



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA
FACULTAD DE CIENCIAS

**ESTUDIO DE LA FORMACIÓN DE ONDAS
DE SUPERFICIE DEBIDO A
DEFORMACIONES DEL FONDO MARINO**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA TIERRA

PRESENTA:

JOSÉ ANTONIO TREJO GUTIÉRREZ

TUTOR:
DR. GERARDO RUIZ CHAVARRÍA
FACULTAD DE CIENCIAS

CIUDAD DE MÉXICO, NOVIEMBRE, 2019.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A Mar.

Agradecimientos

Al Dr. Gerardo Ruiz Chavarría por todo el apoyo que me ha brindado y por haberme tenido una paciencia infinita, gracias a la cual logré terminar exitosamente este trabajo.

Hago mención especial de mis sinodales los doctores David Alberto Salas de León, Erick Javier López Sánchez, Abraham Medina Ovando y Jorge Zavala Hidalgo, quienes con sus oportunos comentarios enriquecieron esta tesis.

Agradezco también al Maestro en Ciencias Sergio Hernández Zapata quien sin ser parte de mi jurado revisó mi tesis y me brindo comentarios muy oportunos que me permitieron mejorar este trabajo.

Agradezco a mis colegas y amigos Alejandro Urizar Valle, Benjamín Castillo Morales, Alan Josué Gutiérrez Castillo, Josefina Janeth Miranda Blancas y en particular a Iñaki Sánchez-Calvo González quien me ayudo con el diseño y construcción del dispositivo experimental.

No puedo dejar de agradecer a mi madre María del Rosario Gutiérrez Alejandre, a mis Hermanos Angélica Yael Porcayo Gutiérrez y Eduardo Isaias Porcayo Gutiérrez por el apoyo brindado durante el tiempo que curse la maestría.

Agradezco a mí mejor amiga, amante, el amor de mi vida, compañera de vida y futura madre de Chris la Maestra en Ciencias de la Tierra María del Mar Ruiz Rojas.

Agradezco el apoyo a la DGAPA-UNAM bajo el proyecto IN114218 “Vorticidad y ondas (internas y de superficie) en dinámica de fluidos” y al CONACYT.



Figura 1: Maria Salomea Skłodowska-Curie c. 1900.

Quiero hacer una dedicatoria especial a una mujer admirable en la ciencia... Marie Curie, ya que en un momento difícil de mi vida, en el cual pensaba abandonar definitivamente mis estudios, vi una película biográfica de ella y me dí cuenta de todas las dificultades que enfrentó y aun así logro salir adelante. Esto me inspiro y se convirtió en la piedra angular de mi pasión científica y de mi carrera académica.

La vida no es fácil, para ninguno de nosotros. Pero... ¡qué importa! Hay que perseverar y, sobre todo, tener confianza en uno mismo. Hay que sentirse dotado para realizar alguna cosa y que esa cosa hay que alcanzarla, cueste lo que cueste.

Maria Salomea Skłodowska-Curie

Resumen

En este trabajo se presentan resultados experimentales sobre deformación de superficie generada por el movimiento de dos bloques de acrílico ubicados en el fondo de una capa de fluido. El movimiento de los bloques y el tamaño de éstos se escogieron de forma tal, que la deformación de la superficie libre generada y el movimiento del fluido puedan brindar información respecto a las condiciones iniciales de un tsunami provocado por un sismo, cuya velocidad de ruptura es pequeña o comparable con la velocidad de propagación de la onda.

La deformación de la superficie libre fue obtenida mediante el uso de la novedosa técnica de schlieren sintético. Los resultados analíticos se compararon con una solución analítica basada en un modelo desarrollado por Hammack, con el cual se resolvió la ecuación para una onda en un fluido ideal considerando el movimiento de un par de bloques sumergidos que se mueven verticalmente, para ello se utilizan transformadas de Laplace para la coordenada temporal y de Fourier para una coordenada espacial.

Por último, al comparar los resultados experimentales y analíticos, se encontraron correspondencias entre ellos y las deformaciones rápidas, por lo que se concluye que el modelo analítico no es adecuado para las deformaciones lentas. Producto del análisis de Fourier realizado a las deformaciones se concluye que para deformaciones rápidas, el sistema se comporta como un filtro espacial pasa-bajos, posteriormente al comparar los resultados experimentales con los datos conocidos del tsunami de Sumatra-Andaman se puede concluir que los experimentos realizados en tanques puedan aportar información importante para prevenir los daños provocados por un tsunami, siempre y cuando se tengan datos respecto a la dinámica del fondo marino.

Índice general

Introducción	1
1. Introducción	2
1.1. Tsunamis	2
1.2. Objetivos	3
1.3. Hipótesis	4
1.4. Desglose de capítulos	4
2. Marco Teórico	5
2.1. Relación de dispersión	6
2.2. Método de schlieren sintético	8
2.3. Antecedentes	13
3. Desarrollo Analítico	14
3.1. Modelo de Hammack	14
4. Desarrollo experimental	24
4.1. Dispositivo experimental	24
4.2. Metodología	28
5. Resultados y Análisis	30
5.1. Resultados experimentales	30
5.2. Análisis de Fourier	35
5.3. Resultados analíticos	39
5.4. Comparación entre resultados analíticos y experimentales	43
5.5. Comparación con el tsunami de Sumatra-Andaman	45
6. Discusión y Conclusiones	47
7. Trabajo futuro	49
Bibliografía	52

Introducción

La modelación de la generación de tsunamis es una parte fundamental en el conocimiento de éstos. Para los tsunamis generados por maremotos, hay que modelar el movimiento del lecho marino a partir de los datos sísmicos brindados por los sismógrafos, y a partir de ésta su efecto en la capa superficial de agua. En la actualidad existen muchos trabajos, cuyo supuesto parte de que la deformación inicial es del orden de la velocidad de fase de la onda de superficie generada y que la deformación de la superficie es similar a la deformación del fondo (método pasivo [Hammack, 1972]) [IUGG/IOC, 1997, Ichiye, 1958, Grilli et al., 2002, Kakinuma, 2009]. No obstante, en una deformación lenta (del orden de la velocidad de fase del tsunami) esto no ocurre, ya que la forma de las ondas se ve influenciada por la dinámica del fondo [Dutykh y Dias, 2010]. Por esta razón el método pasivo no es adecuado para predecir la forma y la amplitud de los trenes de onda generados por este tipo de deformación [Kervella et al., 2007]. Un ejemplo de este tipo de tsunami, ocurrió en las costas de Chile en 1960, en donde los modelos predecían que primero llegaría una onda de elevación y en su lugar llegó una de depresión [Jamin et al., 2015].

El objetivo de este trabajo, es proporcionar resultados experimentales que permitan modelar de manera adecuada las condiciones iniciales de un tsunami cuando la deformación del lecho marino es lenta o comparable con la velocidad de fase del tren de ondas generado.

Este trabajo, tiene la finalidad de analizar las características de una deformación rápida y una lenta, a partir de una comparación entre resultados analíticos y experimentales. Los resultados analíticos fueron generados a partir de un modelo que resuelve la ecuación para una onda en un fluido ideal inicialmente en reposo, que posteriormente fue perturbado por una deformación del fondo lenta o comparable con la velocidad de fase de las ondas generadas. Los resultados experimentales fueron obtenidos mediante el estudio del tren de ondas producido por el movimiento vertical de un par de bloques de acrílico, los cuales se mueven a través de un sistema doble de biela-manivela que está unido a un motor de pasos, por lo que al girar el motor los bloques se moverán a distintas velocidades. El análisis de las ondas de superficie generadas se hizo mediante schlieren sintético.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Tsunamis

Un tsunami es una onda de agua potencialmente destructiva, cuyo nombre proviene de las palabras japonesas *tsu*[*tsu*], que significa puerto o bahía y *tsu*[*nami*] que significa ola. Esta palabra ha sido adoptada por la comunidad científica para referirse a ondas de gravedad que se propagan en el océano y que poseen una gran cantidad de energía. Las ondas son provocadas principalmente por perturbaciones sísmicas que provocan deformaciones del lecho marino. También pueden ser provocados por erupciones volcánicas y desplazamientos de rocas ya sea submarinas o costeras.



Figura 1.1: Tsunami provocado por el gran terremoto de Japón oriental impactando en la ciudad de Miyako el 11 de marzo 2011 [Sinc, 2013].

Es importante conocer las características de un tsunami, tales como su mecanismo de creación, deformación inicial y propagación. Por lo tanto, en este trabajo fue de gran interés el mecanismo de creación, cuyo principal enfoque fue dado a partir de los tsunamis de origen sísmico como producto de

un maremoto cuyas características se resumen de la siguiente forma [Stein and Wysession, 2003].

- Una Falla geológica es una fractura generalmente plana a lo en un terreno a lo largo de la cual se deslizan dos bloques, uno respecto al otro. Las fallas se producen por esfuerzos tectónicos, incluida la gravedad y empujes horizontales que actúan en la corteza. La zona de ruptura tiene una superficie bien definida denominada plano de falla, el ángulo respecto a la vertical según se deslizan es muy importante y este es conocido como ángulo de inmersión.
- La profundidad h en el caso de los tsunamis es la profundidad del lecho marino respecto a la superficie del agua y tiene un valor promedio de $4km$ lejos de la costa.
- El tiempo de ruptura τ_b es el tiempo de subida hidráulica.
- La velocidad de ruptura v_p es la velocidad horizontal a la que se mueve el fondo, está permite identificar diferentes tipos de sismo, para un sismo ordinario su valor oscila entre 1 y $10km/s$.
- La velocidad de fase v_f es la velocidad a la que se desplaza un tsunami, como los tsunamis son ondas de gravedad y estas se propagan mar adentro, entonces ésta tiene un valor aproximado de $v_f = \sqrt{g * h} = \sqrt{9.81m/s^2 * 4000m} \approx 200m/s \equiv 720km/h$.

Por otro lado, al mecanismo de propagación es bien conocido, por ejemplo, en mar adentro las ondas tienen longitudes de onda muy grandes, del orden de cientos de kilómetros y con una amplitud tan pequeña que las hace imposibles de detectar a simple vista. Cuando se aproximan a la costa, la amplitud aumenta considerablemente, por lo cual cuando impactan en las costas pueden poner en peligro a quienes vivan cerca. Este fenómeno fue dado el pasado 26 de diciembre del año 2004 cuando ocurrió un terremoto submarino con una magnitud de aproximadamente $M = 9.3$ en la escala sismológica de magnitud de momento [Stein and Okal, 2005], en la región de Sumatra-Andaman se generó un tsunami enorme, el cual, fue considerado el sísmico más devastador ocurrido hasta la fecha. Ya que causó la muerte de más de 250,000 personas a lo largo de las costas del océano Índico principalmente en Indonesia y Sri Lanka.

1.2. Objetivos

Realizar experimentos que permitan contrastar las principales características de una deformación de superficie libre provocada por una deformación del fondo rápida y una lenta. Para hacer esto es necesario:

1. Construir un dispositivo experimental, que mediante el movimiento vertical de un par de un par de placas rectangulares idénticas sumergidas en agua, genere una deformación de la superficie libre similar a la que se genera cuando ocurre un maremoto producto de un deslizamiento normal de placas.

2. Obtener la deformación de la superficie libre utilizando la novedosa técnica schlieren sintético.
3. Comparar los resultados experimentales entre sí, con un modelo analítico y con tsunamis reales.

1.3. Hipótesis

La forma inicial del tren de ondas generado está íntimamente relacionada con la velocidad de rompimiento, es decir que la forma depende de que tan rápido se muevan las placas y por lo tanto debe haber diferencias significativas entre los trenes de onda al variar la velocidad de rompimiento.

1.4. Desglose de capítulos

A continuación, se presentan seis capítulos, en el Capítulo 2 se detalla la teoría de dispersión de ondas que propagan en la superficie del agua, se explica el funcionamiento del método schlieren sintético y se hace una recapitulación de los modelos y trabajos existentes que abordan el problema de ondas superficiales. En el capítulo 3 se hace una recapitulación del modelo que Hammack desarrollo como parte de su tesis de doctorado para el movimiento vertical de una placa y se extiende al movimiento vertical de dos placas, una que sube y una que baja. En el capítulo 4 se detalla cómo se construyó el dispositivo experimental y la metodología empleada al realizar los experimentos. En el capítulo 5 se muestran los resultados experimentales y analíticos, y se realiza su respectivo análisis. En el capítulo 6 se comparan nuestros resultados con los obtenidos por otros autores que realizaron ya sea experimentos o simulaciones numéricas similares y se presentan las conclusiones. En el capítulo 7 se presenta una propuesta de trabajo futuro y por último se presenta la bibliografía utilizada como referencia para la realización de este trabajo.

Capítulo 2

Marco Teórico

Tsunami lento

Actualmente, un tsunami puede ser detectado mediante boyas las cuales proporcionan medidas directas de las alturas de las olas y de la misma forma es posible conocer la forma de la onda inicial. El problema es que, para tener los datos necesarios y hacer esto de forma confiable se requiere que la ola cruce por varias boyas, por lo tanto, es necesario que el tsunami recorra grandes distancias en el mar. Este problema se puede solucionar mediante la aplicación del modelo de Okada [1985], el cual, utiliza los datos sísmicos medidos por estaciones cercanas a la falla para predecir la deformación de la superficie del océano, otro problema es que este modelo tiende a subestimar la amplitud de la onda de superficie.

La razón principal por la que se cree que esto sucede, es porque el modelo supone que el desplazamiento del lecho marino es instantáneo y que éste se transmite de forma idéntica a la superficie libre, sin embargo, esto no es cierto, ya que esto ocurre cuando la velocidad de rompimiento es lenta comparada con la velocidad de fase. Este tipo de tsunamis ha sido catalogado como “Tsunami earthquake” por el físico japonés Hiroo M. [Kanamori, 1972] quien los define como tsunamis con velocidad de ruptura $v_p < 1km/s$ la cual comparada con la velocidad de fase típica $v_f = \sqrt{g * h} = \sqrt{9.81 \frac{m}{s^2} * 4000m} \approx 200m/s$ es menor.

A continuación, se muestran algunos ejemplos de sismos que generaron este tipo de tsunamis.

Es importante comprender bien este tipo de tsunamis para poder prevenir de forma adecuada a la población debido a su capacidad destructiva y el riesgo de que en el futuro se presente nuevamente un tsunami de este tipo [Hébert and Schindelé, 2011]. Además de la teoría de Kanamori los tsunamis también se pueden discriminar usando escalas de tiempo.

Escalas de tiempo

Las escalas de tiempo son números adimensionales relevantes en un tsunami, éstas relacionan dos números ya conocidos, el primero de ellos es el tiempo de ascenso τ_b y el segundo es el semiperiodo

Evento	Víctimas mortales	Referencia
Sanriku, 1896	22,000	[Kanamori, 1972]
Nicaragua, 1992	170	[Kikuchi and Kanamori, 1995]
Mentawai, 2010	435	[Lay <i>et al.</i> , 2011]
Aleutian, 1946	167	[López and Okal, 2006]
New Zeland, 1947	0	[Bell <i>et al.</i> , 2014]
Valdivia, 1960	2190	[Macías, 1960]
Sumatra-Andamán, 2004	280,000	[BBC-NEWS, 2005]
Java, 2006	600	[Ammon <i>et al.</i> , 2006]

Cuadro 2.1: Breve lista de algunos de tsunamis atípicos, datos tomados de [Le Gal, 2017].

τ_w , que es el tiempo que tarda un máximo en convertirse en un mínimo. Su cociente $\bar{\tau} = \tau_b/\tau_w$ ya que nos permite discriminar entre un tsunami típico $\bar{\tau} \in [0.003, 0.3]$ y uno atípico $\bar{\tau} > 0.3$ [Le Gal *et al.*, 2017].

Número de Froude

El número de Froude es un número adimensional que nos relaciona el efecto que tienen las fuerzas de gravedad e inercia al actuar en un fluido. En el caso de tsunamis está definido como [Hammack, 1973]

$$Fr = \frac{\zeta_m}{\tau_b \sqrt{gh}} = \frac{v_p}{v_f} \quad (2.1)$$

en donde ζ_m es la máxima deformación del lecho marino, por lo tanto, es de particular importancia porque relaciona las dos velocidades características de un tsunami, a partir del cálculo del número de Froude para el límite propuesto por Kanamori [1972] como se observa en el siguiente ejemplo.

$$Fr = \frac{v_p}{v_f} = \frac{1km/s}{\sqrt{g * h}} = \frac{1000m/s}{\sqrt{9.81m/s^2 * 4000m}} = \frac{1000m/s}{198.0908m/s} = 5.0481 \quad (2.2)$$

Con lo anterior se concluye que los tsunamis o deformaciones de superficie cuyo número de Froude sea menor a 5.0481 serán consideradas lentos.

