



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ARAGÓN

Estudio de estabilidad de un vehículo eléctrico de competencia.

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE INGENIERO
MECÁNICO

P R E S E N T A :

Misael Fuente Castillo

ASESOR:

M. en I. HUMBERTO MANCILLA ALONSO

CIUDAD NEZAHUALCÓYOTL, ESTADO DE MÉXICO,

OCTUBRE 2019





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE DE FIGURAS	iii
ÍNDICE DE TABLAS	vi
INTRODUCCIÓN	2
OBJETIVO.....	6
OBJETIVOS PARTICULARES.....	6
CONTEXTO	7
ESTADO DEL ARTE.....	14
CLASIFICACIÓN DE SUSPENSIONES	14
EL NEUMÁTICO	25
EL RESORTE	28
EL AMORTIGUADOR.....	30
FUNCIÓN DE ENTRADA.....	32
MODELO DINÁMICO DE LA SUSPENSIÓN McPHERSON Y DOBLE TRIÁNGULO.....	34
ECUACIONES DIFERENCIALES.....	35
SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES.....	38
VARIABLES DE ESTADO	39
SUSPENSIÓN MCPHERSON	41
SUSPENSIÓN DOBLE TRIÁNGULO.....	46
SIMULACIÓN DINÁMICA	53
RESULTADOS.....	58
RESPUESTA LIBRE.....	60
RESPUESTA TOTAL	65
DIAGRAMA DE FASES EN RESPUESTA LIBRE.....	72
DIAGRAMA DE FASES EN RESPUESTA FORZADA.....	77
ANÁLISIS DE RESULTADOS	81
CONCLUSIONES	83
REFERENCIAS	84

INDICE DE FIGURAS

Figura 1 Representación Gráfica de la configuración frontal de suspensiones en el programa ADAMS obtenido de Harty, Damian y Blundell Mike(2004)	15
Figura 2 Representación gráfica de la configuración de suspensiones traseras en ADAMS/Chassis recuperado de Harty, Damian y Blundell Mike(2004)	16
Figura 3 ángulo de camber positivo (Izquierda) y camber negativo (derecha) obtenido de Abela Posada Fernando Ricardo, 2014.....	17
Figura 4 Ángulos de convergencia y divergencia recuperado de Abela Posada Fernando Ricardo (2014)	18
Figura 5 Diagrama de cuerpo libre clásico para un cuarto de vehículo recuperado de Harty, Damian y Blundell Mike(2004) p. 137.	21
Figura 6 Diagrama de cuerpo libre de un cuarto de suspensión pasiva de dos grados de libertad recuperado de Gosselin-Brison Samuel (2006), p 22.	23
Figura 7 Diagrama de cuerpo libre para una suspensión simple recuperado de Güler, Duygu (2006) p.21	24
Figura 8 Obtención de la masa del neumático que se usa para el modelo	28
Figura 9 Esquema de un amortiguador traslacional recuperado de (Ogata Katsuhiko, 1987 p. 23).	31
Figura 10 MODELO PARA UNA SUSPENSIÓN MCPHERSON.....	41
Figura 11 Diagrama de cuerpo libre del resorte	43
Figura 12 Diagrama de cuerpo libre para la suspensión Doble triángulo	46
Figura 13 Simplificación del movimiento lineal.	48
Figura 14 Ángulos que influyen en φ	49
Figura 15 Diagrama de cuerpo libre del resorte.....	50
Figura 16 Descripción de los parámetros que deben de ser ingresados para que MATLAB resuelva una ecuación diferencial con la función ODE45	53
Figura 17 Representación de las ecuaciones de variables de estado del modelo de la suspensión McPherson en MATLAB.....	54
Figura 18 Condiciones iniciales que se han de incluir en la función	55
Figura 19 Condiciones iniciales para el funcionamiento de la función ODE45	56
Figura 20 Declaración de las condiciones iniciales para la resolución del modelo doble triángulo	56
Figura 21 Representación del vector de variables de estado de la configuración doble triángulo para MATLAB.....	56
Figura 22 Declaración de las condiciones iniciales que serán sustituidas en el vector que representa las variables de estado.	57
Figura 23 Declaración de los valores de la función ODE 45 para la función doble triángulo	57
Gráfica 1 Representación de la velocidad y la aceleración de un sistema masa resorte.....	58
Gráfica 2 Sistema masa resorte representado en la suspensión McPherson. $m_1=0.9$ [kg], $m_2=50$ [kg], $k_2=64.75$ [N/m], $f(t)=0$, $b=0$	59
Gráfica 3 Sistema masa resorte representado en la suspensión Doble triángulo. $m_1=0.9$ [kg], $m_2=50$ [kg], $k_2= 64.75$ [N/m], $f(t)=0$, $b=0$	59
Gráfica 4 Comparación de la respuesta libre con un resorte suave (64.78 [N/m]) y amortiguador suave (1273[N/m/s]) para las configuraciones McPherson y Doble triángulo.	60
Gráfica 5 Comparación de la respuesta libre resorte suave (64.78 [N/m]) y amortiguador medio (1485[N/m/s]) de las configuraciones McPherson y Doble triángulo.	61

Gráfica 6 Comparación de la respuesta libre resorte suave (64.78 [N/m] y amortiguador medio (1697[N/m/s])) de las configuraciones McPherson y Doble triángulo.	61
Gráfica 7 Comparación de la respuesta libre resorte medio (154.68 [N/m] y amortiguador suave (1273[N/m/s])) de las configuraciones McPherson y Doble triángulo	62
Gráfica 8 Comparación de la respuesta libre resorte medio (154.68[N/m] y amortiguador medio (1485[N/m/s])) de las configuraciones McPherson y Doble triángulo	62
Gráfica 9 2Comparación de la respuesta libre resorte medio (154.68 [N/m])y amortiguador duro (1697[N/m/s])) de las configuraciones McPherson y Doble triángulo.....	63
Gráfica 10 Comparación de la respuesta libre resorte duro (924.97 [N/m] y amortiguador medio (1273[N/m/s])) de las configuraciones McPherson y Doble triángulo	64
Gráfica 11 Comparación de la respuesta libre resorte duro (924.97 [N/m] y amortiguador medio (1485[N/m/s])) de las configuraciones McPherson y Doble triángulo	64
Gráfica 12 Comparación de la respuesta libre resorte duro (924.97 [N/m] y amortiguador duro (1697[N/m/s])) de las configuraciones McPherson y Doble triángulo	65
Gráfica 13 Comparación entre suspensión McPherson (color azul) y Doble triángulo (Color naranja) $k_2=924.97$, $b=1967$, $\omega=0.5$, $A= 1$	66
Gráfica 14 Comparación entre la suspensión McPherson (color azul) y Doble triángulo (Color naranja) $k_2=924.97$, $b=1485$, $\omega=0.5$, $A= 1$	67
Gráfica 15 Comparación entre la suspensión McPherson (color azul) y Doble triángulo (Color naranja) $k_2=924.97$, $b=1273$, $\omega=0.5$, $A= 1$	67
Gráfica 16 Comparación entre la suspensión McPherson (color azul) y Doble triángulo (Color naranja) $k_2=64.97$, $b=1273$, $\omega=0.5$, $A= 1$	68
Gráfica 17 Comparación entre la suspensión McPherson (color azul) y Doble triángulo (Color naranja) $k_2=64.97$, $b=1485$, $\omega=0.5$, $A= 1$	69
Gráfica 18 Comparación entre la suspensión McPherson (color azul) y Doble triángulo (Color naranja) $k_2=64.97$, $b=1967$, $\omega=0.5$, $A= 1$	69
Gráfica 19 Comparación entre la suspensión McPherson (color azul) y Doble triángulo (Color naranja) $k_2=154.68$, $b=1273$, $\omega=0.5$, $A= 1$	70
Gráfica 20 Comparación de los diagramas de fases (Velocidad vs Aceleración) de la suspensión McPherson y Doble triángulo $k_2= 64.78$, $b=1273$	73
Gráfica 21 Comparación de los diagramas de fases (Velocidad vs Aceleración) de la suspensión McPherson y Doble triángulo $k_2= 64.78$, $b=1485$	74
Gráfica 22 Comparación de los diagramas de fases (Velocidad vs Aceleración) de la suspensión McPherson y Doble triángulo $k_2= 64.78$, $b=1697$	74
Gráfica 23 Comparación de los diagramas de fases (Velocidad vs Aceleración) de la suspensión McPherson y Doble triángulo $k_2= 154.68$, $b=1273$	75
Gráfica 24 Comparación de los diagramas de fases (Velocidad vs Aceleración) de la suspensión McPherson y Doble triángulo $k_2= 924.97$, $b=1273$	76
Gráfica 25 Comparación de los diagramas de fases (Velocidad vs Aceleración) de la suspensión McPherson y Doble triángulo $k_2= 924.97$, $b=1485$	76
Gráfica 26 Comparación de los diagramas de fases (Velocidad vs Aceleración) de la suspensión McPherson y Doble triángulo $k_2= 924.97$, $b=1697$	77
Gráfica 27 Comparación de los diagramas de fases (Velocidad vs Aceleración) de la suspensión McPherson y Doble triángulo $k_2= 924.97$, $b=1697$	78
Gráfica 28 Comparación entre los diagramas de fases (Aceleración vs Velocidad) entre una suspensión McPherson y una Doble triángulo $k_2=154.68$, $b= 1485$	79
Gráfica 29 Comparación entre los diagramas de fases (Aceleración vs Velocidad) entre una suspensión McPherson y una Doble triángulo $k_2=154.68$, $b= 1273$	80

Gráfica 30 Comparación entre los diagramas de fases (Aceleración vs Velocidad) entre una suspensión McPherson y una Doble triángulo $k_2=64.75$, $b= 1273$ 80

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Comparación de parámetros entre diversos tipos de suspensiones extraído de (Mhod et al, 2018, p. 5).....	20
Tabla 2 Resultados medidos y calculados, Matias llanta TS05 10.0/75-15.3 PR10 obtenido de Kučera M., Helexa M., y Čedík J. (2016), p.1365.....	26
Tabla 3 Valores de los componentes para el modelo de un cuarto de vehículo recuperado de Gosselin-Brisson Samuel (2006) p. 23	27
Tabla 4 Características de los elementos de la suspensión. Recuperado de Güler, Duygu (2006) p. 30.....	27
Tabla 5. Elasticidad del resorte recuperado de Muhammad Zahir Hassan, et al, 2016, p.5166.	30
Tabla 6. Definición de los modos de amortiguamiento obtenida de Choon-Tae Lee, Byung-Young Moon (2006).....	32

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Nacional Autónoma de México por la oportunidad que me ha brindado de realizar estudios de secundaria, prepa y superior.

A la Facultad de Estudios Superiores Aragón que me ha brindado los conocimientos necesarios para la vida profesional, los amigos y las experiencias que me han formado desde que ingresé en el plantel.

A mis padres sin los cuales no podría ser la persona que hoy soy, ya que sin su apoyo incondicional y su guía en este trabajo no sería posible de gran manera la realización de este trabajo.

A mi hermana por su escucha y paciencia.

Al Club de Mecatrónica por haber ayudado a complementar mi formación académica y brindarme la oportunidad de conocer a grandes amigos.

A mis amigos por estar incondicionalmente, sus consejos, sus risas y su apoyo. Héctor Leon, Edgar Medina, Daniel Lozano, Victor G. Hernández, Daniel Cerón, Fernando Rubio, Daniela Contreras, Juan Escalante, Iván Pérez, Daniel Pérez, Cesar Camacho, Luis A. Rodríguez, Carlos Josaphat, Alan Garduño.

Al M. en I. Sabino Henry Escamilla Tolosa, por haber apoyado

A mis sínodos Dr. Patricio Martínez Zamudio, M. en I Francisco de Matías Aguilar y al M. en C. e I. Gerardo González Hernández.

Al programa de Apoyo de Titulación para Egresados de la UNAM a través de estancia académica en el extranjero (TEE).

Al Dr. Vikram Pakrashi por haberme brindado la confianza y la oportunidad de ver la ingeniería y el mundo desde un punto de vista diferente.

Al grupo del Laboratorio de Dinámica de Sistemas y Riesgos de la University College Dublin por abrirme sus puertas y su amistad, La paciencia de George Vathakkatil Joseph, La serenidad de Favour Okosun, a las pláticas con Paul Mucchielli, a la amistad de Seevani Bali. A la Dra. Manita Dangol por su gran amistad, pláticas, paciencia y la determinación que la caracteriza. A la Dra. Lilibeth Zambrano por las pláticas y su gran ejemplo a seguir y toda su amistad.

A Roberto Rodríguez Hernández por el apoyo incondicional que me brindo.

INTRODUCCIÓN

En esta tesis se presenta el desarrollo de la investigación para la selección entre la configuración del mecanismo de suspensión McPherson y doble triángulo; así como de las características de los elementos que sean más adecuados para un vehículo eléctrico, cuyo propósito final es competir en el certamen del *Electratón* realizada a lo largo del país y en diferentes sedes. Los orígenes del *Electratón* se remontan al año de 1978, la primera edición que se llevó a cabo en el autódromo de Donington Park, al noreste de la localidad de Leicestershire en el Reino Unido de Gran Bretaña e Irlanda del Norte con el nombre de *Lucas Electrathon* y que posteriormente se realizó en otros países como Australia, Estados Unidos de Norteamérica y en la República Mexicana. (Newman Perran, 1993).

Es de particular interés para este trabajo enfocarse en el sistema de suspensión del vehículo, su principal función es absorber las vibraciones producidas por el camino y otras fuentes como las que podrían ser generadas por el motor, (Gosselin-Brison Samuel, 2006) así como también las producidas por los efectos de bamboleo o guiñadas generadas al momento de tomar una curva o una frenada brusca (Muhammad Zahir Hassan, Mohd Kamarul Hafis Abdul Aziz, Frank Delbressine and Matthias Rauterberg, 2016) y mantener en contacto en todo momento el neumático con la ruta.

Tanto los orígenes de la suspensión automotriz como el nombre que lleva este mecanismo (utilizado actualmente para amortiguar las vibraciones) se remontan incluso antes de que existieran los motores de combustión interna. Todo este proceso comienza durante el uso de carros tirados por caballos, en los cuales se suspendía un colchón donde se alojaban los pasajeros, para así poder evitar que las posibles incomodidades del camino se transmitieran a los usuarios (Harty, Damian y Blundell Mike 2004). Actualmente los elementos que conforman a las suspensiones son: un elemento que absorbe la energía al que se le transmite debido a las imperfecciones de la ruta, que pueden encontrarse en configuraciones como un resorte helicoidal, muelles u otros elementos elásticos. Sin embargo, debido a que estos elementos elásticos, al momento que se les retira el estímulo buscan liberar inmediatamente y de manera brusca la energía que previamente fue almacenada, se requiere de otro elemento que disipe la energía de alguna manera, para así lograr que la liberación de la energía sea gradual, es decir, que se requiere una

amortiguación. Por lo anterior delineado se ha optado por la utilización de elementos que cumplan con esta función, como lo pueden ser amortiguadores de aceite o aire. Por último, forman parte de este mecanismo elementos estructurales que mantienen unidos el conjunto resorte amortiguador sujetos a los neumáticos y al chasis del vehículo.

El recurso que se utiliza como base para los parámetros de la suspensión, así como los requerimientos del vehículo que involucran a la suspensión, serán en primer lugar aquellos parámetros establecidos en el reglamento del *Electratón* en Mexico (Electraton, 2019) (en adelante denominado el reglamento), cuyo contenido es el comportamiento antes, durante y después del evento. También se emplearán los parámetros establecidos en el reglamento 2019 categoría A (Electratón, 2019) (En adelante denominado reglamento “A”), dirigido a los participantes que compiten con vehículos en los cuales se cuenta con un mecanismo de suspensión, en el cual, se enumeran los parámetros técnicos que debe de cumplir el vehículo para la competencia. Así mismo, se revisan las bases de diseño utilizadas en un manual escrito específicamente para estos vehículos, intitulado *Electrathon America*⁴ (En adelante denominado el manual). Debido a que este último es solamente una guía y el cumplimiento de los puntos son los requerimientos mínimos (Lewis, 2019, p.14), se debe de realizar un análisis de lo expuesto en estas fuentes de información, tanto en los reglamentos como en el manual, para así obtener la mayor cantidad de información útil en la selección de la configuración de la suspensión y lograr un óptimo desempeño en la competencia.

Cabe hacer mención que tanto “el Reglamento” como el “Reglamento técnico A” pertenece a la competencia que se realiza en México, mientras que “el Manual” corresponde a la competencia organizada en los Estados Unidos. A pesar de las diferencias que existen entre sí, se intentara conjuntar, lo mejor posible, las características necesarias de cada uno de los textos, esperando ayudar a la construcción de un vehículo capaz de competir en ambos certámenes. Solo si se llega a presentar el caso en que existiera una contradicción o el caso de que algún parámetro estuviese por debajo o por encima de lo establecido en otro texto, se tomarán como prioritarias las características de la competencia mexicana.

Por lo tanto, y para poder llegar a una selección, tanto de la configuración del mecanismo como de los elementos del conjunto resorte amortiguador, se deben de conocer las características y parámetros que especifican los organizadores del evento, como podrían ser las condiciones de la ruta u otras características deseables en un

vehículo que pretende participar en dicho certamen y se revisaran los reglamentos y el manual.

Así mismo es necesario entender las diferencias principales que presentan las dos configuraciones del mecanismo de suspensión seleccionadas, de las cuales se darán razones con base en la revisión de las fuentes antes mencionadas, las cuáles podrían o no ofrecer ventajas al desempeño del vehículo. Para los fines de esta investigación, antes de comenzar con el desarrollo de todo el bagaje matemático, se revisarán los textos consultados, en los cuales, se encuentran las soluciones propuestas por otros autores, para de esta forma saber, si existe algún trabajo similar o afín, de igual manera se realizará una revisión de la información que pueda resultar de utilidad para el desarrollo que se hará posteriormente. Este proceso descriptivo se delinearé en la primera parte del trabajo aquí presentado, al final se obtendrán parámetros, variables y constantes que serán utilizadas más adelante.

Una vez que se conoce y se comprende lo que involucra a un mecanismo de suspensión y las condiciones a las que será sometido, se pasará al desarrollo matemático de modelos que describan el comportamiento de las dos configuraciones bajo las características establecidas por el agente organizador.

Para el desarrollo del trabajo de investigación se emplea los recursos teóricos de las ecuaciones diferenciales lineales, en particular se desea que las ecuaciones obtenidas sean ecuaciones diferenciales lineales para que sean resueltas por métodos numéricos. Esto implica que las ecuaciones cumplen con los criterios de homogeneidad y aditividad.

La teoría de dinámica de sistemas físicos la cual se enfoca en conocer el cambio de los sistemas, en este caso, atendiendo las fuerzas que generan el cambio y los efectos que estas fuerzas tienen en los diferentes elementos que componen el sistema. Será empleado como base para el desarrollo de los diagramas de cuerpo libre. En particular se revisa la dinámica de sistemas mecánicos en donde generalmente se tienen elementos que almacenan energía como lo son los elementos elásticos y la inercia de la masa de los elementos y los que disipan energía por efectos viscosos como lo son los amortiguadores. Para representar el comportamiento de los elementos dentro de las ecuaciones se utilizan las leyes físicas que gobiernan la naturaleza de los elementos y que deberán ser expresadas de forma lineal para que su manejo y resolución no presenten complicaciones.

Debido que existe la posibilidad que los dos modelos o alguno de ellos por la naturaleza de su comportamiento se presenten ecuaciones diferenciales no lineales, cuya resolución está por encima de lo que se ve en la carrera de ingeniería mecánica, se revisará el fenómeno para conocer si existe algún comportamiento ideal y que con la ayuda de ese comportamiento ideal se puedan expresar el fenómeno en función de ecuaciones diferenciales lineales.

Los elementos anteriormente delineados serán utilizados como recurso para la aproximación del método presentado en el libro intitulado “Aproximaciones a un sistema multicuerpo para la dinámica de vehículos” (“*The multybody system approach to vehicle dynamics*”), en el cual se analiza el vehículo sistema por sistema y al final se han de conjuntar todos los análisis. Principalmente se obtendrán la función de entrada al sistema y la teoría necesaria para el desarrollo de los modelos matemáticos. Finalmente se expresarán las ecuaciones obtenidas de los modelos matemáticos en variables de estado. Este proceso será revisado en la segunda parte del presente trabajo.

Una vez que se han expresado las ecuaciones diferenciales en variables de estado se interpretan, de tal forma que puedan ser introducidas a la plataforma de MATLAB, para lo cual, se dará una descripción de la construcción de los programas de cada una de las configuraciones de mecanismo, así como para el recurso que existe dentro de la misma plataforma y que se utilizó para la resolución de dichas ecuaciones, conocida como la función ODE 45, que resuelve ecuaciones diferenciales lineales y algunas no lineales. De lo anterior se obtendrán gráficas que expresan, en respuesta libre y en respuesta total, el comportamiento de ambos modelos bajo las condiciones establecidas en velocidad y aceleración contra tiempo y diagramas de fases, en los cuales, se relaciona la velocidad contra la aceleración.

Para poder discernir cual es la configuración más adecuada es preciso comparar y analizar las gráficas obtenidas, por lo tanto, se realizará la descripción de lo que se observa tanto en las gráficas de aceleración y velocidad contratiempo como en los diagramas de fases.

En la última parte de este trabajo se selecciona la configuración del mecanismo de suspensión para el vehículo eléctrico, así como la constante de elasticidad del resorte y la constante de viscosidad del amortiguador. Con base en la descripción de la interpretación de los diagramas de fases en respuesta libre y respuesta forzada.

OBJETIVO

Seleccionar la configuración del mecanismo de suspensión y las características de los elementos adecuados para un vehículo que pretende competir en el *Electratón*, buscando el mejor desempeño mecánico del sistema de suspensión y así obtener un buen desempeño en la competencia.

Proponer los modelos matemáticos, expresados en ecuaciones diferenciales lineales, de las dos configuraciones del sistema de suspensión, expresados en variables de estado. Se desarrolla un programa dentro de la plataforma de MATLAB con el fin de simular el comportamiento de ambas configuraciones bajo las características recopiladas de los reglamentos y el manual de la competencia. Al final se obtendrán: gráficas de velocidad contra tiempo y aceleración contra tiempo así como diagramas de fases, que serán analizados y así dar una razón de porque es mejor una configuración respecto a la otra.

OBJETIVOS PARTICULARES

- Conocer y comprender los reglamentos y el manual del *Electratón* estableciendo las condiciones físicas de la competencia así como de los parámetros de diseño esperados en un vehículo que pretende competir en esta competencia.
- Aplicar la teoría de dinámica de sistemas físicos y de ecuaciones diferenciales lineales para obtener un modelo que describa el comportamiento de ambas configuraciones bajo las características antes establecidas.
- Utilizar la plataforma de MATLAB, en particular la función ODE 45, para resolver los modelos matemáticos y obtener gráficas que describen el comportamiento de los modelos.
- Analizar las gráficas de comportamiento así como los diagramas de fases de ambas configuraciones del mecanismo de suspensión y seleccionar la configuración y las características del conjunto resorte amortiguador más adecuadas.

