UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN FILOSOFÍA
FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS

La naturaleza de las entidades lógico-matemáticas en la fenomenología pre-trascendental de E. Husserl. Un estudio sistemático de su obra temprana (1887-1901)

TESIS QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTORADO EN FILOSOFÍA

PRESENTA:

LUIS ALBERTO CANELA MORALES

NOMBRE DEL TUTOR
Dr. ANTONIO ZIRIÓN QUIJANO (IIF-UNAM/UDIR-UNAM)

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

DRA. ANA ROSA PÉREZ RANSANZ (IIF-UNAM)
DR. AXEL ARTURO BARCELÓ ASPEITIA (IIF-UNAM)
DR. MAX FERNÁNDEZ DE CASTRO (UAM-I)
DR. JORGE ARMANDO REYES ESCOBAR (FFYL-UNAM)

Ciudad de México, Noviembre de 2019

Agradecimientos

Seré breve...

Agradezco enormemente el apoyo de quienes aceptaron y apoyaron este trabajo: Dres. Antonio Zirión Quijano; Ana Rosa Pérez Ransanz; Axel Barceló Aspeitia; Max Fernández de Castro y Jorge Armando Reyes Escobar. Sin su guía, nada, absolutamente nada de esto hubiera sido posible.

De manera muy particular quiero agradecer a Norma Angélica Pimentel. Gracias por soportar mi torpeza con los trámites administrativos, y gracias también por tus nobles y atentos gestos hacia mí.

También quiero agradecer a todos mis amigos, alumnos y profesores que de alguna u otra manera me tendieron su mano, sobre todo en los peores momentos de mi vida.

Finalmente, quiero agradecer a mis padres, y en especial a mis hermanos. Los quiero y los abrazo de corazón.

Para Amira, mi atenta y bella compañera... ¡Gracias totales!

ÍNDICE

A modo de advertencia

Las referencias a la obra de Husserl se harán conforme a la siguiente edición: Husserliana–Gesammelte Werke, publicada originalmente por Martinus Nijhoff, luego por Kluwer Academic Publishers y actualmente por Springer. Para citar dicha edición emplearé la sigla "Hua", seguida del tomo en números romanos y las páginas en números arábigos (p.ej. Hua X, 56). La correspondencia de Husserl se citará de siguiente manera: "Hua Dok", seguida del tomo y las páginas en números arábigos (p.ej. Hua Dok III/5, p. 115). En algunas ocasiones también se citan las obras correspondientes a Husserliana Materialien, estas se citarán como "Hua Mat", seguida del tomo en números romanos y las páginas en números arábigos (p.ej. Hua Mat I, 55). Siempre que fue posible cité la versión en español de las ediciones aquí estudiadas, para los casos donde no existe texto en español la traducción es mía, a menos que se diga lo contrario. Aquí debo mencionar que en todo momento tuve en cuenta el original en alemán y siempre conté con la asesoría y corrección del Dr. Antonio Zirión. También he consultado y citado traducciones inéditas que enseguida enlisto:

1. *Sobre el concepto de número*. *Análisis psicológicos*. Traducción de Juan Carlos Lores

2. *Acerca de la lógica de los signos* (*semiótica*). Traducción de Juan Carlos Lores

3. *Estudios psicológicos ordenados a la lógica elemental*. Traducción de Manuel Abella

4. *Objetos intencionales* (1894). Traducción de Ángel Xolocotzi Yáñez y Antonio Zirión Quijano

Todas estas traducciones forman parte del siguiente volumen: Edmund Husserl. *Textos Breves* (1887-1936) editado por Agustín Serrano de Haro y Antonio Zirión Quijano, y que aparecerá en la editorial Sígueme (Salamanca, España). Hago público el agradecimiento al Dr. Antonio Zirión por haberme facilitado estas versiones y permitirme citarlas. Dado su carácter inédito, presento la paginación del original alemán, pero que conste que las traducciones corresponden a los autores arriba mencionados. De igual manera, he consultado el "Glosario-Guía para traducir a Husserl" que dirige el Dr. Antonio Zirión Quijano (http://www.ggthusserl.org/) y así apoyarme en las traducciones utilizadas en los términos técnicos que presentan las obras de Husserl.

INTRODUCCIÓN

No es gratuita la afirmación de Rizo-Patrón cuando dice que en *Filosofía de la aritmética* comenzaron a gestarse algunos de los problemas fundamentales de la fenomenología trascendental husserliana, *v.gr.*, el tema de la idealidad, los primeros esbozos de la intencionalidad y el cuestionamiento sobre si es posible fundar la lógica en un planteamiento psicologista (2002). En un intento por validar y ampliar el juicio anterior, el objetivo general de esta investigación es estudiar la génesis y estructura de los principales conceptos lógico-matemáticos contenidos en las obras de Edmund Husserl enmarcadas dentro del periodo de 1887 a 1900.[1] Básicamente, el presente trabajo intenta reconstruir de manera histórico-crítica[2] aspectos esenciales sobre temas y problemas de matemáticas y lógica de acuerdo con la incipiente fenomenología presente en las primeras obras de Husserl. Debo agregar que mi mayor intención es que este trabajo de investigación ayude a cimentar la bases (o al menos a delinear) un estudio más completo sobre la relación entre la fenomenología husserliana y el quehacer matemático. En este sentido, este trabajo no es un trabajo meramente expositivo, sino que intenta problematizar los conceptos principales con los que Husserl pretende fundamentar fenomenológicamente la esfera de lo formal y con ello la racionalidad teórica en general

Sin obviar el hecho de que las contribuciones de Husserl al campo de las matemáticas y la lógica son exclusivamente filosóficas —pues hasta donde se sabe no existe una sola propuesta a nivel técnico— creo que es válido afirmar, y esto se comprobará a lo largo de esta investigación, que en su obra temprana es posible encontrar los primeros trazos sobre problemas propios de la esfera de lo formal desde una aproximación fenomenológica. Así, a partir de la lectura de los primeros escritos de Husserl, así como de algunos de sus manuscritos inéditos, plantearé nuevas claves para comprender diversos problemas que van

[1] Etapa que coincide con su paso por la Universidad de Halle.

[2] En esta investigación entenderé por método histórico-crítico, el estudio de las estructuras, sentidos y condiciones originales de un texto-discurso. Esto significa que se hará uso de la crítica o, en algunos casos, la reconstrucción de los principales argumentos del texto estudiado, así como crítica de las fuentes secundarias que han contribuido a la formación del texto-discurso. Desde luego, en reiterados momentos intento abrirme paso con meditaciones originales dispuestas a ponerse a prueba con los estudiosos de la fenomenología.

desde el análisis del concepto de número en *Sobre el concepto de número* hasta la presentación de los objetos categoriales en *Investigaciones lógicas*.

Tomando en cuenta este recorrido, el objetivo de mi primer capítulo será explicitar la situación histórico-filosófica e histórico-matemática en la que se encuentra el "joven Husserl". Lo anterior bajo un enfoque histórico-crítico que toma como punto de partida un momento anterior al llamado "giro trascendental" que usualmente suele ubicarse en las lecciones de *La idea de la fenomenología* (1906-07).[3] Ahora bien, la situación histórica-crítica arriba mencionada está conformada por el surgimiento de la teoría de conjuntos (Bolzano, Cantor, Riemann y Dedekind) y por los desarrollos matemáticos de Weierstrass y Kronecker. Todas estas escuelas de pensamiento matemático marcaron fuertemente las nacientes investigaciones matemáticas y lógicas de Husserl. En buena medida, y de esto hablo más adelante, esta pléyade de matemáticos y filósofos son coordenadas ineludibles a las que Husserl se refirió constantemente en su obra temprana. En síntesis, el objetivo del primer capítulo es enfatizar la relación existente entre el proyecto husserliano, en cuanto a la filosofía de las matemáticas y la lógica se refiere, y el desarrollo histórico que sufre la matemática de finales del siglo XIX.

El objetivo del segundo capítulo es una revisión histórica y crítica de los conceptos fundamentales que Husserl desarrolló entre 1887 y 1895, a propósito de una posible fenomenología de las matemáticas. Por lo anterior, el desarrollo de los apartados que componen este capítulo será principalmente expositivo. Así, el primer apartado comienza con la presentación y exegesis crítica de su tesis de habilitación, *Sobre el concepto de número*, texto en el que Husserl tematiza, por primera vez, conceptos como número, conjunto, variedad, signo, etc., mismos que son discutidos a través de la psicología descriptiva de Franz Brentano. En la segunda sección de este capítulo se estudia el primer libro publicado por Husserl, *Filosofía de la aritmética*, cuyas temáticas sintetizan y reforman lo dicho en *Sobre el concepto de número*. En continuidad con las secciones anteriores, el tercer apartado profundiza en la relación entre Husserl y Frege a propósito de las críticas expuestas por este último en su reseña de *Filosofía de la aritmética*. En esta sección se

[3] Sin entrar en muchos detalles, es posible rastrear un claro antecedente de la esfera trascendental, y desde luego de la reducción fenomenológica, en la desconexión del tiempo objetivo que hace su aparición en los Manuscritos de Seefeld fechados entre 1905 y 1907, *Cfr*. Hua X, 237 y *ss*.

estudiarán los orígenes de la disputa entre el logicismo fregeano y el (supuesto) psicologismo husserliano, cuyo foco de discordia serán, precisamente, los conceptos de conjunto y número. Al final del apartado, se presentan los errores y aciertos de la reseña de Frege, y se (de)muestra que el psicologismo existente en *Filosofía de la aritmética* no es el mismo psicologismo denunciado por el lógico alemán. El cuarto apartado se basa en el análisis de lo que he denominado "Ensayos aritmético-formales", contenidos en el tomo XXI y XXII de la serie Husserliana. El estado de las investigaciones husserlianas en ese momento, según el contenido de dichos escritos, presenta una continuidad con lo expuesto en *Filosofía de la aritmética*. Mi hipótesis para ese apartado es que el análisis de estos ensayos aritmético-formales revela que para Husserl toda filosofía *sobre* la aritmética debe remitir a una teoría general de las operaciones. En esta teoría general, las operaciones aritméticas son entendidas como procesos automáticos o técnicos que permiten el manejo y construcción de "nuevos" números siempre que se encuentren fundados en la evidencia y solidez del dominio numérico de origen. De igual manera, este hilo temático me permitirá enlazar *Filosofía de la aritmética* (tomando en cuenta los dos últimos capítulos) con algunas tesis de las "Conferencias de Gotinga", analizadas en el tercer capítulo, y con los *Prolegómenos a la lógica pura*, revisados en el cuarto capítulo.

En el tercer capítulo presentaré las razones por las que Husserl se interesa en el estudio del carácter "formal" de las matemáticas una vez que el proyecto de *Filosofía de la aritmética* ha sido medianamente abandonado. Se evidenciará cómo es que Husserl, a través de ciertas generalizaciones, advierte que es posible "desprender" el carácter cuantitativo de la aritmética sin alterar su condición teorética ni su método calculatorio. Este descubrimiento hubo de confirmar su hipótesis de que lo cuantitativo no pertenece a la esencia de lo matemático o lo formal. En realidad, el paso de lo cuantitativo a lo formal pone de relieve el verdadero interés de Husserl: comprender lo que provisionalmente llamaré en esta disertación "el paso de una filosofía de la aritmética (o filosofía del cálculo) a una teoría de la ciencia (de lo formal)". Para la puesta en marcha de este proyecto, los trabajos de Kronecker, Weierstrass y Brentano resultan insuficientes. Aquí se vuelve necesario recurrir a los proyectos de Bolzano, Gauss, Grassmann, Hankel y Riemann. Tomando en cuenta esto último, llegamos al último apartado del tercer capítulo donde se estudiarán los señalamientos críticos de Husserl a los conceptos de *consistencia* y *completud semántica* (axiomática hilbertiana) expuestas en las poco conocidas conferencias de Gotinga (1900/01). En estas conferencias Husserl intenta dar una respuesta al problema de la *transición a través de lo imposible* o el *pasaje a través de lo imaginario* en matemáticas tomando en cuenta sus primeras herramientas teóricas ganadas hasta ese momento: (1) la noción de *conocimiento simbólico* (*Filosofía de la aritmética*); (2) los conceptos de *operación* y *dominio numérico* (ensayos aritmético-formales, específicamente en la reseña de Schröder), y (3) el concepto de variedad (la recepción de las propuestas de Grassmann, Hankel y Riemann).

Finalmente, en el cuarto y último capítulo presento un estudio completo de la primera edición de las *Investigaciones lógicas*, en particular de la sexta investigación, poniendo especial énfasis en la noción de intuición y objeto categorial. Desde mi punto de vista, las *Investigaciones lógicas* culminan el proyecto iniciado en *Sobre el concepto de número*, pero al mismo tiempo relanzan una serie de cuestionamientos a propósito de la unión entre *lo formal/categorial* con la sensibilidad o, dicho de otro modo, de cómo *transitar* entre lo uno y lo múltiple. Presento algunas de las preguntas que serán respondidas en ese apartado: ¿de qué manera el pensamiento simbólico/formal se convierte en *algo para* nosotros? ¿Cómo es que el pensamiento formal se instancia en la sensibilidad? Dicho con mayor rigor ¿cómo es posible aprehender *lo formal/categorial* desde el plano de la sensibilidad?

Capítulo I

Emergencia y desarrollo de los conceptos de conjunto, variedad y aritmetización del análisis. Justificación y análisis comparativo

1.1 Diagnóstico de la investigación. Perspectivas y alcances de la investigación

§1 Sobre la necesidad de una revisión crítica de los primeros escritos lógico-matemáticos de Edmund Husserl

Esta tesis toma en cuenta poco más de diez años de la obra de Edmund Husserl, desde 1887, es decir, desde la "publicación" de *Sobre el concepto de número,* hasta la primera edición de las *Investigaciones lógicas* (1900/01). Lo anterior con el objetivo de ubicar con precisión sus primeros trabajos en el campo de la lógica y la filosofía de las matemáticas. Este objetivo no sólo vale la pena por la implicación que tiene a la luz de los desarrollos en la lógica formal durante el siglo pasado, sino también porque los primeros escritos de Husserl no han corrido con la misma suerte que sus análisis (tempranos y tardíos) sobre la corporalidad, la cultura, la ética o la metafísica. Lo quiero decir es que las primeras ideas de Husserl sobre la naturaleza de las matemáticas y la lógica han pasado a un "segundo plano" debido al poco interés con que se han discutido. Coincido con Centrone (2009) cuando advierte que lo anterior se debe a cierta *tendencia* entre los intérpretes del pensamiento de Husserl de permanecer dentro de los límites metodológicos e incluso terminológicos de la fenomenología posterior. Si a esto le sumamos que los lógicos y matemáticos "profesionales" no consideran importantes las contribuciones de Husserl a la esfera de lo formal, resulta que lo escrito por Husserl antes de 1900 queda en el olvido.

Mi decisión de enfocarme en las primeras reflexiones de Husserl sobre la lógica y la filosofía de las matemáticas está motivada por lo siguiente: (1) atender esta "falta de interés" en torno a las ideas de Husserl sobre la naturaleza de los objetos lógico-matemáticos y (2) por la gestación y originalidad con que se presentan estas primeras ideas sobre la lógica y las matemáticas. Estas ideas incluyen, por mencionar algunos ejemplos, la articulación de la lógica en niveles; el intento de unificar el quehacer de la lógica formal y las matemáticas en una forma muy general: una ciencia matemático-formal que pretende ser la realización concreta del ideal leibniziano de una *mathesis universalis*, y, finalmente, la concepción explícita de la matemática abstracta como una teoría de las estructuras.

Ahora bien, uno de los objetivos de mi trabajo es presentar la discusión entre Husserl y sus interlocutores tempranos, algunos de los cuales hicieron contribuciones importantes al desarrollo de la lógica formal y de las matemáticas en general. Por esta razón, consideraré importante analizar la relación de Husserl con Cantor, Riemann, Dedekind, Bolzano, Frege, entre otros. Como ya lo advertí párrafos atrás, me incliné, al menos en esta disertación, por una postura interpretativa integral, es decir, una postura que toma como base de una lectura los textos de Husserl, pero también toma debidamente en cuenta los resultados de algunos investigadores[4] que ya han transitado por estos mismo caminos filosóficos. Debo señalar que el diferenciador de este trabajo, radica en el encuadre del pensamiento husserliano con el horizonte de la filosofía matemática de su tiempo y con el desarrollo histórico-crítico de las discusiones que va manteniendo con sus interlocutores a lo largo de sus primeros escritos hasta la aparición de la primera edición de las *Investigaciones lógicas*. En este sentido, trataré de presentar sus reflexiones lógicas y matemáticas en dos direcciones de investigación diferentes pero complementarias: (1) el desarrollo histórico de su filosofía de las matemáticas y la lógica y (2) el desarrollo histórico y problemático de su concepción de una teoría de la ciencia y su relación con las entidades lógico-abstractas. En lo que respecta a (1), el interés de Husserl se centra en temas lógico-formales, por ejemplo, captar con claridad las implicaciones de la tendencia formal-abstracta en matemáticas, en particular, su inclinación hacia la algebrización. En lo que respecta a (2), el proyecto de Husserl intenta desarrollar una filosofía de la lógica y las matemáticas centrada en una sistematización de las propiedades y relaciones que ocurren entre las entidades abstractas.

Finalmente, debo agregar que, aunque la investigación aquí propuesta se atiene a la aclaración de la génesis y estructura de los conceptos fundamentales de las primeras obras de Husserl, espero poder sugerir la pertinencia del modelo de análisis fenomenológico para el análisis de la práctica/experiencia matemática tomando en cuenta sus obras tardías como *Lógica Formal y Lógica Trascendental* y *Experiencia y Juicio*. Esto tendría por resultado, tal como yo lo veo, una descripción genética de una filosofía de la aritmética y la geometría.

---

[4] Me refiero a Lohmar (1989); Tragesser (1984); Ortiz-Hill (2003); Tieszen (2005), van Atten (2007), Centrone (2009) y da Silva (2017).

1.2.- Los orígenes del pensamiento conjuntista en la obra de Bernhard Bolzano

§2. Introducción

Para comprender el desarrollo histórico de la teoría de conjuntos es necesario conocer, primero, su *devenir histórico-matemático* y, segundo, su *devenir histórico-filosófico.* La distinción anterior, hecha por Penelope Maddy en su texto *Naturalism in Mathematics* (1997) añade, además, dos confluencias históricas diferentes, pero no opuestas: por un lado, los trabajos de Cantor y por el otro los trabajos de Frege. Diferentes entre sí porque el primero tiene motivos matemáticos y el segundo motivos parcialmente filosóficos. Ambos momentos son coadyuvantes en la construcción de dicha tradición matemático-filosófica cuyo origen puede rastrearse hasta la obra de Bernhard Bolzano. Para entender lo anterior, dividiré este apartado en tres partes: en la primera, desarrollaré la crítica de Bolzano al concepto de intuición pura kantiana; en la segunda, me centraré en el análisis de algunos pasajes de su *Doctrina de la ciencia* y de las *Paradojas del infinito* donde Bolzano habla sobre los conceptos de multitud, conjunto y sumas, y en la última parte desarrollaré algunas de sus tesis sobre las magnitudes infinitas.

§3. El rechazo del concepto de intuición pura: Bolzano como lector crítico de Kant

A juicio de Ferreirós, la emergencia del periodo matemático-conjuntista aleman surgió de la siguiente manera:

> Retrospectivamente, y desde el punto de vista de la emergencia del enfoque conjuntista de las diversas ramas de la matemática, el quinquenio 1868-1872 se antoja una etapa de

> hiperactividad. Las principales contribuciones que hay que reseñar son obra de matemáticos alemanes, lo que probablemente se debe al peculiar ambiente intelectual que se vivía en aquella zona, sobre todo a la orientación generalizada hacia una matemática pura. Y entre esos matemáticos destacan, por la impronta que dejaron, tres: Riemann, Dedekind y Cantor. (1998, p. 2)

A este triunvirato conjuntista le antecede la obra de Bernhard Bolzano, a quien, además, se le reconoce como uno de los iniciadores de la tradición semántica[5] y del moderno rigor argumentativo en las matemáticas, es decir, de la búsqueda de legitimización del proceder matemático a través de definiciones y demostraciones analíticas que dejan atrás los recursos ajenos al proceder científico. Esto es, de hecho, una suerte de pre-*aritmetización* del análisis. Así, con Bolzano asistimos a uno de los primeros intentos por comprender la naturaleza y el papel del concepto de "conjunto" y su relación con los conceptos de infinito y magnitud. Dada sus numerosas obras (120 volúmenes), en la filosofía de este teólogo y librepensador austriaco es posible encontrar pasajes que trazan ciertas influencias en las tradiciones analíticas[6] y con la tradición lógica polaca (Twardowski, Leśniewski y Tarski).[7] Pero sin duda, y quizás más relevante para el ámbito académico que me compete, es de destacar la influencia que ejerció Bolzano sobre Husserl. Este último describe cómo se introdujo en la obra de este pensador:

> Me enteré de Bolzano como matemático (mientras era estudiante de Weierstrass) a través de un tratado de Stolz en los *Mathematischen Annalen*, a través de G. Cantor y, sobre todo, a través de la discusión de Brentano (en sus conferencias) de las *Paradojas del infinito* (Hua XX-1, p. 297-298)

Efectivamente, la obra de Bolzano habría de influir notablemente en el discurso filosófico-matemático del joven Husserl a través de las lecciones sobre lógica elemental que impartía Brentano. Este último, según recuerda Husserl, manifestaba de modo singular y enérgico la importancia de "[…] la descripción psicológica del continuo con especial atención a las *Paradojas del infinito* de Bolzano" (Hua XXV, 307). En el mismo tenor, Husserl se refirió a Bolzano en varias ocasiones como uno de los filósofos de primera línea, al grado de señalar que "[…] la lógica como ciencia ha de edificarse sobre la obra de Bolzano" (1999, p. 190).

---

[5] *Cfr*. (Coffa, 2005, p. 48)
[6] *Cfr*. Dummett, M. (1996).
[7] *Cfr*. (Simons, 1992, p. 14-15).

Ahora bien, en las *Contribuciones a una más fundada exposición de la matemática* (1810)[8] se puede apreciar una primera denuncia, de parte de Bolzano, de la propuesta filosófica de I. Kant. Dicho brevemente, esta primera denuncia tiene que ver con el uso injustificado del concepto de intuición pura como fuente de justificación epistémica del edificio de las matemáticas. Así, en el §5 de dichas *Contribuciones*, Bolzano advertirá, a partir de la distinción entre conocimiento matemático y conocimiento filosófico, distintos porque el primero hace uso de intuiciones puras y el segundo de conceptos discursivos, que la matemática es la ciencia de conceptos:

> La filosofía crítica […] piensa que ha descubierto una diferencia característica y definitiva entre las dos clases principales de todo conocimiento humano *a priori*, la filosofía y las matemáticas. Esto es, que el conocimiento matemático es capaz de presentar de manera adecuada, es decir, construir, todos sus conceptos en una intuición pura [*reine Anschauung*], y por ello también es capaz de demostrar sus teoremas. Por otro lado, el conocimiento filosófico, desprovisto de toda intuición, debe conformarse con conceptos puramente discursivos (2004, p. 93).

La distincion anterior es en realidad una especie de resumen panorámico sobre las dos soluciones hasta entonces ofrecidas a los problemas relacionados con el quehacer y la naturaleza de la geometría y la matemática en general. De manera particular, Bolzano cree que Kant en su intento por conjuntar ambas propuestas terminó por aceptar que la matemática es la ciencia de la construcción de conceptos *por medio* de una intuición pura:

> Una de las fuentes más importantes de disensión entre ellos es la distinta concepción que uno y otro tienen del papel que debe desempeñar la lógica en las matemáticas, pues, mientras que para Kant éste es más bien secundario e incluso superfino, dada la importancia que para él tiene la construcción intuitiva, Bolzano le conferirá, en cambio, un papel destacado a tono con su total desconfianza en la intuición como fuente de justificación de las matemáticas. (Castrillo, 2004, p. 420)

La desconfianza de Bolzano es producto de su agudeza en la comprensión del distingo fundamental entre intuición, pensamiento y concepto. Así, mientras que para Kant la matemática es la ciencia de la construcción de conceptos por medio de una intuición pura,

[8] Entre las contadas referencias bibliográficas hechas a propósito de estas *Contribuciones* se puede transcribir aquella que enuncia Husserl en su *Lógica formal y lógica trascendental*: "[Bolzano] ya había presentado un intento de definición fundamental de la matemática: tiende a la idea de una teoría formal a priori de los objetos, aunque sin penetrar, por cierto, en su verdadero sentido […]" (2009, p.135).

para Bolzano, el concepto de intuición, y su supuesta dependencia por parte de las matemáticas y la geometría, es completamente falso. Para este último, la matemática es una ciencia que contiene sólo conceptos[9] y, en esa medida, aunque el espacio y el tiempo sean innegablemente formas de la sensibilidad, niega que ellos puedan ocupar el lugar de las determinaciones puras. Se sobreentiende que tanto la aritmética y la geometría no requieren ni de la intuición pura del tiempo ni de la intuición pura del espacio, respectivamente. En suma, las matemáticas no contienen ningún tipo de intuición. En el §6 de sus *Contribuciones*, Bolzano argumenta lo siguiente:

> Por mi parte, me gustaría reconocer abiertamente que todavía no he podido convencerme de la verdad de muchas doctrinas de la filosofía crítica, y especialmente de la corrección de las afirmaciones kantiana acerca de la *intuición pura* y de la *construcción de los conceptos a través de ella*. Sigo creyendo que en el *concepto de intuición pura* (es decir, *a priori*) hay una contradicción interna. Mucho menos puedo convencerme a mí mismo que el concepto de *número* debe ser construido necesariamente en el *tiempo* y que, en consecuencia, la intuición del tiempo es parte fundamental de la aritmética. (p. 93)

Tan importante es este último planteamiento que Bolzano lo amplía en el "Apéndice sobre la teoría kantiana de la construcción de conceptos a través de intuiciones", el cual se inserta, una vez más y abiertamente, en una disputa con el filósofo de Königsberg. En dicho anejo, Bolzano intenta demostrar que, contra a Kant: (1) la matemática, en tanto ciencia de la construcción de conceptos, deja fuera el concepto de intuición por ser este último una *idea* necesariamente empírica que involucran unicamente juicios empíricos y (2) la intuición pura es, en realidad, una falsa concepción del concepto de necesidad y analiticidad. En todo caso, "el cometido que se propone Bolzano y el núcleo en torno al cual gira su proyecto no es otro, en efecto, que el de ofrecer una explicación del conocimiento matemático, para él *a priori* y necesario, en la que la intuición no desempeñe papel alguno" (Castrillo, 2004, p.420). Así, para Bolzano, la filosofía de las matemáticas de Kant no proporciona una explicación convincente de cómo las intuiciones, esencialmente singulares, pueden sustentar nuestro conocimiento de las verdades matemáticas. De hecho, las intuiciones, por naturaleza, son incapaces de demostrar una verdad matemática dado que aquellas son meros ejemplos de

[9] Dicho de otra manera, para Bolzano las intuiciones son "representaciones de un individuo" (*Vorstellungen von einem Individuo*) y los conceptos son "representaciones de algo en general" (*Vorstellungen von etwas Allgemeinem*).

conceptos. En otras palabras, no se puede pasar de lo particular a lo generales dentro del terreno de las matemáticas. A juicio de Bolzano es mejor hablar de conceptos, pues sólo a través de ellos se puede ser consciente de la necesidad y la generalidad de las verdades matemáticas si se procede de conceptos en lugar de intuiciones. En ese mismo tenor, y en parágrafos siguientes, la distinción entre juicios empíricos y juicios analíticos será rechazada. De igual manera, Bolzano no admitirá que los juicios empíricos sean el fundamento de las matemáticas (2004, p. 93 y ss.) oponiéndose con ello, una vez más, al núcleo teórico de la filosofía kantiana.

En afinidad con lo anteriormente dicho se encuentra el texto "Demostración puramente analítica del teorema que afirma que entre dos valores con ordenadas de signos opuestos se encuentra al menos una raíz de la ecuación" (1817). Dicho sea de paso, este ensayo constituye uno de sus primeros trabajos sobre geometría y teoría de series.[10] En la introducción de dicho texto, Bolzano elaboró como una prueba del teorema que tiempo después llevaría su nombre. Dicho teorema expresa que si una función real *f(x)* es definida y continua en un intervalo cerrado *[a, b]*, *[f(a) y f(b)]*, y toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un punto *c* entre *a y b* para el que *f(c)=0*. Según Bolzano, la justificación de esta demostración no puede darse a partir de su consideración como un axioma de la matemática, dado que los conceptos que componen dicho teorema no son o no forman parte de esas verdades simples "llamadas *axiomas* o *verdades fundamentales* (*Grundwahrheiten*)" (Bolzano, 1905. p. 5), ni tampoco puede dársele un tratamiento en el que la intuición sea su fuente de justificación epistémica. En la búsqueda de una correcta justificación filosófica a lo anterior, Bolzano señala que la importancia de este teorema se encuentra en el hecho de demostrar que las "verdades" de la geometría dependen (exclusivamente) de propiedades puramente geométricas (1905, p. 5-6). Así, a diferencia de Kant, para quien las condiciones de posibilidad de la experiencia (espacio y tiempo) eran los marcos necesarios para la fenomenalización de cualquier elemento geométrico, Bolzano cree que el esclarecimiento de verdades geométricas viene a partir de consideraciones y pruebas puramente conceptuales.

---

[10] Sobre las implicaciones filosóficas de este teorema, *cfr*. Meléndez Schofiel, ubicación electrónica en http://marcmmw.freeshell.org/esp/logica/la_importancia_filosofica_del_teorema_de_ bolzano.html

§4. Colecciones, multitudes y sumas

Como resultado de las críticas al programa kantiano, Bolzano estaba al tanto de las confusiones que producía el concepto de intuición pura en el campo de la matemática y de la filosofía. De manera particular, Bolzano se interesó por comprender cómo la intuición, al permanecer en el plano de lo finito, no puede dar cuenta de la intuición de los conjuntos (o totalidades) infinitas. En franca conexión con esto último se encuentran los tratados de Bolzano, la *Doctrina de la ciencia*[11] (1837) y las *Paradojas del infinito* (1831). Ambos tratados, en su conjunto, son textos sustanciosos en cuanto a la teoría de conjuntos y la mereología se refiere. En ellos, Bolzano se propone desarrollar una teoría de las colecciones y las multitudes infinitas que, contrapunteando las posturas de Euclides, Spinoza y Cauchy (1851, §12), logre dar cuenta de la noción de infinito actual como un predicado (*contable*) con el que se puedan "contar magnitudes".

Los §§82–87 de la *Doctrina de la ciencia* y los §§3–10 de las *Paradojas del infinito* presentan las ideas principales de la teoría de las colecciones de Bolzano. Esta teoría funciona, a su vez, como una unidad (ontológica) para la fundamentación del edificio de las matemáticas, muy particularmente, sobre la teoría de números y conjuntos infinitos. Sobre este punto es necesario tener presente lo siguiente: si bien es cierto que la teoría de las colecciones de Bolzano está plagada de una serie de imprecisiones, mayormente la del concepto de suma,[12] esto no significa que no pueda hacerse un estudio ordenado y explícito en el que se presenten sus principales aportes y atinos. En lo que sigue de este estudio presentaré esos aportes y aciertos de la teoría de las colecciones de Bolzano sirviéndome de

[11] En Hua Mat I, Husserl proporcionan una introducción e interpretación de la *Elementarlehre* de la *Doctrina de la ciencia* de Bolzano. Es muy probable, como ya se verá más adelante, que el giro antipsicologista de las *Investigaciones lógicas* tenga algo que ver con la lectura de Bolzano. Para una mayor revisión de la filosofía austriaca y su influencia en la obra temprana de Husserl, debe leerse Benoist (1997).

[12] *Cfr*. (Krickel, 1995, p. 98-99).

la relación que existe entre los conceptos de multitud (*Menge*),[13] colección (*Inbegriff*)[14] y suma (*Summe*), no sin antes establecer su significado y alcance.

Aunque existe la remota posibilidad de que estos tres conceptos, multitud, colección y suma sean vistos como sinónimos en las obras de Bolzano —pues todos designan agrupaciones en las cuales el orden de los elementos, que podrían estar o no estructurados— existe el acuerdo de diferenciarlos para adquirir un mayor entendimiento del proceder matemático de Bolzano. Esta precisión, que me parece atinada en todo sentido, permite dar un seguimiento puntual de las diferentes anotaciones y definiciones de los conceptos de multitud, colección y suma, a lo largo de la *Doctrina de la ciencia* y de las *Paradojas del infinito*. Así, por ejemplo, en el §82 de su *Doctrina de la ciencia*, Bolzano define el concepto de colección como sigue:

> Uso esta palabra en el mismo sentido en que se usa en su función común, pues entiendo por una colección de ciertas cosas exactamente lo mismo que quien se expresa con las palabras: un vínculo (*Verbindung*) o asociación (*Vereinigung*) de cosas, una reunión (*Zusammensein*) de cosas en un todo (*Ganzes*) en el que ellas ocurren como partes (*Teile*). Por tanto, la mera idea de colección no nos permite determinar el orden y la secuencia en las cuales las cosas que están juntas pueden aparecer o si, efectivamente, están en tal orden […] me parece, entonces, que una colección no es otra cosa más que algo complejo (*das Zusammengesetztheit hat*) (1837, p. 393).

Una colección, según Bolzano, es un todo complejo —lo que significa que contiene al menos dos partes o elementos concretos o abstractos— que se define gracias a la relación que existe entre sus partes o elementos. Estas partes o elementos no *deben ocurrir* repetidamente en la misma colección. A partir de esta definición del concepto de multitud se pueden desarrollar dos modos en los que ella se puede expresar: (1) ya sea como la asociación o vínculo de cosas en un todo, es decir, de unas partes que son partes de un todo o (2) como la idea de que una

[13] Entre los traductores angloparlantes de la obra de Bolzano, p.ej., Rusnock y Russ, existe un consenso en la traducción de *Menge* por *Multitude* (Russ, 2004, p. xxviii-xxix y Rusnock, 2013). Dicha traducción es acertada en la medida en que hace justicia al término *Menge*, tal como Bolzano lo entendía, es decir como un "monton de cosas", como una "colección de cosas" del mismo tipo. Otra posible traducción es la que sugiere Peter Simons, quien traduce *Menge* como "*Masses*" (masa, multitud) (Simons, 1997). En realidad, esta sugerencia no entra en contradicción con el término *Multitude*. En este apartado utilizaré el término de *multitud* para la palabra *Menge*.

[14] El concepto de *Inbegriff* también ha sufrido cambios en su definición a lo largo de la historia. En la terminología matemática del siglo de Bolzano, *Inbegriff* representaba un área cerrada o una colección de objetos "encerrados" *en* cierto límite. Los traductores angloparlantes arriba mencionados, lo traducen como "colección" recogiendo el sentido que Bolzano le daba a este término.

colección *es algo complejo* (con o sin orden, con o sin secuencia). En ambos casos, y contrario a Cantor, no existen colecciones vacías.

Ahora bien, si esta distinción es correcta, tendríamos dos tipos de colecciones (Lapointe, 2011, p. 117): (1) las multitudes y sumas y (2) las series (*Reihen*) y las series continuas (*Stetige Reihe*). Los §§84 y 85 de la *Doctrina de la ciencia*, dan prueba de lo anterior. En ellos, Bolzano enfatiza y destaca el hecho de que una colección es un tipo de unión comprehensiva (*Zusammenfassung*) de por lo menos dos objetos cualesquiera (partes de la colección en un todo), ya sea que estos sean concretos o abstractos. El peso fuerte en estos tipos de colecciones recae sobre las partes de un todo. De hecho, a partir de la naturaleza de las partes (concreta o abstracta/natural o social) y sus "modos de combinación", ellas pueden determinar si se trata de una multitud, de una suma o de una serie. Por ejemplo, una diferencia clara entre series y multitudes es que para las primeras el orden y la secuencia son necesarios; mientras que, para las segundas, el orden y la secuencia son por completo irrelevantes. Es por esta razón que los usos que le otorga Bolzano al concepto de colección están en función de las distinciones que existen entre conjuntos, sumas y series, que a su vez se determinan en virtud de cuáles son sus partes, su orden y su secuencia. Siguiendo esta distinción bolzaniana, los grupos de colecciones quedan de la siguiente manera:

> Colecciones donde el modo de combinación es relevante: series (*Reihen*), ideas, proposiciones, inferencias deductivas, colecciones empíricas (por ejemplo, equipos de fútbol, los bosques, las órdenes religiosas), otras.
> Colecciones donde el modo de combinación es irrelevante: multitudes (*Mengen*), sumas (*Summen*), cantidades, listas, unidades (*Einheiten*), pluralidades (*Vielheiten*), totalidades (*Allheiten*), otros. (1837, p. 118)

Lo anterior, es decir, los diferentes modos en los que se dan los modos de combinación, permite definir a las multitudes como aquellas colecciones "que conservan su identidad en todas las reorganizaciones de sus partes" (Rusnock, 2013, p.157) o en todos los reordenamientos de sus elementos (modos de combinación entre sus partes) dentro de una misma clase unitaria (total). Las sumas, casos especiales de las multitudes, serán aquellas colecciones que cumplan los siguientes criterios: 1) que el modo de combinación entre sus partes sea irrelevante, 2) que las partes de las partes de un todo sean de la misma clase y 3) que conserven su identidad aún bajo el reordenamiento de sus partes (Lapointe, 2011, p. 118).

A lo anterior hay que agregar lo dicho en el §84 de la *Doctrina de la ciencia*, donde a partir del ejemplo de "un montón de dinero", Bolzano presenta su definición de suma: "Me permito llamar sumas a aquellas colecciones en las que la forma de combinación no importa y en el que las partes de las partes pueden ser consideradas como partes de un todo" (Bolzano, 1837, p. 400). Ahora bien ¿cómo entiende Bolzano la relación entre partes de una parte de un todo? Es posible que Bolzano tuviera en mente cierto proceso de transitividad $(A \in B) \wedge (B \in C) \rightarrow (A \in C)$ (Rusnock, 2013, p. 155-169); aunque en sentido estricto, el concepto suma que Bolzano describe es más que un proceso transitivo. En realidad, es una modalidad de las donaciones de una colección y sus partes, y en esa medida se trata de definir de qué tipo de partes se está hablando. Al respecto, Simons sugiere que las partes originales de una colección, en tanto suma, sean nombradas como *componentes*; reservando el término parte para un sentido más general que no afecta las unidades de una suma (Simons,1997, p. 87-108). Por ejemplo, Juan, Miguel y Martín son o forman parte de una colección de tres personas, en ese sentido son *componentes* (o partes genuinas) de esa colección de tres personas. El término parte se aplicaría, en este caso, a las partes de cada individuo, por ejemplo, la mano de Juan. En todo caso, se trata de entender la suma como una *cuasi-colección* que sea invariante respecto de cualquier descomposición de sus elementos (Sebestik, 1992, p. 321-322) conservando su identidad, repito, en al menos tres tipos de transformaciones: 1) el reordenamiento de las partes, 2) la disolución de las partes próximas en partes próximas y 3) la agregación/fusión de algunas partes próximas. Los ejemplos que Bolzano proporciona son variados, algunos de ellos aparecen en el §84 de la *Doctrina de la ciencia*: el contenido de una idea como la suma de sus partes, las sumas aritméticas, números concretos (pares, tercios, etc.) y totalidades.

En el caso de las series y las series continuas como colección de "cosas", Bolzano las define del siguiente modo:

> Una colección de cosas A, B, C, D, E, F…L, M, N… se le nombra serie cuando tiene la propiedad constitutiva de que, para cualquier componente M, puede demostrarse la existencia de un N tal que, de acuerdo con una ley válida para todos los componentes de la colección, o bien N puede determinarse por su relación con M, o bien M puede determinarse por su relación con N.

> [...] uno de estos miembros se llamará (sin querer con ello designar el concepto de una secuencia temporal o espacial real) el antecesor o predecesor: el otro será llamado el sucesor. (1851, p. 5)

En el estudio introductorio a la edición inglesa de la *Doctrina de la ciencia*, Jan Berg señala que una serie debe cumplir con al menos cuatro criterios: 1) M no contiene ninguna parte de *x*; 2) M no es invariante bajo cualquier permutación de sus partes y 3) para cada miembro de M hay un predecesor inmediato o sucesor en M. En cambio, una serie continua comparte algunos atributos de las series, pero añade una propiedad más el que 4) para todo x e y en M, hay un z en M entre x e y. Aquí bien valdría recordar el teorema anterior, pues el protagonismo en las series continuas es el concepto de *límite*, p.ej. en una sucesión continua de números a_1, a_2, a_3 … y su "tendencia" a un *límite L* ($a_n \rightarrow L$).

§5. El infinito se dice de infinitos modos

Los primeros parágrafos de las *Paradojas del infinito*, del cuatro al diez, son cruciales para entender las nociones de multitudes infinitas y series. En dichos apartados, Bolzano intenta unificar el edificio de las matemáticas tomando como punto de partida los conceptos de colección, conjunto y número. La tesis principal que Bolzano defiende es la existencia de los conjuntos infinitos y la posibilidad de su demostración conceptual.

En el §3 de las *Paradojas del infinito*, Bolzano ejemplifica el tipo multitudes donde sus componentes o partes genuinas al estar conjuntadas por la partícula "y" *definen* el tipo de relación que existe entre ellas como partes, y el todo como colección. A estas colecciones, Bolzano las caracteriza bajo el rótulo de *bien definidas*: "Una colección de objetos bien definidos o bien, un todo cuyos componentes (*Teile*) se encuentran bien definidos" (1851, p. 2). Y en el §4 nos recuerda la definición de la noción de multitud: "Se llama multitud (*Menge*) a una colección que depende de un concepto respecto al cual el orden de sus componentes es indiferente […]" (p.4). Entender la noción de multitud de este modo permite comprender la multiplicidad (o variedad) como una *serie de colecciones* de miembros de un mismo o diferente tipo. Hay que recordar lo dicho líneas atrás: una colección de cosas es llamada serie si tiene la propiedad de poder demostrar la existencia de un único elemento N que pueda determinarse por su relación con M o bien M determinarse por su relación con N. El término M de la serie se llamará antecesor o predecesor y el otro será llamado el sucesor (p.5).

A partir de esta construcción abstracta y poco clara de una serie en términos de un sucesor y un predecesor, Bolzano llamará multitudes infinitas a las series numéricas naturales, y series continuas a las multitudes de los números racionales. El §9 da luz sobre este punto: "[…] llamaré infinita a una pluralidad (*Vielheit*) si toda multitud finita representa tan sólo una parte de ella" (p.6). En el §10, agrega una nueva conceptualización del infinito, ésta un poco más estricta: "[…] todo aquello de lo que puede declararse que es infinito lo es en razón de y en la medida en que se percibe un elemento constitutivo que pueda ser considerado como una pluralidad infinita" (p.7). Lo anterior significa, según Bolzano, que una parte finita que se presenta dentro de un todo infinito será nombrada como infinita sólo si aparece de tal modo que pueda ser considerada como parte *esencial* (*parte genuina o componente*) de ese todo infinito.

El resultado de esta investigación determina que no todas las multitudes son iguales, y los criterios que establecen su "cardinalidad" sólo son posibles a través de la comparación entre las propias multitudes, dicho de otro modo, la introducción de las relaciones de orden e igualdad permite dicha comparación entre multitudes. Así pues, un conjunto infinito es isomorfo o tiene la propiedad de ser reflexivo a sí mismo a través de un subconjunto propio si puede establecerse en él un procedimiento biyectivo. Todos los conjuntos infinitos tienen esta característica, mientras que los conjuntos finitos son no-reflexivos. De este modo, cada multitud de objetos representa o tiene cierta *extensión* en la que *caen* una serie de objetos. Dicho de otra forma, Bolzano asigna a toda multitud una cardinalidad (él dice *magnitud* o *amplitud* ω (*Weite*)) equivalente a la extensión de ese concepto. Esto demuestra que la diferencia fundamental entre las multitudes finitas y las infinitas radica en que una multitud infinita M es equipotente a una sub-multitud distinta de M.

Ahora bien, la amplitud y alcance de esta definición es lo suficientemente extensa como para aplicarse a conceptos meramente matemáticos, pero también, y así lo reitera Bolzano, a entidades reales. Si esto es así, el infinito puede predicarse de cosas existentes porque todas ellas forman conjuntos infinitos. Por ejemplo, las condiciones que experimenta cada ser humano *son infinitas*, los intervalos de tiempo entre dos sucesos pueden ser infinitos, puede hablarse también de un conjunto infinito en el espacio que ocupa una recta (puntos infinitos). Otro de esos conjuntos es el conjunto de las verdades en sí (*Wahrheiten an sich*) (o proposiciones objetivas o proposiciones en sí o proposiciones en el sentido objetivo)[15] construidas sobre la base del conjunto de los números naturales. Cabe señalar que Bolzano, haciendo frente a la llegada del psicologismo, defendía la objetividad de las *proposiciones en sí* (*Sätze an sich*). Estas *proposiciones en sí*, que constituyen los objetos lógicos, son entidades que no dependen de ningún tipo de determinación ni óntico ni ontológica, es decir, son independientes del ser de los entes (cósicos y no-cósicos). No tienen, pues, determinaciones físicas o mentales, situándose más allá de las predicaciones de ser y no-ser. Esto supone un avance considerable en la filosofía de las matemáticas de Bolzano, quien entre 1837 y 1848, hacía de los objetos matemáticos *ideas en sí* (*an sich*) manteniendo una absoluta independencia de cualquier otra entidad que no sean ellas mismas. Con todo, las "verdades en sí" también forman parte de una suerte de sub-categoría:

> En tal sentido, las proposiciones (*Sätze*) son (en tanto «todos») formados por las representaciones (*Vorstellungen*) (en tanto «partes» de aquellos todos). Dentro del marco general de las proposiciones en sí, podemos distinguir entre «proposiciones verdaderas» (*wahre Sätze*) y «proposiciones falsas» (también consideradas en su «en sí»). (Niel, 2013, p. 948)

En esta caracterización todos los conjuntos infinitos, así como toda construcción infinita, son independientes de nuestro pensamiento, lo que no significa que no puedan ser mostrados intuitivamente. En otras palabras y siguiendo el ejemplo que proporciona Bolzano, se dice que: "hay una verdad" (está es una proposición que se sigue necesariamente de la negación de un escepticismo radical), entonces "la verdad de que 'hay una verdad'" es otra verdad, lo cual deja abierta una iteración idéntica hasta el infinito. De esta manera, de 1, siempre tendremos cualquier número (n), y de cualquier número escogido arbitrariamente, tendremos siempre un $n+1$. Cabe preguntar ¿de verdad alcanzó Bolzano a explicar la noción de infinito a partir de esta argumentación? ¿No será más bien que ha "construido" un conjunto a partir de otro conjunto, lo que significa que utilizó proposiciones distintas para cada uno de ellos? Con base en lo anterior, puede responderse que Bolzano pierde de vista lo que intenta explicar: la noción *per se* de infinito, pues sólo explica cómo derivar un conjunto infinito de

[15] *Cfr.* Carta del 22 de noviembre de 1834 que escribe Bolzano a Exner.

otro conjunto infinito, pero no lo que "es" un infinito. No obstante, esto último no inválida el sorprendente resultado y quizás uno de los más importante de la investigación de su tiempo, a saber, la correspondencia *biunívoca*, la relación de un conjunto con una de sus partes (subconjunto) propiedad exclusiva de los conjuntos infinitos.

En resumen, el análisis Bolzano es sobresaliente en su búsqueda de una "medida" del infinito y su expresión de modo "contable" partiendo de la noción de "equipotencia" de una multitud en conjunción con los conceptos de series, conjuntos, número y magnitudes. Lo que Bolzano siempre tuvo en mente es que el infinito sería, entonces, una unidad de medida. Asimismo, su interés por enfatizar la correspondencia (*biunívoca*) entre multitudes y sus partes (subconjuntos) lo llevó a postular la idea de un infinito actual y comparar el tamaño de los conjuntos infinitos y su posible jerarquía, quizás al modo de Cantor.

1.3-. El primer contacto con las matemáticas. Husserl y el ambiente conjuntista de Alemania: Riemann, Dedekind y Cantor

In re mathematica ars proponendi quaestionem
pluris facienda est quam solvendi
(Cantor)

§6. Introducción

En la entrada correspondiente a la teoría de conjuntos de *The Princeton Companion to Mathematics*, se apunta lo siguiente:

> Entre todas las disciplinas matemáticas, la teoría de conjuntos ocupa un lugar especial porque juega dos roles muy diferentes al mismo tiempo: por un lado es un área de las matemáticas dedicada al estudio de los conjuntos abstractos y sus propiedades; por otro lado, la teoría de conjuntos proporciona el fundamento de las matemáticas. Este segundo aspecto tiene una significación filosófica y también matemática. (Bagaria, 2008, p. 615.)

Esta referencia a la fundamentación de las matemáticas tanto en su carácter filosófico como matemático, fue el panorama intelectual más inmediato del que Husserl se apropió en sus primeros años de formación. Del lado filosófico, estuvieron las investigaciones de Brentano, a las que me referiré más adelante, y del lado matemático, la obra de Riemmann, Dedekind y Cantor, sin olvidar a Weierstrass y Kronecker. Las evidencias sobre la influencia de estos autores en Husserl son más que claras, y no sólo por las múltiples referencias a sus obras, sino por la apropiación y evolución de una serie de conceptos provenientes de esta primera etapa. El reconocimiento de estos antecedentes es más que suficiente para continuar este primer capítulo con una breve caracterización del panorama científico de finales del siglo XIX.

§7. “Sobre las hipótesis en que yacen los fundamentos de la geometría”: Bernhard Riemann y el concepto de variedad

Hacia 1830, Gauss, Lobachevski y Bolyai —precedidos por el matemático jesuita, Saccheri—llegaron a la conclusión, cada uno independientemente de los otros, de que era posible “ampliar” la geometría euclidiana “contrastando” y en algunos casos “reemplazando” el segundo y el quinto postulado de Euclides. Esta revolución y asentamiento teórico de las así llamadas geometrías no-euclidianas mantenía como proclama la autonomía de la geometría frente al mundo “real”, teniendo como metodología el análisis puramente abstracto. A este triunvirato de matemáticos, se unió Bernhard Riemann quien, además de ser influenciado por Gauss, Herbart y Kant, tuvo un fuerte impacto en la filosofía temprana de Edmund Husserl.[16]

El análisis del espacio que Riemann proponía, el mismo al que alude el concepto de variedad, puso de relieve el carácter abstracto y general del cual partir para comprender el espacio físico o intuitivo. Se trataba, pues, de deducir propiedades más complejas de las cuales derivar axiomas que asuman un enfoque analítico frente a las “verdades empíricas” no reconocidas con exactitud. La necesidad de adopción de un enfoque analítico surgió porque en las pruebas geométricas no se podían asumir como evidentes nuestras percepciones o intuiciones del espacio. Pero ¿qué tenían de objetable los axiomas euclidianos que hacían referencia al espacio físico? Primeramente, su trascendencia en la efectividad de la experiencia, y con ella, el rebasamiento del plano del espacio físico e intuitivo. En este respecto, la geometría de Riemann propone una nueva aplicabilidad de la geometría a nuestro espacio físico determinando las condiciones (*a priori*) que están presupuestas en cada experiencia que se tiene del espacio. A partir de lo anterior, sería posible *derivar* y deducir todo tipo de consecuencias sobre el espacio físico.

[16] Los tratamientos sobre el concepto de variedad (*Mannigfaltigkeit*), a los que Husserl aludió en sus primeras obras, provienen de Riemann. Sobre estas menciones se pueden ubicar citas muy concretas, por ejemplo: el apéndice III de los textos complementarios (1889-1901) de Hua XXI; el apéndice XII de Hua XVI; el §70 de los *Prolegómenos a la lógica pura*; la primera parte de *Sobre el concepto de número* y, tiempo después, el tercer apartado de la primera sección de *Lógica formal y lógica trascendental*.

En su célebre disertación "Sobre las hipótesis en que yacen los fundamentos de la geometría"[17]—presentada a Gauss en 1854, pero publicada póstumamente con la ayuda de Dedekind en las memorias de la Academia de Ciencias de Gotinga en 1868—, Riemann comienza por replantear el problema general de la estructura del espacio, para luego estudiar los comportamientos infinitos y las formas de relaciones entre las "variedades" (*Mannigfaltigkeit*)[18] de múltiples dimensiones o, mejor dicho, variedades *n*-dimensionales. En este respecto, Hermann Weyl señala que:

> La determinación más original del espacio es que sus puntos forman una variedad tridimensional […] La característica de una variedad *n*-dimensional es que cada uno de los elementos que la componen pueden ser especificados por la donación de *n* cantidades, los coordinados (*Koordinaten*), los cuales son funciones continuas dentro de la variedad. (1919, p. 75)

La tarea de Riemann fue, pues, "[…] construir, partiendo de conceptos generales de magnitud, el concepto de una magnitud múltiplemente extensa" (Riemann, 2000, p. 2). Queda claro aquí que magnitud, en tanto extensión, es sinónimo de *variedad n-dimensional*, pero ¿qué entiende Riemann por variedad? Por *variedad*, se entiende lo siguiente:

> Los conceptos de magnitud sólo son posibles allí donde se encuentra un concepto general que admite diversas determinaciones (*Bestimmungsweisen*). Esas determinaciones constituyen una variedad continua o discreta (*stetige oder discrete Mannigfaltigkeit*) según tengan o no lugar transiciones continuas de una a otra de ellas; las distintas determinaciones se llaman, en el primer caso, puntos, y en el último, elementos de esa variedad. (Riemann, 2000, p.4)

Toda variedad está compuesta por ciertas propiedades o formas de determinación —también llamadas simplemente *determinaciones*—. Tales determinaciones no son otra cosa que "elementos" u "objetos" sobre los que recae el género la "variedad de *n*". Riemann, en un manuscrito anterior a esta lección inaugural, describe un ejemplo clarísimo sobre lo que es una variedad; lo cito *in extenso*:

---

[17] Dos términos sobresalen de este peculiar título: "hipótesis" y "fundamentos". El primero puede entenderse como una *labor empírica* que determina la validez de una proposición *Cfr*. (Ferreirós, 2007, p. 61). Y por el segundo hay que entender una base que tiene o mantiene un enfoque conceptual capaz de establecer una nueva teoría general, esto es, nuevos fundamentos conceptuales *Cfr*. (Ferreirós, 2006).

[18] Es muy probable que la matemática alemana haya tomado del vocabulario filosófico kantiano el término *Mannigfaltigkeit*. Aunque para Kant, una *Mannigfaltigkeit* es una variedad que puede comprender tanto los datos de los sentidos como las variedades del espacio y el tiempo (Torretti, 1998, p. 7 y ss).

> Pongamos que quisiera hacer un experimento o una observación, y que sólo me importase *un* valor numérico, digamos el grado de calor. En este caso, todos los casos posibles del resultado vendrían representados mediante la serie continua de todos los valores numéricos de $+\infty$ a $-\infty$. Mas pongamos que quisiera determinar dos valores numéricos, digamos que quisiera hacer una determinación de temperatura y una de peso, entonces el resultado estaría condicionado por dos magnitudes x e y. Obtendré aquí la totalidad de todos los casos, cuando dé tanto a x como a y todos los valores de $+\infty$ a $-\infty$, y combine cada valor de x con cada valor de y. Obtendré un valor concreto cuando tanto x como y tengan un valor totalmente determinado. (2000, p. 94)

Este proceso constructivo de ir "agregando" a las variedades más valores o representaciones paramétricas, es decir, ubicaciones en coordenadas variables (x_n, y_n, z_n), da por resultado una serie de cambios al interior de las variedades, pues se las piensa como "una composición de una variabilidad de $n+1$ dimensiones a partir de una variabilidad de n dimensiones y de una variabilidad de una dimensión" (2000, p. 5). Dicho de otro modo, mediante una progresión continua de transformaciones de un elemento (o punto) a otro es que se crean superficies unidimensionales, bidimensionales, tridimensionales, etcétera. En resumen, los n-parámetros variables son llamados coordinados de una variedad.

Las variedades pueden ser continuas y discretas; diferenciadas sólo por el empleo que puede hacerse de ellas. Mientras que en las variedades discretas predomina el acto de enumerar, en las variedades continuas impera el acto de medir. Esto significa, según Riemann, que las variedades continuas se relacionan con la actividad de medir, y por ello con los números reales, y las variedades discretas se relacionan con la actividad de contar, y por tanto con los números naturales.

Como puede notarse, a toda variedad, vista como un conjunto,[19] le corresponden como sus "elementos" sus propias formas de determinación (o instancias). Así, por ejemplo, a la clase de los números le corresponden todos los números; a la clase de las funciones todas las funciones; a la clase de las ecuaciones todas las ecuaciones, etcétera. Si las variedades son conjuntos, entonces, existen para Riemann conjuntos discretos y conjuntos continuos. Una superficie coloreada es un ejemplo patente de una variedad *continua* de puntos de color

[19] Ferreirós ya hizo notar esto cuando señaló que "Riemann hace descansar su teoría general de las magnitudes y las variedades en el principio de comprehensión, axioma básico de lo que suele llamarse la teoría ingenua de conjuntos", *Cfr. Riemanniana Selecta,* pp. LXXVII.

uniformes; mientras que una variedad discreta puede ser cualquier clase a la que pertenezcan diversos objetos con ciertas cualidades en común, por ejemplo: México, Argentina y Perú conforman una variedad discreta de "países donde se habla español". Con la noción de variedad el concepto de espacio adquiere valores que le permiten ser estudiado en función de cierta región dada, no sólo desde una geometría de posición, sino también desde sus diversas configuraciones topológicas. Por tanto, el espacio que concibió Riemann es definido como un espacio heterogéneo, *metrizable* y, desde luego, topológico:

> Las variedades cuya medida de curvatura es en todas partes =0 se pueden considerar como un caso especial de aquellas variedades cuya curvatura es en todas partes constante. La característica común de estas variedades cuya medida de curvatura es constante puede también expresarse diciendo que las figuras se pueden mover en ellas sin estirarse (2000, p. 12).

Es por ello que las variedades riemannianas son consideradas como espacios ilimitados o multidimensionales (sin ser infinitos) que pueden formar espacios curvos (las curvaturas de una variedad) y transitivos. Es preciso recordar que las curvaturas riemannianas están definidas en términos de cantidades determinables que les permiten ser constituidas de tal modo que el desplazamiento de los cuerpos geométricos, en dicho espacio curvo, se perciba como inalterado, "pues claramente las figuras no podrían ser arbitrariamente rotables y desplazables en ellas si la medida de la curvatura no fuera la misma en cada punto y en todas las direcciones" (2000, p. 12). De esta manera, los cuerpos geométricos son capaces de moverse sin cambiar de tamaño y de forma, y capaces de rotar en cualquier dirección. De aquí se derivan las así llamadas superficies (*Flächen*) de Riemann, explicadas en el §5 de "Sobre las hipótesis en que yacen los fundamentos de la geometría".

Antes de presentar las anteriores dilucidaciones, Riemann dejó en claro, en un manuscrito de 1852-1853, que profundizar en el concepto de espacio (métrico-diferencial) y en sus características intrínsecas, puede realizarse independientemente de nuestras intuiciones sensibles del espacio:

> El concepto de variedad de múltiples dimensiones subsiste independientemente de nuestras intuiciones espaciales. El espacio, el plano, la línea son sólo los ejemplos más intuitivos de una variedad de tres, dos o una dimensión. Aun sin tener la menor intuición espacial, podríamos desarrollar toda la geometría (2000, p. 95).

El carácter abstracto que denota la noción de variedad, permitió a Riemann confirmar su hipótesis "sin tomar auxilio de la más mínima intuición espacial" (2000, p. 94) y sin que el espacio se torne meramente idealizante. Otros conceptos relacionados con lo anterior son los que se conocen como *propiedades locales* y *globales*. Estas nociones permiten explicar cómo es que Riemann estudió el comportamiento del espacio en su sentido *local* y no global o unitario (como sí lo hicieron Gauss, Lobachevski y Bolyai). Por el concepto de *local* hay que entender una relación de posición vinculada o ligada a cierta dirección y distancias cercanas a un punto de referencia. Pongo un ejemplo, la Tierra. La Tierra es casi una esfera por lo que le corresponde una geometría propia de las esferas, pero si nos paramos en cierto punto todo nos parece "plano" por lo que "localmente" podemos utilizar la geometría plana para estudiar dicho espacio circundante. El punto aquí es que la geometría de superficie de una esfera es una aplicación de los planos riemannianos que se determinan por una perspectiva de *posición*, esto es, por las relaciones de posición ligadas o vinculadas a la dirección y la distancia. El concepto de *global* se relaciona con una visión donde el cuadrado del elemento de línea (diferencial cuadrático ds^2) está correlacionado con la curvatura y con las geodésicas las cuales fuerzan la euclidianeidad (o no) del espacio. Así, dado que los axiomas de la geometría de Riemann son válidos para la geometría de las esferas, los teoremas también deben serlo. Este punto es fundamental para Husserl y en el tercer capítulo argumentaré por qué.

De la concepción riemanniana del infinito, que es muy clara y sobre la cual se puede decir mucho, sobresalen un par de afirmaciones. [20] La primera se encuentra en el §3, ya hacia el final de "Sobre las hipótesis en que yacen los fundamentos de la geometría", ahí Riemann señala que "las cuestiones sobre lo sumamente grande (*Unmeßbargroße*) son preguntas ociosas para la explicación de la naturaleza. Otra cosa sucede con las cuestiones sobre lo sumamente pequeño" (2000, p. 15). Esto deja en claro que para Riemman la balanza de las investigaciones sobre el infinito debía inclinarse hacia los trabajos de Leibniz y el análisis infinitesimal, así como a los avances de Newton y el conocimiento de la naturaleza.

La siguiente afirmación apunta que "en la extensión de la construcción del espacio a lo infinitamente grande se muestran lo ilimitado y lo infinito; aquel pertenece a las relaciones extensivas (*Ausdehnungsverhältnissen*) y este a las relaciones métricas (*Massverhältnissen*)"

[20] *Cfr.* (Ferreirós, 2007, p. 65 y ss.)

(1876, p. 266). Sobre este caso, Riemann observa y sugiere que la recta no es una extensión infinita, sino más bien una longitud ilimitada o interminable. El ejemplo más simple de esa distinción puede hallarse en la superficie de una esfera: aunque se puede recorrer interminablemente, su longitud sigue siendo finita. "La ilimitación, señalaba Riemann, tiene una credibilidad empírica mucho mayor que la extensión infinita" (Kline, 2006, p. 101). Esta idea de que el espacio fuese ilimitado, pero no infinito, sugirió otro tipo de geometría no-euclidiana conocida como geometría elíptica doble, donde la "[…] línea recta es, en efecto, ilimitada, aunque no infinita en longitud. Además, *no* hay rectas paralelas" (2006, p. 101). En resumen, el infinito en Riemann está vinculado al concepto de magnitud. Lo mismo ocurre en sus *Fragmentos filosóficos* y en una serie de antinomias o de "armonías negativas", muy de estilo kantiano, entre las tesis y antítesis: finito-infinito, libertad-determinismo y Dios temporal-Dios atemporal.[21]

§8. Richard Dedekind: sobre el conjunto de los números racionales

La edición *The Princeton Companion to Mathematics*[22] presenta a Dedekind como parteaguas en el nacimiento de la moderna teoría de conjuntos,[23] el álgebra abstracta, el análisis del concepto de estructura matemática, en los fundamentos del sistema de los números reales y en el uso de las así llamadas "cortaduras" sobre el conjunto de los números racionales. En cada uno de estos rubros, Dedekind hace uso de conceptos y nociones que lo vuelven clave para entender el enfoque conjuntista en la matemática del siglo XIX.

Es posible dividir la obra de Dedekind, mezcla entre filosofía, lógica y matemáticas —y muy fructífera entre los años 1854 y 1858— en tres ejes temáticos: 1) análisis de la teoría general del concepto de sistema; 2) el orden y fundamento de un sistema, y 3) una teoría

[21] En efecto, sus fragmentos filosóficos incluyen, además de un ensayo sobre psicología y otro sobre epistemología, referencias a las obras de Fries y Herbart, algunas desde los años 1853. De hecho, es probable que autores como Scholz sostuvieran que Herbart tuvo un impulso fuerte sobre Riemann y su tratamiento 'filosófico' de la matemática, incluido su enfoque conceptual y abstracto del tema.
[22] *Cfr*. (Gowers, 2008, p. 776).
[23] *Cfr*. (Belna (1996, p. 66 y ss). Este autor considera que Dedekind construye de manera conjuntista, a partir de su teoría de los números reales, la serie completa de los números.

sobre los números (Cavaillès, 2008, p. 121.) En relación al concepto de número y al papel de la aritmética elemental, Dedekind presenta en “Sobre la introducción de nuevas funciones en matemáticas”, un resumen de su concepción tanto de la aritmética como de la creación de los *nuevos* números en los que se funda el progreso de las matemáticas:

> La aritmética elemental surge de la construcción de los números ordinales y cardinales; el paso sucesivo de un término de la serie de los números enteros absolutos al inmediatamente siguiente es la primera y más sencilla operación de la aritmética; sobre ella se fundan todas las demás. Si se reúnen varias realizaciones de esa operación elemental en un único acto, se alcanza el concepto de adición. Partiendo de este se construye de forma similar el de multiplicación, y a partir de este el de potenciación (1932, p. 430-431).

La justificación de lo anterior viene dada por la concepción de los números naturales **N** como una *serie* de elementos. Las operaciones básicas de suma y multiplicación serian, en este sentido, correlatos inmediatos del acto de contar. Sin embargo, lo anterior no basta cuando se requiere del uso de operaciones inversas (resta y división); es ahí donde Dedekind señala:

> El desarrollo de la aritmética, o sea, regenerar cada vez mediante cada una de esas operaciones todo el dominio numérico disponible o, con otras palabras: el logro de la posibilidad de ejecutar ilimitadamente las operaciones indirectas o inversas —sustracción, división, etc.— conduce a la necesidad de crear nuevas clases de números porque la serie original de los números enteros absolutos no puede en absoluto satisfacer esa exigencia. Así se obtienen los números negativos, quebrados, irracionales, y finalmente los llamados números imaginarios. (1932, p. 431)

Como bien apunta Ferreirós, el tema central en estas citas es la extensión rigurosa de las operaciones y no la creación de nuevos números, al menos en estos primeros escritos de Dedekind. En escritos posteriores el orden se invierte y la construcción de los números pasa a ocupar un lugar central en su obra.[24] En el opúsculo “Continuidad y números racionales”, publicado en 1872 y cuya meta es la búsqueda de un fundamento aritmético para el concepto matemático de continuidad, Dedekind señala lo siguiente:

> Veo toda la aritmética como una consecuencia necesaria o al menos natural del acto aritmético más sencillo, contar, y contar no es nada más que la creación sucesiva de la

[24] *Cfr.* (Dedekind, 2014, p. 39).

> serie infinita de los números enteros positivos en la que cada individuo viene definido mediante el inmediatamente precedente; el acto más simple es el paso de un individuo ya creado a su sucesor que está por crear (2014, p. 88).

Es claro que Dedekind se esfuerza por fundamentar el cálculo diferencial que, en tanto parte de la aritmética, se encarga de estudiar las magnitudes continuas. Al considera que cuando los números racionales se asocian a puntos de una recta existe, sobre la misma recta, infinitos puntos a los que no corresponde ningún número racional, demuestra que la densidad de los números racionales es discontinua. Para "rellenar" esta discontinuidad, Dedekind asume que se pueden crear nuevos puntos individuales, y por ello se ocupa de estudiar el acto de contar como proceso definitorio (y representativo) de un número.

Según Dedekind, el acto de contar se tiene como resultado de una operación de sucesores sobre elementos ya definidos, y la serie numérica como una adjunción de unidades homogéneas. Más aún, busca darle sentido al continuo lineal como un hecho aritmético insistiendo en que "los números son creaciones libres del espíritu humano" (2014, p. 107) "así como los números racionales negativos y quebrados se han producido mediante una creación libre […]" (p. 107); dicho de otro modo, son "un resultado (*Ausfluß*) inmediato de las puras leyes del pensamiento" (p. 107). Esta libre creación del espíritu humano, que es en realidad una abstracción del entendimiento sobre la cual depende la creación del número, muestra que este es, además, "completamente independiente de las representaciones o intuiciones (*Vorstellungen oder Anschauungen*) del espacio y del tiempo" (p. 107), y por tanto no requieren de una evidencia intuitiva para ser validados. En una carta que Dedekind escribe a H. Weber, el 24 de enero de 1888, confirma lo anterior. En ella, se lee lo siguiente: "somos de linaje divino y poseemos sin duda alguna capacidad creativa (*schöpferische Kraft*), no sólo en asuntos materiales (ferrocarriles, telégrafos), sino muy especialmente en asuntos espirituales (*geistigen Dingen*)" (p. 192.) La independencia de las representaciones o intuiciones del espacio y del tiempo reaparece en su texto "Continuidad y números irracionales". En él, Dedekind asume que la carencia de espíritu científico en la aritmética debía no sólo apoyarse en intuiciones geométricas (*geometrischer Anschauungen*), que si bien nos permite comprender el "proceso" (creativo) de los números y ser, a su vez, una especie de propedéutica al cálculo, no es rigurosa al momento de determinar las aproximaciones de una magnitud variable a un valor límite fijo.

Ahora bien, sus investigaciones también mantienen cierto enfoque conjuntista. Si se toma en cuenta que es el primero en emplear la noción de conjunto en álgebra y usar infinitos conjuntos de infinitos elementos, bien podría considerársele un precursor de la teoría de conjuntos. En efecto, si tomamos en cuenta la siguiente cita de *¿Qué son y para qué sirven los números?* parecería que no existe diferencia entre lo que Cantor consideraba como conjuntos (*Menge*) y lo que Dedekind entendía como sistema (*System*):

> 1. En lo sucesivo entiendo por *cosa* (*Ding*) todo objeto (*Gegenstand*) de nuestro pensamiento. Para poder hablar cómodamente de las cosas, se las designa mediante símbolos, por ejemplo, mediante letras, y se permite hablar abreviadamente de la cosa *a* o simplemente de *a*, donde en realidad se está haciendo referencia a la cosa designada por *a*, y de ninguna manera la propia letra *a*. Una cosa queda completamente determinada por todo aquello que se puede decir o pensar de ella […]
> 2. Sucede con mucha frecuencia que distintas cosas *a, b, c…* consideradas por cualquier motivo bajo un mismo punto de vista, son reunidas mentales, y se dice entonces que constituyen un *sistema S*; se llama a las cosas *a, b, c… elementos* del sistema S, y se dice que están contenidas (*enthalten*) en *S*; inversamente *S consiste* en esos elementos. Un tal sistema *S* (o un conjunto (*Inbegriff*), una variedad (*Mannigfaltigkeit*), una totalidad *Gesamtheit*)) es igualmente como objeto de nuestro pensamiento, una cosa (1); queda completamente determinado cuando para cada cosa está determinado si es o no unelementos de *S**. (2014, p. 116)

Esta definición, aunque prioritariamente extensional, acerca en demasía la postura de Dedekind con la de Cantor. En efecto, Dedekind describe un *sistema* al mismo modo en que usualmente se define un conjunto, es decir, como una agrupación o un agregado de elementos en una totalidad.[25] Esto puede ser evidenciado si sopesamos el hecho de que para Dedekind los números racionales cumplen con la unicidad del límite, "es decir, en ellos están prohibidas las relaciones por contigüidad: entre dos racionales hay a su vez infinitos racionales. Parece, pues, que cubren toda la recta, es decir, que forman un continuo" (Fernández Beites (1999, p. 373). En este sentido, no es casual que el concepto de variedad aparezca en la obra de Dedekind como sinónimo de sistema. Aunque en una carta a Cantor fechada el 19 de enero de 1879, Dedekind consideró deseable que la "palabra o expresión técnica" para definir con

[25] Pero a diferencia de Cantor, Dedekind, aunque admitió la existencia de sistemas con un solo elemento, negó para sus investigaciones la existencia del sistema vacío, que no contiene absolutamente ningún elemento.

mayor precisión la relación entre un sistema y sus elementos, fuera el concepto de dominio (*Gebiet*) y no el concepto riemanniano de variedad.[26]

Sobre el concepto de dominio, Dedekind también desarrolló lo que él denominó como dominio racional, campo o cuerpo (*Körper*) de números. En el décimo de los “Suplementos a las lecciones sobre la teoría de números de Dirichlet” (1871), Dedekind lo define del siguiente modo:

> […] Por un campo (*Körper*) entiendo cualquier sistema de números infinitos, en los cuales las propiedades de la suma, resta, multiplicación y división de cualquiera de estos números producen siempre un número que pertenece al mismo sistema. Nombro a un campo *A* un divisor del campo *M*, y esto un múltiplo de cada uno, cuando todos los números contenidos en *A* los encontramos, también, en *M.* (1932, p. 400)

El campo es un sistema o colección de infinitos números que, gracias a la propiedad de cerradura, caen bajo las operaciones más básicas de la aritmética: suma ($\alpha+\beta$), resta ($\alpha-\beta$), multiplicación ($\alpha\beta$) y división (sólo si $\beta\neq 0$, α/β). Además, de ser sistemas cerrados y completos, pueden ser equiparados a una especie de totalidad orgánica o a una unidad natural al modo de una teoría de dominios.[27] Su operatividad ocurre en al menos dos números cualesquiera, y a partir de sus combinaciones, el campo (entero) de los números naturales **N** da paso al sistema **Z** y de ahí al sistema **Q**.[28] Esta presentación o visión abstracta de las matemáticas mantiene como interés principal el valor de las operaciones por encima de los elementos mismos. En su tesis de habilitación *Sobre la introducción de nuevas funciones en la matemática* (1854), Dedekind se refiere a esto último de la siguiente manera:

> Estas lecciones no tienen algo de introducción a una nueva clase determinada de funciones en la matemática, como uno tal vez podría interpretar el título, sino más bien, sobre la forma en que los objetos en general, en tanto desarrollo progresivo de esta ciencia nueva de las funciones o, como también podemos decir, nuevas operaciones son añadidas a las anteriores. (1932, p. 428)

---

[26] *Cfr.* Cantor-Dedekind (*Briefwechsel*), p. 47

[27] *Cfr.* Cantor-Dedekind (*Briefwechsel*), p. 47.

[28] En “Continuidad y números racionales”, Dedekind presenta al sistema Q con otra característica: la *comparabilidad*. Esta se define aritmeticamente cuando entre dos números reales se define el mayor, el menor o la igualdad entre uno y otro. A partir de la comparabilidad se establecen tres propieades para Q: la transitividad, la densidad y la cortadura.

Para entender lo anterior, es crucial revisar el concepto de aplicación o representación (*Abbildung*), también llamada función o mapeo:

> Por aplicación ϕ de un sistema S entendemos una ley de acuerdo con la cual cada elemento determinado s de S pertenece (*gehört*) a una cosa determinada que se denomina imagen (*Bild*) de s la cual está denotada por $\phi(s)$; decimos también que $\phi(s)$ corresponde (*entspricht*) al elemento s, que $\phi(s)$ resulta o es producido desde s por la aplicación ϕ, que s está aplicando dentro $\phi(s)$ por la aplicación de $\phi(s)$. (1932, p. 348)

Una aplicación o función es una ley que opera o individualiza su dominio asignando a cada uno de sus elementos una imagen. En otras palabras: la función ϕ es una ley que correlaciona objetos, y en tanto que ϕ se aplica sobre cualquier elemento de un sistema S, produce una imagen del elemento S bajo ϕ, que deviene otro objeto. Contrario a Frege y a Cantor, Dedekind entiende aplicación desde la diferencia de las posibles propiedades de una teoría de los números enteros (Belna, 1996, p. 32 y ss.) Asimismo, la *Abbildung* cobra importancia dentro de un sistema como factor individualizador que atiende las propiedades o estructuras inherentes a dos sistemas (S_1 y S_2) mediante una "aplicación similar" (*ähnliche Abbildung*), es decir, mediante una biyección entre S_1 y S_2. Derivado de esto, Dedekind construye su concepto de infinito cuando un sistema S es similar a una parte propia de sí mismo, en caso contrario S es llamado sistema finito.

§9. Georg Cantor y los *Fundamentos para una teoría general de conjuntos*

La relación filosófica y matemática entre Husserl y Cantor es sumamente interesante al grado de preguntarse cuán grande es la influencia de Cantor en el fundador de la fenomenología.[29] Durante los catorce años que pasaron juntos en la Universidad de Halle,[30] Husserl y Cantor

[29] En su ensayo "Did Georg Cantor Influence Edmund Husserl?" Claire Ortiz Hill realiza una serie de brevísimos apuntes donde va comparando diversos problemas (p. ej. el psicologismo, la aritmetización, la relación con Frege, etcétera) y cómo Husserl y Cantor fueron resolviéndolos *Cfr*. (Rosado Haddock y Ortiz Hill, 2000).

[30] Una revisión histórica de la vida intelectual de Husserl en Halle puede leerse en (Fisette, 2009).

cultivaron no sólo una fructífera amistad,[31] sino también una serie de ideas que vale la pena reproducir en este capítulo. De hecho, parece ser que Husserl, motivado por la preparación de su *Habilitationsschrift*, estudió cálculo de probabilidades con Cantor, y que éste último estuvo en su *Habilitationkommittee.* En lo que sigue expondré brevemente algunas tesis principales de uno de los fundadores de la teoría de conjuntos, y en los capítulos siguientes trataré de mencionar sus vínculos y rupturas teóricas con el fundador de la fenomenología.

Sobre el desarrollo intelectual de Cantor, José Ferreirós (2006)[32] distingue cuatro fases: la primera, de 1870 a 1872, estuvo dedicada al estudio de los puntos-conjuntos, investigación derivada de sus análisis sobre series trigonométricas. La segunda, de 1873 a 1878, estuvo enfocada al análisis de las cardinalidades infinitas. La tercera, de 1879 a 1884, tuvo como núcleo principal la Hipótesis del continuo, y la cuarta, de 1885 hasta el final de su carrera, estuvo orientada al análisis de conjuntos abstractos basados en las nociones de cardinalidad y orden. Para este apartado realizaré un resumen apretadísimo de dichas fases tomando en cuenta dos de sus textos principales: las *Contribuciones a la fundamentación de la teoría de conjuntos transfinitos* y los *Fundamentos para una teoría general de conjuntos.*

En relación con la terminología matemática, Cantor utilizó, por lo menos de 1878 a 1892, la palabra *Mannigfaltigkeit* para designar un conjunto o una variedad propiamente hablando. Pero no fue sino hasta sus *Contribuciones a la fundamentación de la teoría de conjuntos transfinitos*, en dos de sus últimos artículos (1895 y 1897, respectivamente), que Cantor comenzó a utilizar el término *Menge*, concepto que terminó por imponerse en los siguientes trabajos matemáticos. En sus escritos anteriores, también fueron sinónimos de *Menge* los términos *Inbegriff* y *Zahlenklassen*.

Las *Contribuciones a la fundamentación de la teoría de conjuntos transfinitos*, publicadas en los *Mathematische Annalen,* es lo que se puede denominar como el testamento

[31] Cantor no sólo está presente en la obra filosófica y matemática de Husserl, también lo estuvo en su vida personal y académica. Las cartas del 29 y 30 de noviembre de 1985 son la evidencia más clara. En la primera carta, Cantor escribió al Dr. Jacob Lüroth de la Universidad de Friburgo con motivo de la recomendación de Husserl como profesor ordinario para esa universidad. En esa carta escribe que "[Husserl es] una persona altamente valorada y generalmente querida por nosotros debido a su carácter pacífico y excelente". Antes ya había hecho lo mismo para las Universidades de Münster y Kiel. En la segunda carta, la del 30 de noviembre de 1895, Cantor escribe a C. Franz Woker, de la universidad de Paderborn, para hablarle de los trabajos del "joven Husserl" (Ortiz Hill y Da Silva, 2013, p. 367-369).
[32] *Cfr*. también Dauben (1990).

matemático de Cantor. En ellas, Cantor presenta sus "ideas fundamentales sobre los números transfinitos (cardinales y ordinales), los tipos de orden y los conjuntos bien ordenados" (Cantor, 2006, p. 58); mientras que los *Fundamentos*, obra de madurez y calado filosófico-matemático, tiene otros objetivos, p. ej. la "extensión o prosecución de la serie de los verdaderos números más allá del infinito" (p. 85)[33] y el estudio filosófico[34] y matemático de la introducción de los números transfinitos.

La anotación correspondiente al §1 de los *Fundamentos* confirma esta última línea. En dicha anotación, Cantor hace referencia (abierta) a los pasajes del *Filebo* platónico donde se habla de la unidad y la multiplicidad, y donde, como bien deja ver Ferreirós, los conjuntos transfinitos son interpretados al modo del εἶδος y el μιχτόν, es decir, como una combinación entre lo ilimitado y lo limitado. Cito *in extenso* a Cantor:

> Teoría de las variedades [*Mannigfaltigkeitslehre*]. Con esta palabra designo el concepto de una doctrina muy amplia, que hasta ahora sólo he tratado de elaborar bajo la forma especial de una teoría de conjuntos aritméticos o geométricos. A saber, entiendo en general por variedad o conjunto toda multiplicidad que puede ser pensada como unidad, esto es, toda colección de elementos determinados que pueden ser unidos en una totalidad mediante una ley. Y creo haber definido con ello algo semejante al εἶδος o ἰδέα platónicos, como también a lo que Platón llama μιχτόν en su diálogo «Filebo, o el bien supremo». (2006, p. 137).

En cambio, en sus *Contribuciones*, Cantor describió un conjunto de un modo menos general (quiero decir filosófico), pero sí *más matemático*:

> Por un conjunto (*Menge*) entendemos cualquier colección dentro de un todo M de objetos definidos o separados *m* de nuestra intuición o nuestro pensamiento. Estos objetos son llamados "elementos" de M.
> En signos lo expresamos de este modo:
> (1) M = {*m*}. (1915, p. 85.)

[33] Esta prosecución del concepto de infinito da por resultado, según Cantor, la distinción entre *infinito impropio* (cantidad variable que va en incremento o decremento, propio del análisis matemático) y el *infinito propio* (el infinito en su forma determinada o definida, como lo usaba la geometría de un punto en el infinito, quizás más cercano al sentido de Riemann). Hay que especificar que cuando se habla de *propiedad* o *impropiedad*, estas se refieren, según sea el caso, al uso del término infinito y no al infinito mismo.

[34] En los *Fundamentos*, la lista de filósofos citados es considerablemente amplia: Platón, Aristóteles, Leibniz, Locke, Hobbes, Descartes, Berkeley, Bolzano y Spinoza.

En ambos casos, los conjuntos cantorianos son "constructos" que coleccionan objetos (elementos) dados previamente. Estos elementos o miembros, ya sean reales o abstractos, mientras estén incluidos como miembros de un conjunto *M*, pueden ser nombrados como "miembros bien definidos (*wohldefinirt*) o bien ordenados", esto significa, determinar con exactitud qué elementos pertenecen a un conjunto. Por ejemplo, si es considerado el conjunto de los números primos, se sabe con exactitud que el número 7 pertenece a este conjunto y no así el número 2. Pero si se considera el "conjunto de los valores afectivos", este no será un conjunto bien definido, puesto que primero debe aclararse qué es un valor, qué es un afecto y si los afectos son valores. Aunque se pudiera llegar a un consenso, es seguro que otros sujetos convengan en asignar otros valores a este mismo conjunto.

Otras de las cuestiones fundamentales en la teoría de conjuntos cantoriana es la comparación de cardinalidad y la asignación de un número cardinal a cada conjunto. En ambos casos, la determinación lógica que parte de considerar cada "elemento" de un conjunto como "uno", sirve a Cantor para definir las mismas operaciones y propiedades, pero al nivel de un conjunto o colección cerrada, lo que da por corolario que sea posible la comparación entre colecciones de objetos. El resultado de este procedimiento es que el conjunto de los números naturales **N** no está en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números reales **R**. **N** es por tanto un conjunto-*no enumerable*. Incluso podríamos decir lo siguiente: aunque **N** y **R** son conjuntos infinitos, ambos tienen distinto "tamaño" siendo uno "más grande" que el otro o de *potencia* distinta.[35]

Anteriormente, Cantor habló de la presentación de los nuevos números infinitos definidos a partir de la ayuda de *dos principios de generación* y un *principio de restricción*. El resultado: segmentos denominados *clases numéricas*:

> La *primera* clase numérica (I) es el conjunto de los números enteros finitos 1,2,3…**ν**…; le sigue la *segunda* clase numérica (II), consistente en ciertos números infinitos que se siguen unos a otros en una determinada sucesión; tan pronto como la segunda clase numérica ha sido definida, se llega a la tercera, luego a la cuarta, y así sucesivamente. (Cantor, 2006, p. 87)

---

[35] El concepto de función también sufre una serie de cambios en los trabajos de Cantor. En un primer momento, la función biyectiva entre dos conjuntos es lo que mejor caracteriza la noción de potencia, ya que los conjuntos (infinitos) siempre son susceptibles de poseer potencias diferentes. En un segundo momento, el concepto de potencia se relaciona con el concepto de sucesión infinita.

Este tratamiento matemático que desarrolló Cantor, a propósito de los números cardinales transfinitos, lo llevó a crear una aritmética análoga a la aritmética ordinaria. Así, ω_0 representa a la vez el primer número transfinito y la primera clase numérica, ω_1 representa el primer ordinal no enumerable y la segunda clase numérica y así sucesivamente. En sus *Contribuciones*, aparece con mayor claridad esto último.

> Conjuntos con números cardinales finitos son llamados "conjuntos finitos", todos los otros serán nombrados como "conjuntos transfinitos" y sus números cardinales "números cardinales transfinitos". El primer ejemplo de un número transfinito está dado por la totalidad de los números cardinales finitos *v*; llamamos a su número cardinal (§ I) "Aleph-cero" y se denota por $\aleph_0$. (1915, p.103-104)

Justamente uno de sus primeros resultados, como dije líneas atrás, fue mostrar que el conjunto de los números naturales y el de los números reales tenían distinta cardinalidad. Más aún, el trabajo de Cantor mostró que el conjunto de los números naturales **N**, el conjunto de los enteros **Z** y el conjunto de los números racionales **Q** eran del mismo tamaño (misma cardinalidad). A propósito de esto, Jech señala:

> La importancia de la demostración de Cantor radica en el hecho de que emplea, para su prueba de la no numerabilidad de R, la idea de que toda sucesión acotada creciente de números reales posee una cota superior mínima. Esta asunción está ligada a la concepción de los números reales como cortes de Dedekind en Q, o como límites de sucesiones de Cauchy de números racionales, o como expansiones decimales infinitas. Estos tres posibles enfoques son (en cierto sentido) equivalentes y todos requieren la existencia de conjuntos infinitos arbitrarios de enteros. (Jech, 2005, p. 369–370)

De la noción de un conjunto arbitrario de números enteros o de máxima cardinalidad, así como de otros teoremas que no se necesitan detallar aquí, se derivaría la famosa Hipótesis del continuo (HC), que no es sino el cuestionamiento que discute la existencia de conjuntos de números reales **R** que no sean numerables y que no tengan equivalencia, en cardinalidad, a la existencia de un conjunto de todos los números reales **R**. En un primer intento de definir este concepto de *continuo*, Cantor escribe a Dedekind el 15 de septiembre de 1882:

> Aparte [véase abajo] incluyo un intento de formular el problema que me interesa desde hace mucho tiempo, qué se ha de entender por un *continuo* […] Un intento de generalizar su concepto de cortadura y emplearlo para una definición general de continuo no quiso darme frutos. Por el contrario, mi punto de partida en las «sucesiones fundamentales»

> enumerables (ahora llamo así a las sucesiones en las que los elementos se aproximan infinitamente *entre sí*) se acomodó sin violencia a mi intención. (2006, p. 280)

James Robert Brown explica que "HC es equivalente a argumentar que todo conjunto de números reales es equivalente (*i.e.*, hay una correspondencia uno-a-uno) a un conjunto contable de números naturales o al conjunto de todos los números reales" (2008, p. 182). En todo caso HC es un problema que versa sobre la exponenciación de cardinales ($2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$), donde el símbolo $\aleph_\alpha$ denota la cardinalidad de los conjuntos infinitos denumerables y con $\aleph_{+1}$ al siguiente cardinal, quedando el símbolo $\aleph_\omega$ para el número cardinal más bajo de la serie de los conjuntos no numerables.

Finalmente, otra característica en la teoría de conjuntos cantoriana es la introducción de los números ordinales transfinitos, lo que Cantor llamó *buen ordenamiento*. En el §2 de sus *Fundamentos* lo definió de la siguiente manera:

> Entenderemos por conjunto *bien ordenado* todo conjunto bien definido en el cual los elementos están enlazados unos con otros por medio de una sucesión determinada, según la cual exista un *primer* elemento del conjunto, y a cada uno de los elementos (supuesto que no sea el último en la sucesión) le siga otro elemento determinado, e igualmente a todo subconjunto arbitrario de elementos, finito o infinito, le corresponda un elemento determinado que es el *inmediato* sucesor a todos ellos en la sucesión (a menos que no haya absolutamente ninguno en la sucesión que los siga a todo ellos). (2006, p. 89)

Y en sus *Contribuciones*, de un modo un tanto más elegante, aparece la siguiente definición:

> Llamamos, simplemente, a los conjuntos ordenados "bien ordenados" si sus elementos ascienden en una sucesión definida desde el nivel más bajo de f_1 de tal modo que:
>
> I. Hay en F un elemento f_1 el cual es del nivel más ínfimo.
>
> II. Si F' es cualquier parte de F y si F tiene uno o muchos elementos de nivel superior más que todos los elementos de F', entonces, hay un elemento f' de F el cual sigue, inmediatamente después, de la totalidad de F', de tal modo que no hay elementos entre el nivel f' y F' que ocurran en F. (1915, p. 137)

Un conjunto bien ordenado significa que para cada conjunto totalmente ordenado N, cualquier subconjunto de N tiene al menos un primer elemento, dicho de otro modo, sea *A* un conjunto ordenado tal que cada subconjunto de *A* tiene un primer elemento, con lo cual existe en él una determinación interna. Esta diferencia entre un cardinal transfinito y un ordinal transfinito es fundamental por lo que Cantor utiliza diferentes símbolos:

> Así, pues, Cantor utilizó el número ordinal ω para el conjunto ordenado de números naturales 1, 2, 3… De acuerdo con esto, el conjunto ordenado
>
> 1, 2, 3…, 1, 2, 3
>
> Fue (y es) denotado por ω+3. Cantor introdujo una jerarquía en los números ordinales transfinitos. Esta jerarquía se extendía a ω. ω, ω^n y otro más. (Kline, 2006, p. 244)

Parágrafos más adelante, Cantor presenta un argumento a favor de los números *transfinitos*, señalando que existe una "jerarquía ilimitada de modos determinados que según su naturaleza no son finitos sino infinitos, pero que, igual que lo finito, pueden ser determinados por números bien definidos y distinguibles entre sí" (Kline, 2006, p. 99). Estos modos determinados[36] no se agotan en cantidades finitas y Cantor está convencido de poder ampliar más allá de nuestro entendimiento finito la serie de los números. [37]

[36] Charles Parsons señala que se puede hacer una división en la consideración cantoriana de los conjuntos infinitos: la concepción ontológica y la concepción iterativa de los conjuntos. La concepción iterativa es la más conocida, pero la concepción ontológica presenta nuevas ideas a propósito del papel de un conjunto como el sostén del edificio de las matemáticas. La concepción ontológica parte de la distinción y caracterización de tres ideas básicas: pluralidad, colección y extensión, siendo la pluralidad la más importante de ellas. La pluralidad se predica de aquellos objetos que son o están constituido por sus elementos y cuya principal actividad es la de "coleccionar", a través de un proceso sintético de la conciencia, los elementos de un conjunto. Las pluralidades se convertirían, entonces, en construcciones plurales o múltiples con diversas modalidades de expresión ontológica (elementos-múltiples). En suma: la unificación de lo uno, es más bien, la presentación de lo múltiple. *Cfr.* (Parsons, 2008, p. 120).

[37] *Cfr.* la carta a Dedekind del 15 de septiembre de 1882.

1.4. El segundo contacto con las matemáticas: Husserl como alumno de K. Weierstrass y L. Kronecker

§10. Karl Weierstrass y la aritmetización del análisis

En el apartado anterior describí los trasfondos o aspectos no-filosóficos, propiamente hablando, que testificaron el surgimiento de los primeros análisis fenomenológicos de Husserl. Ahora es el momento oportuno para enfocarse en la Escuela de Berlín: la otra cara del horizonte filosófico-matemático que envuelve las primeras obras de Husserl. En lo sucesivo, se revisarán las propuestas de K. Weierstrass y L. Kronecker, y su relación con la obra de Husserl.

La célebre escuela de Berlín tenía entre sus filas a matemáticos y físicos como Leopold Kronecker, Hermann, Helmholtz, Gustav Kirchhoff, Ernst Kummer y Karl Weierstrass, siendo este último una de las referencias obligadas a la hora de hablar sobre el cálculo infinitesimal y la aritmetización del análisis matemático. Se sabe que Husserl estudió matemáticas con Weierstrass de 1878 a 1881,[38] para después convertirse en su asistente (*Privatassistent*) y colaborador.[39] Malvine Steinschneider, esposa de Husserl, recuerda que la influencia más profunda sobre Husserl la ejerció, precisamente, Weierstrass. Decía que de Weierstrass provenía el *ethos* de su esfuerzo científico (1988, 112). Más aún, es posible afirmar que, pese a que Husserl estudió diversos enfoques dentro de las matemáticas, él "[…] permaneció weierstrassiano por el resto de su vida" (Hartimo, 2010, p. 111). En gran medida,

---

[38] Husserl atendió los siguientes cursos completos con Weierstrass: Teoría de las funciones analíticas (1878); Introducción a la teoría de las funciones elípticas (semestre de invierno, 1878/79); Lecciones sobre el cálculo de variaciones (semestre de verano, 1879); Lecciones sobre el uso de las funciones elípticas para resolver problemas selectos de geometría y mecánica (1879); Lecciones sobre la teoría de las funciones abelianas (1879/80) y Teoría de las funciones analíticas (semestre de invierno, 1880/81) (*Husserl-Chronik*, p. 7-9). También Mittag-Leffler menciona a Husserl dentro de la lista de los estudiantes de Weierstrass (1909-1910, p. 11).

[39] Illemann ya observó acertadamente que en el volumen 7 de las obras matemáticas de Weierstrass, Husserl aparece como co-autor/colaborador (1932, p. 9). Este hecho tambien fue señalado por Rudolf Rothe, editor de dicho volumen (1927). Dicho sea de paso, el contenido de ese volumen se elaboró sobre las lecciones y notas de Weierstrass sobre el cálculo de variaciones del verano de 1879.

tanto en su tesis de doctorado,[40] como en su tesis de habilitación, Husserl retoma el punto de partida de la investigación filosófico-matemática de Weierstrass, a saber, que la aritmética es la base de todas las disciplinas matemáticas. Efectivamente, en sus lecciones en Berlín (1858-1859), Weierstrass afirmaba que el concepto de número entero es un concepto "primitivo" o "primario" de la aritmética. Al mismo tiempo, Gerhard Funke advierte de otra apropiación:

> De Weierstrass, adoptó Husserl un tema básico de su posterior trabajo no-matemático, el tema de la construcción sistemática de una teoría general de las funciones analíticas. La insistencia de Husserl en que la aritmética se fundamente analíticamente (y no sintéticamente) deriva de esta tesis. (1995, p. 195)

Es, pues, innegable la profunda influencia que ejerció Weierstrass sobre Husserl, no sólo en el interés por fundar una especie de *arithmetica universalis* donde convergieran la aritmética y el análisis, sino también en una de las ideas más fundamentales que se palpan en *Filosofía de la aritmética*, a saber, que el concepto de número se funda, Husserl dirá, se constituye, en el acto de contar. Husserl reconoció esta herencia cuando menciona que "con respecto al punto inicial y al núcleo germinal de nuestros desarrollos a través de la construcción de una aritmética general, estamos en acuerdo con matemáticos que están entre los más importantes y progresivos de nuestro tiempo: por encima de todos, *Weierstrass*, pero no menos con *Dedekind*, Georg *Cantor*, entre otros" (Hua XII, 374). Finalmente, Husserl termina diciendo que "fue el gran Weierstrass quien despertó en mí el interés por una fundamentación (*Begründung*) radical de las matemáticas durante mis años de estudiante a través sus lecciones sobre la teoría de las funciones" (*Husserl-Chronik*, p. 7).

Antes de seguir vinculando a estos pensadores, es preciso entender qué significa para Weierstrass "aritmetización" del análisis matemático.[41] La pregunta por la aritmetización del análisis matemático también podría elaborarse del siguiente modo: ¿qué significa decir que el concepto de número natural y la aritmética de los números naturales constituyen la base de análisis? Por principio de cuentas se trata de establecer, al menos como principio básico, la posibilidad de que el análisis matemático fuera una ciencia fundada únicamente sobre el

[40] *Cfr*. Ingeborg Strohmeyer, Introducción del editor de Hua XXI, pp. LXVIII y ss.

[41] Caracterizar el concepto de "análisis" no es algo sencillo, pues consiste no solo en el cálculo de integrales y diferenciales, sino también en otro tipo de cálculos como el de variaciones, sub-área en la que Husserl se especializó, además del álgebra y la aritmética. Remito al lector a los siguientes textos clásicos, Boyer (1968) y Bottazzini (1986).

concepto de número y con ello reducir y fundar, de un modo seguro, todo el análisis superior en respuesta a las necesidades de generalización y estandarización de las matemáticas. Françoise Dastur señala que Weierstrass “se propuso fundar el cálculo infinitesimal sobre el sistema de los números, derivar la noción de número real y eliminar, también, el recurso a los conceptos oscuros de cantidades infinitamente pequeñas” (1995, p. 18). Conviene añadir que:

> La aritmetización del análisis no fue simplemente una cuestión de desgeometrizar el cálculo y apuntar hacia las mejores condiciones lógicas en sus fundamentos: fue, más bien, una reducción de las diferentes nociones conceptuales (en referencia a distintos objetos) a las nociones aritméticas. (Segura y Sepulcre, 2015, p. 6)

La “aritmetización” del análisis matemático fue más que un simple proceso abstractivo acuñado en el siglo XIX que dejaba atrás el (oscuro) concepto de intuición geométrica y el cálculo infinitesimal, que, aunque eficaz, prestaba muy poca atención al fundamento y estructura del análisis mismo. Los resultados de la aritmetización demostrarían que ciertas proposiciones que habían sido consideradas como correctas e indubitables a la luz de una intuición geométrica, eran de hecho falsas. Así, “el trabajo de Weierstrass libró finalmente al análisis de toda dependencia con respecto al movimiento, la comprensión intuitiva y las nociones geométricas, que en esa época eran verdaderamente sospechosas” (Kline, 2006, p. 212). Consecuentemente, rechazó todo tipo de intuicionismo geométrico-espacial como base del análisis matemático por ser poco confiable.

La matemática de finales del siglo XIX emergió, entonces, con una nueva actitud. Su objetivo: orientarse sobre un nuevo concepto con validez formal. El punto de partida: la re-invención de la existencia y la naturaleza de las entidades matemáticas. Fue, precisamente, Weierstrass quien promovería dicho cambio de paradigma en las matemáticas modernas:

> El descubrimiento de Weierstrass tiene el valor de un *experimentum crucis*. Consagra el advenimiento del análisis como disciplina independiente de las formas de la intuición espacial o de la observación de los hechos generales de la naturaleza, no reivindicando su autonomía más que para aumentar el rigor de sus métodos según la exigencia que las investigaciones fundamentales de Abel sobre la convergencia de las series habían impuesto en cierto sentido a los matemáticos del siglo XIX. (Brunschvicg, 1945, p. 370)

El programa de Weierstrass puede caracterizarse como la búsqueda de una racionalización del análisis matemático desde sus raíces originales, conceptos y axiomas elementales, al tiempo que construye el concepto de número (de forma lógica) sin apelar al concepto de cantidad (magnitud), pero sí a la definición de limite (ε-δ). Desde luego, el sistema de los números reales será la piedra de toque de su trabajo (Miller, 1982, p. 4-5). En este sentido, Weierstrass fue el primero en darse cuenta de la importancia de este sistema de números, así como de la imperante rigurosidad del sistema de los números enteros positivos, el sistema de las integrales, el sistema de los números racionales y la demostración de las propiedades de los números irracionales a partir de las propiedades del sistema de los racionales. "Introdujo muchos conceptos básicos y teoremas del análisis tales como las nociones de límite superior e inferior. Weierstrass también implementó una serie de nociones topológicas generales, como la noción de entorno o vecindad (*neighbourhood*)" (Hartimo, 2006, p. 323).

En Berlín, en las lecciones del semestre de verano de 1878, tituladas "Introducción a la teoría de las funciones analíticas", Weierstrass lo explicita abiertamente:

> El análisis puro es una ciencia que no debería necesitar ningún postulado, y de hecho no necesita nada más que el concepto de número (en contraste con otras ciencias matemáticas como la geometría, la mecánica analítica, la física-matemática, las cuales, con mayor razón, están fundadas sobre la experiencia) (Ierna, 2006, p. 36).

Desde su perspectiva, el análisis matemático es abstracto y no empírico, de modo que el sistema total del análisis matemático podría ser construido y deducido con rigor a través de un método evidente. Esta inclinación por los fundamentos conceptuales de la aritmética y, desde luego, por el concepto de número, se describe con mayor profundidad en su "Introducción a la teoría de las funciones analíticas". En ese texto se puede leer lo siguiente: "El concepto de número surge a través de la combinación intelectiva de cosas (*Dinge*), se descubre en aquellas notas comunes, sobre todo de las cosas intelectivamente idénticas. Estas cosas las designamos como la unidad del número (*Zahl*)" (Weierstrass, 1973, p.96). Misma idea que se visualiza en su manuscrito Q 3, 1:

> A través del procedimiento de la operación de contar, alcanzamos el concepto de número; consideramos una presentación de agregados de objetos; entre ellos buscamos los que poseen una determinada nota aprehendida (*Merkmal aufgefaßte*) en la representación yendo, a través de ellos, secuencialmente; comprendemos los objetos individuales junto

> con la nota, en una representación global, y por lo tanto se hace una multiplicidad de unidades, este es, pues, el número. (Ierna, 2006, p.)

Para Weierstrass, el acto de contar o enumerar, que es finalmente un acto psíquico u operación mental, cobra especial validez porque mediante él alcanzamos el concepto de número. La secuencia para esto inicia en el acto de enumerar como una operación, posteriormente la elección de una serie de objetos dados en los que se busca una nota en común, y finalmente la determinación de esa multitud de cosas como una unidad homogénea. Vale la pena apuntar que en continuidad con el proyecto de Weierstrass, Husserl tomó como centro de su disertación filosófico-matemática el acto de contar. De hecho, no dudó en afirmar que, en su *Filosofía de la aritmética*, el número es una multiplicidad de unidades, sólo que a diferencia de Weierstrass, no se "conjuntan" objetos con determinadas características particulares, más bien se agregan objetos de un modo arbitrario, al más puro estilo del concepto "*Menge*".

Un último punto de convergencia entre Husserl y Weierstrass es la distinción entre lo material y lo formal o, dicho de otro modo, entre representaciones auténticas o intuitivas (lo que una representación contiene) y representaciones inauténticas o simbólicas (lo que una representación significa). En el mismo manuscrito que he citado, Q 3, 1-4, Weierstrass apuesta por la visualización de los números de forma indirecta (simbólica) y promueve la extensión de los números a otros dominios; el caso paradigmático es el de los números imaginarios.

§11. Leopold Kronecker y la noción de experiencia matemática

Leopold Kronecker, el "Rey sin corona del mundo matemático alemán" (Edwards, 1988, p. 159), fue uno de los grandes hombres de ciencia con los que Husserl se topó en su carrera académica inicial.[42] Dentro de la literatura filosófica, la relación entre Husserl y Kronecker presenta versiones encontradas. Por un lado, no está del todo claro que Husserl hubiera

---

[42] Husserl atendió las lecciones sobre la teoría de ecuaciones algebraicas de Kronecker (semestre de invierno 1878/79) (*Husserl-Chronik*, p. 8).

recibido un impulso matemático o filosófico de su maestro Kronecker.[43] Por otro lado, hay quienes sí confirman cierta influencia de Kronecker en la filosofía matemática de Husserl.[44] Definitivamente me adhiero a esta última interpretación y trataré de defenderla y ampliarla en la medida de lo posible. A continuación, explico los argumentos a favor de esto.

Es cierto que Husserl en contadas ocasiones se refirió a Kronecker como su "Maestro" o como su mentor. En algún momento de su vida, p. ej., Husserl escribió: "En cuestión filosófica, me atrajo especialmente el Prof. Paulsen, a él le debo ideas agradables y duraderas. Con respeto a las matemáticas, por encima de todos, los profesores Weierstrass y Kronecker, cuyo estudiante fui, dejaron una impresión duradera en mí" (*Husserl-Chronik*. p. 7). En otro momento señala que "efectivamente, incluso sentimos que estamos en cierta armonía con investigadores que, como *Kronecker,* mantienen que el número es un mero derivado del concepto de número ordinal" (Hua XII, 374).[45] Lo que también es evidenciable y seguro, es que Kronecker debatió con Weierstrass a propósito de los fundamentos de los números naturales —prueba clara son algunas cartas editadas por Pierre Dugac en su texto *Elements d'analyse de Karl Weierstrass*— y con Cantor en relación a los fundamentos de la matemática. Fue a a este último, en una carta el 21 de agosto de 1884, a quien le confesó cuál era y hacia dónde se dirigía su trabajo:

> […] Qué podría haber más natural, sino que me haya esforzado por establecer los fenómenos o las verdades de esta matemática lo más libres posible de aquellos conceptos filosóficos. Por eso he partido de la idea de reducir todo lo que hay en la matemática *pura* a la teoría de los números enteros, y *creo* que esto se logrará plenamente. (Cantor, 2006, p. 232)[46]

Dicho lo anterior, los textos que tengo en cuenta para este apartado son el artículo "Sobre el concepto de número" (*Zahl*) publicado en el *Journal* de Crelle (o de Berlín)[47] en 1887, y su ampliación en un curso del semestre de verano de 1891. Desde estas obras ubicaré los principales argumentos sobre el concepto de número y su postura sobre la aritmetización.

---

[43] *Cfr*. (De Boer, 1964, p. 97) y (Kern, p. 3).
[44] *Cfr*. Ierna (2006) y Schuhmann (1977).
[45] Idea que cambiaría con la publicación de su *Filosofía de la aritmética*.
[46] Un más o menos detallado de esta carta también puede encontrarse en Edwards, H. M (1995).
[47] El nombre completo de la revista era *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, y fue fundada por August Leopold Crelle en 1826, por ello se le conocía por el apelativo de Revista de Crelle.

Sobre la definición de los números ordinales, Kronecker señala que "en los números ordinales (*Ordnungszahlen*) se encuentra el punto de partida natural para el desarrollo del concepto de número" (1892, p. 253), y junto con la adición sucesiva entre ellos, constituida por una especie de familia (*Schaar*),[48] se determina la totalidad de los números ordinales (p. 254) en una suerte de "stock" de signos:

> Así, por ejemplo, en la familia (*Schaar*) de letras (*a, b, c, d, e*) la letra *a* se designa como la "primera", la letra *b* se designa como la "segunda", etc., y finalmente la letra *e* se designa como la "quinta". La totalidad de los números ordinales así aplicados, o el "*Anzahl*" de las letras *a, b, c, d, e*, puede, en consecuencia, estar en contacto con el último de los números ordinales aplicados y es designado por el número "cinco" (1892, p. 254).

Dicho de otro modo, dada una familia de objetos, el número (cardinal) que le corresponde al último número ordinal será el último que se haya utilizado para contar la cantidad de elementos. Como puede notarse, el proceso que sigue Kronecker tiene un carácter biyectivo o al menos un cierto carácter de equivalencia (uno-a-uno) entre dos sistemas de magnitudes (ordinales y cardinales), un sistema finito de objetos (cuatro perros) y una característica "invariante" (cuatro objetos). Este *Anzahl*, que es resultado del contar, es también una propiedad de la familia, pues los elementos al ser ellos mismos una "característica invariante" de la familia (o la clase) dan cuenta de una *base* más real del concepto de número. Más aún, la importancia y significación que tenían los números para Kronecker es de mayor radicalidad que para Weierstrass:

> En este sentido la palabra "aritmética" no debe ser tomada en el sentido limitado de costumbre, pues todas las disciplinas matemáticas, principalmente el álgebra y el análisis, y excepto la geometría y la mecánica, han de entenderse como parte de ella. Creo también, que tendremos éxito en la "aritmetización" de todo el contenido de todas estas disciplinas matemáticas, es decir, de fundarlas únicamente en el concepto de número tomado en el sentido más estricto y desechar las modificaciones y extensiones de este concepto, las cuales son ocasionadas por las aplicaciones a la geometría y a la mecánica (1892, p. 253)

Esta división es una consecuencia de la propuesta de kroneckiana de la matemática *como una* ciencia natural o, dicho de otro modo, como una ciencia *experimental*, o "matemática

[48] *Schaar* es un término netamente técnico. Dedekind y Kronecker lo utilizan, aunque de un modo diferente. En Dedekind, la traducción que se ocupa es la de "vector espacial" sin sus propiedades topológicas y Kronecker lo utiliza en el sentido de *familia*, esto es, un conjunto finito de objetos que son considerados como tal en cualquier momento, *cfr*. (Gray, 2009, p. 94)

concreta", como le llamaba Cantor.[49] En su curso de 1891, Kronecker apunta: "la matemática es tratada como una ciencia natural" (Boniface y Schapacher, 2002, p. 232), pues "adaptan los métodos de cada una de sus disciplinas constitutivas a los fenómenos que ellas tratan" (p.232) en términos de que "sus objetos son tan reales (*wirklich*) como los de sus ciencias hermanas" (p. 232). Las matemáticas, entonces, no inventan nada, sólo descubren lo que ya está *puesto* de forma natural, aunque como ciencia pura debe partir y fundar su evidencia en la experiencia y para eso requiere inventar nuevos métodos (p.232-233).

Este último punto remite al concepto de *experiencia* (*Erfahrung*) matemática y su oposición al concepto de construcción lógico. Para Kronecker, en lugar de conceptos puros se debe comenzar por la noción de fenómeno (*Erscheinung*) como centro de la fundamentación de las ciencias naturales y matemáticas. En este tenor, los fundamentos de los fenómenos matemáticos deben ser descritos de la manera más simple y más completa (p. 226). Los fenómenos de los que habla Kronecker "son conceptos y principios básicos que están dados en la experiencia y abiertos a la modificación en el curso del desarrollo de los contenidos" (Boniface, 2005, p. 145). Así, la propuesta finitista y constructivista de Kronecker cobra un mayor sentido, y la frase que Heinrich Weber le atribuye: "Dios nos dio los números naturales y el resto es obra de los hombres" (1891-1892, p. 19) se vuelve lapidaria justo porque caracteriza, con toda certeza, su propuesta de que los números naturales no necesitan ser definidos por estar ya dados en la *experiencia matemática* del contar (Boniface, 2005, p. 147). Entender esto último impide que la propuesta (filosófica y matemática) de Kronecker se asimile a una especie de empirismo. Por el contrario, los objetos matemáticos son *fenómenos matemáticos*, son expresiones algebraicas concretas que no están ni en la naturaleza ni en la mente humana.

Según lo anterior, los números naturales serían algo así como la base del edificio de las matemáticas y los demás números sólo serían *construcciones formales* basadas en operaciones y combinaciones finitas. Dichas *construcciones formales* están fundadas en operaciones y combinaciones finitas justificadas por el acto de contar. Así, en el §2 de *Sobre*

[49] Véase la carta del 24 de agosto de 1824 (Cantor, 2006, p. 234). Desde luego existe un desacuerdo de fondo entre la postura matemática de Kronecker y la postura matemática de Cantor. Mientras que Kronecker exigía que toda definición matemática incluyera un método que decidiera a cuáles objetos se aplicaba y a cuáles no; Cantor, por su parte, no tenía problema alguno en reconocer que un conjunto de objetos existe y está determinado, aunque no exista un método o inventario exhaustivo de sus elementos.

el concepto de número, Kronecker explica la suma de los números como un "contar adicional" (*weiter Zählen*), un "agregar el número n_2 al número n_1" (1892, p. 257) en función de un nuevo número al que se le aplica un nuevo contar adicional, $n_1+ n_2+n_3+\ldots+$. En el §4 explica la multiplicación de los números:

> Si los sumandos individuales n_1, n_2, $n_3\ldots n_r$, son todos exactamente iguales al mismo número *n*, entonces uno designa a la adición como "multiplicación del número *n* por el multiplicador *r*" y conjunta: $n_1+ n_2+n_3+\ldots+ n_r =rn$.
>
> Uno designa al resultado de la multiplicación definida como el producto de los números *n* y *r*. (p. 258)

El número en el sentido más estricto es el número natural, porque las cantidades (o "números") irracionales quedan fueran del dominio de la aritmética. Además de esto, la idea de una aritmética general (*Allgemeine Arithmetik*) o pura que incluya al álgebra y al análisis, da a la aritmética un carácter fundacional:

> En los resultados de la "aritmética en general" o de la "teoría aritmética de la totalidad de las funciones variables de los números enteros", sólo podemos ver una unión (*Zusammenfassung*) de todos estos resultados que obtenemos cuando asignamos valores de números enteros a las variables. Entonces, pertenecen propiamente, también, a la aritmética *general,* los resultados de la teoría ordinaria especial de números y todos los resultados de las más profundas investigaciones matemáticas, que al final deben ser capaces de ser expresadas en las formas simples de propiedades de los números enteros (p. 273-274).

En resumen, para Kronecker los conceptos fundamentales de las matemáticas debían ser constructivos, finitistas y derivados de la experiencia, buscando con ello enfatizar las operaciones constructivas y no edificativas en el concepto formal.

1.5 *Adenda*. La psicología descriptiva de Brentano

§13. La psicología empírica como ciencia rigurosa

Después de haber estudiado con Weierstrass y Kronecker en Berlín, y habiendo terminado su servicio militar (1883-1884), Husserl permaneció en Viena definiendo con ello su futuro. En efecto, en esta ciudad atendió, por dos años consecutivos, las lecciones que impartió Franz Brentano,[50] uno de los alumnos más aventajados del famoso aristotélico Friedrich Trendelenburg y del escolástico Franz Clemens. De la mano de Brentano, Husserl tomó la firme decisión de convertirse en filósofo:

> No me defendí mucho tiempo, a pesar de los prejuicios, ante la fuerza de esta personalidad. Pronto me cautivaron las cosas, pronto estaba vencido por la completamente única claridad y agudeza dialéctica de sus argumentaciones, de la fuerza, por así decir, cataléptica de su forma de desarrollar los problemas y de sus teorías (Husserl, 2006, p. 14).

De Brentano, Husserl aprendió que la filosofía era, junto con las matemáticas o las ciencias naturales, "un campo de trabajo serio, y de que podía, por tanto, ser tratado en el espíritu de la ciencia más rigurosa" (Zirión, 2006, p. 48). En esta exigencia y búsqueda de rigurosidad, sobresale el reconocimiento de que todos nuestros conceptos tienen un referente o provienen de nuestra *intuición* y no de principios quiméricos relativos a una metafísica especulativa (Brentano, 2009). Es así como comenzaba a gestarse uno de los principales ejes teóricos de la filosofía (léase psicología) de Brentano: el concepto de intencionalidad.[51]

Desarrollado en su *Psicología desde el punto de vista empírico,*[52] el concepto de intencionalidad se presenta como un estudio (genético) sobre los contenidos de conciencia que, a diferencia de los clásicos tratados de psicología de la época, no toma en cuenta el

[50] Husserl tomó los siguientes cursos con Brentano: "La lógica elemental y las reformas necesarias en ella" (I y II, semestre de invierno de 1884/85) y "Cuestiones selectas de psicología y estética".

[51] Este término de intencionalidad no es nuevo en el discurso filosófico, *cfr.* (Paredes Martín, 2002).

[52] Brentano desarrolló una psicología que no sólo es empírica, sino también descriptiva y, más aun, genética (Rollinger, 2004). Esta "psicología" con la que Brentano se ocupó intensamente fue con el tiempo obteniendo diversos nombres. Por ejemplo, en el semestre de invierno de 1887-1888 (la presentó como psicología descriptiva (Brentano, 1995, p. 129-136); en el semestre de invierno de 1888-1889 como fenomenología descriptiva (p. 137-142), y finalmente, en las lecciones de invierno de 1890-1891 como Psicognosia (p. 3-87).

aspecto psicofísico de la conciencia ni de los elementos que la componen, sino los contenidos de conciencia *desde* la experiencia misma.

