



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Relación entre pérdida de rigidez y
magnitud de grieta, en elementos
estructurales de concreto reforzado**

TESIS

Que para obtener el título de

Ingeniero civil

P R E S E N T A

Orlando Miguel Valencia Medina

DIRECTOR DE TESIS

Dr. José Alberto Escobar Sánchez



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

RESUMEN

A través de los años se han desarrollado diversos métodos de detección de daño, entre los que destacan aquellos que manifiestan el daño estructural como pérdida de rigidez. Con base en la geometría propuesta que se presenta en un elemento estructural que ha sufrido daño, se establecen dos ecuaciones que correlacionan la pérdida de rigidez a flexión con la profundidad de grieta, tanto para vigas como para columnas de concreto reforzado, de sección transversal rectangular y circular respectivamente. Dichas ecuaciones tienen como finalidad complementar la información necesaria que permita tomar una decisión más acertada entre la reparación o la restitución del elemento.

ABSTRACT

Over the years several damage detection methods have been developed, including those that show structural damage as loss of stiffness. Based on the proposed geometry that is presented in a structural element that suffered damage, two equations are established that correlate the loss of stiffness with the depth of cracking, both for beams and columns of reinforced concrete, rectangular and circular cross section respectively. The purpose of these equations is to complement the necessary information to make a more accurate decision between the repair or the restitution of the element.

INDICE

RESUMEN.....	I
ABSTRACT.....	III
1. INTRODUCCIÓN.....	1
1.1. DETECCIÓN DE DAÑO	1
1.2. ALCANCES Y OBJETIVOS.....	2
2. ANTECEDENTES	3
2.1 AGRIETAMIENTO.....	3
2.2 RIGIDEZ.....	4
2.2.1. Rigidez a flexión	5
2.3. MOMENTO DE INERCIA.....	5
2.3.1. Sección rectangular	6
2.3.2. Sección circular	6
2.3.3. Arco de circunferencia	6
3. PROPUESTA PARA CALCULAR LA MAGNITUD DE GRIETAS EN ELEMENTOS ESTRUCTURALES DE CONCRETO REFORZADO.....	9
3.1. VIGAS DE SECCIÓN RECTANGULAR.....	9
3.1.1. Formulación	9
3.2. COLUMNAS DE SECCIÓN CIRCULAR.....	10
3.2.1. Formulación	11
4. APLICACIÓN Y RESULTADOS	15
4.1. VIGAS.....	15
4.1.1. Viga de sección rectangular (50x90).....	15
4.1.2. Viga de sección rectangular (40x70).....	16
4.1.3. Viga de sección rectangular (40x60).....	17
4.2. COLUMNAS	18
4.2.1. Columna de sección circular (r45)	18
4.2.2. Columna de sección circular (r35)	20
4.2.3. Columna de sección circular (r30)	22
5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	25
REFERENCIAS	25

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Los sistemas estructurales son conjuntos susceptibles de sufrir daño, ya sea por exceso de cargas o el impacto de fenómenos naturales, como pueden ser los sismos o la acción del viento. Es por ello que una parte de la ingeniería estructural se ha dedicado a estudiar el daño en las estructuras; dichos estos estudios se realizan con el propósito de determinar la salud estructural de las edificaciones, y en caso de existir daño tomar las medidas correctivas con el propósito de que el sistema funcione adecuadamente.

A la fecha, existen diversos métodos de detección de daño basados en diferentes criterios; entre los que destacan aquellos basados en las propiedades dinámicas de las estructuras (*Doebeling et al.*, 1998; *Escobar et al.*, 2001; *Sohn y Law*, 1997), debido a que permiten cuantificar el daño expresándolo como pérdida de rigidez.

No obstante, la pérdida de rigidez resulta ser un parámetro difícil de interpretar. Si bien la pérdida de rigidez es un parámetro cuantitativo, esta no puede ser idealizada con precisión en los elementos que hayan resultado dañados; es decir, aunque se piense principalmente en la pérdida de rigidez manifestada como agrietamiento, no se puede precisar la magnitud de tal respuesta.

En este trabajo se proponen dos ecuaciones que permiten correlacionar la pérdida de rigidez con la magnitud de grietas en elementos de concreto reforzado. Dichas ecuaciones están acotadas a determinar la profundidad de grietas en trabes y columnas de concreto, de sección transversal rectangular y circular respectivamente. La limitante anterior obedece al hecho de que estas geometrías son las más comúnmente usadas en la construcción a base de marcos rígidos de concreto reforzado.

Adicionalmente, las ecuaciones propuestas se aplican a una serie de elementos estructurales hipotéticos, con la finalidad de entender el desarrollo de una grieta, así como los parámetros que repercuten en la magnitud de la misma.

1.1. DETECCIÓN DE DAÑO

La detección de daño es el estudio que se realiza para localizar y cuantificar el daño en un sistema estructural, ya sea después de un tiempo determinado en que ha estado en funcionamiento o bien, después del acontecimiento de un fenómeno natural que pueda comprometer la integridad de este. En el caso de los sistemas estructurales, dicha integridad está directamente ligada con la seguridad de los usuarios: de ahí la importancia de una constante supervisión de su estado (*Salmerón*, 2018).

Un método confiable de detección de daño debe cubrir cuatro etapas, también llamados *niveles de detección de daño* (*Rytter*, 1993):

1. Determinar si existe daño.
2. Si existe daño, localizarlo.
3. Cuantificar la severidad del daño.
4. Determinar la vida útil de la estructura.

Es importante mencionar que la detección de daño se puede llevar a cabo mediante métodos destructivos y no destructivos. Los métodos no destructivos son aquellos basados en la variación

de las respuestas dinámicas de la estructura (frecuencia naturales y modos de vibrar). Debido a que las respuestas dinámicas se encuentran en función de la rigidez del sistema, una variación en ellas indica cierto nivel de daño, el cual se puede representar como pérdida de rigidez.

1.2. ALCANCES Y OBJETIVOS

Actualmente, se han establecido expresiones matemáticas que permiten determinar el espesor máximo que puede presentar una grieta en un elemento estructural de concreto reforzado, pero a la fecha no se tiene una relación que involucre la profundidad de estas.

En esta tesis, se proponen relaciones matemáticas que permiten establecer la correlación entre pérdida rigidez y magnitud de grietas en elementos estructurales de concreto reforzado. Específicamente, en el caso de trabes sección transversal rectangular y columnas de sección transversal circular; es decir que se puede complementar la literatura ya existente para tener una mejor interpretación del daño estructural.

Dichas relaciones matemáticas involucran variables propias de los elementos estructurales, tales como la longitud total del elemento L , espesor de la grieta e y el peralte total del elemento h en el caso de una viga de sección rectangular; radio de la columna r , longitud de la grieta s y ángulo de apertura de la grieta θ para el caso de una columna de sección circular; el momento de inercia I y la pérdida de rigidez a flexión k^* aplica para ambos casos (vigas y columnas),.

El objetivo principal del presente documento es establecer la correlación entre la pérdida de rigidez a flexión con las dimensiones de las grietas producidas.

Para determinar la profundidad de una grieta, las ecuaciones propuestas en este trabajo se aplicaron a trabes y columnas hipotéticas. Además, se obtuvo el patrón de desarrollo de las grietas, representado gráficamente, en función de su longitud s , para el caso de columnas, y su espesor e en trabes y columnas.

CAPÍTULO 2

ANTECEDENTES

2.1 AGRIETAMIENTO

El agrietamiento es la manera en que los elementos de concreto manifiestan un estado de daño cuando se encuentran expuestos a cargas superiores a las de diseño. La primera causa de agrietamiento se debe a las variaciones de temperatura y la contracción del material, lo que produce esfuerzos de tensión; si la magnitud de dichos esfuerzos supera a los de resistencia, se presenta agrietamiento. La segunda causa se debe a las fuerzas que actúan en el elemento (fuerzas de tensión, momentos flexionantes o fuerzas cortantes); análogamente, si dichas fuerzas sobrepasan las capacidades del elemento, se produce agrietamiento.

El agrietamiento en el concreto reforzado es aceptado como una consecuencia normal del funcionamiento de la estructura, mientras su valor no exceda de ciertos límites que son inaceptables a la vista o que pueda provocar problemas de corrosión (Meli, 2010).

