivada respecto al parámetro $\lambda = 0$. En la segunda se ha eliminado a los términos que contienen la conexión a orden cero (por el hecho

notado líneas arriba, $C^c{}_{ab}(0) = 0$, mientras que en las últimas tres líneas se agruparon términos definiendo a

$$\begin{aligned} {}^1Y_{abc}{}^d &= \frac{\tilde{g}^{df}}{2} \left[2\tilde{\nabla}_{[a}\tilde{\nabla}_{f]}h_{bc}^{(1)} - 2\tilde{\nabla}_{[a}\tilde{\nabla}_{b]}h_{cf}^{(1)} \right] \\ &= \frac{\tilde{g}^{df}}{2} \left[\tilde{R}_{afbe}h_c^{(1)e} - \tilde{R}_{abfe}h_c^{(1)e} + \tilde{R}_{afce}h_b^{(1)e} - \tilde{R}_{abce}h_f^{(1)e} \right]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

El superíndice 1 en ${}^1Y_{abc}{}^d$ hace referencia a que esta cantidad está evaluada en la perturbación $h_{ab}^{(1)}$. Por otro lado, en el mismo espíritu, a segundo orden la derivada del tensor de Riemann (2.31) respecto a λ se escribe como

$$\begin{aligned} \dot{R}_{abc}{}^d &= -2\tilde{\nabla}_{[a}\ddot{C}^d{}_{b]c} + 4\dot{C}^f{}_{c[a}\dot{C}^d{}_{b]f} + 2\ddot{C}^f{}_{c[a}C^d{}_{b]f} + 2C^f{}_{c[a}\ddot{C}^d{}_{b]f} \\ &= -2\tilde{\nabla}_{[a}\ddot{C}^d{}_{b]c} + 4\dot{C}^f{}_{c[a}\dot{C}^d{}_{b]f} \\ &= -2\tilde{\nabla}_{[a}{}^1\ddot{C}^d{}_{b]c} - 2\tilde{\nabla}_{[a}{}^2\ddot{C}^d{}_{b]c} + 4\dot{C}^f{}_{c[a}\dot{C}^d{}_{b]f}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

el cual, se dejará expresado por el momento en términos de la conexión. Más adelante se expresará de forma explícita. Para mantener la mayor claridad posible en los cálculos, es conveniente, con el propósito de más adelante obtener el tensor y escalar de Ricci, escribir al tensor de Riemann completo con los índices abajo, i.e.

$$R_{abcd}(\lambda) = R_{abc}{}^e(\lambda)g_{ed}(\lambda), \quad (2.40)$$

donde se ha utilizado a la métrica completa $g_{ab}(\lambda)$ para «bajar» el índice d .³¹ Así, la derivada a primer orden en λ (en $\lambda = 0$) de (2.40) es

$$\begin{aligned} \dot{R}_{abcd} &= \dot{R}_{abc}{}^e\tilde{g}_{ed} + \tilde{R}_{abc}{}^eh_{ed}^{(1)} \\ &= \frac{1}{2}\delta_d^f \left[-\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_ch_{bf}^{(1)} - \tilde{\nabla}_b\tilde{\nabla}_fh_{ac}^{(1)} + \tilde{\nabla}_b\tilde{\nabla}_ch_{af}^{(1)} + \tilde{\nabla}_f\tilde{\nabla}_ah_{cb}^{(1)} \right] + \tilde{g}_{ed}{}^1Y_{abc}{}^e + \tilde{R}_{abc}{}^eh_{ed}^{(1)} \\ &= \frac{1}{2} \left[-\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_ch_{bd}^{(1)} - \tilde{\nabla}_b\tilde{\nabla}_d h_{ac}^{(1)} + \tilde{\nabla}_b\tilde{\nabla}_ch_{ad}^{(1)} + \tilde{\nabla}_d\tilde{\nabla}_ah_{cb}^{(1)} \right] + \tilde{g}_{ed}{}^1Y_{abc}{}^e + \tilde{R}_{abc}{}^eh_{ed}^{(1)}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

donde en la segunda línea se sustituyó (2.37) y en la tercera línea se operó simplemente a δ_d^f . Asimismo, a segundo orden en λ se tiene

$$\ddot{R}_{abcd} = \ddot{R}_{abc}{}^e\tilde{g}_{ed} + 2\dot{R}_{abc}{}^eh_{ed}^{(1)} + 2\tilde{R}_{abc}{}^eh_{ed}^{(2)}. \quad (2.42)$$

La ecuación (2.42) se dejará por el momento expresada así, en el entendido de que contiene a (2.37) y a (2.39). Cabe señalar que en (2.42) se contemplan todos los posibles términos a segundo orden en λ que pueden contribuir.

2.3.2. Expansión del tensor de Ricci

Por la definición del tensor de Einstein (1.2), es natural que la cantidad interesada en expandir sea el tensor de Ricci. Éste último, el asociado a la métrica completa, se expresa como

$$R_{ac}(\lambda) = R_{abcd}(\lambda)g^{bd}(\lambda). \quad (2.43)$$

³¹El uso de la métrica $g_{ab}(\lambda)$ para bajar el índice tiene sentido pues aún no se ha considerado la expansión explícita, sin embargo, al tener las cantidades expandidas la métrica \tilde{g}_{ab} es con la que se debe de realizar dicha operación matemática.

De acuerdo a (2.23) hay que calcular la primera y segunda derivada respecto al parámetro λ , de la misma manera que en la sección anterior. Así, a primer orden en λ , (2.43) toma la forma

$$\begin{aligned}\dot{R}_{ac} &= \dot{R}_{abcd}\tilde{g}^{bd} - \tilde{R}_{abcd}h^{(1)bd} \\ &= \frac{\tilde{g}^{bd}}{2} \left[-\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_c h_{bd}^{(1)} - \tilde{\nabla}_b\tilde{\nabla}_d h_{ac}^{(1)} + \tilde{\nabla}_b\tilde{\nabla}_c h_{ad}^{(1)} + \tilde{\nabla}_d\tilde{\nabla}_a h_{cb}^{(1)} \right] + \delta_e^{b1} Y_{abc}{}^e + \tilde{g}^{bd}\tilde{R}_{abc}{}^e h_{ed}^{(1)} - \tilde{R}_{abcd}h^{(1)bd} \\ &= \frac{1}{2} \left[-\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_c h^{(1)} - \tilde{\nabla}^d\tilde{\nabla}_d h_{ac}^{(1)} + 2\tilde{\nabla}^d\tilde{\nabla}_{(a}h_{c)d}^{(1)} \right],\end{aligned}\quad (2.44)$$

donde en la segunda línea se hizo uso de la ecuación (2.41). Además, al utilizar la identidad (1.5) los últimos tres términos del lado derecho de la segunda línea de (2.44) se anulan. De esta manera, el tensor de Ricci a primer orden en λ , como se esperaba, es lineal en $h_{ab}^{(1)}$ y tiene la forma

$$R[h^{(1)}]_{ab}^{(1)} = \frac{1}{2} \left[-\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b h^{(1)} - \tilde{\nabla}^d\tilde{\nabla}_d h_{ab}^{(1)} + 2\tilde{\nabla}^d\tilde{\nabla}_{(a}h_{b)d}^{(1)} \right]. \quad (2.45)$$

Hay que mencionar que se ha hecho uso de la identificación (2.26), por las razones antes comentadas. A segundo orden, es decir, derivando dos veces respecto a λ la expresión (2.43) y haciendo uso de la métrica inversa (2.29) se obtiene:

$$\begin{aligned}\ddot{R}_{ac} &= \ddot{R}_{abcd}\tilde{g}^{bd} - 2\dot{R}_{abcd}h^{(1)bd} + \tilde{R}_{abcd}2[h_f^{(1)b}h^{(1)fd} - h^{(2)bd}] \\ &= \tilde{g}^{bd} \left[\ddot{R}_{abc}{}^e\tilde{g}_{ed} + 2\dot{R}_{abc}{}^e h_{ed}^{(1)} + 2\tilde{R}_{abc}{}^e h_{ed}^{(2)} \right] - 2h^{(1)bd} \left[\dot{R}_{abc}{}^e\tilde{g}_{ed} + \tilde{R}_{abc}{}^e h_{ed}^{(1)} \right] \\ &\quad + 2\tilde{R}_{abcd} \left[h_f^{(1)b}h^{(1)fd} - h^{(2)bd} \right] \\ &= \dot{R}_{abc}{}^d\delta^b{}_d \\ &= -2\tilde{\nabla}_{[a}{}^1\dot{C}^b{}_{b]c} + 4\dot{C}^f{}_{c[a}{}^b\dot{C}^b{}_{b]f} - 2\tilde{\nabla}_{[a}{}^2\dot{C}^b{}_{b]c} \\ &= -2\tilde{\nabla}_{[a}{}^1\dot{C}^b{}_{b]c} + 4\dot{C}^f{}_{c[a}{}^b\dot{C}^b{}_{b]f} + \left[-\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_c h^{(2)} - \tilde{\nabla}^d\tilde{\nabla}_d h_{ac}^{(2)} + 2\tilde{\nabla}^d\tilde{\nabla}_{(a}h_{c)d}^{(2)} \right].\end{aligned}\quad (2.46)$$

Donde en la segunda línea simplemente se agruparon términos, mientras que en la tercera línea se utilizó la expresión a segundo orden del tensor de Riemann (2.39). Asimismo, la parte dependiente sólo de $h_{ab}^{(2)}$ en la última línea, es de la forma (2.44), la cual se identifica como la contribución lineal de $h_{ab}^{(2)}$. Por otro lado, los primeros dos términos de (2.46) resultan ser cuadráticos en $h_{ab}^{(1)}$.³² Así, sustituyendo (2.34) y (2.35) en esa misma línea y después una extensa manipulación algebraica, se concluye la expresión a orden λ^2 ,

$$R[h^{(1)}, h^{(2)}]_{ab}^{(2)} \equiv R[h^{(1)}]_{ab}^{(2)} + R[h^{(2)}]_{ab}^{(1)}, \quad (2.47)$$

donde por comodidad se ha separado a una parte cuadrática en $h_{ab}^{(1)}$,

$$\begin{aligned}R[h^{(1)}]_{ab}^{(2)} &= \frac{1}{2}h^{(1)cd} \left[\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b h_{cd}^{(1)} + \tilde{\nabla}_c\tilde{\nabla}_d h_{ab}^{(1)} - 2\tilde{\nabla}_c\tilde{\nabla}_{(a}h_{b)d}^{(1)} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}\tilde{\nabla}_a h^{(1)cd}\tilde{\nabla}_b h_{cd}^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2}\tilde{\nabla}^c h^{(1)} - \tilde{\nabla}_d h^{(1)cd} \right) \left(2\tilde{\nabla}_{(a}h_{b)c}^{(1)} - \tilde{\nabla}_c h_{ab}^{(1)} \right) + \tilde{\nabla}_c h_{bd}^{(1)} \left(\tilde{\nabla}^c h_a^{(1)d} - \tilde{\nabla}^d h_a^{(1)c} \right) \right],\end{aligned}\quad (2.48)$$

y a una parte que depende linealmente de $h_{ab}^{(1)}$

$$R[h^{(2)}]_{ab}^{(1)} = \frac{1}{2} \left[-\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b h^{(2)} - \tilde{\nabla}^c\tilde{\nabla}_c h_{ab}^{(2)} + 2\tilde{\nabla}^c\tilde{\nabla}_{(a}h_{b)c}^{(2)} \right], \quad (2.49)$$

³²El tensor de Ricci debe de preservar la simetría en sus dos índices (i.e. $\ddot{R}_{ac} = \ddot{R}_{ca}$). Sin embargo, en (2.46) la simetría no es clara pues está contenida la expresiones de $\dot{C}^c{}_{ab}$ y $\dot{C}^c{}_{ab}$

donde también se ha usado la identificación (2.26). Nótese que la Ec. (2.49) tiene exactamente la misma forma que (2.45), de ahí el superíndice ⁽¹⁾ en $R[h^{(2)}]_{ab}^{(1)}$. Cabe señalar que el tensor de Ricci debe de ser simétrico en sus dos índices; la simetría es trivial en todos los términos de (2.56) excepto en el primero; para probarla conviene utilizar la propiedad (1.5), con lo que

$$\begin{aligned} h^{(1)cd} 2\tilde{\nabla}_{[a} \tilde{\nabla}_{b]} h_{cd}^{(1)} &= \tilde{R}_{abc}{}^e h_{ed}^{(1)} h^{(1)cd} + \tilde{R}_{abd}{}^e h_{ce}^{(1)} h^{(1)cd} \\ &= \tilde{R}_{abce} h_d^{(1)e} h^{(1)cd} + \tilde{R}_{abde} h_c^{(1)e} h^{(1)cd} \\ &= -\tilde{R}_{abec} h_d^{(1)c} h^{(1)ed} - \tilde{R}_{abed} h_c^{(1)d} h^{(1)ce} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.50)$$

donde en la última línea se utilizó el hecho de que $h_d^{(1)c} h^{(1)ed}$ es simétrico en c y e mientras que \tilde{R}_{abec} es antisimétrico en c y e . Con el resultado (2.50), en efecto, (2.48) es simétrico en sus dos índices. Obsérvese que la expresión (2.48) se puede refinar un poco más si se escribe a todos los términos de manera uniforme como $\tilde{\nabla}^a h_{bc}^{(1)} \tilde{\nabla}^d h_{ef}^{(1)}$, lo anterior se logra al caer en la cuenta que

$$h_{ab}^{(1)} \tilde{\nabla}_c \tilde{\nabla}_d h_{ef}^{(1)} = \tilde{\nabla}_c (h_{ab}^{(1)} \tilde{\nabla}_d h_{ef}^{(1)}) - \tilde{\nabla}_c h_{ab}^{(1)} \tilde{\nabla}_d h_{ef}^{(1)}. \quad (2.51)$$

Así el tensor de Ricci a segundo orden cuadrático en $h_{ab}^{(1)}$ toma la forma

$$\begin{aligned} R[h^{(1)}]_{ab}^{(2)} &= -\frac{1}{4} \tilde{\nabla}_a h^{(1)cd} \tilde{\nabla}_b h_{cd}^{(1)} + \frac{1}{4} \tilde{\nabla}^c h^{(1)} (2\tilde{\nabla}_{(a} h_{b)c}^{(1)} - \tilde{\nabla}_c h_{ab}^{(1)}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_c h_{bd}^{(1)} (\tilde{\nabla}^c h_a^{(1)d} - \tilde{\nabla}^d h_a^{(1)c}) + \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_c S^c{}_{ab}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

donde

$$S^c{}_{ab} \equiv h^{(1)cd} (\tilde{\nabla}_d h_{ab}^{(1)} - 2\tilde{\nabla}_{(a} h_{b)d}^{(1)}) + \delta_a^c h^{(1)de} \tilde{\nabla}_b h_{de}^{(1)}. \quad (2.53)$$

La justificación de escribir a las cantidades de curvatura con una contribución dada por una divergencia total se verá en la sección 2.4.3.

2.3.3. Expansión del escalar de Ricci

En la misma línea de la sección anterior, el escalar de Ricci asociado a $g_{ab}(\lambda)$ es

$$R(\lambda) = g^{ab}(\lambda) R_{ab}(\lambda). \quad (2.54)$$

Por otro lado, de acuerdo a (2.23) éste puede ser expandido en λ como

$$R(\lambda) = \tilde{R} + \lambda \dot{R} + \frac{\lambda^2}{2} \ddot{R} \quad (2.55)$$

donde las derivadas respecto a λ se calculan a partir de (2.54) y toman la forma a orden cero y primero

$$\tilde{R} = \tilde{g}^{ab} \tilde{R}_{ab}, \quad \dot{R} = \tilde{g}^{ab} \dot{R}_{ab} - h^{(1)ab} \tilde{R}_{ab}, \quad (2.56)$$

respectivamente. Utilizando a la expresión de \dot{R}_{ab} (2.44) en términos de $h_{ab}^{(1)}$ el escalar de Ricci a primer orden adopta a forma

$$\boxed{R[h^{(1)}]^{(1)} = -\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}^a h^{(1)} + \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b h^{(1)ab} - h^{(1)ab} \tilde{R}_{ab}}, \quad (2.57)$$

Ahora bien, a segundo orden el escalar de Ricci es

$$\begin{aligned}
\ddot{R} &= \tilde{g}^{ab} \ddot{R}_{ab} - 2h^{(1)ab} \dot{R}_{ab} + 2(h_c^{(1)a} h^{(1)cb} - h^{(2)ab}) \ddot{R}_{ab} \\
&= 2\tilde{\nabla}^a h_{ab}^{(1)} \tilde{\nabla}^b h^{(1)} - \tilde{\nabla}_a h_{bc}^{(1)} \tilde{\nabla}^c h^{(1)ab} + \frac{3}{2} \tilde{\nabla}^a h^{(1)bc} \tilde{\nabla}_a h_{bc}^{(1)} - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}^a h^{(1)} \tilde{\nabla}_a h^{(1)} - 2\tilde{\nabla}_a h^{(1)ab} \tilde{\nabla}^c h_{bc}^{(1)} \\
&\quad + h^{(1)ab} \left[\tilde{\nabla}^c \tilde{\nabla}_c h_{ab}^{(1)} + \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b h^{(1)} - 2\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}^c h_{cb}^{(1)} \right] + 2 \left[-\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}^a h^{(2)} + \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b h^{(2)ab} \right] \\
&\quad - 2h^{(1)ab} \dot{R}_{ab} + 2(h_c^{(1)a} h^{(1)cb} - h^{(2)ab}) \ddot{R}_{ab}, \tag{2.58}
\end{aligned}$$

donde en la segunda línea se ha sustituido a (2.48). Notése que la traza de $R[h^{(1)}, h^{(2)}]_{ab}^{(2)} = \frac{1}{2} \ddot{R}_{ab}$ son los primeros dos renglones de (2.58), retomando la descomposición (2.47), a decir,

$$\tilde{g}^{ab} R[h^{(1)}, h^{(2)}]_{ab}^{(2)} = \tilde{g}^{ab} R[h^{(1)}]_{ab}^{(2)} + \tilde{g}^{ab} R[h^{(2)}]_{ab}^{(1)}, \tag{2.59}$$

se tiene la traza de la parte cuadrática en $h_{ab}^{(1)}$,

$$\begin{aligned}
\tilde{g}^{ab} R[h^{(1)}]_{ab}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left\{ 2\tilde{\nabla}^a h_{ab}^{(1)} \tilde{\nabla}^b h^{(1)} - \tilde{\nabla}_a h_{bc}^{(1)} \tilde{\nabla}^c h^{(1)ab} + \frac{3}{2} \tilde{\nabla}^a h^{(1)bc} \tilde{\nabla}_a h_{bc}^{(1)} - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}^a h^{(1)} \tilde{\nabla}_a h^{(1)} \right. \\
&\quad \left. - 2\tilde{\nabla}_a h^{(1)ab} \tilde{\nabla}^c h_{bc}^{(1)} + h^{(1)ab} \left[\tilde{\nabla}^c \tilde{\nabla}_c h_{ab}^{(1)} + \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b h^{(1)} - 2\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}^c h_{cb}^{(1)} \right] \right\}, \tag{2.60}
\end{aligned}$$

y la traza de la parte lineal en $h^{(1)}$

$$\tilde{g}^{ab} R[h^{(2)}]_{ab}^{(1)} = \left[-\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}^a h^{(2)} + \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b h^{(2)ab} \right]. \tag{2.61}$$

El tener expresadas a las trazas de ambas partes del tensor de Ricci a segundo orden separadas será de gran utilidad para calcular el PTEOM OG en la Sección 2.4.3. Así, con las Ecs. (2.60), (2.61) el escalar de Ricci a segundo orden es

$$\boxed{R[h^{(1)}, h^{(2)}]^{(2)} = \tilde{g}^{ab} R[h^{(1)}]_{ab}^{(2)} + \tilde{g}^{ab} R[h^{(2)}]_{ab}^{(1)} - h^{(1)ab} R_{ab}^{(1)} + (h_c^{(1)a} h^{(1)cb} - h^{(2)ab}) \ddot{R}_{ab}}, \tag{2.62}$$

Por último, la expresión (2.60) puede ser también reescrita en términos de divergencias totales agrupando términos de la forma (2.51). Retomando a la Ec. (2.52) y tomando su traza se obtiene

$$\tilde{g}^{ab} R[h^{(1)}]_{ab}^{(2)} = -\frac{1}{4} \tilde{\nabla}^a h^{(1)cd} \tilde{\nabla}_a h_{cd}^{(1)} + \frac{1}{2} \tilde{\nabla}^a h_{ab}^{(1)} \tilde{\nabla}^b h^{(1)} - \frac{1}{4} \tilde{\nabla}^a h^{(1)} \tilde{\nabla}_a h^{(1)} - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_a h_{bc}^{(1)} \tilde{\nabla}^c h^{(1)ab} + \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_c S^c, \tag{2.63}$$

donde $S^c = \tilde{g}^{ab} S_{ab}$ es la traza, en a y en b , del tensor S definido en (2.53), dada por

$$S^c = h_{cd}^{(1)} (\tilde{\nabla}_d h^{(1)} - 2\tilde{\nabla}^b h_{bd}^{(1)}) + \delta_a^c h^{(1)bd} \tilde{\nabla}^a h_{bd}^{(1)}. \tag{2.64}$$

La Ec. (2.63) también será utilizada en la Sección 2.4.3.

2.3.4. Expansión del tensor de Einstein

En las secciones anteriores se expandió a segundo orden el tensor de Ricci y el escalar de Ricci. Sin embargo, aún cuando se considera vacío, o bien, cuando se tiene el espacio plano de fondo y las ecuaciones de Einstein se reducen a $R_{ab}(\lambda) = 0$, conviene tener también la expansión completa del tensor de Einstein asociado a $g_{ab}(\lambda)$, el cual se define como

$$G_{ab}(\lambda) = R_{ab}(\lambda) - \frac{1}{2} g_{ab}(\lambda) R(\lambda). \tag{2.65}$$

Calculando la primera derivada de (2.65) respecto al parámetro λ se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{G}_{ab} &= \dot{R}_{ab} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}\dot{R} - \frac{1}{2}h_{ab}^{(1)}\tilde{R} \\ &= \dot{R}_{ab} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}\dot{R}_{cd}\tilde{g}^{cd} + \frac{1}{2}(\tilde{g}_{ab}h^{(1)cd}\tilde{R}_{cd} - h_{ab}^{(1)}\tilde{R}),\end{aligned}\quad (2.66)$$

donde en la segunda línea se ha utilizado la expresión del escalar de Ricci a primer orden (2.56). Sustituyendo a la expresión de \dot{R}_{ab} , dada por la Ec. (2.44), en (2.66) se concluye el tensor de Einstein a primer orden:

$$\begin{aligned}G[h^{(1)}]_{ab}^{(1)} &= \frac{1}{2}\left[-\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b h^{(1)} - \tilde{\nabla}^d\tilde{\nabla}_d h_{ab}^{(1)} + 2\tilde{\nabla}^d\tilde{\nabla}_{(a}h_{b)d}^{(1)}\right] + \frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}\left[\tilde{\nabla}^c\tilde{\nabla}_c h^{(1)} - \tilde{\nabla}^c\tilde{\nabla}^d h_{cd}^{(1)}\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\tilde{R}_{cd}(\tilde{g}_{ab}h^{(1)cd} - h_{ab}^{(1)}\tilde{g}^{cd}).\end{aligned}\quad (2.67)$$

Antes de proseguir con el cálculo explícito del tensor de Einstein a segundo orden, nótese que el segundo y cuarto término de (2.67) sugieren la introducción de una nueva variable, a decir,

$$\bar{h}_{ab}^{(1)} \equiv h_{ab}^{(1)} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}\tilde{g}^{cd}h_{cd}^{(1)},\quad (2.68)$$

con la cual (2.67) se simplifica notablemente,

$$G[\bar{h}^{(1)}]_{ab}^{(1)} = -\frac{1}{2}\tilde{\nabla}^d\tilde{\nabla}_d\bar{h}_{ab}^{(1)} + \tilde{\nabla}^c\tilde{\nabla}_{(a}\bar{h}_{b)c}^{(1)} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}\tilde{\nabla}^c\tilde{\nabla}^d\bar{h}_{cd}^{(1)} + \frac{1}{2}\tilde{R}_{cd}(\tilde{g}_{ab}\bar{h}^{(1)cd} - \bar{h}_{ab}^{(1)}\tilde{g}^{cd}).\quad (2.69)$$

El papel de esta variable será de suma importancia al momento de discutir la libertad de norma (ver sección 3.2.2). Obsérvese también que los dos últimos términos de (2.67) y, asimismo, los dos últimos términos de (2.69) están acoplados a la curvatura de fondo (i.e. a \tilde{R}_{ab}), por lo que se anulan en el caso de que el espacio-tiempo de fondo sea el de Minkowski, o bien, si es solución a las ecuaciones de campo en vacío (i.e. $\tilde{R}_{ab} = 0$). Además, al momento de linealizar la ecuación (2.69), con la identificación $\tilde{\nabla}_a \rightarrow \partial_a$ y utilizar las condiciones de norma usuales, (2.69) toma la forma del operador de onda usual para la variable $\bar{h}_{ab}^{(1)}$ (i.e. $G_{ab}^{(1)} = \frac{1}{2}\square\bar{h}_{ab}^{(1)}$; ver sección 3.2).

Aclarado lo anterior, para el cálculo del tensor de Einstein a segundo orden es necesario enunciar la segunda derivada de (2.65) respecto a λ , la cual toma la siguiente forma:

$$\ddot{G}_{ab} = \ddot{R}_{ab} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}(\tilde{g}^{cd}\ddot{R}_{cd}) + \alpha_{ab},\quad (2.70)$$

donde el término α_{ab} representa todos los posibles términos cuadráticos en la expansión y está dado por

$$\begin{aligned}\alpha_{ab} &= -\frac{1}{2}(2h_{ab}^{(1)}\dot{R} + 2h_{ab}^{(2)}\dot{\tilde{R}} + 2\tilde{g}_{ab}(h_e^{(1)c}h^{(1)ed} - h^{(2)cd})\dot{\tilde{R}}_{cd}) \\ &= -\frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}(-2h^{(1)cd}\dot{R}_{cd} + 2(h_e^{(1)c}h^{(1)ed} - h^{(2)cd})\dot{\tilde{R}}_{cd}) - h_{ab}^{(1)}(\tilde{g}^{cd}\dot{R}_{cd} - h^{(1)cd}\dot{\tilde{R}}_{cd}) - h_{ab}^{(2)}\dot{\tilde{R}} \\ &= \dot{\tilde{R}}_{cd}(-\tilde{g}_{ab}h_e^{(1)c}h^{(1)ed} + h_{ab}^{(1)}h^{(1)cd} + \tilde{g}_{ab}h^{(2)cd} - h_{ab}^{(2)}\tilde{g}^{cd}) + \dot{R}_{cd}(\tilde{g}_{ab}h^{(1)cd} - h_{ab}^{(1)}\tilde{g}^{cd}).\end{aligned}\quad (2.71)$$

Con lo que el tensor de Einstein a segundo orden en λ toma la forma genérica

$$G[h^{(1)}, h^{(2)}]_{ab}^{(2)} = R[h^{(1)}, h^{(2)}]_{ab}^{(2)} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}\tilde{g}^{cd}R[h^{(1)}, h^{(2)}]_{cd}^{(2)} + \frac{1}{2}\alpha_{ab},\quad (2.72)$$

donde se ha hecho uso de la identificación (2.26), además de mostrar la dependencia explícita

en las dos perturbaciones. Los dos primeros términos son los que comúnmente se encuentran en la literatura como el tensor de Einstein a segundo orden. El término α_{ab} , que contiene todos los términos a segundo orden, no se reporta en la literatura [67, 91, 112]. La razón es que si se considera al mismo tiempo vacío y un espacio-tiempo plano, α_{ab} es idénticamente cero, es por esto que en lo que sigue de los cálculos no se tendrá en cuenta, a menos que se indique lo contrario. Nótese además que los primeros dos términos de (2.72) contienen a $h_{ab}^{(1)}$ y $h_{ab}^{(2)}$ indistintamente. Es por ello, que con el propósito de empatar el cálculo aquí mostrado con el de la literatura es conveniente escribir a los primeros dos términos de (2.72) utilizando a (2.47) como

$$R[h^{(1)}, h^{(2)}]_{ab}^{(2)} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{ab} \tilde{g}^{cd} R[h^{(1)}, h^{(2)}]_{cd} = \underbrace{R[h^{(1)}]_{ab}^{(2)} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{ab} \tilde{g}^{cd} R[h^{(1)}]_{cd}^{(2)}}_{\equiv G[h^{(1)}]_{ab}^{(2)}} + \underbrace{R[h^{(2)}]_{ab}^{(1)} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{ab} \tilde{g}^{cd} R[h^{(2)}]_{cd}^{(1)}}_{\equiv G[h^{(2)}]_{ab}^{(1)}}, \quad (2.73)$$

es decir, una separación de la parte dependiente de forma cuadrática en $h_{ab}^{(1)}$,

$$\begin{aligned} G[h^{(1)}]_{ab}^{(2)} = & \frac{1}{2} \left\{ h^{(1)cd} \left[\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b h_{cd}^{(1)} + \tilde{\nabla}_c \tilde{\nabla}_d h_{ab}^{(1)} - 2\tilde{\nabla}_c \tilde{\nabla}_{(a} h_{b)d}^{(1)} \right] + \left[\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_a h^{(1)cd} \tilde{\nabla}_b h_{cd}^{(1)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{1}{2} \tilde{\nabla}^c h^{(1)} - \tilde{\nabla}_d h^{(1)cd} \right) \left(2\tilde{\nabla}_{(a} h_{b)c}^{(1)} - \tilde{\nabla}_c h_{ab}^{(1)} \right) + \tilde{\nabla}_c h_{bd}^{(1)} \left(\tilde{\nabla}^c h_a^{(1)d} - \tilde{\nabla}^d h_a^{(1)c} \right) \right] \right\} \\ & - \frac{1}{4} \tilde{g}_{ab} \left\{ \tilde{\nabla}^c h_{cd}^{(1)} \tilde{\nabla}^d h^{(1)} - \tilde{\nabla}_c h_{df}^{(1)} \tilde{\nabla}^f h^{(1)cd} + \frac{3}{2} \tilde{\nabla}^c h^{(1)df} \tilde{\nabla}_c h_{df}^{(1)} - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}^c h^{(1)} \tilde{\nabla}_c h^{(1)} \right. \\ & \left. - 2\tilde{\nabla}_c h^{(1)cd} \tilde{\nabla}^f h_{df}^{(1)} + h^{(1)cd} \left[\tilde{\nabla}^f \tilde{\nabla}_f h_{cd}^{(1)} + \tilde{\nabla}_c \tilde{\nabla}_d h^{(1)} - 2\tilde{\nabla}_c \tilde{\nabla}^f h_{fd}^{(1)} \right] \right\}. \quad (2.74) \end{aligned}$$

y la parte dependiente linealmente en $h_{ab}^{(2)}$

$$G[h^{(2)}]_{ab}^{(1)} = \frac{1}{2} \left[-\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b h^{(2)} - \tilde{\nabla}^c \tilde{\nabla}_c h_{ab}^{(2)} + 2\tilde{\nabla}^c \tilde{\nabla}_{(a} h_{b)c}^{(2)} \right] - \frac{1}{2} \tilde{g}_{ab} \left[\tilde{\nabla}^c \tilde{\nabla}_c h^{(2)} + \tilde{\nabla}_c \tilde{\nabla}_d h^{(2)cd} \right]. \quad (2.75)$$

con lo que (2.72) toma la forma

$$G[h^{(1)}, h^{(2)}]_{ab}^{(2)} = G[h^{(1)}]_{ab}^{(2)} + G[h^{(2)}]_{ab}^{(1)} + \frac{1}{2} \alpha_{ab}. \quad (2.76)$$

Asimismo, utilizando a la ecuación (2.52) es posible escribir a (2.74) en términos de $\tilde{\nabla}_a h_{bc}^{(1)} \tilde{\nabla}_d h_{ef}^{(1)}$ más una divergencia total como

$$\begin{aligned} G[h^{(1)}]_{ab}^{(2)} = & \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_a h^{(1)cd} \tilde{\nabla}_b h_{cd}^{(1)} + \frac{1}{2} \tilde{\nabla}^c h^{(1)} \left(2\tilde{\nabla}_{(a} h_{b)c}^{(1)} - \tilde{\nabla}_c h_{ab}^{(1)} \right) + \tilde{\nabla}_c h_{bd}^{(1)} \left(\tilde{\nabla}^c h_a^{(1)d} - \tilde{\nabla}^d h_a^{(1)c} \right) \right\} \\ & - \frac{1}{4} \tilde{g}_{ab} \left\{ \frac{1}{2} \tilde{\nabla}^e h^{(1)cd} \tilde{\nabla}_e h_{cd}^{(1)} - \tilde{\nabla}_c h_{df}^{(1)} \tilde{\nabla}^f h^{(1)cd} - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}^c h^{(1)} \tilde{\nabla}_c h^{(1)} \right\} + \tilde{\nabla}_c Q_{ab}^c. \quad (2.77) \end{aligned}$$

donde

$$Q_{ab}^c = \frac{1}{2} S_{ab}^c - \frac{1}{4} \tilde{g}_{ab} \left[h^{(1)cd} \left(\tilde{\nabla}_d h^{(1)} - 2\tilde{\nabla}^e h_{ed}^{(1)} \right) + h^{(1)ed} \tilde{\nabla}^c h_{ed}^{(1)} \right], \quad (2.78)$$

Más aún, en términos de $\tilde{h}_{ab}^{(1)}$, dada por (2.68), el tensor de Einstein (2.74) toma la forma

$$\begin{aligned}
G \left[\bar{h}^{(1)} \right]_{ab}^{(2)} = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_a \bar{h}^{(1)cd} \tilde{\nabla}_b \bar{h}_{cd}^{(1)} + \tilde{\nabla}_d \bar{h}^{(1)cd} (-2 \tilde{\nabla}_{(a} \bar{h}_{b)c}^{(1)} + \tilde{g}_{c(a} \tilde{\nabla}_{b)} \bar{h}^{(1)}) + \tilde{\nabla}_c \bar{h}_{bd}^{(1)} \tilde{\nabla}^c \bar{h}_a^{(1)d} \right. \\
& - \tilde{\nabla}^c \bar{h}^{(1)} \tilde{\nabla}_c \bar{h}_{ab}^{(1)} + \frac{1}{4} \tilde{g}_{ab} \tilde{\nabla}_c \bar{h}^{(1)} \tilde{\nabla}^c \bar{h}^{(1)} - \tilde{\nabla}_c \bar{h}_{bd}^{(1)} \tilde{\nabla}^d \bar{h}_a^{(1)c} - \tilde{\nabla}_{(a} \bar{h}_{b)c}^{(1)} \tilde{\nabla}^c \bar{h}^{(1)} - \frac{1}{4} \tilde{\nabla}_a \bar{h}^{(1)} \tilde{\nabla}_b \bar{h}^{(1)} \\
& - \frac{1}{4} \tilde{g}_{ab} \left\{ -2 \bar{h}^{(1)cd} \tilde{\nabla}_c \tilde{\nabla}^e \bar{h}_{de}^{(1)} - 2 \tilde{\nabla}_c \bar{h}^{(1)cd} \tilde{\nabla}^e \bar{h}_{de}^{(1)} + \tilde{\nabla}_c \bar{h}^{(1)} \tilde{\nabla}_d \bar{h}^{(1)cd} + \bar{h}^{(1)} \tilde{\nabla}^c \tilde{\nabla}^d \bar{h}_{cd}^{(1)} \right. \\
& \left. + \bar{h}^{(1)cd} \tilde{\nabla}^e \tilde{\nabla}_e \bar{h}_{cd}^{(1)} - \tilde{\nabla}_c \bar{h}_{de}^{(1)} \tilde{\nabla}^e \bar{h}^{(1)cd} + \frac{3}{2} \tilde{\nabla}^c \bar{h}^{(1)de} \tilde{\nabla}_c \bar{h}_{de}^{(1)} - \frac{1}{4} \tilde{\nabla}_c \bar{h}^{(1)} \tilde{\nabla}^c \bar{h}^{(1)} \right\} \left. \right\}. \quad (2.79)
\end{aligned}$$

En conclusión, en la presente sección se calcularon a segundo orden en λ las cantidades geométricas presentes en las ecuaciones de campo, haciendo uso de la métrica perturbada (2.21). Asimismo, se introdujo a la variable $\bar{h}_{ab}^{(1)}$, cuya utilidad se refleja en la simplificación de las expresiones. En la siguiente sección se hará uso de estas cantidades para construir el PTEM OG.

2.4. Pseudo-tensor de energía-momento de las OG

La detección de OG y la información que pueda ser extraída de éstas, depende naturalmente de los modelos para extraer a las OG del ruido. Comúnmente, la detección de una señal hace uso de técnicas de *matched filtering* [47, 61, 157], es decir, la correlación entre los datos recabados por los detectores y «plantillas» que contienen a diversas formas de onda, realizadas bajo la conjunción de distintos métodos (e.g. post-newtonianos, métodos de relatividad numérica, etc.), en las que se codifican propiedades como los cambios de fase y frecuencia de las OG. En los sistemas binarios, estos cambios se calculan por medio de leyes de balance entre la tasa de cambio de la energía de amarre gravitacional del sistema y la energía-momento contenido en los grados de libertad radiativos (i.e. que se propagan; ver sección 3.3.). Estos últimos se obtienen a partir del PTEM OG.

El tratamiento genérico para obtener el PTEM OG fue expuesto por Isaacson [96, 97] en la década de los sesenta y está precisamente basado en la clase de perturbaciones discutidas en la sección 2.3.³³ No obstante, es importante notar que en la RG no es posible definir de manera clara la noción de *densidad local de energía* para el campo gravitacional. Las razones, anteriormente descritas (ver nota 26; [160]), refieren a la incapacidad de separar, en la teoría completa, a la estructura de fondo en la métrica y a la parte dinámica, que en este caso son las OG. Sin embargo, al igual que en ciertas aproximaciones, es posible definir en sí a las OG, también se puede definir la energía que transportan. Tal aproximación descansa en el hecho de que para un sistema aislado, la noción local de energía puede establecerse al analizar el campo gravitacional a grandes distancias de la fuente. En el caso de las OG, es la *zona lejana de onda*.³⁴ En este sentido, la aportación principal del trabajo de Isaacson es adherir al espacio-tiempo una distancia característica, esto es, caracterizar a cada parte de la métrica con distintas longitudes de onda (o frecuencias) en lo que se conoce como la *Aproximación de Longitud de Onda Corta (ALOC)*.³⁵ Bajo este esquema, el tensor métrico y, por extensión, las ecuaciones de campo, se separan en una parte que varía lentamente (el fondo \tilde{g}_{ab}) y una parte que varía rápidamente respecto al fondo (OG). Debido a ello (y en parte a la libertad de norma, estudiada más adelante), este tratamiento requiere un procedimiento de *promediado* para construir el PTEM OG.

³³ Isaacson no muestra en sí el método que siguió para obtener las cantidades perturbadas; sobre esta cuestión ver e.g., [18].

³⁴ Ver apéndice B.1 para una definición formal de las diferentes regiones donde se definen a las OG.

³⁵ Esta aproximación se puede realizar a la par que la post-minkowskiana, en el sentido de que será precisa a todos los ordenes de la constante G [128].

Por otro lado, Isaacson, así como las modernas discusiones del PTEM OG (ver, e.g., [46, 112]), consideran las ecuaciones de campo en vacío con lo que los cálculos se simplifican notablemente. En este sentido, aquí se describen ambas suposiciones, para espacios-tiempo sin materia y con materia, este último en base a [48, 75]. Cabe señalar que tras la publicación de los artículos de Isaacson se intentó obtener el PTEM OG por otros métodos, los cuales a fin de cuentas también requieren de perturbar a la métrica hasta segundo orden y realizar promedios, sin embargo, no es a las ecuaciones de campo, como hasta ahora ha sido, sino a la acción de Einstein-Hilbert (2.3), dicho método se incluye en el Apéndice C.2. En lo subsecuente se construye el PTEM OG utilizando la ALOC.³⁶

2.4.1. Á la Isaacson: in vacuo

Considérese a las ecuaciones de campo en vacío tomando al tensor de Einstein a segundo orden en λ (2.65),

$$G_{ab}(\lambda) = \tilde{G}_{ab} + \lambda G[h^{(1)}]_{ab}^{(1)} + \lambda^2 G[h^{(1)}]_{ab}^{(2)} + \lambda^2 G[h^{(2)}]_{ab}^{(1)} = 0, \quad (2.80)$$

donde se han separado los términos de segundo orden como en (2.47). Hasta este punto, en las ecuaciones están mezclados términos de distintas magnitudes, es decir, OG de bajas y altas frecuencias (o grandes y pequeñas longitudes de onda). El propósito de este tratamiento es entender hasta que punto las perturbaciones a diferentes ordenes contribuyen a la curvatura. Para ello, es común introducir los siguientes casos, ambos equivalentes,

- A la métrica de fondo se le asocia una longitud característica L_F y las perturbaciones $h_{ab}^{(1)}, h_{ab}^{(2)}$ tienen asociadas longitudes de onda λ_c , con la propiedad de $\lambda_c \ll L_f$.
- La métrica de fondo es característica de frecuencias hasta f_F . Las perturbaciones, por otro lado, son de frecuencias $f_F \ll f$.

Ahora bien, se asume el orden de magnitud del cambio de la métrica de fondo y de las perturbaciones como

$$\partial_a \tilde{g}_{bc} \sim \frac{1}{L_c}, \quad \partial_a h_{bc} \sim \frac{1}{\lambda_c}. \quad (2.81)$$

Más aún, dado que se busca que el PTEM OG sea cuadrático en $h_{ab}^{(1)}$ las ecuaciones de campo en orden de magnitud indican

$$\frac{1}{L_c^2} \gtrsim \lambda^2 \partial_a h_{cd} \partial_b h_{ef} \sim \lambda^2 \frac{1}{\lambda_c^2} \quad (2.82)$$

donde en el lado izquierdo de (2.82) está indicado el orden de magnitud del tensor de Einstein de fondo, pues se espera que el PTEM OG sea también fuente de curvatura. De (2.82) se obtiene la relación

$$\lambda \lesssim \frac{\lambda_c}{L_c}, \quad (2.83)$$

entre el parámetro de expansión λ y las escalas características.³⁷ En el caso de vacío, como lo indica la ecuación (2.80), es decir, donde la única fuente de curvatura son las OG, la expresión

³⁶La separación de las ecuaciones de campo en distintas frecuencias toma distintos enfoques en la literatura, todas con base en las ideas introducidas por Isaacson [97]. En particular, las discusiones más detalladas son las de Misner, Thorne, and Wheeler [115, p.964], Thorne [154, p.357], Maggiore [112, p.27] y Burnett [48].

³⁷Hay que señalar que algunos autores como Thorne [154, p.357] o Poisson and Will [128, p. 641], consideran el lado izquierdo de (2.82) como $1/\mathfrak{R}^2$, con \mathfrak{R} el radio de curvatura del fondo definido por medio del tensor de Riemann de este mismo. Sin embargo, debido a la homogeneidad del espacio-tiempo de fondo, L_c es siempre menor o igual a \mathfrak{R} .

(2.82) toma la forma

$$\lambda = \frac{\lambda_c}{L_c} \ll 1. \quad (2.84)$$

La expresión (2.84) resulta crucial pues justifica la incapacidad de construir el PTEM OG en la teoría lineal (i.e., $\tilde{g}_{ab} \rightarrow \eta_{ab}$). En la teoría lineal $L_c \rightarrow \infty$, con lo que $1/L_c \rightarrow 0$ implicando la no validez de (2.83) para cualquier valor de λ .

Ahora bien, orden a orden en λ se satisfacen las ecuaciones de campo perturbadas (2.80), es decir,

$$\tilde{G}_{ab} = 0, \quad (2.85a)$$

$$G[h^{(1)}]_{ab}^{(1)} = 0, \quad (2.85b)$$

$$G[h^{(2)}]_{ab}^{(1)} = -G[h^{(1)}]_{ab}^{(2)}. \quad (2.85c)$$

En la ecuación (2.85a) se comprueba el hecho de que el espacio-tiempo de fondo satisface las ecuaciones de campo en vacío, mientras que (2.85a) resulta ser la ecuación de propagación de las OG en vacío. Por otro lado, comúnmente se interpreta a (2.85c) bajo la idea de que a segundo orden, el lado derecho de (2.85c), cuadrático en la perturbación a primer orden $h_{ab}^{(1)}$, funge como fuente para la corrección a segundo orden $h_{ab}^{(2)}$, de la misma manera que un tensor de energía momento ordinario fungiría como fuente para $h^{(1)}$ [91, 160].³⁸

A partir de la expresión del parámetro de expansión λ , dado por la Ec. (2.84), es posible refinar aún más las Ecs. (2.85b) distinguiendo entre dos partes. La primera aquella en donde las variaciones sucedan en escalas mayores a λ_c , es decir, una descripción «macroscópica» de las ecuaciones de campo;³⁹ la segunda en donde estén representadas todas las fluctuaciones menores a λ_c , es decir, una descripción «microscópica». Para ello se considera una escala \bar{l} tal que $\lambda_c \ll \bar{l} \ll L_c$, y se realizan promedios sobre un región con volumen \bar{V}^3 , es decir, promedios sobre varias longitudes de onda, denotados por el operado lineal $\langle\langle \cdot \cdot \cdot \rangle\rangle$ (sobre la naturaleza de estos promedios ver Apéndice C.1). Bajo estos promedios, los términos (formalmente, modos) que gocen de una longitud de onda del orden de $\sim \lambda_c$, con la condición $\lambda_c \ll L_c$ es decir, que oscilan rápidamente, promedian a cero. Mientras que los términos cuya longitud de onda sea del orden $\sim L_c$, los cuales oscilan lentamente, permanecerán constantes bajo los promedios espaciales. Esta es precisamente la ALOC, pues se están ignorando los términos de alta frecuencia, o bien, de longitudes de onda pequeñas. Con esto en mente, la perturbación a segundo orden se separa en dos partes [44, 83],

$$h_{ab}^{(2)} = \langle\langle h_{ab}^{(2)} \rangle\rangle + \Delta h_{ab}^{(2)}, \quad (2.86)$$

donde $\langle\langle h_{ab}^{(2)} \rangle\rangle$ es la parte que varía lentamente y $\Delta h_{ab}^{(2)} = h_{ab}^{(2)} - \langle\langle h_{ab}^{(2)} \rangle\rangle$ la parte que varía rápidamente. Así, la métrica completa (2.21) adopta la forma

$$g_{ab}(\lambda) = \underbrace{\tilde{g}_{ab} + \lambda^2 \langle\langle h_{ab}^{(2)} \rangle\rangle}_{\text{varía como } \sim L_c} + \underbrace{\lambda h_{ab}^{(1)} + \lambda^2 \Delta h_{ab}^{(2)}}_{\text{varía como } \sim \lambda_c}. \quad (2.87)$$

Con la introducción de esta descomposición al promediar ambos lados de la Ec. (2.85c), del lado izquierdo sólo permanecen los términos que oscilen lentamente, con lo que

$$G[\langle\langle h^{(2)} \rangle\rangle]_{ab}^{(1)} = -\langle\langle G[h^{(1)}]_{ab}^{(2)} \rangle\rangle. \quad (2.88)$$

³⁸En específico se reescribe a (2.85c) como $G[h^{(2)}]_{ab}^{(1)} = -8\pi\Theta_{ab}$, donde $\Theta_{ab} = -\frac{1}{8\pi}G[h^{(1)}]_{ab}^{(2)}$ es aparentemente el PTEM OG, sin embargo, no es invariante ante transformaciones de norma, esto es, dos perturbaciones $h^{(1)}$ que difieran por la derivada de un campo vectorial simetrizada, con lo que representan la misma situación física, no tendrán en lo general tensores de Einstein a segundo orden equivalentes [117].