En el primer capítulo de la *Psicología*, que es el que interesa como aportación para este apartado, se presenta la distinción entre los fenómenos físicos y los fenómenos psíquicos. Brentano comienza diciendo que toda representación, mediante sensación o fantasía, ofrece un ejemplo de fenómeno psíquico. Por ejemplo, la audición de un sonido, la visión de un objeto, el recuerdo de una persona, son ejemplos de fenómenos psíquicos. También lo es todo juicio, todo evocar, toda expectación, toda conclusión, toda convicción u opinión, toda duda, etc. Lo mismo todo movimiento del ánimo, alegría, tristeza, miedo, esperanza, valor, cobardía, cólera, amor, odio, apetito, volición, etc. Por el contrario, ejemplos de fenómenos físicos son un color, una figura, un paisaje, una sensación de dolor, el calor y el frío, y las cosas semejantes que aparecen en la fantasía (Brentano, 1995):

> Intentamos encontrar un modo diferente y más unificado de explicar los fenómenos psíquicos. Para este propósito haremos uso de una definición que usamos anteriormente cuando decíamos que el término de "fenómenos psíquicos" se aplicaba a las representaciones, así como a todos aquellos fenómenos cuya base esté formada por representaciones. Ya no es necesario volver a decir que por representación entendemos, no lo representado, sino el acto de representarlo. Este acto de representar forma el fundamento, no del juzgar meramente, sino también del apetecer y de cualquier otro acto psíquico. Nada puede ser juzgado, nada tampoco apetecido, nada esperado o temido, si no es representado. De este modo, la determinación dada comprende todos los ejemplos aducidos de fenómenos psíquicos, y, en general, todos los fenómenos pertenecientes a este dominio (Brentano, 1995, p. 61).

Las representaciones son, pues, el fundamento de los demás fenómenos psíquicos. Así, cada vez que nos "representamos algo" esto ha de existir en la conciencia como representado, y cada vez que apetecemos algo tenemos en el pensamiento aquello que apetecemos. Tal como es usada la palabra "representar", podría decirse que "ser representado" vale tanto como "aparecer" o "ser fenómeno". Ahora bien, para diferenciar más claramente un fenómeno psíquico de un fenómeno físico a partir de un hecho, Brentano señala:

> […] allí donde una cortadura, una quemadura o un cosquilleo despierta en nosotros sentimientos de dolor o placer, debemos distinguir del mismo modo un fenómeno físico que se ofrece como objeto de la percepción externa y un fenómeno psíquico de sentimiento que acompaña a la aparición de aquél […] (p. 63)

Un observador superficial confundiría ambos fenómenos como uno solo. Un motivo que favorece este error es que nombramos de igual manera tanto la cualidad que precede al sentimiento como al sentimiento mismo. Se llama *dolor* al fenómeno físico que aparece con el *sentimiento del dolor*. No se dice que se tiene la sensación de éste o aquél fenómeno en el pie con dolor, sino que se dice que *se siente dolor en el pie*. El análisis de Brentano en modo alguno está destinado a reconstruir una doble esfera del mundo, el objetivo y el subjetivo. Por el contrario, funciona como una restricción metodológica al interior del ámbito del fenómeno sin convertir nunca este fenomenismo en tesis metafísicas y asignar a la teoría del conocimiento la tarea de replantear sus criterios realistas con los cuales validar todo proceder cognoscitivo. De esta manera, para Brentano la representación del sonido (fenómeno psíquico que representa un fenómeno físico) y la representación de la presentación del sonido constituyen un único fenómeno, ya que en este único fenómeno está representado el sonido captado y el fenómeno psíquico como tal. Una vez analizado este hecho podemos decir que los fenómenos psíquicos son representaciones o descansan sobre representaciones que les sirven de fundamento.

Ahora bien, la distinción entre fenómenos psíquicos y físicos continua al caracterizar a estos últimos con extensión y determinación local. Los fenómenos psíquicos carecen de estas características. La ausencia de extensión y localidad en los fenómenos psíquicos es crucial para entender su propia constitución. Comento brevemente este punto. Para Brentano, la objetividad de todo fenómeno psíquico no depende de las proyecciones formales del sujeto, puesto que su contenido *ya es* una determinación lógica. Así, "el objeto del conocimiento no se constituye aplicando conceptos puros al dato sensible, ya que el objeto está categorizado en sus propias determinaciones objetivas dadas en la sensibilidad como materia de la representación" (Abella, 2009, p. 204). Finalmente, la definición y diferenciación más clara es la siguiente:

> Todo fenómeno psíquico está caracterizado por lo que los escolásticos de la Edad Media llamaban la inexistencia intencional (o mental) de un objeto, y que nosotros podemos llamar, aunque no de un modo enteramente inequívoco, la referencia a un contenido, la dirección hacia un objeto (por el cual no hay que entender aquí el significado de real), o la objetividad inmanente. Todo fenómeno psíquico contiene en sí algo como su objeto, aunque no todos del mismo modo. En la representación hay algo representado, en la

> afirmación hay algo afirmado o rechazado, en el amor, amado, en el odio, odiado, en el apetito, apetecido y así (Brentano, 2005, p. 68)

Esta característica de los fenómenos psíquicos será conocida comúnmente como intencionalidad. Podemos definir a los fenómenos psíquicos diciendo que son aquellos fenómenos que contienen en sí, intencionalmente, un objeto. Ahora bien ¿qué significa que que *nada puede ser juzgado, apetecido, esperado o temido, a menos que tenga una representación de algo*?[53] En un primer momento se puede responder que los fenómenos psíquicos, como el amor o el odio, descansan en representaciones (o actos teóricos), tienen una existencia efectiva pues, en efecto, no dudamos de estarlos experimentando. Los fenómenos psíquicos se "agrupan" en tres tipos de actos mentales: *Representación* (*Vorstellung*), *Juicio* (*Urteil*) *y Actos de sentimiento* (*Gemütstätigkeiten*). Todo aquello que caiga dentro de estos actos mentales, por ejemplo, pensamientos, juicios, recuerdos, fantasías, sentimientos, etc., son fenómenos psíquicos y a la psicología descriptiva le corresponde su estudio. De acuerdo con el planteamiento anterior, la psicología sería la ciencia de los fenómenos psíquicos, y como tal, tendría la tarea de enunciar las leyes que rigen la coexistencia y sucesión de dichos fenómenos bajo un método que gira en torno a la "experiencia interna".

Dentro del concepto de intencionalidad destacan dos elementos. Primeramente, el acto psíquico y el contenido del acto psíquico, por ejemplo, en la enunciación "observo la foto de mis hermanos que está sobre el escritorio", podemos claramente distinguir entre el acto de percibir (ver algo) y lo percibido (la foto de mis hermanos). Ahora bien, cabe hacer la precisión de que este objeto intendido no está de ninguna manera fuera de mi conciencia, como si por un lado estuviera ella y por el otro lado el mundo, ambos vinculados por la intencionalidad. Lo que Brentano quiere señalarnos es que hay una gran diferencia entre la existencia real (efectiva) de los objetos y una *existencia mental* o *intencional*. Ahora bien, sobre esta misma cadena de ejemplos, pensemos en un sonido:

> Podemos decir que el sonido es el *objeto primario* del *acto* de escuchar, y que el acto de escuchar mismo es el *objeto secundario*. Temporalmente ambos ocurren al mismo tiempo, pero en la naturaleza del caso, el sonido es primero. Una representación del sonido sin una representación del acto de escuchar sería inconcebible, por lo menos *a priori*, pero una

[53] *Cfr*. (Serrano de Haro, 1995, p.61-89).

> representación del acto de escuchar sin una representación del sonido sería una contradicción obvia (Brentano, 1995, p. 98).

El sonido podría ser considerado como objeto primario del *acto de escuchar* y el acto de escuchar mismo como objeto secundario. En la dirección secundaria se presenta una unidad entre el sujeto cognoscente y lo conocido, mientras que la dirección primaria de la intencionalidad (percepción) se representa el objeto propiamente dicho (real o irreal, existente o no existente). Dicho con otras palabras, la *conciencia primaria* es la conciencia que tiene una relación simple con un objeto, es decir, que se dirige a un objeto primario, así en el ejemplo: "yo escucho una melodía de Paganini", notamos que el objeto primario serán las notas y el sonido de la partitura, pero hay también una *conciencia secundaria* que atendería el objeto secundario que no es sino el acto mismo, en este caso el de la escucha, dicho de otro modo, el propio acto se dirige sobre sí mismo, pero ambas direcciones de la conciencia siguen siendo "dos aspectos complementarios e indisociables del mismo fenómeno" (Illescas, 2006: 64).

§14. Brentano y las *Investigaciones filosóficas sobre el espacio, el tiempo y el continuo*

Existe un aspecto aún más controversial que también podría unir a Husserl y a Brentano. Me refiero a las lecciones sobre lógica que Brentano impartió en 1884-1885 en Viena bajo el título "La lógica elemental y las reformas necesarias en ella". De hecho, las lecciones editadas bajo el título *Investigaciones filosóficas sobre el espacio, el tiempo y el continuo*, dan seguimiento a aquellas. Presentaré de manera muy breve este último texto.

Las *Investigaciones filosóficas sobre el espacio, el tiempo y el continuo* son una muestra del conocimiento matemático y científico que Brentano poseía de autores como Dedekind y Cantor, y de tópicos como el concepto del continuo matemático. Empero, "la actitud de Brentano hacia las teorías matemáticas de la serie continua de Dedekind, Cantor y sus sucesores oscila entre rechazarlos como inadecuados y el de concederles el estatus de ficciones" (Brentano (2010, p. xii) La razón de esto es muy clara: la llegada de Brentano al reísmo.[54] Ya con cierta discrepancia de sus raíces aristotélicas, Brentano se inclinó por una descripción de las *experiencias* matemáticas y físicas, y no por las idealizaciones que de ella pudieran derivarse. Dicha descripción realista no sólo apuntaba que lo real *es*, sino que *es* lo *único* que podía ser representado. En este contexto reísta, Brentano presentó una serie de argumentos sobre la noción de espacio, continuo e infinito, partiendo de la tesis de que nuestros conceptos provienen de una intuición o se combinan sobre lo ya dejado por una intuición sensible: Así, "todos nuestros conceptos se toman ya sea inmediatamente de una intuición o combinando notas [*Merkmalen*] características que son tomadas inmediatamente de una intuición" (2010, p. 1).

El continuo que Brentano tenía en mente ha de entenderse como la *percepción inacabada* de un objeto que se prolonga tanto en el espacio como en el tiempo;[55] esto significa que la continuidad es un *fenómeno perceptual* y no una *construcción* matemática. Dicha manifestación o fenomenalización se expresa en la intuición sensible (*Anschauung*) en tres momentos:

1. La sensación nos presenta a objetos que tienen partes que coinciden.

2. De tales objetos nosotros podemos abstraer el concepto de límite y entonces aprehendemos que tales objetos contienen límites que coinciden. Todo límite pertenece a un continuo.

3. Todo límite está caracterizado por la dirección y la homogeneidad.

4. Cada continuo está fundado sobre un continuo temporal. Además, siempre que *aprehendemos* un objeto continuo somos capaces de aprehender con seguridad total que el todo contiene múltiples límites y coincidencia de límites. Un ejemplo claro de esto, y que nos muestra cómo es que estamos familiarizados con este tipo de conceptos, es que cuando comenzamos a realizar una serie de divisiones entre 0 y 1

[54] En 1914, Brentano discutía desde los planteamientos del reísmo (*Reismus*), es decir, desde planteamientos radicales que defienden que no existen los "irreales" (*Nichtreales*). Dicho en pocas palabras: todo lo que es, es real (*reell*).

[55] Sobre el concepto de tiempo en la filosofía brentaniana, el único estudio en español y el más completo se lo debemos a Manuel Abella (2008), remito a él para una mayor profundidad de dicho concepto.

> obtenemos los siguientes dividendos: 1/4, 3/4, 1/8, 3/8, 5/8, 7/8, 1/16, 3/16, y así…*ad infinitum.* Esta experiencia genuina del continuo exhibe la *incompletud* del conjunto de los números fraccionarios, justo por la agregación a nuestros dividendos de más dividendos. (2010, p. 1 y ss.)

Desde estos postulados, Brentano analiza un modo en el que la noción de continuo no fuera nada más que un mero "agregado" o "suma" de números, planos, conjuntos, etc. Aunque admite haber llegado a la misma conclusión que Dedekind, a saber, que existen planos de series continuas llamados planos de segundo orden donde las magnitudes infinitamente pequeñas puedan ser más pequeñas que otras magnitudes infinitamente pequeñas. Este "[…] intento de construcción aquí descrito es similar a uno que se encuentra, por ejemplo, en el trabajo de Poincaré, aunque no es idéntico con esto" (p. 2), pues la mera idea "[…] de continuos de varios grados de completud parecen ser incompatibles con la verdadera solución al problema de la construcción del continuo" (p. 3). Brentano reconoce que el dato clave está en que las anteriores formulaciones sobre el concepto de continuo, incluyendo la cantoriana, vienen dadas a través de la "abstracción" fundadas en operaciones del pensamiento totalmente artificiales (p. 5) o *ficcionales* olvidando la posibilidad de *intuir* el continuo en varios campos perceptivos dados en representaciones actuales (concretas) espacio-temporales.

A juicio de Brentano, la *experiencia del continuo* está ligada y entretejida con la temporalidad interna de la conciencia, con el flujo continuo e incesante del tiempo inmanente que justo se fenomenaliza en la transición del presente hacia el pasado. En el caso de la temporalidad inmanente su constitución continua es unidimensional; es un sólo flujo donde cada "trozo" de ese continuo temporal es nombrado como "momento" o "instante de tiempo" en una especie de eslabones de una cadena temporal interna. "Un continuo —señala Brentano— está designado como una dimensión, si ésta no tiene otros límites que no sean ellos mismos continuos" (p. 7).

Sobre la cuestión espacial del continuo, donde forma parte la discusión sobre la percepción sensible, Brentano comulgó con la idea riemanniana de que las partes espaciales de la donación de una forma geométrica, como puede ser una *línea*, también son definidas a través de sus partes o *puntos espaciales* (p. 11). El espacio es así un *continuo* totalmente homogéneo de puntos, espacios indefinidamente pequeños o lugares capaces de dividirse y extenderse infinitamente. La posible continuidad y transformación espacial de una *línea* y sus *puntos espaciales* hacia un plano u orden superior, es decir, ya como una *superficie* constituida, comprendería dos dimensiones continuas no ya de puntos sino de puntos y líneas que convergen hasta un nivel más alto como la noción misma de *cuerpo* cuya característica sería un continuo de tres dimensiones.

Ahora bien, así como pudieron distinguirse niveles de continuidad, también podrían distinguirse continuos que existieran sólo como límites de algunas otras cosas continuas. Esto puede interpretarse del siguiente modo: si algo continuo es mero límite, entonces, no puede nunca existir en conexión con otros límites excepto si pertenece a un continuo el cual posee un mayor número de dimensiones. Ejemplifiquemos: si tomamos en cuenta una superficie coloreada, su espacialidad (sus dimensiones) puede ser constante y múltiplemente cambiada; no obstante, puede ocurrir que también cambie su color (su forma) dado que este aparece extendido sobre la superficie espacial. A raíz de esto, Brentano distingue entre un continuo primario y un continuo secundario:

1. En el continuo primario, la longitud está dada por la magnitud de la transición de un "punto" a otro, sin cambio de grado, y con diferencia constante. Los continuos primarios son, por tanto, uniformes y poseen velocidad y dirección constante.

2. El continuo secundario, en cambio, manifiesta cambio de dirección, con distinto grado, intensidad y velocidad (Albertazzi, 2006, p. 247).

En resumen, Brentano busca describir la experiencia del continuo *real* a partir de sus partes *reales*. Esta descripción, más que ser una mera idealización, apuesta por algún tipo de representación del continuo en la que pueda darse una relación (o unión natural) entre las partes del continuo y su iteración infinita. A partir de esta nomenclatura, para Brentano queda claro que los elementos de la conciencia y sus modos de conexión debían ser analizados en el marco de una mereología que provea una clasificación completa de los diferentes tipos de partes que cabe distinguir en la unidad de la conciencia. Así pues, toda mereología de lo externo a la conciencia comienza, en realidad, con la descripción de las partes del contenido del acto y con la interpretación de ese contenido.

Sobre la tarea de la mereología, Brentano, sostiene que los todos tienen partes reales de las cuales dependen los actos psíquicos que se relacionan los unos con los otros como partes con un todo, en todo caso “los objetos son partes «anidadas» dentro de las presentaciones, y las presentaciones en cambio están «anidadas» dentro de los correspondientes juicios, y así” (Moran, 2011, p. 37). Asimismo, la ontología que se esboza en sus lecciones de *Lógica elemental* y en su *Teoría de las categorías*, distingue varios tipos de conexiones y relaciones de partes entre sí, y partes con un todo, y partes de un ente real (*real Seiende*). De hecho, las categorías son ya principios ontológicos reales.[56] Brentano logra así distinguir entre partes físicas (*physische Teile*) que tienen una carga material, por ejemplo, las partes de un cuerpo; partes metafísicas (*metaphysische Teile*), la sustancia y el accidente, que están en contraposición con las partes físicas; y las partes lógicas (*logische Teile*) o definitorias, que son parte del concepto en una suerte de teoría nominalista, como el individuo y el género. Todas ellas están vinculadas por lo que él denomina “Enlaces colectivos” (*kollektiven Verbindungen*). Finalmente, la formulación brentaniana del concepto de mereología destaca la noción de límite de los cuerpos como partes reales, que a su vez limitan el todo del cuerpo; pero las partes no son meras partes o piezas-parte, sino que por necesidad existen en tanto parte de un todo mayor.

[56] Remito a estos textos clásicos para una mayor profundización de esta última parte: Chrudzimski (2004) y Baumgartner y Simons (1994).

CAPÍTULO II

El número como problema fenomenológico en las primeras obras de Edmund Husserl (1887-1900)

2.1.- La génesis del número natural en sus aspectos psicológicos (y lógicos). Los análisis pre-fenomenológicos en *Sobre el concepto de número*

Die Mathematik ist die erste und letzte aller Wissenschaften
(Hua XXI, 216)

§1. El concepto de número y conjunto

Husserl concluyó su instrucción matemática con la tesis "Contribuciones a la teoría del cálculo de variaciones" (*Beiträge zur Theorie der Variationsrechnung*)[57] aprobada el 8 de octubre de 1882, bajo la tutela de Leopold Königsberger. El problema del cálculo de variaciones es el de encontrar funciones (o curvas) que tengan una cierta propiedad de máximo o mínimo. Lo que Husserl estudió en su disertación fue la simplificación de este método de comprobación (en el campo del cálculo de las variaciones) a base de reducir sus problemas a problemas propios de las ecuaciones diferenciales. Lamentablemente este sistema de cálculo pronto evolucionó a lo que conocemos como análisis funcional, haciendo de la tesis de Husserl un texto poco "funcional" y de poco interés matemático. Pero por fortuna, Husserl pronto descubrió que su interés por las matemáticas no se sujetaba a cuestionamientos meramente técnicos. El verdadero interés del joven Husserl se encontraba en la aún incipiente filosofía de las matemáticas y, específicamente, en el problema del *conocimiento matemático*. De fondo, la cuestión era comprender cuáles son las condiciones de posibilidad del conocimiento matemático (objetivo) y su relación con los actos cognitivos (subjetivos) (Willard, 1984, p. 3 y ss.); determinar las posibles divergencias entre las teorías matemáticas; evidenciar la posible unidad del edificio de las matemáticas y, finalmente, indagar la génesis del pensamiento matemático. Desde luego, estas cuestiones no tuvieron respuesta en su disertación doctoral, así que después de un breve regreso a Berlín, Husserl se dedicó al estudio de la filosofía con Franz Brentano en Viena de 1884 a 1886. Bajo sus

[57] Este escrito cuenta con dos ediciones al francés y al italiano, *cfr*. Husserl, E. (1983), edición de J. Vauthier y G. Scrimieri (1979).

recomendaciones, Husserl decide viajar a Halle con Carl Stumpf para elaborar su *Habilitationsschrift*. [58] El título de este trabajo como lo conocemos ahora es “Sobre el concepto de número. Análisis psicológicos”.[59]

Sobre este último punto quiero enfatizar una distinción importante entre: (1) la *Habilitationsschrift* y (2) *Sobre el concepto de número*. La *Habilitationsschrift* de Husserl nunca se publicó y lo que conocemos ahora como *Sobre el concepto de número* es, de hecho, solo el primer capítulo de dicha *Habilitationsschrift*.[60] Dado que el texto original de la *Habilitationsschrift* no está en consulta (o está posiblemente perdido) asumiré que lo único editado de ella, es decir, *Sobre el concepto de número*, no tiene variante alguna en sus argumentos y puntos de vista, pues no puedo saber en qué medida se adaptó este capítulo para fines académicos y de publicación.[61] Situados ya en el año de 1887, este será el principio de la actividad filosófica de Edmund Husserl, y el estudio de este primer texto ofrece datos de extraordinario valor para la interpretación de los orígenes del pensamiento fenomenológico. En lo sucesivo me enfocaré en presentar las principales tesis y conceptos contenidos en este texto. Como antesala a este primer texto de Husserl, presentaré de manera muy breve una de sus primeras lecciones de 1887, “Introducción a la teoría del conocimiento y a la metafísica” (Hua XXI), específicamente el apartado, “Panorama histórico de la filosofía de la matemática” por ser una especie de introducción a *Sobre el concepto de número*.

Husserl parte del registro de dos hechos históricos: en primer lugar, que la filosofía de las matemáticas, concretamente la filosofía de la aritmética, no es una doctrina universalmente aceptada; en segundo lugar, que es posible, o al menos plausible, una auténtica constitución científica de la filosofía de la matemática. Empiezo por el primer punto

[58] Debido a que Husserl tenía un doctorado de Austria, la Universidad de Halle le solicitó que se sometiera a un examen de *Nostrification* (equivalencia) el 28 de junio de 1887. El jurado estuvo compuesto por el matemático George Cantor, Carl Hermann Knoblauch, físico experimental y, *ex officio*, Carl Stumpf (Gerlach, 1994, p.184). A principios de julio de 1887, Husserl disputó su tesis de habilitación y presentó siete tesis que defendió con éxito para obtener su título en la universidad. Pocos días después de la *disputatio*, Husserl presentó una *Probevorlesung* en el debate en torno a la psicología de la introspección. Los miembros del jurado fueron una vez más Cantor y Stumpf.

[59] Antes de continuar, quiero hacer una precisión respecto a las traducciones de los términos alemanes *Zahl* y *Anzahl*. *Zahl* y *Anzahl* se traducen al español como número. La diferencia está en que el término *Zahl* designa un número con mayor generalidad (ordinales, naturales, reales, fraccionarios, etcétera), mientras que *Anzahl* es un término usado con mayor frecuencia para la numeración o enumeración.

[60] Esta parte fue publicada por Heynemann'sche Buchdruckerei, pero no se vendió en librerías y solo circuló en forma privada.

[61] Mayores detalles se pueden encontrar en Bierbach (1994) y en Gerlach y Sepp (1994).

resumido en el apartado “Panorama histórico de la filosofía de la matemática”. Que la filosofía de la aritmética no sea una doctrina universalmente aceptada significa que no existe en ella un progreso firme en términos de fundamentos. En efecto, la mera acumulación de meros conocimientos de hechos no es aún ciencia (Hua XXI, 216). Una ciencia, según Husserl, es un sistema lógicamente ordenado, es decir, una conexión sistemática (*systematischer Zusammenhang*) de verdades sin la cual la ciencia no sería ciencia, y en lugar de ella tendríamos una colección de hechos como una enciclopedia o un manual. Esto también demostraría que “un conocimiento aislado” por más evidente que sea no cuenta como conocimiento científico, si no está incorporado a un sistema unificado de fundamentos, pues sólo el conocimiento desde el fundamento o desde la penetración intelectual de las leyes últimas puede ser considerado como origen y progreso firme. Pero además de la intelección de las razones fundamentales que explican los dominios de la realidad, se requiere de un ideal de la ciencia como *episteme* radical y universal ligada al ideal de la humanidad. La historia de la ciencia matemática entendida desde esta perspectiva resulta edificante. Frente a los cortes tan disonantes de la filosofía, en las nociones matemáticas se descubre un progreso firme por situarse “fuera” del tiempo. Mientras que la filosofía ha avanzado de un sistema a otro, la ciencia matemática se mantiene en su origen mismo: la remisión a su propia historia y al compromiso (o naturaleza) históricamente justificado de las proposiciones matemáticas (Hua XXI, 217-218). Es claro que Husserl no está afirmando aquí que la ciencia matemática sólo avance de un teorema a otro. Por el contrario, situar a las matemáticas como la primera y última de las ciencias tiene una razón de peso: significa que, junto con su acompañamiento con otras ciencias exactas, sirviendo incluso de ejemplar metódico, ella ha encontrado la raíz de su cientificidad en sus relaciones lógicas cuya negación es una violación a sus principios más fundamentales.

Sobre el segundo punto —y aquí ya comienza *Sobre el concepto de número*— Husserl señala que la relación existente entre filosofía y matemáticas va más allá de la condición fundacional de la primera sobre la última, pues “una mirada rápida a la historia de la filosofía muestra cómo las concepciones referidas al carácter teórico de la matemática han ejercido una influencia esencial y con frecuencia determinante, en la configuración de importantes cosmovisiones filosóficas” (Hua XII, 289). Pero no sólo esto; Husserl también pone de relieve el interés de los matemáticos por alcanzar, en primer lugar, un método y/o herramientas confiables que den cuenta, en el estado propio de su ciencia, de su clarificación lógica, y, en segundo lugar, el aseguramiento técnico de lo ya ganado. Ante la falta de claridad sobre la naturaleza de los medios auxiliares utilizados y los límites de fiabilidad de las operaciones matemáticas, Husserl insiste en las condiciones de posibilidad del conocimiento matemático. Para lograr lo anterior, los procesos matemáticos deben someterse a un análisis filosófico ordenado en el que, primero, se visualicen los conceptos y relaciones más simples, lógicamente anteriores, y, segundo, los conceptos complejos y dependientes. Esto último obliga a presentar un desarrollo deductivo y riguroso de toda la matemática a partir del menor número posible de principios iluminadores. Para Husserl, el primer miembro de esta serie de dificultades que constituyen la esfera limítrofe entre matemática y filosofía es, precisamente, el concepto de número (Hua XII, 294).

En cierto sentido, esta propuesta inicial de Husserl se enmarca en la línea de los proyectos fundacionales de la matemática del siglo XIX, y asume, junto con ellos, que el desarrollo riguroso y consecuente del análisis superior debe partir de la aritmética elemental cuyo único fundamento es el concepto de número. “Por eso, toda filosofía de la matemática ha de comenzar con el análisis del concepto de número” (Hua XII, 295). Sin embargo, Husserl piensa que los intentos filosóficos y matemáticos hasta entonces expuestos no habían logrado consolidarse como una solución fiable a la (posible) fundamentación de las matemáticas. Desde su perspectiva, estos intentos fallidos eran causados por la disolución de los métodos generales en intereses particulares y por la falta de un medio auxiliar seguro. Un ejemplo de lo anterior fue la teoría de Riemann-Helmholtz. Según Husserl, esta teoría particular, aunque prueba su efectividad en el cálculo analítico y su utilidad “para la resolución de las cuestiones de principio relativas a los axiomas de la geometría […]” (Hua XII, 293) no es evidenciable en términos más intuitivos. Frente a Helmholtz y a la (supuesta) gran ventaja que tenía la geometría analítica de no caer en los peligros de los hechos de intuición (*Anschauungstatsachen*), Husserl argumenta que el método analítico no debe prescindir de estos hechos de intuición, porque son ellos, en última instancia, los que posibilitan la experiencia aritmética. El primero y más fundamental “hecho de intuición”, cuyo análisis resolvería la relación entre matemáticas y filosofía, es justamente el concepto de número.

Husserl hace notar inmediatamente que la psicología moderna también se ha interesado por estas cuestiones, en particular por el origen psicológico de las representaciones del espacio, del tiempo, del continuo, y por supuesto, del número, por lo que admite como "obvio" que sus resultados deben ser importantes también para la metafísica y la lógica. Con lo anterior, la introducción a la problemática sobre la relación entre filosofía y matemáticas, expuesta en estas primeras páginas de *Sobre el concepto de número*, tiene un propósito general: servir de antesala para la indagación sobre la naturaleza del número y la vía o el método auxiliar para realizar este análisis es la psicología brentaniana.

> Este análisis es la meta que se propone el presente tratado. Los medios auxiliares que utiliza para realizarlo pertenecen a la psicología, y así debe ser si una investigación semejante quiere alcanzar resultados firmes […] En verdad no solamente la psicología es imprescindible para el análisis del concepto de número, sino que este análisis forma parte también de la psicología. (Hua XII, 295).

Es oportuno detenerse un instante sobre este punto de partida. Por un lado, Husserl no pensaba en absoluto reformar o revolucionar la lógica y la psicología a partir de nuevas bases. Por el contrario, exigía a estas disciplinas una justificación de sus propias investigaciones. Sin embargo, ambas "ciencias" no le sugerían nada en cuanto al objeto de su investigación; el punto de partida realmente efectivo le es proporcionado por las matemáticas que, como ya he señalado, habían llegado a una etapa en que después de muy notables descubrimientos, extraordinariamente explotados por ellas, había detenido su avance para comenzar a interrogarse por la naturaleza de sus conceptos de base. Por otro lado, se puede, en principio, asombrarse por el hecho de que Husserl intente la dilucidación del concepto de numero valiéndose de investigaciones psicológicas. Parecería que aquí fuesen mucho más pertinentes consideraciones matemáticas o lógicas. Sin embargo, la primacía de los análisis psicológicos en esta primera obra no es algo gratuito. Con esta propuesta, Husserl asume que los análisis psicológicos (análisis genéticos) son los únicos que abordan el problema de la génesis u origen de los conceptos de la aritmética. Frente a la posibilidad de un estudio de tipo lógico, es decir, sobre el *significado* propio del número, Husserl prefiere los análisis ordenados psicológicamente, pues rastrean la génesis fáctica de dicho concepto, van al suelo mismo de la *emergencia* del concepto del número. De esta manera, Husserl encara el concepto de número y el acto de la enumeración como uno de los procesos "mentales" más simples que conviene aclarar primero si se quiere luego abordar los procesos más complejos. El examen de la noción de número se sitúa, pues, en una perspectiva que comienza por el análisis de un fenómeno originario capaz de dar, en cierto modo, la experiencia misma de lo que se podría llamar la *esencia de la conciencia numérica*. Es por esta razón que al estudio de la *emergencia* del concepto básico de la aritmética en un sujeto y en su experiencia incontrastable, Husserl la llama conforme a la costumbre de su tiempo, psicología.

§2. Génesis de los conceptos de conjunto, número y enlace colectivo

El siguiente peldaño en *Sobre el concepto de número* es la distinción entre los *números cardinales* y los *números ordinales*. Los números cardinales también son entendidos como "numeraciones" que abarcan todas las clases de números incluidos los ordinales, enteros, imaginarios, racionales e irracionales, mientras que los ordinales sólo se refieren a los números que incluyen una posición. "Así como las numeraciones se refieren a *conjuntos* (*Mengen*), los ordinales se refieren a *series* (*Reihen*). Las series no son sino conjuntos ordenados y por eso, en un principio, podría pensarse que los conceptos de los números ordinales surgen de los de numeración mediante ciertas restricciones" (Hua XII, 296). Siguiendo esta distinción, Husserl designa a los números en general, según su característica de pertenecer ya sea a un conjunto o a una serie, como "números de conjuntos" a los unos y "números de series" a los otros (Hua XII, 297).

A juicio de Husserl, la definición de los números fundados en conjuntos no había presentado cambio alguno desde la caracterización hecha por Euclides en sus *Elementos*, ni en las investigaciones de Hobbes, Locke y Leibniz:

> La determinación más común reza: el número es una pluralidad de unidades. En lugar de "pluralidad" se dice también multiplicidad, colección, agregado, recolección, conjunto, etc.; meras expresiones que significan lo mismo o que están muy cercanamente emparentadas, si bien no sin matices destacables.[62] (Hua XII, 297)

---

[62] Tal como Husserl lo señala (Hua XII, 297), los términos multiplicidad (*Mehrheit*), colección (*Inbegriff*), agregado (*Aggregat*), conjunto (*Menge*) y variedad (*Mannigfaltigkeit*) presentan matices destacables a nivel estructural. Según la advertencia de Lothar Eley, el editor de *Filosofía de la aritmética*, Husserl habla de

Tal como se observa, esta presentación, de poca o nula ayuda, no determina qué es exactamente un número y qué una pluralidad o conjunto. El verdadero cuestionamiento filosófico sobre la génesis del número debería responder a lo siguiente: "¿cómo se alcanza a partir de los conjuntos concretos el concepto general de pluralidad, de conjunto, de número? ¿Qué proceso de abstracción puede proporcionarlo?" (Hua XII, 299). Es claro que el interés de Husserl no es la definición lógica del concepto de número, sino su caracterización psicológica sobre la que se fundamenta la definición lógica de ese concepto (Hua XII, 299). Se trata de ubicar las notas características y comunes a todas las partes-miembros de ese conjunto o pluralidad y con ello abrir paso a una *caracterización abstracta* de los conjuntos. El resultado: el examen de los miembros o elementos de una pluralidad y, por tanto, lo que es una pluralidad.

Esta característica interna es, para Husserl, un tipo de enlace: "el enlace (*Verbindung*) de los elementos unitarios en el todo" (Hua XII, 299). Este enlace que se encuentra en todos los casos donde se habla de pluralidades "ofrece las bases para la formación del concepto general de pluralidad" (Hua XII, 300). De hecho, funciona al modo de un principio *unificador*, tal como se unifica o se "funde" la extensión con el color o la intensidad con el sonido. Husserl agrega: "A la vista de este modo de enlace, que siguiendo a F. Brentano quisiéramos llamar enlace metafísico, podemos ahora de nuevo formar el concepto de un todo cuyas partes están unificadas precisamente de esa manera." (Hua XII, 300).

Ahora bien ¿qué es un "enlace metafísico" desde la perspectiva de Brentano? Un enlace metafísico es una relación que une partes metafísicas (*metaphysische Teile*)[63], es decir, partes cuya distinción no es física o real en el sentido de que el *todo* del que inicialmente forman puede

lnbegriff cuando quiere subrayar la función de la subjetividad en la constitución del conjunto (*cfr*. Hua XII, p. xxi); en su sentido más estrcito, *lnbegriff* expresa la manera en que los contenidos coligados se juntan en uno (*In-eins-zusammenbegreifen*) (Hua XII, 95). De hecho, este concepto prevalece en la primera parte de esta obra, y es preferido por Husserl por encima de los términos de pluralidad y multiplicidad; mientras que, en la segunda parte de *Filosofía de la aritmética*, Husserl usa mayormente el término *Menge*. En el caso de la palabra *Menge*, pese a que tiene un significado teórico y técnico muy concreto que va más allá del uso que le da Husserl, resulta de utilidad entenderla como "conjunto", sobre todo para hacer frente a expresiones como *eine Menge* ("un montón"). Por último, la noción de variedad (*Mannigfaltigkeit*) es una modificación de la noción matemática de variedad de la Escuela de Berlín y de Gotinga (Weierstrass, Kummer y Riemann, respectivamente); sin entrar en mucho detalle, se puede entender por variedad no una colección de objetos o un mero conjunto o montón de cosas, sino una formación ordenada y definida por sus relaciones de dominio.

[63] Las partes metafísicas se predican de las sustancias concretas y accidentes concretos (*Hombre*, *blanco*) "vinculados" como un todo (*Hombre blanco*), son diferentes de las partes físicas (*physische Teile*) que se predican de entes materiales (p. ej. tallo y raíz) y de las partes lógicas (*logische Teile*), p. ej., el individuo y el género.

dividirse en *dos* realidades que desde ese momento son relativamente autónomas. La cuestión básica para Brentano es que "debe admitirse una distinción auténticamente tal que no sea sin más o física o de mera razón […] Entre una y otra distinción, hay que situar la tercera: la que encuentra partes involucradas con otras *por necesidad,* de modo que no pueden ser despezadas las unas de las otras y continuar todas existiendo" (García-Baró, 2008, p. 84). La pieza clave aquí es que una relación o enlace de este tipo permite definir y garantizar la existencia de una pluralidad a partir de la existencia de sus miembros, algo que no ofrecían los otros tipos de relaciones no mencionados por Husserl, pero sí analizados por Brentano. Me refiero a las relaciones temporales (A *antes* de B) y las relaciones intencionales (*intuir* A, A como lo *intuido*). Para evitar confusiones terminológicas, Husserl señala que "de ahora en adelante vamos a utilizar el nombre de *enlace colectivo* (*kollektive Verbindung*) para designar el enlace que caracteriza a un conjunto." (Hua XII, 301). No obstante, este enlace colectivo para ser correctamente definido debe ser confrontado con otros postulados filosófico-matemáticos que Husserl clasifica en cinco grupos:

A) La unidad de las representaciones del conjunto se da a partir de una conciencia que las abraza.

B) La coexistencia simultánea (temporal) de los contenidos es imprescindible para la representación de su pluralidad (*Vielheit*).

C) El tiempo es un factor psicológico ineludible que dificulta "pensar" múltiples contenidos diferentes.

D) Los números surgen por medio de una adición sistemática de una unidad a unas unidades espaciales.

E) De un conjunto sólo se puede predicar allí donde constan varios objetos distintos.

La crítica de Husserl a (A) resalta la imposibilidad de representarse un único conjunto y que este sea visto como una totalidad. Esto es, que los contenidos representados, los que se encuentran ligados en nuestra conciencia, sean *objetos* y *contenidos* de la representación, en virtud de la conciencia que los abraza como un solo conjunto. Husserl observa que el problema de esta teoría es pasar por alto un dato inmediato: en la representación de un conjunto ocurre de manera *consciente* o *in-consciente* la representación de otros elementos que no formaban parte del conjunto inicial (Hua XII, 303). Estos "otros elementos" no sólo no serían susceptibles de ser enumerados, sino que no podría determinarse con certeza a qué conjunto corresponden. García-Baró apunta algo interesante al respecto: "[…] este estado de cosas podría haber sido puesto de relieve adoptando una perspectiva ligeramente distinta, a saber: recordando que toda representación atenta de un objeto físico lo destaca de un *fondo representado* que no cabe suprimir" (1993, p. 39-40).[64] Dicho en otras palabras, el problema está en la constitución intencional o pre-intencional referida al sentido de la representación de un conjunto tanto en una atención como en una co-atención.[65]

A propósito del segundo postulado (B), Husserl reafirma la misma crítica: la simultaneidad de los miembros de un conjunto no puede ser condición ni necesaria ni suficiente para comprender cómo funciona un enlace colectivo:

> Es cierto que tenemos que representarnos los objetos simultáneamente; pero la remisión a la experiencia interna demuestra de inmediato que no tienen que ser representados como simultáneos, sino que más bien se requieren ciertas reflexiones especiales para advertir esa simultaneidad en el representarse los objetos. (Hua XII, 304)

Un ejemplo de lo anterior bastará: las notas en cualquier melodía exigen ser presentadas una después de otra y referidas unas a otras. A cada nueva exhibición de una nota le corresponde la presencia *cuasi*-simultánea de los contenidos (pasados y presentes) de esa melodía relacionados en un sólo acto de conciencia. Pero de ningún modo, y como si esto pudiera ser posible, las notas pueden ser percibidas "todas a la vez y al mismo tiempo"; de ser así, no habría ni unidad (conjunta) ni entendimiento de esas notas.

Husserl también esgrime una crítica al tercer postulado (C). En realidad es una crítica doble: por un lado, al tiempo como factor psicológico ineludible y, por otro lado, a la

[64] Los términos de conciencia o in-conciencia que utilicé anteriormente son sinónimos de la diferencia planteada por García-Baró entre el objeto físico y el fondo representado. En el caso presentado por Husserl, la distinción se refiere a los contenidos advertidos por sí mismos y a los contenidos advertidos colateralmente, ya sea momentánea o absolutamente. Asimismo, es posible que Husserl hablé aquí de un tipo de pasividad relativa a los elementos atendidos o co-atendidos (Hua XII, 113 y ss.) con lo cual se podría afirmar en pleno 1891 que: ser consciente (o intuir) es un acto que es delimitado y a su vez delimitador, pues mientras destacamos tales o cuales miembros de un conjunto, desatendemos o no apuntamos a los otros miembros de ese conjunto que pasarían a un "segundo plano".

[65] En los §§ 35, 37, 84, 92 y 155 de *Ideas* I (1913), la conceptualización es aún más precisa. Husserl dirá que la percepción puede estar acompañada de dos tipos de atención: una atención primaria, dirigida al primer plano del campo perceptivo, y una atención secundaria, dirigida al segundo plano del campo perceptivo. En este caso, es posible que en *Sobre el concepto de número* se anticipen los modos de la actualidad y los modos de la inactualidad en que se ejecutan las vivencias intencionales.

imposibilidad de pensar más de un contenido simultáneamente o de pensar múltiples contenidos diferentes (Hua XII, 305-306):

> No hay que confundir representaciones presentes con representaciones de algo presente, ni tampoco representaciones pasadas con representaciones de algo pasado. No toda representación presente es una representación de algo presente, como debemos subrayar aquí de nuevo. Precisamente todas las representaciones que se refieren al pasado constituyen una excepción, pues ciertamente todas ellas son representaciones presentes. (Hua XII, 306)

Esta diferencia entre "representaciones presentes" (*Gegenwärtige Vorstellungen*) y "representaciones de lo presente o de lo presentado" (*Vorstellungen von Gegenwärtigem*) es en realidad un antecedente de la distinción entre un acto y un contenido de acto. Incluso se reconoce en esta distinción una forma *cuasi*-lógica y no un mero distingo psicológico. Ahora bien, las "representaciones de algo presente" están al margen del análisis de la conciencia que conforma un conjunto, dado que la sucesión temporal, en tanto exigencia psicológica ineludible, sólo opera para las "representaciones presentes" en forma de una sucesión de los contenidos parciales. En otras palabras, únicamente *la relación* entre las representaciones presentes de los miembros de un conjunto ocurre bajo el pre-requisito de la sucesión temporal (la sucesión numérica), pero el tiempo no forma parte de ellas. Lo único que quizás pueda concederse como psicologista en estas páginas es que:

> […] la sucesión en el tiempo constituye una *condición psicológica previa* insuprimible para la formación de, con mucho, la mayor parte de los conceptos de número y pluralidades concretas —lo mismo que para todos los conceptos más complejos—. Todos ellos tienen un devenir temporal, y en virtud de él cada parte componente del todo resultante conserva en nuestra representación una determinación temporal distinta. (Hua XII, 307)

Desde luego, lo poco que se ha alcanzado no es del todo significativo. Aunque Husserl reconoce que tanto los conjuntos como los números son resultado de una actividad u operación de coleccionar o contar, el problema aún persiste: "percibir contenidos que se suceden temporalmente no quiere decir todavía percibir los contenidos como sucesivos en el tiempo" (Hua XII, 308). Dicho de otro modo, "incluso si la secuencia temporal en que los objetos son coleccionados fuera atendida siempre, seguiría siendo incapaz de fundar por sí sola la unidad del todo colectivo" (Hua XII, 308). Entonces ¿cómo opera la *condición psicológica temporal*? Según Husserl, opera de una doble manera: 1) las representaciones de pluralidad son resultado de *procesos* originados *sucesivamente* en cada elemento (determinación temporal distinta) y 2) en la representación de la pluralidad, las representaciones parciales están presentes *simultáneamente* en nuestra conciencia (Hua XII, 310).

Husserl anticipa correctamente que hablar de la categoría tiempo y de su relación con el concepto de número, remite a las consideraciones hechas por Kant en la *Crítica de la razón pura*. Sin embargo, la presentación que hace del filósofo de Königsberg es negativa:

> En Kant no encontramos un intento serio de llevar a cabo un análisis lógico o psicológico del concepto de número. Unidad, pluralidad y totalidad forman, según su metafísica, las categorías de la cantidad. El número es el esquema trascendental de la cantidad. Kant se expresa pormenorizadamente en la *Crítica de la razón pura* del siguiente modo: "Sin embargo, el esquema puro de la magnitud (*quantitatis*) como concepto del entendimiento es el *número*, que constituye una representación que comprende la adición sucesiva de uno a uno (unidades homogéneas). Por lo tanto, el número no es otra cosa que la unidad de la síntesis de la multiplicidad de una intuición homogénea en general, unidad que se consigue al producir yo el tiempo mismo en la aprehensión de la intuición." (Hua XII, 310)

Según Husserl, este pasaje de la *Crítica de la razón pura* —en el apartado "Del esquematismo de los conceptos puros del entendimiento" — es oscuro y no ayuda en nada a la presentación lógica del número. No sólo esto. Al parecer Kant habría confundido la "representación de la operación de contar" con el concepto de "número":

> Además, no resulta precisamente fácil comprender cómo a partir de la categoría de cantidad y por medio de la representación del tiempo (como esquema común de todas las categorías) podríamos llegar *a priori* a los conceptos singulares, determinados, de los números; y menos evidente todavía resulta la necesidad que nos determina a adscribir a una pluralidad concreta un determinado número y siempre el mismo, a saber, aquel del cual decimos que le corresponde (Hua XII, 311).

En resumen: "la doctrina del esquematismo de los conceptos puros del entendimiento parece errar aquí —como en otros lugares— el objetivo para el que fue especialmente creada" (Hua XII, 312). Vistas así las cosas pareciera que Iso Kern tuvo razón al señalar que durante este periodo pre-fenomenológico la relación entre Husserl y Kant era altamente negativa (Kern, 1964, p. 8-9). En efecto, la crítica husserliana es una muestra clara de la visión que se tenía de Kant en las postrimerías del siglo XIX, y aunque Husserl, siguiendo a Bolzano, reconoce que todo conocimiento es una representación y que esta puede ser reducida a conceptos o intuiciones, esto no lo insta a dejarse "[convencer] de que es necesario construir el concepto de *número* en el tiempo y que consecuentemente la intuición del tiempo es una parte esencial de la aritmética" (Russ, 2004, p. 93 y ss.). Sin embargo, una lectura atenta pone de manifiesto un error sutilísimo en el que incurre Husserl, y también Iso Kern, al no comprender a cabalidad la propuesta del esquematismo trascendental kantiano. No me detendré a exponer ahora "ese error de interpretación",[66] sólo resumiré su tesis central e inmediatamente después presentaré un contraargumento que invalidará la "crítica" husserliana. Intentaré reconstruir a continuación la argumentación de Husserl acerca de la doctrina kantiana del esquematismo. Algunas de las determinaciones de las tesis que presentaré están solamente implícitas en la argumentación de Husserl o en las citas sobre Kant incluidas en la misma.

1. Las categorías son empleadas únicamente mediante sus esquemas. El tiempo es, a grandes rasgos, el esquema común a todas las categorías.
2. Las caracterizaciones que Kant ofrece de los esquemas no son uniformes.
3. El número en general es el esquema trascendental de las categorías de la cantidad y es identificado erróneamente con la representación del contar.
4. Kant no muestra cómo, a partir de la aplicación de las categorías de la cantidad por medio de su esquema, podemos alcanzar, *a priori*, los conceptos de números singulares.
5. Por tanto, no puede mostrarse la pertenencia de un número a una pluralidad de objetos.

Si se aceptan estas tesis husserlianas es fácil derivar la siguiente conclusión: la categoría de cantidad, por medio de la representación psicológica del tiempo, es una categoría que no singulariza los números. Luego, la copertenencia entre un número y una pluralidad de objetos es imposible.

Sin embargo, considero que un examen minucioso de la doctrina kantiana del esquematismo permite sostener una interpretación de la misma que es muy diferente de la lectura presentada por Husserl. Enseguida expondré únicamente las tesis principales en las que puede resumirse esta interpretación.

[66] Para un mejor entendimiento del concepto de esquematismo trascendental *cfr*. (Arias Albisu, 2005, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2014).

1. Los esquemas trascendentales, esto es, los de las categorías, no son determinaciones de la multiplicidad de la intuición pura del tiempo, sino de la multiplicidad empírica en general.
2. Un esquema trascendental es una "determinación" en un sentido dinámico (como una acción de determinación o síntesis) y a la vez en un sentido estático (como una determinación o propiedad que es el producto de la acción mencionada).
3. Un esquema de un concepto aritmético, esto es, de un concepto de un número particular, es un "procedimiento universal de la imaginación para suministrar su imagen a un concepto" (A140/B179-180).[67] Esta definición no es válida para los esquemas trascendentales, porque un esquema trascendental es "algo que no puede ser llevado a imagen alguna" (A142/B181).
4. Los esquemas de los conceptos aritméticos no consisten solamente en un procedimiento de síntesis del contar o el enumerar, sino que también pueden consistir en un procedimiento de síntesis de la medición.
5. En la medida en que la síntesis de los esquemas aritméticos es sucesiva, ella es, ciertamente, temporal. No obstante, debe notarse que esta síntesis tiene lugar mediante la consideración de elementos espaciales. Por tanto, la efectuación de esa síntesis presupone la referencia a intuiciones espaciales.
6. Las síntesis regidas por los conceptos aritméticos son variedades de la síntesis efectuada por el esquema (dinámicamente entendido) correspondiente a las categorías de la cantidad.

Si regresamos al penúltimo (D) postulado, este sugiere que los números surgen de una adición sistemática de unidades *espaciales* por medio de un acto *espacial* que las sintetiza en intuiciones espaciales. Según Husserl, se atribuye a Baumann y Lange la idea de que la representación del espacio es una síntesis omniabarcante de lo múltiple. De hecho, también podría funcionar como la imagen originaria de las magnitudes continuas y discretas, es decir, tanto del número como del tiempo, respectivamente (Hua XII, 312). Contrario a situar en el tiempo el origen del número, "Lange piensa que puede demostrar que su fuente se encuentra en la naturaleza y en las propiedades de la *representación del espacio"* (Hua XII, 313). Pero

[67] La referencia a la *Crítica de la razón pura* corresponde a la paginación de la primera (1781 = A) y la segunda (1787 = B) ediciones originales. La traducción corresponde a Mario Caimi (Kant, 2009).

no sólo eso, pues "Lange no sólo subraya la espacialidad de los objetos contados, sino que habla también de *actos* de síntesis mediante los cuales las magnitudes discretas se reúnen en un número" (Hua XII, 313).

Debido a la tajante diferencia entre la constitución temporal y la constitución espacial del número, parece que una teoría de este tipo no tiene cabida: "¿de qué modo podrían estar comprendidos en el espacio todos los números pensables y que podemos contar por medio de la reunión arbitraria de contenidos espaciales?" (Hua XII, 317). Según Husserl, tal parece que Lange junto con Baumann, no precisaron una idea elemental, a saber, que lo único que podemos advertir en el espacio *no son* los números por sí mismos, sino los *objetos* y *relaciones* espaciales que existen entre ellos.

> Los números son creaciones del espíritu en la medida en que son resultados de actividades que ejecutamos sobre contenidos concretos; pero lo que crean estas actividades no son nuevos contenidos absolutos que pudiéramos reencontrar en algún lugar del espacio o en el "mundo exterior", sino que son conceptos de relación peculiares que siempre pueden ser producidos nuevamente, pero que de ningún modo pueden ser encontrados ya hechos en algún lugar (Hua XII, 317).

Formula significativa para esta primera fase del pensamiento husserliano: los números son *conceptos de relación*; sólo existen en la medida en que se establece una cierta especie de relación; no tienen existencia propia más que en tanto son productos relacionales.[68]

Al último postulado (E), Husserl le dedica un análisis más pormenorizado por ser el más complejo, filosóficamente hablando. Entre sus representantes se ubican las filosofías de W. Stanley Jevons y Sigwart. Cito la caracterización de dicha teoría:

> De un conjunto sólo se puede hablar allí donde constan varios objetos *distintos*. Si fueran idénticos no tendríamos conjunto ninguno ni una pluralidad de objetos, sino tan sólo precisamente *un* objeto. Estas diferencias, no obstante, deben también ser advertidas, pues de otro modo los diferentes objetos formarían para nosotros un todo no analizado, y tampoco en este caso tendríamos posibilidad ninguna de llegar a la representación de una pluralidad. Así,

[68] Que existan estructuras que deban ser producidas en el pensamiento para existir, que sólo existan, por consiguiente, en la medida en que son producidas, tal es propiamente la idea misma de *constitución,* y Husserl la ha encontrado cuando trataba de captar la esencia del número. Bajo la forma en que la presenta aquí, sin duda no escapa al reproche de "psicologismo". De hecho, se puede discutir su legitimidad y criticar el presupuesto metafísico subjetivista que implica la reflexión sobre el acto de contar, pero aún así es innegable que Husserl asume que en la reflexión se captan, en cuanto *intencionales*, los actos psíquicos sin los cuales no habría donación de sentido.

> pues, representaciones de las diferencias copertenecen esencialmente a la representación de todo conjunto. (Hua XII, 318)

Esta teoría pone de relieve el surgimiento de la pluralidad a través de cierta *forma vacía* de la *diferencia*. El punto nodal es abstraer la *diferencia*, de la que surgiría la pluralidad, a partir de la *identidad* del número. Lo *idéntico* y lo *diferente*, es decir el número y la pluralidad, son vistos como funciones inseparables que se condicionan recíprocamente, pues: "los conceptos generales de pluralidad y de unidad, que se obtienen por reflexión sobre estas funciones, serán también conceptos dependientes entre sí y correlativos" (Hua XII, 319). Siguiendo estas ideas, y en aras de su simplicidad, consideremos un conjunto de tres objetos: {A, B, C}. La representación gráfica que a continuación presenta Husserl exhibe las relaciones de diferencia entre sus elementos (Hua XII, 320-232):

$$\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CA}$$

Según la gráfica de arriba, las diferencias y relaciones designadas a partir de los arcos, muestran que existe una relación de diferencia entre A y B, B y C, C y A: "por lo tanto, constituyen la 'forma' de la diferencia que es característica del número tres" (Hua XII, 320). Empero, si es cierto que tales relaciones de diferencia están juntas en la representación que de ellas podemos hacernos y cada una de esas representaciones puede ser percibida como idéntica a sí misma y diferente de las demás, entonces, se torna preciso diferenciar AB de BC, BC de CA y CA de AB. De otro modo, no podrían reconocerse como distintas, y al quedar indiferenciadas se confundirían entre sí. La gráfica quedaría de la siguiente manera:

$$\overset{\frown}{\widehat{AB}\;\widehat{BC}},\quad \overset{\frown}{\widehat{BC}\;\widehat{CA}},\quad \overset{\frown}{\widehat{CA}\;\widehat{AB}},$$

La diferencia ahora se focaliza sobre AB respecto de BC; BC respecto de CA, y CA respecto de AB. El problema de estas *formas de diferencias* es que es posible seguir realizándolas sucesivamente p. ej., ABBC de BCCA y BCCA de CAAB, y así en una especie de *regressus in infinitum*. Y aunque pudiera evitarse este regreso, lo cierto es que las formas esquemáticas se seguirían complicando gradualmente haciendo imposibles las representaciones numéricas muy grandes:

> La complicación extraordinariamente rápida de estas formas explicaría también por qué sólo podemos alcanzar a tener representaciones propias de los primerísimos números, mientras

> que los números más grandes sólo podemos pensarlos de manera meramente simbólica, en cierto modo sólo por medio de rodeos. (Hua XII, 322)

En todo caso, en estas formas esquemáticas no se especifica nada acerca de la naturaleza del número, sólo se hace referencia a sus rasgos supuestamente simbólicos. Sin contar lo complicado que es diferenciar entre dos contenidos que son distintos y dos contenidos *como distintos entre sí*. En el primer caso se advierte la representación unitaria de un conjunto y en el segundo caso la representación de una diferencia entre *contenidos*. Estos últimos señalamientos están dirigidos a la concepción particular sostenida por Jevons, según la cual el total supondría a la vez la representación de la diferencia y la de la identidad. Sin duda los elementos del total son captados como separados los unos de los otros, sin lo cual no habría pluralidad, pero no son captados *en cuanto* separados; si son captados como tales tenemos una representación de diferencia, no un total.

Ahora bien, de lo que se trata, señala Husserl, es de esclarecer el enlace colectivo mediante la *aprehensión de un conjunto* y no por *relaciones* (*diferenciales*) entre los contenidos de ese conjunto (Hua XII, 324 y ss.) En última instancia, es posible admitir que los contenidos son diferentes para así poder hablar de pluralidad o que las diferencias deban sobrepasar cierta medida dentro de una pluralidad, pero lo que es inadmisible, al menos para Husserl, es la extrapolación de este señalamiento y concluir que mediante la aprehensión de las diferencias entre los contenidos de un conjunto o pluralidad se llegará a la identidad de un contenido advertido. En resumen, pensar la diferencia no puede ser condición *sine qua non* de pensar un contenido por sí mismo:

> Para que surja una representación concreta de un conjunto, sólo se requiere que cada uno de los contenidos comprendidos en ella sea uno advertido por sí mismo, es decir, uno separado; no hay, sin embargo, necesidad incondicional de atender a las diferencias de los contenidos, aunque esto suceda frecuentemente e incluso se convierta en regla allí donde tales diferencias son distancias. (Hua XII, 326)

El resultado de haber negado que los conjuntos puedan ser advertidos por sí mismos ni por su pertenencia a una conciencia ni por las relaciones de simultaneidad (sucesión temporal o enlace espacial) y tampoco por una relación de distinción, exige que haya un replanteamiento en los procesos *metodológicos* hasta entonces utilizados. Lo que resta es que tanto el concepto de número como el de pluralidad sean analizados a partir de añadidos a la propuesta brentaniana de una psicología descriptiva y "asumir para el enlace colectivo una clase de relación nueva y bien distinta de todas las demás" (Hua XII, 328). ¿De qué tipo de relación habla Husserl? De las relaciones presentadas en la *Psicología desde un punto de vista empírico* de F. Brentano. Según este filosofo austriaco, existen dos tipos de relación:

1) Relaciones que poseen el carácter de "fenómenos físicos" en el sentido definido por F. Brentano.
2) Del otro lado hay una segunda clase de relaciones que se caracteriza porque aquí el fenómeno de relación es un fenómeno "*psíquico*". (Hua XII, 330)

Husserl admite, bajo la distinción arriba propuesta, la posibilidad de un análisis *psicológico descriptivo* de los conceptos de enlace colectivo y de número. Entiéndase que psicológico significa aquí *genético descriptivo*. En esta metodología, la búsqueda de la génesis es una búsqueda por el *origen del sentido*, no en su carácter mental, sino dentro del marco de una conciencia constituyente. Es comprensible que para estas fechas Husserl no tuviera idea alguna de lo que ahora conocemos como reducción fenomenológica. Sin embargo, este retorno a los orígenes presenta algunas notas que permiten hacer una arqueología del concepto de constitución.

Ahora bien, en la división entre fenómeno físico y fenómeno psíquico se establece que los primeros no existen por sí mismos, además de no ser intencionales, esto es, el no estar *dirigidos a algo*, el no ser actos de conciencia. En contraste, los fenómenos psíquicos tienen una existencia efectiva y acontecen como intencionales, pues tienen una *referencia a algo*. Por ejemplo, los actos de advertir y de querer abrazan su contenido, lo advertido y lo querido, respectivamente. No obstante, persiste la pregunta:

> ¿Son las relaciones que unifican los contenidos de un conjunto y que llamábamos enlaces colectivos relaciones de contenido en el sentido recién precisado —como por ejemplo los enlaces metafísico o continuo—, o más bien debemos asignarlas a la clase de las relaciones psíquicas? (Hua XII, 331).

El enlace colectivo es un enlace del tipo psíquico que permite "enlazar" los contenidos representados, presentándose como un *plus* que no sólo enlaza los contenidos, sino que los retiene en el modo del "estar-juntos". Desde luego, su emergencia no ocurre de manera intuitiva, sino mediante un acto psíquico que abraza los contenidos de representación y los une. Es en este sentido en el que se presume como una *pre-condición psicológica* indispensable para todo enlace o relación colectiva:

> Un conjunto surge cuando un interés unitario y en él y con él a la vez un acto de advertir unitario destaca por sí mismos diversos contenidos y los abraza. Por lo tanto, el enlace colectivo sólo puede ser advertido mediante reflexión sobre el acto psíquico a través del cual el conjunto viene a ser. (Hua XII, 333).

Husserl afirma que, en virtud de la naturaleza general del enlace colectivo, su expresión se da por medio de la partícula conjuntiva "y" que une los contenidos singulares que ha de enlazar. Una vez establecida "la naturaleza psicológica del enlace colectivo" (Hua XII, 334), es posible llevar a cabo la tarea de mostrar el origen de los conceptos de número y pluralidad. Antes se debe tematizar cómo, a partir del acto elemental de destacar y advertir los contenidos representados de un conjunto sensible, se efectúa el proceso de *enlazar colectivamente* en un nivel abstracto.

> […] podemos decir entonces con total facilidad y sin perífrasis: conjunto o pluralidad, pensados en abstracto, no son sino: "un algo cualquiera y un algo cualquiera y un algo cualquiera, etc.", o: "uno cualquiera y uno cualquiera y uno cualquiera", etc., o más brevemente todavía: "uno y uno y uno, etc." (Hua XII, 335).

El resultado de la abstracción de lo *enlazado colectivamente* es que los contenidos singulares no se piensan como contenidos determinados, sino más bien como completamente indeterminados, como contenidos cualesquiera o como uno cualquiera. Así, se puede decir con todo rigor que lo pensado en abstracto es un *algo cualquiera*: p. ej. "un algo cualquiera y un algo cualquiera y un algo cualquiera, etc." o "uno cualquiera y uno cualquiera y uno cualquiera", etc. Este algo cualquiera es el nombre que designa a cualquier contenido pensable u objeto determinado (cosa física, mental, un juicio, valor, etcétera). Naturalmente, agrega Husserl, el concepto de algo debe su surgimiento a la reflexión sobre el acto psíquico de representar, como contenido del cual está dado cada objeto determinado. El "algo" pertenece sólo al contenido de cada objeto concreto cualquiera; puede incluso caracterizarse en sí mismo como una mera determinación relativa. De vuelta al concepto de pluralidad en la prosecución de *algo y algo y algo, etc.*, o *uno y uno y uno, etc*. Este "etcétera" indica una indeterminación esencial. Indeterminación esencial quiere decir aquí que ninguna determinación concreta lo alcanza.[69] Sin embargo, siempre que se piensa el concepto de pluralidad, tiene lugar *de facto* una limitación, una suspensión que "no depende de ella".

> Mediante la suspensión de esa indeterminación surgen de él los conceptos determinados de pluralidad, o *números*. El concepto más general de pluralidad abraza como sus especializaciones todos los conceptos del tipo: "uno y uno", "uno y uno y uno", "uno y uno y uno y uno", etc. En su limitación determinada, estas especializaciones se hallan perfectamente diferenciadas entre sí y de acuerdo con ello reciben nombres particulares: dos, tres, cuatro, etc., (Hua XII, 336).

Esta prosecución *indeterminada de agregados y agregados* obtiene su determinación final mediante la suspensión de la "cuenta por uno" y el origen del concepto numérico "particular". En otras palabras, a cada pluralidad concreta le corresponde de forma determinada un "cierto número". Como puede advertirse, la variedad o pluralidad tiene un carácter doble: por un lado, tiene unidades y/o elementos y, por otro lado, tiene un vínculo colectivo entre esas unidades y/o elementos. Ahora bien, todo el proceso que Husserl ha presentado no es suficiente para lograr una separación de los procedimientos psicológicos que él mismo criticaba. De hecho, para dar cuenta del concepto de número de forma satisfactoria no basta con seguir esta doble constitución psico-lógica;[70] es necesario determinar una secuencialidad lógica de la "cuenta por uno" y de la serie de agregados de "algo y algo y algo". En primer lugar, porque la determinación lógica haría posible la abstracción de la individualidad del conjunto para dar paso a la constitución del número a través de vincular las partes individuales en un todo unitario, y en segundo lugar porque se objetivaría la reflexión y se instigaría a la presentación de las relaciones de sus partes en un todo singular. Finalmente, el enlace colectivo daría con lo invariante en los *múltiples elementos posibles* de una *colección*. Así, pensar en contenidos individuales "juntos" a la manera de una colección tendría por resultado la relación de cardinalidad entre ellas.

[69] Debe quedar claro que indeterminación no significa aquí "imprecisión". No es que no tenga fin la colección de *unos* que representan el concepto de pluralidad, ni mucho menos que no tenga término la forma de pluralidad que se alcanza partiendo de un conjunto dado determinadamente; más bien, lo único que Husserl quiere decir es que no se ha tomado ninguna determinación con respecto a su límite.

[70] Es doble porque 1) el acto psíquico en el que se advierte que un conjunto se encuentra presente como uno y el mismo es una suerte de relación psíquica o primaria, y 2) el acto es lógico porque subsume un contenido cualquiera o indeterminado al concepto de "algo", en su carácter formal.

En conclusión, parece que en *Sobre el concepto de número* se dan los primeros gérmenes de conceptos fundamentales de la fenomenología: la constitución, la reducción, el esclarecimiento del origen de la donación de sentido y la descripción fenomenológica. Lo que se halla también en germen en este texto es la actitud permanente de Husserl respecto de la psicología de Brentano, cuya estructura y significación no dejará de definir de manera cada vez más clara hasta la *Crisis de las ciencias europeas y la fenomenología trascendental.* En este punto terminaré mi exposición de *Sobre el concepto de número.* No debe olvidarse que este es solo el primer capítulo de la tesis de habilitación de Husserl. La reflexión husserliana continuará en *Filosofía de la aritmética*, texto de mayor volumen y envergadura filosófica.

§3. La lección "Sobre el concepto de número". Semestre de invierno de 1889-1890

Entre las diversas lecciones que Edmund Husserl impartió como *Privatdozent* en la Universidad de Halle (1887-1901), destaca una que es fundamental para esta investigación: la "lección sobre el concepto de número" (K I 28/4-12).[71] Contenida en la serie de cursos Preguntas selectas de la filosofía de las matemáticas (*Ausgewählte Fragen aus der Philosophie der Mathematik*), la "lección sobre el concepto de número" sobresale por su contenido lógico-matemático. La fecha aproximada de dicha lección es enero de 1890, apoyándose en el ejemplo que presenta Husserl (¿qué día de enero es hoy?) (KI 28/4a). Aunque es claro que este dato no precisa qué lugar ocupa esta lección en el curso "Preguntas selectas…", el año de 1890 es un año muy importante por ser el marco temporal en el que Husserl escribe a Stumpf (febrero) notificándole de los cambios a su tesis de habilitación (Husserl, 1994, p. 164)

La serie de cursos Preguntas selectas de la filosofía de las matemáticas fue expuesta dos veces: en el semestre de invierno de 1889/90 y en el semestre de invierno de 1890/91. Es

[71] Utilizaré la edición de Carlo Ierna (2005).

de suponerse que la lección sobre el concepto de número fue leída también dos veces, aunque la editora del tomo XXI de Hua, Ingeborg Strohmeyer, advierte que quizás sólo fue leída en el semestre de invierno de 1889/90. La edición del tomo XXI de la serie Husserliana hizo pública una parte de este curso (p. 216-243/312-347) pero dejó fuera esta por ser una exposición sobre el concepto de número ya "conocida" en el tomo I de *Filosofía de la aritmética*. En oposición a este juicio, me parece que la importancia de esta lección de 1890 se encuentra en el hecho de que los análisis lógico-matemáticos que presenta se encuentran a *medio camino* entre *Sobre el concepto de número* (1887) y *Filosofía de la aritmética* (1891). En este sentido, la lección sobre el concepto de número es, quizás, la protagonista o el referente más claro de la transición hacia *Filosofía de la aritmética*. Sin contar que en ella son visibles los cambios y/o modificaciones propias de un pensamiento en marcha. Dicho esto, veamos si es posible determinar el *statu quo* de dicho curso en el marco de las investigaciones de Husserl en estos años.

Probablemente motivado por investigaciones anteriores, Husserl abre la lección de la siguiente manera: "hoy dejaremos las investigaciones críticas y entraremos en las positivas" (KI 28/4a). Inmediatamente después, en la segunda línea del texto citado, Husserl caracteriza la aritmética como la "ciencia de los números" (*Die Arithmetik ist die Wissenschaft von den Zahlen*), expresión que no se encuentra en el primer apartado de la tesis de habilitación, pero sí en el último capítulo de *Filosofía de la aritmética*.[72] Pero no sólo eso, sino que además afirma que "la primera pregunta filosófico-aritmética fundamental es, por tanto: ¿cuál es el contenido del concepto de número? (*Was ist der Inhalt des Zahlbegriffs*?)". Ambas expresiones son bastante sorprendentes. En primer lugar, porque en la citada tesis de habilitación, la pregunta aludía al origen o génesis del concepto de número y no así a su contenido, y, en segundo lugar, por denominar a la aritmética como la "ciencia de los números".

Ahora bien, Husserl menciona sólo los números cardinales y ordinales en su tesis de habilitación, mientras que en *Filosofía de la aritmética* introducirá todo tipo de números.

[72] "La aritmética se definirá de manera general como la ciencia de los números (*Wissenschaft von den Zahlen*)" (Hua XII, 256).

Aquí en la "lección" pasa de una introducción muy básica de los cardinales a los ordinales, y de ahí a otro tipo de números que se usan en matemáticas.

> ¿Estos dos tipos de números [ordinales y cardinales] agotan todos los números posibles? De ninguna manera. Ya en la vida ordinaria hablamos de fracciones, por ejemplo, 1/2, 2/3 y similares. Además de números iterativos: 2 veces, 3 veces, etc. Más aún, la aritmética habla de números negativos, -1, - 2, . . ., de números irracionales, de números imaginarios $2i$, $3i$, . . ., de los números complejos ordinarios $a + bi$, y de un sinnúmero de otros números complejos, incluyendo los cuaterniones, los números alternantes (*alternierenden Zahlen*), etc. En el caso de la mayoría de estos números, excepto los irracionales, un cierto parentesco se expresa ya en la expresión lingüística o aritmética. (KI 28/4a)

En *Sobre el concepto de número* y en la "lección", Husserl mantiene que el número (*Zahl*) es fundamental y primitivo. También en la "lección" recurre a las definiciones dadas por Euclides, Hobbes y Leibniz (KI 28/5a) y contrasta con ellas su presentación del número; continúa con la pregunta por la variedad y la unidad, y finaliza con el concepto de unión comprehensiva (*Zusammenfassung*) de objetos arbitrarios (KI 28/6b). Páginas más adelante, se puede observar otra modificación sustancial: la omisión de las partes correspondientes a los §§2-3 de *Sobre el concepto de número*, para enfocarse en la actividad psíquica (KI 28/7a) necesaria para la unión comprehensiva. Con respecto al texto de *Filosofía de la aritmética* se salta más de cien páginas —hasta el capítulo diez, para ser exactos— y continúa con una discusión sobre la suma, multiplicación, división, etc. (KI 28/4a).

De igual manera, sobresale la caracterización de la aritmética como aquella teoría capaz de obtener nuevos números a partir de números dados a través del número de operaciones y gracias a ciertas relaciones conocidas que subsisten entre ellos (KI 28/8b/ Hua XII, 256). De manera muy particular, quiero subrayar la observación que describe la presentación indirecta y la construcción signitiva de los números como un "atajo" (*Abkürzung*)[73] o una abreviación de las operaciones reales (*wirkliche Operationen*) entre números. Este atajo, además de evitarnos operaciones *ad infinitum*, hace de la aritmética una ciencia que no opera con los números en sí (*wirklich*), sino con meros símbolos (*symbolisch*) o presentaciones signitivas.

[73] El lenguaje que Husserl usa aquí es muy parecido al de su texto *Semiótica*. Esta hipótesis será analizada en el apartado 2.4. "Sobre el tránsito de *Filosofía de la aritmética* a los ensayos aritmético-formales".

La lección continúa explorando el paso de la concepción real de los números a una concepción simbólica que posibilita la aprehensión de grandes cantidades. Es en esta parte donde Husserl hace uso del concepto *Gestaltmoment*; pero mientras que en *Filosofía de la aritmética* hay que esperar hasta el capítulo XI, en la "lección" Husserl apela directamente y sin problemas a la configuración del concepto de número bajo la noción de *Gestalt*, término que haría posible la aprehensión de grandes cantidades sin fundarse en proceso real de contar.

> De esta manera, los grandes números aparecen al principio como presentaciones simbólicas que se componen de formaciones de números simbólicos, estas a su vez, quizás también están [compuestas de construcciones numéricas simbólicas], de tal manera que se llega, finalmente, al pequeño, pero indispensable para la concepción del concepto de número, campo de números reales [*wirkliche Zahlen*]. (KI 28/11a)

Según "la lección", las presentaciones simbólicas pueden convertirse en construcciones muy complejas de signos sobre signos (*Zeichenbau*),[74] que en última instancia adquieren sentido y validez gracias al campo mínimo, pero *indispensable*, de los números concebidos naturalmente. El paralelismo entre los signos numéricos y el conteo natural, garantiza la veracidad de los números simbólicos y hace válidos sus resultados. Finalmente, en "la lección" Husserl adopta un sistema decimal, mientras que en *Filosofía de la aritmética* primero hace un recuento teórico de cómo deben generarse todas las formas numéricas diferentes y luego aborda diversas formas de número base (*Grundzahl*).

[74] De nueva cuenta la referencia al texto de *Semiótica* es asombroso: "Todos los signos matemáticos superiores son indirectos, son signos de signos de signos elevándose y elevándose unos sobre otros (Hua XII, 344)".

2.2.- El concepto de número en *Filosofía de la aritmética*

§4. Los conceptos de pluralidad-unidad, abstracción y enlace colectivo. Análisis de la primera parte de *Filosofía de la aritmética*

La "segunda" obra filosófica de E. Husserl, *Filosofía de la aritmética*, apareció como una nueva estela dentro de la constelación de publicaciones sobre filosofía, matemáticas y lógica.[75] Destinada a ser publicada en dos volúmenes,[76] Husserl sólo pudo publicar un tomo. El único volumen publicado se divide en dos partes. La primera parte está constituida por nueve capítulos y la segunda parte por otros cuatro apartados. El contenido de los primeros cuatro capítulos repite, casi palabra por palabra, lo expuesto en *Sobre el concepto de número* (Hua XII, 8). Dado que el primer apartado de esta investigación estuvo dedicado a dicho texto, no será necesario explicar su contenido nuevamente.

Los objetivos de *Filosofía de la aritmética* son muy precisos: explicar psicológica[77] y lógicamente el concepto de número, y aclarar los conceptos de unidad y pluralidad a partir de su génesis fáctica. Situar el concepto de número como piedra angular del edificio de la aritmética,[78] no hace sino evidenciar las herencias y trasfondos matemáticos de los cuales

[75] El mismo año en que se publica *Filosofía de la aritmética*, se publica también el ensayo de Christian von Ehrenfels, "Sobre la filosofía de las matemáticas"; Carl Stumpf ya había publicado en 1870, *Sobre la fundamentación de la matemática*, Gotlob Frege sus *Fundamentos de la aritmética* (1887) y acababa de publicarse en Turín la axiomatización de la aritmética de G. Peano (1889). Eso sin contar que durante los años de 1880 a 1890, aparecieron otros tratados sobre el fundamento y naturaleza de los números, por ejemplo: Leopold Kronecker, *Sobre el concepto de número*, (1887), Hermann von Helmholtz, *Consideraciones teóricas del contar y el medir*, (1887) y Richard Dedekind, *¿Qué son y para qué sirven los números?* (1888).

[76] En el segundo tomo, Husserl pensaba estudiar los *cuasi*-números, es decir, los números negativos, irracionales e imaginarios. Además de lo anterior, Husserl pensaba en un ensayo filosófico general sobre la geometría euclidiana, la lógica general de los métodos simbólicos (semiótica) y un ensayo sobre la *arithmetica universalis* (Hua XII, 6-8). De hecho, puede reconstruirse el contenido del segundo volumen tomando en cuenta los siguientes ensayos: "Sobre la lógica de los signos (Semiótica)" (Hua XII, 340-373), "El concepto de aritmética general" (Hua XII, 374-379); "La aritmética como ciencia apriorística" (Hua XII, 380-384); "Sobre el concepto de operación" (Hua XII, 408-429); "La pregunta por la aclaración de los conceptos de números naturales como determinaciones individuales dadas" (Hua XII, 489-492) y "Sobre las determinaciones formales de una variedad" (Hua XII, 489-492). La mayoría de estos ensayos serán revisados en el siguiente apartado

[77] Al igual que en *Sobre el concepto de número*, análisis psicológico significa aquí análisis de la génesis de la experiencia de la (re)presentación de un número.

[78] Como bien apunta García-Baró "La *arithmetica universalis* (el análisis) está edificada sobre la aritmética elemental (*arithmetica numerosa*)" (1993, p. 21).

Husserl se hace eco: Paulsen, Weierstrass y Kronecker en 1883, y Brentano[79] y Stumpf en 1884-1886 (Bierbach, 1994, p. 43 y 44). Ahora bien, si el objetivo de *Filosofía de la aritmética* es explicar psicológica y lógicamente el concepto de número, una pregunta surge de inmediato: "¿debe entonces el fundamento de las matemáticas confundirse con su génesis psicológica?" (Derrida, 2015, p. 74). De acuerdo con Husserl, no. Como ya lo advertí anteriormente, génesis psicológica no significa aclaración psíquica, sino investigación *genética-descriptiva* (o estudio de un concepto remontándose a los orígenes de su significación en la conciencia). En efecto, la posición filosófica en *Filosofía de la aritmética* no concierne a hechos empíricos y contingentes, de los que sí se encarga la psicología, sino a conexiones esenciales, universales y necesarias propias de la *estructura* de la conciencia y sus pretendidos actos y procesos. En este tenor, la verdadera crítica de la razón aritmética, como veremos más adelante, viene de la mano con la génesis intencional del número. Ahora bien, "el fundamento absoluto de la objetividad matemática ¿se dará en una evidencia originariamente intencional?" (2015, p. 74). Según Husserl, sí.[80] Sólo en la génesis de una conciencia intencional es donde podemos encontrar la fuente de toda evidencia matemática. Pero antes de evidenciar este último señalamiento, es preciso enumerar las premisas sobre las que se sostiene la argumentación de *Filosofía de la aritmética*.

Una de las premisas fundamentales de *Filosofía de la aritmética* es que en la vida cotidiana nos topamos con todo tipo de fenómenos que remiten a una pluralidad (*Vielheit*), y tanto ella como la *extensión* que la componen son perfectamente bien intuidas:

> Ellos [los fenómenos concretos] son colecciones, pluralidades de ciertos objetos. Todo el mundo sabe lo que quiere decir esta expresión. Nadie duda sobre si se puede hablar o no de una pluralidad en el caso dado. Esto demuestra que el concepto relevante, a pesar de las dificultades en su análisis, es completamente riguroso y la gama de su aplicación delimitada con precisión. Por lo tanto, podemos considerar esta extensión como un hecho, a pesar de que todavía estamos en la oscuridad sobre la esencia y el origen del concepto

[79] "Uno de los principios brentanianos que guían a Husserl en su investigación sobre el origen del concepto de número es el empirismo de los conceptos, según el cual todos nuestros conceptos tienen un origen intuitivo y provienen de la experiencia" (Fisette, 2009, p. 283); "La filosofía de las matemáticas que se encuentra en el primer libro de Husserl es un ejemplo clásico del conceptualismo al modo de Brentano" (Chrudzimski, 2009, p. 436).

[80] *Cfr*. Derrida (2015, p. 74), Sokolowski (1964, p. 18) y Biemel (1968, p. 41).

mismo. Lo mismo se aplica, por idénticas razones, a los conceptos numéricos. (Hua XII, 16)

El problema de Husserl, tal como se esboza en la cita anterior, no tiene que ver con la precisión o exactitud con que se sabe que cinco manzanas son más que tres. En realidad, el problema de de Husserl en *Filosofía de la aritmética* es cómo dar cuenta de la *experiencia* que se tiene de una pluralidad. Precisamente las líneas finales de la cita anterior enfatizan que la *extensión* del concepto está dada. Pero la pregunta nodal es si el *concepto* de número se da en *esta* experiencia ordinaria. Una primera interpretación o intento de respuesta sugiere que para Husserl las *extensiones* de los conceptos, y no los conceptos mismos, se dan en nuestra experiencia ordinaria. Si Husserl creyera que las extensiones de los conceptos, pero no los conceptos mismos, se dan en nuestra experiencia ordinaria, entonces *Filosofía de la aritmética* debería leerse como una investigación que abre paso a una interpretación *platónica* (o platonizante) sobre la naturaleza del número, pues ¿cómo podríamos alcanzar, sobre la base de las extensiones dadas, los conceptos separados de ellas? Una consecuencia de esto es la presencia de cierta "hipóstasis" metafísica en la que no se estaría discutiendo la constitución de los conceptos de pluralidad y número, sino que se supondría una *participación* sustancialista de estos conceptos sobre la base de fenómenos concretos. Sin embargo, ni el trabajo ni los resultados a los que Husserl llega se encuentran en tales emplazamientos.

Otra posible respuesta es la que señala que el concepto de número *se da directamente* en la experiencia ordinaria. Según esta lectura, Husserl parece sugerir que el concepto de número se da junto con la extensión del concepto. Bajo esta hipótesis, sabríamos cómo aplicar el concepto de número, aunque no esté claro *cuál* es el concepto en sí mismo. Por tanto, *Filosofía de la aritmética* se convertiría en una investigación que intentaría "describir" nuestro conocimiento sobre la esencia del concepto de número. Esta lectura, menos metafísica y aunque en principio correcta, pues de lo que se trata es de realizar un análisis de nuestra experiencia cotidiana en lugar de postular y luego construir la esencia del número, no profundiza en las síntesis necesarias para que el concepto de número se nos dé. Existe una tercera lectura, que es la que presentaré a lo largo del texto, que toma como punto de partida esta última interpretación, pero se encaminará a explicitar las síntesis operativas que están involucradas en el concepto de número.

Una segunda premisa elemental aparece en el estudio preliminar de *Filosofía de la aritmética* (capítulos I-IV), en ella se afirma que el número está íntimamente ligado al concepto de variedad. Bien señala Husserl: "donde esté dada una pluralidad, ahí viene a cuento la pregunta por el cuánto y en su respuesta está, precisamente, el número correspondiente" (Hua XII, 15). En este primer sentido, determinar un número significa analizar el concepto de pluralidad, y luego a los conceptos de números, asumiendo que su origen son fenómenos concretos o pluralidades de objetos cualesquiera: alumnos, frutas, perros, Marte, Alemania, etc. (Hua XII, 16). Ahora bien, a la dupla *abstracción* y *psicológico* se deben integrar la pareja de conceptos *reflexión* y *producción* (*Herstellung*) —tomando en cuenta el sentido y legitimidad que significa analizar la génesis del número—. De hecho, en esta primera obra, producción y reflexión son equivalentes a lo que más tarde Husserl llamará *constitución*.[81]

Una tercera premisa es que en *Filosofía de la aritmética* se describe y analiza el proceso *abstractivo-psicológico* cuando se hace aritmética o, mejor aún, un proceso *reflexivo-productivo.* En dicho proceso ocurre una precondición psicológica donde se advierte o se devela cómo "cada uno de los contenidos (*Inhalt*)[82] coligados (*kolligierte*) deben ser advertidos por sí mismos" (*für sich bemerkter sein*) (Hua XII, 64) como *contenidos en tanto que algo*.[83] Advertir (*abstraer*) significa aquí atender sólo a la característica formal de

[81] De entrada, esta presentación se opone tajantemente a lo propuesto por De Boer, a saber, que en *Filosofía de la aritmética* no existe un análisis constitutivo del número. Según De Boer, el concepto fenomenológico de origen (origen en el sentido de la constitución en vez de abstracción) no es un factor en este primer trabajo. En su interpretación, los actos de *orden superior* no tienen correlatos objetivos y por tanto las pluralidades y conjuntos sólo aparecen como fuentes concretas: "[…] no hay ningún objeto de orden superior que corresponda al acto de un orden superior. Es cierto que este acto se dirige hacia una serie de objetos, pero estos no se pueden llamar su *Gegenstand* (objeto) en un sentido estricto. Son objetos de los actos de primer orden - los actos constitutivos en los que se fundamenta el acto de orden superior. El acto de un orden superior se relaciona con estos objetos sólo en un sentido secundario, es decir, en la medida en que se construye sobre los actos en los que están intendidos estos objetos en una forma primaria. El acto de un orden superior, como tal, no tiene su correlato propio" (1978, p. 23-24).

[82] El término contenido (*Inhalt*) es muy confuso en *Filosofía de la aritmética*. Al igual que lo hiciera Marvin Farber en su momento (1943, p. 27), también quiero señalar el uso ambiguo del concepto de contenido, principalmente porque parece estar en contradicción con la noción de intencionalidad. Dallas Willard también se pronunció al respecto al señalar que la noción de contenido por momentos se entiende como el correlato intencional del concepto de pluralidad, esto es, los objetos que la componen o que "caen" bajo ella, pero también se alcanza a definir como el conjunto de rasgos que distinguen una pluralidad (1984, p. 35 y ss). Stefania Centrone (2010b, p. 7) también tiene la misma apreciación. Para evitar estas confusiones, lo ideal hubiese sido utilizar el término "objeto inmanente" (en el sentido brentaniano), puesto que este es el sentido que Husserl le otorga al concepto de "contenido" (Chrudzimski, 2009, p. 430).

[83] El uso de la noción "contenido en tanto que algo" u "objeto en general" en *Filosofía de la aritmética* y tiempo después en las *Ideas,* confirma lo señalado: la sutil influencia de Kant en las primeras obras de Husserl. "La

los elementos de la pluralidad o conjunto en cuestión y categorizarlas como "algo/uno" (en su *producción* esquemática). Así, con esta caracterización se evidencia que el contenido del concepto de número se entiende en términos de intensión (o "la nota") que integra el sentido en el concepto. Este advertir es, pues, una precondición psicológica para que se origine o para darnos cuenta que estamos frente a un conjunto o pluralidad; después de esto viene la reflexión sobre el acto psíquico que los aprehende.

La cuarta y última premisa señala que en *Filosofía de la aritmética* se reconsideran dos puntos cuyo origen se encuentra en *Sobre el concepto de número*: 1) las representaciones de una pluralidad son resultado de *procesos* originados *sucesivamente* a partir de ciertos elementos (cada elemento lleva consigo una determinación temporal distinta), y 2) en la representación de la pluralidad, las representaciones parciales están presentes *simultáneamente* en nuestra conciencia (Hua XII, 24-25). Ambos puntos tienen por consecuencia que en el análisis (pre)-fenomenológico de *Filosofía de la aritmética* se reconozca que el contenido de los actos psíquicos y lógicos involucrados en la constitución de los conceptos numéricos deba su unificación a actos especiales de la conciencia (*besondere Bewußtseinsakte*) (Hua XII, 64). Este acto especial es el enlace colectivo (Hua XII, 20). Comenzaré mi exposición de *Filosofía de la aritmética* en este punto.

El enlace colectivo, como ya se anticipó en el apartado anterior, es un enlace (o interés unificador o el acto de *pensar-junto*) que enlaza ciertos contenidos en un todo (en un conjunto o en una colección). Además de ser una condición "psicológica" indispensable en la relación entre los elementos y una variedad, el enlace colectivo es un tipo muy especial de relación donde *no hay relación* (Chrudzimski, 2009, p. 432) o, dicho con todo rigor, está "vacío de contenido":

> Un interés unitario, que abarca todos los contenidos y los vincula, y al mismo tiempo con y en él (en esa interpenetración recíproca propia de los actos psíquicos), un acto de aprehensión unitaria destaca los contenidos; y el objeto intencional de ese acto es, justo, la representación de la pluralidad (*Vielheit*) o de la colección (*Inbegriffs*) de esos contenidos (Hua XII, 45).

---

intencionalidad se corresponde con el concepto de objetivación de la filosofía crítica y el análisis de la conciencia constantemente se refiere al objeto que intiende. Husserl pretende tematizar el contenido "real" de la conciencia". (Duc Thao 1986, p. 37).

Husserl también señala que el "enlace colectivo" es un acto complejo que reúne en un todo diferentes contenidos. Centrone (2010b) y Rosado Haddock (1973) coinciden al interpretar que el núcleo de este emprendimiento husserliano reside en el hecho de que un conjunto/variedad/pluralidad no es una mera suma (*Summe*) de sus elementos. Por el contrario, "cuando pensamos en contenidos individuales 'juntos' a la manera de una colección, este junto no puede resolverse en otra relación y definirse a través de ella" (Hua XII, 66):

> El "enlace colectivo" representa el *abstractum* que está en la base del concepto general de pluralidad (*Vielheit*) o todo colectivo y, en consecuencia, el significado del nombre "pluralidad" en el sentido de la lógica. Pero este "significado" aún no constituye el contenido (*Gehalt*) lógico total del nombre. El concepto total que le corresponde es el de un "algo que posee este momento abstracto del enlace colectivo". Así entendido, el concepto de enlace colectivo forma la parte integrante más esencial del concepto de la pluralidad […] (Hua XII, 78)

El enlace colectivo o *relacionante* debe entenderse, pues, como un acto que está a la base de la formación de los miembros de una colectividad o como "la conexión de los objetos en la unidad de su colección" (Centrone, 2010b, p. 9). Desde luego, la correspondencia de la noción de *algo en tanto que algo* con su contenido intuitivo estará resuelta hasta que su momento abstracto esté en correlación con aquello que le da sustento: una intuición concreta. Husserl, anticipando lo que sería una de las tesis fundamentales de la sexta investigación lógica,[84] señala lo siguiente:

> Ningún concepto puede ser pensado sin fundarse (*Fundierung*) en una intuición (*Anschauung*) concreta. Por lo tanto, también cuando nos representamos el concepto general de la pluralidad, siempre tenemos la intuición de algunas pluralidades concretas en la conciencia en la cual abstraemos el concepto general. (Hua XII, 79)

De acuerdo con lo anterior, los números no nos son dados en una percepción sensible aislada, sino en una actividad categorial compleja fundada en una percepción sensible. Los fenómenos concretos (no necesariamente sensibles) se colocan a la base de los actos abstractivos que descansan sobre estos "hechos irreductibles" (Cooper-Wiele, 1989, p. 32). Se trata de un movimiento de ida y vuelta: se *abstrae* de lo concreto las representaciones

[84] El concepto de *Fundierung* y objeto categorial serán estudiados a detalle en el segundo apartado del último capítulo de esta disertación.

abstractas, y lo abstraído se instancia en lo *dado* de modo *particular*. Tal relación de fundación entre lo abstracto y su presencia originaria, presenta un carácter intencional donde "todo concepto es concepto de algo: la posibilidad de un «algo» en general (*etwas überhaupt*) fundamenta la posibilidad de la abstracción conceptual" (Derrida, 2015, p. 83). Cabe la pregunta ¿cómo prescindir de la índole de los elementos enlazados? Según Husserl, la solución de este problema es la siguiente:

> La abstracción que se lleva a cabo puede ser descrita de la siguiente manera: determinados contenidos individuales están dados, de alguna manera, en un vínculo colectivo. Al pasar abstractivamente al concepto general no los notamos (*beachten*) como contenidos determinados así y asado. El interés principal se concentra más bien en su vínculo colectivo, mientras que ellos mismos, como cualquier otro contenido, son considerados y notados sólo como *algo cualquiera, uno cualquiera* (Hua XII, 79).

¿Cómo es posible abstraer y fijar la atención en el enlace de los objetos? Prescindir o abstraer *de* algo significa no atender las condiciones secundarias a lo abstraído. Desde luego, el cumplimiento del requisito de abstraer las peculiaridades del contenido no tiene (en absoluto) el efecto de que desaparezcan de nuestra conciencia los contenidos y con ellos su enlace. Abstraer, como ya se dijo, es "indiferenciar" las notas (*Merkmale*) de los elementos de un conjunto. Es un proceso que desprende o hace *caso omiso* de las características secundarias del objeto y retiene lo común a todos al comparar (*Vergleichung*) las características constantes que individualizan dichos elementos. Como ya lo indiqué líneas atrás, en la presentación o fenomenalización de una pluralidad todas y cada una de las características individuales de los contenidos dados o determinados dentro de ella son por completo ignoradas o subsumidas bajo la forma "algo en general" o "uno". Este recurso tiene por resultado formas articuladas de presentación conjuntiva que vinculan los actos sucesivos en su carácter fenomenológico, es decir, como actos de coligar que reúnen en la conciencia un "*y*" conjuntivo; un "*y*" fenomenológico que, reiterado, consigue esta forma fenomenológica de actos articulados (García-Baró, 2008, p. 109). "No es la *y* que reúne objetos sino la *y* que articula actos subjetivos *en cuanto tales*. La *y* vivida, que hace aparecer a la *y* objetiva […], pero que no aparece a su vez más que en la reflexión fenomenológica" (2008, p. 110).

Esta forma abstracta de "lo uno y uno y uno…" se constituye como un tipo de estructura en la que el *contenido* de las colecciones, así como el concepto numérico (especifico), da por resultado un numeral junto con su extensión.[85] La conclusión, según Husserl, es la composición del concepto de variedad por medio del enlace colectivo y la indeterminación (*Unbestimmtheit*) de "algo y algo y algo...etc." En seguimiento de lo anterior, la predicación numérica sólo será posible sobre conjuntos de objetos porque estos están compuestos de partes numerables, por ejemplo, predico del "conjunto de piñas" que tiene cinco elementos y no que "*una* piña *es* tres" o cuando pregunto ¿cuántos capítulos tiene esta serie de televisión? La respuesta definirá un número en concreto.

Hasta este momento de la exposición, se puede decir que, para intuir un número, primero se debe intuir una pluralidad como pluralidad (de cualquier tipo de objetos) y segundo se debe atender a sus miembros, aunque no tenga importancia para nosotros qué tipos de miembros contienen las pluralidades. Desde luego no es suficiente intuir *una sola* pluralidad para intuir un número. De hecho, se deben experimentar *dos o más pluralidades juntas* al mismo tiempo. Por ejemplo, para intuir la forma que llamamos cuadrado, intuimos múltiples cuadrados juntos o se intuyen varias formas juntas diferentes, una de las cuales es un cuadrado. De manera similar, en la experiencia de comparar pluralidades, los números pueden ser llevados a la intuición por sí mismos. El tipo de comparación que se necesita para hacer que un número se destaque no es uno en el que se comparen los tipos de miembros en una pluralidad con los tipos de miembros en otra, como ya se verá. Por el contrario, como lo expresa Husserl, se deben comparar las pluralidades en términos de "igual, más y menos":

> Es un hecho elemental, que no es descrito más que por referencia a los fenómenos, que mientras ciertos contenidos son pensados "juntos" por nosotros, aún existen nuevos contenidos que podrían ser reunidos junto (*zusammengefaßt*) con los ahí presentes. El acto original se expande por la inclusión (*Aufnahme*) de nuevos contenidos. Pero lo contrario también puede ocurrir: que, de los contenidos ya reunidos, sean omitidos algunos, mientras que el acto unificador retiene e incluye solamente los restantes […] Esto

[85] Este mismo procedimiento se puede encontrar en Bolzano, c*fr*. apartado 1.1 de esta investigación. Torretti encuentra una dificultad en este procedimiento. El argumento es el siguiente: dado un conjunto concreto cualquiera, se podría a lo sumo, conforme al procedimiento de Husserl, formar la representación abstracta de uno y uno, o la de uno y uno y uno, o la de uno y uno y uno y uno, u otra representación de una pluralidad finita y bien determinada, *pero no* la *representación* absolutamente *general* de *pluralidad*. Para (con)formarla no basta prescindir de la peculiaridad de los elementos del conjunto concreto tomado como base para la abstracción; es menester además trascender los límites de ese conjunto, esos "puntos suspensivos" (1972, p. 191-192). La crítica es muy precisa, no obstante, Torretti pierde de vista el hecho de que para Husserl la (con)formación de un conjunto es posterior a la mera enumeración de sus elementos.

presupone también, para su realización, que la colección original y la colección ampliada estén presentes al mismo tiempo y en un solo acto (Hua XII, 91).

Estos hechos de expansión y estrechamiento de las colecciones no bastan por sí solos para fundamentar los conceptos relacionales de más y menos. Aunque se puede decir de manera correcta que la colección expandida contiene más por los elementos recién incorporados o que la colección reducida contiene menos por los elementos omitidos, o que el retorno de la colección expandida a la original requiere una disminución, y el retorno de la colección disminuida a la original requiere un aumento, esto no explica mucho. Para comprender psicológicamente lo anterior se requiere, según Husserl, de la descripción de un acto de la experiencia interna que hace que sean posibles. Como cualquier relación se requiere que los términos estén juntos en un solo acto de conciencia. Por tanto, la colección original y la ampliada deben estar presentes para nosotros simultáneamente y en un solo acto. Esto aún no agota el sentido del "más" y el "menos", pues la última colección, en tanto resultado, debe aparecer como la "suma" de dos colecciones, una de las cuales se reconoce como idéntica a la colección original, mientras que la otra representa la colección de los contenidos recién agregados. Husserl pone el siguiente ejemplo: si se amplía la colección (A, B, C) a la forma (A, B, C, D, E), entonces el juicio de que el segundo es más por tener D y E requiere la representación simultánea de: (A, B, C) más (A, B, C, D, E) y (A, B, C; D, E), en un solo acto (Hua XII, 92-93). En consecuencia, en las comparaciones de pluralidades dadas intuitivamente resulta claro que *una es igual a, más que*, o *menos que la otra*, el número que pertenece a esa pluralidad (el número de sus miembros) se vuelve intuitivo por sí mismo. Por tanto, se puede concebir ese número como *este* número particular sobre la base de nuestra intuición de ese número, abandonando con esto las explicaciones numéricas a partir de la igualdad o biyección entre los miembros de dos conjuntos o pluralidades. Explicaré con cierto detalle.

Las colecciones que deben compararse deben consistir en contenidos que sean iguales en ambos lados, en todo o en parte. De tal manera que todos los contenidos de uno están representados por contenidos similares en el otro. Por supuesto, esta condición se cumple siempre que dos colecciones agrupen contenidos de un mismo género. Pero si hay colecciones que agrupan contenidos heterogéneos o si la anterior condición no se cumple, entonces sólo se pueden comparar sus *números* en términos de más y menos (Hua XII, 93).

Ahora bien, dado que cada contenido presente se considera y es pensado junto con los otros sólo en la medida en que es un *algo*, su carácter se torna equiparable a los demás. Esto es coadyuvante en la comparación de los números unos con otros. Si, por ejemplo, juzgamos que cinco es más que tres y que dos, y luego representamos el cinco dividido en dos números parciales, dos y tres, al intentar establecer la identidad o comparación de estos últimos, el excedente viene a la conciencia como *un* número parcial. Ahora, desde este *más* (o desde el *menos*, según se vea) se reconoce lo que uno simplemente llama diferencia; y de la misma manera hablamos de una diferencia de dos números en los casos en que se entiende un número que se piensa como el excedente de un número en relación con otro. (Hua XII, 94-95).

Ahora bien, la crítica de Husserl a Frege comienza en el capítulo VI y finaliza en el capítulo VII. Husserl parte de una consideración elemental, a saber, que los conceptos primarios y fundantes no pueden ser definidos. Todo lo que puede ofrecer un concepto elemental es remitirnos a los procesos psíquicos que son necesarios para la constitución de dicho concepto. Como los conceptos de número y pluralidad son elementales, no se puede definir, a partir de ellos, ni el concepto amplio ni el concepto más restringido de igualdad de dos conjuntos. Según Husserl, el intento de definición de Frege,[86] y por tanto el de Leibniz y Grassmann, está mal orientado y falla por las siguientes razones. En primer lugar, define la

---

[86] En el apartado "El Intento de Frege", Husserl critica la propuesta de este autor desde tres flancos: (i) por evitar problemas psicológicos; (ii) por presentar una definición de un concepto básico (el número) y (iii) por hacer del carácter extensional una razón suficiente para aclarar el concepto de número. La primera objeción básicamente retoma uno de los argumentos principales de *Filosofia de la aritmetica*, a saber, la necesidad de un análisis psicológico (*génesis descriptiva*) del número. La segunda objeción señala que el concepto de número sólo puede estudiarse remitiéndose a la actividad que ocasiona su aparición. Después de todo, agrega Husserl, sólo "puede definirse lo que es lógicamente compuesto. Tan pronto como nos encontramos con los últimos conceptos elementales, termina toda definición" (Hua XII, 119). Así, en contraposición con Frege, Husserl señala que la génesis de los conceptos numéricos no se puede encontrar en una definición lógica (Hua XII, 119). La tercera objeción es la continuación del argumento anterior. Según Husserl, para que pudiera ser comprensible el argumento de Frege de reducir el concepto de número a su extensión, es necesario suponer que las oraciones numéricas implican una afirmación sobre un concepto. Ahora bien, para Frege el número no se adjudica (*zugeschrieben*) ni para un objeto individual ni para un conjunto de objetos, sino más bien para el concepto (*Begriff*) bajo el cual caen los objetos enumerados. Por ejemplo, cuando se dice que Júpiter tiene cuatro lunas, el número cuatro se asigna al concepto "luna de Júpiter" (Hua XII, 120). Esta conceptualización básica concuerda, a juicio de Husserl, con las teorías de la equivalencia en la medida en que Frege también quiere obtener el concepto de número partiendo de la definición de "igualdad numérica" (*GIeichzahligkeit*). Así, se dice que el concepto *F* es equinumeroso al concepto *G*, si existe la posibilidad de una correlación recíproca uno a uno de los objetos que caen bajo un concepto y aquellos que caen debajo del otro. En este sentido el "método fregeano" es considerado como un caso especial del método lógico general que, se supone, permite obtener de un concepto familiar de igualdad la definición de lo que se considera igual.

identidad en lugar de la igualdad. En segundo lugar, el hecho de que dos contenidos puedan sustituirse no es razón de su igualdad, por el contrario, su igualdad es la razón de su sustitución. Y, en tercer lugar, no nos proporciona un criterio para reconocer la igualdad. De hecho, probar la sustitutividad de dos contenidos *a* y *b* lleva a la evaluación de un número infinito de igualdades del valor de verdad de *a* y *b* (Hua XII, 97). Sin embargo, hay que precisar que estas críticas husserlianas no son del todo correctas. Explico esto último. Lo que Frege señala es que la definición del concepto ser (el) número de F, no consiste en explicitar su extensión, sino en afirmar que ser (el) número de F es ser la extensión del concepto ser equinumerable con F. Frente a lo dicho por Husserl de que la definición de equivalencia sólo es un mero criterio para la existencia de igualdad de número en dos grupos, y tomar por cierto sólo sus extensiones, Frege insistiría en que la clase de las propiedades equinumerables con F no es la extensión del concepto de número F sino la del concepto equinumerable con F. De forma correspondiente, ser un número es estar, con un concepto F, en la relación de ser idéntico con la extensión del concepto de ser equinumerable con F. Si uno identifica, como lo hace Husserl, la equivalencia y la igualdad del número, entonces es lógico considerar la equivalencia como la fuente misma del concepto de número. Así, la relación entre conceptos que desempeña un papel análogo a la identidad entre objetos es, precisamente, la relación de tener idéntica extensión. Esto es así, repito, porque para Frege el contenido cognoscitivo verdaderamente importante de una expresión conceptual es su referencia, no su componente intensional; en segundo lugar, esta referencia no es una extensión sino una función.

Ahora bien, el análisis de Husserl se mueve hacia una noción específica de igualdad, la igualdad de dos pluralidades con respecto a su número o equinumerosidad, como ya se advirtió líneas atrás. Para evaluar la igualdad de dos conjuntos, según Husserl, primero debemos saber en qué sentido se deben comparar los dos conjuntos, porque los mismos objetos pueden juzgarse iguales o desiguales según las características sobre las que centramos nuestro interés en un momento dado. Si el interés se dirige al *número* de elementos contenidos en cada conjunto, entonces hay dos formas posibles de proceder en la comparación. El primero consiste en tratar de poner los elementos de los dos conjuntos en correspondencia uno a uno y en verificar que ningún elemento permanezca aislado. El segundo consiste simplemente en contar los elementos de los dos conjuntos y verificar de esta forma si tienen el mismo número o no. El primer método puede usarse cuando solo queremos evaluar la mera equinumerosidad, sin querer saber la cantidad precisa de elementos de cada conjunto; mientras que el segundo método se usa cuando realmente queremos saber la cardinalidad contando los elementos de los dos conjuntos en el sentido simbólico. Para Husserl, las ventajas evidentes del segundo método, que lo hacen preferible al primero, son esencialmente tres: (*i*) es un proceso completamente automático que puede ejecutarse sin pensar en los conceptos involucrados; (*ii*) es eficiente y seguro, y (*iii*) nos permite no solo comparar los dos conjuntos, sino también obtener el número cardinal asociado con cada uno de ellos (Hua XII, 102-105).

Con lo anterior, Husserl asigna un papel genuino al proceso de correspondencia uno-a-uno, y la limitación intrínseca que encuentra en la definición de equinumerosidad bajo consideración: relativa a conjuntos con un número finito de elementos; la correspondencia uno-a-uno garantiza equinumerosidad, pero no es lo que determina la equinumerosidad. Precisamente, la posibilidad de la biyección entre dos conjuntos no es la razón de su equinumerosidad, sino que solo lo garantiza (Hua XII, 105). Por tanto, la razón por la que dos conjuntos tienen la misma cardinalidad no es el hecho de que se pueden poner en correspondencia uno-a-uno; por el contrario, la correspondencia es posible solo si los dos conjuntos tienen la misma cardinalidad. Tratar de ponerlos en una correspondencia uno a uno es una operación que siempre es significativa y que puede tener algún valor práctico, especialmente cuando el número de elementos es alto (pero aún finito). En otras palabras: tener la misma cardinalidad y estar en uno-a-uno la correspondencia no son conceptos con el mismo contenido, sino solo conceptos con la misma extensión (Hua XII, 106-108).

Finalmente, en cuanto a la esencia de la correspondencia uno-a-uno como una relación, Husserl lo toma como un caso especial del enlace colectivo limitado a pares de elementos. De hecho, es el enlace colectivo lo que hace posible la correspondencia, mientras que a cualquier relación primaria se le puede atribuir el valor práctico que hace que sea fácil ver la equinumerosidad de los dos conjuntos. Por tanto, no es la relación φ la que establece la correspondencia, sino el enlace colectivo, es decir, el acto de pensar juntos, en pares ordenados, todos los elementos de los conjuntos que queremos comparar. Dicho lo anterior, el procedimiento está muy lejos de proporcionar una definición a la expresión de igualdad de dos multiplicidades con respecto al número. Todo lo que se puede conceder, según Husserl, es que formula un criterio necesario y suficiente en el sentido lógico, válido para todos los casos, para la obtención de la igualdad. En esto consiste, en consecuencia, el único sentido útil y el logro de la definición (Hua XII, 108-110).

Al inicio del capítulo VII, *Definiciones del número en términos de equivalencia*, Husserl diagnostica los malentendidos vinculados a la definición de igualdad entre los números en términos de correlación recíproca o en términos de "uno a uno", y cuyas consecuencias han terminado en una interpretación errónea del concepto de número como tal. Es verdad que Husserl admite que existen teorías que realmente han avanzado en estos términos, pero insiste en al menos dos líneas de pensamiento cuya teoría no es máximamente coherente: Benno Kerry y Gottlob Frege.[87] Algunos rasgos de su diagnóstico remiten a las definiciones de "igualdad", "más", "menos" y a la definición de igualdad entre los números en términos de correlación recíproca. Lo anterior, denominado como teorías de la equivalencia, sólo requiere que exista un elemento de *correlación* (elementos/grupos), una comparación entre ellos y su revisión de elementos "sobrantes" o fuera del proceso de biyección. Esto quiere decir que, sin tomar en cuenta los grupos, incluso sin saber lo que significa el acto de contar, se está en posición para hacer un juicio numérico a partir de los elementos comparados. Algunos rasgos conexos a esta revisión es que para Husserl la palabra "equinumeroso" también puede decirse como "equivalente", ya que esta última forma de hablar tiene en su connotación el concepto de número.

De conformidad con lo anterior, Husserl abiertamente señala que los errores que comete esta teoría relativista-extrema dependen en lo más íntimo del desconocimiento de la esencia de la correlación uno a uno y de la función que le conviene a ella para el conocimiento de la igual cantidad de dos grupos (Hua XII, 115-116). Al ser la definición de equivalencia un mero criterio para establecer la existencia de igualdad de números en dos grupos, se cae en el error de tomar por verdadero que equivalencia e igualdad en número sean conceptos con el mismo contenido. Lo único cierto son sus extensiones. En efecto, Husserl reconoce que dos conjuntos son equinumerosos *si y sólo si* son equivalentes. Pero, según él, esto sólo significa que los conceptos de equivalencia y de igualdad numérica tienen *la misma extensión,* aunque no tienen *el mismo contenido*. Si uno identifica la equivalencia con la

[87] En el siguiente apartado se discutirá la propuesta de Frege y su relación con la reseña a *Filosofía de la aritmética*.

igualdad del número, entonces, es lógico considerar la equivalencia como la fuente misma del concepto de número y concluir: la totalidad de los grupos equipotentes entre sí (es decir, equivalente, perteneciente a una clase) seguramente no puede tener nada más en común que la igualdad numérica definida de la manera indicada. Asignar un número a un grupo concreto significaría, en consecuencia, clasificarlo en el anterior sentido.

Por supuesto, agrega Husserl, no se puede aceptar este tipo de razonamiento. En primer lugar, porque la equivalencia entre los grupos no se establece simplemente en términos de igualdad numérica o, dicho con mayor claridad, el número de un conjunto es una característica discernible en él sin necesidad de estudiar sus relaciones con otros conjuntos. Por tanto, el isomorfismo entre los grupos debe fundarse a partir del número en el sentido verdadero y auténtico de la palabra (Hua XII, 117). En segundo lugar, se sabe que Rómulo y Remo son dos no *porque* se pueda ponerlos en correspondencia biunívoca con Caín y Abel, Gandhi y Mandela, Alemania y Austria, y otras parejas familiares o desconocidas; antes bien, estas correspondencias pueden establecerse porque Rómulo y Remo son *dos*, opera en ellos una conjunción, como también lo son los otros conjuntos mencionados. Y, en tercer lugar, si los números se definen como los conceptos relacionales basados en la equivalencia, entonces cada afirmación numérica en lugar de estar dirigida al grupo presente (concretamente) estaría dirigida a sus relaciones con otros grupos. Asignar un número determinado a ese grupo significaría clasificarlo dentro de un grupo determinado de grupos equivalentes entre sí. Pero a juicio de Husserl esto no es en absoluto el sentido de una afirmación numérica. Para demostrarlo, Husserl describe un caso específico: pensemos en un conjunto de 4 nueces: ¿llamamos a un grupo de nueces que tenemos ante nosotros *cuatro* por el hecho de pertenecer a una cierta clase de infinitos grupos que se pueden poner mutuamente en una correspondencia biunívoca (uno a uno)? Es poco probable responder afirmativamente a esta pregunta. Lo que debería tomarse en cuenta, según Husserl, es el hecho de que ese grupo exhibe una cantidad de nueces que pueden ser enumeradas como: "una nuez y una nuez y una nuez y una nuez". El uno indeterminado logra su determinación a través del fin de las agregaciones al numeral, en este caso, 4. En esta indeterminación, el individuo concreto es *una* nuez, y no *ella* con tales y cuales características (forma redondeada, con una cáscara dura y rugosa, con un interior comestible, etc.). Por tanto, lo que se busca con lo anterior es una base sobre la cual asentar todos los contenidos individuales que contamos; si es un fundamento genuino, deberá residir en él una característica común a todos y cada uno de esos contenidos. Este es, pues, el sentido de extraer o abstraer la forma general del grupo o el número.

Lo anterior, según Husserl, es pasado por alto en las relaciones de equivalencia entre grupos dados, haciendo completamente inútil y carente de interés una investigación *sobre el número* como tal. En estas construcciones, remotas y artificiales, los conceptos aritméticos elementales se distorsionan y dan por resultados formaciones igualmente inútiles. En conclusión, el concepto de equivalencia no hace nada y no puede hacer nada para la definición o el análisis del concepto de número pese a la tendencia generalizada por asignarle una importancia exagerada al concepto de equivalencia (Hua XII, 124). En esencia, Husserl ha objetado que la definición del concepto de número no debe partir de argumentaciones engañosas a propósito de los conceptos de unidad y pluralidad.

Ahora bien, otra revisión importante dentro de *Filosofía de la aritmética* viene de la tesis que señala que la definición husserliana del número sólo es aplicable a los números de la secuencia numérica de 2 en adelante. 0 y 1 parecen estar excluidos del concepto de número (Hua XII, 129). ¿En qué sentido se presenta esta objeción y la supuesta exclusión? La pregunta "cuántos" (¿*Wie viele*?) o "cuántos son" es receptiva a una determinación numérica particular positiva o negativa. Para ejemplificar el primer caso pongamos por ejemplo el número de satélites naturales que tiene Marte, a saber, es 2 (Fobos y Deimos). Un ejemplo del segundo caso es el número de hijos que tuvo Adolf Hitler, a saber, uno o ninguno. Como se observa, las respuestas positivas corresponden a todos los números de la serie de naturales excepto cero y uno; las respuestas negativas corresponden a cero y uno. Entre las respuestas positivas y negativas a esta pregunta, se obtiene una diferencia en el contenido conceptual, que la lógica no debe descuidar. Gramaticalmente, cero y uno se comportan como números, y por tanto se pueden considerar como determinaciones numéricas desde el punto de vista gramatical, pero esto no es así desde el punto de vista lógico. La diferencia conceptual entre cero y uno y todos los demás números es que estos son conceptos numéricos en el sentido real y propio. De hecho, agrega Husserl, no se ha hablado del 0 y el 1 como númeross (Hua XII, 130). La única salida que queda es negar rotundamente que el 0 y el 1 pertenezcan a los conceptos numéricos. Sin embargo, bien analizado el asunto, la introducción de 0 y 1 en la aritmética, a la par con los otros números, ha hecho posible la solución de algoritmos aritméticos, por tanto, no podemos eliminarlos así sin más. Pero ¿cómo justifica Husserl el tratamiento de 0 y 1 como números? En primer lugar, Husserl reconoce un hecho obvio: necesitamos 0 y 1 para calcular. En segundo lugar, Husserl se dio cuenta de que 0 y 1 son productos comunes en nuestros cálculos numéricos. Desde luego, estas respuestas que no son satisfactorias desde un punto de vista lógico, así que esto nos lleva, junto con Husserl, a considerar que 0 y 1pertenecen a la aritmética únicamente sobre la base de sus relaciones externas o puramente formales con los números propiamente dichos. Explico a detalle.

La pregunta sobre la determinación de “cuántos” no exige una respuesta que involucre *muchos*, *pocos* o *nulos* elementos, sino simplemente demanda la representación de una pluralidad o multiplicidad de objetos. En realidad, la pregunta de “cuántos” se dirige a la determinación de una colección como “dos, tres, cuatro”, etc., en tanto números pertenecientes a una totalidad o una pluralidad indeterminada. En efecto, en un giro argumentativo interesante, Husserl señala que sólo aquello que posee una forma de pluralidad posibilita la tematización de los números en su carácter primario. Lo que destaca es el hecho de que los números se predican con legitimidad sólo en la medida en que su numerosidad posee un carácter conjuntivo. Efectivamente, “lo que hace a una pluralidad ser una pluralidad no es, por cierto, nota alguna que posea cierto elemento suyo. Es la pluralidad globalmente tomada, la pluralidad como un todo […]” (García Baró, 1993, p.32). La particularidad con que el conjunto entero de las partes, una pluralidad, se halle reunido o enlazado, es el modo preciso en que tiene lugar la numerosidad. Por tanto, la afirmación de que “hay *una* cosa” no es una afirmación de número, como tampoco la afirmación “no hay nada”. Dicho de otra manera, lo que se quiere decir es que la predicación numérica parte del encuentro de *un todo* en el que se reúnen *colectivamente n* partes o *n* partes coleccionadas o vinculadas en un conjunto global.

Según lo dicho, uno y ninguno son sólo respuestas negativas en sentido lógico, precisamente porque en sentido lógico no son números. Gramaticalmente, dice Husserl, cero y uno son considerados como determinaciones de número (o números), pero no dice Husserl precisamente que sean respuestas positivas. En consecuencia, la manera en que el 0 y el 1 pertenecen a la serie de números sólo es en términos de relaciones elementales y operacionales (Hua XII, 132 y ss.) es decir, son necesarios en relación al ámbito calculista de la aritmética, esto es, de la elaboración de los algoritmos. Por lo demás, en la aritmética también se muestra su carácter marginal: la adición de cero no aumenta; la resta no disminuye; la división conduce a un resultado sin sentido, lo mismo que elevar el cero a la potencia cero y así sucesivamente. La multiplicación por uno no prolifera, la división por uno no divide y así sucesivamente (Hua XII, 133). Estas son peculiaridades que evidentemente son de un tipo completamente diferente a las que pertenecen a la especie numérica genuina, porque infringen la generalidad de las proposiciones que gobiernan todo el resto del dominio de los números (precisamente el de los números genuinos).

En relación a lo anterior se puede extraer una observación pertinente a propósito de la diferenciación del uno y la unidad (*Einheit*). Según Husserl, el concepto del número uno está bien diferenciado del concepto de unidad. "Uno" como posible respuesta a la pregunta "cuántos" no coincide en concepto con el de unidad correlativo a la pluralidad. El término unidad se usa para designar cosas mientras se abstraen de sus propiedades. Tiene el mismo significado lógico que el término algo, y este significado no debe identificarse con el concepto numérico uno. Desde un punto de vista práctico, esta distinción podría no tener importancia, pero ante la tentativa de ver en ellos sinónimos es necesario tener presente su distinción. Esta última tesis desprende una nueva consideración: la igualdad y diferencia de las unidades contables. Contrario a aquellos que proponen la uniformidad de las unidades como un requisito previo y aquellos que lo afirman sin exigirlo (Hua XII, 139), Husserl resuelve esta dificultad señalando que solo lo que es distinto se puede combinar en una totalidad, pero en la representación de la totalidad nada de *diferencias* está presente (Hua XII, 141). Los elementos de la totalidad están ahí en nuestra representación simplemente como lo que son ("algos"), y no se convierten en tales elementos al distinguirlos por primera vez. En cuanto al concepto de número, este se origina en las totalidades de tal manera que no requiere ningún acto especial de diferenciación. La enumeración, es decir, el proceso secuencial a través del cual determinamos el número del grupo, solo requiere que los objetos que se enumerarán sean distintos, pero no que los *diferencie* (Hua XII, 142). Las excepciones surgen sólo con la enumeración de los contenidos que se confunden fácilmente. En tales casos, se debe tener cuidado con las omisiones y contar nuevamente.