En la actualidad, se han desarrollado técnicas que permiten dar seguimiento a la formación y el desarrollo de grietas en elementos de concreto reforzado. El espécimen que se ha usado para estos estudios es un cilindro o un prisma de concreto, figura 2.1a, con una barra longitudinal interior en cuyos extremos se aplican fuerzas de tensión. El fenómeno de agrietamiento por esfuerzos de tensión se desarrolla como se muestra en la figura 2.1 (González, 2005).

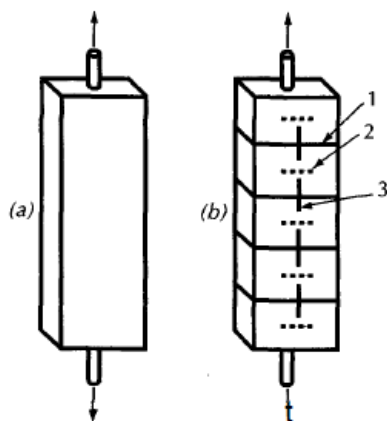


Figura 2.1 Configuración de agrietamiento de un espécimen sujeto a tensión según Broms (González, 2005).

Cuando se alcanza el valor del esfuerzo crítico, del orden de 500 kg/cm^2 , en el refuerzo de acero, comienzan a producirse grietas perpendiculares al acero de refuerzo que atraviesan la sección transversal, a estas grietas se les conoce como *grietas primarias*; 1 en figura 2.1b. Si el valor del esfuerzo aumenta tres veces más, aproximadamente, se desarrollan grietas nuevas que se localizan entre las grietas primarias. A estas grietas se les denomina *grietas secundarias*; 2 en figura 2.1b. Cabe mencionar que las grietas secundarias no atraviesan en su totalidad la sección transversal del elemento. En una última etapa, con esfuerzos mayores, aparecen nuevas grietas cuya peculiaridad es que son longitudinales y se presentan desde las grietas primarias y secundarias, las cuales se representan con el número 3 en la figura 2.1b; en esta etapa ya no se presentan nuevas grietas transversales, pero las existentes tienden a aumentar su espesor.

El desarrollo de grietas en elementos sujetos a flexión resulta ser muy similar al de un elemento sujeto a tensión, como se observa en la figura 2.2.

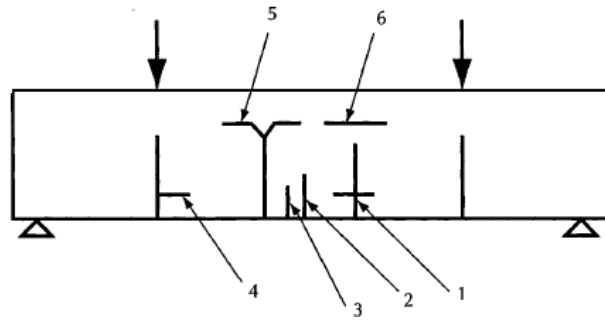


Figura 2.2 Configuración de agrietamiento de un espécimen sujeto a flexión según Broms (González, 2005).

Las grietas primarias, indicadas con el número 1 en la figura 2.2, se pueden presentar con cargas bajas y pueden llegar hasta el eje neutro. Las grietas secundarias, indicadas con el número 2 en la figura 2.2, tienen una prolongación menor que el eje neutro. En ocasiones se presentan grietas secundarias que no exceden la altura del refuerzo (indicadas con el número 3 en la figura 2.2). Cuando se alcanza el esfuerzo resistente se presentan grietas longitudinales, indicadas con el número 4 en la figura 2.2.

En algunos ensayos de laboratorio, se ha observado que las grietas primarias se dividen en dos ramas horizontales, indicadas con el número 5 en la figura 10.3, o que se forman grietas horizontales a la altura del eje neutro, indicadas con el número 6 en la figura 10.3. Esto sucede cuando está a punto de alcanzarse la resistencia del elemento (González, 2005).

2.2 RIGIDEZ

Es la fuerza necesaria que debe aplicarse para producir un desplazamiento unitario. McCormac (1994), ilustró el concepto con un resorte sujeto a una fuerza axial, como se muestra en la figura 2.3.

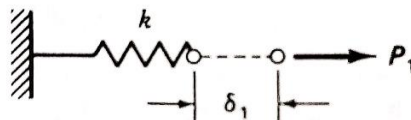


Figura 2.3. Alargamiento producido por una fuerza aplicada (McCormac, 1994)

La relación que existe entre la fuerza aplicada y el desplazamiento producido puede expresarse como:

$$P_1 = k\delta_1 \quad (2.1)$$

Donde P_1 es la fuerza aplicada, δ_1 es desplazamiento resultante; y k es la fuerza necesaria para producir un desplazamiento unitario, es decir:

$$P_1 = k \quad \text{si} \quad \delta_1 = 1 \quad (2.2)$$

Por consiguiente, si se conoce la constante k o constante de rigidez, el desplazamiento puede determinarse para cualquier carga aplicada P_1 (McCormac, 1994).

2.2.1. Rigidez a flexión

Particularmente, la rigidez a la flexión es el momento necesario para producir una rotación unitaria. Para deducir las ecuaciones de rigidez que corresponden a un elemento que trabaja a flexión, se considera una viga sujeta a fuerzas axiales, fuerzas cortantes y momentos flexionantes aplicados en sus nodos, como se muestra en la figura 2.4.



Figura 2.4. Sistema de fuerzas aplicadas en los nodos de un elemento viga.

Basandose en el principio de superposición, se discretiza el sistema de fuerzas de manera que la única fuerza actuante sea el momento flexionante.

Para un giro arbitrario ϕ , y restringiendo todas las demás componentes de desplazamiento, figura 2.5, se obtiene el sistema de fuerzas nodales mostrado en la figura 2.6.



Figura 2.5. Giro arbitrario en un nodo.

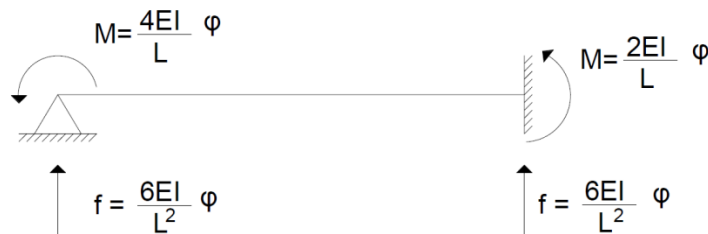


Figura 2.6. Fuerzas nodales resultantes

Como se observa, las fuerzas tienen la forma de la ecuación 2.1 en donde una fuerza es producto de la rigidez del elemento por un desplazamiento. Por lo tanto, se entenderá por rigidez a flexión como:

$$k = \frac{4EI}{L} \tag{2.3}$$

Donde I es el momento de inercia de la sección transversal; E es el módulo de elasticidad; y L es la longitud del elemento.

2.3. MOMENTO DE INERCIA

Siempre que una carga distribuida actúa en forma perpendicular a un área y que su intensidad varía linealmente, el cálculo del momento de la distribución de carga con respecto a un eje implicará una cantidad llamada *momento de inercia* (Hibbeler, 2010).

2.3.1. Sección rectangular

Por definición, para una sección rectangular, el momento de inercia se calcula a través de la siguiente expresión:

$$I_{SR} = \frac{bh^3}{12} \quad (2.4)$$

Donde I_{SR} es el momento de inercia en una sección rectangular; b es la longitud de la base; y h es la altura de la sección.

2.3.2. Sección circular

Por definición, para una sección circular, el momento de inercia se calcula a través de la siguiente expresión:

$$I_{SC} = \frac{1}{4} \pi r^4 \quad (2.5)$$

Donde I_{SC} es el momento de inercia en una sección circular; y r es el radio de la circunferencia.

