



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

**LOCALIZACIÓN Y ESTADOS COHERENTES EN UNA RED DISCRETA NLS
CUÁNTICA.**

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
RICARDO MARTÍNEZ GALICIA

DIRECTOR DE TESIS
Dr. Panayiotis Panayotaras
Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas
y en Sistemas (IIMAS - UNAM)

COMITÉ TUTOR
Dr. Arturo Olvera Chávez
Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas
y en Sistemas (IIMAS - UNAM)

Dr. Moisés Martínez Mares
Universidad Autónoma Metropolitana unidad Iztapalapa

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, DICIEMBRE 2019.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

DEDICATORIAS.

A Dios por estar siempre presente en todo lo que yo emprendo. Gracias.

A mis padres Miguel Martínez Castillo y María Luisa Galicia Rosas, a mi hermano Vicente Martínez Galicia y a mis abuelos Eligio y Marina por todo el apoyo que me han dado.

A mis amigos:

Olimpica Obregón Velasco, Magdalena Escuadra Gallegos, José Luis Lara Solares, Beatriz Adriana Martínez Pérez, Rebeca Elizabeth Lourdes Martel Luna y Miguel Ángel Macareno García.

A mi asesor de tesis:

Dr. Panayiotis Panayotaros por la paciencia que me ha tenido y por todas sus teorías.

A mis sinodales por todos sus valiosos comentarios sobre mi trabajo de tesis:

Dr. Juan Carlos López Vieyra,

Dr. Arturo Olvera Chávez,

Dr. Luis Alberto Cisneros Ake,

Dr. Carlos Leopoldo Pando Lambrushini,

Dr. Moisés Martínez Mares.

A la UNAM y a la UAM.

Y a México que pese a sus problemas es un gran, gran país.

28 Noviembre 2019

Índice general

Introducción general	3
Ecuación de Schrödinger no lineal discreta, breathers clásicos y cuantización.	3
1. Ecuación de Schrödinger no lineal discreta (DNLS) y soluciones tipo breather	9
1.1. Formulación hamiltoniana de la ecuación DNLS	9
1.2. Soluciones tipo breather de ecuaciones DNLS	13
1.3. Soluciones breather con localización espacial	15
1.4. Estabilidad lineal de las soluciones tipo breather	16
1.5. Algunas soluciones breather	19
2. Cuantización bosónica de la ecuación DNLS y evolución clásica de estados coherentes.	21
2.1. Cuantización bosónica de la ecuación DNLS	22
2.2. Evolución cuántica y clásica de estados coherentes	27
2.3. Resultados numéricos de $\overline{D}_n(t)$ para una cadena de 3 sitios	31
2.4. Resultados numéricos de $\overline{D}_n(t)$ para una cadena de 5 sitios	41
3. Recurrencias en la aproximación clásica para estados coherentes correspondientes a breathers	61
3.1. Evolución cuántica y clásica de estados coherentes asociados a órbitas breather	62
3.2. Diferencia $\overline{D}_n(t)$ para estados coherentes asociados a órbitas breather	64
3.3. Evaluación numérica de la expresión para $\overline{D}_n(t)$: cadena de 3 sitios	67
3.4. Evaluación numérica de la expresión para $\overline{D}_n(t)$: cadena de 5 sitios	76
Conclusiones	85
Apéndices	87

A. Estados coherentes	87
A.1. Introducción	87
A.2. Estados coherentes Glauber $ z\rangle$, y $ Z\rangle$	88
A.3. Estados coherentes generalizados $ s, \xi\rangle$	91
A.4. Algunas propiedades de los estados coherentes $ s, \xi\rangle$	92
A.4.1. Representación explícita de los estados $ s, \xi\rangle$	92
A.4.2. Interpretación del parámetro s	93
A.4.3. Relación de ortonormalidad de los estados $ s, \xi\rangle$	93
A.4.4. Relación de incertidumbre de Heisenberg	95
A.4.5. Relación de completez de los estados $ s, \xi\rangle$	96
A.4.6. Relación de los estados $ s, \xi\rangle$ y el grupo $SU(f)$	97
B. Formulación variacional y evolución clásica de los estados coherentes	98
C. Relación de completez de los estados $s, \xi\rangle$	105
D. Relación de los estados coherentes generalizados $s, \xi\rangle$ con el grupo $SU(f)$	110

Introducción general

La localización espacial de energía en cadenas no lineales ha sido un tema de intensa investigación en décadas recientes ya que los efectos de simetría de traslación discreta y la no linealidad llegan a ser importantes en muchos sistemas. Estos sistemas incluyen cristales fotónicos, arreglos no lineales de guías de ondas ópticas, condensados de Bose - Einstein, arreglos de junturas Josephson, proteínas de α - hélices y solitones lentos entre otros, que son descritos en cadenas unidimensionales y cadenas moleculares [1, 2, 3, 4, 5, 6]. La localización espacial puede existir debido a la combinación de la discretización del sistema y la no linealidad en las ecuaciones de movimiento. Las soluciones espacialmente localizadas pueden ser estables y robustas [2, 7, 8, 9].

La ecuación de Schrödinger no lineal cúbica discreta (DNLS), es uno de los modelos matemáticos utilizados para el estudio de cadenas no lineales discretas que aparecen en muchos problemas de la física. Podemos considerar, a groso modo, que la ecuación DNLS representa un arreglo, finito o infinito, de osciladores anarmónicos acoplados con sus vecinos más cercanos y cuya importancia radica en modelar una gran variedad de fenómenos que involucran localización, discretización y no linealidad, en diversas áreas de la ciencia como la mecánica estadística, física de estado sólido, materia condensada y sistemas biológicos [10, 11, 12, 13].

Dependiendo del tamaño del sistema, resulta de interés estudiar cadenas con pocos sitios o cadenas con más sitios (o infinitas). Por ejemplo, en algunas aplicaciones de la óptica y de condensados de Bose - Einstein un modelo de ecuación DNLS con pocos sitios parece el más apropiado, mientras que en sistemas moleculares o de estado sólido se puede considerar un modelo de cadena infinita [8, 9, 10, 13].

En el caso de sistemas que son modelados por la ecuación DNLS, la localización espacial de energía se puede estudiar examinando soluciones especiales periódicas en el tiempo y espacialmente localizadas, llamados breather discretos, de la forma $Ae^{-i\omega t}$ con ω real y A independiente del tiempo y que decae lejos de ciertos sitios. Las propiedades dinámicas de tales soluciones pueden arrojar indicios en muchas observaciones experimentales, y han sido estudiadas en gran detalle matemático, ver por ejemplo [14, 15, 16, 17]. Sus propiedades globales y dinámicas han sido extensivamente estudiadas para el sistema de tres sitios de red (“trimero”) [9, 18, 19, 20, 21, 22].

El problema de la existencia y estabilidad de las soluciones tipo breather

de osciladores acoplados ha sido desarrollado como un tema interesante de investigación, empezando desde la derivación de la ecuación DNLS, la obtención de soluciones estacionarias, por continuación numérica del así llamado límite anticontinuo (caso desacoplado) hasta la construcción de soluciones localizadas cuasiperiodicas o periodicas en el tiempo de sistemas discretos generales [7, 9].

Por otro lado, la contraparte cuántica de la ecuación de Schrödinger no lineal cúbica discreta (DNLS) ha resultado ser de interés en diversos estudios tanto teóricos como de aplicación. El sistema DNLS cuántico ha sido estudiado por muchos autores [2, 23], y existen diversos intentos de definir localización espacial a nivel cuántico, ver por ejemplo [14, 15, 16, 17].

Aplicaciones de la ecuación DNLS y de la localización espacial bajo un punto de vista cuántico se presenta en muchos contextos. Por ejemplo, cuando se consideran cadenas no lineales que involucran sistemas microscópicos, los fenómenos cuánticos comienzan a ser importantes para diversos problemas. Un caso concreto de aplicación es el estudio de pequeñas moléculas en donde la ecuación DNLS ha probado ser un modelo simple y útil para el cálculo de espectros vibrationales anarmónicos donde los efectos cuánticos juegan un papel importante [24, 25, 26, 27].

Los efectos cuánticos también aparecen en el estudio de diversos materiales de baja dimensionalidad (por ejemplo, películas delgadas, materiales nanoestructurados, semi-cristalinos y nanopartículas) los cuales tienen aplicaciones en los campos de, por ejemplo, energía y catálisis, que son importantes para el entendimiento de la termodinámica y propiedades de transporte de diversos materiales. Estas áreas de estudio requieren un entendimiento de la dinámica de excitaciones no lineales, tales como solitones y breather, en ambos contextos clásico y cuántico [28, 29].

Los aspectos cuánticos también llegan a ser importantes en el estudio de la dinámica de los condensados de Bose - Einstein (BEC) cuando estos son confinados en redes ópticas, [30, 31]. El sistema BEC + red óptica se modela basándose en la cuantización de la ecuación de Schrödinger no lineal (DNLS). Los resultados obtenidos muestran una excelente aproximación con la mayoría de los experimentos. Hasta ahora ha habido muy pocos experimentos con gases bosónicos diluidos ultrafríos que no puedan modelarse correctamente usando métodos teóricos basados en la ecuación NLS. El manipular y controlar los condensados de Bose - Einstein abre la posibilidad de una nueva generación de dispositivos a nivel de nanoescala [11], lo que vuelve factible la construcción de, por ejemplo, una computadora cuántica. Lo anterior requiere no sólo de un conocimiento profundo, sino también de un control total de la evolución temporal de estos sistemas.

Otro campo de aplicación del presente estudio es la de los circuitos superconductores usados en computadoras cuánticas que son modelados por osciladores no lineales acoplados, estos exhiben modos de vibración no lineales localizados. Conforme los circuitos superconductores son cada vez más pequeños, el comportamiento cuántico de estos circuitos no lineales comienzan a ser importantes y la comparación de la dinámica clásica y cuántica llega a ser interesante [12].

Por otro lado, en sistemas magnéticos es posible predecir la existencia de

breathers discretos [32]. Los trabajos han sido enfocados en breathers discretos desde un punto de vista de cadenas ferromagnéticas o antiferromagnéticas clásicas. Sin embargo a una escala microscópica o mesoscópica, la dinámica cuántica resulta ser importante [33]. Pese a esto, las investigaciones teóricas que han sido reportadas están principalmente basadas en una dinámica molecular clásica. Por lo tanto, es necesario estudiar breathers cuánticos, que se presentan como una superposición de estados de muchos cuántos y que son excitaciones espacialmente localizadas con tiempos largos para tunear de una red a otra. Estos estudios pueden ser útiles para entender los fenómenos de localización cuántica en materiales ferromagnéticos.

También, una pregunta básica es la dependencia de la dinámica clásica y cuántica debido a la geometría de la cadena, por ejemplo, el número de sitios. Por otro lado, en sistemas cuánticos la ecuación DNLS aparece como una aproximación de campo medio y una pregunta general es la evolución cuántica de estados que pueden ser de alguna forma relacionados a condiciones iniciales clásicas con propiedades dinámicas interesantes.

Por las aplicaciones comentadas resulta de mucho interés el estudio de redes no lineales finitas en el régimen cuántico.

El uso de resultados obtenidos por métodos clásicos para entender el problema cuántico ha sido efectivo en algunos casos especiales donde la integrabilidad clásica, presente en el problema de dos sitios, o cerca de la integrabilidad, presente en ciertos límites de los parámetros, nos permite considerar cuantización semiclásica de soluciones clásicas, ver por ejemplo [15, 34]. Cabe mencionar que algunos autores han probado definir la localización en términos puramente cuánticos. Por ejemplo, en cadenas con simetría traslacional, la ausencia de eigenestados localizados conduce a una definición de localización en términos de separación de niveles de las energías más bajas [14]. En el caso de cadenas sin simetría traslacional se puede también estudiar eigenestados cuánticos localizados [16, 17]. Otra posible localización usa estados localizados en la aproximación de Hartree [35, 36].

Antes de presentar los resultados de la tesis, describimos dos áreas de aplicación de la ecuación DNLS y el porqué resulta su cuantización de especial interés físico.

La motivación para el estudio de la presente tesis es la de obtener una nueva analogía cuántica de la localización clásica considerando breathers clásicos espacialmente localizados y estados cuánticos asociados.

La tesis propone la estrategia de estudiar la dinámica clásica de soluciones espacialmente localizadas, enfocandonos en soluciones espacialmente localizadas tipo breather, y examinar la evolución cuántica de estados coherentes que corresponden a las soluciones tipo breather cuántico, ver los artículos [37, 38] de Martínez-Galicia y Panayotaros. En este estudio utilizamos estados coherentes tipo Glauber [39, 40] y $SU(f)$ [41], definidos en el capítulo 2. Estos estados coherentes se parametrizan por el conjunto de puntos del espacio fase clásico. La correspondencia es explícita, así que cada punto del espacio fase clásico nos da un estado cuántico a través de una fórmula analítica.

Para cuantificar la persistencia de la localización se examinó la diferencia

entre el estado coherente evolucionado de la forma cuántica exacta, integrando numéricamente la ecuación de Schrödinger, y el estado coherente con parámetros que evolucionan por dinámica clásica, es decir, se evalúa numéricamente la distancia entre estados cuánticos exactos y estados coherentes evolucionados clásicamente integrando numéricamente las ecuaciones de Hamilton, usando como condición inicial estados coherentes Glauber y $SU(f)$ que corresponden a puntos en órbitas de tipo breather de la ecuación DNLS y en la vecindad de las mismas. Las soluciones tipo breather para la ecuación DNLS y sus propiedades básicas se revisan en el capítulo 1. El Hamiltoniano cuántico se define en el capítulo 2 usando el formalismo de cuantización bosónica del Hamiltoniano clásico en el espacio de Hilbert de número de ocupación. El espacio de Hilbert se descompone en los subespacios V_n , con n un número entero positivo, de dimensión finita que crece rápidamente con n . Los subespacios V_n corresponden a estados de n partículas o cuantos, ver capítulo 2, y son invariantes bajo la evolución cuántica de sistemas que son la cuantización de sistemas Hamiltonianos con simetría de fase global, como la ecuación DNLS. Esta propiedad facilita el estudio numérico de la evolución cuántica, por lo menos para cierto rango de n (que depende del número de grados de libertad del sistema clásico). El uso de las ecuaciones de Hamilton para los parámetros de estados coherentes es una “aproximación clásica” de la evolución cuántica que se ha propuesto y ha sido usado por varios autores en varios contextos [42, 43, 44, 45, 46, 47, 48], lo cual discutimos más adelante.

Para nuestro estudio numérico, en los capítulos 2, y 3, ver también [37, 38], se considerarán cadenas (lattices) DNLS unidimensionales de 3 y 5 sitios. El sistema de 3 sitios (trímero) es la cadena DNLS no integrable más pequeña y su dinámica clásica ha sido estudiada por varios autores [9, 18, 19, 20, 21, 22]. Se considera el caso de los signos de los parámetros de enfocamiento (focusing), con las condiciones de frontera tipo Dirichlet (el análogo discreto de las condiciones Dirichlet). En el caso de enfocamiento podemos identificar breathers estables de un pico que corresponden al extremo global de la energía para una potencia fija. Estos breathers son ejemplos de soluciones espacialmente localizadas linealmente y no linealmente (orbitalmente) estables que existen para un número arbitrario de sitios. También estudiamos breathers de mas picos, en donde existen casos linealmente estables e inestables [9]. En el caso de acoplamiento lineal pequeño, la estabilidad de los breathers depende del número de picos y de sus signos relativos, ver capítulo 3, así que la estabilidad de los breathers examinados debe ser válida para breathers del mismo perfil espacial en cadenas más grandes. Las condiciones de frontera tipo Dirichlet restringen los breathers y permiten ciertas simplificaciones e información más precisa sobre el conjunto de los breather [8, 9, 21], e.g se puede mostrar que todos los breathers son reales (módulo una fase global). Otro resultado relevante es la continuación global de los breathers del límite lineal al límite sin acoplamiento lineal [8]. La evolución cuántica de los estados coherentes tipo $SU(f)$ que corresponden a los breathers clásicos se estudia para los subespacios de pocos cuantos, con n hasta ~ 10 .

El primer resultado de este estudio numérico es la observación de casos de recurrencia de valores relativamente pequeños de la distancia normalizada \overline{D}_n

entre los estados obtenidos usando las dos reglas de evolución cuántica y la de evolución clásica de los parámetros del estado coherente. Los resultados se describen en el capítulo 2, ver también [37, 38]. Esta recurrencia se observa para las condiciones iniciales clásicas que están sobre y en la vecindad de breathers linealmente estables y sugiere que la noción de localización de estados coherentes correspondientes a tales breathers es recurrente bajo la evolución cuántica. Para condiciones iniciales en la vecindad de los breathers inestables no vemos recurrencias similares. Por el contrario, la distancia entre los estados coherentes exactos y clásicamente evolucionados aumenta rápidamente y fluctúa ligeramente en torno a un promedio grande, sin recurrencia a valores significativamente más pequeños. En el caso de recurrencias a valores pequeños de \overline{D}_n los tiempos de recurrencia dependen del número de cuantos. El fenómeno de recurrencia en la vecindad del estado cuántico inicial es más notorio para números pequeños de cuantos, donde los estados iniciales considerados son también una superposición de un número mas pequeño de eigenestados.

La recurrencia de la distancia \overline{D}_n entre los los estados cuánticos exactos y aproximados se pueden explicar en una forma cuantitativa usando una expresión analítica para dicha distancia en términos de la amplitud y frecuencia del breather, los eigenvalores cuánticos y la proyección del estado coherente inicial a los eigenestados cuánticos. La expresión y su derivación se describen en el capítulo 3, Proposición 3.2.1, ver también el artículo [49] de Martínez-Galicia y Panayotaros. La expresión es válida para órbitas clásicas breather, y demostramos que también aproxima la distancia \overline{D}_n para trayectorias clásicas que permanecen cerca de órbitas breather, ver Proposición 3.2.2. Las cantidades que aparecen en esta expresión son en general evaluadas numéricamente y explican algunas de las características de recurrencias a soluciones cercanas al estado inicial. En algunos casos la expresión de la Proposición 3.2.1 puede ser aproximada por expresiones mas sencillas que permiten calcular de forma aproximada los tiempos de recurrencia a valores pequeños de la diferencia \overline{D}_n . Esto sucede cuando el estado coherente que corresponde al breather tiene relativamente pocos componentes en los eigenestados cuánticos. En el capítulo 3 presentamos varios ejemplos numéricos, y la dependencia en el número de cuantos n .

Consideramos que la expresión para \overline{D}_n del capítulo 3 podría ser aproximada analíticamente en algunos límites de los parámetros del sistema, y posiblemente generalizada a otro tipo de soluciones clásicas. Estas posibles extensiones de la tesis se discuten en las conclusiones del presente trabajo.

La idea de usar la evolución clásica de los parámetros de los estados coherentes para aproximar la evolución cuántica ha sido utilizada por varios autores, y se ha argumentado en la literatura que esta aproximación converge a la solución cuántica exacta en el límite de un gran número de cuantos y una no linealidad débil [42, 43, 44, 45]. Este resultado no parece haber sido demostrado rigurosamente. Sin embargo se sabe que la evolución clásica de los estados coherentes da soluciones exactas de la ecuación de Schrödinger para sistemas lineales y algunas clases de sistemas lineales forzados [39, 40]. Nuestro estudio considera un régimen de parámetros lejos de estos límites, en particular la DNLS en el régimen de localización no lineal donde el acoplamiento lineal entre sitios es

pequeño (“ el límite anticontinuo” [50]).

Al mismo tiempo, las ecuaciones de Hamilton para los parámetros del estado coherente pueden derivarse del sistema cuántico usando un Ansatz variacional o función de prueba [46, 47, 51], algo que examinamos en mas detalle en el Apéndice B para sistemas tipo DNLS. Los estados coherentes constituyen un conjunto de funciones de prueba con parámetros libres, y las ecuaciones de Hamilton aparecen como la condición necesaria para la minimización de un funcional que se anula cuando la evolución cuántica es exacta. Este procedimiento no implica que los estados coherentes evolucionados clásicamente esten cerca a los estados exactos. En esta tesis obtenemos información cuantitativa sobre esta pregunta para algunas soluciones clásicas especiales. Entonces, independientemente de la motivación original de estudiar análogos de la noción de localización, la aportación de nuestro trabajo es examinar la aproximación por la evolución clásica de estados coherentes usando órbitas clásicas específicas, en particular las órbitas periódicas tipo breather. En el régimen de parámetros que hemos estudiado, cuantificamos que la aproximación no es en general buena, pero puede ser recurrente a valores pequeños, algo que se puede utilizar para dar una noción de localización cuántica para algunos estados coherentes. Como se ve en los capítulos 2-3 nuestro formalismo se aplica directamente al régimen de no linealidad débil de sistemas tipo DNLS, y otros los sistemas con simetría de fase global. En este régimen uno puede estudiar la evolución de \bar{D}_n sobre soluciones tipo breather, que en el límite lineal convergen a los modos normales. Una propuesta que surge de la tesis es estudiar \bar{D}_n y la validez del límite clásico sobre orbitas clásicas específicas, empezando con las órbitas tipo breather, ver discusión en las conclusiones.

Al final de la tesis se ha incluido una serie de apéndices (A-D) en el que se exponen elementos de la teoría de los estados coherentes Glauber y $SU(f)$ a manera de complementar los conceptos manejados en la presente tesis. Se ha empezado por la descripción tradicional de los estados coherentes Glauber hasta su generalización y relación con el grupo $SU(f)$. La mayor parte de las ideas sobre los estados coherentes $SU(f)$ ha sido tomada de [46] y se han completado las deducciones y demostraciones que se han considerado pertinentes a la tesis.

Capítulo 1

Ecuación de Schrödinger no lineal discreta (DNLS) y soluciones tipo breather

La ecuación de Schrödinger no lineal discreta (DNLS) es uno de los modelos básicos que se utiliza para el estudio de cadenas (o lattices, por su nombre en inglés) que han aparecido en recientes décadas en diversos contextos de la física y la biología y ha sido un tema de intensa investigación. En términos simples, esta ecuación consiste de un conjunto de f osciladores anarmónicos colocados en cada sitio de la cadena, acoplados a través de interacciones dispersivas. Debido a la no linealidad este sistema presenta un comportamiento dinámico interesante, aunque complicado, para valores particulares de sus parámetros.

En este capítulo resumimos la teoría básica de la ecuación DNLS y de sus soluciones tipo breather. Así mismo de forma breve se considera la existencia y estabilidad dinámica de las soluciones breather.

1.1. Formulación hamiltoniana de la ecuación DNLS

Considere una cadena unidimensional de f sitios cuyas posiciones están descritas en términos del índice j . Cada sitio j está ocupado por un oscilador anarmónico y su dinámica está dada por la ecuación de Schrödinger no lineal cúbica discreta (DNLS)

$$\frac{du_j}{dt} = -i\delta (\Delta u)_j - 2i\gamma |u_j|^2 u_j, \quad (1.1)$$

donde t es la variable tiempo, $u_j \in \mathbb{C}$ es la amplitud compleja de cada oscilador en el sitio j de la cadena, $j \in \{1, \dots, f\}$, y δ es un número real que representa

la constante de acoplamiento entre sitios vecinos. El signo de γ determina la naturaleza de las interacciones interatómicas. Estas son atractivas para γ positiva, mientras que son repulsivas para γ negativa. Para $\delta > 0$, el primer caso corresponde al así llamado *enfocamiento* no lineal ($\delta\gamma > 0$), mientras que el segundo caso es llamado *desenfocamiento* ($\delta\gamma < 0$), [3] (esta nomenclatura se origina en la óptica no lineal). El caso $\gamma = 0$ corresponde al caso lineal. El caso $\delta = 0$ es frecuentemente llamado “límite anticontinuo” [50].

El Laplaciano discreto Δ está definido por

$$\begin{aligned}(\Delta u)_j &= u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j, \quad j = 2, \dots, f-1, \\(\Delta u)_1 &= u_2 - 2u_1, \quad (\Delta u)_f = u_{f-1} - 2u_f,\end{aligned}\tag{1.2}$$

que es el análogo discreto de las condiciones de frontera de Dirichlet aunque otras condiciones son también posibles, por ejemplo condiciones periódicas

$$\begin{aligned}(\Delta u)_j &= u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j, \quad j = 2, \dots, f-1, \\(\Delta u)_1 &= u_f + u_2 - 2u_1, \quad (\Delta u)_f = u_{f-1} - 2u_f + u_1.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Para los fines de la presente tesis se necesita el análogo cuántico de la ecuación (1.1), por lo que un primer paso hacia dicha cuantización es la obtención del hamiltoniano clásico del sistema.

Las ecuaciones de Hamilton en \mathbb{R}^{2f} , en términos de las coordenadas y momentos generalizados $\{q_j, p_j\}$, son [52]

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}\tag{1.4}$$

y

$$\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j},\tag{1.5}$$

con $j = 1, 2, \dots, f$ siendo (1.4) y (1.5) un sistema de $2f$ ecuaciones diferenciales, llamado sistema hamiltoniano, y $H = H(q_1, p_1, \dots, q_f, p_f)$ denota el Hamiltoniano correspondiente del sistema.

Considere la variable u_j , $j = 1, 2, \dots, f$ y su complejo conjugado

$$u_j = \frac{\sqrt{2}}{2}(q_j + ip_j), \quad u_j^* = \frac{\sqrt{2}}{2}(q_j - ip_j),\tag{1.6}$$

con las ecuaciones inversas dadas por

$$q_j = \frac{\sqrt{2}}{2}(u_j + u_j^*), \quad p_j = -i\frac{\sqrt{2}}{2}(u_j - u_j^*),\tag{1.7}$$

es decir, $u_j(q_j, p_j)$ y $u_j^*(q_j, p_j)$. Entonces, por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial H}{\partial u_j^*} = \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial u_j^*} + \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial u_j^*} = i\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{dq_j}{dt} + i\frac{dp_j}{dt} \right),\tag{1.8}$$

donde se han usado las ecuaciones (1.4)-(1.2). Por otro lado,

$$\frac{du_j}{dt} = \frac{\partial u_j}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial u_j}{\partial p_j} \frac{dp_j}{dt} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{dq_j}{dt} + i \frac{dp_j}{dt} \right). \quad (1.9)$$

Comparando (1.8) y (1.9) se obtiene finalmente la forma compleja de las ecuaciones de Hamilton asociadas a las ecuaciones de movimiento (1.4)-(1.5),

$$\frac{du_j}{dt} = -i \frac{\partial H}{\partial u_j^*}, \quad \text{con } j = 1, \dots, f, \quad (1.10)$$

en términos de las variables complejas u_j y u_j^* , la cual es aplicable a cualquier sistema Hamiltoniano. El espacio fase \mathbb{R}^{2f} se identifica con el espacio fase complejo \mathbb{C}^f .

Definición 1.1.1 *Se define el corchete de Poisson, $\{A, B\}$, $A, B : \mathbb{R}^{2f} \rightarrow \mathbb{R}$, como una función de las coordenadas y momentos, q_j y p_j con $j = 1, \dots, f$, dada por*

$$\{A, B\} = \sum_{j=1}^f \frac{\partial A}{\partial q_j} \frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial B}{\partial q_j}. \quad (1.11)$$

Usando el corchete de Poisson, la derivada temporal de cualquier función A de las coordenadas y momentos e independiente explícitamente del tiempo, evaluada a lo largo de una solución $(q_1(t), p_1(t), \dots, q_f(t), p_f(t))$ de las ecuaciones de Hamilton (1.4) y (1.5) satisface

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \sum_{j=1}^f \left(\frac{\partial A}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{dp_j}{dt} \right) \\ &= \sum_{j=1}^f \left(\frac{\partial A}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \\ &= \{A, H\}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

En particular, si $\{A, H\} = 0$, entonces la cantidad A es una constante (o integral) de movimiento.

Usando las ecuaciones (1.6) y la regla de la cadena se tiene, en general, para una función $f(q_1, p_1, \dots, q_f, p_f)$, que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial p_j} &= \frac{\partial f}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial u_j^*} \frac{\partial u_j^*}{\partial p_j} = i \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u_j} - \frac{\partial f}{\partial u_j^*} \right), \\ \frac{\partial f}{\partial q_j} &= \frac{\partial f}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial u_j^*} \frac{\partial u_j^*}{\partial q_j} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u_j} + \frac{\partial f}{\partial u_j^*} \right), \end{aligned} \quad (1.13)$$

de donde el corchete de Poisson es

$$\{A, B\} = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^f \left[\left(\frac{\partial A}{\partial u_j} + \frac{\partial A}{\partial u_j^*} \right) \left(\frac{\partial B}{\partial u_j} - \frac{\partial B}{\partial u_j^*} \right) \right] - \left(\frac{\partial A}{\partial u_j} - \frac{\partial A}{\partial u_j^*} \right) \left(\frac{\partial B}{\partial u_j} + \frac{\partial B}{\partial u_j^*} \right)$$

que reduciendo algebraicamente se obtiene finalmente que el corchete de Poisson en las variables complejas u_j y u_j^* se puede escribir como,

$$\{A, B\} = i \sum_j^f \left(\frac{\partial A}{\partial u_j^*} \frac{\partial B}{\partial u_j} - \frac{\partial A}{\partial u_j} \frac{\partial B}{\partial u_j^*} \right). \quad (1.14)$$

Por cálculo directo tenemos que

$$\{u_l, u_m\} = \{u_l^*, u_m^*\} = 0 \quad y \quad \{u_l, u_m^*\} = i\delta_{l,m} \quad \forall l, m$$

con $\delta_{l,m}$ la delta de Kronocker, lo que asegura que u_j y u_j^* sean variables canónicas.

De acuerdo con las ecuaciones anteriores, el sistema (1.1) es equivalente a la ecuación de Hamilton (1.10), donde el hamiltoniano H correspondiente está dado por,

$$H = -\delta \left(\sum_{j=1}^{f-1} |u_{j+1} - u_j|^2 + |u_1|^2 + |u_f|^2 \right) + \gamma \sum_{j=1}^f |u_j|^4, \quad (1.15)$$

o bien de forma,

$$H = -2\delta \sum_{j=1}^f |u_j|^2 + \delta \sum_{j=1}^{f-1} (u_{j+1}u_j^* + u_ju_{j+1}^*) + \gamma \sum_{j=1}^f |u_j|^4, \quad (1.16)$$

que puede ser verificado por derivación parcial directa y considerando $|u_j|^2 = u_ju_j^*$.

El Hamiltoniano propuesto es independiente del tiempo, $\{H, H\} = 0$, de donde se tiene que H es una constante de movimiento (cantidad conservada), siendo esta constante la energía del sistema.

La otra cantidad conservada del sistema (1.1) es

$$P = \sum_{i=1}^f |u_i|^2, \quad (1.17)$$

la “potencia” o “masa” en diferentes contextos físicos como la óptica. La conservación de P es una consecuencia del hecho que el Hamiltoniano es invariante bajo el cambio de fase global $u_j \rightarrow e^{i\theta}u_j$, $j = 1, \dots, f$ o (*simetría S^1 global*) de H .

Proposición 1.1.2 *Si el Hamiltoniano $H : \mathbb{C}^f \rightarrow \mathbb{R}$ de un sistema es invariante bajo el cambio $u_j \mapsto e^{i\theta}u_j$ con $\theta \in \mathbb{R}$ arbitrario, $\forall j = 1, \dots, f$, entonces $P = \sum_{j=1}^f |u_j|^2$ es una constante de movimiento.*

Demostración. Para ver esto, se tiene, de acuerdo a (1.15), que

$$H(u_j e^{i\theta}, e^{-i\theta} u_j^*) = H(u_j, u_j^*), \forall \theta \in \mathbb{R}. \quad (1.18)$$

Por otro lado, se tiene que $u_j(\theta) = e^{i\theta}u_j(0)$, $j = 1, \dots, f$ satisface la ecuación

$$\frac{du_j}{d\theta} = iu_j = i\frac{\partial P}{\partial u_j^*}, \quad j = 1, \dots, f, \quad (1.19)$$

que es la ecuación de Hamilton para el “tiempo” θ , con “Hamiltoniano” $-P$. Entonces, de (1.12), $H(u_j e^{i\theta}, e^{-i\theta}u_j^*)$, el Hamiltoniano H a lo largo de las trayectorias $u_j(\theta) = e^{i\theta}u_j(0)$, $j = 1, \dots, f$ debe satisfacer

$$\frac{d}{d\theta}H(u_j e^{i\theta}, e^{-i\theta}u_j^*) = -\{H, P\}(u_j e^{i\theta}, e^{-i\theta}u_j^*),$$

para cada $\theta \in \mathbb{R}$, y cada $u \in \mathbb{C}^f$. Entonces, $\{H, P\}$ se anula en todo \mathbb{C}^f . \square

Un sistema Hamiltoniano con f grados de libertad es integrable si existen f constantes de movimiento independientes y en involución [52]. Los casos $f = 1$ (monómero) y $f = 2$ (dímero) son integrables debido a la existencia de las cantidades conservadas en involución H y P . En el trímero $f = 3$, y en general $f \geq 3$, no se conocen otras primeras integrales [19].

1.2. Soluciones tipo breather de ecuaciones DNLS

Una solución *breather* de (1.1) es una solución periódica temporal de la forma

$$u_j = e^{-i\omega t}A_j, \quad (1.20)$$

con ω real, y $A = [A_1, \dots, A_f] \in \mathbb{C}^f$ independiente del tiempo t .

Revisamos algunas propiedades básicas de las soluciones tipo breather. Primero, para calcular las soluciones de tipo breather sustituimos el ansatz (1.20) en (1.1) del que se obtiene un sistema de ecuaciones algebraico no lineal para A_j y ω ,

$$-\omega A_j = -\delta(\Delta A)_j - 2\gamma|A_j|^2 A_j, \quad j = 1, \dots, f, \quad (1.21)$$

junto con la condición,

$$P = \sum_{j=1}^f |A_j|^2 = C, \quad (1.22)$$

para un valor fijo de C . Este es un sistema de $2f + 1$ ecuaciones reales para $2f + 1$ variables, reales, las A_j (sus partes real e imaginaria), y ω . El sistema puede ser resuelto en algunos casos de manera analítica [2] y en general, de manera numérica. Otra variante de este cálculo es resolver el sistema (1.21) para las A_j con ω dado. En este caso la potencia (1.22) del breather no es conocida a-priori.

Revisamos enseguida algunos resultados de la literatura sobre la existencia de soluciones tipo breather. Notemos primero que si A es una solución de (1.21) también lo es $e^{i\phi}A$, para algún $\phi \in \mathbb{R}$ independiente de j . Se puede demostrar [21] que en el caso de condiciones de frontera tipo Dirichlet dadas por (1.3) todas las soluciones de (1.21) son reales, módulo una fase global. En este caso el sistema (1.21) y (1.22) se reduce a un sistema de $f + 1$ ecuaciones para las

$f + 1$ incógnitas A_j y ω . Las condiciones de frontera periódicas (1.3) conducen a soluciones breather complejas que no son reales módulo una fase global, ver [53]. Se considera entonces que las condiciones tipo Dirichlet simplifican el cálculo de los breathers, y permiten una clasificación más completa de estas soluciones y sus bifurcaciones conforme cambian los parámetros del sistema. Además se ve que las condiciones de frontera afectan la dinámica, y se puede esperar que también conduzcan a una dinámica cuántica no equivalente.

Las soluciones tipo breather son órbitas periódicas de las ecuaciones de evolución (1.1) que coinciden con órbitas de la acción $(\theta, u) \rightarrow e^{i\theta}u$ del cambio de fase global, que además es una simetría del sistema. Este tipo de soluciones se llaman equilibrios relativos de simetría S^1 global.

Esta propiedad geométrica de los breathers está relacionada con el hecho de que la ecuación (1.21) es equivalente a

$$\omega \nabla P = \nabla H,$$

donde ∇ es el gradiente en \mathbb{R}^{2f} y H, P son expresadas en las variables reales $q_j, p_j, j = 1, \dots, f$, de (1.6), ver e.g. [9]. Entonces los breathers son puntos críticos del Hamiltoniano H sobre las hipersuperficies $P = C, C > 0$, que son esferas de radio C de dimensión $2f - 1$ en \mathbb{R}^{2f} , ω es el multiplicador de Lagrange. Dado que H es un polinomio en las variables q_j, p_j , y por lo tanto es una función continuamente diferenciable, tenemos que para cada potencia $C > 0$ existen por lo menos dos soluciones tipo breather, correspondientes al mínimo y máximo global de H , respectivamente. La importancia de estas órbitas es que son en general no linealmente estables. La estabilidad de los breathers se considera en la siguiente sección.

La simetría de fase global implica también que la ecuación DNLS en cada conjunto $\mathcal{S}_C \subset \mathbb{C}^f$ de los puntos u con $P(u) = C, C > 0$, se puede reducir a una ecuación en el conjunto \mathcal{S}_C/S^1 que se obtiene al identificar los puntos de cada órbita de la acción de fase global [9]. Es decir, dos puntos u, v de \mathcal{S}_C se identifican si $u = e^{i\theta}v$ para algún θ real. El conjunto que se obtiene es conocido como espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}\mathbb{P}^{f-1}$. En esta construcción los breathers son puntos fijos del sistema reducido [9]. Los breathers pueden entonces ser pensados como las soluciones no triviales más simples del sistema DNLS. Además, según un resultado de la topología, una función continuamente diferenciable en $\mathbb{C}\mathbb{P}^{f-1}$ tiene por lo menos f puntos críticos. Entonces para cada $C > 0$, (1.21), (1.22) tiene por lo menos f soluciones [9].

El estudio de los breathers es un punto de partida para estudios más detallados de la dinámica de las ecuaciones DNLS, véase [9, 19, 22] para estudios en cadenas de $f = 3$ sitios. En [54] se estudian también la bifurcación de soluciones tipo onda viajera de ciertas soluciones tipo breather para cadenas DNLS periódicas. Las energías de los breathers son las únicas en donde la hipersuperficie de energía con potencia fija puede cambiar su topología, por ejemplo desde un conjunto disconexo a uno conexo. En [9] se argumenta que esto puede ocurrir en la energía de ciertos breathers inestables de dos picos que son considerados en el problema cuántico estudiado. El cambio a una hipersuperficie de energía

conexa podría favorecer la dispersión de energía a más sitios, sin embargo, un estudio más detallado de la dinámica en la vecindad de esos breathers para el caso de tres sitios sugirió que la propagación de la energía a toda la cadena necesita energías que están bastante lejos de la energía del breather de dos picos. El mismo estudio también mostró recurrencias en la vecindad de la configuración del breather de dos picos inestable, ver [9]. Estas ideas sobre el papel de los breathers de dos picos requieren más estudio y deberían ser relevantes para cadenas más grandes. En el presente estudio, los breathers de dos picos son interesantes como ejemplos de una solución inestable cuya dinámica local y recurrencias están relativamente bien estudiadas.

Observación 1.2.1 *Las nociones que surgen de la definición de los breathers para sistemas DNLS son aplicables a sistemas Hamiltonianos generales con simetría S^1 . Sistemas de este tipo surgen en muchos contextos, e.g. como formas normales después de promediación, en el estudio de sistemas de osciladores armónicos acoplados con resonancias. Temas como la reducción productivo complejo $\mathbb{C}\mathbb{P}^{f-1}$, coordenadas y puntos fijos en $\mathbb{C}\mathbb{P}^{f-1}$ han sido estudiados extensivamente en la mecánica celeste, ver e.g. [55, 56]. La aplicabilidad más amplia de las nociones relacionadas a los breathers significa también que el formalismo cuántico que se presenta en el siguiente capítulo puede tener aplicaciones a sistemas más generales.*

1.3. Soluciones breather con localización espacial

Aunque hay resultados de existencia teórica de soluciones tipo breather para valores amplios de δ y γ , estos no producen formas sistemáticas para aproximar las soluciones breather. Existen sin embargo dos límites, el límite lineal $\gamma = 0$, y el límite “anticontinuo” $\delta = 0$, en donde la construcción de las soluciones tipo breather se simplifica y son importantes también en varios contextos. En esta subsección nos interesa especialmente el límite anticontinuo $\delta = 0$ y su vecindad, $|\delta| \ll 1$, porque nos permite definir de una manera natural soluciones tipo breather espacialmente localizadas.

Notamos que en el caso lineal $\gamma = 0$ de la DNLS (1.1), la ecuación para los breathers (1.21) se reduce a la ecuación para los eigenvectores y eigenvalores de la segunda derivada discretizada Δ . Estas soluciones son los modos normales lineales del problema lineal y se pueden calcular explícitamente. Claramente los modos normales lineales son entonces ejemplos de soluciones tipo breather. Además, en el caso de (1.1), los modos normales lineales se pueden continuar a soluciones tipo breather para el sistema con $\gamma \neq 0$ [8]. La continuación de los modos normales lineales es especialmente interesante para el estudio de sistemas débilmente no lineales, e.g. con $|\gamma| \ll 1$.

En el límite $\delta = 0$, $\gamma \neq 0$, la ecuación DNLS (1.1) se vuelve un sistema de osciladores anarmónicos desacoplados. Las cantidades $|u_j|^2$, $j = 1, \dots, f$, son cantidades conservadas y el sistema es integrable. Las soluciones tipo breather

son de la forma

$$A_n = \begin{cases} \sqrt{\frac{\omega}{2}} e^{i\phi_n} & \text{para } n \in U \\ 0 & \text{para } n \in U^c \end{cases} \quad (1.23)$$

donde $\omega > 0$, U un subconjunto de $\{1, \dots, f\}$ (conjunto de sitios activos), y U^c el complemento de U en $\{1, \dots, f\}$. Los $\phi_n \in \mathbb{R}$ son arbitrarios.

