



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
Mecánica – Termofluidos

Generadores Magneto Hidrodinámicos

TESIS,  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
Ramírez Trocherie Marcel-André

TUTOR PRINCIPAL  
Dr. Jose Enrique Guzmán Vázquez Instituto de Ingeniería

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., Diciembre, 2019



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Federico Méndez Lavielle

Secretario: Dr. Gabriel Ascanio Gasca

1 er. Vocal: Dr. Enrique Guzmán Vázquez

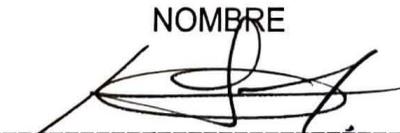
2 do. Vocal: Dr. Sergio Cuevas García

3 er. Vocal: Dr. Frédéric Trillaud

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Instituto de ingeniería UNAM

**TUTOR DE TESIS:** Dr. Enrique Guzmán Vázquez

NOMBRE

A handwritten signature in black ink, consisting of several loops and strokes, positioned above a horizontal dashed line.

FIRMA

(Segunda hoja)

## Agradecimientos

A la UNAM que me vio crecer y me nutrió de saberes.

A mi Tutor por su guía a lo largo de esta formación.

A mis profesores que alentaron mi ávido apetito de saberes.

A mi colegas del Instituto de Ingeniería por la crítica siempre vital y ante todo objetiva, por ese apoyo incondicional.

A mis amigos pese a que no entendiesen con claridad la investigación que desempeñaba.

Ma compagne de voyage, merci d'être avec moi malgré la tempête.

A mi hermana por darme conocimientos fuera de los esperados.

Fred eric merci de mávoir encouragé sur ce chemin.

Por sobre todo a mis Padres que siempre me han impulsado a ser mejor y por alentarme en mi formación pese a que no fuese siempre del todo convencional.

# Resumen

En el presente trabajo se condensa la investigación teórica y experimental en torno al funcionamiento de micro-generadores magnetohidrodinámicos ( $\mu$ -GMHD). Los experimentos se realizaron en el laboratorio de MEMS de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

El fenómeno estudiado representa un flujo en régimen laminar, a través de un canal con sección transversal cuadrada. El flujo es sometido a un campo magnético uniforme perpendicular al flujo. El canal cuenta con dos paredes conductoras (paralelas al campo magnético) y dos aislantes. El fluido de trabajo se comporta como un material óhmico con una reología newtoniano. El problema en cuestión se aborda a lo largo de tres vertientes: la analítica, la numérica y la experimental.

En cuanto a la primera, en el capítulo 2 se plantean los modelos matemáticos transitorios del fenómeno descrito. Las soluciones analíticas consideran efectos magnéticos (fuerzas de Lorentz) y efectos viscosos. Dichas soluciones fueron obtenidas por el método de separación de variables en tres dimensiones y por medio de expansiones de Fourier.

Respecto a la segunda, en el capítulo 3 se muestra el montaje y construcción experimental. La finalidad es comprobar la existencia del fenómeno descrito en la hipótesis para comparar el fenómeno físico con los modelos analíticos y numéricos. Dicho montaje consta de un canal de sección cuadrada ( $1.2 \times 10^{-3} \text{m}$ ) y una longitud dada ( $2.35 \times 10^{-2} \text{m}$ ), con un campo magnético uniforme en todo el canal (0.5T) generado por un imán permanente. El flujo es producido por un dispositivo de bombeo de desplazamiento positivo. Las paredes conductoras están fabricadas con óxido de Indio (ITO) y las aislantes con polidimetilsiloxano (PDMS).

Por último, en los capítulos finales se analizan y comparan los resultados experimentales y analíticos.

El objetivo principal de la investigación es estudiar la corriente generada en un  $\mu$ -GMHD para diferentes condiciones de flujo.

# Contenido

<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>IX</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	2
1.2. Objetivos y alcances . . . . .	4
<b>2. Modelo Matemático</b>	<b>5</b>
2.1. Aproximación del modelo . . . . .	6
2.2. Modelo para un micro-generador MHD . . . . .	8
2.2.1. Formulación hidrodinámica del problema . . . . .	10
2.2.2. Formulación de conservación de carga . . . . .	16
<b>3. Experimentos de Laboratorio</b>	<b>23</b>
3.1. Fluidos de trabajo . . . . .	23
3.1.1. Propiedades del fluido . . . . .	25
3.2. Micro-canales . . . . .	26
3.2.1. Diseño . . . . .	26
3.2.2. Procedimiento de polimerización de PDMS . . . . .	27
3.3. Arreglo experimental . . . . .	28

3.3.1. Instalación experimental medidas de presión . . . . .	29
3.3.2. Sistema de adquisición de datos . . . . .	32
3.4. Técnicas de medición . . . . .	32
<b>4. Análisis de Resultados</b>	<b>34</b>
4.0.1. Mediciones de la corriente inducida . . . . .	34
4.1. Mediciones de la presión . . . . .	35
4.1.1. Características estacionarias de la corriente . . . . .	36
4.2. Discusión . . . . .	37
<b>5. Conclusiones</b>	<b>39</b>
5.1. Contribuciones . . . . .	40
5.2. Recomendaciones y trabajo futuro . . . . .	41
<b>A. Ecuaciones Fundamentales</b>	<b>43</b>
A.1. Ecuaciones del campo electromagnético . . . . .	43
A.2. Ecuaciones del campo hidrodinámico . . . . .	48

# Lista de Figuras

2.1. Diagrama del micro-canal. El sistema de referencia es dextrógiro (La componente $x$ entra al interior del dibujo). Se localiza en el punto medio del canal. . . . .	5
2.2. Diagrama de flujo de resolución del sistema de ecuaciones diferenciales. . . . .	10
2.3. Campo de velocidades (derecha 3D e izquierda vista de planta) a un gasto de $4 \times 10^{-8} \text{m}^3/\text{s}$ . . . . .	20
2.4. Potencial eléctrico(derecha 3D e izquierda vista de planta) generado por un gasto de $4 \times 10^{-8} \text{m}^3/\text{s}$ . . . . .	21
2.5. Densidad de corriente $\vec{J}_E$ A/m <sup>2</sup> (izquierda) generada por $\vec{E}$ y $\vec{J}_v$ A/m <sup>2</sup> (derecha) generada por $\vec{v}$ . . . . .	22
2.6. Densidad de corriente total $\vec{J}$ A/m <sup>2</sup> . . . . .	22
3.1. Iones en medios acuosos. . . . .	24
3.2. 1) PDMS, 2) Micro canal Canal, 3) Paredes conductoras , 4) Paredes no conductoras . . . . .	26
3.3. Diagrama esquemático del arreglo experimental . . . . .	28
3.4. Tubos capilares . . . . .	31
3.5. Vista de planta del microcanal al interior del arreglo de imanes . . . . .	31
3.6. Diagrama esquemático de conexión para adquisición de señales de presión . . . . .	32
4.1. Señal cruda (derecha), señal filtrada (Izquierda). Muestra obtenida a $20 \mu \text{L} / \text{min}$ . . . . .	34

4.2. Valores de presión en estado estacionario . . . . .	35
4.3. Corriente obtenida a diferentes gastos. . . . .	36
4.4. Diferencia de potencial obtenida a diferentes gastos. . . . .	37
4.5. Muestra obtenida a $10 \mu L/min$ . . . . .	38
4.6. ( <i>Re</i> )Regresión, <i>Ex</i> Experimental . . . . .	38

# Lista de Tablas

3.1. Propiedades del fluido de trabajo $1.6 \frac{mol}{L}$ de NaCl . . . . .	25
3.2. Matriz experimental de fluido de trabajo NaCl . . . . .	33

# Nomenclatura

## Mayúsculas

$B$	Campo magnético ( $T$ ).
$C$	Constante dimensional.
$E$	Campo eléctrico ( $\frac{V}{m}$ ).
$F$	Fuerza ( $\frac{Kg\,m}{s^2}$ ).
$H$	Ancho del canal ( $m$ ).
Ha	Número adimensional de Hartmann.
$I$	Corriente eléctrica ( $A$ ).
$J$	Densidad de corriente ( $\frac{A}{m^2}$ ).
Re	Número adimensional de Reynolds.
Rm	Número adimensional de Reynolds magnético.
$M$	Molaridad ( $\frac{mol}{L}$ ).
$P$	Presión ( $KPa$ ).
$Q$	Gasto volumétrico ( $\frac{m^3}{s}$ ).
$T$	Temperatura ( $C$ ).
$V$	Volumen ( $m^3$ ).

## Minúsculas

$h$	Profundidad del canal ( $m$ ).
$i$	Raíz de menos uno (-).
$n$	Índice de sucesiones.
$\hat{n}$	Vector normal a la superficie.
$v$	Velocidad ( $\frac{m}{s}$ ).
$t$	Tiempo (número de muestras).

## Letras griegas

$\pi$	Número Irracional (-).
$\epsilon$	Permitividad eléctrica del medio $\left(\frac{F}{m}\right)$ .
$\lambda$	Valor característico (eigenvalor).
$\mu$	Viscosidad cinemática ( $Pa \cdot s 10^{-1}$ ).
$\mu_m$	Permeabilidad magnética del medio $\left(\frac{N}{A^2}\right)$
$\rho$	Densidad $\left(\frac{Kg}{m^3}\right)$ .
$\varrho$	Densidad volumétrica de carga $\left(\frac{C}{m^3}\right)$ .
$\sigma$	Conductividad eléctrica $\left(\frac{S}{m}\right)$ .

# Capítulo 1

## Introducción

La magnetohidrodinámica (MHD) es la ciencia que conjunta el estudio de la mecánica de fluidos y el fenómeno electromagnético. La sinergia de estos campos se da cuando se coloca un fluido conductor eléctrico en movimiento en presencia de un campo electromagnético generando corrientes al interior del fluido que a su vez provocan fuerzas que modifiquen la dinámica del fluido. El estudio del MHD conlleva interacciones acopladas hidráulicas y electromagnéticas, permite comprender fenómenos tales como el movimiento interno del sol (movimiento de plasma), la generación del campo magnético de la Tierra (movimiento de metales líquidos) entre otros. Las ecuaciones que modelan el fenómeno son las ecuaciones de Navier-Stokes y las ecuaciones de Maxwell.

En el caso particular de la generación de energía eléctrica, es de gran la comprensión de esta disciplina. Un ejemplo de ello son los reactores Tokamak. La gran ventaja que presentan es la ausencia de partes móviles y pérdidas únicamente debidas a fricción viscosa y disipación térmica. En este tipo de reactores el control del movimiento de plasmas es fundamental por los requerimientos de seguridad y operación que poseen estos generadores.

Dadas las elevadas temperaturas y condiciones extremas de confinamiento de los plasmas, la implementación a gran escala de generadores MHD se ha visto obstaculizada. Motivado por las dificultades presentes a gran escala y la complejidad del tema, se ha migrado el estudio de la generación de energía a escalas y condiciones más viables.

## 1.1. Antecedentes

Históricamente el MHD a atraído el interés de la comunidad científica. Desde el surgimiento mismo del concepto Alfvén (1942) en cual se describían la existencia de ondas magnetohidrodinámicas transversales en el plasma solar generadas por el campo magnético del sol.

Ryabinin & Khozhainov (1967), proponen una solución analítica para el campo de velocidades de flujos incompresibles MHD en tuberías de sección transversal rectangular. El modelo está hecho asumiendo que dos de las paredes constituyen los polos magnéticos, y suponiendo que el Reynolds magnético es  $R_m \ll 1$ . Por otra parte asumen que los transitorios electromagnéticos son instantáneos en el caso que tratan. Cabe observar que esto no es necesariamente cierto en términos generales, especialmente en el caso de los electrolitos. La solución permite calcular en particular la pérdida de presión durante el transitorio. La solución de estos autores coincide en los detalles con la solución aquí propuesta. Es importante recalcar que el trabajo Ryabinin y Khozhainov carece de validación experimental. Esto difiere fundamentalmente del trabajo presentado en ésta tesis que sí está soportado por evidencia experimental. Finalmente, otro aspecto que vale la pena señalar es que la solución de estos autores no permite considerar los casos en los que no se satisface la condición de no-deslizamiento. El modelo propuesto en ésta tesis sí incluye dichos efectos.

Lei et al. (2009) proponen una solución analítica para el campo de velocidades de un flujo incompresible sujeto a efectos electro-viscosos en microcanales de sección transversal rectangular considerando paredes de PDMS y vidrio (hidrofóbico e hidrofílico, respectivamente). Específicamente consideran tres paredes con deslizamiento (PDMS) y una sin él (vidrio). Aunque no considera efectos magnéticos la aportación de Lei et al. (2009) son las múltiples condiciones de frontera. Cabe recalcar que al igual que Ryabinin & Khozhainov (1967), los autores no incluyen una validación experimental, si bien reproducen los resultados mediante un simulación numérica.

Ramos (2007), Aporta una clasificación de las micro-bombas impulsadas por campos electromagnéticos, en movimiento de flujos en micro-fluídica por medio de MHD y EHD. Específicamente en los dispositivos MHD en conductos de sección transversal rectangular, propone modelos matemáticos globales del movimiento en los que no se aporta el perfil de velocidades y tan solo se aporta los casos máximos. Cabe denotar que atribuye los gradientes de presión a los efectos del campo eléctrico y magnético  $\Delta P = \sigma E_0 B_0$ , así como el uso de las nociones de diámetro hidráulico, para calcular las perdidas del mismo modo que canales de sección circular. No aporta una ecuación que describa el campo de velocidades y solamente describe

las velocidades máximas y gastos máximos a diferencia del trabajo presente.

Lekner (2007), Postula soluciones analíticas para flujos de Hagen Poiseuille incompresibles incluyendo canales infinitamente largos de sección transversal rectangular, lamentablemente no incluye efectos magnéticos y sus estudios son puramente teóricos.

Berker (1963), proponen soluciones analíticas para el campo de velocidades y el gasto para flujos estacionarios de Hagen-Poiseuille estacionarios, específicamente es de interés su solución para tuberías de sección transversal rectangular. El modelo incorpora los efectos de la viscosidad debido a las cuatro paredes. No incorpora fuerzas magnéticas ni posibles deslizamientos en las paredes a diferencia del realizado en el presente trabajo. El estudio realizado por Berker (1963) es puramente teórico y no aporta validaciones experimentales de sus modelos.