2.1. Relación de dispersión

La relación de dispersión representa en la teoría la relación que hay entre la frecuencia y el número de onda. Se le llama así pues es común que ondas de diferentes frecuencias se muevan a diferentes velocidades, lo que implica que un tren de ondas cambie su forma (se disperse) al paso del tiempo [Jamin *et al.*, 2015]

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\sigma k^3}{\rho} \right) \tanh(hk)$$

a partir de esta se puede obtener la velocidad de fase:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c^2 = \left(\frac{g}{k} + \frac{\sigma k}{\rho} \right) \tanh(hk)$$

$$c = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{\sigma 2\pi}{\rho\lambda} \right) \tanh\left(\frac{h2\pi}{\lambda} \right)}$$

Si $g = 981\text{cm/s}^2$ aceleración de la gravedad, $\sigma = 65\text{dyn/cm}$ tensión superficial del agua (agua de la llave), $\rho = 1\text{gr/cm}^3$ densidad del agua, $h = 2\text{cm}$ profundidad de la capa de fluido. Si se sustituye todos esos valores nos queda la velocidad en función de λ .

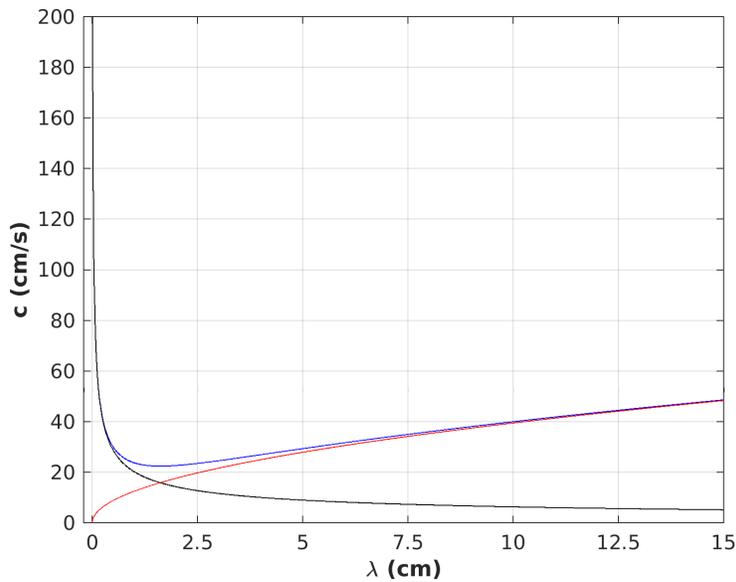


Figura 2.1: Se muestra una comparación entre la relación de dispersión (línea azul), la relación de dispersión en la que $g = 0$, es decir, se consideró solo el término correspondiente a ondas capilares (línea negra) y la parte correspondiente a ondas de gravedad considerando $\sigma = 0$ (línea roja), graficadas para longitudes de onda de 0 a 15cm.

En la representación gráfica donde de la relación de dispersión completa y la que toma en cuenta sólo el término correspondiente a las ondas de gravedad se puede observar que a partir de $\lambda \approx 10\text{cm}$ no hay gran diferencia, en consecuencia, se puede decir que el término relacionado a ondas capilares es despreciable. Por otro lado, se puede decir que se está trabajando en aguas someras ya que $h < \lambda$ pero no mucho mayor como en el caso de un tsunami en donde $\lambda \approx 213\text{km}$ lo cual es mucho mayor a los 4km que tiene el mar de profundidad por lo que en ese caso se tienen aguas someras.

$$1 > \frac{h}{\lambda} = \frac{2\text{cm}}{11\text{cm}} = 0.1818 \quad 1 \gg \frac{h}{\lambda} = \frac{4\text{km}}{213\text{km}} = 0.01877$$

por lo que se trabajó con un orden de magnitud menor que en el caso de un tsunami. Aunado a esto, se estimó velocidad de fase suponiendo que se tienen ondas con una longitud de $\lambda \geq 11\text{cm}$ por lo que se obtuvo

$$c = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{\sigma 2\pi}{\rho\lambda}\right) \tanh\left(\frac{h 2\pi}{\lambda}\right)} \approx \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi}\right) \left(\frac{h 2\pi}{\lambda}\right)} = \sqrt{g * h} = \sqrt{981\text{cm/s}^2 * 2\text{cm}} = 44.22\text{cm/s}$$

Por esta razón, se espera obtener una velocidad de fase dominante cercana a este valor.

2.2. Método de schlieren sintético

El método de schlieren sintético, relaciona el gradiente de la deformación de la superficie libre con el desplazamiento aparente de un patrón de puntos situado en el fondo de la capa de fluido. Los puntos son registrados con una cámara digital cuando la superficie libre se encuentre en reposo y cuando no. A partir los movimientos aparentes $\vec{\delta r}(x, y)$ se puede reconstruir la superficie libre.

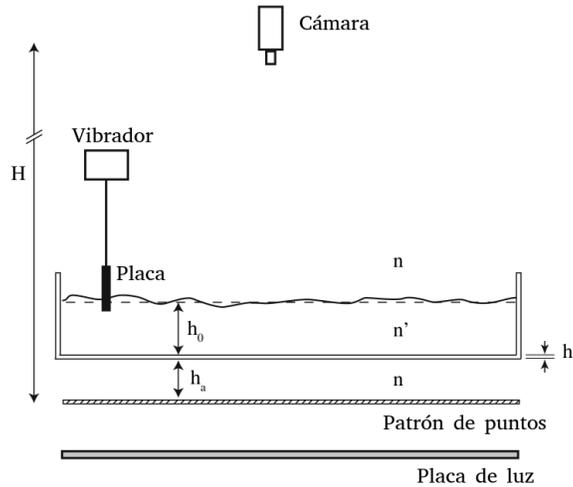


Figura 2.2: Representación dispositivo experimental para la técnica schlieren sintético en una cuba que contiene un fluido que es perturbado con un vibrador. Figura tomada y modificada de [Moisy et al., 2009].

Para determinar la dirección y magnitud de los desplazamientos, las imágenes obtenidas se dividieron en celdas, donde el patrón de puntos debe ser tal que, existan al menos 10 puntos en cada celda, por lo que se puede utilizar el mismo tipo de software que se usa en PIV (Velocimetría por imágenes de partículas) para obtener el campo de desplazamientos aparentes pero con la diferencia de que los puntos realmente no se mueven, antes de analizar las imágenes se deben intercalar entre ella una del patrón de puntos donde la superficie este en reposo (la misma siempre). De esta forma al analizar las

imágenes se obtuvo el campo de desplazamientos aparentes.

El patrón de puntos debe ser aleatorio, ya que si fuese periódico se tendrían problemas al analizar desplazamientos aparentes producidos por deformaciones periódicas. Una vez aclarado esto se puede proceder a obtener el campo de desplazamientos aparentes y la deformación de la superficie libre. A continuación, se presenta un bosquejo del desarrollo teórico desarrollado por Frédéric Moisy, Marc Rabaud y Kévin Salsac, para una versión más precisa consulte directamente su trabajo titulado “A synthetic Schlieren method for the measurement of the topography of a liquid interface” [Moisy et al., 2009].

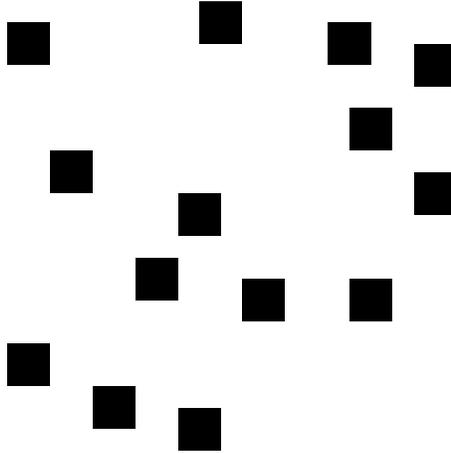


Figura 2.3: Sección escalada del patrón de puntos aleatorios pegado al fondo del tanque.

Para poder determinar el campo de movimientos aparentes $\delta\mathbf{r}(x, y)$, se toma un punto M en el patrón y se determinan los puntos virtuales M' y M'' ; correspondientes a los de la superficies plana y deformada del fluido. Se define $\mathbf{M}'\mathbf{M}'' = \delta\mathbf{r}$, para posteriormente relacionar $\delta\mathbf{r}$ con ∇h que es el gradiente de la superficie deformada.

Para ello se supone lo siguiente:

1. La aproximación paraxial es decir $H \gg L$ donde L es el tamaño del campo dado un ángulo paraxial máximo $\beta_{max} \simeq L/\sqrt{2}H \ll 1$. en la figura 2.10a se muestra cómo se considera L .
2. La aproximación de pendiente pequeña es decir el ángulo θ entre el vector normal $\hat{\mathbf{n}}$ a la interfase y el vector vertical $\hat{\mathbf{z}}$ es pequeña (figura 1.5). Como consecuencia la pendiente γ de la superficie, medida en el plano de incidencia también es pequeño.
3. La aproximación de amplitud pequeña es decir tomando $h(x, y) = h_p + \eta(x, y)$ como la altura de la superficie en el punto (x, y) , la amplitud $|\eta|$ es pequeña comparada con la altura media h_p figura 1.5 b.

Imagen refractada a través de la superficie plana

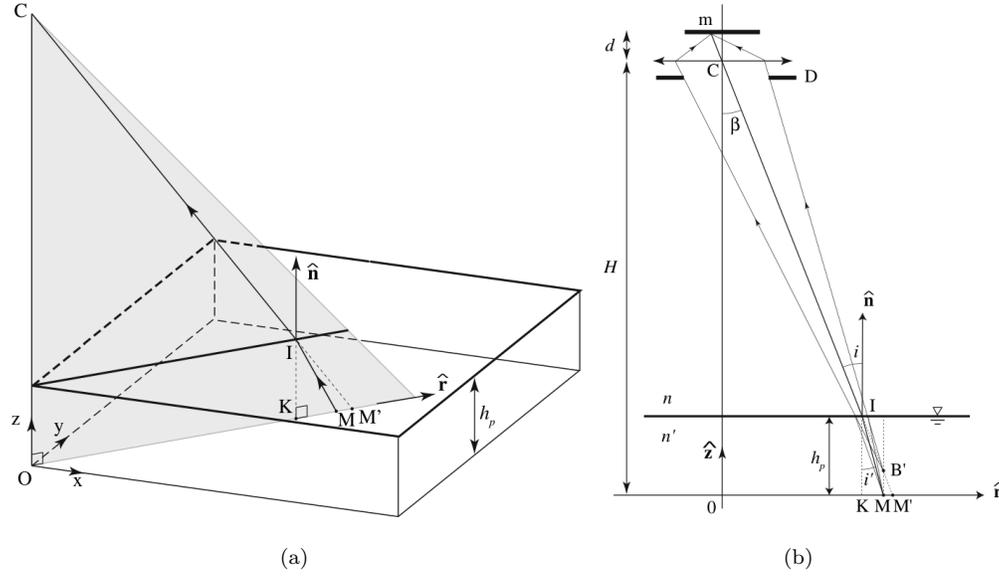


Figura 2.4: a) Representación gráfica de la Geometría tridimensional de los rayos sobre la superficie plana. b) Representación gráfica de la vista bidimensional de los rayos en el plano incidente COM. Diagramas obtenidos de [Moisy et al., 2009].

El objeto virtual B' ubicado sobre el patrón en $(x_M, y_M, \alpha h_p)$ (figura 1.5b) con $\alpha = 1 - n/n'$. El desplazamiento de M a M' es hacia afuera en la dirección radial $MM' = h_p(\tan i - \tan i')\hat{r}$, donde la relación entre los ángulos de los rayos incidentes y refractados están dados por la ley de Snell: $n \sin i = n' \sin i'$. Para la superficie plana el ángulo incidente es el ángulo β con la aproximación paraxial y las ecuaciones antes mencionadas, se obtiene

$$MM' = \alpha h_p i \hat{r} \quad (2.3)$$

Imagen refractada a través de la superficie deformada

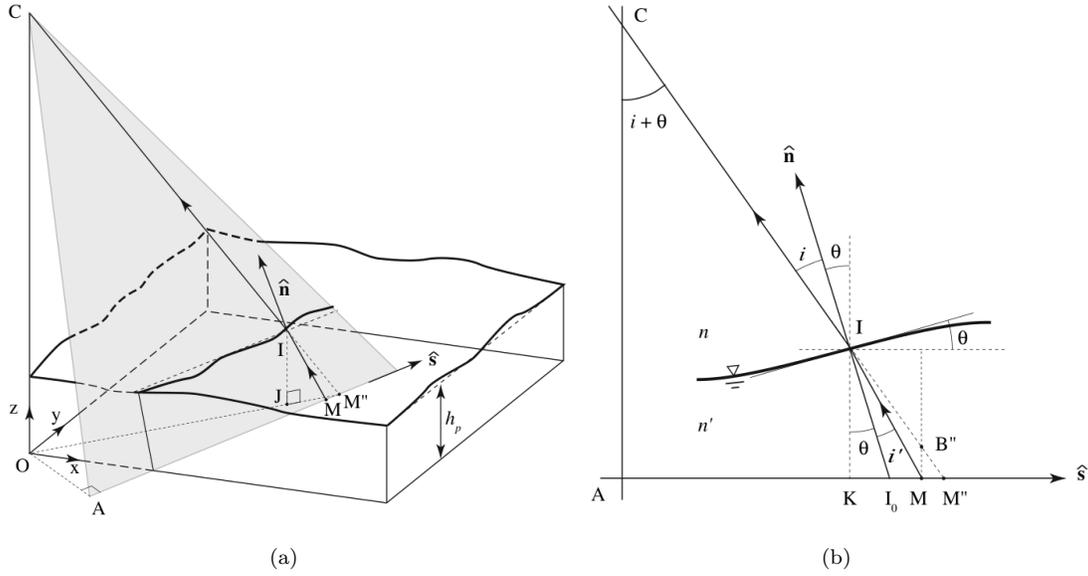


Figura 2.5: a) Representación gráfica de la geometría tridimensional de los rayos sobre la superficie deformada. b) Representación gráfica de la vista bidimensional de los rayos en el plano incidente CAM, donde C corresponde a la cámara, A es el punto de intersección entre la línea con dirección \hat{s} que pasa por M y la línea perpendicular a \hat{s} que pasa por el origen O. Diagramas obtenidos de [Moisy et al., 2009].

Al considerar el caso de la superficie deformada, el vector normal a la superficie es

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\hat{\mathbf{z}} - \nabla h}{\sqrt{1 + |\nabla h|^2}} \quad (2.4)$$

aplicando la aproximación de pendiente pequeña $|\nabla h|^2 \ll 1$ (cercana a cero); la ecuación 1.4 se simplifica en $\nabla h = \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{n}}$. Como $\hat{\mathbf{n}}$ se encuentra en el mismo plano que \mathbf{CM}'' y $\hat{\mathbf{S}}$ (figura 1.6a) se le puede representar como la combinación lineal de éstos.

$$\hat{\mathbf{n}} = a\hat{\mathbf{s}} + b\frac{\mathbf{CM}''}{|\mathbf{CM}''|} \quad (2.5)$$

Al usar el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, se obtuvo las proyecciones de $\hat{\mathbf{n}}$ sobre los vectores base $\frac{\mathbf{CM}''}{|\mathbf{CM}''|}$ y $\hat{\mathbf{S}}$ y se restó la aportación del vector $\frac{\mathbf{CM}''}{|\mathbf{CM}''|}$ sobre $\hat{\mathbf{S}}$ quedando

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} &= \left(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{S}} - \frac{\mathbf{CM}''}{|\mathbf{CM}''|} \cdot \hat{\mathbf{S}} \right) \hat{\mathbf{S}} + \left(\hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\mathbf{CM}''}{|\mathbf{CM}''|} \right) \frac{\mathbf{CM}''}{|\mathbf{CM}''|} \\ &= \left(-\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - (i + \theta)\right) \right) \hat{\mathbf{S}} + (-\cos(i)) \frac{\mathbf{CM}''}{|\mathbf{CM}''|} \\ &= (-\sin\theta - (-\cos i - \sin\theta)) \hat{\mathbf{S}} - \cos i \frac{\mathbf{CM}''}{|\mathbf{CM}''|} \end{aligned}$$

después de considerar las aproximaciones paraxiales de primer orden; se obtuvo para la ecuación 1.5 $a = i$ y $b = -1$, por lo que

$$\hat{\mathbf{n}} = i\hat{\mathbf{s}} - \frac{CM''}{|CM''|} \quad (2.6)$$

sustituyendo $\hat{\mathbf{n}}$ en la ecuación de ∇h y reemplazando $\hat{\mathbf{z}} = -\frac{CO}{|CO|} = -\frac{CO}{H}$ y $\frac{CM''}{|CM''|} \approx \frac{CO}{H} + \frac{OM''}{H}$ se obtuvo

$$\nabla h = \frac{OM''}{H} - i\frac{MM''}{|MM''|} = \frac{OM''}{H} - i\hat{\mathbf{s}} \quad (2.7)$$

de la figura 1.6a se tiene que $MM'' = IK(\tan(\theta + i) - \tan(\theta + i'))\hat{\mathbf{s}}$ donde K es la proyección de I sobre $z = 0$, $IK = II_0 \cos \theta$ con I_0 a lo largo del vector normal $\hat{\mathbf{n}}$ e $II_0 = h(I)/\cos \gamma$ entonces.