Con la otra posibilidad, es decir, cuando se niega la igualdad de las unidades y se pretende con ello la uniformidad de los objetos que se enumerarán, surge la pregunta: ¿cómo la uniformidad total de las unidades en el número debe ser compatible con la distinción? Si aceptamos como contenido de una representación solo representaciones parciales y consideramos las representaciones como comparables sólo cuando poseen contenidos parciales comunes de ese tipo, entonces, hay infinitas representaciones dispares y no comparables. Pero es claro que la enumeración no requiere comparabilidad, por ejemplo, “un alma y un triángulo” son dos, aunque no tienen una sola propiedad intrínseca en común. Sin embargo, si aceptamos como contenido de una representación todas las determinaciones negativas y relativas que se le atribuyen, entonces no hay, en general, representaciones no comparables ya que no hay ninguna que no sea del mismo tipo, al menos en cuanto a caer bajo el concepto de algo.

De acuerdo con la perspectiva husserliana, la representación numérica de un grupo determinado no nace al comparar los objetos de ese grupo entre sí y sumarlos bajo el concepto genérico que surge de esa comparación (perro, gato, calculadora, autobús), sino del “traerlos a cuenta” siempre bajo el mismo concepto: el de *algo* (sea lo que sea que estemos contando) y al mismo tiempo “agarrar” esos objetos colectivamente (Hua XII, 142-143). Esta es la manera cómo se origina la forma general de pluralidad, uno y uno y uno… bajo la cual la pluralidad concreta *cae bajo* el número que le pertenece (Hua XII, 143). Contrario a los puntos de vista que sugieren que cada enumeración requeriría comparaciones preliminares o simultáneas o que las relaciones de igualdad entrarían esencialmente en el concepto de número, según Husserl la abstracción (o reflexión) que se debe aplicar a los miembros de un grupo para llegar al número trae como consecuencia la igualdad de las unidades, pero ni las comparaciones ni las relaciones de igualdad entre las unidades entran en la representación del número como constituyentes explícitos. De hecho, están lejos de formar factores psicológicos esenciales en la representación del número (Hua XII, 143). En consecuencia, se puede captar la situación anterior de esta manera: los conceptos numéricos se originan a través de la abstracción de los grupos concretos cuyos miembros están representados como lo *mismo*.

Es visible de inmediato que la relación de fundación que hace que los complejos relacionales se presenten en representaciones unitarias (en totalidades) no se basa en la igualdad, sino en la combinación colectiva. Así, por ejemplo, la expresión numérica: “*dos* manzanas” no significa que una manzana sea lo mismo que otra manzana, sino *una* manzana *y una* manzana. Ciertamente, una manzana y una manzana son dos manzanas porque cada una *es una* manzana.[88] Dos manzanas, dos hombres, una manzana y un hombre, etc., son en cada caso dos porque representan totalidades concretas que, a través del proceso de enumeración, caen directamente bajo la forma del grupo abstracto *uno y uno*, y bajo ningún otro (Hua XII, 145). Otro ejemplo ¿cuánto es Júpiter, un ángel y una contradicción? Simplemente contamos: Júpiter *es uno* y una contradicción *es una* y un ángel *es uno*, lo que da por resultado uno y uno y uno, por tanto, tres (Hua XII, 145). Por supuesto, las unidades son "iguales" entre sí. Pero estas semejanzas son una consecuencia de la abstracción numérica, no su base y su presuposición. Nuevamente se puede observar que no se puede retener nada de los contenidos, sólo la propiedad extrínseca de que son contenidos. Por tanto, el concepto vacío "algo o una cosa" y el concepto de la combinación colectiva conforman el concepto de número. Finalmente, Husserl cree que comparar, distinguir, coligar y enumerar son operaciones mentales bien diferenciadas que deben separarse unas de otras. Por supuesto, hay muchas ocasiones en que todas estas operaciones entran en juego juntas (Hua XII, 146).

En el siguiente capítulo, capítulo IX, junto con el apéndice a la primera parte de *Filosofía de la aritmética*, se detallan algunos de los debates que Husserl sostuvo con filosofós, lógicos y matemáticos de la época (Hua XII, 161-180). Un par de apartados antes, se había hecho mención de Mill, Herbart, Frege, Kronecker y Helmholtz (Hua XII, 154). No entraré en detalles o pormenores de estas discusiones para no dilatar la presentación y el análisis de la segunda parte de *Filosofía de la aritmética*, que es la parte más rica en contenido. No obstante, esbozaré algunos puntos esenciales de estos debates. Husserl considera, principalmente, algunas de los puntos de vista de Mill, por un lado, y de Herbart y Frege, por el otro. Descarta rápidamente la opinión de Mill, para quien "el número es un predicado de las cosas enumeradas", mientras que la opinión de Herbart y Frege de que el número se refiere a un concepto, se examina a partir de lo dicho en el capítulo VII. Husserl considera que, aunque debe hacerse justicia al papel desempeñado por los conceptos en nuestro conocimiento del número, el número no deja de ser la forma general de la pluralidad bajo la cual cae la totalidad de los objetos. En efecto, el número se relaciona no con el concepto de los objetos enumerados, sino con su totalidad. En consecuencia, la relación entre el número y el concepto genérico del enumerado es contraria a lo que Herbart y Frege

[88] Esto es visible desde el comienzo del capítulo VIII, ahí Husserl señalaba que los números son relativos y nunca predicados absolutos, es decir, ningún conjunto o pluralidad tiene un número en sí.

mantuvieron. En el *apéndice* a la primera parte, Husserl aborda una interpretación nominalista de los conceptos numéricos basada en la confusión del concepto uno con el signo "1". La lucha contra el nominalismo fue posiblemente el tema más importante y generalizado de toda su obra. Irónicamente, las injusticias de la historia de la filosofía han llevado a que el propio Husserl sea visto a través de la lente de una fenomenología nominalista.[89] En esta discusión inicial, la posición de Husserl era que el nominalismo pierde de vista las nociones de concepto y esencia, y no tiene forma de dilucidar la relación de los símbolos con aquello que representan. Helmholtz, por ejemplo, define los números como símbolos arbitrarios, pero ¿qué son realmente estos símbolos y que hacen por el conocimiento? ¿Qué significa que estos símbolos realmente signifiquen? En resumen, ¿cuál es el concepto que media cada uso de los signos y constituye la unidad de su significación? No hay respuesta a tales preguntas disponibles para el nominalismo. Los conceptos numéricos, con las esencias correspondientes, simplemente se pierden, y con ellos, cualquier posibilidad de comprender la naturaleza y los logros de los mismos símbolos en los que los nominalistas, Helmholtz y Kronecker, confían.

§5. Momentos figurales, conceptos inauténticos y operaciones aritméticas. Análisis de la segunda parte de *Filosofía de la aritmética*

La segunda parte de *Filosofía de la aritmética*, "Los conceptos simbólicos de número y las fuentes lógicas de la aritmética cardinal" inicia con el capítulo diez que se titula "Las operaciones numéricas y los conceptos numéricos auténticos". A partir de este momento, la investigación filosófica husserliana se da a la tarea de hacer comprensible de manera lógica "el origen (*Entstehung*) de la técnica del cálculo (*Rechenkunst*) con base en los conceptos de unidad, pluralidad, numero y de investigar su relación con la ciencia aritmética" (Hua XII, 181). En efecto, la segunda parte de *Filosofía de la aritmética* examina la dificultad en la que se encontraba la ciencia aritmética al no poder proporcionar una explicación satisfactoria de la naturaleza de sus propias operaciones. Ciertamente, con números intuitivamente

[89] *Cfr.* (Bergmann, 1997).

concebidos es posible calcular, pero en sentido estricto ¿qué significa calcular? Si preguntáramos cómo es posible la combinación entre los números 3 y 4, y el 7 como resultado, Husserl respondería que no tiene sentido hablar de la *suma* del *concepto* 3 más el *concepto* 4, y su resultado, el *concepto* 7. Frente a la postura que considera el cálculo de conceptos y su realización en operaciones aritméticas, Husserl se inclina por la idea de que son las operaciones con los *objetos de los conceptos* representados con generalidad los que permiten la correcta ejecución del cálculo deductivo y la ampliación del dominio de los números (Hua XII, 181). Para Husserl, los signos que se combinan al calcular tienen el carácter de *signos generales*, signos numéricos como base. Por tanto, el numeral "7" no significa el concepto (el *abstractum*) siete, sino más bien "7" es un signo que sirve par calcular.

Ahora bien, hasta este momento, Husserl únicamente ha descrito la *numeración de pluralidades* (*Zahlung von Vielheiten*), es decir, el proceso en el que los números se originan a través del conteo sucesivo o mediante la enumeración directa de cosas (en tanto miembros de una pluralidad). La numeración es mayormente efectiva con los primeros números de la serie de los naturales,[90] por ser ellos representaciones auténticas de la serie numérica. Sin embargo, este no es el único modo en el que los números se originan. También existe un modo indirecto para "generar números" a partir de números dados y así evitar operaciones verdaderamente titánicas con una cantidad considerable de números, por ejemplo, a través de operaciones de cálculo aritmético como la adición, la resta, la multiplicación, la exponenciación y las fracciones (Hua XII, 182, 185, 189). En este caso, para lograr cálculos correctos con números de mayor extensión es necesario hacer una doble sustitución: por un lado, la representación simbólica ("signo/símbolo") debe desplazar al concepto del número ("concepto 7") y, por otro lado, las operaciones matemáticas del cálculo deben desplazar a las actividades psíquicas reales. Ambas sustituciones son necesarias, pues si tuviésemos representaciones auténticas de todos los números como se tienen de los primeros en la serie

[90] No existe un acuerdo en *Filosofía de la aritmética* sobre el número exacto de objetos presentados auténticamente. En ocasiones Husserl habla de cinco como el número máximo (Hua XII, 114), pero también dice que pueden ser diez (Hua XII, 224) o incluso doce (Hua XII, 192). Infiero, por lo dicho hasta aquí, que el número máximo deberían ser cinco unidades. Mi argumento es que nuestra percepción directa de un número no va más allá de esta cifra, así que operar con más elementos es ya operar con un código o modos de agrupación para determinar el número exacto. El propio Husserl parece sugerir esta cantidad como una cota máxima *cfr.* Hua XII, 216.

numérica, entonces no existiría la aritmética o sería completamente superflua (Hua XII, 190). Es en esta parte donde Husserl confirma la configuración inauténtica del resto de los conceptos numéricos que "son y sólo pueden ser simbólicos" (Hua XII, 190):[91]

> Las relaciones más complicadas entre los números, que descubrimos ahora con dificultad a través de largos cálculos, serían intuidas simultáneamente con evidencia con las representaciones numéricas como las proposiciones del tipo 2+3=5 [...] Aunque, de hecho, estamos extremadamente limitados en nuestras facultades representacionales. El que encontremos aquí algún tipo de límite en nosotros, recae en la finitud de la naturaleza humana. Sólo podemos esperar representaciones auténticas de todos los números en un entendimiento infinito; porque, indudablemente, ahí estaría la capacidad de unir una verdadera infinitud de elementos en una representación explícita […] Así, la aritmética entera, como veremos, no es otra cosa que la suma de medios artificiales (*kunstmäßiger*) para superar las limitaciones esenciales de nuestro intelecto, aquí señaladas […] Yo simplemente diría: 'El hombre aritmetiza"[92] (Hua XII, 191-192)".[93]

La diversidad numérica que producen las operaciones del cálculo no siempre remite a los materiales originales o a la actividad más básica que es la de enumerar. Antes bien, presenta nuevas formas cada vez más complejas de unidades, haciendo de la aritmética entera una suma de medios artificiales fundada, además, en el hecho de que toda proposición numérica que va más allá de los primeros números es un funcionamiento simbólico con representaciones simbólicas. Da Silva resume correctamente cuáles son las variantes del problema de lo simbólico en Husserl: 1) la que concierne a la justificación de los algoritmos para realizar cálculos aritméticos y 2) la que versa sobre el tratamiento de los signos 0 y 1 como símbolos numéricos (2010, p. 127). En ambos casos, al menos en *Filosofía de la aritmética*, la figura de los conceptos simbólicos está a la base de la serie de los numerales, de ahí su necesaria investigación. Ahora bien ¿qué es una representación simbólica?

[91] Husserl se ocupó del problema de lo simbólico por lo menos desde su tesis de habilitación (1887) hasta 1901 con las conferencias ofrecidas en Gotinga ese mismo año, de las que ya hablaremos más adelante. El tema de lo simbólico "lo obligó a ampliar sus horizontes filosóficos, abriendo nuevas perspectivas sobre el papel de la simbolización en el pensamiento y los procesos de conocimiento y la presentación de nuevas preguntas sobre el sentido y el alcance de la lógica formal" (da Silva 2010, p. 123).

[92] Un estudio introductorio sobre la expresión "El hombre aritmetiza" puede encontrarse en Rizo-Patrón (2008) y Rizo-Patrón (2012).

[93] En otro momento, Husserl también señala que: "[…] sin la posibilidad, para las representaciones auténticas, de sustitutos simbólicos representativos para lo más abstracto o de incluso representaciones impropias, sería difícil distinguirlas y manejarlas, no existiría una vida espiritual más alta y menos aún la ciencia (Hua XII, 349)".

> Una representación simbólica (*symbolische Vorstellung*) o inauténtica es, como su nombre lo dice, una representación a través de signos (*Zeichen*). Si un contenido no se da directamente a nosotros como lo que es, sino sólo indirectamente a través de signos que lo caracterizan unívocamente, entonces, estamos ante una auténtica representación simbólica (Hua XII, 193).

Esto significa que se tiene una representación auténtica de un objeto cuando este se da directamente a nosotros, y una representación simbólica cuando se da a nosotros indirectamente (a través de signos que lo caracterizan unívocamente) "de tal manera que siempre pueda ser identificado" (Centrone, 2010b, p. 32):

> Tenemos, por ejemplo, una representación auténtica de la apariencia exterior de una casa cuando realmente (*wirklich*) nos fijamos (*betrachten*) en la casa; y tenemos una representación simbólica cuando alguien nos da una caracterización indirecta: la casa de la esquina en tal o cual lado, de tal y cual calle

La presentación de una representación simbólica o signitiva puede *sustituir* a una representación auténtica. Así, "la representación simbólica tiene la función de ̒estar en lugar de (subrogado), lo propio, de lo intuitivo cuando no está disponible" (Centrone, 2010b, p. 32). Lo verdaderamente importante en este punto, es que un símbolo no es el objeto presentado, sino un sustituto de aquello que no puede ser presentado realmente; actúa como una *señal indicativa* para ese objeto (y sólo para ese objeto):

> Tal sustitución puede ser temporal, como es el caso, por ejemplo, de la casa, o permanente, si una representación auténtica está siempre más allá de nuestro alcance cognitivo; en este último caso, la representación simbólica tiene la función de un sustituto permanente para lo adecuado (2010b, p. 32).

Empero, no funciona su conversa: una *representación auténtica* nunca podría sustituir una representación simbólica de ningún objeto y, por tanto, nunca podría contar como una representación simbólica de él. Ahora bien, no son sólo los objetos de la percepción los que pueden simbolizarse, sino también conceptos abstractos y generales como el concepto de triangulo. En resumen: se habla de *representación simbólica* cuando: 1) se da un "objeto" por medio de señales o signos unívocos; 2) cuando existe relación de concordancia entre el objeto representado auténticamente y el objeto representado simbólicamente —esto significa que la identidad de un objeto no cambia cuando se da o bien simbólicamente o bien auténticamente, lo que cambia es su modo de presentación—; 3) todo lo que puede enunciarse como verdadero en un objeto auténticamente presentado es verdadero del objeto presentado simbólicamente, y 4) tanto las representaciones auténticas como las simbólicas se pueden utilizar en juicios válidos sobre un objeto.

A partir de la noción de representación inauténtica, Husserl investiga el dominio simbólico de los números; pero esto último requiere, primero, del estudio de la presentación simbólica de las pluralidades (Hua XII, 195) y, segundo, de su aprehensión:

> Para este propósito hay que considerar, por el momento y de cerca, la función de las representaciones inauténticas para la formación de las representaciones plurales (*Vielheitsvorstellungen*), con lo cual debemos limitarnos a la pluralidad de contenidos sensibles (*Vielheiten sinnlicher Inhalte*) (Hua XII, 195)

Limitarse a la pluralidad de contenidos sensibles significa contrastar la intuición de la *cosa sensible individual* con la intuición de un conjunto sensible (*sinnliche Menge*). Aunque en ambos casos intuimos cosas sensibles, lo que distingue a un individuo sensible de un grupo sensible son los tipos de partes/miembros que contienen. Mientras que las partes de las cosas sensibles individuales son propiedades, los miembros de los conjuntos sensibles son *intuiciones parciales separadas* o *discretas.*

> Un conjunto sensible —a partir de ahora admitiremos esta conveniente, aunque no del todo correcta expresión— primero se presenta a un interés que se destaca como una intuición unificada, como un todo. Pero esto no distingue el conjunto sensible de la cosa sensible individual. Tal cosa es también un todo, en función del hecho de que un análisis posterior descubre en ella una pluralidad de partes (*Vielheit von Teilen*), a saber, las propiedades. Sin embargo, en el grupo sensible las partes no están incluidas, precisamente, en la forma de propiedades sino a la manera de *intuiciones parciales separadas* (*gesonderter Teilanschauungen*) (Hua XII, 195).

La cuestión es que al intuir las partes de un individuo sensible, es decir, sus propiedades, nuestra atención destaca (o realza) la combinación de aquellas partes que configuran un todo (individual); mientras que en el caso de los conjuntos sensibles cada uno de sus miembros destaca por su cuenta. En efecto, en el grupo sensible sus miembros están incluidos a la manera de *intuiciones parciales separadas*. Y de hecho son de tal tipo que, en determinadas circunstancias, “nos atraen” con un interés dominante y unitario hacia ellos mismos. Precisamente por esto nuestra intención originaria (*ursprüngliche Intention*) se dirige hacia la formación de una representación colectiva (*Inbegriffsvorstellung*) que aprehende cada una de estas intuiciones parciales por sí misma y las hace reunir con las otras. Nuestra intención está dirigida a tal unión, pero carecemos de la capacidad correspondiente para satisfacer por completo colecciones más grandes.

Dicho de otra manera, si observamos un grupo sensible como un todo y luego sus miembros individuales de forma independiente, es posible volver a reunirlos entre sí. Sin embargo, la posibilidad de satisfacer esta intención con conjuntos muy grandes rebasa toda intuición auténtica. Hay, por tanto, graves dificultades en el intento por comprender cómo aprehendemos grandes conjuntos sensibles (y no-sensibles). Por ejemplo, supongamos que estamos en una enorme estación del Metro de la Cd. de México y esta se encuentra *llena de personas*, "bastaría" con una mirada para enunciar: *eso es un grupo de personas*. Nos basta con levantar la vista y alcanzar a ver un cúmulo de estrellas para enunciar: el cielo estrellado (Hua XII, 196). Pero ¿cómo son posibles estos juicios? ¿Cómo puede un "vistazo" ser "suficiente" para juzgar que estamos ante un conjunto, variedad o pluralidad? (Hua XII, 196). Frente a este conflicto, Husserl señala que no puede hablarse de una auténtica (*eigentliche*) aprehensión de una pluralidad. Para que una pluralidad sea aprehendida auténticamente es necesario que haya tantos actos de presentación como elementos contenga la pluralidad, de modo que cada acto aprehenda uno y sólo uno de sus elementos. En efecto, "para la representación real (*wirklichen*) de un conjunto necesitamos, según los análisis previos, de un acto psíquico que represente cada miembro singular del conjunto y junto con los otros […] (Hua XII, 196)".

Ahora bien, siempre que no se requiera de una determinación exacta de cuántos miembros tiene una pluralidad, podría omitirse la aprehensión real (*wirkliche*) de todos los elementos (individuales) y llevar a cabo una subsunción aún más secundaria. Esto sucede principalmente cuando los objetos son semejantes entre sí y nos interesan sólo como pertenecientes a su género inmediatamente reconocible (Hua XII, 196). Desde luego, esto por sí mismo no es suficiente para satisfacer nuestro interés por determinar una colección cuantiosa, pues además de estos actos de aprehensión individual, hace falta uno que coligue a todos y en virtud del cual los elementos que han sido aprehendidos individualmente sean recogidos y juntados. Dado que el acto de coligación supone los actos de aprehensión individual, aquél tendrá que ser de orden secundario con respecto a éstos, pero no se puede suponer que tal acto de aprehensión de una pluralidad haya tenido lugar cuando de un vistazo se encuentren cientos de elementos formando parte de una pluralidad.

Según lo antes dicho, en las *representaciones auténticas* de *grupos sensibles* se intuye cada miembro singular del conjunto. Bajo las condiciones más favorables, tomando en cuenta todo nuestro "poder mental" y presuponiendo contenidos que son especialmente fáciles de percibir y en una sucesión que no transite rápidamente, se pueden intuir objetos menores a doce elementos[94] (Hua XII, 197). Pero en la *representación no-sensible* de *conjuntos* o *grupos* mayores a una docena ocurre otro proceso. Un proceso que debe permitirnos comprender cómo son posibles los conjuntos, pluralidades y colecciones de objetos cuantiosos (decenas, centenas, millares, etc.) Un intento o hipótesis para explicar este proceso se basa en la "mirada" de la que se habló anteriormente. Desde luego, esta no debe tomarse en un sentido completamente literal, pues la aprehensión no es precisamente instantánea. En efecto, se puede notar cómo enfocamos este o aquel objeto individual o un pequeño grupo aquí y allá, pero en lugar de llevar a cabo todo el proceso de recopilación de todo lo "visto", nos conformamos con lo elemental o rudimentario de *alguno* en particular aprovechando cualquiera de los objetos individuales que se impone directamente. Sin embargo, esta hipótesis plantea varias dificultades: ¿cómo puede la aprehensión y la reunión de unos pocos elementos servir como un signo para una colección total? ¿Qué nos permite saber que el proceso de recolección puede continuarse con un sólo paso o ir más allá de lo que ya se ha coligado? ¿Qué nos permite saber que se está frente a una colección total?

> La solución de estas dificultades será más fácil si primero examinamos más de cerca esas representaciones simbólicas de conjuntos en las que la subsunción inauténtica bajo el concepto de conjunto no se produce en la inmediatez instantánea (es decir, bajo la mera mediación de la aprehensión individual de algunos miembros del grupo), en las que más las actividades psíquicas propiamente requeridas que rinden lo que en general debe rendirse, a saber, la aprehensión sucesiva (aunque no en una comprensión unitaria) de todos los miembros del conjunto (Hua XII, 198).

[94] Incluso el grupo más pequeño de, por ejemplo, cuatro o cinco objetos, frecuente, aunque no necesariamente, presenta una articulación en subconjuntos: 2 + 2 o 3 +1, 2 + 3 o bien 2 + 2 + 1. Para conjuntos cuyo número de elementos es mayor que cinco, tales articulaciones son una necesidad para que ocurra una aprehensión efectiva del conjunto (Hua XII, 216).

En efecto, la solución a esta dificultad es examinar más de cerca las representaciones simbólicas de conjuntos o *representación inauténtica de conjuntos* (*uneigentlichen Mengenvorstellungen*) desde las actividades psíquicas que las hacen rendir. El análisis es paulatino. De entrada, aunque podría reconocerse que un conjunto puede ser intuido por medio de un "vistazo general", este punto de vista no es del todo cierto porque supone que en la recolección de una totalidad algunos miembros se aprehenden inconscientemente. Además de esto, se requiere una cantidad de tiempo considerable y circunstancias extraordinariamente favorables. Un segundo intento de explicación, señala que, en lugar de llevar a cabo todo el proceso anterior, un mero fragmento de él es suficiente (seleccionamos los primeros objetos individuales que se nos imponen, los conjuntamos e interrumpimos tan pronto como formamos la siguiente representación que actua como un sustituto). Sin embargo, también este intento falla y por razones similares: la "totalidad" de los pocos miembros captados no agota la intuición grupal que tenemos ante nosotros; incluso somos conscientes de que, además de los miembros elegidos, también existen muchos otros. Más aún ¿cómo pueden los dos o tres primeros pasos del proceso servir como un signo para el proceso completo presumiblemente previsto? ¿Qué nos permite saber que el proceso de aprehensión por separado puede continuar incluso con un solo paso? En un nuevo intento de explicación de la aprehensión instantánea de un conjunto, Husserl señala que existe *algo* en nuestra experiencia de los grupos sensibles que actúa como una *señal* o *indicación* de que lo que estamos viendo es un conjunto o pluralidad:

> En la intuición del conjunto sensible deben radicar signos indicativos (*Anzeichen*) que pueden captarse inmediatamente, en los cuales se puede reconocer el carácter de conjunto (*Mengencharakter*); ya que garantizan indirectamente que el proceso descrito anteriormente puede ser realizado. Con estos signos indicativos se pueden asociar el nombre y el concepto del conjunto inmediatamente (Hua XII, 201).

Debido a que excedería nuestras capacidades representacionales *representarnos* cada elemento (singular) conectado simultáneamente a una variedad conformada por cientos de elementos, la propuesta de Husserl es profundizar en la *señal* o signos indicativos por los cuales puedan ser tomadas las pluralidades como pluralidades. Esta señal es una característica especifica que es perceptible de inmediato, o sea, una cualidad sensible de orden secundario que viene unida al agregado en tanto y en cuanto se da en la percepción. ¿Cómo es evidenciable esta señal de la que habla Husserl? La señal de la que habla Husserl se encuentra en las relaciones elementales entre los miembros del conjunto. Esto quiere decir que en la asociación de los miembros de un conjunto o pluralidad se presenta cierto *carácter* perceptible de forma *inmediata*, mismo que permitiría el tránsito al *carácter* de conjunto o pluralidad. Dicho con mayor rigor, se trata de tematizar los complejos relacionales que abarcan el conjunto total (*Gesamtmenge*) y que al fusionarse en unidades fijas "distribuyen" la apariencia completa del conjunto y le brindan un carácter específico inmediatamente perceptible:

> Estos caracteres cuasi-cualitativos que en contraste con las relaciones elementales que los condicionan podrían ser la *πρότερον πρὸς ἧμᾶς* proveerían, entonces, de un apoyo para la asociación correspondiente. Indirectamente, ellos garantizarían la existencia de un complejo relacional, y con esto, la de una pluralidad de puntos relacionales (*Beziehungspunkten*) fundados en ella (Hua XII, 201).

Esos caracteres cualitativos o cuasi-cualidades, como bien señala Husserl, garantizan la existencia de un complejo relacional y de una pluralidad de puntos relacionales sin recurrir, por tanto, al proceso de coligación y/o enumeración explícitas. Aprehendemos el agregado de objetos en tanto que pluralidad debido a que así lo *percibimos*. Gracias a estos caracteres cuasi-cualitativos llegamos a tomar conciencia de la posibilidad de continuar la operación que sólo hemos iniciado sin agotar el todo mediante aprehensiones individuales sucesivas, Así, pues, lo anterior nos permite reconocer que existe una propiedad que caracteriza a la intuición unitaria total del grupo y que permite captar, *a la vez*, a los miembros de un grupo distribuidos dentro del campo visual que los presenta (Hua XII, 203-204).

Son numerosos los casos que presentan este tipo de cuasi-cualidades. Por ejemplo, una formación de soldados, un montón de manzanas, una hilera de árboles, una bandada de gallinas, parvadas, manadas, etc. También pueden darse con configuraciones espaciales, como son una hilera de líneas paralelas equidistantes o un conjunto de objetos iguales distribuidos de un modo determinado en el campo visual. Otra ilustración la encontramos en la estructura del tablero de ajedrez y en los fenómenos rítmicos como lo es una secuencia de golpes entre los que se dan relaciones temporales determinadas. En todos estos ejemplos, no percibimos el conjunto como una pluralidad *pura* sino más bien como una *pluralidad organizada*. En ella aparecen los elementos como pertenecientes a un grupo o como miembros de subconjuntos en que el grupo ha de articularse (como pasa, por ejemplo, en la estructura del tablero de ajedrez). Los elementos, que son diferentes y distinguibles entre sí, se dan en la experiencia en relación de pertenencia recíproca debido a que están integrados a una pluralidad organizada o si se prefiere están en una dependencia funcional. En otras palabras, los elementos se dan en tanto que *partes* de un *todo*.[95]

Sobre este punto en particular, la relación entre las partes y el todo se da en términos de momentos dinámicos,[96] esto es, en el modo de una implicación dentro de la percepción de momentos relacionales de un cambio continuo. Esto quiere decir que no hay dos o más cosas particulares que entran en relación, sino *momentos de unidad* de un conjunto que forman una única cosa. Así, por ejemplo, percibimos una bandada de pájaros y cosas semejantes porque en el caso de los todos sensibles lo que se enlaza son las partes independientes (relativamente) unas a otras, por ejemplo, sonidos en la unidad de una melodía[97] o colores separados en pedazos en la unidad de la configuración cromática o figuras parciales en la unidad de la figura compleja.

Dicho en términos generales, la discontinuidad fenoménica es subsanada, por así decirlo, en la percepción de un todo relacional. A fin de dar cuenta de expresiones como fila, montón, bandada, etc., Husserl señala que el todo o pluralidad organizada muestra un rasgo perceptivo característico y específico que le es propio. De este modo, las pluralidades organizadas pueden, por tanto, presentar rasgos cualitativos específicos que les ayudan a establecer diferencias mediante la comparación de los aspectos cualitativos que ofrecen los diversos grupos. Así, una hilera de líneas paralelas y equidistantes nos muestra un aspecto cualitativo característico distinto del de las paralelas dispuestas en subconjuntos, y una hilera de líneas verticales equidistantes muestra también un aspecto diverso del de una de líneas horizontales equidistantes. Inspirándose en las características perceptivas o sensibles de las pluralidades, Husserl emplea el vocablo *momentos figurales* (*figurale Momente*)[98] para

[95] De esto me ocuparé en el cuarto capítulo, donde se analizará la tercera investigación lógica," Sobre la teoría de los todos y las partes".
[96] Tambien se dan de manera estática como en el caso tablero de ajedrez.
[97] Las melodías son elementos todavía más complejos. La secuencia de notas se presenta con un carácter figural propio, a saber, el rasgo cualitativo auditivo de la melodía misma. Pero al analizar este carácter figural y obtener sus componentes determinantes se presentan varios "sub-momentos" figurales: el de índole temporal, que tiene que ver con el ritmo; el de tono y, por último, el de la intensidad. Tales sub-momentos dependen de las propiedades de las notas y también de las relaciones entre ellas. De ese modo, diversos estratos de los momentos figurales se entrelazan entre sí dando por resultado el carácter figural de la melodía.
[98] Husserl posiblemente esté en deuda con las investigaciones de von Ehrenfels y Ernst Mach, en cuanto a los análisis sobre los momentos figurales se refiere. Justo nos recuerda cómo "la cuestión del origen de las

referirse a estos rasgos cualitativos y su configuración como una unidad. Es en virtud de estas propiedades que las pluralidades de esta especie no pueden ser reducidas a meras sumas. En efecto, los momentos figurales constituyen el contenido psico-lógico que permite que el acto psíquico se refiera a una pluralidad en tanto tal y, por ello, hacen posibles las representaciones simbólicas de pluralidades concretas o secuencias numéricas.

> La intuición de la totalidad se modifica dependiendo de si los términos particulares y las secuencias particulares están más cerca o más lejos, o si están igualmente espaciados o hacia fuera, o si corren paralelas una a otra o en un ángulo. El momento figural (*figurale*

---

representaciones impropias de cantidad me condujo a los momentos 'cuasi-cualitativos o figurales' constituidos por las 'fusiones' de sus relaciones de contenido, los mismos que von Ehrenfels, guiado por problemas completamente diferentes, había nombrado cualidades de formas en su famoso tratado de 1890 ["Über Gestaltqualitaten" en *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie* (1890:249-292)]" (Hua XX/1, 295). En la tercera de sus *Investigaciones lógicas* presenta una parte de la Escuela de Brentano que también habría de influenciarlo:

> En general, para todos los desarrollos que en la presente obra hago acerca de pluralidades, momentos de unidad, complexiones, todos y objetos de orden superior, deberá consultarse la obra citada [*Filosofía de la aritmética*] que es mi primera obra y que representa la refundición de mi trabajo de habilitación de 1887 en Halle, trabajo que no ha salido al público y que sólo en parte ha sido impreso. Debo manifestar mi pesar de que muchos de los recientes estudios sobre teorías de las «cualidades figurales» hayan desatendido esa obra, aun cuando una parte no despreciable de los posteriores desarrollos de Cornelius, Meinong y otros, sobre cuestiones del análisis, la aprehensión de multitudes, la complexión, se encuentra ya, según los pensamientos esenciales, en mi *Philosophie der Arithmetik*, bien que con otra terminología. Me parece que sería útil, incluso hoy en día, repasar la *Philosophie der Arithmetik* en lo referente a esos temas fenomenológicos y ontológicos; <u>cuando más que es el primer libro que ha reconocido y estudiado los actos y objetos de orden superior</u>. (1999, p. 426) [Traducción ligeramente modificada. El subrayado es mío].

En efecto, también es un hecho innegable que el concepto de momento figural husserliano está *muy cercano* al concepto de *Gestalt* incluido en las obras de Herbart y Meinong. A la *Gestalt*, según estos filósofos y psicólogos, se puede acceder a través de la igualdad (*Gleichheit*) de los elementos de la percepción sensorial, y junto con la aparición de los *momentos figurales*, a la comprensión de la aprehensión indirecta de conjuntos (Hua XII, 210). Sin embargo, hay que tener presente lo que Kohler explica en su *The Place of Value in a World of Facts*, a saber, que los gestaltistas decían seguir a Husserl, pero que este último rechazaba esta conexión. Esto es, quizá, una muestra del distanciamiento que Husserl, posteriormente, quiso marcar con cualquier tipo de aproximación psicológica, *cf*. Kohler (1938). En el caso de las investigaciones de E. Mach, Husserl reconoce que fue la investigación de von Ehrenfels la que estimuló la "[…] obra del notable físico, es posible que también yo estuviera parcialmente influenciado en el progreso de mi pensamiento por reminiscencias de esa lectura [E. Mach, *Beiträge zur Analyse der Empfindungen*]" (Hua XII, 210-211). Cabe apuntar que para Mach, la *Gestalt* indica la característica según la cual el todo depende de la configuración específica de sus partes. Es un tipo de igualdad geométrica en el caso de las figuras espaciales; rítmicas y melódicas, en el caso del tiempo. Queda claro, entonces, que Husserl no fue ajeno a la propuesta de Mach, a quien posteriormente, dedicará algunos seminarios entre 1903-04 y 1911 con el título "Ejercicios filosóficos de textos modernos por científicos sobre Filosofía de la Naturaleza: Ernst Mach". También conviene tener presente los §§ 53-55 de los *Prolegómenos a la lógica pura*.

> *Moment*) salta a nosotros inmediatamente, y sólo después de una reflexión posterior nos damos cuenta de las relaciones condicionantes y cambiantes de caso a caso (Hua XII, 205)

El momento figural, se trata, dice Husserl, de una unidad de tipo sensible. Desde luego, "no es una cualidad sensible de primer orden, como el color, pero sí debe considerarse como *cualidad de segundo orden*. Es justamente esta última la que intuimos de modo directo cuando percibimos un conjunto de objetos sensibles" (Fernández Beites, 2007, p. 73). Los momentos figurales nos permiten reconocer lo similar en las variedades o pluralidades gracias a un proceso de "asociación originaria". Dicha asociación recorre a todos sus miembros al modo de una transición entre los elementos de una pluralidad. Esto es, precisamente, lo decisivo del momento de unidad: abarca todos los contenidos, proporcionando una unidad *directa* entre las partes o miembros. Así, contra las propuestas psicologistas, el tratamiento fenomenológico de la asociación en *Filosofía de la aritmética* se enfoca en la legalidad esencial que gobierna la donación de una similitud dentro o desde una multitud de fenómenos diferentes. La idea, básicamente, es que esta asociación de *similitud* se constituye a partir de un mínimo de dos datos intuitivos presentados a una conciencia que los engloba en su mutua diferenciación de manera inmediata. Definitivamente, la asociación de similitud es puramente pasiva en el sentido preciso en que aparece a la conciencia tanto si se la destaca como si no; con esta superposición de sentido tiene lugar una asociación en un nivel superior, es decir, una "*fusión*" fenomenológica de una unidad de similitud. Así, gracias a la identidad o similitud sensible de cada uno de los componentes de un conjunto y a la configuración del mismo, es posible agrupar los elementos pertenecientes a una variedad determinada:

> Podemos captar las relaciones simples que unen cualquier par de elementos cercanos en la secuencia; captamos, también, las relaciones de segundo orden que enlazan los pares de relaciones simples que en cierto modo colindan unos con otros ya que tienen en común un fundamento que es idénticamente el mismo. Y no es primero a través de la actividad (que viene después) de relacionar los términos que establecemos estas relaciones de [segundo orden]. Están allí e indudablemente vienen con la unidad de la figura. Que esta unidad es más que la mera suma de las relaciones, es algo que concedo con gusto. Pero eso es después de todo cierto para cualquier unidad que sea más que una mera unidad colectiva. (Hua XII, 206).

Al analizar la cuestión más detalladamente, se observa que para Husserl el momento figural se funda en las propiedades de los elementos de la pluralidad. Si pasamos por alto la agrupación desordenada de cosas heterogéneas, se puede afirmar que percibimos no sólo una pluralidad de objetos sino además una pluralidad de un género determinado (p. ej. el azul, el rojo y el amarillo pertenecen al género "momentos cromáticos"). Cuando nos encontramos con un conjunto que carece de regularidad en la distribución de sus elementos, habrá que atribuir el aspecto cualitativo específico de la pluralidad al hecho de que los elementos en cuestión sean de una clase determinada y no de otra (digamos que se trata de piñas y no de rocas). Ejemplo de esto lo encontramos en expresiones como montón y bandada, pues traducen los momentos figurales que dependen de la igualdad existente entre elementos que se distribuyan sin regularidad. Lo mismo sucede con las relaciones espaciales que existen entre los elementos de una pluralidad que determinan el aspecto cualitativo de la misma en los casos en que los elementos estén ordenados según una estructura característica. Ejemplo de esto último lo encontramos en las expresiones como filas, columnas o batallones, pues expresan los rasgos perceptivos de las pluralidades que presentan una ordenación regular de sus elementos.

Que los momentos figurales dependan de los elementos de las pluralidades y sobre todo de las relaciones entre los elementos de las mismas, se hace evidente cuando las relaciones en cuestión están sujetas a la variación. Cuando se reorganiza una hilera de líneas paralelas equidistantes poniendo a las mismas en grupos o cuando las líneas se reagrupan de modo que formen un sistema de irradiación en vez de uno de líneas paralelas, cambia de inmediato el aspecto cualitativo de la pluralidad que forman. Un efecto similar se obtiene mediante la variación de las relaciones que existen entre los elementos de la pluralidad. En ambos casos, la variación de las relaciones en cuestión conlleva una modificación del correspondiente momento figural, lo cual demuestra, por tanto, que está en función de las relaciones entre los elementos del conjunto (Hua XII, 207-209):

> Los variados tipos de momentos figurales ocurren, según sus diferencias específicas, en las más diversas mezclas o más exactamente fusiones. Cohesivamente fusionados en la intuición correspondiente, están separados solamente por la abstracción. El momento de la configuración temporal, por ejemplo, se fusiona con los momentos de cualidad y la intensidad; y lo compuesto tiene al principio un carácter figural unitario que sólo a través de análisis se descompone en sus componentes. Una melodía implica una intrincada

complejidad de un tipo tal. Un ejemplo bastante simple es ofrecido por una serie de objetos presentes en el campo visual. Aquí el momento de la serie y el momento de igualdad se pueden separar fácilmente (Hua XII, 209).

Ahora bien, cuando Husserl trata de explicar el modo en que las propiedades de ciertos elementos y las relaciones entre ellos contribuyen a la determinación de un dato específico nuevo que se caracterice por la autonomía fenoménica, recurre a la teoría de la *Verschmelzung*[99] o fusión.[100] En la propuesta husserliana, la *Verschmelzung* no debe entenderse en el sentido habitual del término, como cuando dos o más cosas se unen de tal forma que ya no es posible separarlas dando por resultado un nuevo dato sin organización ni articulación internas, sino en el sentido de cierta "transitividad" que nos permite aprehender las características, en este caso cuasi-sensibles, de un miembro y "observarlas" en otro miembro. Al recurrir al concepto de *fusión*, con el fin de explicar los momentos figurales, Husserl amplía el significado del mismo de tal modo que su empleo no esté ya restringido a la esfera de los datos simultáneos. Es por esta razón que mediante la fusión se lleva a cabo el análisis de momentos figurales de diversas especies y así se puede hablar de la existencia de interrelación entre los elementos de una pluralidad, lo mismo ocurre en lo que se refiere a las propiedades intrínsecas de los elementos como a sus relaciones:

En todos los casos, las diferencias entre estos momentos cuasi-cualitativos están en dependencia funcional, ya de las cualidades internas de las respectivas intuiciones parciales, ya de ciertas relaciones y complejos relacionales que conectan las intuiciones parciales entre sí, ya de ambas cosas juntas. Por tanto, vamos a intentar justificar la opinión

---

[99] La noción de "*Verschmelzung*" que Husserl utiliza en *Filosofía de la aritmética*, también representa un claro ejemplo de cómo "el joven Husserl fue un filósofo ecléctico al integrar con éxito conceptos de diferentes disciplinas y tradiciones en su propio marco conceptual" (Ierna, 2009, p. 491). Efectivamente, la noción de *Verschmelzung* fue un término técnico que ya había sido estudiado con detalle por filósofos y psicólogos como Herbart, Wundt, Meinong, Mach, Stumpf y von Ehrenfels. Sin embargo, la adopción de dicho término, por parte de Husserl (y Stumpf), significó también una re-elaboración. En el caso específico de Stumpf, la percepción de una forma (*Form*) surge del fundamento de las presentaciones sensoriales que son el sustrato de toda actividad psíquica; así, cuando se habla de igualdad, proporción o pluralidad de objetos, se dice porque la conciencia ha captado las relaciones de los contenidos de percepción. Ahora bien, las presentaciones sensoriales son "vistas" siempre en relación con lo percibido, son co-percibidas. Esto último es resultado de re-pensar la noción de "fusión" (*Verschmelzung*) como conciencia de la pluralidad de sensaciones que se nos dan sensiblemente siempre y cuando se nos presenten simultáneamente. La "fusión" es el fundamento –y enlace estático– de las mismas. Así, pues, el modo como Stumpf tematiza la "fusión" le permite afirmar que la relación o vínculo entre sensaciones no es una mera suma que daría por resultado un complejo, sino que, por el contrario, la "fusión" confiere a los datos sensibles su aparición como partes de un todo sensible sin modificar con ello su individualidad como datos sensibles. Sobre la relación entre Husserl y Stumpf, *cf.* (Holenstein, 1972, p. 118-131), (Rollinger, 1999, p. 83-122), (Smith, B. 1994) y (Gurwitsch, 1979).

[100] Este concepto será utilizado, de nueva cuenta, en la tercera de las *Investigaciones lógicas.*

> de que estos momentos han de considerarse claramente como unidades en las que las peculiaridades de los contenidos o de sus relaciones primarias se fusionan entre sí. Digo “fusionan” (*verschmelzen*), y con ello deseo hacer hincapié en que los momentos unitarios son precisamente algo más que simples sumas. Comprendemos el carácter casi cualitativo de toda la intuición, como algo simple, y no como un conjunto de contenidos y relaciones (Hua XII, 204).

Dicho de otra manera, la naturaleza sensible o experiencial de estos *todos* se pone de manifiesto en ciertos rasgos cualitativos propios, o sea, en el carácter figural que presenten. Este carácter se experimenta previamente a la distinción de los factores determinantes que resulten del análisis, y se da con toda independencia del hecho de que la distinción ocurra. Así, ni la distinción ni el análisis afectan en lo más mínimo el carácter figural. Por ejemplo, al escuchar una pieza musical, digamos “La danza de los Caballeros” de Sergei Prokofiev, experimentamos la pluralidad de las notas que integran dicho movimiento. Aunque es posible que no adquiramos conciencia de la unicidad de cada nota, pues la *fusión* de varias notas simultáneas puede convertirse en obstáculo para el análisis (de hecho, puede llegar a ser bastante difícil que notemos la pluralidad de las notas que forman los movimientos), *experimentamos* la unidad de la pieza musical. Si, a pesar de todo, logramos analizar las notas que presenten un alto grado de *fusión*, habremos de adquirir conciencia de la pluralidad en cuestión, pero esto no tendrá por resultado el hecho de que desaparezca la *fusión*.

Ahora bien, en el caso de conjuntos más grandes, su representación es imposible sin tomar en cuenta a los momentos figurales de la intuición. Eso sin contar lo difícil que sería hacerse una idea de cómo transformar unos cuantos elementos en conjuntos superiores, es decir, se vuelve complicado argumentar sobre la posibilidad de una enumeración completa perpetua. ¿De dónde sacamos, entonces, la certeza de que realmente se han captado todos los miembros de un conjunto sensible? Si el conjunto posee el carácter de una secuencia simple, los vínculos entre los elementos de la serie (en tanto momentos figurales) son los que nos guían. Si la secuencia está acotada, entonces comenzamos con uno de los términos del límite, y para *otras* circunstancias, se asume el primer y más fuerte estímulo como un criterio discriminatorio. En este último caso, a través del análisis de ese estímulo se llega al primer término (por contigüidad) y este alcanza un segundo término contigüo y así sucesivamente

(Hua XII, 215).[101] En resumen, el momento figural es el foco de interés teórico; las cualidades sensibles son los medios para eso.[102] En el caso de extender las operaciones y relaciones elementales a pluralidades representadas simbólicamente, los momentos figurales servirían sólo como mediadores. Para conjuntos arbitrarios representados simbólicamente se plantea la cuestión de la comparabilidad según la cual los conceptos de igual, más y menos, aparecen en aplicaciones simbólicas. La pluralidad sigue siendo el concepto de un todo (de una determinada colección de contenidos separados) sólo que la segregación de contenidos y su colocación, en lugar de llegar a la realización real, sigue siendo en su totalidad o en su mayor parte una mera intención (Hua XII, 218). Pero aún queda una pluralidad especialmente digna de ser analizada —que amplía el concepto original de tal manera que supera no solo los límites contingentes, sino también los necesarios para la esencia de todo conocimiento—. Un tipo de pluralidad cuya extensión va *más allá* de la capacidad de representación, pues dificulta captar, en forma colectiva, conjuntos de cien, mil o un millón de elementos. "Hablamos, pues, de conjuntos infinitos" (*unendlichen Mengen*) (Hua XII, 219).

En conjuntos sensibles podemos traer cada elemento de un grupo a representación (en sí mismo) mediante una sucesión temporal, aunque no en un acto inclusivo, pero esto es *imposible* en los casos de pluralidades con cientos de elementos, en totalidades, conjuntos y pluralidades donde el concepto de formación auténtica o de su simbolización mediante el agotamiento secuencial de los individuos involucrados contiene una imposibilidad lógica. Por ejemplo, "el conjunto de los números en la serie numérica expandida simbólicamente es infinito, el conjunto de puntos en una línea y, en general, en los límites de un continuo es infinito" (Hua XII, 220). "¿Cómo tienen lugar estos conceptos simbólicos? ¿Qué constituye su contenido psicológico y lógico?" (Hua XII, 220). Para responder esto, Husserl parte de un principio que podemos catalogar como *principio de secuencialidad* con el cual se puede transformar (o *representar simbólicamente* como *transformado*) cualquier concepto ya formado (de un determinado género dado) en un nuevo concepto rigurosamente distinto del primero y este último en otro y así sucesivamente. En otras palabras, nuestra presentación general de un conjunto infinito tiene una naturaleza inductiva y consiste en "(i) la

---

[101] Se debe considerar que las representaciones de conjuntos que se originan de esta manera son auténticas o, mejor dicho, genuinas, ya que todos los miembros en realidad (*wirklich*) aparecen unificados en una representación explícita a través de un solo acto.
[102] Husserl expresamente dice: "las relaciones se fusionan en la unidad de la cuasi-cualidad" (Hua XII, 2016)

presentación de solo unos pocos elementos del conjunto, (ii) la presentación de un principio de construcción para obtener todos los otros elementos, y (iii) la certeza de que dicho proceso de construcción puede llevarse a cabo indefinidamente" (Centrone, 2010, p. 34).

Así, en el caso de la construcción de los números, el proceso de adjuntar una unidad a un número dado arbitrariamente es una operación cuyo concepto anterior garantiza la conducción a un nuevo y determinado número. Según Husserl, si partimos del número uno, entonces este principio de formación lleva a dos, a tres, a cuatro... y a números nuevos y siempre nuevos, sin dar marcha atrás y sin límite. La determinación conceptual es, como la del proceso en sí, rigurosa y, por tanto, los posibles resultados de la construcción secuencial de los conceptos indicados poseen una característica común que los une de manera análoga a como la unidad colectiva une a los miembros de un grupo (Hua XII, 220). Por tanto, cuando hablamos de la totalidad de todos los números naturales representamos ante todo un conjunto en el sentido habitual, es decir, los números de una subsecuencia inicial de la secuencia numérica. A esto se une la representación complementaria de que esta formación, en virtud de su principio de secuencialidad, puede extenderse *in infinitum*, por lo que cada nuevo miembro se determinaría por medio de este proceso. Ya con lo anterior, es fácil señalar el momento figural que ha proporcionado la ocasión para la transposición del concepto de pluralidad a formaciones que, en su carácter lógico, son esencialmente distintas: en primer lugar, en la representación simbólica de los conjuntos el momento figural es la noción de *unidad*, en segundo lugar, en los conjuntos infinitos se habla de un principio más alejado y conceptual que confiere unidad (*determinabilidad*) y le da cierto apoyo a la representación de todo lo que es alcanzable a través de ese proceso iterativo. Mientras que en el primer caso la finitud pertenecía al concepto de "proceso"; en el segundo caso, lo que pertenece al concepto de proceso iterativo es su ser ilimitado (Hua XII, 221).

§6. La representación signitiva de los números

Impulsados por la finitud de la naturaleza humana, establecemos sistemas numéricos que se conciben, siguiendo a Husserl, como *sistemas de numeración sobre una base determinada*.

En párrafos anteriores se evidenció cómo las operaciones aritméticas —operaciones elementales como la suma, la multiplicación, la resta y la división o las de nivel superior, como la exponenciación— se conciben como procedimientos de construcción numérica que generan y, al mismo tiempo, designan números de forma sistemática. Si únicamente tuviéramos acceso lógico y epistemológico a las representaciones auténticas de conjuntos, entonces nuestra serie numérica terminaría, en el mejor de los casos, con doce elementos enumerados, cancelando todo acceso a una continuación más allá de esto.

No obstante, es claro que la expansión simbólica de los conjuntos no se detiene en doce elementos. En el sentido simbólico se puede decir, según Husserl, que a cualquier conjunto arbitrario se le atribuye, incluso antes de que se haya formado un número determinado, una "infinidad" de elementos. La razón de esto es que los números son las distintas *especies* del concepto general de pluralidad. Dicho de otro modo, el conjunto de los números forma un género y los números *particulares* su diferencia específica —y si no su diferencia específica, al menos sí su dominio—. De hecho, existe plena justificación cuando se dice que "el dominio del número abarca una variedad ilimitada (*unbegrenzte*) de especies" (Hua XII, 222). De esta manera, si se comienza con cualquier representación simbólica de conjuntos (arbitraria), se está (al menos idealmente) en la capacidad de expandirla sin límites añadiendo continuamente nuevos y siempre nuevos miembros (o al menos se puede *imaginar* a los miembros del conjunto en una constante reiteración), y en consecuencia formar el concepto de la expansión progresiva del conjunto por medio de sus miembros. Empero, esta formación del concepto simbólico de conjuntos infinitos implica una fuerte idealización de nuestras capacidades de representación (*Vorstellungsvermögens*) (Hua XII, 223). De hecho, agrega Husserl, es imposible formar las reiteraciones requeridas *in infinitum* y organizarlas en una secuencia temporal. La actividad mental para ello se ve sobrepasada. Sin embargo, es posible, por medio del proceso de idealización (*Idealisierung*),[103] ignorar las limitaciones fácticas de nuestras habilidades y concebir los conceptos numéricos simbólicos. De acuerdo

[103] La perspectiva de Husserl estaba basada en la idea de que la idealización en la matemática puede ser caracterizada como un proceso con el cual se introducen nuevos "elementos ideales". Esto se entiende *desde* dos aspectos correlativos. Por un lado, la llamada idealización es un trabajo (rendimiento) de las facultades de la conciencia y supone una *referencia* a un dominio ideal de objetividad, por esto mismo es trascendente respecto de la conciencia *real*. Por otro lado, la idealización es vista como *completación*, esto es, el "llenado" de un dominio dado mediante la introducción de algunos "elementos ideales".

con esto, el conjunto en expansión (o conjunto *potencia*) se expande simbólicamente (a través de la idealización) teniendo como correlato, en representación simbólica, un número determinado para cada nuevo nivel o escala numérica: "la variedad de particularizaciones numéricas concebibles es, por tanto, infinita, como la variedad de niveles de conjuntos (*Mengenstufen*) concebibles" (Hua XII, 223). De esta manera, cree Husserl, se puede hablar en un sentido simbólico, pero totalmente determinado, de números en los que su representación auténtica se nos niega. A partir de aquí podría establecerse la infinitud ideal del reino de los números sin que por ello se dé por terminada una investigación sobre una filosofía de la aritmética.

Es verdad, agrega Husserl, que de ninguna manera esta investigación ya está completa. Las simbolizaciones remotas a las que se ha llegado ciertamente no pueden ser de ninguna utilidad, dada su vaga generalidad, a los fines de enumerar y calcular. (Hua XII, 223). Lo que se necesita para alcanzar claridad en la aprehensión de grandes números o grandes conjuntos, cuyos números asociados son demasiado grandes para intuir, es intuirlos como conjuntos o colecciones más pequeñas, cuyos números asociados no sean demasiado grandes para *intuirlos*. Para ilustrar mejor lo anterior se puede pensar en el análisis o descomposición arbitraria de un conjunto en subconjuntos auténticamente enumerables y su reconducción a la (re)construcción simbólica de un concepto numérico mayor a 10 o 12 elementos, pero compuesto aditivamente de números auténticamente representables. Tomemos por caso la base 10, y por tanto conjuntos de 10 elementos. Frente a formaciones numéricas simbólicas como "29", "54" o "23", podemos descomponerlas en conjuntos más pequeños. Por ejemplo, se podría pensar que la formación numérica "23" está dividida en tres subconjuntos (más pequeños), cada uno con números que sí podrían intuirse: un subconjunto de ocho miembros, el siguiente de seis y el último de nueve, y así concebir el número original ("23") o "el número que es ocho más seis más nueve". Según Husserl, al hacer esto hemos introducido un mínimo de *autenticidad* en nuestra manera no auténtica (simbólica) de conceptualizar el número en cuestión, aunque el concepto "23" siga siendo simbólico. De hecho, todavía se concibe el número como realmente se nos ha dado (es decir, simbólicamente, ya que *no es,* y no puede ser, realmente dado a nosotros).

Ahora bien, dado que esos números más pequeños son intuitivos, esta forma de concebir *n* números está más cerca de ser auténtica que si sólo hubiéramos concebido el número como *cualquier número de miembros en este conjunto*. Si dividimos conjuntos más grandes en conjuntos parciales, sin superar, por ejemplo, la base diez, pronto llegaríamos a tantas repeticiones de los mismos números parciales que no se marcaría ninguna diferencia con la asignación de las formaciones simbólicas emergentes ni con las correspondientes sumas no articuladas de unidades. Este inconveniente puede remediarse, al menos en cierta medida, si el número de elementos (p. ej. en la suma) permanece lo más pequeño posible. Así, no solo los números auténticamente representados, sino también los números simbólicos ya formados, pueden ser admitidos como mediadores de la formación de la suma (Hua XII, 224-225).

Dadas tales simbolizaciones, nada se interpone en el camino de la expansión universal del dominio numérico original más allá de cualquier límite. Pero, de nueva cuenta, no se llega muy lejos por los medios indicados. Si por cada paso se usaran nuevos tipos de resúmenes para la construcción de los conceptos numéricos simbólicos, entonces la variedad de formas numéricas pronto llegaría a ser tan vasta que sería inconcebible que la memoria las dominara; eso sin contar el problema de la comparación numérica (Hua XII, 226). Para superar estas deficiencias se requiere un principio rigurosamente sistemático que sea coadyuvante (al *principio de secuencialidad*) en la construcción de las formas numéricas simbólicas que están destinadas a complementar el estrecho dominio de los números auténticamente representables, sin imponer cargas excesivas sobre nuestra memoria. Además, se deberá garantizar que mediante este procedimiento nunca se obtenga más de una forma numérica simbólica para cada uno de los números que se simbolizarán; sólo entonces estaremos en posición de inferir, a partir de la divergencia en las formas numéricas que surgen de la enumeración comparativa de dos multiplicidades, la diferencia de los números correspondientes.

Según Husserl, todos estos requisitos intentan satisfacerse de la manera más simple: apelando al recurso de formación sucesiva de números mediante la adición de una unidad al número ya formado. Por ejemplo, si pensamos en los números auténticamente dados como dispuestos de modo que cada uno surja del anterior por incremento de una unidad, entonces obtenemos la siguiente secuencia numérica: 1; 2 = 1 + 1; 3 = 2 + 1; 4 = 3 + 1…10 = 9 + 1... hasta llegar a la base 10. Que esta secuencia (tomando diez como el número final auténticamente representable) puede ser simbólicamente continua, es claro. Ahora bien, si llamamos al número que está simbolizado *once* (11), por la suma de "10 + 1", entonces ese número será definido por la ecuación: 11=10 + 1. De esta misma manera se obtiene la secuencia de definiciones numéricas que puede continuarse indefinidamente y mediante la cual podemos contar cualquier pluralidad arbitraria siempre que el rango de formación del concepto y la terminología se hayan desarrollado suficientemente. Vale la pena presentar más detalles en este punto. La enumeración de una pluralidad procede de la siguiente manera: se comienza con cualquier miembro, se enumera como uno; este pasa a un segundo número (y a la forma 1 + 1 = 2); la transición y la adición de *uno* más los *dos* recién formados rinden 2 + 1 = 3, y así sucesivamente hasta que todos los miembros estén agotados. Con cualquier miembro que comencemos y cualquiera que sea la dirección que tome la enumeración sucesiva a través de los miembros, el resultado siempre deberá ser el mismo. Por tanto, varias enumeraciones cederían a diversas formas simbólicas de composición del mismo número a partir de números parciales.

Pese a lo anterior, es claro que el método antes expuesto contiene defectos que limitarían su aplicación a límites muy estrechos: (1) la composición aditiva de números propios produce una multiplicidad de formas simbólicas carente de un criterio organizativo; (2) no existe una designación unívoca entre los números propios (el mismo número no debe estar presente más de una vez, es decir, todos deben tener diferentes nombres en la construcción), y (3) no se da ningún criterio para reconocer inmediatamente la relación de cada número simbólico dado con respecto a la relación de orden. Presentemos algunos detalles de estos puntos. Cada nuevo paso en la formación de números simbólicos requiere un nuevo paso en el nombramiento. Si tuviéramos que elegir nuevos nombres (y eso seguramente es inevitable), esto implicaría cargas memorísticas inmanejables. No se estaría en la capacidad de soportar la carga si todos los nombres nuevos necesariamente tuvieran que ser independientes entre sí (Hua XII, 228). De la misma manera, convertir las designaciones en una verdadera imagen especular de las formaciones conceptuales bajo el nombramiento de la *unidad* es insuficiente, cruda e incluso lo más opuesto a lo que se busca. De manera muy cierta, Husserl señala: "cuan desacertado y embarazoso (*ungeschickt und hemmend*) serían los nombres que surgen de solo cinco o seis, por no mencionar veinte o treinta, repeticiones del nombre *uno*" (Hua XII, 228). Por si fuera poco, quién podría distinguir diecinueve repeticiones de *uno* en lugar de veinte, por no decir nada de las denominaciones para números mayores (Hua XII, 228).[104]

En consecuencia, los defectos arriba enlistados se convierten en demandas a cumplir para dar con un principio de construcción que sea uniforme e inequívoco para todos los números sean o no accesibles a la intuición directa: (1) poder calcular efectivamente con todos los números imaginables; (2) clasificarlos de manera unívoca sobre la base de la relación de orden y (3) cumplir las siguientes condiciones: velocidad en los cálculos, facilidad para distinguir constructos numéricos y univocidad en el principio de construcción. Ahora bien ¿cómo encontrar un principio simple y transparente que permita construir, a partir de unos pocos signos fundamentales (*Grundzeichen*), un sistema de signos (*Zeichensystem*); que además confiera a cada número determinado un signo conveniente, fácilmente distinguible y que señale distintivamente su posición sistemática en la serie numérica? (Hua XII, 228-229). Más aún ¿cómo podría construirse un sistema de designación numérica basado en algunos pocos signos fundamentales sin que un sistema de formación conceptual (*System der Begriffsbildung*), también fundado en ciertos conceptos fundamentales, se corresponda con él en un paralelismo riguroso? En otras palabras, se trata de establecer una estricta correspondencia entre los conceptos numéricos y los signos numéricos, base sobre la cual descansa la justificación epistemológica del cálculo aritmético.

Podría suponerse que todo es cuestión de la nomenclatura y la importancia otorgada a la formación numérica por medio del nombrar. Pero en realidad esto sólo ocurre dentro de los límites auténticos de lo que nombramos. En este sentido, esta hipótesis lejos de esclarecer la formación numérica la entorpece al hacer extremadamente confuso la consecución de pasos uniformes para la conformación ilimitada de números distintos (donde cada paso nuevo presupone toda la serie anterior). Por ejemplo, “el concepto 50 se nos da a través de la formación (*Bildung*) 49 + 1. ¿Pero qué es 49? Es 48 + 1. ¿Qué es 48? Es 47 + 1, y así sucesivamente” (Hua XII, 229). Cada respuesta es en realidad un nuevo desplazamiento, un nuevo paso hacia atrás, y solo cuando hayamos llegado al dominio de los conceptos numéricos auténticos podríamos quedar satisfechos. Incluso el principio de la formación de series mediante la adición sucesiva de una unidad resultó demasiado tosco, mientras que la

[104] Esta misma argumentación aparece desde el capítulo quinto de *Filosofía de la aritmética*.

imposibilidad de resolver problemas de cálculo suficientemente complejos con las series numéricas naturales exige una construcción conceptual más inclusiva y poderosa que requiere herramientas lógicas más refinadas.

Ahora bien, además de satisfacer los requisitos mencionados anteriormente, la expansión del dominio numérico apropiado debe efectuarse de tal manera que todos los constructos numéricos puedan obtenerse a través de unos pocos signos fundamentales de acuerdo con un principio de construcción unitario y fácilmente comprensible. También es necesario que los nombres para los números de la aritmética se construyan a partir de unos pocos nombres básicos, para que de este modo puedan controlarse. En la búsqueda de un principio de construcción numérica que satisfaga las necesidades antes expuestas, Husserl recurre a lo que en la terminología actual se denomina un *sistema de numeración en una base dada*. La esencia de tal sistema consiste en el hecho de que construye todos los conceptos numéricos usando algunos conceptos elementales y reglas básicas de operaciones. La base (1... X)[105] o base 10 está constituida por los números que se nos dan correcta o auténticamente (o por los que están cerca de ellos) por ser accesibles para nosotros sin operaciones complejas o simbolizaciones:

> Consideremos los números:
>
> 1, 2, . . ., X
>
> en su secuencia (*Folge*) natural, como el segmento inicial del sistema que nos es dado; y, para empezar, intentamos nuevas formaciones a partir de la serie del principio anterior:
>
> X + 1, X + 1 + 1, X + 1 + 1 + 1
>
> [En lugar de estas sumas] podemos escribir más simplemente:
>
> X + 1, X + 2, . . ., X + X,
> X + X + 1, X + X + 2, . . ., X + X + X… (Hua XII, 230. El agregado es mío)

Veamos esto con detalle. Podemos sustituir los numerales correspondientes tomados del segmento fijado inicialmente por todas las sumas de unidades (teniendo como mayoría X miembros) para tener una notación simple. Sin embargo, este modo de designación no es suficiente. Cuanto más avanzamos, más tediosa se vuelve la designación por la acumulación de sumas de X. Un nuevo medio de abreviatura se presenta en este punto: la simple

105 Debe aclararse que el sistema base diez no es el único. Husserl sugiere que el sistema de base doce podría de hecho ser más útil para articular los así llamados números superiores (Hua XII, 237).

enumeración de los X conduce a la simbolización multiplicativa en pensamiento y signo; es decir, a: 2X, 3X, 4X, etc. Usando el mismo tipo de argumento, Husserl justifica la introducción del tipo exponencial, donde los constructos formados por la multiplicación iterativa de X (XX, XXX, XXXX) proliferan a tal punto que nuevas abreviaturas se vuelven necesarias. Lo mismo ocurre al contar los factores que llevan a la operación de exponenciación (X^2, X^3, X^4). Se observa que la serie continúa y que introduce una nueva operación; sin embargo, por razones y fines prácticos, Husserl sostiene que es suficiente detenerse en la operación de exponenciación. Se debe aclarar un poco más esta construcción numérica.

Pongamos, por forma simbólica, la base 10 y analicemos el siguiente ejemplo: "México es un país con treinta y dos Estados" (32).[106] Estos se pueden organizar como tres grupos de diez Estados y "dos sobrantes". Puede decirse también que el número de Estados es *cualquier número de tres decenas y dos*. Otro ejemplo puede ser la cantidad de teclas en un piano y su organización como ocho grupos de diez teclas, con ocho teclas sobrantes, pero también puede decirse que el número de teclas es *un número con ocho decenas y ocho* (que finalmente se abrevia a "ochenta y ocho"). Hasta este momento, el sistema de base diez proporciona una forma algorítmica de concebir los grandes números que solo podemos conceptualizar simbólica o inauténticamente, de modo que nuestros conceptos se vuelven más auténticos y distintos. Esto lo nombraremos, siguiendo a Husserl, un número sistemático.[107] Si nos enfrentamos con el concepto simbólico (equivalente al anterior) como "el número que resulta de tres nueves y un cinco", nuestro trabajo es descubrir cómo conceptualizar ese mismo número de una manera que coincida con nuestro sistema de base

---

[106] Se debe tener en cuenta que las *bases* son características de los sistemas numéricos posicionales, pero en el caso de los sistemas de expresiones numéricas, en nuestros lenguajes naturales, no lo son. Quiero decir con esto que no se trata de independencia entre sistemas, sino que no se refieren a ellos. En otras palabras, el sistema numérico natural no es posicional porque se habla de sistema numérico posicional cuando el número representado se calcula asignando a cada símbolo básico un valor que depende exclusivamente del tipo de símbolo y de su posición en la secuencia. Ahora bien, no todos los sistemas posicionales tienen una base, pero los que sí, es porque la función general que se asigna a cada símbolo contribuye a su semántica en función de su lugar en la secuencia. Finalmente, es cierto que el número diez juega un papel importante en la descripción de la sintaxis y la semántica de expresiones numéricas de varios idiomas, pero es impreciso llamar a este aspecto "base diez" cuando esta expresión tiene otro uso más específico en la descripción de la estructura de sistemas posicionales como el de los números arábigos que de hecho usamos para calcular. Estas apreciaciones se las debo al Dr. Axel Barcerló Aspeitia.

[107] Los números sistemáticos no son en realidad números, sino más bien una clase especial de conceptos numéricos o formas de concebir los números como conjuntos de números más pequeños, por ejemplo, la base 10, la base 12, la base 8, etc.

diez (número sistemático). Después de un poco de trabajo, por ejemplo, se descubre que "cualquier número que sea tres nueves y un cinco" es lo mismo que "cualquier número que sea tres decenas y dos sobrantes". Hacer esto, descubrir la forma sistemática de concebir el mismo número que estamos conceptualizando de manera no-sistemática, es un tipo de cálculo (Hua XII, 230-233). Esta circunstancia particular conduce a una observación que debe ser enfatizada. Según Husserl, si la serie de números naturales que se piensa se desarrolla en todos los puntos en paralelo con la secuencia de nuestro sistema de base 10, entonces parece que nada se interpondrá en el camino de considerar las designaciones de este último como designaciones de los números correspondientes en el primero: a cada número natural le corresponde un número sistemático totalmente determinado (igual a él), y para este último, a su vez, corresponde una designación totalmente determinada que refleja su forma de formación. "El concepto de número sistemático sería, por tanto, el mediador (*Vermittler*) entre el número natural y la denominación (*Benennung*) sistemática" (Hua XII, 233).

Así el número sistemático alcanzado (específicamente en nuestro sistema decimal) no es, entonces, un mero método para simbolizar los conceptos que se dan, sino más bien uno para construir nuevos conceptos y simultáneamente designarlos junto con su construcción. Por supuesto, agrega Husserl, se puede formar el *ideal* de una continuación irrestricta de la secuencia numérica simple al corresponder idealmente a nuestra capacidad mental (Hua XII, 234). Se puede, además, pensar en las formaciones de signos del sistema numérico como un simbolismo para los miembros paralelos de la secuencia numérica, pero se debe considerar el hecho de que todos estos sólo son modos de representación y expresión que son inauténticos en el más alto grado y tienen su origen en las idealizaciones mencionadas (Hua XII, 234). Interpretarlos en otro sentido más auténtico sería distorsionar todo el sentido y el propósito de la formación sistemática de números. Finalmente, se debe enfatizar una cosa más, a saber:

> Que las llamadas formaciones numéricas naturales no son en lo más mínimo más naturales que las que son sistemáticas en el sentido más estricto (por ejemplo, el decimal). En ambos casos se trata de formaciones simbólicas para aquellas especies del concepto de número que no son accesibles para nosotros en el sentido auténtico; y es puramente cuestión del enjuiciamiento lógico, esto es, ajustado a los fines del conocimiento del dominio de los números, decidir qué método de formación simbólica es preferible (Hua XII, 234).

Considero importante describir con un poco más de detalle la sistemática que Husserl ha desarrollado. Esta presenta un aspecto doble: por un lado, proporciona a cada número un modo sistemático de formación (como reemplazo simbólico del concepto de número auténtico (ausente)) utilizando ciertos números elementales. Y, por otro lado, proporciona, a partir de los numerales "1, 2 ... X", un modo sistemático de formación para el numeral correspondiente a cada uno de los números (Hua XII, 237). Existe, pues, un paralelismo entre el método para la continuación de la secuencia de *conceptos* numéricos y el método para la continuación de la secuencia de *signos* numéricos, válido no meramente de manera general, sino más bien para cada paso individual, uno después del otro. Asimismo, la sistemática de los signos toma como punto de llegada el reemplazo de las definiciones numéricas y las reglas de operación que son el medio regular del progreso sistemático con las correspondientes fórmulas convencionales que expresan las equivalencias de las combinaciones de signos (Hua XII, 237). Ahora bien, si el sistema de formación numérica refleja fielmente estas formulaciones conceptuales, entonces cada designación de números también deberá tener correspondencia exacta con las designaciones de los elementos y operaciones. Del mismo modo, si todas las formaciones numéricas son consecuencias rigurosas de los conceptos elementales junto con sus formas de combinación y transformación, entonces las formaciones de los signos paralelos también tendrán que ser consecuencias rigurosas de su signo elemental (signos junto con sus formas de combinación y transformación) (Hua XII, 238). Ciertamente, en el primer caso las transformaciones se desarrollan sobre la base del conocimiento que procede necesariamente de los conceptos relevantes; mientras que en el último caso las transformaciones de los signos procederán de una manera totalmente externa y mecánica (Hua XII, 238). De hecho, la estructura significativa es una forma de producir signos a partir de signos de acuerdo con reglas preestablecidas, sin necesidad de referirse a su contenido conceptual.

¿Cómo es que ocurre esta manipulación de signos numéricos más allá de los límites cognitivos? El sistema de signos funciona mecánicamente, es decir, es un mecanismo consecuencial que produce símbolos automáticamente y procede de una manera absolutamente independiente con respecto a los conceptos que se pretendían expresar. Esto implica que cuando se cuentan conjuntos determinados en la práctica, así como cuando se construyen números mediante operaciones, la forma de operar que conduce a la solución es puramente mecánica. El punto es que el cálculo no es una actividad con conceptos, sino con signos. Estos signos sensibles implicados aquí no son, a la manera de los signos del lenguaje, meros acompañamientos de conceptos. De hecho, participan de manera mucho más llamativa; tanto así que finalmente dominan casi todo el campo numérico. En efecto, agrega Husserl, los paralelismos anteriormente descritos permiten considerar las continuaciones sistemáticas de la serie de signos como los *representantes* (*Repräsentanten*) de las continuaciones sistemáticas en la serie de conceptos (representados inauténticamente) (Hua XII, 241). Así, si uno pregunta sobre el contenido exacto del concepto, y por lo tanto sobre el sentido de este símbolo, entonces comienza una cadena de explicaciones que tiene su apoyo en la unidad y en el modo especial de formación en la composición del signo. Solo de esta manera se gana la posibilidad de una continuación del dominio numérico que, incomparablemente más amplio que cualquier otro, puede satisfacer completamente los requisitos de la ciencia aritmética y ordinaria (Hua XII, 242). Además, agrega Husserl, hay que tomar en cuenta que es más conveniente apegarse a los símbolos externos; incluso donde el contenido conceptual podría ser llevado ante la mente. En efecto, las reflexiones sobre los conceptos son las fuentes de las cuales surgen las reglas de todas las operaciones aritméticas, pero los signos sensibles son los que subyacen a la práctica matemática. [108]

Ahora bien, con lo hasta ahora expresado y teniendo en cuenta la base 10, se vuelve necesaria una segunda enumeración, a saber, la de los conjuntos con base diez. Si el número es mayor que diez, se requiere la introducción de un signo; de hecho, un nuevo signo para evitar la confusión de los diez simples con diez veces diez. Si por conveniencia de la exposición se expresó este signo como *un centenar*, la misma enumeración de cientos forzó la introducción de un nuevo signo, el *mil* (diez veces cien) y así sucesivamente. Cada nuevo paso, que consiste en la adición de una unidad al número que se acaba de formar, daría un nuevo número. Pero este nuevo principio secuencial no es el único que determina las nuevas formaciones. El empleo de las operaciones auxiliares de multiplicación y exponenciación permite el uso repetido de formaciones numéricas de modo que cada número y numeral aparecen como una construcción sistemática a partir de unos pocos números elementales y

[108] Por práctica matemática debe entenderse la forma en que se presenta y se detalla la concepción del sistema de signos como un mecanismo de funcionamiento autónomo durante el siglo XIX. Esto es un testimonio de que Husserl comprendió muy bien, y abrazó, los resultados del proceso de transformación del álgebra que, durante el siglo XIX, condujo al nacimiento del álgebra abstracta.

numerales (los dos se ejecutan rigurosamente en paralelo). Ahora bien, esta descripción del cálculo ciertamente parece más cercana a la práctica de las matemáticas a diferencia de la hipótesis del mero enumerar o aquella donde sólo se podían considerar los primeros números auténticos. Estamos avanzando, junto con Husserl, hacia la conexión de nuestra experiencia (común) de los números en el mundo con la forma en que los matemáticos practican la aritmética. Si recapitulamos un poco, lo que se ha descubierto hasta ahora es que la forma en que los matemáticos realmente calculan tiene más sentido si los vemos como (1) pensando no sólo en los números que podemos intuir, sino también (2) concibiendo esos números que no podemos intuir como colecciones de números más pequeños que sí podemos intuir, y luego (3) tratar de traducir algorítmicamente esas formas de concebir los números que no se ajustan a un sistema dado en formas de concebir los números que encajan en los números sistemáticos. Esto es asunto del último capítulo de *Filosofía de la aritmética*.

En el último capítulo de *Filosofía de la aritmética*, "Las fuentes (*Quellen*) lógicas de la aritmética"[109] —fuentes lógicas de la aritmética significa aquí necesidades que tiene el intelecto para representar y conocer el dominio de los números y las relaciones numéricas— presenta una respuesta final a la pregunta: ¿cómo ocurre la manipulación de signos numéricos más allá de los límites cognitivos? La respuesta de Husserl se presenta en varias etapas. Antes se debe tener en cuenta que la técnica de cálculo (*Rechenkunst*) mantiene una estrecha relación con la aritmética. De hecho, a menudo se identifican. Sin embargo, para Husserl la aritmética no se limita a los números individuales (o clases completas de los mismos), sino a las relaciones de los números entre sí (*Zahlbeziehungen*) (Hua XII, 256). La aritmética así concebida es una empresa ciertamente más modesta que la que buscaban fundamentar sus contemporáneos matemáticos, Frege, Dedekind y Peano. Una consecuencia de lo anterior es que el concepto de cálculo también se modifica, al menos en dos sentidos: en el sentido más amplio, calcular es cualquier tipo de derivación de números a partir de números. En el sentido más restringido, calcular requiere que el método de derivación sea sensible, es decir, que funcione según reglas preestablecidas. Desde estas perspectivas, *calcular* significaría derivar

[109] El adjetivo *lógico* se aplica a tres puntos principales en este último capítulo de *Filosofía de la aritmética*: (1) La relación entre género y especie. El color, por ejemplo, es una "parte lógica" del rojo; como se recordará este uso fue tomado de Brentano; (2) Las significaciones o significados (y sus relaciones) de expresiones, en contraste con sus partes y propiedades, y (3) dispositivos (o necesidades o condiciones) que nos permiten extender el conocimiento aritmético con seguridad absoluta. El tercer término es el que Husserl más utiliza en este apartado de *Filosofía de la aritmética*.

números de números a través de operaciones en signos sensibles. Ya sea que adoptemos el camino de la formación de conceptos o el de la formación de signos exteriores, cualquier método que se elija, agrega Husserl, es de hecho un método de cálculo. Asumiendo lo anterior, podría definirse a la técnica de cálculo como la técnica de la "cognición" aritmética, y la aritmética como el ordenamiento total y sistemático de este conocimiento aritmético (Hua XII, 256-257).

Ahora bien, en cuanto al método de derivación de números a partir de números dados, pueden distinguirse dos casos particulares: o bien esta derivación es una operación esencialmente conceptual o bien es una operación sensorial perceptible que, utilizando el sistema de signos numéricos, deriva el signo actual del signo anterior de acuerdo con reglas fijas. Es verdad que Husserl ha venido anticipando desde capítulos anteriores que el método de conceptos es muy abstracto, limitado, laborioso y hace la práctica más extensa. En cambio, la operación por medio de signos es más concreta, sensible a los sentidos, inclusiva y es, con un grado modesto de práctica, conveniente para trabajar. Esta última hace que el método conceptual sea completamente superfluo, ya que su uso no es adecuado para ningún estudio científico (Hua XII, 257).

Sobre la caracterización del método de los signos sensibles, Husserl señala que este es, pues, "el método lógico de la aritmética" (*logische Methode der Arithmetik*) (Hua XII, 257). Ahora bien, con todo lo dicho hasta ahora se puede concebir el cálculo como "cualquier modo de derivación regulado de signos a partir de signos dentro de cualquier sistema de signos algorítmico de acuerdo con las 'leyes'[110]—o mejor: las convenciones— peculiares de este sistema para la combinación, la separación y la transformación" (Hua XII, 258). Hemos arribado, pues, al desarrollo de la idea de que es posible interpretar el cálculo como una actividad realizada exclusivamente con signos (computar, diríamos actualmente). Este sentido del concepto de calcular declina en favor de un sistema de signos que se puede considerar independiente de su sustrato conceptual (el sistema de conceptos numéricos) y donde, además, el mismo sistema de signos puede interpretarse en diferentes sistemas

[110] Bajo el título de leyes (*Gesetze*), Husserl se refiere a las reglas de cálculo y no a las leyes básicas algebraicas. De acuerdo con la definición, el cálculo consta de tres etapas separables: "conversión de los pensamientos en signos, cálculo con signos y conversión de los signos en pensamientos. Pero para garantizar la confiabilidad del *método* de los signos, el método debe recibir una base lógica, es decir, elaborar la estructura del sistema de conceptos.

"calculatorios". En efecto, con esta nueva interpretación del concepto de calcular, Husserl obtiene una caracterización exacta del método algorítmico-formal. Calcular ahora significa derivar signos de signos de acuerdo con reglas formales fijas. Husserl atribuye gran importancia a este concepto de cálculo ya que hace posible una separación exacta de los diversos momentos *lógicos* que están involucrados en cada derivación de números a partir de números: *La conversión de los pensamientos iniciales en signos — cálculo — y la conversión de los signos resultantes en pensamientos* (Hua XII, 258)

La generalidad de esta caracterización posibilita el análisis y la representación de la estructura de cualquier proceso de *resolución de problemas* de tipo numérico y también de aquellos independientes de la naturaleza específica del dominio en el que estamos operando. Por ejemplo, si se pide determinar un número desconocido x que, multiplicado por un segundo número a (por ejemplo, 2) y dividido por un tercero b (15), es igual a un cuarto número c (4), basta con volver a traducir el problema en términos algorítmicos y aplicar las reglas fijas del cálculo que expresan las relaciones entre los signos dentro del sistema. El problema se expresaría de la siguiente manera $\frac{ax}{b} = c$ y, basado en las leyes de transformación, desarrollado como $x=\frac{bc}{a}$. En este punto, se reemplazan los signos con los pensamientos, es decir con los números, y se obtiene $x= \frac{15.4}{2}$ de donde es fácil derivar el desconocido x, o 30. El resultado obtenido es un signo que se define por su ubicación determinada dentro del sistema, es decir, por la relación con los otros signos. Así, en lugar del origen *psicológico* del número, la nueva noción de análisis se centra en las relaciones mantenidas por el objeto aritmético.

Lo anterior se funda, pues, en tres momentos distintos y secuenciales, el primero y el tercero son conceptuales, mientras que el segundo es puramente formal-algorítmico: "codificación formal del problema + cálculos + solución como decodificación del resultado del cálculo".[111] Ahora bien, según la formulación anterior, en el dominio numérico ocurren dos pasos: un primer paso consiste en que de los complejos de conceptos y numerales que se dan en cada caso, uno se abstrae del primero y uno sólo retiene al segundo (Hua XII, 259); un segundo paso ocurre cuando los signos numéricos y sus correlaciones conceptuales

[111] La marcada relación de este esquema con los trabajos de G. Boole, puede estudiarse en Centrone y Minari (2017). De Husserl puede leerse Hua Mat. I.

permiten la asignación de nuevos números. Así, de continuidad con lo planteado, la combinación sistemática de los conceptos y sus interrelaciones pueden explicar el hecho de que las correspondientes designaciones se entrelacen para formar un sistema desarrollado coherentemente, donde, además, se tiene la certeza de que cualquier derivación de signos y relaciones de signos dados será válida conforme al sentido prescrito por las reglas para el simbolismo. En consecuencia, para especificar la fundamentación de los métodos de cálculo en la aritmética se debe volver a los conceptos numéricos y a sus formas de combinación (Hua XII, 259). Ahora bien, el sistema de números para Husserl consiste en primer lugar en una serie de números normativos, números normales (*Normalzahlen*) o estándares fijos a los que hacen referencia todas las demás formas numéricas (Hua XII, 261). En este sentido, la tarea de la aritmética es identificar los tipos de formularios (por ejemplo, como un tipo aditivo, multiplicativo o más complejo), y luego buscar las reglas de cálculo para cada tipo con el que reducir la forma numérica dada a los números normales. Revisemos con detalle estas últimas ideas.

En virtud del orden en la secuencia numérica de los naturales, podemos decidir de inmediato, para dos números sistemáticos, si representan el mismo o diferentes números, y en este último caso también podemos señalar de manera inmediata cuál es mayor y cuál es más pequeño. Una simple mirada a sus posiciones relativas será suficiente (Hua XII, 260). Pero ocurre todo lo contrario con las simbolizaciones no sistemáticas de los números. Las formaciones de un tipo como 18 + 49, 5 x 43, y similares, nos proporcionan formas numéricas simbólicas que no son menos determinadas que las formas decimales que les corresponden. En este caso ¿cómo se decide si dos de esos números son iguales o no? Husserl responde, si ya poseemos un sistema numérico (base 10, base 12, etc.,) la respuesta es clara: "mediante la reducción a los números sistemáticos correspondientes" (Hua XII, 261). En párrafos anteriores, se adelantó la idea general de esta "reducción aritmética". Reducción aritmetica quiere decir que a cada número no sistemático le corresponde un número sistemático unívocamente determinado que es igual a él, es decir, uno que simboliza el mismo concepto numérico auténtico. Por ejemplo, el concepto equivalente, "un número de tres doces y un ocho es un número no sistemático". Es decir, es una forma de concebir un número que no es consistente con las reglas del sistema de base 10, pues presenta el número como una colección de doces con algunas sobras, en lugar de una colección de decenas con algunas sobras. Empero, que el número sea cuatro decenas y cuatro o tres doces y un ocho, son dos formas de concebir el mismo número (el número que llamaríamos cuarenta y cuatro). Ahora bien, una vez que hemos adoptado cualquier sistema numérico particular (base-diez, base-dos, base-doce, etcétera), la tarea es traducir cualquier concepto numérico (no sistemático) a su equivalente en conceptos sistemáticos. La razón de esto es que el objetivo de Husserl es mostrar que la operación de los conceptos es estrictamente paralela al método externo de los signos. Así, en un primer momento "reducción aritmética" significa que cualquier formación simbólica compleja (18 + 48) debe reducirse a uno de los números sistemáticos (66). En suma, para cada número sistemático y la operación en él, corresponde un signo unívoco y una reducción paralela en los signos que da el mismo resultado. Dicho de otro modo, dada cualquier forma de concebir un número que no coincida con el sistema algorítmico que se ha adoptado, el trabajo será descubrir *cuál es la* forma de concebir ese mismo número en nuestro sistema. Bien señala Husserl:

> Nuestra última investigación condujo a un postulado general de la aritmética: las formaciones simbólicas que son diferentes de los números sistemáticos deben, donde sea que aparezcan, reducirse a los números sistemáticos equivalentes a ellas, como sus formas normativas. En consecuencia, surge, como la PRIMERA TAREA BÁSICA DE LA ARITMÉTICA, SEPARAR TODOS LOS MODOS SIMBÓLICOS CONCEBIBLES DE FORMACIÓN NUMÉRICA EN SUS DISTINTOS TIPOS, Y DESCUBRIR PARA CADA TIPO LOS MÉTODOS QUE SON CONFIABLES Y LO MÁS SIMPLE POSIBLE PARA LLEVAR A CABO ESA REDUCCIÓN. (Hua XII, 262)

Lo que Husserl llama la primera tarea básica de la aritmética tiene, entonces, dos partes: (i) la clasificación de todas las expresiones numéricas no sistemáticas (compuestas) en sus tipos principales, y (ii) la aclaración de los procedimientos más simples y más ciertos para la reducción de las expresiones numéricas complejas a esos tipos correspondientes (expresiones sistemáticas, numerales).[112] Además de esto, dicha tarea fundamental demanda la revisión de las operaciones aritméticas elementales que Husserl presentó, sin mucho éxito, en el capítulo diez de *Filosofía de la aritmética*.

[112] También podría expresarse de este modo: (1) separar todos los modos simbólicos imaginables (operaciones aritméticas) de formación de números en sus distintos tipos (aditivo, multiplicativo, etc.) (2) descubrir para cada tipo los métodos que sean confiables y lo más simple posible para llevar a cabo esa reducción. Es decir, para cada operación concebible, la aritmética debe encontrar un método de cálculo, un procedimiento algorítmico eficiente, para ejecutarla.

Recapitulando un poco. Un logro de Husserl alcanzado hasta este momento es la idea que nos dice que la primera y esencial tarea radica en el descubrimiento de reglas generales para la reducción de las diversas formas de número a ciertas formas normativas. Ya en este punto, agrega Husserl, se prevé que las llamadas "operaciones aritméticas elementales" no son sino los métodos para llevar a cabo esta reducción (Hua XII, 262). Pongamos por caso la evolución que ha sufrido la adición. Al principio de la investigación husserliana, el concepto de adición se lograba mediante la reflexión sobre la forma en que varias totalidades se conducían a una sola que abarca todas sus unidades. Pero ahora, al hablar de adición, por ejemplo, de 8 + 6, se posee un cierto número sistemático que es equivalente a esta suma ("14"). Ahora bien, dado que los conceptos numéricos inauténticos no son accesibles para nosotros, operamos con signos sustitutos rigurosamente definidos (y clasificados) dentro de una secuencia de conceptos normativos; y así como el número simbólico individual es un representante de un número auténtico, así también cada operación simbólica de combinación representa una auténtica operación definitiva (aunque no ejecutable inmediatamente). Surge la pregunta ¿cómo se pueden llevar a cabo estas tareas de reducción (operaciones)? (Hua XII, 263). Para responder lo anterior, se necesita, a juicio de Husserl, la presentación completa del sistema total de los números o, mejor dicho, concebir el dominio primitivo de los números como una de las formas sistemáticas y tratarlas como realmente ejecutables. Desglosemos con más detalle. Un sistema numérico adecuado, en el caso de Husserl, la base diez, incluye, además de un algoritmo para concebir números grandes como colecciones de números más pequeños, un algoritmo para traducir formas no sistemáticas de concebir números en formas sistemáticas de concebir números, y también un sistema de signos para ayudar en estas traducciones. El sistema de signos provisto por un sistema numérico adecuado incluirá: (1) un signo "unívoco" para cada uno de los números básicos desde cero hasta el número de base del sistema (pero sin incluirlo); (2) un algoritmo para *componer* los signos que sirven para designar números mayores; diferente, además, a los signos para los números básicos, y (3) un algoritmo para traducir los signos que representan números concebidos de manera no sistemática en los signos de los mismos números de manera sistemática. Con todo lo anterior, el proceso para *encontrar números* a partir de otros números en virtud de ciertas relaciones conocidas que existen entre ellos, es, por supuesto, la tarea del cálculo. En general, los procesos aritméticos estándar para llevar a cabo esta tarea son cálculos que reducen la expresión numérica compuesta a un solo número que corresponde, a su vez, a un "número sistemático". Siguiendo con la base 10, y siguiendo a Husserl, se tiene, por un lado, la serie de números decimales (u otros) números y, por otro lado, un grupo indefinidamente grande de descripciones definidas formadas a partir de esos números junto con los signos aritméticos de suma, resta, multiplicación, y división (las *cuatro operaciones elementales* de la aritmética), y otros signos que se introducirán más adelante.

Enseguida, Husserl introduce, discute y detalla las formaciones numéricas surgidas a partir de las *cuatro operaciones elementales* de la aritmética (Hua XII, 264-273). En este caso presentaré sólo brevísimos apuntes para no dilatar más la presentación. Según él, las operaciones fundamentales mediante las cuales podemos formar nuevos números con otros dados, son la adición y la partición (*Teilung*). La adición se presenta una operación que determina, dados *n* números, el número *b* de los elementos del conjunto formado (uniendo) *n* conjuntos que tienen respectivamente *n* elementos. En cuanto a la partición, ella busca el número de miembros de un conjunto obtenido partiendo otro conjunto que posea cierto número dado de elementos. Hay dos formas de partición: la sustracción y la división. La sustracción puede describirse así: dado un ·conjunto con *m* elementos, si se separa de él un subconjunto con *n* elementos, el número de los elementos del subconjunto restante es el resultado de la sustracción. La división así: dado un conjunto con *m* elementos, si se lo parte en subconjuntos iguales con *n* elementos cada uno, el número de los miembros del conjunto de estos subconjuntos será el número resultante de la división. La multiplicación, por otra parte, no es sino una forma especial de adición. Puesto en ejemplos un poco más claros. Las expresiones más características de la aritmética son de los siguientes tipos: "45 + 26", "65 – 15", "7x37", "80÷5"… y sus complicaciones. Estas pueden leerse como frases descriptivas: la suma de 45 y 26 o la diferencia entre 65 y 15, etc. En general, los procesos aritméticos estándar para llevar a cabo esta tarea son cálculos que reducen la expresión numérica compuesta a un sólo número que corresponde, a su vez, a un *número sistemático*. Así, en los números no sistemáticos como "523", "319" y "158"se colocan en cierta disposición columnar y, a través de procesos *bien conocidos*, el número "1000" emerge de ellos. La descripción: "suma de "523, 319 y 158", se reduce al número "1000" que es el nombre más simple para la clasificación del número correspondiente dentro del sistema de conceptos de números de base 10. Otro ejemplo, "5 × 7–3" tendría como su concepto sistemático equivalente “cualquier número es tres decenas y dos” o simplemente “32”. Entonces, con un sistema numérico adecuado no tendríamos que calcular únicamente concibiendo un número de una manera no sistemática y luego seguir las reglas para traducir esa manera de concebir el número en una forma sistemática de concebir el mismo número; también podríamos utilizar los signos y los algoritmos que son proporcionados por el sistema para construirlos y transformarlos en nuestras conceptualizaciones y traducciones.

La anterior reducción es un procedimiento estrictamente automático o técnico, pero el resultado es siempre el mismo que si se tratara de un proceso completamente conceptualizado o incluso uno intuitivo, y eso se debe al riguroso paralelismo establecido entre el orden de los números y operaciones, o dicho en términos husserliano: se presuponen, por un lado, el sistema numérico elaborado de manera completa y coherente y, por otro lado, un sistema de designación numérica que lo refleja completa y coherentemente (Hua XXI, 272-273). Pero dentro de la aritmética general hay tipos de caracterizaciones indirectas o no sistemáticas de números distintos a los mencionados hasta este punto, y que también sirven en representaciones simbólicas de números. Sobre todo, existe el caso en que un número se caracteriza indirectamente por medio de una ecuación (o incluso sistemas de ecuaciones) que implican uno o más números desconocidos. Lo que sabemos de ese número es que su valor, si se supiera, daría, dado estas y aquellas relaciones, el resultado expresado en la ecuación. En efecto, agrega Husserl, los métodos para llevar a cabo las cuatro operaciones elementales no son los únicos concebibles. Ellas de ninguna manera agotan el rango de operaciones concebibles en el cálculo (Hua XII, 276). Todavía son concebibles muchas otras formas de composiciones de números simbólicos y para cada una de ellas debe plantearse una solución que sea correlativa con aquellas que las cuatro operaciones resuelven para sus formas de composiciones numéricas.

Ahora bien, la manera sistemática en que el número se ha construido y el sistema algorítmico de transformaciones al que pertenece, nos permite calcular, pero ¿qué se quiere decir con esto? Según Husserl, el algoritmo para construir signos de números complejos a partir de signos numéricos simples refleja *exactamente* el algoritmo para concebir números grandes como colecciones de números más pequeños a los que los signos numéricos nos permiten acceder o vincular, incluso cuando no podemos concebir claramente los números con los que estamos tratando de trabajar. Pero ¿cómo funciona el algoritmo para el cálculo técnico o automático, según Husserl? Primero, el algoritmo nos dice que agreguemos los números en el *lugar de las unidades* y así consignar un nuevo complejo de signos. En segundo lugar, en ningún momento se solicita hacer un uso mental del cálculo. Lo que tenemos es la puesta en marcha de un conjunto de equivalencias básicas de signos y un cierto proceso metódico para producir complejos de signos apropiados y registrar los resultados. En otras palabras, debido a que el sistema de signos que fue diseñado para ayudarnos a calcular conceptualmente en un sistema numérico dado, es posible calcular sin concebir los números de ninguna manera mental. Esta es, de hecho, la práctica matemática: la manipulación de signos y no la conceptualización numérica.

Las composiciones numéricas y las operaciones correspondientes tomadas en consideración hasta ahora, siguen sin agotar la totalidad de las formas numéricas concebibles (Hua XII, 278). En efecto, Husserl advierte que existe toda una variedad de formas nuevas que surgen de la combinación de las que *ya se formaron* (son sus elementos básicos). Es ahí donde surgen problemas tales como multiplicar una suma por un número, dividir un producto por una suma, elevar un cociente a una potencia, etc. Todo lo anterior proporciona, *ipso facto*, un tipo de representación simbólica numérica que debe evaluarse en el sentido indicado anteriormente, es decir, reducirlo a un número sistemático determinado (Hua XII, 278). Ahora bien, la evaluación puede resultar simplemente de seguir, paso a paso, la progresión de las operaciones elementales indicadas, pero los intereses lógicos requieren una vez más que, por un lado, se deba garantizar la posibilidad de ejecución y, por otro lado, la mayor simplificación posible (Hua XII, 279). En cuanto a la primera parte, las operaciones fundamentales son bastante suficientes. Pero en el último aspecto, es “indispensable un estudio preciso de las relaciones recíprocas (*wechselseitigen*) en las que se fundamentan las diversas operaciones elementales” (Hua XII, 279). Para solucionar lo anterior, Husserl cree que es posible reemplazar una secuencia de operaciones con una secuencia equivalente de otras operaciones que sea más simple o al menos más fácil de llevar a cabo, y tal vez esta última con otra, hasta que finalmente se llegue a una secuencia que exhiba un mínimo irreductible de complicaciones o dificultades, y luego se evalué mediante la ejecución real de las operaciones básicas indicadas. Con esto se observa que no es la necesidad de la ejecución más perfecta posible para las operaciones compuestas (más complicadas) lo que da importancia a esos problemas de reducción, sino la necesidad de validar los métodos más perfectos posibles para la evaluación de las operaciones básicas en sí mismas.

Husserl se pregunta ¿será esto adecuado para los objetivos del conocimiento aritmético? La respuesta es no (Hua XII, 289). Las reglas formuladas ahorran el trabajo innecesario y presentan operaciones puramente mecánicas en lugar de pensamientos reales. Ahora bien, si estas reglas se establecen e inculcan de antemano, entonces la ejecución de cualquier tipo de complejos operacionales puede elegir la ruta de cálculo más corta y más ventajosa en cualquier circunstancia sin tener que recurrir en ningún momento a la significación de los signos. Bien señala Husserl:

> Las deliberaciones científicas mediante las cuales se definen los conceptos de las diversas formas simbólicas de construcción de números, junto con el conocimiento de sus relaciones recíprocas utilizadas en el establecimiento (*Aufstellung*) de un mecanismo de reglas de cálculo que rigen la combinación, la ordenación (*Anordnung*) y la transformación equivalente de estas formas, forman el dominio de la aritmética general (Hua XII, 280).

Hasta este punto únicamente se ha llegado a una serie de problemas que han dado lugar a una necesidad lógica para el estudio de las diversas formas de formación de números simbólicos y de las leyes de su conexión recíproca. Pero existen otros casos concebibles.

> Un número también puede definirse simbólicamente como una parte integrante (*Bestandteil*) desconocida de una formación (*Gebildes*) caracterizada con tanta precisión que su valor ya es conocido o puede calcularse por medio de una formación de operaciones construida completamente con números conocidos (Hua XII, 281).

En una palabra, los números también se pueden definir mediante *ecuaciones*. El valor de ese número, que está vinculado (o incluso: por estar vinculado) a ciertos números dados mediante tales y cuales operaciones, produciría en caso de que se supiera, directamente o indirectamente, aquel resultado conocido. Incluso cabe pensar en la posibilidad de que un número esté definido por un sistema de ecuaciones, en lugar de una ecuación única. Los números que satisfacen estas condiciones se consideran como formaciones últimas y elementales.[113] Si, ahora, tales tareas como estas también conducen a formas numéricas

[113] En este punto, Husserl nos recuerda que los números negativos, imaginarios, fraccionarios e irracionales aún *no han sido introducidos*. Pero advierte, y esto lo aclararemos en el tercer capítulo, que través de ellos ocurre en nuestro dominio numérico una reducción de cálculo de los números inversos a los directos (Hua XII, 282).

esencialmente nuevas, es decir, a las que son últimas y no más reducibles, y si lo que producen está libre de contradicciones, en todas las circunstancias o solo bajo ciertas, estas cuestiones, agrega Husserl, requieren investigaciones separadas. En cualquier caso, para Husserl todas o sólo las clases caracterizadas de forma determinada de estos números se pueden reducir a esas tareas elementales. Puede ser manejable desentrañar el complejo de operaciones en el que el número desconocido se enreda a través de una serie de transformaciones de equivalencia de tal manera que finalmente se destaca como un número conocido, uno que tiene su equivalente en una estructura operativa fundada sobre números, todos claramente conocidos. Es obvio que estas transformaciones se basan únicamente en un conocimiento científico exacto de las relaciones entre los diversos tipos elementales de formaciones numéricas y las formas de su complicación. “[…] Así, esta segunda gran clase de problemas, que es tratada por una rama especial de la teoría numérica de la mayor importancia —la del álgebra— trata la necesidad de una aritmética general en el sentido definido anteriormente de una teoría general de las operaciones (Hua XII, 282)”.

Finalmente, continua Husserl, con esto se han caracterizado los dos grandes grupos de problemas que requieren para su solución una aritmética general. El primero tiene que ver con una determinación indirecta del número por medio de un complejo equivalente de conjunciones dadas de números conocidos, y la tarea aquí consiste en reducir al mínimo las dificultades y complicaciones involucradas en la ejecución real. El segundo tiene que ver con una determinación numérica que es indirecta en un grado mucho más elevado, por medio de un complejo de operaciones que se dan de manera incompleta, en la medida en que el número desconocido en sí funciona como un sólo término en las conjunciones; la tarea aquí consiste en determinar lo desconocido, ya sea completamente, o al menos por medio de un complejo equivalente del primer tipo y, en consecuencia, puede considerarse como el representante de un número conocido (Hua XII, 283). Con los últimos problemas considerados, todos los tipos concebibles de determinaciones de números simbólicos se agotan. Por tanto, y citando a Husserl, se puede expresar su resultado de la siguiente manera:

> El hecho de que en la incomparable mayoría de los casos estemos limitados a FORMACIONES NUMÉRICAS SIMBÓLICAS nos obliga a formar un dominio numérico regulado en forma de un sistema numérico (ya sea en la serie numérica natural o el sistema en el sentido más restringido de la palabra). De acuerdo con un principio fijo, un sistema

> numérico selecciona cada uno de los conceptos numéricos reales a partir de la totalidad de las formaciones simbólicas que pertenecen a él y son equivalentes a él, y a la vez le da un sitio sistemático. Para todas las otras formas de número concebibles surge entonces el problema de la evaluación: es decir, de reducción clasificatoria al número de sistema equivalente a ella. Pero un estudio de las formas imaginables de formación de números nos enseñó que la invención de métodos apropiados de evaluación depende de la elaboración de una aritmética general, en el sentido de una teoría general de las operaciones (Hua XII, 283).

Este sugerente cierre del primer volumen de *Filosofía de la aritmética* encuentra su continuación en los *bocetos* de Husserl para el segundo volumen que nunca vio “luz” en una forma acabada e impresa. De esto me encargaré más adelante.

2.3.- La reseña de Frege de *Filosofía de la aritmética* y la respuesta de Husserl

§7. Introducción y breve estado de la cuestión

La publicación de *Filosofía de la aritmética* trajo consigo un notable avance en las incipientes investigaciones fenomenológicas de Edmund Husserl. Con un propósito bien definido, *Filosofía de la aritmética* se convirtió en una referencia particular —y controversial— entre las indagaciones ya existentes sobre la fundamentación de las matemáticas a las que ya me referí en el capítulo anterior. Justo al interior de esta constelación de publicaciones *sobre* la fundamentación de las matemáticas es donde se originó una de las polémicas o controversias filosóficas más importantes de las postrimerías del siglo XIX, que tuvo como protagonistas a Edmund Husserl y Gottlob Frege. Bajo esta premisa, los objetivos de este apartado serán: (1) estudiar la recensión de *Filosofía de la aritmética* hecha por Frege en 1894 (de ahora en adelante la reseña de 1894);[114] (2) elaborar una posible respuesta a esta recension crítica, y (3) presentar un balance general sobre *Filosofía de la aritmética*. Debo aclarar que este apartado no busca ofrecer una exhaustiva elucidación de las diversas interpretaciones que se hacen de un autor u otro, ni de las decenas de comentarios sobre su relacion filosófica. Lo único que ofrezco en este apartado es una presentación cuyo punto de partida es la

[114] La importancia de esta reseña es que en ella se apoyan dos propuestas de interpretación histórica diametralmente opuestas en torno a la tematización husserliana del concepto de número; la caracterización del concepto de signo; el uso de la psicología como método filosófico y, por supuesto, la irrupción de la lógica pura. Por un lado, se encuentran los que señalan que *Filosofía de la aritmética* estuvo condicionada por el escenario intelectual de Alemania y consideran esta obra como un trabajo ecléctico, pero encallado dentro de un psicologismo que solo Frege pudo develar (*cfr*. D. FØllesdal (1958), H. Dreyfus /Hall (1987), David Woodruff Smith/Ronald McIntyre (1975) y M. Dummet (1981)); y por otro lado, los que proponen la adopción de un enfoque pre-fenomenológico que, con independencia del escenario anterior y de Frege mismo, haría del camino filosófico-matemático del joven Husserl una ruta sin cortes hasta las *Investigaciones lógicas* (*cfr*. Mohanty (1982, 1977) y Drummond (1985)). Ambas propuestas son, a mi juicio injustificadas o al menos insostenibles, pero demostrar un juicio como este me llevaría centenares de hojas. Lo que me resta hacer es ofrecer algunas claves de interpretación tomando en cuenta no sólo la reseña de 1894, sino cartas, recensiones en común, reseñas no consideradas hasta este momento y, finalmente, una suerte de mediación entre ambas posturas.

ponderación en los juicios emitidos por Frege en su reseña de *Filosofía de la aritmética*, así como los aspectos no visto por Frege en su crítica.

§8. La reseña de Frege a *Filosofía de la aritmética* (1894)

G. Frege publicó su recensión sobre *Filosofía de la aritmética* en 1894. Publicada originalmente en el *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*,[115] la reseña es, en realidad, una respuesta a lo expuesto por Husserl en la sección "El intento de Frege" de *Filosofía de la aritmética*, a propósito de los *Fundamentos de la aritmética*. Recordemos qué es lo que Husserl critica de Frege:

> La vigencia de las últimas observaciones también queda notablemente ilustrada por el libro de Frege, a menudo citado e ingenioso (*geistreiche*), dedicado exclusivamente al análisis y la definición del concepto de número. En efecto, él plantea la pregunta de por qué podemos designar todas las cosas con el nombre "uno", al que hemos dedicado largas discusiones. Ocasionalmente se topa con la respuesta correcta, pero luego toma distancia lejos de la verdad. Es este el lugar para discutir el curioso (*merkwürdigen*) intento de Frege, porque la concepción que finalmente alcanza se mantiene, si atendemos esencialmente, en estrecha relación con la teoría de equivalencia criticada anteriormente (Hua XII, 118).

Husserl critica la propuesta de Frege desde tres flancos: (i) por evitar problemas psicológicos que, para él, eran centrales; (ii) por dar una definición de un concepto básico (la noción de número es primitiva, por tanto, debe remitirse a la actividad mental que lo origina y no a una definición) y (iii) por hacer del carácter extensional una razón suficiente para aclarar la idea de número. Me parece que no es necesario volver a explicar el primer punto, basta con decir que Husserl no comparte el punto de vista de Frege, o dicho propiamente, Husserl se inclina a favor de un estudio psicológico descriptivo del concepto de número y rechaza la visión logicista. Sobre la segunda objeción, Husserl señala que sólo "puede definirse lo que es lógicamente compuesto. Tan pronto como nos encontramos con los últimos conceptos elementales, termina toda definición" (Hua XII, 119). Dicho con otras palabras, conceptos

[115] Para este apartado utilizaré la edición de Ignacio Angelelli de las obras de G. Frege (1990).

elementales como *calidad, intensidad, lugar, tiempo*, etc., no pueden ser definidos lógicamente por ser, justamente, conceptos primitivos. Lo único que puede hacerse en tales casos es señalar los fenómenos concretos a partir de los cuales se abstraen los conceptos y así dejar en claro la naturaleza del proceso de abstracción involucrado. La tercera objeción da por hecho que las oraciones numéricas, desde el punto de vista fregeano, implican una afirmación sobre un concepto. Desde este enfoque, para Frege el número no se adjudica (*zugeschrieben*) ni a un objeto individual ni a un conjunto de objetos, sino más bien al concepto (*Begriffe*) bajo el cual caen los objetos enumerados. En resumen, Husserl cree que este tipo de emplazamiento lejos de enriquecer el programa lógico, lo empaña con largas secuencia de definiciones y análisis relacionados con ella (Hua XII, 120-121). Con resultados de este tipo, agrega Husserl, lo único que este método permite definir no son los contenidos de los conceptos, sino sus extensiones.

Volvamos a la reseña. Lo dicho en ella parece de lectura simple, pero en realidad es muy compleja y presenta ciertas dificultades para su interpretación, por ejemplo, da la impresión de que Frege leyó "a medias" *Filosofía de la aritmética*, pero eso es algo que no puedo asegurar. En dicha reseña se presentan al menos una docena de críticas a la concepción husserliana del concepto de número; a la tesis de que 0 y 1 no son números; al psicologismo "presente" en toda la obra y, por último, al infundado interés por hacer de la abstracción un método infalible para alcanzar el concepto de número. Enseguida presento estas y otras críticas junto con los argumentos que las sostienen.

1) Ambigüedad definicional. Pluralidad (*Vielheit*), multiplicidad (*Mehrheit*), colección (*Inbegriff-Sammlung*), agregado (*Aggregat*) y conjunto (*Menge*) son todos sinónimos en *Filosofía de la aritmética*.

La advertencia es clara: no podemos tomar por equivalentes los conceptos antes mencionados. En los *Fundamentos* (1884, §§28, 29, 38 y 40), Frege había desacreditado tres métodos más comunes, y por ende menos rigurosos, de definir el concepto de número: 1) por sus condiciones de aplicabilidad (adjetival o atributiva); 2) por su vinculación a una imagen o representación mental (*Vorstellung*) y 3) por su definición como "pluralidad", "conjunto" o "agregado" que excluyen tanto al 0 como al 1. A juicio de Frege, la concepción del número en *Filosofía de la aritmética* presenta un riesgo similar al asumir que son los conjuntos o pluralidades o agregados el origen del concepto de número. Sin embargo, no precisar el concepto de conjunto o subsumirlo bajo nociones muy amplias, como las de multiplicidad o pluralidad, o aplicarlo en realidades tan diferentes como el segmento de una línea, una persona, un montón de hojas o una manada de lobos, trae consigo confusiones tales como: "Werther es *uno*, pero tiene *muchas* partes", "una jauría de veinte perros incluye una *pluralidad* de veinte orejas o cuarenta patas". Eso sin contar que "la relación lógica entre una multiplicidad y un número no es del todo clara" (1884, p. 179).

2) Husserl no establece la distinción entre un concepto y la extensión de un concepto (1884, p. 179-180). De hecho, "el asunto sería eventualmente más claro si se estableciera una mejor distinción entre el caer bajo un concepto y la subordinación" (p. 179-180).

En los §§68 y 69 de los *Fundamentos,* Frege presenta una definición en la que se fundamenta la crítica anterior: el concepto de *P* es biyectable con el concepto *Q*, si y sólo si hay una biyección entre los objetos (elementos) que caen bajo *P* y los objetos (elementos) que caen bajo *Q*. Dicho en otros términos: el número que pertenece al concepto *F* es la extensión del concepto numéricamente equivalente al concepto *F*. Esto, además de presentar la existencia de una relación de equivalencia entre *F* y *lo que cae bajo F,* nos dice que el conjunto de *componentes determinantes* que describen las *propiedades* de los *objetos* (*Gegenstand*) que caen bajo él, fija su tipo de entidades y las identifica en virtud de un particular modo de referencia que es definido de forma lógica.[116] Según Frege, esta correspondencia biunívoca no está presente en la obra de Husserl y, por tanto, imposibilita la aparición de una relación puramente lógica del tipo F es equinumérico (*gleichzählig*) a G.

3) El enlace colectivo es una relación "mental" o un acto psíquico (1884, p. 180).

En la introducción a los *Fundamentos,* Frege presenta un requisito elemental que debe cumplir toda investigación acerca de la naturaleza de la aritmética: "Se debe distinguir claramente lo lógico de lo psicológico, lo subjetivo de lo objetivo" (1884, p. x). Según Frege, esta condición no se cumple en *Filosofía de la aritmética* en cuanto al enlace colectivo se

[116] La distinción entre función y objeto, producto del trabajo maduro de Frege en sus *Leyes fundamentales*, ya es visible desde sus *Fundamentos*. *Cfr.* Mendelsohn, R. (2005).

refiere, pues, "[…] de acuerdo con la opinión del autor, [el enlace colectivo] es también una relación psíquica […] (1990, p. 170)", y en tanto tal, hace de la lógica parte de lo que conocemos burdamente como psicologismo. Que la estructura lógica de un concepto deba estudiarse psicológicamente es una proposición fuera de lugar para Frege. Su trabajo abunda en razones para rechazar este enfoque. En efecto, si algo caracteriza el proyecto de Frege es su intento por demostrar que las verdades de la aritmética son en realidad verdades primitivas de la lógica o, lo que es lo mismo, demostrar que las proposiciones de la aritmética son analíticas y que toda lógica puede ser construida sin acudir al concepto de intuición pura *a priori*. De acuerdo con el logicismo de Frege, todo concepto de las matemáticas (aritmética, álgebra y análisis) puede ser *definido* o *deducido* en términos puramente lógicos o desde las definiciones de la lógica. Esta reducción del lenguaje aritmético al lenguaje lógico no significa una simplificación, antes bien constituye un avance epistemológico invaluable en términos de fundamentación de principio, pues si la aritmética es reducible a la lógica, su estudio se reduciría a la explicitación de ciertos principios lógicos que justificarían su *analiticidad*. Según lo anterior, las tesis (o condiciones) del logicismo a considerar son dos: (i) la lógica define el lenguaje matemático y (ii) la lógica demuestra el conjunto de verdades matemáticas, toda vez que el auxilio para tal encomienda no debe venir de la psicología, sino de las matemáticas mismas que están en estrecha relación con la lógica. En resumen, la crítica a Husserl dice que la aritmética no puede ser considerada como una ciencia cuyos objetos de estudios sean la intuición (Belna, 1996, p. 200), la imaginación o acto psíquico alguno.

4) La interpretación husserliana del concepto de número es ingenua. Un enunciado numérico sólo se predica sobre un concepto o la extensión de un concepto, no sobre un conjunto como meros "algos" (1884, p.180).

En los §§18 al 26 de los *Fundamentos*, Frege asume una postura contraria a dos posicionamientos naturalistas ya clásicos: la obra de Stuart Mill y los trabajos de Leibniz-Grassmann. Básicamente, y dicho de un modo muy general, estos filósofos admiten la posibilidad de alcanzar las verdades aritméticas a través de proposiciones empíricas obtenidas por inducción. Por ejemplo, Stuart Mill pensaba que a partir de la adición de la cuenta por uno se llegaba al concepto general de número en una suerte de "abstracción". En un segundo momento, Frege dirige sus críticas a las posturas de Locke, Leibniz y Schröder cuyas propuestas señalan que el número es una idea o algo subjetivo, pero si el número es una idea da lo mismo decir que es una imagen (§27), y si esto es así, entonces el número es una representación subjetiva haciendo retroceder la aritmética hasta la psicología. En suma: fundar la actividad del contar en una sucesión o simultaneidad es sólo mantener el viejo prejuicio de no saber diferenciar entre signo numérico y número o entre el número y las unidades.

5) No existe una clara diferencia entre una representación (*Vorstellung*) objetiva y una representación subjetiva (1990, p. 182).

El punto central de esta crítica es que la abstracción practicada en *Filosofía de la aritmética* admite un compromiso psicologista que afecta de manera esencial a los objetos que caen bajo un mismo concepto. Esto quiere decir que en la relación de la conciencia *de* algo (o *con* algo) se da una correspondencia entre el pensar y *algo* que es trascendente a él. Este *algo* no sólo no es parte inmanente del pensar o de la conciencia en general, sino que tampoco se vuelve tal por el mero hecho de ser captado. Por tanto, no se pueden reducir los pensamientos a representaciones o a la combinación de representaciones, pues esto borraría "la diferencia entre representación y concepto, entre representar y pensar. Todo deriva hacia lo subjetivo" (1990, p. 182). Es preciso remarcar desde ahora que Frege utiliza el término *Vorstellung* al modo de una idea o imagen mental y, desde luego, en su sentido más psicológico para así distanciar las nociones de objeto y concepto.

6) La equinumerosidad y el concepto unívoco de uno-a-uno husserliano no supone nunca relación biyectiva, sino una relación falaz (1990, p. 183)

El análisis fregeano exige definir el número a partir de su propia biyectabilidad. Dicho de otro modo, se debe probar que la equinumerosidad de las extensiones de los conceptos F y G es condición materialmente necesaria y suficiente de la *igualdad* de los números asociados con F y G. En el §55 de los *Fundamentos*, Frege sugiere que un número es un concepto bajo el cual caen ciertos objetos, siendo cada número un objeto independiente (§57). Las definiciones de 0 y 1 permiten definir el paso de un número al siguiente mediante la formulación: de que al concepto F le corresponde el número (n+1) cuando existe un objeto a que cae bajo F tal que al concepto que cae bajo F, pero no a, le corresponde el número n. El hecho de que la equinumerosidad sea una relación de equivalencia le permite proponer su famosa definición: un número no es otra cosa que el número de algún concepto. A juicio de

Frege, lo anterior no es todo claro (o sencillamente no existe) en *Filosofía de la aritmética*. En dicha obra, Husserl no fija qué se entiende por igualdad numérica y, por tanto, no puede definir de manera lógica el número correspondiente a cada concepto.

