



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

EL PROBLEMA DE LOS  $N$  VÓRTICES  
SOBRE SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

MIGUEL ALCUBIERRE MÉNDEZ

TUTOR:  
DR. CARLOS GARCÍA AZPEITIA

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., Otoño 2019.





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**1. Datos del alumno**

Alcubierre

Méndez

Miguel

55 54 32 66 77

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

312283977

**2. Datos del tutor**

Doctor

Carlos

García

Azpeitia

**3. Datos del sinodal 1**

Doctor

Panayiotis

Panayotaros

**4. Datos del Sinodal 2**

Doctor

Carlos

Málaga

Iguñiz

**5. Datos de la sinodal 3**

Doctora

María de los Ángeles

Sandoval

Romero

**6. Datos del sinodal 4**

Doctor

Luis Fernando

López

Ríos

**7. Datos del trabajo escrito**

El problema de los  $N$  vórtices sobre superficies de revolución

78 p.

2019

*Dedicado al profesor  
Luis Manuel Hernández Gallardo  
y sus fichitas de trabajo  
que en la memoria guardo.*



# Reconocimientos y Agradecimientos

---

El primer agradecimiento le corresponde a mi asesor, el Dr. Carlos García Azpeitia, por su entusiasmo e interés por el tema y por ser paciente con mis erráticos hábitos de trabajo. Aprecio que además me haya apoyado con una beca y que me haya confiado las ayudantías de sus cursos. Dicho lo cual, debo reconocer que esta tesis es resultado de una investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica, *PAPIIT*, de la UNAM IA105217: Aplicación del análisis no líneal a la mecánica de cuerpos, vórtices y moléculas. Agradezco a la DGAPA-UNAM por la beca recibida.

Me siento profundamente afortunado de tener amigos con quienes disolver el estrés universitario. Conjeturo que los siguientes pardillos seguirán jugando un papel protagónico en mi vida académica y personal. Quiero dar gracias a Marcos Bermúdez, Jorge Cruz, Andrés Gutiérrez, Alvar Ortega, Daniel Tamayo, Frida Tovar, Leonardo Uhthoff y Edgar Zepeda por su tiempo y cariño.

Mi estancia en la Facultad de Ciencias me expuso a muchos docentes, con sus propios estilos, intereses y enfoques. Puedo decir que, en general, estudié bajo excelentes profesores. Agradezco a todos su participación en mi formación y, como base inductiva de este hecho, quiero dejar registro escrito de uno (el resto de la inducción, como quien dice, *se queda de ejercicio al lector...*).

“*Ese curso parece un stand up de geometría*” fue mi motivación para inscribir *Geometría Analítica II* con Francisco Barrios Paniagua. Cualquiera que haya escuchado a Frank sabe que es un orador sensacional, con un respeto y compromiso inquebrantable por su labor docente. De él aprendí

muchísimo sobre lo valioso que es el trabajo duro y constante en la formación de un matemático. Encima de eso, Frank es un gran amigo personal. Por todo eso y más, gracias.

Aprovecho el foro para agradecer a la Dirección General de Cooperación e Internacionalización de la UNAM y a la Secretaría de Educación Pública por darme la oportunidad de estudiar un semestre en *The University of Tokyo*, tengan la seguridad de que genuinamente aproveché la experiencia. Por supuesto que también debo agradecer a la máxima casa de estudios japonesa por abrirme sus puertas y confiar en mí – 東京大学、ありがとうございます!

Lo cual me recuerda que le debo un agradecimiento desde la fibra más tierna de mi corazón a *nuestra* máxima casa de estudios, a la Universidad Nacional Autónoma de México, que directa e indirectamente me ha dado tanto. La fibra más tierna dice que *gracias*.

Si he llegado tan lejos, es porque muy al principio me cargaba un par de gigantes – Mamá, Papá: gracias por el cariño y apoyo que toda la vida me han dado. Sé que sin ustedes esto no estaría pasando. En muchos sentidos esta tesis también es suya: muchas felicidades. Los amo.

A mis duendes – Raúl, J. y Mily – les doy las gracias por las risas que compartimos, esas risas que, sin que ustedes lo supieran, me han mantenido optimista en momentos difíciles. Ustedes tres son el amor más grande de mi vida.

Por supuesto que me falta gente, pero una lista exhaustiva de agradecimientos no sería muy práctica (incluso si me restrinjo a familiares y amistades), así, dado que se acaba la cuartilla, le regalo esta última línea a mi Yaya adorada: no se me olvida que todo esto empezó en tus brazos.

*Por mi raza hablará el espíritu, ¡Goya!*





# Resumen

---

Este trabajo de tesis busca estudiar la dinámica de sistemas de  $n$  vórtices, en particular, nos interesa la estabilidad lineal de configuraciones poligonales sobre la esfera.

El primer capítulo, **Sobre Vórtices en el Plano** cubre los principios básicos de la dinámica de vórtices en el plano (apoyado en [1]) y funciona como prototipo de lo que queremos aplicar a superficies. A pesar de ser un capítulo casi exclusivamente motivacional, incluirlo es importante para dar contexto y dirección al trabajo presentado. Se precisa lo que *es* un vórtice y se desarrollan algunas ecuaciones al respecto. Finalmente se dan un par de ejemplos analíticos y numéricos (éstos últimos corren por cuenta mía) donde se observa que dada una configuración poligonal no hay equilibrios pero sí hay equilibrios relativos.

El capítulo 2, **Sobre Vórtices en Superficies**, es bastante más técnico y funciona como marco teórico. Está fuertemente basado en el artículo [2]. Escencialmente se trata de extender la primera parte del capítulo anterior a superficies. De nuevo se plantean las ecuaciones de los vórtices estáticos pero para describir la dinámica se constuyen hamiltonianos, funciones de Green y funciones de corriente. Empezamos trabajando lo más general posible, empezando con variedades compactas y terminando con la teoría aplicada a superficies de revolución.

Volvemos, en el tercer capítulo **Sobre Vórtices en la Esfera**, a exhibir ejemplos concretos para fomentar la intuición y generar motivación. Aplicamos la teoría del capítulo anterior a la esfera y observamos que arriba del ecuador, los vórtices parecen comportarse como en el plano mientras que en el ecuador el comportamiento es distinto. De nuevo nos encontramos con

un equilibrio relativo y es éste fenómeno el que verdaderamente nos interesa estudiar con cuidado.

Hacia el final de la tesis, como sugiere el título de cuarto capítulo, **La Estabilidad**, buscamos estudiar la estabilidad lineal de lo que hemos construido. Para ello debemos linealizar el sistema que tenemos. Tomamos como guía a [5], pero necesitaremos adaptar los resultados obtenidos en los primeros capítulos. Acabando el capítulo damos un criterio suficiente y necesario para garantizar estabilidad lineal.

Acabamos nuestro estudio en las **Observaciones Finales**, donde brevemente describimos todo el proceso, damos un par de aplicaciones muy atractivas a escalas drásticamente lejanas y sugerimos posibles investigaciones posteriores como continuación de este trabajo.

# Índice general

---

Reconocimientos y Agradecimientos . . . . .	III
Resumen . . . . .	IX
<b>Índice de figuras</b>	<b>XI</b>
<b>1. Sobre Vórtices en el Plano</b>	<b>13</b>
1.1. La Función de Corriente y la Distribución de Vorticidad . . . . .	13
1.1.1. Ejemplo - Una distribución de vorticidad puntual . . .	14
1.1.2. Ejemplo - Distribuciones de vorticidad sobre polígonos regulares . . . . .	17
1.2. La Dinámica de los Vórtices y los Equilibrios Relativos . . . . .	18
1.2.1. Un par de simulaciones numéricas . . . . .	19
1.2.2. Los equilibrios . . . . .	21
1.2.3. Los equilibrios relativos . . . . .	21
<b>2. Sobre Vórtices en Superficies</b>	<b>23</b>
2.1. La Energía del Sistema de Vórtices . . . . .	23
2.1.1. El problema de la inversión del operador . . . . .	24
2.1.2. Los vórtices puntuales y la energía del sistema . . . .	25
2.1.3. La renormalización del Hamiltoniano . . . . .	27
2.2. Calculando la Función de Green ( $\mathbf{G}$ ) en Superficies de Revolución . . . . .	29
2.2.1. Transformaciones conformes . . . . .	29
2.2.2. La función de Green sobre la superficie perforada $\mathbf{S}_p$ .	30
2.2.3. Extendiendo la función de Green al resto de $\mathbf{S}$ . . . .	32
2.3. La Dinámica en Superficies de Revolución . . . . .	35
2.3.1. Un resultado sobre variedades simplécticas . . . . .	36

2.3.2.	Las ecuaciones de movimiento para superficies de revolución . . . . .	37
<b>3.</b>	<b>Sobre Vórtices en la Esfera</b>	<b>41</b>
3.1.	Un Pálido Punto Azul . . . . .	41
3.2.	La Función de Corriente . . . . .	44
3.2.1.	Ejemplo 3.1 - Una distribución de vorticidad puntual .	45
3.2.2.	Ejemplo 3.2 - Distribuciones de vorticidad sobre polígonos regulares . . . . .	46
3.3.	La Dinámica de Los Vórtices . . . . .	47
3.3.1.	Otro par de simulaciones numéricas . . . . .	47
3.3.2.	Los equilibrios y los equilibrios relativos . . . . .	49
<b>4.</b>	<b>La Estabilidad Lineal</b>	<b>51</b>
4.1.	Pasando al Mundo Complejo . . . . .	51
4.1.1.	El cambio de variables . . . . .	51
4.1.2.	El nuevo planteamiento . . . . .	53
4.2.	La Linealización . . . . .	54
4.2.1.	Representaciones irreducibles . . . . .	56
4.3.	El Criterio de Estabilidad . . . . .	60
4.3.1.	Las frecuencias normales . . . . .	60
4.3.2.	El teorema de la estabilidad lineal . . . . .	62
<b>5.</b>	<b>Observaciones Finales</b>	<b>65</b>
5.1.	Una interpretación del criterio de estabilidad . . . . .	65
5.2.	Un par de aplicaciones potenciales . . . . .	66
5.2.1.	Fenómenos atmosféricos . . . . .	66
5.2.2.	El <i>BECMEX</i> . . . . .	69
<b>A.</b>	<b>Apéndice</b>	<b>71</b>
A.1.	La Integral . . . . .	71
	<b>Bibliografía</b>	<b>75</b>

# Índice de figuras

---

1.1.	Campo de velocidades $\mathbf{V}$ y algunas trayectorias. . . . .	15
1.2.	Campo de velocidades $\mathbf{U}_2$ y algunas líneas integrales sobre- puestas a la Lemniscata de Bernoulli. . . . .	18
1.3.	Campos de velocidades $\mathbf{U}_3$ , $\mathbf{U}_4$ , $\mathbf{U}_5$ . y algunas líneas integrales.	18
1.4.	Dinámica de vórtices con distribución inicial $\omega_1$ calculada numéricamente en $t = 0, \pi, 2\pi$ . . . . .	20
1.5.	Dinámica de vórtices con distribución inicial $\omega_{-1}$ calculada numéricamente en $t = 0, 3, 6$ . . . . .	20
3.1.	La esfera unitaria, en azul. . . . .	41
3.2.	Campo de velocidades $\mathbf{U}_0$ y algunas líneas integrales. . . . .	45
3.3.	Campos de velocidades $\mathbf{U}_1$ y $\mathbf{U}_2$ . En azul están los vórtices y en rojo las trayectorias obtenidas al simular numéricamente partículas prueba colocadas en distintas posiciones. . . . .	46
3.4.	Dinámica de vórtices correspondiente al campo $\mathbf{U}_2$ . En azul las posiciones iniciales y en morado las trayectorias. . . . .	48
3.5.	Dinámica de vórtices correspondiente al campo $\mathbf{U}_1$ . En azul las posiciones iniciales y vacuamente en morado las trayectorias.	48
5.1.	El hexágono de Saturno. (Imágenes cortesía de [11] y [12]) . .	67
5.2.	El octágono y el pentágono de Júpiter. (Imágenes cortesía de [13] y [14]) . . . . .	68
5.3.	El <i>BECMEX</i> levitando en su trampa magneto-óptica. (Foto cortesía de Andrés Gutiérrez) . . . . .	69



# Sobre Vórtices en el Plano

---

Si pretendemos estudiar la dinámica de vórtices, es buena idea empezar por concretar qué entendemos por *vórtice* y cómo es su dinámica.

## 1.1. La Función de Corriente y la Distribución de Vorticidad

Comenzando en el plano, pensaremos en un fluido dos dimensional descrito de manera Euleriana por un campo de velocidades  $\mathbf{V}(x, y) = u(x, y)\mathbf{i} + v(x, y)\mathbf{j}$ . Además pediremos que el fluido no tenga viscosidad. Éste debe satisfacer la ecuación de continuidad, a decir

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt},$$

donde  $\rho$  es la *densidad* del fluido y  $\frac{D\rho}{Dt} \equiv \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla\rho$  es la derivada material de la densidad. Diremos que dicho fluido es *incompresible* si  $\frac{D\rho}{Dt} \equiv 0$ . Si un fluido es incompresible, la ecuación de continuidad se traduce en  $\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ . Si definimos  $\psi$  a través de

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\partial\psi}{\partial y} & \text{y} \\ v &= \frac{\partial\psi}{\partial x} \end{aligned}$$

la ecuación de continuidad para el fluido incompresible se satisface automáticamente, ya que  $\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial\psi}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\frac{\partial\psi}{\partial x}) = 0$ . Entonces podemos reescribir

a  $\mathbf{V}$  del siguiente modo

$$\mathbf{V} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}\mathbf{i} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\mathbf{j}. \quad (1.1)$$

Lo valioso de esto es que pudimos escribir a  $\mathbf{V}$  en términos de una función escalar, pero lo más importante de este tipo de funciones es que las trayectorias que mantienen constante a  $\psi$  coinciden con las líneas de corriente: dado que  $d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = vdx - udy$ , si  $\psi$  es constante se tiene que  $d\psi = 0$  y entonces  $\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$ . Por eso a  $\psi$  le llamamos la *Función de Corriente*<sup>1</sup>. Por otro lado, la función de corriente está relacionada con el rotacional de  $\mathbf{V}$  (estrictamente pensando en un encaje de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^3$ ) de la siguiente manera:

$$\nabla \times \mathbf{V} = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \mathbf{k} = \Delta \psi \mathbf{k}.$$

De modo que si definimos a  $\omega$  como la magnitud escalar de  $\nabla \times \mathbf{V}$  obtenemos la ecuación de Poisson central a esta tesis

$$\Delta \psi = \omega, \quad (1.2)$$

donde a  $\omega$  le llamamos *distribución de vorticidad* de  $\mathbf{V}$ . Lo anterior nos dice que dada una distribución de vorticidad sobre un fluido incompresible, deberíamos poder reconstruir la función de corriente y, a su vez, el campo de velocidades. Veamos un ejemplo para ejercitar la imaginación.

### 1.1.1. Ejemplo - Una distribución de vorticidad puntual

Consideremos una distribución de vorticidad puntual y constante. Esto queda modelado por la siguiente distribución de vorticidades:  $\omega = \delta$ , donde  $\delta$  es la Delta de Dirac en el origen. Así, nos gustaría resolver

$$\Delta \psi = \delta. \quad (1.3)$$

Afortunadamente, un resultado clásico de la teoría de ecuaciones diferenciales parciales es que la solución está dada por

$$\psi(\mathbf{x}) = \int \delta(\mathbf{y})G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \int \delta(\mathbf{y}) \log \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| d\mathbf{y} = \frac{1}{2\pi} \log \|\mathbf{x}\|,$$

con

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \log \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (1.4)$$

---

<sup>1</sup>*Stream Function* en inglés.

la función de Green en el plano.

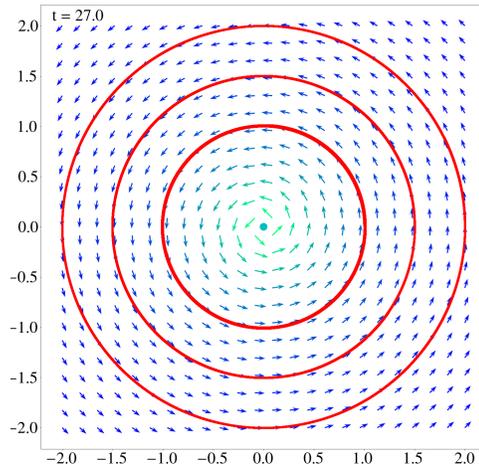
Retomando 1.1

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(x, y) &= -\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial y}\mathbf{i} + \frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x}\mathbf{j} \\ &= -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2\pi}\log\sqrt{x^2 + y^2}\right)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2\pi}\log\sqrt{x^2 + y^2}\right)\mathbf{j} \\ &= -\frac{y}{2\pi(x^2 + y^2)}\mathbf{i} + \frac{x}{2\pi(x^2 + y^2)}\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Sólo por completitud, consideremos una partícula prueba colocada en  $(r_0, 0)$ . En ese campo de velocidades su cinemática queda descrita por

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{-y}{2\pi(x^2+y^2)} \\ \dot{y} = \frac{x}{2\pi(x^2+y^2)} \\ (x(0), y(0)) = (r_0, 0) \end{cases} \implies \begin{cases} x(t) = r_0 \cos\left(\frac{t}{2\pi r_0^2}\right) \\ y(t) = r_0 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2\pi r_0^2}\right) \end{cases}.$$

No es sorpresa que obtengamos un movimiento circular, por algo se llaman vorticidades. Incluso así, vale la pena notar que la función de corriente  $\psi$  es constante si y sólo si la norma del argumento es constante (Fig 1.1).



**Figura 1.1:** Campo de velocidades  $\mathbf{V}$  y algunas trayectorias.

Un lector atento notará que hay un problema con nuestras ecuaciones de movimiento: no están bien definidas en el origen. Sin embargo, vemos que

las ecuaciones son radialmente simétricas, así que en el origen no puede haber una dirección privilegiada y la única velocidad que satisface esto es la nula. Es decir, que si la partícula prueba pasó por el origen en realidad se queda ahí siempre. Intuitivamente, podemos pensar que en ese punto todas las velocidades se “cancelan”, de modo que el centro **no induce velocidad en sí mismo**.