CONTEXTO

El Electratorón es una competencia de vehículos propulsados por corriente continua cuya principal fuente de energía está almacenada en bancos de baterías ácido-plomo (Electratoron, 2019), (Lewis Michel, 2018). Siendo uno de sus objetivos “Manejar un vehículo eléctrico la mayor distancia posible en una hora sobre un circuito cerrado con energía limitada” (Lewis, 2019, p.3), y considerando como uno de los ejes principales de la competencia la seguridad, tanto de los asistentes al evento como de los participantes. Para lo cual se deben de conocer los lineamientos de la competencia establecidos en los reglamentos y el manual, que puedan ayudar a que el mecanismo de la suspensión cumpla con los objetivos de la competencia.

Para lo cual en primer lugar, es necesario el conocer las condiciones físicas bajo las cuales se llevara a cabo dicha competencia. De acuerdo al manual “Los eventos se llevan a cabo generalmente en estacionamientos, pistas pavimentadas o autódromos en donde el acceso puede ser controlado de manera segura” (Lewis, 2019, p.30). De modo que las condiciones de la pista se han de considerar como buenas, es decir, es un lugar que generalmente es utilizado para el tránsito de vehículos, constituidos de asfalto o concreto, como lo serían, un estacionamiento o velódromos por lo que también se supondrá que el mantenimiento proporcionado a dichas pistas y lugares de competencia es adecuado y por ello la cantidad de baches, terreno pedregoso, terreno desigual o cualquier otro exabrupto a la que se pudiesen ser sometidos el mecanismo de suspensión y el piloto serán mínimos y en el mejor de los casos nulo, a menos que los organizadores del evento agreguen alguna prueba que involucre directamente al desempeño de la suspensión del vehículo.

En segundo lugar el vehículo, deberá de “demostrar que es estable cuando se encuentre en reposo, a la toma de una curva y en el frenado [...] siendo la estabilidad uno de los puntos críticos para la seguridad y deberá ser constante en vueltas inclinadas, vueltas cerradas y condiciones ventosas” (Lewis, 2019, p.7). En este punto, la estabilidad se refiere a que debe de existir un equilibrio en el vehículo y que no tenderá a volcarse o en su defecto a que una o varias ruedas pierdan contacto con el suelo, ya sea que esté en reposo (aparcado en los pits) o en movimiento (Durante el desarrollo de la competencia o pruebas), entrando en directa relación con el punto anterior, la función de la suspensión. Es menester particular prestar atención a la transferencia de masa que ocurre en los

muelleos del vehículo cuando este se encuentra en la toma de una curva, que se puede observar de una mejor manera, cuando el vehículo se inclina hacia un lado debido a las fuerzas laterales producidas al tomar curvas y que en caso de que fuesen lo suficientemente grandes, las ruedas que se encuentran al interior de la curva pierdan contacto con la ruta e incluso, en el peor de los casos, se llegué a producir una volcadura. Hecho que se desea evitar a toda costa con la ayuda de la suspensión, y aunque actualmente existen sistemas que modulan las fuerzas de los componentes para mitigar o modificar los muelleos o guiñadas estaremos considerando una suspensión sin dichos elementos o sistemas ya que como se describe más adelante son de gran complejidad y costo por lo que quedan fuera de los objetivos de este trabajo.

Cabe mencionar que, a pesar de que no hay una prueba que directamente evalúe las cualidades del mecanismo de suspensión, o algún otro mecanismo en particular, será puesto a prueba de una manera indirecta, a través de una serie de retos denominados *pruebas dinámicas y escrutinio*. Que en el reglamento 2019 se mencionan como obligatorias y que “Previo a cada campeonato se realizará el escrutinio y pruebas dinámicas. Los equipos deben pasar obligatoriamente el escrutinio para poder competir, así como pasar las pruebas dinámicas básicas.”(Electratón. 2019, p.18), en donde el escrutinio solo se refiere a que el vehículo deberá estar terminado en su totalidad cumpliendo las características señaladas en los reglamentos; dimensiones, pesos elementos de seguridad etc. Es necesario recalcar la obligatoriedad de pasar las pruebas dinámicas, por lo que se le dará solo un poco más, y sin despreciar la importancia del escrutinio, una mayor importancia a las pruebas dinámicas ya que serán las que indirectamente presenten un reto mayor para el desempeño del mecanismo de la suspensión.

Dichas pruebas consisten en lo siguiente:

- El slalom es una prueba en la cual el vehículo deberá sortear en zigzag 8 conos con una separación de 8 metros entre sí.
- La prueba de frenado que consiste en acelerar a 40 km/hr (o la máxima velocidad del vehículo) y detenerse en un espacio designado de 6m en 3 segundos.
- La prueba de las puertas, en donde se debe de pasar una serie de puertas, que aunque no se menciona de manera explícita en la fuente, esta prueba consiste

generalmente pasar entre dos conos paralelos entre si denominados puertas en el menor tiempo posible, para así probar la maniobrabilidad del vehículo.

En tercer lugar el manual, en el cual se especifica el subtítulo de “guía” y por ende se entiende que solo se proporcionan algunos consejos donde se mencionan los sistemas esperados en el vehículo o por otra parte, en el caso del reglamento, el cual establece el comportamiento deseado de los participantes, los procedimientos a seguir, describiendo como se ha planeado el desarrollo de la competencia, las pruebas que se mencionaron anteriormente, así como, dar estructura al evento. Se da una serie de características e información necesaria para determinar los requerimientos mínimos que se deberán cumplir (Lewis Michel, 2018), y que formarán parte de la evaluación. Esto es, que se proporcionan las condiciones iniciales así como posibles valores de frontera para poder ser evaluados en los modelos de ambas configuraciones de suspensiones y aunque cada punto tiene, en menor o mayor medida una importancia, se les hará mención ya que son los datos que ayudarán a determinar los requerimientos mínimos necesarios para competir.

En los puntos referentes a la seguridad se menciona que; Debe de estar presente en la estructura una barra, estructura, tuvo doblado, que sea más alta que la cabeza del conductor de modo que, si imaginamos una línea que inicie en el punto más alto de esta barra y la trazamos hasta el segundo punto más alto de la estructura del vehículo, dicha línea no deberá de intersectar en ningún momento la cabeza del piloto, siendo este elemento llamado barra de volcadura. También se hace mención que dicho elemento de volcadura debe de resistir el peso del vehículo volcado y se proporcionan algunas sugerencias de medidas mínimas de calibres de tubos y algunas otras notas para su construcción, con la finalidad de evitar que el conductor se lesione la cabeza o quede aplastado por el peso del vehículo, en caso de que se produzca una volcadura. También deberá contar con barras que eviten que cualquier parte del conductor quede expuesta en caso de un choque, es decir, que la estructura forme una zona de seguridad para el piloto. No se ahondará mucho en esta parte, ya que a pesar de la relevancia de la seguridad del piloto, la estructura y estos puntos en particular, no arrojarán más información para el desarrollo de la suspensión.

Algo que por el contrario, si arroja una mayor cantidad de información es lo que se estipula en el “Reglamento A” en donde se menciona que el auto debe tener un ancho máximo de 45 pulgadas (1.143 metros) mientras que en el manual (Lewis Michel,

2018) se tiene que el ancho máximo es de 4 pies (1.219 metros) y que la máxima longitud debe de ser de 80 pulgadas (2.032 metros), de acuerdo al reglamento A (Electrathon, 2019, *Reglamento 2019 categoría A*) y 12 pies (3.658 metros) para el manual (Lewis Michel, 2018). También se hace mención que debe de existir un espacio entre el chasis y el suelo de 2 pulgadas como mínimo. La masa mínima, que se estipula en el manual, para el conductor, deberá ser de 70 kg (Lewis Michel, 2018), mientras que los casos, tanto del “Reglamento A” y en el “Reglamento” es de 180 libras (81 kilogramos) (Electrathon, 2019, *Reglamento 2019 categoría A*) y no se especifica si existe un límite máximo con respecto a la masa del conductor en las tres fuentes consultadas. Rondando entonces, la masa total de un vehículo Electrathon entre las 360 libras y las 370 libras (entre 164.16 kg y 168.72 kg) de acuerdo al manual (Lewis Michel, 2018). En cuanto a la energía almacenada se menciona que; “El peso máximo neto permitido es de 65 kg por banco y se permiten hasta un máximo de dos bancos [...] el peso máximo del banco de baterías ion-litio es de 35 kg y se permite utilizar sólo un banco” (Electrathon, 2019, p.22) mientras que en el manual “Electrathon solo permite el uso de baterías acido- plomo, con un peso no mayor de 73 libras en total (33.288 kg)” (Lewis, 2019, p. 25)

Es muy claro que el vehículo contemplado en la competencia mexicana es de dimensiones más reducidas que su contraparte estadounidense, sobre todo en su longitud pues en el ancho difieren por unos escasos centímetros y como en ambos casos se refiere a medidas máximas, así que se optará por tomar las medidas de la competencia mexicana. En el punto en donde existe una gran diferencia, de 10 kilogramos, es en la masa mínima requerida para el piloto del vehículo. Tomando en cuenta que no existe una restricción a una mayor cantidad de masa aportada por el piloto en ambas versiones, se ha decidido suponer que la masa del piloto sea conforme a lo establecido en la competencia estadounidense, así, la suspensión estará lista para competir en ambos certámenes. En otras palabras la suspensión será capaz de soportar entre 70 kg y 81 kg aproximadamente.

Por último el peso de las baterías, considerando que al vehículo se le aporten los dos bancos establecidos por la competencia mexicana sería de 130 kilogramos en total mientras que la competencia estadounidense solo permite 73 libras (33.288 kg), en otras palabras la competencia organizada en los Estados Unidos solo permite aproximadamente una cuarta parte del total aceptado en la competencia mexicana. La primera idea que surge es que, mientras más peso sea añadido al vehículo mayor será la potencia que se requiera para romper la inercia generada por la masa de las baterías y el vehículo, por lo que, la

velocidad del vehículo se verá disminuida en el caso de que la pista de competencia presente una pendiente; por el contrario si las baterías proporcionadas al vehículo es escasa y por lo tanto su masa, y la estructura es muy pesada no se tendrá la potencia necesaria de mover el vehículo. O puede ser que al principio las baterías tengan la potencia necesaria, pero conforme pase el tiempo de la competencia no podrán mantener una velocidad deseada para cumplir el objetivo de la competencia. Aún así es claro que el peso propuesto por la competencia mexicana es demasiado, por lo que se opta por añadir una masa utilizada en un solo banco de baterías, es decir, 65 kg o solamente el doble de lo marcado por la guía estadounidense.

Quedando entonces que la masa del vehículo se estimara en: 81 kg del piloto más 65 kg de las baterías, obteniendo un total de 146 kg. Si consideramos que el peso total es el mencionado por el manual ronda entre los 164.16 kg y los 168.72 kg serían unos veinte kilogramos de la estructura o más, Aún así también considerara que se agregaran otros componentes como cables, mando, cinturones y las guardas de algunos componentes mencionados en el reglamento y en el manual (Lewis Michel, 2018) (Electratón, 2019, *Reglamento 2019 categoría A*) entonces se estimara que la masa total del vehículo es de unos 200 [kg]. Por lo que la suspensión deberá mantener los 200 kg a una distancia del suelo de 2 pulgadas y debe absorber las imperfecciones del camino.

El último punto que se marca en el reglamento “A” y que ha dado la pauta para hacer la selección entre las dos configuraciones de mecanismos de suspensión para el vehículo dice; “La suspensión delantera deberá de ser independiente, ya sea de diseño doble triangulo o esquema McPherson” (Electratón, 2019, p.19), Razón por la cual los modelos y los estudios rondaran sobre estas dos configuraciones ya que en ningún punto revisado en el “Reglamento” o en el “Reglamento A” o en el “Manual” se estipula cual es la más adecuada y bajo qué circunstancias. Cumpliendo así con lo estipulado por los organizadores del Electratón.

Una vez que se conoce cuáles son las condiciones que demanda el agente organizador en cualquiera de los vehículos que pretendan competir en este tipo de eventos, así como las características deseables y de acuerdo al libro intitulado aproximación multicuerpo a la dinámica de vehículos nos enfocaremos solamente en el estudio de los mecanismos de suspensión de modo que lo que se realiza a continuación es conocer el sistema de interés. Comenzando entonces por recordar que la función principal de un mecanismo de suspensión automotriz es; Evitar que se transmitan las vibraciones de la ruta y de las

imperfecciones del camino hacia el conductor, manteniendo los neumáticos en contacto con el suelo en todo momento (Lewis Michel, 2018) (Gosselin-Brison Samuel, 2006) (Mohd Riduan Aizuddin Fahmi, TamaldinNoreffendy, Sudrajat Ajat, y Fauzi Ahmad, 2018). Teniendo en cuenta que son dos las masas importantes que influyen sobre este sistema. La masa que está formada por el rin, el neumático y otros elementos estructurales que permiten la unión entre este y el chasis. Cuyos elementos varían dependiendo de la configuración que esta tenga, además que se incluyen los sistemas de dirección y frenado que se unen al rin del neumático, la cual es conocida como masa no suspendida y a la cual por comodidad se le denominara como masa del neumático. La masa proporcionada por el piloto, el chasis, motor, almacenes de energía, siendo para este caso en particular las baterías, cinturones, parte del sistema de dirección y frenado, así como otra gran variedad elementos que le dan forma y funcionalidad al vehículo, a la cual se le conoce como masa suspendida.

La influencia de las dos masas antes mencionadas, puede ser apreciada a través del siguiente ejemplo: Se imagina un vehículo que, para una mejor visualización, se dice que se encuentra avanzando sobre una ruta de terracería, encontrándose en el camino con agujeros en el suelo lo suficientemente grandes como para que el neumático entre en estos, así como guijarros y otros obstáculos propios de un camino en malas condiciones. Mientras el vehículo avanza, y aunque se trata de evitar que el auto entre en los baches antes mencionados, se llega a dar la situación que entre en ellos, y debido a que por el efecto de la suspensión sobre el neumático, este busca seguir la forma de la ruta por la que pasa, empieza un descenso hacia el fondo del agujero, pero debido a que la masa del neumático presenta una inercia que se resiste al cambio de estado, además del conjunto resorte amortiguador que también se resiste a ser deformado jalan a la masa del chasis hacia el mismo sentido en el que se dirige la masa del neumático. Mientras lo anterior sucede el neumático ya se ha encontrado con el final del agujero y empieza a marcar una trayectoria ascendente, pero como la masa suspendida, que apenas ha empezado la trayectoria descendente por el efecto de la inercia, se produce un efecto en donde se comprime al conjunto de resorte amortiguador, ocurriendo un efecto similar al de un acordeón. Una vez que el neumático ya se encuentra fuera totalmente del bache, las fuerzas de los elementos, resorte y amortiguador, ya empezaron a ejercer la fuerza suficiente como para que la masa suspendida empiece a describir el movimiento ascendente, el cual de la misma manera lleva una inercia proporcionada por la masa

deformando nuevamente el conjunto resorte amortiguador, estirando a los elementos. El amortiguador ha estado trabajando al intentar que el resorte no libere la energía de forma brusca, evitando así un efecto similar al de una pelota que revota sin parar, pero es cuando la entrada del bache ha cesado cuando es capaz de poder restablecer un movimiento, relativamente recto sobre la masa suspendida, aunque aún se perciben los efectos producidos por los guijarros del resto de la ruta. De esta manera se ejemplifica como es que trabaja un mecanismo de suspensión, en donde para realizar una mejor visualización se magnifican los fenómenos ocurridos.

En general, el mecanismo de suspensión se encuentra compuesto por un elemento elástico cuyo propósito es absorber la energía que se le transmite y en cuanto el estímulo cese inmediatamente liberara la energía, como se ejemplifico anteriormente, por lo que también es necesario un elemento que absorba dicha energía que el resorte quiere liberar, disipándola en forma de calor, como lo son los amortiguadores que está compuesto por un pistón dentro de un cilindro que contiene un fluido al cual al aplicarse una velocidad de desplazamiento busca pasar alrededor del pisto o entre los orificios que posea dicho pistón encontrando resistencia a pasar de un lado a otro del tubo.

Estos elementos trabajan, para el caso de la suspensión en forma de un movimiento lineal, y así se tomaran en el resto del trabajo, sin olvidar la existencia de ambos elementos existen para movimientos, tanto de traslación, como lo es en este caso particular, como rotacionales que pudieran ser utilizados para diferentes configuraciones u otras aplicaciones. Contando también con elementos estructurales que están presentes para unir el mecanismo de la suspensión al neumático y al chasis. Aun así en el manual se hace mención que “un mecanismo de suspensión automotriz no es necesario para la competencia del Electratón y que su implementación haría la conducción más cómoda” (Lewis, 2019, p.20). En otras palabras, se entiende que dicho sistema no es obligatorio para competir en el certamen pero este será muy necesario para garantizar el cumplimiento de otros puntos importantes que ya se mencionaron anteriormente.

ESTADO DEL ARTE

CLASIFICACIÓN DE SUSPENSIONES

Existen varias formas para clasificar los diversos tipos de suspensiones automotrices. Se comienza revisando la clasificación de estas a través de la configuración de los elementos antes mencionados, en otras palabras, la primera clasificación de los elementos se basa en el acomodo lógico de cada una de las partes para que cumplan con la función para la que fueron destinados. Aunque es necesario considerar la diferencia en el acomodo para una suspensión en los neumáticos conectados a la transmisión de potencia y la configuración del mecanismo para los neumáticos que no reciben la potencia. Aún así se debe de considerar que el sistema de suspensión sea independiente, es decir, que el movimiento de un neumático no afecte de gran manera el movimiento del neumático opuesto a él. Algo que ocurre de manera contraria a la suspensión conectada a la transmisión de potencia, ya que los neumáticos si están conectados o por lo menos existe una mayor relación debido al acoplamiento proporcionado por el elemento que transmite el torque del motor a estos. Siendo los principales tipos de suspensiones independientes para los neumáticos sin conexión a la transmisión de potencia, de acuerdo a su configuración de los elementos mostrado en (Harty, Damian y Blundell Mike, 2004), los siguientes:

1. Hotchkiss (3 eslabones o suspensión de muelles)
2. McPherson Strut
3. Doble triángulo o SLA (Shor long Arm para el inglés estadounidense) o Double Wishbone (para el inglés británico), (Con resorte o barra de torsión)
4. Doble viga en I

Cuyos diagramas generales se presentan en la Figura 1

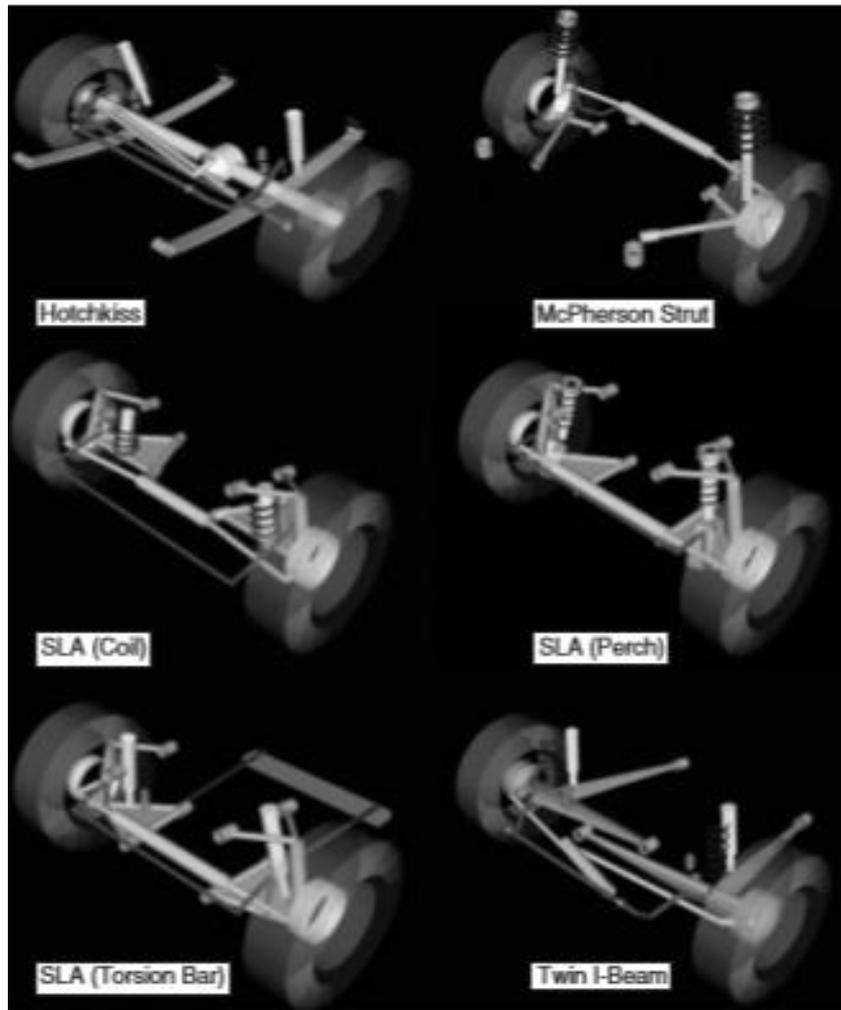


Figura 1 Representación Gráfica de la configuración frontal de suspensiones en el programa ADAMS obtenido de Harty, Damian y Blundell Mike(2004)

Mientras que para los mecanismos en los neumáticos conectados a la transmisión de potencia existen las variantes de la suspensión Hotchkiss como:

1. 4 eslabones Panhard
2. 4 eslabones Watts
3. Eslabón central
4. QuadraLink (Strut)
5. Brazo semi triangular
6. Viga flexionante.

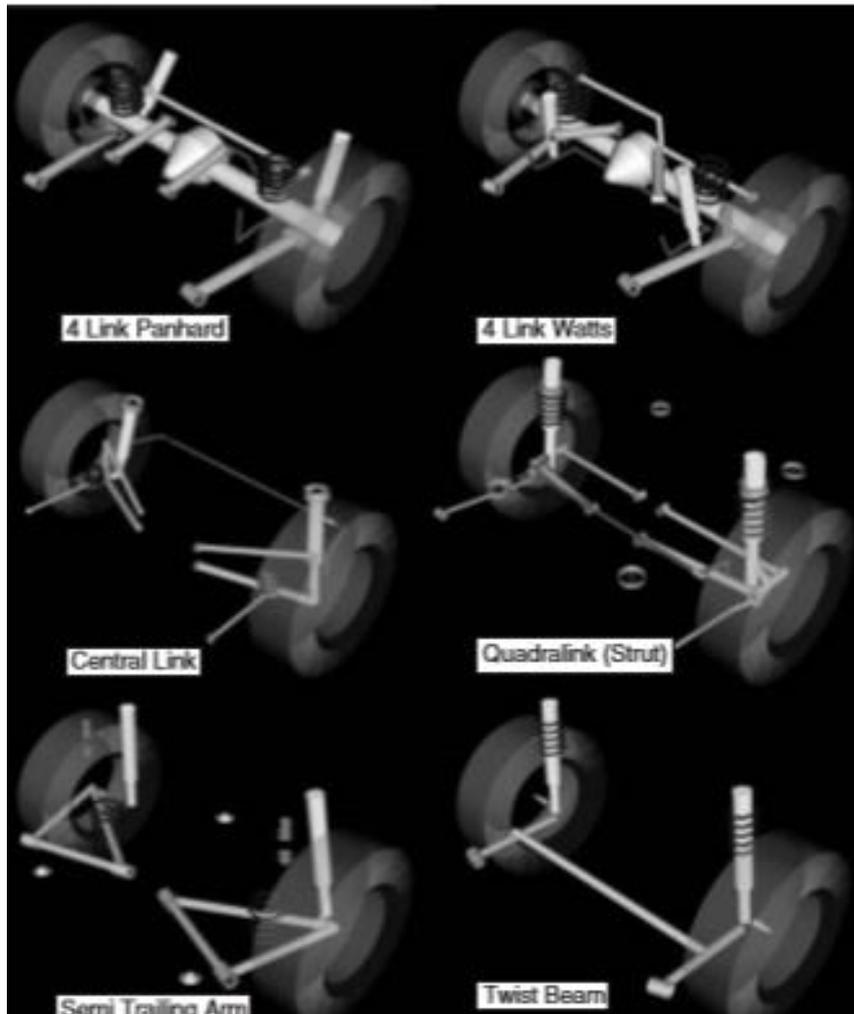


Figura 2 Representación gráfica de la configuración de suspensiones traseras en ADAMS/Chassis recuperado de Harty, Damian y Blundell Mike(2004)

A pesar de la gran gama para realizar una selección se retoma que en el reglamento se proponen solamente el uso entre la configuración McPherson y Doble triángulo por lo que solo se da la descripción de estas dos últimas configuraciones y se omiten el resto. La suspensión McPherson Strut, que en adelante se le hará mención solamente como McPherson es a grandes rasgos una suspensión que consiste en el resorte y el amortiguador que están unidos sobre un mismo eje y que trabajan como una columna telescópica ensamblada directamente al neumático a través de los elementos estructurales de unión y para limitar su movimiento que pudiese ser generado por fuerzas que no sean netamente verticales, cuenta con otra estructura en forma de “A” (similar a las encontradas en la suspensión de doble triángulo), que puedan modificar los ángulos que existen en la configuración.