Manyonge et al. (2012), realizan un estudio puramente matemático y llegan a soluciones analíticas para flujos estacionarios de Hagen-Poiseuille con campo magnético inclinado, el modelo está generado con la idealización de un conducto con dos paredes infinitamente largas y porosas. Lo más resaltante del estudio es la incorporación de una inclinación en el campo magnético. Sin embargo no aporta validaciones experimentales así como el hecho de considerar la afectación de sólo 2 paredes a diferencia del presente trabajo.

Jang & Lee (2000), trabaja tanto aspectos teóricos como el experimental de los dispositivos MHD a micro escala en su modalidad de bombas, se encuentran limitados puesto que asumen sólo efectos de dos paredes y en el ámbito de la micro-fluídica las distancias son tan cercanas que resulta atrevido ignorar las afectaciones causadas por las otras paredes.

Ueno (1991), trabaja analítica y numéricamente los efectos MHD de flujos incompresibles en canales de sección transversal rectangular. Su mayor aportación es incorporar un campo magnético no constante de forma espacial específicamente con una función periódica senoidal, pese a que los modelos y las simulaciones numéricas son de alta calidad, no especifica ni da muestras de la existencia de un campo magnético con la forma que declara. A diferencia de la presente tesis que da muestras de un caso en el cual ocurre lo descrito.

## 1.2. Objetivos y alcances

El objetivo general de la investigación es estudiar la corriente inducida en un micro generador Magnetohidrodinámico ( $\mu$ -GMHD) para diferentes condiciones de flujo.

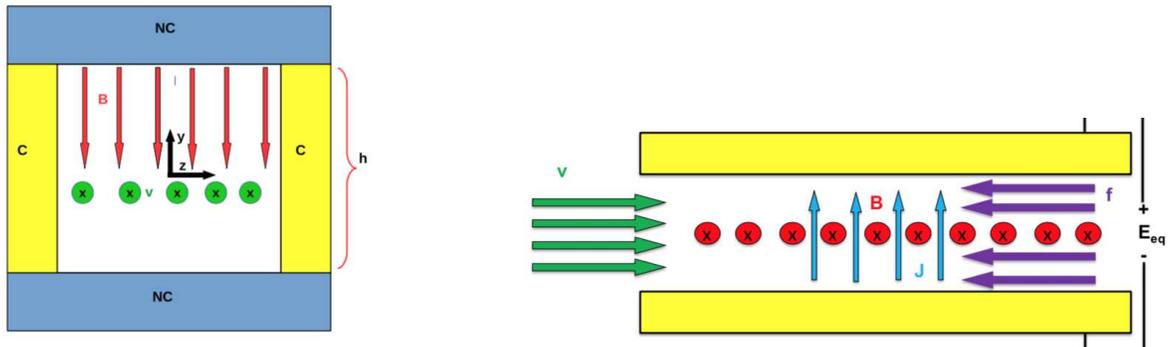
### **Alcances:**

- Desarrollar un modelo experimental para estudiar la densidad de corriente inducida.
- Desarrollar un modelo analítico para estudiar la densidad de corriente inducida.
- Desarrollar un modelo numérico para estudiar la densidad de corriente inducida.
- Desarrollar la metodología requerida para medir de manera directa la densidad de corriente en el microdispositivo con una incertidumbre baja, dicho modelo debe contemplar los efectos de la resistencia externa.
- Desarrollar la técnica necesaria para medir directamente la presión de operación del micro-dispositivo.
- Evaluar de manera indirecta el flujo volumétrico del electrolito.

# Capítulo 2

## Modelo Matemático

El fenómeno físico estudiado es el flujo de un electrolito (óhmico), que fluye a través de un micro-canal de sección transversal rectangular. El canal se encuentra completamente inmerso en un campo magnético externo. El campo es estático y perpendicular al flujo del electrolito. La figura 2.1 ilustra esquemáticamente el arreglo correspondiente.



**Figura 2.1:** Diagrama del micro-canal. El sistema de referencia es dextrógiro (La componente  $x$  entra al interior del dibujo). Se localiza en el punto medio del canal.

La sección transversal cuenta con dos paredes conductoras las cuales son paralelas al campo magnético aplicado y dos paredes aislantes.

Por un extremo del canal ingresa un flujo volumétrico  $Q$  de electrolito con conductividad eléctrica  $\sigma$  conocida. Posteriormente éste es evacuado a presión atmosférica por el extremo opuesto, el cual ha sido especialmente diseñado a fin de evitar los efectos asociados a la descarga (por ejemplo, los de tensión superficial).

Al pasar el electrolito por el campo magnético, se genera una densidad de corriente eléctrica

$\vec{J}$  que es transversal al flujo. En principio, la corriente  $I$  movilizada en el fluido puede ser recolectada en las paredes conductoras del microcanal. La carga eléctrica acumulada en dichas paredes produce un efecto similar al observado en un capacitor convencional. Gracias a la diferencia de potencial  $\Delta V$  entre ambas paredes, la carga se puede hacer fluir a través de un circuito eléctrico externo para alimentar una carga.

En las aplicaciones de MHD a pequeña escala son de gran importancia los números adimensionales tales como, el número de Reynolds magnético  $Rm = \mu \sigma U_0 L$  y el número de Hartmann  $Ha = B_0 L \sqrt{\sigma/\mu}$ .

El  $Rm$  es una relación entre la advección magnética y la difusión magnética. En el experimento los valores de éste número están acotados,  $1.31 \times 10^{-12} \geq Rm \leq 1.31 \times 10^{-11}$ , lo que indica que los efectos advectivos dominan sobre los efectos difusivos en el proceso.

El  $Ha$  es una relación de fuerzas, las fuerzas magnéticas por un lado y por el otro las fuerzas viscosas, e indica que fuerzas dominan el fenómeno estudiado. En nuestro caso de estudio,  $Ha = 4.37 \times 10^{-2}$ , por tanto si bien dominan las fuerzas viscosas, los efectos magnéticos comienzan a ser perceptibles.

Finalmente, cabe mencionar que el principio de operación descrito corresponde a la configuración tipo generador de este arreglo. La operación tipo bomba también es posible mediante una modificación menor, donde se invierte el sentido de operación mediante diferencias de voltaje. Todo el proceso ocurre a temperatura ambiente y los efectos de calentamiento en el fluido por efecto Joule son despreciables en el límite considerado.

## 2.1. Aproximación del modelo

La magnetohidrodinámica<sup>1</sup> es la ciencia que estudia la dinámica de los fluidos conductores de electricidad en presencia de campos electromagnéticos. Si se coloca un fluido conductor en movimiento en presencia de campos electromagnéticos, el fluido produce fuerzas electromotrices FEM en su interior que cambian su dinámica y provocan corrientes eléctricas en el fluido.

Por tal motivo, se vuelve indispensable considerar simultáneamente las ecuaciones de la hidrodinámica y del electromagnetismo. Estas ecuaciones se describen con detalle en el apéndice A.

---

<sup>1</sup>Este concepto fue introducido en 1942 por el científico sueco Hannes Alfvén, mientras estudiaba los procesos de la ionosfera terrestre.

Bajo las siguientes condiciones es posible simplificar dicho conjunto de ecuaciones. En particular, en la aproximación magnetohidrodinámica siguiente cabe resaltar:

1. El flujo es no-relativista.
2. El flujo es incompresible.
3. El campo magnético externo es estacionario.
4. La corriente de desplazamiento se ignora.
5. Para el electrolito  $\mu_m \approx \mu_0$ .
6. Los campos inducidos son más pequeños que los aplicados ( $Rm \ll 1$ ).

El conjunto simplificado de ecuaciones, a partir del cual se desarrolla el modelo del sistema que nos ocupa, es el siguiente:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{J} \times \vec{B} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_m \vec{J} + \mu_m \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.6)$$

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.7)$$

En estas expresiones  $P$ ,  $\nu$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{J}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\mu_m$ ,  $\sigma$ , y  $\epsilon$ , representan la presión, la viscosidad cinemática, el campo de velocidades, la densidad de corriente, el campo magnético, el campo eléctrico, permeabilidad magnética, conductividad eléctrica, y la permitividad eléctrica, respectivamente.

## 2.2. Modelo para un micro-generador MHD

La parte hidrodinámica requiere la conservación de masa (ecuación 2.1) considerando flujo unidireccional  $v_y = v_z = 0$ , por lo que sólo permanece la componente  $v_x$  en dirección  $x$ ,

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0. \quad (2.8)$$

$$\vec{v} \perp \nabla \vec{v}, \quad \therefore \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = 0. \quad (2.9)$$

Incorporando a la ecuación 2.2 (Navier-Stokes con efectos MHD),

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{J} \times \vec{B}. \quad (2.10)$$

Adicionalmente se incorpora la ecuación 2.7 (ley de Ohm) llegando a

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{v} + \frac{\sigma}{\rho} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \times \vec{B}. \quad (2.11)$$

Para obtener la parte eléctrica, se aplica la divergencia a 2.6

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{B} = \nabla \cdot \mu_m \vec{J} + \mu_m \epsilon \nabla \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2.12)$$

Introduciendo la ecuación 2.7 y aplicando las leyes de los operadores diferenciales, obtenemos la ecuación de conservación que gobierna el fenómeno electromagnético

$$\mu_m \sigma \nabla \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + \mu_m \epsilon \frac{\partial \nabla \cdot \vec{E}}{\partial t} = 0. \quad (2.13)$$

Incorporando la ecuación 2.4 (ley de Gauss) en la ecuación 2.13 se obtiene

$$\mu_m \sigma \nabla \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + \mu_m \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (2.14)$$

La ecuación de conservación de carga de un material óhmico, tal y como se expresa en el anexo (A.11).

Es posible reexpresar al campo eléctrico en términos del potencial eléctrico de la siguiente manera  $-\nabla \phi = \vec{E}$ , dado que el campo magnético es invariante en el tiempo la ecuación 2.15 (ley de Faraday) se reduce a

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0} \quad \therefore \quad -\nabla \times \nabla \phi = \vec{0}. \quad (2.15)$$

Al introducir el potencial en las ecuaciones 2.14 y 2.11, se obtiene el potencial magnetohidrodinámico

$$-\sigma \nabla^2 \phi + \sigma \nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{v} + \frac{\sigma}{\rho} \left( -\nabla \phi + \vec{v} \times \vec{B} \right) \times \vec{B}. \quad (2.17)$$

Normalizando (2.16 y 2.17) con las escalas:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= U \vec{v}^*, & \vec{v}^* &\sim 1, \\ \vec{E} &= U B_0 \vec{E}^*, & \vec{E}^* &\sim 1, \\ \vec{B} &= B_0 \vec{B}^*, & \vec{B}^* &\sim 1, \\ \varrho &= \frac{\epsilon U B_0 \varrho^*}{h}, & \varrho^* &\sim 1, \\ \phi &= h U B_0 \phi^*, & \phi^* &\sim 1, \\ z &= h z^*, & z^* &\sim 1, \\ y &= h y^*, & y^* &\sim 1, \\ t &= \frac{h}{U} t^*, & t^* &\in (0, +\infty). \end{aligned}$$

El sistema acoplado de ecuaciones diferenciales

$$-\nabla^{2*} \phi^* + \nabla^* \cdot (\vec{v}^* \times \vec{B}^*) + \frac{N}{\text{Rm}} \frac{\partial \varrho^*}{\partial t^*} = 0, \quad (2.18)$$

$$\text{Re} \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} = P^* + \nabla^{2*} \vec{v}^* + \text{Ha}^2 \left( -\nabla^* \phi^* + \vec{v}^* \times \vec{B}^* \right) \times \vec{B}^*. \quad (2.19)$$

Donde:

$$\text{Ha} = B_0 h \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}}, \quad \text{Re} = \frac{U h}{\nu}, \quad P^* = \frac{h^2 \nabla P}{U \rho \nu}, \quad \text{Rm} = U h \sigma \mu_0 \text{ y } N = \frac{U^2}{c^2}.$$

El orden de magnitud del cociente  $\frac{N}{\text{Rm}} \approx 1 \times 10^{-8}$  es muy pequeño. El término de asociado al mismo puede ser negligido de la ecuación quedando la conservación de la carga

$$\nabla^{2*} \phi^* + \nabla^* \cdot (\vec{v}^* \times \vec{B}^*) = 0. \quad (2.20)$$

El fenómeno se desarrolla a  $\text{Ha}^2 = 1.936 \times 10^{-3}$ , por lo que es posible aproximar mediante un desacople de las ecuaciones, puesto que el Ha es pequeño es posible eliminar el término  $-\nabla^* \phi^*$  de la ecuación 2.19, se llega a

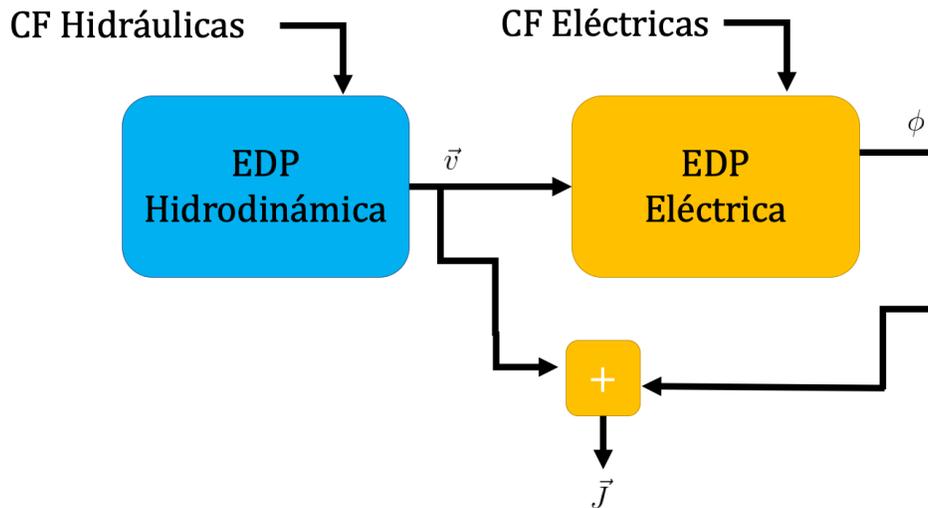
$$\text{Re} \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} = P^* + \nabla^{2*} \vec{v}^* + \text{Ha}^2 \left( \vec{v}^* \times \vec{B}^* \right) \times \vec{B}^*. \quad (2.21)$$

Es importante señalar que el número de Reynolds del flujo se encuentra en el orden  $Re \sim 1.5 \times 10^1$ . Esto corresponde a un flujo laminar, de tal forma que los efectos turbulentos son inexistentes. Puesto que el flujo es unidireccional, todos los términos de la derivada material desaparecen de la formulación. La versión final de las ecuaciones es lineal y permite soluciones analíticas. Con condiciones de frontera de no deslizamiento en cuatro paredes correspondientes al caso hidrodinámico, conductividad en dos paredes (paralelas a  $\vec{B}$ ) y aislamiento en las otras dos para el caso electromagnético respectivamente

$$v_x^*(\pm 0.5, z^*) = v_x^*(y^*, \pm 0.5) = 0,$$

$$\frac{\partial \phi^*(\pm 0.5, z^*)}{\partial y^*} = 0, \quad \phi^*(y^*, \pm 0.5) = \pm \phi_{max}. \quad (2.22)$$

La figura 2.2 ejemplifica el método de solución secuencial del sistema de ecuaciones que se implementara en las siguientes subsecciones, primeramente se resuelve el sistema hidrodinámico con sus respectivas condiciones de frontera y posteriormente el sistema electromagnético y sus respectivas condiciones de frontera eléctricas.



