



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA-CONTROL

CÁLCULO RECURSIVO DE GANANCIAS PARA EL DIFERENCIADOR DE LEVANT POR MEDIO DE FUNCIONES DE LYAPUNOV

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRA EN INGENIERÍA

PRESENTA:
MARÍA FERNANDA MERINO MORALES

TUTOR
DR. JAIME ALBERTO MORENO PÉREZ
INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM.

DICIEMBRE
CIUDAD DE MÉXICO DE 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Luis A. Álvarez-Icaza Longoria

Secretario: Dra. María Cristina Verde Rodarte

Vocal: Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez

2^{do}. Vocal: Dr. Leonid Fridman

3^{er}. Vocal: Dr. Edmundo Gabriel Rocha Cózatl

Lugar donde se realizó la tesis:
Instituto de Ingeniería, Ciudad Universitaria.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez

FIRMA

Agradecimientos



Agradezco a mis padres, María y Javier, por todos sus esfuerzos (que han sido sobrehumanos) para que mi hermana y yo tengamos la educación que hoy tenemos, los recursos necesarios para lograrlo y mucho amor para seguir adelante.

A mi hermana, Mariana, que siempre esta ahí para mí, en especial cuando quiero y necesito perder el tiempo.

Al Dr. Moreno, le agradezco tanta paciencia, los buenos consejos y la oportunidad de trabajar con él.

A la Dra. Verde y sus extraordinaria dedicación e interés al momento de revisar mi trabajo.

A mis compañeros de cubículo: a Market por esas discusiones sin y con sentido. A Luis por ese apoyo incondicional. A Ulises, porque es mi mejor amigo aquí, en México.

A Juan Carlos que, desde la distancia, me apoya muchísimo. Por ese cariño que nos profesamos.

A mis amigos Daphne y Pablo, que los adoro y además, aunque no me entienden, siempre me escuchan con atención cuando hablo de funciones de Lyapunov.

Agradecimiento a CONACyT por el apoyo económico durante estos años bajo el CVU 857205.

Esta investigación fue realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN110719.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y al Instituto de Ingeniería

Índice general

Lista de Figuras	VI
1. Introducción	1
1.1. Estado del arte	1
1.2. Motivación	3
1.3. Objetivo	4
1.4. Estructura del trabajo	4
2. Preliminares	6
2.1. Homogeneidad ponderada	6
2.2. Diferenciador de Levant de orden arbitrario	7
2.3. Función de Lyapunov presentada por Cruz-Zavala y Moreno (2016)	9
2.3.1. Ejemplo motivacional	10
3. Función de Lyapunov propuesta para el diferenciador de Levant	15
3.1. Caso perturbado	18
4. Conjunto de ganancias admisibles para el diferenciador de Levant de segundo orden	22
4.1. Enfoque de funciones de Lyapunov	23
4.1.1. Diferenciador de Levant	23
4.1.2. Diferenciador lineal	27
4.2. Simulaciones numéricas	29
4.2.1. Cálculo de la cota máxima de $f^{(3)}(t)$	32
5. Conclusiones	34

Lista de Figuras

2.1. Regiones de ganancias admisibles para diferenciador de Levant de primer orden obtenidas por medio de la función de Lyapunov (2.6) con distintos grados de homogeneidad.	14
4.1. Cota inferior de la relación entre las ganancias \tilde{k}_1 y \tilde{k}_3	24
4.2. Cota inferior de la relación entre las ganancias \tilde{k}_1 y \tilde{k}_3 según el valor de θ_1 aproximada por una regresión lineal	25
4.3. Cota inferior de la relación entre las ganancias \tilde{k}_1 y \tilde{k}_3 según el valor de θ_1 aproximada por una regresión lineal	27
4.4. Cota inferior de la relación entre las ganancias \tilde{k}_1 y \tilde{k}_3 según el valor de θ_1 aproximada por una regresión lineal para el diferenciador de segundo orden lineal	28
4.5. Simulación numérica para la hallar región de ganancias crítica	30
4.6. Condición Hurwitz comparada con la región estimada de ganancias para el diferenciador de Levant.	30
4.7. Condición Hurwitz comparada con las regiones calculadas de ganancias por medio de funciones de Lyapunov	31

Capítulo 1

Introducción

1.1. Estado del arte

La diferenciación y estimación de señales con ruido ha sido uno de los problemas estudiados en las últimas décadas desde el punto de vista de diferentes campos de aplicación como el procesamiento de señales, teoría de la estimación y la ingeniería de control.

Motivada para la implementación de leyes de control, la estimación de las derivadas de una señal en tiempo real es especialmente relevante cuando éstas no pueden ser medidas.

Existen varias soluciones numéricas para cuando se desconoce la función analítica a derivar, cuando la señal está contaminada con ruido o cuando ésta proviene de un sistema no modelado. Uno de los métodos más conocidos es aproximar la función de transferencia de un diferenciador en una banda específica de frecuencia, Rabiner y Steiglitz (1970). Otro enfoque es utilizar observadores dinámicos de alta ganancia como para estimar la derivada de una señal, Dabroom y Khalil (1997). Se han presentado algoritmos de diferenciación, realizados con dinámicas continuas y homogéneas, que convergen a la estimación de la derivada en tiempo finito, Andrieu et al. (2008).

En particular, el trabajo de Levant (1998) demostró que un sistema dinámico continuo empleado como diferenciador no es capaz de estimar exactamente las derivadas de una señal si la derivada n -ésima no es desvaneciente. Levant (2003) propone un diferenciador discontinuo, basado en modos deslizantes de orden superior (cuya dinámica se muestra en (1.1)), el cual es capaz de reconstruir exacta y robustamente una señal hasta la $n - 1$ derivadas, siempre y cuando la n -ésima derivada de esta sea acotada; a (1.1) se le conoce como “diferenciador de Levant de orden $n - 1$ ”.

Partiendo de la señal sin ruido $f_0(t)$ y definiendo las variables $\xi_i = f_0^{(n-i)}$ con $i = n, n - 1, \dots, 1$; siendo $f_0^{(n-i)}(t) = \frac{d^{(n-i)}}{dt^{(n-i)}} f_0(t)$, y el estimado de la señal y sus derivadas denotado como $\hat{\xi}_i$, el algoritmo de diferenciación propuesto por Levant para estimar la señal y sus $n - 1$ derivadas,

está modelado por

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\xi}}_i &= -k_i |\hat{\xi}_n - \xi_n|^{\frac{i-1}{n}} \text{sign}(\hat{\xi}_n - \xi_n) + \hat{\xi}_{i-1}, & i = n, n-1, \dots, 2 \\ \dot{\hat{\xi}}_1 &= -k_1 \text{sign}(\hat{\xi}_n - \xi_n);\end{aligned}\tag{1.1}$$

Las propiedades teóricas de estabilidad en tiempo finito y robustez cuando la derivada n de la señal a diferenciar no se desvanece en el origen, pero es acotada, hacen de (1.1) una excelente opción cuando es necesario obtener las derivadas de una señal. Estas propiedades se han demostrado por medio de métodos geométricos (Levant (1998)) y usando las propiedades de homogeneidad de (1.1) (Levant (2005)); sin embargo, con estas demostraciones no es posible el diseño de las ganancias, que es una parte esencial para la implementación.

Actualmente, la sintonización de las ganancias k_i de (1.1) para órdenes de diferenciación iguales o superiores a dos es un problema poco explorado. Dentro del trabajo de Levant (2003) se presenta la selección de unas ganancias que hacen que el diferenciador converja exactamente y en tiempo finito hasta la quinta derivada de la señal; es decir para cuando $n = 6$. Es importante destacar que estas ganancias son constantes y pueden ser escaladas según la señal a derivar; sin embargo, éstas han sido seleccionadas a través de simulaciones numéricas y no hay prueba formal de que estas ganancias hagan que el error de diferenciación converja a cero.

El trabajo de Reichhartinger et al. (2017) representa el diferenciador de Levant con un sistema dinámico pseudolineal de la forma $\dot{\hat{\xi}} = M(\hat{\xi}_n)\hat{\xi}$ y considerando que la matriz $M(\hat{\xi}_n)$ es constante se sintonizan las ganancias tal que $M(\hat{\xi}_n)$ sea Hurwitz; sin embargo, dentro de la matriz $M(\hat{\xi}_n)$ existen singularidades y por la falta de suavidad no existe una prueba teórica de que el error de diferenciación converja a cero.

El método directo para verificar estabilidad de trayectorias en el sentido de Lyapunov, Khalil (2002), es una de las herramientas más usadas en el análisis y diseño de sistemas dinámicos no lineales; por medio de este método es posible diseñar los parámetros de (1.1).

El diferenciador de primer orden, basado en (1.1) cuando $n = 2$, también conocido como el algoritmo super twisting, ha sido ampliamente estudiado y se han propuesto varias funciones de Lyapunov para éste (Polyakov y Poznyak (2009), Moreno y Osorio (2012)). Incluso, existe una forma para hallar las ganancias óptimas del super twisting en presencia de ruido, la cual es presentada por Angulo et al. (2012).

Para el diferenciador de segundo orden, Aparicio Martínez (2012) propone una función de Lyapunov que está basada en la planteada por Moreno y Osorio (2012) más otros términos. También presenta un juego de ganancias (k_3, k_2, k_1) calculado a partir de dicha función de Lyapunov. Variando los coeficientes de esta función de Lyapunov se mostró que se podrían calcular distintos juegos de ganancias; sin embargo, siendo estos fijos, deben resolverse numerosas y complicadas

desigualdades para obtenerlos.

Moreno (2012) encuentra una función de Lyapunov para el diferenciador de Levant de segundo orden, la cual es una forma cuadrática que no es diferenciable y presenta tres juegos de ganancias que deben satisfacer distintas desigualdades.

El trabajo de Ortíz Ricardez (2015) presenta una función de Lyapunov basada en formas generalizadas. Para probar que es positiva definida y su derivada es negativa definida se hace uso del Teorema de Polya se construyen desigualdades lineales y se encuentra un juego de ganancias que satisface dichas desigualdades.

Recientemente, para el diferenciador de orden arbitrario (1.1), Cruz-Zavala y Moreno (2016) proponen una función de Lyapunov suave que permite calcular las ganancias de (1.1). Además, por la estructura recursiva del diferenciador, estas ganancias también garantizan estabilidad del origen de el error de diferenciación para órdenes inferiores. Sin embargo, resultados numéricos indican que para órdenes inferiores, estas ganancias están sobrecalculadas en comparación a las obtenidas con la función de Lyapunov para el algoritmo de diferenciación de orden menor.

Una vez fijado n , es importante notar que si se necesita un diferenciador de orden mayor a $n - 1$, se deben recalcular todas las ganancias, porque las antes calculadas servirán para diferenciadores de orden menor o igual a $n - 1$ y, debido a que podrían sobreestimarse de las ganancias del diferenciador para órdenes inferiores, no se recomienda calcular parámetros para el diferenciador de orden $n - 1$ cuando sólo se requieren $n - j$ (con $2 \leq j \leq n - 2$) derivadas.

Para obtener condiciones sobre las ganancias $(k_n, k_{n-1}, \dots, k_1)$ lo menos conservadoras posibles, sería deseable calcular el conjunto de ganancias del diferenciador de orden $n - 2$ (k_{n-1}, \dots, k_1) y, si es necesario incrementar un orden de diferenciación reutilizar estas ganancias en el diferenciador de orden $n - 1$ y sólo calcular la condición que debe satisfacer k_n .

1.2. Motivación

Con las funciones de Lyapunov existentes actualmente para el diferenciador de Levant, una vez fijado el orden de diferenciación, es imposible reutilizar las ganancias calculadas para diferenciadores de orden superior. Es posible hacerlo a la inversa (calcular ganancias de diferenciador de orden $n - 1$ y usarlas para diferenciadores de orden menor). Por otra parte, se ha ilustrado con cálculos numéricos que estas ganancias calculadas para el diferenciador de orden $n - 1$ y usadas para diferenciadores de orden menor, satisfacen condiciones más fuertes que aquellas calculadas por medio de la función de Lyapunov correspondiente para el diferenciador de menor orden.