Podemos llamar esta solución un breather de k -picos, donde k es el número de elementos de U . En (1.23) hemos resuelto (1.21) con ω dado. La siguiente proposición garantiza la existencia de soluciones reales de (1.21) para δ en la vecindad de $\delta = 0$ donde ω permanece fijo.

Proposición 1.3.1 *Considere una solución $A(0)$ de la ecuación (1.21) con $\delta = 0$ que tiene la forma (1.23) con $\phi_n = 0$ o π , $\forall n \in U$. Entonces existe un δ_1 tal que para $|\delta| < \delta_1$ la ecuación (1.21), restringida a \mathbb{R}^{2f} , tiene una única solución real $A(\delta) \in \mathbb{R}^f$ que satisface $A(\delta) \rightarrow A(0)$. Además $A(\delta)$ es una función analítica real en δ de $(-\delta_1, \delta_1)$ a \mathbb{R}^f .*

La demostración de la proposición (1.3.1) se debe a R. S. Mackay y S. Aubry [7, 50], ver generalizaciones en [57, 58], e.g. para cadenas infinitas. Existe también una versión semejante en donde fijamos la potencia $P = C$ [21]. En este caso, la amplitud del breather en el caso $\delta = 0$ depende de C , de k y del número de elementos de U .

De [21] todas las soluciones tipo breather de (1.1) son reales módulo cambio de una fase global, así que la restricción de (1.21) a $A \in \mathbb{R}^{2f}$ no da todos los breathers posibles cerca de $\delta = 0$.

La proposición anterior implica también que cada breather de k -picos del límite $\delta = 0$ se continúa únicamente a un breather del caso $\delta \neq 0$, suponiendo $|\delta|$ suficientemente pequeño. Además, estos breathers tienen amplitud $|A_j| = O(\delta)$ en los sitios $j \in U^c$, y $|A_j| = \sqrt{\omega}/2 + O(\delta)$ en los sitios $j \in U$. Esto nos permite hablar de localización espacial en los sitios del conjunto U en una forma precisa.

En general δ_1 depende de $A(0)$, U , y ω . La analiticidad implica que para $|\delta|$ pequeño los breathers pueden ser obtenidos a partir de un ansatz dado en serie de potencias por

$$A_n(\delta) = A_{n,0} + \delta A_{n,1} + \delta^2 A_{n,2} + \dots \quad (1.24)$$

y empatando las potencias de δ . El término $A_{n,0}$ está dado por (1.23) [59].

Para $|\delta|$ más grande la noción de localización es menos precisa. Además aumentando $|\delta|$ se observan varias bifurcaciones tipo fold y pitchfork, i.e. la fusión y desaparición de varias ramas de breathers con diferentes números de picos [21]. Existen sin embargo ramas que persisten, como las que son continuación de un breather de un pico.

1.4. Estabilidad lineal de las soluciones tipo breather

El análisis de estabilidad lineal de las soluciones breather puede ser realizada al introducir una perturbación a las soluciones (1.20) de (1.1) y considerando la

ecuación variacional.

Se demuestra primero que para el caso de soluciones tipo breather, la ecuación variacional se reduce a un sistema autónomo. Para simplificar la notación consideramos (1.1) con $\gamma = 1$. (El caso general se puede obtener de este caso especial a través de re-escalamientos.)

Considere entonces una perturbación arbitraria $e^{-i\omega t}R_j = e^{-i\omega t}R_j(t)$ a la solución tipo breather $A_j(t) = e^{-i\omega t}A_j$ (A_j independiente de tiempo t) de la ecuación (1.1). Entonces sustituyendo

$$u_j = e^{-i\omega t}(A_j + R_j), \quad (1.25)$$

$j = 1, \dots, f$ en la ecuación (1.1),

$$\frac{du_j}{dt} = -i\delta(\Delta u)_j - 2i\gamma|u_j|^2u_j,$$

se obtiene

$$\frac{dR_j}{dt} - i\omega(A_j + R_j) = -i\delta(\Delta(A + R))_j - 2i|A_j + R_j|^2(A_j + R_j), \quad (1.26)$$

con $(\Delta u)_j$, $j = 1, \dots, f$ definido en (B.27) (condiciones de frontera tipo Dirichlet). Reacomodando términos se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{dR_j}{dt} - i\omega(A_j + R_j) &= -i\delta((\Delta A)_j) - 2i|A_j|^2A_j \\ &\quad - i\delta(\Delta R)_j \\ &\quad - 2iR_j|A_j|^2 - 2i(A_jR_j^* + R_jA_j^* + |R_j|^2)(A_j + R_j), \end{aligned} \quad (1.27)$$

para $j = 1, \dots, f$. De la ecuación (1.21) para soluciones tipo breather (1.27) se reduce a

$$\begin{aligned} \frac{dR_j}{dt} - i\omega R_j &= -i\delta(\Delta R)_j - 2iR_j|A_j|^2 - 2i(A_jR_j^* + R_jA_j^* + |R_j|^2)(A_j + R_j) \\ &= -i\delta(\Delta R)_j - 2i(2|A_j|^2R_j + A_j^2R_j^*) \\ &\quad - 2i(2A_j|R_j|^2 + R_j^2A_j^* + |R_j|^2R_j). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Considerando el caso A_j real para cada $j = 1, \dots, f$ se tiene que (1.28) se puede escribir como,

$$\frac{dR_j}{dt} - i\omega R_j = -i\delta(\Delta R)_j - 2iA_j^2(2R_j + R_j^*) + O(2), \quad (1.29)$$

donde $O(2)$ denota términos cuadráticos en R_j , R_j^* . Entonces la linealización resulta en un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales linealizadas para la perturbación R_j .

La eliminación de factores que dependen explícitamente en el tiempo en la ecuación variacional se observa para soluciones tipo breather arbitrarias, e.g. con

condiciones de frontera periódicas. Aquí hemos simplificado la ecuación usando el hecho que las condiciones tipo Dirichlet implican soluciones breather reales [21].

Considerando $R_j = \alpha_j + i\beta_j$ y sustituyendo en (1.29) se obtiene,

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_j}{dt} &= -\omega\beta_j + \delta(\Delta\beta)_j + 2A_j^2\beta_j, \\ \frac{d\beta_j}{dt} &= \omega\alpha_j - \delta(\Delta\alpha)_j - 6A_j^2\alpha_j,\end{aligned}\tag{1.30}$$

para $j = 1, \dots, f$.

Considere $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_f)^T$ y $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_f)^T$, la matriz ωI_f con I_f la matriz unitaria de $f \times f$, la matriz diagonal

$$[D(\tilde{A}^2)] = \begin{pmatrix} A_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_f^2 \end{pmatrix}\tag{1.31}$$

y la matriz ($f \times f$) \tilde{M} dada por,

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \end{pmatrix}.\tag{1.32}$$

Entonces las ecuaciones (1.30) pueden ser reescritas en forma matricial como,

$$\frac{dz}{dt} = \tilde{L}z\tag{1.33}$$

donde

$$z = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})^T,$$

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} \tilde{0} & -\omega I_f + 2[D(\tilde{A}^2)] + \delta\tilde{M} \\ \omega I_f - 6[D(\tilde{A}^2)] - \delta\tilde{M} & \tilde{0} \end{pmatrix},$$

y $\tilde{0}$ es una matriz $f \times f$ con entradas cero. Notamos que L es una matriz Hamiltoniana, es decir de la forma JS , donde J es la matriz $2f \times 2f$ simpléctica

$$J = \begin{pmatrix} \tilde{0} & I \\ -I_f & \tilde{0} \end{pmatrix},$$

y S una matriz simétrica.

La estabilidad lineal del breather se determina por los eigenvalores λ_i de la matriz \tilde{L} y se obtienen numéricamente. En nuestro estudio hemos utilizado el paquete Mathematica y Maple.

La condición de estabilidad lineal de las soluciones breather es que todos los eigenvalores λ_i tengan parte real menor o igual a cero. De otra forma las soluciones son linealmente inestables. Notamos además que la ecuación $\det(L - \lambda I_2) = 0$ se reduce a

$$\det\left(\left(-\omega I_f + 2D(\tilde{A}^2) + \delta\tilde{M}\right)\left(\omega I_f - 6D(\tilde{A}^2) - \delta\tilde{M}\right) - \lambda^2 I_f\right) = 0. \quad (1.34)$$

La estabilidad ocurre si todas las λ_i^2 son números reales y negativos, lo que origina que las λ_i 's sean números imaginarios puros. Una condición suficiente para la inestabilidad es que al menos un λ_i^2 no sea real y negativo, dando una raíz λ_i que tiene partes reales positivas [2].

Además de la noción de estabilidad, se puede considerar la estabilidad orbital, que es la permanencia en una vecindad de la órbita breather para todo tiempo. Resultados de estabilidad se pueden obtener para breathers que son extremos locales del Hamiltoniano H sobre $P = C$. Este análisis se puede hacer en el espacio reducido $\mathbb{C}\mathbb{P}^{f-1}$, examinando el Hessiano del Hamiltoniano del sistema reducido [9]

Un caso importante de extremos locales son los breathers de un pico, para $\gamma\delta > 0$ (caso focusing) y δ suficiente cerca de $\delta = 0$ [9]. En el caso $\delta < 0$ estos breathers son mínimos locales. También se puede identificar el máximo global, que corresponde a un breather cercano al perfil del modo normal más alto de problema lineal. Breathers de más picos no son extremos locales, y no tenemos información sobre su estabilidad orbital. En el capítulo 3 usamos una noción de estabilidad orbital para tiempo finito, que corresponde a la observación numérica de trayectorias que permanecen en la vecindad de breathers linealmente estables para tiempos largos. Estas trayectorias no corresponden a extremos locales de H para $P = C$, y por lo tanto no podemos asegurar que permanezcan cerca de la órbita del breather para todo tiempo.

1.5. Algunas soluciones breather

El sistema algebraico de ecuaciones no lineal (1.21), junto con la ecuación de potencia (1.22), puede ser resuelto para encontrar las A_j y la frecuencia ω correspondiente, de manera numérica aunque se conocen algunas soluciones analíticas que se pueden deducir de manera mas o menos directa. En lo que sigue se ha considerado $P = 1$ y se ha utilizado el método de Newton para resolver el sistema (1.21)-(1.22). También hemos ultimado la implementación del paquete Mathematica.

Por mencionar, para una lattice de 3 sitios, una solución analítica a $A = [A_1, A_2, A_3]$ para el breather $u = e^{-i\omega t} A$ es

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, A_2 = 0, A_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \omega = 1 - 2\delta \quad (1.35)$$

mientras que para una lattice de 5 sitios, algunas soluciones analíticas para $A = [A_1, A_2, A_3, A_4, A_5]$ son las siguientes

1. $A_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, A_2 = 0, A_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}, A_4 = 0, A_5 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \omega = -2\delta + \frac{2}{3}$
2. $A_1 = \frac{1}{2}, A_2 = \frac{1}{2}, A_3 = 0, A_4 = -\frac{1}{2}, A_5 = -\frac{1}{2}, \omega = -\delta + \frac{1}{2}$
3. $A_1 = -\frac{1}{2}, A_2 = \frac{1}{2}, A_3 = 0, A_4 = -\frac{1}{2}, A_5 = \frac{1}{2}, \omega = -3\delta + \frac{1}{2}$
4. $A_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{1 - \sqrt{1 - 4\delta^2}}, A_2 = \frac{-2\sqrt{1 - \sqrt{1 - 4\delta^2}} + (1 - \sqrt{1 - 4\delta^2})^{\frac{3}{2}}}{4\delta}, A_3 = 0,$
 $A_4 = -A_2, A_5 = -A_1, \omega = 1 - 2\delta.$

Algunas otras soluciones analíticas de tipo breather se pueden encontrar en [2]. Por otro lado, para soluciones numéricas de tipo breather, en el caso de la presente tesis, se han considerado cadenas de 3 y 5 sitios, con potencia $P = 1$ y una constante de acoplamiento $\delta = 0.3$. Como ya se mencionó, el sistema algebraico (1.21)-(1.22) se ha resuelto utilizando el software Mathematica, así como Maple y Newton-Raphson.

Por ejemplo, para 3 sitios algunas soluciones numéricas de breather estables, clasificados de acuerdo con los criterios que se mencionaron líneas arriba, son por ejemplo,

1. $A_1 = 0.550259, A_2 = 0.628037, A_3 = 0.550259, \omega = -0.336834,$
2. $A_1 = 0.149791, A_2 = 0.977305, A_3 = 0.149791, \omega = 1.40221,$
3. $A_1 = 0.707107, A_2 = 0, A_3 = 0.707107, \omega = 0.4,$

mientras que para el caso de 5 sitios podemos mencionar los siguientes breather estables,

1. $A_1 = 0.381608, A_2 = -0.480558, A_3 = 0.49687, A_4 = -0.480558, A_5 = 0.381608, \omega = -0.686541,$
2. $A_1 = 0.0230719, A_2 = 0.153576, A_3 = 0.975584, A_4 = 0.153576, A_5 = 0.0230719, \omega = 1.39798.$

Las amplitudes $u_j = A_j e^{-i\omega t}$ con $j = 1, \dots, 5$ para los casos anteriores de cinco sitios, (1) y (2), se encuentran representados en las Figuras 3.13 y 3.18 respectivamente.

Capítulo 2

Cuantización bosónica de la ecuación DNLS y evolución clásica de estados coherentes.

Los breather clásicos son un fenómeno que está relativamente bien entendido, sin embargo una gran atención ha sido puesta para definir un equivalente cuántico. En este capítulo describimos y examinamos una nueva propuesta de análogos cuánticos de las soluciones tipo breather de las ecuaciones que se basa en los estados coherentes [37, 38].

Definimos primero en la sección 2.1 la cuantización del sistema DNLS, usando el formalismo de cuantización bosónica [14, 23, 48]. El Hamiltoniano clásico H del sistema DNLS se usa para definir un operador autoadjunto \hat{H} en el espacio de Hilbert V que definimos, además se postula la evolución cuántica según la ecuación de Schrödinger para el operador \hat{H} . En la sección 2.2 se introducen los estados coherentes tipo Glauber y $SU(f)$ [39, 40, 43, 44, 46], un conjunto de estados cuánticos (elementos de V) indexados por los puntos del espacio fase clásico de las ecuaciones DNLS. El uso de estos estados nos permite definir estados análogos a los breathers clásicos del sistema DNLS. También definimos la evolución “clásica” (o “semiclásica”) de los estados coherentes, una regla de evolución que en algunos límites puede aproximar la evolución cuántica. La evolución clásica de los estados coherentes se motiva por un Ansatz variacional que se describe en el Apéndice B. Algunos aspectos adicionales de la teoría de los estados coherentes se presentan en el Apéndice A. En la sección 2.3 comparamos numéricamente la evolución clásica y cuántica de condiciones iniciales que son estados coherentes que corresponden a puntos en órbitas tipo breather y su vecindad. Presentamos un resumen de los resultados numéricos y las principales observaciones, que también describimos en nuestras publicaciones [37, 38].

2.1. Cuantización bosónica de la ecuación DNLS

Para definir una versión cuántica del sistema hamiltoniano clásico, dado por (1.15) en el espacio fase clásico \mathbb{C}^f , seguimos las reglas de cuantización bosónicas, ver por ejemplo [14, 23, 48].

Específicamente, considere a V como el espacio complejo de Hilbert generado por la base con elementos $|n_1, n_2, \dots, n_f\rangle$, donde $n_1, \dots, n_f \geq 0$, que además satisfacen la condición de ortonormalidad

$$\langle m_1, \dots, m_f | n_1, \dots, n_f \rangle = \delta_{m_1 n_1} \dots \delta_{m_f n_f}, \quad (2.1)$$

donde $\langle a|b\rangle$ denota el producto interno hermitiano entre dos elementos a, b de V , y $\delta_{m_i n_j}$, la delta de Kronecker, satisface $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ y $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$.

El vector $|n_1, n_2, \dots, n_f\rangle$ representa un estado con n_j partículas (“cuantos” o “bosones”) en el sitio j , $j = 1, \dots, f$. En general el sistema se encuentra en una superposición de estos estados. El conjunto de los estados $|n_1, n_2, \dots, n_f\rangle$, con $n_1, \dots, n_f \geq 0$, se conoce como *base de número de ocupación*.

En el segundo paso de la definición para la cuantización bosónica, las variables canónicas complejas u_j^* y u_j , $j = 1, \dots, f$, que aparecen en la ecuación (1.1), se mapean a los operadores de *creación* y *aniquilación* bosónicos, B_j^\dagger and B_j , $j = 1, \dots, f$ respectivamente, definidos por su efecto en los vectores base por

$$\begin{aligned} B_j^\dagger |n_1, n_2, \dots, n_j, \dots, n_f\rangle &= \sqrt{n_j + 1} |n_1, n_2, \dots, n_j + 1, \dots, n_f\rangle, \\ B_j |n_1, n_2, \dots, n_j, \dots, n_f\rangle &= \sqrt{n_j} |n_1, n_2, \dots, n_j - 1, \dots, n_f\rangle, \quad \text{si } n_j > 0, \\ B_j |n_1, n_2, \dots, 0, \dots, n_f\rangle &= 0 |n_1, n_2, \dots, 0, \dots, n_f\rangle = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Notamos que la definición (2.2) implica la relación de conmutación para los operadores B_j y B_j^\dagger dada por,

$$[B_i, B_j^\dagger] = B_i B_j^\dagger - B_j^\dagger B_i = \delta_{i,j} \quad (2.3)$$

donde $\delta_{i,j}$ es la delta de Kronecker.

El Hamiltoniano clásico H de (1.15), que es una función real de las variables u_j^* y u_j , $j = 1, \dots, f$, se mapea a un operador autoadjunto \hat{H} en V , sustituyendo los u_j^* y u_j clásicos en H por los operadores B_j^\dagger y B_j respectivamente. Un operador autoadjunto \hat{H} (operador Hamiltoniano cuántico) que se obtiene de esta forma es una “cuantización” bosónica del Hamiltoniano clásico H . Recordamos que un operador lineal $A : V \rightarrow V$ es autoadjunto si y solo si se cumple que $\langle Aa|b\rangle = \langle a|Ab\rangle$, para cada a, b en V .

La condición de que \hat{H} sea autoadjunto es uno de los postulados de la mecánica cuántica, y está relacionado con el postulado de la regla de evolución cuántica (ecuación de Schrödinger) que describimos más adelante. Por otro lado, dado que el producto de los operadores cuánticos de creación y aniquilación no es conmutativo, la cuantización de un hamiltoniano clásico H por la sustitución arriba no resulta en general en un operador único. Por ejemplo, sea $f = 1$ sitio, $u^* = u_1^*$,

$u = u_1$, el hamiltoniano clásico $H = uu^* + (u)^2u^* + (u^*)^2u$ en \mathbb{C} , y los operadores de creación y aniquilación $\hat{B}^\dagger = \hat{B}_1^\dagger$, $\hat{B} = \hat{B}_1$. Claramente, tenemos también $H = u^*u + u^*(u)^2 + u(u^*)^2$ y otras maneras equivalentes de escribir H . Los operadores que cuantizan H incluyen los operadores $\hat{B}\hat{B}^\dagger + (\hat{B})^2\hat{B}^\dagger + (\hat{B}^\dagger)^2\hat{B}$, $\hat{B}^\dagger\hat{B} + \hat{B}^\dagger(\hat{B})^2 + \hat{B}(\hat{B}^\dagger)^2$ y otros que son a-priori distintos. Existen diferentes formas sistemáticas para ordenar los operadores de creación y aniquilación que resultan en operadores autoadjuntos, ver e.g. [14, 23, 48]. En general estos operadores son distintos, tienen por ejemplo diferentes espectros. (Una noción relevante para comparar operadores es la similitud por operador unitario). Los axiomas de la mecánica cuántica no incluyen una regla para ordenar los operadores y el ordenamiento físicamente relevante se tiene que determinar a-posteriori en cada caso de los datos experimentales.

En este trabajo usaremos las convenciones de [10, 60], cuantizando la funciones que aparecen en (1.15) como

$$\begin{aligned} |u_j|^2 &\rightarrow \frac{1}{2} \left(\hat{B}_j^\dagger \hat{B}_j + \hat{B}_j \hat{B}_j^\dagger \right), \\ |u_j|^4 &\rightarrow \frac{1}{6} \left(\hat{B}_j^\dagger \hat{B}_j^\dagger \hat{B}_j \hat{B}_j + \hat{B}_j^\dagger \hat{B}_j \hat{B}_j^\dagger \hat{B}_j + \hat{B}_j^\dagger \hat{B}_j \hat{B}_j \hat{B}_j^\dagger \right. \\ &\quad \left. + \hat{B}_j \hat{B}_j^\dagger \hat{B}_j \hat{B}_j^\dagger + \hat{B}_j \hat{B}_j \hat{B}_j^\dagger \hat{B}_j^\dagger + \hat{B}_j \hat{B}_j^\dagger \hat{B}_j^\dagger \hat{B}_j \right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

en donde antes de cuantizar se han considerado los promedios de todos los ordenamientos de u_j y u_j^* que corresponden a $|u_j|^2$ y $|u_j|^4$, así por ejemplo, $|u_j|^2 = u_j u_j^* \rightarrow \frac{1}{2}(u_j^* u_j + u_j u_j^*)$. Nótese que esta forma de promedio hace que los operadores cuánticos correspondientes a $|u_j|^2$ y $|u_j|^4$ sean hermíticos.

Utilizando el conmutador (2.3) la cuantización de $|u_j|^2$ se puede reescribir como, $|u_j|^2 \rightarrow \frac{1}{2} \left(\hat{B}_j^\dagger \hat{B}_j + \hat{B}_j \hat{B}_j^\dagger \right) = \frac{1}{2} \left(\hat{B}_j^\dagger \hat{B}_j + 1 + \hat{B}_j^\dagger \hat{B}_j \right) = \frac{1}{2} \left(2\hat{B}_j^\dagger \hat{B}_j + 1 \right)$, esto es,

$$|u_j|^2 \rightarrow B_j^\dagger B_j + \frac{1}{2}. \quad (2.5)$$

De forma análoga, el conmutador (2.3) puede ser utilizado para reordenar cada uno de los seis sumandos cuantizados del promedio de $|u_j|^4$, por ejemplo, $B_j^\dagger B_j B_j B_j^\dagger = B_j^\dagger B_j (1 + B_j^\dagger B_j) = B_j^\dagger B_j + B_j^\dagger B_j B_j^\dagger B_j$ y procediendo de manera semejante con el resto de los términos el operador cuántico correspondiente a $|u_j|^4$ se reduce a

$$|u_j|^4 \rightarrow B_j^\dagger B_j B_j^\dagger B_j + B_j^\dagger B_j + \frac{1}{2}. \quad (2.6)$$

Sustituyendo en ec. (1.15) se tiene el hamiltoniano cuantizado,

$$\begin{aligned}\hat{H} &= -\delta \left(\sum_{j=1}^{f-1} \left[B_{j+1}^\dagger B_{j+1} + B_j^\dagger B_j - B_j^\dagger B_{j+1} - B_j B_{j+1}^\dagger + 1 \right] \right. \\ &\quad \left. + B_1^\dagger B_1 + B_f^\dagger B_f + 1 \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^f \left(B_j^\dagger B_j B_j^\dagger B_j + B_j^\dagger B_j + \frac{1}{2} \right).\end{aligned}\quad (2.7)$$

Reacomodando términos \hat{H} puede ser escrito finalmente como,

$$\hat{H} = (1 - 2\delta) \sum_{j=1}^f B_j^\dagger B_j + \sum_{j=1}^f B_j^\dagger B_j B_j^\dagger B_j + \delta \sum_{j=1}^f \left(B_j^\dagger B_{j+1} + B_j B_{j+1}^\dagger \right), \quad (2.8)$$

donde el término constante que se origina representa un desplazamiento en el espectro de energías, por lo que puede ser anexado al Hamiltoniano y por lo tanto será omitido en el cálculo que sigue.

El efecto de ordenar de diferentes formas los operadores en este problema se considera brevemente en [48]. Notamos también que el Hamiltoniano clásico H de (1.15) se puede escribir usando diferentes coordenadas canónicas, e.g. las variables q_j, p_j del capítulo anterior, o las variables de modos normales, etc. En cada caso, uno puede definir cuantizaciones que también pueden dar operadores distintos. El efecto de las diferentes cuantizaciones no se ha considerado en esta tesis, y se puede examinar en el futuro.

Dado el operador Hamiltoniano cuántico \hat{H} , la dinámica del sistema cuántico es descrita por la *ecuación de Schrödinger* [61]

$$i \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\Psi(t)\rangle, \quad (2.9)$$

donde se ha considerado $\hbar = 1$ y cuya solución formal, para H independiente del tiempo t , es

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t} |\Psi(0)\rangle, \quad (2.10)$$

con $|\Psi(0)\rangle$ el estado inicial.

La forma general (2.9) de la ecuación de evolución, con \hat{H} autoadjunto, es otro postulado básico de la mecánica cuántica. La propiedad \hat{H} autoadjunto implica que el operador $e^{-i\hat{H}t}$ es unitario y que entonces las soluciones $|\Psi(t)\rangle$ de la ecuación de Schrödinger satisfacen $\langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle = \langle \Psi(0) | \Psi(0) \rangle$, para cada t real. (En la física se postula también estados normalizados, i. e. $\langle \Psi(0) | \Psi(0) \rangle = 1$.)

Sea V_n , $n > 0$, el subespacio complejo de estados de V generado por el conjunto de elementos

$$\{|n_1, \dots, n_f\rangle \in V : n_1 + \dots + n_f = n\}. \quad (2.11)$$

La dimensión p del subespacio V_n es el número de formas en que n cuantos (bosones) pueden ser colocados en una cadena de f sitios, esto es,

$$p = \dim V_n = \frac{(n + f - 1)!}{(f - 1)!n!}. \quad (2.12)$$

V_n se refiere al subespacio de n cuantos (o bosones o partículas). El subespacio V_0 es generado por el estado $|0, \dots, 0\rangle$ (el “vacío”).

Una propiedad importante del operador \hat{H} de (2.8) es que deja invariantes los subespacios V_n , $n \geq 0$, y que entonces conmuta con el operador de “número de cuantos” (o “número de partículas”) \hat{N} definido por

$$\hat{N} = \sum_{j=1}^f B_j^\dagger B_j. \quad (2.13)$$

Observamos que

$$\hat{N}|n_1, \dots, n_f\rangle = (n_1 + \dots + n_f)|n_1, \dots, n_f\rangle,$$

entonces los subespacios V_n son invariantes bajo \hat{N} , además si $|a\rangle \in V_n$ tenemos $\hat{N}|a\rangle = n|a\rangle$. Entonces el subespacio V_n , $n \geq 0$, es también el espacio de eigenfunciones de \hat{N} con eigenvalor n . Notamos que el operador \hat{N} es una cuantización de la potencia P del capítulo anterior

Además, el hecho de que \hat{H} deja invariante los subespacios V_n , $n \geq 0$, implica que los V_n son invariantes bajo la evolución de la ecuación de Schrödinger correspondiente. Esta observación nos permite estudiar la evolución cuántica en los subespacios V_n , que son de dimensión finita. El crecimiento rápido de la dimensión de V_n con n y f hace este estudio menos factible para n y f grandes.

Para examinar la evolución cuántica en los subespacios V_n , $n > 0$, usamos la notación

$$|\Phi\rangle = \sum_{k=1}^p a_k |\Psi_k\rangle, \quad (2.14)$$

donde $|\Phi\rangle$ es un elemento arbitrario de V_n y los $|\Psi_k\rangle$ denotan los p elementos del conjunto de los elementos de la base de número de ocupación que pertenecen a V_n , (2.11), esto es, $\{|\Psi_k\rangle : k = 1, 2, \dots, p\} = \{|n_1, n_2, \dots, n_f\rangle \in V : n_1 + n_2 + \dots + n_f = n\}$. Esta notación supone también una forma para enumerar los elementos de la base de número de ocupación que pertenecen a V_n , e.g. el orden lexicográfico u otros.

Así por ejemplo, para $f = 3$ sitios de la cadena y $n = 2$ bosones se obtienen $p = 6$ estados independientes, de donde (2.14) se escribe como,

$$|\Phi\rangle = a_1|2, 0, 0\rangle + a_2|0, 2, 0\rangle + a_3|0, 0, 2\rangle + a_4|1, 1, 0\rangle + a_5|0, 1, 1\rangle + a_6|1, 0, 1\rangle,$$

usando también el orden

$$\{\Psi_1, \dots, \Psi_6\} = \{|2, 0, 0\rangle, |0, 2, 0\rangle, |0, 0, 2\rangle, |1, 1, 0\rangle, |0, 1, 1\rangle, |1, 0, 1\rangle\}. \quad (2.15)$$

Usando esta notación y la base de número de ocupación, \hat{H} de (2.8) se puede escribir como

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} H_0 & 0 & & & & \\ 0 & H_1 & 0 & & & \\ & 0 & H_2 & 0 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

que tiene una forma diagonal a bloques. Las matrices H_n tiene entradas $\langle \Psi_i | \hat{H} | \Psi_j \rangle$, con Ψ_i, Ψ_j elementos de la base del número de ocupación que pertenecen a V_n .

Por ejemplo, para el caso de una cadena de $f = 3$ sitios, usamos (2.8) para calcular H_2 y el bloque que corresponde al subespacio V_2 (dos bosones) tiene explícitamente la forma

$$H_2 = \begin{pmatrix} 6 - 4\delta & 0 & 0 & \delta\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 6 - 4\delta & 0 & \delta\sqrt{2} & \delta\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 6 - 4\delta & 0 & \delta\sqrt{2} & 0 \\ \delta\sqrt{2} & \delta\sqrt{2} & 0 & 4 - 4\delta & 0 & \delta \\ 0 & \delta\sqrt{2} & \delta\sqrt{2} & 0 & 4 - 4\delta & \delta \\ 0 & 0 & 0 & \delta & \delta & 4 - 4\delta \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

donde $H_2(i, j) = \langle \Psi_i | \hat{H} | \Psi_j \rangle$ con los $|\Psi_j\rangle$ como en (2.15).

La ecuación de eigenvalores correspondiente a cada H_n en el subespacio V_n

$$(H_n - E) |\Phi\rangle = 0$$

puede ser resuelta para hallar $p = \dim(V_n)$ estados (ver ecuación (2.14))

$$|\Phi_{j,n}\rangle = \sum_{k=1}^p a_{j,k} |\Psi_k\rangle, \quad (2.18)$$

con $j = 1, 2, \dots, p$ junto con sus eigenenergías correspondientes E_j , esto es, $H_n |\Phi_{j,n}\rangle = E_j |\Phi_{j,n}\rangle$.

Invirtiendo las ecuaciones (2.18), podemos expresar los elementos de la base de número de ocupación V_n en términos de los eigenestados del operador \hat{H}_n , es decir,

$$|\Psi_k\rangle = \sum_{j=1}^p b_{k,j} |\Phi_{j,n}\rangle, \quad (2.19)$$

con $k = 1, 2, \dots, p$, $|\Psi_k\rangle \in \{|n_1, \dots, n_f\rangle \in V : n_1 + \dots + n_f = n\}$, esto es, $(a_{ij})^{-1} = (b_{ij})$, y nuevamente $H_n |\Phi_{j,n}\rangle = E_j |\Phi_{j,n}\rangle$.

La construcción del operador hamiltoniano \hat{H} usando el formalismo de cuantización bosónica que hemos descrito aplica a sistemas hamiltonianos clásicos generales en \mathbb{C}^f . En el caso de hamiltonianos clásicos con simetría de fase global

S^1 , podemos ver que los operadores cuantizados dejan los subespacios V_n invariantes. Por lo tanto la estructura de \hat{H} diagonal en bloques correspondientes a los subespacios V_n es relevante a todos los sistemas clásicos de este tipo.

En la presente tesis las matrices que representan a H_n son de tamaño $p \times p$ por lo que crecen de manera drástica con el número de bosones n de acuerdo con (2.12). Se ha usado un método numérico para encontrar sus vectores y valores propios (energías), aprovechando que las H_n son simétricas. La programación se ha hecho en Fortran y esta apoyada en subrutinas de Eispack que se encuentran en, por ejemplo, www.netlib.org/eispack. Análogamente la inversión de matrices se ha hecho también numéricamente.

2.2. Evolución cuántica y clásica de estados coherentes

En esta sección introducimos los estados coherentes tipo Glauber y $SU(f)$ y definimos una noción de evolución clásica para dichos estados que comparamos con su evolución cuántica dada por la ecuación de Schrödinger. Mas adelante examinamos el caso de la evolución cuántica y clásica de los estados coherentes rotulados por los breathers clásicos y puntos en su vecindad.

Considere $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_f) \in \mathbb{C}^f$. Se define el estado coherente Glauber $|\alpha\rangle$ asociado a $(\alpha) \in \mathbb{C}^f$, como el estado que satisface

$$\hat{B}_j |\alpha\rangle = \alpha_j |\alpha\rangle, \quad (2.20)$$

para todo $j = 1, 2, \dots, f$.

Además, se puede ver que el estado coherente normalizado Glauber $|\alpha\rangle$ puede ser escrito explícitamente en términos de los estados número $|n_1, n_2, \dots, n_f\rangle$ como

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \dots + |\alpha_f|^2)} \\ &\times \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_f=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2} \dots \alpha_f^{n_f}}{\sqrt{n_1! n_2! \dots n_f!}} |n_1, n_2, \dots, n_f\rangle, \end{aligned} \quad (2.21)$$

ver por ejemplo [39, 40]. En el Apéndice A resumimos algunas propiedades básicas de los estados de Glauber.

Sea $\alpha(0) = (\alpha_1(0), \dots, \alpha_f(0)) \in \mathbb{C}^f$ y considere un estado coherente dado por $|\alpha(0)\rangle$. Sea un $n \geq 0$, y considere el estado evolucionado al tiempo t dado por

$$|\Psi_n(t)\rangle = e^{-iH_n t} P_n |\alpha(0)\rangle, \quad (2.22)$$

donde P_n denota la proyección ortogonal en el subespacio V_n . De la ecuación de Schrödinger (2.9), y la forma diagonal en bloques de \hat{H} (2.16) tenemos que $|\Psi_n(t)\rangle$ describe la evolución cuántica exacta de $P_n |\alpha(0)\rangle$ en el subespacio invariante V_n . Además, la evolución cuántica exacta de $|\alpha(0)\rangle$ se obtiene por

la superposición

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-iH_n t} P_n |\alpha(0)\rangle.$$

Nótese que en el subespacio V_n se tiene que para todo $|(\alpha)\rangle$, estado coherente asociado a $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_f) \in \mathbb{C}^f$,

$$P_n |(\alpha)\rangle = e^{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^f |\alpha_k|^2} \sum_{n_1 + \dots + n_f = n} \frac{\alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2} \dots \alpha_f^{n_f}}{\sqrt{n_1! n_2! \dots n_f!}} |n_1, n_2, \dots, n_f\rangle, \quad (2.23)$$

donde la suma es sobre todos los estados que cumplen con $n = n_1 + n_2 + \dots + n_f$ para n dado, el número de bosones.

Los estados coherentes tipo $SU(f)$ se definen como estados Glauber $P_n |(\alpha)\rangle$, i.e proyectados a un V_n y normalizados, ver [43, 44, 46]. Los estados coherentes tipo $SU(f)$ admiten definiciones equivalentes que se discuten junto con aspectos adicionales de la teoría de los estados coherentes tipo $SU(f)$ en los Apéndices C y D.

Considere ahora a $\alpha(t) = (a_1(t), a_2(t), \dots, a_f(t))$, la solución de las ecuaciones de Hamilton (1.10) al tiempo t con condición inicial

$$\alpha(0) = (a_1(0), a_2(0), \dots, a_f(0)), \quad (2.24)$$

y $|(\alpha(t))\rangle$, el estado coherente tipo Glauber correspondiente definido usando (2.21).

Los estados coherentes $|(\alpha(t))\rangle$, t real, definen la *evolución clásica* (o *semiclásica*) del estado coherente tipo Glauber, y usamos la notación $|\Psi^C(t)\rangle = |(\alpha(t))\rangle$. Además, definimos la proyección al subespacio V_n por $|\Psi_n^C(t)\rangle$, y

$$|\Psi_n^C(t)\rangle = P_n |(\alpha(t))\rangle. \quad (2.25)$$

Así, (2.25) proporciona una aproximación “clásica” a la evolución de la proyección de un estado coherente. Dado que $\langle(\alpha(t))|(\alpha(t))\rangle = 1$ para cada t real, podemos normalizar los estados proyectados $P_n |(\alpha(t))\rangle$ multiplicando por $\langle P_n(\alpha(0)) | P_n(\alpha(0)) \rangle^{-1/2}$. De esta forma definimos la evolución clásica de los estados coherentes tipo $SU(f)$ $\langle P_n(\alpha(0)) | P_n(\alpha(0)) \rangle^{-1/2} P_n |(\alpha(t))\rangle$ por

$$|\Psi_n^C(t)\rangle = \langle P_n(\alpha(0)) | P_n(\alpha(0)) \rangle^{-1/2} P_n |(\alpha(t))\rangle.$$

(Dado que esta es esencialmente (2.25), usamos la misma notación para la evolución clásica de los estados coherentes tipo $SU(f)$ y los estados normalizados $SU(f)$.)

Las ecuaciones de Hamilton para los parámetros de los estados coherentes Glauber y análogos para los estados $SU(f)$ se derivan usando un cálculo que se describe en el Apéndice B y en donde también se explica la nomenclatura usada en la evolución semiclásica. Las ecuaciones se derivan de un análogo del principio de la acción mínima. El funcional que juega el papel de la acción se define sobre trayectorias en el espacio de los parámetros de los estados coherentes

y se anula cuando estas trayectorias satisfacen la ecuación de Schrödinger (las leyes de la evolución cuántica exacta), ver [46, 47, 51]. Sin embargo, en general la evolución cuántica no preserva el conjunto de los estados coherentes, excepto en algunos casos especiales como son sistemas de osciladores lineales y para osciladores lineales con forzamiento, ver [39, 62, 63]. Por lo tanto las soluciones de las ecuaciones de Hamilton para los parámetros de estados coherentes dan trayectorias en el espacio de Hilbert V que pertenecen al conjunto de los estados coherentes y que extremizan un funcional de “distancia” entre el conjunto de los estados coherentes y la trayectoria cuántica exacta.

En el Apéndice B damos un ejemplo de funcional que puede ser usado para derivar las ecuaciones de Hamilton, basándonos en las ideas generales de [46, 47, 51]. Consideramos que este cálculo puede ser generalizado a otros funcionales que son mas razonables como indicadores de la distancia entre los estados exactos y su aproximación por los estados coherentes. Aun así, estas derivaciones nos dan información acerca de si la distancia entre los estados coherentes y los estados cuánticos exactos es pequeña o no. Consideramos entonces que el uso de las ecuaciones de Hamilton para la evolución de los estados coherentes es en general una regla heurística y sólo podría dar buenas aproximaciones a los estados cuánticos exactos cerca de algunos límites en donde la evolución cuántica preserva el conjunto de los estados coherentes.

En lo que sigue evaluamos numéricamente la distancia entre los estados cuánticos exactos $|\Psi(t)\rangle$ y los estados con evolución clásica $|\Psi^C(t)\rangle$ usando la misma condición inicial $|\Psi(0)\rangle$, con $|\Psi(0)\rangle$ un estado coherente. Dado que esta distancia no tiene necesariamente que permanecer pequeña para todo tiempo, nuestro interés en este cálculo radica en el hecho que la evolución clásica de los estados coherentes nos da una manera de traducir las trayectorias clásicas en estados cuánticos que evolucionan en el tiempo. En este trabajo estudiaremos en mas detalle los estados coherentes que corresponden a trayectorias clásicas con condición inicial sobre o en la vecindad de órbitas periódicas clásicas tipo breather. Como hemos discutido en el capítulo 2, estas órbitas incluyen soluciones espacialmente localizadas. Así que el estado coherente incluye cierta información sobre la localización espacial.

Para comparar las dos reglas de evolución se mide la distancia $D(t)$ definida como

$$D(t) = \inf_{\phi \in \mathbb{R}} \|e^{i\phi} |\Psi(t)\rangle - |\Psi^C(t)\rangle\|, \quad (2.26)$$

suponiendo que $|\Psi(0)\rangle = |\Psi^C(0)\rangle$ es un estado coherente tipo Glauber. De la definición de los estados coherentes Glauber, los $|\Psi(t)\rangle$ y $|\Psi^C(t)\rangle$ tienen componentes en todos los subespacios V_n , y por lo tanto $D(t)$ solo puede ser aproximado numéricamente, e.g. usando los V_n con $n \leq N$ para algun N finito.