$$MM'' = h(I) \frac{\cos \theta}{\cos \gamma} (\tan(\theta + i) - \tan(\theta + i'))\hat{\mathbf{s}} \approx h_p i \alpha \hat{\mathbf{s}} \quad (2.8)$$

al considerar ángulos y deformaciones pequeñas $h(I) \approx h_p$, $\cos \theta \approx 1$, $\cos \gamma \approx 1$, $\tan(i + \theta) \approx i + \theta$, $\tan(\theta + i') \approx \theta + i\frac{n}{n'}$; por lo cual, $i\hat{\mathbf{s}} = \frac{MM''}{\alpha h_p}$ y al sustituir en la ecuación 2.18 se introdujo $OM'' = OM' + \delta r$ y $MM'' = MM' + \delta r$ (figura 1.7) resulta

$$\nabla h = \frac{OM'}{H} + \frac{\delta r}{H} - \left(\frac{MM'}{\alpha h_p} + \frac{\delta r}{\alpha h_p} \right) \quad (2.9)$$

$$\nabla h = -\delta r \left(\frac{1}{\alpha h_p} - \frac{1}{H} \right) + \frac{OM'}{H} - \frac{MM'}{\alpha h_p} \quad (2.10)$$

Los últimos dos términos de la ecuación 1.10, son idénticos por semejanza de triángulos lo cual se representa en la figura 1.6b, por lo que, se tiene que el gradiente de la superficie posee una relación lineal simple con δr el desplazamiento.

$$\nabla h = -\frac{\delta r}{h^*} \quad \text{con} \quad \frac{1}{h^*} = \left(\frac{1}{\alpha h_p} - \frac{1}{H} \right) > 0 \quad (2.11)$$

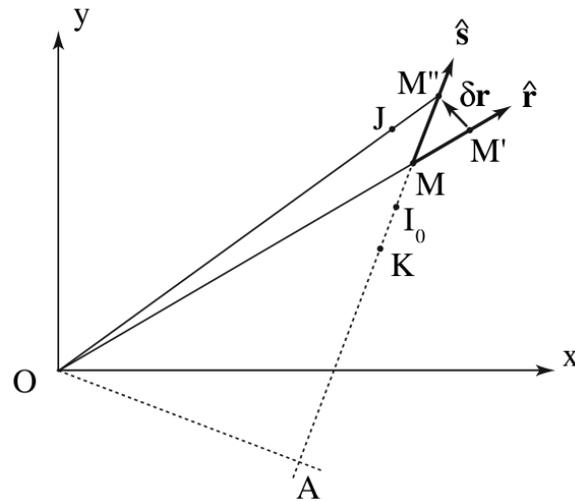


Figura 2.6: Vista superior del plano del patrón, donde se muestra el punto M y sus dos objetos virtuales M' y M'' para los casos de las superficies plana y deformada respectivamente. La línea AMM'' es la intersección del plano incidente CAM con el plano del patrón Oxy . J es la proyección vertical del punto I donde el rayo de luz MIC intercepta a la interfase. $M'M'' = \delta r$ es desplazamiento medido por la correlación digital de las imágenes. Diagrama obtenido de [Moisy et al., 2009]

2.3. Antecedentes

- Hammack 1970, realizó experimentos y desarrolló un modelo analítico para un bloque que se mueve verticalmente en el fondo de una capa de líquido.
- Okada 1985, realizó un modelo que permite a partir de datos sísmicos obtener una estimación de la forma del tren de ondas generado por un maremoto. Este modelo a partir de datos sísmicos estima como es la deformación del lecho marino y aplica lo que se conoce como hipótesis pasiva, es decir supone que la deformación de la superficie libre es exactamente igual a la deformación del fondo, y a partir de esta predice cómo será el tren de ondas generado.
- Enet et al 2007, realizaron experimentos en donde simulaban tsunamis por deslizamiento de roca sumergida.
- Gordillo et al 2013, realizaron experimentos y una extensión del trabajo de Hammack en donde estudiaron deformaciones de superficie provocadas por un bloque circular que se mueve verticalmente.
- Marine Le Gal 2017, realizó un trabajo teórico en donde comparó resultados de distintos modelos analíticos con resultados numéricos centrado su atención en la importancia de las escalas de tiempo.

Capítulo 3

Desarrollo Analítico

3.1. Modelo de Hammack

El modelo de Hammack es un modelo analítico desarrollado por Joseph Leonar Hammack Jr. en 1972 como parte de su tesis doctoral "Tsunamis-A model of their generation and propagation" [Hammack, 1972]. Este modelo brinda una solución para la deformación de la superficie libre $\eta(x,t)$, producida por el movimiento de un bloque rectangular. El bloque está en el fondo $\zeta(x,t)$ de un recipiente que contiene un líquido donde la profundidad (h) del mismo es constante. Las soluciones obtenidas son solo una aproximación, ya que no se toman en cuenta términos no lineales, por lo que al principio la aproximación será buena ya que los términos no lineales serán pequeños, conforme la onda se propaga, estos crecerán hasta tener la misma magnitud que los términos lineales [Hammack, 1972].

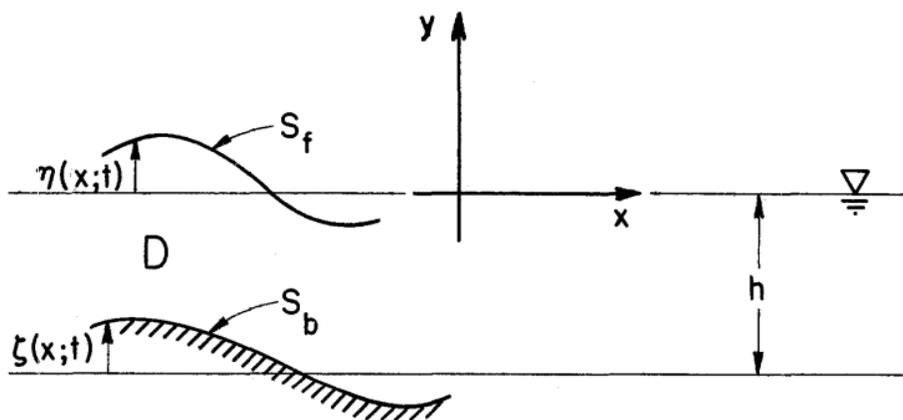


Figura 3.1: Definición del sistema de coordenadas en donde $\eta(x,t)$ y $\zeta(x,t)$ son la deformación de la superficie libre y la deformación del fondo respectivamente [Hammack, 1972].

Para deducir el modelo de Hammack, se parte de la ecuación de Navier-Stokes y la de continuidad.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla gy + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

Suponiendo que la velocidad del fluido es pequeña comparada con la velocidad del sonido en ese medio, que el fluido es no viscoso y que el flujo es irrotacional podemos simplificar las ecuaciones de la siguiente forma

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla gy \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

de esta forma la ecuación de Navier-Stokes se convierte en la ecuación de Euler, además, por ser el flujo irrotacional, se puede expresar a la velocidad como el gradiente de una función potencial φ

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi \implies \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{en } D \quad (3.1)$$

Está es la ecuación a resolver, para su solución se imponen condiciones de frontera, una de ella sale de la ecuación de Bernoulli, empezamos sustituyendo en la ecuación de Euler, obteniendo lo siguiente

$$-\frac{\partial \nabla \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u}^2 = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla gy$$

Al suponer que φ es una función bien comportada podemos intercambiar los operadores diferenciales y queda

$$\nabla \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \frac{p}{\rho} + gy \right) = 0 \quad \implies \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \frac{p}{\rho} + gy = cte \quad (3.2)$$

Esta es la ecuación de Bernoulli dependiente del tiempo y la siguientes dos para el fondo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{d\zeta}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{en} \quad y = -h \quad (3.3)$$

La primera ecuación corresponde al fluido sobre los bloques y la segunda al resto del fluido, por lo que la condición cinemática es

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{en} \quad y = 0 \quad (3.4)$$

Esta ecuación contiene un término no lineal, por lo que para poder resolverla se ignora este término esperando que su contribución sea pequeña en comparación al término lineal por lo que se obtiene lo siguiente

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{en} \quad y = 0 \quad (3.5)$$

Por otro lado, de la ecuación 2.2, se tiene que, si se está en la superficie libre, la presión es constante y despreciando el término cuadrático dado que \mathbf{u} es pequeña se obtiene

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\eta = cte \quad \text{en} \quad y = 0 \quad (3.6)$$

Por otro lado, derivando respecto al tiempo la ecuación anterior y sustituyendo la ecuación 2.5 se obtiene

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (3.7)$$

Estas ecuaciones pueden ser resueltas de varias formas, en particular para este caso es muy útil el método de las transformadas. En este caso las transformadas usadas serán la transformada de Fourier y la de Laplace junto con sus respectivas transformadas inversas. La transformada de Fourier, permite transformar funciones que dependan del espacio al espacio de números de onda, siempre y cuando la función este definida para $-\infty < x < \infty$ y está definida como

$$\bar{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx$$

Y su transformación inversa está definida como

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(k) e^{-ikx} dk$$

Por otro lado, la transformada de Laplace permite transformar funciones que estén definidas para $t \geq 0$ y está definida como

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Si bien en algunos casos se puede invertir la transformada mediante el uso de tablas, es más conveniente utilizar la integral sobre el contorno de Bromwich

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \tilde{f}(s) e^{st} ds$$

esta integral compleja puede ser resuelta fácilmente mediante el uso del Teorema del residuo obteniendo

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \tilde{f}(s) e^{st} ds = \sum_{i=1}^n \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) e^{st} \tilde{f}(s)$$

en donde p_i son los puntos singulares o polos de la función, aplicándole ambas transformadas se obtiene

$$\tilde{\tilde{f}}(k, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(x, t) e^{-st} dt \right) e^{ikx} dx$$

Aplicando la transformada de Fourier para la coordenada espacial y la transformada de Laplace para la coordenada temporal a la ecuación 2.7 se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{ikx} e^{-st} \frac{\partial^2 \varphi(x, y, t)}{\partial x^2} dt + \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{ikx} e^{-st} \frac{\partial^2 \varphi(x, y, t)}{\partial y^2} dt = 0$$

Suponiendo que las funciones son bien comportadas podemos intercambiar los operadores y reescribir la ecuación de la siguiente forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\int_0^{\infty} e^{-st} \varphi(x, y, t) dt \right] dx + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{ikx} e^{-st} \varphi(x, y, t) dt \right] = 0$$

lo cual a su vez puede ser reescrito como

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}(x, y, s)}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}(k, y, s)}{\partial y^2} = 0$$

Integrando por partes y suponiendo que $\tilde{\varphi}(x, y, s)$ y sus derivadas se anulan en $x = \pm\infty$ se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}(x, y, s)}{\partial x^2} dx = e^{ikx} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} ik e^{ikx} \frac{\partial \tilde{\varphi}(x, y, s)}{\partial x} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} ik e^{ikx} \frac{\partial \tilde{\varphi}(x, y, s)}{\partial x} dx$$

Integrando nuevamente por partes obtenemos

$$\begin{aligned} - \int_{-\infty}^{\infty} ik e^{ikx} \frac{\partial \tilde{\varphi}(x, y, s)}{\partial x} dx &= -ik e^{ikx} \tilde{\varphi}(x, y, s) \Big|_{-\infty}^{\infty} - k^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \tilde{\varphi}(x, y, s) dx = -k^2 \tilde{\varphi}(k, y, s) \\ \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}(k, y, s)}{\partial y^2} - k^2 \tilde{\varphi}(k, y, s) &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Aplicando el mismo procedimiento a las ecuaciones 2.3, 2.5 y 2.6 se obtiene

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}(k, -h, s)}{\partial y} = s \tilde{\zeta}(k, s) \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}(k, 0, s)}{\partial y} + \frac{s^2}{g} \tilde{\varphi}(k, 0, s) = 0 \quad (3.10)$$

$$\tilde{\eta}(k, s) = -\frac{s}{g} \tilde{\varphi}(k, 0, s) \quad (3.11)$$

Para deducir estas ecuaciones se parte del hecho que $\varphi(x, y, 0) = \frac{\partial \varphi(x, y, 0)}{\partial t} = 0$, lo cual es una consecuencia de las condiciones iniciales impuestas en las fronteras del problema.

La ecuación 2.8 es una ecuación diferencial que puede ser resuelta fácilmente obteniéndose por solución

$$\tilde{\varphi}(k, y, s) = A(k, s) \cosh(ky) + B(k, s) \sinh(ky) \quad (3.12)$$

sustituyendo esta solución en la ecuación 2.10 se obtiene

$$\begin{aligned} kB(k, s) + \frac{s^2}{g} A(k, s) &= 0 \\ \implies B(k, s) &= -\frac{s^2}{kg} A(k, s) \end{aligned} \quad (3.13)$$

sustituyendo 2.13 en 2.12 y 2.9 nos queda

$$\tilde{\varphi}(k, y, s) = A(k, s) \left[\cosh(ky) - \frac{s^2}{kg} \sinh(ky) \right] \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \implies \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}(k, y, s)}{\partial y} \right|_{y=-h} &= kA(k, s) [\sinh(k(-h)) - \frac{s^2}{kg} \cosh(k(-h)y)] = s\tilde{\zeta}(k, s) \\ \implies A(k, s) &= \frac{-gs\tilde{\zeta}(k, s)}{[s^2 + gk \tanh(kh)] \cosh(kh)} = \frac{-gs\tilde{\zeta}(k, s)}{[s^2 + \omega^2] \cosh(kh)} \end{aligned}$$

En este caso $\omega^2 = gk \tanh(kh)$ es idéntica a la relación de dispersión sin capilaridad, no obstante, no lo es para este problema, por lo que al sustituirla en la ecuación 2.14 resulta

$$\implies \tilde{\varphi}(k, y, s) = \frac{-gs\tilde{\zeta}(k, s)}{[s^2 + \omega^2] \cosh(kh)} \left[\cosh(ky) - \frac{s^2}{kg} \sinh(ky) \right] \quad (3.15)$$

sustituyendo 2.15 en 2.11 nos queda

$$\tilde{\eta}(k, s) = -\frac{s}{g} \frac{-gs\tilde{\zeta}(k, s)}{[s^2 + \omega^2] \cosh(kh)} \left[\cosh(ky) - \frac{s^2}{kg} \sinh(ky) \right] \Big|_{y=0} = \frac{-s^2\tilde{\zeta}(k, s)}{[s^2 + \omega^2] \cosh(kh)}$$

Esta es la doble transformada de la deformación de la superficie libre en términos de k y s por lo que ahora solo debe devolverse a sus variables originales. Al aplicar las transformadas inversas de Fourier y la de Laplace a la ecuación anterior se obtiene

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} e^{st} \left(\frac{-s^2\tilde{\zeta}(k, s)}{[s^2 + \omega^2] \cosh(kh)} \right) ds \right\} dk \quad (3.16)$$

Para poder resolver esta ecuación debe especificarse la función $\tilde{\zeta}(k, s)$, para esto partimos del movimiento de un par bloques que se mueve hacia arriba y hacia abajo respectivamente, y cuyo movimiento corresponde a una función sinusoidal

$$\zeta(x, t) = \zeta_0 \left[\left(\frac{1 - \cos(\pi t/T)}{2} \right) H(T-t) + H(t-T) \right] [H(b^2 - (x-b)^2) - H(b^2 - (x+b)^2)] \quad (3.17)$$

En donde $H(t-T)$ es la función de Heaviside definida por

$$H(T-t) = \begin{cases} 1 & t > T \\ 0 & t < T \end{cases} \quad (3.18)$$

Esta función es muy útil ya que nos permite limitar la duración del movimiento de los bloques a T segundos y el ancho de los bloques a $2b$, por otro lado ζ_0 es la amplitud del desplazamiento vertical de los bloques.