³⁹Las ecuaciones escritas de esta manera se les conoce como una descripción *coarse-grained*.

Restando la Ec. (2.88) de la Ec. (2.85c) se obtiene una ecuación para $\Delta h_{ab}^{(2)}$,

$$G[\Delta h^{(2)}]_{ab}^{(1)} = -\left(G[h^{(1)}]_{ab}^{(2)} - \langle\langle G[h^{(1)}]_{ab}^{(2)} \rangle\rangle\right), \quad (2.89)$$

Por otro lado, la Ec. (2.88) puede ser reescrita como

$$G[\tilde{g} + \lambda^2 \langle\langle h^{(2)} \rangle\rangle]_{ab} = 8\pi \Theta_{ab}^{(RG)}, \quad (2.90)$$

donde

$$\Theta_{ab}^{(RG)} \equiv -\frac{1}{8\pi} \left\{ \langle\langle G[h^{(1)}]_{ab}^{(2)} \rangle\rangle \right\}, \quad (2.91)$$

es el PTEM OG en vacío.⁴⁰ Notése que (2.91) es efectivamente cuadrático en $h^{(1)}$, como era de esperarse. Es además, simétrico en a y b y «aparentemente» conservado respecto a la métrica $\tilde{g}_{ab} + \lambda^2 \langle\langle h_{ab}^{(2)} \rangle\rangle$ pues el lado izquierdo de (2.90) satisface la identidad de Bianchi. En particular, a primer orden en λ , $\Theta_{ab}^{(RG)}$ se conserva respecto a la métrica de fondo \tilde{g}_{ab} , esto es,

$$\tilde{\nabla}^a \Theta_{ab}^{(RG)} = 0. \quad (2.92)$$

Más aún, la introducción de los promedios introduce en $\Theta_{ab}^{(RG)}$ la importantísima propiedad de ser invariante bajo transformaciones de norma, para probarla es necesario expresar a (2.91) en términos de $h_{ab}^{(1)}$, utilizando (2.56) y operar los promedios, esto se llevará a cabo en la Sección 2.4.3.

Por último, notése que en el lado derecho de la ecuación (2.89), al tensor de Einstein a segundo orden $G[h^{(1)}]_{ab}^{(2)}$, que contiene términos de baja y alta frecuencia se le están restando los términos puramente de baja frecuencia, es decir, cuya longitud de onda es del orden $\sim L_c$. Con lo que se concluye que los términos de alta frecuencia funcionan como fuente para la correcciones de alta frecuencia a la métrica de mayor orden, es decir, a $\Delta h_{ab}^{(2)}$. O dicho en otras palabras, los efectos no lineales generan más y más correcciones conforme se extienda a más ordenes la expansión de la métrica.

2.4.2. Á la Isaacson: con materia

En la sección anterior se calculó el PTEM OG tomando las ecuaciones de campo en vacío. De manera similar se calcula éste último, en el entendido que la suposición inicial no será vacío, sino la inclusión de las contribuciones de materia representadas por T_{ab} . Ahora bien, para introducir la ALOC en este contexto, considérese el hecho de que el tensor de energía-momento también puede ser perturbado como (2.25), esto es,

$$T_{ab} = \tilde{T}_{ab} + \epsilon T_{ab}^{(1)} + \epsilon^2 T_{ab}^{(2)} \quad (2.93)$$

donde $\epsilon \ll 1$ es un parámetro adimensional. Al introducir la expansión (2.93) junto con las Ecs. (2.66), (2.76), en las ecuaciones de campo (2.1), es decir, considerar también la expansión $G_{ab} = \tilde{G}_{ab} + \lambda G_{ab}^{(1)} + G_{ab}^{(2)}$, se obtiene orden a orden (i.e. al igualar $\epsilon = \lambda$), el análogo a las Ecs.

⁴⁰El parámetro λ se ha incluido en la amplitud de $h^{(1)}$, para evitar mostrarlo explícitamente en el PTEM OG.

(2.85b):

$$\tilde{G}_{ab} = \tilde{R}_{ab} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}\tilde{R} = 8\pi\tilde{T}_{ab}, \quad (2.94a)$$

$$G[h_{cd}^{(1)}]_{ab} = R_{ab}^{(1)} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}\tilde{g}^{cd}R_{cd}^{(1)} + \frac{1}{2}(\tilde{g}_{ab}h^{(1)cd}\tilde{R}_{cd} - h_{ab}^{(1)}\tilde{R}) = 8\pi T_{ab}^{(1)}, \quad (2.94b)$$

$$G[h_{cd}^{(1)}, h_{cd}^{(2)}]_{ab} = G[h_{ab}^{(1)}]_{ab}^{(2)} + G[h_{ab}^{(2)}]_{ab} + \frac{1}{2}\alpha_{ab} = 8\pi T_{ab}^{(2)}, \quad (2.94c)$$

las ecuaciones de Einstein perturbadas. La ecuación (2.94a) depende únicamente de la métrica de fondo \tilde{g}_{ab} y, por ende, determina la geometría del espacio-tiempo de fondo. En el caso de la teoría lineal (i.e. $\tilde{g}_{ab} = \eta_{ab}$), es idénticamente cero, sin embargo, como hasta ahora ha sido, se está considerando un fondo arbitrario que satisface dichas ecuaciones. De igual manera, las Ecs. (2.94b), (2.94c), son las ecuaciones a primer y segundo orden respectivamente. Como consecuencia de esta separación, las Ecs. (2.94) deben de ser resueltas simultáneamente. Esto es, la métrica que satisfaga (2.94a), debe de ser utilizada en (2.94b) para obtener a $h_{ab}^{(1)}$ y, ésta a su vez, debe de ser utilizada en (2.94c) para obtener $h_{ab}^{(2)}$.

En este contexto se define el PTEM OG como

$$\Theta_{ab}^{(RG)} = -\frac{1}{8\pi}\langle\langle G[h^{(1)}]_{ab}^{(2)} + \frac{1}{2}\alpha_{ab} - 8\pi T_{ab}^{(2)} \rangle\rangle. \quad (2.95)$$

2.4.3. Forma explícita del pseudo-tensor de energía-momento de las OG

En esta sección se retoma al PTEM OG en vacío (2.91) y se expresa puramente en términos de $h_{ab}^{(1)}$. Del Apéndice (C.1) se consideran las siguientes propiedades del operador $\langle\langle \dots \rangle\rangle$:

P.I. La divergencia total de un tensor genérico T^c_{ab} se anula i.e. $\langle\langle \tilde{\nabla}_c T^c_{ab} \rangle\rangle = 0$.

P.II. En particular se sigue que bajo el operador $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ se puede integrar por partes. Si $T^c_{ab} = R^c S_{ab}$ entonces, $\langle\langle S_{ab} \tilde{\nabla}_c R^c \rangle\rangle = -\langle\langle R^c \tilde{\nabla}_c S_{ab} \rangle\rangle$.

P.III. El conmutador de dos derivadas se anula, $\langle\langle \tilde{\nabla}_{[a} \tilde{\nabla}_{b]} T_c = 0 \rangle\rangle$.

Aclarado este punto, haciendo uso de (2.73), el PTEM OG (2.91) se reescribe como

$$\Theta_{ab}^{(RG)} \equiv -\frac{1}{8\pi}\langle\langle G[h^{(1)}]_{ab}^{(2)} \rangle\rangle, \quad (2.96)$$

es decir, el promedio del tensor de Einstein a segundo orden. En primer lugar considérese a

$$\langle\langle G[h^{(1)}]_{ab}^{(2)} \rangle\rangle = \langle\langle R_{ab}^{(2)} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}\tilde{g}^{cd}R_{cd}^{(2)} \rangle\rangle = \langle\langle R_{ab}^{(2)} \rangle\rangle - \frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}\langle\langle \tilde{g}^{cd}R_{cd}^{(2)} \rangle\rangle, \quad (2.97)$$

donde se ha hecho uso de la linealidad del operador $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ además de $\langle\langle \tilde{g}^{ab}R_{ab}^{(2)} \rangle\rangle = \tilde{g}^{ab}\langle\langle R_{ab}^{(2)} \rangle\rangle$. La dependencia en $h^{(1)}$ se ha omitido por conveniencia. Retomando la Ec. (2.52), donde se expresó a $R_{ab}^{(2)}$ con la contribución de una divergencia total, el primer término de (2.97) toma la forma

$$\langle\langle R_{ab}^{(2)} \rangle\rangle = \frac{1}{4}\langle\langle -\tilde{\nabla}_a h^{(1)cd}\tilde{\nabla}_b h_{cd}^{(1)} + \tilde{\nabla}^c h^{(1)}(2\tilde{\nabla}_{(a} h_{b)c}^{(1)} - \tilde{\nabla}_c h_{ab}^{(1)}) + 2\tilde{\nabla}_c h_{bd}^{(1)}(\tilde{\nabla}^c h_a^{(1)d} - \tilde{\nabla}^d h_a^{(1)c}) \rangle\rangle, \quad (2.98)$$

donde, claro está, se ha utilizado a la propiedad P.I al desprejiciar a la divergencia, $\langle\langle \tilde{\nabla}_c S^c_{ab} \rangle\rangle = 0$. Como a primer orden se cumple la ecuación de propagación (2.85a), dada por

$$R_{ab}^{(1)} = \frac{1}{2}\left[-\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b h^{(1)} - \tilde{\nabla}^c \tilde{\nabla}_c h_{ab}^{(1)} + 2\tilde{\nabla}^c \tilde{\nabla}_{(a} h_{b)c}^{(1)}\right] = 0, \quad (2.99)$$

donde se ha retomado la Ec. (2.45) para tener la expresión en términos de $h_{ab}^{(1)}$, ésta se puede utilizar para reescribir a parte del segundo término de (2.98) como

$$\begin{aligned} \langle\langle \tilde{\nabla}^c h^{(1)} \tilde{\nabla}_c h_{ab}^{(1)} \rangle\rangle &= -\langle\langle h^{(1)} \tilde{\nabla}^c \tilde{\nabla}_c h_{ab}^{(1)} \rangle\rangle \\ &= -\langle\langle -h^{(1)} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b h^{(1)} + 2h^{(1)} \tilde{\nabla}^c \tilde{\nabla}_{(a} h_{b)c}^{(1)} \rangle\rangle \\ &= \langle\langle -\tilde{\nabla}_a h^{(1)} \tilde{\nabla}_b h^{(1)} + 2\tilde{\nabla}^c h^{(1)} \tilde{\nabla}_{(a} h_{b)c}^{(1)} \rangle\rangle. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Para el tercer término de (2.98) la idea es la misma pero la ecuación de propagación que se usa va sobre los índices a y d (i.e. $R_{ad}^{(1)} = 0$),

$$\begin{aligned} \langle\langle \tilde{\nabla}_c h_{bd}^{(1)} (\tilde{\nabla}^c h_a^{(1)d} - \tilde{\nabla}^d h_a^{(1)c}) \rangle\rangle &= \langle\langle -h_b^{(1)d} (\tilde{\nabla}^c \tilde{\nabla}_c h_{ad}^{(1)} - \tilde{\nabla}^c \tilde{\nabla}_d h_{ac}^{(1)}) \rangle\rangle \\ &= \langle\langle h_b^{(1)d} (\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_d h^{(1)} - \tilde{\nabla}^c \tilde{\nabla}_a h_{dc}^{(1)}) \rangle\rangle \\ &= \langle\langle h_b^{(1)d} (\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_d h^{(1)} - \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}^c h_{cd}^{(1)}) \rangle\rangle \\ &= \langle\langle -\tilde{\nabla}_a h_b^{(1)d} (\tilde{\nabla}_d h^{(1)} - \tilde{\nabla}^c h_{cd}^{(1)}) \rangle\rangle. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Combinando así los resultados (2.100) y (2.101) en (2.98), se simplifica la expresión para el tensor Ricci a segundo orden a

$$\langle\langle R_{ab}^{(2)} \rangle\rangle = -\frac{1}{4} \langle\langle \tilde{\nabla}_a h^{(1)cd} \tilde{\nabla}_b h_{cd}^{(1)} - 2\tilde{\nabla}_c h^{(1)cd} \tilde{\nabla}_{(a} h_{b)d}^{(1)} + 2\tilde{\nabla}_d h^{(1)} \tilde{\nabla}_{(a} h_{b)d}^{(1)} - \tilde{\nabla}_a h^{(1)} \tilde{\nabla}_b h^{(1)} \rangle\rangle. \quad (2.102)$$

La simetría en los índices a y b se hace manifiesta. Ahora bien, el promedio de la traza del tensor de Ricci que aparece en el segundo término de (2.97) puede reescribirse, retomando a la Ec. (2.63), como

$$\begin{aligned} \langle\langle \tilde{g}^{cd} R_{cd}^{(2)} \rangle\rangle &= \frac{1}{4} \langle\langle \tilde{\nabla}^a h^{(1)cd} \tilde{\nabla}_a h_{cd}^{(1)} + 2\tilde{\nabla}^a h_{ab}^{(1)} \tilde{\nabla}^b h^{(1)} - \tilde{\nabla}^a h^{(1)} \tilde{\nabla}_a h^{(1)} - 2\tilde{\nabla}_a h_{bc}^{(1)} \tilde{\nabla}^c h^{(1)ab} \rangle\rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle\langle -h^{(1)cd} \tilde{\nabla}^a \tilde{\nabla}_a h_{cd}^{(1)} + \tilde{\nabla}^a h^{(1)} \tilde{\nabla}_a h^{(1)} - 2\tilde{\nabla}_a h_{bc}^{(1)} \tilde{\nabla}^c h^{(1)ab} \rangle\rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle\langle h^{(1)cd} \tilde{\nabla}_c \tilde{\nabla}_d h^{(1)} + \tilde{\nabla}^a h^{(1)} \tilde{\nabla}_a h^{(1)} - 2h^{(1)cd} \tilde{\nabla}^b \tilde{\nabla}_c h_{db}^{(1)} + 2h_{bc}^{(1)} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}^c h^{(1)ab} \rangle\rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle\langle -\tilde{\nabla}^a h^{(1)} \tilde{\nabla}_a h^{(1)} + \tilde{\nabla}^a h^{(1)} \tilde{\nabla}_a h^{(1)} \rangle\rangle \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.103)$$

donde en la primera línea se ha anulado la divergencia total $\langle\langle \tilde{\nabla}_c S^c \rangle\rangle = 0$ que aparece en (2.63), en la segunda línea se utilizó la identidad: $\langle\langle \tilde{\nabla}^b h^{(1)} \tilde{\nabla}^a h_{ab}^{(1)} \rangle\rangle = \langle\langle h^{(1)} \tilde{\nabla}^a \tilde{\nabla}^b h_{ab}^{(1)} \rangle\rangle = \langle\langle \tilde{\nabla}^a h^{(1)} \tilde{\nabla}_a h^{(1)} \rangle\rangle$, la cual a su vez hace uso de la traza de la ecuación de propagación (2.99) (i.e., $\tilde{g}^{ab} R_{ab}^{(1)} = 0$), por último, en la tercera línea se utilizó la igualdad, $\langle\langle h^{(1)cd} \tilde{\nabla}_c \tilde{\nabla}_d h^{(1)} \rangle\rangle = \langle\langle h^{(1)} \tilde{\nabla}_c \tilde{\nabla}_d h^{(1)cd} \rangle\rangle = \langle\langle h^{(1)} \tilde{\nabla}^a \tilde{\nabla}_a h^{(1)} \rangle\rangle$. Así, el promedio de la traza del tensor de Ricci se anula, con lo que, $\Theta_{ab}^{(RG)} = 1/8\pi \langle\langle R_{ab}^{(2)} \rangle\rangle$. Finalmente, la Ec. (2.102) se puede refinar aún más si expresa en términos de $\bar{h}_{ab}^{(1)}$ (Ec. (2.68)). Para ello, basta notar la siguiente igualdad:

$$\langle\langle 2\tilde{\nabla}_c h^{(1)cd} \tilde{\nabla}_{(a} h_{b)d}^{(1)} \rangle\rangle = \langle\langle 2\tilde{\nabla}_c \bar{h}^{(1)cd} \tilde{\nabla}_{(a} \bar{h}_{b)d}^{(1)} + 2\tilde{\nabla}_c h^{(1)} \tilde{\nabla}_{(a} h_{b)d}^{(1)} - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_a \bar{h}^{(1)} \tilde{\nabla}_b \bar{h}^{(1)} \rangle\rangle. \quad (2.104)$$

Al sustituir (2.104) en (2.102) y retomando el factor $1/8\pi$ de (2.97), se obtiene el PTEM OG en términos de $\bar{h}_{ab}^{(1)}$:

$$\Theta_{ab}^{(RG)} = \frac{1}{32\pi} \langle\langle \tilde{\nabla}_a \bar{h}^{(1)cd} \tilde{\nabla}_b \bar{h}_{cd}^{(1)} - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_a \bar{h}^{(1)} \tilde{\nabla}_b \bar{h}^{(1)} - 2\tilde{\nabla}_c \bar{h}^{(1)cd} \tilde{\nabla}_{(a} \bar{h}_{b)d}^{(1)} \rangle\rangle. \quad (2.105)$$

Cabe señalar que los primeros dos términos de (2.105) son invariantes ante el cambio $h_{ab}^{(1)} \rightarrow \bar{h}_{ab}^{(1)}$, esto es, $\tilde{\nabla}_a h^{(1)cd} \tilde{\nabla}_b h_{cd}^{(1)} = \tilde{\nabla}_a \bar{h}^{(1)cd} \tilde{\nabla}_b \bar{h}_{cd}^{(1)}$ y $\tilde{\nabla}_a h^{(1)} \tilde{\nabla}_b h^{(1)} = \tilde{\nabla}_a \bar{h}^{(1)} \tilde{\nabla}_b \bar{h}^{(1)}$. Como hasta ahora ha sido expuesto, no se ha utilizado la libertad de norma en ningún momento, es por ello que en la literatura a la Ec. (2.105) adopta el nombre de PTEM OG válido en cualquier norma. Además, (2.105) es manifiestamente simétrico en a y en b . Dicho de otro modo, bajo los promedios se están despreciando términos de mayor orden.

2.5. Comparación con el pseudo-tensor de Landau-Lifschitz

En la Sección 2.2.2 se describió brevemente la formulación de Landau-Lifshitz de la RG. Bajo este esquema aparece como contribución efectiva a las ecuaciones de campo (2.10) un término cuadrático en g_{ab} , nombrado como el PTLT dado por la Ec. (2.12). Cabe recordar que dicho esquema es una reformulación exacta de la ecuaciones de campo usuales para la métrica g_{ab} . En esta sección se analiza el límite lineal del PTLT y se confronta con el PTEM OG derivado en la Sección 2.4.3.

Retomando la definición de g_{ab} , dada por la Ec. (2.9), y la definición del potencial h_{ab} , dada por la Ec. (2.14), se obtiene al combinarlas

$$h_{ab} = \eta_{ab} - g_{ab} \sqrt{g}, \quad (2.106)$$

En la aproximación lineal, es decir, tomando la expansión (2.21) a primer orden en λ con la métrica de fondo plana (i.e., $\tilde{g}_{ab} \rightarrow \eta_{ab}$ con lo que $\tilde{\nabla}_a \rightarrow \partial_a$), la Ec. (2.106) toma la forma

$$h_{ab} = h_{ab}^{(1)} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{ab} h^{(1)} = \bar{h}_{ab}. \quad (2.107)$$

donde se ha utilizado la expansión del determinante (A.17). Además sólo se han mantenido los términos de primer orden haciendo $\lambda = 1$ y no se ha escrito más el superíndice (1) en \bar{h}_{ab} . Más aún, reescribiendo a (2.14) como $g^{ab} = \eta^{ab} - h^{ab}$ en el límite lineal se obtiene

$$g^{ab} = \eta^{ab} - \bar{h}^{(1)ab}. \quad (2.108)$$

Ahora bien, la identidad (2.11) implica la existencia de una cantidad conservada definida como

$$\mathcal{P}^{ab} = \frac{1}{16\pi} (\partial_c \partial_d H^{abcd}). \quad (2.109)$$

Si esta cantidad es promediada bajo la ALOC se encuentra que

$$\Theta_{(RG)}^{ab} = \langle\langle \mathcal{P}^{ab} \rangle\rangle = \langle\langle (-g) t_{LL}^{ab} \rangle\rangle, \quad (2.110)$$

donde se utilizó a las ecuaciones de campo (2.10). Es decir, a orden lineal se recupera el PTEM OG. Para especificar aún más a la expresión (2.110), conviene escribir a t_{LL}^{ab} en términos de \bar{h}_{ab} . Así sustituyendo a (2.108) en la Ec. (2.12) se obtiene

$$\begin{aligned} (-g) t_{LL}^{ab} = \frac{1}{16\pi} \left\{ \partial_c \bar{h}^{ab} \partial_d \bar{h}^{cd} - \partial_c \bar{h}^{ac} \partial_d \bar{h}^{bd} + \frac{1}{2} g^{ab} \partial_e \bar{h}^{cd} \partial_d \bar{h}_c^e - 2 \partial_c \bar{h}_d^{(a} \partial^b) \bar{h}^{cd} + \partial_d \bar{h}^{ac} \partial^d \bar{h}_c^b \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \partial^a \bar{h}_{cd} \partial^b \bar{h}^{cd} - \frac{1}{4} \partial^a \bar{h} \partial^b \bar{h} - \frac{1}{4} g^{ab} \partial^c \bar{h}_{de} \partial_c \bar{h}^{de} + \frac{1}{8} g^{ab} \partial^c \bar{h} \partial_c \bar{h} \right\}. \quad (2.111) \end{aligned}$$

Al promediar a la Ec. (2.12), ésta puede ser reordenada en dos términos.

$$\Theta_{(RG)}^{ab} = \frac{1}{16\pi} \left\langle\left\langle \frac{1}{2} \partial^a \bar{h}_{cd} \partial^b \bar{h}^{cd} - \frac{1}{4} \partial^a \bar{h} \partial^b \bar{h} - 2 \partial_c \bar{h}_d^{(a} \partial^b) \bar{h}^{cd} \right\rangle\right\rangle + \frac{1}{16\pi} \langle\langle \mathcal{S}^{ab} \rangle\rangle. \quad (2.112)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{ab} = \frac{1}{16\pi} & \left\{ \partial_c \bar{h}^{ab} \partial_d \bar{h}^{cd} - \partial_c \bar{h}^{ac} \partial_d \bar{h}^{bd} + \partial_d \bar{h}^{ac} \partial^d \bar{h}_c^b \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} g^{ab} \partial_e \bar{h}^{cd} \partial_d \bar{h}_c^e - \frac{1}{4} g^{ab} \partial^c \bar{h}_{de} \partial_c \bar{h}^{de} + \frac{1}{8} g^{ab} \partial^c \bar{h} \partial_c \bar{h} \right\}. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Este término se anula al utilizar las propiedades de los promedios enunciadas a principios de la Sección 2.4.3. Con lo que el PTEM OG es

$$\Theta_{(\text{RG})}^{ab} = \frac{1}{32\pi} \left\langle \left\langle \partial^a \bar{h}_{cd} \partial^b \bar{h}^{cd} - \frac{1}{2} \partial^a \bar{h} \partial^b \bar{h} - 4 \partial_c \bar{h}_d^{(a} \partial^b) \bar{h}^{cd} \right\rangle \right\rangle. \quad (2.114)$$

De este modo se concluye que en la teoría lineal ambas formulaciones coinciden. Pues (2.114) es esencialmente la misma expresión bajo la identificación $\tilde{\nabla}_a \rightarrow \partial_a$.

Hasta este punto se ha hecho uso de la teoría de perturbaciones a segundo orden para calcular el PTEM OG para un fondo genérico. El propósito del siguiente capítulo será discutir las posibles relaciones del PTEM OG con las mismas OG al establecer como fondo el de Minkoski.

Capítulo 3

Radiación Gravitacional en la Relatividad General

Uno de los aspectos más sutiles y confusos en la RG, en particular, cuando se analiza un problema de forma perturbativa, es el de la libertad de «norma» o la libertad de escoger coordenadas. Un aspecto similar, aunque quizá, menos confuso por no involucrar al espacio-tiempo mismo es el que aparece en la teoría electromagnética (o electromagnetismo; EM). Dada la similitud que existe entre ambas teorías, la RG y EM, conviene primero revisar el problema de la determinación de una norma en el EM, ya que en la RG ocurre algo muy similar, con el añadido de que existe un mayor número de grados de libertad. Dicho en otras palabras, antes de atacar de lleno a la teoría de radiación gravitacional en la RG, se retomaran algunos puntos importantes sobre la teoría electromagnética—específicamente sobre radiación— cuyo parecido operacional con la RG linealizada es ampliamente reconocido [25, 113]. En particular se analizan los modos físicos radiativos y en segundo lugar su relación con la libertad de norma.

3.1. Radiación Electromagnética

3.1.1. Ecuaciones de Maxwell

En la formulación covariante de la teoría de Maxwell en un espacio-tiempo plano los campos eléctrico \mathbf{E} y magnético \mathbf{B} usuales se combinan en un sólo tensor antisimétrico F_{ab} (ver e.g., [53, 128, 149, 160]). Para un observador con 4-velocidad v^a , los campos están dados por

$$E_a = F_{ab}v^b, \quad B_a = F_{ab}^*v^b, \quad (3.1)$$

respectivamente, donde $F_{ab}^* = 1/2\epsilon_{ab}{}^{cd}F_{cd}$ es el tensor dual a F_{ab} y ϵ_{abcd} es el tensor de Levi-Civita totalmente antisimétrico en 4 dimensiones. Las ecuaciones de Maxwell toman la forma,

$$\partial^a F_{ab} = -4\pi j_b, \quad (3.2a)$$

$$\partial_{[a} F_{bc]} = 0, \quad (3.2b)$$

donde j^a es la 4-densidad de corriente usual. La antisimetría de F_{ab} implica la ley de conservación $\partial_a j^a = 0$. En la formulación usual del EM es útil expresar a los campos (3.1) en términos de el potencial escalar ϕ y el potencial vectorial \mathbf{A} . Estos pueden ser combinados en campo vectorial $A^a = (\phi, A^i)$.⁴¹ Por otro lado, la Ec. (3.2b) implica la existencia de este preciso campo A_a con el que⁴²

$$F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a. \quad (3.3)$$

⁴¹Los índices $i, j, k, l, m, n \dots$ son utilizados para denotar cantidades 3-dimensionales.

⁴²Por el teorema de Poincaré [160].

Así, en términos de A_a las ecuaciones de Maxwell (inhomogéneas), (3.2a), toman la forma

$$\partial^a(\partial_a A_b - \partial_b A_a) = -4\pi j_b. \quad (3.4)$$

Mientras que, los campos (3.1) se escriben como

$$E_i = -\partial_t A_i - \nabla A_0, \quad B_i = \epsilon_{ijk} \partial^j A^k, \quad (3.5)$$

donde ϵ_{ijk} es el tensor de Levi-Civita totalmente antisimétrico en tres dimensiones. Por otro lado, el tensor de energía-momento en la teoría de Maxwell es

$$T_{ab}^{(\text{EM})} = \frac{1}{4\pi} \left\{ F_{av} F_b{}^c - \frac{1}{4} \eta_{ab} F_{de} F^{de} \right\} \quad (3.6)$$

Notése que $T_{ab}^{(\text{EM})}$ es cuadrático en A_a , de la misma manera que el PTEM OG es cuadrático en h_{ab} (ver Capítulo 2). Más aún, en razón de que se está considerando un fondo plano, si j^a (3.6) cumple $\partial^a T_{ab}^{(\text{EM})} = 0$; si $j^a \neq 0$ no se conserva sólo $T_{ab}^{(\text{EM})}$ sino el tensor de energía-momento total (i.e. $\partial^a (T_{ab}^{(\text{EM})} + T_{ab}[\psi]) = 0$, donde ψ son los campos de materia adicionales).

3.1.2. Libertad de norma en la teoría electromagnética

Las Ecs. (3.4) no están únicamente determinadas, pues una transformación de la forma

$$A_a \rightarrow A_a + \partial_a \xi, \quad (3.7)$$

las deja invariantes, en donde ξ es una función escalar ($\xi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$) arbitraria. A las transformaciones de la forma (3.7) se les conoce como *transformaciones de norma*. Comúnmente se asocian observables físicas a cantidades que sean invariantes ante esta clase de simetrías.⁴³ Esta libertad de coordenadas permite *fijar la norma*, e imponer la condición

$$\partial^a A_a = 0, \quad (3.8)$$

conocida como el nombre de norma de Lorenz.⁴⁴ Con fijar la norma se entiende que si un potencial, a decir $A_a^{(1)}$, no satisface la condición (3.8) (i.e., $\partial^a A_a^{(1)} \neq 0$), ésta siempre puede ser impuesta pues bajo una transformación de la forma (3.7), $A_a^{(1)} \rightarrow A_a^{(2)} = A_a^{(1)} + \partial_a \xi$, siempre y cuando ξ satisfaga la ecuación

$$\partial^a \partial_a \xi = -\partial^a A_a^{(1)}. \quad (3.9)$$

De esta manera se obtiene $\partial^a A_a^{(2)} = 0$. Es común decir que $A_a^{(1)}$ y $A_a^{(2)}$ son físicamente equivalentes. Aclarado lo anterior, al utilizar la norma de Lorenz (3.8), las Ecs. (3.4) toman la forma

$$\partial^a \partial_a A_a \equiv \square A_a = -4\pi j_b \quad (3.10)$$

Es decir, en la norma de Lorenz el potencial A_a satisface una ecuación de onda, cuyas soluciones de analizarán en la Sección 3.1.4. Es importante señalar que el tensor de Faraday F_{ab} es invariante de norma, por consiguiente, los campos eléctrico y magnético, definidos como en (3.1), más específicamente por las combinaciones de (3.5), también son invariantes de norma, es por ello que son ya en sí observables físicas. No obstante, el hecho de que A_a satisfaga (3.10) sugiere que todas las componentes de A_a son de naturaleza radiativa,⁴⁵ lo cual no es correcto pues es bien conocido que la teoría EM contiene sólo dos grados de libertad

⁴³En principio clásicamente (cf. el experimento de Aharanov-Bohm para un escenario cuántico)

⁴⁴Nombrada así en reminiscencia de Ludvig Lorenz (1829-1891), no confundir con Hendrik Lorentz (1853-1928), responsable de la fuerza de Lorentz [128].

⁴⁵Por grados de libertad radiativos se está refiriendo a aquellos que satisfacen una ecuación de onda.

radiativos, es decir, las dos polarizaciones asociadas al fotón. Si bien A_a contiene en principio cuatro grados de libertad, bajo la condición (3.8) sólo tres resultan ser grados de libertad independientes.

La naturaleza de estos tres grados de libertad remanentes es válida al notar que la elección de norma (3.8) no fija de manera unívoca a A_a .⁴⁶ En la misma línea que la Ec. (3.9), si $A_a^{(2)}$ ya satisface $\partial^a A_a^{(2)} = 0$, una nueva transformación de norma

$$A_a^{(2)} \rightarrow A_a^{(3)} = A_a^{(2)} + \partial_a \zeta, \quad (3.11)$$

donde ζ es una función escalar distinta a la anterior ξ , implica, en razón de que $\partial^a A_a^{(2)} = 0$ sea preservada,

$$\square \zeta = 0, \quad (3.12)$$

con lo que se asegura que $\partial^a A_a^{(3)} = 0$. Esta libertad remanente suele ser ocupada para «especificar más la norma», esto es, fijar un grado de libertad más. Es bien conocido que en el problema de la radiación electromagnética sin fuentes (i.e., $j^a = 0$) el potencial A_0 puede ser escogido nulo. En este caso, la norma de Lorenz se reduce a la norma de Coulomb (i.e., $\partial_j A^j = 0$), Esto es, $A_0 = 0$ y, por consiguiente, de las tres componentes espaciales de A_j sólo dos son independientes en razón de la norma de Coulomb. Sin embargo, como se verá más adelante (Secciones 3.1.4 & 3.1.5) bajo ciertas condiciones radiativas, también existen dos grados de libertad radiativos en presencia de fuentes.

Para aclarar el punto anterior, considérese la componente temporal de la segunda transformación de norma (3.11), es decir, $A_0^{(3)} = A_0^{(2)} + \partial_t \zeta$. Si en una hipersuperficie a tiempo $t = t_0$ se fija la condición inicial $A_0^{(3)}|_{t_0} = A_0^{(2)}|_{t_0} + \partial_t \zeta|_{t_0} = 0$, el valor de la derivada temporal de ζ queda fijo a

$$\partial_t \zeta|_{t_0} = -A_0^{(2)}|_{t_0}. \quad (3.13)$$

También la derivada temporal de $A_0^{(3)}$ se puede fijar a $\partial_t A_0^{(3)}|_{t_0} = \partial_t A_0^{(2)}|_{t_0} + \partial_{tt} \zeta|_{t_0} = 0$,⁴⁷ con lo que $\partial_{tt} \zeta|_{t_0} = -\partial_t A_0^{(2)}|_{t_0}$. En virtud de esta última condición inicial la Ec. (3.9) toma la forma

$$\nabla^2 \zeta|_{t_0} = -\partial_j A_j^{(2)}|_{t_0}, \quad (3.14)$$

donde se ha adoptado la notación $\nabla^2 \equiv \partial^i \partial_i$, que corresponde al operador de Laplace en un espacio euclidiano 3-dimensional. De esta forma ζ se define como la solución a la Ec. (3.12) cuyas condiciones iniales están dadas por las Ecs. (3.13) y (3.14). Dado que $A_a^{(3)}$ satisface la ecuación de onda (3.10). En particular para la componente temporal se cumple

$$\square A_0^{(3)} = \square(A_0^{(2)} + \partial_t \zeta) = -4\pi j_0. \quad (3.15)$$

Es así que en el caso donde no existen fuentes, es decir, regiones del espacio-tiempo donde $j_0 = 0$ la única solución de la Ec. (3.15) para $A_a^{(3)}$, con las condiciones iniciales (3.13) y (3.14) es $A_0^{(3)} = 0$, con lo que, se fija el valor de la componente temporal de potencial a cero. Esta especialización de la norma de Lorenz se conoce como la norma de radiación o de Coulomb, en la que se cumplen las condiciones

$$j_a = 0, \quad A_0 = 0, \quad \partial^j A_j = 0. \quad (3.16)$$

Notése que fue esencial la suposición de regiones libres de fuentes para conseguir que $A_0 = 0$ (se han dejado de lado los superíndices). Se reconoce de inmediato que los grados de libertad remanentes de A_a son dos y ambos son radiativos pues satisfacen la ecuación de onda. No

⁴⁶La discusión sobre esta libertad remanente en A_a es reminiscencia de Wald [160, p.79].

⁴⁷Se ha adoptado la notación compacta $\partial_i \partial_j = \partial_{ij}$, $\partial_i \partial_i = \partial_{ii}$.

obstante queda aún por responder que parte de A_a son precisamente estos dos grados de libertad. Para identificarlos se pueden tomar dos enfoques. El primero está conformado por una descomposición en sus partes irreducibles de la cantidad en cuestión a analizar, en este caso, el potencial A_a y a partir de ésta identificar los grados de libertad por medio de la ecuación que satisface (i.e., la Ec. (3.10)). El segundo es analizar el potencial en la zona lejana de onda, es decir, donde la distancia a la fuente tiende a infinito. En las secciones siguientes se exponen ambos enfoques para el caso EM, en el entendido de que en el caso gravitacional se esperan comportamientos muy similares para h_{ab} .

3.1.3. Descomposición en partes irreducibles del potencial electromagnético

De acuerdo al Apéndice B.3 el vector potencial A^a puede ser descompuesto de la siguiente manera

$$A_0 = -\phi, \quad A_j = \partial_j \lambda + A_j^T, \quad (3.17)$$

donde para el potencial ϕ se tiene la representación trivial pues es un escalar. Por otro lado, $\partial_j \lambda$ representa la parte longitudinal de A_j siendo λ una función escalar y A_j^T da lugar a la parte transversa de A_j . Ambas cantidades satisfacen

$$\partial^j A_j^T = 0, \quad \partial^j A_j = \nabla^2 \lambda. \quad (3.18)$$

Bajo la descomposición (3.18) los cuatro grados de libertad de A_a se reparten en los dos escalares ϕ y λ y en las dos componentes independientes de A_j^T . El propósito de introducir esta descomposición es encontrar combinaciones de λ , ϕ y A_j^T que sean invariantes bajo las transformaciones de la forma (3.7). Esto es, cantidades invariantes de norma. Para ello, considérese la transformación de la parte transversa de A_j bajo (3.7) dada por $A_j^T \rightarrow A_j'^T = A_j^T + \partial_j \xi$. De esta manera, bajo una transformación de norma la parte espacial satisface

$$A_j'^T = A_j^T + \partial_j(\lambda - \lambda' + \xi), \quad (3.19)$$

con lo que para preservar la invarianza de la parte transversa se debe de satisfacer $\xi = \lambda' - \lambda + \text{cte}$. Así, $A_j'^T = A_j^T$. En la misma línea, para la parte temporal se tiene

$$\phi' = \phi - \partial_t \xi = \phi - \partial_t \lambda' + \partial_t \lambda, \quad (3.20)$$

la cual, al ser reordenada permite ver que la combinación

$$\Psi \equiv \phi + \partial_t \lambda \quad (3.21)$$

es, en efecto, un invariante de norma. Para recapitular, las dos cantidades invariantes de norma resultan ser Ψ y A_j^T . Ahora bien, para identificar los grados de libertad de la teoría, identificada por las Ecs. (3.4), resulta natural descomponer también a la corriente j^a en sus partes irreducibles como

$$j_0 = -\rho, \quad j_i = \partial_i \sigma + j_i^T, \quad (3.22)$$

donde la parte transversa satisface $\partial^i j_i^T = 0$. Así, la sustitución de las descomposiciones dadas por las Ecs. (3.17) y (3.22) en las ecuaciones de la teoría EM (3.4) proporcionan una parte temporal y espacial

$$\nabla^2 \Psi = -4\pi\rho, \quad (3.23a)$$

$$\square A_i^T = -4\pi j_i^T + \partial_i(\partial_t \Psi - 4\pi\sigma), \quad (3.23b)$$

respectivamente. Notése que la segunda ecuación puede ser reducida utilizando la descomposición (3.22) en la ley conservación local de la carga (i.e., $\partial_a j^a = 0$),

$$\partial_t \rho + \nabla^2 \sigma = 0, \quad (3.24)$$

la cual puede ser reescrita como

$$\nabla^2 \left(\sigma - \frac{1}{4\pi} \partial_t \Psi \right) = 0, \quad (3.25)$$

cuya solución bien comportada es $4\pi\sigma = \partial_t \Psi + \text{cte}$. De esta manera, las Ecs. (3.23) se reescriben como

$$\nabla^2 \Psi = -4\pi\rho, \quad (3.26a)$$

$$\square A_i^T = -4\pi j_i^T. \quad (3.26b)$$

Las Ecs. (3.26) reflejan la naturaleza de los grados de libertad en la teoría EM. En principio, A_j^T contiene tres grados de libertad, sin embargo, en razón de la condición de transversalidad dada por la Ec. (3.18), los grados de libertad independientes de A_j^T son dos. Por otro lado, la función Ψ es un escalar y, en consecuencia, contiene sólo un grado de libertad. En conclusión, se tienen **tres grados de libertad independientes**; Ψ físico pero no radiativo y A_j^T físico y radiativo pues satisface una ecuación de onda. Además, la Ec. (3.27b) refleja el hecho ya conocido de que la parte radiativa se encuentra en la parte transversa del potencial, o bien, la parte radiativa es debido a la parte transversa de la corriente j_i [98].⁴⁸

En vacío es claro que las Ecs. (3.26) se reducen a

$$\nabla^2 \Psi = 0, \quad (3.27a)$$

$$\square A_i^T = 0. \quad (3.27b)$$

que admiten soluciones de la forma

$$\Psi = 0, \quad A_j^T = \epsilon_j e^{ik_a x^a} = \epsilon_j e^{-i\omega t + ik_z z}, \quad (3.28)$$

para condiciones de frontera triviales, donde $\omega = -k_a v^a$ es la frecuencia de la onda medida por un observador con velocidad v^a y ϵ_j es el vector de polarización cuyas componentes independientes son dos, a decir, ϵ_1 y ϵ_2 , conocidos como los modos de polarización. Sin pérdida de generalidad se ha asumido que la onda se propaga en la dirección z . Notesé que bajo una rotación θ la parte transversa adquiere una fase esto es, $A_j^T \rightarrow A_j'^T = e^{i\theta} A_j^T$, con lo que se concluye, bajo la perspectiva de la física de partículas, que la partícula representada por A_a es de espín 1. Este resultado tiene su contraparte en el caso gravitacional.

Por lo demás, la discusión anterior permite reescribir a la teoría EM en términos de cantidades invariantes de norma. Si bien, se recuperan resultados ya conocidos, la metodología resulta útil como punto de partida para la RG linealizada, en donde aumentan considerablemente los grados de libertad. En la Sección 3.2.4 se realiza el mismo procedimiento para el caso de radiación gravitacional.⁴⁹

⁴⁸Bajo esta descomposición, aunque se tienen ecuaciones que son invariantes de norma, la norma misma puede también ser escrita en términos de estas variables. Para la norma de Lorenz $\partial_a A^a = 0$, se tiene $\nabla^2 \lambda = -\partial_t \phi$, la cual, al sustituirse en (3.23a) se obtiene $\square \phi = -4\pi\rho$, con lo que se recupera $\square A_a = -4\pi j_a$. Asimismo, en la norma de Coulomb $\partial_j A^j = 0$, se obtiene $\nabla^2 \lambda = 0$, con lo que $\lambda = 0$ y, en consecuencia $\Psi = \phi$.

⁴⁹Como ejemplo, en el Apéndice B.4 se realiza la misma descomposición irreducible para el caso masivo del EM, la no invarianza de norma en esta teoría se refleja también en dicha descomposición.

3.1.4. Potencial electromagnético en la zona de onda lejana

Una característica esencial en los campos radiativos es que decaen como r^{-1} , donde r es la distancia a la fuente. Esta condición permite especificar la norma de Lorenz (3.8) aún más en la zona lejana de onda (ver Apéndice B.1) para el potencial A_a , sin concebir la total ausencia de fuentes como fue el caso en la Sección (3.1.2). De esta manera la única componente relevante es la parte espacial transversa de A_a , denotada por A_j^T ; en ella están contenidos los grados de libertad radiativos de la teoría. En esta sección se expresan a los potenciales ϕ y A_j , partiendo de la solución general a la ecuación de onda con fuentes que satisface A_a , en la zona lejana de onda, es decir, manteniendo sólo los términos que decaen como r^{-1} .⁵⁰ Este identificación tiene su símil en la teoría de radiación gravitacional, donde también se puede expresar a h_{ab} en la zona lejana de onda para posteriormente establecer a los modos radiativos como aquellos contenidos solamente en la parte sin traza y transversa de h_{ab} (lo anterior se verá en la Sección (3.2.5)).

