UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

APLICACIONES DEL LEMA DE RASIOWA-SIKORSKI A LA TEORÍA DE ÓRDENES PARCIALES Y A LA TEORÍA DE RAMSEY

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

TONATIUH MATOS WIEDERHOLD

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ROBERTO PICHARDO MENDOZA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2019

1.Datos del alumno:	
Apellido paterno	Matos
Apellido materno	Wiederhold
Nombre(s)	Tonatiuh
Teléfono	(55) 55 63 13 40
Universidad	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	313535585
2. Datos del tutor:	
Grado	Dr.
Nombre(s)	Roberto
Apellido paterno	Pichardo
Apellido materno	Mendoza
3. Datos del sinodal 1:	
Grado	Dr.
Nombre(s)	Ángel
Apellido paterno	Tamariz
Apellido materno	Mascarúa
4. Datos del sinodal 2:	
Grado	Dra.
Nombre(s)	Luz María
Apellido paterno	García
Apellido materno	Ávila
5. Datos del sinodal 3:	
Grado	Dr.
Nombre(s)	Alejandro Darío
Apellido paterno	Rojas
Apellido materno	Sánchez
6. Datos del sinodal 4:	
Grado	Dra.
Nombre(s)	Amanda
Apellido paterno	Montejano
Apellido materno	Cantoral
7. Datos del trabajo escrito:	
Título	Aplicaciones del Lema de Rasiowa-Sikorski a la teoría de órdenes parciales y a la Teoría de Ramsey
Número de páginas	67
Año	2019

Da steh ich nun, ich armer Tor,
Und bin so klug als wie zuvor.

Faust

AGRADECIMIENTOS

A mi familia, a Fernanda y a mis amigos, por su apoyo y compañía.

A Roberto, por inculcarme profundidad, claridad y humildad; por el enorme esfuerzo que invirtió en este trabajo; por toda su ayuda.

A los sinodales de esta tesis, por su tiempo y su apoyo.

A mis maestros, en orden cronológico, Javier Páez, Alejandro Rojas, Francisco Marmolejo, Ángel Tamariz, Roberto Pichardo, Rodrigo Cepeda y Amanda Montejano, por sus inestimables lecciones y enseñanzas.

RESUMEN

En 1900, el matemático alemán David Hilbert publicó una lista de 23 problemas abiertos, los cuales él consideraba los más importantes hasta el momento. El primero de estos problemas pasó a conocerse como la Hipótesis del Continuo, la cual niega la existencia de un conjunto cuya cardinalidad se encuentre estrictamente entre la de los enteros y la de los reales. La historia de dicha conjetura es fascinante, y no hubo una respuesta definitiva hasta 1963, cuando Paul Cohen demostró la independencia de la Hipótesis de los axiomas de la Teoría de Conjuntos, comúnmente denotados como ZFC. Por dicho trabajo, Cohen obtuvo la prestigiosa medalla Fields, y hasta la fecha sigue siendo la única instancia de este premio otorgado a esta área de las matemáticas.

Para demostrar la independencia de la Hipótesis del Continuo, Cohen desarrolló una herramienta que en la modernidad se conoce como *Forcing*. Esta teoría es una de las contribuciones más significativas a la Teoría de Conjuntos en el siglo pasado. El objetivo de esta tesis es mostrar que el Forcing, así como otras ramas de la Teoría de Conjuntos, tiene aplicaciones en otras áreas de las matemáticas; concreta y principalmente, nos enfocaremos en dos áreas: en la teoría de órdenes parciales, particularmente álgebras booleanas, y en la Teoría de Ramsey, una rama de la Combinatoria que estudia las propiedades que se preservan bajo particiones finitas.

El primer capítulo consiste de preliminares y su intención es familiarizar al lector con la notación y resultados elementales que se usarán por el resto de este trabajo. Se incluye el Lema de Rasiowa-Sikorski, resultado fundamental para el Forcing cuyas aplicaciones son el tema central de la tesis.

El segundo capítulo empieza por un teorema de Cantor que caracteriza completamente a los números racionales por propiedades de su orden. Dicha sección incluye una breve introducción al famoso Problema de Suslin y al Axioma de Martin. Posteriormente, se demuestra que, salvo isomorfismo, existe una única álgebra booleana numerable y libre de átomos. Ambos argumentos utilizan el Lema de Rasiowa-Sikorski para construir los isomorfismos.

En el tercer capítulo se demuestran resultados en Teoría de Ramsey: el Teorema de Ramsey y el Teorema de Hindman. Se da una introducción a la Teoría de Ramsey, así como varios ejemplos que ilustran la no-trivialidad de los teoremas. Cada sección termina con un apartado de corolarios importantes. Del Teorema de Ramsey se desprenden varias proposiciones que cubren desde el Análisis hasta la Combinatoria finita y un problema que motiva el Teorema de Hindman. Este último teorema tiene como consecuencia pertinente la existencia de ultrafiltros idempotentes en la compactación de Čech-Stone de los números naturales, visto como semigrupo topológico izquierdo.

El cuarto y último capítulo trata de características de las nociones de Forcing que se usaron a lo largo de la tesis. Se demuestra que una de las propiedades que tiene el preorden usado para probar el Teorema de Ramsey de hecho es equivalente a este teorema. Se expone que las propiedades combinatorias de los preórdenes que se construyeron en el capítulo dos se traducen en cualidades interesantes de las extensiones genéricas.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1: PRELIMINARES

En este trabajo usaremos la notación, definiciones y resultados del libro [8]. Introduzcamos algo de notación que resultará muy útil.

Para dos conjuntos A, B cualesquiera, $A \subseteq B$ quiere decir que todo elemento de A es elemento de B; y $A \subsetneq B$ significa $A \subseteq B$ pero $A \neq B$. Usaremos el símbolo $\dot{\bigcup}$ para denotar a la *unión ajena*, es decir, $A = \dot{\bigcup} B$ quiere decir que $A = \bigcup B$ y que para cualesquiera dos elementos distintos en B, su intersección es vacía.

La *potencia* de un conjunto A será denotada por $\mathcal{P}(A) := \{B \colon B \subseteq A\}$.

Si X es un conjunto y κ un cardinal, definimos $[X]^\kappa := \{A \subseteq X \colon |A| = \kappa\}$, $[X]^{\leqslant\kappa} := \{A \subseteq X \colon |A| \leqslant \kappa\}$ y finalmente $[X]^{<\kappa} := [X]^{\leqslant\kappa} \setminus [X]^\kappa$.

Denotaremos por ω al primer cardinal infinito. Así por ejemplo, $[X]^{<\omega}$ es la colección de todos los subconjuntos finitos de X. También denotaremos a la cardinalidad del conjunto de números reales $\mathbb{R}$ por la letra $\mathfrak{c}$, o sea, $\mathfrak{c} = 2^\omega = |\mathbb{R}|$.

Diremos que un conjunto A es *numerable* si $|A| \leqslant \omega$. También usaremos $\mathbb{N}$ para denotar al conjunto de números naturales positivos, o sea, $\mathbb{N} := \omega \setminus 1$.

También son convenientes los símbolos de *dominio* e *imagen de una función*: si f es una función, $\mathrm{dom}(f) := \{x \colon \exists y((x, y) \in f)\}$ y $\mathrm{img}(f) := \{y \colon \exists x((x, y) \in f)\}$. Además, vamos a usar la notación $f[A] := \{y \colon \exists a \in A((a, y) \in f)\}$ y $f^{-1}[B] := \{x \colon \exists b \in B((x, b) \in f)\}$ para cualesquiera conjuntos A y B.

Finalmente, si tenemos una función f y un conjunto A, definimos la *restricción* de f a A como $f \restriction A = \{(a, b) \in f \colon a \in A\}$.

Además, para conjuntos A, B cualesquiera, denotaremos por ${}^B A$ a la colección de todas las funciones de B en A. Así, por ejemplo, ${}^{<\omega}2 := \bigcup_{n<\omega} {}^n 2$, esto es, ${}^{<\omega}2$ es el conjunto de todas las sucesiones binarias finitas.

1.1 Preórdenes

Recordemos que un *conjunto preordenado* (o sólo *preorden*) es una pareja $(\mathbb{P}, \leqslant)$ donde $\leqslant$ es una relación reflexiva y transitiva sobre $\mathbb{P}$. Si además la relación es antisimétrica, diremos que la pareja es un *orden parcial*. Daremos por hecho que un preorden (orden parcial) $\leqslant$ induce su correspondiente preorden (orden parcial) estricto (ver [8, Definición 4.101, p. 78]) y viceversa y lo denotaremos por $<$.

Un tipo de preorden de suma importancia para la combinatoria de conjuntos es el *árbol*. No incluiremos la definición en esta tesis (ver [11, III.5, p. 201]), pero sí vale la pena mencionar un ejemplo particular de árbol: el conjunto de todas las sucesiones binarias finitas $T := 2^{<\omega}$, ordenadas por la contención. Es fácil ver que $|T| = \omega$. Ahora, observemos que no puede existir una familia de conjuntos $\mathcal{D} \subseteq [\omega]^\omega$ no numerable que sea ajena por pares; pero debilitando un poco el enunciado, dejando que los elementos de $\mathcal{D}$ se "toquen un poco", obtenemos lo siguiente.

Lema 1.1. *Existe una familia de conjuntos $\mathcal{D} \subseteq [\omega]^\omega$ de tamaño $\mathfrak{c}$ que satisface que para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{D}$ distintos, $X \cap Y$ es finito.*

Demostración. Consideremos, para cada $f \in 2^\omega$, $X_f := \{f \restriction n \colon n < \omega\}$ y notemos que cada X_f es infinito, $X_f \subseteq T$ y que si $f, g \in 2^\omega$ son distintos, entonces X_f y X_g son distintos; en consecuencia, como $|2^\omega| = \mathfrak{c}$, hay $\mathfrak{c}$ conjuntos de la forma X_f. Además, si $f, g \in 2^\omega$ son distintos e $i := \min\{n < \omega \colon f(n) \neq g(n)\}$, entonces $X_f \cap X_g = \{f \restriction n \colon n \leqslant i\}$ es finito.

Tomando una biyección $\varphi \colon T \longrightarrow \omega$, $\mathcal{D} := \{\varphi[X_f] \colon f \in 2^\omega\} \subseteq [\omega]^\omega$ tiene tamaño $\mathfrak{c}$, y dados $f, g \in 2^\omega$ distintos, $\varphi[X_f] \cap \varphi[X_g] = \varphi[X_f \cap X_g]$ es finito. $\square$

A una familia de conjuntos cuyos elementos siempre se intersecan en un conjunto finito se le llama *casi ajena*.

Sigamos ahora con más definiciones pertinentes al concepto de preorden.

Definición 1.2. Sean $(\mathbb{P}, \leqslant)$ un preorden y $D \subseteq \mathbb{P}$. Diremos que D es *denso en* $\mathbb{P}$ si para todo $p \in \mathbb{P}$ existe $q \in D$ tal que $q \leqslant p$.

Observemos que en la definición anterior, por la reflexividad del orden, resulta equivalente sustituir "para todo $p \in \mathbb{P}$" por "para todo $p \in \mathbb{P} \setminus D$".

Definición 1.3. Sean $(\mathbb{P}, \leqslant)$ un preorden, $p, q \in \mathbb{P}$ y $F \subseteq \mathbb{P}$.

- Vamos a decir que p y q son *compatibles* si existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$, y escribiremos $p \mid q$. En caso contrario se dirá que son *incompatibles* y emplearemos el símbolo $p \perp q$.

- Diremos que F es un $\mathbb{P}$-*filtro* (o sólo *filtro* si el preorden es claro) si:

  1. para todo $p, q \in F$ existe $r \in F$ tal que $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$ (p y q son compatibles en F) y
  2. las condiciones $p \in \mathbb{P}, q \in F$ y $q \leqslant p$ implican la pertenencia $p \in F$.

Una simple observación es que la condición (2) de la definición de filtro aplica para cualquier cantidad finita de elementos en él. Es decir, si F es un filtro y tenemos $\{p_i \colon i \in n\} \subseteq F$, entonces existe $r \in F$ tal que para todo $i \in n$, $r \leqslant p_i$.

Definición 1.4. Sea $(\mathbb{P}, \leqslant)$ un preorden, F un filtro y $\mathcal{D}$ una familia de conjuntos densos en $\mathbb{P}$. Diremos que F es $\mathcal{D}$-*genérico* si F intersecta a todos los elementos de $\mathcal{D}$, es decir, si para todo $D \in \mathcal{D}$ se cumple $F \cap D \neq \emptyset$.

1.2 Funciones parciales finitas

Veamos un orden concreto para ejemplificar las definiciones anteriores. Sean X, Y dos conjuntos no vacíos. Denotaremos por $\mathrm{Fn}(X, Y)$ al conjunto de funciones de algún subconjunto finito de X en Y, es decir, $\mathrm{Fn}(X, Y) := \{f \in [X \times Y]^{<\omega} \colon f \text{ es función}\}$. A estas funciones se les llama *funciones parciales finitas de X en Y*. Observemos que siempre $\emptyset \in \mathrm{Fn}(X, Y)$. Es claro que $(\mathrm{Fn}(X, Y), \supseteq)$ es un orden parcial.

Mostremos que dos funciones en $\mathrm{Fn}(X, Y)$ son compatibles en el orden si y sólo si son compatibles como funciones: para $p, q \in \mathrm{Fn}(X, Y)$, si $p \mid q$, entonces existe $r \in \mathrm{Fn}(X, Y)$ tal que $r \supseteq p, q$; en particular, $r \supseteq p \cup q$ lo que implica que $p \cup q \in \mathrm{Fn}(X, Y)$. Por otro lado, si $p \cup q \in \mathrm{Fn}(X, Y)$, entonces trivialmente $p \mid q$, pues de hecho $p \cup q \supseteq p, q$.

De lo anterior se deduce que si F es un $\mathrm{Fn}(X, Y)$-filtro, entonces F es un sistema compatible de funciones, es decir, $\bigcup F$ es una función.

Afirmamos que si $x \in X$, entonces $D_x := \{p \in \mathrm{Fn}(X,Y) \colon x \in \mathrm{dom}(p)\}$ es denso en $\mathrm{Fn}(X,Y)$. En efecto, dado $p \in \mathrm{Fn}(X,Y) \setminus D_x$, fijamos $y_0 \in Y$ y hacemos $q := p \cup \{(x, y_0)\}$ para obtener $q \in \mathrm{Fn}(X,Y)$ con $q \supseteq p$.

1.3 El Lema de Rasiowa-Sikorski

El único resultado de esta sección será usado múltiples veces en la tesis.

Teorema 1.5 (Lema de Rasiowa-Sikorski)**.** *Sean* $(\mathbb{P}, \leqslant)$ *un preorden,* $p \in \mathbb{P}$ *y* $\mathcal{D}$ *una familia numerable de subconjuntos densos de* $\mathbb{P}$*. Entonces existe un filtro* $\mathcal{D}$*-genérico que contiene a* p*.*

Demostración. Por ser numerable, podemos escribir $\mathcal{D} = \{D_n \colon n \in \omega\}$ (posiblemente con repeticiones). Vamos a construir una sucesión $\{q_n\}_{n\in\omega}$ en $\mathbb{P}$ tal que para todo $n \in \omega$:

a) $q_{n+1} \leqslant q_n \leqslant q_0 = p$ (la sucesión es decreciente) y

b) $q_{n+1} \in D_n$.

Empezamos entonces tomando $q_0 := p$ y si tenemos elegido a q_n, como D_n es denso, existe $q_{n+1} \in D_n$ tal que $q_{n+1} \leqslant q_n$. Esto completa la recursión.

Verifiquemos ahora que $F := \{t \in \mathbb{P} \colon \exists n \in \omega (q_n \leqslant t)\}$ es el filtro buscado. Notemos que la reflexividad de $\leqslant$ nos da $\{q_n\}_{n\in\omega} \subseteq F$ y, en especial, $p \in F$. Con respecto a las propiedades de filtro:

1. Dados $t_1, t_2 \in F$, existen $m, k \in \omega$ tales que $q_m \leqslant t_1$ y $q_k \leqslant t_2$. Por (a) y por transitividad de $\leqslant$, $q_{m+k} \leqslant t_1, t_2$ y $q_{m+k} \in F$.

2. Dado $q \in \mathbb{P}$ y $t \in F$, si $t \leqslant q$ entonces, por transitividad de $\leqslant$, $q \in F$.

Finalmente, por (b), F es un filtro $\mathcal{D}$-genérico. □

CAPÍTULO 2: UN PAR DE APLICACIONES A LA TEORÍA DE ÓRDENES PARCIALES

2.1 Una caracterización de los números racionales

La primera aplicación del Lema de Rasiowa-Sikorski es como sigue. Se sabe que los racionales con su orden usual $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ son un orden total, denso, numerable y no acotado. Cantor mostró que estas cuatro propiedades caracterizan a los racionales como conjunto ordenado, es decir, que salvo isomorfismo hay un único orden con esas cuatro propiedades (ver [8, Teorema 11.2, p. 297]). El teorema 1.5 nos da una demostración bastante sencilla de dicho hecho, que además ejemplifica la relación entre los temas tratados en esta tesis.

Teorema 2.1 (Cantor)**.** *Sea $(X, \preceq)$ un orden total, denso, numerable y no acotado. Entonces $(X, \preceq)$ es isomorfo a $(\mathbb{Q}, \leqslant)$.*

Demostración. Vamos a construir el isomorfismo usando el teorema 1.5. Para esto es necesario dar un preorden $\mathbb{P}$ y una familia numerable de densos adecuada.

Le recomendamos al lector que se familiarice con el material presentado en la sección 1.2.

Sea $\mathbb{P} := \{p \in \mathrm{Fn}(X, \mathbb{Q}) \colon \forall x, y \in X(x \prec y \to p(x) < p(y))\}$, o sea $\mathbb{P}$ es la colección de todas las funciones parciales finitas que preservan el orden estricto. Nuevamente $\emptyset \in \mathbb{P}$. Ordenemos a $\mathbb{P}$ con la contención inversa.

Mostraremos que, para cada $x \in X$, el conjunto $D_x := \{p \in \mathbb{P} \colon x \in \mathrm{dom}(p)\}$ es denso en $\mathbb{P}$. Con esto en mente tomemos $p \in \mathbb{P} \setminus D_x$ y definamos

$$x^{\leftarrow} := \{y \in \mathrm{dom}(p) \colon y \prec x\} \text{ y } x^{\rightarrow} := \{y \in \mathrm{dom}(p) \colon x \prec y\}.$$

Entonces hay exactamente tres casos:

a) $x^{\leftarrow} = \emptyset$. Dado que $\preceq$ es un orden total, $\mathrm{dom}(p) = x^{\rightarrow}$. Como $\mathbb{Q}$ no es acotado (en particular no tiene mínimo) y el conjunto $\mathrm{img}(p)$ es finito, existe $a_0 \in \mathbb{Q}$ tal que para todo $a \in \operatorname{img}(p)$ se tiene $a_0 < a$. De este modo $q := p \cup \{(x, a_0)\}$ es un elemento de D_x que cumple $q \supseteq p$.

b) $x^{\rightarrow} = \emptyset$. Una modificación mínima al argumento de arriba produce $q \in D_x$ de tal modo que $q \supseteq p$.

c) $x^{\leftarrow} \neq \emptyset$ y $x^{\rightarrow} \neq \emptyset$. Denotemos por a y b, respectivamente, al máximo elemento de $x^{\leftarrow}$ y al mínimo elemento de $x^{\rightarrow}$ en X. Entonces $p(a) < p(b)$ y por densidad existe un racional c tal que $p(a) < c < p(b)$. Por lo tanto $q := p \cup \{(x, c)\}$ es un elemento de D_x con $q \supseteq p$.

Análogamente, para cada $a \in \mathbb{Q}$ definimos $E_a := \{p \in \mathbb{P} \colon a \in \operatorname{img}(p)\}$ y por un argumento similar al expuesto arriba se deduce que E_a es denso.

Consideramos $\mathcal{D} := \{D_x \colon x \in X\} \cup \{E_a \colon a \in \mathbb{Q}\}$ y notamos que como X y $\mathbb{Q}$ son numerables, $\mathcal{D}$ es una familia numerable de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$. Entonces, por el teorema 1.5, existe F un $\mathbb{P}$-filtro $\mathcal{D}$-genérico con $\emptyset \in F$. Por lo mencionado en la sección 1.2, $f := \bigcup F$ es una función. Veamos que es el isomorfismo buscado.

Dado $x \in X$, como F es $\mathcal{D}$-genérico, en particular existe $p \in F \cap D_x$, es decir, que $x \in \operatorname{dom}(p) \subseteq \bigcup_{q \in F} \operatorname{dom}(q) = \operatorname{dom}(f)$. Así, $\operatorname{dom}(f) = X$, es decir, $f \colon X \longrightarrow \mathbb{Q}$. Similarmente, para cada $a \in \mathbb{Q}$ existe $p \in F \cap E_a$ y, por ende, $a \in \operatorname{img}(p) \subseteq \operatorname{img}(f)$. Por lo tanto f es suprayectiva.

Supongamos para $x, y \in X$ que $x \prec y$. Por (1) existen $p, q \in F$ tales que $x \in \operatorname{dom}(p)$ y $y \in \operatorname{dom}(q)$. Pero F es filtro, así que existe $r \in F$ tal que $r \supseteq p, q$. En particular $x, y \in \operatorname{dom}(r)$. Así es claro que $f(x) = r(x) < r(y) = f(y)$. En otras palabras, f preserva el orden estricto, en particular es inyectiva. Por lo tanto, f es una biyección entre conjuntos linealmente ordenados que preserva el orden, esto es, en virtud de [8, Teorema 4.124, p. 84], un isomorfismo de orden. $\square$

Ya teniendo caracterizados los racionales, es un simple ejercicio (que resolveremos en esta sección) extender dicha caracterización a los números reales. Podemos pensar en los reales como una *completación* del orden de los racionales, en el siguiente sentido.

Definición 2.2. Decimos que un orden total es *completo* si todo subconjunto acotado superiormente y no vacío tiene supremo.

En general, si un conjunto linealmente ordenado contiene un subconjunto que es denso (todo intervalo abierto no vacío contiene un punto del conjunto) y numerable, diremos que es *separable*. En el sentido de la Topología, un espacio topológico es *separable* si existe un subconjunto numerable que es denso (es decir, todo conjunto abierto no vacío del espacio tiene un punto en el subconjunto denso). De este modo, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.3 (Cantor)**.** *Sea $(X, \preceq)$ un orden total, denso en sí mismo (esto es, para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \prec y$ existe $z \in X$ con $x \prec z \prec y$), separable, completo y no acotado. Entonces $(X, \preceq)$ es isomorfo a $(\mathbb{R}, \leqslant)$.*

Demostración. Empezamos tomando un conjunto $D \subseteq X$, denso y numerable. Claramente D no puede ser acotado pues es denso, además es un orden total con el orden heredado. Así, por el teorema 2.1, existe un isomorfismo de orden $f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow D$.

Parece natural extender la función f usando la hipótesis de que X es completo: definimos $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow X$ por la regla de correspondencia $F(x) = \sup\{f(q)\colon q \in \mathbb{Q} \text{ y } q \leqslant x\}$. F está bien definida porque para cada $x \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{f(q)\colon q \in \mathbb{Q}, q \leqslant x\}$ claramente es acotado superiormente y no es vacío. Veamos que F es un isomorfismo de orden.

Si tomamos dos números reales $x < y$, podemos encontrar por densidad un par de racionales p, q de manera que $x < p < q < y$. Si sucediera que $f(p) \prec F(x)$, por definición de supremo, habría un racional $r \leqslant x$ que cumpliría $f(p) \prec f(r)$; como f es isomorfismo, esto implicaría que $p < r \leqslant x$, lo que contradiría la elección de p. Por lo tanto, por linealidad de $\preceq$, $F(x) \preceq f(p)$. De este modo, como f es isomorfismo y por la definición de F, $F(x) \preceq f(p) \prec f(q) \preceq F(y)$, o sea $F(x) \prec F(y)$. Este párrafo prueba que F preserva el orden estricto y como $\leqslant$ es total, deducimos que F es inyectiva.

Dado $y \in X$, por un argumento similar al del segundo párrafo, existe $x := \sup\{q \in \mathbb{Q}\colon f(q) \preceq y\}$. Usando nuevamente que f es un isomorfismo,

$$\begin{aligned} F(x) &= \sup\{f(q)\colon q \in \mathbb{Q} \text{ y } q \leqslant \sup\{p \in \mathbb{Q}\colon f(p) \preceq y\}\} \\ &= \sup\{f(q)\colon q \in \mathbb{Q} \text{ y } f(q) \preceq y\} = y. \end{aligned}$$

Esto prueba la sobreyectividad.