7) La expresión "y" en la cuenta por uno (uno y uno y uno…) no agrega nada a las oraciones numéricas. Además, no responde a la pregunta ¿cuánto? De hecho, "[…] es notable que esta forma de enunciado numérico casi no ocurre en la vida ordinaria y, cuando ocurre, no se emite con la intención de que sea un enunciado numérico" (1990, p. 184-185).

De acuerdo con Frege, Husserl hace referencia al concepto de totalidad mediante los enunciados numéricos del tipo "algo y algo y algo" haciendo de la conjunción ("y") una forma sintagmática que define la cardinalidad de un conjunto. En un análisis detallado, Frege piensa que este tipo de procedimientos transforma un problema ontológico en uno lingüístico, es decir, en el sentido de las expresiones que contienen números. Si fuese cierto que las proposiciones numéricas expresan pluralidades expresables mediante la conjunción "y", entonces, serían equivalentes a una sentencia de la forma "$N= a$ y b y c y… x". Ahora bien, según Frege, el enunciado: "Berlín, Dresde y Múnich son tres" debería ser equivalente a "Berlín y Dresde y Múnich o algo y algo y algo" por ser enunciados numéricos. No obstante, esto no es verdad. En este último enunciado numérico no se dice que Berlín, Dresde y Múnich sean *tres* entidades distintas. Bien podría ocurrir teóricamente que Berlín, Dresde y Múnich sean la *misma* ciudad. Valga otro ejemplo más concluyente: "Jesús dice: Yo soy el camino y la verdad y la vida" (San Juan 14:6-7). Es claro que aunque se enumeran "tres cosas" estas son una misma: Jesús. Por último, Frege también añade que esta forma de enunciación numérica no tiene ningún uso en la vida cotidiana y demerita las igualdades y diferencias entre los elementos conjuntados. Por ejemplo, uno no se pregunta ¿cuántos son Hidra y Caronte y Nix y Estigia? Más bien se pregunta ¿cuántas lunas tiene Plutón? De conformidad con la pregunta antes planteada, y desde el enfoque de Husserl, se tendría que responder "uno y uno y uno y uno" … y no simplemente cuatro.

8) Es imposible formar una "colección" o un "conjunto" sin que sus elementos tengan alguna relación (1990, p. 185-186)

El §45 de los *Fundamentos* resume todas las críticas hechas por Frege a las concepciones que proponen que una colección es el origen del concepto de número. En dicho parágrafo, se establece que el número no es: I) una propiedad de las cosas; II) algo subjetivo (una imagen mental), y III) un mero agregado de cosas. A juicio de Frege, *Filosofía de la aritmética* daría por válido II y III, haciendo que el concepto de colección pueda representarse sin unión alguna. Esto último pretende dar por válida una conexión entre palabras como una conexión entre enunciados numéricos. Otra objeción derivada de lo anterior es la siguiente: la "y" de "algo y algo y algo" es relacional y no conjuntiva, lo que implica que la totalidad en cuestión no da cuenta de la conexión entre los elementos, sino simplemente de su unión. En suma, para Frege esta relación es imposible; no se puede representar la rojez, la Luna y Napoleón sin una unión (la rojez de un pueblo en llamas, la figura de Napoleón y la iluminación de la Luna).

9) Los números son resultado de procesos o actividades mentales (1990, p. 190).

Aquí la crítica fregeana es confusa. Según este autor, Husserl mezcla nociones elementales que hacen de *Filosofía de la aritmética* un fracaso psicologista. Conceptos como *Vorstellung* y *Begriff* son tomados por igual y confundidos en cuanto a su aplicación se refiere. En el horizonte de una filosofía de la aritmética, Frege acusa a Husserl de haber confundido entre lo que es un número y la presentación de un número.

10) La definición del número, en términos de conjuntos, multiplicidades o pluralidades de unidades, deja al 0 y al 1 fuera del dominio de los números.

Para Frege, definir el número en términos conjuntistas o *à la* Husserl, se debe a que imposibilita dar *cuenta* de la unidad por sí misma y de la unidad como inicio de la serie numérica. Más aún, los números 0 y 1, desde la perspectiva de Husserl, sólo serían posible como *respuestas negativas* a la pregunta cuánto sin ser verdaderamente una solución lógica. En efecto, según Husserl, "cero" y "uno" son respuestas negativas a las preguntas "¿cuántos?" ("no muchos", "ninguna multiplicidad"), "¿cuándo?" ("jamás"), "¿dónde?" ("en ninguna parte") y "¿qué?" ("nada"). Frege ataca esta concepción de diversas formas. Expresa, por un lado, que debido a la vaguedad del término "multiplicidad" no hay razones para considerar que se tiene una multiplicidad y, por tanto, un número a partir del 2 y no con cantidades superiores. Por otro lado, no hay nada negativo en respuestas como “cero” o “uno”. Pensemos en la siguiente pregunta “¿cuál es el número de hijos de Hipatia de Alejandría?” No existe problema alguno en afirmar “ninguno” y, por tanto, no hay en esta formulación nada negativo. En todo caso, se está negando el predicado, pero esto no ocurre cuando se dice “cero” o “uno”.

§9. Una “respuesta a Frege”. Balances interpretativos

Hasta donde sé, Husserl jamás respondió a la reseña de Frege que, por cierto, no fue la única que recibió *Filosofía de la aritmética*.[117] Incluso en las cartas[118] escritas después de la mentada reseña, Husserl no parece ofrecer respuesta alguna a las críticas de Frege. Frente a este panorama, en este apartado ensayaré una suerte de “respuesta a Frege” tomando en cuenta únicamente lo expuesto en *Filosofía de la aritmética*. Con esto espero demostrar dos tesis: (1) que el psicologismo en esta obra no es el psicologismo que Frege duramente critica y (2) que Husserl llega por cuenta propia a la concepción de la aritmética (y la lógica) desligada de toda psicología y no por el “impulso provocador” de la recensión de Frege. De hecho, esto es constatable al menos desde 1891.[119] Debo anticipar que mi “respuesta” toma en cuenta sólo una parte del desenvolvimiento histórico de la crítica de Frege al psicologismo,[120] y muy tangencialmente su concepción acerca de la subjetividad.[121] Dicho lo anterior, comienzo respondiendo a la primera crítica enlistada en el apartado anterior:

1) Ambigüedad definicional. Pluralidad, grupo, colección, agregado y conjunto son todos sinónimos en *Filosofía de la aritmética*.

[117] *Cfr*. Anejo I de esta investigación.
[118] *Cfr*. Anejo II de esta investigación.
[119] En el apartado 2.4 “Sobre el tránsito de *Filosofía de la aritmética* a los ensayos aritmético-formales” presentaré más detalles sobre este punto.
[120] Para más detalles sobre el desarrollo de la crítica del psicologismo en Frege, *cfr*. González Porta (2012), (2014a) y (2015).
[121] Para más detalles sobre este aspecto del pensamiento de Frege, *cfr*. González Porta (2014b) y (2017).

Hay que decir que Husserl siempre fue consciente de este “error”. En el primer apartado de este capítulo se trajo a cuenta la siguiente cita de *Sobre el concepto de número*:

> La determinación más común reza: el número es una pluralidad de unidades. En lugar de “pluralidad” se dice también multiplicidad, colección, agregado, recolección, conjunto, etc.; meras expresiones que significan lo mismo o que están muy cercanamente emparentadas, si bien no sin matices destacables. (Hua XII, 297).

Tal como Husserl lo señala, los términos pluralidad, colección, agregado, conjunto y variedad presentan cierto parentesco al ser todos ellas, coloquialmente hablando, agrupaciones de “cosas”. Sin embargo, a nivel estructural ellos tienen matices destacables, p. ej., cuando Husserl habla de *colección* quiere subrayar la función que ejerce la subjetividad en la constitución de un conjunto. De hecho, en su sentido más estricto, *colección* expresa la manera en que los contenidos coligados se juntan en uno (*In-eins-zusammenbegreifen*) (Hua XII, 95). En el caso de los conceptos de *pluralidad* y *conjunto* estos casi siempre designan a una “agrupación” (no necesariamente acotada) de objetos (Hua XII, cap. XI). Por último, la noción de variedad, Husserl la entiende como una formación ordenada y definida por sus relaciones de dominio (Hua XII, cap. XII y XIII). Es importante destacar que nada de esto es tomado en cuenta por Frege.

2) Husserl no establece la distinción entre un concepto y la extensión de un concepto.

Para responder a este cuestionamiento me apoyaré en los argumentos que presenta Tieszen (1994), además de lo dicho en *Filosofía de la aritmética*. En el capítulo VII del citado libro, Husserl argumenta que los conceptos numéricos son entidades intensionales, es decir, que la concepción del número es epistemológicamente anterior a la noción de concepto y su extensión. Por tanto, cuando Husserl dice que el *concepto de número no es definible* significa que no es posible definir el *contenido* (lógico simple) o el sentido (intensión) de dicho concepto (Tieszen 1990). Como puede intuirse, el desacuerdo entre Husserl y Frege refleja una división aún más general: la intensionalidad y la extensionalidad en lógica y matemáticas. En cierta medida, Husserl, desde el comienzo de su carrera filosófica-matemática, se puso del lado de los lógicos intensionales y su preocupación por los sentidos o significados como tales de un modo más radical que el propio Frege (Tieszen, 1994, p. 91, 92). Este último, aunque coincide con Husserl en que la extensión de un concepto presupone la intensión de un concepto, no comparte todos los presupuestos contenidos en su primera obra.

3) El enlace colectivo es una relación "mental" o un acto psíquico.

De manera muy general, y con ciertas reservas, podría decirse que Husserl distingue tres niveles en la formación del concepto de número: la etapa sensible, la etapa simbólica y la etapa axiomática (Majer, 2009). Las consideraciones de los dos primeros niveles ya son suficientes para marcar una diferencia entre Husserl y Frege. De entrada, Frege no acepta que el primer nivel sea necesario o siquiera útil para el análisis del concepto de número. Esta diferencia, a simple vista no muy importante, resulta ser fundamental si se tiene en cuenta que para Husserl la génesis de los números toma en cuenta ciertos aspectos "psicológicos"-constructivos y no una cuestión de "extensión de conceptos". Ahora bien, en la caracterización fregeana del enlace colectivo como una "relación mental", se pasa por alto que el acento de Husserl no está en la abstracción de los objetos que una pluralidad agrupa, sino en la *relación* de esos elementos particulares en un todo. Lo que importa es el *modo de unión* entre ellos (Hua XII, cap. X y XI). En lo que sí tiene razón Frege, es que el enlace colectivo es captado a partir de una reflexión sobre el acto psíquico sobre el que se origina la pluralidad.[122] Sin embargo, la importancia que Husserl concede a los análisis psicológicos radica en que sólo ellos pueden abordar el problema del origen de los conceptos, y en la medida en que a tal concepto sólo se llega activamente, el número es, pues, una suerte de *concepto relacional*.

4) La interpretación husserliana del concepto de número es ingenua. Un enunciado numérico sólo se predica sobre un concepto o la extensión de un concepto, no sobre un conjunto como meros "algos".

Según Cobb-Stevens:

[122] En *Sobre el concepto de número*, Husserl advertía este punto: "Los números son creaciones del espíritu en la medida en que son resultados de actividades que ejecutamos sobre contenidos concretos; pero lo que crean estas actividades no son nuevos contenidos absolutos que pudiéramos reencontrar en algún lugar del espacio o en el "mundo exterior", sino que son conceptos de relación peculiares que siempre pueden ser producidos nuevamente, pero que de ningún modo pueden ser encontrados ya hechos en algún lugar" (Hua XII, 317). Los números son, pues, conceptos de relación, sólo existen en la medida en que se establece una cierta especie de relación; no tienen existencia propia más que en tanto son productos relacionales. Ahora bien, bajo la forma en que se presenta aquí esta idea no escapa sin duda al reproche de "psicologismo" que bien apuntó Frege.

> […] Esta [la crítica] es una caricatura de la posición de Husserl, porque él claramente mantiene que los objetos siempre se identifican por medio de sus notas. Su punto es simplemente que, teniendo identificados objetos para ser contados, agrupamos sus contenidos determinados en su numeración (1998, p. 160).

La respuesta a esta crítica se encuentra en el concepto de abstracción. La abstracción es para Husserl aquello que permite el tránsito de una pluralidad dada a un número, p. ej., pasar de los dedos de mi mano al número 5. Para Husserl, la abstracción posee dos momentos esenciales: *retener* algo y *dejar de lado* algo. Aquí podemos errar el camino e interpretar el proceso abstractivo husserliano como aquel proceso que borra (o *abstrae de*) las diferencias entre los elementos de una pluralidad dada, quedándonos únicamente con las propiedades que son comunes a los elementos de la pluralidad. Por ejemplo, si la pluralidad es el conjunto de "lagartijas en mi jardín", el *abstractum* sería el conjunto de propiedades comunes a esas lagartijas, a saber, "el ser lagartijas de mi jardín". El camino abstractivo de Husserl es más radical. Se trata de abstraer todas las propiedades de los elementos, incluidos los elementos en común, excepto una última propiedad: el ser *algo* o *uno*. De la pluralidad de los dedos de mi mano, de las lagartijas de mi jardín o del color verde, la Luna, Sócrates sólo quedan "algos" o "*algos* en tanto que *algos*". En este sentido, coincido con Derrida (2015) cuando señala que aquí se pone de manifiesto, aunque sin resolverse, el problema de la distinción entre una génesis empírica del número (y por ende psicológica) y una génesis fenomenológica que constituye intencionalmente un sentido objetivo (aparición original a la conciencia).

5) No existe una clara diferencia entre una representación (*Vorstellung*) objetiva y una representación subjetiva (1990, p. 182).

En los *Fundamentos de la aritmética*, Frege ya había anticipado que el concepto de representación puede ser entendido de dos modos: (1) de modo subjetivo (representaciones psicológicas asociativas) y (2) de modo objetivo (representación lógica). Del mismo modo, cuando Frege habla de "ideas" casi siempre se refiere a ellas como imágenes subjetivas y privadas, y sus argumentos a menudo dependen de este uso. Ahora bien, si tenemos en cuenta esta particularidad, las expresiones del tipo: "los objetos aritméticos se encuentran en la vida de conciencia" o "los objetos de orden superior tiene como base una representación", parecerían fundadas sobre un andamiaje subjetivo o psicofísico. Precisamente esto es contra lo que Frege lucha: contra las teorías que señalan que los objetos lógicos son sólo representaciones o imágenes mentales. El problema con esta crítica es que Frege no tiene un concepto bien definido de "subjetividad" y, por tanto, es difícil identificar qué es a lo que Frege llama subjetividad y por qué esta es problemática. Si radicalizamos la cuestión resulta difícil comprender cómo se distingen entre sí las múltiples representaciones que podemos tener de los "objetos lógicos", es decir, no podríamos comprender cómo es que aprehendemos y distinguimos pensamientos lógicos. Según lo anterior, la crítica de Frege a Husserl no tendría razón de ser puesto que en *Filosofía de la aritmética* el concepto de representación tiene un significado mucho más amplio. De entrada, la noción de representación simbólica es mucho más amplia en comparación con la noción de "idea mental". Me parece, pues, que la confusión ya es clara: Frege agrega un carácter subjetivo al concepto de representación de Husserl haciendo que la "presentación" de los números sea entendida como imágenes mentales.

6) La equinumerosidad y el concepto unívoco de uno-a-uno husserliano no supone nunca relación biyectiva, sino una relación falaz

Esta es, sin duda, una contrarréplica a lo dicho por Husserl en el capítulo VII de *Filosofía de la aritmética*. Hay que recordar que para Frege la equinumerosidad se define en términos de la correspondencia uno a uno. Para Husserl esto es inexacto porque, según él, las expresiones "A y B tienen el mismo número" y "A y B son equinumerables" son coextensivas, pero no sinónimas. Por tanto, el concepto de número debe definirse independientemente de su equinumerosidad, que es, en todo caso, sólo un criterio de identidad del número. La crítica de Husserl a Frege, no sé si correcta o no, en realidad trata de poner de manifiesto que "los objetos por sí solos no determinan un conjunto" (Hua XII, 163) y que la coordinabilidad biunívoca no puede ser el verdadero origen del concepto del número y, por tanto, ella no puede estar exenta de toda suposición numérica. Finalmente, la cuestión está en saber si no se puede numerar nada que no esté acogido a un determinado concepto (Hua XII, 164). "Si así fuera, el apriorismo se ofrece como única teoría posible del conocimiento, dado el papel elementalísimo que desempeña el fenómeno de coleccionar conjuntos en la vida teórica entera" (García-Baró, 1992, p. 81). Así, toda parificación no sería sino la formación de un conjunto, y el resultado de la coordinación biunívoca, a su vez, sería la presencia consciente de un conjunto de pares.

7) La expresión "y" en la cuenta por uno (uno y uno y uno…) no agrega nada a las oraciones numéricas. Además, no responde a la pregunta ¿cuánto?

Pareciera que Frege tiene algo de razón en esta crítica. De hecho, la objeción es bastante interesante; la expondré en forma de pregunta: ¿existe alguna diferencia entre lo denotado por cada uno de los siguientes términos singulares: "el color verde *en tanto* algo", "la Luna *en tanto* algo" y "Sócrates *en tanto* algo"? ¿O entre lo denotado por cada uno de los tres "unos" en "uno y uno y uno"? Según Frege, la respuesta de Husserl no es muy clara en este punto. En efecto, si la partícula "*y*" elimina todo predicado accidental y retiene sólo el *ser ese algo*, obviamente "las denotaciones de los tres términos singulares son indiscernibles, o sea los tres términos podrían denotar lo mismo (como 'París' y 'la capital de Francia')" (Angelelli, 2013, p. 67). Lo mismo ocurriría si los términos singulares "el color rojo *en tanto* algo", "la Luna *en tanto* algo", "Sócrates *en tanto* algo" tienen denotaciones distintas, pues volveríamos a tener una pluralidad desde la cual habría que volver a iniciar la marcha (¿abstractiva?) hacia el número 3 (en este ejemplo) (p. 2013, p. 67). En resumen, Frege objeta que si la denotación es la misma no se podría distinguir entre, por ejemplo, el resultado de aplicar la abstracción a una pluralidad de tres elementos y a una pluralidad de cinco elementos, igual que no se puede distinguir entre decir tres veces París y decir cinco veces París, en ambos casos hay un único objeto denotado: la ciudad que es capital de Francia. Con este dilema la marcha abstractiva, iniciada con la pretensión de llegar desde una pluralidad a su número, "encuentra un *impasse* y por consiguiente sólo queda evaluar negativamente el proyecto central de *Filosofía de la aritmética*" (Angelelli, 2013, p. 67). Aquí quizás habría que tomar en cuenta una última consideración. Derrida (2015) explica que tanto las cosas similares como las cosas diferentes pueden ser agrupadas en totalidades, pero en la totalidad como tal, es decir, en su significación propia, no hay diferencias. De esto se sigue que la numeración supone la distinción esencial y no la diferencia real. Por tanto, se debe distinguir con claridad entre distinción y diferencia. Según lo anterior, Frege habría confundido identidad y equivalencia, pues los tres objetos (*diferentes*) de los ejemplos anteriores, aunque pueden ser *equivalentes* no son idénticos.

8) Es imposible formar una “colección” o un “conjunto” sin que sus elementos tengan alguna relación

La contraargumentación fregeana a la tesis de Husserl de que es imposible formar un “conjunto” o “colección” sin que sus elementos tengan alguna relación es simplemente falaz. Sobre esto no queda más que señalar que Husserl está pensando en el hecho de que el concepto de número supone (*supponiert*, en el sentido de “estar en lugar de”) aquello que denota. Precisamente esta mala interpretación fregeana es producto de no comprender el papel de los momentos figurales y de hacer equivalente el posicionamiento husserliano con los emplazamientos filosófico-matemáticos de Cantor y Weierstrass que eran rechazados fuerte y abiertamente por Frege.

9) Los números son resultado de procesos o actividades mentales

Hasta este momento, tal parece que la diferencia entre Husserl y Frege no está en cómo ostentaron sus propuestas a propósito de la fundamentación del concepto de número, sino en *el modo de interpretarse entre ellos*. Si aceptamos las tesis de Frege, resulta que los conceptos lógicos y aritméticos no son ni objetos de la percepción sensible ni objetos mentales, por tanto, todo recurso filosófico y lógico apoyado en cierto empirismo y psicologismo está condenado al fracaso, incluida la propuesta de Husserl. Aquí está su acierto y su error. En efecto, el mérito del antipsicologismo de Frege es el haber intentado resolver minuciosamente la cuestión de cómo y por qué nosotros, los seres humanos, logramos pensar lógicamente. Su error fue haber interpretado a la conciencia humana como puramente empírica. De hecho, siempre que Frege habla de la psicología presupone que esta es una ciencia natural. Así, no sólo de forma implícita, sino también explícita, Frege proporciona un fundamento a la tesis que dicta que el objeto de la psicología es el establecimiento de un sistema de leyes (leyes de la asociación) que dan cuenta del acontecer psíquico (o representaciones). Es comprensible que Husserl se mostrará menos interesado en un rechazo radical de la psicología, al menos no aquella en la que se había formado. De hecho, coincido con Derrida (2015) cuando afirma que Husserl fue capaz de reconocer que a Frege le faltaba el vínculo concreto, la continuidad entre la objetividad de los conceptos lógicos y aritméticos y una subjetividad. Quizás es por esta razón que Husserl se acercó más a la psicología brentaniana, misma que Frege parece ignorar en su totalidad. En todo caso, me parece que Husserl intenta superar en *Filosofía de* *la aritmética*, aunque de manera no muy bien elaborada,[123] este primer problema en torno a la génesis de los conceptos aritméticos.

10) La definición del número, en términos de conjuntos, multiplicidades o pluralidades de unidades, deja al 0 y al 1 fuera del dominio de los números.

Esta última crítica hace pensar que Frege no comprendió (¿no leyó?) el capítulo VIII de *Filosofía de la aritmética*. Precisamente en este capítulo, Husserl señala que la introducción de 0 y 1 en la aritmética, a la par con los otros números, ha hecho posible la solución de algoritmos aritméticos, por tanto, no podemos eliminarlos así sin más. Pero ¿cómo justifica Husserl el tratamiento de 0 y 1 como números? En primer lugar, Husserl reconoce un hecho obvio: necesitamos 0 y 1 para calcular. En segundo lugar, Husserl se da cuenta de que 0 y 1 son productos comunes en nuestros cálculos numéricos. Desde luego, estas respuestas no son satisfactorias desde un punto de vista lógico. La solución lógica que Husserl presenta en *Filosofía de la aritmética* es considerar que 0 y 1 pertenecen a la aritmética únicamente sobre la base de sus relaciones externas o puramente formales con los números propiamente dichos. Repito lo dicho líneas atrás. La pregunta sobre la determinación de "cuántos" no exige una respuesta que involucre *muchos*, *pocos* o *nulos* elementos, sino simplemente demanda la representación de una pluralidad o multiplicidad de objetos. En realidad, la pregunta de "cuántos" se dirige a la determinación de una colección como "dos, tres, cuatro", etc., en tanto números pertenecientes a una totalidad o una pluralidad indeterminada. En efecto, Husserl señala que sólo aquello que posee una forma de pluralidad posibilita la tematización de los números en su carácter primario. Lo que destaca es el hecho de que los números se predican con legitimidad sólo en la medida en que su numerosidad posee un carácter conjuntivo. Efectivamente, "lo que hace a una pluralidad ser una pluralidad no es, por cierto, nota alguna que posea cierto elemento suyo. Es la pluralidad globalmente tomada, la pluralidad como un todo […]" (García Baró, 1993, p.32). La particularidad con que el conjunto entero de las partes, una pluralidad, se encuentre reunido o enlazado, es el modo preciso en que tiene lugar la numerosidad. Por tanto, la afirmación de que "hay *una* cosa" no es una afirmación de número, como tampoco la afirmación "no hay nada". Dicho de otra

[123] El sujeto que aparece en *Filosofía de la aritmética* remite a un sujeto constituyente y temporal, que es, a su vez, psicológico y real. Por tanto, los números se constituyen mediante el acto de contar que realiza un sujeto empírico.

manera, lo que se quiere decir es que la predicación numérica parte del encuentro de *un todo* en el que se reúnen *colectivamente n* partes o *n* partes coleccionadas o vinculadas en un conjunto global. En consecuencia, la manera en que el 0 y el 1 pertenecen a la serie de números sólo es en términos de relaciones elementales y operacionales (Hua XII, 132 y ss.) es decir, son necesarios en relación al ámbito calculista de la aritmética, esto es, de la elaboración de los algoritmos.

Finalmente, y tomando todo lo anterior, resulta claro por qué se ha ubicado de modo impreciso el lugar de Frege y Husserl. Por un lado, es claro que Frege tiene un "plus" por sobre los psicologistas lógicos, pero trae un "menos" en relación con el proyecto de la fenomenología. Subrayar unilateralmente uno u otro aspecto nos lleva a un error de perspectiva en el que se sobre-dimensiona o sub-dimensiona la contribución de Frege a la creación del programa husserliano. Por otro lado, la crítica de Husserl al psicologismo en 1891 (o posterior a este año) no se evidencia como problema específico ni mucho menos central en su obra temprana (de esto hablaré en el siguiente apartado). Por tanto, no existen motivos para afirmar que en 1891 o 1892, Husserl germinara ideas que le permitieran dar el giro radical hacia la crítica al psicologismo desarrollado en las *Investigaciones lógicas*. Pero tampoco existen motivos para decir abiaertamente que fue Frege el impulso que Husserl necesitaba. Como observa correctamente Ortiz Hill (1991, p. 20), las influencias más decisivas en el cambio de las concepciones de Husserl fueron Bolzano y Lotze, y a ellos hay que añadir a Cantor, Hume y Riemann.[124] En otro momento, esta misma autora subraya en varias ocasiones (1991, p. 70-76 y ss.) que, aunque Husserl llevó a cabo tanto análisis lógicos como análisis psicológicos, no los mezcló o los confundió. Más aún, añade Ortiz Hill (p. 80), Husserl no mezcló, en general, lo subjetivo con lo objetivo del modo que alegó Frege en su reseña, aunque cabe la posibilidad de que los primeros intentos de Husserl de esclarecer la relación entre lo objetivo y lo subjetivo no sean del todo exitosos, confiriéndole así cierta legitimidad a la queja de Frege.

[124] *Cfr*. la carta de Husserl a Carl Stumpf de 1890 (Hua XXI, 244-255); la carta a Brentano de 1892 (Hua Dok III, 1, p. 11) y en el prólogo a la segunda edición de sus Investigaciones lógicas (Hua XX-1, 290); en dichos textos, Husserl no menciona a Frege, de hecho, sólo se menciona a Helmholtz, Riemann, Hume, Bolzano y Lotze.

2.4.- Sobre el tránsito de *Filosofía de la aritmética* a los ensayos aritmético-formales

§10. La articulación y transición a la ontología formal del primer Husserl

Después de la publicación de *Filosofía de la aritmética* (1891) y poco antes de la aparición de la primera edición de las *Investigaciones lógicas* (1900-1901), Husserl publicó numerosos escritos ahora editados en los tomos XII, XXI y XXII de la serie Husserliana. De hecho, muchos de ellos estaban contemplados para el segundo tomo de *Filosofía de la aritmética*.[125] Desafortunadamente, como ya se sabe, nunca se completó este segundo tomo, aunque Husserl siguió trabajando en él hasta por lo menos 1894. No se sabe con exactitud cuál era el estado de las investigaciones husserlianas en ese momento, pero es de suponer, por el contenido de dichos escritos, que Husserl mantenía una continuidad con algunos problemas de *Filosofía de la aritmética* relativos a la psicología, la lógica y la aritmética. Mi hipótesis o tesis central para este apartado es que la noción de signos operativos, que emerge muy claramente del último capítulo de la *Filosofía de la aritmética*, permanecerá *casi* sin modificar por lo menos hasta el año de 1900. En otras palabras, se trata de defender lo siguiente: "los signos operativos no tienen significado por sí mismos, sino un significado que les es otorgado por reglas de cálculo (el significado de un signo operacional se agota en su algoritmo informático)". La importancia de este hilo temático es que me permitirá enlazar *Filosofía de la aritmética* (tomando en cuenta los dos últimos capítulos) con algunos de los ensayos aritméticos ya anunciados y anticipar algunas tesis de los *Prolegómenos a la lógica pura*.

[125] El posible índice del segundo tomo sería el siguiente: "I. Los conceptos propios de pluralidad, unidad y número; II. Los conceptos simbólicos del número y las fuentes lógicas de la aritmética numérica; III. La aritmética general del número; IV. El algoritmo aritmético en otros dominios; V. Observaciones finales; Apéndice: Las investigaciones en Semiótica" (*Husserl–Chronik*, p. 30). Los ensayos que posiblemente Husserl haya tenido en mente para el segundo tomo son: "Objetos intencionales" (1894); "Estudios psicológicos ordenados a la lógica elemental" (1894); "Acerca de la lógica de los signos (semiótica)" (1890) y "Ensayo sobre la filosofía del cálculo" (1887-1895).

Concluidas las generalidades de la teoría de la representación simbólica, Husserl sabía que esta interpretación debía ser complementada con un análisis semiótico, mismo que ya había iniciado en torno a 1890. Dicho intento se refleja en el texto de 1890 titulado "Sobre la lógica de los signos (Semiótica)" (en adelante *Semiótica*),[126] donde dedica grandes esfuerzos a explicar el origen y los mecanismos psicológicos detrás de la función de reemplazo y detallar las diferentes especies y géneros de signos. Esta "nueva" tarea ilumina muchos aspectos ontológicos cuyo tratamiento directo parece soslayarse en *Filosofía de la aritmética*. En efecto, Husserl vio que no sólo había omitido una minuciosa discusión sobre la noción de sustitución y la de representación simbólica en *Filosofía de la aritmética*, sino que no había explicado por completo el origen y funcionamiento de ningún signo.[127] Para enmendar lo anterior, en *Semiótica* se aborda la génesis y la función de todo tipo de signos y, por otra parte, da ocasión para el planteamiento y discusion de problemas de mayor envergadura como lo es la teoría general del signo. Esta tarea no es abrumadora, pues Husserl considera

---

[126] Este artículo data de la misma época en que eran publicados los primeros trabajos de Charles Sanders Peirce y antecede a la publicación del *Curso de lingüística general* de Ferdinand de Saussure, por nombrar a los reconocidos fundadores de la ciencia general de los signos: semiótica o semiología. De hecho, también fue conocido y destacado por semiólogos como Roman Jackobson:

"El estudio del joven Edmund Husserl *Zur Logik der Zeichen (Semiotik)*, escrito en 1890 pero inédito hasta 1970, es una tentativa de organizar las categorías del signo y contestar a la cuestión de saber en qué sentido el lenguaje, es decir, nuestro más importante sistema de signos, «favorece y, por otro lado, a la vez inhibe el pensamiento». La crítica de los signos y su mejoramiento se conciben como una tarea urgente a la que se enfrenta la *lógica*:

> Una mirada más profunda sobre la naturaleza de los signos y de las artes permitiría (a la lógica) ir más allá en esos métodos de procedimiento simbólico a los que no ha llegado todavía la mente humana, es decir, a establecer las leyes de su invención.

El manuscrito de 1890 contiene una referencia al capítulo «*Semiotik*» de la *Teoría de la ciencia* del que se dice que es *wichtig* (p.530); apuntando a dos metas, una estructural y la otra normativa, Husserl sigue de hecho en este ensayo el ejemplo de Bolzano, al que llamará más tarde uno de los más grandes lógicos de todos los tiempos. En las ideas semióticas de las *Investigaciones lógicas* pueden encontrarse «instigaciones decisivas de Bolzano» reconocidas por el fenomenólogo; y el segundo volumen de las *Investigaciones*, con su importante tratado de semiótica general constituida como sistema, ejerció una profunda influencia en los comienzos de la lingüística estructural. Como lo indica Elmar Holenstein, Husserl escribió varias notas en los márgenes del parágrafo 285 de su ejemplar de la *Teoría de la ciencia III* de Bolzano y subrayó el término *Semiotik* y su definición en el *Ensayo* de Locke en su traducción alemana" (Jakobson, 1988, p. 12-13). *Cfr.*, también Aurora, S. (2015) y Bar-Hillel, Y. (1977).

[127] El texto de *Semiótica* estaba programado como un apéndice al segundo volumen de *Filosofía de la aritmetica*. En al menos dos ocasiones, Husserl advierte, a los lectores de su libro, acerca de la lógica general de los métodos simbólicos (semiótica) como apéndice al volumen dos (Hua XII, 6), y en otro momento señala que presentará, en un apéndice del segundo volumen, investigaciones más detalladas sobre las representaciones simbólicas y los métodos de conocimiento fundamentados de este trabajo [*Filosofía de la aritmética*] (Hua XII, 193).

que solo hay dos géneros de signos: hay signos de motivación asociativa y signos que sirven como reemplazos; aunque reconoce que los signos pueden tener muchos orígenes genéticos diferentes.

La pregunta con la que abre *Semiótica* es la pregunta por la posibilidad de tematizar conceptos que "no se tienen propiamente", es decir, aquellos cuya captación es puramente simbólica o signitiva. Ahora bien, la palabra "signo" es tomada en este ensayo en el sentido más amplio posible, abarca signos exteriores y signos conceptuales o notas distintivas (*Merkmale*). Sin embargo, el rol principal lo ocupa la distinción entre conceptos o contenidos generales y sus modos de donación. Estos pueden ser de un modo propio (como lo que *son*) o de un modo impropio (lo que *representan*) (Hua XII, 340).[128] Los primeros también son definidos, como ya se sabe, como representaciones intuitivas (o auténticas) y los segundos como representaciones simbólicas o signitivas (inauténticas). Debe quedar claro que la autenticidad se refiere a la ejecutividad de los actos intuitivos al momento de coleccionar o comparar una multiplicidad determinada, mientras que la inautenticidad sólo está referida a los signos al modo de una *mecanización de algoritmos*. [129]

Ahora bien, Husserl señala que el concepto de signo es un concepto de relación, pues se entabla una conexión que va del signo a lo *designado* (Hua XII, 342). En este sentido, el signo *da a conocer* a lo designado, en cualquier modo que esto ocurra. Después de esta primerísima definición, Husserl realiza una primera clasificación. La distinción entre signos *externos* y signos *conceptuales* (Hua XII, 341-342). Un signo externo, nos dice Husserl, es aquel que no tiene nada que ver con el concepto particular de lo designado, con su contenido o con sus características particulares. Podríamos decir que no guarda ninguna relación "de semejanza", por ejemplo, el caso del nombre de una persona; lo designa, pero no lo caracteriza. A diferencia del signo externo, el signo conceptual es toda nota característica (interna o externa) del objeto en el sentido habitual. En términos generales hay dos tipos de notas características: aquellas determinaciones que son contenidos parciales en la

[128] Esta distinción, Husserl también se la debe a Brentano, *cfr*. Cobb-Stevens (1998, p. 158 y ss).

[129] En sus "Estudios psicológicos ordenados a la lógica elemental", Husserl describe lo anterior de este modo: "Por el contrario, la intuición es una representación en el sentido más propio de poner ante nosotros realmente su objeto, de tal modo que el propio objeto sea el sustrato de la actividad psíquica. […] Si un interés particular, por ejemplo, un interés psicológico, se dirige al contenido que existe en este momento, al aspecto unilateral tal como él mismo es, entonces tenemos, en relación con él, una intuición" (Hua XII, 103).

presentación del objeto designado y aquellas que son determinaciones relativas que caracterizan al contenido como uno de los fundamentos de ciertas relaciones que descansan en él. La segunda clasificación importante que hace Husserl es la de signos unívocos y multívocos (Hua XII, 342). Entre ellos hay que estudiar la univocidad o multivocidad de los signos cuando son casuales o cuando son según su naturaleza o determinación. Un nombre propio, por ejemplo, puede guardar una relación unívoca relativa a su propia naturaleza, pero casualmente puede presentar una cierta multivocidad al encontrarnos con el mismo signo ("Rosa") que mienta "casualmente" a una multiplicidad de objetos designados. La tercera clasificación es la de signos simples y compuestos (Hua XII, 343), que no debe ser confundida con otra clasificación que se presenta inmediatamente entre signos directos e indirectos (Hua XII, 343). Un signo simple, como su nombre lo indica, es un signo en vinculación única con un *designatum*. Un signo compuesto es un signo que posee partes que son signos. Los signos directos son aquellos que designan a su objeto sin mediación de otro signo. El signo indirecto es un signo compuesto en el cual los signos parciales no están colocados unos junto a otros, sino unos sobre otros y referidos unos a otros de modo que la composición entre estos signos es la de ser "signo de signo".[130] Los signos indirectos son a su vez multívocos, por lo que se precisa estudiar la diferencia entre lo que el signo significa (*bedeuten*) y lo que el signo designa (*bezeichen*); esto no es problema en el caso de los signos directos, que son esencialmente los nombres propios y unívocos. En el caso de los nombres propios, la relación entre significación y designación es coincidente, pues la relación entre el signo y la cosa es directa. Pero en el caso de los signos indirectos sí se debe hacer una precisión debido a que entre el signo y la cosa hay mediaciones, y la manera como el signo designa a la cosa es a través de esas mediaciones, y precisamente a partir de este proceso se constituye el significado. La siguiente distinción que hace Husserl es la que existe entre signos *idénticos* y *equivalentes* (Hua XII, 341-345). Dos signos son idénticos cuando designan el mismo objeto o los objetos de un mismo grupo en el mismo sentido. Dos signos son equivalentes cuando designan al mismo objeto o a objetos de un mismo grupo, pero de manera distinta. Finalmente tenemos la distinción entre los signos de *contenidos de*

[130] Esta cuestión de los signos compuestos se encuentra estrechamente vinculada tanto con lo que posteriormente desarrolla en *Investigaciones lógicas* respecto a las expresiones compuestas y las expresiones simples en la cuarta investigación, que, a su vez, instancia la teoría del todo y las partes presentada en la tercera investigación. Se puede ver una clara continuidad de la obra de Husserl en este punto.

presentación (*o signos para contenidos representativos*) y signos de *actos psíquicos*. Es en este justo momento donde se refuerzan las posibilidades de haber atinado en la descripción del concepto de "contenido" tal y como fue caracterizado en *Filosofía de la aritmética,* pues se trata de preparar el camino para la crucial distinción entre materia y forma del conocimiento y los signos lingüisticos que se corresponden con uno y otro.

En lo que respecta al segundo apartado del texto de Husserl, este inicia con nuevas distinciones que ocuparán un lugar importante: la diferencia entre los signos naturales y los signos artificiales. Los signos naturales y los artificiales se rigen bajo las mismas leyes expuestas anteriormente, pero lo que los distingue es que en los signos artificiales aparece la voluntad y el interés por el conocimiento propios del sujeto. La otra diferenciación es la que distingue entre signos *formales* y signos *materiales* (Hua XII, 346). Con esta distinción, Husserl pretende separar dos distinsiones completamente heterogéneas: por un lado, la que separa *contenido juzgado* y *acto de juicio*, y, por otro lado, entre signos de los fundamentos de la relación y signos de las relaciones. Son del primer tipo en la aritmética los signos =, $\gtrless$, +, ≡, etc., o en la geometría, los signos ∼, ≅, etc.; = significa: "es igual", > significa: "es mayor que", etc. Los signos de las operaciones aritméticas +, ·, etc. son del segundo tipo. Ahora bien, según Husserl, en todo sistema de signos distinguimos entre signos fundamentales y signos derivados o compuestos. La derivación de los últimos a partir de los signos fundamentales se produce mediante operaciones con signos. Éstas son modos sistemáticos de proceder según reglas determinadas del representar, juzgar y deducir simbólicos. Así, las operaciones aritméticas, en tanto que formas de construir números, son métodos regulados de producción de representaciones impropias; en tanto que establecen reglas de formación y transformación de igualdades o desigualdades, son métodos de producción de juicios simbólicos. En estos casos conviene recordar, junto con Husserl, que en matemáticas la presentación de los signos lingüisticos es a través de las formas simbólicas de las ecuaciones, las congruencias, relaciones, etc.

Todas las descripciones de Husserl sobre las funciones y la génesis de todos los signos pueden emplearse (y de hecho se justifica su uso) para clarificar su teoría de los signos numéricos. Sobre la base del análisis anterior, podemos decir que una presentación auténtica de un número más pequeño puede vincularse asociativamente con un signo numérico. Esto es evidenciable en el último capítulo de *Filosofía de la aritmética*. Ahora bien, está claro que cuando los signos numéricos sirven como reemplazos, lo hacen “confundiéndose” con sus números naturales o conceptuales. Explico esto último. Cada vez que conozco un número más alto mediante procedimientos calculatorios, no trato con los números presentados auténticamente, sino con los signos de números de reemplazo. A pesar de que los signos numéricos realizan su operación de reemplazo de la misma manera que todos los demás sustitutos, los sustitutos numéricos son diferentes ya que únicamente pueden ejecutar esa función dentro del contexto de un sistema numérico. Es aparentemente por esta razón que Husserl está más preocupado por describir la génesis del sistema numérico en *Filosofía de la aritmética* que por proporcionar un análisis exhaustivo de los sustitutos numéricos. Precisamente esto es lo que viene a subsanar el texto de *Semiótica*: la ausente descripción del origen del sistema de los signos y las omisiones en el proceso de reemplazo en *Filosofía de la aritmética*.

Según lo dicho en *Semiótica*, Husserl afirma que somos capaces de diseñar un sistema numérico sacando provecho del hecho de que se pueden presentar auténticamente números más pequeños en relación con otros. En otras palabras, la función subrogativa de los signos numéricos es posible debido a una operación resolutoria. Ahora bien, para la creación de un sistema numérico funcional es necesario vincular asociativamente ciertos tipos de signos a la presentación auténtica de números más pequeños de una manera rigurosa y metodológicamente precisa. Por esta razón es que Husserl utiliza un número base (decimal) en *Filosofía de la aritmética*. El establecimiento de un número base es más ventajoso porque crea un sistema numérico recursivo. Una vez que se ha aprendido este sistema recursivo de números se mantiene alejado un enfoque de mayor carga mental. Cuando veo el signo “9,573” no estoy impulsado asociativamente a explicar el referente como nueve conjuntos de diez conjuntos de diez conjuntos de diez conjuntos, cinco conjuntos de diez conjuntos de diez conjuntos, siete conjuntos de diez conjuntos, y 3 sobrantes, sino como un signo o fórmula númerica cuyo significado se encuentra en el cálculo en cuestión.

Sobre la base de este bosquejo de los signos en *Semiótica*, se revela cómo en el origen genético de este ordenamiento sistemático de los signos numéricos y el sistema aritmético al que pertenecen, posibilita que los sustitutos numéricos ejecuten su función de reemplazo. En primer lugar, la recursividad del sistema numérico permite que todos los signos numéricos se refieran a sus números de una manera unívoca. Así, los signos de números más pequeños significan de una manera no ambigüa, porque se han configurado de tal modo que tienen una correspondencia de uno a uno con sus números auténticamente presentados. En segundo lugar, al continuar la formulación de signos numéricos más allá de aquellos que tienen números auténticamente presentables, de acuerdo con el método recursivo establecido, se mantiene el vínculo unívoco entre los signos y sus números. De este modo, cada signo numérico superior sigue teniendo una correspondencia uno a uno con su número. Esta estructuración recursiva del sistema numérico también elimina el problema (aparente) de la (im)precisión de los signos numéricos superiores y su empleo en una aritmética exacta en tanto se los comparase con los números presentados auténticamente. Siguiendo a Husserl, no es necesario que realice esta tarea (imposible) ya que la correspondencia directa entre el signo y el número significado garantiza la precisión de los números de los sustitutos. Los signos numéricos pueden ser fácilmente tomados en cuenta, comparados, contrastados y utilizados en el cálculo debido a la naturaleza repetitiva del sistema numérico. En cuanto a la generación, no se tiene por qué memorizar 80,000 signos distintos para poder contar. En cambio, sólo se deben recordar 10 signos numéricos (0-9) y continuamente implementarlos de la manera repetitiva descrita en *Filosofía de la aritmética*.

Teniendo en mente lo anterior, si volvemos a tomar como punto de partida el capítulo final de la *Filosofía de la aritmética*, encontraremos que en él se establece la posibilidad de circunscribir la *totalidad de las operaciones aritméticas concebibles*, "reduciendo" una serie de procedimientos generales por medio de los cuales se generan nuevas operaciones aritméticas (computables) a partir de las dadas. El resultado: caracterizar la clase de funciones aritméticas computables como un todo. Recordemos cómo finaliza *Filosofía de la aritmética*:

> El hecho de que en la incomparable mayoría de los casos estemos limitados a FORMACIONES NUMÉRICAS SIMBÓLICAS nos obliga a formar un dominio numérico regulado en forma de un sistema numérico (ya sea en la serie numérica natural o el sistema en el sentido más restringido de la palabra). De acuerdo con un principio fijo, un sistema numérico selecciona cada uno de los conceptos numéricos reales a partir de la totalidad de las formaciones simbólicas que pertenecen a él y son equivalentes a él, y a la vez le da un sitio sistemático. Para todas las otras formas de número concebibles surge entonces el problema de la evaluación: es decir, de reducción clasificatoria al número de sistema equivalente a ella. Pero un estudio de las formas imaginables de formación de números nos enseñó que la invención de métodos apropiados de evaluación depende de la

> elaboración de una aritmética general, en el sentido de una teoría general de las operaciones (Hua XII, 283).

Husserl cobra plena conciencia de la elaboración de una aritmética general, en el sentido de una teoría general de las operaciones en un texto inédito de 1891 intitulado “Sobre el concepto de operación”. En este brevísimo tratado, Husserl destaca, aunque con poca claridad, cómo la separación de los miembros de un dominio respecto de su naturaleza se vuelve una condición necesaria para operar formalmente dentro y fuera del ámbito aritmético. En este sentido, la teoría general de las operaciones debería explicitar conceptos como: combinación, operación básica, equivalencia, sistemas algorítmicos, etc., y responder preguntas como: ¿Qué es una combinación? ¿Cuándo se habla de combinaciones equivalentes? ¿Qué equivalencias deben afirmarse como proposiciones dentro de una *mathesis*, y cuáles deben considerarse solo como expresiones diferentes de la misma proposición?

La propuesta inicial de “Sobre el concepto de operación” nos dice que existen varias formas de determinación numérica que permiten designar nuevos números por medio de números arbitrarios. Si se encuentran tales formas, entonces se puede pensar en números enlazados (*verknüpft*) por ellas, y luego considerar qué leyes resultan de los conceptos de estas formas de construcción o de combinación numérica. Cito a Husserl:

> Si nombramos a los números con los cuales se efectúa la representación conceptual del nuevo número en una determinación aritmética de números, los “miembros” (*Gleider*) de este “enlace” (“*Verknüpfung*”), entonces cada uno de los a, b, c,… que sirven como signos para los miembros del enlace significan tanto como “un cierto número”, una expresión que en su indeterminación se adapta a cualquier número, de modo que en el dominio de la aplicación cada uno puede considerarse como este cierto número (Hua XII, 408-409).

A partir de lo anterior, y siguiendo a Husserl, se puede deducir el itinerario para obtener dichas formas de enlace o combinación. *Combinación* denota aquí cualquier tipo de síntesis conceptual de dos o más objetos que determinan un nuevo objeto llamado *resultado* (*Resultat*) de la combinación.

(i) Para descubrir las leyes más generales del dominio numérico, la aritmética debe dejar fuera de consideración cualquier determinación *específica* o concreta de números (p. ej. ¿cuántas flores tiene este jardín?)

(ii) Cada número debe considerarse solo como *un cierto número*, como un número arbitrario. Por esta razón los números son reemplazados por letras *a*, *b*, *c d*, *e*, *f*…etc.

(iii) Una vez que se ha efectuado esta abstracción preliminar, se debe preguntar en qué formas se pueden combinar y determinar nuevos números a partir de números dados arbitrariamente.

(iv) Tan pronto como se encuentran estas *formas de combinación*, la tarea es especificar las leyes generales a las que están sujetas.

Revisemos por partes. El paso (i) claramente indica que la aritmética debe dejar fuera de consideración cualquier determinación concreta de números. Esto significa que debe evitarse cualquier determinación que incluyan un aspecto concreto. Por ejemplo, las leyes más generales de la aritmética no tratan de la suma de *esta rosa más esta rosa*. Los pasos (ii) y (iii) se basan en la posibilidad de pasar de una combinación determinada concreta a una *forma de combinación*. Esta forma se obtiene reemplazando los objetos, es decir, los miembros de la combinación, por símbolos, y reemplazando la combinación por un símbolo operativo (Centrone, 2010, p. 64). Por ejemplo, para obtener la forma de la combinación: "4 + 3", se deben sustituir por las letras "a+b", de esta forma cada uno de los dos miembros de la combinación anterior se considerará únicamente como *un cierto número*.

Enseguida se debe estipular que, dentro de una expresión aritmética-formal, diferentes ocurrencias de la misma *letra* siempre se referirán al mismo objeto. En el ejemplo anterior, la forma obtenida: "a + b", todavía está ligada a un dominio específico, a saber, el de los números naturales. Para construir una teoría formal más abstracta (una aritmética general), Husserl señala que se tiene que dar un paso más allá y pasar a la forma general de esa combinación en la que el signo de suma se reemplaza por un símbolo de operación indeterminado, por ejemplo ρ. Entonces, la forma general de la combinación concreta de la que partimos es "$a \rho b$". Como en el caso de las letras a y b, ahora se estipula que, dentro de una expresión formal, así como dentro de una *teoría formal*, diferentes ocurrencias del mismo símbolo de operación siempre denotan la misma operación. Antes de revisar los pasos (iii) y (iv), valga una cita:

Todas las determinaciones aritméticas del número se basan en el análisis final de actividad que se pueden practicar, como en el caso de las colecciones, como las colecciones en general, en números. Como tales, reconocemos la unión (*Zusammenfügen*) y la partición (*Teilen*). Las unidades de dos o, arbitrariamente, muchos números disyuntos se pueden unir, evidentemente, en un número que incluye dentro de sí todas las unidades de esos números y no otros. (De manera similar, se pueden unir números y unidades aisladas, o solo algunas unidades). Por el contrario, se puede dividir (cualquier número) (al menos en unidades, pero a menudo) en números (o números y unidades). Esto también es reconocible a priori; entonces cada unión de números corresponde a una división del resultado en solo estos números. Unir y dividir son patentemente operaciones inversas (Hua XII, 409).

Sobre el punto (iii). Husserl a menudo llama, a los objetos que están conectados en una combinación, miembros (*Glieder*) de esa combinación. Es importante subrayar que en "Sobre el concepto de operación", la combinación no es en absoluto aquello que afecta la conexión entre sus miembros, sino el complejo constituido por objetos que están conectados (los miembros). Es por esto que encontramos combinaciones no sólo entre números, es decir, dentro del dominio aritmético, sino entre objetos de cualquier dominio.[131]

Siempre que esté presente una determinación conceptual que determina un objeto por medio de otros objetos (*Gegenstande*), hablamos de una combinación (síntesis) de estos últimos objetos en el primero, el "resultado de la combinación". Así, por ejemplo, nombramos a cualquier clase de producción conceptual (*Herstellung*) de un número a partir de más números una combinación (aditiva, multiplicativa, etc.) de esos números (Hua XII, 422).

[131] Esto se aplica también para el cálculo. En efecto, afirma Husserl, no existe una razón *a priori* para limitar el cálculo al dominio numérico. En general, es posible aplicar el cálculo, un sistema algorítmico, a cualquier dominio que permita una estructuración algebraica:

De inmediato queda claro que a priori no se ve con intelección ninguna razón por la que el cálculo (*Rechnen*) deba restringirse al dominio aritmético. Dondequiera que encontremos un dominio de conceptos en el que se encuentren relaciones análogas como en el dominio de la aritmética, es decir, donde podamos encontrar maneras uniformes (*einförmige*) de construir nuevos conceptos a partir de los dados, de tal manera que los resultados de las construcciones siempre puedan servir como elementos para nuevas construcciones, y donde exista un número limitado de leyes para estas maneras de construcción, una variedad infinita de teoremas puros (*Folgesätze*) es deducible de los axiomas (*Grundsätze*), y esto en la manera de una deducción puramente formal. Y entonces la forma calculatoria de proceder también será posible, lo que hace que recurrir a los conceptos sea superfluo y se abandona únicamente a las formas externas de proceder (Hua Mat. I, 312).

Para decirlo desde el punto de vista morfológico-formal, las "*combinaciones* de Husserl" corresponden a términos complejos de un lenguaje elemental, es decir, a expresiones complejas que se construyen a partir de variables individuales y constantes mediante aplicación iterada de letras de función. Los objetos que entran en una combinación pertenecen a la misma clase, en cuyo caso se determina un nuevo objeto que pertenece a la misma clase, o cada uno de ellos pertenece a una clase diferente; en este caso el objeto determinado por la combinación lleva las determinaciones de cada una de las clases a las cuales pertenecen los objetos combinados.

Según Husserl, si desviamos completamente nuestra atención de los miembros y atendemos exclusivamente al pensamiento que produce su síntesis, entonces obtenemos el tipo de combinación. Hablamos, por ejemplo, de suma, resta, etc., como diferentes tipos de combinaciones de números y, si al hacerlo, nos ponemos en claro el concepto de adición en concreto, evidentemente no prestamos ninguna atención a los miembros individuales de la adición particular que sirve de base. Por tanto, para la especie de combinación (*Verknüpfunsart*), el número de miembros no es esencial, pero sí modifica su tipo de combinación (Hua XII, 425). Ahora bien:

> También distinguimos tipos de enlaces elementales (*elementarer Verknüpfungen*) y tipos de enlaces derivados (*abgeleiteter*). Cada enlace compuesto es una particularización de un enlace elemental; sus miembros se determinan como resultados de ese enlace. Si las especies de enalces elementales difieren, entonces el establecimiento de las combinaciones derivadas es solo una cuestión de combinación. La totalidad de tipos de combinaciones elementales de un dominio que no tienen equivalente, lo llamamos totalidad de combinaciones básicas (Hua XII, 426).

Dada la distinción entre combinaciones simples y complejas (o elementales y derivadas), Husserl identifica en los procesos de particularización (*Besonderung*) y composición (*Komposition*) las dos formas elementales (de salida) de las combinaciones que se generan. Por medio de la creación de instancias generamos, por ejemplo, las combinaciones a + b, b + a, a + c, etc., como particularizaciones de la combinación aditiva. Por medio de la composición obtenemos una nueva (forma de) combinación de una combinación dada al reemplazar uno de sus miembros por otra (forma de) combinación, no necesariamente del mismo tipo con el que comenzamos. Ahora bien, tanto para una combinación determinada concretamente como para una forma general de combinación, Husserl distingue los tipos de materiales de los modos materiales, y los tipos formales de los modos formales (Hua XII, 426-427). El tipo material de una combinación es para Husserl el tipo de conexión (por ejemplo, aditivo, multiplicativo, mixto, etc.) que combina los miembros. El modo formal es básicamente un patrón específico de posiciones de los miembros en una forma completamente abstracta de combinación.

> Lo principal es: la operación es una forma de transformación conceptual de lo dado que da lugar a algo nuevo, pero que puedo ver a través de la transformación como dada. ¿Cuándo puedo hacer eso? Debo tener la evidencia de que existe, ya sea siempre o bajo ciertas condiciones. En este último caso, opero precisamente solo cuando este requisito se cumple (Hua XII, 428).

Situados en el paso (iv), hay que señalar que Husserl emplea el término operación (*Operation*) para designar una determinada actividad subjetiva que puede realizarse en colecciones, es decir, unir, dividir y designar las formas de determinación numérica, es decir, las operaciones aritméticas. Bajo este sentido, las operaciones son formas para determinar nuevos números por medio de números dados. Estos formularios se basan en (o, en cierto sentido, *a partir de*) actividades subjetivas como agregar y dividir. Lo que resta por decir es que la noción de operación es más bien la contraparte aritmética del pensamiento de combinación que está incrustado en una combinación. En el tratado de Husserl encontramos algunas notas interesantes, aunque bastante incompletas sobre la naturaleza de las operaciones y su conexión con la noción de producción de un objeto. Finalmente, en *Sobre el concepto de operación*, Husserl subraya repetidamente la importancia de la generalidad y la flexibilidad con la que un sistema algorítmico obtenido mediante la abstracción de un dominio conceptual específico, también puede ser interpretable en diferentes dominios conceptuales estructuralmente similares. Este aspecto significativo es el que Husserl buscará en los años siguientes: dar cuenta del proceso que consiste en partir de la constitución de un sistema algorítmico y luego buscar posibles interpretaciones (posibles modelos). Para redondear el último punto (iv), pero apoyados en una cita de las lecciones de lógica de 1896, supongamos que configuramos un algoritmo (es decir, un sistema de signos más reglas de transformación): ¿los signos todavía tienen un significado? Y si es así ¿cuál es? La respuesta de Husserl a esta pregunta es afirmativa: los signos tienen un significado en el algoritmo, es decir, un significado operacional, un *Spielbedeutung*, que está determinado por el conjunto de reglas formales que rigen su manipulación.

> El asunto es, pues, ahora éste: tengo un género de signos determinadamente fijados y grabados en mi memoria, y además un cierto número de reglas que, como las reglas de un juego (*Spielregeln*), determinan cómo se nos permite operar con los signos, de modo que cualquier otra forma de proceder se considera inaceptable. Entonces, una combinación arbitraria de signos puede, con base a las reglas, ser reemplazada por varias combinaciones de signos equivalentes. Y una derivación es correcta si todos sus pasos están de acuerdo con las reglas, es decir, no se toma ningún paso que no tenga una justificación por una simple subsunción bajo una de las reglas. Por lo tanto, si considero los signos de esta manera por sí mismos, no son meramente garabatos en el papel, claramente tienen un cierto significado. ¿Cuál es, pues, su significado? Ya no es el significado aritmético correspondiente, porque me he abstraído completamente de él. Claramente, el significado ahora radica en las reglas del juego. Es exactamente como en el juego de ajedrez: el alfil, la torre, etc. Ahora mantengo: todo cálculo consiste en el hecho de que los conceptos originales, los conceptos de número y los conceptos de relación y enlace que les pertenecen, son reemplazados por sus meros símbolos y estos ahora se consideran solo como tales conceptos de juego puramente convencionales. El significado del juego (*Spielbedeutung*) de estos símbolos radica en ciertas reglas que no son más que las contrapartidas exactas de las leyes fundamentales a las que toda deducción aritmética puede reducirse por mera subsunción (Hua Mat. I, 310).

§11. Representación simbólica, aritmética de los signos y teoría de las funciones

Meses después de la publicación de *Filosofía de la aritmética*, Husserl publica una reseña del primer volumen de las *Lecciones sobre el álgebra de la lógica* (*Lógica exacta*) de E. Schröder (de ahora en adelante la "reseña de Schröder").[132] Es de suma importancia la presentación de esta reseña por la continuidad que mantiene con *Filosofía de la aritmética* y

[132] Las *Lecciones* de Schröder consisten en tres tomos voluminosos, precedidos por un prólogo y una larga introducción. Dicho sea de paso, el tema de estudio de las *Vorlesungen* es la lógica deductiva. Más específicamente, Schröder tiene como objetivo presentar una lógica deductiva completamente reformada en forma de álgebra de lógica. Las 14 lecciones del primer volumen, que son las que Husserl reseña, están dedicadas a la elaboración y la investigación formal de un cálculo axiomático (álgebras booleanas, como podríamos decir ahora) teniendo el cálculo anterior como la interpretación privilegiada.

con el marco general de lo hasta ahora expuesto, sin contar lo que será posteriormente una crítica de la razón lógica. En esta reseña, Husserl critica los posicionamientos lógicos de Schröder evocando una línea de investigación claramente establecida desde finales del siglo XIX, a saber, el rechazo del carácter ciego con que se pretende estudiar al cálculo a través del algebra de la lógica. Para los intereses de esta investigación reduciré esta crítica a dos temas: la oposición cálculo y lenguaje, y la oposición entre lógica intensional (*lnhaltslogik*, *Logik des Begriffsinhalts*) y lógica extensional (*Umfangslogik*, *Logik der Begriffsumfange*).

La oposición cálculo y lenguaje. El objetivo de Husserl es rebatir la propuesta de Schröder de igualar o identificar el álgebra de la lógica con una parte de la lógica deductiva (la lógica de la inferencia) (Hua XXII, 5). Según Husserl, para Schröder lo anterior es posible porque supone, previamente, una triple reducción: "él reduce la lógica a la lógica formal, la lógica formal, por su vez, a una inferencia y, finalmente, la teoría de la inferencia a un cálculo" (González Porta, 1999, p. 95). El resultado (contradictorio) de esta reducción es que el algebra de la lógica sólo puede dar cuenta de la forma algorítmica, pero no de los principios materiales e intuiciones o evidencias primeras necesarias para entender el pleno sentido del programa de una lógica *trascendental* (Hua XXII, 6). En realidad, la reducción de la teoría de las ciencias deductivas a una teoría de la inferencia tiene por consecuencia que el cálculo devenga una forma *vacía* y sea incapaz de dar cuenta de otros procesos como la construcción y la interpretación, fundamentales para la edificación de una ciencia de las teorías deductivas. Lo que, finalmente, está puesto en la mesa de discusion es si existe una identidad entre cálculo y deducción. Según los planteamientos husserlianos, si esta identidad existiera, entonces la deducción no sería otra cosa más que cálculo *vacío*. Pero ¿puede el pensamiento ser reducido a un mero cálculo? La respuesta de Husserl es que no. El cálculo es un proceder ciego con símbolos según reglas reproducidas mecánicamente para transformar y transponer signos en cada algoritmo; es un error fundamental creer que con esto se alcanzan los fines de la lógica. Por lo anterior, la lógica no puede ser vista como un álgebra que opera con signos carentes de significados y divorciados de representaciones intuitivas, y, por tanto, no puede ser considerada un lenguaje simbólico (Hua XXII, 21). El álgebra de la lógica no es otra cosa que una técnica de signos. Empero, agrega Husserl, el calcular no es deducir, sino más bien un sustituto superficial de la deducción. El cálculo lógico es, por ende, un cálculo de las deducciones puras, más no su lógica.

Asimismo, para Husserl inferir es sólo uno de los métodos de las ciencias deductivas, pero no el único (los algoritmos y los procedimientos computacionales son otro tipo de métodos). Si así fuera se tendría que admitir que calcular (*Rechnen*) es lo mismo que inferir (*Schließen*). Así pues, esta técnica limitada (el álgebra de la lógica) lejos de ser una teoría de la deducción pura, es más bien un arte que tiene por objeto hacer superflua toda deducción. En suma, no puede admitirse bajo ninguna circunstancia que sus algoritmos o técnicas de "deducción" puedan ser pasados por inferencias genuinas (Hua XXII, 7-8), pues en ningún momento sus procesos semánticos y signitivos son totalmente isomorfos a la estructura del pensamiento: "El lenguaje no es ningún método sistemático-simbólico de inferencia (*Folgerung*), el cálculo no es ningún método sistemático-simbólico de la enunciación (*Äußerung*) de los fenómenos psíquicos […] con uno de ellos el otro no está dado, y es sobre todo seguro que el cálculo lógico sólo es cálculo y de ningún modo es lenguaje" (Hua XXII, 21-22).

Entendido el nucleo de la polémica con Schröder, resulta claro que Husserl no está tratando con un problema nuevo, sino continuando una línea ya establecida en *Filosofía de la aritmética*, a saber, la fundamentación de la matemática tomando como momento central la clarificación de sus conceptos básicos y sus métodos simbólicos. En efecto, "el esclarecimiento del concepto de número remite a la noción de representación impropia *(uneigentliche Vorstellung*) y pasa por tanto por la clarificación de la teoría del simbolismo" (González Porta, 1999, p. 97). Dicho esto, es claro que Husserl nunca dejó de creer que la lógica en su sentido más amplio tiene una función epistémica y de fundamentación, por ello se oponía a su identificación con la lógica deductiva en el sentido de Schröder. En lo que Husserl sí oscila es entre una *valorización* del cálculo técnico para suplir la capacidad limitada del hombre y una *denuncia a ultranza* sobre su desarrollo en los últimos siglos; del lado de esta última oscila igualmente entre una *valorización* del carácter fundacional y auténtico de las representaciones de base (*intuitivas*) y, por otro, la *observación* de su carácter profundamente finito.

<u>La oposición intensionalismo y extensionalismo</u>. Husserl señala, en la reseña en cuestión, que la lógica intensional es aquella que desglosa el sentido lógicamente primitivo de una entidad; mientras que una lógica extensional o de clases se hace depender del contexto o de los individuos. Para Husserl, el cálculo de la lógica *extensional* trata de relaciones de

clase. Las clases, sin embargo, no son ellas mismas otra cosa que colecciones y sólo en esa medida son consideradas por el cálculo (Hua XXII, 14- 15). Frente a Schröder, quien argumenta a favor de la primacía de la lógica extensional y, por ende, de su capacidad de suplir nuestra capacidad limitada de determinar los contenidos objetuales, Husserl abiertamente considera absurda esta caracterización. A diferencia de Schröder, Husserl cree una verdadera lógica de la extensión supone juicios intensionales. Dicho de otra manera, Husserl cree que la lógica deductiva es, en esencia, lógica intensional, es decir, un cálculo de conceptos (signos)–contenido. En lo que sí está de acuerdo con Schröder es en que ningún ser humano *posee* (intuitivamente) un contenido conceptual ideal y considera que el modo de referirnos a dicho contenido conceptual ideal es a través de una forma *simbólica*.

A partir de su encuentro con el álgebra de la lógica de Schröder, Husserl se "llevó a casa" mucho más que una apreciación adicional sobre la re-interpretabilidad de los sistemas formales. En efecto, Husserl se dio cuenta de que podía desafiar el formalismo en matemáticas, algo que él mismo había tenido como interés en sus años de estudiante en Berlín. Bajo esta óptica, el formalismo de Schröder no respondía ni planteaba la cuestión de las condiciones de la posibilidad de la lógica como algoritmo formal. En todo caso descuidaba la importante cuestión de las relaciones entre el álgebra de clases y las operaciones lógicas. El hecho es que Husserl pensó que la cuestión relativa a la posibilidad de un algoritmo formal se puede abordar a través de una investigación exhaustiva de la noción de sustitución. En el fondo, la actitud crítica de Husserl hacia el uso de definir un concepto definiendo su extensión, al menos en esta reseña, desarrollada como verdadera teoría de la representación impropia, mostraba el retroceso del espectro intensional de la lógica mediante la sustitución de los conceptos aritméticos intuitivos o "auténticos" por representaciones simbólicas o "inauténticas".

Resulta evidente que los términos de auténtico y simbólico, principales herramientas en *Filosofía de la aritmética*, aún mantienen su presencia y solidez; pero esto también significa que el influjo de Brentano sigue estando presente. Precisamente la solidez de este influjo comenzará a fragmentarse con el desarrollo de nuevos estudios lógico-semánticos orientados objetivamente, en los cuales Husserl buscar determinar la *trascendencia* de los significados conceptuales (*ideales*) y su correación con los llamados objetos intencionales. Este nuevo emplazamiento finalmente superará la concepción fenomenalista e inmanentista de la conciencia de la que Husserl no había logrado desprenderse aun en sus mejores argumentos en *Filosofía de la aritmética*. Con la caracterización del carácter intencional de la conciencia y sus representaciones subjetivas abiertas a la *trascendencia*, Husserl no dudará en poner atención a los caracteres subjetivos *intencionales* y a su direccionalidad. En este trasfondo es que aparecen, en 1893, los "Estudios psicológicos ordenados a la lógica elemental".[133]

En la segunda parte de dicho escrito de 1893, Husserl retoma la distincion entre representaciones auténticas y representaciones simbólicas. En un contexto general, este texto aún mantiene una discusión sobre los fundamentos psicológicos de la lógica y de las matemáticas. En un contexto específico se pregunta por el papel del pensamiento simbólico en el conocimiento científico. Ahondando en la distinción entre representaciones auténticas e inauténticas que se encontraban en *Filosofía de la aritmética*, Husserl propone ahora, en este texto de 1893, dos tipos de representaciones: intuiciones (*Anschauungen*) y representaciones simbólicas (*Repräsentationen*):

> Ciertas vivencias psíquicas, denominadas en general "representaciones", tienen la peculiaridad de que no encierran en sí sus "objetos" como contenidos inmanentes (o sea, como contenidos presentes en la conciencia), sino que *meramente intienden* sus objetos de una cierta manera que aún ha de caracterizarse con mayor precisión. Baste de modo provisional la determinación, sin duda certera y deliberadamente sobrecargada, de que el "meramente intender" significa aquí tanto como: por medio de cualesquiera contenidos dados en la conciencia apuntar a otros que no están dados, mentarlos, aludir a ellos con comprensión, emplear con comprensión esos primeros contenidos como representantes simbólicos de estos otros; y ello sin que haya un conocimiento conceptual de la relación que impera entre la representación y el objeto intendido. A tales representaciones vamos a denominarlas *representaciones simbólicas*. Frente a ellas están otras vivencias psíquicas, denominadas también "representaciones" en la terminología de muchos psicólogos, que no se limitan a intender sus "objetos" sino que *los acogen realmente en sí* como contenidos inmanentes. Llamamos *intuiciones* a las representaciones en este sentido (Hua XXII, 107-108).

[133] Husserl no dudó en caracterizar este ensayo como un fragmento de psicología descriptiva y señalar, tiempo después, que constituye el primer esbozo de las *Investigaciones lógicas*, especialmente de la III y la V, (Husserl, 1956, p. 295).

A partir de esto tenemos que *representación* (*Vorstellung*) en un sentido refiere al acto que coloca *realmente* un objeto frente a nosotros. En este primer caso, representar es intuir, pues el contenido es igual al objeto de la presentación. Pero en otro sentido *Representación* (*Repräsentation*) significa lo contrario, es decir, la representación representa algo mediante otro contenido. En este segundo caso, el contenido es sólo representante de otro contenido no dado. Aunque en género son distintos, tienen en común la presencia de cierto contenido. Es este punto nodal el que constituye el gran descubrimiento de Husserl, a saber, que la diferencia entre ambas *representaciones* no es una diferencia de contenidos, sino de modos de la conciencia o de la apercepción de contenidos. Las representaciones simbólicas son más significativas por ser la base de los conceptos lógicos y matemáticos, y porque son las primeras en revelar la dimensión propia de la intencionalidad. En efecto, Husserl parece caracterizarlas como ciertas vivencias psíquicas que tienen el carácter peculiar de no incluir a sus objetos en ellas mismas como contenidos inmanentes. En todo caso, ellas *mientan* sus objetos en *ausencia*. En tanto meramente mentados, los objetos de las representaciones simbólicas no están *dados* intuitivamente, pero se refieren a estos por medio de ciertos contenidos inmanentes a ellas que funcionan como los representantes de dichos objetos, es decir, como *signos* que apoyan la orientación ideal hacia un contenido no dado (Hua XXII, 406-408). Estos *representantes* o signos no son en verdad *notados* por ellos mismos. Por ejemplo, por medio de sus contenidos inmanentes, el lenguaje simbólico matemático mienta las figuras geométricas o los objetos matemáticos que jamás pueden hacerse presentes en una intuición.

En suma, para Husserl, el carácter de la intención reside exclusivamente en la direccionalidad de la conciencia hacia un contenido y no en el hecho de la presencia de un contenido en la conciencia en tanto tal. En efecto, ese carácter es compartido tanto por la representación funcional como por las intuiciones, aunque es más notable en el caso de la primera. Finalmente, tres son los puntos a tener en consideracion sobre este texto: 1) Husserl ha afinado su caracterización de la subjetividad diferenciando dos modos de representación: las representaciones simbólicas y las intuiciones; 2) Husserl sigue desdibujando la diferencia entre contenido y objeto de una intuición, y 3) la distinción entre contenidos subjetivos y contenidos objetivos (ideales), aunque presente en las representaciones simbólicas, pues se “orientan hacia un contenido no dado”, no es del todo claro. Estas distinciones empezarán a surgir un año después, en 1894.

No obstante, la interpretación husserliana de intuición ya ha superado parcialmente la estructura moderna representacionalista. En primer lugar, se distingue de la representación simbólica por el modo *de referencia* o por la diferencia en sus caracteres de acto intencionales y no por otros derroteros. En segundo lugar, reformula la naturaleza del objeto intencional en la intuición. Esto es visible en un texto de 1894 intitulado “Objetos intencionales” (Hua XXII, 303-348),[134] donde Husserl finalmente se da cuenta de que debe distinguirse, en *todas las representaciones*, entre sus contenidos inmanentes (primarios), sus contenidos lógicos y, finalmente, sus objetos intencionales.

Concebido como un ensayo “contra Twardowski”, uno de los discípulos “escolásticos” de Brentano, en “Objetos intencionales” Husserl propone una solución a la paradoja de las representaciones sin objetos. Dicha paradoja surge cuando entran en conflicto dos afirmaciones: por un lado, la afirmación de que a toda representación le corresponde un objeto (Hua XXII, 303), y, por otro lado, la afirmación de que no a toda representación le corresponde un objeto (p. ej. el caso de “círculo cuadrado”) (Hua XXII, 303). De entrada, Husserl rechaza la teoría de la imagen, según la cual toda representación tiene como contenido por lo menos una imagen de objeto. La rechaza porque hay muchas representaciones sin imágenes. También rechaza una variante ingeniosa de la teoría de la imagen, la de Kasimir Twardowski, quien introduce la diferencia entre objetos intencionales (representados) y objetos verdaderos (o reales), alegando que toda representación (incluso las absurdas) tiene por lo menos un objeto intencional. Husserl critica esta teoría por llevar a cabo una falsa duplicación de la nocion de objeto; en todo caso, el contraste entre objetos intencionales y objetos reales de la conciencia es sólo un contraste aparente, pues reconduce

[134] Los tres textos contenidos en *Objetos intencionales* fueron escritos por Husserl en tres años distintos. En la siguiente tabla se muestran los datos cronológicos y la paginación de Husserliana correspondientes a cada texto o grupo de manuscritos que conforman dicho texto:

Objetos intencionales 1894 Hua XXII, 303-337

Objetos intencionales 1895 Hua XXII, 337-338

Objetos intencionales 1898 Hua XXII, 338/9-348 la problemática al plano de las representaciones en vez de situarla en el plano de los objetos representados (Hua XXII, 312, 315).

La solución de Husserl propone que, en lugar de referirnos a objetos intencionales (indeterminados), en oposición a objetos verdaderos (determinados), deberíamos hablar de representaciones indeterminadas o determinadas. Habría, por ende, que distinguir en las representaciones entre sus contenidos inmanentes (primarios), sus contenidos lógicos (ideales) y, finalmente, sus objetos intencionales. Si no lo hacemos, entonces absurdidades como cuadrados redondos existirían en las representaciones (como contenidos primarios) (Hua XXII, 310). Así, la paradoja mencionada concierne al contenido objetivo (ideal) de las representaciones (su significado). Si uno dice, "una representación tiene un objeto verdadero", se está diciendo que "un objeto le corresponde". Pero si uno dice, "una representación tiene un objeto intencional" o "tiene un objeto meramente intentional" (no tiene un objeto verdadero, meramente lo representa) significa que sólo tiene un "contenido objetivo," un significado meramente intencional (Hua XXII, 333).

Para Husserl "un objeto meramente intencional es un objeto no existente" (Hua XXII, 315), es decir, los objetos meramente intencionales son objetos que no se juzgan ni como existentes ni como no existentes. En este sentido, hablar de existencia meramente intencional de un objeto no implica que el objeto exista *en* la intención.[135] Ahora bien, las representaciones se tratan como existentes por estar en relación con algún marco teórico o interpretativo. Husserl considera que el pensamiento dentro de marcos, es decir, *bajo una suposición fija*, es muy frecuente en el discurso ordinario y científico, menciona especialmente a la aritmética formal y los sistemas geométricos como tipos de marcos:

> Con ello tiene que ver que todo hablar condicionado acerca de verdad y falsedad, existencia y no-existencia, consecuencia o no-consecuencia, objetos reales [*wirklich*] y ficticios, etcétera, puede ser tratado completamente como incondicionado, siempre que uno se asegure de no rebasar el marco de la asunción dominante. Esto tiene consecuencias significativas especialmente en los sistemas deductivos de la llamada "aritmética formal",

[135] Aquí cabe la pregunta: ¿qué hay en el acto mental de representación si el objeto al que se dirige la misma no existe ni fuera ni dentro de la representación? El término para referirse a eso que hay en el acto psíquico es lo que se ha llamado contenido. A partir de aquí, Husserl presenta y acepta la división entre acto, contenido y objeto, a la vez que toma distancia de Brentano en algunas consideraciones que le impiden resolver la paradoja de las representaciones sin objeto, específicamente en cuanto a su falta de distinción entre contenido y objeto de la representación.

> donde las configuraciones hipotéticas de conceptos formales fundamentales y los axiomas relativos a ellas sirven para la constitución de un ámbito matemático cerrado, un "álgebra" cuyo contenido es el sistema ramificado al infinito de las consecuencias formales que pueden derivarse en una deducción pura de aquellas bases. Aquí no solamente se habla, sino que se *juzga*, como si las verdades, existencias, relaciones, incompatibilidades deducidas fueran absolutamente válidas (Hua XXII, 323-324).

De este modo, Husserl no sólo ha diferenciado los aspectos subjetivos y objetivos de las representaciones, sino que también ha identificado el elemento esencial de las representaciones: el elemento intencional. Ha llegado así a este "resultado principal [...] que, de hecho [...], sólo la significación es la determinación interna y esencial de la representación, mientras que la relación al objeto apunta a cierto marco de verdades o juicios en los que encaja la significación" (Hua XXII, 336). En otras palabras, "la relación al objeto, con cada representación (subjetiva), está mediada a través de su contenido, *v. gr*. su significación" (Hua XXII, 338). Siguiendo a Fisette (2003), en el período de 1894 a 1896 al parecer ya se pueden encontrar distinciones precisas al interior de la noción de contenido que se relacionan con el modo en que Husserl comprende la intencionalidad de las representaciones. En esa misma línea, Mohanty sugiere que el uso de la terminología del Husserl temprano se debe entender como una parte del proceso intelectual que lo lleva hacia una teoría de la trascendencia de los contenidos ideales (2008, p. 50). En efecto, la aparición del concepto de intencionalidad en el contexto de una teoría de los objetos intencionales esclarece una dimensión de la conciencia que involucra la abstracción, la idealización, la reflexión, la formalización y otras actividades cognitivas de orden superior. Precisamente tales actividades cognitivas de orden superior son fundamentales para la constitución de ese tipo de objetos, como los números y las formas geométricas, a los que Husserl atribuirá, en textos posteriores, la objetividad ideal. Para Husserl, el empleo sistematizado de signos y reglas formales en *Filosofía de la aritmética* coincide con el desarrollo sistemático de una verdadero concepción simbólica y abstracta del número. El desarrollo de tal forma simbólica de pensamiento matemático es un paso crucial en el proceso que conduce a la constitución de la objetividad ideal matemática. Esta transición está directamente relacionada con el proceso general mediante el cual el juego de signos (formales) culmina en una formalización completamente universal de la ciencia de las matemáticas comprensible sólo si se toma en cuenta el papel de la intencionalidad tal y como comienza a ser planteada en *Objetos intencionales*.

Si recapitulamos lo hasta ahora señalado, resulta que obtenemos toda una sistemática de los signos y una ampliación de la teoría del signo matemático. La conclusión es que los signos numéricos resultan ser signos del tipo conceptual, dado que sus notas internas y externas sirven como "caracteres" que denotan lo representado formalmente, pero también son signos *indirectos* en tanto que se sostienen uno dentro del otro (como signos mediadores entre sí). En efecto: "los signos indirectos, puramente externos y enteramente unívocos desempeñan (junto a los signos indirectos, mixtos) un papel de la mayor importancia en la aritmética" (Hua XII, 344). Más aún:

> El signo indirecto es un signo compuesto en el cual los signos parciales no están colocados unos junto a otros sino unos sobre otros y referidos unos a otros. S es un signo del objeto 0 en virtud de que S es un signo de S_0, y éste es un signo de 0; o bien, S es un signo de S_1, éste un signo de S_2, éste quizá a su vez un signo de S_3, y así sucesivamente, hasta llegar finalmente al signo S_n, que designa directamente a 0. (Hua XII, 343)

En resumen: "los signos fundamentales de la ciencia de los números son los signos 0, 1,..., 9. Todos los signos de los restantes números, y además signos como $2 + 3$, $5 \cdot 6$, $^4/_2$, etc., son signos derivados de números representados impropiamente" (Hua XII, 368).[136] Como se observa, el concepto de signo matemático es, además, completamente relacional, "esto es, que lo esencial para la existencia de un signo es la *relación* entre lo que solemos metonímicamente llamar signo y lo designado"(García-Baró, 1993, p. 134). Ahora bien, una vez que se tiene toda una sistemática de los signos ¿cómo ocurre la *relación entre signos*? ¿Qué entiende Husserl por una aritmética de los signos? La respuesta se encuentra en el ensayo, "La aritmética como una ciencia a priori" (1891), donde además de preguntarse por el desarrollo de la aritmética como una ciencia, Husserl se cuestiona cómo es que la aritmética establece "[…] las leyes para el dominio de los números" (Hua XII, 382).

Dicho en términos generales, para Husserl el concepto de aritmética tiene que ver con las relaciones o construcción de números (Hua XII, 375). Esto último es comprensible si recordamos la base husserliana de reunir las representaciones simbólicas y la aritmética de

[136] Sobre este punto se hablará a detalle en el siguiente capítulo: "La teoría de la variedad como llave de acceso a nuevos dominios numéricos (1890-1901)".

los signos; en otras palabras, de oponer una aritmética universal y una aritmética específica. La aritmética universal es en este caso un sistema de axiomas que rige el *comportamiento* de las operaciones aritméticas válidas en todos los sistemas numéricos. En otras palabras, la aritmética universal es la parte que todas las teorías de los sistemas numéricos tienen en común —formas generales de las operaciones (*Allgemeine Operationsformen*)—. En el caso de la aritmética específica, esta tiene como correlato formas concretas de operaciones (en un sistema numérico particular) que determinan la especificidad del cálculo aritmético o las formas de operación de lo particular (*Operacionsformen der besonderen*) (Centrone, 2010b, p. 160). Esto es confirmado por Husserl cuando señala que la aritmética "tiene la tarea de definir cualquier forma elemental y concebible de los números y de establecer, mutuamente, las leyes de su conexión y aplicación" (Hua XII, 378). Asimismo, en el texto 2 de Hua XXI, titulado "Aritmética y teoría de las funciones" puede leerse lo siguiente:

> En la aritmética general son establecidas las leyes, según las cuales, se construyen o son dadas, en la conversión equivalente, las operaciones fundamentales de cualquier complejo simbólico de formación numérica, según la cual se sustituye la característica enigmática de los números a través de una construcción definida. (Hua XXI, 14)

La aritmética tiene, entonces, dos objetivos recíprocos: 1) establecer las reglas bajo las cuales se construyen las formulas aritméticas y 2) este sistema de reglas debe hacer posible el procedimiento automático o técnico de calcular entre los signos naturales —los signos naturales no son sino el conjunto de los números auténticos, mientras que los signos derivados son aquellos representados impropiamente (Hua XII, 344) —. Si regresamos a una de las tesis de "Sobre el concepto de operación", además de enfatizar lo anterior, Husserl explica cómo la justificación lógica de los algoritmos aritméticos hace depender la relación representacional de la identidad formal (estricta) con un signo. Tal es el caso de los algoritmos y operaciones aritméticas:

> [...] cualquier algoritmo comienza estableciendo un paralelismo algorítmico riguroso entre los conceptos fundamentales, juicios fundamentales e inferencias fundamentales (*Grundschlüssen*) de su dominio. Asimismo, los objetos del dominio, que se representan de una manera indeterminada, son reemplazados por signos simples, la combinación por signos compuestos producidos por la combinación de signos que corresponden a los diferentes conceptos de combinación; la relación de signos por signos de relación. Además, los axiomas (*Grundsatze*) designan, por convenciones signitivas

> (*Zeichenkonventionen*), qué modificaciones signitivas están permitidas y cuáles no (toda vez que corra paralela a ella un juicio correcto) [...]. (Hua XII, 418)

En *Semiótica* se repite la misma tesis:

> Los símbolos son el gran medio auxiliar natural mediante el cual podemos quebrar las barreras originariamente tan angostas de nuestra vida psíquica, mediante el cual estas imperfecciones esenciales de nuestro intelecto pueden tornarse, al menos hasta un cierto grado, inocuas. Por rodeos peculiares, que ahorran el pensar más elevado, ellos capacitan al espíritu humano para rendimientos que él mismo nunca podría alcanzar de una forma directa, en un auténtico trabajo cognoscitivo. Los símbolos sirven a la economía del rendimiento del trabajo intelectual como las herramientas y las máquinas lo hacen a la economía del rendimiento del trabajo mecánico. (Hua XII, 349-350)

Por lo anterior, las operaciones aritméticas se constituyen como *procedimientos* para la reducción y construcción numéricas. Construcción numérica, porque comprenden expresiones numéricas complejas a partir de los números en forma natural, y reducción numérica porque van de las expresiones numéricas complejas hasta el número correspondiente en forma natural (Centrone, 2010, p. 330). Queda claro, entonces, que las operaciones aritméticas son formas de producción simbólica que establecen reglas que forman y transforman igualdades, desigualdades, funciones, etc. Lo que está de fondo aquí es la separación del *sistema de numeración* del *sistema de los signos numéricos* tal y como fue especificado en *Filosofía de la aritmética*. En dicha separación los signos numéricos son independientes de sus correlatos conceptuales. Así, mientras que el aspecto *simbólico* del *sistema de numeración* se mantiene trabajando de forma autónoma, en el *sistema de numeración* se constituyen dos niveles correlativos: uno conceptual y otro signitivo. En el nivel conceptual se generan nuevos *conceptos* de acuerdo a cierta combinación de sus *conceptos elementales*, mientras que en el nivel signitivo lo que se producen son *signos a partir de signos* de acuerdo a reglas preestablecidas. Por ejemplo, la adición sería una construcción simbólica que opera bajo ciertos signos fundamentales que a su vez se sostienen en un modelo matemático o, como sugiere Husserl, "también podemos decir que en la aritmética yace el problema de la determinación aritmética del número, la determinación de los números dados bajo ciertas condiciones de otros números (Hua XXI, 14). Finalmente, otra de las operaciones aritméticas fundamentales Husserl la localiza en la llamada teoría de las funciones (*Theorie der Funktionen*).[137] Así como a la aritmética general le corresponde el dominio de los números, existe otra disciplina cuyo objeto de estudio son las funciones:

> En la teoría de funciones el punto de vista es otro: no es su meta el problema de la determinación, esto es, la posible producción conveniente y sencilla de los números a través de cualquiera de sus determinadas condiciones aritméticas; sino la determinación de las funciones que caracterizan las condiciones aritméticas. (Hua XXI, 14)

La principal tarea de la teoría de las funciones es la clasificación de las dependencias funcionales y la investigación vinculada a cada tipo de formas de exposición numérica. De modo que, mientras que "la aritmética trata con números, la teoría de las funciones con funciones. Si las funciones descansan sobre los números, la aritmética también es el fundamento para la teoría de las funciones" (Hua XXI, 15). Para Husserl es importante clarificar el concepto de función, pues a partir de él se derivan las propiedades características, las formas de presentación, las formas de aplicación de las nociones numéricas y su coordinación directamente entre ellas. En Hua XXI, 17, Husserl presenta el siguiente ejemplo:

$$G(f(u), f(v), f(u + v)) = 0$$

$$f(u) \bullet f(v) = f(u + v)$$

$$a^x \text{ y}$$

$$x = f(y)$$

Las funciones que aquí se observan son funciones de igualdad que poseen *n* puntos infinitos y uno o ningún cero. La frecuencia con que se usan aquí los axiomas de la igualdad se debe a que los conceptos de función, inyectividad, suprayectividad y biyectabilidad, se definen en términos de igualdad. Por tanto, la teoría de las funciones se define como un procedimiento simbólico con el cual se logra un conocimiento de las propiedades que surgen de la dependencia de ciertos signos indeterminados que representan la multiplicidad de números indefinidos con partes *fijas* y partes *variables*. Así, la derivación de algunas de estas propiedades determina las formas generales de los números dependientes, independientes y

[137] Hay que recordar que una función es una herramienta muy importante en las matemáticas modernas. Luzin la define de este modo: "En su máxima generalidad, el término 'función' denota una relación entre cantidades variables. Si una cantidad x puede tomar valores arbitrarios y se da una regla mediante la cual es posible asociar a estos valores, determinados valores de una cantidad y, entonces decimos que y es una función de x y denotamos esto mediante notaciones simbólicas como $y = f(x)$, o $y = F(x)$, o $y = \varphi(x)$, y así sucesivamente" (2003, p.415).

constantes. Por ejemplo, en la ecuación de la recta: $y = ax + b$, "a" y "b" son constantes y "x" la variable (Hua XXI, 17). Otro ejemplo sería las constantes y variables iguales a "y":

$$y = \frac{a_{0+}\, a_{1}\, \mathrm{x}_{+}\, \cdots}{b_0 + \; b_1 \mathrm{x} + \cdots}$$

En este caso se observa cómo lo "números" se determinan entre sí, pero al tiempo la variedad de número determina otra variedad de números (y donde su significación ocurre al margen de su encuentro intuitivo). En palabras de Husserl: "Los signos del cálculo (*Rechenzeichen*) o signos aritméticos, en tanto signos algorítmicos, tienen su significado (*Bedeutung*) (connotación en el sentido de Mill) exclusivamente en las reglas del enlace, la separación, la sustitución, en fin, en las reglas operacionales las que en su totalidad hacen del algoritmo un algoritmo" (Hua XXII, 393).

Con base en lo anterior, resulta claro por qué Husserl presenta en *Filosofía de la aritmética* a los signos naturales (los números fundamentales/naturales) en "oposición" a los signos artificiales (los "demás números"), aunque en ambos casos se apunte hacia el cumplimiento de la verdad lógica mediante un recurso que va de las operaciones lógicas a las operaciones pre-lógicas. De lo que se trata es de "construir, a partir del procedimiento natural y lógicamente injustificado, otro artificial y lógicamente justificado que garantiza no mera convicción sino conocimiento asegurado" (Hua XII, 373). En el caso de conceptos aritméticos como a^n estos siguen representando (simbólicamente) la relación del concepto de un producto de *n* factores de *a*. De hecho, este proceso puede ser continuado apuntando a unas y otras representaciones simbólicas que van mediando entre la intuición originaria y lo que se representa, pues existe entre la intuición y la representación simbólica una "dependencia funcional necesaria (*notwendiger funktioneller Abhängigkeit*) con evidencia entre los contenidos enlazados" (Hua XXII, 96). Este fenómeno que sería una especie de *cumplimiento próximo*, siendo el cumplimiento último de toda representación simbólica la intuición pura, permite a Husserl confirmar "que nuestras determinaciones concuerdan en lo esencial con algunas de las propuestas por Kant: así, cuando contrapone las intuiciones como representaciones inmediatas a las representaciones conceptuales y en imagen como mediatas" (Hua XXII, 109).

En resumen, el proceso de simbolización en *Filosofía de la aritmética* y en los ensayos antes comentados es muy claro: es una operación de *sustitución* que reemplaza la finitud intuitiva de los conjuntos sensibles por un signo. Sin embargo, Husserl pronto habría de darse cuenta que su posición inicial —que el dominio numérico (cardinal) es fundamental para la aritmética general— traía consigo numerosos problemas. En primer lugar, dado que la aritmética es ahora un proceso exclusivamente signitivo, la comprensión de la formación de un sistema numérico parece requerir más que una semiótica de los signos. En segundo lugar, se presenta el problema de hacer que la aritmética, fundada en el concepto de número cardinal, dé cuenta de otras formas de números posibles, en el sentido auténtico del término, pues es el caso que los números negativos, imaginarios, irracionales y complejos no pueden ser construidos a partir de la de combinación de conceptos numéricos propios. Una carta a Stumpf, de febrero de 1890[138] resume bien este problema (Hua, XXII, 244-251). Al referirse a su investigación como una "justificación para ampliar el campo de los números", Husserl se da cuenta, y se lo confía Stumpf, que este argumento resulta ser falso, porque cualquier intento de derivar los números complejos, negativos, racionales e irracionales del concepto de número cardinal se vuelve imposible. En Hua XXI, se lee lo siguiente:

> El concepto de numeración no permite ninguna extensión en absoluto; lo que está en extensión y permite la extensión es solo la técnica aritmética. Es ella quien sabe y ella quien forma los signos negativos, imaginarios, irracionales y fraccionarios que sirven para hacer el cálculo más completo y que desde este punto de vista tienen un significado lógico importante. Pero lo que les falta es todo el contenido conceptual más allá del algoritmo (XXI, 42-43).

El problema de la ampliación (*Erweiterung*) del dominio de los números, tan importante en ese momento, es en realidad el problema de la justificación del cálculo con números complejos. Para decirlo rápidamente, la hipótesis de Husserl es que la justificación de la expansión del dominio de los números no depende de una base conceptual sino de la *técnica* de la aritmética, es decir, de los signos y reglas de cálculo.[139] En ese mismo año, 1890,

[138] Existe un debate en torno a la fecha en que Husserl escribió la carta a Stumpf. Unos plantean que la carta fue escrita en 1890 (Hill y da Silva 2013) y otros en 1891(Rosado Haddock 2012). Por cierto convencionalismo entre los estudiosos de Husserl, daré por válida la fecha de 1890.

[139] Esta propuesta es reafirmada en la carta a Frege del 18 de julio de 1891, donde Husserl defiende una posición formalista con respecto al método de justificación de números imaginarios en aritmética. Sin embargo, en la misma carta, Husserl está de acuerdo en la crítica del formalismo que desarrolla Frege. El porqué de esta ambivalencia es claro: Husserl se *opone* al formalismo matemático por su desprecio a cuestiones semánticas,

Husserl redactó un brevísimo manuscrito sobre este tema donde critica las teorías de la ampliación del dominio numérico (*Die Theorien der Erweiterung des Zahlgebietes*) y luego discute las teorías verdaderas. Las cuatro *Erweiterungtheorien* criticadas son: (1) la escéptica; (2) aquella que sostiene que la extensión numérica es resultado de la creación o definición de nuevos números; (3) aquella que señala que la ampliación se justifica a través del recurso de apelación a otros dominios conceptuales (demostración (*Veranschaulichung*)), y, finalmente, (4) aquella para la cual la ampliación se legitima independientemente de sus fundamentos conceptuales.[140] La respuesta de Husserl, cercana a la cuarta teoría criticada, consistirá en sostener que la ampliación no depende de una fundación *conceptual* sino de reglas de los signos y del cálculo (de la técnica aritmética). En el fondo, el dominio conceptual no se extiende, sino únicamente la *técnica aritmética*, siendo esta extensión un logro de la matemática formal.

Aun cuando Husserl concluye que el dominio del número natural no es el fundamento de la aritmética, su concepción inicial de la determinación de ésta como teoría general de las operaciones no se ve modificada. Finalmente, el desarrollo progresivo de la extensión de las técnicas algorítmicas que generan nuevas formaciones numéricas cada vez más formales hace de la *arithmetica universalis* una parte de la lógica formal. Una parte especial y uno de los capítulos más importantes de la lógica en tanto *arte* para denotar conocimiento (Hua XXI,248).

---

pero lo acepta porque es el formalismo la clave para evidenciar la *re-interpretabilidad* del cálculo formal sobre diferentes dominios.

[140] *Cfr.*, la introducción del editor (xviii-xxiii) de Hua XXI.

CAPÍTULO III

La teoría de la variedad (*Mannigfaltigkeitslehre*) como llave de acceso a nuevos dominios numéricos (1890-1901)

3.1 Génesis y desarrollo de la “teoría de la variedad” (*Mannigfaltigkeitslehre*) en los primeros escritos de Husserl (1890-1901)

§1. Introducción

Hacia 1913, Husserl reconoce haber desarrollado, desde 1886, una teoría de la variedad pura a partir de estudios materiales e históricos. Esos estudios materiales e históricos tienen que ver con la reformulación de sus lecciones sobre lógica y el estudio de la lógica de Bolzano, a la que le faltaba, según Husserl, la idea de una matemática formal pura:

> Mientras reformulaba completamente mis lecciones lógicas, sobre la base del nuevo conocimiento y con la ayuda de Bolzano, reconocí lo incompleto del diseño de este autor. Le faltaba la idea de una matemática formal pura, esto es, la idea de una “TEORÍA DE LA VARIEDAD”, idea que yo había desarrollado a través de estudios materiales e históricos en una pureza con la cual, en aquel tiempo, los matemáticos todavía no estaban en absoluto familiarizados como lo están actualmente; y en consecuencia, también le faltaba toda visión de la unidad interna de la lógica formal con la teoría pura de los números cardinales, la teoría pura de los números ordinales, **la teoría pura de la magnitud, etc., finalmente de las doctrinas puras de la teoría y de la variedad** (Hua XX/1, p. 298. El énfasis es mío).

Más de una década antes de este pronunciamiento, el 7 de septiembre de 1901, Husserl escribe a Paul Natorp lo siguiente:

> Durante los años 1886/93 participé en las teorías de la geometría, la aritmética formal y la **teoría de las variedades**, a veces con dedicación exclusiva. El resultado de estas investigaciones fueron el prefacio de mi *Filosofía de la aritmética* (1891) (véase la observación sobre el informe de Gauss de la segunda edición sobre los residuos bicuadráticos, W. W. parte III), y también muchas reflexiones importantes con sus demostraciones. También hice, influenciado por la ***Teoría de la extensión*** **de Grassmann** y la ***Introducción a los números complejos*** **de Gauss** (lc), planos como ciertas series continuas dobles, el espacio como ciertas series tridimensionales, etc. En los números complejos generales (como la representación de $re^{\varphi i}$) intenté buscar expresiones

> aritméticas suficientes para las relaciones de orden en el plano, y de la misma manera en los números complejos correspondientes de orden superior para las variedades planas (*ebenen Mannigfaltigkeiten*) de orden superior (Hua Dok III/5, p.80. El énfasis es mío).

En ambas citas se han destacado las enunciaciones concernientes a la teoría pura de la magnitud, la teoría de la extensión y las doctrinas puras de la variedad. Esto responde al hecho de que estas doctrinas, en tanto marcos teóricos, contribuyeron o fueron coadyuvantes en la transición filosófica-matemática de Husserl anunciada en sus ensayos aritmético-formales, a saber, el paso de un estudio enfocado en la matemática cuantitativa al estudio de la matemática formal:

> La investigación lógica de la aritmética formal y teoría de las variedades, disciplina y método superior a todas las formas especiales del número y de la extensión, me deparó particulares dificultades, forzándome a consideraciones de índole muy general, que rebasaba la estricta esfera matemática y tendían hacia una teoría general de los sistemas deductivos formales. De las series de problemas que se impusieron, indicaré sólo una determinada. La patente posibilidad de llevar a cabo generalizaciones o modificaciones de la aritmética formal, mediante las cuales puede ésta elevarse sobre la esfera cuantitativa sin alterar esencialmente su carácter teorético ni su método calculatorio, hubo de despertar la intelección de que lo cuantitativo no pertenece a la esencia más general de lo matemático o «formal» y de los métodos calculatorios fundados en ella. Cuando luego descubrí en la «lógica matemática» una matemática que efectivamente no tiene nada que ver con la cantidad […] se me plantearon los importantes problemas sobre la esencia de lo matemático en general, sobre las conexiones naturales o los posibles límites entre los sistemas de la matemática cuantitativa y no cuantitativa, y especialmente, por ejemplo, sobre la relación entre lo formal de la aritmética y lo formal de la lógica (Husserl, 1999, p. 21-22).

Husserl admite que fue el estudio de la investigación lógica de la aritmética formal y de la teoría de las variedades lo que despertó su interés por el estudio del carácter "formal" de las matemáticas. La patente posibilidad de llevar a cabo generalizaciones mediante las cuales puede la aritmética formal desprenderse de la esfera cuantitativa sin alterar su carácter teorético ni su método calculatorio, hubo de confirmar la hipótesis de Husserl de que lo cuantitativo no pertenece a la esencia de lo matemático o lo formal. En realidad, el paso de lo cuantitativo a lo formal pone de relieve el verdadero interés de Husserl: comprender lo que provisionalmente llamaré: el paso de una filosofía de la aritmética (o filosofía del cálculo) a una teoría de la ciencia (de lo formal) que tome en serio su papel como fundamento de toda teoría científica.

Pero para lograr esto, primero se requiere evidenciar que existe cierto tipo de relación estructural entre los dominios de cualquier ciencia y después establecer que existe una especie de equivalencia elemental que permita capturar el aspecto puramente formal de cualquiera de esos dominios. Una vez logrado esto se hará patente una ciencia de los sistemas deductivos en general. Según Picker, esta nueva investigación abriría, definitivamente, el camino que conducirá a las *Investigaciones lógicas* y, quizás, a toda la filosofía fenomenológica que "es verdaderamente el desarrollo del método de la abstracción y reducción aplicado en toda conformación conceptual matemática, hasta (convertirle en) un método filosófico del conocimiento de la esencia" (1961, p. 266).[141]

En la puesta en marcha del proyecto anterior, los trabajos de Kronecker, Weierstrass, Brentano, resultan insuficientes (Ortiz Hill y Rosado Haddock, 2000). Aquí se vuelve necesario recurrir a los proyectos de Bolzano, Gauss,[142] Grassmann, Hankel y Riemann, por ser ellos los fundadores de las disciplinas como teoría de la ciencia, la teoría pura de la magnitud, la teoría de la extensión y las doctrinas puras de la variedad que, como señalé al principio de este apartado, fueron coadyuvantes en el establecimiento de una teoría de la ciencia. Dicho lo anterior, este tercer capítulo inicia con la *interpretación* que Husserl hace de la filosofía matemática de Hankel, Grassmann y Riemann, seguida de la presentación de la teoría de la variedad *husserliana* desde un punto de vista filosófico y matemático. En lo que sigue de este capítulo, haré explícito este tránsito.

[141] Desde luego, no comparto esta última opinión de Picker, a saber, la de caracterizar a la fenomenología como un puro conocimiento de esencias.
[142] Por falta de espacio y de tiempo no puedo dedicar un apartado a la relación entre Gauss y Husserl. Remito al lector al prólogo de Hua XII (p. 8) donde Husserl expresamente señala que debe sus ideas matemáticas al estudio de la teoría de los residuos bicuadráticos de Gauss. También debe consultarse la discusión de Bolzano, Gauss y Husserl sobre las cantidades y magnitudes en el ensayo de Husserl "Intentos de delimitar las cantidades generales y el concepto de número" (Hua XXI, p. 69 y ss.).

§2. El origen del concepto "variedad" y su relación con la teoría de la ciencia. B. Bolzano, H. Grassmann y H. Hankel como interlocutores de Husserl

En el primer capítulo de esta tesis se encuentran definidos algunos de los principales conceptos de la filosofía de Bolzano, tal y como aparecen en su *Wissenschaftslehre* (Teoría o Doctrina de la ciencia). Me refiero a los conceptos de infinito, representación y proposiciones en sí. En ese mismo capítulo ya se advertía la enorme importancia que tendría Bolzano en *Filosofía de la aritmética*. De manera particular, alrededor de 1896 la influencia de Bolzano sobre Husserl presenta un giro interesantísimo. En ese año, siguiendo las tesis de la *Teoría de la ciencia*, Husserl presenta, en su *Lógica. Lecciones de 1896* (Hua Mat-I)[143] una reorientación de los conceptos más fundamentales de la lógica desde un punto de vista "objetivista" y, por tanto, desvinculada de toda forma de subjetivismo. Una mirada rápida a las *Lecciones de 1896* muestra que la interpretación husserliana de la *Elementarlehre* de Bolzano es, en realidad, un enjuiciamiento que toma como punto de partida el uso y legitimidad del término "teoría de la ciencia". Para Husserl, el uso correcto del término "doctrina o propedéutica de la ciencia" tiene que ver con la lógica en su carácter puro. Una lógica pura que, además de estudiar el ordenamiento sistemático de verdades y objetos en las ciencias, sea el fundamento de ellas (Hua-Mat I, 4-5). Es ella, la lógica pura, la base necesaria para las ciencias. Ahora bien, para su correcto establecimiento es necesaria una crítica de las derivas psicológicas de la lógica, por ejemplo: 1) si la lógica es independiente o dependiente de otra disciplina, y si es así, cuál disciplina; 2) si la lógica es un arte o una ciencia; 3) si la lógica es una disciplina formal y 4) si es una ciencia demostrativa o empírica (p. 31). La

[143] De manera resumida se puede decir que Hua Mat-I está dedicado a lo que Husserl llama las tres secciones tradicionales de la lógica: la teoría de los conceptos y sus objetos (Hua Mat-I, 54-132); la teoría de proposiciones y juicios (p. 133-231), y la teoría de la inferencia (p. 232-64). En la primera sección, Husserl trata cuestiones como la referencia y el significado. Asimismo, reintroduce la distinción escolástica entre expresiones sincategoremáticas y categoremáticas (p. 55-57) y distingue entre relaciones, combinaciones, series y variedades (§§22-23). En la segunda sección Husserl discute la formación de oraciones complejas a partir de oraciones simples refiriéndose explícitamente al texto de Frege "Sobre sentido y referencia". También analiza la forma categórica de las oraciones, la interpretación extensional e intensional de la cópula, las oraciones categóricas negativas, el significado de la negación y la cuantificación. En la última sección, Husserl estudia las inferencias lógicas como proposiciones causales (*kausaler Satz*). La conclusión de ese capítulo señala que la lógica es una teoría inferencial. Se recomienda, para ampliar esto último, la lectura de Mohanty (2008), Rollinger (2003) y Centrone (2010).

conclusión aquí, como en los *Prolegómenos*, ya se verá esto, es que la tendencia subjetiva de la lógica psicologista trae consigo un relativismo y un escepticismo radicales (p. 33-34). Así, mientras la lógica pura demuestra su carácter formal e independiente de toda ciencia (p. 32-45), la lógica psicológica se desvanece en el aire.

Como corolario a estas proposiciones, Husserl no duda en afirmar que el primer y principal fundamento de toda lógica objetiva (en tanto teoría no-psicológica) son las relaciones de dependencia e inferencia entre proposiciones (p. 23). Esto equivale a decir que la *tarea* de la lógica pura es construir una teoría axiomática con la cual todos los problemas pensables puedan resolverse en un procedimiento ordenado, y en el que cada proposición pueda describirse como una inferencia a partir de proposiciones primitivas (p. 245 y ss.) Así, todavía en plena continuidad con lo dicho en *Filosofía de la aritmética*, la lógica como disciplina formal de las inferencias encuentra su analogía directa en el cálculo, pues "las operaciones de pensamiento y las operaciones sobre los signos son exactamente paralelas" (p. 248).

Años antes de la publicación de los *Prolegómenos a la lógica pura*, Husserl ya reconocía, en la reseña a las *Lecciones sobre el álgebra de la lógica* de Schröder, que la extensión de cualquier dominio numérico se logra tomando en consideración la *técnica* aritmética y no los signos y símbolos en su carácter formal. Dicho en otras palabras, se trata de separar la *técnica aritmética* de los *dominios numéricos*. Esta "separación" —también insinuada en *Sobre el concepto de operación*—requiere de un principio formal que conserve la coherencia (léase consistencia) de dicha extensión y/o aplicación en otros dominios numéricos.[144] Dicho de manera más explícita: una vez que el concepto de número ha sido reducido (pero no identificado) al signo numérico, se necesita una segunda reducción que va del carácter signitivo del concepto de número a un algoritmo-base. Esto *debería* dar por resultado —bajo el supuesto de un sistema numérico y sus correspondientes signos construidos sistemáticamente— un proceso técnico que logra expandir o extender un sistema dado. Pero antes de esto, se deben probar dos condiciones: por un lado, el encadenamiento exacto de las operaciones aritméticas dentro de una teoría formal y, por otro lado, un principio

[144] La principal consecuencia lógica de esto es que al conservar las leyes formales del sistema original en una ampliación numérica nueva, se vuelve innecesario demostrar, para el nuevo sistema, (nuevamente) las reglas del cálculo aritmético.

que garantice la conservación de las leyes formales. La primera condición se resuelve con la teoría de la extensión de Grassmann[145] y la segunda con el *Principio de permanencia* de Hankel.[146]

Según lo anterior, la aparición de Grassmann y Hankel en los escritos de Husserl no es algo gratuito. Por el contrario, su aparición es fundamental para entender la *posibilidad* de una aritmética general (o estructural o abstracta) situada más allá de los dominios materiales, así como la posibilidad de una teoría pura de la ciencia. Enseguida presento la propuesta de Grassmann.

En la famosa carta a Stumpf de febrero de 1890, Husserl señala lo siguiente:

> Los aritméticos que, ora con vacilación, ora con decisión explican los números como signos, se dejan guiar simplemente por el estudio de los formalismos algebraicos. Estos matemáticos, sobre todo Grassmann, han puesto de manifiesto la posibilidad de derivar el algoritmo completo de la aritmética y el análisis mediante meras definiciones de signos (1+1=2, 2+1=3, etc., $a \bullet a = a^2$, $(\sqrt{a})^2 = a$ etc., todas entendidas en el sentido de meras equivalencias de signos en el papel) (Hua Dok. III/1, p. 158-159).

La relación filosófica y de amistad[147] que sostuvieron Grassmann y Husserl revela aspectos poco conocidos del desarrollo filosófico-matemático del segundo. Por ejemplo, lo relativo a la teoría de la variedad y, en consecuencia, lo relativo a la posibilidad de una aritmética universal. Otro ejemplo es el curso que Husserl impartió sobre Riemann-Helmholtz en el semestre de invierno de 1889/90, donde se detalla cómo Grassmann, junto con Gauss, representan una ruptura sin precedentes en la historia de las matemáticas —dicho sea de paso, también resulta interesante la descripción sobre la teoría de las paralelas y la comparación de Gauss con Abel en cuanto a la teoría de las ecuaciones algebraicas se refiere (Hua XXI, 318-322)—.

---

[145] En 1876-1878, a la edad de 17 o 18 años y antes de sus estudios con Weierstrass en Berlín, Husserl estudió matemáticas, física, astronomía y filosofía en la Universidad de Leipzig (*Husserl Chronik*, p. 4). De estos años data la amistad de Husserl con Hermann E. Grassmann, hijo de Hermann G. Grassmann. Particularmente importante es el hecho de que en el semestre de invierno de 1877-78, Husserl recibió, como regalo, la *Teoría de la extensión* de G. Grassmann (edición de 1844) (Schuhmann, 1977, p.6). Una mayor referencia histórica se puede encontrar en Hartimo (2011) y Gérard (2010).

[146] Husserl conocía la obra de Hankel al menos desde 1887, incluso atendió las lecciones de Hankel en la Universidad de Leipzig en 1876 a 1878 (*Husserl Chronik*, p. 4).

[147] Sobre la amistad entre Husserl y Grassmann, en un tono más “familiar”, se puede leer Malvine Husserl (1988).

En páginas inéditas del curso antes citado, las que pertenecen al manuscrito K I 36,[148] Husserl presenta un resumen de la introducción de la primera edición de la *Teoría de la extensión* de Grassmann (1844). En esta sinopsis es posible observar tres momentos que definirán la teoría de la variedad husserliana (Gerard, 2010). El primero de ellos tiene que ver con la definición de las matemáticas puras como teoría de las formas puras:

> [Grassmann] quizás el matemático más brillante que Alemania ha producido en este siglo. Ya su primera *Teoría de la extensión*, publicada en 1844, está precedida por una introducción filosófica en la que expone el concepto de la matemática pura o la teoría de las formas puras (*reinen Formenlehre*), que aprehende al ser particular que se ha convertido con el pensamiento: "La forma, en su significado puro, abstraída de todo contenido real, no es otra cosa que la forma del pensamiento" (Ms. K I 36, p. 8).

Según Husserl, en los primeros parágrafos de la *Teoría de la extensión*, Grassmann pone en la mesa de discusión la idea de una matemática intelectual o teoría de las formas como rediseño del concepto de la matemática pura. Esta definición de matemática pura resulta de la clasificación de las ciencias en ciencias reales (*reale*) y en ciencias formales (*formale*). Las ciencias reales se caracterizan por reproducir en el pensamiento el "ser que es independiente" (objeto externo) del pensamiento, mientras que las ciencias formales tienen por objeto de estudio lo formado o postulado en el pensamiento mismo. La verdad en las primeras se manifiesta en la concordancia entre pensamiento y ser, y la verdad en las segundas radica en la concordancia de los procesos mentales entre sí (Grassmann, 1844, §1, p. 21).[149] En el caso de las ciencias formales se estudian o bien las leyes generales del pensar o bien lo particular engendrado por el pensamiento. Lo primero se denomina dialéctica (lógica) y lo segundo matemáticas (§2, p. 22). A las matemáticas les corresponde el estudio del *ser particular* o la "forma de pensamiento" o simplemente *forma*, "[porque] la forma, en su significado puro, abstraída de todo contenido real, no es otra cosa que la forma del pensamiento" (§3, p. 22). En ese sentido, las matemáticas se redefinen como la teoría de las formas o como matemáticas puras. Esta última definición da paso a otra: la que describe a las matemáticas puras como una teoría de las magnitudes (*Grössenlehre*).

[148] Manuscrito citado en Gerard (2010).
[149] Existe una traducción al español, quizás una de las mejores traducciones de esta obra, *cfr*. H. Grassmann (1947). En este apartado se citan ambas versiones diferenciadas una de la otra por el signo de "§" cuando cite el apartado de la versión alemana y con números arábigos la página de la versión española.

El segundo aspecto que Husserl recupera de la introducción de la *Teoría de la extensión* es la división de la teoría de las formas en cuatro ramas:

> Y a través de una discusión filosófica abstracta, él [Grassmann] cree poder establecer la división de la teoría de las formas puras en cuatro disciplinas matemáticas: la teoría de números y la teoría combinatoria como ciencias de la forma discreta, y las teorías de la magnitud intensiva y extensiva como ciencias de la forma continua (Ms K I 36, p. 8).

Para entender esto último es preciso hacer una distinción sobre las maneras de *generar formas*. Dice Grassmann: "todo aquello que es producto del pensamiento pudo haber sido engendrado de dos maneras: o bien por un simple acto de crear, o por un doble acto de yuxtaponer y combinar" (§4, p. 24). El objeto generado del primer modo es la forma continua o *magnitud*, lo que es producido de la segunda manera es la forma discreta o formas concatenadas (*Verknüpfungs-form*). La intersección de las formas de generación da como resultado los cuatro tipos principales de *formas* y, en consecuencia, las cuatro ramas de la teoría de las formas. La forma discreta se divide en el número y la combinación. El número es la forma discreta algebraica (o lo yuxtapuesto considerado como igual), mientras que la combinación es la forma discreta combinatoria (o conjunto de lo que se considera como distinto). Correlativamente, las ciencias de lo discreto se dividen en teoría de números (aritmética) y teoría de combinaciones o teoría de enlaces (*Verbindungslehre*) (§6, p. 26). La oposición entre los dos tipos de formas discretas se expresa en el signo único que reúne el número, en cambio lo reunido para formar la combinación se reúne en letras arbitrarias. En cuanto a la forma o magnitud continua, esta se divide en la forma continua algebraica (magnitud intensiva) y en la forma continua combinatoria (magnitud extensiva).

El tercero y último punto que Husserl cita de Grassmann es la idea de una *teoría general de las formas*: "precede a estas cuatro disciplinas una teoría general de las formas que presenta las leyes generales de las uniones, es decir, las que se pueden aplicar por igual en todas las ramas" (K I 36, p. 8). La teoría general de las formas es una suerte de cálculo general que estudia el encadenamiento sistemático de las operaciones que componen a las disciplinas antes mencionadas. Así, en lugar de existir decenas de cálculos, existe un cálculo general que los subsume a todos a modo de una teoría formal de las operaciones. Esta teoría del cálculo general tiene su razón de ser en tanto que hace aparecer las relaciones formales constitutivas (y verdaderas) de una teoría en términos de una *Begründung*, es decir, de una fundamentación formal.

Haré un pequeño resumen. Husserl retoma de Grassmann tres aspectos: en primer lugar, la importancia del conocimiento simbólico para las operaciones matemáticas. En segundo lugar, la idea de una teoría general de las formas y, en tercer lugar, la definición de las matemáticas como una teoría de las formas puras de pensamiento. Queda por definir el proceso de unificación gracias al cual se ordenan y se conservan ciertos cálculos particulares. En este punto, Hankel se hace necesario.

Hermann Hankel presentó su principio de permanencia en su *Teoría del sistema de los números complejos* en 1867.[150] Este libro de Hankel intenta presentar una teoría de las funciones de una variable compleja, además de ofrecer una presentación completa, rigurosa y científica del sistema de los números complejos (1867, p. v). El tema para entonces era relativamente nuevo, aunque ya había sido anticipado por Gauss, Cauchy y Riemann. En la primera parte, Hankel intenta dar un tratamiento riguroso a los sistemas de números complejos (p. viii). En la segunda parte, que nunca se publicó, se esperaba la discusión sobre la teoría de las funciones de una variable compleja (p. ix). Conceptualmente hablando, el trabajo de Hankel es particularmente importante porque presenta una concepción simbólica o puramente formal de las matemáticas, a partir del abandono del *fundamento vulgar* (*vulgären Begründung*) del concepto de número (p. vii). Para Hankel, una investigación esencialmente pura se apoya en el trabajo de la lógica y las matemáticas pues son las únicas disciplinas o ciencias "puramente formales que tratan con relaciones (*Relationen*) que son independientes de contenidos determinados (*bestimmten Inhalte*) […]" (p. 1). Las relaciones o enlaces (*Verbindungen*) a los que se refiere Hankel son o bien téticos (*tetischen*) o bien líticos (*lytischen*). Las combinaciones téticas son la suma, la multiplicación y la operación de potencia. Las combinaciones líticas son las operaciones inversas, como la resta y la división. Hankel considera las combinaciones una tras otra y analiza sus propiedades (p. 4-10).

