



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Estudio de la propagación de  
ondas no lineales en medios  
no homogéneos**

**TESIS**

Que para obtener el título de  
**Ingeniero Mecánico**

**P R E S E N T A**

Aarón Alejandro Gómez Becerra

**DIRECTOR DE TESIS**

Dr. José Enrique Guzmán Vázquez



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**

**Tesis Digitales**

**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**

**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**Jurado Asignado**

Presidente: **M. I. Yahvé Abdul Ledezma Rubio**  
Secretario: **Dr. Francisco Antonio Godínez Rojano**  
Suplente: **Dra. Flor Lizeth Torres Ortiz**  
Suplente: **Dr. Josué Tago Pacheco**  
Vocal: **Dr. José Enrique Guzmán Vázquez**

## Agradecimientos

Al Dr. Francisco Sánchez Sesma, por su apertura a colaborar con él en el tema de propagación de ondas no lineales en medios no homogéneos, de modo tal, que esta tesis establece el primer paso para dicha colaboración.

Al sínodo, por sus valiosas aportaciones y sugerencias al trabajo. Agradezco especialmente al Dr. Francisco Antonio Godínez Rojano, porque sus aportaciones en la etapa temprana del proyecto dieron lugar al diseño del experimento. También, le agradezco su constante apoyo e interés en el trabajo y en mi persona.

A mi director de tesis, el Dr. José Enrique Guzmán Vázquez, por su tutela tenaz, porque con el rigor exigido entiendo que se me considera capaz. Lo reconozco especialmente, como uno de los profesores que impactó mi formación profesional.

A mi alma máter, la Universidad Nacional Autónoma de México, porque en sus espacios encontré cultura, libertad, conocimiento y camaradería. Me cultivé de sus valores y porto sus colores con orgullo.

Hago mención especial de mi terruño, la ciudad de La Paz, Baja California Sur, porque el haber venido a estudiar a la UNAM implicó dejar atrás familiares y amigos queridos, mismos que nunca dejaron de apoyarme. Es tal mi gratitud que a modo de epígrafe cito a José Peláez Trasviña:

“Cómo no he de quererte ciudad mía, si mi primer amor fue serenata, que recorrió tu malecón un día, teñido de crepúsculo escarlata”.

## Dedicatoria

A mis padres, Beatriz y Víctor, por su cariño incondicional, por su ejemplo y por enseñarme que la educación es un noble y generoso camino para ser feliz.

# Resumen

En esta tesis se estudió experimental y numéricamente la propagación de un pulso en un medio no homogéneo. Dicho medio, está constituido por una cadena de péndulos acoplados con juntas esféricas con fricción, suspendida verticalmente de uno de sus extremos. Se desarrolló un dispositivo experimental que permite aplicar diferentes tipos de excitación, donde los parámetros a variar son el desplazamiento horizontal y el tiempo. El fenómeno se grabó con una cámara de alta velocidad para ser procesado con un programa de análisis de video, del cual, se obtuvieron los desplazamientos nodales en el plano de vibración. Se desarrolló un modelo numérico mecanicista con el programa LS-Dyna de elementos finitos, que permite estudiar la propagación de la onda. En éste, se establecieron los eslabones como elementos rígidos y se perturbó inicialmente la cadena con una función de desplazamiento en términos del tiempo. Las ecuaciones que describen la dinámica del sistema planteado, se resuelven con el método de penalización e integración explícita en el tiempo. Se corroboró que el pulso se propaga no linealmente, ya que su velocidad de fase cambia de manera espacial y temporal. Aunque en realidad la tensión está en función del tiempo y la dirección de propagación (a lo largo de la coordenada  $y$ ), se encontró que la velocidad del pulso se describe con propiedad al considerar que la tensión varía aproximadamente de forma lineal. Los resultados experimentales y simulados concuerdan en la primera oscilación. Después de ésta, se presentó un comportamiento producto de la interacción de las ondas reflejadas desde los extremos, cuyas velocidades y amplitudes no son constantes.

# Contenido

|                                                                                      |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Resumen</b>                                                                       | <b>III</b> |
| <b>1. INTRODUCCIÓN</b>                                                               | <b>1</b>   |
| 1.1. Ondas no lineales . . . . .                                                     | 2          |
| 1.2. Antecedentes . . . . .                                                          | 3          |
| 1.3. Objetivos de la tesis . . . . .                                                 | 7          |
| 1.3.1. Alcances . . . . .                                                            | 7          |
| 1.3.2. Hipótesis . . . . .                                                           | 7          |
| <b>2. MARCO TEÓRICO</b>                                                              | <b>8</b>   |
| 2.1. Fundamentos de propagación de ondas . . . . .                                   | 8          |
| 2.1.1. Ondas mecánicas . . . . .                                                     | 8          |
| 2.1.2. Ondas planas . . . . .                                                        | 8          |
| 2.1.3. Parámetros de onda . . . . .                                                  | 9          |
| 2.1.4. Ecuación de onda: solución de d'Alembert . . . . .                            | 13         |
| 2.2. Vibración libre con amortiguamiento viscoso de un sistema de 2° orden . . . . . | 15         |
| 2.2.1. Caso 1: sistema subamortiguado . . . . .                                      | 15         |
| 2.2.2. Caso 2: sistema sobreamortiguado . . . . .                                    | 16         |
| 2.2.3. Caso 3: sistema críticamente amortiguado . . . . .                            | 17         |
| 2.2.4. Caso 4: sistema no amortiguado . . . . .                                      | 17         |

|                                                                                        |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.3. Vibración forzada con amortiguamiento viscoso de un sistema de 2° orden . . . . . | 18        |
| 2.3.1. Respuesta a un forzamiento tipo escalón unitario . . . . .                      | 18        |
| 2.3.2. Respuesta a un forzamiento tipo impulso . . . . .                               | 18        |
| 2.4. Consideraciones sobre movimiento pendular . . . . .                               | 19        |
| 2.4.1. Aproximación de ángulos pequeños para un péndulo simple . . . . .               | 20        |
| 2.4.2. Péndulo múltiple . . . . .                                                      | 20        |
| 2.4.3. Aproximación de ángulos pequeños para un péndulo múltiple . . . . .             | 22        |
| <b>3. EXPERIMENTACIÓN</b>                                                              | <b>24</b> |
| 3.1. Dispositivo experimental . . . . .                                                | 24        |
| 3.1.1. Mecanismo rodillo-corredera . . . . .                                           | 27        |
| 3.1.2. Control del mecanismo . . . . .                                                 | 28        |
| 3.2. Procesos de interés . . . . .                                                     | 32        |
| 3.2.1. Caso 1: impacto aplicado . . . . .                                              | 32        |
| 3.2.2. Caso 2: desplazamiento aplicado . . . . .                                       | 34        |
| 3.3. Método de análisis . . . . .                                                      | 36        |
| 3.3.1. Análisis de videos con el programa Tracker 4.9.6 . . . . .                      | 36        |
| 3.3.2. Conversión de la duración del video al tiempo real . . . . .                    | 37        |
| <b>4. MODELO NUMÉRICO</b>                                                              | <b>38</b> |
| 4.1. Cadena de péndulos acoplados . . . . .                                            | 38        |
| 4.1.1. Condiciones de frontera . . . . .                                               | 40        |
| 4.1.2. Juntas esféricas con fricción . . . . .                                         | 41        |
| 4.1.3. Funciones de excitación . . . . .                                               | 44        |
| 4.2. Ecuaciones de movimiento . . . . .                                                | 45        |
| 4.3. Visualización de las simulaciones . . . . .                                       | 49        |

|                                                                                                   |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>5. MÉTODOS DE VALIDACIÓN</b>                                                                   | <b>50</b>  |
| 5.1. Obtención de la función de excitación . . . . .                                              | 50         |
| 5.2. Estimación del coeficiente de fricción viscosa $b$ y la constante de rigidez torsional $k$ . | 51         |
| <b>6. RESULTADOS</b>                                                                              | <b>55</b>  |
| 6.1. Comparación del movimiento simulado con el real . . . . .                                    | 56         |
| 6.2. Desplazamientos nodales en el plano . . . . .                                                | 66         |
| 6.3. Velocidades y aceleraciones nodales . . . . .                                                | 72         |
| 6.4. Trayectorias en el plano fase . . . . .                                                      | 76         |
| 6.5. Características de la propagación . . . . .                                                  | 78         |
| 6.6. Análisis y discusión . . . . .                                                               | 95         |
| <b>7. CONCLUSIONES</b>                                                                            | <b>100</b> |
| 7.1. Contribuciones . . . . .                                                                     | 101        |
| 7.2. Recomendaciones y trabajo futuro . . . . .                                                   | 102        |
| <b>A. Código IDE</b>                                                                              | <b>103</b> |
| <b>B. Código LS-Dyna</b>                                                                          | <b>105</b> |

# Lista de Figuras

|                                                                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1. Frentes de onda planos y esféricos. Imagen tomada de Stein y Wyssession (2003). . .                                | 9  |
| 2.2. Sistema masa-resorte. Tomada de Beer y Johnston (2010). . . . .                                                    | 9  |
| 2.3. Circunferencia y vectores que representan un movimiento armónico simple. Tomada de Beer y Johnston (2010). . . . . | 10 |
| 2.4. Periodo y longitud de onda. Tomada de Stein y Wyssession (2003). . . . .                                           | 12 |
| 2.5. Fuerzas que actúan en un segmento de una cuerda transversal. Tomada de Stein y Wyssession (2003). . . . .          | 14 |
| 2.6. Respuesta de un sistema subamortiguado (los ejes son adimensionales). . . . .                                      | 16 |
| 2.7. Respuesta de un sistema sobreamortiguado (los ejes son adimensionales). . . . .                                    | 17 |
| 2.8. Respuesta de un sistema críticamente amortiguado (los ejes son adimensionales). . .                                | 18 |
| 2.9. Función impulso. Tomada de Ogata (1987) . . . . .                                                                  | 19 |
| 2.10. Péndulo simple. Tomada de Beer y Johnston (2010) . . . . .                                                        | 20 |
| 2.11. Péndulo múltiple. Tomada de Braun (2003) . . . . .                                                                | 21 |
| 3.1. Segmento de la cadena utilizada en la experimentación. . . . .                                                     | 24 |
| 3.2. a) Cámara de alta velocidad b) lente c) lámpara. . . . .                                                           | 25 |
| 3.3. Mecanismo y sistema de control. . . . .                                                                            | 26 |
| 3.4. Sistema de coordenadas propuesto: a) caso 1, b) caso 2. . . . .                                                    | 26 |
| 3.5. Modelos 3D de las piezas que conforman el mecanismo: a) rodillo, b) base de la corredera, c) corredera. . . . .    | 28 |

|                                                                                                                                                             |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.6. Diagrama de pines de salida del controlador digital A4988. Tomada de Pololu Robotics Electronics (2018). . . . .                                       | 29 |
| 3.7. Medición del voltaje de referencia para el ajuste de corriente eléctrica. Tomado de Pololu Robotics Electronics (2018). . . . .                        | 31 |
| 3.8. Asignación del periodo de paso en el código IDE. . . . .                                                                                               | 32 |
| 3.9. Periodo que dura un paso. Tomada de Allegro Microsystems (2014). . . . .                                                                               | 32 |
| 3.10. Impacto aplicado en el caso 1: a) $t = 0$ s, b) $t = 0.05$ s, c) $t = 0.1$ s. . . . .                                                                 | 33 |
| 3.11. Función de entrada $x(t)$ para el caso 1. . . . .                                                                                                     | 34 |
| 3.12. Desplazamiento aplicado en el caso 2: a) $t = 0$ s, b) $t = 0.14$ s, c) $t = 0.2$ s. . . . .                                                          | 35 |
| 3.13. Función de entrada $x(t)$ para el caso 2. . . . .                                                                                                     | 36 |
| 3.14. Seguimiento de la trayectoria de los nodos en Tracker. . . . .                                                                                        | 37 |
| 4.1. Tipos de elementos en LS-Dyna. Tomado de Livermore Software Technology Corporation, (1999). . . . .                                                    | 39 |
| 4.2. Definición de la duración de las simulaciones y exportación de los datos de solución. . . . .                                                          | 40 |
| 4.3. Definición del campo gravitacional en LS-Dyna. . . . .                                                                                                 | 40 |
| 4.4. Restricción de grados de libertad de nodos: a) caso 1, b) caso 2. . . . .                                                                              | 41 |
| 4.5. Junta esférica y 2 nodos necesarios para definirla. Tomada de Livermore Software Technology Corporation, (1999). . . . .                               | 42 |
| 4.6. Elemento extra con función de soporte. . . . .                                                                                                         | 42 |
| 4.7. Definición de las funciones de entrada en LS-Dyna: a) caso 1, b) caso 2. . . . .                                                                       | 45 |
| 4.8. Visualización en Paraview de los resultados de la simulación numérica. . . . .                                                                         | 49 |
| 5.1. Error entre 2 curvas. . . . .                                                                                                                          | 52 |
| 5.2. Definición de la fricción en las juntas esféricas en LS-Dyna: a) asignación de $k$ y ángulo de tope, b) tabla de par contra celeridad angular. . . . . | 54 |
| 6.1. Caso 1: comparación de la onda experimental con la onda simulada para $t = 0$ s. . .                                                                   | 56 |
| 6.2. Caso 1: comparación de la onda experimental con la onda simulada para $t = 0.1$ s. .                                                                   | 57 |

|                                                                                                                                                          |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 6.3. Caso 1: comparación de la onda experimental con la onda simulada para $t = 0.2$ s. . .                                                              | 58 |
| 6.4. Caso 1: comparación de la onda experimental con la onda simulada para $t = 0.29$ s. .                                                               | 59 |
| 6.5. Caso 1: comparación de la onda experimental con la onda simulada para $t = 0.45$ s. .                                                               | 60 |
| 6.6. Caso 2: comparación de la onda experimental con la onda simulada para $t = 0$ s. . .                                                                | 61 |
| 6.7. Caso 2: comparación de la onda experimental con la onda simulada para $t = 0.14$ s. .                                                               | 62 |
| 6.8. Caso 2: comparación de la onda experimental con la onda simulada para $t = 0.24$ s. .                                                               | 63 |
| 6.9. Caso 2: comparación de la onda experimental con la onda simulada para $t = 0.34$ s. .                                                               | 64 |
| 6.10. Caso 2: comparación de la onda experimental con la onda simulada para $t = 0.49$ s. .                                                              | 65 |
| 6.11. Desplazamiento nodal $x(t)$ para $y = -0.113$ m: a) caso 1, b) caso 2. . . . .                                                                     | 66 |
| 6.12. Desplazamiento nodal $x(t)$ para $y = -0.503$ s: a) caso 1, b) caso 2. . . . .                                                                     | 67 |
| 6.13. Desplazamiento nodal $y(x)$ para $y = -0.113$ m: a) caso 1, b) caso 2. . . . .                                                                     | 68 |
| 6.14. Desplazamiento nodal $y(x)$ para $y = -0.503$ m: a) caso 1, b) caso 2. . . . .                                                                     | 69 |
| 6.15. Desplazamientos nodales $y(x)$ para el caso1: a) experimento, b) simulación. . . . .                                                               | 70 |
| 6.16. Desplazamientos nodales $y(x)$ para el caso 2: a) experimento, b) simulación. . . . .                                                              | 71 |
| 6.17. Velocidad nodal $\dot{x}(t)$ para $y = -0.113$ m: a) caso 1, b) caso 2. . . . .                                                                    | 72 |
| 6.18. Velocidad nodal $\dot{x}(t)$ para $y = -0.503$ m: a) caso 1, b) caso 2. . . . .                                                                    | 73 |
| 6.19. Aceleración nodal $\ddot{x}(t)$ para $y = -0.113$ m: a) caso 1, b) caso 2. . . . .                                                                 | 74 |
| 6.20. Aceleración nodal $\ddot{x}(t)$ para $y = -0.503$ m: a) caso 1, b) caso 2. . . . .                                                                 | 75 |
| 6.21. Trayectorias en el plano fase para el caso 1: nodos correspondientes a $y = -0.091$ m,<br>$y = -0.243$ m, $y = -0.395$ m y $y = -0.503$ m. . . . . | 76 |
| 6.22. Trayectorias en el plano fase para el caso 2: nodos correspondientes a $y = -0.091$ m,<br>$y = -0.243$ m, $y = -0.395$ m y $y = -0.503$ m. . . . . | 77 |
| 6.23. Amplitud $A(t)$ : a) caso 1, b) caso 2. . . . .                                                                                                    | 78 |
| 6.24. Amplitud $A(y)$ : a) caso 1, b) caso 2. . . . .                                                                                                    | 79 |
| 6.25. Desplazamientos nodales $x(t)$ y amplitud $A(t)$ para el caso 1: a) experimento, b)<br>simulación. . . . .                                         | 80 |

|                                                                                                                                           |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 6.26. Desplazamientos nodales $x(t)$ y amplitud $A(t)$ para el caso 2: a) experimento, b) simulación. . . . .                             | 81 |
| 6.27. Posición de la onda $\delta(t)$ : a) caso 1, b) caso 2. . . . .                                                                     | 82 |
| 6.28. Posición de la onda $\delta(t)$ ajustada a una función polinomial de tercer grado: a) caso 1, b) caso 2. . . . .                    | 83 |
| 6.29. Velocidad de fase $c(t)$ : a) caso 1, b) caso 2. . . . .                                                                            | 84 |
| 6.30. Velocidad de fase $c(t)$ ajustada a un polinomio de segundo grado: a) caso 1, b) caso 2. . . . .                                    | 85 |
| 6.31. Velocidad $c(y)$ : a) caso 1, b) caso 2. . . . .                                                                                    | 86 |
| 6.32. Comparación de velocidades $c(y)$ experimentales: a) caso 1, b) caso 2. . . . .                                                     | 87 |
| 6.33. Comparación de velocidades $c(y)$ simuladas: a) caso 1, b) caso 2. . . . .                                                          | 88 |
| 6.34. Comparación de velocidades $c(y)$ experimentales utilizando el ajuste a una función de raíz cuadrada: a) caso 1, b) caso 2. . . . . | 89 |
| 6.35. Comparación de velocidades $c(y)$ simuladas utilizando el ajuste a una función radical: a) caso 1, b) caso 2. . . . .               | 90 |
| 6.36. Aceleración $a(t)$ : a) caso 1, b) caso 2. . . . .                                                                                  | 91 |
| 6.37. Aceleración $a(t)$ ajustada a una función lineal: a) caso 1, b) caso 2. . . . .                                                     | 92 |
| 6.38. Aceleración $a(y)$ : a) caso 1, b) caso 2. . . . .                                                                                  | 93 |
| 6.39. Aceleración $a(y)$ ajustada a una función radical: a) caso 1, b) caso 2. . . . .                                                    | 94 |
| 6.40. Tensión de la cadena en reposo $T_0 = T(0, y)$ . . . . .                                                                            | 98 |

# Lista de Tablas

|                                                                                                                                           |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1. Relación entre parámetros de onda . . . . .                                                                                          | 12 |
| 3.1. Características de la cadena. . . . .                                                                                                | 25 |
| 3.2. Equipo requerido por el dispositivo experimental. . . . .                                                                            | 27 |
| 3.3. Configuración del tamaño de paso. Tomada de Allegro Microsystems (2014). . . . .                                                     | 29 |
| 3.4. Ejemplo de datos obtenidos. . . . .                                                                                                  | 36 |
| 5.1. Rango de valores posibles del coeficiente de fricción viscosa $b$ , de acuerdo al factor de amortiguamiento relativo $\xi$ . . . . . | 51 |
| 5.2. Errores de nodos correspondientes a (1) $y = -0.004$ m, (2) $y = -0.156$ m y (3) $y = -0.503$ m. . . . .                             | 53 |

# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

Los fenómenos ondulatorios describen muchos de los procesos físicos presentes en la naturaleza. Por ejemplo, las ondas sísmicas, las olas del mar, la luz y el sonido. Casos de especial interés ocurren cuando varios sistemas están acoplados, pues las interacciones se transmiten entre uno y otro como ondas (Picquart, 2017). Su propagación implica, en general, una diferencia de tiempo entre una causa o perturbación distante y un efecto observado. Dicho efecto depende de las propiedades del medio y se expresa a través de la velocidad de la onda (French, 2006).

Los movimientos oscilatorios implican transmisión de energía. Un ejemplo de lo anterior, es la transferencia de calor por radiación, donde se emite desde una fuente (como el sol) a otro lugar, en forma de ondas electromagnéticas que viajan a través de un medio (particularmente los campos electromagnéticos se pueden propagar en el vacío) (Incropera, 2007). En muchos casos, la fuente de energía es periódica; sin embargo, un impulso también es capaz de generar un proceso ondulatorio: una piedra que perturba un cuerpo de agua, un músico que pulsa una cuerda de un instrumento, una explosión, entre otros (White, 1979).

Este trabajo trata sobre las oscilaciones de una cadena suspendida verticalmente por uno de sus extremos, excitada inicialmente por un mecanismo rodillo-corredera que aplica un impulso dado. Las características del movimiento de la onda que avanza en dirección vertical descendente, es el objeto de estudio de esta tesis.

## 1.1. Ondas no lineales

Se denominan así, a aquellas ondas cuya ecuación de movimiento que las describe, es no lineal en la función y sus derivadas (para más detalle sobre linealidad de ecuaciones diferenciales, revisar Boyce y DiPrima (2012)). Esta característica es consecuencia de las propiedades del medio. Por ejemplo, en la ecuación de onda para una cuerda vibrante, la velocidad de fase está en términos de la tensión y la densidad lineal. Si la tensión es una función de la dirección de propagación o alguna variable dependiente, encontrar soluciones analíticas de la ecuación es complicado, por lo que se suele recurrir a los métodos numéricos.

Los modelos no lineales suelen describir procesos caóticos, impredecibles, no intuitivos, tal como se comportan la mayoría de los sistemas presentes en la naturaleza. Se puede decir que es una forma más realista y detallada de describir los fenómenos físicos. Por ende, a pesar de la dificultad matemática, son de gran interés en ingeniería, física, biología, entre muchas otras disciplinas científicas. Tsunamis, ondas en polímeros, la propagación de pulsos en el cerebro, el transporte de energía en proteínas son ejemplos de fenómenos no lineales (Theodorakopoulos, 2018).

Existen diversos modelos no lineales que se utilizan para estudiar fenómenos ondulatorios: la propagación de ondas solitarias en canales está descrita por la ecuación de Korteweg-de Vries, las ecuaciones de Seno-Gordon y Senoh-Gordon se utilizan para describir las dislocaciones en materiales cristalinos, el problema de Fermi-Pasta-Ulam fue de vital importancia para comprender la distribución de energía a través de ondas solitarias en sistemas no armónicos, la cadena de Toda es un modelo que involucra la propagación de la energía mecánica en cadenas de masas discretas unidas por resortes, la ecuación de Schrödinger describe la propagación de ondas en medios dispersivos no lineales, la ecuación de Burgers es resultado de combinar el análisis de la propagación de ondas no lineales con efectos difusivos en medios viscosos (Sen, Hong, Bang, Avalos, y Doney, 2008), por mencionar algunos.

## 1.2. Antecedentes

Un rasgo característico de una onda no lineal es que su velocidad de propagación no es constante y depende de la amplitud. Se encuentran ondas de este tipo en medios granulares, que están constituidos de masas discretas. Tal es el caso estudiado por Sen y cols. (2008) en el que se analizó la propagación descrita por la ecuación de contacto de Hertz. Resultó que el sistema es altamente dependiente de la perturbación externa, esto se atribuyó a la no linealidad del fenómeno.

En el trabajo realizado por Daraio, Nesterenko, Herbold, y Jin (2005) se investigó experimental y numéricamente la propagación de ondas solitarias, así como trenes de ondas, en medios granulares descritos por la Ley de Hertz. Estos últimos, definidos al considerar elementos rígidos esféricos, unidos entre sí por resortes. Se encontró que la velocidad de propagación tiene una relación no lineal con la rapidez de deformación de las partículas del medio, su diámetro y la amplitud.

En la investigación de Coste, Falcon, y Fauve (1997) se observó la propagación de pulsos no lineales en medios granulares. Se midió la velocidad de fase, se analizó como función de la amplitud máxima para 4 diferentes fuerzas estáticas y se registró el perfil de las ondas. Se encontraron similitudes entre los resultados experimentales y las predicciones teóricas basadas en la Ley de Hertz.

G. Rega y Benedettini (1984) estudiaron las oscilaciones de un cable parabólico suspendido de dos puntos. Se realizó un análisis paramétrico de la vibración libre del sistema. También, se resolvió la dependencia espacial de forma integral, para reducir el problema a una ecuación diferencial ordinaria; la cual, muestra no linealidad cúbica y cuadrática. Se encontró que la velocidad de fase depende de las propiedades del cable y la amplitud.

Zhu, Lei, Wu, Nan Li, y Shi (2015) utilizaron una cadena de péndulos acoplados para simular soluciones de la ecuación de Seno-Gordon (SG). La ecuación de SG se derivó al calcular el par neto que actúa en los péndulos. Se estudió de forma experimental la propagación con una cámara de alta velocidad. Los datos experimentales fueron consistentes con los cálculos teóricos lo que verifica que el sistema utilizado es adecuado para describir el proceso.

El péndulo simple muestra comportamiento no lineal para amplitudes grandes. En el trabajo de Shinbrot, Grebogi, Wisdom, y Yorke (1992) se estudió la oscilación de dos péndulos acoplados. El sistema resultó extremadamente sensible a las condiciones iniciales. Es por ello que, al oscilar con amplitudes pequeñas el movimiento es periódicamente el mismo; pero, para amplitudes iniciales mayores el movimiento es caótico. Se atribuyó a ligeras diferencias en la disposición del experimento que por pequeñas que sean, en un sistema no lineal determinan movimientos totalmente diferentes.

En el trabajo de Andrievsky y Fradkov (2008) se estudiaron experimental y numéricamente las oscilaciones de una cadena de péndulos, la cual fue inducida de forma armónica. El modelo numérico consistió en una cadena de péndulos 1-D acoplados mediante resortes torsionales. Aunque el

sistema es altamente no lineal, la excitación es pequeña por lo que se linealizaron las ecuaciones de movimiento mediante la aproximación de ángulos pequeños.

Al tratar con cadenas extensibles se observan ondas transversales y longitudinales. A la dinámica de las ondas longitudinales se le da menor importancia en muchas aplicaciones, pues suelen tener amplitudes pequeñas. Además, en general, tienen velocidades de fase grandes, lo que dificulta el análisis numérico. La forma más simple de deshacerse de este problema es considerar cuerdas inextensibles. Es debido a esto, que, a pesar de que el modelo de cuerpos rígidos unidos mediante juntas sin fricción es muy simple, logra describir muchas características de la propagación. Al sostener la cadena de uno de sus extremos y perturbarla en algún punto medio claramente se observan dos ondas: una es la que se aproxima al extremo libre, la cual es fácil de estudiar debido a su velocidad de propagación decreciente y su amplitud creciente. La otra es la que se propaga hacia arriba, la cual no se observa tan fácil ya que su velocidad incrementa y su amplitud disminuye. Se encontró que el movimiento ondulatorio resulta de movimientos transversales y la velocidad de fase depende de la tensión de la cadena (Schagerl y Berger, 2002).

En el trabajo de Makhina y Tenmenko (1998) se estudiaron las oscilaciones de una cuerda fija de uno de sus extremos, inmersa en un campo gravitacional. Se presentó un modelo analítico-numérico para estudiar las vibraciones planas, las cuales se modelaron con dos ecuaciones de segundo orden. Finalmente, se linealizaron por medio del método de Lindstadt-Poincaré y se eliminaron las dependencias temporales con transformadas de Fourier.

Mahalingam (1957) estudió las vibraciones transversales en una cadena de transmisión con tensión constante. Se encontró que la frecuencia de oscilación decrece progresivamente hasta cero, a medida que la velocidad de la cadena se aproxima a la velocidad de fase. Se utilizaron métodos exactos y de aproximación numérica para determinar las frecuencias.

En la investigación realizada por Belmonte, Shelley, Eldakar, y Wiggins (2001) se hizo oscilar de forma sinusoidal a una cadena suspendida de uno de sus extremos con un motor a frecuencias desde 1 hasta 4 Hz. Se encontró que a medida que se incrementa la frecuencia de excitación, la cadena muestra un movimiento pendular plano. A mayores frecuencias, se encontró que la cadena se mueve de forma caótica, limitada ocasionalmente por colisiones con esta misma. El movimiento caótico del sistema no fue una sorpresa pues es esencialmente un sistema de  $n$  péndulos acoplados, un sistema altamente caótico y no lineal incluso para  $n = 2$ . Es un hecho común entre magos y marineros que se formen nudos en cuerdas al ser agitadas, los que se formaron para este caso ocurrieron en regímenes caóticos. Inmediatamente después que se forman los nudos, la cadena pierde casi toda la energía cinética y oscila con movimiento pendular plano hasta que llega al reposo.

Se estudió una cadena suspendida sobre su propio peso de uno de sus extremos, que se perturbó armónicamente con frecuencias cercanas a la frecuencia de resonancia. Se trabajó en coordenadas lagrangianas con direcciones normal, binormal y tangencial; la coordenada lagrangiana a lo largo de

la cadena se denota por  $s$ . Dado que la excitación es una velocidad contenida en el plano de vibración, se obtuvo la tensión de la cadena en las tres direcciones, las velocidades de fase y los ángulos de Euler que definen la posición de la cadena en el espacio. Las soluciones obtenidas son asintóticas bajo las condiciones de frontera que en el último nodo la tensión es nula y que las velocidades son nulas para el tiempo inicial. Los resultados experimentales y numéricos concuerdan hasta el punto de colapso, cuando la onda llega al extremo suelto, pues a amplitudes iniciales grandes, hay una región de la cadena cercana al extremo libre donde la tensión es nula durante un corto intervalo de tiempo. (Howell y Triantafyllou, 1993).

En el estudio de Saxon y Cahn (1953) también se determinaron soluciones asintóticas y se propuso un método para calcular las frecuencias características de una cuerda inextensible suspendida de dos puntos extremos. Es el mismo caso para el trabajo de Goodey (1961) donde se obtuvieron los modos naturales y las frecuencias de una cadena inextensible. Se encontró que los modos de vibración de una cadena de cierta longitud que se encuentra suspendida de uno de sus extremos, serán los mismos para otra de la misma longitud suspendida de dos puntos, debido a que las dos mitades oscilan en fase.

En el trabajo realizado por (Bailey, 2000) se estudió una cadena sujeta de un punto, a la que se perturba con un golpe horizontal en su extremo libre. El pulso resultante viaja hacia el punto fijo y es reflejado causando que el extremo libre tenga un movimiento violento. Se observó que los "latigues" del extremo libre aunque ocurren en diferentes direcciones, siguen un patrón que se repite cada cuatro oscilaciones. El problema fue modelado mediante la solución de d'Alembert de la ecuación de onda, con tensión variable y mediante análisis de Fourier. La deflexión del extremo libre calculada es muy similar a la experimental obtenida de un video.

El problema de una cadena suspendida bajo su propio peso oscilando es un problema clásico de la mecánica, del cual dos aspectos muy interesantes son la presencia simultánea de regímenes de alta y baja tensión, así como la naturaleza inestable y caótica de los movimientos de gran amplitud. En el trabajo de Gobat, Grosenbaugh, y Triantafyllou (2002) se consideró una cadena suspendida de uno de sus extremos, perturbada de forma armónica. Se propuso un algoritmo de solución numérica que simula el movimiento en las tres direcciones incluso después del colapso del pulso en el punto inferior.

Se consideró una cadena suspendida y perturbada de su extremo libre, provocando una onda que viaja hacia arriba y después es reflejada desde el punto fijo hacia abajo. Después de una serie de oscilaciones, el movimiento regular se desvanece en vibraciones irregulares. Las cadenas de este tipo, difieren de las que están tensas por dos puntos no sólo en las condiciones de frontera, sino también la tensión. Por lo tanto, en la velocidad de propagación. La tensión para el primer caso depende linealmente de la dirección de propagación. Se obtuvo el tiempo en que viaja el pulso con un desarrollo teórico muy simple, basado en la velocidad de fase de la solución de d'Alembert para la ecuación de onda, sustituyendo la tensión lineal e integrando ambos miembros (Freeman, 1977).

Levinson (1977) asegura en su estudio que considerando que las cadenas están constituidas de eslabones rígidos, se puede esperar que un modelo discreto describa adecuadamente los valores de las frecuencias naturales, sobre todo en modos de vibración mayores.

Fehribach y Shearer (1989) utilizó el método de Glimm para obtener soluciones del sistema de ecuaciones no lineales que describen el movimiento oscilatorio de una cuerda elástica. Con ciertas condiciones iniciales, los resultados numéricos sugieren la existencia de una solución estable aproximadamente periódica.

En el análisis del movimiento de una cuerda se suelen hacer dos aproximaciones: Amplitudes pequeñas y que el movimiento es puramente transversal. No se consideraron dichas aproximaciones en el trabajo de Keller (1959) ni que el movimiento está contenido totalmente en un plano. En los resultados se obtuvo que las tres componentes del movimiento (dos transversales y una longitudinal) son independientes y satisfacen la ecuación de onda lineal.

En el trabajo realizado por Western (1980), una cadena suspendida de uno de sus extremos mostró frecuencias de resonancia similares a las de ondas estacionarias en una cuerda. El perfil de la onda se aproximó a una función de Bessel de orden cero, en función de la distancia vertical. Se perturbó la cadena con un motor de velocidad variable y se pudo observar la función de Bessel a simple vista.

En el artículo presentado por Braun (2003), se describen propiedades importantes sobre los péndulos múltiples. Se considera una cuerda inextensible, suspendida de un extremo con puntos de masa concentradas a lo largo de esta, formada de  $n$  péndulos acoplados. Se establecen las ecuaciones de movimiento por medio de su lagrangiano. No obstante, no hay forma de obtener soluciones analíticas desde  $n > 1$ . Considerando que el movimiento está restringido a oscilaciones pequeñas, se formula el problema de eigenvalores correspondiente. El trabajo se enfoca en obtener las frecuencias naturales  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  y sus modos de vibración respectivos, donde se encontró que bajo dichas consideraciones, las frecuencias naturales de oscilación dependen de la longitud de la cadena y la aceleración gravitatoria.

### 1.3. Objetivos de la tesis

1. Crear un dispositivo experimental que permita perturbar la cadena con diferentes tipos de excitación, definidos mediante el desplazamiento horizontal y el tiempo.
2. Estudiar de forma experimental la propagación de un pulso en una cadena suspendida verticalmente de uno de sus extremos para dos tipos de perturbación: un impacto horizontal y una función de desplazamiento.
3. Desarrollar un modelo numérico discreto con elementos mecánicos que describa el fenómeno en cuestión.
4. Validar el modelo con el estudio experimental.

#### 1.3.1. Alcances

1. Calcular la velocidad de fase, aceleración y amplitud del pulso, así como conocer la cinemática de los nodos que conforman la cadena.
2. Determinar si la propagación de la onda describe un proceso no lineal.
3. Realizar simulaciones del proceso para cualquier tipo de entrada, aplicada a nodos arbitrarios y considerando fricción viscosa en las juntas esféricas.
4. Comprobar que el modelo planteado describe con propiedad la propagación de un pulso no lineal en un medio no homogéneo.

#### 1.3.2. Hipótesis

Un pulso aplicado a una cadena suspendida de uno de sus extremos, se propaga en la dirección del extremo libre con una velocidad de fase decreciente en función del tiempo y de la posición; en función de ello, la amplitud tiene una relación inversa pues incrementa con el tiempo y la posición de la onda.

## Capítulo 2

# MARCO TEÓRICO

### 2.1. Fundamentos de propagación de ondas

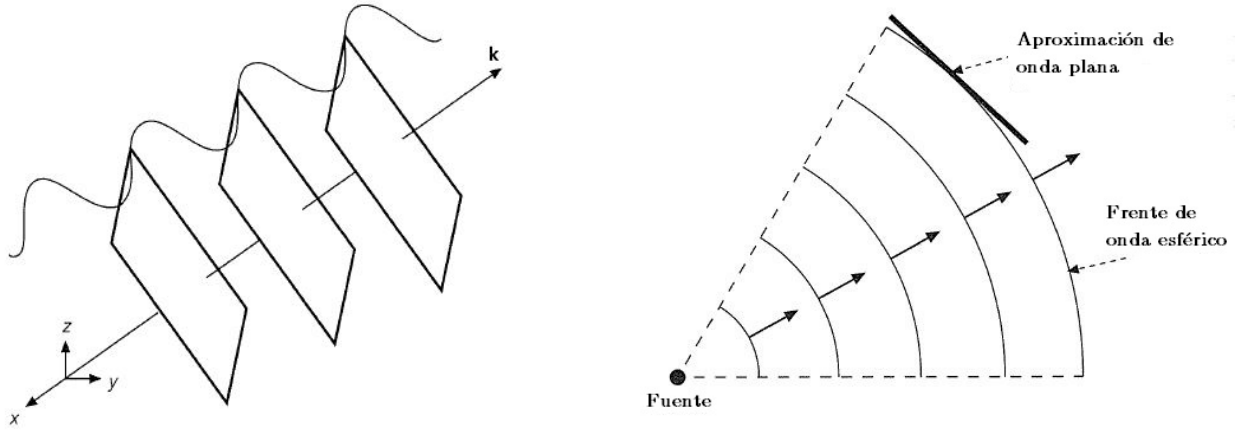
#### 2.1.1. Ondas mecánicas

Se denominan ondas mecánicas a aquellas que se propagan en medios elásticos o deformables. Se originan con el movimiento de una porción del espacio a partir de una posición de equilibrio. En particular para las ondas transversales, las partículas del medio no se mueven en la dirección de propagación, esto se observa claramente en flotantes o boyas en el mar, ya que tienen movimiento de vaivén pero no se desplazan con las olas. En otras palabras, la energía se transfiere a través de la materia de una región a otra, y no por el desplazamiento de la materia misma.

El medio que transmite una onda mecánica debe tener propiedades de inercia y elasticidad. El carácter elástico es el encargado de que las partículas oscilen en torno a un punto (Halliday y Resnick, 1960).

#### 2.1.2. Ondas planas

De acuerdo a Halliday y Resnick (1960), se denomina frente de onda a toda superficie que contenga las partículas del medio que sufren una perturbación similar en un instante dado, es decir, que están en la misma fase del movimiento. Cuando las condiciones son idénticas en cada fase para todos los puntos contenidos en un plano, se dice que el frente de onda es plano. En el caso general cabe considerar una fuente puntual que emite en todas las direcciones en el espacio tridimensional; en este caso, las superficies son esferas concéntricas. Por otro lado, las direcciones de propagación se representan con líneas rectas denominadas rayos. Si el medio es homogéneo e isótropo son perpendiculares a los frentes de onda (ver figura 2.1).



**Figura 2.1:** Frentes de onda planos y esféricos. Imagen tomada de Stein y Wyssession (2003).

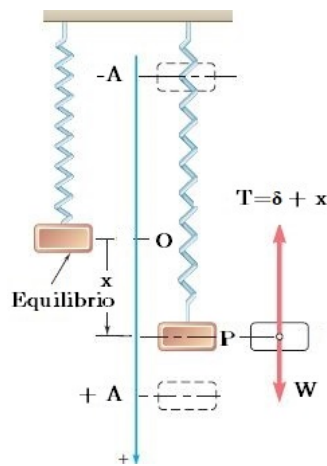
La ecuación que describe a una onda plana transversal que se propaga a la velocidad  $c$  en la dirección  $x$  está dada por

$$y(x, t) = f(u) = f(ct \pm x). \quad (2.1)$$

Las dos funciones planteadas en la ecuación 2.1 son soluciones de la ecuación de onda, misma que se tratará más adelante.

### 2.1.3. Parámetros de onda

Con el fin de introducir los parámetros de onda, conviene referirse a un sistema de masa-resorte como se muestra en la figura 2.2. El movimiento vertical está determinado por dos fuerzas: la fuerza elástica del resorte y la fuerza gravitacional, ambas orientadas en direcciones opuestas.