Por lo tanto, F es una biyección entre conjuntos linealmente ordenados que preserva el orden, esto es, en virtud de [8, Teorema 4.124, p. 84], un isomorfismo de orden. □

El resto de esta sección expone un argumento que relaciona el anterior resultado con otras ramas de la matemática, como la Topología.

Definición 2.4. Un espacio topológico tiene *celularidad numerable* si cualquier colección de subconjuntos abiertos ajenos por pares es a lo más numerable.

Intuitivamente, en un espacio de celularidad numerable, no caben más que una cantidad numerable de conjuntos abiertos ajenos. Se verifica rápidamente que un espacio topológico linealmente ordenado tiene celularidad numerable si y sólo si cualquier familia de intervalos abiertos ajenos por pares es a lo más numerable.

Una pregunta de suma importancia se basa en la siguiente observación.

Lema 2.5. *Cualquier espacio topológico separable tiene celularidad numerable.*

Demostración. Si en un espacio separable tomamos una colección de subconjuntos abiertos no vacíos ajenos por pares, en cada uno de estos subconjuntos debe haber un elemento del conjunto denso numerable (que existe por ser separable), y por ser éste numerable, implica que en total no puede haber más que una cantidad numerable de conjuntos abiertos en la colección que tomamos. □

Así, la pregunta que nos hacemos es: ¿en el teorema 2.3 podemos debilitar la hipótesis de separabilidad y reemplazarla por la de celularidad numerable? Esta pregunta se conoce como el *Problema de Suslin*. Si la respuesta fuera no, entonces habría un contraejemplo, es decir, un orden total $(S, \preceq)$ denso en sí mismo, de celularidad numerable, completo y no acotado que **no** es isomorfo a $(\mathbb{R}, \leqslant)$. A esta clase de órdenes totales se les conoce como *líneas de Suslin*. Siempre pensaremos en las líneas de Suslin como espacios topológicos linealmente ordenados.

Resulta que la existencia de líneas de Suslin es independiente de ZFC, y por lo tanto la respuesta al Problema de Suslin es indecidible. Es usual agregar axiomas a la teoría de manera que el problema en cuestión sí sea decidible, y probablemente el más común es el famoso Axioma de Martin. Éste implica la no existencia de líneas de Suslin, como se deduce de los siguientes dos resultados cuya prueba se sale vehementemente del alcance de esta tesis.

Lema 2.6 ([11, Lemma III.2.18, p. 170])**.** *Si $(S, \preceq)$ es una línea de Suslin, entonces el producto topológico $S \times S$ no tiene celularidad numerable.*

Una versión ligeramente más débil de [11, Theorem III.3.43, p. 183], que bastará para el argumento expuesto aquí, es como sigue.

Teorema 2.7. *Demos por hecho el Axioma de Martin. Si $\{X_i \colon i \in I\}$ es una familia de espacios topológicos con celularidad numerable, entonces el producto topológico $\prod_{i \in I} X_i$ tiene celularidad numerable.*

De este modo, la existencia de líneas de Suslin es incompatible con el Axioma de Martin.

Concluimos esta sección comentando que el Axioma de Martin se menciona muchas veces cuando uno estudia Forcing, y sobre todo es interesante visto como una especie de generalización del Lema de Rasiowa-Sikorski, en el sentido de que podemos cambiar la hipótesis de que la familia de densos $\mathcal{D}$ sea numerable por la hipótesis de que $|\mathcal{D}| \leqslant \kappa$ con $\kappa < 2^\omega$, siempre y cuando el preorden satisfaga la condición de la cadena contable.

2.2 Hay una única álgebra booleana numerable y libre de átomos

En esta sección probaremos que, salvo isomorfismo, existe una única álgebra booleana numerable y libre de átomos (ver definición 2.9, abajo). Usaremos la notación, resultados básicos y definiciones (así como la noción de *álgebra booleana*) que aparecen en el tercer capítulo del libro [12].

Vale la pena mencionar que la demostración clásica del teorema que vamos a probar utiliza un argumento conocido como *back-and-forth*, como, por ejemplo, se muestra en [12, Teorema 5.4.9, pp. 132-133]; sin embargo, hasta donde llega nuestro conocimiento, el argumento expuesto a continuación no había sido escrito previamente.

Dada un álgebra booleana $(A, \leqslant)$ (para simplificar la notación, nos referiremos a ella como A),

1. los símbolos 0_A y 1_A denotarán, respectivamente, al mínimo y al máximo elemento de A, y pensaremos siempre que éstos son distintos;

2. $a \wedge b$ y $a \vee b$ representarán al ínfimo y al supremo, correspondientemente;

3. similarmente, para $B \subseteq A$, $\bigwedge B$ y $\bigvee B$ denotarán el ínfimo y supremo del conjunto B, respectivamente;

4. a' representará el complemento del elemento a;

5. $a - b$ es una abreviatura de $a \wedge b'$ y

6. denotaremos al conjunto de elementos positivos de A por A^+, es decir, $A^+ := A \backslash \{0_A\}$.

Lema 2.8. *Para cualesquiera $a \in A^+$ y $E \in [A]^{<\omega}$, la condición $a \leqslant \bigvee E$ implica que hay $x \in E$ con $a \wedge x > 0_A$.*

Demostración. Por contrapuesta: supongamos que $a \wedge x = 0_A$, para cada $x \in E$. Luego, por la distributividad,

$$a = a \wedge \bigvee E = \bigvee \{a \wedge x \colon x \in E\} = 0_A,$$

es decir, $a \notin A^+$. $\square$

Definición 2.9. Sea A un álgebra booleana. Un elemento $a \in A^+$ es llamado *átomo* si es un elemento $\leqslant$-minimal en A^+. Al conjunto de átomos de A se le denotará por $\mathrm{At}(A)$. Para simplificar la notación, definamos también, para cada $a \in A$, el conjunto

$$\mathrm{At}_a(A) := \{x \in \mathrm{At}(A) \colon x \leqslant a\}.$$

De este modo, diremos que A es *libre de átomos* si $\mathrm{At}(A) = \emptyset$.

Para un breve ejemplo ilustrativo, se puede considerar, para un conjunto no vacío X, al álgebra booleana $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$. En este caso, dado $Y \subseteq X$, $\mathrm{At}_Y(\mathcal{P}(X)) = \{\{y\} \colon y \in Y\}$. Note que si $x, y \in X$ satisfacen $\emptyset \neq \{x\} \cap \{y\}$, entonces, $x = y$; también se tiene que $\bigcup \mathrm{At}_Y(\mathcal{P}(X)) = Y$. Esto sirve de motivación para las siguientes dos proposiciones.

Se tienen las siguientes propiedades respecto a los átomos de A. Primeramente, si dos átomos de A, digamos a y b, son tales que $0_A < a \wedge b$, entonces, como $a \wedge b \leqslant a$ y por ser a un átomo, $a \wedge b = a$, es decir, $a \leqslant b$ y, por ser también b un átomo, $a = b$. En resumen, hemos probado lo siguiente.

Proposición 2.10. *Para cualesquiera $a, b \in \mathrm{At}(A)$, si $0_A < a \wedge b$, entonces $a = b$.*

Proposición 2.11. *Supongamos que A es finita. Entonces,*

1. $\mathrm{At}(A)$ *es denso en* A^+ *y*

2. *para todo $a \in A$, $a = \bigvee \mathrm{At}_a(A)$ (ver definición 2.9).*

Demostración. Hagamos el primer inciso por contrapuesta: si no fuera el caso que $\mathrm{At}(A)$ es denso en A^+, entonces habría un elemento $a \in A^+$ tal que para todo $b \in A$, $b \leqslant a$ implica $b \notin \mathrm{At}(A)$. Argumentaremos que esta última condición tiene como consecuencia la existencia de una sucesión $\{a_k \colon k < \omega\} \subseteq A$ estrictamente decreciente, en especial, con una infinidad de elementos, lo cual nos garantiza que A es infinita.

Como en particular $a_0 := a$ no es un átomo, existe $a_1 \in A^+$ tal que $a_1 < a$. Si, para algún natural n, tenemos construida $\{a_k \colon k \leqslant n\}$, una sucesión estrictamente decreciente, entonces, por hipótesis, a_n no es un átomo (pues $a_n \leqslant a$), y así obtenemos a_{n+1} con las propiedades deseadas. Esto completa nuestra recursión.

Pensando ahora en el segundo inciso, es claro que a es cota superior de $\mathrm{At}_a(A)$ y así $b := \bigvee \mathrm{At}_a(A) \leqslant a$. Por otro lado, si sucediera que $a - b \in A^+$, entonces el primer inciso del lema nos arrojaría un átomo $c \in A^+$ tal que $c \leqslant a - b$; luego, $c \leqslant a$ y $c \leqslant b'$. La primera de estas desigualdades, junto con $c \in \mathrm{At}(A)$, nos dice que $c \leqslant b$, lo cual claramente, siendo c positivo, contradice la segunda desigualdad. Por lo tanto, $a - b = 0_A$, o sea, $a = b$. $\square$

Del primer inciso de la proposición anterior se deduce que la igualdad $\mathrm{At}(A) = \emptyset$ implica que A es infinita (observe que $\emptyset$ no puede ser denso en A pues $1_A \in A^+$). Si además A es numerable, entonces $|A| = \omega$. Esto es importante para el resultado central de la sección, pues así toda álgebra numerable y libre de átomos tiene cardinalidad ω.

Supongamos que A_0 es una subálgebra de A y sea $u \in A$. En vista de que la intersección de subálgebras vuelve a ser una subálgebra, para cualquier subconjunto arbitrario de A tiene sentido definir la mínima subálgebra que lo contiene. En particular, tenemos lo siguiente.

Definición 2.12. La *extensión simple de A_0 dada por u* es la mínima subálgebra de A que contiene a $A_0 \cup \{u\}$ y es denotada por $A_0(u)$.

Para los siguientes lemas, supondremos que C_0 y D_0 son álgebras booleanas y que C y D son subálgebras de C_0 y D_0 respectivamente. Dejaremos de especificar a cuál álgebra pertenecen los órdenes y los elementos máximo y mínimo pues será claro del contexto y simplificará la lectura de las pruebas.

Lema 2.13. *Sea u un elemento arbitrario de C_0. Se tiene que*

$$C(u) = \{(a \wedge u) \vee (b - u) \colon a, b \in C\}.$$

Si además $H \colon C(u) \longrightarrow D_0$ es un homomorfismo booleano, entonces $H[C(u)]$ es la extensión simple de la subálgebra $H[C]$ dada por $H(u)$, es decir, $H[C(u)] = H[C](H(u))$.

Demostración. En la prueba que se expone a continuación usaremos libremente las propiedades básicas de los operadores booleanos, como asociatividad, conmutatividad, distributividad, Leyes de De Morgan y equivalencias con el orden.

Primero, veamos que $C' := \{(a \wedge u) \vee (b - u) \colon a, b \in C\}$ es una subálgebra de C_0 que contiene a $C \cup \{u\}$, así por minimalidad, $C(u) \subseteq C'$.

En primer lugar, por ser C una subálgebra de C_0, $\{0, 1\} \subseteq C$, y así

$$u = (1 \wedge u) \vee (0 - u) \in C'.$$

También, dado $\{a, a_1, b, b_1\} \subseteq C$, tenemos que

$$a = a \wedge (u \vee u') = (a \wedge u) \vee (a - u) \in C',$$

es decir, $C \cup \{u\} \subseteq C'$. Luego, podemos usar que (nuevamente por ser subálgebra) tanto

$a \vee a_1$ como $b \vee b_1$ son elementos de C para obtener

$$\begin{aligned}
&[(a \wedge u) \vee (b - u)] \vee [(a_1 \wedge u) \vee (b_1 - u)] = \\
&[(a \wedge u) \vee (a_1 \wedge u)] \vee [(b - u) \vee (b_1 - u)] = \\
&\qquad [(a \vee a_1) \wedge u] \vee [(b \vee b_1) - u] \in C'.
\end{aligned}$$

Para ver que C' es cerrado bajo complementos, notemos primero que

$$\begin{aligned}
(a' \wedge b') \wedge [(b' \wedge u') \vee (a' \wedge u)]' &= \\
(a' \wedge b') \wedge [(b' \wedge u')' \wedge (a' \wedge u)'] &= \\
b' \wedge (b' \wedge u')' \wedge a' \wedge (a' \wedge u)' &= \\
b' \wedge (b \vee u) \wedge a' \wedge (a \vee u') &= \\
b' \wedge u \wedge a' \wedge u' &= 0.
\end{aligned}$$

Y como consecuencia,

$$a' \wedge b' \leqslant (b' \wedge u') \vee (a' \wedge u). \tag{2.1}$$

Finalmente, como $\{a', b'\} \subseteq C$,

$$\begin{aligned}
[(a \wedge u) \vee (b - u)]' &= \\
(a \wedge u)' \wedge (b - u)' &= \\
(a' \vee u') \wedge (b' \vee u) &= \\
[(a' \wedge b') \vee (a' \wedge u)] \vee [(u' \wedge b') \vee (u \wedge u')] &= \\
(a' \wedge b') \vee (a' \wedge u) \vee (u' \wedge b') &= \quad \text{(por (2.1))} \\
(a' \wedge u) \vee (b' - u) &\in C'.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

De este modo, C' es una subálgebra de C_0 que contiene a $C \cup \{u\}$ y con eso tenemos la primera inclusión: $C(u) \subseteq C'$. La segunda inclusión es más sencilla, pues dados $a, b \in C$, como $C(u)$ es una subálgebra que contiene a $C \cup \{u\}$, debe suceder que $(a \wedge u) \vee (b - u) \in C(u)$.

Concluimos que $C(u) = C'$ como se quería.

Demos por hecho ahora que $H\colon C(u) \longrightarrow D_0$ es un homomorfismo booleano. Por lo que acabamos de demostrar en los párrafos anteriores, basta ver que

$$H[C(u)] = \{(a \wedge H(u)) \vee (b - H(u))\colon a, b \in H[C]\}.$$

Por un lado, dados $a, b \in H[C]$, existen $x, y \in C$ con $H(x) = a$ y $H(y) = b$. Por ser H un homomorfismo,

$$\begin{aligned}(a \wedge H(u)) \vee (b - H(u)) &= (H(x) \wedge H(u)) \vee (H(y) - H(u)) \\ &= H((x \wedge u) \vee (y - u)) \in H[C(u)]\end{aligned}$$

Por el otro lado, si $a \in H[C(u)]$, entonces existen (usando la primera parte del lema) $x, y \in C$ tales que $a = H((x \wedge u) \vee (y - u))$. Como H es un homomorfismo, una cuenta similar a la anterior revela que $a = (H(x) \wedge H(u)) \vee (H(y) - H(u))$. Por lo tanto, $H[C(u)]$ es la extensión simple de $H[C]$ dada por $H(u)$. □

Nos será de gran utilidad el siguiente lema de extensión.

Lema 2.14. *Suponga que $u \in C_0$ y $w \in D_0$ son arbitrarios. Si un isomorfismo booleano $h\colon C \longrightarrow D$ satisface que para todo $x \in C$*

1. *$x \leqslant u'$ equivale a $h(x) \leqslant w'$ y*

2. *$x \leqslant u$ si y sólo si $h(x) \leqslant w$,*

entonces existe un isomorfismo booleano $H\colon C(u) \longrightarrow D(w)$ tal que $h \subseteq H$ y $H(u) = w$.

Demostración. Demos por ciertas las hipótesis del lema y sea $x \in C(u)$. Queremos definir $H(x)$. Por el lema anterior, x tiene una representación en términos de dos elementos de C y de u. Si bien dicha representación para x no es única, veremos que las hipótesis que satisface h tienen como consecuencia que, para cualquier $\{a_0, a_1, b_0, b_1\} \subseteq C$, las igualdades

$$x = (a_0 \wedge u) \vee (b_0 - u) = (a_1 \wedge u) \vee (b_1 - u) \tag{2.3}$$

implican la igualdad

$$(h(a_0) \wedge w) \vee (h(b_0) - w) = (h(a_1) \wedge w) \vee (h(b_1) - w). \tag{2.4}$$

Con ello en mente, hagamos lo siguiente. Primeramente, la condición (2.3) implica que

$$\begin{aligned}
& a_0 \wedge u = x \wedge u = a_1 \wedge u \\
\text{y} \quad & b_0 - u = x - u = b_1 - u; \\
\text{entonces, para cada } i < 2, \quad & (a_i - a_{1-i}) \wedge u = 0_A \\
\text{y} \quad & (b_i - b_{1-i}) - u = 0_A; \\
\text{de donde} \quad & (a_i - a_{1-i}) \leqslant u' \\
\text{y} \quad & (b_i - b_{1-i}) \leqslant u.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Ahora, usando las dos hipótesis del lema y que h es un homomorfismo booleano, obtenemos

$$\begin{aligned}
\text{para } i < 2, \quad & h(a_i) - h(a_{1-i}) \leqslant w' \\
\text{y} \quad & h(b_i) - h(b_{1-i}) \leqslant w
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Las últimas desigualdades implican que

$$h(a_0) \wedge w = h(a_1) \wedge w \quad \text{y} \quad h(b_0) - w = h(b_1) - w$$

y, con eso, la condición (2.4).

Definamos entonces, para $x = (a \wedge u) \vee (b - u)$, $H(x) := (h(a) \wedge w) \vee (h(b) - w)$. H está bien definida por todo lo hecho previamente. En especial, si $a \in C$, podemos escribir $a = (a \wedge u) \vee (a - u)$ para calcular $H(a) = (h(a) \wedge w) \vee (h(a) - w) = h(a)$, es decir, $H \upharpoonright C = h$. También podemos escribir $u = (1 \wedge u) \vee (0 - u)$ para ver que $H(u) = (h(1) \wedge w) \vee (h(0) - w) = (1 \wedge w) \vee (0 - w) = w$.

Únicamente falta verificar que, efectivamente, H es un isomorfismo. Tomemos arbitrariamente dos elementos x, y en $C(u)$ y, por el lema anterior, supongamos que se ven como $x = (a \wedge u) \vee (b - u)$ y $y = (a_1 \wedge u) \vee (b_1 - u)$, para algún $\{a, a_1, b, b_1\} \subseteq C$. Tal y como lo hicimos en la prueba del lema 2.13, $x \vee y = [(a \vee a_1) \wedge u] \vee [(b \vee b_1) - u]$ y, en consecuencia,

$$\begin{aligned}
H(x \vee y) &= \\
H([(a \vee a_1) \wedge u] \vee [(b \vee b_1) - u]) &= \\
(h(a \vee a_1) \wedge w) \vee (h(b \vee b_1) - w) &= \\
(h(a) \vee h(a_1)) \wedge w) \vee (h(b) \vee h(b_1)) - w) &= \\
((h(a) \wedge w) \vee (h(a_1) \wedge w)) \vee ((h(b) - w) \vee (h(b_1)) - w)) &= \\
((h(a) \wedge w) \vee (h(b) - w)) \vee ((h(a_1) \wedge w) \vee (h(b_1) - w)) &= \\
H(((a \wedge u) \vee (b - u))) \vee H(((a_1 \wedge u) \vee (b_1 - u))) &= H(x) \vee H(y).
\end{aligned}$$

Por un argumento similar al que empleamos para deducir (2.1) (escribiendo $h(a)$, $h(b)$ y w en lugar de a, b y u, respectivamente), se puede obtener que

$$h(a)' \wedge h(b)' \leqslant (h(b)' - w) \vee (h(a)' \wedge w). \tag{2.7}$$

Usando esto y la cuenta que se hizo en (2.2), se tiene que

$$\begin{aligned}
H(x)' = H([(a \wedge u) \vee (b - u)])' &= \\
[(h(a) \wedge w) \vee (h(b) - w)]' &= \\
(h(a)' \vee w') \wedge (h(b)' \vee w) &= \\
(h(a)' \wedge h(b)') \vee (h(a)' \wedge w) \vee (w' \wedge h(b)') \vee (w' \wedge w) &= \\
(h(a)' \wedge h(b)') \vee (h(a)' \wedge w) \vee (w' \wedge h(b)') &= \quad \text{(por (2.7))} \\
(h(a)' \wedge w) \vee (h(b)' - w) &= (h(a') \wedge w) \vee (h(b') - w) \quad = \\
H((a' \wedge u) \vee (b' - u)) &= \\
H([(a \wedge u) \vee (b - u)]') &= H(x').
\end{aligned}$$

Concluimos así que H es un homomorfismo booleano. Más aún, el lema 2.13 implica que $H[C(u)] = H[C](H(u))$ y en vista de que $H(u) = w$ y h es un isomorfismo extendido por H, se tiene que $H[C](H(u)) = h[C](w) = D(w)$. Concluimos que $H\colon C(u) \longrightarrow D(w)$ es, entonces, un epimorfismo booleano. Vale la pena hacer el comentario de que, de nuestras hipótesis del lema, hasta ahora, no hemos usado las implicaciones de regreso de los incisos (1) y (2).

Veamos que H es inyectiva. Dado $x \in C(u)$ tal que $H(x) = 0$, fijemos $a, b \in C$ con $x = (a \wedge u) \vee (b - u)$. Entonces, tenemos la igualdad $(h(a) \wedge w) \vee (h(b) - w) = 0$, la cual, a su vez, tiene como consecuencia que $(h(a) \wedge w) = (h(b) - w) = 0$ o, visto de otro modo, $h(a) \leqslant w'$ y $h(b) \leqslant w$. Aplicando nuestras dos hipótesis del lema, obtenemos que $a \leqslant u'$ y $b \leqslant u$, luego, $x = (a \wedge u) \vee (b - u) = 0 \vee 0 = 0$. Comprobamos que H tiene núcleo trivial, y esto implica que H es inyectiva. Con ello tenemos que H es un isomorfismo. $\square$

Intuitivamente, el lema que acabamos de probar nos dice que si w se compara con D de la misma forma en que u se compara con C, entonces podemos extender cualquier isomorfismo entre C y D para que incluya a u y w. Sin embargo, para la prueba del resultado central de esta sección nos será de gran utilidad saber cómo encontrar un elemento $w \in D_0$ que haga lo requerido por el lema. El siguiente lema tiene justamente este objetivo.

Lema 2.15. *Supongamos ahora que C y D son finitas, $u \in C_0$, D_0 es libre de átomos y que $h\colon C \longrightarrow D$ es un isomorfismo booleano. Entonces, existe $w \in D_0$ que cumple con todas las hipótesis del lema 2.14.*

Demostración. Comencemos por definir los siguientes conjuntos de átomos.

$$\begin{aligned} A^0 &:= \{a \in \mathrm{At}(C)\colon a \leqslant u\}, \\ A^1 &:= \{a \in \mathrm{At}(C)\colon a \leqslant u'\} \text{ y} \\ A^{1/\pi} &:= \mathrm{At}(C) \setminus (A^0 \cup A^1). \end{aligned}$$

Es claro que estos tres son ajenos y su unión es $\mathrm{At}(C)$.

Como $\mathrm{At}(D_0) = \emptyset$, para cada $y \in A^{1/\pi}$, existe $\hat{y} \in D_0^+$ de tal suerte que $\hat{y} < h(y)$. Con todo esto, proponemos

$$w := \bigvee \{\hat{y}\colon y \in A^{1/\pi}\} \vee \bigvee h[A^0].$$

Veamos que w cumple con las bicondicionales que tiene el lema 2.14 por hipótesis.

Primero vamos a probar que los incisos (1) y (2) del lema 2.14 son ciertos cuando x es un átomo, y luego, veremos que el resultado se extiende para un x arbitrario. Con ello en mente, tomemos un átomo $x \in C$.

Supongamos que $x \leqslant u'$; en particular, $x \in A^1$. Así, por distributividad,

$$h(x) \wedge w = \bigvee\{h(x) \wedge \hat{y} \colon y \in A^{1/\pi}\} \vee \bigvee\{h(x) \wedge h(y) \colon y \in A^0\}.$$

Para cada $y \in A^{1/\pi}$, $h(x) \wedge \hat{y} \leqslant h(x) \wedge h(y)$. Como h es un isomorfismo, debe mandar átomos distintos en átomos distintos, así, por la proposición 2.10, $h(x) \wedge h(y) = 0$. Similarmente, dado cualquier $y \in A^0$, $h(x) \wedge h(y) = 0$. Esto prueba que $h(x) \wedge w = 0$, y luego, $h(x) \leqslant w'$.