De todas las combinaciones, la adición es, quizás, la más importante. En ella se resume el enfoque general de Hankel: capturar las leyes que rigen las operaciones aritméticas,

[150] En realidad, es una reinterpretación de lo dicho por George Peacock en su obra *A treatise of Algebr*a (1830, 1845).

en este caso, la asociatividad y la conmutatividad. Consideramos esta suma: x + b = c. De acuerdo con las propiedades de adición, x tiene un valor que se puede describir como x = b – c. Pero ¿qué pasa cuando c>b? Cuando esto ocurre, el valor de *x* no está entre los números naturales y, por tanto, el resultado aparece como un número imposible (*unmöglich*), en este caso, un número negativo. Para comprender qué tipo de resultado es este, es necesario comprender cómo se puede "extender" el dominio numérico de los naturales a los números negativos (p. 4-5). Partiendo de la distinción entre *contradicción* e *imposibilidad lógica*, Hankel argumenta que, por ejemplo, la *imposibilidad* (no la contradicción) de los números negativos se debe a que no pueden (re)presentarse en la intuición (*Anschauung*) (p. 6-7). Es la representación en la intuición la que delimita, según Hankel, la esfera entre números puramente formales y números reales. Los primeros no pueden construirse por intuición y los segundos representan cantidades reales. Ahora bien, la consideración de las operaciones líticas (o inversas) y la necesidad de extender el dominio numérico más allá de lo que puede intuirse, lleva a Hankel a la conclusión de que la aritmética general es puramente formal:

> La condición (*Bedingung*) para establecer una aritmética general es, por tanto, una matemática puramente intelectual separada (*losgelöste*) de toda intuición, una teoría pura de las formas en la cual no se relacionan las cantidades o sus imágenes (*Quanta oder ihre Bilder*), los números, sino los objetos intelectuales, los objetos de pensamiento, que podrían corresponder a objetos o relaciones reales, aunque tal correspondencia no sea necesaria (p. 10).

Las matemáticas puramente formales no son una generalización de las matemáticas habituales. Para Hankel, ellas son una disciplina completamente nueva que no sólo prueba las reglas de la aritmética ordinaria, también las ejemplifica (p. 12). A ella pertenecen las combinaciones abstractas de magnitudes, el estudio de la intuición espacial y las magnitudes mecánicas (p. 12–13). Ahora bien, la generalidad de las matemáticas formales se logra, según Hankel, al confiar en el principio de permanencia de las leyes formales:

> El principio pedagógico (*hodegetische*) aquí contenido puede designarse como el principio de la permanencia de las leyes formales (*das Princip der Permanenz der formalen Gesetze*) y consiste en lo siguiente: si dos formas de la aritmética universal (*arithmetica universalis*)expresadas en signos generales son iguales entre sí, entonces deben permanecer iguales cuando los signos dejan de designar magnitudes simples

> (*einfache Grössen*) y cuando, en consecuencia, las operaciones reciben otro contenido real (p. 11).

El principio de permanencia al que Hankel se refiere como *introductorio* o pedagógico es, según él, un principio metafísico vinculado a todas nuestras intuiciones. Según este principio, al “generar” un nuevo concepto o dominio numérico se deben conservar el mayor número de propiedades, así el nuevo concepto se vuelve un caso particular o extendido del dominio original. Por ejemplo, si se considera la extensión de los números naturales a los enteros, y si es el producto lo que se quiere conservar, la acción del principio de permanencia es sobre el producto de los enteros, pues debe conservar la mayor cantidad posible de propiedades que tiene el producto de los naturales, además de que las propiedades del producto en el campo de los números enteros deben ser iguales a las de los números naturales para el caso de que los factores sean números naturales. Eventualmente, este mismo resultado debería poder aplicarse cuando pasamos a números negativos, irracionales y complejos.

Así, al guiarse por el principio de permanencia, Hankel *puede* pasar del reino de los números reales a conceptos formales más generales. De hecho, se hace posible el uso de números imposibles (negativos, imaginarios y complejos) en un dominio puramente formal y con operaciones definidas en él (p. 47):

> Por medio de este principio fue posible reemplazar el concepto inicial de número, entendido como expresión de las relaciones reales de los objetos y sus operaciones, por un concepto más general de operaciones formales que se mueven sólo en el dominio del pensamiento lógico […] (p. 47).

El proyecto de Hankel es, pues, una combinación de una definición analítica de las operaciones por medio de leyes algebraicas y una generación sintética del sistema de cálculo (Hartimo-Okada, 2016). Por ejemplo, por medio de una ley básica como $a + (b + 1) = (a + b) + 1$, Hankel define la regla de cálculo de la suma. Sin embargo, también verifica lo inverso, es decir, que la operación de adición implica la ley básica como teorema. Finalmente, en la cumbre de su proyecto, Hankel sugiere construir un sistema numérico que contenga todos los resultados posibles de las operaciones llevadas a cabo en ciertos elementos; esto significa crear nuevos signos (o números). Este proceso continuará hasta que no se alcancen más signos (p. 35) (Hartimo-Okada, 2016).

Husserl conocía el principio de la permanencia de las leyes formales al menos desde su escrito de habilitación (1887)[151] y su influencia se extiende hasta 1901, particularmente en las conferencias de Gotinga, de las que hablaré en el siguiente apartado. Aunque a Husserl le parecía que este principio es un *principio indudablemente correcto* que elimina toda oscuridad de la aritmética y justifica plenamente los procedimientos aritméticos, no estaba del todo satisfecho con él, al menos por dos razones: (*i*) por la equivalencia entre el *signo* y el *significado* numérico y (*ii*) por no justificar adecuadamente la consistencia del algoritmo extendido. A pesar de esta actitud crítica, Husserl adopta lo que él llama el *núcleo sólido* del principio, a saber, la posibilidad de la permanencia de las leyes formales y la producción de resultados correctos. La *interpretación* del principio de permanencia aparece en su ensayo "Las teorías verdaderas" (1889–1890):

> Principio de permanencia: si ciertas operaciones algorítmicas no pueden ejecutarse en generalidad completa sin llegar a construcciones de conceptos contradictorios, en virtud de la peculiaridad de los conceptos que fundamentan un algoritmo, entonces se amplía el algoritmo para que se separe de la fundamentación conceptual y así se piensa como convencional. Esto se lleva a cabo de modo que uno agrega a modo de prueba cada construcción al dominio algorítmico y agrega una convención de que las leyes antiguas siguen siendo válidas también para los objetos simbolizados (signos), entonces las viejas leyes deberían ser ejecutables con total generalidad. En cualquier caso, uno tiene que probar la consistencia del algoritmo extendido (Hua XXI, 33).

De acuerdo con la formulación de Husserl, aunque el principio permite la extensión de un dominio, estos no pueden ser arbitrarios, antes deben cumplir ciertas condiciones para que las operaciones en ellos puedan ser válidas. La primera condición tiene que ver con la demostración de la consistencia del algoritmo extendido. La segunda condición hace referencia al dominio propio (o exclusivo) del algoritmo extendido. Finalmente, Husserl agrega, los algoritmos deben "producir" resultados correctos en cada ecuación que pueda ser reducida a una identidad, utilizando para ello las definiciones de los signos (Hua XXI, 35):

> Si un dominio científico se controla a través de un algoritmo restringido, de modo que entre los dos hay un paralelismo completo bien investigado y caracterizado, entonces, para

[151] "El principio de Hankel de la permanencia de las leyes formales en aritmética no es un principio metafísico ni pedagógico" (Hua XII, 339). Ciertamente, Husserl está en lo correcto. El principio de permanencia no es ni metafísico (en tanto que trata con símbolos y condiciones formales) ni pedagógico (en tanto que juega un papel central en el enfoque de Hankel).

> los propósitos científicos de este dominio, el algoritmo limitado puede ser sustituido *salva veritate* con un algoritmo extendido e ilimitado y, como tal, controlará aún más ese dominio, a través de la mayor integridad de su mecanismo […] El cálculo con la ayuda de la técnica del dominio extendido debe, en todas las circunstancias, producir resultados correctos, ya que de acuerdo con nuestra investigación general, cada equivalencia de signos, que contiene y presupone sólo signos y convenciones del dominio más restringido, es en este sentido correcto, por tanto, reducible a una identidad (Hua XXI, 34-35).

§3. La doctrina de la variedad en los primeros escritos de Husserl. El enfoque filosófico y el enfoque matemático

Como se demostró en el apartado anterior, Husserl está inmerso en la problemática de una fundamentación formal de las matemáticas, al menos desde 1894. Los vínculos con Grassmann y Hankel dan orientación al pretendido establecimiento de los métodos formales numéricos, a la invención de una teoría formal de las operaciones aritméticas y a la posibilidad de una teoría de la ciencia. Estos nuevos emplazamientos obligan al abandono de la psicología brentaniana[152] en la que se sustentaba *Sobre el concepto de número* y, por tanto, la primera parte de *Filosofía de la aritmética*,[153] y abren paso a un estudio de corte más "estructural". Una consecuencia de lo anterior es que el concepto de número es reemplazado por el estudio de un concepto más general: el concepto de variedad. En consecuencia, no se trata ahora de estudiar las propiedades cuantitativas de un dominio numérico, sino su formalidad relacional. Por tanto, este nuevo emprendimiento, que se concibe como una teoría de la variedad, deja de ser esencialmente cuantitativo-material para convertirse en un estudio

[152] "En *PhA* tenía Husserl la sensación de haber armonizado psicologismo y constructivismo. Pero sería por poco tiempo, pues le resultaron insalvables las dificultades para objetivizar los actos y vivencias psicológicos, para fundamentar psicológicamente la teoría de la abstracción sobre el concepto de atención, para conferirles necesaria validez general a los principios lógico-matemáticos, a base de una fundamentación genético-psicológica, que ignoraba o infravaloraba el carácter ideal de los mismos" (García Prada, 1986, p. 59).

[153] *Cfr*. (García Prada, 1986, p. 62). Vale la pena seguir recordando que en la primera parte de *Filosofía de la aritmética*, Husserl señala que el fundamento de la aritmética parte de las colecciones perceptibles de objetos que presentan los números auténticos (cardinales finitos), pero al no poder dar cuenta de manera satisfactoria de los dominios numéricos que están *más allá* del dominio de números naturales, sobre la base de números cardinales, Husserl cambia su punto de vista, en la segunda parte, asumiendo la aritmética como esencialmente simbólica y como tal aplicable a diferentes dominios.

formal-relacional. Con la fijación de estos nuevos derroteros: abandono de la matemática cuantitativa y concentración en los estudios lógico-formales de fundamentación, la problemática específicamente filosófico-fenomenológica está cada vez más cerca.

Como ya se dijo, la génesis de la noción de variedad se encuentra a principios de la década de 1890 cuando Husserl dedica varias páginas al esclarecimiento de dicho concepto. De hecho, el origen de esta noción puede rastrearse cinco años antes (entre 1885-1888) en una serie de fragmentos pertenecientes a los manuscritos K I A, K I 15 y K I 4/9a-18a, la mayoría de ellos editados en sus *Estudios sobre aritmética y geometría* (Hua XXI). En la mayoría de estos escritos, la apropiación husserliana del concepto de variedad tiene como interlocutores a Riemann, a Helmholtz, a Hankel y a Grassmann,[154] por ello es presentada en contextos (casi exclusivamente) técnicos y filosóficos. Evidentemente, ambos "sentidos" del concepto de variedad, el filosófico y el matemático, se entrecruzan de tal forma que uno depende del otro. Como bien apunta Mormann "[…] no hay razón para pensar que el vocabulario del filósofo debe desviarse del matemático, ya que esto cortaría el concepto filosófico de Husserl de su fuente matemática adecuada" (1991, p. 69). Lo que sí debe hacerse, tal como se expuso en el capítulo I y II de esta investigación, es reiterar que el concepto de variedad, en su sentido matemático y filosófico, no es sinónimo de los siguientes términos: pluralidad, suma, colección, totalidad, agregado y conjunto.

Líneas arriba mencioné que Husserl usa "variedad" en dos sentidos: uno técnico y el otro filosófico. El sentido técnico se desarrolla en buena parte del tomo XXI de Husserliana, mientras que el sentido filosófico se presenta con mayor detalle en los *Prolegómenos a la lógica pura*. Comenzaré por este último, aunque sólo anticiparé algunos aspectos y conceptos claves, pues reservaré los detalles de esa exposición para el apartado dedicado a dicha obra.

El concepto de variedad, en el sentido o enfoque filosófico, es para Husserl el concepto que corresponde al sistema de relaciones o una estructura que se define a través de sus relaciones ordenadas y continuamente interrelacionadas:

> Una variedad no es un agregado de elementos sin relación. Las relaciones son, precisamente, lo esencial, lo que la hace diferente de un mero agregado. Surge, pues, la pregunta: ¿qué forma sistemática deben tener las relaciones? ¿Qué carácter deben poseer

[154] Al parecer, también la geometría general de J. Bolyai es otra de las referencias de Husserl (Gauthier 2004).

> sus elementos individuales de modo tal que resulte un sistema de principios que corresponda a la geometría? (Hua XXI, 410).

Se puede decir que una "variedad husserliana" es un dominio general que considera a sus objetos particulares de un modo completamente indeterminado, es decir, sin otro contenido en particular que sus conexiones (o leyes) que le dan validez. Por tanto, *una teoría* de la variedad sería una investigación de las *formas posibles de los dominios en general*. Esta teoría investigaría los conceptos y leyes esencialmente constitutivas a la *idea* de dominio o de teoría, es decir, determinaría los tipos esenciales de teorías posibles e indagaría sus relaciones regulares mutuas. Explico con cierto detalle.

Para Husserl, una teoría es una combinación de proposiciones y conceptos deductivamente cerrada. Los conceptos son, según sea el caso, determinados formal y materialmente, por ejemplo, conceptos como "elefante, fotones, colores". Eventualmente, podemos desplazarnos de este nivel de conceptos materiales a un nivel puramente formal, por ejemplo: "*un* algo, *este* algo o el ya conocido *algo en general*". A la "traslación" de los conceptos materialmente determinados a meras variables de cualquier concepto, Husserl lo denomina "formalización" (*Formalisierung*). Formalizar es, pues, aislar o eliminar, en los objetos de pensamiento, los últimos *residuos* de contenido intuitivo:

> En la teoría de la variedad, el signo +, por ejemplo, no es el signo de la adición aritmética, sino un enlace en general del que son válidas leyes de la forma $a + b = b + a$, etcétera. La variedad está definida por la circunstancia de que sus objetos mentales hacen posibles estas «operaciones» y otras, de que pueda demostrarse que son compatibles *a priori* con ellas (Husserl, 1999, p. 205).

Según el ejemplo anterior, la idea es que un signo aritmético ("+, =, x,") no es un signo exclusivo de la relación entre números, sino un signo capaz de expresar cualquier tipo de conexión, siempre que le sean válidas las leyes de la igualdad, la equivalencia, la sustracción, etc. Esto nos ofrece la posibilidad de juzgar no el contenido material o su contexto, sino su carácter formal. En las expresiones donde está en juego la universalidad, son los principios *relacionales* los que otorgan validez (general) a los casos (singulares) sobre los que se aplica. Estos principios relacionales forman parte de una ontología formal que se ocupa del estrato *forma vacía en general*, que tiene *bajo* sí a todas las regiones materiales con todas sus particularizaciones esenciales.

El residuo que queda después de eliminar todo contenido material, sin alterar su conformación lógica, podemos denominarlo *estructura formal* (Caracciolo, 2015, p. 38). Si fuese posible aplicar este proceso de formalización al cuerpo de una teoría, es decir, si consideramos todo su entramado conceptual no en su materialidad, sino en sus meras variables formales (modelos o tipos), Husserl cree que emergería la *forma*, la *idea* o la *estructura* formal de dicha teoría. De su estudio se encargaría una *teoría pura de la variedad*. Por ejemplo, el espacio euclidiano es distinto de la *forma*-espacio o "variedad analítica-formal espacial".[155] El primero, según Husserl, es una instancia singular del segundo. Vista de esta manera, la *teoría pura de la variedad* es una investigación fundamental que se relaciona con el conocimiento general de una ciencia; esto significa que la teoría de la variedad no sólo permite la contemplación de las meras formas y estructuras de una ciencia (independientemente del propósito para el cual fue "construida"); también concibe, programáticamente, su lógica y su evidencia.

Al enfoque filosófico, Husserl vincula un enfoque matemático. Este sentido técnico o matemático del concepto de variedad es, en realidad, una modificación del concepto matemático de variedad de la Escuela de Berlín y de Gotinga (Weierstrass, Kummer y Riemann). Me parece que poco tiene que ver con la teoría cantoriana de conjuntos.[156] En Hua XXI esto queda más que claro:

> Por conjunto, Cantor entiende una simple colección de elementos que están de alguna manera unidos [. . .] Sin embargo, esta concepción no coincide con la de Riemann, ni con el uso en otra parte de la teoría de la geometría; de acuerdo con esta última, una variedad no es una colección de elementos meramente unidos, sino de elementos ordenados y conectados de forma continua (Hua XXI, 95-96).

[155] Durante mucho tiempo, Husserl luchó por fijar una posición respecto de dos grandes tradiciones: por un lado, las geometrías no-euclidianas, y por el otro, la geometría clásica (o entre las "variedades *n*-dimensionales" y el espacio euclídeo finito). Finalmente, se conformó con una visión que presenta el espacio geométrico como una idealización del espacio físico percibido intuitivamente.

[156] Wiegand, por ejemplo, cree que la noción de variedad podría ser analizada desde una teoría de grupos y no desde la teoría de conjuntos cantoriana (1998, p.64 y ss.) Presenta como argumento el hecho de que en la teoría de grupos la definición de grupo se da a través de sus relaciones puramente abstractas entre objetos de pensamiento. En su enfoque, una variedad husserliana es una forma axiomática con ausencia de contenidos individualizantes (1998, p.57). Aunque es una lectura interesante, no deja de ser complicado encontrar en la obra de Husserl conceptos como anillos, espacios vectoriales o cuerpos, etc., necesarios, según entiendo, para comprender el concepto de grupo.

Aunque la referencia a Cantor en esta cita es clara, insisto en que la teoría cantoriana de conjuntos no tiene mucho que ver con el origen y desarrollo del concepto de "variedad husserliana". Si bien existen otros temas en los que ambos coinciden, p. ej., el rechazo al psicologismo, la aritmetización y la relación con Frege, no ocurre lo mismo con el concepto de variedad. Si nos atenemos a la terminología matemática de ambos autores, resulta que Cantor utilizó, de 1878 a 1892, el término *Mannigfaltigkeit* para designar un conjunto; de 1895 a 1897 utilizó el término *Menge*, concepto que terminó por imponerse en sus siguientes trabajos matemáticos, aunque también hizo uso de conceptos como *Inbegriff* y *Zahlenklassen*. Husserl, en cambio, desde 1890 hasta 1927, mantiene cierta uniformidad en su terminología y utiliza el término *Mannigfaltigkeit*. Los conceptos de *Vielheit*, *Mehrheit*, *Inbegriff*, *Aggregat* y *Menge*, son casi siempre usados para designar agrupaciones sensibles, pero sin llegar a ser equivalentes al término *Mannigfaltigkeit*. Por lo anterior, la tesis que sostiene Ortiz Hill, para quien la *Mannigfaltigkeitslehre* de Cantor se asimila al término *Mannigfaltigkeit* de Husserl a finales de 1890, es francamente cuestionable (2003, p.165 y ss.).

En ocasiones, Husserl también menciona a los Grupos de Lie y a los Cuaterniones de Hamilton como auténticas realizaciones, aunque parciales, de una "teoría de la variedad", pero no da detalles respecto de si ellos forman parte del *corpus* matemático al cual se inscribe:

> Cuando hablo de las teorías de la variedad que han nacido de generalizaciones de la teoría geométrica, me refiero naturalmente a la teoría de las variedades *n*-dimensionales, sean euclidianas o no euclidianas, a la teoría de la extensión de Grassmann y a las teorías análogas de un W. Rowan-Hamilton y otros, fáciles de despojar de todo lo geométrico. También entran aquí la teoría de los grupos de transformación, grupos de Lie […] (Husserl, 1999, p. 206).

Así, siguiendo a Rosado Haddock (2006), sostengo que es Riemann y no Cantor quien influye en Husserl,[157] en lo que refiere al concepto de variedad. Enseguida presento más argumentos que sustentan esta tesis.

---

[157] En efecto, desde 1892, Husserl había aceptado los puntos de vista de Riemann sobre la naturaleza de la geometría, sobre la naturaleza del espacio físico y el tratamiento analítico-abstracto de las variedades geométricas. De hecho, se mantuvo firmemente convencido de la exactitud de ellos (Rosado Haddock, 2017).

Entre los años 1892 y 1893, Husserl distingue algunos *tipos* de variedades, por ejemplo: variedad discreta y variedad continua, variedad cíclica y variedad ortoide (o lineal o *rectilineal*) (Hua XXI, 348-359). En (la continuación de) la carta a Paul Natorp del 7 de septiembre de 1901, Husserl escribe:

> Para ganar claridad y rigor, volví al concepto de número y reconocí la necesidad de distinguir entre cardinales, magnitudes continuas, ordinales discretos y ordinales continuos, etc. Analicé el concepto de series, particularmente series limitadas, ilimitadas, abiertas y cíclicas, buscando los criterios necesarios y suficientes con los cuales uno podría decidir si una variedad infinitamente grande se ordena ortoide o cíclicamente (*eine orthoid oder cyclisch geordnete Mannigfaltigkeit*), etc. En todo esto, también consideré la distancia (*Abstand*) y dirección como elementos básicos de una variedad topoide (*topoider Mannigfaltigkeiten*) (Hua Dok III/5, p. 80-81).

Las variedades discretas (finitas o infinitas) tienen un concepto “natural” de distancia, es decir, se puede definir la distancia entre dos de sus puntos como aquel número más pequeño de puntos por los que uno tiene que pasar para alcanzar al otro (da Silva, 2011). Una variedad continua no tiene un concepto “natural” de distancia, pero puede *adquirirla.*

En el caso de las variedades ortoides y variedades cíclicas, Husserl señala lo siguiente:

> La investigación sobre las series cíclicas se completó totalmente en 1892. Cuando el trabajo de Gilman apareció en *Mind* en 1892, yo estaba ocupado con las variedades cíclicas. El enojo de que Gilman hubiera anticipado mi idea de la variedad simple (*einfachen Mannigfaltigkeit*) me hizo querer abordar finalmente el problema correspondiente para la variedad cíclica que aún no estaba resuelto (*Husserl Chronik*, p. 34).

Después de leer el artículo de Gilman, Husserl se enfocó en la definición de las series cíclicas y ortoides en el otoño de 1892. Pero ¿cómo define Husserl el concepto de variedad ortoide y el de variedad cíclica? Primero, hay que recordar cómo se define una variedad en un sentido riemanniano. La variedad *n*-dimensional V_n que Riemann describía en su lección inaugural, se define como un conjunto de *n* variables $x^1 \ldots x^n$ que pueden representar longitudes, espacios, ángulos, etc., y que están definidas en correspondientes intervalos de números reales $I_1 \ldots I_n$. Es, además, un conjunto que localmente es difeomorfo a un subconjunto abierto de R^n, un conjunto en el cual, localmente, todo punto queda completamente determinado por *n* números, esto es: $V_n = \{x^i/x^i \in I_i,\ i=1\ldots n\}$. Los elementos *x* del conjunto *Rn* de *n*-uplas ordenadas de números reales pueden ser considerados como vectores de un espacio afín euclídeo o como puntos de un espacio en común. El número *n* de parámetros que aparece en cada una de estas *n*-uplas ordenadas es la dimensión de la variedad. Así, este proceso constructivo de ir "agregando" a las variedades más valores o representaciones paramétricas, es decir, ubicaciones en coordenadas variables (x_n, y_n, z_n), da por resultado una serie de cambios al interior de las variedades. Dicho de otro modo, una progresión continua de transformaciones de un elemento (o punto) a otro crea superficies unidimensionales, bidimensionales, tridimensionales, etcétera. Por ejemplo, una línea se considerará como una variedad unidimensional y el espacio como una variedad tridimensional.

Dicho lo anterior, según Husserl, las variedades lineales u ortoides se caracterizan a partir de las siguientes propiedades: (1) Sean a y b dos elementos cualesquiera, entonces, o bien a φ b o b φ a pero no a la vez y (2) existe transitividad: a φ b φ c= a φ c.

> Podríamos simplemente definir el concepto de variedad ortoide de la siguiente manera: dos elementos de la variedad están enlazados mediante una relación interna de género Φ, la cual posee las siguientes propiedades:
>
> 1) Es desigual, tiene la diferencia de sentido. Si aφb, entonces bφ'a y viceversa. Y, por cierto, o bien hay dentro del género Φ sólo los dos tipos φ y φ', o bien la variedad determina mediante sus pares de puntos sólo relaciones de estos dos tipos.
>
> 2) Es una magnitud en el sentido estricto de la palabra. A la magnitud de la relación, haciendo abstracción del sentido, la denominamos distancia (*Abstand*); al sentido de la relación, haciendo abstracción de la magnitud, lo denominamos dirección (*Richtung*).
>
> 3) Si a es un punto arbitrario, entonces hay un solo punto que se ubica en la dirección φ y la distancia r.
>
> 4) a φ b φ c = a φ c (Hua XXI, 98).

Las variedades lineales se caracterizan a partir de las propiedades de transitividad (a φ b φ c= a φ c). El carácter abierto de la variedad se mantiene fijo mediante la ordenación (*Anordnung*) que recibe cada elemento. En lo que se refiere a cada elemento determinado, este puede ser designado como distancias o intervalos (*Abstandes*) del valor absoluto (Hua XXI, 96). Un ejemplo más intuitivo de una variedad lineal u ortoide, se encuentra en la carta a Natorp del 29 de marzo de 1897. En ella, Husserl describe al tiempo como un continuo cuya forma puede describirse y determinarse como una *variedad ortoide*:[158]

> La forma del tiempo es un continuo, lo que designamos como variedad ortoide y podemos determinar de una manera puramente conceptual y puramente categorial. Lo mismo se aplica a cualquier línea de espacio. ¿Cuál es la diferencia entre los dos? Evidentemente, mediante lo así llamado "material" de los elementos: por un lado, son puntos del espacio; por el otro, puntos del tiempo. Pero mediante qué se distinguen punto del espacio y punto del tiempo, eso no se deja determinar, sólo se puede decir: ¡mira! El concepto de tiempo difiere de "la" variedad ortoide por el material, por la concreción; hay, bajo ∞ muchas variedades ortoides posibles, pero un tiempo. Así, hay muchas posibles variedades euclidianas, pero un sólo espacio. La variedad euclidiana: una entre otras variedades de especies, así como el dos, una entre otras especies en la serie de números. (Hua Dok III/5, p. 59).

Dicho con toda precisión, una variedad ortoide es un todo cuyas partes están conectadas por *compenetración*, una vertiéndose en la otra. La relación de compenetración permite distinguirlas y, en tanto partes dependientes del todo-temporal, son partes abstractas. En este caso, el *continuo temporal es un todo concreto independiente porque no depende ontológicamente de otro objeto para existir*. Ahora bien, cuando Husserl dice que el "continuo temporal tiene el carácter de una multiplicidad ortoide limitada por un lado", claramente está operando con la noción de intervalo semiabierto[159] pues incluye un extremo, pero no el otro. En esta incipiente topología (temporal) husserliana, el hecho de que la noción de intervalo semiabierto se pueda invocar se refuerza porque lo *rectilineal* implica

[158] En los añadidos posteriores a 1905 de las *Lecciones de fenomenología sobre la conciencia interna del tiempo*, Husserl vuelve a reiterar que la constante producción de la conciencia interna del tiempo posee la forma de un conjunto o variedad unidimensional y unidireccional: "toda impresión originaria está caracterizada como tal, y cada modificación lo está como tal. Más aún, cada modificación es modificación continua. Lo cual distingue a esta especie de modificación de la modificación de la fantasía o de la conciencia de imagen. Cada una de estas modificaciones temporales es límite no independiente en un continuo. Y este continuo tiene el carácter de una **multiplicidad ortoide** limitada por un lado" (Husserl, 2002, p. 119. El énfasis es mío). En los *Prolegómenos a la lógica pura*, Husserl también hace referencias a las variedades tridimensionales y unidimensionales: "Tales supuestos son, por ejemplo, la existencia de un mundo exterior, que se extiende en el espacio y en el tiempo, teniendo el espacio el carácter de una multiplicidad euclidiana tridimensional y el tiempo el de una multiplicidad unidimensional ortoidea; la sumisión de todo advenimiento al principio de causalidad, etc. Con bastante inexactitud suelen considerarse hoy como epistemológicos estos supuestos, que entran por completo en el marco de la filosofía primera de Aristóteles" (Husserl, 1999, p. 40).

[159] Se entiende que, hablando del tiempo, este no puede ser comprendido como un intervalo cerrado, pues no hay como tal acotamiento en ambos extremos, ni tampoco puede ser comprendido como un intervalo abierto, esto es, sin acotamientos.

movimiento en una dirección, en este caso, desde la proto-impresión hacia la protención. Esa proto-impresión cierra la línea temporal, pero al mismo tiempo la abre hacia el futuro.

Las variedades cíclicas se describen del siguiente modo:

1) Para cada dos elementos p, q, hay dos determinadas σ, y para cada una de ellas vale que o bien p σ q, o bien q σ p, pero no ambas conjuntamente.
2) Si ambas σ están designadas mediante σ' y σ", entonces si p σ' q, debe ser exactamente q σ" p, y si q σ' p, debe ser exactamente p σ" q.
3) De ambos encadenamientos de relación que forman conjuntamente ambos pares de puntos encadenados ab y bc, esto es, de ab bc, cb ba, debe uno y sólo uno estar en la relación-π, o sea o bien ab π bc, o bien, cb π ba (Hua XXI, 103)

Con cierto arreglo topológico, nuestro cuerpo puede ser un buen ejemplo intuitivo de una variedad cíclica; asumiendo, claro está, que *nuestro* cuerpo propio es un sistema de orientación *en* el espacio. Siguiendo esta pauta, los diferentes trayectos que pueden trazarse en el espacio, a partir de los movimientos de nuestro cuerpo, mostrarían formas típicas de variedades cíclicas. Así, lo que hace que un espacio difiera de otro espacio es el modo en que el cuerpo propio lo recorre o lo aprehende. En los §§64-72 de *Ding und Raum*, Husserl explicita estas "variedades cíclicas" (el giro y el alejamiento). El giro se produce cuando un objeto rota sobre sí mismo (rotación axial) o nosotros giramos alrededor de él. El objeto varía la apariencia de su forma, pues se va "modificando" con cada "vuelta", sus puntos de referencia van cambiando y adquiriendo con ello una nueva figura, y una nueva orientación que vuelve a su forma inicial una vez que el objeto ha girado completamente sobre su propio eje o nosotros alrededor de él. La modificación de la expansión, en la que se manifiesta el acercamiento y el distanciamiento, es un tipo de modificación que prosigue al infinito en dos lados o, mejor aún, tiene dos y sólo dos direcciones que al estar opuestas se fusionan en una variedad lineal (en una variedad ortoide abierta infinita en dos lados).

Finalmente, la lectura más inquietante que hace Husserl de las variedades riemannianas se encuentra en su ensayo "Objeciones matemáticas, especialmente contra Riemann" (Hua XXI, 337–347). En ese brevísimo apartado, Husserl presenta algunas observaciones a la noción de medida de curvatura de Riemann.[160] Husserl comienza con una

[160] En al menos dos cartas, Husserl muestra cierto distanciamiento de algunos postulados de la obra de Riemann:

descripción general del desarrollo de la geometría euclidiana, el problema de las paralelas y el descubrimiento de la geometría no-euclidiana. Enseguida, ofrece una exposición detallada de la teoría de la curvatura de Gauss de la cual recupera, al menos, tres puntos decisivos: "(*i*) la definición de medida de curvatura (*misura di curvatura*), (*ii*) la representación paramétrica de la superficie y la invariación (*invarianza*) de la curvatura por la isométrica; (*iii*) la diferencia entre la superficie de una curvatura constante y la superficie de una curvatura variable" (Sinigaglia, 2002, p.15-16). En un primer momento, Husserl no tiene dificultad en mostrar que la definición gaussiana de la medida de curvatura constituye una generalización de toda la superficie de la teoría de la curva, pero niega que la noción de curvatura de Riemann pueda tomarse como una generalización adecuada de la teoría de Gauss. Sus objeciones toman en cuenta las propuestas de Minding[161] y Beez.[162]

> Nuestras objeciones comienzan con la aplicación del teorema de curvatura. En particular, según muchas de las afirmaciones de Riemann, él piensa que el valor de la medida de la curvatura determina una variedad de acuerdo con su medida interna, es decir, en términos de su grado de curvatura, él opina que, si se da K, se puede calcular ds a partir de él. Así, dos superficies en puntos correspondientes tienen la misma medida de curvatura, por lo que puede haber torsión, de acuerdo con Riemann. La tesis inversa es aquel famoso teorema de Gauss: dos superficies que pueden desenrollarse una sobre la otra tienen una

---

> Recientemente he estado trabajando en los problemas geométricos filosóficos. Algunas cosas que antes consideraba seguras ahora se han vuelto muy dudosas para mí […] También mi juicio sobre las teorías del espacio de Riemann-Helmholtz ha cambiado […] las teorías generales que construyen, siguiendo un golpe de genio, ocultan un contenido valioso que, filosóficamente elucidado, sería interesante incluso para una teoría del conocimiento geométrico (Hua Dok III/1, 10).

> Reconozco (en contra de mis puntos de vista anteriores) la posibilidad de otras intuiciones espaciales que dan lugar a diferentes espacios geométricos idealizados y cuya estructuración lógica podría exhibirse en otras variedades puras. Pero lo que es completamente cierto para mí, es que todas las posibilidades existentes en general están rígidamente demarcadas por leyes apriorísticas: posibilidades ideales, ideas platónicas. Dentro de este marco opera la "arbitrariedad" matemática, con sus "convenciones", mediante las cuales se seleccionan tipos determinados de variedades de la totalidad de los válidos, se "definen", pero, por supuesto, no se crean ... *a priori* = legalidad categorial pura, en virtud de su extensión = la mathesis en su sentido más general (Hua Dok III/5, 62-63 y 83–84).

[161] Ernst Ferdinand Adolf Mindig (1806-1885) fue uno de los primeros matemáticos que trabajaron en la geometría diferencial de superficies, siguiendo el camino inaugurado por Gauss en su *Disquisitiones generales circa supercies curvas*. De Mindig, Husserl cita *Cómo se puede decidir si dos superficies curvas dadas son sucesivamente desenrolladas o no, junto con los comentarios sobre las superficies de dimensiones de curvatura constante*, J. Reine Angew. Math. 19 (1839), pp. 370–383.

[162]Richard Beez (1827–1902), profesor del Gymnasium de Plauen, escribió un artículo, "Zur *Theorie des Krümmungsmasses von Mannigfaltigkeiten* höherer Ordnung" (z. Math. Phys., 1875-1876), donde construyó la teoría de una superficie (n-1) dimensional en el espacio n-dimensional.

medida de curvatura igual en puntos correspondientes. Sea como fuere, por lo tanto, la igualdad de la medida de curvatura es una condición necesaria de la desenrollabilidad. Pero Gauss nunca afirmó que era suficiente, como lo expresa la declaración inversa de Riemann, y sería sorprendente que a un Gauss se le hubiera escapado una cosa así, de ser verdadera (Hua XXI, 337-338).

Como en la variedad bidimensional las relaciones métricas de la variedad están determinadas a la medida de la curvatura, así también en la variedad múltiplemente extensa las relaciones métricas se determinan completamente por el grado de curvatura en el sentido riemanniano, por tanto, más precisamente por el grado de curvatura en dirección de superficie $\frac{n(n-1)}{2}$ (Hua XXI, 338-339).

Sin embargo, a partir de aquí, Husserl puede dar una primera y quizás apresurada conclusión: puesto que la geometría de una superficie depende únicamente de su métrica (ds^2) es posible establecer una correspondencia puntual entre las diversas superficies, por lo que todo lo que Riemann dice acerca de la aplicabilidad, como cuando dice, por ejemplo, que todas las variedades de curvatura positiva constante también deben ser desarrollables en la esfera, es falso. Esto sólo se aplica a la variedad de dos dimensiones, pero no para las *n*-dimensionales (Hua XXI, 340-341). Husserl cree que la verdadera teoría de la curvatura no confirma la concepción de Riemann, y la investigación de Lobachevsky, que parecía encontrar una base en la teoría de Riemann, es pura ficción:

Las superficies geodésicas, a la que se refiere Riemann, están generalmente dotadas de torsión, como lo está, generalmente, una línea geodésica en la variedad […] Si consideramos una superficie cualquiera, una línea más corta en ella, que describe un hilo tenso, de ninguna manera es siempre una línea plana, sino en general una línea doblemente torcida. Y lo mismo valdrá en general para variedades n-tuples (Hua XXI, 343).

Para Husserl es de particular importancia la distinción entre las superficies cuya medida de curvatura varía de punto a punto y la superficie en la cual aquella es constante. El apoyo a esta tesis Husserl lo encuentra en la memoria de Ferdinand Minding[163] publicada en el tomo XIX del *Journal de Crelle* en 1839:

[163] A través del trabajo de F. Minding sobre el estudio de las superficies de curvatura constante y, en particular, la ecuación de la famosa pseudo-esfera, Husserl se hace eco para presentar una crítica a Riemann (Hua XXI, 330 y ss.) Una observación importante hecha por Minding, en su ensayo ya citado, es que las fórmulas trigonométricas en una superficie de curvatura constante negativa tienen la misma forma que las de una esfera hasta la sustitución en las fórmulas esféricas del radio *R* de la esfera por una cantidad imaginaria $R\sqrt{(-1)}$. Por

> Puesto que la tesis [de Minding] no vale para las variedades bidimensionales, entonces tampoco para las *n*-tuples, excepto en el caso completamente especial y no caracterizable *a priori*, en el que aquellas superficies geodésicas son en sí homogéneas. Si esto valiese para cualquier posición de estas superficies, entonces la variedad entera *n*-tuple tendría que ser evidentemente en sí homogénea, de modo que el estado de cosas permanece invariado mediante el tránsito de n = 2 a n = n. Así como mediante la medida de curvatura de Gauss las superficies, las relaciones de medida internas de las mismas, sólo están determinadas cuando ellas son homogéneas en sí, o sea, que tienen en general una medida de curvatura constante, así estas mismas, mediante la medida de curvatura riemanniana de la variedad n-tuple, solo estarán determinadas según sus relaciones de medida internas cuando ellas en sí sean homogéneas, o sea, cuando posean en toda dirección de la superficie una medida de curvatura constante (Hua XXI, 339. El agregado entre corchetes es mío).

La crítica de Husserl expresa una preocupación que impulsó el desarrollo posterior de la topología. Él quería que el sitio de análisis fuera enteramente no métrico. Se podría decir que, para él, el problema que se presenta en Riemann tiene que ver con cómo enlaza sus objetos topológicos básicos con números y sistemas de coordenadas. Pero, cuando se trata de construir un marco para el análisis no métrico, parece recurrir a los conceptos de medición y la geometría analítica ordinaria. Ahora bien, resulta curioso saber que la crítica de Husserl a Riemann ni siquiera es una crítica a Riemann, sino a Helmholtz, quien creía posible que el espacio físico, como es dado a la percepción sensorial, puede ser representado con una curvatura distinta de cero, o sea, como un espacio no-euclidiano. Para Husserl, únicamente podemos percibir el espacio con curvatura nula, lo que no impide que podamos concebirlo racionalmente como admitiendo una curvatura no-nula imperceptible a los sentidos. Husserl nada tiene contra Riemann, lo que él no cree posible es que la percepción espacial pueda detectar una eventual curvatura del espacio. En todo caso, Husserl piensa que solo el valor matemático, y no el filosófico, puede elogiarse en la teoría de Riemann (Hua XXI, 347).

Finalmente, quizás lo más destacable de ambos enfoques, es que convergen en los años cercanos a 1900-01, específicamente en un par de conferencias que Husserl presenta en 1901 a la sociedad matemática de Gotinga, en las cuales trata de dar cuenta de la noción de sistema de axiomas definido, lo que modernamente equivale a un sistema de axiomas

tanto, dado que en las variedades riemannianas la torsión es igual a cero y los espacios sin torsión no poseen curvatura, se "infiere" la posibilidad de espacios con torsión sin ser curvos.

completo. Para este nuevo emprendimiento, Husserl echa mano de sus recientes resultados en torno al concepto de variedad formal, pues de lo que se trata es de capturar un dominio puramente formal de objetos por medio de su teoría de la variedad. En el siguiente apartado me enfocaré en dilucidar con más detalle la respuesta de Husserl a la noción de *definitud,* en las ya mencionadas conferencias presentadas a la sociedad matemática de Gotinga. Después de ese análisis, volveré sobre la noción de teoría de la ciencia y lógica pura pero ahora en los *Prolegómenos a la lógica pura.*

3.2 Números imaginarios, consistencia y completud en las conferencias de Gotinga (1901)

§.4 Introducción[164]

En la quinta sesión de la Sociedad Matemática de Gotinga (26 de noviembre de 1901), Husserl pronunció la primera parte de una conferencia titulada “El pasaje a través de lo imposible y la completud (*Vollständigkeit*)[165] de un sistema axiomático”.[166] La segunda parte de esta conferencia se continuó en la séptima sesión de dicha Sociedad (10 de diciembre de 1901). En la primera parte, Husserl presentó sus apuntes iniciales sobre una teoría capaz de extenderse al dominio de lo imaginario matemático. En la segunda parte, los temas revisados fueron el concepto de “definitud” y la noción de “sistema absolutamente definido” (Schuhmann y Schuhmann, 2001, p. 87-88). La edición de “ambos” textos ahora se conoce como *Göttinger Doppelvortrag* (de ahora en adelante las conferencias de Gotinga).[167] Dicho

[164] El presente apartado se ubica “antes” del análisis de los *Prolegómenos a la lógica pura* en virtud de la claridad expositiva que pretende esta disertación. En sentido estricto, las conferencias de las que ahora me ocuparé aparecieron casi dos años después de que los *Prolegómenos* fueron enviados a la imprenta (noviembre y diciembre de 1899) (*Husserl Chronik*, p. 58-59).

[165] De ahora en adelante *completud* y *definitud* traducen los conceptos *Vollständigkeit* y *Definitheit*. El significado exacto de la palabra *definitud* en la obra de Husserl ha sido tema de mucha controversia. Varios autores han abordado antes este problema, entre ellos Hill (1995), Majer (1997), da Silva (2000a, 2000b, 2010 y 2016), Hartimo (2007), Centrone (2010) y Okada (2013). La razón o razones de esta controversia quizás se deban a la dificultad de traducir los conceptos lógicos husserlianos a la terminología lógica actual. Por ejemplo, Husserl desarrolla en estas conferencias un tipo de consecuencia e implicación lógicas que no coincide del todo con la descripción que de ella tenemos ahora. Otro ejemplo es el de “decibilidad”. En términos husserlianos esta tiene un fuerte carácter informal y difícilmente es traducible a términos metalógicos. Para esta apartado entenderé por *definitud* a la propiedad interna que define a los sistemas de axiomas que son “suficientes” para su propia constitución interna (Hua XII, 455). Es, además, una propiedad cerrada intrínsecamente, es decir, sin la adición externa de un axioma de cierre (Hua XII, 443).

[166] Cabe destacar que la participación de Husserl se dio gracias a la invitación de Félix Klein y David Hilbert, miembros de dicha Sociedad Matemática. Se sabe que Husserl estuvo presente en la conferencia de Hilbert intitulada “Clausura de los sistemas axiomáticos”, presentada días antes de su participación (Hua XII, 444-451). Se sabe, también, que fue el mismo Hilbert quien exhortó a Husserl a hacer públicas estas conferencias, aunque tal encargo no fue cumplido. La redacción final de estas conferencias no se hizo pública sino hasta 1970, año de la edición del tomo XII de la serie Husserliana.

[167] Estas conferencias se conservan bajo la notación K I 26 de los Archivos Husserl de Lovaina. Para esta investigación utilizaré la edición de Schuhmann y Schuhmann (2001) por ser la edición más completa comparada con la edición de Lothar Eley, incluida en Hua XII. En lo que sigue del apartado, citaré el número de página de la edición de Schuhmann y Schuhmann y el pasaje correspondiente al folio K I 26.

sea de paso, semanas antes de su participación, el 14 de septiembre para ser exactos, Husserl se establecía en esa misma ciudad como profesor extraordinario (*ausserordentlichen*) (Schuhmann, 1977, p. 67).

Como previamente lo anticipé, la importancia de estas conferencias se debe a que en ellas encontramos el intento de Husserl por responder al “problema de lo imaginario” en matemáticas[168] a partir de sus resultados en torno al concepto de variedad formal. Desde la perspectiva de Husserl, abordar el problema de lo imaginario significa dar solución a dos preguntas fundamentales: (1) ¿cuándo se *vuelve* imaginario un elemento/objeto desde la perspectiva de un sistema axiomático formal? (problema ontológico) y (2) ¿cómo se justifica el uso de elementos/objetos *imaginarios* en matemáticas? (problema epistemológico) (da Silva, 2000, p. 417). Repito, ambos problemas serán estudiados tomando en cuenta los primeros resultados que hasta ese momento Husserl tiene a la mano: (1) la noción de *conocimiento simbólico*; (2) los conceptos de *operación* y *dominio numérico* y (3) el concepto de *variedad formal*.

§5. El problema de las entidades imaginarias en las primeras obras de Husserl

El problema de la *transición a través de lo imposible* o el *pasaje a través de lo imaginario* en matemáticas no fue una preocupación ajena en las obras de Husserl. Las referencias a este tema abarcan desde 1891[169] hasta 1929,[170] con muy pocas variantes entre ellas. Incluso se

[168] De ahora en adelante se entenderá por “imaginario” o “el problema de lo imaginario” el uso de conceptos numéricos de mayor complejidad. Para Husserl, el problema de los elementos *imaginarios* en aritmética abarca los números negativos, racionales, irracionales y complejos. Son designados como imaginarios precisamente porque no son *naturales*, es decir, no corresponden a una noción de cantidad. En este sentido, la terminología está más que justificada, pues entidades “imaginarias” no solo “no existen”, sino que podrían *no existir* desde la perspectiva de los dominios donde se introducen.

[169] Por ejemplo, en la carta de Frege a Husserl (24 de mayo 1891) se habla de “la sorpresa” que trajo la aparición del signo “√-1” en matemáticas. También en la carta de Husserl a Frege (18 de julio de 1891), Husserl hace una breve mención de cómo justificar lo imaginario a través de una *extensión* de la aritmética. *Cfr*. (Frege, 1980, p. 63-65).

[170] *Cfr*. §70 de Hua XIX/1 (1901); §19 de Hua XXIV (1906-1907); §72-73 de Hua III/1 (1913) y el capítulo III de Hua XVII (1929).

podría decir que el problema de lo imaginario en matemáticas, al tener relación con la conformación simbólica del conocimiento científico y la formalización de la ciencia, está presente en el último trabajo de Husserl, *La crisis de las ciencias europeas y la fenomenología trascendental* (da Silva, 2010, p.124). Por ahora, basta concentrarse en los años de 1900-1901.

Como señalé párrafos antes, Husserl aborda el problema de lo imaginario desde sus primeras herramientas teóricas ganadas hasta ese momento: (1) la noción de *conocimiento simbólico* (*Filosofía de la aritmética*); (2) los conceptos de *operación* y *dominio numérico* (ensayos aritmético-formales, específicamente en la reseña de Schröder), y (3) el concepto de variedad (la recepción de las propuestas de Grassmann, Hankel y Riemann). Enseguida detallo este asunto.

El "fracaso" de *Filosofía de la aritmética* se debió, en parte, a la imposibilidad de derivar *otros* conceptos numéricos, como los números negativos, irracionales, complejos, etc., a partir del concepto de número cardinal. Debe quedar muy claro que ese fracaso es meramente parcial si se tienen en cuenta los últimos capítulos de esa obra, específicamente aquellos que estudian la teoría general de las operaciones y el concepto de conocimiento simbólico (da Silva, 2012, 2015). Empezaré por este último concepto. Según Husserl, se tiene un conocimiento simbólico cuando un objeto se da a nosotros de manera indirecta, es decir, a través de signos. Lo verdaderamente importante en este punto es, justamente, el carácter "subrogatorio" del conocimiento simbólico. Para Husserl, el conocimiento simbólico aparece a modo de un *representante*, de un *sustituto* que actúa como una *señal indicativa* para un objeto (y sólo para ese objeto o sistema de objetos). Básicamente son cuatro las características principales del conocimiento simbólico en Husserl: (I) los símbolos pueden llegar a ser independientes de su significado y, por tanto, de la interpretación que se les asigne; (II) los símbolos tienen un *fin instrumental*; (III) los símbolos pueden recibir diferentes interpretaciones, y (IV), quizás la más destacable, los sistemas simbólicos permiten presentificarnos entidades "imposibles" y operar con ellas.

La conclusión del análisis de los ensayos aritmético-formales fue que toda filosofía *sobre* la aritmética debe remitir a una *teoría general de las operaciones*. En esta *teoría general de las operaciones*, las operaciones aritméticas son entendidas como procesos automáticos o tecnicos de manejo y construcción de números fundados en la evidencia y solidez del *dominio* numérico de origen. Por esta razón, según concluía Husserl, se puede estar seguros de que cuando calculamos con *signos numéricos*, los resultados siempre serán válidos. De manera muy particular, en la reseña a las *Lecciones sobre el álgebra de la lógica* de Schröder, Husserl ya presenta indicios de un tratamiento sólido al problema de lo imaginario. En esa reseña, Husserl establece que los símbolos y transformaciones simbólicas que Schröder presenta como un cálculo lógico no pueden ser admitidos como tales pues no establecen correctamente una teoría pura de la deducción. En todo caso sería una técnica de la consecuencia y no una lógica. Aquí aparece una primera exigencia al posible tratamiento de lo imaginario: un cálculo debe estar técnica y *lógicamente* justificado. En el caso de la introducción de los *símbolos imaginarios* estos se justifican en virtud de que su aplicación no genera inconsistencias formales, al menos desde una perspectiva puramente algorítmica. La diferencia de este primer intento con las conferencias de Gotinga, como ya se verá, es que Husserl todavía no trata con sistemas simbólicos puramente formales, sino con sistemas que pretenden cumplir sus *intenciones de interpretación*.

Finalmente, Husserl también tomará en consideración, en estas conferencias de Gotinga, las conclusiones a las que llegó en los *Prolegómenos a la lógica pura* en relación a la unidad de las ciencias (§§ 66-71). Esta unidad, según Husserl, se refiere tanto a la interconexión de las cosas a las que se dirigen nuestras experiencias como a la interconexión de las verdades provenientes de ellas. En otras palabras, la unidad teórica se refiere a la unidad de las cosas y a la unidad de las verdades sobre ellas. Bajo esta condición, la unidad ideal de la ciencia nos “salva” del psicologismo de la lógica, pues enfatiza la objetividad de las leyes lógicas frente a la subjetividad de la experiencia en general. Así, el argumento de Husserl contra el psicologismo en los *Prolegómenos* es, al mismo tiempo, una defensa de un enfoque ordenado, unitario y, cabría decir, axiomático. Específicamente en el §69 de los *Prolegómenos*, Husserl presenta la idea de una ciencia más amplia que investiga los conceptos y leyes esencialmente inherentes a la *forma* de una teoría. Me refiero a la *teoría de las formas posibles de una teoría* o *teoría pura de la variedad* (§70).

Siguiendo todos estos resultados, Husserl desarrollará tres *ideas* en torno al problema de lo imaginario en matemáticas: (1) la necesidad de diferenciar entre definitud relativa y definitud absoluta; (2) la necesidad de justificar el acceso a lo imaginario a través del conocimiento simbólico, y (3) fundamentar la *extensión* de un *dominio numérico* no-interpretado. Para explicar cada uno de estos puntos, dividiré en tres partes lo expuesto en ambas conferencias. En la primera parte presentaré el problema de lo imaginario *como* cuestión fundamental (*Grundfrage*) que concierne al método matemático y filosófico. En la segunda parte se estudiarán las cinco propuestas de solución que Husserl enlista y revisa. En la última parte se estudiará la propuesta de Husserl para resolver el problema de lo imaginario. Dicho esto, revisemos la primera parte de las conferencias de Gotinga.

§6. El problema de lo imaginario y el acceso a nuevos dominios numéricos

Al inicio de la primera conferencia, Husserl señala lo siguiente:

> El tema que deseo abordar en esta conferencia se refiere a una cuestión fundamental de la metodología matemática y pertenece, como tal, a ese difícil dominio (*Gebiet*) en el que los matemáticos y filósofos tienen el mismo grado de interés, aunque no sea en el mismo sentido […] Originalmente limitada al dominio del número y la cantidad (*Zahl und Quantität*), las matemáticas han crecido más allá de ese dominio […] Las matemáticas en el sentido más elevado e inclusivo (*umfassendsten*) son la ciencia de los sistemas teóricos en general (*Wissenschaft von den theoretischen Systemen überhaupt*) y en abstracción de lo que se teoriza en las teorías dadas de las diversas ciencias (Schuhmann y Schuhmann, 2001, p. 91. K I 26/76).

El tema al que Husserl se refiere tiene que ver con la justificación de la metodología matemática en ámbitos que rebasan sus dominios originales (el número y la cantidad). Efectivamente, tal parece que la transición de una matemática de las cantidades a una matemática de las estructuras abstractas (pero ejemplificables) pasó por alto problemas asociados a la justificación de sus métodos de investigación (o pruebas) o bien no tuvo claridad sobre sus bases lógicas.[171] En este sentido, Husserl tiene razón cuando señala que

[171] Ya he expresado en otros momentos que Husserl fue consciente del avance de las matemáticas del siglo XIX y XX, y que había estado en constante revisión de autores como Riemann, Hamilton, Boole, Grassmann, Hilbert, la teoría de los grupos de transformación de Lie, etc. De hecho, es correcto afirmar que Husserl

estos problemas deben ser de interés tanto para los matemáticos como para los filósofos, pues su solución implica la justa comprensión de la esencia general de las ciencias deductivas.

Así, motivado por comprender de raíz las transformaciones de las matemáticas, Husserl concibe, quizás apoyándose en los §§ 70-71 de sus *Prolegómenos a la lógica pura*, la idea de una teoría de las teorías, una ciencia de los sistemas teóricos en general que incluya, por supuesto, a la matemática en general. Para alcanzar una teoría de esta envergadura se necesita abstraer la "forma pura" de las teorías interpretadas en general. Se trata, pues, de abstraer lo meramente formal de las representaciones objetivas (*Objektvorstellungen*) determinadas materialmente. Proceder de esta manera es hacer uso de una generalización (*Verallgemeinerung*) que considera una teoría dada como un mero caso singular de una clase de teorías (*Einzelfall einer Theorienklasse*) o más bien de una forma de teoría (*Theorienform*). Esta última nos permitiría incluir todos los dominios científicos particulares bajo *una* misma *forma* de *teoría* (2001, p. 91. K I 26/76). Enseguida, Husserl se apresura a señalar lo siguiente:

> Una teoría elaborada sistemáticamente en este sentido se define por una colección (*Inbegriff*) de axiomas formales, es decir, por un número limitado de proposiciones fundamentales (*Grundsätze*) puramente formales, mutuamente consistentes e independientes entre sí. La deducción sistemática proporciona de manera puramente lógica, es decir, de acuerdo con el principio de contradicción (*Prinzip vom Widerspruch*), las proposiciones dependientes y, con ello, la colección total de las proposiciones (*Gesamtinbegriff von Sätzen*) que pertenecen a la teoría definida. Sin embargo, el dominio de objetos se define por los axiomas en el sentido de que se delimita como una cierta esfera de los objetos en general, independientemente de si son reales o ideales, para los cuales se aplican las proposiciones fundamentales de tales y tales formas válidas (2001, p. 91. K I 26/76).

Una teoría elaborada *sistemáticamente* es una teoría *sintácticamente* completa, definida formalmente por la suma o colección total de los axiomas que la caracterizan de forma única. Una teoría de este tipo se denomina "variedad definida" (2001, p. 91. K I 26/76). Una variedad definida (o completa) comparte su estructura formal con otros dominios de teorías isomorfas. Le corresponde a la doctrina de las teorías (*Theorienlehre*), a la ciencia más

realmente estaba al tanto de los aspectos más fundamentales del desarrollo de las matemáticas de su época, en particular, de la formalización y la algebraización.

general de los sistemas deductivos posibles, la tarea de hacer comprensible el concepto de variedad definida, pues sólo ella puede examinar las relaciones entre los diferentes tipos de formas de teoría, p.ej., estructuras, variedades, modelos, etc. Ya en esta etapa del pensamiento de Husserl está presente la idea de que las formas de las teorías, obtenidas mediante su generalización o formalización, se pueden clasificar y relacionar sistemáticamente. Sobre la base de estas interrelaciones, Husserl extrae conclusiones significativas sobre las teorías formales, p. ej., que sus estructuras correspondientes o bien pueden ser generalizadas (expansiones) o bien admitir restricciones (especializaciones). Otra conclusión importante es aquella que se relaciona con lo que Husserl llama matemáticas formales: “La doctrina de las teorías matemáticas (*Die mathematische Theorienlehre*), que comúnmente designamos como aritmética formal o matemática formal, pretende ser el instrumento de los descubrimientos matemáticamente concretos” (2001, p. 92. K I 26/76) que constituyen las “matemáticas reales”. En tanto ciencia de los sistemas teóricos en general, las matemáticas formales no están restringidas al tratamiento de las variedades matemáticas, sino que son una doctrina de teorías puras y formales, precisamente porque son independientes de cualquier campo del conocimiento. Téngase en cuenta que las matemáticas formales no son las matemáticas *formalistas*; son formales porque tratan con estructuras o formas puras en lugar de aspectos materiales.

Ahora bien, la (complicada) relación entre las matemáticas formales y las matemáticas “aplicadas” a dominios particulares del conocimiento, esconde un primer acercamiento al problema de lo imaginario (2001, p. 92. K I 26/77). Como ya había señalado, para Husserl el problema de lo imaginario fue uno de los primeros ejemplos históricos en los que la tendencia a la formalización en el cálculo algebraico (*algebraischen Rechnung*) condujo a formas de operación (*Operationsformen*) sin sentido aritmético (*arithmetisch sinnlos*), pero que extrañamente mostraron la peculiaridad de ser útiles en las matemáticas (2001, p. 92. K I 26/77). Sin reparar en esta extraña peculiaridad, los matemáticos siguieron perfeccionando sus técnicas y aplicaciones formalizantes las cuales consideran a sus objetos de dominio como meros *portadores* de determinaciones formales, pero sin ocuparse de las principales dificultades asociadas a su justificación y su uso. Esta fue, según Husserl, la “quiebra” de este cálculo algebraico: no saber a “ciencia cierta por qué los procedimientos calculatorios funcionan tan extraordinariamente bien. O se ha olvidado la demostración gracias a la cual se los introdujo, o en realidad esta demostración no se ha producido nunca con toda la perfección lógica que se requiere de las pruebas racionales auténticas" (García-Baró, 2008, p. 22). Siguiendo a Husserl, tal parece que comprender el problema de lo imaginario en matemáticas significa entender la lógica interna de estas formas de operación "sin sentido" aritmético:

> Supongamos un dominio (*Gebiet*) de objetos dados en el cual, a través de la peculiar naturaleza de los objetos, las formas de combinación y relación están determinadas expresándose en un cierto axioma del sistema A. Sobre la base de este sistema, y así sobre la base de la particular naturaleza de los objetos, ciertas formas de combinación no tienen un significado real (*reale Bedeutung*), es decir, ellas son formas de combinación en contrasentido (*widersinnige Verknüpfungsformen*) (2001, p. 93) [K I 26/77].

Según Husserl, se trata de estudiar, dentro de un sistema dado, aquellas formas de combinación que no tienen un significado real y, por tanto, implican un *contrasentido* (o son "contradictorias") dentro del sistema en cuestión. Desde esta perspectiva, las cuestiones a resolver serían las siguientes: ¿en qué condiciones es legítima la introducción de nuevas entidades u operaciones en un dominio ya dado? ¿Qué es lo que ocurre con el uso de lo imaginario o lo absurdo en matemáticas? ¿Con qué justificación puede el "contrasentido" ser asimilado y utilizado en el cálculo como si fuera algo significativo? (2001, p. 93. K I 26/77).

En estas preguntas se presentan tres temas importantes: (1) la inserción de lo imaginario en una teoría definida, (2) justificar el uso de lo imaginario y (3) demostrar que la solución al problema de lo imaginario se relaciona con la propiedad formal de definitud. Si he entendido bien, el punto exacto de partida de las conferencias de Gotinga es, justamente, el punto donde confluyen los tres temas anteriores: la definición de un dominio formal y su posible expansión. Así, comprender el problema de lo imaginario en matemáticas significa comprender qué se entiende por dominio formal, cómo se delimita y cómo podría expandirse. Ahora bien, el desarrollo completo de esta propuesta puede dividirse en cuatro argumentos; cada uno de ellos muestra una condición para la correcta comprensión, delimitación y extensión de un sistema dado (K I 26/77- K I 26/80). Pero antes, es preciso revisar las críticas de Husserl a las cinco teorías, hasta entonces conocidas, sobre el problema de lo imaginario en matemáticas.

§7. Teorías sobre lo imaginario

El análisis de Husserl de las diversas teorías matemáticas, filosóficas y psicológicas toma en cuenta a autores como Bain, Baumann, Dedekind y Boole (2001, p. 93-95. K I 26/78-79). En lo que sigue, presentaré una síntesis de cada teoría con sus respectivas críticas:

Primera teoría. Lo imaginario es restituido a través de la inducción.

Segunda teoría. Lo imaginario es directa (y evidentemente) *a priori*.

Tercera teoría. Las fracciones y los números negativos son, de hecho, números imposibles desde el punto de vista de los números cardinales (originalmente los únicos definidos). Son conceptos a los que *ningún objeto* puede corresponder. Pero ¿quién nos obliga a permanecer dentro del dominio restringido de los números? Los números, después de todo, son meras creaciones de nuestra mente a través del acto de contar (Dedekind). Por tanto, los números negativos y fraccionarios son creados por la mente humana.

Cuarta teoría. La aritmética puede explicarse a través de sus aplicaciones reales. Por ejemplo, en la vida y en la ciencia hablamos y usamos unidades de enumeración como las magnitudes de tiempo y de fuerza; en el dominio de las magnitudes divisibles, las fracciones adquieren sentido; en el dominio de las magnitudes continuas, los números irracionales adquieren sentido; en el dominio de los segmentos de línea, los números negativos adquieren sentido. Por tanto, los imaginarios también adquieren sentido gracias a su aplicación real, su imposibilidad es sólo aparente.

Quinta teoría. De acuerdo con el *principio de permanencia* de Hankel, se puede pasar de un dominio particular a un dominio formal y, por tanto, operar libremente con $\sqrt{-1}$. Si la aritmética formal es internamente coherente, entonces un funcionamiento más amplio no puede mostrar ninguna contradicción con el funcionamiento más estricto. En conclusión, lo que se deduce formalmente de *un* dominio también debe ser cierto para *otro* dominio (2001, p. 93-96. K I 26/77-80).

Para Husserl las dos primeras teorías son completamente ininteligibles. Si por número entendemos lo relativo a la noción de *cantidad* o *magnitud*, el caso de los imaginarios quedaría fuera de ese ámbito, pues ellos no responden a la pregunta ¿*cuántos*? De hecho, son *contradictorios* a la idea de *cantidad*. Lo imaginario no es, por tanto, ni directa ni evidentemente *a priori*. Del mismo modo, Husserl cree que en ningún momento el caso de los imaginarios se podría "reivindicar" *empíricamente* (o bajo algún proceso inductivo), pues esto exigiría la aparición inmediata del *acto de contar o asociar* números imaginarios, lo cual es ya un sinsentido en tanto que ellos superan todo tipo de construcción intuitiva.

El caso de la tercera teoría es particularmente importante porque en ella se alude indirectamente al ensayo de Dedekind "Continuidad y números racionales". En el primer capítulo expliqué la manera en que Dedekind reducía el sistema de los reales al sistema de los racionales a través de un proceso similar a la aritmetización del análisis. Pero a diferencia de ese procedimiento, Dedekind partía de la libre creación y ampliación del sistema (originalmente definido) de los naturales. Dicha expansión daba lugar a la definición de nuevos números y se aseguraba que sus reglas de cálculo no cayeran en contradicción con el sistema original o con el sistema ampliado. Sin embargo, a juicio de Husserl, la esfera del concepto de número cardinal no puede expandirse arbitrariamente sobre la base de definiciones creativas. De hecho, para él resulta incomprensible una solución fundada en una definición arbitraria del concepto de número. "Sería como si en geometría se decretara: habrá cuadrados redondos, si no en el plano, en una dimensión superior del espacio" (2001, p. 94. K I 26/78). Ahora bien, lo que sí puede hacerse, según Husserl —y este es el punto crucial de su reformulación— es construir un nuevo concepto de número[172] e introducir, junto con él, un sistema formal de definiciones y operaciones válidas. En otras palabras, se trata de usar un sistema base para *interpretar* un nuevo campo numérico capaz de ser ampliado con *nuevas* definiciones y *nuevas* formas específicas de operaciones que deberían ser válidas. Así, el nuevo (sub)sistema de operaciones coincide y se comporta (parcialmente) igual que el sistema original y, al mismo tiempo, es más amplio ya que contiene más elementos y axiomas (2001, p. 94. K I 26/78). Sobre esta misma base, Husserl rechaza la cuarta teoría cuyo

[172] "Podemos abandonar el concepto de número y, a través del sistema formal de definiciones y operaciones que son válidos para los números, definir un concepto nuevo, puramente formal, el de número entero positivo. Este concepto formal de número positivo, en la medida en que está delimitado por la definición, puede ser ampliado por nuevas definiciones sin contradicción" (K I 26/78).

objetivo es deducir la legitimidad de las entidades imaginarias a partir de la existencia real de diferentes tipos de magnitudes: distancias, tiempos, constantes, etc. Frente a tal emplazamiento, Husserl sostiene que las pruebas empíricas no *fundamentan* contextos teóricos. De hecho, las pruebas empíricas son insuficiente para poder fundamentar el concepto de número imaginario.

La quinta y última teoría está en consonancia con el principio de permanencia de las leyes formales de Hankel. Como se recordará, el principio de permanencia de las leyes formales dicta que para "generar" un nuevo concepto o dominio numérico se deben conservar el mayor número de propiedades; así el nuevo concepto se vuelve un caso particular o extendido del dominio original. Tomando en cuenta esto último, Husserl plantea dos cuestiones: la relativa a las condiciones en que se pueden deducir, componer y extender "libremente" ciertas proposiciones a partir de proposiciones originales, y la relativa a la validez de las proposiciones extendidas que están, aparentemente, libres de contradicciones.

Tomando en cuenta lo anterior, Husserl anticipa una respuesta al problema de lo imaginario: si queremos expandir un concepto más allá de su definición original debemos proceder de tal manera que se preserven, en la medida de lo posible, las viejas reglas de cálculo original (2001, p. 97-98. K I 26/81). El argumento que Husserl desarrolla, hasta este momento, puede reconstruirse de la siguiente manera: sea G un determinado campo concreto, por ejemplo, el de los números naturales. Sea A_G el conjunto de axiomas relativos a G, esto es, el campo formal obtenido por la formalización de G. Sea F_G el conjunto de proposiciones lógicamente derivadas de A_G (es decir, el conjunto de consecuencias lógicas *F*) y sea $A\Gamma$ la expansión de A_G. Por tanto: $A_G \subseteq A\Gamma$ y $F\Gamma = F(A_G + A')$ (Centrone, 2010, p. 164-165). Si he entendido correctamente esto, lo que Husserl propone es que un campo formal (expandido) no tiene las mismas limitaciones que el campo original. Los nuevos axiomas A' no tendrían las mismas restricciones de A. Sin embargo, la teoría de la permanencia en este punto establece que si la expansión ($A\Gamma$) es consistente, lo es porque es conservativa respecto de A_G. Por tanto, cabe el supuesto de que toda proposición del sistema extendido incluya o no una inconsistencia; el problema ahora está en saber si esto ocurre (2001, p. 97. K I 26/81). En realidad, este planteamiento puede dividirse en dos problemas distintos pero complementarios:

(1) ¿Bajo qué condiciones es $A\Gamma$, la expansión de A_G, consistente?

(2) ¿Bajo qué condiciones es conservativa la teoría $A\Gamma$ sobre A_G? En otras palabras ¿bajo qué condiciones son las expresiones de $A\Gamma$ comprobables en G y por tanto verdaderas en el campo interpretado de G? (Centrone, 2010, p. 165).

Estas preguntas no serán respondidas hasta la segunda parte de la conferencia. Por lo pronto, esta primera parte se puede resumir de la siguiente manera:

(a) El conjunto de las proposiciones matemáticas complejas, reguladas únicamente por reglas formales, es ahora objeto de la investigación filosófico-matemática.

(b) Es posible analizar el aspecto formal de una teoría concreta (interpretada).

(c) El problema del imaginario puede estudiarse a partir del análisis de las relaciones entre los algoritmos generales y las matemáticas aplicadas o entre la *forma* de las teorías y las teorías concretas (Centrone, 2010, p. 158-159).

Ahora bien, de lo dicho hasta ahora puedo inferir cuatro argumentos que enuncian las condiciones necesarias para lograr el *tránsito* a lo imaginario.

Argumento (A): Una teoría axiomática está completa si determina su dominio matemático (variedad definida). Esto significa no dejar ninguna ambigüedad en la estructura de su dominio.

Argumento (B): Si se cumple lo siguiente, entonces se justifica el uso de imaginarios:

(1) El sistema original es (sintácticamente) completo, y

(2) El sistema ampliado es consistente.

Las dos condiciones anteriores implican la propiedad de conservación, es decir, el sistema ampliado es una extensión conservadora del original. Siguiendo a Okada (2013) y a Majer (1997), dos sistemas axiomáticos formales ($S1 \subset S2$) donde:

S1= Sistema original (real)

S2= Sistema ampliado con algunos imaginarios.

Para toda proposición real *A* de *S1*, si *A* es demostrable en *S2*, entonces *A* es demostrable en *S1* [Propiedad de conservación], es decir:

$S2 \vdash A \rightarrow S1 \vdash A$

Entonces, *S*2 se nombra como una extensión conservada de *S*1 y *S*1 se nombra como un subsistema conservativo de *S*2. Por ejemplo: supongamos un sistema que describa los números naturales y que pueda ser despojado de toda *interpretación* para ser extendido a un sistema (consistente) interpretado por, digamos, los números racionales. Según la primera condición de Husserl, ningún enunciado del nuevo sistema podría ser aceptado como verdadero si no fuese verdadero en el sistema original.

Argumento (C): El concepto de completud de los sistemas formales depende de los dominios objetivos que describan estos sistemas. Por tanto, para extender la noción de completud a sistemas no interpretados es necesario definir cuál es el dominio de una teoría como tal (da Silva, 2000b, p. 44).

Argumento (D): Este cuarto argumento/condición muestra afinidad con la teoría de Meinong[173] sobre las *representaciones con objetos inexistentes* (*o imposibles*), esto es, sobre la admisibilidad de objetos con propiedades puramente proposicionales. Meinong señala que cuando se enuncia algo proposicionalmente no es necesario decir nada sobre su existencia; se puede simplemente predicar (con sentido) su "ser-así" (*Sosein*). Así, el enunciado "la capa negra de Batman" dice algo con sentido sobre un objeto inexistente (la capa negra de Batman). En tal sentido, Meinong sostiene que podemos decir perfectamente que "el cuadrado redondo es redondo" o "la montaña de oro es de oro", sin por ello implicar el ser o la existencia real de los objetos en cuestión. Según esta condición, para justificar el uso de lo imaginario en matemáticas deben considerarse los criterios y reglas con los que se dice que algo es "imaginario" desde la perspectiva de un sistema originalmente dado.

[173] *Cfr.* (Benoist, 2001) y (Niel, 2015).

§8. Variedad definida y dominio formal. La propuesta de Husserl al problema de lo imaginario

Las ediciones de Schuhmann y Schuhmann (2001) y Lothar Eley (1970) coinciden en que la segunda parte de la conferencia de Husserl comienza a partir de la distinción de los tipos de variedades (definida y formal), a la vez que delimita tres problemas relacionados a estos tipos de variedades. Enseguida presento estos tres problemas y después presento las variedades arriba mencionadas.

1. ¿Puede una variedad definida ser excluida a través de un axioma de clausura? (*Schliessungs-Axiom*).
2. ¿Puede una variedad puramente algebraica, que no define ningún individuo, tener el carácter de una variedad definida?
3. Sistemas de operaciones que no excluyen a los individuos en la generación del dominio: (1) no todos los resultados operacionales generalmente definidos y existentes pertenecen a la esfera de los individuos operacionalmente producibles y (2) Sistemas matemáticos donde todo lo que existe está determinado operativamente de manera única (K I 26/93. p. 99-100).

Para entender qué es lo que Husserl está cuestionando en I, II y III, hay que añadir una serie de definiciones procedentes de los textos que complementan las conferencias de Gotinga (Hua XII, 452-500). Siguiendo estos textos se puede postular lo siguiente: para Husserl, un sistema axiomático es un *conjunto* limitado de proposiciones fundamentales puramente formales coherentes e independientes entre sí (Hua XII, 496).[174] Este conjunto finito se rige por un *sistema operativo* o sistema de operaciones que consiste en un conjunto de leyes de operación[175] (Hua XII, 496). Desde sus axiomas y según sus leyes, el sistema axiomático genera, de una manera puramente lógica, un conjunto de proposiciones necesariamente recíprocas (no contradictorias). El o los dominios formales de los sistemas axiomáticos tienen dos aspectos correlativos: la *dimensión estructural* que corresponde al concepto que Husserl

[174] Los axiomas de los sistemas de axiomas expresan propiedades, relaciones (de orden), uniones y operaciones de un dominio formal (asociatividad, distribuidad, conmutatividad, etc.)

[175] El conjunto de leyes de operación "designa un conjunto predefinido de reglas de derivación (o cálculo) de las consecuencias lógicas de los axiomas" (Gustavo Isaac, 2015, p. 9).

llama “variedad” y que él define, como ya hemos visto, como una totalidad genérica compuesta por una multiplicidad de elementos u objetos que son individualmente distintos, formales o abstractos e inscritos en un tejido de relaciones o uniones (Gustavo Isaac, 2015) —de hecho, la existencia de estas relaciones es lo que da a la variedad su unidad (Hua XII, p. 465, 495)—, y la *dimensión operacional* que corresponde a la forma específica en este o aquel “dominio de operación” (*Operationsgebiet*), por ejemplo: +, -, ×, actúa sobre sus elementos u objetos[176], determina, pues, las relaciones de un objeto por medio de objetos dados (Hua XII, p. 467, 493, 541).

Ahora bien, la delimitación efectuada por un sistema de axiomas en el conjunto de objetos formales constituye, a su vez, una *indeterminación* de los dominios relativos al sistema de axiomas en cuestión. Dicho de otra manera: para cada ley de operación trabajada (*exploitée*) por una variedad, el sistema de axiomas también incluye “axiomas de existencia” que garantizan, por un lado, la existencia de la variedad de objetos a los que se aplica esta forma de relación y, en segundo lugar, que el producto de las relaciones o uniones operadas en la multiplicidad corresponde a un objeto existente en la variedad (Gustavo Isaac, 2015, p. 7) (Hua XII, 470).[177] Por supuesto, siempre que se agregue un axioma de cierre o clausura[178] al sistema. Bien señala Husserl:

> 1.1 En este sentido, una teoría elaborada sistemáticamente es definida por una colección de axiomas formales, es decir, por un número limitado de axiomas puramente formales de acuerdo a los principios de consistencia e independencia (2001, p. 91. K I 26/76).
>
> 2.1 Dominio. Establece lo que se entenderá bajo un dominio de un sistema axiomático (2001, p. 98. K I 26/43).

---

[176] Para Husserl, los elementos de un dominio no son objetos especificados sino, más bien, objetos formales no especificados o también, como a veces los llama, formas de objetos. Debemos tener en cuenta que los objetos formales no son entidades lingüísticas. Ellos están denotados por términos y singularizados por descripciones, pero no pueden reducirse a ellas. La idea es que estos objetos formales son estructuras de algún tipo que se transforman en objetos genuinos cuando se llenan con la materia apropiada. Serían una suerte de objetos insaturados, en el sentido de Frege (da Silva, 2000a).

[177] Si, por ejemplo, el dominio correlativo de las operaciones de una multiplicidad de objetos formales incluye la operación “+”, entonces deben existir dentro de esta multiplicidad al menos dos objetos (a y b) que sean alcanzables por esta operación (en la forma: a + b) y un elemento correspondiente al producto de esta operación (una x tal que x = a + b).

[178] La adición de un axioma de cierre a un sistema de axiomas opera, justamente, como una clausura. En este sentido, es un axioma “negativo” que da lugar a un concepto de “completud no auténtica” (Hua XII, p.442). En el caso de expansión de un sistema de axiomas esta excluye la presencia de tal axioma dentro de su sistema.

> 3.1 Un sistema axiomático "define" un dominio, una variedad, y esta no excluye que existan aun más objetos los cuales satisfacen el sistema axiomático ademas de estos definidos. Pero estos otros objetos son indefinidos (2001, p. 98. K I 26/43).

Según lo dicho en la primera conferencia, la definitud de los sistemas interpretados (o significativos) está en correspondencia con los dominios (objetuales) que describen (o con los que tratan). Por tanto, para extender la noción de definitud a sistemas no interpretados, Husserl debe responder a la pregunta ¿cuál es el dominio (objetual) de un sistema no interpretado o puramente formal? El problema en este asunto es que en la completud de las teorías interpretadas se mencionan explícitamente sus (múltiples) descripciones o intenciones de interpretación o propiedades significativas. Pero en los sistemas no interpretados nada de esto es evidenciado. Una respuesta fácil, pero incorrecta, es señalar que las teorías no interpretadas no tienen descripciones o intenciones de interpretación. Sin embargo, para Husserl las teorías no interpretadas también tienen, al menos en germen, dominios o intenciones de interpretación, pero estos no son dominios que correspondan a objetos determinados, sino más bien a objetos *indeterminados* (pero susceptibles de múltiples interpretaciones) (2001, p. 100. K I 26/93).

Ahora bien, cabe preguntar: ¿cuáles son las condiciones para que un objeto formal pueda pertenecer a una variedad formal? La respuesta de Husserl en esta segunda conferencia señala que un objeto formal (un *algo* indeterminado) caracterizado por una cierta propiedad $F(x)$, pertenece al dominio formal determinado por una teoría formal T siempre que la fórmula $F(x)$ pertenezca al lenguaje de T y, además, T pruebe que *existe una única x tal que F (x)* y viceversa. En otras palabras, un objeto formal es simplemente un *algo* indeterminado que satisface cierta propiedad que puede ser expresada en el lenguaje de la teoría en cuestión (da Silva, 2010). Ahora, si se transfiere la noción de definitud de teorías interpretadas a teorías no interpretadas sustituyendo las intenciones de interpretación por variedades formales, obtenemos lo siguiente. Una teoría no interpretada será *relativamente* definida cuando: (*i*) en ella se decida cualquier aseveración que se refiera a su variedad formal y (*ii*) ella sea sintácticamente completa. Dicho de otro modo, para Husserl una teoría no interpretada es *relativamente* definida cuando cada una de sus proposiciones significativas se decide bajo su campo de restricción, es decir, si cada fórmula (del lenguaje de la teoría) es demostrable o refutable en ella (2001, p. 102. K I 26/95).

Hasta este momento, la definitud de un sistema no interpretado parece corresponderse con su completud sintáctica, es decir, en relación a un subconjunto de afirmaciones expresables en el lenguaje de la teoría. Sin embargo, Husserl explora la posibilidad de que una teoría no interpretada, aunque sea definida, pueda no ser sintácticamente completa. En esta parte aparecerían dos versiones de definitud (no equivalentes) para sistemas no interpretados. Por un lado, la definitud *relativa* y, por el otro, la definitud *absoluta*. Sobre los conceptos de definitud relativa y definitud absoluta, Husserl señala lo siguiente:

> Un sistema axiomático es relativamente definido (*definit*) si para su dominio de existencia no admite más axiomas adicionales, pero admite que para otro dominio más amplio, son válidos los mismos axiomas y naturalmente los nuevos axiomas [...] Relativamente definida es la esfera de los números enteros, los números fraccionarios, los números racionales, así como la serie discreta de pares ordenados de números (números complejos).
> Llamo a una variedad definida absolutamente cuando no existe otra variedad que contengan estos mismos axiomas (todos juntos) (2001, p. 102. K I 26/95).

El dominio de un sistema, según lo ya establecido, se define como una colección de entidades que el sistema de axiomas requiere que exista. Por ejemplo, la aritmética de los números naturales requiere la existencia de 0 y un sucesor para cada número: 2 es el sucesor de 1; 3 es el sucesor de 2, y así sucesivamente. Un dominio siempre es completo o absoluto cuando se define a partir de sus propios axiomas (o de sus objetos formales o formas de objetos) y sus dominios posibles o circunscritos. Dicho con más detalle:

> Un sistema axiomático es relativamente definido si toda proposición significativa, de acuerdo a este sistema, se decide bajo las restricciones de su dominio.
> Un sistema axiomático es absolutamente definido si toda proposicion significativa dentro de él se decide en general.
> Por lo tanto, absolutamente definido = completo en el sentido de Hilbert (2001, p. 103. K I 26/82).

A partir de la diferencia entre la definitud relativa y la definitud absoluta, Husserl esboza una respuesta más completa para la justificación de los números imaginarios:

a) Sistema *relativo* definido. Que un sistema de axiomas sea relativamente definido significa, por un lado, que este sistema es irreductible y, por otro lado, que la completud deductiva y la máxima consistencia del sistema en cuestión son relativas a su dominio (2001, p. 103. K I 26/82). Por tanto, tal sistema de axiomas es ciertamente completo, *pero* de una manera limitada, en el sentido de que, según sus definiciones, ningún resultado posible de operación permanece abierto (2001, p. 103. K I 26/82). En otras palabras, tal sistema permanece *inesencialmente completo* ya que deja abierta la fijación formal de relaciones (o uniones) y posibles operaciones para todo el *dominio de existencia* en general (Hua XII, 455). Como tal, un sistema de axiomas relativamente definido es un sistema extensible (Gustavo Isaac, 2015, p. 18).

b) Sistema definido *absoluto*. La definitud absoluta de un sistema de axiomas significa que su completud deductiva y su consistencia máxima no se limitan a ningún dominio, sino que valen *en general* (2001, p. 103. K I 26/82). En ella sus definiciones se despliegan hasta tal punto que ningún resultado posible de operación queda abierto; tal sistema de axiomas es, por tanto, *absolutamente completo* (*absolut komplett*) (2001, p. 107. K I 26/85). Este estado de completud absoluta puede explicarse por el hecho de que ya se ha logrado cualquier fijación formal de relaciones o uniones y posibles operaciones para todo el dominio de su existencia en general (Hua XII, p. 455); como tal, no puede ser ampliado por nuevas leyes operativas que determinan, en un dominio extendido, nuevas formas de operaciones que vinculan nuevos conceptos de objetos. Por tanto, su propio dominio no puede extenderse sin que sus axiomas originales dejen de ser válidos (2001, p. 102-105. K I 26/94 / K I 26/84) (Gustavo Isaac, 2015, p. 19). Se dice, entonces, que un sistema de axiomas absolutamente definido es esencialmente completo (*wesentlich vollständige*) (Hua XII, 455).

Una vez establecidas las definiciones necesarias, se deben contemplar todas las aristas del problema de lo imaginario. Una de ellas es, precisamente, que su solución va más allá de comprender cómo una teoría no-interpretada definida se abre paso en su expansión. Veamos un ejemplo: *supongamos que A es un sistema interpretado (con un dominio objetual) y A_w un sistema extendido (y no interpretado) de A. El sistema A es consistente, por lo que toda proposición que contenga contradicción y que pueda ser derivada de A_w contiene contradicciones en A.* Según lo anterior ¿es válido suponer que A_w deriva sus propiedades (definitud) a partir del dominio de A utilizando como criterio necesario y suficiente la consistencia de A? La respuesta de Husserl es que no. Ciertamente, piensa Husserl, una proposición que tiene sentido para A_w no necesariamente tiene que ser verdadera en el dominio de A; es como si A tuviera que ser exclusivamente responsable de lo que es verdad en su dominio, y no dependiera de extensiones arbitrarias de sí mismo para resolver esta cuestión (2001, p 103. K I 26/95).

Lo que Husserl confirma con esto es que si se formaliza una teoría y se expande de un modo formalmente consistente, lo expandido, incluso cuando corresponda a un sistema de entidades pertenecientes a dicha teoría, no mantiene su consistencia dependiente de los axiomas de aquella teoría. Por esta razón, es importante definir a lo imaginario en un sistema de deducción consistente y comprensivo, pues esto permite que toda proposición extendida que caiga dentro del dominio original se decida sobre la base de los axiomas del sistema extendido y del original mismo (2001, p. 103-104. K I 26/83-84). Pero el asunto es todavía más profundo. Lo que ahora se está intentando comprender es que introducir un elemento imaginario no es simplemente extender A en A_w (como en el ejemplo anterior). Tal como se advirtió páginas atrás, Husserl va más allá cuando enfatiza que lo imaginario debe tener su propio dominio, es decir, A_w es extensión de A si y sólo si A_w reinterpreta estructuralmente los axiomas de A en un contexto más amplio. De acuerdo con este nuevo emplazamiento, Husserl desarrolla la posibilidad de un sistema completo que pueda ser ampliado por la introducción adicional de un axioma independiente que mantiene abierto su dominio de objetos. En el caso de un sistema de este tipo, sus elementos son definidos de forma exhaustiva con respecto a sus relaciones formales y solamente podría ampliarse mediante la adición de axiomas donde las consecuencias del sistema no-extendido formen un subconjunto de las consecuencias del sistema ampliado.[179]

Ahora bien, teniendo en cuenta lo anterior, lo que sigue es "ofrecer" un dominio a este sistema no interpretado o extendido. Según lo antes expuesto, una teoría no interpretada tiene por dominio una variedad formal (colección de objetos *formales*). Explico a detalle siguiendo a da Silva (2000b, 2010, 2017). Si bien es cierto que, en el proceso de formalización, los símbolos, términos, relaciones y operaciones están desprovistos de cualquier referencia predeterminada, también es verdad que los símbolos, relaciones, operaciones y componentes sintácticos refieren indirectamente a un componente de un *estado*

[179] Lo anterior bajo las hipótesis de que (*i*) la aritmética material puede ser axiomatizada y (*ii*) la teoría formal derivada de la aritmética material es completa (en el sentido de que sólo podría ampliarse en sucesivos axiomas que definen nuevas relaciones entre sus elementos).

de cosas (*Sachverhalt*).[180] Todo estado de cosas está compuesto de una materia y una forma. Su materia está constituida por los objetos, relaciones y operaciones específicas que están presentes en ese estado de cosas, y su forma (lógica) viene dada por la manera en que estos componentes están relacionados en ese estado de cosas. Por ejemplo: 3<5 se expresa mediante $x\ R\ y$, donde R es una relación entre las variables x e y que denotan un objeto. También podría describir lo anterior de la siguiente manera: *dos objetos indeterminados que se encuentran en una relación binaria determinada*. Según lo anterior, se puede decir que para Husserl el estado de cosas (objetual) de una teoría no interpretada definida son las formas puras o indeterminadas. Por tanto, una teoría no interpretada, vista simplemente como una colección de objetos formales, denota la forma de un dominio objetivo o, en otras palabras, se trata de un dominio caracterizado exclusivamente con respecto a su forma. La forma en tanto dominio objetivo de una teoría no interpretada se caracteriza por un lenguaje simbólico que denota objetos-indeterminados (variables de objeto), operaciones (variables de operación), relaciones (variables de relación) y propiedades (variables de propiedad). La colección de estas expresiones formales constituye una teoría formal cuyo objetivo correlacionado es un dominio formal.

Ya con todos estos antecedentes se puede dar solución a los problemas antes presentados, a saber:

(1) ¿Bajo qué condiciones es $A\Gamma$, la expansión de A_G, consistente?

(2) ¿Bajo qué condiciones es conservativa la teoría $A\Gamma$ sobre A_G?

Desde el punto de vista de los dominios formales axiomatizados, el diseño de la extensión de los sistemas de axiomas está condicionado por un requisito para preservar las dimensiones estructurales y operacionales de un dominio de inicio. Desde el punto de vista de los sistemas de axiomatización, ciertas operaciones posibles en general permanecen abiertas y, por tanto, ciertas propuestas posibles en general no están fijadas por él (Hua XII, 453). Concebida de esta manera, la extensión de un sistema de axiomas, que agrega axiomas externos y nuevas leyes de operación a un sistema de inicio, no opera con una modificación del campo inicial, sino con un cambio de dominio. En otras palabras, sobre la base de la identificación de las

[180] Sin entrar en detalles, un estado de cosas o *Sachverhalt* es, propiamente, el correlato de un juicio.

propiedades (potenciales) de las extensiones del sistema de axiomas que definen sus dominios, la cuestión de la extensión se expresa en términos de la conservación parcial del nuevo dominio respecto de su dominio restringido de inicio. En consecuencia, la extensión de un sistema de axiomas no debe entenderse como un proceso de ampliación, por así decirlo, desde *dentro* de un sistema de inicio, sino como la expresión de un dominio "más grande" que contiene un sistema restringido como una de sus partes.

Ahora bien, dada la preservación de las dimensiones estructurales y operativas de un dominio formal "incluido" en un dominio mayor extendido, se debe preservar la verdad de las proposiciones derivadas del sistema de axiomas del dominio de inicio. Así, cuando se agrega a un sistema de axiomas los axiomas que son independientes de él, estén o no conectados de manera deductiva, los axiomas extendidos serán "compatibles" con el sistema de axiomas iniciales que contiene deductivamente. En particular, la conclusión de que la teoría extendida es conservativa no se deriva de la premisa de que es consistente como parece sostener la teoría de la permanencia de Hankel. La conservatividad se debe probar por separado para cada teoría. Siguiendo esta hipótesis, Husserl argumenta que, dado que A_G se incluye en $A\Gamma$, para cualquier fórmula α en el lenguaje de G, si se puede probar α partir de $A\Gamma$, entonces α no es incompatible con A_G (dada la consistencia de A_G). Ahora bien, a partir del hecho de que α no está en contradicción con A_G (es decir $\neg\alpha$ no es demostrable desde A_G) la teoría de la permanencia concluye que A_G prueba α (Centrone, 2010, p. 166).

Husserl sintetiza el resultado de sus reflexiones señalando que el paso a través de lo imaginario es posible (1) si el imaginario puede definirse formalmente en un sistema completo y consistente; (2) si el campo o teoría original tiene la propiedad de que cada proposición que cae dentro de ella se decide sobre la base de los axiomas del campo; (3) la extensión de una teoría interpretada sólo puede lograrse ampliando el lenguaje utilizado (para describirlo con nuevos símbolos) y (4) se deben introducir nuevos axiomas para definir las entidades imaginarias y extender las operaciones definidas anteriormente. Así, la solución presentada en las conferencias de Gotinga para el problema de los imaginarios nos dice que, desde una perspectiva formal, las entidades imaginarias pueden tratarse como reales siempre y cuando se establezcan las condiciones lógicas bajo las cuales se puede permitir dicho tratamiento.

CAPITULO IV

Elementos para una aclaración fenomenológica de la constitución y objetividad de las idealidades matemáticas en las *Investigaciones lógicas* (1900-1901)

4.1 La (in)justificación psicológica de la lógica. La crítica al psicologismo y la teoría de la variedad en los *Prolegómenos a la lógica pura*

Die Logischen Untersuchungen waren für mich ein Werk des Durchbruchs,
und somit nicht ein Ende, sondern ein Anfang
(Hua XVIII)

§1. Introducción

El epígrafe anterior resume con mucha exactitud la visión que Husserl tenía de sus *Investigaciones lógicas*: las veía como un primer comienzo, como una obra de penetración y apertura de nuevos caminos y perspectivas. Ellas eran el resultado, pero no el fin, de un trabajo riguroso (de más de una década) que, habiendo partido en búsqueda de una explicación filosófica de la matemática pura, terminó por ser una exploración del campo de la conciencia:

> Las *Investigaciones lógicas*, cuya publicación inicio con estos *Prolegómenos*, han brotado de los ineludibles problemas que han dificultado repetidas veces e interrumpido finalmente el curso de mis largos esfuerzos por obtener una explicación filosófica de la matemática pura. Estos esfuerzos perseguían principalmente la solución de las difíciles cuestiones acerca de la teoría y del método matemáticos, además de las referentes al origen de los conceptos y de las intelecciones matemáticas fundamentales. Lo que hubiera debido parecer transparente y fácilmente comprensible, según la lógica tradicional o la reformada de un modo u otro, esto es, la esencia racional de la ciencia deductiva, con su unidad formal y su método simbólico, se me presentaba oscuro y problemático al hacer el estudio de las ciencias deductivas realmente existentes. Cuanto más hondo penetraba con mi análisis, tanto más adquiría conciencia que la lógica de nuestro tiempo no basta a explicar la ciencia actual, siendo ésta, sin embargo, una de sus incumbencias principales (1999, p. 21).

Las *Investigaciones lógicas* se publican por primera vez en dos volúmenes en los años de 1900 y 1901. En 1900 aparece el primer volumen titulado *Prolegómenos a la lógica pura* y en 1901 aparece el segundo volumen titulado *Investigaciones para la fenomenología y la teoría del conocimiento*. La tesis general que guía a la obra es la de “aclarar la idea de la lógica pura, retornando (*Rückgang*) a la donación de sentido o efectuación cognoscitiva que se ejecutan en la conciencia lógica […] se trataba de reorientar la intuición hacia las vivencias lógicas que tienen lugar en nosotros cuando pensamos, pero que no podemos ver, que no tenemos en el campo de la mirada atenta cuando el acto de pensar transcurre de una manera naturalmente original" (Hua IX, 20). Efectivamente, en las *Investigaciones lógicas* se trata de resolver los nuevos problemas concernientes a la comprensibilidad del vivenciar lógico, a su ejecución y al modo como se construyen todas aquellas formaciones cognoscitivas que están a la base de todo pensamiento judicativo. Pero no sólo eso. En ellas se presentan una serie de variados problemas de una índole filosófica genuina:

> Las monumentales *Logische Untersuchungen* de Husserl ciertamente se ocupan no sólo de la lógica y la refutación del psicologismo (*Prolegómenos*), sino también con la filosofía de la matemática (capítulo 11 de los *Prolegómenos*), con la filosofía del lenguaje (Investigaciones I y IV), con la ontología (Investigaciones II y III), con la filosofía de la lógica (capítulo 11 de los *Prolegómenos* y la Investigación III), con la gramática universal (Investigación IV) y con la teoría del conocimiento (Investigaciones V y VI), incluyendo el conocimiento matemático y la intuición categorial (Investigación VI). Las otras ciencias, especialmente la psicología, son consideradas de manera comparativa, sobre todo para enfatizar la naturaleza peculiar de la lógica y la matemática en contraste con la psicología (Rosado Haddock, 2011, p. 171).

La extensa gama de problemas a los que se dedican las *Investigaciones lógicas* dan motivos para pensar que ellas sólo son una serie de estudios vagamente relacionados, un mosaico o mezcla de estudios aislados cuyos propósitos son, en el mejor de los casos, desconcertantes (Woodruff Smith, 2003). Esta supuesta desconexión temática es ilusoria y tiene una causa: en las *Investigaciones lógicas*, Husserl entra en detalles tan exhaustivos y en distinciones tan precisas que la relación con los temas arriba señalados puede olvidarse fácilmente. Sin contar que la mayoría de las veces Husserl se acerca a su propia posición a través de un examen y corrección de otras opiniones, lo que hace que se pierdan de vista los objetivos planteados. Lo cierto es que las *Investigaciones lógicas* en su conjunto se basan en cuatro temas principales: (1) la purificación de los significados ideales de las expresiones; (2) la determinación de la naturaleza y estructura de las vivencias intencionales; (3) el problema del conocimiento o la síntesis de identidad, y (4) la ontología formal. Los contenidos particulares de estos cuatro temas principales corresponden a la esfera de la verdad; a la esfera de la intencionalidad; a la esfera de la ontología, y por supuesto, a la esfera de lo lógico y lo matemático, respectivamente. Desde luego, ningún tema se presenta uno detrás del otro, más bien son momentos diferentes que convergen en una problemática: una nueva fundamentación de la lógica pura y la teoría del conocimiento (Sokolowski, 1971), que, como bien señala García-Baró, terminó por "reemplazar a la crítica kantiana y desplazar del centro de la filosofía las formas varias del hegelianismo, [del idealismo de cuño neokantiano, de toda forma de antropología en su sentido *más pragmático* y, finalmente, de todo tipo de escepticismo filosófico]" (2008, p. 9. El agregado entre corchetes es mío).

Como señalé hace un momento, las *Investigaciones lógicas* fueron una exploración del campo de la conciencia. Pero esta exploración no fue definitiva, hubo que hacer un nuevo viaje para ver las cosas bajo nueva luz. Ese nuevo viaje fue precisamente la segunda edición en el año de 1913. Así, "las *Investigaciones Lógicas* conocieron dos ediciones. La segunda difiere en puntos capitales de la original, porque entre ellas se sitúa el momento en el que el autor descubrió que el método que aplicaba requería una condición que no había conseguido entender plenamente trece años antes" (García-Baró, 2008, p. 9). Lo que Husserl hizo en ese momento fue adaptar lo dicho en 1900 a la nueva situación de su filosofía, ya trascendental para ese entonces. El resultado fue que "la segunda edición es un hibrido extraño y poco comprensible. Cabe dudar de que debiera nunca haber sido publicada" (p. 10).[181] Por esta

[181] En esta segunda edición se vieron profundamente transformadas la introducción, las investigaciones tercera y quinta —y por tanto la primera, segunda y cuarta investigaciones, además de los *Prolegómenos*—. La sexta investigación también se modificó, pero sus modificaciones no se publicaron sino hasta 1902. En el prólogo a la segunda edición, el propio Husserl se encarga explicar en qué consistieron todos estos cambios.

"Respecto de las distintas investigaciones y su refundición debo advertir lo siguiente. La obra [*Prolegómenos a la lógica pura*] está pensada también de una vez y por eso creí no deber refundirla radicalmente. Por otra parte, me encontré con la posibilidad de llevar a cabo, aproximadamente desde la mitad, muchas y considerables correcciones en la exposición, como extirpar errores y proyectar una luz más intensa sobre puntos importantes" (1999, 27-28. El agregado es mío).

"[...] la primera -*Expresión y significación*- conserva en la nueva edición su carácter 'meramente preparatorio'. Invita a pensar; guía la mirada del fenomenólogo principiante hacia los primeros y ya muy difíciles problemas de la conciencia de la significación; pero no los resuelve plenamente" (1999, p. 29).

"La segunda investigación: *La unidad ideal de la especie y las teorías modernas de la abstracción*, tenía en su estilo (pero también en su limitación) cierta rotundidad que no hacia deseable grandes transformaciones, aunque sí muchas correcciones aisladas" (p. 29).

"La tercera investigación: *Sobre la teoría de los todos y las partes*, ha sido objeto de una refundición profunda, aunque en ella no ha habido que realizar transacciones insatisfactorias, ni llevar a cabo rectificaciones o profundizaciones posteriores. No había más que dar la mayor eficacia al sentido propio de esta investigación y a sus resultados, en mi opinión, importantes, y corregir múltiples imperfecciones de la exposición" (p. 29).

"Algo semejante a lo sucedido con la tercera sucede con la cuarta investigación: *Sobre la diferencia entre las significaciones independientes y dependientes y la idea de la gramática pura*. Mi punto de vista no ha cambiado razón, García-Baró sugiere que "quien desee conocer la posición posterior de Husserl, la […] *fenomenología transcendental*, hará bien en estudiar directamente *Ideas I* y prescindir de *Investigaciones*. Pero quien quiera introducirse en los apasionantes problemas […] que fueron comunes a los fenomenólogos reunidos en Göttingen, necesita meditar […] el texto auténtico de las *Investigaciones*" (p. 10). Siguiendo esta indicación y dado que el interés de esta disertación es estudiar la posición filosófica de Husserl antes del giro trascendental, me enfocaré en la primera edición de las *Investigaciones lógicas*.[182] Debo aclarar que esto no significa hacer un cotejo de ambas ediciones tratando de perseguir detalladamente sus oscuridades y ambigüedades. Esto sería un trabajo demasiado arduo, largo y en gran medida innecesario para esta disertación. Sólo me enfocaré en presentar el suelo donde se arraigan los primeros (y quizás principales) problemas ontológicos en torno a la fenomenología[183] de las matemáticas y la lógica. Finalmente, debo advertir que haré uso de conceptos y, en muy

---

tampoco en esto. El texto ha sufrido, además de correcciones, muchas adiciones de contenido, que se refieren de antemano a futuras publicaciones de mis lecciones sobre lógica (p. 30).

"Profundas reformas ha experimentado la quinta investigación: *Sobre las vivencias intencionales y sus contenidos*. En ella ataco problemas cardinales de la fenomenología [...] respecto de los cuales he podido alcanzar un grado considerablemente más alto de claridad y evidencia, sin necesidad de alterar la estructura y el contenido esencial de la investigación. No apruebo ya la negación del yo puro; sin embargo, he dejado en forma abreviada y corregida las consideraciones respectivas, como sustrato de una interesante polémica de P. Natorp [...] He suprimido íntegramente el parágrafo 7, muy citado, poco claro y en conjunto completamente superfluo [...] En general he procurado no tocar a la antigua terminología de la obra." (p. 30)

"La última parte de la obra contiene la refundición de la sexta investigación, la más importante en sentido fenomenológico" (p. 30). Para esta "nueva edición" de la sexta de las *Investigaciones lógicas,* Husserl tenía planeado un cambio radical de dicha investigación, corrigiendo partes completas e insertando series enteras de nuevos capítulos. Sin embargo, en un nuevo prólogo, el de 1920, a la sexta investigación corrige este señalamiento: "La presente reedición del fragmento final de las *Investigaciones lógicas* no responde —a mi pesar— al programa expuesto en el prólogo que agregué en el año 1913 al tomo primero de la segunda edición. He tenido que decidirme a publicar el texto antiguo, corregido esencialmente sólo en algunas secciones, en lugar de la radical refundición de que ya entonces estaba impresa una parte considerable" (1999, p. 593).

[182] Por esta razón usaré como material de estudio los tomos XVIII y XIX/1 de Husserliana (editados por Elmar Holenstein y Urzula Panzer, respectivamente). En estos tomos se incluyen tanto la primera como la segunda edición de las *Investigaciones lógicas*. No obstante, la traducción española de Gaos y García Morente (1999) ha sido debidamente cotejada y se ha consultado constantemente y con muchísimo provecho. Por tanto, donde no se altere la *exposición* o el *contenido* entre la primera y la segunda edición seguiré dicha traducción.

[183] De ahora en adelante, por fenomenología debe entenderse, siguiendo a Husserl: "la fenomenología descriptiva de la experiencia interna que se encuentra en la base de la psicología empírica y, en un modo totalmente distinto, de la crítica del conocimiento" (Hua XVIII, 215). Aquí es necesario aclarar lo anterior. Es verdad que Husserl en la primera edición de las *Investigaciones lógicas*, explícitamente señala que "la fenomenología es psicología descriptiva" (Hua XIX/1, 24). "Sin embargo, sostiene que, desde el punto de vista de la teoría del conocimiento, es importante separar el examen de las vivencias cognoscitivas de las tareas que interesan a la psicología. De ahí que, cuando la descripción no tiene meramente la función preparatoria de aclarar el contenido de los conceptos para su uso ulterior en una psicología orientada hacia la explicación y la génesis empírica, Husserl prefiera 'hablar más bien de fenomenología en lugar de psicología descriptiva' (Hua XIX/1, 24)" (Walton, 2006).

pocos casos, neologismos[184] que no están del todo bien delimitados en las *Investigaciones lógicas*. Tanto su utilidad como su aparición deben entenderse sólo como recursos expositivos que aligeran la presentación e intentan mostrar una orientación elemental en medio de un relieve complejo como lo es la fenomenología de principios de 1900.

§2. La crítica al psicologismo como crítica a las falsas condiciones sobre las que se fundamenta el quehacer de la ciencia

La estructura de los *Prolegómenos* se divide en tres partes. La primera parte es una suerte de *introducción* que tiene por objetivo evidenciar la necesidad de fundamentar la lógica, entendida como arte lógico, en una disciplina teórica; en la segunda parte se presentan una serie de refutaciones a los intentos de fundamentar a la lógica a partir de "ciencias empíricas" como la antropología y la psicología, y en la tercera parte se expone la teoría de la lógica pura. En su conjunto, los *Prolegómenos* discuten los siguientes problemas: la objetividad de la lógica, si la lógica puede ser una ciencia o es sólo un arte, el problema de la objetividad de las teorías científicas en general y la refutación del psicologismo asociado con el relativismo, el antropologismo y el escepticismo.

Apoyado en la interpretación que ofrece Peucker (2012), a saber, que el objetivo de las *Investigaciones lógicas* es encontrar una respuesta a la pregunta de qué es lo que hace que la ciencia sea una ciencia,[185] desarrollaré una interpretación de los *Prolegómenos a la lógica pura* que muestra que la crítica al psicologismo es en realidad una crítica a las falsas condiciones sobre las que se ha querido fundar la definición y el quehacer de la ciencia.

[184] Cuando eso ocurra cambiaré a *cursivas* y en **negritas**.

[185] Husserl dice: *Wissenschaft*, es decir, ciencia o "conjunto de lo sabido". Para las *Investigaciones lógicas*, la ciencia es lo último y más alto, algo que sólo puede ser caracterizado como aquello que conduce, a quien lo emplea adecuadamente, a saber (*Wissen*). "La palabra saber es evidentemente correlativa de verdad. No se pueden saber falsedades. Saber en acto ahora una verdad es, para empezar, creerla, pero precisamente en un juicio correcto, como objeto suyo" (García-Baró, 2008, p.24).

Descubrir las condiciones que hacen posible a una ciencia equivale a descubrir la posibilidad tanto del conocimiento racional de cualquier teoría como sus condiciones, relaciones y consecuencias. Desde esta perspectiva, el objetivo de los *Prolegómenos* quedaría definido de la siguiente manera: indagar los fundamentos de una ciencia a partir del estudio de sus condiciones de posibilidad y acción. Entendamos mejor este punto. Husserl establece una distinción entre la ciencia como conexión subjetiva de actos y vivencias que llevan a cabo los científicos y ciencia como conjunto de significaciones verdaderas encadenadas en fundamentaciones (ciencia como realidad subjetiva y ciencia como realidad objetiva, respectivamente). Se trata de encontrar aquellos rasgos esenciales que se obtienen al reflexionar sobre las condiciones lógicas y epistemológicas de la ciencia. Para llevar a cabo una investigación como esta, se deben tener en mente dos direcciones: primero, debemos examinar aquellas leyes lógicas que toda ciencia debe seguir y cumplir a fin de evitar contradicciones dentro de su arquitectura teórica, y segundo, debemos examinar aquellos actos involucrados en la aprehensión del conocimiento científico. Dicho de otro modo, debemos estudiar aquellos actos que nos permiten captar las *verdades lógico-científicas*.[186] Sin el correcto entendimiento de estos asuntos, Husserl cree que no tendríamos una comprensión del origen y la esencia de una ciencia, únicamente nos mantendríamos en el margen o en la ingenuidad de lo que indirectamente es una ciencia. Así, a la pregunta ¿cuáles son las condiciones de posibilidad para que una ciencia sea una ciencia? la respuesta de Husserl, como se observará, será doble. Por un lado, se trata de una investigación de las condiciones epistemológicas y lógicas de la ciencia y, por otro lado, se trata de indagar las condiciones de posibilidad de nuestro conocimiento en general y científico. Pues bien, para hacer visible estas condiciones se requiere de un repaso crítico de las principales perspectivas involucradas, según Husserl, en la falsa génesis del conocimiento científico, a saber, el antropologismo y el psicologismo. Comenzaré describiendo este último caso.

Ya desde 1896, y en particular desde la lección de Marperger,[187] Husserl advertía que gran parte del desarrollo del *psicologismo*, en lo tocante a sus fines, métodos y principios esenciales, no reflejaba una definición auténtica de la lógica en tanto ciencia. Hay que

[186] Esto último, como se observa, está dirigido a las condiciones subjetivas del conocimiento, en tanto realización de ciertos actos mentales, y conduce a una elucidación de las condiciones epistemológicas del conocimiento científico (Peucker, 2012, p. 137).
[187] *Cfr.* Anejo IV. Los *Prolegómenos* en sus orígenes. La conferencia Marperger.

recordar que la tesis central del psicologismo sostiene que la "psicología empírica es la más importante de las ciencias teóricas a la hora de sustentar la *tecnología* que es la lógica; porque, en definitiva, las situaciones predicativas y las situaciones relacionales no son sino aspectos reales de la subjetividad, del psiquismo" (García-Baró, 2008, p. 44). Efectivamente, el psicologista hace de la (verdad) lógica una parte dependiente del acto de creerla o juzgarla o, peor aún, la vuelve una parte dependiente de la situación o del sentido de cualquier vida subjetiva. De hecho, "la posición psicologista absorbe en el acto puntual del juicio tanto la situación válida que es su referente intencional cuanto *lo creído* respecto de ella, coincida o no con la situación *real* de las cosas. Creer una verdad es, pues, para esta teoría, creer de cierto modo" (García-Baró, 2008, p. 51). El resultado común a toda forma de psicologismo es la tesis de que *la verdad es un hecho*. Por tanto, las verdades sobre la verdad o sobre las verdades, serán también hechos, y la evidencia[188] no podrá consistir sino en un "sentimiento concomitante especial o, en el mejor caso, en la conciencia de estar juzgando conforme a una norma […] Esa norma establece precisamente cómo se debe juzgar para juzgar correctamente, pero no puede estar tomada, por principio, más que de la inducción sobre casos observados" (p. 52).

Trataré de resumir lo anterior de una manera esquemática: el psicologismo hizo de la lógica una falsa extensión de la psicología en dos aspectos:

i. Un conocimiento completo de los hechos empíricos y las leyes de la psicología empírica *produce* un conocimiento completo de la existencia y el carácter específico de la lógica (Hanna, 2008, p. 29).
ii. Los hechos y leyes empíricos con los que se ocupa la psicología *determinan estrictamente* la existencia y el carácter específico de las leyes de la lógica (p. 29).

Estas condiciones implican otros tres compromisos adicionales:

(iii) Un reduccionismo modal de lógica: las leyes y verdades lógicas son reducibles a leyes meramente causales y verdades meramente probabilísticas y contingentes.

[188] En el §13 de esta apartado hablaré con más detalles de este importantísimo concepto que Husserl llega a definir como un saber muy estricto, una suerte de "certeza luminosa" (§6 de los *Prolegómenos*) o perfección del juicio por el cual este obtiene peculiar plenitud.

(iv) Un empirismo epistémico de la lógica: el conocimiento lógico es reducible al conocimiento y justificación de las condiciones fácticas y contingentes.

(v) Un relativismo escéptico de la lógica: las leyes, la verdad y el conocimiento lógicos son reducibles a creencias individuales o a creencias específicas de una especie.

Ahora bien, García-Baró tiene razón cuando señala que en la primera edición de las *Investigaciones lógicas*, "Husserl recupera plenamente el sentido y el valor de su descripción capital de años antes, en el único volumen publicado de su *Filosofía de la Aritmética*; pero la ontología que reconoce ha variado: se ha decidido por el dualismo entre lo real y lo ideal" (2008, p. 105). Es justamente está distinción entre lo *real* y lo *ideal* lo que permite a Husserl hacer frente a los compromisos psicologistas arriba mencionados y con ello deslindar los principios rectores (y campos de acción) de la lógica y la psicología. Sin embargo, el concepto de realidad no es dado en principio con algún grado de claridad, sólo se observa que se opone al no menos oscuro concepto de idealidad (2008, p. 23). Lo que Husserl alcanza a reconocer en el §5 de los *Prolegómenos* es que lo real se toma, ante todo, como lo espacial y lo temporal (lo *existente en el tiempo*). Es real lo que puede ser considerado causa o efecto de algo, mientras que "lo ideal es la clase complementaria de lo real: el dominio (o los dominios) de aquellos objetos que son incapaces esencialmente de ser considerados causas o efectos de otros y, por lo mismo, no se pueden hallar en el tiempo ni en el espacio" (2008, p. 23). Desde luego, la anterior distinción no se limita al ser real y al ser ideal, también incluye a las posibilidades e imposibilidades reales e ideales, y a la inteligibilidad ideal (o posible) y la inteligibilidad efectiva (o *actual*). Así, frente a las condiciones materiales de la psicología se imponen las condiciones ideales de la lógica; frente a lo *a posteriori* de la psicología se presenta lo *a priori* de la lógica; frente a lo inductivo de la psicología, lo deductivo de la lógica y, finalmente, frente a lo fáctico en la psicología se impone lo necesario en la lógica. Tomando en cuenta las premisas anteriores, Husserl pretende demostrar que no es la psicología la que fundamenta las leyes lógicas ni siquiera en sus aspectos más elementales.

En el § 6, Husserl señala que la esencia de la ciencia implica la unidad del nexo de las fundamentaciones, en el que alcanzan unidad sistemática no sólo los distintos conocimientos, sino también las fundamentaciones mismas. Esto quiere decir que una teoría científica, además de poseer una multiplicidad de actos de conocimiento, de verificaciones y falsaciones, validaciones y cálculos llevados a cabo por sucesivas generaciones de sujetos cognitivos, requiere de una conexión sistemática en sentido teorético, esto es, alcanzar la unidad del nexo de las fundamentaciones. El fin de esta unidad es otorgarnos saber en la medida en que respondan a nuestros fines teoréticos. En el §7 de los *Prolegómenos* inicia con las tres peculiaridades de las fundamentaciones: (1) unidad del nexo de las fundamentaciones es esencial para toda ciencia; (2) la multiplicidad infinita de declaraciones en una ciencia tiene que estar fundada en un número finito de ellas y (3) el hecho de que existan fundamentos para la mayor parte de nuestro conocimiento no sólo hace posible la existencia de las ciencias, sino que hace necesaria una lógica concebida como una doctrina de la ciencia. Lo anterior es posible gracias a que, según Husserl (§7), los cimientos de toda ciencia son en realidad una especie de estructura o forma primitiva que sostienen las infinitas conexiones entre proposiciones ordenadas bajo una forma de inferencia. Así, no importa qué ciencia se esté considerando o con qué tipo de conocimiento se inicie, su *fundamento* se encontrará en leyes generales que permiten justificar su validez.

Ahora bien, si las formas de inferencia hacen posible la existencia de las infinitas conexiones entre las proposiciones de cualquier ciencia, entonces debe existir una forma interna en la que confluyan las distintas formas de una ciencia. En otras palabras, debe existir una doctrina de la ciencia que haga posible la convergencia entre las distintas formas concretas de una ciencia. Como Husserl lo expresa correctamente (§8), sin esta forma típica o la forma regular, no podría haber una *lógica general*, sino sólo una multiplicidad de "lógicas particulares" cada una correspondiente a una ciencia determinada. Por tanto, la lógica como doctrina de la ciencia es la disciplina relacionada con las formas de las fundamentaciones que tienen lugar en todas las ciencias (es decir, de las inferencias, de las argumentaciones, de los raciocinios), y tiene como una de sus tareas la clara separación entre la fundamentación válida y la fundamentación inválida del conocimiento y la separación entre teorías y ciencias (formalmente) válidas y (formalmente) inválidas.

En el §11, Husserl afirma que la lógica resulta una disciplina normativa (Hua XVIII, 40). Esto merece una aclaración. Husserl no combate o (en su defecto) niega el carácter normativo de la lógica, lo que observa es que las disciplinas normativas son esencialmente diferentes de las disciplinas teóricas. Mientras que una disciplina teórica es capaz de desentrañar el conjunto de condiciones que determinan sus correspondientes disciplinas auxiliares, las disciplinas normativas únicamente albergan proposiciones del tipo “A debe ser B”. Más aún, la diferencia entre la ciencia teórica y la que no lo es, estriba en que la primera refleja la estructura “(normalmente jerarquizada: de condicionantes a condicionados) de un dominio de cosa […] Una ciencia normativa o una tecnología, en cambio, ordena sus verdades en torno a una idea o un fin que pueden estar seleccionados por una caprichosa decisión, por una aleatoria estimación de un sujeto” (García-Baró, 2008, p.39). Entiéndase aquí por “verdades” a las *normas* y pautas (o preceptos o mandamientos). En un sentido más estricto cabría decir que toda proposición normativa equivale a una proposición hipotética valorativa del tipo “sólo un A que es B es un *buen* A”, p.ej. “sólo un soldado que es valiente es un buen soldado”. Así, las proposiciones normativas son a su vez convertibles en proposiciones axiológicas que establecen los requisitos necesarios, más no suficientes, para ser consideradas como proposiciones fundamentales. Pensemos en el concepto de ciencia. Si damos por válido que una disciplina normativa suministra la(s) norma(s) fundamental(es) de una ciencia, lo que en realidad estaríamos afirmando es que “*se debe buscar la ciencia*”, pero la expresión “se debe buscar la ciencia” no significa otra cosa que “la ciencia es buena” o que “la ciencia es lo bueno”, expresiones que son ajenas a la constitución real de una ciencia.