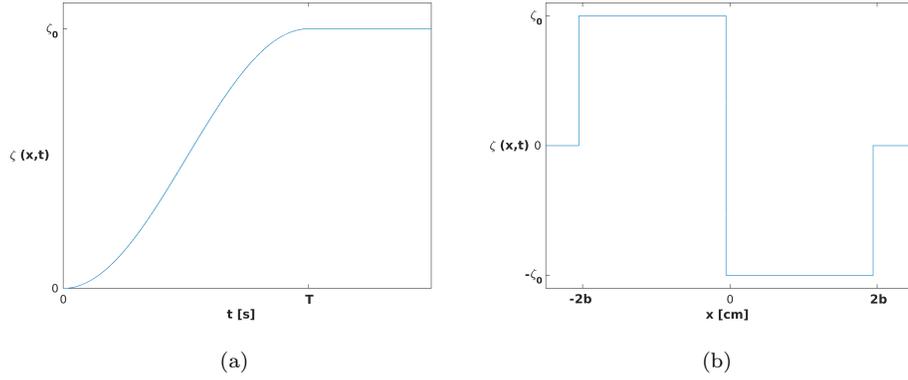


Figura 3.2: (a) Evolución temporal del movimiento de un bloque que se mueve hacia arriba ocurrido en T (s), (b) posición de los bloques para $t > T$

Al aplicar la transformada de Laplace a la ecuación 2.17 se deriva

$$\begin{aligned}
 \bar{\zeta}(k, t) &= \zeta_0 \left[\left(\frac{1 - \cos(\pi t/T)}{2} \right) H(T - t) + H(t - T) \right] \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} [H(b^2 - (x + b)^2) - H(b^2 - (x - b)^2)] dx \\
 &= \zeta_0 \left[\left(\frac{1 - \cos(\pi t/T)}{2} \right) H(T - t) + H(t - T) \right] \left[\int_{-2b}^0 e^{ikx} dx - \int_0^{2b} e^{ikx} dx \right] \\
 &= \zeta_0 \left[\left(\frac{1 - \cos(\pi t/T)}{2} \right) H(T - t) + H(t - T) \right] \left[\frac{e^{ikx}}{ik} \Big|_{-2b}^0 - \frac{e^{ikx}}{ik} \Big|_0^{2b} \right] \\
 &= \zeta_0 \left[\left(\frac{1 - \cos(\pi t/T)}{2} \right) H(T - t) + H(t - T) \right] \left[\frac{e^0 - e^{-i2kb}}{ik} - \frac{e^{i2kb} - e^0}{ik} \right] \\
 &= \zeta_0 \left[\left(\frac{1 - \cos(\pi t/T)}{2} \right) H(T - t) + H(t - T) \right] \left[\frac{1 - \cos(2kb) + i \sin(2kb)}{ik} - \frac{\cos(2kb) + i \sin(2kb) - 1}{ik} \right] \\
 &= \zeta_0 \left[\left(\frac{1 - \cos(\pi t/T)}{2} \right) H(T - t) + H(t - T) \right] \left[\frac{2 - 2 \cos(2kb)}{ik} \right]
 \end{aligned}$$

en este caso se obtuvo una función imaginaria, aplicando la transformada de Fourier nos queda

$$\begin{aligned}
 \tilde{\zeta}(k, s) &= 2\zeta_0 \int_0^\infty e^{-st} \left[\left(\frac{1 - \cos(\pi t/T)}{2} \right) H(T-t) + H(t-T) \right] \left[\frac{1 - \cos(2kb)}{ik} \right] dt \\
 &= 2\zeta_0 \left[\frac{1 - \cos(2kb)}{ik} \right] \int_0^\infty e^{-st} \left[\left(\frac{1 - \cos(\pi t/T)}{2} \right) H(T-t) + H(t-T) \right] dt \\
 &= 2\zeta_0 \left[\frac{1 - \cos(2kb)}{ik} \right] \left\{ \frac{1}{2} \left[\int_0^T e^{-st} dt - \int_0^T e^{-st} \cos(\pi t/T) dt \right] + \int_T^\infty e^{-st} dt \right\} \\
 &= 2\zeta_0 \left[\frac{1 - \cos(2kb)}{ik} \right] \left\{ \frac{1}{2} \left[-\frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^T - \int_0^T e^{-st} \cos(\pi t/T) dt \right] - \frac{e^{-st}}{s} \Big|_T^\infty \right\} \\
 &= 2\zeta_0 \left[\frac{1 - \cos(2kb)}{ik} \right] \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} - \int_0^T e^{-st} \cos(\pi t/T) dt \right] + \frac{e^{-sT}}{s} \right\} \\
 &= 2\zeta_0 \left[\frac{1 - \cos(2kb)}{ik} \right] \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s} - \int_0^T e^{-st} \cos(\pi t/T) dt \right] \right\}
 \end{aligned}$$

la última integral requiere algo más de trabajo, primero integramos por partes

$$I = \int_0^T e^{-st} \cos(\pi t/T) dt = -\frac{e^{-st} \cos(\pi t/T)}{s} \Big|_0^T - \frac{\pi}{sT} \int_0^T e^{-st} \sin(\pi t/T) dt$$

integrando nuevamente por partes

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{e^{-st} \cos(\pi t/T)}{s} \Big|_0^T - \frac{\pi}{sT} \left[-\frac{e^{-st} \sin(\pi t/T)}{s} \Big|_0^T - \frac{\pi}{sT} \int_0^T e^{-st} \cos(\pi t/T) dt \right] \\
 &= -\frac{e^{-st} \cos(\pi t/T)}{s} \Big|_0^T + \frac{\pi e^{-st} \sin(\pi t/T)}{s^2 T} \Big|_0^T + \frac{\pi^2}{s^2 T^2} I \\
 &= \frac{s^2 T^2 (1 + e^{-sT})}{s^2 T^2 + \pi^2}
 \end{aligned}$$

Por lo que, la doble transformada de la ecuación que describe el movimiento de los bloques queda

$$\tilde{\zeta}(x, t) = \zeta_0 \left[\frac{1 - \cos(2kb)}{ik} \right] \left[(1 + e^{-sT}) \left(\frac{\varkappa^2}{s(s^2 + \varkappa^2)} \right) \right] \quad \text{donde} \quad \varkappa = \frac{\pi}{T}$$

sustituyendo en la ecuación 2.16 se obtiene

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-ikx} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} e^{st} \left(\frac{-s^2}{[s^2 + \omega^2] \cosh(kh)} \zeta_0 \left[\frac{1 - \cos(2kb)}{ik} \right] \left[\frac{\varkappa^2 (1 + e^{-sT})}{s(s^2 + \varkappa^2)} \right] \right) ds \right\} dk$$

lo cual se puede reescribir como

$$\eta(x, t) = \frac{\zeta_0}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-ikx} \left[\frac{1 - \cos(2kb)}{ik \cosh(kh)} \right] \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} e^{st} \left(\frac{-s^2}{[s^2 + \omega^2]} \left[\frac{\varkappa^2 (1 + e^{-sT})}{s(s^2 + \varkappa^2)} \right] \right) ds \right\} dk$$

En este caso la transformada inversa de Laplace se puede integrar recurriendo al teorema del residuo obteniendo

$$\eta(x, t) = \frac{\zeta_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \left[\frac{1 - \cos(2kb)}{ik \cosh(kh)} \right] \left[\frac{\varkappa^2}{\varkappa^2 - \omega^2} \right] [\cos(\omega t) - \cos(\varkappa t) + H(t - T)(\cos(\omega(t - T)) + \cos(\varkappa t))] dk$$

la anterior es una integral compleja, en donde la parte imaginaria es impar y la real es par, como se está integrando en un intervalo simétrico la parte imaginaria es cero y la real se puede escribir como

$$\eta(x, t) = \frac{\zeta_0}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{\sin(kx)(\cos(2kb) - 1)}{k \cosh(kh)} \right] \left[\frac{\varkappa^2}{\varkappa^2 - \omega^2} \right] [\cos(\omega t) - \cos(\varkappa t) + H(t - T)(\cos(\omega(t - T)) + \cos(\varkappa t))] dk$$

Esta ecuación expresa la deformación de la superficie libre, sin embargo, no puede ser integrada analíticamente por lo que debe integrarse de forma numérica. En este caso se utilizó la regla 3/8 de Simpson [Burden and Fires, 2002] y se programó en Fortran.

Por otro lado, a partir de la ecuación 2.15 se puede derivar la función φ recurriendo nuevamente al teorema del residuo se obtiene lo siguiente

$$\varphi(x, y, t) = \frac{\zeta_0}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{\sin(kx)(\cos(2kb) - 1)}{k \cosh(kh)} \right] \left[\frac{\varkappa}{k\omega(\varkappa^2 - \omega^2)} \right] [F_1 + H(t - T)F_2] dk$$

$$F_1 = gk \cosh(ky)[\omega \sin(\varkappa t) - \varkappa \sin(\omega t)] - \varkappa\omega \sinh(ky)[\omega \sin(\omega t) - \varkappa \sin(\varkappa t)]$$

$$F_2 = gk \cosh(ky)[\omega \sin(\varkappa(t - T)) - \varkappa \sin(\omega(t - T))] - \varkappa\omega \sinh(ky)[\omega \sin(\omega(t - T)) - \varkappa \sin(\varkappa(t - T))]$$

Ésta función en sí misma no es de utilidad, pero sí lo son sus derivadas, por lo que derivando φ nos queda

$$u(x, y, t) = \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial x} = \frac{\zeta_0}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{\cos(kx)(\cos(2kb) - 1)}{\cosh(kh)} \right] \left[\frac{\varkappa}{k\omega(\varkappa^2 - \omega^2)} \right] [F_1 + H(t - T)F_2] dk$$

$$F_1 = gk \cosh(ky)[\omega \sin(\varkappa t) - \varkappa \sin(\omega t)] - \varkappa\omega \sinh(ky)[\omega \sin(\omega t) - \varkappa \sin(\varkappa t)]$$

$$F_2 = gk \cosh(ky)[\omega \sin(\varkappa(t - T)) - \varkappa \sin(\omega(t - T))] - \varkappa\omega \sinh(ky)[\omega \sin(\omega(t - T)) - \varkappa \sin(\varkappa(t - T))]$$

$$v(x, y, t) = \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial y} = \frac{\zeta_0}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{\sin(kx)(\cos(2kb) - 1)}{k \cosh(kh)} \right] \left[\frac{\varkappa}{k\omega(\varkappa^2 - \omega^2)} \right] [F_1 + H(t - T)F_2] dk$$

$$F_1 = gk^2 \sinh(ky)[\omega \sin(\varkappa t) - \varkappa \sin(\omega t)] - \varkappa\omega k \cosh(ky)[\omega \sin(\omega t) - \varkappa \sin(\varkappa t)]$$

$$F_2 = gk^2 \sinh(ky)[\omega \sin(\varkappa(t - T)) - \varkappa \sin(\omega(t - T))] - \varkappa\omega k \cosh(ky)[\omega \sin(\omega(t - T)) - \varkappa \sin(\varkappa(t - T))]$$

Estas ecuaciones nos brindan el campo de velocidades del fluido producido por el movimiento de los bloques, al igual que en el caso de la superficie libre. por esta razón es necesario recurrir a la regla 3/8 de Simpson y programarlo en Fortran para obtenerlo.

Haciendo una breve recapitulación del trabajo realizado, se despreció la capilaridad, compresibilidad y los efectos viscosos y se asumió que el flujo es irrotacional y que el sistema puede ser expresado en términos de una función de potencial de velocidad que satisface

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (3.19)$$

en el dominio. Se supuso que la relación $\zeta_m/h \ll 1$, por lo tanto, se pueden despreciar los términos no lineales en las condiciones de frontera [Hammack, 1972]. A continuación, se presentan la condición cinemática en la superficie libre, las condiciones de frontera y una cuarta ecuación obtenida a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes y de frontera.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad \text{en} \quad y = 0 \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \quad \text{en} \quad y = -h \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad \text{en} \quad y = 0 \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{en} \quad y = 0 \quad (3.23)$$

Al aplicar a estas cuatro ecuaciones, las transformadas de Fourier y de Laplace y resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales, se obtiene la deformación de la superficie libre transformada, regresándola a las variables originales a través de las transformadas inversas se obtiene

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} e^{st} \left(\frac{-s^2 \tilde{\zeta}(k, s)}{[s^2 + \omega^2] \cosh(kh)} \right) ds \right\} dk \quad (3.24)$$

para derivar la deformación de la superficie libre, solo hace falta la función ζ , en nuestro caso se propuso una ζ que represente el movimiento de dos bloques rectangulares que se mueven verticalmente en un determinado tiempo

$$\zeta(x, t) = \zeta_0 \left[\left(\frac{1 - \cos(\pi t/T)}{2} \right) H(T - t) + H(t - T) \right] [H(b^2 - (x - b)^2) - H(b^2 - (x + b)^2)] \quad (3.25)$$

transformando esta ecuación, insertándola en la ecuación 2.23 y aplicando las transformadas inversas nos queda

$$\eta(x, t) = \frac{\zeta_0}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{\sin(kx)(\cos(2kb) - 1)}{k \cosh(kh)} \right] \left[\frac{\varkappa^2}{\varkappa^2 - \omega^2} \right] [\cos(\omega t) - \cos(\varkappa t) + H(t - T)(\cos(\omega(t - T)) + \cos(\varkappa t))] dk$$

Por último, está ecuación no puede ser integrada de forma analítica, por lo que recurrimos a integración numérica y de esta forma obtenemos la deformación de la superficie libre. Producto del trabajo realizado es fácil calcula φ , pero esta no es de interés, más si lo son sus derivadas, ya que estas nos dan el campo de velocidades obteniendo

$$u(x, y, t) = \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial x} = \frac{\zeta_0}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{\cos(kx)(\cos(2kb) - 1)}{\cosh(kh)} \right] \left[\frac{\varkappa}{k\omega(\varkappa^2 - \omega^2)} \right] [F_1 + H(t - T)F_2] dk$$

$$F_1 = gk \cosh(ky)[\omega \sin(\varkappa t) - \varkappa \sin(\omega t)] - \varkappa\omega \sinh(ky)[\omega \sin(\omega t) - \varkappa \sin(\varkappa t)]$$

$$F_2 = gk \cosh(ky)[\omega \sin(\varkappa(t - T)) - \varkappa \sin(\omega(t - T))] - \varkappa\omega \sinh(ky)[\omega \sin(\omega(t - T)) - \varkappa \sin(\varkappa(t - T))]$$

$$v(x, y, t) = \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial y} = \frac{\zeta_0}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{\sin(kx)(\cos(2kb) - 1)}{k \cosh(kh)} \right] \left[\frac{\varkappa}{k\omega(\varkappa^2 - \omega^2)} \right] [F_1 + H(t - T)F_2] dk$$

$$F_1 = gk^2 \sinh(ky)[\omega \sin(\varkappa t) - \varkappa \sin(\omega t)] - \varkappa\omega k \cosh(ky)[\omega \sin(\omega t) - \varkappa \sin(\varkappa t)]$$

$$F_2 = gk^2 \sinh(ky)[\omega \sin(\varkappa(t - T)) - \varkappa \sin(\omega(t - T))] - \varkappa\omega k \cosh(ky)[\omega \sin(\omega(t - T)) - \varkappa \sin(\varkappa(t - T))]$$

las cuales tampoco se pueden integrar numéricamente y nuevamente se integran mediante el uso de integración numérica.

Capítulo 4

Desarrollo experimental

4.1. Dispositivo experimental

Para construir el dispositivo experimental, se analizaron varias opciones. El movimiento deseado era el de dos bloques rectangulares que debían moverse verticalmente, se pensó en utilizar electroimanes para mover los bloques, o bien, el uso de un sistema hidráulico. Pero al final se optó por un sistema mecánico que consiste en unir los bloques a un barrote circular por su centro de gravedad, de tal forma que los bloques colgarán del barrote. Los barrotos se unieron a un sistema biela manivela doble, el cual funciona mediante el giro de engranes gemelos. Uno de estos engranes estaba empotrado en un motor de pasos, de tal modo que cuando gire el motor, los engranes van a girar y esto provocará que los bloques se muevan verticalmente.

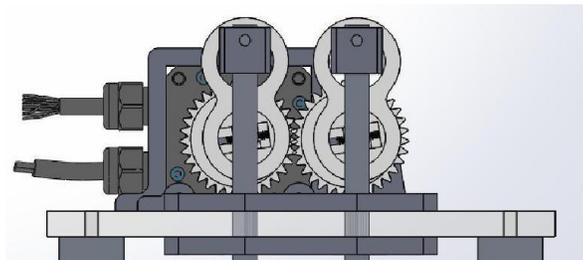


Figura 4.1: Diseño del sistema biela-manivela doble.

El motor reposaba sobre una placa sólida que se mantiene unida a otra placa sólida del mismo tamaño y material. Las placas forman un esqueleto paralelepípedo. El motor se encontraba empotrado en la tapa superficial, mientras que la tapa inferior sirve de base para todo el dispositivo. Por último, se añadieron bloques adicionales para que la altura de los bloques de acrílico fuese la misma que la de los alrededores como se muestra en la imagen 2.2.

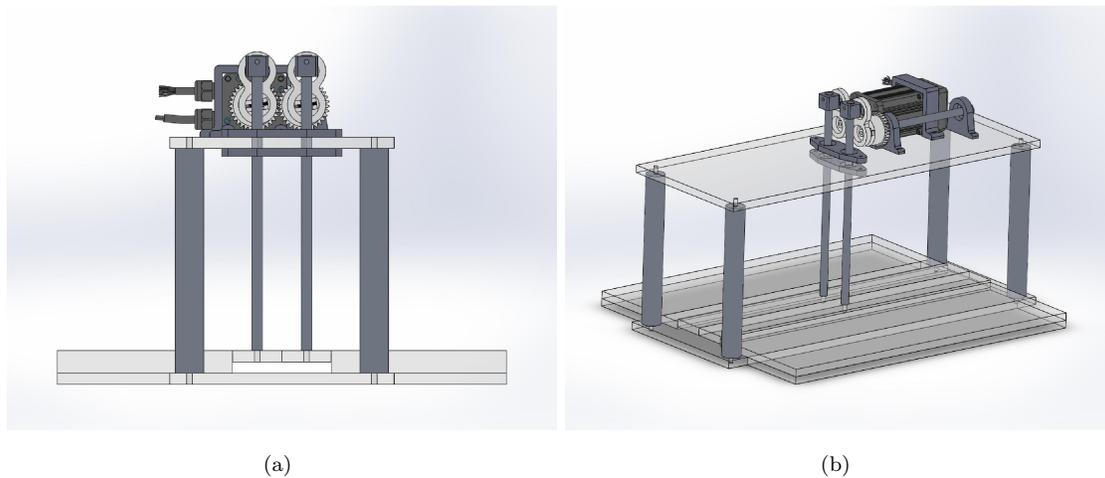


Figura 4.2: Diseño del dispositivo experimental visto de (a) frente, (b) costado.