Mientras que una suspensión de doble triángulo consta de un mecanismo de cuatro barras donde los elementos estructurales que le dan el nombre al tipo de suspensión son dos barras en forma de “A” o como por su nombre en inglés Double wishbone (Doble hueso de los deseos) tiene la forma de un hueso de los deseos encontrado en los pavos de navidad cuya forma se asemeja a la de una “y” griega. Estas dos estructuras pueden ser de la misma longitud o con diferentes longitudes, pueden ser paralelas entre sí y al suelo o con diversos ángulos en cuyas configuraciones no se ahonda mucho debido a que las ventajas o desventajas que proporcionan son tema para otro estudio y como lo dice (Güler, Duygu, 2006, p. 5) el diseño de una geometría doble triángulo necesita de un cuidadoso refinamiento para obtener buenos resultados. Otra característica importante en este tipo de suspensiones es que el conjunto resorte-amortiguador puede llegar a formar un ángulo que se forma por la línea perpendicular al suelo y por las uniones de este conjunto al chasis del vehículo, a demás que este conjunto no está conectado directamente al neumático lo que al ver en movimiento el vehículo el paralelogramo comienza a deformarse y cambiar los ángulos iniciales.

Hablando de los ángulos mencionados anteriormente, que se encuentran presentes tanto en la configuración McPherson y Doble triángulo, así como en cualquier tipo de suspensión son los ángulos de Camber. Qué genera las tan deseadas fuerzas laterales al momento de tomar una curva gracias a la inclinación del neumático. El ángulo de Camber es formado cuando el neumático se inclina, tomando la línea perpendicular al suelo pasando por la suspensión. Cuando el neumático se inclina en dirección al chasis del vehículo se considera que existe un Camber negativo o en el caso que el neumático se incline en dirección contraria al chasis se considera que existe un Camber positivo (Abela Posada Fernando Ricardo, 2014). Como se muestra en la Figura 3.

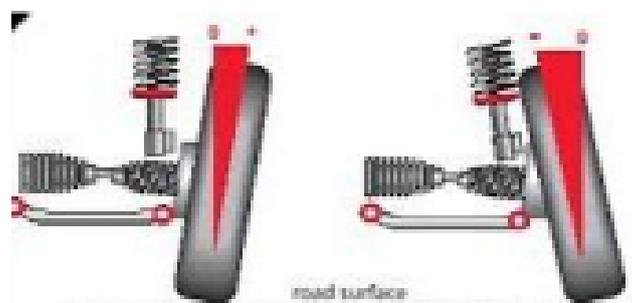


Figura 3 ángulo de camber positivo (Izquierda) y camber negativo (derecha) obtenido de Abela Posada Fernando Ricardo, 2014.

Otro de los ángulos que existen dentro de la geometría que involucra a la suspensión son los ángulos de convergencia y divergencia, que realmente son casos del efecto producido, el primero al momento en que el vehículo frena y el segundo al momento en el que el vehículo acelera, en otras palabras, se entiende que los neumáticos se abren o se cierran como se muestra en la siguiente Figura 4.

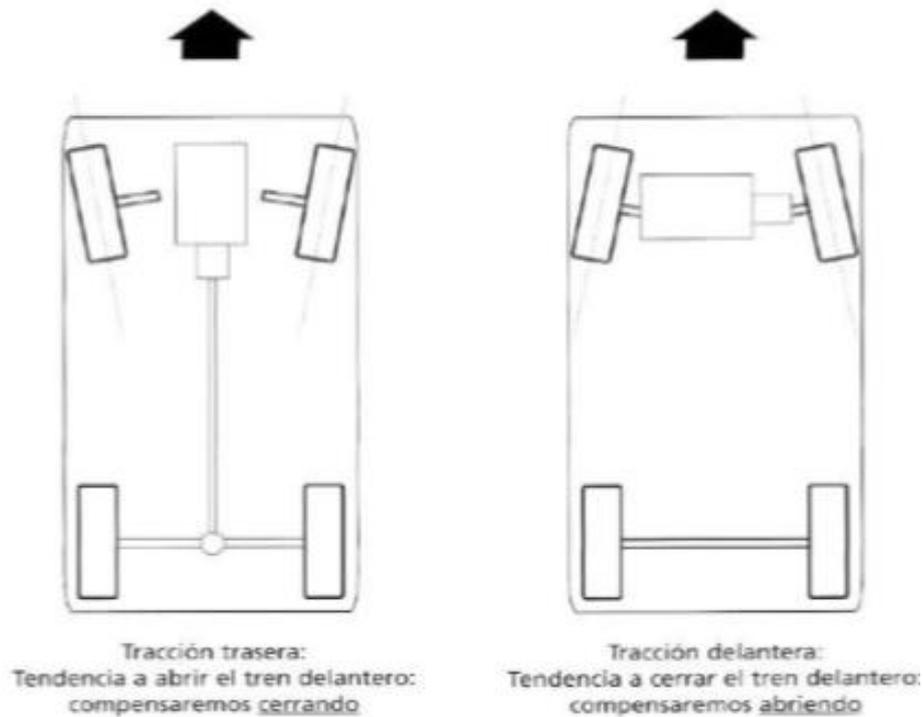


Figura 4 Ángulos de convergencia y divergencia recuperado de Abela Posada Fernando Ricardo (2014)

Existen otros ángulos a parte de los antes mencionados que se forman de acuerdo a la geometría con la que se diseñe la suspensión pero con la intención de reducir la complejidad de los modelos, dichos ángulos se consideraran como nulos ya que aumentarían en gran medida la complejidad de los modelos propuestos y se tendría que analizar cuál es el ángulo más adecuado para cada configuración así como las características de los elementos para cada variación de ángulo. Hecho que podría ser utilizado en un trabajo futuro.

Otra forma en la que se clasifican los mecanismos de suspensión, tiene más que ver con la energía que el sistema tiene y la que pudiese ser aportada por cada uno de los elementos a la dinámica del mecanismo, es decir, que los elementos sean capaces de

modificar alguna o varias de sus propiedades, cambiando la energía que disipa o aporta. Siendo tres los rubros que existen y son los siguientes:

1. Una suspensión pasiva es una configuración en cuyos elementos mantienen sus coeficientes de elasticidad y amortiguamiento constantes (Mohd Riduan Aizuddin Fahmi, 2018), o como lo menciona Bahise R *et al* que una suspensión pasiva no añade energía al sistema de suspensión. Es decir que la energía admitida o disipada no cambia, relativamente, conforme pasa el tiempo; ya que si puede existir un cambio debido al desgaste de los elementos.
2. En una suspensión semiactiva se puede variar el coeficiente de amortiguamiento, como lo es el caso de amortiguadores cuyo fluido contenido tiene propiedades magneto-reológicas, cuyo cambio en el coeficiente de amortiguación se da debido a que al proporcionarles una corriente eléctrica o un campo magnético ciertas partículas cambian sus propiedades viscosas. Aún así no añaden energía al sistema (Bhise, R. Ankita, Desai G. Rutuja, Yerrawar Mr R. N., Mitra, Dr A. C. y Arakerimath Dr R. R, 2016), solo cambian la manera en que se disipa la energía del sistema.
3. Una suspensión activa es aquella en la cual existe un actuador que ayuda a la disipación o almacenamiento de la energía dependiendo de las condiciones de la ruta. Permite, gracias a los actuadores, que la energía del sistema pueda ser controlada a través del establecimiento de diferentes leyes de control y que a través de sensores midan las condiciones y así poder retroalimentar el sistema de control para que cambie las condiciones físicas de los elementos de ser necesario. Pero tiene el inconveniente de tener un gran costo y una gran complejidad por lo que es utilizada en un reducido grupo de automóviles o camiones (Mohd Riduan Aizuddin Fahmi, et al, 2018).

Dependiendo de los recursos, técnicos y económicos que posea el equipo diseñador, se podrá seleccionar uno u otro tipo. Pero en lo que a este estudio respecta se realizará sobre una suspensión pasiva ya que es poco compleja, son confiables y baratas en comparación con las suspensiones activas que requieren un mayor nivel de conocimiento técnico por las leyes de control que se deben de implementar.(Mohd Riduan Aizuddin Fahmi, *et al*,

2018), Siendo las características encontradas en las suspensiones pasivas, muy necesarias en una competencia, ya que dicha sencillez permitirá al equipo reemplazar y reparar el sistema en caso de algún percance y el bajo precio de las partes permitirá tener al equipo más de una refacción en caso de una falla. La comparación anterior se realizó con base en lo que se observa en la tabla 1.

Tabla 1 Comparación de parámetros entre diversos tipos de suspensiones extraído de (Mhod et al, 2018, p. 5)

Parámetros	Suspensión pasiva	Suspensión semi-activa	Hidráulica/ neumática(Activa)	Electromagnética activa
Estructura	Muy simple	Compleja	La más compleja	Simple
Peso/volumen	El más ajo	bajo	Alto	El más alto
Costo	El más bajo	Bajo	El más alto	Alto
Comodidad de manejo	Malo	Media	Buena	El mejor
Manejo	Malo	Media	Bueno	El mejor
Confiabilidad	Muy alta	Alta	Mediana	Alto
Dinámica	Pasiva	passiva	Mediana	Muy buena

Finalmente se realiza la revisión de artículos, otras tesis que puedan ayudar a entender de una mejor manera el comportamiento del mecanismo de suspensión y arrojar información que ayude al desarrollo de los modelos, recordando que es deseable encontrar modelos que nos puedan arrojar ecuaciones diferenciales lineales o que por lo menos proporcionen un punto de partida.

Respecto al desarrollo de suspensiones automotrices y se encontró que la mayoría de estas como la tesis de (Abela Posada Fernando Ricardo, 2014) intitulada *Diseño de Suspensión Adaptativa para Vehículo Híbrido* en la cual se describe el diseño de la suspensión delantera para un vehículo híbrido tomando en cuenta los ángulos de Camber, Castor así como otros ángulos antes mencionados y que puede decirse como el precursor directo del presente trabajo. Siendo una de las mayores diferencias entre este trabajo y el propuesto por Abela Posada, 2014 que realiza el modelo en un sistema masa resorte amortiguador como se muestra en la Figura 5, despreciando el efecto de la masa y el coeficiente de elasticidad del neumático.

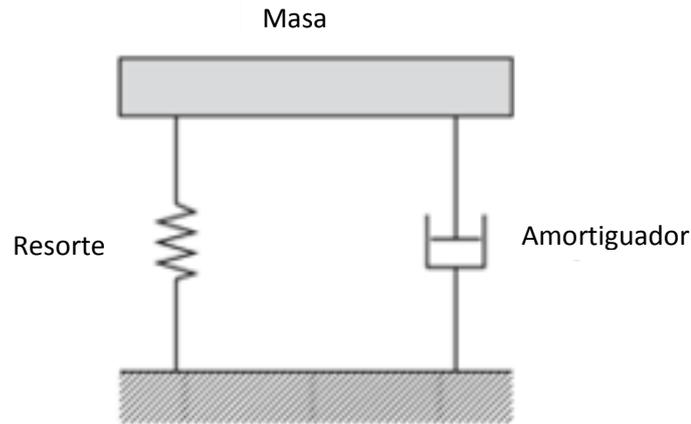


Figura 5 Sistema masa resorte amortiguador recuperado de <https://glossar.item24.com/es/indice-de-glosario/articulo/item//sistema-masa-resorte-amortiguador-1.html> 17 de septiembre del 2019

Otra literatura que se revisa es el texto de Harty, Damian y Blundell Mike, 2004 intitulado “Aproximación Multicuerpo a la Dinámica de Vehículos (“*The multybody system approach to vehicle dynamics*”)” en el cual, en una de las secciones, más específicamente en el capítulo 4 se habla del modelo matemático y geométrico de la suspensión y propone realizar el análisis del comportamiento de la suspensión y de la misma manera que Abela Posada Fernando Ricardo, 2014, es decir, propone la utilización de un cuarto de suspensión resorte masa amortiguador considerando la rueda rígida como si se tratase de un tren. Por lo que el sistema igualmente actúa como un sistema Masa resorte amortiguador pero también incluye en el modelo una función de entrada al sistema para representar el efecto del suelo sobre la suspensión.

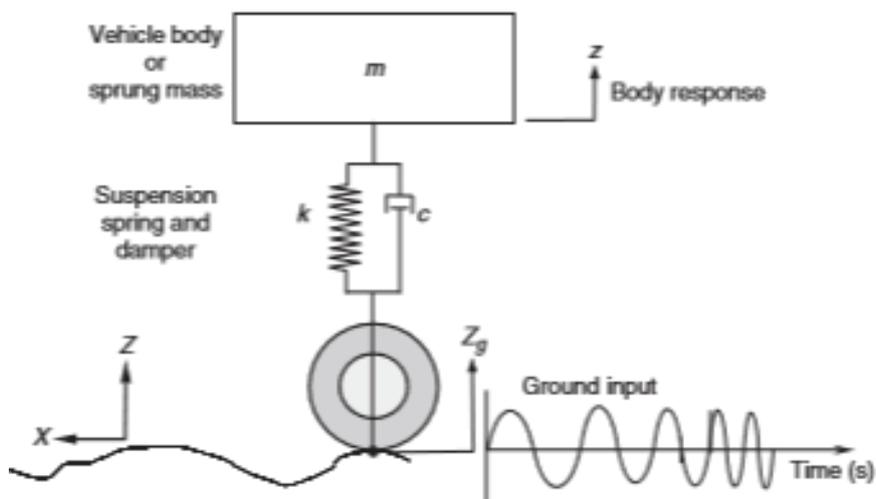


Figura 5 Diagrama de cuerpo libre clásico para un cuarto de vehículo recuperado de Harty, Damian y Blundell Mike(2004) p. 137.

Otras fuentes consultadas son los artículos en donde se describen los avances realizados en el campo, como el realizado por Attia Ali Hazem 2001, intitulado Modelado Dinámico para el Sistema de Suspensión Doble Triángulo de un Vehículo con Motor de Combustión Interna (*Dynamic modelling of the double wishbone motor vehicle suspension system*), donde se propone el modelo para una suspensión doble triángulo tomando en cuenta las juntas de los eslabones del mecanismo para obtener sus ecuaciones de movimiento como si de un robot se tratase.

Por otro lado, Muhammad Zahir Hassan, Mohd Kamarul Hafis Abdul Aziz, Frank Delbressine and Matthias Rauterberg ,2016 presentan un artículo en el cual se propone la simulación de una suspensión doble triángulo a través del programa Altair HyperWorks® and MotionView® para conocer la influencia de los diferentes tipos de rigidez de un resorte y así mejorar el desempeño del vehículo, obteniendo gráficas de comportamiento en donde se puede notar que, debido a que es el programa el cual realiza el establecimiento de las ecuaciones y el proceso necesario, no deja ver cuáles son las consideraciones utilizadas o posibles simplificaciones. Aún así se obtendrán de este trabajo algunas condiciones necesarias para nuestro modelo y simulación ya que la aplicación es similar.

Jorge Hurel , Anthony Mandow & Alfonso García-Cere, 2013 presenta un trabajo intitulado Análisis de la Cinemática y Dinámica Plana de una Suspensión McPherson en un Cuarto de Vehículo (*Kinematic and dynamic analysis of the McPherson suspension with a planar quarter-car model*), en donde se presenta el análisis matemático y el establecimiento para una suspensión McPherson en donde se permiten solamente desplazamientos verticales y rotación de la masa suspendida, considerando solamente la geometría de la suspensión y que para obtener las gráficas de comportamiento se realiza la implementación del modelo a través de SIMULINK dentro de la plataforma de MATLAB.

Desafortunadamente ninguno de los artículos o literatura revisada se encontró una comparación, de las gráficas o de los modelos, de las dos configuraciones de suspensión. Simplemente se centraban en el estudio de una u otra. Por lo que se optó por tomar lo que se considerará de mayor utilidad de cada texto revisado. De los textos de los cuales se recuperaron los ejemplos de los modelos propuestos es de la tesis, que para obtener el grado de maestría en ingeniería mecánica, intitulada Estudio de un sistema de control para una suspensión automotriz (*Étude d'un système de control pour suspension automobile*) Gosselin-Brison Samuel, 2006), en donde se tratan diferentes aproximaciones para la

configuración de un actuador en el desarrollo de suspensiones activas, donde lo importante de este trabajo y, que se recupera es, como se realiza el modelo para una suspensión pasiva tipo McPherson así como algunos valores utilizados. Este trabajo toma en cuenta el efecto que puede tener la masa y la constante de elasticidad del neumático por lo que, como se ve en la Figura 7, utiliza un sistema resorte masa, resorte masa amortiguador.

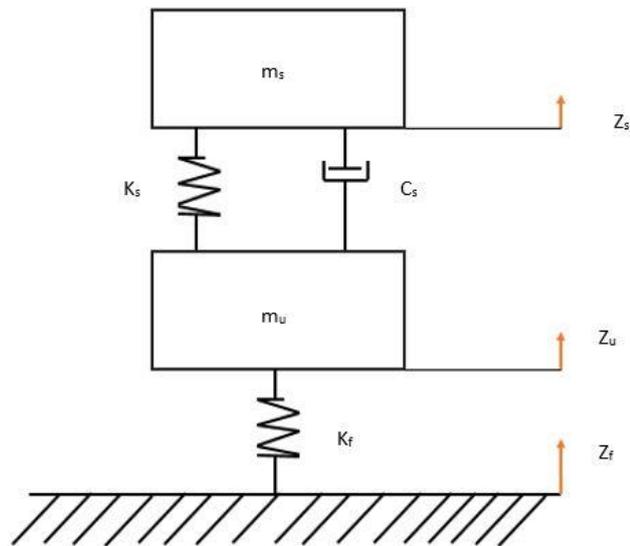


Figura 6 Diagrama de cuerpo libre de un cuarto de suspensión pasiva de dos grados de libertad recuperado de Gosselin-Brisson Samuel (2006), p 22.

En el trabajo intitulado Análisis dinámico para una suspensión Doble triángulo (*Dynamic analysis of double wishbone suspension*) Güler, Duygu, 2006 se proponen los diagramas de cuerpo libre mostrado en la Figura 8 que se utiliza como base para el modelo de la suspensión doble triángulo que se presenta en este trabajo, aún así las diferencias entre este trabajo y lo propuesto de Güler Duygu, 2006, radica en las diferencias en la inclinación del conjunto resorte amortiguador, ya que en el estudio propuesto se realiza con inclinación en el conjunto resorte amortiguador mientras que Güler Duygu trabaja el conjunto resorte amortiguador en forma completamente vertical y que mientras que Güler utiliza un método energético para el análisis en aquí se resuelve por variables de estado; Aun así ambos modelos son para una suspensión pasiva para un cuarto de vehículo.

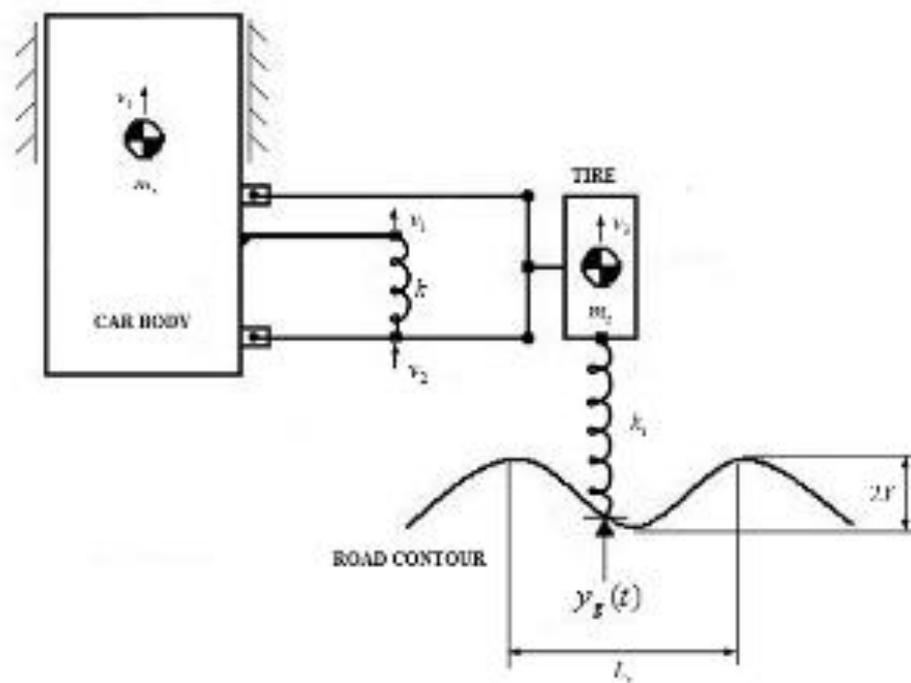


Figura 7 Diagrama de cuerpo libre para una suspensión simple recuperado de Güler, Duygu (2006) p.21

Desafortunadamente en las fuentes consultadas no se encontró una comparación ni de gráficas ni de modelos entre estos dos grandes exponentes de la suspensión automotriz. O gráficas para poder hacer una validación y poder conocer el posible error que puedan a llegar los modelos propuestos. Utilizando otra forma de validar los modelos obtenidos.

Debido a que el vehículo aún se encuentra en desarrollo y aún existen una gran cantidad de incógnitas se propone utilizar la información presentada en el artículo intitulado “Diseño y análisis de una suspensión frontal Doble triángulo modificada para un auto híbrido de tres llantas. (*Design and Analysis of Modified Front Double Wishbone Suspension for a Three Wheel Hybrid Vehicle*)” (Sarvadnya Ajinkya Thakare, Prasad C Antapurkar, Divyaj S Shah, P R Dhamangaonkar and S N Sapali, 2015). En donde el autor describe el diseño de una modificación a una suspensión doble triángulo, sin alterar la configuración básica y por ende las características de este tipo de configuración, por lo que se considera conveniente extraer las medidas geométricas que utilizan para la suspensión doble triángulo, en particular para las longitudes de los brazos en forma de “A” como sigue: una longitud del brazo superior de 174mm (0.174 [m]), Diámetro exterior del punto de sujeción 12.7 mm, diámetro interno del punto de sujeción 9.5 mm, longitud del brazo inferior 225[mm] (0.225 [m]) (Sarvadnya Ajinkya Thakare et al, 2015).