Lo anterior ocurre con las disciplinas prácticas (§15), Husserl explica que una disciplina práctica es un caso especial de una disciplina normativa en la que la norma fundamental consiste en alcanzar un objetivo práctico general. Por tanto, cualquier disciplina práctica contiene una disciplina normativa como una especie de núcleo dado que la tarea de cualquier disciplina normativa supone la tarea de fijar las normas independientemente de cualquier consideración práctica. Finalmente, como afirma Husserl en el §16, todas y cada una de las disciplinas normativas y, por lo tanto, todas las prácticas, presuponen una o más disciplinas teóricas como base:

> Las leyes lógicas […] por su propia naturaleza no son verdades normativas, sino teoréticas […] Los principios lógicos puros, si miramos a su contenido originario, sólo se refieren a lo ideal; los principios metodológicos a lo real. Los primeros tienen su origen en axiomas inmediatamente intelectivos; los últimos en hechos empíricos y principalmente psicológicos (1999, p.157, 159).

En paralelo a lo establecido en los parágrafos anteriores, en el §17 de los *Prolegómenos*, Husserl se pregunta: si aplicamos las consideraciones generales anteriores, la primera y más importante cuestión se presenta, "¿qué ciencias teoréticas proporcionan los fundamentos esenciales a la teoría de la ciencia? […] Aquí nos encontramos con la discutida cuestión de la relación entre la psicología y la lógica. Pues hay una dirección —justamente la dominante en nuestro tiempo— que tiene pronta respuesta a las cuestiones formuladas y dice: los fundamentos teoréticos esenciales de la lógica yacen en la psicología, a cuyo dominio pertenecen por su contenido teorético las proposiciones que dan a la lógica su sello característico" (Hua XVIII, 63-64).

La lógica se relacionaría, pues, con la psicología como una rama de la tecnología química con la química o como la agrimensura con la geometría, etc. Según lo dicho hasta este momento, la psicología, como disciplina pretendidamente fundamentadora de la lógica, carecería de leyes en el auténtico sentido de la palabra. A lo mucho contaría con vagas generalizaciones de la experiencia o con enunciados de regularidades aproximadas obtenidos a través de inducción o a través de *otras* experiencias particulares. Frente a este tipo de juicios psicológicos, las leyes lógicas tienen un contenido de carácter universal y necesario. Si esto no fuera así, si en verdad las leyes de la psicología rigieran el campo de lo lógico, los objetos lógicos estarían *apareciendo*, *desapareciendo* y *coexistiendo* según la experiencia cambiante de cada sujeto, tal y como las leyes de hechos lo hacen al ser ellas consecuencias de su individualidad, temporalidad y mutabilidad. En suma, lo que hace el psicologismo es *confundir estados de cosas lógicos* con *actos de juzgar lógicos*, consecuencia de naturalizar el principio de inmanencia como fuente epistémica.

Aquí es conveniente señalar que a diferencia de los argumentos antipsicologistas[189] desarrollados por Lotze y Bolzano, Husserl no defiende la separación de la lógica de la psicología sobre la base del supuesto carácter normativo de la lógica, sino sobre la base de lo

[189] Se entiende por antipsicologismo aquella tendencia filosófica que se posiciona en contra de la extrapolación de la psicología en otras disciplinas. Más que una corriente homogénea, el antipsicologismo presenta algunas diferencias entre argumentos y posiciones. Sin embargo, existen algunos ejes centrales en los que coinciden la mayoría de los antipsicologistas del siglo XIX, por ejemplo: la diferenciación categórica entre lo objetivo (lo pensado) y lo subjetivo (el pensar), y la caracterización de lo *objetivo* como una entidad ideal. Husserl no comparte del todo este planteamiento antipsicologista. Él mismo lo admite cuando afirma que "la parte más importante de la verdad está del lado antipsicologista; sólo que los pensamientos decisivos no han sido expuestos convenientemente y están enturbiados por muchas inexactitudes" (§20).

que debe ser considerado como ciencia. Al investigar las condiciones epistemológicas del psicologismo o de la lógica psicológica, Husserl concluye que la psicología no puede ser la condición de posibilidad de una ciencia y menos de una ciencia de la lógica. En otras palabras: si verdaderamente tomáramos como válidos los principios lógicos de acuerdo con la psicología, veríamos que el razonamiento lógico sólo tiene lugar bajo ciertas condiciones subjetivas. Más aún, nos daríamos cuenta que lo psicológico tiene su raíz en los mismos conceptos constitutivos de las leyes lógicas y no al revés. En todo caso, nos daríamos cuenta que la psicología carece de leyes auténticas y, por ende, de leyes exactas que honren este nombre de *leyes*. A lo mucho sólo se habla de generalizaciones vagas de la experiencia y enunciados de aproximadas regularidades en la coexistencia o la sucesión.

Finalmente, el psicologista confunde la inferencia *según* las leyes lógicas y las inferencias *de* leyes lógicas, por ejemplo, las leyes de la asociación de ideas, a las que la psicología asociacionista quisiera otorgar el puesto y la significación de leyes psicológicas fundamentales, pierden el pretendido carácter de leyes tan pronto como se toma el trabajo de formular de modo adecuado su sentido empíricamente legítimo. Tal como Husserl lo advertirá a lo largo de los *Prolegómenos*, las leyes lógicas son formulaciones de carácter universal y necesario, mientras que los juicios psicológicos expresan un grado de realidad, con causas y efectos predecibles. Ahora bien, no será sino hasta la refutación de las perspectivas antropológica y sociológica de las condiciones de una ciencia y del conocimiento lógico (tanto en su versiones empiristas, historicistas y escépticas) cuando logre plantearse el camino correcto que debe seguir una autentica teoría *sobre* la ciencia.

§3. Las consecuencias empíricas del psicologismo

A partir del capítulo IV, Husserl tematiza las consecuencias *empíricas* del psicologismo. Al comienzo del §21, Husserl nos recuerda que la psicología es una ciencia *de* hechos y *sobre* hechos y, por tanto, una ciencia empírica. Una consecuencia negativa de estudiar las *leyes lógicas desde un punto de vista empírico* es que estas pronto se convierten en *contingencias* históricas perdiendo así su universalidad y necesidad. Naturalmente, las verdades sobre la verdad o sobre las verdades, serán también hechos o *contingencias históricas*; "las proposiciones de la teoría de la verdad […] habrán igualmente de ser hechos. Las condiciones de posibilidad de la verdad serán, pues, dicho lo mismo en una expresión nueva, hechos" (García-Baró, 2008, p.52). Esto es, precisamente, lo que hace el empirismo (presente en el psicologismo) con las leyes lógicas: las convierte en un conjunto de hechos que se dan en un lugar y en un momento determinado o en situaciones históricas cambiantes y relativas leídas a partir de contenidos cognitivos también cambiantes. Lo anterior, llevado a sus últimas consecuencias, conduce al extravío de las ideas de verdad, de teoría y de ciencia Siguiendo el §21, donde se exponen los contrasentidos empiristas del psicologismo, trataré de hacer más explícito lo anterior.

A) Primera consecuencia. "Sobre bases teóricas vagas sólo pueden fundarse reglas vagas". Es un hecho, afirma Husserl, que la psicología (en su carácter empírico) es una disciplina cuyo tema son los "hechos de conciencia" o las "vivencias de conciencia". Si la interpretación psicológica (en su carácter empírico) fuese correcta, entonces las leyes lógicas estarían fundadas en vaguedades y/o regularidades empíricas y su validez dependería del cumplimiento de *ciertas* precisiones de la experiencia y de "*vagas*" aproximaciones a leyes generales. Lo anterior además de hacer equívoca y falible una ley lógica, haría que los preceptos de la lógica carecieran de certeza (§21).

B) Segunda consecuencia. "Ninguna ley natural es cognoscible *a priori* ni demostrable con evidencia intelectiva". Husserl señala expresamente que se habla de "leyes" psicológicas solo en términos inductivos (§21). Empero, la inducción no demuestra la validez de la ley, sino su probabilidad. Por tanto, lo justificado con intelección es la probabilidad y no la ley. Para decirlo de manera más clara: el psicologismo exige partir de datos fácticos particulares para que, por inducción, se conviertan en resultados universales, desde luego, en este emplazamiento las condiciones ideales de la lógica se ven mermadas. Por tanto, si la base psicológica de la lógica es absurda, la tesis del psicologismo también lo es. Finalmente, las tesis psicologistas sólo son plausibles cuando nos limitamos a consideraciones generales o inductivas, pero tan pronto como las examinamos a detalle vemos que el psicologismo sólo produce generalizaciones empíricas incapaces de aprehender la exactitud y apodicticidad de las leyes lógicas.

C) Tercera consecuencia. “Ninguna ley lógica implica una *matter of fact*, ni siquiera la existencia de representaciones, o de juicios, o de otros fenómenos del conocimiento” (§23). A diferencia de las generalizaciones psicológicas e históricas cuyo contenido implica la existencia efectiva de las circunstancias que las originaron, ninguna ley lógica, en su auténtico sentido, es una ley *exclusiva de los hechos* de la vida psíquica. En efecto, si las leyes lógicas tuvieran su base epistemológica en los hechos históricos y psicológicos o si fueran sólo giros normativos de los hechos históricos y psicológicos, ellas tendrían un contenido *existencial* en dos sentidos: (i) tendrían que ser leyes para la vida de cada uno de nosotros y (ii) tendrían que *presuponer* o contener la *existencia* de ese *algo* al cual se refieren. Sin embargo, las leyes de la lógica no encierran ningún contenido existencial. Así, aunque la lógica establece sus leyes como normas que sirven a los actos de juzgar, ella no supone la existencia de *un* sólo acto de juzgar o cualquier otro contenido psíquico o histórico. Hablar de leyes lógicas *a partir* de representaciones y juicios en vivencias actuales o por haber abstraído de ellas sus respectivos conceptos, no implica que en todo acto de comprensión y de afirmación de la ley esté implícita la existencia de representaciones y de juicios que podrían inferirse de ellas. En todo caso, esta consecuencia no está sacada de la ley, sino del acto de comprensión y de afirmación de la misma.

Husserl concluye el capítulo IV con algunos argumentos adicionales de carácter más general. El primero afirma que no debemos confundir la base ideal de una ley lógica con el conocimiento *de las* leyes lógicas que sí presupone una experiencia concreta (§24). En el segundo, Husserl argumenta que algunas leyes lógicas se ocupan de las verdades en general y, por tanto, no son leyes para los hechos. De hecho, estas últimas se originan en la experiencia y su “validez” se fundamenta en la experiencia propia o ajena. Por último, Husserl vuelve a recordarnos que la diferencia fundamental entre los objetos reales e ideales es decisiva para resolver el conflicto entre la lógica pura y la interpretación psicológica de la lógica.

§4. La perspectiva antropologista de las condiciones de una ciencia. Nuevas consecuencias empíricas del psicologismo

La crítica al psicologismo no estaría completa sin una revisión crítica a las condiciones antropológicas de una ciencia y del conocimiento lógico bajo la modalidad del *relativismo específico* y el *antropologismo*. El núcleo de esta crítica, que se encuentra en el capítulo VII, se origina a partir de la conversión de la tesis principal del psicologismo "todo conocimiento se reduce a contenidos psíquicos" a la tesis "todo conocimiento es subjetivo". Una tesis tan radical sólo puede ser sostenida por un empirismo radical y un empirismo moderado o, dicho propiamente, por un relativismo particular y un relativismo general (§32). Para estas teorías, el sentido de las leyes lógicas depende de la posibilidad cognoscitivo-racional de un individuo o de una especie negando con ello las condiciones lógicas o de posibilidad de cualquier teoría. Explico esto último a detalle.

Husserl define al relativismo en general como una doctrina que sostiene que cualquier verdad es *relativa* al sujeto que juzga (§34). Si este sujeto es el sujeto humano individual, hablamos de un relativismo individual; si por sujeto entendemos los *miembros de una especie*, digamos la especie humana, hablamos de un relativismo específico o antropologismo.[190] Sobre el relativismo individual no hay mucho que decir, pues es refutado tan pronto como se establece eso que el subjetivista llama "verdad subjetiva" (§35). Pero en el §36 de los *Prolegómenos*, Husserl expone seis argumentos contra el antropologismo. Los tres primeros argumentos recorren casi los mismos razonamientos de los que ya nos hemos ocupado:

Primer argumento: relativizar la verdad a la especie que la juzga es absurdo, ya que la misma proposición puede ser cierta para un sujeto (en este caso) humano, pero falsa para un sujeto no humano. Sin embargo, el mismo contenido juzgable no puede ser verdadero y falso a la vez.

[190] Coincido con García-Baró cuando señala que "el concepto de relativismo específico es más amplio que el de antropologismo, sólo que no conocemos casos en que aplicarlo realmente: sería la defensa de que la verdad lo es *para* otra especie de realidades empíricas, o bien al margen del hombre, o bien abarcadoras del mismo hombre —*verdad para selenitas*; *verdad para habitantes del sistema solar*—" (2008, p. 67.).

Segundo argumento: cuando el relativismo específico declara que podría haber otras especies que no obedezcan a los principios lógicos quiere decir que (*i*) los juicios de *tal especie* pueden estar o no de acuerdo con los principios lógicos, o bien (*ii*) que los juicios de *tal especie* no están regulados psicológicamente por principios lógicos. En este último caso no hay un problema que perseguir, pues bien podría existir una especie que no se guíe de esa manera, pero en lo que refiere al primer caso hay dos posibilidades: (*i*) o bien *tal especie* comprende las palabras verdadero y falso en nuestro sentido, en cuyo caso no se puede hablar de la invalidez de los principios lógicos, (*ii*) o bien usan las palabras verdadero y falso en otro sentido, en cuyo caso la disputa se vuelve una discusión bizantina.

Tercer argumento: la constitución de una especie es un hecho y sobre la base de los hechos sólo se pueden fundamentar hechos. Así, fundar la verdad en la constitución de una especie, como el relativista exige, es dar a la verdad el estatuto de un hecho. Empero, esto es un contrasentido dado que las verdades en general carecen de una determinación temporal; pensarlas en términos de causas y efectos o en términos de hechos individuales y temporales es un absurdo.

Cuarto argumento: Si toda verdad en general es dependiente de la existencia de una naturaleza humana, como sostiene el antropologismo, entonces la inexistencia de dicha naturaleza humana traería consigo la inexistencia de la verdad; pero resulta que la proposición "no existe ninguna verdad" equivale a la afirmación "es verdad que no existe ninguna verdad".

Quinto argumento: Según el relativismo, podría suceder que, fundada en la constitución de una especie y válida para esta, se diese la verdad que dijese que no existe semejante constitución. En tal caso, la verdad de una proposición que dice que una especie determinada no existe se fundaría en la constitución de esa misma especie, lo que es claramente absurdo.

Sexto argumento: La relatividad de la verdad en el antropologismo implica la relatividad de la existencia del mundo, puesto que el mundo es la unidad objetiva total correspondiente al sistema ideal de toda verdad y es, además, inseparable de él. Por tanto, si los antropologistas tuvieran razón, no habría un mundo objetivo, sino sólo un mundo en relación con la especie humana o con algún otro tipo de especie. Bien señala García-Baró "[…] la relativización de la verdad y del mundo lleva, pues, a la consecuencia de que se vuelve dudoso el mismo *cogito* cartesiano y, con él, la evidencia que sigue siendo básica para el relativista: la de la existencia de los seres que juzgan la verdad y la someten a serles dependiente" (2008, p. 71-72).

Tomando en cuenta todo lo anterior, las condiciones propuestas por el relativismo específico y por el antropologismo no son ni suficientes ni necesarias para determinar por qué una ciencia es una ciencia. Así, lo que el antropologista de la ciencia vendría a decirnos es que las condiciones de una ciencia se fundan en las condiciones individuales o en especies particulares. Por tanto, la unidad ideal de una ciencia cedería su paso a la multiplicidad real de enunciaciones y vivencias de cada sujeto. Finalmente, si las verdades tuvieran alguna relación esencial con la especie humana, se originarían y desaparecerían con la especie humana (§39). Desde luego, esto se debe a que el antropologista de la ciencia no distingue entre el fundamento de una verdad científica, que es una noción puramente lógica, y el fundamento de un juicio particular, que es una noción que pertenece al ámbito de lo subjetivo. También se debe a que el antropologista de la ciencia pierde de vista que hablar del fundamento de una verdad científica significa evidenciar la prueba teórica de que esa verdad se puede remontar a sus fundamentos teóricos objetivos y, en última instancia, a sus axiomas (§40).

§5. Los prejuicios del psicologismo

La tarea de combatir al psicologismo en sus vertientes antropologista, historicista y empirista comenzó desde sus consecuencias teóricas, cabría decir que comenzó desde sus falsas condiciones para que una ciencia sea ciencia. Pero de sus argumentos (o prejuicios, *Vorurteil*) no se ha dicho mucho. Justo el capítulo VIII de los *Prolegómenos* se encarga de esto. En él, Husserl presenta una serie de críticas a los argumentos (o prejuicios) del psicologismo y, por tanto, al antropologismo y al historicismo.

Primer prejuicio. "Los preceptos (*Vorschriften*) que regulan lo psíquico están fundados, evidentemente, en la psicología. Por tanto, también es evidente que las leyes normativas del conocimiento deben estar fundadas en la psicología del conocimiento" (Hua XVIII, 159). Lo anterior es un prejuicio en la medida en que *supone* que toda ley lógica es de suyo una proposición normativa. Es verdad que podemos emplear las leyes lógicas para generar una normatividad, pero ellas *no* son normas. Como ya se ha adelantado, las leyes de la lógica son teóricas por naturaleza y su contenido originario sólo se refiere a lo ideal, a diferencia de los principios normativos, rectores o metodológicos que son por naturaleza se refieren a lo real.

Ahora bien, en relación a las condiciones de posibilidad lógica de nuestro conocimiento científico desde el punto de vista del psicologismo y, por tanto, desde el antropologismo y el historicismo, el componente teórico y objetivo de nuestras aseveraciones sobre el quehacer de la ciencia se ve entorpecido. Para superar esto hay que entender que las condiciones de posibilidad lógicas de nuestro conocimiento científico se basan en la comprensión de la ciencia como una unidad de verdades teóricas enlazadas; verdades que no cabe pensar que desaparezcan sin que desaparezca la base y el sentido objetivo de la ciencia. Lo anterior constituye, por tanto, un criterio de demarcación fundamental para todo componente teórico que pretenda ser ciencia o pretenda pertenecer a una ciencia sea como principio, consecuencia, prueba, teoría, etc. La validez de lo anterior permite suponer que toda ciencia se analiza desde un punto de vista doble: (I) como un conjunto de dispositivos humanos encauzados a alcanzar, delimitar y exponer sistemáticamente los conocimientos de la verdad y (II) desde el punto de vista de lo que *enseña una ciencia*, es decir, de su contenido teorético (donde cada proposición enunciada es una verdad enlazada con otras proposiciones). Sobre esto último, Husserl agrega que ninguna verdad científica está aislada, toda verdad está en relación teórica con otras verdades.

Segundo prejuicio. "¿De qué se habla en la lógica? De las representaciones y los juicios, de las deducciones y las demostraciones, de la verdad y la probabilidad (*Wahrscheinlichkeit*), de la necesidad y la posibilidad, del fundamento y la consecuencia (*Folge*), y de otros conceptos próximos y relacionados a éstos" (Hua XVIII, 170-171). Sin embargo, los equívocos aquí son notables, pues bajo estos conceptos el psicologista entiende figuras y/o vivencias en sus disposiciones psíquicas. Pero los juicios no son *asentimientos* ni las proposiciones *unidades intencionales subjetivas*, tampoco el concepto de representación *tiene* un carácter subjetivo (§44).[191]

En relación a las condiciones de posibilidad lógica de nuestro conocimiento científico, los argumentos de los psicologistas, antropologistas e historicistas señalan que los elementos más fundamentales de cualquier ciencia (relaciones y conexiones entre proposiciones, fórmulas, leyes, conectivas, etc.) se originan en actividades psicológicas o en actos psicológicos que obedecen a "generalizaciones" psicológicas. Sobre este tema, Husserl observa que si bien es cierto que en las operaciones matemáticas se pueden rastrear algunos actos psicológicos en los que se producen los conceptos aritméticos, sería una autentica *μετάβασις εἰς ἄλλο γένος* sostener que las leyes matemáticas son psíquicas (§46); es como si dijéramos que la aritmética se ocupa de los hechos individuales y temporales cuando alguien enuncia los números 1, 2, 3, 4, etc. Lo mismo que sucede con la aritmética también sucede con la lógica (§46). Aunque los conceptos lógicos tienen en nosotros una especie de "origen psicológico", eso no significa que tales conceptos estén basados en la psicología. En el §48, Husserl presenta una serie de distinciones o diferencias fundamentales entre las tres clases de conexiones propias del conocimiento científico. Aspectos que los psicologistas y antropologistas de la ciencia ignoran. La primera conexión refiere a la conexión de las *vivencias cognoscitivas* en las cuales se realiza subjetivamente la ciencia, es decir, la conexión psicológica de las representaciones, juicios, intelecciones, presunciones, preguntas, en las cuales se verifica la investigación o en las cuales es pensada intelectivamente una teoría. Por ejemplo, las vivencias psíquicas (y muy subjetivas) de un físico que trabaja en el CERN. La segunda conexión es relativa a los objetos (investigados) que constituyen la región de estudio de una ciencia. Por ejemplo, el estudio de las partículas elementales, sus actividades y procesos, fuerzas, campos, medios, etc. La tercera conexión lógica es la conexión de las ideas teóricas que constituyen la unidad de las verdades de una disciplina científica o, más específicamente, de una teoría científica o de la unidad de los conceptos de dicha disciplina. Por ejemplo, el bosón de Higgs, el gravitón o la teoría de supersimetría, etc.

---

[191] Aquí es importante recordar los inconvenientes en la comprensión del término alemán *Vorstellung*. Para los psicologistas, el término fue interpretado como una idea que hace las veces de mediación entre el sujeto y el mundo.

Ahora bien, en la refutación del segundo prejuicio se descubre que la validez y la verdad de una teoría no tienen siempre que coordinarse con la receptividad del entendimiento humano. En última instancia, las "teorías son verdaderas, aunque no se las encuentre nadie encima de la mesa o colgando de la rama de un árbol; […] pero el hombre tiene que saltar hasta el dominio de lo ideal o hasta el dominio de las estructuras predicativas, partiendo de la plataforma inmediata que para él es lo sensible" (García-Baró, 2008, p.105).

Tercer prejuicio (§49). Toda verdad está en el juicio, pero reconocemos que un juicio es verdadero sólo en el caso de su evidencia. Este concepto tan importante es visto por el psicologista de la ciencia como un sentimiento concomitante o, peor aún, como una *corazonada* que juzga conforme a una (falsa) inducción de casos observados. Aquí vale la pena citar *in extenso* qué entiende Husserl por evidencia:

> La evidencia [...] no es otra cosa que la "vivencia" de la verdad. Naturalmente, la verdad no se vive en otro sentido que como puede vivirse en el acto real algo ideal. Con otras palabras: *la verdad es una idea cuyo caso singular es vivencia actual en el juicio evidente*. De ahí la imagen del ver, del penetrar intuitivamente, del captar la verdad en la evidencia. Y así como en el dominio de la percepción no se solapan en absoluto el no ver y el no ser, así tampoco significa la falta de evidencia lo mismo que no-verdad. La verdad se comporta respecto de la evidencia análogamente a como se comporta el ser de algo individual respecto de su percepción *adecuada*. A su vez, el juicio se comporta respecto del juicio evidente análogamente a como lo hace la posición intuitiva (la percepción, el recuerdo, etc.) respecto de la percepción adecuada. Lo presentado intuitivamente y tomado por existente no es tan sólo algo mentado sino también algo *presente* en el acto tal como es mentado. Así, lo juzgado con evidencia no está meramente juzgado (mentado en modo judicativo, enunciativo, asertivo) sino que está ello mismo presente en la vivencia de juicio: presente en el sentido en que una situación puede estar "presente" en esta o aquella captación significativa y según sea su índole (singular o universal, empírica o ideal, etc.). La *vivencia de la concordancia* entre la mención y lo vivido presente que ella mienta, entre el *sentido* vivido *del enunciado* y la *situación vivida*, es la evidencia, y la idea de esta concordancia es la verdad (Hua XVIII, 193-194. La traducción al español es de García-Baró, 2008, p. 112).

La evidencia en sentido fenomenológico, al menos en la edición de 1900, se presenta de dos modos: (I) es un acto de cumplimiento por *confirmación* —de este punto me ocuparé en el §21 de esta disertación— y (II) es el fenómeno en el que un sujeto no sólo percibe una verdad, sino que, además, *sabe* que es verdad. Enseguida detallaré este valiosísimo aspecto. Primero, imaginemos la siguiente situación más o menos típica: Imaginemos que participamos en el conocido juego *¿dónde quedó la bolita?* Un habilidoso prestidigitador provisto de tres vasos pasa una pequeña esfera de un vaso a otro de manera azarosa. Interesados en "probar suerte" aceptamos el reto de encontrar esa escurridiza esfera. Tratamos de seguir la bola con la vista hasta que, finalmente, el ilusionista detiene sus movimientos y, por tanto, la bolita queda oculta bajo uno de los vasos. Nos toca decidir ahora en qué vaso está la esfera, si acertamos ganamos algún premio y si no quizás perdemos algo de dinero. Elegimos un vaso al azar, pero resulta que al levantarlo la esferita sí estaba en ese vaso. Hemos acertado. Sin embargo, aunque nuestra creencia se ha cumplido no podemos decir que *sabemos* ni que *sabemos justificadamente*. No hay, pues, conocimiento; sólo tenemos una opinión verdadera. Lo que nos falta son las razones o justificaciones desde las cuales concluir que "tenemos evidencia de nuestro conocimiento verdadero". Según lo anterior, es necesario que exista una correlación entre la verdad y la evidencia. La evidencia constituiría, pues, la norma suprema o última del conocimiento o para decirlo en otros términos: el único criterio del conocimiento, aquello que nos permite distinguir entre una opinión sin fundamento del conocimiento genuino. Me parece que la siguiente tesis resume lo anterior:

Tesis I. Si se tiene la evidencia de un estado de cosas, entonces la proposición correspondiente es verdadera.

Ahora bien, si afirmamos la verdad tenemos que afirmar también las condiciones de su posibilidad. Aquí es necesaria una aclaración: lo que se está tratando de establecer no son las condiciones bajo las cuales una proposición es verdadera, sino las *condiciones* bajo las cuales *estamos justificados* en tomar una proposición como verdadera. De acuerdo con Lee (2013), la evidencia no debe ser interpretada como una condición necesaria y suficiente de la verdad de una proposición, sino como la condición necesaria y suficiente para *la creencia justificada en la verdad de una proposición*. En pocas palabras, la evidencia para Husserl es evidencia no sólo porque ella "hace" verdadera una proposición, sino porque nos *justifica la creencia de la verdad de dicha proposición*. De acuerdo con lo anterior, Husserl sostendría lo siguiente:

Tesis II. Un acto de creer *P* por parte de una persona *S* contará como conocimiento si y sólo si la verdad de *P* es evidente para *S*.

Para comprender este último punto es necesario tomar en cuenta los siguientes puntos significativos:

1. En la primera edición de las *Investigaciones lógicas* las vivencias son vivencias reales tomadas en sus estructuras esenciales. La evidencia, en cuanto vivencia, es "vivencia actual".

2. Sólo puede haber evidencia si hay verdad.

3. Si sólo hay evidencia cuando hay verdad, lo vivido como verdadero no puede ser falso.

Por ejemplo, sigo aquí a Lee (2013), la mera creencia de que la cámara de la tumba del Taj Mahal es octogonal no cuenta como conocimiento, incluso si esa creencia es de hecho verdadera. La verdad de la proposición creída, aunque es una condición necesaria no es una condición suficiente para el conocimiento. La persona a quien pertenece la creencia en la proposición también debe estar justificada para mantener esa creencia. Por tanto, si decimos que tenemos evidencia que de que *P* es verdadera, estamos confirmando que nuestro juicio (*S es P*) tiene plena justificación para la creencia en la verdad de dicha proposición. Ampliemos el ejemplo anterior: al leer sobre el Taj Mahal, creo que la cámara de la tumba es octagonal, es decir, me refiero a ese estado de cosas como "la cámara de la tumba del Taj Mahal es octogonal". Si viajo a la ciudad de Agra y entro en la cámara de la tumba tendré una presentación perceptiva más o menos adecuada de ese estado de cosas: "el ser octagonal de la cámara de la tumba del Taj Mahal". Cuando estos dos actos se "unen" en una síntesis de cumplimiento por un acto sintético de identificación, se experimenta un nuevo estado de cosas, a saber,[192] "la cámara de la tumba se presenta de manera intuitiva de acuerdo con la forma en que se pensó (octogonal)". Ahora se puede juzgar con pruebas que la cámara de la tumba es octogonal o, mejor dicho, la verdad de la proposición de que la cámara de la tumba es octogonal es evidente. Puedo afirmar que sé que la cámara de la tumba es octogonal.

Por tanto, S se justifica al creer que *p* es verdadero si y sólo si *p* es evidente para S, o mejor dicho, S puede justificarse creyendo que *p* es verdadero si y sólo si *p* puede ser evidente

[192] La verdad no es, pues, una relación oculta de acuerdo entre el pensamiento y el ser, entre una proposición y un estado de cosas, es más bien el fenómeno de concordancia entre el estado de cosas como intención intencional y el mismo estado de cosas como intuición directa. Debemos tener cuidado de observar que aquí la verdad no se interpreta como una propiedad de una proposición. Es más bien un estado de cosas en el que una relación de identidad se mantiene entre un estado de cosas bajo dos modos diferentes de entrega.

para S. Ya para terminar, en el §50 de los *Prolegómenos*, Husserl señala que la propuesta "S sabe que *p* con evidencia" no puede ser objeto de estudio de la psicología, ya que tales posibilidades de evidencia son ideales, mientras que la psicología es una ciencia empírica y, como tal, se ocupa sólo de los hechos psicológicos.

§6. El establecimiento de la lógica pura como teoría de la ciencia

Al inicio del capítulo XI de los *Prolegómenos*, específicamente en el §62, Husserl declara que la ciencia es en primer término una unidad antropológica y sociológica, esto es, una unidad de actos y disposiciones del pensamiento de los individuos en relación con ciertos dispositivos exteriores. Sin embargo, esto no da por resultado la unidad esencial de la ciencia (*lo que hace a una ciencia*, *ciencia*). Cabe preguntar: ¿qué es aquello que hace de la ciencia, ciencia? ¿Cuáles son las condiciones de posibilidad de una ciencia? La respuesta de Husserl, tal y como lo advertí al principio de este apartado, comprende tanto las condiciones formales de lo que es una ciencia como las condiciones de posibilidad lógicas de nuestro conocimiento científico.

Según Husserl, una ciencia no sólo es una colección de proposiciones o un mero conjunto de proposiciones sobre un determinado campo de conocimiento, sino una interconexión de proposiciones científicas que tiene por resultado una unidad teórica. En sentido estricto, la efectividad y validez de una ciencia se "mide", según Husserl, en términos de este acoplamiento interno de sus leyes. Ahora bien, los elementos que permiten las interconexiones válidas entre proposiciones son los principios y reglas lógico-formales (Peucker, 2012). Estas se definen, como su nombre lo indica, como estructuras formales o principios explicativos necesarios para evitar contradicciones dentro de una combinación de proposiciones. Ejemplo de estos principios o reglas lógico-formales son las inferencias lógicas o las leyes de la silogística tradicional (§§ 63, 64). Asimismo, la justificación y la fundamentación del conocimiento científico se encuentran en esta *unidad originaria* de la ciencia, producto de la interconexión de las justificaciones que abre paso, a su vez, a los distintos conocimientos y complejos superiores de fundamentaciones que nombramos teorías. El fin de esta unidad originaria es, justamente, proporcionarnos no un saber puro y simple, sino un saber que responde con la mayor perfección posible a nuestros supremos fines teoréticos (Banega, 2010). Ahora bien, la forma puramente lógica de una teoría, en tanto que mantiene cierta independencia de su contenido material concreto, puede ser investigada por una teoría de la ciencia o *lógica* en el sentido pleno. "Cabe una ciencia de la ciencia precisamente porque las situaciones relacionales no son peculiares de un dominio tan sólo de lo real, sino que, allí donde existen leyes regulando el condicionamiento entre las situaciones vigentes, allí ocurre que esas leyes coinciden genéricamente con las de cualquier otro dominio" (García-Baró, 2008, p. 36). Ciertamente, la expresión *ciencia de la ciencia* quiere decir que, "debajo" de las ciencias que se ocupan de situaciones concretas o particulares, existe una ciencia que se ocupa de la *fundamentación* de todos los tipos posibles de situaciones concretas o particulares. El desarrollo de una teoría de la ciencia en tanto teoría de las estructuras formales nos permite *pre*-ver la estructura formal de cada teoría posible, esto es, la interconexión objetiva y coherente de sus proposiciones verdaderas sea cual sea el objeto de estudio de una ciencia o su campo particular de aplicación. El que la *teoría* de la ciencia proceda de manera puramente formal e independientemente de su contenido material asegura el conocimiento científico, pues en toda ciencia hay fundamentaciones en las que se dan inferencias lógicas que se realizan siguiendo leyes. Bien señala Husserl en el §63, el conocimiento científico es un conocimiento por fundamentos. Conocer el fundamento de algo equivale a decir que conocemos la necesidad de que algo sea así y no de otra manera o a decir que sabemos qué es un hecho científico porque conocemos de donde se *origina* o *deduce* de manera justificada.

Pero ¿es este concepto de ciencia adecuado para todas las demás ciencias y en particular para las ciencias descriptivas? En el §64 Husserl señala que lo anterior no se limita a la competencia de aquellas ciencias que son de un carácter puramente deductivo o ciencias cuya unidad es una unidad deductiva. La arqueología, la anatomía, la meteorología, etc., pese a que no son ejemplos de ciencias deductivas o ciencias construidas nomológicamente, siguen siendo ciencias. Pero ¿cómo pueden estas y otras disciplinas ser ciencias si no están estructuradas por una interconexión deductiva de proposiciones? Según Husserl, todas estas disciplinas, y otras más, son ciencias porque están estructuradas conforme a un encuadre lógico o según ciertas formas lógicas correctas que permiten la unión válida de todas sus proposiciones e impiden su presentación como meras colecciones de experiencias o historias. Desde luego, debe quedar claro que las ciencias abstractas o nomológicas son las ciencias más fundamentales de cuyo contenido teorético han de extraer las ciencias concretas todo cuanto hace de ellas ciencias, en el sentido analítico-formal.

En el §65 Husserl señala que como el fin esencial del conocimiento científico sólo puede alcanzarse mediante la teoría, en el sentido riguroso de las ciencias nomológicas, sería mejor preguntar por las condiciones de posibilidad de la *teoría en general* o, dicho con mayor rigor, por las condiciones de posibilidad del *conocimiento teorético en general* o del *raciocinio en general*. Pero esta idea enormemente ambiciosa sólo se puede realizar cuando observemos más de cerca las condiciones lógicas internas de la verdad en general y de la unidad deductiva en general, condiciones que son tanto reales como ideales. En estas últimas condiciones, Husserl comprende aquellas que se fundan o bien en la idea de conocimiento o bien en el contenido del conocimiento. De esta manera, en el §66, Husserl considera pertinente determinar los conceptos primitivos esenciales sobre los que se funda el concepto de teoría en general. Esos conceptos, como ya observaremos, fundan leyes puras que dan unidad a cualquier tipo de teoría. Así, conforme al ideal de una teoría en general, una teoría científica será una teoría si y sólo si puede ser subsumida bajo tales conceptos y leyes (Banega, 2010).

Ahora bien, para cercar aún más el concepto de una teoría de la ciencia, Husserl asigna tres tareas principales que deben ser resueltas.[193] La primera consiste en poner de manifiesto los conceptos primitivos de segundo grado u orden que pertenecen a la idea de la unidad teorética y la hacen posible (§67). Tales conceptos se reparten en dos grupos correlativos: las categorías significativas y las categorías objetivas formales o puras. Dentro de las primeras están los conceptos que pertenecen a la esencia de la proposición como los conceptos de

[193] Siguiendo a Bernet, también podríamos decir que la lógica pura tal como es aquí presentada consiste de tres tareas: "1. La doctrina de la apofántica primitiva y las categorías ontológico-formales y las leyes que conciernen a su aplicación; 2. La doctrina de la conexión de esas categorías en términos de una consecuencia lógica, que del lado de los significados se desarrolló en teorías independientes como la silogística y en el lado de objetos formales en la aritmética; 3. La teoría apofántica de las posibles formas de teoría y sus correspondientes teorías de multiplicidades formales-ontológicas y matemáticas" (2002, p. 20). Por su parte, Woodruf Smith afirma que: "Husserl divide las tareas de la lógica pura en tres partes: la teoría de las formas o categorías lógicas, la teoría de la inferencia y la teoría de las posibles formas de teorías" (2002, p. 54).

concepto, proposición y las formas elementales de combinación (copulativa, disyuntiva, hipotética, de proposición a proposición, etc.). Dentro de las segundas se encuentran los conceptos de objeto, unidad, pluralidad, número, propiedad, relación, conjunto, todo y parte. Ambos grupos de categorías poseen en común el carácter formal que las hace independientes de cualquier materia del conocimiento y permiten a la lógica formal una doble orientación. De alguna manera, sugiere Husserl, la conexión entre estos conceptos de segundo orden involucra la semántica formal en tanto que se introduce, en el cálculo sintáctico, el predicado verdadero.

La segunda tarea consiste en la investigación de las leyes que se fundan en los dos grupos de conceptos categoriales mencionados anteriormente, buscando, por un lado, la verdad o falsedad de las significaciones y, por el otro, el ser y no ser de los objetos en general (§68). Estas leyes constituirán a su vez teorías. En el lado de las leyes de las significaciones se hallarán las teorías de los raciocinios, como la silogística; en el lado de los correlatos objetivos se hallarán las teorías aprióricas del objeto en general, es decir, las teorías ontológico-formales como la teoría de la pluralidad y la aritmética pura.

Estas dos tareas parecen ser suficientes para poder establecer una ciencia de las condiciones de posibilidad de una teoría en general. No obstante, Husserl agrega una última tarea: entender que esta teoría de la ciencia apunta a una ciencia complementaria la cual trata (*a priori*) de las clases (o formas) esenciales de teorías y de sus leyes de relación correspondiente. Brota así la idea de una ciencia más amplia que investiga los conceptos y las leyes esenciales constitutivamente inherentes a la idea de teoría, una teoría de las teorías posibles (§69) o también una teoría de las formas posibles de una teoría o teoría pura de la variedad (§70). La teoría pura de la variedad investiga, como ya lo mencioné, los conceptos y leyes esenciales y constitutivas a la idea de teoría, es decir, determina los tipos esenciales de teorías o esferas posibles e investiga sus relaciones regulares mutuas. Aquí es importante hacer notar que la teoría de la variedad, al ser una teoría de los correlatos objetivos de teorías posibles, trata de la *relación* y *ordenamiento* de los dominios de objetos no especificados —ordenamiento significa aquí *concatenación* de miembros en una posición inequívoca estricta, es decir, un enlazamiento directo o indirecto únicamente entre ellos—. Son precisamente estas relaciones las que son esenciales y sirven para distinguir una teoría de un mero agregado de ideas.

La teoría de las formas posibles de una teoría al ser una teoría orientada hacia los contenidos ideales y objetivos de cualquier ciencia, también puede ser vista como una especie de metateoría o por lo menos se acerca mucho a lo que actualmente se denomina "una teoría de los sistemas axiomáticos formales más una teoría de los dominios en los que las fórmulas interpretadas deberían rangear (sic)" (Banega, 2010, p. 37). En este tenor, la teoría de las formas posibles de una teoría prescribe la constitución formal de toda ciencia material, una común a todas sin afirmar nada acerca de las regiones materiales que se encuadran a su estructura universal. Por ejemplo, son dos cosas distintas el espacio euclidiano, por un lado, y la *forma* espacio o "variedad formal-analítica espacio", por el otro. El primero, según Husserl, es una instancia singular del segundo. La idea de una teoría pura de la variedad es, pues, un tipo de investigación fundamental que se relaciona justamente con el conocimiento general de una ciencia y que incluye, además, a la lógica pura como una herramienta fundamental. Vinculado a esta idea de ciencia de la lógica en general, aparecen las nociones de conocimiento posible en general y método posible en general; estos caen bajo la forma de un sistema de proposiciones verdaderas en la unidad de una teoría que corresponde, a su vez, a una región de objetos formales que dejan indeterminada cada particularidad material de los objetos con los que se relaciona. Al interior del quehacer científico, aquí van incluidas las proposiciones, juicios, axiomas, etc., la teoría de la variedad investiga la estructura interna de eso que, precisamente, llamamos ciencia. En suma, Husserl habrá de considerar a la teoría de la variedad de la matemática moderna como una realización del ideal de una ciencia de los sistemas deductivos posibles, pero que sólo representaba parcialmente la realizacion de su propio ideal de una ciencia de los sistemas deductivos.

> Pero la «matemática formal» en el sentido más amplio de esta expresión, o la *teoría de la variedad*, suprema flor de la matemática moderna, prueba que no se trata de vagas fantasías, sino de concepciones de un contenido preciso. La teoría de la variedad no es de hecho otra cosa que una realización parcial (en trasposición correlativa) del ideal que acabamos de esbozar (Husserl, 1999, p. 205).

Así, cuando una esfera nomológica cualquiera se formaliza, emerge la forma de variedad en sentido estricto. Visto de esta manera, el concepto de forma-variedad es una suerte de propiedad onto-lógica que compartirían todas las figuras que caen en dicha esfera nomológica. Es esto, y no otra cosa, lo que Husserl entiende por idea de una teoría formal de la ciencia.

§7. Breve excurso sobre la primera y la segunda investigaciones lógicas

Husserl sostiene que la lógica pura, en cuanto ciencia de las unidades teoréticas (juicios, raciocinios, conceptos, etc.) es, por esencia, ciencia de los significados (*Bedeutung*), de sus especies y diferencias, y de sus leyes ideales (Hua XIX/1, 97). Hay en esta afirmación categórica, la confirmación de un puente esencial entre la teoría de la ciencia y el estudio de los significados, es decir, los juicios que se dan en la ciencia se dan en forma de expresiones lingüísticas. Dicho con otras palabras: lo que Husserl afirma ahora, en 1901, es que todos los juicios (de cualquier nivel), en el sentido de actos de juzgar (vivencias), encierran una unidad de significado que es el juicio ideal (Hua XIX/1, 5-6). Siguiendo esta indicación, en este *breve excurso* por la primera y la segunda investigaciones lógicas, me propongo explicar este puente entre la teoría de la ciencia (*Prolegómenos*) y el estudio de los significados (investigaciones primera y segunda).

En el universo de la lógica pura no sólo hay números, también existen otras entidades, como los significados, que forman parte de la recién descubierta esfera de lo ideal. Unos y otros, números y significados, son intemporales y, unos y otros advierten al joven Husserl de distintos grados de idealidad que todavía no son tematizados y que generan algunas ambigüedades si no se aclara que la significación de un concepto no es de la misma especie que la significación de las objetividades lógico-matemáticas (siempre de una universalidad superior). Este último emplazamiento filosófico encamina a Husserl a los umbrales de la parte final del recorrido de nuestra disertación: la intuición categorial. De manera muy general, presentaré el estudio fenomenológico de las expresiones para reconstruir, desde ahí, la toma de conciencia de Husserl de otro tipo de idealidades y el acceso a la intuición de los objetos de orden superior.

La primera de las *Investigaciones lógicas* inicia con la consideración de las relaciones entre los signos (*Zeichen*) y la significación. En específico, Husserl trata de dar cuenta del concepto de expresión (*Ausdruck*), entendido lingüísticamente. Para lograr esto, Husserl separa aquellos elementos que pertenecen a una expresión de aquellos que no le pertenecen (o que *pueden* aparecer en una expresión sin ser *necesarios* a ella). El primer paso que Husserl da en esta dirección consiste en distinguir la expresión de otro tipo de signos que no son *expresivos* (en el sentido de expresar una significación). Por esta razón, Husserl advierte: "Todo signo es signo de algo, pero no todos tienen una 'significación', un 'sentido', que esté expresado con el signo" (Hua XIX/1, 30). Efectivamente, todo signo designa o presenta indirectamente a otra cosa, pero no se puede decir que todo signo "signifique algo". Por tanto, la significación no es dependiente del signo.

La anterior distinción esencial también puede verse como un distingo entre los signos que no expresan nada y los *signos significativos*. Los primeros son llamados signos indicativos o señales (*Anzeichen*) y los segundos expresiones significativas. Los signos indicativos o señales se caracterizan de la siguiente manera: "En sentido propio algo sólo debe ser nombrado como signos indicativos siempre que funcione para un ser pensante como indicación de alguna cosa" (Hua XIX/1, 31). Según lo anterior, una de las funciones que posee el signo indicativo o señal es la *indicación* (*Anzeige*). Ahora bien, la indicación es una relación entre tres partes: una señal, aquello señalado y un sujeto racional a quien la señal le sirve como indicación de lo señalado:

> […] Cualesquiera objetos o estados de cosas, de cuya existencia alguien tiene conocimiento actual, indican a ese alguien la existencia de ciertos otros objetos o estados de cosas en el sentido de que el convencimiento del ser de uno es sentido como motivo (y como un motivo no-intelectivo) por él para el convencimiento o la presunción del ser del otro. La motivación produce, entre los juicios de acto en los que se constituye para el pensante un estado de cosas indicadoras e indicadas, una unidad descriptiva; verbigracia, una 'cualidad figural' (*Gestaltqualität*) fundada en los actos de juicio. Allí yace la esencia de la señal. Y evidentemente este estado de cosas no afirma otra cosa que justamente esto: que unas cosas podrían o deben existir porque algunas otras están dadas. Y este "porque", aprehendido como expresión de una relación cósica, es el correlato objetivo de la motivación como una forma descriptivamente característica del entretejimiento entre actos de juicio y un acto de juicio (Hua XIX/1, 32).

La cita anterior nos permite comprender la manera en la que el conocimiento de un determinado objeto (o estado de cosas) nos lleva a pensar en algún otro objeto (o estado de cosas) que esté asociado a él por una relación de indicación. Aquí decimos que el primer estado de cosas funciona como señal del segundo. Los ejemplos de Husserl toman en cuenta los signos naturales y los signos artificiales. Por ejemplo, el humo como señal de fuego; las huellas en la arena como señales de pisadas; los fósiles como señales de la existencia de animales extintos; el estigma como señal del esclavo o una bandera como señal de un país. A partir de este momento, Husserl describe lo que sería la esencia de la señal (*Das Wesen der Anzeige*), es decir, la relación común que mantiene toda señal con lo señalado, a saber, que un objeto (la señal) *indica* la existencia de otro objeto o situación objetiva. En este carácter propio de la señal, Husserl también distingue entre las funciones del indicar o remitir (*hinweisen*) y del demostrar (*beweisen*). Esta última es propia de las inferencias lógicas en las que existe una conexión *necesaria* entre premisas y conclusiones: "al deducir y demostrar subjetivos corresponden la deducción y demostración objetivas, o sea, la relación objetiva entre fundamento y consecuencia" (Hua XIX/1, 33). Algo muy distinto ocurre en el caso de la relación de indicación:

> Cuando decimos que el estado de cosas *A* es una señal para el estado de cosas *B*, que el ser de uno indica que también el otro es, entonces podemos estar completamente seguros en la expectativa (*Erwartung*) de encontrar también esto último realmente; pero hablar de esta manera no dice que una relación de conexión intelectiva y objetivamente necesaria exista entre *A* y *B*; los contenidos de juicio no se hallarán para nosotros en la relación de premisas y conclusiones (Hua XIX/1, 33).

En el §5 de la primera investigación, Husserl comienza la descripción de los signos significativos o expresiones; aquí se toma la expresión en un sentido limitado. Por esta razón, Husserl establece que todo discurso y toda parte de él es una expresión sin importar que este sea hablado o no. Del concepto de expresión quedan excluidos los gestos y ademanes con que acompañamos nuestros discursos involuntariamente, pues ellos no están verbalizados, no tienen, propiamente hablando, significación (Hua XIX/1, 38). Una vez que ha sido aclarada la relación entre señales y significados, Husserl pasa a considerar los actos que dan origen a una expresión.

La primera caracterización positiva del concepto de expresión aparece en el §6. En ese parágrafo Husserl distingue el lado físico y el lado psíquico de la expresión. El primero es el signo escrito o la voz hablada en su aparición física y real. El segundo es "un cierto curso de vivencias psíquicas (*Belauf von psychischen Erlebnissen*) que, enlazado asociativamente a la expresión, la convierten en expresión de algo" (Hua XIX/, 38). En otras palabras, en toda expresión se distinguen dos aspectos: por un lado, su parte *física*, el signo sensible (articulación de sonidos o grafismos), por otro lado, el conjunto de vivencias psíquicas que convierten a una expresión en expresión *sobre* algo o que convierten lo que no era expresión (un grafismo, un garabato) en expresión. Hacia los §§9 y 10, Husserl señala que:

> [hay] que diferenciar dos tipos de actos o series de actos: por un lado, aquellos que son esenciales a la expresión, si esta ha de ser expresión, esto es la palabra vocal animada de sentido. Estos actos los llamamos actos de dar sentido o intenciones significativas. Por otro parte, tenemos los actos que sin duda no son esenciales a la expresión como tal, pero que mantienen con ella la relación lógica fundamental de cumplir (confirmar, robustecer, ilustrar) su intención significativa más o menos adecuadamente y por tanto de actualizar justamente su referencia al objeto (Hua XIX/1, 44).

Se observa que en la articulación del fenómeno de la expresión se conjugan, indisolublemente, los siguientes elementos: (*i*) su constitución en cuanto fenómeno físico y (*ii*) los *actos* que le confieren *significación*:

> Los actos diferenciados arriba, la aparición de la expresión y la intención significativa, eventualmente también la plenificación de la significación, no construyen en la conciencia una mera conjunción (*Zusammen*), como si estuvieran dados simplemente en simultáneo. Más bien construyen una unidad íntimamente fusionada de carácter peculiar […] Dicho de manera puramente fenomenológica, esto no es otra cosa que: la representación intuitiva, en la que se constituye la aparición física de la palabra, experimenta una modificación fenomenal esencial, cuando su objeto adquiere la validez de una expresión" (Hua XIX/1, 45-47).

No obstante, la plenitud o cumplimiento es "inesencial" para la expresión, puesto que esta última sigue siendo significativa encuentre o no un cumplimiento de su intención. Llegados a este punto, es conveniente precisar algunas cuestiones. En primer lugar, la significación de una expresión no se agota en su fenómeno verbal sonoro ni se identifica con los actos que dan significación (no es un componente real de la vivencia significativa), antes bien, ella no sólo trasciende la realización temporal y efímera de esa voz sonora fugitiva y efímera, también trasciende la vivencia de significación, el acto en el que se juzga, esté o no esté expresado. Dicho de otra manera, la significación es aquello que se mantiene *idéntico* e invariable en todos los enunciados y es, además, independientemente del acto de juzgar:

> Mi acto de juzgar es una vivencia efímera que surge y desaparece. No lo es empero, lo que dice el enunciado, no este contenido: *que tres alturas de un triángulo se intersecan en un punto*; este contenido no surge ni desaparece. Con tanta frecuencia

> como yo o cualquier otro haya pronunciado de igual manera ese mismo enunciado, otras tantas se producirá un nuevo juicio. Los actos de juzgar serán en cada caso diferentes. Pero lo que juzgan, lo que el enunciado dice, es siempre lo mismo. Es algo idéntico, en estricto sentido de las palabras; es una y la misma verdad geométrica (Hua XIX/1, 50).

En el §11, "Las distinciones ideales: primero entre expresión y significación como unidad ideal", Husserl circunscribe su interés a lo que está dado *en* el fenómeno de la expresión y en las vivencias de dar sentido, a saber, la expresión misma, su sentido y su objetividad correspondiente:

> La idealidad de la relación entre expresión y significación se muestra inmediatamente en la referencia a ambos miembros, dado que preguntamos por la significación de una expresión cualquiera (por ejemplo 'residuo cuadrático'), no mentamos bajo expresión justamente el constructo sonoro exteriorizado *hic et nunc*, el sonido fugitivo y que nunca retorna idéntico. Mentamos la expresión *in specie* (Hua XIX/1, 48-49).

Según Husserl, la significación de una expresión no puede ser aquello que aparece y desaparece con cada exteriorización por parte de cualquier sujeto. Por el contrario, la significación se mantiene como ella misma en la variación de distintos actos expresivos que mientan, en distintos momentos, la *misma* significación y, a su vez, no depende de ninguna determinación de carácter psicológico (Hua XIX/1, 50). Más adelante, Husserl agrega:

> La esencia de la significación no la vemos en la vivencia de dar significado, sino en su 'contenido', que expone una unidad intencional idéntica frente a la multiplicidad dispersa de vivencias reales o posibles de quien habla y piensa. 'Contenido' de la vivencia significativa correspondiente en este sentido ideal no tiene nada que ver con lo que la psicología mienta bajo contenido, a saber, cualquier parte o lado real de una vivencia" (Hua XIX/1,102).

Es verdad que la vivencia significativa tiene sus contenidos psicológicos que varían de individuo a individuo y se relacionan con la aparición de la palabra física, con los actos perceptivos y demás. Pero el significado que allí aparece es un contenido ideal que aparece siempre igual en toda la multiplicidad de casos (Hua XIX/1, 105). Bien señala Husserl:

> Esta verdadera identidad que aquí afirmamos no es otra que la identidad de la especie. Así, pero también sólo así, puede ella como unidad ideal abarcar la multiplicidad disipada de elementos individuales. [...] Las múltiples unidades son, naturalmente, a la

significación ideal-una los correspondientes actos del significar, las intenciones significativas. La significación se comporta, entonces, respecto del acto correspondiente de significar (y la representación lógica con los actos de representar y el juicio lógico con los actos de juzgar y el inferir lógico (*logische Schluß*) con los actos de inferir) como lo rojo en especie lo hace en las rayas de papel que aquí yacen, que todas 'tienen' el mismo rojo (Hua XIX/1, 105-106).

En este momento de las *Investigaciones lógicas*, Husserl defiende la idealidad de la significación como *especie ideal*[194] de la cual serían instancias particulares los actos que la tienen como contenido. En este sentido, la relación más próxima es la de una relación de instanciación entre un objeto general y su caso particular. Por ejemplo, el color rojo es una *especie ideal* que tiene por instancia "esta raya roja sobre la pared". "Un algo real rojo, un factor rojo en un concreto (*ein Rotes*), no es la especie *rojo* (*die Spezies Rot*), pero se llama como ella […] los singulares se llaman igual que la idea, sólo que no son ya *lo rojo mismo* sino uno entre la infinita muchedumbre de *los rojos*" (García-Baró, 2008, p. 85). El significado, como *especie*, es esa unidad ideal que aparece instanciada en la multiplicidad de vivencias significativas reales y particulares. Así como *todas las apariciones del color rojo* mantienen su "identidad" gracias a su idealidad cromática que en ellas se expresa[195] también las vivencias de significación guardan un contenido ideal que instancian siempre como "lo mismo".

Hay que entender que, en esta primera investigación lógica, Husserl tiene presente la oposición básica y excluyente entre lo ideal y lo real, tal y como fue establecida en los *Prolegómenos* (real es todo aquello que está sometido al tiempo, ideal es todo aquello que está fuera de él). Según lo anterior, los significados serían un tipo especial de entidades ideales. En el §32, Husserl señala: "La idealidad del significado es un caso especial de la idealidad de lo específico en general". No tiene de ninguna manera, pues, el sentido de la idealidad normativa […]" (Hua XIX/1,107). Efectivamente, la idealidad no tiene nada que ver con el ideal de perfección o de valor-límite que funcione a manera de *patrón* con los

[194] La captación de la misma significación en la variedad de actos de significar tampoco depende de una suerte de abstracción que surja de la repetición de una variedad de actos aprehendidos. Se trata de una captación inmediata de la unidad de la significación como ella misma. La vía con que Husserl plantea la idealidad de las significaciones como contenidos de las expresiones aparece con mucho detalle en la sexta investigación lógica.
[195] De hecho, "Husserl no llama colores a sus infinitos casos singulares posibles, sino *Farbeninhalte*, contenidos de color (eso que corresponde a la especie que es un color dentro del todo muy complejo que es una cosa empírica)" (García-Baró, 2008, p. 63).

casos individuales. En otras palabras, el significado no es una idea regulativa o modelo platónico para el que sus casos singulares son aproximaciones más o menos perfectas. El significado es ideal por su *universalidad*, su *atemporalidad* y por su identidad y unidad en la multiplicidad de apariciones fugaces. El significado tiene, por tanto, una auténtica universalidad ideal. En conclusión, la tesis de la idealidad del significado sostiene que las significaciones que constituyen las expresiones lingüísticas son objetos ideales *en* los que pensamos cuando realizamos una intención significativa.

Antes de continuar con la exposición de la segunda investigación, parece necesario desarrollar un poco más la tesis brevemente anunciada líneas atrás: "la significación no depende de la existencia del objeto". Dicho de manera más clara, el carácter referencial de toda expresión no implica que esa referencia esté necesariamente realizada en el mundo o que tenga siquiera una intuición que la legitime. Esta cuestión se aclara justamente en el §15 de la primera investigación:

> 1. Al concepto de expresión pertenece el tener una significación. […] Una expresión sin significación no es entonces, para hablar con propiedad, ninguna expresión […] Aquí pertenecen construcciones sonoras articuladas que suenan a palabras, como 'Abracadabra', por otro lado, empero, también complejos de expresiones reales, a los cuales no les corresponde ninguna significación unitaria, mientras que por el modo como se dan externamente, parecen pretenderlo, por ejemplo, 'verde es o'.
> 2. En la significación se constituye la referencia a un objeto. Entonces utilizar una expresión con sentido y referirse expresando a un objeto (representar un objeto) es una sola cosa. No depende, por lo tanto, de si el objeto existe o es ficticio, incluso si es imposible" (Hua XIX/1, 59).

Cada vez que una expresión es significativa, es decir, cada vez que una expresión se conforma como tal, podemos decir que esta expresión es referencial en el sentido de que se dirige hacia un objeto y lo representa, sea este un objeto real dado en la percepción, sea un objeto ficticio (montaña de oro) o sea un objeto "imposible" (cuadrado redondo). Justamente comprendemos enunciados como "no existen las hadas" o "los cuadrados redondos son figuras imposibles" porque entendemos *de qué* están hablando; nos basta con que el enunciado sea significativo para que lo comprendamos, incluso cuando lo que intencionemos sea algo borroso o no intuitivo. Desde luego, esto no implica que esos objetos sean correlatos existentes. En todo caso existen como objetos intencionales.[196]

Hemos acordado, junto con Husserl que, a pesar de la pluralidad de personas y actos de significar, el significado no se degrada. Como ya se había señalado, esta *especie* o unidad ideal de significación conforma una unidad en la pluralidad de las intenciones de significar. Asimismo, ya se había dicho que las significaciones constituyen una clase particular de especie e individuo o para decirlo con un ejemplo frecuente de Husserl: un objeto rojo es, también, un momento de "rojez".

Reconociendo que los excesos del realismo han sido la causa de la negación tanto de la realidad de los conceptos como de la objetividad de las especies, Husserl distingue, en el §2 de la segunda investigación lógica, entre las singularidades individuales (*individuellen Einzelheiten*) como son las cosas empíricas, y las singularidades específicas (*spezifischen Einzelheiten*) como los números, las variedades matemáticas, los conceptos y proposiciones de la lógica pura:

> En verdad es totalmente inevitable distinguir entre singularidades individuales, como son, por ejemplo, las cosas empíricas, y singularidades específicas, como son los números y variedades de la matemática, las representaciones y los juicios (los conceptos y las proposiciones) de la lógica pura. *Número* es un concepto que, como ya se ha dicho muchas veces, comprende bajo sí, como singularidades, el 1, el 2, el 3, etc. Un número es, por ejemplo, el número 2, no un grupo de dos objetos individuales singulares (Hua XIX/1, 115-116).

Según Husserl, de un lado hay un caso real de 2 cosas, del otro lado un caso *ideal* numérico (2). Así como los números forman un conjunto de objetos generales objetivamente fijo, así también las unidades ideales puramente lógicas forman un conjunto de objetos genéricos. En relación con esto podría decirse, también, que las significaciones constituyen una clase de conceptos en el sentido de *objetos* universales. Desde luego, esto no quiere decir que tales objetos existan en algún "lugar celeste". Sólo se afirma que es posible hablar de objetos

[196] Hay que recordar que para Husserl los objetos intencionales son objetos que no se juzgan ni como existentes ni como no existentes. En este sentido, hablar de existencia meramente intencional de un objeto no implica que el objeto exista en la intención. Así, si uno dice: "una representación tiene un objeto intencional" o "tiene un objeto meramente intentional" significa que sólo tiene un "contenido objetivo," un significado meramente intencional (Hua XXII, 333).

universales y del ser de estos objetos si tales expresiones se toman simplemente como signos de la validez de ciertos juicios, a saber, aquellos en que se juzga sobre números, proposiciones, figuras geométricas, etc. Ahora bien, una vez que Husserl rechaza los dos modos de referirse a lo universal, esto es, la hipóstasis metafísica, recién comentada, y la hipóstasis psicológica —la aceptación de una existencia *real* de las especies *en* el pensamiento— intentará establecer la índole de lo ideal prescindiendo por completo de todo supuesto metafísico (§§7 y 8). En este sentido, lo real quedará definido como lo temporal y lo ideal como lo intemporal (§8). Esto es precisamente lo que a Husserl le interesa acentuar: la diferencia categorial entre ser ideal y ser real, ser como especie y ser como individualidad. La garantía de todo esto es la evidencia de remontarse a los casos en los cuales se cumplen representaciones individuales o específicas para ver con claridad las diferencias esenciales. El objeto ideal es, entonces, un *a priori*, una forma objetiva de la validez de proposiciones verdaderas.

Parece, pues, que el fundamento de la existencia de los objetos ideales reside, según Husserl, en su capacidad de ser sujetos de juicios categóricos; en cambio, el ser de los objetos reales no se reduce a los actos en virtud de los cuales estos objetos son "objetivados" para una conciencia. A esta diferencia corresponde la distinción entre la génesis física real de los actos de la representación y la mera génesis intencional de los objetos ideales. Esta génesis meramente intencional no consiste en un crearle realidad a algo, sino, como decíamos, en la aparición de determinadas objetividades ante la conciencia. La presencia, pues, de los objetos ideales no es menos "verdadera" que la "presencia" de los objetos reales.

4.2 El concepto fenomenológico de *Fundierung* y la formalización de la teoría de los todos y las partes

§8. Introducción

La tercera de las *Investigaciones lógicas* titulada "Sobre la teoría de los todos (*Ganzen*) y las partes (*Teilen*)"[197] tiene por objetivo elaborar una teoría de las formas de combinación entre las partes de un objeto que constituyen un todo. Dicho análisis está a la base de las distinciones conceptuales presentadas a lo largo de las *Investigaciones lógicas*. Ciertamente, el propio Husserl reconoce que es la teoría de los todos y las partes un antecedente fundamental para la comprensión de los trabajos que componen las *Investigaciones lógicas*: "Tengo la impresión de que esta investigación ha sido demasiado poco leída. A mí me prestó un gran auxilio, ya que es antecedente esencial para la plena comprensión de las investigaciones siguientes" (Hua XVIII, 14).

La necesidad de incorporar esta tercera investigación lógica al cuerpo de esta disertación, responde al hecho de que ella mantiene una incidencia directa con la sexta de las investigaciones lógicas, en específico, con el rol que juegan la variación eidética y los niveles de categorialidad en la constitución de los objetos categoriales, además de estar ligada al desarrollo de los significados ideales de la segunda y la cuarta investigaciones lógicas.[198] Es

[197] Para evitar un anacronismo explícito en el título del presente trabajo, he decidido usar la expresión "teoría de los todos y partes" como sinónimo del término mereología en tanto disciplina formal que estudia los todos y las partes, así como sus múltiples relaciones. El motivo de esto es que el término mereología no fue utilizado por Husserl, hasta donde sé, en ninguna de sus obras. Otra expresión que podría haber utilizado, y esto no es ningún anacronismo, sería proto-mereología, pero sería injusto porque Husserl no fue el primero en tematizar las nociones de todos y partes *cfr*. (Paul Henry, 1991).

[198] A diferencia de lo que se cree, la influencia de Husserl sobre Stanislaw Leśniewski y su teoría de los tipos, no parte de los desarrollos de la tercera investigación lógica, sino de la noción de *categorías significativas* esbozadas en la cuarta investigación lógica ("La diferencia entre las significaciones independientes y no-independientes y la idea de la gramática pura"). Cito a Leśniewski: "En 1921 construí mi 'teoría de los tipos', que Tarski mencionó en una nota a pie de su trabajo citado anteriormente […] En 1922 delineé un concepto de categorías semánticas como reemplazo de la jerarquía de tipos, que me es muy poco intuitiva. […] Desde un punto de vista formal, mi concepto de categorías semánticas se relaciona estrechamente con teorías bien conocidas sobre los tipos, especialmente con respecto a sus consecuencias teóricas. Sin embargo, intuitivamente, el concepto se relaciona más fácilmente con el hilo de la tradición que pasa por las categorías

tal la importancia de la teoría de los todos y las partes, que ella constituye una pieza clave de la ontología formal desarrollada por Husserl en años posteriores.[199] En particular, el concepto de todo es consustancial al de objeto en general. Inclusive, se podría decir que la teoría de los todos y las partes está a la base de la constitución ideal de una ciencia en tanto que su unidad y organización se presentan en términos de formas proposicionales concatenadas.

En lo que refiere a las fuentes teóricas de la tercera investigación lógica, debe tomarse en cuenta que ella mantiene una continuidad temática con los *Prolegómenos a la lógica pura* y la unidad de una teoría pura, base sobre la que se fundan las *leyes a priori* relativas a la unidad y pluralidad del conocimiento científico. También se puede rastrear la temática de los todos y las partes en el capítulo XI de *Filosofía de la aritmética* donde a partir del marco de la teoría de las relaciones primarias y secundarias de Brentano, Husserl distingue entre todos y partes metafísicas y todos y partes "categoriales" (conexiones colectivas, disyuntivas, monádicas, etc.) (Vassiliou, 2010). Pero quizás sean los dos primeros parágrafos de sus *Estudios psicológicos ordenados a una lógica elemental*,[200] obra ya estudiada en apartados anteriores, donde mejor pueda evidenciarse un primer intento de tematizar las múltiples relaciones entre los todos y las partes.

Dicho lo anterior, dividiré este apartado en dos secciones y un anejo.[201] En la sección I haré una brevísima presentación de los §§ 1 y 2 de los "Estudios psicológicos ordenados a una lógica elemental". En la sección II me dedicaré a esclarecer los principales conceptos que aparecen en el primer capítulo de la tercera investigación lógica, "La diferencia entre objetos independientes y no-independientes", seguido de la presentación del concepto fenomenológico de *Fundierung*. Y finalmente, en el anejo V haré una revisión de los principales teoremas y axiomas que aparecen en el segundo capítulo de la tercera investigación lógica "Pensamiento para una teoría de las formas puras de los todos y las partes", con lo cual se evidenciará la relevancia del pensamiento husserliano en cuestiones de filosofía de la lógica.

---

de Aristóteles, las partes del habla de la gramática tradicional, y las *categorías significativas de Husserl*" (1992, p. 421-22. Las cursivas son mías).

[199] Una revisión de las maneras en que se relaciona la tercera investigación con el resto de las *Investigaciones lógicas* se encuentra en Willard (2003).

[200] Publicado originalmente en *Philosophische Monatshefte*, XXX (1894), 159–191.

[201] Anejo V. Los seis teoremas de la tercera investigación lógica. Bosquejos de una formalización.

§9. Los conceptos de todos y partes en los "Estudios psicológicos ordenados a una lógica elemental"

Se podría decir que los "Estudios psicológicos ordenados a una lógica elemental" (1894) perfilan la orientación que Husserl seguirá una vez que ha comprendido que el programa inicial de su investigación ha colapsado (*Sobre el concepto de número* y la primera parte de *Filosofía de la aritmética*). El título mismo de la obra destaca la necesidad del *ordenamiento* de los estudios de los estados y procesos mentales, a una *lógica elemental* o básica. Se inicia con los estudios *psicológicos* porque Husserl cree que existe una transición de los *estados mentales individuales* a la condición de *saber* en general. Ahora bien, ya sabemos que cuando Husserl habla de *lógica* en estos años se refiere a una teoría que indaga por qué el conocimiento general puede devenir un *conocimiento* lógico, qué procesos ocurren en este último, y por qué el conocimiento lógico nos pone en el camino de la verdad y la evidencia.

El §1 de ese tratado, Sobre la distinción entre abstracto y concreto, trata de las *conexiones necesarias* entre tipos o elementos de estados mentales. Husserl comienza con la observación de que la conciencia total de cada momento es una unidad en que todo está en conexión con todo. No obstante, existen diferencias considerables en el modo en el que ese todo está conectado, en otras palabras: la forma de unificación de ese todo varía significativamente de un caso a otro. A tales diferencias se refiere a la división de los contenidos en independientes y no-independientes (Hua XXII, 92).

> La conciencia total de cada momento es una unidad en que todo está en conexión con todo. Hay, no obstante, diferencias considerables en el modo de la conexión, en su relativa consistencia y en su carácter mediato o inmediato. A tales diferencias se refiere también la división de los contenidos que vamos a considerar aquí, en *independientes* ("separables", "representables por sí") y *no-independientes* ("inseparables", "no representables por sí") (Hua XXII, 92).

Ahora bien, Husserl señala que la independencia en ciertos contenidos es notada con cierta facilidad. De hecho, se imponen a nuestra consideración como unidades naturales, p.ej., el contenido intuitivo total de las cosas perceptibles. No obstante, existen otro tipo de contenidos complejos, como las notas internas de dichas cosas (color, forma, figura, etc.,) donde no es fácil definir o señalar en qué consiste su dependencia. Con el fin de evidenciar ese tipo de conexión, Husserl trabaja, ya desde estas fechas, con variaciones y experimentos que se pueden hacer en la fantasía a fin de visualizar cuáles son los efectos de unos componentes en otros —y en el conjunto mismo— y cuándo los cambios en un componente producen cambios en otro:

> Podemos en efecto pensar por medio de la fantasía la completa supresión de las conexiones causales, sin que por ello encontremos cambiado el contenido total intuitivo de la percepción. Los contenidos que hemos de estudiar aquí manifiestan una separabilidad semejante respecto de lo enlazado con ellos, sólo que con un alcance mucho más amplio: no sólo respecto de lo vinculado causalmente con ellos, sino también respecto de *todo* contenido que, pudiendo ser notado simultáneamente, se vincule con ellos del modo que sea; dejando de lado, claro está, sus propias partes, en referencia a las cuales no parecería adecuado hablar de enlace. Estos contenidos siguen siendo, aparentemente, lo que son incluso si los contenidos que están conectados con ellos son representados como habiendo desaparecido o como variando de cualquier otro modo. En la fantasía yo puedo conservar por sí la cabeza de un caballo y hacer desaparecer, o variar a mi gusto, las restantes partes del caballo, así como la totalidad de su entorno intuitivo: la cabeza permanece intuitivamente invariable (Hua XXII, 93).

Husserl ha partido de los fenómenos o cosas que muestran rasgos característicos de independencia. Pero en el caso de los contenidos *no-independientes*, el comportamiento es completamente distinto respecto de los puntos que la cita anterior destaca. Husserl ilustra este tipo de dependencia con las sensaciones de sonido:

> Pero estos mismos rasgos los encontramos también en no-cosas, por ejemplo, en fenómenos auditivos que pensemos libres de toda relación con objetos, como sonidos o figuras sonoras clausuradas intuitivamente [...] La intensidad de un sonido no es algo indiferente a la cualidad, algo que le sea externo, por así decir; y lo mismo al revés [...] Una variación de la cualidad condiciona necesariamente una variación del carácter de la intensidad, por más que el momento que denominamos "grado" pueda permanecer invariado por ambas partes. La intensidad no es justamente nada por sí, sino sólo algo con y junto a la cualidad. Si suponemos la cualidad eliminada por entero, entonces también queda eliminada la intensidad, y esto no es un mero hecho sino una necesidad evidente. Y lo mismo en el caso contrario: una variación de la intensidad significa inevitablemente una cierta variación de la cualidad, por más que su especie cualitativa pueda perdurar intacta. No se trata, pues, de una suma, uno de cuyos miembros puede variar mientras el otro permanece idénticamente el mismo […] Ambos contenidos se interpenetran, están uno dentro del otro, no fuera del otro. El reducirse a cero la intensidad condiciona de nuevo una aniquilación completa de la cualidad, y esto no de manera meramente fáctica sino necesaria con evidencia (Hua XXII, 94).

Tomando en cuenta lo anterior, es posible distinguir un contenido independiente de un contenido no independiente. Un contenido no independiente es aquel donde la variación o supresión de al menos uno de los contenidos dados juntamente con él (sólo que no incluidos en él) ha de comportar su propia variación o supresión. Ellos están fundados en cierta *dependencia funcional necesaria*. Un contenido para el cual esto no es el caso, se llama independiente. Se puede decir también que en los contenidos no independientes se tiene la evidencia de que sólo son pensables como partes de todos más amplios; esta evidencia es inexistente en el caso de los contenidos dependientes (Hua XXII, 95). Hasta este momento, la independencia ha valido como algo absoluto, y la no-independencia ha valido como su opuesto contradictorio. Pero, agrega Husserl, nada impide hablar de una *independencia relativa*, por contraposición con la independencia *absoluta*, p.ej., las partes físicas de una pizarra negra son absolutamente independientes, pero las partes físicas de la *superficie de la pizarra* lo son sólo relativamente en relación con las restantes partes de la superficie (Hua XXII, 96).

En el §2, contenidos abstractos y concretos, del mismo texto, Husserl comienza su análisis tomando como punto de partida las diferencias de relación entre las partes independientes (o disyuntas) de un contenido. Por partes disyuntas se entienden aquellas partes que no tienen ninguna parte idéntica en común, ni siquiera a sí mismas. Ellas pueden presentarse de dos maneras: "o bien la parte en consideración es independiente en relación con todas las partes disyuntas que pertenecen al todo, o bien no lo es. En el primer caso hablamos de *pedazos* de este todo; en el segundo, de *partes abstractas* (*abstractis*) del todo" (Hua XXII, 97). Las partes abstractas pueden ser despedazadas, y los pedazos o contenidos absolutamente independientes pueden ser divididos abstractivamente. Cuando un abstracto admite un despedazamiento en pedazos del mismo género, Husserl lo denomina un *todo físico*, y, a sus partes, *partes físicas*. Las partes pueden ser partes *inmediatas* o *mediatas*. Estas últimas son partes de las partes (Hua XXII, 97).

Es interesante notar que mucho de lo que presentan estos primeros esbozos de una teoría de los todos y las partes se mantiene intacto hasta la primera edición de la tercera investigación lógica, que enseguida estudiaremos.

§10. Exposición general de la teoría de los todos y las partes.

En la introducción al primer capítulo de la tercera investigación lógica, "La diferencia entre objetos independientes y objetos no independientes", Husserl describe su propuesta de una teoría de los todos y las partes como un elemento fundamental de una *teoría pura* (*apriorística*) *de los objetos como tales* (Hua XIX/1, 227).[202] Como ya se advertía desde sus "Estudios psicológicos ordenados a una lógica elemental", la teoría de los todos y las partes estuvo fuertemente influida por la ontología de los objetos ideales de Bolzano y por la propuesta "mereológica" de Stumpf.[203] De hecho, en ciertos pasajes Husserl hace equivalente su propuesta al trabajo de este último,[204] no sin antes someterlo a un análisis profundo (Hua XIX/1,228). Así pues, la tercera investigación lógica, apunta Husserl, "no es una presentación sistemática de la lógica, sino su aclaración epistemológica" (Hua XIX/1,228). Aclaración epistemológica significa aquí estudio *de los objetos en general* o, dicho con todo rigor, estudio de las condiciones generales de la *categoría objeto*. Esta generalidad supera todo análisis particular de determinada región (p.ej. cuando preguntamos ¿qué es *este objeto que está frente a mí*?) y, por tanto, trasciende el terreno de la psicología descriptiva de los datos de sensación y de la esfera de los contenidos de conciencia particulares. Dicho nuevamente, el objetivo general de la tercera investigación lógica es presentar y discutir, de manera puramente formal, *la teoría pura* (*apriorística*) *de los objetos como tales*.

Ahora bien, la idea de una teoría de los todos y las partes evoca al menos dos modos de asumir la conexión entre objetos: la relativa a los objetos que en ningún respecto sean partes de un todo y la relativa a la idea de objetos que forman parte de un todo. En la primera

[202] Teoría en la cual son tratadas las ideas pertenecientes a la *categoría de objeto*, como el todo y la parte […] el individuo y la especie, el género y la especie, la relación y la colección, la unidad, el número, la serie, el número ordinal, la magnitud etc.

[203] Stumpf elabora su propuesta "mereológica" a partir de la variación de los contenidos mentales que se presumen son no-independientes o independientes de otros contenidos. El caso particular para Stumpf es el ejemplo de la relación entre color y extensión. Dado que no podemos concebir o percibir un color sin extensión ni una extensión sin color, Stumpf concluye que estos contenidos son recíprocamente no independientes de acuerdo a su naturaleza. Sobre los aspectos "mereológicos" de la obra de Stumpf, se pueden consultar los textos de Rollinger (1999) y (2008), y Stumpf (1873).

[204] "La diferencia entre contenidos 'abstractos' y 'concretos', que resulta **idéntica** a la diferencia hecha por Stumpf entre contenidos no-independientes e independientes, es de mayor importancia para todas las investigaciones fenomenológicas […]" (Hua XIX/1, 227). El resaltado es mío.

edición de las *Investigaciones lógicas*, que es la que aquí nos interesa, Husserl, probablemente influido por la distinción entre partes lógicas y partes metafísicas de Brentano,[205] sugiere la siguiente clasificación de las partes de un todo: partes lógicas y partes disyuntas. Según Husserl, las partes lógicas o formales (género y especie) no introducen auténtica composición, pese a lo que podrían sugerir los términos de multiplicidad/individuo o universal/diferencia especifica; las que sí presentan una composición genuina son las partes disyuntas, pues son las que no tienen nada de común según su contenido. Ellas son auténticas *partes*.

Ahora bien, si asumimos que los objetos pueden estar unos con otros en relación de todos y partes, y que todo objeto es parte real (*wirklicher*) o posible (*möglicher*) (Hua XIX/1, 229), se tiene por resultado la primera y más básica división: objetos simples (*einfache*) y objetos compuestos (*zusammengesetzt*) (Hua XIX/1, 229). Por definición, los objetos simples son aquellos que no pueden descomponerse en una pluralidad ni dividirse en (al menos) dos partes *disyuntas*. En cambio, en los objetos compuestos sí se distinguen (al menos) dos partes disyuntas (Hua XIX/1, 229). Siguiendo esta breve clasificación se obtiene el siguiente esquema:

1. Partes lógicas (género y especie).
2. Partes disyuntas.

2.1 Partes no-independientes (*partes abstractas* o *Momentos*).
2.2 Partes independientes (*partes concretas* o *Pedazos*).

Dentro de las partes disyuntas se distinguen, por un lado, las partes no-independientes, es decir, las partes que no son separables (o que no pueden existir fuera) del todo al que pertenecen, y por otro lado, las partes independientes, esto es, las partes que sí son separables del todo al que pertenecen. Dicho en otros términos: los momentos o partes abstractas se refieren a aquellas partes que se "mezclan" entre sí o a las partes que son inseparables, mientras que los pedazos o partes concretas se refieren a aquellas partes que sí son separables.

[205] "En recuerdo de los términos que usaban Brentano y otros miembros del grupo de los discípulos de éste, Husserl llama aquí por un instante a las partes de un todo concreto que no pueden ser separadas para que vivan vida autónoma, partes metafísicas o psicológicas. Quiere decir partes cuya distinción no es física, no es real, en el sentido de que el todo que inicialmente forman pueda trocearse en dos realidades que desde ese momento, son relativamente autónomas" (García-Baró, 2008, p. 84). Sobre la propuesta "mereología" de Brentano puede consultarse el ya clásico ensayo de Baumgartner y Simons (1994).

Para ejemplificar el primer caso pensemos en el *color* y su *extensión*. En este caso uno es condición del otro, pues no se puede separar el color de su localización en una cierta superficie. Para ejemplificar el segundo caso consideremos un árbol como un *todo* conformado por ramas, tronco, hojas, raíces, corteza, etc. Todas estas son partes que pueden separarse fáctica o imaginativamente del todo (las hojas de las ramas, las ramas del tronco, el tronco de las raíces) Todas ellas se pueden "desprender" del *todo*-árbol de una manera en la que no puedo "separar" el brillo del color o el color de la superficie. Todo lo anterior puede resumirse en la siguiente tesis:

Tesis (1). Las partes independientes conforman a los todos que sí se pueden desmembrar o despedazar. Las partes no independientes no son separables (o no pueden existir fuera) del todo al que pertenecen. Ellas están compenetradas.

Corolario (1). *El criterio de inseparabilidad*. La necesidad que rige la no independencia de las partes debe analizarse a contraluz de contenidos representativos contradictorios. Esto significa que la existencia separada de una parte no independiente *no puede* ser pensada o que "pensarla" separada representa una contradicción *per se*. [206]

Siguiendo la tesis (1) y el corolario (1) se puede deducir que dos determinaciones o contenidos son no independientes si tenemos "la evidencia de que la alteración o supresión de al menos uno de los contenidos dados junto con ellos (pero no incluidos en ellos) los modificarían o los suprimirían" (Hua XIX/1, 233). Por el contrario, un contenido para el cual esto no es el caso lo llamamos independiente. Desde luego, la evidencia de este criterio de inseparabilidad obliga a que "todo cambio objetivo se desarrolle dentro de la unidad de un género" (Serrano de Haro, 1990, p.35), p. ej., pasar de un *color* a su *extensión* y no de un *sonido* a su "visualización". Conviene añadir que en el criterio de inseparabilidad se pone de manifiesto el contenido que permanece inalterado en el proceso de la variación ilimitada en la fantasía:[207]

[206] La incapacidad de pensar con evidencia la existencia separada de la parte no-independiente no se refiere a una incapacidad psicológica propia de los seres humanos, sino a una incapacidad racional para separar contenidos lógicos entre sí, tal y como se observó en el apartado "La (in)justificación psicológica de la lógica. La crítica al psicologismo y la teoría de la variedad en los *Prolegómenos a la lógica pura*". En palabras de John Drummond, "La necesidad de complementar partes no independientes con otras partes surge de una necesidad en la naturaleza de las cosas mismas, una necesidad en el sentido de las partes mismas" (2008, p.109).

[207] En la sexta investigación lógica Husserl llama a este procedimiento "variación eidética".

> La separabilidad no quiere decir más que podemos mantener este contenido en la representación, aunque variemos sin límites (con variación caprichosa, no impedida por ninguna ley fundada en la naturaleza del contenido); de modo que, después de todo, él no sería afectado incluso por su anulación (Hua XIX/1, 238-239).

Volvamos al ejemplo del color y la extensión: si los sujetamos a una "variación caprichosa" nos daremos cuenta que por más cambios radicales que pueda sufrir el momento cromático (hacer, p. ej., decenas de matices del color amarillo) es el caso que no llegará un sólo cambio que lo prive de su extensión espacial. Lo anterior pone de manifiesto la forma de conexión o unión enteramente primitiva entre los contenidos disyuntos (partes no independientes) que Husserl denomina compenetración (*Durchdringung*). Esto última deriva en una segunda tesis.

Tesis (2). Un contenido es independiente si su esencia *no se funda* en la dependencia respecto de otro contenido, incluso cuando otros contenidos estén en relación con él. Los contenidos no independientes *necesitan que otros contenidos existan* al mismo tiempo para poder existir.

Corolario (2). Los contenidos independientes pueden ser representados por sí (*für sich vorgestellt*) y los contenidos no independientes solo pueden ser notados por sí (*für sich bemerkt*) (Hua XIX/1).

Según la tesis (2), todos los contenidos o partes independientes pueden existir por separado, es decir, la existencia de una parte independiente no precisa de otra parte, no se fundan unas en otras. Por ejemplo, la mano "existe" sin la necesidad de las demás partes del cuerpo —aquí se debe tener en cuenta que, contrario al "sentido común", las partes en tanto que partes no exigen un todo. Más adelante argumentaré cómo es posible esto—. En cambio, el fenómeno de la compenetración pone de relieve la profunda y extraordinaria implicación entre dos contenidos en niveles crecientes:

1. Contenidos compenetrados son contenidos inseparables. Todo intento de rompimiento es imposible (Serrano de Haro, 1990, p. 42).
2. Los contenidos compenetrados suponen que cada contenido de un género *x* tiene en la unión con un contenido del género *y* una condición de posibilidad de su existencia (dependencia bilateral) (p. 42).

3. La existencia de los contenidos no independientes sólo puede concebirse a título de parte que no puede dejar de ser tal (p. 44).

Sobre el corolario (2), Husserl aclara que el *notar por sí* es un “modo de atención” en el que, a partir del *aislamiento* de una parte de un todo que la engloba, se aprehende una nota distintiva o un contenido particular. En el caso de los contenidos *representados por sí* se alude al hecho fenomenológico de que su existencia no remite a otra cosa en la cual o sobre la cual (o en enlace con la cual) exista. Ahora bien, la ley que rige esencialmente a una parte no independiente es una ley de esencia según la cual la existencia de un contenido presupone la existencia de contenidos correlativos o correspondientes a la misma clase que aquella parte. Esto deriva en una tercera tesis.

Tesis (3). Todos los contenidos no independientes sólo pueden existir como partes de un todo más amplio. Los contenidos independientes pueden formar parte de algún todo, pero no se deben a él.

Corolario (3). Un objeto no independiente no puede existir fuera del todo. Un objeto independiente puede existir *sin* un todo del que sea parte, aunque el término “parte” se predique, vulgarmente, en relación a un todo.

La tesis (3) junto con el corolario (3) resumen correctamente lo que quiere decir la expresión *parte en tanto que parte* o partes que pueden existir como partes fuera del todo. La propuesta de Husserl de una *parte en tanto que parte* demuestra que, contrario al “sentido común” que dice que las partes exigen analíticamente al todo del que son partes, las partes sí pueden existir fuera del todo que las reúne. Así, aunque dejan de ser “*partes de*…” estas siguen perdurando como partes:

> Una parte, como tal, no puede existir sin un todo del que sea parte. Por otro lado, empero, decimos (con relación a las partes independientes): una parte puede a veces existir sin un todo del que sea parte. En esto no hay, naturalmente, contradicción. Lo que se quiere decir es que si consideramos la parte según su contenido interno (*inneren Gehalt*), entonces vemos que lo que posee ese mismo contenido puede ser sin un todo en el cual sea; puede ser por sí, sin enlace con otro, y entonces precisamente no es parte. La modificación y aun total anulación de los enlaces no toca para nada aquí al contenido interno de las partes y no quita existencia a la parte, sino que sólo anula sus relaciones, su ser-parte (Hua XIX/1, 257).

¿Cómo es posible lo anterior? De entrada, la teoría de las partes independientes está ligada al concepto primitivo de fundamentación. Mientras que las partes abstractas (o momentos) se fundan unas en otras constituyendo así un todo,[208] las partes concretas (o pedazos) *no se fundamentan* unas en otras, incluso cuando forman un todo.[209] En el caso de la fundamentación de las partes abstractas, su forma de unión, que es la compenetración, no debe entenderse como un nuevo contenido que articula o adhiere estas partes con el todo; al contrario, su unidad le es prescrita por el propio género al que se someten los contenidos disyuntos. Esto significa que no se requiere nada más que el *sometimiento a su propio género* para que los contenidos singulares se compenetren evitando con esto un *regressus ad infinitum*. Atinadamente señala Husserl: "Ahí donde no tiene sentido hablar de separación tampoco ha de tener sentido el problema de cómo debemos superarla" (Hua XIX/1, 285-286).

En el caso de la fundamentación de las partes concretas ocurre lo contrario, pues la unión entre ellas no viene dada por el *sometimiento a su propio género*, antes bien, requiere una presencia efectiva de un nuevo enlace o forma de unión que sustente o reúna a estos contenidos separables del todo. Dicho de otro modo "no basta la existencia de las partes para que se dé la unidad del todo, sino que se necesita, ahora sí, un cemento especial que ligue unos pedazos con otros" (Fernández Beites, 2007, p. 70). Este "pegamento especial" Husserl lo denomina *formas de enlace* (*Verknüpfungsform*) o *formas de unidad* que, a su vez, fundan

---

[208] Hasta este momento se entiende que las partes abstractas o momentos no pueden existir separados y que una parte concreta o pedazo sí pueden separarse del todo. Sin embargo, conviene añadir que se puede ser momento o pedazo de forma absoluta o relativa o, dicho de otro modo, se admite la posibilidad de la transitividad (restringida) de la relación de "ser parte de" y de "fundamentación". En el caso de los momentos, estos únicamente se pueden considerar como abstractos en sentido absoluto, pero en el caso de los pedazos se pueden considerar como *relativos* en relación con sus momentos abstractos, y como *absolutos* si no son abstractos en ninguna dirección (§§ 17 y 18). Por ejemplo, si se considera una rama "como parte" de un árbol, la rama misma debe ser vista, también, como un objeto *complementado* por un horizonte o un fondo espacial contra el cual aparece. Así, un objeto dado puede ser un pedazo de un todo en un aspecto y un momento de un todo en otro respecto.

[209] No es lo mismo un concreto (contenido disyunto independiente) que una cosa (*Ding*). La cosa estaría constituida por una multiplicidad de concretos enlazados materialmente que duran en el tiempo, a veces cambiando, a veces permaneciendo. Dicho de manera más explícita: un todo extensivo es lo que Husserl, en la primera edición, nombró como un todo físico (*physisches Ganzes*). Si un todo permite una fragmentación tal que sus pedazos, por su misma esencia, sean del mismo género ínfimo que el determinado por el todo indivisible, entonces, ese todo será un todo extensivo y sus partes serán partes extensivas. Pero en la segunda edición, Husserl cambió lo anterior, pues explicitaba un tipo más amplio de todos extensivos que los meros todos físicos. Los ejemplos entonces muestran que no es determinante el carácter físico del todo para ser un todo extensivo. Así, de acuerdo a la definición, la fragmentación de una extensión en extensiones, la división de un segmento espacial en segmentos espaciales, la división de intervalos temporales en intervalos temporales, dan como resultado que la extensión, el segmento espacial, y el intervalo temporal son todos extensivos. Esta tesis se encuentra en el §3 de la primera edición.

momentos de unidad (o *momentos figurales* en la terminología de *Filosofía de la aritmética*). Los enlaces también tienen divisiones:

> Los enlaces se dividen, pues, en enlaces que contienen encadenamiento y enlaces que no los contienen; y los enlaces de la primera especie son complejos de enlaces de la última especie. Los miembros de un enlace, que están libre de encadenamiento, se dicen inmediatamente enlazados o avecindados. En todo encadenamiento y, por tanto, en cualquier todo que contenga encadenamientos, tiene que haber miembros inmediatamente enlazados, a saber: los que pertenecen a enlace parciales que ya no contienen encadenamientos. Todos los demás miembros de un todo semejante se llaman mediatamente enlazados (Hua XIX/1, 280).

Siguiendo a Husserl se puede decir que la relación de las partes independientes enlazadas puede ser inmediata (no compleja) o mediata (compleja). Así, si dos elementos (*p* y *q*) están en una relación mutua sin la intervención de un tercer elemento, se dice que mantienen un enlace inmediato (*unmittelbare Verknüpfung*) o avencidado. Pero si es el caso que *q* está relacionado con otro elemento *r*, pero este último no lo está con *p*, se dice que el tipo de enlace (entre *p* y *r*) es mediato. Desde el punto de vista de su composición se puede decir que los enlaces inmediatos son simples, mientras que los enlaces mediatos son complejos. Valga otro ejemplo: un enlace inmediato puede ser del siguiente tipo: el enlace entre "1 *y* 2", donde los pedazos están representados por números y la forma de enlace por la letra. La construcción de un *enlace complejo* requiere de un tercer elemento y otra forma de enlace, por ejemplo, enlazamos el pedazo 2 con el pedazo 3 mediante la forma de enlace "*z*". Obteniendo así un nuevo enlace inmediato que es 2 *z* 3. El enlace complejo en su totalidad o la forma de unidad compleja (*komplexe Einheitsform*) sería el siguiente: 1 *y* 2, 2 *z* 3, donde el miembro en común en ambos enlaces es el 2. Por tanto, el enlace de 1*y*2 y 2*z3* no necesita una nueva forma de unidad por ser 2 el pedazo común-idéntico, mismo que impide que puedan existir de modo independiente, es decir, separadamente (1*y*2 / 2*z*3). Para que ambos enlaces pudieran separarse el 2 tendría que ser destruido o puesto de manera simultánea en ambas partes[210] (Fernández Beites, 2007, p. 72).

[210] La mediatez e inmediatez entre las partes también puede presentarse en la forma de "proximidad" y "lejanía", tal como sugiere el §19 de la tercera investigación lógica. A propósito de estos conceptos, Sokolowski pone un ejemplo interesante a partir del brillo y el color: el brillo es una parte mediata respecto de la superficie porque se une con ella a través del color. Pero, por otro lado, el brillo es una parte inmediata respecto del color porque se mezcla con él sin la mediación de otras partes. Así, el color es un momento más cercano a algo material

Ahora bien, lo anterior, aunque clarifica el enlace que opera en las partes independientes, no explica por qué las partes pueden existir separadas del todo al que pertenecen. Cabe preguntar ¿esto no las convierte en meros elementos de un agregado o colección? ¿Cómo pueden ser auténticas partes de un todo sin pertenecer a un todo? Elmar Holenstein (1972) y Aron Gurwitsch (1979) fueron los primeros en presentar estos dilemas. El punto clave de la crítica de Gurwitsch, y por supuesto de Holenstein, parte del concepto de asociación sensible. Para ambos autores, las partes independientes se ven modificadas al entenderlas justamente como eso, como *partes independientes*. Sin embargo, entenderlas de ese modo significa introducir momentos externos que enlazarían partes con partes hasta formar un agregado o una colección de piezas. Dicho agregado o colección, al ser externo, daría cuenta de las partes como elementos y no como partes de un todo, como pretende Husserl. En este sentido, la crítica de Gurwitsch, y Holenstein pierde de vista que las formas y momentos de unidad no son una unidad externa a las partes (Serrano de Haro, 1990, p. 113-116).

> De hecho, esta crítica [la crítica de Gurwitsch] incurre en los dos errores que, eludiendo citar sus valedores, puse anteriormente de relieve: toma las partes separables por contenidos en un sentido impropio, extrínseco a su ser, y opone momentos y pedazos en un plano de igualdad […] De la obra citada del discípulo [*El campo de la conciencia*] está ausente la distinción entre forma de enlace y momento figural de unidad. Y esta indistinción lleva a Gurwitsch a malinterpretar el pensamiento de Husserl en el sentido de que la figura viene a "unificar elementos independientes": como si un momento, que es además una nota interna, pudiese tener eficacia causal (p.114-115).

Ahora bien, Husserl nos advierte que las formas y momentos de unidad fundados en las partes son irreductibles a estas mismas y, por tanto, les añaden algo que hace que el todo sea algo más que una mera suma de elementos. La dependencia de las partes independientes respecto del todo se establece con base en su carácter *estructural* que consiste en que la parte está en función de la unidad del todo, es decir, no posee propiedades por sí misma, sino por el todo al que pertenece y, por tanto, se modifica en función del todo. La independencia de las partes independientes es una *independencia existencial* compatible con la dependencia estructural entre ellas. De este modo, "las partes independientes presentan una dependencia estructural

---

porque el color pertenece a cierta superficie. En cambio, el brillo está más lejos de la superficie al estar mediado por el color (1968, p. 539-540).

y en esto se distinguen de los elementos de un agregado (que no pueden considerarse partes, sino justamente elementos, porque poseen independencia estructural)" (Fernández Beites, 2007, p. 80-81). A partir de este punto cobran sentido las últimas líneas del parágrafo citado líneas atrás: "La modificación y aun total anulación de los enlaces no toca para nada aquí al contenido interno de las partes y no quita existencia a la parte, sino que sólo anula sus relaciones, su ser-parte" (Hua XIX/1, 257). En efecto, *no se anula* la existencia (contenido) de la parte, sólo se anula su *ser parte* o parte fuera del todo. Ahora bien, a partir de los conceptos de independencia y no-independencia se llega al eje principal de la tercera investigación lógica: la relación de fundación (*Fundierung*). Es un eje principal porque a partir de él se da el establecimiento último de las distintas conexiones entre el contenido formal (sintáctico) y el contenido material (semántico).

El concepto de fundación alude a la ley esencial que dice que un momento no puede existir como tal si no está en una unidad más inclusiva. Ser no independiente significa, pues, tener necesidad de fundamentación mutua (*bilateral*) o fundamentación unilateral. La primera ocurre cuando la fundamentación es mutua, es decir, cuando uno (*a*-*w*) no puede darse sin el otro y viceversa (*w*-*a*), y la segunda cuando uno de los dos elementos fundamenta al otro, pero este otro es indiferente para el primero, por ejemplo, las percepciones fundan los juicios, pero los juicios no fundan a las percepciones (Hua XIX/1, 270). Ambas relaciones de fundamentación son válidas tanto para los géneros como para los individuos en tanto que la legalidad que rige estas relaciones es una legalidad esencial y necesaria. De acuerdo con Rota, la fundación se caracteriza por ser una relación lógica primitiva e irreductible a otro tipo de relación. La fundación, según Rota, combina dos procesos centrales en la construcción de una ontología de redes de fundamentación: facticidad y funcionalidad. (1997, p.176). Mientras que la facticidad tiene el rol de soporte material, la función tiene un sentido contextual:

> *Fundierung* es una relación, uno de esos términos es una *función*. Por ejemplo, el contenido del texto es una *función*. Esta función está vinculada al texto por una relación de *Fundierung*. La reina de corazones como *ítem* en un juego de cartas es una función vinculada por una relación de *Fundierung* a la reina de corazones como una pura y simple carta. El otro término de una relación de *Fundierung* se llama *facticidad*: en el primer ejemplo, el texto; en el segundo, la reina de corazones como una carta en la baraja. (p.176)

Dicho de manera más explícita, la existencia del término fundado depende siempre de la existencia del término fundante. Así, el contenido de un texto no puede existir independientemente del soporte físico proporcionado por el texto, y lo mismo se aplica a la reina de corazones en el juego de póker. En resumen, la función no puede existir sin la facticidad. Ahora bien, siguiendo a Rota podemos decir que una relación fundación es una relación formal, no una relación material de causalidad o en sus términos la facticidad no es la causa de la función. En este sentido, el término fundado goza de una forma de autonomía respecto de su apoyo. Aquí parece haber una tensión: afirmar que un algo A es dependiente existencialmente de otro algo B podría llevarnos a considerar que no hay nada en A que no esté en B. Sin embargo, afirmar que A tiene un modo de ser específico parece impedir que A dependa fundamentalmente de B. Rota no niega esta tensión. Sin embargo, insiste en la necesidad de mantener y combinar los dos aspectos (Gandon, 2015). De hecho, Rota critica el error del reduccionismo que consiste en identificar la función con la facticidad.

Hasta ahora, los términos relacionados por una relación de fundación están más o menos indeterminados. Podrían ser cualquier cosa. Pensemos, junto con Rota, en un objeto matemático cualquiera: este debe, por un lado, insertarse pragmáticamente en un contexto (facticidad) y, por otro lado, contrastarse correlativamente en el contexto (funcionalidad).[211] El concepto de fundación estudia, entonces, cómo los procesos matemáticos se enlazan unos con otros, independientemente de su desarrollo analítico. “Los procesos u objetos matemáticos se entienden como polos de una relación de estratificación, con gradaciones complejas entre ellos […] Las redes de acople fáctico y funcional entre los cuasi-objetos matemáticos en su sentido más lato posible (metáforas, ideas, procesos, conjeturas, ejemplos, definiciones, teoremas) constituyen entonces el verdadero espectro de los fenómenos matemáticos” (Zalamea, 2009, p. 191). Efectivamente, para Rota las ciencias, y especialmente las matemáticas, están hechas de capas diferentes, cada una dotada de sus propias características y leyes específicas, y que están relacionadas entre sí por varias relaciones de fundación. Por ejemplo, la termodinámica depende de la mecánica, en el sentido de que la noción termodinámica básica (el calor de un gas) se puede definir en

[211] La propuesta de Rota también podría interpretarse desde la idea de que no “existen” cosas físicas sino útiles (al modo heideggeriano) en relación de fundación (Palombi, 2003, p. 61-66). Así, las condiciones del concepto de fundación, como ley esencial, son satisfacer el enlace entre sus miembros y describir el proceso de fundamentación de uno en otro o, en todo caso, de su complementación

términos de nociones mecánicas (como la energía cinética promedio de las moléculas de gas) (Gandon, 2015, p. 14). En resumen, la teoría de los todos y las partes constituye una pieza clave de la ontología formal que Husserl ha comenzado a esbozar en los *Prolegómenos a la lógica pura*. Pero, además, la teoría de los todos y las partes resulta significativa para entender la unidad de la ciencia como un todo si tomamos en cuenta su organización e interconexión de leyes (o significados proposicionales en general).

Aquí también resulta de particular interés el hecho de que el enlace por fundamentación entre las verdades de una teoría es del tipo de la compenetración, pues *detrás* de toda ley exacta hay una conexión de fundamentación entre otras leyes y verdades. Según la idea anterior, la lógica de la teoría de los todos y las partes pretende delimitar los conceptos que forman parte de la idea de una unidad de una ciencia con relación a sus objetos. De igual manera, el concepto de fundación es importante para la lógica, en tanto teoría de la ciencia porque toda instancia de unidad se basa en una ley necesaria que define ciertas relaciones de fundación y compatibilidad entre las partes unificadas. Bien señala Husserl: "Lo que verdaderamente unifica, por así decirlo, son las relaciones de fundación" (Hua XIX/1,286). ¿Cómo podemos comprender con mayor precisión la relación entre la teoría de los todos y las partes y la consideración husserliana de la unidad de una teoría? Una teoría en tanto estructura de significados es una cierta combinación de proposiciones deductivamente cerrada con ciertos tipos de combinaciones de conceptos y *formas de combinación*. Estudiada en su carácter de *forma de teoría*, su estructura puede ser compartida por todas las regiones posibles de conocimiento con las que una teoría de esta forma se puede vincular. Nuevamente, la teoría de los todos y las partes es significativa, pues la estructura como un todo se determina meramente por el hecho de que sus objetos perduran en ciertas relaciones formalmente determinadas y permiten ciertas operaciones formales. Finalmente, para que un grupo de enunciados científicos constituyan una teoría debe haber, en este nivel puramente formal, una adecuación ideal de su unidad (como unidad significativa) con la objetividad significada. Los objetos significados por las proposiciones constituyentes de la teoría deben estar conectados de un modo apropiado, deben constituir, pues, la unidad formal de una cierta variedad formal determinada.

§11. Breve excurso sobre la cuarta investigación lógica

Según Sokolowski, "la cuarta investigación entera es una aplicación de la lógica parte-todo al dominio de los significados" (1977, p. 99). Ciertamente, los términos "independencia", "no independencia", "parte" y "momento" se ocupan para estudiar la idea de una gramática pura. Husserl considera que, partiendo de diversas combinaciones de significados simples se pueden formar significados complejos. Sin embargo, para que esas combinaciones se constituyan en todos verdaderamente significativos deben seguir ciertas reglas. En otras palabras, el intento de Husserl en la cuarta investigación lógica es aplicar los resultados de la tercera investigación con miras a dar una explicación de cómo una variedad de representaciones permanece unida con el acto de nombrar-significar. Veamos esto con cierto detalle.

En la cuarta investigación lógica, Husserl estudia la posibilidad de establecer leyes universales con las que se orienten las significaciones. Dicha tarea comienza con la distinción entre significaciones simples y compuestas (§1). Dentro del tipo de las significaciones compuestas se introduce la distinción entre significaciones categoremáticas y sincategoremáticas. Las primeras se refieren a las expresiones por sí significativas, mientras que las últimas son las palabras que ayudan a la expresión y no tienen, propiamente hablando, significación alguna. El pasaje de un tema a otro se presenta en el §4 y está dado por la pregunta de si a toda palabra de un cierto conjunto dado se le debe atribuir o no una significación propia.

Ahora bien, en el excurso de la primera y la segunda investigaciones lógicas advertí que las significaciones son unidades ideales y que por su propio sentido son necesariamente expresables (aunque no tengan cumplimiento). También señalé que a las significaciones les basta ser posibles para existir. La pregunta que ahora Husserl formula en la cuarta investigación lógica es si es posible establecer leyes universales por las cuales son posibles las significaciones. Ciertamente las significaciones pueden combinarse y dar como resultado nuevas significaciones, pero no toda reunión de significaciones produce una (nueva) significación. Dicho de otra manera: no se puede crear libremente una unión azarosa de significaciones con significaciones. Sólo en algunos casos las significaciones se unen en una nueva significación total, pero en otros casos el resultado es meramente un conjunto inconexo de significaciones (§10). Ahora bien, la búsqueda de tales leyes universales que hacen posible toda significación presupone la distinción entre objetos independientes y no independientes, ya estudiada en la tercera investigación lógica. La finalidad de esto último es establecer categorías esenciales de la significación en las que las leyes apriorísticas de la significación se puedan sostener. Pues bien, lo que determina la posibilidad de unir significaciones no es propiamente el contenido particular de esas significaciones, sino el "tipo" de las mismas. "Las significaciones se clasifican, de acuerdo a su naturaleza, en diferentes géneros, o sea, caen bajo diversas 'categorías de significación' (*Bedeutungskategorien*). Las leyes a priori establecen las posibilidades de reunión de tipos o géneros de significaciones" (González Porta, 2008, p. 43). Ellas establecen qué categorías de significación son capaces de ser combinables con otras categorías de significación para así obtener una significación total (§10).

Llegar al punto anterior exige un "nuevo" trabajo de abstracción particular o "formalización" (§13). El trabajo de formalización toma como referencia a la proposición, pues todo significado es una proposición o es parte de una proposición (§13). Ahora bien, en correspondencia con las diferentes partes de la lógica, Husserl cree que en las leyes lógicas se deben diferenciar dos tipos (§14). El primer tipo lo representan las leyes de la significación y el segundo "lo representan leyes que se refieren a la validez objetiva en tanto ésta depende de las formas de la significación y no de la materia. En el primer caso se trata de leyes para evitar el sinsentido, en el segundo, de leyes para evitar el contrasentido" (González Porta, 2008, p. 52). Finalmente, se pueden resumir las tareas de la morfología de las significaciones en tres puntos.

1. Se trata de establecer o fijar las formas primitivas de las significaciones.
2. Se trata de estudiar las leyes que rigen las posibles combinaciones de categorías de significación.
3. Se trata de fijar las formas derivadas de significación reconduciendo estas leyes a un número mínimo de leyes elementales. Las formas primitivas de combinación son "válidas" pues a cada una de ellas le pertenece una ley existencial *a priori*. Así, toda combinación que obedezca a las mismas leyes, resulta en una significación existente (2008, p. 44).

4.3 Constitución, intuición y conocimiento matemático. Análisis del concepto objeto categorial en la sexta investigación lógica

§12. Introducción

Hasta ahora hemos recorrido el itinerario filosófico-matemático de Husserl desde 1890 hasta entrado el año de 1901. Durante este recorrido he procurado explicitar la manera en que Husserl hizo frente al problema de la fundamentación del número; al problema del signo; a los ensayos aritmético-formales; al problema del conocimiento simbólico; a la ampliación de los dominios numéricos; a la teoría de los todos y partes y, finalmente, al establecimiento de la lógica pura como teoría de la ciencia. Sin embargo, aún queda una última pregunta por responder: ¿de qué manera el pensamiento simbólico/formal se convierte en *algo para* nosotros? ¿Cómo es que el pensamiento formal se instancia en la sensibilidad? Dicho con mayor rigor ¿cómo es posible aprehender *lo formal/categorial* desde el plano de la sensibilidad? Dar este último paso significaría resolver el enigma inicial con el que inició la filosofía-matemática de Husserl: ¿cuáles son las condiciones de posibilidad de la *aparición* del conocimiento matemático (objetivo) y cuál es su relación con los actos cognitivos (subjetivos)? Para responder a lo anterior se requiere de la unidad o el agrupamiento de los resultados previamente obtenidos en una investigación más general. Esta investigación no es otra que la sexta de las *Investigaciones lógicas*.

La sexta de las investigaciones lógicas concluye el análisis filosófico iniciado en los *Prolegómenos a la lógica pura* acerca de la verdad y la evidencia. Con lo anterior, también se pone un fin a la investigación fenomenológica de los logros cognitivos de la conciencia (intencional) a través de un modelo de fundamentación epistemológica que resuelve el problema kantiano de la relación entre intuición y entendimiento (Nenon, 1997, p. 105-106). Estamos ante la recontextualización de lo que Husserl llama la antigua antítesis epistemológica entre el pensar y el intuir o, en términos kantianos, entre la sensibilidad y el entendimiento. Pero a diferencia de Kant, para Husserl el conocimiento comienza en un nivel más bajo, incluso antes de la combinación de sensibilidad y entendimiento, lo que implica, entre otras cosas, reformular la tensión entre espontaneidad y pasividad.[212] Bajo esta óptica, la sexta investigación lógica estaría no sólo centrada en el análisis de la sensibilidad y en el del entendimiento, sino también en la ampliación de lo que (fenomenológicamente) significa intuición y percepción y, por tanto, en el esclarecimiento fenomenológico del conocimiento. Sobre la base de esta fenomenología del conocimiento se puede estudiar un problema altamente importante en la primera fenomenología de 1900, a saber, la unión de *lo formal/categorial* con la sensibilidad o, dicho de otro modo, de cómo *transitar* entre lo uno y lo múltiple. En efecto, detrás del problema fenomenológico de la unión de *lo formal/categorial* con la sensibilidad subyacen aspectos fundamentales que permiten entender la pluralidad de fenómenos junto con su unidad categorial (¿cómo multiplicar lo universal en lo diverso?) así como su unión, bajo ciertos ***modos de transformación***, con el conocimiento lógico-matemático, que es el que aquí interesa.

En un ejercicio filosófico de incesante mediación, de fuerza técnica y conceptual, Husserl se encaminará al análisis de las nociones de *objeto* e *intuición categorial*.[213] Será la donación de lo categorial la que desempeñe, aquí en la sexta investigación lógica, el rol principal en la aprehensión del conocimiento lógico-matemático, pero también de las relaciones generales de la conciencia con el mundo. “Gracias a la intuición categorial, la relación de conocimiento ya no se comprenderá según un modelo naturalista y causal entre dos entidades, sino como una correlación diversificada entre actos de conciencia que son ‘intenciones’, y los objetos intencionados por aquellos” (Paredes Martín, 2005, p. 84). Así, el desarrollo de la intuición que está “más allá” de la percepción de objetos individuales responde a la necesidad de explicitar el sentido (y ejecución) de la correlación entre pensamiento e intuición del conocimiento lógico-matemático. Ahora bien, entender esta nueva perspectiva exige ir respondiendo paso a paso ciertos cuestionamientos, p. ej., ¿qué significa objetualidad categorial? ¿Cómo son posibles esas objetualidades categoriales? ¿Qué

---

[212] Según Paimann, Husserl rompe así el programa kantiano y al mismo tiempo lo agudiza, pues sitúa la cuestión de la combinación de los elementos sensibles y conceptuales en una esfera no atendida por Kant: las síntesis pasivas (2002, p. 288).

[213] De aquí en adelante los términos “objeto categorial”, “objeto de orden superior” y “objetualidad categorial” serán usados como sinónimos. Todos estos términos denotan a aquellos objetos que existen en niveles superiores a los de los individuos empíricos. Los objetos categoriales incluyen las especies formales y estados de cosas, así como las categorías formales de la lógica, la ontología formal y las matemáticas.

relación tienen con las entidades matemáticas? ¿Pueden ser *re-presentadas* y aprehendidas de manera subjetiva? ¿Cómo se obtiene la idealidad de lo universal a partir de lo sensible individual? En lo que sigue, expondré con detalle los conceptos relacionados a la intuición categorial, para después responder una a una las preguntas antes planteadas. Al final del apartado, presentaré la propuesta de Husserl sobre las objetualidades matemáticas en el marco de esta sexta investigación lógica.

§13. El marco general de la doctrina de la intuición categorial. Las palabras y las cosas

En la sexta de las investigaciones lógicas, Husserl se esfuerza por reconciliar los resultados de los *Prolegómenos* y de las cinco investigaciones lógicas anteriores.[214] Dicho explícitamente, la cuestión decisiva es ahora acoplar, por un lado, la idealidad objetiva de las entidades que pertenecen a la esfera teórico-formal de la lógica pura o de la teoría pura de la ciencia (trascendentes con respecto a toda subjetividad empírica) y, por otro lado, las vivencias concretas en cuya referencia objetiva se instancian esas entidades ideales. Esta reconciliación comienza a adquirir forma en la quinta investigación lógica, pues en ella se determina que el acceso a las entidades que pertenecen a la esfera formal (y no formal) es a través de la "referencia intencional". Atenderé, aunque sea brevemente, este último concepto para comprobar cómo anticipa el tema fundamental de la sexta investigación: la consideración de la esencia de las vivencias en su referencia a una objetividad categorial:

En la introducción a la quinta investigación, Husserl señala la tarea a cumplir:

[214] "El tratamiento de la intuición categorial en las *IL* se contextualiza dentro de una fenomenología de la expresión lingüística, que Husserl expone y desarrolla especialmente en las Investigaciones I y VI —aunque también se encuentran parágrafos importantes sobre ese tema en otros lugares de la mencionada obra—. Por ello cabe afirmar que la teoría husserliana de la intuición categorial es parte integrante de una teoría fenomenológica del signo y de la dimensión ontológica subyacente (a la que se debe, en cierta medida, el modo como se plantea la relación entre lo universal y lo particular, y entre el todo y las partes) así como del tratamiento epistemológico de la relación entre representación y concepto" (Paredes Martín, 2005, p. 77-78).

> En la segunda investigación hemos aclarado en general el sentido de la idealidad de las especies y, así, al mismo tiempo, el sentido de la idealidad de las significaciones que importa a la lógica pura. Como a todas las unidades ideales, a las significaciones les corresponden posibilidades reales y, eventualmente, realidades efectivas: a las significaciones *in specie* les corresponden los actos del significar, y aquéllas no son sino caracteres de acto de estos actos, captados idealmente. Pero ahora se plantean nuevas cuestiones a propósito del género de las vivencias psíquicas en las que tiene su origen el sumo género *significación* […] Se trata, pues, de responder a la pregunta por el origen del concepto de significación y de sus especificaciones esenciales [...] En íntima relación con ello se encuentran otras cuestiones: las significaciones han de hallarse en intenciones de acto que pueden entrar en cierta relación con la intuición [...] Surge, pues, la tarea de describir esta notable relación fenoménica y de definir su papel lógico, o sea de esclarecer los conceptos de conocimiento que se basan en ella (Hua XIX/1,352).

No hay que perder de vista el giro que representa la cita anterior respecto del "cuasi-platonismo" de las investigaciones previas. En efecto, parece que Husserl da un giro de 180 grados al privilegiar ahora aquellos *actos* que tienen por correlatos, precisamente, la *idealidad* del significado ya estudiada ampliamente en los *Prolegómenos*, en la primera, segunda y cuarta investigaciones lógicas. De alguna manera, ya en 1901, Husserl creía posible llegar a una clarificación y fundamentación del *cogitatum* (o "en sí") desde la *inmanencia* del *cogito* (o subjetividad), pero todavía no tiene el discernimiento de cómo hacerlo. Hay que aclarar, preliminarmente, qué se quiere decir con esto. Por ello, me regresaré brevemente a la quinta investigación lógica, específicamente en los análisis del concepto de "referencia intencional".

La referencia intencional, concepto heredado de Brentano (§§9-10), es para Husserl una peculiaridad íntima de ciertas vivencias; la nota esencial de los fenómenos psíquicos de poseer una intención por medio de la cual ellas se refieren al *algo* (como el juzgar, el imaginar, el percibir, etc.). Ya nos daremos cuenta que ese *algo* (objeto), según se aclarará en la quinta investigación, es intencional porque únicamente "existe" como correlato de una vivencia.