Otra opción es considerar los estados $SU(f)$, que existen en cada V_n . Considerando primero las proyecciones $|\Psi_n(t)\rangle$ y $|\Psi_n^C(t)\rangle$ de $|\Psi(t)\rangle$ y $|\Psi^C(t)\rangle$ respectivamente en el subespacio V_n , definimos las distancias

$$D_n(t) = \inf_{\phi \in \mathbb{R}} \|e^{i\phi} |\Psi_n(t)\rangle - |\Psi_n^C(t)\rangle\| \quad (2.27)$$

donde de acuerdo con líneas arriba $|\Psi_n(t)\rangle = e^{-iH_n t} P_n |\alpha(0)\rangle$ con $P_n |(\alpha(0))\rangle$

dado por ecuación (2.23) y (2.19), es decir,

$$|\Psi_n(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{c}} \sum_{j=1}^{p_n} d_{j,n} e^{-iE_{j,n}t} |\Phi_{j,n}\rangle, \quad (2.28)$$

con $c = |d_{1,n}|^2 + \dots + |d_{f,n}|^2$, y $d_{j,n}$ dado por

$$d_{j,n} = e^{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^f |\alpha_k|^2} \sum_{l=1}^{p_n} \frac{\alpha_1^{n_{1l}} \alpha_2^{n_{2l}} \dots \alpha_f^{n_{fl}}}{\sqrt{n_{1l}! n_{2l}! \dots n_{fl}!}} b_{lj} \quad (2.29)$$

Como un caso particular se ha usado como condición inicial $|\alpha(0)\rangle$ con $\alpha(0) = (A_1, A_2, \dots, A_f)$, una amplitud breather que cumple con (1.21), entonces

$$d_{j,n} = e^{-\frac{1}{2} \sum_{r=1}^f |A_r|^2} \sum_{l=1}^{p_n} \frac{A_1^{n_{1l}} A_2^{n_{2l}} \dots A_f^{n_{fl}}}{\sqrt{n_{1l}! n_{2l}! \dots n_{fl}!}} b_{lj}. \quad (2.30)$$

De forma análoga, se tiene que $|\Psi_n^C(t)\rangle = P_n|\alpha(t)\rangle$. Para el cálculo numérico se ha considerado a $\alpha_j = \alpha_j(t)$ con $j = 1, \dots, f$ y $\alpha_j(t)$ una solución de la ecuación DNLS clásica (1.1). Sustituyendo en (2.23) se obtiene

$$|\Psi_n^C(t)\rangle = \sum_{j=1}^{p_n} d_{j,n}^C(t) |\Phi_{j,n}\rangle, \quad (2.31)$$

donde para $\alpha(t) = Ae^{i\omega t}$, solución breather de la DNLS clásica (1.1), se tiene en este caso para la evolución semiclásica

$$d_{j,n}^C(t) = e^{-\frac{1}{2} \sum_{r=1}^f |A_r|^2} \sum_{l=1}^{p_n} \frac{[A_1 e^{-i\omega t}]^{n_{1l}} [A_2 e^{-i\omega t}]^{n_{2l}} \dots [A_f e^{-i\omega t}]^{n_{fl}}}{\sqrt{n_{1l}! n_{2l}! \dots n_{fl}!}} b_{lj}. \quad (2.32)$$

La ortogonalidad entre los subespacios V_n implica que

$$\inf_{\phi \in \mathbb{R}} \|e^{i\phi} |\Psi(t)\rangle - |\Psi^C(t)\rangle\| \geq \sum_{n=0}^{\infty} \inf_{\phi_n \in \mathbb{R}} \|e^{i\phi_n} |\Psi_n(t)\rangle - \Psi_n^C(t)\rangle\| \quad (2.33)$$

por lo tanto los $D_n(t)$ de (2.27) pueden ser usados para estimar desde abajo la diferencia $D(t)$. Nótese que, puesto que los estados Glauber están normalizados dado una condición clásica $\alpha(0)$, y a un tiempo t , las normas de cada uno de los correspondientes estados $|\Psi_n(t)\rangle$, $|\tilde{\Psi}_n(t)\rangle$ en los subespacios V_n deben eventualmente anularse para $n \rightarrow \infty$. Esto implica que $D_n(t)$ debe hacerse cero cuando $n \rightarrow \infty$. Este decaimiento se observa que es rápido y monótono en n en los ejemplos examinados [37].

Además, se puede considerar las dos evoluciones para las proyecciones normalizadas de $|\Psi(0)\rangle$ para cada V_n . Tales condiciones iniciales corresponden a estados cuánticos con un número n definido de cuantos. La diferencia entre las dos evoluciones del estado normalizado en V_n se mide entonces por

$$\overline{D}_n(t) = \| |\Psi_n(0)\rangle \|^{-1} D_n(t). \quad (2.34)$$

En el caso de $|\Psi(0)\rangle$ estados coherentes Glauber estos estados normalizados son estados coherentes $SU(f)$ en el espacio V_n . La cantidad $\overline{D}(t)$ mide entonces la distancia entre los estados normalizados de las evoluciones cuántica y clásica de los estados coherentes tipo $SU(f)$.

Concluimos esta sección con un comentario sobre algunas definiciones diferentes de los estados $SU(f)$. Usando la notación del Apéndice D, la relación entre los estados Glauber proyectados $P_n|\alpha\rangle$, $\alpha \in \mathbb{C}^f$, y los estados coherentes $SU(f)$, ver [43, 44, 46], se puede ver que (2.23) se escribe como

$$P_n|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}P(\alpha)} \frac{(P(\alpha))^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}} \sqrt{n!} \sum_{n_1+\dots+n_f=n} \frac{\xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \dots \xi_f^{n_f}}{\sqrt{n_1! n_2! \dots n_f!}} |n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_f\rangle$$

donde se han hecho el cambio de variable

$$\xi_j = (P(\alpha))^{-\frac{1}{2}} \alpha_j, \quad (2.35)$$

se ha identificado a $P(\alpha) = \sum_{k=1}^f |\alpha_k|^2$, de donde se tiene

$$P_n|\alpha\rangle = e^{-\frac{P(\alpha)}{2}} \frac{(P(\alpha))^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}} |n; \xi\rangle \quad (2.36)$$

donde $|n; \xi\rangle$ denota un estado coherente $SU(f)$ en V_n de acuerdo con (A.26), salvo una convención de fase global fija para ξ , por ejemplo, $\xi_1 = \xi_1^*$, ver [43]. El hecho de que $P(\xi) = 1$ implica que el estado $|n; \xi\rangle$ es normalizado ver [46]. Las condiciones de estado inicial Glauber normalizado proyectado en (2.34) son por lo tanto estados coherentes $SU(f)$.

2.3. Resultados numéricos de $\overline{D}_n(t)$ para una cadena de 3 sitios

En esta sección se presentan resultados numéricos de la evolución de la diferencia normalizada $\overline{D}_n(t)$,

$$\overline{D}_n(t) = \|\Psi_n(0)\|^{-1} D_n(t),$$

para una cadena (lattice) de $f = 3$ sitios (trimero) usando como condiciones iniciales estados coherentes $|\Psi_n(0)\rangle = |\alpha(0)\rangle$ con condiciones iniciales clásicas $\alpha(0)$ que corresponden a breathers, tanto estables como inestables, así como puntos en la vecindad de algunos breather. Estos resultados fueron reportados en [38] para los valores de potencia $P = 1$ y $\delta = 0.3$, los cuales son indicativos de lo que se observa para valores pequeños de $\delta > 0$ (el caso de enfocamiento).

Como señalamos en la sección anterior, la evolución clásica de los parámetros del estado coherente $|\alpha(0)\rangle$ codifica la trayectoria clásica que tiene como condición inicial $\alpha(0)$, y la propiedades de dicha órbita, e.g. su localización espacial. La pregunta que motiva los cálculos que siguen es que tanto estos datos

son reflejados en la trayectoria cuántica con condición inicial $|\alpha(0)\rangle$. Esto se cuantifica por las distancias $D(t)$ para los estados coherentes tipo Glauber, y $\overline{D}_n(t)$, $n > 0$, para los estados $SU(f)$ (en cada V_n). Nuestro estudio examina los $\overline{D}_n(t)$. Como se vió en la sección anterior esta información acota por abajo a los $\overline{D}(t)$.

Un primer ejemplo de nuestros resultados, en la Figura 2.1, corresponde al estado cuántico $|\langle\alpha(0)\rangle\rangle$ donde $\alpha(0)$ corresponde al estado clásico $\mathcal{A}_1 = (0, 1, 0)$ que es completamente localizado en el sitio $j = 2$ y que además se encuentra en la vecindad del breather estable $\mathcal{A}_2 = (0.149791, 0.977305, 0.149791)$ que examinamos mas adelante. El número de bosones es $n = 3$. El eje vertical es la diferencia $\overline{D}(t)$ mientras que el eje horizontal es el tiempo t . Además por la normalización se tiene que $\langle\Psi_n(t)|\Psi_n(t)\rangle = 1$ y $\langle\Psi_n^C(t)|\Psi_n^C(t)\rangle = 1, \forall t$.

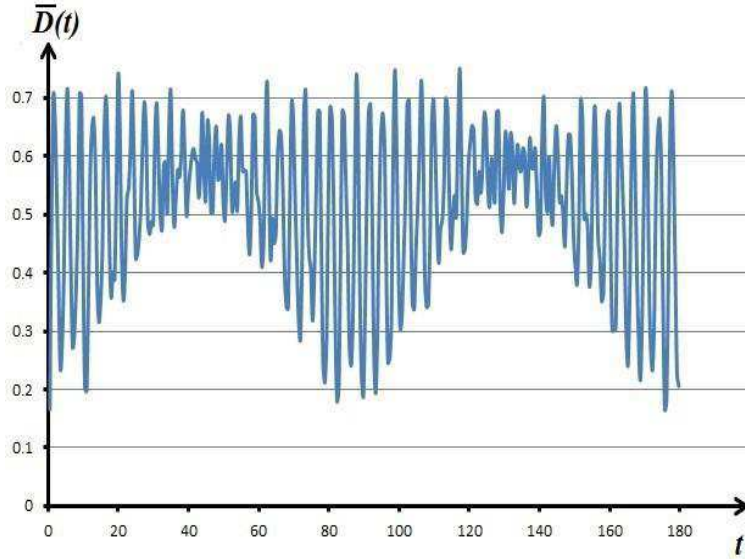


Figura 2.1: \overline{D} v.s. t , la condición inicial es el estado Glauber proyectado normalizado correspondiente a $\mathcal{A}_1 = (0, 1, 0)$, para $n = 3$ bosones, $f = 3$ sitios, $\delta = 0.3$, $P = 1$.

La siguiente Figura 2.2 se obtiene del mismo estado cuántico inicial $|\langle\alpha(0)\rangle\rangle$ con $\alpha(0)$ dado por el estado clásico $\mathcal{A}_1 = (0, 1, 0)$ pero ahora proyectado al subespacio de $n = 10$ bosones.

Se observa que $\overline{D}_n(t)$ varía en el rango $[0.2, 0.7]$ para $n = 3$, y en el rango $[0.03, 1.2]$ para $n = 10$. Esto indica que la regla de evolución para los estados coherentes normalizados proyectados no converge para n grandes. Como se observa en las dos figuras, a medida que el número de bosones aumenta los mínimos de $\overline{D}(t)$ disminuyen, por ejemplo en $n = 10$ se ve que el mínimo local es de aproximadamente 0.03, además los tiempos entre los mínimos disminuyen.

Estas propiedades se observan en corridas con hasta $n = 30$ cuantos.

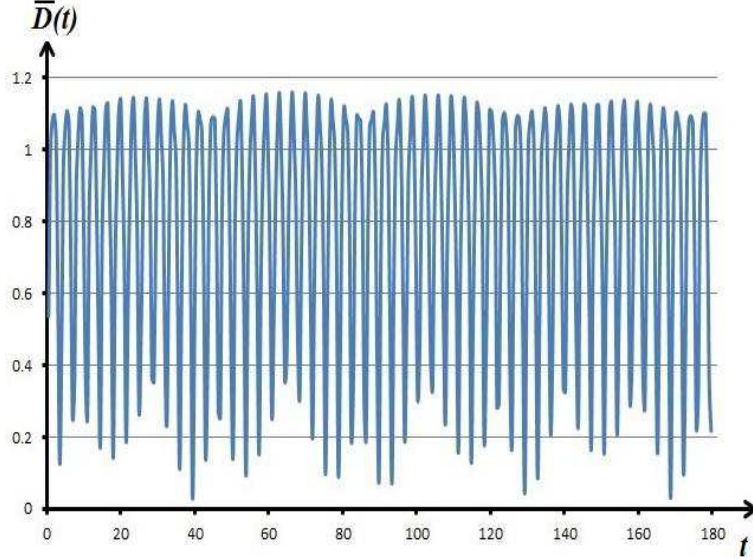


Figura 2.2: \bar{D} v.s. t , la condición inicial es el estado Glauber proyectado normalizado correspondiente a $\mathcal{A}_1 = (0, 1, 0)$, para $n = 10$ bosones, $f = 3$ sitios, $\delta = 0.3$.

Ahora examinamos la evolución del estado cuántico $|\alpha(0)\rangle$, donde $\alpha(0)$ es el breather estable

$$\mathcal{A}_2 = (0.149791, 0.977305, 0.149791).$$

El breather \mathcal{A}_2 es una solución calculada numéricamente de (1.21)-(1.22) con $P = 1$, $\delta = 0.3$ el cual tiene un periodo $T = 4.480916$ y corresponde al punto de máxima energía para $P = 1$, por lo tanto es linealmente y orbitalmente estable, ver [9] para cálculos en el mismo rango de parámetros. Este breather clásico es un ejemplo de un breather espacialmente localizado, en el sentido que pertenece a la rama de los breathers que se continúan del breather de un pico $(0, 1, 0)$ de (1.21) con $P = 1$ y $\delta = 0$.

Las Figuras 2.3 y 2.4 muestran la diferencia $\bar{D}_n(t)$ para $n = 3$, y $n = 10$ bosones respectivamente.

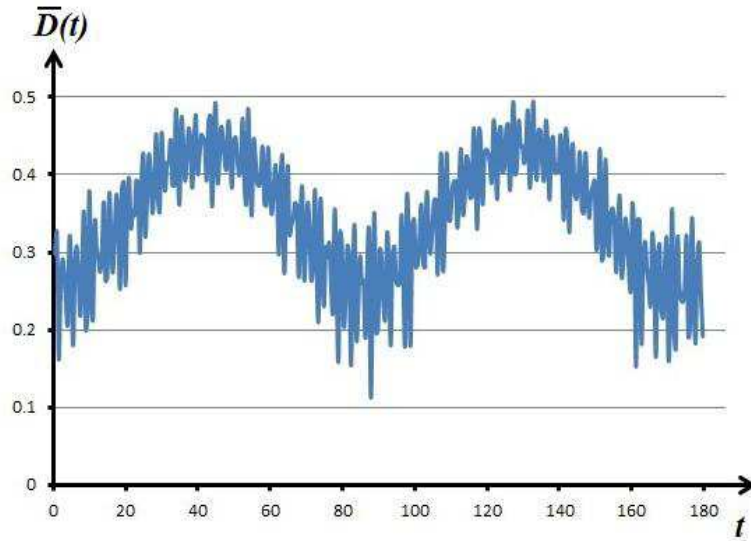


Figura 2.3: \bar{D} v.s. t , la condición inicial es el estado Glauber proyectado normalizado correspondiente a $\mathcal{A}_2 = (0.149791, 0.977305, 0.149791)$, para $n = 3$ bosones, $f = 3$ sitios, $\delta = 0.3$, $P = 1$.

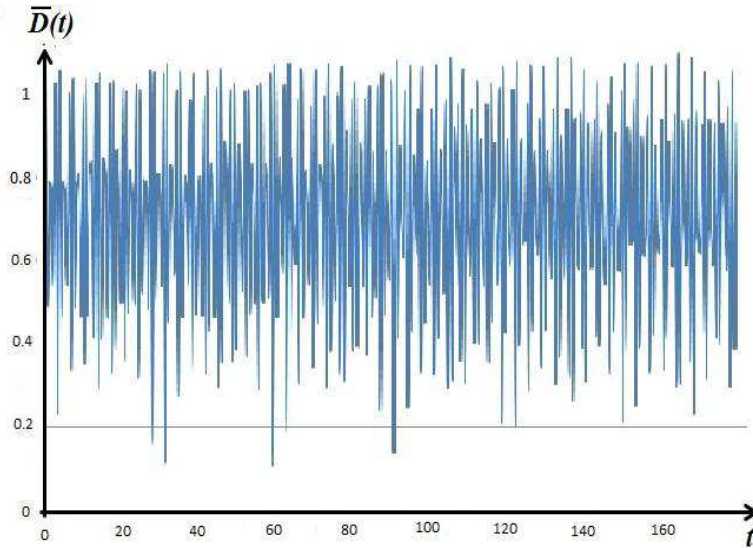


Figura 2.4: \bar{D} v.s. t , la condición inicial es el estado Glauber proyectado normalizado correspondiente a $\mathcal{A}_2 = (0.149791, 0.977305, 0.149791)$, para $n = 10$ bosones, $f = 3$ sitios, $\delta = 0.3$.

El comportamiento es cualitativamente similar al ejemplo anterior, y la distancia normalizada $\overline{D}_n(t)$ varía en el rango de $[0.16, 0.46]$ para $n = 3$, y en el rango de $[0.1, 1.1]$ para $n = 10$. Para $n = 10$ se observa una recurrencia al valor mínimo local de alrededor de 0.3 en tiempos separados por intervalos que son comparables al periodo del breather. Para $n = 3$ se ve una recurrencia menos frecuente.

Las frecuencias involucradas en las Figuras 2.1-2.4 pueden hacerse más evidentes si consideramos la transformada rápida de Fourier (FFT) de ellas, las cuales son presentadas en las Figuras 2.5 y 2.6. Para fines de comparación se han graficado ambas transformadas de Fourier en una sola figura. Existen algunas marcadas diferencias entre los espectros correspondientes presentados. Recordando que el caso \mathcal{A}_1 corresponde a una condición inicial que es cercana a la condición breather \mathcal{A}_2 , se observa en su espectro de frecuencias, tanto para $n = 3$ como para $n = 10$ bosones, que a parte de las frecuencias comunes a \mathcal{A}_2 presenta otras frecuencias involucradas. Esto lo podemos interpretar como una distribución mayor de energía en los tres sitios por lo que la localización para \mathcal{A}_1 no es tan marcada como en el caso \mathcal{A}_2 . Esto será considerado también en el siguiente capítulo. Como ya se mencionó para $n = 3$ se ve una recurrencia menos frecuente, que corresponde a un frecuencia aproximada de 0.015711. Por otro lado, el caso $n = 10$ bosones presenta una frecuencia cercana a 0.3 que en este caso se compara con el período del breather.

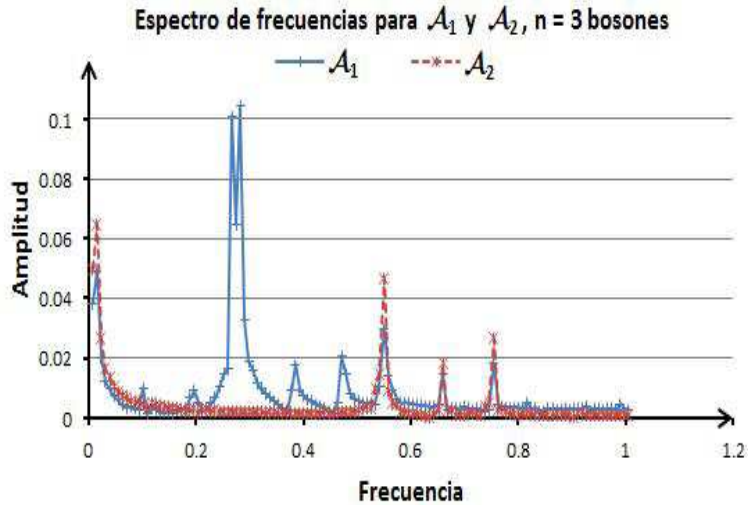


Figura 2.5: Espectro de Frecuencias correspondientes a \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 para $n = 3$ bosones y $f = 3$ sitios, $\delta = 0.3$.

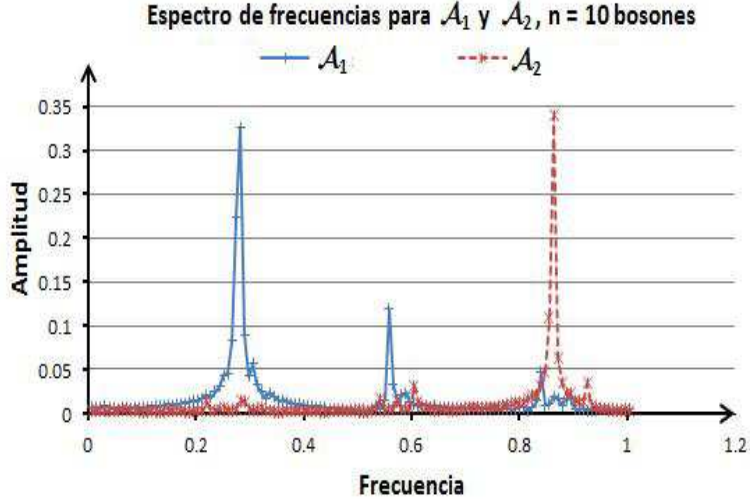


Figura 2.6: Espectro de Frecuencias correspondientes a \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 para $n = 10$ bosones y $f = 3$ sitios, $\delta = 0.3$.

Nótese que un estado Glauber evolucionado clásicamente $|\tilde{\Psi}(t)\rangle$, con la condición inicial $\tilde{\Psi}(0) = |(A)\rangle$, con A un breather, tiene un período T , donde T es el período del breather. Las proyecciones a cada V_n , $n \geq 1$, tienen un período de T/n . Este período da una primera indicación de las escalas de tiempo que aparecen en estas recurrencias, y que se discuten con más detalle en el siguiente capítulo.

Consideramos ahora el caso de un estado cuántico $|(\alpha(0))\rangle$, donde $\alpha(0)$ es el breather inestable. En particular usamos como $\alpha(0)$ el breather

$$\mathcal{A}_3 = (0.71607, 0.678973, 0.161982)$$

que es una solución calculada numéricamente de (1.21)-(1.22) con $P = 1$, $\delta = 0.3$. El período del breather en este caso es $T = 8.849906$. \mathcal{A}_3 es linealmente inestable, y es una solución de dos picos que pertenece a la rama que se continúa desde la solución $(1, 1, 0)$ de (1.21)-(1.22) con $P = 1$, $\delta = 0$. Del análisis de [9] para este rango de valores de δ , su energía coincide con el valor de energía que corresponde al cambio de una hipersuperficie de energía conexa a una desconexa con $P = 1$.

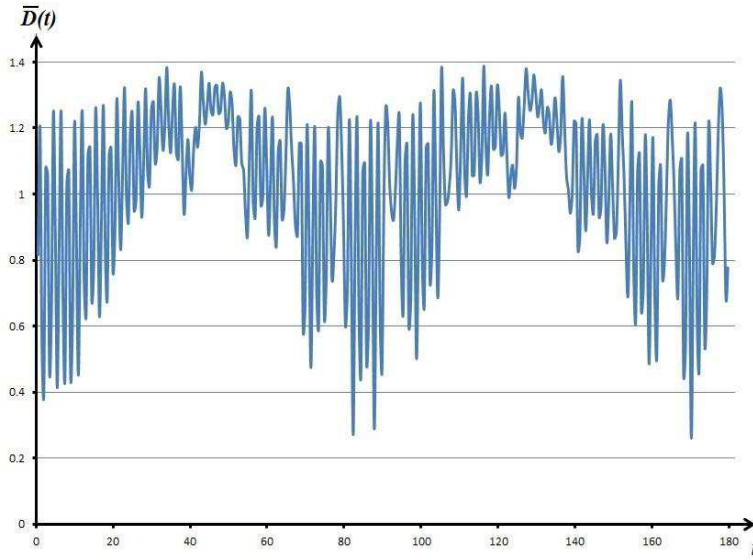


Figura 2.7: \bar{D} v.s. t , la condición inicial es el estado Glauber normalizado proyectado correspondiente a $\mathcal{A}_3(0) = (0.71607, 0.678973, 0.161982)$, para $n = 3$ bosones, $f = 3$ sitios, $\delta = 0.3$.

Los resultados para la distancia $\bar{D}_n(t)$ se muestran en las Figuras 2.7 y 2.8 que corresponden a $n = 3$ y $n = 10$ bosones respectivamente. La distancia normalizada $\bar{D}(t)$ está en el rango de $[0.3, 1.4]$ para $n = 3$ y $[0.6, 1.4]$ para $n = 10$. En este caso, los mínimos locales de $\bar{D}_n(t)$ no parecen disminuir con n .

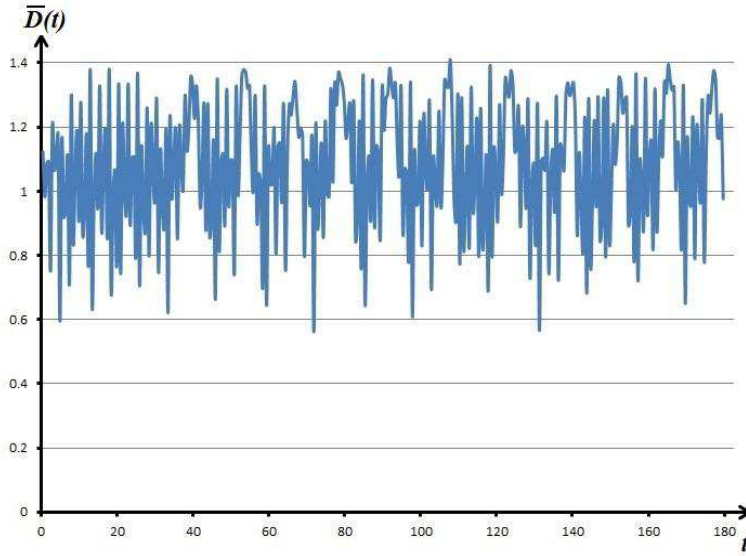


Figura 2.8: \bar{D} v.s. t , la condición inicial es el estado Glauber proyectado normalizado correspondiente a $\mathcal{A}_3(0) = (0.71607, 0.678973, 0.161982)$ para $n = 10$ bosones, $f = 3$ sitios, $\delta = 0.3$.

Para el breather inestable \mathcal{A}_3 , la transformada rápida de Fourier, Figura 2.9, presenta una mayor cantidad de señales en el espectro de frecuencias comparado con el caso estable \mathcal{A}_2 , $n = 10$ bosones, es decir, la deslocalización de la energía se hace evidente.

En el siguiente capítulo estos picos de frecuencia serán entendidos en función de diferencias de las eigenenergías correspondientes al hamiltoniano del sistema.

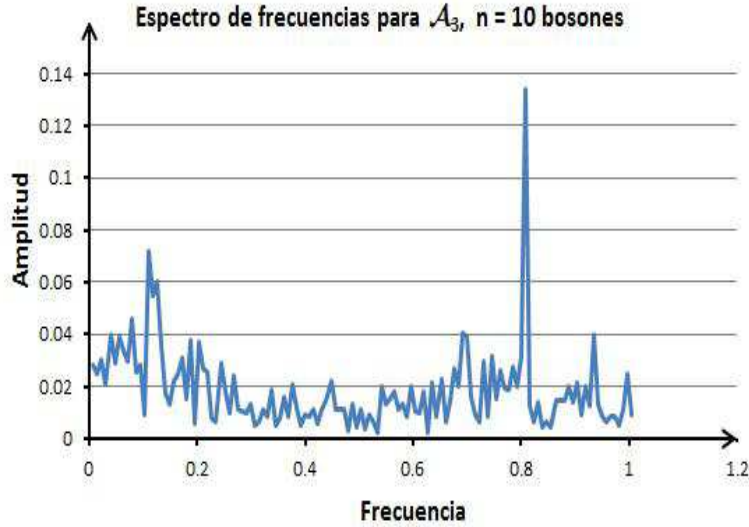


Figura 2.9: Espectro de Frecuencias correspondiente a \mathcal{A}_3 para $n = 10$ bosones y $f = 3$ sitios, $\delta = 0.3$.

Presentamos también algunos resultados en donde comparamos las distancias $\overline{D}_n(t)$ para estados $SU(f)$ obtenidos de estados clásicos $\alpha(0) \neq \alpha'(0)$ que son cercanos en el espacio fase clásico. Nos interesa el caso de $\alpha(0)$ sobre o cerca de una órbita breather.

La Figura 2.10 compara $\overline{D}(t)$ para los estados coherentes normalizados proyectados correspondientes al breather estable \mathcal{A}_2 y una condición inicial cercana

$$\mathcal{A}_2' = (0.18, 0.967057, 0.18).$$

La distancia entre \mathcal{A}_2 y \mathcal{A}_2' es ~ 0.04 . Por otro lado, la Figura 2.11 compara $\overline{D}(t)$ para los estados coherentes \mathcal{A}_3 y una condición inicial cercana

$$\mathcal{A}_3' = (0.69629, 0.6569, 0.289098).$$

En este último caso la distancia entre \mathcal{A}_3 y \mathcal{A}_3' es ~ 0.4 . En el caso del breather estable, las distancias $\overline{D}_n(t)$ para las dos trayectorias están cerca y exhiben las mismas recurrencias a sus mínimos locales. En el caso del breather inestable, la distancias $\overline{D}_n(t)$ para las dos trayectorias parecen alejarse y sus mínimos locales no coinciden.

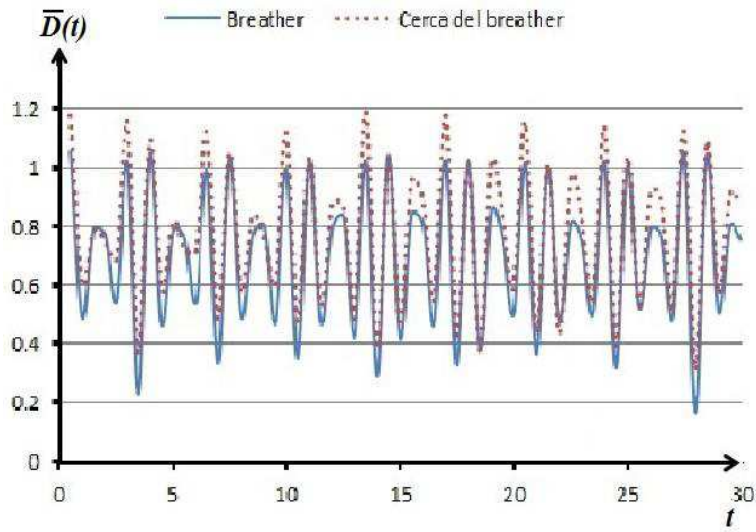


Figura 2.10: Comparación de \bar{D} vs. t para condiciones iniciales que son estados Glauber normalizados proyectados correspondientes a \mathcal{A}_2 (puntos en la órbita del breather estable), y \mathcal{A}_2' (puntos cercanos), para $n = 10$ bosones, $f = 3$ sitios, $\delta = 0.3$.

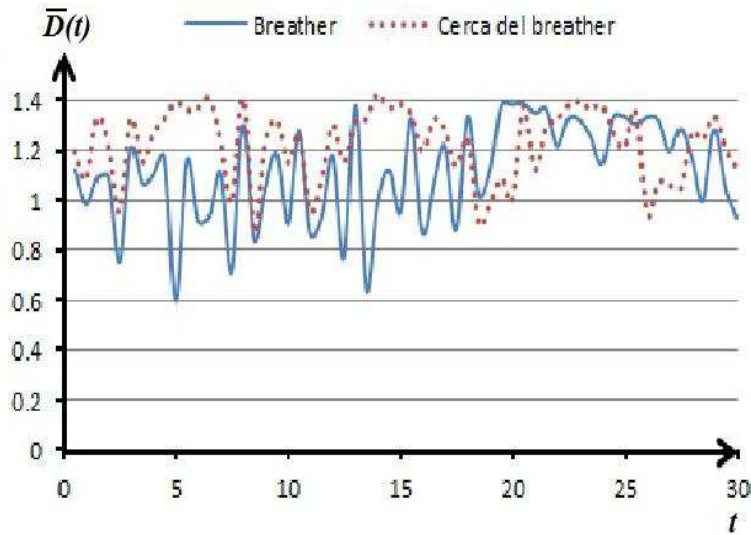


Figura 2.11: Comparación de \bar{D} vs. t para condiciones iniciales que son estados Glauber normalizados proyectados correspondientes a \mathcal{A}_3 (puntos en la órbita del breather inestable), y \mathcal{A}_3' (puntos cercanos), para $n = 10$ bosones, $f = 3$ sitios, $\delta = 0.3$.

Lo anterior nos da un sentido cuantitativo de la diferencia de las evoluciones cuánticas y clásicas en una pequeña cadena motivados por el problema clásico.

El aumento en el número de partículas n no acerca a las dos evoluciones para el caso normalizado, pero se observan algunos patrones de recurrencia posiblemente interesantes que dependen de la dinámica clásica fundamental y de n , el número de bosones. Enseguida examinamos estos fenómenos en una cadena de $f = 5$ sitios.

2.4. Resultados numéricos de $\overline{D}_n(t)$ para una cadena de 5 sitios

En esta sección examinamos algunos de los fenómenos de la sección 2.4 para una cadena DNLS con cinco sitios. Los resultados fueron reportados en [38]. El propósito principal es obtener más datos y corroborar las observaciones de la sección anterior. Las conclusiones se discuten al final de esta sección.

Usar más sitios es útil pero también más costoso desde el punto de vista computacional. Consideramos sin embargo que un pequeño aumento en los sitios de la cadena puede acercarnos a algunos efectos observados en redes de más sitios que pueden ser relevantes para algunas aplicaciones.

En el estudio de la cadena de $f = 5$ sitios, nuestro objetivo también es examinar los breather inestables localizados en dos sitios consecutivos, argumentando que pueden tener alguna importancia posible para la dinámica global de la cadena DNLS finita [9], ver también [37]. En el trímero, estas soluciones se ven afectadas por el hecho de que uno de los picos está en el borde de la cadena. El problema de cinco sitios evita ese problema, se ve que tienen dinámicas algo diferentes y puede ser más representativo de lo que deberíamos ver en redes más grandes.

En la presente sección se indican las principales observaciones sobre la evolución de $\overline{D}_n(t)$ utilizando para ello cuatro condiciones iniciales clásicas en una cadena (lattice) con $f = 5$ sitios. Tres de ellas son soluciones tipo breather calculadas numéricamente. Se considera nuevamente el caso $\delta > 0$ en la ecuación (1.1), es decir, el caso de enfoque (o atractivo).

Empezamos la presentación de los resultados con la descripción de las condiciones iniciales clásicas. La primera condición inicial clásica es $\alpha(0) = \mathcal{B}_1$, donde

$$\mathcal{B}_1 = (0, 0, 1, 0, 0), \quad (2.37)$$

tiene energía completamente localizada en el sitio $j = 3$ de la cadena. La Figura 2.12 muestra la evolución de la ecuación DNLS con $\delta = 0.3$ con condición inicial \mathcal{B}_1 y se ve que la energía sigue localizada en el sitio $j = 3$. La condición inicial no pertenece a una órbita breather para $\delta = 0.3$. Su estabilidad se explica por su cercanía al breather estable \mathcal{B}_2 que presentamos enseguida.

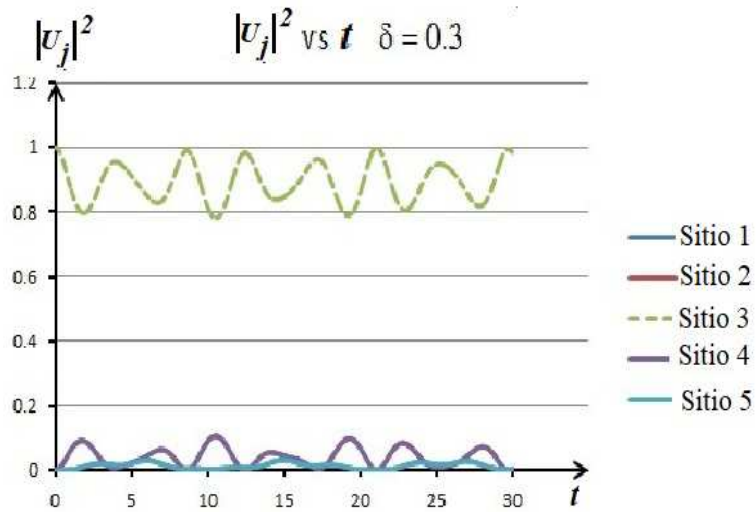


Figura 2.12: Evolución de la ecuación DNLS del estado inicial $\mathcal{B}_1 = (0, 0, 1, 0, 0)$, para $\delta = 0.3$.

La Figura 2.13 muestra la dinámica de la condición inicial $\mathcal{B}_1 = (0, 0, 1, 0, 0)$ con $\delta = 0.5$. La localización se pierde una vez que el valor de la constante de acoplamiento δ se incrementa, como se ve en este caso con $\delta = 0.5$.

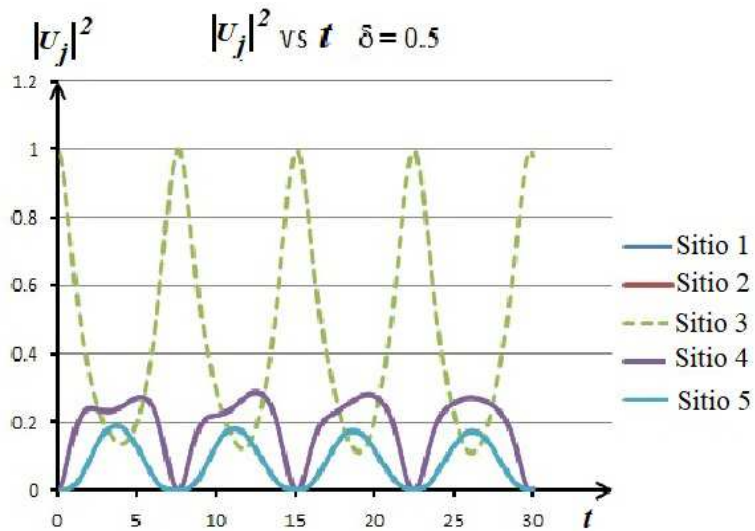


Figura 2.13: Evolución de la ecuación DNLS del estado inicial $\mathcal{B}_1 = (0, 0, 1, 0, 0)$, para $\delta = 0.5$.

Las condiciones iniciales que son soluciones breather para $\delta = 0.3$ son el breather estable \mathcal{B}_2 , y los breathers inestables \mathcal{B}_3 y \mathcal{B}_4 . Todas satisfacen (1.1) con $\delta = 0.3$ y $P = 1$.

En particular tenemos

$$\mathcal{B}_2 = (0.0230719, 0.153576, 0.975584, 0.153576, 0.0230719), \quad (2.38)$$

con frecuencia $\omega = 1.39798$. El breather \mathcal{B}_2 es linealmente estable. La condición inicial \mathcal{B}_1 esta en la vecindad de \mathcal{B}_2 . Es posible que \mathcal{B}_2 sea el análogo de \mathcal{A}_2 de la sección anterior, es decir el breather de menor energía para $P = 1$. (Nótese que las soluciones de (1.1), con $P = 1$ y $\delta > 0$ y suficientemente pequeño en la rama que continúa el breather $(0, 0, 1, 0, 0)$ desde $\delta = 0$ son mínimos locales de la energía para $P = 1$, ver [59].)

La segunda solución breather es

$$\mathcal{B}_3 = (-0.663413, -0.0271497, 0.582775, 0.441421, 0.157056), \quad (2.39)$$

con $\omega = 0.292511$. El breather \mathcal{B}_3 es linealmente inestable. La tercer solución que se considera es

$$\mathcal{B}_4 = (0.16342, 0.687407, 0.684993, 0.173157, 0.0395882), \quad (2.40)$$

con $\omega = 0.715323$, tiene dos picos consecutivos como el breather \mathcal{A}_3 de la sección anterior y es también inestable.

En [9] se argumentó que una solución breather con dos picos consecutivos puede ser importante para la dinámica global del sistema, como probablemente lo sea la energía crítica para la transición entre una superficie de energía conexas y una no conexas a potencia constante, vea también [37]. Los argumentos de [9] fueron hechos para la cadena de $f = 3$ y podrían aplicarse a cadenas más grandes. Sin embargo, la dinámica de una solución de dos picos en el trímico puede ser afectada por el hecho de que uno de los picos está en el borde de la cadena. Las propiedades de soluciones análogas para una cadena de $f = 5$ sitios pueden ser relevantes para cadenas más grandes.

En la Figura 2.14 se muestra la evolución del breather inestable \mathcal{B}_3 . Se observa que después de un tiempo, $t \approx 30$, el breather se deslocaliza y la energía se distribuye en el resto de los sitios.

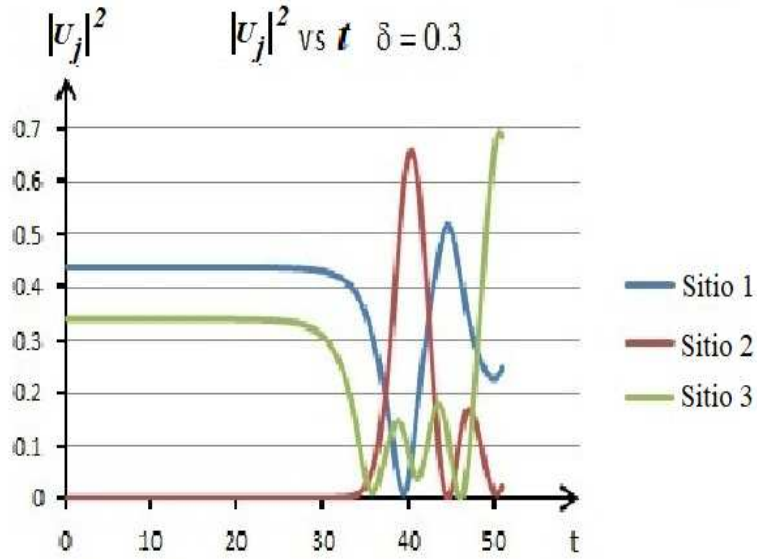


Figura 2.14: Evolución de la ecuación DNLS clásica para la condición inicial \mathcal{B}_3 , ver (2.39), usando $\delta = 0.3$. Se muestra la amplitud de los primeros tres sitios.