Para empezar a generalizar esto, elijamos una constante  $\Gamma_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$ , un punto  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$  e incorpóremoslos en (1.3) para tener  $\Delta\psi = \Gamma_0\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \Gamma_0\delta_{\mathbf{x}_0}$ . Como lo único que hicimos fue trasladar y reescalar, tenemos que  $\psi(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma_0}{2\pi} \log |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ . Queda claro que  $\mathbf{x}_0$  *mueve* al centro de lugar y por ello lo llamaremos *centro de vorticidad*; mientras que  $\Gamma_0$ , al ser un escalar, sólo altera el campo de velocidades  $\mathbf{V}$  de forma lineal: su signo controla la dirección del campo (dextrógiro si es positivo, como vimos en el ejemplo 1.1.1) y su magnitud altera la intensidad del campo, así que a  $\Gamma_0$  le llamamos *circulación de vorticidad*.

Con todo esto ya podemos empezar a considerar  $n$  vorticidades puntuales, con centros en  $\mathbf{x}_i$  (todos distintos) y circulaciones  $\Gamma_i$ . Por superposición, la distribución de vorticidad quedaría como  $\Delta\psi = \sum_{i=1}^n \Gamma_i\delta_{\mathbf{x}_i}$ . De hecho, del ejemplo 1.1.1 es fácil ver que

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \Gamma_i \log \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|. \quad (1.5)$$

De aquí podríamos usar (1.1) para describir la dinámica de una partícula prueba, pero resulta más simple determinar las líneas integrales:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}) &= cte, \\ \implies \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \Gamma_i \log \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| &= cte, \\ \implies \sum_{i=1}^n \log (\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^{\Gamma_i}) &= cte, \\ \implies \log \left( \prod_{i=1}^n \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^{\Gamma_i} \right) &= cte, \\ \implies \prod_{i=1}^n \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^{\Gamma_i} &= cte. \end{aligned} \quad (1.6)$$

### 1.1.2. Ejemplo - Distribuciones de vorticidad sobre polígonos regulares

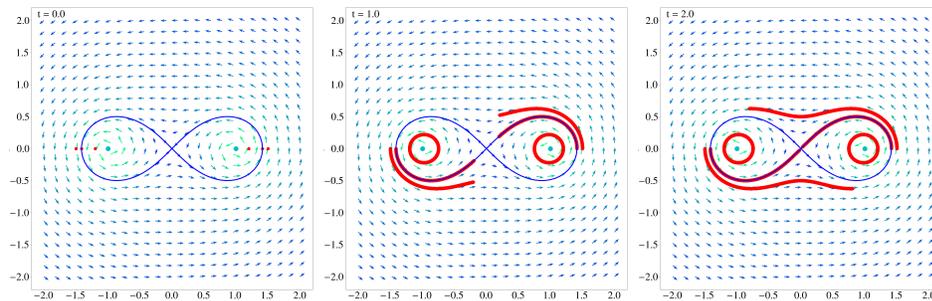
Sea  $\mathbf{A}_n = \{(\cos(\frac{2\pi k}{n}), \sin(\frac{2\pi k}{n})) \in \mathbb{R}^2 : k \in \mathbb{N}, 0 < k \leq n\}$  el conjunto de vértices de un  $n$ -ágono regular. Consideremos una distribución de vórtices puntuales  $\omega_n$  cuyos centros coinciden con los vértices y tomemos circulaciones idénticas (digamos  $\Gamma_k = 2$  con  $0 < k \leq n$ ) entonces, de (1.6), las líneas integrales del campo de velocidades inducido  $\mathbf{U}_n$  quedan descritas por

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_k\|^2 &= cte, \\ \implies \prod_{k=1}^n \left[ x^2 + y^2 + 1 - 2x \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) - 2y \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \right] &= cte. \end{aligned} \quad (1.7)$$

El caso  $n = 2$ ,  $cte = 1$  es suficientemente sencillo y estético como para incluirlo aquí:

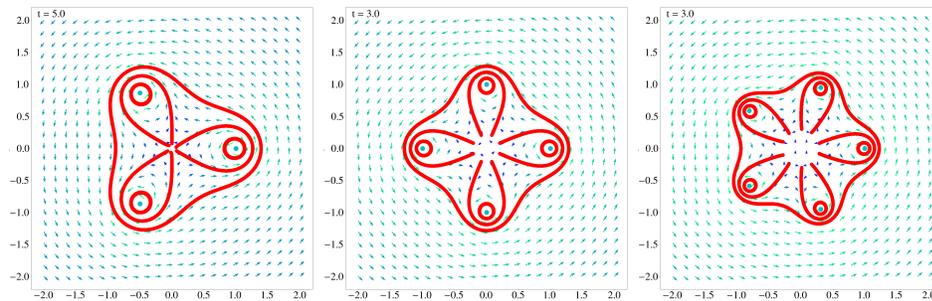
$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^2 x^2 + y^2 + 1 - 2x \cos\left(\frac{2\pi k}{2}\right) - 2y \sin\left(\frac{2\pi k}{2}\right) &= 1, \\ \implies (x^2 + y^2 + 1 + 2x)(x^2 + y^2 + 1 - 2x) &= 1, \\ \implies x^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 + y^4 + 2y^2 &= 0, \\ \implies (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Resulta que 1.8 es la Lemniscata de Bernoulli, cuyos focos  $((-1, 0), (1, 0))$  coinciden con los centros de la distribución (Fig. 1.2).



**Figura 1.2:** Campo de velocidades  $U_2$  y algunas líneas integrales sobrepuestas a la Lemniscata de Bernoulli.

Aumentando el número de vórtices y variando la constante se obtienen trayectorias parecidas (Fig. 1.3).



**Figura 1.3:** Campos de velocidades  $U_3$ ,  $U_4$ ,  $U_5$ . y algunas líneas integrales.

## 1.2. La Dinámica de los Vórtices y los Equilibrios Relativos

Ya vimos cómo influyen en su entorno un conjunto de distribuciones puntuales de vorticidad *constantes*. El siguiente problema atractivo por estudiar es qué pasa si *soltamos* a los vórtices y los dejamos interactuar entre sí, es decir, la dinámica de vórtices puntuales. Intuitivamente, cada vórtice se comporta como una partícula prueba respecto a los demás e intenta seguir lo mejor posible las líneas de integrales en cada instante. Formalmente, esto es consecuencia del segundo teorema de Helmholtz: los vórtices se mue-

ven con el fluido. Así, podemos simplemente imponer la siguiente condición cinemática

$$\dot{\mathbf{x}}_j = \mathbf{V}(\mathbf{x}_j) = (-\partial_y \bar{\psi}_j(\mathbf{x}_j), \partial_x \bar{\psi}_j(\mathbf{x}_j))$$

donde  $\bar{\psi}_j(\mathbf{x}) := \frac{1}{2\pi} \sum_{i \neq j} \Gamma_i \log \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|$  para quitar la auto-interacción del  $j$ -ésimo vórtice (a  $\bar{\psi}_j$  la llamamos la *función de corriente renormalizada*). Tenemos que

$$\begin{aligned} \partial_x \bar{\psi}_j(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2\pi} \sum_{i \neq j} \Gamma_i \log \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i \neq j} \Gamma_i \frac{\partial}{\partial x} (\log \|(x - x_i, y - y_i)\|) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i \neq j} \Gamma_i \frac{\partial}{\partial x} \left( \log \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i \neq j} \Gamma_i \frac{x - x_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^2}, \end{aligned}$$

análogamente

$$\partial_y \bar{\psi}_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i \neq j} \Gamma_i \frac{y - y_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^2}.$$

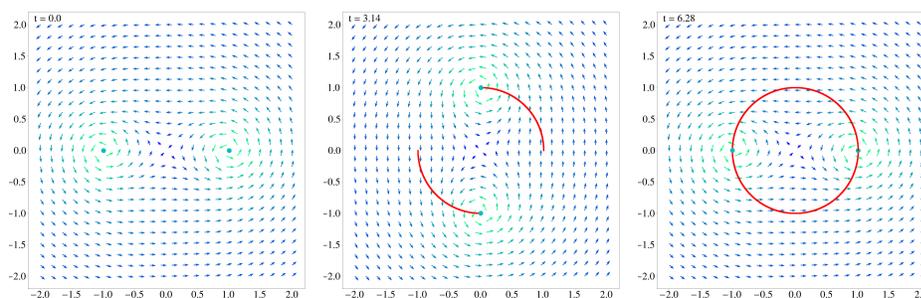
Así

$$\dot{\mathbf{x}}_j(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i \neq j} \frac{\Gamma_i}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|^2} (y_i - y_j, x_j - x_i). \quad (1.9)$$

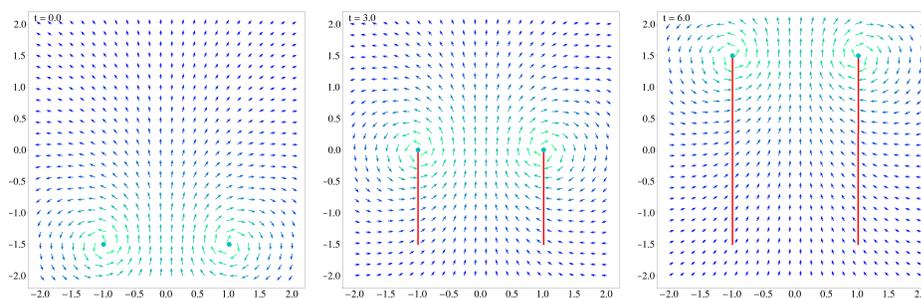
### 1.2.1. Un par de simulaciones numéricas

En [1] hay un estudio amplio sobre los equilibrios de (1.9), sin embargo, a primera vista, de la ecuación no es inmediato si existen puntos de equilibrio o configuraciones interesantes por estudiar. Para empezar podemos simular los casos más básicos para darnos una idea superficial sobre qué sí podríamos estudiar. Consideremos dos vórtices con vorticidades iguales y otros dos con vorticidades opuestas, esto es  $\omega_1(\mathbf{x}, 0) = \delta_{(-1,0)} + \delta_{(1,0)}$  y  $\omega_{-1}(\mathbf{x}, 0) = \delta_{(1,-\frac{3}{2})} - \delta_{(-1,-\frac{3}{2})}$ . Ésas son, módulo traslaciones y rotaciones, todas las configuraciones para dos vórtices.

Las figuras 1.4 y 1.5 muestran los resultados numéricos. Se observan dos comportamientos distintos: para los vórtices idénticos tenemos un movimiento circular mientras que los vórtices inversos tiene un movimiento traslacional. Ninguno es un equilibrio pero son evidencia de que, quizá, la dinámica tiene una estructura estudiable<sup>1</sup>.



**Figura 1.4:** Dinámica de vórtices con distribución inicial  $\omega_1$  calculada numéricamente en  $t = 0, \pi, 2\pi$ .



**Figura 1.5:** Dinámica de vórtices con distribución inicial  $\omega_{-1}$  calculada numéricamente en  $t = 0, 3, 6$ .

Así pues, nosotros vamos a estudiar lo que pasa con  $n$  vórtices, considerando una situación simplificada: pedimos que los vórtices tengan **vorticidades idénticas**  $\Gamma_j = 1$ ;  $0 \leq j \leq n$  y que inicialmente estén distribuidos sobre un  $n$ -ágono regular  $\mathbf{x}_j(0) = (\cos \frac{2\pi j}{n}, \sin \frac{2\pi j}{n})$ . Aun con esa simplificación, el sistema 1.9 es fundamentalmente no lineal, de modo que, como con todos los sistemas no lineales, empezaremos buscando los puntos de equilibrio.

<sup>1</sup>*Spoiler alert:* sí la tiene.

### 1.2.2. Los equilibrios

No hay. No es difícil ver de (1.9) que, dada nuestra configuración poligonal con vorticidades idénticas, el único equilibrio posible ocurre si  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j$  para todas  $i, j$ , lo cual equivale a sobreponer todos los vórtices en el mismo lugar para tener uno “grandote”. Este caso no nos es de interés.

### 1.2.3. Los equilibrios relativos

Volviendo a la fig. 1.4, se observa que, aunque no había puntos de equilibrio, sí hay una dinámica bien portada - cada vórtice está en equilibrio relativo a los demás. Veamos que esto es cierto en general:

Fijémonos en el momento inicial  $t = 0$

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}}_0(0) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_k\|^2} (y_k - y_0, x_0 - x_k) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{|\mathbf{x}_0(0)|^2 + |\mathbf{x}_k(0)|^2 - 2\mathbf{x}_0(0) \cdot \mathbf{x}_k(0)} \left( \operatorname{sen} \frac{2\pi k}{n}, 1 - \cos \frac{2\pi k}{n} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2(1 - \cos \frac{2\pi k}{n})} \left( \operatorname{sen} \frac{2\pi k}{n}, 1 - \cos \frac{2\pi k}{n} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{\cot \frac{\pi k}{n}}{2}, \frac{1}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Como estamos sumando sobre los vértices de un polígono las cotangentes se anulan y así

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}}_0(0) &= \frac{1}{2\pi} \left( 0, \frac{n-1}{2} \right) \\
 &= \left( 0, \frac{n-1}{4\pi} \right) \\
 &= (0, f(n)).
 \end{aligned}$$

Argumentando por simetría tenemos que

$$\dot{\mathbf{x}}_j(t) = f(n) \left( \frac{-y_j}{\sqrt{x_j^2 + y_j^2}}, \frac{x_j}{\sqrt{x_j^2 + y_j^2}} \right) \quad (1.10)$$

para  $f(n) = \frac{n-1}{4\pi}$ . Ahora, en coordenadas polares, podemos escribir

$$\begin{aligned}\dot{r}_j(t) &= \frac{x_j\dot{x}_j + y_j\dot{y}_j}{\sqrt{x_j^2 + y_j^2}} = f(n) \frac{-x_jy_j + x_jy_j}{x_j^2 + y_j^2} = 0, \\ \dot{\theta}_j(t) &= \frac{x_j\dot{y}_j - y_j\dot{x}_j}{x_j^2 + y_j^2} = f(n) \frac{x_j^2 + y_j^2}{x_j^2 + y_j^2} = f(n).\end{aligned}\tag{1.11}$$

Esto nos dice que al colocar los vórtices sobre un  $n$ -ágono, éstos se moverán al rededor del origen a **velocidad angular constante**, conservando su configuración  $n$ -gonal. Esto es un equilibrio relativo y si pasáramos a coordenadas rotantes con una rotación compensante  $\omega_n = -f(n)$  tendríamos un equilibrio de verdad. Esto es lo que haremos con más detalle sobre la esfera en el tercer capítulo.

# Sobre Vórtices en Superficies

---

Ya discutimos vórtices fijos y dinámicos en el plano. No hay mucho más por hacer ahí, así que el siguiente paso es cambiar el ambiente - pasarlos a una superficie curva. En este capítulo derivaremos la dinámica de vórtices sobre superficies y daremos dos representaciones: una *local* y una *encajada*.

## 2.1. La Energía del Sistema de Vórtices

Sea  $S$  una superficie compacta diferenciable. Si pensamos a  $S$  encajada en  $\mathbb{R}^3$ , entonces bastan dos parámetros  $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$  para que cualquier punto se pueda ver como  $\mathbf{r}(\mathbf{s}) = \mathbf{r}(s_1, s_2) = (x(s_1, s_2), y(s_1, s_2), z(s_1, s_2))$ .

### Flujo Incompresible Inducido por Vorticidades

Sea  $\omega(\mathbf{s}, t)$  una distribución de vorticidades tal que el campo de velocidades inducido  $\mathbf{U}(\mathbf{s}, t)$  es incompresible, es decir,  $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$ . Por definición,  $\frac{d}{dt}\mathbf{r} = \mathbf{U}$  y dado que la distribución de vorticidades se conserva al seguir un elemento de fluido, nos gustaría determinar el movimiento de un elemento arbitrario de fluido inducido por  $\omega(\mathbf{s}, t)$ . Este problema, como en el plano, es fundamentalmente no lineal ya que el movimiento redistribuye  $\omega(\mathbf{s}, t)$ .

De lo que vimos en el primer capítulo y extendiéndolo a la superficie podemos escribir el campo de velocidades como

$$\mathbf{U} = \mathbf{n} \times \nabla \psi, \tag{2.1}$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector normal a la superficie (considerando a ésta encajada en  $\mathbb{R}^3$ ) y  $\psi$  la función de corriente. Afortunadamente, también vimos que

$$\omega = \Delta\psi, \quad (2.2)$$

con  $\Delta$  el operador de Laplace-Beltrami. De modo que el plan es éste: resolvemos 2.2 para obtener  $\psi$  y con 2.1 recuperamos  $\mathbf{U}$  describiendo el movimiento de las partículas y la evolución de  $\omega$  en  $S$ .

### 2.1.1. El problema de la inversión del operador

Para resolver resolver 2.2 necesitamos *invertir* el operador de Laplace-Beltrami. Pero aun antes de ponernos a invertir distribuciones necesitamos dar una distribución. Notemos que, dada una superficie compacta  $S$ , si  $\omega$  realmente define un campo de velocidades entonces debe integrar 0:

$$\iint_S \omega(\mathbf{s}, t) d\Omega_S = \iint_S \Delta\psi(\mathbf{s}, t) d\Omega_S,$$

pero  $\Delta\psi = \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{U})$ , así

$$= \iint_S \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{U}) d\Omega_S,$$

y aplicando el Teorema de la Divergencia

$$\begin{aligned} &= \iiint_V \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{U}) dV \\ &= \iiint_V 0 dV = 0. \end{aligned}$$

A esto se le llama *Condición de Gauss*, habla de la conservación del momento angular y es una condición necesaria para que realmente tengamos un campo de velocidades.