Uno de los elementos más evidentes a analizar y que es de los que primero saltan a la vista en un vehículo, ya que es el elemento al cual se le transmiten las fuerzas de tracción y por lo tanto son los que vemos en movimiento. Los neumáticos son los elementos que puede llegar a agregar mayor complejidad al modelo matemático ya que, debido a que como es el elemento que está en contacto con el suelo y que proporciona el movimiento general al vehículo, le ayudan a tomar dirección, en este se encuentran una gran cantidad de variables y parámetros que influyen en la dinámica del vehículo y de la suspensión. Cuyos modelos como “la fórmula mágica” y el modelo Fila (Harty, Damian y Blundell Mike, 2004) incluyen variables como la fuerza de tracción, antes mencionada, las fuerzas laterales y también la presión del aire al interior del mismo.

Un neumático está fabricado básicamente con Polietileno Butadieno Estireno o como comercialmente se encuentra es como caucho SBR (Tukackinky A, Schworm D and Isayev, A.I, 1996). Del neumático se obtiene la constante de elasticidad, y que al inicio del estudio se piensa en solo implementar el módulo elástico del material, pero se encontró que dada la geometría de este, un círculo en el cual la elasticidad influye en varias direcciones, es decir que si se imagina al neumático como un elemento constituido por una cantidad de resortes que parten de un mismo origen que es el centro del neumático. Como si el rin de una bicicleta fuese el neumático y los rayos fuesen sustituidos por resortes y que al girar la rueda, existiría un resorte perpendicular a la línea de acción del peso del ciclista, pero los resortes circundantes a este último también se verían influenciados en menor medida y conforme a se alejan del resorte que carga. Pero a su vez el resorte de carga como los resortes, influenciados por el peso del ciclista, presentaría reacciones opuestas. Por lo que para conocer un valor que represente el fenómeno antes descrito para un neumático en particular se debe de realizar la caracterización a través de un banco de pruebas que ejerce una presión y a través de la medición de la deformación del neumático, el conocimiento de la presión del aire al interior del mismo entre otros parametros se podría conocer el valor de la constante radial de elasticidad estática del neumático (Chalco Criollo Freddy Marcelo, Sinchi Viñazaca Eddy Gabriel, 2016). Pero como dicha caracterización sale de los objetivos de la tesis se optó por buscar los valores de la rigidez estática radial aplicados a un neumático en donde se presentara una aplicación similar.

Entonces se encontró la tabla 2 en un artículo intitulado “Relación entre la Rigidez Elástica Radial Estática y Tamaño de un neumático, su área de contacto y la presión de contacto (*Link between static radial tire stiffness and the size of its contact Surface and contact pressure*)” (Kučera M., Helexa M., y Čedík J., 2016), en el cual se realizan pruebas a un neumático TS05 10.0/75-15.3 PR10 para conocer cómo cambian los valores de la rigidez radial elástica con respecto a la presión dentro del neumático y la huella de presión. Aunque no es el mismo modelo de neumático se toma en cuenta ya que la aplicación es similar y muestran una relación entre la presión del aire contenido en el neumático, la carga y la rigidez estática radial. Como se muestra en la tabla 2.

Tabla 2 Resultados medidos y calculados, Matias llanta TS05 10.0/75-15.3 PR10 obtenido de Kučera M., Helexa M., y Čedík J. (2016), p.1365

Load (kg)	Normal Force (N)	Pressure (kPa)	Tire rolling radius (mm)	Deformation of tire (mm)	Work expended on deformation (J)	Stiffness (N m ⁻¹)
1,025.09	10,056.13	300.00	376.00	19.00	94.77	525,000
847.14	8,310.44	300.00	379.00	16.00	69.19	
709.30	6,958.23	300.00	381.00	14.00	54.82	
567.90	5,571.10	300.00	384.00	11.00	36.88	
0.00	0.00	300.00	395.00	0.00	0.00	
1,025.09	10,056.13	220.00	373.00	22.00	126.46	522,500
847.14	8,310.44	220.00	377.00	18.00	90.53	
709.30	6,958.23	220.00	380.00	15.00	67.98	
567.90	5,571.10	220.00	384.00	11.00	43.18	
0.00	0.00	220.00	395.00	0.00	0.000	
847.14	8,310.44	160.00	376.00	19.00	76.39	423,200
709.30	6,958.23	160.00	379.00	16.00	53.57	
656.48	6,440.07	160.00	380.00	15.00	46.88	
567.90	5,571.10	160.00	382.00	13.00	34.86	
0.00	0.00	160.00	395.00	0.00	0.000	
847.14	8,310.44	100.00	369.00	26.00	64.99	192,300
709.30	6,958.23	100.00	372.00	23.00	42.20	
656.48	6,440.07	100.00	373.00	22.00	35.52	
567.90	5,571.10	100.00	375.00	20.00	23.53	
0.00	0.00	100.00	395.00	0.00	0.00	

Por lo que obtenemos una rigidez elástica de 192 300 [N/m] a una presión de 100 [KPa] y una carga de 567.90 [kg] ya que presenta un valor muy similar al que se observa en otros trabajos como en la tabla de valores numéricos presentada por Gosselin-Brison Samuel, 2006, p. 23 en donde aparece la tabla siguiente:

Tabla 3 Valores de los componentes para el modelo de un cuarto de vehículo recuperado de Gosselin-Brison Samuel (2006) p. 23

Paramètre	Symbole	Valeur	Unité
Masse suspendue	m_s	250	kg
Masse non-suspendue	m_{ns}	30	kg
Ressort de la suspension	k_s	20 000	N / m
Ressort du pneu	k_p	200 000	N / m
Amortisseur suspension	b_s	1 000	N s/m

Cuyo valor de la rigidez elástica del neumático es de 200,000 [N/m] y comparado con el valor obtenido de 192,300 [N/m] de la tabla anterior. O como el valor obtenido en Güler, Duygu (2006) que se muestra en la tabla 4 en donde se muestra un valor de 235 [N/mm] o (235,000 [N/m]). Valores similares al que fue seleccionado.

Tabla 4 Características de los elementos de la suspensión. Recuperado de Güler, Duygu (2006) p. 30

Parameters	Value
m_c (kg)	750
m_t (kg)	50
k (N/mm)	340
k_t (N/mm)	235
ζ (-)	0.2

Dándole una mayor prioridad al valor obtenido en la tabla 2 ya que en esa se detalla cual es el neumático utilizado en la prueba, la relación que existe entre la presión interna del neumático y la rigidez estática radial.

Para determinar el valor de la masa de los neumáticos se utilizan cuatro neumáticos YJL SL 7.1/11.0 0.5 de la marca BRIGESTONE de cara lisa y rines de aluminio con los que ya se contaba debido a previos desarrollos realizados por otros equipos. Y basándonos en lo que se propuso tanto por Gosselin-Brison Samuel, 2006, como por Güler Duygu, 2006, Harty, Damian y Blundell Mike, 2004 y la mayoría de los autores en solamente se toma un cuarto del vehículo; por lo que solo es necesario conocer el peso de un neumático. Dato que se obtuvo con una báscula de pesa deslizante ubicada en los laboratorios de la FES Aragón. Obteniendo así una masa de 2.5 [Kg], debido a que se considera que aparte del peso del neumático también se considera ciertas partes del mecanismo de dirección, transmisión (en su caso), sistema de frenado etc. Se estima que

la masa del neumático será de unos 3 [Kg] aunque, como es una estimación para un neumático de Go kart no se descarta que la masa total pueda ser mayor como en el caso de Gosselin-Brisson Samuel, 2006,p 23 y mostrado en este trabajo en la tabla 3 un peso de 30 [Kg] o en los datos de Güler Duygu, 2006, p 30 y mostrado en la tabla 4 con un peso de 50 kg. Teniendo en cuenta que los últimos trabajos son para vehículos con un motor de combustión interna.



Figura 8 Obtención de la masa del neumático que se usa para el modelo

EL RESORTE

El resorte es un elemento usado no solamente para las suspensiones, sino que su aplicación en la ingeniería, donde una de las clasificaciones se encuentra dependiendo de la carga empleada para realizar la deformación como tirar, empujar o torcer (Norton L. Robert 1999). Se muestra mayor interés en esta clasificación, la que es de interés, ya que como se menciona anteriormente, el resorte por la acción de las dos masas estará tirando y empujando al resorte de la suspensión. Por lo que, debido a que la acción de tirar y empujar es un movimiento rectilíneo se considera que el resorte que se emplea, para el caso particular de las configuraciones McPherson y Doble triángulo, son los resortes lineales. Por ello, se dice que los resortes lineales son elementos mecánicos los cuales al ser deformado por una fuerza externa expresada en un desplazamiento rectilíneo, tal que la deformación sea proporcional a la fuerza aplicada lineales (Ogata

Katsuhiko, 1987 p.6). Es decir que se considera que siguen la ley de Hook expresado en la siguiente manera.

Ecuación 1

$$\sigma = E\epsilon$$

Donde

σ es el esfuerzo aplicado a un elemento

E es la constante de elasticidad

ϵ es la deformación

Expresado particularmente para el resorte lineal, la Ecuación 1 se expresa como la Ecuación 2:

Ecuación 2

$$F = Kx$$

Donde F representa la fuerza aplicada, K es la constante de elasticidad o la proporción con la que se deforma el resorte respecto a la fuerza aplicada y x representa el desplazamiento del resorte bajo dicha fuerza F . Por lo que se requiere conocer la constante de elasticidad o la proporción de deformación de un resorte para poder realizar un modelo particular o un rango de valores que puedan ser evaluados como lo será en este trabajo. Se considera que, para el presente trabajo, no se puede considerar cualquier constante de elasticidad de resorte, sino que, el rango de valores de elasticidad debe de ser provenientes de resortes que estén pensados para su utilización en vehículos de competencia en Go karts o alguna aplicación similar como en automóviles turismo.

Para seleccionar ese rango, que será evaluado posteriormente en el modelo, se realiza la revisión del trabajo de Muhammad Zahir Hassan, Mohd Kamarul Hafis Abdul Aziz, Frank Delbressine and Matthias Rauterberg, 2016 intitulado Análisis Numérico de la Rigidez Elástica para el Diseño de un Vehículo en Desarrollo (*Numerical analysis of spring stiffness in vehicle design development stage*), y de donde se extrae la tabla 5 que se encuentra en Muhammad Zahir Hassan et al, 2016 p. 5166 que muestra un rango de valores de la rigidez elástica entre los 64.75 [N/m] y los 924.97 [N/m] para resortes suave, medio y duro que aunque no se utilizan los mismos valores rescatados en las secciones anteriores y en esta si es la misma aplicación.

Tabla 5. Elasticidad del resorte recuperado de Muhammad Zahir Hassan, et al, 2016, p.5166.

Constante de compresión del resorte (k)	
Suave	
Constante del resorte (k)	64.75
Media	
Constante del resorte(k)	154.68
Dura	
Constante del resorte(k)	924.97

Muhammad Zahir Hassan et al, 2016 obtienen la rigidez elástica de tres resortes fabricados con acero ASTM A 228 que para conocer las características de los resortes suave medio y duro, así como una simulación del comportamiento de la suspensión se realiza con la ayuda de un programa de computadora el modelo 3D y la simulación para después implementar físicamente los resortes en un Go kart mono plaza con un motor de 135 cc y corriendo en una pista especial para la competencia de los vehículos Go kart.

Se toman estos valores ya que la aplicación, que se muestra en el artículo del que se extrajo la tabla, resulta ser similar a lo que se pretende en este trabajo, a pesar que en las demás obras revisadas también dan valores para la rigidez del resorte con la mayor diferencia que los otros trabajos antes mencionados son para vehículos más grandes.

EL AMORTIGUADOR

El amortiguador como ya se mencionó anteriormente, es un elemento que disipa la energía en forma de calor al presentar una resistencia al paso de algún fluido, contenido en un tubo, alrededor o a través de un pistón como se presenta gráficamente en la Figura 11, pero es la viscosidad del fluido en cuestión el parámetro que modifica si el fluido pasa rápidamente o de forma más lenta entre los agujeros. Ya que como lo menciona White Frank M. (2008) p. 25. La viscosidad es una medida cuantitativa de la resistencia de un fluido al movimiento, de forma más concreta, es un valor que determina la velocidad de deformación del fluido que se produce al aplicarle un esfuerzo cortante. Por lo que si a una partícula fluida sometida a un esfuerzo cortante τ en un plano, la partícula se moverá con una velocidad δu por ello se entiende que:

Ecuación 3

$$\tau \propto \frac{\delta u}{\delta t}$$

Siendo la constante de proporcionalidad μ un coeficiente de viscosidad.

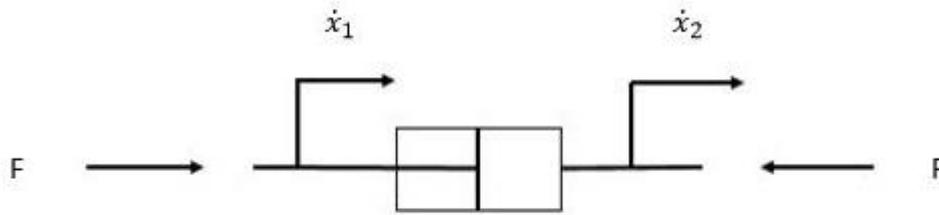


Figura 9 Esquema de un amortiguador traslacional recuperado de (Ogata Katsuhiko, 1987 p. 23).

Para el caso particular del amortiguador lineal que se muestra en la Figura 11. En donde se puede apreciar que, de acuerdo a la tercera ley de Newton a la acción en algún extremo, de estiramiento o compresión, de desplazamiento lineal, se genera una reacción en el otro extremo pero como lo menciona Ogata Katsuhiko, 1987 p. 23. Las velocidades \dot{x}_1 y \dot{x}_2 son relativas por lo que se considera como una sola velocidad quedando la ecuación para un amortiguador traslacional como:

Ecuación 4

$$F = b\dot{x}$$

Donde:

F =es la fuerza aplicada

b = es el coeficiente de viscosidad

\dot{x} = la velocidad del desplazamiento

Para los amortiguadores se procede de la misma manera que en el caso de los resortes. Es necesario conocer un rango de valores que serán sustituidos en el modelo para su posterior evaluación y así conocer el comportamiento de cada configuración de suspensión con cada coeficiente de viscosidad. Para lo cual se busca que el rango de valores del coeficiente de viscosidad del amortiguador este también expresado como las características de suave, medio y duro, para así poder compararlos con las rigideces elásticas que se seleccionaron en el resorte. Dichas constantes de viscosidad clasificadas como se menciona anteriormente fueron halladas en el artículo intitulado “simulación y validación experimental de las características dinámicas de un vehículo para un desplazamiento sensitivo de un amortiguador usando modelado del flujo de un fluido” (Choon-Tae Lee, Byung-Young Moon, 2006 p.384), Artículo en el cual se realiza la validación de un amortiguador para un vehículo, por lo que es una aplicación similar y a pesar que el análisis de Choon-Tae Lee, Byung-Young Moon, 2006, se realiza para un

amortiguador sensible al desplazamiento, es posible recuperar los datos mostrados en la tabla 4 donde se expresan los datos a evaluar en el artículo y del cual se extraen valores del coeficiente de viscosidad. La razón por la cual fue tomada la tabla es que debido a que los valores de la masa suspendida presentada en el artículo es similar a la que se propone, siendo, en el caso del artículo de 250 [kg] (Choon-Tae Lee, Byung-Young Moon, 2006, p. 383) mientras que la propuesta por el trabajo se estima en 200 [Kg]

Tabla 6. Definición de los modos de amortiguamiento obtenida de Choon-Tae Lee, Byung-Young Moon (2006)

Modo	Coefficiente de amortiguamiento [N/m/s]	razon de amortiguamiento
Suave	1273	0.3
Medio	1485	0.35
Duro	1697	0.4
Desplazamiento sensitivo	1273-1697	0.3-0.4

FUNCIÓN DE ENTRADA

Por último la función de entrada a la cual serán sometidos ambos modelos será una idealización del terreno, que como se mencionó anteriormente se considera en buenas condiciones por lo que dicha idealización se supondrá como una onda producida por una oscilación armónica simple que también se muestra en (Harty y Blundell, 2004, p 137), expresada en la ecuación 5. Es decir que se ha considerado el terreno como uno en el cual las imperfecciones estarán en intervalos regulares con dimensiones iguales.

Ecuación 5

$$f(t) = Ae^{i\omega t + \phi}$$

Donde A representa a la amplitud de la onda, i representa a la raíz imaginaria de -1 , ω representa la frecuencia de la onda, t representa el tiempo y ϕ representa un desfase de onda. Siendo esta la representación de un movimiento armónico simple. Y como una pequeña nota se puede decir que las personas tienen una susceptibilidad al mal de movimiento para movimientos de baja frecuencia estando alrededor de los 0.5 Hz.

Debido que esta función es simple de entender, se genera el efecto deseado para conocer el efecto de la suspensión bajo las consideraciones que se hicieron de la pista es la razón para utilizarla. Por lo que para considerar los efectos de la transferencia de masa en muelleos y guiñadas se debe de considerar la mitad de una suspensión así como los

efectos de los momentos de inercia de cada elemento involucrado y como no se encontró una función que describa dicho comportamiento para un cuarto de suspensión es por lo que se opta por la función de movimiento armónico simple. Otra forma que podría arrojar una mayor cantidad de datos sería instrumentar el neumático de algún vehículo para medir las aceleraciones producidas en este elemento que podría ser sustituido posterior mente.

Entonces, resumiendo los valores que se emplearan en los modelos McPherson y Doble triángulo, que se obtuvieron de la revisión de fuentes y trabajos similares queda así. La masa suspendida estimada es de 200 [Kg], una distancia del chasis al suelo de 2 pulgadas (0.5 [m]), una rigidez elástica estática radial del neumático de 192 300 [N/m], un rango para la rigidez elástica del resorte de entre 64.75 a 924.97 [N/m] y un coeficiente viscoso entre los 1273 a 1697 [N/m/s]. Todos los ángulos de Castor, Camber, divergencia/convergencia, etc. como nulos ya que su inclusión podría generar como resultado ecuaciones diferenciales no lineales, aumentando de manera considerable.

MODELO DINÁMICO DE LA SUSPENSIÓN McPHERSON Y DOBLE TRIÁNGULO

Una suspensión McPherson trabaja como una columna telescópica, compuesta por el conjunto resorte amortiguador, que relaciona la masa suspendida y la masa del neumático, siendo esta una relación directa, ya que el conjunto resorte amortiguador se conecta directamente a la masa del neumático y por lo tanto las perturbaciones generadas por la ruta pasan directamente al conjunto resorte amortiguador. Mientras que en la suspensión Doble triángulo la relación que existe entre la masa suspendida y la masa del neumático, que sigue siendo el conjunto resorte amortiguador, pero no es tan directamente conectado a la masa del neumático sino que se monta sobre una de las estructuras en forma de A.

A pesar de que la función principal de las diferentes configuraciones es la misma en los estudios revisados se enfocan solamente en una u otra, enfocándose en el desarrollo particular de una de las configuraciones si atender la otra. Curiosamente el fabricante de suspensiones menciona que la configuración Doble triángulo ofrece un confort, dinámica y agarre de la llanta superior (NTN-SNR, 2015 p.2) también se menciona que usualmente la configuración doble triángulo se utiliza en vehículos de gama alta como lo son los *Mercedes clase E y S*, *BMW 5 y 7* (NTN-SNR, 2015 p. 2), pero en ningún momento se dice cuál es esa característica o por que la configuración Doble triángulo es superior a la configuración McPherson.

Los trabajos de investigación revisados, se puede observar que el desarrollo de la investigación se centra en una u otra configuración, no se encuentra una comparación entre estos mecanismos ni la razón de porque una configuración es mejor que otra. Es por ello que se ha de conocer el comportamiento de las dos configuraciones del mecanismo de suspensión, a través de un modelo matemático que arroje las gráficas de comportamiento, bajo las condiciones iniciales que se plantean en el entendimiento del “Reglamento”, “Reglamento técnico A” y “manual”.

Por otro lado se aprecia que los valores para la resolución numérica se han establecido, debido a que evalúan un vehículo en particular, sin atender si existe otras características que pudiesen ser adecuadas o no para la aplicación, por ello se han establecido los rangos tanto de la constante de elasticidad como de la constante de viscosidad y así determinar los más adecuados.

Antes de empezar a realizar el modelo matemático se debe de esclarecer que dentro de la mecánica este trabajo se enfocara en rama de la dinámica de sistemas la cual se encarga de estudiar los cuerpos en movimiento atendiendo las fuerzas que provocan dicho movimiento. Pero para poder conocer las fuerzas que provocan el movimiento de un objeto se requiere de la realización de un dibujo donde se muestren claramente todas las cantidades involucradas así como un diagrama de todos los cuerpos involucrados; A lo que se le conoce como un diagrama de cuerpo libre (Beer P. Ferdinand, Johnston E Rusell, Mazurek F. David, Eisenberg R. Elliot, 2010, p. 12).

De este diagrama de cuerpo libre es de donde se obtiene un modelo matemático al cual se aplican las leyes físicas que lo rigen para describir su comportamiento. Tal modelo puede incluir parámetros desconocidos, pero es necesario aclarar que debe existir un equilibrio entre la exactitud y la simplicidad, por lo que se debe ser consciente que ningún modelo puede representar cualquier componente o sistema físico con exactitud, por lo que siempre se involucran aproximaciones o suposiciones. Y es necesario decidir cuáles son las variables y relaciones físicas cruciales o de interés y descartar las que no lo sean convenientes para el modelo todo esto con el objeto de obtener un modelo en forma de ecuaciones diferenciales lineales (Ogata Katsuhiko, 1987 p.6).

Para determinar cuáles son las variables y relaciones físicas se hizo el entendimiento de la función del mecanismo de suspensión así como de las variables involucradas en él en capítulos anteriores, también se realizó el análisis de los requerimientos de la suspensión establecidos en los reglamentos y en el manual así como de las características físicas de la competencia de donde se han obtenido los valores y parámetros que se emplearan para los modelos, como la masa suspendida, la distancia entre el suelo y el chasis y también las pruebas a las que será sometido el vehículo. Aún así solo se obtuvieron algunos valores y parámetros para los modelos. Por lo que ahora se explica cuáles son los fundamentos matemáticos teóricos empleados en el desarrollo del modelo.

ECUACIONES DIFERENCIALES

Se sabe, de la teoría de ecuaciones diferenciales, en donde se establece que una ecuación diferencial es aquella en la que las ecuaciones contienen derivadas de una o más variables

dependientes respecto a una o más variables independientes (Zill Dennis G., 2017 p.2), donde se habla del elemento que debe estar presente en toda ecuación diferencial, una derivada pero se entiende entonces que una ecuación diferencial es aquella en la cual se muestra la relación que existe entre una variable dependiente y una independiente. Por poner un ejemplo se dirá que una ecuación muestra como la posición cambia conforme el tiempo pasa, o como cambia una temperatura conforme se aumenta el espesor de algún material. La manera de obtener soluciones generales y particulares depende de si son proporcionados los valores iniciales, es decir que se establezcan los valores que tenía el sistema al momento de comenzar con la evaluación del fenómeno. Se habla que se encuentra una solución general cuando se conoce la familia de soluciones definidas en algún intervalo que contiene a todas las soluciones de la ecuación diferencial definidas en ese intervalo (Zill G: Dennis, 2017, p.114).