**Figura 2.2:** Diagrama de flujo de resolución del sistema de ecuaciones diferenciales.

### 2.2.1. Formulación hidrodinámica del problema

La siguiente formulación se centra en variaciones temporales, el flujo parte del reposo. Se parte de la ecuación 2.19 (Navier-Stokes adimensional). El proceso de flujo es tal que los

vectores  $\vec{v}^*$  y  $\vec{B}^*$  son perpendiculares entre sí. Esto significa que la fuerza magnética  $F_{mag}^*$  es antiparalela a la velocidad y se manifiesta, efectivamente, como una fuerza de frenado (frenado de Hartmann)

$$F_{mag}^* = \text{Ha}^2 v_x^* \quad (2.23)$$

Al incorporar la ecuación 2.23 en 2.19, se llega a la ecuación diferencial

$$\text{Re} \frac{\partial v_x^*}{\partial t^*} = P_x^* + \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial z^{*2}} - \text{Ha}^2 v_x^* \quad (2.24)$$

Partiendo de la consideración que  $P_x^* = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*}$  es una constante espacial a lo largo del canal, la ecuación diferencial es soluble dado que es una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden no homogénea. Con condiciones de frontera e iniciales

$$v_x^*(0, z^*, y^*) = v_x^*(t^*, \pm 0.5, y^*) = v_x^*(t^*, z^*, \pm \frac{\xi}{2}) = 0 ,$$

donde  $\xi = \frac{H}{h}$  es una relación de aspecto entre el alto ( $h$ ) y ancho ( $H$ ) del canal. Se resuelve la ecuación homogénea

$$\text{Re} \frac{\partial v_x^*}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial z^{*2}} - \text{Ha}^2 v_x^* \quad (2.25)$$

Se propone la solución

$$v_x^* = F(t^*)\gamma(y^*)G(z^*) \quad (2.26)$$

Incorporando la ecuación 2.26 en la ecuación 2.25

$$\gamma(y^*)G(z^*)\text{Re} \frac{\partial F(t^*)}{\partial t^*} = F(t^*)G(z^*)\frac{\partial^2 \gamma(y^*)}{\partial y^{*2}} + F(t^*)\gamma(y^*)\frac{\partial^2 G(z^*)}{\partial z^{*2}} - \text{Ha}^2 F(t^*)\gamma(y^*)G(z^*) \quad (2.27)$$

Dividiendo 2.27 entre  $v_x^*$

$$\frac{\text{Re}}{F(t^*)} \frac{\partial F(t^*)}{\partial t^*} = \frac{1}{\gamma(y^*)} \frac{\partial^2 \gamma(y^*)}{\partial y^{*2}} + \frac{1}{G(z^*)} \frac{\partial^2 G(z^*)}{\partial z^{*2}} - \text{Ha}^2 \quad (2.28)$$

Las variables están completamente separadas, por lo que se puede separar en tres ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$\frac{\text{Re}}{F(t^*)} \frac{\partial F(t^*)}{\partial t^*} = k \quad (2.29)$$

$$\frac{1}{\gamma(y^*)} \frac{\partial^2 \gamma(y^*)}{\partial y^{*2}} = -\lambda_y^2 \quad (2.30)$$

$$\frac{1}{G(z^*)} \frac{\partial^2 G(z^*)}{\partial z^{*2}} = -\lambda_z^2 \quad (2.31)$$

$$k = -(\lambda_y^2 + \lambda_z^2 + \text{Ha}^2) \quad (2.32)$$

Se resuelve la ecuación 2.30 con condiciones de frontera (simétricas)  $\gamma(\frac{\xi}{2}) = \gamma(-\frac{\xi}{2}) = 0$

$$\gamma(y^*) = C_1 \cos(\lambda_y y^*) \quad (2.33)$$

se obtiene

$$C_1 \cos\left(\frac{\xi \lambda_y}{2}\right) = 0. \quad (2.34)$$

Los valores propios posibles son los siguientes,

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{\xi}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.35)$$

La ecuación 2.31 con condición de frontera (simétrica)  $G(\frac{1}{2}) = G(-\frac{1}{2}) = 0$ ,

$$G(z^*) = C_2 \cos(\lambda_z z^*) \quad (2.36)$$

se obtiene

$$C_2 \cos\left(\frac{\lambda_z}{2}\right) = 0. \quad (2.37)$$

De igual manera que en el inciso anterior se llega a la conclusión que los valores propios de  $z$  posibles son,

$$\lambda_m = (2m-1)\pi, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (2.38)$$

Se resuelve la ecuación 2.29 con las condiciones iniciales  $F(0) = 0$ ,

$$F(t^*) = C_3 e^{\frac{k}{\text{Re}} t^*} + C_4 \quad (2.39)$$

$$C_3 e^{\frac{k}{\text{Re}} 0} + C_4 = 0 \quad (2.40)$$

Para que la igualdad sea posible,

$$C_3 = -C_4. \quad (2.41)$$

La solución a la cual se llega es

$$F(t^*) = \left(1 - e^{\frac{k}{\text{Re}} t^*}\right) C_4 \quad (2.42)$$

con

$$k_{nm} = -(\lambda_n^2 + \lambda_m^2 + \text{Ha}^2). \quad (2.43)$$

La solución para la velocidad adimensional está dada por

$$v_x^*(t^*, y^*, z^*) = A_{nm} \left( 1 - e^{\frac{k_{nm}}{\text{Re}} t^*} \right) \cos(\lambda_n y^*) \cos(\lambda_m z^*). \quad (2.44)$$

Por principio de superposición, la solución total es la suma de todas las soluciones.

$$v_x^*(t^*, y^*, z^*) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} \left( 1 - e^{\frac{k_{nm}}{\text{Re}} t^*} \right) \cos(\lambda_n y^*) \cos(\lambda_m z^*) \quad (2.45)$$

con

$$k_{nm} = -(\lambda_n^2 + \lambda_m^2 + \text{Ha}^2),$$

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{\xi}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y

$$\lambda_m = (2m-1)\pi, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Para conocer los coeficientes  $A_{n,m}$  se sustituye la solución en la ecuación diferencial no homogénea

$$\text{Re} \frac{\partial v_x^*}{\partial t^*} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} k_{nm} e^{\frac{k_{nm}}{\text{Re}} t^*} \cos(\lambda_n y^*) \cos(\lambda_m z^*). \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} \lambda_n^2 \left( 1 - e^{\frac{k_{nm}}{\text{Re}} t^*} \right) \cos(\lambda_n y^*) \cos(\lambda_m z^*). \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial^2 v_x^*}{\partial z^{*2}} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} \lambda_m^2 \left( 1 - e^{\frac{k_{nm}}{\text{Re}} t^*} \right) \cos(\lambda_n y^*) \cos(\lambda_m z^*). \quad (2.48)$$

Tras la sustitución en la ecuación no homogénea se llega a

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} k_{nm} \cos(\lambda_n y^*) \cos(\lambda_m z^*) = P_x^*. \quad (2.49)$$

Se considera al forzamiento de presión como una función de Heaviside. Se resuelven los coeficientes mediante series de tipo Fourier en ambas direcciones  $(y^*, z^*)$  con un periodo adimensional de 2. Los coeficientes de Fourier para el caso indicado tienen la siguiente forma

$$D_{nm} = \frac{16(-1)^{m+n}}{(2n-1)(2m-1)\pi^2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.50)$$

Se iguala coeficiente a coeficiente para obtener la forma de los  $A_{n,m}$

$$D_{nm} = \frac{k_{nm}A_{nm}}{P_x^*} \quad (2.51)$$

Despejando se llega

$$A_{nm} = \frac{16(-1)^{n+m-2}}{\lambda_m \lambda_n k_{nm}} P_x^*. \quad (2.52)$$

Se regresa la ecuación a sus variables dimensionales, con ello se obtiene la solución temporal del problema

$$v_x(t, y, z) = U_{max} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{nm} \left( 1 - e^{-\frac{k_{mn}\nu}{h^2}t} \right) \cos\left(\lambda_n \frac{y}{h}\right) \cos\left(\lambda_m \frac{z}{h}\right) \quad (2.53)$$

con

$$\begin{aligned} U_{max} &= -\frac{h^2}{\rho\nu} \frac{\partial P}{\partial x}, \\ B_{nm} &= \frac{16(-1)^{n+m}}{\lambda_m \lambda_n k}, \\ k_{nm} &= -(\lambda_n^2 + \lambda_m^2 + \text{Ha}^2), \\ \lambda_n &= \frac{(2n-1)\pi}{\xi}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

y

$$\lambda_m = (2m-1)\pi, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

### Cálculo de flujo volumétrico

Con el perfil de Hartmann obtenido en la subsección anterior se puede calcular el flujo volumétrico  $Q$  y por consiguiente, la densidad de corriente inducida  $\vec{J}$  y la corriente total  $I$  que circula por la carga externa. Por definición,

$$Q = \int \vec{v} \cdot \hat{n} da. \quad (2.54)$$

Puesto que la velocidad es perpendicular al área, siendo ésta la sección rectangular, la integral se reduce

$$Q = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} v_x dz dy, \quad (2.55)$$

al sustituir la ecuación 2.53 se llega a,

$$Q = U_{max} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{nm} \left( 1 - e^{-\frac{k_{mn}\nu}{h^2}t} \right) \cos\left(\lambda_n \frac{y}{h}\right) \cos\left(\lambda_m \frac{z}{h}\right) dy dz. \quad (2.56)$$

Finalmente se obtiene

$$Q = h^2 U_{max} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{nm} \left( 1 - e^{-\frac{k_{mn} \nu}{h^2} t} \right) \quad (2.57)$$

donde

$$C_{nm} = \frac{64}{\lambda_m^2 \lambda_n^2 k}.$$

Adicionalmente la definición de la velocidad media  $v_m$ , que será de utilidad en futuras secciones del trabajo

$$v_m = \frac{Q}{A_t}, \quad (2.58)$$

en donde  $A_t = hH$ .

### Cálculo de gradiente de presión

Conocer el gradiente de presión por medio de instrumentos de medición a pequeñas escalas puede no ser sencillo, puesto que son mediciones invasivas, se mide el gasto volumétrico o la presión en puntos específicos, dadas estas limitaciones se ha optado por reescribir el  $\nabla P$  en términos de  $Q$ , en el presente trabajo se miden ambas magnitudes de manera experimental y se les.

Se replantea la ecuación 2.57

$$Q = h^2 \frac{h^2}{\nu \rho} \frac{\partial P}{\partial x} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{nm} \left( 1 - e^{-\frac{k_{mn}\nu}{h^2}t} \right), \quad (2.59)$$

al despejar el gradiente de presión

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{Q \rho \nu}{h^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{nm} \left( 1 - e^{-\frac{k_{mn}\nu}{h^2}t} \right)}. \quad (2.60)$$

Adicionalmente podemos obtener una aproximación del  $-\Delta P$ ,

$$-\Delta P \approx \frac{L Q \nu \rho}{h^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{n,m} \left( 1 - e^{-\frac{k_{mn}\nu}{h^2}t} \right)}, \quad (2.61)$$

donde  $L$  es la longitud del canal.