Si ahora consideramos, inocentemente, una distribución de vorticidad como las que teníamos en el plano, a decir, de la forma  $\omega(\mathbf{s}, t) = \Gamma_0 \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0)$

tendríamos que

$$\iint_S \omega(\mathbf{s}, t) d\Omega_S = \iint_S \Gamma \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) = \Gamma.$$

Esto no se anula al menos que  $\Gamma$  sea cero, pero ese caso no es de interés porque corresponde a un vórtice sin vorticidad. Entonces, la distribución inocente no cumple la condición de Gauss y, en consecuencia, no define un campo de velocidades válido. Para remediar esto, introducimos un *campo compensante*<sup>1</sup> para quedarnos con  $\omega(\mathbf{s}, t) = \Gamma_0 \left( \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) - \frac{1}{A} \right)$  donde  $A$  es el área de  $S$ , así

$$\iint_S \omega(\mathbf{s}, t) d\Omega_S = \iint_S \Gamma \left( \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) - \frac{1}{A} \right) = \Gamma \left( 1 - \frac{1}{A} A \right) = 0.$$

Con las distribuciones de vorticidad definidas, ya podemos pasar a invertir 2.2. Usando lo que sabemos de funciones de Green, tenemos que la solución general es

$$\psi_0(\mathbf{s}, t) = \iint_S G(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0) \omega(\mathbf{s}_0, t) d\Omega_{\mathbf{s}}, \quad (2.3)$$

donde  $G(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0)$  es la solución de fundamental o la función de Green, la cual se obtiene de

$$\Delta G(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0) = \omega(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) = \Gamma_0 \left( \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) - \frac{1}{A} \right). \quad (2.4)$$

Por lo pronto trabajaremos dando por sentado a la  $G$ . Más adelante, cuando haga falta en casos particulares, la derivaremos con cuidado.

### 2.1.2. Los vórtices puntuales y la energía del sistema

De aquí en adelante consideramos  $n$  vórtices puntuales con centros  $\mathbf{s}_k(t)$  y circulaciones  $\Gamma_k$ . Sobreponiéndolos obtenemos

$$\omega(\mathbf{s}, t) = \sum_j \Gamma_j \left( \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_j(t)) - \frac{1}{A} \right). \quad (2.5)$$

---

<sup>1</sup>*Nota bene:* En [3] proponen alternativas para garantizar la condición de Gauss, entre ellas destaca la idea de colocar una vórticidad globalmente opuesta a las demás en el polo norte. Volveremos a mencionar esto más adelante.

Entonces de 2.3 tenemos que para el  $k$ -ésimo vórtice se cumple

$$\begin{aligned}
\psi_k(\mathbf{s}, t) &= \iint_S G(\mathbf{s}, \mathbf{s}_k) \omega(\mathbf{s}_k, t) d\Omega_{\mathbf{s}} \\
&= \iint_S G(\mathbf{s}, \mathbf{s}_k) \Gamma_k \left( \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_k(t)) - \frac{1}{A} \right) d\Omega_S \\
&= \Gamma_k \iint_S G(\mathbf{s}, \mathbf{s}_k) \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_k(t)) d\Omega_S - \frac{\Gamma_k}{A} \iint_S G(\mathbf{s}, \mathbf{s}_k) d\Omega_S \\
&= \Gamma_k G(\mathbf{s}, \mathbf{s}_k(t)).
\end{aligned}$$

Así, por superposición, la función de corriente queda como

$$\psi(\mathbf{s}, t) = \sum_k \Gamma_k G(\mathbf{s}, \mathbf{s}_k(t)) \quad (2.6)$$

para  $\mathbf{s} \neq \mathbf{s}_k$ .

De nuevo, el problema es que - como en el plano -  $\psi$  es singular en cada vórtice. Sin embargo, esta vez no basta anular la función de corriente en el punto singular para quitar la autointeracción, pues al tratarse de una superficie compacta, la autointeracción tiene dos partes: una parte local y una que puede “regresar por atrás”. Esto, esencialmente, se debe al término  $\frac{1}{A}$ .

Para darle la vuelta a este problema usaremos las ecuaciones de Hamilton directamente y para ello necesitamos calcular la energía de interacción (el Hamiltoniano  $H$ ) del sistema de los  $n$  vórtices sobre  $S$ . La energía cinética  $E$  es

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2} \iint_S \|\mathbf{U}(\mathbf{s}, t)\|^2 d\Omega = \frac{1}{2} \iint_S \|\nabla\psi(\mathbf{s}, t)\|^2 d\Omega \\
&= \frac{1}{2} \iint_S \nabla\psi(\mathbf{s}, t) \cdot \nabla\psi(\mathbf{s}, t) d\Omega_S = -\frac{1}{2} \iint_S \psi(\mathbf{s}, t) \Delta\psi(\mathbf{s}, t) d\Omega_S \\
&= -\frac{1}{2} \iint_S \psi(\mathbf{s}, t) \omega(\mathbf{s}, t) d\Omega_S = -\frac{1}{2} \iint_S \psi(\mathbf{s}, t) \sum_j \Gamma_j \left( \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_j(t)) - \frac{1}{A} \right) d\Omega_S \\
&= -\frac{1}{2} \sum_j \Gamma_j \psi(\mathbf{s}_j, t) + \frac{\sum_j \Gamma_j}{2A} \iint_S \psi(\mathbf{s}, t) d\Omega_S.
\end{aligned} \quad (2.7)$$

Para una partícula prueba, como la del Ejemplo 1.1.1, podríamos tomar  $H = E$  como el Hamiltoniano y acabaríamos; desafortunadamente, para los

vórtices no podemos tomar así al Hamiltoniano por la autointeracción ya mencionada. Vimos, en el caso del plano, que bastaba considerar la simetría radial para anular la posible autointeracción de un vórtice. Tampoco podemos repetir ese argumento ahora porque no sabemos que nuestra superficie sea radialmente simétrica alrededor de un vórtice. Necesitamos una manera más sofisticada de remover la autointeracción *local* sin quitar la que pudiese “regresar por atrás”. En física, a este proceso se le suele llamar *renormalización*.

### 2.1.3. La renormalización del Hamiltoniano

Para poder hablar legítimamente de “localidad” le pedimos a nuestra superficie  $S$  que sea una variedad diferenciable. Así, para cada vórtice, podemos comparar la autointeracción local con el comportamiento “planar” que estudiamos en el primer capítulo. Recordemos lo que hicimos para renormalizar las funciones de corriente en la sección 1.1.2:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_k(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j \neq k} \Gamma_j \log \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\| = \frac{1}{2\pi} \sum_j \Gamma_j \log \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\| - \frac{1}{2\pi} \Gamma_k \log \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| \\ &= \psi_k(\mathbf{x}) - \frac{1}{2\pi} \Gamma_k \log \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|.\end{aligned}$$

Esto debería funcionar *localmente* y motiva definir a la función de corriente en el  $k$ -ésimo vórtice como el siguiente límite:

$$\psi(\mathbf{s}_k, t) := \lim_{\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}_k} \left( \psi(\mathbf{s}, t) - \frac{\Gamma_k}{2\pi} \log d(\mathbf{s}, \mathbf{s}_k) \right), \quad (2.8)$$

con  $d(\cdot, \cdot)$  la distancia geodésica de la superficie  $S$ . Entonces, retomando 2.6, tendríamos que

$$\begin{aligned}
\psi(\mathbf{s}_k, t) &= \lim_{\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}_k} \left( \psi(\mathbf{s}, t) - \frac{\Gamma_k}{2\pi} \log d(\mathbf{s}, \mathbf{s}_k) \right) \\
&= \lim_{\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}_k} \left( \sum_j \Gamma_j G(\mathbf{s}, \mathbf{s}_j) - \frac{\Gamma_k}{2\pi} \log d(\mathbf{s}, \mathbf{s}_k) \right) \\
&= \lim_{\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}_k} \left( \sum_{j \neq k} \Gamma_j G(\mathbf{s}, \mathbf{s}_j) + \Gamma_k G(\mathbf{s}, \mathbf{s}_k) - \frac{\Gamma_k}{2\pi} \log d(\mathbf{s}, \mathbf{s}_k) \right) \\
&= \sum_{j \neq k} \Gamma_j G(\mathbf{s}_k, \mathbf{s}_j) + \Gamma_k \lim_{\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}_k} \left( G(\mathbf{s}, \mathbf{s}_k) - \frac{1}{2\pi} \log d(\mathbf{s}, \mathbf{s}_k) \right) \\
&= \sum_{j \neq k} \Gamma_j G(\mathbf{s}_k, \mathbf{s}_j) + \Gamma_k R(\mathbf{s}_k). \tag{2.9}
\end{aligned}$$

Al factor  $R(\mathbf{s}_k) = \lim_{\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}_k} (G(\mathbf{s}, \mathbf{s}_k) - \frac{1}{2\pi} \log d(\mathbf{s}, \mathbf{s}_k))$  se le conoce como la *Función de Robin*. Sustituyendo esto en 2.7 podemos plantear el Hamiltoniano para el sistema de  $n$  vórtices como

$$\begin{aligned}
H &= -\frac{1}{2} \sum_k \Gamma_k \psi(\mathbf{s}_k, t) + \frac{\sum_k \Gamma_k}{2A} \iint_S \psi(\mathbf{s}, t) d\Omega_S \\
&= -\frac{1}{2} \sum_k \Gamma_k \left( \sum_{j \neq k} \Gamma_j G(\mathbf{s}_k, \mathbf{s}_j) + \Gamma_k R(\mathbf{s}_k) \right) + \frac{\sum_k \Gamma_k}{2A} \iint_S \psi(\mathbf{s}, t) d\Omega_S \\
&= -\frac{1}{2} \sum_k \sum_{j \neq k} \Gamma_k \Gamma_j G(\mathbf{s}_k, \mathbf{s}_j) - \frac{1}{2} \sum_k \Gamma_k^2 R(\mathbf{s}_k) + \frac{\sum_k \Gamma_k}{2A} \iint_S \psi(\mathbf{s}, t) d\Omega_S.
\end{aligned}$$

Hay un par de observaciones que hacer sobre esta expresión.

Primero, notemos que no hemos supuesto nada más allá de que  $S$  es una variedad diferenciable y compacta, así que el Hamiltoniano es bastante general. Segundo, el último término es constante ya que la integral de  $\psi$  sobre la superficie no cambia, así que podemos omitirlo, simplificando el Hamiltoniano a

$$H = -\frac{1}{2} \sum_j \sum_{k \neq j} \Gamma_j \Gamma_k G(\mathbf{s}_j, \mathbf{s}_k) - \frac{1}{2} \sum_j \Gamma_j^2 R(\mathbf{s}_j). \tag{2.10}$$

El primer término describe la interacción entre pares de vórtices mientras que el segundo describe la autointeracción renormalizada.

## 2.2. Calculando la Función de Green ( $G$ ) en Superficies de Revolución

Hasta ahora todo ha sido muy directo porque hemos procrastinado el cálculo explícito de la función de Green. Procederemos a calcularla para superficies de revolución en esta sección. Si  $S$  es de revolución respecto al eje  $z$ , su representación cartesiana es

$$\mathbf{x}(\theta, \varphi) = (x(\theta, \varphi), y(\theta, \varphi), z(\theta, \varphi)) = (\rho(\theta) \cos \varphi, \rho(\theta) \sin \varphi, \zeta(\theta)) \quad (2.11)$$

para funciones especificadas  $\rho$ ,  $\zeta$  y  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $\varphi \in [0, \pi]$ . Notemos que en el caso de la esfera,  $\rho(\theta) = \sin \theta$  y  $\zeta(\theta) = \cos \theta$ .

### 2.2.1. Transformaciones conformes

Nos gustaría dar una transformación conforme entre la superficie  $S$  y  $\mathbb{R}^2$ , pero como la superficie es compacta y el plano no, empezamos considerando a la superficie perforada:  $S_p = S - \{p\}$  para algún  $p \in S$ , digamos que  $p$  corresponde a  $\theta = \varphi = 0$ .  $S_p$  sí es homeomorfa a  $\mathbb{R}^2$ . Ahora, tenemos que

$$\begin{aligned} ds^2 &= \|\mathbf{dx}\|^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= \left( \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi \right)^2 \\ &= (\rho' \cos \varphi d\theta - \rho \sin \varphi d\varphi)^2 + (\rho' \sin \varphi d\theta + \rho \cos \varphi d\varphi)^2 + (\zeta' d\theta)^2 \\ &= (\rho')^2 d\theta^2 + \rho^2 d\varphi^2 + (\zeta')^2 d\theta^2 = [(\rho')^2 + (\zeta')^2] d\theta^2 + \rho^2 d\varphi^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Consideremos un mapeo  $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $(\theta, \varphi) \rightarrow (r(\theta), \varphi)$ . Éstas son coordenadas planares usuales. Nos interesa encontrar a  $r(\theta)$  de modo que dado un factor conforme apropiado  $\lambda^2(\theta)$ ,  $ds^2$  quede como

$$ds^2 = \lambda^2(dr^2 + r^2 d\varphi^2). \quad (2.13)$$

Planteando la identidad que queremos

$$\begin{aligned} [(\rho')^2 + (\zeta')^2] d\theta^2 + \rho^2 d\varphi^2 &= \lambda^2(dr^2 + r^2 d\varphi^2) \\ &= \lambda^2((r')^2 d\theta^2 + r^2 d\varphi^2) \\ &= \lambda^2(r')^2 d\theta^2 + \lambda^2 r^2 d\varphi^2. \end{aligned}$$

De ahí obtenemos el sistema

$$\begin{cases} (\rho')^2 + (\zeta')^2 = \lambda^2 (r')^2 \\ \rho^2 = \lambda^2 r^2 \end{cases}$$

$$\implies \lambda^2 = \frac{\rho^2}{r^2} = \frac{(\rho')^2 + (\zeta')^2}{(r')^2} \implies \lambda = \frac{\rho}{r} = \frac{\sqrt{(\rho')^2 + (\zeta')^2}}{r'}$$

y así

$$\frac{r'}{r} = \frac{\sqrt{(\rho')^2 + (\zeta')^2}}{\rho} ; \lambda = \frac{\rho}{r}. \quad (2.14)$$

Dadas una condición inicial y funciones razonablemente amigables  $\rho$  y  $\zeta$  se pueden determinar  $r$  y  $\lambda$ . Las expresiones 2.12 y 2.13 (que son la métrica de la superficie) nos permiten establecer una dos forma (o forma de área)

$$d\Omega_S = (\lambda dr) \wedge (\lambda r d\varphi) = \rho \sqrt{(\rho')^2 + (\zeta')^2} d\theta \wedge d\varphi,$$

que se puede reescribir como

$$d\Omega_S = -d\mu \wedge d\varphi, \quad (2.15)$$

si definimos  $\mu(\theta)$  a partir de

$$\mu' = -\rho \sqrt{(\rho')^2 + (\zeta')^2}. \quad (2.16)$$

Éstas últimas son las coordenadas naturales (también llamadas *coordenadas de Darboux*).

### 2.2.2. La función de Green sobre la superficie perforada $S_p$

Acabamos de ver que nuestra superficie perforada se puede conformar al plano  $\mathbb{R}^2$  a través de una transformación  $\Phi : S_p \rightarrow \mathbb{R}^2$  con un factor conforme  $\lambda^2(\mathbf{s})$ . Como vimos en el primer capítulo, la dinámica sólo dependía de la función de Green en el plano (1.4)

$$G_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \log \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|.$$

Con  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0$  puntos de  $\mathbb{R}^2$  y el indicando que es la función de Green planar. La función de Green surge como solución a la ecuación de Poisson con una delta de Dirac como fuente

$$\Delta_{\mathbf{x}} G_{\mathbb{R}^2} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (2.17)$$

(que de hecho es 1.3). En coordenadas polares podemos escribir

$$\begin{aligned}
G_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) &= \frac{1}{2\pi} \log \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \frac{1}{4\pi} \log \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 \\
&= \frac{1}{4\pi} \log(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)) = \frac{1}{4\pi} \log(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \alpha) \\
&= \frac{1}{2\pi} \log \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \alpha},
\end{aligned} \tag{2.18}$$

donde  $x = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ ,  $x_0 = (r_0 \cos \varphi_0, r_0 \sin \varphi_0)$ ,  $\alpha = \varphi - \varphi_0$ .

**Lema 2.2.1.** *Sea  $\Phi : S_p \rightarrow \mathbb{R}^2$  una transformación conforme con factor conforme  $\lambda^2(\mathbf{s})$ . Entonces*

$$\Delta G_{\mathbb{R}^2}(\Phi(\mathbf{s}), \Phi(\mathbf{s}_0)) = \lambda^2(\mathbf{s}) \delta_{\mathbb{R}^2}(\Phi(\mathbf{s}) - \Phi(\mathbf{s}_0)) = \delta_{S_p}(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0), \tag{2.19}$$

con  $\delta_{\mathbb{R}^2}$  y  $\delta_{S_p}$  las deltas de Dirac sobre el  $\mathbb{R}^2$  y  $S_p$  respectivamente.

*Demostración.* Por definición, la delta de Dirac sobre  $\mathbb{R}^2$  es una distribución  $\delta_{\mathbb{R}^2}$  que satisface

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \delta_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) f(\mathbf{x}) d\Omega_{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}_0)$$

para  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Consideremos, pues, una transformación conforme

$$\begin{aligned}
\Phi : S_p &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
\mathbf{s} &\rightarrow \mathbf{x}(\mathbf{s})
\end{aligned}$$

con factor conforme  $\lambda^2(\mathbf{s})$ . Esto transforma la identidad anterior en

$$\iint_{S_p} \delta_{\mathbb{R}^2}(\Phi(\mathbf{s}) - \Phi(\mathbf{s}_0)) f(\Phi(\mathbf{s})) \lambda^2(\mathbf{s}) d\Omega_S = f(\Phi(\mathbf{s}_0))$$

definiendo  $g(\mathbf{s}) = f(\Phi(\mathbf{s}))$  tenemos que

$$\iint_{S_p} [\lambda^2(\mathbf{s}) \delta_{\mathbb{R}^2}(\Phi(\mathbf{s}) - \Phi(\mathbf{s}_0))] g(\mathbf{s}) d\Omega_S = g(\mathbf{s}_0),$$

lo que quiere decir que la delta de Dirac sobre  $S_p$  ( $\delta_{S_p}$ ) debe satisfacer

$$\delta_{S_p}(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) = \lambda^2(\mathbf{s})\delta_{\mathbb{R}^2}(\Phi(\mathbf{s}) - \Phi(\mathbf{s}_0)). \quad (2.20)$$

Finalmente, basta aplicar la transformación a la identidad definitoria de la función de Green en el plano  $\Delta G_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \delta_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  para obtener el resultado.  $\square$

A partir de ahora omitiremos los subíndices en las deltas confiando en que el contexto basta para distinguirlas. Lo que el lema anterior nos dice es que la función de Green sobre la superficie perforada es

$$G_{S_p}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0) = G_{\mathbb{R}^2}(\varphi(\mathbf{s}), \varphi(\mathbf{s}_0)), \quad (2.21)$$

ya que  $G_{S_p}$  satisface

$$\Delta G_{S_p} = \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0). \quad (2.22)$$

Desafortunadamente, esta función de Green no es aplicable a superficies sin perforaciones ya que no satisface la condición de Gauss. Esto lo tratamos a continuación.