Ahora consideremos la evolución cuántica correspondiente para los estados coherentes $SU(f)$ que se obtienen de los estados Glauber $|\alpha(0)\rangle$, $\alpha(0) = \mathcal{B}_k$, $k = 1, \dots, 4$, usando proyección a V_n y normalización.

Primero consideramos $\alpha(0) = \mathcal{B}_1$. En las Figuras 2.15, 2.16 y 2.17 mostramos $\overline{D}_n(t)$ para $n = 4$, $n = 6$ y $n = 9$ bosones respectivamente, y puede verse que $\overline{D}_n(t)$ pasa a través de mínimos en ciertos periodos de tiempo. A pesar de que estos mínimos no son cero, las figuras sugieren que los estados $|\Psi_n(t)\rangle$ y $|\Psi_n^C(t)\rangle$ están cerca en ciertos momentos. Los intervalos de tiempo entre estos mínimos recurrentes, y también sus valores, dependen del número de cuántos n .

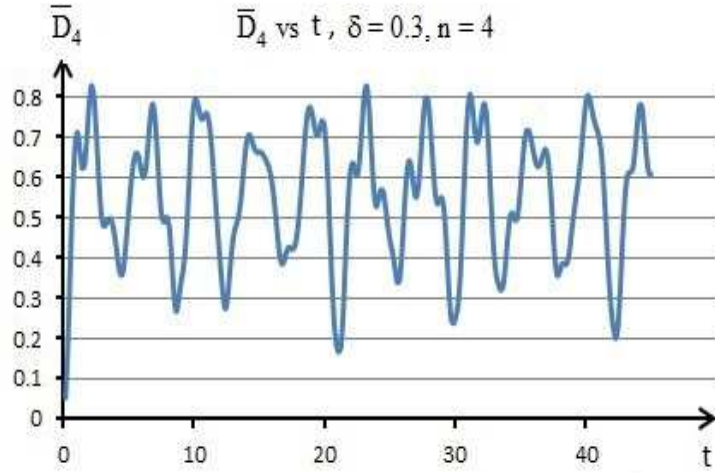


Figura 2.15: \bar{D}_4 v.s. t , la condición inicial es el estado Glauber normalizado proyectado correspondiente al estado clásico \mathcal{B}_1 , ver (2.37), para $n = 4$ bosones, $f = 5$ sitios, $\delta = 0.3$.

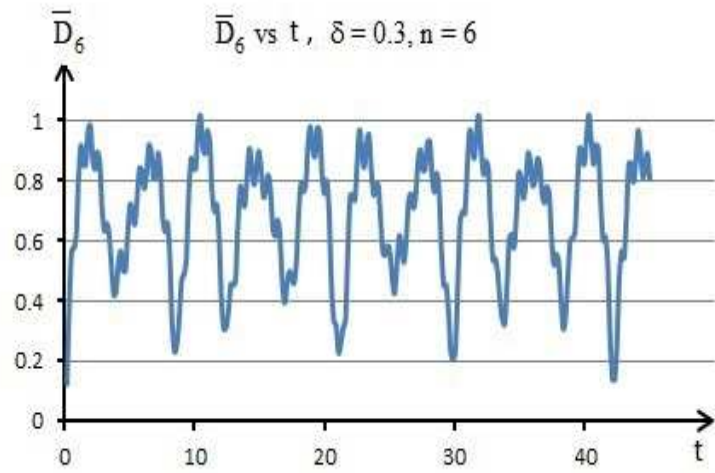


Figura 2.16: \bar{D}_6 v.s. t , la condición inicial es el estado Glauber normalizado proyectado correspondiente al estado clásico \mathcal{B}_1 , ver (2.37), para $n = 6$ bosones, $f = 5$ sitios, $\delta = 0.3$.

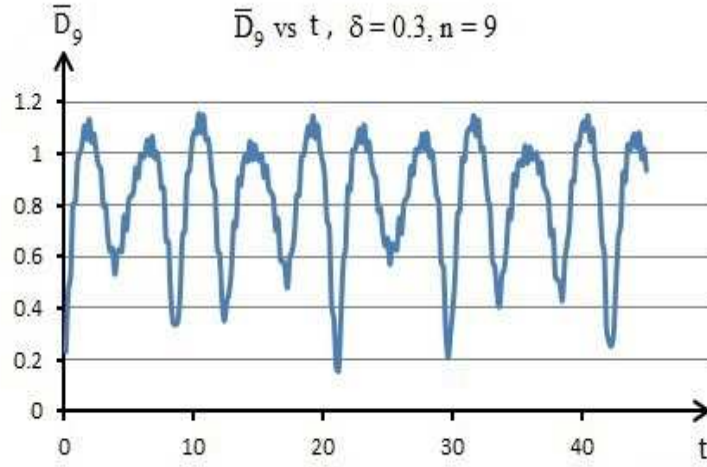


Figura 2.17: \bar{D}_9 v.s. t , la condición inicial es el estado Glauber normalizado proyectado correspondiente al estado clásico \mathcal{B}_1 , ver (2.37), para $n = 9$ bosones, $f = 5$ sitios, $\delta = 0.3$.

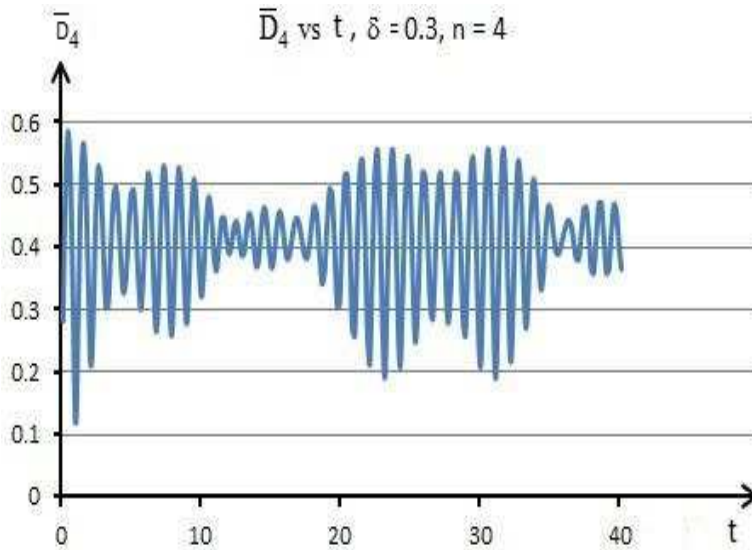


Figura 2.18: \bar{D}_4 v.s. t , la condición inicial es el estado Glauber normalizado proyectado correspondiente al estado clásico estable \mathcal{B}_2 dado por (2.38), para $n = 4$ bosones, $f = 5$ sitios, $\delta = 0.3$.

Las Figuras 2.18, 2.19 y 2.20 usan como condición inicial clásica $\alpha(0)$ al breather estable \mathcal{B}_2 dado por (2.38), y muestran $\overline{D}_n(t)$ para $n = 4$, $n = 6$ y $n = 9$ bosones respectivamente. Nuevamente se observan recurrencias a valores relativamente pequeñas de \overline{D}_n . La dependencia en el tiempo de la distancia es diferente de la de las figuras 2.15-2.17, y de nuevo depende de n .

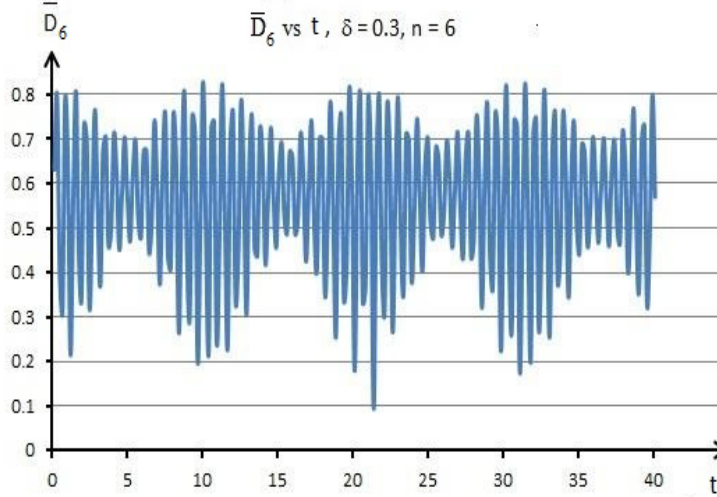


Figura 2.19: \overline{D}_6 v.s. t , la condición inicial es el estado Glauber normalizado proyectado correspondiente al estado clásico estable \mathcal{B}_2 dado por (2.38), para $n = 6$ bosones, $f = 5$ sitios, $\delta = 0.3$.

De forma análoga a los casos \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 considerados líneas arriba, las frecuencias involucradas en las Figuras 2.15-2.20 que corresponden a \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 se hacen evidentes al considerar la transformada rápida de Fourier (FFT) de ellas, las cuales son presentadas en las Figuras 2.21 y 2.22. Para fines de comparación nuevamente se han graficado ambas transformadas de Fourier en una sola figura. En comparación con \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 los casos \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 presentan el mismo comportamiento. El caso \mathcal{B}_1 corresponde a una condición inicial que es cercana a la condición breather \mathcal{B}_2 , se observa en su espectro de frecuencias, tanto para $n = 4$ como para $n = 9$ bosones, que a parte de las frecuencias comunes a \mathcal{B}_2 presenta otras frecuencias involucradas. Esto lo podemos interpretar como una distribución mayor de energía en los cinco sitios por lo que la localización para \mathcal{B}_1 no es tan marcada como en el caso \mathcal{B}_2 . Como ya se mencionó para $n = 4$ se ve una recurrencia con menos frecuencia que el caso para $n = 9$ bosones que presenta frecuencias mayores en las recurrencias.

Las Figuras 2.23, 2.24 y 2.25 se obtienen usando el estado coherente correspondiente a la condición inicial clásica $\alpha(0) = \mathcal{B}_3$ dado por (2.39) y muestran $\overline{D}_n(t)$ para $n = 4$, $n = 6$ y $n = 9$ bosones respectivamente. La gráfica de $\overline{D}_n(t)$ es

diferente de lo que se observa en los dos ejemplos anteriores. La distancia aumenta rápidamente a un valor arriba de 1.2 y permanece en ese rango en todo momento. Por lo tanto, parece que el estado coherente evolucionado clásicamente está lejos del estado cuántico exacto en todo momento.

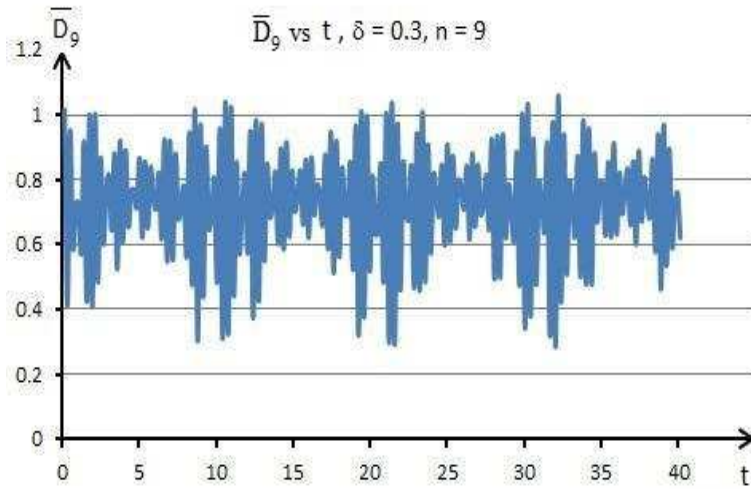


Figura 2.20: \overline{D}_9 v.s. t , la condición inicial es el estado Glauber normalizado proyectado correspondiente al estado clásico estable \mathcal{B}_2 dado por (2.38), para $n = 9$ bosones, $f = 5$ sitios, $\delta = 0.3$.

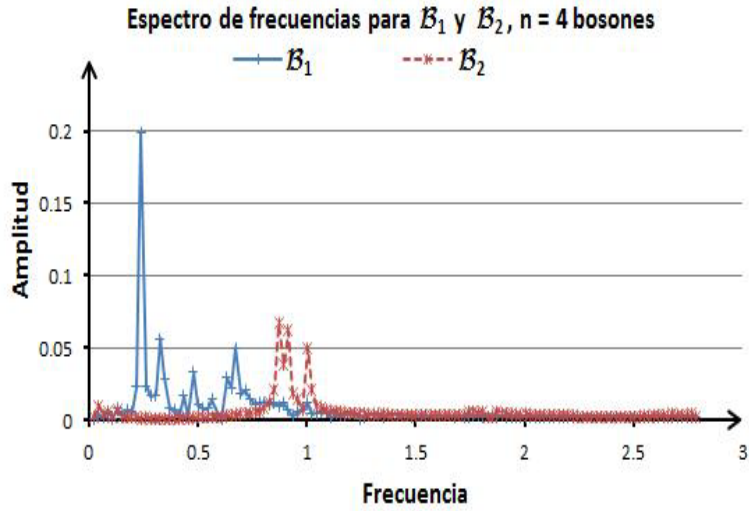


Figura 2.21: Espectro de Frecuencias correspondientes a \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 para $n = 4$ bosones y $f = 5$ sitios, $\delta = 0.3$.

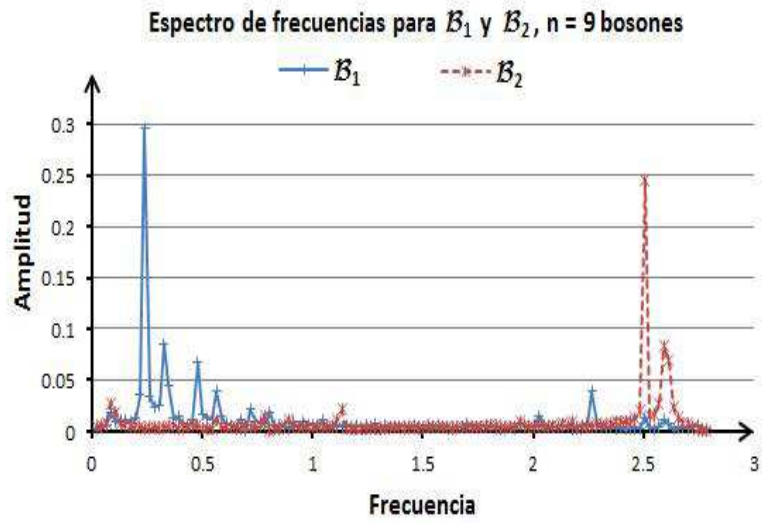


Figura 2.22: Espectro de Frecuencias correspondientes a \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 para $n = 9$ bosones y $f = 5$ sitios, $\delta = 0.3$.

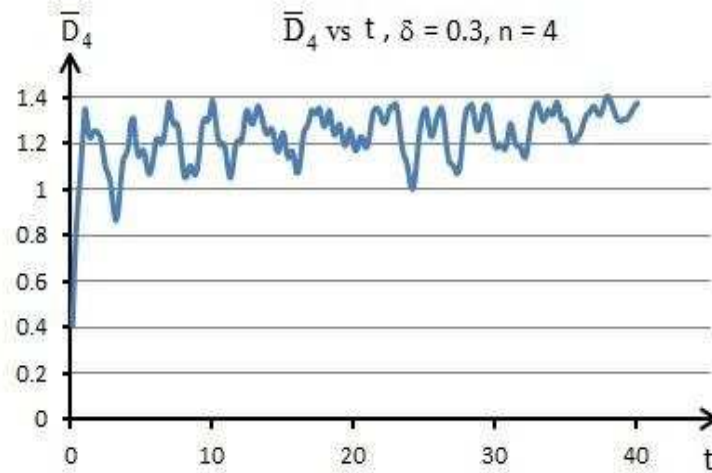


Figura 2.23: \bar{D}_4 v.s. t , la condición inicial es el estado Glauber normalizado proyectado correspondiente al estado clásico inestable \mathcal{B}_3 dado por (2.39), para $n = 4$ bosones, $f = 5$ sitios, $\delta = 0.3$.

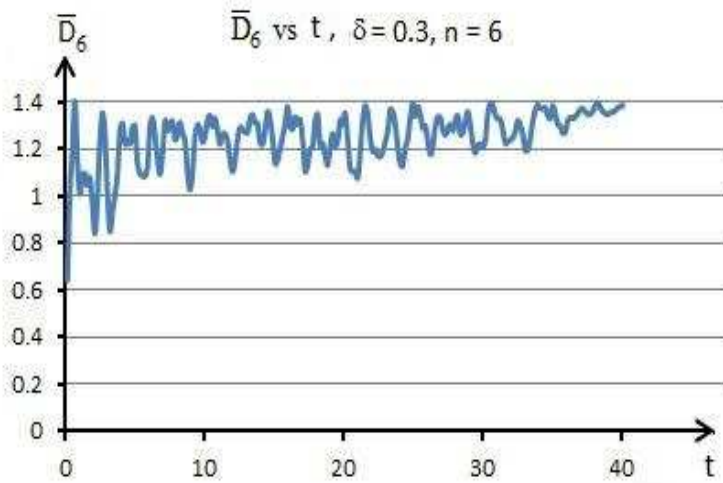


Figura 2.24: \bar{D}_6 v.s. t , la condición inicial es el estado Glauber normalizado proyectado correspondiente al estado clásico inestable \mathcal{B}_3 dado por (2.39), para $n = 6$ bosones, $f = 5$ sitios, $\delta = 0.3$.

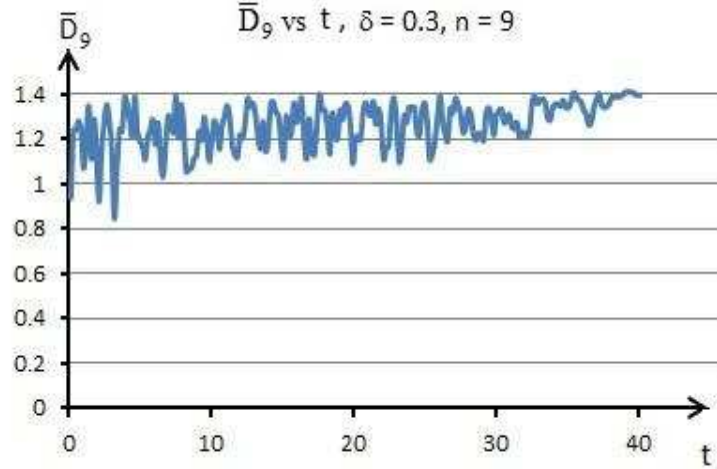


Figura 2.25: \bar{D}_9 v.s. t , la condición inicial es el estado Glauber normalizado proyectado correspondiente al estado clásico inestable \mathcal{B}_3 dado por (2.39), para $n = 9$ bosones, $f = 5$ sitios, $\delta = 0.3$.

Las Figuras 2.26, 2.27 y 2.28 se obtienen usando el estado coherente correspondiente a la condición inicial clásica $\alpha(0) = \mathcal{B}_4$ dado por (2.40), se muestra $\bar{D}_n(t)$ para $n = 4$, 6 y $n = 9$ bosones respectivamente. El caso correspondiente a dos picos consecutivos muestra una diferencia más pequeña que el \bar{D}_n anterior, a pesar de ser inestable. La solución clásica es inestable, y la energía tiende a concentrarse en el sitio 3, con una amplitud menor en el sitio 2 (otros sitios tienen amplitudes incluso más pequeñas). Este comportamiento es diferente de lo que se vió en la cadena clásica de $f = 3$ sitios [9], donde hubo recurrencias en la configuración con picos en los dos sitios consecutivos.

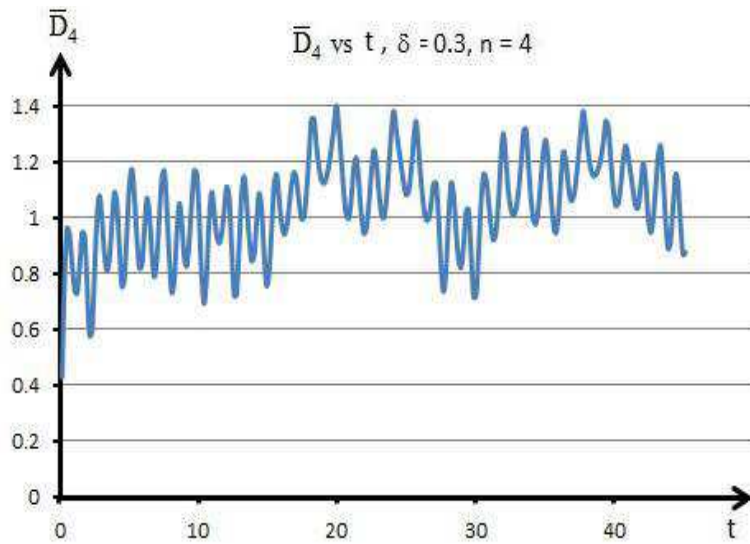


Figura 2.26: \bar{D}_4 v.s. t , la condición inicial es el estado Glauber normalizado proyectado correspondiente al estado clásico inestable \mathcal{B}_4 , dado por (2.40), para $n = 4$ bosones, $f = 5$ sitios, $\delta = 0.3$.

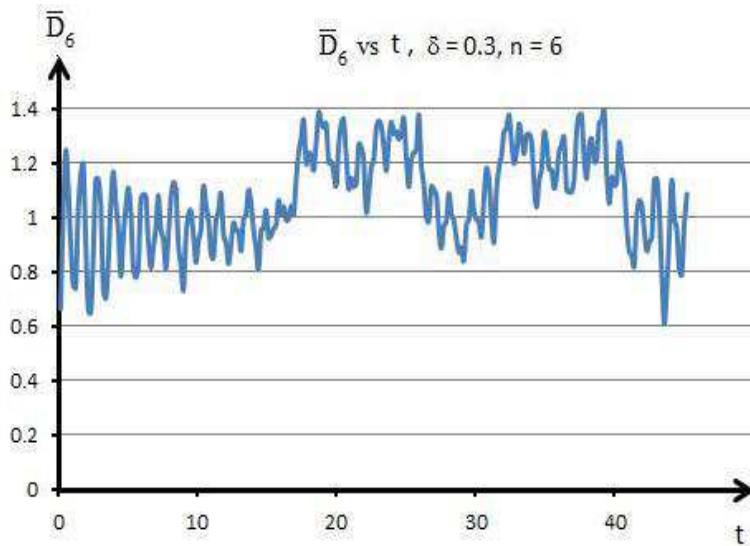


Figura 2.27: \bar{D}_6 v.s. t , la condición inicial es el estado Glauber normalizado proyectado correspondiente al estado clásico inestable \mathcal{B}_4 , dado por (2.40), para $n = 6$ bosones, $f = 5$ sitios, $\delta = 0.3$.

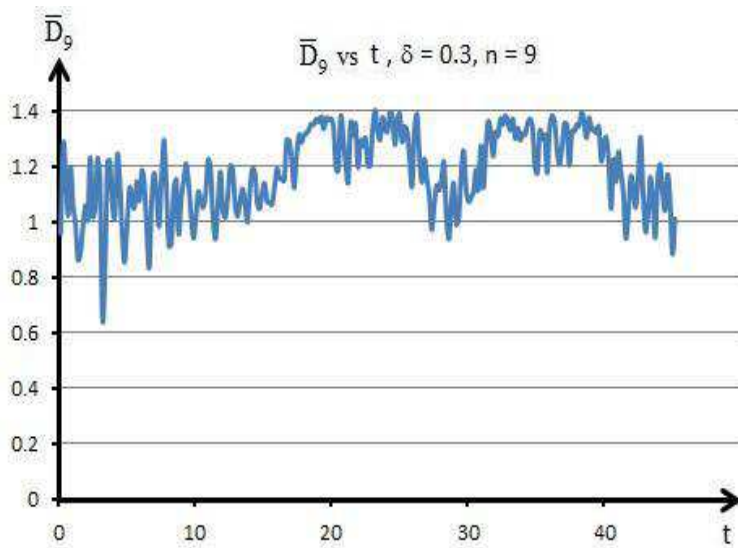


Figura 2.28: \bar{D}_9 v.s. t , la condición inicial es el estado Glauber normalizado proyectado correspondiente al estado clásico inestable \mathcal{B}_4 , dado por (2.40), para $n = 9$ bosones, $f = 5$ sitios, $\delta = 0.3$.

Para el breather inestable \mathcal{B}_4 , la transformada rápida de Fourier, Figura 2.29, presenta una mayor cantidad de señales en el espectro de frecuencias comparado con el caso estable \mathcal{B}_2 , $n = 9$ bosones, es decir, la deslocalización de la energía se vuelve a hacer evidente.

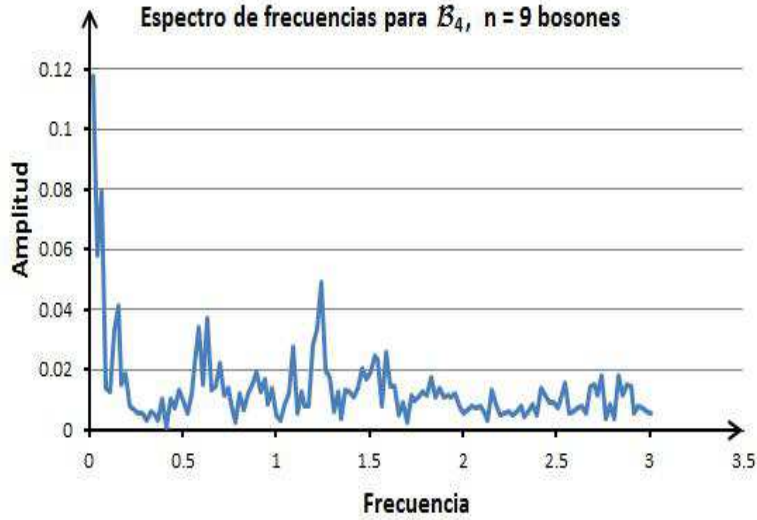


Figura 2.29: Espectro de Frecuencias correspondientes a \mathcal{B}_4 para $n = 9$ bosones y $f = 5$ sitios, $\delta = 0.3$.

Finalmente presentamos algunos resultados en donde comparamos las distancias $\overline{D}_n(t)$ para estados $SU(f)$ obtenidos de estados clásicos $\alpha(0) \neq \alpha'(0)$ que son cercanos. Las Figuras 2.30, 2.31 y 2.32, para $n = 4$, $n = 6$ y $n = 9$ bosones respectivamente, compara $\overline{D}_n(t)$ para estados coherentes que corresponden al breather estable \mathcal{B}_2 , y una condición inicial cercana

$$\mathcal{B}_2' = (0.0130719, 0.253576, 0.933298, 0.253576, 0.0130719).$$

La distancia entre $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2'$ es ~ 0.14 . Observamos que los $\overline{D}_n(t)$ no son tan cercanos pero que los tiempos de sus máximos y mínimos locales están cerca, i.e. sus oscilaciones muestran cierta correlación. Notamos que la distancia entre las condiciones $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2'$ no es tan pequeña, y eso es una posible explicación de la distancia relativa entre las $\overline{D}_n(t)$ correspondientes que se discute en mas detalle en la siguiente sección.

Las Figuras 2.33, 2.34 y 2.35, muestran $\overline{D}_n(t)$ para $n = 4, n = 6$ y $n = 9$ bosones respectivamente, para los estados coherentes que corresponden al breather inestable \mathcal{B}_3 y una condición inicial cercana

$$\mathcal{B}_3' = (-0.565613, -0.0376497, 0.685875, 0.423421, 0.169886).$$

La distancia entre $\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_3'$ es ~ 0.14 . En este caso vemos que $\overline{D}_n(t)$ para ambas trayectorias mantiene valores más grandes que en el caso estable, y que sus oscilaciones no tienen correlación.

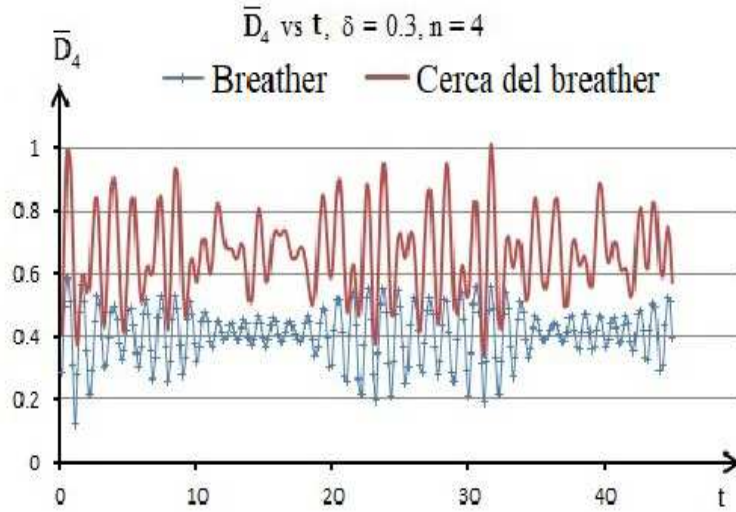


Figura 2.30: Comparación de \bar{D}_4 vs. t para condiciones iniciales que son estados Glauber normalizados proyectados que corresponden al estado clásico estable \mathcal{B}_2 , ver (2.38), y \mathcal{B}'_2 (puntos cerca, $\|\mathcal{B}_2 - \mathcal{B}'_2\| \sim 0.14$), para $f = 5$, $\delta = 0.3$, $n = 4$ bosones.

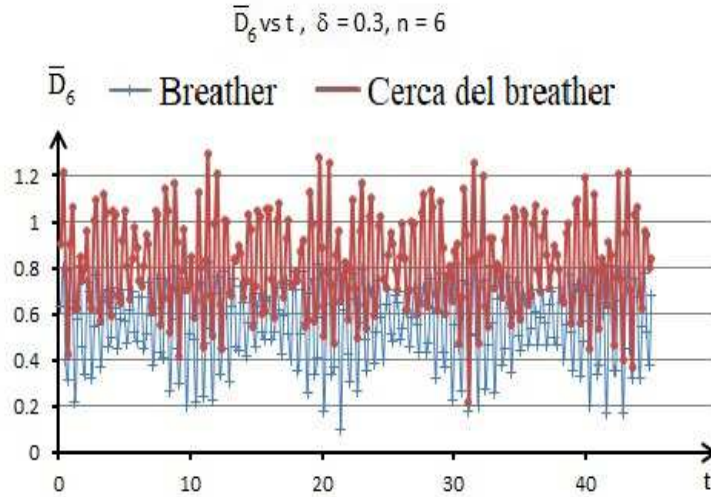


Figura 2.31: Comparación de \bar{D}_6 vs. t para condiciones iniciales que son estados Glauber normalizados proyectados que corresponden al estado clásico estable \mathcal{B}_2 , ver (2.38), y \mathcal{B}'_2 (puntos cerca, $\|\mathcal{B}_2 - \mathcal{B}'_2\| \sim 0.14$), para $f = 5$, $\delta = 0.3$, $n = 6$ bosones.

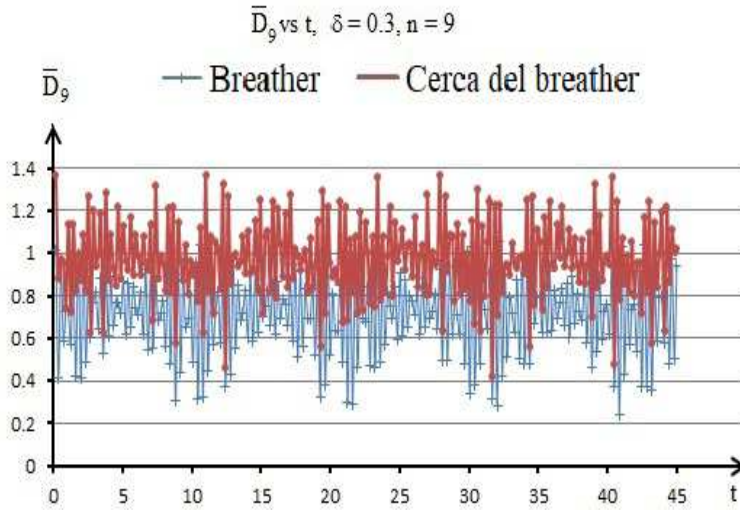


Figura 2.32: Comparación de \bar{D}_9 vs. t para condiciones iniciales que son estados Glauber normalizados proyectados que corresponden al estado clásico estable \mathcal{B}_2 , ver (2.38), y \mathcal{B}'_2 (puntos cerca, $\|\mathcal{B}_2 - \mathcal{B}'_2\| \sim 0.14$), para $f = 5$, $\delta = 0.3$, $n = 9$ bosones.

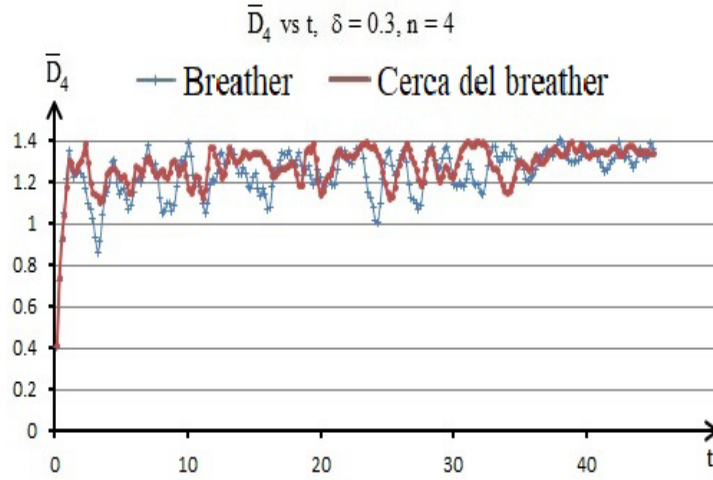


Figura 2.33: Comparación de \bar{D}_4 vs. t para condiciones iniciales que son estados Glauber normalizados proyectados que corresponden al estado clásico estable \mathcal{B}_3 , ver (2.39), y \mathcal{B}'_3 (puntos cerca, $\|\mathcal{B}_3 - \mathcal{B}'_3\| \sim 0.14$) para $f = 5$, $\delta = 0.3$, $n = 4$ bosones.

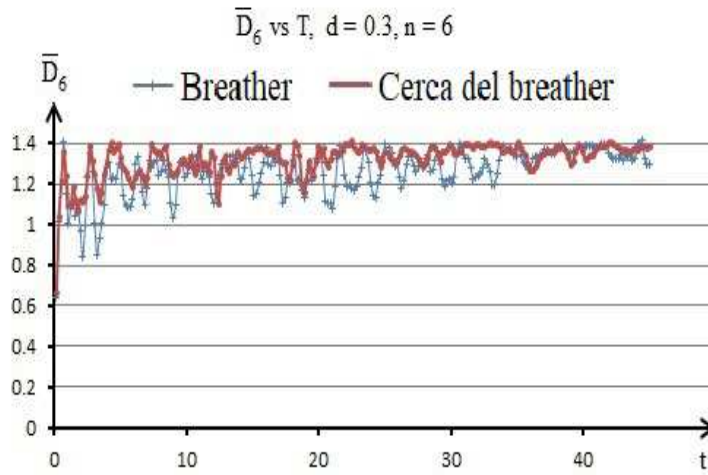


Figura 2.34: Comparación de \bar{D}_6 vs. t para condiciones iniciales que son estados Glauber normalizados proyectados que corresponden al estado clásico estable \mathcal{B}_3 , ver (2.39), y \mathcal{B}'_3 (puntos cerca, $\|\mathcal{B}_3 - \mathcal{B}'_3\| \sim 0.14$) para $f = 5$, $\delta = 0.3$, $n = 6$ bosones.

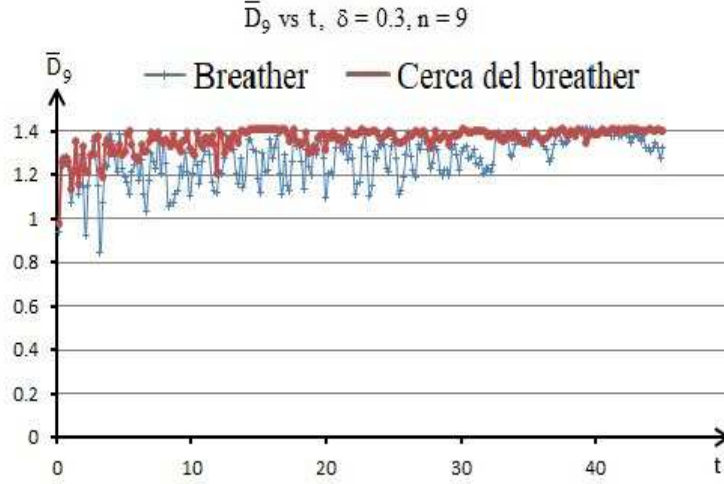


Figura 2.35: Comparación de \overline{D}_9 vs. t para condiciones iniciales que son estados Glauber normalizados proyectados que corresponden al estado clásico estable \mathcal{B}_3 , ver (2.39), y \mathcal{B}'_3 (puntos cerca, $\|\mathcal{B}_3 - \mathcal{B}'_3\| \sim 0.14$) para $f = 5$, $\delta = 0.3$, $n = 9$ bosones.

Concluimos este capítulo con un resumen de las observaciones numéricas de las secciones 2.4 y 2.5 y algunos comentarios. Primero, hemos observado que las distancias $\overline{D}_n(t)$ entre estados cuánticos y los estados coherentes no son en general pequeñas, lo que significa que la evolución clásica no es una aproximación adecuada de la evolución cuántica en el régimen de parámetros $\delta \in [0, 0.3]$, el cual esta cerca del límite anticontinuo del capítulo 1. El comportamiento de \overline{D}_n depende de n y no muestra tendencias de disminuir con n .

Comentamos aquí que la literatura sugiere que $\overline{D}_n(t)$ puede ser pequeña y posiblemente converger a cero en el “límite clásico”, que para el sistema DNLS (1.1), corresponde a $|\gamma| \rightarrow 0$ (límite lineal) y $n \rightarrow 0$ [45]. Este límite también se examina en [43, 44] comparando funciones de distribución clásica y cuántica. El caso del trío se estudia en [64, 65]. Consideramos factible estudiar $\overline{D}_n(t)$ en el régimen débilmente no lineal, para n fijo, en el futuro. En este caso podemos considerar soluciones breather que son cercanos a los modos normales del sistema.

La principal observación de la sección 2.4, 2.5 es que el comportamiento de $\overline{D}_n(t)$ depende de la dinámica de la trayectoria clásica y que en el caso de algunos breathers estables el valor de $\overline{D}_n(t)$ muestra recurrencias a valores relativamente pequeños. Esto significa que algunos aspectos de la trayectoria clásica que se codifican en los estados coherentes son recurrentes. Esto nos interesó especialmente para soluciones tipo breather y su vecindad que muestran localización espacial en todo t . Entonces la recurrencia a pequeños valores de $\overline{D}_n(t)$ se interpreta como una recurrencia a un estado cuántico, el estado cohe-

rente correspondiente al breather localizado, que contiene información sobre la localización espacial. Como hemos señalado, estas observaciones aplican lejos del límite lineal.

En [38] sugerimos que el comportamiento recurrente de \overline{D}_n para algunas soluciones clásicas puede ser relacionado con la frecuencia de la trayectoria clásica (e.g. en el caso de órbitas periódicas) y de las cuasi-frecuencias (las energías) que aparecen en la evolución cuántica. En el siguiente capítulo damos una formulación cuantitativa de esta idea intuitiva.

Capítulo 3

Recurrencias en la aproximación clásica para estados coherentes correspondientes a breathers

En el capítulo anterior definimos y estudiamos numéricamente las distancias \overline{D}_n entre la aproximación clásica de la evolución de estados coherentes Glauber y $SU(f)$ y la trayectoria cuántica exacta. El estudio se enfocó en condiciones iniciales que son estados coherentes que corresponden a puntos en órbitas breather y su vecindad. En este capítulo presentamos un avance hacia una explicación teórica de algunos fenómenos de recurrencia a valores pequeños de dichas distancias que se detectaron en casos de breathers espacialmente localizados estables.

En la sección 3.2 usamos una expresión general para las trayectorias clásicas de los estados coherentes que corresponden a breathers clásicos y en la sección 3.3 obtenemos una expresión analítica para las distancias D_n, \overline{D}_n en términos de los parámetros de la órbita breather (frecuencia y amplitud) y los datos espectrales del problema cuántico (eigenvalores y eigenvectores de los operadores H_n). Demostramos también que dicha expresión aproxima \overline{D}_n para condiciones iniciales cercanas a breathers estables. La expresión muestra los cuasiperíodos de los D_n, \overline{D}_n explícitamente y puede evaluarse numéricamente (y posiblemente de manera analítica en algunos límites). El material de las secciones 3.2, 3.3 se describe también en nuestro artículo [49]. En las secciones 3.4 y 3.5 evaluamos estas fórmulas para varios ejemplos de breathers estables en cadenas de $f = 3$ y 5 sitios respectivamente. Concluimos la sección 3.5 con algunos comentarios adicionales sobre la utilidad de las expresiones, posibles extensiones y generalizaciones.