2.3.3. Arco de circunferencia

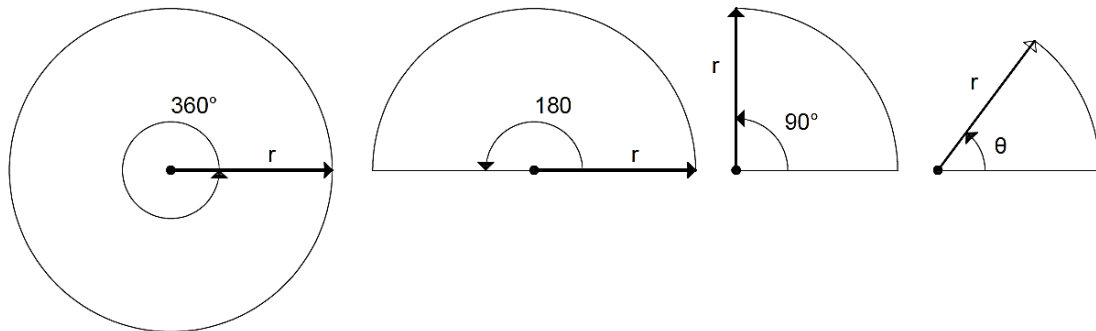


Figura 2.7. Arcos de circunferencia

Por definición, el momento de inercia de una circunferencia está representado por la ecuación 2.4; para un arco de circunferencia con un ángulo de 180° se sabe que su momento de inercia corresponde a:

$$I_{CG} = \frac{1}{8} \pi r^4 \quad \text{en términos de su ángulo} \quad I_{CG} = \frac{1}{4} \frac{180^\circ}{360^\circ} \pi r^4 \quad (2.6)$$

En donde I_{CG} es el momento de inercia para un arco de circunferencia de 180°.

Para un arco de circunferencia con un ángulo de 90°, el momento de inercia se calcula como:

$$I_{NG} = \frac{1}{16} \pi r^4 \quad \text{en términos de su ángulo:} \quad I_{NG} = \frac{1}{4} \frac{90^\circ}{360^\circ} \pi r^4 \quad (2.7)$$

En donde I_{NG} es el momento de inercia para un arco de circunferencia de 90°.

Capítulo 2. Antecedentes

En conclusión: con la relación que existe entre el ángulo del arco y el momento de inercia, se puede calcular el momento de inercia para cualquier arco de circunferencia a través de la siguiente expresión:

$$I_A = \frac{1}{4} \frac{\theta}{360} \pi r^4 \quad (2.8)$$

Donde I_A es el momento de inercia para un arco de circunferencia de cualquier ángulo; θ es el ángulo del arco; y r es el radio del arco.

Con base en los conceptos descritos, rigidez a flexión y momento de inercia, en el capítulo siguiente se propone una metodología para calcular la magnitud de grieta en vigas y columnas de concreto, permitiendo correlacionar a la pérdida de rigidez con la profundidad de grieta.

CAPÍTULO 3

PROPUESTA PARA CALCULAR LA MAGNITUD DE GRIETAS EN ELEMENTOS ESTRUCTURALES DE CONCRETO REFORZADO

3.1. VIGAS DE SECCIÓN RECTANGULAR

Se propone una viga prismática de sección rectangular, en donde una grieta de espesor e penetra desde la base del elemento hasta una profundidad C_V . Dicha grieta va de un extremo a otro en la base, es decir que la longitud de la grieta tiene la misma magnitud que la base de la viga b .

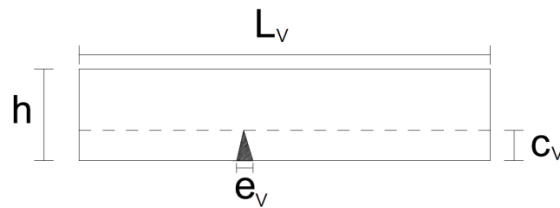


Figura 3.1. Agrietamiento debido a flexión en una viga, vista lateral.

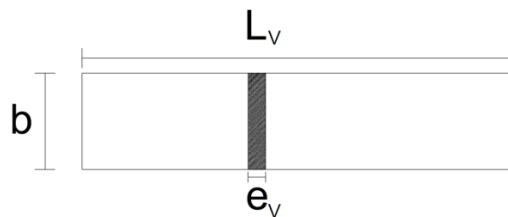


Figura 3.2. Agrietamiento debido a flexión en una viga, vista inferior.

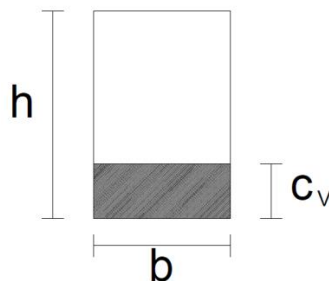


Figura 3.3. Sección transversal agrietada.

3.1.1. Formulación

Para poder modelar una relación que determine la profundidad de grieta se parte de establecer la pérdida de rigidez en función de la rigidez a flexión inicial y la del estado dañado, es decir:

$$k_R^* = 1 - \frac{k_{R2}}{k_{R1}} \quad (3.1)$$

Donde k_R^* es la pérdida de rigidez en un elemento de sección rectangular; k_{R1} es la rigidez a flexión antes del daño en un elemento de sección rectangular; y k_{R2} es la rigidez a flexión del elemento en estado de daño en un elemento de igual sección.

De acuerdo con la ecuación 2.3, se pueden conocer los valores de la rigidez a flexión inicial y la del estado dañado, esto es:

Capítulo 3. Propuesta para calcular la magnitud de grietas en elementos estructurales de concreto reforzado

$$k_{R1} = \frac{4EI_{SR}}{L_V} \quad (3.2)$$

$$k_{R2} = \frac{4EI_{SRD}}{L_{VD}} \quad (3.3)$$

Donde I_{SRD} es el momento de inercia de la sección rectangular agrietada; L_V es la longitud inicial de la viga; y L_{VD} la longitud de la viga después del daño.

Para establecer la rigidez del estado inicial del elemento, se sustituye la ecuación 2.4 en la 3.2, obteniendo así:

$$k_{R1} = \frac{4E}{L_V} \cdot \frac{bh^3}{12} \quad (3.4)$$

Para establecer la rigidez del estado dañado, se realiza un análisis del elemento agrietado, propuesto en las figuras 3.1, 3.2 y 3.3, en donde se observa que el agrietamiento modifica las dimensiones del elemento; disminuyendo la altura del elemento, y su vez el momento de inercia de la sección transversal, y la longitud del mismo; lo que se representa como:

$$I_{SRD} = \frac{b(h - C_V)^3}{12} \quad (3.5)$$

$$L_D = L_V - e_V \quad (3.6)$$

Donde C_V es la profundidad de grieta en una viga; y e_V el espesor de la grieta en la viga.

Una vez definidos los parámetros anteriores (I_{SRD} y L_D), éstos se sustituyen en la ecuación 3.3.

$$k_{R2} = \frac{4E}{L_V - e_V} \cdot \frac{b(h - C_V)^3}{12} \quad (3.7)$$

Conociendo las ecuaciones de rigidez, tanto del estado inicial como del estado de daño, ambas se sustituyen en la ecuación 3.1:

$$k_R^* = 1 - \frac{\frac{4E}{L_V - e_V} \cdot \frac{b(h - C_V)^3}{12}}{\frac{4E}{L_V} \cdot \frac{bh^3}{12}} \quad (3.8)$$

Considerando que el módulo de elasticidad permanece constante, la ecuación 3.8 se puede escribir como:

$$C_V = h - h \cdot \sqrt[3]{\left(1 - \frac{e_V}{L_V}\right) (1 - k_R^*)} \quad (3.8.1)$$

Donde C_V es la profundidad de grieta en una viga.

Por lo tanto, la ecuación propuesta (3.8.1) permite conocer de manera directa la profundidad de una grieta que se presenta en una viga de sección rectangular.

3.2. COLUMNAS DE SECCIÓN CIRCULAR

Las grietas que se presentarían en una columna debido a esfuerzos flexionantes se muestran en la figura 3.4, en donde S_G representa la longitud de la grieta, e_C al espesor de la misma y L_C a la altura total de la columna.

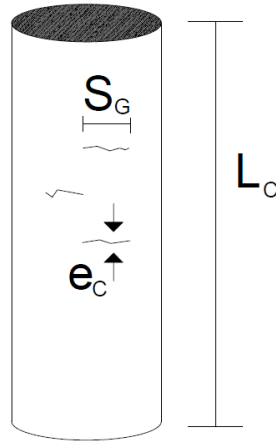


Figura 3.4. Agrietamiento debido a flexión en una columna

En la figura 3.5 se muestra la sección transversal de una columna circular agrietada. En donde la grieta idealizada corresponde a un arco de circunferencia de ángulo θ_G , radio C_C y longitud S_A . Estrictamente, la longitud de la grieta S_G no tiene la misma magnitud que la del arco de circunferencia idealizado S_A ; sin embargo, se considerará que la diferencia entre estas magnitudes es irrelevante, por lo que el valor de la longitud de grieta S_G será el mismo para la longitud del arco de circunferencia S_A .