### 2.2.2. Formulación de conservación de carga

En la presente deducción se resolverá la ley de la conservación de la carga (ecuación 2.20), implicando con ello la importancia de los campos autoinducidos en el fluido.

$$-\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial y^{*2}} - \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial z^{*2}} + \frac{\partial v_x^*}{\partial z^*} = 0. \quad (2.62)$$

Con condiciones de frontera de conductividad en dos paredes (paralelas a  $\vec{B}$ ) y aislamiento en las otras dos, las paredes conductoras requieren ser un equipotencial, cada una de forma independiente, cabe recalcar que las dos paredes no tienen porque encontrarse al mismo

potencial.

$$\begin{aligned}\phi^*(y^*, \pm 0.5) &= \pm \phi_{max} \\ \frac{\partial \phi^*(\pm 0.5, z^*)}{\partial y^*} &= 0.\end{aligned}$$

El término de velocidad es aproximado por la velocidad media adimensional,  $\frac{\partial v^*}{\partial z^*} \approx v_m^*(t^*)$ . La ecuación diferencial aproximada con el forzamiento; dado por la velocidad

$$\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial z^{*2}} \approx v_m^*(t^*). \quad (2.63)$$

Se realiza un cambio de variable para transformar las condiciones no homogéneas de las paredes conductoras en condiciones homogéneas, se propone

$$\phi^* = \hat{\phi} + 2\phi_{max}z^*. \quad (2.64)$$

La ecuación diferencial para  $\hat{\phi}$

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial z^{*2}} \approx v_m^*(t^*), \quad (2.65)$$

con sus respectivas condiciones de frontera homogéneas

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(y^*, \pm 0.5) &= 0 \\ \frac{\partial \hat{\phi}(\pm 0.5, z^*)}{\partial y^*} &= 0.\end{aligned}$$

Se propone una separación de variables,

$$\hat{\phi} = \eta(y^*)\zeta(z^*). \quad (2.66)$$

Al incorporar la ecuación 2.66 en la versión homogénea de la ecuación 2.65.

$$\eta_{yy}\zeta + \eta\zeta_{zz} = 0. \quad (2.67)$$

Se divide la ecuación 2.67 entre  $\hat{\phi}$ ,

$$\frac{\zeta_{zz}}{\zeta} + \frac{\eta_{yy}}{\eta} = 0. \quad (2.68)$$

Se observa que las ecuaciones están completamente separadas,

$$\frac{\zeta_{zz}}{\zeta} = -\lambda^2 \quad (2.69)$$

$$\frac{\eta_{yy}}{\eta} = \lambda^2. \quad (2.70)$$

Resolviendo en  $z$  se obtiene la solución homogénea,

$$\zeta = A \cos(\lambda z^*) + B \sin(\lambda z^*). \quad (2.71)$$

Incorporando condiciones de frontera ( $\zeta(\pm \frac{1}{2}) = 0$ ), dado que son condiciones simétricas obligan a que la solución sea de igual forma.

$$\begin{aligned} \zeta\left(\pm \frac{1}{2}\right) &= A \cos\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 0 \\ &\vdots \\ \lambda_p &= \pi(2p - 1) \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Por principio de superposición la totalidad de soluciones son válidas, simultáneamente  $\eta$  homogéneo queda perfectamente definido por los valores de  $\lambda_n$ .

$$\eta_h = A \cosh(\lambda_p y^*) + B \sinh(\lambda_p y^*) \quad (2.73)$$

Recordemos que la constante de forzamiento solamente es constante al interior del canal, por lo cual es posible expandirla en una serie de cosenos como se mostró en la ecuación 2.49. Para obtener la solución total ( $\eta_T = \eta_h + \eta_f$ ) y los coeficientes asociados, se incorpora la solución total en la ecuación diferencial con forzamiento.

$$\begin{aligned} \hat{\phi} &= \sum_{p=1}^{\infty} C_p \cos(\lambda_p z^*) \eta_T \\ \hat{\phi}_{yy} &= \sum_{p=1}^{\infty} C_p \cos(\lambda_p z^*) (\lambda_p^2 \eta_h + \eta_{fyy}) \\ \hat{\phi}_{zz} &= \sum_{p=1}^{\infty} -C_p \lambda_p^2 \cos(\lambda_p z) \eta_T \end{aligned}$$

Sumando las segundas derivadas e igualandolas al forzamiento, se obtienen las siguientes conclusiones:

$$\begin{aligned} \eta_h &= 0 \\ \eta_f &= 1 \\ C_p &= \frac{4(-1)^{p-1} v_m^*(t)}{\pi(2p-1)\lambda_p^2}, \quad \lambda_p = \pi(2p-1) \quad p \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Obteniendo que  $\hat{\phi}$  posee la siguiente forma

$$\begin{aligned} \hat{\phi} &= \sum_{p=1}^{\infty} C_p \cos(\lambda_p z), \\ \lambda &= \pi(2p-1) \quad p \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Al retornar a las variables dimensionales se obtiene

$$\phi = \frac{\Delta\phi}{h}z + B_0 h v_m(t) \sum_{p=1}^{\infty} A_p \cos(\lambda_p z^*). \quad (2.76)$$

donde

$$A_p = \frac{4(-1)^{p-1}}{\pi(2p-1)\lambda_p^2}.$$

Dado que la ecuación diferencial debe ser satisfecha sin importar el tiempo, puesto que una de las soluciones posee parte temporal no resta más que el termino sin parte temporal también posea una, se obtiene la siguiente modificación

$$\phi = T \frac{\Delta\phi}{h}z + B_0 h v_m(t) \sum_{p=1}^{\infty} A_p \cos(\lambda_p z^*) \quad (2.77)$$

donde

$$T = \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{n,m} \left(1 - e^{-\frac{k_{mn}\nu}{h^2}t}\right)}{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{n,m}}.$$

Siendo  $\Delta\phi$  la diferencia de potencial entre las placas conductoras. El potencial por si mismo no representa el fenómeno eléctrico, lo que importa es la variación del mismo, por lo cual es requerido el cálculo  $\vec{E}$ , por medio de su definición  $-\nabla\phi = \vec{E}$ . La componente más importante de  $\vec{E}$  para el estudio es la de la dirección  $z$ ,

$$E_z = -T \frac{\Delta\phi}{h} + B_0 v_m \sum_{p=1}^{\infty} D_p \text{sen}(\lambda_p z^*) \quad (2.78)$$

con

$$D_p = \frac{4(-1)^{p-1}}{\pi(pn-1)\lambda_n}.$$

### Cálculo de densidad de corriente inducida

La densidad de corriente de interés en este tipo de dispositivos es la que penetra por las paredes conductoras y es factible de emplear en dispositivos externos. Por ende se calcula la corriente que penetra en la pared. Por definición

$$\vec{J}_z = \sigma \left( \vec{v} \times \vec{B}_0 + E_z \right), \quad (2.79)$$

valuada en la pared conductora

$$\vec{J}_z(-0.5, y) = -\sigma \frac{\Delta\phi}{h} T - \sigma B_0 v_m \sum_{n=1}^{\infty} D_p \text{sen}(\lambda_p 0.5) \quad (2.80)$$

Sin embargo, experimentalmente sólo es posible medir la corriente generada por el dispositivo, por lo cual se procede a su cálculo por medio de

$$I = \int \vec{J} \cdot \hat{n} da, \quad (2.81)$$

puesto que  $\vec{J}_z$  es perpendicular a las paredes conductoras se llega a que la corriente medida en la pared conductora  $I_w$  es

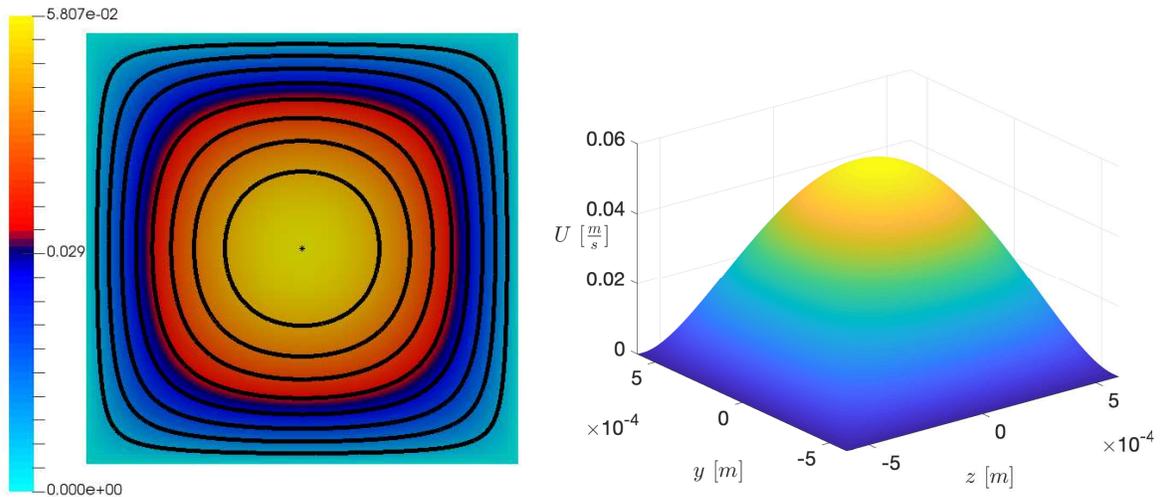
$$I_w = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^L -\frac{\sigma \Delta \phi}{h} T - \sigma B_0 v_m \sum_{p=1}^{\infty} D_p \text{sen}(\lambda_p 0.5) dx dy. \quad (2.82)$$

La  $I_w$  se reduce a

$$I_w = -\sigma L \Delta \phi T - \sigma L B_0 h v_m \sum_{p=1}^{\infty} D_p \text{sen}(\lambda_p 0.5). \quad (2.83)$$

### Predicciones teóricas

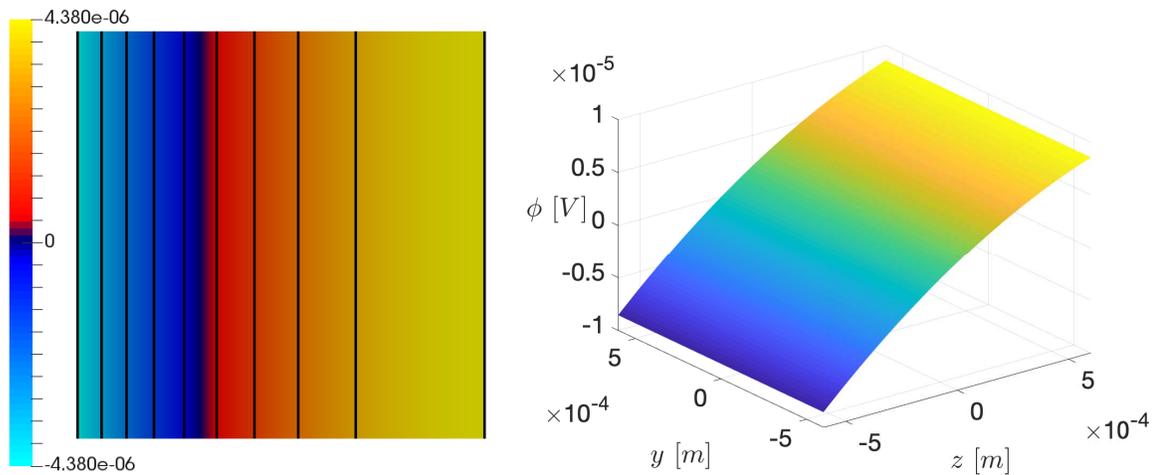
Los modelos teóricos planteados en el presente capítulo permiten predecir la distribución espacial y temporal que adquieren las soluciones. Las imágenes de la figura 2.3 muestran el perfil de velocidades dado por la ecuación 2.53 a las condiciones experimentales descritas en el capítulo 3, podemos observar que el perfil es consistente, teniendo en el centro un máximo, cumpliendo con el no deslizamiento en las cuatro paredes y curvas de nivel cerradas y transiciones suaves entre las mismas. La figura 2.4 muestra el potencial eléctrico con sus



**Figura 2.3:** Campo de velocidades (derecha 3D e izquierda vista de planta) a un gasto de  $4 \times 10^{-8} \text{m}^3/\text{s}$

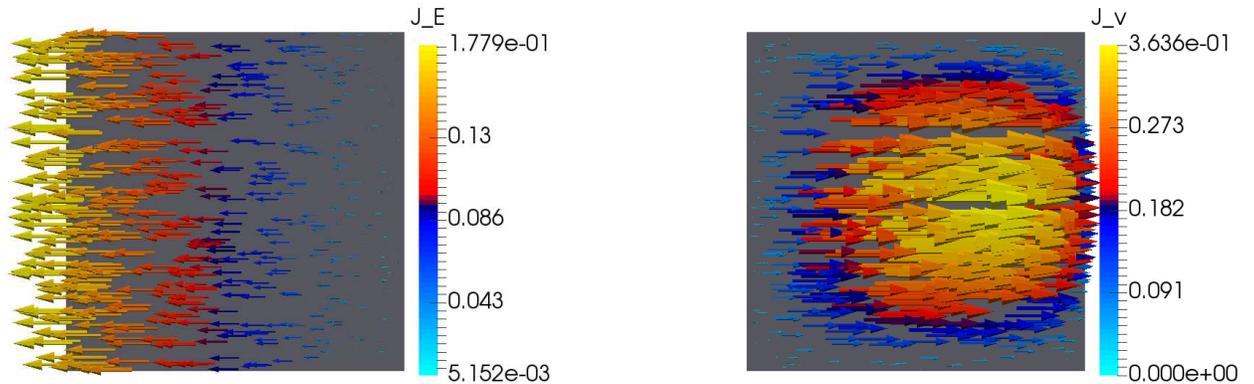
respectivas curvas equipotenciales dadas por la ecuación 2.77 , como se espera, los equipotenciales son perpendiculares a las paredes aislantes. Lo anterior conlleva, que el respectivo

campo eléctrico sea en la dirección de las paredes conductoras, las cuales son un perfecto equipotencial y ello corresponde al potencial eléctrico descrito, el potencial eléctrico muestra no ser simétrico con respecto a la cordenada  $z$ , ello evidencia la competencia entre los efectos de tipo capacitivo dados por el termino  $\frac{\Delta\phi}{h}z$  y los efectos debidos al movimiento del fluido.

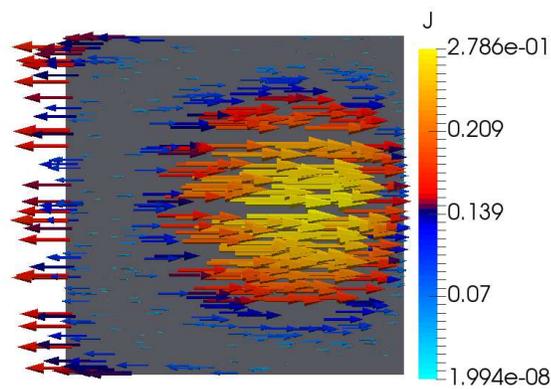


**Figura 2.4:** Potencial eléctrico(derecha 3D e izquierda vista de planta) generado por un gasto de  $4 \times 10^{-8} \text{m}^3/\text{s}$

En la figura 2.5 se muestra la densidad corriente producida por los efectos eléctricos e hidrodinámicos respectivamente contenidas en la ecuación 2.79. Adicionalmente se observa que las paredes aislantes no poseen penetración de corriente y en una de las paredes conductoras se observa penetración de las corrientes únicamente producidas por el campo  $\vec{E}$  tal y como es de esperarse. Del lado izquierdo de la figura 2.5 se muestra como  $\vec{J}_E$  crece gradualmente teniendo su máximo en la pared conductora. El  $\vec{J}_E$  presenta únicamente componentes en dirección  $z$ .