> Las vivencias intencionales poseen la peculiaridad de relacionarse de distintas maneras con objetos representados. Lo hacen, justamente, en el sentido de la intención. En ellas hay mentado un objeto: su mira está puesta en él en el modo de la representación o, a la vez, del juicio[...] Cabe, naturalmente, que haya en la conciencia esta vivencia con esa su

> intención sin que exista el objeto, e incluso quizás sin que pueda éste existir. Que el objeto está mentado quiere decir que el mentarlo es vivencia; pero, en estos casos, él es un objeto meramente putativo, es, en verdad, nada [...] Que yo me represente al dios Júpiter quiere decir que tengo cierta vivencia representativa, que en mí (en mi conciencia) se lleva a cabo la presentación del dios Júpiter. Por más que se desmembre en el análisis descriptivo esta vivencia intencional, en ella, naturalmente, no podrá hallarse al dios Júpiter (Hua XIX/1, 385-386).

Bien entendido este asunto, lo que se trata de advertir aquí es que la teoría de la intencionalidad, en la primera edición de las *Investigaciones lógicas*, no es una teoría de las relaciones (Benoist, 2001b, 118). Husserl considera incorrecto afirmar que la conciencia *entra en relación* con el objeto, como si fueran dos cosas entre las cuales se produce un proceso real que las relaciona mutuamente (§11). La referencia intencional no es, por tanto, una relación entre lo interno y lo externo, ni una relación interna entre dos componentes reales de la conciencia. Dicho de otra manera, la intencionalidad no es una relación entre dos pilares: un yo y una referencia objetiva, y tampoco es ninguno de esos términos. Esta falta de necesidad del "yo" como polo de una relación entendida como una actividad entre dos términos, coincide con la teoría no egológica de 1901.

> [...] Las vivencias con una conciencia que las vive, un individuo psíquico o un yo, no remite a ningún dato fenomenológico peculiar [...] el yo permanecerá siendo un objeto individual que, como todos los objetos de tal índole, no tiene fenomenológicamente otra unidad que la que le viene dada por sus propiedades aunadas y se funda *eo ipso* en el acervo del contenido propio de éstas [...] Va de suyo que el yo no es nada peculiar que se cierna sobre las múltiples vivencias, sino que es sencillamente idéntico a la unidad propia de éstas (Hua XIX/1, 363-364).

En todo caso, como lo indica Benoist, en la primera edición de *Investigaciones lógicas* "los actos no tienen otro soporte más que ellos mismos"; se basan "en su propia efectividad y son ellos mismos los vectores y la puesta en acto de la relación, pero no constituyen ninguno de los términos" (2001b, 121). Más concretamente, la referencia intencional no es una propiedad de los objetos, sino de ciertas vivencias a las que es inherente referirse o "mentar" algo en cuanto objeto. Este énfasis de Husserl en la intencionalidad en sí misma parece mostrar el carácter *superfluo* o innecesario de la existencia *real* del objeto intencionalmente referido. Se trata, pues, de una exigencia que en cierto modo viene planteada desde el momento en que se afirma que la existencia o no existencia del objeto no afecta para nada a la índole de la referencia intencional como tal:

> El objeto "inmanente", el objeto "mental" no pertenece, pues, al acervo descriptivo de la vivencia, o sea que, en verdad no es en absoluto ni inmanente ni mental. No existe, por cierto, tampoco *extra mentem* [...] Si, en cambio, existe el objeto intendido, no hace falta cambiar nada por lo que hace a lo psíquico. Lo dado es para la conciencia esencialmente lo mismo tanto si existe el objeto presentado como si es una ficción o quizá, incluso, absurdo (Hua XIX/1, 386-387).

La función intencional de mentar un objeto y de dirigirse a él de un modo determinado no sólo hace valer en general la dimensión de apertura de la conciencia, sino que también permite especificar los distintos modos de donación y poner de relieve el papel de la intencionalidad en los actos de conocimiento. Precisamente sobre este punto, se pueden tener dos tipos de vivencias: la que consiste en mentar significativamente sus objetos y la de ofrecer "en persona" (*leibhaftig*) el objeto intencionado o representado. En esta última es la intuición (de manera genérica) la que nos pone ante la presencia efectiva del objeto. Pero dado que la intuición es, además, un acto vinculado a la dimensión epistémica de la intencionalidad, resulta indispensable explicar cómo es posible la relación entre la intención significativa y la "intención intuitiva". Esta relación resulta indispensable para entender el planteamiento de la intuición categorial. El procedimiento de Husserl para hacer esta averiguación consiste en presentar la cuestión de la relación entre la intención significativa y el cumplimiento de la misma. De este modo, los conceptos de "intención" y cumplimiento (o plenificación o intuición impletiva) aseguran la posibilidad de situaciones vivenciales que efectivamente proporcionan la presencia de los objetos mentados. Es sólo en relación con el proceso fenomenológico de cumplimiento que el estado y la función de los conceptos de cognición, evidencia y verdad pueden determinarse con mayor precisión y, por tanto, el acercamiento a las objetividades categoriales se hace más visible. Explico con detalles estas últimas líneas.

§14. Síntesis de cumplimiento y decepción

¿Qué significa que las intenciones significativas, esenciales para que la expresión sea algo más que una simple voz, puedan ser plenificadas por otros actos que no son *esenciales* a ellas? En el §3 de la sexta investigación lógica, Husserl señala que, en el caso de las expresiones significativas, el juicio no recae sobre la percepción, sino sobre lo *percibido*. Con esto queda indicado, según Husserl, que la percepción es un acto que determina la significación, pero no la contiene (§5). Ahora bien, si es cierto que la percepción no constituye el núcleo de la significación de un enunciado, aunque sí contribuye en algo, cuál es, pues, esa contribución. En las expresiones significativas como “este gorrión echa a volar” se observa que la expresión está dirigida, de manera particular y específica, “a cierto objeto/sujeto (gorrión) del cual se predica algo (salió volando)”. Aquí ocurre algo interesante: un tipo de relación nominal en el que el nombre se “superpone” a la cosa percibida como si fuera un “traje a la medida”. Esta relación nominal, afirma Husserl, puede ser estática, cuando la expresión señala de manera directa al objeto percibido, y puede ser dinámica, cuando primero se presenta una intención significativa y luego la intuición correspondiente. En ambos casos existe una correspondencia entre la esencia intencional del acto intuido y la esencia significativa del acto expresivo, es decir, se cumple en la intuición lo dado en la intención significativa. Esto último es denominado por Husserl, cumplimiento o intuición impletiva.

El cumplimiento ocurre, pues, cuando la expresión significativa, que funciona primero de un modo meramente “simbólico”, se *asocia* a una intuición (más o menos) correspondiente. Ella, la intuición, pone delante de nosotros lo que la intención mienta, pero de un modo “relativamente más directo” o “más propio” en comparación con la pura mención vacía. Dicho de otro modo, en la intuición está presentada la cosa objetiva que era “meramente pensada” en el acto simbólico, haciendo intuitivas (casi) todas las determinaciones con que era meramente significada.[215] En los términos de las

[215] Aquí aparece el primer sentido de evidencia del que hablamos en el §5 de este aparatado, a saber, en el que la intención intuitiva da su plenitud a la intención signitiva que estaba vacía. Husserl señala, en el §38 de la sexta investigación, que:

> Hablamos de evidencia en un sentido laxo siempre que una intención ponente (principalmente una aserción) encuentra su confirmación por medio de una percepción correspondiente y plenamente adecuada, aunque esta sea una síntesis adecuada de percepciones particulares conectadas. En este caso puede hablarse con buen sentido de ‘grados y niveles de la evidencia’ [...]. Pero el ‘sentido conciso’ de evidencia, en la ‘crítica del conocimiento’, se refiere exclusivamente a este último término infranqueable, al ‘acto de esta síntesis de cumplimiento

Investigaciones lógicas, Husserl dice que la esencia intencional del acto intuido se adecua a la esencia significativa del acto expresivo. En cierto sentido, a todas las intenciones les corresponden, desde el punto de vista de la posibilidad, un cumplimiento o, al menos, alcances parciales de sus correlatos objetivos.

Ahora bien, la síntesis de cumplimiento (*Synthesis der Erfüllung*) tiene su contraparte o su antítesis en la decepción (*Enttäuschung*). La decepción ocurre cuando los aspectos mentados se revelan de *otro modo* al que habían sido mentados, lo cual implica una determinación diferente (*Andersbestimmung*) o en otra dirección. En este tipo de acto o síntesis, lo intuido aparece de manera distinta, como *no-el mismo*, como *otro objeto* al acto de intención (§11). Empero, ella no mienta una mera privación del cumplimiento, sino un nuevo hecho descriptivo en el que opera una forma de síntesis de la distinción. Esto último se debe a que en la decepción una parte complementaria sí se cumple, sí se presenta, pues, cierta concordancia. Finalmente, cumplimiento y decepción coinciden en una cosa: la dirección hacia el objeto.

En el cumplimiento vivimos, pues, el "*esto* es ello mismo" en su forma cumplida. Sin embargo, las expresiones antes mencionadas del "relativamente" o del "más o menos directamente" indican que la síntesis del cumplimiento mantiene una gradación que va desde los actos de menor plenitud cognoscitiva hacia los de más rica plenitud, de tal suerte que en el acto impletivo se observa cierta incompletud que consiste en la presentación cercana, pero no directa, de la cosa misma intuida. Dicho con mayor detalle, la representación de lo intuido es incompleta por dos motivos:

(I) El esquema espacial de la cosa física. El objeto de la percepción no está dado plena y totalmente como lo que es él mismo. De hecho, aparece matizado desde cualquier ángulo desde el que se le observe, es decir, algunas de sus partes no caen dentro de la percepción, pues unas aparecen por este lado, otras por aquél. En cada matiz está

más perfecta', que da a la intención —por ejemplo, a la intención judicativa— la absoluta plenitud de contenido, la del objeto mismo. El objeto no es meramente mentado (*gemeint*), sino 'dado'— en el sentido más riguroso— tal como es mentado e identificado con la mención. Por lo demás, es indiferente que se trate de un objeto individual o universal, de un objeto en sentido estrecho o de una situación objetiva (el correlato de una síntesis identificadora o distintiva). (Hua XIX/1, 651).

ahí “uno y el mismo objeto”.[216] Es el objeto mismo el que aparece, ahora por un lado, ahora por aquél. Unas partes se hacen visibles en este momento, otras en el momento siguiente. Si se habla de las partes (digamos de las patas de una mesa de billar), también ellas se ofrecen en la percepción matizadas: en un momento se dan, por un lado, en otro momento por otro. Ahora bien, dado que el carácter intencional de la percepción consiste en presentar (§11) y que lo presentado se da siempre de una manera matizada, la unidad de los escorzos perceptivos se refiere a una sola intención a modo de una concatenación o fusión de actos parciales. Se trata, pues, para decirlo claramente, de una unidad fenomenológica concretada en un solo acto de percepción de una sola y misma objetividad.

(II) La necesidad de cumplimiento de la intención con lo pensado. La función de la intuición consiste, según hemos visto, en traer a presencia la mención. Pero la mera sensibilidad no puede dar un cumplimiento satisfactorio a todas las intenciones, pues los objetos de la percepción sensible exhiben formas complejas de presentación que no se dan a la conciencia sensible. Aquí se vuelve necesario ampliar el concepto de percepción por encima de los límites de la sensibilidad, de no ser así el objetivo de su *cumplimiento* en sentido fenomenológico quedaría desvirtuado. En suma, la teoría de la intuición quedaría incompleta si se quedara en la mera intuición sensible y no diera una explicación de la base intuitiva-categorial que respalda a la predicación.

[216] En la primera edición de las *Investigaciones lógicas*, Husserl “interpreta el escorzo perceptivo como signo por semejanza de una parte del objeto total (el contenido perceptivo puro remite a la parte correspondiente mediante mera semejanza)” (Fernández Beites, 1999, p. 140). La semejanza (*Ähnlichkeit*) es entendida ahí como una correspondencia entre dos especies que no necesariamente coinciden, si lo hicieran estaríamos hablando de otra cosa y no de semejanza, su síntesis es motivo de la ligazón entre las distintas apariciones del objeto, que no se daban directamente sino indirectamente, no por similitud sino por contigüidad, no intuitivamente sino por representación simbólica. Lo que se advertía en *Investigaciones lógicas* era, en cierto modo, la afirmación de que lo exhibido en la percepción se sujetaba a los contenidos exhibitivos; no será sino hasta las lecciones de *Cosa y espacio* (Hua XVI), cuando Husserl ensaye la posibilidad de un nexo “sintético” que no pertenezca meramente a la sensación sino a la totalidad de lo que aparece en la conciencia unitaria, esto es, a la dación objetiva total. Sobre este último punto remito a mi tesis de maestría en Filosofía “La constitución fenomenológica del espacio y la corporalidad: un análisis de *Ding und Raum. Vorlesungen 1907* de Edmund Husserl”, División de Ciencias Sociales y Humanidades, Universidad de Guanajuato, 2012.

Gracias a este nuevo emplazamiento, asistimos a una nueva caracterización que nos acerca a la noción de intuición categorial: los actos fundados.

§15. La aparición de la intuición categorial[217] como acceso a las objetualidades categoriales

La posibilidad de encontrar un correcto paralelismo entre la expresión y lo expresado por ella se establecerá a partir del reconocimiento de que, junto a los actos de receptividad sensible (actos sensibles), existen otros tipos de actos diferentes (pero fundados en ellos) los cuales hacen posible el acceso a un grado más complejo de objetividad. Los primeros son nombrados como actos básicos o fundantes (*Grundakte, fundierende Akte*) y los segundos como actos fundados (*fundierte Akte*) (§46). ¿Cuál es la diferencia entre ellos y cómo operan?

Toda intuición, dice Husserl, se caracteriza por presentar el objeto mismo. Efectivamente, en la sensibilidad encontramos elementos materiales (*stoffliche Elemente*) originarios o primarios que son los que, precisamente, dan cumplimiento a la intención. Ahora bien, el gran descubrimiento de Husserl, en la sección II de la sexta investigación lógica titulada "Sensibilidad y entendimiento", fue constatar que, en el cumplimiento de los enunciados perceptivos tomados íntegramente, siempre queda un resto o excedente (*Überschuss*) en la significación que no encuentra confirmación en los elementos materiales. Dicho con mayor claridad, se tiene, por un lado, a los componentes de las expresiones nominales y su cumplimiento en una intuición, y se tiene, por otro lado, a aquellas partes de la expresión que no tienen la posibilidad de ser intuidas o de tener, al menos, algún correlato sensible o algún tipo de representación.

Tomemos como ejemplo de lo anterior la siguiente expresión: "el tucán es un animal de color negro y amarillo". De esta proposición únicamente son susceptibles de ser percibidos, de manera sensible, el sujeto de la oración (*tucán*) y los momentos cromáticos

[217] Para una mayor comprensión del concepto intuición categorial en las obras de Husserl se recomienda leer, Tugendhat (1970), Sokolowski (1970), Willard (1984), Rosado Haddock (1987), Bernet (1988), Lohmar (1989), Seebohm (1990) y Cobb-Stevens (1990).

amarillo y *negro*; los demás elementos, que también forman parte del enunciado completo (*el*, *y*, *de*) no son intuidos, incluida, por supuesto, la cópula (*es*), la cual no se refiere a ninguna nota real del objeto. Ella es, como todos los anteriores, un elemento formal que exige un modo de cumplimiento efectivo:

> Recordemos aquí la proposición kantiana: *el ser no es un predicado real* (*Das Sein ist kein reales Prädikat*) […] esta afirmación indica exactamente lo que ahora queremos poner en claro. Puedo ver el color, no el *ser* coloreado. Puedo sentir la suavidad, pero no el ser suave. Puedo oír el sonido, pero no el *ser* sonoro. El ser no es nada *dentro* (*im*) del objeto, ninguna parte del mismo, ningún momento inherente a él, ninguna cualidad ni intensidad; pero tampoco ninguna figura, ninguna forma interna en general, ninguna nota constitutiva, como quiera que se la conciba. Tampoco es el ser nada *fuera* (*an*) de un objeto; así como no es una nota real interna, tampoco es una nota real externa, ni, por ende, una «nota» en sentido *real* y en general (Hua XIX/1, 665-666).

Lo mismo sucede con otras notas: las preposiciones, los artículos, las formas cuantitativas y numéricas, etc.[218] Para que estas formas y demás elementos de un estado de hechos puedan donarse de manera *análoga* a una intuición sensible, deberán darse por medio de un tipo de intuición de lo no sensible.[219] De esta exigencia, Husserl extraerá, consecuentemente, la necesidad de ampliar los conceptos de percepción y de intuición, pues, en efecto, sólo habrá auténtico cumplimiento allí donde los elementos materiales y formales puedan cumplirse. A esta peculiar forma de intuición de lo no sensible, Husserl la denomina intuición categorial, y al correlato de la intuición categorial, objetividad categorial. El rasgo distintivo de la intuición categorial, en contraposición a la intuición sensible, consiste en ser un acto fundado (*fundiert*), [220] es decir, necesariamente apoyado en las intuiciones sensibles (o fundantes).

---

[218] De acuerdo con Husserl, bajo la noción de términos formales (*Formworte*) también se incluyen los artículos, los pronombres numerales definidos e indefinidos, los pronombres demostrativos y relativos, también las conjunciones coordinantes "y", "o", las conjunciones que dan expresión a las constantes lógicas fundamentales y en general los términos sincategoremáticos.

[219] Así, en clara contraposición a Brentano, Husserl no acepta que los conceptos categoriales de, por ejemplo, la lógica y la ontología formal tales como el ser y no ser, unidad, pluralidad, totalidad, número, fundamento, consecuencia, etc., puedan surgir por medio de la reflexión sobre determinados actos mentales. Algunos conceptos sí surgen de esta manera, como el juicio, la afirmación, la negación, el coleccionar y el contar (§44), pero estos no son los conceptos categoriales del corazón mismo de la lógica. "El ser no es un juicio, ni un componente real de ningún juicio. Así como el ser no es ningún componente real de ningún objeto externo, tampoco es un componente real de ningún objeto interno" (§44).

[220] Este acto fundado no implica, para Husserl, que la categoría sea una parte real —lo que él denomina un pedazo del objeto individual que sirve para fundarlo— más bien, su estado es el de una parte abstracta, esto es, un momento del conjunto complejo en el que una cualidad empírica de un objeto individual, por ejemplo, el rojo de una mesa percibida, se presenta como un ejemplo del objeto categorial, rojo en sí, que también se

Así, mientras que en la percepción sensible el objeto se presenta de modo simple (dado inmediatamente) y como un acto unirradial (*einstrahlig*) (Hua XIX/1, §§46-47), en la intuición categorial se da un modo de donación que no es de golpe, sino plurirradial (*vielstrahlig*), y necesita de otros actos para subsistir. Del mismo modo, mientras que la autonomía y homogeneidad rigen en la constitución de la intuición sensible, la subordinación y heterogeneidad lo hace con la intuición categorial.[221] Sin seguir al pie de la letra lo dicho por Sokolowski (1981, p. 128), podemos suponer que la intuición sensible (pre-categorial) es equivalente a una intuición no articulada sintácticamente, mientras que la intuición categorial sí lo es. Lo esencial de la intuición categorial es que en ella *se da* una referencia intencional unitaria, una objetividad de nivel superior respecto de los objetos simples. Detrás de todo esto se encuentra la idea de que lo categorial es, por una parte, completamente distinto de lo material (elementos sensibles de un enunciado) y, por otra parte, pertenece a una objetividad de orden superior que se nos da por sí misma.

Es importante destacar otras dos cuestiones. En primer lugar, Husserl expresamente señala que la noción de intuición categorial es un *analogon* de la percepción sensorial ordinaria (o intuición sensible). Cito a Husserl: “La misma relación que el objeto sensible mantiene con la percepción sensible, mantiene la situación objetiva con el acto de darnos cuenta, acto que la ‘da’ (de modo más o menos adecuado) (Hua XIX/1, 669.) La analogía es válida porque los actos categoriales comparten, con los juicios y las presentaciones ordinarias, tres aspectos esenciales: la cualidad intencional, la materia intencional y un contenido representativo,[222] siendo este último el momento que constituye la diferencia entre

---

presenta. Es decir, la presentación de la categoría rojo, en tanto momento abstracto de la silla percibida, no es una pieza más como sí lo son las patas o el respaldo (Burt Hopkins, 1997, p. 155).

[221] Pero, además, resulta ser de una importancia doble: por un lado, la intuición categorial es la respuesta final al psicologismo lógico desde una teoría fenomenológica del conocimiento que trata de la especificidad intuitiva de los objetos ideales. Por otro lado, la intuición categorial revela la distinción ontológica entre entidades sensibles e ideales (Bernet, 1988).

[222] La cualidad de un acto es entendida como el carácter general del acto que designa el modo en el cual un objeto está intendido (*deseado*, *juzgado*, *dudado*, *representado*, etc.). La materia intencional comprende las características atribuidas al objeto, pero también su “articulación y su forma” en la cuales estas características son atribuidas. La materia será aquello que *da dirección a un objeto* y no a otro. Tanto la materia como la cualidad intencional son dos momentos ingredientes del acto, son dependientes e inseparables; no podría existir el uno sin el otro; juntos, la materia y la cualidad del acto, forman la esencia intencional del acto. La cualidad y la materia también se asocian con una tercera dimensión de variación, la dimensión de lo que Husserl llama el contenido representante. Podemos considerar este contenido como la característica de nuestros actos de estar más o menos cumplidos intuitivamente, en su estar más o menos en contacto con las cosas mismas hacia la que nuestros actos se dirigen. En Zahavi (1992) puede encontrarse un estudio más detallado de cada uno de estos conceptos tomando en cuenta la primera edición de las *Investigaciones lógicas*.

la significación categorial y la intuición sensible. Dicho de este modo, cabría aceptar que lo dado en la intuición categorial es tan originario como lo dado en la percepción sensible. En segundo lugar, según la doctrina de la intuición categorial, los actos de orden más básico pueden ser: (1) actos de percepción de ciertos momentos específicos de las cosas percibidas y (2) actos de aprehensión de estos momentos en tanto situados en relaciones de similitud exacta o de identidad; también el tipo de relación puede ser de relación mutua, de las partes con el todo, de posición relativa, de cantidad, etc. Más adelante explicaré esto último.

Dentro de la intención categorial total, el acto de nivel superior se referirá a los objetos de los actos simples en el modo del "mentar conjuntamente" (sintético-categoriales). De hecho, este es el sentido original del percibir categorial. Por eso "[…] se convierten en 'objetos' *las colecciones, las multitudes indeterminadas, las totalidades, los números, las disyuntivas, los predicados (el ser justo), las situaciones objetivas*; y en 'percepciones', los actos, por medio de los cuales aparecen como dados. […]" (Hua XIX/1, 672). Desde luego, un objeto categorial no es, como acabamos de ver, un "objeto" en el sentido corriente, sino un correlato (de nivel superior) del pensar determinante. Se constituye, precisamente, como correlato de una conciencia "referencial" en los actos sintéticos y es, por tanto, una objetividad formada categorialmente de tal o cual forma.

§16. Las leyes puras de la intuición categorial que rigen a los objetualidades categoriales

Como señalé al principio del apartado, a la pregunta central de la fenomenología de cómo transitar entre lo uno y lo múltiple (o cómo multiplicar lo universal en lo diverso), subyacen modos de transformación, mediaciones, concatenaciones o correlaciones, que llevan a la explicitación de las categorías universales en la pluralidad de manifestaciones. Dentro de esa mediación de lo universal se puede detectar un doble movimiento (o red relacional libre) siempre en permanente apertura: (1) una serie de ascensos y descensos en el entendimiento y (2) una búsqueda de invariantes detrás de las oscilaciones concretas y formales. En lo que sigue, veremos cómo algunos incisivos aportes de la fenomenología de la sexta de las investigaciones lógicas responden, de manera clara, a sofisticadas formas conceptuales de las ideas matemáticas.

En la esfera de los actos categoriales también existe una regulación legal para la formación, *in specie*, de nuevas categorías en sentido objetivo.[223] Estas *leyes ideales*, descritas en el §62 de la sexta investigación lógica, determinan qué variaciones de una forma categorial son válidas. Es por esta razón que Husserl las nombra *leyes del pensamiento propio*. Para este trabajo los denominaré como ***leyes de composición de invariantes***, pues esto es justamente lo que hacen: ordenan, componen y delimitan la variedad de nuevas ordenaciones y transformaciones de las formas categoriales sobre la base de una materia que permanece idéntica (Hua XIX/2, 718). Está por demás agregar que estas leyes tienen el carácter de leyes completamente puras, analíticas e independientes de la índole particular de las materias sobre las que las categorías se asientan. "Su expresión general no contiene, por tanto, nada de especies materiales, más bien, utiliza sólo símbolos algebraicos como portadores (*Träger*) de las representaciones indeterminadamente universales de ciertas materias cualesquiera, pero permanecen idénticas consigo mismas" (Hua XIX/2, 718):

1) Ley de la ***composición y asignación ideal***: no podemos intuir la materia sensible en cualquier forma categorial, es decir, no les corresponde, *a cada uno* de los complejos categoriales posibles, un tipo de objetividad categorial (Hua XIX/2, 717).
2) Ley de la ***variación y la identidad***: la multiplicidad de nuevas formas categoriales se establece sobre la base de una materia que permanece idéntica (Hua XIX/2, 718).
3) Ley de la ***correlación ideal***: las condiciones ideales de posibilidad de una intuición categorial en general son, correlativamente, las condiciones de posibilidad de los objetos de la intuición categorial (Hua XIX/2, 718-719).
4) Ley de la ***fundación de géneros***: los contenidos de todos los géneros pueden ser formados por todas las categorías (Hua XIX/2, 719).

Bajo el título de ley de la composición y asignación ideal se establecen dos cosas: (1) que las objetualidades categoriales se constituyen únicamente como actos fundados (composición) y

[223] Considero que existe una especie de paralelismo con la *morfología* de la significación o gramática universal de la cuarta *investigación lógica*. Este paralelismo implica que las leyes gramaticales, con las cuales unificamos las formas de significación, corren a la par de las leyes de la intuición categorial con las cuales aprehendemos una objetividad categorial.

(2) que no a todas las combinaciones significativas (posibles) les corresponde un tipo de objetividad categorial. Aquí es necesaria una brevísima explicación. Husserl dice que el paralelismo entre los tipos de significación posible y una objetividad categorial sólo puede (y necesita) existir teniendo como base a las formas sensibles primitivas, pues únicamente las significaciones primitivas tienen su origen en la plenitud de una intuición correlativa. Así, a las expresiones como "algún A no es B" (un perro no es gris) no les corresponde algo así como una "objetividad categorial negativa", más bien la fórmula "no es" es equivalente, en el cumplimiento del juicio o en la formación de la materia correspondiente, a la operación de disyunción de dos elementos representados y colocados en relación de exclusión (o el perro es gris o el perro es negro);[224] aquí sí se puede tener cumplimiento o decepción, según sea el caso (Altobrando, 2017).

Bajo la *ley de la variación y la identidad* se regula y se determina qué variaciones, modificaciones y ordenaciones de las objetualidades categoriales son posibles y cuáles rompen el esquema originario y determinado (la identidad de la materia). Según esta ley, existe una amplia libertad de enlazar, relacionar, generalizar y subsumir formaciones categoriales, pero por grande que sea esta libertad, existen límites legales. En las nuevas formaciones deben existir conexiones imposibles de romper. Por ejemplo: la relaciones entre los todos y las partes puede dar paso a nueva construcción mereológica de diversos grados, pero no de tal manera que percibamos la parte como todo y el todo como parte. La puridad de esta ley se establece a partir de su independencia de todo tipo de particularidades, pues estas no son consideradas de manera esencial, sino tan sólo como depositarias de la objetualidad supuesta en cada caso.

La *ley de la correlación ideal* especifica el campo de jurisdicción de las objetualidades categoriales en tanto que describe su realización de tal y cual manera sobre la base de tales y cuales intuiciones fundantes correspondientes. Dicho de otra manera, la intuición de una objetualidad formada categorialmente sólo es posible analizando las

[224] Por tanto, en el contexto de los juicios negativos, siempre hay una intención de un signo positivo. El "no" únicamente indicaría el contraste entre las partes de las dos intenciones. En conclusión, el "no ser algo" no constituye un genuino estado de cosas. *cfr.* (Altobrando, 2017), (Lohmar, 1991/1992) y (Benoist, 2001).

condiciones que hacen posible la forma categorial correspondiente, aunque sólo sean imaginaciones o representaciones.

La *ley de la fundación de géneros* dicta que sólo existe un círculo idealmente cerrado de transformaciones posibles en formas siempre nuevas. Esto significa que las leyes anteriores enseñan que cuando un material dado asume alguna forma, entonces hay un conjunto fijo de otras formas que tal material puede asumir. En resumen, las intuiciones categoriales se integran en conjuntos unificados cuya base son una o más intuiciones básicas fundantes articuladas según sus propiedades (Cobb-Stevens, 1990).

Las leyes anteriores son básicamente *redes* y *procesos* que "atrapan" el tránsito de la unidad y la variedad. Son ***redes complejas*** que se entrelazan entre sí en *diversos* universos de una manera sólida y firme. Ellas demuestran cómo, debajo de múltiples situaciones concretas, subyacen procesos complejos que ayudan a la conformación de los objetos ideales que a su vez ayudan a comprender el contexto inicial. Pero también demuestran que, en la filosofía de las matemáticas, la imbricación de fragmentos de realismo e idealismo no sólo es posible sino *necesaria*. Finalmente, estas leyes o redes complejas rigen, pues, a las objetividades categoriales y permiten una serie de niveles ascendentes de los que enseguida hablaré. Teniendo en mente la noción de intuición categorial como acceso a las objetualidades categoriales, así como las leyes que en ellos rigen, presento, pues, los tipos de intuición categorial y sus correspondientes objetualidades categoriales, así como sus niveles constituyentes en el marco de la filosofía de las matemáticas presente en esta sexta investigación lógica.

§17. *Primer grupo* de actos categoriales y sus correspondientes objetos categoriales

En este *primer grupo* de actos categoriales se presenta un tipo de *redimensión* de la *universalidad* que no se "acopla" a la serie de intuiciones sensibles. Por tanto, la tensión entre "razón" y "sensibilidad" no se presenta aquí como antagónica o dual, sino que, más bien, cede el paso a una *gradualidad* ascendente que, como tal, se acerca más a uno de los extremos de la polaridad. En otras palabras, en este primer grupo se trata de estudiar, a partir del anterior *complejo de leyes*, ciertos *tipos* de actos categoriales que, aunque fundados en actos sensibles, no los incorporan como parte constituyente.

Específicamente en los §§41, 47 y 52 de la sexta investigación lógica, Husserl tematiza aquellos actos categoriales que no incorporan a sus actos sensibles como parte constituyente, su relación se establece entre unidades ideales. Para este tipo de intuición categorial, el objeto dado en la intuición sensible es únicamente una instancia o un ejemplo de un *género* particular: “pero lo individual intuitivo no es lo mentado en este caso, que, a lo sumo, funciona como un caso singular, como un ejemplo, o sólo como un tosco análogo de un ejemplo de lo universal, al que se endereza la intención” (Hua XIX/2, 661). Estos casos o tipos corresponden a la *universalización* (§41), la *generalización* (§47) y la *abstracción ideatoria* (§52), en tanto apoyo de las anteriores. Todos estos tipos de actos categoriales son visibles dentro de la esfera de la lógica y las matemáticas. Enseguida detallo lo anterior.

En el §41, Husserl da cuenta del tipo de objetualidades categoriales pertenecientes a la universalización.

> Agréganse, entonces, principalmente los juicios que no tienen una referencia determinada a algo individual que pueda ser dado por alguna intuición, sino que expresan de modo general relaciones entre unidades ideales. También las significaciones generales de estos juicios pueden ejecutarse sobre la base de una intuición ‘correspondiente’, dado que su origen reside inmediata o mediatamente en la intuición. Pero lo individual intuitivo no es lo mentado aquí, ello funge como caso singular, como ejemplo, o sólo como tosco análogo de un ejemplo, de lo universal, que es lo único que interesa a la intención (Hua XIX/q, 661).

La universalización se caracteriza por ser una vivencia de conocimiento universal en la que el objeto dado en la intuición sensible (“la flor *amarilla* que ahora mismo percibo”) es *un ejemplo*, en este caso visual, del momento cromático *amarillo*. El objeto intuido no se presenta como lo que es mentado en ese momento, sino que funciona como un *ejemplo aclarativo* de una mención genérica, siguiendo el ejemplo anterior, se trata de proporcionar una intuición justificativa del género cromático *amarillo*. Ahora bien, se trata de una vivencia de conocimiento universal porque nadie diría que el “amarillo” en una hoja de papel o en un autobús escolar o en una cascara de plátano están a la base o como fundamento del género cromático amarillo.

Otros ejemplos más acordes a nuestra investigación se encuentran en los dibujos, formas o figuras particulares (rectas, ángulos o triángulos dibujados en libros, pizarras, cuadernos, etc.) que sirven como *apoyo* para los juicios o proposiciones matemáticas. Por ejemplo, un triángulo dibujado en el pizarrón es una mera ayuda ilustrativa, pero *no* constituyente, de una objetividad fundada. "Se sabe que la figura en sentido geométrico es un límite ideal (*ideale Grenze*) que *in concreto* no puede mostrarse nunca intuitivamente" (Hua XIX/2, 662). Así, si bien es cierto que las operaciones geométricas se "apoyan" en intuiciones individuales de dibujos en tanto "ejemplares" ilustrativos, también es verdad que los teoremas o proposiciones fundamentales únicamente tratan de entidades universales o generales. Por ello, la universalidad esencial a la que se refieren las objetividades, en este caso geométricas, es una universalidad incondicionada, muy diferente de la generalidad inductiva de las leyes de la naturaleza y aún más diferente de las *pseudo* leyes del abstraccionismo psicologista. Sin embargo, para que podamos enunciar auténticas proposiciones eidéticas es necesario dar un paso más allá de esta universalización. Es necesario operar con una intuición idealizante (o ideatoria) que nos permita acceder a entidades cuyo "modo de ser" es enteramente ideal. Antes, es preciso detenerse en la *generalización* como otro tipo de acto categorial.

Al principio del §47, Husserl presenta las objetualidades categoriales pertenecientes a la *generalización*:

> Fijamos, pues, nuestra vista en los actos en que se presentan como dados, concretos sensibles y sus fragmentos sensibles (*sinnlichen Bestandstücke*); y después, en oposición con ellos, los actos, totalmente diferentes, por medio de los cuales son dados estados de hechos, colectivos, disyuntivos, como "objetos complejos del pensamiento", como "objetos de orden superior" QUE INCLUYEN SUS OBJETOS FUNDANTES COMO PARTES REALES EN SÍ; y también actos de la índole de la generalización o de la aprehensión individual indeterminada, cuyos objetos son también de grado superior, pero *no* incluyen en sí de esa suerte sus objetos FUNDANTES (Hua XIX/2, 676)

El acto de la generalización o abstracción de un objeto general es entendido como el paso de un *hecho* a su *esencia* o como el paso de una esencia a su género. La generalización engloba la pluralidad ilimitada de objetos singulares que caen bajo él. En este sentido es esencial porque se traslada de *algo individual*, puesto como existente, a una esfera indeterminadamente general de individuos. La generalización se presenta cuando traemos a dación originaria la *esencia* de la cosa material sobre la base de una libre variación de una *cosa* semejante. Aquí, como en la universalización, entran todo tipo de aplicaciones de verdades geométricas a casos de la naturaleza (aunque también se aplica en los ámbitos del espacio, del número, de la estructura, de la forma). Tomemos como ejemplos a un triángulo y al número *e* bajo esta modalidad de la generalización. El género triángulo engloba cualquier "imagen particular" que pueda venir a nosotros si decimos: "polígono de tres lados y tres ángulos". Otro ejemplo, "este cubo que observo es un poliedro regular"; tengo, pues, una presentación intuitiva del cubo como un poliedro regular. Pero también puedo validar la posición del cubo (como un poliedro regular) experimentando su regularidad (que todas sus caras sean polígonos regulares iguales) como una propiedad necesaria de cualquier cubo. Al analizar esta experiencia puedo generalizarla y ser consciente de que este cubo particular que experimento es representativo de la categoría de todos los cubos con respecto a su propiedad relevante (poliedro regular). La experiencia intuitiva de todos los cubos no es la experiencia real de todos los cubos, sino la experiencia intuitiva de un ejemplar.

Hasta este momento de nuestro análisis, la fenomenología de las matemáticas presente en la sexta de las investigaciones lógicas, se ha ocupado de "calibrar" ese "ir y venir" entre propiedades globales y propiedades genéricas. Ahora bien, una fenomenología que pretenda capturar, de manera fiel y no reduccionista, el acceso a las entidades matemáticas también debe tener en cuenta una mixtura particular: lo *invariante* en el *flujo* de las intuiciones sensibles. Se trata, entonces, de aprehender esta suerte de ***signo primordial*** que encarna una universalidad. El §52 de la sexta investigación es clave para esta búsqueda. Según Husserl, sobre la base de intuiciones primarias entra en juego la abstracción haciendo "surgir" una *nueva especie de objetividad*. Esta abstracción ideatoria[225] trae a la conciencia o a presencia actual, la *idea* o el *universal* mismo. Dicho sea de paso, esto es lo que la hace diferente de la abstracción en el sentido del *destacamiento* de un aspecto dependiente de un objeto sensible o a la simple idea de abstracción, cuyos conceptos son el resultado de

[225] La literatura secundaria sobre este tema puede encontrarse en Bernet *et. al* (1989), Mohanty (1959), Tugendhat (1997).

agrupamientos y posteriores generalizaciones de experiencias repetidas de cosas individuales. En el ámbito fenomenológico, la abstracción ideatoria tiene como resultado intuiciones generales (*allgemeine Anschauungen*). Más aun, la idea o el universal mismo no se presenta en un modo meramente significativo, sino que verdaderamente se *aprehende*, se *intuye*. Es por ello que está justificado hablar de *intuición de lo universal*, más concretamente, de *percepción de lo universal* (*Wahrnehmung des Allgemeinen*) (Hua XIX/2, 691).

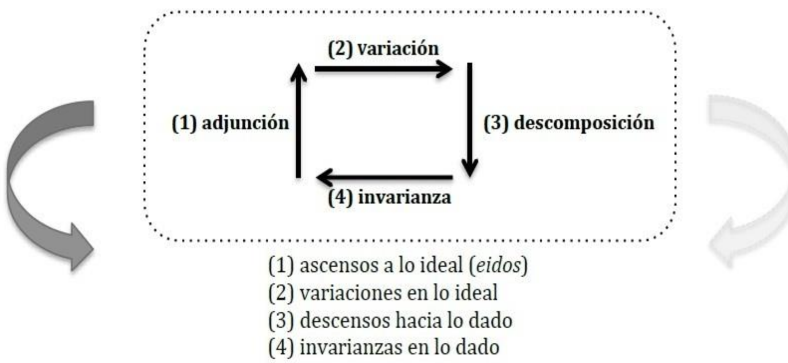
En la abstracción ideatoria el punto de partida es cualquier objeto individual que se toma como un ejemplo, pero también puede ocurrir por medio de la comparación fantaseada de dos o más cualidades *similares* entre los ejemplares perceptivos; si ellas "resisten" cambios a su sentido o significado individual se debe a que en ellas guía el reconocimiento y presentación de lo universal mismo como unidad de lo particular. Tal unidad es homogénea a la similitud de las cualidades de los objetos ejemplares que a la vez se refieren a ella y se rigen por ella.[226] Como resultado, es posible la articulación predicativa de la *relación* del significado categorial con los ejemplares:

> El *rojo*, el *triángulo* de la mera fantasía es específicamente el mismo que el *rojo*, el *triángulo* de la percepción. La conciencia de lo universal se edifica igualmente bien sobre la base de la percepción que sobre la de la imaginación conforme, y una vez edificada, captamos lo *universal mismo*, la idea de *rojo*, la idea de *triángulo*, o sea, lo intuimos en un modo único que no admite diferencias entre la imagen y el original (Hua XIX/2, 691-692).

En este caso, la figura intuida de un triángulo (imaginado o dibujado) funciona como representación análoga de la universalidad intencional y contribuye a determinar el carácter imaginativo de la representación universal. Finalmente, en el acto de la abstracción ideatoria captamos la unidad de coincidencia especial que se establece entre las captaciones particulares recorridas (percepciones, recuerdos o fantasías) como una dación intuitiva de la especie, y se muestra, también, la posibilidad de la intuición de lo general y de las síntesis identificadoras que se dirigen a esto general (Lohmar, 2007).

[226] La pertenencia es ideal en el sentido de que lo que se articula es la suplementación de la categoría manifestada por las instancias individuales. Del mismo modo, el *ser* en cuestión, en la articulación de *S es P*, ni es real ni es subjetivo, es ideal en el sentido de que lo que se articula es la manifestación de la categoría, ya que complementan sus instancias individuales.

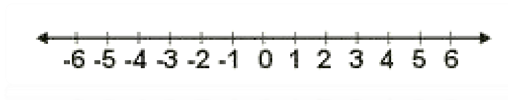
La abstracción ideatoria también puede ser entendida como el método de la intuición de esencias (*Wesenserschauung*). Este método está enraizado en la posibilidad metódica de modificar la variedad de ejemplares dados de manera empírica de tal forma que se "liberan" de su carácter contingente. Ahora bien, si la intuición de esencias es descrita como una forma particular de la intuición categorial, tal y como hace Husserl en el parágrafo §52, entonces también posee la estructura característica de la intuición categorial: percepción singular, percepción global y síntesis categorial. En el caso de la intuición de esencias los títulos de las fases son: percepción o fantasía, creación de variantes con las síntesis de cubrimiento que se establecen entre las variantes y la percepción/intuición de lo invariante. Enseguida presento un esquema que ayudará a entender estas fases, seguido de la explicación de cada una de ellas.



La variación en la imaginación[227] se produce cuando un estado de cosas se toma como un ejemplo arbitrario de su conjunto o género al que pertenece (1). Ese ejemplo arbitrario recibe el carácter de modelo-guía para la "intuición" de un invariante (2). Por ejemplo, podemos variar en la imaginación el color amarillo de una esfera tomando como instancia de inicio cualquier esfera que venga a nuestra mente (3). La producción imaginativa de *imágenes* de esferas amarillas puede ir de esferas que incluyan un color amarillo más fuerte, más claro, más brillante, más tenue, más apagado, más difuso, etc. La esfera también podría ser del tamaño que queramos: desde una canica hasta esferas de decenas de metros de diámetros o

[227] Con el fin de prevenir un posible malentendido del método, debemos tener en cuenta que al referirnos al papel de la imaginación no estamos afirmando que sea necesario formar una imagen en la mente. No es necesario que haya una imagen basada en la percepción sensorial ni una imagen de ningún otro tipo, más bien, al apelar a la imaginación estamos apelando a la capacidad de *pensar en posibilidades lógicas*. La variación en la imaginación puede, pero no necesita, estar acompañada por imágenes mentales.

del tamaño de la Luna. Aunque las variaciones sean tan radicales, tan profundas o tan abstractas, no podrían eliminar —incluso bajo las variaciones más extremas— lo invariante de cualquier esfera, a saber, el *ser una figura espacial*, y lo invariante de cualquier momento cromático: su extensión (4). Valga otro ejemplo relacionado con la geometría. Tomemos lo dicho por Tieszen (2005, p. 155-156), y expresemos las transformaciones de un punto *Px* a partir de su traslación en la siguiente recta numérica



Si imaginamos que el punto de origen se sitúa en 0, y nos movemos 4 unidades a la derecha, bajo esta variación se cambia el punto de origen al punto 4. Si, en cambio, tomamos -2 como punto de origen, el punto se recorrerá a 2, o si tomamos a -1 este se convertirá en 3, 1 se convierte en 5, 2 en 6 y así sucesivamente. ¿Qué es lo que todos estos cambios particulares tienen en común? Husserl respondería que la *distancia* junto con la *dirección* permanecen invariantes en este tipo de variación imaginada, en el sentido de que $x_1 < x_2 \leftrightarrow x'_1 < x'_2$. Dicho en términos del procedimiento de ideación descrito por Husserl: (1) comenzamos con un ejemplo o modelo; (2) producimos y analizamos activamente una multiplicidad de variaciones con respecto al ejemplo; (3) se reconoce una coincidencia superpuesta de las variantes en las que todas aparecen como variaciones entre sí, y finalmente (4), debe haber una intuición activa de lo invariante a través de las variaciones. Es decir, el mismo universal debe ser percibido en el contexto de las variaciones.[228] Ahora bien, estos invariantes o universales también son nombrados por Husserl como esencias. Esta esencia, este *eidos*, tomado en su pureza y alejado de todas las interpretaciones metafísicas, se presenta de forma inmediata e intuitiva.[229] El *eidos* involucra el "elevarse" a una perspectiva más alta donde se contempla un panorama abierto, un inmenso campo de acción que trae consigo un saber más amplio.

[228] El resultado también podría ser tomado como un nuevo objeto (o estado de cosas) que puede compararse con otros objetos (o estados de cosas) y ser objeto de nuevas predicaciones, siempre que se respeten las leyes enunciadas anteriormente.

[229] Debe tenerse en cuenta que este *eidos* no se refiere a las *ideas* en un sentido subjetivo ni a entidades mentales, tampoco son *ideas* en un sentido platónico. En realidad, Husserl se apoya en cierto uso operativo y funcional del termino idea/ideal para designar aquello que se mantiene "en común" al paso del tiempo y al paso de las infinitas variedades de objetos.

Valga un resumen de este apartado: el proceso cognitivo que conduce a una vivencia de conocimiento universal a partir de un ejemplo aclarativo de una mención genérica, es la *universalización*. El proceso cognitivo que conduce de los individuos a las especies y de estas a los géneros, es el de *generalización* (el paso de un triángulo individual a la *esencia triángulo* y de ahí al sumo género de figura espacial). Finalmente, el paso a las *eide* ocurre siguiendo el proceso de la *variación en la imaginación* donde intuimos lo universal. En este entorno se puede vislumbrar, entonces, una compleja relación donde se acotan tanto el movimiento de los objetos sensibles como las invarianzas o *eides*. Se trata, pues, de una plasticidad peculiar que combina una capacidad de movimiento y de facilidad de tránsito de mundos posibles con un cuidadoso manejo de diferenciales exactos. Quizás sea esta *conexión de movimiento y exactitud* donde yace la verdadera fortaleza de una auténtica fenomenología de las matemáticas.

Ahora bien ¿cómo podríamos describir, tomando en cuenta este primer grupo de actos categoriales, la constitución fenomenológica de un concepto tan elemental como lo es un número natural? Con lo únicamente dicho hasta aquí, la intuición de los números estaría fundada en una estructura o forma secuencial cuya composición se basa sobre la idea de iteración o *sucesión*. Los números naturales, por ejemplo, se construyen en etapas sucesivas. En cierta etapa se intuye una unidad; en una etapa posterior, otra unidad; luego miramos a este par como *un* objeto unitario; luego, en una etapa aún ulterior, se construye otra unidad tomando el par formado previamente como un término de un nuevo par nuevo, y así sucesivamente. Al continuar con la construcción simplemente se está iterando el proceso (operación) de construir una unidad, es decir, agregando una unidad en cada etapa. En cada etapa posterior del proceso, la estructura que se dio en la etapa inmediatamente anterior se conserva tal como se dio originalmente. Así, a medida que continuamos la construcción, cada etapa posterior se ha incorporado, por así decirlo, exactamente como se dio en todas las etapas anteriores. La prueba de lo anterior es que a la intuición del proceso de generación de números o de la relación entre los números le basta con *variar* un número en la imaginación y verificar que todas las variaciones legítimas sigan siendo formas numéricas. El proceso para cumplir con las intenciones numéricas es, por tanto, bastante determinado y muy simple si seguimos las leyes ya previamente estudiadas.

Ahora bien ¿se podría variar en la imaginación una colección de objetos que puedan iterarse de tal manera que la cantidad incrementada no se pueda intuir ni siquiera en la imaginación? ¿Cómo sería posible esta aprehensión? El proceso intencional que se sigue aquí es el de intuir la *idealidad* de la sucesión. Así, si escribo 50^{10}, aun y cuando este número nunca pueda ser intuido (directamente), el acto intencional de construirlo se confirmaría como un acto fundado sobre otros actos fundados. Aquí debe tenerse algo en cuenta: para la fenomenología en general, uno puede intuir un concepto sin intuir cada uno de los objetos que caen debajo de él. Intuir un concepto no es equivalente a intuir su extensión, las *leyes* anteriores así lo establecen.

¿Qué ocurre con la variación en un contexto puramente formal? ¿Estamos realmente haciendo uso de la variación eidética en contextos como las matemáticas puras? Siguiendo el ejemplo de Lohmar (2010, p. 87-90), podría decirse que sí. Incluso en contextos formales, donde los objetos tienen pocas propiedades que pueden ser modificables, el caso de los números primos o factores primos comunes, es posible encontrar un rendimiento eidético. En contextos formales se comienza con un conjunto de elementos, operaciones y axiomas que hacen posible el uso de signos. Por ejemplo, comencemos con los números naturales y, por tanto, con los axiomas de Peano, incluido el axioma de inducción completa. Nuestro conocimiento sobre los números, junto con su amplitud, se logran intuitivamente contando y, posteriormente, con el uso de ciertos axiomas: $2^2 \geq 2$, $3^2 \geq 3$, $4^2 \geq 4$, y así sucesivamente. Entonces, podría decirse que $n^2 \geq n$ es cierto para todos los números naturales, pero si queremos probar que ese es el caso tenemos que utilizar el método de inducción completa: “Para todos los $n \in N$, es cierto que: $n^2 \geq n$”. Este es sólo un ejemplo muy simple para caracterizar las pruebas axiomáticas formales. Toda la prueba puede interpretarse como una argumentación basada en los axiomas, las operaciones y el uso de reglas lógicas presupuestas. A simple vista parece que no hay rastro ni espacio para la variación, salvo la suposición generalizada de que $n \in N$. Esta expresión es visible gracias a la variación implícita de asumir suposiciones adicionales que limiten la generalidad de n. Es de vital importancia asegurarse de que no hay limitación de la generalidad, es decir, que es posible variar los valores utilizados en el rango completo, por ejemplo, $n \in N$.

Otro ejemplo, también de Lohmar (2010), se encuentra en la prueba clásica de la inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$. Se comienza la prueba indirecta suponiendo que es conmensurable, es decir, que $\sqrt{2} = p/q$ donde $p, q \in$ N y p y q no tienen un divisor común (no hay un factor común en la factorización prima de los dos números). Esta última presuposición, un factor no común en p y q, parece limitar seriamente la generalidad de la prueba. Sin embargo, sabemos que en los anillos euclidianos tenemos la posibilidad de una factorización completa de cada elemento p (y q) en un producto de números primos y siempre podemos excluir en un próximo paso los factores primos comunes de p y q (resultando en $p´$ y $q´ \in$ N con $p / q = p´ / q´$). Luego comenzamos planteando $\sqrt{2}=p / q$ (donde $p, q \in$ N y p y q no tienen un divisor común) y concluimos que $2 = p^2 / q^2$ también $2q^2=p^2$ y esto implica que 2 es un divisor de p^2 y así también de p. Ahora, en la otra dirección. Para $p= 2n$ con n $\in$ N, podemos sustituir $2 q^2 = (2 \text{ n})^2 = 4 \text{ n}^2$ y esto implica $q^2=2\text{n}^2$ y vemos que 2 también debe ser un divisor de q. Así llegamos a una contradicción. Entonces, lo que ganamos al usar el valor de p, q que abarca la totalidad de todos los números naturales, es una proposición que no depende del valor elegido arbitrariamente de p o q. Por lo tanto, podemos resumir: incluso en contextos formales, la evidencia de la prueba se basa en una variación implícita y obtiene su evidencia apodíctica especial de esta fuente.

§18. *Segundo grupo* de actos categoriales: actos sintéticos y estados de cosas (relaciones de identidad, colectivas y disyuntivas)

Si tomamos en consideración los §§48, 50 y 51 de la sexta investigación lógica, es posible considerar otros ejemplos de objetualidades categoriales relacionadas con los estados de cosas. Aquí parece conveniente definir con más claridad qué es un estado de cosas (*state of affairs*, *Sachverhalt*). Un "estado de cosas" es una entidad compleja de orden superior constituida por otras entidades que, en principio, deberían verse como más básicas que él. Es verdad que "no son propiamente objetualidades constituidas por la espontaneidad del entendimiento, es decir, no son objetualidades categoriales" (Rosado Haddock, 1987, p. 86), pero también es verdad que en la intuición sensible receptiva no las tenemos temáticamente como objetualidades simples. En este sentido, los estados de cosas también pueden concebirse como el hecho de instanciar o ejemplificar un objeto (u objetos universales) o una propiedad (o relación). Su existencia, entonces, parece depender de (o estar fundada en) la existencia de propiedades o "cosas simples", sean o no relacionales. Por supuesto, de un modo muy general, se podría sostener que un "estado de cosas" postula una propiedad diferente a los objetos en donde puede estar instanciado y que, por su naturaleza, puede encontrarse ejemplificado en una pluralidad de objetos al mismo tiempo, por ello su identidad no se agota en los objetos que él alberga. Puede sostenerse, también, que la forma de estructuración de un estado de cosas, entendida en el modo anterior, no es una mera conjunción o suma mereológica o una fusión de "cosas", pues, precisamente, dos estados de cosas con exactamente los mismos componentes podrían ser diferentes. Por ejemplo: si Maximiliano ama a Carlota no se sigue que Carlota ama a Maximiliano. El estado de cosas de *Maximiliano ama a Carlota* no es el mismo estado de cosas de *Carlota ama a Maximiliano*. Un estado de cosas tiene, pues, una forma de estructuración peculiar, un *algo adicional* visible sólo a través de un ver sintético. Con todo, un estado de cosas debe entenderse como "dependiente ontológicamente" de sus componentes fundantes, pues en principio "hereda" sus condiciones de identidad de ellos, aunque esta dependencia ontológica es del tipo de una noción de 'fundación' primitiva, es decir, de la relación de *Fundierung*.

En los parágrafos antes mencionados, §§48, 50 y 51 de la sexta investigación lógica, Husserl tematiza, como ejemplo de actos sintéticos y estados de cosas, las relaciones de identidad total y parcial, las relaciones extrínsecas entre estados de cosas y finaliza con el estudio de las disyuntivas (*Disjunktiva*) y las colectivas (*Colectiva*). Estas últimas son definidas como "actos en los que se constituyen como datos, son aquellos que dan intuición impletiva a las significaciones de las conjunciones *y* y *o*" (Hua XIX/2, 688).

Husserl comienza con el estudio de las relaciones entre la parte y el todo:

> Captamos a primera vista las relaciones entre la parte y el todo, o sea, las relaciones *A es (tiene)* α y α *está en A* […]Un acto perceptivo capta *A* como un todo, de un solo golpe y en modo simple. Un segundo acto de percepción se dirige a α, a la parte o momento no-independiente que pertenece constitutivamente a *A*. Pero estos dos actos no se ejecutan al mismo tiempo o sucesivamente, en el modo de vivencias "disociadas"; más bien, se enlazan en un acto único, en cuya síntesis *A* está dado solamente *como* teniendo en sí a α.

> También α puede venir a dación de sí mismo (*Selbstgegebenheit*) como perteneciendo a *A*, si la dirección de la percepción relacionante es la inversa (Hua XIX/2, 681-682).

Según la cita anterior, podemos aprehender un objeto sensible de un modo simple, es decir, aprehendido como *eso* que está delante de nosotros (*A*). Las partes *B* que constituyen a *A* están en él, pero en el acto simple no se hacen explícitas. Ahora bien, podemos aprehender el mismo objeto en modo *explicitante*, es decir, en *actos* "*articulativos*" que pongan de relieve sus partes o en *actos relacionantes* que pongan de manifiesto su relación, ya sea mutua, ya sea con el todo. Sólo mediante estos nuevos modos de aprehensión, los miembros enlazados y relacionados adquieren el carácter de partes o de todos. Dicho con un poco más de detalles: consideremos un par de actos de percepción dirigidos hacia *A* y hacia su parte o momento *B*, respectivamente. Los dos actos no tienen lugar en una mera simultaneidad o sucesión, antes bien se enlazan en un acto singular en cuya síntesis *A* está dado solamente como teniendo en sí *B*. También *B* puede venir a presencia, como perteneciente a *A*, si la dirección de la percepción relacionante es la inversa. Esta dirección de la percepción relacional es una nueva especie de momento de acto que tiene su propio y determinado carácter fenomenológico y que hace sus propias y determinadas contribuciones a la materia del acto relacionante. En el caso anterior hay claramente dos "direcciones" semejantes, dos posibilidades con arreglo a las cuales puede venir a presencia actual la misma relación, pero sólo en actos fundados de la especie indicada. En resumen, en esta secuencia podemos distinguir tres pasos: 1) intencionamos el objeto de modo indiviso o simple. En este caso *A* se mienta como un todo y sus partes son co-representadas; 2) el mismo objeto intencional puede aprehenderse de "modo explicitante", esto es, destacando sus partes co-mentadas o co-representadas a través de actos articuladores. En el ejemplo de la cita anterior, *B* se convierte en un objeto de percepción propia de un tipo de acto peculiar, pero sin que dejen de coincidir tanto el acto total (*A*) con los actos parciales.

"Lo mismo ocurre notoriamente en las relaciones *extrínsecas*, de las cuales proceden las predicaciones del tipo *A está a la derecha de B*; *A es más grande, más brillante que B,* y similares" (Hua XIX/2, 683). En estos ejemplos, la unión de dos objetos, A y B, forman nuevos estados de cosas, por ejemplo, *A es más grande que B* y *B es menor que A* o *A es más alto que B* y *B es más bajo que A*, etc. Los estados de cosas en cuestión pueden surgir en cualquier parte en que objetos independientemente perceptibles "se junten en grupos, prescindiendo de su individualidad aislada, en unidades más o menos íntimas, o sea, en el fondo, en objetos más amplios. Estas relaciones pueden comprenderse todas bajo el tipo de la relación de una parte a las demás partes del todo" (Hua XIX/2, 683). Aquí es menester que sea destacado un miembro capital a la vez que se fijan los restantes miembros para así destacar la determinación fenoménica del primero por los miembros correlativos.

Supongamos, para considerar otro ejemplo, que "percibimos" el contacto de dos objetos A y B, su compartir un límite común en un todo más abarcador:

> En la formación de relaciones externas, la forma sensible puede servir como el fundamento para la constitución de una forma categorial correspondiente; como cuando captamos las formas sintéticas *A colinda con B*, *o B colinda con A*, el colindar sensible de los contenidos *A y B*, dadas en la intuición de un *G*, que los comprende […] En el todo sensible las partes *A* y *B* están enlazadas por el momento del colindar, que las enlaza de un modo sensible. El destacar estas partes y momentos, la formación de las intuiciones de *A* y *B* y de colindar, no proporciona aún la representación: *A colinda con B*. Ésta exige un nuevo acto, que se apodera de aquellas representaciones, dándoles la forma y el enlace adecuados (Hua XIX/2, 684-685).

Las relaciones anteriores también pueden comprenderse todas bajo el tipo de la relación de la colindancia o vecindad entre las partes *A* y *B* que componen al todo *G* (Hua XIX/2, 683). Aquí es menester que sea destacado la forma capital "*A colinda con B*" sostenida sobre los actos simples de la percepción de uno y otro.

El otro ejemplo típico de una objetividad del entendimiento considerado por Husserl, en el §51, es el de las colectivas o colecciones finitas y las disyuntivas:

> Pongamos atención ahora en otros ejemplos, dos formas sintéticas que no son estados de hechos pero que desempeñan un gran papel en la conexión de éstas: las *colectivas* y las *disyuntivas.* Los actos en los cuales se constituyen como objetividades son los que dan intuición impletiva a los significados de las conjunciones *y* y *o*. (Hua XIX/2, 688)

En la intuición sensible no se aprehenden los términos *y*, *o*, *u*, *ambos*. Tampoco se pueden representar en imagen (o en copertenencia) la "colección" de los *objetos reunidos*: "Puedo pintar A y pintar B, puedo pintar ambos en el mismo espacio del cuadro; pero no puedo pintar el *ambos*, el *A y B*" (Hua XIX/2, 688). La razón de lo anterior es que no se puede aprehender "lo uno *junto* con lo otro" o "uno *al lado del* otro", pues el *ambos* no es una objetualidad sensiblemente percibida. Sin embargo, tanto a las colectivas como a las disyuntivas les corresponde ser situadas como formas categoriales en virtud de estar dadas como una *referencia intencional unitaria* a la que le corresponde un objeto que sólo puede constituirse y presentarse en este enlace de actos. Dicho con mayor precisión, la síntesis necesaria para lograr una percepción intuitiva de una colectiva y una disyuntiva consiste en la re-captación reflexiva del acto de recopilar dos o más elementos. Para las multiplicidades cuyos elementos son demasiado numerosos como para ser colocados uno al lado del otro en un acto de recolección, es la percepción de la posibilidad ideal de tal acto lo que comprende una intuición del conjunto correspondiente. Lo que en resumidas cuentas está aquí presente es la diferencia con las simples percepciones de conjunto sensibles unitarios, series, enjambres (*Schwärmen*), etc., (Hua XIX/2, 689). Es verdad que los conjunto o pluralidades sensibles unitarias, como los árboles en un parque, los asientos en un aula, autos en fila, etc., tienen algo semejante a las *colectivas*, pero también es verdad que "he vivido un sólo acto cuya complejidad tiene mucho más de 2 partes […] Y mejor aún: no es exacto que se me haya presentado un conjunto […] sino sólo que se me han presentado 2 cosas –conjuntadas–". (García-Baró, 2008, p. 111). Así, únicamente en las percepciones *conjuntivas* es donde se constituye propia y exclusivamente la conciencia misma de la pluralidad (*Vielheitsbewusstsein*) (Hua XIX/2, 689). Asimismo, frente a lo dicho en el capítulo XI de *Filosofía de la aritmética*, donde los momentos figurales servían como signos sensibles (actos simples) de la pluralidad sin poseer el carácter de una verdadera intuición de la colección como tal, en las *Investigaciones lógicas* se requieren de actos articulados de orden superior.

Ahora traslademos lo dicho acerca de los estados de cosas y la tematización de las disyuntivas y colectivas a ciertos aspectos de las matemáticas. Comencemos con los estados de cosas y después las disyuntivas y colectivas.

Las proposiciones como "en el estanque hay siete peces nadando" desde luego que involucran entidades matemáticas. Estas entidades se encuentran instanciadas en expresiones como la anterior o en expresiones como 3 + 4 = 7. Siguiendo a Husserl podríamos postular que este peculiar estado de cosas consiste en una relación diádica entre, por un lado, un agregado o suma de elementos y, por otro lado, una *propiedad*. La relación en cuestión sería una relación de totalización, esto es, un ***estado de cosas total***. ¿Cuándo nos encontramos ante una relación de totalización? ¿Cuándo un agregado totaliza una propiedad? La respuesta es cuando el agregado en cuestión comprende todos los ítems que instancian la propiedad correspondiente. Por ejemplo, en el caso de los números (naturales, racionales, reales, etc.,) estos podrían tratarse como relaciones que se sostienen entre una ***propiedad-unidad*** o ***cantidad-unidad*** y las cosas que están numeradas ("los peces en el estanque"). Las formas de ir y venir entre el estado de cosas total y sus componentes pueden ser de la totalidad a la unidad o de la unidad a la totalidad. Supongamos que hacemos esto último, tenemos ciertos componentes sensibles enumerables (peces, estanque) que se encuentra en cierta relación (peces "nadando en el estanque"). El estado de cosas total aprehendido son los siete peces que se encuentran, de hecho, nadando en este estanque.

¿Qué pasa en el caso de las disyuntivas y colectivas? Al tematizar a las disyuntivas y las colectivas, se puede decir que la relación de *Fundierung* (independiente y no-independiente) comienza a operar al modo de peldaños donde los actos de abstracción descansan sobre los actos intuitivos. Trataré de ser más explícito. Las colecciones, sumas, conjuntos, por ejemplo, se obtienen por unificación, es decir, tomándolas como coleccionables (unidad en la multiplicidad). La unificación es una experiencia intencional particular que requiere, además de su materia, un tipo de "acto" que junta las partes en tanto colección, el "y", en "a y b", en tanto "*y*" fenomenológico que permite una verdadera intuición de la colección de manera ideal. Así, las colecciones, sumas, conjuntos tienen dos momentos: uno relacionado con sus partes concretas y otro relacionado con el acto de unificación correspondiente. Valga otro ejemplo: una forma cuantitativa particular es el primer movimiento en la presentación de un número particular a la conciencia. Sin embargo, "percibir 3" como la forma de una colección arbitraria de tres cosas aún no es intuir el número 3. Se necesita, además de lo anterior, "intuir ideativamente" un número, como la forma de una colección arbitraria de "x" número de cosas y observar que cualquier colección de "x" número de cosas tiene el mismo número (cardinalidad) en otras condiciones. Entonces, "percibir tres objetos" como 3 puede contar como la intuición del número 3 sólo si este "percibir" está acompañado por la conciencia de que cualquier colección de tres cosas tiene esta misma forma. En otras palabras, intuir 3 en una colección de tres cosas implica abstraer la forma numérica de la colección e idearla. Idear una forma numérica es acceder a un nivel superior. Ella implica, primero, el reconocimiento de una equivalencia entre objetos de un tipo determinado con respecto a algún aspecto común y, segundo, que todas las entidades equivalentes sean instancias o realizaciones de la misma forma ideal. Así, dos formas cuantitativas son equivalentes si las colecciones de las cuales son formas son equinuméricas, p. ej., el número 3 es, entonces, la forma cuantitativa ideal de todas las colecciones ternarias.

§19. Los niveles de categorialidad de las objetualidades categoriales

En contra de lo que sugiere Jacques Taminiaux (1985), no existe una suerte de fundación circular entre la intuición sensible y la intuición categorial, al menos no en la primera edición de las *Investigaciones lógicas*. Lo que sí existe es una gradación o niveles de categorialidad que surgen cuando los objetos categoriales actúan como "objetos fundantes" de nuevos objetos categoriales de nivel superior. Estos niveles de categorialidad completan todo el trabajo de la sexta investigación en torno a la actividad categorial de la conciencia. Desde luego, también esta jerarquía de actos categoriales está regida por las leyes lógico-lingüísticas estudiadas por Husserl en la cuarta investigación (Rosado Haddock,1987), y también están en consonancia con las leyes ideales antes enunciadas.

En los §§ 46, 59 y 60 de la sexta investigación lógica, Husserl presenta una suerte de jerarquía de formas categoriales en cuyo nivel cero se encuentran los actos sensibles.

<u>Objetos categoriales del primer nivel</u>. La presentación de este tipo de formación categorial ocurre al final del §46. En dicho parágrafo, Husserl estudia aquellos actos complejos (fundados) construidos sobre otros actos complejos o series graduales enteras de actos fundados (Hua XIX/2, 675-676). Dicho de otra manera, la objetualidad constituida en un acto categorial puede servir de base para la constitución de otras objetualidades —ir de un *primer nivel* de los actos categoriales a un *segundo* nivel y así sucesivamente—. Esto también puede leerse en el §59:

> Las unidades categoriales pueden convertirse una y otra vez (sobre la base de ciertas leyes categoriales de índole apriorística) en objetos de nuevos actos sintéticos, relacionantes o ideatorios. Los objetos universales, por ejemplo, pueden ser enlazados colectivamente; las

colecciones así formadas pueden serlo, también colectivamente, con otras similares o de diversos tipos y así *in infinitum* (Hua XIX/2, 710).

Como es notorio, existe una posibilidad casi ilimitada de formar nuevas unidades categoriales. Incluso los estados o situaciones de hecho pueden unirse en nuevos estados o situaciones de hecho y fundar una nueva unidad de orden superior. Siguiendo esta dinámica, las objetualidades matemáticas del primer nivel, es decir, aquellas que se constituyen o se edifican sobre otros actos fundados, operan con series graduales enteras de fundamentaciones y actos fundados que sirven de *indicaciones* (o *señales*) formales para la constitución de actos de un nivel superior. Volvamos al ejemplo del número. Intuir fenomenológicamente un número significa, primero, postularlo ya sea como objeto simple o en conjunción {a} {a, b, c…}; enseguida, hacemos "uso" de la abstracción ideatoria para así intuir la forma *serial* de la colección y, finalmente, hacer de su presentación una presentación *ideal*. En este caso, la presentación del número fue, en realidad, una superposición de muchos actos intencionales en los que, quizás, uno o más objetos de un acto de nivel inferior (sensible) sirvieron como peldaños de un acto inmediatamente posterior. A partir de aquí también es posible obtener una jerarquía de conjuntos de una manera bastante natural: supongamos que se da un cierto número (pequeño) de objetos, entonces puedo recoger los objetos y tomar conciencia de ellos como un conjunto. Ahora, ya situado en el acto de primer orden, puedo ver estos conjuntos como nuevos *elementos* para volver a recopilarlos y tomar conciencia de ellos como un nuevo conjunto. Este proceso puede continuar hasta dar con construcciones de un orden aún más superior de conjuntos basados en objetos ya construidos.[230]

<u>Objetos categoriales de segundo nivel</u>. Husserl presenta, en el §60, a los objetos categoriales de segundo nivel y en ellos incluye a los actos categoriales puros, a los actos del entendimiento puro y a los actos del entendimiento mixto (Hua XIX/2, 711-712):

Si consideramos la peculiaridad de la abstracción ideatoria de descansar necesariamente sobre una intuición individual, sin mentar por ello el objeto individual de esta intuición;

[230] Aquí estaría la base fenomenológica para la comprensión del primer principio de generación de Cantor. Según este principio, la transición de un número dado a su sucesor inmediato es la regla que nos permite construir variantes arbitrarias. Repitiendo este procedimiento en $\omega + \omega$, Cantor formula su segundo principio de generación que equivale a la idea eidética de que cualquier sucesión definida de números sin un último elemento debe tener un límite mínimo. La aplicación combinada de estos principios, donde aplicación ahora significa la creación de instancias de las esencias correspondientes a esos principios, permite la comprensión intuitiva del resto de los números en el esquema anterior (Kai Hauser, 2014).

> si consideramos que dicha abstracción es un nuevo modo de aprehensión, que constituye una generalidad, en lugar de una individualidad, surge la posibilidad de INTUICIONES UNIVERSALES QUE EXCLUYEN DE SU CONTENIDO INTENCIONAL NO SÓLO TODO LO INDIVIDUAL, SINO TODO LO SENSIBLE (Hua XIX/2, 712)

En los actos categoriales de segundo nivel se introduce la posibilidad fenomenológica de intuiciones generales *que no se refieran* ni a algo individual ni a algo sensible. No existe en ellos una “pizca” de materia sensible. La justificación fenomenológica para lo anterior se establece a partir de una función sintética de actos fundados que se construyen en etapas fundadas. En dicha función (léase construcción) se introduce un tipo de *síntesis categorial activa*, entre actos fundados, que permite reconocer y transitar por todo el espectro de entidades categoriales. Esto es posible gracias a la indeterminación en la que se deja el material sensible sobre el que se funda una intuición categorial de primer nivel. Así, sin contradicción alguna, puede afirmarse que todo lo categorial se basa en la intuición sensible, pero en un segundo nivel, las objetualidades categoriales puras no tienen ningún rastro de sensibilidad en su constitución (Rosado Haddock, 1987, p.92). Con lo anterior, la tesis de una completa “dependencia funcional” de la plenitud de los actos fundados respecto de la plenitud de las intenciones fundantes sigue vigente (Lohmar, 2004, p. 44).

Tomando en cuenta lo anterior, los objetos categoriales de este nivel al poseer una única característica, a saber, su *formalidad*, su rendimiento ontológico y epistemológico sería únicamente *simbólico*. Entendamos este punto con el ejemplo del número. La *formalidad* se refiere, en el caso de la serie numérica, a sus ***propiedades operacionales*** o ***funciones de operación***. Por ejemplo, el contenido material del número 2 lo distingue de otros objetos (dos perros, dos gatos), pero no de otros números; esto sólo puede lograrse por las propiedades operacionales del número 2 (potencias, factores, relaciones). Son estas propiedades operacionales del 2 las que le garantizan su objetividad y su concepción dentro de una serie numérica. Desde luego, la propiedad formal es una propiedad que cualquier entidad de su tipo lógico puede llegar a tener. Una segunda característica de estos objetos categoriales de segundo nivel está asociada a la concepción de los objetos categoriales como ***esquemas***. Explico esto último.

En los objetos categoriales de segundo orden o *esquemas*, como he decidido nombrarlos, la realidad no está representada en todos sus detalles, sólo son conservados rasgos elementales, símbolos y relaciones. El esquema no es, pues, una representación fiel de la experiencia en un sentido absoluto. De hecho, es completamente incomprensible si no se posee la clave de su "interpretación" o traducción a un lenguaje ordinario. Existen varios tipos de ejemplos para estas esquematizaciones. Aquí únicamente consideraré la ***esquematización axiomática***.[231] Siguiendo a Gonseth (1998), podemos decir que en esta esquematización axiomática se presenta una verdadera transmutación de las nociones materiales y formales que en ella participan. En la esquematización axiomática se desdoblan las nociones, ya abstractas, a un plano relacional, esto es, se presentan modelos diferentes a partir de un modelo-base, por tanto, las designaciones o nombres se cambian y se puede, en suma, traspasar de una región a otra. Por ejemplo: "Se va a decir: sólo quiero retener de la recta el hecho de ser un cierto objeto de una cierta categoría […] De la misma manera para el punto. Cuando una recta A contenga a un punto *a*, diré que *A* y *a* están en una cierta […] relación puramente lógica. Los axiomas indicarán por sí mismos cómo se van a tratar estas relaciones y cómo hay que combinarlas" (p. 139-140). Los esquemas así obtenidos son ahora un edificio de relaciones lógicas completamente vacío. Nos hemos quedado con la pura estructura axiomática. En resumen, los objetos categoriales de segundo orden son esquemas ideales que no tienen apoyo sobre lo real-objetivo, únicamente son representaciones esquemáticas cuyo sentido sólo es inteligible a través de sus propias relaciones de interpretación.

El resultado de estudiar las objetualidades puramente categoriales *como* esquemas puramente categoriales trae consigo una "peculiar correlación entre objetos ideales de la esfera lógica pura y el vivenciar psíquico subjetivo como hacer formativo" (Hua IX, 26). Este *hecho* fenomenológico es una *ida y vuelta* de las formaciones matemáticas formales a las formaciones puramente fenomenológicas y viceversa. Así, sobra decir que no sólo podemos experimentar objetos concretos y particulares, sino también abstractos y universales (Hua IX, p.300 y ss.). Finalmente, remito a un último diagrama que espero logre capturar y mostrar toda la riqueza conceptual estudiada en este último parágrafo.

[231] Me parece que podría hablarse, también, de una "esquematización algebraica" donde se incluyan los objetos de la topología algebraica, el álgebra línea, la teoría combinatoria, etc. También de una "esquematización lógica" donde se incluyan los objetos de las lógicas.

§20. La posición de Husserl en la filosofía de las matemáticas

La fenomenología desarrollada en la primera edición de las *Investigaciones lógicas* es, a mi juicio, una fenomenología del tránsito matemático, del entretejimiento en redes y leyes puras, de gradaciones no dualistas y procesos fundacionales (*Fundierung*) que permiten comprender las manifestaciones matemáticas en toda su complejidad. La principal consecuencia de esta fenomenología de las matemáticas es que, frente al cuadro logicista, nominalista, pragmatista y fomalista de su tiempo, ella es inmensa y radicalmente innovadora. Lo es, porque desde un punto de vista interno, la fenomenología involucra un acercamiento a las estructuras ideales a través de redes y tránsitos que median entre lo uno y lo múltiple. En otras palabras, el fenomenólogo de las matemáticas estudia la remisión a la percepción o intuición de esas formas ideales a través de las correlaciones entre los fenómenos concretos y sus representaciones teóricas.

Desde los planteamientos hasta ahora estudiados, cabría decir que las objetualidades matemáticas no se presentan ni como objetos de la experiencia sensible ni como formas platónicas. Son, en todo caso, objetos u objetualidades intencionales ligadas al carácter intencional de la conciencia. De hecho, las preguntas acerca de un “qué” o un “dónde” absolutos, es decir, aquellas que describen y sitúan de una vez por todas los objetos matemáticos ora en un mundo de “ideas”, ora en un mundo físico “real”, son *preguntas mal planteadas*. En este sentido, para Husserl las objetualidades matemáticas son formas universales *irreales,* es decir, no son objetos reales físicamente ni tampoco contenidos de conciencia. La existencia de las objetualidades matemáticas debe entenderse, insisto, como una existencia intencional. Así, desde la perspectiva husserliana preguntar si un objeto matemático *realmente* existe con tales o cuales características no sólo no es una pregunta genuina, ni siquiera es una pregunta filosófica legítima. De conformidad con lo anterior, Husserl no niega los derechos de existencia *objetiva* a los objetos matemáticos, pero tampoco les impone un tipo de existencia que no tienen. En todo caso, la objetividad de las entidades matemáticas tiene que ver con la capacidad de manifestarse como lo mismo ya sea ante un individuo o ante un colectivo de múltiples experiencias.

Ahora bien, cabe resolver una última pregunta: ¿qué posición ocuparía Husserl dentro del campo de la filosofía de las matemáticas? Para algunos autores, Husserl podría ubicarse dentro las filas del formalismo de Hilbert (Okada, 2013, (Hartimo, 2017); del intuicionismo matemático (van Atten, 2010); platonismo constitutivo (Richard Tieszen, 2010, 2005); del *descripcionismo realista* (Gian-Carlo Rota (1997), y finalmente, dentro del revisionismo matemático fuerte (van Atten, 2002). La respuesta a esta pregunta me parece que es muy simple: Husserl no forma parte de ninguno de los anteriores posicionamientos. Me parece, hasta cierto punto, una necedad ubicar a Husserl dentro de alguna de esas posiciones teóricas, pues ninguna de ellas hace justicia a la verdadera posición de Husserl *en* la filosofía de las matemáticas, a saber, la de un "fenomenólogo de las matemáticas". Es verdad que lo dicho hasta ahora atraviesa las diversas posiciones arriba mencionadas, pero también es verdad que Husserl hace un extraordinario esfuerzo por evitar los problemas que conllevan cada una de las anteriores posiciones filosóficas. En todo caso, el enfoque "fenomenológico" presentado tanto en *Filosofía de la aritmética* como en *Investigaciones lógicas* está encaminado a la forma en la que se construyen nuestros actos matemáticos, pero también está vinculado a las aplicaciones de las matemáticas. Se trata de llegar a una visión más refinada y al mismo tiempo hacer justicia a las matemáticas tal como se dan y se practican. Finalmente, el enfoque fenomenológico de las matemáticas no puede alinearse con las anteriores doctrinas, pues ellas, de alguna manera, persiguen un ideal normativo (lo que *deberían* ser las matemáticas). La fenomenología de las matemáticas intenta complementar las matemáticas, pero sin proporcionarles un conjunto de fundamentos, sino sosteniendo un planteamiento totalmente nuevo de las posibilidades en las que se puede interpretar el *quehacer* matemático.

CONCLUSIONES

La conclusión de una investigación siempre ha de ser una conclusión parcial. Esta disertación no es, pues, la excepción. En tanto conclusión parcial puede ser que futuras exposiciones amplíen lo aquí demostrado o al menos encuentren ideas que debatir. Gran parte de los problemas que trae consigo el análisis de los primeros escritos de Husserl han sido, si no resueltos, al menos expuestos y desarrollados de modo tal que quizás logren evidenciar la justificación de este trabajo, que no ha hecho sino presentar la problemática lógico-matemática y esbozar direcciones para su tratamiento profundo. Dicho esto, a lo largo de este largo proceso de investigación se demostró que en los primeros trabajos de Husserl se encuentra un proyecto matemático y filosófico sin precedentes, con una riqueza conceptual compresible únicamente a través de la profundización y discusión de su obra con sus contemporáneos (desde Bolzano hasta Hilbert). Así, pues, uno de los logros de esta investigación fue demostrar que no sólo es necesario comprender este primer momento dentro del sistema fenomenológico husserliano, sino que además resulta imprescindible cuando se trata de discutir problemas posteriores y aparentemente tan lejanos como los "orígenes" de los conceptos aritmético geométricos en el *Origen de la geometría* o en *Experiencia y juicio*. Asimismo, la presentación minuciosa de estos primeros trabajos de Husserl evidenció que el fundador de la fenomenología formó parte, de una u otra manera, de la transición germánica hacia una noción moderna del concepto de número, esto es, de la transición hacia un escenario donde la matemática es concebida como una ciencia formal y no como una ciencia de magnitudes. Esto se debió, como también se demostró aquí, a que los desarrollos filosófico-matemáticos de Husserl estuvieron muy cerca de las líneas propuestas y trabajadas por Bolzano, Riemann, Cantor, Dedekind y otros matemáticos. Precisamente, y dada la relevancia de las universidades de Berlín, Gotinga y Halle en la "conformación" del pensamiento husserliano temprano, esta tesis se enfocó en los trabajos de los autores ya mencionados.

Ciertamente, la postura de Husserl en *Sobre el concepto de número* no es exactamente la misma después de la publicación de sus ensayos aritmético-formales y, a su vez, una y otras obras no son exactamente lo mismo en comparación con sus escritos posteriores. Como ya lo expliqué a lo largo de estas primeras páginas, lo anterior se debe a que el programa filosófico inicial (y final) de Husserl es, en realidad, un método riguroso para filosofar que vuelve una y otra vez al ámbito la experiencia en sus diversas formas, siempre apuntando a verdades universales en el ámbito de las meras posibilidades. La prueba más clara de esto fue, precisamente, *Filosofía de la aritmética*. A partir de ella, como ya se demostró, Husserl se empeñó en demostrar que el método general de la filosofía y las matemáticas, la lógica incluida, debía asirse de un estudio genético, es decir, de un estudio fundado en la *experiencia* que se tiene de los conceptos matemáticos. Siguiendo esta pauta, esta investigación también demostró que este particular estudio de la génesis de los conceptos numéricos está emparentada con el estudio de la lógica intensional y que, dicho sea de paso, no puede ser comprendida dentro del rango de las así llamadas doctrinas psicologistas.

Asimismo, la tesis demostró que la concepción de Husserl sobre las operaciones aritméticas, en tanto de procedimientos de construcción numérica, resulta una investigación innovadora pues en el intento por reducir los complejos numéricos a sus expresiones "normales" correspondientes, Husserl se topó con un desarrollo aritmético sin precedentes. Otra de las metas cumplidas en esta investigación fue mostrar la manera en que Husserl, apoyado en Grassmann, pretende derivar la aritmética de manera puramente sintáctica a través de definiciones recursivas, lo que permite concebirla como un desarrollo sintáctico y meramente simbólico. Esto último me llevó a un segundo aspecto poco estudiado y comprendido del primer Husserl: reflexionar e investigar sistemáticamente el problema de la totalidad de las operaciones numéricas computables. En la tesis se evidenció que un estudio de este tipo tiene por propósito una equivalencia extensional de la clase de operaciones.

De igual manera, se demostró que Husserl respaldó claramente una versión donde los signos tienen un significado que se agota en las normas operativas que constituyen el algoritmo. Sin embargo, como subraya Husserl, la solidez lógica de la estructura significativa debe ser garantizada por el paralelismo entre un sistema conceptual subyacente y el sistema de signos. Del mismo modo, y habiendo consultado las publicaciones realizadas a propósito de la relación entre Frege y Husserl, estudiando no sólo la literatura histórica, sino también la poco considerada literatura secundaria que gira en torno a temas poco tomados en consideración, en esta disertación se llegó a la conclusión de que la revisión de Frege de la *Filosofía de la aritmética* es en parte errónea, sobre todo en el señalamiento de hacer pasar por psicologista una obra que en su segunda parte se abre paso a un trabajo puramente formal. En esta disputa también se llegó a la conclusión de que la relación entre Husserl y Frege debe tener en cuenta al menos tres puntos: (1) la definición de Husserl sobre el número no tiene nada que ver con el psicologismo criticado por Frege, (2) no es Frege quien moviliza los trabajos posteriores de Husserl y (3) en *Filosofía de la aritmética* se hace presente una filosofía del cálculo completamente ignorada en la obra de Frege.

Asimismo, en esta disertación se demostró que Husserl presenta una propuesta original para resolver el problema de lo imaginario en matemáticas partiendo de una distinción entre las reglas de cálculo en general y las formas específicas de operaciones que determinan un campo particular. Tal como aquí se formuló, el problema de lo imaginario en matemáticas puede entenderse como el problema de encontrar las condiciones que hacen posible extender de manera consistente una determinada teoría deductiva (numérica) en nuevas formas específicas de operaciones. Tal como se demostró en esta tesis, Husserl introduce y estudia propiedades y relaciones lógicas, sistemas de axiomas y niveles de estructuras. En particular, él circunscribe una propiedad de lo definido (relativo y absoluto) que él contrasta con las nociones de completud. Definitivamente, no fue una tarea fácil desentrañar las intrincadas y a menudo bastante imprecisas conceptualizaciones de las conferencias de Gotinga. Sin embargo, considero que esta tesis presenta una contribución genuina para su correcta comprensión y reconstrucción formal. Considero, además, que lo expuesto en ese apartado de esta tesis contribuye a un área donde poco se ha escrito, y de alguna manera, mi trabajo ya es significativo al trata de comprender los orígenes y desarrollos tempranos de la metamatemática.

El capítulo tres de esta disertación explicó con detalle el surgimiento de un nuevo tipo de práctica matemática que no sólo difería sobremanera de las de sus antecesores y contemporáneos matemáticos, sino que de hecho se asemejaban a prácticas modernas, como en el estudio de los números complejos. En cierto sentido, la continuidad en su proyecto es un elemento clave para entender el clímax de dicho proyecto, a saber, la idea de una concepción fenomenológica de las entidades matemáticas. Como paulatinamente se volvería más claro, en un principio Husserl presentó una caracterización satisfactoria de la unidad de las ciencias, de los dominios de una ciencia y del trabajo mereológico, poco estudiado en su carácter formal. Al igual que lo hicieran Simons, Casari y Fine, por mencionar a algunos, en esta tesis realicé una pequeña contribución al correcto entendimiento de la tercera de las investigaciones lógicas y a su posible presentación formal. Ya para terminar, Husserl fue congruente con su concepción de las matemáticas y sus nociones de variedad y número, pues entendió que en realidad el estudio de la matemática formal revela la importancia de comprender cómo es posible una ciencia junto con sus leyes o formas generales a las que las cosas habían de ajustarse en su existencia.

ANEJOS

Anejo I. Las reseñas *olvidadas* de *Filosofía de la aritmética* y sus balances interpretativos

La reseña de Frege sobre *Filosofía de la aritmética* obtuvo un reconocimiento casi inmediato en el horizonte de las exploraciones fenomenológicas posteriores. Sin embargo, no fue la única reseña que tuvo esta obra. En lo que sigue, presentaré al menos quince reseñas de *Filosofía de la aritmética*, todas publicadas entre 1891 y 1895, que el propio Husserl resguardó entre sus manuscritos (Ierna 2012c, 1999). Resulta sorprendente que ninguna de ellas haya sido tomada en cuenta para matizar la presentación fregeana de *Filosofía de la aritmética*, y lo es porque en cada una de ellas se descubre un enfoque muy diferente a lo expresado por Frege en la reseña de 1894. Bajo estos "nuevos puntos de vista", espero demostrar que *Filosofía de la aritmética* tuvo una recepción mucho más extendida de lo que se suponía hasta ahora,[232] y quizá también ayuden a establecer un balance más objetivo del trabajo de Husserl. Cabe destacar que tres de las revisiones críticas aparecieron en revistas matemáticas como el *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, el *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, y el *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*; tres fueron publicadas en revistas inglesas como *The Philosophical Review, The Monist* y *Mind*, y dos de ellas escritas por otros miembros de la Escuela de Brentano: Franz Hillebrand y Alois Höfler. Enlisto de inmediato todas las reseñas consignadas:

1. Carl Theodor Michaëlis, *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* XXIII/1 (1891), pp. 58–59.

2. Anonymous, *Literarisches Centralblatt für Deutschland* 8 (febrero, 1892), pp. 238–239.

3. Jules Tannery, *Bulletin des science mathematiques* XVI (1892), pp. 239–245.

[232] La compilación, edición y traducción al inglés de estas reseñas se debe a Carlo Ierna (2012c). En lo sucesivo me referiré a esta edición. A excepción de la reseña Jules Tannery, que Ierna no compila, me abstengo de hacer citas directas de las reseñas para evitar tergiversaciones al ser traducciones de traducciones.

4. Frank Thilly, *The Philosophical Review* 1(3) (mayo, 1892), pp. 327–330.

5. Paul Carus, *The Monist II* (julio 1892), pp. 627–629.

6. Anonymous, *Mind* 1(4) (octubre 1892), pp. 565–566.

7. Ernest Lindenthal, *Zeitschrift für das Realschulwesen* (1893), pp. 104–107.

8. Heinrich Schotten, *Zeitschrift für Mathematik und Physik (Historischliterarische Abtheilung*) 38 (1893), pp. 88–90.

9. Franz Hillebrand, *Göttingische gelehrte Anzeigen* 4 (1893), pp. 175–180.

10. Albino Nagy, *Rivista Italiana di Filosofia* VIII/II (1893), pp. 243–245.

11. Alois Höfler, *Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane* VI (1894), pp. 49–56.

12. Adolf Elsas, *Philosophische Monatshefte* 30 (1894), pp. 437–440.

13. Michael Glossner, *Jahrbuch für Philosophie und spekulative Theologie* (1894), pp. 235–239.

14. Friedrich Pietzker, *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* XXVI (1895), pp. 512–517.

15. Władysław Heinrich, *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie* (1895), pp. 436–9.

Es verdad que no todas las reseñas presentan estudios completos o profundos. Hay, por un lado, revisiones muy superficiales;[233] meras paráfrasis a menudo sin referencias;[234] meros

[233] Tal es el caso de los “anónimos” que publicaron en *Literarisches Centralblatt* y en *Mind*, y de Władysław Heinrich (1869–1957), matemático, psicólogo y filósofo quien trabajara en las universidades de Múnich y Zúrich, y último de los discípulos de R. Avenarius.

[234] Como es el caso de la reseña de Michael Glossner (1837–1909), teólogo neo-tomista y filósofo. Pese al carácter tan fragmentario de esta reseña, quizás sea la única que entabla una discusión entre las tesis del primer volumen de *Filosofía de la Aritmética* y la tradición aristotélico-tomista. Aunque está de acuerdo con la oposición de Husserl a la concepción nominalista del número, Glossner impugna las críticas husserlianas sobre el concepto aristotélico del número. Con relación a esto último, este autor señala que Husserl no entendió correctamente la concepción aristotélica del número en tanto objetos secundarios de la percepción sensorial. Según Glossner, Aristóteles, y después Sto. Tomás, distinguen entre el *numerus numerans* y el *numerus*

listado de temas tomados del índice de contenido[235] y resúmenes apenas aceptables.[236] Por otro lado, hay reseñas que exigen una presentación "más matemática y menos filosófica" del concepto de número[237] y otras que analizan la relación (o ruptura) de Husserl con la Escuela de Brentano,[238] pero de una manera muy endeble. Por encima de estos resúmenes, hay al menos siete recensiones muy significativas que se involucran profundamente con los temas y problemas que Husserl aborda en *Filosofía de la aritmética*. En ellas me enfocaré en lo que sigue de este apartado. Cabe destacar que casi todos los críticos comentan el hecho de que el trabajo en consideración es sólo el primer volumen (o parte preparatoria) de un trabajo de mayor envergadura —algo que Frege ni siquiera toma en cuenta— y asumen, por tanto, que este primer volumen allana el camino para el segundo cuyos temas centrales serían la aritmética general y la teoría general del signo. Si bien muchos revisores aguardan con gran interés el segundo volumen, ninguno trata de extraer ninguna implicación del primer volumen

---

numeratus, sólo el primero puede postularse en plural y, por tanto, es un elemento de lo incrementable y decreciente (no se fusiona con otras unidades ni se transforma en un continuo cuando está conectado a un número). El segundo es considerado abstractamente y concierne a la enumeración. En este sentido, según Glossner, los escolásticos distinguirían entre la multiplicidad cuantitativa y la multiplicidad ontológica. Concluye su reseña señalando que estas observaciones críticas no pretenden disminuir o retractar el reconocimiento y el mérito al autor y sus conocimientos profundos en la esencia del cálculo.

[235] Como la reseña de H. Schotten (1856–1939), director del *Oberrealschule* en Halle y desde 1901 editor del *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*. Si bien es cierto que la reseña de Schotten es un listado de temas, es el único que pone atención en la "ausencia", en *Filosofía de la aritmética*, de un estudio más detallado de las obras de G. Cantor, B. Kerry y B. Bolzano, por ser los primeros en trabajar el concepto de *Inbegriff*.

[236] Tal es el caso de la reseña de C. T. Michaëlis (1852–1914), autor de dos breves tratados: *Über Kant's Zahlbegriff* (1884) y *Stuart Mill's Zahlbegriff* (1888). Michaëlis fue el primero en poner de relieve el hecho de que *Filosofía de la aritmética* era, en realidad, una preparación para una obra sistemático (o completa) sobre una auténtica filosofía de la aritmética. Dicho sea de paso, para Michaëlis el trabajo de Husserl es uno de los mejores escritos sobre los fundamentos de la aritmética de su tiempo.

[237] Tal es el caso de la reseña de Adolf Elsas (1855–1895), profesor de física en Marburgo y autor de *Über die Psychophysik. Physikalische und erkenntnistheoretische Betrachtungen* (1886). Aunque Elsas también señala que las discusiones psicológicas y lógicas que Husserl ha reunido en *Filosofía de la aritmética* están destinadas a servir como una preparación y una base científica para un desarrollo futuro, no pasa por alto el hecho de que la obra de Husserl no rastrea el desarrollo histórico del concepto de número en la historia de las matemáticas. Curiosamente, Elsas señala que los fundamentos psicológicos del concepto de número "rara vez se mencionan" y en cambio se presenta la progresión lógica coma la base del concepto de número.

[238] Aquí se puede ubicar la reseña de Albino Nagy (1866–1900) quien estudió matemáticas y filosofía de 1884 a 1888. Nagy de inmediato relaciona el concepto de representaciones simbólicas, "tema popular en la psicología alemana moderna", con lo dicho por Brentano y Meinong (*Hume studien* 1882). Al igual que los demás revisores, mantiene cierto interés en la publicación del segundo volumen en los que se tratará el cálculo lógico, pero sobre todo por los principios de semiótica que probablemente contribuirían de manera significativa a la polémica entre Husserl y Voigt.

con respecto a estos temas, aunque ya se les insinúa sustancialmente en los últimos capítulos de *Filosofía de la aritmética*. Sin más, comienzo la presentación de las reseñas.

1. Frank Thilly,[239] *The Philosophical Review* 1(3) (Mayo 1892), p. 327–30

En la reseña de Thylli, *Filosofía de la aritmética* presenta un enfoque muy detallado a propósito de una genuina filosofía de la aritmética. Además de ser vista como una valiosa contribución para la comprensión de los conceptos fundamentales que subyacen a la ciencia de los números, el libro de Husserl, a juicio de Thylli, muestra un compromiso significativo, aunque sólo sea en el marco de la lógica, y cuya aparición sobresale de los escasos recuentos sobre la filosofía de las ciencias hasta entonces conocidas. Asimismo, Thylli tiene el tino de señalar el amplio rango de lecturas del autor y su muy cuidada critica a los puntos esenciales de las teorías ahí presentadas. Además, considera que los argumentos presentados a los matemáticos deben absolver a Husserl del cargo de unilateralidad. En efecto, a Thylli le parece que el desprecio intencional de una terminología especializada que a menudo repele a los que no son expertos en el oficio, hace que las páginas sean accesibles tanto para los matemáticos como para los filósofos (Ierna, 2012c. p. 206-207). En lo que se refiere al contenido de *Filosofía de la aritmética,* Thylli no tiene ningún reparo en el hecho de que Husserl haya rechazado el método lógico y aceptado los resultados de la psicología. Asimismo, en cuanto al concepto de “enlace colectivo”, reconoce que esta explicación le parece mucho más satisfactoria que el razonamiento superficial de Mill quien, como Bain, defiende la teoría de la abstracción física. Lo verdaderamente interesante está en la vinculación que hace Thylli entre Husserl y Kant, a propósito de la noción de *algo en general*. A su juicio, este último concepto le parece más bien una categoría en el sentido kantiano de *función* o forma del intelecto, un hecho que el propio Husserl no aprecia suficientemente.

Finalmente, Thylli explica con mucho detalle la segunda parte de *Filosofía de la* aritmética, tomando muy en cuenta el hecho de que para Husserl la aritmética es simplemente

[239] Frank Thilly (1865–1934). Estudió en Alemania entre 1889 y 18990 bajo la dirección de Friedrich Paulsen. Posteriormente fue profesor en las universidades de Cornell y Princeton, autor de *A History of Philosophy*.

un medio artificial para superar las imperfecciones de un intelecto finito. Del mismo modo, revisa con detalles la noción husserliana de cuasi-cualidades sensibles de una multitud, el papel de las representaciones simbólicas, la noción de signo y las tareas de la aritmética (p. 207-208). Finaliza su reseña comentando brevemente el último capítulo de *Filosofía de la aritmética*. Desde mi juicio personal, me parece que Thylli leyó muy detenidamente el texto de Husserl, lo que la vuelve una reseña de mucho calado filosófico.

2. Paul Carus,[240] *The Monist* II (July 1892), p. 627–629

Paul Carus fue de los primeros en señalar que el primer volumen de *Filosofía de la aritmética* no pretendía ser un sistema completo de filosofía de la aritmética, sino que intentaba preparar, en una serie de investigaciones psicológicas y lógicas posteriores, la base científica para una futura construcción de esta disciplina que tendría igual valor tanto para el matemático como para el filósofo (p. 208). En la revisión de la primera parte, Carus pone atención a las ideas de pluralidad, unidad y número en la medida en que se dan directamente y no en simbolización (indirecta). En la segunda parte considera las representaciones simbólicas de la pluralidad y el número. En su revisión crítica del libro, señala que este contiene muchas sugerencias valiosas, pero que es muy difícil de leer por su carácter tan disperso. Según Carus, los puntos de vista de Husserl no están claramente establecidos, la tabla de contenidos tampoco está organizada de forma sistemática siendo de poca ayuda para tener una pista del plan del libro. Se supone, continúa Carus, que el lector debe leer el libro directamente para comprender capítulos separados o incluso oraciones, y, aun así, no es seguro entender las propuestas del autor cuya consistencia no es tan aparente como podría esperarse. Por otro lado, Carus es, quizás, el único que puso atención a la crítica que hace Husserl de la teoría de Frege a propósito de la dificultad de definir conceptos como calidad, intensidad, lugar, tiempo, etc., (p. 209). Sin embargo, agrega Carus, esta idea es difícil de entender. Finalmente, termina por señalar que el libro contiene muchos pasajes que no están bien pensados por el

[240] Paul Carus (1852–1919). Estudió con Hermann Grassmann en Stettin y posteriormente en Tubinga. En 1880 emigró a Gran Bretaña y después a USA, donde fue confundador de Open Court Press y editor de *The Monist*. Sobresale su fuerte relación con Charles Sanders Peirce.

autor, pero admite que el tema es difícil y, como tal, una obra de este tipo debe ser juzgada con indulgencia.

3. Ernest Lindenthal,[241] *Zeitschrift für das Realschulwesen* (1893), p.104–107

Lindenthal también pone atención en el hecho de que el trabajo de Husserl no pretende ser un sistema directo de filosofía de la aritmética, antes bien, prepara los fundamentos de esta ciencia. Discute la primera parte de *Filosofía de la aritmética* destacando el origen del concepto de pluralidad por medio del enlace colectivo; los diversos intentos de explicar la esencia del número; la noción de equinumerosidad, y termina con los conceptos de unidad y multiplicidad. Discute, también, la segunda parte dedicada a los llamados conceptos simbólicos de número y las fuentes lógicas de la aritmética de los números. En una revisión general de la “segunda” obra de Husserl, Lindenthal es bastante generoso al señalar que no existe en alemán o en ningún otro idioma un trabajo de tal magnitud, ni con una exposición tan detallada y abarcadora sobre los fundamentos de la aritmética con tantos resultados prometedores (p. 210).

Respecto de la revisión crítica del contenido de *Filosofía de la aritmética*, Lindenthal elogia el hecho de que los desarrollos críticos de la primera parte, es decir, todos los puntos de vista sobre la esencia del número, se sometan a un escrutinio agudo. Asimismo, Lindenthal coincide con Husserl en el rechazo a las opiniones nebulosas y dependientes de Wundt con respecto a los números relativos, fraccionarios e irracionales y con las críticas a los intentos nominalistas de Kronecker y Helmholtz. Lindenthal, al igual que lo hiciera posteriormente Frege, esboza una crítica a propósito de las definiciones del concepto de unidad que Husserl brevemente desarrolla en *Filosofía de la aritmética* (Hua XII, 153). La crítica tiene que ver con la ambigüedad de la palabra unidad. Según Lindenthal, Husserl señala que en el análisis superior se habla de unidades en varios sentidos que no tienen nada que ver directamente con el número y sólo se encuentran en una relación muy remota con él. Por ejemplo, las unidades imaginarias. Estas a menudo sirven como un recurso técnico, en cuyo caso no les corresponde

[241] E. Lindenthal (1853–1922). Fue un professor de matemáticas y autor de libros de textos sobre matemáticas: *Rechenlehre für die I und II Realschulclasse* (1896).

ningún contenido conceptual, pero en *otros casos* (en ciertos dominios materiales) les corresponde una "significación real". Según Lindenthal, las unidades imaginarias no son unidades contables y, por tanto, no ve ningún tipo de variedad de unidades. En su ejemplo, la palabra caballo no es plurívoca sólo porque haya caballos *blancos*, de la misma manera la palabra unidad no es plurívoca simplemente porque haya unidades imaginarias (p. 211). Para Lindenthal esto es un error que debería eliminarse de las revisiones de *Filosofía de la aritmética*.

La siguiente crítica tiene que ver con la definición de número como "pluralidad de unidades". Según Lindenthal, esto no tiene ningún significado. En sus palabras: el filósofo se convirtió en gramático, pero donde comienza la gramática, la filosofía termina. Otra crítica, quizás la más ingenua, Lindenthal la encuentra en Hua XII, 14-15, donde Husserl señala que dondequiera que se asigne un número determinado se puede hablar de una pluralidad y donde se tiene una pluralidad siempre hay un número determinado. Para Lindenthal esto no es cierto. En oraciones como: "hay muchos puntos de vista" o "muchos caminos conducen a Roma", aparecen "pluralidades", pero no hay números definidos o viceversa. A lo sumo se podría decir que la pluralidad solo puede entenderse como pluralidad finita (p. 211). Del mismo modo, Lindenthal crítica la apreciación de Husserl sobre la aprehensión de una pluralidad en un sólo acto de pensamiento. Para Lindenthal, "un amigo, su amor por el orden y la fatigabilidad" no *despiertan* el concepto tres cuando se los piensa simultáneamente, antes bien, sólo cuando nuestra atención se dirije al contraste entre uno y muchos es que surge el concepto de pluralidad. A la pregunta ¿cuántos son Júpiter, una contradicción y un ángel? no se responde inmediatamente "tres", sino solo después de traerlos bajo un concepto común. En este caso, bajo el concepto de cosa. Para Lindenthal es más que claro que se postula un concepto antes de contar. Finalmente, señala que el paralelismo que Husserl establece entre el sistema de conceptos numéricos y el de signos es extraordinariamente útil a la hora de calcular. Sin embargo, esto no justifica la explicación del cálculo como una deducción basada en reglas de signos a partir de signos. Lindenthal termina su reseña señalando que el libro de Husserl, tomado en su conjunto, es un excelente logro en el área fronteriza de la filosofía y la aritmética, pero también es adecuado para reducir las fantasías dominantes del valor educativo de las matemáticas puras a su dimensión correcta.

4. Franz Hillebrand,[242] *Göttingische gelehrte Anzeigen* 4 (1893), p. 175–80

El análisis de Hillebrand pone de manifiesto la importancia del estudio y el origen psicológico del concepto de pluralidad, así como la reflexión sobre la forma peculiar de unificación de contenidos en cada pluralidad concreta, la esencia del enlace colectivo y las críticas a las obras de Lange, Mill y Jevons. En oposición a los demás revisores de la obra de Husserl, Hillebrand es el único que pondera el papel de la idealización como un acto psíquico de orden superior necesario para la *completación* de un dominio dado. Del mismo modo, vuelve a poner sobre la mesa de discusión el concepto de igualdad y su no-identidad en la correlación uno-a-uno [biyección] de miembros individuales. Otro de los apuntes críticos de Hillebrand versa sobre la definición del cero y el uno como números en sentido "figurado", a partir de esta caracterización sigue la adición y la partición como dos operaciones básicas que podemos aplicar a los números. Después de haber reseñado correctamente los conceptos que se relacionan con el concepto de número y de haber descrito las operaciones básicas sobre estos, Hillebrand se dirige a la investigación de los conceptos numéricos simbólicos y su origen en los llamados "momentos figurales". De hecho, es interesante que sea Hillebrand quien ponga atención a la relación entre Husserl y von Ehrenfels en torno a las nociones de *cualidades-Gestalt*. Sobre la base de este resultado, Hillebrand describe brevemente la aparición de los números sistemáticos y después los no sistemáticos (p.218). Al final, agrega Hillebrand, Husserl discute las fuentes lógicas de la aritmética en lo que se refiere a la ciencia de la derivación simbólica de los números a partir de las operaciones basadas en reglas con signos sensoriales.

Hecho lo anterior, Hillebrand se apresura a señalar que en el libro de Husserl se trata de una investigación cuidadosa y sofisticada de un área problemática. Sin embargo, se precisa de un análisis psicológico más profundo sobre el concepto de *colección*. Según Hillebrand, Husserl intenta caracterizarlo como un acto unitario en una pluralidad de contenidos dados que los mantiene unidos. Si preguntamos, agrega Hillebrand, qué se entiende por tal *acto*, se obtiene por respuesta lo siguiente: un interés unitario y al mismo tiempo un notificar unitario.

[242] F. Hillebrand (1863–1926). Filósofo y psicólogo vienés, estudiante de Brentano y Marty, autor de *Die neuen Theorien der kategorischen Schlüsse* (1891).

Sin embargo, caben las preguntas: ¿son dos actos? ¿Pueden estar presentes por separado? ¿Cuál de ellos es el principal? ¿Pertenecen a los actos de representación? ¿Son estas diferencias en intensidad? Si a estas preguntas no se les puede dar una respuesta concluyente al final, entonces es bueno no proseguir el análisis más allá de lo que se está completamente seguro. Hillebrand termina diciendo que no hay crítica en esto último, pero sí expresa su deseo de que el autor no prive a sus lectores del segundo volumen tan esperado.

5. Alois Höfler,[243] *Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane* VI (1894), p. 49–56

De entrada, la reseña de Höfler presenta el trabajo de Husserl como una obra que testimonia el influjo del trabajo de Kerry (p. 222); además de señalar que este es sólo el primer volumen.[244] Así como los anteriores revisores, analiza en dos partes *Filosofía de la aritmética*. En la primera señala que la obra trata, principalmente, de las cuestiones psicológicas involucradas en el análisis de los conceptos de pluralidad, unidad y número. En la segunda parte considera las presentaciones simbólicas de la pluralidad y el número e intenta mostrar cómo el hecho de que estemos casi totalmente limitados a conceptos numéricos simbólicos determina el sentido y el propósito de la aritmética de los signos. Höfler respalda la mayoría de las investigaciones indicadas con respecto al contenido, pero, sobre todo, con relación al método utilizado en *Filosofía de la aritmética*. En efecto, el propio Höfler señala que durante muchos años ha preferido y ha llegado a soluciones cercanas al trabajo de Husserl (p. 224). Sin embargo, existen diferencias esenciales que Höfler no tarda en señalar. Una concierne a la teoría de las relaciones. Para Höfler, la contribución de Husserl a la teoría de las relaciones no está firmemente establecida. De hecho, cree que Husserl vacila en su terminología sobre la noción de relación. Dentro de esta crítica, este autor señala que Husserl hubiera logrado mayor entendimiento si hubiera establecido una conexión, aunque sea polémica, con la primera y hasta ahora única publicación extensa sobre la teoría de las relaciones, *Hume*

[243] A. Höfler (1853–1928). Matemático, físico y filósofo austriaco, alumno de A. Meinong.
[244] El propio Höfler señala que Husserl le avisó por carta, "no hace mucho tiempo", que la preparación se retrasaría más allá de 1893. Esta misma circunstancia pudo, en parte, contar como una excusa para la tardanza de su revisión. *Cfr.*, la carta de Höfler a Husserl del 16 de febrero de 1893 en Hua-Dok III/1, pp. 63-64.

studien II. Zur Relationstheorie de Meinong, un tratado en el que aparece por primera vez la expresión teoría de las relaciones (p. 224).

Una segunda objeción se refiere al tratamiento de la presentación del concepto de número. Höfler sugiere que Husserl no parece distinguir la actividad mental de la actividad mental relacionada, ni tampoco entre un evento psíquico y un acto psíquico. Los actos psíquicos son presentar, asentir, negar, amar, odiar, querer, etc., que se revelan por la percepción interna. Con respecto a esto, Höfler confiesa que prefiere la teoría de Lotze a los intentos de Stumpf de restringir el concepto de "actividad psíquica" (224-226). Precisamente por este motivo, Höfler exhorta a Husserl, que todavía está "trabajando" en esos temas, a mostrar una mayor clarificación de algunos pasajes oscuros de su libro. En todo caso, Höfler sugiere que es mejor volver al decimotercer (último) capítulo, las fuentes lógicas de la aritmética, después de la publicación del segundo volumen, y posponer la evaluación general del trabajo de Husserl, que es para él el más completo que existe en filosofía de la aritmética.

6. Friedrich Pietzker,[245]*Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* XXVI (1895), p. 512–517

Para Pietzker, la mayoría de las críticas que Husserl realiza son justificadas, aunque en ocasiones presente una interpretación "demasiado reducida" de algunas afirmaciones que no fueron pretendidas de ese modo por sus creadores (p. 237). En general, está de acuerdo con Husserl, especialmente con la refutación de la teoría de equivalencia y de la justificación de la equinumerosidad por el concepto de correlación uno a uno. La explicitación de los intentos nominalistas (Helmholtz y Kronecker) que toman el número ordinal como el concepto básico, así como la posición mencionada anteriormente, es correcta en sus planteamientos, aunque no reciben mayor tratamiento en el apéndice de *Filosofía de la aritmética*. En lo que Pietzker no está de acuerdo con Husserl, es cuando señala que las cosas contadas no tienen la igualdad que se les asigna concretamente en el proceso de contar bajo un concepto general. En el

[245] F. Pietzker (1844–1916). Enseñó matemáticas y física en Nordhausen. Es el autor de *Die Gestaltung des Raumes: Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie* (1891), donde discute los principales tópicos de la geometría no-euclideana de Riemann y Helmholtz. Pietzker es el único en considerar una posible discusión entre lo dicho por Husserl en *Filosofía de la aritmética* y la visión formalista de la aritmética dominante aquellos tiempos.

contexto de la polémica contra la confusión de igualdad e identidad cometida por Frege en la discusión del concepto de número, Pietzker enfatiza que por igualdad nunca se entiende la concordancia completa. Piensa, además, en la polémica de Husserl contra la opinión defendida por Frege, que no es aceptable ninguna definición de número que tampoco se ajuste a cero y a uno. Que Husserl no quiera considerar al cero y al uno como números propios porque no encajan en su derivación del concepto de número del concepto de conexión colectiva (sic) es, en su opinión, demasiado estrecho y en cierto sentido demasiado literal (p. 238-239). Sobre este asunto, Pietzker prefiere tomar la afirmación de Frege como correcta: el número responde la pregunta ¿cuántos? que también puede responderse con cero o uno. La distinción propuesta por Husserl, por correcta que sea, entre la unidad en la multiplicidad y la unidad en oposición a la multiplicidad no es un argumento concluyente aquí. Si Husserl estuviera realmente en lo cierto con su exclusión de cero y uno de la serie de conceptos numéricos apropiados, entonces también tendría que desterrarlos de la ciencia de los números (de la aritmética). Que aún quiera concederles la *oportunidad* es una inconsistencia que no es refutada por su argumentación. Incluso, agrega Pietzker, se tiene la sensación de que el autor sólo desea considerar, como momento común de las cosas que se contarán, el hecho de que cada una caiga bajo el concepto de *algo*. Finalmente, agrega Pietzker, estas discusiones son la antesala para el segundo volumen del libro que cubrirá la aritmética propiamente concebida, esto es, como una teoría general de las operaciones.

7. Jules Tannery,[246] *Bulletin des science mathematiques* XVI (1892), p. 239–245. Reimpresa en *Science et philosophie*, Paris (1912), p. 79-87

Fue de las primeras revisiones de *Filosofía de la aritmética*. Aunque publicada en el *Bulletin des sciences mathematiques*, el texto de Tannery tuvo el acierto de enfocarse en los aspectos filosóficos del texto de Husserl. Si bien la reseña presenta escasos o, mejor dicho, *nulos* análisis críticos, ella es, por mucho, la reseña más completa de *Filosofía de la aritmética*, razón por la que merece un brevísimo espacio en esta lista de reseñas. Para Tannery, la segunda parte de *Filosofía de la aritmética* es la más rica en información; en ella, las

[246] Jules Tannery fue un matemático francés, hermano del matemático e historiador de la ciencia Paul Tannery. Se educó en Escuela Normal Superior de París.

opiniones de filósofos y matemáticos son desarrollados con amplitud ayudando a que el lector siga la lectura con mayor detenimiento. Tannery, como los anteriores revisores, describe brevemente la idea de abstracción, el enlace colectivo, la idea de "algo en general", todo a la luz de un análisis psicológico. Del mismo modo, sigue cada línea sobre las críticas de Husserl a Leibniz, Frege y a las teorías sobre la equinumerosidad.

8. Władysław Heinrich,[247] *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie* (1895), p. 436–9

En su revisión, escrita en Viena, Heinrich se centró en cuestiones metodológicas. Desde su punto de vista, los conceptos pueden ser estudiados de una manera doble, a saber, incorporando sus diferentes niveles de desarrollo para aclarar la percepción en su valor y alcance, o al describir su etapa actual de desarrollo. Como afirma Heinrich, Husserl emplea el último método, aunque es inadecuado porque describe solo el *qué* (*Was*) de los conceptos aritméticos. Por otro lado, una pregunta más importante se refiere al *cómo* (*Wie*) de los conceptos matemáticos. Según Heinrich, Husserl, al describir la estructura estática del concepto de número, no pudo expresar la construcción compleja y dinámica de contar. Heinrich recomienda una investigación genética en lugar de una descripción estática. Él aprecia, por supuesto, la diferenciación de Husserl entre un símbolo numérico y un concepto numérico. Sin embargo, enfatiza que el análisis de Husserl del conteo se limita solo a algunas partes de la aritmética, pero no se puede aplicar a las matemáticas en general (Płotka, 2017).

Breve balance crítico

Con base en lo anterior y en un intento de análisis panorámico de estas reseñas se puede afirmar que *Filosofía de la aritmética* fue un texto discutido con mucho rigor, al menos, cinco años después de su publicación. Lo interesante en cada una estas recensiones es que en

[247] Estudió en Zurich y Munich, donde escribió su disertación con Richard Avenarius (1843–1896). Después de su regreso a Polonia, trabajó en la Universidad Jagellónica de Cracovia.

ninguna se hace mención del "psicologismo" practicado por Husserl o de su falta de seriedad al momento definir el concepto de número o, peor aún, de la ausencia de un aparato crítico y/o metodológico. Por el contrario, pareciera que, en cada una de ellas, por muy breves que sean, se asume que este primer volumen es un episodio o primer ladrillo en la construcción de una autentica teoría de la aritmética y se ponderan, por mucho, los capítulos dedicados a las fuentes lógicas de la aritmética. Por momentos, y situándonos en la reseña de Frege, da la impresión de que después de haber visto en Husserl una serie de declaraciones psicológicamente problemáticas, Frege aprovechó la oportunidad, en su revisión crítica, para devolverle el favor a Husserl a expensas de su corta interpretación. Es verdad que algunas de las críticas de Frege son exactas, pero también es verdad que muchas no lo son. De hecho, resultaría perjudicial y unilateral suponer que la "segunda" obra de Husserl recibió (únicamente) una revisión y que fue esta la determinó su porvenir. Desde luego, esto no me sitúa del lado de los defensores (demasiado entusiastas) que han insistido en que Frege no tenía nada que enseñarle a Husserl y que sus cambios de opinión fueron totalmente independientes de él. La verdad se encuentra en algún punto intermedio y espero haberlo demostrado en los párrafos anteriores.

Anejo II. El intercambio epistolar entre Husserl y Frege

Es bien sabido que Husserl y Frege coinciden en dos momentos: en 1891 en Halle y en 1906 en Gotinga. Antes y después de la "decisiva" reseña crítica de 1894. A partir de 1916-1918, el distanciamiento es aún mayor, dado que Husserl se traslada a Friburgo y Frege se queda en Jena. Según la periodización histórica de la fenomenología,[248] en 1918 Husserl ya tenía un programa filosófico bastante definido; mientras que Frege, para esas fechas, volvía a sus viejos apuntes para trabajar en lo que sería su obra cumbre: las *Investigaciones lógicas*. La proximidad entre uno y otro incluye, además de las reseñas, una serie de referencias explícitas en sus obras, cartas, y "simples" menciones entre ambos. Todo esto entre 1884 y 1936.[249] Véase el siguiente esquema.