El propósito de este trabajo es hallar una familia de funciones de Lyapunov para una clase de diferenciadores homogéneos de orden $n - 1$, dentro de la cual está el caso particular del

diferenciador de Levant, que haga posible que una vez calculadas las ganancias $(k_n, k_{n-1}, \dots, k_1)$, éstas puedan ser utilizadas para el diferenciador de orden n y sólo deba calcularse la condición sobre la ganancia faltante k_{n+1} y así recursivamente. Con esta función de Lyapunov, se desea facilitar el cálculo de ganancias en el caso de necesitar un orden de diferenciación extra y al calcularse las ganancias a partir de ordenes inferiores del diferenciador, se conjetura que al no sobreestimar las ganancias para los diferenciadores de orden menor puede obtenerse un conjunto de ganancias admisibles más grande que por el método convencional (las funciones de Lyapunov de Cruz-Zavala y Moreno (2016)).

1.3. Objetivo

El objetivo principal de esta tesis es proponer una función de Lyapunov que permita el cálculo recursivo de las ganancias del diferenciador de Levant de orden arbitrario tomando como caso base de la recursividad las ganancias del diferenciador de algún orden inferior.

Como objetivo particular se busca presentar condiciones sobre las ganancias del diferenciador de orden dos calculadas a partir de las ganancias del diferenciador de primer orden.

La metodología para cumplir los objetivos aquí presentados es buscar una función de Lyapunov a partir del trabajo de Cruz-Zavala y Moreno (2016) y calcular el conjunto de ganancias por medio de ésta para el caso nominal: cuando $f^{(n)}(t) = 0$, $0 \leq t$ y mostrar que es posible usar las ganancias calculadas para cuando $f^{(n)}(t) \neq 0$.

1.4. Estructura del trabajo

En el Capítulo 2, se presenta el concepto de homogeneidad y es introducida una familia de algoritmos de diferenciación homogéneos que contienen como caso particular al diferenciador de Levant. También se muestra la función de Lyapunov que se propuso en el trabajo de Cruz-Zavala y Moreno (2016), que fue la base de esta tesis así como un ejemplo motivacional para introducir la necesidad de proponer otra función de Lyapunov para cumplir el objetivo de la tesis.

En el Capítulo 3 se presenta la contribución principal de esta tesis, que es una familia de funciones de Lyapunov para una clase de diferenciadores homogéneos, entre los cuales está el algoritmo propuesto por Levant y además se muestran las propiedades de recursividad de la misma y como estas propiedades facilitan el cálculo del conjunto de ganancias cuando se desea incrementar el orden de diferenciación. A lo largo de la tesis, los cálculos del conjunto de ganancias se hacen considerando el caso nominal que es cuando la señal $f^{(n)}(t) = 0$, la cual es tomada en cuenta como perturbación, excepto en la Sección 3.1; ahí se muestra como utilizar el conjunto de ganancias calculado con el caso nominal, para cuando $f^{(n)}(t) \neq 0 \forall t \geq 0$.

Se calcula el conjunto de ganancias del diferenciador de segundo orden con la función de Lyapunov propuesta y se compara contra el conjunto de ganancias obtenido con la función de Lyapunov de Cruz-Zavala y Moreno (2016) y contra la condición Hurwitz del diferenciador lineal; estos resultados se muestran en el Capítulo 4.

Finalmente, en el Capítulo 5, se presentan las conclusiones.

Capítulo 2

Preliminares

A lo largo de este trabajo se usa la siguiente notación. Para una variable real $z \in \mathbb{R}$ y un número real $m \in \mathbb{R}$ el símbolo $[z]^m$ es la potencia signada m de z , es decir

$$[z]^m = |z|^m \text{sign}(z)$$

de acuerdo a lo anterior

$$\begin{aligned} [z]^0 &= \text{sign}(z) \\ \frac{d}{dt} [z]^m &= m|z|^{m-1} \\ \frac{d}{dt} |z|^m &= m[z]^{m-1} \end{aligned}$$

2.1. Homogeneidad ponderada

Definición 1 (Bacciotti y Rosier (2001)) Sea el conjunto de coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$ en \mathbb{R}^n . Sea $r = (r_1, \dots, r_n)$ un conjunto de exponentes reales positivos.

- La familia de dilataciones $(\delta_\epsilon^r)_{\epsilon > 0}$ (para el vector asociado a r) está definida por

$$\delta_\epsilon^r(x) := (\epsilon^{r_1} x_1, \dots, \epsilon^{r_n} x_n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \epsilon > 0$$

donde los valores r_i corresponden a las ponderaciones de las coordenadas x .

- Una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice δ^r -homogénea de grado m ($m \in \mathbb{R}$) si

$$V(\delta_\epsilon^r(x)) = \epsilon^m V(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \epsilon > 0$$

- Un campo vectorial $f = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ se dice δ^r -homogéneo de grado k si las componentes f_i de f son δ^r -homogénea de grado $k + r_i$ para cada i ; esto es,

$$f_i(\epsilon_1^r x_1, \dots, \epsilon_n^r x_n) = \epsilon^{k+r_i} f_i(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \forall i \in [1, n] \subset \mathbb{N}$$

Definición 2 Sean x y r como en la Definición 1, entonces la norma δ^r -homogénea es un mapa $x \mapsto \|x\|_{r,q}$, donde para cada $q \geq 1$

$$\|x\|_{r,q} := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{q}{r_i}} \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

En particular, el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_{r,q} = 1\}$ corresponde a la esfera homogénea unitaria.

Lema 1 Sea $(\delta_\epsilon^r)_{\epsilon > 0}$ cualquier familia de dilataciones en \mathbb{R}^n y sean V_1, V_2 (f_1, f_2 , respectivamente) funciones homogéneas (campos vectoriales, respectivamente) de grado m_1, m_2 , (k_1, k_2 , respectivamente) con respecto a la dilatación $(\delta_\epsilon^r)_{\epsilon > 0}$. Entonces

- $V_1 V_2$, (respectivamente $V_1 f_1, [f_1, f_2]$) es homogénea de grado $m_1 + m_2$ ($m_1 + k_1, k_1 + k_2$, respectivamente).
- $\frac{\partial V_1}{\partial x_i}$ es homogénea de grado $m_1 - r_i$ donde r_i es la ponderación del estado x_i .
- $\dot{V}_1 = \langle \Delta V_1, f_1 \rangle$ es homogénea de grado $m_1 + k_1$.
- Existe una constante $c_2 > 0$ tal que $V_1(x) \leq c_2 \|x\|_{r,p}^{m_1}$. Además, si $0 < V_1(x)$, existe una constante c_1 tal que $c_1 \|x\|_{r,p}^{m_1} \leq V_1(x)$

■

El grado de homogeneidad de una constante es cero. Además si dos funciones son homogéneas con el mismo grado, la suma de éstas también es una función homogénea del mismo grado. Las características más importantes de la homogéneidad ponderada son (Bacciotti y Rosier (2001))

- Si el origen de un sistema con campo vectorial homogéneo es localmente atractivo, entonces por la homogeneidad se puede afirmar que el origen de ese sistema es Global y Asíntoticamente Estable (GAE).
- Si el campo vectorial f del sistema es homogéneo de grado k y existen soluciones para todo $t > t_0$ para cada condición inicial $x_0 = x(t_0)$, entonces las soluciones satisfacen $\delta_\epsilon^r x(\epsilon^k t, x_0) = x(t, \delta_\epsilon^r x_0)$

2.2. Diferenciador de Levant de orden arbitrario

Se tiene una señal $f_0(t)$, que es la señal base a derivar y que es $n - 1$ veces diferenciable. Para la derivada $(n - 1)$ de esta señal existe una constante conocida Lipschitz \mathcal{L} ; es decir, $|f_0^{(n)}(t)| \leq \mathcal{L}$.

Definiendo las variables: $\xi_n = f_0(t)$, $\xi_{n-1} = \dot{f}_0(t), \dots, \xi_1 = f_0^{(n-1)}(t)$, donde $f_0^{(j)}(t) = \frac{d^j}{dt^j} f_0(t)$ para $j = 1, \dots, n$, una representación en variables de estado de la señal base es

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_i &= \xi_{i-1} \quad i = n, \dots, 2 \\ \dot{\xi}_1 &= f_0^{(n)}(t).\end{aligned}$$

Para estimar la señal base y sus derivadas, se considera la siguiente familia de diferenciadores

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\xi}}_i &= -k_i [\hat{\xi}_n - \xi_n]^{\frac{1-d(i-2)}{1-d(n-1)}} + \hat{\xi}_{i-1}, \quad i = n, \dots, 2 \\ \dot{\hat{\xi}}_1 &= -k_1 [\hat{\xi}_n - \xi_n]^{\frac{1+d}{1-d(n-1)}};\end{aligned}\tag{2.1}$$

que son homogéneos con las ponderaciones $r_i = r_1 - (i-1)d$ para cada coordenada ($\hat{\xi}_i$) con $i = n, \dots, 1$, y con grado de homogeneidad $-r_1 \leq d \leq 0$ donde, sin pérdida de generalidad, $r_1 = 1$. La familia de diferenciadores queda parametrizada por $-1 \leq d \leq 0$. Para el caso cuando $d = 0$, se recupera el diferenciador lineal y para $d = -1$ se obtiene el diferenciador de Levant de orden $n-1$ (Levant (2003)), el cual tiene una dinámica discontinua y sus soluciones son entendidas en el sentido de Filippov (1988).

Definiendo el error de diferenciación como $\varepsilon \triangleq \hat{\xi}_i - \xi_i$, su dinámica puede ser reescrita

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_i &= -k_i [\varepsilon_n]^{\frac{1-d(i-2)}{1-d(n-1)}} + \varepsilon_{i-1}, \quad i = n, \dots, 2, \\ \dot{\varepsilon}_n &= -k_1 [\varepsilon_n]^{\frac{1+d}{1-d(n-1)}} - f^{(n)}(t)\end{aligned}\tag{2.2}$$

Particularizando en el caso de interés, cuando $d = -1$, el error de diferenciación es

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_i &= -k_i [\varepsilon_n]^{\frac{i-1}{n}} + \varepsilon_{i-1}, \quad i = n, \dots, 2 \\ \dot{\varepsilon}_1 &= -k_1 [\varepsilon_n]^0 - f^{(n)}(t)\end{aligned}\tag{2.3}$$

Por simplicidad, se propone realizar el cambio de coordenadas en el sistema (2.2) dado por:

$$z_i = \frac{\varepsilon_i}{k_{i+1}}, \quad i = n, \dots, 1$$

suponiendo que $f^{(n)}(t) = 0$, el error de diferenciación en las nuevas coordenadas se escribe

$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= -\tilde{k}_i ([z_n]^{\frac{i-1}{n}} - z_{i-1}), \quad i = n, \dots, 2 \\ \dot{z}_1 &= -\tilde{k}_1 [z_n]^0\end{aligned}\tag{2.4}$$

con $k_{n+1} = 1$, $\tilde{k}_i = \frac{k_i}{k_{i+1}}$, $i = n, \dots, 1$.

2.3. Función de Lyapunov presentada por Cruz-Zavala y Moreno (2016)

Para el diferenciador de Levant de orden arbitrario sólo existe una clase de funciones de Lyapunov y es la propuesta por Cruz-Zavala y Moreno (2016); es por eso que se toma como base para cumplir el objetivo principal de esta tesis.

La función de Lyapunov que Cruz-Zavala y Moreno (2016) ($V_{CM}(z)$) presentan para cualquier diferenciador de la familia mostrada en (2.1) y de orden arbitrario es

$$V_{CM_n}(z) = \sum_{j=0}^{n-2} \beta_{j+1} \mathbf{Z}_{n-j}(z_{n-j}, z_{n-j-1}) + \beta_n \frac{1}{p} |z_1|^p \quad (2.5)$$

donde

$$\mathbf{Z}_i(z_i, z_{i-1}) = \frac{r_i}{p} |z_i|^{\frac{p}{r_i}} - z_i \lceil z_{i-1} \rceil^{\frac{p-r_i}{r_i-1}} + \frac{p-r_i}{p} |z_{i-1}|^{\frac{p}{r_i-1}},$$

con $r_i = 1 - (i-1)d$, para $i = n, \dots, 2$

con grado de homogeneidad $p \geq 2 - (2n-3)d$.

En el trabajo de Cruz-Zavala y Moreno (2016), se propone que las ganancias del diferenciador de orden $n-1$ se calculan desde \tilde{k}_2 hasta \tilde{k}_n con $\tilde{k}_1 > 0$.

Para probar esa proposición se definen las hipersuperficies \mathfrak{Z}_{n-j} para $j = 1, \dots, n-1$

$$\mathfrak{Z}_{n-1} = \left\{ \lceil z_n \rceil^{\frac{r_{n-1}}{r_n}} = z_{n-1} \right\},$$

$$\mathfrak{Z}_{n-j} = \left\{ \lceil z_n \rceil^{\frac{r_{n-1}}{r_n}} = z_{n-1} \wedge \dots \wedge \lceil z_n \rceil^{\frac{r_{n-j}}{r_n}} = z_{n-j} \right\}$$

donde “ \wedge ” significa la concatenación de las hipersuperficies.