Ahora, demos por hecho que $x \leqslant u$. Según nuestra definición, esto quiere decir que $x \in A^0$, lo cual implica que $h(x) \leqslant \bigvee h[A^0] \leqslant w$.

Consideremos ahora el caso en que $h(x) \leqslant w'$. Entonces, $h(x) \wedge w = 0$, de donde, por la definición de w y por distributividad, obtenemos que para cualquier $y \in A^0$, $h(x) \wedge h(y) = 0$ y, para cualquier $y \in A^{1/\pi}$, $h(x) \wedge \hat{y} = 0$. Pero x es un átomo y trivialmente $0 < h(x) = h(x) \wedge h(x)$, así $x \notin A^0$; también, si x fuera un elemento de $A^{1/\pi}$, entonces, $0 < \hat{x} = h(x) \wedge \hat{x}$, lo que contradice lo dicho al principio de este párrafo, es decir $x \notin A^{1/\pi}$. En resumen, $x \in A^1$, y luego, $x \leqslant u'$.

Finalmente, si $h(x) \leqslant w$, entonces, por el lema 2.8, debe suceder uno de dos casos. El primer caso es si $0 < h(x) \wedge \bigvee h[A^0]$. Entonces, por el mismo lema, debe haber un átomo $y \in A^0$ de forma que $0 < h(x) \wedge h(y)$. En vista de que h es un isomorfismo, se deduce que $h(x)$, $h(y) \in \mathrm{At}(D)$ y, de acuerdo a la proposición 2.10, concluimos que $h(x) = h(y)$. Así, por inyectividad, $x = y \in A^0$. Es decir, $x \leqslant u$.

El segundo caso, $0 < h(x) \wedge \bigvee h[A^0]$, implica que, por el lema 2.8, hay algún $y \in A^{1/\pi}$ para el cual $0 < h(x) \wedge \hat{y} \leqslant h(x) \wedge h(y)$. Entonces, por la proposición 2.10, $h(x) = h(y)$ y así $x = y \in A^{1/\pi}$. En especial, tenemos que para todo $z \in A^0$, $h(x) \wedge h(z) = 0$ (pues z y y pertenecen a clases de átomos distintas), lo cual tiene como consecuencia que $h(x) \wedge \bigvee h[A^0] = 0$. Consecuentemente, sólo el caso analizado en el párrafo previo ocurre.

Veamos ahora que para un $x \in C$ arbitrario se valen los incisos (1) y (2) del lema 2.14.

La proposición 2.11 nos permite escribir $x = \bigvee \mathrm{At}_x(C)$, lo cual, conjunto con la definición de supremo, nos dice que para cualquier $v \in C_0$,

$$x \leqslant v \qquad \text{si y sólo si} \qquad \text{para todo } a \in \mathrm{At}_x(C),\ a \leqslant v. \tag{2.8}$$

Tenemos entonces que (tomando $v = u$ en (2.8)) $x \leqslant u$ si y sólo si, para todo $a \in \mathrm{At}_x(C)$, $a \leqslant u$, lo cual, por los párrafos anteriores, equivale a que para todo $a \in \mathrm{At}_x(C)$, $h(a) \leqslant w$. Esto último implica que

$$h(x) = h\left(\bigvee \mathrm{At}_x(C)\right) = \bigvee \{h(a)\colon a \in \mathrm{At}_x(C)\} \leqslant w.$$

Conversamente, si $h(x) \leqslant w$, entonces, como h es un isomorfismo, para todo $a \in \mathrm{At}_x(C)$, $h(a) \leqslant h(x) \leqslant w$. En vista de que a es un átomo, se deduce que $a \leqslant u$ y por (2.8), $x \leqslant u$. Esto prueba el inciso (1).

Análogamente, sustituyendo en el párrafo anterior u y w por u' y w' respectivamente, se obtiene el inciso (2). $\square$

Teorema 2.16. *Si $(\mathbb{A} \leqslant)$ y $(\mathbb{B}, \preceq)$ son álgebras booleanas (no triviales) numerables y libres de átomos, entonces son isomorfas.*

Demostración. Vamos a construir el isomorfismo usando Rasiowa-Sikorski. Con ello en mente, definamos al conjunto $\mathbb{P}$ mediante la fórmula siguiente.

$$\begin{gathered} p \in \mathbb{P} \text{ si y sólo si } p \in \mathrm{Fn}(A, B),\ p \text{ es un isomorfismo booleano y} \\ \mathrm{dom}(p) \text{ e } \mathrm{img}(p) \text{ son subálgebras finitas de } A \text{ y } B\text{, respectivamente.} \end{gathered}$$

Dotamos a $\mathbb{P}$ con el orden $q \leqslant p$ si y sólo si q es una extensión de p, en breve, $p \subseteq q$. Tenemos que $(\mathbb{P}, \leqslant)$ es un orden parcial con elemento máximo $\{(0_A, 0_B), (1_A, 1_B)\}$. Para simplificar la notación, abreviemos, para $p \in \mathbb{P}$, $A_p := \mathrm{dom}(p)$ y, similarmente, $B_p := \mathrm{img}(p)$.

Para cada elemento $a \in A$, afirmamos que $D_a := \{p \in \mathbb{P}\colon a \in A_p\}$ es un subconjunto denso de $\mathbb{P}$. Para esto, tomemos arbitrariamente $p \in \mathbb{P} \setminus D_a$, es decir, $a \in A \setminus A_p$. Vamos a aplicar los lemas 2.15 y 2.14 (en ese orden) tomando $C_0 := A$, $D_0 := B$, $C := A_p$,

$D := B_p$, $h := p$ y $u := a$ para obtener, respectivamente, $w \in B$ y luego un isomorfismo $H\colon A_p(a) \longrightarrow B_p(w)$ que extiende a p. Como la extensión simple de una subálgebra finita vuelve a ser finita y $a \in A_p(a)$, resulta que $H \in D_a$, con lo cual se concluye que D_a es denso.

Similarmente, para cada $b \in B$, el conjunto $E_b := \{p \in \mathbb{P}\colon b \in B_p\}$ es denso en $\mathbb{P}$: dado $p \in \mathbb{P} \setminus E_b$, aplicamos los lemas 2.15 y 2.14 tomando $C_0 := B$, $D_0 := A$, $C := B_p$, $D := A_p$, $h := p^{-1}$ y $u := b$ para obtener, respectivamente, $w \in A$ y luego un isomorfismo $H\colon B_p(b) \longrightarrow A_p(w)$ que extiende a p^{-1}. Así, el isomorfismo $H^{-1}\colon A_p(w) \longrightarrow B_p(b)$ es una extensión de p que tiene al elemento b en su imagen por lo cual, análogo al caso anterior, culmina en la prueba de que E_b es denso en $\mathbb{P}$.

Así, la familia

$$\mathcal{D} := \{D_a\colon a \in A\} \cup \{E_b\colon b \in B\}$$

es una colección numerable (pues A y B son numerables) de densos en $\mathbb{P}$. Por el teorema 1.5, hay un filtro $F \subseteq \mathbb{P}$ que es $\mathcal{D}$-genérico. Hagamos $f := \bigcup F$ y notemos que el material presentado en la sección 1.2 nos garantiza que f es una función. Comprobemos que es el isomorfismo buscado.

Primeramente, notemos que dado $a \in A$, por genericidad, existe $p \in G$ tal que $a \in A_p \subseteq \operatorname{dom}(f)$. Análogamente, para cada $b \in B$, $b \in \operatorname{img}(f)$. Así, $f\colon A \longrightarrow B$ es sobreyectiva.

Dados $a_0, a_1 \in A$, debe haber $p_0, p_1 \in F$ tales que para $i < 2$, $a_i \in \operatorname{dom}(p_i)$; pero F es un filtro, entonces debe existir una condición $q \in F$ que extiende a ambas, p_0 y p_1; en especial, $\{a_0, a_1\} \subseteq \operatorname{dom}(q)$. Pero q es un isomorfismo, así que $a_0 \leqslant a_1$ si y sólo si $f(a_0) = q(a_0) \preceq q(a_1) = f(a_1)$. Por lo tanto, f es un isomorfismo de orden y, por ende, un isomorfismo booleano. $\square$

El resto de la sección está dedicado a probar que el teorema anterior no es cierto por vacuidad, esto es, nos concentraremos en producir un ejemplo de un álgebra booleana numerable y libre de átomos.

Mucho de lo que se expondrá a continuación se puede hacer en espacios topológicos más generales, sin embargo, para los fines de este trabajo, bastará con particularizar varios conceptos. Éstos que no sean definidos explícitamente aquí, deberán entenderse tal y como aparecen en [2].

Vamos a considerar al espacio topológico ${}^{\omega}2$ obtenido como el producto Tychonoff de ω copias del espacio discreto 2. Si $\mathrm{CA}({}^{\omega}2)$ denota la colección de conjuntos que son abiertos y cerrados en ${}^{\omega}2$, se puede verificar (ver [12, Ejemplo 3.1.6,p. 64]) que $(\mathrm{CA}({}^{\omega}2), \subseteq)$ es un álgebra booleana con $\emptyset$ y ${}^{\omega}2$ como mínimo y máximo, respectivamente. También, dados $A, B \in \mathrm{CA}({}^{\omega}2)$, $A \wedge B = A \cap B$ y $A \vee B = A \cup B$.

Vamos a usar el hecho de que, como cada factor del espacio es finito y, en consecuencia, compacto, por el Teorema de Tychonoff, ${}^{\omega}2$ es compacto también.

Recordemos que la topología producto es la *topología débil inducida* por la familia de proyecciones (para detalles consúltese la sección 4.3 de [2]), o sea, en nuestro caso particular, la topología de ${}^{\omega}2$, denotada por $\tau({}^{\omega}2)$, es la menor topología que hace continua, para cada $n < \omega$, a la función $\pi_n \colon {}^{\omega}2 \longrightarrow 2$ dada por $\pi_n(f) := f(n)$. Como 2 es un espacio discreto, un conjunto $U \subseteq {}^{\omega}2$ es un básico canónico de ${}^{\omega}2$ si y sólo si existen $F \in [\omega]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y $\{A_n \colon n \in F\} \subseteq \mathcal{P}(2)$ de tal forma que

$$U = \bigcap_{n \in F} \pi_n^{-1}[A_n].$$

Vale la pena observar que, por la continuidad de cada proyección, U, además de ser un abierto canónico, es intersección de conjuntos cerrados y, por lo tanto, cerrado.

Supongamos ahora que U es no vacío, es decir, $U \in \mathrm{CA}({}^{\omega}2)^+$. Si tomamos, por ser F finito, $m \in \omega \setminus (\bigcup F + 1)$ y un punto cualquiera $x \in U$, es claro, según la discusión del párrafo anterior, que

$$x \in U' := \bigcap_{n < m} \pi^{-1}\{x(n)\} \in \tau({}^{\omega}2).$$

También, dado cualquier $z \in U'$, la elección de U' nos dice que para todo $n < m$, $z(n) = x(n)$, en particular, para todo $n \in F \subseteq m$, $z(n) \in \{x(n)\}$, o sea, $z \in U$. Hemos demostrado que $x \in U' \subseteq U$.

Definamos ahora, para cada $s \in 2^{<\omega}$, $[s] := \{x \in {}^{\omega}2 \colon s \subseteq x\}$ y notemos que

$$z \in \bigcap_{n < m} \pi_n^{-1}[x(n)]$$

si y sólo si para todo $n < m$, $z(n) = x(n)$ o, equivalentemente, $z \upharpoonright m = x \upharpoonright m$. Más sucintamente,

$$\bigcap_{n<m} \pi_n^{-1}\{x(n)\} = [x \upharpoonright m].$$

De este modo, cada conjunto de la forma $[x \upharpoonright m]$ es un elemento de $\mathrm{CA}({}^{\omega}2)$.

Proposición 2.17. *La colección numerable* $\mathcal{B} := \{[s] \colon s \in {}^{<\omega}2\} \subseteq \mathrm{CA}({}^{\omega}2)$ *es base del espacio* $({}^{\omega}2, \tau({}^{\omega}2))$.

Demostración. Como $|{}^{<\omega}2| = \left|\bigcup_{n<\omega} {}^{n}2\right| \leqslant \omega \cdot \omega = \omega$, $\mathcal{B}$ es numerable. Además, el comentario final del párrafo que precede esta proposición tiene como consecuencia que $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{CA}({}^{\omega}2)$.

Dado un básico canónico U en ${}^{\omega}2$ y $x \in U$, los párrafos previos a la presente proposición justifican la existencia de un natural m tal que

$$x \in [x \upharpoonright m] \subseteq U.$$

Consecuentemente, $\mathcal{B}$ es base del espacio en cuestión. $\square$

Mostremos ahora que el álgebra booleana $\mathrm{CA}({}^{\omega}2)$ es libre de átomos: dado $A \in \mathrm{CA}({}^{\omega}2)^{+}$, podemos escoger $x \in A$ y, por la proposición anterior, algún $m < \omega$ tal que $x \in [x \upharpoonright m] \subseteq A$. Observemos que se da la contención $[x \upharpoonright (m+1)] \subseteq [x \upharpoonright m]$; de hecho, la función $f \in {}^{\omega}2$ dada por

$$f(n) := \begin{cases} x(n), & n \neq m \\ 1 - x(n), & n = m \end{cases},$$

cumple que $f \in [x \upharpoonright m] \setminus [x \upharpoonright (m+1)]$ y así atestigua que la contención es propia. Luego, $x \in [x \upharpoonright (m{+}1)] \subsetneq A$, lo cual prueba que A no es un átomo. Concluimos que $\mathrm{At}(\mathrm{CA}({}^{\omega}2)) = \emptyset$.

Dado cualquier $A \in \mathrm{CA}({}^{\omega}2)$, por ser A un abierto y por la proposición 2.17, existe $B \subseteq \mathcal{B}$ tal que $A = \bigcup B$. Por ser A cerrado en el espacio compacto ${}^{\omega}2$, A es compacto y, siendo B una cubierta abierta de A, tiene alguna subcubierta finita. En resumen, cada elemento de $\mathrm{CA}({}^{\omega}2)$ es la unión finita de elementos de $\mathcal{B}$, la cual es una colección numerable. Por lo tanto, $\mathrm{CA}({}^{\omega}2)$ es numerable.

En resumen, $(\mathrm{CA}({}^{\omega}2), \subseteq)$ es un álgebra booleana numerable y libre de átomos; más aún, según el teorema 2.16, es la única salvo isomorfismo. Con esto completamos la sección.

CAPÍTULO 3: UN PAR DE APLICACIONES A LA TEORÍA DE RAMSEY

La Teoría de Ramsey es una rama de la Combinatoria que estudia las propiedades que se preservan bajo particiones finitas. Para un ejemplo muy sencillo, considere la propiedad de infinitud de un conjunto, si éste es partido en una cantidad finita de pedazos, entonces algún pedazo debe preservar la propiedad de ser infinito; este hecho se formaliza en la proposición 3.3.

Para un ejemplo más sofisticado, considere la siguiente propiedad del conjunto ω: siempre podemos encontrar tres números distintos x, y, z tales que $x + y = z$. ¿Será que esta propiedad se preserva si partimos finitamente a ω? Dicho de otro modo, si particionamos finitamente a ω, ¿habrá una terna x, y, z de números distintos, todos ellos pertenicientes al mismo elemento de la partición, tales que $x + y = z$? La respuesta afirmativa a esta pregunta se demuestra en el corolario 3.16.

Los dos resultados mencionados hasta ahora son consecuencia del Teorema de Ramsey. En el contexto de esta breve introducción a la Teoría de Ramsey, podemos describir a dicho teorema como sigue. Dado un número natural positivo fijo n, el Teorema de Ramsey afirma que si partimos finitamente a $[\omega]^n$, entonces algún pedazo debe contener, para algún $H \subseteq \omega$ infinito, al conjunto $[H]^n$. El objetivo de la siguiente sección es demostrar este teorema usando el Lema de Rasiowa-Sikorski.

3.1 El Teorema de Ramsey

Iniciemos esta sección con una definición que será la noción central a estudiar.

Definición 3.1. Sean X un conjunto no vacío, λ un cardinal y $r < \lambda$. Cualquier función $c\colon X \longrightarrow \lambda$ es llamada una *coloración de X en $\leqslant \lambda$ colores*. Además exhibimos las siguientes definiciones.

1. Si $x \in X$, llamaremos a $c(x)$ el *color de x*. Si para $A \subseteq X$ no vacío, resulta que $c \restriction A$ es constante, diremos que A es *monocromático*; y si además dicha constante es r, se

dirá que A es *monocromático de color* r.

2. Además, en el caso en que $X = [E]^\theta$, para algún conjunto E y un cardinal θ, se tendrá que $H \subseteq E$ será llamado *c-homogéneo* (o simplemente *homogéneo* cuando la coloración sea clara por el contexto) si la colección $[E]^\theta$ es monocromática. En el caso en que $[H]^\theta$ sea monocromático de color r, se dirá que H es *c-homogéneo de color* r.

Lo que sigue es la noción central de esta sección.

Definición 3.2. Sean κ, λ, μ cardinales y $n \in \mathbb{N}$. Usaremos la notación

$$\kappa \to (\mu)^n_\lambda$$

como abreviatura de la frase: para toda coloración de $[\kappa]^n$ en $\leqslant \lambda$ colores existe un conjunto homogéneo de cardinalidad μ.

Como ejemplo, el Principio del Palomar se puede escribir de la siguiente manera:

Proposición 3.3 (Principio del Palomar)**.** *Para cualquier* $m \in \mathbb{N}$*,* $\omega \to (\omega)^1_m$*.*

Demostración. Sean $m \in \mathbb{N}$ y c una coloración de $[\omega]^1$ en $\leqslant m$ colores. Consideramos para cada $k \leqslant m$, $A_k := \{n < \omega \colon c(\{n\}) = k\}$ y observamos que $\bigcup_{k \leqslant m} A_k = \omega$. Necesariamente existe $k_0 \leqslant m$ tal que A_{k_0} es infinito y luego, trivialmente, A_{k_0} es un conjunto c-homogéneo. $\square$

La demostración es muy sencilla porque ω es, esencialmente, lo mismo que $[\omega]^1$. Esta idea motiva la siguiente útil generalización de la definición 3.2.

Lema 3.4. *Para cualesquiera cardinales* κ*,* λ*,* μ *y* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene que el enunciado* $\kappa \to (\mu)^n_\lambda$ *es equivalente a que para todo conjunto* X *de cardinalidad* κ *y para toda coloración de* $[X]^n$ *en* $\leqslant \lambda$ *colores, existe un conjunto homogéneo de cardinalidad* μ*.*

Demostración. Supongamos que se cumple $\kappa \to (\mu)^n_\lambda$. Sea X un conjunto, $\phi \colon \kappa \longrightarrow X$ una biyección y $c \colon [X]^n \longrightarrow \lambda$. Entonces, consideramos $\bar{\phi} \colon [\kappa]^n \longrightarrow [X]^n$ dada por $\bar{\phi}(a) := \phi[a]$. Notemos que está bien definida por ser ϕ biyectiva, y de hecho $\bar{\phi}$ vuelve a ser una biyección.

Resulta que $c \circ \bar{\phi}$ es una coloración de $[\kappa]^n$ en $\leqslant \lambda$ colores, y así, por hipótesis, existe $H \in [\kappa]^\mu$ tal que H es $(c \circ \bar{\phi})$-homogéneo, digamos, de color $r < \lambda$.

Finalmente, dado cualquier $b \in [\phi[H]]^n$, resulta que $(c \circ \bar{\phi})(\phi^{-1}[b]) = r$, ya que $\phi^{-1}[b] \in [H]^n$. Pero $(c \circ \bar{\phi})(\phi^{-1}[b]) = c(b)$. Por lo tanto, el conjunto $\phi[H]$ es c-homogéneo de cardinalidad μ.

El enunciado recíproco es trivial en vista de que κ es un conjunto de cardinalidad κ.

$\square$

Vale la pena mencionar que, a pesar de que la proposición 3.3 es bastante simple, no es nada trivial, en general, determinar **cuál** es el conjunto homogéneo infinito. Un ejemplo que se presenta en [7, p. 88] es el siguiente.

Un número primo $p \in \omega$ es llamado un *primo de Wieferich* si se cumple que p^2 divide a $2^{p-1} - 1$. Por ejemplo, se puede verificar que 1093 y 3511 son primos de Wieferich. Con esta definición podemos colorear a $\mathcal{P}$, el conjunto de números primos, como sigue: $c \colon \mathcal{P} \longrightarrow 2$ está dada por $c(p) = 0$ si y sólo si p es un primo de Wieferich. En este caso, ¿cuál es el conjunto homogéneo infinito? Resulta que los dos ejemplos de primos de Wieferich presentados anteriormente son los únicos que se conocen. Luego, es un problema abierto determinar cuál de los dos conjuntos (si los primos de Wieferich o su complemento en $\mathcal{P}$) es infinito.

Lema 3.5. *Si para números cardinales κ, κ', λ y μ y un número natural n se tiene que $\kappa \to (\mu)^n_\lambda$, entonces la condición $\kappa \leqslant \kappa'$ implica que $\kappa' \to (\mu)^n_\lambda$.*

Demostración. Sea c una coloración de $[\kappa']^n$ en $\leqslant \lambda$ colores. Por hipótesis, para la restricción $c^* := c \restriction [\kappa]^n$ existe un conjunto c^*-homogéneo $H \in [\kappa]^\mu$. Como $\kappa \leqslant \kappa'$, $H \in [\kappa']^\mu$, y claramente H es c-homogéneo, en virtud de que $c^* \subseteq c$. Concluimos que $\kappa' \to (\mu)^n_\lambda$. $\square$

El primer resultado importante de lo que hoy en día se conoce como Teoría de Ramsey es justamente una generalización del Principio del Palomar, conocido como el Teorema de Ramsey. Nos concentraremos ahora en la demostración de éste. Para ello, usaremos las herramientas que hemos desarrollado.

Ilustrativamente, el Teorema de Ramsey afirma que para $n, m \in \mathbb{N}$, si pintamos los elementos de $[\omega]^n$ con m (o menos) colores, debe haber un conjunto infinito $H \subseteq \omega$, tal que todos los elementos de $[H]^n$ fueron pintados del mismo color. Con la notación que hemos introducido, esto se puede escribir como sigue.

Teorema 3.6 (Ramsey)**.** *Para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, $\omega \to (\omega)^n_m$.*

Para mostrar el hecho de que el resultado no es trivial, mostraremos que el teorema anterior es falso si intercambiamos ω por ω_1. La idea de la demostración que se incluye a continuación se encuentra en [6, Theorem 6.4.1, p. 180].

Proposición 3.7 (Sierpiński, 1933)**.** *Es falso que $\omega_1 \to (\omega_1)^2_2$.*

Demostración. Demostraremos la falsedad de $\mathfrak{c} \to (\omega_1)^2_2$. Luego, usando la contrapuesta del lema 3.5 y que $\omega_1 \leqslant \mathfrak{c}$, obtendremos el resultado.

De acuerdo al lema 3.4, basta con ver que hay una coloración c de $[\mathbb{R}]^2$ en dos colores que carece de conjuntos c-homogéneos no numerables.

Sean $<$ el orden usual en $\mathbb{R}$ y $\prec$ un buen orden en $\mathbb{R}$ (dicho orden existe como consecuencia del Principio del Buen Orden, equivalente al Axioma de Elección). Definimos una coloración $c\colon [\mathbb{R}]^2 \longrightarrow 2$ por medio de la fórmula, para dos reales $x < y$, $c(\{x, y\}) = 0$ si y sólo si $x \prec y$; es decir, la pareja $\{x, y\}$ tiene color 0 si y sólo si los órdenes $<$ y $\prec$ coinciden en ella.

Sea H un subconjunto c-homogéneo de $\mathbb{R}$. Entonces, para algún $i < 2$, $c\left[[H]^2\right] \subseteq \{i\}$. Por la definición de c, esto quiere decir que para todos los elementos de H, o bien los órdenes $<$ y $\prec$ coinciden (en el caso en que $i = 0$), o los órdenes $>$ y $\prec$ coinciden (cuando $i = 1$). Analicemos, primeramente, el caso $i = 0$, es decir, supongamos que $<$ bien ordena a H.