**Figura 2.2:** Sistema masa-resorte. Tomada de Beer y Johnston (2010).

Si se mide el desplazamiento desde la posición de equilibrio se puede descartar el término asociado al peso, por lo tanto la ecuación de movimiento está dada por

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \quad (2.2)$$

donde  $k$  es la constante de rigidez del resorte. La ecuación 2.2 indica que el sistema en cuestión tiene movimiento armónico simple, ya que es de la forma

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0, \quad (2.3)$$

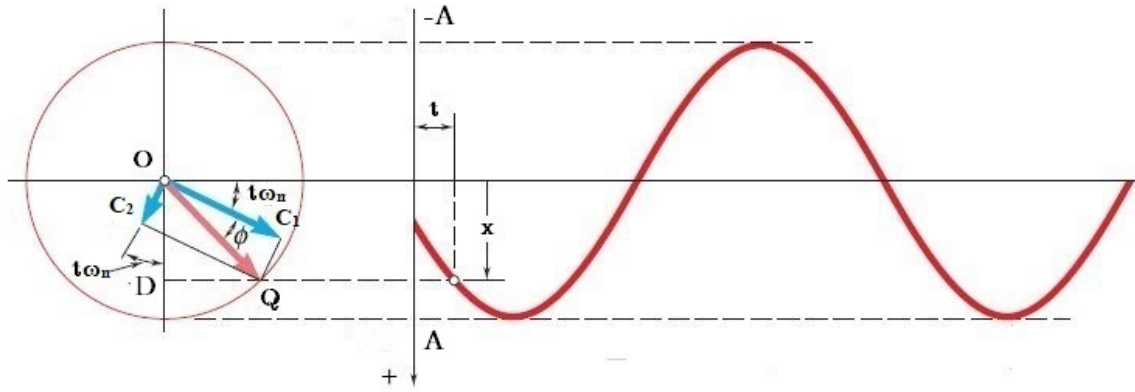
donde  $\omega_n$  se define como la frecuencia natural del sistema. Este tipo de movimiento se caracteriza por el hecho de que la aceleración es proporcional al desplazamiento y en dirección opuesta. Se puede comprobar fácilmente que las funciones  $x_1 = \sin(\sqrt{k/m}t)$  y  $x_2 = \cos(\sqrt{k/m}t)$  satisfacen la ecuación 2.2 y son soluciones particulares. Ahora bien, la solución general se puede obtener de la combinación lineal de  $x_1$  y  $x_2$ :

$$x(t) = C_1 \sin(\omega_n t) + C_2 \cos(\omega_n t), \quad (2.4)$$

donde  $\omega_n = \sqrt{k/m}$ . Los valores de  $C_1$  y  $C_2$  dependen de las condiciones iniciales. Sin embargo, se puede obtener una versión más compacta de  $x(t)$ , si se observa que representa la suma de las componentes verticales de los vectores  $\vec{C}_1$  y  $\vec{C}_2$ , tal como se muestra en la figura 2.3. Por lo tanto

$$x(t) = A \sin(\omega_n t + \phi), \quad (2.5)$$

donde  $A$  es la amplitud del movimiento y  $\phi$  el ángulo de fase.



**Figura 2.3:** Circunferencia y vectores que representan un movimiento armónico simple. Tomada de Beer y Johnston (2010).

Se define el periodo  $P$  como el tiempo requerido para producir una vibración completa. Por otro lado, la frecuencia es el número de vibraciones por unidad de tiempo y se suele medir en Hertz (1 ciclo/s = 1 Hz). Si un objeto vibrante completa un ciclo en medio segundo, su periodo es de 0.5 s, esto quiere decir que completa dos vibraciones por segundo, por lo tanto, su frecuencia es de 2 Hz. La frecuencia y el periodo tienen entonces una relación inversamente proporcional:

$$P = \frac{1}{f}. \quad (2.6)$$

De acuerdo con la figura 2.3, en la ecuación 2.5 el periodo debe corresponder a un aumento de  $2\pi$  en el argumento del seno. Entonces

$$x(t) = x(t + P) = A \sin(\omega_n(t + P) + \phi), \quad (2.7)$$

lo que implica que

$$\omega_n(t + P) + \phi = \omega_n t + \phi + 2\pi, \quad (2.8)$$

por lo tanto

$$P = \frac{2\pi}{\omega_n}. \quad (2.9)$$

De la ecuación 2.9 se obtiene la relación entre la frecuencia y la frecuencia natural:

$$\omega_n = 2\pi f. \quad (2.10)$$

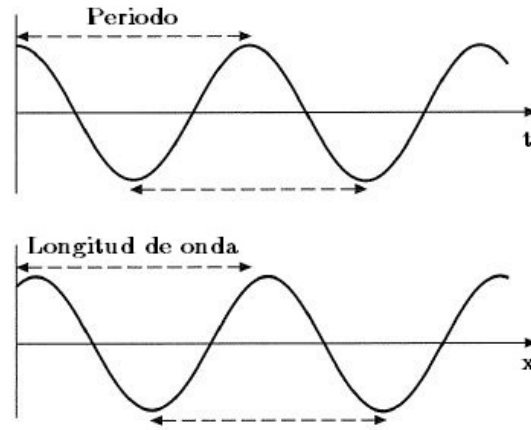
Otro parámetro importante es la longitud de onda, se define como la distancia entre dos puntos equivalentes de dos ondas consecutivas. Se denota por  $\lambda$  y se relaciona con la velocidad de fase por la expresión

$$c = \frac{\lambda}{P} = \lambda f. \quad (2.11)$$

Ya que la longitud de onda se puede considerar como un periodo espacial (ver figura 2.4), tiene asociado un parámetro angular llamado número de onda y se denota por  $k$ :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (2.12)$$

En la tabla 2.1 se recopilan las relaciones entre los parámetros de onda mencionados hasta el momento.



**Figura 2.4:** Periodo y longitud de onda. Tomada de Stein y Wyssession (2003).

**Tabla 2.1:** Relación entre parámetros de onda

| Cantidad física    | Dimensiones | Relaciones                                                       |
|--------------------|-------------|------------------------------------------------------------------|
| Velocidad de fase  | $LT^{-1}$   | $c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{P} = \lambda f$           |
| Periodo            | $T$         | $P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} = \frac{\lambda}{c}$      |
| Frecuencia         | $T^{-1}$    | $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{P} = \frac{c}{\lambda}$      |
| Frecuencia angular | $T^{-1}$    | $\omega = \frac{2\pi}{P} = 2\pi f = kc$                          |
| Longitud de onda   | $L$         | $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{c}{f} = cP$                    |
| Número de onda     | $L^{-1}$    | $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c}$ |

### 2.1.4. Ecuación de onda: solución de d'Alembert

Considérese un impulso transversal en una cuerda horizontal, que para  $t = 0$  es una función de la forma

$$y(x, t) = f(x, t) = f(u). \quad (2.13)$$

En otro instante, para una velocidad de propagación  $c$  constante, se tiene

$$y(x, t) = f(x - ct). \quad (2.14)$$

Si se requiere analizar alguna parte específica, hay que poner atención en un valor particular de la constante. La ecuación 2.14 es la función de una onda que avanza en el sentido positivo del eje  $x$ , pues si  $t$  aumenta,  $x$  también lo hace para conservar la fase.

$$x - ct = \text{constante}, \quad (2.15)$$

entonces

$$dx - cdt = 0, \quad (2.16)$$

y se concluye que

$$c = \frac{dx}{dt}. \quad (2.17)$$

A la expresión 2.17 se le llama velocidad de fase.

Es fácil comprobar que la ecuación 2.14 es solución de la ecuación de onda. Derivando dos veces respecto a  $x$  se tiene que

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{f(u)}{du} \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (2.18)$$

y aplicando la regla de la cadena una vez más se obtiene

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{d^2 f(u)}{du^2}. \quad (2.19)$$

Por otra parte, derivando dos veces respecto al tiempo sigue que

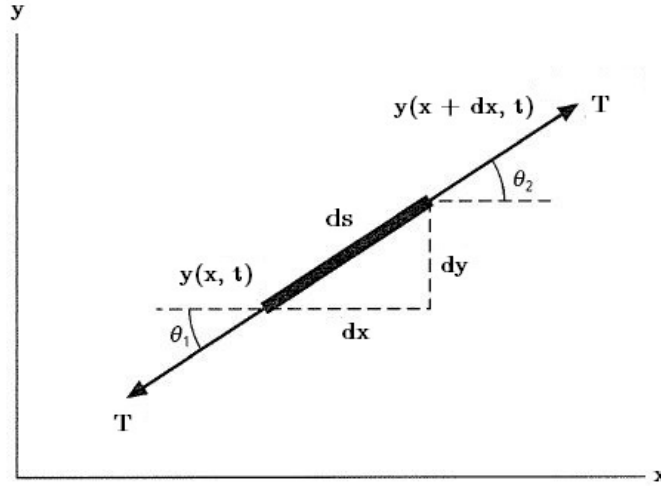
$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{d^2 f(u)}{du^2}. \quad (2.20)$$

Finalmente, utilizando las ecuaciones 2.19 y 2.20 se obtiene

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}. \quad (2.21)$$

A la expresión 2.21 se le conoce como ecuación de onda y sus soluciones son de la forma 2.1.

Este planteamiento se puede extender para analizar el estado dinámico de una cuerda. Si está tensa, su peso influye poco en la forma que adquiere el equilibrio, por lo tanto se desprecian efectos gravitatorios. También se considera despreciable el movimiento horizontal, es decir, que sus vibraciones son transversales solamente. Considerando un segmento  $ds$ , las fuerzas que actúan sobre éste se representan en la figura 2.5.



**Figura 2.5:** Fuerzas que actúan en un segmento de una cuerda transversal. Tomada de Stein y Wyssession (2003).

Sólo las fuerzas en el eje vertical son de interés, así que aplicando la segunda ley de Newton de forma escalar se tiene que

$$F_y = ma_y, \quad (2.22)$$

donde las fuerzas que actúan sobre el elemento de longitud  $ds$  son las proyecciones verticales de la tensión  $T$ . También la masa se puede expresar en términos de la densidad lineal de la cuerda  $\mu$ , por lo tanto

$$T \sin(\theta_2) - T \sin(\theta_1) = \mu dx \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}. \quad (2.23)$$

Utilizando la aproximación de ángulos pequeños  $\theta \approx \sin(\theta) \approx \tan(\theta)$ , entonces

$$T \left( \frac{\partial y(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right) = \mu dx \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}, \quad (2.24)$$

donde el primer término se puede expandir en una serie de Taylor de segundo orden:

$$T \left( \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} dx - \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right) = \mu dx \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}, \quad (2.25)$$

obteniendo así la ecuación de onda de d'Alembert para una cuerda vibrante:

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}, \quad (2.26)$$

donde  $c = \sqrt{T/\mu}$  es la velocidad de propagación de la onda.

## 2.2. Vibración libre con amortiguamiento viscoso de un sistema de 2° orden

Considérese un sistema mecánico que consiste de una masa, un resorte y un amortiguador. Si se desplaza la masa hacia abajo y se suelta, el sistema vibrará libremente. El modelo matemático, donde el desplazamiento se mide respecto a la posición de equilibrio está dado por

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \quad (2.27)$$

donde  $b$  es el coeficiente de fricción viscosa del amortiguador. De acuerdo a la ecuación general para un sistema de 2° orden:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.28)$$

y

$$\xi = \frac{b}{2\sqrt{mk}}, \quad (2.29)$$

donde  $\omega_n$  es la frecuencia natural no amortiguada y  $\xi$  es el factor de amortiguamiento relativo. El carácter de la respuesta natural del sistema se determina por las raíces de la ecuación característica dadas por

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (2.30)$$

y

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}. \quad (2.31)$$

### 2.2.1. Caso 1: sistema subamortiguado

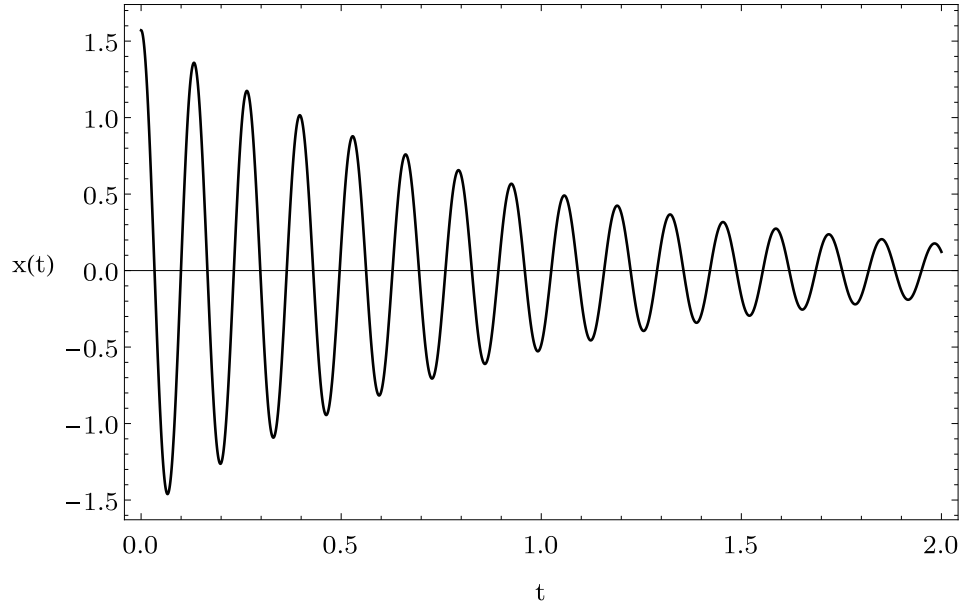
Es un sistema subamortiguado cuando  $\xi \in (0, 1)$ . Por lo tanto, las raíces de la ecuación característica son complejas conjugadas son

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n i\sqrt{1 - \xi^2}. \quad (2.32)$$

Al regresar al dominio del tiempo se obtiene

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left[ x(0) \cos(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t) + \frac{\xi\omega_n x(0) + \dot{x}(0)}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t) \right]. \quad (2.33)$$

En este caso la respuesta contiene el factor  $e^{-\xi\omega_n t}$  que es una exponencial decreciente (disminuye a medida que el tiempo incrementa). Esto significa que la amplitud decrece exponencialmente con el tiempo, tal como se muestra en la figura 2.6.



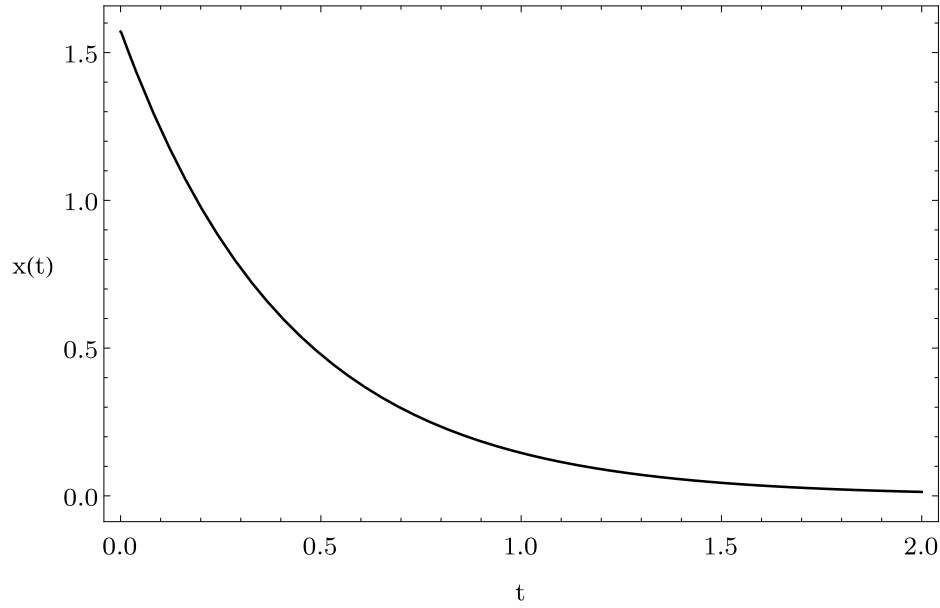
**Figura 2.6:** Respuesta de un sistema subamortiguado (los ejes son adimensionales).

### 2.2.2. Caso 2: sistema sobreamortiguado

El sistema es sobreamortiguado si  $\xi \in (1, \infty)$ , por lo que las raíces de la ecuación característica son reales y se obtiene una respuesta del tipo:

$$x(t) = \left[ \frac{(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})x(0)}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} - \frac{\dot{x}(0)}{2\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}} \right] e^{-(\xi\omega_n + \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1})t} + \left[ \frac{(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})x(0)}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} + \frac{\dot{x}(0)}{2\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}} \right] e^{-(\xi\omega_n - \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1})t}. \quad (2.34)$$

Ambos términos de la ecuación 2.34 decrecen exponencialmente. En consecuencia, la amplitud disminuye de forma lenta y gradual hasta llegar a la posición de equilibrio, tal como se muestra en la figura 2.7.



**Figura 2.7:** Respuesta de un sistema sobreamortiguado (los ejes son adimensionales).

### 2.2.3. Caso 3: sistema críticamente amortiguado

Se denomina a un sistema como críticamente amortiguado, cuando se cumple que  $\xi = 1$ . Las raíces resultan reales e idénticas:

$$s_{1,2} = -\omega_n. \quad (2.35)$$

Al regresar al dominio del tiempo se obtiene

$$x(t) = e^{-\omega_n t} [x(0) + (\omega_n x(0) + \dot{x}(0)) t]. \quad (2.36)$$

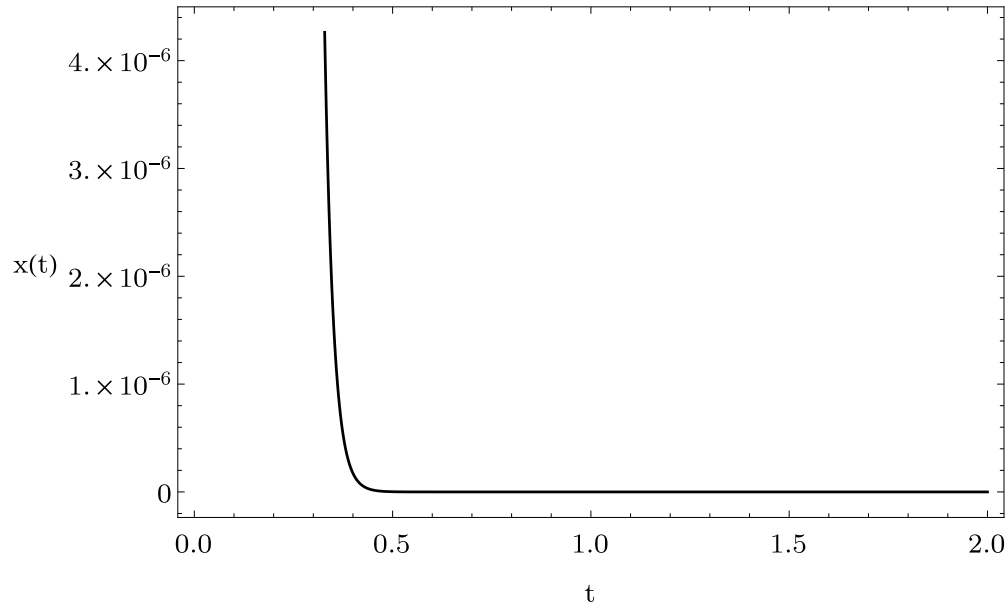
La respuesta es similar al caso sobreamortiguado, pero la amplitud decrece más rápido, tal como se muestra en la figura 2.8.

### 2.2.4. Caso 4: sistema no amortiguado

Se puede decir que el sistema es no amortiguado siempre y cuando  $\xi = 0$ . La ecuación característica se reduce a

$$s^2 + \omega_n^2 = 0, \quad (2.37)$$

que es la transformada de Laplace de la ecuación que describe el movimiento armónico simple y cuya respuesta ya se describió al tratar el sistema masa-resorte.



**Figura 2.8:** Respuesta de un sistema críticamente amortiguado (los ejes son adimensionales).

## 2.3. Vibración forzada con amortiguamiento viscoso de un sistema de 2° orden

### 2.3.1. Respuesta a un forzamiento tipo escalón unitario

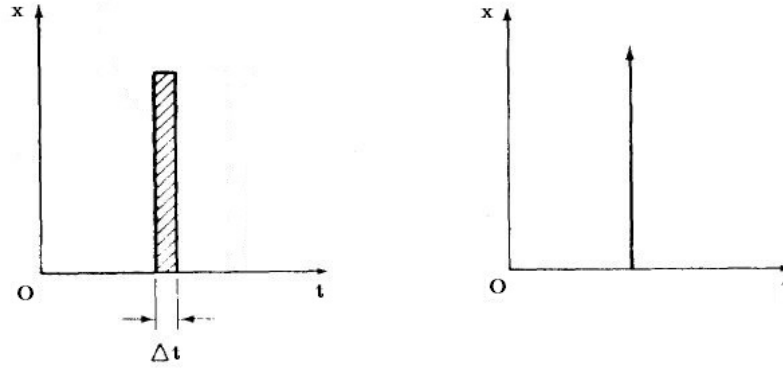
En este caso el sistema tiene una función de excitación constante, puede ser una entrada de energía, un desplazamiento, una velocidad, etc. La respuesta es de la misma forma que una vibración libre pues la ecuación de movimiento del sistema es del tipo

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = U(t), \quad (2.38)$$

donde  $U(t)$  es una función escalón, que al ser constante es nula después de aplicar la transformada de Laplace.

### 2.3.2. Respuesta a un forzamiento tipo impulso

Una respuesta impulso ocurre cuando un sistema se somete a una excitación de magnitud muy grande durante un tiempo muy corto. Matemáticamente tal entrada se representa mediante una función impulso. Si una entrada de amplitud  $A$  tiene duración  $\Delta t$ , de modo que el área  $A\Delta t$  no sea despreciable, entonces puede ser aproximada mediante un impulso (ver figura 2.9).



**Figura 2.9:** Función impulso. Tomada de Ogata (1987)

La ecuación de movimiento está dada por

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = f(t), \quad (2.39)$$

donde  $f(t)$  es la función impulso. Se puede expresar la ecuación 2.39 en términos de una función escalón como sigue:

$$f(t) = |f(t)|U(t). \quad (2.40)$$

## 2.4. Consideraciones sobre movimiento pendular

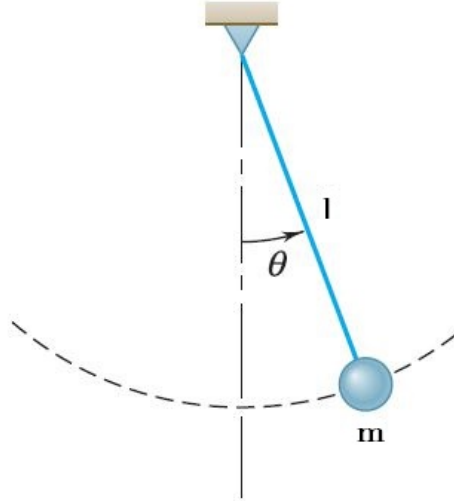
Dado que el sistema estudiado está constituido por elementos de tipo pendular, cabe considerar un péndulo simple que consta de un cable de longitud  $l$  con una masa  $m$  en su extremo libre tal como se muestra en la figura 2.10. Aplicando la segunda ley de Newton para sistemas rotacionales:

$$T_n = J \frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad (2.41)$$

donde  $J$  es el momento de inercia y  $T_n$  el par neto. Se obtiene una ecuación diferencial ordinaria de 2° orden no lineal:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0 \quad (2.42)$$

La ecuación 2.42 describe el movimiento angular de un péndulo simple, es decir, su oscilación respecto a la posición de equilibrio  $\theta = 0$ . Es factible obtener soluciones analíticas mediante un análisis de variable compleja; no obstante, la ecuación 2.42 se puede hacer lineal como se explica a continuación.



**Figura 2.10:** Péndulo simple. Tomada de Beer y Johnston (2010)

### 2.4.1. Aproximación de ángulos pequeños para un péndulo simple

Cuando la amplitud del péndulo es pequeña se puede considerar que  $\sin(\theta) \approx \theta$ , por lo tanto la ecuación de movimiento está dada por

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}(\theta) = 0 \quad (2.43)$$

la cual describe un movimiento armónico simple.

### 2.4.2. Péndulo múltiple

Las ecuaciones de movimiento para un péndulo múltiple de  $n$  elementos de longitud  $a_i$  se describen a continuación. Se utiliza el lagrangiano de segundo tipo, donde la energía cinética  $T$  y potencial  $U$  se expresan en las coordenadas generalizadas  $\phi_i$ . El origen del sistema de referencia global  $(x_0, y_0)$  se establece en el punto inferior de la cadena cuando está en reposo, es decir, en las coordenadas:

$$x_0 = 0 \quad (2.44)$$

y

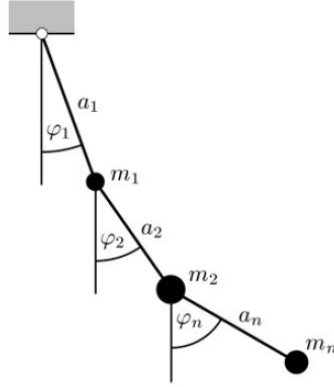
$$y_0 = \sum_{i=1}^n a_i \quad (2.45)$$

Se expresa la energía cinética considerando el movimiento traslacional y rotacional de cada elemento con respecto al centro de masa:

$$T_k = \frac{1}{2}m_k \sum_{i=1}^k (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) + \frac{1}{2}I \sum_{i=1}^k \dot{\phi}_i^2, \quad (2.46)$$

donde  $m_k$  la masa del péndulo del  $k$ -ésimo elemento e  $I$  es el momento de inercia respecto al centro de masa. Después de desarrollar la ecuación 2.46 y aplicar identidades trigonométricas para la suma de ángulos, se expresa mediante

$$T_k = \frac{1}{2} m_k \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_i a_j \dot{\phi}_i \dot{\phi}_j \cos(\phi_i - \phi_j). \quad (2.47)$$



**Figura 2.11:** Péndulo múltiple. Tomada de Braun (2003)

Por otra parte, la energía potencial para el  $k$ -ésimo elemento está dada por:

$$U_k = m_k g \sum_{i=1}^k a_i (1 - \cos \phi_i). \quad (2.48)$$

Con las ecuaciones 2.47 y 2.48 se define el lagrangiano, que está conformado por las contribuciones energéticas de todos los puntos de masa:

$$L = \sum_{k=1}^n (T_k - U_k). \quad (2.49)$$

Para evaluar la ecuación 2.49 es conveniente cambiar el orden de la suma poniendo los puntos de masa en la posición interior. Se utilizan las fórmulas de equivalencia

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k = \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n \quad (2.50)$$

y

$$\sum_{k=i}^n \sum_{j=1}^k = \sum_{j=1}^n \sum_{k=\max(i,j)}^n, \quad (2.51)$$

las cuales se pueden interpretar como la forma discreta del teorema de Fubini para integrales. La suma interna sobre  $k$  afecta a las masas  $m_k$ , por consiguiente se define la masa  $M_l$  desde cualquier punto  $l$  hasta el extremo inferior de la cadena como

$$M_l = \sum_{k=l}^n m_k. \quad (2.52)$$

El lagrangiano entonces se puede expresar de la forma

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[ M_i a_i^2 \dot{\phi}_i^2 + 2 \sum_{j=i+1}^n a_i a_j \dot{\phi}_i \dot{\phi}_j \cos(\phi_i - \phi_j) \right] - g \sum_{i=1}^n M_i a_i (1 - \cos(\phi_i)). \quad (2.53)$$

Por la ley de conservación de la energía  $L$  es constante, así que al derivar la expresión 2.53 respecto a  $\phi_i$ , se obtiene

$$\sum_{j=1}^n M_{\max(i,j)} a_i a_j \left[ \ddot{\phi}_j \cos(\phi_i - \phi_j) + \dot{\phi}_j^2 \sin(\phi_i - \phi_j) \right] + M_i g a_i \sin \phi_i = 0. \quad (2.54)$$

La ecuación 2.54 describe el movimiento de un péndulo múltiple de  $n$  eslabones. Para el caso trivial en que  $n = 1$  describe el movimiento de un péndulo simple.

### 2.4.3. Aproximación de ángulos pequeños para un péndulo múltiple

Si se considera que las rotaciones y sus derivadas respecto al tiempo son pequeñas, la ecuación 2.54 se puede expresar matricialmente como

$$\mathbf{M} \ddot{\vec{\phi}} + \mathbf{C} \vec{\phi} = 0, \quad (2.55)$$

donde  $\vec{\phi} = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]^T$  es el vector de coordenadas generalizadas. La matriz  $\mathbf{M}$  es de la forma

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1 a_1^2 & M_2 a_1 a_2 & \cdots & M_n a_1 a_n \\ M_2 a_2 a_1 & M_2 a_2^2 & \cdots & M_n a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_n a_n a_1 & M_n a_n a_2 & \cdots & M_n a_n^2 \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

A la matriz  $\mathbf{C}$  se le llama matriz de restitución por la similitud entre la ecuación 2.55 y la ecuación de movimiento para un sistema de masa-resorte. Está dada por

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} M_1 a_1 & & & \\ & M_2 a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_n a_n \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

Las soluciones de la ecuación 2.54 son expresiones de la forma

$$\vec{\phi} = \vec{A} \cos(\omega t), \quad (2.58)$$

donde la frecuencia natural y el vector de amplitudes satisfacen el problema de eigenvalores formulado a partir de

$$(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}) \vec{A} = \vec{0}. \quad (2.59)$$

## Capítulo 3

# EXPERIMENTACIÓN

### 3.1. Dispositivo experimental

El experimento consistió en una cadena suspendida de uno de sus extremos, que fue perturbada de forma transversal con un mecanismo de rodillo-corredera. El motor que impulsa al sistema mecánico fue controlado electrónicamente con una tarjeta Arduino. El proceso físico fue capturado con una cámara de alta velocidad.

Se utilizó una cadena de aluminio como se muestra en la figura 3.1, conformada de 117 esferas a las que se les llamó nodos. Se pintaron de blanco 24 nodos equidistantes y los restantes se pintaron de negro mate, esto con el fin de facilitar la observación de las trayectorias de los pintados de blanco. En la tabla 3.1 se proporcionan las características de la cadena.



**Figura 3.1:** Segmento de la cadena utilizada en la experimentación.

**Tabla 3.1:** Características de la cadena.

| Característica                  | Nomenclatura | Valor                  | Unidades |
|---------------------------------|--------------|------------------------|----------|
| Longitud de la cadena           | $L$          | 0.503                  | m        |
| Masa de la cadena               | $m$          | 0.017                  | kg       |
| Diámetro de nodo                | $D_n$        | 0.003                  | m        |
| Distancia entre nodos contiguos | $l$          | 0.00434                | m        |
| Masa nodal                      | $m_n$        | $145.3 \times 10^{-6}$ | kg       |

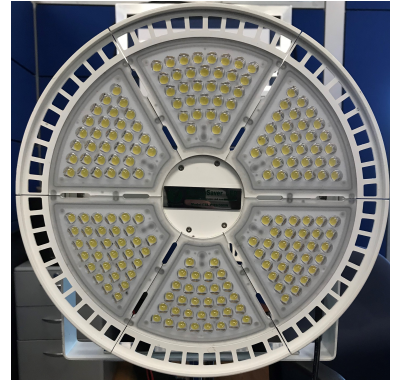
Se utilizó una cámara de alta velocidad propia para trabajo científico y una misma lente para todos los experimentos. Los videos requirieron de muy buena iluminación, la cual se proporcionó con una lámpara especial para fotografía de alta calidad. Estos tres componentes se muestran en la figura 3.2 y sus especificaciones se pueden consultar en la tabla 3.2.



(a)



(b)

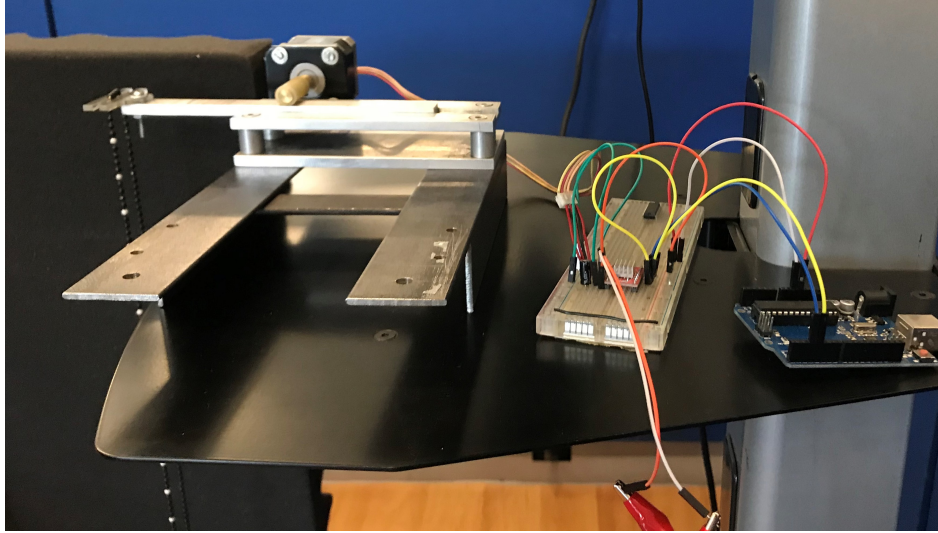


(c)

**Figura 3.2:** a) Cámara de alta velocidad b) lente c) lámpara.

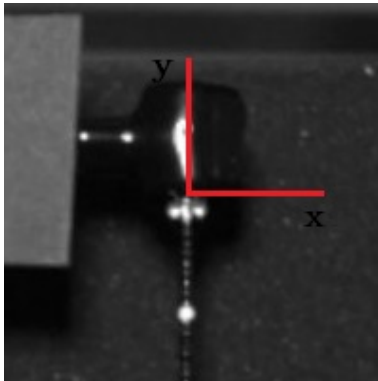
La cámara se instaló sobre un tripié, el cual se niveló para que se muestre el plano deseado en los videos. También se instaló un fondo gris mate para reducir la reflexión de la luz y no afectar la resolución de los videos. Los experimentos se realizaron en el Instituto de Ingeniería de la UNAM.

Se utilizó un soporte universal y una pinza de laboratorio para sostener la cadena para uno de los casos experimentales descritos más adelante; mientras que para los demás casos, la cadena se colgó de la pieza de acrílico del mecanismo rodillo-corredora mostrada en la figura 3.1. La tarjeta Arduino y el controlador digital se colocaron a un costado del mecanismo como se aprecia en la figura 3.3.

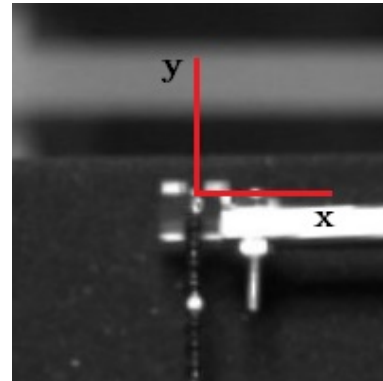


**Figura 3.3:** Mecanismo y sistema de control.

Se estableció un sistema de coordenadas cartesianas, con origen ubicado en el nodo superior del cual pende la cadena (ver figura 3.4). También se estableció como referencia, un segmento de longitud conocida para hacer la conversión de pixeles a metros. Dicho segmento es la longitud de la cadena, pues se escogió lo más grande posible para que la propagación del error sea mínima.



(a)



(b)

**Figura 3.4:** Sistema de coordenadas propuesto: a) caso 1, b) caso 2.

En la tabla 3.2 se enlista el equipo requerido para instalar el dispositivo y realizar las series experimentales, incluyendo los componentes de los que se conforma el mecanismo, mismo que se describe en la sección a continuación.

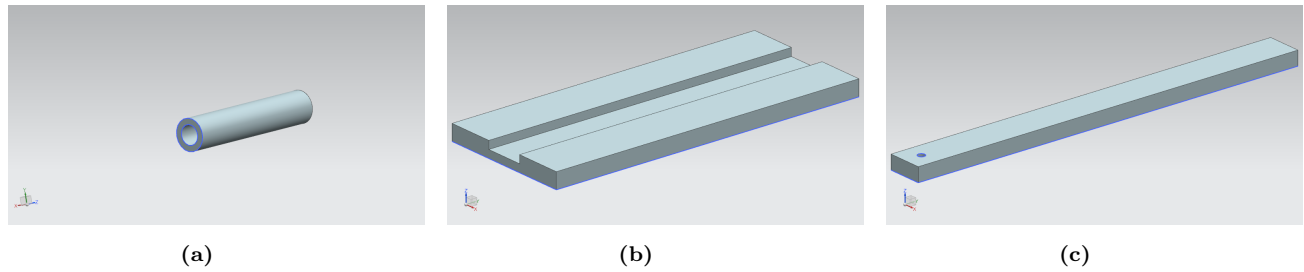
**Tabla 3.2:** Equipo requerido por el dispositivo experimental.

| Equipo                    | Especificaciones                                                                                                                           |
|---------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Motor a pasos NEMA 17     | Corriente de operación DC: 2 A<br>Voltaje de operación DC: [12, 48] V<br>Fases: 2<br>Paso completo: 1.8°                                   |
| Arduino UNO               | Corriente de operación DC para pin I/O: 20 mA<br>Corriente de operación DC para pin 3.3V: 50 mA<br>Voltaje de operación DC: 5 V            |
| Controlador digital A4988 | Corriente máxima de operación DC: 2 A<br>Voltaje de alimentación para motor DC: [8, 35] V<br>Voltaje lógico de alimentación DC: [3, 5.5] V |
| Fuente de voltaje         | Voltaje proporcionado DC: 12 V<br>Corriente de operación DC: 1.5 A                                                                         |
| Fuente de voltaje         | Voltaje proporcionado DC: 5 V<br>Corriente de operación DC: 500 mA                                                                         |
| Cámara de alta velocidad  | Modelo: Phantom v1211<br>Máxima velocidad en alta resolución: 12600 fps<br>Máxima velocidad a 128x16 pixeles: 820000 fps                   |
| Lente                     | Marca: Nikon<br>Foco: 35 mm                                                                                                                |
| Lámpara                   | Modelo: Energysaver ESL-PHSI300W<br>Intensidad luminosa: 36000 lm                                                                          |

### 3.1.1. Mecanismo rodillo-corredera

Se diseñó un mecanismo para aplicar un desplazamiento en algún nodo deseado. El requerimiento principal del diseño fue que la perturbación sea puramente horizontal, es decir, que la línea de acción de la fuerza sea transversal al eje vertical.

El mecanismo está conformado por un rodillo y una corredera, que a su vez está compuesta de una barra con forma de prisma rectangular y una base acanalada sobre la que corre (ver figura 3.5). Las tres piezas mencionadas fueron diseñadas en un programa de dibujo mecánico. También se diseñó una base que las soporta. Se dibujaron planos de todas las piezas y se maquinaron en el taller de manufactura del Instituto de Ingeniería con el apoyo de los técnicos.



**Figura 3.5:** Modelos 3D de las piezas que conforman el mecanismo: a) rodillo, b) base de la corredera, c) corredera.

La pieza de acrílico que se colocó en el extremo de la corredera fue de suma importancia, tiene el espesor suficiente para impactar un solo nodo y también cuenta con dos ranuras para que la cadena cuelgue libremente del nodo superior (ver figura 3.1). El acoplamiento de la pieza con el resto del mecanismo se hizo de tal forma que la perturbación esté contenida en el plano deseado, pues aunque todas las demás piezas y la cadena estén alineadas correctamente, un desplazamiento aplicado en un plano distinto describiría un proceso de propagación diferente.