### 2.2.3. Extendiendo la función de Green al resto de S

Necesitamos *extender* nuestra función de Green perforada  $G_{S_p}$  de modo que cumpla la condición de Gauss, esto sugiere lo siguiente.

**Lema 2.2.2.** *La función de Green para la superficie fíj  $S$  se obtiene a partir de*

$$G_S(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0) = G_{S_p}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0) - \tilde{G}(\mathbf{s}_0) - \tilde{G}(\mathbf{s}), \quad (2.23)$$

donde

$$\tilde{G}(\mathbf{s}_0) = \frac{1}{A} \iint_{S_p} G_{S_p}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0) d\Omega_s \text{ y } \tilde{G}(\mathbf{s}) = \frac{1}{A} \iint_{S_p} G_{S_p}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0) d\Omega_{s_0}, \quad (2.24)$$

recordando que  $d\Omega_s = \rho\sqrt{(\rho')^2 + (\zeta')^2} d\theta d\varphi = -d\mu d\varphi$  y  $A = 2\pi(\mu(0) - \mu(\pi))$  es el área de la superficie.

*Demostración.* Primero veamos que  $G_S$  está bien definida.

De 2.24:

$$\tilde{G}(\mathbf{s}) = \frac{1}{A} \iint_{S_p} G_{S_p}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0) d\Omega_{\mathbf{s}_0} = \frac{1}{A} \iint_{S_p} G_P(\varphi(\mathbf{s}), \varphi(\mathbf{s}_0)) d\Omega_{\mathbf{s}_0},$$

notando que  $\alpha = \varphi_0 - \varphi$  implica  $d\alpha = d\varphi_0$  y usando 2.18 obtenemos

$$\tilde{G}(\theta) = -\frac{1}{4\pi A} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \log [r^2(\theta) + r^2(\theta_0) - 2r(\theta)r(\theta_0) \cos \alpha] \mu'(\theta_0) d\theta_0 d\alpha.$$

Pasando la  $A$  multiplicando e integrando respecto de  $\alpha$

$$A\tilde{G}(\theta) = -\int_0^\pi \log r_{>} \mu'(\theta_0) d\theta_0, \quad (2.25)$$

donde  $r_{>} = \max\{r, r_0\}$ <sup>1</sup>. Cortando la integral en dos e integrando por partes

$$\begin{aligned} A\tilde{G}(\theta) &= -\log r(\theta) \int_0^\theta \mu'(\theta_0) d\theta_0 - \int_\theta^\pi \log r(\theta_0) \mu'(\theta_0) d\theta_0 \\ &= -\log r(\theta) [\mu(\theta_0) - \mu(0)]_0^\theta - [\log r(\theta_0) (\mu(\theta_0) - \mu(\pi))]_\theta^\pi + \int_\theta^\pi (\mu(\theta_0) - \mu(\pi)) \frac{r'(\theta_0)}{r(\theta_0)} d\theta_0. \end{aligned}$$

El límite superior del segundo término se anula, ya que

$\mu(\theta_0) - \mu(\pi) \approx \mu''(\pi)(\theta_0 - \pi)^2/2$  cuando  $\theta_0 \rightarrow \pi$ , de donde obtenemos

$$\tilde{G}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \log[r(\theta)] + \frac{1}{A} \int_\theta^\pi (\mu(\theta_0) - \mu(\pi)) \frac{r'(\theta_0)}{r(\theta_0)} d\theta_0. \quad (2.26)$$

Potencialmente, podríamos tener singularidades en  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ . Sustituyendo  $\theta = 0$  en (2.25) se tiene

$$A\tilde{G}(0) = -\int_0^\pi \log r(\theta_0) \mu'(\theta_0) d\theta_0.$$

Tenemos que  $|\log r(\theta_0) \mu'(\theta_0)|$  es finito para toda  $\theta_0$  de modo que  $\tilde{G}(0)$  integra a alguna constante, así que no hay singularidad en  $\theta = 0$ . Sin embargo, conforme  $\theta \rightarrow \pi$ , la integral en 2.26 tiende a cero, es decir

$$\tilde{G}(\theta) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \log[r(\theta)]$$

---

<sup>1</sup>[véase A.1].

cuando  $\theta \rightarrow \pi$ . Esto es singular, pues como el *polo* es mandado al infinito tenemos que  $r(\theta) \rightarrow \infty$  cuando  $\theta \rightarrow \pi$ . Pero comparando esto con 2.18, vemos que esto es justo lo que necesitamos para contrarrestar la singularidad de  $G_{S_p}$ . De modo que efectivamente  $G_S$  “pega bien”.

Falta ver que  $G_S$  es la función de Green. Podemos aplicar el operador de Laplace-Beltrami a  $G_S$  a partir de 2.23:

$$\begin{aligned}
\Delta G_S(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0) &= \Delta \left( G_{S_p}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0) - \tilde{G}(\mathbf{s}_0) - \tilde{G}(\mathbf{s}) \right) \\
&= \Delta G_{S_p}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0) - \Delta \tilde{G}(\mathbf{s}_0) - \Delta \tilde{G}(\mathbf{s}) \\
&= \Delta G_{S_p}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0) - 0 - \frac{1}{A} \iint_{S_p} \Delta G_{S_p}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0) d\Omega_{s_0} \quad (2.27) \\
&= \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) - \frac{1}{A} \iint_{S_p} \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) d\Omega_{s_0} \\
&= \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) - \frac{1}{A}.
\end{aligned}$$

Integrando sobre  $S$

$$\begin{aligned}
\iint_S \Delta G_S(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0) d\Omega_S &= \iint_S \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) - \frac{1}{A} d\Omega_S \\
&= \iint_S \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) d\Omega_S - \iint_S \frac{1}{A} d\Omega_S \quad (2.28) \\
&= 1 - \frac{1}{A}A \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Lo cual verifica que  $G_S$  es una función de Green sobre  $S$ . □

*Obs.*  $G_S$  es simétrica respecto a sus argumentos:

Es claro de  $G_{\mathbb{R}^2}$  es simétrica respecto a sus argumentos, así

$$G_{S_p}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0) = G_{\mathbb{R}^2}(\varphi(\mathbf{s}), \varphi(\mathbf{s}_0)) = G_{\mathbb{R}^2}(\varphi(\mathbf{s}_0), \varphi(\mathbf{s})) = G_{S_p}(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}),$$

luego

$$G_S(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0) = G_{S_p}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0) - \tilde{G}(\mathbf{s}_0) - \tilde{G}(\mathbf{s}) = G_{S_p}(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}) - \tilde{G}(\mathbf{s}) - \tilde{G}(\mathbf{s}_0) = G_S(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}).$$

*Obs.* De 2.23 y 2.24 se sigue que

$$\begin{aligned}
\iint_S G_S(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0) d\Omega_{\mathbf{s}} &= \iint_S [G_{S_P}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0) - \tilde{G}(\mathbf{s}_0) - \tilde{G}(\mathbf{s})] d\Omega_{\mathbf{s}} \\
&= \iint_S G_{S_P}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0) d\Omega_{\mathbf{s}} - A\tilde{G}(\mathbf{s}_0) - \iint_S \tilde{G}(\mathbf{s}) d\Omega_{\mathbf{s}} \\
&= \iint_{S_P} G_{S_P}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0) d\Omega_{\mathbf{s}} - A\tilde{G}(\mathbf{s}_0) - \iint_S \tilde{G}(\mathbf{s}) d\Omega_{\mathbf{s}} \\
&= A\tilde{G}(\mathbf{s}_0) - A\tilde{G}(\mathbf{s}_0) - \iint_S \tilde{G}(\mathbf{s}) d\Omega_{\mathbf{s}} = - \iint_S \tilde{G}(\mathbf{s}) d\Omega_{\mathbf{s}}
\end{aligned}$$

es constante. De la segunda a la tercera línea quitamos *un* punto en el primer término, lo cual no altera la integral pero nos permite completar la definición de  $\tilde{G}(\mathbf{s}_0)$ .

*Obs.* Del argumento de buena definición, se sigue que la función  $G_S$  cumple

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi} G_S(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0) = -\frac{1}{2\pi} \log(r_0) \quad \text{y} \quad \lim_{\theta_0 \rightarrow \pi} G_S(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0) = -\frac{1}{2\pi} \log(r).$$

## 2.3. La Dinámica en Superficies de Revolución

### El Hamiltoniano

Hasta ahora, lo que hemos logrado es desingularizar la función de Green  $G$  que nos pide el Hamiltoniano 2.10, y como la función de Robin está dada en términos de  $G$ :

$$R(\mathbf{s}_k) = \lim_{\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}_k} \left( G(\mathbf{s}, \mathbf{s}_k) - \frac{1}{2\pi} \log d(\mathbf{s}, \mathbf{s}_k) \right),$$

parecería que ya acabamos. Sin embargo, para superficies de revolución, aún podemos simplificar la función de Robin bastante. La distancia geodésica  $d$  tiene la misma forma que la diferencia local,  $ds$ , recordando 2.13 tenemos

$$\lim_{\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}_k} d(\mathbf{s}, \mathbf{s}_k) = \lambda(\mathbf{s}_k) \lim_{\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}_k} \sqrt{(r - r_k)^2 + r_k^2 (\varphi - \varphi_k)^2} \quad (2.29)$$

$$= \lambda(\mathbf{s}_k) \lim_{\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}_k} \sqrt{r^2 + r_k^2 + rr_k \cos(\varphi - \varphi_k)}, \quad (2.30)$$

donde la segunda identidad es análoga a 2.18 de modo que, en el límite, el segundo término en

$$\frac{1}{2\pi} \log d(\mathbf{s}, \mathbf{s}_k) = \frac{1}{2\pi} \log[\lambda(\mathbf{s}_k)] + \frac{1}{2\pi} \log \sqrt{r^2 + r_k^2 + rr_k \cos(\varphi - \varphi_k)}$$

se cancela con  $G_{S_p}$ , así

$$\begin{aligned} R(\mathbf{s}_k) &= \lim_{\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}_k} \left( G_S(\mathbf{s}, \mathbf{s}_k) - \frac{1}{2\pi} \log d(\mathbf{s}, \mathbf{s}_k) \right) \\ &= \lim_{\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}_k} \left( G_{S_p}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_k) - \tilde{G}(\mathbf{s}) - \tilde{G}(\mathbf{s}_k) - \frac{1}{2\pi} \log d(\mathbf{s}, \mathbf{s}_k) \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \log[\lambda(\mathbf{s}_k)] - 2\tilde{G}(\mathbf{s}_k), \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde  $\lambda(\mathbf{s}_k) = \frac{\rho(\theta_k)}{r(\theta_k)}$  para superficies de revolución. En la extensión de  $G_{S_p}$  tenemos que  $\tilde{G}(\mathbf{s}_k)$  también sólo depende de  $\theta_k$ , entonces la función de Robin también es función exclusivamente de  $\theta_k$ . Finalmente, tenemos que para superficies de revolución el Hamiltoniano de 2.10 se puede escribir como

$$H = -\frac{1}{2} \sum_k \sum_{j \neq k} \Gamma_k \Gamma_j G(\mathbf{s}_k, \mathbf{s}_j) + \frac{1}{4\pi} \sum_k \Gamma_k^2 \left( \log[\lambda(\mathbf{s}_k)] - 2\tilde{G}(\mathbf{s}_k) \right). \quad (2.32)$$

### 2.3.1. Un resultado sobre variedades simplécticas

Por fin tenemos al dichoso Hamiltoniano (2.32) y una forma de área (2.15), pero falta explicar su relación con la dinámica que nos interesa. Para ello es necesario tomar un momento para mencionar un par de cosas sobre variedades simplécticas y Hamiltonianos. Los siguientes resultados son tomados de [4] y son incluidos por completitud.

Una forma simpléctica en una variedad  $M$  es una 2-forma no degenerada y cerrada  $\Omega$ . Al par  $(M, \Omega)$  se le llama *variedad simpléctica*. Como  $\Omega$  es no degenerada entonces  $M$  tiene que tener dimensión par<sup>1</sup>, digamos  $2n$ . Además  $M$  es orientable pues  $\Omega^n$  define una forma de volumen. Como  $\Omega$  es no degenerada, entonces la forma define un isomorfismo

$$\begin{aligned} S : TM &\rightarrow T^*M \\ X &\rightarrow \Omega(X, \cdot), \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>De lo contrario  $\Omega$  tendría un kernel no trivial, contradiciendo la no degeneración.

donde  $\Omega(X, \cdot)$  denota la contracción de la forma  $\Omega$  por el campo  $X$ . Sea  $J$  el inverso

$$J = S^{-1} : T^*M \rightarrow TM,$$

y sea  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  un mapeo diferenciable, entonces  $H$  define el campo vectorial en  $M$  dado por

$$X_H = J dH,$$

que es el único campo que satisface  $\Omega(X_H, \cdot) = dH$ . A  $X_H$  se le llama el *campo vectorial Hamiltoniano* asociado al Hamiltoniano  $H$ . Entonces  $M$  es el espacio fase y al flujo asociado  $\varphi_t : M \rightarrow M$  se le llama flujo Hamiltoniano. Como para cualquier función  $F$  se tiene que

$$\frac{d}{dt} F \circ \varphi_t = dF(X_H) = \Omega(X_F, X_H),$$

entonces

$$\dot{F} = \{F, H\},$$

donde  $\{F, H\}$  es el bracket de Poisson definido por

$$\{F, H\} = dF(X_H) = \Omega(X_F, X_H).$$

Es inmediato de las definiciones que  $H$  es conservada por el flujo  $\varphi_t$  porque  $\Omega(X_H, X_H) = 0$ . En física, a esta propiedad se le llama conservación de la energía. A las cantidades  $F$  tales que  $\{F, H\} = 0$  se les llaman cantidades conservadas porque no cambian con el flujo.

En nuestra situación ya sabemos que  $H$  es conservada (pues es una energía y la energía se conserva), lo que nos interesa es el flujo que la conserva.

### 2.3.2. Las ecuaciones de movimiento para superficies de revolución

Las ecuaciones de movimiento del vórtice  $\mathbf{x}_k$  en la superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  está dada por

$$\Gamma_k \dot{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{n} \times \nabla H(\mathbf{x}), \quad (2.33)$$

o bien, por

$$\Gamma_k \dot{\mathbf{s}}_k = \tilde{J}_2 \nabla_{\mathbf{s}_k} H(\mathbf{s}_k), \quad (2.34)$$

donde

$$\tilde{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

es la matrix antisimétrica genérica. Es decir, tenemos dos maneras equivalentes de pensar a nuestra superficie, con ecuaciones encajadas (2.33) o ecuaciones locales (2.34). Es importante aclarar que son equivalentes porque vamos a estar alternando entre las dos representaciones.

Como parametrizamos a la superficie  $S$  por  $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\varphi, \mu)$ , entonces las posiciones de los vórtices están determinadas por  $(\varphi_j, \mu_j)$ . Dado que en la superficie  $S$  la forma de volumen es  $\Omega_S = -d\mu \wedge d\varphi$ , la ecuación (2.34) en las coordenadas  $(\varphi_j, \mu_j)$  está dada por

$$\begin{aligned} \Gamma_j \dot{\varphi}_j &= \partial_{\mu_j} H \\ \Gamma_j \dot{\mu}_j &= -\partial_{\varphi_j} H \end{aligned} \tag{2.35}$$

La ecuación anterior determina un sistema Hamiltoniano para los  $n$  vórtices en la esfera. Es decir, la variedad  $M = S^n$  es simpléctica con la 2-forma

$$\Omega = \sum_{j=1}^n \Gamma_j d\varphi_j \wedge d\mu_j.$$

Para ver esto notemos que, de acuerdo a la definición, el campo vectorial en  $M$  está determinado por el Hamiltoniano  $H$ . Sea  $\frac{\partial}{\partial \varphi_j}$  y  $\frac{\partial}{\partial \mu_j}$  la base de  $TM$  y  $d\varphi_j$  y  $d\mu_j$  la base de  $T^*M$ , entonces  $d\varphi_j \wedge d\mu_j \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_j}, \cdot \right) = d\mu_j$  y  $d\varphi_j \wedge d\mu_j \left( \frac{\partial}{\partial \mu_j}, \cdot \right) = -d\varphi_j$ . Por lo tanto, el campo es

$$X_H = \sum_{j=1}^n \Gamma_j^{-1} \left( -\partial_{\varphi_j} H \frac{\partial}{\partial \mu_j} + \partial_{\mu_j} H \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \right),$$

porque satisface

$$\Omega(X_H, \cdot) = \sum_{j=1}^n (\partial_{\varphi_j} H d\varphi_j + \partial_{\mu_j} H d\mu_j) = dH.$$

Por lo tanto el flujo determinado por  $X_H$  en  $M$  es equivalente al sistema (2.35).

## El par *Posición-Momento* en superficies de revolución

Como nota cultural, vale la pena mencionar que si hubiéramos trabajado con un enfoque más físico, hubiera bastado observar que las superficies de revolución tienen un par canónico de *posición* y *momento*  $(q_k, p_k) = (\varphi_k, \Gamma_k \mu_k)$  para cada vórtice  $k$

$$\mathbf{s}_k = (\varphi_k, \mu_k) = \left( q_k, \frac{p_k}{\Gamma_k} \right), \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.36)$$

Así, que el campo vectorial  $\mathbf{U}$  sea incompresible se traduce a

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{\partial \dot{\mu}}{\partial \mu} + \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \varphi} = 0. \quad (2.37)$$

Entonces, como en el Capítulo 1, existe una función de corriente  $\psi$  tal que

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \psi}{\partial \mu}; \quad \dot{\mu} = -\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}. \quad (2.38)$$

Para cada vórtice puntual tenemos las mismas ecuaciones y la función de corriente ya la dimos en 2.9. De manera equivalente y consistente podemos obtener  $\dot{\varphi}$  y  $\dot{\mu}$  a partir de las ecuaciones de movimiento 2.34, si tomamos a  $\varphi_k$  como la posición y a  $\Gamma_k \mu_k$  como el momento:

$$\dot{\varphi}_k = \frac{1}{\Gamma_k} \frac{\partial H}{\partial \mu_k}; \quad \Gamma_k \dot{\mu}_k = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_k}. \quad (2.39)$$

*Obs.* La cantidad  $M = \sum_k \Gamma_k \mu_k$  es constante respecto al tiempo, esto debido a la simetría meridial del Hamiltoniano al tratarse de una superficie de revolución. Por lo tanto, resulta apropiado llamar a  $M$  el momento angular del sistema.