Una vez que el diseño fue terminado, se comenzó el proceso de construcción. El dispositivo fue construido en el Taller de Fluidos de la Facultad de Ciencias. El material de los barrotos es aluminio debido a su facilidad de manejo y precio. Por otro lado, los bloques se escogieron de acrílico transparentes ya que debía poder verse a través de ellos, otra opción que pudo emplearse fue el vidrio, pero debido a su fragilidad y a su dificultad de manejo se optó por el acrílico. Las piezas de acrílico se mandaron a cortar a la medida en una cortadora láser ya que es muy importante que los cortes sean precisos, las dimensiones finales la base y la tapa son $40\text{cm} \times 60\text{cm} \times 1\text{cm}$. Una vez cortados se unieron a los barrotos mediante el uso de tornillos metálicos, los cuales no se pudieron conseguir inoxidable como era la intención. Se perforó el acrílico con un taladro de banco que hay en el laboratorio. Los bloques móviles tienen las siguientes dimensiones $4.4\text{cm} \times 38\text{cm} \times 1\text{cm}$ y para unir los barrotos a los bloques móviles fue necesario hacerles una cuerda interior. Como no se cuenta con la maquinaria adecuada para hacer eso en el laboratorio se mandaron a hacer al Taller Mecánico de la Facultad de Ciencias.



Figura 4.3: Foto de la barra mostrando una cuerda interna.

Para limitar el movimiento de los bloques, a los lados se cortó un bloque de acrílico de tal forma que solo les permitiera moverse verticalmente, este nuevo bloque tiene las siguientes dimensiones $34\text{cm} \times 66\text{cm} \times 1\text{cm}$, como un bloque debe moverse hacia arriba y el otro hacia abajo se pusieron dos de estos bloques juntos, uno sobre el otro, de tal forma que el bloque que baja no golpee el fondo. Por lo tanto, el movimiento máximo de los bloques es de un centímetro.



Figura 4.4: Foto del delimitador de movimiento.

Una vez cortados los bloques, se construyó el sistema biela-manivela doble, para ello se optó por construir las piezas con una impresora 3D cuya impresión se basa en la construcción de objetos a través de capas sobrepuestas muy finas, cuyo material se funde en un fino filamento de PLA o ácido poli-láctico, el cual, es un polímero biodegradable derivado del ácido láctico y que tiene unos niveles de resistencia a la presión y al calor aceptables.

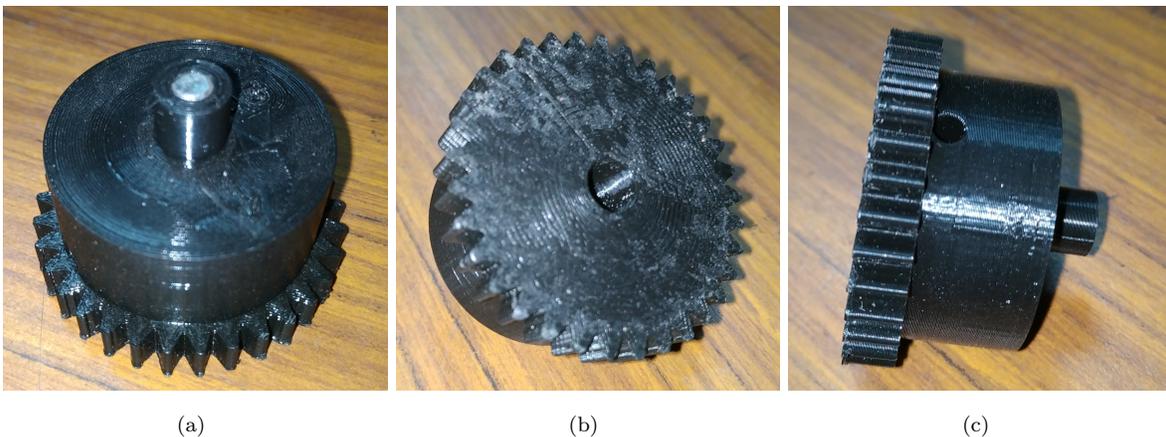


Figura 4.5: Engrane impreso con la ayuda de la impresora 3D visto en diferentes ángulos.

Una vez impresas todas las piezas, se procedió a armar el dispositivo, el cual quedó de la siguiente forma.

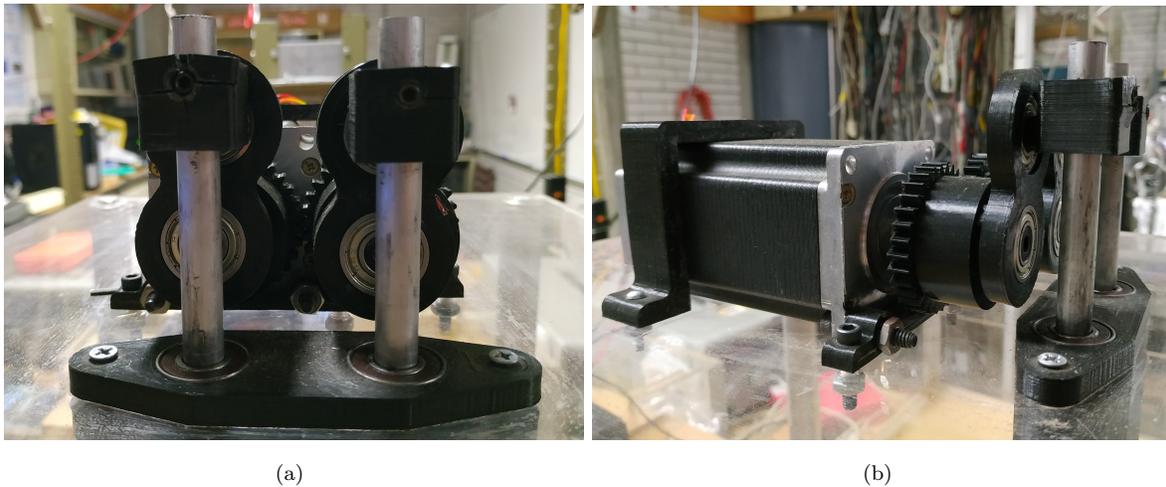


Figura 4.6: Sistema biela manivela visto de (a) frente, (b) costado.

Al construir el sistema biela manivela, se procedió a montar el motor de pasos (Nema 23), y a su vez conectar el motor a su respectivo controlador y este a su vez a una tarjeta de manipulación de señales digitales (PCI-MIO-16E-4) mediante un cable coaxial, de tal modo que, el cual se presenta de la siguiente forma



Figura 4.7: Sistema biela manivela visto de (a) frente, (b) costado.

Con esto quedó terminada la construcción del dispositivo y se procedió a elaborar un programa de LabView, que a través de la tarjeta produce un tren de ondas cuadradas que llegan al controlador del motor de pasos, esto con el fin de indicar al motor el movimiento deseado.

4.2. Metodología

Una vez terminada la construcción del dispositivo se procedió a crear el patrón de puntos. Se colocó por debajo de una cuba de dimensiones $1.20m \times 1.20m$ hecha de acrílico transparente. Se colocó el dispositivo sobre la cuba, de tal forma que los puntos quedaran bajo las paletas, ya que en esta zona y sus alrededores donde se quiere conocer la deformación de la superficie libre.



Figura 4.8: Vista superior del dispositivo colocado sobre el patrón de puntos.

Posteriormente, el motor de pasos fue conectado al controlador, el cual a su vez se enlazaba con la tarjeta mediante un cable coaxial mientras que el programa LabView se ponía en marcha. Asimismo, se procedió con el llenado de la cuba con suficiente agua para que las paletas móviles quedaran $2cm$ por debajo de la superficie del agua. Se colocó la cámara digital sobre un tripié, a una distancia de 1.20 metros del patrón de puntos y se enfocó la lente de manera que solo se grabara el patrón de puntos (figura 2.9).

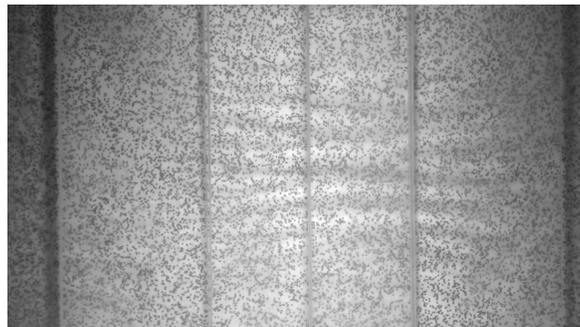


Figura 4.9: Patrón de puntos.

Para la realización de los experimentos se utilizaron diferentes cámaras, en particular se optó por aquellas que grabaran a más de 60 cuadros por segundo. Una vez colocada la cámara, se iluminó el patrón de puntos con dos lámparas de luz continua especiales para fotografía profesional. Posteriormente se

procedió a realizar pruebas con diferentes tiempos de subida τ_b , diferentes amplitudes ζ_m y diferentes cámaras con el fin de poner a punto el sistema experimental.



Figura 4.10: Configuración experimental

Una vez concluidas las pruebas, se procedió a realizar los experimentos. Se programó el motor para que diera un cuarto de vuelta, es decir, un bloque se moverá hacia arriba y el otro hacia abajo, después de un minuto, el motor dará los otros tres cuartos de vuelta y así sucesivamente, repitiéndolo por 10 ocasiones completando la grabación del procedimiento con la cámara digital.

Capítulo 5

Resultados y Análisis

5.1. Resultados experimentales

Tras realizar numerosas pruebas con diferentes configuraciones de velocidad y desplazamiento, en donde se tuvieron velocidades entre $0.23 \frac{cm}{s} < v < 10 \frac{cm}{s}$, se optó por presentar resultados cuya amplitud del movimiento fue de $\zeta_m = 0.23cm$. Los tiempos que duraron los movimientos fueron $\tau_b = 1.0095s, 0.1120s, 0.0231s$, estos parámetros se eligieron con el fin de mostrar las diferencias entre una deformación rápida y una lenta. No se pudieron realizar experimentos a tiempos menores debido a que el motor de pasos no puede girar a una mayor velocidad. A continuación, se presenta una imagen en la que se muestra una reconstrucción de la deformación de la superficie libre.

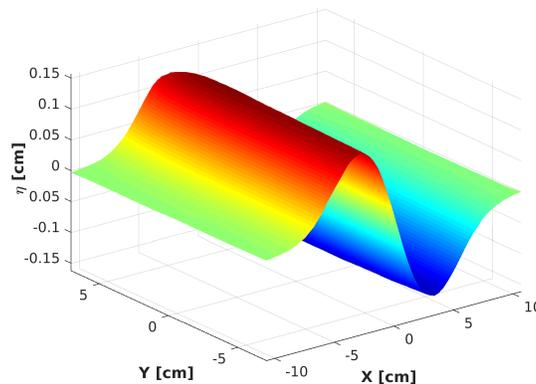


Figura 5.1: Gráfica de la deformación de la superficie libre inicial, en donde se puede observar que la deformación de la superficie libre es una función impar al igual que la función que describe el movimiento del fondo.

Al analizar y graficar al mismo tiempo la deformación de todos los planos paralelos se puede apreciar que la deformación es similar en todos los planos, en particular en los planos centrales es idéntica.

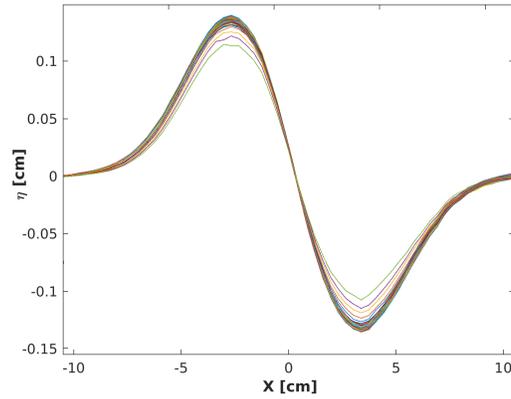


Figura 5.2: Gráfica de la deformación de la superficie libre en planos paralelos respecto al eje y a $t = 0.0567$ s.

Al dejar un solo plano, podemos ver que la deformación tiene un máximo y un mínimo global al inicio del movimiento como se puede observar en la figura 3.2.

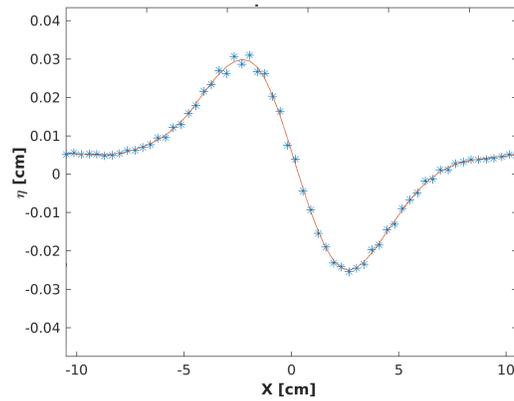


Figura 5.3: Comparación entre datos experimentales a $t = 0.0567$ s y una curva suavizada.

Siguiendo el desplazamiento del máximo o el mínimo se puede obtener la velocidad de fase del tren de ondas generado. Esta velocidad de fase, nos permite derivar la longitud de onda y a su vez, esta nos permite discriminar entre ondas capilares y ondas de gravedad. En particular se espera obtener longitudes de onda correspondientes a ondas de gravedad ($\lambda > 10$ cm), ya que en nuestros experimentos la tensión superficial tiene poca influencia.

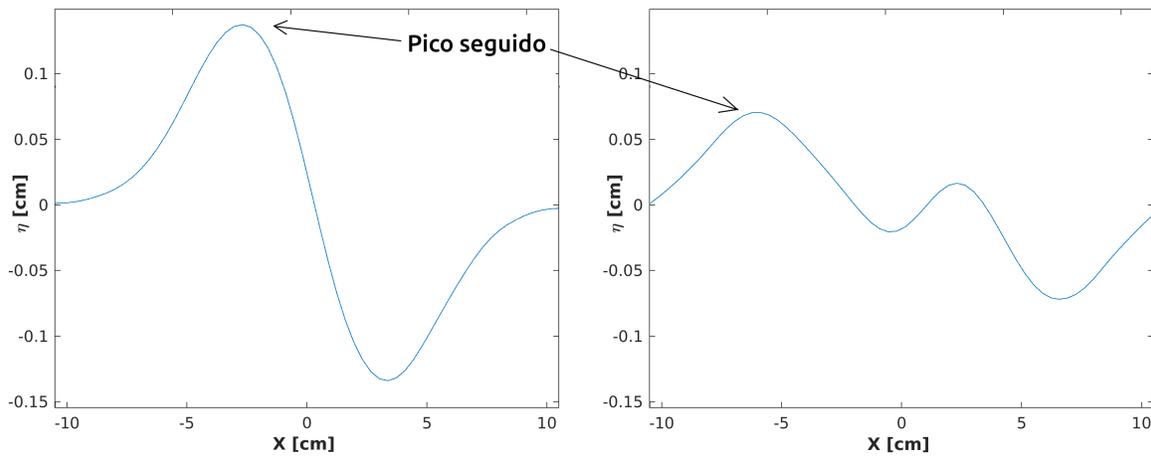


Figura 5.4: Gráfica de la deformación de la superficie libre a dos tiempos diferentes. La posición de la cresta se usó para calcular la velocidad de fase dominante, está se movió hacia la izquierda, mientras que el valle se movió a la derecha.

siguiendo la posición de un máximo se obtiene que la velocidad de desplazamiento se aproxima bastante bien a una constante, ya que la gráfica de la posición se ajusta bien a una línea recta.

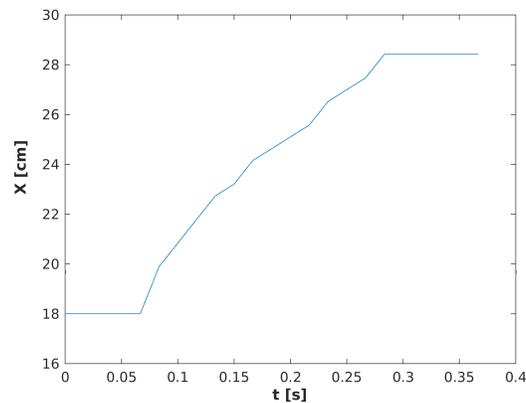


Figura 5.5: Gráfica de la posición de uno de los picos de la deformación de la superficie libre utilizada para calcular la velocidad de fase de la onda.