3.1. Evolución cuántica y clásica de estados coherentes asociados a órbitas breather

Del capítulo anterior se tiene que la evolución cuántica del estado inicial $P_n|(\alpha(0))\rangle$, $|(\alpha(0))\rangle$ estado coherente tipo Glauber, está dado por

$$|\Psi_n(t)\rangle = e^{-iH_n t} P_n |(\alpha(0))\rangle. \quad (3.1)$$

Un cálculo explícito de $D(t)$ puede ser hecho usando (2.19) en (2.23), de donde

$$P_n |(\alpha)\rangle = \sum_{j=1}^{p_n} d_{j,n} |\Phi_{j,n}\rangle, \quad (3.2)$$

con

$$d_{j,n} = e^{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^f |\alpha_k|^2} \sum_{l=1}^{p_n} \frac{\alpha_1^{n_{1l}} \alpha_2^{n_{2l}} \dots \alpha_f^{n_{fl}}}{\sqrt{n_{1l}! n_{2l}! \dots n_{fl}!}} b_{lj} \quad (3.3)$$

donde como se mencionó en el capítulo anterior $H_n |\Phi_{j,n}\rangle = E_{j,n} |\Phi_{j,n}\rangle$, con p_n la dimension compleja del subespacio V_n de n cuantos.

Entonces (3.1) puede ser escrito como

$$|\Psi_n(t)\rangle = \sum_{j=1}^{p_n} d_{j,n} e^{-iE_{j,n} t} |\Phi_{j,n}\rangle. \quad (3.4)$$

Lo anterior también se aplica a las condiciones iniciales $c^{-1/2} P_n |(\alpha(0))\rangle$, con $c^{1/2}$ un factor de normalización. Los estados Glauber normalizados proyectados son conocidos como estados coherentes $SU(f)$ [40, 41, 44, 46]. Por (3.4) la evolución cuántica normalizada de estados coherentes $SU(f)$ esta dado por

$$|\Psi_n(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{c}} \sum_{j=1}^{p_n} d_{j,n} e^{-iE_{j,n} t} |\Phi_{j,n}\rangle, \quad (3.5)$$

con $c = |d_{1,n}|^2 + \dots + |d_{f,n}|^2$, y $d_{j,n}$ como en (3.3).

Como un caso particular se ha usado como condición inicial $|(\alpha(0))\rangle$ con $\alpha(0) = (A_1, A_2, \dots, A_f)$, una amplitud breather que cumple con (1.21), entonces

$$d_{j,n} = e^{-\frac{1}{2} \sum_{r=1}^f |A_r|^2} \sum_{l=1}^{p_n} \frac{A_1^{n_{1l}} A_2^{n_{2l}} \dots A_f^{n_{fl}}}{\sqrt{n_{1l}! n_{2l}! \dots n_{fl}!}} b_{lj}. \quad (3.6)$$

En el capítulo 2 se propuso una alternativa no exacta y posiblemente aproximada a la regla de evolución para los estados cuánticos, definida de la siguiente manera. Considere que $\alpha(t)$ sea una solución de las ecuaciones de Hamilton (1.10) con condición inicial $\alpha(0)$ (como arriba). También se considera a $|(\alpha(t))\rangle$ el correspondiente estado coherente en algún tiempo t . Entonces se definen a $|\Psi^C(t)\rangle$ y $|\Psi_n^C(t)\rangle$ por $|\Psi^C(t)\rangle = |(\alpha(t))\rangle$, y

$$|\Psi_n^C(t)\rangle = P_n |(\alpha(t))\rangle, \quad (3.7)$$

respectivamente. El estado (3.7) da una aproximación “clásica” (o “semi-clásica”) a la evolución de la proyección de un estado coherente.

Considere $\alpha_j = \alpha_j(t)$ con $j = 1, \dots, f$ y $\alpha_j(t)$ una solución para la ecuación DNLS clásica (1.1). Sustituyendo en (2.23) se obtiene

$$|\Psi_n^C(t)\rangle = \sum_{j=1}^{p_n} d_{j,n}^C(t) |\Phi_{j,n}\rangle, \quad (3.8)$$

con

$$d_{j,n}^C(t) = e^{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^f |\alpha_k(t)|^2} \sum_{l=1}^{p_n} \frac{[\alpha_1(t)]^{n_{1l}} [\alpha_2(t)]^{n_{2l}} \dots [\alpha_f(t)]^{n_{fl}}}{\sqrt{n_{1l}! n_{2l}! \dots n_{fl}!}} b_{lj}, \quad (3.9)$$

usando también (2.19).

Para $\alpha(t)$ una solución breather $Ae^{-i\omega t}$ de la DNLS clásica (1.1), se tiene que

$$d_{j,n}^C(t) = e^{-\frac{1}{2} \sum_{r=1}^f |A_r|^2} \sum_{l=1}^{p_n} \frac{[A_1 e^{-i\omega t}]^{n_{1l}} [A_2 e^{-i\omega t}]^{n_{2l}} \dots [A_f e^{-i\omega t}]^{n_{fl}}}{\sqrt{n_{1l}! n_{2l}! \dots n_{fl}!}} b_{lj}, \quad (3.10)$$

por lo tanto

$$d_{j,n}^C(t) = e^{-\frac{1}{2} \sum_{r=1}^f |A_r|^2} \sum_{l=1}^{p_n} \frac{A_1^{n_{1l}} A_2^{n_{2l}} \dots A_f^{n_{fl}}}{\sqrt{n_{1l}! n_{2l}! \dots n_{fl}!}} e^{-i\omega n t} b_{lj} = d_{j,n} e^{-i\omega n t}, \quad (3.11)$$

usando $n_{1j} + n_{2j} + \dots + n_{fj} = n$. Claramente $d_{j,n}^C(0) = d_{j,n}$, con $d_{j,n}$ como en (3.6), el coeficiente que aparece en el estado coherente breather inicial.

Los estados cuántico y “semi-clásico” de los estados coherentes breather normalizados están por lo tanto dados respectivamente por

$$|\Psi_n(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{c}} \sum_{j=1}^{p_n} d_{j,n} e^{-iE_{j,n}t} |\Phi_{j,n}\rangle, \quad (3.12)$$

y

$$|\Psi_n^C(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{c}} \sum_{j=1}^{p_n} d_{j,n} e^{-i\omega N t} |\Phi_{j,n}\rangle, \quad (3.13)$$

con $d_{j,n}$ dado por (3.6), y $c = |d_{1,n}|^2 + \dots + |d_{f,n}|^2$ la constante de normalización.

El módulo al cuadrado de cada coeficiente $d_{j,n}/\sqrt{c}$ pueden ser interpretados como la probabilidad de que el sistema este en el estado $|\Phi_{j,n}\rangle$ con $j = 1, 2, \dots, p_n$.

Observación 3.1.1 *Por (3.13) el estado $|\Psi_n^C(t)\rangle$ tiene la dependencia en el tiempo de un eigenestado. Así el estado breather coherente imita estados estacionarios. Para $|\delta|$ pequeño el número de breathers es más grande que f [21]. Para $|\delta|$ suficientemente grande, los breathers se aproximan a los modos normales del sistema lineal, y se tiene f breathers, ver [8].*

3.2. Diferencia $\overline{D}_n(t)$ para estados coherentes asociados a órbitas breather

Seguendo el capítulo 2, la diferencia entre los estados cuántico $|\Psi_n(t)\rangle$ y semiclásico $|\Psi_n^C(t)\rangle$ normalizados en V_n dados por (3.12) y (3.13) se mide por

$$\overline{D}_n(t) = \inf_{\phi \in S^1} \|e^{i\phi}|\Psi_n(t)\rangle - |\Psi_n^C(t)\rangle\|. \quad (3.14)$$

de donde explícitamente se tiene

$$\overline{D}_n^2(t) = \inf_{\phi \in S^1} \left(2 - 2 \sum_{j=1}^{p_n} \frac{|d_{j,n}|^2}{c} \cos((E_{j,n} - \omega n)t + \phi) \right), \quad (3.15)$$

donde $d_{j,n}$ está dado por (3.6). El valor de ϕ en el que se alcanza el ínfimo depende de t . La notación para \overline{D}_n aquí es la del capítulo anterior, en [49] \overline{D}_n es denotado como D_n^2 .

Proposición 3.2.1 *Las funciones \overline{D}_n^2 , $n \geq 1$, de (3.15) están dadas por*

$$\overline{D}_n^2(t) = 2 - \frac{2}{c} \sqrt{\sum_{j=1}^{p_n} |d_{j,n}|^4 + 2 \sum_{i < j}^{p_n} |d_{i,n}|^2 |d_{j,n}|^2 \cos(E_{j,n} - E_{i,n})t}. \quad (3.16)$$

Demostración. Fijando n, t y escribiendo D_n como la función

$$G(\phi) = 2 - 2 \sum_{j=1}^{p_n} \frac{|d_{j,n}|^2}{c} \cos(\lambda_j t + \phi), \quad \lambda_j = E_{j,n} - \omega n. \quad (3.17)$$

G es una función real suave 2π -periódica y tiene al menos dos puntos críticos en $[-\pi, \pi)$, correspondiendo a su máximo y a su mínimo. Para

$$G(\phi) = 2 - 2A \cos \phi + 2B \sin \phi, \quad (3.18)$$

con

$$A = \sum_{j=1}^{p_n} \frac{|d_{j,n}|^2}{c} \cos \lambda_j t, \quad B = \sum_{j=1}^{p_n} \frac{|d_{j,n}|^2}{c} \sin \lambda_j t, \quad (3.19)$$

y

$$G'(\phi) = 2A \sin \phi + 2B \cos \phi, \quad (3.20)$$

los puntos críticos satisfacen

$$\tan \phi = -\frac{B}{A}. \quad (3.21)$$

Hay entonces exactamente dos puntos críticos en $[-\pi, \pi)$, el mínimo y el máximo. Además las dos ϕ que satisfacen (3.21) están en los intervalos $(-\pi/2, \pi/2)$, y $(-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$. Se puede afirmar que para $A > 0$ el mínimo está en

$(-\pi/2, \pi/2)$, y que para $A < 0$ el mínimo está en $(-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$. Se evalúa

$$G''(\phi) = 2A \cos \phi - 2B \sin \phi = 2 \cos \phi (A - B \tan \phi) \quad (3.22)$$

en los puntos críticos. El ϕ una solución de (3.21) y $\cos \phi = \pm(1 + B^2/A^2)^{-1/2}$ implica

$$G''(\phi) = \pm 2A(1 + \tan^2 \phi)^{-1/2}. \quad (3.23)$$

Por lo tanto $G''(\phi) > 0$ requiere que A y $\cos \phi$ tengan el mismo signo, mostrando lo que se afirmó. Usando este hecho se puede checar que en el mínimo, $\cos \phi = \pm(1 + B^2/A^2)^{-1/2}$ implica

$$G(\phi) = 2 \mp 2 \frac{A}{|A|} \sqrt{A^2 + B^2} = 2 - 2\sqrt{A^2 + B^2} \quad (3.24)$$

por $A = \pm|A|$. Por lo tanto

$$\overline{D}_n^2(t) = 2 - 2 \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{p_n} \frac{|d_{j,n}|^2}{c} \cos(E_{j,n} - \omega N) t \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^p \frac{|d_{j,n}|^2}{c} \sin(E_{j,n} - \omega n) t \right)^2}, \quad (3.25)$$

y se obtiene inmediatamente (3.16). \square

Se puede usar la expresión (3.16) para aproximar $\overline{D}_n(t)$. Por ejemplo si sólo consideramos los dos coeficientes $|d_{1,n}|, |d_{2,n}|$ en la suma (3.16), suponiendo sea uno de los más grandes, se tiene la expresión simplificada

$$\overline{D}_n^2(t) \approx 2 - \frac{2}{c} \sqrt{|d_{1,n}|^4 + |d_{2,n}|^4 + 2|d_{1,n}|^2|d_{2,n}|^2 \cos(E_{2,n} - E_{1,n})t}. \quad (3.26)$$

Podemos estimar la frecuencia de recurrencia al mínimo de \overline{D}_n^2 como $(E_{2,n} - E_{1,n})/2\pi$.

La expresión (3.15) también implica que la distancia $\overline{D}_n(t)$ depende sólo de la órbita del breather: por (3.6), cambiando la condición breather inicial de A a $e^{i\theta}A$ multiplica todos los $d_{j,n}$ por una fase común $e^{in\theta}$ dejando a $D_n(t)$ invariante. Esta observación justifica tomar como condición inicial cualquier punto de la órbita.

Observamos también que la expresión (3.15) con $c = 1$ nos da la distancia $D_n(t)$ para estados Glauber proyectados a V_n (sin normalización), ver la sección 2.3. Esto nos permite usar también (3.15) para estimar desde abajo $D(t)$, la distancia para los estados Glauber.

En la segunda parte de esta sección demostramos también que el valor de $\overline{D}_n(t)$ para condiciones iniciales clásicas en la vecindad de un breather estable son aquellos obtenidos para el breather más un pequeño error.

Para hacer esto más preciso considere una solución breather $Ae^{-i\omega t}$, y una solución \tilde{u} que satisface

$$\tilde{u}(t) = Ae^{-i(\omega t + \theta(t))} + \delta(t), \quad \text{con } \phi(0) = 0, \quad \|\delta(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.27)$$

para algunas funciones $\theta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $\delta : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}^f$. ($\|\cdot\|$ es la norma Euclidea en $\mathbb{C}^f \approx \mathbb{R}^{2f}$.)

La expresión (3.27) establece que la órbita \tilde{u} permanece ϵ -cerca a la órbita del breather en $[0, T]$. ($\theta(t)$ puede crecer así que $\tilde{u}(t)$ no está necesariamente cerca a $Ae^{-i\omega t}$). Se pueden definir tiempos finitos de estabilidad orbital para el breather $Ae^{-i\omega t}$ como la propiedad que da algun $0 < \epsilon < \epsilon_m$ podemos escoger δ_0 tal que $\|\tilde{u}(0) - A\| < \delta_0$ implica (3.27) para funciones apropiadas θ, δ . Para $T = \infty$ se tiene la definición usual de estabilidad orbital.

La estabilidad orbital es conocida solamente para órbitas breather que corresponden a extremos locales de la energía para una potencia fija, y existen muchos breather linealmente estables que no son extremos locales. No conocemos resultados teóricos del análisis de estabilidad no lineal para tales breathers, pero numéricamente vemos trayectorias que permanecen indefinidamente en las proximidades del breather, así como los casos de escape eventual de la proximidad del breather linealmente estable [8, 9]. Estas consideraciones deberían hacer que la estabilidad temporal finita sea una suposición razonable. Desde un punto de vista más práctico, nos interesan las trayectorias \tilde{u} observadas para satisfacer (3.27) para ϵ “pequeña”.

Proposición 3.2.2 *Considere una solución breather $Ae^{-i\omega t}$ y la trayectoria \tilde{u} que satisface (3.27) para alguna $T > 0$ y funciones apropiadas θ, δ . Considere $\tilde{A} = \tilde{u}(0) = A + \delta(0)$, $|\delta(0)| < \epsilon$, y considere los estados cuánticos y clásicos $|\tilde{\Psi}_n(t)\rangle$, $|\tilde{\Psi}_n^C(t)\rangle$ como arriba que evoluciona desde la condición inicial $|\tilde{A}\rangle$. Entonces, para cualquier $t \in [0, T]$, la diferencia $\tilde{D}_n(t)$ entre $|\tilde{\Psi}_n(t)\rangle$, $|\tilde{\Psi}_n^C(t)\rangle$, definida como en (3.14), satisface*

$$\tilde{D}_n^2(t) = 2 - \frac{2}{c} \sqrt{\sum_{j=1}^{p_n} |d_{j,n}|^4 + 2 \sum_{i < j}^{p_n} |d_{i,n}|^2 |d_{j,n}|^2 \cos(E_{j,n} - E_{i,n})t + O(\epsilon)} \quad (3.28)$$

como $\epsilon \rightarrow 0$, con $d_{j,n}$ como en (3.6).

Demostración. Por la suposición, $\alpha_j(t) = A_j e^{-i(\omega t + \phi(t))} + \delta_j(t)$, con $|\delta_j(t)| < \epsilon$ para todo $j = 1, \dots, f$, $t \in [0, T]$. Entonces los coeficientes semiclásicos $d_{j,n}^C(t)$ de (3.9) con $\alpha(t)$ las trayectorias \tilde{u} son

$$d_{j,n}^C(t) = e^{-\frac{1}{2} \sum_{r=1}^f |A_r|^2} \sum_{l=1}^p \frac{A_1^{n_{1l}} A_2^{n_{2l}} \dots A_f^{n_{fl}}}{\sqrt{n_{1l}! n_{2l}! \dots n_{fl}!}} e^{-iN(\omega t + \theta(t))} b_{lj} + O(\epsilon), \quad (3.29)$$

y tenemos que el estado semiclásico correspondiente a \tilde{u} satisface

$$|\tilde{\Psi}_n^C(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{c}} \sum_{j=1}^{p_n} d_{j,n} e^{-iN(\omega t + \theta(t))} |\Phi_{j,n}\rangle + O(\epsilon) \quad (3.30)$$

para todo $t \in [0, T]$, con $d_{j,n}$ obtenido del breather no perturbado por (3.6). La suposición también implica que el estado cuántico obtenido de la condición

inicial $|(\tilde{u})\rangle$ satisfice

$$|\Psi_n(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{c}} \sum_{j=1}^{p_n} d_{j,n} e^{-iE_{j,n}t} |\Phi_{j,n}\rangle + O(\epsilon) \quad (3.31)$$

para todo t real, con $d_{j,n}$ como en (3.30). Definiendo la diferencia $\tilde{D}_n(t)$ entre $|\tilde{\Psi}_n(t)\rangle$ y $|\tilde{\Psi}_n^C(t)\rangle$, como en (3.14) se tiene

$$\tilde{D}_n^2(t) = \inf_{\phi \in S^1} \left(2 - 2 \sum_{j=1}^{p_n} \frac{|d_{j,n}|^2}{c} \cos((E_{j,n} - \omega n)t + \theta(t) + \phi) \right) + O(\epsilon), \quad (3.32)$$

para todo $t \in [0, T]$. El ínfimo sobre $\phi \in S^1$ para algún t dado no es afectado por la adición de un ángulo $\theta(t)$, y se obtiene de nueva cuenta la expresión de la proposición (3.2.1), salvo un error $O(\epsilon)$. \square

La falta de cambio significativo en $\overline{D}_n(t)$ para las condiciones iniciales en la proximidad de breathers estables también se reportó en [37, 38] y en las secciones 3.4 y 3.5

3.3. Evaluación numérica de la expresión para $\overline{D}_n(t)$: cadena de 3 sitios

A continuación se presentan cálculos numéricos usando estados coherentes y la expresión (3.16) para los casos de breathers estables. El objetivo de esta sección es ver como las diferentes características consideradas de los datos espectrales del problema cuántico afectan a la diferencia $\overline{D}_n(t)$, y ver como una aproximación tal como la dada por la ecuación (3.26) captura las principales características dadas por la expresión (3.16).

Los resultados presentados se obtuvieron con $P = 1$, $\delta = 0.3$, y son indicativos de lo que se observa para valores pequeños de $\delta > 0$ (el caso de enfocamiento). Además, bajo las suposiciones adicionales de la Proposición 3.2.2, cuando se consideran condiciones iniciales cercanas a un breather (una perturbación del breather) se obtienen cambios adicionales pequeños en la diferencia $\overline{D}_n(t)$ (comparado con el breather sin perturbar), por lo que, sin pérdida de generalidad, en los resultados únicamente se muestra a la diferencia $\overline{D}_n(t)$ para condiciones iniciales de tipo breather.

Para valores de $|\delta|$ suficientemente pequeños la estabilidad lineal de los breathers se puede determinar usando un criterio de número de cambios de signo de la amplitud del breather demostrado por Pelinovsky, Kevrekidis y Frantzeskakis [57]. Este criterio nos permite escoger breathers que podrían ser estables para un rango de δ mas amplio. La estabilidad lineal de los breathers se verifica numéricamente tomando en cuenta las consideraciones del capítulo 2. En esta y la próxima sección indicamos también la estabilidad orbital en tiempo finito utilizada en la sección 3.2 para condiciones iniciales cercanas al breather usando integración numérica.

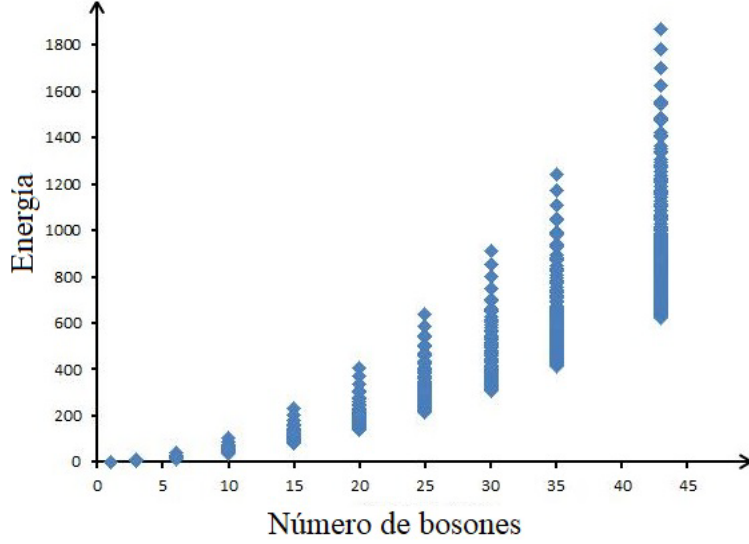


Figura 3.1: Espectro de energía de una cadena de 3 sitios del hamiltoniano \hat{H}_n dado por (2.8) para diferente número n de bosones, $\delta = 0.3$.

En esta y en la próxima sección la enumeración de los coeficientes $d_{j,n}$, con $j = 1, \dots, p_n$, p_n , del estado coherente $P_n|\alpha(0)\rangle$, $|\alpha(0)\rangle$ un estado coherente Glauber (la condición inicial), en la base de eigenvectores de H_n hace a $E_{j,n}$ decreciente en j .

En lo que sigue y la próxima sección usaremos también la notación simplificada d_j para denotar el coeficiente $d_{j,n}$, y E_j para denotar $E_{j,n}$. El número de cuantos se hará explícito en cada caso. Empezamos con la cadena de $f = 3$ sitios. En la Figura 3.1 se muestra el espectro de H_n para diferente número de cuantos, n , para una cadena de $f = 3$ sitios.

Como condiciones iniciales se han usado los estados coherentes correspondientes a los breathers

$$\mathcal{C}_1 = (0.550259, -0.628037, 0.550259), \quad (3.33)$$

y

$$\mathcal{C}_2 = (0.149791, 0.977305, 0.149791). \quad (3.34)$$

La estabilidad clásica de \mathcal{C}_1 esta indicada en las Figuras 3.2 y 3.3, donde se han graficado, respectivamente, las amplitudes $|u_j(t)|^2$ de las soluciones de la ecuación DNLS (1.1) con la condición inicial $u(0) = \mathcal{C}_1$ y con una condición inicial cercana a \mathcal{C}_1 , $\mathcal{C}'_1 = (0.54, -0.6456004957, 0.54)$.

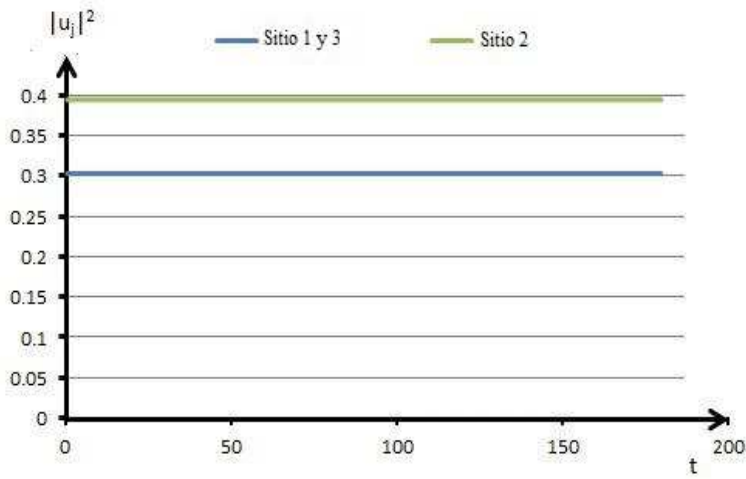


Figura 3.2: Amplitudes $|u_j|^2$ v.s. tiempo t , evolución bajo la ecuación NLS (1.1) con condición inicial \mathcal{C}_1 dada por (3.33). Cadena de $f = 3$ sitios, $\delta = 0.3$, y $P = 1$.

Como se puede ver en la Figura 3.3, la trayectoria con la condición inicial \mathcal{C}'_1 aun permanece en un estado localizado y cerca de \mathcal{C}_1 .

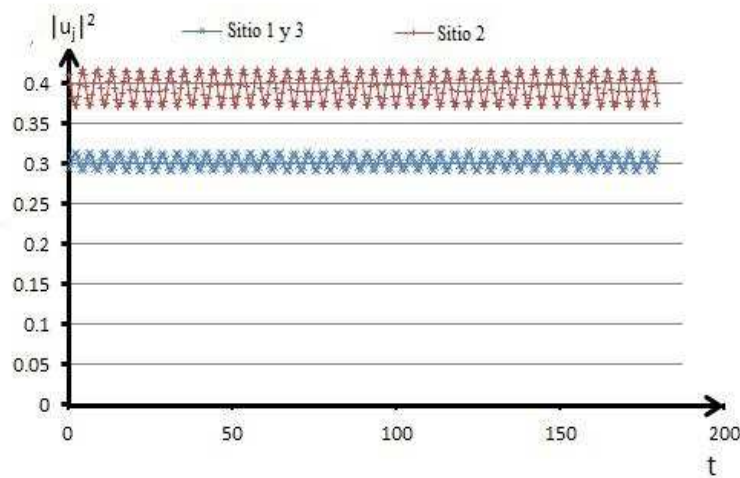
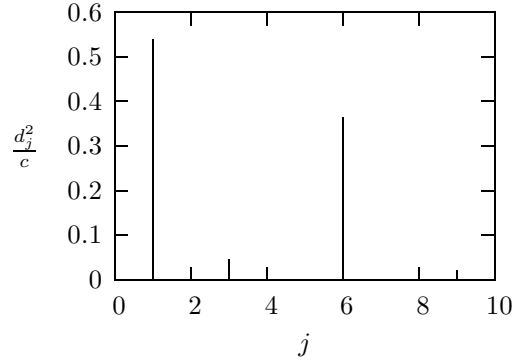
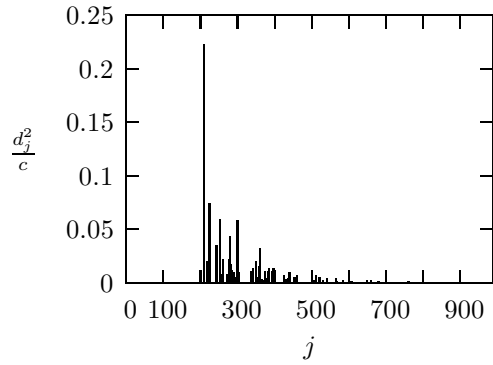


Figura 3.3: Amplitudes $|u_j|^2$ v.s. tiempo t , evolución bajo la ecuación NLS (1.1) con condición inicial $\mathcal{C}'_1 = (0.54, -0.6456004957, 0.54)$, cerca de \mathcal{C}_1 dada por (3.33). Cadena de $f = 3$ sitios, $\delta = 0.3$, y $P = 1$.

En las Figuras 3.4a y 3.4b se muestran los coeficientes $|d_{j,n}|^2/c$ de la expresión (3.15) para los estados cuánticos iniciales $|(\alpha(0))$, $\alpha(0) = \mathcal{C}_1$, en el subespacio con $n = 3$, y $n = 43$ bosones respectivamente. La energía $E_{j,n}$ disminuye con el índice j (n será explícitamente establecida en cada caso). En la Figura 3.4a, para $n = 3$, se observan dos coeficientes dominantes $|d_j|^2/c$, que son $|d_1|^2/c = 0.5404639$, y $|d_6|^2/c = 0.3645769$.



(a) Caso de $n = 3$ bosones



(b) Caso de $n = 43$ bosones

Figura 3.4: Coeficientes $\frac{d_j^2}{c}$ para la cadena con $f = 3$ sitios, $\delta = 0.3$, $n = 3$ y 43 bosones respectivamente para el estado inicial $|(\alpha(0))$, $\alpha(0) = \mathcal{A}_1$, ver (3.33).

En la Figura 3.5 se comparan los valores de $\overline{D}_3(t)$ obtenidos por la expresión (3.16) y su aproximación a dos estados, es decir usando únicamente los dos estados correspondientes a los coeficientes $|d_1|^2/c$ y $|d_6|^2/c$. Se observa que el aproximado $\overline{D}_3(t)$ es cercano al valor exacto. También se ha usado la aproximación a dos estados para estimar el tiempo $T = 86.39$ entre mínimos de $\overline{D}_3(t)$. Aproximaciones similares, mínimos relativamente pequeños de $\overline{D}_n(t)$ son vistos hasta para $n \approx 10$. Esto probablemente se debe a un número pequeño de coeficientes d_j dominantes.

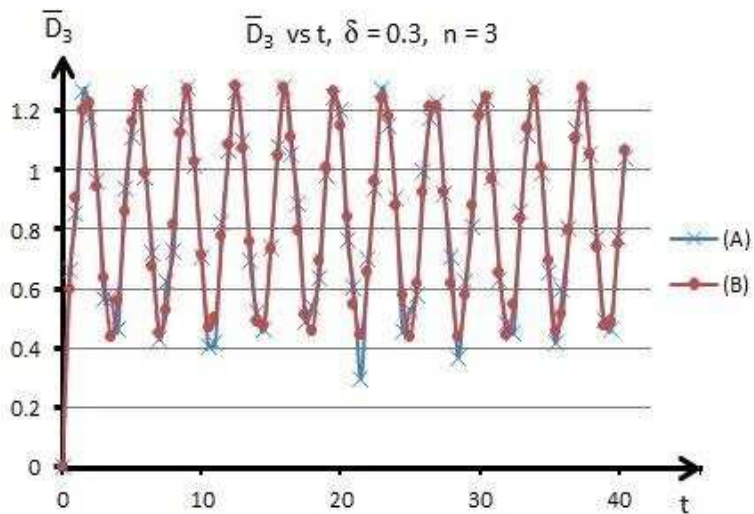


Figura 3.5: \bar{D}_n v.s. t , $n = 3$ bosones, la condición inicial es el estado coherente correspondiente a \mathcal{C}_1 de (3.33). (A) $\bar{D}_n(t)$ exacto, (B) aproximación a dos estados de $\bar{D}_n(t)$. Cadena con $f = 3$ sitios, $\delta = 0.3$, $P = 1$.

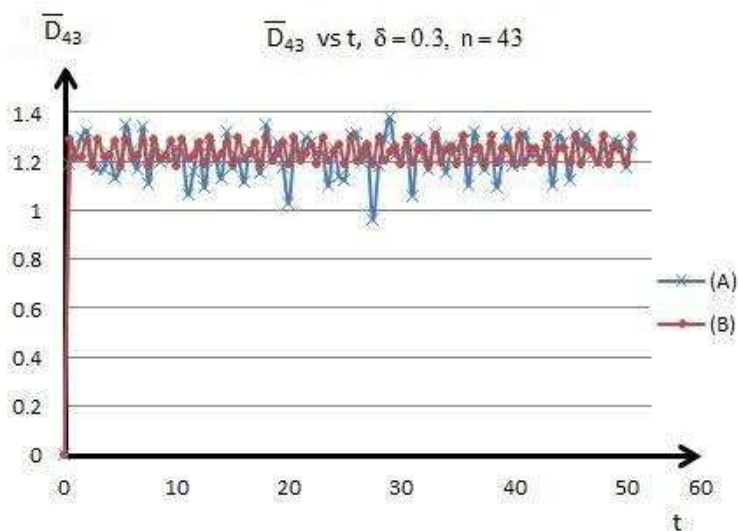


Figura 3.6: \bar{D}_n v.s. t , $n = 43$ bosones, la condición inicial es el estado coherente correspondiente a \mathcal{C}_1 de (3.33). (A) $\bar{D}_n(t)$ exacto, (B) aproximación a dos estados de $\bar{D}_n(t)$. Cadena con $f = 3$ sitios, $\delta = 0.3$, $P = 1$.

En la Figura 3.6 se muestra la misma comparación para $n = 43$ bosones, usando de nueva cuenta la aproximación de dos estados (3.26) para \overline{D}_n . Se observa que las dos expresiones dan resultados comparables para la escala de tiempo de la oscilación de $\overline{D}_{43}(t)$. Los casos $n = 3$ y 43 mostrados en Figuras 3.5 y 3.6 indican la observación general que el mínimo de $\overline{D}_n(t)$ crece conforme n se incrementa. Esto es también capturado aproximadamente por la aproximación de los dos estados.

La estabilidad orbital del breather \mathcal{C}_2 , dado por 3.34, es indicado por las Figuras (3.7) y (3.8). El breather \mathcal{C}_2 coincide con el breather \mathcal{A}_2 de la sección 3.4.

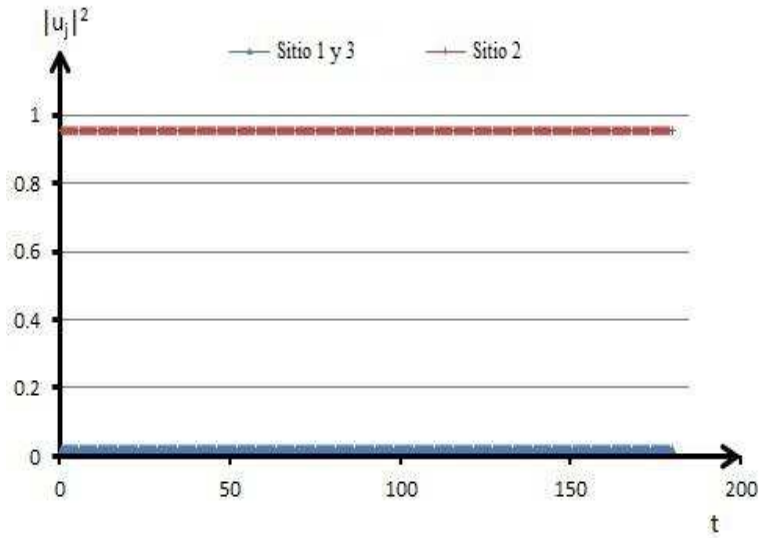


Figura 3.7: Amplitudes $|u_j|^2$ v.s. tiempo t , evolución bajo la ecuación NLS (1.1) con condición inicial \mathcal{C}_2 dada por (3.34). Cadena de $f = 3$ sitios, $\delta = 0.3$, y $P = 1$.

En la Figura 3.8 se muestra la dinámica de la condición inicial $\mathcal{C}'_2 = (0.13, 0.98295472937, 0.13)$, cerca de \mathcal{C}_2 . Como se puede observar el estado permanece localizado y cerca de \mathcal{C}_2 .

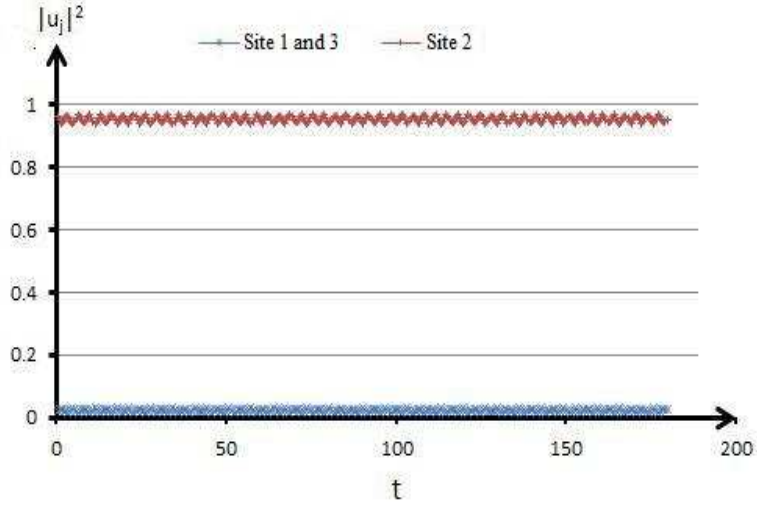
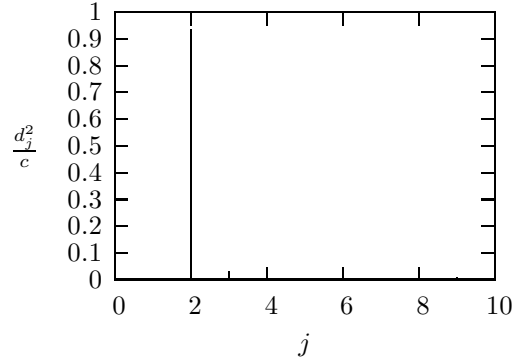
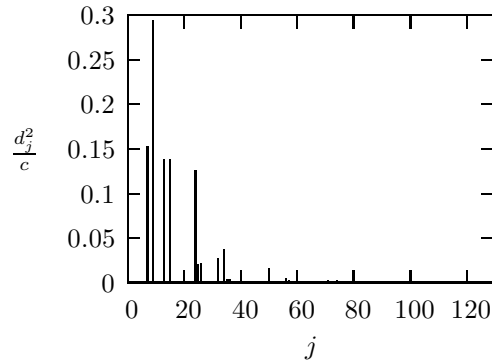


Figura 3.8: Amplitudes $|u_j|^2$ v.s. tiempo t , evolución bajo la ecuación NLS (1.1) con condición inicial $\mathcal{C}'_2 = (0.13, 0.98295472937, 0.13)$ cerca de \mathcal{C}_2 of (3.33). Cadena de 3 sites, $\delta = 0.3$, y $P = 1$.

En las Figuras 3.9a y 3.9b se muestran los coeficientes $|d_j|^2/c$ de la expresión (3.15) para los estados iniciales cuánticos $|(\alpha(0))\rangle$, $\alpha(0) = \mathcal{C}_2$, en los subespacios de $n = 3$, y $n = 43$ bosones respectivamente. Para $n = 3$ se observa un coeficiente dominante $|d_j|^2/c$ (los otros no son visibles en la figura).



(a) Caso de $n = 3$ bosones



(b) Caso de $n = 43$ bosones

Figura 3.9: Coeficientes $\frac{d_j^2}{c}$ para la cadena con $f = 3$ sitios, $\delta = 0.3$, $n = 3$ y 43 bosones respectivamente para el estado inicial $|(\alpha(0))\rangle$, $\alpha(0) = \mathcal{A}_2$, dada por (3.34).

Se ha calculado la aproximación a dos estados (3.26) de $\overline{D}_3(t)$ a partir de los dos coeficientes más grandes $|d_2|^2/c = 0.935728$, y $|d_3|^2/c = 0.031473$, y se compara el valor exacto y aproximado de $D_3(t)$ en la Figura 3.10. La aproximación de dos estados describe la envolvente de las oscilaciones de $\overline{D}_3(t)$. Los mínimos sin embargo son sobrestimados.

Una comparación similar de la aproximación de dos estados de $\overline{D}_{43}(t)$ a su valor exacto se muestra en la Figura 3.11. Se observa que la aproximación de dos estados captura la escala de tiempo de las oscilaciones pero no aproxima bien el mínimo de $\overline{D}_{43}(t)$. Por lo tanto no es tan útil y se necesitan más términos. En este breather se observa que incrementando el número de bosones conduce a un incremento más lento del mínimo de $\overline{D}_n(t)$.

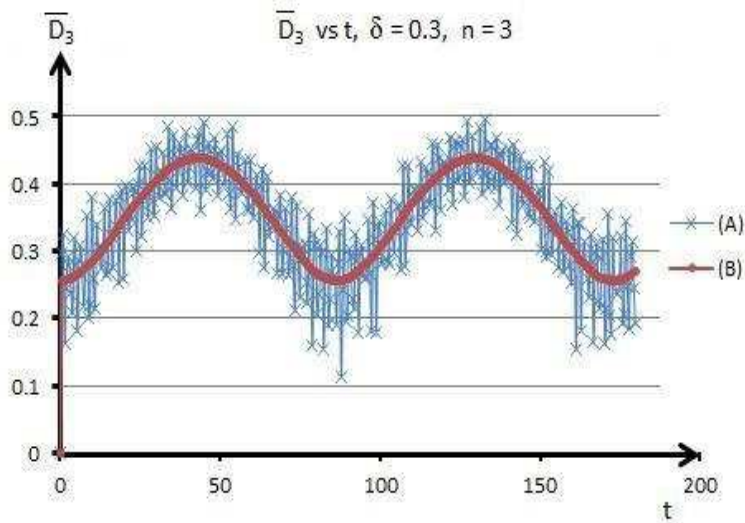


Figura 3.10: \bar{D}_n v.s. t , $n = 3$ bosones, la condición inicial es el estado coherente correspondiente a \mathcal{C}_2 of (3.33). (A) $\bar{D}_n(t)$ exacto, (B) aproximación a dos estados de $\bar{D}_n(t)$. Cadena con $f = 3$ sites, $\delta = 0.3$, $P = 1$.