Cabe mencionar que la grieta no necesariamente se puede presentar con una magnitud menor que el radio de la columna, sino también puede alcanzar un valor máximo igual al diámetro de la columna.

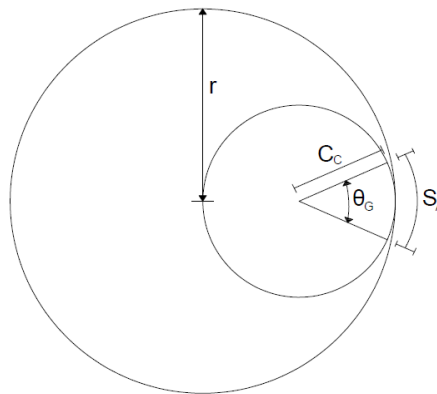


Figura 3.5. Sección transversal agrietada.

3.2.1. Formulación

De manera análoga a la formulación de la ecuación para vigas rectangulares, se parte se parte de establecer la pérdida de rigidez en función de la rigidez a flexión inicial y la del estado dañado, es decir:

$$k_C^* = 1 - \frac{k_{C2}}{k_{C1}} \quad (3.9)$$

Capítulo 3. Propuesta para calcular la magnitud de grietas en elementos estructurales de concreto reforzado

Donde k_C^* es la pérdida de rigidez en un elemento de sección circular; k_{C1} es la rigidez a flexión antes del daño en un elemento de sección circular; y k_{C2} es la rigidez a flexión del elemento en estado de daño en un elemento de sección circular.

Así mismo, con base en la ecuación 2.4, se establecen los valores de la rigidez a flexión para el estado inicial y el estado de daño:

$$k_{C1} = \frac{4EI_{SC}}{L_C} \quad (3.10)$$

$$k_{C2} = \frac{4EI_{SCD}}{L_{CD}} \quad (3.11)$$

Donde I_{SCD} es el momento de inercia de sección circular agrietada; L_C es la longitud inicial de la columna; y L_{CD} es la longitud de la columna después del daño.

Para la rigidez inicial del elemento basta con sustituir el momento de inercia de la ecuación 2.5 en la ecuación 3.10, obteniéndose:

$$k_{C1} = \frac{4E}{L_C} \cdot \frac{1}{4} \pi r^4 \quad (3.12)$$

En el caso de la rigidez del elemento en estado de daño, la longitud de la columna se reduce debido al espesor de la grieta. Por otra parte, el momento de inercia de la sección dañada puede obtenerse como la diferencia entre el momento de inercia inicial y el momento de inercia producido por la grieta, es decir:

$$L_{CD} = L_C - e_C \quad (3.13)$$

$$I_{SCD} = I_{SC} - I_{GC} \quad (3.14)$$

Donde e_C es el espesor de grieta en la columna; e I_{GC} es el momento de inercia que representa a la grieta.

De la figura 3.5, se sabe que la grieta se idealiza como un arco de circunferencia, por lo tanto, su momento de inercia obedece a la ecuación 2.8, es decir:

$$I_{GC} = \frac{1}{4} \frac{\theta_G}{360} \pi C_C^4 \quad (3.15)$$

Donde C_C es la profundidad de grieta; y θ_G es el ángulo del arco que representa a la grieta.

Sustituyendo las ecuaciones 2.5 y 3.15 en la ecuación 3.14, se obtiene el momento de inercia de la sección agrietada como:

$$I_{SCD} = \frac{1}{4} \pi r^4 - \frac{1}{4} \frac{\theta_G}{360} \pi C_C^4 \quad (3.16)$$

Una vez se ha definido el momento de inercia de la sección agrietada, así como la longitud de la columna dañada, se puede determinar la rigidez a flexión del estado dañado sustituyendo las ecuaciones 3.13 y 3.16 en la ecuación 3.11.

$$k_{C2} = \frac{4E \left(\frac{1}{4} \pi r^4 - \frac{1}{4} \frac{\theta_G}{360} \pi C_C^4 \right)}{L_C - e_C} \quad (3.17)$$

Siendo establecidas las ecuaciones de rigidez para ambos estados, estado inicial y estado dañado, éstas se sustituyen en la ecuación 3.9:

Capítulo 3. Propuesta para calcular la magnitud de grietas en elementos estructurales de concreto reforzado

$$k_C^* = 1 - \frac{4E \left(\frac{1}{4} \pi r^4 - \frac{1}{4} \frac{\theta_G}{360} \pi C_C^4 \right)}{\frac{L_C - e_C}{\frac{4E}{L_C} \cdot \frac{1}{4} \pi r^4}} \quad (3.18)$$

Considerando que el módulo de elasticidad permanece constante, la ecuación 3.18 puede escribirse como:

$$C_C = \sqrt[4]{\frac{360}{\theta_G} \cdot r^4 \cdot \left[1 - \left(\frac{L_C - e_C}{L_C} \right) (1 - k_C^*) \right]} \quad (3.18.1)$$

En este punto se tienen dos incógnitas, C_C y θ_G , y una sola ecuación. La segunda ecuación parte de la relación geométrica que existe entre un arco de circunferencia y sus parámetros característicos:

$$S_G = \frac{\pi \cdot C_C \cdot \theta_G}{180} \rightarrow C_C = \frac{180 \cdot S_G}{\pi \cdot \theta_G} \quad (3.19)$$

Igualando la ecuación 3.19 con la ecuación 3.18.1:

$$\frac{180 \cdot S_G}{\pi \cdot \theta_G} = \sqrt[4]{\frac{360}{\theta_G} \cdot r^4 \cdot \left[1 - \left(\frac{L_C - e_C}{L_C} \right) (1 - k_C^*) \right]} \quad (3.20)$$

La ecuación anterior puede escribirse de la siguiente manera:

$$\theta_G = \sqrt[3]{\frac{(180 \cdot S_G)^4}{\pi^4 \cdot r^4 \cdot 360 \cdot \left[1 - \left(\frac{L_C - e_C}{L_C} \right) (1 - k_C^*) \right]}} \quad (3.20.1)$$

De esta manera la ecuación 3.20.1 permite calcular el ángulo de apertura de la grieta. Una vez calculado el ángulo, se puede determinar la profundidad de grieta con la ecuación 3.19 o bien con la ecuación propuesta (3.20.1).

CAPÍTULO 4

APLICACIÓN Y RESULTADOS

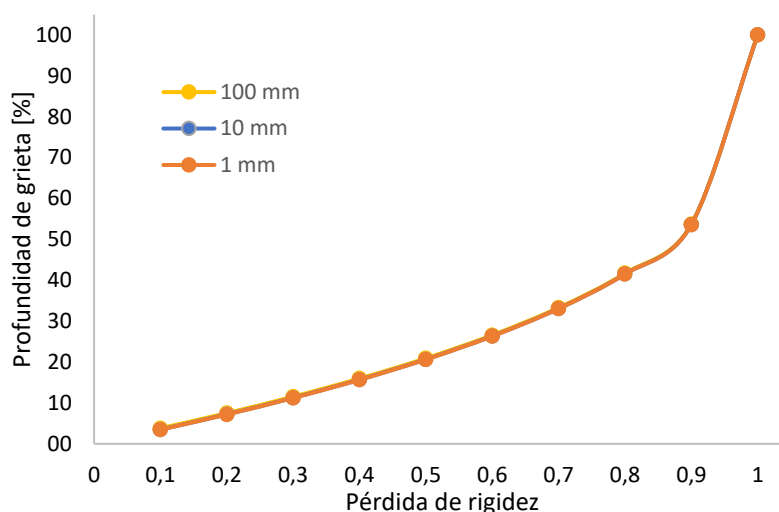
Con el fin de comprender el comportamiento de la profundidad de grieta, se proponen tres vigas y tres columnas de diferente sección transversal.

4.1. VIGAS

4.1.1. Viga de sección rectangular (50x90)

Viga de concreto reforzado con sección transversal rectangular de 50 cm de base y 90 cm de altura, con una longitud de 9 m.

En la gráfica 4.1, se muestra la variación de la magnitud de la grieta, expresada en el porcentaje que ésta representa respecto a la altura del elemento, para distintos valores de pérdida de rigidez y diferentes espesores de grieta (1, 10 y 100 mm).



Gráfica 4.1. Relación profundidad de grieta-pérdida de rigidez en viga 50x90.