Al calcular la pendiente de la recta, se obtiene la velocidad de desplazamiento de la onda. El motor se programó para que diera una vuelta por cada 400 pulsos. Para generar un pulso rectangular en LabView se utilizaron dos pulsos, uno de $5V$ y otro de $0V$. Por tanto, se le deben enviar 200 pulsos al controlador del motor para que este último realice un cuarto de vuelta. Se analizaron diferentes tiempos de ascenso. Los tiempos correspondieron a las frecuencias de producción de las señales $f = 200Hz$, $f = 2,000Hz$ y $f = 20,000Hz$.

Estas frecuencias a su vez, deben corresponder a los tiempos $\tau_b = 1.0s$, $\tau_b = 0.1s$, $\tau_b = 0.01s$, sin embargo, corresponden a tiempos reales del movimiento de $\tau_b = 1.0095s$, $\tau_b = 0.1120s$, $\tau_b = 0.0231s$ respectivamente. Se tienen estos tiempos debido al tiempo de respuesta del motor de pasos, analizando 10 eventos para cada tiempo de ascenso por lo que se obtuvieron los siguientes resultados (cuadro 3.1)

$\tau_b = 1.0095s$		$\tau_b = 0.1120s$		$\tau_b = 0.0231s$	
c (cm/s)	λ (cm)	c (cm/s)	λ (cm)	c (cm/s)	λ (cm)
40.8656	10.4456	40.6429	10.3264	40.0742	10.0248
40.3341	10.1621	40.3814	10.1872	40.3032	10.1458
41.1484	10.5977	40.7775	10.3984	39.7059	9.83150
41.0333	10.5357	40.8656	10.4456	39.9418	9.95510
41.9630	11.0413	40.5582	10.2813	40.1666	10.0736
40.9903	10.5125	40.7372	10.3768	40.0252	09.9990
41.0915	10.5670	40.5417	10.2725	39.9938	09.9825
40.8158	10.4189	40.3261	10.1579	39.9525	09.9607
42.0712	11.1007	40.7421	10.3794	40.0703	10.0227
42.0123	11.0683	40.4369	10.2167	39.6098	09.7813
$\bar{c} = 41.23255(0.58)$		$\bar{c} = 40.60096(0.18)$		$\bar{c} = 39.98433(0.20)$	
$\bar{\lambda} = 10.64498(0.31)$		$\bar{\lambda} = 10.30422(0.09)$		$\bar{\lambda} = 9.9777(0.10)$	

Cuadro 5.1: Datos producto del análisis de los videos tomados con una cámara rápida de resolución de 720 x 480 píxeles a 300 fotogramas por segundo. La velocidad de fase y la longitud de onda mostradas son las dominantes del tren de ondas generado, la incertidumbre mostrada es la desviación estándar.

Los valores obtenidos para la velocidad de fase fueron muy similares al valor esperado $c = 44.22cm/s$; Se calculó la velocidad de ruptura mediante la derivada temporal de la ecuación (1.12)

$$\dot{\zeta}(x, t) = \frac{\zeta_0 \pi}{2T} \left[\left(\frac{\sin(\pi t/T)}{2} \right) H(T-t) \right] [H(b^2 - (x-b)^2) - H(b^2 - (x+b)^2)] \quad (5.1)$$

Al derivar nuevamente e igualando a cero, la velocidad máxima se obtiene cuando $(x \in [0, 2b], t = T/2)$, comparando esta velocidad con la velocidad de fase se obtiene

$$\tau_b = 1.0095s \implies Fr = \frac{v_p}{v_f} = \frac{\frac{\zeta_0 \pi}{2T}}{\sqrt{g * h}} = \frac{\frac{0.23cm\pi}{2 * 1.0095s}}{\sqrt{981cm/s * 2cm}} = \frac{0.3578cm/s}{44.22cm/s} = 0.0080 \quad (5.2)$$

$$\tau_b = 0.1120s \implies Fr = \frac{\frac{0.23cm\pi}{2 * 0.1120s}}{44.22cm/s} = \frac{3.2257cm/s}{44.22cm/s} = 0.0729 \quad (5.3)$$

$$\tau_b = 0.0231s \implies Fr = \frac{\frac{0.23cm\pi}{2 * 0.0231s}}{44.22cm/s} = \frac{15.6399cm/s}{44.22cm/s} = 0.3536 \quad (5.4)$$

Por ende, todos los experimentos cumplen la hipótesis de Kanamori para ser considerado una deformación lenta, ya que tienen número de Froude menor a 5.0481, no obstante, se presentan diferencias significativas entre la deformación lenta y la rápida, por lo que las hipótesis de Kanamori no son suficientes para poder discriminar una deformación lenta de una rápida a esta escala.

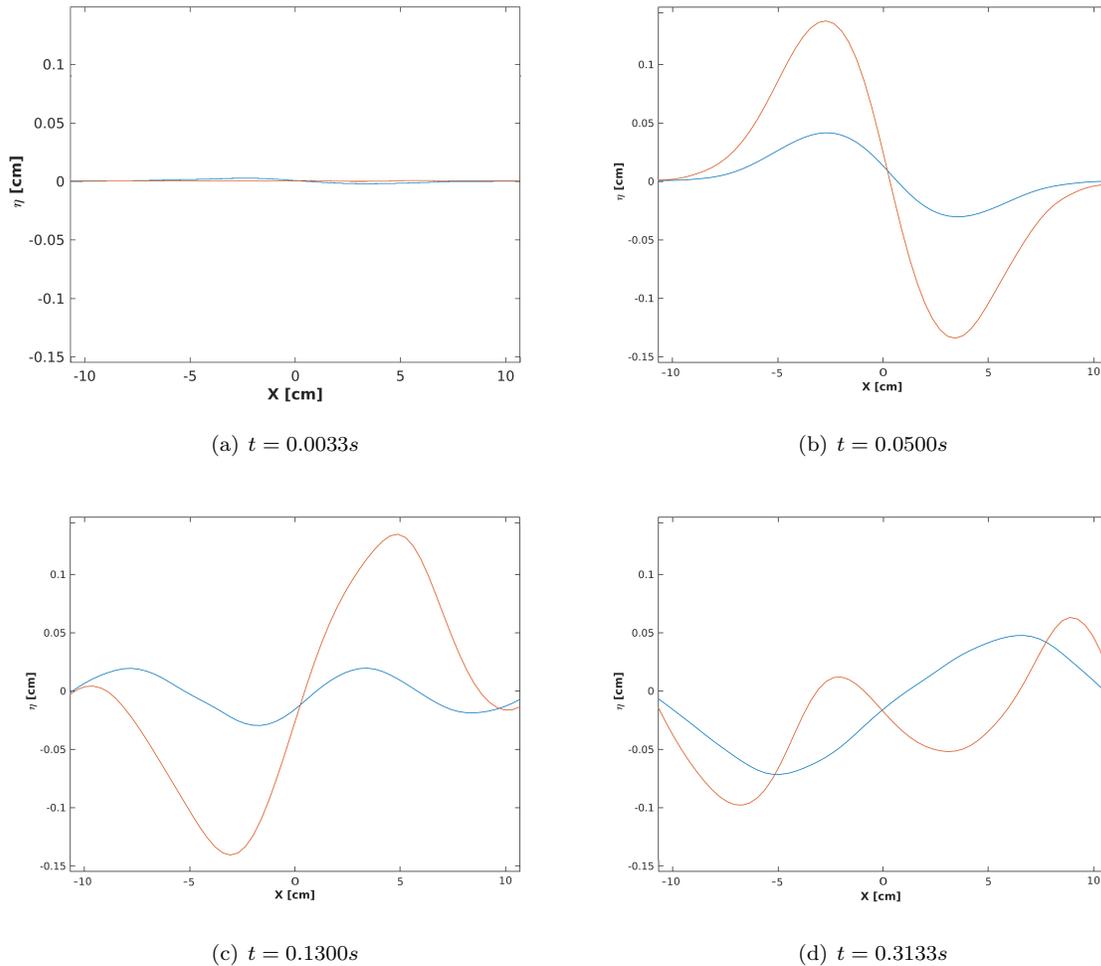


Figura 5.6: Evolución de la deformación de la superficie libre a $Y = 0$, para diferentes tiempos. Se grafican una deformación lenta $\tau_b = 1.0095s$ (línea azul) y una deformación rápida $\tau_b = 0.0231s$ (línea roja).

Al analizar los resultados experimentales se observan diferencias significativas entre las amplitudes de las crestas y los valles para una deformación rápida y una lenta. Esto principalmente se debe a que, en una deformación lenta, el agua desplazada tiene más tiempo para moverse a los lados que en una rápida y por esto que son más pronunciados los que corresponden a una deformación rápida. Por otro lado, la velocidad a la que evoluciona el tren de ondas generado es mayor en el caso de la deformación rápida a pesar de que la velocidad de fase dominante de la deformación lenta fue mayor.

Por otro lado, la forma de la onda es similar en ambos casos. Esto se puede apreciar más claramente si analizamos la deformación en un solo punto, en particular en $Y = 0, X = -2.3, X = -2.5$, que es donde se tiene la cresta tanto para la deformación lenta y como para la rápida figura 3.6b.

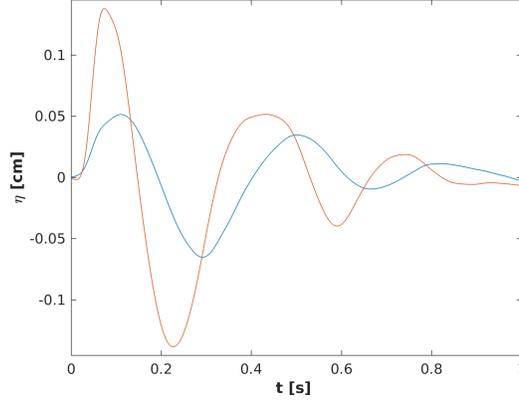


Figura 5.7: Gráfica de la evolución temporal de la deformación de la superficie libre en un solo punto para una deformación lenta $\tau_b = 1.0095s$ (línea azul) y una deformación rápida $\tau_b = 0.0231s$ (línea roja) en $Y = 0, X = -2.3, X = -2.5$ respectivamente.

Al analizar los tiempos se obtiene que en el caso de los experimentos realizados el valor de $\bar{\tau} \in [0.0231s/0.154s, 1.0095s/0.1835s] = [0.15, 5.5]$, por lo que el experimento lento sería catalogado como un deformación atípica, ya que para tiempos de ascenso cortos, los resultados obtenidos se acercan a lo que se conoce como régimen lineal. Sin embargo, para tiempos grandes difieren completamente de los resultados de una lenta, ya que se espera que sólo cambiase la amplitud y no la forma de la onda. Además, la deformación inicial es más ancha para una deformación lenta.

Estos resultados deben compararse con los del modelo analítico para poder obtener más conclusiones respecto a la condición inicial de un tsunami.

5.2. Análisis de Fourier

La deformación de la superficie libre es una onda que se propaga en el tiempo y el espacio, está compuesta de un conjunto de ondas planas con diferentes longitudes de onda y velocidad de propagación por lo que puede ser escrita como se muestra a continuación [Burden and Fires, 2002]

$$\eta(x, t) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos(k_i x - \omega_i t) + b_i \sin(k_i x - \omega_i t)) \quad (5.5)$$

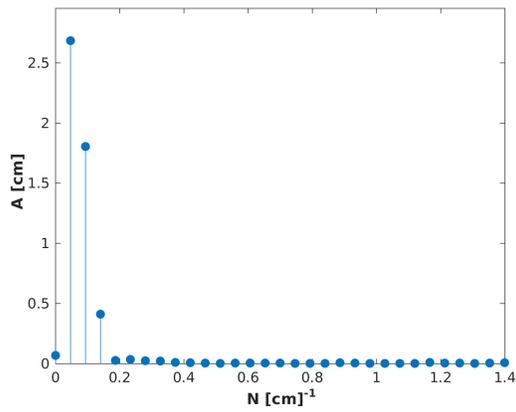
En donde a_0 es el promedio de la superficie libre, a_i y b_i son las amplitudes de las componentes seno y coseno respectivamente, k_i son los números de onda y ω_i las frecuencias. Mediante el uso de la

transformada discreta de Fourier, es posible obtener las frecuencias si se analiza la deformación en un punto fijo o los números de onda si se deja fijo el tiempo. Al aplicar la transformada discreta de Fourier a la deformación espacial en la que se tiene la deformación máxima (fig. 3.2) se obtiene

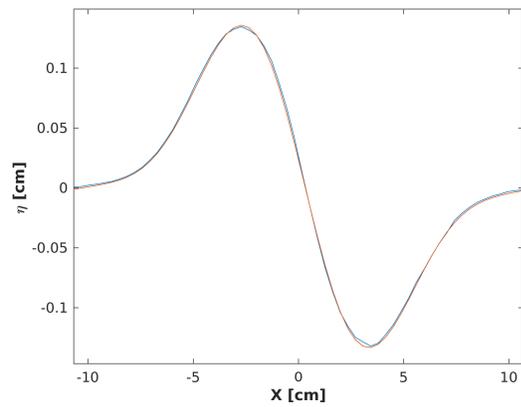
A (cm)	N (1/cm)	λ (cm)	ν (Hz)	c (cm/s)
2.684	0.0466	21.4286	1.9657	42.1224
1.803	0.0933	10.7143	3.507	37.5746
0.40981	0.1399	7.1429	4.6536	33.24
0.034051	0.2333	4.2857	6.433	27.5699
0.026035	0.1866	5.3571	5.5877	29.9343
0.022684	0.2800	3.5714	7.2519	25.8995
0.020944	0.3266	3.0612	8.0749	24.7191
0.0097683	0.3733	2.6786	8.9178	23.8869
0.0082866	1.6667	0.85714	28.8217	24.7043
$\bar{\lambda} = 15.7498\text{cm}$				
$\bar{c} = 38.8385\text{cm/s}$				

Cuadro 5.2: A es la amplitud correspondiente a cada uno de los inversos de la longitud de onda obtenidos mediante la transformada rápida de Fourier y está relacionada con las amplitudes de la ecuación 3.6 mediante la siguiente expresión $a_n + ib_n = (-1)^n/m * A_n$ [Burden and Fires, 2002]. N es el inverso de la longitud de onda y es igual al número de onda dividido por 2π . λ es la longitud de onda obtenida a partir de N , ν es la frecuencia obtenida a partir la relación de dispersión, c es la velocidad de fase para cada número de onda respectivamente. Por último $\bar{\lambda}$ y \bar{c} son la longitud de onda y la velocidad de fase promedio ponderadas a través de las amplitudes.

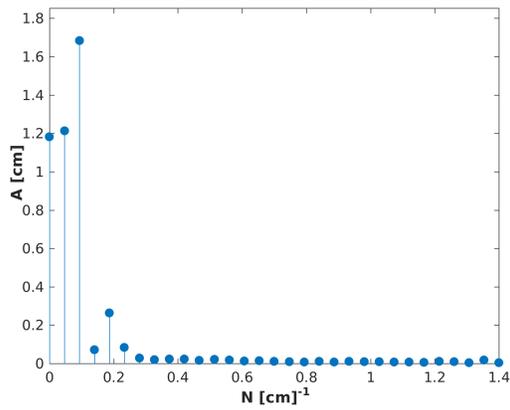
En la tabla se observa que tres números de onda dominan, es decir los demás son despreciables, por lo tanto, es posible reconstruir la forma de la onda usando solo tres números de onda, como se muestra a continuación, para diferentes tiempos y en todos los casos para una deformación rápida.



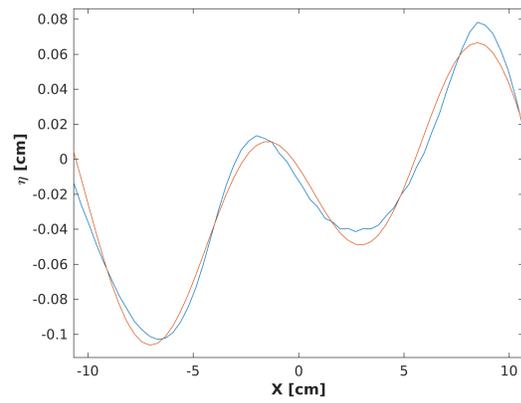
(a) Amplitudes



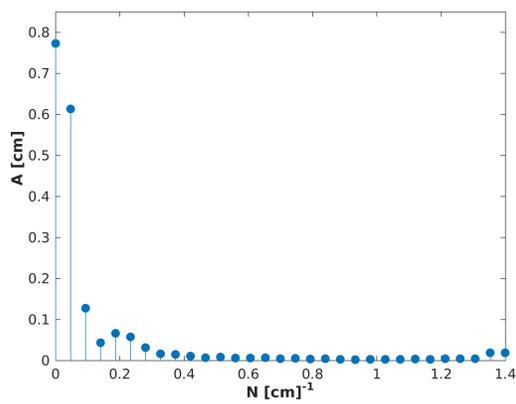
(b) Deformación



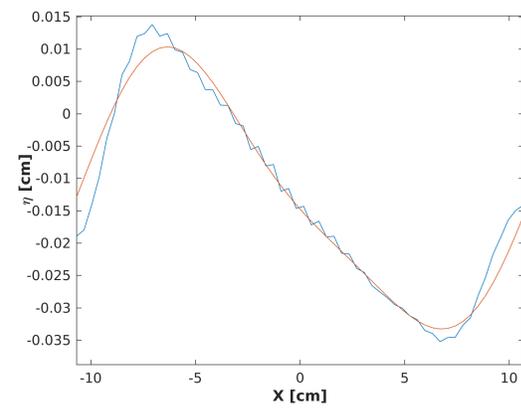
(c) Amplitudes



(d) Deformación



(e) Amplitudes



(f) Deformación

Figura 5.8: (a),(c),(e) Gráfica de las amplitudes correspondientes a cada número de onda dividido entre 2π para la misma deformación rápida a los siguientes tiempos $t = 0.0567s$, $t = 0.3167s$, $t = 0.6500s$ respectivamente, (b),(d),(f). Reconstrucción de la deformación de la superficie libre usando solo tres números de onda en todos los casos.