Retomando la ecuación de onda (3.10) para A_a con fuentes j^a , ésta tiene una solución particular en la zona lejana de onda en términos de una expansión multipolar dada por

$$A_a(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} n_{j_1 \dots j_k} \left(\frac{d}{d\tau} \right)^k \left\{ \int j_a(\tau, \mathbf{x}') x'^{j_1 \dots j_k} d^3 x' \right\}. \quad (3.29)$$

donde se ha adoptado la notación compacta $x'^{j_1 \dots j_k} = x'^{j_1} \dots x'^{j_k}$, mientras que

$$\tau \equiv t - r, \quad (3.30)$$

es el *tiempo retardado* con $r = |\mathbf{x}|$ la distancia a la fuente y $n_i = x_i/r$ es el vector radial unitario (i.e. $n^j n_j = 1$). La solución general es la suma de la Ec. (3.29) más la solución de la ecuación homogénea. Nótese que por solución en la zona lejana de onda sólo se mantienen los términos que decaen como r^{-1} (para el cálculo explícito de la solución de la ecuación de onda véase el apéndice B). Los primeros cuatro términos de la expansión (3.29) toman la forma

$$A_0(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{r} \left\{ Q + n_i \frac{d}{d\tau} \int \rho(\tau, \mathbf{x}') x^i d^3 x' + n_i n_j \frac{d^2}{d\tau^2} \int \rho(\tau, \mathbf{x}') x^i x^j d^3 x' + \dots \right\}, \quad (3.31a)$$

$$A_k(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{r} \left\{ \int j_k(\tau, \mathbf{x}') d^3 x' + n_i \frac{d}{d\tau} \int j_k(\tau, \mathbf{x}') x^i d^3 x' + \dots \right\}, \quad (3.31b)$$

donde se ha obviado en la ecuación (3.31a) el primer término de la expansión para A_0 dado por la carga eléctrica total $Q = \int \rho(\mathbf{x}) d^3 x$, la cual es independiente de τ en virtud de la ley de conservación $\partial_a j^a$. Al realizar una expansión multipolar del estilo de las Ecs. (3.31) es común definir a los momentos multipolares (ver e.g. [98]). El momento dipolar eléctrico se define como

$$p_i(\tau) = \int \rho(\tau, \mathbf{x}') x_i d^3 x. \quad (3.32)$$

Asimismo el momento cuadrupolar eléctrico (con traza) y el momento dipolar magnético son

$$Q_{jk} = \int \rho(\tau, \mathbf{x}) x_j x_k d^3 x, \quad \mathcal{M}_k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \int j_j(\tau, \mathbf{x}) x_i d^3 x, \quad (3.33)$$

respectivamente. Existen momentos a mayores ordenes, no obstante, en la realidad las contribuciones a problemas físicos son despreciables la mayoría de las veces, ya que los términos dominantes a grandes distancias son los que decaen como r^{-1} . Para efectos de esta tesis, sólo

⁵⁰La discusión en ésta y la siguiente sección sigue de cerca a Poisson and Will [128, p.541]

se tomarán estos términos. Así, los potenciales (3.31) adoptan la forma

$$\phi = \frac{Q}{r} + \frac{1}{r} \left\{ n_i \dot{p}_i(\tau) + n_i n_j \ddot{Q}_{ij}(\tau) + \dots \right\}, \quad (3.34a)$$

$$A_k = \frac{1}{r} \left\{ \dot{p}_k(\tau) + \ddot{Q}_{jk}(\tau) n_j - \epsilon_{ijk} n_i \dot{M}_j(\tau) \dots \right\}, \quad (3.34b)$$

donde los puntos indican derivadas temporales y además en el primer término de (3.34b) se ha utilizado la conservación $\partial_a j^a$ para expresar a la integral de j_k en términos de la derivada temporal del momento monopolar. De las ecuaciones (3.34) resulta sencillo notar la forma genérica de los potenciales:

$$\phi = \frac{Q}{r} + \frac{1}{r} C(\tau, \mathbf{n}), \quad (3.35a)$$

$$A_k = \frac{1}{r} D_k(\tau, \mathbf{n}), \quad (3.35b)$$

es decir, se pueden expresar con alguna función auxiliar que dependa de τ y \mathbf{n} . En este punto la restricción sobre la dependencia r^{-1} para los campos de radiación puede ser utilizada notando la siguiente regla de diferenciación, la cual sólo es válida en la zona lejana de onda pues se están despreciando términos de mayor orden en r^{-1} :

$$\partial_j T = -n_j \partial_\tau T, \quad (3.36)$$

donde T es un tensor arbitrario con los índices suprimidos cuya dependencia, al igual que las ecuaciones (3.35), es de la forma $T = r^{-1} f(\tau, \mathbf{n})$. Para probarlo notése que $\partial_j r^{-1} = \mathcal{O}(r^{-2})$ y $\partial_j n_k = \mathcal{O}(r^{-1})$ por lo que la única dependencia que va como r^{-1} es en τ pues $\partial_j \tau = -\partial_j r = -n_j$. Tomando las consideraciones anteriores notése también que los términos dominantes en ambas expresiones, es decir, en las Ecs. (3.35) son de la forma $r^{-1} f(\tau)$. De esta manera

$$\begin{aligned} \partial_j (r^{-1} f(\tau, \mathbf{n})) &= r^{-1} \partial_j f(\tau) + \mathcal{O}(r^{-2}) \\ &= r^{-1} \partial_\tau f(\tau, \mathbf{n}) \partial_j \tau + \mathcal{O}(r^{-2}) \\ &= n_j \partial_\tau (r^{-1} f(\tau, \mathbf{n})) + \mathcal{O}(r^{-2}), \\ &= -n_j \partial_\tau T + \mathcal{O}(r^{-2}), \end{aligned} \quad (3.37)$$

con lo que la Ec. (3.36) queda justificada. Con esta condición la norma de Lorenz (3.8) adopta la forma

$$\partial_\mu A^\mu = \partial_\tau (A^0 - n_j A^j) = 0, \quad (3.38)$$

donde se ha utilizado que $\partial_\tau = \partial_t$ en virtud de la Ec. (3.30). Por otro lado, una forma útil para dejar en claro los grados de libertad de una teoría corresponde a una descomposición en sus partes irreducibles (véase apéndice B.3). Para la teoría electromagnética contenida en los cuatro grados de libertad de A_a , en razón de que se han obtenido la forma genérica de sus componentes en la zona de onda, estos es, las Ecs. (3.35), la descomposición equivale a expresar a C y D_k en sus partes irreducibles. Para C es trivial pues es un escalar, mientras que para D_k se tiene

$$D_k = D n_k + D_k^\top, \quad (3.39)$$

donde $D n_k$ y D_k^\top son la contribución longitudinal y la transversa de D_k respectivamente, ésta última satisface $n_k D_k^\top = 0$. En este punto la condición de norma (3.38) puede ser utilizada para establecer algunas constricciones. Escribiendo a (3.35) en términos de (3.39) y a su vez sustituyendo en (3.38) se obtiene

$$C = D. \quad (3.40)$$

Lo cual indica que ϕ y A_k no son independientes. Incorporando la constricción (3.40) a los potenciales (3.35) estos se escriben como

$$\phi = \frac{Q}{r} + \frac{1}{r}D, \quad (3.41a)$$

$$A_k = \frac{1}{r}(Dn_k + D_k^T), \quad (3.41b)$$

donde D , D_k^T son funciones de τ y de n . El numero de cantidades independientes se ha reducido a tres: una en D y dos en D_k^T , lo cual era de esperarse pues la condición de Lorenz elimina un grado de libertad.

3.1.5. Transformación a la norma transversa

En la sección anterior se expresó a los potenciales ϕ y A_j en la zona lejana de onda, dados por las Ecs. (3.41). En esta sección se retoma el hecho que una segunda transformación de Lorenz deja un grado de libertad remanente. Sin embargo, a diferencia de la discusión de la Sección 3.1.2 en donde la norma de radiación satisface las ecuaciones (3.16), aquí no se tendrá la hipótesis de $j_a = 0$. Es importante contrastar este hecho con la literatura, pues cuando se busca implementar la norma de radiación en el EM normalmente se toma como condición necesaria la consideración de regiones en donde $j_a = 0$. Esto es conveniente en la teoría de Maxwell pues a diferencia de la teoría de emisión de OG, la emisión de ondas electromagnéticas se debe a superposiciones incoherentes de átomos, moléculas o partículas cargadas. Es decir, eventos indistinguibles que suceden incontables veces con lo que las ondas electromagnéticas son fácilmente absorbidas o dispersadas por el medio en el que se propagan. En contraste, en la emisión de OG, la información de cada evento esta contenida completamente en la onda y ésta se propaga intacta desde la fuente hasta un observador distante. Esta es la razón por la cual la discusión de la teoría de radiación en el EM no toma en cuenta estas sutilezas.⁵¹

Aclarado lo anterior, considérese la segunda transformación de norma dada por la Ec. (3.11). Esta segunda transformación está generada por la función ζ que satisface a la Ec. (3.12) en razón de preservar la condición de norma de Lorenz. Una solución a dicha ecuación se escribe como

$$\zeta = \frac{1}{r}\alpha(\tau, \mathbf{n}) + O(r^{-2}), \quad (3.42)$$

donde α es una función arbitraria. Estrictamente α tendría que ser también descompuesto en sus partes irreducibles, sin embargo, dado que es un escalar, su representación es trivial, lo cual no será el caso cuando se trate el caso gravitacional. Insertando la solución (3.42) y la forma de los potenciales (3.41) en (3.11) y utilizando la regla de diferenciación (3.36) eventualmente se obtienen las reglas de transformación siguientes:

$$D_k^T \rightarrow D_k^T, \quad (3.43a)$$

$$D \rightarrow D - \partial_\tau \alpha. \quad (3.43b)$$

Esto es, el como transforman a las partes irreducibles del potencial A_a . De (3.43) queda de manifiesto la invarianza de la parte transversa de D_k bajo transformaciones de norma. Nótese de igual manera que α puede ser elegido tal que se satisfaga $D = 0$. Con esto último los

⁵¹Estrictamente toda la materia y energía, incluyendo a los átomos, es fuente de radiación gravitacional, sin embargo, la diferencia de magnitudes entre las demás interacciones del modelo estándar hacen plausible el poder despreciar estos efectos en el rango macroscópico.

potenciales se reducen a

$$\phi = \frac{Q}{r}, \quad (3.44a)$$

$$A_k = \frac{1}{r} D_k^T(\tau, \mathbf{n}). \quad (3.44b)$$

Dado que $D_k^T n^k = 0$, los grados de libertad relevantes para la zona de onda lejana, es decir, dependientes del tiempo y por tanto los que contienen la información de la fuente son dos y están contenidos en la parte transversa de D y en consecuencia en la parte transversa de A_k . Los campos expresados en la forma (3.44) se dice se encuentran en la *norma transversa* (T). La Ec. (3.44a) simplemente expresa el comportamiento coulombiano de ϕ pero no contribuye a la energía radiada ya que no depende de t .

3.1.6. Extracción de la parte transversa

En la sección anterior se identificó a los dos grados de libertad radiativos del potencial A_a como aquellos contenidos en la parte transversa A_k^T . En esta sección por el contrario se especifica el cómo aislar la parte transversa dado un potencial A_a .

La extracción de la parte transversa del potencial A_a es llevada a cabo por medio de la aplicación de un operador de proyección ortogonal a n^i , es decir, proyecta un vector sobre el plano que es ortogonal a n^i [84, 98, 130]. Este operador se define como

$$\mathcal{P}_k^j = \delta_k^j - n^j n_k, \quad (3.45)$$

el cual satisface las siguientes propiedades

$$\mathcal{P}_k^j n^k = 0, \quad \mathcal{P}_j^j = 2, \quad \mathcal{P}_j^i \mathcal{P}_k^j = \mathcal{P}_k^i, \quad (3.46)$$

las cuales reflejan la dimensión dos del plano ortogonal y la idempotencia del mismo proyector. Con las anteriores propiedades dado un vector B_j expresado en sus partes irreducibles (anteriormente introducida en la Ec. (3.39))

$$B_j = B n_j + B_j^T. \quad (3.47)$$

La acción del proyector (3.45) sobre el vector (3.47) produce

$$\mathcal{P}_k^j B_j = B_k^T, \quad (3.48)$$

es decir, aísla la parte transversa del vector B_j . Con estas consideraciones retomando a la Ec. (3.44b) para A_k y combinándola con la expresión en términos de los momentos multipolares dada por la Ec. (3.34b) se obtiene

$$\boxed{A_k^T = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathcal{P}_k^j(\mathbf{n}) \left\{ \frac{dp_k}{dt}(\tau) + \mathcal{O}(c^{-1}) \right\} + \mathcal{O}(r^{-2}),} \quad (3.49)$$

donde se han restaurado las unidades. La expresión concluye que a orden dominante en r y en c la radiación electromagnética es esencialmente dipolar. Este es el mismo resultado que se obtendría a partir de la expansión multipolar de la Ec. (3.27b) asumiendo la zona de onda lejana.

3.2. Radiación gravitacional en la aproximación lineal

En las secciones anteriores se estudió el problema de la radiación electromagnética concluyendo que es esencialmente radiación dipolar. Sin embargo, en el caso de la radiación gravitacional a orden dominante en una expansión multipolar la radiación resulta ser cuadrupolar. Dicho de otro modo, la emisión de OG es consecuencia de un momento cuadrupolar que varía en el tiempo. Este resultado, como se anticipaba en la introducción de esta tesis fue encontrado por Einstein [80]. Hoy en día, y en razón del trabajo de Landau & Lifshitz [107], se conoce como el formalismo cuadrupolar. Este formalismo es válido para fuentes aisladas cuya dinámica está dominada por fuerzas gravitacionales, esto es, aquellas que pueden ser modeladas bajo la aproximación post-newtoniana (brevemente discutida en la Sección (2.2.1)). A pesar de ello, es válida también en el límite newtoniano (i.e. $v/c \rightarrow 0$), es por ello que puede ser derivada en el límite lineal de la RG (así fue como Einstein la encontró).

Como se comentó brevemente en la Introducción de esta tesis, en las actuales colaboraciones internacionales para detectar de manera directa OG, LIGO y VIRGO, el paradigma matemático se sostiene en que las observaciones son descritas por las soluciones retardadas de la ecuaciones de Einstein, es decir, h_{ab} , cuya fuente son objetos altamente dinámicos y compactos en un espacio-tiempo descritos por un tensor de energía-momento $T_{ab}[\psi]$.

En principio, h_{ab} contiene (i) grados de libertad de norma, (ii) grados de libertad físicos radiativos, y (iii) grados de libertad físicos no radiativos. Éstos últimos asociados a las fuentes de materia. Por grados radiativos se está haciendo referencia a aquellos grados de libertad que satisfacen una ecuación de onda. Resulta ser que bajo cualquier norma, la única parte de la métrica que satisface una ecuación de este estilo es la parte *transversa y sin traza* (TT). Las componentes restantes son en tanto funciones que son gobernadas por ecuaciones de Poisson, es decir, no son modos radiativos. Este hecho, como se verá más adelante en la Sección 3.2.4 es oscurecido cuando se utilizan normas como la de Lorenz, en donde aparentemente, todas las componentes satisfacen una ecuación de onda.

En esta sección se da un repaso a la teoría de radiación gravitacional en el límite lineal de la RG sobre Minkowski, en la misma línea de estudio de la radiación electromagnética, comenzando con la discusión usual de la libertad de norma en espacios globalmente vacíos, para después contrastarla con el caso de fuentes de materia no nulas. Sin embargo, aunque en ambos casos la conclusión es que los grados de libertad radiativos están en la parte TT de h_{ab} , en una serie de recientes artículos, Ashtekar et. al. [20, 21] sugieren que ha existido desde el inicio de la teoría de radiación gravitacional una ambigüedad entre dos nociones distintas de los modos (TT): la primera, presente en la teoría linealizada, es la descomposición de la perturbación h_{ab} en sus partes irreducibles; la segunda, refiere al uso de proyectores para extraer la parte TT de h_{ab} . Sin embargo, como se explicará a lo largo de las subsecuentes secciones ambas nociones resultan ser equivalentes.

3.2.1. Ecuaciones linealizadas de Einstein

De acuerdo a los resultados del Capítulo 2, el cálculo de las cantidades de curvatura es inmediato. En la aproximación lineal la expansión de la métrica se trunca a primer orden y el espacio de fondo es el de Minkowski (i.e. $\tilde{R}_{ab} = 0$),

$$g_{ab} = \eta_{ab} + \lambda h_{ab}, \quad (3.50)$$

de ahí que la identificación $\tilde{\nabla}_a \rightarrow \partial_a$ es permisible. Con esta identificación, retomando a la Ec. (2.67), las ecuaciones de Einstein a primer orden en términos de la perturbación, forma

de onda, o potencial gravitacional h_{ab} toman la forma

$$G[h]_{ab}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(-\partial_a \partial_b h - \partial^c \partial_c h_{ab} + 2\partial^d \partial_{(a} h_{b)d} + \eta_{ab} \left[\partial_c \partial^c h - \partial_c \partial_d h^{cd} \right] \right) = 8\pi T_{ab}[\psi], \quad (3.51)$$

las cuales son reminiscencia de las Ecs. (3.4) para el potencial A_a . En el caso de (3.51) la fuente está dada por el tensor de energía-momento de los campos de materia $T_{ab}[\psi]$, es decir, la fuente de las OG, compatible con

$$\partial^a T_{ab} = 0. \quad (3.52)$$

Nótese que a nivel lineal no aparece el PTEM OG, discutido en la Sección 2.4, pues éste es cuadrático en h_{ab} . Cabe señalar que la expresión (3.51) será utilizada más adelante (Sección 3.2.4) para identificar la naturaleza de los grados de libertad independientes de h_{ab} . Ahora bien, retomando a la Ec. (2.69) las ecuaciones de campo en términos de $\bar{h}_{ab} = h_{ab} - 1/2\eta_{ab}h$, son de la forma

$$G[\bar{h}]_{ab}^{(1)} = -\frac{1}{2}\partial^d \partial_d \bar{h}_{ab} + \partial^c \partial_{(a} \bar{h}_{b)c} - \frac{1}{2}\eta_{ab} \partial^c \partial^d \bar{h}_{cd} = 8\pi T_{ab}[\psi]. \quad (3.53)$$

Esta expresión puede simplificarse aún más al escoger un sistema de coordenadas apropiado, es decir, escoger una norma de la misma manera que en el caso EM.

3.2.2. Libertad de norma en ausencia de fuentes

En la RG una transformación de norma es simplemente una transformación de coordenadas [53, 112, 122, 149, 154, 160]. Más aún, en teoría de perturbaciones la libertad de norma significa la «libertad» de identificar puntos entre el espacio-tiempo de fondo y en donde viven las perturbaciones[117–119]. Específicamente una transformación infinitesimal de coordenadas de la forma

$$x^a \rightarrow x^a + \xi^a, \quad (3.54)$$

bajo la cual la perturbación h_{ab} transforma como

$$h_{ab} \rightarrow h_{ab} - 2\partial_{(a} \xi_{b)}, \quad (3.55)$$

mientras que la variable \bar{h}_{ab} toma la forma

$$\bar{h}_{ab} \rightarrow \bar{h}_{ab} - (2\partial_{(a} \xi_{b)} - \partial_c \xi^c \eta_{ab}), \quad (3.56)$$

a su vez la traza de \bar{h}_{ab} transforma como

$$\bar{h} \rightarrow \bar{h} - 2\partial^c \xi_c. \quad (3.57)$$

Es sencillo probar que bajo las transformaciones (3.55), (3.56) las Ecs. (3.51) y (3.53) permanecen invariantes respectivamente. La clase de normas que interesan en el problema de radiación gravitacional son aquellas que satisfacen la condición de norma de Lorenz,

$$\partial^b \bar{h}_{ab} = 0, \quad (3.58)$$

en clara analogía con la condición de norma de Lorenz del EM dada por la Ec. (3.8). Esta norma siempre se puede imponer en el sentido de que si un potencial $\bar{h}_{ab}^{(1)}$ ⁵² no satisface la condición (3.58) (i.e., $\partial^a \bar{h}_{ab}^{(1)} \neq 0$) una transformación de la forma (3.56) en dicha perturbación $\bar{h}_{ab}^{(1)} \rightarrow \bar{h}_{ab}^{(2)} = \bar{h}_{ab}^{(1)} - (2\partial_{(a} \xi_{b)} - \partial_c \xi^c \eta_{ab})$, la condición $\partial^b \bar{h}_{ab}^{(2)} = 0$ se satisface siempre y cuando

⁵²En esta sección los superíndices en h_{ab} no tienen relación alguna con el orden en una expansión perturbativa, simplemente son para distinguir poder distinguir entre distintas perturbaciones, todas de primer orden.

el generador de la transformación ξ^a satisfaga la ecuación

$$\square \xi_a = \partial^b \bar{h}_{ab}^{(1)}, \quad (3.59)$$

cuyas soluciones siempre pueden ser encontradas. Más aún, la condición (3.58) implica que de los diez grados de libertad de \bar{h}_{ab} , sólo seis resultan independientes. La implementación de la condición de norma de Lorenz en las ecuaciones de campo (3.53) las simplifica notablemente, con lo que toman la forma de una ecuación de onda para \bar{h}_{ab} :

$$\square \bar{h}_{ab} = -16\pi T_{ab}. \quad (3.60)$$

Las soluciones a esta ecuación se analizarán más adelante en la Sección (3.2.5). La métrica completa se recupera a partir de $g_{ab} = \eta_{ab} + \bar{h}_{ab} - \frac{1}{2}\bar{h}\eta_{ab}$.

No obstante, no es esperado notar que, de la misma manera como sucede en la teoría EM, la condición de Lorenz no fije totalmente los grados de libertad de \bar{h}_{ab} cuando se consideran espacios-tiempo libres de fuentes (i.e., $T_{ab} = 0$). Para identificar la libertad de norma remanente considérese en primer lugar una segunda transformación de norma a generada por ζ_a a $\bar{h}_{ab}^{(2)}$, es decir, $\bar{h}_{ab}^{(2)} \rightarrow \bar{h}_{ab}^{(3)} = \bar{h}_{ab}^{(2)} - 2\partial_{(a}\zeta_{b)} - \partial_c \zeta^c \eta_{ab}$, dado que $\partial^b \bar{h}_{ab}^{(2)} = 0$, para preservar la condición de norma sobre $\bar{h}_{ab}^{(2)}$, esto es, $\partial^b \bar{h}_{ab}^{(3)} = 0$, se tiene que satisfacer la siguiente ecuación:

$$\square \zeta_a = 0. \quad (3.61)$$

En segundo lugar considérese a las ecuaciones de campo linealizadas de Einstein en vacío

$$\square \bar{h}_{ab} = 0. \quad (3.62)$$

Siguiendo la discusión de Wald [160, p.70], en una hipersuperficie a tiempo constante $t = t_0$ se fija como condición inicial a (3.57), con lo que

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{h}|_{t_0} - 2\partial^c \zeta_c|_{t_0} \\ &= \bar{h}|_{t_0} - 2(-\partial^0 \zeta_0 + \partial^i \zeta_i)|_{t_0} \\ &= \bar{h}|_{t_0} - 2(\partial_t \zeta_0 - \nabla \cdot \zeta)|_{t_0}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Por otra parte, tomando la derivada temporal de la misma ecuación (3.57) y evaluándola en $t = t_0$ se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t \bar{h}|_{t_0} - 2\partial_t \partial^c \zeta_c|_{t_0} \\ &= \partial_t \bar{h}|_{t_0} - 2\partial_t (\partial_t \zeta_0 - \nabla \cdot \zeta)|_{t_0} \\ &= \partial_t \bar{h}|_{t_0} + 2(-\partial_{tt} \zeta_0 + \nabla \cdot \partial_t \zeta)|_{t_0} \\ &= \partial_t \bar{h}|_{t_0} + 2(-\nabla^2 \zeta_0 + \nabla \cdot \partial_t \zeta)|_{t_0}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

donde en la última línea se ha hecho uso de la componente temporal ζ_0 en la condición (3.61) para ζ_a . Por otro lado, de la Ec. (3.56) es posible obtener dos ecuaciones más para fijar por completo a ζ_a . Para ello considérese a \bar{h}_{0a} , con lo que

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{h}_{0a}|_{t_0} - 2\partial_{(0}\zeta_a)|_{t_0} + \partial^c \zeta_c \eta_{0a}|_{t_0} \\ &= \bar{h}_{0a}|_{t_0} - \partial_t \zeta_a|_{t_0} - \partial_a \zeta_0|_{t_0}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

De la misma manera, tomando la derivada temporal a (3.65), evaluando en $t = t_0$ y utilizando la condición (3.61) se obtiene la última ecuación de condiciones iniciales

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t \bar{h}_{0a} \Big|_{t_0} - \partial_{tt} \zeta_0 \Big|_{t_0} - \partial_t \partial_a \zeta_0 \Big|_{t_0} \\ &= \partial_t \bar{h}_{0a} \Big|_{t_0} - \nabla^2 \zeta_0 \Big|_{t_0} - \partial_a \partial_0 \zeta_0 \Big|_{t_0}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Las Ecs. (3.13), (3.64), (3.65) y (3.66), fijan los valores iniciales de las cuatro componentes de ζ_a . Bajo estas consideraciones se define a ζ^a como la solución a la ecuación (3.61), es decir, $\square \zeta_a = 0$. Más aún, bajo los mismo argumentos utilizados en el caso EM (Sección 3.1.2), si \bar{h}_{ab} satisface la Ec. (3.62), se consiguen las siguientes dos condiciones:

$$\bar{h}_{0k} = 0, \quad \eta^{ab} \bar{h}_{ab} = 0. \quad (3.67)$$

Las cuales son validas en regiones libres de fuentes. En consecuencia a la condición sin traza se sigue de inmediato que $\bar{h}_{ab} = h_{ab}$. Cabe señalar que dado que \bar{h}_{ab} satisface la condición de Lorenz, se puede tomar la componente temporal que, junto con la primera condición de (3.67), satisface $\partial_t \bar{h}_{00} = 0$; por lo que de la ecuación en vacío (3.62), la componente temporal satisface $\nabla^2 \bar{h}_{00} = 0$ cuya única solución con condiciones triviales de frontera es

$$\bar{h}_{00} = 0. \quad (3.68)$$

En conclusión de los seis grados de libertad remanentes tras satisfacer la condición de Lorenz, las condiciones (3.67), (3.68) implican que la perturbación es puramente espacial, sin traza, y transversa, con lo que solamente dos grados de libertad son linealmente independientes. La perturbación que satisfaga las anteriores condiciones se dice que esta en la *norma sin traza-transversa (TT)*, y se identifica con h_{ab}^{TT} . En este punto la barra sobre h_{ab} se vuelve redundante. Como se verá en la siguiente sección este resultado se recupera como caso particular del escenario con fuente de materia (ver Ecs. (3.87)).

3.2.3. Libertad de norma en presencia de fuentes

Es claro que en situaciones más reales el tensor de energía-momento no es nulo. En este contexto además de los grados de libertad físicos radiativos, están presentes aquellos que son físicos pero no radiativos. De ahí que no sea posible, al considerar fuentes, escribir directamente a la perturbación en la norma TT. Sin embargo, es posible tomar dos enfoques. El primero es ver a la perturbación como una única descomposición en partes irreducibles con el propósito de identificar los grados de libertad de manera clara. Lo anterior se logra al dividir a la perturbación en una contribución escalar, vectorial y tensorial, y después analizar su comportamiento bajo transformaciones de norma para construir luego combinaciones que en efecto sean invariantes de norma. Este formalismo es ampliamente aplicado en teoría de perturbaciones cosmológicas invariantes bajo transformaciones de norma [27]. En cierto sentido, lo que se tratará en la siguiente sección es el límite lineal de dicho formalismo [35, 72]. En específico se recogen las ideas de [83, 128, 130].

El segundo enfoque es el análisis de h_{ab} en la zona lejana de onda, similar al realizado para el caso EM en la Sección 3.1.4, éste será expuesto en la Sección 3.2.5. No obstante, ambos enfoques resultan ser equivalentes con la introducción de un operador que aísla a la parte TT de la perturbación, introducido en la Sección 3.2.6.

3.2.4. Descomposición en partes irreducibles del potencial gravitacional

Retomando a la Ec. (3.60), en la que se ha utilizado la condición de norma de Lorenz para simplificar notablemente a la Ec. (3.53), se tiene la aparente peculiaridad de que todas las

componentes de la perturbación \bar{h}_{ab} satisfacen en efecto una ecuación de onda, lo cual lleva a pensar que todas son grados de libertad radiativos; aunque en realidad esto no es del todo correcto. Para comenzar la discusión considérese el hecho de que la perturbación h_{ab} puede ser considerada como una descomposición "3+1" dada por⁵³

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{0j} \\ h_{j0} & h_{jk} \end{pmatrix}, \quad (3.69)$$

con la importante observación de que h_{00} bajo una rotación de los ejes espaciales transforma como un escalar, h_{0j} transforma como un vector espacial y h_{jk} transforma como un tensor espacial. De acuerdo al Apéndice B.3, cada parte de la descomposición (3.69) se expresa como

$$h_{00} = 2\phi, \quad (3.70a)$$

$$h_{0j} = \beta_j + \partial_j\gamma, \quad (3.70b)$$

$$h_{jk} = \frac{1}{3}H\delta_{jk} + \left(\partial_{jk} - \frac{1}{3}\delta_{jk}\nabla^2\right)\Upsilon + 2\partial_{(j}\zeta_{k)} + h_{jk}^{\text{TT}}. \quad (3.70c)$$

donde se tienen las condiciones de transversalidad y sin traza

$$\partial_j\beta^j = 0, \quad \partial_j\zeta^j = 0, \quad \partial_k h^{\text{TT}jk} = 0, \quad \delta_{jk} h^{\text{TT}jk} = 0, \quad (3.71)$$

respectivamente. Nótese que en términos de la descomposición (3.70) la traza de h_{ab} adopta la forma

$$\eta^{ab}h_{ab} = H - 2\phi. \quad (3.72)$$

Bajo la descomposición (3.70) las diez cantidades de $h_{\alpha\beta}$ están representadas por los cuatro escalares ϕ , γ , H , Υ , por las cuatro componentes independientes de los vectores β_j y ζ_j , y por las dos componentes independientes de h_{jk}^{TT} . Por otro lado, dado que se desea obtener el comportamiento de una transformación de norma en presencia de fuentes, resulta natural considerar una transformación de la forma (3.55) generada por ξ_a . Este generador también puede ser descompuesto en una parte escalar y otra vectorial,

$$\xi_0 = \alpha, \quad \xi_j = b_j + \partial_j c, \quad (3.73)$$

respectivamente, donde $\partial_j b^j = 0$. Así, al aplicar la regla de transformación (3.55) a las componentes (3.70) se encuentra

$$\begin{aligned} h_{00} &\rightarrow h_{00} - 2\partial_0\xi_0 & h_{0j} &\rightarrow h_{0j} - \partial_0\xi_j - \partial_j\xi_0 \\ &\rightarrow 2(\phi - \partial_0\alpha), & &\rightarrow (\beta_j - \partial_0 b_j) + \partial_j(\gamma - \alpha - \partial_0 c), \end{aligned} \quad (3.74)$$

mientras que para las componentes espaciales

$$\begin{aligned} h_{jk} &\rightarrow h_{jk} - \partial_j\xi_k - \partial_k\xi_j \\ &\rightarrow h_{jk} - \partial_j b_k - \partial_k b_j - 2\partial_j\partial_k c \\ &\rightarrow \frac{1}{3}H\delta_{jk} + \partial_j\partial_k(\Upsilon - 2c) - \frac{1}{3}\delta_{jk}\nabla^2\Upsilon + \partial_j(\zeta_k - b_k) + \partial_k(\zeta_j - b_j) + h_{jk}^{\text{TT}} \\ &\rightarrow \frac{1}{3}\delta_{jk}(H - 2\nabla^2 c) + \left(\partial_{jk} - \frac{1}{3}\nabla^2\right)(\Upsilon - 2c) + \partial_j(\zeta_k - b_k) + \partial_k(\zeta_j - b_j) + h_{jk}^{\text{TT}}, \end{aligned} \quad (3.75)$$

⁵³La descomposición se realiza sobre h_{ab} , sin embargo, es completamente equivalente realizarla sobre \bar{h}_{ab} .

con lo que se obtienen las siguientes reglas de transformación

$$\phi \rightarrow \phi - \partial_t \alpha, \quad (3.76a)$$

$$\beta_j \rightarrow \beta_j - \partial_t b_j, \quad \gamma \rightarrow \gamma - \alpha - \partial_t c, \quad (3.76b)$$

$$H \rightarrow H - 2\nabla^2 c, \quad \Upsilon \rightarrow \Upsilon - 2c, \quad \zeta_j \rightarrow \zeta_j - b_j, \quad h_{jk}^{\text{TT}} \rightarrow h_{jk}^{\text{TT}}. \quad (3.76c)$$

Las Ecs. (3.76) muestran que en efecto la única cantidad invariante ante transformaciones de norma es la parte TT, es decir, h_{jk}^{TT} . Ahora bien, con las reglas de transformación anteriores es posible construir cantidades que sean combinaciones de ϕ , β_j , γ , H , λ , ζ_j y sean invariantes bajo transformaciones de norma. En sí, lo que se busca es el análogo a la teoría EM en donde los campos eléctrico y magnético ya son combinaciones invariantes de norma de los potenciales ϕ_m y A_j , dados por la Ec. (3.5). Para encontrar estas combinaciones conviene descomponer al tensor de Einstein lineal en h_{ab} (3.51) en sus componentes temporal, espacio-temporal y espaciales dadas por

$$G_{00}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(-\partial_{tt} h - \partial^\alpha \partial_\alpha h_{00} + 2\partial^\alpha \partial_t h_{0\alpha} - \partial^\alpha \partial_\alpha h + \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} \right) \quad (3.77a)$$

$$G_{0j}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(-\partial_{tj} h - \partial^\alpha \partial_\alpha h_{0j} + 2\partial^\alpha \partial_{(0} h_{j)\alpha} \right) \quad (3.77b)$$

$$G_{jk}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(-\partial_{jk} h - \partial^\alpha \partial_\alpha h_{jk} + 2\partial^\alpha \partial_{(j} h_{k)\alpha} + \delta_{jk} (\partial_\alpha \partial^\alpha h - \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta}) \right) \quad (3.77c)$$

respectivamente. Sustituyendo la descomposición (3.70) en (3.77) se obtiene

$$G_{00}^{(1)} = -2\nabla^2 \Psi \quad (3.78a)$$

$$G_{0j}^{(1)} = -2\partial_{tj} \Psi + 2\nabla^2 \Theta_j \quad (3.78b)$$

$$G_{jk}^{(1)} = -\frac{2}{3} \delta_{jK} \nabla^2 (\Phi - \Psi) - 2\delta_{jK} \partial_{tt} \Psi + \left(\partial_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{jK} \nabla^2 \right) (\Phi - \Psi) + 2(\partial_{tj} \Theta_k + \partial_{tk} \Theta_j) - \frac{1}{2} \square h_{jk}^{\text{TT}} \quad (3.78c)$$

donde naturalmente se han obtenido las siguientes combinaciones

$$\Phi \equiv \phi - \partial_t \gamma + \frac{1}{2} \partial_{tt} \Upsilon, \quad (3.79a)$$

$$\Theta_j \equiv -\frac{1}{4} (\beta_j - \partial_t \zeta_j), \quad (3.79b)$$

$$\Psi \equiv \frac{1}{6} (H - \nabla^2 \Upsilon), \quad (3.79c)$$

la cuales resultan ser invariantes bajo las reglas de transformación (3.76).⁵⁴ Es importante notar este hecho, pues es común que en la discusión de dicha descomposición (ver [83, 128]) se introduzcan antes las combinaciones (4.57), y después se calculen las componentes (3.78). De las condiciones (3.71) es posible realizar un conteo de los grados de libertad de $G_{ab}^{(1)}$. Para ello considérese que Φ , Θ_j , Ψ representan cuatro funciones invariantes de norma dada la condición de transversalidad $\partial^j \Theta_j = 0$. Además h_{jk}^{TT} contiene en principio, seis funciones independientes, pero existen cuatro condiciones para h_{jk}^{TT} , a decir, la condición de transversalidad y sin traza de las Ecs. (3.71) respectivamente, por lo que de estas seis funciones sólo dos resultan ser independientes. Por lo tanto, al final se tienen **seis grados de libertad independientes**.

⁵⁴Esta es la versión para un fondo de Minkowski de los bien conocidos potenciales de Bardeen [27].

La elección de los factores $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{6}$ en (4.57) es por motivos de conveniencia; diversos autores definen las cantidades invariantes con distintas constantes [53, 83, 130]. La descomposición (3.78) empata con la de [128] a excepción de factores con potencias de c , la velocidad de la luz, consecuencia natural de la elección de unidades, además de reflejar la propiedad, al igual que (3.70), de que (3.78b) contiene una parte longitudinal y otra transversa mientras que (3.78c) contiene la traza, una parte longitudinal sin traza, otra longitudinal y transversa y, en el último término, la parte transversa y sin traza.

Para poder imponer las ecuaciones de campo (3.51), conviene igualmente descomponer a T_{ab} en sus partes irreducibles como

$$T_{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{c|c} T_{00} & T_{0j} \\ \hline T_{j0} & T_{jk} \end{array} \right), \quad (3.80)$$

definido como

$$T_{00} = \rho, \quad (3.81a)$$

$$T_{0j} = -S_j - \partial_j S, \quad (3.81b)$$

$$T_{jk} = \tau \delta_{jk} + \left(\partial_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{jk} \nabla^2 \right) \sigma + 2\partial_{(j} \sigma_{k)} + \sigma_{jk}^{\text{TT}}, \quad (3.81c)$$

con las condiciones

$$\partial_j S^j = 0, \quad \partial_j \sigma^j = 0, \quad \partial_k \sigma^{\text{TT}jk} = 0, \quad \delta_{jk} \sigma^{\text{TT}jk} = 0. \quad (3.82)$$

Sin embargo, se tiene a nivel lineal la condición de conservación $\partial_b T^{ab} = 0$ que da pie a tres relaciones extra:

$$\nabla^2 S = -\partial_t \rho, \quad (3.83a)$$

$$\nabla^2 \sigma_j = -\partial_t S_j, \quad (3.83b)$$

$$\nabla^2 \sigma = -\frac{3}{2}(\tau + \partial_t S). \quad (3.83c)$$

Con esto en mente el igualar las componentes temporales (3.78a) con (3.81a) da pie a una ecuación

$$\nabla^2 \Psi = -\frac{\kappa}{2} \rho, \quad (3.84)$$

donde $\kappa = 8\pi$. Asimismo, la igualdad entre las componentes espacio-temporales (3.78b) y (3.81b) da pie a dos ecuaciones

$$\nabla^2 \Theta_j = -\frac{\kappa}{2} S_j, \quad (3.85a)$$

$$\partial_t \Psi = \frac{\kappa}{2} S. \quad (3.85b)$$

Por último, el imponer las ecuaciones de campo en la parte espacial, i.e. la igualdad entre (3.78c) y (3.81c) se determinan cuatro ecuaciones más

$$\nabla^2(\Phi - \Psi) = -\frac{3}{2}(\kappa\tau + 2\partial_{tt}\Psi), \quad (3.86a)$$

$$(\Phi - \Psi) = \kappa\sigma, \quad (3.86b)$$

$$\partial_t\Theta_k = \frac{\kappa}{2}\sigma_k, \quad (3.86c)$$

$$\square h_{jk}^{\text{TT}} = -2\kappa\sigma_{jk}^{\text{TT}}. \quad (3.86d)$$

Las ecuaciones (3.85b), (3.86b), (3.86c), permiten determinar los potenciales Ψ , Φ y Θ_k una vez conocida la fuente en virtud de las Ecs. (3.83). Asimismo la Ec. (3.86a) se puede refinar aún más al derivar respecto al tiempo a la Ec. (3.85b) y utilizar la Ec. (3.84). Con ello, las funciones invariantes de norma satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\nabla^2\Psi = -\frac{\kappa}{2}\rho, \quad (3.87a)$$

$$\nabla^2\Phi = -\frac{3\kappa}{2}\left(\tau + \frac{1}{3}\rho + \partial_t S\right), \quad (3.87b)$$

$$\nabla^2\Theta_j = -\frac{\kappa}{2}S_j, \quad (3.87c)$$

$$\square h_{jk}^{\text{TT}} = -2\kappa\sigma_{jk}^{\text{TT}}. \quad (3.87d)$$

Las Ecs. (3.87) son el punto culminante de la teoría lineal, pues estas representan a una formulación invariante ante transformaciones de norma. La primera diferencia a notar es que en la formulación de Lorenz todas las componentes de la perturbación aparentan satisfacer una ecuación de onda, cuestión que lleva a pensar que en efecto, todos los grados de libertad de la teoría son radiativos. No obstante, las Ecs. (3.87), las cuales son totalmente equivalentes a las ecuaciones de campo usuales (3.51), muestran lo contrario, **los únicos grados de libertad radiativos son dos y se encuentran en la parte TT**, h_{jk}^{TT} . Las demás ecuaciones, aunque independientes del tiempo, son grados de libertad físicos pero no radiativos, las cuatro funciones Φ , Ψ , Θ_j , satisfacen ecuaciones de Poisson que pueden ser resueltas a cada tiempo t dependiendo del estado de la materia a ese mismo tiempo, reminiscencia de la formulación Newtoniana. Notése además el parecido en la estructura de las Ecs. (3.87) con las Ecs. (3.26) del caso EM.

Los dos grados de libertad radiativos corresponden a los dos modos de polarización h_+ y h_\times asociados a las componentes $h_{xx} = -h_{yy}$ y h_{xy} , respectivamente. Cuando se escoge un sistema de coordenadas en que la onda se propaga en la dirección z , la métrica completa adopta la forma

$$ds^2 = -dt^2 + (1 + h_+)dx^2 + (1 - h_+)dy^2 + 2h_\times dx dy + dz^2. \quad (3.88)$$

Por último, conviene notar que si se considera vacío, las Ecs. (3.87) adoptan la forma

$$\nabla^2\Psi = 0, \quad (3.89a)$$

$$\nabla^2\Phi = 0, \quad (3.89b)$$

$$\nabla^2\Theta_j = 0, \quad (3.89c)$$

$$\square h_{jk}^{\text{TT}} = 0, \quad (3.89d)$$

cuyas soluciones para condiciones triviales de frontera implican que los modos escalares y vectoriales son nulos $\Psi = \Phi = \Theta_j = 0$. Además, en virtud de la Ec. (3.72) se recupera

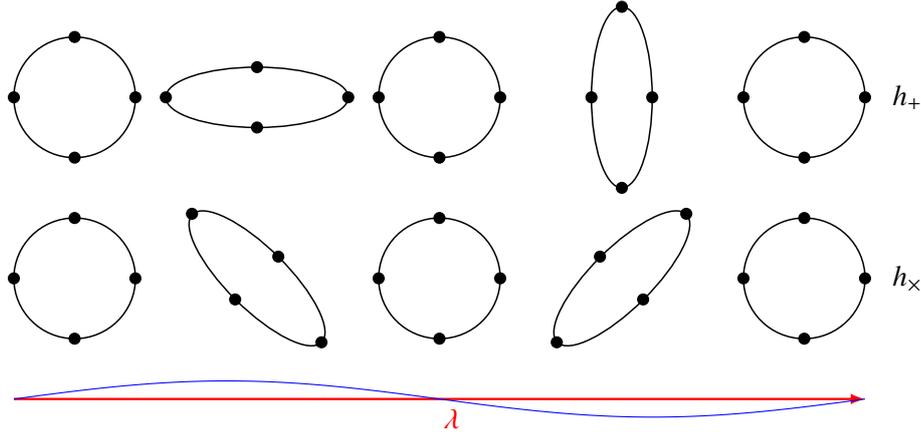


FIGURA 3.1: Interacción de una onda gravitacional monocromática que se propaga en la dirección z . La parte superior refiere a la polarización h_+ ; mientras la parte inferior refiere a la polarización h_\times . Como su nombre lo indica, la polarización h_\times corresponde a la polarización h_+ cuando el sistema de coordenadas es rotado 45° .

$\bar{h}_{jk} = h_{jk}^{\text{TT}}$. Más aún, en vacío se obtiene el resultado similar al caso EM (ver Ec. (3.28)). Para ello notése que la solución a la Ec. (3.89d) es una onda transversa de la forma

$$h_{jk}^{\text{TT}} = H_{jk} e^{ik_a x^a}, \quad (3.90)$$

donde H_{jk} es el tensor de polarización. Si la onda se propaga en la dirección z que entra en la página, es decir, $k^a = (k_0, 0, 0, k_z)$, las componentes del tensor de polarización se reducen a

$$H_{xj} = H_{zz} = 0, \quad H_{xx} = -H_{yy} = h_+, \quad H_{xy} = h_\times. \quad (3.91)$$

Además, ante una rotación θ sobre el eje de propagación la onda adquiere una fase $h_{jk}^{\text{TT}} \rightarrow h_{jk}^{\text{TT}} e^{i2\theta}$, lo que refleja, bajo la perspectiva de la física de partículas, la naturaleza de espín 2 de h_{jk}^{TT} .

Por otro lado, como se mencionaba en la introducción de esta tesis, el cómo interactúan las OG con la materia, es decir, si es que producen algún efecto físico, fue motivo de históricos debates. Al respecto, es sabido que las OG producen cambios en la distancia propia entre dos partículas. La descripción puede ser realizada en el sistema de coordenadas TT, representado por la métrica (3.88), o bien utilizando la ecuación de desviación geodésica o coordenadas normales de Riemann [47, 109]. El resultado es que una OG genérica puede ser entendida como una superposición de dos campos de marea que se propagan en el vacío. Los efectos de la polarizaciones h_+ y h_\times en un anillo de partículas se muestran en la Fig. 3.1.