Las funciones de excitación que definieron los movimientos de la corredera se programaron con la tarjeta Arduino. Para todos los casos experimentales fue muy importante la velocidad de giro del motor, pues se requirió que gire lo suficientemente rápido para mover el nodo deseado y retirarse antes que la onda generada comience a propagarse, esto debido a que la cadena debe oscilar libremente sin efectos externos ajenos al proceso ondulatorio.

El motor fue alimentado con la fuente de voltaje de 12 V de DC, mientras que el voltaje que exige la tarjeta Arduino fue proporcionado mediante el puerto USB de una laptop, lo que equivale a una fuente de voltaje de 5 V de DC. No se debe conectar el motor sin la fuente de 12 V por un tiempo prolongado, ya que la tarjeta Arduino no es capaz de cumplir con la exigencia energética y puede descomponerse.

### 3.1.2. Control del mecanismo

El control del motor se realizó con un controlador digital A4988 de micropasos, con traductor y protección contra sobrecorriente eléctrica y una tarjeta Arduino modelo UNO genérica. Se controlaron cuatro variables del motor: sentido de giro, tamaño de paso, corriente eléctrica y frecuencia angular.

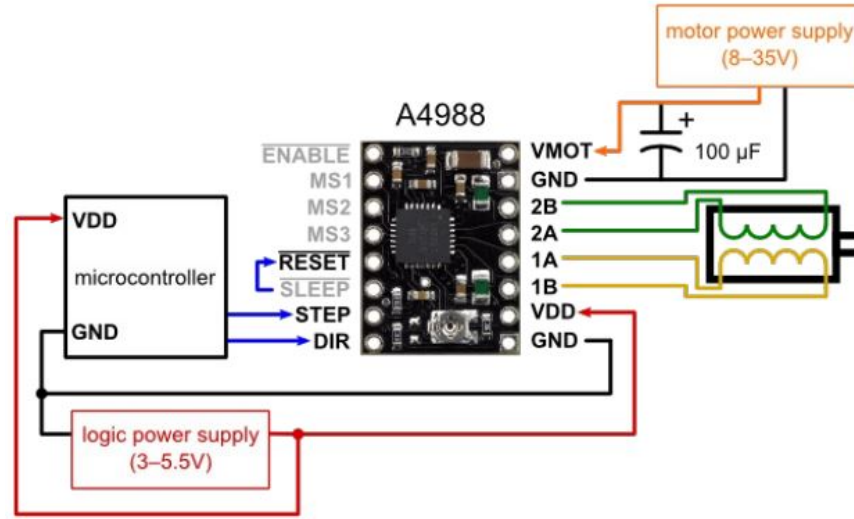
#### Sentido de giro

El sentido de giro se controla al asignar el pin DIR del controlador A4988 que se muestra en la figura 3.6 a un pin digital de la tarjeta Arduino. Si se manda una señal de valor lógico 1 el motor gira en el sentido dextrógiro, por el contrario si se manda una señal de valor lógico 0 gira en el

sentido levógiro. La relación del sentido de giro con el valor lógico de entrada, se invierte al conectar las terminales de cada bobina del motor al revés.

### Tamaño de paso

El controlador puede establecer que el motor realice pasos completos o fracciones de éstos mediante las diferentes combinaciones al conectar los pines MS1, MS2 y MS3. En la tabla 3.3 se muestran las combinaciones en que se deben mandar las señales para cada tamaño de paso. Las señales lógicas con valor 1 se obtienen al conectar los pines a salidas digitales de la tarjeta Arduino o a su salida de 5 V, esto depende de los requerimientos del proceso. Si se desea cambiar de tamaño de paso durante el proceso, se deben conectar los pines del controlador correspondientes a pines digitales para poder ser manipulados mediante el código IDE de Arduino. Sin embargo, si el tamaño de paso se mantiene constante, basta con conectar los pines del controlador a la salida de 5 V.



**Figura 3.6:** Diagrama de pines de salida del controlador digital A4988. Tomada de Pololu Robotics Electronics (2018).

**Tabla 3.3:** Configuración del tamaño de paso. Tomada de Allegro Microsystems (2014).

| Tamaño de paso       | MS1 | MS2 | MS3 |
|----------------------|-----|-----|-----|
| Paso completo        | 0   | 0   | 0   |
| Medio paso           | 1   | 0   | 0   |
| Cuarto de paso       | 0   | 1   | 0   |
| Octavo de paso       | 1   | 1   | 0   |
| Dieciseisavo de paso | 1   | 1   | 1   |

Se utilizaron pasos completos en todo momento, por lo que se conectaron a tierra los tres pines de acuerdo a la tabla 3.3. Esto equivale a dejarlos desconectados, ya que al no detectar entrada alguna, el controlador lo interpreta como señales de valor 0.

### Corriente eléctrica que circula por las bobinas

Utilizando la ley de Ohm se define el voltaje de referencia  $V_{ref}$  de la forma siguiente

$$V_{ref} = RI, \quad (3.1)$$

donde  $R$  es la resistencia eléctrica e  $I$  es la corriente eléctrica. De acuerdo a la hoja de especificaciones proporcionada por el fabricante (Allegro Microsystems, 2014),  $R$  está dada por

$$R = 8R_s, \quad (3.2)$$

donde  $R_s$  es la resistencia interna del controlador. Cuando se trabaja con pasos completos se debe tomar la siguiente consideración:

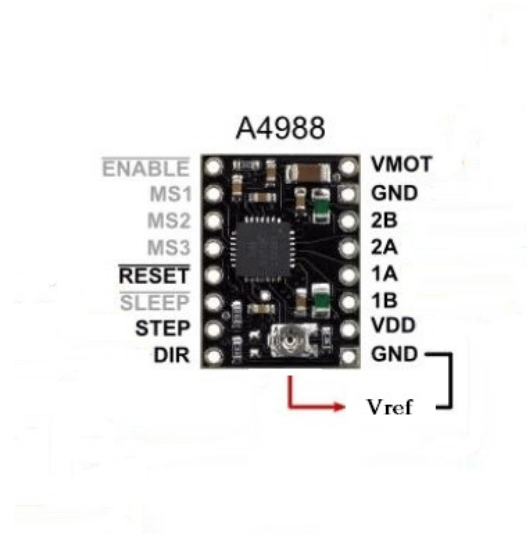
$$I_{full} = 0.7I, \quad (3.3)$$

donde  $I_{full}$  es la corriente cuando el motor trabaja a pasos completos. Por lo tanto, se puede reescribir la ec. 3.1 como

$$V_{ref} = 11.429R_sI_{full}. \quad (3.4)$$

En la hoja de especificaciones (Allegro Microsystems, 2014) se encuentran los valores de  $R_s$  para cada tamaño de paso. El controlador A4988 soporta una corriente máxima de 2 A, por lo que dicho valor es el máximo que puede tomar  $I_{full}$ .

Limitar la corriente que circula por las bobinas del motor (al utilizar pasos completos) consiste en escoger una corriente máxima  $I_{full}$ , calcular  $V_{ref}$  de acuerdo a la ecuación 3.4 y ajustar dicho voltaje con el potenciómetro contenido en el controlador. El voltaje de referencia se mide entre el potenciómetro y el pin GND asociado al pin VDD, tal como se ilustra en la figura 3.7.



**Figura 3.7:** Medición del voltaje de referencia para el ajuste de corriente eléctrica. Tomado de Pololu Robotics Electronics (2018).

### Frecuencia angular

Se expresa el periodo  $P$  como

$$P = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (3.5)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular. El periodo que dura un paso se obtiene de

$$P_s = \frac{P}{s}, \quad (3.6)$$

donde  $s$  son los pasos requerido por revolución. De las ecs. 3.5 y 3.6

$$\omega = \frac{2\pi}{P_s s}. \quad (3.7)$$

En la sección del código IDE mostrado en la figura 3.8, se establece que el motor gire dextrógiro al mandar una señal lógica de valor 1 por medio de la variable *dirPin*. También se proporcionan las señales correspondientes a los pasos representadas por la variable *stepPin*. Para el motor en cuestión el paso completo es de  $1.8^\circ$ , en consecuencia una revolución se logra con 200 pasos completos. La cantidad de pasos que se establezcan determinan la amplitud de la función de entrada al sistema. En este caso la variable contadora  $x$  en el ciclo *for* corre hasta 100. Por lo tanto el motor gira media revolución, que traducido a distancia lineal determina una función de entrada de amplitud  $0.5D$  donde  $D$  es el diámetro del rodillo y es de 12 mm.

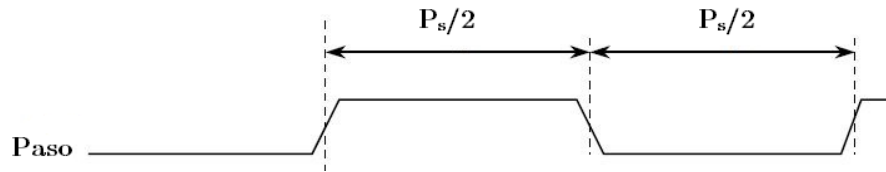
Como se mostró en la ecuación 3.7, la frecuencia angular se controla mediante el periodo de paso. Éste se establece en el código a través de la función *delayMicroseconds* y se proporciona en dos partes debido a que cada paso está definido por una señal como la que se muestra en la figura 3.9, compuesta de una cresta y un valle con duración de medio periodo cada uno.

```

void loop() {
  delay(2000);
  digitalWrite(dirPin,HIGH); //
  // Si se usa FULL STEP se req
  for(int x = 0; x < 100; x++)
    digitalWrite(stepPin,HIGH);
    delayMicroseconds(395);
    digitalWrite(stepPin,LOW);
    delayMicroseconds(395);
}

```

**Figura 3.8:** Asignación del periodo de paso en el código IDE.

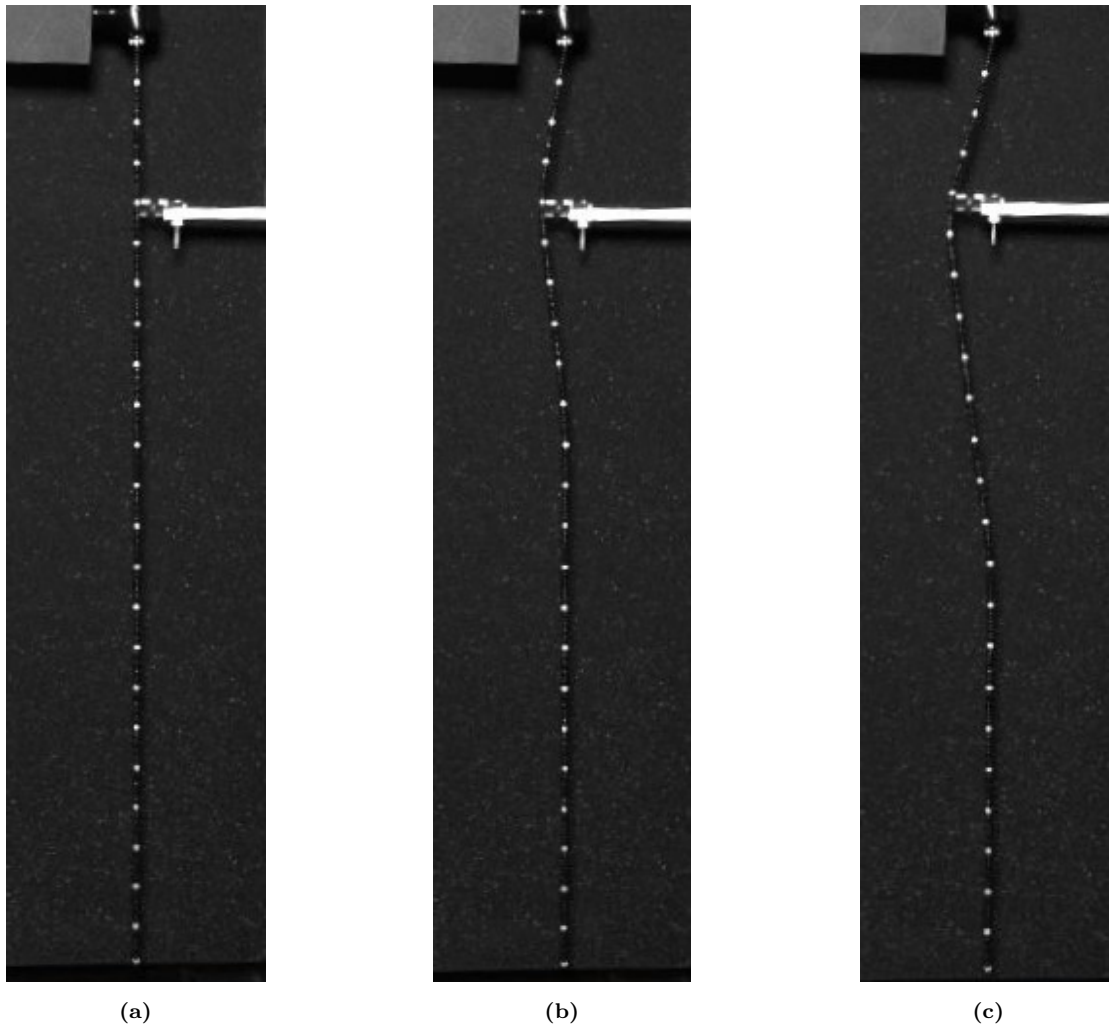


**Figura 3.9:** Periodo que dura un paso. Tomada de Allegro Microsystems (2014).

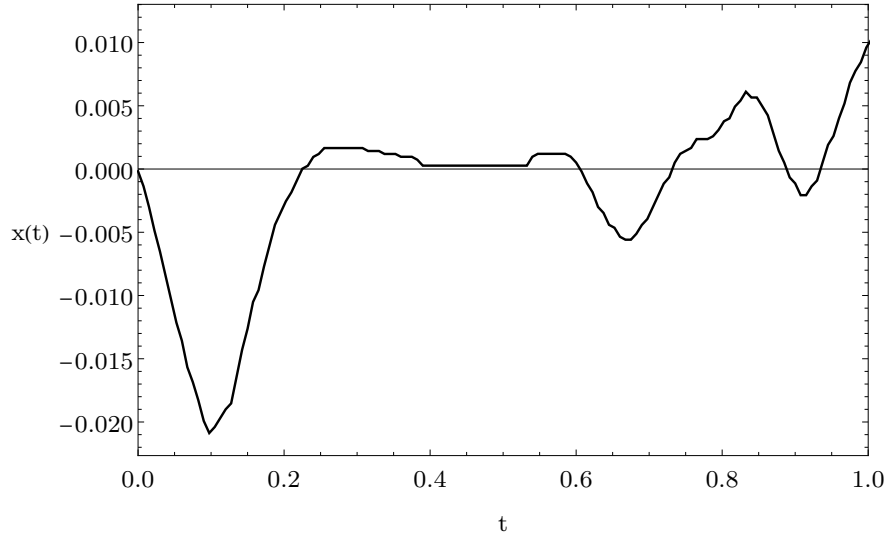
## 3.2. Procesos de interés

### 3.2.1. Caso 1: impacto aplicado

Se colocó la cadena en el soporte universal colgando libremente en el plano vibración y se aplicó un impacto en  $y = -0.091$  m (ver figura 3.10). La excitación se definió mediante una función de desplazamiento de la forma  $x(t)$  cuya gráfica se muestra en la figura 3.11. En este caso, el nodo superior del cual pende la cadena está fijo. El video se realizó con una resolución de  $1280 \times 800$  pixeles, a una velocidad de 2000 cuadros/s, con un tiempo de exposición de  $30 \mu\text{s}$ .



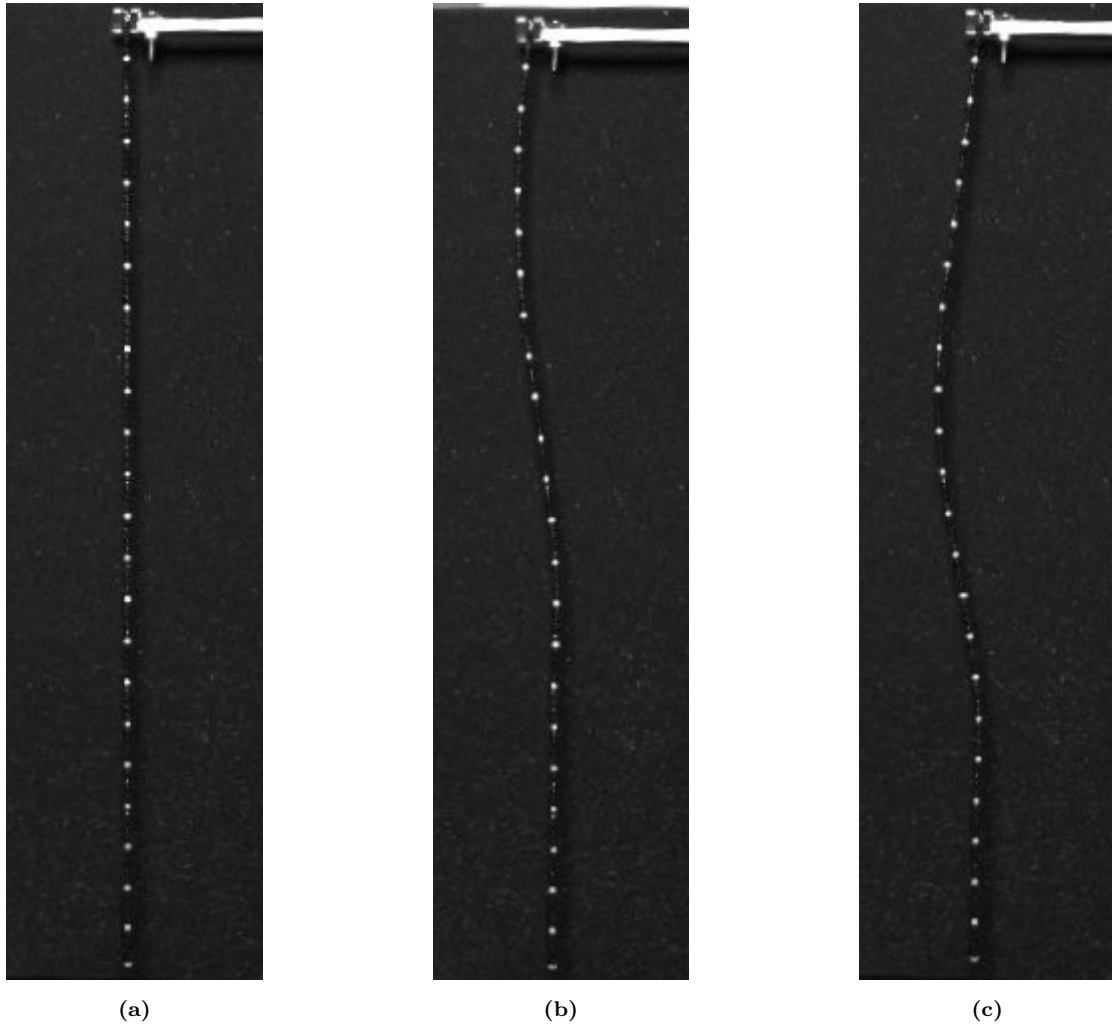
**Figura 3.10:** Impacto aplicado en el caso 1: a)  $t = 0$  s, b)  $t = 0.05$  s, c)  $t = 0.1$  s.



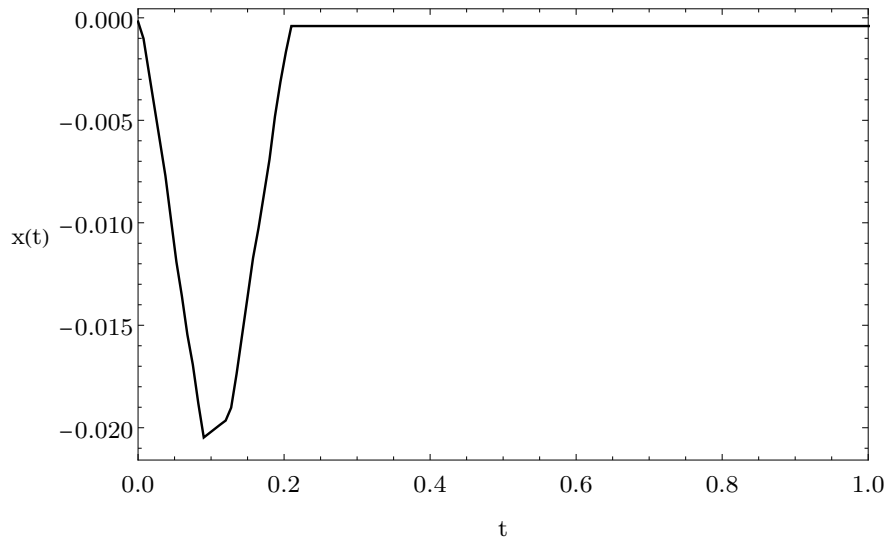
**Figura 3.11:** Función de entrada  $x(t)$  para el caso 1.

### 3.2.2. Caso 2: desplazamiento aplicado

La cadena se colocó en la pieza de acrílico colgando libremente en el plano de vibración y se aplicó un desplazamiento en  $y = 0$  m (ver figura 3.12). Se definió la excitación de igual forma que el caso anterior, mediante una función de desplazamiento  $x(t)$  cuya gráfica se muestra en la figura 3.13. El nodo superior del cual pende la cadena tiene un grado de libertad a lo largo del eje  $x$  momentáneamente, pues una vez que la función de entrada termina, dicho nodo queda fijo. El video se realizó con una resolución de  $1280 \times 800$  pixeles, a una velocidad de 2000 cuadros/s, con un tiempo de exposición de  $30 \mu\text{s}$ .



**Figura 3.12:** Desplazamiento aplicado en el caso 2: a)  $t = 0$  s, b)  $t = 0.14$  s, c)  $t = 0.2$  s.



**Figura 3.13:** Función de entrada  $x(t)$  para el caso 2.

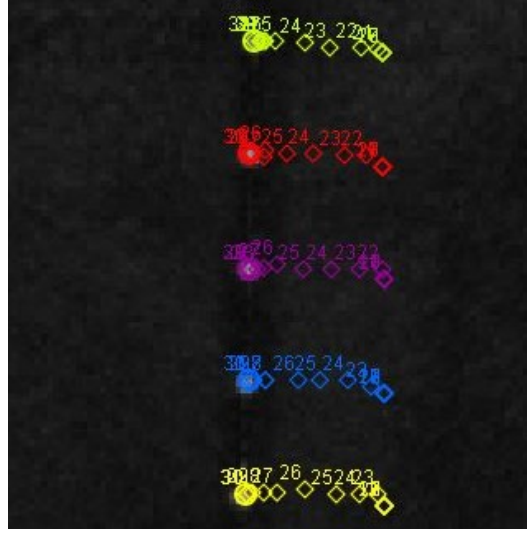
### 3.3. Método de análisis

#### 3.3.1. Análisis de videos con el programa Tracker 4.9.6

El procesamiento de los videos se realizó con el programa Tracker 4.9.6 (Brown, 2019), el cual es un software libre perteneciente al proyecto OSP (*Open Source Physics*). Está diseñado para estudiar procesos dinámicos en cursos elementales de física. Tiene la capacidad de seguir la trayectoria de conjuntos de píxeles para obtener desplazamientos, velocidades y aceleraciones de partículas, centros de masa y vectores. En este trabajo se utilizó para visualizar el movimiento de los nodos blancos como se muestra en la figura 3.14, y así registrar datos de sus posiciones en el plano de vibración. En la tabla 3.4 se da un ejemplo de la información que proporciona el programa.

**Tabla 3.4:** Ejemplo de datos obtenidos.

| $t$   | $x$                     | $y$                    |
|-------|-------------------------|------------------------|
| s     | m                       | m                      |
| 0     | $-0.441 \times 10^{-3}$ | $-47.7 \times 10^{-3}$ |
| 0.025 | $-0.441 \times 10^{-3}$ | $-47.7 \times 10^{-3}$ |
| 0.05  | $-0.441 \times 10^{-3}$ | $-47.7 \times 10^{-3}$ |
| 0.075 | $-0.441 \times 10^{-3}$ | $-47.7 \times 10^{-3}$ |



**Figura 3.14:** Seguimiento de la trayectoria de los nodos en Tracker.

### 3.3.2. Conversión de la duración del video al tiempo real

El tiempo que dura un video depende de la velocidad a la que se reproduce y no se debe confundir con el tiempo que transcurrió en el proceso de grabación.

Los cuadros que contiene un video están dados por

$$q = wt, \quad (3.8)$$

donde  $w$  es la velocidad de grabación y  $t$  el tiempo. De forma análoga

$$t_v = \frac{q}{w_r}, \quad (3.9)$$

donde  $t_v$  es la duración del video y  $w_r$  la velocidad de reproducción. De las ecuaciones 3.8 y 3.9 se obtiene

$$t = \frac{t_v w_r}{w}. \quad (3.10)$$

Por practicidad se expresa el tiempo como

$$t = t_v f_t, \quad (3.11)$$

donde  $f_t$  es el factor de conversión de tiempo

$$f_t = \frac{w_r}{w}. \quad (3.12)$$

Se aplicó el factor  $f_t$  a cada dato de tiempo obtenido experimentalmente.

## Capítulo 4

# MODELO NUMÉRICO

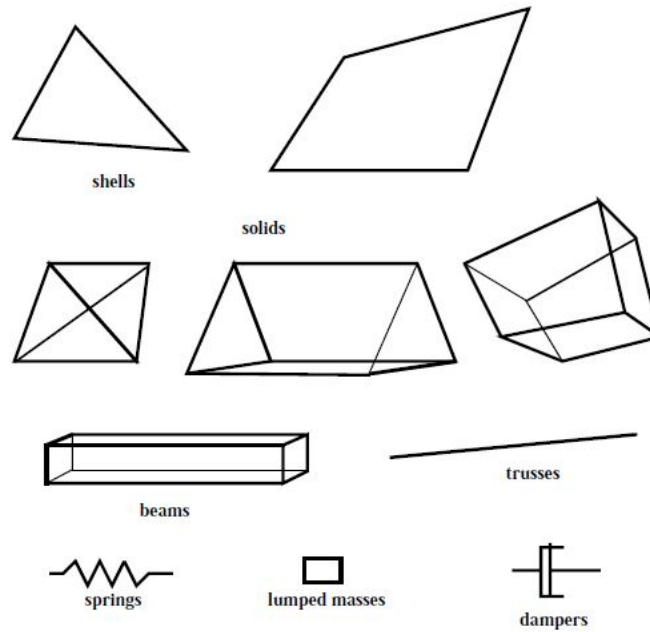
Se realizaron dos simulaciones numéricas de la cadena oscilando, una para cada caso experimental. Se simuló con LS-Dyna, un programa de elemento finito capaz de simular fenómenos físicos complejos. Las soluciones que provee están basadas en análisis por elementos finitos para sistemas físicos no lineales y transitorios. Los algoritmos que utiliza para la integración numérica no son tan precisos como otros métodos, sin embargo, las soluciones obtenidas son válidas y eficientes en términos de uso de memoria (Hallquist, 1998). La precisión puede ser un problema al tratar deflexiones muy pequeñas, pero no es el caso para este proyecto. El código fuente está programado en FORTRAN 77 en su mayoría y algunas partes en C.

Las unidades utilizadas deben ser consistentes para todas las variables físicas involucradas. En el desarrollo de este trabajo se usaron unidades del sistema internacional (SI).

Se utilizó un modelo de un péndulo múltiple de 116 eslabones acoplados mediante juntas esféricas con fricción. Las propiedades geométricas, condiciones de frontera, parámetros de solución y entradas al sistema considerado se describen a continuación.

### 4.1. Cadena de péndulos acoplados

Se consideró una cadena conformada de elementos 1D acoplados mediante juntas esféricas. LS-Dyna es capaz de trabajar con distintos tipos de elementos, los cuales se muestran en la figura 4.1, de los cuales se utilizó el tipo viga (“truss” en inglés). Dicho tipo de elemento requiere que se proporcione por lo menos el área seccional, que se consideró de  $196.3 \times 10^{-9} \text{ m}^2$  para elementos cilíndricos con radio de  $0.25 \times 10^{-3} \text{ m}$ . Se definieron 116 elementos, uno por cada eslabón de la cadena.



**Figura 4.1:** Tipos de elementos en LS-Dyna. Tomado de Livermore Software Technology Corporation, (1999).

Un parámetro relevante para la solución numérica es el paso temporal (“timestep” en inglés), que se define como el tiempo que le toma a una onda acústica propagarse en un elemento por la mínima distancia característica (Bathe, 2014). Debido a que la cadena se construyó de elementos rígidos, el software no es capaz de establecerlo pues al no existir deflexiones de las partículas que conforman los eslabones, no hay propagación acústica. Este problema se resolvió al definir un elemento elástico que no forma parte del medio. No es importante el material escogido ni su posición en el espacio. Solamente se proporciona para que el programa pueda establecer un paso temporal con base a las propiedades de un material elástico y que la solución numérica proceda. En las simulaciones realizadas en esta tesis, dicho elemento extra se consideró del tipo viga y de aluminio.

El tiempo que dura la simulación se define con la función “control termination”, para ambos casos se estableció un periodo de 1.08 s. También es necesario especificar cada cuanto tiempo se exportan datos de solución, lo cual se definió mediante la función “data binary d3plot” cada 0.0075 s (ver figura 4.2).

Se definieron elementos de masa en cada uno de los nodos de la cadena de acuerdo a sus propiedades mostradas en la tabla 3.1. En base a esto, el programa distribuye las masas puntuales hacia el centro de masa de cada eslabón y calcula los momentos de inercia correspondientes. El método que utiliza para el cálculo se expone más adelante.

```

*CONTROL_TERMINATION
$  endtim
$      f
    1.080
*DATABASE_BINARY_D3PLOT
$  dt/cycl
$      f
    0.0075

```

**Figura 4.2:** Definición de la duración de las simulaciones y exportación de los datos de solución.

#### 4.1.1. Condiciones de frontera

La cadena está bajo la acción del campo gravitacional terrestre, donde  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ , el cual se define con una carga en el sentido negativo de la coordenada vertical y con una curva de aceleración contra tiempo, tal como se muestra en la figura 4.3.

```

*LOAD_BODY_Y
$  lcid      sf
$      i      f
    1  9.81E+00
*DEFINE_CURVE
$$ GRAVITY
$  lcid
    1
$      abscissa      ordinate
0.00000000000000E+00 1.00000000000000E+00
3.85000000000000E+00 1.00000000000000E+00

```

**Figura 4.3:** Definición del campo gravitacional en LS-Dyna.

Cada caso experimental se simuló con diferentes grados de libertad para ciertos nodos, tal como se muestra en la figura 4.4 por medio de definir restricciones traslacionales y rotationales (tc y rc respectivamente). Para el caso 1 se establece que el nodo superior ( $y = 0 \text{ m}$ ) está fijo y que puede girar alrededor del eje  $z$ . Para el caso 2 se establece que el nodo superior se puede trasladar horizontalmente y girar respecto al eje  $z$ .

| *NODE |      |         |          |     |    |    |
|-------|------|---------|----------|-----|----|----|
| \$    | i8   | f       | f        | f   | i  | i  |
| \$    | node | x       | y        | z   | tc | rc |
|       | 1    | 0.0     | 0.0000   | 0.0 | 7  | 0  |
|       | 2    | 0.0     | -0.00434 | 0.0 |    |    |
|       | 3    | 0.0     | -0.00434 | 0.0 |    |    |
|       | 234  | 0.00000 | 0.00000  | 0.0 | 7  | 0  |
|       | 235  | 0.00434 | 0.00000  | 0.0 | 7  | 0  |
|       | 236  | 0.00434 | 0.00434  | 0.0 | 7  | 7  |
|       | 237  | 0.00868 | 0.00434  | 0.0 | 7  | 7  |

(a)

| *NODE |      |         |          |     |    |    |
|-------|------|---------|----------|-----|----|----|
| \$    | i8   | f       | f        | f   | i  | i  |
| \$    | node | x       | y        | z   | tc | rc |
|       | 1    | 0.0     | 0.0000   | 0.0 | 5  | 0  |
|       | 2    | 0.0     | -0.00434 | 0.0 |    |    |
|       | 3    | 0.0     | -0.00434 | 0.0 |    |    |
|       | 234  | 0.00000 | 0.00000  | 0.0 | 5  | 7  |
|       | 235  | 0.00434 | 0.00000  | 0.0 | 5  | 7  |
|       | 236  | 0.00434 | 0.00434  | 0.0 | 5  | 7  |
|       | 237  | 0.00868 | 0.00434  | 0.0 | 5  | 7  |

(b)

**Figura 4.4:** Restricción de grados de libertad de nodos: a) caso 1, b) caso 2.

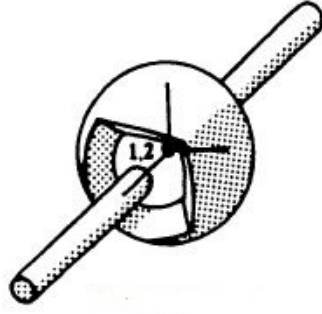
#### 4.1.2. Juntas esféricas con fricción

Cada junta esférica se conformó de dos nodos como se muestra en la figura 4.5, de los cuales uno pertenece al eslabón superior y el otro al inmediato inferior. Para el primer eslabón se definió un elemento extra colocado de forma horizontal mostrado en la figura 4.6. Dicho elemento sirvió de soporte de la cadena y para definir la primera junta ubicada en  $y = 0$  m. Utilizar juntas esféricas implica que los eslabones se pueden mover en cualquier dirección, en otras palabras, cuentan con los 6 grados de libertad. Sin embargo, se definieron ángulos de tope que limitan la rotación de los eslabones a  $45^\circ$  alrededor del eje  $z$ , pues la cadena real sólo permite dicho ángulo de movimiento.

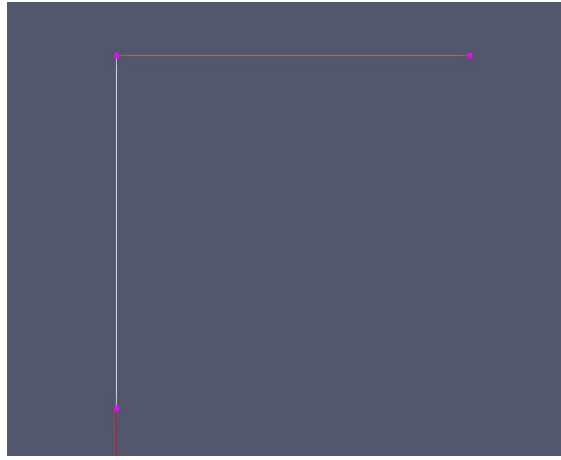
Se definió un sistema de referencia local para cada junta. Cada uno de ellos requiere de tres nodos: uno sobre el eje nuevo horizontal, otro sobre el vertical y por último uno que esté contenido en el plano descrito por los ejes locales. Cada péndulo se modeló como un sistema masa-resorte-amortiguador torsional con el fin de simular el movimiento entre eslabones y la disipación de energía asociada a la fricción en las juntas. Las ecuaciones que describen cada elemento del sistema son

$$T = J\ddot{\theta}, \quad (4.1)$$

$$T_r = k\theta \quad (4.2)$$



**Figura 4.5:** Junta esférica y 2 nodos necesarios para definirla. Tomada de Livermore Software Technology Corporation, (1999).



**Figura 4.6:** Elemento extra con función de soporte.

y

$$T_a = b\dot{\theta}, \quad (4.3)$$

donde  $T$  es el par inercial asociado a la masa del péndulo,  $T_r$  es el par que actúa en el resorte,  $T_a$  es el par que actúa en el amortiguador,  $\theta$  es la rotación del cuerpo rígido,  $k$  es la constante de rigidez torsional y  $b$  es el coeficiente de fricción viscosa. La ecuación de movimiento del sistema está dada por

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{J}\dot{\theta} + \frac{k}{J}\theta = U(t), \quad (4.4)$$

donde  $J$  es el momento de inercia respecto al eje de rotación y  $U(t)$  es una función de entrada local tipo escalón. Aplicando la transformada de Laplace se obtiene la ecuación característica del sistema

$$s^2 + \frac{b}{J}s + \frac{k}{J} = \frac{U(s)}{s}. \quad (4.5)$$

De la ecuación 4.5 se obtiene el factor de amortiguamiento relativo  $\xi$  y la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$  de la forma siguiente:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{J}} \quad (4.6)$$

y

$$\xi = \frac{b}{2\sqrt{Jk}} \quad (4.7)$$

El carácter de la respuesta natural depende de  $\xi$ ; es decir, está determinado por las variables físicas que aparecen en la ecuación 4.7. Sin embargo, como  $J$  es constante, los valores que tomen  $b$  y  $k$  determinan el comportamiento del sistema ante la función de entrada. Se debe proporcionar en el código de LS-Dyna una tabla de par contra velocidad angular que define al coeficiente de fricción viscosa y también un valor específico para la constante de rigidez torsional.

### 4.1.3. Funciones de excitación

Las funciones de excitación se definieron mediante el comando "boundary prescribed motion", el cual define un movimiento en uno o más nodos por medio de un desplazamiento, una velocidad o una aceleración. Los dos tipos de entrada fueron representadas con funciones de desplazamiento  $x(t)$  aplicadas en un nodo específico: para el caso 1 se aplicó la función de entrada mostrada en la figura 3.11 al nodo correspondiente a  $y = -0.091$  m; mientras que para el caso 2 se aplicó la función que se observa en la figura 3.13 al nodo correspondiente a  $y = 0$  m.

En la figura 4.7 se aprecian los datos necesarios para definir la función de entrada. En el espacio correspondiente a *nid* se asigna la función al nodo deseado, la dirección del desplazamiento se designa con *dof* y se establece el tiempo en el que la función es válida definiendo su inicio y su término ("birth" y "death" respectivamente en inglés). Por último se provee una tabla de valores de tiempo y posición que definen las funciones de excitación.

```

*BOUNDARY_PRESCRIBED_MOTION_NODE
$      nid      dof      vad      lcid      sf      vid      death birth
      42         1         2         3         1
*DEFINE_CURVE
$$ NODAL DISPLACEMENT
$      lcid
      3
$      abscissa      ordinate
      0.0000      -1.80E-04
      0.0075      -1.37E-03
      0.0150      -3.00E-03
      0.0225      -4.88E-03
      0.0300      -6.52E-03
      0.0375      -8.40E-03
      0.0450      -1.03E-02
      0.0525      -1.21E-02

```

(a)

```

*BOUNDARY_PRESCRIBED_MOTION_NODE
$      nid      dof      vad      lcid      sf      vid      death birth
      1         1         2         3         1
*DEFINE_CURVE
$$ NODAL DISPLACEMENT
$      lcid
      3
$      abscissa      ordinate
      0.00E-00      -1.84E-04
      7.50E-03      -1.02E-03
      1.50E-02      -2.70E-03
      2.25E-02      -4.37E-03
      3.00E-02      -6.04E-03
      3.75E-02      -7.72E-03
      4.50E-02      -9.81E-03
      5.25E-02      -1.19E-02

```

(b)

Figura 4.7: Definición de las funciones de entrada en LS-Dyna: a) caso 1, b) caso 2.

## 4.2. Ecuaciones de movimiento

El programa hace la integración explícita en el tiempo por medio del método de diferencias centrales. Se expresa la segunda ley de Newton como

$$M\ddot{u}^n = P^n - F^n + H^n, \quad (4.8)$$

donde  $M$  es la matriz diagonal de masas,  $u$  es el vector de desplazamientos nodales,  $P^n$  es la matriz de cargas externas y fuerzas de cuerpo,  $F^n$  es el vector de divergencia de esfuerzo y  $H^n$  es la resistencia al efecto de adelgazamiento del elemento en la parte central (conocido coloquialmente como efecto de reloj de arena o “hourglass”<sup>1</sup> en inglés). Se hace la integración en el tiempo por

<sup>1</sup>Los modos de deformación tipo “hourglass” describen procesos de energía nula que no producen esfuerzos ni deformaciones (Hallquist, 1998).

medio de las ecuaciones:

$$\ddot{u}^n = M^{-1}(P^n - F^n + H^n), \quad (4.9)$$

$$\dot{u}^{n+1/2} = \dot{u}^{n-1/2} + \ddot{u}^n \Delta t^n, \quad (4.10)$$

y

$$u^{n+1} = u^n + \dot{u}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2}, \quad (4.11)$$

donde

$$\Delta t^{n+1/2} = \frac{\Delta t^n + \Delta t^{n+1}}{2}. \quad (4.12)$$

La geometría se actualiza añadiendo los incrementos en los desplazamientos a la geometría inicial por medio de:

$$x^{n+1} = x^0 + u^{n+1}. \quad (4.13)$$

Se ha encontrado que a pesar de que se necesita más memoria para realizar estas operaciones y guardar el vector de desplazamiento, los resultados son menos sensibles al error por redondeo de acuerdo a Hallquist (1998).