Se observa que el espesor de grieta no contribuye de manera importante a la profundidad, aunado a ello, el desarrollo de la grieta muestra un comportamiento exponencial. No obstante, no es sino hasta que se presenta un 90% de pérdida de rigidez cuando las grietas penetran a más del 53% respecto peralte del elemento.

En la tabla 4.1 se muestran los valores obtenidos de profundidad de grieta empleando la ecuación 3.8.1, para distintos espesores y distintos estados de daño; dichos valores están representados en centímetros y en el porcentaje que representa la grieta respecto al peralte de la sección:

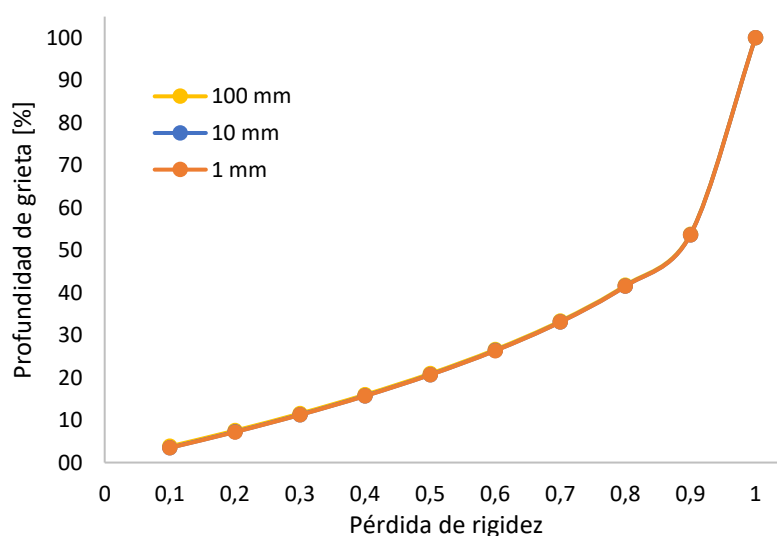
Tabla 4.1. Profundidad de grieta para distintos espesores en viga 50x90.

k*	e = 1 [mm]		e = 10 [mm]		e = 100 [mm]	
	c [cm]	c [%]	c [cm]	c [%]	c [cm]	c [%]
0.1	3.1	3.5	3.1	3.5	3.4	3.8
0.2	6.5	7.2	6.5	7.2	6.8	7.5
0.3	10.1	11.2	10.1	11.2	10.4	11.5
0.4	14.1	15.7	14.1	15.7	14.4	16.0
0.5	18.6	20.6	18.6	20.7	18.8	20.9
0.6	23.7	26.3	23.7	26.3	23.9	26.6
0.7	29.8	33.1	29.8	33.1	30.0	33.3
0.8	37.4	41.5	37.4	41.5	37.6	41.7
0.9	48.2	53.6	48.2	53.6	48.4	53.8
1	90.0	100.0	90.0	100.0	90.0	100.0

4.1.2. Viga de sección rectangular (40x70)

Viga de concreto reforzado con sección transversal rectangular de 40 cm de base y 70 cm de altura, con una longitud de 9 m.

En la gráfica 4.2, se muestra la variación de la magnitud de la grieta, expresada en el porcentaje que ésta representa respecto a la altura del elemento, para distintos valores de pérdida de rigidez y diferentes espesores de grieta (1, 10 y 100 mm).



Gráfica 4.2. Relación Profundidad de grieta – pérdida de rigidez en viga 40x70.

Se observa que el espesor de grieta no contribuye de manera importante a la profundidad, aunado a ello, el desarrollo de la grieta muestra un comportamiento exponencial. No obstante, no es sino hasta que se presenta un 90% de pérdida de rigidez cuando las grietas penetran a más del 50% respecto peralte del elemento.

En la tabla 4.2, se muestran los valores obtenidos de profundidad de grieta empleando la ecuación 3.8.1, para distintos espesores y distintos estados de daño; dichos valores están representados en centímetros y en el porcentaje que representa la grieta respecto al peralte de la sección:

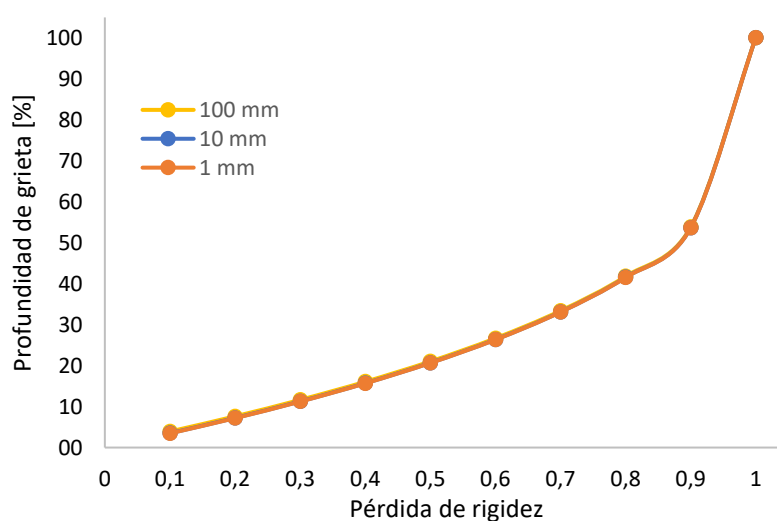
Tabla 4.2. Profundidad de grieta para distintos espesores en viga 40x70.

k*	e = 1 [mm]		e = 10 [mm]		e = 100 [mm]	
	c [cm]	c [%]	c [cm]	c [%]	c [cm]	c [%]
0.1	2.4	3.5	2.4	3.5	2.7	3.8
0.2	5.0	7.2	5.0	7.2	5.3	7.5
0.3	7.8	11.2	7.9	11.2	8.1	11.5
0.4	11.0	15.7	11.0	15.7	11.2	16.0
0.5	14.4	20.6	14.5	20.7	14.6	20.9
0.6	18.4	26.3	18.4	26.3	18.6	26.6
0.7	23.1	33.1	23.2	33.1	23.3	33.3
0.8	29.1	41.5	29.1	41.5	29.2	41.7
0.9	37.5	53.6	37.5	53.6	37.6	53.8
1	70.0	100.0	70.0	100.0	70.0	100.0

4.1.3. Viga de sección rectangular (40x60)

Viga de concreto reforzado con sección transversal rectangular de 40 cm de base y 60 cm de altura, con una longitud de 7 m.

En la gráfica 4.3, se muestra la variación de la magnitud de la grieta, expresada en el porcentaje que ésta representa respecto a la altura del elemento, para distintos valores de pérdida de rigidez y diferentes espesores de grieta (1, 10 y 100 mm).



Gráfica 4.3. Relación Profundidad de grieta – pérdida de rigidez en viga 40x60.

Se observa que el espesor de grieta no contribuye de manera importante a la profundidad, aunado a ello, el desarrollo de la grieta muestra un comportamiento exponencial. No obstante, no es sino hasta que se presenta un 90% de pérdida de rigidez cuando las grietas penetran a más del 53% respecto peralte del elemento

En la tabla 4.3, se muestran los valores obtenidos de profundidad de grieta empleando la ecuación 3.8.1, para distintos espesores y distintos estados de daño; dichos valores están representados en centímetros y en el porcentaje que representa la grieta respecto al peralte de la sección:

Tabla 4.3. Profundidad de grieta para distintos espesores en viga 40x60.