**Figura 2.5:** Densidad de corriente  $\vec{J}_E$  A/m<sup>2</sup> (izquierda) generada por  $\vec{E}$  y  $\vec{J}_v$  A/m<sup>2</sup> (derecha) generada por  $\vec{v}$



**Figura 2.6:** Densidad de corriente total  $\vec{J}$  A/m<sup>2</sup>

# Capítulo 3

## Experimentos de Laboratorio

### 3.1. Fluidos de trabajo

Las aplicaciones MHD utilizan fluidos conductores eléctricos, de los cuales hay tres tipos fundamentales: a) metales líquidos, b) plasmas y b) soluciones electrolíticas. Es importante reconocer que la corriente inducida depende fuertemente de la conductividad eléctrica del fluido, como se puede ver en la ecuación (2.23). Por tal motivo, en aquellos casos donde se requieren elevadas densidades de corriente (como sucede con los generadores eléctricos de alta eficiencia) el fluido de trabajo es un plasma tal como lo indican Brogan et al. (1962).

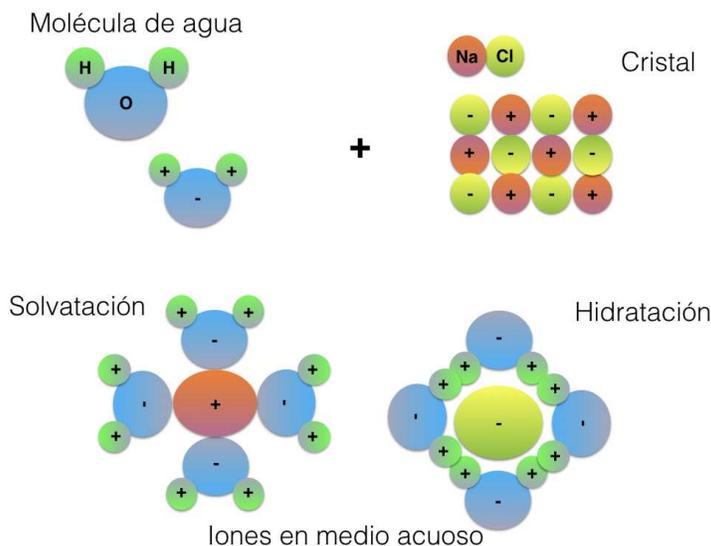
Por otro lado el uso de plasmas en aplicaciones de pequeña escala presenta una serie de problemas técnicos de muy difícil resolución. Evidentemente la construcción de un canal capaz de confinar un plasma sería técnicamente complicado y sumamente costoso.

En este caso se optó por realizar los experimentos con soluciones preparadas a base de agua des-ionizada y reactivos analíticos de NaCl. Esto obedece a los siguientes motivos principales:

1. Los electrolitos son seguros y son compatibles con los materiales de los canales.
2. Sus propiedades físicas se pueden modificar fácilmente.
3. El costo correspondiente es inferior al de otras alternativas de mayor escala.
4. La facilidad para el escalamiento debido a que los reactivos son accesibles.
5. Son sustancias simples con propiedades de transporte fácilmente medibles.

Se eligieron como fluidos de trabajo disoluciones de Cloruro de Sodio ( $\text{NaCl}$ ), debido a que son sustancias simples que cumplen con los requisitos anteriores.

A nivel molecular, la estructura iónica de estas disoluciones está caracterizada como se indica en la figura 3.1, el comportamiento corresponde a las soluciones salinas.



**Figura 3.1:** Iones en medios acuosos.

Este esquema de organización molecular es importante puesto que permite discernir cómo se mueven las cargas en una solución de alta conductividad. A diferencia del modelo del mar electrónico de Fermi en un metal en el cual los electrones se encuentran deslocalizados, en este caso son los iones en el medio acuoso los que son susceptibles de ser desplazados bajo la acción de campos electromagnéticos externos. Cabe mencionar que estas sales se disuelven en agua por la interacción entre los dipolos de las moléculas de agua que disocia el cristal iónico, disolviéndolo e hidratándolo, hasta que finalmente se liberan los iones sodio  $\text{Na}^{1+}$  y de cloruro  $\text{Cl}^{1-}$ .

### Procedimiento de síntesis de electrolitos

El procedimiento de síntesis se puede describir mejor enumerando los pasos seguidos:

1. Con ayuda de una espátula cromada y una balanza analítica se miden las masas (en gramos) indicados para el soluto requerido ( $\text{NaCl}$ ) en función de la molaridad solicitada.

2. Se coloca el soluto dentro de un matraz aforado y se disuelve con agua des-ionizada, hasta alcanzar la marca del aforo (la parte inferior del menisco debe ajustarse a la línea del aforo).
3. Se coloca el tapón del matraz aforado, y se agita vigorosamente hasta que se logra disolver completamente el soluto.
4. Envasar y etiquetar la disolución con la molaridad correspondiente.

### 3.1.1. Propiedades del fluido

La presente tesis retoma los experimentos realizados en el trabajo de licenciatura Ramírez Trocherie (2017) en el cual se detalla la obtención de las propiedades del fluido de trabajo, la tabla 3.1 sintetiza las propiedades eléctricas y mecánicas del fluido NaCl  $1.6 \frac{mol}{L}$

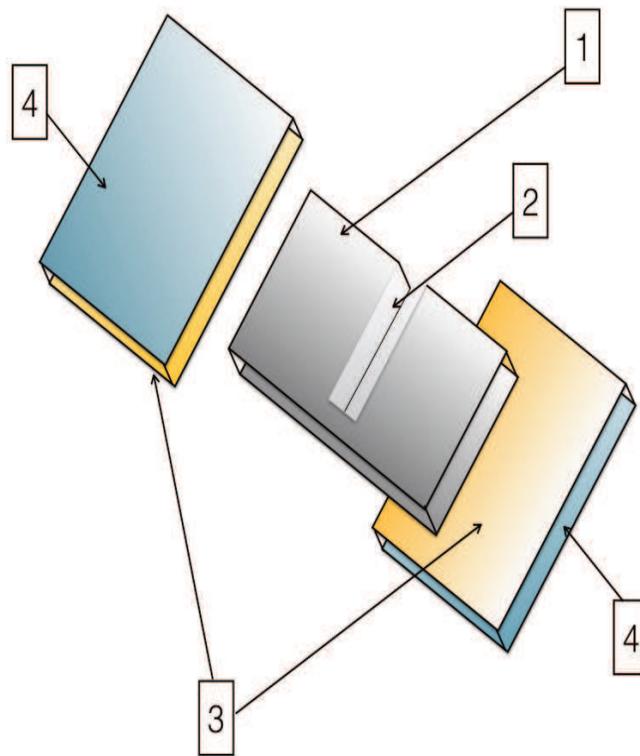
**Tabla 3.1:** Propiedades del fluido de trabajo  $1.6 \frac{mol}{L}$  de NaCl

Propiedad	Valor	Incertidumbre	Unidades
$\sigma$	12.54	0.1254	$\frac{S}{m}$
$\rho$	1050	12.6	$\frac{kg}{m^3}$
$\mu$	$2.3 \times 10^{-3}$	$0.034 \times 10^{-3}$	Pas

## 3.2. Micro-canales

### 3.2.1. Diseño

Como primera opción se han elegido geometrías simples; en este caso se trata de una sección transversal rectangular. Ello facilita el estudio enormemente dado que la sección transversal se mantiene constante. Físicamente la complicación del modelado consiste en que la construcción requiere que dos de sus paredes sean conductoras y dos de ellas no. Un diagrama de la geometría básica ilustra éste concepto (fig. (3.2)).



**Figura 3.2:** 1) PDMS, 2) Micro canal Canal, 3) Paredes conductoras , 4) Paredes no conductoras

Por cuestiones de facilidad en la manufactura en escalas de  $10^{-3}$  m, y dado que dos de las paredes son conductoras y dos no lo son, fue necesario construir los canales en tres secciones acopladas (3.2). La parte intermedia (1) esta hecha de polidimetilsiloxano (PDMS). Esta provee el espesor del dieléctrico que evita movimientos indeseados de cargas. Las otras dos paredes (2) proveen rigidez a la construcción, y están formadas por porta objetos recubiertos

con una capa de Óxido de Estaño e Indio (ITO). Este material es un buen conductor, por lo que su uso conviene a los objetivos de generación de energía eléctrica y de medición.

### 3.2.2. Procedimiento de polimerización de PDMS

La construcción del canal requiere de un cuidadoso proceso de curación del polímero PDMS. En resumen, los pasos que a seguir son:

1. Con ayuda de un agitador de vidrio y una balanza analítica, se vierte en un vaso de precipitado la masa (en gramos) requerido para obtener una capa del grosor deseado. Se agregan dos gramos extra para compensar las mermas posibles a causa del catalizador.
2. Se agita vigorosamente la mezcla con un agitador de vidrio durante un par de minutos.
3. Se introduce la mezcla y el vaso de precipitado en una campana de vacío, y se aumenta la presión vacuométrica.
4. Se corta la presión vacuométrica en cuanto todas las burbujas de aire en la mezcla desaparezcan, y se reestablezca la presión en la campana a su valor atmosférico.
5. Se retira el vaso de precipitado con la mezcla, y se vierte en una caja de petri colocada sobre la balanza analítica previamente tarada. Se deposita la cantidad deseada según el grosor que se requiera.
6. Se coloca la caja de Petri en un horno a 50° C durante unas 6 horas, procurando que la superficie en donde repose la caja sea perfectamente plana y sin inclinaciones.

Una vez que se obtiene la capa de PDMS con el grosor constante solicitado, se procede a retirar la capa de la caja de Petri. Es necesario limpiar la capa cuidadosamente con alcohol isopropílico. Posteriormente se corta en una cortadora láser en la que se han preseleccionado el tamaño del corte así como la potencia y la velocidad requeridas, destacando que el corte contempla el canal y sus puertos anexos. Es importante que la temperatura no se eleve porque se daña la capa de PDMS, puesto que se liberan gases tóxicos. El recorte se ajusta al tamaño de los porta objetos.

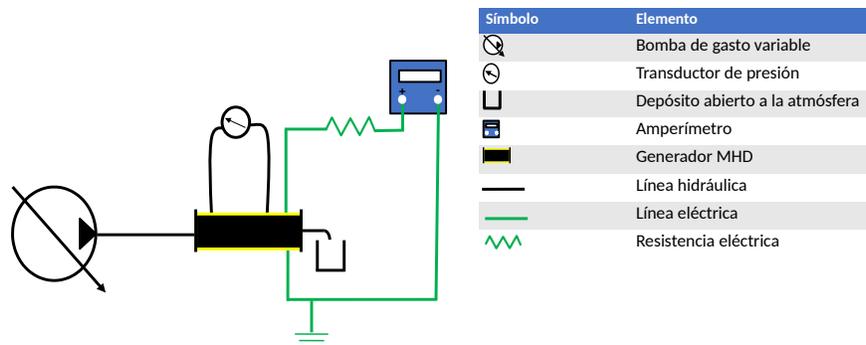
La construcción misma del canal requiere de los siguientes pasos:

1. Se limpia el canal recortado retirando las partes quemadas, con un punzón muy delgado y una mezcla de alcohol con agua.

2. Al terminar la limpieza se introduce el recorte al horno unos 20 minutos, a  $60^{\circ}\text{C}$  con el fin de evaporar cualquier residuo de agua remanente.
3. Se retira con ayuda de cinta adhesiva cualquier posible pelusa del las paredes, y en paralelo se limpian los dos porta objetos de ITO del lado conductor.
4. Se pegan las partes del canal con ayuda de la pistola de efecto corona, irradiando 40 segundos el PDMS y sucesivamente 120 segundos al portaobjetos del lado conductor.
5. Posteriormente pegar las partes procurando no dejar aire entre las superficies. Siempre recordando el uso de las protecciones adecuadas (gafas de seguridad, mascara de gas y guantes ).
6. Repetir el proceso anterior con el otro lado del PDMS y el porta objetos restante.
7. Para finalizar se coloca el canal en una caja de Petri (para evitar que se ensucie) y dejarle una noche en el horno a unos  $50^{\circ}\text{C}$  para que se relajen los esfuerzos.

### 3.3. Arreglo experimental

La figura 3.3 muestra un esquema del arreglo experimental, el cual contempla las tanto el arreglo hidráulico como el arreglo electromagnético y sus respectivos equipos de sensado.



**Figura 3.3:** Diagrama esquemático del arreglo experimental

El montaje experimental posee una bomba de desplazamiento positivo que produce un flujo laminar y un control muy exacto de la dosificación. La bomba en cuestión funciona por medio de un motor a pasos de alta calidad. Al girar se desplaza el émbolo por medio de un tornillo sin fin que empuja una jeringa. Dependiendo de la velocidad de giro, se tiene un gasto constante particular. El experimento se desarrolla de una presión alta generada por la bomba y una salida a presión atmosférica.

El montaje eléctrico adoptado es el de un medidor de corriente y una resistencia de carga en serie al dispositivo con la finalidad de disipar energía. Cabe recalcar que si bien el sistema posee una resistencia interna debida al fluido y no se encuentra concentrada, se considera despreciable al tener una resistencia de carga lo suficientemente grande ( $R=1K\Omega$ ) tal y como se muestra en la figura 3.3. En cuanto a la medición de corriente se ha optado por un electrómetro dado que las corrientes que se pretenden medir son del orden de  $1 \times 10^{-6}A$ .

### 3.3.1. Instalación experimental medidas de presión

Las medición de presión es la variable de mayor relevancia en el presente estudio, puesto que con ella es posible validar el modelo teórico. En la presente sección se presentara el desarrollo de la técnica de medición implementada en micro-canales con la finalidad de medir la presión en su interior.

La sola medida de presión no es suficiente lo que es requerido es conocer su variación, tal y como se expresa.

Como primera aproximación al problema se construyeron micro-canales rectos con desembocadura a presión atmosférica, 3cm antes de la entrada del micro-canal se colocó una bifurcación tipo Y en la cual se introdujo una punta del sensor de presión (Honeywell HSCDRR001NDAA5) diferencial y la otra se dejó abierta al ambiente.