3.2.5. Potencial gravitacional en la zona de onda lejana

En esta sección se analiza el potencial gravitacional \bar{h}_{ab} de manera similar al caso EM de la Sección 3.1.4. Para ello, considérese la ecuación de onda con fuentes que satisface \bar{h}_{ab} , a decir, la Ec. (3.60). La solución a esa ecuación en la zona lejana de onda, es decir, manteniendo sólo términos radiativos que decaen como r^{-1} es

$$\bar{h}_{ab}(t, \mathbf{x}) = \frac{\kappa}{2\pi} \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} n_{j_1 \dots j_k} \left(\frac{d}{d\tau} \right)^k \left\{ \int T_{ab}(\tau, \mathbf{x}') x'^{j_1 \dots j_k} d^3 x' \right\}, \quad (3.92)$$

donde $\kappa = 8\pi$ (ver Apéndice B.2). El observar la ecuación (3.92) permite establecer que en cada término l habrá integrales del tensor energía-momento T_{ab} , es decir, cada término representa un momento multipolar. Para efectos de esta tesis, sólo se tendrá en cuenta el momento multipolar dominante que es precisamente el momento cuadrupolar.⁵⁵ Sin embargo, es ilustrativo tener en cuenta términos de mayor orden. De esta manera, tomando los primeros términos de la solución (3.92) para cada componente se obtiene [128, 153]

$$\bar{h}_{00} = \frac{4}{r} \left\{ M + \frac{1}{2} n_j n_k \ddot{I}^{jk} + \frac{1}{6} n_j n_k n_l \ddot{I}^{jkl} + \dots \right\} \quad (3.93a)$$

$$\bar{h}_{0j} = \frac{4}{r} \left\{ \frac{1}{2} \ddot{I}^{jk} n^k + \frac{1}{12} n^k n^l (\ddot{I}^{jkl} - 2\epsilon_{mjk} \ddot{J}_{ml}) + \dots \right\} \quad (3.93b)$$

$$\bar{h}_{jk} = \frac{4}{r} \left\{ \frac{1}{2} \ddot{I}^{jk} + \frac{1}{6} n^l (\ddot{I}^{jkl} + 2\epsilon_{mlj} \ddot{J}_{mk} + 2\epsilon_{mlk} \ddot{J}_{mj}) + \dots \right\} \quad (3.93c)$$

donde se ha adoptado las siguientes definiciones de los momentos multipolares

$$I^L \equiv \int T_{00} x^L d^3x, \quad (3.94a)$$

$$J_j^L \equiv \epsilon_{jlm} \int T_{0m} x^L d^3x. \quad (3.94b)$$

$$M_{jk,L} \equiv \int T_{jk} x^L d^3x. \quad (3.94c)$$

Cabe mencionar que en este formalismo no sólo se está asumiendo que el fondo es Minkowski sino que se está usando una foliación de $t = cte$. Asimismo, la notación compacta $a^L \equiv a^{j_1 \dots j_l}$. Nótese que para el caso $l = 0$ en (3.94a) se recupera la masa total asociada a la fuente $M = \int T_{00} d^3x$. También es relevante indicar de que la solución (3.92) ya asume la condición de movimiento interno lento de las fuentes. Observando las Ecs. (3.93) se concluye en general que las componentes de \bar{h}_{ab} en la zona lejana de onda adoptan la forma

$$\bar{h}_{00} = \frac{4M}{r} + \frac{1}{r} C(\tau, \mathbf{n}), \quad (3.95a)$$

$$\bar{h}_{0j} = \frac{1}{r} D_j(\tau, \mathbf{n}), \quad (3.95b)$$

$$\bar{h}_{jk} = \frac{1}{r} A_{jk}(\tau, \mathbf{n}). \quad (3.95c)$$

donde las funciones C , D_j y A_{jk} dependen del tiempo retardado definido en (3.30) y del vector radial unitario $n_j = x_j/r$, con r la distancia a la fuente. En estas funciones están contenidos todos los momentos multipolares, sin embargo, para esta discusión su forma exacta no es necesaria. Nótese que aquí también la regla de diferenciación (3.36) es válida, en términos de \bar{h}_{ab} toma la forma

$$\partial_j \bar{h}^{ab} = -n_j \partial_\tau \bar{h}^{ab}. \quad (3.96)$$

Una vez más, es útil introducir la descomposición en sus partes irreducibles de las cantidades C , D_j y A_{jk} . Para C es trivial pues es un escalar. Para D_j se tiene

$$D_j = D n_j + D_j^T, \quad (3.97)$$

⁵⁵Para las expresiones de los momentos multipolares a mayores ordenes ver e.g. [112, 128].

donde Dn_j es la parte longitudinal de D_j y D_j^T es la parte transversa que satisface $n_j D_j^T = 0$. De manera similar para A_{jk} se obtiene

$$A_{jk} = \frac{1}{3} \delta_{jk} A + \left(n_j n_k - \frac{1}{3} \delta_{jk} \right) + 2n_{(j} A_{k)}^T + A_{jk}^{TT}, \quad (3.98)$$

donde $\frac{1}{3} \delta_{jk} A$ es la traza, el segundo término es la parte longitudinal sin traza, mientras que el tercer término $2n_{(j} A_{k)}^T$ es la parte longitudinal y transversa, debido a que $n_j A_j^T = 0$. Por último, A_{jk}^{TT} satisface

$$n_j A_{jk}^{TT} = 0, \quad \delta_{jk} A_{jk}^{TT} = 0, \quad (3.99)$$

es decir, es la parte TT de A_{jk} . Por otro lado, la condición de norma de Lorenz se simplifica en la zona lejana de onda a

$$\partial_\tau (\bar{h}_{00} + \bar{h}_{0k} n_k) = 0, \quad \partial_\tau (\bar{h}_{0j} + \bar{h}_{jk} n_k) = 0. \quad (3.100)$$

De esta manera al sustituir a las descomposiciones (3.97) y (3.98) en las Ecs. (3.95), y posteriormente al sustituir éstas en las Ecs. (3.100) se obtienen las siguientes condiciones

$$C = D, \quad (3.101a)$$

$$D = \frac{1}{3}(A + 2B), \quad (3.101b)$$

$$D_j^T = A_j^T \quad (3.101c)$$

Así, incorporando a las condiciones (3.101) en las Ecs. (3.95), éstos últimos adoptan la forma

$$\bar{h}_{00} = \frac{4M}{r} + \frac{1}{3r} C(A + 2B), \quad (3.102a)$$

$$\bar{h}_{0j} = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{3}(A + 2B)n_j + A_j^T \right], \quad (3.102b)$$

$$\bar{h}_{jk} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} \delta_{jk} A + \left(n_j n_k - \frac{1}{3} \delta_{jk} \right) + 2n_{(j} A_{k)}^T + A_{jk}^{TT} \right]. \quad (3.102c)$$

Las condiciones de transversalidad y sin traza permiten determinar el número de grados de libertad independientes a 6. Ahora bien, si se considerará una segunda transformación de norma generada por ζ_a que satisfaga la Ec. (3.61), las soluciones a dicha ecuación pueden escribirse como

$$\zeta_0 = \frac{1}{r} \alpha(\tau, \mathbf{n}) + \mathcal{O}(r^{-2}), \quad (3.103a)$$

$$\zeta_j = \frac{1}{r} \beta_j(\tau, \mathbf{n}) + \mathcal{O}(r^{-2}). \quad (3.103b)$$

donde α y β_j son funciones arbitrarias que también pueden ser descompuestas en sus partes irreducibles como $\beta_j n_j + \beta_j^T$, con $\beta_j^T n_j = 0$. De esta manera, utilizando las reglas de diferenciación (3.36) junto con la ley de transformación de norma de \bar{h}_{ab} , dada por la Ec. (3.56), se

obtienen eventualmente las siguientes reglas de transformación

$$A \rightarrow A + 3\partial_\tau\alpha - \partial_\tau\beta, \quad (3.104a)$$

$$B \rightarrow B + 2\partial_\tau\beta, \quad (3.104b)$$

$$A_j^T \rightarrow A_j^T + \partial_\tau\beta_j^T, \quad (3.104c)$$

$$A_{jk}^{TT} \rightarrow A_{jk}^{TT}. \quad (3.104d)$$

Con lo que nuevamente se confirma que la única parte que es invariante bajo transformaciones de norma es la parte TT. Más aún, de las Ecs. (3.104) se pueden fijar a α , β y β_j^T de tal manera que A , B y A_j^T se anulen. Así, implementando las consideraciones anteriores, las Ecs. (3.102) toman la forma

$$\bar{h}_{00} = \frac{4M}{r}, \quad (3.105a)$$

$$\bar{h}_{0j} = 0, \quad (3.105b)$$

$$\bar{h}_{jk} = \frac{1}{r}A_{jk}^{TT}(\tau, \mathbf{n}). \quad (3.105c)$$

Las Ecs. (3.105) demuestran que en la zona de onda los términos dominantes se encuentran en la parte puramente temporal y la parte espacial de \bar{h}_{ab} . Más aún, dadas las condiciones de que satisface la parte TT, es decir, las Ecs. (3.99), los grados de libertad se han reducido a dos y están contenidos en las componentes A_{jk}^{TT} . En conclusión, en la zona lejana de onda, la norma TT también puede ser impuesta al ser expresados de la forma (3.105). Es posible recuperar estos mismos directamente al realizar la expansión multipolar directamente a la Ec. (3.87) en la zona de onda.

3.2.6. Extracción de la parte transversa y sin traza

En las dos secciones anteriores se mostró que los grados de libertad radiativos están, en efecto, contenidos en la parte TT de \bar{h}_{ab} . En este sentido, la cuestión se reduce a la siguiente: dada una perturbación cualquiera que no se encuentre en la norma TT, ¿cómo pueden ser extraídos únicamente los grados de libertad radiativos? En la práctica, esta cuestión tiene su respuesta en analogía con el caso EM, en el cual se utilizan proyectores que aíslan la parte transversa del resto (ver Sección 3.1.6).

Retomando al proyector \mathcal{P}_k^j definido como en (3.45), es posible introducir un proyector más general construido a partir de éste último como

$$\mathcal{P}_{lm}^{jk} \equiv \mathcal{P}_l^j \mathcal{P}_m^k - \frac{1}{2} \mathcal{P}^{jk} \mathcal{P}_{lm}, \quad (3.106)$$

el cual en virtud de las propiedades de la Ec. (3.46) satisface

$$\mathcal{P}_{lm}^{jk} n^m = 0, \quad \mathcal{P}_{lm}^{jk} \delta^{lm} = 0. \quad (3.107)$$

además de ser simétrico en jk y en lm . Con las anteriores propiedades es sencillo probar que dado un tensor espacial simétrico B_{jk} se cumple

$$\mathcal{P}_{lm}^{jk} B_{jk} = B_{lm}^{TT}. \quad (3.108)$$

La utilidad de estos proyectores se aprovecha al notar la descomposición *simétrica y sin traza de tensores* (STF por sus siglas en inglés; ver e.g. [128, 133, 153]). Bajo este esquema, un

tensor de la forma $B_{jk} = s_j s_k$ puede ser descompuesto como

$$B_{jk} = B_{\langle jk \rangle} + \frac{1}{3} \delta_{jk} B_{ii}, \quad (3.109)$$

donde $B_{\langle jk \rangle} \equiv s_j s_k - \frac{1}{3} \delta_{jk} s^2$. Bajo esta descomposición la acción del proyector (3.106) es

$$\mathcal{P}_{lm}^{jk} B_{jk} = \mathcal{P}_{lm}^{jk} B_{\langle jk \rangle}, \quad (3.110)$$

donde se ha utilizado la propiedad (3.107). La Ec. (3.109) puede ser generalizada para tensores espaciales con más índices, sin embargo, para efectos de esta tesis, sólo se necesita ésta última.

3.3. Formalismo cuadrupolar

En las secciones anteriores se demostró que la naturaleza radiativa de \bar{h}_{ab} está totalmente contenida en la parte TT y esta a su vez puede ser extraída a razón de utilizar un proyector. En esta sección se retoma la solución (3.93c) a orden dominante en r^{-1} y la relación de ésta con la energía radiada, las cuales a su vez están relacionadas con el PTEM OG discutido en la Sección 2.4.

Retomando el primer término de la Ec. (3.93c), es decir, la parte puramente espacial de \bar{h}_{ab} dada por

$$\bar{h}_{jk} = \frac{2}{r} \ddot{\mathcal{I}}_{jk}(\tau), \quad (3.111)$$

donde $\mathcal{I}_{jk}(\tau)$ es el *momento cuadrupolar de masa* definido en términos de la densidad de masa newtoniana ρ como

$$\mathcal{I}_{jk}(\tau) \equiv \int T_{00} x_j x_k d^3x = \int \rho x_j x_k d^3x. \quad (3.112)$$

Ahora bien, de acuerdo a las secciones anteriores, la parte radiativa está contenida en la parte TT, por lo que simplemente hay que utilizar el proyector (3.106) en la Ec. (3.111). Bajo estas consideraciones se deduce la famosa formula cuadrupolar derivada por Einstein:

$$\boxed{h_{jk}^{\text{TT}} = \frac{2G}{c^4 r} \mathcal{P}_{jklm}(\mathbf{n}) \left\{ \frac{d^2 \mathcal{I}_{lm}(\tau)}{dt^2} + \mathcal{O}(c^{-1}) \right\} + \mathcal{O}(r^{-2})}. \quad (3.113)$$

Donde se han restaurado las unidades para tener en cuenta de que se están despreciando términos de mayor orden en c y en r . La Ec. (3.113) es quizás el resultado más importante en la teoría de emisión de OG, pues demuestra el hecho de que la radiación gravitacional es de naturaleza cuadrupolar. Es decir, siempre que exista una variación temporal del momento cuadrupolar, tomará partida la emisión de OG. Más aún las leyes de conservación de la masa y del momento lineal prohíben la emisión de radiación monopolar y dipolar.

3.3.1. Flujo de energía y momento

Considérese el PTEM OG expresado como en (2.105), es decir,

$$\Theta_{ab}^{(\text{RG})} = \frac{1}{32\pi} \left\langle \left\langle \partial_a \bar{h}_{cd} \partial_b \bar{h}_{ef} \left(\eta^{ce} \eta^{df} - \frac{1}{2} \eta^{cd} \eta^{ef} \right) - 2 \partial_c \bar{h}_{d(a} \partial_{b)} \bar{h}^{cd} \right\rangle \right\rangle. \quad (3.114)$$

Ahora bien, se busca implementar en primer lugar la norma de Lorenz (3.58); bajo esta suposición el último término de (3.114) se anula al expresar a éste como $\partial_c (h_{d(a}^{\text{TT}} \partial_{b)} h^{\text{TT}cd}) -$

$h_{d(a}^{\text{TT}}\partial_b)\partial_c h^{\text{TT}cd}$, es decir, un término de divergencia total y otro proporcional a la norma de Lorenz. Por otro lado, los primeros dos términos de la expresión son de la misma forma. En este punto, se puede explotar la libertad de norma en la zona de onda lejana discutida en la Sección 3.2.5. Para ello, considérese la generalización de la regla diferenciación (3.96), dada por

$$\partial_a \bar{h}^{bc} = -k_a \partial_\tau \bar{h}^{bc} + \mathcal{O}(r^{-2}), \quad (3.115)$$

donde $k_a = (1, n^j)$.⁵⁶ Con esta condición se tiene $(\partial_a \bar{h}_{cd})(\partial_b \bar{h}_{ef}) = (\partial_\tau \bar{h}_{cd})(\partial_\tau \bar{h}_{ef})k_a k_b$. De acuerdo a las Ecs. (3.105), resultado de especializar la norma de Lorenz en la zona lejana de onda, se sabe que la única parte que depende del tiempo es \bar{h}_{jk} , con lo que $(\partial_\tau \bar{h}_{cd})(\partial_\tau \bar{h}_{ef})k_a k_b = (\partial_\tau \bar{h}_{ij})(\partial_\tau \bar{h}_{kl})k_a k_b$. Bajo estas consideraciones (3.114) adopta la forma

$$\Theta_{ab}^{(\text{RG})} = \frac{1}{32\pi} \left\langle\left\langle (\partial_\tau \bar{h}_{jk} \partial_\tau \bar{h}_{jk} + \frac{1}{2} \delta^{ij} \delta^{kl} \partial_\tau \bar{h}_{ij} \partial_\tau \bar{h}_{kl}) k_a k_b \right\rangle\right\rangle. \quad (3.116)$$

También, como conclusión de la Sección 3.2.5 se obtuvo que la única parte que contribuye en la zona lejana de onda a \bar{h}_{jk} es la parte TT. Con este resultado, es decir, $\bar{h}_{jk} \rightarrow h_{jk}^{\text{TT}}$, el segundo término de (3.116) se anula, pues $\delta^{jk} h_{jk}^{\text{TT}} = 0$. Por lo tanto, el PTEM OG en la zona lejana de onda se reduce a

$$\Theta_{ab}^{(\text{RG})} = \frac{1}{32\pi} \left\langle\left\langle \partial_\tau h_{jk}^{\text{TT}} \partial_\tau h_{jk}^{\text{TT}} k_a k_b \right\rangle\right\rangle. \quad (3.117)$$

Es de recalcar que en la derivación de la Ec. (3.114) se utilizó en todo momento la presencia de fuentes al especializar la norma de Lorenz, contrario a la literatura tradicional [53, 112, 154], en donde la derivación de la expresión (3.114) sucede al considerar espacio-tiempos sin fuentes de materia. Si bien ambos resultados son equivalentes, resulta confuso–sino incongruente– utilizar la suposición de vacío al derivar el PTEM OG pues la motivación principal es mantener la mayor información posible de la fuente en la zona lejana de onda, es decir, en donde en buena aproximación se encuentran los detectores respecto a una fuente lejana, información que está totalmente contenida en la forma de onda \bar{h}_{ab} .

Como se anticipaba en la Sección 2.4 la importancia del PTEM OG se sustenta en torno a las ecuaciones de balance en sistemas gravitacionales radiativos. La descripción de sistemas radiativos suya se basa en dos formalismos, ambos equivalentes, el primero y más formal es aquel desarrollado por Bondi et. al. en la década de los sesenta [42, 133]. No obstante, para efectos de esta tesis se utilizará el formalismo de Landau-Lifshitz [38, 107, 128].

La ecuación de balance de energía es, a fin de cuentas, la equivalencia entre el cambio de energía del sistema E ⁵⁷ y la potencia radiada por las OG \mathcal{P} , esto es, la razón conforme las OG remueven la energía del sistema,

$$\frac{dE}{dt} = -\mathcal{F} \equiv - \oint_{\infty} \Theta_{0k}^{(\text{RG})} dS_k, \quad (3.118)$$

donde la integral es sobre una 2-esfera cuyo radio tiende a infinito, con lo que $dS_k = n_k r^2 d\Omega$. A \mathcal{F} también se le conoce como la *luminosidad gravitacional*. Al sustituir a (3.117) en (3.118) se obtiene

$$\mathcal{F} = \frac{r^2}{32\pi} \int \left\langle\left\langle \partial_\tau h_{jk}^{\text{TT}} \partial_\tau h_{jk}^{\text{TT}} \right\rangle\right\rangle d\Omega, \quad (3.119)$$

donde se ha utilizado que $n_k n^k = 1$. La Ec. (3.119) sintetiza la conexión entre el PTEM OG

⁵⁶Para demostrar (3.115) nótese que $\bar{h}_{ab} = \frac{1}{r} f_{ab}(\tau, \mathbf{x})$, con lo que $\partial_\tau \bar{h}_{ab} = \frac{1}{r} \partial_\tau f_{ab}$; la parte espacial proviene de (3.96).

⁵⁷ E es la energía del sistema (e.g. sistema binario) medida por un observador cuya 4-velocidad es paralela a un vector de Killing estacionario en infinito, (e.g. energía del sistema medida en el marco de referencia del centro de masa).

y la formula cuadrupolar dada por la Ec. (3.113), donde en ambos la hipótesis de fuentes con materia ha sido impuesta. Si se sustituye está última en la Ec. (3.119) se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \frac{r^2}{32\pi r^2} \int \mathcal{P}_{jk}^{lm} \mathcal{P}_{pq}^{jk} \langle \ddot{\mathcal{I}}_{lm} \ddot{\mathcal{I}}^{pq} \rangle d\Omega \\ &= \frac{1}{8\pi} \langle \ddot{\mathcal{I}}_{\langle lm} \ddot{\mathcal{I}}^{\langle pq} \rangle \rangle \int \mathcal{P}_{jk}^{lm} \mathcal{P}_{pq}^{jk} d\Omega,\end{aligned}\quad (3.120)$$

donde $d\Omega$ es el elemento de área dos dimensional en coordenadas esféricas, además en la segunda línea se utilizó la descomposición (3.109) y la propiedad (3.110) para el momento cuadrupolar \mathcal{I}_{jk} para la cual

$$\mathcal{I}_{\langle jk \rangle}(\tau) = \int \rho(\tau, \mathbf{x})(x_j x_k - \frac{1}{3} \delta_{jk} x_i x_i) d^3 x. \quad (3.121)$$

A la Ec. (3.121) comúnmente se le asocia el nombre del momento cuadrupolar reducido [107, 112, 160], sin embargo, es sólo la parte sin traza del momento cuadrupolar. Además, la descomposición (3.121) puede ser promovida a momentos multipolares de mayor orden, es por ello que se adopta esa notación. En la Ec. (3.120) el momento cuadrupolar salió de la integral angular debido a que los promedios van sobre longitudes de onda o, en este caso, frecuencias, es decir, son promedios temporales. A su vez, la resolución de la integral angular requiere de proyecciones sobre los armónicos esféricos y su conexión con los tensores simétricos sin traza. Se recogen aquí alguna identidades útiles⁵⁸

$$\int \frac{1}{4\pi} n_j d\Omega = 0, \quad (3.122a)$$

$$\int \frac{1}{4\pi} n_j n_k d\Omega = \frac{1}{3} \delta_{jk}, \quad (3.122b)$$

$$\int \frac{1}{4\pi} n_j n_k n_l d\Omega = 0, \quad (3.122c)$$

$$\int \frac{1}{4\pi} n_j n_k n_l n_m d\Omega = \frac{1}{15} (\delta_{jk} \delta_{lm} + \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{jm} \delta_{kl}). \quad (3.122d)$$

$$(3.122e)$$

Así el cálculo de la integral angular de la Ec. (3.120) es

$$\begin{aligned}8\pi\mathcal{F} &= \langle \ddot{\mathcal{I}}_{\langle lm} \ddot{\mathcal{I}}^{\langle pq} \rangle \rangle \int \mathcal{P}_{pq}^{lm} d\Omega \\ &= \langle \ddot{\mathcal{I}}_{\langle lm} \ddot{\mathcal{I}}^{\langle pq} \rangle \rangle \int \left(\mathcal{P}_p^l \mathcal{P}_q^m - \frac{1}{2} \mathcal{P}^{lm} \mathcal{P}_{pq} \right) d\Omega \\ &= \langle \ddot{\mathcal{I}}_{\langle lm} \ddot{\mathcal{I}}^{\langle pq} \rangle \rangle \int \left[(\delta_p^l \delta_q^m - \delta_p^l n^m n_q - \delta_q^m n^l n_p + n^l n_p n^m n_q) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (\delta^{lm} \delta_{pq} - \delta^{lm} n_p n_q - \delta_{pq} n^l n^m + n^l n^m n_p n_q) \right] d\Omega \\ &= \langle \ddot{\mathcal{I}}_{\langle lm} \ddot{\mathcal{I}}^{\langle pq} \rangle \rangle \int (\delta_p^l \delta_q^m - 2\delta_p^l n^m n_q + \frac{1}{2} n^l n^m n_p n_q) d\Omega \\ &= 4\pi \langle \ddot{\mathcal{I}}_{\langle lm} \ddot{\mathcal{I}}^{\langle pq} \rangle \rangle \frac{1}{30} (\delta^{lm} \delta_{pq} + 11\delta_p^l \delta_q^m + \delta_q^l \delta_p^m) \\ &= 4\pi \frac{12}{30} \langle \ddot{\mathcal{I}}_{\langle lm} \ddot{\mathcal{I}}^{\langle lm} \rangle \rangle,\end{aligned}\quad (3.123)$$

⁵⁸Es importante resaltar la diferencia en notación, pues en [128] la operación $\langle \dots \rangle$ denota a $\frac{1}{4\pi} \int \dots d\Omega$, mientras que los promedios $\langle \dots \rangle$ son los promedios denotados aquí por $\langle \dots \rangle$.

en donde en la primera, segunda y tercera línea se desarrollaron los proyectores conforme a las Ecs. (3.106) y (3.45). En la cuarta línea se hizo uso de $I_{\langle jk \rangle} \delta^{jk} = 0$. En la quinta línea se utilizaron las identidades (3.122). Sustituyendo el resultado anterior en la Ec. (3.120) se obtiene la segunda formula cuadrupolar

$$\mathcal{F} = \frac{G}{5c^5} \left\{ \left\| \left\| \frac{d^3 I_{\langle jk \rangle}(\tau)}{dt^3} \frac{d^3 I_{\langle jk \rangle}}{dt^3} \right\| \right\| + O(c^{-2}) \right\}, \quad (3.124)$$

donde se han restaurado las unidades. La Ec. (3.124) también fue encontrada por Einstein y representa la potencia gravitacional total emitida por la fuente radiada hacia todas las direcciones. Ésta puede ser utilizada para estimar el orden de magnitud de la luminosidad gravitacional de una fuente con masa M y un radio R [109], para el cual $\mathcal{I} \sim sMR^2\rho(\omega t)$ donde $0 \leq s \leq 1$ es un factor de asimetría, de tal manera que $s = 0$ para un objeto esféricamente simétrico y $\rho \sim 1$ representa la densidad de materia de la fuente y está depende de ω que denota a la velocidad angular para una fuente quasi-periódica, entonces $\ddot{\mathcal{I}} \sim s\omega^3 MR^2$ con lo que

$$\mathcal{F} \sim \frac{G}{c^5} s^2 \omega^6 M^2 R^4 \sim \frac{c^5}{4G} \left(\frac{R_S}{R} \right)^2 \left(\frac{v_c}{c} \right)^6 s^2, \quad (3.125)$$

donde se ha introducido el radio de Schwarzschild $R_S = 2GM/c^2$ y una velocidad característica de la fuente $v_c = R\omega$. De la Ec. (3.125) se concluye que ningún experimento terrestre es capaz de producir una luminosidad gravitacional detectable. Sin embargo, para objetos compactos ($R \gtrsim R_S$) altamente no esféricos ($s \lesssim 1$) cuyas velocidades son relativistas $v_c \sim c$ la potencia radiada es del orden

$$\mathcal{F}_{OC} \sim \frac{c^5}{4G} \approx 10^{53} W. \quad (3.126)$$

Es por ello, que el evento GW150914 [2], el cual registró un pico de potencia del orden $\sim 10^{49} W$ fue detectable.

3.4. Sistema binario newtoniano

La importancia del formalismo cuadrupolar yace en su simplicidad. Esta característica fue la que permitió comprobar indirectamente la existencia de OG al corroborar la observaciones del púlsar binario PSR 1913+16 [94, 95, 151, 152]. En específico se utilizó la ecuación de balance de energía (3.118) aplicada a un sistema binario con el propósito de obtener la variación del período orbital [126]. En lo que sigue de esta sección se calculan las formas de onda para un sistema binario de estrellas newtoniano para una orbita excéntrica, los cálculos están basados en [128, 159].

Considérese dos cuerpos de masa m_1 y m_2 con posiciones \mathbf{R}_1 y \mathbf{R}_2 respectivamente. Adoptando la descripción relativa al centro de masa y situando el origen de coordenadas en éste último, es decir, $m_1 \mathbf{R}_1 + m_2 \mathbf{R}_2 = 0$ se obtienen las posiciones

$$\mathbf{R}_1 = \frac{m_2}{M} \mathbf{R}, \quad \mathbf{R}_2 = -\frac{m_1}{M} \mathbf{R}, \quad (3.127)$$

en términos del vector de separación relativo $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$ y la masa total $M = m_1 + m_2$. Es fácil notar que las velocidades están dadas por

$$\mathbf{V}_1 = \frac{m_2}{M} \mathbf{V}, \quad \mathbf{V}_2 = -\frac{m_1}{M} \mathbf{V}, \quad (3.128)$$

en términos de la velocidad relativa $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$. Es útil también definir a el vector unitario $\mathbf{N} \equiv \mathbf{R}/R$ donde $R = |\mathbf{R}|$. Ahora bien, en la descripción puntual de partículas la densidad de

materia puede ser definida como

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_{A=1}^2 m_A \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}_A), \quad (3.129)$$

donde $\delta(x)$ es la delta de Dirac. La expresión anterior funciona siempre y cuando se omita una descripción interna de los cuerpos en el sistema, no obstante, estas contribuciones pueden ser tomadas en cuenta modelando la densidad de masa de otra forma. Al sustituir la Ec. (3.129) en el momento cuadrupolar (3.112) se obtiene

$$\mathcal{I}^{jk} = \sum_{A=1}^2 m_A R_A^j R_A^k, \quad (3.130)$$

la cual, puede ser escrita en términos de las coordenadas relativas dadas por las Ecs. (3.127) y (3.128). Más aún, notando que la onda h_{jk}^{TT} , expresada como en (3.113), y la potencia radiada \mathcal{F} , expresada como en (3.124), requieren de segundas y terceras derivadas temporales respectivamente, es útil enunciarlas

$$\dot{\mathcal{I}}_{jk} = \nu M R_j R_k, \quad (3.131a)$$

$$\ddot{\mathcal{I}}_{jk} = 2\nu M \left(V_j V_k - \frac{GM}{R} N_j N_k \right), \quad (3.131b)$$

$$\dddot{\mathcal{I}}_{jk} = -2\nu M \frac{GM}{R^2} \left(\frac{4}{R} R_{(j} V_{k)} - \frac{3\dot{R}}{R^2} R_j R_k \right). \quad (3.131c)$$

Cabe señalar que los factores GM/R ⁵⁹ aparecen debido a la ecuación de movimiento $\ddot{\mathbf{r}}_1 = -GM_2 \mathbf{N}/R^2$ y además se ha definido a la *razón de masa simétrica*

$$\nu = \frac{m_1 m_2}{M^2}. \quad (3.132)$$

Hasta este punto, la descripción sucede en un *sistema de coordenadas orbital* (x, y, z) . Por la conservación del momento angular, el movimiento orbital está confinado al plano $x - y$ (adoptando la convención de que el momento angular apunta en z). En este plano es posible adoptar un sistema de coordenadas polar usual $\{\mathbf{N}, \Phi\}$ definido por

$$\mathbf{N} \equiv \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y, \quad \Phi \equiv -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y. \quad (3.133)$$

En términos de esta base las coordenadas relativas toman la forma

$$\mathbf{R} = R\mathbf{N}, \quad \mathbf{V} = \dot{R}\mathbf{N} + R\dot{\phi}\Phi. \quad (3.134)$$

Mientras que las ecuaciones de movimiento se escriben como

$$\frac{d}{dt}(R^2 \dot{\phi}) = 0, \quad \ddot{R} - R\dot{\phi}^2 = -\frac{GM}{R^2}, \quad (3.135)$$

cuyas soluciones son bien conocidas y están dadas por

$$R = \frac{p}{1 + e \cos \phi}, \quad \dot{\phi} = \sqrt{\frac{GM}{p^3}} (1 + e \cos \phi)^2. \quad (3.136)$$

donde e es la excentricidad de la órbita y ésta indica la naturaleza de la misma: si $e < 1$ la

⁵⁹En esta sección se restauran las unidades.

órbita es cerrada, esto es, una órbita elíptica, mientras si $e > 1$ la órbita no es cerrada, lo que corresponde a una hipérbola. Además, p es el *semi-latus rectum* definido como

$$p = \frac{R^4 \dot{\phi}^2}{GM} \equiv \frac{h^2}{GM}, \quad (3.137)$$

usando el hecho de que $h = R^2 \dot{\phi}$ es una constante de movimiento dada la primera Ec. de (3.135). Sustituyendo a las Ecs. (3.136) en las coordenadas (3.134) se obtiene

$$R_j = \left(\frac{p}{1 + e \cos \phi} \right) N_j, \quad V_j = \sqrt{\frac{GM}{p}} \left[(e \sin \phi) N_j + (1 + e \cos \phi) \Phi_j \right]. \quad (3.138)$$

Nótese que el movimiento orbital queda completamente determinado por el ángulo polar ϕ al resolverse las Ecs. (3.136). Sustituyendo a las coordenadas (3.138) en las expresiones cuadrupolares (3.131) se obtiene

$$\mathcal{I}_{jk} = \nu M \left(\frac{p}{1 + e \cos \phi} \right)^2, \quad (3.139a)$$

$$\ddot{\mathcal{I}}_{jk} = \frac{2\nu GM^2}{p} \left[- (1 + e \cos \phi - e^2 \sin^2 \phi) N_j N_k + 2e \sin \phi (1 + e \cos \phi) N_{(j} \Phi_k) + (1 + e \cos \phi)^2 \Phi_j \Phi_k \right], \quad (3.139b)$$

$$\ddot{\ddot{\mathcal{I}}}_{jk} = -\frac{2\nu M (GM)^{3/2}}{p^{5/2}} (1 + e \cos \phi)^2 \left[e \sin \phi N_j N_k + 4(1 + e \cos \phi) N_{(j} \Phi_k) \right]. \quad (3.139c)$$

Con lo que sólo basta sustituir estas expresiones en h_{jk}^{TT} (Ec. (3.113)) o bien en \mathcal{F} (Ec. (3.124)) según sea el caso. La perturbación \bar{h}_{jk} se obtiene al sustituir la segunda derivada del momento cuadrupolar (3.139b) en la Ec. (3.111) (restaurando las unidades) y adopta la forma

$$\bar{h}_{jk} = \frac{4}{c^4 r} \frac{\nu (GM)^2}{p} \left[- (1 + e \cos \phi - e^2 \sin^2 \phi) N_j N_k + 2e \sin \phi (1 + e \cos \phi) N_{(j} \Phi_k) + (1 + e \cos \phi)^2 \Phi_j \Phi_k \right], \quad (3.140)$$

Note que, las Ecs. (3.139) están expresadas en la base del sistema de coordenadas orbital. En lo que sigue se calcula h_{jk}^{TT} haciendo uso de los proyectores introducidos en la Sección 3.2.6 construyendo las conocidas polarizaciones h_x y h_+ correspondientes a los dos grados de libertad radiativos discutidos en la Sección 3.2.4.

3.4.1. Polarizaciones

Retomando a la expresión para el proyector $\mathcal{P}_{lm}^{jk}(\mathbf{n})$, nótese que éste depende del vector \mathbf{n} que representa la dirección longitudinal respecto a la fuente. Si se considera la base cartesiana usual $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ se puede introducir una base esférica dada por los vectores

$$\mathbf{n} \equiv \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \vartheta \mathbf{e}_z \quad (3.141a)$$

$$\boldsymbol{\vartheta} \equiv \cos \vartheta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \cos \vartheta \sin \varphi \mathbf{e}_y - \sin \vartheta \mathbf{e}_z, \quad (3.141b)$$

$$\boldsymbol{\varphi} \equiv -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y, \quad (3.141c)$$

los cuales forman una base, por lo que,

$$\delta_{jk} = n_j n_k + \vartheta_j \vartheta_k + \varphi_j \varphi_k. \quad (3.142)$$

El sistema de coordenadas adaptado al detector se ilustra en la Figura 3.2. La relación entre ambos sistemas de coordenadas se expresa como

$$\mathbf{e}_u = \cos \omega \mathbf{e}_x - \sin \omega \mathbf{e}_y, \quad (3.146a)$$

$$\mathbf{e}_v = \cos l \sin \omega \mathbf{e}_x + \cos l \cos \omega \mathbf{e}_y - \sin l \mathbf{e}_z, \quad (3.146b)$$

$$\mathbf{e}_w = \sin l \sin \omega \mathbf{e}_x + \sin l \cos \omega \mathbf{e}_y + \cos l \mathbf{e}_z, \quad (3.146c)$$

donde l es el ángulo de inclinación entre el plano orbital y el plano del cielo, ω es el ángulo entre la línea de nodos y el pericentro (ver Fig. 3.2). Por las consideraciones anteriores es claro que $\mathbf{n} = \mathbf{e}_w$. En esta nueva base los vectores del plano orbital \mathbf{N} , $\mathbf{\Phi}$ están dados por

$$\mathbf{N} = \cos(\omega + \phi) \mathbf{e}_u + \cos l \cos(\omega + \phi) \mathbf{e}_v + \sin l \sin(\omega + \phi) \mathbf{e}_w, \quad (3.147a)$$

$$\mathbf{\Phi} = -\sin(\omega + \phi) \mathbf{e}_u + \cos l \cos(\omega + \phi) \mathbf{e}_v - \sin l \sin(\omega + \phi) \mathbf{e}_w. \quad (3.147b)$$

Además, al contrastar las Ecs. (3.146) con los vectores (3.141) se concluye que los vectores $\{\mathbf{n}, \boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\varphi}\}$ están relacionados con $\{\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w\}$ por medio de

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_w, \quad \vartheta = l, \quad (3.148)$$

$$\boldsymbol{\vartheta} = \mathbf{e}_v, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \omega, \quad (3.149)$$

$$\boldsymbol{\varphi} = -\mathbf{e}_u. \quad (3.150)$$

Con esto en mente las polarizaciones h_+ y h_\times expresadas en la base de coordenadas adaptada al detector mantienen la forma (3.145) y se escriben como

$$h_+ = \frac{1}{2}(e_u^j e_u^k - e_v^j e_v^k) \bar{h}_{jk}, \quad (3.151a)$$

$$h_\times = \frac{1}{2}(e_u^j e_v^k + e_v^j e_u^k) \bar{h}_{jk}. \quad (3.151b)$$

Para obtener las polarizaciones explícitamente en términos de la fase orbital ϕ es necesario sustituir componente a componente los vectores del plano orbital expresados como en (3.147) en la amplitud \bar{h}_{jk} dada por la Ec. (3.140). Después este resultado hay que sustituirlo en cada una de las polarizaciones (3.151). Después de un cálculo tedioso se obtiene

$$h_+ = h_0 \left\{ - (1 + \cos^2 l) \left[\cos(2\phi + 2\omega) + \frac{5}{4} e \cos(\phi + 2\omega) + \frac{1}{4} e \cos(3\phi + 2\omega) + \frac{1}{2} e^2 \cos 2\omega \right] + \frac{1}{2} e \sin^2 l (e + \cos \phi) \right\}, \quad (3.152a)$$

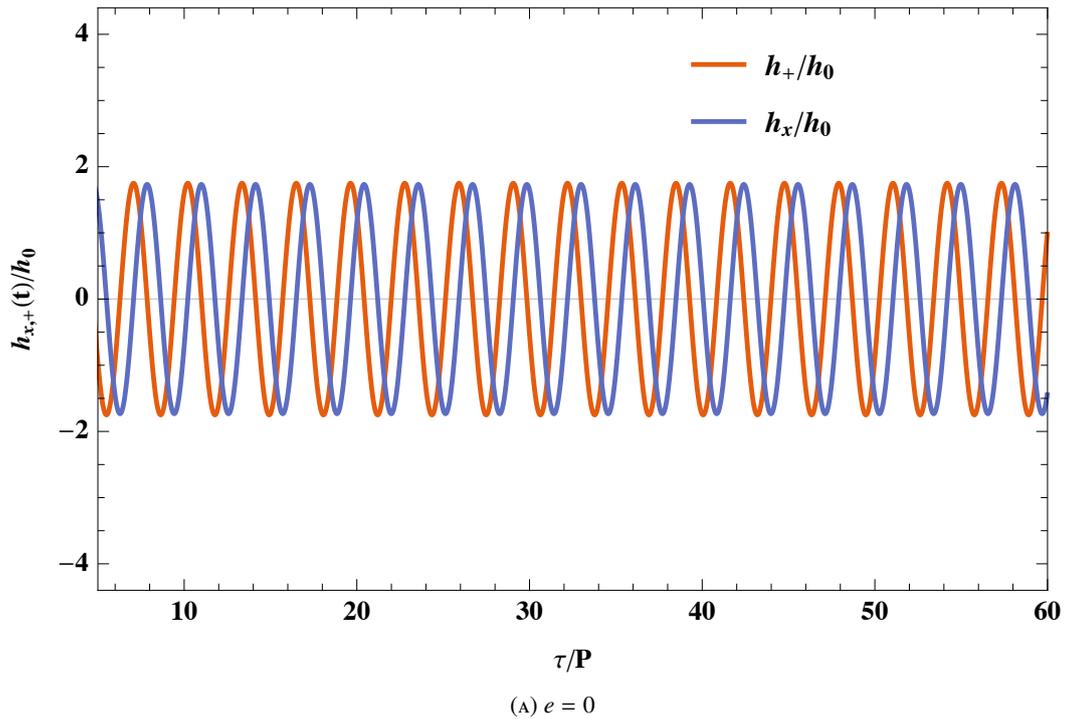
$$h_\times = -h_0 2 \cos l \left[\sin(2\phi + 2\omega) + \frac{5}{4} e \sin(\phi + 2\omega) + \frac{1}{4} e \sin(3\phi + 2\omega) + \frac{1}{2} e^2 \sin 2\omega \right], \quad (3.152b)$$

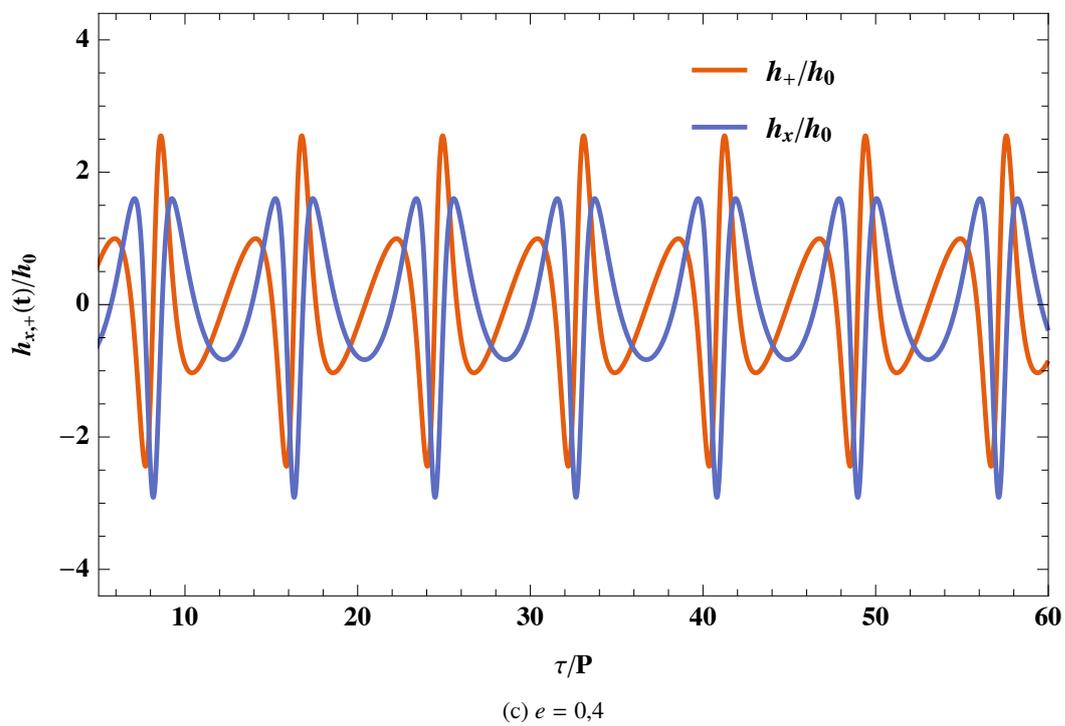
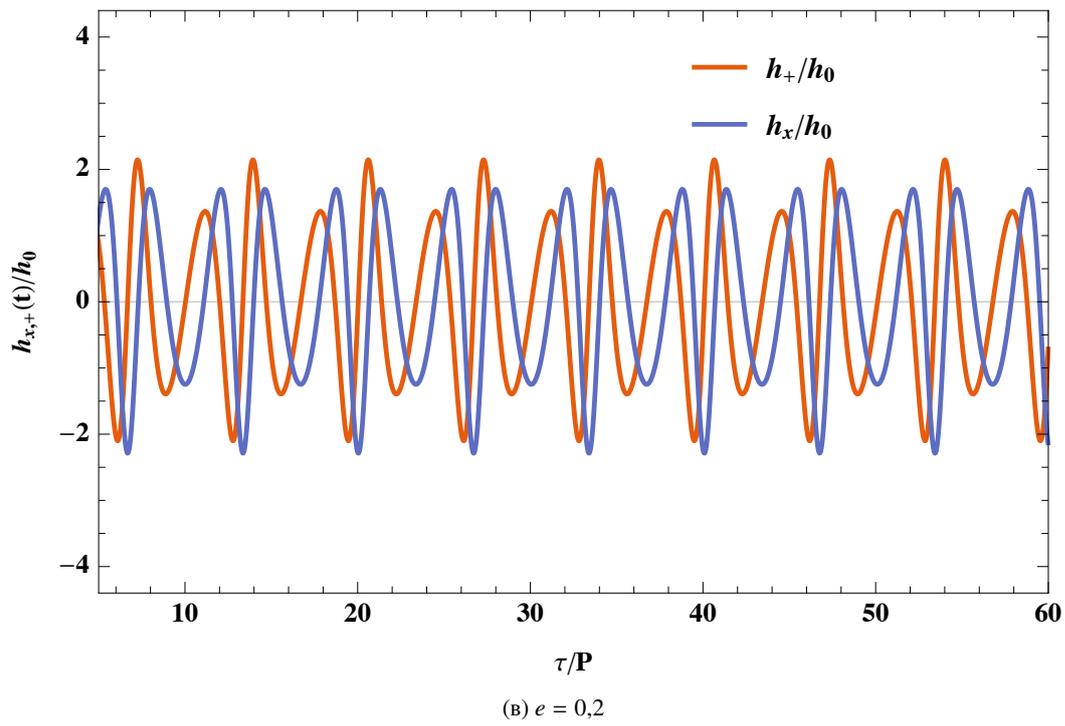
donde la amplitud h_0 está dada por

$$h_0 = \frac{2\nu}{c^4 R} \frac{(GM)^2}{p}. \quad (3.153)$$

Las ecuaciones (3.152) representan las polarizaciones de un sistema binario de estrellas con excentricidad e , en principio arbitraria, que emite radiación gravitacional, los cálculos corresponden con [128, 159]. Nótese que ϕ naturalmente depende del tiempo retardado τ por lo que las polarizaciones también varían respecto a τ . Para encontrar la dependencia explícita en τ de h_+ y h_\times es necesario resolver numéricamente la Ec. (3.136) para ϕ . Este procedimiento permite obtener la llamada forma de onda para un sistema binario de estrellas. En la Fig.

3.3 se muestran las formas de onda para un sistema binario con distintas excentricidades. El púlsar binario PSR 1913+16 corresponde a una excentricidad de $e \simeq 0,61$, la forma de onda se corresponde a la Fig. 3.3d. Noté que la emisión de radiación gravitacional aumenta considerablemente en el pericentro, esto es, cuando los cuerpos están en su punto más cercano. Esta característica se ve más definida en orbitas más excéntricas. Por otro lado, para un orbita circular (i.e. $e = 0$, Fig. 3.3a) la emisión de radiación es periódica, lo cual anticipa que la potencia radiada para este tipo de órbitas es constante, esta característica se analiza en la siguiente sección.