Para cada $x \in H$, tiene sentido hablar de su *elemento sucesor* en H, o sea $x^+ := \min_<\{y \in H\colon x < y\}$. Así, el intervalo $I_x := \{y \in \mathbb{R}\colon x < y < x^+\}$ está bien definido y es no vacío.

Mostremos que si $x, y \in H$ satisfacen $x < y$, entonces los intervalos I_x e I_y son ajenos para concluir que $\{I_t\colon t \in H\}$ es una familia celular en $\mathbb{R}$ y, por ende, $|H| \leqslant \omega$. Con ello en mente, tomemos $x, y \in H$ de forma que $x < y$ y supongamos que existe un elemento $z \in I_x \cap I_y$. Según nuestra definición de los intervalos, esto quiere decir que $x < z < x^+$ y

$y < z < y^+$; como $x < y$ y por la definición de x^+, esto implica que $z < x^+ \leqslant y < z$, lo cual no puede pasar.

De manera similar al argumento anterior, en el caso en que $i = 1$, consideramos, para cada $x \in H$, $x^* := \text{mín}_>\{y \in H \colon x > y\}$ y al intervalo $I_x := \{y \in \mathbb{R} \colon x^* < y < x\}$. Como $x > x^*$, cada intervalo I_x es no vacío. La prueba de que son ajenos por pares es análoga.

En cualquier caso, concluimos que como $\{I_t \colon t \in H\}$ es una familia celular en $\mathbb{R}$ (un espacio separable y por lo tanto sujeto al lema 2.5), H debe ser numerable. $\square$

Volvamos ahora al Teorema de Ramsey. La demostración se hará por doble inducción: una sobre m y una para n. De hecho (lema 3.8), verificaremos que si $n \in \mathbb{N}$ satisface $\omega \to (\omega)^n_2$, entonces $\omega \to (\omega)^n_m$, para cualquier $m \in \mathbb{N}$. Con respecto a la inducción sobre n, se empleará el Lema de Rasiowa-Sikorski.

Nuestra primera observación es que bastará probar el caso $m = 2$ y luego hacer inducción sobre m para el caso general. Más aún, tenemos lo siguiente:

Lema 3.8. *Para cualquier cardinal κ, la condición $\kappa \to (\kappa)^n_2$ implica $\kappa \to (\kappa)^n_m$ para todo $m \in \mathbb{N} \setminus 2$.*

Demostración. Demos por hecho que $\kappa \to (\kappa)^n_2$. Procederemos por inducción sobre m. El caso base es justamente la hipótesis.

Supongamos que tenemos $\kappa \to (\kappa)^n_m$ para algún $m \geqslant 2$ y veamos que $\kappa \to (\kappa)^n_{m+1}$. Sea $c \colon [\kappa]^n \longrightarrow m + 1$. Consideremos la función $\phi \colon m + 1 \longrightarrow 2$ dada por $\phi(k) = 1$ si y sólo si $k = m$. De inmediato $\phi \circ c$ es una coloración de $[\kappa]^n$ en $\leqslant 2$ colores. Entonces, por hipótesis, existe $H_0 \in [\kappa]^\kappa$ tal que H_0 es $(\phi \circ c)$-homogéneo, digamos, de color $r \in 2$. Por lo tanto, hay exactamente dos casos:

1. $r = 0$. Entonces, $c \restriction [H_0]^n$ es una coloración de $[H_0]^n$ en $\leqslant m$ colores. Por hipótesis inductiva y el lema 3.4, existe un conjunto $H_1 \in [H_0]^\kappa$ que es $(c \restriction [H_0]^\kappa)$-homogéneo, digamos, de color $r' \in m$. Luego, dado $a \in [H_1]^n \subseteq [H_0]^n$, $c(a) = r'$. Concluimos que H_1 es el conjunto c-homogéneo buscado.

2. $r = 1$. Entonces, $c \restriction [H_0]^n$ es la función constante m, en particular, H_0 es c-homogéneo. $\square$

Para probar que $\omega \to (\omega)^n_2$, procederemos por inducción sobre n. El caso $n = 1$ es la proposición 3.3 con $m = 2$. Ahora, con la intención de dilucidar el argumento, enlistemos nuestras hipótesis α y β para fácil referencia. Éstas se usarán por el resto de la sección.

(α) Para alguna $n \geqslant 1$, $\omega \to (\omega)^n_2$.

Veamos que $\omega \to (\omega)^{n+1}_2$. Sea $c\colon [\omega]^{n+1} \to 2$ una coloración y fijemos un color $r \in 2$. Supondremos lo siguiente.

(β) No existe un conjunto infinito $S \subseteq \omega$ que sea c-homogéneo de color $1 - r$.

A continuación definiremos un preorden que nos producirá un subconjunto infinito de ω que será c-homogéneo de color r.

Definición 3.9. Primero, consideramos a $\mathbb{P}$ como el conjunto de todas las parejas $(a, A) \in [\omega]^{<\omega} \times [\omega]^\omega$ tales que:

1. para todo $k \in a$ y todo $l \in A$, $k < l$;
2. $c \restriction [a]^{n+1}$ es la función constante r y
3. para todo $j \in (n + 1) \setminus 1$ y para todo $y \in [a]^j$ y todo $x \in [A]^{n+1-j}$ se cumple que $c(y \cup x) = r$.

Luego, dadas dos parejas $(a, A), (b, B) \in \mathbb{P}$, definimos la relación binaria $\preceq$ mediante la fórmula $(b, B) \preceq (a, A)$ si y sólo si a es segmento inicial de b (esto es, hay un número natural m con $a = b \cap m$), $B \subseteq A$ y $b \setminus a \subseteq A$.

Argumentos rutinarios muestran que $\preceq$ es un preorden. Además, se observa que $(\emptyset, \omega) \in \mathbb{P}$. Es usual, y en nuestro caso práctico, emplear las variables p, q, etcétera para los elementos de un preorden. Por ello, vamos a simplificar nuestra notación conviniendo que cualquier pareja $p \in \mathbb{P}$ se escribe de la forma $p = (a_p, A_p)$.

Lema 3.10. *Para toda $p \in \mathbb{P}$ existen $m \in A_p$ y $B \in [A_p \setminus (m + 1)]^\omega$ de tal modo que para cualquier $y \in [B]^n$, $c(\{m\} \cup y) = r$.*

Demostración. Sea $p \in \mathbb{P}$. Con la intención de obtener una contradicción, supongamos que el lema es falso, es decir, demos por hecho que para todo $m \in A_p$ y para todo $B \in [A_p \setminus (m+1)]^\omega$, existe $y \in [B]^n$ tal que $c(\{m\} \cup y) = 1 - r$.

Sea m_0 el elemento mínimo de A_p. Vamos a construir por recursión dos sucesiones, $\{m_k \colon k < \omega\} \subseteq A_p$ y $\{B_k \colon k < \omega\}$, tales que para todo $k < \omega$:

(1_k) $B_k \subseteq A_p \setminus \{m_k\}$,

(2_k) $B_{k+1} \subsetneq B_k$,

(3_k) $m_{k+1} = \text{mín}\, B_k$ y

(4_k) para todo $y \in [B_k]^n$, se tiene $c(\{m_k\} \cup y) = 1 - r$.

Primero, definamos $c_0 \colon [A_p \setminus \{m_0\}]^n \longrightarrow 2$ como $c_0(y) = c(y \cup \{m_0\})$. Dado que $|A_p \setminus \{m_0\}| = \omega$, por la hipótesis inductiva (α) y el lema 3.4, existe un conjunto $B_0 \in [A_p \setminus \{m_0\}]^\omega$ que es c_0-homogéneo. De esta forma, $m_0 \in A_p$ y $B_0 \in [A_p \setminus (m_0+1)]^\omega$; en consecuencia, hay $y \in [B_0]^n$ con $c(\{m_0\} \cup y) = 1 - r$. En especial, $c_0 \restriction [B_0]^n$ es la función constante $1 - r$. Así concluimos que m_0 y B_0 satisfacen (1_0) y (4_0) ((2_0) y (3_0) no aplican pues no hemos obtenido m_1 y B_1).

Supongamos entonces que ya tenemos construidos, para alguna $l < \omega$, $\{m_k \colon k < l\} \subseteq A$ y $\{B_k \colon k < l\}$ tales que para toda $k \leqslant l$ se cumplen (1_k) y (4_k), y las condiciones (2_k) y (3_k) son satisfechas siempre que $k < l$. Vamos a construir los términos $l + 1$.

Pensando en (3_l), denotemos por m_{l+1} al mínimo elemento de B_l. Ahora, definimos una coloración $d \colon [B_l \setminus \{m_{l+1}\}]^n \longrightarrow 2$ mediante $d(y) = c(\{m_{l+1}\} \cup y)$. Aplicamos la hipótesis inductiva (α) y el lema 3.4 para hallar $B_{l+1} \in [B_l \setminus \{m_{l+1}\}]^\omega$, un conjunto d-homogéneo de color $1 - r$ (ver el argumento usado para B_0). Las condiciones (1_{l+1}), (2_l), (3_l) y (4_{l+1}) se verifican inmediatamente, con lo que se concluye la recursión.

Observemos que las condiciones (1_k) y (3_k) implican que la sucesión $\{m_k \colon k < \omega\}$ es estrictamente creciente. Con el fin de concluir la prueba del lema, deduciremos una contradicción a nuestra hipótesis (β); específicamente, mostraremos que el conjunto infinito $S := \{m_i \colon i < \omega\}$ es c-homogéneo de color $1 - r$.

Si tomamos $y \in [S]^{n+1}$, el mínimo elemento de y es algún m_k, de modo que (ver (2_k) y (3_k)) $y \setminus \{m_k\} \in [B_k]^n$, y por lo tanto, por la condición (4_k), $c(y) = c(\{m_k\} \cup (y \setminus \{m_k\})) = 1 - r$. □

Podemos aplicar el lema "l veces" para obtener el siguiente resultado.

Corolario 3.11. *Para cualesquiera $p \in \mathbb{P}$ y $l < \omega$, existe $q \in \mathbb{P}$ tal que $q \preceq p$ y $|a_q| = |a_p| + l$.*

Demostración. Sean $p \in \mathbb{P}$ y $l < \omega$. Procederemos por inducción sobre l. Si $l = 0$, basta con tomar $q := p$.

Supongamos entonces que para alguna $l < \omega$ hay $t \in \mathbb{P}$ tal que $t \preceq p$ y $|a_t| = |a_p| + l$. Aplicando el lema anterior a t, obtenemos que existen $m \in A_t$ y $B \in [A_t]^\omega$ tales que:

a) para todo $k \in B$, $m < k$ y

b) para todo $y \in [B]^n$, $c(\{m\} \cup y) = r$.

Ahora tomemos $q := (a_t \cup \{m\}, B) \in [\omega]^{<\omega} \times [\omega]^\omega$. Verifiquemos el resto de los incisos de la definición 3.9 para confirmar que $q \in \mathbb{P}$:

1. Las hipótesis $t \in \mathbb{P}$ y $m \in A_t$ implican (ver definición 3.9(1)) la contención $a_t \subseteq m$, y como $B \subseteq A_t \setminus (m+1)$, concluimos que $k < l$ para cualesquiera $k \in a_t \cup \{m\}$ y $l \in B$.

2. Tomemos $x \in [a_t \cup \{m\}]^{n+1}$. En el caso en que $m \notin x$, se tiene que $x \in [a_t]^{n+1}$; así, podemos aplicar el inciso 2 de la definición 3.9 a t para obtener $c(x) = r$. Ahora, cuando $m \in x$, deducimos que $x \setminus \{m\} \in [a_t]^n$ y $\{m\} \in [A_t]^1$; luego, la definición 3.9(3) para t nos da $c(x) = c((x \setminus \{m\}) \cup \{m\}) = r$.

3. Sean $j \in (n+1) \setminus 1$, $y \in [a_t \cup \{m\}]^j$ y $z \in [B]^{n+1-j}$. Nuevamente, hay dos posibilidades. Si $y = \{m\}$, entonces $j = 1$, y por (b), $c(y \cup z) = c(\{m\} \cup z) = r$. En el caso en que $y \neq \{m\}$, definimos $y' := y \setminus \{m\}$, $z' := z \cup (y \cap \{m\})$ e $i := |y'|$. Notemos que, en estas circunstancias, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, y en especial, $i \in (n+1) \setminus 1$. Además, $|z'| = n + 1 - i$; luego, como t satisface el inciso 3 de la definición 3.9, $c(y \cup z) = c(y' \cup z') = r$.

En vista de la transitividad de $\preceq$ y las igualdades $|a_t \cup \{m\}| = |a_t| + 1 = |a_p| + l + 1$, únicamente debemos cerciorarnos de que $q \preceq t$. Primeramente, $(a_t \cup \{m\}) \cap m = a_t$ y así, a_t

es un segmento inicial de $a_t \cup \{m\}$. Por otro lado, es claro que $B \subseteq A_t$ y $(a_t \cup \{m\}) \setminus a_t = \{m\} \subseteq B$. $\square$

Una consecuencia inmediata del resultado anterior es que para cada $m < \omega$, el conjunto $D_m := \{q \in \mathbb{P} \colon m \leqslant |a_q|\}$ es denso en $\mathbb{P}$. Hagamos $\mathcal{D} := \{D_m \colon m < \omega\}$ y empleemos el teorema 1.5 para obtener F, un filtro $\mathcal{D}$-genérico que contiene a $(\emptyset, \omega)$. Afirmamos que

$$H := \bigcup_{p \in F} a_p$$

es el conjunto homogéneo buscado.

Primero, veamos que H es infinito. Sea $m < \omega$. Luego, elegimos $q \in F \cap D_m$. Es claro que $a_q \subseteq H$, y entonces, $m \leqslant |a_q| \leqslant |H|$. Como m fue arbitrario, necesariamente H es infinito.

Segundo, dado cualquier $y \in [H]^{n+1}$, sabemos que es de la forma $y = \{y_i \colon i \leqslant n\}$. Entonces, por definición de H, existe $\{p_i \colon i \leqslant n\} \subseteq F$ tal que para todo $i \leqslant n$, $y_i \in a_{p_i}$. De este modo, por ser F un filtro, existe $q \in F$ tal que para todo $i \leqslant n$, $q \preceq p_i$. Pero en especial, esto implica que para cada $i \leqslant n$, $y_i \in a_{p_i} \subseteq a_q$, es decir, $y \in [a_q]^{n+1}$. Luego, por como está definido nuestro preorden, $c(y) = r$. En conclusión, $c \restriction [H]^{n+1}$ es la constante r, o sea, H es c-homogéneo.

Por lo tanto, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $\omega \to (\omega)^n_2$, y luego, en virtud del lema 3.8, se tiene el Teorema de Ramsey. $\square$

En lo que resta de la sección discutiremos algunos resultados que se pueden probar usando el Teorema de Ramsey. Las versiones originales y completas de éstos se pueden consultar en [7, pp. 90-91] y [6, pp. 17-18].

Uno de los corolarios más usados del Teorema de Ramsey es una versión finita del mismo, de la cual se pueden deducir, respectivamente, versiones finitas de los demás corolarios que se mencionarán en lo que resta de la sección.

Teorema 3.12 (Versión finita del Teorema de Ramsey)**.** *Para todo $m, n, r \in \omega$ con $1 \leqslant r$ y $n \leqslant m$, existe un natural $N \geqslant m$ que satisface que dada cualquier coloración de $[N]^n$ en $\leqslant r$ colores, se puede encontrar $H \in [N]^m$, de manera que el conjunto $[H]^n$ es monocromático.*

Demostración. La prueba será por contrapuesta, es decir, vamos a suponer la negación del resultado a demostrar y contradecir el teorema 3.6. Con ello en mente, fijemos $n < \omega$, $m \in \omega \setminus n$ y $r \in \mathbb{N}$ de tal modo que para cualquier $N \in \omega \setminus m$ exista c de tal modo que

$$c\colon [N]^n \longrightarrow r \;\wedge\; \forall\, H \in [N]^m \; (c \restriction [H]^n \text{ no es constante}). \tag{3.1}$$

Más aún, convengamos en denotar por $\varphi(N, c)$ al enunciado (3.1).

Ahora definamos al conjunto T mediante la fórmula: $c \in T$ si y sólo si, una de dos, ó $c = \emptyset$ ó existe $N \in \omega \setminus m$ de tal modo que $\varphi(N, c)$ es cierta. Claramente, $(T, \subseteq)$ es un orden parcial.

Antes de continuar observemos que si $c, d \in T$, entonces existen $N, \widetilde{N} \in \omega \setminus m$ de tal suerte que $\varphi(N, c)$ y $\varphi(\widetilde{N}, d)$ son ciertas. En especial, $c\colon [N]^n \longrightarrow r$ y $d\colon [\widetilde{N}]^n \longrightarrow r$. De este modo, la condición $c \subseteq d$ (repectivamente, $c \subset d$) equivale a que $N \leqslant \widetilde{N}$ (respectivamente, $N < \widetilde{N}$) y $d \restriction [N]^n = c$.

Para simplificar la notación, dado $c \in T$, denotemos por $c\!\uparrow$ a la colección $\{d \in T\colon c \subset d\}$. Vamos a construir una sucesión $\{c_k\colon k \in \omega \setminus m\}$ de manera que cada $c_k\!\uparrow$ sea infinito y $\operatorname{dom}(c_k) = [k]^n$.

Nuestra elección de m, n y r nos garantiza que $\emptyset\!\uparrow = T \setminus \{\emptyset\}$ es infinito. Por otro lado, nuestra definición de T nos da

$$\emptyset\!\uparrow = \{c \in T\colon\, \operatorname{dom}(c) = [m]^n\} \cup \bigcup \{c\!\uparrow\colon c \in T \wedge \operatorname{dom}(c) = [m]^n\}.$$

Como r es finito, debe haber una cantidad finita de posibles coloraciones de $[m]^n$, es decir, $\emptyset\!\uparrow$ es una unión finita. Por el Principio del Palomar (véase 3.3 y aplíquese el lema 3.4 con $\kappa = \mu = \omega$, $\lambda = m$ y $n = 1$), existe $c_m \in T$ con $\operatorname{dom}(c_m) = [m]^n$ y de tal modo que $c_m\!\uparrow$ es infinito. Esto completa el caso base.

Si ya tenemos construido hasta el término $k \in \omega \setminus m$ de la sucesión, podemos escribir

$$c_k\!\uparrow = \{d \in c_k\!\uparrow\colon\, \operatorname{dom}(d) = [k+1]^n\} \cup \bigcup \{d\!\uparrow\colon d \in T c_k\!\uparrow \wedge \operatorname{dom}(d) = [k+1]^n\},$$

que es un conjunto infinito por hipótesis. Análogamente al caso base, por el Principio del

Palomar, existe $c_{k+1} \in c_k\!\uparrow$ de tal suerte que $\mathrm{dom}(c_{k+1}) = [k+1]^n$ y $c_{k+1}\!\uparrow$ es infinito. Esto completa la recursión.

Hagamos $C := \{c_k \colon k \in \omega \setminus m\}$ para obtener una cadena infinita en T. Es claro que C, por ser una cadena, es un *sistema compatible de funciones*, o sea $d := \bigcup C$ es una función de $\bigcup\{[k]^n \colon k \in \omega \setminus m\} = [\omega]^n$ en r. Afirmamos que d es una coloración sin conjuntos homogéneos infinitos.

Sea $K \in [\omega]^\omega$ arbitrario y fijemos $\ell \in \omega$ de tal modo que el conjunto $H := K \cap \ell$ tenga precisamente m elementos. De nuestra recursión se deduce que el enunciado $\varphi(\ell, c_\ell)$ es cierto y como $H \in [\ell]^m$, obtenemos que $c_\ell \restriction [H]^n$ no es constante. Por otro lado, las contenciones $c_\ell \subseteq d$ y $H \subseteq K$ nos dan

$$c_\ell \restriction [H]^n \subseteq d \restriction [H]^n \subseteq d \restriction [K]^n;$$

luego, $d \restriction [K]^n$ no es constante, esto es, K no es d-homogéneo.

En consecuencia, obtenemos que d no satisface el teorema 3.6, como se quería probar.

□

Vale la pena mencionar, para aquellos lectores familiarizados con el concepto conjuntista de *árboles* (ver [11, III.5, p. 201]) y el Lema de König (ver [11, Lemma III.5.6, p. 203]), que la pareja $(T, \subseteq)$, como se definió en la prueba de arriba, es un árbol de altura ω con todos los niveles finitos; así que de hecho, usando el Lema de König, se pueden omitir los párrafos intermedios de la prueba anterior y obtener directamente la cadena infinita C.

A continuación presentaremos algunos corolarios del Teorema de Ramsey que consideramos interesantes.

En un orden parcial $(\mathbb{P}, \leqslant)$, un conjunto $C \subseteq \mathbb{P}$ es llamado una *cadena* si cualquier par de elementos en C son $\leqslant$-comparables (es decir, están relacionados bajo $\leqslant$); por otro lado, un conjunto $A \subseteq \mathbb{P}$ es una *familia de incomparables* si ningún par de elementos en A es $\leqslant$-comparable. Es pertinente el comentario que en la literatura sobre Combinatoria y temas afines el concepto de *familia de incomparables* es llamado simplemente *anticadena*; sin embargo, para nuestros fines, dicha palabra se puede confundir con la definición que se emplea en nociones de Forcing (ver, por ejemplo, el teorema 4.2).

Corolario 3.13 (Dilworth). *Para todo orden parcial* $(\mathbb{P}, \leqslant)$*, con* $\mathbb{P}$ *infinito numerable,* $\mathbb{P}$

contiene una cadena infinita o una familia de incomparables infinita.

Demostración. Definamos $c\colon [\mathbb{P}]^2 \longrightarrow 2$ mediante $c(\{x,y\}) = 0$ si y sólo si $\{x,y\}$ es una cadena. Por el Teorema de Ramsey (aplíquese el lema 3.4 con $\mu = \kappa = \omega$, $\lambda = 2$ y $X = \mathbb{P}$), existe un conjunto homogéneo infinito de color 0 o de color 1. Respectivamente, esto nos da una cadena o una familia de incomparables del tamaño deseado. □

La versión original del resultado de Dilworth (ver [6, p. 17]) afirma que si dos números naturales n y m satisfacen la desigualdad $(n-1)(m-1)+1 \leqslant |\mathbb{P}|$, podemos encontrar una cadena de tamaño n o una familia de incomparables de tamaño m en $\mathbb{P}$.

Veamos una aplicación del teorema 3.6 al Análisis. Diremos que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es *secuencialmente compacto* si toda sucesión de puntos en A tiene una subsucesión que converge en A.

Corolario 3.14 (Teorema de Bolzano-Weierstraß)**.** *Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es secuencialmente compacto si y sólo si A es cerrado y acotado.*

Demostraremos sólo el regreso de la equivalencia del teorema, ya que éste es el que usa nuestra herramienta combinatoria.

Demostración. Supongamos que $A \subseteq \mathbb{R}$ es cerrado y acotado y que $\{x_n\colon n < \omega\} \subseteq A$ es una sucesión de puntos. Por el Teorema de Ramsey, la coloración $c\colon [\omega]^2 \longrightarrow 2$, dada por $c(\{i,j\}) = 0$ si y sólo si $x_i < x_j$, nos da una subsucesión monótona (estrictamente creciente o decreciente) de $\{x_n\colon n < \omega\}$ en A. Esta subsucesión es acotada en virtud de que A lo es. Por el Teorema de Convergencia Monótona (ver [13, Teorema 2, p. 621]), la subsucesión converge y, como A es cerrado, el límite debe ser algún punto de A. En conclusión, A es secuencialmente compacto. □

De hecho, la técnica que usamos para extraer una subsucesión monótona se puede aplicar de manera particular para obtener un teorema por sí mismo.

Corolario 3.15 (Erdős-Szekeres)**.** *Cualquier sucesión de elementos distintos de números reales contiene una subsucesión monótona infinita.*

Nuevamente, el Teorema de Ramsey brinda una manera rápida de demostrar el resultado. Vale la pena mencionar que el enunciado original postula que si la sucesión tiene tamaño n^2+1, con n un número natural, podemos encontrar una subsucesión monótona de longitud $n+1$ (ver [6, pp. 17-18]).

Demostración. Sea $s\colon \omega \longrightarrow \mathbb{R}$ inyectiva. Ahora coloreamos cada pareja de índices distintos $\{i,j\} \subseteq \omega$ del color 0 si $s(i) < s(j)$ y del color 1 si $s(j) < s(i)$. Por un argumento similar al corolario anterior, se termina la demostración. $\square$

Un resultado muy interesante es de las primeras proposiciones históricas en Teoría de Ramsey.