En las ecuaciones diferenciales se encuentran separadas de acuerdo al orden, esto es, que depende el orden de la mayor derivada en la ecuación es decir que $\frac{d^2y}{dx^2}$ es una derivada de segundo orden y que $(\frac{dy}{dx})^3$ es una derivada de primer orden aunque se encuentre elevada al cubo. Pero las ecuaciones que aquí se ocuparan son de orden superior por lo que las derivadas contenidas son de orden mayor a 2 expresadas como se muestra en la ecuación 6.

Ecuación 6

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

Por el principio de superposición aplicado en las ecuaciones diferenciales se sabe que una solución para la ecuación diferencial homogénea de n-ésimo orden en un intervalo se compone por la combinación lineal de todas las posibles soluciones de está expresándose de la siguiente manera (Zill G.Dennis, 2017, p.117)

Ecuación 7

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_k y_k$$

Mientras que en una ecuación diferencial no homogénea expresada como sigue:

Ecuación 8

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Sea y_p cualquier solución particular de la ecuación diferencial no homogénea de n-ésimo orden en un intervalo, y sea y_1, y_2, \dots, y_n un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial no homogénea asociada en el intervalo. Entonces su solución en el intervalo está dada por (Zill G: Dennis, 2017, p. 121):

Ecuación 9

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n + y_p$$

Se sabe que las ecuaciones diferenciales describen el comportamiento de un sistema que varía con el tiempo y dependiendo de los parámetros que se establezcan en éstas se va a comportar de una manera a otra a lo cual se le conoce como la respuesta del sistema. En el caso de una ecuación diferencial homogénea de orden superior, presentada en la ecuación 6 se nota como esta igualada a cero lo que indica que el comportamiento no se ve influido por un agente externo o entrada, es decir que tiene una entrada igual a cero y solo depende de los parámetros internos así como el comportamiento del modelo descrito por la ecuación, por lo que, cuándo se encuentra la solución general del sistema se dice que nos está entregando una respuesta libre.

En el caso de la ecuación 8 se observa que la ecuación esta igualada a otra función a la cual se le conoce como entrada y que representa alguna perturbación externa al sistema y al encontrar la solución de la ecuación 8 se dice que se encuentra una respuesta forzada ya que se compone por la respuesta del sistema cuando se encuentra bajo el efecto de la perturbación externa:

Por lo que para nuestro sistema se espera encontrar la suma de la respuesta libre y de la respuesta forzada y así conocer una respuesta total del sistema (Nise S. Norman, 2006, p.14), pero como se verá más adelante en ambas configuraciones de suspensión se encontrará que para describir el comportamiento se necesita más de una ecuación diferencial. Por lo que se describe el siguiente tema.

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES.

Un sistema de ecuaciones diferenciales se refiere a un conjunto de ecuaciones interactuando en un mismo sistema pero con una variable de la misma naturaleza aun así independientes la una de la otra, y que puede ser expresado dependiendo de la cantidad de grados de libertad presentes en el sistema. Lo que se entiende cuando se hace referencia a el término grado de libertad es a la cantidad de parámetros linealmente independientes en un sistema (Nise Norman S. 2006) por lo que para este caso en particular podemos decir que si un punto en movimiento se podrá mover si el resto de puntos que conforman el sistema se mantienen inmóviles. Por lo tanto la cantidad de ecuaciones diferenciales será igual al número de grados de libertad del sistema. Por lo que para poder expresar un sistema de ecuaciones deferenciales que se expresan como en la ecuación 10.

Ecuación 10

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)\end{aligned}$$

Ecuación 11

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

Se toman las variables independientes juntándolas en una matriz y las variables dependientes, en el caso de que alguna de las ecuaciones contenga una entrada se separan en otra matriz como se muestra en la ecuación 11. Siendo X, A y F.

Entonces se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

Donde

$$\mathbf{X}' = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

Quedando como:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$$

Esta matriz nos ayudara a comprender el siguiente tema para poder llegar a la solución.

VARIABLES DE ESTADO

Finalmente, para que las ecuaciones obtenidas sean manipulables al momento de ser programadas en la plataforma se ha de introducir el concepto de variables de estado, las cuales son una manera que se utiliza en la teoría de control. Así un estado se refiere al conjunto de variables más pequeño (llamadas variables de estado), de forma que el conocimiento de estas variables en $t = t_0$, junto con el conocimiento de la entrada para $t \geq t_0$, determinan completamente el comportamiento del sistema en cualquier $t \geq t_0$, de acuerdo a Ogata, Katsuhiko, 2010, p.29. Entonces las variables de estado son aquellas que constituyen el menor conjunto de variables que determinan el estado de un sistema dinámico. Ogata, Katsuhiko, 2010, p.29. Todo esto aplicado a un sistema en el cual existe

una “n” cantidad de entradas para una “m” cantidad de salidas que pueden ser variantes en el tiempo o respecto a otra variable.

Podría expresarse que si se conoce el vector de variables de estado, condiciones iniciales del sistema.

Ecuación 13

$$\bar{x}(t) = [x_1(t), x_2(t) \dots x_n(t)]$$

Y conocemos el comportamiento del sistema con respecto a dichas variables de estados y la entrada podremos formar un arreglo en forma matricial como se muestra en la ecuación 14.

Ecuación 14

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}$$

En donde la matriz A representa a las condiciones que gobiernan el sistema, B representa a las variables que gobiernan la entrada al sistema, que es similar a lo visto anteriormente. El vector \bar{x} , representa la variables independiente y el \bar{u} el vector independiente de la entrada que se expresa como en la ecuación 15.

Ecuación 15

$$\bar{u} = [u(t)_1, u(t)_2, \dots u(t)_n]$$

Entonces podemos conocer el comportamiento del sistema en todo momento para $t \geq t_0$ es decir que se puede conocer el comportamiento desde el instante en que empezamos a analizar el sistema hasta el instante de tiempo que sea deseado obtendremos una ecuación expresada como la ecuación 16.

Ecuación 16

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}$$

Este arreglo de las ecuaciones nos ayudará su fácil introducción en la plataforma de MATLAB que a través de la función ODE 45 de MATLAB, función que se basa en el método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden. Que de acuerdo con Zill G: Dennis,

2017 p. 359, “es uno de los procedimientos numéricos más populares así como más preciso, usado para obtener soluciones aproximadas para un problema con valores iniciales”

Una vez que se entiende todas las bases matemáticas antes mencionadas se procede a realizar los diagramas de cuerpo libre y los modelos matemáticos.

SUSPENSION MCPHERSON

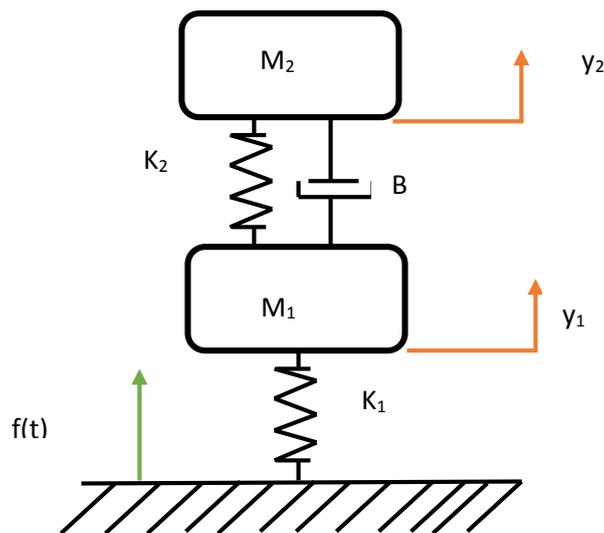


Figura 10 MODELO PARA UNA SUSPESIÓN MCPHERSON

Para la configuración McPherson se presenta un modelo de dos grados de libertad ya que las masas se pueden mover de manera independiente, en donde la respuesta de interés es conocer la posición, velocidad y la aceleración de las masas, En donde M_2 representa la masa suspendida y M_1 representa la masa del neumático, constantes que se conocen, y que dependiendo de los valores que tengan la constante de elasticidad en K_2 que representa el resorte lineal y la constante del coeficiente viscoso B variara su comportamiento. Las constantes las conocemos gracias a la revisión de fuentes antes mencionada.

Retomando lo mencionado en la introducción del trabajo, la suspensión McPherson es un arreglo que actúa como una columna telescópica, efecto proporcionado por el conjunto resorte amortiguador, y que está unido a un neumático y a la masa suspendida por los extremos. Por lo que si se tiene una fuerza de entrada, producida por el efecto de la ruta, el efecto del resorte proporcionado por el material se resistirá a

cambiar su forma, esa reacción será a su vez transmitida a la masa uno que de igual forma, por primera ley de Newton, se resistirá a ser desplazada y como a su vez, la masa del neumático está directamente conectada el resorte y el amortiguador producirán una reacción que busca impedir que se desplace la masa del neumático, por lo que transmitirán la fuerza hasta la masa suspendida aunque no de forma completa debido a las propiedades el conjunto resorte amortiguador, la masa suspendida a su vez resistiéndose a ser desplazada por el efecto de la inercia.

Gracias a las ecuaciones de equilibrio de los elementos que se enumeran a continuación y con la descripción anterior.

Ecuación 17

$$f_{k_1} = k_1 y_1 \quad \text{La fuerza elástica en el neumático.}$$

Ecuación 18

$$f_B = \beta \frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_1}{dt} \quad \text{La fuerza viscosa del amortiguador.}$$

Ecuación 19

$$f_{m_2} = m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} \quad \text{La fuerza de la masa suspendida.}$$

Ecuación 20

$$f_{k_2} = k_2 (y_2 - y_1) \quad \text{La fuerza producida en el resorte.}$$

Ecuación 21

$$f_{m_1} = m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} \quad \text{La fuerza producida por la masa del neumático.}$$

Se empieza a comprender el efecto desde la entrada de producida por la tierra, que pasara al efecto del resorte producido por el neumático como se muestra en la Figura 13:



Figura 11 Diagrama de cuerpo libre del resorte

Cuya ecuación de equilibrio queda de la siguiente manera.

Ecuación 22

$$f(t) = k_1 x_1$$

En donde se puede apreciar que el efecto de la función de entrada será la misma a la función de reacción generado por el efecto del resorte.

Ecuación 23

$$k_1 x_1 = k_2 (y_2 - y_1) + m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \beta \left(\frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_1}{dt} \right)$$

El efecto pasa a la masa del neumático en donde se puede ver la influencia del conjunto resorte amortiguador.

Ecuación 24

$$m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = k_2 (y_2 - y_1) + \beta \left(\frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_1}{dt} \right)$$

Y en la Ecuación 24 se aprecia nada más el efecto del conjunto resorte amortiguador y la inercia de la masa suspendida.

Pero como sabemos que la entrada en el resorte de la llanta va a ser igual a la función de entrada por lo que la Ecuación 22 se sustituye en la Ecuación 23 remplazando el efecto de resorte producida por el material quedando como se muestra en la ecuación 25.

Ecuación 25

$$f(t) = k_2 (y_2 - y_1) + m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \beta \frac{dy_1}{dt}$$

Quedando la Ecuación 23 de la misma manera.

Ecuación 26

$$m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = k_2(y_2 - y_1) + \beta \left(\frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_1}{dt} \right)$$

Es apreciable que tanto en el modelo y confirmado por las ecuaciones que se presenta un sistema que tiene dos grados de libertad, ya que para conocer la posición del sistema necesitamos de dos parámetros independientes y_2 y y_1 . Debido a que lo que nos interesa es la acción de los parámetros en el resorte y el amortiguador sobre la velocidad y la aceleración de las masas se deben de resolver las Ecuaciones 25 y 26 en función del grado mayor de la ecuación siendo en ambas, el termino en donde se expresa la inercia de las masas del neumático y de la masa suspendida reescribiendo para un manejo más sencillo quedando las Ecuaciones 27 y 28.

Ecuación 27

$$m_2 \ddot{y}_2 = k_2(y_2 - y_1) + \beta(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)$$

Ecuación 28

$$m_1 \ddot{y}_1 = -k_2(y_2 - y_1) - \beta(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + f(t)$$

Entonces despejando las masas 1 y 2 de las Ecuaciones 27 y 28 arrojando 29 y 30.

Ecuación 29

$$\ddot{y}_2 = -\frac{k_2}{m_2}(y_2 - y_1) - \frac{\beta}{m_2}(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)$$

Ecuación 30

$$\ddot{y}_1 = -\frac{k_2}{m_1}(y_2 - y_1) - \frac{\beta}{m_1}(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + \frac{f(t)}{m_1}$$

Ambos modelos deben de ser expresados en variables de estado, como ya se mencionó, conocer sus entradas así como sus condiciones iniciales y la o las funciones que describen

su comportamiento. Quedando para la suspensión McPherson, en función de las variables de interés, velocidad y aceleración siguiendo el siguiente procedimiento.

Ecuación 31

$$[S] = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dot{y}_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix}$$

Se dice que el vector S compuesto por la posición y la velocidad que si derivamos se obtiene el vector \dot{S} cuyas compuesto por la matriz A formada por las variables que rigen el comportamiento del fenómeno multiplicado por el estado iniciales que se expresó en el vector S más el vector que expresa a la función de entrada.

Para obtener la matriz A se toman las ecuaciones 29 y 30 si el término y_1 está relacionado con el término \dot{y}_1 . Si \dot{y}_1 está relacionada con \ddot{y}_1 se colocan las constantes en las que aparece el término \dot{y}_1 .

Ecuación 32

$$[\dot{S}] = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_1} & \frac{\beta}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1} & -\frac{\beta}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{\beta}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{\beta}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \dot{y}_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} + f(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para poder expresar la Ecuación 32 en una manera que sea comprensible para la plataforma de MATLAB se expresa la matriz de 4x4 en una matriz de 4x1 de la siguiente manera.

Ecuación 33

$$[S] = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dot{y}_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix}$$

$$[\dot{S}] = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_2}{m_1}(s_3 - s_1) - \frac{\beta}{m_1}(s_4 - s_2) + \frac{f(t)}{m_1} \\ s_2 \\ s_4 \\ \frac{k_2}{m_2}(s_3 - s_1) + \frac{\beta}{m_2}(s_4 - s_2) \end{bmatrix}$$

SUSPENSIÓN DOBLE TRIÁNGULO.

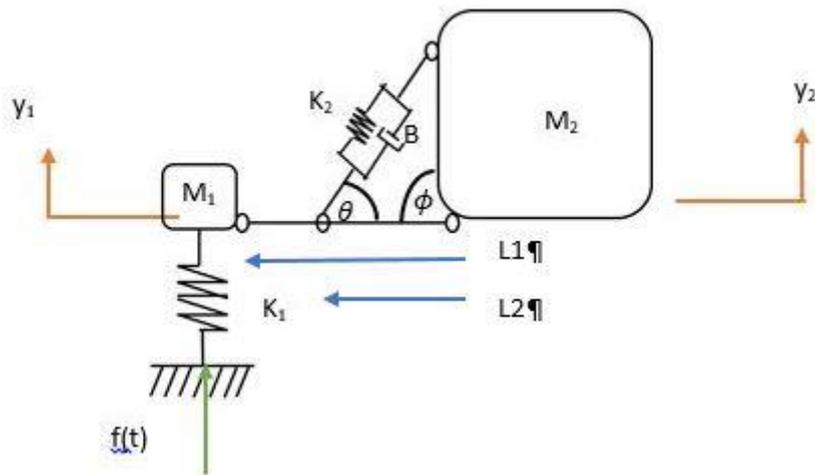


Figura 12 Diagrama de cuerpo libre para la suspensión Doble triángulo

Se observa en el diagrama de cuerpo libre que la interacción entre la masa suspendida y la masa del neumático es a través del conjunto resorte amortiguador que está montado sobre el elemento estructural en forma de “A” lo que proporciona un sistema de 3 grados de libertad cuyos parámetros requieren de tres variables, siendo estas \$x_1\$, \$x_2\$ y \$\theta\$, es decir dos posiciones lineales y una angular, proporcionado por la configuración de la suspensión doble triángulo, que a su vez nos dirán velocidades y aceleraciones lineales en las dos masas y una velocidad y aceleración angular en el brazo que conecta la masa del neumático con la masa suspendida y que a su vez sirve como apoyo al conjunto resorte amortiguador como se muestra en la Figura 14. Y aunque se sabe que el triángulo formado entre la longitud \$L1\$, \$L2\$ y la distancia entre la unión donde se forma el ángulo teta y la masa dos cuyo comportamiento cambia conforme el tiempo y la entrada cambie. Se estimará que dichas deformaciones son mínimas por lo que \$\Delta\theta \approx \theta\$ así que será considerado como una constante. Entonces se obtienen las ecuaciones de equilibrio en los tres ejes quedando como sigue:

Ecuación 35

$$\sum Fx = f_{k_2} + f_B = 0$$

Ecuación 36

$$\sum Fy = f_{k_1} + f_B + f_{m_2} + f_{k_2} + f_{m_1} + f(t) = 0$$

Ecuación 37

$$\sum M = Mm_1 + Mk_1 + Mk_2 + Mf(t) + M\beta = 0$$

En donde las Ecuaciones 35,36 y 37 muestran la existencia de fuerzas sobre el eje x y y así como una ecuación de equilibrio de los momentos, pero como solamente se está analizando un cuarto de suspensión, se considera que existe un espejo del sistema presentado en la Figura 14 tanto en su configuración como en sus elementos mecánicos y también en sus características por lo que las fuerzas que actúan sobre el eje x se anularan por el efecto del espejo de la suspensión. Quedando solamente desplazamientos verticales y siendo las ecuaciones de los elementos las siguientes.

Ecuación 38

$$f_{k_1} = k_1 y_1$$

La fuerza en el neumático.

Ecuación 39

$$f_B = \beta \left(\frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_1}{dt} \right)$$

La fuerza en el neumático.

Ecuación 40

$$f_{m_2} = m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2}$$

La fuerza de la masa suspendida.

Ecuación 41

$$f_{k_2} = k_2(y_2 - y_1)$$

La fuerza producida en el resorte.

Ecuación 42

$$f_{m_1} = m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2}$$

La fuerza producida por la masa del neumático.

En el caso de los momentos se realizó la consideración que la distancia entre \overline{ab} mostrada en la Figura 15 es similar al tramo de curva C por lo que se expresa como se muestra en la ecuación 43.

Ecuación 43

$$\overline{ab} \approx l_1 \phi$$

Se conoce que la suposición mostrada en la Ecuación 43 reduce la exactitud del modelo, aún así son necesarias ya que de lo contrario se corre el riesgo de obtener ecuaciones diferenciales no lineales.

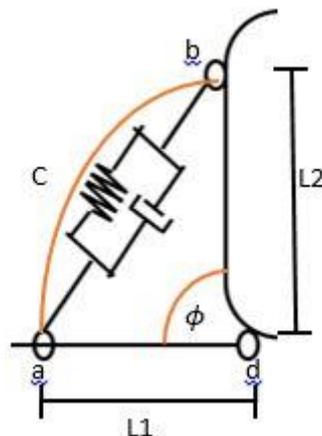


Figura 13 Simplificación del movimiento lineal.

También se sabe que no solamente la barra \overline{ab} cambia el ángulo ϕ , sino que puede producirse un cambio en el ángulo ϕ debido al movimiento en la sección del vehículo expresado por \overline{db} . Pero como se mencionó anteriormente, las fuerzas sobre el eje x serán consideradas cero, debido al espejo que existe de la suspensión, y son precisamente esas fuerzas las que podrían generar el cambio de posición de la recta \overline{db} , pero ya no consideradas por lo anterior se supondrá que el cambio del ángulo ϕ_2 será considerado nulo. Aportando solamente el cambio ϕ_1 que se considera como un cambio total. Para

demostrar gráficamente lo que se intenta explicar se ha realizado la Figura 16 en donde se presentan los posibles cambios de ángulo en ϕ .

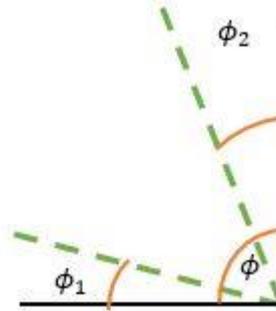


Figura 14 Ángulos que influyen en ϕ

Quedando las ecuaciones en los momentos de la siguiente manera:

Ecuación 44

$$M_{m_1} = m_1 l_T \ddot{\phi}$$

Momento en la masa del neumático.

Ecuación 45

$$M_{k_1} = k_1 l_T \phi$$

Momento en el resorte del neumático.

Ecuación 46

$$M_{f(t)} = f(t) l_T$$

Momento generado por la fuerza del pavimento.

Ecuación 47

$$|M_{k_2} = k_2 (\dot{\phi}) l_1$$

Momento generado por la reacción del resorte

Ecuación 48

$$M_{\beta} = \beta (\dot{\phi}) l_1$$

Momento generado por la reacción del amortiguador.

Y de la misma manera en que se procede con la suspensión McPherson se empieza el análisis del diagrama de cuerpo libre de abajo hacia arriba, comenzando con la función de entrada sobre el fenómeno de resorte generado por el material del neumático como se ve en la Figura 17 considerando que la reacción del resorte es la misma a la de la función de entrada obteniendo de ello la ecuación 49.

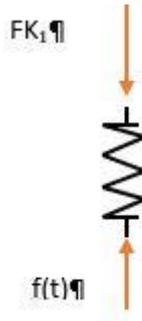


Figura 15 Diagrama de cuerpo libre del resorte

Y las ecuaciones 50, 51, y 51 procedentes de la sustitución de las ecuaciones que gobiernan a los elementos sobre las ecuaciones de equilibrio 35, 36 y 37.

Ecuación 49

$$f(t) = k_1 x_1$$

Ecuación 50

$$k_1 y_1 - m_1 \ddot{y}_1 - \beta (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k_2 (y_2 - y_1) \sin(\theta) = 0$$

Ecuación 51

$$k_2 (y_2 - y_1) \sin(\theta) + \beta (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) \sin(\theta) - m_2 \ddot{y}_2 = 0$$

Ecuación 52

$$k_2 \phi l_1 \sin(\theta) + \beta \dot{\phi} l_1 \sin(\theta) + m_1 l_T \ddot{\phi} - k_1 l_T \phi = 0$$

Nuevamente resolviendo para las aceleraciones lineales y la aceleración angular y despejando los valores de las masas suspendida y del neumático quedan las ecuaciones 53, 54 y 55

Ecuación 53

$$\ddot{y}_2 = \frac{k_2}{m_2} (y_2 - y_1) \sin(\theta) + \frac{\beta}{m_2} (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) \sin(\theta)$$

Ecuación 54

$$\ddot{y}_1 = \frac{f(t)}{m_1} - \frac{\beta}{m_2} (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) \sin(\theta) - \frac{k_2}{m_1} (y_2 - y_1) \sin(\theta)$$

Ecuación 55

$$\ddot{\phi} = \frac{f(t)}{m_1} - \frac{k_2(\phi) \sin(\theta) l_1}{m_1 l_t} - \frac{\beta \dot{\phi} l_1 \sin(\theta)}{m_1 l_t}$$

Ambos modelos deben de ser expresados en variables de estado, conocer los valores iniciales de entrada así como sus condiciones iniciales de los elementos que conforman la configuración y la o las funciones que describen su comportamiento. Que dando para la configuración doble triángulo las variables de interés dos posiciones lineales y una angular y sus respectivas velocidades. Obteniendo el vector S compuesto por la posición y velocidad de la masa del neumático, la posición y la velocidad de la masa suspendida y la posición y la velocidad angular en el brazo “A”.