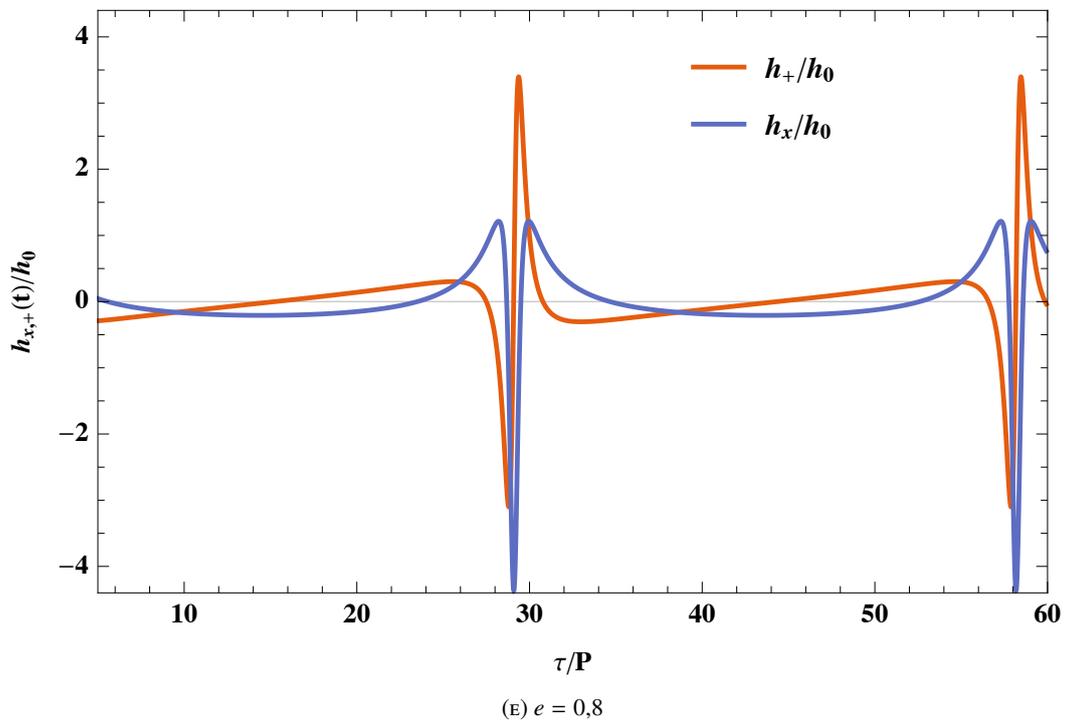
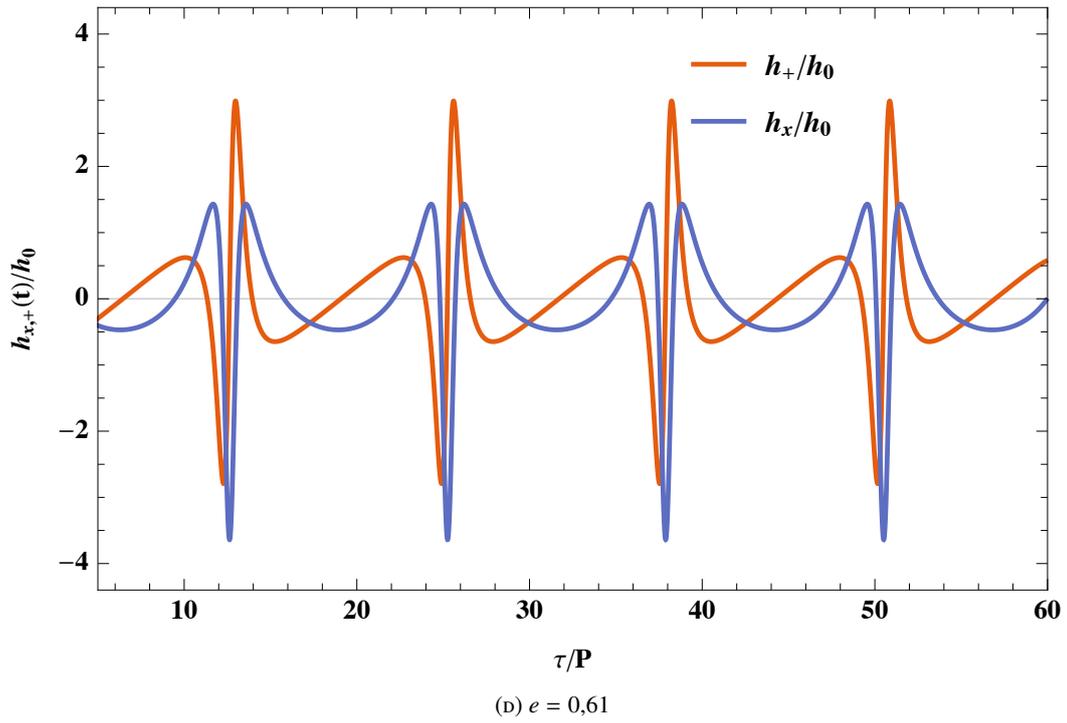


FIGURA 3.3: Polarizaciones h_+ y h_x dadas por las Ecs. (3.152) en función del tiempo retardado τ normalizado por el período orbital P . La fase orbital ϕ se obtiene de resolver numéricamente la Ec. (3.136). Se muestran varias polarizaciones, todas con $\omega = \pi/4$ y $l = \pi/6$.

3.4.2. Potencia radiada

Nótese que para la potencia radiada a orden cuadrupolar, dada por la Ec. (3.124), la tercera derivada temporal está aplicada sobre el momento cuadrupolar sin traza $\mathcal{I}_{\langle jk \rangle}$, además de que en este caso los proyectores ya se han operado. Retomando a la Ec. (3.109), la traza de (3.139c) es

$$\delta^{jk} \ddot{\mathcal{I}}_{jk} = -\frac{2\nu M(GM)^{3/2}}{p^{5/2}}(1 + e \cos^2 \phi)^2 e \sin \phi, \quad (3.154)$$

con lo que

$$\ddot{\mathcal{I}}_{\langle jk \rangle} = -\frac{2\nu M(GM)^{3/2}}{p^{5/2}}(1 + e \cos \phi)^2 \left[e \sin \phi N_j N_k + 4(1 + e \cos \phi) N_{\langle j} \Phi_k \rangle - \frac{1}{3} \delta_{jk} e \sin \phi \right]. \quad (3.155)$$

Ahora bien, si se reescribe a la potencia radiada (3.124) como

$$\mathcal{F} = \langle\langle f \rangle\rangle \quad f = \frac{G}{5c^5} \ddot{\mathcal{I}}_{\langle jk \rangle} \ddot{\mathcal{I}}_{\langle jk \rangle}, \quad (3.156)$$

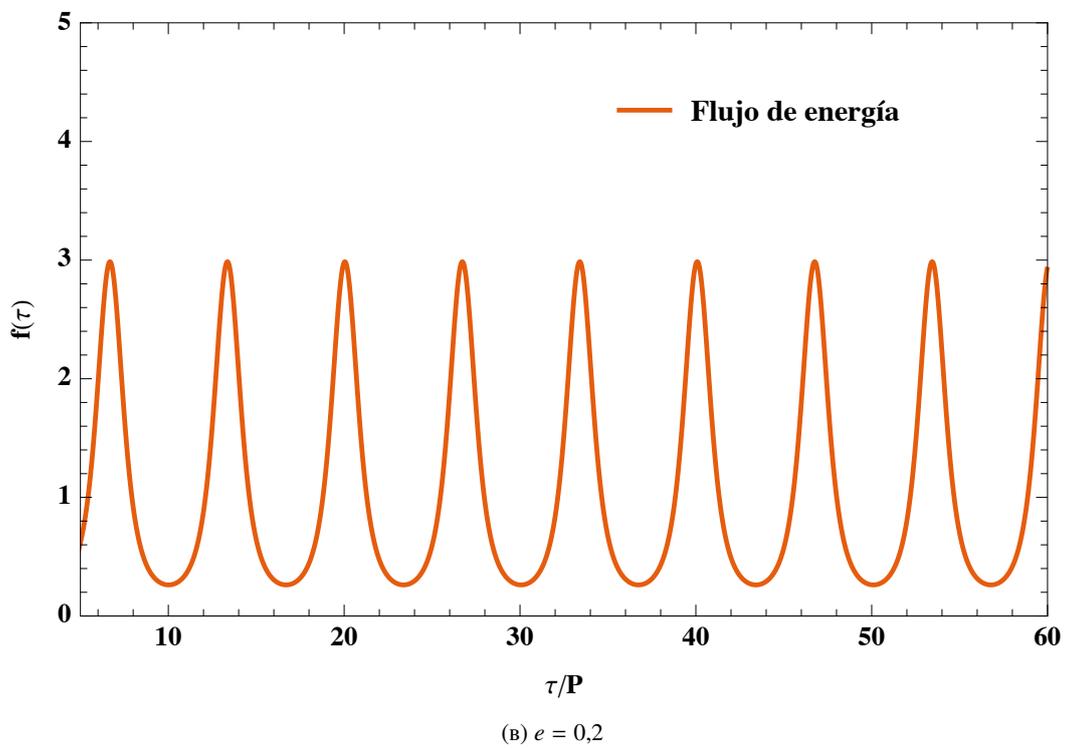
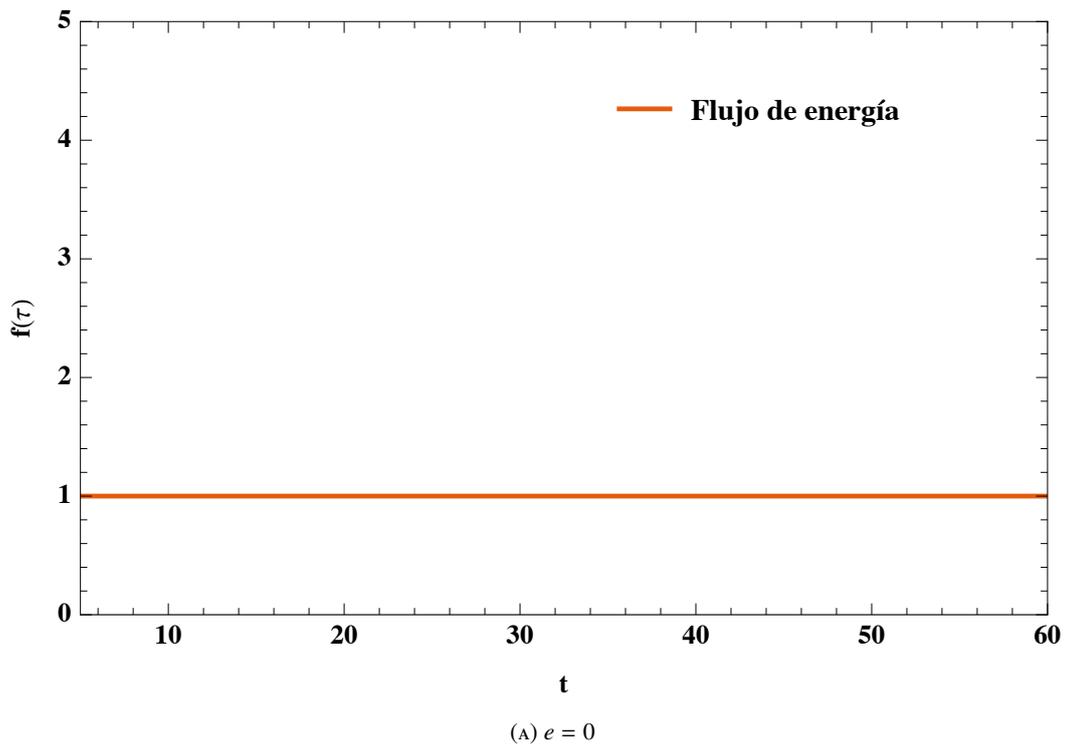
se sigue al sustituir la expresión (3.155)

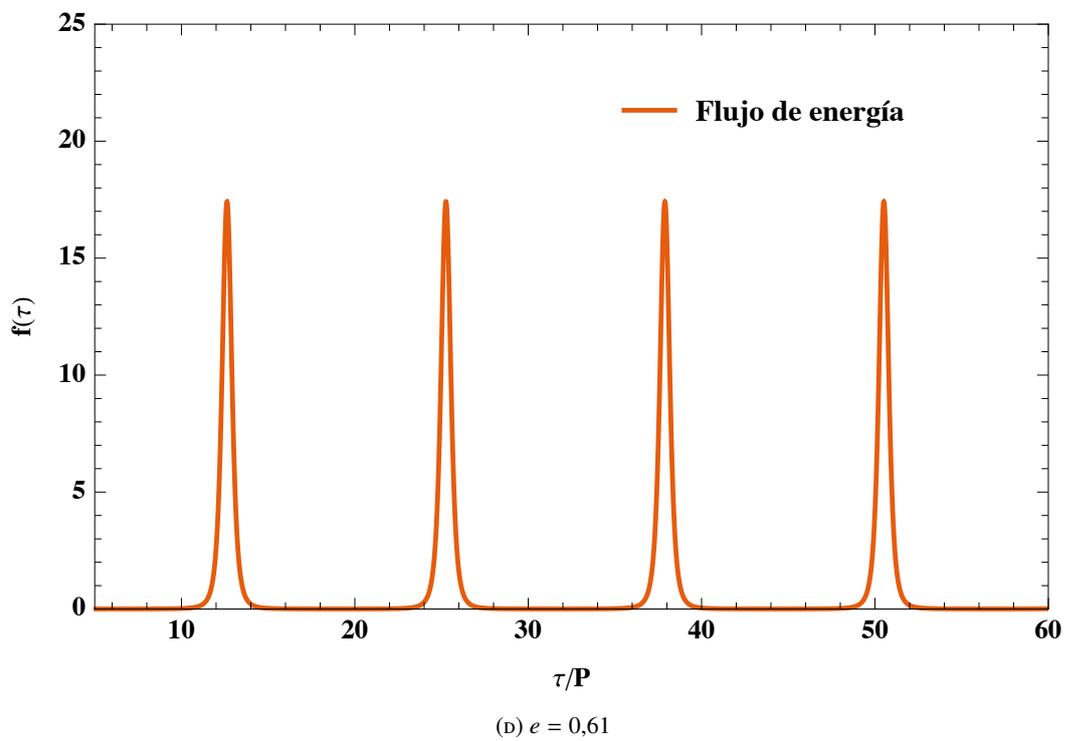
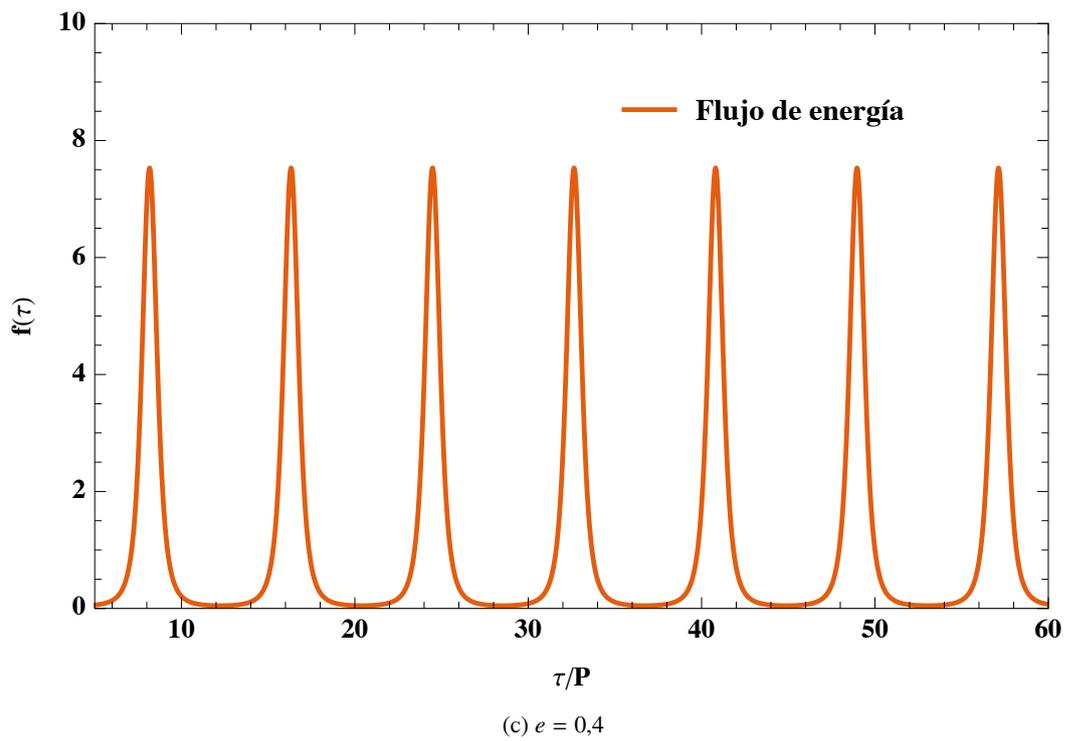
$$\begin{aligned} f(\phi) &= \frac{G}{5c^5} \frac{4\nu^2 M^2 (GM)^3}{p^5} (1 + e \cos \phi)^4 \left[e \sin \phi N_j N_k + 4(1 + e \cos \phi) N_{\langle j} \Phi_k \rangle - \frac{1}{3} \delta_{jk} e \sin \phi \right]^2 \\ &= \frac{G}{5c^5} \frac{4\nu^2 M^2 (GM)^3}{p^5} (1 + e \cos \phi)^4 \left[\frac{2}{3} e^2 \sin^2 \phi + 8(1 + 2e \cos \phi + e^2 \cos^2 \phi) \right] \\ &= \frac{32}{5} \nu^2 \frac{c^5}{G} \left(\frac{\nu}{c} \right)^{10} (1 + e \cos \phi)^4 \left[1 + 2e \cos \phi + \frac{1}{12} e^2 (1 + 11 \cos^2 \phi) \right], \end{aligned} \quad (3.157)$$

donde se ha definido a la velocidad orbital como $v \equiv \sqrt{GM/p}$, la cual corresponde a una órbita circular. Nótese que f sólo depende de la fase orbital ϕ , y además c^5/G tiene unidades de energía por segundo, es decir, de potencia, como se esperaba. Además f escala como $(v/c)^{10}$ lo cual revela un importante hecho. Si bien en sistemas con velocidades orbitales usuales (i.e. $v \ll c$) la potencia gravitacional radiada es muy pequeña, sucede que al considerar sistemas binarios de estrellas de neutrones altamente relativistas muy cerca de la fase de «fusión» (i.e. $v \sim c$) la potencia radiada adquiere un valor máximo mayor a, por ejemplo, la potencia electromagnética radiada por el Sol

$$f_{\text{EM}}^{\text{SOL}} \sim 10^{26} \text{Watts}, \quad f_{\text{OG}} \sim 10^{52} \text{Watts}. \quad (3.158)$$

En la Fig. 3.4 se muestra el flujo de energía $f(\phi)$ para sistemas con distintas excentricidades; como se anticipó en la sección anterior, el flujo de energía para órbitas circulares es constante (Fig. 3.4a). Contrastando con las polarizaciones de la Fig. 3.3 se concluye que los máximos del flujo de energía ocurren en el pericentro de la órbita, como era de esperarse.





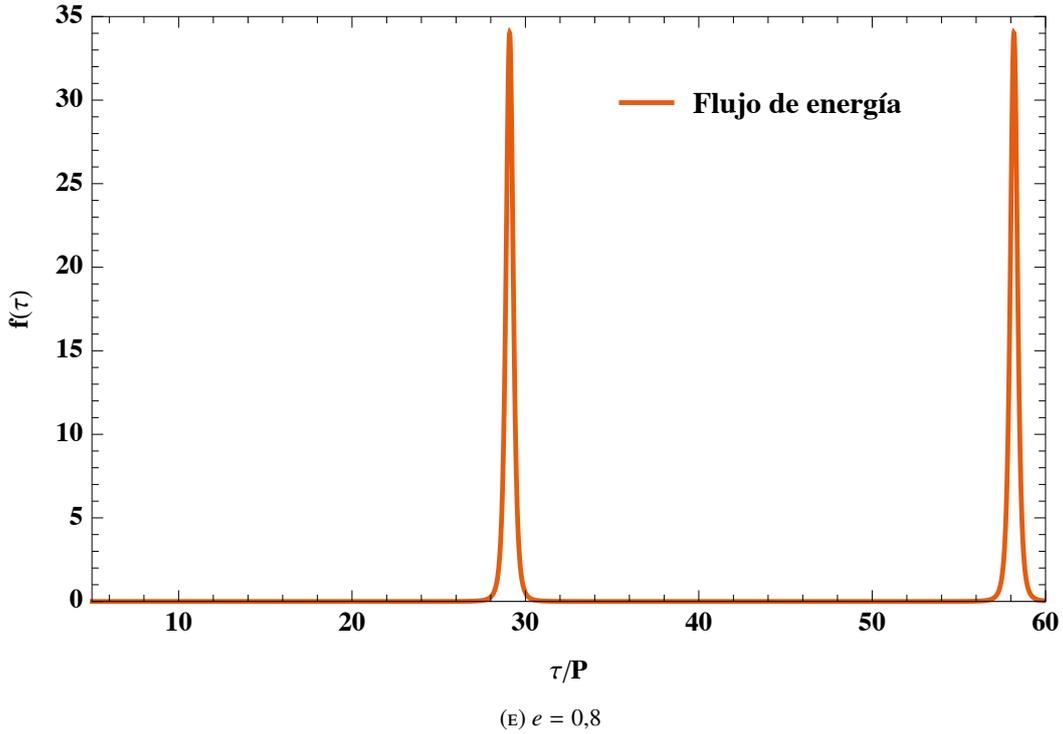


FIGURA 3.4: Flujo de energía dado por la Ec. (3.157) en función del tiempo retardado τ normalizado por el período orbital P . La fase orbital ϕ se obtiene de resolver numéricamente la Ec. (3.136). Se muestra el flujo de energía para órbitas con distintas excentricidades, todas con $\omega = \pi/4$ y $l = \pi/6$. Los picos de emisión ocurren en el pericentro, a excepción de la órbita circular, en la que el flujo de energía permanece constante.

Como se discutió en la Sección 2.4 es necesario emplear promedios sobre varias longitudes de onda. En el caso de sistemas binarios con orbitas cerradas estos promedios se reducen a promedios sobre el periodo orbital:

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{p^3}{GM}} \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}} \equiv 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}, \quad (3.159)$$

donde $a = p/(1 - e^2)$ es el semi-eje mayor de la órbita, esto es,

$$\langle \dots \rangle \rightarrow \frac{1}{P} \int_0^P \dots dt = \frac{(1 - e^{3/2})}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \phi^2)^{-2} \dots d\phi, \quad (3.160)$$

donde se han utilizado las ecuaciones de movimiento (3.136). De esta manera, integrando sobre la potencia total radiada \mathcal{F} se obtiene

$$\mathcal{F} = \frac{32}{5} v^2 \frac{c^5}{G} \left(\frac{v}{c}\right)^{10} (1 - e^2)^{3/2} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4\right), \quad (3.161)$$

la cual fue reportada por primera vez en [126]. Ahora bien, el cambio en el período orbital conforme la radiación gravitacional es emitida, se encuentra a partir de la ecuación de balance (3.118), en este sentido conviene expresar a la energía total del sistema binario:

$$E = \frac{1}{2} \mu V^2 - \frac{G\mu M}{R}, \quad (3.162)$$

donde $\mu = m_1 m_2 / M$ es la masa reducida, en términos de período orbital. Esto se consigue al sustituir en la energía, la velocidad al cuadrado, $V^2 = V_j V_j$, dada por la Ec. (3.138), con lo que

$$E = \frac{1}{2} \mu \frac{GM}{p} (1 + 2e \cos \phi + e^2) - \frac{G\mu M}{R} \quad (3.163)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{G\mu M}{p} \left(\frac{e^2 - 1}{p} + \frac{2}{R} \right) - \frac{G\mu M}{R} \quad (3.164)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{G\mu M}{p} \left(-\frac{1}{a} + \frac{2}{R} \right) - \frac{G\mu M}{R} \quad (3.165)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{G\mu M^2}{a}. \quad (3.166)$$

Derivando temporalmente es claro que

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \frac{G\mu M^2}{a^2}, \quad (3.167)$$

con lo que la ecuación de balance (3.118) se escribe como

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = -\frac{192\pi}{5c^5} \left(\frac{2\pi G}{P} \right)^{5/3} \frac{m_1 m_2}{M^{1/3}} \frac{1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4}{(1 + e^2)^{7/2}}}. \quad (3.168)$$

La Ec. (3.168) es la predicción más importante en el formalismo cuadrupolar en la RG. Como resultado de la emisión de radiación gravitacional en sistemas binarios, el período orbital decrece con el tiempo. El decaimiento orbital observado en diversos púlsares, en efecto, corresponde a la predicción de la RG. En particular, el púlsar binario PSR B1913+16, cuyas mediciones del decaimiento orbital circundan más de 40 años, son consistentes con la RG en al nivel de $(0,13 \pm 0,21 \%)$ [165]. En esta última revisión, se reporta una gráfica mostrando el cambio en el *Desfase Temporal Acumulativo del Periastro* (DTAP).⁶⁰ Dicha gráfica es una de la más contundentes pruebas de la RG pues muestra el acuerdo entre los datos resultado de las observaciones y la predicción teórica. La curva teórica puede ser derivada a partir de la Ec. (3.168) y de la *anomalía promedio* [128] definida como

$$M(t) = 2\pi \frac{t - T}{P}, \quad (3.169)$$

donde T es una constante orbital conocida como el *tiempo de pasaje del pericentro*, en general se puede calcular la anomalía promedio a cualquier tiempo como

$$M = \int_0^t \frac{2\pi}{P} dt, \quad (3.170)$$

donde P es claramente una función del tiempo. A esta expresión se le puede tomar una expansión en Taylor respecto al tiempo t_0 en el cual comenzaron las mediciones del pulsar. Así,

$$\begin{aligned} M(t) &= M_0 + \dot{M}_0 t + \frac{1}{2} \ddot{M}(t) t^2 \\ &= \frac{2\pi}{P_0} \left[t - \frac{1}{2} \frac{\dot{P}_0}{P_0} t^2 \right] + O(t^3). \end{aligned} \quad (3.171)$$

⁶⁰Cumulative Periastron Time Shift en la literatura en inglés.

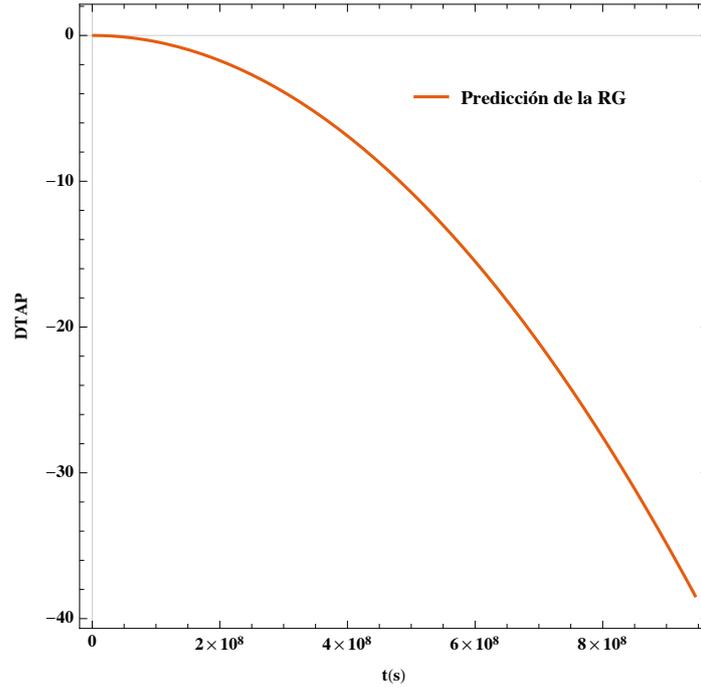


FIGURA 3.5: Decaimiento orbital del púlsar PSR B1913+16. En específico se grafica el cambio en la época del periastro respecto a un sistema cuyo período orbital permanece constante. Este cambio está cuantificado por el DTAP expresado en la Ec. 3.173. Hasta antes de la detección directa de OG, este resultado representa la evidencia más contundente a favor de la existencia de radiación gravitacional, una característica propia de la RG.

Se pueden ignorar a este nivel de aproximación los siguientes términos pues

$$\begin{aligned} P_0 &= 0,322997448930(\text{d}), \\ \dot{P}_0 &= -2,4184 \times 10^{-14}, \end{aligned} \quad (3.172)$$

con lo que $\dot{P}_0/P_0 \sim 10^{-16}$ [164, 165]. De esta manera el DTAP puede ser aproximado como

$$\Delta t = \frac{1}{2} \frac{\dot{P}_0}{P_0} t^2, \quad (3.173)$$

el cual se grafica en la Fig. 3.5 para un período de 30 años. El nivel de consistencia con la RG reduce notablemente las posibles desviaciones presentes en teorías alternativas de la gravitación. En específico los grados de libertad adicionales en teorías alternativas pueden ser constreñidos por el análisis del púlsar binario.

Hasta este punto se ha analizado el formalismo cuadrupolar de generación de OG en la aproximación lineal sobre Minkowski de la RG. La consistencia con la parte experimental sugiere que la ventana a teorías alternativas es pequeña. En el siguiente capítulo se analizan las posibles desviaciones que resultan de considerar teorías alternativas extrapolando los métodos desarrollados en los capítulos anteriores.

Capítulo 4

Teorías Alternativas

4.1. Teorías escalares-tensoriales

De acuerdo al teorema de Lovelock (ver nota 17), la forma más simple de construir una teoría métrica cuyas ecuaciones difieran de las de la RG es la adición de campos escalares, vectoriales o tensoriales «extra» acoplados no mínimamente, esto es, que el campo gravitacional ya no está representado sólo por la métrica g_{ab} sino también por los campos adicionales.

En el caso de un campo escalar, la idea ha estado presente incluso antes de la introducción de la RG por Einstein. G. Nordstöm formuló una teoría escalar de la gravedad conformemente plana que el mismo Einstein consideró viable. Tras la consolidación de la RG, surgió la idea, en parte al trabajo de P. Dirac y P. Jordan de que el acople gravitacional podría ser dependiente del tiempo, esto concluyó en el hecho de promover a G como un campo gravitacional escalar (ver e.g., [82] para un repaso histórico más detallado). No obstante, estas ideas alcanzaron total madurez a principios de la década de los sesenta con los trabajos de Brans-Dicke (BD), cuya teoría contenía un sólo un campo escalar acoplado no mínimamente un parámetro libre ω ; al tender este parámetro a infinito se recupera la RG [43]. Los experimentos a nivel del sistema solar colocan cotas del orden de $\omega \gtrsim 40000$ [168]. En consecuencia, las predicciones de la teoría de BD, en los sectores de campo fuerte y débil, son muy cercanas a las de la RG. Este hecho motivó la construcción de teorías más generales a la teoría de BD.

En los años 1968-1970, Bergmann, Nordtvedt, Wagoner generalizaron esta clase de teorías con la inclusión de un parámetro dependiente del mismo campo escalar ϕ sujeto a un potencial arbitrario $V(\phi)$, esto es, $\omega(\phi)$. A esta clase de teorías se les conoce como teorías escalares-tensoriales (TET), y representan una clase de teorías que incluye un campo escalar en adición al tensor métrico (ver e.g., [59, 82] para un repaso de estas teorías). Más tarde, en la década de 1990, Damour y Esposito-Farèse generalizaron las TET con la inclusión de múltiples campos escalares [63]. En su seminal trabajo, Damour y Esposito-Farèse emplearon el «marco de Einstein», matemáticamente más simple que el llamado «marco de Jordan» utilizado con poca frecuencia en la literatura. Al respecto, ha existido cierta controversia y confusión sobre la equivalencia física de ambos marcos [37, 50]. Un argumento adoptado por la comunidad por varios años refiere al problema de Cauchy, el cual se creía que sólo estaba bien definido en el marco de Einstein; sin embargo, fue probado recientemente que el problema de Cauchy en el marco de Jordan está bien formulado [135]. En esta tesis se adopta la formulación en el marco de Jordan.

La TET funcionan como el prototipo genérico de una teoría alternativa de la gravedad, en el sentido de que, las desviaciones a la RG para otras teorías alternativas son modeladas en base a las desviaciones propias de las TET. Esto debido a su estructura es relativamente simple y permite encontrar soluciones analíticas en un amplio número de situaciones físicas de interés. Una de las motivaciones principales de las TET proviene del contexto cosmológico, varios modelos han sido propuestos como alternativas a la constante cosmológica para explicar la expansión acelerada del universo [82].

Si bien las TET fueron propuestas hace ya varias décadas, no fue sino recientemente cuando diversos fenómenos físicos sin contraparte en la RG, han sido analizados. En el contexto astrofísico, Damour y Esposito-Farèse, encontraron un fenómeno de transición de fase en modelos de estrellas de neutrones, análogo a la magnetización espontánea de materiales ferromagnéticos a bajas temperaturas y consiste en la aparición de una configuración no trivial del campo escalar ϕ [64]. El fenómeno acuña el nombre de «escalarización espontánea». Un fenómeno similar que ha tomado reciente importancia tras la detección de OG, es la llamada «escalarización dinámica», escalarización que toma lugar en durante la coalescencia de sistemas binarios de estrellas de neutrones [104, 142].

Un objeto compacto, en particular, una estrella de neutrones, escalarizado emite radiación escalar, esto es, radiación asociada únicamente a los grados de libertad radiativos del campo escalar, cuando es acelerado, en analogía a una carga acelerada en el caso EM. En un sistema binario, la emisión de ondas escalares, acelera la disipación de energía a través de las OG usuales encontrados en la RG, acelerando el decaimiento orbital. Las observaciones de púlsares binarios [16, 166] y las recientes observaciones OG por coalescencias de agujeros negros y estrellas de neutrones [2–7, 9] son, en principio, sensibles a los flujos de energía anómalos y, por lo tanto, pueden usarse para restringir la presencia de escalarización en dichos sistemas binarios.

Por otro lado, al nivel de las ecuaciones de movimiento la existencia de un grado de libertad extra en las TET, implica la existencia de modos radiativos distintos a los de la RG. En el Capítulo 3 se mostró que el orden dominante de radiación gravitacional es el cuadrupolar; la razón es debido a que en el contexto de la RG, el momento monopolar corresponde a la masa total del sistema, el cual en la zona de onda, permanece constante con pequeños cambios debidos a las pérdidas radiativas. De la misma manera, la derivada temporal del momento dipolar, que corresponde al momento total del sistema, es también constante y se puede anular ocupando un sistema de referencia adecuado. Sin embargo, como se verá más adelante, en las TET no existe razón a priori para esperar la supresión de radiación monopolar o dipolar. En consecuencia, los modos radiativos no son sólo h_+ y h_\times .

Las características antes descritas por las TET han resultado en recientes extensiones de los formalismos de la RG, como la aproximación post-newtoniana, el formalismo de campo efectivo, entre otros [30, 31]. El propósito de este capítulo es analizar las consecuencias del campo escalar en la radiación gravitacional en el límite lineal de las TET.

La acción para una TET con un sólo campo escalar está dada por [135]

$$S[g_{ab}, \phi, \psi] = \int \left\{ \frac{1}{16\pi G_0} F(\phi)R - \left(\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi) \right) \right\} \sqrt{-g}d^4x + S_m[g_{ab}, \psi], \quad (4.1)$$

donde ψ representa colectivamente los campos de materia (i.e. todos los campos excepto ϕ). La representación para las TET dada por la Ec (4.1) es la llamada representación en el marco de Jordan, discutida anteriormente. Dichas teorías se pueden reparametrizar como

$$S[g_{ab}, \Phi, \psi] = \frac{1}{16\pi G_0} \int \left\{ \Phi R - \frac{\omega(\Phi)}{\Phi}(\nabla\Phi)^2 + 2\Phi\lambda(\Phi) \right\} \sqrt{-g}d^4x + S_m[g_{ab}, \psi], \quad (4.2)$$

donde se ha definido a

$$\Phi \equiv F(\phi), \quad (4.3)$$

$$\omega(\Phi) \equiv \frac{8\pi G_0 \Phi}{(\partial_\phi F)^2}, \quad (4.4)$$

$$\lambda(\Phi) \equiv -\frac{8\pi V(\phi)}{\Phi}. \quad (4.5)$$

A la acción de la forma (4.2) se le conoce como la parametrización de BD, en razón de el parámetro $\omega(\Phi)$, acotado por los experimentos al nivel del sistema solar. De esta manera, la teoría de Brans-Dicke en el marco de Jordan corresponde $\omega = \text{cte}$ con lo que $F = 2\pi G_0 \phi^2 / \omega$ y además $V(\phi) = 0$. En la basta literatura de TET es habitual trabajar en el llamado marco de Einstein al introducir los siguientes «campos no físicos»

$$g_{ab}^* \equiv F(\phi)g_{ab}, \quad (4.6)$$

$$\phi^* \equiv \int \left[\frac{3}{4} \frac{1}{F^2(\phi)} (\partial_\phi F)^2 + \frac{4\pi}{F(\phi)} \right]^{1/2} d\phi, \quad (4.7)$$

$$F^*(\phi^*) = F(\phi), \quad (4.8)$$

con lo que la acción toma la forma

$$S[g_{ab}^*, \phi^*, \psi] = \frac{1}{16\pi G_0} \int [R^* - 2(\nabla^* \phi^*)^2 - V^*(\phi^*)] \sqrt{-g^*} d^4x + S_m[g_{ab}^*/F^*(\phi^*), \psi], \quad (4.9)$$

donde todas las cantidades con * se calculan a partir de g_{ab}^* y ϕ^* . Es claro que en el marco de Einstein el campo ϕ^* aparece acoplado mínimamente a la métrica no física por lo que las ecuaciones que resultan de variar a (4.9) son las mismas que de las de la RG más un campo externo ϕ^* . Si bien, operar en el marco de Einstein permite facilidad en los cálculos, pues son muy similares a los de la RG, las ecuaciones que satisface la materia, derivadas a partir de la identidad de Bianchi $\nabla^{*a} G_{ab}^* = 0$ tendrán fuentes, esto es, $\nabla^{*a} T_{ab}^* \neq 0$.

Al variar la acción (4.1) se obtienen las ecuaciones de movimiento

$$G^{ab} = 8\pi G_0 X^{ab}, \quad (4.10a)$$

$$g^{ab} \nabla_a \nabla_b \phi + \frac{1}{2} f' R = V', \quad (4.10b)$$

donde las cantidades primadas representan derivadas respecto al potencial ϕ y, además, X_{ab} es un tensor de energía-momento efectivo que incluye la contribución debida a la materia misma y al campo escalar,

$$X_{ab} = \frac{G^{\text{eff}}}{G_0} (T_{ab}^f + T_{ab}^\phi + T_{ab}), \quad (4.11)$$

$$T_{ab}^f = \nabla_a (f' \nabla_b \phi) - g_{ab} \nabla_c (f' \nabla^c \phi), \quad (4.12)$$

$$T_{ab}^\phi = \nabla_a \phi \nabla_b \phi - g_{ab} \left[\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + V(\phi) \right], \quad (4.13)$$

$$G^{\text{eff}} \equiv \frac{1}{8\pi f}, \quad f \equiv \frac{F}{8\pi G_0}. \quad (4.14)$$

Más aún, utilizando la Ec. (4.10a), el escalar de Ricci en la ecuación (4.10b) puede ser escrito en términos del tensor de energía-momento X_{ab} , con lo que se obtiene

$$g^{ab} \nabla_a \nabla_b \phi = \frac{1}{f(1 + \frac{3f'^2}{2f})} \left[fV' - 2f'V - \frac{1}{2} f'(1 + 3f'') (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} f' T \right], \quad (4.15)$$

donde T es la traza del tensor de energía-momento usual de la materia T_{ab} . Por otro lado, de la Ec. (4.10a) se obtiene, por la identidad de Bianchi la ley de conservación

$$\nabla_a X^{ab} = 0. \quad (4.16)$$

Mientras que si se toman en cuenta las ecuaciones de movimiento, el tensor de energía-momento de la materia se satisface independientemente,

$$\nabla_a T^{ab} = 0, \quad (4.17)$$

con lo que el principio de equivalencia se satisface [135], a decir, partículas de prueba neutras siguen las geodésicas de la métrica física y, por consiguiente, el efecto del campo escalar se manifiesta en modificaciones a la geometría misma.

4.2. Expansión alrededor de un fondo genérico

En consonancia con la primera parte de este trabajo, para la aproximación lineal de las TET, al igual que para la RG, es necesario perturbar las ecuaciones de movimiento a primer orden. Por otro lado, para obtener el PTEM OG para las TET es necesario llevar hasta segundo orden la expansión de las ecuaciones de movimiento. La distinción obvia entre el caso perturbativo de la RG y el de las TET yace en que la expansión también se realiza sobre el campo escalar. Con estas consideraciones, las expansiones a tomar en cuenta son

$$g_{ab}(\lambda) = \tilde{g}_{ab} + \lambda h_{ab}^{(1)} + \lambda^2 h_{ab}^{(2)}, \quad (4.18a)$$

$$\phi = \phi_0 + \lambda \tilde{\phi}, \quad (4.18b)$$

$$T_{ab} = \tilde{T}_{ab} + \lambda T_{ab}^{(1)}, \quad (4.18c)$$

donde por el momento se ha tomado que a orden $\lambda = 0$ el tensor de energía-momento de la materia es \tilde{T}_{ab} . Más adelante, al tomar $\tilde{T}_{ab} = 0$, si bien las ecuaciones se simplifican notablemente, está suposición encuentra sus consecuencias al momento de establecer el tipo de radiación propia del campo escalar. Por otro lado, de acuerdo al formalismo introducido en el Capítulo 2 y en el Apéndice C.2 los cálculos de las cantidades perturbadas son relativamente inmediatos, sin embargo, hay que tener en cuenta que funciones que dependen del campo como $F(\phi)$ y $V(\phi)$ también deben ser expandidas sobre el parámetro λ de la siguiente forma:

$$\mathcal{F}(\phi(\lambda)) = \mathcal{F}_0 + \lambda \mathcal{F}'_0 \tilde{\phi} + \frac{\lambda^2}{2} \mathcal{F}''_0 \tilde{\phi}^2, \quad (4.19)$$

donde las cantidades con el subíndice $_0$ están evaluadas en ϕ_0 . De esta manera, a orden cero las Ecs. (4.10) se escriben como

$$\tilde{G}_{ab} = 8\pi G_0^{\text{eff}} (\tilde{T}_{ab} + \tilde{T}_{ab}^\phi), \quad \tilde{T}_{ab}^\phi = -\tilde{g}_{ab} V_0, \quad (4.20a)$$

$$f'_0 \tilde{R} = 2V'_0. \quad (4.20b)$$

La Ec. (4.20a) muestra que el mínimo de potencial esta asociado a la geometría de fondo, en sentido más estricto V_0 puede ser entendido como una constante cosmológica. Siguiendo con la expansión en λ , a primer orden se tiene

$$G_{ab}^{(1)} = 8\pi G_0 X_{ab}^{(1)}, \quad (4.21a)$$

$$\tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi} = V''_0 \tilde{\phi} - \frac{1}{2} (f''_0 \tilde{\phi} \tilde{R} + f'_0 R^{(1)}), \quad (4.21b)$$

donde

$$X_{ab}^{(1)} = \frac{1}{G_0} \left[G_{\text{eff}}^{(1)} (\tilde{T}_{ab}^\phi + \tilde{T}_{ab}) + \frac{G_0}{F_0} (T_{ab}^{(1)f} + T_{ab}^{(1)\phi} + T_{ab}^{(1)}) \right], \quad (4.22)$$

$$T_{ab}^{(1)f} = f'_0 [\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi} - \tilde{g}_{ab} \tilde{\nabla}_c \tilde{\nabla}^c \tilde{\phi}], \quad (4.23)$$

$$T_{ab}^{(1)\phi} = -\tilde{g}_{ab} V'_0 \tilde{\phi}, \quad (4.24)$$

$$G_{\text{eff}}^{(1)} \equiv -\frac{G_0}{F_0^2} F'_0 \tilde{\phi}, \quad f'_0 \equiv \frac{F'_0}{8\pi G_0}, \quad (4.25)$$

en donde $G_{ab}^{(1)}$ está dado por la Ec. (2.69) y se retoma la expresión en términos de $\bar{h}_{ab}^{(1)}$ por conveniencia :

$$G \left[\bar{h}^{(1)} \right]_{ab}^{(1)} = -\frac{1}{2} \tilde{\nabla}^d \tilde{\nabla}_d \bar{h}_{ab}^{(1)} + \tilde{\nabla}^c \tilde{\nabla}_{(a} \bar{h}_{b)c}^{(1)} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{ab} \tilde{\nabla}^c \tilde{\nabla}^d \bar{h}_{cd}^{(1)} + \frac{1}{2} \tilde{R}_{cd} (\tilde{g}_{ab} \bar{h}^{(1)cd} - \bar{h}_{ab}^{(1)} \tilde{g}^{cd}). \quad (4.26)$$

Finalmente, a segundo orden en λ se obtiene

$$G_{ab}^{(2)} = 8\pi G_0 X_{ab}^{(2)}, \quad (4.27a)$$

$$V_0''' \tilde{\phi}^2 = -\frac{1}{2} \left[f_0''' \tilde{\phi}^2 \tilde{R} + 2f_0'' \tilde{\phi} R^{(1)} + 4f_0' R^{(2)} \right], \quad (4.27b)$$

donde

$$X_{ab}^{(2)} = \frac{1}{G_0} \left[G_{\text{eff}}^{(2)} (\tilde{T}_{ab}^\phi + \tilde{T}_{ab}) + G_{\text{eff}}^{(1)} (T_{ab}^{(1)f} + T_{ab}^{(1)\phi} + T_{ab}^{(1)}) + \frac{G_0}{F_0} (T_{ab}^{(2)f} + T_{ab}^{(2)\phi}) \right], \quad (4.28)$$

$$T_{ab}^{(2)f} = f_0'' \left\{ \tilde{\nabla}_a (\tilde{\phi} \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi}) - \tilde{g}_{ab} \tilde{\nabla}_c (\tilde{\phi} \tilde{\nabla}^c \tilde{\phi}) \right\}, \quad (4.29)$$

$$T_{ab}^{(2)\phi} = \tilde{\nabla}_a \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi} - \tilde{g}_{ab} \frac{1}{2} \left[\tilde{\nabla}_c \tilde{\phi} \tilde{\nabla}^c \tilde{\phi} + V_0'' \tilde{\phi}^2 \right], \quad (4.30)$$

$$G_{\text{eff}}^{(2)} = \frac{G_0}{2} \tilde{\phi}^2 \left[\frac{2(F'_0)^2}{F_0^3} - \frac{F_0''}{F_0^2} \right], \quad f_0'' = \frac{F_0''}{8\pi G_0}, \quad (4.31)$$

donde el lado izquierdo de (4.27a) es el tensor de Einstein a segundo orden calculado en el Capítulo (2) dado por la Ec. (2.76). Notése que la Ec. (4.27b) incluye terceras derivadas del potencial y de la función $f(\phi)$; al nivel del PTEM OG para las TET no es útil, pues no se requiere el perturbar a segundo orden la ecuación escalar, sin embargo, se incluye por completéz. En conclusión las Ecs. (4.20), (4.21) y (4.27) representan las perturbaciones a orden cero, primero y segundo sobre λ respectivamente. Ahora bien, si en la perturbación de la materia (4.18c) se toma a orden cero $\tilde{T}_{ab} = 0$, y la métrica de fondo sea solución a $\tilde{G}_{ab} = 0$, automáticamente se obtiene de las Ecs. (4.20)

$$V_0 = 0 = V_0', \quad (4.32)$$

con lo que las Ecs. (4.21) se simplifican notablemente a

$$G_{ab}^{(1)} = 8\pi G_0 X_{ab}^{(1)} = 8\pi \frac{G_0}{F_0} (T_{ab}^{(1)f} + T_{ab}^{(1)}), \quad (4.33a)$$

$$\tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi} = V_0'' \tilde{\phi} - \frac{1}{2} f_0' R^{(1)}, \quad (4.33b)$$

donde $G_{ab}^{(1)}$ corresponde a la Ec. (4.26) con $\tilde{R}_{cd} = 0$. A su vez, a segundo orden la Ec. (4.27a) se simplifica a

$$G_{ab}^{(2)} = 8\pi G_0 X_{ab}^{(2)} = 8\pi G_{\text{eff}}^{(1)} (T_{ab}^{(1)f} + T_{ab}^{(1)}) + 8\pi \frac{G_0}{F_0} (T_{ab}^{(2)f} + T_{ab}^{(2)\phi}). \quad (4.34)$$

Las Ecs. (4.33) serán utilizadas más adelante para construir el límite lineal de las TET, por otro lado, la Ec. (4.34) es la base para construir PTEM OG en las TET, el cual se analiza en la siguiente sección. Sin embargo, antes de proseguir, noté que se puede recuperar la primera perturbación en λ de la Ec. (4.15). Al trazar la Ec. (4.33a), se obtiene $R^{(1)} = -8\pi G_0 F_0^{-1} (T^{(1)f} + T^{(1)})$; sustituyendo dicha expresión en la Ec. (4.33b),

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi} &= V_0'' \tilde{\phi} - \frac{1}{2} \frac{F_0'}{F_0} (T^{(1)f} + T^{(1)}) \\ &= V_0'' \tilde{\phi} + \frac{3(F_0')^2}{16\pi G_0 F_0} \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi} - \frac{F_0'}{2F_0} T^{(1)}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

La Ec. (4.35) puede ser reescrita como una ecuación tipo Klein-Gordon si se definen las siguientes variables

$$m_0^2 = \frac{V_0''}{1 + \frac{3(F_0')^2}{16\pi G_0 F_0}}, \quad \alpha = \frac{1}{8\pi \left(1 + \frac{3(F_0')^2}{16\pi G_0 F_0}\right)}. \quad (4.36)$$

Así, (4.35) toma a forma

$$\tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi} - m_0^2 \tilde{\phi} = 4\pi \frac{F_0'}{F_0} \alpha T^{(1)}. \quad (4.37)$$

Por otra parte, de la misma manera que en el caso de RG se utilizó la variable \bar{h}_{ab} en lugar de h_{ab} , en la cual la norma de Lorenz era más simple, en el caso de las TET a primer nivel perturbativo conviene introducir la nueva variable

$$\tilde{h}_{ab} = \bar{h}_{ab} + \kappa \tilde{g}_{ab} \tilde{\phi}, \quad (4.38)$$

donde κ es una constante que se obtendrá más adelante en la Sección 4.4.1 cuando se considere el límite lineal de las TET ($\tilde{\nabla}_a \rightarrow \partial_a$ y $\tilde{g}_{ab} \rightarrow \eta_{ab}$). Por el momento, se expresa a (4.26) en términos de esta nueva variable

$$G[\tilde{h}]_{ab}^{(1)} = -\frac{1}{2} \tilde{\nabla}^d \tilde{\nabla}_d \tilde{h}_{ab} + \tilde{\nabla}^c \tilde{\nabla}_{(a} \tilde{h}_{b)c} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{ab} \tilde{\nabla}^c \tilde{\nabla}^d \tilde{h}_{cd} - \kappa (\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi} - \tilde{g}_{ab} \tilde{\nabla}_c \tilde{\nabla}^c \tilde{\phi}). \quad (4.39)$$

4.3. Pseudo-tensor de energía-momento de las OG

El PTEM OG para las TET se reporta en [134, 170], sin embargo, la derivación refiere sólo a la teoría de Brans-Dicke (i.e., $\omega = \text{cte}$ en la acción (4.2)). En esta sección se generaliza este resultado para teorías masivas parametrizadas en la forma (4.1).