Si se evalúa la dinámica del error de diferenciación de orden $n-1$ (2.4) sobre la hipersuperficie $n-j$, se recupera la dinámica del error de diferenciación de orden $n-j-1$. Lo mismo sucede con la función de Lyapunov (2.5) y su derivada.

Las ganancias del diferenciador de orden $n-1$ pueden comenzar a calcularse a partir de evaluar la derivada de (2.5) en la hipersuperficie \mathfrak{Z}_1 . En \mathfrak{Z}_1 la dinámica del error de diferenciación y función de Lyapunov es la del diferenciador de orden cero, así se encuentra que $\tilde{k}_1 > 0$. En \mathfrak{Z}_2 la dinámica del error de diferenciación y función de Lyapunov es la del diferenciador de orden uno y así se obtiene la condición sobre la ganancia \tilde{k}_2 . Posteriormente se evalúa la derivada de (2.5) en la hipersuperficie \mathfrak{Z}_3 , en donde se recupera la dinámica del diferenciador de orden

dos y con las ganancias \tilde{k}_1 y \tilde{k}_2 se calcula la condición sobre \tilde{k}_3 . Este procedimiento se hace recursivamente hasta obtener la condición sobre la ganancia \tilde{k}_n .

Como consecuencia de lo anterior se concluye que para una $1 \leq j \leq n - 1$, las ganancias $(\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_{n-j})$ son apropiadas para el diferenciador de orden $n - j - 1$; sin embargo, estas ganancias fueron calculadas con una función de Lyapunov con grado de homogeneidad superior al mínimo requerido para el diferenciador de orden $n - j - 1$.

Si se quisieran obtener las condiciones sobre las ganancias del diferenciador de orden n , el grado de homogeneidad de la función de Lyapunov se debe modificar a $p \geq 2 - (2n - 1)d$, entonces se deberán recalculer todas las condiciones sobre las ganancias $\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_n$ y, debido al incremento del grado de homogeneidad, estas nuevas ganancias podrían ser más conservadoras que las anteriormente calculadas; pero las calculadas previamente no sirven para obtener la condición sobre la ganancia \tilde{k}_{n+1} .

Una opción para poder incrementar el orden de diferenciación sin recalculer las ganancias obtenidas para diferenciadores de orden menor es elegir el grado de homogeneidad de la función de Lyapunov mucho mayor que el mínimo establecido; es decir, considerar $h \gg n$ en $p \geq 2 - (2h - 3)d$. Sin embargo, esa función de Lyapunov sólo servirá hasta el diferenciador de orden $h - 1$ y por cálculos numéricos se han obtenido algunos resultados en los que las ganancias para diferenciadores de órdenes menores son sobrecalculadas. A continuación se muestra un ejemplo para ilustrar lo anterior.

En esta tesis la numeración de los estados, de las ganancias y de las hipersuperficies \mathfrak{Z} está en orden inverso a la mostrada en Cruz-Zavala y Moreno (2016); es decir, para $i = n, \dots, 1$ e $\bar{i} = 1, \dots, n$; el estado z_i y la ganancia \tilde{k}_i de esta tesis corresponde al estado $z_{\bar{i}}$ y ganancia $\tilde{k}_{\bar{i}}$ del artículo citado. Las hipersuperficies $\mathfrak{Z}_i = \mathfrak{Z}_{\bar{i}}$ con $i = n - 1, \dots, 1$ e $\bar{i} = 1, \dots, n - 1$, donde \mathfrak{Z}_i corresponde a la nomenclatura de esta tesis.

Además de estar invertida la numeración de las funciones $\mathbf{Z}(\cdot)$, se decidió realizarle un corrimiento a la misma con respecto al artículo de Cruz-Zavala y Moreno (2016); esto es $\mathbf{Z}_i(\cdot) = \mathbf{Z}_{\bar{i}}(\cdot)$ con $i = n, \dots, 2$ e $\bar{i} = 1, \dots, n - 1$, donde $\mathbf{Z}_i(\cdot)$ es la numeración usada en esta tesis.

2.3.1. Ejemplo motivacional

Para los casos particulares de los diferenciadores homogéneos (con cualquier $-1 \leq d \leq 0$) de primer y segundo orden, con su respectiva función de Lyapunov de la estructura (2.5) se muestra como pueden ser calculadas las ganancias admisibles \tilde{k}_1 y \tilde{k}_2 y se calculan las condiciones de las mismas para el caso cuando $d = -1$.

Debido a que el grado de homogeneidad de las funciones de Lyapunov para los diferenciadores

de primer y segundo orden son diferentes, se obtienen distintos conjuntos de ganancias para \tilde{k}_1 y \tilde{k}_2 para cada caso del diferenciador, a pesar de que las condiciones a satisfacer para calcular dichos conjuntos son idénticas, exceptuando en grado de homogeneidad de la función de Lyapunov.

Este ejemplo que busca ilustrar con resultados numéricos lo que sucede con el conjunto de ganancias \tilde{k}_1 y \tilde{k}_2 del diferenciador con diferentes grados de homogeneidad de la función de Lyapunov.

Diferenciador de primer orden (n=2)

La función de Lyapunov para error de diferenciación de primer orden, a partir de (2.5) es

$$V_{CM_2}(z_1, z_2) = \beta_1 \mathbf{Z}_2(z_1, z_2) + \frac{\beta_2}{p} |z_1|^p \quad (2.6)$$

con

$$\mathbf{Z}_2(z_2, z_1) = \frac{r_2}{p} |z_2|^{\frac{p}{r_2}} - z_2 \lceil z_1 \rceil^{\frac{p-r_2}{r_1}} + \frac{p-r_2}{p} |z_1|^{\frac{p}{r_1}}$$

Se eligen $\beta_1 = \beta_2 = 1$ y $p = 2 - d$. Los pesos de homogeneidad de los estados, son $r_2 = 1 - d$ y $r_1 = 1$.

Sin pérdida de generalidad, la única condición sobre la ganancia \tilde{k}_1 es que sea positiva. Con esta condición, \tilde{k}_2 debe satisfacer la siguiente desigualdad para que la derivada de la función de Lyapunov $V_{CM_2}(\cdot)$ sea negativa definida

$$\Gamma_{21_2} \triangleq \max_{z \in S} \{\omega_{22}(z)\} < \frac{\tilde{k}_2}{\tilde{k}_1} \quad (2.7)$$

con

$$\omega_{22}(z) \triangleq \frac{(p-r_2)|z_1|^{p-r_2-1} \lceil z_2 \rceil^{r_1+d} \left(z_2 - \lceil z_1 \rceil^{r_2} - \left(1 + \frac{\beta_2}{\beta_1(p-r_2)}\right) \right)}{\left(\lceil z_2 \rceil^{\frac{p-r_2}{r_2}} - \lceil z_1 \rceil^{p-r_2} \right) \left(\lceil z_2 \rceil^{\frac{r_1}{r_2}} - z_1 \right)}$$

La función $\omega_{22}(z)$ es homogénea de grado cero, de modo que alcanza su máximo en la esfera unitaria homogénea S ,

Para el caso del diferenciador de Levant ($d = -1$ y $p = 3$), evaluando numéricamente la función $\omega_{22}(z)$ en S se obtiene que las ganancias \tilde{k}_1 y \tilde{k}_2 deben satisfacer

$$2 < \frac{\tilde{k}_2}{\tilde{k}_1} \quad (2.8)$$

$$\Gamma_{21_2} = 2.$$

Diferenciador de segundo orden (n=3)

En este caso, la función de Lyapunov es

$$V_{CM_3}(z) = \beta_1 \mathbf{Z}_3(z_3, z_2) + \beta_2 \mathbf{Z}_2(z_2, z_1) + \beta_3 \frac{1}{p} |z_1|^p \quad (2.9)$$

donde

$$\mathbf{Z}_i(z_i, z_{i-1}) = \frac{r_i}{p} |z_i|^{\frac{p}{r_i}} - z_i [z_{i-1}]^{\frac{p-r_i}{r_{i-1}}} + \frac{p-r_i}{p} |z_{i-1}|^{\frac{p}{r_{i-1}}}, \quad i = 3, 2.$$

Se eligen $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$, los pesos de homogeneidad son $r_3 = 1 - 2d$, $r_2 = 1 - d$ y $r_1 = 1$. $p = 2 - 3d$.

La derivada de $V_{CM_3}(z)$ es

$$\dot{V}_{CM_3}(z) = \underbrace{-\tilde{k}_3 \beta_1 \left([z_3]^{\frac{p-r_3}{r_3}} - z_2 \left[z_2 \right]^{\frac{p-r_3}{r_2}} \right)}_{=\eta_1} \left([z_3]^{\frac{r_2}{r_3}} - z_2 \right) + \mu_1(z, \tilde{k}_2, \tilde{k}_1) \quad (2.10)$$

≤ 0

cuando $\mathfrak{Z}_2 = \left\{ z_3 = [z_2]^{\frac{r_3}{r_2}} \right\}$, la función $\eta_1(\cdot) = 0$.

De evaluar la derivada de $V_{CM_3}(\cdot)$ en \mathfrak{Z}_2 y sabiendo que $\tilde{k}_1 > 0$, se obtiene que \tilde{k}_2 debe satisfacer

$$\Gamma_{213} \triangleq \max_{z \in S} \{ \omega_{23}(z) \} < \frac{\tilde{k}_2}{\tilde{k}_1} \quad (2.11)$$

con

$$\omega_{23}(z) \triangleq \frac{(p-r_2) |z_1|^{p-r_2-1} [z_2]^{r_1+d} \left(z_2 - [z_1]^{r_2} - \left(1 + \frac{\beta_3}{\beta_2(p-r_2)} \right) \right)}{([z_2]^{\frac{p-r_2}{r_2}} - [z_1]^{p-r_2})([z_2]^{\frac{r_1}{r_2}} - z_1)}.$$

La función $\omega_{23}(z)$ es homogénea de grado cero, de modo que alcanza su máximo en la esfera unitaria homogénea S .

Para el caso del diferenciador de Levant ($d = -1$ y $p = 5$), evaluando numéricamente la función $\omega_{23}(z)$ en S se obtiene que las ganancias \tilde{k}_1 y \tilde{k}_2 deben satisfacer

$$4 < \frac{\tilde{k}_2}{\tilde{k}_1}; \quad (2.12)$$

$$\Gamma_{213} = 4$$

La función a maximizar ($\omega_{22}(\cdot)$) en la desigualdad que deben satisfacer las ganancias \tilde{k}_2 y \tilde{k}_1 , para $n = 2$ mostrada en (2.7) es exactamente igual a la función ($\omega_{23}(\cdot)$) de la desigualdad (2.11)

$p = 3$	$2k_1 < k_2^2$
$p = 5$	$4k_1 < k_2^2$
$p = 7$	$6k_1 < k_2^2$

Tabla 2.1: Condiciones sobre las ganancias k_1 , k_2 del diferenciador de Levant de orden uno calculadas por medio de la función de Lyapunov (2.6) con distintos grados de homogeneidad.

para $n = 3$, lo único que difiere en ellas es el grado de homogeneidad de la función de Lyapunov p . Con estos resultados numéricos, se puede observar que mientras mayor sea p , más grande debe seleccionarse la ganancia \tilde{k}_2 con respecto a \tilde{k}_1 .

Las ganancias \tilde{k}_1 y \tilde{k}_2 obtenidas con las condiciones del diferenciador de orden dos pueden usarse para el diferenciador de orden uno; sin embargo ellas son calculadas con un grado de homogeneidad superior al mínimo para $n = 2$, por lo que se ilustra que son sobredeterminadas.

Por otro lado, a partir de la condición (2.7), no se puede calcular la condición faltante \tilde{k}_3 para el diferenciador de orden dos, porque el grado de homogeneidad usado para (2.7) es menor que el mínimo requerido para la función de Lyapunov de $n = 3$.

Si se quisieran utilizar las ganancias \tilde{k}_1 y \tilde{k}_2 del diferenciador de orden uno en diferenciadores de orden superior, estas deben calcularse con $p \geq 5$; si se elige $p = 5$, a partir de esas ganancias sólo puede calcularse \tilde{k}_3 , para $n = 3$ pero ya no se podría incrementar el orden de diferenciación; si $p = 7$, además de poder calcular \tilde{k}_3 , se puede calcular hasta \tilde{k}_4 para $n = 4$ y así sucesivamente; sin embargo, mientras mayor sea p , menor puede ser el conjunto de ganancias admisibles para diferenciadores de orden menor. En la Tabla 2.1 se muestran las condiciones que deben satisfacer las ganancias originales (k_1 y k_2) para el diferenciador de primer orden obtenidas con diferentes valores de p .