Debido a que el modelo considera a los eslabones como elementos rígidos, se utilizan las ecuaciones de movimiento traslacional y rotacional:

$$F_i = M \ddot{X}_i^{CM} \quad (4.14)$$

y

$$T_i = J_{ij} \dot{\omega}_j + e_{ijk} \omega_j J_{kp} \omega_p, \quad (4.15)$$

donde  $F$  es la fuerza inercial,  $M$  es la matriz de masas,  $X^{CM}$  es la matriz de coordenadas de centros de masa,  $T$  el par inercial,  $J$  el tensor de momento de inercia y  $\omega$  la velocidad angular. Las ecuaciones 4.14 y 4.15 se pudieran resolver para las aceleraciones sencillamente mediante

$$\ddot{X}_i^{CM} = \frac{F_i}{M} \quad (4.16)$$

y

$$\dot{\omega}_j = J_{ij}^{-1} (T_i - e_{ijk} \omega_j J_{kp} \omega_p). \quad (4.17)$$

Sin embargo, hay tres principales complicaciones asociadas a implementar las ecuaciones 4.14 y 4.15 en un programa de dinámica estructural: (1) calcular  $M$  y  $J$  de la malla que define al elemento rígido, (2) calcular las fuerzas y pares inerciales y (3) actualizar los desplazamientos, velocidades y el tensor de inercia de modo que no se deforme al elemento. Al utilizar una malla de elementos finitos se define un cuerpo rígido al especificar que todos los elementos en dicha región son rígidos.

La masa de los cuerpos rígidos está dada por

$$M = \sum_{\alpha, \beta}^p M_{\alpha 1 \beta 1}, \quad (4.18)$$

donde  $p$  es la cantidad de elementos rígidos en la geometría. De la ecuación 4.18 se observa que la matriz de masas es diagonal. Por otro lado, el tensor de inercia se calcula con la suma nodal del producto de las masas con sus respectivos vectores perpendiculares de la forma siguiente:

$$J_{ij} = e_{irs} e_{jnm} M \hat{x}_{\alpha s} \hat{x}_{\beta m}, \quad (4.19)$$

donde

$$\hat{x}_{\alpha i} = x_{\alpha i} - X_i^{CM}. \quad (4.20)$$

El desplazamiento de los cuerpos rígidos se mide desde la posición de los centros de masa. Sus coordenadas se inicializan mediante la ecuación

$$X_i^{CM} = \frac{\sum_{\alpha}^p M_{\alpha} x_{\alpha i}}{M}. \quad (4.21)$$

También se definen las velocidades nodales iniciales, utilizando la derivada temporal de la expresión 4.21 por medio de

$$\dot{x}_{\alpha i} = \dot{X}_i^{CM} + e_{ijk} \omega_j A_{kn} \hat{x}_{\alpha n}, \quad (4.22)$$

donde  $\theta$  es la rotación del cuerpo rígido y  $A_{ij}$  es el tensor de transformación de coordenadas del sistema local al sistema global, que en el tiempo inicial es el tensor de Kronecker.

Para las orientaciones arbitrarias de los cuerpos rígidos, el tensor de inercia debe transformarse a medida que pasa el tiempo, es decir, cada paso temporal. Esto se expresa como

$$J_{ij}^{n+1} = A(\Delta\theta)_{ik} A(\Delta\theta)_{jm} J_{km}^n. \quad (4.23)$$

Las fuerzas y pares que actúan en cada elemento se calculan con la suma de las fuerzas y pares nodales mediante

$$F_i = \sum_{\alpha}^p f_{\alpha i} \quad (4.24)$$

y

$$T_i = e_{ijk} \hat{x}_{\alpha j} f_{\alpha k}, \quad (4.25)$$

donde  $f_{\alpha i}$  es la fuerza que actúa en el  $i$ -ésimo nodo. Las ecuaciones 4.24 y 4.25 toman en cuenta todo tipo de fuerzas: cargas concentradas, fuerza gravitatoria, fuerzas de impacto, tracción, fuerzas de interacción entre elementos rígidos y otros tipos, etc. De acuerdo a Hallquist (1998), la simplicidad de la obtención de fuerzas y pares mediante sumas es lo que hace a los modelos de elementos rígidos tan atractivos en términos de cómputo.

La matriz de incrementos en la rotación de los elementos rígidos se calcula con el algoritmo de Hughes y Winget (1980), de donde también se obtiene el método para calcular las velocidades locales como función del tiempo.

$$\Delta\theta_i^{n+1} \simeq \Delta t^{n+1/2} \omega_i^{n+1/2}. \quad (4.26)$$

$$\dot{x}_{\alpha i}^{n+1/2} = \frac{x_{\alpha i}^{n+1} - x_{\alpha i}^n}{\Delta t^{n+1/2}}. \quad (4.27)$$

Para más detalle sobre este aspecto técnico, revisar las expresiones 4.26 y 4.27 mostradas a continuación en la publicación mencionada. Los métodos de análisis por elemento finito que se trataron, se pueden revisar a fondo en el libro de Bathe (2014) y en el manual de Hallquist (1998), los cuales, se tomaron como referencia para desarrollar esta sección.

### 4.3. Visualización de las simulaciones

Los datos de salida del software de elementos finitos se procesaron con el programa Paraview 5.5, el cual permite la visualización y análisis de los resultados obtenidos de simulaciones numéricas. Se utilizó para seguir la trayectoria en el plano de vibración de los nodos simulados correspondientes a los marcados de blanco a través del tiempo. Con esto se obtuvieron los datos análogos a los datos experimentales, los cuales se exportaron a una hoja de cálculo para su análisis posterior.

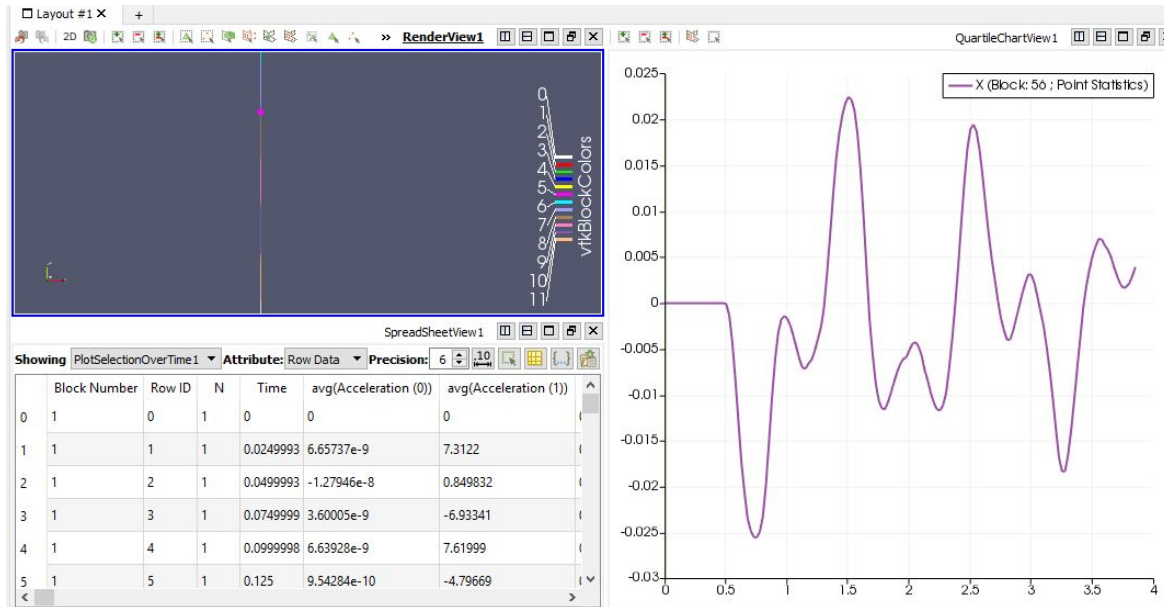


Figura 4.8: Visualización en Paraview de los resultados de la simulación numérica.

## Capítulo 5

# MÉTODOS DE VALIDACIÓN

Los datos obtenidos de los experimentos y las simulaciones se procesaron en Wolfram Mathematica 10.3. Se diseñó un programa para importar los datos de tiempo y posición en el plano de vibración de los nodos de interés y generar las gráficas apropiadas para estudiar la propagación. Asimismo, se graficaron diversas curvas: desplazamientos, velocidades y aceleraciones nodales, amplitud de la onda, velocidad de fase, entre otras. Las curvas de desplazamientos nodales de la forma  $x(t)$  se tomaron de referencia para validar los resultados de las simulaciones numéricas.

### 5.1. Obtención de la función de excitación

Por otra parte, se utilizó el programa Tracker para obtener los desplazamientos del nodo al que se aplicó la función de excitación para cada caso experimental, construyendo así, una tabla de datos que definen las funciones de entrada  $x(t)$ . Este procedimiento es determinante para la validación del modelo numérico, ya que se asegura que la cadena simulada sea perturbada exactamente igual que la real. Aún considerando una cadena de elementos rígidos acoplados sin fricción en las juntas, como se hace en el trabajo de Schagerl y Berger (2002), los resultados experimentales y numéricos serían muy similares. Sin embargo, en esta tesis sí se consideraron juntas con fricción, por lo tanto el ajuste fino de las simulaciones dependió de la constante de rigidez torsional y el coeficiente de fricción viscosa planteados en el modelo numérico.

## 5.2. Estimación del coeficiente de fricción viscosa $b$ y la constante de rigidez torsional $k$

La frecuencia natural no amortiguada depende de la constante de rigidez torsional del resorte y del momento de inercia. Para estimar una constante de rigidez se tomó de referencia un péndulo simple, cuya frecuencia natural no amortiguada se calcula mediante

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (5.1)$$

La aceleración gravitatoria y la longitud del péndulo para el sistema en cuestión, son propiedades conocidas. De acuerdo a las ecuaciones 4.6 y 5.1

$$k = \frac{gJ}{l}. \quad (5.2)$$

Sustituyendo los valores de  $J$  y  $l$ , y considerando una aceleración gravitacional de  $9.81 \text{ m/s}^2$  la constante del resorte es

$$k = 6.19 \times 10^{-6} \frac{Nm}{rad}. \quad (5.3)$$

Ahora de las ecuaciones 4.7 y 5.2 se tiene que

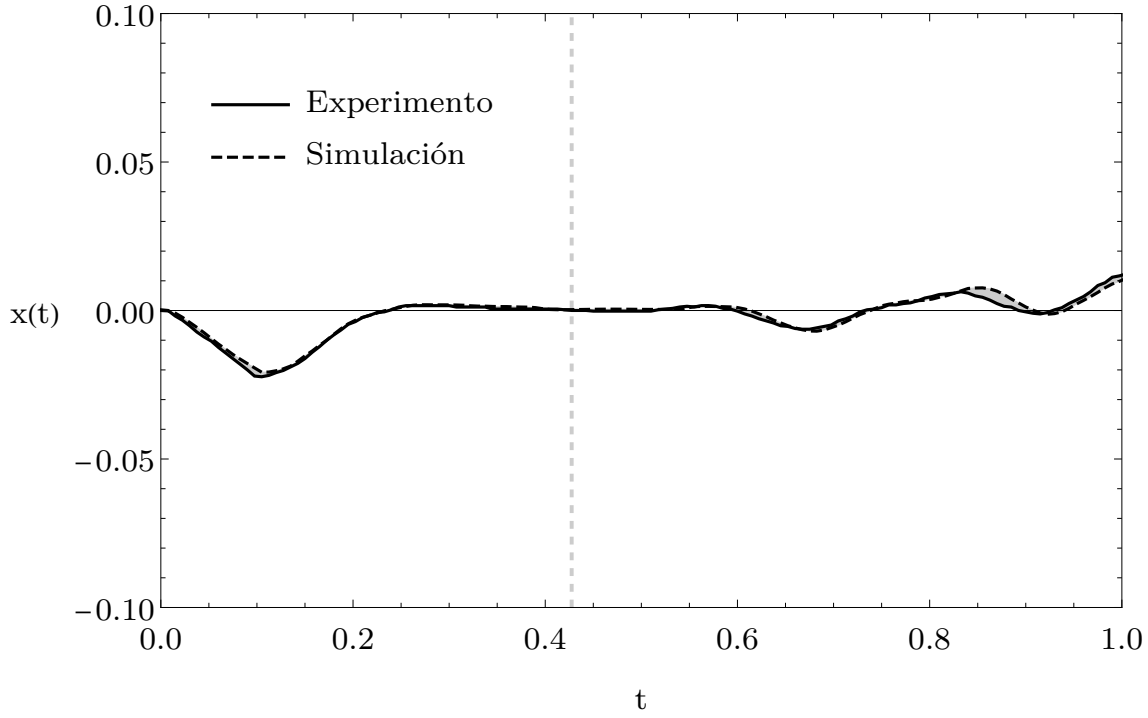
$$b = 2\xi J \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (5.4)$$

Con la ecuación 5.4 se elaboró una tabla de valores posibles que puede tomar  $b$ , los cuales definen el tipo de respuesta del sistema masa-resorte-amortiguador (ver tabla 5.1).

**Tabla 5.1:** Rango de valores posibles del coeficiente de fricción viscosa  $b$ , de acuerdo al factor de amortiguamiento relativo  $\xi$ .

| Tipo de sistema          | $\xi$     | $b$<br>$\times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ kg/s}$ |
|--------------------------|-----------|--------------------------------------------------|
| Sobreamortiguado         | $\xi > 1$ | $b > 2.6$                                        |
| Críticamente amortiguado | $\xi = 1$ | $b = 2.6$                                        |
| Subamortiguado           | $\xi < 1$ | $b < 2.6$                                        |
| Armónico simple          | $\xi = 0$ | $b = 0$                                          |

Para lograr que el modelo numérico y los experimentos fueran acordes, se realizaron los pasos siguientes: asignar un valor del coeficiente de fricción viscosa de acuerdo a la tabla 5.1, obtener las curvas  $x(t)$  de los nodos correspondientes a  $y = -0.004 \text{ m}$ ,  $y = -0.156 \text{ m}$  y  $y = -0.503 \text{ m}$ , calcular el área comprendida entre las curvas experimentales y simuladas como se muestra en la figura 5.1, repetir iterativamente el proceso hasta obtener un error lo más pequeño posible.



**Figura 5.1:** Error entre 2 curvas.

El área comprendida entre dos funciones se calculó mediante la integral del valor absoluto de la diferencia entre ellas, es decir,

$$E = \int_{t_1}^{t_2} |x_e(t) - x_s(t)| dt, \quad (5.5)$$

donde  $E$  es el error entre las dos curvas,  $x_e(t)$  es la función correspondiente al experimento y  $x_s(t)$  la correspondiente a la simulación. En la tabla 5.2 se muestran los errores calculados mediante la ecuación 5.5.

El valor final para  $b$  fue  $2.5 \times 10^{-6} \text{ m}^2\text{kg/s}$  ya que tuvo el error mínimo para los nodos escogidos, lo que implica que los péndulos se comportan como sistemas sobreamortiguados.

Los valores se asignan en el código de la simulación con la opción "boundary constrained joint stiffness", donde se establece la constante de rigidez torsional en la columna correspondiente a *esps* y se proporciona la tabla de par contra celeridad angular que define el coeficiente de fricción viscosa (ver figura 5.2).

**Tabla 5.2:** Errores de nodos correspondientes a (1)  $y = -0.004$  m, (2)  $y = -0.156$  m y (3)  $y = -0.503$  m.

| $b$<br>$\times 10^{-6} \text{m}^2 \text{kg/s}$ | Error (1)<br>$\times 10^{-4} \text{ m s}$ | Error (2)<br>$\times 10^{-3} \text{ m s}$ | Error (3)<br>$\times 10^{-3} \text{ m s}$ |
|------------------------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|
| 0.0008                                         | 36.45                                     | 3.2                                       | 45.37                                     |
| 0.001                                          | 33.52                                     | 3.15                                      | 44.53                                     |
| 0.002                                          | 35.54                                     | 3.09                                      | 44.7                                      |
| 0.26                                           | 36.01                                     | 2.675                                     | 44.7                                      |
| 0.28                                           | 35.85                                     | 2.69                                      | 44.84                                     |
| 0.5                                            | 35.38                                     | 2.63                                      | 44.81                                     |
| 1.5                                            | 33.27                                     | 2.6                                       | 43.78                                     |
| 2.5                                            | 8.56                                      | 1.7                                       | 3.18                                      |
| 2.6                                            | 35.63                                     | 2.65                                      | 3.20                                      |
| 3.5                                            | 45.12                                     | 2.56                                      | 3.75                                      |
| 4.2                                            | 61.82                                     | 2.53                                      | 4.34                                      |
| 26                                             | 25.89                                     | 2.65                                      | 5.24                                      |
| 15                                             | 21.05                                     | 2.61                                      | 40.75                                     |
| 150                                            | 17.02                                     | 2.51                                      | 39.57                                     |
| 400                                            | 16.66                                     | 2.49                                      | 41.52                                     |
| 420                                            | 16.62                                     | 2.48                                      | 41.82                                     |

```

*CONSTRAINED_JOINT_STIFFNESS_GENERALIZED
$
$      jsid      pida  pidb  cida  cidb      84
      84      84      85      84
$      lcidx      lcidy  lcidz  (about axe x, y or z)
      0      0      0      0      0      2
$      esph      fmph      esth      fmth      esps      fmps
      0E+00      0E+00      0E+00      0  6.1862E-06  0E-06
      0      0      0      0      -45      225

```

(a)

```

*DEFINE_CURVE
$$ DAMPING TORQUE VS ROTATION IN RADIANS
$      lcid
      2
$      abscissa      ordinate
      0      0.00E+00
      1      2.50E-06
      2      5.00E-06
      3      7.50E-06

```

(b)

**Figura 5.2:** Definición de la fricción en las juntas esféricas en LS-Dyna: a) asignación de  $k$  y ángulo de tope, b) tabla de par contra celeridad angular.

## Capítulo 6

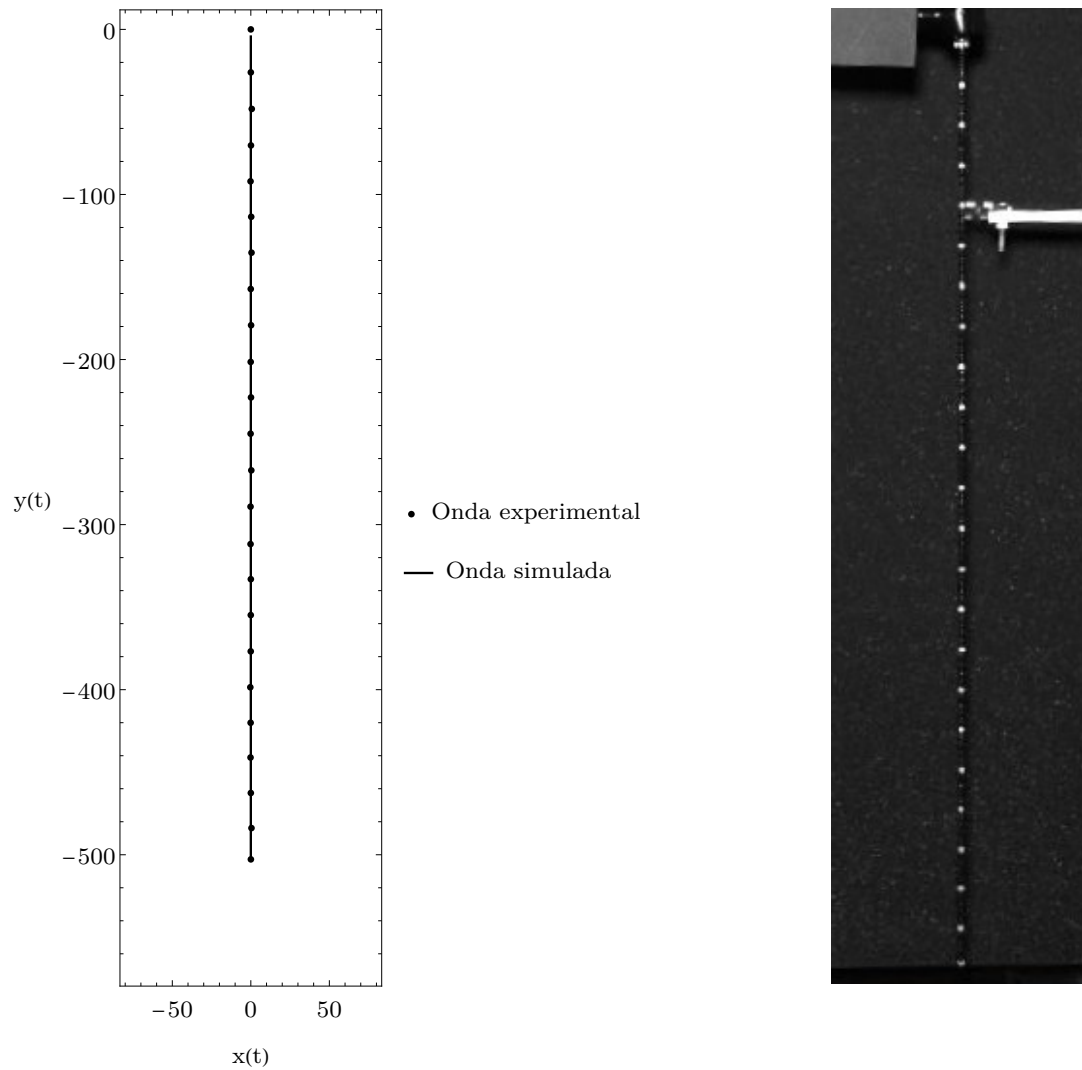
# RESULTADOS

Se presentan los resultados comparativos de los experimentos y las simulaciones numéricas. La comparación cualitativa entre las oscilaciones, tanto de la cadena real como de la teórica, se realizó por medio de la imagen obtenida con la cámara y la gráfica generada por la simulación, en una serie de diez diferentes instantes para cada caso experimental.

Se cuantifican los desplazamientos, las velocidades y las aceleraciones locales en el plano de vibración, con un programa escrito ex profeso en Wolfram Mathematica. Además, en el mismo programa se grafican las proyecciones de las trayectorias en el plano fase y se determinan las características de la propagación, es decir, las amplitudes, las velocidades de fase y las aceleraciones. La mayoría de las gráficas mostradas en este capítulo están referidas a la primera oscilación de la cadena. Se indica con una línea vertical punteada el instante donde dicho proceso finaliza.

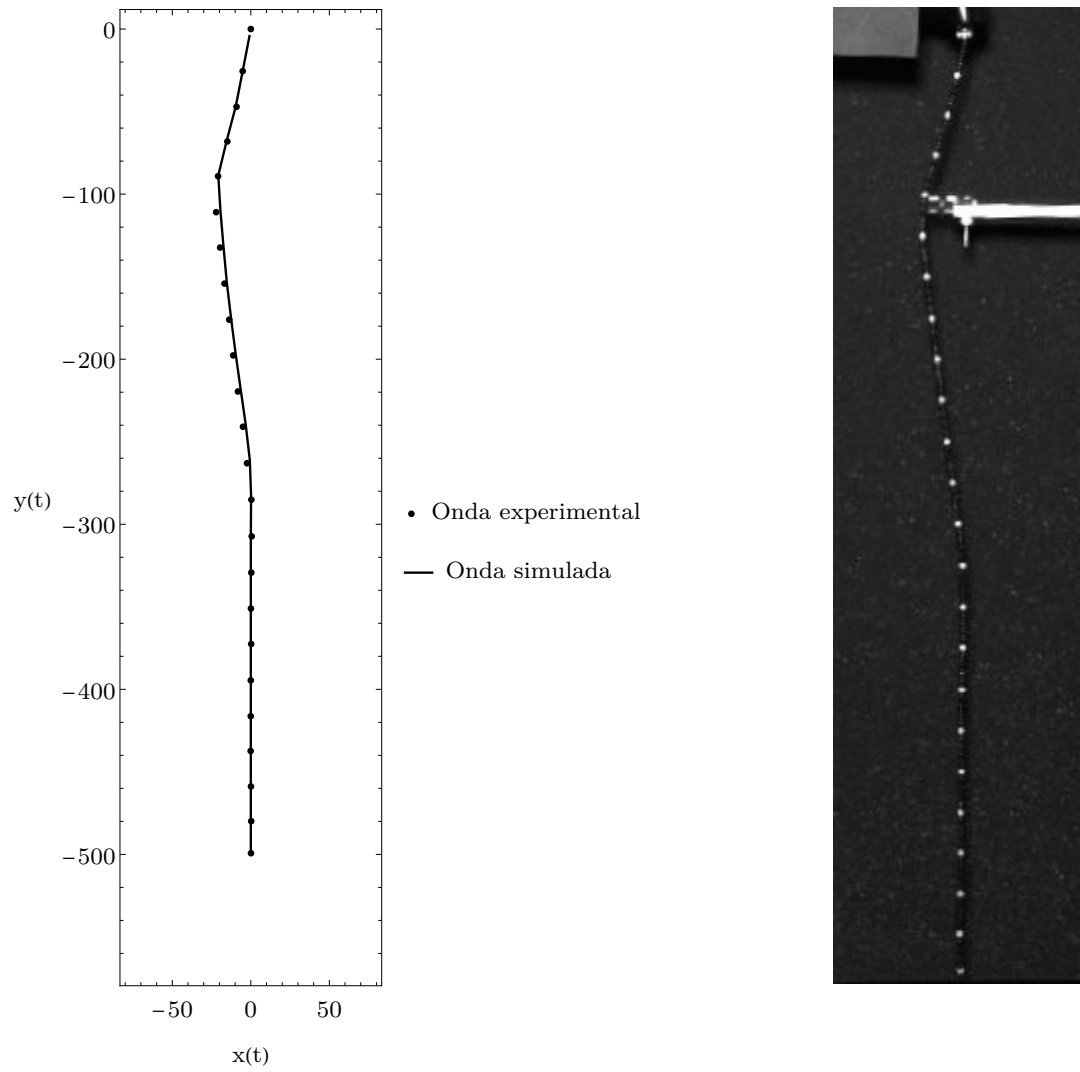
A continuación se muestran cada una de las comparaciones específicas de la figura 6.1 a la 6.10, para cada uno de los instantes considerados.

### 6.1. Comparación del movimiento simulado con el real



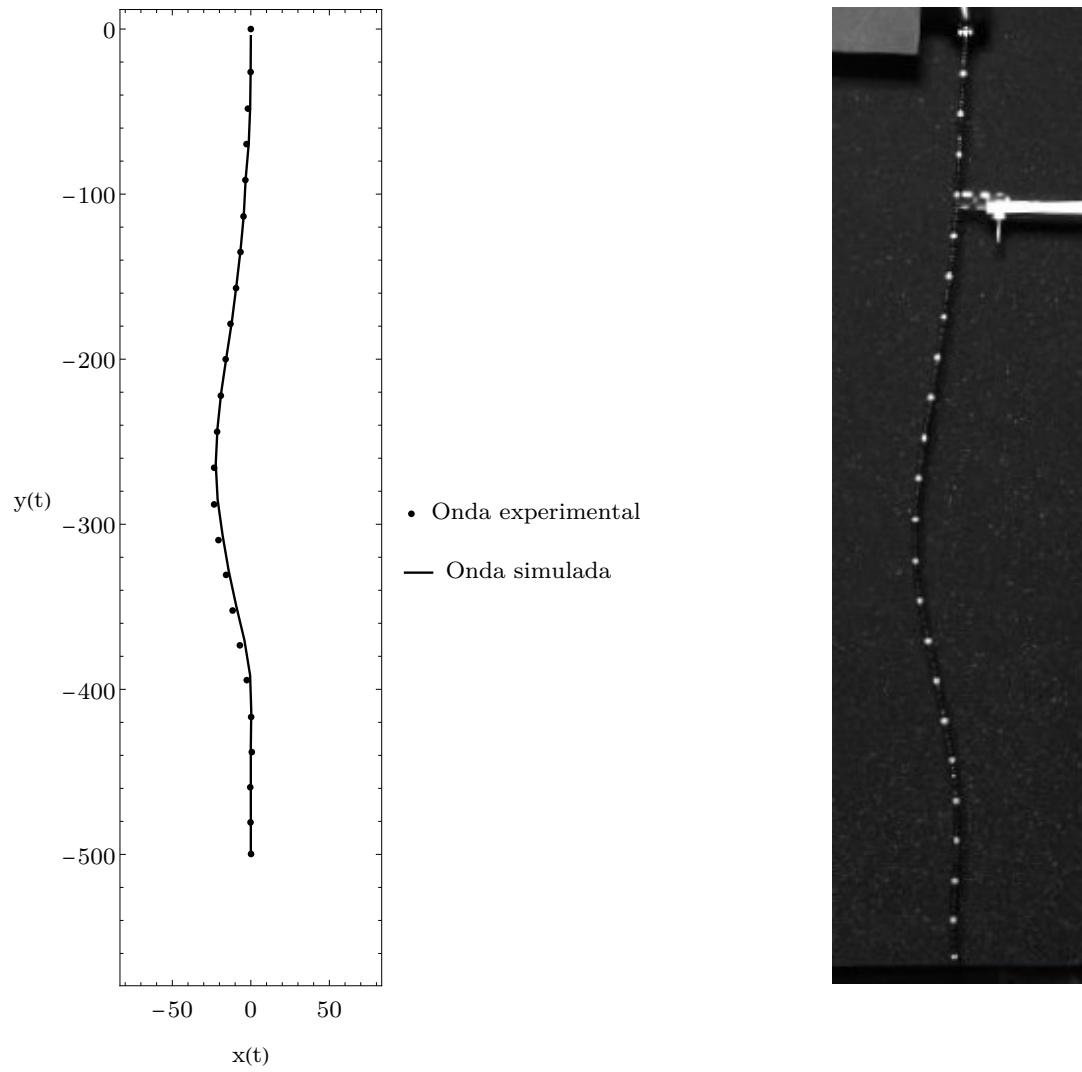
**Figura 6.1:** Caso 1: comparación de la onda experimental con la onda simulada para  $t = 0$  s.

En el tiempo inicial, las cadenas experimental y simulada están dispuestas de forma idéntica; la posición inicial de los nodos fue la referencia para construir la cadena en el simulador a lo largo del eje vertical  $y$  en sentido negativo (ver figura 6.1).



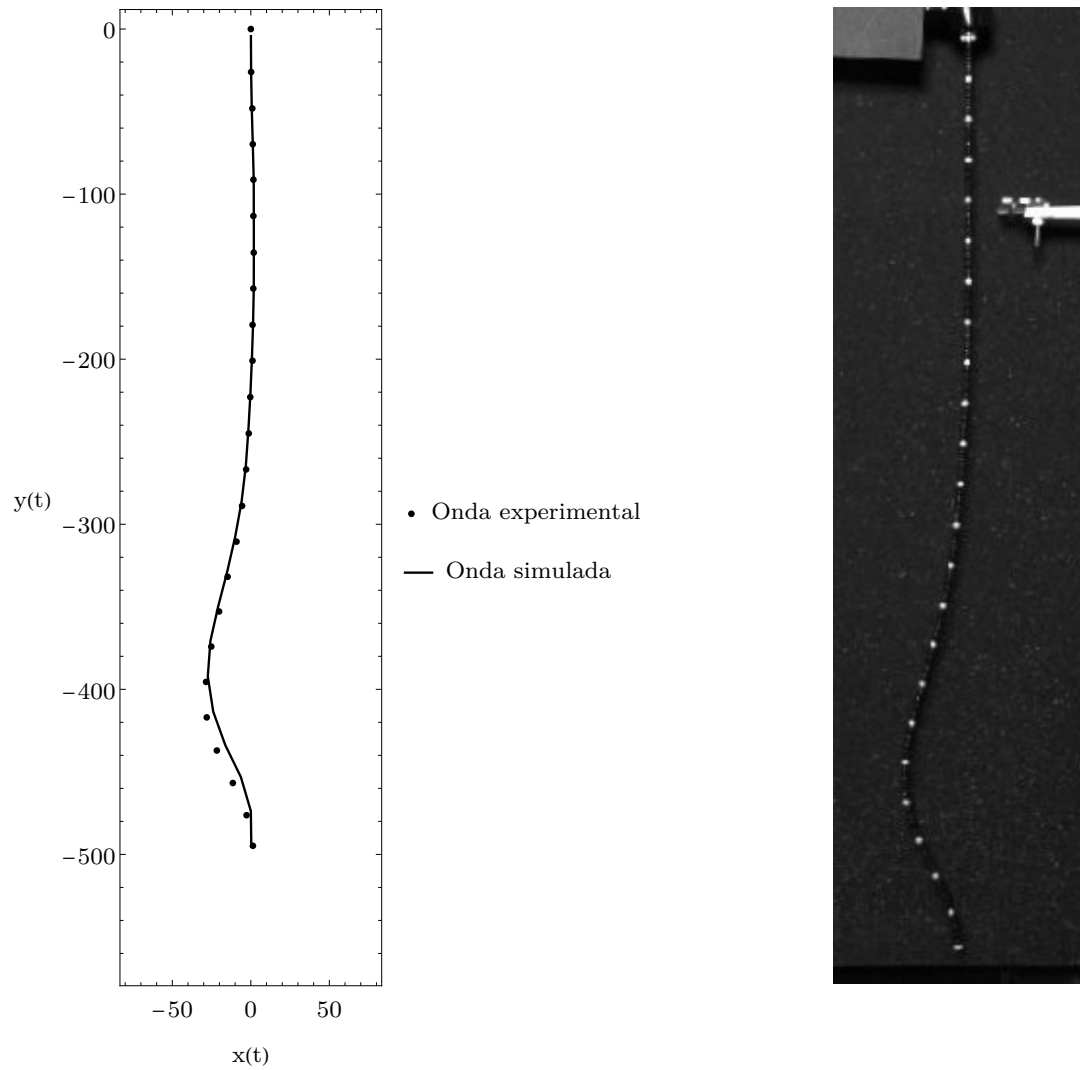
**Figura 6.2:** Caso 1: comparación de la onda experimental con la onda simulada para  $t = 0.1$  s.

En la figura 6.2 comienza la propagación del pulso y la vibración libre de la cadena en el plano.



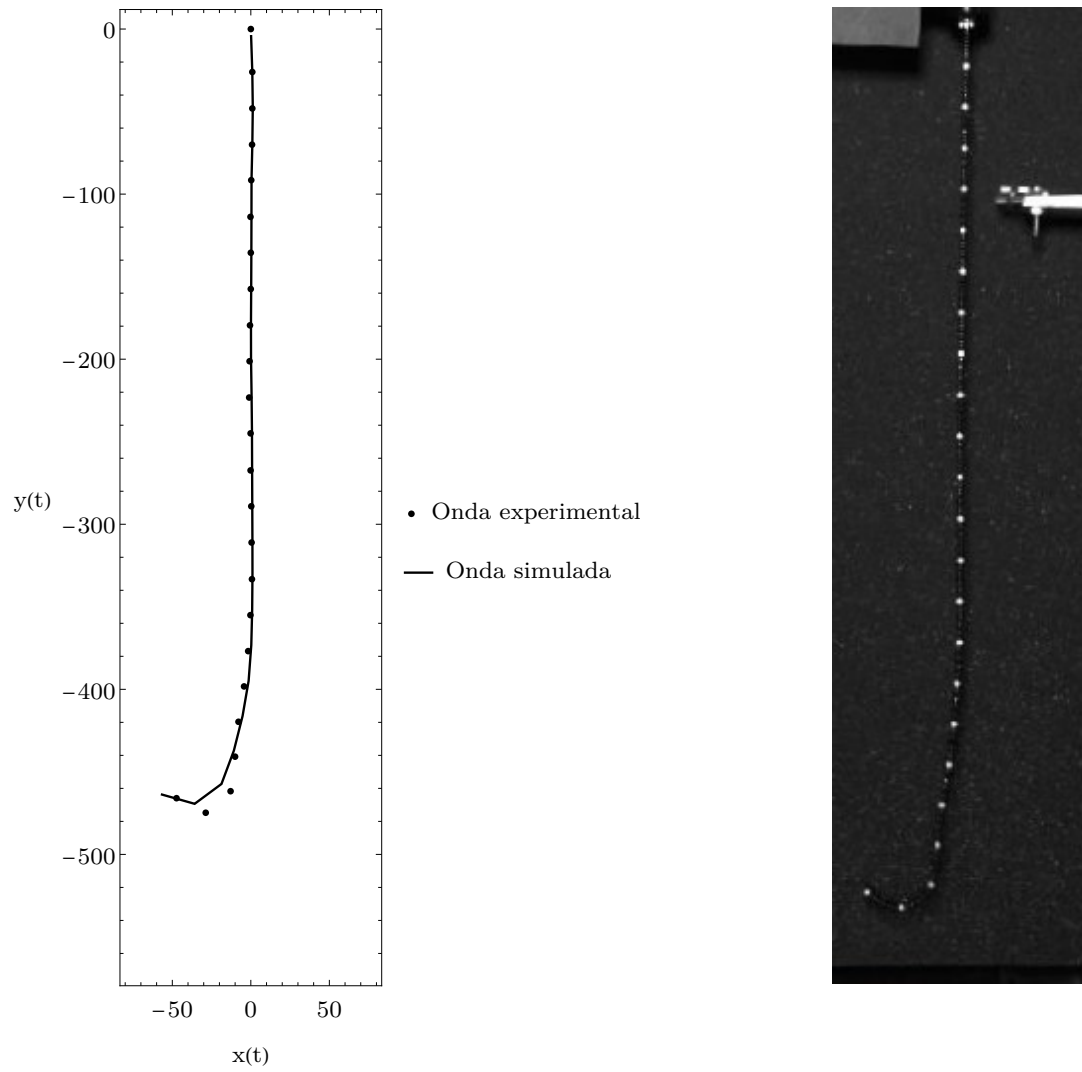
**Figura 6.3:** Caso 1: comparación de la onda experimental con la onda simulada para  $t = 0.2$  s.

En la figura 6.3 se muestra que las cadenas son acordes. También, a pesar de que el pulso ya se encuentra alrededor de la posición  $y = -270$  mm, los 5 nodos inferiores permanecen inalterados en dirección horizontal.