De acuerdo a la Sección 2.4, en la RG bastó con considerar a las ecuaciones de campo en vacío para obtener el PTEM OG; para las teorías escalaras esto equivale a suponer la ausencia de materia, es decir, $T_{ab}^{(1)} = 0$. Con dicha consideración las ecuaciones de campo a segundo orden (4.34) toman la forma

$$G[h^{(1)}, h^{(2)}]_{ab}^{(2)} = 8\pi G_{\text{eff}}^{(1)} T_{ab}^{(1)f} + 8\pi \frac{G_0}{F_0} (T_{ab}^{(2)f} + T_{ab}^{(2)\phi}). \quad (4.40)$$

El lado izquierdo es el tensor de Einstein calculado en el Capítulo 2 y está dado por la Ec. (2.74). Las expresiones explícitas del lado derecho de (4.40) están dadas por las Ecs. (4.29), (4.30), (4.23) y (4.25). En consecuencia, separando las dependencias del tensor de Einstein a segundo orden se reescribe la Ec. (4.40) como λ se tiene

$$G[h^{(2)}]_{ab}^{(1)} = -G[h^{(1)}]_{ab}^{(2)} + 8\pi G_{\text{eff}}^{(1)} T_{ab}^{(1)f} + 8\pi \frac{G_0}{F_0} (T_{ab}^{(2)f} + T_{ab}^{(2)\phi}). \quad (4.41)$$

Siguiendo el mismo análisis de la Sección 2.4 se define el PTEM OG para las TET se define como

$$\begin{aligned} \Theta_{ab}^{(\text{TET})} &= \frac{F_0}{8\pi G_0} \left\langle \left\langle -G_{ab}^{(2)} + 8\pi G_{\text{eff}}^{(1)} T_{ab}^{(1)f} + \frac{8\pi G_0}{F_0} (T_{ab}^{(2)f} + T_{ab}^{(2)\phi}) \right\rangle \right\rangle \\ &= \Theta_{ab}^{(\text{RG})} + \left\langle \left\langle T_{ab}^{(2)f} + T_{ab}^{(2)\phi} \right\rangle \right\rangle + \frac{F_0}{G_0} \left\langle \left\langle G_{\text{eff}}^{(1)} T_{ab}^{(1)f} \right\rangle \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Notése que, bajo los promedios, el término $T_{ab}^{(2)f}$ se anula pues de acuerdo a la Ec.(4.30) son divergencias totales. Por otro lado, el primer término es el PTEM OG en la RG obtenido en el Capítulo 3 y está dado por la Ec. (3.114), en el entendido de que $G \rightarrow G_0/F_0$. Ahora bien, es conveniente expresar a $\Theta_{ab}^{(\text{RG})}$ en términos de \tilde{h}_{ab} pues la norma de Lorenz en las TET está dada por la Ec. 4.53 la cual está expresada en términos de \tilde{h}_{ab} . Bajo estas consideraciones, los términos de $\Theta_{ab}^{(\text{RG})}$ se escriben como

$$\tilde{\nabla}_a \tilde{h}^{cd} \tilde{\nabla}_b \tilde{h}_{cd} = \tilde{\nabla}_a \tilde{h}^{cd} \tilde{\nabla}_b \tilde{h}_{cd} - 2\kappa \tilde{\nabla}_{(a} \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_{b)} \tilde{h} + 4\kappa^2 \tilde{\nabla}_a \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi}, \quad (4.43a)$$

$$\tilde{\nabla}_a \tilde{h} \tilde{\nabla}_b \tilde{h} = \tilde{\nabla}_a \tilde{h} \tilde{\nabla}_b \tilde{h} - 8\kappa \tilde{\nabla}_{(a} \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_{b)} \tilde{h} + 16\kappa^2 \tilde{\nabla}_a \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi}, \quad (4.43b)$$

$$\tilde{\nabla}_c \tilde{h}^{cd} \tilde{\nabla}_{(a} \tilde{h}_{b)d} = \tilde{\nabla}_c \tilde{h}^{cd} \tilde{\nabla}_{(a} \tilde{h}_{b)d} - \kappa \tilde{\nabla}^c \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_{(a} \tilde{h}_{b)c} - \kappa \tilde{\nabla}_c \tilde{h}_{(b}^c \tilde{\nabla}_{a)} \tilde{\phi} + \kappa^2 \tilde{\nabla}_{(a} \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_{b)} \tilde{\phi} \quad (4.43c)$$

con lo que

$$\begin{aligned} \Theta_{ab}^{(\text{RG})} &= \frac{F_0}{32\pi G_0} \left\langle \left\langle \tilde{\nabla}_a \tilde{h}^{cd} \tilde{\nabla}_b \tilde{h}_{cd} - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_a \tilde{h} \tilde{\nabla}_b \tilde{h} - 2\tilde{\nabla}_c \tilde{h}^{cd} \tilde{\nabla}_{(a} \tilde{h}_{b)d} \right\rangle \right\rangle \\ &= \frac{F_0}{32\pi G_0} \left\{ \left\langle \left\langle \tilde{\nabla}_a \tilde{h}^{cd} \tilde{\nabla}_b \tilde{h}_{cd} - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_a \tilde{h} \tilde{\nabla}_b \tilde{h} - 2\tilde{\nabla}_c \tilde{h}^{cd} \tilde{\nabla}_{(a} \tilde{h}_{b)d} \right\rangle \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left\langle \left\langle 2\kappa \tilde{\nabla}_{(a} \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_{b)} \tilde{h} - 6\kappa^2 \tilde{\nabla}_a \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi} - 2(-\kappa \tilde{\nabla}^c \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_{(a} \tilde{h}_{b)c} - \kappa \tilde{\nabla}_c \tilde{h}_{(b}^c \tilde{\nabla}_{a)} \tilde{\phi}) \right\rangle \right\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Por otro lado, el segundo término de la Ec. (4.42) puede ser reescrito utilizando la Ec. (4.37) como

$$\begin{aligned} \langle \langle T_{ab}^{(2)\phi} \rangle \rangle &= \langle \langle \tilde{\nabla}_a \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi} - \tilde{g}_{ab} \frac{1}{2} [\tilde{\nabla}_c \tilde{\phi} \tilde{\nabla}^c \tilde{\phi} + V_0'' \tilde{\phi}^2] \rangle \rangle \\ &= \langle \langle \tilde{\nabla}_a \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi} - \tilde{g}_{ab} \frac{1}{2} [-\tilde{\phi} \tilde{\nabla}_c \tilde{\nabla}^c \tilde{\phi} + V_0'' \tilde{\phi}^2] \rangle \rangle \\ &= \langle \langle \tilde{\nabla}_a \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi} - \tilde{g}_{ab} \frac{1}{2} [-m_0^2 \tilde{\phi}^2 + V_0'' \tilde{\phi}^2] \rangle \rangle \\ &= \langle \langle \tilde{\nabla}_a \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi} + \tilde{g}_{ab} \frac{\tilde{\phi}^2}{2} [m_0^2 - V_0''] \rangle \rangle, \end{aligned} \quad (4.45)$$

mientras que para el tercer término de (4.42) se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{F_0}{G_0} \langle\langle G_{\text{eff}}^{(1)} T_{ab}^{(1)f} \rangle\rangle &= -\frac{F_0 \kappa^2}{8\pi G_0} \langle\langle \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi} - \tilde{g}_{ab} \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_c \tilde{\nabla}^c \tilde{\phi} \rangle\rangle \\
&= \frac{F_0 \kappa^2}{8\pi G_0} \langle\langle \tilde{\nabla}_a \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi} + \tilde{g}_{ab} m_0^2 \tilde{\phi}^2 \rangle\rangle \\
&= \frac{F_0 \kappa^2}{32\pi G_0} \langle\langle 4 \tilde{\nabla}_a \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi} + 4 \tilde{g}_{ab} m_0^2 \tilde{\phi}^2 \rangle\rangle
\end{aligned} \tag{4.46}$$

De esta manera, combinando las Ecs. (4.45), (4.46) y (4.44) se obtiene el PTEM OG para las TET

$$\Theta_{ab}^{(\text{TET})} = \frac{F_0}{32\pi G_0} \left\{ \left\langle\left\langle \tilde{\nabla}_a \tilde{h}^{cd} \tilde{\nabla}_b \tilde{h}_{cd} + 2(16\pi G_0 F_0^{-1} - \kappa^2) \tilde{\nabla}_a \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi} \right.\right.\right. \\
\left. \left. + \tilde{g}_{ab} \tilde{\phi}^2 \left[m_0^2 (4\kappa^2 + 16\pi G_0 F_0^{-1}) - V_0'' 16\pi G_0 F_0^{-1} \right] \right.\right. \\
\left. \left. + \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_a \tilde{h} \tilde{\nabla}_b \tilde{h} - 2 \tilde{\nabla}_c \tilde{h}^{cd} \tilde{\nabla}_{(a} \tilde{h}_{b)d} + 2\kappa \tilde{\nabla}_{(a} \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_{b)} \tilde{h} \right.\right. \\
\left. \left. - 2(-\kappa \tilde{\nabla}^c \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_{(a} \tilde{h}_{b)c} - \kappa \tilde{\nabla}_c \tilde{h}_{(b} \tilde{\nabla}_{a)} \tilde{\phi}) \right\rangle\right\}. \tag{4.47}$$

Notése que dada la definición de m_0 (Ec. (4.36)), ésta es proporcional a V_0''' , por lo que en la segunda línea de la Ec. (4.78) ambos términos son proporcionales a la masa del campo escalar. Asimismo, el PTEM OG para las TET, en distinción con su contraparte de la RG, contiene términos puramente debidos al campo escalar y algunos acoplados con la perturbación \tilde{h}_{ab} . Por lo que al nivel de las ecuaciones de balance energéticas se espera ya una contribución debida al campo escalar.

4.4. Radiación gravitacional en TET

4.4.1. Límite lineal

El límite lineal de las TET ha sido explorado ampliamente en el marco de Einstein [82]. En el caso de la parametrización de Brans-Dicke, el límite lineal ha sido analizado en [170]. En esta sección se analiza el límite lineal las TET con la parametrización (4.1) en lo que se conoce como la formulación 4 + 0 [135]. Retomando las expansiones (4.18), el límite lineal corresponde a la identificación $\tilde{\nabla}_a \rightarrow \partial_a$ y $\tilde{g}_{ab} \rightarrow \eta_{ab}$ en las Ecs. (4.37) y (4.33). Para el campo escalar se tiene la versión linealizada de la Ec. de Klein Gordon⁶¹

$$\Box \tilde{\phi} - m_0^2 \tilde{\phi} = 4\pi\alpha \frac{F_0'}{F_0} T, \tag{4.48}$$

donde $\Box = \eta^{ab} \partial_a \partial_b$ y $T = \eta^{ab} T_{ab}$. Por otro lado, la versión lineal de la Ec. (4.33) se obtiene al linealizar (4.39), con lo que

$$-\frac{1}{2} \Box \tilde{h}_{ab} + \partial^c \partial_{(a} \tilde{h}_{b)c} - \frac{1}{2} \eta_{ab} \partial^c \partial^d \tilde{h}_{cd} = \left(\frac{F_0'}{F_0} + \kappa \right) (\partial_a \partial_b \tilde{\phi} - \eta_{ab} \Box \tilde{\phi}) + \frac{8\pi G_0}{F_0} T_{ab}. \tag{4.49}$$

Nótese que si se escoge

$$\kappa = -\frac{F_0'}{F_0}, \tag{4.50}$$

⁶¹En esta sección los superíndices indicando el orden de la perturbación ya no se escriben; en el caso del tensor de energía-momento de la materia se tiene la identificación $T_{ab}^{(1)} \rightarrow T_{ab}$.

la ecuación para \tilde{h}_{ab} se desacopla del campo escalar $\tilde{\phi}$,

$$-\frac{1}{2}\square\tilde{h}_{ab} + \partial^c\partial_{(a}\tilde{h}_{b)c} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\partial^c\partial^d\tilde{h}_{cd} = \frac{8\pi G_0}{F_0}T_{ab}, \quad (4.51)$$

y toma la misma forma que la versión lineal de la RG (Ec. 3.53). La conservación del tensor de energía-momento de la materia (4.16) se traduce a

$$\partial_a T^{ab} = 0. \quad (4.52)$$

Más aún, al observar la forma de (4.51) la condición usual de norma de Lorenz en la RG se generaliza a

$$\partial^a\tilde{h}_{ab} = 0, \quad (4.53)$$

para las TET y puede ser impuesta para simplificar la Ec. (4.51), con lo que

$$\square\tilde{h}_{ab} = -\frac{16\pi G_0}{F_0}T_{ab}, \quad (4.54)$$

es decir, una ecuación de onda análoga al caso de la RG. La condición (4.53) es, de hecho, el límite lineal de la norma pseudo-harmónica $\square x^a = -\nabla^a \log F$ [135].

4.4.2. Descomposición en partes irreducibles

Para identificar la naturaleza de los grados de libertad del límite lineal de las TET conviene partir de la Ec. (4.33a), esto es,

$$G[h]_{ab}^{(1)} = 8\pi G_0 X_{ab}^{(1)} = 8\pi \frac{G_0}{F_0} (T_{ab}^{(1)f} + T_{ab}), \quad (4.55)$$

donde T_{ab} es el tensor de energía momento de la materia y $T_{ab}^{(1)f}$ está dado por la Ec. (4.23). Siguiendo el formalismo desarrollado en la Sección 3.2.4, la descomposición 3 + 1 en la perturbación h_{ab} (Ec. (3.70)) es inmediata pues el lado izquierdo de la Ec. (4.55) es el tensor de Einstein usual a primer orden. Sin embargo, la distinción con el caso de la RG proviene del lado derecho de (4.55), específicamente en la dependencia de $T_{ab}^{(1)f}$. Con esto en mente, se retoma la descomposición 3 + 1 del tensor de Einstein a primer orden, Ec. (3.78), dada por

$$G_{00}^{(1)} = -2\nabla^2\Psi \quad (4.56a)$$

$$G_{0j}^{(1)} = -2\partial_{tj}\Psi + 2\nabla^2\Theta_j \quad (4.56b)$$

$$G_{jk}^{(1)} = -\frac{2}{3}\delta_{jK}\nabla^2(\Phi - \Psi) - 2\delta_{jK}\partial_{tt}\Psi + \left(\partial_{jk} - \frac{1}{3}\delta_{jK}\nabla^2\right)(\Phi - \Psi) + 2(\partial_{tj}\Theta_k + \partial_{tk}\Theta_j) - \frac{1}{2}\square h_{jk}^{\Gamma\Gamma} \quad (4.56c)$$

donde las cantidades

$$\Phi \equiv \phi_h - \partial_t\gamma + \frac{1}{2}\partial_{tt}\Upsilon, \quad (4.57a)$$

$$\Theta_j \equiv -\frac{1}{4}(\beta_j - \partial_t\zeta_j), \quad (4.57b)$$

$$\Psi \equiv \frac{1}{6}(H - \nabla^2\Upsilon), \quad (4.57c)$$

son invariantes de norma.⁶² En la misma línea, el tensor de energía-momento de la materia adopta la descomposición dada por la Ec. (3.81). Con lo que el lado derecho de la Ec. (4.55) en la descomposición 3 + 1 se escribe como

$$8\pi G_0 X_{00} = \frac{F'_0}{F_0} (\partial_{tt} \tilde{\phi} + m_0^2 \tilde{\phi}) + 4\pi\alpha \left(\frac{F'_0}{F_0} \right)^2 T + \frac{8\pi G_0}{F_0} T_{00}, \quad (4.58a)$$

$$8\pi G_0 X_{0j} = \frac{F'_0}{F_0} \partial_{tj} \tilde{\phi} + \frac{8\pi G_0}{F_0} T_{0j}, \quad (4.58b)$$

$$8\pi G_0 X_{jk} = \frac{F'_0}{F_0} (\partial_{jk} \tilde{\phi} - \delta_{jk} m_0^2 \tilde{\phi}) - \delta_{jk} 4\pi\alpha \left(\frac{F'_0}{F_0} \right)^2 T + \frac{8\pi G_0}{F_0} T_{jk}, \quad (4.58c)$$

donde se utilizó la Ec. de Klein-Gordon (4.48) para reescribir el término cinético de $T_{ab}^{(1)f}$ en términos de la traza de T_{ab} , cuya descomposición en partes irreducibles está dada por la Ec. (3.81). De esta manera, la igualdad entre las componentes temporales (4.58a) y (4.56a) da pie a

$$\nabla^2 \Psi = -\frac{F'_0}{2F_0} (\partial_{tt} \tilde{\phi} + m_0^2 \tilde{\phi}) - 2\pi\alpha \left(\frac{F'_0}{F_0} \right)^2 (-\rho + 3\tau) - \frac{4\pi G_0}{F_0} \rho. \quad (4.59)$$

Por otro lado, la igualdad entre las componentes espacio-temporales (4.58b) y (4.56b) implica dos ecuaciones

$$\nabla^2 \Theta_j = -\frac{4\pi G_0}{F_0} S_j, \quad (4.60a)$$

$$\partial_t \Psi + \frac{F'_0}{2F_0} \partial_t \tilde{\phi} = \frac{4\pi G_0}{F_0} S, \quad (4.60b)$$

donde S_j y S están directamente relacionados con la descomposición de T_{ab} . Finalmente, la igualdad entre la parte espacial (4.58c) y (4.56c) determina las siguientes ecuaciones:

$$\nabla^2 (\Phi - \Psi) = -2\partial_{tt} \Psi + \frac{F'_0}{F_0} m_0^2 \tilde{\phi} + 4\pi\alpha \left(\frac{F'_0}{F_0} \right)^2 (-\rho + 3\tau) + \frac{8\pi G_0}{F_0} \left(-\tau + \frac{1}{3} \nabla^2 \sigma \right) \quad (4.61a)$$

$$\Phi - \Psi = \frac{F'_0}{F_0} \tilde{\phi} + \frac{8\pi G_0}{F_0} \sigma \quad (4.61b)$$

$$\partial_t \Theta_k = 4\pi G_0 \sigma_k \quad (4.61c)$$

$$\square h_{jK}^{\text{TT}} = -\frac{16\pi G_0}{F_0} \sigma_{jk}^{\text{TT}} \quad (4.61d)$$

Las Ecs.(4.59), (4.61a) y (4.61b) pueden ser reescritas si se redefinen las cantidades invariantes de norma como

$$\Psi_\phi = \Psi + \frac{1}{2} \frac{F'_0}{F_0} \tilde{\phi}, \quad (4.62a)$$

$$\Phi_\phi = \Phi - \frac{1}{2} \frac{F'_0}{F_0} \tilde{\phi}, \quad (4.62b)$$

donde de la Ec. (4.61b) se observa que, en efecto, $F'_0/F_0 \tilde{\phi}$ es un invariante de norma, pues está expresada en términos de los potenciales Ψ y Φ . Así, se obtiene una formulación invariante

⁶²Noté que se utilizó a ϕ_h en lugar de ϕ en $h_{00} = 2\phi_h$ para evitar confusiones con el campo escalar $\tilde{\phi}$.

de norma del límite lineal de las TET dada por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi_\phi &= -\frac{4\pi G_0}{F_0} \rho, & (4.63a) \\ \nabla^2 \Phi_\phi &= -\frac{12\pi G_0}{F_0} \left(\tau + \frac{1}{3} \rho + \partial_t S \right), & (4.63b) \\ \nabla^2 \Theta_j &= -\frac{\kappa}{2} S_j, & (4.63c) \\ \square h_{jk}^{\text{TT}} &= -2\kappa \sigma_{jk}^{\text{TT}}, & (4.63d) \\ (\square - m_0^2) \tilde{\phi} &= 4\pi \alpha \frac{F'_0}{F_0} (-\rho + 3\tau), & (4.63e) \end{aligned}$$

con las condiciones

$$\partial^j \Theta_j = 0 = \partial^j S_j \qquad h_{jK}^{\text{TT}} \delta^{jk} = 0 = \partial^j h_{jk}^{\text{TT}} \quad (4.63f)$$

Es claro, que en el límite $F'_0 = 0$ se recuperan la formulación invariante de la RG. Las Ecs. (4.63) indican que los grados de libertad radiativos de las TET son **tres, dos de la parte sin traza y transversa y uno debido al campo escalar**. Los cuatro grados de libertad sobrantes, Ψ_ϕ , Φ_ϕ y Θ_j , son no radiativos y están directamente relacionados con la distribución de materia a un mismo t . Nótese que la contribución del campo escalar sólo se refleja en las escalares Ψ_ϕ y Φ_ϕ y no en la perturbación «puramente» gravitacional h_{jk}^{TT} .⁶³ Para ver el efecto de este grado de libertad extra considérese el tensor de Riemman linealizado (2.41):

$$R_{abcd} = \frac{1}{2} \left[\partial_a \partial_c h_{bd} - \partial_d \partial_a h_{bc} + \partial_b \partial_c h_{ad} + \partial_d \partial_a h_{cb} \right] \quad (4.64)$$

En particular, la componente relevante en la interacción de la onda con un detector es R_{j0k0} la cual puede ser expresada en términos de las cantidades invariantes de norma como

$$R_{j0k0} = -\partial_{jk} \Psi_\phi - \delta_{jk} \partial_{tt} \Psi_\phi - 4\partial_t \partial_{(j} \Theta_{k)} + \frac{F'_0}{F_0} (\delta_{jk} \partial_{tt} \tilde{\phi} - \partial_{jk} \tilde{\phi}) - \frac{1}{2} \partial_{tt} h_{jk}^{\text{TT}}, \quad (4.65)$$

En vacío, los potenciales Ψ_ϕ , Φ_ϕ y Θ_j , son idénticamente cero por lo que (4.65) se reduce a

$$R_{j0k0} = \frac{F'_0}{F_0} (\delta_{jk} \partial_{tt} \tilde{\phi} - \partial_{jk} \tilde{\phi}) - \frac{1}{2} \partial_{tt} h_{jk}^{\text{TT}}. \quad (4.66)$$

La ecuación de desviación geodésica [160] en el límite en el que las masas de prueba se mueven lentamente

$$\frac{d^2 X^j}{dt^2} = -R_{j0k0} X^k, \quad (4.67)$$

⁶³Nótese que si en lugar de haber partido del tensor lineal de Einstein $G[h]_{ab}^{(1)}$ se escoge $G[\tilde{h}]_{ab}^{(1)}$ dado por la Ec. (4.39) y se realiza la descomposición en partes irreducible a la variable \tilde{h}_{ab} los resultados obtenidos son equivalentes y además se obtiene que $h_{jk}^{\text{TT}} = \tilde{h}_{jK}^{\text{TT}}$.

donde X^k es el vector de desviación geodésica, que en este caso representa el desplazamiento de las partículas de prueba. Por lo tanto, se satisface la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X^j}{dt^2} &= \left[-\frac{F'_0}{F_0} (\delta_{jk} \partial_{tt} \tilde{\phi} - \partial_{jk} \tilde{\phi}) + \frac{1}{2} \partial_{tt} h_{jK}^{\text{TT}} \right] X^k. \\ &= \left[-\frac{F'_0}{F_0} (\delta_{jk} - n_j n_k) \partial_{tt} \tilde{\phi} + \frac{1}{2} \partial_{tt} h_{jK}^{\text{TT}} \right] X^k, \\ &\equiv \partial_{tt} S_{jk} X^k \end{aligned} \quad (4.68)$$

donde se ha hecho uso de que las cantidades dependen de las variables \mathbf{n} y el tiempo retardado τ , por lo que, en la zona de onda se ha hecho uso de la regla de diferenciación $\partial_j \tilde{\phi} = -n_j \partial_t \tilde{\phi}$,⁶⁴ además se ha definido a

$$S_{jk} = \underbrace{(\delta_{jk} - n_j n_k) \kappa \tilde{\phi}}_{\text{Modo escalar}} + \frac{1}{2} h_{jk}^{\text{TT}}. \quad (4.69)$$

Notése de la expresión anterior que el nuevo modo escalar es transverso a la dirección de propagación. Para describir el efecto de este modo escalar considerés la solución a la Ec.(4.68) a primer orden en el desplazamiento:

$$X^j(t) = X^j(0) + S_{jk}(\tau, \mathbf{n}) X^k, \quad (4.70)$$

por lo que para una onda propagándose en la dirección z se tiene $\mathbf{n} = (0, 0, z)$, de tal manera que

$$x(t) = x_0 + (\kappa \tilde{\phi} + \frac{1}{2} h_+) x_0 + \frac{1}{2} h_{\times} y_0, \quad (4.71a)$$

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{2} h_{\times} x_0 + (\kappa \tilde{\phi} - \frac{1}{2} h_+) y_0, \quad (4.71b)$$

$$z(t) = z_0. \quad (4.71c)$$

De las Ecs. (4.71) se observa que para un modo escalar puro no masivo, un aro de partículas en el plano $x - y$ aumenta y disminuye su tamaño de manera uniforme como se observa en la Fig. 4.1. Este modo escalar adquiere el nombre *breathing mode*, por sus particulares consecuencias [168, 170]. La eventual detección de este modo escalar por las futuras generaciones de detectores representaría la desviación a la RG más contundente en favor de esta clase de teorías. Hasta este momento no se ha hecho incapie en la naturaleza de la radiación escalar; independientemente de su origen, las TET contienen tres grados de libertad radiativos y, por extensión, tres modos de polarización, en principio, observables.

4.4.3. Formalismo multipolar en las TET

Si se define a $\mu \equiv -\alpha \frac{F'_0}{F_0} T^{\text{mat}} \equiv \tilde{\alpha} T$ la ecuación para el campo escalar (4.48) toma la forma

$$\square \tilde{\phi} - m_0^2 \tilde{\phi} = -4\pi\mu, \quad (4.72)$$

sin embargo, la masa del campo escalar puede ser despreciada (i.e. $m_0 \sim 0$) pues en casos de importancia como la escalarización espontánea generalmente se toma en cuenta campos

⁶⁴Está regla asume que se está trabajando en el caso en el que se puede despreciar la masa del campo escalar. Si no fuera así, existiría un modo longitudinal debido a la parte masiva [93].

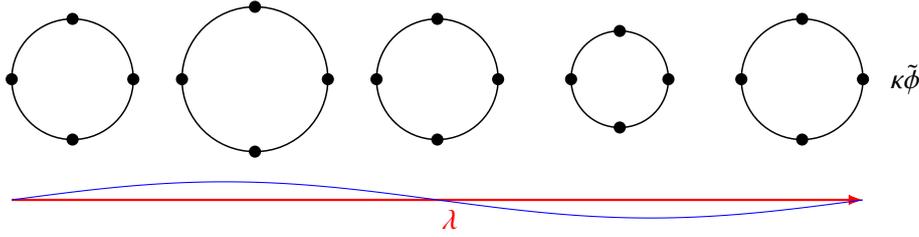


FIGURA 4.1: Efecto del modo escalar presente en las TET. Si la onda se propaga en la dirección z el aro de partículas de prueba situado en el plano $x-y$, que coincide con el de la página, cambia su radio uniformemente.

escalares no masivos.⁶⁵ De esta manera las ecuaciones de campo para el límite lineal de las TET son:

$$\square \tilde{h}_{ab} = -\frac{16\pi G_0}{F_0} T_{ab}, \quad (4.73a)$$

$$\square \tilde{\phi} = -4\pi \tilde{\alpha} T, \quad (4.73b)$$

es decir, dos ecuaciones tipo onda cuya fuente es el tensor de energía-momento de la materia y su traza, respectivamente. La solución en términos de la expansión multipolar en la zona lejana de onda, es, de acuerdo a la Ec. (B.10), de la forma

$$\tilde{\phi}(t, \mathbf{x}) = \frac{\tilde{\alpha}}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} n_{j_1 \dots j_k} \left(\frac{d}{d\tau} \right)^k \left\{ \int T(\tau, \mathbf{x}') x'^{j_1 \dots j_k} d^3 x' \right\}, \quad (4.74)$$

donde r es la distancia a la fuente. Dado que el orden dominante para \tilde{h}_{jk} es el cuadrupolar con $l = 2$ la expansión para $\tilde{\phi}$ se trunca en $l = 2$ por consistencia y ésta se escribe como

$$\tilde{\phi} = \phi_0 + \frac{\tilde{\alpha}}{r} \left[\mathcal{I}_s + \dot{\mathcal{I}}_s^j n_j + \ddot{\mathcal{I}}_s^{jk} n_j n_k + \dots \right] \quad (4.75)$$

donde se han definido a los momentos multipolares escalares

$$\mathcal{I}_s = \int T(\tau, \mathbf{x}) d^3 x, \quad \text{Monopolar} \quad (4.76a)$$

$$\mathcal{I}_s^j = \int T(\tau, \mathbf{x}) x^j d^3 x, \quad \text{Dipolar} \quad (4.76b)$$

$$\mathcal{I}_s^{jk} = \int T(\tau, \mathbf{x}) x^j x^k d^3 x. \quad \text{Cuadrupolar} \quad (4.76c)$$

Es claro que el orden dominante en la expansión (4.75) es monopolar, esta cuestión se discutirá más adelante en la Sección (4.5). Por otro lado, la solución a la Ec. 4.73a, debido a que la fuente es puramente T_{ab} y esta se conserva como en el caso de la RG, es de la misma forma,

⁶⁵Realizar una expansión multipolar a la ecuación de Klein-Gordon requiere además de técnicas matemáticas más sofisticadas pues la solución en el espacio de posiciones no es trivial, a diferencia del caso no masivo. Para la expansión multipolar del caso masivo ver e.g. [13, 171].

así retomando a la solución (3.93) se tiene

$$\tilde{h}_{00} = \frac{4G_0}{rF_0} \left\{ M + \frac{1}{2}n_j n_k \ddot{I}^{jk} + \frac{1}{6}n_j n_k n_l \ddot{I}^{jkl} + \dots \right\} \quad (4.77a)$$

$$\tilde{h}_{0j} = \frac{4G_0}{rF_0} \left\{ \frac{1}{2}\ddot{I}^{jk}n^k + \frac{1}{12}n^k n^l (\ddot{I}^{jkl} - 2\epsilon_{mjk}\ddot{J}_{ml}) + \dots \right\} \quad (4.77b)$$

$$\tilde{h}_{jk} = \frac{4G_0}{rF_0} \left\{ \frac{1}{2}\ddot{I}^{jk} + \frac{1}{6}n^l (\ddot{I}^{jkl} + 2\epsilon_{mlj}\ddot{J}_{mk} + 2\epsilon_{mlk}\ddot{J}_{mj}) + \dots \right\}. \quad (4.77c)$$

A este nivel de aproximación, para calcular el flujo de energía, es necesario especializar el PTEM OG para las TET, Ec. (4.78), en la zona lejana de onda. En primer lugar con la identificación usual $\nabla_a \rightarrow \partial_a$ y $\tilde{g}_{ab} \rightarrow \eta_{ab}$, se recupera el límite lineal. Más aún, dado que se están considerando sólo TET no masivas, esto es $V_0'' = m_0 = 0$, el PTEM OG para las TET se reduce a

$$\begin{aligned} \Theta_{ab}^{(\text{TET})} = \frac{F_0}{32\pi G_0} \left\{ \left\langle \left\langle \partial_a \tilde{h}^{cd} \partial_b \tilde{h}_{cd} + 2(16\pi G_0 F_0^{-1} - \kappa^2) \partial_a \tilde{\phi} \partial_b \tilde{\phi} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + -\frac{1}{2} \partial_a \tilde{h} \partial_b \tilde{h} - 2\partial_c \tilde{h}^{cd} \partial_{(a} \tilde{h}_{b)d} + 2\kappa \partial_{(a} \tilde{\phi} \partial_{b)} \tilde{h} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 2(-\kappa \partial^c \tilde{\phi} \partial_{(a} \tilde{h}_{b)c} - \kappa \partial_c \tilde{h}_{(b} \partial_{a)} \tilde{\phi}) \right\rangle \right\rangle \right\}. \quad (4.78) \end{aligned}$$

Por otro lado, de la misma manera que el caso de RG, la especialización en la zona de onda lejana permite simplificar a (4.78) notablemente, haciendo uso de las reglas de diferenciación

$$\partial_a \tilde{h}^{bc} = -k_a \partial_\tau \tilde{h}^{bc} + \mathcal{O}(r^{-2}), \quad (4.79a)$$

$$\partial_a \tilde{\phi} = -k_a \partial_\tau \tilde{\phi} + \mathcal{O}(r^{-2}), \quad (4.79b)$$

donde $k_a = (1, n^j)$. Además tomando en cuenta que la única parte que contribuye en la zona lejana de onda es $\tilde{h}_{ab} \rightarrow \tilde{h}_{jk}^{\text{TT}}$, el PTEM OG de las TET no masivas se reduce a

$$\Theta_{ab}^{(\text{TET})} = \frac{F_0}{32\pi G_0} \left\langle \left\langle \partial_\tau \tilde{h}_{jk}^{\text{TT}} \partial_\tau \tilde{h}_{jk}^{\text{TT}} k_a k_b + 2(16\pi G_0 F_0^{-1} - \kappa^2) \partial_\tau \tilde{\phi} \partial_\tau \tilde{\phi} k_a k_b \right\rangle \right\rangle, \quad (4.80)$$

el cual coincide con el reportado en [134] si se reparametriza con las Ecs. (4.3). La Ec. (4.80) muestra el término debido al grado de libertad radiativos escalar propio de las TET. Es claro también que el límite de la RG se recupera con la condición $F_0 = 1$.

4.5. Sobre la radiación dipolar y monopolar en TET

Como se discutió en la Sección 4.4.2 las TET contienen un grado de libertad extra debido puramente al campo escalar ϕ . Esta característica, usualmente es la razón de la predicción por parte de las TET de radiación monopolar y dipolar.⁶⁶ Dicha característica fue puntualizada por vez primera en el trabajo de Eardley [73] referente a la teoría original de BD en el contexto de un sistema binario de estrellas, es decir, un sistema con auto-interacción gravitacional. El enfoque de Eardley, es hoy estándar al momento de tratar radiación dipolar de sistemas binarios en TET [13, 30, 31, 108]. En lo que sigue se discute como este enfoque no es compatible con la aproximación lineal realizada en las secciones anteriores.

⁶⁶En general teorías métricas de la gravedad predicen hasta seis polarizaciones y radiación de todos los multipolos [59, 170].

La presencia de radiación monopolar y dipolar corresponde formalmente a los momentos multipolares de primer y segundo orden no nulos. En el caso de la RG, retomando a la Sección (3.2.5), el orden dominante en una expansión multipolar para la perturbación \bar{h}_{ab} es el término cuadrupolar; la razón subyace en que, dada la conservación lineal del tensor de energía-momento de la materia ($\partial_a T^{ab} = 0$), el término monopolar, equivalente a la masa total del sistema, es constante y, por otra parte, el término dipolar es proporcional al momento lineal que es conservado y puede ser fijado a cero. En el caso del límite lineal de las TET se observa para la variable \tilde{h}_{ab} algo análogo, en específico la Ec. (4.77). La razón es que la fuente en la Ec. (4.73a), es precisamente el tensor de energía-momento de la materia, con lo que el orden dominante en una expansión multipolar para \tilde{h}_{ab} es el cuadrupolar. Es así que los términos de radiación debidos a los momentos monopolar o dipolar deben provenir de la ecuación del campo escalar.

Si bien se definieron los momento multipolares escalares (4.76a), estos al depender de la traza del tensor de energía-momento de la materia $T = -T_{00} + T_{jk}\delta^{jk}$ pueden ser expresados en términos de los momentos multipolares usuales como

$$\mathcal{I}_s = - \int T_{00} d^3x + \delta^{jk} \int T_{jk} d^3x = M + \delta^{jk} \mathcal{M}_{jk}, \quad (4.81a)$$

$$\mathcal{I}_s^j = - \int T_{00} x^j d^3x + \delta^{lm} \int T_{lm} x^j d^3x = -\mathcal{I}_j + \delta^{lm} \mathcal{M}_{lm,j}, \quad (4.81b)$$

$$\mathcal{I}_s^{jk} = - \int T_{00} x^j x^k d^3x + \delta^{lm} \int T_{lm} x^j x^k d^3x = -\mathcal{I}_{jk} + \delta^{lm} \mathcal{M}_{lm,jk}, \quad (4.81c)$$

con lo que la solución para el campo escalar se escribe como

$$\tilde{\phi} = \phi_0 + \frac{\tilde{\alpha}}{r} \left\{ -M + \delta^{jk} \mathcal{M}_{jk} - n_j \dot{\mathcal{I}}_j + n_j \delta^{lm} \dot{\mathcal{M}}_{lm,j} - \frac{1}{2} n_j n_k \ddot{\mathcal{I}}_{jk} + \frac{1}{2} n_j n_k \delta^{lm} \ddot{\mathcal{M}}_{lm,jk} + \dots \right\}, \quad (4.82)$$

donde los momentos multipolares se definen como en (3.94). Dada la ley de conservación (4.52) es sencillo probar las siguientes identidades

$$\dot{M} = \int \partial_t T^{00} d^3x = - \int \partial_j T^{0j} d^3x = - \int T^{0j} dS^j = 0, \quad (4.83)$$

$$\dot{\mathcal{I}}^j = \int \partial_t T^{00} x^j d^3x = - \int \partial_l T^{l0} x^j = \int T^{0l} \delta_l^j d^3x = \int T^{0j} d^3x \equiv P^j, \quad (4.84)$$

$$\dot{P}_j = \int \partial_t T^{0j} d^3x = - \int \partial_k T^{kj} d^3x = - \int T^{jk} dS^k = 0. \quad (4.85)$$

Las Ecs. (4.83) y (4.85) representan la conservación de la masa y el momento lineal que coinciden con el límite lineal de la RG. De forma análoga se puede probar la siguiente identidad

$$\mathcal{M}_{jk} = \frac{1}{2} \ddot{\mathcal{I}}_{jk}. \quad (4.86)$$

Al hacer uso de esta expresión en la Ec. (4.82) se concluye que, en efecto, el orden dominante para la expansión multipolar del campo escalar es

$$\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_0 + \frac{\tilde{\alpha}}{r} \left\{ \delta^{jk} \ddot{\mathcal{I}}_{jk} + \dots \right\}, \quad (4.87)$$

donde en $\tilde{\phi}_0$ se han absorbido los términos independientes del tiempo M y \mathcal{I}_j que en consecuencia no producen radiación y, además, no se han escrito términos que contienen derivadas temporales de mayor orden del momento cuadrupolar y momentos de ordenes mayores. La forma de la Ec. (4.87) muestra que en el límite lineal de las TET no esta presente radiación

monopolar o dipolar. Dicha conclusión se explica al notar que los momentos multipolares escalares pueden ser expresados en términos del tensor de energía-momento de la materia el cual es conservado.

El hecho de que la radiación del campo escalar sea cuadrupolar impide distinguirla de la contraparte puramente gravitacional, simplemente son proporcionales. Esto dificulta el poder detectar puramente el modo escalar al «suprimir» los modos tensoriales.

Por un lado, este resultado indica que la radiación dipolar o monopolar es un fenómeno no lineal, no presente en ningún sentido al tomar la expansión alrededor de un fondo de Minkowski. El primer argumento a este respecto se refleja en el hecho de que algunos autores [63, 85, 168, 170] realizan una aproximación post-newtoniana cerca de la fuente, partiendo de las ecuaciones reducidas en el marco de Einstein, con lo que se está tomando que a orden más bajo la métrica no es Minkowski sino potenciales tipo Newton dependientes de la fuente de materia. El segundo argumento proviene de los fenómenos de escalarización espontánea los cuales son intrínsecamente no lineales.

Por otro lado, como se había anticipado al principio de esta sección, al momento de tratar objetos compactos con auto-interacción gravitacional se adopta el enfoque de Eardley, el cual se basa en la dependencia de la masa inercial del sistema M del valor local de G controlado por el valor del campo escalar en cada punto ϕ . En otras palabras, para poder realizar una descripción precisa de la materia de esta clase de objetos se considera que la masa total de estos mismos, considerados como partículas puntuales, dependa del valor del campo escalar en su locación. Este argumento se traduce en la modificación de la acción de la materia por un término

$$S_m[\phi] = - \sum_A \int m_A(\phi) d\tau_A, \quad (4.88)$$

donde τ_A es el tiempo propio de la partícula A . Esta suposición inmediatamente postula un acople no mínimo entre la materia y el campo escalar estando en el marco de Jordan, cuya más importante distinción con el marco de Einstein es que en este la materia está acoplada mínimamente con la materia. (ver Ec. (4.9)). Formalmente esta modificación introduce un tensor-de energía momento de la materia de la forma

$$T^{ab}(x^\lambda) = (-g)^{1/2} \sum_A \int m_A(\phi) u_A^a u_A^b \delta^4(x_A^\lambda - x^\lambda), \quad (4.89)$$

cuya dependencia en el campo escalar produce su no conservación, es decir,

$$\nabla_a T^{ab} \neq 0. \quad (4.90)$$

La inclusión del término de masa (4.88) en la acción de las TET representa una drástica modificación a la teoría en el sentido de que se están introduciendo posible violaciones al PED, el cual, como se comentó en la introducción de esta tesis, posee cotas experimentales altísimas. Más aún, en el límite lineal de esta nueva teoría, la ecuación del campo escalar (4.73b) se modifica en tal sentido que los momentos escalares no se pueden reescribir como en (4.81). De esta manera es claro que la dependencia del campo escalar, por medio del tensor de energía-momento, produce que todos los momentos multipolares contribuyan en la región lejana de onda y, por consiguiente, la existencia de radiación monopolar y dipolar.

4.6. Teorías $f(R)$

Finalmente, a manera de breve comentario se presentan las teorías $f(R)$ [59, 100, 143, 171]. Estas teorías, a la par que las TET es una de las alternativas a la RG más estudiadas y postulan *a priori* una función arbitraria del escalar de Ricci R como densidad lagrangiana.

El interés de estas teorías están altamente motivadas por el sector cosmológico. En específico han sido propuestas para explicar la expansión acelerada del universo así como un mecanismo para producir inflación en el universo temprano en términos puramente geométricos y evitar ideas como la energía oscura o la introducción del conocido inflatón [145].