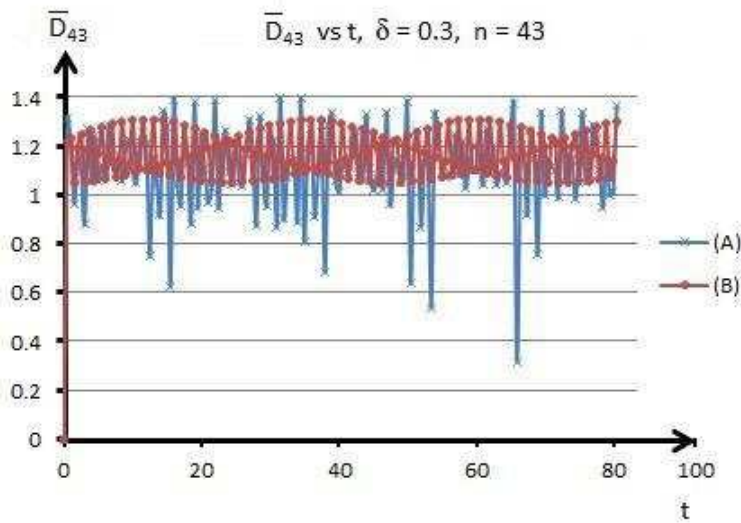


Figura 3.11: \bar{D}_n v.s. t , $n = 43$ bosones, la condición inicial es el estado coherente correspondiente a \mathcal{C}_2 of (3.33). (A) $\bar{D}_n(t)$ exacto, (B) aproximación a dos estados de $\bar{D}_n(t)$. Cadena con $f = 3$ sitios, $\delta = 0.3$, $P = 1$.

3.4. Evaluación numérica de la expresión para $\overline{D}_n(t)$: cadena de 5 sitios

El propósito de esta sección es extender las observaciones de la sección 3.3 a una cadena de $f = 5$ sitios. La notación es la de la sección 3.3. El rápido crecimiento de la dimensión de V_n con n y f , ver sección 3.2, nos limita a estudios de hasta $n = 9$ bosones. El espectro de H_n para diferente número de cuantos, n , se muestra en la Figura 3.12.

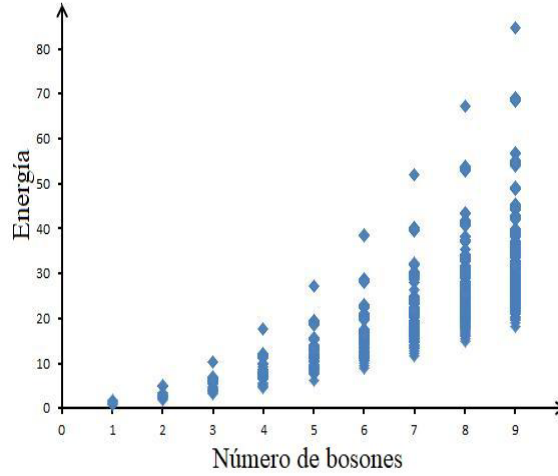


Figura 3.12: Espectro de energía de una cadena de 5 sitios del Hamiltoniano H_n dado por (2.8) para diferente número n de bosones, $\delta = 0.3$.

Se han usado como condiciones iniciales los estados coherentes correspondientes a los breathers

$$\mathcal{D}_1 = (0.381608, -0.480558, 0.49687, -0.480558, 0.381608), \quad (3.35)$$

y

$$\mathcal{D}_2 = (0.0230719, 0.153576, 0.975584, 0.153576, 0.0230719). \quad (3.36)$$

donde se ha usado $\delta = 0.3$ y $P = 1$.

La estabilidad de \mathcal{D}_1 es indicada en las Figuras 3.13 y 3.14, donde se ha utilizado el estado cuántico correspondiente a $\mathcal{D}'_1 = (0.392503, -0.470044, 0.5, -0.470044, 0.392503)$ cerca del breather estable \mathcal{A}_1 .

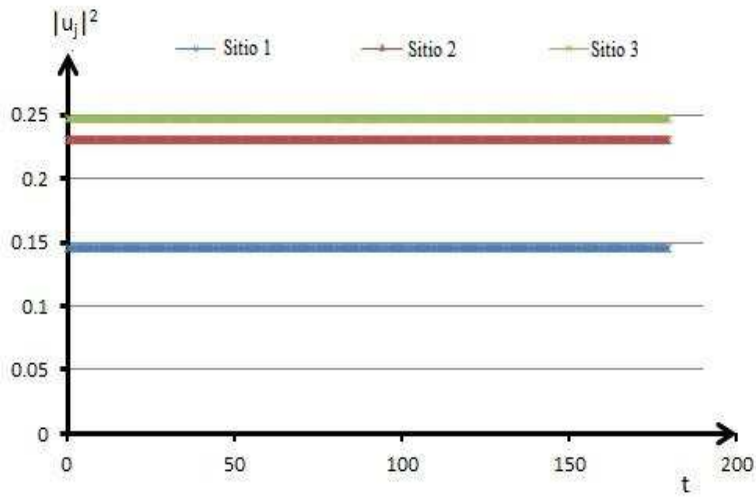


Figura 3.13: Amplitudes $|u_j|^2$ v.s. tiempo t , evolución bajo la ecuación DNLS (1.1) con condición inicial \mathcal{D}_1 dado por (3.35). Cadena de $f = 5$ sitios, $\delta = 0.3$, y $P = 1$.

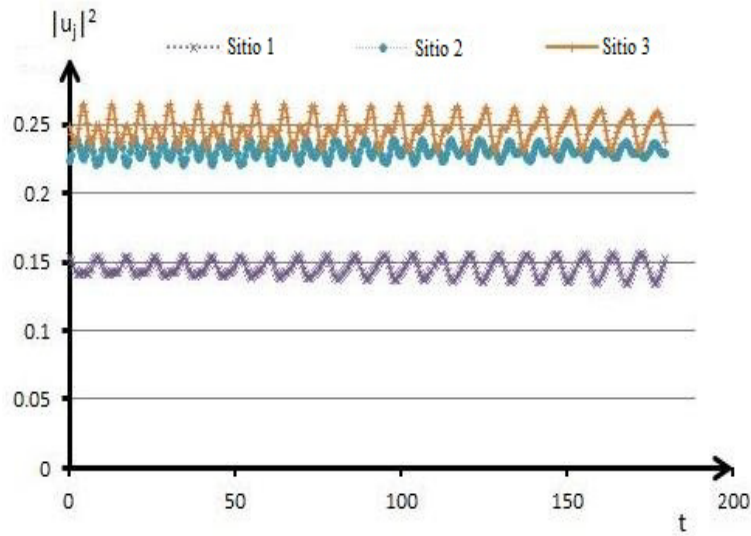
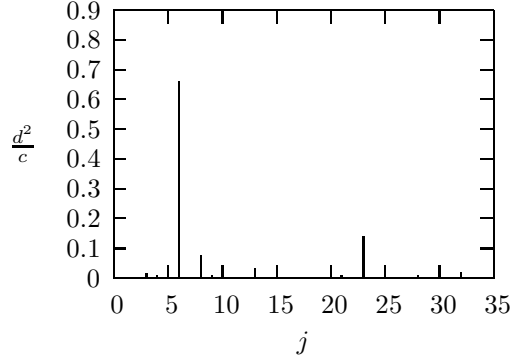
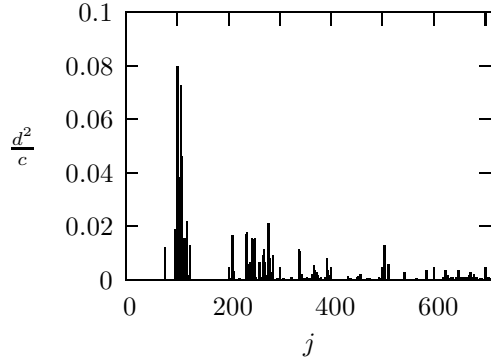


Figura 3.14: Amplitudes $|u_j|^2$ v.s. tiempo t , evolución bajo la ecuación DNLS (1.1) con condición inicial $\mathcal{D}'_1 = (0.392503, -0.470044, 0.5, -0.470044, 0.392503)$ cerca de \mathcal{D}_1 dado por (3.35). Cadena de $f = 5$ sitios, $\delta = 0.3$, y $P = 1$.

Ahora consideremos la evolución cuántica correspondiente. Las Figuras 3.15a y 3.15b muestran los coeficientes $|d_j|^2/c$ para el estado cuántico $|(\alpha(0)), \alpha(0)=\mathcal{D}_1$ dado por (3.35), en el subespacio de $n = 3$ y $n = 9$ bosones respectivamente. Para $n = 3$ bosones los coeficientes más grandes son $|d_6|^2/c = 0.6609740$, y $|d_{23}|^2/c = 0.1383539$.



(a) Caso de $n = 3$ bosones



(b) Caso de $n = 9$ bosones

Figura 3.15: Coeficientes $\frac{d_j^2}{c}$ para la cadena con $f = 5$ sitios, $\delta = 0.3$, $n = 3$ y 9 bosones respectivamente para el estado inicial $|(\alpha(0)), \alpha(0) = \mathcal{D}_1$ dado por (3.35).

La correspondiente aproximación a dos estados (3.26) de $\overline{D}_3(t)$ y la expresión exacta son comparadas en la Figura 3.16. Se observa una buena aproximación del tiempo entre mínimos de $\overline{D}_3(t)$. Los valores de los mínimos son sobrestimados por la aproximación. Resultados similares para $n = 9$ bosones se muestran en la Figura 3.17. Se observa que la aproximación a dos estados da una buena estimación del mínimo de $\overline{D}_9(t)$. La variación de $\overline{D}_9(t)$ es mucho más pequeña. En esta cadena grande se observa que el mínimo de $\overline{D}_n(t)$ disminuye más rápido con el número de bosones.

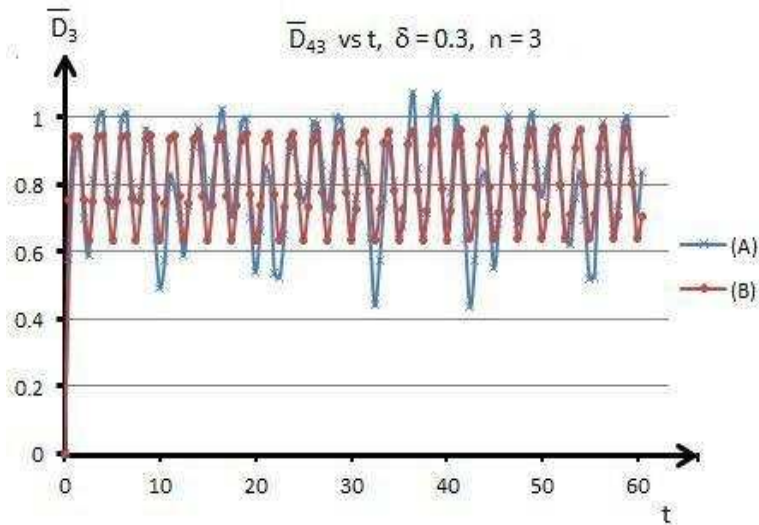


Figura 3.16: \bar{D}_n v.s. t , $n = 3$ bosones, la condición inicial es el estado coherente correspondiente a \mathcal{D}_1 de (3.35). (A) $\bar{D}_n(t)$ exacto, (B) aproximación a dos estados de $\bar{D}_n(t)$. Cadena con $f = 5$ sitios, $\delta = 0.3$, $P = 1$.

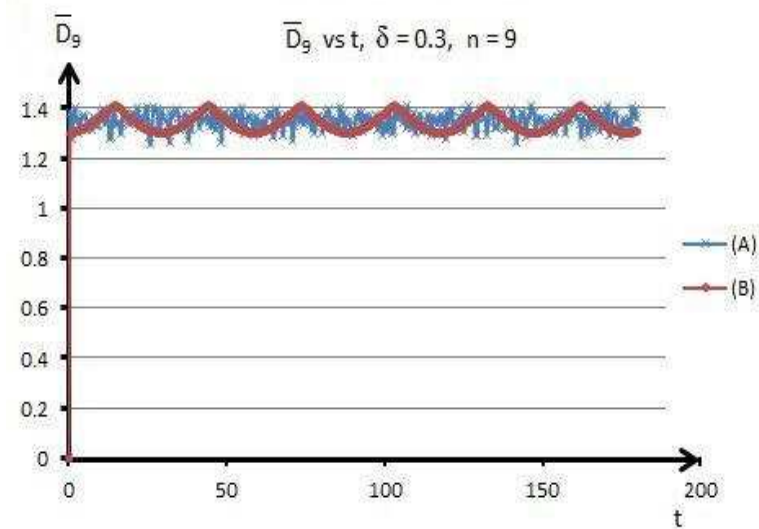


Figura 3.17: \bar{D}_n v.s. t , $n = 9$ bosones, la condición inicial es el estado coherente correspondiente a \mathcal{D}_1 de (3.35). (A) $\bar{D}_n(t)$ exacto, (B) aproximación a dos estados de $\bar{D}_n(t)$. Cadena con $f = 5$ sitios, $\delta = 0.3$, $P = 1$.

La estabilidad del breather estable \mathcal{D}_2 , dado por (3.36), se indica en las Figuras 3.18 y 3.19. El breather \mathcal{D}_2 coincide con el breather \mathcal{B}_2 de la sección 3.5. Se ha utilizado $\mathcal{D}'_2 = (0.0185, 0.1395, 0.98, 0.1395, 0.0185)$ cerca del breather \mathcal{D}_2 dado por (3.36).

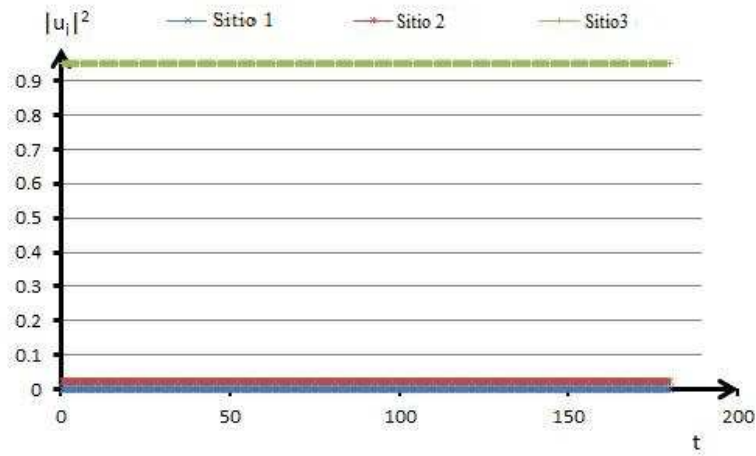


Figura 3.18: Amplitudes $|u_j|^2$ v.s. tiempo t , evolución bajo la ecuación DNLS (1.1) con condición inicial \mathcal{D}_2 dado por (3.36). Cadena de $f = 5$ sitios, $\delta = 0.3$, y $P = 1$.

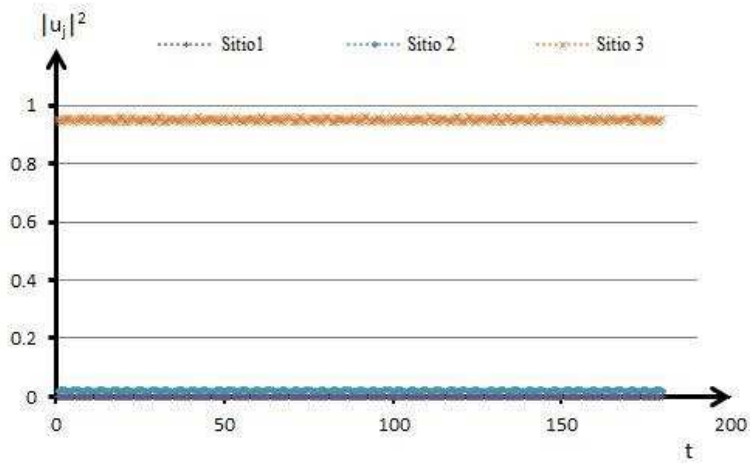
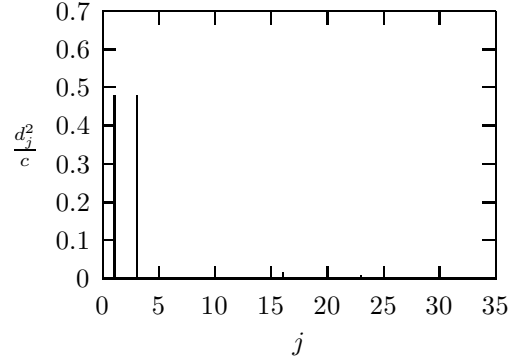
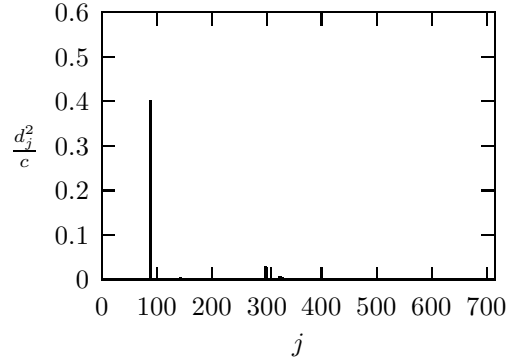


Figura 3.19: Amplitudes $|u_j|^2$ v.s. tiempo t , evolución bajo la ecuación DNLS (1.1) con condición inicial $\mathcal{D}'_2 = (0.0185, 0.1395, 0.98, 0.1395, 0.0185)$ cerca de \mathcal{D}_2 dado por (3.36). Cadena de $f = 5$ sitios, $\delta = 0.3$, y $P = 1$.

Las Figuras 3.20a, y 3.20b muestran los valores de los coeficientes $|d_j|^2/c$ para el estado cuántico inicial $|\alpha(0)\rangle$, $\alpha(0)=\mathcal{D}_2$, en el subespacio de $n = 3$, y $n = 9$ bosones respectivamente.



(a) Caso de $n = 3$ bosons



(b) Caso de $n = 9$ bosons

Figura 3.20: Coeficientes $\frac{d_j^2}{c}$ para la cadena con $f = 5$ sitios, $\delta = 0.3$, $n = 3$ y 9 bosones respectivamente para el estado inicial $|\alpha(0)\rangle$, $\alpha(0) = \mathcal{D}_2$, ver (3.36).

Para $n = 3$ bosones los dos coeficientes más grandes son $|d_1|^2/c = 0.4806854$ y $|d_3|^2/c = 0.4810364$ con energías respectivas $E_1 = 10.3504977$ y $E_3 = 10.3228246$.

Las correspondientes aproximaciones (3.26) de $\overline{D}_2(t)$ y la expresión exacta son presentadas en las Figuras 3.21 y 3.22.

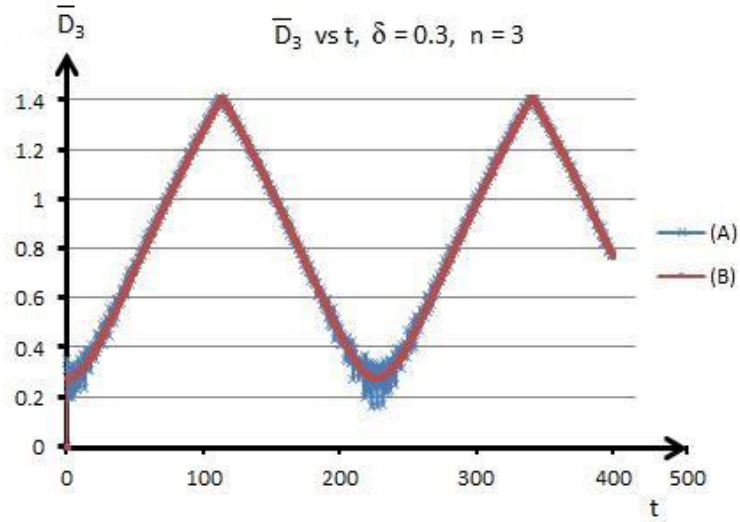


Figura 3.21: \bar{D}_n v.s. t , $n = 3$ bosones, la condición inicial es el estado coherente correspondiente a \mathcal{D}_2 dado por (3.36). (A) $\bar{D}_n(t)$ exacto, (B) aproximación a dos estados de $\bar{D}_n(t)$. Cadena con $f = 5$ sitios, $\delta = 0.3$, $P = 1$.

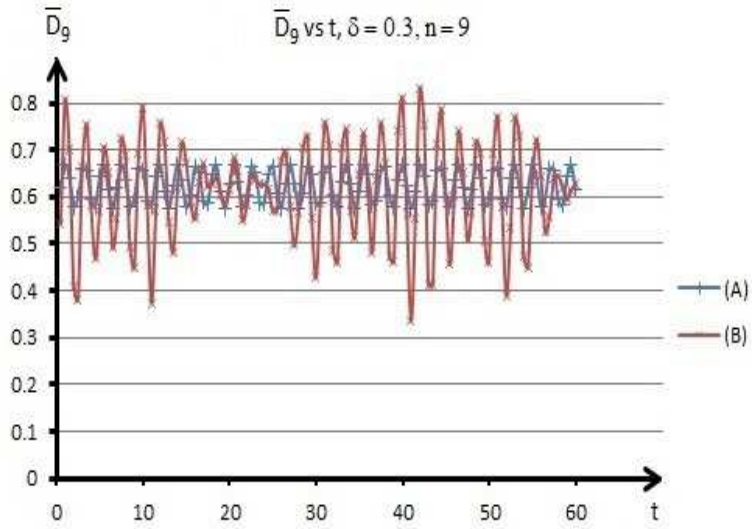


Figura 3.22: \bar{D}_n v.s. t , $n = 9$ bosones, la condición inicial es el estado coherente correspondiente a \mathcal{D}_2 dado por (3.36). (A) $\bar{D}_n(t)$ exacto, (B) aproximación a tres estados de $\bar{D}_n(t)$. Cadena con $f = 5$ sitios, $\delta = 0.3$, $P = 1$.

En la Figura 3.21 se observa que la correspondiente aproximación de dos estados de $\overline{D}_3(t)$ da valores exactos para los tiempos y valores del mínimo de $\overline{D}_3(t)$. Para $n = 9$ bosones mejoramos la aproximación de $\overline{D}_9(t)$ usando tres estados, con coeficientes $|d_{88}|^2/c = 0.4025045$, $|d_{87}|^2/c = 0.4024292$, $|d_{298}|^2/c = 0.0296268$, y energías respectivas $E_{88} = 48.7760689$, $E_{87} = 48.7760691$, $E_{298} = 39.1033353$. El exacto y el aproximado de $D_9(t)$ se muestran en la Figura 3.22. La aproximación de tres estados da una buena estimación de los tiempos entre los mínimos de $\overline{D}_9(t)$, pero da valores inexactos, más pequeño, para el mínimo. Se observa de nueva cuenta que el mínimo de $\overline{D}_n(t)$ disminuye con n .

Conclusiones

En el presente trabajo hemos estudiado numérica y analíticamente la distancia \overline{D}_n entre estados cuánticos exactos y estados coherentes con parámetros que evolucionan clásicamente. En ambos casos se han usado como condiciones iniciales estados coherentes $SU(f)$ que corresponden a soluciones breather de la ecuación DNLS clásica y también condiciones iniciales en la vecindad de dichos breather. Se consideró en ambos casos la evolución de estados coherentes $SU(f)$ en subespacios invariantes de un número fijo de cuantos.

En el capítulo 2 se presenta el cálculo numérico de la distancia \overline{D}_n entre las dos reglas de evolución. Se consideran cadenas (lattices) de tres y cinco sitios en donde se pudo observar que la evolución de esta distancia presenta recurrencias o retornos a valores relativamente pequeños (valores mínimos de \overline{D}_n), es decir los resultados sugieren el retorno a una vecindad o acercamiento al estado coherente inicial. También se observa que esta distancia depende de la estabilidad de las soluciones breather que se han utilizado. Para condiciones iniciales referidas a un breather inestable no se observan recurrencias similares a las vistas para el caso de condiciones iniciales de un breather estable. En el caso inestable la distancia \overline{D}_n entre los estados coherentes evolucionados cuántica y clásicamente aumenta rápidamente y fluctúa ligeramente en torno a un valor promedio grande, sin alguna recurrencia a valores de \overline{D}_n pequeños, es decir, las órbitas inestables parecen corresponder a diferencias grandes entre las dos evoluciones en todo momento.

De forma paralela al estudio numérico se obtuvo una expresión relativamente simple de la distancia \overline{D}_n que puede ser evaluada numéricamente y puede explicar algunas características de recurrencias a la vecindad del estado inicial que se observan en la parte numérica.

Se observa que el fenómeno de recurrencia a una vecindad del estado cuántico inicial es más pronunciada en subespacios con un número pequeño de cuantos. Este resultado se debe probablemente a que los estados iniciales considerados son una superposición de un número pequeño de eigenestados del operador Hamiltoniano. En este caso $\overline{D}_n(t)$ puede ser aproximado de forma efectiva por la expresión simplificada (3.26) de la que se pueden predecir los mínimos de la distancia \overline{D}_n y los tiempos de recurrencia a estos mínimos.

Se observa que el mínimo de $\overline{D}_n(t)$ es significativamente más pequeño para los breathers de un pico, que se espera sea un mínimo local (y mínimo global) de la energía H a una potencia fija P y por lo tanto orbitalmente estable para $\delta \geq 0$

suficientemente pequeño, ver [9], por ejemplo para $P = 1$, un breather de k - pico tiene amplitudes $|A| = 1/\sqrt{k} + O(\delta)$ (en k sitios), y energía $H = -1/\sqrt{k} + O(\delta)$.

El estudio numérico que presentamos no resuelve la dependencia de estos fenómenos con el número de sitios f de la cadena, ya que la dimensión del subespacio de n cuantos V_n crece rápidamente con f y n . Consideramos factible que para $|\delta| \ll 1$, los datos clásicos del breather (frecuencia y amplitud), y los datos espectrales podrían ser aproximados analíticamente usando argumentos perturbativos. Este tipo de cálculo aproximado podría darnos información sobre el comportamiento de $\overline{D}_n(t)$ para n y f más grandes en el régimen $|\delta| \ll 1$ (anticontinuo).

Finalmente, podemos generar algunas cuestiones relacionadas con el presente trabajo que pueden dar origen a futuros trabajos como por ejemplo la posible generalización de la expresión exacta para la distancia entre trayectorias cuánticas y clásicas de estados coherentes a otros sistemas con simetría de fase global. Por ejemplo, se puede considerar el mismo sistema DNLS usando como variables los modos normales de vibración para las u_j y el correspondiente hamiltoniano. Consideramos que se pueden obtener expresiones análogas aunque más engorrosas para la distancia $D(t)$ entre las trayectorias semiclásica y cuántica para órbitas periódicas generales para sistemas sin la simetría S^1 global, i.e. con operador hamiltoniano cuántico sin una estructura diagonal en bloques respecto a los subespacios V_n . Tales expresiones requieren de mayor cálculo de cómputo, pero pueden dar una forma precisa para medir la exactitud de las aproximaciones semiclásicas de los estados coherentes para una clase grande de órbitas.

Estudios adicionales pueden involucrar cadenas de mayor dimensión, fenómenos de interferencia cuántica, memorias cuánticas, entre otros, que pudieran dar lugar a mayores temas de investigación.

Apéndice A

Estados coherentes

A.1. Introducción

En este Apéndice se presentan algunas definiciones y propiedades básicas de los estados coherentes tipo Glauber y los estados coherentes generalizados tipo $SU(f)$ utilizados en la tesis [63, 66, 67, 68].

El formalismo de los estados coherentes denotados aquí como estados Glauber fue propuesto por R. J. Glauber [39] en 1963, los cuales también los aplicó a varios problemas de la óptica cuántica. Estos estados son implícitos en un trabajo de Schrödinger de 1926 quien estaba interesado en estudiar los estados cuánticos del oscilador armónico que imitaran su contraparte clásica a través de la evolución del operador de posición [39]. Varios aspectos de la teoría matemática de los estados coherentes fueron desarrollados en los 1950s y 60s por Aronsajn, I.E. Segal, Bargmann, Klauder, Sudarshan y Schweber. El apéndice de [40] y [69] contiene varios comentarios históricos sobre el origen de la teoría de estados coherentes.

El concepto de los estados coherentes admite varias generalizaciones [62], y notamos especialmente la definición de estados coherentes asociados a grupos introducida en forma independiente por Perelomov [63, 70] y Gilmore en 1972 [71, 72]. Este formalismo está relacionado con los estados que hemos denotado como estados $SU(f)$ en la tesis, en particular su conexión con el grupo $SU(f)$ surge de la definición de Perelomov-Gilmore. En el formalismo de Perelomov-Gilmore, los estados originales de Glauber se asocian al grupo de Heisenberg - Weyl. Definiciones más recientes y más generales de estados coherentes se presentan en [73].

Los estados coherentes tienen aplicaciones en diversas áreas de la física matemática y teórica, por ejemplo son usados en teoría de la probabilidad [74], integrales de trayectoria [75], en la teoría de funciones analíticas [76], en física de materia condensada [77] y en teoría cuántica de la información [78].

Dado que la teoría de estados coherentes es extensa aquí nos enfocamos en propiedades que resultan útiles o relevantes para el desarrollo de la presente

tesis. El mayor énfasis en este y los Apéndices C y D esta en la relación entre diferentes definiciones de los los estados $SU(f)$ y algunas propiedades básicas de dichos estados.

Esta teoría se usa en el Apéndice B para entender mejor la relación entre los estados coherentes y la descripción semiclásica de sistemas cuánticos. La discusión del Apéndice B proporciona una relación natural entre la mecánica cuántica y la descripción clásica, y motiva la ley de evolución clásica de los estados coherentes definida en el capítulo 2 de la tesis. En particular, describiremos como la evolución clásica de los parámetros de los estados coherentes constituye una aproximación “semiclásica” de la evolución cuántica.

En la sección A.2. revisamos algunas definiciones y propiedades básicas de los estados Glauber. Introducimos también una notación alternativa al del texto principal de la tesis que facilita los cálculos en estos apéndices. En la sección A.3. usamos los estados de Glauber, denotados como $|Z\rangle$, $Z \in \mathbb{C}^f$, para definir estados $|s, \xi\rangle$, s entero no negativo, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_f) \in \mathbb{C}^f$, $|\xi|^2 = \sum_{j=1}^f |\xi_j|^2 = 1$.

En la sección A.4. mostramos que los estados $|s, \xi\rangle$ pertenecen al subespacio V_s de s cuantos y que son estados $SU(f)$ definidos en el capítulo 2 de la tesis. El material de la sección A.4. se usa en el Apéndice B para motivar la definición de la evolución clásica de los estados coherentes. Algunas demostraciones más largas de resultados de la sección A.4. se presentan en los Apéndices C y D.

A.2. Estados coherentes Glauber $|z\rangle$, y $|Z\rangle$

Primero consideramos los estados coherentes Glauber para un sistema de $f = 1$ grado de libertad. En este caso los estados coherentes Glauber son indizados por puntos del espacio fase clásico \mathbb{C} , y se denotan por $|z\rangle$, $z \in \mathbb{C}$. (Esta notación y su generalización a más dimensiones es mas estandar que la notación $|z\rangle$ utilizada en los capítulos 2, 3, y facilita los cálculos que siguen.)

Usamos la notación de la sección 2.1 para los operadores de creación y aniquilación $B^\dagger = B_1^\dagger$, $B = B_1$ respectivamente en el espacio V generado por los estados $|k\rangle$, k entero no negativo.

Tenemos las siguientes tres definiciones equivalentes de los estados coherentes Glauber $|z\rangle$, $z \in \mathbb{C}^f$ [39, 62, 79]:

- (1.) Como eigenestados del operador de aniquilación B , esto es $\hat{B}|z\rangle = z|z\rangle$.
- (2.) Aplicando el operador desplazamiento, $D(z)$, al estado $|0\rangle$ (estado base del oscilador armónico o vacío), donde

$$D(z) = e^{zB^\dagger - z^*B} = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} e^{zB^\dagger} e^{-z^*B}. \quad (\text{A.1})$$

Esta definición nos resulta en la fórmula explícita

$$|z\rangle = D(z)|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (\text{A.2})$$

Para obtener (A.2) usamos la fórmula de Baker - Campbell - Hausdorff para el producto de las exponenciales de dos operadores A y B en V [80],

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}, \quad (\text{A.3})$$

con $[A, B] = AB - BA$, y la relación $[B, B^\dagger] = 1$, de donde tenemos

$$e^{zB^\dagger - z^*B} = e^{zB^\dagger} e^{-z^*B} e^{-\frac{1}{2}[zB^\dagger, -z^*B]} = e^{zB^\dagger} e^{-z^*B} e^{-\frac{1}{2}|z|^2}. \quad (\text{A.4})$$

La fórmula (A.2) se obtiene usando $B|0\rangle = 0$ y $e^{-z^*B}|0\rangle = |0\rangle$.

3. Como estados cuánticos que minimizan (saturan) la relación de incertidumbre de Heisenberg.

Para formular precisamente esta tercera definición usamos las siguientes definiciones. Para constantes $\omega > 0$, $h > 0$, sean $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ y los operadores \hat{q} , \hat{p} definidos por

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(B + B^\dagger), \quad (\text{A.5})$$

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(B^\dagger - B). \quad (\text{A.6})$$

Además, para cada estado $|\psi\rangle \in V$ y operador M en V definimos la cantidad $(\Delta M)^2$, la varianza cuadrada de M respecto al estado $|\psi\rangle$, por

$$(\Delta M)^2 = \langle \psi | M^2 | \psi \rangle - \langle \psi | M | \psi \rangle^2.$$

Nótese que la dependencia de $(\Delta M)^2$ en $|\psi\rangle$ no se hace explícita en esta notación.

La relación de incertidumbre de Heisenberg es el teorema que para cada $|\psi\rangle \in V$, las varianzas $\Delta\hat{p}$, $\Delta\hat{q}$ de los operadores \hat{p} , \hat{q} respecto al estado $|\psi\rangle$ satisfacen la desigualdad

$$\Delta\hat{p}\Delta\hat{q} \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Los estados coherentes se pueden definir como los elementos $|\chi\rangle \in V$ para los cuales se tiene la igualdad. (El parámetro h que aparece en la desigualdad es la constante de Planck.)

Observamos que las definiciones alternativas de los estados Glauber nos permiten calcular que si $|\psi\rangle = |z\rangle$, un estado Glauber, entonces las varianzas correspondientes $\Delta\hat{p}$, $\Delta\hat{q}$ se calculan como

$$(\Delta q)^2 = \langle z | \hat{q}^2 | z \rangle - \langle z | \hat{q} | z \rangle^2 = \frac{\hbar}{2\omega},$$

$$(\Delta p)^2 = \langle z | \hat{p}^2 | z \rangle - \langle z | \hat{p} | z \rangle^2 = \frac{\hbar\omega}{2}.$$

Entonces los estados coherentes nos dan el valor mínimo para el producto $\Delta\hat{p}\Delta\hat{q}$.

A continuación mencionamos algunas propiedades importantes de los estados coherentes Glauber, ver [62] para demostraciones y referencias.

- (i) El conjunto de estados coherentes forma un conjunto completo, esto es, se tiene una relación de completitud de la forma,

$$\frac{1}{\pi} \int |z\rangle\langle z| d^2z = I, \quad (\text{A.7})$$

donde I es el operador unidad en V , y la integración es sobre todo el plano complejo $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, y $d^2z = dx dy$, con $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Esta relación se llama también *resolución de la unidad*.

- (ii) Existen subconjuntos del conjunto de los estados coherentes que forman bases de V . Un ejemplo es el conjunto de los estados $|z\rangle$ donde $z = \sqrt{\pi}(n + im)$, con n, m enteros.

- (iii) Los estados Glauber no son ortogonales. De acuerdo con (A.2) se tiene,

$$|\langle w|z\rangle|^2 = e^{-|z-w|^2} \quad (\text{A.8})$$

por lo que los estados coherentes llegan a ser ortogonales cuando la diferencia $|z - w|^2$ se incrementa.

Consideramos ahora los estados coherentes para un sistema de $f \geq 1$ grados de libertad. Los estados coherentes Glauber correspondientes se denotarán por $|Z\rangle$, $Z = (z_1, \dots, z_f) \in \mathbb{C}^f$, además usaremos la notación de la sección 2.1 para los operadores de creación y aniquilación B_j^\dagger, B_j , $j = 1, \dots, f$, respectivamente en el espacio V generado por los estados $|n_1, \dots, n_f\rangle$, $n_j \geq 0$, $j = 1, \dots, f$.

Usaremos también las relaciones de conmutación

$$[B_m, B_i] = [B_m^\dagger, B_i^\dagger] = 0, \quad [B_m, B_i^\dagger] = \delta_{mi}, \quad \forall m, i \in \{1, \dots, f\}. \quad (\text{A.9})$$

Definiremos ahora los estados coherentes Glauber por

$$|Z\rangle = \prod_{i=1}^f |z_i\rangle = \prod_{i=1}^f e^{z_i B_i^\dagger - z_i^* B_i} |0, \dots, 0\rangle, \quad (\text{A.10})$$

donde $Z = (z_1, \dots, z_f) \in \mathbb{C}^f$. Esta definición generaliza la segunda definición del caso $f = 1$. Usando de forma análoga la fórmula de Baker - Campbell - Hausdorff

$$e^{z_i B_i^\dagger - z_i^* B_i} = e^{z_i B_i^\dagger} e^{-z_i^* B_i} e^{-\frac{1}{2}[z_i B_i^\dagger, -z_i^* B_i]} = e^{z_i B_i^\dagger} e^{-z_i^* B_i} e^{-\frac{1}{2}|z_i|^2}, \quad (\text{A.11})$$

obtenemos

$$|Z\rangle = \prod_{i=1}^f e^{-\frac{1}{2}|z_i|^2} e^{z_i a_i^\dagger} |0, \dots, 0\rangle = e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^f |z_i|^2} e^{\sum_{i=1}^f z_i a_i^\dagger} |0, \dots, 0\rangle. \quad (\text{A.12})$$

La generalización de las propiedades (i)-(iii) para el caso $f \geq 1$ se describe en [39, 62]. Notamos en particular la relación de completez

$$\frac{1}{\pi^f} \int_{\mathbb{C}^f} |Z\rangle\langle Z| d^{2f}Z = I, \quad (\text{A.13})$$

donde I es el operador unidad en V , y $d^{2f}z = \prod_{k=1}^f dx_k dy_k$, con $z_k = x_k + iy_k$, $x_k, y_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, f$.

A.3. Estados coherentes generalizados $|s, \xi\rangle$

Ahora usamos una descomposición de los estados Glauber $|Z\rangle \in V$ en estados que denotaremos como estados $|s, \xi\rangle$. Los estados $|s, \xi\rangle$ son elementos de los subespacios de s cuantos V_s . Los estados $|s, \xi\rangle$ satisfacen varias de las propiedades de los estados coherentes Glauber, y se indentificarán mas adelante con los estados $SU(f)$.

Considere entonces el estado coherente $|Z\rangle$, $Z = (z_1, \dots, z_f) \in \mathbb{C}^f$, definido por (A.12). Usando la serie de la exponencial se tiene que,

$$|Z\rangle = e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^f |z_i|^2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(\sum_{i=1}^f z_i B_i^\dagger \right)^s |0, 0, \dots, 0\rangle. \quad (\text{A.14})$$

Si se considera el cambio de variable

$$z_i = \xi_i \sqrt{N}, \quad i = 1, \dots, f, \quad \text{con} \quad N = \sum_{i=1}^f |z_i|^2,$$

$$\begin{aligned} |Z\rangle &= e^{-\frac{N}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} (\sqrt{N})^s \left(\sum_{i=1}^f \xi_i B_i^\dagger \right)^s |0, 0, \dots, 0\rangle \\ &= e^{-\frac{N}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{N})^s}{s!} (A^\dagger)^s |0, 0, \dots, 0\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

donde A^\dagger se define por

$$A^\dagger = \sum_{i=1}^f \xi_i B_i^\dagger. \quad (\text{A.16})$$

Reescribiendo (A.15) como

$$|Z\rangle = e^{-\frac{N}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{N^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{s!}} \frac{(A^\dagger)^s}{\sqrt{s!}} |0, 0, \dots, 0\rangle. \quad (\text{A.17})$$

y definiendo a

$$|s, \xi\rangle = \frac{(A^\dagger)^s}{\sqrt{s!}} |0, 0, \dots, 0\rangle \quad (\text{A.18})$$

se obtiene finalmente que,

$$|Z\rangle = e^{-\frac{N}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{N^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{s!}} |s, \xi\rangle. \quad (\text{A.19})$$

de donde $|Z\rangle$ resulta ser una superposición de los estados $|s, \xi\rangle$

De acuerdo con lo anterior se tiene la siguiente definición [46].