Mediante el esquema anterior no fue factible la medición puesto que la medida de presión era un orden superior a las predicciones denotando con ello que la sección extra y la bifurcación tipo Y dominaban el fenómeno, siendo las medidas del orden de 200 Pa y la medida esperada del orden de 20 Pa, por lo cual no fue perceptible el efecto del micro-canal, adicionalmente se notaron fluctuaciones temporales del orden de 10 Pa que coincidían con la formación y caída de gotas debidas a efectos de tensión superficial. Los efectos conjuntos anteriormente descritos evitan poder observar los efectos del micro-canal.

Posteriormente para eliminar cualquier perturbación debida a la salida y obtener la medi-

ción cercana al canal, se optó por la creación de canales secundarios perpendiculares al canal principal, dichos canales fungen como puertos de medición diferencial.

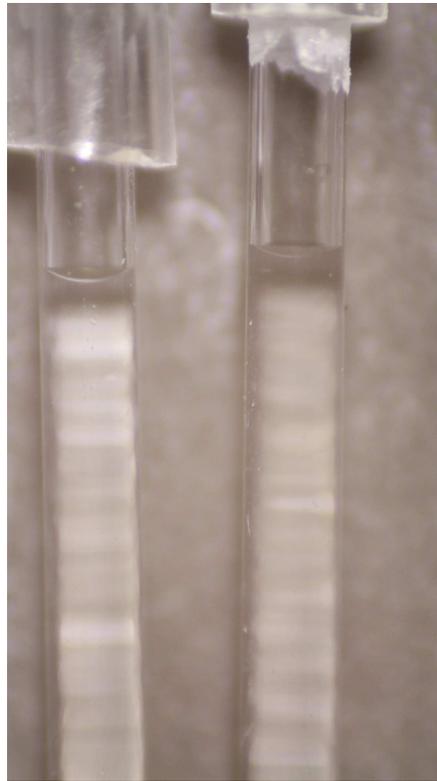
Para evitar fugas y con ello errores en la medición tanto la entrada del canal cómodo los puertos de medición y sus respectivas agujas que conecten con el sistema de bombeo y el sensor de presión respectivamente, se requiere adicionar un pegamento liquido de secado rápido ya sea silicón líquido o pdms en forma líquida. De ser requerido el proceso deberá ser repetido si se presentan pequeña fugas procurando tener el dispositivo lo más seco posible encuanto no seque el pegamento.

Se implementaron dos técnicas de sensado a la par para obtener mayor certeza de las mediciones. La primera técnica fue una implementación por medios ópticos, se conectaron por medio de mangueras los puertos de medición con dos tubos de capilares, el extremo de los mismos se interconecta con manguera flexible. Anterior a la interconexión de los tubos capilares, los mismos requieren estar inundados hasta una medida en conjunto con la tubería y el canal tal y como se observa en la figura 3.4 . Al tener el micro-canal en reposo se toma una fotografía de los capilares uno al lado del otro alineados de forma perpendicular a la Tierra , teniendo en primer plano los meniscos, después se pone en marcha la bomba al gasto deseado y en cuanto se llegue a un estado estacionario se toma una foto para observar la variación de los meniscos, posteriormente se apaga el sistema de bombeo y se vuelve a tomar una foto para verificar el estado base.

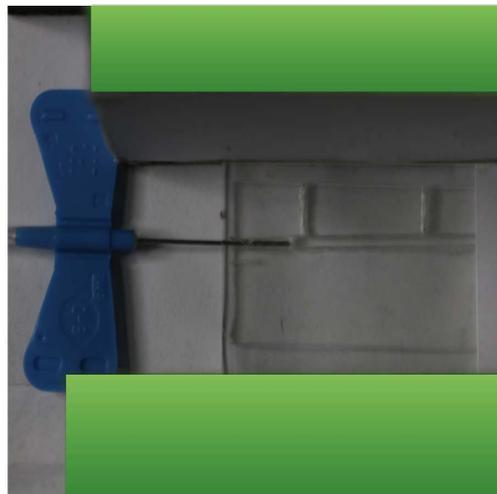
Lamentablemente la técnica óptica no fue de utilidad puesto que el estado inicial partiendo del reposo y el estado final de la bomba apagada no coincidían en los mismos puntos, esto puede deberse a efectos de capilaridad o la posible precipitación de sales en el capilar debidas a la iluminación del equipo fotográfico, lo cual provoca un cambio en la viscosidad del fluido en el capilar, al no tener repetibilidad los datos obtenidos no son representativos del fenómeno físico estudiado. En la figura 3.5 se observa el micro-canal de sección cuadrada 1.2 mm de diámetro hidráulico de 2.4 cm de longitud cuyos puertos de medición se encuentran 1.8 cm de distancia entre sí.

La segunda técnica de medición implementada en los puertos de medición se instala por medio de pequeñas mangueras y agujas de cateter el sensor de presión diferencial (Honeywell HSCDRRN001NDAA5), al sensor de presión se encuentra en el rango  $\pm 250$  Pa de medición y una sensibilidad de percibir variaciones de 1 Pa.

La última técnica de medición implementada fue satisfactoria y por medio de los resultados obtenidos mediante ella se realizan los análisis en los capítulos subsecuentes.



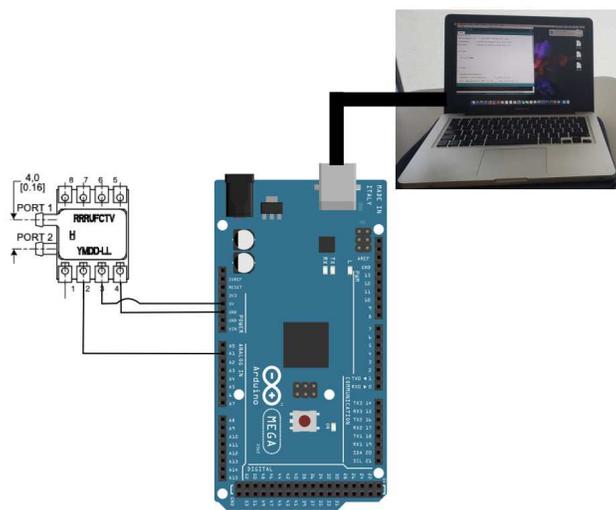
**Figura 3.4:** Tubos capilares



**Figura 3.5:** Vista de planta del microcanal al interior del arreglo de imanes

### 3.3.2. Sistema de adquisición de datos

La variable de mayor relevancia es la presión, puesto que los sensores utilizados convierten la medida de presión en una señal de voltaje es requerido un sistema de adquisición. El sensor de presión se encuentra en el rango  $\pm 250$  Pa de medición y una sensibilidad de percibir variaciones de 1 Pa. La señal de salida se transmite, como una señal de voltaje, a la tarjeta de adquisición arduino mega 2560. La figura 3.6 muestra el diagrama de conexión de la tarjeta arduino y el sensor de presión, la adquisición de datos se realizó vía el puerto serial de la computadora a una tasa de muestreo constante de 20 Hz y posteriormente transcribiéndoles en un archivo de texto para su posterior procesamiento.



**Figura 3.6:** Diagrama esquemático de conexión para adquisición de señales de presión

## 3.4. Técnicas de medición

La medición de los parámetros experimentales de interés requirió de los siguientes pasos:

1. En primer lugar se llena la tubería que conecta la bomba con sensor de presión. Es muy importante eliminar de los conductos todas las burbujas de aire que quedan atrapadas.
2. Posteriormente se conecta la manguera a la entrada del microcanal.
3. El dispositivo completo se debe colocar en el centro del soporte que aloja los imanes. Esto permite tener el experimento inmerso en un campo magnético bien alineado. Me-

diante el tornillo se ajustan las placas hasta obtener el campo magnético deseado (en este caso el campo máximo de 0.5T).

4. Se conectan las terminales del electrómetro al ánodo y cátodo del microcanal.
5. Se activa la bomba un momento para llenar el microcanal.
6. Se encienden los instrumentos de adquisición y se ajustan las frecuencias de muestreo a las tasas deseadas (previamente han sido conectados los instrumentos de medición).
7. Se enciende la bomba al gasto solicitado y después de un par de minutos se alcanza el estado estacionario (en cuanto la medida de presión deja de fluctuar). Se apaga la bomba y se enciende nuevamente hasta un nuevo estado estacionario. Se guardan los datos registrados en la memoria del aparato.
8. El último paso se repite tantas veces como sea necesario para tener un conjunto mínimo de datos confiables.
9. Al finalizar los experimentos se sustituye el líquido de trabajo por agua des-ionizada con el objeto de limpiar el sistema. Para este fin, se deben bombear aproximadamente  $40 \times 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s}$  durante un minuto.
10. El paso anterior se puede repetir sustituyendo el líquido por aire con la finalidad de secar el interior de los conductos.
11. El sistema se puede desensamblar y almacenar en un ambiente seco.

Los experimentos considerados se realizaron con gastos e intensidades del campo magnético específicas. Los valores concretos se muestran en la siguiente tabla

$M$	$\sigma$	$B$	$Q$
mol	S/m	T	$10^{-8} \times \text{m}^3/\text{s}$
1.6	12.54	0.5	1
1.6	12.54	0.5	1.5
1.6	12.54	0.5	2
1.6	12.54	0.5	3
1.6	12.54	0.5	4

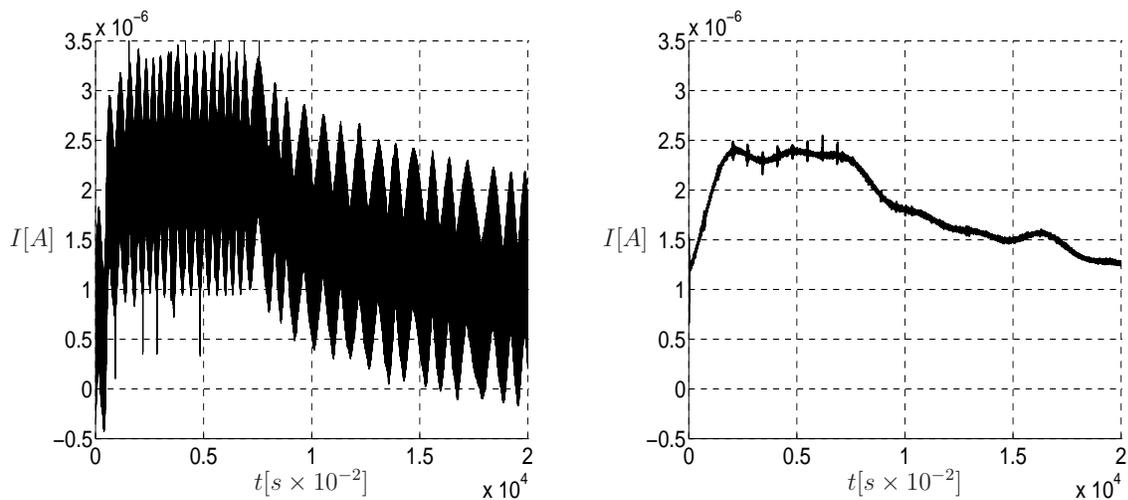
**Tabla 3.2:** Matriz experimental de fluido de trabajo NaCl

# Capítulo 4

## Análisis de Resultados

### 4.0.1. Mediciones de la corriente inducida

La corriente generada en el electrolito es la variable más importante del estudio. Su medición mediante la experimentación a producido curvas como la que se ilustra en la figura (4.1). Se puede observar que de acuerdo con el experimento propuesto existe una variación temporal producida por el inicio del bombeo, una meseta casi estacionaria y un descenso en cuanto se apaga el sistema de bombeo.



**Figura 4.1:** Señal cruda (derecha), señal filtrada (Izquierda). Muestra obtenida a  $20 \mu L / \text{min}$

Con el objeto de hacer visibles las características principales de la respuesta dinámica es necesario filtrar la señal. Posprocesando la señal mediante la transformada de Fourier es

posible eliminar las fluctuaciones de alta frecuencia<sup>1</sup>; el resultado se muestra en la figura (4.1).

Se realizaron en promedio 5 ensayos con el fin de caracterizar estadísticamente dicho experimento. El grado de similitud que hay entre las curvas de cada ensayo permite anticipar una incertidumbre experimental relativamente pequeña, tal y como se demuestra al final de esta sección.

## 4.1. Mediciones de la presión

Las presiones registradas en el transductor diferencial colocado en dos puntos al lo largo del canal se muestran en la figura 4.2. La respectiva barra de error corresponde a la desviación estándar obtenida del análisis estadístico de los múltiples experimentos y los puntos el promedio de los mismos. El dispositivo experimental funciona como una resistencia hidráulica lineal.

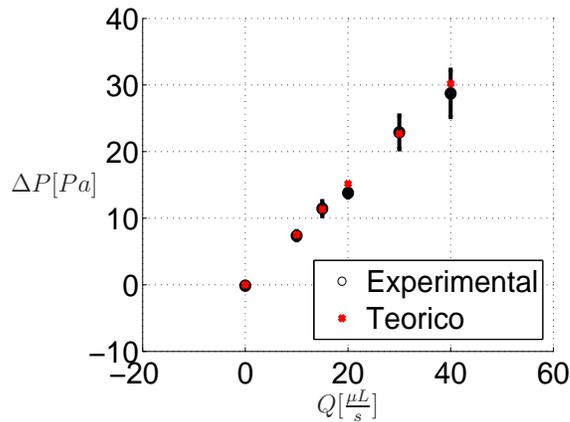


Figura 4.2: Valores de presión en estado estacionario

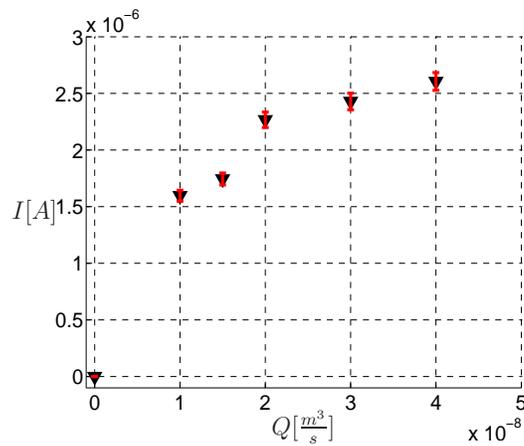
La gráfica 4.2 sugiere que el sistema de flujo responde al incremento de la presión como una resistencia hidráulica. Cabe recalcar que aunque la presión no está medida estrictamente en la entrada del canal, el flujo volumétrico guarda una relación lineal (como es de esperar) con la presión. Este hecho permite utilizar el gasto de entrada como variable independiente.