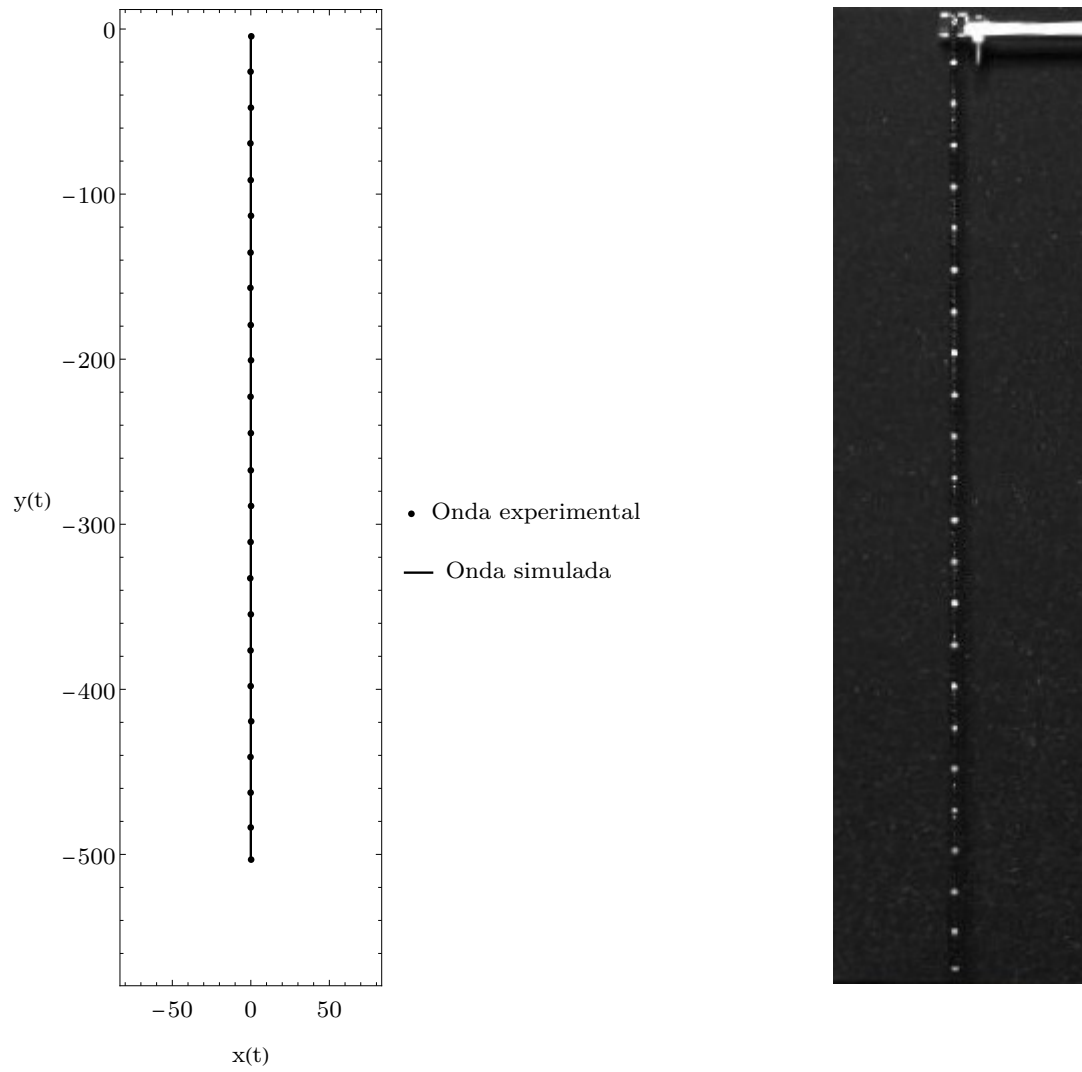
**Figura 6.4:** Caso 1: comparación de la onda experimental con la onda simulada para  $t = 0.29$  s.

La figura 6.4 muestra que existe desacuerdo en tres nodos inferiores. La amplitud de la onda es más grande respecto a la mostrada en la figura 6.3.



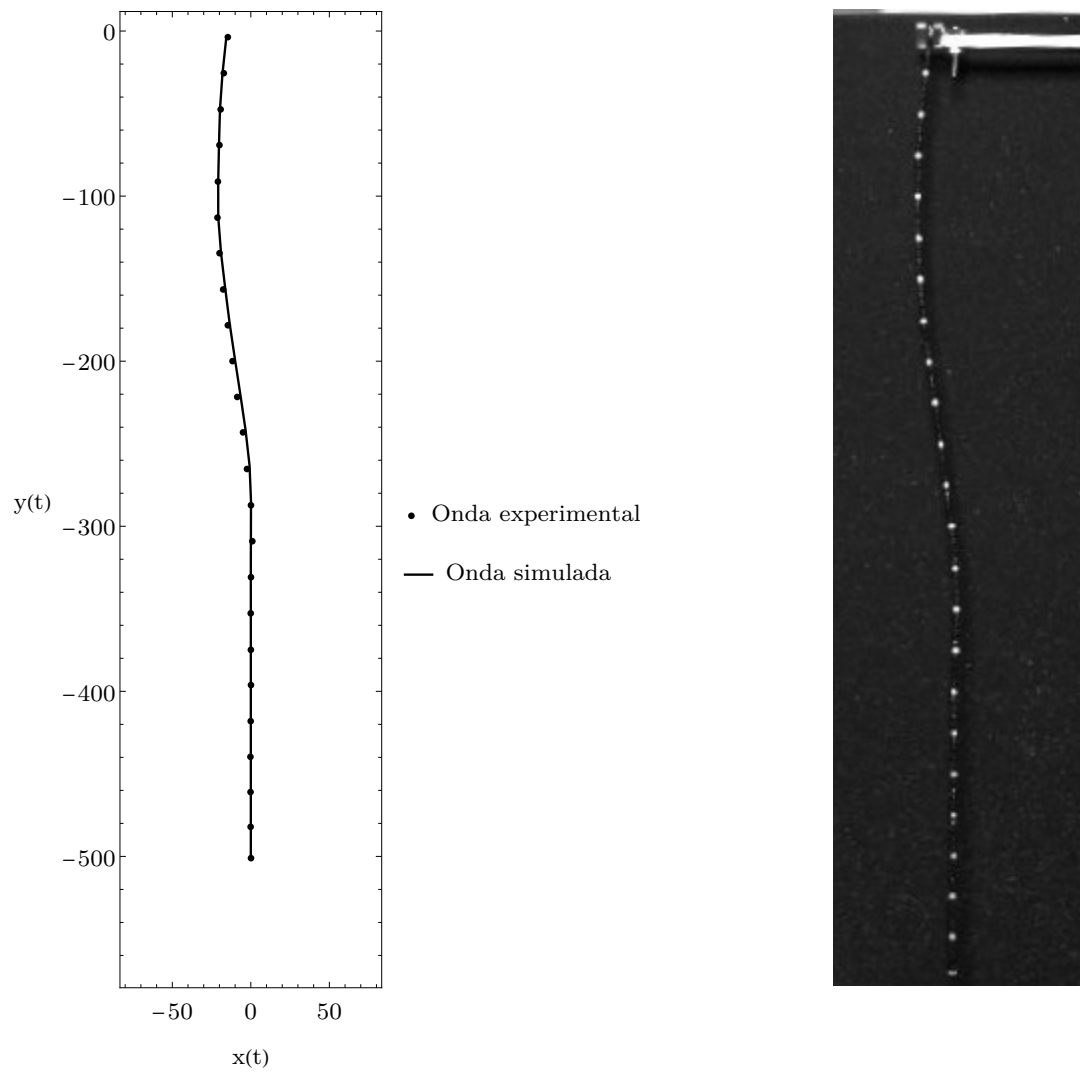
**Figura 6.5:** Caso 1: comparación de la onda experimental con la onda simulada para  $t = 0.45$  s.

En la figura 6.5 la onda aparece desplazada hasta el extremo libre. Hay discrepancia en las posiciones de los cuatro nodos inferiores, así como en la amplitud entre el pulso experimental y el simulado.



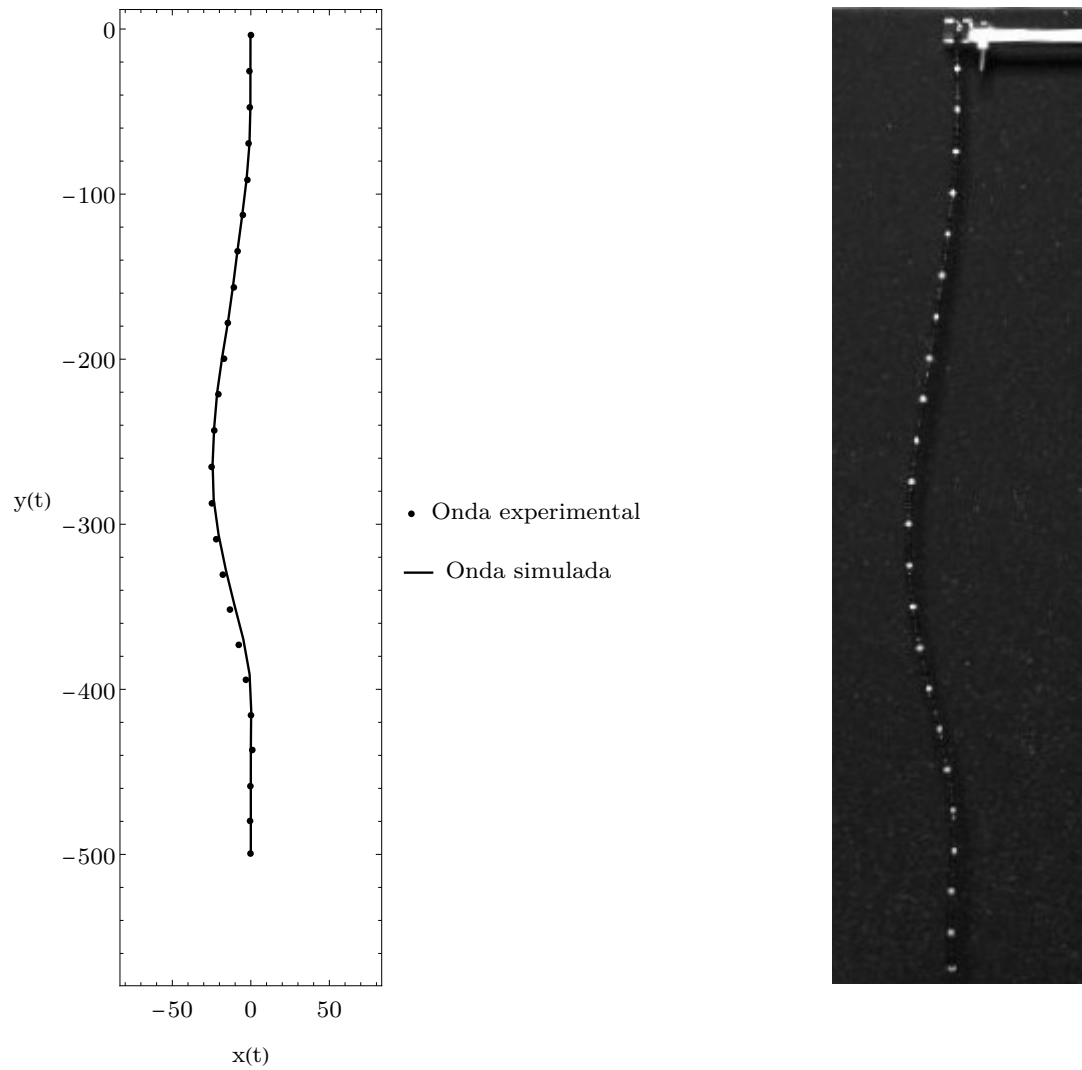
**Figura 6.6:** Caso 2: comparación de la onda experimental con la onda simulada para  $t = 0$  s.

De la misma manera que en el caso anterior, el caso 2 muestra que para el tiempo inicial la cadena simulada es idéntica a la experimental. En dicho instante ambas se encuentran en reposo (ver figura 6.6).



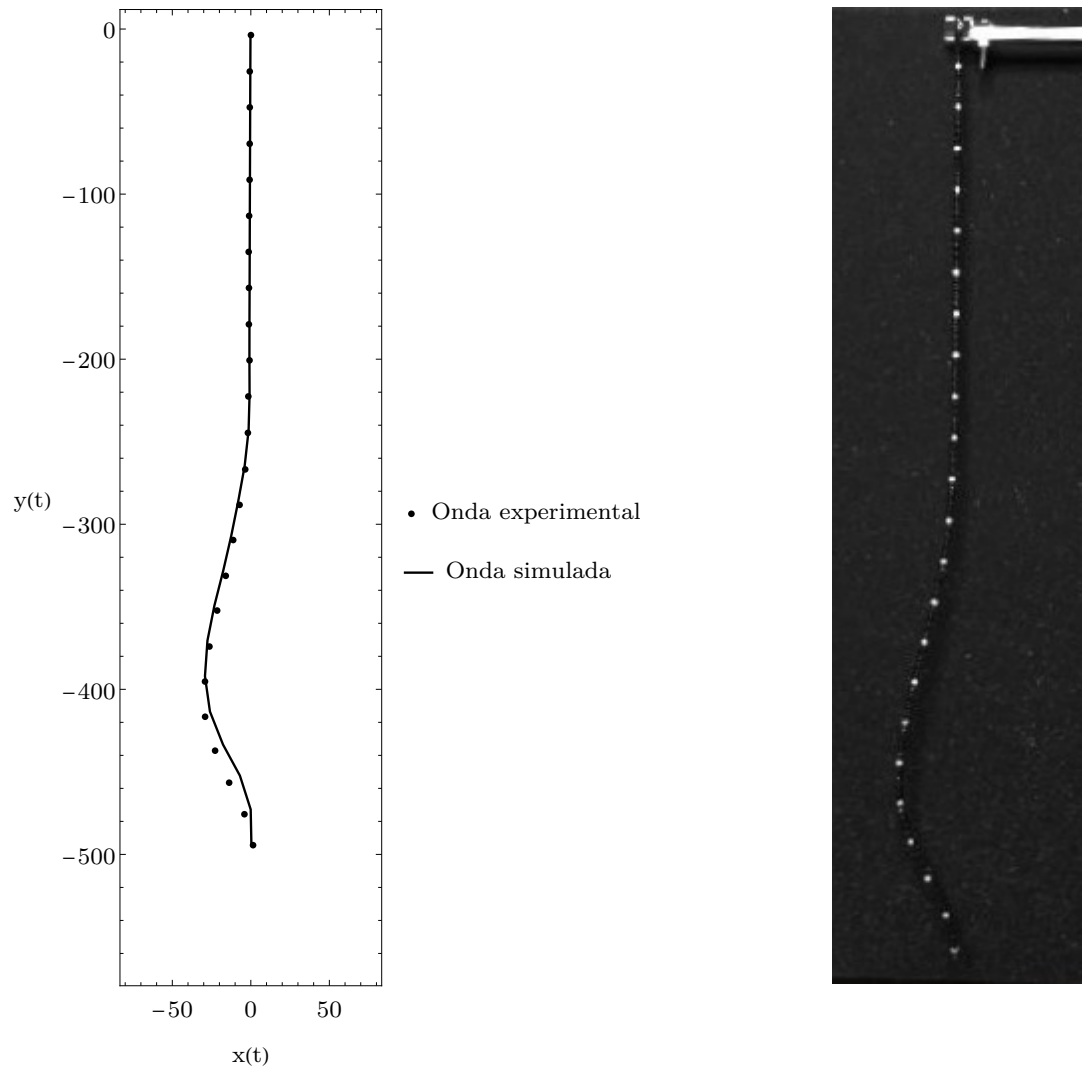
**Figura 6.7:** Caso 2: comparación de la onda experimental con la onda simulada para  $t = 0.14$  s.

En la figura 6.7 el mecanismo continúa aplicando la excitación al nodo superior; sin embargo, se observa que el pulso ya se está propagando.



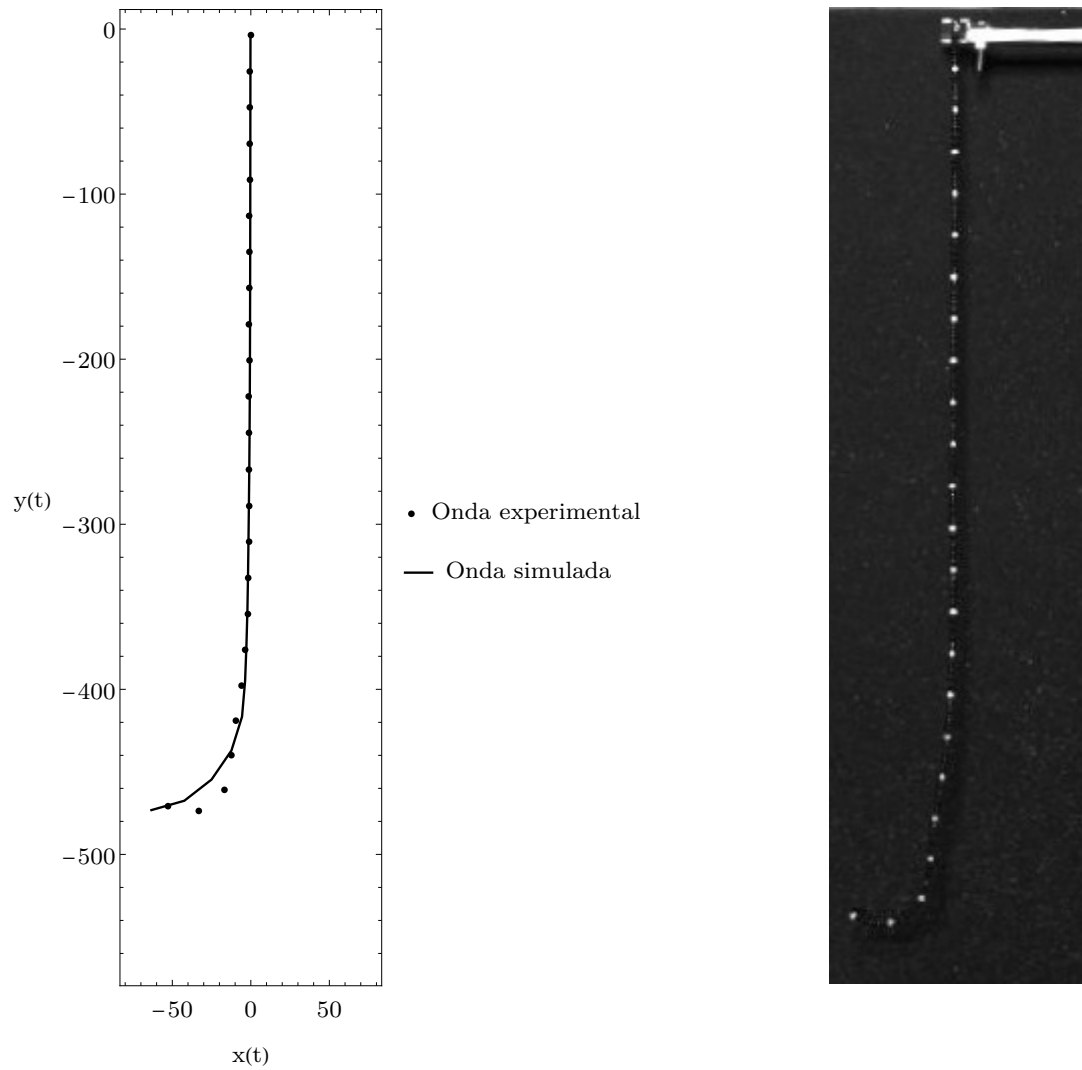
**Figura 6.8:** Caso 2: comparación de la onda experimental con la onda simulada para  $t = 0.24$  s.

En la figura 6.8 el pulso se encuentra alrededor de la posición 260 mm y su amplitud es notoriamente más grande en comparación con los instantes mostrados anteriormente.



**Figura 6.9:** Caso 2: comparación de la onda experimental con la onda simulada para  $t = 0.34$  s.

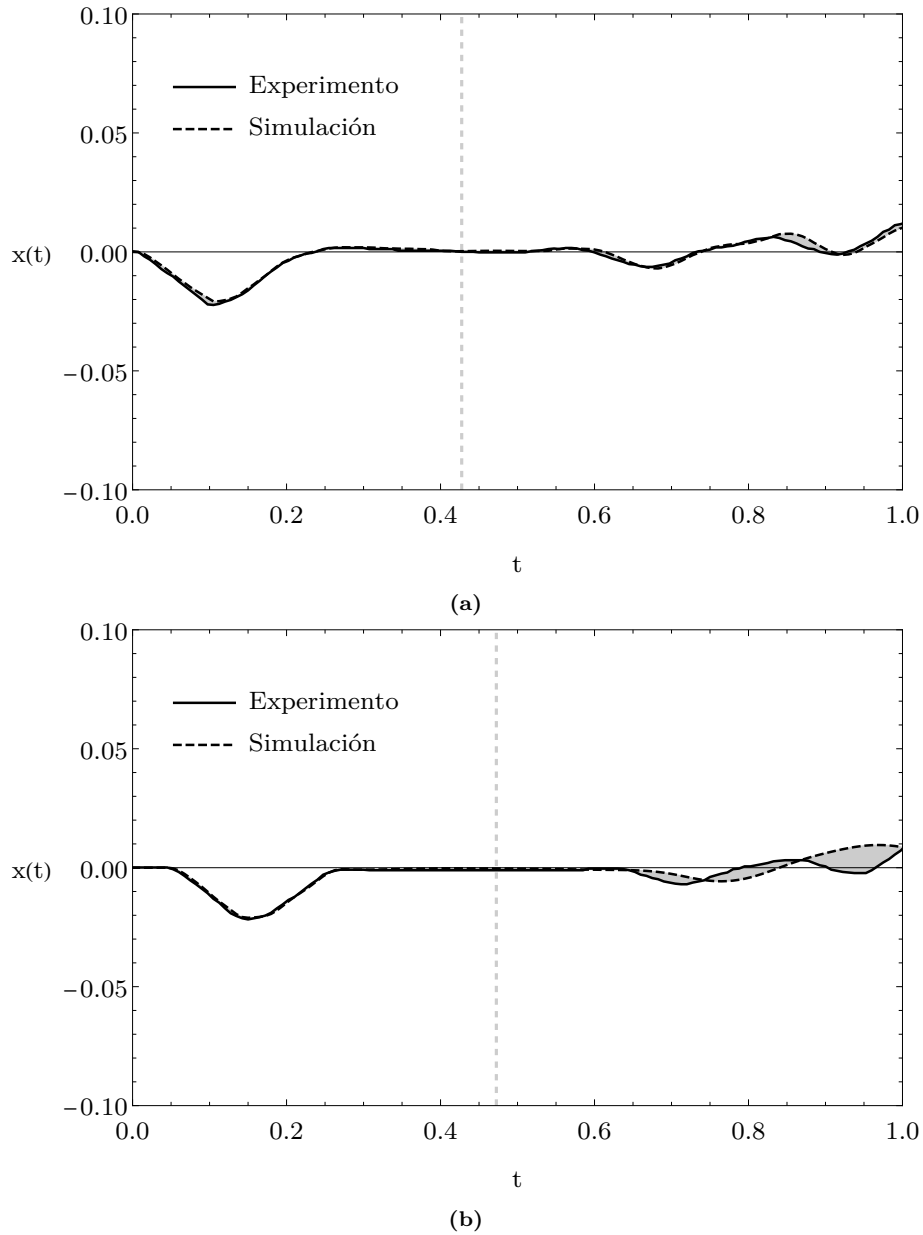
En la figura 6.9 el pulso está cerca llegar al extremo libre. Se observa discrepancia en las posiciones experimentales y simuladas de cuatro nodos inferiores y la amplitud es más grande que el instante mostrado en la figura 6.8.



**Figura 6.10:** Caso 2: comparación de la onda experimental con la onda simulada para  $t = 0.49$  s.

Cuando el instante de tiempo en que el pulso llegó al extremo suelto ya ocurrió, sigue habiendo buen acuerdo entre la cadena experimental y la simulada, exceptuando en los últimos tres nodos inferiores que difieren en sus posiciones en el plano (ver figura 6.10).

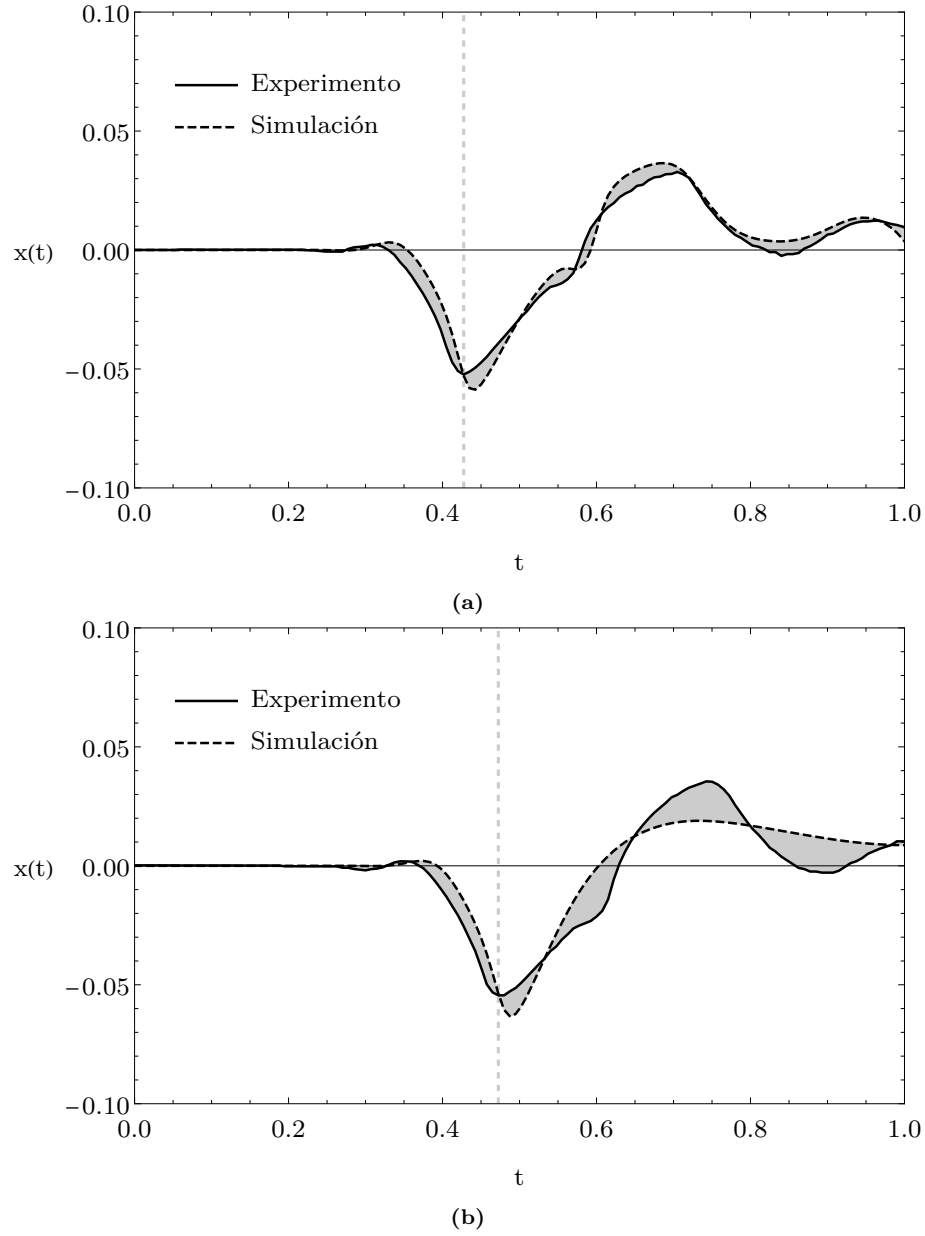
## 6.2. Desplazamientos nodales en el plano



**Figura 6.11:** Desplazamiento nodal  $x(t)$  para  $y = -0.113$  m: a) caso 1, b) caso 2.

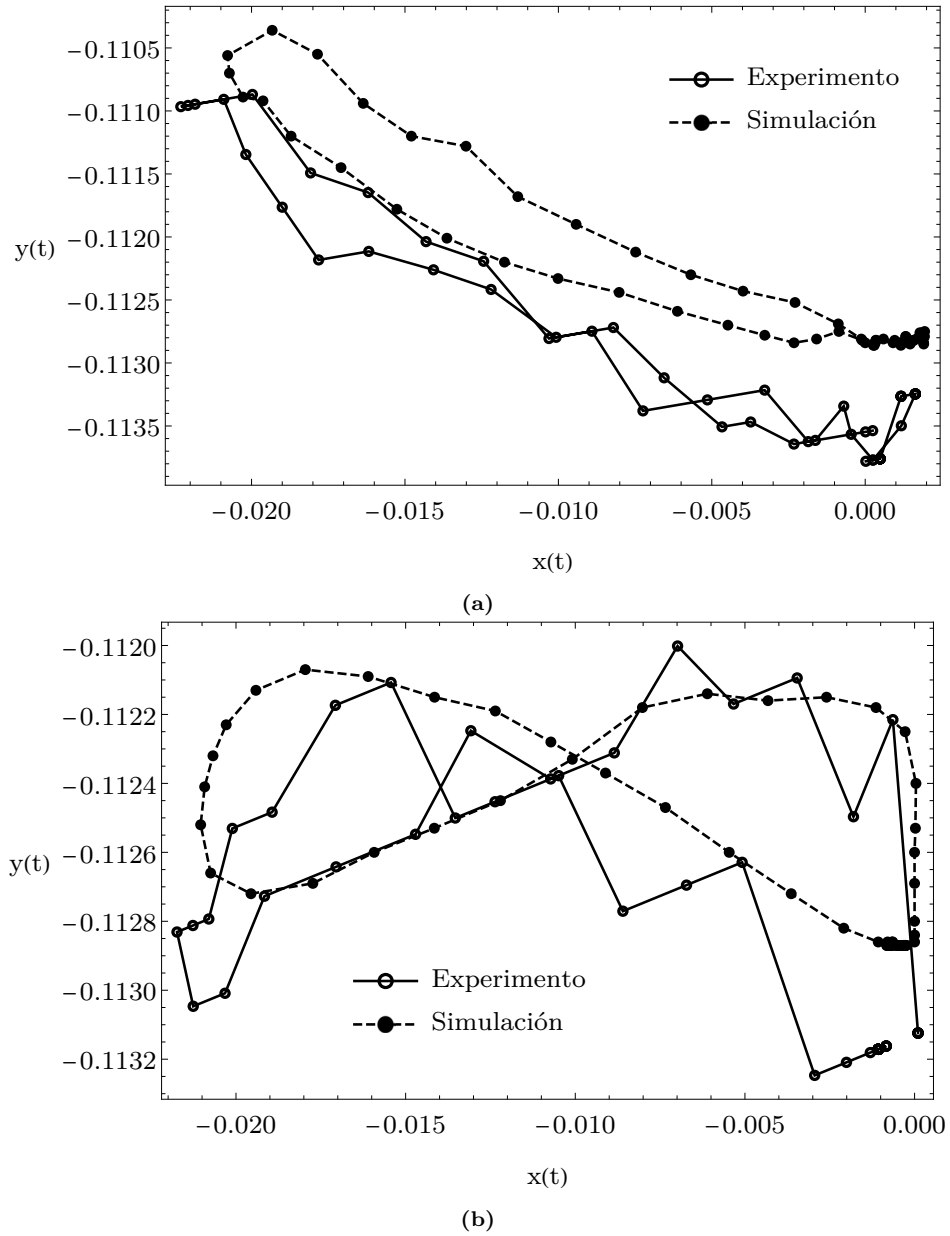
En la figura 6.11 el desplazamiento nodal en la coordenada horizontal  $x$  muestra que existe concordancia entre el experimento y la simulación. Se trata de una posición cercana al punto de perturbación:  $y = -0.113$  m. Para el caso 2 hay discrepancia a partir de  $t = 0.6$ ; sin embargo, en la primera oscilación tiene mejor acuerdo que el caso 1. En el caso 1 la curva experimental y simulada tienen un mínimo en  $t = 0.11$  s. En el caso 2, los datos experimentales y numéricos presentan un

mínimo en  $t = 0.15$  s. Los mínimos en estas gráficas determinan la amplitud del pulso en un instante dado.



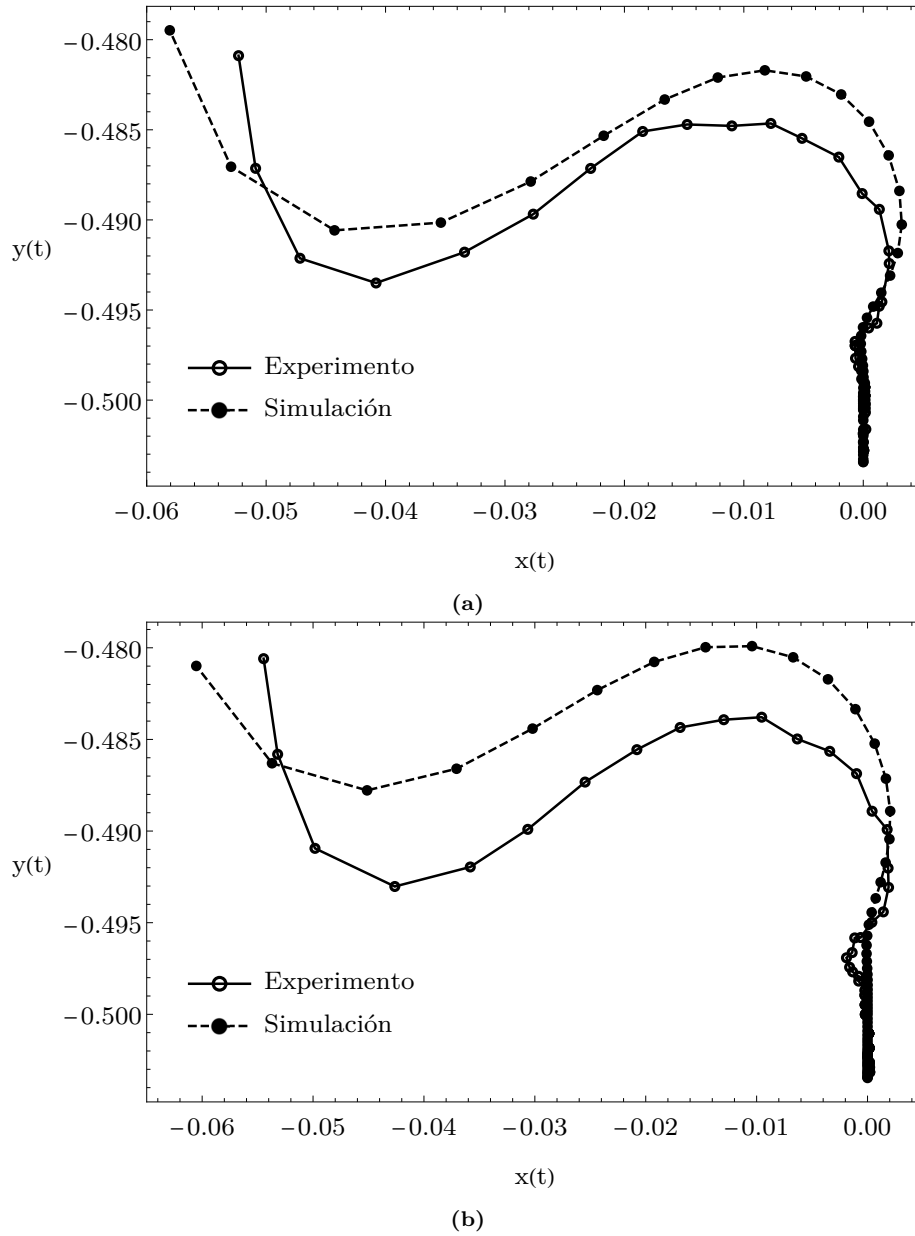
**Figura 6.12:** Desplazamiento nodal  $x(t)$  para  $y = -0.503$  s: a) caso 1, b) caso 2.

En la figura 6.12 se muestra el desplazamiento horizontal del nodo ubicado en el extremo libre. Los mínimos están desfasados en ambos casos. El caso 1 presenta un mínimo experimental en  $t = 0.43$  s y numérico en  $t = 0.44$  s. El caso 2 presenta un mínimo experimental y simulado en  $t = 0.47$  s y en  $t = 0.49$  s respectivamente.



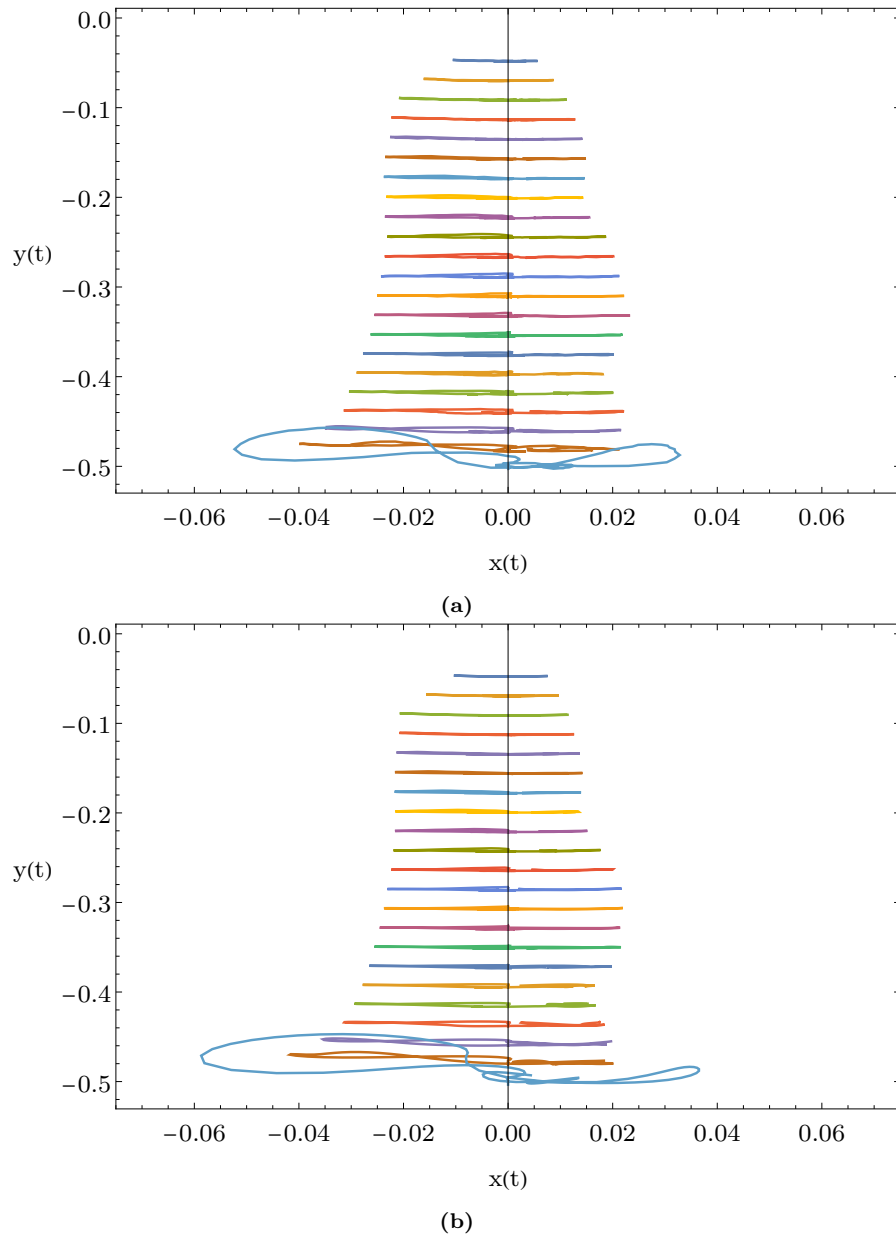
**Figura 6.13:** Desplazamiento nodal  $y(x)$  para  $y = -0.113$  m: a) caso 1, b) caso 2.

En la figura 6.13 se presenta la trayectoria en el plano de vibración de un nodo cercano al punto fijo (posición  $y = -0.113$  m). El caso 1 describe un movimiento elíptico mientras que el caso 2 muestra una trayectoria del tipo rosa polar de dos pétalos. Hay congruencia entre los resultados experimentales y numéricos pues las curvas tienen comportamientos y amplitudes similares; no obstante, las curvas de las simulaciones están desplazadas en el eje vertical  $y$ .