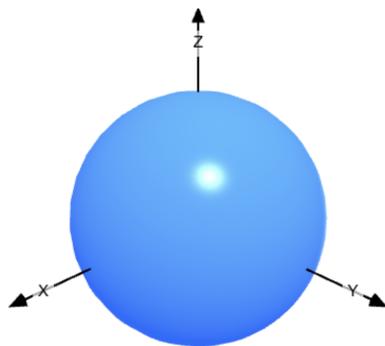


## Sobre Vórtices en la Esfera

---

### 3.1. Un Pálido Punto Azul

Vamos a aplicar la teoría desarrollada en el Capítulo 2 a una superficie concreta. En un profundo alarde de imaginación tomaremos a la esfera unitaria.



**Figura 3.1:** La esfera unitaria, en azul.

En este caso tenemos que  $\rho(\theta) = \text{sen } \theta$  y  $\zeta(\theta) = \cos \theta$ , sustituyendo esto en 2.14 obtenemos

$$\frac{r'}{r} = \frac{\sqrt{(\rho')^2 + (\zeta')^2}}{\rho} = \frac{\sqrt{(\cos \theta)^2 + (-\text{sen } \theta)^2}}{\text{sen } \theta} = \frac{1}{\text{sen } \theta}, \quad (3.1)$$

que podemos integrar con  $r(0) = 0$

$$\begin{aligned} \implies \log r(\theta) &= \int_0^\theta \frac{d\theta}{\operatorname{sen} \theta} = -\log(\cot \theta + \operatorname{csc} \theta) \\ \implies r(\theta) &= \frac{1}{\cot \theta + \operatorname{csc} \theta} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{1 + \cos \theta} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Luego, el factor conforme queda como

$$\lambda(\theta) = \frac{\rho(\theta)}{r(\theta)} = \operatorname{sen} \theta \left( \frac{1 + \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \right) = 1 + \cos \theta, \quad (3.3)$$

y la coordenada meridial  $\mu$  sale de

$$\begin{aligned} \mu' &= -\rho \sqrt{(\rho')^2 + (\zeta')^2} = -\operatorname{sen} \theta \sqrt{(\cos \theta)^2 + (-\operatorname{sen} \theta)^2} = -\operatorname{sen} \theta \\ \implies \mu(\theta) &= \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ahora necesitamos calcular la función de Green, para ello empezamos calculando  $\tilde{G}(\theta)$ :

$$\begin{aligned} 4\pi A\tilde{G}(\theta) &= \log r^2(\theta) + \int_\theta^\pi (\mu(\theta_0) - \mu(\pi)) \frac{r'(\theta_0)}{r(\theta_0)} d\theta_0 \\ &= \log \left( \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right) + \int_\theta^\pi (\cos \theta_0 + 1) \frac{1}{\operatorname{sen} \theta_0} d\theta_0 \\ &= \log \left( \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right) + \int_\theta^\pi (\operatorname{sen} \theta_0) \frac{1}{1 - \cos \theta_0} d\theta_0 \\ &= \log \left( \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right) + [\log(1 - \cos \theta + 0)]_\theta^\pi \\ &= -\log \left( \frac{1 + \cos \theta}{2} \right) \\ \therefore \tilde{G}(\theta) &= -\frac{1}{4\pi} \log \left( \frac{1 + \cos \theta}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

$\tilde{G}$  tiene una singularidad cuando  $\theta \rightarrow \pi$ , pero ese problema ya lo estudiamos (y resolvimos) en el capítulo anterior. Continuando, tenemos que la función de Green es

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0) &= G_{S_p}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0) - \tilde{G}(\mathbf{s}_0) - \tilde{G}(\mathbf{s}) \\
&= \frac{1}{4\pi} \log(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\phi - \phi_0)) - \tilde{G}(\theta) - \tilde{G}(\theta_0) \\
&= \frac{1}{4\pi} \log \left( \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1 - \cos \theta_0}{1 + \cos \theta_0} - 2\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \sqrt{\frac{1 - \cos \theta_0}{1 + \cos \theta_0}} \cos(\phi - \phi_0) \right) \\
&\quad + \frac{1}{4\pi} \log \left( \frac{1 + \cos \theta}{2} \right) + \frac{1}{4\pi} \log \left( \frac{1 + \cos \theta_0}{2} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi} \log \left( \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1 - \cos \theta_0}{1 + \cos \theta_0} - 2\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \cdot \frac{1 - \cos \theta_0}{1 + \cos \theta_0} \cos(\phi - \phi_0) \right) \\
&\quad + \frac{1}{4\pi} \log((1 + \cos \theta)(1 + \cos \theta_0)) - \frac{1}{4\pi} \log(4) \\
&= \frac{1}{4\pi} \log((1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta_0) + (1 - \cos \theta_0)(1 + \cos \theta) \\
&\quad - 2\sqrt{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)} \cdot (1 - \cos \theta_0)(1 + \cos \theta_0) \cos(\phi - \phi_0)) - \frac{1}{4\pi} \log(4) \\
&= \frac{1}{4\pi} \log(2 - 2 \cos \theta \cos \theta_0 - 2\sqrt{(1 - \cos^2 \theta)(1 - \cos^2 \theta_0)} \cos(\phi - \phi_0)) - \frac{1}{4\pi} \log(4) \\
&= \frac{1}{2\pi} \log \left( \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}{2} \right).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Ahora, la función de Robin queda como

$$\begin{aligned}
R(\theta) &= -\frac{1}{2\pi} \log \lambda(\theta) - 2\tilde{G}(\theta) = -\frac{1}{2\pi} \log(1 + \cos \theta) + 2\frac{1}{4\pi} \log \left( \frac{1 + \cos \theta}{2} \right) \\
&= \frac{\log 2}{2\pi}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Al ser constante, la función de Robin no aporta nada a la dinámica (en particular, nos dice que los vórtices no autointeractúan en la esfera, lo cual no debería ser sorpresa, pues la esfera es verdaderamente simétrica) de modo que la podemos suprimir del Hamiltoniano:

$$\begin{aligned}
H &= -\frac{1}{2} \sum_j \sum_{k \neq j} \Gamma_j \Gamma_k G(\mathbf{s}_j, \mathbf{s}_k) \\
&= -\frac{1}{4\pi} \sum_j \sum_{k \neq j} \Gamma_j \Gamma_k \log \left( \frac{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|}{2} \right) \\
&= -\frac{1}{2\pi} \sum_{k < j} \Gamma_j \Gamma_k \log \left( \frac{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|}{2} \right).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

### 3.2. La Función de Corriente

Con todo esto ya podemos obtener la función de corriente a partir de 2.6

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \sum_k \Gamma_k \log \left( \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|}{2} \right). \tag{3.9}$$

Derivando

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial x} &= -\frac{1}{2\pi} \sum_k \Gamma_k \frac{\partial}{\partial x} \log \left( \frac{\sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + (z - z_k)^2}}{2} \right) \\
&= -\frac{1}{2\pi} \sum_k \Gamma_k \frac{x - x_k}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|^2} \\
\frac{\partial \psi}{\partial y} &= -\frac{1}{2\pi} \sum_k \Gamma_k \frac{y - y_k}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|^2} \\
\frac{\partial \psi}{\partial z} &= -\frac{1}{2\pi} \sum_k \Gamma_k \frac{z - z_k}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|^2} \\
\therefore \nabla \psi &= -\frac{1}{2\pi} \sum_k \frac{\Gamma_k}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|^2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k).
\end{aligned}$$

Luego, de 2.1

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{n} \times \nabla \psi(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} \times \left( -\frac{1}{2\pi} \sum_k \frac{\Gamma_k}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|^2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_k \Gamma_k \frac{\mathbf{x} \times \mathbf{x}_k}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|^2} = \frac{1}{2\pi} \sum_k \Gamma_k \frac{\mathbf{x} \times \mathbf{x}_k}{|\mathbf{x}|^2 - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_k) + |\mathbf{x}_k|^2} \\
&= \frac{1}{4\pi} \sum_k \Gamma_k \frac{\mathbf{x} \times \mathbf{x}_k}{1 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_k}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

donde al final usamos que  $|\mathbf{x}| = |\mathbf{x}_k| = 1$  por estar en la esfera. Con esto ya podemos *ver* vórtices estáticos en acción. Además, las líneas de corriente corresponden a los valores constantes de  $\psi(\mathbf{x})$ :

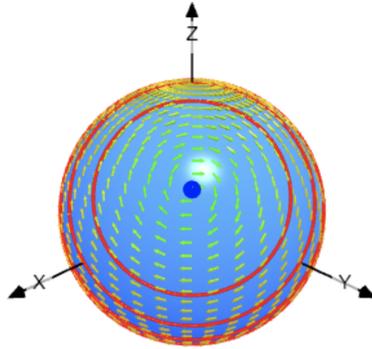
$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}) &= cte \\ \frac{1}{2\pi} \sum_k \Gamma_k \log \left( \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|}{2} \right) &= cte \\ \prod_k \left( \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|}{2} \right)^{\Gamma_k} &= cte. \end{aligned} \quad (3.11)$$

### 3.2.1. Ejemplo 3.1 - Una distribución de vorticidad puntual

Imitando lo que hicimos en el primer capítulo, empezamos graficando una distribución de vorticidad puntual constante con centro  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{s}(\frac{2\pi}{8}, \frac{\pi}{4})$  con vorticidad  $\Gamma_0 = 1$ , el campo vectorial correspondiente es

$$\mathbf{U}_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\mathbf{x} \times \mathbf{x}_0}{1 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_0} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\mathbf{x} \times (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})}{1 - \mathbf{x} \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})},$$

las líneas de corriente, no sorpresivamente, son círculos respecto al eje  $\mathbf{x}_0$ . Esto se debe a que 3.11 para  $n = 1$  corresponde a  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = cte$ . De nuevo, se



**Figura 3.2:** Campo de velocidades  $\mathbf{U}_0$  y algunas líneas integrales.

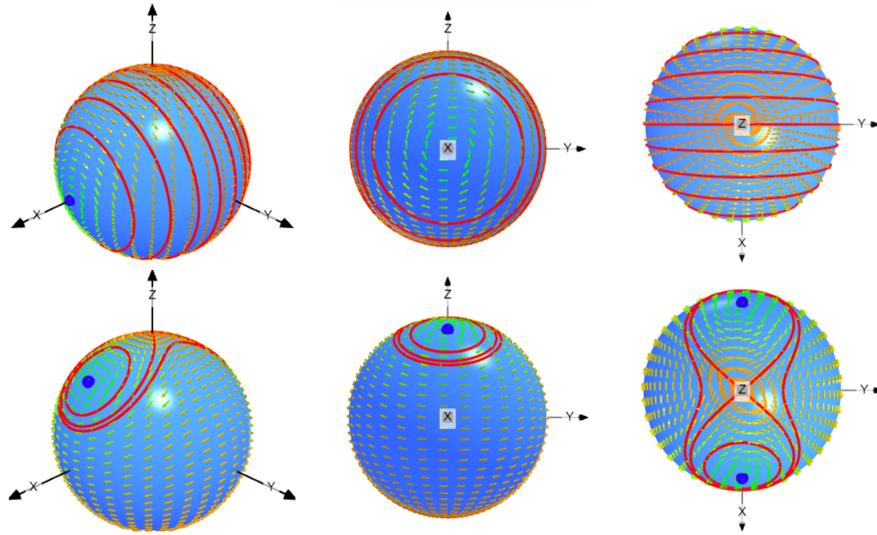
ve que al rededor del vórtice las velocidades se anulan – esto es consecuencia directa del hecho de que la función de Robin es constante.

### 3.2.2. Ejemplo 3.2 - Distribuciones de vorticidad sobre polígonos regulares

El paso siguiente es pensar en un par de vórtices. Como queremos conservar algo de simetría, pondremos los vórtices reflejados respecto al plano  $yz$ . Este ejemplo es análogo al ejemplo 1.1.2. Sin embargo, hay dos casos que separar: cuando los vórtices están diametralmente opuestos y cuando no. Así, consideremos un par de vórtices sobre el eje  $x$  y otro a 45 grados sobre éste.

$$\mathbf{U}_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\mathbf{x} \times (1, 0, 0)}{1 - \mathbf{x} \cdot (1, 0, 0)} + \frac{\mathbf{x} \times (-1, 0, 0)}{1 - \mathbf{x} \cdot (-1, 0, 0)} \right),$$

$$\mathbf{U}_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\mathbf{x} \times (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})}{1 - \mathbf{x} \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})} + \frac{\mathbf{x} \times (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})}{1 - \mathbf{x} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})} \right).$$



**Figura 3.3:** Campos de velocidades  $\mathbf{U}_1$  y  $\mathbf{U}_2$ .

En azul están los vórtices y en rojo las trayectorias obtenidas al simular numéricamente partículas prueba colocadas en distintas posiciones.

Lo primero que llama la atención es que las trayectorias de  $\mathbf{U}_2$  se parecen más al caso del plano, de hecho, colocando una partícula prueba en

$(\sqrt{2\sqrt{2}-2}, 0, \sqrt{2}-1)$  se obtiene, esencialmente, una lemniscata. Mientras que en  $\mathbf{U}_1$  las únicas líneas de corriente son círculos respecto al eje  $x$ . No es difícil probar que existen lemniscatas para cualquier par de vórtices que no sean los diametralmente opuestos. Esto nos dice que la simetría ecuatorial es *especial*. Esto lo exploramos un poco más en el siguiente ejemplo.

### 3.3. La Dinámica de Los Vórtices

Dado que los vórtices no interactúan consigo mismos, basta tomar la expresión que teníamos para  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  y omitir el término correspondiente al  $k$ -ésimo vórtice para obtener que

$$\dot{\mathbf{x}}_k = \frac{1}{4\pi} \sum_{j \neq k} \Gamma_j \frac{\mathbf{x}_k \times \mathbf{x}_j}{1 - \mathbf{x}_k \cdot \mathbf{x}_j}. \quad (3.12)$$

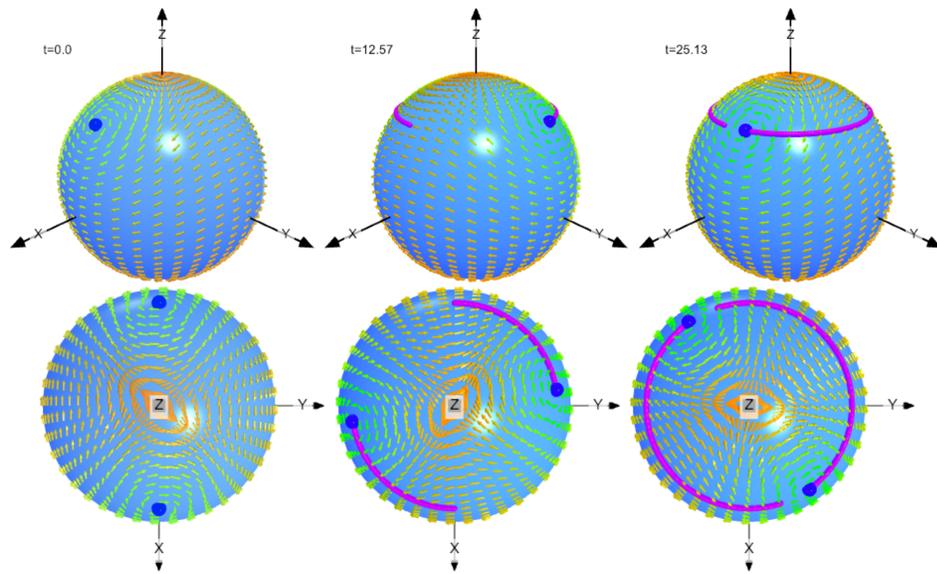
Alternativamente (y de manera más formal que “omitiendo” un término), podemos obtener la misma expresión a partir de 2.33, notando que en la esfera las normales coinciden con los puntos de ésta. Así,

$$\Gamma_k \dot{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k \times \nabla_{\mathbf{x}_j} H.$$

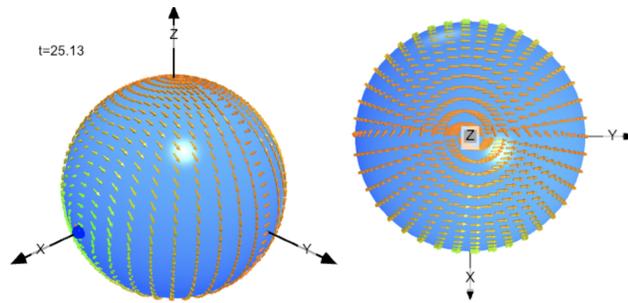
Usando que  $\nabla_{\mathbf{x}_j} H = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq j} \Gamma_j \Gamma_k \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\|^2}$  es fácil ver que las expresiones anteriores realmente son la misma.

#### 3.3.1. Otro par de simulaciones numéricas

Exploremos qué pasa si “soltamos” los campos  $\mathbf{U}_1$  y  $\mathbf{U}_2$ . Para  $\mathbf{U}_2$  tenemos que los vórtices forman una coreografía circular (de hecho es la protagonista de esta tesis), igual que en el plano. Sin embargo, para los vórtices diametralmente opuestos tenemos ¡un equilibrio!



**Figura 3.4:** Dinámica de vórtices correspondiente al campo  $U_2$ .  
 En azul las posiciones iniciales y en morado las trayectorias.



**Figura 3.5:** Dinámica de vórtices correspondiente al campo  $U_1$ .  
 En azul las posiciones iniciales y vacuamente en morado las trayectorias.