Las regiones de ganancias admisibles de la Tabla 2.1 se ilustran en la Figura 2.1, en donde la región magenta es para $p = 7$, la región azul es para $p = 5$ y ellas están contenidas en la región verde que es con $p = 3$.

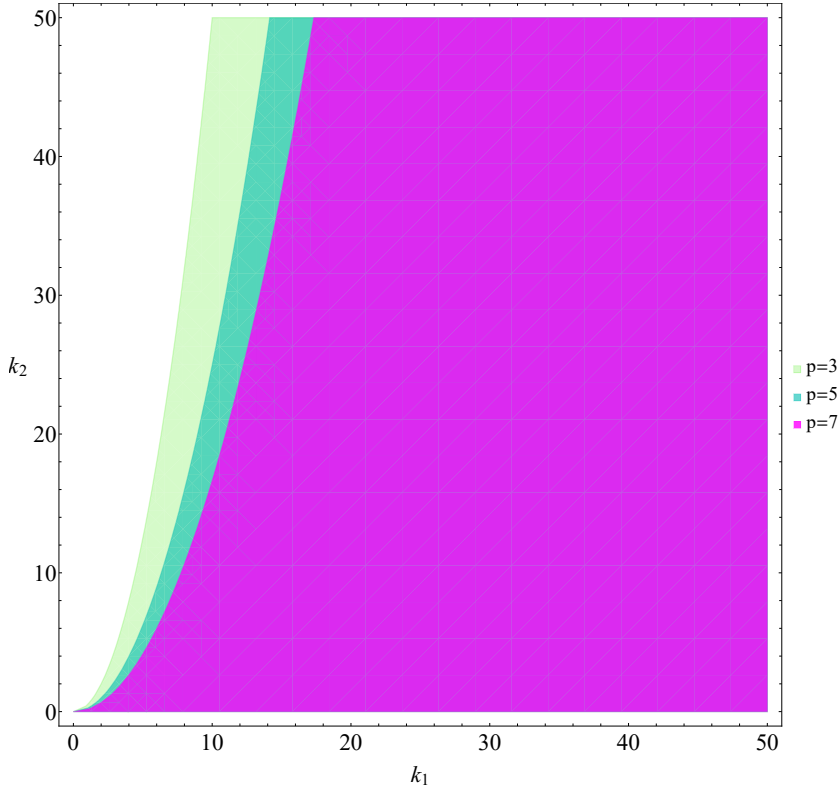


Figura 2.1: Regiones de ganancias admisibles para diferenciador de Levant de primer orden obtenidas por medio de la función de Lyapunov (2.6) con distintos grados de homogeneidad.

Capítulo 3

Función de Lyapunov propuesta para el diferenciador de Levant

Al calcular el conjunto de ganancias para el diferenciador de orden $n - 1$ con la función de Lyapunov homogénea (V_n) de grado $p = 2 - (2n - 3)d$, el problema de querer aumentar un orden de diferenciación, sin recalcular las ganancias, aparece porque para calcular la ganancia faltante, la función de Lyapunov (V_{n+1}) para el diferenciador de orden n debe ser, al menos, de grado de homogeneidad $p = 2 - (2n - 1)d$.

Para no recalcular todas las ganancias al incrementar el orden de diferenciación, parece necesario que parte de la función V_{n+1} tenga, de alguna forma, en su estructura a V_n y que además V_{n+1} sea homogénea de grado $p = 2 - (2n - 1)d$.

Aprovechando la forma de las funciones presentadas por Cruz-Zavala y Moreno (2016) y como se desvanecen en ciertas hipersuperficie, tomando en cuenta la dinámica del error de diferenciación de orden $n - 1$ dado en (2.4), para cada $n \geq 2$, se define la función homogénea positiva semidefinida $\mathbf{Z}_n(z_n, z_{n-1})$

$$\mathbf{Z}_n(z_n, z_{n-1}) = \frac{r_n}{p_n} |z_n|^{\frac{p_n}{r_n}} - z_n [z_{n-1}]^{\frac{p_n - r_n}{r_{n-1}}} + \frac{p_n - r_n}{p_n} |z_{n-1}|^{\frac{p_n}{r_{n-1}}} \quad (3.1)$$

con $p_n \geq 2 - (2n - 3)d$ esta función y sus derivadas se hacen cero en la hipersuperficie

$$\mathfrak{Z}_{n-1} = \left\{ [z_n]^{\frac{r_{n-1}}{r_n}} = z_{n-1} \right\}$$

y recordando que al evaluar la dinámica del error de diferenciación de orden $n - 1$ en \mathfrak{Z}_{n-1} se recupera la dinámica del error de diferenciación de orden $n - 2$, se hace la siguiente proposición.

Proposición 1 *Suponga que, para el diferenciador de orden $n - 2$, ya se han calculado las condiciones suficientes de las ganancias*

$$\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_{n-1}$$

(con el orden del sistema: $n - 1 > 2$) con una función de Lyapunov $V_{n-1}(z)$ que cumple con la estructura de (3.2), de grado de homogeneidad $p_{n-1} \geq 2 - (2n - 5)d$. Es decir, con ese conjunto de ganancias $\dot{V}_{n-1}(z) < 0$.

Entonces, se pueden usar las ganancias $\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_{n-1}$ del diferenciador de orden $n - 1$ y sólo calcular la condición sobre la ganancias faltante, \tilde{k}_n , por medio de la función de Lyapunov

$$V_n(z) = \mathbf{Z}_n(z_n, z_{n-1}) + \gamma_n \frac{p_{n-1}}{p_n} V_{n-1}(z_{n-1}, z_{n-2}, \dots, z_1)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} \quad (3.2)$$

de grado de homogeneidad $p_n \geq 2 - (2n - 3)d$ y $\gamma_n > 0$

Para el caso particular del diferenciador de primer orden la función de Lyapunov es

$$V_2(z) = \beta_1 \mathbf{Z}_2(z_2, z_1) + \frac{\beta_2}{p_2} |z_1|^{p_2}; \quad \text{con } p_2 \geq 2 - d, \quad 0 < \beta_1 \text{ y } 0 < \beta_2$$

Prueba de la Proposición 1 La derivada de (3.2) a lo largo de las trayectorias del diferenciador de orden $n - 1$ es

$$\dot{V}_n(z) = \frac{d\mathbf{Z}_n(z_n, z_{n-1})}{dt} + \gamma_n V_{n-1}(z_{n-1}, \dots, z_1)^{\frac{p_n - p_{n-1}}{p_{n-1}}} \dot{V}_{n-1}(z); \quad (3.3)$$

La función $\mathbf{Z}_n(z_n, z_{n-1})$ y sus derivadas se hacen cero en la hipersuperficie \mathfrak{Z}_{n-1} . En \mathfrak{Z}_{n-1} la derivada de la función de Lyapunov se reduce a

$$\dot{V}_n|_{\mathfrak{Z}_{n-1}} = \gamma_n V_{n-1}(z_{n-1}, \dots, z_1)^{\frac{p_n - p_{n-1}}{p_{n-1}}} \frac{\partial V_{n-1}(z)}{\partial z} \dot{z}|_{\mathfrak{Z}_{n-1}}$$

Como $\gamma_n V_{n-1}(z_{n-1}, \dots, z_1)^{\frac{p_n - p_{n-1}}{p_{n-1}}}$ es positiva definida, la única manera de que $\dot{V}_n|_{\mathfrak{Z}_{n-1}}$ sea negativa definida es que $\frac{\partial V_{n-1}}{\partial z} \dot{z}|_{\mathfrak{Z}_{n-1}} < 0$.

Sabiendo que $\dot{z}|_{\mathfrak{Z}_{n-1}}$ es la dinámica del error de diferenciación de orden $n - 2$, $\frac{\partial V_{n-1}}{\partial z} \dot{z}|_{\mathfrak{Z}_{n-1}}$ es la derivada de $V_{n-1}(z_{n-1}, \dots, z_1)$ a lo largo de las trayectorias del error de diferenciación de orden $n - 2$; como las condiciones que deben satisfacer las ganancias $\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_{n-1}$ para que $\frac{\partial V_{n-1}}{\partial z} \dot{z}|_{\mathfrak{Z}_{n-1}} < 0$ son las mismas que para las ganancias del diferenciador de orden $n - 2$, que ya fueron calculadas con anterioridad; sólo debe calcularse la condición sobre \tilde{k}_n .

A continuación se desarrolla $\dot{V}_n(z)$ para mostrar como debe ser calculada \tilde{k}_n .

$$\begin{aligned} \dot{V}_n(z) &= \frac{\partial \mathbf{Z}_n(z_n, z_{n-1})}{\partial z_n} \dot{z}_n + \frac{\partial \mathbf{Z}_n(z_n, z_{n-1})}{\partial z_{n-1}} \dot{z}_{n-1} + \gamma_n V_{n-1}(z_{n-1}, \dots, z_1)^{\frac{p_n - p_{n-1}}{p_{n-1}}} \dot{V}_{n-1}(z); \\ \dot{z}_n &= -\tilde{k}_n \left([z_n]^{\frac{1-d(n-2)}{1-d(n-1)}} - z_{n-1} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

definiendo

$$\begin{aligned}\eta_n(\cdot) &\triangleq \frac{\partial \mathbf{Z}_n(z_n, z_{n-1})}{\partial z_n} \left(\lceil z_n \rceil^{\frac{1-d(n-2)}{1-d(n-1)}} - z_{n-1} \right) \geq 0 \\ \mu_n(\cdot) &\triangleq \frac{\partial \mathbf{Z}_n(z_n, z_{n-1})}{\partial z_{n-1}} \dot{z}_{n-1} + \gamma_n V_{n-1}(z_{n-1}, \dots, z_1)^{\frac{p_n - p_{n-1}}{p_{n-1}}} \dot{V}_{n-1}(z)\end{aligned}$$

se rescribe $\dot{V}_n(z)$ como

$$\dot{V}_n(z) = -\tilde{k}_n \eta_n(\cdot) + \mu_n(\cdot) \quad (3.5)$$

La ganancia \tilde{k}_n debe calcularse tal que $\dot{V}_n(z) < 0$. Es decir, debe satisfacer

$$\max_{z \in S} \left\{ \frac{\mu_n(\cdot)}{\eta_n(\cdot)} \right\} < \tilde{k}_n \quad (3.6)$$

donde

$$\begin{aligned}\eta_n(\cdot) &\triangleq \frac{\partial \mathbf{Z}_n}{\partial z_n} \left(\lceil z_n \rceil^{\frac{1-d(n-2)}{1-d(n-1)}} - z_{n-1} \right) \geq 0 \\ \mu_n(\cdot) &\triangleq \frac{\partial \mathbf{Z}_n}{\partial z_{n-1}} \dot{z}_{n-1} + \gamma_n V_{n-1}^{\frac{p_n - p_{n-1}}{p_{n-1}}} \dot{V}_{n-1}\end{aligned}$$

La función $\mu_n(\cdot)$ no depende de la ganancia \tilde{k}_n ; $\mu_n(\cdot)$ es función de las ganancias $\tilde{k}_{n-1}, \dots, \tilde{k}_1$ y de los pesos de homogeneidad p_n y p_{n-1} . Además $\frac{\mu_n(\cdot)}{\eta_n(\cdot)}$ es una función homogénea de grado cero, entonces su máximo está sobre la esfera unitaria S .

Considere que la función $\mu_n(\cdot)$ no tiene signo bien definido, pero depende de la selección de ganancias $\tilde{k}_{n-1}, \dots, \tilde{k}_1$ y del grado de homogeneidad de la función de Lyapunov; así que, intuitivamente, mientras más grandes sean estas ganancias y p_n , mayor debería ser \tilde{k}_n para hacer la derivada de la función de Lyapunov (3.2) negativa definida.

Las ganancias para el diferenciador de orden $n - j$ con $j = n - 2, \dots, 2$, pueden ser calculadas de igual manera ya que provienen de una función de Lyapunov con la estructura de 3.2. De forma recursiva, a partir del caso base, se pueden calcular las ganancias del diferenciador de orden superior, para cualquier orden del diferenciador y para cualquier grado de homogeneidad del mismo entre $-1 \leq d \leq 0$.