<sup>1</sup>La aplicación del método se puede consultar en la tesis “Estudio de Flujos Horizontales de Mezclas Bifásicas Gas-Líquido con Fases de Alta Viscosidad”, de Juan Carlos Montiel Cortés, UNAM, 2017.

Se concluye que las condiciones de frontera quedan perfectamente bien definidas en los bordes del canal y que se apegan a las idealizaciones consideradas en el modelo matemático. Podemos observar que las predicciones teóricas corresponden con gran fidelidad a la realidad experimental.

#### 4.1.1. Características estacionarias de la corriente

Una vez alcanzado el estado estacionario, la corriente generada mantiene un nivel fijo. El nivel de corriente estacionaria que se alcanza con cada gasto de entrada se muestra en la figura 4.3 .



**Figura 4.3:** Corriente obtenida a diferentes gastos.

Los puntos indican el valor promedio de las series experimentales, y las barras indican la desviación estándar correspondiente. Es evidente que las dispersiones son bajas en todos los experimentos. Se concluye en consecuencia que el grado de precisión de la medición es significativo. Como se dijo anteriormente, la corriente también es proporcional al flujo volumétrico de entrada. Sin embargo, el crecimiento de la corriente no aparenta ser monótono; de hecho se observa un salto en el valor de la corriente que pasa de  $1.75 \times 10^{-6}$  [A] a  $2.9 \times 10^{-6}$  [A], cuando el gasto es aproximadamente  $2.0 \mu$  [L/s]. Salvo por el salto que se produce en la curva, la relación de proporcionalidad es claramente lineal en los regímenes altos y bajos de gasto. Como se verá en la siguiente sección, la curva debe ser analizada en forma global a fin de tomar en consideración los límites operativos. La relación en tal caso sigue siendo lineal, aunque con dispersiones más significativas en la respuesta promedio.

Mediante la corriente medida y la ecuación 2.83 se midió de forma indirecta el  $\Delta\phi$  el cual se

ilustra en la gráfica 4.4, se observa que a medida que aumenta  $Q$  aumenta el  $\Delta\phi$  denotando una relación de proporcionalidad. El  $\Delta\phi$  puede ser explicado por la acumulación de cargas en las paredes conductoras debida al campo eléctrico producido por  $\vec{v} \times \vec{B}$  que intenta separar las cargas, positivas a una pared conductora y negativas a la otra pared, con lo cual se obtiene una acumulación efectiva en las paredes.

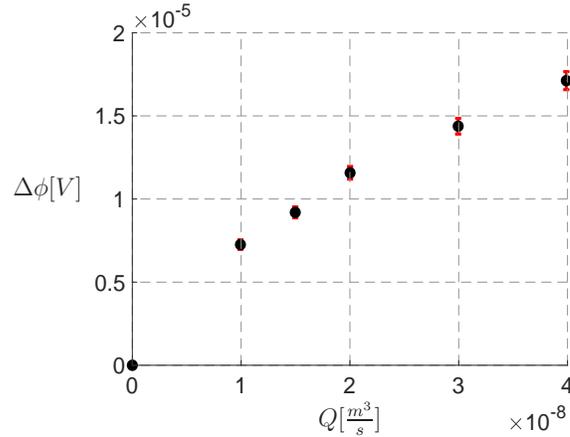


Figura 4.4: Diferencia de potencial obtenida a diferentes gastos.

## 4.2. Discusión

La figura 4.5 muestra la predicción analítica y una muestra experimental variante en el tiempo.

Se puede observar que la predicción dinámica predice de buena manera el tiempo de desarrollo de la corriente. Así mismo refleja globalmente el comportamiento de la corriente generada.

La gráfica de la Fig. (4.6) representa la potencia disipada. Ésta se calculó como una potencia disipada en resistores  $W = I^2R$ , donde  $R = 1034 \Omega$  representa una resistencia de carga.

Aparentemente hay dos regímenes de generación de corriente en torno al punto  $Q = 2 \times 10^{-8} m^3/s$ , donde los datos parecen tener un salto. El origen de este efecto no-lineal no ha sido precisado aún. No obstante, si el conjunto de datos se lee globalmente se percibe un comportamiento lineal, aunque con mayor dispersión en los datos. Esto podría deberse al movimiento y reacomodo de iones en el electrolito, que alcanza un cierto valor crítico con ese flujo volumétrico. En todo caso es pertinente ampliar el conjunto de experimentos para incluir más puntos muestrales que verdaderamente indiquen el comportamiento en esa región.

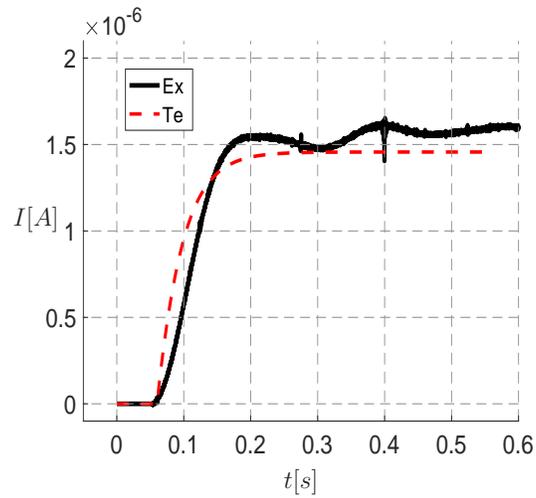


Figura 4.5: Muestra obtenida a  $10 \mu\text{L}/\text{min}$

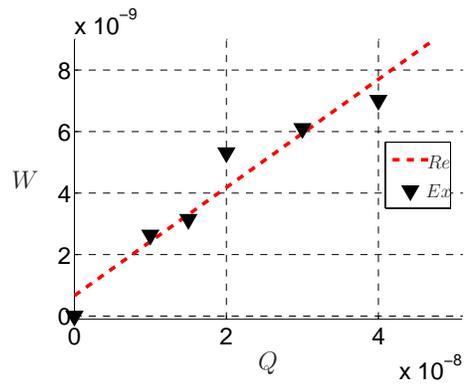


Figura 4.6: ( $Re$ )Regresión,  $Ex$  Experimental

Existe la posibilidad que el PDMS se deforme y el vidrio no, conllevando con ello una velocidad media inferior pues el área transversal habría incrementado, sin aumentar el área de captación de corriente. Produciendo un déficit de corriente del teórico esperado.

# Capítulo 5

## Conclusiones

El presente trabajo resume los resultados teórico-experimentales concernientes a los efectos magneto-hidrodinámicos (o MHD) inducidos en electrolitos que fluyen por micro-canales.

El proceso considerado consiste en generar una densidad de corriente estacionaria en un fluido conductor que circula por un canal de sección transversal rectangular y que está inmerso en un campo magnético externo de tipo estático.

Se desarrolló un modelo analítico en el que se consideraron algunos de los procesos físicos fundamentales. Las idealizaciones relativas a la naturaleza del electrolito tienen una repercusión clara en los resultados, aunque las predicciones son bastante cercanas a los valores medidos experimentalmente.

El modelo está representado por un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, que tiene la particularidad de ser lineal y no-homogéneo (incluidas las condiciones de frontera). Se basa en el acoplamiento de las ecuaciones de Navier-Stokes y de Maxwell, en lo que constituye la aproximación MHD. Las condiciones de frontera son las que corresponden a un canal de sección transversal rectangular con paredes que satisfacen la condición de no-deslizamiento, también paredes que no la satisfacen. Las presiones se asumen conocidas y forman parte de la formulación del problema.

En paralelo se llevaron a cabo pruebas de laboratorio en un dispositivo diseñado y construido para tal fin. El montaje experimental permitió observar el fenómeno y cuantificar debidamente las corrientes inducidas mediante un electrómetro de alta resolución.

El diseño y fabricación de los micro-canales requirió trabajar en una escala de  $1 \times 10^{-3}$ m. El material utilizado fue el polímero PDMS, y su elaboración requirió la utilización de técnicas

de micro-fabricación especializadas.

Así mismo, cabe mencionar que se elaboró químicamente el fluido de trabajo (es decir el electrolito). Esto permitió garantizar una reología newtoniana de la sustancia, a la vez que se incrementó su conductividad eléctrica aproximadamente a  $\sigma \sim 10 \text{ S/m}$ .

También se desarrolló un dispositivo para alinear y graduar el conjunto de dos imanes permanentes de neodimio con los que se produjo el campo magnético externo. Los imanes fueron caracterizados con un “gaussmetro” prestado por la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

El microcanal fue operado mediante bombas de émbolo (desplazamiento positivo) que entregan gastos constantes dentro del intervalo  $1 \times 10^{-14} \text{ m}^3/\text{s}$  a  $1 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$ . La bomba permitió generar gastos en forma de escalón<sup>1</sup> de presión en instantes de tiempo concretos. La generación de los escalones de presión (y gasto) permitió establecer que los tiempos de reacción de la densidad de corriente no son simétricos con respecto a la excitación.

La comparación de las predicciones teóricas con los datos experimentales fueron satisfactorias en función de la metodología propuesta. Es importante señalar que el modelo está limitado a las condiciones de frontera e iniciales descritas en el trabajo.

El resultado más relevante es que se demostró ampliamente la posibilidad de generar corrientes significativas del orden de  $1 \times 10^{-6} \text{ A}$  en dispositivos de tamaño muy reducido. Se demuestra también el principio de operación de los micro-generadores de alta eficiencia.

Los resultados indican que, en general, la corriente inducida es directamente proporcional al gasto<sup>2</sup>. La predicción sugiere que dicha relación es lineal, mientras que los resultados experimentales no permiten concluir esto de manera definitiva para todo el intervalo de gastos (ver figura 4.2). Esto se debe a una carencia de puntos en las regiones de bajos gastos.

Se obtuvieron resultados positivos en función de los objetivos y alcances propuestos.

## 5.1. Contribuciones

Se recogen las siguientes ventajas y contribuciones relevantes del trabajo:

1. Se desarrollaron modelos teóricos acoplados

---

<sup>1</sup>En el sentido de la función de Heaviside

<sup>2</sup>Entendiendo por “directamente proporcional” que una cantidad aumenta cuando la otra lo hace.

2. Se desarrollaron técnicas experimentales especiales para este tipo de sistemas
3. Se demostró que se producen corrientes significativas en estos dispositivos
4. Se demostró el principio de operación que permite estudiar su escalamiento
5. Se demostraron los tipos de relaciones subyacentes en los fenómenos observados

## 5.2. Recomendaciones y trabajo futuro

En primera instancia resultará absolutamente relevante la búsqueda de las aplicaciones potenciales de los procesos estudiados. Existen múltiples vertientes que son muy interesantes. Sin embargo, inicialmente se pretende buscar aplicaciones médicas y para procesos industriales (específicamente, en el contexto de los hidrocarburos pesados).

Evidentemente hay varias mejoras que implementar, tanto en el modelo, como en el experimento. Se deben cuidar ciertos aspectos que modifican las mediciones obtenidas, tales como:

1. La medición de la presión y la ubicación del puerto de medición
2. El blindaje eléctrico del experimento para evitar la contaminación con armónicos espurios en las mediciones
3. La temperatura a la cual se realiza el experimento
4. Asegurar las condiciones para que se logre un verdadero estado estacionario
5. Se tiene que desgasificar el electrolito
6. Mejorar el dispositivo de soporte de los imanes

También es muy importante implementar y realizar mediciones de las velocidades de deslizamiento. Esto implica que se empleen técnicas de velocimetría avanzada. Aquí se propone la implementación de la micro-velocimetría por imágenes de partículas (o micro-PIV), que permitiría tener una primera estimación de la velocidad finita de deslizamiento en las paredes.

Adicionalmente, en trabajos futuros sería de gran interés realizar las siguientes mejoras al modelo:

1. Considerar variaciones temporales y espaciales del campo magnético
2. Considerar con mayor detalle la naturaleza advectiva-difusiva de los iones en el electro-lito
3. Considerar deformaciones del PDMS
4. Considerar la interacción fluido estructura en el modelo del fluido

En relación con los experimentos, se ha visto la necesidad de:

1. Ampliar los intervalos experimentales para el gasto y el campo magnético
2. Incrementar el número de experimentos en puntos intermedios
3. Incluir variaciones temporales del  $B$
4. Evaluar el efecto de la geometría de microcanales (e.g. venturis, cambios de sección, etc.)
5. Incrementar la conductividad del fluido de trabajo incluyendo soluciones de cloruro de potasio (KCl) y mercurio
6. Proponer escalamientos del experimento

# Apéndice A

## Ecuaciones Fundamentales

La magneto-hidrodinámica es la ciencia que estudia la dinámica de los fluidos conductores de electricidad en presencia de campos electromagnéticos. Este concepto fue introducido en 1942 por el científico escandinavo Hannes Alfvén.

En la siguiente sección se explicaran las bases esenciales para comprender el MHD, de tal manera se explicaran las leyes fundamentales que rigen el comportamiento de los fluidos, el comportamiento de los campos electromagnéticos y el funcionamiento de los conductores.

En la siguiente sección se deducirán la ecuaciones de continuidad, Navier-Stokes, ecuaciones de Maxwell y Ley de Ohm.

### A.1. Ecuaciones del campo electromagnético

La densidad de carga se define como

$$\varrho = \frac{dq}{dv} \tag{A.1}$$

En la cual  $q$ ,  $v$ ,  $\vec{v}$  son respectivamente la carga, el volumen y la velocidad. Denotando que la propiedad de densidad de carga volumétrica es intensiva. Partiendo de la ley de la conservación de la carga

$$\frac{dq}{dt} = 0 = \frac{d}{dt} \int \varrho dV + \oint \varrho \vec{v} \hat{n} da \tag{A.2}$$

Al introducir la variación temporal al interior de la integral y ocupando el teorema de la

divergencia,

$$\int \frac{d\rho}{dt} dV + \int \nabla \cdot \vec{v}\rho dV = 0. \quad (\text{A.3})$$

Debido a que sin importar el volumen de control, la igualdad se mantiene y por medio del teorema del residuo, se re-expresa en su versión diferencial la Ley conservación de la carga.