### 3.3.2. Los equilibrios y los equilibrios relativos

De nuevo, nos interesa identificar concretamente los equilibrios y equilibrios relativos. Tomemos  $n$  vórtices distribuidos inicialmente sobre un  $n$ -ágono paralelo al plano  $xy$  a una altura  $\cos \phi_0$ , con  $\phi_0 \in (0, \frac{\pi}{2}]$ . Esto es

$$\mathbf{x}(0)_k = \left( \text{sen } \phi_0 \cos \frac{2\pi k}{n}, \text{sen } \phi_0 \text{sen } \frac{2\pi k}{n}, \cos \phi_0 \right). \quad (3.13)$$

Ahora, imitando el primer capítulo, veamos la dinámica inicial del primer vórtice.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_0(0) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k \neq 0} \frac{\mathbf{x}_0 \times \mathbf{x}_k}{1 - \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}_k} \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\text{sen } \phi_0, 0, \cos \phi_0) \times (\text{sen } \phi_0 \cos \frac{2\pi k}{n}, \text{sen } \phi_0 \text{sen } \frac{2\pi k}{n}, \cos \phi_0)}{1 - (\text{sen } \phi_0, 0, \cos \phi_0) \cdot (\text{sen } \phi_0 \cos \frac{2\pi k}{n}, \text{sen } \phi_0 \text{sen } \frac{2\pi k}{n}, \cos \phi_0)} \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-\text{sen } \phi_0 \cos \phi_0 \text{sen } \frac{2\pi k}{n}, -\text{sen } \phi_0 \cos \phi_0 (1 - \cos \frac{2\pi k}{n}), \text{sen}^2 \phi_0 \text{sen } \frac{2\pi k}{n})}{1 - \text{sen}^2 \phi_0 \cos \frac{2\pi k}{n} - \cos^2 \phi_0} \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-\text{sen } \phi_0 \cos \phi_0 \text{sen } \frac{2\pi k}{n}, -\text{sen } \phi_0 \cos \phi_0 (1 - \cos \frac{2\pi k}{n}), \text{sen}^2 \phi_0 \text{sen } \frac{2\pi k}{n})}{\text{sen}^2 \phi_0 + \cos^2 \phi_0 - \text{sen}^2 \phi_0 \cos \frac{2\pi k}{n} - \cos^2 \phi_0} \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-\text{sen } \phi_0 \cos \phi_0 \text{sen } \frac{2\pi k}{n}, -\text{sen } \phi_0 \cos \phi_0 (1 - \cos \frac{2\pi k}{n}), \text{sen}^2 \phi_0 \text{sen } \frac{2\pi k}{n})}{\text{sen}^2 \phi_0 (1 - \cos \frac{2\pi k}{n})} \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-\cos \phi_0 \text{sen } \frac{2\pi k}{n}, -\cos \phi_0 (1 - \cos \frac{2\pi k}{n}), \text{sen } \phi_0 \text{sen } \frac{2\pi k}{n})}{\text{sen } \phi_0 (1 - \cos \frac{2\pi k}{n})} \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \left( -\cot \phi_0 \cot \frac{\pi k}{n}, -\cot \phi_0, \cot \frac{\pi k}{n} \right) = \left( 0, -(n-1) \frac{\cot \phi_0}{4\pi}, 0 \right). \end{aligned}$$

Entonces, por simetría tenemos que

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}_k(t) &= (n-1) \frac{\cot \phi_0}{4\pi} \left( \frac{y_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}}, \frac{-x_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}}, 0 \right) \\
&= \frac{n-1}{4\pi} \frac{\cos \phi_0}{\sen \phi_0} \left( \frac{y_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}}, \frac{-x_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}}, 0 \right) \\
&= \frac{n-1}{4\pi} \frac{z_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}} \left( \frac{y_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}}, \frac{-x_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}}, 0 \right) \\
&= \frac{n-1}{4\pi} \left( \frac{y_k z_k}{x_k^2 + y_k^2}, \frac{-x_k z_k}{x_k^2 + y_k^2}, 0 \right) \\
&= \frac{n-1}{4\pi} \left( y_k \frac{z_k}{1 - z_k^2}, -x_k \frac{z_k}{1 - z_k^2}, 0 \right),
\end{aligned} \tag{3.14}$$

o en coordenadas (locales) esféricas

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_k(t) &= -(n-1) \frac{\cot \phi_0}{4\pi} \frac{1}{\sen \phi_0} = -\frac{n-1}{4\pi} \frac{\cos \phi_0}{\sen^2 \phi_0} = cte, \\
\dot{\phi}_k(t) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

La ecuación 3.15 es muy fácil de leer y nos dice que sólo hay dos equilibrios posibles: uno si  $n = 1$  (el caso trivial donde sólo hay un vórtice) o cuando  $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ , es decir, cuando los vórtices están en el ecuador. Sin embargo, tenemos que las configuraciones  $n$ -gonales conservan su altura inicial y rotan con velocidad angular constante respecto al eje  $z$ . Eso, de nuevo, es un equilibrio relativo.

Ahora, si pasáramos a un sistema de referencia en coordenadas rotantes con una rotación compensante

$$\omega_n = \frac{n-1}{4\pi} \frac{\cos \phi_0}{\sen^2 \phi_0}, \tag{3.16}$$

nuestro equilibrio relativo se verá como un equilibrio de verdad. La estabilidad de este equilibrio es lo estudiaremos en el siguiente capítulo.

# La Estabilidad Lineal

---

En este último capítulo nos interesa estudiar la estabilidad de nuestro sistema poligonal. Para ello procederemos a linealizarlo para poder analizarlo eficientemente.

## 4.1. Pasando al Mundo Complejo

Hasta este momento, hemos evadido el uso de la variable compleja porque no nos ha hecho falta, sin embargo, para lo que nos interesa estudiar a continuación, nos conviene trabajar en coordenadas estereográficas. De modo que procedemos a replantear lo que ya teníamos en este nuevo sistema.

### 4.1.1. El cambio de variables

Vamos a proyectar a la esfera unitaria estereográficamente desde el polo norte  $\mathbf{p}_0$ . Para cualquier punto  $\mathbf{x} \in S^2 - p_0$ ,  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  tenemos que la proyección estereográfica  $q$  de  $\mathbf{x}$  es

$$q = \pi(\mathbf{x}) = \pi(x, y, z) = \frac{x + iy}{1 - z}. \quad (4.1)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|^2}{4} &= \frac{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2 + (z_j - z_k)^2}{4} \\
&= \frac{x_j^2 + y_j^2 + z_j^2 + x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 - 2(x_j x_k + y_j y_k + z_j z_k)}{4} \\
&= \frac{2 - 2(x_j x_k + y_j y_k + z_j z_k)}{4} \\
&= \frac{2(1 - z_j z_k) - (x_j + iy_j)(x_k - iy_k) - (x_j - iy_j)(x_k + iy_j)}{4} \\
&= \frac{2 - 2z_j z_k - (x_j + iy_j)(x_k - iy_k) - (x_j - iy_j)(x_k + iy_j)}{4} \\
&= \frac{(1 + z_j)(1 - z_k) + (1 - z_j)(1 + z_k)}{4} + \\
&\quad - \frac{(x_j + iy_j)(x_k - iy_k) - (x_j - iy_j)(x_k + iy_j)}{4} \\
&= \frac{\frac{1+z_j}{1-z_j} + \frac{1+z_k}{1-z_k} - \frac{x_j+iy_j}{1-z_j} \frac{x_k-iy_k}{1-z_k} - \frac{x_j-iy_j}{1-z_j} \frac{x_k+iy_k}{1-z_k}}{4 \frac{1}{(1-z_j)(1-z_k)}} \\
&= \frac{\frac{1-z_j^2}{(1-z_j)^2} + \frac{1-z_k^2}{(1-z_k)^2} - q_j \bar{q}_k - \bar{q}_j q_k}{(1-z_j)(1-z_k) + (1+z_j)(1-z_k) + (1-z_j)(1+z_k) + (1+z_j)(1+z_k)} \\
&= \frac{\frac{x_j^2+y_j^2+z_j^2-z_j^2}{(1-z_j)^2} + \frac{x_k^2+y_k^2+z_k^2-z_k^2}{(1-z_k)^2} - q_j \bar{q}_k - \bar{q}_j q_k}{1 + \frac{1+z_j}{1-z_j} + \frac{1+z_k}{1-z_k} + \frac{1+z_j}{1-z_j} \frac{1+z_k}{1-z_k}} \\
&= \frac{\frac{x_j^2+y_j^2}{(1-z_j)^2} + \frac{x_k^2+y_k^2}{(1-z_k)^2} - q_j \bar{q}_k - \bar{q}_j q_k}{1 + \frac{x_j^2+y_j^2}{(1-z_j)^2} + \frac{x_k^2+y_k^2}{(1-z_k)^2} + \frac{x_j^2+y_j^2}{(1-z_j)^2} \frac{x_k^2+y_k^2}{(1-z_k)^2}} \\
&= \frac{|q_j|^2 + |q_k|^2 - q_j \bar{q}_k - \bar{q}_j q_k}{1 + q_j \bar{q}_j + q_k \bar{q}_k + q_j \bar{q}_j q_k \bar{q}_k} \\
&= \frac{|q_j - q_k|^2}{(1 + |q_j|^2)(1 + |q_k|^2)},
\end{aligned}$$

de modo que para el Hamiltoniano tenemos

$$\begin{aligned}
H &= -\frac{1}{8\pi} \sum_j \sum_{k \neq j} \log \left( \frac{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|^2}{4} \right) \\
&= -\frac{1}{8\pi} \sum_j \sum_{k \neq j} \log \left( \frac{|q_j - q_k|^2}{(1 + |q_j|^2)(1 + |q_k|^2)} \right).
\end{aligned}$$

Sin embargo, vamos a simplificar el Hamiltoniano reduciendo<sup>1</sup> el factor de  $\frac{1}{2\pi}$  porque no juega ningún papel relevante en la linealización o estabilidad, así que trabajamos con

$$H = -\frac{1}{4} \sum_j \sum_{k \neq j} \log \left( \frac{|q_j - q_k|^2}{(1 + |q_j|^2)(1 + |q_k|^2)} \right), \quad (4.2)$$

y nuestra rotación compensante, de 3.16 queda como

$$\begin{aligned}
\omega_n &= \frac{n-1}{4\pi} \frac{\cos \varphi_0}{\sin^2 \varphi_0} = \frac{n-1}{4\pi} \frac{z}{x^2 + y^2} = \frac{n-1}{4\pi} \frac{z}{1-z^2} \\
&= \frac{n-1}{4\pi} \left( \frac{\frac{r^2-1}{r^2+1}}{1 - \left(\frac{r^2-1}{r^2+1}\right)^2} \right) = \frac{n-1}{4\pi} \left( \frac{r^4-1}{4r^2} \right),
\end{aligned}$$

donde hemos usado que en la representación polar  $a = re^{i\theta}$ , el módulo  $r$  está relacionado con la altura  $z$  en la esfera como  $r = \frac{1}{1-z}$ ,  $z = \frac{r^2-1}{r^2+1}$ . Como omitimos el factor de  $\frac{1}{2\pi}$  en el Hamiltoniano, siguiendo las cuentas se ve que también desaparece en la rotación compensante de modo que trabajamos con

$$\omega_n = \frac{n-1}{2} \left( \frac{r^4-1}{4r^2} \right). \quad (4.3)$$

#### 4.1.2. El nuevo planteamiento

Ahora el Hamiltoniano se escribe como

$$H(q) = -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \log \frac{|q_j - q_k|^2}{(1 + |q_j|^2)(1 + |q_k|^2)}, \quad (4.4)$$

---

<sup>1</sup>esto es tomar  $\Gamma_j = 2\pi$  en lugar de  $\Gamma_j = 1$  como habíamos hecho antes.

y la forma simpléctica queda

$$\Omega = \sum_{j=1}^n 2i(1 + |q_j|^2)^{-2} dq_j \wedge d\bar{q}_j. \quad (4.5)$$

Y sea

$$V(q) = \omega G(q) + H(q) \text{ donde } G(q) = 2 \sum_{j=1}^n \frac{|q_j|^2}{1 + |q_j|^2} \quad (4.6)$$

el potencial enmendado. Además queremos trabajar en coordenadas rotantes, es decir que tomamos  $q_j(t) = e^{J\omega t} u_j(t)$ . Así las ecuaciones de la dinámica están dadas por

$$4(1 + |u_j|^2)^{-2} J\dot{u}_j = \nabla_{u_j} V(\mathbf{u}), \quad (4.7)$$

donde

$$\nabla_{u_j} V(\mathbf{u}) = 4(1 + |u_j|^2)^{-2} \omega u_j - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \left( \frac{u_j - u_k}{|u_j - u_k|^2} - \frac{u_j}{1 + |u_j|^2} \right).$$

Finalmente, nuestro  $n$ -ágono queda representado por  $\mathbf{a} = (a_j(t))_{j=1}^n$  donde  $a_j(t) = r e^{\frac{2\pi j t}{n} i}$  y la rotación compensante, la que nos da el equilibrio, es

$$(4.8)$$

## 4.2. La Linealización

Ahora queremos linealizar la ecuación 4.7 en  $\mathbf{a}$ , despejando  $\mathbf{u}$  tenemos

$$\dot{\mathbf{u}} = -\frac{1}{4}(1 + |\mathbf{u}|^2)^2 \mathbf{J} \nabla V(\mathbf{u}),$$

$\mathbf{J} = (J, \dots, J)$ . Puesto que  $\mathbf{a}$  anula a  $\nabla V$ , al ser un equilibrio, la linealización está dada por

$$\dot{\mathbf{u}} = -\frac{1}{4}(1 + r^2)^2 \mathbf{J} \nabla^2 V(\mathbf{a}) \mathbf{u},$$

Despejando de regreso tenemos

$$4(1 + r^2)^{-2} \mathbf{J} \dot{\mathbf{u}} = \nabla^2 V(\mathbf{a}) \mathbf{u}$$

si ahora consideramos  $\mathbf{u}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}_0$ , entonces se cumplen las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) \text{ es solución} &\iff 4(1+r^2)^{-2} \mathbf{J} \lambda e^{\lambda t} \mathbf{v}_0 = \nabla^2 V(\mathbf{a}) e^{\lambda t} \mathbf{v}_0 \\ &\iff 4(1+r^2)^{-2} \mathbf{J} \lambda \mathbf{v}_0 = \nabla^2 V(\mathbf{a}) \mathbf{v}_0 \\ &\iff -4(1+r^2)^{-2} \mathbf{J} \lambda \mathbf{v}_0 + \nabla^2 V(\mathbf{a}) \mathbf{v}_0 = 0 \\ &\iff (-4(1+r^2)^{-2} \mathbf{J} \lambda + \nabla^2 V(\mathbf{a})) \mathbf{v}_0 = 0, \end{aligned}$$

de modo que nos va a interesar estudiar

$$-4(1+r^2)^{-2} \mathbf{J} \lambda + D^2 V(\mathbf{a}) = 0. \quad (4.9)$$

Para estudiar los sumandos de 4.9, es útil ver el siguiente lema.

**Lema 4.2.1.** *Sea  $\mathcal{M}(\lambda) = -4(1+r^2)^{-2} \mathbf{J} \lambda + D^2 V(\mathbf{a})$ .*

*Entonces*

$$\mathcal{M}^T(\lambda) = \mathcal{M}(-\lambda).$$

*Demostración.* Basta notar que  $D^2 V(\mathbf{a})$  es autoadjunto y que  $\mathbf{J}^T = -\mathbf{J}$ .

Así,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^T(\lambda) &= (-4(1+r^2)^{-2} \mathbf{J} \lambda + D^2 V(\mathbf{a}))^T \\ &= -4(1+r^2)^{-2} \mathbf{J}^T \lambda + D^2 V^T(\mathbf{a}) \\ &= -4(1+r^2)^{-2} \mathbf{J}(-\lambda) + D^2 V(\mathbf{a}) = \mathcal{M}(-\lambda). \end{aligned}$$

□

De forma inmediata se obtiene el siguiente resultado.

**Corolario 4.2.1.1.**  $\det \mathcal{M}(\lambda) = 0 \iff \det \mathcal{M}(-\lambda) = 0$ . *Es decir, si  $\lambda$  anula a  $\det \mathcal{M}$  entonces  $-\lambda$  también.*

Esto tiene como consecuencia que si  $\lambda = \eta + i\nu; \eta, \nu \in \mathbb{R}$  anula a  $\mathcal{M}$  entonces también lo harán  $-\lambda, \bar{\lambda}$  y  $-\bar{\lambda}$ . Sin embargo, para que las soluciones puedan ser linealmente estables (fenómeno de nuestro interés), necesitamos

que no haya soluciones a la izquierda del eje imaginario, o bien, que  $\lambda$  coincida con su conjugado. Así pues, estamos buscando soluciones de la forma  $\lambda = i\nu$  con  $\nu \in \mathbb{R}$ . De modo que si definimos

$$M(\nu) = -4(1 + r^2)^{-2}\nu i\mathbf{J} + D^2V(\mathbf{a}),$$

la cual simplemente es una presentación más concreta de  $\mathcal{M}$  con argumentos reales. Ahora nos interesará estudiar las raíces reales de

$$\det M(\nu) = 0. \quad (4.10)$$

Para poder continuar, necesitamos calcular  $D^2V(\mathbf{a})$ .