La acción más general para una teoría $f(R)$ está dada por

$$S[g^{ab}, \psi] = \frac{1}{16\pi G_0} \int \sqrt{-g} f(R) + S_m[g_{ab}, \psi]. \quad (4.91)$$

Esta clase de teorías puede ser mapeada a una TET. Al nivel de la acción se introduce una nueva variable χ con lo que la ésta última se reescribe a

$$S = \frac{1}{16\pi G_0} \int [f(\chi) + f'(\chi)(R - \chi)] + S_m \sqrt{-g} d^4x. \quad (4.92)$$

La variación de la acción respecto a χ resulta en

$$f''(\chi)(R - \chi) = 0, \quad (4.93)$$

con lo que $\chi = R$ si $f''(\chi) \neq 0$. De esta manera definiendo un campo escalar $\phi = f'(\chi)$ y además el potencial

$$V(\phi) = \chi\phi - f(\chi), \quad (4.94)$$

la acción para una teoría $f(R)$ toma la forma

$$S = \frac{1}{16\pi G_0} \int [\phi R - V(\phi)] \sqrt{-g} d^4x + S_m, \quad (4.95)$$

que es precisamente una acción del tipo (4.2) con $\omega(\phi) = 0$. En principio, bajo este cambio de representación el formalismo desarrollado en las secciones anteriores puede generalizarse. Recientemente en [116] se realizó la descomposición en partes irreducibles del límite lineal en esta clase de teorías, concluyendo que el campo escalar en la acción (4.95) da pie a un modo de polarización extra resultado de la superposición de dos polarización, a decir, un modos longitudinal y un modo *breathing*, discutido en la Sección 4.4.2.

Sin embargo, existe otra sutileza asociada a este tipo de teorías que las distingue de las TET, a pesar de que a primera vista parecieran equivalentes. En las TET el valor del parámetro post-newtoniano esta controlado por el parámetro $\omega(\phi)$ de BD. Sucede que en las teorías $f(R)$, $\omega(\phi) = 0$, con lo que el parámetro post-newtoniano queda controlado por un fenómeno altamente no lineal conocido como el *mecanismo camaleón* [105]. Debido a la existencia de dicho fenómeno camaleón, la aproximación puramente lineal en el sector escalar-tensorial esta comprometida severamente. Un tratamiento de la emisión de OG que tome en cuenta dicho mecanismo requiere de un tratamiento «perturbativo» más sofisticado, el cual queda fuera del objetivo de la presente tesis [120].

Para recapitular, en esta última parte de la tesis se analizó el límite lineal de las TET, identificando la naturaleza de los grados de libertad adicionales a RG, notando que no esta presente radiación de naturaleza distinta a la cuadrupolar. Las razones fueron expuestas en secciones anteriores. Más aún, en las teorías $f(R)$ llevar a cabo una aproximación lineal conlleva sutilezas más complejas que impiden extrapolar de manera inmediata el formalismo introducido en los capítulos anteriores.

Capítulo 5

Conclusiones

Las recientes detecciones directas de OG por las colaboraciones LIGO y VIRGO y lo que representan las futuras generaciones de detectores (KAGRA, LIGO-India y LISA) apuntan a el establecimiento de una nueva área de estudio enfocada en radiación gravitacional. Así lo confirma el reciente *boom* de artículos y formalismos sobre radiación gravitacional en diversos escenarios. Resulta esencial entonces tener claros los fundamentos de la teoría de OG, en específico la relación entre el evento astrofísico que funge como fuente de radiación gravitacional y las posibles observables. Al respecto de esto último, es bien conocido que existen dos formas de incidir en la cuestión de obtener observables: métodos numéricos y métodos analíticos. En esta tesis se optó por el enfoque basado en métodos analíticos aproximados.

En la primera parte del trabajo, concerniente a la radiación gravitacional en la RG se introdujo el método analítico más añejo: teoría de perturbaciones, y este, como se mostró en el Capítulo 2, está intrínsecamente relacionado con la definición de energía asociada a las OG por medio del PTEM OG. A su vez, se mostró como la teoría de perturbaciones está relacionada con otra clase de métodos analíticos más sofisticados enfocados en incluir iterativamente las no-linealidades de las ecuaciones de campo [38, 128]. La teoría de perturbaciones en RG representa una vasta área de estudio. En el contexto cosmológico, perturbaciones a la métrica de un espacio-tiempo de FLRW están intrínsecamente relacionadas con la formación de estructura. Los cálculos del Capítulo 2 bien podrían ser extrapolados al contexto cosmológico.

Recientes trabajos [134, 146], los cuales muestran la importancia de obtener el PTEM OG por distintos métodos en diferentes teorías de la gravitación, motivaron el estudio más detallado de esta cantidad. En esta tesis, se calculó en primer lugar, y tomando las mínimas suposiciones, las cantidades de curvatura propias de la RG, a decir, el tensor de Ricci y el tensor de Riemann, a segundo orden con teorías de perturbaciones alrededor de un fondo genérico. El hecho de asumir en los cálculos las mínimas suposiciones, es decir, evitar incurrir tempranamente en la elección de norma o el hecho de que las cantidades de curvatura satisficieran a las ecuaciones de Einstein, permitió mostrar que existe un término que vagamente se incluye en la literatura (Ec. (2.71)). Si bien este término es idénticamente cero en la suposición de vacío a todos los órdenes en las ecuaciones de Einstein, resulta conveniente tenerlo en cuenta para futuras aplicaciones en donde la anterior hipótesis no se incluya. En segundo lugar, si bien no se cuenta con una definición formal de densidad local de energía asociada al campo gravitacional en el contexto de la RG, se mostró que bajo la ALOC es, en efecto, posible asociar una densidad de energía por medio de promedios espacio-temporales que se traducen en promedios sobre diversas longitudes de onda a las OG. Estas ideas, esparcidas por la literatura bajo distintos consensos e interpretaciones [18, 48, 112], basadas en la hipótesis de Isaacson [96, 97], fueron implementadas de la manera más clara y sencilla posible.

Por otro lado, una serie de recientes artículos de Ashtekar et al. [20, 21], motivó la revisión detallada sobre la naturaleza de los grados de libertad radiativos en el límite lineal de la RG; retomando antes la conocida similitud existente entre la teoría EM y la RG linealizada. En específico se estudió la relación de la parte TT de las OG (cuya contraparte EM es la parte transversa del potencial vectorial electromagnético) y la libertad de norma con la zona lejana

de onda en presencia de fuentes. Este análisis se basó en la descomposición en partes irreducibles de la perturbación, idea introducida por primera vez en [83], a su vez inspirada en las ideas cosmológicas de Bardeen [27]. El resultado más importante de esta sección de la tesis (Capítulo 3) es la cuantificación de los grados de libertad en diversas cantidades totalmente invariantes de norma en presencia de fuentes que se dividen en potenciales tipo Newton, es decir, que satisfacen una ecuación local de Poisson y la parte TT, que, como era de esperarse, satisface una ecuación tipo onda que indica su naturaleza radiativa. Este resultado abre la puerta a interesantes posibilidades. Por ejemplo, la generalización más inmediata sería extrapolar la descomposición en partes irreducibles a un fondo genérico, lo cual permitiría, por un lado, recuperar los potenciales invariantes de norma propuestos en el contexto de perturbaciones cosmológicas por J. Bardeen y, por otro, esclarecer de mejor manera la naturaleza de los grados de libertad radiativos en contextos más realistas, esto es, cerca de las fuentes de radiación gravitacional, donde es claro que un fondo plano no es buena hipótesis. En esta misma dirección y, pensado como un proyecto más ambicioso, sería el tratar de extender el formalismo para tratar de obtener cantidades invariantes de norma en la teoría completa. En este sentido los eventuales resultado deberían de ser compatibles con el robusto formalismo ADM de la RG [160].

Asimismo se analizó el formalismo cuadrupolar de OG en donde ambos objetos de estudio, el PTEM OG y la parte TT, son fundamentales. Se calcularon las conocidas expansiones multipolares a la forma de onda h_{ab} concluyendo que, en efecto, el orden dominante en la radiación gravitacional de la RG es cuadrupolar. Más aún, la potencia radiada por un sistema gravitacional aislado también depende a orden dominante del término cuadrupolar asociado a la fuente. A manera de ejemplo, se estudió el caso de un sistema binario de estrellas. Se calcularon las formas de onda, es decir, las polarizaciones h_+ y h_\times debidas a este sistema así como los flujos de energía coincidiendo con [126, 159]. Este análisis permitió encontrar el cambio en el período orbital, producto de la emisión de radiación gravitacional, el cual, en su momento, representó la prueba más contundente de la existencia de OG en el contexto del púlsar binario PSR B1913+16 [95]. Los resultados obtenidos en esta sección, facilitan la continuación a métodos analíticos más sofisticados; en particular la obtención de las formas de onda es similar cuando se desea incluir términos post-newtonianos o bien, en regiones que no son la zona lejana de onda. A este respecto, los trabajos de L. Bernard et al. [17, 32] proponen distintas líneas de investigación en distintas direcciones, una de ellas y quizá la más interesante, es el fenómeno de dispersión en OG.

La segunda parte de esta tesis fue dedicada al estudio de OG en teorías alternativas, principalmente en las TET (en la representación de Jordan). El propósito de haber estudiado detalladamente diversos aspectos de la radiación gravitacional en la RG permitió establecer con mayor claridad a las OG en esta clase de teorías. Es sabido que una de las características más novedosas en las teorías alternativas de la gravitación es la presencia de nuevos grados de libertad y, por consiguiente, nuevos modos de polarización. Si bien, en el caso de la TET se mostró que existe un grado de libertad radiativo extra debido al campo escalar, éste, de alguna manera, se suprime al considerar el límite lineal de las TET. A este respecto, diversos autores [13, 108] consideran el límite lineal de las TET de distinta forma a la considerada en esta tesis. Los resultados obtenidos sugieren que la condición mínima para la existencia de radiación dipolar o monopolar en el límite lineal es la inclusión de un acople poco convencional no mínimo entre la materia y el campo escalar o bien considerar no perturbaciones a un fondo de Minkowski, sino a un fondo dinámico compatible con el campo escalar. En tanto, esto resulta inesperado pues no es común que se trate en términos del formalismo cuadrupolar a las TET.

Finalmente, este estudio permitió ahondar más en el tópico de radiación gravitacional en teorías alternativas de la gravitación, el cual, está en una ferviente etapa en la que se trata de extender la mayor cantidad de resultados y formalismos posible presentes en la RG a teorías

alternativas. A su vez, se obtiene la idea general de que los métodos perturbativos no son suficientes si se requiere considerar coalescencias de objetos compactos; la relatividad numérica, es decir, la resolución de las ecuaciones de campo de la RG sin ninguna aproximación, cobra importancia.

Apéndice A

Apéndice 1

A.1. Métrica inversa

Para obtener la métrica inversa se utiliza el mismo formalismo expuesto en a lo largo del Capitulo 1. La métrica total inversa está definida como

$$g^{ab}(\lambda) \equiv (g_{ab}(\lambda))^{-1}. \quad (\text{A.1})$$

Retomando la expansión de g_{ab} respecto a λ a segundo orden

$$g^{ab}(\lambda) = \tilde{g}^{ab} + \lambda \dot{g}^{ab} + \frac{1}{2} \lambda^2 \ddot{g}^{ab}. \quad (\text{A.2})$$

Es sencillo calcular a primer orden en λ a partir de la Ec. (A.1) la métrica inversa

$$\dot{g}^{ab} = -\tilde{g}^{ac} \tilde{g}^{bd} h_{cd}^{(1)} = -h^{(1)ab}, \quad (\text{A.3})$$

de la misma manera a segundo orden se obtiene

$$\ddot{g}^{ab} = 2\tilde{g}^{af} \tilde{g}^{bg} \tilde{g}^{cd} h_{fc}^{(1)} h_{dg}^{(1)} - 2\tilde{g}^{ac} \tilde{g}^{bd} h_{cd}^{(2)} = 2h^{(2)ac} h_c^{(1)b} - 2h^{(2)ab}. \quad (\text{A.4})$$

Así, la métrica total inversa queda totalmente definida hasta segundo orden como

$$g^{ab}(\lambda) = \tilde{g}^{ab} - \lambda h^{(1)ab} + \lambda^2 (h^{(2)ac} h_c^{(1)b} - h^{(2)ab}). \quad (\text{A.5})$$

A.2. Expansión del determinante

Conviene antes repasar cómo es que se define el determinante de la métrica. Se define el tensor de Levi-Civita cómo [53]:

$$\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} = \sqrt{|g|} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n}, \quad (\text{A.6})$$

donde $g \equiv \text{Det}(g_{\mu\nu})$, y $\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n}$ es el símbolo de Levi-Civita. Se puede probar también que se satisface la siguiente identidad

$$\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_n}. \quad (\text{A.7})$$

Para encontrar al determinante en términos de la métrica se utiliza la expresión (A.7), es decir,

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} &= g_{\mu_1 \nu_1} \dots g_{\mu_n \nu_n} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} \epsilon^{\nu_1 \dots \nu_n} \\ &= \frac{1}{(-1)^s g} g_{\mu_1 \nu_1} \dots g_{\mu_n \nu_n} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} \varepsilon^{\nu_1 \dots \nu_n}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

donde en la segunda línea se ha utilizado el hecho de que $[(-1)^s \text{Det}(g_{\mu\nu})] = \sqrt{|g|}$, siendo s el número de signos negativos en la signatura de la métrica [160]. Para poder expresar en mejores términos el lado izquierdo de (A.8) es útil ocupar la siguiente identidad

$$\epsilon_{\nu_1 \dots \nu_n} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} = n! (-1)^s \delta_{[\nu_1}^{[\mu_1} \dots \delta_{\nu_n]}^{\mu_n]} \quad (\text{A.9})$$

con lo que se concluye una expresión para el determinante de una métrica en una variedad n -dimensional

$$g = \frac{1}{n!} g_{\mu_1 \nu_1} \dots g_{\mu_n \nu_n} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} \epsilon^{\nu_1 \dots \nu_n}. \quad (\text{A.10})$$

Para la RG (i.e., $n = 4$), es claro que la expresión para el determinante, a partir de (A.10), toma la forma

$$g = \frac{1}{4!} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon^{\rho\sigma\mu\nu} g_{\alpha\rho} g_{\beta\sigma} g_{\gamma\mu} g_{\delta\nu}. \quad (\text{A.11})$$

Retomando la expansión de la métrica a segundo orden como

$$g_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{(1)} + h_{\mu\nu}^{(2)}, \quad (\text{A.12})$$

donde se ha hecho $\lambda = 1$. A fuerza bruta, en contraste al formalismo del Capítulo 1, se sustituye a la Ec. (A.12) en la Ec. (A.10) hasta orden cuadrático

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{4!} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon^{\rho\sigma\mu\nu} (\tilde{g}_{\alpha\rho} + h_{\alpha\rho}^{(1)} + h_{\alpha\rho}^{(2)}) (\tilde{g}_{\beta\sigma} + h_{\beta\sigma}^{(1)} + h_{\beta\sigma}^{(2)}) \\ &\quad \times (\tilde{g}_{\gamma\mu} + h_{\gamma\mu}^{(1)} + h_{\gamma\mu}^{(2)}) (\tilde{g}_{\delta\nu} + h_{\delta\nu}^{(1)} + h_{\delta\nu}^{(2)}) \\ &= \frac{1}{4!} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon^{\rho\sigma\mu\nu} (\tilde{g}_{\alpha\rho} \tilde{g}_{\beta\sigma} \tilde{g}_{\gamma\mu} \tilde{g}_{\delta\nu} + h_{\alpha\rho}^{(1)} \tilde{g}_{\beta\sigma} \tilde{g}_{\gamma\mu} \tilde{g}_{\delta\nu} + h_{\beta\sigma}^{(1)} \tilde{g}_{\alpha\rho} \tilde{g}_{\gamma\mu} \tilde{g}_{\delta\nu} + h_{\gamma\mu}^{(1)} \tilde{g}_{\beta\sigma} \tilde{g}_{\alpha\rho} \tilde{g}_{\delta\nu} \\ &\quad + h_{\delta\nu}^{(1)} \tilde{g}_{\alpha\rho} \tilde{g}_{\beta\sigma} \tilde{g}_{\gamma\mu} \tilde{g}_{\delta\nu} + h_{\alpha\rho}^{(1)} h_{\beta\sigma}^{(1)} \tilde{g}_{\gamma\mu} \tilde{g}_{\delta\nu} + h_{\alpha\rho}^{(1)} h_{\gamma\mu}^{(1)} \tilde{g}_{\beta\sigma} \tilde{g}_{\delta\nu} + h_{\alpha\rho}^{(1)} h_{\delta\nu}^{(1)} \tilde{g}_{\beta\sigma} \tilde{g}_{\gamma\mu} \\ &\quad + h_{\beta\sigma}^{(1)} h_{\gamma\mu}^{(1)} \tilde{g}_{\alpha\rho} \tilde{g}_{\delta\nu} + h_{\beta\sigma}^{(1)} h_{\delta\nu}^{(1)} \tilde{g}_{\alpha\rho} \tilde{g}_{\gamma\mu} + h_{\gamma\mu}^{(1)} h_{\delta\nu}^{(1)} \tilde{g}_{\alpha\rho} \tilde{g}_{\beta\sigma} + h_{\alpha\rho}^{(2)} \tilde{g}_{\beta\sigma} \tilde{g}_{\gamma\mu} \tilde{g}_{\delta\nu} \\ &\quad + h_{\beta\sigma}^{(2)} \tilde{g}_{\alpha\rho} \tilde{g}_{\gamma\mu} \tilde{g}_{\delta\nu} + h_{\gamma\mu}^{(2)} \tilde{g}_{\beta\sigma} \tilde{g}_{\alpha\rho} \tilde{g}_{\delta\nu} + h_{\delta\nu}^{(2)} \tilde{g}_{\alpha\rho} \tilde{g}_{\beta\sigma} \tilde{g}_{\gamma\mu}) + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Es sencillo mostrar que las siguientes dos identidades se satisfacen

$$\frac{1}{4!} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon^{\rho\sigma\mu\nu} h_{\alpha\rho}^{(1)} \tilde{g}_{\beta\sigma} \tilde{g}_{\gamma\mu} \tilde{g}_{\delta\nu} = \frac{1}{4} \tilde{g} h^{(1)}, \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{1}{4!} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon^{\rho\sigma\mu\nu} h_{\alpha\rho}^{(1)} h_{\beta\sigma}^{(1)} \tilde{g}_{\gamma\mu} \tilde{g}_{\delta\nu} = \tilde{g} \frac{1}{12} [h^{(1)} h^{(1)} - h_{\rho}^{(1)\sigma} h_{\sigma}^{(1)\rho}], \quad (\text{A.15})$$

donde $\tilde{g} = \text{Det} \tilde{g}_{\mu\nu}$ y $h^{(1)}$ es la traza de la perturbación. Para los términos sólo dependen de $h_{\alpha\rho}^{(2)}$ en (A.13) se utiliza la expresión (A.14). Con lo anterior en mente g adopta la forma

$$g = \tilde{g} \left(1 + h^{(1)} + h^{(2)} + \frac{1}{2} h^{(1)} h^{(1)} - \frac{1}{2} h_{\rho}^{(1)\sigma} h_{\sigma}^{(1)\rho} + \mathcal{O}(h^3) \right). \quad (\text{A.16})$$

Tomando el negativo y la raíz se obtiene

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} &= \sqrt{-\tilde{g}} \left(1 + h^{(1)} + h^{(2)} + \frac{1}{2} h^{(1)} h^{(1)} - \frac{1}{2} h_{\rho}^{(1)\sigma} h_{\sigma}^{(1)\rho} + \mathcal{O}(h^3) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{-\tilde{g}} \left(1 + \frac{1}{2} h^{(1)} + \frac{1}{2} h^{(2)} + \frac{1}{8} h^{(1)} h^{(1)} - \frac{1}{4} h_{\rho}^{(1)\sigma} h_{\sigma}^{(1)\rho} + \mathcal{O}(h^3) \right), \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

donde en la segunda línea se hizo uso de la siguiente expansión

$$(1 + \alpha x + \beta x^2)^{\frac{1}{2}} = \left(1 + \alpha \frac{x}{2} + \frac{1}{8} x^2 (4\beta - \alpha^2) + O(x^3)\right). \quad (\text{A.18})$$

A.3. Existencia de las coordenadas armónicas

En este apartado damos una prueba a detalle de alguna identidades útiles. Consideremos un cambio de coordenadas arbitrario dado por $x'^{\mu} = f^{\mu}(x^{\alpha})$

$$\begin{aligned} g^{\mu'\nu'} &= \sqrt{-\det(g_{\mu'\nu'})} g^{\mu'\nu'} = \left(-\det(g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}})\right)^{-1/2} \partial_{\alpha} f^{\mu} \partial_{\beta} f^{\nu} g^{\alpha\beta} \\ &= \left(-\det(g_{\alpha\beta}) \left(\det \frac{\partial f^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right)^{-2}\right)^{1/2} \partial_{\alpha} f^{\mu} \partial_{\beta} f^{\nu} g^{\alpha\beta} \\ &= \left(\det \frac{\partial f^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right)^{-1} \partial_{\alpha} f^{\mu} \partial_{\beta} f^{\nu} g^{\alpha\beta} \\ &= J^{-1} \partial_{\alpha} f^{\mu} \partial_{\beta} f^{\nu} g^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

dónde hemos denotado a $J := \det[\partial f^{\mu}/\partial x^{\alpha}]$ cómo el Jacobiano de la transformación. De (A.19) es fácil notar que $J^{-1} = \sqrt{-g'}/\sqrt{-g}$

$$\begin{aligned} \partial_{\nu'} g^{\mu'\nu'} &= \partial_{\beta} f^{\nu} J^{-1} \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} (\partial_{\alpha} f^{\mu} g^{\alpha\beta}) + \partial_{\alpha} f^{\mu} g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} (\partial_{\beta} f^{\nu} J^{-1}) \\ &= J^{-1} \frac{\partial f^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} (\partial_{\alpha} f^{\mu} g^{\alpha\beta}) \\ &= J^{-1} \delta_{\beta}^{\rho} \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} (\partial_{\alpha} f^{\mu} g^{\alpha\beta}) \\ &= \sqrt{-g'} \square_g f^{\mu}(x^{\alpha}) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

dónde en la última línea definimos al siguiente operador para cualquier función escalar f , $\square_g f = (-g)^{-1/2} \partial_{\beta} (g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} f)$, además de que en la segunda línea se utilizó el hecho de que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} (\partial_{\beta} f^{\nu} J^{-1}) &= J^{-1} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial f^{\nu}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial f^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} J^{-1} \\ &= J^{-1} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial f^{\nu}}{\partial x^{\rho}} - J^{-1} \frac{1}{2} \frac{\partial f^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^{\rho}} \\ &= J^{-1} \Gamma_{\rho\beta}^{\rho} - J^{-1} \frac{1}{2} \delta_{\beta}^{\rho} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \\ &= J^{-1} \Gamma_{\rho\beta}^{\rho} - J^{-1} \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}} \\ &= J^{-1} \Gamma_{\rho\beta}^{\rho} - J^{-1} \Gamma_{\mu\beta}^{\mu} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

En la tercera línea se han usado coordenadas normales de Riemann. Por último es útil hacer ver que $\square_g f$ es equivalente al D'Alembertiano usual en espacios curvos, esto es,

$$\begin{aligned}
 \square_g f &:= g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu f \\
 &= \nabla_\mu (g^{\mu\nu} \partial_\nu f) \\
 &= \partial_\mu (g^{\mu\nu} \partial_\nu f) + \Gamma^\mu_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} \partial_\nu f \\
 &= \partial_\mu (g^{\mu\nu} \partial_\nu f) + (-g)^{-1/2} \partial_\alpha (\sqrt{-g}) g^{\alpha\nu} \partial_\nu f \\
 &= (-g)^{-1/2} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu f) \\
 &= (-g)^{-1/2} \partial_\mu (g^{\mu\nu} \partial_\nu f)
 \end{aligned} \tag{A.22}$$

Apéndice B

B.1. Regiones de onda

Al discutir sobre las OG surgen de inmediato dos vertientes que se pueden tratar como independientes. Por un lado, se tiene la «producción de OG» y, por otro, la «propagación de OG». Para concebir ambas cuestiones como independientes se opta por dividir al espacio-tiempo en tres regiones [128, 154]. Para ello considérese las siguientes cantidades

$$t_c \equiv \text{tiempo característico de la fuente,} \quad (\text{B.1a})$$

$$\omega_c \equiv \frac{2\pi}{t_c} = \text{frecuencia característica de la fuente,} \quad (\text{B.1b})$$

$$\lambda_c \equiv \frac{2\pi}{\omega_c} = \text{longitud de onda característica de la fuente.} \quad (\text{B.1c})$$

Bajo estas definiciones se definen a:

$$\text{zona cercana: } r \ll \lambda_c, \quad (\text{B.2a})$$

$$\text{zona de onda: } r \gg \lambda_c, \quad (\text{B.2b})$$

$$\text{zona de onda lejana: } r \rightarrow \infty. \quad (\text{B.2c})$$

donde r es la distancia a la fuente. En la *zona de onda lejana* sólo los términos que van como r^{-1} contribuyen a las ecuaciones.

B.2. Solución a la ecuación de onda

La discusión acerca de las soluciones de una ecuación de onda es un tema por demás añejo y altamente estudiado. Su implementación en la electrodinámica clásica y en la teoría gravitacional es variado en la literatura de acuerdo a las convenciones utilizadas, sin embargo, es claro que debe de existir una equivalencia entre todos los tratamientos. En lo que sigue, se esboza la discusión seguida en [123, 128], escribiendo sólo los resultados importantes en el entendido de que los detalles técnicos son redundantes en este trabajo. Se refiere a [153] para un completo estudio de la expansión multipolar.

En general una ecuación de onda toma la forma

$$\square\psi(x) = -4\pi\mu(x), \quad (\text{B.3})$$

cuya solución es la función retardada

$$\psi(x) = \int G(x, x') d^4x', \quad (\text{B.4})$$

con

$$G(x, x') = \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (\text{B.5})$$

con lo que $\psi(x)$ toma la forma

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{\mu(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x'. \quad (\text{B.6})$$

En general, es posible realizar un expansión de Taylor sobre el integrando de (B.6), de tal manera que

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \partial_{j_1 \dots j_k} \left\{ \frac{1}{r} \int \mu(\tau, \mathbf{x}') x'^{j_1 \dots j_k} d^3 x' \right\} \quad (\text{B.7})$$

donde se ha adoptado la notación $x'^{j_1 \dots j_k} = x'^{j_1} \dots x'^{j_k}$ y $\partial_{j_1 \dots j_k} = \partial_{j_1} \dots \partial_{j_k}$. Además

$$\tau \equiv t - r, \quad (\text{B.8})$$

es el *tiempo retardado* con $r = |\mathbf{x}|$. En la *zona de onda lejana* (i.e., donde $r \rightarrow \infty$), la solución se puede refinar aún más al mantenerse sólo los términos de orden r^{-1} , entonces

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \partial_{j_1 \dots j_k} \left\{ \int \mu(\tau, \mathbf{x}') x'^{j_1 \dots j_k} d^3 x' \right\} + \mathcal{O}(r^{-2}) \quad (\text{B.9})$$

La dependencia de x_i de la fuente μ se encuentra en τ . Con este hecho, la expresión (B.9) toma la forma

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} n_{j_1 \dots j_k} \left(\frac{d}{d\tau} \right)^k \left\{ \int \mu(\tau, \mathbf{x}') x'^{j_1 \dots j_k} d^3 x' \right\}, \quad (\text{B.10})$$

donde se ha hecho uso de

$$\partial_j \mu = \partial_\tau \mu \partial_j r = \partial_\tau \mu n_j \quad (\text{B.11})$$

definiendo al vector radial unitario como $n^j = x^j/r$. La ecuación (B.10), en un principio representa la solución, considerando las mismas aproximaciones, de cualquier ecuación de onda del tipo (B.3) en la zona lejana de onda.

B.3. Descomposición de un tensor en sus partes irreducibles

Cualquier tensor espacial B_{jk} simétrico puede ser descompuesto en partes irreducibles (se sigue aquí la discusión de [83, 128]), como

$$B_{jk} = \frac{1}{3} \delta_{jk} B + \left(\partial_j \partial_k - \frac{1}{3} \delta_{jk} \nabla^2 \right) C + \partial_j C_k^T + \partial_k C_j^T + C_{jk}^{TT}, \quad (\text{B.12})$$

con las condiciones

$$\partial_j C_T^j = 0, \quad \partial_k C_{TT}^{jk} = 0, \quad \delta_{jk} C_{TT}^{jk} = 0. \quad (\text{B.13})$$

Dicha descomposición contiene una parte de traza $\frac{1}{3} \delta_{jk}$, una parte longitudinal-sin traza $\left(\partial_j \partial_k - \frac{1}{3} \delta_{jk} \nabla^2 \right) C$, una parte longitudinal-transversa $\partial_j C_k^T + \partial_k C_j^T$, y una parte que es transversa-sin traza C_{TT}^{jk} .

B.4. Descomposición en partes irreducibles en EM (caso masivo)

El caso masivo del EM es una teoría que conocida por no ser invariante ante transformaciones de norma. Las ecuaciones de movimiento para esta teoría las ecuaciones de movimiento están dados por

$$\partial^a F_{ab} + m^2 A_b = -4\pi j_b, \quad (\text{B.14})$$

con la ley de conservación $\partial_a j^a = 0$ que automáticamente implica, a diferencia del caso no masivo, $\partial_a A^a = 0$. Para la componente espacial y temporal se tiene

$$\begin{aligned} \square\phi + m^2\phi &= -4\pi\rho, \\ \square A_j + m^2 A_j &= -4\pi j_j. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Introduciendo la descomposición (3.17) y (3.22), las ecuaciones anteriores adoptan la forma

$$\nabla^2\Psi + m^2\phi = -4\pi\rho, \quad (\text{B.16a})$$

$$\square A_j^T + m^2 A_j^T = -4\pi j_j^T + \partial_j(\partial_t\Psi - 4\pi\sigma - m^2\lambda). \quad (\text{B.16b})$$

El término de masa en las Ecs. (B.16) no permite expresar por completo a las ecuaciones de movimiento en términos de las cantidades, que en el caso no masivo, eran invariantes de norma. Utilizando la ecuación de conservación (3.25) las Ecs. (B.16) se pueden simplificar a

$$\nabla^2\Psi + m^2\phi = -4\pi\rho, \quad (\text{B.17a})$$

$$\square A_j^T + m^2 A_j^T = -4\pi j_j^T - m^2\partial_j\lambda. \quad (\text{B.17b})$$

De las Ecs. (B.17) es evidente que los grados de libertad radiativos y no radiativos no se desacoplan, además de la manifiesta no invarianza de norma. La presencia del término $\partial_j\lambda$ en la última ecuación implica que los modos transversos no se desacoplan del modo longitudinal.

Apéndice C

C.1. Promedios

En esta sección se describen los fundamentos matemáticos de los llamados «promedios». El propósito principal de un esquema de promedios es aislar a las cantidades radiativas, aquellas que varían rápidamente, de las cantidades tipo Coulumb, aquellas funciones del espacio-tiempo que varían lentamente. Este promedio puede ser realizado con un operador lineal integral « $\langle\langle \cdot \cdot \rangle\rangle$ », y puede realizarse sobre las fases de las cantidades que varían rápidamente, o bien, sobre el espacio-tiempo. Formalmente Isaacson utilizó el llamado esquema de promedios de Brill-Hartle (BH) [44, 97], sin embargo, existen otros formalismos con resultados equivalentes [174, 175].

En el esquema de BH se define el promedio de un tensor arbitrario X_{ab} el cual se asume contienen términos que varían como $\sim 1/L_c$ y $\sim 1/\lambda_c$:

$$\langle\langle X_{ab}(x) \rangle\rangle = \int d^4 x' g_a^{a'}(x, x') g_b^{b'}(x, x') X_{a'b'}(x') f(x, x'), \quad (\text{C.1})$$

donde $g_a^{a'}(x, x')$ es el *bi-vector de desplazamiento paralelo geodésico*, esto es, dados dos puntos x y x' y una geodésica que los une, al aplicar $g_a^{a'}$ a un vector definido en x se obtendrá un vector en el punto x' , que es el paralelamente desplazado por la geodésica que une a los dos puntos [68], y $f(x, x')$ es el kernel de la integral que satisface

$$\int d^4 x' f(x, x') = 1, \quad (\text{C.2})$$

y decae a cero cuando x y x' difieren a una distancia \bar{l} tal que $\lambda_c \ll \bar{l} \ll L_c$. Se entiende que las integrales se realizan sobre todo el espacio-tiempo. A continuación se demuestran las propiedades más útiles de estos promedios para efectos de esta tesis.

P.I. La divergencia total de un tensor T^c_{ab} se anula i.e. $\langle\langle \tilde{\nabla}_c T^c_{ab} \rangle\rangle = 0$.

Dem.

$$\begin{aligned} \langle\langle \tilde{\nabla}_c T^c_{ab} \rangle\rangle &= \int g_a^{a'} g_b^{b'} \tilde{\nabla}_c T^c_{a'b'} f \\ &= \int \tilde{\nabla}_c (g_a^{a'} g_b^{b'} T^c_{a'b'} f) - (\tilde{\nabla}_c g_a^{a'}) g_b^{b'} T^c_{a'b'} f \\ &\quad - \tilde{\nabla}_c (g_b^{b'}) g_a^{a'} T^c_{a'b'} f - (\tilde{\nabla}_c f) g_a^{a'} g_b^{b'} T^c_{a'b'} f. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

El primer término puede ser reescrito como una integral de superficie en la región donde $f \rightarrow 0$. Los tres términos sobrantes contienen variaciones del orden $O(\lambda_c/L_c)$, esto al notar $\langle\langle O(\partial T/\partial \lambda_c) \rangle\rangle \sim O(T \partial f/\partial L_c) \sim O(\partial T/\partial \lambda_c) O(\partial \lambda_c \partial L_c)$, los cuales son despreciables pues $\lambda_c/L_c \ll 1$.

P.II. En particular se sigue que bajo el operador « $\langle\langle \cdot \cdot \rangle\rangle$ » se puede integrar por partes. Si $T^c_{ab} = R^c S_{ab}$ entonces, $\langle\langle S_{ab} \tilde{\nabla}_c R^c \rangle\rangle = -\langle\langle R^c \tilde{\nabla}_c S_{ab} \rangle\rangle$.

Dem.

$$\langle\langle S_{ab} \tilde{\nabla}_c R^c \rangle\rangle = \langle\langle \tilde{\nabla}_c (R^c S_{ab}) \rangle\rangle - \langle\langle R^c \tilde{\nabla}_c S_{ab} \rangle\rangle = -\langle\langle R^c \tilde{\nabla}_c S_{ab} \rangle\rangle + O(\lambda_c/L_c). \quad (C.4)$$

P.III. El conmutador de dos derivadas se anula, $\langle\langle \tilde{\nabla}_{[a} \tilde{\nabla}_{b]} T_c \rangle\rangle = 0$.

Dem.

$$\langle\langle \tilde{\nabla}_{[a} \tilde{\nabla}_{b]} T_c = 0 \rangle\rangle = \langle\langle \tilde{R}_{abc}{}^d T_d \rangle\rangle = O(\lambda_c^2/L_c^2), \quad (C.5)$$

con los argumentos del punto P.I.

C.2. Formalismo a partir de la acción perturbada

Otro enfoque fue desarrollado a partir de la acción de Relatividad General [175]. MacCallum and Taub [111] mostraron que es posible obtener un tensor equivalente al de Isaacson si en lugar de perturbar las ecuaciones de Einstein se perturba a la acción de Einstein-Hilbert. En dicho enfoque también es necesario hacer uso de un esquema de promedios, un tanto distinto al de Brill-Hartle pues lo que se promedia es una densidad escalar en lugar de una cantidad tensorial. En este sentido no se seguirá tal enfoque, pues como se verá más adelante, resulta más útil y claro, realizar en primer lugar la variación, cuyo resultado son en efecto cantidades tensoriales, y después el promedio sobre éstas.

En cuanto a la variación, al promover la acción a segundo orden, se pueden tratar a las perturbaciones y a la métrica de fondo \tilde{g}_{ab} como campos independientes. El realizar la variación respecto a la primera perturbación resulta en las ecuaciones de movimiento lineales, esto es, el tensor de Einstein a primer orden. La variación respecto a la métrica de fondo implica al mismo tiempo el PTEM OG y las ecuaciones a orden cero de la métrica de fondo.

Así pues, con el método expuesto en el primer capítulo, las expansiones son inmediatas. Considérese la acción de la RG

$$S_{RG} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (C.6)$$

donde $\kappa = 8\pi$. Tomando la expansión usual

$$g_{ab} = \tilde{g}_{ab} + \epsilon h_{ab}^{(1)} + \epsilon^2 h_{ab}^{(2)}, \quad (C.7)$$

y siguiendo la misma lógica del Capítulo 2 la acción tiene la forma $S_{RG} = S_{RG}^{(0)} + \epsilon S_{RG}^{(1)} + \epsilon^2 S_{RG}^{(2)}$. Orden a orden en ϵ se tiene

$$S_{RG}^{(0)} \equiv S_{RG}|_{\epsilon=0} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{ab} \tilde{R}_{ab}, \quad (C.8)$$

$$S_{RG}^{(1)} \equiv \left. \frac{dS_{RG}}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\tilde{g}^{ab} \dot{R}_{ab} - h^{(1)ab} \tilde{G}_{ab} \right], \quad (C.9)$$

$$S_{RG}^{(2)} \equiv \left. \frac{1}{2} \frac{d^2 S_{RG}}{d\epsilon^2} \right|_{\epsilon=0} = \frac{1}{4\kappa} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[(h^{(2)} + \frac{1}{4} h^{(1)} h^{(1)} - \frac{1}{2} h^{(1)ab} h_{ab}^{(1)}) \tilde{R} + h^{(1)} \dot{R} + \ddot{R} \right]. \quad (C.10)$$

Notése que el expandir la acción a segundo orden implica también la expansión del determinante. El cálculo explícito se da en el Apéndice (A.1); retomando aquí la expresión final, Ec. (A.17),

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-\tilde{g}} \left[1 + \epsilon \frac{1}{2} h^{(1)} + \epsilon^2 \left(\frac{1}{2} h^{(2)} + \frac{1}{8} h^{(1)} h^{(1)} - \frac{1}{4} h^{(1)ab} h_{ab}^{(1)} \right) \right] \quad (C.11)$$

para no perder detalle de donde provienen los términos de $S_{RG}^{(2)}$. Dado que el interés está en las contribuciones no lineales a la teoría, solamente se tomarán en cuenta el término a segundo

orden (C.10). Tomando las expresiones (2.56) y (2.58) se reescribe a $S_{RG}^{(2)}$ como la suma de dos lagrangianos, uno dependiente sólo de cantidades referentes a la curvatura de fondo, y el otro dependiente de derivadas a la primera y segunda perturbación.

$$S_{RG}^{(2)} = S_{RG;1}^{(2)} + S_{RG;2}^{(2)} \equiv \frac{1}{2K} \int d^4x \mathcal{L}_1^{(2)} + \mathcal{L}_2^{(2)}, \quad (\text{C.12})$$

donde se ha definido

$$\mathcal{L}_1^{(2)} = \frac{1}{8} \sqrt{-\tilde{g}} \left[\tilde{R}(h^{(1)2} - 2h_a^{(1)b}h_b^{(1)a} + 4h^{(2)}) + \tilde{R}_{ab}(8h_c^{(1)a}h^{(1)cb} - 4h^{(1)ab} - 8h^{(2)ab}) \right], \quad (\text{C.13})$$

$$\mathcal{L}_2^{(2)} = \sqrt{-\tilde{g}} \left[-\dot{R}_{ab}(h^{(1)ab} - \frac{1}{2}h^{(1)}\tilde{g}^{ab}) + \frac{1}{2}\ddot{R}_{ab}\tilde{g}^{ab} \right]. \quad (\text{C.14})$$

Notése que el factor que acompaña al primer término de (C.14) es precisamente la variable $\bar{h}_{ab}^{(1)} = h_{ab}^{(1)} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}h^{(1)}$, lo cual sugiere el utilizarla sistemáticamente. Con esto en mente se reescribe a (C.13) como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^{(2)} &= \frac{1}{8} \sqrt{-\tilde{g}} \left[(\tilde{R}(\bar{h}^{(1)2} - 2\bar{h}_a^{(1)b}\bar{h}_b^{(1)a}) + 4\tilde{R}_{ab}(2\bar{h}_c^{(1)a}\bar{h}^{(1)cb} - \bar{h}^{(1)ab}\bar{h}^{(1)})) + (4\tilde{R}h^{(2)} - 8\tilde{R}_{ab}h^{(2)ab}) \right], \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-\tilde{g}} \left[(2\tilde{g}^{ca}\tilde{G}^{db} - \tilde{G}^{cd}\tilde{g}^{ab}) + \frac{\tilde{R}}{2}(\tilde{g}^{ca}\tilde{g}^{db} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{cd}\tilde{g}^{ab}) \right] \bar{h}_{ab}^{(1)}\bar{h}_{cd}^{(1)} - \sqrt{-\tilde{g}}\tilde{G}^{ab}h_{ab}^{(2)}, \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

donde en la segunda línea se ha refinado aún más la expresión para tener en claro las dependencias en la métrica de fondo y las perturbaciones. Asimismo el Lagrangiano (C.14) toma la forma

$$\mathcal{L}_2^{(2)} = \sqrt{-\tilde{g}} \left[-\dot{R}_{ab}\bar{h}^{(1)ab} + \frac{1}{2}\ddot{R}_{ab}\tilde{g}^{ab} \right], \quad (\text{C.16})$$

en el entendido de que \dot{R}_{ab} y \ddot{R}_{ab} están evaluados en $\bar{h}_{ab}^{(1)}$. Obsérvese que de las expresiones calculadas en el Capítulo 2, el tensor de Ricci a segundo orden (2.48) contiene términos cuadráticos en $h^{(1)}$ y lineales en $h^{(2)}$. Para tener simplicidad en los cálculos que siguen se omite en lo que sigue toda dependencia de $h^{(2)}$ en los lagrangianos (C.15) y (C.16). En otras palabras, se está considerando sólo el segundo orden de la primera perturbación $h^{(1)}$. Con esto aclarado, haciendo uso de las expresiones (2.44) y (2.46) explícitamente el Lagrangiano (C.16) adopta la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2^{(2)} &= \sqrt{-\tilde{g}} \left[-\bar{h}^{(1)ab}\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_c\bar{h}_b^{(1)c} - \frac{1}{8}\tilde{\nabla}_a\bar{h}^{(1)}\tilde{\nabla}^a\bar{h}^{(1)} - \tilde{\nabla}_a\bar{h}^{(1)ab}\tilde{\nabla}_c\bar{h}_b^{(1)c} + \frac{1}{2}\tilde{\nabla}_a\bar{h}^{(1)}\tilde{\nabla}_b\bar{h}^{(1)ab} - \bar{h}^{(1)ab}\tilde{\nabla}_c\tilde{\nabla}_a\bar{h}_b^{(1)c} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\bar{h}^{(1)}\tilde{\nabla}^a\tilde{\nabla}^b\bar{h}_{ab}^{(1)} + \bar{h}^{(1)ab}\tilde{\nabla}^c\tilde{\nabla}_c\bar{h}_{ab}^{(1)} - \frac{1}{4}\bar{h}^{(1)}\tilde{\nabla}^a\tilde{\nabla}_a\bar{h}^{(1)} - \frac{1}{2}\tilde{\nabla}_a\bar{h}_b^{(1)c}\tilde{\nabla}_c\bar{h}^{(1)ab} + \frac{3}{4}\tilde{\nabla}^a\bar{h}^{(1)bc}\tilde{\nabla}_a\bar{h}_{bc}^{(1)} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Los términos de la forma $\bar{h}^{(1)ab}\tilde{\nabla}_c\tilde{\nabla}_d\bar{h}^{(1)ef}$, contraídos de alguna forma, pueden ser reescritos como $\tilde{\nabla}_c\bar{h}^{(1)ab}\tilde{\nabla}_d\bar{h}^{(1)ef}$ más una divergencia total, así el Lagrangiano (C.17) se escribe de manera más compacta:

$$\mathcal{L}_2^{(2)} = \sqrt{-\tilde{g}} \left[-\frac{1}{4}\tilde{\nabla}^a\bar{h}^{(1)bc}\tilde{\nabla}_a\bar{h}_{bc}^{(1)} + \frac{1}{2}\tilde{\nabla}_c\bar{h}^{(1)ab}\tilde{\nabla}_a\bar{h}_b^{(1)c} + \frac{1}{8}\tilde{\nabla}^a\bar{h}^{(1)}\tilde{\nabla}_a\bar{h}^{(1)} + \tilde{\nabla}_a v^a \right], \quad (\text{C.18})$$

con

$$v^a = -\bar{h}^{(1)ab}\tilde{\nabla}^c\bar{h}_{cb}^{(1)} + \bar{h}^{(1)cb}(\tilde{\nabla}^a\bar{h}_{cb}^{(1)} - \tilde{\nabla}_c\bar{h}_b^{(1)a}) + \bar{h}^{(1)}(\frac{1}{2}\tilde{\nabla}^c\bar{h}_c^{(1)a} - \frac{1}{4}\tilde{\nabla}^a\bar{h}^{(1)}), \quad (\text{C.19})$$

el cual no contribuirá a la acción, en razón de que es una divergencia total, con lo que (C.18) se reduce a

$$\mathcal{L}_2^{(2)} = \sqrt{-\tilde{g}} \left[-\frac{1}{4} \tilde{\nabla}^a \bar{h}^{(1)bc} \tilde{\nabla}_a \bar{h}_{bc}^{(1)} + \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_c \bar{h}^{(1)ab} \tilde{\nabla}_a \bar{h}_b^{(1)c} + \frac{1}{8} \tilde{\nabla}^a \bar{h}^{(1)} \tilde{\nabla}_a \bar{h}^{(1)} \right]. \quad (\text{C.20})$$

Cabe señalar que el Lagrangiano (C.20) es el mismo que el reportado en [111, 146]. Para simplificar las variaciones, tanto respecto a la métrica de fondo \tilde{g}_{ab} como respecto a la perturbación $\bar{h}^{(1)}$, se puede seguir la misma línea de pensamiento de (C.15), esto es, separar a ambas dependencias. Así, (C.20) toma la forma

$$\mathcal{L}_2^{(2)} = \sqrt{-\tilde{g}} P^{abcdef} \tilde{\nabla}_d \bar{h}_{ef}^{(1)} \tilde{\nabla}_a \bar{h}_{bc}^{(1)}, \quad (\text{C.21})$$

con el tensor

$$P^{abcdef} \equiv -\frac{1}{4} \tilde{g}^{ad} \tilde{g}^{be} \tilde{g}^{cf} + \frac{1}{2} \tilde{g}^{ae} \tilde{g}^{bf} \tilde{g}^{dc} + \frac{1}{8} \tilde{g}^{ad} \tilde{g}^{ef} \tilde{g}^{bc}, \quad (\text{C.22})$$

dependiente únicamente de la métrica de fondo. La variación de (C.21) respecto a $\bar{h}^{(1)ab}$ es