Las ganancias (\tilde{k}_1 y \tilde{k}_2) y la función de Lyapunov del diferenciador de primer orden se consideran el caso base de la recursividad.

La función de Lyapunov del diferenciador de primer orden es como la que se propone en Cruz-Zavala y Moreno (2016): $V_2(z_2, z_1) = \beta_1 \mathbf{Z}_2(z_2, z_1) + \frac{\beta_2}{p_2} |z_1|^{p_2}$; con $\beta_1 = \beta_2 = 1$ y $p_2 = 3$, así que se obtiene como caso base de la recursividad la desigualdad (2.7).

El diferenciador de orden cero, cuya dinámica de error de diferenciación es

$$\dot{z}_1 = -\tilde{k}_1 [z_1]^{1+d} \quad (3.7)$$

y la candidata a función de Lyapunov

$$V_1(z_1) = \frac{1}{p_1} |z_1|^{p_1} \quad \text{con } p_1 \geq 2 + d$$

podrían tomarse como caso base de recursividad; sin embargo (3.8), es negativa definida sin importar el valor de p_1 y sólo \tilde{k}_1 debe ser positiva, así que, debido a la trivialidad del resultado, éste ya es considerado en el cálculo de ganancias para el diferenciador de primer orden considerando $p_1 = p_2 = 3$.

$$\dot{V}_1(z_1) = -\tilde{k}_1 |z_1|^{p_1+d} \quad (3.8)$$

3.1. Caso perturbado

Esta sección es exclusiva para el diferenciador de Levant, que es el único capaz de converger al estimado de la $n - 1$ derivada de la señal con perturbaciones no desvanecientes acotadas acopladas en el último canal.

Durante todo este trabajo se ha considerado el caso donde $f^{(n)}(t) = 0$ en la dinámica del error de diferenciación (2.2); sin embargo, al ser una señal a la cual no se tiene acceso (es desconocida) se considera como una perturbación, pero, se sabe que esta perturbación es acotada $|f^{(n)}(t)| \leq \mathcal{L}$ y que la ganancia k_1 debe seleccionarse $\mathcal{L} < k_1$, además las ganancias k_2, \dots, k_n deben satisfacer las condiciones que se imponen para hacer la derivada de la función de Lyapunov, a lo largo del sistema perturbado, negativa definida.

Sin embargo, una vez calculadas las condiciones sobre las ganancias del sistema nominal y seleccionados algunos valores de esas ganancias k_1, \dots, k_n , se puede probar con la derivada de la función de Lyapunov a lo largo del sistema perturbado, que con esas ganancias seleccionadas el diferenciador es capaz de rechazar una perturbación cuya cota máxima es $|f^{(n)}(t)| \leq \Delta_0$.

Una vez dado un juego de ganancias que hacen que la derivada de la función de Lyapunov V_n a lo largo de las trayectorias del sistema nominal, sea negativa definida, la cota máxima de la perturbación puede calcularse con el siguiente procedimiento.

La derivada de la función de Lyapunov a lo largo de las trayectorias del sistema perturbado es

$$\dot{V}_n(z) = \frac{d\mathbf{Z}_n(z_n, z_{n-1})}{dt} + \gamma_n V_{n-1}(z_{n-1}, \dots, z_1)^{\frac{p_n - p_{n-1}}{p_{n-1}}} \dot{V}_{n-1}(z); \quad (3.9)$$

a partir de ahora, por simplicidad de nomenclatura, se omitirá el argumento de las funciones $V_i(z)$ con $i = n - 1, \dots, 2$; pero se espera que se entienda que, por ejemplo, V_{n-1} se refiere a $V_{n-1}(z_{n-1}, \dots, z_1)$.

$$\dot{V}_n(z) = \frac{d\mathbf{Z}_n(z_n, z_{n-1})}{dt} + \gamma_n V_{n-1}^{\frac{p_n - p_{n-1}}{p_{n-1}}} \left(\sum_{i=2}^{n-1} \frac{\partial V_{n-1}}{\partial z_i} \dot{z}_i + \frac{\partial V_{n-1}}{\partial z_1} \left(-\tilde{k}_1 \left([z_n]^0 + \frac{1}{k_1} f^{(n)}(t) \right) \right) \right)$$

como $f^{(n)}(t) \leq \Delta_0$

$$\dot{V}_n \in \frac{d\mathbf{Z}_n}{dt} + \gamma_n V_{n-1}^{\frac{p_n - p_{n-1}}{p_{n-1}}} \left(\sum_{i=2}^{n-1} \frac{\partial V_{n-1}}{\partial z_i} \dot{z}_i - \tilde{k}_1 \frac{\partial V_{n-1}}{\partial z_1} \left([z_n]^0 + \frac{1}{k_1} [-\Delta_0, \Delta_0] \right) \right).$$

Desarrollando el último término de (3.1)

$$\begin{aligned} -\tilde{k}_1 \gamma_n V_{n-1}^{\frac{p_n - p_{n-1}}{p_{n-1}}} \frac{\partial V_{n-1}}{\partial z_1} \left([z_n]^0 + \frac{1}{k_1} f^{(n)}(t) \right) &= -\tilde{k}_1 \prod_{i=2}^{n-1} \gamma_{i+1} V_i^{\frac{p_{i+1} - p_i}{p_i}} \frac{\partial V_2}{\partial z_1} \times \\ &\times \left([z_n]^0 + \frac{1}{k_1} [-\Delta_0, \Delta_0] \right) \end{aligned}$$

con

$$\frac{\partial V_2}{\partial z_1} = -(p_2 - r_2) |z_1|^{p_2 - r_2 - r_1} \beta_1 \left(z_2 - [z_1]^{\frac{r_2}{r_1}} \right) + \beta_2 [z_1]^{p_2 - r_1}$$

cuando $k_1 > \Delta_0$

$$[z_n]^0 + \frac{1}{k_1} [-\Delta_0, \Delta_0] = [z_n]^0 \left[1 - \frac{\Delta_0}{k_1}, 1 + \frac{\Delta_0}{k_1} \right]$$

para no tratar con la inclusión de esta última expresión, se puede hallar la cota superior

$$-[z_n]^{\frac{p_2 - 1}{n}} \left([z_n]^0 + \frac{\Delta_0}{k_1} [-1, 1] \right) \leq \left(\frac{\Delta_0}{k_1} - 1 \right) |z_n|^{\frac{p_2 - 1}{n}}$$

La expresión $\frac{\partial V_2}{\partial z_1}$ puede ser escrita

$$\frac{\partial V_2}{\partial z_1} = -(p_2 - r_2) |z_1|^{p_2 - r_2 - r_1} \beta_1 \left(z_2 - [z_1]^{\frac{r_2}{r_1}} \right) + \beta_2 [z_1]^{p_2 - r_1} - [z_n]^{\frac{p_2 - 1}{n}} + [z_n]^{\frac{p_2 - 1}{n}}$$

con lo cual

$$-\tilde{k}_1 \frac{\partial V_2}{\partial z_1} \left([z_n]^0 + \frac{1}{k_1} [-\Delta_0, \Delta_0] \right) \leq \tilde{k}_1 \nu_n \left(1 + \frac{\Delta_0}{k_1} \right) - \tilde{k}_1 \left(1 - \frac{\Delta_0}{k_1} \right) |z_n|^{\frac{p_2 - 1}{n}}$$

con

$$\nu_n = (p_2 - r_2) |z_1|^{p_2 - r_2 - r_1} \beta_1 | -z_2 + [z_1]^{r_2} | + | [z_n]^{\frac{p_2 - 1}{n}} - \beta_2 [z_1]^{p_2 - r_1} | \geq 0$$

Entonces $\dot{V}_n(z)$ se puede escribir

$$\dot{V}_n(z) \leq W(z)$$

con

$$W(z) = \dot{\mathbf{Z}}_n + \gamma_n V_{n-1}^{\frac{p_n - p_{n-1}}{p_{n-1}}} \sum_{i=2}^{n-1} \frac{\partial V_{n-1}}{\partial z_i} \dot{z}_i + \tilde{k}_1 \prod_{i=2}^{n-1} \gamma_{i+1} V_i^{\frac{p_{i+1} - p_i}{p_i}} \times \\ \times \left[\nu_n \left(1 + \frac{\Delta_0}{k_1} \right) - \left(1 - \frac{\Delta_0}{k_1} \right) |z_n|^{\frac{p_2 - 1}{n}} \right]$$

note que cuando $\Delta_0 = 0$ la derivada de la función de Lyapunov a lo largo de las trayectorias del sistema nominal puede ser acotada por

$$\dot{V}_{nominal} \leq W_{nominal}(z)$$

con

$$W_{nominal} \triangleq \dot{\mathbf{Z}}_n + \gamma_n V_{n-1}^{\frac{p_n - p_{n-1}}{p_{n-1}}} \sum_{i=2}^{n-1} \frac{\partial V_{n-1}}{\partial z_i} \dot{z}_i + \tilde{k}_1 \prod_{i=2}^{n-1} \gamma_{i+1} V_i^{\frac{p_{i+1} - p_i}{p_i}} \left[\nu_n - |z_n|^{\frac{p_2 - 1}{n}} \right] < 0$$

que es negativa definida porque ya se han elegido las ganancias para que $\dot{V}_{nominal} < 0$. La parte de la derivada de la función de Lyapunov que incluye a la perturbación es

$$W_{perturbada} \triangleq \tilde{k}_{n-1} \frac{\Delta_0}{k_1} \prod_{i=2}^{n-1} \gamma_{i+1} V_i^{\frac{p_{i+1} - p_i}{p_i}} \left[\nu_n + |z_n|^{\frac{p_2 - 1}{n}} \right]$$

entonces

$$W(x) = W_{nominal}(\cdot) + W_{perturbada}(\cdot)$$

para que $W(x)$ sea negativa definida se debe satisfacer

$$\max_{z \in S} \left\{ \frac{-W_{perturbada}(\cdot)}{W_{nominal}} \right\} < 1$$

de esta última expresión es fácil ver que

$$\tilde{k}_1 \frac{\Delta_0}{k_1} \max_{z \in S} \left\{ \frac{-\prod_{i=2}^{n-1} \gamma_{i+1} V_i^{\frac{p_{i+1} - p_i}{p_i}} \left(\nu_n + |z_n|^{\frac{p_2 - 1}{n}} \right)}{W_{nominal}(\cdot)} \right\} < 1$$

definiendo

$$\Gamma_p \triangleq \max_{z \in S} \left\{ \frac{-\prod_{i=2}^{n-1} \gamma_{i+1} V_i^{\frac{p_{i+1} - p_i}{p_i}} \left(\nu_n + |z_n|^{\frac{p_2 - 1}{n}} \right)}{W_{nominal}(\cdot)} \right\}$$

la cota máxima de la perturbación debe satisfacer

$$\Delta_0 < \frac{k_1}{\tilde{k}_1 \Gamma_p}$$

recordando que $\tilde{k}_1 = \frac{k_1}{k_2}$

$$\Delta_0 < \frac{k_2}{\Gamma_p}$$

Con el fin de que con las ganancias calculadas con el sistema nominal, el algoritmo de diferenciación converja exactamente aún con perturbaciones mayores a Δ_0 ; es decir $|f^{(n)}(t)| \leq \Delta$; con $\Delta_0 < \Delta$ se introduce la transformación lineal

$$e_i = L\varepsilon_i \tag{3.10}$$

con $L = \frac{\Delta}{\Delta_0}$. La versión escalada del error de diferenciación queda

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= -k_i L \frac{n-i+1}{n} [e_n] \frac{i-1}{n} + e_{i-1}, & i = n, \dots, 2 \\ \dot{e}_1 &= -k_1 L [e_n]^0 - L f^{(n)}(t) \end{aligned} \tag{3.11}$$

es claro que si (2.2) converge a cero, entonces (3.11) también lo hará y viceversa.

Entonces, las ganancias que hacen que el diferenciador converja aún con una perturbación $|f^{(n)}(t)| \leq \Delta$, son las ganancias nominales escaladas de la forma:

$$\begin{aligned} \bar{k}_i &= k_i L \frac{n-i+1}{n}, & i = n, \dots, 2 \\ \bar{k}_1 &= k_1 L \end{aligned}$$

Capítulo 4

Conjunto de ganancias admisibles para el diferenciador de Levant de segundo orden

En este capítulo se muestra el cálculo de ganancias para el diferenciador de Levant de segundo orden ($n = 3$) por medio de la función de Lyapunov propuesta en esta tesis. Este conjunto de ganancias es comparado con el conjunto de ganancias obtenido con la función de Lyapunov $V_{CM_3}(z)$.