#### 4.2.1. Representaciones irreducibles

Para calcular el Hessiano de  $V$  consideramos  $A_{ij}$  como los menores de  $2 \times 2$  de  $D^2V(\mathbf{a}) \in M_{\mathbb{R}}(2n)$ , es decir

$$D^2V(\mathbf{a}) = (A_{ij})_{i,j=1}^n$$

**Lema 4.2.2.** *Para  $j \in \{1, \dots, n-1\}$  tenemos que*

$$A_{nj} = \frac{1}{(2r \operatorname{sen}(\frac{j\zeta}{2}))^2} (e^{jJ\zeta} R), \quad A_{nn} = A - \sum_{j=1}^{n-1} A_{nj}$$

donde  $R = \operatorname{diag}(1, -1)$ ,  $\zeta = \frac{2\pi}{n}$  y  $A = s_1 r^{-1} I - 4s_1(1 + r^2)^{-2} \operatorname{diag}(1, 0)$

*Demostración.* Primero, observemos que de 4.7

$$\begin{aligned} \nabla_{x_n} V(x) &= 4\omega \frac{x_n}{1 + |x_n|^2} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^n \left( \frac{x_n - x_k}{|x_n - x_k|^2} - \frac{x_n}{1 + |x_n|^2} \right) \\ &= 4\omega \frac{x_n}{1 + |x_n|^2} + (n-1) \frac{x_n}{1 + |x_n|^2} - \sum_{k \neq n} \frac{x_n - x_k}{|x_n - x_k|^2}, \end{aligned}$$

así que el menor  $A_{nj}$  está dado por

$$A_{nj} = D_{x_j} \nabla_{x_n} V(x) \Big|_{x_j=a_j} = D_{x_j} \left( -\frac{x_n - x_j}{|x_n - x_j|^2} \right) \Big|_{x_j=a_j}$$

dado que  $a_j = (r \cos j\zeta, r \sin j\zeta)$ , tenemos que

$$A_{nj} = \frac{1}{|a_n - a_j|^2} I - \frac{2r^2}{|a_n - a_j|^4} \begin{pmatrix} (1 - \cos j\zeta)^2 & -(1 - \cos j\zeta) \sin j\zeta \\ -(1 - \cos j\zeta) \sin j\zeta & (\sin j\zeta)^2 \end{pmatrix}$$

y usando que  $|a_n - a_j|^2 = 2r^2(1 - \cos j\zeta) = 4r^2 \sin^2(j\zeta/2)$ , y que  $\sin^2 j\zeta = (1 - \cos j\zeta)(1 + \cos j\zeta)$ , podemos escribir

$$A_{nj} = \frac{1}{4r^2 \sin^2(j\zeta/2)} \left( I - \begin{pmatrix} 1 - \cos j\zeta & -\sin j\zeta \\ -\sin j\zeta & 1 + \cos j\zeta \end{pmatrix} \right)$$

Sea

$$A = D_{x_n} \left( 4\omega \frac{x_n}{(1 + |x_n|^2)^2} + (n-1) \frac{x_n}{1 + |x_n|^2} \right) \Big|_{x_n=a_n}$$

de modo que la matriz  $A_{nn}$  satisface

$$A_{nn} = A - \sum_{j \neq n} D_{x_n} \left( -\frac{x_n - x_j}{|x_n - x_j|^2} \right) = A - \sum_{j \neq n} A_{nj}$$

Ahora calculamos  $A$  explícitamente

$$A = \left( \frac{4\omega}{(1+r^2)^2} + \frac{n-1}{1+r^2} \right) I - 2r^2 \left( \frac{8\omega}{(1+r^2)^3} + \frac{n-1}{(1+r^2)^2} \right) \text{diag}(1, 0)$$

usando que  $\omega = s_1 \frac{r^4-1}{4r^2}$ , tenemos que el primer paréntesis se simplifica a  $\frac{n-1}{2} r^{-2}$  y el segundo a  $(n-1)r^{-2}(1+r^2)^{-2}$ , de modo que

$$A = s_1 r^{-2} I - 4s_1 (1+r^2)^{-2} \text{diag}(1, 0).$$

□

Ya con esto, procedemos a dar una descomposición por bloques.

**Definición 1.** Para  $k \in \{1, \dots, n\}$  definimos los isomorfismos  $T_k : \mathbb{C}^2 \rightarrow W_k$  a través de

$$T_k(w) = \left( \frac{1}{\sqrt{n}} e^{(ikI+J)\zeta} w, \frac{1}{\sqrt{n}} e^{2(ikI+J)\zeta} w, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} e^{n(ikI+J)\zeta} w \right)$$

con

$$W_k = \left\{ \left( e^{(ikI+J)\zeta} w, e^{2(ikI+J)\zeta} w, \dots, e^{n(ikI+J)\zeta} w \right) : w \in \mathbb{C}^2 \right\} \subset \mathbb{C}^{2n}$$

*Obs.* Los subespacios  $W_k$  son ortogonales, de modo que la transformación lineal

$$Pw = \sum_{k=1}^n T_k(w_k), \quad w = (w_1, \dots, w_n) \in (C)^2,$$

es ortogonal, o bien, que  $P$  permuta las coordenadas de la descomposición por bloques, de donde podemos concluir que

$$P^{-1}D^2V(\mathbf{a})P = \text{diag}(B_1, \dots, B_n) \quad (4.11)$$

donde las matrices  $B_k$  son aquellas que satisfacen  $D^2V(\mathbf{a})T_k(w) = T_k(B_k w)$ .

Esto esta muy bien y todo, pero, ¿quiénes son los  $B_k$ ? Afortunadamente, tenemos de [6] que los bloques  $B_k$  se pueden obtener apartir de

$$B_k = \sum_{j=1}^n A_{nj} e^{j(ikI+J)\zeta} \quad \text{para } k \in \{1, \dots, n\} \quad (4.12)$$

así pues, procedemos a calcular los  $B_k$  en el caso de los  $n$  vórtices sobre la esfera.

**Proposición 4.2.3.** *Los bloques  $B_k$  están dados por*

$$B_k = s_1 r^{-2} I + (s_1 - s_k) r^{-2} R - 4s_1 (1 + r^2)^{-2} \text{diag}(1, 0)$$

donde  $s_k = \frac{k(n-k)}{2}$ .

*Demostración.* Partiendo del lema 4.2.2, tenemos que  $A_{nn} = A - \sum_{j=1}^{n-1} A_{nj}$ ,

lo que es equivalente a  $A = \sum_{j=1}^n A_{nj}$  así

$$\begin{aligned}
B_k &= \sum_{j=1}^n A_{nj} e^{j(ikI+J)\zeta} = \sum_{j=1}^n A_{nj} e^{j(ikI+J)\zeta} + A - A \\
&= A + \sum_{j=1}^n A_{nj} e^{j(ikI+J)\zeta} - \sum_{j=1}^n A_{nj} = A + \sum_{j=1}^n A_{nj} (e^{j(ikI+J)\zeta} - I) \\
&= A + \sum_{j=1}^{n-1} A_{nj} (e^{j(ikI+J)\zeta} - I) + A_{nn} (e^{n(ikI+J)\zeta} - I) = A + \sum_{j=1}^{n-1} A_{nj} (e^{j(ikI+J)\zeta} - I)
\end{aligned}$$

recordando que  $A_{nj} = (2r \operatorname{sen}(j\zeta/2))^{-2} (e^{jJ\zeta} R)$  tenemos

$$\begin{aligned}
B_k &= A + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{(2r \operatorname{sen}(j\zeta/2))^2} R e^{jJ\zeta} (e^{j(ikI+J)\zeta} - I) = A + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{R}{(2r \operatorname{sen}(j\zeta/2))^2} (e^{jik\zeta+2j\zeta} - e^{jJ\zeta}) \\
&= A + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{R}{(2r \operatorname{sen}(j\zeta/2))^2} (e^{jik\zeta} - e^{jJ\zeta}).
\end{aligned}$$

Usando que  $e^{-iz} + e^{iz} = 2 \cos z$  y que  $e^{jJ\zeta} = e^{-jJ\zeta}$ ;  $e^{jik\zeta} = e^{-jik\zeta}$  podemos escribir  $2e^{jik\zeta} = e^{jik\zeta} + e^{-jik\zeta} = 2 \cos jk\zeta$ ;  $2e^{jJ\zeta} = e^{jJ\zeta} + e^{-jJ\zeta} = 2I \cos j\zeta$ , y así

$$B_k = A + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\cos jk\zeta - \cos j\zeta}{(2r \operatorname{sen}(j\zeta/2))^2} R$$

y sustituyendo  $4 \operatorname{sen}^2(j\zeta/2) = 2(1 - \cos j\zeta)$

$$B_k = A + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{-2 \operatorname{sen}^2(jk\zeta/2) + 2 \operatorname{sen}^2(j\zeta/2)}{4r^2 \operatorname{sen}^2(j\zeta/2)} R = A + \frac{R}{2r^2} \sum_{j=1}^{n-1} 1 - \frac{\operatorname{sen}^2(jk\zeta/2)}{\operatorname{sen}^2(j\zeta/2)} = A + \frac{R}{r^2} (s_1 - s_k)$$

donde, como en el primer capítulo, hemos usado las identidades trigonométricas de Lagrange para establecer que  $\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\operatorname{sen}^2(jk\zeta/2)}{\operatorname{sen}^2(j\zeta/2)} = \frac{k(n-k)}{2} = s_k$ .

Finalmente, basta sustituir la expresión de  $A$  para obtener el resultado.  $\square$

Aplicando todo esto a 4.10, tenemos que en las nuevas coordenadas, la matriz  $M(\nu)$  está dada por

$$P^{-1}M(\nu)P = \operatorname{diag}(m_1(\nu), \dots, m_n(\nu))$$

donde los bloques  $m_k(\nu) \in M_{\mathbb{C}}(2)$  son

$$m_k(\nu) = -4(1+r^2)^{-2} \nu iJ + B_k.$$

### 4.3. El Criterio de Estabilidad

Con la matriz  $M(\nu)$  representada diagonalmente por bloques, y los bloques identificados explícitamente podemos empezar a analizar la estabilidad lineal.

#### 4.3.1. Las frecuencias normales

Empezamos obteniendo las frecuencias normales, es decir, aquellas que anulan al determinante de  $M(\nu)$ , pero como es diagonal por bloques, basta revisar los determinantes de cada bloque  $m_k(\nu)$ . Primero escribimos a  $m_k(\nu)$  explícitamente

$$\begin{aligned}
 m_k(\nu) &= -4(1+r^2)^{-2}\nu iJ + B_k \\
 &= -4(1+r^2)^{-2}\nu iJ + s_1 r^{-2}I + (s_1 - s_k)r^{-2}R - 4s_1(1+r^2)^{-2} \text{diag}(1, 0) \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{4\nu i}{(1+r^2)^2} \\ \frac{-4\nu i}{(1+r^2)^2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{s_1}{r^2} & 0 \\ 0 & \frac{s_1}{r^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{s_1-s_k}{r^2} & 0 \\ 0 & -\frac{s_1-s_k}{r^2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4s_1}{(1+r^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{s_1}{r^2} + \frac{s_1-s_k}{r^2} - \frac{4s_1}{(1+r^2)^2} & \frac{4\nu i}{(1+r^2)^2} \\ -\frac{4\nu i}{(1+r^2)^2} & \frac{s_1}{r^2} - \frac{s_1-s_k}{r^2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (2s_1 - s_k)r^{-2} - 4s_1(1+r^2)^{-2} & 4\nu i(1+r^2)^{-12} \\ -4\nu i(1+r^2)^{-2} & s_k r^{-2} \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

cuyo determinante es

$$\det(m_k(\nu)) = -\nu^2 16(1+r^2)^{-4} + s_k (2s_1 - s_k - 4s_1 r^2(1+r)^{-2}) r^{-4},$$

que se anula únicamente para

$$\nu_k = \frac{(1+r^2)^2}{4r^2} \sqrt{s_k (2s_1 - s_k - 4s_1 r^2(1+r^2)^{-2})}, \quad (4.13)$$

donde, para garantizar la estabilidad lineal, necesitamos que las frecuencias normales  $\nu_k$  sean reales y no nulas<sup>1</sup>, es decir, que el radical sea positivo. Como los  $s_k$  son estrictamente positivos tenemos que

---

<sup>1</sup> Cuando  $k = n$  el determinante también se anula, sin embargo,  $\nu_n = 0$  pues  $s_n = 0$ . Esto corresponde a rotar nuestras condiciones iniciales de modo que cada vórtice caiga en el siguiente.

$$\begin{aligned}
& s_k (2s_1 - s_k - 4s_1 r^2 (1 + r^2)^{-2}) > 0 \\
\iff & 2s_1 - s_k - 4s_1 r^2 (1 + r^2)^{-2} > 0 \\
\iff & 2 - \frac{s_k}{s_1} - 4r^2 (1 + r^2)^{-2} > 0 \\
\iff & 2 - \frac{s_k}{s_1} > 4r^2 (1 + r^2)^{-2}
\end{aligned}$$

*Obs.* Una condición *necesaria* para lo anterior es que la cantidad  $2 - \frac{s_k}{s_1}$  sea estrictamente positiva, ya que  $4r^2(1 + r^2)^{-2} > 0$ .

**Proposición 4.3.1.** *La condición necesaria  $2 - \frac{s_k}{s_1} > 0$  se cumple para toda  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  si  $n \leq 6$  y para toda  $k \in \{1, 2, n-2, n-1\}$  si  $n \geq 7$ . Es decir, éstos son los únicos casos donde las frecuencias  $\nu_k$  son reales.*

*Demostración.*

**Parte I:**  $k \in \{1, 2, n-2, n-1\}$ .

Veamos que para toda  $n$ , los pares extremos satisfacen la desigualdad.

Para  $k = 1$  tenemos que  $2 - \frac{s_k}{s_1} = 2 - \frac{s_1}{s_1} = 2 - 1 = 1 > 0$ .

Para  $k = 2$  tenemos que  $2 - \frac{s_k}{s_1} = 2 - \frac{2(n-2)}{n-1} = \frac{2(n-1) - 2(n-2)}{n-1} = \frac{2}{n-1} > 0$

Notando que  $s_k = s_{n-k}$  se obtienen los otros dos casos. Además, esto cubre totalmente los casos  $n = 2, 3, 4$  y  $5$  pues en esos casos  $\{1, 2, n-2, n-1\}$  son todos los  $k$ 's posibles

**Parte II:**  $k = 3$  con  $n \geq 6$ .

Nos falta checar qué pasa después de  $n = 5$ . Así, supongamos que  $n \geq 6$  y

que la desigualdad se cumple para  $k = 3$ . Esto es

$$\begin{aligned}
0 &< 2 - \frac{s_3}{s_1} = 2 - \frac{3(n-3)}{n-1} \\
&\iff 3(n-3) < 2(n-1) \\
&\iff 3n - 9 < 2n - 2 \\
&\iff n < 7 \\
&\iff n \leq 6
\end{aligned}$$

es decir, el único  $n$  después del 5 tal que la tercera  $k$  funciona es  $n = 6$ . Además, como  $k(n-k)$  es creciente en  $k$  para  $k \in \{1, \dots, [n/2]\}$  sabemos que la desigualdad no se vuelve a dar para ninguna otra  $k$  en  $\{3, 4, \dots, n-4, n-3\}$ .

□

### 4.3.2. El teorema de la estabilidad lineal

Con todo esto ya podemos caracterizar la estabilidad lineal para configuraciones poligonales de vórtices sobre la esfera.

**Teorema 4.3.2.** *Dados  $n$  vórtices puntuales con vorticidades idénticas colocados poligonalmente sobre la esfera unitaria a una altura  $z = \cos \varphi_0$  con  $\varphi_0$  el ángulo cenital, éstos mantendrán un equilibrio relativo linealmente estable si  $n \leq 6$  y*

$$\frac{k(n-k)}{n-1} - 1 < z^2 = \cos^2 \varphi_0 \text{ para toda } k \in \{1, \dots, n-1\} \quad (4.14)$$

*Demostración.* De la sección anterior vimos que la estabilidad lineal depende de que para toda  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  se satisfaga

$$2 - \frac{s_k}{s_1} > 4r^2(1+r^2)^{-2}.$$

Sustituyendo  $r^2 = \frac{1+z}{1-z}$  tenemos que

$$\begin{aligned} 2 - \frac{s_k}{s_1} &> 4 \left( \frac{1+z}{1-z} \right) \left( 1 + \frac{1+z}{1-z} \right)^{-2} \\ &= 4 \left( \frac{1+z}{1-z} \right) \left( \frac{2}{1-z} \right)^{-2} \\ &= 1 - z^2, \end{aligned}$$

lo cual es equivalente a

$$\frac{k(n-k)}{n-1} - 1 < z^2 = \cos^2 \varphi_0 \text{ para toda } k \in \{1, \dots, n-1\}.$$

□

*Y creo que le pararé ahí...*



## Observaciones Finales

---

Repacemos brevemente lo que se ha hecho en este trabajo de tesis. Primero estudiamos superficialmente la dinámica de vórtices en el plano donde describimos equilibrios relativos. Esto fungió de guía e inspiración para el estudio de vórtices en superficies más generales, lo que conforma el resto del trabajo. Después, con mucho detalle, adaptamos la teoría a superficies cada vez más particulares – empezamos con superficies arbitrarias, avanzamos más en variedades diferenciables o simplécticas, dimos ecuaciones explícitas para superficies de revolución y finalmente aplicamos la teoría a la esfera unitaria, donde caracterizamos la estabilidad lineal de equilibrios relativos de configuraciones poligonales de vórtices idénticos en función de la .

### 5.1. Una interpretación del criterio de estabilidad

Antes de ver las aplicaciones de este trabajo necesitamos interpretar el criterio de estabilidad, afortunadamente esto no es muy difícil. Primero, notemos que el criterio 4.14 tiene dos variables: el número de vórtices  $n$  y la altura  $z$  a la que están colocados respecto al ecuador. Como mencionábamos en 4.3.1, el lado izquierdo de la desigualdad alcanza un máximo en  $k = \lfloor n/2 \rfloor$ . De hecho, el máximo es exactamente  $\frac{\lfloor n/2 \rfloor (n - \lfloor n/2 \rfloor)}{n-1} - 1$ , cuyas tabulaciones aparecen a continuación en la tabla 5.1. De acuerdo al criterio, para  $n$  vórtices, la altura al cuadrado ( $z^2$ ) debe ser mayor a lo que aparece en el renglón inferior de la tabla y como  $z \in [-1, 1]$  queda claro que para 7 vórtices la estabilidad lineal llega a su límite.

Número de vórtices, $n$	2	3	4	5	6	7
$\frac{[n/2](n-[n/2])}{n-1} - 1$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	1

Tabla 5.1

Por otro lado, del primer capítulo sabemos que los vórtices en el plano sí mantienen un movimiento circular estable. Un argumento geométrico sugiere que la estabilidad de los vórtices debería “mejorar” entre más cercanos estén unos de otros, ya que para distancias cortas la esfera (en general, cualquier variedad) se aproxima a un plano. Como la cercanía de los vórtices depende directamente de la altura a la que están podemos dar la siguiente interpretación: las raíces cuadradas (pues  $z$  va al cuadrado) de las tabulaciones anteriores nos dan una cota inferior para la estabilidad, sin embargo, ésta mejora a mayor altura. No sobra hacer énfasis en el hecho de que no hemos estudiado la estabilidad **no lineal** de este problema, sin embargo las siguientes aplicaciones sugieren que nuestro estudio de estabilidad es bastante completo.

## 5.2. Un par de aplicaciones potenciales

Podría parecer que nuestro modelo de un fluido dos dimensional, incompresible y con vórtices puntuales está demasiado idealizado como para reflejar fenómenos reales. A continuación damos dos aplicaciones valiosas de nuestro estudio a escalas drásticamente distintas.