Ecuación 56

$$[S] = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dot{y}_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_2 \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

Y derivando el vector se obtiene el siguiente vector \dot{S} . Compuesta por velocidades y aceleraciones que están igualados a la matriz de las constantes que gobiernan el modelo multiplicadas por el vector S más el vector que describe la función de entrada.

Ecuación 57

$$[\dot{S}] = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_1} \sin(\theta) & \frac{\beta}{m_1} \sin(\theta) & -\frac{k_2}{m_1} \sin(\theta) & -\frac{\beta}{m_2} \sin(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_2}{m_2} \sin(\theta) & \frac{\beta}{m_2} \sin(\theta) & \frac{k_2}{m_2} \sin(\theta) & \frac{\beta}{m_2} \sin(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k_2 \sin(\theta) l_1}{m_1 l_t} & \frac{\beta \sin(\theta) l_1}{m_1 l_t} \end{bmatrix} + f(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{m_1} \end{bmatrix}$$

Para poder expresar en MATLAB las variables de estado solo se cambia lo antes mencionado, de una matriz 4 x4 a una matriz de 4 x1:

Ecuación 58

$$[S] = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dot{y}_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_2 \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

Ecuación 59

$$[\dot{S}] = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_2 \\ \frac{f(t)}{m_1} - \frac{\beta}{m_1} \sin(\theta)(s_4 - s_2) - \frac{k_2}{m_1} \sin(\theta)(s_3 - s_1) \\ s_4 \\ \frac{k_2}{m_2} \sin(\theta)(s_3 - s_1) + \frac{\beta}{m_2} \sin(\theta)(s_4 - s_2) \\ s_6 \\ \frac{f(t)}{m_1} - \frac{k_2 \sin(\theta) l_1}{m_1 l_t} s_5 - \frac{\beta l_1 \sin(\theta)}{m_1 l_t} s_6 \end{bmatrix}$$

Para poder resolver y finalmente conocer el comportamiento, expresado en gráficas que son más fáciles de entender, se procede a expresar todo en la plataforma de MATLAB.

SIMULACIÓN DINÁMICA

Una vez que se conocen las variables y se conocen los modelos se procede a realizar la o las simulaciones necesarias para conocer las gráficas que describen el comportamiento bajo las condiciones establecidas por la competencia Electratón. Para ello se realizó un programa en la plataforma MATLAB, el cual ayudara a resolver las ecuaciones diferenciales establecidas en variables de estado con la utilización de la función ode45 en el cual se evaluaran las diferentes constantes de elasticidad de los resortes y las constantes de viscosidad en los amortiguadores. Conocimiento que se adquirió en la estancia de investigación realizada en la University College Dublin bajo la supervisión del Dr. Vikram Pakrashi en el laboratorio de Dinámica de Sistemas y Riesgos gracias al programa de “Apoyo de Titulación para Egresados de la UNAM a través de Estancia Académica en el Extranjero (TEE)” que se obtuvo gracias al apoyo de la carrera de ingeniería mecánica de la FES Aragón y al Departamento de Movilidad Estudiantil de la misma institución.

La función ODE45 es una función de MATLAB para resolución de ecuaciones diferenciales no rígidas, siendo una ecuación diferencial rígida aquella en la cual dos o más constantes de tiempo son muy diferentes entre sí o cuando una sola constante es muy pequeña con relación a la función de entrada (Wilson H. Rymond, 1968). Utilizando como base el método de resolución de ecuaciones diferenciales de Runge-Kutta de cuarto orden.

La estructura básica que pide la función ODE45 es en primer lugar una función con dos variables cuales quiera y que pueden ser designadas por el que realiza la programación, siendo las seleccionadas para este programa t y s , un intervalo de tiempo en el cual resolverá la o las ecuaciones diferenciales y las condiciones iniciales del sistema, que dependerán del vector S expresado en las variables de estado aparte de otras condiciones particulares que no se expresan aquí por su nula utilización.

```
[t,s]=ode45(función,intervalo de tiempo, condiciones iniciales)
```

Figura 16 Descripción de los parámetros que deben de ser ingresados para que MATLAB resuelva una ecuación diferencial con la función ODE45

Teniendo muy presente que MATLAB es un lenguaje de programación que se expresa en forma Matricial y arreglos matemáticos (Math Works, 2019) es decir que la plataforma

de MATLAB funciona con vectores y matrices. Por ello eran necesario expresar los modelos en forma matricial.

Empezando con la programación para la configuración McPherson se toma el vector que expresa la matriz de 4 x 1 que es la que gobierna el comportamiento del sistema con la función de entrada incluida. La cual, para separar cada renglón se pondrá un punto y coma, Al principio y al final se utilizarán corchetes para decirle al programa que está tratando con un vector. Queda el vector de la función Mcpherson escrito como:

$$\begin{bmatrix} s(2) ; \\ - (f(\tau) / m1) + (k2 / m1) * (s(3) - s(1)) + (b / m1) * (s(4) - s(2)) ; \\ s(4) ; \\ - (k2 / m2) * (s(3) - s(1)) - (b / m2) * (s(4) - s(2))] \end{bmatrix}$$

Figura 17 Representación de las ecuaciones de variables de estado del modelo de la suspensión McPherson en MATLAB

Y en este caso como “s” es el vector en el cual se expresan las posiciones, velocidades y aceleraciones, como se mostró en la sección de los modelos, será la variable que resolverá la función. Se considera necesario aclarar que, se creó una función una especie de función aparte en caso de que pudiese existir algún otro modelo bajo las mismas condiciones iniciales y evaluación de tiempo. Como si se tratase de un disco que se quita y se pone.

En cada función se deben de colocar las constantes conocidas y obtenidas, una masa de 200 [Kg] que debido a que solamente se está evaluando un cuarto de la suspensión será dividida entre cuatro teniendo entonces una masa para el modelo de 50 [Kg], para la masa del neumático más el rin y la estimación del resto de componentes se tiene una masa por neumático de 3 [Kg], y las variables que se evaluarán y se cambiarán cuando así sea requerido, siendo estas la constante de elasticidad del resorte y la constante de viscosidad del amortiguador y finalmente añadiendo la función de movimiento armónico simple que llamara a la constante t, la cual se expresa más adelante y que denota el tiempo de evaluación. Todo esto escrito de la siguiente manera.

```

m1= 3; % masa del neumático [kg]
m2 = 50; % masa suspendida [kg]
w=0.5;
A=1;
f= @(t) A*cos(w*t); %entrada del suelo
%-----Amortiguamiento y elasticidad-----%
k2=64.75; % rigidez elástica del resorte [N/m]64.75-154.68-924.97
b=1273; % constante de amortiguamiento [N/m/m] 1273-1485-1697

```

Figura 18 Condiciones iniciales que se han de incluir en la función

Una vez que se ha realizado la función que contiene la ecuación en variables de estado se debe de guardar la función con un nombre que no se repita y por lo tanto cause una confusión en el programa.

Después se deben de incluir las condiciones iniciales y el tiempo en el cual será evaluada la función pero fuera de la función. En otra ventana en la cual se aplicará la función ODE 45 y que llamará a la función que previamente creamos. Se conoce que el sistema que se presenta posee dos grados de libertad (en el caso de la suspensión McPherson) por lo que las condiciones iniciales en el modelo para que se pueda obtener una solución son: una posición y velocidad inicial de la masa del neumático y una posición y velocidad inicial en la masa suspendida y el tiempo en el cual se planea conocer el comportamiento.

En el caso del tiempo, será evaluado desde un estado de reposo en el tiempo cero hasta que la gráfica muestre un comportamiento predecible tomando de 0 a 150 segundos, La posición inicial del neumático y de acuerdo a una de las función de la suspensión es que el neumático mantenga contacto con el suelo en todo momento (Lewis Michel, 2018), (Gosselin-Brison Samuel, 2006) (Mohd Riduan Aizuddin Fahmi, et al, 2018), por lo que se estableció que su posición inicial sea en una posición inicial de cero, es decir pegada al suelo mientras que su velocidad inicial su velocidad inicial, que parte del instante antes de avanzar o partiendo del reposo se considera que sea de cero. Para la masa suspendida y de acuerdo a lo establecido por el manual (Lewis Michel, 2018). Debe de existir un espacio entre el chasis y el suelo de 2 pulgadas como mínimo. Por lo que la posición inicial de la masa suspendida es de 2 pulgadas (0.05 [m]), siendo esa su posición inicial y como se parte justo antes de avanzar pero con el piloto ya adentro sin que existan oscilaciones se estima que se parte del reposo por lo que la velocidad inicial es de cero. Quedando expresado de la siguiente manera.

```

%-----Condiciones iniciales-----%
%Valores
t0=0;   tf=150;
x0= 0;  x0dot=0;
x02= 0.05; x02dot= 0;

tspan=[t0,tf];
IC= [x0,x0dot,x02,x02dot];

```

Figura 19 Condiciones iniciales para el funcionamiento de la función ODE45

Una vez realizado dicho procedimiento se debe guardar el programa con un nombre y correr el programa. La función ODE 45 llamará a la función donde se encuentran las ecuaciones del modelo a la vez que sustituye los valores dentro de la función, lo cual al final del proceso arrojará un vector llamado como se nombró en un principio, en este caso fue cambiado a “state_variables” y un vector con el tiempo que fue evaluado.

```
[t,state_variables]=ode45(@functionMcPherson,tspan,IC);
```

Figura 20 Declaración de las condiciones iniciales para la resolución del modelo doble triángulo

De la misma manera se procede con la ecuación en variables de estados de la suspensión doble triángulo. Se expresa la ecuación en variables de estado en forma que la plataforma de MATLAB lo pueda entender.

```

[s(2);...
(k2/m1)*(s(3)-s(1))*sin(th)+(b/m1)*(s(4)-s(2))*sin(th)-(f(t)/m1);
s(4);...
-(k2/m2)*(s(3)-s(1))*sin(th)-(b/m2)*(s(4)-s(2))*sin(th);...
s(6);...
f(t)/(m1*lt)-(k2*ll)/(m1*lt)*sin(th)*s(5)-
(b*ll)/(m1*lt)*sin(th)*s(6)];

```

Figura 21 Representación del vector de variables de estado de la configuración doble triángulo para MATLAB.

Y se establecen las constantes de manera similar a lo que se realizó en la función McPherson: Se colocan la masa suspendida, la masa del neumático, la posición y la velocidad iniciales verticales de manera similar a la función utilizada para la configuración McPherson pero presentando la mayor diferencia que existe entre las configuraciones, que es posible apreciar en el diagrama de cuerpo libre del mecanismo doble triángulo. Que es un sistema de tres grados de libertad por lo que será necesario indicar además la posición y velocidad angular iniciales. Siendo en el primer caso un

ángulo inicial, entre la estructura en forma de “A” y el chasis, de noventa grados para que el mecanismo sea paralelo al suelo. Y como se parte de la suposición que el vehículo parte de un estado de reposo se supone que la velocidad angular inicial será de cero. También se incluyen las distancias de las barras como lo propone (Sarvadnya Ajinkya Thakare, Prasad C Antapurkar, Divyaj S Shah, P R Dhamangaonkar and S N Sapali, 2015) siendo una longitud de 225 mm (0.225m), y un ángulo entre el conjunto resorte amortiguador y el brazo en forma de “A” de 20 grados, suponiendo ambos brazos de la misma longitud para que sean paralelos entre sí y con el suelo. Se guarda la función con un nombre diferente y se corre para verificar si existen errores.

```

k1 = 192300; %Constante de elasticidad del neumático [N/m]
m1= 50; % masa del neumático [kg]
m2 = 3; % masa suspendida [kg]
lt=0.225; %Longitud total del brazo "A" [m]
l1=0.012;% Longitud de la masa 2 al conjunto resorte-amortiguador [m]
th=20; %Ángulo entre el conjunto resorte amortiguador y el brazo "A"
w=0.5;
A=1;
f= @( t) A*cos (w*t); %Entrada del suelo
%-----Amortiguamiento y elasticidad-----%
k2= 64.75; %Constante de elasticidad del resorte [N/m] 64.75-924.97
b= 1967; %Constante de viscosidad del amortiguador [N/m/s] 1273-1967

```

Figura 22 Declaración de las condiciones iniciales que serán sustituidas en el vector que representa las variables de estado.

Se desarrolla el programa que resolverá la función de la configuración Doble triángulo ocupando la función ODE45 para la resolución como se hizo con la función McPherson.

```

[t,state_variables]=ode45(@functionDoublewishbone,tspan,IC);

```

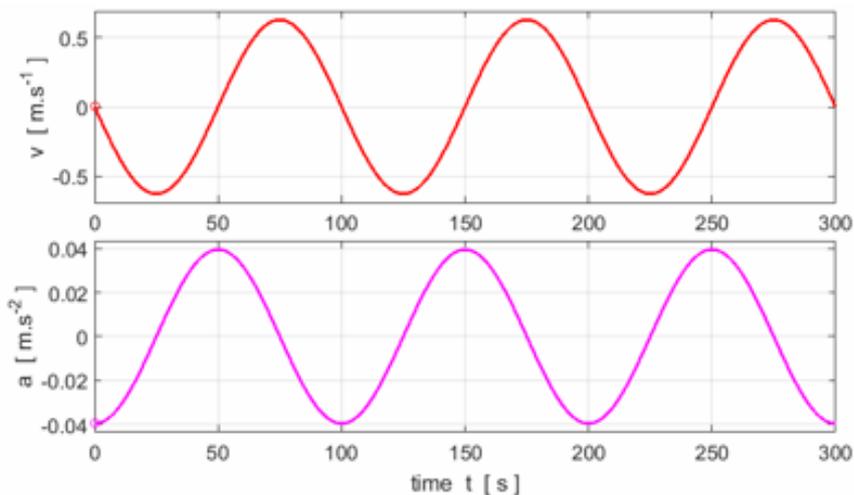
Figura 23 Declaración de los valores de la función ODE 45 para la función doble triángulo

Una vez que se tiene el programa funciona se procede a cambiar en ambos modelos solamente la constante de elasticidad y la constante de viscosidad para tres valores, suave, medio y duro como se vio en las tablas de donde se obtuvieron los valores para conocer cómo se comporta el sistema y una prueba más en la cual la constante de amortiguación es cero, para así poder verificar que se comporta como un sistema masa-resorte del cual son conocidas las gráficas.

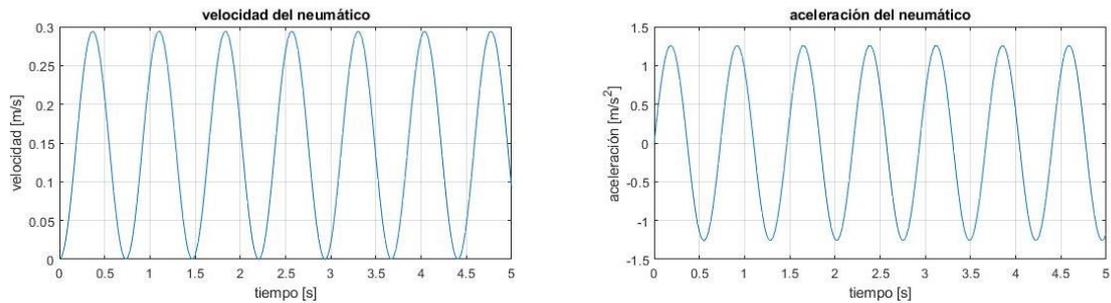
RESULTADOS

Se sustituirán los valores de las tablas 3 y 4 para obtener las gráficas de comportamiento con la combinación de los valores, la manera en que se puede validar si el modelo que se propone es adecuado o se comporta de acuerdo a lo que se espera. Se utiliza el comportamiento de un sistema masa resorte, ya que se conoce su modelo y sus gráficas de velocidad y aceleración contra tiempo como se muestra en la Gráfica 1, podría decirse, que el sistema masa resorte es una forma simple del modelo de un mecanismo de suspensión., en el cual solo se omite el efecto generado por el amortiguador y la masa del neumático.

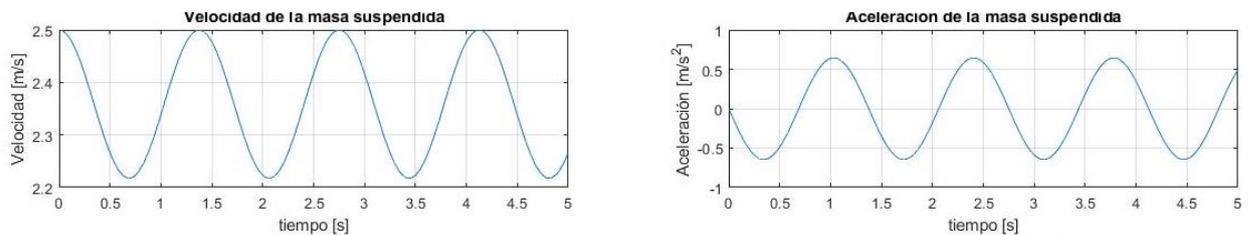
Por ello se comparará la gráfica de velocidad contra tiempo de ambos modelos, variando los valores de estos, para que se comporten como un sistema masa resorte. Para ello se introduce el valor de la masa del neumático tendiente a cero, ya que en la ecuación, la masa del neumático divide a toda un renglón y en el caso en el que se llegará sustituir el valor de m_1 igual a cero el programa arrojaría un error, por lo que el valor de la masa del neumático en este caso se considera como 0.1 [Kg] lo que significa que tiende a cero. El valor de la constante viscosa se sustituye como cero para que no produzca el efecto de la viscosidad en el modelo.



Gráfica 1 Representación de la velocidad y la aceleración de un sistema masa resorte.



Gráfica 2 Sistema masa resorte representado en la suspensión McPherson. $m_1=0.9$ [kg], $m_2=50$ [kg], $k_2=64.75$ [N/m], $f(t)=0$, $b=0$



Gráfica 3 Sistema masa resorte representado en la suspensión Doble triángulo. $m_1=0.9$ [kg], $m_2=50$ [kg], $k_2=64.75$ [N/m], $f(t)=0$, $b=0$

Es posible observar que las gráficas de la suspensión McPherson y Doble triángulo se comportan como un sistema masa resorte y presentan la misma forma de onda, cuando se anulan los valores de la masa del neumático, el efecto viscoso generado por el amortiguador, la función de entrada. A pesar de que no se puede anular completamente el valor de la masa del neumático debido al error que podría arrojar el modelo, se considera que el valor no afecta las gráficas y se puede observar en las Gráficas 3 y 4. Con lo que se puede notar que los modelos pueden llegar a representar de manera general los sistemas homólogos. Por lo tanto se puede asegurar que los modelos se comportan de acuerdo a lo esperado y se considera que representan al fenómeno que se estudia en esta investigación.

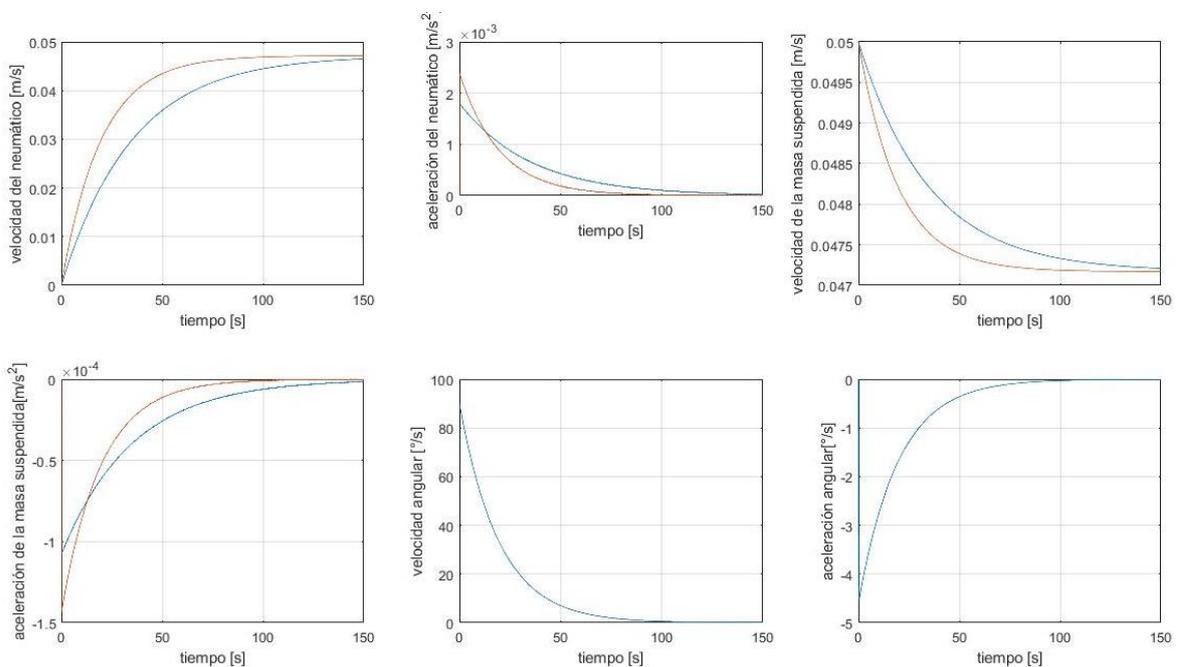
Lo adecuado sería que se realizara la comparación con los modelos obtenidos en otros trabajos pero como no se encontró una gráfica de velocidad contra aceleración en ninguna de las fuentes revisadas es imposible realizar la comparación. Debido a que el vehículo se encuentra en fase de desarrollo y no existe un modelo físico con ambas configuraciones del mecanismo de suspensión no se podrían obtener los valores en un modelo real. Por lo que se propone como trabajo a futuro.

RESPUESTA LIBRE.

Se realiza la simulación de ambas configuraciones bajo condiciones de respuesta libre, es decir, sin el efecto de la entrada generada por la ruta, por lo que se busca obtener las gráficas en respuesta libre del sistema. Simplemente se estima que los valores de la función, que describe la entrada generada por el suelo expresada en programa, sean iguales a cero así utilizando una frecuencia natural omega igual a cero y una amplitud en la entrada igual a cero.

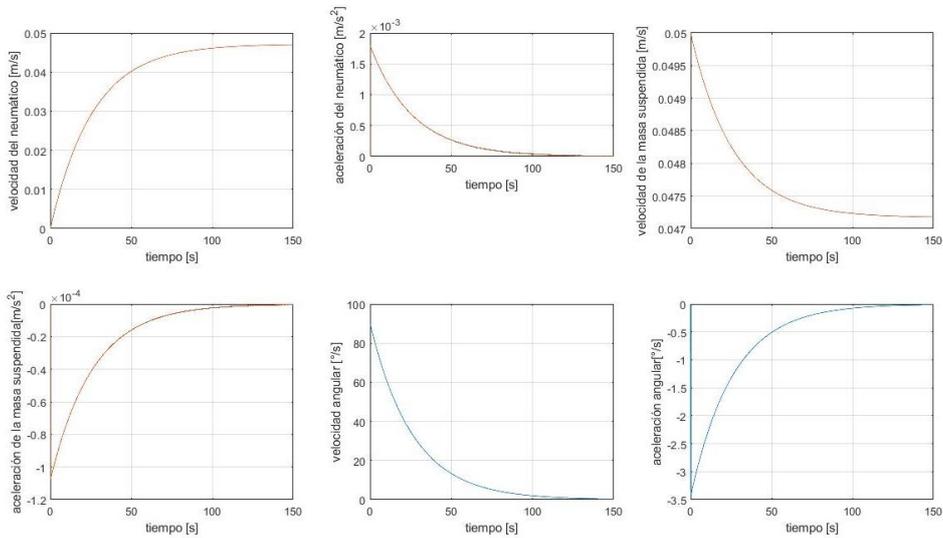
Se evalúan las características del conjunto resorte amortiguador para cada combinación en el modelo. Se comparan las gráficas obtenidas en respuesta libre de cada configuración se denota la gráfica de la configuración McPherson en color azul y las gráficas de la configuración doble triángulo en color naranja.