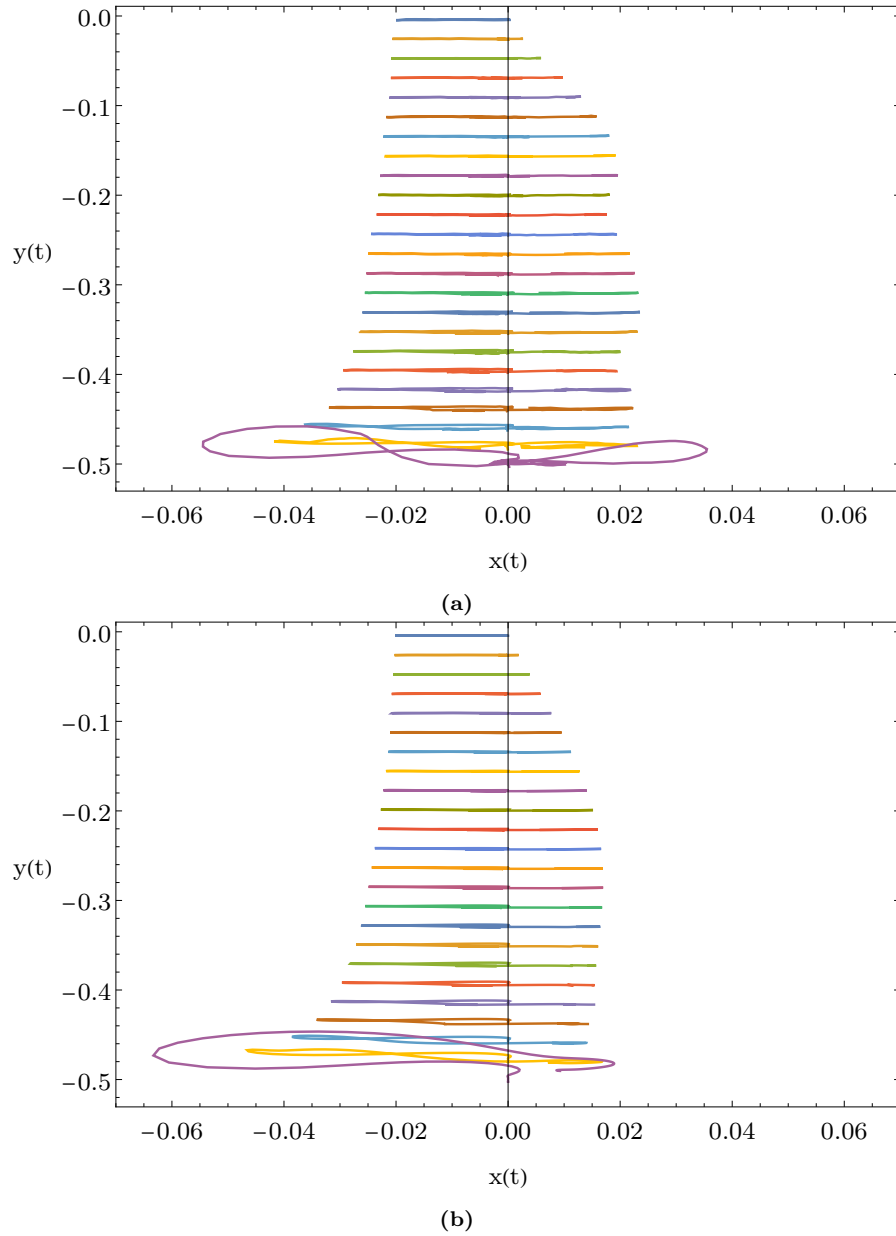
**Figura 6.14:** Desplazamiento nodal  $y(x)$  para  $y = -0.503$  m: a) caso 1, b) caso 2.

En la figura 6.14 se presenta la trayectoria en el plano de vibración del nodo correspondiente extremo libre de la cadena. El experimento y la simulación son acordes para ambos casos; aunque las curvas descritas por los datos numéricos están desplazadas en el eje  $y$ . La amplitud determinada por el valor mínimo en  $x$  indica la última posición del pulso antes de reflejarse hacia arriba.



**Figura 6.15:** Desplazamientos nodales  $y(x)$  para el caso1: a) experimento, b) simulación.

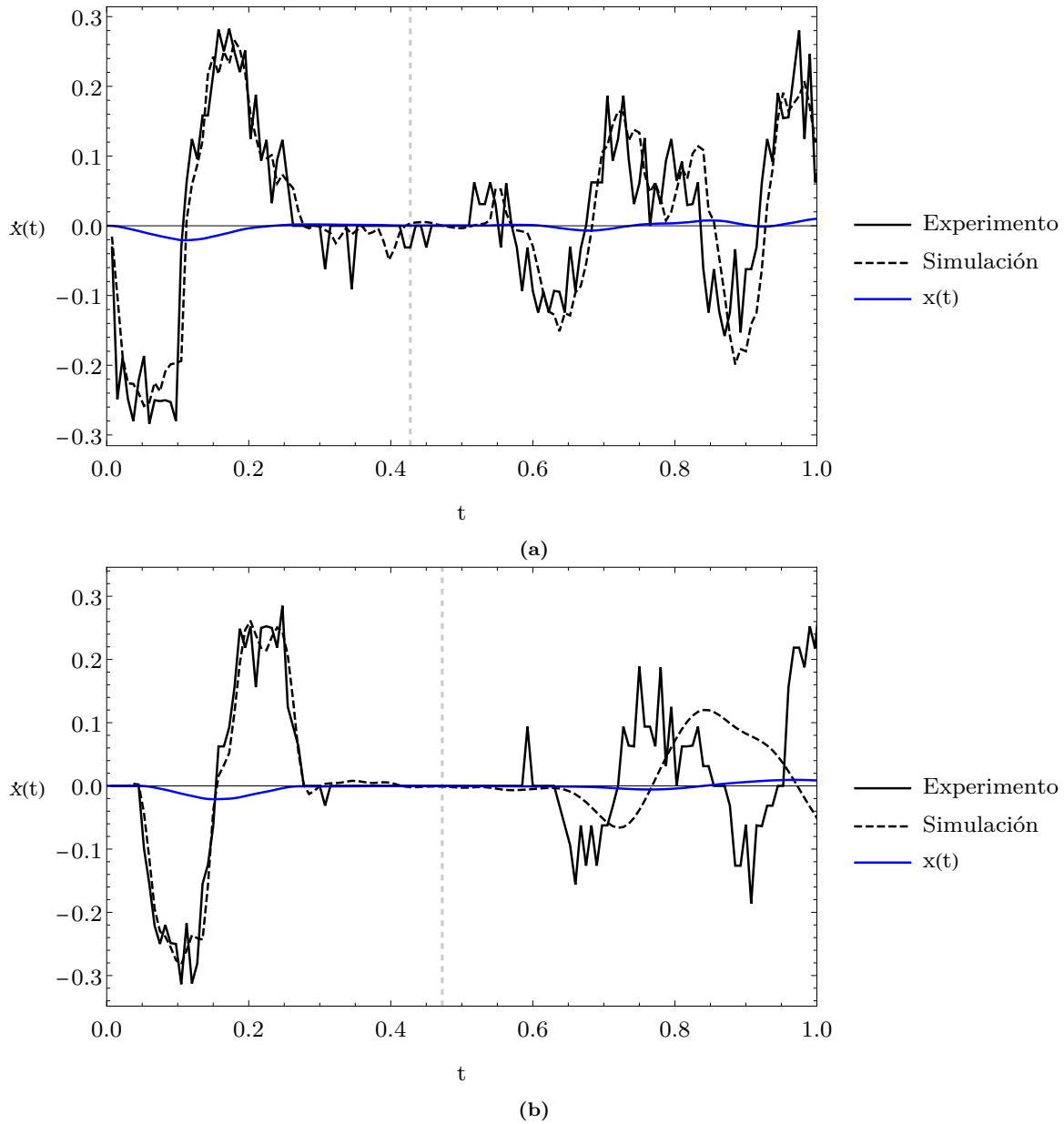
En la figura 6.15 se muestran las trayectorias en el plano de vibración de todos los nodos que se escogieron pintar de blanco correspondientes al caso 1. Es claro que la amplitud del pulso tiende a incrementar a medida que se acerca al extremo libre. Después de la primera oscilación se aprecian distintos modos de vibración de la cadena.



**Figura 6.16:** Desplazamientos nodales  $y(x)$  para el caso 2: a) experimento, b) simulación.

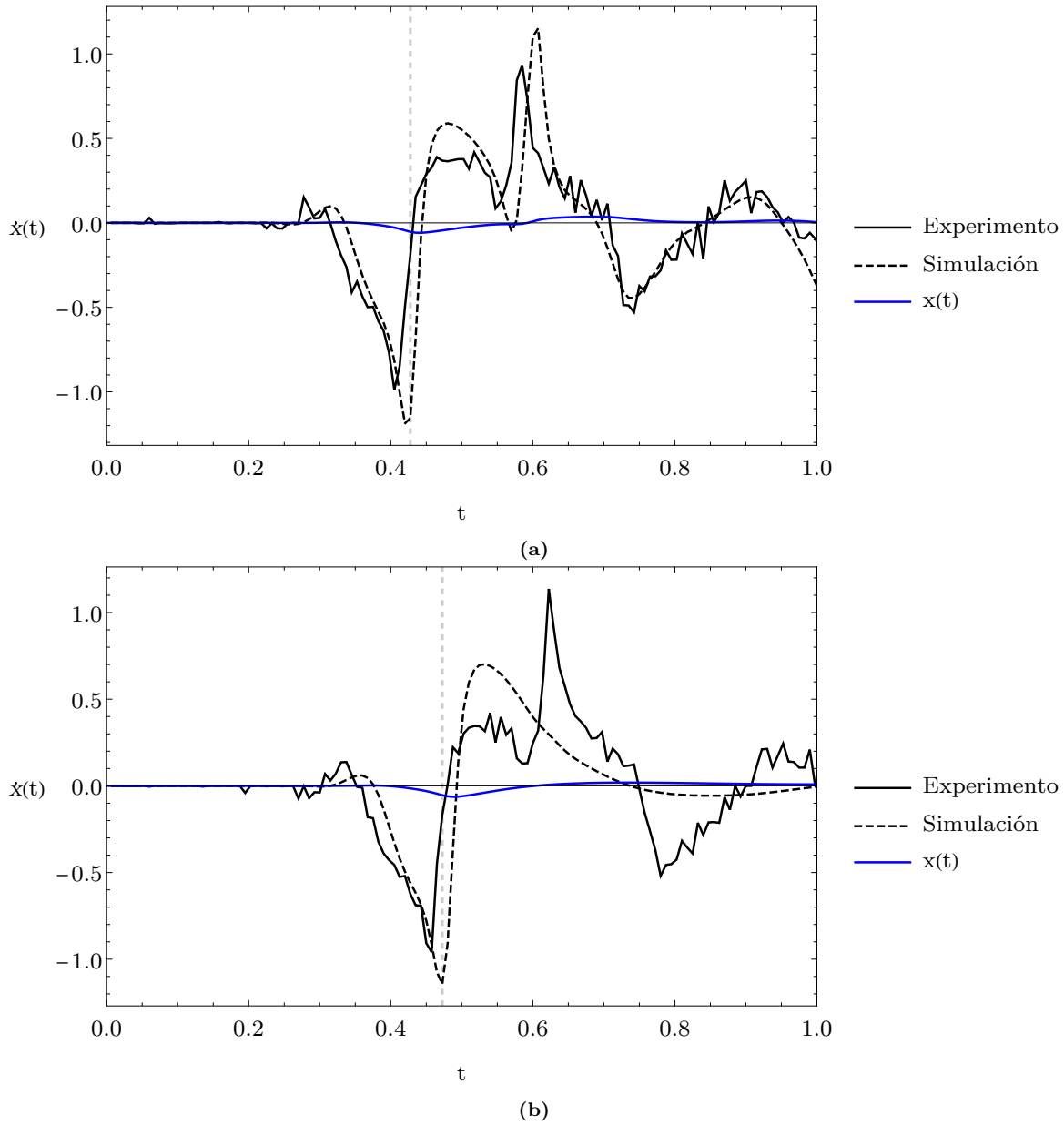
En la figura 6.16 se presentan las trayectorias en el plano de los nodos pintados blancos para el caso 2. Se observa el comportamiento creciente de la amplitud del pulso a medida que descende en el eje vertical  $y$ . La trayectoria experimental y la simulada del último nodo discrepan en forma, aunque los valores numéricos de la amplitud son congruentes. Después de la primera oscilación la vibración de la cadena tiene distintos modos de vibración y no hay acuerdo entre el experimento y la simulación.

### 6.3. Velocidades y aceleraciones nodales



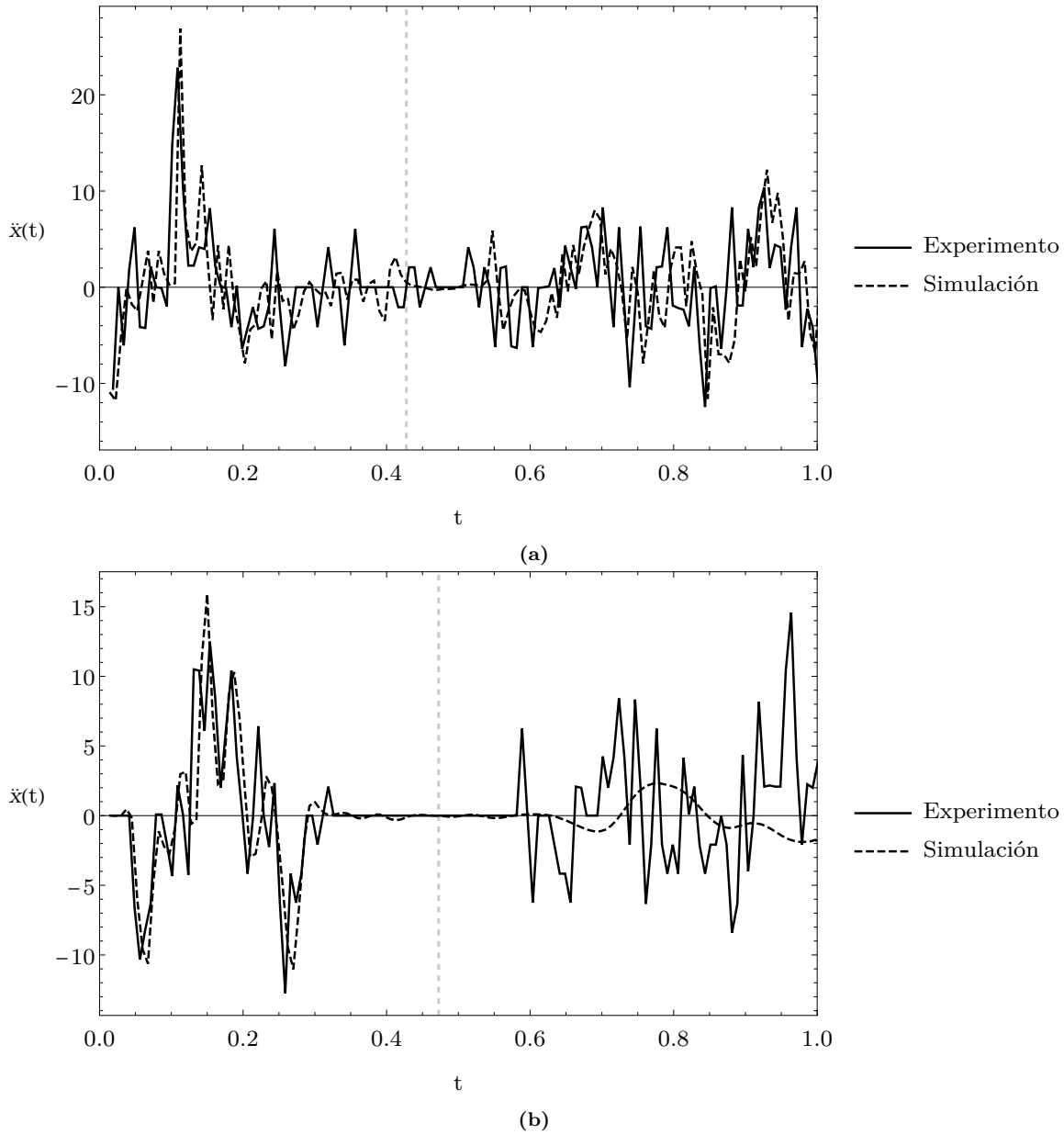
**Figura 6.17:** Velocidad nodal  $\dot{x}(t)$  para  $y = -0.113$  m: a) caso 1, b) caso 2.

En la figura 6.17 se presenta la velocidad de un nodo cuya posición es cercana al extremo fijo de la cadena ( $y = -0.113$  m) y en azul se expone el desplazamiento del mismo nodo. Las gráficas de los experimentos tienen buen acuerdo con las simuladas; no obstante, las últimas describen curvas más suaves. El desplazamiento en  $x$  ilustrado en azul muestra el desfase adecuado de máximos, mínimos y raíces con respecto a las curvas de velocidad.



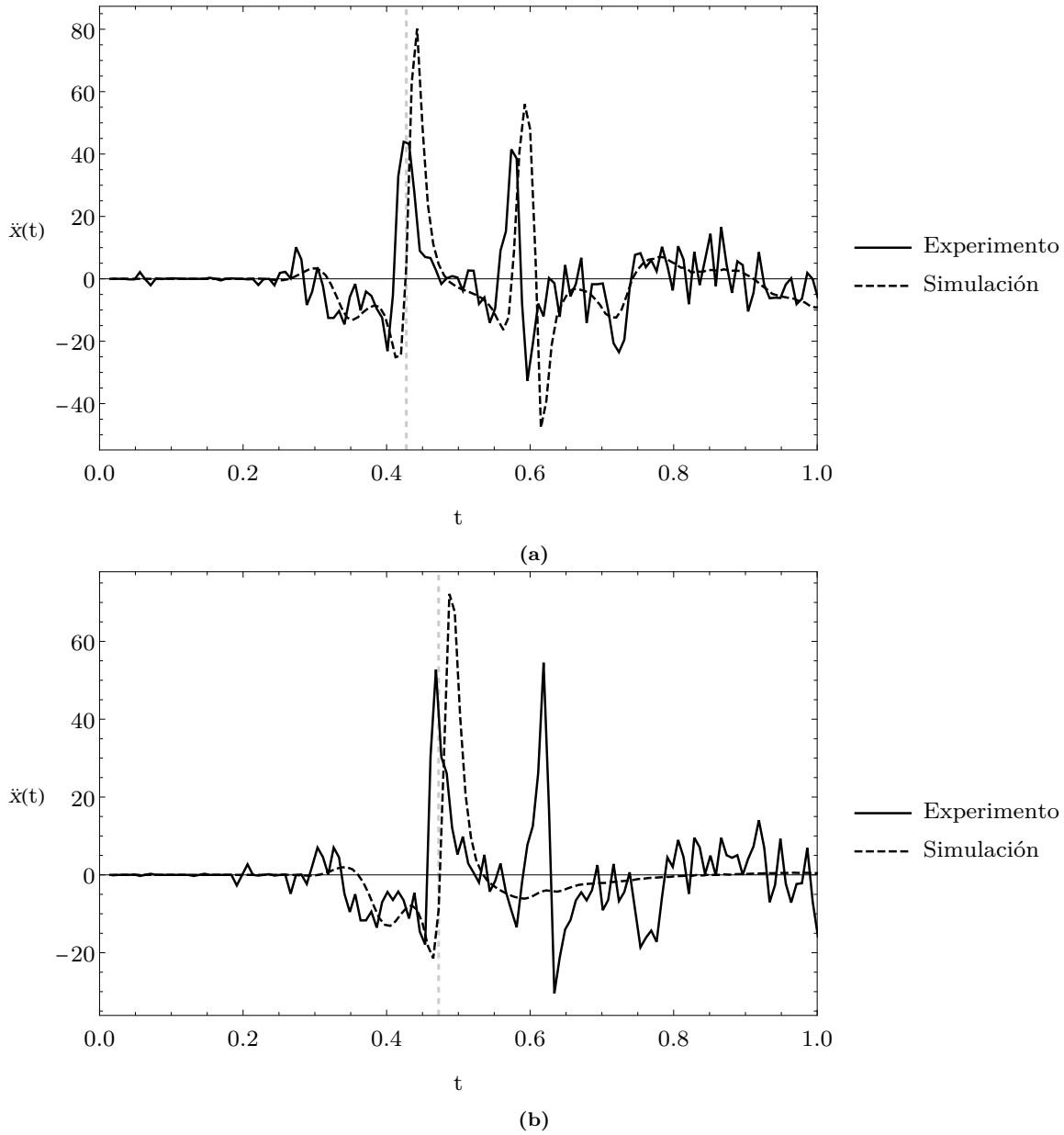
**Figura 6.18:** Velocidad nodal  $\dot{x}(t)$  para  $y = -0.503$  m: a) caso 1, b) caso 2.

En la figura 6.18 se muestra la velocidad nodal en el extremo libre de la cadena, así como el desplazamiento del mismo nodo en color azul. Hay congruencia entre los resultados experimentales y numéricos hasta la primera oscilación. De la misma forma que en la figura anterior, las gráficas simuladas describen curvas más suaves que las experimentales. Hay un desfase correcto entre las gráficas de desplazamiento y velocidad para ambos casos.



**Figura 6.19:** Aceleración nodal  $\ddot{x}(t)$  para  $y = -0.113$  m: a) caso 1, b) caso 2.

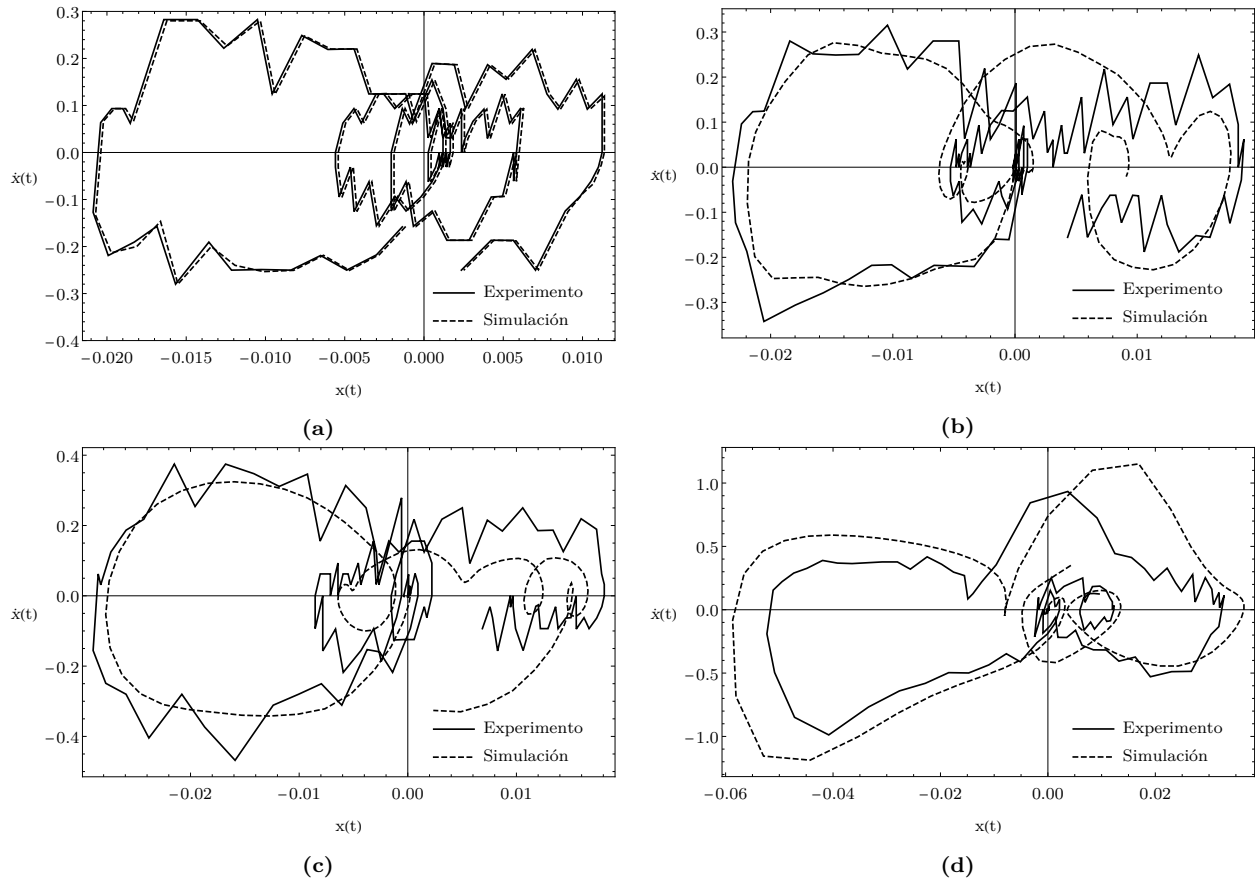
En la figura 6.19 se presenta la aceleración nodal para un punto cercano al extremo fijo de la cadena (posición  $y = -0.113$  m). Los resultados experimentales y numéricos muestran un buen acuerdo hasta la primera oscilación. A partir de dicho punto el comportamiento es similar en las tendencias para ambos casos, aunque la gráfica experimental tiene muchos picos.



**Figura 6.20:** Aceleración nodal  $\ddot{x}(t)$  para  $y = -0.503$  m: a) caso 1, b) caso 2.

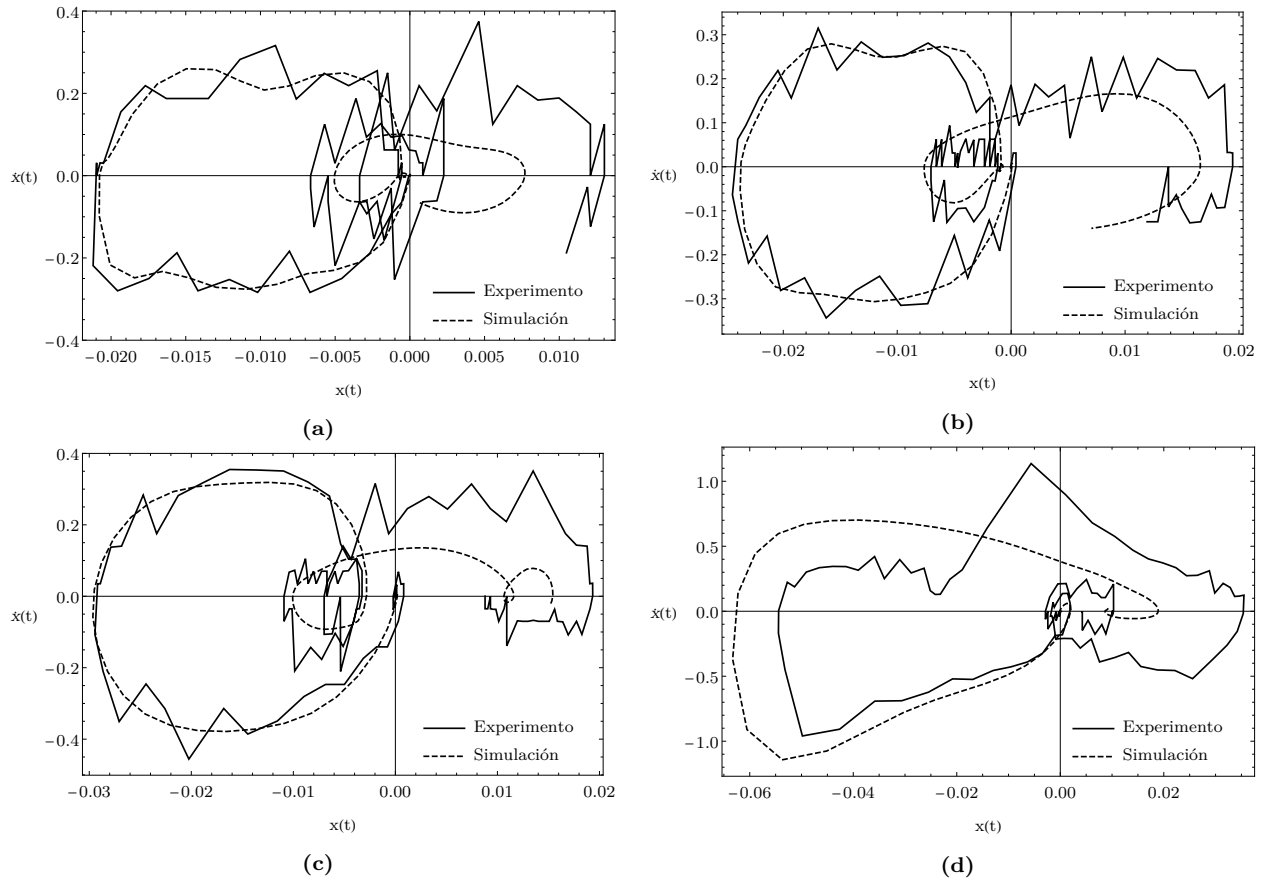
En la figura 6.20 se ilustra la aceleración nodal del extremo libre de la cadena. Las curvas experimentales y simuladas muestran similitud en la primera oscilación, pero los resultados experimentales describen curvas con muchos picos para ambos casos. Por otro lado, los resultados numéricos describen curvas más suaves. Después de que el pulso llega extremo libre de la cadena, se produce una discrepancia. Se observan dos máximos prominentes en ambos casos justo después de la primera oscilación.

### 6.4. Trayectorias en el plano fase



**Figura 6.21:** Trayectorias en el plano fase para el caso 1: nodos correspondientes a  $y = -0.091$  m,  $y = -0.243$  m,  $y = -0.395$  m y  $y = -0.503$  m.

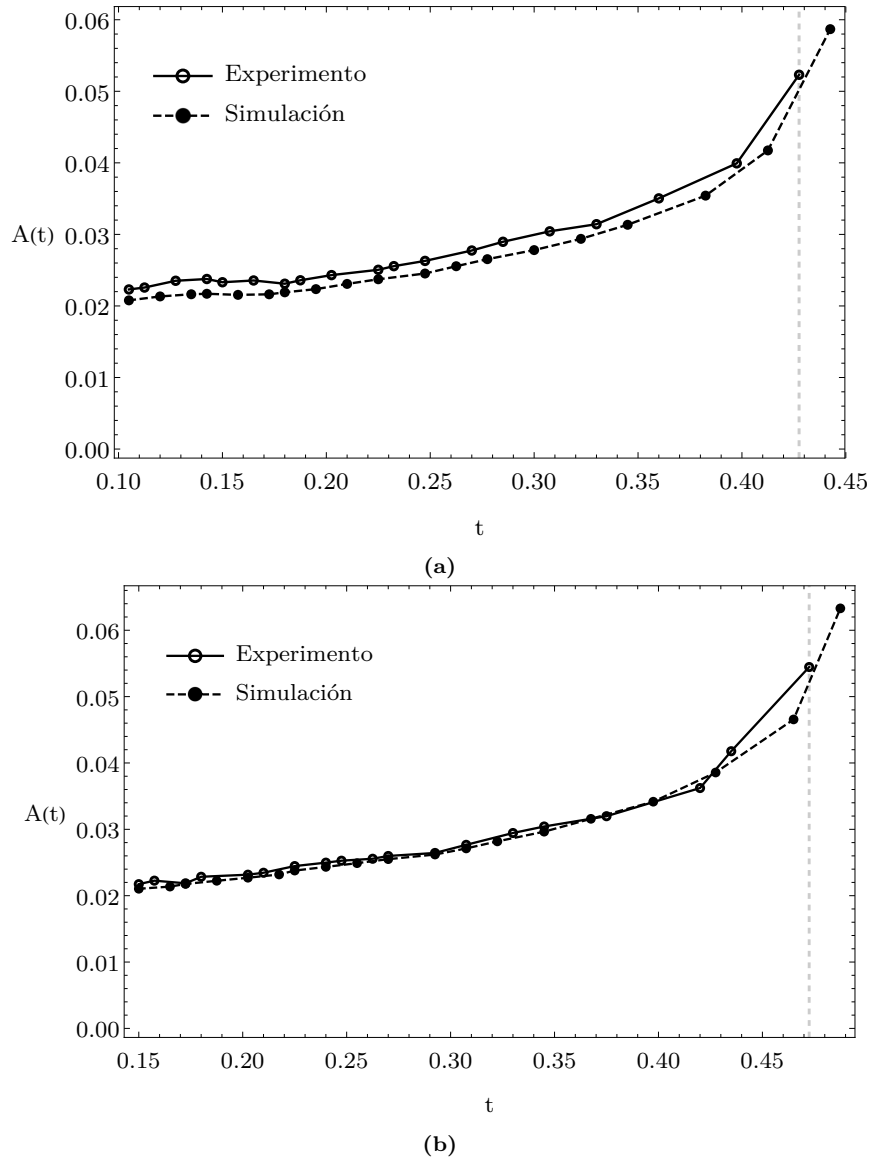
En la figura 6.21 se muestran las trayectorias en el plano fase de cuatro nodos de la cadena para el caso 1. Para el nodo correspondiente a  $y = -0.091$  m se tiene un punto crítico tipo espiral en  $x = 0$  m. Para el nodo en  $y = -0.243$  m se observan dos puntos críticos tipo espiral en  $x = -0.004$  y  $x = 0.011$  m. Para el nodo correspondiente a  $y = -0.395$  m se aprecia un punto crítico tipo espiral en  $x = -0.004$  m y dos puntos tipo centro en  $x = 0.011$  y  $x = 0.015$  m. Para el nodo en  $y = -0.503$  m se observan 3 puntos críticos tipo espiral en  $x = -0.003$ ,  $x = 0.003$  y  $x = 0$  m. En general los resultados numéricos describen trayectorias más suaves en el plano fase; éstas conectan los puntos críticos de cada nodo. Los resultados experimentales tienden a mostrar un punto crítico tipo centro en  $x = 0$  m.



**Figura 6.22:** Trayectorias en el plano fase para el caso 2: nodos correspondientes a  $y = -0.091$  m,  $y = -0.243$  m,  $y = -0.395$  m y  $y = -0.503$  m.

En la figura 6.22 se muestran las trayectorias en el plano fase del nodo correspondiente a  $y = -0.091$  m para el caso 2. Se observa un punto crítico tipo espiral en  $x = -0.003$  m. Para el nodo en  $y = -0.243$  m se tiene un punto crítico tipo espiral en  $x = -0.004$  m. El nodo en  $y = -0.395$  m muestra dos puntos críticos tipo espiral en  $x = -0.006$  y  $x = 0.011$  m. Para el nodo en  $y = -0.503$  m se tiene un punto crítico tipo espiral en  $x = 0$  m. Hay conexión entre los puntos críticos de cada nodo.

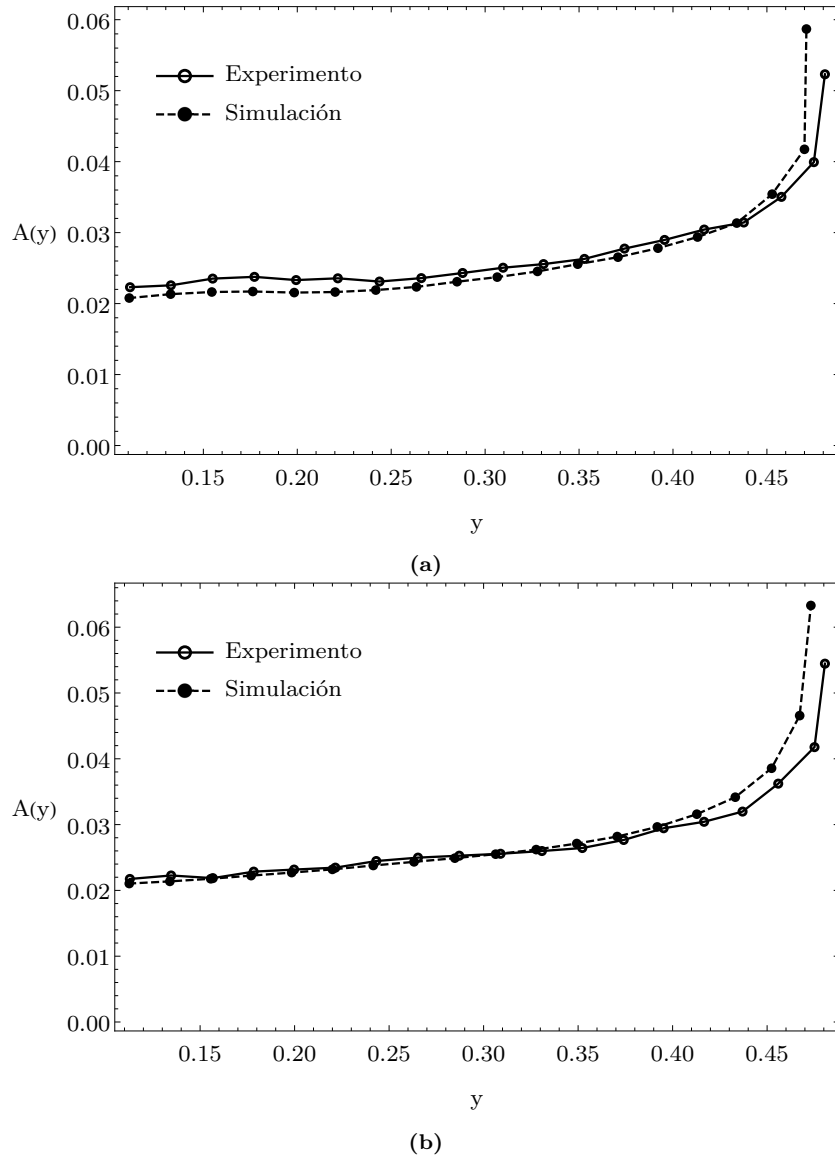
### 6.5. Características de la propagación



**Figura 6.23:** Amplitud  $A(t)$ : a) caso 1, b) caso 2.

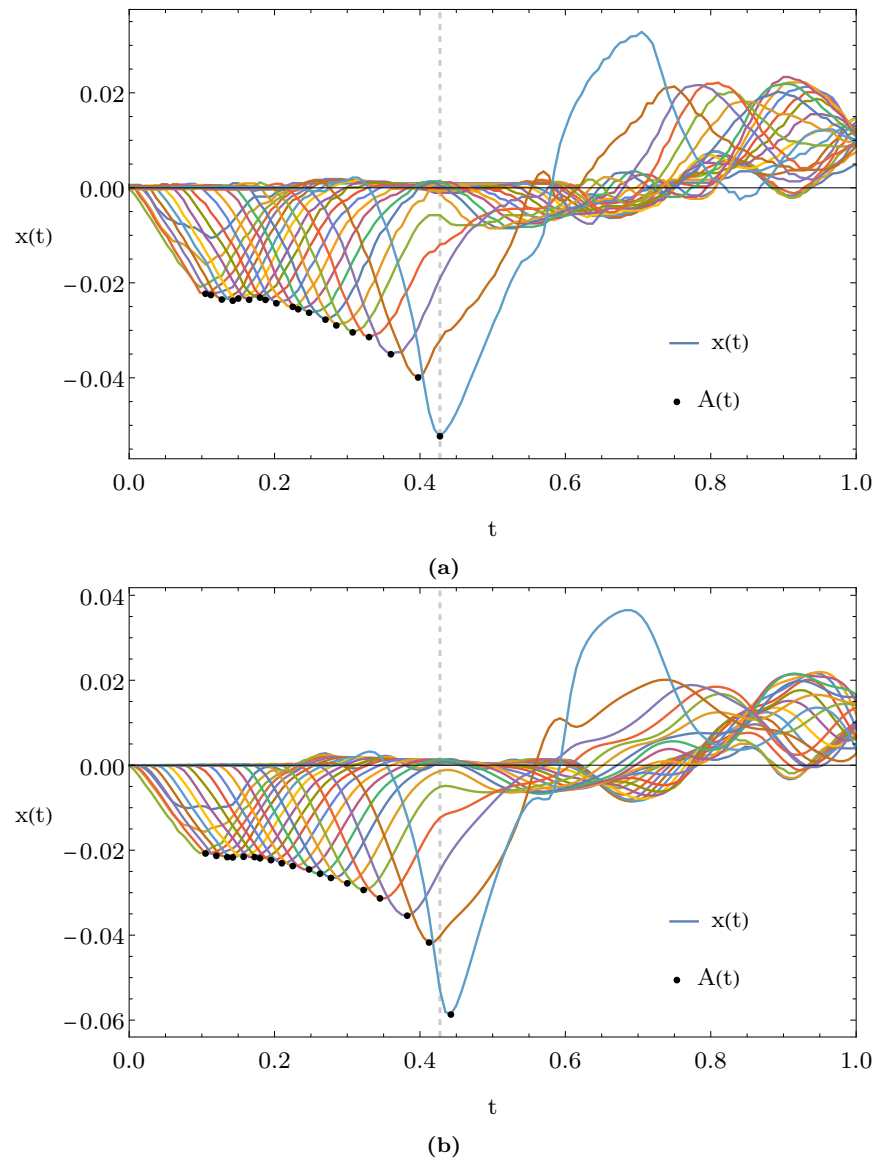
La figura 6.23 muestra para ambos casos el comportamiento creciente de la amplitud a medida que transcurre el tiempo. En el caso 1 la amplitud aumenta con una razón de cambio casi constante. Hay un cambio abrupto de pendiente en  $t = 0.4$  s para el experimento y en  $t = 0.41$  s para la simulación. También las amplitudes máximas están desfasadas en el tiempo y difieren por 0.006 m. De igual forma, en el caso 2 la amplitud aumenta con una razón de cambio casi constante. Hay un cambio brusco en la pendiente en  $t = 0.42$  s para el experimento y en  $t = 0.47$  s para la simulación. Aunque para el caso 2 hay mejor acuerdo entre experimento y simulación, en los últimos instantes

hay discrepancia y las amplitudes difieren por 0.009 m.