Definición A.3.1 *Se define el conjunto de estados coherentes generalizados, $\{|s, \xi\rangle\}$, dados por*

$$|s, \xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{s!}} (A^\dagger)^s |0, 0, \dots, 0\rangle, \quad (\text{A.20})$$

s entero nonegativo, con

$$A^\dagger = \sum_{i=1}^f \xi_i B_i^\dagger \quad (\text{A.21})$$

y

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_f) \in \mathbb{C}^f, \text{ con } \sum_{i=1}^f |\xi_i|^2 = 1. \quad (\text{A.22})$$

A.4. Algunas propiedades de los estados coherentes $|s, \xi\rangle$

En la presente sección se mencionan algunas propiedades referentes a los estados coherentes generalizados $|s, \xi\rangle$ en analogía con las propiedades ya conocidas de los estados Glauber $|z\rangle$.

A.4.1. Representación explícita de los estados $|s, \xi\rangle$

De (A.20) el estado coherente generalizado $|s, \xi\rangle$ se puede escribir explícitamente como

$$|s, \xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{s!}} \left(\xi_1 B_1^\dagger + \xi_2 B_2^\dagger + \dots + \xi_f B_f^\dagger \right)^s |0, 0, \dots, 0\rangle, \quad (\text{A.23})$$

y usando la fórmula multinomial para desarrollar la potencia de la suma anterior se tiene,

$$|s, \xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{s!}} \sum_{\sum_{i=1}^f m_i = s} \frac{s!}{m_1! m_2! \dots m_f!} (\xi_1 B_1^\dagger)^{m_1} (\xi_2 B_2^\dagger)^{m_2} \dots (\xi_f B_f^\dagger)^{m_f} |0, 0, \dots, 0\rangle \quad (\text{A.24})$$

entonces

$$|s, \xi\rangle = \sum_{\sum_{i=1}^f m_i = s} \frac{\sqrt{s!}}{\sqrt{m_1! m_2! \dots m_f!}} \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} \dots \xi_f^{m_f} \prod_{i=1}^s \frac{(B_i^\dagger)^{m_i}}{\sqrt{m_i!}} |0, \dots, 0\rangle \quad (\text{A.25})$$

que finalmente se puede reescribir como,

$$|s, \xi\rangle = \sum_{\vec{m}} \frac{\sqrt{s!}}{\sqrt{m_1! m_2! \dots m_f!}} \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} \dots \xi_f^{m_f} |m_1, m_2, \dots, m_f\rangle \quad (\text{A.26})$$

donde

$$|m_1, m_2, \dots, m_f\rangle = \prod_{i=1}^{(s)} \frac{(B_i^\dagger)^{m_i}}{\sqrt{m_i!}} |0, \dots, 0\rangle. \quad (\text{A.27})$$

A.4.2. Interpretación del parámetro s

Usando el operador de número de cuántos $\hat{N} = \sum_{i=1}^f a_i^\dagger a_i$, tenemos

$$\begin{aligned} \hat{N}|m_1, m_2, \dots, m_f\rangle &= \sum_{i=1}^f a_i^\dagger a_i |m_1, m_2, \dots, m_f\rangle = \\ &= \left(\sum_{i=1}^f m_i \right) |m_1, m_2, \dots, m_f\rangle = s|\vec{m}\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

De (A.26) tenemos

$$\hat{N}|s, \xi\rangle = s|s, \xi\rangle, \quad (\text{A.29})$$

esto implica que el parámetro s es el número de bosones, y $|s, \xi\rangle \in V_s$.

A.4.3. Relación de ortonormalidad de los estados $|s, \xi\rangle$

Considere a $f(B_i, B_i^\dagger)$ una función que puede ser expandida en una serie de potencias en B_i y B_i^\dagger , entonces [80]

$$[B_i, f(B_i, B_i^\dagger)] = \frac{\partial f}{\partial B_i^\dagger}, \quad (\text{A.30})$$

por lo que

$$[B_i, (A^\dagger)^s] = [B_i, \left(\sum_{i=1}^f \xi_i B_i^\dagger \right)^s] = s \xi_i \left(\sum_{i=1}^f \xi_i B_i^\dagger \right)^{s-1} = s \xi_i (A^\dagger)^{s-1}, \quad (\text{A.31})$$

con $A^\dagger = \sum_{i=1}^f \xi_i B_i^\dagger$, de donde se obtiene

$$B_i (A^\dagger)^s = (A^\dagger)^s B_i + s \xi_i (A^\dagger)^{s-1}. \quad (\text{A.32})$$

Ahora,

$$\begin{aligned} B_i |s, \xi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{s!}} B_i (A^\dagger)^s |0, 0, \dots, 0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{s!}} [(A^\dagger)^s B_i + s \xi_i (A^\dagger)^{s-1}] |0, 0, \dots, 0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Usando $a_i|0, 0, \dots, 0\rangle = 0$, tenemos entonces

$$\begin{aligned} B_i|\xi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{s!}} s \xi_i (A^\dagger)^{s-1} |0, 0, \dots, 0\rangle \\ &= \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{(s-1)!}} \xi_i (A^\dagger)^{s-1} |0, 0, \dots, 0\rangle. \end{aligned}$$

Identificando a

$$|s-1, \xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{(s-1)!}} (A^\dagger)^{s-1} |0, 0, \dots, 0\rangle \quad (\text{A.34})$$

se obtiene finalmente que

$$B_i|\xi\rangle = \sqrt{s} \xi_i |s-1, \xi\rangle. \quad (\text{A.35})$$

De forma análoga se puede mostrar que,

$$B_i|s-1, \xi\rangle = \frac{s-1}{\sqrt{(s-1)!}} \xi_i (A^\dagger)^{s-2} |0, 0, \dots, 0\rangle \quad (\text{A.36})$$

de donde, identificando a

$$|s-2, \xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{(s-2)!}} (A^\dagger)^{s-2} |0, 0, \dots, 0\rangle \quad (\text{A.37})$$

se obtiene,

$$B_i|s-1, \xi\rangle = \sqrt{s-1} \xi_i |s-2, \xi\rangle. \quad (\text{A.38})$$

En general, iterando se obtiene que,

$$B_i|s-n, \xi\rangle = \sqrt{s-n} \xi_i |s-(n+1), \xi\rangle \quad (\text{A.39})$$

donde

$$|s-n, \xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{(s-n)!}} (A^\dagger)^{s-n} |0, 0, \dots, 0\rangle, \quad (\text{A.40})$$

con $n \in Z^+$, y relaciones análogas para los conjugados,

$$\langle s-n, \xi | B_i^\dagger = \sqrt{s-n} \xi_i^* \langle -(n+1), \xi | \quad (\text{A.41})$$

y

$$\langle s-n, \xi | = \frac{1}{\sqrt{(s-n)!}} \langle 0, 0, \dots, 0 | (A)^{s-n} \quad (\text{A.42})$$

con $A = \sum_{i=1}^f \xi_i^* B_i$.

Usando estos resultados, tenemos

$$\langle s, \xi | B_j^\dagger B_j |s, \xi\rangle = s |\xi_j|^2 \langle s-1, \xi |s-1, \xi\rangle, \quad (\text{A.43})$$

y

$$\langle s, \xi | \hat{N} | s, \xi \rangle = s \left(\sum_{i=1}^f |\xi_i|^2 \right) \langle s-1, \xi | s-1, \xi \rangle, \quad (\text{A.44})$$

para $s \geq 1$. Aplicando (A.29) tenemos

$$\langle s, \xi | s, \xi \rangle = \left(\sum_{i=1}^f |\xi_i|^2 \right) \langle s-1, \xi | s-1, \xi \rangle. \quad (\text{A.45})$$

De la normalización $\sum_{i=1}^f |\xi_i|^2 = 1$, tenemos

$$\langle 1, \xi | 1, \xi \rangle = \langle 0, \xi | 0, \xi \rangle = 1, \quad (\text{A.46})$$

ya que $|0, \xi\rangle = |0, \dots, 0\rangle$, el estado del vacío que es normalizado. Argumentando de forma inductiva tenemos entonces

$$\langle s, \xi | s, \xi \rangle = 1, \quad (\text{A.47})$$

para cada $s \geq 0$, suponiendo $\sum_{i=1}^f |\xi_i|^2 = 1$, y la propiedad de ortonormalidad

$$\langle \xi, s' | s, \xi \rangle = \delta_{s,s'} \quad (\text{A.48})$$

dado que los espacios de diferentes números de cuantos son ortogonales.

A.4.4. Relación de incertidumbre de Heisenberg

Considere los operadores de momento \hat{p}_j y de posición \hat{q}_j , para el sitio j de una red de f sitios, los que pueden ser escritos en términos de los operadores B_j y B_j^\dagger como,

$$\hat{q}_j = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (B_j + B_j^\dagger), \quad (\text{A.49})$$

$$\hat{p}_j = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} (B_j^\dagger - B_j). \quad (\text{A.50})$$

Estos operadores, \hat{q}_j y \hat{p}_j , actúan en un espacio de Hilbert estándar y satisfacen las relaciones de conmutación $[\hat{q}_k, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{k,j}\hat{I}$, $[\hat{q}_j, \hat{I}] = 0$ y $[\hat{p}_j, \hat{I}] = 0$, donde el paréntesis cuadrado significa el conmutador $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$, \hat{I} es el operador identidad y \hbar es la constante de Plank dividida entre 2π . De forma paralela, como ya se mencionó líneas arriba, B_j y B_j^\dagger satisfacen el conmutador $[B_k, B_j^\dagger] = \hat{1}\delta_{k,j}$, de donde se tiene que $B_j B_j^\dagger = \hat{1} + B_j^\dagger B_j$.

Entonces,

$$\hat{q}_j^2 = \frac{\hbar}{2\omega} (B_j + B_j^\dagger)^2 = \frac{\hbar}{2\omega} (B_j^2 + B_j^{\dagger 2} + 2B_j^\dagger B_j + \hat{1}) \quad (\text{A.51})$$

y

$$\hat{p}_j^2 = -\frac{\hbar\omega}{2} (B_j^\dagger - B_j)^2 = -\frac{\hbar\omega}{2} (B_j^{\dagger 2} + B_j^2 - 2B_j^\dagger B_j - \hat{1}). \quad (\text{A.52})$$

Se tiene que $\langle s, \xi | B_j | s, \xi \rangle = 0$ y también $\langle s, \xi | B_j^\dagger | s, \xi \rangle = 0$ debido a que el estado $B_j | s, \xi \rangle$ pertenece al espacio de Hilbert de $s-1$ partículas, el cual resulta ortogonal al estado de $|s, \xi\rangle$ de s partículas. Lo mismo puede ser dicho para el caso $B_j^\dagger | s, \xi \rangle$. Entonces,

$$\langle \xi | \hat{q}_j | \xi \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \langle \xi | (\hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger) | \xi \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \left(\langle \xi | \hat{a}_j | \xi \rangle + \langle \xi | \hat{a}_j^\dagger | \xi \rangle \right) = 0. \quad (\text{A.53})$$

Análogamente

$$\langle \xi | \hat{p}_j | \xi \rangle = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} \langle \xi | (\hat{a}_j^\dagger - \hat{a}_j) | \xi \rangle = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} \left(\langle \xi | \hat{a}_j^\dagger | \xi \rangle - \langle \xi | \hat{a}_j | \xi \rangle \right) = 0. \quad (\text{A.54})$$

También se cumple que $\langle \xi | B_j^2 | \xi \rangle = 0$ y $\langle \xi | B_j^{\dagger 2} | \xi \rangle = 0$ por lo que

$$\langle \xi | \hat{q}_j^2 | \xi \rangle = \frac{\hbar}{2\omega} (2s|\xi_j|^2 + 1) \quad (\text{A.55})$$

y

$$\langle \xi | \hat{p}_j^2 | \xi \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} (2s|\xi_j|^2 + 1) \quad (\text{A.56})$$

donde se ha usado (A.43) y la $\langle s-1, \xi | s-1, \xi \rangle = 1$, $\forall s \geq 1$, para calcular $\langle s, \xi | B_j^\dagger B_j | s, \xi \rangle$. Las varianzas de \hat{p}_j y \hat{q}_j para los estados $|s, \xi\rangle$ están dadas por

$$(\Delta q_j) = \sqrt{\langle \hat{q}_j^2 \rangle - \langle q_j \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega} (2s|\xi_j|^2 + 1)} \quad (\text{A.57})$$

y

$$(\Delta p_j) = \sqrt{\langle \hat{p}_j^2 \rangle - \langle p_j \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2} (2s|\xi_j|^2 + 1)} \quad (\text{A.58})$$

de donde se ve que las varianzas Δq_j y Δp_j son iguales, por lo que el principio de incertidumbre está saturado y

$$\Delta q_j \Delta p_j = \frac{\hbar}{2} [2s|\xi_j|^2 + 1]. \quad (\text{A.59})$$

Cabe mencionar que en este caso se esta considerando un principio de incertidumbre de Heisenberg generalizado, ver por ejemplo [81]

A.4.5. Relación de completez de los estados $|s, \xi\rangle$

Sea $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_f) \in \mathbb{C}^f$. Sea $|\xi|^2 = \sum_{j=1}^f |\xi_j|^2$. La completez de los estados $|s, \xi\rangle$, $\xi \in \mathbb{C}^f$, $|\xi| = 1$, el subespacio V_s se describe por la siguiente

Proposición A.4.1 (*Relación de completez*).

$$\int d\mu(\xi_1) \int d\mu(\xi_2) \dots \int d\mu(\xi_f) \delta(|\xi| - 1) |s, \xi\rangle \langle s, \xi \dots \xi_2 \xi_1 | = \hat{1} \quad (\text{A.60})$$

donde $\hat{1}$ es la matriz unitaria en V_s (la dimensión de V_s es $\frac{(s+f-1)!}{(f-1)!s!}$) y $d\mu(\xi_j)$, es la medida dada por,

$$d\mu(\xi_j) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{(s+f-1)!}{s!} \right)^{\frac{1}{f}} d(\text{Re}\xi_j)d(\text{Im}\xi_j) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{(s+f-1)!}{s!} \right)^{\frac{1}{f}} d^2\xi_j. \quad (\text{A.61})$$

con $j = 1, 2, \dots, f$. Considerando el caso $f = 1$ se tiene que la relación (C.1) se reduce a

$$\frac{1}{\pi} \int d\mu(\xi) |\xi\rangle \langle \xi| = \hat{1} \quad (\text{A.62})$$

que es la relación de completez dada para el caso de estados coherentes Glauber, relación (A.13). La demostración de la proposición (A.4.1) puede consultarse en el apéndice C.

A.4.6. Relación de los estados $|s, \xi\rangle$ y el grupo $SU(f)$

Los estados coherentes y sus generalizaciones pueden ser derivados esencialmente de una teoría de grupos. Para el proceso de construcción de los estados coherentes asociados al grupo $SU(f)$, ver por ejemplo [43, 46, 63], considere a G el grupo de Lie dinámico del sistema cuántico considerado. Para simplificar, se supone que G es conexo, simplemente conexo, y es de dimensión finita. La representación irreducible unitaria del grupo dinámico G que actúa sobre el espacio de Hilbert V_s y que se denota por T . Con estos preliminares, se pueden definir los estados coherentes generalizados por la acción de un elemento de la representación irreducible unitaria T en un estado de referencia fijo normalizado $|\psi_0\rangle$,

$$|s, \xi\rangle = T(\zeta)|\psi_0\rangle \quad (\text{A.63})$$

con $\zeta \in G$.

Aunque la elección del estado de referencia $|\psi_0\rangle$ es en principio arbitraria, esta elección influye fuertemente en la forma de los estados coherentes y en la estructura del espacio fase correspondiente. Por lo tanto, una selección motivada físicamente sería un estado extremal del espacio de Hilbert tal como el estado vacío, $|0\rangle$, para el grupo de Heisenberg-Weyl (estados coherentes Glauber) o el estado de espín más bajo (más alto) para el caso del grupo $SU(f)$.

Una forma explícita para T de (A.63) puede ser construida. Omitiendo los desarrollos matemáticos (los cuales se encuentran justificados en el apéndice C), se encuentra que

$$T(\zeta) = e^{i \sum_{l=2}^f (\zeta_l^* B_1^\dagger B_l + \zeta_l B_l^\dagger B_1)} \quad (\text{A.64})$$

de donde el estado coherente $|\xi\rangle$ es dado por

$$|s, \xi\rangle = e^{i\phi_1 N} T(\zeta) |s, 0, \dots, 0\rangle \quad (\text{A.65})$$

de acuerdo con (A.63), con $\phi_1 \in \mathbb{R}$. Se puede mostrar que $T(\zeta)$ es un elemento del grupo $SU(f)$ (apéndice D), lo que demuestra que el estado $|\xi\rangle$, salvo un factor de fase irrelevante, es generado por la acción del grupo de $T(\zeta)$.

Apéndice B

Formulación variacional y evolución clásica de los estados coherentes

En este apéndice presentamos una motivación para el uso de las ecuaciones de Hamilton para la evolución de los parámetros de los estados coherentes. La principal observación es que esta regla de evolución se sigue de un Ansatz variacional para la evolución cuántica, en combinación con una aproximación semiclásica.

La teoría se basa en parte en un formalismo variacional desarrollado en [47, 46], al que añadimos un interpretación semiclásica precisa que no parece estar en la literatura. Describiremos también la teoría para sistemas cuánticos que se obtienen de la cuantización bosónica de sistemas clásicos con simetría de fase global como los sistemas DNLS.

El procedimiento variacional se aplicará al modelo propuesto por el hamiltoniano cuántico dado por (2.8), que por claridad se vuelve a escribir a continuación,

$$\hat{H} = (1 - 2\delta) \sum_{j=1}^f B_j^\dagger B_j + \sum_{j=1}^f B_j^\dagger B_j B_j^\dagger B_j + \delta \sum_{j=1}^f \left(B_j^\dagger B_{j+1} + B_j B_{j+1}^\dagger \right). \quad (\text{B.1})$$

La ecuación de evolución cuántica, ecuación de Schrödinger, se escribe en la forma

$$(i\hbar\partial_t - H)|\Psi\rangle = 0, \quad (\text{B.2})$$

en donde incluimos el parámetro físico \hbar (la constante de Planck dividida por 2π). El parámetro \hbar puede absorberse en la definición de t , pero aquí será útil dejarlo en la ecuación. La idea es que va a servir como un parámetro pequeño en una forma de aproximar las soluciones de la ecuación de Schrödinger. Claramente, las soluciones $|\Psi(t)\rangle$, $t \in [t_1, t_2]$, de (B.2) también satisfacen

$$\langle \Psi(t) | i\hbar\partial_t - H | \Psi(t) \rangle = 0, \quad \forall t \in [t_1, t_2], \quad (\text{B.3})$$

y

$$\int_{t_1}^{t_2} |\langle \Psi(t) | i\hbar \partial_t - H | \Psi(t) \rangle| dt = 0. \quad (\text{B.4})$$

Examinamos ahora la idea de buscar soluciones aproximadas de (B.2), donde hemos supuesto que el estado cuántico $|\Psi(t)\rangle$ pertenece a un conjunto de estados $|\Psi(y)\rangle$, indizados por una variable $y \in Y$. La pregunta es cómo deberían evolucionar los parámetros y en el tiempo para minimizar la distancia entre los estados $|\Psi(y(t))\rangle$ con las soluciones exactas de la ecuación de Schrödinger. Podemos buscar las ecuaciones para $y(t)$ minimizando un funcional de la forma

$$S(y) = \int_{t_1}^{t_2} |\langle \Psi(y(t)) | i\hbar \partial_t - H | \Psi(y(t)) \rangle| dt. \quad (\text{B.5})$$

Este funcional es no negativo, y cero solo si $|\Psi(y(t))\rangle$ es una solución de la ecuación de Schrödinger.

En lo que sigue consideramos el caso donde el conjunto de estados $|\Psi\rangle$ es el conjunto de los estados $|s, \xi\rangle \in V_s$, con $s \geq 0$, y $\xi \in \mathbb{C}^f$, con $|\xi|^2 = 1$. Fijando s consideramos

$$|\Psi\rangle = |s, \xi\rangle,$$

con $\xi = \xi(t)$, donde

$$|\xi\rangle = |s, \xi\rangle = \frac{(A^\dagger)^s}{\sqrt{s!}} |0, 0, \dots, 0\rangle, \quad (\text{B.6})$$

ver (A.3.1), (A.27), y la acción $S_{L_{1/2}}$ que corresponde al Langragiano $L_{1/2}$,

$$S_{L_{1/2}}(\xi) = \int_{t_1}^{t_2} L_{1/2}(\xi(t), \dot{\xi}(t)) dt, \quad L_{1/2} = |\langle \xi | i\hbar \partial_t - H | \xi \rangle| dt. \quad (\text{B.7})$$

En esta notación s es fijo, y $|\xi\rangle = |s, \xi\rangle$. Los mínimos de la acción $S_{L_{1/2}}$ sobre trayectorias con puntos iniciales y finales fijos son puntos críticos de $S_{L_{1/2}}$, y satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange para $\xi(t)$, las cuales examinaremos más adelante.

Fijar s es compatible con el hecho que los subespacios V_s de s cuántos son invariantes bajo la evolución cuántica exacta de los sistemas que estamos considerando. Notamos que además los parámetros ξ se mueven en el espacio fase clásico \mathbb{C}^f , con $|\xi|^2 = 1$. La restricción a $|\xi|^2 = 1$ es compatible con la conservación de la cantidad $P(\xi) = |\xi|^2$ para los sistemas que estamos considerando. Además cada condición inicial $\xi(0) \in \mathbb{C}^f$ puede ser re-escalada para satisfacer $|\xi(0)|^2 = 1$. Aplicando el mismo re-escalamiento al Hamiltoniano podemos estudiar una dinámica equivalente en la hipersfera definida por $P(\xi) = 1$.

En la literatura [47, 46] se ha considerado también el funcional de acción

$$S[\xi(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(\xi(t), \dot{\xi}(t)) dt \quad (\text{B.8})$$

donde el Lagrangiano es

$$L(\xi) = i\hbar\langle\xi|\partial_t|\xi\rangle - \langle\xi|H|\xi\rangle. \quad (\text{B.9})$$

Las ecuaciones Euler-Lagrange para L proporciona las ecuaciones dinámicas de las variables ξ_i . Este principio variacional se obtiene considerando estados cuánticos de la forma $|\Psi\rangle = e^{iS(\xi)}|\xi\rangle$, con $|\xi\rangle$ los estados definidos en el párrafo anterior. Imponiendo la ecuación de Schrödinger (B.3) a este Ansatz obtenemos

$$\dot{S} = i\hbar\langle\xi|\partial_t|\xi\rangle - \langle\xi|H|\xi\rangle,$$

del que S es dado por (B.8), (B.9). El principio de acción (fase) crítica para el Ansatz $e^{iS(\xi)}|\xi\rangle$ se postula por analogía con los métodos de óptica geométrica. Notamos aquí que L no parece ser en general real, por lo que también examinaremos $\text{Re}(L)$.

En lo que sigue obtenemos expresiones explícitas de los Lagrangianos L de (B.9) y $L_{1/2}$ de (B.7) en términos de ξ , $\dot{\xi}$. Dichas expresiones nos permitirán escribir y comparar las ecuaciones Euler-Lagrange correspondientes.

El número de cuantos s se considera fijo, y usamos la notación simplificada $|\xi\rangle = |s, \xi\rangle$, y $|\xi'\rangle = |s-1, \xi\rangle$. Considere el primer sumando de $L(\xi)$,

$$\begin{aligned} \langle\xi|\partial_t|\xi\rangle &= \langle\xi|\frac{\partial}{\partial t}\frac{(A^\dagger)^s}{\sqrt{s!}}|0, 0, \dots, 0\rangle \\ &= \langle\xi|\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{s!}}\left(\sum_{i=1}^f \xi_i B_i^\dagger\right)^s|0, 0, \dots, 0\rangle \\ &= \langle\xi|\frac{s}{\sqrt{s!}}\left(\sum_{i=1}^f \xi_i B_i^\dagger\right)^{s-1}\left(\sum_{i=1}^f \frac{\partial \xi_i}{\partial t} B_i^\dagger\right)|0, 0, \dots, 0\rangle \\ &= \langle\xi|\sum_{i=1}^f \frac{s}{\sqrt{s!}}(A^\dagger)^{s-1} \frac{\partial \xi_i}{\partial t} B_i^\dagger|0, 0, \dots, 0\rangle. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial|\xi\rangle}{\partial \xi_j} &= \frac{\partial}{\partial \xi_j} \frac{1}{\sqrt{s!}} \left(\sum_{i=1}^f \xi_i B_i^\dagger\right)^s |0, 0, \dots, 0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{s!}} s \left(\sum_{i=1}^f \xi_i B_i^\dagger\right)^{s-1} B_j^\dagger |0, 0, \dots, 0\rangle \\ &= \frac{s}{\sqrt{s!}} (A^\dagger)^{s-1} B_j^\dagger |0, 0, \dots, 0\rangle. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\langle \xi | \partial_t | \xi \rangle &= \langle \xi | \sum_{i=1}^f \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi_i} | \xi \rangle \\
&= \frac{1}{s!} \langle 0, \dots, 0, 0 | (A)^s \sum_{i=1}^f \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi_i} (A^\dagger)^s | 0, 0, \dots, 0 \rangle \\
&= \frac{1}{s!} \langle 0, \dots, 0, 0 | (A)^{s-1} A \sum_{i=1}^f \frac{\partial \xi_i}{\partial t} s (A^\dagger)^{s-1} B_i^\dagger | 0, 0, \dots, 0 \rangle \\
&= \frac{1}{(s-1)!} \langle 0, \dots, 0, 0 | (A)^{s-1} \sum_{i=1}^f \frac{\partial \xi_i}{\partial t} A B_i^\dagger (A^\dagger)^{s-1} | 0, 0, \dots, 0 \rangle \\
&= \langle \xi' | \sum_{i=1}^f \frac{\partial \xi_i}{\partial t} A B_i^\dagger | \xi' \rangle \tag{B.10}
\end{aligned}$$

donde $|\xi'\rangle = |s-1, \xi\rangle$. Ahora, de $A = \sum_{i=1}^f \xi_i^* B_i$ se obtiene,

$$[A, B_i^\dagger] = -[B_i^\dagger, A] = \xi_i^*, \tag{B.11}$$

de donde $A B_i^\dagger = \xi_i^* + B_i^\dagger A$. Sustituyendo en (B.10) se tiene,

$$\begin{aligned}
\langle \xi | \partial_t | \xi \rangle &= \langle \xi' | \frac{\partial \xi_i}{\partial t} [a_i^\dagger A + \xi_i^*] | \xi' \rangle \\
&= \langle \xi' | \sum_{i=1}^f \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \xi_i^* | \xi' \rangle + \langle \xi' | \sum_{i=1}^f \frac{\partial \xi_i}{\partial t} a_i^\dagger A | \xi' \rangle \\
&= \sum_{i=1}^f \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \xi_i^* + \langle \xi' | \sum_{i=1}^f \frac{\partial \xi_i}{\partial t} a_i^\dagger A | \xi' \rangle \\
&= \sum_{i=1}^f \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \xi_i^* + \langle \xi' | \sum_{i=1}^f \frac{\partial \xi_i}{\partial t} a_i^\dagger \sum_{k=1}^f \xi_k^* a_k | \xi' \rangle \\
&= \sum_{i=1}^f \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \xi_i^* + \langle \xi' | \sum_{i=1}^f \sum_{k=1}^f \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \xi_k^* a_i^\dagger a_k | \xi' \rangle \\
&= \sum_{i=1}^f \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \xi_i^* + \sum_{i=1}^f \sum_{k=1}^f \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \xi_k^* \langle \xi' | a_i^\dagger a_k | \xi' \rangle. \tag{B.12}
\end{aligned}$$

Combinando con (A.39) se obtiene,

$$\langle \xi | \partial_t | \xi \rangle = \sum_{i=1}^f \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \xi_i^* + \sum_{i=1}^f \sum_{k=1}^f (s-1) \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \xi_k^* \xi_i^* \xi_k \tag{B.13}$$

y usando $\sum_{i=1}^f |\xi_i|^2 = 1$,

$$\langle \xi | \partial_t | \xi \rangle = \sum_{i=1}^f \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \xi_i^* + \sum_{i=1}^f (s-1) \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \xi_i^*, \quad (\text{B.14})$$

de donde finalmente se obtiene que,

$$\langle \xi | \partial_t | \xi \rangle = s \sum_{i=1}^f \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \xi_i^*, \quad (\text{B.15})$$

y también,

$$\langle \xi | \partial_t | \xi \rangle^* = s \sum_{i=1}^f \frac{\partial \xi_i^*}{\partial t} \xi_i. \quad (\text{B.16})$$

De forma análoga se puede hacer el cálculo de $\langle \xi | \hat{H} | \xi \rangle$, esto es,

$$\begin{aligned} \langle \xi | \hat{H} | \xi \rangle &= (1-2\delta) \sum_{j=1}^f \langle \xi | B_j^\dagger B_j | \xi \rangle + \sum_{j=1}^f \langle \xi | B_j^\dagger B_j B_j^\dagger B_j | \xi \rangle \\ &+ \delta \sum_{j=1}^f \langle \xi | \left(B_j^\dagger B_{j+1} + B_j B_{j+1}^\dagger \right) | \xi \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

De acuerdo con lo anterior cada sumando de (B.17) puede ser calculado como,

$$\langle \xi | B_i^\dagger B_i | \xi \rangle = s \xi_i^* \xi_i \langle \xi' | \xi' \rangle = s |\xi_i|^2 \quad (\text{B.18})$$

donde se ha utilizado que $\langle \xi' | \xi' \rangle = 1$. Además

$$\begin{aligned} \langle \xi | B_i^\dagger B_i B_i^\dagger B_i | \xi \rangle &= \langle \xi | B_i^\dagger (1 + B_i^\dagger B_i) B_i | \xi \rangle \\ &= \langle \xi | B_i^\dagger B_i | \xi \rangle + \langle \xi | B_i^\dagger B_i^\dagger B_i B_i | \xi \rangle \\ &= s |\xi_i|^2 + s(s-1) |\xi_i|^4. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

También,

$$\begin{aligned} \langle \xi | (B_i^\dagger B_{i+1} + B_i B_{i+1}^\dagger) | \xi \rangle &= \langle \xi | (B_i^\dagger B_{i+1} | \xi \rangle + \langle \xi | B_i B_{i+1}^\dagger | \xi \rangle) \\ &= s (\xi_i^* \xi_{i+1} + \xi_i \xi_{i+1}^*), \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

de donde el valor de expectación del Hamiltoniano (2.8) queda finalmente como,

$$\begin{aligned} \langle \xi | \hat{H} | \xi \rangle &= -2\delta s \sum_{i=1}^f |\xi_i|^2 + s(s-1) \sum_{i=1}^f |\xi_i|^4 \\ &+ \delta s \sum_{i=1}^f (\xi_i^* \xi_{i+1} + \xi_i \xi_{i+1}^*) + 2s \sum_{i=1}^f |\xi_i|^2. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

El último término se origina por el tipo de ordenamiento que se ha utilizado en los operadores B y B^\dagger . En este caso se ha utilizado un ordenamiento simétrico (2.4).

Sustituyendo los resultados (B.15), (B.16) y (B.21) en (B.9), se tiene que el lagrangiano queda finalmente como

$$\begin{aligned} \text{Re}L(\xi) &= \frac{1}{2}is \sum_{j=1}^f \left(\frac{d\xi_j}{dt} \xi_j^* - \frac{d\xi_j^*}{dt} \xi_j \right) + 2\delta s \sum_{j=1}^f |\xi_j|^2 - s(s-1) \sum_{j=1}^f |\xi_j|^4 \\ &- \delta s \sum_{j=1}^f (\xi_j^* \xi_{j+1} + \xi_j \xi_{j+1}^*) - 2s \sum_{j=1}^f |\xi_j|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Observamos que $\langle \xi | \hat{H} | \xi \rangle$ es real, y que tiene la forma del Hamiltoniano del sistema clásico, módulo constantes. Definimos entonces H por $H = \langle \xi | \hat{H} | \xi \rangle$. H es una función de las variables canónicas ξ_j, ξ_j^* .

El término $i\langle \xi | \partial_t | \xi \rangle$ no parece ser en general real. Sin embargo, de

$$i \frac{d\xi_j}{dt} \xi_j^* = i \frac{1}{2} i \left(\frac{d\xi_j}{dt} \xi_j^* - \frac{d\xi_j^*}{dt} \xi_j \right) + i \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\xi_j|^2,$$

donde $j = 1, \dots, f$ y las partes $\langle \xi | \partial_t | \xi \rangle$ y $\text{Re}(\langle \xi | \partial_t | \xi \rangle)$ de L y $\text{Re}(L)$ respectivamente difieren en una derivada. Entonces, las ecuaciones de Euler-Lagrange de L y $\text{Re}(L)$ son idénticas. En particular, las ecuaciones de Euler-Lagrange de L

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_j} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_k} = 0, \quad (\text{B.23})$$

para $j = 1, \dots, f$. Obtenemos

$$h \dot{\xi}_j = -i \frac{\partial H}{\partial \xi_j^*}, \quad j = 1, \dots, f,$$

que son las ecuaciones de Hamilton, módulo la constante h que se puede absorber en un re-escalamiento del tiempo.

Considerando el Langrangiano $L_{1/2} = |L|$, tenemos

$$|L|^2 = h^2 |\dot{\xi}|^2 |\xi|^2 - ihH \sum_{j=1}^f (\dot{\xi}_j \xi_j^* - \dot{\xi}_j^* \xi_j) + H^2, \quad (\text{B.24})$$

y

$$|L| = |H| + ih \frac{H}{|H|} \sum_{j=1}^f (\dot{\xi}_j \xi_j^* - \dot{\xi}_j^* \xi_j) + O(h^2),$$

entonces

$$|L| = \pm \left(H + ih \sum_{j=1}^f (\dot{\xi}_j \xi_j^* - \dot{\xi}_j^* \xi_j) \right) + O(h^2),$$

para $|H| = \pm H$ respectivamente. Las ecuaciones de Euler-Lagrange para $L_{1/2} = |L|$ y $|L|^2$ son entonces las ecuaciones de Hamilton, módulo un error de $O(\hbar^2)$.

Esta derivación alternativa de las ecuaciones de Hamilton hace explícito que son una aproximación de un funcional que minimiza el error de los estados coherentes.

En el caso del Lagrangiano $|L|^2$ de (B.24) el error $O(\hbar^2)$ esta escrito explícitamente y se interpreta como un término de energía cinética con masa que depende de $|\xi|^2$. Por ejemplo, para $f = 1$ grados de libertad, con $z = q + ip$, tenemos

$$|L|^2 = \hbar^2(\dot{q}^2 + \dot{p}^2)(q^2 + p^2) + 2\hbar(q\dot{p} - \dot{q}p)H + H^2.$$

La relevancia de la corrección $O(\hbar^2)$ esta por investigarse en el futuro. Además, la derivación variacional de las ecuaciones de Hamilton no garantiza la cercanía de las trayectorias clásicas de estados coherentes. Este es precisamente el problema que hemos abordado en la tesis.

Concluimos esta sección observando que usando $u_i = \sqrt{s}\xi_i$ en (B.21), se obtiene

$$\begin{aligned} H = \langle \xi | \hat{H} | \xi \rangle = & - 2\delta \sum_{i=1}^f |u_i|^2 + \frac{s-1}{s} \sum_{i=1}^f |u_i|^4 \\ & + \delta \sum_{i=1}^f (u_i^* u_{i+1} + u_i u_{i+1}^*) + 2 \sum_{i=1}^f |u_i|^2. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Este es el Hamiltoniano clásico (1.16) con dos diferencias, primero la adición del constante de movimiento P , y también un constante que depende de s en frente del término no lineal. El término P se puede eliminar con un cambio de variable de la forma $u_j = e^{ict} v_j$, y entonces no afecta la dinámica. El factor que depende de s da una dinámica ligeramente diferente de la (1.1), es decir, la ecuación que obtenemos de (B.25) y las ecuaciones de Euler-Lagrange para L son

$$\frac{du_j}{dt} = -i\delta (\Delta u)_j - 2i \frac{s-1}{s} |u_j|^2 u_j, \quad (\text{B.26})$$

donde como ya se había mencionado,

$$\begin{aligned} (\Delta u)_j &= u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j, \quad j = 2, \dots, f-1, \\ (\Delta u)_1 &= u_2 - 2u_1, \quad (\Delta u)_f = u_{f-1} - 2u_f, \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

y difiere de (1.1) por el factor $(s-1)/s$. La ecuación (B.26) puede interpretarse como la proyección de la ecuación (1.1) en un subespacio de Hilbert de s partículas. Nótese que para un número grande s de bosones las ecuaciones (B.26) se aproximan a las ecuaciones clásicas (1.1). En nuestro estudio no hemos tomado en cuenta este factor, y es probable que afecte poco nuestros resultados. Esta ligera dependencia en s en las ecuaciones semiclásicas se puede considerar en un futuro estudio.

Apéndice C

Relación de completez de los estados $|s, \xi\rangle$

Presentamos ahora una demostración de la relación de completez de los estados $|s, \xi\rangle$, enunciada en el Apéndice A.

Proposición C.0.2 (*Relación de completez*). Sea $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_f) \in \mathbb{C}^f$, y

$$J_s = \int_{\mathbb{C}} d\mu(\xi_1) \int_{\mathbb{C}} d\mu(\xi_2) \dots \int_{\mathbb{C}} d\mu(\xi_f) \delta(|\xi| - 1) |s, \xi\rangle \langle s, \xi|, \quad (\text{C.1})$$

donde δ es la función delta de Dirac y

$$d\mu(\xi_j) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{(s+f-1)!}{s!} \right)^{\frac{1}{f}} d^2 \xi_j = \frac{1}{\pi} \left(\frac{(s+f-1)!}{s!} \right)^{\frac{1}{f}} d(\text{Re} \xi_j) d(\text{Im} \xi_j). \quad (\text{C.2})$$

Entonces

$$J_s = \hat{1},$$

donde $\hat{1}$ es la matriz unitaria en V_s , i.e. de dimensión $\frac{(s+f-1)!}{(f-1)!s!} \times \frac{(s+f-1)!}{(f-1)!s!}$.

Demostración. Considere explícitamente el estado coherente (A.26)

$$|s, \xi_1, \dots, \xi_f\rangle = \sum_{\sum_{j=1}^f m_j = s} \frac{\sqrt{s!}}{\sqrt{m_1! m_2! \dots m_f!}} \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} \dots \xi_f^{m_f} |m_1, \dots, m_f\rangle \quad (\text{C.3})$$

con la restricción $|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \dots + |\xi_f|^2 = 1$, por lo que los estados coherentes (A.26) o (C.3) están definidos sobre la esfera de dimensión $f+1$.

Entonces J_s de (C.1) se puede escribir explícitamente como [?],

$$\begin{aligned} & \frac{(s+f-1)!}{s!} \frac{1}{\pi^f} \int_{\mathbb{C}} d^2 \xi_1 \int_{\mathbb{C}} d^2 \xi_2 \dots \int_{\mathbb{C}} d^2 \xi_f \delta(|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \dots + |\xi_f|^2 - 1) s! \\ & \sum_{\sum_{j=1}^f m_j = s} \sum_{\sum_{j=1}^f k_j = s} \frac{\xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} \dots \xi_f^{m_f} \bar{\xi}_1^{k_1} \bar{\xi}_2^{k_2} \dots \bar{\xi}_f^{k_f}}{\sqrt{m_1! m_2! \dots m_f! k_1! k_2! \dots k_f!}} |m\rangle \langle k| \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

donde la barra encima de las ξ 's significa complejo conjugado y, $|m\rangle = |m_1, \dots, m_f\rangle$, $|k\rangle = |k_1, \dots, k_f\rangle$ son elementos de la base de número de ocupación en el subespacio de s bosones definidos en la sección 2.1 de la tesis (también denotados estados Fock).