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_2^{(2)} &= -\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\nabla}^a \left([P_{abcdef} + P_{defabc}] \tilde{\nabla}^d \bar{h}^{(1)ef} \right) \delta \bar{h}^{(1)bc} \\ &= -\sqrt{-\tilde{g}} \left(-\frac{1}{2} \tilde{\nabla}^c \tilde{\nabla}_c \bar{h}_{ab}^{(1)} + \tilde{\nabla}^c \tilde{\nabla}_{(a} \bar{h}_{b)c}^{(1)} + \frac{1}{4} \tilde{g}_{ab} \tilde{\nabla}^c \tilde{\nabla}_c \bar{h}^{(1)} \right) \delta \bar{h}^{(1)ab} \\ &= -\sqrt{-\tilde{g}} R_{ab}^{(1)} \delta \bar{h}^{(1)ab}, \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

donde en la primera línea se ha integrado por partes anulando así mismo una divergencia total, mientras que en la segunda línea simplemente se agruparon términos de utilizando la forma explícita de (C.22) y se renombraron índices. Obsérvese que en la última línea aparece el tensor de Ricci a primer orden encontrado en el Capítulo 2. Si se pide que la acción construida con el Lagrangiano (C.21) sea estacionaria se obtiene

$$0 = \epsilon^2 \frac{\delta \mathcal{L}_2^{(2)}}{\delta \bar{h}^{(1)ab}} = \epsilon^2 \sqrt{-\tilde{g}} R^{(1)ab}, \quad (\text{C.24})$$

que implica precisamente la ecuación de propagación de las OG

$$\tilde{\nabla}^c \tilde{\nabla}_c \bar{h}_{ab}^{(1)} - 2 \tilde{\nabla}^c \tilde{\nabla}_{(a} \bar{h}_{b)c}^{(1)} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{ab} \tilde{\nabla}^a \tilde{\nabla}_a \bar{h}^{(1)} = 0, \quad (\text{C.25})$$

cuya traza es

$$2 \tilde{\nabla}^a \tilde{\nabla}_a \bar{h}^{(1)} + \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \bar{h}^{(1)ab} = 0. \quad (\text{C.26})$$

Por otro lado, la variación de (C.21) respecto a \tilde{g}^{ab} involucra tres términos, a decir,

$$\delta(\mathcal{L}_2^{(2)}) = \delta(\sqrt{-\tilde{g}}) P^{abcdef} \tilde{\nabla}_d \bar{h}_{ef}^{(1)} \tilde{\nabla}_a \bar{h}_{bc}^{(1)} + \sqrt{-\tilde{g}} \delta(P^{abcdef}) \tilde{\nabla}_d \bar{h}_{ef}^{(1)} \tilde{\nabla}_a \bar{h}_{bc}^{(1)} + \sqrt{-\tilde{g}} P^{abcdef} \delta(\tilde{\nabla}_d \bar{h}_{ef}^{(1)} \tilde{\nabla}_a \bar{h}_{bc}^{(1)}). \quad (\text{C.27})$$

Es fácil notar que el primero de ellos es

$$\delta(\sqrt{-\tilde{g}}) P^{abcdef} \tilde{\nabla}_d \bar{h}_{ef}^{(1)} \tilde{\nabla}_a \bar{h}_{bc}^{(1)} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_2^{(2)} \tilde{g}_{ab} \delta \tilde{g}^{ab}, \quad (\text{C.28})$$

donde se ha utilizado que $\delta\tilde{g}_{ab} = -\tilde{g}_{ac}\tilde{g}_{bd}\tilde{g}^{cd}$, es decir, no se está utilizando a la métrica de fondo para subir y bajar índices. Desarrollando el segundo se obtiene

$$\begin{aligned} \sqrt{-\tilde{g}}\delta(P^{abcdef})\tilde{\nabla}_d\bar{h}_{ef}^{(1)}\tilde{\nabla}_a\bar{h}_{bc}^{(1)} &= \sqrt{-\tilde{g}}\left[-\frac{1}{4}\tilde{\nabla}_a\bar{h}^{(1)cd}\tilde{\nabla}_b\bar{h}_{cd}^{(1)} - \frac{1}{2}\tilde{\nabla}^c\bar{h}_a^{(1)d}\tilde{\nabla}_c\bar{h}_{bd}^{(1)} + \frac{1}{8}\tilde{\nabla}_a\bar{h}^{(1)}\tilde{\nabla}_b\bar{h}^{(1)}\right. \\ &\quad \left.+ \frac{1}{4}\tilde{\nabla}^c\bar{h}_{ab}^{(1)}\tilde{\nabla}_c\bar{h}^{(1)} + \tilde{\nabla}^c\bar{h}_b^{(1)d}\tilde{\nabla}_{(a}\bar{h}_{d)c}^{(1)} + \tilde{\nabla}_a\bar{h}^{(1)cd}\tilde{\nabla}_d\bar{h}_{bc}^{(1)}\right]\delta\tilde{g}^{ab}. \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

El último término de (C.27) no es inmediato pues es necesario tomar en cuenta las contribuciones que provienen de variar directamente a la conexión. La expresión general esta dada por

$$\delta(\tilde{\nabla}_a T^{b_1\dots b_k}_{c_1\dots c_l}) = \tilde{\nabla}_a(\delta T^{b_1\dots b_k}_{c_1\dots c_l}) + \sum_i \delta C^{b_i}_{ad} T^{b_1\dots b_k}_{c_1\dots c_l} - \sum_j \delta C^d_{ac_j} T^{b_1\dots b_k}_{c_1\dots c_l} \quad (\text{C.30})$$

donde se ha utilizado a (2.34) para obtener

$$\delta C^c_{ab} = -\frac{1}{2}\tilde{g}^{cd}\left[\tilde{g}_{be}\tilde{g}_{df}\tilde{\nabla}_a\delta\tilde{g}^{ef} + \tilde{g}_{ae}\tilde{g}_{df}\tilde{\nabla}_b\delta\tilde{g}^{ef} - \tilde{g}_{ae}\tilde{g}_{bf}\tilde{\nabla}_d\delta\tilde{g}^{ef}\right] \quad (\text{C.31})$$

$$= -\frac{1}{2}\left[2\tilde{g}_{d(a}\tilde{\nabla}_{b)}\delta\tilde{g}^{cd} - \tilde{g}_{ad}\tilde{g}_{be}\tilde{\nabla}^c\delta\tilde{g}^{de}\right] \quad (\text{C.32})$$

De tal manera que la variación, omitiendo el factor $\sqrt{-\tilde{g}}$, se escribe como

$$\begin{aligned} P^{abcdef}\delta(\tilde{\nabla}_d\bar{h}_{ef}^{(1)}\tilde{\nabla}_a\bar{h}_{bc}^{(1)}) &= -P^{abcdef}\left(\tilde{\nabla}_a\bar{h}_{bc}^{(1)}[\delta C^g_{de}\bar{h}_{gf}^{(1)} + \delta C^g_{df}\bar{h}_{ge}^{(1)}] + \tilde{\nabla}_d\bar{h}_{ef}^{(1)}[\delta C^g_{ab}\bar{h}_{mc}^{(1)} + \delta C^g_{ac}\bar{h}_{gb}^{(1)}]\right) \\ &= -\delta C^g_{de}\bar{h}_{fg}^{(1)}\tilde{\nabla}_a\bar{h}_{bc}^{(1)}\left(P^{abcdef} + P^{abcdfe} + P^{defabc} + P^{dfeabc}\right) \\ &= \left[2\tilde{g}_{m(d}\tilde{\nabla}_{e)}\delta\tilde{g}^{gm} - \tilde{g}_{dm}\tilde{g}_{en}\tilde{\nabla}^g\delta\tilde{g}^{mn}\right]S^{de}_g, \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

donde en la última línea se han agrupado términos y, además, se ha definido el siguiente tensor por conveniencia

$$S^{de}_g \equiv \frac{1}{2}\bar{h}_{fg}^{(1)}\tilde{\nabla}_a\bar{h}_{bc}^{(1)}\left(P^{abcdef} + P^{abcdfe} + P^{defabc} + P^{dfeabc}\right) \quad (\text{C.34})$$

Notése que en (C.30) es posible integrar por partes y despreciar el término de divergencia total, con lo que

$$\begin{aligned} P^{abcdef}\delta(\tilde{\nabla}_d\bar{h}_{ef}^{(1)}\tilde{\nabla}_a\bar{h}_{bc}^{(1)}) &= \delta\tilde{g}^{gm}\left(-2\tilde{g}_{m(d}\tilde{\nabla}_{e)}S^{de}_g\right) + \delta\tilde{g}^{mn}\left(\tilde{g}_{dm}\tilde{g}_{en}\tilde{\nabla}^gS^{de}_g\right) \\ &= \left(-2\tilde{g}_{b(d}\tilde{\nabla}_{e)}S^{de}_a + \tilde{g}_{da}\tilde{g}_{eb}\tilde{\nabla}^gS^{de}_g\right)\delta\tilde{g}^{ab}, \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

donde en la última línea simplemente se han renombrado índices por consistencia. Con los cálculos anteriores se ha completado la variación de (C.21) respecto a la métrica inversa. Agrupando los resultados de las Ecs. (C.28), (C.29) y (C.35) en la Ec. (C.27) se escribe

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}}\frac{\delta\mathcal{L}_2^{(2)}}{\delta\tilde{g}^{ab}} &= -\frac{1}{2\sqrt{-\tilde{g}}}\mathcal{L}_2^{(2)}\tilde{g}_{ab} - \frac{1}{4}\tilde{\nabla}_a\bar{h}^{(1)cd}\tilde{\nabla}_b\bar{h}_{cd}^{(1)} - \frac{1}{2}\tilde{\nabla}^c\bar{h}_a^{(1)d}\tilde{\nabla}_c\bar{h}_{bd}^{(1)} - \frac{1}{8}\tilde{\nabla}_a\bar{h}^{(1)}\tilde{\nabla}_b\bar{h}^{(1)} + \frac{1}{4}\tilde{\nabla}^c\bar{h}_{ab}^{(1)}\tilde{\nabla}_c\bar{h}^{(1)} \\ &\quad + \tilde{\nabla}^c\bar{h}_b^{(1)d}\tilde{\nabla}_{(a}\bar{h}_{d)c}^{(1)} + \tilde{\nabla}_a\bar{h}^{(1)cd}\tilde{\nabla}_d\bar{h}_{bc}^{(1)} - 2\tilde{g}_{b(d}\tilde{\nabla}_{e)}S^{de}_a + \tilde{g}_{da}\tilde{g}_{eb}\tilde{\nabla}^gS^{de}_g. \end{aligned} \quad (\text{C.36})$$

Si además se toma la acción construida con

$$S_{RG}^{(\text{eff})} = S_{RG}^{(0)} + \epsilon^2 S_{RG;2}^{(2)}, \quad (\text{C.37})$$

y se pide que la acción sea estacionaria, entonces la variación del primer término deriva en

las ecuaciones de Einstein para la métrica de fondo mientras que el segundo término se puede interpretar como el PTEM OG

$$\frac{\delta S_{RG}^{(0)}}{\delta \tilde{g}^{ab}} = -\frac{\delta S_{RG;2}^{(2)}}{\delta \tilde{g}^{ab}}, \quad (\text{C.38})$$

que resulta en

$$\frac{\sqrt{-\tilde{g}}}{\kappa} \tilde{G}_{ab} = -\frac{\epsilon^2}{2\kappa} \frac{\delta \mathcal{L}_2^{(2)}}{\delta \tilde{g}^{ab}}. \quad (\text{C.39})$$

De la anterior ecuación, el PTEM OG toma la forma

$$\Theta_{ab}^{(RG)} \equiv -\frac{1}{2\kappa} \left\langle \left\langle \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\delta \mathcal{L}_2^{(2)}}{\delta \tilde{g}^{ab}} \right\rangle \right\rangle \quad (\text{C.40})$$

Más aún bajo los promedios, noté que los primeros dos términos de la segunda línea de la Ec. (C.36) pueden ser integrados por partes bajo la operación $\langle \cdot \cdot \rangle$, y explotando la condición de norma de Lorenz pueden ser anulados. Más aún los siguientes dos términos representan divergencias totales por lo que tampoco contribuyen. Con lo que

$$\Theta_{ab} = \left\langle \left\langle -\frac{1}{2\sqrt{-\tilde{g}}} \mathcal{L}_2^{(2)} \tilde{g}_{ab} - \frac{1}{4} \tilde{\nabla}_a \bar{h}^{(1)cd} \tilde{\nabla}_b \bar{h}_{cd}^{(1)} - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}^c \bar{h}_a^{(1)d} \tilde{\nabla}_c \bar{h}_{bd}^{(1)} - \frac{1}{8} \tilde{\nabla}_a \bar{h}^{(1)} \tilde{\nabla}_b \bar{h}^{(1)} + \frac{1}{4} \tilde{\nabla}^c \bar{h}_{ab}^{(1)} \tilde{\nabla}_c \bar{h}^{(1)} \right\rangle \right\rangle. \quad (\text{C.41})$$

Bibliografía

- [1] Aasi, J. et al. “Advanced LIGO”. *Class. Quant. Grav.*, **32**, (2015), 074001. [doi]. [arXiv:1411.4547 (gr-qc)].
- [2] Abbott, B. P. et al. “Binary Black Hole Mergers in the first Advanced LIGO Observing Run”. *Phys. Rev. X*, **6**, (2016), 041015. [doi]. [arXiv:1606.04856 (gr-qc)].
- [3] Abbott, B. P. et al. “GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence”. *Phys. Rev. Lett.*, **116**, (2016), 241103. [doi]. [arXiv:1606.04855 (gr-qc)].
- [4] Abbott, B. P. et al. “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger”. *Phys. Rev. Lett.*, **116**, (2016), 061102. [doi]. [arXiv:1602.03837 (gr-qc)].
- [5] Abbott, B. P. et al. “GW170608: Observation of a 19-solar-mass Binary Black Hole Coalescence”. *Astrophys. J.*, **851**, (2017), L35. [doi]. [arXiv:1711.05578 (astro-ph.HE)].
- [6] Abbott, B. P. et al. “GW170814: A Three-Detector Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Coalescence”. *Phys. Rev. Lett.*, **119**, (2017), 141101. [doi]. [arXiv:1709.09660 (gr-qc)].
- [7] Abbott, B. P. et al. “GWTC-1: A Gravitational-Wave Transient Catalog of Compact Binary Mergers Observed by LIGO and Virgo during the First and Second Observing Runs” (2018). [arXiv:1811.12907 (astro-ph.HE)].
- [8] Abbott, B. P. et al. “Prospects for Observing and Localizing Gravitational-Wave Transients with Advanced LIGO, Advanced Virgo and KAGRA”. *Living Rev. Relativity*, **21**, (2018), 3. [doi]. [arXiv:1304.0670 (gr-qc)].
- [9] Abbott, B. P. et al. “GW170104: Observation of a 50-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence at Redshift 0.2”. *Phys. Rev. Lett.*, **118**, (2017), 221101. [doi]. [arXiv:1706.01812 (gr-qc)].
- [10] Acernese, F. et al. “Advanced Virgo: a second-generation interferometric gravitational wave detector”. *Class. Quant. Grav.*, **32**, (2015), 024001. [doi]. [arXiv:1408.3978 (gr-qc)].
- [11] Ade, P. A. R. et al. “Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters”. *Astron. Astrophys.*, **594**, (2016), A13. [doi]. [arXiv:1502.01589 (astro-ph.CO)].
- [12] Alcubierre, M. *Introduction to 3+1 numerical relativity*. International Series of Monographs on Physics. Oxford University Press, 2008. [Google Books].
- [13] Alsing, J. et al. “Gravitational radiation from compact binary systems in the massive Brans-Dicke theory of gravity”. *Phys. Rev. D*, **85**, (2012), 064041. [doi]. [arXiv:1112.4903 (gr-qc)].
- [14] Amanullah, R. et al. “Spectra and Hubble Space Telescope Light Curves of Six Type Ia Supernovae at $0.511 < z < 1.12$ and the Union2 Compilation”. *Astrophys. J.*, **716**, (2010), 712–738. [doi]. [arXiv:1004.1711 (astro-ph.CO)].

- [15] Amendola, L. et al. “Fate of Large-Scale Structure in Modified Gravity After GW170817 and GRB170817A”. *Phys. Rev. Lett.*, **120**, (2018), 131101. [doi]. [arXiv:1711.04825 (astro-ph.CO)].
- [16] Anderson, D. et al. “Binary Pulsar constraints on massless scalar-tensor theories using Bayesian statistics” (2019). [arXiv:1901.00938 (gr-qc)].
- [17] Annulli, L. et al. “Scattering of scalar, electromagnetic and gravitational waves from binary systems”. *Phys. Rev.*, **D98**, (2018), 084001. [doi]. [arXiv:1809.05108 (gr-qc)].
- [18] Araujo, M. E. de. “On the Assumptions Made in Treating the Gravitational Wave Problem by the High Frequency Approximation”. *Gen. Rel. Grav.*, **18**, (1986), 219–233. [doi].
- [19] Armano, M. et al. “Sub-Femto- g Free Fall for Space-Based Gravitational Wave Observatories: LISA Pathfinder Results”. *Phys. Rev. Lett.*, **116**, (2016), 231101. [doi].
- [20] Ashtekar, A. and Bonga, B. “On a basic conceptual confusion in gravitational radiation theory”. *Class. Quant. Grav.*, **34**, (2017), 20LT01. [doi]. [arXiv:1707.07729 (gr-qc)].
- [21] Ashtekar, A. and Bonga, B. “On the ambiguity in the notion of transverse traceless modes of gravitational waves”. *Gen. Rel. Grav.*, **49**, (2017), 122. [doi]. [arXiv:1707.09914 (gr-qc)].
- [22] Ashtekar, A. et al. “Asymptotics with a positive cosmological constant: III. The quadrupole formula”. *Phys. Rev. D*, **92**, (2015), 104032. [doi]. [arXiv:1510.05593 (gr-qc)].
- [23] Ashtekar, A. et al. “Gravitational waves from isolated systems: Surprising consequences of a positive cosmological constant”. *Phys. Rev. Lett.*, **116**, (2016), 051101. [doi]. [arXiv:1510.04990 (gr-qc)].
- [24] Baker, T. et al. “Linking Tests of Gravity On All Scales: from the Strong-Field Regime to Cosmology”. *Astrophys. J.*, **802**, (2015), 63. [doi]. [arXiv:1412.3455 (astro-ph.CO)].
- [25] Bakopoulos, A. “Gravitoelectromagnetism: Basic principles, novel approaches and their application to Electromagnetism” (2016). [arXiv:1610.08357 (gr-qc)].
- [26] Barack, L. et al. “Black holes, gravitational waves and fundamental physics: a roadmap” (2018). [arXiv:1806.05195 (gr-qc)].
- [27] Bardeen, J. M. “Gauge Invariant Cosmological Perturbations”. *Phys. Rev. D*, **22**, (1980), 1882–1905. [doi].
- [28] Battye, R. A. et al. “Gravitational wave constraints on dark sector models”. *Phys. Rev. D*, **98**, (2018), 023504. [doi]. [arXiv:1802.09447 (astro-ph.CO)].
- [29] Bekenstein, J. D. “Relativistic gravitation theory for the MOND paradigm”. *Phys. Rev.*, **D70**, (2004). [Erratum: *Phys. Rev.* D71,069901(2005)], 083509. [doi]. [arXiv:astro-ph/0403694 (astro-ph)].
- [30] Bernard, L. “Dynamics of compact binary systems in scalar-tensor theories: Equations of motion to the third post-Newtonian order”. *Phys. Rev.*, **D98**, (2018), 044004. [doi]. [arXiv:1802.10201 (gr-qc)].
- [31] Bernard, L. “Dipolar tidal effects in scalar-tensor theories” (2019). [arXiv:1906.10735 (gr-qc)].

- [32] Bernard, L. et al. “Fokker action of nonspinning compact binaries at the fourth post-Newtonian approximation”. *Phys. Rev. D*, **93**, (2016), 084037. [doi]. [arXiv:1512.02876 (gr-qc)].
- [33] Berti, E. et al. “Testing General Relativity with Present and Future Astrophysical Observations”. *Class. Quant. Grav.*, **32**, (2015), 243001. [doi]. [arXiv:1501.07274 (gr-qc)].
- [34] Berti, E. et al. “Extreme Gravity Tests with Gravitational Waves from Compact Binary Coalescences: (II) Ringdown”. *Gen. Rel. Grav.*, **50**, (2018), 49. [doi]. [arXiv:1801.03587 (gr-qc)].
- [35] Bertschinger, E. “Gravitation in the weak-field limit”. *Physics 8.962 (MIT’s GR course) lecture notes*, **22**, (1999).
- [36] Bettoni, D. et al. “Speed of Gravitational Waves and the Fate of Scalar-Tensor Gravity”. *Phys. Rev.*, **D95**, (2017), 084029. [doi]. [arXiv:1608.01982 (gr-qc)].
- [37] Bhadra, A. et al. “Brans-Dicke theory: Jordan versus Einstein frame”. *Mod. Phys. Lett.*, **A22**, (2007), 367–376. [doi]. [arXiv:gr-qc/0605109 (gr-qc)].
- [38] Blanchet, L. “Gravitational radiation from post-Newtonian sources and inspiralling compact binaries”. *Living Rev. Relativity*, **17**, (2014). [doi]. [arXiv:1310.1528 (gr-qc)].
- [39] Blanchet, L. et al. “Gravitational radiation from inspiralling compact binaries completed at the third post-Newtonian order”. *Phys. Rev. Lett.*, **93**, (2004), 091101. [doi]. [arXiv:gr-qc/0406012 (gr-qc)].
- [40] Blum, A. et al. “The reinvention of general relativity: A historiographical framework for assessing one hundred years of curved space-time”. *Isis*, **106**, (2015), 598–620. [doi].
- [41] Bojowald, M. “Singularities and Quantum Gravity”. *AIP Conf. Proc.*, **910**, (2007), 294–333. [doi]. [arXiv:gr-qc/0702144 (GR-QC)].
- [42] Bondi, H. “Plane gravitational waves in general relativity”. *Nature*, **179**, (1957), 1072–1073. [doi].
- [43] Brans, C. and Dicke, R. H. “Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation”. *Phys. Rev.*, **124**, (1961), 925–935. [doi].
- [44] Brill, D. R. and Hartle, J. B. “Method of the Self-Consistent Field in General Relativity and its Application to the Gravitational Geon”. *Phys. Rev.*, **135**, (1964), B271–B278. [doi].
- [45] Brizuela, D. et al. “High-order gauge-invariant perturbations of a spherical space-time”. *Phys. Rev. D*, **76**, (2007), 024004. [doi]. [arXiv:gr-qc/0703069 (gr-qc)].
- [46] Buonanno, A. “Gravitational waves”. *Les Houches Summer School - Session 86: Particle Physics and Cosmology: The Fabric of Spacetime Les Houches, France, July 31-August 25, 2006*. 2007. [arXiv:0709.4682 (gr-qc)].
- [47] Buonanno, A. and Sathyaprakash, B. S. “Sources of Gravitational Waves: Theory and Observations”. 2014, 287–346. [arXiv:1410.7832 (gr-qc)].
- [48] Burnett, G. A. “The High Frequency Limit in General Relativity”. *J. Math. Phys.*, **30**, (1989), 90–96. [doi].
- [49] Campanelli, M. and Lousto, C. O. “Second order gauge invariant gravitational perturbations of a Kerr black hole”. *Phys. Rev. D*, **59**, (1999), 124022. [doi]. [arXiv:gr-qc/9811019 (gr-qc)].

- [50] Capozziello, S. et al. “Physical non-equivalence of the Jordan and Einstein frames”. *Phys. Lett. B*, **689**, (2010), 117–121. [doi]. [arXiv:1003.5394 (gr-qc)].
- [51] Capozziello, S. and De Laurentis, M. “Extended Theories of Gravity”. *Phys. Rept.*, **509**, (2011), 167–321. [doi]. [arXiv:1108.6266 (gr-qc)].
- [52] Cardoso, V. and Porto, R. A. “Analytic approximations, perturbation theory, effective field theory methods and their applications”. *Gen. Rel. Grav.*, **46**, (2014), 1682. [doi]. [arXiv:1401.2193 (gr-qc)].
- [53] Carroll, S. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Pearson Education Limited, 2014. [Google Books].
- [54] Cervantes-Cota, J. L. et al. “A Brief History of Gravitational Waves”. *Universe*, **2**, (2016), 22. [doi]. [arXiv:1609.09400 (physics.hist-ph)].
- [55] Chamberlain, K. and Yunes, N. “Theoretical Physics Implications of Gravitational Wave Observation with Future Detectors”. *Phys. Rev. D*, **96**, (2017), 084039. [doi]. [arXiv:1704.08268 (gr-qc)].
- [56] Chandrasekhar, S. and Thorne, K. S. *The mathematical theory of black holes*. 1985.
- [57] Chaverra, E. et al. “Black holes in nonlinear electrodynamics: Quasinormal spectra and parity splitting”. *Phys. Rev.*, **D93**, (2016), 123013. [doi]. [arXiv:1605.04003 (gr-qc)].
- [58] Ciufolini, I. et al. *Gravitational waves*. High Energy Physics, Cosmology and Gravitation. Institute of Physics Publishing, 2001. [Google Books].
- [59] Clifton, T. et al. “Modified Gravity and Cosmology”. *Phys. Rept.*, **513**, (2012), 1–189. [doi]. [arXiv:1106.2476 (astro-ph.CO)].
- [60] Collins, H. *Gravity’s shadow: the search for gravitational waves*. University of Chicago Press, 2010. [Google Books].
- [61] Colpi, M. and Sesana, A. “Gravitational Wave Sources in the Era of Multi-Band Gravitational Wave Astronomy”. *An Overview of Gravitational Waves: Theory, Sources and Detection*. World Scientific, 2017, 43–140. [Google Books].
- [62] Damour, T. “The problem of motion in Newtonian and Einsteinian gravity”. *Three Hundred Years of Gravitation*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987, 128–198. [Google Books].
- [63] Damour, T. and Esposito-Farese, G. “Tensor multiscalar theories of gravitation”. *Class. Quant. Grav.*, **9**, (1992), 2093–2176. [doi].
- [64] Damour, T. and Esposito-Farese, G. “Nonperturbative strong field effects in tensor - scalar theories of gravitation”. *Phys. Rev. Lett.*, **70**, (1993), 2220–2223. [doi].
- [65] Damour, T. and Schmidt, B. G. “Reliability of Perturbation Theory in General Relativity”. *J. Math. Phys.*, **31**, (1990), 2441–2453. [doi].
- [66] Detweiler, S. “Elementary development of the gravitational self-force”. *Fundam. Theor. Phys.*, **162**, (2011), 271–307. [arXiv:0908.4363 (gr-qc)].
- [67] Detweiler, S. “Gravitational radiation reaction and second-order perturbation theory”. *Phys. Rev. D*, **85**, (2012), 044048. [doi]. [arXiv:1107.2098 (gr-qc)].
- [68] DeWitt, B. S. and Brehme, R. W. “Radiation damping in a gravitational field”. *Annals Phys.*, **9**, (1960), 220–259. [doi].
- [69] Di Casola, E. et al. “Nonequivalence of equivalence principles”. *Am. J. Phys.*, **83**, (2015), 39. [doi]. [arXiv:1310.7426 (gr-qc)].

- [70] Dokkum, P. van et al. “A Second Galaxy Missing Dark Matter in the NGC 1052 Group”. *Astrophys. J.*, **874**, (2019), 8pp. [doi]. [arXiv:1901.05973 (astro-ph.GA)].
- [71] Duerr, P. M. “It ain’t necessarily so: Gravitational waves and energy transport”. *Stud. Hist. Philos. Sci. B*, **65**, (2019), 25–40. [doi].
- [72] Durrer, R. “Gauge invariant cosmological perturbation theory: A General study and its application to the texture scenario of structure formation”. *Fund. Cosmic Phys.*, **15**, (1994), 209–339. [arXiv:astro-ph/9311041 (astro-ph)].
- [73] Eardley, D. M. “Observable effects of a scalar gravitational field in a binary pulsar”. *The Astrophysical Journal*, **196**, (1975), L59–L62. [doi].
- [74] Eddington, A. S. “The propagation of gravitational waves”. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **102**, (1922), 268–282. [doi].
- [75] Efroimsky, M. “Gravity waves in vacuum and in media: The wave equation, the role of nonlinearity, the stress energy tensor and the low frequency cutoff”. *Class. Quant. Grav.*, **9**, (1992), 2601–2614. [doi].
- [76] Ehlers, J. et al. “Comments on Gravitational Radiation Damping and Energy Loss in Binary Systems”. *Astrophys. J.*, **208**, (1976), L77–L81. [doi].
- [77] Einstein, A. “Die Feldgleichungen der Gravitation”. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* (), 844–847.
- [78] Einstein, A. “Die feldgleichungen der gravitation”. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, **25**, (1915), 844–847. [doi].
- [79] Einstein, A. “Näherungsweise integration der feldgleichungen der gravitation”. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* (1916), 688–696. [doi].
- [80] Einstein, A. “Über Gravitationswellen”. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, **1918**, (1918), 154–167. [doi].
- [81] Einstein, A. and Rosen, N. “On Gravitational waves”. *J. Franklin Inst.*, **223**, (1937), 43–54. [doi].
- [82] Faraoni, V. *Cosmology in scalar tensor gravity*. Vol. 139. 2004. [doi].
- [83] Flanagan, E. E. and Hughes, S. A. “The Basics of gravitational wave theory”. *New J. Phys.*, **7**, (2005), 204. [doi]. [arXiv:gr-qc/0501041 (gr-qc)].
- [84] Frenkel, A. and Rácz, I. “On the use of projection operators in electrodynamics”. *Eur. J. Phys.*, **36**, (2015), 015022. [doi]. [arXiv:1407.7396 (math-ph)].
- [85] Fujii, Y. and Maeda, K. *The scalar-tensor theory of gravitation*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2007. [doi].
- [86] Gair, J. R. et al. “Testing general relativity with low-frequency, space-based gravitational-wave detectors”. *Living Rev. Relativity*, **16**, (2013), 7. [doi]. [arXiv:1212.5575 (gr-qc)].
- [87] Geroch, R. “Limits of spacetimes”. *Comm. Math. Phys.*, **13**, (1969), 180–193.
- [88] Geroch, R. *General relativity: 1972 lecture notes*. Vol. 1. Minkowski Institute Press, 2013. [Google Books].
- [89] Gleiser, R. J. et al. “Gravitational radiation from Schwarzschild black holes: The Second order perturbation formalism”. *Phys. Rept.*, **325**, (2000), 41–81. [doi]. [arXiv:gr-qc/9807077 (gr-qc)].
- [90] Gnocchi, G. et al. “Bounding Alternative Theories of Gravity with Multi-Band GW Observations” (2019). [arXiv:1905.13460 (gr-qc)].

- [91] Habisohn, C. X. “Calculation of radiated gravitational energy using the second-order Einstein tensor”. *Journal of Mathematical Physics*, **27**, (1986), 2759–2769. [DOI].
- [92] Haugan, M. P. and Lämmerzahl, C. “Principles of equivalence: their role in gravitation physics and experiments that test them”. *Lect. Notes Phys.*, **562**, (2001), 195–212. [DOI]. [arXiv:gr-qc/0103067 (gr-qc)].
- [93] Hou, S. et al. “Polarizations of Gravitational Waves in Horndeski Theory”. *Eur. Phys. J.*, **C78**, (2018), 378. [DOI]. [arXiv:1704.01899 (gr-qc)].
- [94] Hulse, R. A. and Taylor, J. H. “Discovery of a pulsar in a binary system”. *Astrophys. J.*, **195**, (1975), L51–L53. [DOI].
- [95] Hulse, R. A. “The discovery of the binary pulsar”. *Rev. Mod. Phys.*, **66**, (1994), 699–710. [DOI].
- [96] Isaacson, R. A. “Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. I. The Linear Approximation and Geometrical Optics”. *Phys. Rev.*, **166**, (1968), 1263–1271. [DOI].
- [97] Isaacson, R. A. “Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. II. Non-linear Terms and the Effective Stress Tensor”. *Phys. Rev.*, **166**, (1968), 1272–1280. [DOI].
- [98] Jackson, J. *Classical Electrodynamics: Third Edition*. Wiley, 2007. [Google Books].
- [99] Jaime, L. G. et al. “New parametrized equation of state for dark energy surveys”. *Phys. Rev. D*, **98**, (2018), 083530. [DOI]. [arXiv:1804.04284 (astro-ph.CO)].
- [100] Jaime, L. G. et al. “Robust approach to f(R) gravity”. *Phys. Rev.*, **D83**, (2011), 024039. [DOI]. [arXiv:1006.5747 (gr-qc)].
- [101] Joyce, A. et al. “Beyond the Cosmological Standard Model”. *Phys. Rept.*, **568**, (2015), 1–98. [DOI]. [arXiv:1407.0059 (astro-ph.CO)].
- [102] Kennefick, D. *Traveling at the speed of thought: Einstein and the quest for gravitational waves*. Princeton University Press, 2016. [Google Books].
- [103] Kennefick, D. “The binary pulsar and the quadrupole formula controversy”. *Eur. Phys. J. H*, **42**, (2017), 293–310. [DOI].
- [104] Khalil, M. et al. “Theory-agnostic framework for dynamical scalarization of compact binaries” (2019). [arXiv:1906.08161 (gr-qc)].
- [105] Khoury, J. and Weltman, A. “Chameleon cosmology”. *Phys. Rev. D*, **69**, (2004), 044026. [DOI]. [arXiv:astro-ph/0309411 (astro-ph)].
- [106] Kiefer, C. *Quantum Gravity*. International Series of Monographs on Physics. Oxford University Press, 2007. [Google Books].
- [107] Landau, L. D. *The Classical Theory of Fields*. Vol. 2. Elsevier, 2013. [Google Books].
- [108] Lang, R. N. “Compact binary systems in scalar-tensor gravity. II. Tensor gravitational waves to second post-Newtonian order”. *Phys. Rev. D*, **89**, (2014), 084014. [DOI]. [arXiv:1310.3320 (gr-qc)].
- [109] Le Tiec, A. and Novak, J. “Theory of Gravitational Waves”. *An Overview of Gravitational Waves: Theory, Sources and Detection*. World Scientific, 2017, 1–43. [Google Books].
- [110] Lewis, A. et al. “Efficient computation of CMB anisotropies in closed FRW models”. *Astrophys. J.*, **538**, (2000), 473–476. [DOI]. [arXiv:astro-ph/9911177 (astro-ph)].

- [111] Maccallum, M. A. H. and Taub, A. H. “The averaged lagrangian and high-frequency gravitational waves”. *Commun. Math. Phys.*, **30**, (1973), 153–169. [doi].
- [112] Maggiore, M. *Gravitational Waves: Volume 1: Theory and Experiments*. Oxford University Press, 2008. [Google Books].
- [113] Mashhoon, B. “Gravitoelectromagnetism: A Brief review” (2003). [arXiv:gr-qc/0311030 (gr-qc)].
- [114] Mino, Y. “Modulation of the gravitational waveform by the effect of radiation reaction”. *Phys. Rev. D*, **77**, (2008), 044008. [doi]. [arXiv:0711.3007 (gr-qc)].
- [115] Misner, C. et al. *Gravitation*. Physics Series. W. H. Freeman, 1973. [Google Books].
- [116] Moretti, F. et al. “Gauge invariant formulation of metric $f(R)$ gravity for gravitational waves”. *Phys. Rev. D*, **100**, (2019), 084014. [doi]. [arXiv:1906.01899 (gr-qc)].
- [117] Nakamura, K. “Second order gauge invariant perturbation theory”. *Prog. Theor. Phys.*, **113**, (2005), 481–511. [doi]. [arXiv:gr-qc/0410024 (gr-qc)].
- [118] Nakamura, K. “Gauge-invariant formulation of the second-order cosmological perturbations”. *Phys. Rev. D*, **74**, (2006), 101301. [doi]. [arXiv:gr-qc/0605107 (gr-qc)].
- [119] Nakamura, K. “‘Gauge’ in general relativity: Second-order general relativistic gauge-invariant perturbation theory”. *Bulg. J. Phys.*, **35**, (2008), 489–492. [arXiv:0711.0996 (gr-qc)].
- [120] Negrelli, C. et al. (Enviado 2019).
- [121] Norton, J. D. “What can we learn about the ontology of space and time from the theory of relativity?” *Physical Theory: Method and Interpretation*. Oxford University Press, USA, 2014, 185. [Google Books].
- [122] Padmanabhan, T. *Gravitation: Foundations and Frontiers*. Cambridge University Press, 2010. [Google Books].
- [123] Pati, M. E. and Will, C. M. “PostNewtonian gravitational radiation and equations of motion via direct integration of the relaxed Einstein equations. 1. Foundations”. *Phys. Rev. D*, **62**, (2000), 124015. [doi]. [arXiv:gr-qc/0007087 (gr-qc)].
- [124] Patrignani, C. et al. “Review of Particle Physics”. *Chin. Phys.*, **C40**, (2016), 100001. [doi].
- [125] Peebles, P. J. E. and Shaviv, G. “Large-Scale Structure of the Universe”. 1980.
- [126] Peters, P. C. and Mathews, J. “Gravitational radiation from point masses in a Keplerian orbit”. *Phys. Rev.*, **131**, (1963), 435–439. [doi].
- [127] Petiteau, A. “Pulsar Timing Array”. *An Overview of Gravitational Waves: Theory, Sources and Detection*. World Scientific, 2017, 269–283. [Google Books].
- [128] Poisson, E. and Will, C. M. *Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic*. Cambridge University Press, 2014. [doi]. [Google Books].
- [129] Psaltis, D. “Probes and Tests of Strong-Field Gravity with Observations in the Electromagnetic Spectrum”. *Living Rev. Relativity*, **11**, (2008), 9. [doi]. [arXiv:0806.1531 (astro-ph)].
- [130] Racz, I. “Gravitational radiation and isotropic change of the spatial geometry” (2009). [arXiv:0912.0128 (gr-qc)].
- [131] Regge, T. and Wheeler, J. A. “Stability of a Schwarzschild singularity”. *Phys. Rev.*, **108**, (1957), 1063–1069. [doi].

- [132] Rendall, A. D. “On the definition of post-Newtonian approximations”. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **438**, (1992), 341–360. [doi].
- [133] Sachs, R. K. “Gravitational waves in general relativity. VI. The outgoing radiation condition”. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A264**, (1961), 309–338. [doi].
- [134] Saffer, A. et al. “The gravitational wave stress–energy (pseudo)-tensor in modified gravity”. *Class. Quant. Grav.*, **35**, (2018), 055011. [doi]. [arXiv:1710.08863 (gr-qc)].
- [135] Salgado, M. “The Cauchy problem of scalar tensor theories of gravity”. *Class. Quant. Grav.*, **23**, (2006), 4719–4742. [doi]. [arXiv:gr-qc/0509001 (gr-qc)].
- [136] Sasaki, M. and Tagoshi, H. “Analytic black hole perturbation approach to gravitational radiation”. *Living Rev. Relativity*, **6**, (2003). [doi]. [arXiv:gr-qc/0306120 (gr-qc)].
- [137] Sathyaprakash, B. S. and Schutz, B. F. “Physics, Astrophysics and Cosmology with Gravitational Waves”. *Living Rev. Relativity*, **12**, (2009), 2. [doi]. [arXiv:0903.0338 (gr-qc)].
- [138] Saulson, P. R. “Josh Goldberg and the physical reality of gravitational waves”. *Gen. Rel. Grav.*, **43**, (2011), 3289–3299. [doi].
- [139] Schmidt, H.-J. “Fourth order gravity: Equations, history, and applications to cosmology”. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, **4**, (2007), 209–248. [doi]. [arXiv:gr-qc/0602017 (gr-qc)].
- [140] Schumann, M. “Direct Detection of WIMP Dark Matter: Concepts and Status” (2019). [arXiv:1903.03026 (astro-ph.CO)].
- [141] Schutz, B. F. “Gravitational wave astronomy”. *Class. Quant. Grav.*, **16**, (1999), A131–A156. [doi]. [arXiv:gr-qc/9911034 (gr-qc)].
- [142] Sennett, N. et al. “Effective action model of dynamically scalarizing binary neutron stars”. *Phys. Rev. D*, **96**, (2017), 084019. [doi]. [arXiv:1708.08285 (gr-qc)].
- [143] Sotiriou, T. P. and Faraoni, V. “ $f(R)$ Theories of Gravity”. *Rev. Mod. Phys.*, **82**, (2010), 451–497. [doi]. [arXiv:0805.1726 (gr-qc)].
- [144] Stairs, I. H. “Testing general relativity with pulsar timing”. *Living Rev. Relativity*, **6**, (2003), 5. [doi]. [arXiv:astro-ph/0307536 (astro-ph)].
- [145] Starobinsky, A. A. “Disappearing cosmological constant in $f(R)$ gravity”. *JETP Lett.*, **86**, (2007), 157–163. [doi]. [arXiv:0706.2041 (astro-ph)].
- [146] Stein, L. C. and Yunes, N. “Effective gravitational wave stress-energy tensor in alternative theories of gravity”. *Phys. Rev. D*, **83**, (2011), 064038. [doi].
- [147] Stephani, H. et al. *Exact solutions of Einstein’s field equations*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003. [doi].
- [148] Stewart, J. M. and Walker, M. “Perturbations of space-times in general relativity”. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **341**, (1974), 49–74. [doi].
- [149] Straumann, N. *General Relativity: With Applications to Astrophysics*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer Berlin Heidelberg, 2013. [Google Books].
- [150] Straumann, N. “Reflections on gravity” (2000). [arXiv:astro-ph/0006423 (astro-ph)].
- [151] Taylor, J. H. et al. “Measurements of general relativistic effects in the binary pulsar PSR 1913+16”. *Nature*, **277**, (1979), 437–440. [doi].

- [152] Taylor, J. H. “Binary pulsars and relativistic gravity”. *Rev. Mod. Phys.*, **66**, (1994), 711–719. [doi].
- [153] Thorne, K. S. “Multipole Expansions of Gravitational Radiation”. *Rev. Mod. Phys.*, **52**, (1980), 299–339. [doi].
- [154] Thorne, K. S. “Gravitational radiation.” *Three Hundred Years of Gravitation*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987, 330–458. [Google Books].
- [155] Thorne, K. S. “LIGO and Gravitational Waves, III: Nobel Lecture, December 8, 2017”. *Annalen Phys.*, **531**, (2019), 1800350. [doi].
- [156] Thorne, K. S. et al. “Foundations for a Theory of Gravitation Theories”. *Phys. Rev. D*, **7**, (1973), 3563–3578. [doi].
- [157] Tsang, K. W. et al. “Modeling the postmerger gravitational wave signal and extracting binary properties from future binary neutron star detections” (2019). [arXiv:1907.02424 (gr-qc)].
- [158] Vinet, J. Y. “Theory of Gravitational Wave Detecion”. *An Overview of Gravitational Waves: Theory, Sources and Detection*. World Scientific, 2017, 141–194. [Google Books].
- [159] Wahlquist, H. “The Doppler Response to Gravitational Waves From a Binary Star Source”. *Gen. Rel. Grav.*, **19**, (1987), 1101–1113. [doi].
- [160] Wald, R. M. *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984. [Google Books].
- [161] Wald, R. M. “Spin-2 Fields and General Covariance”. *Phys. Rev. D*, **33**, (1986), 3613. [doi].
- [162] Weber, J. “Detection and Generation of Gravitational Waves”. *Phys. Rev.*, **117**, (1960), 306–313. [doi].
- [163] Weinberg, S. “The Cosmological Constant Problem”. *Rev. Mod. Phys.*, **61**, (1989), 1–23. [doi].
- [164] Weisberg, J. M. et al. “GRAVITATIONAL WAVES FROM AN ORBITING PULSAR”. *Sci. Am.*, **245**, (1981), 66–74. [doi].
- [165] Weisberg, J. M. and Taylor, J. H. “Relativistic binary pulsar B1913+16: Thirty years of observations and analysis”. *ASP Conf. Ser.*, **328**, (2005), 25. [arXiv:astro-ph/0407149 (astro-ph)].
- [166] Wex, N. “Testing Relativistic Gravity with Radio Pulsars” (2014). [arXiv:1402.5594 (gr-qc)].
- [167] Will, C. M. “On the unreasonable effectiveness of the post-Newtonian approximation in gravitational physics”. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **108**, (2011), 5938. [doi]. [arXiv:1102.5192 (gr-qc)].
- [168] Will, C. M. “The Confrontation between General Relativity and Experiment”. *Living Rev. Relativity*, **17**, (2014). [doi].
- [169] Will, C. M. “Was Einstein Right? A Centenary Assessment” (2014). [arXiv:1409.7871 (gr-qc)].
- [170] Will, C. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambridge University Press, 2018. [Google Books].
- [171] Wu, B. and Huang, C.-G. “Multipole analysis for linearized $f(R, \mathcal{G})$ gravity with irreducible Cartesian tensors”. *Eur. Phys. J.*, **C79**, (2019), 519. [doi]. [arXiv:1807.00683 (gr-qc)].

-
- [172] Yagi, K. “Scientific Potential of DECIGO Pathfinder and Testing GR with Space-Borne Gravitational Wave Interferometers”. *Int. J. Mod. Phys. D*, **22**, (2013), 1341013. [doi]. [[arXiv:1302.2388 \(gr-qc\)](#)].
- [173] Yunes, N. and Siemens, X. “Gravitational-Wave Tests of General Relativity with Ground-Based Detectors and Pulsar Timing-Arrays”. *Living Rev. Relativity*, **16**, (2013), 9. [doi]. [[arXiv:1304.3473 \(gr-qc\)](#)].
- [174] Zalaletdinov, R. M. “Averaging out the Einstein equations”. *Gen. Rel. Grav.*, **24**, (1992), 1015–1031. [doi].
- [175] Zalaletdinov, R. M. “Averaged Lagrangians and MacCallum-Taub’s limit in macroscopic gravity”. *Gen. Rel. Grav.*, **28**, (1996), 953–979. [doi].