Corolario 3.16 (Teorema de Schur)**.** *Dada una coloración finita de ω, siempre existen x, y, z distintos y del mismo color, tales que $x+y=z$, o sea una solución monocromática de la ecuación $x+y=z$.*

Demostración. Para $n \in \mathbb{N}$, empezamos por tomar una coloración $k\colon \omega \longrightarrow n$. Necesitamos extender dicha coloración para poder aplicar el Teorema de Ramsey. Definimos $k^*\colon [\omega]^2 \longrightarrow n$ por medio de la fórmula $k^*(\{i,j\}) = k(|i-j|)$. Por el Teorema de Ramsey, existe un conjunto $H \in [\omega]^\omega$ que es k^*-homogéneo. Fijemos, usando que H es infinito, cuatro elementos $a > b > c > d$ en H.

Si resulta que $a-b \neq b-c$, obtenemos que $a-b+b-c = a-c$ y además, por la definición de k^* y nuestra elección de los números a, b, c y d, $k(a-b) = k(b-c) = k(a-c)$. De este modo, $x := a-b$, $y := b-c$ y $z := a-c$ son los tres elementos distintos del mismo color buscados.

En el caso en que $a-b = b-c$, se tiene $a-b < b-d$ y, en consecuencia, $x := a-b$, $y := b-d$ y $z := a-d$ son tres soluciones distintas del mismo color. $\square$

El Teorema de Schur afirma que, dada una coloración finita, siempre podemos encontrar un conjunto de tamaño 2 ($\{x,y\}$) tal que cualquier suma finita de sus elementos resulta ser del mismo color (pues según el teorema, x, y y $x+y$ son del mismo color). ¿Podremos encontrar un conjunto más grande? Es decir, ¿podemos sustituir el número 2 por algún ordinal mayor? Una posible manera de responder afirmativamente la pregunta se presenta en la siguiente sección, en donde veremos que de hecho podemos encontrar una infinidad de números naturales que cumplen con lo que se acaba de mencionar.

3.2 El Teorema de Hindman

Otro resultado que se puede probar usando el Lema de Rasiowa-Sikorski es el Teorema de Hindman. Ilustrativamente, éste afirma que si pintamos a los números naturales de una cantidad finita de colores, debe haber un conjunto infinito de números naturales, tal que todas las posibles sumas finitas de elementos del conjunto son del mismo color. Esta sección está dedicada a la demostración de dicho teorema.

Para tener una notación más apropiada, vamos a definir los siguientes símbolos. Escribiremos, para un conjunto $H \subseteq \omega$, $[H]^{<\omega}_{+}$ para denotar a la colección $[H]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$, o sea, los subconjuntos finitos no vacíos de H.

Definición 3.17. Suponga que H es un subconjunto de ω.

- Cuando $H \neq \emptyset$, $\sum H := \sum_{n \in H} n$; mientras que $\sum \emptyset = 0$.
- Además, $\mathrm{FS}(H) := \left\{\sum E \colon E \in [H]^{<\omega}_{+}\right\}$.
- Para $X \subseteq [\omega]^{<\omega}_{+}$, $\mathrm{FU}(X) := \{\bigcup A \colon A \in [X]^{<\omega}_{+}\}$.
- Si $\mathcal{D} \subseteq [\omega]^{<\omega}$ es una colección disjunta (o sea ajena por pares) infinita, abreviaremos este hecho escribiendo que $\mathcal{D}$ *es una C.D.I. (plural: C.D.I.s)*.

El resultado de abajo será empleado varias veces en lo que resta de la sección.

Lema 3.18. *Para cualesquiera $\mathcal{D}, \mathcal{E} \subseteq [\omega]^{<\omega}_{+}$, los enunciados siguientes son ciertos.*

1. *Si $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$, entonces $\mathrm{FU}(\mathcal{D}) \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{E})$.*
2. *$\mathcal{D} \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D})$.*
3. *$\mathrm{FU}(\mathrm{FU}(\mathcal{D})) = \mathrm{FU}(\mathcal{D})$.*

Demostración. La prueba de (1) es rutinaria y por eso la omitimos. Ahora, con respecto a (2), basta con notar que para cualquier $D \in \mathcal{D}$, $\{D\} \in [\mathcal{D}]^{<\omega}_{+}$ y $D = \bigcup\{D\}$.

Finalmente, de (2) y (1) deducimos que $\mathrm{FU}(\mathcal{D}) \subseteq \mathrm{FU}(\mathrm{FU}(\mathcal{D}))$. Para la contención contraria, sea $a \in \mathrm{FU}(\mathrm{FU}(\mathcal{D}))$ y fijemos $A \in [\mathrm{FU}(\mathcal{D})]^{<\omega}_{+}$ con $a = \bigcup A$. Así, para cada $x \in A$

hay $E_x \in [\mathcal{D}]^{<\omega}_{+}$ con $x = \bigcup E_x$. Por ende, $\bigcup\{E_x \colon x \in A\}$ es un subconjunto finito no vacío de $\mathcal{D}$ cuya unión es igual a a; en otras palabras, $a \in \mathrm{FU}(\mathcal{D})$. $\square$

De este modo, podemos escribir el resultado central de esta sección como sigue.

Teorema 3.19 (Hindman)**.** *Para cualesquiera $k \in \mathbb{N}$ y $c\colon \omega \longrightarrow k$, existe $H \in [\omega]^{\omega}$ tal que $\mathrm{FS}(H)$ es monocromático.*

Podemos hacer dos observaciones pertinentes del resultado anterior. El conjunto H mismo es monocromático, y además con cualquier par de elementos en H podemos formar una solución monocromática de la ecuación $x+y=z$. Por lo tanto, el Teorema de Hindman es, respectivamente, una generalización del Principio del Palomar y del Teorema de Schur (ver 3.3 y 3.16).

Análogo a la proposición 3.7, como ejemplo ilustrativo de la no trivialidad del Teorema de Ramsey, existen varios resultados igualmente ilustrativos pero pertinentes al Teorema de Hindman. Uno de ellos se encuentra enunciado a continuación. La prueba es muy extensa para incluirla en este trabajo, sin embargo para el lector interesado, el artículo completo se puede consultar en [3].

Teorema 3.20 (Fernández-Rinot, 2017)**.** *Existe una coloración $c\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$ tal que para todo $H \in [\mathbb{R}]^{\mathfrak{c}}$ y cualquier $\gamma \in \mathbb{Q}$, existen $x_0, x_1 \in H$ distintos, de manera que $c(x_0+x_1) = \gamma$.*

En otras palabras, no sólo se vuelve falso el teorema 3.19 si sustituimos k por $\mathbb{Q}$ y ω por $\mathbb{R}$, en el sentido de que no hallaremos un conjunto $H \in [\mathbb{R}]^{\mathfrak{c}}$ que cumpla la conclusión del teorema; sino, de hecho, $\mathrm{FS}(H)$ tiene elementos de todos los colores (en cierto sentido, está lo más alejado posible de ser monocromático). Volvamos al tema de la sección.

Hay una relación importante entre los símbolos FU y FS que vamos a explotar para hacer la demostración. Específicamente, se puede mostrar que el siguiente teorema es equivalente al de Hindman (recuerde que el símbolo $\dot\bigcup$ significa unión ajena de conjuntos).

Teorema 3.21 (Baumgartner)**.** *Para cualquier $k \in \mathbb{N}$, si $[\omega]^{<\omega} = \dot\bigcup_{i<k} \mathcal{C}_i$, entonces existen $j < k$ y $\mathcal{D}$, una C.D.I., tales que $\mathrm{FU}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{C}_j$.*

Para los fines de este trabajo no necesitaremos la equivalencia entre los teoremas 3.19 y 3.21, únicamente lo siguiente.

Lema 3.22. *El teorema 3.21 implica el Teorema de Hindman.*

Demostración. Sean $k \in \mathbb{N}$ y $c\colon \omega \longrightarrow k$ arbitrarios.

Primero, vamos a considerar una biyección $\phi\colon [\omega]^{<\omega} \longrightarrow \omega$ que se define a continuación. Dado un número natural m, éste tiene una expansión binaria que se puede ver como una sucesión finita de dígitos, esto es, existe una sucesión finita de ceros y unos, $e(m) \in {}^{<\omega}2$, de tal manera que $m = \sum\{2^i e(m)(i)\colon i < |e(m)|\}$. De esta forma, se sabe que $e\colon \omega \longrightarrow {}^{<\omega}2$ es una biyección.

Ahora, para cada $s \in [\omega]^{<\omega}$, tomemos $m_s := \min\{\ell < \omega\colon s \subseteq \ell\}$ y denotemos por $\psi(s)$ a la función característica de s, esto es, $\psi(s)\colon m_s \longrightarrow 2$ está dada por $\psi(s)(i) = 1$ si y sólo si $i \in s$. De este modo, argumentos rutinarios muestran que $\psi\colon [\omega]^{<\omega} \longrightarrow {}^{<\omega}2$ es una biyección.

Finalmente, $\phi := e^{-1} \circ \psi$ es la biyección buscada y, además, para cada $s \in [\omega]^{<\omega}$, $\phi(s) = \sum\{2^l\colon l \in s\}$. También, si para cada $i < k$ tomamos $\mathcal{C}_i := (c \circ \phi)^{-1}\{i\}$, es claro que $[\omega]^{<\omega} = \dot{\bigcup}_{i<k} \mathcal{C}_i$. Entonces, aplicando el teorema 3.21, existen $j < k$ y $\mathcal{D}$, una C.D.I., tales que $\mathrm{FU}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{C}_j$. Afirmamos que $H := \phi[\mathcal{D}]$ es el conjunto buscado.

Observemos que, por ser ϕ una biyección y $\mathcal{D}$ un conjunto infinito, $H \in [\omega]^{\omega}$. Veamos que $\mathrm{FS}(H)$ es monocromático, y más aún, de color j.

Sea $a \in [H]^{<\omega}_{+}$. Ahora, dado $x \in a$, se sigue de nuestra definición de H que hay $s \in \mathcal{D}$ con $x = \phi(s) = \sum\{2^l\colon l \in s\}$ o, equivalentemente, $x = \sum\{2^l\colon l \in \phi^{-1}(x)\}$. Por lo anterior,

$$\begin{aligned} c\left(\sum a\right) &= c\left(\sum_{x\in a}\sum\{2^l\colon l \in \phi^{-1}(x)\}\right) \\ &= c\left(\sum\left\{2^l\colon l \in \bigcup_{x\in a}\phi^{-1}(x)\right\}\right) \\ &= c\left(\phi\left(\bigcup_{x\in a}\phi^{-1}(x)\right)\right). \end{aligned}$$

Por otro lado, la contención $\{\phi^{-1}(x)\colon x \in a\} \subseteq \mathcal{D}$ nos garantiza que $\bigcup_{x\in a}\phi^{-1}(x) \in \mathrm{FU}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{C}_j$. Así, por definición,

$$c\left(\sum a\right) = (c \circ \phi)\left(\bigcup_{x\in a}\phi^{-1}(x)\right) = j.$$

$\square$

Dedicaremos el resto de la sección a la demostración del teorema 3.21.

Definición 3.23. El símbolo $\mathcal{D}_0 \sqsubseteq \mathcal{D}_1$ será una abreviatura de la frase, para cada $i < 2$, $\mathcal{D}_i$ es una C.D.I. y $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D}_1)$.

Observe que lo escrito arriba puede ser interpretado como definir una relación binaria, $\sqsubseteq$, en la familia de todas las colecciones disjuntas infinitas.

Lema 3.24. *Son ciertos los siguientes dos enunciados:*

1. *La relación $\sqsubseteq$ es un preorden.*

2. *Las condiciones $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_0 \sqsubseteq \mathcal{D}$ implican $\mathcal{D}_1 \sqsubseteq \mathcal{D}$.*

Demostración. La reflexividad de $\sqsubseteq$ es consecuencia del inciso (1) del lema 3.18.

Para la transitividad de $\sqsubseteq$ basta tomar tres C.D.I.s $\mathcal{D}, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ tales que $\mathcal{D}_2 \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D}_1)$ y $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D})$. Si aplicamos dos veces el lema 3.18, directamente obtenemos $\mathcal{D}_2 \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D}_1) \subseteq \mathrm{FU}(\mathrm{FU}(\mathcal{D})) = \mathrm{FU}(\mathcal{D})$.

Si $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_0 \sqsubseteq \mathcal{D}$, entonces, por definición, $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_0 \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D})$, es decir, $\mathcal{D}_1 \sqsubseteq \mathcal{D}$. $\square$

Definición 3.25. Diremos que una colección $\mathcal{C} \subseteq [\omega]^{<\omega}$ es *grande para* una C.D.I. $\mathcal{D}$, si se cumple que para toda $\mathcal{D}' \sqsubseteq \mathcal{D}$, $\mathcal{C} \cap \mathrm{FU}(\mathcal{D}') \neq \emptyset$. Para simplificar escritura, cada vez que empleemos la frase $\mathcal{C}$ *es grande para* $\mathcal{D}$ estaremos suponiendo implícitamente que $\mathcal{C} \subseteq [\omega]^{<\omega}$ y que $\mathcal{D}$ es una C.D.I.

Note que, por ejemplo, $[\omega]^{<\omega}$ es grande para cualquier $\mathcal{D}$.

A continuación exploraremos propiedades de la relación *ser grande* y por este motivo, en los enunciados de los resultados 3.26-3.30 y 3.32 se estará asumiendo implícitamente que $\mathcal{C}$ es grande para $\mathcal{D}$.

Unas de las propiedades de *ser grande* que se verifican inmediatamente con la definición son las siguientes.

Lema 3.26. *Para cualquier $\mathcal{C}' \subseteq [\omega]^{<\omega}$, los enunciados siguientes son ciertos.*

1. *La condición* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$ *implica que* $\mathcal{C}'$ *es grande para* $\mathcal{D}$.

2. *Si* $\mathcal{D}' \sqsubseteq \mathcal{D}$, *entonces* $\mathcal{C}$ *es grande para* $\mathcal{D}'$.

Nos referiremos al resultado siguiente como el *Lema de Descomposición*. Éste fue probado por Baumgartner en [1].

Lema 3.27. *Si* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\mathcal{C} = \bigcup_{i<n} \mathcal{C}_i$, *entonces existen* $j < n$ *y* $\mathcal{D}_1 \sqsubseteq \mathcal{D}$ *de manera que* $\mathcal{C}_j$ *es grande para* $\mathcal{D}_1$.

Demostración. Procederemos por inducción sobre n. El caso $n = 1$ es inmediato tomando $\mathcal{D}_1 := \mathcal{D}$.

Supongamos que para alguna $n \in \mathbb{N}$ se cumple que siempre que tengamos una colección $\mathcal{C}'$ que es grande para alguna $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{C}' = \bigcup_{i<n} \mathcal{C}'_i$, podemos encontrar $j < n$ y $\mathcal{D}_3 \sqsubseteq \mathcal{D}_1$ de manera que $\mathcal{C}'_j$ es grande para $\mathcal{D}_3$.

Fijemos $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ de tal modo que $\mathcal{C}$ sea grande para $\mathcal{D}$ y supongamos que $\mathcal{C} = \bigcup_{i<n+1} \mathcal{C}_i$.

Si resulta que $\mathcal{C}_n$ es grande para $\mathcal{D}$, bastará con tomar $\mathcal{D}_1 := \mathcal{D}$ para concluir este caso. De este modo, supondremos por el resto del argumento que $\mathcal{C}_n$ no es grande para $\mathcal{D}$.

Por definición, existe algún $\mathcal{D}_1 \sqsubseteq \mathcal{D}$ tal que $\mathcal{C}_n \cap \mathrm{FU}(\mathcal{D}_1) = \emptyset$. Para simplificar la notación, escribamos $\mathcal{C}' := \bigcup_{i<n} \mathcal{C}_i$; así, $\mathcal{C} = \mathcal{C}' \cup \mathcal{C}_n$.

Argumentaremos que $\mathcal{C}'$ es grande para $\mathcal{D}_1$. Con esto en mente, tomemos $\mathcal{D}_2 \sqsubseteq \mathcal{D}_1$ arbitraria. Por hipótesis y por la transitividad de $\sqsubseteq$, existe $d \in \mathcal{C} \cap \mathrm{FU}(\mathcal{D}_2)$. Como $\mathcal{D}_2 \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D}_1)$, por el lema 3.18, $d \in \mathcal{C} \cap \mathrm{FU}(\mathcal{D}_2) \subseteq \mathcal{C} \cap \mathrm{FU}(\mathcal{D}_1)$. Pero entonces (recuerde cómo fue elegida $\mathcal{D}_1$) $d \notin \mathcal{C}_n$ y en consecuencia, $d \in \mathcal{C}' \cap \mathrm{FU}(\mathcal{D}_2)$.

Aplicando la hipótesis inductiva a $\mathcal{C}'$ y $\mathcal{D}_1$ obtenemos que existen $j < n < n + 1$ y $\mathcal{D}_3 \sqsubseteq \mathcal{D}_1 \sqsubseteq \mathcal{D}$ tales que $\mathcal{C}_j$ es grande para $\mathcal{D}_3$, con lo cual se finaliza la inducción. $\square$

Definición 3.28. Para una colección $\mathcal{C} \subseteq [\omega]^{<\omega}$ y un conjunto $s \in [\omega]^{<\omega}$ se define el siguiente conjunto:

$$\mathcal{C} - s := \{c \in \mathcal{C} \colon c \cap s = \emptyset\}.$$

Una propiedad que se verifica en breve es la siguiente.

Lema 3.29. *Para toda* $s \in [\omega]^{<\omega}$, $\mathcal{C} - s$ *también es grande para* $\mathcal{D}$.

Demostración. Tomemos un conjunto $s \in [\omega]^{<\omega}$ y $\mathcal{D}_0 \sqsubseteq \mathcal{D}$. Si consideramos la colección $\mathcal{D}_1 := \mathcal{D}_0 - s$, ésta resulta ser disjunta (pues $\mathcal{D}_0$ lo es) e infinita (pues s es finito). Además, por el segundo inciso del lema 3.24, $\mathcal{D}_1 \sqsubseteq \mathcal{D}$. Como $\mathcal{C}$ es grande para $\mathcal{D}$, existe $d \in \mathcal{C} \cap \mathrm{FU}(\mathcal{D}_1)$. En especial, $d \subseteq \bigcup \mathcal{D}_1 \subseteq \omega \setminus s$, esto es, $d \in \mathcal{C} - s$. Por otro lado, el lema 3.18 nos da $d \in \mathrm{FU}(\mathcal{D}_0)$. Concluimos que $\mathcal{C} - s$ es grande para $\mathcal{D}$. □

Los siguientes lemas son de carácter técnico.

Lema 3.30. *Existen $n \in \mathbb{N}$ y $\{d_i \colon i < n\} \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D})$ tales que para todo $x \in \mathrm{FU}(\mathcal{D})$ que cumple $x \cap \bigcup_{k<n} d_k = \emptyset$, hay $\emptyset \neq I \subseteq n$ tal que $x \cup \bigcup_{k\in I} d_k \in \mathcal{C}$.*

Demostración. Vamos a suponer, con la intención de contradecir la hipótesis de que $\mathcal{C}$ es grande para $\mathcal{D}$, que para toda $n \in \mathbb{N}$ y para todo $\{d_i \colon i < n\} \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D})$, existe $x \in \mathrm{FU}(\mathcal{D})$ que cumple $x \cap \bigcup_{k<n} d_k = \emptyset$, pero, para cualquier conjunto $\emptyset \neq I \subseteq n$, $x \cup \bigcup_{k\in I} d_k \notin \mathcal{C}$.

Usaremos lo anterior para, recursivamente, construir una sucesión $\{d_n \colon n < \omega\} \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D})$ tal que

1. $d_k \cap d_\ell = \emptyset$, siempre que $k < \ell < \omega$, y
2. para toda $\emptyset \neq I \subseteq n$, $\bigcup_{k\in I} d_k \notin \mathcal{C}$.

Si tomamos cualquier elemento $d_0 \in \mathrm{FU}(\mathcal{D})$ (debe haber pues $\mathcal{D}$ es infinito), se satisfacen vacuamente las condiciones de arriba.

Demos por hecho ahora que para alguna $n < \omega$ y $\{d_k \colon k < n\}$ se cumplen (1) y (2). Entonces, por la hipótesis del primer párrafo, existe $d_n \in \mathrm{FU}(\mathcal{D})$ que satisface las condiciones $d_n \cap \bigcup_{k<n} d_k = \emptyset$ y, para todo $\emptyset \neq I \subseteq n$, $d_n \cup \bigcup_{k\in I} d_k \notin \mathcal{C}$. Pero, de este modo, la familia $\{d_k \colon k < n+1\}$ cumple con la condición (1), siempre que $k < \ell < n$. Para la condición (2), si tomamos $\emptyset \neq I \subseteq n+1$, hay dos casos: cuando $n \notin I$, tenemos que (2) es consecuencia de nuestra hipótesis inductiva, mientras que si $n \in I$, nuestra elección de d_n y la condición $\emptyset \neq I \setminus \{n\}$ nos dan $\bigcup_{k\in I} d_k = d_n \cup \bigcup_{k\in I\setminus\{n\}} d_k \notin \mathcal{C}$. Esto completa la recursión.

Finalmente, note que $\mathcal{D}_1 := \{d_n \colon n < \omega\}$ satisface: $\mathcal{D}_1 \sqsubseteq \mathcal{D}$ y $\mathcal{C} \cap \mathrm{FU}(\mathcal{D}_1) = \emptyset$, esto es, $\mathcal{C}$ no es grande para $\mathcal{D}$; la contradicción buscada. □

Lema 3.31. *Si $\mathcal{C}_i$ es cualquier colección grande para $\mathcal{D}_i$, existen $s \in \mathrm{FU}(\mathcal{D}_i)$ y $\mathcal{D}_0 \sqsubseteq \mathcal{D}_i - s$, de tal manera que la colección*

$$\mathcal{C}_0 := \{t \in \mathcal{C}_i - s \colon t \cup s \in \mathcal{C}_i\}$$

es grande para $\mathcal{D}_0$.

Demostración. Empecemos por fijar n y $\{d_k \colon k < n\}$ con las propiedades descritas en el lema 3.30.

Llamemos $d^* := \bigcup_{k<n} d_k$ y, para cada $\emptyset \neq I \subseteq n$, sea

$$\mathcal{C}_I := \left\{ c \in \mathcal{C}_i - d^* \colon c \cup \bigcup_{k \in I} d_k \in \mathcal{C}_i \right\}.$$

Vamos a demostrar que $\mathcal{C}' := \bigcup\{\mathcal{C}_I \colon \emptyset \neq I \subseteq n\}$ es grande para $\mathcal{D}_i$.

Con lo anterior en mente, tomemos arbitrariamente $\mathcal{D}' \sqsubseteq \mathcal{D}_i$ y definamos $\mathcal{D}^* := \{d \in \mathcal{D}' \colon \max d^* < \min d\}$ (notemos que d^* es un subconjunto finito no vacío de ω, por lo cual tiene máximo elemento). En vista de las relaciones $\mathcal{D}^* \subseteq \mathcal{D}' \sqsubseteq \mathcal{D}_i$, se sigue (lema 3.24) que $\mathcal{D}^* \sqsubseteq \mathcal{D}_i$; esto es, $\mathcal{D}^* \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D}_i)$ y por el lema 3.18, $\mathrm{FU}(\mathcal{D}^*) \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D}_i)$. Como $\mathcal{C}_i$ es grande para $\mathcal{D}_i$, existe $e \in \mathrm{FU}(\mathcal{D}^*) \cap \mathcal{C}_i$ y, por cómo está definido el conjunto $\mathcal{D}^*$, tenemos que $e \cap d^* = \emptyset$. Entonces, por la elección de $\{d_k \colon k < n\}$, debe haber algún $\emptyset \neq I \subseteq n$ de manera que $e \cup \bigcup_{k \in I} d_k \in \mathcal{C}_i$, es decir, hemos comprobado que $e \in \mathcal{C}'$.

Por otro lado, como $\mathcal{D}^* \subseteq \mathcal{D}'$, usando el lema 3.18 se obtiene que $\mathrm{FU}(\mathcal{D}^*) \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D}')$. Así en especial, $e \in \mathrm{FU}(\mathcal{D}')$ y, por el párrafo anterior, $e \in \mathrm{FU}(\mathcal{D}') \cap \mathcal{C}'$. En conclusión, $\mathcal{C}'$ es grande para $\mathcal{D}_i$.