Sean $\xi_j = x_j + iy_j = r_j e^{i\theta_j}$ de donde $d^2\xi_j = r_j dr_j d\theta_j$ entonces de (C.4) el integral J_s es

$$\begin{aligned} & \frac{(s+f-1)!}{s!} \frac{1}{\pi^f} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r_1 dr_1 d\theta_1 \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r_2 dr_2 d\theta_2 \dots \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r_f dr_f d\theta_f \\ & \delta(r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_f^2 - 1) s! \sum_{\vec{m}}^{(s)} \sum_{\vec{k}}^{(s)} \\ & \frac{(r_1 e^{i\theta_1})^{m_1} (r_2 e^{i\theta_2})^{m_2} \dots (r_f e^{i\theta_f})^{m_f} (r_1 e^{-i\theta_1})^{k_1} (r_2 e^{-i\theta_2})^{k_2} \dots (r_f e^{-i\theta_f})^{k_f}}{\sqrt{m_1! m_2! \dots m_f! k_1! k_2! \dots k_f!}} \\ & |m\rangle \langle k| \end{aligned} \tag{C.5}$$

que puede ser reescrita como,

$$\begin{aligned} & \frac{(s+f-1)!}{s!} \frac{1}{\pi^f} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r_1 dr_1 d\theta_1 \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r_2 dr_2 d\theta_2 \dots \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r_f dr_f d\theta_f \\ & \delta(r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_f^2 - 1) s! \sum_{\vec{m}}^{(s)} \sum_{\vec{k}}^{(s)} \\ & \frac{r_1^{(m_1+k_1)} r_2^{(m_2+k_2)} \dots r_f^{(m_f+k_f)} e^{i(m_1-k_1)\theta_1} e^{i(m_2-k_2)\theta_2} \dots e^{i(m_f-k_f)\theta_f}}{\sqrt{m_1! m_2! \dots m_f! k_1! k_2! \dots k_f!}} \\ & |m\rangle \langle k|. \end{aligned} \tag{C.6}$$

Integrando sobre todos los ángulos θ_j con $j = 1, \dots, f$ y utilizando que

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-k)\theta} d\theta = 2\pi \delta_{\mu, \kappa},$$

con μ y κ enteros y $\delta_{\mu, \kappa}$ la delta de Kronecker, se tiene entonces de (C.6) que J_s es

$$\begin{aligned} & \frac{(s+f-1)!}{s!} \frac{(2\pi)^f}{\pi^f} \int_0^\infty dr_1 \int_0^\infty dr_2 \dots \int_0^\infty dr_f \delta(r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_f^2 - 1) s! \\ & \sum_{\vec{m}}^{(s)} \frac{r_1^{2m_1+1} r_2^{2m_2+1} \dots r_f^{2m_f+1}}{m_1! m_2! \dots m_f!} |m\rangle \langle m|. \end{aligned} \tag{C.7}$$

Las integrales anteriores pueden ser calculadas utilizando las coordenadas llamadas f -esféricas [82], donde

$$\begin{aligned}
r_1 &= r \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \dots \operatorname{sen} \theta_{f-1} \\
r_2 &= r \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \dots \operatorname{sen} \theta_{f-1} \\
r_3 &= r \cos \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3 \dots \operatorname{sen} \theta_{f-1} \\
r_4 &= r \cos \theta_3 \operatorname{sen} \theta_4 \dots \operatorname{sen} \theta_{f-1} \\
r_5 &= r \cos \theta_4 \operatorname{sen} \theta_5 \dots \operatorname{sen} \theta_{f-1} \\
&\vdots \\
r_{f-1} &= r \cos \theta_{f-2} \operatorname{sen} \theta_{f-1} \\
r_f &= r \cos \theta_{f-1}.
\end{aligned} \tag{C.8}$$

Bajo estas coordenadas se tiene que $r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_f^2 - 1 = r^2 - 1$. Además, puesto que $r_1, r_2, \dots, r_f \geq 0$, todos los ángulos θ_j dados por (C.8) van de 0 a $\frac{\pi}{2}$. Entonces el integral J_s de (C.7) se escribe como,

$$\begin{aligned}
&2^f (s + f - 1)! \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta(r^2 - 1) \sum_{\vec{m}}^{(s)} (r \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \dots \operatorname{sen} \theta_{f-1})^{2m_1+1} \times \\
&\times (r \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \dots \operatorname{sen} \theta_{f-1})^{2m_2+1} \dots (r \cos \theta_{f-1})^{2m_f+1} \\
&\frac{1}{m_1! m_2! \dots m_f!} r^{f-1} \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen}^2 \theta_3 \operatorname{sen}^3 \theta_4 \dots \operatorname{sen}^{f-2} \theta_{f-1} \\
&dr d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{f-1} |m\rangle \langle m|,
\end{aligned} \tag{C.9}$$

donde se ha utilizado el valor absoluto del jacobiano de la transformación [82]

$$\frac{\partial(r_1, r_2, \dots, r_f)}{\partial(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{f-1})} = (-1)^f r^{f-1} \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen}^2 \theta_3 \operatorname{sen}^3 \theta_4 \dots \operatorname{sen}^{f-2} \theta_{f-1}.$$

Realizando la integral sobre r y utilizando la propiedad de la delta de Dirac,

$$\int_0^\infty \delta(r^2 - 1) h(r) dr = \frac{1}{2} h(1)$$

con $h : R \rightarrow R$ función continua arbitraria, se tiene que J_s de (C.9) se reduce a

$$\begin{aligned}
&(s + f - 1)! \frac{2^f}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{\vec{m}}^{(s)} (\operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \dots \operatorname{sen} \theta_{f-1})^{2m_1+1} \times \\
&\times (\cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \dots \operatorname{sen} \theta_{f-1})^{2m_2+1} \dots (\cos \theta_{f-1})^{2m_f+1} \\
&\frac{1}{m_1! m_2! \dots m_f!} \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen}^2 \theta_3 \operatorname{sen}^3 \theta_4 \dots \operatorname{sen}^{f-2} \theta_{f-1} \\
&d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{f-1} |m\rangle \langle m|.
\end{aligned} \tag{C.10}$$

Realizando las integrales angulares no es difícil verificar que siguen cierta regla general. Por ejemplo para θ_1 se tiene,

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{sen}\theta_1)^{2m_1+1} (\text{cos}\theta_1)^{2m_2+1} d\theta_1 \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}\theta_1 \cos\theta_1 (\text{sen}^2\theta_1)^{m_1} (\text{cos}^2\theta_1)^{m_2} d\theta_1 \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}\theta_1 \cos\theta_1 (\text{sen}^2\theta_1)^{m_1} (1 - \text{sen}^2\theta_1)^{m_2} d\theta_1. \tag{C.11}
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $x = \text{sen}^2\theta_1$ de donde $dx = 2\text{sen}\theta_1 \cos\theta_1 d\theta_1$, es decir, $\frac{1}{2}dx = \text{sen}\theta_1 \cos\theta_1 d\theta_1$ se tiene que,

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}\theta_1 \cos\theta_1 (\text{sen}^2\theta_1)^{m_1} (1 - \text{sen}^2\theta_1)^{m_2} d\theta_1 \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 x^{m_1} (1-x)^{m_2} dx = \frac{1}{2} \frac{m_1! m_2!}{(m_1 + m_2 + 1)!}, \tag{C.12}
\end{aligned}$$

donde se ha usado la función beta dada por

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}. \tag{C.13}$$

Para θ_2 se tiene,

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{sen}\theta_2)^{2m_1+1} (\text{sen}\theta_2)^{2m_2+1} (\text{cos}\theta_2)^{2m_3+1} \text{sen}\theta_2 d\theta_2 \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}\theta_2 \cos\theta_2 (\text{sen}\theta_2)^{2m_1+2m_2+2} (\text{cos}\theta_2)^{2m_3} d\theta_2 \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}\theta_2 \cos\theta_2 (\text{sen}^2\theta_2)^{m_1+m_2+1} (\text{cos}^2\theta_2)^{m_3} d\theta_2 \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}\theta_2 \cos\theta_2 (\text{sen}^2\theta_2)^{m_1+m_2+1} (1 - \text{sen}^2\theta_2)^{m_3} d\theta_2 \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 x^{m_1+m_2+1} (1-x)^{m_3} dx = \frac{1}{2} \frac{(m_1+m_2+1)! m_3!}{(m_1+m_2+m_3+2)!}. \tag{C.14}
\end{aligned}$$

El caso general se puede tratar por inducción, es decir,

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{sen}\theta_{f-1})^{2m_1+1} (\text{sen}\theta_{f-1})^{2m_2+1} \dots (\text{cos}\theta_{f-1})^{2m_f+1} \text{sen}^{f-2}\theta_{f-1} d\theta_{f-1} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}\theta_{f-1} \cos\theta_{f-1} (\text{sen}^2\theta_{f-1})^{m_1+m_2+\dots+m_{f-1}+f-2} (\text{cos}^2\theta_{f-1})^{m_f} d\theta_{f-1} \\
&= \frac{1}{2} \frac{(m_1 + m_2 + \dots + m_{f-1} + f - 2)! m_f!}{(m_1 + m_2 + \dots + m_f + f - 1)!}. \tag{C.15}
\end{aligned}$$

Finalmente sustituyendo los resultados (C.12), (C.14) y el término general (C.15) en la ecuación (C.10) se sigue la relación de completitud ecuación (C.1), ya que

$$\sum_{s=m_1+m_2+\dots+m_f} |m\rangle \langle m| = \hat{1} \tag{C.16}$$

con $|m\rangle = |m_1, \dots, m_f\rangle$, debido a la ortogonalidad correspondiente de los estados Fock $|m\rangle$ de la sección 3.2. \square

Apéndice D

Relación de los estados coherentes generalizados $|s, \xi\rangle$ con el grupo $SU(f)$

El siguiente texto justifica los resultados mostrados en la sección (3.4.6) referente a la relación de los estados coherentes generalizados $|s, \xi\rangle$ con el grupo $SU(f)$.

Dada una representación $T : V_s \rightarrow V_s$, el subgrupo de isotropía o grupo de estabilidad máxima $H \subset G$ consta de los elementos que dejan al estado de referencia invariante salvo un factor de fase, es decir

$$T(h)|\psi_0\rangle = e^{i\phi(h)}|\psi_0\rangle \quad (\text{D.1})$$

con $\phi(h) \in \mathbb{R}$, $\forall h \in H$.

Considerando a los estados coherentes, se tiene una única descomposición para cada elemento $g \in G$ en un producto de dos elementos: uno que pertenece al subgrupo de isotropía H y uno al espacio coset G/H , con $g = \Omega h$, $g \in G$, $h \in H$, y $\Omega \in G/H$.

Finalmente, se observa que existe una correspondencia uno a uno entre los elementos $\Omega(g)$ del espacio coset G/H y los estados coherentes $|\Omega\rangle = |\psi_\Omega\rangle$ que preserva las propiedades algebraicas y topológicas. Esta construcción garantiza la propiedad característica de los estados coherentes: un estado coherente permanece coherente bajo evolución temporal lineal en los generadores del grupo dinámico.

Para el caso de estados coherentes $SU(f)$ una selección apropiada del estado de referencia es el estado de espín máximo, correspondiendo al estado con todas las partículas en el primer sitio $|s, 0, \dots\rangle$. Por lo tanto, el estado coherente $|\xi\rangle = |s, \xi\rangle \in V_s$ es generado por la acción del grupo en ese estado. La deducción siguiente da la relación entre los estados $|\xi\rangle$ y el grupo $SU(f)$, y esta basada en [46].

Considere el operador \hat{E} dado por,

$$\hat{E} = e^{i\hat{S}} e^{i\hat{D}} \quad (\text{D.2})$$

donde

$$\hat{S} = \sum_{j=1}^f \phi_j \hat{n}_j, \quad \hat{D} = \sum_{j=2}^f \theta_j (B_1^\dagger B_j + B_j^\dagger B_1) \quad (\text{D.3})$$

con ϕ_j y θ_j números reales, y $\hat{n}_j = B_j^\dagger B_j$.

Proposición D.0.3 La acción de $e^{i\hat{D}}$ en \hat{B}_1^\dagger está dada por la fórmula

$$e^{i\hat{D}} \hat{B}_1^\dagger e^{-i\hat{D}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} [\hat{D}, \hat{B}_1^\dagger]_k \quad (\text{D.4})$$

donde $[\hat{D}, \hat{B}_1^\dagger]_k = [\hat{D}, [\hat{D}, \hat{B}_1^\dagger]_{k-1}]$, $k \geq 2$, $[\hat{D}, \hat{B}_1^\dagger]_1 = [\hat{D}, \hat{B}_1^\dagger]$, y $[\hat{D}, \hat{B}_1^\dagger]_0 = \hat{B}_1^\dagger$.

Demostración. Considere la función operador

$$\hat{A}(\lambda) = e^{\lambda \hat{L}} \hat{A} e^{-\lambda \hat{L}} \quad (\text{D.5})$$

de donde se tiene por el proceso normal de derivación, tomando en cuenta el carácter de la no conmutatividad de los operadores involucrados,

$$\frac{d\hat{A}(\lambda)}{d\lambda} = -e^{\lambda \hat{L}} \hat{A} e^{-\lambda \hat{L}} \hat{L} + \hat{L} e^{\lambda \hat{L}} \hat{A} e^{-\lambda \hat{L}} = [\hat{L}, \hat{A}(\lambda)]$$

De una segunda derivada se tiene,

$$\frac{d^2 \hat{A}(\lambda)}{d\lambda^2} = \hat{L} \frac{d\hat{A}}{d\lambda} - \frac{d\hat{A}}{d\lambda} \hat{L} = \hat{L} [\hat{L}, \hat{A}(\lambda)] - [\hat{L}, \hat{A}(\lambda)] \hat{L} = [\hat{L}, [\hat{L}, \hat{A}(\lambda)]].$$

Definiendo a

$$[\hat{L}, \hat{A}(\lambda)]_n = [\hat{L}, [\hat{L}, \hat{A}(\lambda)]_{n-1}],$$

la primera y segunda derivada de $\hat{A}(s)$ se pueden escribir de forma compacta como,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{A}}{d\lambda} &= [\hat{L}, \hat{A}(\lambda)]_1 = [\hat{L}, \hat{A}(\lambda)], \\ \frac{d^2 \hat{A}(\lambda)}{d\lambda^2} &= [\hat{L}, \hat{A}(\lambda)]_2, \end{aligned}$$

y en general, por inducción, se obtiene,

$$\frac{d^k \hat{A}(\lambda)}{d\lambda^k} = [\hat{L}, \hat{A}(\lambda)]_k.$$

Haciendo un desarrollo de Taylor alrededor de $\lambda = 0$ de la función $\hat{A}(\lambda)$ se obtiene,

$$\hat{A}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^{(k)}(0)}{k!} \lambda^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\hat{L}, \hat{A}(0)]_k}{k!} \lambda^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\hat{L}, \hat{A}]_k}{k!} \lambda^k. \quad (\text{D.6})$$

Considerando el caso particular $e^{i\hat{D}} \hat{a}_1^\dagger e^{-i\hat{D}}$ donde $[i\hat{D}, \hat{a}_1^\dagger]_k = i^k [\hat{D}, \hat{a}_1^\dagger]_k$ y evaluando en $\lambda = 1$ se obtiene finalmente

$$e^{i\hat{D}} \hat{B}_1^\dagger e^{-i\hat{D}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} [\hat{D}, \hat{B}_1^\dagger]_k$$

□

Calculando de manera directa se tiene que

$$[\hat{D}, \hat{B}_1^\dagger] = \hat{D} B_1^\dagger - B_1^\dagger \hat{D} = \sum_{k=2}^f \theta_j (B_1^\dagger B_j + B_j^\dagger B_1) B_1^\dagger - B_1^\dagger \sum_{k=2}^f \theta_j (B_1^\dagger B_j + B_j^\dagger B_1),$$

pero $[B_1, B_j^\dagger] = 0$ para $j = 2, 3, \dots, f$, de donde,

$$\begin{aligned} [\hat{D}, \hat{B}_1^\dagger] &= \hat{D} B_1^\dagger - B_1^\dagger \hat{D} = \sum_{k=2}^f \theta_j (B_j^\dagger B_1 B_1^\dagger - B_j^\dagger B_1^\dagger B_1) \\ &= \sum_{k=2}^f \theta_j B_j^\dagger (B_1 B_1^\dagger - \hat{B}_1^\dagger B_1) = \sum_{k=2}^f \theta_j \hat{B}_j^\dagger [B_1, B_1^\dagger] \\ &= \sum_{k=2}^f \theta_j B_j^\dagger, \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

donde se ha usado que $[B_1, B_1^\dagger] = \hat{1}$.

De forma semejante,

$$\begin{aligned} [\hat{D}, B_1]_2 &= [\hat{D}, [\hat{D}, B_1]] = [\hat{D}, \sum_{k=2}^f \theta_j B_j^\dagger] = \sum_{k=2}^f \theta_j [\hat{D}, B_j^\dagger] \\ &= \sum_{k=2}^f \theta_j (\hat{D} B_j^\dagger - B_j^\dagger \hat{D}) \\ &= \sum_{k=2}^f \theta_j \left(\sum_{k=2}^f \theta_k (B_1^\dagger B_k + B_k^\dagger B_1) B_j^\dagger - B_j^\dagger \sum_{k=2}^f \theta_k (B_1^\dagger B_k + B_k^\dagger B_1) \right) \\ &= \sum_{j=2}^f \theta_j \left(\sum_{k=2}^f \theta_k (B_1^\dagger B_k B_j^\dagger - B_1^\dagger B_j^\dagger B_k) \right) \\ &= \sum_{j=2}^f \theta_j \sum_{k=2}^f \theta_k B_1^\dagger [B_k, B_j^\dagger] = \sum_{j=2}^f \theta_j \sum_{k=2}^f \theta_k B_1^\dagger \delta_{k,j} = \sum_{j=2}^f \theta_j^2 B_1^\dagger, \end{aligned}$$

de donde $[\hat{D}, \hat{a}_1]_2 = \sum_{j=2}^f \theta_j^2 B_1^\dagger$. Análogamente

$$\begin{aligned} [\hat{D}, \hat{a}_1]_3 &= [\hat{D}, [\hat{D}, B_1^\dagger]_2] = [\hat{D}, \sum_{j=2}^f \theta_j^2 B_1^\dagger] \\ &= \sum_{j=2}^f \theta_j^2 [\hat{D}, B_1^\dagger] = \sum_{j=2}^f \theta_j^2 \left(\sum_{k=2}^f \theta_k^2 B_k^\dagger \right) \end{aligned}$$

Siguiendo iterativamente se observa que hay una separación en el cálculo de $[\hat{D}, B_1^\dagger]_l$ dependiendo de si l par o impar, de tal manera que $[\hat{D}, B_1^\dagger]_{2r} = \theta^{2r} B_1^\dagger$ y $[\hat{D}, B_1^\dagger]_{2r+1} = \theta^{2r} Q$ con $Q = \sum_{k=2}^f \theta_k \hat{B}_k^\dagger$ y $\theta^2 = \sum_{k=2}^f \theta_k^2$, de donde se obtiene que

$$\begin{aligned} e^{i\hat{D}} B_1^\dagger e^{-i\hat{D}} &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r)!} \theta^{2r} B_1^\dagger + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{i(-1)^r}{(2r+1)!} \theta^{2r} Q \\ &= B_1^\dagger \cos \theta + iQ \frac{\text{sen} \theta}{\theta} = \sum_{j=1}^f y_j \hat{B}_j^\dagger, \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

donde se ha identificado a

$$y_1 = \cos \theta, \quad y_k = i\theta_k \frac{\text{sen} \theta}{\theta}, \quad k = 2, \dots, f.$$

De una acción adicional de $e^{i\hat{S}}$ se obtiene

$$EB_1^\dagger E^\dagger = e^{i\hat{S}} e^{i\hat{D}} \hat{B}_1^\dagger e^{-i\hat{D}} e^{-i\hat{S}} = \sum_{j=1}^f y_j e^{i\phi_j} B_j^\dagger = \sum_{j=1}^f \xi_j \hat{B}_j^\dagger = A^\dagger \quad (\text{D.9})$$

donde

$$\xi_1 = e^{i\phi_1} \cos \theta, \quad \xi_k = i\theta_k e^{i\phi_k} \frac{\text{sen} \theta}{\theta}, \quad k = 2, \dots, f. \quad (\text{D.10})$$

Entonces se obtiene que el estado coherente $|\xi\rangle$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} |\xi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{s!}} (A^\dagger)^s |0, 0, \dots, 0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{s!}} (EB_1^\dagger E^\dagger)^s |0, 0, \dots, 0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{s!}} E (B_1^\dagger)^s E^\dagger |0, 0, \dots, 0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Pero $B_j^\dagger B_j |0, \dots, 0\rangle = \hat{n}_j |0, \dots, 0\rangle = 0$ de donde

$$\hat{S} |0, \dots, 0\rangle = \sum_{j=1}^f \phi_j \hat{n}_j |0, \dots, 0\rangle = 0 \quad (\text{D.12})$$

y análogamente $\hat{D}|0, \dots, 0\rangle = 0$, por lo que

$$E^\dagger|0, \dots, 0\rangle = e^{-iD}e^{-iS}|0, \dots, 0\rangle = 0$$

de donde

$$\begin{aligned} |\xi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{s!}} (A^\dagger)^s |0, 0, \dots, 0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{s!}} E(a_1^\dagger)^s |0, 0, \dots, 0\rangle \\ &= E|s, 0, \dots, 0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

donde en la última línea se ha utilizado que

$$(B_1^\dagger)^s |0, \dots, 0\rangle = \sqrt{s!} |s, 0, \dots, 0\rangle.$$

Por otro lado se tiene que,

$$e^{i\hat{S}}e^{-i\hat{S}} = \hat{1} \quad (\text{D.14})$$

de donde

$$\begin{aligned} \left(e^{i\hat{S}}i\hat{D}e^{-i\hat{S}}\right)^k &= e^{i\hat{S}}i\hat{D}e^{-i\hat{S}}e^{i\hat{S}}i\hat{D}e^{-i\hat{S}}\dots e^{i\hat{S}}i\hat{D}e^{-i\hat{S}} \\ &= e^{i\hat{S}}\left(i\hat{D}\right)^k e^{-i\hat{S}} \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

donde por (D.14) todos los factores intermedios se han colapsado a $(i\hat{D})^k$. En general, si la función $F(i\hat{D})$ se puede expresar en una serie de potencias,

$$F(i\hat{D}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_n (i\hat{D})^k$$

entonces

$$\begin{aligned} e^{i\hat{S}}F(i\hat{D})e^{-i\hat{S}} &= e^{i\hat{S}}\sum_{k=0}^{\infty} c_n (i\hat{D})^k e^{-i\hat{S}} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{i\hat{S}}c_n (i\hat{D})^k e^{-i\hat{S}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_n \left(e^{i\hat{S}}i\hat{D}e^{-i\hat{S}}\right)^k = F\left(e^{i\hat{S}}i\hat{D}e^{-i\hat{S}}\right) \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

donde se usó (D.15).

Usando (D.16) con $F(i\hat{D}) = e^{i\hat{D}}$, el operador E puede ser escrito como,

$$E = e^{i\hat{S}}e^{i\hat{D}} = e^{i\hat{S}}e^{i\hat{D}}e^{-i\hat{S}}e^{i\hat{S}} = \exp\left(e^{i\hat{S}}i\hat{D}e^{-i\hat{S}}\right)e^{i\hat{S}}$$

de donde el estado $|\xi\rangle$ puede ser reescrito como,

$$\begin{aligned} |\xi\rangle &= \exp\left(e^{i\hat{S}}i\hat{D}e^{-i\hat{S}}\right)e^{i\hat{S}}|s, 0, \dots, 0\rangle \\ &= e^{i\phi_1 s} \exp\left(e^{i\hat{S}}i\hat{D}e^{-i\hat{S}}\right)|s, 0, \dots, 0\rangle. \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
e^{i\hat{S}} \hat{D} e^{-i\hat{S}} &= e^{i\hat{S}} \left(\sum_{j=2}^f \theta_j \left(\hat{B}_1^\dagger B_j + B_j^\dagger B_1 \right) \right) e^{-i\hat{S}} \\
&= \sum_{j=2}^f \theta_j e^{i\hat{S}} B_1^\dagger B_j e^{-i\hat{S}} + \sum_{j=2}^f \theta_j e^{i\hat{S}} B_j^\dagger B_1 e^{-i\hat{S}} \quad (D.17)
\end{aligned}$$

Considere la función

$$g(\lambda) = e^{\lambda \hat{B}^\dagger B} B_\dagger e^{-\lambda B^\dagger B}, \quad (D.18)$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{dg(\lambda)}{d\lambda} &= -e^{\lambda B^\dagger B} B^\dagger B^\dagger B e^{-\lambda B^\dagger B} + B^\dagger B e^{\lambda B^\dagger B} B^\dagger e^{-\lambda B^\dagger B} \\
&= \hat{B}^\dagger B e^{\lambda B^\dagger B} B^\dagger e^{-\lambda B^\dagger B} - e^{\lambda B^\dagger B} B^\dagger B^\dagger B e^{-\lambda B^\dagger B} \\
&= e^{\lambda B^\dagger B} B^\dagger B B^\dagger e^{-\lambda B^\dagger B} - e^{\lambda B^\dagger B} B^\dagger B^\dagger B e^{-\lambda B^\dagger B} \\
&= e^{\lambda B^\dagger B} (B^\dagger B B^\dagger - B^\dagger B^\dagger B) e^{-\lambda B^\dagger B} \\
&= e^{\lambda B^\dagger B} [B^\dagger B, B^\dagger] e^{-\lambda B^\dagger B} \\
&= -e^{\lambda B^\dagger B} [B^\dagger, B^\dagger B] e^{-\lambda B^\dagger B}.
\end{aligned}$$

Usando la identidad [80]

$$[B^\dagger, f(B, B^\dagger)] = -\frac{\partial f}{\partial B}$$

se obtiene

$$\frac{dg(\lambda)}{d\lambda} = e^{\lambda B^\dagger B} B^\dagger e^{-\lambda B^\dagger B} = g(\lambda).$$

En general se tiene que la derivada n-ésima de $g(\lambda)$ esta dada por

$$\frac{d^n g(\lambda)}{d\lambda^n} = g(\lambda). \quad (D.19)$$

Haciendo un desarrollando en serie de Taylor de la función $g(\lambda)$ alrededor de $\lambda = 0$ se obtiene

$$g(\lambda) = B^\dagger \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} \lambda^2 + \frac{\lambda}{3!} \lambda^3 + \dots \right) = B^\dagger e^\lambda, \quad (D.20)$$

de donde finalmente se obtiene que

$$e^{\lambda B^\dagger B} B_\dagger e^{-\lambda B^\dagger B} = B^\dagger e^\lambda. \quad (D.21)$$

De forma análoga se puede demostrar que

$$e^{\lambda B^\dagger B} B e^{-\lambda B^\dagger B} = B e^{-\lambda}. \quad (D.22)$$

Aplicando estos resultados al caso tratado se tiene

$$\begin{aligned} e^{i\hat{S}} B_j^\dagger B_1 e^{-i\hat{S}} &= e^{i\phi_j B_j^\dagger B_j} B_j^\dagger e^{-i\phi_j B_j^\dagger B_j} e^{i\phi_1 B_1^\dagger B_1} B_1 e^{i\phi_1 B_1^\dagger B_1} \\ &= B_j^\dagger e^{i\phi_j} B_1 e^{-i\phi_1} = B_j^\dagger B_1 e^{i(\phi_j - \phi_1)} \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

y análogamente

$$e^{i\hat{S}} B_1^\dagger B_j e^{-i\hat{S}} = B_1^\dagger B_j e^{-i(\phi_j - \phi_1)}, \quad (\text{D.24})$$

lo que conlleva a

$$e^{i\hat{S}} \hat{D} e^{-i\hat{S}} = \sum_{l=2}^f \left(\zeta_l^* B_1^\dagger B_l + \zeta_l B_l^\dagger B_1 \right)$$

con

$$\zeta_l = \theta_l e^{i(\phi_l - \phi_1)}, \quad l = 2, 3, \dots, f. \quad (\text{D.25})$$

Definiendo a

$$T(\zeta) = e^{i \sum_{l=2}^f (\zeta_l^* B_1^\dagger B_l + \zeta_l B_l^\dagger B_1)} \quad (\text{D.26})$$

se tiene finalmente que

$$|\xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{s!}} (A^\dagger)^s |0, 0, \dots, 0\rangle = e^{i\phi_1 s} T(\zeta) |s, 0, \dots, 0\rangle \quad (\text{D.27})$$

donde $T(\zeta)$ es un elemento del grupo $SU(f)$, lo que demuestra que el estado $|\xi\rangle$, salvo un factor de fase irrelevante, es generado por la acción del grupo de $T(\zeta)$. Los parámetros ξ y ζ están relacionados implícitamente por (D.25), (D.10).

Bibliografía

- [1] D. N. Christodoulides, R. I. Joseph, Discrete self-focusing in nonlinear arrays of coupled waveguides, *Opt. Lett.* *18*, (1988), 794-796
- [2] J. C. Eilbeck, P. S. Lomdahl, A. C. Scott, The discrete self-trapping equation, *Physica D.* *16*, (1985), 318-338
- [3] P. G. Kevrekidis, The Discrete Nonlinear Schrödinger Equation, Springer, New York (2009)
- [4] R. Franzosi, S. M. Giampaolo, F. Illuminati, Quantum localization and bound - state formation in Bose - Einstein condensates, *Phys. Rev. A* *82*, (2010), 063620
- [5] D. N. Christodoulides, R. I. Joseph, Discrete self-focusing in nonlinear arrays of coupled waveguides, *Opt. Lett.* *13*, (1988), 794-796
- [6] O. Bang, P. D. Millert, Exploiting Discreteness for Switching in Arrays of Nonlinear Waveguides, *Physica Scripta.* *T67*, (1996), 26-29
- [7] S. Aubry, Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization, *Physica D* *113*, (1997), 201-250
- [8] P. Panayotaros, Continuation of normal modes in finite NLS lattices, *Phys. Lett. A* *374*, 38, (2010), 3912-3919
- [9] P. Panayotaros, Instabilities of breathers in a finite NLS lattice, *Physica D* *D241*, (2012), 847-856
- [10] A. C. Scott, L. Bernstein, J. C. Eilbeck, Energy Levels of the Quantized Discrete Self-Trapping Equation, *Journal of Biological Physics* *17*, (1989), 1-17
- [11] H. Hennig, J. Dorignac, D. K. Campbell, Transfer of Bose-Einstein condensates through discrete breathers in an optical lattice, *Phys. Rev. A* *82*, (2010), 053604
- [12] X. Li, Y. Wu, D. Steel, D. Gammon, T. H. Stievater, D. S. Katzer, D. Park, C. Piermarocchi, L. J. Sham, An All-Optical Quantum Gate in a Semiconductor Quantum Dot, *Science* *301*, (2003), 809-811

- [13] G. I. Stegeman, *Nonlinear Waves in Solid State Physics*, Plenum Press, New York (1990).
- [14] L. Bernstein, J. C. Eilbeck, A. C. Scott, The quantum theory of local modes in a coupled system of nonlinear oscillators, *Nonlinearity* 3, (1990), 293-323
- [15] S. Flach, V. Fleurov, Tunnelling in the nonintegrable trimer—a step towards quantum breathers, *J. Phys. Condens. Matter* 9, (1997), 7039-7061
- [16] J. C. Eilbeck, F. Palmero, Trapping in quantum chains, *Phys. Lett. A* 331, (2004) 201-208
- [17] R. A. Pinto, M. Haque, S. Flach, Edge-localized states in quantum one-dimensional lattices, *Phys. Rev. A* 79, (2009), 052118
- [18] P. Buonsante, R. Franzosi, V. Penna, Dynamical instability in a trimeric chain of interacting Bose-Einstein condensates, *Phys. Rev. Lett.* 90, (2003), 050404
- [19] M. Johansson, Hamiltonian Hopf bifurcations in the discrete nonlinear Schrödinger trimer: oscillatory instabilities, quasi-periodic solutions and a 'new' type of self-trapping transition, *J. Phys. A: Math. Gen.* 37, (2004), 2201-2222
- [20] T. Kapitula, P. G. Kevrekidis, Z. Chen, Three is a crowd: solitary waves in photorefractive media with three potential wells, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 5, (2007), 598-633
- [21] P. Panayotaros, Continuation and bifurcations of breathers in a finite discrete NLS equation, *Disc. Cont. Dyn. Syst. S*, (2011), 1227-1245
- [22] R. Goodman, Hamiltonian Hopf bifurcations and dynamics of NLS/GP standing-wave modes, *J. Phys. A: Math. Theor.* 44, (2011), 425101
- [23] A. C. Scott, J. C. Eilbeck, The quantized discrete self-trapping equation, *Phys. Lett. A* 119, (1986), 60-64
- [24] X. R. Chen, Q. Q. Gou, X. F. Pang, Calculation of Vibrational Energy Spectra of H_2O Molecule by Nonlinear Quantum Theory, *Chin. Phys. Lett* 31, (1996), 660-663
- [25] X. R. Chen, Y. Cheng, J. Luo, Q. Q. Gou, X. F. Pang, High-Lying Vibrational Spectrum of Ammonia via Nonlinear Quantum Theory, *Commun. in Theor. Phys.* 31, (1999), 169-174
- [26] X. R. Chen, Q. Q. Gou, X. F. Pang, Y. Cheng, A nonlinear model for highly excited vibrational energy levels of silane, *Acta Physica Sinica* 8, (1999), 131-135

- [27] M. P. Jacobson, C. Jung, H. S. Tayleo, R. W. Field, State-by-state assignment of the bending spectrum of acetylene at 15000 cm⁻¹: A case study of quantum-classical correspondence, *J. Chem. Phys.* *111*, (1999), 600-618
- [28] W. Z. Wang, J. Tinka Gammel, A. R. Bishop, Quantum Breathers in a Nonlinear Lattice, *Phys. Rev. Lett.* *76*, (1996), 3598-3601
- [29] B. I. Swanson, J. A. Brozik, S. P. Love, G. F. Strouse, A. P. Shreve, A. R. Bishop, W.-Z. Wang, and M. I. Salkola, Observation of Intrinsically Localized Modes in a Discrete Low-Dimensional Material, *Phys. Rev. Lett.* *82*, (1999), 3288-3291
- [30] R. Livi, R. Franzosi, G. L. Oppo, Self-Localization of Bose-Einstein Condensates in Optical Lattices via Boundary Dissipation, *Phys. Rev. Lett.* *97*, (2006), 060401
- [31] R. Carretero-González, K. Promislow, Localized breathing oscillations of Bose-Einstein condensates in periodic traps *Phys. Rev. A* *66*, (2002), 033610
- [32] M. Lakshmanan, B. Subash, A. Saxena, Intrinsic localized modes of a classical discrete anisotropic Heisenberg ferromagnetic spin chain, *Physics Letters A* *378*, (2014), 1119-1125
- [33] B. Tang, D. J. Li, Y. Tang, Quantum breathers in Heisenberg ferromagnetic chains with Dzyaloshinsky-Moriya interaction, *Chaos* *24*, (2014), 023113
- [34] S. Aubry, S. Flach, K. Kladko, E. Olbrich, Manifestation of classical bifurcation in the spectrum of the integrable quantum dimer, *Phys. Rev. Lett.* *76*, (1996), 1607-1610
- [35] E. Wright, J. C. Eilbeck, M. H. Hays, P. D. Miller, A. C. Scott, The quantum discrete self-trapping equation in the Hartree approximation, *Physica D* *69*, (1993), 18-32
- [36] P. D. Miller, A. C. Scott, J. Carr, J. C. Eilbeck, Binding energies for discrete nonlinear Schrödinger equations, *Physica Scripta* *44*, (1991), 509-516
- [37] R. Martínez-Galicia, P. Panayotaros, Coherent states and localization in a quantized discrete NLS lattice, *J. Nonlin. Opt. Phys. Materials* *25*, (2016), 1650047
- [38] R. Martínez-Galicia, P. Panayotaros, Localization and coherent states in a quantum DNLS trimer, *Euro. Phys. J. - S. T.* *225*, (2016), 2717-2727
- [39] R. J. Glauber, Coherent and incoherent states of the radiation field, *Phys. Rev.* *131*, (1963), 2766-2788
- [40] J. C. Klauder, E. G. C. Sudarshan, Fundamentals of Quantum Optics, W.A. Benjamin, New York (1968)

- [41] D. M. Gitman, A. L. Shelepin, Coherent states of the $SU(N)$ groups, *J. Phys. A: Math. Gen.* *26*, (1993), 313-327
- [42] S. Raghavan, A. Smerzi, V.M. Kenkre, Transitions in coherent oscillations between two trapped Bose-Einstein condensates, *Phys. Rev. A* *60*, (1999), 1787-1790
- [43] F. Trimborn, D. Witthaut, H.J. Korsch, Exact number preserving phase-space dynamics in the M-site Bose-Hubbard model, *Phys. Rev. A* *77*, (2008), 043631
- [44] F. Trimborn, D. Witthaut, H. J. Korsch, Beyond mean-field dynamics of small Bose-Hubbard systems based on the number-conserving phase-space approach, *Phys. Rev. A* *79*, (2009), 013608
- [45] M. Hiller, T. Kottos, T. Geisel, Wave-packet dynamics in energy space of a chaotic trimeric Bose-Hubbard system, *Phys. Rev. A* *79*, (2009), 023621
- [46] P. Buonsante, V. Penna, Some remarks on the coherent-state variational approach to nonlinear boson models, *J. Phys. A: Math. Theor.* *41*, (2008), 175301
- [47] L. Amico, V. Penna, Dynamical mean field theory of the Bose-Hubbard model, *Phys. Rev. Lett.* *80*, (1998), 2189
- [48] D. Ellinas, M. Johansson, P. L. Christiansen, Quantum nonlinear lattices and coherent state vectors, *Physica D* *34*, (1999), 126-143
- [49] R. Martínez-Galicia, P. Panayotaros, Classical breathers and quantum coherent states in discrete NLS systems, *Phys. Lett. A* *383*, (2019), 164169
- [50] R. S. MacKay, S. Aubry, Proof of existence of breathers for time-reversible or Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators, *Nonlinearity* *7*, (1994), 1623-1643
- [51] A. G. Basile, V. Elser, Equations of motion for superfluids, *Phys. Rev. E* *51*, (1995), 5688-5694
- [52] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison - Wesley, USA (2006)
- [53] C. L. Pando, E. J. Doedel, Bifurcation structures and dominant modes near relative equilibria in the one dimensional discrete nonlinear Schrödinger equation, *Physica D*, *238*, (2009), 687-698.
- [54] R. Calleja, E. Doedel, C. Garcia Azpeitia, C. Pando, Choreographies in the discrete NLS equation, *Euro. Phys. J. - S. T.* *227*, (2018), 615-624
- [55] P. Yanguas, J. F. Palacian, R. K. Meyer, H. Scott Dumas, Periodic solutions in Hamiltonian systems, averaging and the lunar problem, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* *7*, (2008), 311-340

- [56] S. Ferrer, J. Palacian, P. Yanguas, Hamiltonian oscillators in 1:1:1 resonance: Normalization and Integrability, *J. Nonlinear. Sci.* 10, (2000), 145-175
- [57] D. E. Pelinovsky, P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, Stability of discrete solitons in nonlinear Schrödinger lattices, *Physica D* 212, (2005), 1-19
- [58] P. Panayotaros, D. E. Pelinovsky, Periodic oscillations of discrete NLS solitons in the presence of diffraction management, *Nonlinearity* 21, (2008), 1265-1279
- [59] P. Panayotaros, Linear stability of breathers of the discrete NLS, *Phys. Lett. A* 373, (2009), 957-963
- [60] A. C. Scott, P. L Christiansen, A Generalized Discrete Self-Trapping Equation, *Phys. Scrip.* 42, (1990), 257-262
- [61] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, Quantum Mechanics Vol. 1, John Wiley and Sons., France (1977)
- [62] J. R. Klauder and B. S. Skagerstam, Coherent States Applications in Physics and Mathematical Physics, World Scientific, Singapore, (1985)
- [63] A. Perelomov, Generalized coherent states and their applications, Springer Verlag, Berlin (1986)
- [64] P. Buonsante, V. Penna, A. Vezzani, Quantum signatures of the self-trapping transition in attractive lattice bosons, *Phys. Rev. A* 82, (2010), 043615
- [65] A. Camacho-Guardian, R. Paredes, Intrinsic decoherence and purity in Bose quantum fluid in a triple well potential, *Laser Phys.* 24, (2014), 085501
- [66] E. Meinrenken, Coherent states and classical limits, *J. Phys. A Math. Gen.* 21, (1994), 3257-3265
- [67] S. Howard and S. K. Roy, Coherent states of harmonic oscillator, *Am. J. Phys.* 55, (1987) 1109-1117
- [68] S. Basu, R. K. Roychoudhury, The coherent state and anharmonic oscillator description of nonlinear oscillation, *J. of Math. Chem.* 28, (2000) 35-41
- [69] W. M. Zhang, D. H. Feng, R. Gilmore, Coherent states: Theory and some applications, *Rev. Mod. Phys.* 62, (1990), 867-927
- [70] A. M. Perelomov, Coherent states for arbitrary Lie group, *Commim. math. Phys.* 26, (1972), 222-236
- [71] R. Gilmore, Geometry of symmetrized states, *Ann. Phys. (NY)* 74, (1972) 391-463
- [72] R. Gilmore, On properties of coherent states, *Rev. Mex. Fis.* 23, (1974) 143-187

- [73] J-P. Gazeau, Coherent States in Quantum Physics, Wiley-VCH, Berlin (2009)
- [74] Hong-Chen Fu, R. Sasaki, Probability distributions and coherent states of B_r , C_r and D_r algebras, *J. Phys. A: Math. Gen.* *31*, (1998), 901-925
- [75] J. H. Wilson, V. Galitski, Breakdown of the Coherent State Path Integral: Two Simple Examples, *Phys. Rev. Lett.* *PRL106*, (2011), 110401
- [76] M. Arik, D. D. Coon, Hilbert spaces of analytic functions and generalized coherent states, *Journal of Mathematical Physics* *17*, (1976), 524-527
- [77] X. Hu, F. Nori, Quantum phonon optics: Coherent and squeezed atomic displacements, *Phys. Rev. B* *53*, (1996), 2419-2424.
- [78] J. P. Gazeau, Coherent states in Quantum Information: an example of experimental manipulations, *Journal of Physics: Conference Series* *213*, (2010), 012013
- [79] J. R. Klauder, The action option and a Feynman quantization of spinor fields in terms of ordinary c -numbers, *Ann. Physics* *11*, (1960), 123-168
- [80] W. H. Louisell, Quantum statistical properties of radiation, John Wiley and Sons, USA (1973).
- [81] A. Kempf, G. Mangano, R. B. Mann, Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation, *Phys. Rev. D*, *52*, (1995), 1108-1118
- [82] A. Muleshkov, T. Nguyen, Easy proof of the jacobian for the N-dimensional polar coordinates, *The Pi Mu Epsilon Journal*, *14*, (2016), 269-273