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{v}\rho = 0 \quad (\text{A.4})$$

En forma alterna puesto que a la densidad de carga se le conoce  $\vec{J} = \vec{v}\rho$

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (\text{A.5})$$

Poniendo a prueba la soluciones obtenidas y recordando que partimos del precepto, la velocidad de los flujos y la velocidad de las cargas son las misma. Incorporando el perfil de velocidades y la densidad de carga, obtenemos por las propiedades del operador nabla.

$$\nabla \cdot \vec{v}\rho = \nabla \rho \cdot \vec{v} + \rho \nabla \cdot \vec{v} \quad (\text{A.6})$$

Dada la ecuación de la incompresibilidad (A.34) el segundo término se vuelve 0, en el caso del primer término el gradiente sólo tendrá componentes en  $z$  y  $y$ , puesto que la velocidad sólo posee componentes en  $x$  el resultado es 0.

$$\nabla \cdot \vec{v}\rho = 0 \quad (\text{A.7})$$

Se demuestra por consecuencia que la variación temporal es 0 llegando con ello a que el fenómeno modelado se encuentra plenamente en estado estacionario.

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (\text{A.8})$$

La ley de Gauss eléctrica: En sus comienzos se estableció que existía una relación de proporcionalidad entre el flujo de un campo eléctrico y la carga eléctrica.

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} da \propto q \quad (\text{A.9})$$

Transformando la proporcionalidad en igualdad por medio de una constante que llamaron permitividad eléctrica, esta constante depende del medio en el cual se encuentren las cargas.

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q}{\epsilon}. \quad (\text{A.10})$$

Al incorporar el teorema de la divergencia y considerando que la carga está dispersa en el espacio que la contiene es posible hablar de una densidad de carga puntual dispersa en el volumen de control.

$$\int \nabla \cdot \vec{E} dV = \int \frac{\rho}{\epsilon} dV \quad (\text{A.11})$$

Por medio del teorema del residuo se llega a la versión diferencial de la ley de Gauss.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}. \quad (\text{A.12})$$

Fenomenológicamente la ecuación A.12 indica que la existencia de cargas eléctricas provoca la existencia de campos eléctricos, la intensidad de los mismos dependerá del medio en el que se encuentren las cargas.

Ley de Gauss Magnética:

Se establece que el flujo del campo magnético siempre es 0.

$$\oint \vec{B} \cdot \hat{n} da = 0 \quad (\text{A.13})$$

Se aplica el teorema de la divergencia,

$$\int \nabla \cdot \vec{B} dV = 0. \quad (\text{A.14})$$

Por medio del teorema del residuo se llega a la versión diferencial de esta ley.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{A.15})$$

La interpretación física de éste fenómeno es que los monopolos magnéticos no existen y que las líneas de flujo en un campo magnético son siempre cerradas sin importar el volumen de control.

Ley de Faraday

Faraday encontró que debido a la variación temporal del flujo magnético que atraviesa una superficie, producía circulación de un campo eléctrico a través de un conductor que encerraba la superficie.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{s}. \quad (\text{A.16})$$

Al incorporar el teorema de Stokes e introduciendo la derivada temporal al interior de la integral.

$$\int \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (\text{A.17})$$

Por medio del teorema del residuo se llega a la versión diferencial de la ley.

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{A.18})$$

El fenómeno físico se interpreta que la existencia de variaciones temporales de  $B$  provoca la generación de  $E$ , cabe recalcar que este fenómeno es el principio fundamental de los transformadores eléctricos de corriente alterna y en electrostática  $\vec{E}$  es irrotacional.

Ley de Maxwell- Ampere:

En un comienzo Ampere explica que la circulación de un campo magnético en un contorno cerrado es proporcional al flujo de densidad de corriente que se desplaza en el conductor.

Posteriormente Maxwell agrega un término correctivo que es nombrado corriente de desplazamiento y se da cuando hay variaciones temporales del campo eléctrico, agregandolo como el flujo de la variación temporal del campo eléctrico multiplicado por la permitividad eléctrica del medio en el cuál se encuentra el campo eléctrico.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} \propto \int \vec{J} \cdot d\vec{s} + \int \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (\text{A.19})$$

La proporcionalidad se transforma en igualdad por medio de una constante que fue nombrada permeabilidad magnética y varia en función del medio en el cual se encuentre inmerso el campo magnético

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_m \left( \int \vec{J} \cdot d\vec{s} + \int \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \right) \quad (\text{A.20})$$

Aplicando el teorema de Stokes

$$\int \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_m \left( \int \vec{J} \cdot ds + \int \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot ds \right) \quad (\text{A.21})$$

Por medio del teorema del residuo se llega a su forma diferencial de la ley.

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_m \left( \vec{J} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (\text{A.22})$$

El fenómeno físico se puede interpretar, al existir desplazamiento de cargas producto de corrientes eléctricas se generan campos magnéticos normales al flujo de las cargas eléctricas, existiendo una proporcionalidad con respecto a la magnitud del campo dependiendo de la permeabilidad magnética del medio en el cual se encuentren en movimiento las cargas.

Ley de Ohm generalizada

Es una ley muy conocida aunque en su versión macroscópica en la cual se relacionan las diferencias de potencial (voltaje) y las corrientes en conductores conocidos como conductores óhmicos que cumplen esta ley

$$\Delta V \propto I \quad (\text{A.23})$$

La proporcionalidad se transforma en igualdad mediante una constante que se llamó resistencia, aunque para el fin de esta demostración se ocupa su inverso que es la conductancia

$$G = \frac{1}{R}$$

$$G\Delta V = I \quad (\text{A.24})$$

Siendo ésta una expresión muy específica puesto que la conductancia depende de nociones extrínsecas al material de modo que se replantea esta relación de la siguiente manera.

$$G \int \vec{E} \cdot dl = \int \vec{J} \cdot ds \quad (\text{A.25})$$

A su vez la conductancia se puede definir, en un volumen de control infinitesimal.

$$G = \frac{\sigma s}{l} = \sigma \frac{ds}{dl}$$

$$\int \sigma \frac{ds}{dl} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (\text{A.26})$$

se reduce

$$\sigma \vec{E} = \vec{J} \quad (\text{A.27})$$

se sabe que hay una equivalencia entre los campos eléctricos y campos magnéticos con cargas con velocidad, generando campos eléctricos equivalentes .

$$\vec{E}_{equivalente} = \vec{v} \times \vec{B} \quad (\text{A.28})$$

Se llega a la forma más general de la ley de Ohm

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (\text{A.29})$$

Estas ecuaciones nos hablan de los movimientos de cargas eléctricas son debidos a campos electromagnéticos y la facilidad con la cual se mueven las cargas dependen de la conductividad del medio en el cual se muevan .

## A.2. Ecuaciones del campo hidrodinámico

Partiendo del teorema de transporte de Reynolds.

Que relaciona la variación de una propiedad transportada por el fluido con sus variaciones en el volumen de control y aquello que sale y entra por las superficie del volumen de control

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{d}{dt} \int \psi \rho dV + \oint \psi \rho \vec{v} \hat{n} da \quad (\text{A.30})$$

Donde  $\psi = \frac{\partial \Psi}{\partial m}$  siendo  $\psi$  una propiedad intensiva y  $\Psi$  la propiedad a transportar.

Primeramente se toma como propiedad de transporte la  $m$ .

$\frac{dm}{dm} = 1$  por definición .

Por la ley de la conservación de la materia (Lomonsov-Lavoisier).

$$\frac{dm}{dt} = 0 = \frac{d}{dt} \int \rho dV + \oint \rho \vec{v} \hat{n} da \quad (\text{A.31})$$

De tal forma que, ocupando el teorema de la divergencia.

$$\int \frac{d\rho}{dt} dV + \int \nabla \cdot \vec{v}\rho dV = 0 \quad (\text{A.32})$$

Por el teorema del residuo llegamos a la forma diferencial de la conservación de la masa

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{v}\rho = 0 \quad (\text{A.33})$$

Puesto que el fenómeno ocurre en un régimen estacionario y el fluido posee una densidad constante se llega a la ecuación de incompresibilidad de un fluido.

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{A.34})$$

Desglosando esta expresión en coordenadas cartesianas.

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.35})$$

Puesto que se analiza un flujo en tubería y es unidireccional de acuerdo al sistema de referencia impuesto podemos afirmar que  $v_y = 0 = v_z$  por lo que.

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.36})$$

Cabe resaltar que esta ecuación nos indica que  $v_x \neq f(x)$ .

Sin embargo esto no es suficiente información para describir el perfil de velocidades de modo que la siguiente propiedad a transportar es el momentum lineal  $m\vec{v}$ , por definición

$$\frac{dm\vec{v}}{dm} = \frac{\vec{v}dm}{dm} + \frac{m d\vec{v}}{dm} \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{dm\vec{v}}{dm} = \vec{v} \cdot 1 = \vec{v} \quad (\text{A.38})$$

Al aplicar la definición de la segunda ley de Newton

$$\frac{dm\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F} \quad (\text{A.39})$$

Puesto que el canal no posee cambios de altura en el eje z la suma de fuerzas que actúa sobre el sistema es igual a:

$$\sum \vec{F} = F_{mag}^{\vec{}} + F_{\mu}^{\vec{}} + F_p^{\vec{}} \quad (\text{A.40})$$

La Fuerza magnética que se presenta es mejor conocida como la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F}_{mag} = \int \vec{J} \times \vec{B} dV \quad (\text{A.41})$$

En la cual  $J$  la densidad de corriente se define  $\vec{J} = \rho_{carga} \vec{v}_{carga}$ ,  $\vec{B}$  el campo magnético.

$$\int \frac{dv\rho}{dt} dV + \int \vec{v} \cdot \nabla \cdot \vec{v} \rho dV = \int \vec{J} \times \vec{B} dV \oint \nabla \vec{v} \cdot \hat{n} ds - \int \nabla P dV \quad (\text{A.42})$$

Volviendo a ocupar el teorema de la divergencia se llega

$$\int \frac{dv\rho}{dt} dV + \int \vec{v} \cdot \nabla \cdot \vec{v} \rho dV = \int \vec{J} \times \vec{B} dV + \int \nabla \cdot \nabla \vec{v} dV - \int \nabla P dV \quad (\text{A.43})$$

Por medio del teorema del residuo se llega a la versión diferencial del balance de fuerzas conocida como Navier- Stokes para fluidos newtonianos con fuerzas magnéticas.

$$\frac{dv\rho}{dt} + \vec{v} \cdot \nabla \cdot \vec{v} \rho = \vec{J} \times \vec{B} + \nabla \vec{v} - \nabla P \quad (\text{A.44})$$

# Bibliografía

Alfvén, H. (1942), ‘Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves’, *Nature* **150**(3805), 405–406.

Andò, B., Ascia, A., Baglio, S. & Beninato, A. (2009), ‘The “one drop” ferrofluidic pump with analog control’, *Sensors and Actuators A: Physical* **156**(1), 251–256.

Berker, R. (1963), ‘Hand book of fluid dynamics, vol viii/3’.

Brogan, T., Kantrowitz, A., Rosa, R. & Stekly, Z. (1962), ‘Progress in mhd power generation’, *Engineering Aspects of Magnetohydrodynamics*.

Courant, R., Friedrichs, K. & Lewy, H. (1928), ‘Über die partiellen differenzengleichungen der mathematischen physik’, *Mathematische annalen* **100**(1), 32–74.

Davidson, P. A. (2016), *Introduction to magnetohydrodynamics*, Vol. 55, Cambridge university press.

Eijkel, J., Dalton, C., Hayden, C., Burt, J. & Manz, A. (2003), ‘A circular ac magnetohydrodynamic micropump for chromatographic applications’, *Sensors and Actuators B: Chemical* **92**(1), 215–221.

Hunt, J. (1965), ‘Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts’, *Journal of Fluid Mechanics* **21**(4), 577–590.

Hunt, J. & Shercliff, J. (1971), ‘Magnetohydrodynamics at high hartmann number’, *Annual Review of Fluid Mechanics* **3**(1), 37–62.

Hunt, J. & Stewartson, K. (1965), ‘Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts. ii’, *Journal of fluid mechanics* **23**(3), 563–581.

International Energy Agency (2016), ‘<https://www.iea.org/publications/freepublications/publica>

- Jang, J. & Lee, S. S. (2000), 'Theoretical and experimental study of mhd (magnetohydrodynamic) micropump', *Sensors and Actuators A: Physical* **80**(1), 84–89.
- Kang, H.-J. & Choi, B. (2011), 'Development of the mhd micropump with mixing function', *Sensors and Actuators A: Physical* **165**(2), 439–445.
- Lei, W., Jiankang, W. & Bo, C. (2009), 'Analytic solution of liquid flow in rectangular pdms-glass microchannel with wall slip and electro-viscous effects', *Applied Mathematical Sciences* **3**(44), 2195–2214.
- Lekner, J. (2007), 'Viscous flow through pipes of various cross-sections', *European Journal of Physics* **28**(3), 521.
- Manyonge, W., Kiema, D. & Iyaya, C. (2012), 'Steady mhd poiseuille flow between two infinite parallel porous plates in an inclined magnetic field', *International Journal of Pure and Applied Mathematics* **76**(5), 661–668.
- Nguyen, N.-T. (2012), 'Micro-magnetofluidics: interactions between magnetism and fluid flow on the microscale', *Microfluidics and nanofluidics* **12**(1-4), 1–16.
- Ramos, A. (2007), Electrohydrodynamic and magnetohydrodynamic micropumps, in 'Microfluidic technologies for miniaturized analysis systems', Springer, pp. 59–116.
- Ramírez Trocherie, M.-A. (2017), *Efectos Magneto-hidrodinámicos Producidos por Variaciones del Flujo de Electrolitos en Micro-canales*, UNAM.
- Reitz, J. R., Milford, F. J. & Christy, R. W. (2008), *Foundations of electromagnetic theory*, Addison-Wesley Publishing Company.
- Ryabinin, A. & Khozhainov, A. (1967), 'Transient-state flow of a conducting liquid in an mhd generator at constant flow rate in the presence of side walls', *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* **8**(2), 17–19.
- Ueno, K. (1991), 'Inertia effect in two-dimensional mhd channel flow under a traveling sine wave magnetic field', *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics* **3**(12), 3107–3116.
- White, F. M. & Corfield, I. (2006), *Viscous fluid flow*, Vol. 3, McGraw-Hill New York.