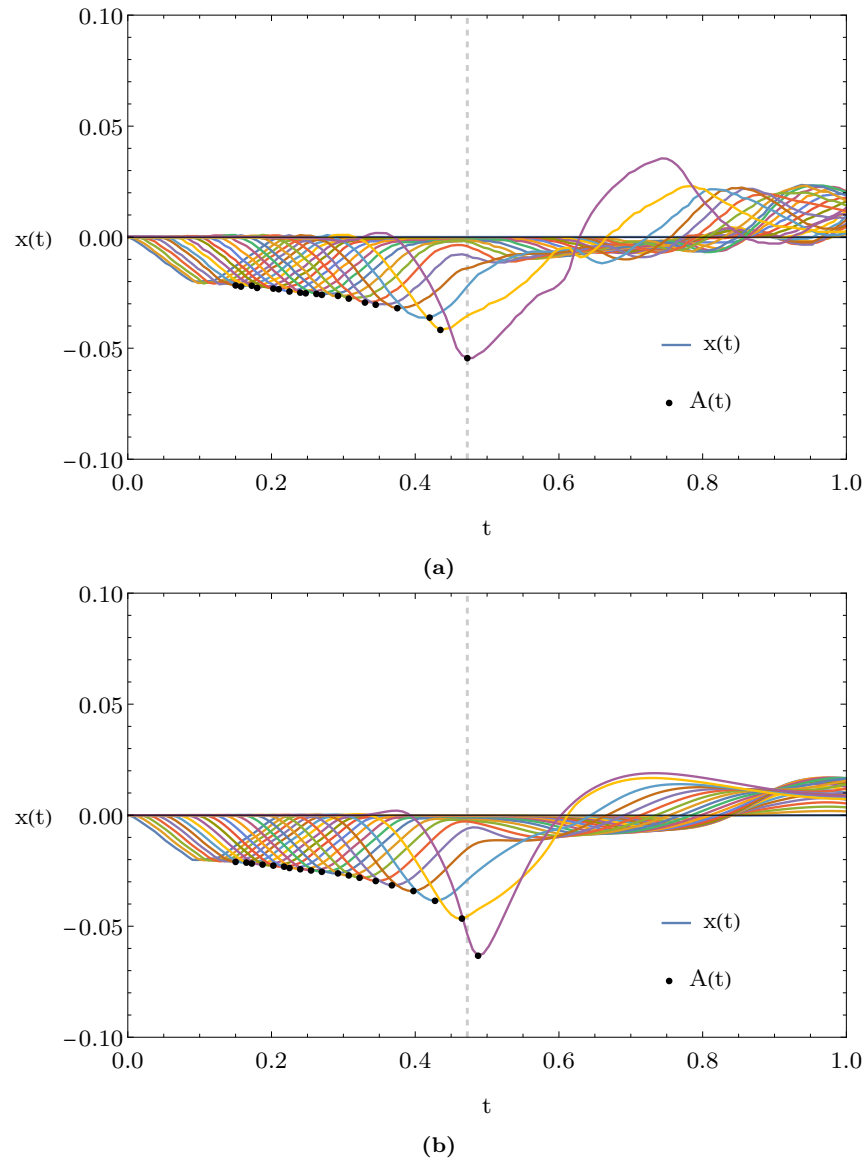
**Figura 6.24:** Amplitud  $A(y)$ : a) caso 1, b) caso 2.

En la figura 6.24 se presenta la amplitud del pulso en función de su posición en  $y$  para ambos casos. El caso 1 describe que la amplitud es proporcional al desplazamiento vertical, hay un cambio abrupto de pendiente en  $y = 0.438$  m para el experimento y en  $y = 0.434$  m para la simulación.. El caso 2 muestra la amplitud creciente a medida que incrementa  $y$  a una razón de cambio casi constante hasta que hay un cambio vertiginoso en  $y = 0.437$  m para el experimento y en  $y = 0.433$  m para la simulación.



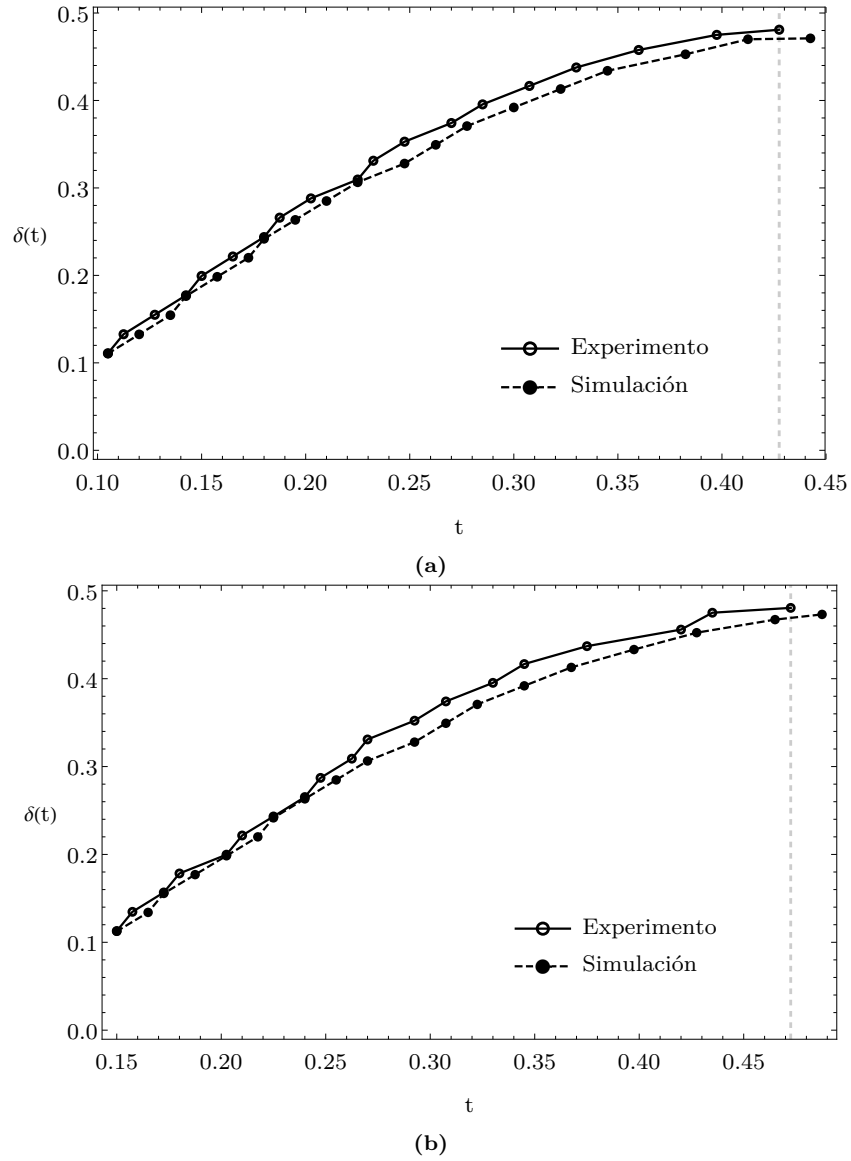
**Figura 6.25:** Desplazamientos nodales  $x(t)$  y amplitud  $A(t)$  para el caso 1: a) experimento, b) simulación.

En la figura 6.25 se ilustran los desplazamientos nodales del caso 1 junto con la amplitud del pulso. Esto funge como una comprobación visual de que los desplazamientos nodales mínimos corresponden a la amplitud del pulso a medida que transcurre el tiempo.



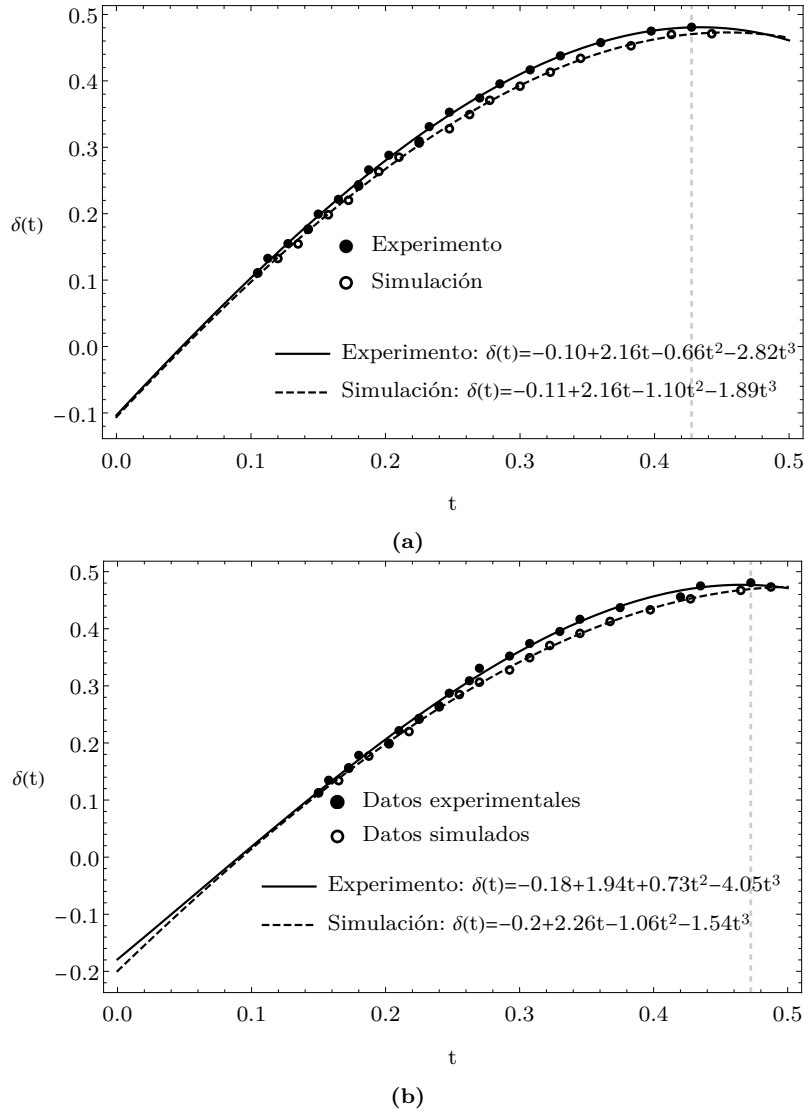
**Figura 6.26:** Desplazamientos nodales  $x(t)$  y amplitud  $A(t)$  para el caso 2: a) experimento, b) simulación.

En la figura 6.26 se presentan los desplazamientos nodales y la amplitud del pulso para el caso 2. Se aprecia que el desplazamiento mínimo de cada nodo corresponde a la amplitud del pulso en ese instante.



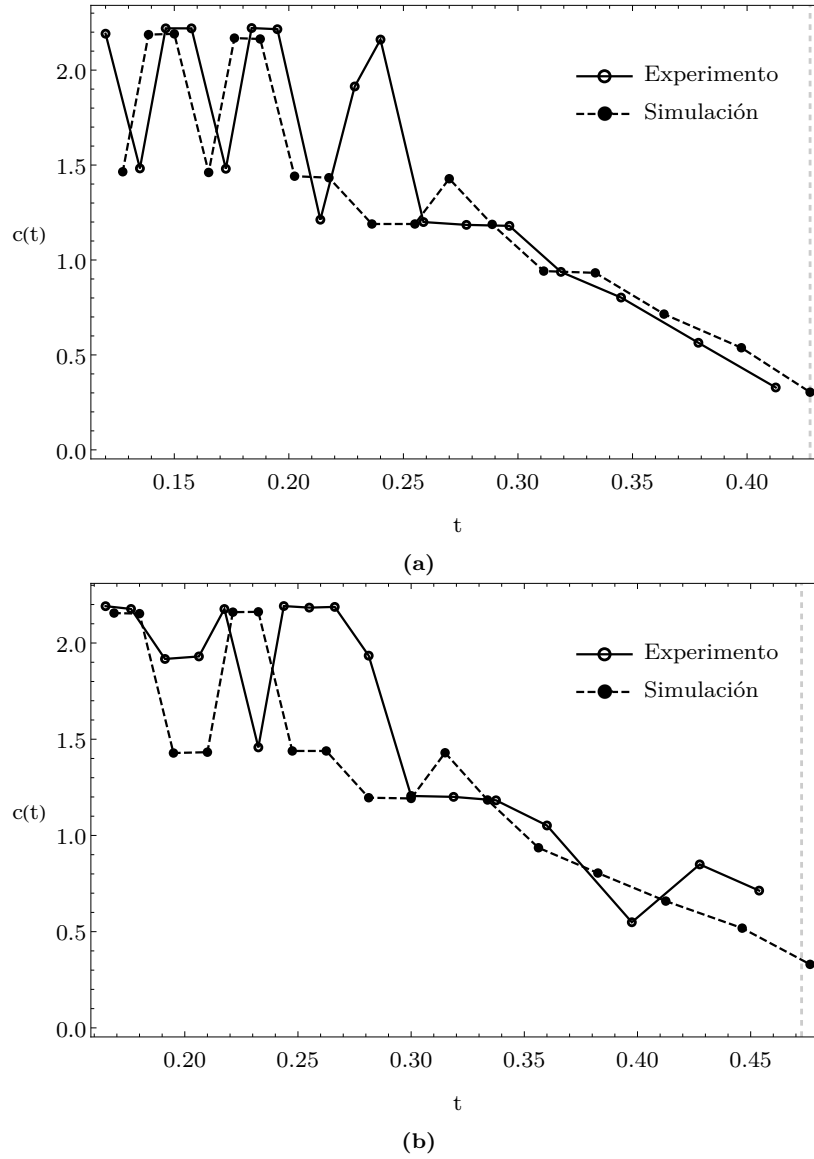
**Figura 6.27:** Posición de la onda  $\delta(t)$ : a) caso 1, b) caso 2.

En la figura 6.27 se presenta la posición del pulso en función del tiempo. A medida que el pulso avanza la pendiente decrece lo que indica que la velocidad de fase no es constante, si no que disminuye a medida que transcurre el tiempo. Los resultados experimentales y numéricos muestran buen acuerdo en ambos casos.



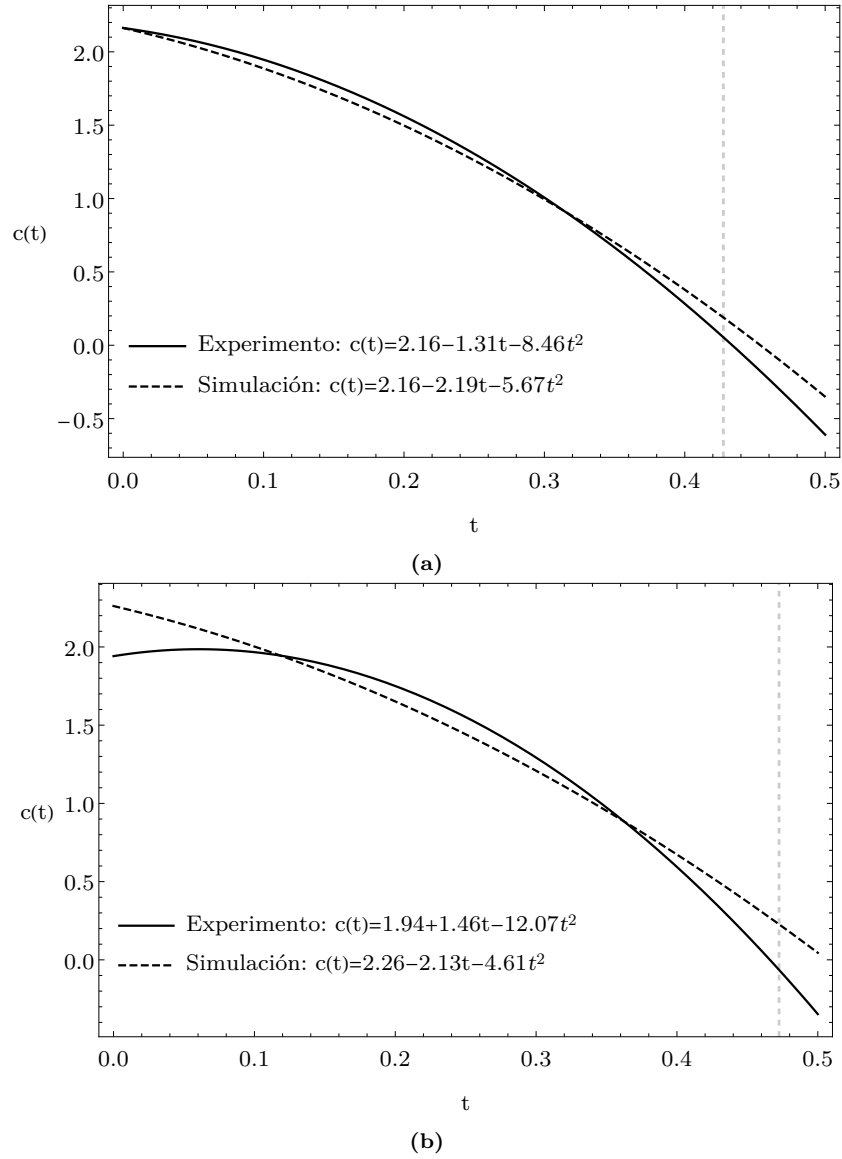
**Figura 6.28:** Posición de la onda  $\delta(t)$  ajustada a una función polinomial de tercer grado: a) caso 1, b) caso 2.

En la figura 6.28 se muestra el ajuste de los resultados experimentales y numéricos con un polinomio de tercer grado. El caso 1 se ajusta con un coeficiente de correlación de  $r = 0.98$  y el caso 2 con  $r = 0.99$ . Las gráficas muestran buen acuerdo entre el experimento y simulación para ambos casos, y describen un comportamiento decreciente de la razón de cambio indicando una velocidad de fase variable.



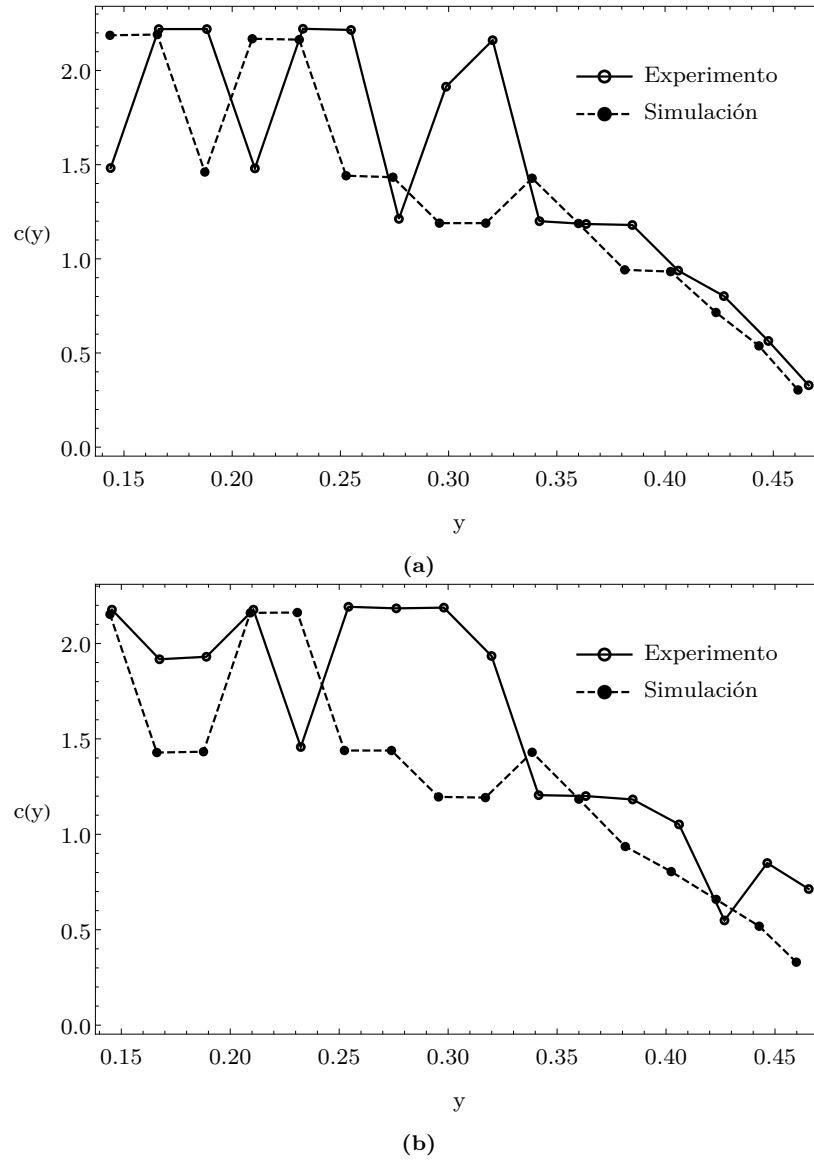
**Figura 6.29:** Velocidad de fase  $c(t)$ : a) caso 1, b) caso 2.

En la figura 6.29 se presenta la velocidad de fase del pulso. Se observa un comportamiento decreciente aunque los cambios abruptos de pendiente de la figura 6.27 se ven reflejados en los picos mostrados en el intervalo de tiempo  $t \in [0, 0.3]$  s.



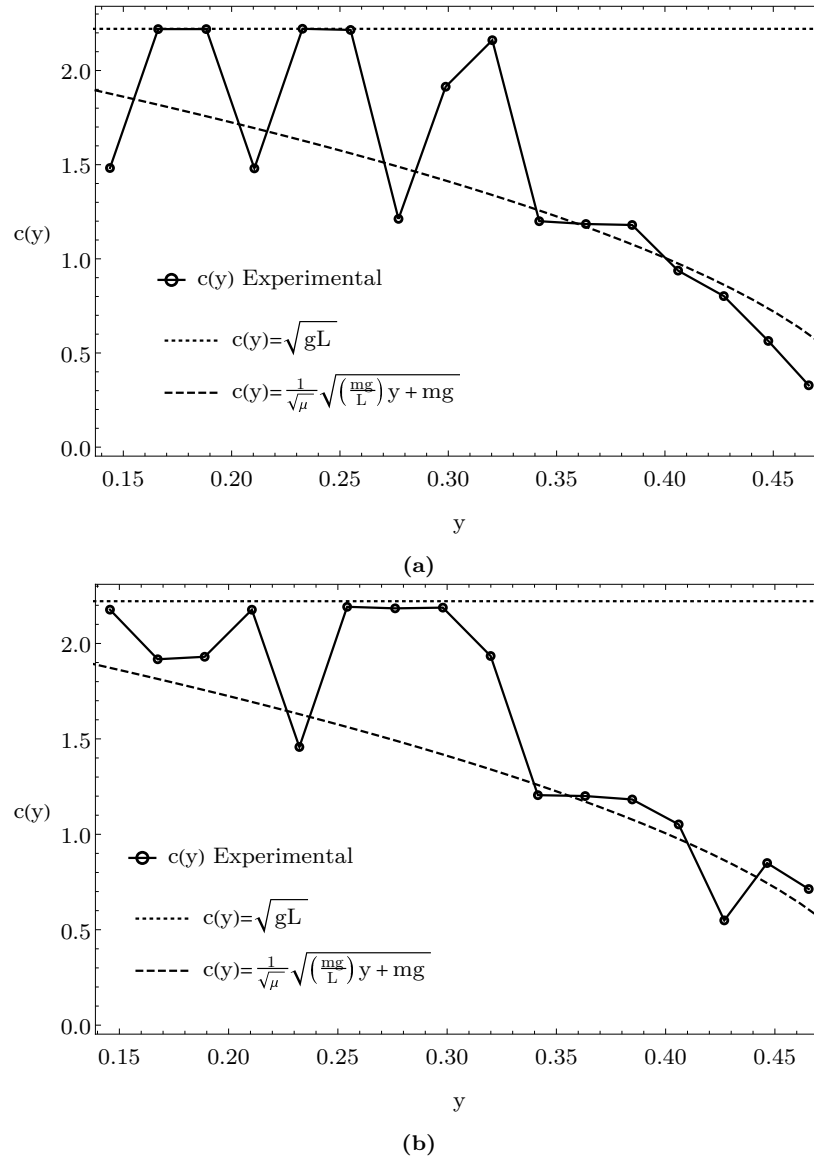
**Figura 6.30:** Velocidad de fase  $c(t)$  ajustada a un polinomio de segundo grado: a) caso 1, b) caso 2.

La curva mostrada en la figura 6.30 se obtuvo al derivar la función polinomial de tercer grado resultante del ajuste mostrado en la figura 6.28. El caso 1 muestra buen acuerdo entre los resultados experimentales y numéricos, pero el caso 2 muestra discrepancia en los intervalos extremos del dominio.



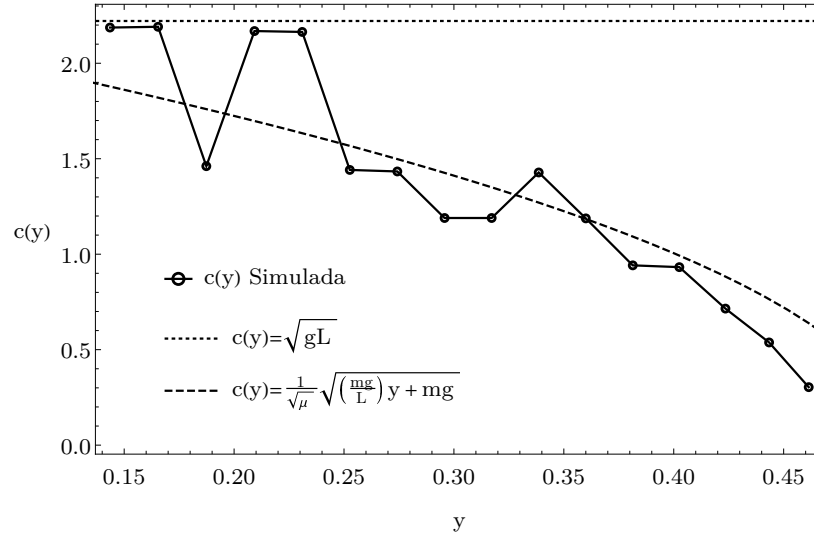
**Figura 6.31:** Velocidad  $c(y)$ : a) caso 1, b) caso 2.

En la figura 6.31 se muestra la velocidad de fase en función de la posición del pulso, para ambos casos. Muestra una tendencia descendente a medida que el pulso se aproxima al extremo libre; sin embargo, tiene muchos picos debidos a los cambios bruscos de pendiente.

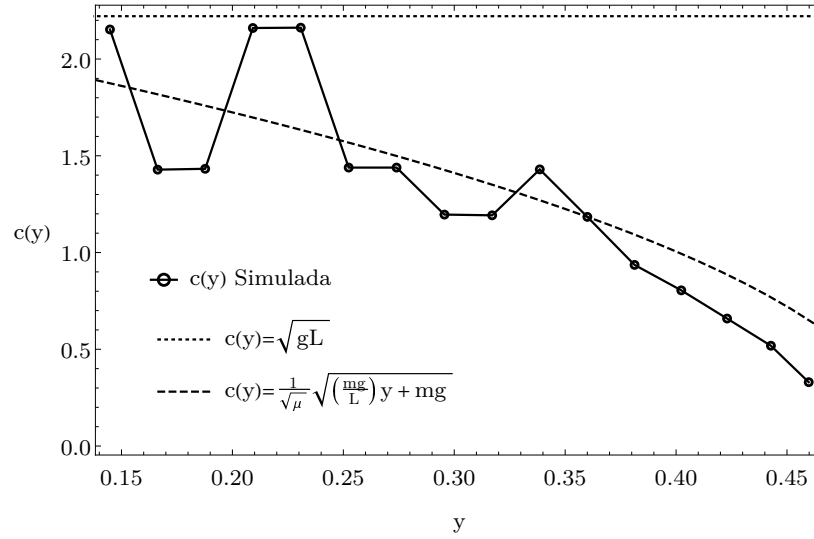


**Figura 6.32:** Comparación de velocidades  $c(y)$  experimentales: a) caso 1, b) caso 2.

En la figura 6.32 se presenta la velocidad de fase experimental del pulso en función de su posición en  $y$ . También, se muestra la comparación con dos diferentes velocidades de fase del tipo  $c(y)$  basadas en la solución de d'Alembert de la ecuación de onda. La primera de ellas considerando que la tensión en la cadena es constante describiendo una función constante  $c(y) = 2.22$ . La segunda considerando que la tensión en la cadena varía linealmente en  $y$  describiendo una función de raíz cuadrada  $c(y) = 5.44\sqrt{0.17 - 0.33y}$ .



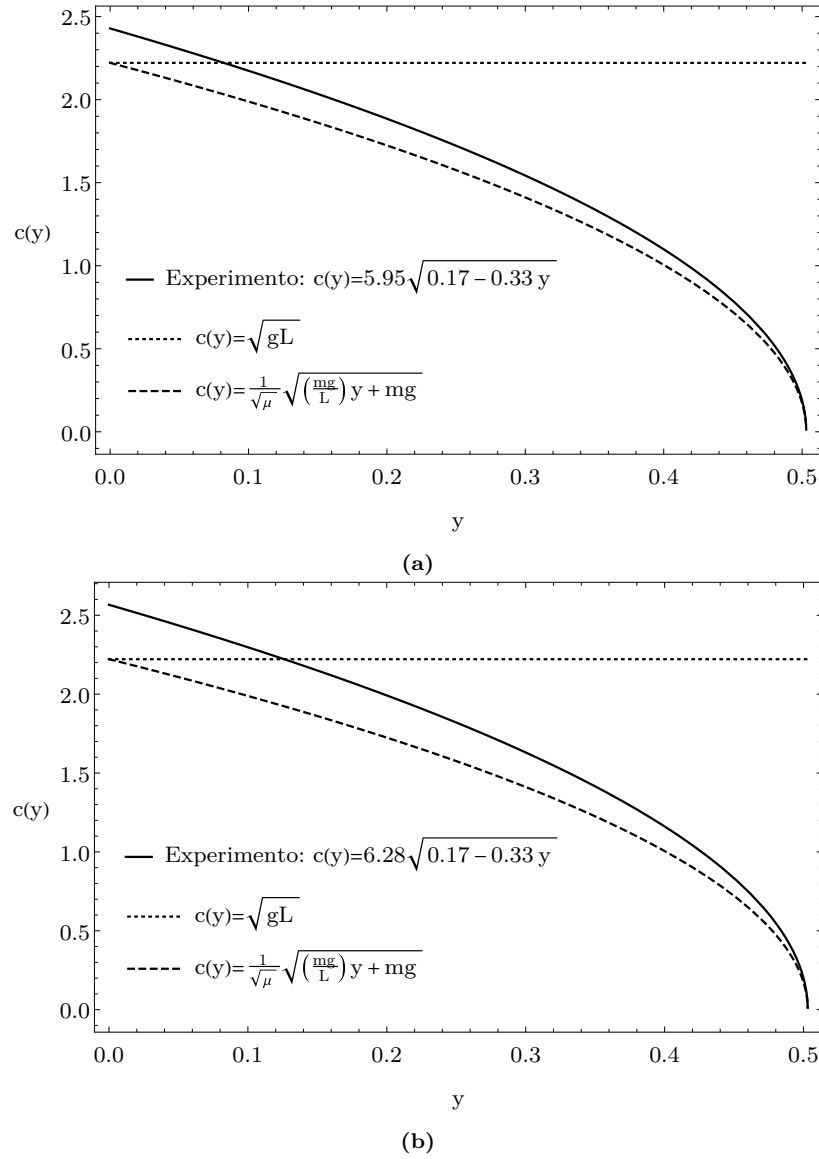
(a)



(b)

**Figura 6.33:** Comparación de velocidades  $c(y)$  simuladas: a) caso 1, b) caso 2.

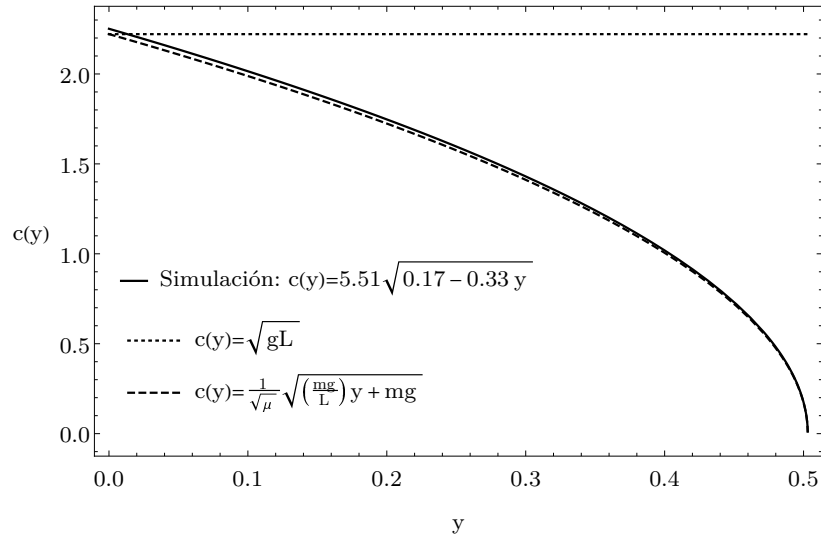
En la figura 6.33 se presenta la velocidad de fase simulada del pulso en función de su posición, comparada con dos funciones de velocidad basadas en la solución de d'Alembert para la ecuación de onda.



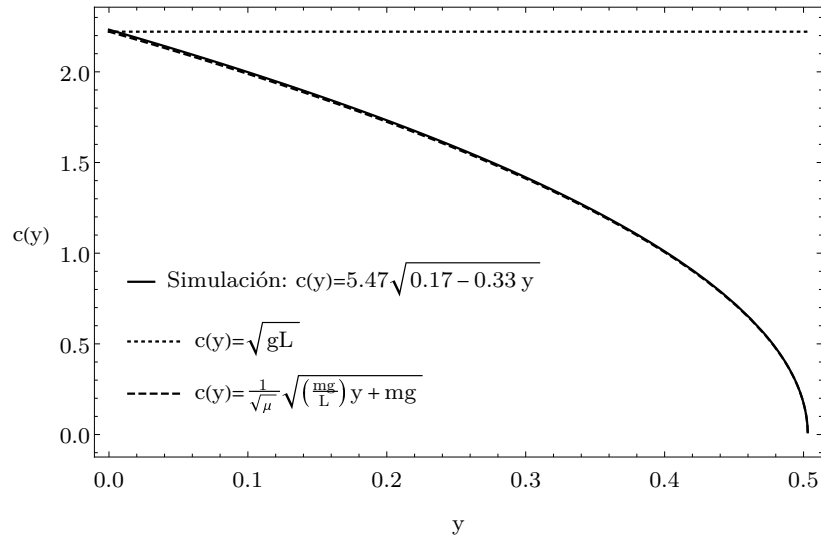
**Figura 6.34:** Comparación de velocidades  $c(y)$  experimentales utilizando el ajuste a una función de raíz cuadrada: a) caso 1, b) caso 2.

Se ajustaron los datos experimentales y simulados a una función que considera que la tensión de la cadena varía linealmente mediante  $T(y) = 0.17 - 0.33y$ . Resultó que para ambos casos, el acuerdo entre el experimento y la simulación es mejor a medida que el pulso se aproxima al extremo libre.

En la gráfica presentada en la figura 6.34 se muestra el ajuste de los resultados experimentales para la velocidad de fase en función de  $y$  a una función radical con un coeficiente de correlación de  $r = 0.8$ , comparada con una velocidad de fase constante y una representada mediante una función de raíz cuadrada mostradas en la figura 6.32.



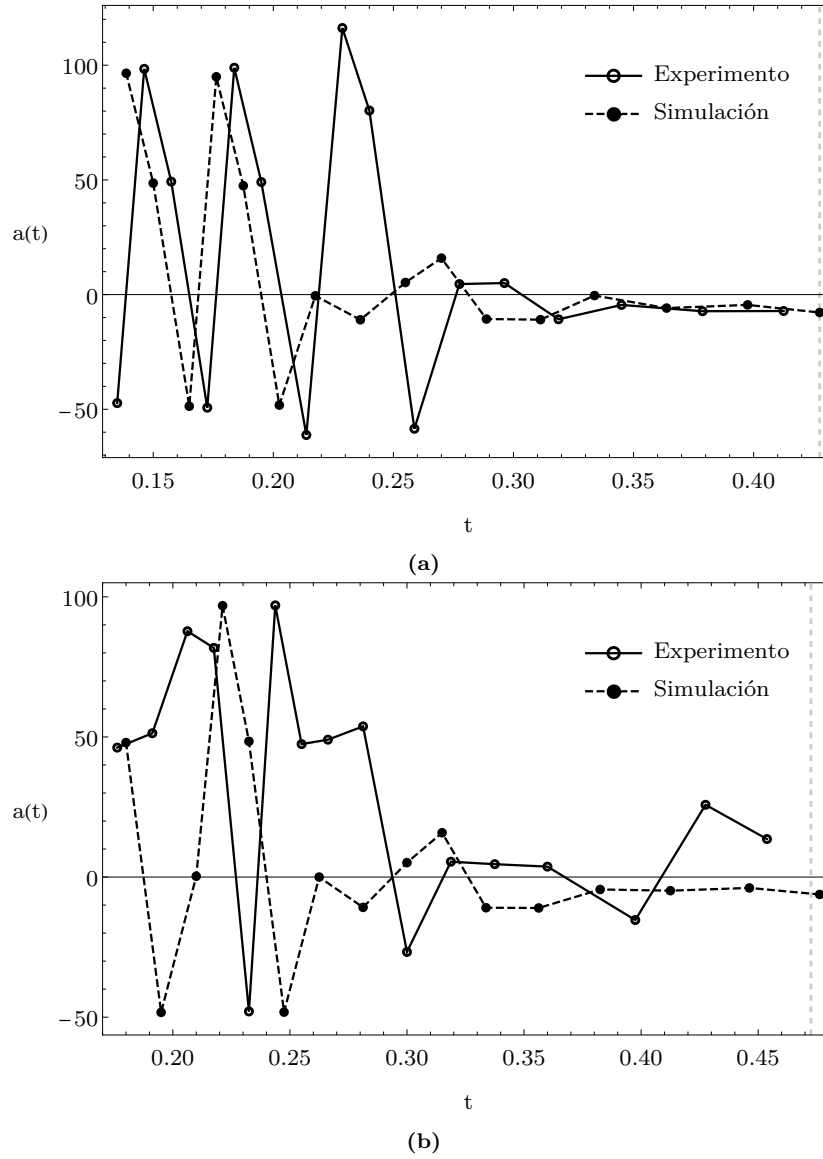
(a)



(b)

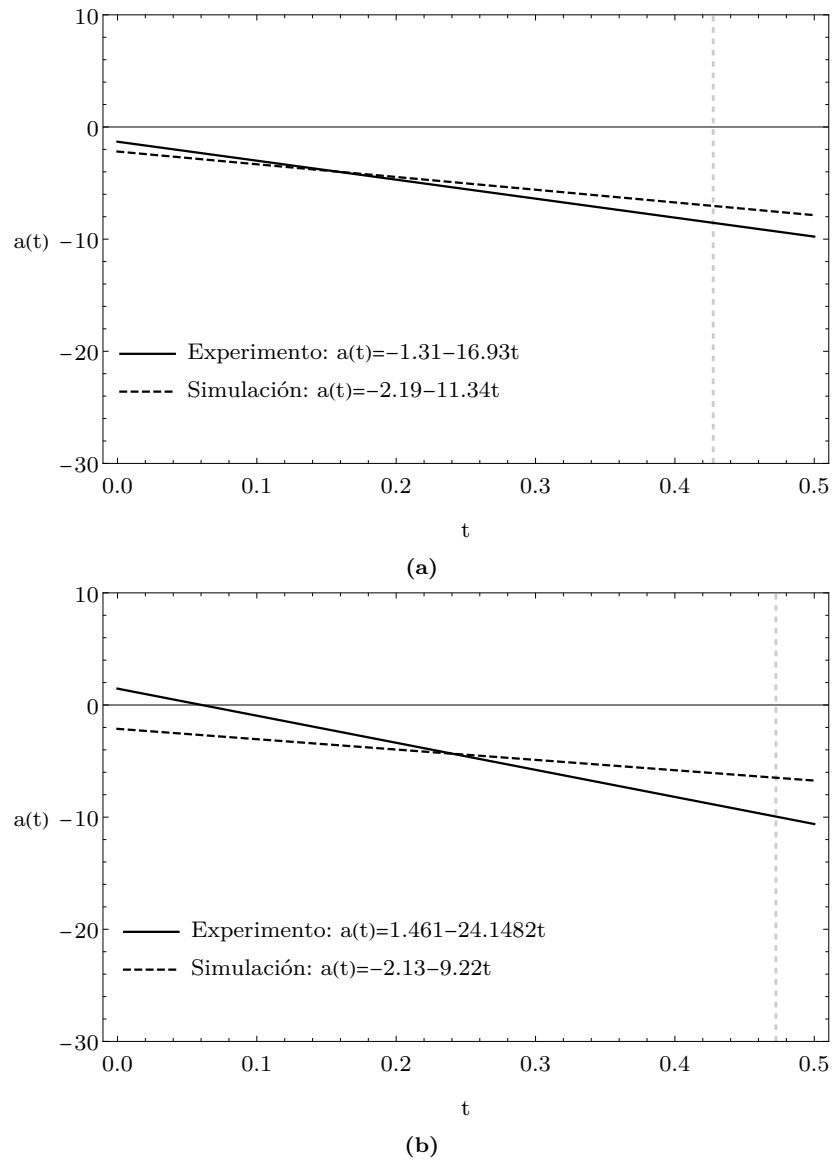
**Figura 6.35:** Comparación de velocidades  $c(y)$  simuladas utilizando el ajuste a una función radical: a) caso 1, b) caso 2.