Para observar que tan fuertes son las condiciones impuestas por la función de Lyapunov, se presenta el cálculo de ganancias para el diferenciador lineal y se comparan contra la condición Hurwitz que es una condición suficiente y necesaria sobre los parámetros del diferenciador.

Se trató de tener un estimado de toda la región de ganancias admisibles para el diferenciador por medio de simulaciones numéricas; esta región es comparada con el caso Hurwitz y las regiones obtenidas con las funciones de Lyapunov $V_3(z)$ y $V_{CM_3}(z)$.

Es importante destacar que los resultados aquí presentados fueron obtenidos con $f_0^{(3)} = 0$, pero en la última sección se elige un juego de ganancias y se calcula la cota máxima de la perturbación que es capaz de soportar el diferenciador y se muestra como pueden escarse estas ganancias para que el diferenciador converja a pesar de una perturbación cuya cota sea mayor a la anteriormente calculada.

4.1. Enfoque de funciones de Lyapunov

4.1.1. Diferenciador de Levant

La dinámica del error de diferenciación con $d = -1$ de segundo orden es

$$\begin{aligned}\dot{z}_3 &= -\tilde{k}_3 \left(\lceil z_3 \rceil^{\frac{2}{3}} - z_2 \right) \\ \dot{z}_2 &= -\tilde{k}_2 \left(\lceil z_3 \rceil^{\frac{1}{3}} - z_1 \right) \\ \dot{z}_1 &= -\tilde{k}_1 \lceil z_3 \rceil^0\end{aligned}\tag{4.1}$$

La función de Lyapunov propuesta a partir de (3.2) es

$$V_3(z) = \mathbf{Z}_3(z_3, z_2) + \frac{p_2}{p_3} V_2(z_2, z_1)^{\frac{p_3}{p_2}}\tag{4.2}$$

donde

$$\mathbf{Z}_3(z_3, z_2) = \frac{r_3}{p_3} |z_3|^{\frac{p_3}{r_3}} - z_3 \lceil z_2 \rceil^{\frac{p_3 - r_3}{r_2}} + \frac{p_3 - r_3}{p_3} |z_2|^{\frac{p_3}{r_2}}\tag{4.3}$$

Por simplicidad se escoge $\gamma_n = 1$ y además, para tratar de hallar un conjunto de ganancias más grande con $V_3(z)$ se elige $p_3 = 5$.

La función $V_2(\cdot)$ es como en (2.6) con $\beta_1 = \beta_2 = 1$ y $p_2 = 3$ entonces, las ganancias \tilde{k}_1 y \tilde{k}_2 deben satisfacer la desigualdad (2.7), la cual se cumple eligiendo \tilde{k}_2 como

$$\tilde{k}_2 = 2\theta_1 \tilde{k}_1; \quad 1 < \theta_1\tag{4.4}$$

así que sólo queda por calcular cómo deber ser la ganancia \tilde{k}_3 .

Calculando $\dot{V}_3(z)$ a lo largo de (4.1)

$$\dot{V}_3(z) = \frac{\partial \mathbf{Z}_3(z_3, z_2)}{\partial z_3} \dot{z}_3 + \frac{\partial \mathbf{Z}_3(z_3, z_2)}{\partial z_2} \dot{z}_2 + V_2(z_1, z_2)^{\frac{p_3 - p_2}{p_2}} \left(\frac{\partial \mathbf{V}_2(z_1, z_2)}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial \mathbf{V}_2(z_1, z_2)}{\partial z_2} \dot{z}_2 \right)\tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_3(z) &= -\tilde{k}_3 \left(\lceil z_3 \rceil^{\frac{2}{3}} - z_2 \right)^2 - \tilde{k}_2 \frac{\partial \mathbf{Z}_3(z_3, z_2)}{\partial z_2} \left(\lceil z_3 \rceil^{\frac{1}{3}} - z_1 \right) - \tilde{k}_1 V_2(z_1, z_2)^{\frac{p_3 - p_2}{p_2}} \frac{\partial \mathbf{V}_2(z_2, z_1)}{\partial z_1} \lceil z_3 \rceil^0 - \\ &\quad \tilde{k}_2 V_2(z_2, z_1)^{\frac{p_3 - p_2}{p_2}} \frac{\partial \mathbf{V}_2(z_2, z_1)}{\partial z_2} \left(\lceil z_3 \rceil^{\frac{1}{3}} - z_1 \right)\end{aligned}\tag{4.6}$$

Sustituyendo (4.4) en (4.6) y definiendo las siguientes funciones

$$\begin{aligned}\eta_3(z_2, z_3) &\triangleq \left(\lceil z_3 \rceil^{\frac{2}{3}} - z_2 \right)^2; \quad \eta_3(z_2, z_3) \geq 0 \\ \mu_3(z_1, z_2, z_3, \theta_1) &\triangleq -2\theta_1 \frac{\partial \mathbf{Z}_3}{\partial z_2} \left(\lceil z_3 \rceil^{\frac{1}{3}} - z_1 \right) - V_2^{\frac{p_3 - p_2}{p_2}}(z_1, z_2) \left(\frac{\partial \mathbf{V}_2}{\partial z_1} \lceil z_3 \rceil^0 \right) - \\ &\quad 2\theta_1 V_2^{\frac{p_3 - p_2}{p_2}}(z_1, z_2) \frac{\partial \mathbf{V}_2}{\partial z_2} \left(\lceil z_3 \rceil^{\frac{1}{3}} - z_1 \right)\end{aligned}$$

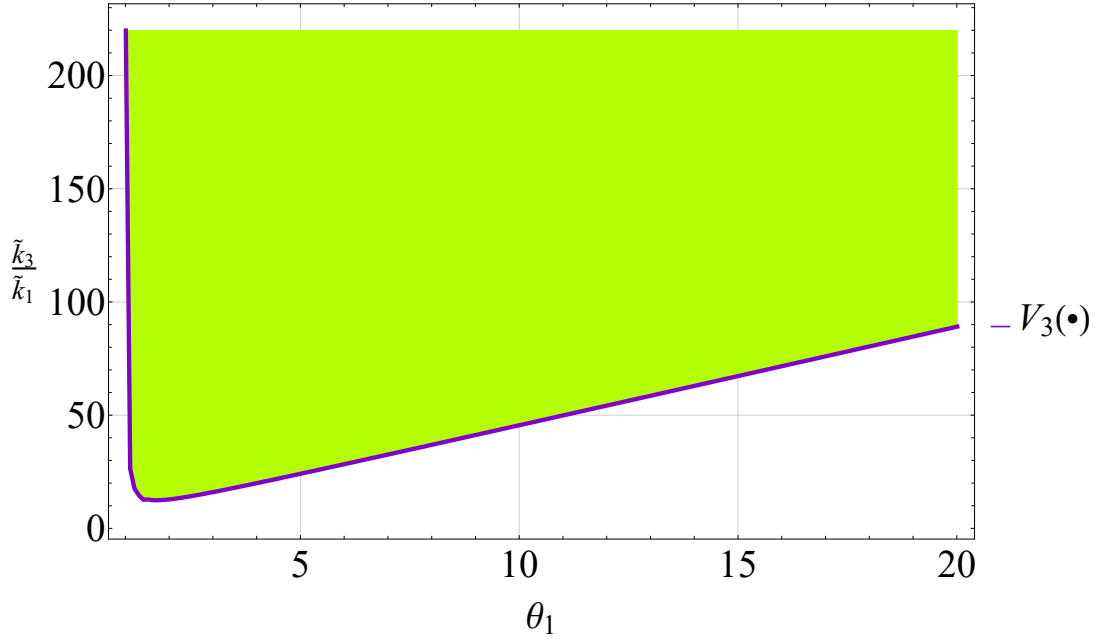


Figura 4.1: Cota inferior de la relación entre las ganancias \tilde{k}_1 y \tilde{k}_3 según el valor de θ_1

$\dot{V}_3(z)$ puede escribirse como

$$\dot{V}_3(z) = -\tilde{k}_3\eta_3(z_2, z_3) + \tilde{k}_1\mu_3(z_1, z_2, z_3, \theta_1)$$

la ganancia \tilde{k}_3 debe satisfacer

$$\tilde{k}_1 \max_{z \in S} \left\{ \frac{\mu_3(\cdot)}{\eta_3(\cdot)} \right\} < \tilde{k}_3 \quad \text{ó} \quad \max_{z \in S} \left\{ \frac{\mu_3(\cdot)}{\eta_3(\cdot)} \right\} < \frac{\tilde{k}_3}{\tilde{k}_1}.$$

Se calculó esta relación para diferentes valores de θ_1 , comenzando con $\theta_1 = 1.01$. La relación $\frac{\tilde{k}_3}{\tilde{k}_1}$ debe seleccionarse por encima de la línea morada de la Figura 4.1; esta línea morada, dentro de la zona verde, representa la región de ganancias críticas calculadas por la función de Lyapunov. A partir de $\theta_1 = 1.70$ parece que $\frac{\tilde{k}_3}{\tilde{k}_1}$ están relacionadas linealmente.

Para comprobar si dos variables se relacionan de forma lineal, puede calcularse el coeficiente de correlación lineal (r_c) de los datos, $r_c \in [-1, 1]$. A partir del valor de r_c se puede concluir

- $r_c = -1$: La relación entre las variables comparadas es perfecta negativa; exactamente en la medida que aumenta una variable disminuye la otra.
- $r_c = 0$: No existe correlación lineal entre las variables.
- $r_c = 1$: La relación entre las variables comparadas es perfecta positiva; exactamente en la medida que aumenta una variable aumenta la otra.

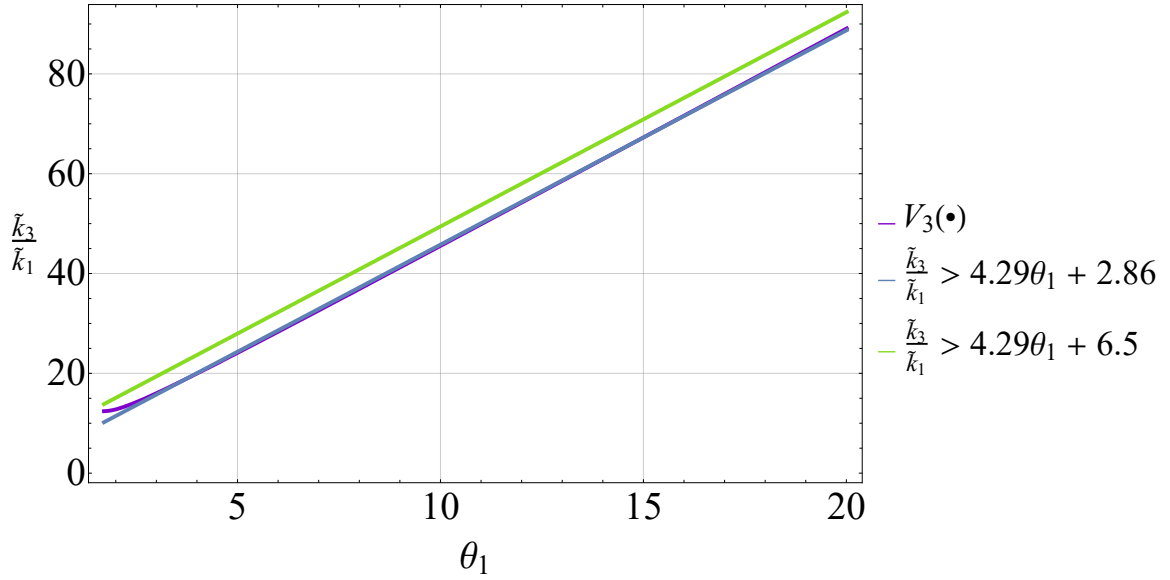


Figura 4.2: Cota inferior de la relación entre las ganancias \tilde{k}_1 y \tilde{k}_3 según el valor de θ_1 aproximada por una regresión lineal

El coeficiente de correlación está definido como

$$r_c = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

donde

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2}{m}} \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2}{m}}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i$$

El coeficiente de correlación entre θ_1 y $\frac{\tilde{k}_3}{\tilde{k}_1}$, a partir de $\theta_1 = 1.7$ es $r_c = 0.999$ lo que dice que los datos están fuertemente relacionados linealmente, así que la región crítica de ganancias se aproxima por una regresión lineal, la cual se muestra en la Figura 4.2; sin embargo, para asegurar que aún cometiendo error en la evaluación numérica las región de ganancias admisibles dadas aseguran la estabilidad del origen del error de diferenciación se propone elegir las ganancias $\frac{\tilde{k}_3}{\tilde{k}_1}$ por encima de la línea verde, también mostrada en la Figura 4.2.