En la cual se puede observar que para un resorte suave (64.78 [N/m]) y un amortiguador suave (1273 [N/m/s]) se observa que la gráfica azul presenta una transición mucho más suave que en la gráfica naranja en la cual se observa que el cambio de aceleración y de velocidades es más rápido. Gráfica 4.

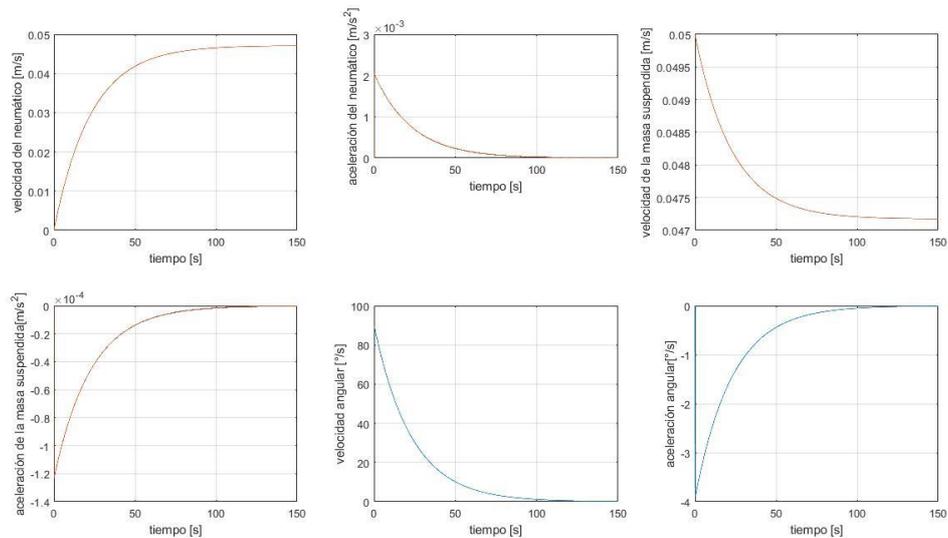


Gráfica 4 Comparación de la respuesta libre con un resorte suave (64.78 [N/m]) y amortiguador suave (1273 [N/m/s]) para las configuraciones McPherson y Doble triángulo.

Pero cuando se cambian los valores a un resorte suave y un amortiguador medio o duro las gráficas tienden a acoplarse de una forma mucho más rápida, de tal manera en que no se identifica en qué momento se encuentra una y otra como se muestra en Gráficas 5 y 6



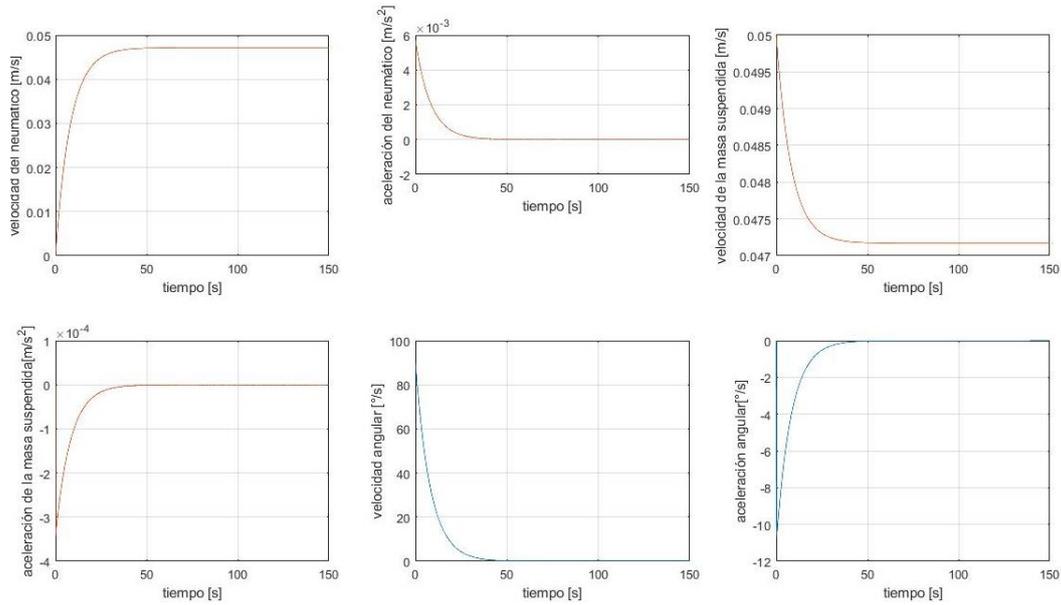
Gráfica 5 Comparación de la respuesta libre resorte suave (64.78 [N/m] y amortiguador medio (1485[N/m/s])) de las configuraciones McPherson y Doble triángulo.



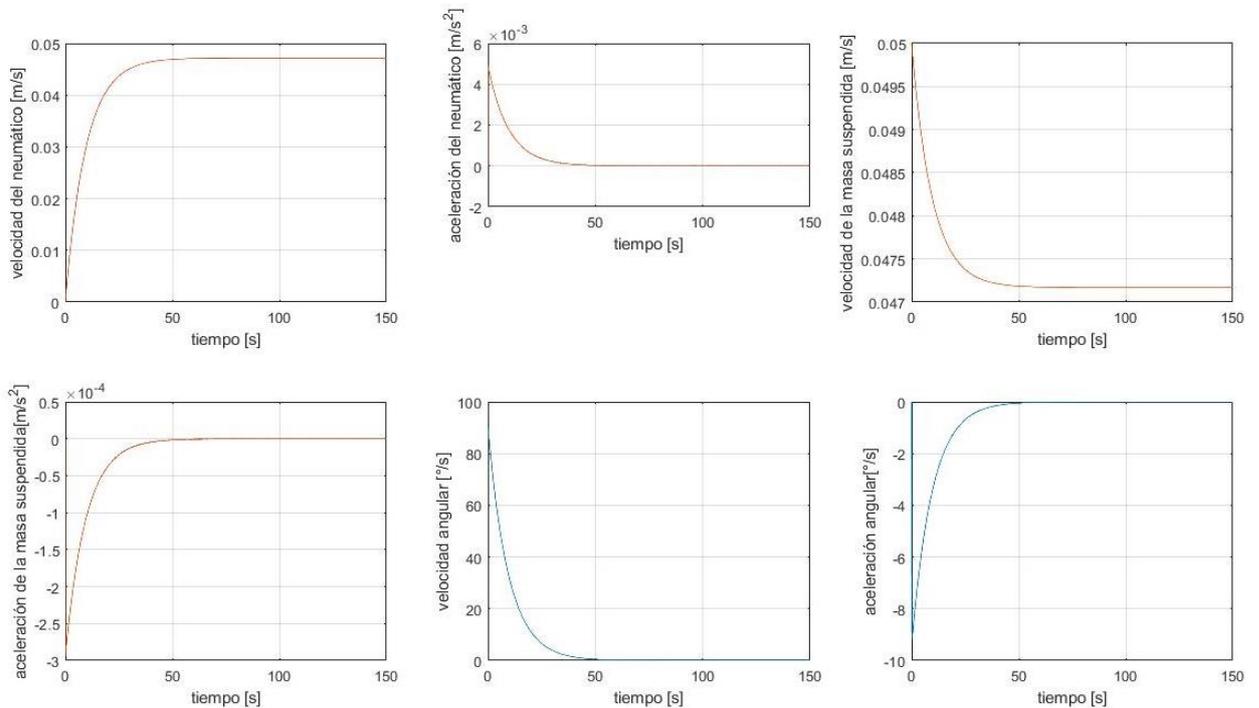
Gráfica 6 Comparación de la respuesta libre resorte suave (64.78 [N/m] y amortiguador medio (1697[N/m/s])) de las configuraciones McPherson y Doble triángulo.

Cuando se observa este comportamiento de acoplamiento de las gráficas se entiende que su forma de responder a un estímulo nulo es similar, o en este caso idéntico. Se observa que en la gráfica de aceleración contra tiempo, tanto de la masa suspendida como de la masa del neumático, la aceleración tiende a cero por lo que indica que el amortiguador está realizando su trabajo al disipar la energía limitando la aceleración en el sistema y anulándola,

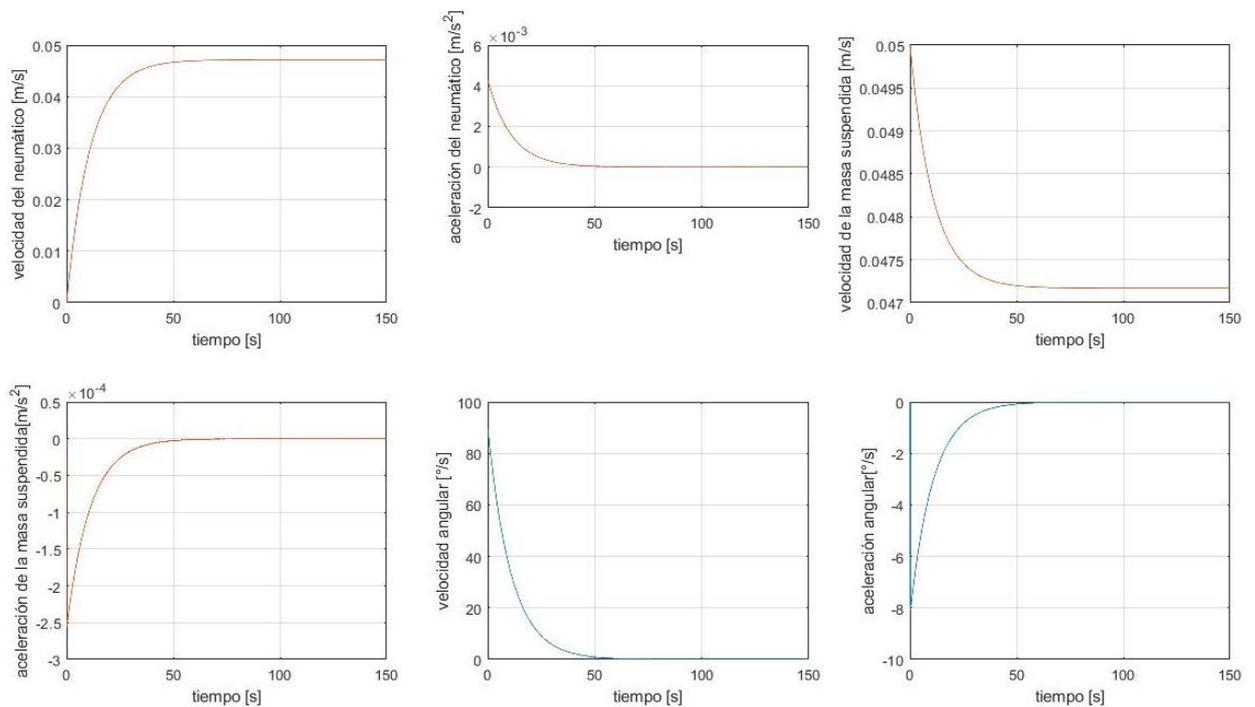
Si se utilizan otros valores seleccionados de las tablas 3 y 4 se puede observar que el modelo se comporta de una manera similar, acoplándose las gráficas de ambas configuraciones como se muestra en las Gráficas 7, 8 y 9. En las cuales se muestra una configuración de resorte medio con las variaciones de amortiguador suave, medio y duro.



Gráfica 7 Comparación de la respuesta libre resorte medio (154.68 [N/m] y amortiguador suave (1273[N/m/s])) de las configuraciones McPherson y Doble triángulo

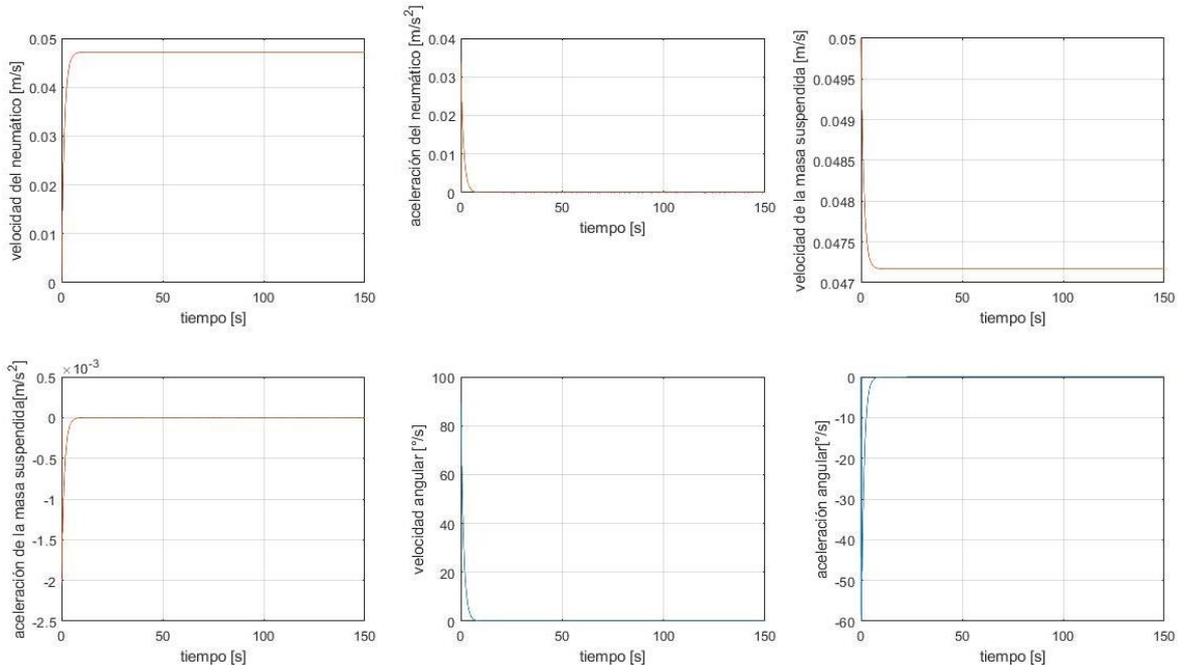


Gráfica 8 Comparación de la respuesta libre resorte medio (154.68[N/m] y amortiguador medio (1485[N/m/s])) de las configuraciones McPherson y Doble triángulo

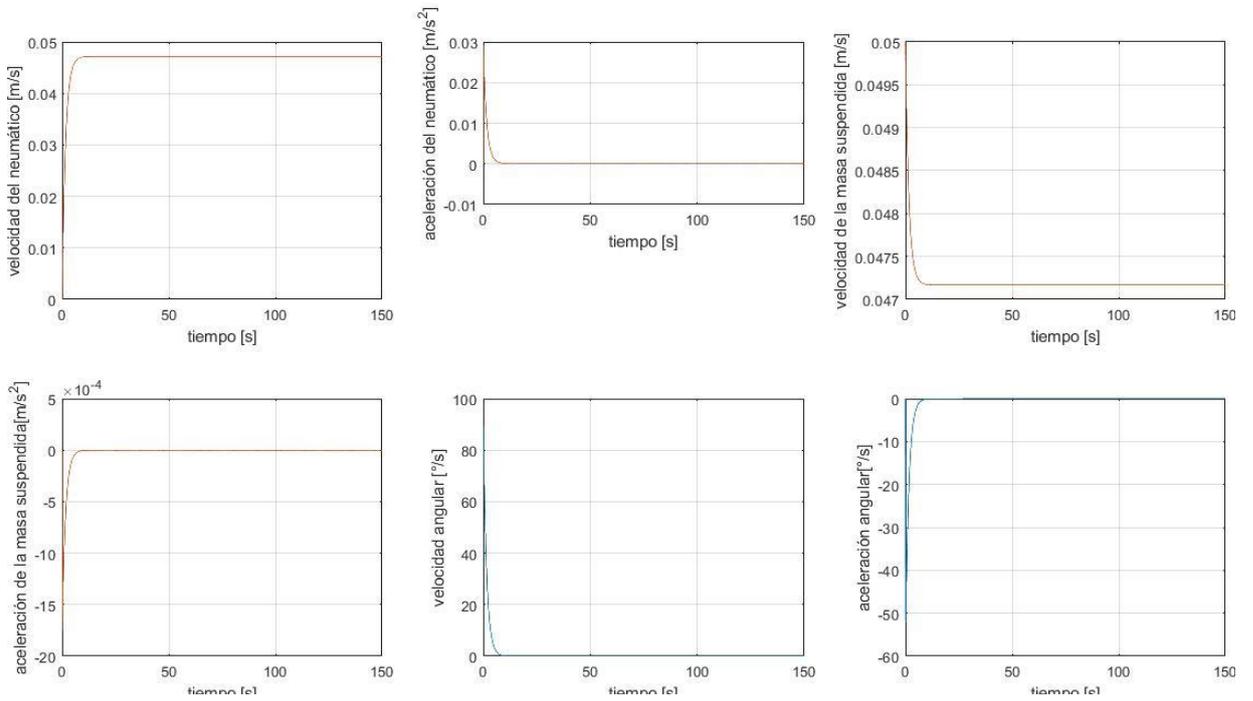


Gráfica 9 2 Comparación de la respuesta libre resorte medio (154.68 [N/m]) y amortiguador duro (1697[N/m/s]) de las configuraciones McPherson y Doble triángulo

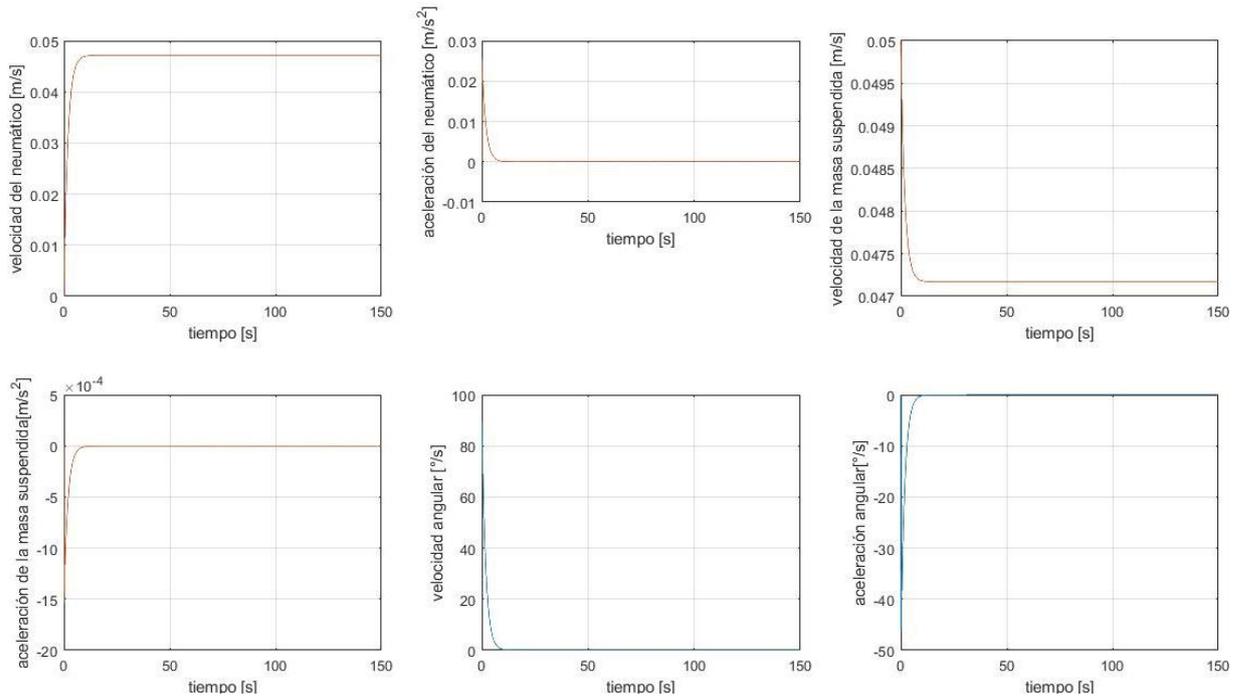
La mayor diferencia que se puede apreciar es que mientras más grande sea el valor de la constante de elasticidad y de la constante de viscosidad sea en los elementos, la curva tendera a acercarse a la esquina superior izquierda de cada una de las gráficas lo que nos indica que, la gráfica busca comportarse como una constante por lo que la mitigación de las velocidades y aceleraciones es más rápida lo que se entiende como un golpe sobre la estructura. El comportamiento que se describe puede ser apreciado en las gráficas mostradas en las Gráficas 10, 11 y 12 en donde se ocupan valores en la constante elástica de 924.97 [N/m] es decir que el resorte se considera como duro y se combinan los valores para la constante de viscosidad suave, medio y duro.



Gráfica 10 Comparación de la respuesta libre resorte duro (924.97 [N/m] y amortiguador medio (1273[N/m/s])) de las configuraciones McPherson y Doble triángulo



Gráfica 11 Comparación de la respuesta libre resorte duro (924.97 [N/m] y amortiguador medio (1485[N/m/s])) de las configuraciones McPherson y Doble triángulo



Gráfica 12 Comparación de la respuesta libre resorte duro (924.97 [N/m] y amortiguador duro (1697[N/m/s])) de las configuraciones McPherson y Doble triángulo

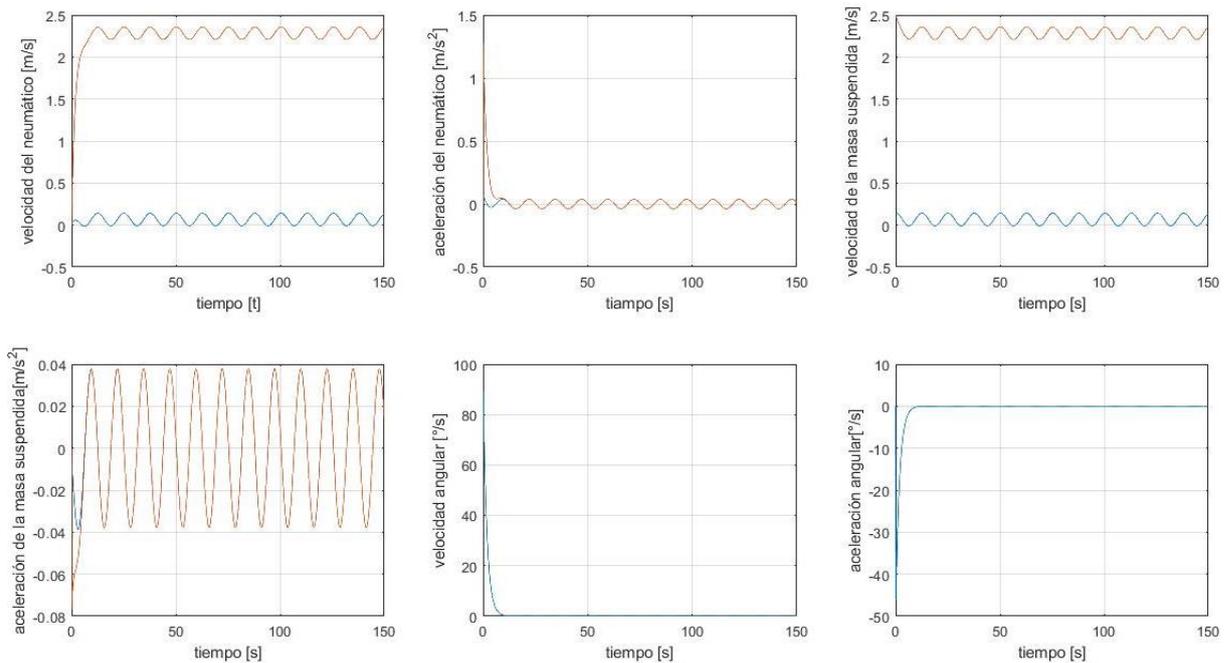
Figura

En otras palabras, podría decirse que ambas configuraciones se comportan como un cuerpo sólido o columnas que transmiten un golpe directamente al ocupante del vehículo.