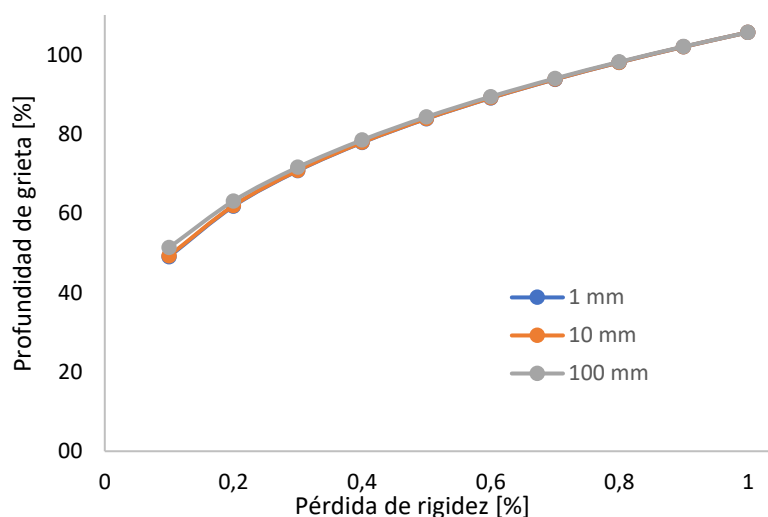
k*	e = 1 [mm]		e = 10 [mm]		e = 100 [mm]	
	c [cm]	c [%]	c [cm]	c [%]	c [cm]	c [%]
0.1	2.1	3.5	2.1	3.5	2.3	3.9
0.2	4.3	7.2	4.3	7.2	4.6	7.6
0.3	6.7	11.2	6.8	11.3	7.0	11.6
0.4	9.4	15.7	9.4	15.7	9.6	16.1
0.5	12.4	20.6	12.4	20.7	12.6	21.0
0.6	15.8	26.3	15.8	26.4	16.0	26.7
0.7	19.8	33.1	19.9	33.1	20.0	33.4
0.8	24.9	41.5	24.9	41.5	25.1	41.8
0.9	32.2	53.6	32.2	53.6	32.3	53.8
1	60.0	100.0	60.0	100.0	60.0	100.0

4.2. COLUMNAS

4.2.1. Columna de sección circular (r45)

Columna de concreto reforzado con sección transversal circular de 45 cm de radio y una altura de 6 m.

En la gráfica 4.4, se muestran los valores de magnitud de grieta expresado en el porcentaje que esta representa respecto del diámetro de la columna, para distintos estados de daño (pérdida de rigidez), distintos espesores (1, 10 y 100 mm) y una longitud propuesta de 30 cm que representa el 10% del perímetro de la columna.



Gráfica 4.4. Relación pérdida de rigidez–espesor–profundidad de grieta en columna r45

Se observa que el espesor de grieta no contribuye de manera importante a la profundidad; el desarrollo de la grieta comienza a partir del 50% de profundidad respecto al diámetro de la columna, para una pérdida de rigidez del 10%.

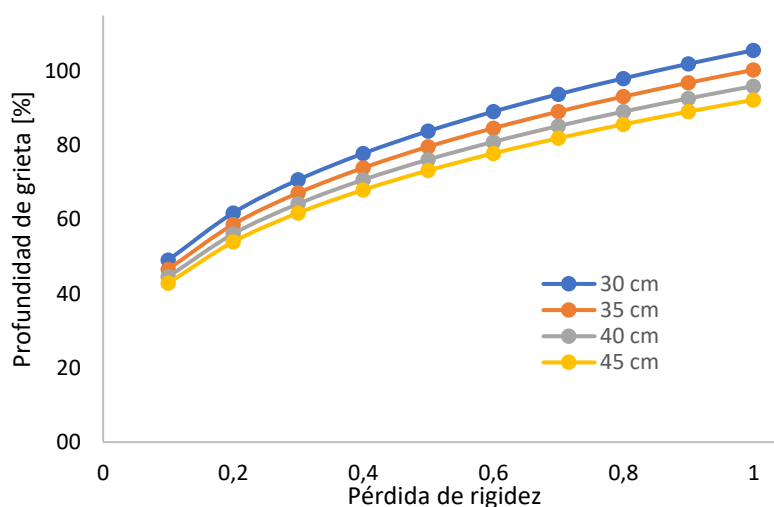
En la tabla 4.4, se muestran los valores obtenidos de profundidad de grieta, empleando las ecuaciones 3.20.1 y 3.19, para distintos espesores y estados de daño y una longitud de grieta

propuesta de 30 cm; dichos valores están representados en centímetros y en el porcentaje que representa la grieta respecto al diámetro de la comuna:

Tabla 4.4. Profundidad de grieta para distintos espesores en columna r45.

k*	e = 1 [mm]		e = 10 [mm]		e = 100 [mm]	
	c [cm]	c [%]	c [cm]	c [%]	c [cm]	c [%]
0.1	44.1	49.0	44.3	49.3	46.2	51.4
0.2	55.6	61.8	55.7	61.9	56.8	63.1
0.3	63.6	70.7	63.7	70.8	64.4	71.6
0.4	70.0	77.8	70.1	77.9	70.6	78.5
0.5	75.4	83.8	75.5	83.9	75.9	84.3
0.6	80.2	89.1	80.2	89.1	80.5	89.4
0.7	84.4	93.8	84.4	93.8	84.6	94.0
0.8	88.2	98.0	88.3	98.1	88.4	98.2
0.9	91.8	102.0	91.8	102.0	91.8	102.0
1	95.1	105.6	95.1	105.6	95.1	105.6

En la gráfica 4.5 se muestran los valores de magnitud de grieta expresado en el porcentaje que esta representa respecto del diámetro de la columna, para distintos estados de daño (pérdida de rigidez k^*), distintas longitudes de grieta (30, 35, 40 y 45 cm) y un espesor supuesto de 1 mm.



Gráfica 4.5. Relación pérdida de rigidez – longitud – profundidad de grieta en columna r45.

Se observa que la longitud de grieta sí tiene una repercusión importante en la profundidad de esta; por otra parte, para las longitudes de 30 cm y 35 cm la ecuación propuesta arroja profundidades de grieta mayores al 100% respecto al diámetro.

En la tabla 4.5, se muestran los valores obtenidos de profundidad de grieta, empleando las ecuaciones 3.20.1 y 3.19, para distintas longitudes y estados de daño y un espesor de grieta propuesto de 1 mm; dichos valores están representados en centímetros y en el porcentaje que representa la grieta respecto al diámetro de la comuna:

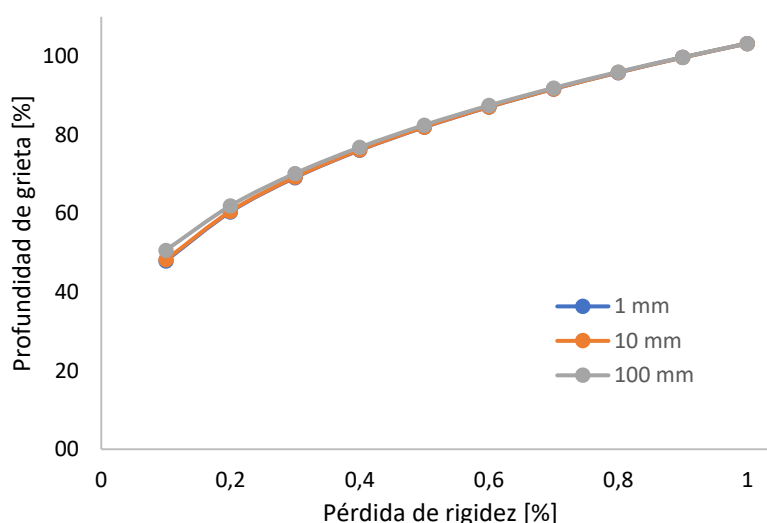
Tabla 4.5. Profundidad de grieta para distintas longitudes en columna r45.

k*	s = 30 [cm]		s = 35 [cm]		s = 40 [cm]		s = 45 [cm]	
	c [cm]	c [%]	c [cm]	c [%]	c [cm]	c [%]	c [cm]	c [%]
0.1	44.1	49.0	41.9	46.6	40.1	44.6	38.6	42.8
0.2	55.6	61.8	52.8	58.7	50.5	56.1	48.6	54.0
0.3	63.6	70.7	60.5	67.2	57.8	64.2	55.6	61.8
0.4	70.0	77.8	66.5	73.9	63.6	70.7	61.2	68.0
0.5	75.4	83.8	71.7	79.6	68.5	76.2	65.9	73.2
0.6	80.2	89.1	76.2	84.6	72.8	80.9	70.0	77.8
0.7	84.4	93.8	80.2	89.1	76.7	85.2	73.7	81.9
0.8	88.2	98.0	83.8	93.1	80.2	89.1	77.1	85.7
0.9	91.8	102.0	87.2	96.9	83.4	92.6	80.2	89.1
1	95.1	105.6	90.3	100.3	86.4	96.0	83.0	92.3

4.2.2. Columna de sección circular (r35)

Columna de concreto reforzado con sección transversal rectangular de 35 cm de radio y una altura de 5 m.

En la gráfica 4.6, se muestran los valores de magnitud de grieta expresado en el porcentaje que esta representa respecto del diámetro de la columna, para distintos estados de daño (pérdida de rigidez), distintos espesores (1, 10 y 100 mm) y una longitud propuesta de 25 cm que representa el 11% del perímetro de la columna.