Luego, como claramente $\mathcal{D}_i - d^* \sqsubseteq \mathcal{D}_i$, $\mathcal{C}'$ es grande para $\mathcal{D}_i - d^*$ (ver el segundo inciso del lema 3.26). Así, podemos aplicar el lema 3.27 (observemos que $\mathcal{C}'$ es una unión finita) para obtener $\emptyset \neq J \subseteq n$ de tal modo que $\mathcal{C}_J$ sea grande para algún $\mathcal{D}_0 \sqsubseteq \mathcal{D}_i - d^*$. Verifiquemos que $s := \bigcup_{k \in J} d_k \in \mathrm{FU}(\mathcal{D}_i)$ funciona, es decir, veamos que $\mathcal{C}_0$ (ver enunciado del lema para la definición de $\mathcal{C}_0$) es grande para $\mathcal{D}_0$: dado $\mathcal{D}' \sqsubseteq \mathcal{D}_0$, como $\mathcal{C}_J$ es grande para $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{C}_J \cap \mathrm{FU}(\mathcal{D}') \neq \emptyset$, ahora note que $\mathcal{C}_J \subseteq \mathcal{C}_0$, entonces, $\mathcal{C}_0 \cap \mathrm{FU}(\mathcal{D}') \neq \emptyset$. Esto concluye la prueba. $\square$

Resulta que para nuestras dos colecciones fijas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, podemos pedir que el elemento s del resultado anterior además se encuentre en $\mathcal{C}$, tal y como se verifica en el resultado de abajo.

Lema 3.32. *Existen $s' \in \mathrm{FU}(\mathcal{D}) \cap \mathcal{C}$ y $\mathcal{D}' \sqsubseteq \mathcal{D} - s'$ de tal manera que la colección*

$$\mathcal{C}' := \{t \in \mathcal{C} - s' \colon t \cup s' \in \mathcal{C}\}$$

es grande para $\mathcal{D}'$.

Demostración. Vamos a construir tres sucesiones de conjuntos $\{\mathcal{C}_i \colon i < \omega\}$, $\{\mathcal{D}_i \colon i < \omega\}$ y $\{s_i \colon i \in \omega \setminus 1\}$ de manera que para todo $i < \omega$ se cumpla lo siguiente:

1. $s_{i+1} \in \mathrm{FU}(\mathcal{D}_i)$,

2. $\mathcal{C}_{i+1} := \{t \in \mathcal{C}_i - s_{i+1} \colon t \cup s_{i+1} \in \mathcal{C}_i\}$ es grande para $\mathcal{D}_{i+1}$,

3. $\mathcal{D}_{i+1} \sqsubseteq \mathcal{D}_i - \bigcup_{j=1}^{i+1} s_j$ y

4. $\mathcal{C}_0 := \mathcal{C}$ y $\mathcal{D}_0 := \mathcal{D}$.

El inciso (4) nos da la base de la recursión. Supongamos que tenemos construidas las sucesiones hasta el término $i < \omega$; vamos a encontrar los términos $i+1$. Usando el lema 3.31, como $\mathcal{C}_i$ es grande para $\mathcal{D}_i$ (hipótesis inductiva), existen un elemento $s_{i+1} \in \mathrm{FU}(\mathcal{D}_i)$ (de donde inmediatamente se cumple el primer inciso) y una colección $\mathcal{D}_{i+1} \sqsubseteq \mathcal{D}_i - s_{i+1}$ de tal modo que $\mathcal{C}_{i+1}$, definida como se especifica en el segundo inciso, es grande para $\mathcal{D}_{i+1}$. Veamos que se satisface el tercer inciso.

Sea $d \in \mathrm{FU}(\mathcal{D}_{i+1})$. Como $\mathcal{D}_{i+1} \sqsubseteq \mathcal{D}_i - s_{i+1}$, por el lema 3.18, $d \in \mathrm{FU}(\mathcal{D}_{i+1}) \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D}_i - s_{i+1})$. En consecuencia, $d \cap s_{i+1} = \emptyset$. Si además $i > 0$, tenemos, por el inciso (3) de la hipótesis inductiva, que $\mathcal{D}_i \sqsubseteq \mathcal{D}_{i-1} - \bigcup_{j=1}^{i} s_j$; luego, por el lema 3.18,

$$d \in \mathrm{FU}(\mathcal{D}_i - s_{i+1}) \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D}_i) \subseteq \mathrm{FU}\left(\mathcal{D}_{i-1} - \bigcup_{j=1}^{i} s_j\right);$$

consecuentemente, $d \cap \bigcup_{j=1}^{i} s_j = \emptyset$. En conclusión, $d \cap \bigcup_{j=1}^{i+1} s_j = \emptyset$.

El párrafo anterior prueba que dado cualquier $d \in \mathrm{FU}(\mathcal{D}_{i+1})$, $d \cap \bigcup_{j=1}^{i+1} s_j = \emptyset$ y $d \in \mathrm{FU}(\mathcal{D}_i)$. Por lo tanto, $\mathcal{D}_{i+1} \sqsubseteq \mathcal{D}_i - \bigcup_{j=1}^{i+1} s_j$, y así, la recursión está completa.

Mostraremos ahora que si $\mathcal{D}^* := \{s_i \colon i \in \omega \setminus 1\}$, entonces $\mathcal{D}^* \sqsubseteq \mathcal{D}$.

Empecemos por comprobar que $\mathcal{D}^* \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D})$. Los incisos (3) y (4), aunados a un argumento inductivo, implican que, para cualquier $i < \omega$, $\mathrm{FU}(\mathcal{D}_i) \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D})$. Entonces, por el primer inciso, se tiene que $s_{i+1} \in \mathrm{FU}(\mathcal{D}_i) \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D})$.

Para ver que $\mathcal{D}^*$ es una C.D.I., basta con probar que para cualesquiera $0 < i < j < \omega$, $s_i \cap s_j = \emptyset$. Con esto en mente, observemos que nuestros incisos (1) y (3), además del lema 3.18, nos dan $s_j \in \mathrm{FU}(\mathcal{D}_{j-1}) \subseteq \mathrm{FU}\left(\mathcal{D}_{j-2} - \bigcup_{k=1}^{j-1} s_k\right)$; en especial, como $i \leqslant j-1$, $s_i \cap s_j = \emptyset$. Esto concluye nuestro argumento para $\mathcal{D}^* \sqsubseteq \mathcal{D}$.

Recordemos ahora la hipótesis de que $\mathcal{C}$ es grande para $\mathcal{D}$. Así, la relación $\mathcal{D}^* \sqsubseteq \mathcal{D}$ nos da un conjunto $s' \in \mathrm{FU}(\mathcal{D}^*) \cap \mathcal{C} \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D}) \cap \mathcal{C}$; en particular, para algún $I \in [\omega \setminus 1]^{<\omega}_{+}$, $s' = \bigcup_{i \in I} s_i$. Hagamos $m := |I| - 1$ y denotemos por f a la única función estrictamente decreciente de $m+1$ en I.

Definamos $\mathcal{C}'$ como en el enunciado de nuestro lema. Con la idea en mente de probar la contención $\mathcal{C}_{f(0)} \subseteq \mathcal{C}'$, tomemos $t \in \mathcal{C}_{f(0)}$. Empecemos por mostrar, usando inducción sobre $k \leqslant m$, que

$$t \in \mathcal{C}_{f(k)} \qquad \text{y} \qquad t \cup \bigcup_{i=0}^{k} s_{f(i)} \in \mathcal{C}_{f(k)-1}. \tag{3.2}$$

Antes de iniciar nuestro argumento, es conveniente mencionar que emplearemos varias veces la siguiente consecuencia del inciso (2): si $j \in \omega \setminus 1$ y $r \in \mathcal{C}_j$, entonces $r \cup s_j \in \mathcal{C}_{j-1}$.

Para la base: nuestra elección de t y la contención $I \subseteq \omega \setminus 1$ implican que $t \cup s_{f(0)} \in \mathcal{C}_{f(0)-1}$.

Supongamos ahora que hay $k < m$ de tal suerte que (3.2) es cierta. En vista de que f es estrictamente decreciente, deducimos que

$$f(k+1) < f(k) \qquad \text{y} \qquad f(k+1) \leqslant f(k) - 1;$$

en particular, de la primera desigualdad se obtiene que $t \in \mathcal{C}_{f(k)} \subseteq \mathcal{C}_{f(k+1)}$. Además, la segunda desigualdad y nuestra hipótesis inductiva nos garantizan que $t \cup \bigcup_{i=0}^{k} s_{f(i)}$ es un elemento de $\mathcal{C}_{f(k+1)}$, con lo cual

$$t \cup \bigcup_{i=0}^{k+1} s_{f(i)} = \left(t \cup \bigcup_{i=0}^{k} s_{f(i)} \right) \cup s_{f(k+1)} \in \mathcal{C}_{f(k+1)-1}.$$

Lo anterior completa la prueba de que (3.2) es cierta para cualquier $k \leqslant m$. En especial, la primera parte de (3.2) nos garantiza que t es ajeno con $\bigcup_{k=0}^{m} s_{f(k)}$ y como f es suprayectiva, se obtiene que $t \cap s' = \emptyset$. El hacer $k = m$ en la segunda parte de (3.2) nos produce $t \cup s' \in \mathcal{C}_{f(m)} \subseteq \mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$. En resumen, $t \in \mathcal{C}'$ y, por ende, $\mathcal{C}_{f(0)} \subseteq \mathcal{C}'$.

En aras de concluir la prueba del presente lema, hagamos $\mathcal{D}' := \mathcal{D}_{f(0)}$. Se obtiene inmediatamente del inciso (2) y del lema 3.26 que $\mathcal{C}'$ es grande para $\mathcal{D}'$. $\square$

A partir de ahora dejamos de fijar las dos colecciones $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$.

Definición 3.33. 1. Para $\alpha \leqslant \omega$, una colección $\{d_i \colon i < \alpha\}$ de subconjuntos finitos no vacíos de ω es llamada *sucesión de bloques* si para cualquier $i < \omega$, $\max d_i < \min d_{i+1}$, siempre que $i + 1 < \alpha$. Cuando $\alpha < \omega$, diremos que la sucesión de bloques es finita, y en el caso en que $\alpha = \omega$, diremos que es infinita.

2. Si $\mathcal{D}_0$ y $\mathcal{D}_1$ son sucesiones de bloques, diremos que $\mathcal{D}_0$ es un *segmento inicial de* $\mathcal{D}_1$ si existe un natural m de manera que $\mathcal{D}_0 = \{d \in \mathcal{D}_1 \colon \max d < m\}$.

Observemos que la relación de ser segmento inicial es reflexiva y transitiva sobre la clase de sucesiones finitas de bloques. Otra afirmación importante es que toda C.D.I. contiene una sucesión de bloques infinita, más aún:

Proposición 3.34. *Si $\mathcal{D}'$ es una C.D.I., entonces existe $\mathcal{D}$, una sucesión de bloques infinita, con $\mathcal{D} \sqsubseteq \mathcal{D}'$.*

Demostración. Vamos a construir por recursión una colección $\{d_i \colon i < \omega\} \subseteq \mathcal{D}'$ de tal manera que, para toda $i < \omega$,

$$\max d_i < \min d_{i+1}. \tag{3.3}$$

Comencemos por fijar d_0, un elemento arbitrario de $\mathcal{D}' \setminus \{\emptyset\}$. Ahora demos por hecho que, para algún $n < \omega$, hemos producido $\{d_i \colon i \leqslant n\} \subseteq \mathcal{D}'$ de forma tal que (3.3) es cierta siempre que $i < n$. Hagamos $m := 1 + \max d_n$. El que $\mathcal{D}'$ sea ajena por pares implica que $\{e \in \mathcal{D}' \colon e \cap m \neq \emptyset\}$ es finito. Luego, hay $d_{n+1} \in \mathcal{D}'$ con $d_n \cap m = \emptyset$. En particular, $\max d_n < m \leqslant \min d_{n+1}$, tal y como se requería. Esto concluye la recursión.

La condición (3.3) nos garantiza que $\mathcal{D} := \{d_i \colon i < \omega\}$ es una sucesión infinita de bloques que satisface (ver lema 3.24) $\mathcal{D} \sqsubseteq \mathcal{D}'$. □

Teorema 3.35. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}'$ dos colecciones de manera que $\mathcal{C}$ es grande para $\mathcal{D}'$. Entonces, existe $\mathcal{E} \sqsubseteq \mathcal{D}'$ tal que $\mathrm{FU}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{C}$.*

Demostración. Empleemos el resultado previo para fijar $\mathcal{D}$, una sucesión infinita de bloques con $\mathcal{D} \sqsubseteq \mathcal{D}'$. Si logramos hallar $\mathcal{E} \sqsubseteq \mathcal{D}$ de tal forma que $\mathrm{FU}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{C}$, entonces la condición $\mathcal{D} \sqsubseteq \mathcal{D}'$ nos daría $\mathcal{E} \sqsubseteq \mathcal{D}'$ y, consecuentemente, ya habríamos probado nuestro teorema.

Para obtener la familia $\mathcal{E}$ descrita en el párrafo previo usaremos el Teorema de Rasiowa-Sikorski, esto es, definiremos un preorden y una cantidad numerable de densos en éste.

Note que, de acuerdo al lema 3.26, $\mathcal{C}$ es grande para $\mathcal{D}$.

Vamos a definir el preorden $\mathbb{P}$ por medio de la fórmula $p \in \mathbb{P}$ si y sólo si existen dos conjuntos A_p y $\mathcal{D}_p$ que satisfacen lo siguiente:

1. A_p es una sucesión finita (posiblemente vacía) de bloques que cumple que $\mathrm{FU}(A_p) \subseteq \mathcal{C}$ y $A_p \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D})$,

2. $\mathcal{D}_p$ es una sucesión infinita de bloques tal que $\mathcal{D}_p \sqsubseteq \mathcal{D}$,

3. si $A_p \neq \emptyset$, $\max \bigcup A_p < \min \bigcup \mathcal{D}_p$, y

4. la colección $\mathcal{C}_p^* := \{y \in \mathrm{FU}(\mathcal{D}_p) \cap \mathcal{C} \colon \forall x \in \mathrm{FU}(A_p)(x \cup y \in \mathcal{C})\}$ es grande para $\mathcal{D}_p$.

El orden $\preceq$ será definido como sigue: para dos elementos $p, q \in \mathbb{P}$, escribimos $q \preceq p$ si y sólo si se cumplen los siguientes tres incisos:

(a) A_p es un segmento inical de A_q,

(b) $\mathcal{D}_q \sqsubseteq \mathcal{D}_p$ y

(c) $A_q \setminus A_p \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D}_p)$

Afirmamos que $(\mathbb{P}, \preceq)$ es un preorden: la reflexividad de $\preceq$ es consecuencia directa de que las relaciones *ser segmento inicial* y $\sqsubseteq$ son reflexivas. La transitividad se demuestra tomando p, q y r, tres elementos en $\mathbb{P}$, de manera que $r \preceq q$ y $q \preceq p$. Para ver que $r \preceq p$, los incisos (a) y (b) de la definición de $\preceq$ se verifican inmediatamente usando que las relaciones *ser segmento inicial* y $\sqsubseteq$ son transitivas. Con respecto al inciso (c), las condiciones $q \preceq p$ y $r \preceq q$ implican, respectivamente, que $\mathcal{D}_q \sqsubseteq \mathcal{D}_p$ y $A_r \setminus A_q \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D}_q)$; esto, más el lema 3.18, nos da $A_r \setminus A_q \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D}_q) \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D}_p)$. Combinando este último hecho con la contención (recuerde que $p \preceq q$) $A_q \setminus A_p \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D}_p)$, obtenemos $A_r \setminus A_p = (A_r \setminus A_q) \cup (A_q \setminus A_p) \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D}_p)$.

Argumentemos ahora que un elemento máximo de nuestro preorden es $(\emptyset, \mathcal{D})$. Para ver que $(\emptyset, \mathcal{D}) \in \mathbb{P}$, los incisos (1)-(3) de la definición son inmediatos. Para el inciso (4), empecemos por fijar $\mathcal{D}^* \sqsubseteq \mathcal{D}$. Como consecuencia del lema 3.18 obtenemos que

$$\mathrm{FU}(\mathcal{D}^*) \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D}).$$

Por otro lado, ver definición 3.17, $\mathrm{FU}(\emptyset) = \emptyset$ y, consecuentemente, $\mathcal{C}^*_{(\emptyset,\mathcal{D})} = \mathrm{FU}(\mathcal{D}) \cap \mathcal{C}$. Así, $\mathcal{C}^*_{(\emptyset,\mathcal{D})} \cap \mathrm{FU}(\mathcal{D}^*) = \mathcal{C} \cap \mathrm{FU}(\mathcal{D}^*)$, lo cual, junto con el hecho de que $\mathcal{C}$ sea grande para $\mathcal{D}$, nos permite concluir que $\mathcal{C}^*_{(\emptyset,\mathcal{D})}$ es grande para $\mathcal{D}$, tal y como se deseaba.

Ahora veamos que si $p \in \mathbb{P}$, entonces $p \preceq (\emptyset, \mathcal{D})$. Directamente de la definición de $\preceq$ se deducen los incisos (a) y (b). El inciso (c) se infiere de la observación que, por el inciso (1), $A_p \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D})$.

Afirmación 3.36. Para todo $p \in \mathbb{P}$, existe $q \in \mathbb{P}$ tal que $q \preceq p$ y $|A_q| = |A_p| + 1$.

Demostración de la afirmación. Fijamos el elemento $p \in \mathbb{P}$. Como (inciso (4)) $\mathcal{C}^*_p$ es grande para $\mathcal{D}_p$, por el lema 3.32, existen $s \in \mathcal{C}^*_p \cap \mathrm{FU}(\mathcal{D}_p)$ y $\mathcal{D}' \sqsubseteq \mathcal{D}_p - s$ de manera que $\mathcal{C}' := \{z \in \mathcal{C}^*_p - s \colon z \cup s \in \mathcal{C}^*_p\}$ es grande para $\mathcal{D}'$. Verifiquemos que

$$A_q := A_p \cup \{s\} \text{ es una familia de bloques con } |A_q| = |A_p| + 1. \tag{3.4}$$

Empecemos por notar que la pertenencia $s \in \mathrm{FU}(\mathcal{D}_p)$ nos da $s \subseteq \bigcup \mathcal{D}_p$ y, por ende, $\min s \geqslant \min \bigcup \mathcal{D}_p$. Ahora, cuando $A_p \neq \emptyset$, el empleo de la propiedad (3) produce $\min s > \max \bigcup A_p$

y así obtenemos (3.4). Por otro lado, en el caso en que $A_p = \emptyset$, (3.4) es trivialmente cierto.

Es claro que las condiciones (a) y (c) son satisfechas por nuestro A_q.

Por otro lado, como $s \in \mathcal{C}_p^*$, dado cualquier $x \in \mathrm{FU}(A_p)$, $x \cup s \in \mathcal{C}$. En consecuencia (ver condición (1)), $\mathrm{FU}(A_q) \subseteq \mathcal{C}$. También tenemos que $\mathcal{D}_p \sqsubseteq \mathcal{D}$ y, por ende, que $\mathrm{FU}(\mathcal{D}_p) \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D})$ (ver lema 3.18). Entonces, $s \in \mathrm{FU}(\mathcal{D})$. En vista de que $A_p \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D})$, se tiene $A_q \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D})$. Para resumir, hemos comprobado que A_q satisface la condición (1).

Ahora observemos que el conjunto $\mathcal{D}_q := \{d \in \mathcal{D}' \colon \max s < \min d\}$ cumple la condición (3). Además, en vista de que $\mathcal{D}_q \subseteq \mathcal{D}' \sqsubseteq \mathcal{D}_p - s \subseteq \mathcal{D}_p \sqsubseteq \mathcal{D}$, por el lema 3.24, se cumplen los incisos (2) y (b). Falta entonces verificar el inciso (4) y habremos acabado con la prueba de la afirmación 3.36.

Definamos la colección $\mathcal{C}_q^*$ como en el inciso (4). Con la intención de demostrar que dicha colección es grande para $\mathcal{D}_q$, tomamos arbitrariamente $\mathcal{D}'' \sqsubseteq \mathcal{D}_q$. Note que la contención $\mathcal{D}_q \subseteq \mathcal{D}'$ nos da $\mathcal{D}_q \sqsubseteq \mathcal{D}'$. Como $\mathcal{C}'$ es grande para $\mathcal{D}'$, existe un elemento $z \in \mathrm{FU}(\mathcal{D}'') \cap \mathcal{C}'$. Vamos a probar que $z \in \mathcal{C}_q^*$. Observamos dos cosas: $z \in \mathrm{FU}(\mathcal{D}'') \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D}_q)$ y $z \in \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}_p^* \subseteq \mathcal{C}$. De esta forma, $z \in \mathrm{FU}(\mathcal{D}_q) \cap \mathcal{C}$.

Sea ahora $x \in \mathrm{FU}(A_q)$. Hay dos posibilidades: si $x \in \mathrm{FU}(A_p)$, como $z \in \mathcal{C}_p^*$, $x \cup z \in \mathcal{C}$. Si, por otro lado, $x \notin \mathrm{FU}(A_p)$, entonces existe $x' \in \mathrm{FU}(A_p)$ de manera que $x = x' \cup s$; en vista de que $z \in \mathcal{C}'$, $z \cup s \in \mathcal{C}_p^*$, es decir, $z \cup x = z \cup s \cup x' \in \mathcal{C}$.

Los últimos dos párrafos prueban que $z \in \mathrm{FU}(\mathcal{D}'') \cap \mathcal{C}_q^*$; en otras palabras, se cumple el inciso (4). Así tenemos que $q \in \mathbb{P}$ y además que $q \preceq p$.

Nuestro enunciado siguiente es corolario inmediato de la afirmación 3.36.

Afirmación 3.37. Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $p \in \mathbb{P}$, existe $q \in \mathbb{P}$ tal que $q \preceq p$ y $|A_q| = |A_p| + n$.

Definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $D_n := \{p \in \mathbb{P} \colon n \leqslant |A_p|\}$ y observemos que por la afirmación 3.37, cada D_n es un subconjunto denso de $\mathbb{P}$. Entonces, por el lema 1.5, existe un filtro F en $\mathbb{P}$ que interseca a todos los conjuntos D_n. Probaremos que

$$\mathcal{E} := \bigcup_{p \in F} A_p$$

es el conjunto buscado.

Primero, notemos que si $r \in F$, entonces $A_r \in [\omega]^{<\omega}$ y, por ende, $\mathcal{E} \subseteq [\omega]^{<\omega}$. Ahora, para ver que $\mathcal{E}$ es infinita, tomemos $n \in \mathbb{N}$ y fijemos $q \in D_n \cap F$ para obtener $n \leqslant |A_q| \leqslant |\mathcal{E}|$. Dados dos elementos $d, e \in \mathcal{E}$, como F es un filtro, podemos encontrar (vea la condición (a)) un elemento $p \in F$ tal que $d, e \in A_p$. Recordemos que A_p es una sucesión de bloques; en particular, es ajena por pares, o sea, $d \cap e = \emptyset$. En conclusión, acabamos de probar que $\mathcal{E}$ es una C.D.I. Por otro lado, nuestra condición (1) nos garantiza que $A_p \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D})$, para cada $p \in F$; consecuentemente, $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{FU}(\mathcal{D})$. Luego, $\mathcal{E} \sqsubseteq \mathcal{D}$.

Para ver que $\mathrm{FU}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{C}$, basta tomar $m \in \mathbb{N}$ y $x = \bigcup_{j<m} x_j$ con todos los elementos x_j en $\mathcal{E}$. Por definición, existen $\{p(j) \colon j < m\} \subseteq F$ de manera que para todo $j < m$, $x_j \in A_{p(j)}$. Nuevamente usando que F es un filtro, podemos encontrar $p \in F$ tal que para todo $j < m$, $p \preceq p(j)$. El inciso (a) implica que para todo $j < m$, $A_{p(j)} \subseteq A_p$ y, por lo tanto, $x_j \in A_p$. Finalmente, por el inciso (1), $x \in \mathrm{FU}(A_p) \subseteq \mathcal{C}$. $\square$

Ahora ya tenemos todo lo necesario para concluir el argumento.