Fecha	**Frege**	**Husserl**
1884	*Fundamentos de la aritmética*	
1891		*Filosofía de la aritmética*. Sección "*El intento de Frege*"
Mayo de 1891	Carta a Husserl	
Julio de 1891		Carta a Frege
No antes de 1892	Versiones sobre *Sentido y referencia* de Frege	
1893		Respuesta a Frege
1894	Reseña de *Filosofía de la aritmética* de Husserl	
1900-1901		*Investigaciones lógicas*
1903-1904		*Informe sobre escritos lógicos alemanes III, V*
1906	Dos cartas a Husserl	Tres cartas a Frege
1936		Tarjeta postal a Scholz

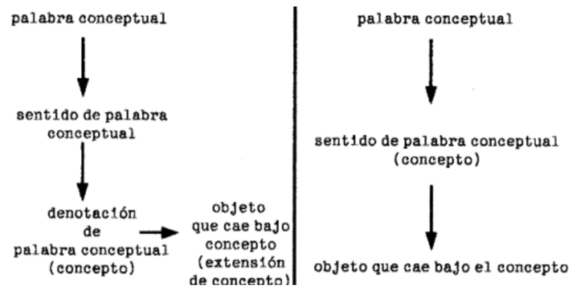
[248] *Cfr*. Sokolowski, R. (1964) y Spiegelberg, H. (1982).
[249] *Cfr*. Angelelli, I. (1997).

Dos eventos son los que deben ser remarcados en el esquema anterior: el primero tiene que ver con la correspondencia[250] que ambos mantuvieron y el segundo con el intercambio de sus escritos ocurrido en 1891. Enseguida presentaré algunos detalles sobre esto.

Husserl envió a Frege un ejemplar de *Filosofía de la aritmética* en 1891, y Frege a Husserl su *Conceptografía*. La primera carta entre ambos, el 24 de mayo de 1891, da prueba de este intercambio (Frege, 1980, p. 61). En ella se deja en claro que Husserl además de leer la *Conceptografía* y los *Fundamentos de la aritmética*, también conoció los ensayos *Sobre concepto y objeto* y *Sobre función y concepto* (Hua XXII, 202-203). Frege, por su parte, además de estudiar *Filosofía de la aritmética*, conocía los siguientes escritos de Husserl *El cálculo inferencial y la lógica de contenidos* y la reseña del libro de Schröder, *Lecciones sobre el álgebra de la lógica.* Sobre esta reseña, Frege está de acuerdo en dos puntos principales planteados en ella. El primero se refiere a *la forma en que los signos* 0 y 1 se introducen en el cálculo y el segundo se refiere a las definiciones de suma y multiplicación. Cabe destacar que Frege no sólo está de acuerdo con la crítica de Husserl a Schröder, sino que además muestra cierto agrado por haber encontrado a alguien con el mismo interés por los fundamentos de la matemática.

Del contenido filosófico de la carta sobresalen dos puntos que a mi juicio son fundamentales para aclarar parte de la "versión fregeana". El primero se refiere a los dos esquemas trazados por Frege para hacer frente a la dificultad de comprender la relación entre palabra y objeto que Husserl expone en *Filosofía de la aritmética*. El segundo punto aparece cuando Frege señala que en "[…] los *Fundamentos* no había ensayado aún la distinción entre sentido y referencia" (Frege, 1980, p. 63). Sobre la primera cuestión, los esquemas muestran una versión preliminar de la distinción entre *Sinn* y *Bedeutung*. Del lado derecho, Husserl, del izquierdo, Frege.

[250] Una historia sobre las cartas entre Husserl y Frege puede encontrar en Ortiz Hill y da Silva (2013).



En este esquema, según Frege, Husserl da un salto que va desde el concepto a la referencia objetiva. Desde el punto de vista fregeano es un error lógico pensar que se puede transitar de la *percepción de un objeto* a la *representación en un concepto* sin la mediación del *nombre propio* cuya tarea es representar directamente al objeto y ponerlo a disposición del pensamiento que lo conceptualiza. Sobre la segunda cuestión, estas notas dejan en claro que para 1884 las nociones de sentido y referencia todavía no están presentes en la obra de Frege y, por tanto, Husserl no pudo haberlas conocido para esas fechas, ni en las obras antes mencionadas. Desde luego, esto no quiere decir que Husserl no haya recogido de esta carta o de los ensayos, *Sobre concepto y objeto* y *Sobre función y concepto*, las nociones de sentido y referencia.

En la segunda carta, el 18 de julio de 1891 (1980, p. 64), Frege recibe una respuesta en la que Husserl agradece la correspondencia anterior, así como el envío de los ensayos: *Aplicaciones de la conceptografía, Sobre las teorías formales de la aritmética* y *Sobre el propósito de la conceptografía.* En esta carta Husserl no profundiza en ningún tema de lógica o matemáticas en particular, sólo se limita a señalar que no está de acuerdo en lo expresado por Frege en sus escritos, pero le reconoce la brillantez con que marca la diferencia entre lenguaje y cálculo.

Con motivo del envío de parte de Husserl a Frege del quinto de sus *Reportes sobre escritos alemanes de lógica de los años 1895-1899* (Hua XXII, 236-258), la tercera carta del 30 de octubre/01 de noviembre de 1906 contiene una serie de apuntes que dejan ver cierto reverdecimiento de la amistad filosófica entre ambos luego de casi doce años de la publicación de *Filosofía de la aritmética*. Del contenido filosófico de esta carta sobresale la discusión sobre el papel de las proposiciones equivalentes (o equipotentes) y su relación con las nociones modernas de implicación *material* e implicación *estricta* (1980, p. 69). Finalmente, la última carta entre ambos, el 9 de diciembre de 1906, recoge algunos puntos de una carta anterior que Husserl habría enviado a Frege, donde este último discutía cómo debe ser entendida una equivalencia y una contradicción lógicas. Esta última carta corresponde a la fecha del 10 de noviembre, pero se perdió. También se especula que en esa carta Husserl estudió el uso de las proposiciones equivalentes y las paradojas (quizás la paradoja de Russell) dentro de la lógica. De igual manera, la carta fechada entre el 21 de diciembre y el 13 de enero de 1906-1907, se perdió.

A lo anterior quisiera agregar lo siguiente: la comunicación entre filósofos. Es bien sabido que Husserl además de mantener una correspondencia con Frege, también mantuvo correspondencia con Bertrand Russel quien, a su vez, también la tenía con Frege. Del mismo modo, Husserl mantuvo una amplia relación con Stumpf, quien mantenía correspondencia con William James y con el incipiente círculo de Viena. No obstante, todas estas cartas y correspondencias han sido poco evaluadas por los comentadores de Husserl y Frege, pero considero que en ellas se revelan perspectivas interesantes, al menos para disminuir la imagen crítica de uno y otro. Dicho esto, me enfocaré en el intercambio epistolar que Frege mantuvo con Marty y Stumpf para demostrar tangencialmente este punto.[251]

La relación entre Frege y Carl Stumpf ha sido ignorada casi en su totalidad.[252] Sin embargo, bien merece la pena recordar que los alumnos de Brentano, entre los que se cuenta Stumpf, fueron los *unicos* responsables de la primera recepción crítica de la obra de Frege en Alemania. De esto queda constancia por la carta que escribió Frege a Stumpf en la que describía algunas ideas básicas de su *Begriffsschrift* y le pedía que publicase una reseña de su libro que, en aquel momento, había sido ignorado por completo, al menos desde su

[251] Benno Kerry también es importante en este sentido. Sin embargo, no me ocuparé extensamente de él, salvo en esta breve nota. Se sabe que fue Benno Kerry quien inspiró la redacción de *Sobre concepto y objeto* (1892). En efecto, Frege abre dicho trabajo señalando que Kerry, en una serie de artículos sobre la intuición y su elaboración psíquica, se ha referido a sus *Fundamentos de la aritmética* y a otros de sus escritos, concordando con ellos en parte y en parte impugnándolos. Algo que, además de motivante, demanda la discusión de los puntos impugnados por él. El recorrido por los ocho artículos que conforman la serie que Frege menciona, ubican a Kerry como un filósofo compenetrado con la problemática de los fundamentos de la matemática de su época. Tales artículos aparecen entre 1885 y 1891 en el *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie* bajo el título "Über Anschauung und ihre psychische Verarbeitung". Dicho sea de paso, Kerry además de presentar su conocida crítica a la noción fregeana de concepto, critica especialmente la noción fregeana de número y su definición de sucesor. Sin embargo, Frege no supo ponderar los agudos comentarios de Kerry basados en su lectura de la *Conceptografía* y no merecieron una respuesta a tono con la exigencia realizada. Por lo demás, la crítica de Kerry no trasciende los círculos académicos en los que él se movía y nadie responde a ella sino quince años más tarde, en la obra de B. Russell, *Principles of Mathematics*.
[252] Dos de los trabajos que podrían considerarse como los más completos, y quizás únicos en esta línea, se los debemos a Ewen (2008) y Fisette y Martinelli (2015).

publicación en 1879. El temor de Frege era que las obras que estaba preparando sobre la fundamentación de la aritmética sufrieran el mismo destino que su *Begriffsschrift*. Stumpf respondió a la carta de Frege semanas más tarde prometiéndole reseñar su escrito, no sin antes recomendarle que primero publicase su investigación en lengua vernácula (*gewöhnlich*) y pospusiera la publicación de su teoría de la aritmética basada en el lenguaje técnico de su *Begriffsschrift*, al parecer Frege hizo caso de este consejo y publicó, años más tarde, sus famosos *Fundamentos de la aritmética*:

> Si tuviera su *Conceptografía* (*Begriffsschrift*) a la mano, gustosamente cumpliría con su deseo de discutir los puntos de vista a los que Ud., se refiere en su carta, pero lamentablemente no logro recordarla a detalle, y los detalles son indispensables para un completo entendimiento de sus puntos de vista; y, en segundo lugar, estoy en el proceso de, finalmente, llevar a término y a impresión una investigación que he estado persiguiendo durante siete años, la cual exigirá todo mi tiempo por varios meses más. Pero prometo responderle lo más pronto posible; también espero ser capaz de escribir algo en un *Journal*. (¿Podría su nuevo trabajo, tal vez, ser reseñado junto con su *Conceptografía*?)" (Frege, 1980, p. 189).

La investigación que menciona Stumpf es su *Tonpsychologie*, misma que, finalmente, le impidió realizar alguna reseña o mención del trabajo de Frege. Fue Anton Marty, otro alumno de Brentano, de quien hablaré más adelante, quien en 1884 reseñó y comentó la *Begriffsschrift* de Frege en el segundo artículo de una serie de estudios sobre proposiciones sin sujeto.

Ahora bien, de Stumpf sólo se dice, y se reconoce, que fue el hombre que alentó a Frege a escribir los *Fundamentos de la aritmética*, pero se olvida que ambos fueron estudiantes de Lotze y que convivieron en la Universidad de Gotinga entre 1870 y 1873. Desde luego, las afinidades filosóficas entre uno y otro, que es lo que finalmente importa, no son pocas. En el periodo antes mencionado, el interés de Stumpf no estaba dirigido a la psicología, sino hacia los fundamentos de las matemáticas y hacia las críticas al psicologismo de Fries y Beneke. La prueba de esto se encuentra en su artículo de 1891, *Psychologie und Erkenntnistheorie*[253] y en su tesis de habilitación, *Über die Grundsätze der Mathematik*. En

[253] *Abhandlungen der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften* 19, zweite Abt., München: Franz, p. 465-516

ambos textos, Stumpf presenta un debate con el psicologismo que *parece* anteceder la posición adoptada por Husserl y Frege sobre el mismo tema. En efecto, el punto de partida de Stumpf es la pregunta por el fundamento del conocimiento científico, su origen y fin último. De entrada, descarta los emplazamientos filosóficos que dominaban en aquel momento: el empirismo de J. S. Mill y el trascendentalismo kantiano, y se sitúa en los límites del quehacer filosófico y psicológico experimental. Dicho con mayor soltura, Stumpf reconoce que debemos mantener una estricta línea divisoria entre el concepto de *necesidad*, pieza clave de los principios y las leyes de la lógica y la ciencia en general, y las *generalizaciones* meramente empíricas. Se trata, pues, de demostrar que los axiomas y las proposiciones matemáticas son analíticas y que no se adquieren a través de la experiencia, pero sin denostar el hecho de que son resultado de un proceso de deducción a partir de conceptos. Previamente en su tesis de habilitación, Stumpf había delimitado el campo de la lógica y de las matemáticas con respecto al de la psicología. En este sentido, Stumpf distingue la cuestión del *origen* de los *conceptos*, que es una cuestión *psicológica*, de la cuestión que pertenece al dominio lógico-matemático, al que pertenecen las proposiciones y los axiomas.

El artículo antes mencionado, *Psychologie und Erkenntnistheorie*, no fue ajeno al interés de Husserl. Como ha puesto de manifiesto Dieter Münch (2002), la posición de Stumpf sobre el psicologismo en estos textos tuvo una influencia en la crítica de Husserl al psicologismo lógico en sus *Prolegómenos*. W. Ewen (2008), editor de la tesis de habilitación de Stumpf, también subraya la relación de Stumpf con Husserl, pero sobre todo con Frege, y extrae varios paralelismos entre las contribuciones de Stumpf y este último a propósito de la fundamentación de las matemáticas y la crítica del psicologismo, todo ello teniendo como base la lógica de Lotze. Husserl explícitamente se refiere al artículo de Stumpf en, al menos, dos ocasiones. La primera referencia está en una nota a pie de página de los *Prolegómenos* (§18), donde Husserl adopta el mismo marco teorético de Stumpf para referirse al psicologismo. Esta "breve" observación parece sugerir que, a diferencia de la posición antipsicologista defendida por Frege, Husserl sigue a Stumpf al negarse a excluir la contribución de la psicología a las materias epistemológicas. La segunda referencia se encuentra en una nota a pie de página donde Husserl opone la posición de Stumpf a la de Erdmann en su *Lógica* (*Briefwechsel*, III, p. 132).

Ahora bien, en el caso de la relación de Anton Marty con Frege, sólo se tiene como antecedente una carta fechada el 29 de agosto de 1882, en la que solicita a Marty la revisión de su obra: [254]

> Me dio mucho placer su amable postal, tanto más que sólo he encontrado muy poco acuerdo hasta ahora. Permítame darle algo más de información sobre mi *Conceptografía* con la esperanza de que, tal vez, tuviera ocasión de llamar la atención sobre ella en un *Journal*; para mí esto haría más fácil publicar nuevas obras (1980, p. 117).

Del contenido de esta carta sobresalen varios puntos filosóficos importantes: primero, una sugerencia de Marty a Frege de explicar su programa en el lenguaje ordinario y después en su notación conceptual, así haría más accesible su programa logicista. Segundo, el hecho de que Frege encuentra un punto de reunión y discordia con Husserl y Marty, respectivamente, a propósito de aceptar o no el tratamiento de la negación como parte de un contenido judicativo. Tercero, Frege insinua de forma más o menos destacada el concepto de *insaturación* o *incompletitud*, cuando señala que un concepto no está saturado cuando requiere que algo caiga bajo él; por tanto, no puede existir por sí mismo. Cuarto, Frege comenta líneas más adelante en esta carta que la refutación de Kant del argumento ontológico se vuelve muy obvia cuando se presenta en los términos por él criticados sobre la existencia como propiedad de conceptos. Asimismo, en el segundo de sus artículos de la serie *Über subjectlosse Sätze und das Verhältniss der Grammatik zu Logik und Psychologie*, Marty dedica algunas páginas para discutir la teoría del juicio de Frege, expuesta en el *Begriffsschrift*. Hace lo mismo en el tercer artículo del mismo trabajo donde discute la teoría de las denotaciones en términos muy cercanos a los que Frege habría de hacerlo. En este respecto, él afirma que necesariamente se debe dar un vínculo de mediación entre la expresión del lenguaje y su denotación que él llama un *Etymon*. Este *Etymon* sirve como un camino por el cual los signos se denotan.

[254] También Louis Couturat escribe a Frege el 08 de junio de 1899. En la carta se afirma que gracias a la lectura que hizo de *Filosofía de la aritmética* de Husserl, pudo conocer el trabajo Frege. La tesis doctoral de Couturat versó sobre el infinito matemático y fue publicada en 1894.

Anejo III. La ampliación del dominio numérico por medio del análisis geométrico

Para entender cómo los primeros estudios filosóficos de Husserl en matemáticas se trasladan de la aritmética a la geometría, es necesario volver sobre una nota que Husserl intencionadamente deja en *Filosofía de la aritmética*. En ella se lee lo siguiente:

> Si el tiempo y las circunstancias son favorables, me propongo desarrollar en el segundo volumen una nueva teoría filosófica de la geometría euclidiana, cuyos pensamientos fundamentales (*Grundgedanken*) están en estrecha relación con los problemas que deben tratarse allí (Hua XII, 8).

Los estudios sobre la geometría euclidiana y no-euclidiana continuarían la investigación de *Filosofía de la aritmética*, ya que ambos comparten estos *Grundgedanken*, es decir, el conjunto de herramientas y temas que giran en torno a la noción de representación simbólica. Estudiar si es factible proporcionar un tratamiento algorítmico del campo geométrico y de qué manera proporcionarlo es la tarea de una *filosofía de la geometría*.

Se sabe que desde 1892 Husserl llevó a cabo varios "intentos" de investigación dedicados a la filosofía de la geometría. En realidad, se había interesado en la geometría al menos desde 1886; este interés se intensificó durante el semestre de invierno de 1889-1890 cuando impartió sus lecciones sobre los *Problemas fundamentales de la geometría* (Hua XXI, 312–347). Lo anterior le llevaría por un (aparente) nuevo derrotero en octubre de 1893 en el que aborda el lado psicológico y filosófico del problema del espacio, delineando con ello su primera teoría del espacio. Siguiendo esta pista, presentaré algunos apuntes sobre el volumen XXI de Hua, específicamente del apartado *Ensayo filosófico sobre el espacio* (1886-1901) (de ahora en adelante el *Raumbuch*).[255]

Para Husserl, el *Raumbuch* concluiría con una serie de análisis geométricos y filosóficos a propósito del "ideal euclidiano" de un sistema deductivo mediante el cual se nos brinda la posibilidad de descubrir la esencia (*a priori*) del espacio geométrico (Hua XXI, 267). En ese sentido, el objetivo del *Raumbuch* sería doble: por un lado, se debe aclarar la posibilidad de una fundamentación de la aritmética y por otro lado encontrar el "origen" y el

[255] *cfr*. Hua XXI, 261-310.

"contenido" de la representación del espacio geométrico. La metodología también es doble: esclarecer el nivel ontológico y esclarecer el nivel geométrico. En el nivel geométrico Husserl expone una "*proto-geometría*" que envolvería a las cosas físicas determinándolas geométricamente de modo que podamos re-conocer en ellas una forma espacial; y en el nivel ontológico se explica la relación entre el espacio perceptivo (espacio físico) y el espacio geométrico, ya sea que entendamos a este último como una extensión o como una deformación de aquel otro (Hua XXI, 262).

De acuerdo con lo planificado por Husserl, la estructura del *Raumbuch* estaría constituida por tres momentos de la investigación espacial: el problema psicológico, el problema lógico y el problema metafísico, dando mucho más peso al primero por ser un tipo de investigación más inmediata, y posteriormente al proceso de idealización dentro de la geometría. Proceder de esta manera es tener en vista la *genealogía* de la *lógica geométrica* en un intento de restaurar los vínculos genéticos existentes entre la representación intuitiva y los conceptos puramente formales que caracterizan el campo de la idealización científica. Este tipo de investigación, que ya era visible desde su crítica a Schröder en 1891, pues se presentaba un (re)despliegue del campo de la geometría a partir de los contenidos concretos (los momentos de la representación espacial intuitiva) a la representación puramente conceptual (el espacio geométrico), hace del *Raumbuch* un lugar donde convergen las tesis principales sobre las representaciones simbólicas tanto de *Filosofía de la aritmética* como de los ensayos aritmético-formales.

El primer texto preparatorio (1892) del *Raumbuch* da cuenta de lo anterior al señalar que la diferencia entre una representación intuitiva y una representación conceptual requiere volver a la diferencia entre representación adecuada y representación inadecuada y también a la diferencia entre representación abstracta y representación concreta (Hua XXI, 262). Lo anterior significa que, en el *Raumbuch*, la representación simbólica se investiga en conexión con la formación de la representación espacial. En uno de sus pasajes, Husserl pregunta en este respecto cuál es el objeto real (*das wirkliche Objekt*) de la representación del espacio; si es siempre el mismo o no; si hay más contenidos; si tienen conexiones internas o si se combinan, por ejemplo, en un contenido global ideal:

> Aquí debemos primero preguntarnos qué se nos presenta cuando nos representamos el espacio como objeto inmanente real (*wirkliche*) de la representación y además, si éste es siempre el mismo o si es distinto […]; con otras palabras, preguntamos, si la representación real, la que tenemos cada vez, posee el carácter de una intuición o representación simbólica [*Repräsentation*] y en el último caso volvemos a preguntar, si tiene el carácter de una representación simbólica intuitiva o no intuitiva (adecuada o inadecuada) de lo que nombramos espacio. Si tenemos representaciones simbólicas no intuitivas, debemos investigar si poseen, en general o en ciertas circunstancias, el carácter de representaciones simbólicas conceptuales, en qué relación se encuentran con las intuiciones correspondientes, si pueden basarse en éstas o si, ya sea debido a los límites fácticos de nuestra facultad representativa, ya sea por incompatibilidades intendidas, necesariamente deben estar desprovistas de una intuición correspondiente (Hua XXI, 262).

La díada inicial es la misma que ya se encontró en *Filosofía de la aritmética*, en *Semiótica* y en *Objetos intencionales*: por un lado, *intuición* en lugar de representación propia, y por el otro, *representación simbólica* en lugar de representación impropia. En la intuición de un objeto este está presente, aunque no siempre, como objeto real, inmanente a la representación; en la representación simbólica se representa el contenido como algo presente. Así, a través de sucesivos refinamientos, en *Filosofía de la aritmética*, en *Semiótica* y en el *Raumbuch*, Husserl finalmente llega a perfeccionar una teoría de la representación que, al menos en sus estimaciones, debe aclarar la naturaleza y el funcionamiento de los procesos simbólicos en uso tanto en la aritmética como en la geometría. La exploración de las representaciones simbólicas que se presentan en el *Raumbuch* representa la culminación de la investigación sobre la génesis de la geometría y, con su arquitectura más que con su contenido, se revela una tendencia inherente en el pensamiento de los primeros textos de Husserl, a saber, un abandono de la teoría de la representación brentaniana. En resumen, la cuestión es comprender cómo a partir de ciertas abstracciones materiales surge la geometría formal del espacio como pura multiplicidad y sus componentes formales como puntos, líneas, planos, etc. Como se observa, la problemática central sigue siendo la problemática de *Filosofía de la aritmética*, sólo que en este momento de la investigación husserliana, se trata de estudiar las etapas sucesivas que la conciencia intencional debe atravesar para que desde las capas más elementales de la representación intuitiva puedan formarse representaciones conceptuales en las que se forme la relación con los objetos puramente formales. Dicho de otra manera, se trata de la elucidación del origen de la representación del espacio.

Finalmente, este análisis de la espacialidad permite a Husserl decir que a cada tipo de contenido de percepción le es inherente un tipo de geometría. Claro está, Husserl parte del postulado de que el espacio ocupado por la cosa física es en realidad una concreción del espacio euclidiano. Así, es la extensión de todo objeto físico la que permite "llenar" un espacio: si la extensión varía, su forma y su localización también lo harán. De este modo, la tarea de averiguar el "origen" de nuestra representación del espacio está en relación con una geometría del campo sensible donde se pueda dar una proto-idealización de la cosa espacial y con ello una *geometría unitaria* que funcione como condición *sine qua non* de la constitución de un cuerpo espacial geometrizado. En otras palabras, tanto la aritmética como la geometría aparecen como áreas puramente formales determinadas por las reglas del análisis (Brisart, 2007, p. 262). Desde luego, esto último supondría que la geometría puede ser descrita en términos de conceptos primitivos o axiomas, tal como lo apunta Ingeborg Strohmeyer, quien sugiere que la construcción de la *aritmetica universalis* en un principio, antes de 1901, no necesitó ser fundada a través de axiomas (Hua XXI, xxxi-xxxvi). Aparentemente, esta explicación de la aritmética general haría de Husserl un formalista. En efecto, en los años posteriores a 1891, Husserl realiza un nuevo giro filosófico, esta vez más cercano a Hilbert.

Anejo IV. Los *Prolegómenos* en sus orígenes. La conferencia Marperger

Husserl no recibía salario de fondos públicos mientras era *Privatdozent* en la Universidad de Halle (1887-1901). Salvo por algunas modestas ganancias por honorarios, la mayor parte de su salario provenía de fondos privados. Uno de estos fondos privados (o estipendios) le fue concedido por la Universidad de Halle y por la Fundación Marperger de noviembre de 1896 a mayo de 1898, con la condición de presentar una conferencia en latín en el mes de mayo del último año de recepción de la beca. En consecuencia, Husserl presentó el 6 de junio de 1898 —un mes después y en alemán— la conferencia intitulada: "Sobre la justificación psicológica de la lógica"[256] (de ahora en adelante la "conferencia Marperger"). Entre los temas contenidos en esta brevísima conferencia destacan al menos dos cuestiones relativas a la naturaleza de la lógica: 1) si la lógica es una disciplina teórica o práctica y 2) si es una disciplina independiente de otras ciencias o dependiente de la psicología.

Es muy probable —aunque no del todo seguro— que el núcleo temático de la lección Marperger sea resultado de investigaciones anteriores como la *Logik. Vorlesung 1896* (Hua Mat I) o de comunicaciones como la carta a Paul Natorp del 14-15 de marzo de 1897.[257] La

[256] La conferencia Marperger es un manuscrito estenográfico ubicado en la carpeta K I 29 de los Archivos Husserl de Lovaina. Según su editor, Karl Schuhmann, en el interior de dicha carpeta se encuentra la invitación a la conferencia de Husserl y la inscripción: "Conferencia sobre la tarea de la lógica. Para la beca Marperger 6 de julio de 1898" (*Husserl Chronik*, p.54). Para esta apartado usaré la edición de esta conferencia contenida en *The New Yearbook for Phenomenology and Phenomenological Philosophy* (2002).

[257] Sobre la carta a Paul Natorp, fechada entre el 14 y el 15 de marzo de 1897, Husserl presenta el siguiente informe, que cito *in extenso*:

> En mi investigación partí de la técnica lógica (*logischen Kunstlehre*) y planteé la cuestión (*die Frage*) de sus fundamentos teóricos. Esto llevó a la discusión entre la lógica psicológica y la lógica pura (en el sentido tradicional). La primera pone a la lógica como una parte (*Stück*) de la psicología práctica; en cambio, la lógica pura pretende ser un dominio propio (aunque clasificada en la lógica práctica) sin tener nada que ver con la psicología. Los argumentos presentados por ambas partes son rechazados. Los psicólogos tergiversan el sentido de las leyes lógicas —aquí proporciono, entre otras cosas, contraargumentos (principalmente con relación a Mill y Heymans)— las exactitudes absolutas se convierten en las más burdas generalidades empíricas que corresponden a objetos totalmente diferentes [...]
>
> La lógica pura tiene razón en su tesis, pero se equivoca en la demostración en cuanto que presenta el carácter normativo de las leyes puramente lógicas como esenciales, pero no hace comprensible cómo las reglas para los juicios y otras actividades de pensar son posibles sin tener el fundamento en la psicología; además, el contenido especial de los argumentos habituales ofrece al psicólogo muchos tipos de refutación.
>
> Doy una amplia justificación de mi propia posición al dibujar primero un paralelismo entre proposiciones lógicas y proposiciones algebraicas —de nuevo estoy en acuerdo con su maestro.

justificación para introducir la lección de Marperger al cuerpo de la tesis es que ella documenta un paso decisivo en el desarrollo del pensamiento de Husserl y en mucha medida da cuenta de su dedicación a la lógica en las postrimerías del siglo XIX. Cabe señalar que en lo que respecta a algunos fragmentos o párrafos de la lección de Marperger, la crítica al psicologismo es más reducida o más circunscrita. Lo interesante es que la mayoría de estos fragmentos tienen coincidencia completa, y a veces exacta, en algunos parágrafos de los *Prolegómenos a la lógica pura*.

Entrados en materia, el fragmento K I 29/12a[258] de la lección de Marperger es una suerte de primer diagnóstico del quehacer de la lógica en las postrimerías del siglo XIX:

> Hasta el día de hoy ninguna ciencia tiene menos el carácter de una ciencia autónoma y esencialmente perfeccionada que la lógica […] Sin embargo, si echamos algunas miradas comparativas sobre su contenido, extrañamos la claridad y el acuerdo en todos los aspectos esenciales; lo extrañamos con respecto a los objetivos, los métodos y las teorías […] Vano sería el intento de delimitar una suma de alguna manera considerable de oraciones y teorías llenas de contenido a las que el nuevo siglo podría reclamar como su herencia lógica totalmente segura.

El recuento del estado de las ciencias que Husserl lleva a cabo en la lección de Marperger parte de los "avances" de la así llamada lógica psicológica. Avances que, en lo tocante a sus fines, métodos y principios esenciales, no reflejan una auténtica definición de la lógica como ciencia. Para Husserl, la lógica psicológica (o psicologismo, como mayormente lo denomina) es la consecuencia de la duplicación o repetición de los resultados de la fisiología y la psicología en áreas como la epistemología, la lógica e incluso la pedagogía. Aquí es necesario

---

Muestro que la forma normativa de estas proposiciones es, en ambos casos, un giro insignificante (*unerhebliche Wendung*) de algunos contenidos teóricos, por ejemplo, (a+b) (a- b) = a2 - b2 […]" (Hua Dok III/5, p. 52-53.)

En sentido estricto debería decirse *tecnología* y no técnica lógica (*logischen Kunstlehre*), pues una tecnología es una reflexión sobre una técnica, una que consigue "exponer el cuerpo de las reglas por las que tiene éxito la técnica en cuestión. De este modo, aunque al principio de la actividad técnica se trabaja sin tales reglas tecnológicas, es muy útil para la técnica misma que llegue pronto el momento de poseerlas" (García-Baró, 2008, p. 19). Son las normas o reglas de la tecnología lo debe dominar el técnico para proceder con seguridad en su empeño.

[258] Este fragmento tiene su correspondencia en el §1 de los *Prolegómenos a la lógica pura*: "[…] aún hoy estamos muy lejos de una general unanimidad respecto a la definición de la lógica y del contenido de sus doctrinas esenciales. Esto no quiere decir que la lógica actual ofrezca el mismo espectáculo que hacia la mitad del siglo […] vano sería el intento de acotar una suma de proposiciones o teorías, con un contenido objetivo, en que pudiésemos ver el patrimonio inalienable de la ciencia lógica de nuestra época y la herencia que deja al porvenir" (Husserl, 1999, p. 35)

tener presente que el establecimiento del psicologismo se debió al reemplazo e interés de fundar una nueva crítica *antropológica* de la razón. Esto último fue visible entre los años 1830 a 1870 cuando se intentó traducir el estudio de la estructura del alma a términos psicofísicos o, dicho en términos kantianos, de traducir los conceptos trascendentales a condiciones empíricas. Las obras de J. F. Fries y de H. Helmholtz son un claro intento de probar que las tesis kantianas derivaban en un fenomenalismo para el cual los datos sensibles aportan los conceptos suficientes y necesarios con los cuales construir un idealismo subjetivo. En suma, se trataba de pronunciarse a favor del análisis del "yo psicológico" y atribuirle procesos psicológicos y fisiológicos mediante procesos inductivos. Bajo este enfoque, la lógica sería una provincia de la psicología cuyo argumento principal podría resumir de la siguiente manera: *si la lógica se ocupa de juicios y deduce de manera natural otras formas de pensamiento que se manifiestan en eventos psíquicos, entonces, todo proceso que implique nociones como validez y deducciones debe ser resuelto mediante un examen de los procesos mentales de los individuos, puesto que ellos juzgan y razonan de manera lógica*. La equivalencia es clara: normas y leyes son sinónimos de regularidades empíricas; y los actos mentales son sinónimos de contenidos representacionales y/o procesos psíquicos. Esto da por resultado, además, que los conceptos (objetivos) pasen a ser ideas (subjetivas) ubicadas en un (falso) nicho (naturalista) de la subjetividad.

El inicio del fragmento K I 29/11a[259] presenta sus "cuestiones discutidas" junto con el camino a emprender:

> Una pregunta dice: ¿es la lógica una disciplina esencialmente teórica o esencialmente práctica? La otra: ¿es una ciencia que precede a todas las demás y, por tanto, es independiente de todas las otras o es, por el contrario, dependiente? La última pregunta apunta específicamente de preferencia a la disputada dependencia de la psicología. Pronto

[259] Este fragmento tiene su similar en el §3 de los *Prolegómenos*. Las cuestiones discutidas tradicionalmente, y que están en relación con la delimitación de la lógica, son las siguientes:

1. Si la lógica es una disciplina teorética o una disciplina práctica (un «arte»).
2. Si es una ciencia independiente de las demás ciencias y en especial de la psicología y la metafísica.
3. Si es una disciplina formal o, como suele entenderse, si se refiere a la «mera forma del conocimiento» o debe tomar en consideración también su «materia».
4. Si tiene el carácter de una disciplina *a priori* y demostrativa o el de una disciplina empírica e inductiva.

> veremos cuán íntimamente conectadas están las dos preguntas entre sí y cómo respondiendo una se llega a la otra.

Teniendo en mente estas *cuestiones disputadas*, Husserl traza una frontera entre la psicología y la lógica que tiene en cuenta la demarcación del campo de acción de cada disciplina. Por un lado, la psicología, como ciencia de hechos, investiga el modo en que nuestros pensamientos se desarrollan subjetivamente y, por otro lado, la lógica, como ciencia ideal, investiga las leyes que rigen nuestro pensamiento de manera universal. En pocas palabras, Husserl pretende separar la lógica de la lógica psicológica a partir de la *discusión* de sus principios rectores.

El final del fragmento K I 29/11a junto con el fragmento K I 29/10b[260] establece lo siguiente:

> Por supuesto, la lógica puede construirse como una disciplina práctica […] Lo que los representantes de un lado han subrayado una y otra vez es completamente cierto: una lógica orientada a la práctica es un postulado irrefutable de toda ciencia; después de todo, la lógica tuvo sus primeros orígenes en las necesidades prácticas […] Examinada más de cerca, la verdadera cuestión controvertida, que desafortunadamente no ha sido formulada claramente por ningún lado, es totalmente diferente: pregunta, en efecto, si es solo el punto de vista práctico el que justifica el derecho de la lógica como una disciplina científica autónoma […]

Lo esencial en este fragmento es que Husserl no combate o niega el carácter práctico de la lógica —el cual puede o no existir—, lo que pone en entredicho es si su sentido epistemológico fundamental, el de ser o bien una ciencia autónoma o una ciencia dependiente, tiene acomodo (o no) en el aspecto práctico de la lógica. La respuesta a este cuestionamiento parte de la evidencia de que las leyes lógicas, por ser lógicas, son esencialmente distintas de las leyes de hechos o regularidades de la experiencia. Así, mientras

[260] Este coincide casi palabra por palabra con lo establecido en el §13 del segundo capítulo de los *Prolegómenos*: "La cuestión en verdad discutida y la importante en principio […] se refiere a si la definición de la lógica como arte toca su carácter esencial. Lo único que se discute es —con otras palabras— si el punto de vista práctico es el único en que se funda el derecho de la lógica a ser considerada como una disciplina científica propia […] (1999, p. 54)".

que las leyes de hechos sólo pueden ser o parciales (o probables), las leyes lógicas son universales y absolutas. Otro de los fragmentos, el K I 29/9b[261] señala lo siguiente:

> ¿Cuáles son las disciplinas teóricas sobre las que descansa la lógica y cuáles son las que le ofrecen fundamentos teóricos esenciales? […] Si luego preguntamos con precisión sobre los fundamentos esenciales de la lógica, el psicologismo prevaleciente responde en el mismo sentido. Por supuesto, dice, los fundamentos esenciales de la lógica se encuentran en la psicología. Todas las oraciones que le dan a la lógica su sello característico tienen su derecho de origen allí. La lógica está relacionada con la psicología exactamente de la misma manera, y en ninguna otra, como la topografía para la geometría, como la ingeniería mecánica para la física, etc. Encontramos observaciones similares en Lipps, Meinong, en resumen, en todos los pensadores psicologistas.

En otras partes de la lección de Marperger, específicamente en los fragmentos K I 29/9a y K I 29/8b,[262] Husserl apunta lo siguiente:

> Es notable que a pesar de que el argumento es tan plausible y tan viejo como la disputa completa, no ha sido capaz de ganar sobre el lado opuesto, ni siquiera en el caso de un gran psicólogo como Herbart. Se ofrecieron argumentos en contra, pero a su vez se perdieron en el partido psicologista. No quiero entrar en estos argumentos aquí. Son de tal naturaleza que realmente no saben cómo hacer prevalecer su buen núcleo, y debido a la falta de claridad de sus conceptos o al mezclarse con errores, permiten un aparente rechazo. De esta manera, solo contribuyen a fortalecer el psicologismo en su posición. Así, los viejos argumentos y contraargumentos van y vienen, sin apenas modificaciones significativas, y cada parte se adhiere a su punto de vista […]

[261] Es paralelo a lo establecido en el §17 de los *Prolegómenos*: "¿Qué ciencias teoréticas suministran los fundamentos esenciales a la teoría de la ciencia? […] En este punto tropezamos con la discutida cuestión de la relación entre la psicología y la lógica. Pues hay una dirección —justamente la dominante en nuestro tiempo— que tiene pronta respuesta a las cuestiones formuladas y dice: los fundamentos teoréticos esenciales de la lógica residen en la psicología, a cuya esfera pertenecen por su contenido teorético las proposiciones que dan a la lógica su sello característico. La lógica se relacionaría, pues, con la psicología como una rama de la tecnología química con la química o como la agrimensura con la geometría, etc. (1999, p. 67)".

[262] Es similar a lo dicho en el §19 de los *Prolegómenos*: "Es cierto que la psicología debe investigar las leyes naturales del pensamiento, o sea, las leyes de todos los juicios, justos o falsos; pero sería absurdo interpretar esta afirmación como si sólo entrasen en la psicología aquellas leyes de máxima generalidad, que se refieren a todos los juicios, debiendo excluirse de su esfera las leyes especiales del juicio, como las leyes del juicio justo (sic)" (1999, p. 69) Este argumento demuestra que la psicología es, a lo sumo, copartícipe en la fundación de la lógica, pero no que sea ella sola, ni siquiera preferentemente, la que suministre el fundamento esencial, en el sentido definido por Husserl. Aquí queda abierta la posibilidad de que otra ciencia contribuya a la fundación, y posiblemente de un modo más importante.

> Pero reflexionemos sobre la principal pregunta orientadora. La que se refiere a los fundamentos teóricos esenciales de la lógica. ¿Esta cuestión está realmente resuelta por los argumentos de los pensadores psicologistas? Aquí encontramos enseguida el talón de Aquiles. Que una técnica de conocimiento científico, como una función psíquica, no es posible sin la psicología, por supuesto, no lo negaremos. Sin embargo, eso realmente solo prueba una cosa, que la psicología está involucrada en la fundamentación de la lógica, pero de ninguna manera es la tesis psicologista la que prueba que únicamente la psicología está involucrada o que proporciona la base esencial de la técnica lógica. La posibilidad permanece abierta a que otra ciencia, y tal vez de una manera incomparablemente más significativa, contribuya a su fundamentación. Y este puede ser el lugar para esa lógica pura a priori que, según Kant y Herbart, lleva una vida independiente de toda psicología, como una ciencia naturalmente limitada e independiente.

Al enfrentarse a las cuestiones indicadas anteriormente, Husserl distingue tres tendencias principales en los estudios sobre los fundamentos de la lógica: (*i*) el ya mencionado psicologismo; (*ii*) el formalismo, donde la lógica estudiaría las condiciones "formales" que evitarían las contradicciones y (*iii*) la metafísica, donde la lógica sería un instrumento que contribuye al discernimiento de contenidos verdaderos. A cada una de estas maneras de estudiar la lógica corresponde una metodología para justificar o delimitar su método, por ejemplo: si la lógica es una disciplina subordinada a la psicología, la lógica debe basarse en la psicología para establecer las leyes fundamentales del raciocinio científico. Si la fundamentación de la lógica es únicamente formal, la lógica debe ser una ciencia meramente formal en detrimento de otros aspectos de las ciencias en general. Si la fundamentación en cuestión es ontológica o fenomenológica, la lógica deberá establecer una metodología ontológica o fenomenológica para establecer sus leyes.

Finalmente, el fragmento K I 27/7a de la lección de Marperger apunta lo siguiente:[263]

> […] es absolutamente necesario tener en cuenta una distinción entre enunciados que sirven a la norma de conocimiento y oraciones que contienen el pensamiento de esta norma en sí mismas […] Las leyes silogísticas nos sirven en la normatividad de las actividades inferenciales; pero ellas mismas no contienen el pensamiento de esta norma. No tienen el

[263] Es similar a lo dicho en el §41del capítulo ocho de los *Prolegómenos* "Insistimos en que las leyes lógicas, consideradas en sí y por sí, no son proposiciones normativas, en el sentido de preceptos, esto es, de proposiciones a cuyo contenido sea inherente el enunciar como se debe juzgar. Hay que distinguir las leyes, que sirven de normas para las actividades del conocimiento, y las reglas, que implican la idea de esta norma y enuncian ésta como universalmente obligatoria" (1999, p. 139)

> carácter de oraciones deontológicas […] Hay una diferencia fundamental entre las normas puramente lógicas (que son normas, pero no prescripciones técnicas, ni prácticas, válidas para todo ser inteligente como tal) y las reglas técnicas de un arte del pensamiento específicamente humano, y ambas son, de acuerdo con el contenido, origen y función, de un carácter totalmente diferente. Las normas lógicas están relacionadas con lo ideal, las reglas técnicas con lo real; los primeros tienen su origen en axiomas inmediatamente evidentes, las últimas en hechos empíricamente psicológicos.

Para Husserl es necesario dejar en claro que las leyes lógicas, consideradas en sí y por sí, no son proposiciones normativas en el sentido deontológico, por eso insiste en que hay que *distinguir las leyes que sirven de normas para las actividades del conocimiento,* y las *reglas que implican la idea de estas normas,* como es el caso de cualquier teorema matemático.

Hasta aquí las comparaciones entre la lección de Marperger y los *Prolegómenos*. Solo resta mencionar que existe una diferencia notable entre ambos textos: en el primer texto, la crítica psicologista no está dirigida a autores particulares, en el segundo sí encontramos una mayor concentración sistemática de los argumentos antipsicologistas.

Anejo V. Los seis teoremas de la tercera investigación lógica. Bosquejos de una formalización

§1. Introducción y presentación de los teoremas

Luego de establecida la relación de fundamentación, Husserl enuncia seis teoremas que resumen las relaciones parte-todo. El desarrollo se presenta a partir del §14 de la tercera investigación lógica. Pese a lo esperado, Husserl no presenta ningún tipo de demostración lógico-matemática de dichos teoremas, aun y cuando dichos teoremas tienen un interés primario en su teoría de los todos y partes:

> Estos pensamientos quieren, y sólo pueden ser, meras indicaciones para un futuro tratamiento de la teoría de los todos y las partes. Una realización efectiva de la teoría pura que aquí tenemos en mente, debería definir todos los conceptos con exactitud matemática y deducir los teoremas por *argumenta in forma*, esto es, matemáticamente (Hua XIX/1, 294).

En lo que sigue expondré sumariamente los teoremas presentados por Husserl, seguidos de las traducciones formales más conocidas hasta ahora.

Los teoremas son los siguientes:

Teorema 1. Si un α, como tal, necesita ser fundado por un μ, entonces un todo que incluya como parte un α, pero no un μ, necesitará igualmente de la misma fundamentación.

Teorema 2. Un todo que incluya como parte un momento no-independiente, sin incluir la complementación exigida por dicho momento, también es no-independiente; y lo es relativamente a los todos independientes superiores, en los cuales aquel momento no-independiente esté contenido.

Teorema 3. Si G es una parte independiente de (relativamente a) Γ, entonces toda parte independiente g de G también será una parte independiente de Γ.

Teorema 4. Si γ es parte no-independiente de un todo G, también será parte no-independiente de cualquier todo del cual G sea una parte.

Teorema 5. Un objeto relativamente no-independiente es también absolutamente no-independiente. En cambio, un objeto relativamente independiente puede ser no-independiente en sentido absoluto.

Teorema 6 Si α y β son partes independientes de un todo G cualquiera, también serán independientes relativamente una de la otra (Hua XIX/1, 268-269).

Los seis teoremas tienen por base o por condición de fundamentación la ley esencial que dice que:

> Definición. Un α sólo puede existir como tal α, en una unidad que lo incluya, que lo enlaza con un μ, decimos que el α, como tal, necesita ser fundamentado por un μ, o también que el α, como tal necesita ser complementado por un μ. Por consiguiente, si α_0 μ_0 son casos singulares ejemplificados en un todo de los géneros α y μ, que se encuentran en la relación indicada, decimos que α_0 está fundado por μ_0 y exclusivamente por μ_0 cuando sólo μ_0 satisface la necesidad de complementación que siente α_0. Naturalmente podemos trasladar esta terminología a las especies mismas. El equívoco aquí es completamente inofensivo (Hua XIX/1, 267).

§2. Revisión panorámica de las propuestas de formalización de los seis teoremas

Los teoremas anteriores han merecido una revisión completa e intentos de formalización a lo largo de varias décadas. En este apartado presentaré de manera *panorámica* cada una de estas formalizaciones hasta hoy conocidas. Debo anticipar que las demostraciones, largas y detalladas, escapan por completo a esta investigación por lo que no serán motivo de explicación.

El ensayo de Eugene Ginsberg “On the Concepts of Existential Dependence and Independence” (1929) es el primer texto que estudia, más o menos detenidamente, la tercera investigación lógica de Husserl. El artículo comienza con las definiciones de Stumpf sobre los contenidos dependientes e independientes, continúa con Höfler, luego Twardowski y finalmente Husserl. En la revisión que hace Ginsberg de los seis teoremas de Husserl, sólo los teoremas I, III y V son admitidos como válidos. Los teoremas II y, por tanto, el IV y el VI son, a su juicio, falsos. El argumento que sostiene lo anterior es el siguiente: Un todo que incluya un momento dependiente sin incluir o comprender como su parte el complemento que exige ese momento es igualmente dependiente y es tan relativo a cualquier todo independiente superior en el que ese momento dependiente esté contenido. La conclusión de Ginsberg es que no todas las partes pertenecen a un mismo todo y, por tanto, el criterio de dependencia es *relativo*. Desde luego, es un hecho que la crítica de Ginsberg es errónea. Lo anterior se debe a que no toma en cuenta la distinción propuesta por Husserl entre fundamentación mediata y fundamentación inmediata. Así, la dependencia de una parte a un todo o de un todo a un todo superior es una dependencia inmediata que no afecta a la dependencia mediata de una parte a un todo previo.

En el ensayo de Peter Simon “The Formalisation of Husserl's Theory of Wholes and Parts” (1982) se presenta un trabajo más completo en cuanto a la formalización se refiere. Dentro de sus pronunciamientos, Simons reconoce que la teoría de los todos y las partes de Husserl es no-extensional, lo que obliga a trabajar con conceptos como *necesidad* y *esencia* (en sentido platónico) (p. 116).[264] También menciona la poca familiaridad con que Husserl habla de la lógica moderna. En relación a la elección del lenguaje formal para traducir los seis teoremas, Simons utiliza un tipo de lógica modal (S4). El problema de usar un operador como el de necesidad es que los términos que utiliza Husserl no operan sobre proposiciones

[264] En el capítulo VII de *Parts. A Study in Ontology* (1987), Simons reitera su crítica al señalar que el programa de los todos y las partes de Husserl no puede asumir el término *Fundierung* como un tipo de dependencia formal. *Fundierung* sería, en todo caso, un tipo de dependencia ontológica o existencial más cercana al concepto aristotélico de sustancia, que, aunque capaz de predicarse de objetos en general, es infecunda en cuanto a proposiciones puramente lógicas (p.ej. portadores de verdad). Antes de dar por válido lo anterior, es necesario resolver una cuestión, a saber, el problema de si la relación de *Fundierung* debe tomarse como un predicado o como un operador sentencial. Si se toma como un predicado, la relación de fundamentación se expresa en los términos “estar fundamentado en estados de cosas, objetos, universales, etcétera”; si se toma como un operador sentencial, la fundamentación debe hacerse mediante un operador o conectiva, por ejemplo, la implicación estricta entre oraciones. Ambas propuestas traen consigo dificultades innecesarias. En la primera propuesta se requeriría precisar el tipo de categorías ontológicas y sus relaciones de fundamentación incluso entre universales; en la segunda propuesta, la fundamentación en términos operacionales es más débil. Si radicalizamos la propuesta de Simon, resulta que el concepto de *Fundierung* sería una suerte de versión esencialista donde una entidad Φ es ontológicamente dependiente de otra entidad Ψ si y sólo si Ψ constituye una proposición que es verdad en los términos de la identidad de Φ. Sin embargo, para Husserl la noción de *Fundierung* es una noción ontológica primitiva no analizable por otras ni reducible a enfoques esencialistas. Inclusive, es posible argumentar que la noción de dependencia ontológica, analizada en términos de la relación de fundamentación, poco tiene que ver con una implicación que haría de la dependencia ontológica una relación más débil que la de fundación.

sino en *propiedades*, y esto complica su traducción correcta. De acuerdo con lo anterior, el operador de necesidad actuaría como un operador general que determinaría la necesidad genérica en toda la fórmula; sin embargo, existe, en la tercera investigación lógica, un tipo de fundamentación individual. Detallo esto último.

Como ya se advirtió líneas atrás, Husserl caracteriza dos nociones de fundamentación: la fundamentación de especies y la fundamentación objetual. La fundamentación de especies es una relación binaria que conecta especies con clases y la fundamentación objetual es una relación binaria entre objetos. Husserl considera explícitamente que la noción de fundamentación de especie es más fundamental que la objetual. Empero, de lo anterior surgen varios problemas. Uno de ellos es que no está claro cómo dar un sentido preciso a la caracterización de la fundamentación de especies y el otro es que la caracterización de la fundamentación objetual no capta apropiadamente la noción objeto-parte. Sobre el primer problema, Simons presenta una simbolización para los miembros individuales. Si, por ejemplo, consideramos que $\alpha \rceil \beta$ = "α's están fundados sobre los β's", y $\alpha \rangle \beta$ = "objeto que contiene un α pero no un β como parte", el primer teorema, según Simons, quedaría definido del siguiente modo: $\alpha \rceil \beta \supset \alpha \rangle \beta \rceil \beta$. Bajo esta óptica, el teorema II no es derivado del teorema anterior, pues mientras el teorema I habla de *especies*, el teorema II se predica de *individuos* y, por tanto, este último teorema se prueba como falso.

Otra formalización se encuentra en Gilbert T. Null y Roger A. Simons en su ensayo "Manifolds, Concepts and Moment-Abstracta" (1982). Ambos interpretan la teoría de los todos y las partes en términos de una lógica de segundo orden monádica [clases, miembros y elementos] y las relaciones binarias entre ellos [$\varnothing$, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \subseteq B$]. Sumado a lo anterior, otro propósito del artículo es presentar una teoría de variedades como solución a las preguntas relacionadas con las nociones tradicionales de universales y especies. Desde un punto de vista ontológico, las variedades tendrían las propiedades de los universales o individuos universales de orden superior. Desde un punto de vista epistemológico, las variedades se definirían como extensiones de conceptos formulados lingüísticamente. Al distinguir diferentes tipos de variedades y relaciones entre variedades, se hacen posibles distinciones análogas relativas a conceptos predicativos como los todos y las partes. Finalmente, la interpretación de Null y Simons expresa que toda variedad definida, junto con sus expansiones, es una variedad de primer orden gracias a un tipo de equivalencia elemental. Aunque la propuesta es arriesgada, no deja de ser interesante vincular una interpretación de los todos y las partes desde este punto de vista.

Bajo el título “Matrix Representation of Husserl's Part-Whole-Foundation Theory” (1990), Richard Blecksmith y Gilbert Nulle estudian la teoría de los todos y las partes en términos de matrices boolenas. Este ensayo persigue dos objetivos: uno general y uno específico. El objetivo general es introducir e ilustrar, con el uso de matrices booleanas, las propiedades lógicas de predicados y, por tanto, de proporcionar caracterizaciones matriciales de modelos finitos para conjuntos de axiomas que contienen dichos predicados. El objetivo específico es considerar los sistemas axiomáticos que implican la relación parte-todo junto con una relación de fundamentación empleada por Husserl. Para lo anterior, primero presentan un sistema de axiomas que es, en realidad, una formalización de primer orden de la teoría de las relaciones de parte-todo sugerida por Husserl y enseguida su representación matricial; al resultado lo llaman “estructuras de Husserl” ($\cup$, $\leq$, $\Im$: Σ). Su sistema de axiomas emplea dos conceptos primitivos: parte propia ($\leq$) y fundamentación ($\Im$). Una denota las relaciones entre la parte y el todo, y la otra la fundamentación. Así, sea $U = \{1,...,n\}$ y sean $\leq$, $\Im$ relaciones binarias en U con incidencia de matrices en P, F, se nombrará, a la matriz de incidencia de la relación de solapamiento O, la matriz de superposición $O = [o_{ij}]$. Las operaciones resultantes o que se pueden realizar entre matrices booleanas son tres: unión, conjunción y producto booleano. Estas operaciones serían equivalentes a las operaciones de solapamiento, productos binarios, sumas, complementos y diferencias. Desde luego, no pueden realizarse sobre dos matrices cualesquiera, sino que deben cumplir ciertos criterios para poder llevarse a cabo. En particular, en el caso de la unión y la conjunción, las matrices que intervienen en la operación deben tener el mismo tamaño, y en el caso del producto booleano, las matrices deben cumplir con las mismas condiciones para formar el producto de otras matrices.

Otra de las formalizaciones más acertadas se encuentra en el ensayo de Kit Fine “Part-Whole” (1995). Fine se enfoca en el malentendido que Husserl da por válido: mezclar formulaciones generales con formulaciones particulares o lo que Simon (1982) ya había apuntado: pasar de la interpretación genérica a la interpretación objetual. ¿Cómo interpreta Fine esta confusión? En la tercera investigación lógica, Husserl señala:

> Por consiguiente, si α_0 μ_0 son casos singulares ejemplificados en un todo de los géneros α y μ, que se encuentran en la relación indicada, decimos que α_0 está fundado por μ_0 y exclusivamente por μ_0 cuando sólo μ_0 satisface la necesidad de complementación que siente α_0. Naturalmente podemos trasladar esta terminología a las especies mismas. El equívoco aquí es completamente inofensivo (Hua XIX/1, 267. El subrayado es mío).

Sin embargo, es el caso que el equívoco sí es del todo perjudicial. En el caso de que se estuviera refiriendo a especies, no queda claro cómo sería la dependencia entre los individuos, pues en la ley anterior: "*algún* miembro de una especie *complementa* a otro miembro de *otra especie*" no se determina qué miembro de la especie debe funcionar como complemento fundamentante. De hecho, la mayoría de las veces no queda claro si Husserl se está refiriendo a individuos o a especies (Banega, 2005). Una forma de dar un rodeo a este "salto categorial" es redefinir, según Fine, el núcleo proposicional a partir de las siguientes convenciones notacionales: parte ($\leq$); fundamentación ($\Im$); α, β, variables que denotan especies, y operadores "x en tanto que α"($\square_{x,\alpha}$). De esta manera, la representación del primer teorema quedaría de la siguiente manera: $\square_{\mathbf{x,\alpha}}\chi \rightarrow \forall x \ (x\mathrm{I}\alpha \rightarrow \chi)$. El operador afecta a toda la proposición por igual. Sin embargo, no puede hacerse lo mismo con los siguientes teoremas que requieren la simbolización de las nociones de *parte dependiente*, *todo independiente* y *parte relativamente dependiente* y, por tanto, las simbolizaciones de una fundación estricta y una fundación débil.

Otro aporte se lo debemos a Jean Petitot en su ensayo "Sheaf mereology and Husserl's morphological ontology" (1995). El núcleo de este ensayo, dicho en términos muy generales, es la relación entre el concepto de *Fundierung* y el enfoque de modelos geométricos y conceptos topológicos (haces, topos, geometría diferencial, etc.). El ensayo inicia con la distinción entre ontología formal y ontología regional; enseguida, continua con una descripción "morfológica gestaltista" cuyo propósito es presentar una esquematización geométrica de la esfera eidético-pura y su correlato (axiomática mereológica). El resultado es que, a partir de distinguir un concepto primitivo mereológico ($x\mathbf{C}y$) y un concepto primitivo topológico ($x\mathbf{P}y$), se logre dar cuenta de, por ejemplo, una mereología de haces.

En 1998, Barry Smith presentó su ensayo "Basic Concepts of Formal Ontology". En él, Smith agrupa los conceptos básicos de la ontología formal husserliana en tres categorías: la teoría de la parte y el todo; la teoría de la dependencia y la teoría del límite, y la continuidad y el contacto. El trasfondo del que parte Smith es, curiosamente, un enfoque topológico que se torna más evidente, según este autor, en el tratamiento de la noción de fusión. La sugerencia de Smith es, pues, una mereotopología (combinación de mereología y topología) cuyos conceptos fundamentales son: conjunto abierto, conjunto cerrado, densidad, límites, puntos, etc., y con relaciones primitivas como parte interior, parte discreta, punto interior, etc. Según Smith, la mereotopología ofrece un marco más adecuado permitiendo formular hipótesis ontológicas formales de una manera más directa y completa. Bajo este enfoque, el concepto de fusión, pero sobre todo el de suma ($Szxy=def.\ \forall w[Ozw \leftrightarrow (Owx\ v\ Owy)]$) se amplía: suma irrestricta ($\exists w \varphi w \rightarrow \exists z Sz \varphi w$); suma general ($\sigma x \varphi x\ =df\ \imath z Sz \varphi wS$); suma irrestricta unica ($\exists x \varphi x \rightarrow \exists z(z=\sigma x \varphi x)$) y suma generalizada ($[\exists w \varphi w\ \&\ \forall w(\varphi w \rightarrow \psi w)] \rightarrow \exists z Sz \varphi w$).

Haciéndose eco de los trabajos de Kit Fine, Fabrice Correia, en "Husserl on Foundation" (2004), demuestra la insuficiencia del teorema II y presenta una posible solución al dilema de la relación de especie y objetos. Según Correia, si se toma por válido lo que dice Husserl acerca de que: si α_0 μ_0 son casos singulares ejemplificados en un todo de los géneros α y μ, que se encuentran en la relación indicada, decimos que α_0 está fundado por μ_0 y exclusivamente por μ_0 cuando sólo μ_0 satisface la necesidad de complementación que siente α_0, la caracterización ciertamente no capta el concepto de fundación objetual. Según la definición propuesta, para que un objeto se fundamente en otro objeto es suficiente que (i) no sea parte del otro, y (ii) exista una especie *a* y una especie *m* tal que el primer objeto pertenezca a *a* y el segundo a *m*, y *a* se basa en *m*. Así, no son los miembros de una especie los que necesitan ser complementados por miembros de otra especie dentro de unidades más integrales, sino la noción de los miembros de una especie que necesitan ser complementados por miembros de esa misma especie dentro de unidades más completas. Con lo anterior, según Correia, no sólo la relación de fundamentación queda posiblemente esclarecida, sino también el problemático teorema II. Dicho sea de paso, me parece que el análisis presentado por Correia es quizás el más atinado en este aspecto y el más completo de los hasta ahora mencionados.

Finalmente, los trabajos de Ettore Casari “On Husserl’s Theory of Wholes and Parts” (2000) y “On the Relationship between Parts and Wholes in Husserl’s Phenomenology” (2007). Ambos ensayos pretenden dar una respuesta de formalización definitiva a los teoremas de Husserl, no sin antes presentar una crítica a la postura de Simon y a la presentación en lógica modal. Casari apuesta más por un tipo de lectura topológica. Si bien es cierto que la lógica modal expresa “satisfactoriamente” la parte formal de la tercera investigación lógica, para Casari usar herramientas topológicas significa privilegiar el lado ontológico de dicha investigación. Es en este nivel donde se formalizan objetos y especies, aunque Husserl los use indistintamente. Para Casari, los problemas que Fine y Correia diagnosticaron siguen estando presentes, pues sigue sin quedar claro cómo sería la dependencia entre los individuos. Más aún, la equivalencia entre (1) a_o necesita complementación o (2) a_o está fundado en un determinado momento, como sinónimas de (3) a_o es dependiente, es falsa o está mal establecida de principio.

BIBLIOGRAFIA

A) Tomos de Husserliana citados

- [Hua IX] *Phänomenologische Psychologie. Vorlesungen Sommersemester 1925*. Hrsg. Walter Biemel, The Hague, Martinus Nijhoff, 1968

- [Hua X] *Zur Phänomenologie des inneren Zeitbewusstseins (1893-1917)*. Hrsg. Rudolf Boehm. The Hague, Martinus Nijhoff ,1969.

- [Hua XII] *Philosophie der Arithmetik. Mit ergänzenden Texten (1890-1901)*. Hrsg. Lothar Eley, The Hague, Martinus Nijhoff ,1970.

- [Hua XVIII] *Logische Untersuchungen. Erster Band: Prolegomena zur reinen Logik*. Text der 1. und der 2. Auflage. Halle: 1900, rev. ed. 1913. Hrsg. Elmar Holenstein. The Hague, Martinus Nijhoff, 1975.

- [Husserliana XX/1] *Logische Untersuchungen. Ergänzungsband*. *Erster Teil. Entwürfe zur Umarbeitung der VI. Untersuchung und zur Vorrede für die Neuauflage der Logischen Untersuchungen (Sommer 1913)*. Hrsg. Ulrich Melle. The Hague, Kluwer Academic Publishers, 2002.

- [Husserliana XX/2] *Logische Untersuchungen. Ergänzungsband*. *Zweiter Teil. Texte für die Neufassung der VI. Untersuchung. Zur Phänomenologie des Ausdrucks und der Erkenntnis (1893/94-1921)*. Hsrg. Ulrich Melle. The Hague, Kluwer Academie Publishers, 2005.

- [Hua XX-1] *Logische Untersuchungen. Ergänzungsband. Erster Teil. Entwürfe zur Umarbeitung der VI. Untersuchung und zur Vorrede für die Neuafulageder Logischen Untersuchungen,* The Hague, Kluwer Academic Publishers, 2002.

- [Hua XXI] *Studien zur Arithmetik und Geometrie. Texte aus dem Nachlass (1886-1901).* Hrsg. Ingeborg Strohmeyer, The Hague, Martinus Nijhoff, 1983.

- [Hua XXII] *Aufsätze und Rezensionen (1890-1910)*. Hrsg. Bernhard Rang, The Hague, Martinus Nijhoff, 1979.

- [Hua XXIV] *Einleitung in die Logik und Erkenntnistheorie. Vorlesungen 1906/07.* Hrsg. von Ullrich Melle The Hague, Martinus Nijhoff, 1985.

- [Hua XXXVIII] *Wahrnehmung und Aufmerksamkeit. Texte aus dem Nachlass (1893-1912).* Hrsg. von Thomas Vongehr und Regula Giuliani. New York, Springer, 2005.

Husserliana Dokumente

- Schuhmann, K. (1977). *Husserl-Chronik* (*Denk- und Lebensweg Edmund Husserls*), Husserliana Dokumente. Nijhoff, Den Haag.

- Husserl, Edmund (1994). *Briefwechsel*. Hrgs. Karl Schuhmann In Verbindung mit Elisabeth Schuhmann. The Hague, Kluwer Academic Publishers.
  Band III: Die Göttinger Schule.
  Band IV: Die Freiburger Schüler.
  Band V: Die Neukantianer.
  Band VII: Wissenschaftkorrespondenz

Husserliana Materialien

- Materialienband I. *Logik. Vorlesung 1896*. Hrgs. Elisabeth Schuhmann. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2001.

Otras ediciones de las obras de Husserl

- Husserl, E. (1901). *Logische Untersuchungen. Zweiter Theil. Untersuchungen zur Phänomenologie und theorie der Erkenntnis*, 1ª Ed. Max Niemeyer, Halle de Salle.
- -------------- (1983). *Contributions à la Theorie du Calcul des Variations*, Ontario, Queen's University.
- -------------- (2005b). *Vorlesung Über den Begriff der Zahl* (WS 1889/90) en *The New Yearbook for Phenomenology and Phenomenological Philosophy*, V, pp. 278–308.
- --------------(1956). *Persönliche Aufzeichnungen* en *Philosophy and Phenomenological Research*, Vol. 16, No. 3. pp. 293-302.
- --------------(2001) Schuhmann, K. y E. Schuhmann (Eds.) "Husserls Manuskripte zu seinem Göttinger Doppelvortrag von 1901" en *Husserl Studies* 17, 2001, pp. 87–123. Kluwer Academic Publishers.

Traducciones de la obra de Husserl citadas

- (2002). *Lecciones de fenomenología de la conciencia interna del tiempo*, Madrid: Trotta. (Trad., Intr., y notas de Agustín Serrano de Haro).

- (1997). *La idea de la fenomenología*. Madrid: F.C.E. Trad. Miguel García-Baró.

- (1999). *Investigaciones lógicas*. Madrid: Alianza. Trad. José Gaos y Manuel García Morente.

- (2006). "Recuerdos sobre Franz Brentano" en Ángel Xolocotzi (Coord.) *Actualidad de Franz Brentano*, Universidad Iberoamericana/cuadernos de filosofía, No. 35, México.

B) Bibliografia consultada y citada

- Abella, Manuel (2009). *Franz Brentano: Unidad de conciencia y conciencia del tiempo*, México: Red Utopía, A.C. Jitanjáfora, Serie Fenomenología, Vol. 8, Morelia Editorial.

- Albertazzi, Liliana (2006). *Immanent Realism. An Introduction to Brentano*, Netherlands: Springer.

- Altobrando, Andrea (2017). La negazione: dal rifiuto al contrasto. Brentano e Husserl sul giudizio negativo, *Verifiche XLVII* (2), pp. 139-177.

- Angelelli, Ignacio (1967). *Studies on Gottlob Frege and Traditional Philosophy*. Netherlands: Springer.

- ----------------------- (1997). The Topics of the "Frege-Husserl" texts, *Phenomenological Inquiry*, *27*, pp. 29–51.

- ------------------------ (2013). Abstracción en la "*Philosophie der Arithmetik*" de Husserl, *Escritos de filosofía*. Segunda serie (1), pp. 59-74.

- Arias Albisu, Martín, (2005). La doctrina kantiana del esquematismo trascendental, *Areté. Revista de filosofía, XVII* (2), pp. 155-182.

- ----------------- (2008). ¿Hay un esquematismo de los conceptos empíricos y matemáticos? *Anuario filosófico, XLI* (3), pp. 621-635.

- ------------------ (2009). Una relación de homogeneidad entre términos heterogéneos. El concepto de homogeneidad en el capítulo del esquematismo de la *Crítica de la razón pura*, *Diánoia*, *LIV*, (63), pp. 71–88.

- ---------------- (2010). Los esquemas trascendentales como procedimientos y productos, *Revista de Filosofía, 35* (1), pp. 27-42.

- ----------------- (2011). El esquema trascendental de las categorías de la cantidad como determinación temporal, *Éndoxa: series filosóficas* (27), pp. 55-72.

- ---------------- (2012). Acerca del carácter ontológico del esquematismo trascendental, *Contrastes. Revista internacional de filosofía*, *XVII*, pp. 7-25.

- --------------- (2014). Los esquemas de los conceptos empíricos y matemático como procedimientos de síntesis gobernados por reglas conceptuales, *Studia Kantiana* (17), pp. 74-103.

- Aurora, Simone (2015). A Forgotten Source in the History of Linguistics: Husserl's *Logical Investigations*, *Bulletin d'analyse phénoménologique*, *XI* (5), pp. 1-19.

- Bachelard, Suzanne (1968). *A Study of Husserl's Formal and Transcendental Logic*, EUA: Northwestern University Press. Trad. Lester Embree.

- Bagaria, Joan (2008). Set Theory. En Gowers, Timothy (Ed.). *The Princeton Companion to Mathematics*, Princeton: Princeton University Press.

- Banega, Horacio M. R. (2005). La mereología husserliana: algunos conceptos y problemas. En Faas, Horacio, Aarón Saal, Marisa Velasco (Eds.) *Epistemología e Histona de la Ciencia* (pp. 74-80): Pío Editores/Universidad Nacional de Córdoba, Vol.

- --------------------------- (2010). La teoría de la ciencia de los '*Prolegómenos a la lógica pura*' de las *Investigaciones lógicas* de Edmund Husserl. En García Alba, Massolo (Ed.) *Epistemología e historia de la ciencia* (pp. 37-44): Pío Editores/Universidad Nacional de Córdoba, Vol. 16.

- Bar-Hillel, Y. (1977). Husserl's Conception of a Purely Logical Grammar. En Mohanty, J.N. (Ed.) *Readings on Edmund Husserl's Logical Investigations* (pp. 128-136), The Hague: Martinus-Nijhoff.

- Baumgartner, Wilhelm y Peter Simons (1994). Brentano's Mereology, *Axiomathes*, (1), pp. 55-76.

- Benoist, Jocelyn (1997). *Phénoménologie, sémantique, ontologie. Husserl et la tradition logique autrichienne*, París: PUF (Épiméthée).

- -------------------- (2001). *Représentations sans objet. Aux origines de la phénoménologie et de la philosophie analytique*, París: PUF.

- -------------------- (2001b). *Intentionalité et langage dans les Recherches logiques de Husserl*, París: PUF.

- -------------------- (2001c). La théorie phénoménologique de la négation, entre acte e sens, *Revue de métaphysique et de morale, XXX*, (2), pp. 21-35.

- -------------------- (2005). *Les limites de l'intentionnalité. Recherches phénoménologiques et anaytiques*. París: Vrin.

- ---------------------- (2008), *Husserl*. París: Ed. du Cerf.

- Beaney, M. (Ed.) (2013). *The Oxford Handbook of the History of Analytic Philosophy*. United Kingdom: Oxford University Press.

- Bégout, Bruce (2000). *La genéalogie de la logique. Husserl, l'antéprédicatif et le catégorial*. París: Vrin.

- Belna Jean-Pierre (1996). *La notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege*. París: Vrin.

- Bernet, R. (1988). Perception, Categorial Intuition and Truth in Husserl's Sixth 'Logical Investigation'. En Sallis, J., G. Moneta y J. Taminiaux (Eds.) *The Collegium Phaenomenologicum. The First Ten Years* (pp. 33-45). Dordrecht: Springer/Kluwer Academic Publishers.

- Bernet, R., Kern, I., Marbach, E. (1989). *Edmund Husserl. Darstellung seines Denkens*, Hamburg: Felix Meiner Verlag.

- Bernet, R. (2002). Different Concepts of Logic and their Relation to Subjectivity. En Zahavi, D. y Stjernfelt, F. (Eds). *One Hundred Years of Phenomenology. Husserl´s Logical Investigations Revisited* (pp. 19-29). Dordrecht / Boston / Londres, Kluwer Academic Publishers.

- Beyer, C. (2010). Edmund Husserl. En Moyar, D., (Ed.). *The Routledge Companion to Nineteenth Century Philosophy* (pp. 887–909). England: Routledge/ Taylor & Francis Ltd.

- Biceaga, V. (2010). *The Concept of Passivity in Husserl's Phenomenology*. Dordrecht: Springer.

- Biemel, W. (1968). Las fases decisivas en el desarrollo de la filosofia de Husserl. En *Cahiers de Royaumont*. *Husserl. Tercer Coloquio Filosófico de Royaumont*. Buenos Aires: Paidós. (Trad.) Amalia Podetti.

- Bierbach, von Pier (1994). Husserls '*Philosophie der Arithmetik*'. Eine textanalytische Studie. En Gerlach, Hans-Martin y Hans Reiner Sepp (Eds.) *Husserl in Halle. Spurensuche im Anfang der Phänomenologie* (pp. 40-62). Frankfurt: Peter Lang.

- Bolzano, B. (1837). *Wissenschaftslehre*. Sulzbach (Alemania, actual): Seidelsche Buchhandlung.

- --------------. (1851). *Paradoxien des Unendlichen*, Leipzig: H. Reclam. (Ed). F. Příhonsǩy.

- --------------. (1905). *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewahren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*. Leipzig: Verlag Wilhelm Engelmann.

- -------------. (2004). *Contributions to a Better-Grounded Presentation of Mathematics* en *The Mathematical Works of Bernard Bolzano*. United Kingdom: Oxford University Press. (Ed.) Steve Russ.

- --------------. (1973). *Theory of Science*. Dordrecht/Boston: D. Reidel Publishing Company. (Ed. y estudio introductorio de Jan Berg), (Trad. Burnham Terrell).

- Boniface, J. (2005). Leopold Kronecker's Conceptions of the Foundations of Mathematics, *Philosophia Scientae* (5), pp. 43-156.

- ---------------. (2007). The Concept of Number from Gauss to Kronecker. En Goldstein, C., N. Schappacher y J. Schwermer, (Eds.) *The Shaping of Arithmetic after C.F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*. Berlín/Heidelberg/New: Springer.

- Boniface, J. y N. Schapacher (Eds.) (2002). Sur le concept de nombre dans la mathématique. Course inédite de Leopold Kronecker à Berlin (1891), *Revue d'histoire des mathématiques*, *Vol 7*, (2), pp. 207-275.

- Bottazzini, Umberto (1986). *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*. New York: Springer-Verlag.

- Boyer, C.B. (1968). *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. New York: Wiley & Sons.

- Brentano, F. (1981). *The Theory of Categories*. The Hague/Boston/London: Martinus Nijhoff Publishers. (Trads.) Roderick M. Chisholm y Norbert Guterman.

- ----------------- (1995). *Psychology from an Empirical Standpoint*. London-New York: Routledge. (Ed.) Linda L. Mcalister. (Trads.) Antos C. Rancurello, D. B. Terrell y Linda L. McAlister.

- ----------------- (2006). *Sobre el concepto de verdad*. Madrid: Editorial Complutense S.A. (Trads.) Juan José García Norro y Silvia López-Palao.

- ----------------- (2009). *The Origin of our Knowledge of Right and Wrong*. New York: Routledge & Francis Group. (Eds.) Oskar Kraus y Roderick M. Chisholm. (Trads.) Roderick M. Chisholm y Elizabeth H. Schneewind.

- ------------------ (2010). *Philosophical Investigations on Space, Time and the Continuum*. New York: Taylor & Francis Group. (Trad.) Barry Smith.

- Brisart, Robert (2007). Les premières articulations du fonctionnement intentionnel: le projet d'un *Raumbuch* chez Husserl entre 1892 et 1894, *Philosophiques*, *Vol. 34*, (2), pp. 259–272.

- Brown, J.R. (2008). *Philosophy of Mathematics. A Contemporary Introduction to the World of Proofs and Pictures*. New York/Londres: Taylor & Francis Group.

- Brunschvicg, Leon (1945). *Las etapas de la filosofía matemática*. Buenos Aires: Lautaro.

- Canela Morales, Luis Alberto (2012). *La constitución fenomenológica del espacio y la corporalidad: un análisis de Ding und Raum. Vorlesungen 1907 de Edmund Husserl* (Tesis de maestría). Universidad de Guanajuato, México.

- Cantor, G. (1915). *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*. New York: Dover Publications. (Trad., intr., y notas de Philip E. B. Jourdain).

- ------------- (2006). *Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta.* Barcelona: Crítica. (Ed., trad., y estudio introductorio de José Ferreirós).

- Caracciolo, Edoardo (2015). Formalization and Intuition in Husserl's *Raumbuch*. En Lolli, G. *et al*. (Eds.) *From Logic to Practice* (pp.30-50). Suiza: Springer International Publishing.

- Castrillo, Pilar (2004). La teoría lógica de Bolzano: Una reacción ante el subjetivismo Kantiano, *Éndoxa*, (18), pp. 417-443.

- Cavaillès, Jean (1962). *Philosophie mathématique.* París: Hermann.

- Cavallin, Jens (1997). *Content and Object. Husserl, Twardowski and Psychologism*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

- Centrone, Stefania (2010). *Logic and Philosophy of Mathematics in the Early Husserl*. Heidelberg/ London/New York: Springer.

- -------------------- (Ed.) (2017). *Essays on Husserl's Logic and Philosophy of Mathematics*. Dordrecht: Springer.

- ---------------------, Pierluigi Minari (2017a). Husserl and Boole. En Centrone, S. *Essays on Husserl's Logic and Philosophy of Mathematics* (pp. 111-124). Dordrecht: Springer.

- ---------------------, Pierluigi Minari (2017b). Husserl and Schröder. En Centrone, S. (Ed.) *Essays on Husserl's Logic and Philosophy of Mathematics* (pp. 125-145) Dordrecht: Springer.

- Chrudzimski, Arkadiusz (2004). *Die Ontologie Franz Brentanos*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

- --------------------------- (2009). Catégories formelles, nombres et conceptualisme. La première philosophie de l'arithmétique de Husserl, *Philosophiques*, *Vol. 36*, (2), pp. 427–445.

- Chrudzimski, Arkadiusz y Barry Smith (2004). Brentano's Ontology: from Conceptualism to Reism En Jacquette, Dale (Ed.) *The Cambridge Companion to Brentano* (pp. 197-219). United Kingdom: Cambridge University Press.
- Cobb-Stevens, R. (1990). Being and Categorial Intuition, *The Review of Metaphysics*, *Vol. 44*, (1), pp. pp. 43-66.
- --------------------- (1998). *Husserl et la philosophie analytique*. Paris: Vrin.

- Coffa, Alberto (2005). *La tradición semántica. De Kant a Carnap*, México: UAM Editorial. (Trads). Max Fdez. de Castro, *et al*.

- Cooper-Wiele, Jonathan K. (1989). *The Totalizing act: key to Husserl's Early Philosophy*. Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers.

- Cortois, Paul (1996). From Apophantics to Manifolds: the Structure of Husserl's Formal Logic, *Philosophia Scientiae*, *Vol. 1*, (2), pp. 15-49.

- Cussins, Adrian, (1987). Varieties of Psychologism, *Synthese*, *Vol. 70* (1), pp. 123-154.

- Da Silva, Jairo José (2000a). Husserl's two Notions of Completeness, Husserl and Hilbert on Completeness and Imaginary Elements in Mathematics, *Synthese*, *Vol. 125*, (3), pp. 417–438.

- ---------------------- (2000b). The Many Senses of Completeness, *Manuscrito, Vol. 23*, (2), pp. 41-60.

- ------------------------(2010). Beyond Leibniz: Husserl’s Vindication of Symbolic Knowledge. En Hartimo, M. (Ed.) *Phenomenology and Mathematics* (pp. 123-145). Dordrecht: Springer.

- ----------------------- (2011). Husserl on Geometry and Spatial Representation, *Axiomathes, Vol. 22*, (5), pp. 5–30

- ---------------------- (2012). Away from the Facts. Symbolic Knowledge in Husserl’s Philosophy of Mathematic. En Lasalle Casanave, A. (Ed.), *Symbolic Knowledge from Leibniz to Husserl* (pp. 115–136). London: College Publications.

- ----------------------- (2016). Husserl and Hilbert on Completeness, still. *Synthese*, Vol. 193, (6), pp. 1925–1947.

- ----------------------- (2017) *Mathematics and Its Applications. A Transcendental-Idealist Perspective*, Netherlands, Springer.

- Dastur, Françoise, Husserl (1995). *Husserl. Des mathématiques à l'histoire*, París: PUF.

- De Boer, Theodor (1964). *The Development of Husserl’s Thought*, The Hague: Martinus-Nijhoff.

- Dedekind, Richard (1932). *Gesammelte mathematische Werke* (Dritter Band). Brunswick: Vieweg & Sohn Akt.-Ges. (Eds.) Robert Fricke, Emmy Noether y Öystein Ore.

- ------------------------- (2014). *¿Qué son y para qué sirven los números? Y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid: Alianza. (Trad., intr., ed., y notas de José Ferreirós).

- Derrida, Jacques (1962). *L'origine de la géometrie*. París: PUF.

- -------------------- (2015). *El problema de la génesis en la filosofía de Husserl*. Salamanca: Sígueme.

- Desmond, Paul Henry (1991). *Medieval Mereology*. Amsterdam/ Philadelphia: B.R. Grüner Publishing Company.

- Dreyfus, H. y Hall (Eds.) (1987). *Husserl, Intentionality and Cognitive Science*. Massachusets: MIT Press.

- Drummond, John J. (1985). Frege and Husserl: Another look at the Issue of Influence, *Husserls Studies* (2), pp. 245-265.

- ---------------------- (2008). Wholes, Parts, and Phenomenological Methodology (III. Logische Untersuchung). En Mayer, Verena y Christopher Erhard (Eds.) *Edmund Husserl. Logische Untersuchungen*, Berlín: Akademie Verlag.

- Dummet, Michael (1981). *The Interpretation of Frege's Philosophy*. Cambridge /Massachusets: Harvard University Press.

- --------------------- (1996). *Frege and Other Philosophers*. Oxford: Clarendon Press.

- Edwards, H. M (1995). Kronecker on the Foundations of Mathematics. En Hintikka, J. (Ed.) *From Dedekind to Gödel. Essays on the Development of the Foundations of Mathematics* (pp. 45-52). The Hague: Springer/Kluwer Academic Publishers.

- ------------------- (1988). Kronecker's Place in History. En Aspray, W. y Philip Kitcher, (Ed.) *History and Philosophy of Modern Mathematics* (pp. 139-144). Minneapolis: University of Minnesota Press.

- Ehrlich, W. (1923). *Kant und Husserl. Kritik der Transzendentalen und Phänomenologischen Methode*. Halle: Max Niemeyer Verlag.

- Ewen, Wolfgang (2008). *Carl Stumpf und Gottlob Frege*. Wurzburgo: Konigshausen & Neumann.

- Farber, Marvin (1943). *The Foundation of Phenomenology. Edmund Husserl and the Quest for a Rigorous Science of Philosophy*. New York: State University of New York Press.

- Fernández Beites, Pilar (1999). *Fenomenología del ser espacial*. Salamanca: Publicaciones Universidad Pontificia Salamanca.

- ---------------------------- (2007). Teoría de todos y partes: Husserl y Zubiri, *Signos filosóficos, IX*, (17), pp. 63-99.

- Ferreirós, José (1998). El enfoque conjuntista en matemática, *La Gaceta de la RSME*, *1*, (3), pp. 389-412.

- --------------------- (2006). Riemann's Habilitationsvortrag at the Crossroads of Mathematics, Physics, and Philosophy. En Ferreirós, J. y J. J. Gray, (Eds.) *The Architecture of Modern Mathematics. Essays in History and Philosophy* (pp. 67-96). New York: Oxford University Press.

- ------------------- (2007). *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*. Basilea-Boston-Berlín: Birkhäuser.

- Fisette, Denis (2003). Représentations. Husserl critique de Twardowski. En Fisette, D. y S. Lapointe (Eds.) *Aux origines de la phénoménologie. Husserl et le contexte des Recherches Logiques* (pp. 61-92). París/Québec: Vrin-Les Presses de l´Université Laval.

- ----------------- (2009). Husserl à Halle (1886-1901), *Philosophiques*, *36*, (2), pp. 277-306.

- Funke, Gerhard (1995). La recepción de Kant en Husserl y la fundamentación de su “Filosofía Primera” transcendental fenomenológica, *Anales del Seminario de Historia de la Filosofía*,*12*, pp. 193-212.

- Føllesdal, D. (1958). *Husserl und Frege, ein Beitrag zur Beleuchtung der Entstehung der phänomenologischen Philosophie*. Oslo: Ashehoug und Co.

- ----------------- (1969). Husserl's Notion of the Noema, *The Journal of Philosophy*, *66*, pp. 680-687.

- ----------------- (1994). Husserl and Frege: A Contribution to Elucidating the Origin of Phenomenological Philosophy. En Haaparanta, L. (Ed.) (1994). *Mind, Meaning and Mathematics. Essays on the Philosophical Views of Husserl and Frege* (pp. 3-47). Dordrecht/Boston/London: Synthese Library/Kluwer Academic Publishers

- Frege, G. (1884). *Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslavia: Koebner.

- ------------------- (1894). Rezension von Dr. E. Husserls, *Philosophie der Arithmetik*. *Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik*, *103*, pp. 313–332.

- ------------------- (1980). *Philosophical and Mathematical Correspondence*. Oxford: Basil Blackwell. (Trad.) Hans Kaal, Gottfried Gabriel *et al.*, (Eds.)

- ------------------(1990). *Kleine Schriften*. Hildesheim/Zürich/New York: Georg Olms Verlag. (Ed.) Ignacio Angelelli.

- Gandon, Sébastien (2016). Rota's Philosophy in its Mathematical Context, *Philosophia Mathematica*, *24*, (2, 1), pp. 145–184.

- García-Baró, Miguel (1993). *Categorías, intencionalidad y números*, Madrid: Tecnos.

- ----------------------- (2008). *Teoría fenomenológica de la verdad: comentario continuo a la primera edición de las Investigaciones lógicas de Edmund Husserl*. Madrid: Editorial de la Universidad Pontifica Comillas.

- Gauthier, Yvon (2004). Husserl and the Theory of Multiplicities "Mannigfaltikeitslehre". En Richard Feist (Ed.), *Husserl and the Sciences. Selected Perspectives* (pp. 121-127). Ottawa: University Ottawa Press.

- Gérard, Vincent (2010). Mathesis universalis et géométrie: Husserl et Grassmann. En Ierna, C. *et al*. (Eds.) *Philosophy, Phenomenology, Sciences* (pp. 255-300). The Hague: Springer.

- Gerlach, H.-M. y Sepp, H. R., (Eds.) (1994). *Husserl in Halle*. *Spurensuche im Anfang der Phänomenologie*. Frankfurt: Peter Lang.

- Gonseth, F (1998),. La verdad matemática y la realidad, *Educación Matemática*, *10*, (3), pp. 128-144. Trad. Guillermina Waldegg

- González Porta, Mario Ariel (1999). Los orígenes de la virada antipsicologista en Husserl. (La reseña a Schröder de 1891 revisada), *Thémata*. *Revista de Filosofía* (21), pp. 85-116.

- ------------------------------- (2008). La idea de una morfología de la significación o gramática universal en la "4ª investigación lógica" de Husserl, *Cognitio*, *9*, (1), pp. 41-55.

- ------------------------------ (2010a). Psicologismo e idealismo en Frege y Husserl, *Síntese. Rev. de Filosofía*, *37*, (117), pp. 84-86.

- ------------------------------ (2010b). Algunas consideraciones en torno a la distinción de tipos de psicologismo en Husserl, *Cognitio*, *11*, (2), pp. 279-302.

- -------------------------------- (2012) La evolución de la crítica fregueana al psicologismo, *Veritas*, *57*, pp. 99-122.

- -------------------------------- (2014a). Crítica al psicologismo y concepción de subjetividad en Frege, *Manuscrito. Revista internacional de filosofía*, *37,* (2), pp. 357-413.

- -------------------------------- (2014b). Gottlob Frege: del Platonismo a la Fenomenología, *Revista de Humanidades de Valparaíso*, *2,* (4), pp. 21-32.

- --------------------------------- (2015). The Evolution of Frege's Critique of Psychologism and the Brentano School, *Filosofia Unisinos*, *16*(3), pp. 199-211.

- -------------------------------- (2017) The Critique of Psychologism and the Conceptionof Subjectivity in Frege, *CR: The New Centennial Review*,*17*, (2), pp. 135–156.

- Gowers, Timothy (Ed.) (2008). *The Princeton Companion to Mathematics*. Princeton: Princeton University Press.

- Grassmann, H. (1844). *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik, dargestellt und durch Anwendungen auf die ubrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erlautert*, Leipzig: Wigand.

- ----------------------- (1947). *Teoría de la Extensión. Nueva disciplina matemática expuesta y aclarada mediante aplicaciones*. Argentina: Espasa-Calpe. (Trad.) Emilio Oscar Roxin.

- Gray, Jeremy (2009). *Plato's Ghost: The Modernist Transformation of Mathematics*. Princeton: Princeton University Press.

- Gurwitsch, Aron (1979). *El campo de la conciencia*, Madrid: Alianza. Trad. Jorge García-Gómez.

- --------------------- (2009). *Studies in Phenomenology and Psychology* (*Volume II. The Collected Works of Aron Gurwitsch, 1901–1973).* Dordrecht/Heidelberg/ London /New York: Springer. (Ed. Fred Kersten, Fred).

- Gustavo Isaac, Manuel (2015). L'idée de la logique formelle dans les appendices VI à X du volume 12 des Husserliana (1970), *History and Philosophy of Logic 36* (4) pp. 321-345.

- Ha, Byung-Hak (1997). *Das Verhältnis der Mathesis universalis zur Logik als Wissenschaftstheorie bei E. Husserl*, Alemania: Peter Lang.

- Haaparanta, L., (Ed.) (1994). *Mind, Meaning and Mathematics. Essays on the Philosophical Views of Husserl and Frege*. Dordrecht/Boston/London: Synthese Library/Kluwer Academic Publishers.

- Hamacher-Hermes, Adelheid (1991). The Debate Between Husserl and Voigt Concerning the Logic of Content and Extensional Logic. En Tymieniecka, Anna–Teresa (Ed.) *The Turning Points of the New Phenomenological Era* (pp. 529-547), Dordrecht: Springer.

- Hanna, R. (1993). Logical Cognition: Husserl's *Prolegomena* and the Truth en Psychologism, *Philosophy and Phenomenological Research*, *53*, pp. 251-76.

- Hardy, Lee (2013). *Nature's Suit. Husserl's Phenomenological Philosophy of the Physical Sciences*. Ohio: Ohio University Press.

- Hartimo, Mirja (2006). Mathematical Roots of Phenomenology: Husserl and the Concept of Number, *History and Philosophy of Logic*, *27* (4), pp. 319-337.

- ---------------------(2007). Towards Completeness: Husserl on Theories of Manifolds 1890–1901, *Synthese*, *156*, pp. 281–310.

- -------------------- (2010). The Development of Mathematics and the Birth of Phenomenology. En Hartimo, M. (Ed.), *Phenomenology and Mathematics* (pp. 107-121). Dordrecht/Heidelberg/London/New York: Springer.

- --------------------(2011). Grassmann's Influence on Husserl. En Petsche, H.-J. *et al*. (Eds.) *From Past to Future: Graßmann's Work in Context* (pp. 149-159) Basilea: Springer.
- ------------------- Okada, M. (2016). Syntactic Reduction in Husserl's Early Phenomenology of Arithmetic, *Synthese*, *193*(3), pp. 937–969.

- Hauser, Kai (2014) Intuition and its Object, *Axiomathes*, *25*, (3), pp 253–281.

- Heinrich, Dieter (1994). On the Unity of Subjectivity. En Heinrich, Dieter (Ed.) *The Unity of Reason. Essays on Kan's Philosophy* (pp. 17-54). Cambridge-Massachussets: Harvard University Press. (Trad.) G. Zoeller.

- Heffernan, George (2014). Fenomenología de la evidencia, *Escritos de Filosofía* (2), pp. 3-70. (Trad.) de Roberto J. Walton

- Holenstein, Elmar (1972). *Phänomenologie der Assoziation: Zu Struktur und Funktion eines Grundprinzips der passiven Genesis bei E. Husserl*. The Hague: Martinus-Nijhoff.

- Hopkins, B. (1997). Phenomenological Cognition of the A priori: Husserl's Method of 'Seeing Essences' (Wesenserschauung). En Hopkins, B. (Ed.) *Husserl in Contemporary Context. Prospects and Projects for Phenomenology* (pp. 151-178), Dordrecht: Springer.

- --------------- (2002). Authentic and Symbolic Numbers in Husserl's *Philosophy of Arithmetic*. En Hopkins, B. y Steven Crowell (Eds.) *The New Yearbook for Phenomenology and Phenomenological Philosophy* II (pp. 39–71). Kentucky: Routledge/Taylor & Francis Group.

- ------------------ (2011). *The Origin of the Logic of Simbolic Mathematics. Edmund Husserl and Jacob Klein*. Bloomington: Indiana University Press.

- Husserl, Malvine (1988). Skizze eines Lebensbildes von E. Husserl, *Husserl Studies,* 5 (2), pp.105-125

- Ierna, C. (2005). The Beginnings of Husserl's Philosophy. Part 1: From *Über den Begriff der Zahl* to *Philosophie der Arithmetik*. *The New Yearbook for Phenomenology and Phenomenological Philosophy* V (pp. 1–56). Kentucky: Routledge/Taylor & Francis Group.

- ------------- (2006). The Beginnings of Husserl's Philosophy. Part 2: Mathematical and Philosophical Background. *The New Yearbook for Phenomenology and Phenomenological Philosophy* VI (pp. 33–81). Kentucky: Routledge/Taylor & Francis Group.

- ------------- (2009). Husserl et Stumpf sur la Gestalt et la fusión, *Philosophiques*, *36*, (2), pp. 489–510

- ------------- (2012a). Husserl's Psychology of Arithmetic, *Bulletin d'analyse phénoménologique*, *8*, (1), pp. 97-120

- -------------- (2012b). La notion husserlienne de multiplicité: au-delà de Cantor et Riemann, *Methodos*, *12*, [En línea]. URL: http://methodos.revues.org/2943.

- -------------- (2012c). Edmund Husserl's *Philosophy of Arithmetic* in Reviews, *The New Yearbook for Phenomenology and Phenomenological Philosophy* XII (pp. 198–242) Kentucky: Routledge/Taylor & Francis Group.

- Illemann, W. (1932). *Husserls vor-phänomenologische Philosophie*, Leipzig: Hirzel.

- Illescas Nájera, María Dolores (2006). La unidad de la conciencia y la autoconciencia en las posturas filosóficas de Franz Brentano y Edmund Husserl. En Xolocotzi, A. (Coord.) *Actualidad de Franz Brentano* (pp. 61-75) México: Universidad Iberoamericana.

- Ives Gilman (1892). On the Properties of a One-Dimensional Manifold, *Mind*, *1*, (4), pp. 518-526.

- Jagnow, René (2006). Edmund Husserl on the Applicability of Formal Geometry. En Carson, E. y R. Huber (Eds.) *Intuition and the Axiomatic Method* (pp. 67-85). Netherlands: Springer.

- Jakobson, Roman (1988). *El marco del lenguaje*, México: F.C.E.

- Jech, Thomas (2005). El infinito, *La gaceta de la RSME*, *8*, pp. 369–370.

- Kern, I. (1964). *Husserl und Kant. Eine Untersuchung über Husserls Verhältnis zu Kant und Neukantianismus*. The Hague: Martinus-Nijhoff.

- Kyung Cho, Kah (2007). History and Substance of Husserl's *Logical Investigations*. En Lau, Y. y J.J. Drummond (Eds.) *Husserl's Logical Investigations in the New Century: Western and Chinese Perspectives* (pp. 1-20.) Netherlands: Springer.

- Kline, Morris (1990). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press.

- ---------------- (2006). *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*. México: Siglo XXI.

- Krickel, F. (1995). *Teil und Inbegriff: Bernard Bolzanos Mereologie*. St. Augustin Academia Verlag.

- Kronecker, Leopold (1892). Über den Zahlbegriff, *Leopold Kronecker's Werke*. Vol. III, Leipzig: Teubner. (Ed.) Hensel.

- Lapointe, S. (2011). *Bolzano's Theoretical Philosophy*. New York: Palgrave Macmillan.

- Lesniewski, S. (1992). *Collected Works. Vol. II*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers. (Eds.) S. J. Surma, J. T. Srzednicki y D. I. Barnett.

- Lohmar, Dieter (1989). *Phänomenologie der Mathematik. Elemente einer phänomenologischen Aufklärung der mathematischen Erkenntnis nach Husserl*. Alemania: Springer.

- ------------------ (1991). Kants Schemata als Anwendungsbedingungen von Kategorien auf Anschauungen. Zum Begriff der Gleichartigkeit im Schematismuskapitel der Kritik der reinen Vernunft, *Zeitschrift für philosophische Forschung*, *45*, (1), pp. 77-92.

- ----------------- (1991/1992). Beiträge zu einer phänomenologischen Theorie des negativen Urteils, *Husserl Studies*, *VIII*, (3), pp. 173-204.

- ------------------ (2000). Edmund Husserls "*Formale und transzendentale logik*", Alemania: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

- --------------------- (2004). El concepto de la intuición categorial en Husserl, *Anuario Filosófico*, *XXXVII* (1), pp. 33-64.

- --------------------- (2007). El método fenomenológico de la intuición de esencias y su concreción como variación eidética, *Investigaciones Fenomenológicas* (5), pp. 9-47. (Trad.) Francisco Conde Soto.

- -------------------- (2010). Intuition in Mathematics: On the Function of Eidetic Variation in Mathematical Proofs. En Hartimo, M. (Ed.) *Phenomenology and Mathematics*, Dordrecht/Heidelberg/London/New York: Springer.

- Luzin, N. N. (2003). Función, *La gaceta de la RSME*, Vol. 62.

- Mach, E. (1886). *Beiträge zur Analyse der Empfindungen*. Jena: Gustav Fischer.

- ------------ (1914). *The Analysis of Sensations and the Relation of the Physical to the Psychical*. Chicago-London: Open Court.

- --------------- (1943). *Space and Geometry in the Light of Physiological, Psychological and Physical Inquiry*. La Salle: Open Court. (Trad.) T. J. McCormack.

- Maffia, Diana (1989). Analogía entre el noema y el sentido fregeano, *Análisis Filosófico*, *IX*, (2), pp.109-118.

- Majer, Ulrich (1997). Husserl and Hilbert on Completeness: A Neglected Chapter in Early Twenty Century Foundation of Mathematics, *Synthese*, *110*, pp. 37-56.

- ---------------- (2009). Husserl between Frege's Logicism and Hilbert's Formalism, *The Baltic International Yearbook of Cognition, Logic and Communication*, *4*, pp. 1-21.)

- McCormick, P. y F. Elliston (Eds.) (1981). *Husserl Shorter Works*. University of Notre Dame Press.

- Miller, J. Philip (1982). *Numbers in Presence and Absence: A Study of Husserl's Philosophy of Mathematics*. The Hague /Boston/London: Martinus Nijhoff.

- Mittag-Leffler, G. (1910/1911). Sur les fondements arithmétiques de la théorie des fonctions d'après Weierstrass. En *Compte Rendu du Congrès des mathématiciens tenu à Stockholm*, Leipzig/Berlin.

- Mohanty, J.N. (1959). Individual Fact and Essence in E. Husserl's Philosophy, *Philosophy and Phenomenological Research*, *XIX*¸ pp. 152-162.

- ------------------ (1977). Husserl and Frege: A new look at their Relationship. En Mohanty, J.N (Ed.) *Readings on Edmund Husserl's Logical Investigations* (pp. 22-32). Netherlands: Springer.

- ------------------ (1982). *Husserl and Frege*, Bloomington: Indiana University Press.

- ------------------ (1995). The Development of Husserl's Thought. En Smith, B. y D. W Smith (Eds.) *The Cambridge Companion to Husserl* (pp. 45-77). Cambridge: Cambridge University Press.

- ------------------ (2003). The Concept of 'Psychologism' in Frege and Husserl. En Jacquette, D. (Ed.) *Philosophy, Psychology, and Psychologism* (pp. 113-130). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

- --------------------. (2008). *The Philosophy of Edmund Husserl. A Historical Development*. New Haven: Yale University Press.

- Molina Cantó, Eduardo (2006). Posibilidad e imposibilidad de la Fenomenología. La VI. Investigación lógica de E. Husserl y el problema de la intuición categorial, *Thémata. Revista de Filosofía* (36), pp. 129-152.

- Moran, D. (2000). *Introduction to Phenomenology*. London-New York: Routledge.

- -------------- (2008). Husserl's Transcendental Philosophy and the Critique of Naturalism, *Continental Philosophy Review, 41* (4), pp. 401-425.

- -------------- (2011). *Introducción a la fenomenología*. México: Anthropos-UAM-I. (Trads.) Francisco Castro Merrifield y Pablo Lazo Briones.

- Mormann, Thomas (1991). Husserl's Philosophy of Science and the Semantic Approach, *Philosophy of Science*, *58*, (1), pp. 61-83.

- Münch, D. (2002). *Erkenntnistheorie und Psychologie*. Die Wissenschaftliche Weltauffassung Carl Stumpfs, *Brentano Studien*, *10*, pp. 11-66.

- Nenon, Thomas (1997). Two Models of Foundation in the *Logical Investigations*. En Burt C. Hopkins (Ed.) *Husserl in Contemporary Context. Prospects and Projects for Phenomenology* (pp. 97-114). Netherlands: Springer.

- Niel, Luis (2013). Semántica y ontología. Reflexiones en torno a la *Wissenschaftslehre* de Bolzano, *Pensamiento*, *69*, (261), pp. 939-962.

- ------------- (2015). Intencionalidad, Objeto y Sentido en la *Gegenstandstheorie* de Alexius Meinong, *Azafea. Revista de filosofía*, *17*, pp. 141-173.

- Noether, E. y J. Cavaillès (Eds.) (1933). *Cantor-Dedekind (Briefwechsel)*. París: Hermann & Cie.

- Okada, M. (2013). Husserl and Hilbert on Completeness and Husserl's Term Rewrite-based Theory of Multiplicity. *Invited paper, 24th International Conference on Rewriting Techniques and Applications (RTA'13)* (pp. 4–19). Netherlands: Eindhoven. (Ed. Femke van Raamsdonk).

- Olvera Mijares, Raúl (1994). Some Historical Remarks on Husserl's Theory of Multiplicity, *Axiomathes*, (2-3), pp. 385-394.

- Ortiz Hill, Claire (1991). *Word and Object in Husserl, Frege and Russell. The Roots of Twentieth-Century Philosophy*. Ohio: Ohio University Press.

- ----------------------- (1994). Frege's Attack on Husserl and Cantor, *The Monist*, *77*, (3), pp. 345-357.

- ------------------- (1995). Husserl and Hilbert on Completeness. En Hintikka, Jaakko (Ed.) *From Dedekind to Gödel* (pp. 143-163), Dordrech: Kluwer Academic Publishers.

- ------------------ (2003). Husserl's *Mannigfaltigkeitslehre*. En Ortiz Hill, C. y Guillermo Rosado Haddock (Eds.) *Husserl or Frege? Meaning, Objectivity, and Mathematics* (pp. 161-178), Chicago: Open Court Publishing.

- Ortiz Hill, Claire y Da Silva, Jairo José (2013). *The Road not Taken. On Husserl´s Philosophy of Logic and Mathematics*. United Kingdom: College/Lighting Source/ Milton Keynes.

- Osborn, A. D. (1934a). *The Philosophy of Edmund Husserl in its Development from his Mathematical Interests to his First Concept of Phenomenology in Logical Investigations*. New York: International Press.
- ------------------ (1934b). Some Recent German Critics of Phenomenology. *The Journal of Philosophy*, *31*,(14), pp. 377–382.

- Paimann, R. (2002). *Formales Strukturen der Subjektivität. Egologische Grundlagen des Systems der Transzendentalphilosophie bei Kant und Husserl*, Hamburg: Felix Meiner Verlag.

- Palombi, Fabrizio (2003). *La stella e l' intero. La ricerca di Gian-Carlo Rota tra matemática e fenomenología*. Torino: Bollati Boringhieri.

- Paredes Martín, María del Carmen (2002). *Teorías de la intencionalidad*. Madrid: Síntesis.

- --- (2005). Intuición categorial y trascendencia ontológica. En Moreno, César y Alicia Mª de Mingo (Eds.) *Signo, intencionalidad, verdad*: *Estudios de Fenomenología* (pp.77-93), Sevilla: Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Sevilla.

- Penelope, Maddy (1997). *Naturalism in Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

- Peucker, Henning (2002). *Von der Psychologie zur Phänomenologie, Husserls Weg in die Phänomenologie der Logischen Untersuchungen*. Hamburg: Felix Meiner Verlag.

- ----------------------- (2012). Husserl's Foundation of the Formal Sciences in his ‘‘*Logical Investigations*’’, *Axiomathes 22*, pp.135–146.

- Picker, B. (1961). Die Bedeutung der Mathematik für die Philosophie E. Husserls, *Philosophia Naturalis*, 7 (3), pp. 266-355.

- Pietersma, Henry (1967). Husserl and Frege, *Archiv für Geschichte der Philosophie*, (49), pp. 298-323.

- Płotka, Witold (2017). Early Phenomenology in Poland (1895–1945): Origins, Development, and Breakdown, *Stud. East Eur Thought* (69), pp. 79–91.

- Riemann, B. (1876). *Gesammelte Mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*. Leipzig: B. G. Teubner. (Eds.) R. Dedekind y H. Weber.

- ---------------- (2000). *Riemanniana selecta*, Madrid: CSIC. (Ed., trad. y estudio introductorio de José Ferreirós).

- Rigal, Élisabeth (1996). De la fondation phénoménologique. En Courtine, Jean-François (Ed) *Phénoménologie et logique*, Editorial Escuela Normal de París.

- Rizo-Patrón, Rosemary (2008). hò ànthropos aritmetízei": finitud intuitiva e infinitud simbólica en la *Filosofía de la aritmética* y la *Crisis* de Husserl, *Areté. Revista de Filosofía*, *XX*, (2), pp.285-302.

- --------------------------- (2002). Génesis de las *Investigaciones Lógicas* de Husserl: Una obra de irrupción, *Signos filosóficos*, (7), pp. 221-244.

- ---------------------------(2012). Husserl, lector de Kant. Apuntes sobre la razón y sus límites, *Areté. Revista de Filosofía*, *XXIV*, (2), pp.351-383.

- Rollinger, R. (1993). Meinong and Husserl on Abstraction and Universals, Netherlands: Brill-Rodopi.

- ----------------- (1999). *Husserl's Position in the School of Brentano*. Netherlands: Springer.

- ----------------- (2003). Husserl's Elementary Logic. The 1896 Lectures in their Nineteenth Century Context, *Studia Phaenomenologica* 3(1–2), pp. 195–213.

- ------------------(2004). Brentano and Husserl. En Dale Jacquette (Ed.) *The Cambridge Companion to Brentano* (pp. 255-276). United Kingdom: Cambridge University Press.

- ------------------ (2008). *Austrian Phenomenology*. Frankfurt: Ontos Verlag.

- Rosado Haddock, Guillermo E. (1973). *Edmund Husserls Philosophie der Logik und Mathematik im Lichte der Gegenwärtigen Logik und Grundlagenforschung* (Tesis doctoral), Universidad de Bonn, Alemania.

- ---------------------------(1987). Husserl's Epistemology of Mathematics and the Foundation of Platonism in Mathematics, *Husserl Studies* (4), p. 81-102.

- -------------------------- (1994). Husserl y Frege: Acerca de un mito historiográfico, *Diálogos. Revista de Filosofía*, *29* (64), pp. 187-200.
- --------------------------- (2000). The Structure of Husserl's Prolegomena, *Manuscrito, 23* (2), pp. 61-100.

- ---------------------------- (2006). Husserl's Philosophy of Mathematics: its Origin and Relevance, *Husserl Studies* (22), pp. 193–222.

- ---------------------------- (2011). Husserl's Conception of Physical Theories and Physical Geometry in the Time of the Prolegomena: A Comparison with Duhem's and Poincare's Views, *Axiomathes* (22), pp. 171–193.

- ---------------------------- (2012). *Against the Current. Selected Philosophical Papers*. Alemania: Ontos Verlag.

- ---------------------------- (2017). Husserl and Riemann. En Centrone, Stefania (Ed.) *Essays on Husserl's Logic and Philosophy of Mathematics* (pp. 229-243), Dordrecht: Springer.

- Rota, Gian-Carlo (1996). *Indiscrete Thoughts*. Boston: Birkhäuser.

- Rusnock, Paul (2013). On Bolzano's Concept of a Sum, *History and Philosophy of Logic*, *34* (2), pp. 155-169.

- Rusnock, Paul y Rolf George (2004). Bolzano as Logician. En M. Gabbay, Dov y John Woods (Eds.) *Handbook of the History of Logic: The Rise of Modern Logic: From Leibniz to Frege*, Vol. 3 (pp. 177-205): Netherlands: Elsevier B. V.

- Russ, Steve (2004). *The Mathematical Works of Bernard Bolzano*. United Kingdom: Oxford University Press.

- Scanlon, John (1991). "Tertium non datur": Husserl's Conception of a Definite Multiplicity. En Seebohm, M. D. Føllesdal y Mohanty, J.N. (Eds.) *Phenomenology and the Formal Sciences* (pp. 139-147) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

- Schuhmann, K. (1992). Husserl's Abhandlung " Intentionale Gegenstände", *Brentano Studien* (*1990/1991*) (3), pp. 137–176.

- Seebohm, M. (1990). Kategoriale Anschauung, *Phänomenologische Forschungen*, *23*, pp. 9-47.

- Seebohm, Th. (1991). Psychologism Revisited. En Seebohm, Th, D. Føllesdal y J.J. Mohanty, (Eds.) *Phenomenology and the Formal Sciences* (pp. 149-182), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

- Sebestik, J. (1992). *Logique et mathématique chez Bernard Bolzano*. París: Vrin.

- ---------------- (2003). Husserl Reader of Bolzano. En Fisette, D. (Ed.), *Husserl's Logical Investigations Reconsidered* (pp. 59-81). Netherlands/Boston/London: Kluwer Akademic Publishers.

- Segura, Lorena y Juan Matías Sepulcre (2015). Arithmetization and Rigor as Beliefs in the Development of Mathematics, *Foundations of Science*, *21*, (1), pp. 207–214.

- Serrano de Haro, Agustín (1990). *Fenomenología trascendental y ontología*, (Tesis doctoral), UCM, Madrid.

- ------------------------------ (1995). Actos básicos y actos fundados. Exposición critica de los primeros análisis husserlianos, *Anuario Filosófico*, *XXVIII* (1), pp.61-89.

- Scrimieri, Giorgio (1979). *Analitica matematica e fenomenologica in Edmund Husserl*, Milán: Edizioni Levante.

- Simons, Peter. (1997). Bolzano on Collections, *Grazer Philosophische Studien*, (53), pp. 87–108.

- ------------------. (1992). *Philosophy and Logic in Central Europe from Bolzano to Tarski*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

- Smith, Barry (1994). *Austrian Philosophy: The Legacy of Franz Brentano*. Chicago: Open Court Publishing.

- Smith, B. y David W. Smith (Eds.) (1995). *The Cambridge Companion to Husserl*. Cambridge: Cambridge University Press.

- Smith, D. W. (2002). What is 'Logical' in Husserl's *Logical Investigations*? The Copenhagen Interpretation. En Zahavi, D. y Stjernfelt, F. (Eds.) *One Hundred Years* *of Phenomenology. Husserl´s Logical Investigations Revisited* (pp. 51-65). Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers.

- ------------------- (2007). *Husserl*. Abingdon: Routledge Philosophers.

- Smith, David W. y McIntyre, Ronald (1975). *Husserl and intentionality: A study of mind, meaning, and language*. Netherlands: Springer.

- Sinigaglia, Corrado (2002). *La seduzione dello Spazio. Geometria e filosofia nel primo Husserl*, Milán: Edizioni UNICOPLI.

- Sokolowski, Robert (1964). *The Formation of Husserl's Concept of Constitution*. The Hague: Martinus-Nijhoff.

- --------------------------- (1968). The Logic of Parts and Wholes in Husserl's Investigations, *Philosophy and Phenomenological Research*, *28*, (4), pp. 537-553.

- --------------------------- (1971). The Structure and Content of Husserl's *Logical Investigation*s, *Inquiry. An Interdisciplinary Journal of Philosophy*, *14* (1-4), pp. 318-347.

- ---------------------------- (1978). *Presence and Absence: A Philosophical Investigation of Languaje and Being*, Bloomington, Indiana: The Catholic University of America Press.

- Spiegelberg, Herbert (1982). *The Phenomenological Movement*. The Hague/Boston/London: Martinus-Nijhoff.

- Staiti, Andrea (2014). *Husserl's Transcendental Phenomenology. Nature, Spirit, and Life*. Cambridge: Cambridge University Press.

- Stumpf, C. (1873). *Über den psychologischen Ursprung der Raumvorstellung,* Leipzig: Verlag von S. Hirzel.

- Taminiaux, Jacques (1985). *Dialectic and Difference. Finitude in Modern Thought*, New Jersey/London: Humanities Press-Macmillan. (Trads.) Robert Crease y James T. Decker.

- Tappenden, J. (2006). The Riemannian Background to Frege's Philosophy. En Ferreiros, J. y Gray, J. J., (Eds.) *The Architecture of Modern Mathematics* (pp. 107–150). Oxford: Oxford University Press.

- Tieszen, Richard (1994). The Philosophy of Arithmetic: Frege and Husserl En Haaparanta, L. (Ed.), *Mind, Meaning and Mathematics* (pp. 85-112) Dordrecht/Boston: Kluwer Academic Publishers.

- --------------------- (2005a). *Phenomenology, Logic, and the Philosophy of Mathematics*, New York: Cambridge University Press.

- ---------------------- (2005b). Free Variation and the Intuition of Geometric Essences: Some Reflections on Phenomenology and Modern Geometry, *Philosophy and Phenomenological Research*, *LXX*, (1), pp. 153-173.

- Tirado San Juan, Víctor Manuel (1994). *La verdad y la esencia en Edmund Husserl y en Xavier Zubiri* (Tesis doctoral) Universidad Complutense de Madrid.

- Tran Duc Thao (1986). *Phenomenology and Dialectical Materialism*, Boston: D. Reidel Publishing Company (Kluwer Academic Publisher). (Trad.) Daniel J. Herman y Donald V. Morano, (Ed.) Robert S. Cohen.

- Torretti, Roberto (1972). La filosofía de la aritmética de Husserl, *Studi Internazionali Di Filosofia*, *4*, p p. 183-206.

- ------------------- (1998). *El paraiso de Cantor*. Santiago de Chile: Ediciones Universitaria.

- Tragesser, Robert (1984). *Husserl and Realism in Logic and Mathematics*. New York: Cambridge University Press.

- Tugendhat, E. (1970). *Der Wahrheitsbegriff bei Husserl und Heidegger*. Berlín: De Gruyter.

- van Atten, Mark (2002). Why Husserl Should Have Been a Strong Revisionist in Mathematics, *Husserl Studies* (18), pp. 1–18.

- --------------------(2007). *Brouwer meets Husserl. On the phenomenology of Choice Sequences*. Netherlands: Springer.

- ------------------- (2015). *Essays on Gödel's Reception of Leibniz, Husserl and Brouwer*, Heidelberg/New York: Springer.

- Vassiliou, Fotini (2010). The Content and Meaning of the Transition from the Theory of Relations in *Philosophy of Arithmetic* to the Mereology of the Third Logical Investigation, *Research in Phenomenology* (40), pp. 408–429.

- Velarde-Mayol, Víctor (1995). Crítica a la noción de ser ideal en las *Investigaciones Lógicas* de Husserl, *Espíritu XLIV*, pp. 21-32.
- Villanueva Barreto, Jaime Javier (2009). El motivo trascendental en Kant y Husserl, *Estudios filosóficos*, (39), pp. 55-80.

- Vigo, Alejandro (2002). Intuición categorial, *THÉMATA. Revista de Filosofía* (28), pp. 187-212.

- von Ehrenfels, C. (1890). Über Gestaltqualitäten, *Vierteljahrsschrift für wissen-schaftliche Philosophie* (14), pp. 249–292.

- Walton, Robert (2006). Pierce y la fenomenología, versión electrónica en: http://www.unav.es/gep/IIPeirceArgentinaWalton.html

- Warren Dauben, J. (1990). *George Cantor. His mathematics and Philosophy of the Infinite*. Princeton: Princeton University Press.

- Weiertrass, Karl (1927). *Vorlesungen über Variationsrechnung*. Mathematische Werke 7. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft. (Ed.) Rudolf Rotthe.

- --------------------- (1973). *Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen* en *Elements d'analyse de Karl Weierstrass*. París: Springer-Verlag. (Ed.) Pierre Dugac.

- Welton, D. (Ed.) (2003). *The New Husserl: A Critical Reader*. Bloomington: Indiana University Press.

- Weyl, H. (1919). *Raum-Zeit-Materie*. Berlín:Julius Springer.

- Wiegand, Olav K. (1998). *Interpretationen der Modallogik. Ein Beitrag zur phänomenologischen Wissenschaftsheorie*. The Hague/Boston/London: Martinus Nijhoff.

- Willard, D. (1980). Husserl on a Logic that Failed, *Philosophical Review, LXXXIX* (1), pp. 46–64.

- --------------- (1984). *Logic and the Objectivity of Knowledge: A Study of Husserl's Early Philosophy*. Ohio: Ohio University Press.

- ----------------- (2003). The Theory of Wholes and Parts and Husserl's Explication of the Possibility of Knowledge in the *Logical Investigations*. En Fisette D. (Ed.), *Husserl´s Logical Investigations Reconsidered* (pp. 163-182) Netherlands: Kluwer Academic Publisher.
- Zahavi, Dan (1992). Constitution and Ontology: Some Remarks on Husserl's Ontological Position in the *Logical Investigations*, *Husserl Studies* (9), pp. 111-124,

- Zirión, Antonio (2006). Sobre el propósito original de la filosofía en Brentano. En Xolocotzi, A. (Coord.) *Actualidad de Franz Brentano* (pp. 47-59) México: Universidad Iberoamericana.

- ------------------- (2017). *Breve diccionario analítico de conceptos husserlianos* (2ª edición). FFyL/IIF-UNAM, México.