Gráfica 4.6. Relación pérdida de rigidez–espesor–profundidad de grieta en columna 35.

Se observa que el espesor de grieta no contribuye de manera importante a la profundidad; el desarrollo de la grieta comienza a partir del 50% de profundidad respecto al diámetro de la columna, para una pérdida de rigidez del 10%.

En la tabla 4.6, se muestran los valores obtenidos de profundidad de grieta empleando las ecuaciones 3.20.1 y 3.19, para distintos espesores y estados de daño y una longitud de grieta propuesta de 25 cm; dichos valores están representados en centímetros y en el porcentaje que representa la grieta respecto al diámetro de la columna:

Tabla 4.6. Profundidad de grieta para distintos espesores en columna r35.

k*	e = 1 [mm]		e = 10 [mm]		e = 100 [mm]	
	c [cm]	c [%]	c [cm]	c [%]	c [cm]	c [%]
0.1	33.6	47.9	33.7	48.2	35.4	50.6
0.2	42.3	60.4	42.4	60.5	43.3	61.9
0.3	48.4	69.1	48.4	69.2	49.1	70.2
0.4	53.2	76.1	53.3	76.1	53.8	76.8
0.5	57.3	81.9	57.4	82.0	57.7	82.5
0.6	60.9	87.1	61.0	87.1	61.2	87.4
0.7	64.2	91.6	64.2	91.7	64.3	91.9
0.8	67.1	95.8	67.1	95.8	67.2	96.0
0.9	69.8	99.7	69.8	99.7	69.8	99.7
1	72.2	103.2	72.2	103.2	72.2	103.2

En la gráfica 4.7 se muestran los valores de magnitud de grieta expresado en el porcentaje que esta representa respecto del diámetro de la columna, para distintos estados de daño (pérdida de rigidez k^*), distintas longitudes de grieta (20, 25, 30 y 35 cm) y un espesor supuesto de 1 mm.

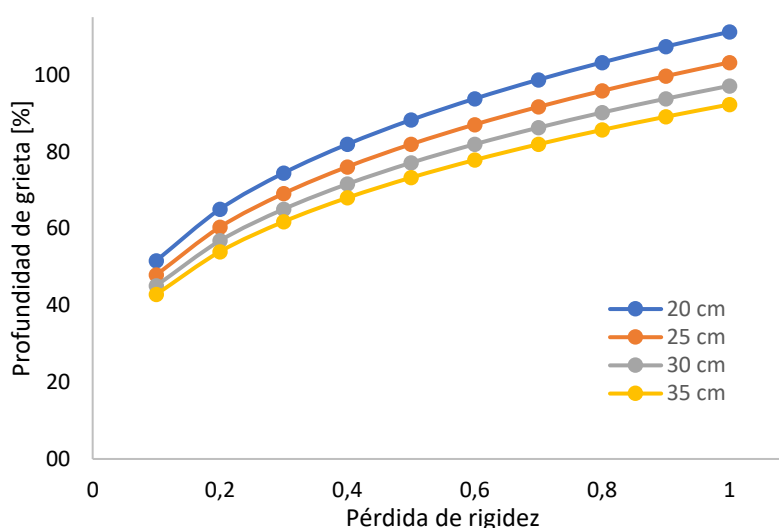


Figura 4.7. Relación pérdida de rigidez–longitud–profundidad de grieta en columna r35.

Se observa que la longitud de grieta sí tiene una repercusión importante en la profundidad de esta; por otra parte, para las longitudes de 20 cm y 25 cm la ecuación propuesta arroja profundidades de grieta mayores al 100% respecto al diámetro.

En la tabla 4.7, se muestran los valores obtenidos de profundidad de grieta, empleando las ecuaciones 3.20.1 y 3.19, para distintas longitudes y estados de daño y un espesor de grieta propuesto de 1 mm; dichos valores están representados en centímetros y en el porcentaje que representa la grieta respecto al diámetro de la comuna.

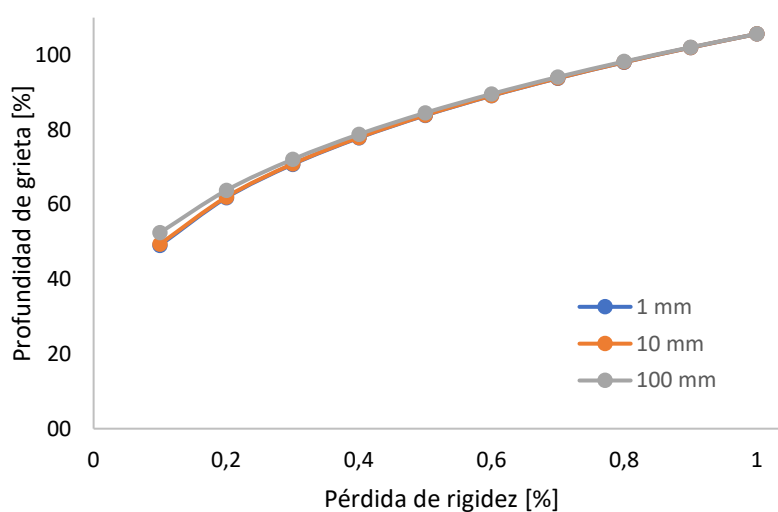
Tabla 4.7. Profundidad de grieta para distintas longitudes en columna r35.

k*	s = 20 [cm]		s = 25 [cm]		s = 30 [cm]		s = 35 [cm]	
	c [cm]	c [%]	c [cm]	c [%]	c [cm]	c [%]	c [cm]	c [%]
0.1	36.1	51.6	33.6	47.9	31.6	45.1	30.0	42.9
0.2	45.5	65.0	42.3	60.4	39.8	56.8	37.8	54.0
0.3	52.1	74.4	48.4	69.1	45.5	65.0	43.2	61.8
0.4	57.4	81.9	53.2	76.1	50.1	71.6	47.6	68.0
0.5	61.8	88.3	57.3	81.9	54.0	77.1	51.3	73.2
0.6	65.6	93.8	60.9	87.1	57.3	81.9	54.5	77.8
0.7	69.1	98.7	64.2	91.6	60.4	86.2	57.3	81.9
0.8	72.3	103.2	67.1	95.8	63.1	90.2	60.0	85.7
0.9	75.1	107.3	69.8	99.7	65.6	93.8	62.4	89.1
1	77.8	111.2	72.2	103.2	68.0	97.1	64.6	92.3

4.2.3. Columna de sección circular (r30)

Columna de concreto reforzado con sección transversal rectangular de 30 cm de radio y una altura de 4 m.

En la gráfica 4.8, se muestran los valores de magnitud de grieta expresado en el porcentaje que esta representa respecto del diámetro de la columna, para distintos estados de daño (pérdida de rigidez), distintos espesores (1, 10 y 100 mm) y una longitud propuesta de 20 cm que representa el 10.6% del perímetro de la columna.



Gráfica 4.8. Relación pérdida de rigidez–espesor–profundidad de grieta en columna r30.

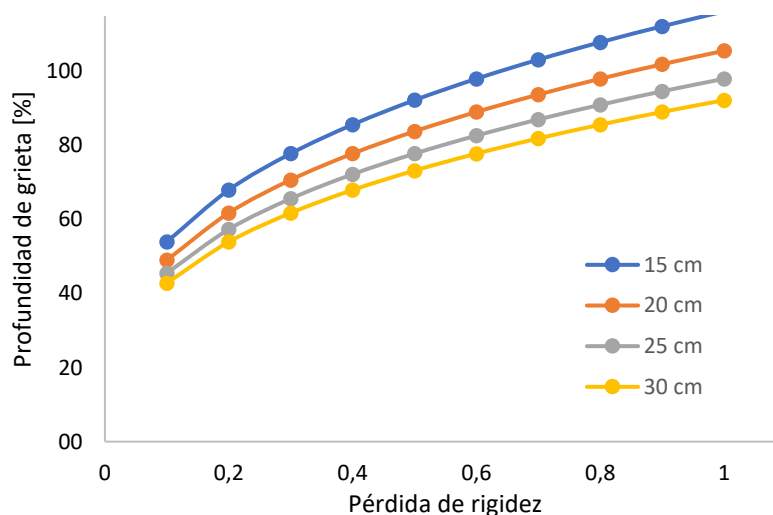
Se observa que el espesor de grieta no contribuye de manera importante a la profundidad; el desarrollo de la grieta comienza a partir del 50% de profundidad respecto al diámetro de la columna, para una pérdida de rigidez del 10%.