Demostración del teorema 3.21. Supongamos que $[\omega]^{<\omega} = \dot{\bigcup}_{i<k} \mathcal{C}_i$. Es claro que $[\omega]^{<\omega}$ es grande para cualquier C.D.I., por ejemplo, para $\{\{i\} \colon i < \omega\}$. Por el Lema de Descomposición (lema 3.27), existe $j < k$ tal que $\mathcal{C}_j$ es grande para algún $\mathcal{D}' \sqsubseteq \{\{i\} \colon i < \omega\}$. Finalmente, por el teorema 3.35, existe $\mathcal{E} \sqsubseteq \mathcal{D}'$ tal que $\mathrm{FU}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{C}_j$. $\square$

Así por el lema 3.22, se tiene el Teorema de Hindman.

Finalizaremos la sección con una aplicación sumamente interesante del teorema recién demostrado y, para esto, será conveniente tener a la mano la siguiente consecuencia del Teorema de Hindman.

Proposición 3.38. *Para cualquier $k \in \mathbb{N}$, si $\omega = \bigcup_{\ell<k} A_\ell$, entonces existen $H \in [\omega]^\omega$ y $\ell < k$ de tal forma que $\mathrm{FS}(H) \subseteq A_\ell$.*

Demostración. Empiece por definir, para cada $\ell < k$, $B_\ell := A_\ell \setminus \bigcup_{i<\ell} A_i$. Argumentos rutinarios muestran que $\omega = \dot{\bigcup}_{\ell<k} B_\ell$ y, además, $B_\ell \subseteq A_\ell$ para cualquier $\ell < k$. De lo anterior se deduce que la fórmula $c(n) = \ell$ si y sólo si $n \in B_\ell$ nos da una función $c \colon \omega \longrightarrow k$. De acuerdo al Teorema de Hindman, hay $H \in [\omega]^\omega$ y $\ell < k$ de tal forma que $c[\mathrm{FS}(H)] \subseteq \{\ell\}$; equivalentemente, $\mathrm{FS}(H) \subseteq B_\ell \subseteq A_\ell$. $\square$

Ahora, recordemos algunos resultados de Topología. Para los fines de este trabajo, daremos por hecho nociones básicas (como cerradura, compacidad y espacios Hausdorff) y las propiedades de la compactación de Čech-Stone, es decir, no demostraremos la propiedad 3.39 ni los párrafos que le preceden; los detalles se pueden consultar en [14, Secciones 14 y 15, pp. 63-70] y [12, Sección 1.6, pp. 19-24].

Considerando a $\mathbb{N} := \omega \setminus 1$ como un espacio topológico discreto, particularmente es completamente regular y, como tal, tiene sentido considerar su compactación de Čech-Stone. De hecho, es posible construirla explícitamente considerando el conjunto $\beta\mathbb{N} := \{\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})\colon \mathcal{U} \text{ es un ultrafiltro}\}$ con la topología generada por los abiertos básicos de la forma $A^* := \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}\colon A \in \mathcal{U}\}$, para cualquier $A \subseteq \mathbb{N}$.

Finalmente, definiendo el encaje $e\colon \mathbb{N} \longrightarrow \beta\mathbb{N}$ por medio de $e(n) := \{A \subseteq \mathbb{N}\colon n \in A\}$, se verifica que $(\beta\mathbb{N}, e)$ es la compactación de Čech-Stone de $\mathbb{N}$, pues satisface la siguiente propiedad (la prueba puede encontrarse en [12, Teorema 1.6.5, p. 20] y [12, Teorema 1.6.8, p. 22]).

Proposición 3.39 (Propiedad Universal de $\beta\mathbb{N}$)**.** *Para cualquier espacio Hausdorff compacto K y toda $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow K$, existe $\beta f\colon \beta\mathbb{N} \longrightarrow K$ continua tal que $\beta f \circ e = f$.*

También usaremos la siguiente observación referente a la topología de $\beta\mathbb{N}$. Para cada $A \subseteq \beta\mathbb{N}$, convengamos en denotar por $\overline{A}$ a la cerradura topológica de A en $\beta\mathbb{N}$.

Lema 3.40. *Si $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ y $A \subseteq \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{U} \in \overline{e[A]}$ si y sólo si $A \in \mathcal{U}$.*

La proposición 3.39 se puede usar para dotar a $\beta\mathbb{N}$ de una estructura álgebraica compatible con su topología, extendiendo la suma de $\mathbb{N}$ como se hace a continuación.

Para un natural positivo m fijo, la función $s_m\colon \mathbb{N} \longrightarrow \beta\mathbb{N}$ dada por $s_m(n) := e(n+m)$ posee una única extensión continua $\beta s_m\colon \beta\mathbb{N} \longrightarrow \beta\mathbb{N}$ (esto es, βs_m es la única función continua que satisface $\beta s_m \circ e = s_m$). Análogamente, si fijamos un ultrafiltro $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$, la función $t_{\mathcal{U}}\colon \mathbb{N} \longrightarrow \beta\mathbb{N}$ definida por $t_{\mathcal{U}}(m) := \beta s_m(\mathcal{U})$ se puede extender a $\beta t_{\mathcal{U}}$. Definamos así la suma para dos ultrafiltros: $\mathcal{U} + \mathcal{V} := \beta t_{\mathcal{U}}(\mathcal{V})$, para cualesquiera $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$.

Esta suma, por construcción, resulta ser continua por la izquierda (con esto nos referimos a que la función que suma un ultrafiltro por la izquierda, o sea $\beta t_{\mathcal{U}}$, es continua).

En aras de indagar qué propiedades algebraicas satisface la operación recién definida en $\beta\mathbb{N}$, es conveniente hacernos de otra descripción de ésta.

Para simplificar la notación, definamos para un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$,

$$A - m := {s_m}^{-1}[A] = \{n \in \mathbb{N} \colon n + m \in A\},$$

y notemos que las siguientes observaciones se derivan directamente de la definición (por lo cual no incluimos su demostración).

Lema 3.41. *Para cualquier número natural n,*

(a) $\emptyset - n = \emptyset$*,*

(b) si $A \subseteq B$*, entonces* $A - n \subseteq B - n$*,*

(c) $(A \cap B) - n = (A - n) \cap (B - n)$*,*

(d) $\omega \setminus (A - n) = (\omega \setminus A) - n$ *y*

(e) para todo $m \in \mathbb{N}$*,* $(A - m) - n = A - (m + n) = (A - n) - m$*.*

Lema 3.42. *Para cualesquiera* $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$*,*

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} = \{A \subseteq \mathbb{N} \colon \{m \in \mathbb{N} \colon A - m \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}\}.$$

Demostración. Mostremos que $\mathcal{W} := \{A \subseteq \mathbb{N} \colon \{m \in \mathbb{N} \colon A - m \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}\}$ es un filtro en $\mathbb{N}$.

En primer lugar, el inciso (a) del lema previo y el hecho de que $\emptyset \notin \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ implican que $\{m \in \mathbb{N} \colon \emptyset - m \in \mathcal{U}\} = \emptyset \notin \mathcal{V}$, esto es, $\emptyset \notin \mathcal{W}$.

Luego, dados A y B subconjuntos cualesquiera de naturales de forma que $B \subseteq A$ y $B \in \mathcal{W}$, por la observación 3.41(b) se tiene que para todo $n < \omega$, $B - n \subseteq A - n$. Esto implica que $\{n \colon B - n \in \mathcal{U}\} \subseteq \{n \colon A - n \in \mathcal{U}\}$, y como el primero de estos conjuntos pertenece al ultrafiltro $\mathcal{V}$, también el segundo lo hace, es decir, $A \in \mathcal{W}$.

Finalmente, si $A, B \in \mathcal{W}$, la observación 3.41(c) implica que $\{n \colon (A \cap B) - n \in \mathcal{U}\} = \{n \colon (A - n) \cap (B - n) \in \mathcal{U}\} = \{n \colon A - n \in \mathcal{U}\} \cap \{n \colon B - n \in \mathcal{U}\}$. Cada uno de estos dos intersectandos está en el ultrafitro $\mathcal{V}$, así su intersección también lo está. En conclusión, $A \cap B \in \mathcal{W}$. Esto termina la prueba de que $\mathcal{W}$ es un filtro en $\mathbb{N}$.

Únicamente debemos mostrar que $\mathcal{U} + \mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ para finalizar nuestra prueba. Con esto en mente, tomemos $A \in \mathcal{U} + \mathcal{V} = \beta t_{\mathcal{U}}(\mathcal{V})$. Como $\beta t_{\mathcal{U}}$ es continua, deducimos que existe $B \in \mathcal{V}$ de tal modo que $\beta t_{\mathcal{U}}[B^*] \subseteq A^*$. Observe que si la contención

$$B \subseteq \{m \in \mathbb{N} : A - m \in \mathcal{U}\} \tag{3.5}$$

fuese cierta, se tendría que $A \in \mathcal{W}$, tal y como deseamos. Verifiquemos, entonces, (3.5).

Por definición, $e[B] \subseteq B^*$ y, consecuentemente,

$$t_{\mathcal{U}}[B] = (\beta t_{\mathcal{U}} \circ e)[B] = \beta t_{\mathcal{U}}[e[B]] \subseteq \beta t_{\mathcal{U}}[B^*] \subseteq A^*.$$

Así, dado $m \in B$, $\beta s_m(\mathcal{U}) = t_{\mathcal{U}}(m) \in A^*$ y como βs_m es continua, se sigue que hay $C \in \mathcal{U}$ con $\beta s_m[C^*] \subseteq A^*$. Esto, aunado a que $e[C] \subseteq C^*$, nos da

$$s_m[C] = (\beta s_m \circ e)[C] = \beta s_m[e[C]] \subseteq \beta s_m[C^*] \subseteq A^*.$$

Luego, para cada $n \in C$, $e(m+n) = s_m(n) \in A^*$, o sea, $m+n \in A$. De este modo, $C \subseteq A-m$ y, por ende, $A - m \in \mathcal{U}$. Como m fue arbitrario, esto muestra la veracidad de (3.5). $\square$

Ya tenemos lo necesario para demostrar que $(\beta\mathbb{N}, +)$ es una estructura algebraica que satisface ser asociativa y continua por la izquierda, es decir,

Teorema 3.43. $(\beta\mathbb{N}, +)$ *es un semigrupo topológico izquierdo.*

Demostración. Únicamente nos falta verificar la asociatividad de la suma. Para esto, tomemos $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W} \in \beta\mathbb{N}$. Nos concentraremos en demostrar que $(\mathcal{U}+\mathcal{V})+\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}+(\mathcal{V}+\mathcal{W})$ (dado que ambos son ultrafiltros, esta contención implica la igualdad).

Sea $A \in (\mathcal{U} + \mathcal{V}) + \mathcal{W}$. Queremos probar que $A \in \mathcal{U} + (\mathcal{V} + \mathcal{W})$, es decir (lema 3.42), que $\{m \in \mathbb{N} \colon A - m \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V} + \mathcal{W}$. Hagamos $B := \{m \in \mathbb{N} \colon A - m \in \mathcal{U}\}$ y notemos que la pertenencia que deseamos se traduce en

$$\{n \in \mathbb{N} \colon B - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{W} \tag{3.6}$$

Como $A \in (\mathcal{U} + \mathcal{V}) + \mathcal{W}$, el conjunto $C := \{n \in \mathbb{N} \colon A - n \in \mathcal{U} + \mathcal{V}\}$ es un elemento de $\mathcal{W}$. De este modo, el que $\mathcal{W}$ sea un filtro nos garantiza que si logramos probar la contención $C \subseteq \{n \in \mathbb{N} \colon B - n \in \mathcal{V}\}$, entonces ya tendríamos demostrada la condición (1). Sea, pues, $n \in C$. Entonces, $A - n \in \mathcal{U} + \mathcal{V}$ y, consecuentemente, $D := \{k \in \mathbb{N} \colon (A - n) - k \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$. En aras de argumentar que $B - n \in \mathcal{V}$, mostraremos que $D \subseteq B - n$. Para esto, tomemos $k \in D$. Según el lema 3.41(e), $A - (k + n) = (A - n) - k \in \mathcal{U}$ y nuestra definición de B produce $k + n \in B$, es decir, $k \in B - n$, tal y como queríamos. $\square$

Como consecuencia de [14, Lemma 4, p. 69], el teorema siguiente es equivalente al Teorema de Hindman. Sin embargo, para no incluir dos pruebas del mismo teorema en este trabajo, nos restringimos a demostrar que el Teorema de Hindman implica dicho resultado.

Teorema 3.44. *Si para $r \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mathbb{N} = \bigcup_{k=0}^{r} A_k$, entonces existen $\ell \leqslant r$ y $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$, de tal suerte que $A_\ell \in \mathcal{U}$ y además $\mathcal{U} + \mathcal{U} = \mathcal{U}$.*

Dicho en otras palabras, si partimos finitamente al conjunto de números naturales positivos, algún pedazo se queda en algún ultrafiltro idempotente. Es pertinente el comentario de que la mera existencia de ultrafiltros idempotentes no es trivial, y su afirmación se conoce como el Teorema de Glazer (ver [14, p. 68]).

Lema 3.45. *Sea H un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Consideremos la familia de conjuntos $\mathcal{G} := \{H \setminus F \colon F \in [H]^{<\omega}\}$ para definir*

$$K_H := \bigcap_{G \in \mathcal{G}} \overline{e[\mathrm{FS}(G)]}.$$

Afirmamos que K_H siempre es un subconjunto compacto no vacío de $\beta\mathbb{N}$ que es cerrado bajo la suma de ultrafiltros (es decir, que la condición $\mathcal{V}, \mathcal{W} \in K_H$ implica $\mathcal{V} + \mathcal{W} \in K_H$).

Demostración. Claramente $K_H \subseteq \beta\mathbb{N}$ y además, siendo una intersección de conjuntos cerrados, K_H es cerrado. Como $\beta\mathbb{N}$ es compacto, K_H termina siendo un subconjunto también compacto. En vista de esto, basta demostrar que $\mathcal{G}$ tiene la propiedad de la intersección finita (abreviada *PIF*) para concluir que K_H sea no vacío. Veamos que $\mathcal{G}$ tiene la PIF.

Sea n cualquier natural y $\{G_i\colon i \leqslant n\} \subseteq \mathcal{G}$, es decir, hay $\{F_i\colon i \leqslant n\} \subseteq [H]^{<\omega}$ de forma que para cada $i \leqslant n$, $G_i = H \setminus F_i$. Nótese que, en virtud de que H es infinito y de que $E \subseteq \mathrm{FS}(E)$, siempre que $E \subseteq \mathbb{N}$, deducimos que

$$\emptyset \neq H \setminus \bigcup_{i=0}^{n} F_i = \bigcap_{i=0}^{n} G_i \subseteq \bigcap_{i=0}^{n} \mathrm{FS}(G_i).$$

Como consecuencia,

$$\emptyset \neq e\left[\bigcap_{i=0}^{n} \mathrm{FS}(G_i)\right] \subseteq \bigcap_{i=0}^{n} e[\mathrm{FS}(G_i)] \subseteq \bigcap_{i=0}^{n} \overline{e[\mathrm{FS}(G_i)]}.$$

O sea, $\mathcal{G}$ tiene la PIF.

Únicamente nos falta verificar que K_H es cerrado bajo la suma y habremos probado el lema. Con la intención de demostrar esto último, consideremos dos ultrafiltros $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ en el conjunto K_H. Usaremos la siguiente observación, que es es consecuencia directa del lema 3.40, varias veces en lo que resta de la prueba: para todo $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$,

$$\text{la pertenencia } \mathcal{U} \in K_H \text{ equivale a que, para cada } G \in \mathcal{G}, \mathrm{FS}(G) \in \mathcal{U}. \tag{3.7}$$

Para ver que $\mathcal{V} + \mathcal{W} \in K_H$, tomemos una $G \in \mathcal{G}$ cualquiera y comprobemos que $\mathrm{FS}(G) \in \mathcal{V} + \mathcal{W}$. Ahora notemos lo siguiente, si $m \in \mathrm{FS}(G)$, entonces $m = \sum F$ para algún $F \in [G]^{<\omega}_{+}$; además la condición $G \subseteq H$ implica que $F \in [H]^{<\omega}$. Llamemos $G' := G \setminus F$. Como $G \in \mathcal{G}$, claramente $G' \in \mathcal{G}$.

Con la notación del párrafo previo: mostremos que $\mathrm{FS}(G') + m := \{y + m\colon y \in \mathrm{FS}(G')\} \subseteq \mathrm{FS}(G)$. Dado un elemento $x \in \mathrm{FS}(G') + m$ cualquiera, debe haber un $y \in \mathrm{FS}(G')$ de tal manera que $x = y + m$. También debemos poder encontrar $F' \in [G']^{<\omega}_{+}$ tal que $y = \sum F'$. Como F y F' son conjuntos ajenos, resulta que $x = y + m = \sum F' + \sum F = \sum(F \cup F')$ y naturalmente $F \cup F' \in [H]^{<\omega}_{+}$. Esto prueba la contención deseada.

De lo anterior se deduce que $\mathrm{FS}(G') \subseteq \mathrm{FS}(G) - m$. En vista de que $G' \in \mathcal{G}$ y $\mathcal{V} \in K_H$, resulta que, por (3.7), $\mathrm{FS}(G') \in \mathcal{V}$; lo cual implica que $\mathrm{FS}(G) - m \in \mathcal{V}$.

En resumen, $\mathrm{FS}(G) \subseteq \{m \in \mathbb{N}\colon \mathrm{FS}(G) - m \in \mathcal{V}\}$. Como $\mathcal{W} \in K_H$, otra vez por (3.7) sabemos que $\mathrm{FS}(G)$ es un elemento del ultrafiltro $\mathcal{W}$, lo cual, por la contención que se acaba de probar, implica que $\{m \in \mathbb{N}\colon \mathrm{FS}(G) - m \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{W}$; esto último, en virtud del lema 3.42, equivale a que $\mathrm{FS}(G) \in \mathcal{V} + \mathcal{W}$. □

Demostración del teorema 3.44. Bajo la hipótesis de que $\mathbb{N} = \bigcup_{k=0}^{r} A_k$ y como consecuencia de la proposición 3.38, obtenemos que existen $\ell \leqslant r$ y $H_0 \in [\omega]^\omega$ tales que $\mathrm{FS}(H_0) \subseteq A_\ell$. Llamemos $H := \mathrm{FS}(H_0)$ y notemos que H es infinito y que $\mathrm{FS}(H) = H$ (recuerde el lema 3.18(3)).

Ahora definamos, para nuestra H, el conjunto K_H como en el lema 3.45. Si llamamos $\mathcal{S}$ a la colección de subconjuntos cerrados no vacíos de K_H que también son cerrados bajo la suma de ultrafiltros, entonces, en particular, $K_H \in \mathcal{S}$. De este modo, $(\mathcal{S}, \supseteq)$ resulta ser un orden parcial no vacío. Probemos que satisface las demás hipótesis del Lema de Zorn.

Dada una cadena no vacía arbitraria $\mathcal{C}$ en $(\mathcal{S}, \supseteq)$, notemos que $S := \bigcap \mathcal{C} \subseteq K_H$. Además, S es cerrado pues es intersección de cerrados y, más aún, es compacto (recuerde que el espacio $\beta\mathbb{N}$ es compacto). Una observación es que como $\emptyset \notin \mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$ es una $\supseteq$-cadena, $\mathcal{C}$ tiene la PIF, y así, por compacidad, $S \neq \emptyset$.

Para ver que en efecto S es elemento de $\mathcal{S}$, y así concluir que es una cota superior (con el orden $\supseteq$) de $\mathcal{C}$, falta verificar que S es cerrado bajo la suma de ultrafiltros. Para esto, note que dados dos ultrafiltros $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ en S y $S' \in \mathcal{C}$, se tiene que $\mathcal{V}, \mathcal{W} \in S \subseteq S'$, y como $S' \in \mathcal{S}$, $\mathcal{V} + \mathcal{W} \in S'$.

En conclusión, por el Lema de Zorn, existe un elemento S en $(\mathcal{S}, \supseteq)$ que es maximal. Verifiquemos ahora que, de hecho, cualquier elemento de S es idempotente con respecto a la suma de ultrafiltros. Con esto en mente, tomemos un ultrafiltro arbitrario $\mathcal{U} \in S$. Vamos a demostrar que $\mathcal{U} + S := \{\mathcal{U} + \mathcal{V}\colon \mathcal{V} \in S\} \in \mathcal{S}$. Denotemos también, como es usual, $S + S := \{\mathcal{V} + \mathcal{W}\colon \mathcal{V}, \mathcal{W} \in S\}$.

Como la suma de ultrafiltros es continua por la izquierda y S es compacto y no vacío, $\mathcal{U} + S$ es compacto no vacío (concretamente, $\mathcal{U} + S$ es la imagen del conjunto compacto S bajo la función continua $\beta t_{\mathcal{U}}$). En especial, $\mathcal{U} + S$ es cerrado (recuerde que el espacio $\beta\mathbb{N}$ es

Hausdorff). También es sencillo ver que la pertenencia $S \in \mathcal{S}$ implica que

$$\mathcal{U} + S \subseteq S + S \subseteq S \subseteq K_H. \tag{3.8}$$

Ahora, note que por asociatividad (teorema 3.43), $(\mathcal{U}+S)+(\mathcal{U}+S) \subseteq \mathcal{U}+(S+S+S) \subseteq \mathcal{U} + S$. Con base en el último desarrollo de argumentos, concluimos que, efectivamente, $\mathcal{U} + S \in \mathcal{S}$.

Como $\mathcal{U} + S \subseteq S$ (ver (3.8)), esto implica, por la $\supseteq$-maximalidad de S, que $S = \mathcal{U} + S$. En particular para el elemento $\mathcal{U}$ debe haber un ultrafiltro $\mathcal{V}' \in S$ de tal suerte que $\mathcal{U} = \mathcal{U} + \mathcal{V}' = \beta t_{\mathcal{U}}(\mathcal{V}')$ o, dicho de otra manera, el conjunto $T := S \cap (\beta t_{\mathcal{U}})^{-1}\{\mathcal{U}\}$ es no vacío.

Demostremos que T es un elemento de $\mathcal{S}$. La contención $T \subseteq K_H$ es consecuencia trivial de que $S \subseteq K_H$. Por la continuidad de $\beta t_{\mathcal{U}}$, T es intersección de cerrados y, por implicación, cerrado. Además, es inmediato que para cualesquiera dos ultrafiltros $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ en T, como $T \subseteq S$ y $S \in \mathcal{S}$, su suma debe estar en S. Pero más aún, la asociatividad que demostramos en el teorema 3.43 nos dice que

$$\begin{aligned}
\beta t_{\mathcal{U}}(\mathcal{V} + \mathcal{W}) &= \mathcal{U} + (\mathcal{V} + \mathcal{W}) = (\mathcal{U} + \mathcal{V}) + \mathcal{W} \\
&= \beta t_{\mathcal{U}}(\mathcal{V}) + \mathcal{W} = \mathcal{U} + \mathcal{W} \\
&= \beta t_{\mathcal{U}}(\mathcal{W}) = \mathcal{U}
\end{aligned}$$

En otras palabras, $\mathcal{V} + \mathcal{W} \in (\beta t_{\mathcal{U}})^{-1}\{\mathcal{U}\}$; con ello se tiene que $\mathcal{V} + \mathcal{W} \in T$ y, finalmente, que $T \in \mathcal{S}$.

Pero como $S \supseteq T$ y S es $\supseteq$-maximal, necesariamente se da la igualdad entre ambos conjuntos. Así, en particular $T \subseteq (\beta t_{\mathcal{U}})^{-1}\{\mathcal{U}\}$, es decir, $\mathcal{U} = \beta t_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} + \mathcal{U}$.

Finalmente, como $\mathcal{U} \in S \subseteq K_H$, para cualquier $F \in [H]^{<\omega}_{+}$, se tiene que $\mathcal{U} \in \overline{e[\mathrm{FS}(H \setminus F)]}$, lo que equivale, en virtud del lema 3.40, a que $\mathrm{FS}(H \setminus F) \in \mathcal{U}$. Pero por el lema 3.18(1) y la observación hecha en el primer párrafo de la presente prueba, deducimos que $\mathrm{FS}(H \setminus F) \subseteq \mathrm{FS}(H) = H \subseteq A_\ell$. Como $\mathcal{U}$ es un filtro, se concluye que $A_\ell \in \mathcal{U}$ y, con ello, el teorema. $\square$

CAPÍTULO 4: COMBINATORIA DE PREÓRDENES

En este capítulo seguiremos la teoría y notación que se exponen en el capítulo IV de [11] sobre el tema del Forcing.