Como se puede ver en las imágenes, conforme evoluciona el tren de ondas, se excitan las mismas frecuencias y sólo cambian las amplitudes. Al aplicar el análisis de Fourier a la deformación rápida mostrada en la gráfica 3.7 en donde se grafica la evolución temporal a $x = -2.3$ se obtiene

A (cm)	ν (Hz)	λ (cm)	c (cm/s)
9.0073	3	13.1017	39.3051
5.6222	2	21.0233	42.0466
3.7097	4	8.936	35.7441
3.5056	5	6.3901	31.9503
1.9701	1	43.7303	43.7303
1.2085	7	3.7649	26.3541
1.1503	6	4.7827	28.6964
0.70708	8	3.1012	24.8096
0.61505	9	2.6469	23.8217
0.43912	10	2.32	23.2001
$\bar{\lambda} = 14.0613$ cm			
$\bar{c} = 36.8150$ cm/s			

Cuadro 5.3: A es la amplitud correspondiente a cada una de las frecuencias obtenidas con la transformada de Fourier y está relacionada con las amplitudes de la ecuación 3.6 mediante la siguiente expresión $a_n + ib_n = (-1)^n / m * A_n$. ν es la frecuencia. λ es la longitud de onda obtenida a partir de la relación de dispersión. c es la velocidad de fase para cada frecuencia y por último $\bar{\lambda}$ y \bar{c} son la longitud de onda y la velocidad de fase promedio ponderadas a través de las amplitudes.

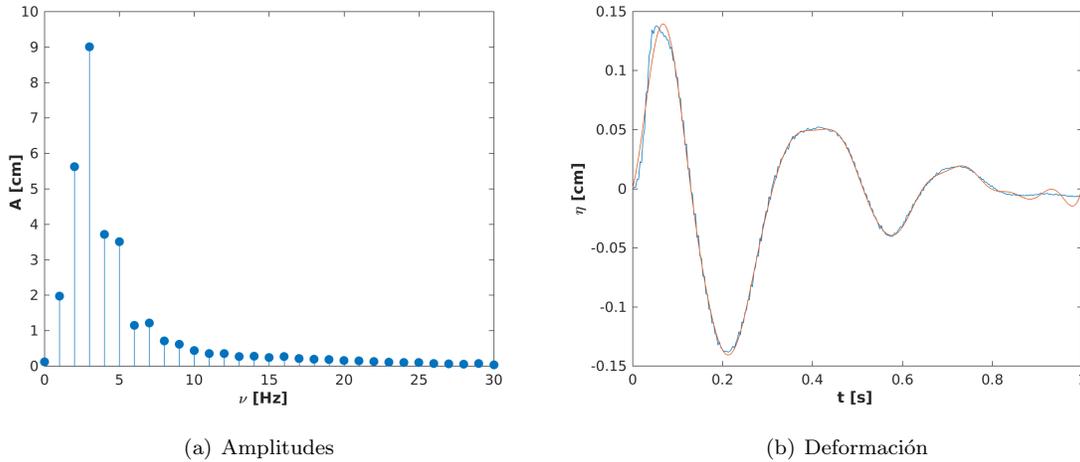


Figura 5.9: (a) Gráfica de las amplitudes correspondientes a cada frecuencia, (b) reconstrucción de la deformación de la superficie libre usando 5 frecuencias.

A partir del análisis de las frecuencias y longitudes de onda obtenidas se puede observar que hay una buena concordancia entre ellos, sin embargo, en el caso de las frecuencias correspondientes al análisis de la deformación temporal, hay más frecuencias relevantes y esto es debido a que este análisis brinda información a todos los tiempos y no solo a uno.

En los dos casos mostrados se analizaron deformaciones rápidas. A continuación, se muestra la comparación entre una deformación rápida y una lenta.

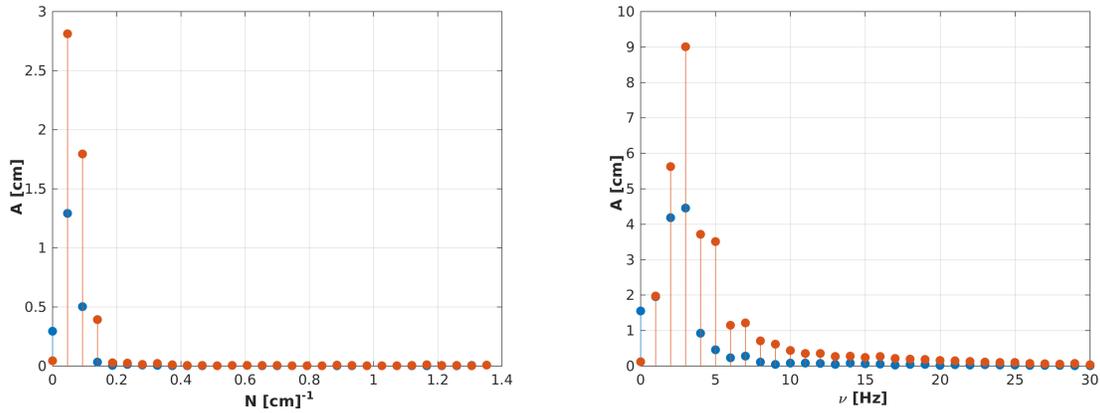


Figura 5.10: Gráfica de la comparación entre las amplitudes correspondientes a cada frecuencia y números de onda divididos por 2π de una deformación lenta (puntos azules) y una deformación rápida (puntos rojos) a $t = 0.0500$.

A partir de la figura 5.10b, se puede observar que la deformación rápida es capaz de excitar frecuencias más altas e incapaz de excitar frecuencias del orden del inverso del tiempo de ascenso, no obstante, la deformación lenta si es capaz de hacerlo. Por lo tanto, este fenómeno se asemeja a un filtro pasa bajos temporal.

Del análisis de los números de onda, se puede observar que ambas deformaciones excitan diferentes números de onda y con diferentes amplitudes, lo cual explica el por qué las ondas tienen formas diferentes. Por otro lado, el análisis de las frecuencias el por qué los máximos correspondientes a la deformación rápida se encuentran a la izquierda de los de la deformación lenta, es decir, la evolución de la deformación rápida excita frecuencias más altas que tienen asociado una longitud de onda pequeña y, por lo tanto, la velocidad promedio ponderada es menor.

5.3. Resultados analíticos

Se obtuvieron resultados analíticos con forma similar al variar los tiempos de ruptura y éstos coinciden con los medidos experimentalmente. A continuación, se muestra la amplitud máxima para una deformación rápida.

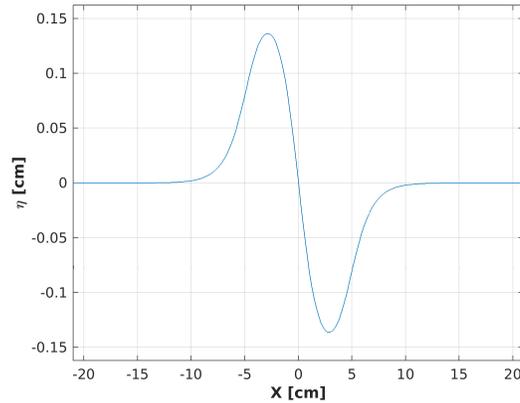


Figura 5.11: Gráfica de la deformación de la superficie libre obtenida mediante el modelo de Hammack para un tiempo de ascenso $\tau = 0.0231s$. El tiempo mostrado, es aquel en el que la deformación tiene su máxima altura.

Como se puede observar en la figura 5.11, la deformación es completamente simétrica. Analizando la deformación en un solo punto para una deformación rápida y una lenta obtenemos las gráficas que se muestran en la figura 5.12.

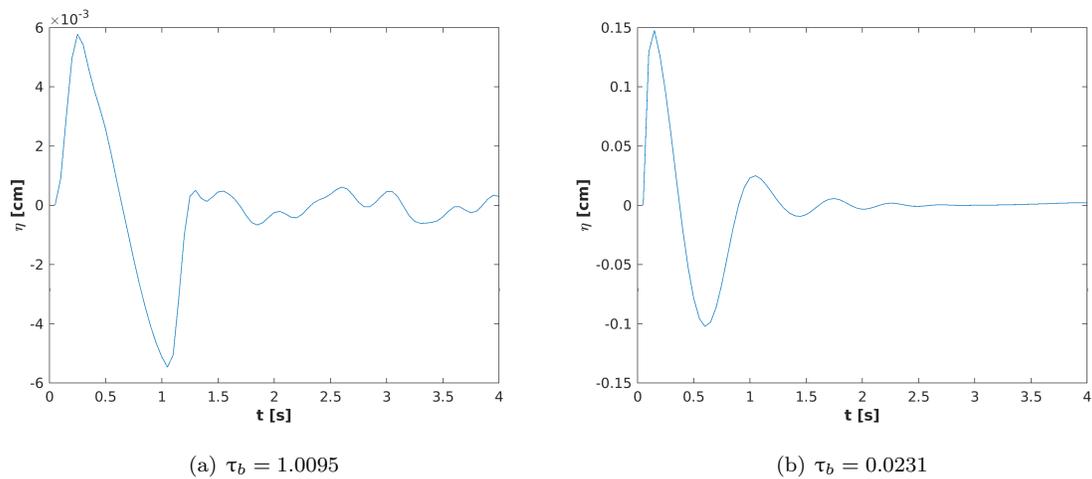


Figura 5.12: Deformación de la superficie libre en un punto del modelo de Hammack a distintas velocidades de ruptura.

Se puede observar que las dos deformaciones tienen formas similares, sin embargo, sus amplitudes son completamente diferentes siendo 20 veces menor la amplitud para una deformación lenta que para una rápida. Esto es más claro, si se grafican las dos al mismo tiempo como se muestra en la siguiente figura

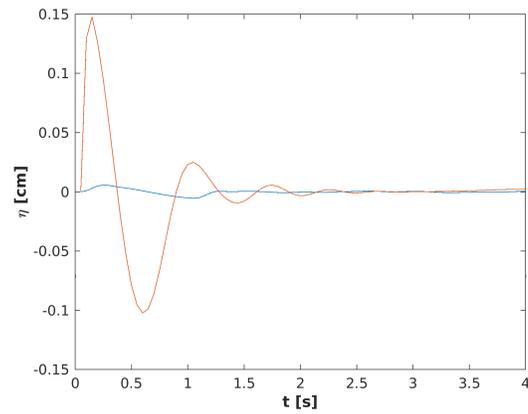


Figura 5.13: Gráfica de la comparación entre la deformación lenta $\tau = 1.0095s$ (línea azul) y $10 \frac{cm}{s}$ (línea roja).

Asimismo, fue posible calcular el campo de velocidades del fluido, el cual se presenta en la misma figura que la deformación de la superficie libre en la figura 5.14

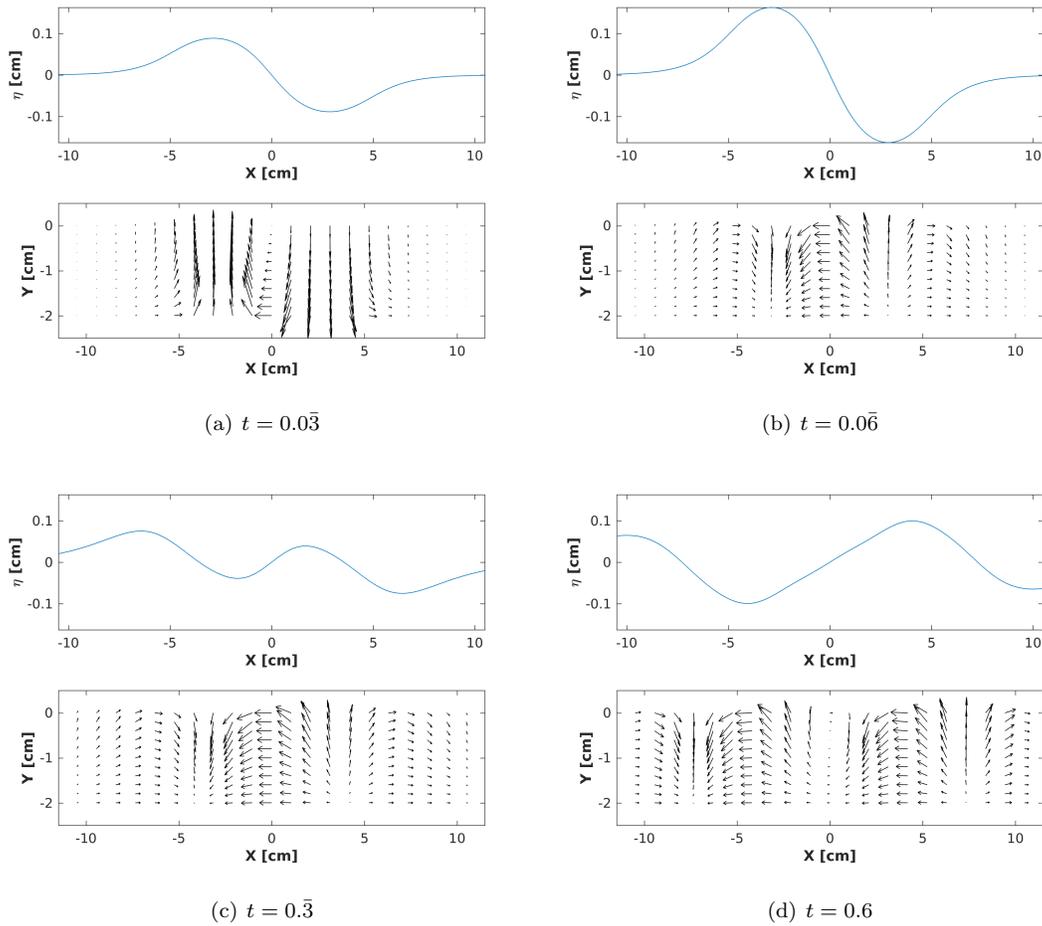


Figura 5.14: Gráficas en donde se grafica en la misma figura el campo de velocidades y la deformación de la superficie libre, para una deformación rápida en diferentes tiempos.

Se puede observar que hay un desacoplamiento entre el campo de velocidades y la deformación de la superficie libre, es decir la superficie libre evoluciona siguiendo la evolución del campo figura 5.14b.

5.4. Comparación entre resultados analíticos y experimentales

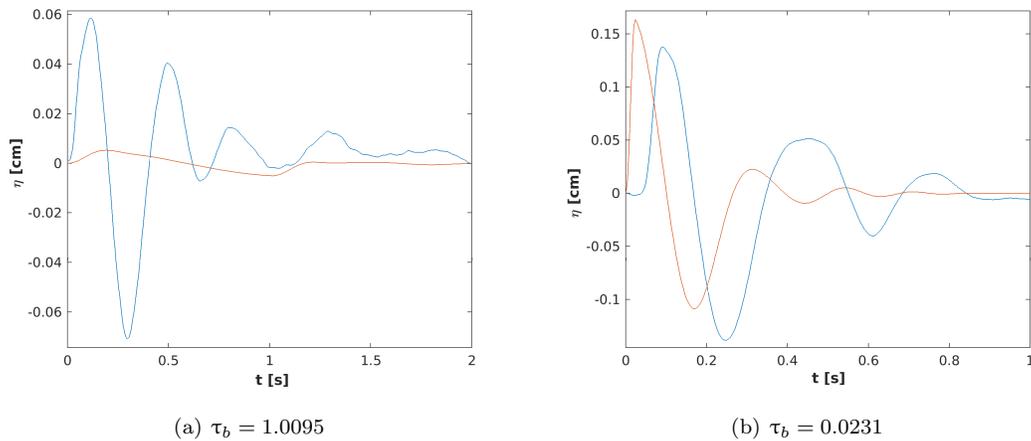


Figura 5.15: Comparación entre los resultados experimentales (línea azul) y los resultados analíticos (línea roja) para una deformación lenta (a) y una rápida (b).

Al comparar los resultados experimentales con los analíticos, se concluye que el modelo analítico no es adecuado prediciendo la amplitud de la deformación cuando la deformación del fondo es lenta. En cambio, para una deformación rápida predice de forma más o menos adecuada la amplitud. Asimismo, se puede observar que hay un desfase debido a que en el modelo analítico las deformaciones rápidas se acercan al modelo lineal, en el cual, se supone que la deformación de la superficie libre es igual al movimiento del fondo y es transmitido de forma instantánea.