En resumen, las condiciones sobre las ganancias son las siguientes

$$\begin{aligned}\tilde{k}_2 &= 2\theta_1\tilde{k}_1 \\ 4.29\theta_1 + 6.5 &< \frac{\tilde{k}_3}{\tilde{k}_1}\end{aligned}$$

Así que

$$\theta_1 = \frac{\tilde{k}_2}{2\tilde{k}_1}$$

y como la regresión lineal se calculó con $1.7 \leq \theta_1$, entonces, las condiciones sobre las ganancias pueden ser escritas

$$\begin{aligned}1.7 \leq \theta_1 &= \frac{\tilde{k}_2}{2\tilde{k}_1} \\ 4.29\frac{\tilde{k}_2}{2\tilde{k}_1} + 6.5 &< \frac{\tilde{k}_3}{\tilde{k}_1}\end{aligned}$$

regresando al espacio de ganancias originales del diferenciador, las condiciones sobre éstas son

$$\begin{aligned}k_1 &\leq \frac{k_2^2}{3.4k_3} \\ k_1 &< 0.154k_2k_3 - 0.328\frac{k_2^2}{k_3}\end{aligned}\tag{4.7}$$

Se calcularon las ganancias admisibles con la función de Lyapunov (2.9) y se compara contra los resultados obtenidos con (4.2). La región crítica de ganancias obtenida con (2.9) se puede ver en la línea rosa de la Figura 4.3. Al igual que en el caso anterior, se aproximó esta región con una regresión lineal y se tomó una tolerancia del error numérico así que para la función $V_{CM_3}(z)$ la relación de las ganancias $\frac{\tilde{k}_3}{\tilde{k}_1}$ deben seleccionarse por encima de la línea azul de la Figura 4.3; por lo que se puede ver que el conjunto de ganancias calculado por medio de la función de Lyapunov propuesta en esta tesis proporciona un conjunto de ganancias más grande que el que se puede calcular con la propuesta en Cruz-Zavala y Moreno (2016); sin embargo, para valores cercanos a uno de θ_1 , la función de Lyapunov propuesta en esta tesis sugiere utilizar valores muy grandes de \tilde{k}_3 y/o muy pequeños de \tilde{k}_1 ; esto se mejora en cuanto el producto de $\Gamma_{21}\theta_1 \rightarrow 4$; que es el valor de Γ_{21} cuando $p_2 = p_3 = 5$.

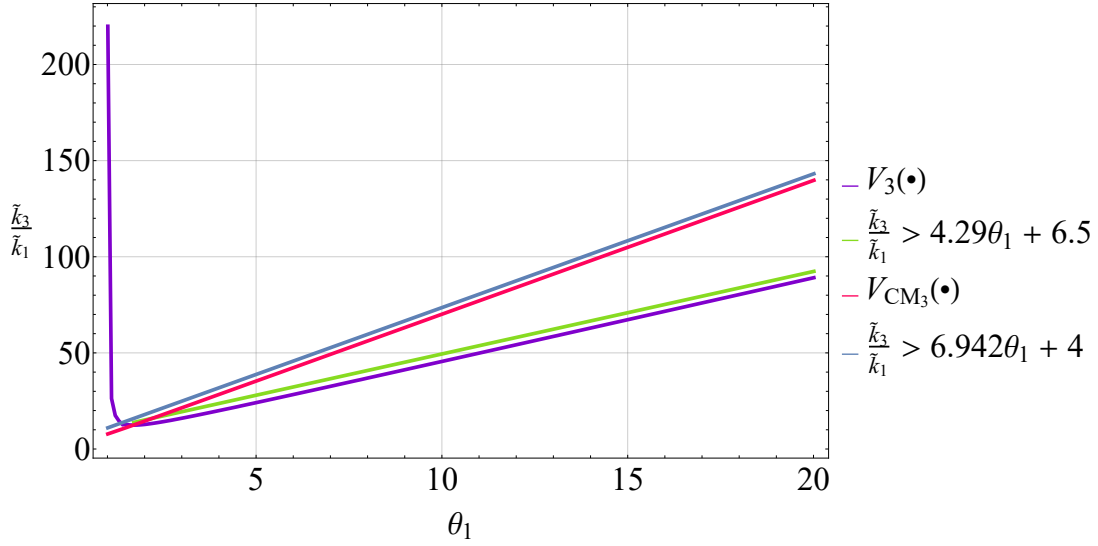


Figura 4.3: Cota inferior de la relación entre las ganancias \tilde{k}_1 y \tilde{k}_3 según el valor de θ_1 aproximada por una regresión lineal

4.1.2. Diferenciador lineal

El error de diferenciación lineal ($d = 0$) de primer orden en términos de los estados z de (2.4) es

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= -\tilde{k}_2(z_2 - z_1) \\ \dot{z}_1 &= -\tilde{k}_1 z_2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

La función de Lyapunov para el diferenciador lineal de primer orden es:

$$V_{L2}(z) = \frac{1}{p_2} |z_2|^{p_2} - z_2 |z_1|^{p_2-1} + |z_1|^{p_2} \quad (4.9)$$

de grado de homogeneidad $p_2 = 2 - (2n - 3)d = 2$.

A partir de la derivada de (4.9) a lo largo de las trayectorias del diferenciador lineal de primer orden (4.8) se obtiene que

$$\begin{aligned} 0 &< \tilde{k}_1 \\ \tilde{k}_1 &< \tilde{k}_2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

A partir de los resultados obtenidos para el diferenciador de primer orden, se calcula la ganancia faltante \tilde{k}_3 para el diferenciador de segundo orden cuya dinámica se muestra a continuación

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 &= -\tilde{k}_3(z_3 - z_1) \\ \dot{z}_2 &= -\tilde{k}_2(z_3 - z_1) \\ \dot{z}_1 &= -\tilde{k}_1 z_3 \end{aligned} \quad (4.11)$$

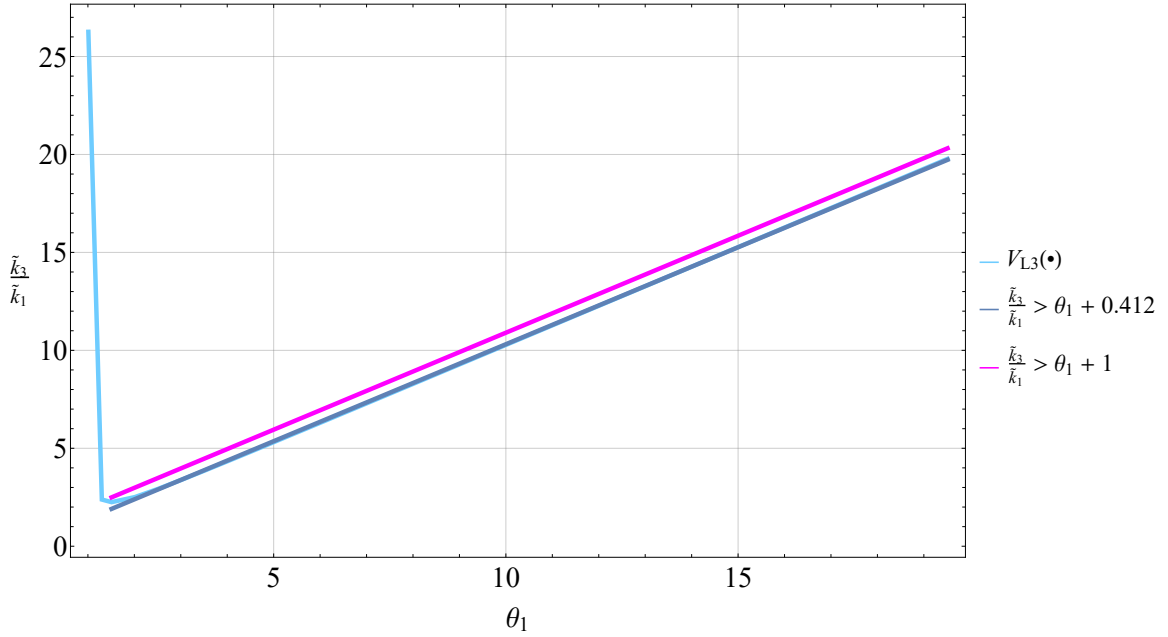


Figura 4.4: Cota inferior de la relación entre las ganancias \tilde{k}_1 y \tilde{k}_3 según el valor de θ_1 aproximada por una regresión lineal para el diferenciador de segundo orden lineal

Para el diferenciador lineal de segundo orden, la función de Lyapunov propuesta es

$$V_{L3}(z) = \frac{1}{p_3} |z_3|^{p_3} - z_3 [z_2]^{p_3-1} + \frac{1}{p_3} |z_2|^{p_3} + \frac{p_2}{p_3} V_{L2}(z)^{\frac{p_3}{p_2}} \quad (4.12)$$

de grado de homogeneidad $p_3 = 2 - (2n - 3)d = 2$.

Por medio de las condiciones obtenidas en (4.10), se sugiere la siguiente elección de la ganancia \tilde{k}_2

$$\tilde{k}_2 = \theta_1 \tilde{k}_1; \quad \theta_1 > 1 \quad (4.13)$$

A partir de la derivada de (4.12) a lo largo de las trayectorias del diferenciador lineal de segundo orden (4.11), para diferentes valores de θ_1 , la región crítica de ganancias $\frac{\tilde{k}_3}{\tilde{k}_1}$ es la línea azul de la Figura 4.4. Esta región también se aproximó por una regresión lineal con $\theta_1 \geq 1.5$ y se propone elegir las ganancias $\frac{\tilde{k}_3}{\tilde{k}_1}$ por encima de la línea magenta de la Figura 4.4.

Las condiciones sobre las ganancias para el caso lineal son las siguientes

$$\begin{aligned} \tilde{k}_2 &= \theta_1 \tilde{k}_1 \\ \theta_1 + 1 &< \frac{\tilde{k}_3}{\tilde{k}_1} \end{aligned}$$

Así que

$$\theta_1 = \frac{\tilde{k}_2}{\tilde{k}_1}$$

y como la regresión lineal se calculó con $1.5 \leq \theta_1$, entonces, las condiciones sobre las ganancias pueden ser escritas

$$\begin{aligned} 1.5 &\leq \theta_1 = \frac{\tilde{k}_2}{\tilde{k}_1} \\ \frac{\tilde{k}_2}{\tilde{k}_1} + 1 &< \frac{\tilde{k}_3}{\tilde{k}_1} \end{aligned}$$

regresando al espacio de ganancias originales del diferenciador, las condiciones sobre las ganancias para el diferenciador lineal son

$$\begin{aligned} k_1 &\leq \frac{k_2^2}{1.5k_3} \\ k_1 &< k_2k_3 - \frac{k_2^2}{k_3} \end{aligned}$$

4.2. Simulaciones numéricas

Las ganancias obtenidas por las funciones de Lyapunov, prueban formalmente la estabilidad del origen de (4.1); sin embargo, ellas pueden ser muy conservadoras. Para tener una idea de que tan fuertes son las condiciones impuestas a las ganancias por las funciones de Lyapunov, se trató de tener un estimado de la región completa de las ganancias admisibles. Para ello, se realizaron simulaciones numéricas considerando la señal $f(t) = 0.5(\sin(0.5t) + \cos(t))$, teniendo como condición inicial del error de diferenciación (2.3) $e(0) = [1, -5, 1]$, se considera $f^{(3)} = 0$. La integración numérica se realizó con el método de Euler con paso fijo $\Delta_t = 10^{-5}$.

Las simulaciones consistieron en, fijar una ganancia y hallar los valores de las ganancias restantes que hacen que la estabilidad del origen de (2.3) sea crítica. Se fijó $k_1 = 1$, se tuvo como grado de libertad k_3 y se halló la ganancia k_2 que con (k_1, k_3) dadas se tuviera estabilidad crítica. Un ejemplo de las simulaciones realizadas se muestra en la Figura 4.5.