En resumen, el Forcing es una técnica de demostración para enunciados de independencia. El ejemplo clásico es la Hipótesis del Continuo, cuya independencia requirió, por parte de Paul Cohen en 1963, el primer uso histórico del Forcing. Conviene un breve resumen de dicho acontecimiento para motivar los temas a continuación.

Desde finales del siglo XIX, el matemático alemán Georg Cantor se había hecho la siguiente pregunta. ¿Existe un conjunto cuya cardinalidad se encuentre estrictamente entre la de los números naturales y la de los número reales? Responder negativamente a la pregunta se conoce como la *Hipótesis del Continuo* (abreviada CH por sus siglas en inglés), y fue uno de los 23 problemas propuestos por Hilbert en 1900. Usando trabajos previos de Gödel y su recién inventada técnica del Forcing, Cohen resolvió el problema, probando que CH (y también el Axioma de Elección) es independiente de ZFC, labor por la cual se ganó la Medalla Fields.

Concretamente, esta técnica consiste en tomar un modelo V, transitivo y numerable, suficientemente amplio de ZFC para luego extenderlo a otro modelo en donde se cumpla algún enunciado específico; como ejemplo, que existan suficientes subconjuntos de ω como para que CH sea falso. La forma usual de extender a V es añadiendo un objeto G, llamado *filtro genérico*, y así obteniendo el nuevo modelo $V[G]$, el cual, de hecho, resultará ser la mínima extensión de V que contenga a G como elemento. Dicho G se construye a partir de un preorden $\mathbb{P} \in V$: como V es numerable, el número total de subconjuntos densos en $\mathbb{P}$ que son elementos de V es, a lo sumo, ω. Como consecuencia del Lema de Rasiowa-Sikorski (teorema 1.5), hay un filtro genérico G.

Lo que nos parece relevante para los fines de esta tesis es la relación que tiene el preorden $\mathbb{P}$ con la extensión $V[G]$ que se produce. Específicamente, encontraremos que los enunciados que se pueden probar en el modelo $V[G]$ dependen íntimamente de las propiedades combinatorias de $\mathbb{P}$. Para un ejemplo particular, si $\mathbb{P}$ es ccc (i.e., toda anticadena en $\mathbb{P}$ es numerable), entonces $V[G]$ no colapsa cardinales, en otras palabras, los siguientes enunciados son equivalentes para cualquier conjunto κ.

1. $\kappa \in V$ y $V \models \kappa$ es un cardinal.

2. $\kappa \in V[G]$ y $V[G] \models \kappa$ es un cardinal.

Dicho resultado es consecuencia de que podemos replicar la prueba de que $\mathbb{P}$ es ccc dentro del modelo base V (pues éste modela suficientes axiomas de ZFC), y así $V \models (\mathbb{P}$ es ccc$)$. Finalmente, por implicación de [11, Theorem 3.4, p. 264], se tienen las equivalencias anteriormente citadas.

En este capítulo estudiaremos con más detalle algunos de los preórdenes que fueron usados en secciones pasadas, haciendo énfasis en sus propiedades combinatorias.

4.1 El preorden del Teorema de Ramsey

Recordemos brevemente el preorden definido en la demostración del Teorema de Ramsey (definición 3.9).

En primer término, fijamos $r < 2$ y una coloración $c\colon [\omega]^2 \longrightarrow 2$ para la cual no existe un subconjunto infinito de ω que sea c-homogéneo de color $1 - r$. De este modo, $\mathbb{P}$ consiste de todas las parejas $p := (a_p, A_p) \in [\omega]^{<\omega} \times [\omega]^\omega$ tales que:

1. para todo $k \in a_p$ y todo $l \in A_p$, $k < l$;

2. $c \restriction [a_p]^2$ es la función constante r y

3. para todo $y \in [a_p]^1$ y todo $x \in [A_p]^1$ se cumple que $c(y \cup x) = r$.

El orden $\preceq$ queda definido como $q \preceq p$ si y sólo si a_p es segmento inicial de a_q, $A_q \subseteq A_p$ y $a_q \setminus a_p \subseteq A_p$.

En aras de conectar la introducción de este capítulo con el preorden que se acaba de definir, demostraremos que $\mathbb{P}$ no es ccc. Observemos que, por vacuidad, si X es un subconjunto infinito de números naturales, entonces $(\emptyset, X) \in \mathbb{P}$; dicha observación será usada sin citar en lo que resta de la sección. También es conveniente recordar la definición 1.3 para los símbolos empleados a continuación.

Lema 4.1. *Sean $X, Y \in [\omega]^\omega$. Entonces, $(\emptyset, X) \perp (\emptyset, Y)$ es equivalente a que $X \cap Y$ sea finito.*

Demostración. Por doble contrapuesta: si, por un lado, $X \cap Y$ fuese infinito, entonces se verifica rápidamente con las definiciones previas que $(\emptyset, X \cap Y) \in \mathbb{P}$, que $(\emptyset, X \cap Y) \leqslant (\emptyset, X)$ y, finalmente, que $(\emptyset, X \cap Y) \leqslant (\emptyset, Y)$. Es decir, $(\emptyset, X) \mid (\emptyset, Y)$.

Si, por otro lado, existiese $(a, A) \in \mathbb{P}$ que atestigüe la compatibilidad de $(\emptyset, X)$ y $(\emptyset, Y)$, o sea $(a, A) \leqslant (\emptyset, X), (\emptyset, Y)$, entonces, la definición del orden en $\mathbb{P}$ inmediatamente nos arroja que a y A son subconjuntos de X y de Y, en particular, $A \subseteq X \cap Y$. Pero como $(a, A) \in \mathbb{P}$, A es infinito y, en consecuencia, también lo es $X \cap Y$. $\square$

Teorema 4.2. *Hay una anticadena en $\mathbb{P}$ de tamaño $\mathfrak{c}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{D} \subseteq [\omega]^\omega$ una familia casi ajena de tamaño $\mathfrak{c}$, por ejemplo, aquella construida en el lema 1.1. Entonces, por ser casi ajena y por el lema anterior, $\mathcal{A} := \{(\emptyset, X) \colon X \in \mathcal{D}\} \subseteq \mathbb{P}$ es una anticadena de tamaño $\mathfrak{c}$. $\square$

Además, si $A \subseteq \mathbb{P} \subseteq [\omega]^{<\omega} \times [\omega]^\omega$, un simple cálculo de cardinalidad nos dice que $|A| \leqslant \omega \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$. Así, la anticadena producida en el teorema anterior tiene tamaño máximo en $\mathbb{P}$. De este modo, $\mathbb{P}$ no sólo no es ccc, sino está muy lejos de serlo.

A continuación definiremos una *noción de forcing* (i.e., un preorden con elemento máximo) equivalente a *Mathias Forcing* (ver [10, Definition 26.24, p. 524]).

Teniendo un conjunto infinito $H \subseteq \omega$ podemos definir

$$\mathbb{M}_H := \{(a, A) \in [H]^{<\omega} \times [H]^\omega \colon \forall\, k \in a\ \forall\, l \in A\ (k < l)\}$$

y equiparlo con el mismo orden $\preceq$ que se definió en $\mathbb{P}$.

Para una condición $p \in \mathbb{P}$, abreviemos el conjunto de elementos $q \in \mathbb{P}$ tales que $q \prec p$ (esto significa que $q \preceq p$ y $p \neq q$) por $\mathbb{P} \restriction p$.

Le pedimos al lector que recuerde la demostración del Teorema de Ramsey que mostramos en este trabajo; concretamente, referimos la atención hacia el corolario 3.11. El siguiente resultado muestra que dicho corolario de hecho es equivalente al Teorema de Ramsey, en el sentido de que probar que cada elemento de $\mathbb{P}$ se puede extender en su parte finita (tal y como se enuncia a continuación), es lo mismo que probar que existe un conjunto homogéneo en cualquier subconjunto infinito de ω.

Teorema 4.3. *Los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. *Para todo $p \in \mathbb{P}$, existe $q \in \mathbb{P} \restriction p$ de forma que $|a_p| < |a_q|$.*

2. *Para todo $p \in \mathbb{P}$ y cualquier $n < \omega$, existe $q \in \mathbb{P} \restriction p$ de forma que $|a_p| + n < |a_q|$.*

3. *Para cualquier $X \in [\omega]^\omega$, hay un $H \in [X]^\omega$ c-homogéneo de color r de tal suerte que $\mathbb{P} \restriction (\emptyset, H) = \mathbb{M}_H$.*

4. *Para cualquier $X \in [\omega]^\omega$, hay un $H \in [X]^\omega$ de manera que H es c-homogéneo de color r.*

Demostración. La prueba de que el inciso (1) implica el inciso (2) es una simple aplicación del Principio de Inducción. Para $n = 0$, los enunciados (1) y (2) de hecho son idénticos. Supongamos que demostramos el inciso (2) para algún número natural n y un $p \in \mathbb{P}$ cualquiera, es decir, supongamos que sabemos que existe $q' \in \mathbb{P} \restriction p$ de forma que $|a_p| + n < |a_{q'}|$. Por el inciso (1), podemos hallar $q \in \mathbb{P} \restriction q'$ que satisfaga $|a_{q'}| < |a_q|$. Pero por la transitividad de $\prec$, $q \in \mathbb{P} \restriction p$ y también $|a_p| + (n+1) \leqslant |a_{q'}| < |a_q|$, como se quería probar.

En aras de demostrar que (2) implica (3), tomemos arbitrariamente $X \in [\omega]^\omega$. De esta forma, $(\emptyset, X) \in \mathbb{P}$. Para cada $n < \omega$, definamos el conjunto $D_n := \{q \in \mathbb{P} \colon n \leqslant |a_q|\}$ y observemos que la densidad de D_n es consecuencia inmediata de la hipótesis. Usando el teorema 1.5 con $\mathcal{D} := \{D_n \colon n < \omega\}$, existe F, un filtro $\mathcal{D}$-genérico en $\mathbb{P}$, que satisface $(\emptyset, X) \in F$.

Afirmamos que

$$H := \bigcup_{p \in F} a_p$$

cumple lo requerido.

Como para todo número natural n se tiene que existe $p \in F \cap D_n$ (por genericidad de F), podemos deducir que $n \leqslant |a_p| \leqslant |H|$. En consecuencia, H no puede ser finito.

Ahora, para ver que $H \subseteq X$, tomamos un elemento cualquiera $q \in F$. Dado que F es un filtro y $q, (\emptyset, X) \in F$, podemos encontrar una extensión común de ambos elementos en F, o sea, hay un $t \in F$, de tal suerte que $t \preceq q$ y $t \preceq (\emptyset, X)$. La primera de estas desigualdades tiene como consecuencia particular que $a_q \subseteq a_t$, mientras que la segunda implica que, además, $a_t = a_t \setminus \emptyset \subseteq X$, es decir, $a_q \subseteq X$.

Veamos ahora que H es c-homogéneo de color r. Tomemos una pareja $\{x, y\} \in [H]^2$ cualquiera. Por definición de H, existen $p, q \in F$ tales que x y y son elementos respectivos de a_p y a_q. Usemos nuevamente que F es un filtro para hallar $t \in F$ tal que $t \preceq p, q$; esto a su vez quiere decir, en especial, que $\{x, y\} \subseteq a_t$. Para concluir, el segundo inciso de la definición de $\mathbb{P}$ inmediatamente nos arroja que $c(\{x, y\}) = r$. Sólo nos falta verificar que $\mathbb{P} \restriction (\emptyset, H) = \mathbb{M}_H$.

Por un lado, si $(a, A) \in \mathbb{M}_H$, el inciso (1) de la definición de $\mathbb{P}$ para (a, A) ya está dado. Además, los incisos (2) y (3) de la definición de $\mathbb{P}$ son consecuencia de la homogeneidad de H y de la inclusión $a \cup A \subseteq H$.

Por otro lado, si $p \in \mathbb{P} \restriction (\emptyset, H)$, entonces por la definición del orden tenemos que $A_p \subseteq H$ y que $a_p = a_p \setminus \emptyset \subseteq H$, es decir, $p \in \mathbb{M}_H$ pues también satisface la condición (1) de la definición de $\mathbb{P}$. Los últimos dos párrafos conforman la prueba de que $\mathbb{P} \restriction (\emptyset, X) = \mathbb{M}_H$.

Que (3) implica (4) es trivial.

Para ver que (1) es consecuencia de (4), sea $p \in \mathbb{P}$. Por hipótesis, existe $H \in [A_p]^\omega$ c-homogéneo de color r. Hagamos $\ell := \min H$ y definamos $a_q := a_p \cup \{\ell\}$ y $A_q := H \setminus \{\ell\}$. Por el hecho de que $H \subseteq A_p$ y la condición (1) de la definición de $\mathbb{P}$, deducimos que $\ell \notin a_p$. Consecuentemente, $|a_p| < |a_q|$. Comprobemos a continuación que $(a_q, A_q) \in \mathbb{P}$.

Por lo expuesto en el párrafo previo, el inciso (1) de nuestra definición de $\mathbb{P}$ se cumple. Con respecto a (2), tomemos $e \in [a_q]^2$. Si $\ell \notin e$, entonces, de hecho, $e \in [a_p]^2$ y así, $c(e) = r$. Cuando $\ell \in e$ se sigue que $e \setminus \{\ell\} \in [a_p]^1$ y $\{\ell\} \in [A_p]^1$, con lo cual, $c(e) = c((e \setminus \{\ell\}) \cup \{\ell\}) = r$.

Finalmente, para el inciso (3), fijemos $y \in [a_q]^1$ y $x \in [A_q]^1$. En el caso en que $\ell \notin y$, se tiene que $y \in [a_p]^1$ y $x \in [A_p]^1$; en consecuencia, $c(y \cup x) = r$. Ahora, la igualdad $y = \{\ell\}$ nos da $y \cup x \in [H]^2$ y de esta forma, $c(x \cup y) = r$.

Para comprobar que $(a_q, A_q) \prec p$, observe que a_p es segmento inicial de a_q, que $A_q \subseteq H \subseteq A_p$ y que $a_q \setminus a_p = \{\ell\} \subseteq H \subseteq A_p$. $\square$

Denotemos $\mathbb{M} := \mathbb{M}_\omega$. Recordemos que un filtro $G \subseteq \mathbb{M}$ es $(V, \mathbb{M})$-genérico si interseca a todos los subconjuntos densos de $\mathbb{M}$ que son elementos del modelo base V.

Lema 4.4. *Sea G un filtro $(V, \mathbb{M})$-genérico. Entonces,*

$$x_G := \bigcup_{p \in G} a_p$$

es infinito.

La demostración de este lema resultará muy familiar a como se probó que, en el teorema 4.3, H es infinito; sin embargo, podremos prescindir de la inducción que hicimos para la implicación (4) $\implies$ (1) porque $\mathbb{M}$ no habla de homogeneidad, y por lo tanto, el argumento queda más sencillo.

Demostración. Empecemos por definir, para cada $n < \omega$, $D_n := \{p \in \mathbb{M} \colon n \leqslant |a_p|\}$ y veamos que es denso en $\mathbb{M}$. Dado $p \in \mathbb{M}$, como A_p es infinito, existe $m < \omega$ de tal modo que $m \cap A_p$ posee, al menos, n elementos. Intuitivamente, seleccionamos del conjunto A_p al menos los primeros n elementos. Luego, $q := (a_p \cup (m \cap A_p), A_p \setminus m)$ es un elemento de $\mathbb{M}$ que extiende a p, y claramente a_q tiene al menos n elementos, es decir, $q \in D_n$.

En particular, por genericidad, para toda $n < \omega$, existe $p \in G \cap D_n$, es decir, $n \leqslant |a_p| \leqslant |x_G|$. Esto prueba que x_G debe ser infinito. $\square$

4.2 El preorden del Teorema de Hindman

Pensemos ahora en una generalización del preorden de la sección previa. En lugar de tomar una pareja (a_p, A_p) de subconjuntos de números naturales, pensemos una pareja donde cada elemento de a_p y A_p es un subconjunto de naturales. Siguiendo la misma idea de que "a_p se encuentra a la izquierda de A_p", podemos pedirle dicha restricción a cada nueva pareja. De manera similar, a_p seguirá siendo finito y A_p infinito. El orden entre las parejas del preorden también es análogo. Así se construye el preorden usado en la demostración del Teorema de Hindman.

Inspirados en el párrafo anterior, recordemos que $\mathbb{P}$, el preorden empleado en la prueba del Teorema de Hindman, consiste de todas las parejas $p = (a_p, \mathcal{D}_p)$ de sucesiones de bloques (ver definición 3.33) donde a_p es finita, $\mathcal{D}_p$ es infinita y para todo $\ell \in s_p$ y $d \in \mathcal{D}_p$, $\max \ell < \min d$. El orden es determinado por la fórmula $p \preceq q$ si y sólo si a_q es segmento inicial de a_p, $\mathcal{D}_p \sqsubseteq \mathcal{D}_q$ y $a_p \setminus a_q \in \mathrm{FU}(\mathcal{D}_q)$. Si, en particular, cada elemento de a_p y de $\mathcal{D}_p$ tiene cardinalidad 1, entonces podemos observar que, esencialmente, tenemos el mismo preorden que aquel definido en la sección anterior.

Para simplificar la notación, convengamos que si a es una sucesión finita de bloques, a^* va a ser la (única) función suprayectiva de $|a|$ en a de tal modo que para todo $i < |a|$, si $i + 1 < |a|$, entonces $\max a^*(i) < \min a^*(i+1)$.

Proposición 4.5. *Para dos sucesiones finitas de bloques, a y b, a es segmento inicial de b si y sólo si $a^* \subseteq b^*$.*

Demostración. Supongamos que a es un segmento inicial de b, es decir, que para algún número natural n se tiene que $a = \{d \in b \colon \max d < n\}$. Dado $k < |a|$ arbitrario, como $a^*(k) \in a$, en particular, $a^*(k) \in b$. Entonces, por la sobreyectividad y la unicidad de b^*, $b^*(k) = a^*(k)$. Se concluye que $a^* \subseteq b^*$.

Ahora demos por hecho que $a^* \subseteq b^*$. Primeramente, notemos que si se diera el caso $a = \emptyset$, es trivial que $a = \{d \in b \colon \max d < 0\}$. Supongamos entonces que a es no vacía. Si $n := \max a^*(|a| - 1)$, entonces, es claro que por la propiedad

$$\text{para todo } \; i < |a|, \text{ si } \; i + 1 < |a|, \text{ entonces } \; \max a^*(i) < \min a^*(i+1), \tag{4.1}$$

para cualquier $d \in a$, $\max d \leqslant n$. Afirmamos que $a = \{d \in b \colon \max d \leqslant n\}$, con lo cual se terminaría la prueba.

Por un lado, si d es cualquier bloque en a, $a^*(k) = d$ para algún $k < |a|$. Por hipótesis, esto implica que $b^*(k) = d$, es decir, $d \in b$ y además $\max d \leqslant n$.

Por otro lado, si tomamos cualquier $d \in b$ de forma que $\max d \leqslant n$, entonces, para alguna $k < |b|$, $b^*(k) = d$. Como $\max d \leqslant n$ y por (4.1), $k \leqslant |a| - 1 < |a|$; en consecuencia, $a^*(k) = b^*(k) = d$, es decir, $d \in a$. $\square$

Sean G un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico y $\mathcal{D}$ una sucesión infinita de bloques. Definamos

$$x_G := \bigcup \operatorname{dom} G.$$

Lema 4.6. *Bajo las hipótesis del párrafo anterior, x_G siempre es una sucesión infinita de bloques.*

Demostración. Como G es un filtro, la colección $\{a^* \colon a \in \operatorname{dom} G\}$ es un sistema compatible de funciones (recuerde la proposición 4.5 y el orden en $\mathbb{P}$); por lo tanto,

$$g := \bigcup \{a^* \colon a \in \operatorname{dom} G\}$$

es una función.

Afirmamos ahora, similar a como se hizo en la prueba del lema 4.4, que, para cada $n < \omega$, el conjunto $D_n := \{p \in \mathbb{P} \colon n \leqslant |a_p|\}$ es denso en $\mathbb{P}$. Con esto en mente, tomemos arbitrariamente $p \in \mathbb{P}$ y notemos que, siendo $\mathcal{D}_p$ infinito, debe haber un natural m de tal suerte que el conjunto $\mathcal{D} := \{d \in \mathcal{D}_p \colon \max d \leqslant m\}$ tiene al menos n elementos. Nos resta verificar que $q := (a_p \cup \mathcal{D}, \mathcal{D}_p \setminus \mathcal{D})$ es un elemento de $\mathbb{P}$ que está por debajo de p, pero ambas cosas son consecuencia directa de que $p \in \mathbb{P}$ y la definición de q. Como efectivamente $q \in D_n$, se tiene la densidad de dicho conjunto.

Por genericidad de G, para toda $n < \omega$ existe $p \in G$ tal que $n \leqslant |a_p|$, lo que implica que $n \subseteq \operatorname{dom}(a^*) \subseteq \operatorname{dom} g$ y, en consecuencia, que $\operatorname{dom} g = \omega$. También notemos que

$$\operatorname{img} g = \bigcup \{\operatorname{img}(a^*) \colon a \in \operatorname{dom} G\} = \bigcup \{a \colon a \in \operatorname{dom} G\} = x_G.$$

Ahora tomemos $i < \omega$ y fijemos $a \in \operatorname{dom} G$ con $i + 1 \in \operatorname{dom}(a^*)$. Finalmente, las desigualdades $\max g(i) = \max a^*(i) < \min a^*(i+1) = \min g(i+1)$ concluyen la prueba de que x_G es una sucesión infinita de bloques. $\square$

Como el filtro G siempre es un elemento de la extensión genérica $V[G]$ y por la transitividad de la misma, resulta que x_G es un elemento infinito de $V[G]$. Decimos que x_G es un objeto nuevo, comúnmente referido como *real*, que se añade al forzar con el respectivo preorden. En nuestros dos ejemplos de preórdenes de la sección, forzar con éstos añade un real al modelo base V.

Al principio de la sección, mencionamos un preorden conocido como Mathias Forcing, que añade un *real de Mathias*, definido como x_G en el lema 4.4. De acuerdo con [5], se puede probar que el preorden $\mathbb{P}$, discutido en esta última sección de la tesis, también añade un real de Mathias. Sin embargo, a pesar de su similitud, $\mathbb{P}$ y Mathias Forcing producen extensiones genéricas distintas, es decir, no son equivalentes como nociones de Forcing.

REFERENCIAS

[1] J.E. Baumgartner, *A short proof of Hindman's theorem*, Journal of Combinatorial Theory, 17: 384-386, 1974.

[2] F. Casarrubias Segura y Á. Tamariz Mascarúa, *Elementos de topologıa general*, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2012.

[3] D. Fernández-Bretón y Assaf Rinot, *Strong failures of higher analogs of Hindman's Theorem*, Transactions of the American Mathematical Society 369 no. 12, 2017.

[4] L.M. García-Ávila, *Forcing proofs of Ramsey's Hindman's Theorems*, en: RIMS Proceedings of the Symposium on Reflection Principles and Set Theory of Large Cardinals, No. 1895. RIMS Kôkyûroku, Universidad de Kioto, Kioto, Japón, 2014.

[5] L.M. García-Ávila, *A forcing notion related to Hindman's theorem*, en: Mathematical Logic, 54:133-159, Springer, 2015.

[6] R.L. Graham, B.L. Rothschild y J.H. Spencer, *Ramsey Theory*, Wiley-Interscience, Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization, 1990.

[7] L.J. Halbeisen, *Combinatorial Set Theory*, Springer, Springer Monographs in Mathematics, 2011.

[8] F. Hernández Hernández, *Teoría de Conjuntos (una introducción)*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos 13, Sociedad Matemática Mexicana, 1998.

[9] N. Hindman, *Finite sums from sequences within cells of a partition of N*, Journal of Combinatorial Theory, 17: 1-11, 1974.

[10] T. Jech, *Set Theory. The Third Millennium Edition, revised and expanded*, Springer, Springer Monographs in Mathematics, Berlin, 2002

[11] K. Kunen, *Set theory. An introduction to independence proofs*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 102, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980.

[12] R. Pichardo Mendoza y Á. Tamariz Mascarúa, *Álgebras booleanas y espacios topológicos*, Colección Aportaciones Matemáticas, Serie Textos; 40, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2017.

[13] M. Spivak, *Cálculo Infinitesimal*, Segunda edición, Editorial Reverté, S.A., 1996.

[14] S. Todorcevic, *Topics in Topology*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1997.