En la figura 6.35 se hace una comparación de los datos de las simulaciones numéricas de la velocidad de fase en términos de  $y$ , ajustada a una función de raíz cuadrada con un coeficiente de correlación de  $r = 0.8$ , con las 2 funciones del tipo de la figura 6.32a. En ambos casos las funciones que consideran que la tensión varía linealmente en  $y$  son muy similares y describen el mismo comportamiento del pulso.



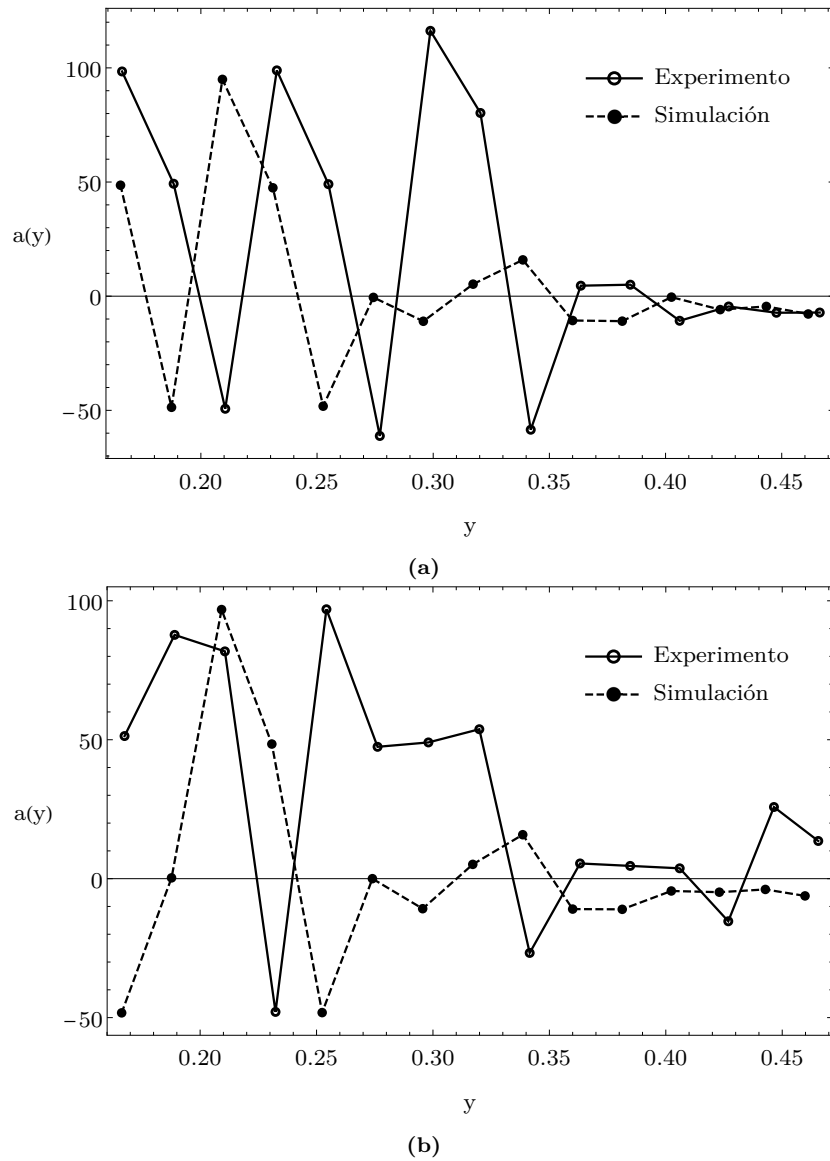
**Figura 6.36:** Aceleración  $a(t)$ : a) caso 1, b) caso 2.

En la figura 6.36 se muestra la aceleración del pulso. Los diversos picos en el intervalo de tiempo  $t \in [0, 0.3]$  s, son propiciados por los cambios abruptos de pendiente que se ven en la figura 6.29. La aceleración tiende a ser muy pequeña para valores de tiempo mayores a 0.3 s para el caso 1. El caso 2 mantiene la discrepancia entre resultados experimentales y numéricos.



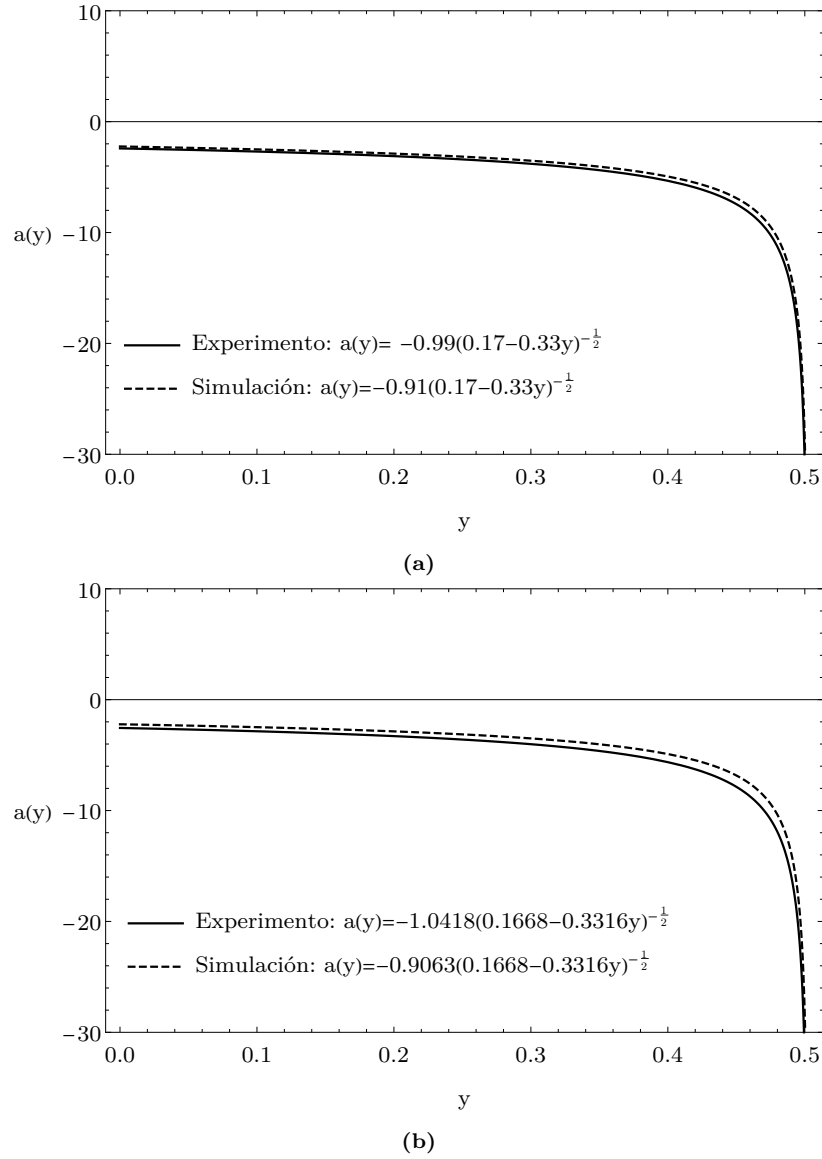
**Figura 6.37:** Aceleración  $a(t)$  ajustada a una función lineal: a) caso 1, b) caso 2.

En la figura 6.37 se presenta la aceleración del pulso después de derivar la velocidad de fase ajustada una función polinomial cuadrática. En ambos casos hay discrepancia entre los resultados experimentales y numéricos.



**Figura 6.38:** Aceleración  $a(y)$ : a) caso 1, b) caso 2.

En la figura 6.38 se presenta la aceleración del pulso en función de su posición. Es una gráfica con demasiados picos provocados por los cambios abruptos de pendiente mostrados en la figura 6.31.



**Figura 6.39:** Aceleración  $a(y)$  ajustada a una función radical: a) caso 1, b) caso 2.

La gráfica mostrada en la figura 6.39 se obtuvo al derivar la función obtenida del ajuste de la velocidad de fase  $c(y)$  a una función radical. Se observa buen acuerdo entre resultados experimentales y numéricos para ambos casos. La aceleración tiende a decrecer a medida que el pulso se aproxima al extremo libre.

## 6.6. Análisis y discusión

Los desplazamientos de los nodos mostrados en las figuras 6.11 y 6.12, presentan discrepancia entre el experimento y la simulación después de la primera oscilación. En el caso 1, la onda se propaga en ambas direcciones y se refleja tanto en el extremo libre, como en el extremo fijo de la cadena. En el caso 2, la onda sólo se propaga hacia el extremo libre, donde eventualmente se refleja para producir una onda ascendente. Lo anterior implica que se produce la interacción entre ondas con velocidades de fase y amplitudes diferentes. De acuerdo a Schagerl y Berger (2002), es dicha interacción la causa de que se generen diferentes modos de vibración.

El desplazamiento máximo determina la amplitud del pulso en cierto instante. En las figuras 6.11 y 6.12 se presenta un desfaseamiento entre las amplitudes experimentales y simuladas, lo que significa que las velocidades de fase son diferentes. Por otro lado, las magnitudes de las amplitudes discrepan entre los resultados experimentales y numéricos, lo que es un indicador de la energía asociada al sistema. Esto se puede discutir en términos de la forma de disipación de energía que se propone en el modelo numérico y su precisión con respecto al caso real.

Las trayectorias mostradas en las figuras 6.9 y 6.14 muestran el comportamiento de las amplitudes en interés de la relación que mantienen con la energía. Dichas figuras muestran un desfase vertical, el cual es un indicador de la energía agregada al sistema y su transmisión. En aras de este argumento conviene analizar la figura 6.14, donde se muestra un claro desplazamiento vertical ascendente del último nodo y las discrepancias entre el movimiento experimental y el simulado. Dicha diferencia implica que en ambos casos, la simulación considera una entrada de energía mayor. En última instancia, la disparidad se encuentra determinada por la fricción en las juntas esféricas, pues es el único medio de disipación de energía considerado en el modelo numérico.

Otra característica importante es que la amplitud de la onda se amplifica progresivamente durante su propagación hacia el extremo libre, debido a que la tensión disminuye hasta ser nula en dicho extremo. Lo anterior se corrobora al examinar la sección izquierda de las figuras 6.15 y 6.16.

De forma particular, en la figura 6.15 se observan las dos ondas mencionadas anteriormente. El pulso que se propaga hacia el extremo fijo muestra una amplitud decreciente. Al contrario del que se propaga hacia el extremo libre cuya amplitud es creciente, lo que implica que la tensión decrece con la posición en el eje  $y$ . Por otra parte, la figura 6.16 ilustra que en el caso 2, solamente existe una onda de amplitud creciente que se propaga de forma descendente. Esto se debe a que la función de entrada fue aplicada en el nodo superior de la cadena, por lo que se elimina la onda que se mueve en sentido contrario.

Es de especial interés la asimetría entre el lado izquierdo y el derecho que presentan las figuras 6.15 y 6.16. Este comportamiento sugiere que los distintos modos de vibración que aparecen después

de la primera oscilación están determinados por la tensión de la cadena; cuya relación funcional está descrita, al menos, en términos del tiempo y de la posición. Dicha cualidad define a la cadena como un medio no homogéneo. En virtud de que las amplitudes están dadas por la tensión, y por lo tanto, relacionada con la disipación de energía; se plantea una interrogante sobre la precisión de la analogía de un péndulo con fricción, con un sistema de masa-resorte-amortiguador torsional. Por lo menos se puede discutir la validez de las funciones de entrada consideradas en cada sistema pendular.

En las figuras 6.17 y 6.18 se presentan las velocidades de dos nodos en el plano de vibración. Hay un desfaseamiento entre la curva de velocidad y la de desplazamiento (denotada en azul); esto debido a que la celeridad se obtuvo mediante la derivada temporal del desplazamiento. Es conveniente utilizar esta explicación para denotar los puntos críticos que presentan las velocidades en la primera oscilación, particularmente los máximos y mínimos que delimitan el periodo del pulso.

De igual forma, las aceleraciones nodales que se ilustran en las figuras 6.19 y 6.20 se calcularon mediante derivar las velocidades. Es por ello que muestra desfaseamiento entre puntos críticos. Por la misma razón, las curvas de aceleración muestran sensibilidad, puesto que la disponibilidad de nodos estudiados impide que se describan curvas más suaves.

Por otra parte, los diagramas de fase son de utilidad cuando se trata con sistemas no lineales, pues permiten obtener información de sus soluciones sin tener que resolver las ecuaciones que los describen. En este caso, los diagramas de fase presentados en las figuras 6.21 y 6.22 consideran al sistema de un péndulo múltiple de 116 eslabones, el cual es fuertemente no lineal. Los puntos críticos mostrados son en su mayoría del tipo espiral que se alejan de la raíz, lo que indica zonas de inestabilidad. También se muestran puntos del tipo centro que implican soluciones periódicas.

Las figuras 6.23 y 6.24 muestran la amplitud del pulso para ambos casos, que tiende a crecer a medida que transcurre el tiempo y también a medida que la onda se desplaza en  $y$ . Se podría decir entonces, que la amplitud es una función del tipo  $A(t, y)$ . Las gráficas muestran sensibilidad en el valor de la amplitud correspondiente al extremo fijo. Se debe a que en dicha posición la tensión es nula para ese instante. De acuerdo a la ecuación de onda para una cuerda vibrante, esto implica que la velocidad de fase sea nula también.

La diferencia entre la magnitud de la amplitud experimental y la simulada, depende de la precisión del modelo numérico para describir la fricción en las juntas. Cuando se superponen los desplazamientos nodales con las amplitudes, se observa claramente la correspondencia con los desplazamientos máximos, tal como se muestra en las figuras 6.25 y 6.26. En dichas figuras se observan modos de vibración después de la primera oscilación, que son resultado de las ondas reflejadas ya discutidas. Es adecuado tratar dichos modos en términos de frecuencias y es a partir de éstos que se puede hablar de velocidades de grupo; sin embargo, este trabajo no está dirigido a estudiar estas propiedades aunque vale la pena mencionarlas.

Las curvas mostradas en la figura 6.27 son de gran relevancia para esta tesis, pues muestran las posiciones, a partir de las cuales se obtienen las velocidades de fase en la primera oscilación. Se puede inferir a simple vista que la velocidad de propagación no es constante y que tiene una tendencia decreciente, lo que implica que la onda es no lineal.

La velocidad de fase se presenta en la figura 6.29. La gráfica muestra sensibilidad debido a los puntos disponibles para realizar el cálculo. En vista de esto, se optó por ajustar el desplazamiento del pulso con funciones polinomiales. Con polinomios de 2° y 3° grado se ajustaron los datos (experimentales y numéricos). Se produjeron con coeficientes de correlación de  $r = 0.98$  y  $r = 0.99$  respectivamente, así que se prefirió tratar con la función polinomial de 3° grado (ver figura 6.28).

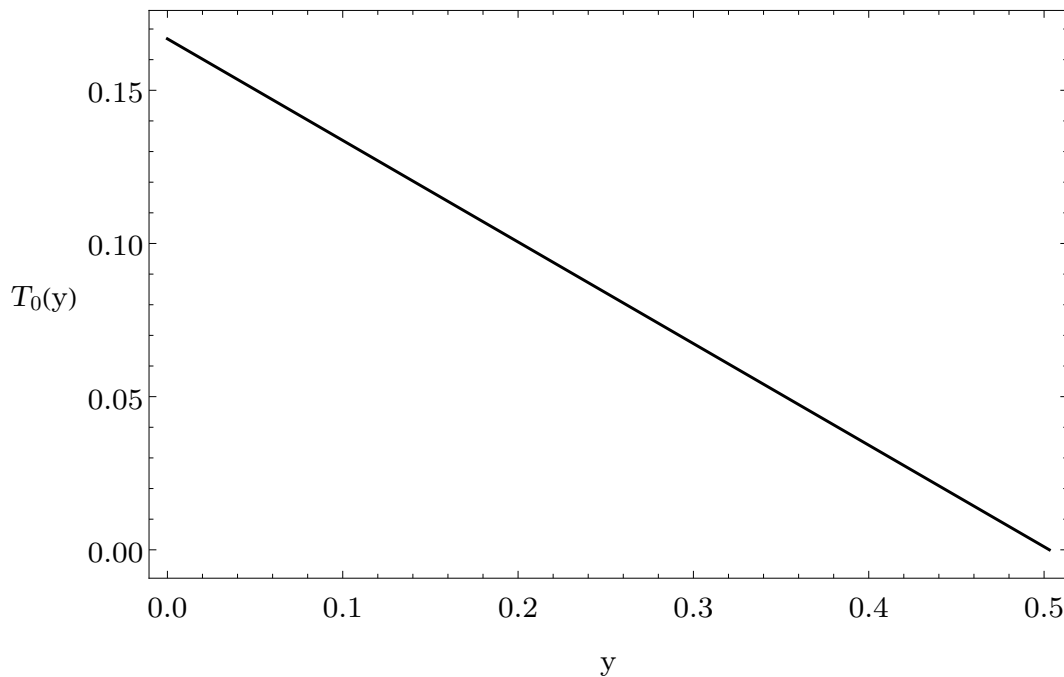
A partir de la función obtenida del ajuste polinomial, se obtuvo la velocidad de fase al derivar dicha función respecto al tiempo. La velocidad entonces, se describió con una función parabólica mostrada en la figura 6.30. Aunque muestra un comportamiento decreciente, los resultados experimentales difieren de forma importante sobre todo para el caso 2.

Cuando se analiza la velocidad de fase respecto al desplazamiento vertical, se obtiene que ésta decrece a medida que el pulso se aproxima al extremo libre de la cadena, tal como se muestra en la figura 6.31. Se realizó una comparación de los datos (experimentales y numéricos, ver figuras 6.32 y 6.33) con dos velocidades de fase en términos de la posición del pulso. La primera de ellas describe una velocidad de fase constante que implica que la tensión también lo es. Esta primera comparación es de utilidad para mostrar que el orden de magnitud es adecuado para el medio en cuestión. La segunda comparación, que se hace con una velocidad que implica una relación lineal con la tensión, sirve para mostrar que el comportamiento se describe adecuadamente con dicha consideración.

Las velocidades de fase supuestas tienen un punto común en  $y = 0$  m, pues en dicho punto las condiciones del medio son las mismas, la tensión es igual al peso de la cadena. Se podría decir que  $y = 0$  m indica un cambio de régimen entre dos modos de propagación, uno lineal y otro no lineal.

A pesar de que la tendencia es clara, la curva muestra la sensibilidad descrita antes. Por esta razón se optó por realizar un ajuste similar al de la velocidad en términos del tiempo. De acuerdo a la solución de d'Alembert para la ecuación de onda, la velocidad de fase está en función de la raíz cuadrada del cociente de la tensión y la densidad lineal. La tensión en la cadena es una función multivariable que depende del tiempo y la posición vertical  $T(t, y)$ ; sin embargo, para obtener dicha función se requiere un análisis dinámico fuera del alcance de esta tesis. Por lo tanto, se consideró como aproximación que la tensión varía solamente con  $y$  y que lo hace linealmente, tal como ocurre cuando la cadena está en reposo en  $t = 0$  s (ver figura 6.40).

Al considerar que la tensión varía linealmente con  $y$  se establece que la velocidad de fase es una función radical cuyos parámetros que la describen son la masa y la longitud de la cadena, y la aceleración gravitatoria. Se ajustó la velocidad de fase a una función radical tal como se muestra



**Figura 6.40:** Tensión de la cadena en reposo  $T_0 = T(0, y)$ .

en las figuras 6.34 y 6.35.

Puesto que la tensión y la velocidad de fase están descritas con funciones multivariantes más complejas como ya se mencionó, es de especial interés que los datos se ajusten tanta exactitud al ajuste propuesto. Aunque parecería que considerar que la tensión es una función lineal es una aproximación idealizada para describir la propagación, lo apropiado que resulta, plantea la posibilidad de proponer más modelos basados en conceptos teóricos elementales, que describan de forma idónea el fenómeno.

De forma análoga a la velocidad de fase, en primera instancia, se obtuvo la aceleración del pulso con una derivación discreta con respecto al tiempo (ver figura 6.36). No obstante, presenta el mismo problema de la sensibilidad a las variaciones de las posiciones de nodos contiguos. Es por ello que se prefirió obtener la aceleración con base en el ajuste polinomial ya mencionado. Las aceleraciones obtenidas están descritas con rectas de pendiente decreciente ver figura 6.37.

Nuevamente, la aceleración del pulso mostrada en la figura 6.38 no exhibe una tendencia clara por los motivos ya expuestos. Por lo tanto, la aceleración se calculó derivando las funciones con las que se ajustaron los datos. El ajuste revela que la aceleración tiende a decrecer y describe un comportamiento asintótico cuando el pulso se aproxima al extremo libre (ver figura 6.39). Esto se explica con el colapso de la cadena cuando la onda llega al punto donde la tensión es nula ( $y = -L$ ), a partir del cual, se produce la reflexión que genera una onda ascendente.

La asíntota representa que el medio es finito, es decir, está delimitado por la longitud de la cadena  $L$ . Dicha propiedad se ve reflejada en la función radical que describe a la aceleración, ya que se indetermina para  $|y > L|$ .

## Capítulo 7

# CONCLUSIONES

A través de un estudio experimental y numérico de la propagación de un pulso desde el extremo superior de una cadena suspendida hasta su extremo libre, se analizaron desplazamientos, velocidades y aceleraciones nodales en el plano de vibración, así como las velocidades de fase de los pulsos para los dos casos considerados.

Previo al desarrollo de este trabajo, se ignoraba el comportamiento de la velocidad de fase y la amplitud de un pulso en un medio no homogéneo como lo es la cadena considerada. Sin embargo, por medio de los recursos bibliográficos al alcance, se consiguió una comprensión preliminar del fenómeno físico y sus posibles implicaciones.

A través del estudio experimental, se observó que tanto la velocidad de propagación como la amplitud difieren de comportarse como constantes. Dichos resultados mostraron el mismo comportamiento en el estudio por simulación numérica.

En el caso particular de las amplitudes, se demostró que están en función del tiempo y de la posición del pulso. Se comprobó gráficamente, pues las curvas que describen dichas relaciones no son constantes.

La dependencia de la velocidad de fase con el tiempo, se representó con funciones polinomiales; de las cuales, se obtuvo que el ajuste que mostró mejor coeficiente de correlación fue el de un polinomio de 2° grado. Esto implica que la aceleración del pulso está descrita con funciones lineales.

La relación funcional de la velocidad de fase con la posición del pulso, se estudió con base en la solución de d'Alembert de la ecuación de onda para una cuerda vibrante. Es por ello que se representó la velocidad y por lo tanto la aceleración, con funciones radicales en términos de la masa de la cadena, su longitud y la aceleración gravitatoria. Los modelos propuestos consideran que la tensión es una función lineal de la posición; por lo tanto, implican discontinuidades representadas

con asíntotas para valores de posición mayores a la longitud de la cadena. La propiedad con la que se ajustaron los datos (experimentales y simulados) sugiere que el enfoque es adecuado y da apertura a tratar con modelos similares en términos de la tensión.

Por medio del estudio numérico se encontró que el sistema es muy sensible a la fricción en las juntas puesto que la validación del modelo depende casi en su totalidad de considerar los coeficientes de fricción adecuados. La validación también mostró dependencia con las funciones de excitación, aunque este detalle es característico de fenómenos no lineales. Es por ello que la función de excitación debía ser idéntica tanto en la simulación como en el experimento, según el caso.

En conclusión, se encontró que a medida que se propaga el pulso hacia el extremo libre de la cadena, la amplitud del pulso se incrementa. También, se determinó que la velocidad de fase decrece a medida que el pulso se aproxima al extremo suelto. Lo anterior implica que el pulso se propaga no linealmente, de modo que su amplitud y velocidad de fase son funciones del tiempo y el desplazamiento.

## 7.1. Contribuciones

Se aportó con el desarrollo de un dispositivo experimental orientado a estudiar la oscilación de una cadena suspendida de uno de sus extremos. La característica más importante y contribución de dicho dispositivo, es que permite aplicar diversas funciones de excitación definidas por funciones de desplazamiento o velocidad. Es posible controlar perfectamente la amplitud del pulso de entrada por medio del control digital del motor a pasos y el sistema de control proporcionado con la tarjeta arduino. Asimismo, es factible establecer funciones de entrada periódicas con el mismo método de control.

Se desarrolló un modelo numérico lagrangiano basado en elementos mecánicos que permite simular y estudiar la propagación de ondas no lineales en una cadena suspendida de uno de sus extremos. El modelo considera que los eslabones de la cadena son elementos rígidos unidos mediante juntas esféricas con fricción. La correcta determinación de dicha fricción es clave para aproximar las soluciones numéricas a su caso experimental correspondiente.

El planteamiento numérico contribuye con el enfoque de establecer sistemas locales en cada nodo. Esta consideración implica que el sistema de un péndulo múltiple de  $n$  eslabones, esté subdividido en  $n$  sistemas de péndulos simples. Cada péndulo se conforma de un elemento rígido con masas concentradas en sus extremos, de las cuales se determina su momento de inercia respecto al eje de rotación. Esta discretización del problema es lo que hace posible plantear la disipación de energía en las juntas con un modelo tan simple como el sistema masa-resorte-amortiguador torsional.

## 7.2. Recomendaciones y trabajo futuro

Este trabajo ha contribuido para comprender de manera más objetiva la sensibilidad del modelo ante la fricción en las juntas. Una obvia limitante de este estudio es el método para obtener la fricción mencionada. Es por eso que se requiere de mecanismos exactos del cálculo del coeficiente de fricción viscosa y la constante de rigidez torsional.

Además, con el fin de estudiar los modos de vibración no lineales en medios no homogéneos, es posible realizar experimentos utilizando cadenas con diferentes parámetros y una variedad más extensa de funciones de excitación. Este problema se relaciona con entender el proceso de propagación después de la primera oscilación, donde se requiere de estudio adicional e investigación, así como la utilización de métodos de análisis más generales.

Este trabajo está orientado a estudiar analíticamente la propagación no lineal de ondas en medios no homogéneos. Esto implica, eventualmente, la utilización de modelos como el de Korteweg de Vries, la ecuación no lineal de Schrödinger y la ecuación de Burgers. Con ellos es posible estudiar la propagación de ondas no lineales en aguas someras, en aguas profundas o entender las interacciones en flujos multifásicos (por ejemplo, la propagación interfacial de ondas) Sen y cols. (2008). De igual forma, en campos como la sismología se requiere utilizar modelos no lineales, pues la tierra y sus estratos poseen propiedades fuertemente no lineales, lo que conlleva a considerar la utilización de modelos de propagación más generales (Nikolaev, 1988).

# Apéndice A

## Código IDE

/Control de motor a pasos

Escrito por: Aarón Gómez

```
/
// Definición de variables y pines
const int stepPin = 3;
const int dirPin = 4;

void setup() {
  // Los dos pines son output
  pinMode(stepPin,OUTPUT);
  pinMode(dirPin,OUTPUT);
}
void loop() {
  delay(2000);
  digitalWrite(dirPin,HIGH); // Gira el motor en cierta dirección
  // Si se usa FULL STEP se requieren 200 pulsos pues avanza 1.8 grados cada pulso
  for(int x = 0; x < 150; x++) {
    digitalWrite(stepPin,HIGH);
    delayMicroseconds(400);
    digitalWrite(stepPin,LOW);
    delayMicroseconds(400);
  }
  delay(50);
}
```

```
digitalWrite(dirPin,LOW); //Gira el motor en la otra dirección
// Usa 400 pulsos para regresar a la posición original
for(int x = 0; x < 200; x++) {
digitalWrite(stepPin,HIGH);
delayMicroseconds(400);
digitalWrite(stepPin,LOW);
delayMicroseconds(400);
}
delay(3000);
}
```

## Apéndice B

# Código LS-Dyna

Los parámetros de solución, condiciones de frontera y elementos geométricos se introducen al programa LS-Dyna por medio formatos llamados *CARDS*, son tarjetas que tienen un orden y requisitos predeterminados que se pueden consultar a detalle en (“LS-Dyna Keyword User’s Manual”, 1999). Todas las instrucciones definidas para las simulaciones numéricas se muestran a continuación, aquellas que son repetitivas se muestran ilustrativamente solamente una vez. Cada comando comienza con un signo “\*”).

\*KEYWORD

\*TITLE

Chain1

\*CONTROL\_TERMINATION

1.080

\*DATABASE\_BINARY\_D3PLOT

0.0075

\*DATABASE\_MATSUM

0.1

\*DATABASE\_NODOUT

0.1

\*DATABASE\_ELOUT

0.1

\*PART

Eslabon1

1 1 1

(Se repite para todos los eslabones)

\*SECTION\_BEAM

1 3

1.963E-07

\*MAT\_RIGID

1 2.7E+03 70.00E+09 0.33

(Se repite para todos los eslabones)

\*MAT\_ELASTIC

118 2.7E+03 70.00E+09 0.33

\*ELEMENT\_BEAM

1 1 1 2

(Continúa para todos los eslabones)

\*ELEMENT\_MASS

1 1 72.65E-6

(Continúa para todos los eslabones)

\*CONSTRAINED\_JOINT\_SPHERICAL

1 234

(Continúa para todos los eslabones)

\*CONSTRAINED\_JOINT\_STIFFNESS\_GENERALIZED

1 1 2 1 1

0 0 0 0 0 2

0E+00 0E+00 0E+00 0 6.1862E-06 0E-06

0 0 0 0 -45 225

(Se repite para todos los eslabones)

\*DEFINE\_COORDINATE\_NODES

1 1 235 238

(Se repite para todos los eslabones)

\*NODE

1 0.0 0.0000 0.0 7 0

(Continúa para todos los eslabones)

\*LOAD\_BODY\_Y

1 9.81E+00

\*DEFINE\_CURVE

1

0.000000000000000E+00 1.000000000000000E+00

3.850000000000000E+00 1.000000000000000E+00

\*DEFINE\_CURVE

2

0 0.00E+00

1 2.50E-06

2 5.00E-06

3 7.50E-06

4 1.00E-05

5 1.25E-05

(Continúa hasta 50)

Caso 1:

\*BOUNDARY\_PRESCRIBED\_MOTION\_NODE

42 1 2 3 1

\*DEFINE\_CURVE

3

0.0000 -1.80E-04

0.0075 -1.37E-03

0.0150 -3.00E-03

0.0225 -4.88E-03

0.0300 -6.52E-03

(Continúa hasta 1.08)

Caso 2:

\*BOUNDARY\_PRESCRIBED\_MOTION\_NODE

1 1 2 3 1 1.08 0.00

\*DEFINE\_CURVE

3

0.00E-00 -1.84E-04

7.50E-03 -1.02E-03

1.50E-02 -2.70E-03

2.25E-02 -4.37E-03

3.00E-02 -6.04E-03

(Continúa hasta 1.08)

\*END

# Referencias

- A4988 stepper motor driver carrier black edition [Manual de software informático]. (2018).
- Andrievsky, B., y Fradkov, A. L. (2008). Behavior analysis of harmonically forced chain of pendulums. *Control of Complex Systems Lab., Institute for Problems of Mechanical Engineering of Russian Academy of Sciences*, 1-5.
- Bailey, H. (2000). Motion of a hanging chain after the free end is given an initial velocity. *American Journal of Physics*, 68(8), 764-767. doi: 10.1119/1.19539
- Bathe, K. J. (2014). *Finite element procedures*. USA: Prentice Hall Pearson Education.
- Beer, F. P., y Johnston, E. R. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros dinámica*. México: McGraw Hill.
- Belmonte, A., Shelley, M. J., Eldakar, S. T., y Wiggins, C. H. (2001). Dynamic patterns and self-knotting of a driven hanging chain. *Physical Review Letters*, 87(11), 114301-1 - 114301-4. doi: 10.1103/PhysRevLett.87.114301
- Boyce, W. E., y DiPrima, R. C. (2012). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. México: Limusa Wiley.
- Braun, M. (2003). On some properties of the multiple pendulum. *Archive of Applied Mechanics*(72), 899-910. doi: 10.1007/s00419-002-0263-4
- Brown, D. (2019). *Tracker video analysis and modeling tool*. (<https://physlets.org/tracker/>)
- Coste, C., Falcon, E., y Fauve, S. (1997). Solitary waves in a chain of beads under hertz contact. *Physical Review E*, 56(5), 6104-6117.
- Daraio, C., Nesterenko, V. F., Herbold, E. B., y Jin, S. (2005). Strongly nonlinear waves in a chain of teflon beads. *Physical Review E*, 72(016603), 1-9. doi: 10.1103/PhysRevE.72.016603
- Dmos microstepping driver with translator and overcurrent protection [Manual de software informático]. (2014).
- Fehribach, J. D., y Shearer, M. (1989). Approximately periodic solutions of the elastic string equations. *Applicable Analysis*, 32, 1-14. doi: 10.1080/00036818908839835
- Freeman, I. M. (1977). Propagation of a transverse pulse along a hanging chain. *The Physics Teacher*, 15, 545. doi: 10.1119/1.2339767
- French, A. P. (2006). *Vibraciones y ondas*. Barcelona: Editorial Reverté.
- Gobat, J. I., Grosenbaugh, M. A., y Triantafyllou, M. S. (2002). Generalized time integration

- solutions for hanging chain dynamics. *Journal of Engineering Mechanics*, 128, 677-687. doi: 10.1061/ASCE0733-939920021286677
- Goodey, W. J. (1961). On the natural modes and frequencies of a suspended chain. *Quart. Journ. Mech. and Applied Math.*, 14(1), 118-127.
- G. Rega, F. V., y Benedettini, F. (1984). Parametric analysis of large amplitude free vibrations of a suspended cable. *Solids Structures*, 20(2), 95-105.
- Halliday, D., y Resnick, R. (1960). *Física*. México: Compañía Editorial Continental.
- Hallquist, J. O. (1998). Ls-dyna theoretical manual [Manual de software informático].
- Howell, C. T., y Triantafyllou, M. S. (1993). Stable and unstable nonlinear resonant response of hanging chains: Theory and experiment. *The Royal Society*, 440, 345-364. doi: 10.1098/rspa.1993.0020
- Hughes, T., y Winget, J. (1980). Finite rotation effect in numerical integration of rate constitutive equations arising in large deformation analysis. *Short Communications*(80), 1862-1867.
- Incropera, F. P. (2007). *Fundamentals of heat and mass transfer*. USA: John Wiley and sons.
- Keller, J. B. (1959). Large amplitude motion of a string. *American Journal of Physics*, 27, 584-586. doi: 10.1119/1.1934919
- Levinson, D. A. (1977). Natural frequencies of a hanging chain. *American Journal of Physics*, 45(7), 680-681. doi: 10.1119/1.10789
- Ls-dyna keyword user's manual [Manual de software informático]. (1999).
- Mahalingam, S. (1957). Transverse vibrations of power transmission chains. *British Journal of Applied Physics*, 8, 145-148.
- Makhina, G. A., y Tenmenko, V. A. (1998). Non linear oscillation of a freely suspended string. *Journal of Mathematical Sciences*, 90(6), 2484-2488.
- Nikolaev, A. V. (1988). Problems of nonlinear seismology. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 50, 1-7. doi: [https://doi.org/10.1016/0031-9201\(88\)90084-2](https://doi.org/10.1016/0031-9201(88)90084-2)
- Ogata, K. (1987). *Dinámica de sistemas*. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.
- Picquart, M. (2017). *Vibraciones y ondas*. México: Editorial Trillas.
- Saxon, D. S., y Cahn, A. S. (1953). Modes of vibration of a suspended chain. *Quart. Journ. Mech. and Applied Math*, 6(3), 273-285.
- Schagerl, M., y Berger, A. (2002). Propagation of small waves in inextensible strings. *Wave Motion*, 35, 339-353.
- Sen, S., Hong, J., Bang, J., Avalos, E., y Doney, R. (2008). Solitary waves in the granular chain. *Physics Reports*, 462, 21-66. doi: 10.1016/j.physrep.2007.10.007
- Shinbrot, T., Grebogi, C., Wisdom, J., y Yorke, J. A. (1992). Chaos in a double pendulum. *American Journal of Physics*, 60(491), 491-499. doi: 10.1119/1.16860
- Stein, S., y Wysession, M. (2003). *An introduction to seismology, earthquakes and earth structure*. Cornwall: Blackwell Publishing.
- Theodorakopoulos, N. (2018). *Non linear physics, professor theodorakopoulos lecture's notes*.

- Western, A. B. (1980). Demonstration for observing  $j(x)$  on a resonant rotating vertical chain. *American Journal of Physics*, 48(1), 54-56.
- White, H. E. (1979). *Física moderna*. Barcelona: Montaner y Simón.
- Zhu, C., Lei, J., Wu, Y., Nan Li, D. C., y Shi, Q. (2015). Experimental observation of solitary waves in a new designed pendulum chain system. *European Journal of Physics*, 36(045002), 1-11. doi: 10.1088/0143-0807/36/4/045002