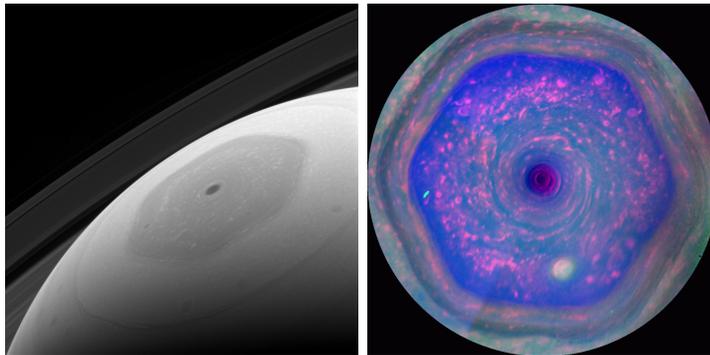
### 5.2.1. Fenómenos atmosféricos

Podría parecer razonable tratar de aplicar la teoría desarrollada al estudio de la meteorología terrestre, modelando huracanes, tornados o tifones como vórtices sobre el verdadero pálido punto azul: la Tierra. Sin embargo, es fácil ver que este modelo tiene las siguientes deficiencias críticas. Por un lado, la Tierra, con su topografía, no es suficientemente suave como superficie y su atmósfera, además de ser compresible, no se porta como un fluido ideal. Por otro lado, desde el punto de vista físico, no hay vorticidades puntuales en nuestra atmósfera; esto motiva una potencial continuación de

este trabajo, a decir, el estudio de vórticidades con distribuciones suaves. Se ocurre estudiar  $\Delta\psi = f$  con  $f$  una distribución gaussiana, pero eso es mucho más complejo y escapa la visión de esta tesis.

Afortunadamente, existen planetas sin topografía y con atmósferas idealizables: los gigantes gaseos Júpiter y Saturno. Estos planetas poseen atmósferas susceptibles de ser modeladas como fluidos incompresibles dos-dimensionales sobre esferas. Es emocionante poder incluir en este trabajo las observaciones de patrones poligonales cerca de los polos de Saturno [7] y de Júpiter [8].

El hexágono de Saturno (figura 5.1) se observó en 1981 y sigue sin darse una explicación totalmente satisfactoria respecto a su formación. A pesar de que los mecanismos que dan lugar al hexágono siguen sin identificarse, los modelos [9] sugieren que se trata de vórtices verticales distribuidos poligonalmente en torno al polo, mientras que los experimentos [10] confirman que, dadas las condiciones atmosféricas de Saturno, configuraciones de hasta ocho vórtices deberían ser posibles. Asimismo, los mismos experimentos observan una afinidad por las configuraciones hexagonales, sugiriendo que son más estables que los polígonos mayores. Esto es consistente con nuestro resultado.

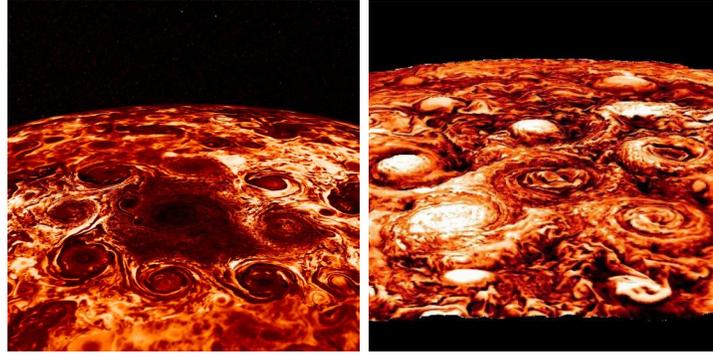


**Figura 5.1:** El hexágono de Saturno.

(Imágenes cortesía de [11] y [12])

Por otro lado, Júpiter también posee configuraciones poligonales en sus polos (figura 5.2). En este caso se observan un pentágono en el polo sur y un octágono en el polo norte. El pentágono no debería extrañarnos pues para  $n \leq 5$  nuestro estudio predice estabilidad. Sin embargo, el modelo llega a su

límite cuando los polígonos corresponden a heptágonos, así que no tenemos nada formal que comentar en el caso del octágono.



**Figura 5.2:** El octágono y el pentágono de Júpiter.

(Imágenes cortesía de [13] y [14])

No obstante, vale la pena señalar que tanto el hexágono de Saturno como los polígonos de Júpiter están dotados en un ciclón central. De hecho, en el caso del Júpiter, se ha observado que el pentágono junto con su centro se mueven de manera estable y rígida, es decir, los seis vórtices (incluyendo el central) mantienen sus posiciones relativas incluso cuando la estructura completa se mueve un poco [15]. No requiere mucha imaginación relacionar esto con la alternativa no tomada al garantizar la condición de Gauss en el segundo capítulo: en vez de introducir un campo compensante pudimos haber introducido un *vórtice compensante*.

Así, aunque nosotros no modelamos la formación de estas estructuras, las similitudes superficiales indican que podemos tener confianza al considerar aplicar este trabajo como soporte formal en el estudio de la estabilidad y evolución de estos fenómenos atmosféricos. Sería interesante, ya que no lo hemos hecho aquí, considerar el efecto de Coriolis en una esfera, esto queda descrito Eulerianamente [16] por

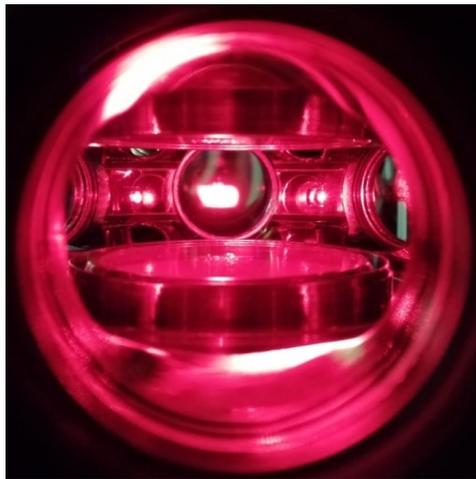
$$\partial_t \mathbf{U} + \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{U} + \nabla P = \frac{z}{\varepsilon} \mathbf{u}^\perp$$

donde  $\mathbf{U}$  es el campo de velocidades,  $P$  la presión,  $\mathbf{u}^\perp$  es  $\mathbf{U}$  con un cuarto de vuelta respecto al ecuador y  $\varepsilon$  es el *número de Rossby* y es proporcional a la frecuencia de rotación.

### 5.2.2. El *BECMEX*

Como suele pasar con estos modelos idealizados, los ejemplos suelen existir a escalas cósmicas o, simétricamente, a escalas atómicas. El siguiente fenómeno tampoco lo conocía al iniciar este trabajo, de modo que quiero agradecer explícitamente a mi amigo Andrés Gutiérrez, alumno del Laboratorio de Materia Ultrafría, adscrito al Laboratorio Nacional de Materia Cuántica (LANMAC) del Instituto de Física de la UNAM (IFUNAM) por ser el primero en llamar mi atención a él. Debo advertir que la mecánica cuántica está en la frontera de mi *esfera* de conocimiento, así que la siguiente explicación debe tomarse con un grano de sal y en calidad divulgativa.

Para dar contexto, quiero empezar mencionando que el año pasado, en el LANMAC, el Dr. Jorge Amin Semen Harutinian, investigador del IFUNAM, junto con sus colaboradores y alumnos, logró producir el primer condensado de Bose-Einstein de México (*BECMEX* por sus siglas en inglés: *Bose-Einstein Condensate, Mexico*), un estado de la materia ultrafría [17] (fig. 5.3).



**Figura 5.3:** El *BECMEX* levitando en su trampa magneto-óptica.

(Foto cortesía de Andrés Gutiérrez)

Un BEC suele describirse como un superfluido, el cual se obtiene al enfriar átomos o moléculas a temperaturas comparables con el cero absoluto. Una propiedad interesante de estos objetos es que su momento angular está

cuantizado, de modo que al poner todo el condensado a rotar se pueden formar vorticidades en su superficie, las cuales se distribuyen en configuraciones estables. Estas configuraciones pueden ser poligonales, polihédricas o distribuidas en latices triángulares y fueron observadas en el 2005 por un grupo de físicos [18]. Esto es esencialmente lo que tenemos nosotros: una esfera rotando (considerando la rotación compensante que introdujimos para garantizar la condición de Gauss) con vórtices prácticamente puntuales en su superficie.

De hecho, el estudio de configuraciones polihédricas fue considerado como tema alternativo para esta tesis y valdría la pena realizar esa investigación más adelante. De cualquier forma, me da gusto afirmar que el modelo presentado en esta tesis, aunque simplista, sí es relevante en los estudios de los fenómenos cuánticos presentes en la teoría de los condensados de Bose-Einstein.

Aprovecho el espacio libre de esta cuartilla para agradecer a todos los lectores de esta tesis. Su paciencia e interés son profundamente apreciados.

# Apéndice

---

## A.1. La Integral

Me interesa evaluar la expresión

$$I(r, r_0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \log[r^2 - 2rr_0 \cos \alpha + r_0^2] d\alpha$$

con métodos elementales , para la cual necesitamos varios lemas.

**Lema A.1.1.** *Sea*

$$P(r, \alpha) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \alpha + r^2}$$

el Núcleo de Poisson, entonces para  $(r, \alpha) \neq (1, 0)$  se tiene que  $\Delta P = 0$ .

*Demostración.* Como  $\Delta P(r, \alpha) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial}{\partial r} P) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} P$  tenemos

$$\begin{aligned} \Delta P(r, \alpha) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{2(r^2 + 1) \cos \alpha - 2r}{(1 - 2r \cos \alpha + r^2)^2} \right) - \frac{2(1 - r^2)((r^2 + 1) \cos \alpha + r(\cos 2\alpha - 3))}{r(1 - 2r \cos \alpha + r^2)^3} \\ &= \frac{2(1 - r^2)((r^2 + 1) \cos \alpha + r(\cos 2\alpha - 3))}{r(1 - 2r \cos \alpha + r^2)^3} - \frac{2(1 - r^2)((r^2 + 1) \cos \alpha + r(\cos 2\alpha - 3))}{r(1 - 2r \cos \alpha + r^2)^3} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

**Lema A.1.2.** *Sea*

$$U(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \alpha - \varphi) d\varphi,$$

entonces para  $r < 1$  se tiene que  $\Delta U = 0$ .

*Demostración.* Como la integral no depende de  $r$  o  $\alpha$  entonces el laplaciano se le mete en la fila a la integral y aplicando el lema anterior se tiene

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{1}{2\pi} \Delta \int_0^{2\pi} P(r, \alpha - \varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta P(r, \alpha - \varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 0 d\varphi \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

**Lema A.1.3.** *Para  $r < 1$  se tiene que  $U(r, \alpha) = 1$ .*

*Demostración.* Del lema anterior tenemos que  $\Delta U(r, \alpha) = 0$ , en particular  $\Delta U(r, 0) = 0$ , o bien  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial}{\partial r} U(r, 0)) = 0$ .

De modo que  $\frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial}{\partial r} U(r, 0)) = 0$ , entonces  $r \frac{\partial}{\partial r} U(r, 0) = cte$  pero como esto debe funcionar para toda  $r$  podemos concluir que  $\frac{\partial}{\partial r} U(r, 0) = 0$  es decir,  $U(r, 0)$  también es constante. Evaluando en  $r = 0$  se sigue que  $U(0, 0) = 1$ . Así para  $r < 1$ ,  $U(r, 0) = 1$  y como  $\cos \varphi = \cos(-\varphi)$  tenemos que  $U(r, \alpha) = U(r, 0) = 1$ .

□

**Lema A.1.4.** *Sea*

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2r - 2 \cos \varphi}{1 - 2r \cos \varphi + r^2} d\varphi,$$

entonces para  $r < 1$  se tiene que  $I = 0$ .

*Demostración.* Consideremos la siguiente suma

$$\begin{aligned}
 rI + U(r, 0) &= r \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2r - 2 \cos \varphi}{1 - 2r \cos \varphi + r^2} d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(-\varphi) + r^2} d\varphi \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2r^2 - 2 \cos \varphi + 1 - r^2}{1 - 2r \cos(-\varphi) + r^2} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - 2r \cos(-\varphi) + r^2}{1 - 2r \cos(-\varphi) + r^2} d\varphi \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 d\varphi = 1.
 \end{aligned}$$

del lema anterior tenemos que  $U(r, 0) = 1$ , por lo tanto  $I = 0$ . □

**Teorema A.1.5.**

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log[1 - 2r \cos \alpha + r^2] d\alpha = \log(\text{máx}\{1, r^2\})$$

.

*Demostración.* Primero, notemos que para  $r = 0$  el resultado se cumple:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log[1] d\alpha = 0 = \log 1 = \log(\text{máx}\{0, 1\}).$$

Ahora consideramos tres casos:  $r < 1$ ,  $r > 1$  y  $r = 1$ .

**Caso 1:**  $r < 1$

Del lema anterior

$$\begin{aligned}
 0 = I &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2r - 2 \cos \alpha}{1 - 2r \cos \alpha + r^2} d\alpha \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \log[1 - 2r \cos \alpha + r^2] d\alpha \\
 &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log[1 - 2r \cos \alpha + r^2] d\alpha \right)
 \end{aligned}$$

Entonces, para  $r < 1$ , lo que está entre paréntesis es constante, y como conocemos su valor en  $r = 0 < 1$  tenemos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log[1 - 2r \cos \alpha + r^2] d\alpha = 0 = \log(\max\{1, r^2\}).$$

**Caso 2:**  $r > 1$

Notemos que si  $r > 1$  entonces  $s = \frac{1}{r} < 1$ , así

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log[1 - 2r \cos \alpha + r^2] d\alpha &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log[r^2(s^2 - 2s \cos \alpha + 1)] d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log[r^2] d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log[s^2 - 2s \cos \alpha + 1] d\alpha \\ &= \log[r^2] + 0 = \log(\max\{1, r^2\}), \end{aligned}$$

donde al segundo término le hemos aplicado el primer caso.

**Caso 3:**  $r = 1$

Este caso se sigue por continuidad.

□

**Corolario A.1.5.1.**

$$I(r, r_0) = \log(\max\{r, r_0\}).$$

*Demostración.* Para empezar, para que la integral tenga sentido,  $r$  y  $r_0$  no pueden ser simultáneamente 0, digamos que  $r_0 > 0$ . Ahora, si denotamos por  $I(r, r_0)$  a la integral, tenemos

$$\begin{aligned} I(r, r_0) &= \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left[ r_0^2 \left( \frac{r^2}{r_0^2} - 2 \frac{r}{r_0} \cos \alpha + 1 \right) \right] d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log[r_0^2] d\alpha + \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left[ \frac{r^2}{r_0^2} - 2 \frac{r}{r_0} \cos \alpha + 1 \right] d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \log r_0^2 + \frac{1}{2} \log \left( \max\left\{1, \frac{r^2}{r_0^2}\right\} \right) = \log r_0 + \log \left( \max\left\{1, \frac{r}{r_0}\right\} \right) \\ &= \log \left[ r_0 \max \left( 1, \frac{r}{r_0} \right) \right] = \log(\max\{r_0, r\}), \end{aligned}$$

donde hemos aplicado el teorema anterior sobre  $\frac{r}{r_0}$  en el segundo término.

□

# Bibliografía

---

- [1] P. K. Newton, *The N-Vortex Problem: Analytical Techniques*, Springer-Verlag New York, Vol. 145, (2001), pp. 1-5, 154-175. VII, 19
- [2] D. G. Dritschel & S. Boatto, *The motion of point vortices on closed surfaces*, Proc. R. Soc. A , Vol. 471, 2015. VII
- [3] J. Montaldi & T. Tokieda, *Deformation of Geometry and Bifurcations of Vortex Rings.*, Recent Trends in Dynamical Systems, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Vol 35, 2013. 25
- [4] T. Kappeler & J. Pöschel, *KdV & KAM*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Vol 45, 2003. 36
- [5] C. García Azpeitia, *Relative periodic solutions of the n-vortex problem on the sphere*, 2019. VIII
- [6] C. García Azpeitia & J. Ize, *Global bifurcation of polygonal relative equilibria for masses, vortices and dNLS oscillators.*, J. Differential Equations Vol 252 (2013) 58
- [7] D.A. Godfrey, *A hexagonal feature around Saturn's north pole*, Icarus Vol 76 (1988) 67
- [8] A. Adriani, A. Mura, G. Orton et al. *Clusters of cyclones encircling Jupiter's poles.*, Nature Vol 555 (2018) 67
- [9] R. Morales-Juberías, K. Sayanagi, A. Simon, Amy L. Fletcher & R. Cozzetto, *Meandering shallow atmospheric jet as a model of saturns north-polar hexagon.*, The Astrophysical Journal Vol 806 (2015) 67

- [10] A. Barbosa Aguiar, P. Read, R. Wordsworth, T. Salter & Y. Yamazaki *A laboratory model of Saturn's North Polar Hexagon*, *Icarus* Vol 206 (2010) 67
- [11] NASA/JPL-Caltech/Space Science Institute *Hail the Hexagon*, PIA21327 (2017) XI, 67
- [12] NASA/JPL-Caltech/SSI/Hampton University, *In Full View: Saturn's Streaming Hexagon*, PIA14947 (2013) XI, 67
- [13] NASA/JPL-Caltech/SwRI/ASI/INAF/JIRAM, *A New View on Jupiter's North Pole*, PIA22336 (2017) XI, 68
- [14] NASA/JPL-Caltech/SwRI/ASI/INAF/JIRAM, *Jupiter's Southern Exposure in Infrared*, PIA22337 (2017) XI, 68
- [15] F. Tabataba-Vakili, J.H. Rogers, G. Eichstädt, G. Orton, C.J. Hansen, T. Momary, J. Sinclair, R.S. Giles, M.A. Caplinger, M.A. Ravine, & S. Bolton, *Long-term tracking of circumpolar cyclones on Jupiter from polar observations with JunoCam*, *Icarus* Vol 335 (2019) 68
- [16] B. Cheng, A. Mahalov, *Euler equation on a fast rotating sphere—Time-averages and zonal flows*, *European Journal of Mechanics - B/Fluids* Vol 37 (2013) 68
- [17] Instituto de Física, UNAM. *Científicos del IFUNAM crean el primer condensado de Bose-Einstein de México.*, Noticias IFUNAM; 12 de noviembre de 2018.  
<https://www.fisica.unam.mx/es/noticias.php?id=1733>. 69
- [18] M. W. Zwierlein, J. R. Abo-Shaeer, A. Schirotzek, C. H. Schunck & W. Ketterle. *Vortices and superfluidity in a strongly interacting Fermi gas*. *Nature*, Vol 435, 2005. 70