En la tabla 4.8, se muestran los valores obtenidos de profundidad de grieta, empleando las ecuaciones 3.20.1 y 3.19, para distintos espesores y estados de daño y una longitud de grieta propuesta de 20 cm; dichos valores están representados en centímetros y en el porcentaje que representa la grieta respecto al diámetro de la columna:

Tabla 4.8. Profundidad de grieta para distintos espesores en columna r30.

k*	e = 1 [mm]		e = 10 [mm]		e = 100 [mm]	
	c [cm]	c [%]	c [cm]	c [%]	c [cm]	c [%]
0.1	29.4	49.1	29.6	49.4	31.5	52.5
0.2	37.1	61.8	37.2	62.0	38.3	63.8
0.3	42.4	70.7	42.5	70.8	43.2	72.1
0.4	46.7	77.8	46.7	77.9	47.3	78.8
0.5	50.3	83.8	50.3	83.9	50.7	84.5
0.6	53.5	89.1	53.5	89.1	53.7	89.6
0.7	56.3	93.8	56.3	93.8	56.5	94.1
0.8	58.8	98.0	58.8	98.1	58.9	98.2
0.9	61.2	102.0	61.2	102.0	61.2	102.1
1	63.4	105.6	63.4	105.6	63.4	105.6

En la gráfica 4.9 se muestran los valores de magnitud de grieta expresado en el porcentaje que esta representa respecto del diámetro de la columna, para distintos estados de daño (pérdida de rigidez k^*), distintas longitudes de grieta (15, 20, 25 y 30 cm) y un espesor supuesto de 1 mm.



Gráfica 4.9. Relación pérdida de rigidez-longitud-profundidad de grieta en columna r30.

Se observa que la longitud de grieta sí tiene una repercusión importante en la profundidad de esta; por otra parte, para las longitudes de 15 cm y 20 cm la ecuación propuesta arroja profundidades de grieta mayores al 100% respecto al diámetro.

En la tabla 4.9, se muestran los valores obtenidos de profundidad de grieta, empleando las ecuaciones 3.13.1 y 3.12, para distintas longitudes y estados de daño y un espesor de grieta propuesto de 1 mm; dichos valores están representados en centímetros y en el porcentaje que representa la grieta respecto al diámetro de la comuna.

Tabla 4.9. Profundidad de grieta para distintas longitudes en columna r30.

k*	s = 15 [cm]		s = 20 [cm]		s = 25 [cm]		s = 30 [cm]	
	c [cm]	c [%]	c [cm]	c [%]	c [cm]	c [%]	c [cm]	c [%]
0.1	32.4	54.0	29.4	49.1	27.3	45.5	25.7	42.9
0.2	40.8	68.0	37.1	61.8	34.4	57.4	32.4	54.0
0.3	46.7	77.8	42.4	70.7	39.4	65.6	37.1	61.8
0.4	51.4	85.7	46.7	77.8	43.3	72.2	40.8	68.0
0.5	55.4	92.3	50.3	83.8	46.7	77.8	43.9	73.2
0.6	58.8	98.1	53.5	89.1	49.6	82.7	46.7	77.8
0.7	61.9	103.2	56.3	93.8	52.2	87.1	49.2	81.9
0.8	64.7	107.9	58.8	98.0	54.6	91.0	51.4	85.7
0.9	67.3	112.2	61.2	102.0	56.8	94.7	53.4	89.1
1	69.7	116.2	63.4	105.6	58.8	98.0	55.4	92.3

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Las ecuaciones propuestas en este trabajo están basadas en la magnitud de la pérdida de rigidez en un elemento estructural que trabaja a flexión. A partir de la idealización geométrica del desarrollo de la grieta, se planteó una relación entre las propiedades geométricas y la rigidez a flexión del elemento, tanto en vigas como columnas.

Las ecuaciones presentadas proporcionan dos ventajas:

1. Relacionar la pérdida de rigidez a flexión con la profundidad de la grieta.
2. Reducción de costos; es decir, poder omitir pruebas de campo.

Con base en las gráficas obtenidas (pérdida de rigidez–profundidad de grieta), para el caso de vigas, el desarrollo de la grieta muestra dos comportamientos: uno exponencial y otro lineal. El comportamiento exponencial es el primero en presentarse en intervalo de pérdida de rigidez de 0% a 90%, en donde las grietas alcanzan una penetración máxima del 53% del peralte del elemento, para los casos analizados; el comportamiento lineal se presenta en un intervalo de pérdida de rigidez de 90% a 100%, en donde las grietas alcanzan un valor máximo de penetración del 100% del peralte, es decir que las grietas atraviesan el elemento en su totalidad. Por otra parte, en los resultados también se observó que la profundidad de la grieta no se ve afectada de manera importante por su espesor.

El caso de las columnas resulta similar al caso de las vigas en cuanto a la repercusión que tiene el espesor de grieta en la profundidad. Es decir, el espesor no afecta de manera importante la profundidad de una grieta. Por otra parte, las columnas presentan un parámetro adicional, la longitud de grieta s , el cual sí tiene una influencia importante en el desarrollo de grietas.

Para las tres columnas analizadas y para ciertas longitudes de grieta, se observaron porcentajes de penetración mayores al 100% de su diámetro. Por ejemplo, en la columna $r = 30\text{cm}$, para una longitud $S_G = 15\text{ cm}$ y una pérdida de rigidez del 70%, se estimó una grieta de 61.9 cm (103.2% respecto del diámetro), lo que se puede interpretar como el hecho de que la columna no puede presentar grietas de esa longitud tan *pequeña* para tal magnitud de pérdida de rigidez. La contra parte se presenta cuando se propone una longitud $S_G = 30\text{ cm}$, ya que para una pérdida de rigidez del 100%, la profundidad de grieta estimada es de 55.4 cm (92.3% respecto del diámetro), es decir que no penetró al elemento en su totalidad como se hubiese esperado.

Con base en los resultados obtenidos para los casos estudiados se concluye que, en columnas, la pérdida de rigidez se manifiesta físicamente en longitud y profundidad de grieta. La profundidad de grieta puede alcanzar un 100% de penetración respecto al diámetro de la columna, para una pérdida de rigidez menor al 100%, si la longitud de grieta S_G es lo suficientemente *pequeña*. Por otra parte, la grieta puede no penetrar la totalidad del elemento, para una pérdida de rigidez del 100%, si la longitud de la grieta S_G es lo suficientemente *grande*.

Se recomienda realizar pruebas experimentales, en donde se sometan modelos estructurales de concreto fuerzas de flexión hasta el grado de dañarlos, posteriormente realizar un estudio de detección de daño y aplicar las ecuaciones propuestas en este trabajo; esto con el fin de poder realizar una comparación entre los resultados obtenidos mediante las ecuaciones aquí presentadas con los valores obtenidos de dichas pruebas. Así mismo, se recomienda investigar y desarrollar ecuaciones correspondientes a otro tipo de secciones y a elementos que trabajen a compresión. Por otra parte, analizar a fondo la razón por la cual las grietas se presentan a partir del 50% respecto del diámetro en las columnas

REFERENCIAS

- Doebbling S., Farrar C., y Prime M., (1998), "A summary review of vibration-based damage identification methods", Engineering Analysis Group, EUA.
- González O., (2005), "Aspectos fundamentales del concreto reforzado", LIMUSA, México.
- Escobar J.A., Sosa J.J., y Gómez R., (2001), "Damage detection in framed building structures", Canadian Journal of Civil Engineering, Canadá.
- Hibbeler R., (2010), "Estática", Pearson education, México.
- McCormac J., (1994), "Estructuras análisis y diseño", Alfaomega, México.
- Meli R., (2010), "Diseño Estructural", LIMUSA, México.
- Rytter A., (1993), "Vibration based inspection of civil engineer structures", Ph. D. Dissertation, Department of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University, Denmark.
- Salmerón M., (2018), "Evolución del método de la matriz de transformación para detección de daño estructural: marcos planos asimétricos", Tesis de licenciatura, UNAM, México.
- Sonh H. y Law K., (1997), "A bayesian probabilistic approach for structure damage detection", Department of Civil Engineering, Stanford University, EUA.