Si se modifica a posteriori el tiempo de inicio del modelo analítico, se obtiene una mejor concordancia, sin embargo, el modelo presenta fallas al predecir la evolución del tren de ondas.

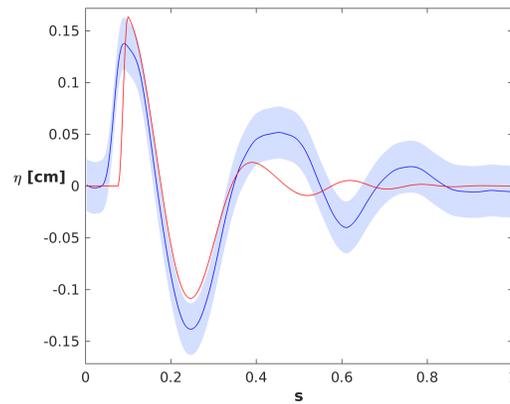


Figura 5.16: Gráfica de la comparación entre la deformación de la superficie libre para el modelo analítico con el desfase corregido (línea roja) y datos experimentales (línea azul) para una deformación rápida.

Si se compara la deformación de la superficie libre corrigiendo el desfase, se obtiene una muy buena concordancia entre los datos experimentales y los analíticos al principio del movimiento, pero conforme evoluciona el tren de onda esta concordancia va disminuyendo.

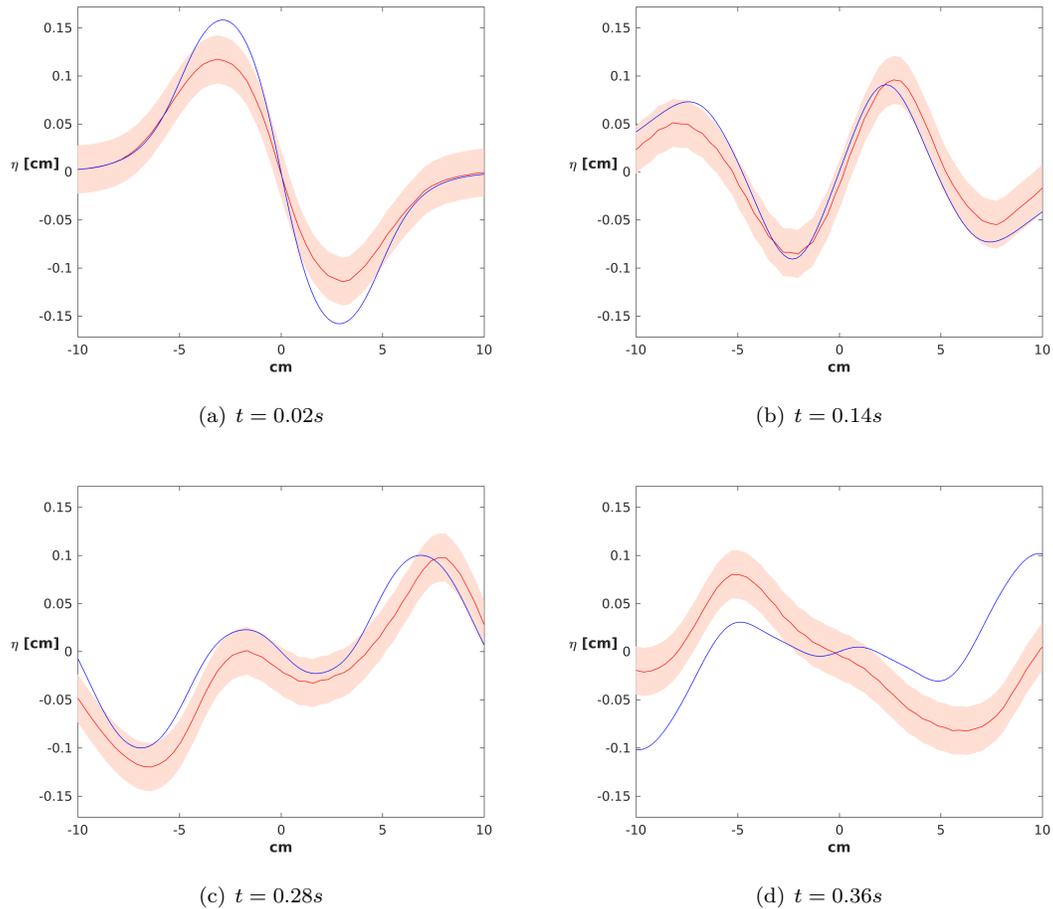


Figura 5.17: Comparación entre los resultados experimentales (línea roja) y los resultados analíticos (línea azul) para una deformación rápida con $\tau = 0.0231s$. Los tiempos mostrados son los de los datos experimentales.

5.5. Comparación con el tsunami de Sumatra-Andaman

El 26 de diciembre del 2004 ocurrió un terremoto de intensidad de $M_w = 9.3$, en la magnitud de momento, en la región de Sumatra-Andaman, el cual provocó un tsunami enorme cuyas olas alcanzaron hasta 30 metros de altura al llegar a las costas. Este fue el evento sísmico más devastador y mortal de los últimos 100 años causando más de 250,000 pérdidas humanas y devastación a lo largo de las costas del Océano Índico. Es por esto que muchos investigadores se han dado a la tarea de estudiar este fenómeno sísmico. En particular, muchos se han centrado en entender el papel de la fuente de este terremoto ya que es muy raro que ocurra un sismo de tal magnitud, y es aún más raro el tsunami que se generó, ya que tuvo propiedades diferentes a las predichas por los modelos existentes, por lo que este sismo se volvió un referente para probar modelos de inversión, que son aquellos que a partir de datos sísmicos predicen el tsunami generado, ya que el poder conocer las propiedades de ruptura de

un sismo a partir de los datos brindados por un sismógrafo en poco tiempo es un problema sin resolver y ocurre igual con los tsunamis ya que aún no es posible predecir todas sus características solamente con los datos brindados por el sismógrafo, en particular este problema se agrava para tsunamis lentos [Piatanesi and Lorito, 2007].

El principal problema de comparar resultados experimentales de tsunamis generados en un laboratorio con un tsunami real es que no un número adimensional que permita relacionar los experimentos realizados en tanques con tsunamis reales, sin embargo existen algunos parámetros que nos permiten comparar algunas de sus características [Jamin et al., 2015].

- En lo que respecta los efectos debidos a la viscosidad y a los efectos capilares, éstos disminuyen conforme aumenta la escala del fenómeno, por lo que para un tsunami real estos efectos son incluso más pequeños que para nuestros experimentos.
- Una forma de cuantificar la contribución de los efectos no lineales es mediante la relación entre la altura de la deformación de la fuente y la altura de la capa de fluido sobre esta ζ_m/h [Hammack, 1972]. En el caso del tsunami de Sumatra-Andaman es de $(12m - 15m)/1500m = 0.008 - 0.01 < 0.23cm/2cm = 0.115$ esto significa que la teoría lineal se ajusta mejor para los tsunamis reales que para los de laboratorio [Stein and Okal, 2005].
- En el tsunami de Sumatra-Andaman se tuvieron tiempos $\tau_b = 3min$ y $\tau_w = 10min$, por lo cual, $\bar{\tau} = 0.3$ [Fujii and Satake, 2017], no obstante, en nuestros experimentos se tuvo un $\tau_b \in [0.0231s, 1.0095s]$, $\tau_w \in [0.1466, 0.1833]$, por lo tanto, $\bar{\tau} \in [0.1575, 5.5073]$. En el caso de un tsunami típico se tiene que $\bar{\tau} \in [0.003, 0.3]$, por consiguiente, solo la deformación lenta entraría en el rango de tsunamis atípicos, lo cual era de esperarse ya que el modelo lineal no le ajusta bien y a la rápido sí.

Por último, cabe resaltar que la aplicación de nuestros resultados a la prevención de tsunamis en tiempo real, está limitada por el hecho de que los datos sísmicos no proporcionan información respecto a la cinemática del fondo marino.

Capítulo 6

Discusión y Conclusiones

- La técnica de schlieren sintético puede ser una opción para reconstruir de forma eficaz la deformación de la superficie libre generada por un dispositivo experimental, el cual, representa a escala una falla geológica normal.
- A partir del análisis de los resultados experimentales, se observó que sin importar si una deformación es rápida o una lenta, las ondas tienen formas similares y velocidades de propagación similares. Pero tienen amplitudes completamente diferentes.
- Los resultados obtenidos contradicen lo propuesto en [Kanamori \[1972\]](#) ya que a pesar de que todos los experimentos realizados cumplen con lo que él propone, se observaron diferencias significativas entre la deformación rápida y la lenta. Por consiguiente, este criterio no basta para diferenciar una deformación rápida de una lenta, por lo menos a esta escala.
- Tomando como base el modelo de [Hammack \[1973\]](#), se construyó un nuevo modelo que permite obtener la deformación de la superficie a partir del movimiento de dos bloques, cuyo tamaño y velocidad de ruptura puede ser igual o variar como se desee.
- El modelo analítico tiene una buena concordancia cuando se tiene una velocidad de ruptura alta, pero para velocidades de ruptura bajas el modelo analítico no predice de forma adecuada el comportamiento del tren de ondas generado, de esta forma se ve la necesidad de modificar los algoritmos existentes para tomar en cuenta estos efectos cuando la velocidad de ruptura es baja.
- Se demostró que, para deformaciones lentas, las amplitudes son mayores que las que predice el modelo lineal, por lo cual es importante seguir trabajando en esto, ya que, si bien este tipo de

tsunamis son raros, históricamente han costado miles de vidas.

Capítulo 7

Trabajo futuro

- En el futuro, se espera realizar una simulación numérica en Gerris, el cual es un software libre que resuelve ecuaciones Navier-Stokes dependientes del tiempo con densidad variable con un método lagrangiano, usando volumen finito, para un fluido incompresible y que permite resolver de forma adecuada problemas en donde se tiene una superficie libre. Éste fue desarrollado por Stéphane Popinet del instituto Jean le Rond d'Alembert. Este software nos permitirá no solo simular una falla normal, sino fallas con distintos ángulos y distintas geometrías o por otro lado podríamos usar TELEMAC-2D o TELEMAC-3D que son programas que resuelven las ecuaciones Saint-Venant para aguas someras utilizando elemento finito o volumen finito en 2 o 3 dimensiones respectivamente y los cuales han dado muy buenos resultados en los últimos años.

Bibliografía

- C. J. AMMON, H. KANAMORI, T. LAY, A. A. VELASCO. The 17 July 2006 Java tsunami earthquake. *Geophysical Research Letters*, **33**, 1-5, 2006. <https://doi.org/10.1029/2006GL028005>
- BBC-NEWS: Tsunami Indonesia quake toll jumps again. 2005. <http://news.bbc.co.uk/2/hi/asia-pacific/4204385.stm>
- R. BELL, C. HOLDEN, W. POWER, X. WANG, G. DOWNES. Hikurangi margin tsunami earthquake generated by slow seismic rupture over a subducted seamount. *Earth and Planetary Science Letters*, **397**, 1-9, 2014. <http://dx.doi.org/10.1016/j.epsl.2014.04.005>.
- R. L. BURDEN, J. D. FIRES: Análisis numérico. *International Thomson Editores S. A.* 537-547, 2002.
- D. DUTYKH, F. DIAS. Influence of sedimentary layering on tsunami generation, *Appl. Mech. Eng.*, **199**, 1268–1275, 2010. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.07.011>
- F. ENET AND ST. GRILLI. Experimental study of tsunami generation by three-dimensional rigid underwater landslides, *J. Waterway Port Coastal Ocean Eng.*, **133**, 442-454, 2007. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-950X\(2007\)133:6\(442\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-950X(2007)133:6(442))
- Y. FUJII AND K. SATAKE. Tsunami Source of the 2004 Sumatra-Andaman Earthquake Inferred from Tide Gauge and Satellite Data, *Bulletin of the Seismological Society of America*, **97**, 192-207, 2017. <https://doi.org/10.1785/0120050613>
- ST. GRILLI AND S. VOGELMANN AND P. WATTS. Development of a 3D numerical wave tank for modeling tsunami generation by underwater landslides, *Eng. Anal. Boundary Elements*, **26**, 301-313, 2002. [https://doi.org/10.1016/S0955-7997\(01\)00113-8](https://doi.org/10.1016/S0955-7997(01)00113-8)
- JL. HAMMACK. *Tsunamis—a model of their generation and propagation*, PhD thesis, California Institute of Technology—W. M. Keck Laboratory of Hydraulics and Water Resources, Pasadena, CA, USA. 21-45, 1972. <http://resolver.caltech.edu/CaltechKHR:KH-R-28>
- JL. HAMMACK. A note on tsunamis: their generation and propagation in an ocean of uniform depth, *A J. Fluid Mech.*, **60**, 769–799, 1973. <https://doi.org/10.1017/S0022112073000479>
- H. HÉBERT, F. SCHINDELÉ. Peut-on prévoir les TSUNAMIS?. *Le Pommier*, 3-16, 2011.

- T. ICHIYE: A theory on the generation of tsunamis by an impulse at the sea bottom, *J. Oceanogr. Soc. Jpn*, **14**, 41-44, 1958. <https://doi.org/10.5928/kaiyou1942.14.41>
- IUGG/IOC TIME PROJECT. Numerical method of tsunami simulation with the leap-frog scheme, Technical Report IOC Manuals and Guides. París, 1-9,1997. <http://ulis2.unesco.org/images/0012/001223/122367EB.pdf>
- JAMIN T, GORDILLO L, RUIZ-CHAVARRÍA G, BERHANU M, FALCON E. Experiments on generation of surface waves by an underwater moving bottom, *Proc. R. Soc A* **471**, 1-15, 2015. <https://doi.org/10.1098/rspa.2015.0069>
- T. KAKINUMA. Numerical simulation of tsunami generation, *Kôkyûroku*, **1645**, 14-21, 2009. <http://hdl.handle.net/2433/140682>
- H. KANAMORI. Mechanism of tsunami earthquakes, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **6**, 346-359, 1972. [https://doi.org/10.1016/0031-9201\(72\)90058-1](https://doi.org/10.1016/0031-9201(72)90058-1)
- Y. KERVELLA, D. DUTYKH, F. DIAS. Comparison between three-dimensional linear and nonlinear tsunami generation models, *Theor. Comput. Fluid Dyn*, **21**, 245-269, 2007. <https://doi.org/10.1007/s00162-007-0047-0>
- M. KIKUCHI, H. KANAMORI Source characteristics of the 1992 nicaragua tsunami earthquake inferred from teleseismic body waves. *Tsunamis: 1992-1994 Their Generation, Dynamics, and Hazard*, **144**, 441-453, 1995. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7279-9_5
- T. LAY, C. J. AMMON, H. KANAMORI, Y. YAMAZAKI, K. F. CHEUNG, A. R. HUTKO: The 25 october 2010 mentawai tsunami earthquake (mw 7.8) and the tsunami hazard presented by shallow megathrust ruptures. *Geophysical Research Letters*, **38** , 1-5, 2011. <https://doi.org/10.1029/2010GL046552>
- M. LE GAL. *Influence des échelles de temps sur la dynamique des tsunamis d'origine sismique*, PhD thesis, Université Paris-Est, Laboratoire d'Hydraulique Saint-Venant, Paris, France. 67-86, 2017. <https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-01529253>
- M. LE GAL, D. VIOLEAU Y M. BENOIT: Influence of timescales on the generation of seismic tsunamis. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, **65**, 257-273, 2017. <http://dx.doi.org/10.1016/j.euromechflu.2017.03.008>
- T. A. M. LÓPEZ Y E. A. OKAL: A seismological reassessment of the source of the 1946 Aleutian 'tsunami' earthquake. *Geophysical Journal International*, **165**, 835-849, 2006. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2006.02899.x>
- A. MACÍAS. Más de dos mil muertos y heridos. *La Cruz del Sur*, 1960. <https://web.archive.org/web/20131207173335/http://www.memoriasdelsigloxx.cl/contenidos/archivosMultimedia/MSXX025032.pdf>

- F. MOISY, M. RABAUD, K. SALSAC. A synthetic Schlieren method for the measurement of the topography of a liquid interface, *Springer-Verlag*, **46**, 1021–1036, 2009. <https://doi.org/10.1007/s00348-008-0608-z>.
- Y. OKADA: Surface deformation due to shear and tensile faults in a half-space. *Bull. Seismol.Soc. Am.*, **75** (4), 1135–1154, 1985.
- A. PIATANESI, S. LORITO: Rupture Process of the 2004 Sumatra–Andaman Earthquake from Tsunami Waveform Inversion. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **97**, 223–231 (2007. <https://doi.org/10.1785/0120050627>
- SINC. Una falla delgada y resbaladiza causó el tsunami de Japón en 2011. 2013. <https://www.agenciasinc.es/Noticias/Una-falla-delgada-y-resbaladiza-causo-el-tsunami-de-Japon-en-2011>
- S. STEIN, E. A. OKAL. Speed and size of the Sumatra earthquake. *Nature*, **33**, 581-582, 2005. <https://doi.org/10.1038/434581a>
- S. STEIN AND M. WYSESSION: An introduction to seismology, earthquakes, and earth structure. *Blackwell*, 215-228, 2003.