Los resultados de estas simulaciones se comparan contra el diferenciador lineal (4.14) en el cual las ganancias deben seleccionarse para que la matriz A sea Hurwitz; es decir, $k_1 < k_3k_2$; si $k_1 = 1$, k_2 debe satisfacer $\frac{1}{k_3} < k_2$ y se sabe que el valor de k_2 que ocasiona que el origen de (4.14) sea críticamente estable es $k_2 = \frac{1}{k_3}$. Esta comparación de región de ganancias admisibles entre el diferenciador de Levant y el diferenciador lineal se muestra en la Figura (4.6). La región crítica de ganancias para el diferenciador lineal y no lineal están dadas por las líneas rojo y naranja, respectivamente. La estabilidad del origen de diferenciación en cada caso se alcanza eligiendo las ganancias por encima de las líneas antes mencionadas; puede verse que la región

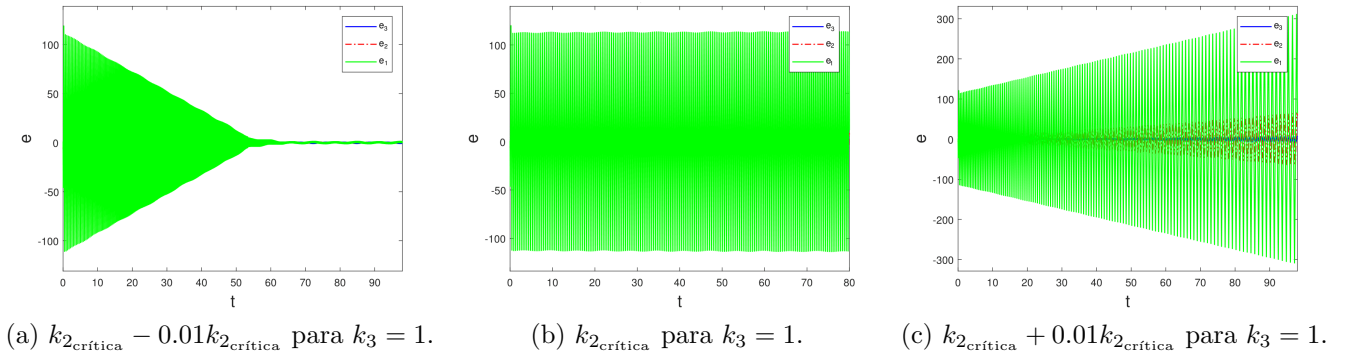


Figura 4.5: Simulación numérica para la hallar región de ganancias crítica

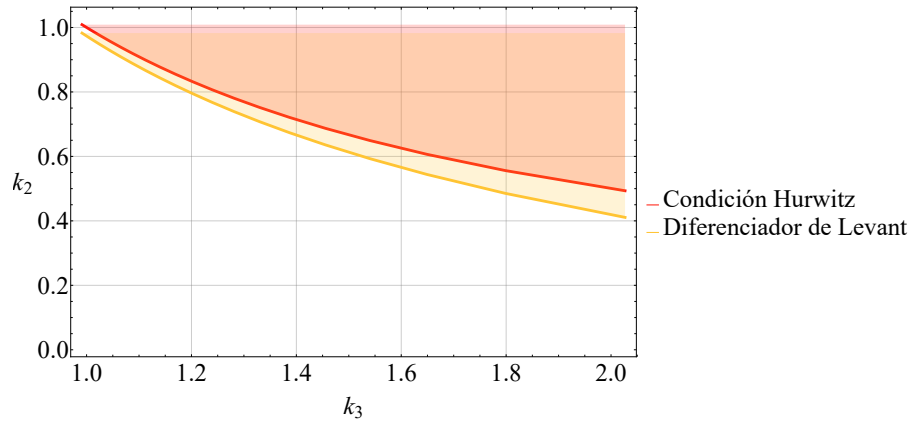


Figura 4.6: Condición Hurwitz comparada con la región estimada de ganancias para el diferenciador de Levant.

de ganancias del diferenciador de Levant es ligeramente mayor a la condición de Hurwitz y el caso Hurwitz está contenido ella.

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_3 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -k_3 & 1 & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 \\ -k_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} \xi_3 \\ \xi_2 \\ \xi_1 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Para poner en perspectiva las regiones de ganancias originales calculadas, se ilustran algunos valores de k_3 y k_2 que satisfacen la región de ganancias (4.7) ($V_3(z)$), la región obtenida por medio de la función de Lyapunov ($V_{CM_3}(z)$) de Cruz-Zavala y Moreno (2016) y el caso Hurwitz como referencia para ver que tan conservadoras son las condiciones obtenidas sobre las ganancias. Esto se muestra en la Figura 4.7, la cual fue realizada eligiendo $k_1 = 1$ (siempre pueden escalarse las ganancias por el difeomorfismo (3.10)).

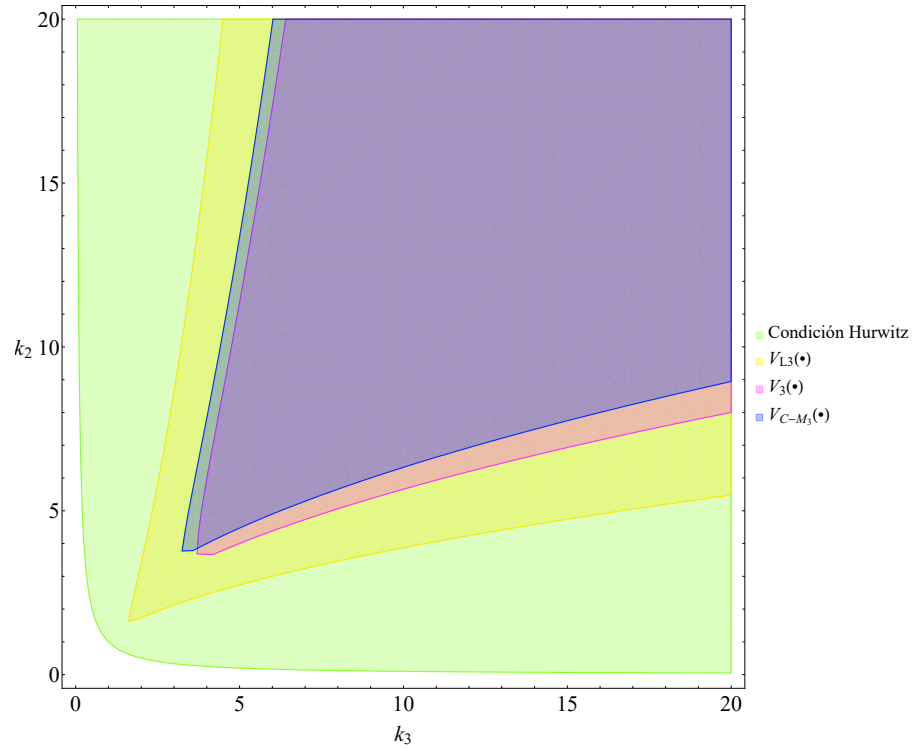


Figura 4.7: Condición Hurwitz comparada con las regiones calculadas de ganancias por medio de funciones de Lyapunov

También, en la Figura 4.7 se muestra la región de ganancias admisibles del diferenciador lineal, en amarillo, obtenida con la correspondiente función de Lyapunov. En la comparación entre esta región y la Hurwitz puede verse la restricción que impone la función de Lyapunov sobre el conjunto de ganancias.

4.2.1. Cálculo de la cota máxima de $f^{(3)}(t)$

Se eligen las ganancias

$$k_3 = 4.44, \quad k_2 = 5.75 \text{ y} \quad k_3 = 0.5$$

ellas satisfacen (4.7) y además ellas fueron diseñadas en Moreno (2012) para que el diferenciador converja exactamente aún con

$$|f^{(3)}(t)| \leq 0.1$$

.

La derivada de la función de Lyapunov a lo largo de las trayectorias del error de diferenciación considerando que $f^{(3)}(t) = 0$, es acotada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(z)|_{f^{(3)}(t)=0} \leq W_{nominal}(z)W_{nominal}(z) = & -\tilde{k}_3 \left(\lceil z_3 \rceil^{\frac{2}{3}} - z_2 \right)^2 - \tilde{k}_2 \left(\lceil z_3 \rceil^{\frac{1}{3}} - z_1 \right) \left[\left(-z_3 + \lceil z_2 \rceil^{\frac{3}{2}} \right) + V_2^{\frac{2}{3}} \left(\lceil z_3 \rceil^{\frac{2}{3}} \right) \right. \\ & \left. + V_2^{\frac{2}{3}} \tilde{k}_1 \left(\nu_3 - |z_3|^{\frac{2}{3}} \right) \right] \end{aligned}$$

con

$$\nu_3 = |z_2 - \lceil z_1 \rceil^2| + |\lceil z_3 \rceil^{\frac{2}{3}} - \lceil z_1 \rceil^2| \quad (4.15)$$

La parte de la derivada de la función de Lyapunov donde aparece la perturbación es

$$W_{perturbada}(z) = \tilde{k}_1 \frac{\Delta_0}{k_1} V_2^{\frac{2}{3}} \left(\nu_3 + |z_3|^{\frac{2}{3}} \right)$$

entonces

$$\dot{V}_n(z) = W_{nominal}(z) + W_{perturbada}(z) \quad (4.16)$$

y la cota máxima de la perturbación $\Delta_0 = 0.13506$.

Capítulo 5

Conclusiones

Se presentó una función de Lyapunov para el diferenciador de Levant de orden arbitrario que permite el cálculo de ganancias de forma recursiva, tomando como base las ganancias y la función de Lyapunov del diferenciador de primer orden. Ella permite, que al incrementar el orden de diferenciación, se usen las ganancias calculadas para el diferenciador de orden menor y sólo deba calcularse la condición sobre una ganancia, en lugar de calcular n ganancias. Esto simplifica el cálculo y además ayuda a no sobrecalcular las ganancias de los diferenciadores de orden menor.

Se dieron las condiciones para las ganancias del diferenciador de orden dos y no sólo un juego de parámetros del diferenciador. A partir de este conjunto de ganancias se podrían obtener las condiciones para el diferenciador de orden tres; sin embargo mientras mayor es el orden más gasto computacional para calcular el máximo de la función mostrada en la desigualdad (3.6) para hallar la ganancia \bar{k}_n ; así que se propone hallar un método numérico que optimice ese cálculo.

Por otra parte, los coeficientes de la función de Lyapunov se fijaron en uno; sin embargo, podría hacerse una optimización del conjunto de ganancias modificando estos coeficientes.

Se estimó la región de ganancias crítica del diferenciador de orden dos para analizar que tan conservadoras son las ganancias obtenidas y, efectivamente las condiciones calculadas con la función de Lyapunov son muy restrictivas, pero aún quedan como grados de libertad los coeficientes de la función de Lyapunov para tratar de hacer ese conjunto de ganancias mayor.

La técnica aquí propuesta para la función de Lyapunov para el diferenciador de Levant también funciona para la familia de diferenciadores continuos homogéneos mostrada en (2.1).

Bibliografía

- Andrieu, V., Praly, L., y Astolfi, A. (2008). Homogeneous approximation, recursive observer design and output feedback. *SIAM Journal on Control and Optimization*.
- Angulo, M., Moreno, J., y Fridman, L. (2012). Optimal gain for the super-twisting differentiator in the presence of measurement noise. pages 6154–6159.
- Aparicio Martínez, A. (2012). Función de Lyapunov para el diferenciador por modos deslizantes de tercer orden. Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Bacciotti, A. y Rosier, L. (2001). Liapunov functions and stability in control theory. In *Lecture notes in control and information science*, volume 267.
- Cruz-Zavala, E. y Moreno, J. (2016). Lyapunov functions for continuous and discontinuous differentiators. *IFAC-PapersOnLine*.
- Dabroom, A. y Khalil, H. (1997). Numerical differentiation using high-gain observers. In *Proceedings of the 36th Conference on Decision and Control*, pages 4790–4795, San Diego, CA, USA. IEEE.
- Filippov, A. (1988). Differential equations with discontinuous righthand side. *Kluwer. Dordrecht. The Netherlands*.
- Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 3rd edition.
- Levant, A. (1998). Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*.
- Levant, A. (2003). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, 76(9-10):924–941.
- Levant, A. (2005). Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica*.
- Moreno, J. y Osorio, M. (2012). Strict Lyapunov function for the supertwisting algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- Moreno, J. A. (2012). Lyapunov function for Levant’s second order differentiator. In *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 6448–6453.

- Ortíz Ricardez, F. (2015). Función de Lyapunov suave para el diferenciador de segundo orden. Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Polyakov, A. y Poznyak, A. (2009). Reaching time estimation for “supertwisting” second order sliding mode controller via Lyapunov function designing. *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- Rabiner, L. y Steiglitz, K. (1970). The design of wide-band recursive and nonrecursive digital differentiators. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, 18(2):204–209.
- Reichhartinger, M., Spurgeon, S., Forstinger, M., y Wipfler, M. (2017). A Robust Exact Differentiator Toolbox for Matlab Simulink. *IFAC PaperOnLine*.