RESPUESTA TOTAL

Retomando nuevamente lo que se sabe en la teoría para las ecuaciones diferenciales no homogéneas, de las cuales se sabe que su solución está compuesta por la respuesta libre y la particular sabemos que el modelo se debe de comportar de una forma similar a lo que se analizó en la respuesta libre pero con la variación que proporciona el efecto sobre comportamiento debido a la entrada del sistema, para este caso se selecciona como entrada de la función de movimiento armónico simple. Cuyos valores son una Amplitud unitaria y una frecuencia natural de 0.5 Hz. Como se expresó en el capítulo del modelo.

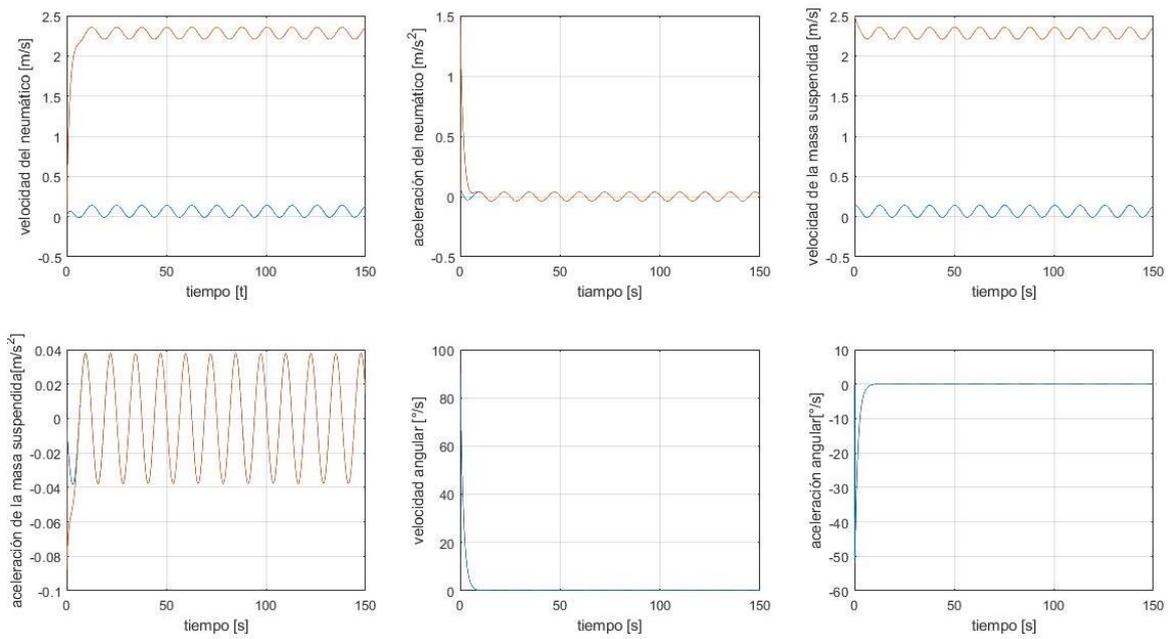
Se comienza por analizar los modelos con las características para un resorte duro y un amortiguador duro ($k_2= 924.97$, $b=1967$) que se muestra en la siguiente Gráfica 13, pasando también por la combinación resorte duro y amortiguador medio y suave mostrados en Gráfica 14 y 15.



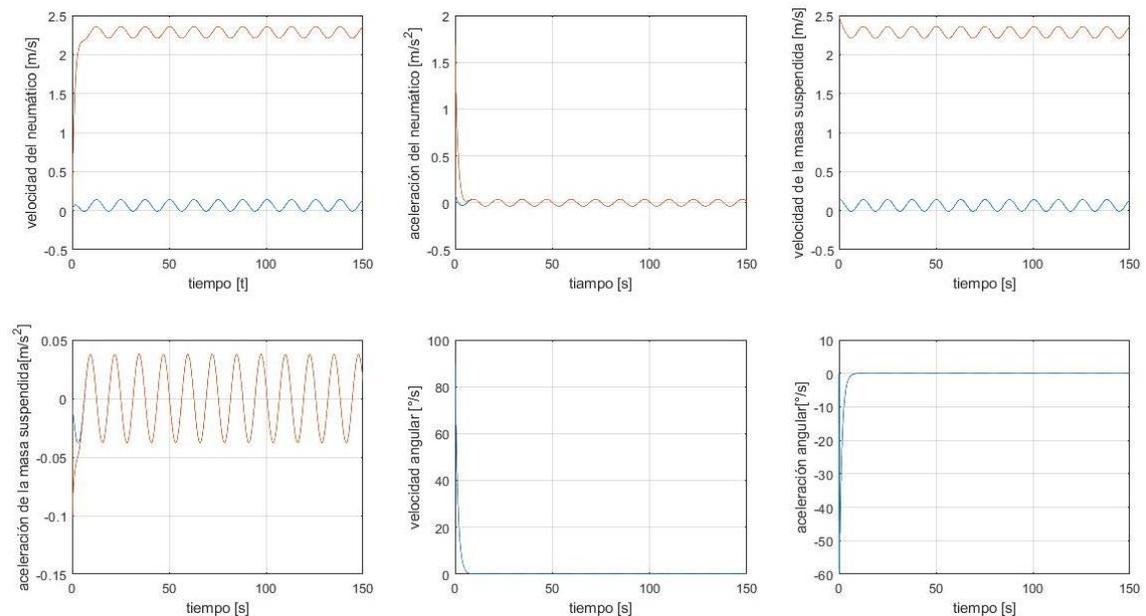
Gráfica 13 Comparación entre suspensión McPherson (color azul) y Doble triángulo (Color naranja) $k_2=924.97$, $b=1967$, $\omega=0.5$, $A=1$.

En donde se puede apreciar que, la velocidad en la suspensión Doble triángulo se incrementara de una manera muy rápida, indicando que el conjunto está trabajando como una columna rígida de manera similar al efecto mostrado en la respuesta libre bajo las mismas características del conjunto resorte amortiguador, estabilizándose alrededor de los 2.25 [m/s]. También indica que el desplazamiento del neumático es mucho mayor en la suspensión Doble triángulo que en la suspensión McPherson en el cual la se observa que su velocidad ronda un poco más arriba del cero y se mantiene en ese rango a lo largo del tiempo evaluado.

Se puede observar que en ambos casos el rango de valores se mantendrá de forma constante, en el caso de la suspensión Doble triángulo alrededor de los 2.25, mientras que en la McPherson está por arriba de cero. Mientras que tanto en el neumático como en la masa suspendida las aceleraciones se encuentran rondando el cero. Situación muy similar en otras gráficas donde el resorte es duro.

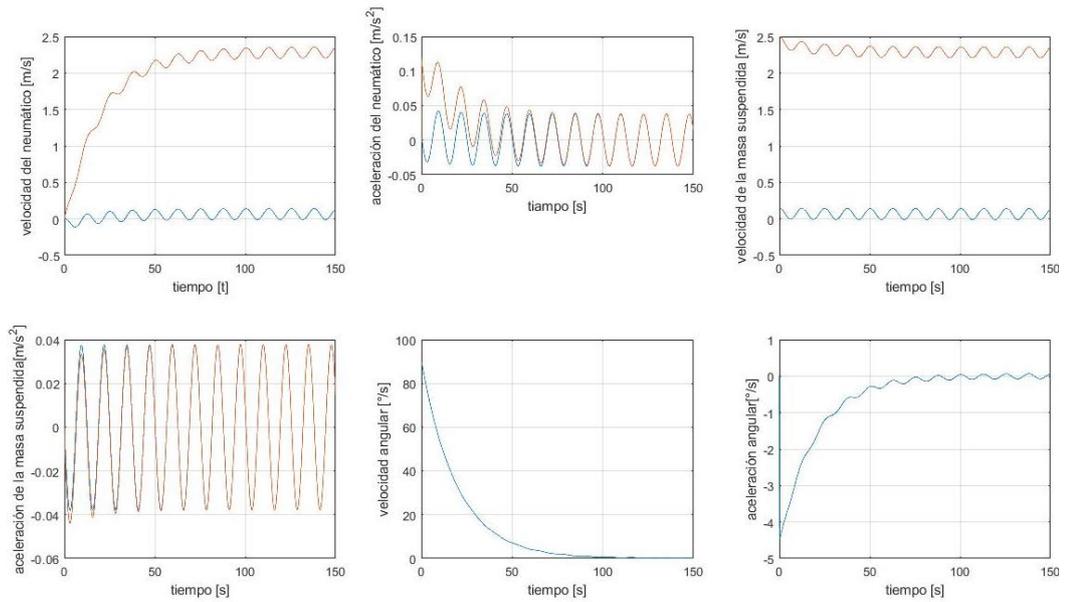


Gráfica 14 Comparación entre la suspensión McPherson (color azul) y Doble triángulo (Color naranja) $k_2=924.97$, $b=1485$, $\omega=0.5$, $A=1$.



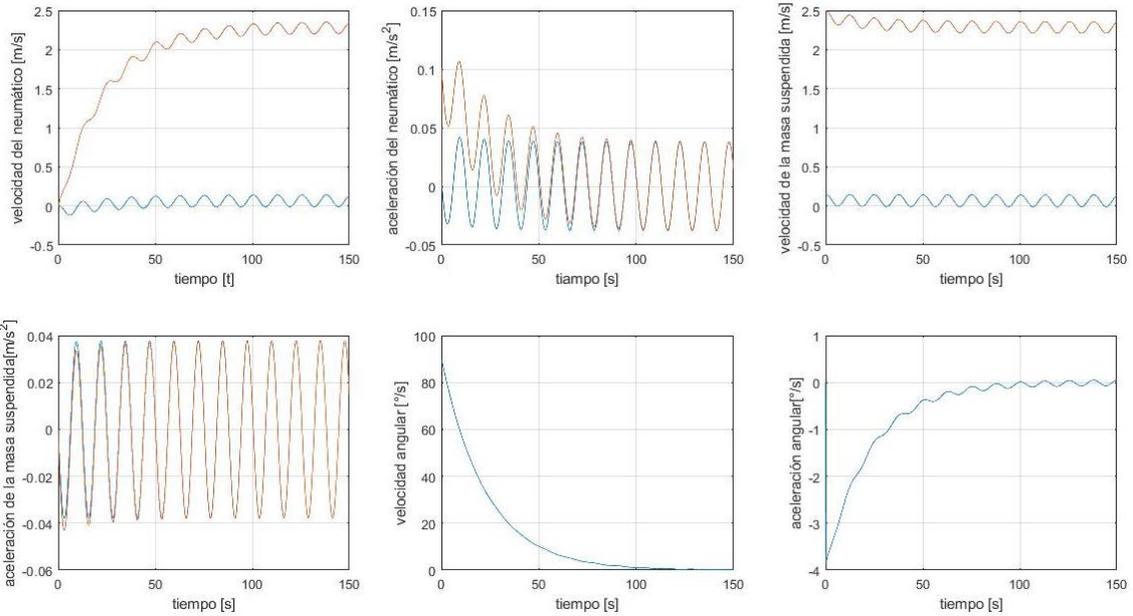
Gráfica 15 Comparación entre la suspensión McPherson (color azul) y Doble triángulo (Color naranja) $k_2=924.97$, $b=1273$, $\omega=0.5$, $A=1$.

Ocurre lo contrario cuando se evalúan las características de un resorte suave y amortiguador suave, ya que el cambio de la velocidad del neumático será más gradual y por lo tanto, la rapidez de cambio de la velocidad también tardará en realizarse. Como se muestra en la Gráfica 16.

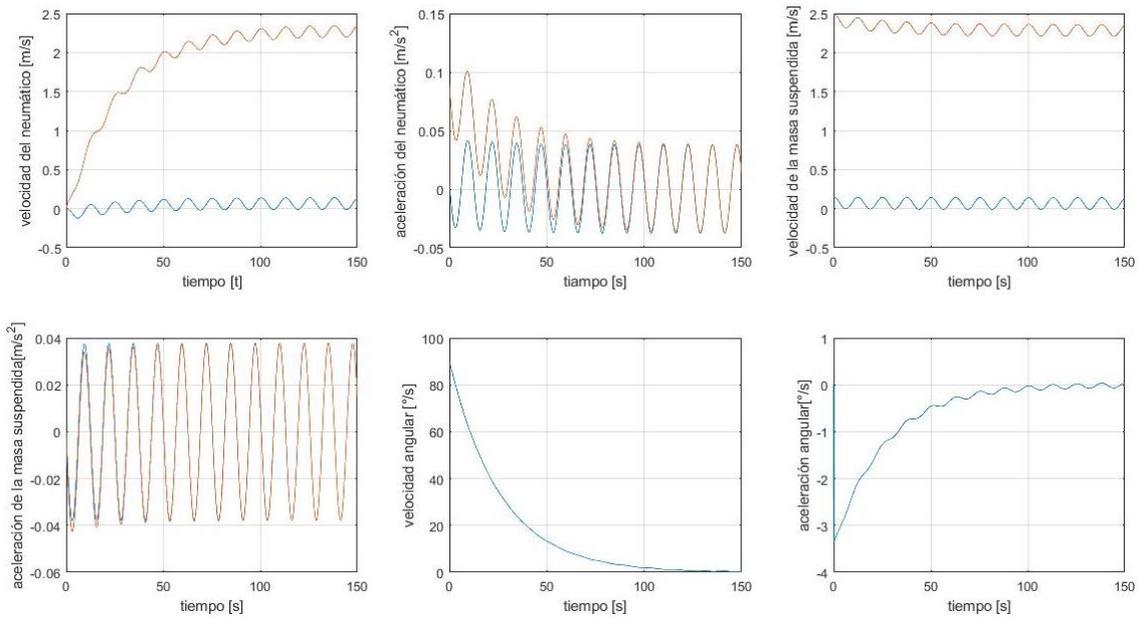


Gráfica 16 Comparación entre la suspensión McPherson (color azul) y Doble triángulo (Color naranja) $k_2=64.97$, $b=1273$, $\omega=0.5$, $A=1$.

Por lo que se tiene un conjunto mucho más flexible al movimiento del neumático y los posibles golpes no se transmiten directamente a la masa suspendida. Los rangos de oscilación en la aceleración son parecidos a los mostrados en las Gráficas 17, 18 y 19 rondando el 2.25 [m/s] y cero en el caso de las aceleraciones en la masa suspendida. Pero el cambio de aceleración angular será solamente un poco más perceptible llegando incluso a oscilar debido al efecto de la suavidad en el resorte. De manera muy similar en las demás combinaciones de amortiguador suave, medio y duro con un resorte suave como se muestra en las Gráficas 17 y 18.

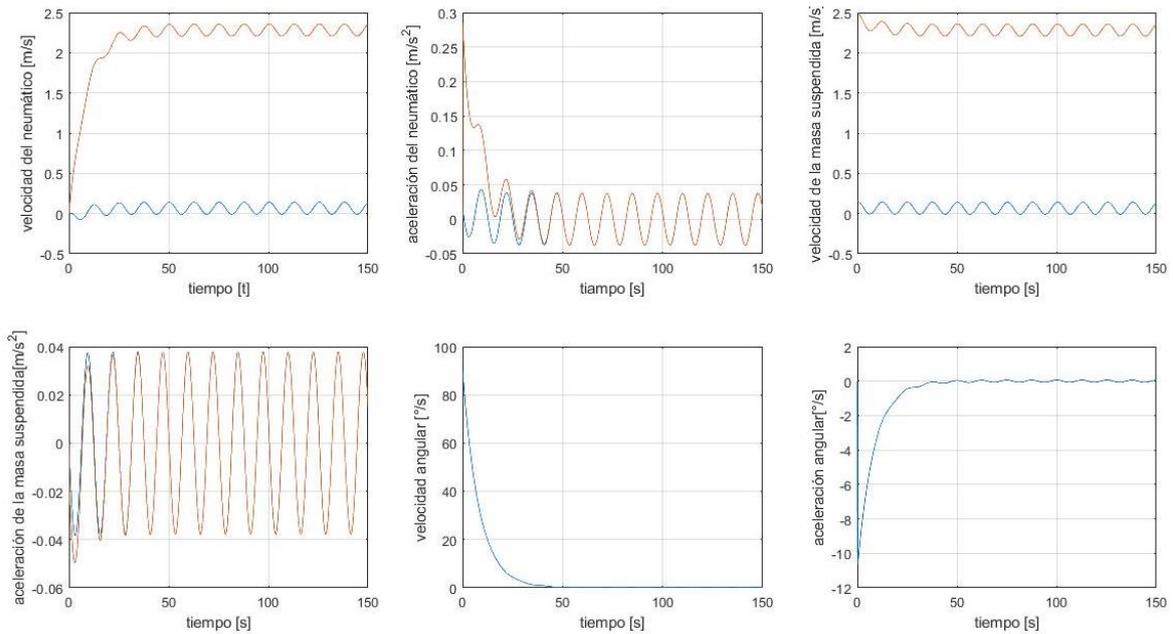


Gráfica 17 Comparación entre la suspensión McPherson (color azul) y Doble triángulo (Color naranja) $k_2=64.97$, $b=1485$, $\omega=0.5$, $A=1$.



Gráfica 18 Comparación entre la suspensión McPherson (color azul) y Doble triángulo (Color naranja) $k_2=64.97$, $b=1967$, $\omega=0.5$, $A=1$.

Para finalizar con los resultados se analiza el punto intermedio (de acuerdo a la tabla 3 y 4) para el resorte medio combinándolo con los valores de amortiguadores suave, medio y duro que se muestran en la Gráfica 19.



Gráfica 19 Comparación entre la suspensión McPherson (color azul) y Doble triángulo (Color naranja) $k_2=154.68$, $b=1273$, $\omega=0.5$, $A=1$.

En el cual se aprecia una transición a los valores en donde se mantiene constante el comportamiento, donde el conjunto resorte amortiguador no se comporta ni como una columna ni como un resorte que se puede deformar de una manera tan rápida. Para el caso de la masa suspendida su desplazamiento es mínimo en ambos casos y a lo largo de todas las combinaciones de valores en el conjunto resorte amortiguador. A pesar que los valores en el conjunto resorte amortiguador son diferentes de inicio se mantiene oscilando sin un cambio muy brusco oscilando en valores similares.

Aun así es observable que en todos los modelos está presente la respuesta libre del sistema que es la que se comporta como una función exponencial alcanzando un valor constante y se nota la presencia del efecto de la entrada en esas oscilaciones en la masa del neumático como en la masa suspendida.

Para poder complementar estas gráficas se utiliza la teoría enclavada dentro de la dinámica de sistemas que es una propuesta diferente de visualizar las ecuaciones diferenciales. Siendo a través de la representación de una ecuación diferencial como si fuese el flujo de algún líquido cuyo comportamiento es descrito por la ecuación diferencial que se pueden visualizar a partir de generar un campo vectorial. Es decir que, si tenemos la ecuación $\dot{x} = \sin x$ y queremos visualizar su comportamiento sin la necesidad de un proceso determinístico. Obtendremos una gráfica en donde se muestre cómo se comporta la velocidad que varía de acuerdo a la regla que se propuso. Como se

muestra en (Strogatz, H. Steven, 1994, p. 15-17). De forma que se puedan conocer el comportamiento bajo las condiciones que se establezcan.

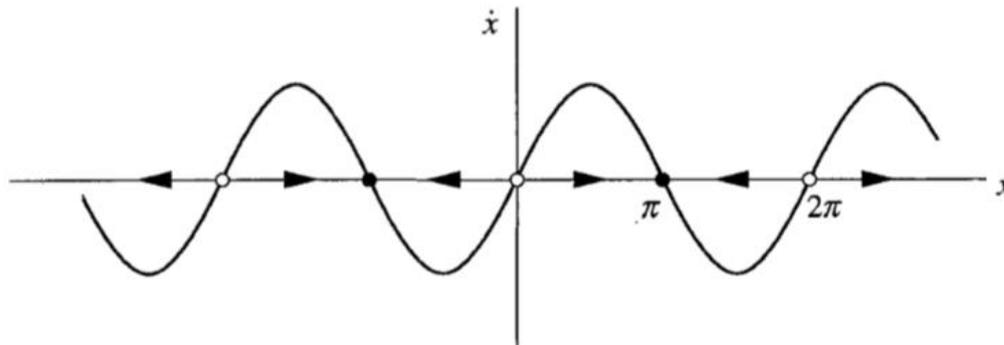
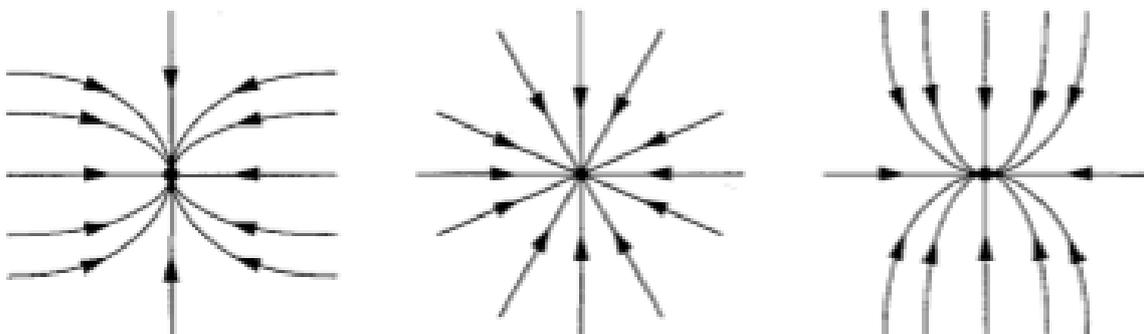


Figura 3 Diagrama de fases velocidad posición que muestra los puntos atractores y fuentes.

En donde se pueden encontrar puntos donde el fluido no se mueve conocidos como puntos fijos, de los cuales existen dos tipos. Los puntos atractores, en los cuales, si seguimos con la analogía del fluido, es donde el fluido se dirigirá hacia ellos, también se tienen los puntos fuente, de los cuales el flujo se aleja o brota hacia puntos que atraen el flujo. Conociendo a los primeros como puntos de estabilidad y a los segundos como puntos inestables, En otras palabras los puntos atractores representan equilibrio de un sistema ya que si se parte de ellos tenderán a dirigirse a los atractores. Son estos puntos los cuales se evaluarán las gráficas de los modelos más convenientes. Donde se podrán observar los diagramas de fases de ambas suspensiones y en donde existe un punto de equilibrio para los valores de velocidad y aceleración.

Pero existen varias clasificaciones para la estabilidad. Un sistema estable es un punto atractor, si pero la manera en que este punto atractor actúa sobre el flujo como por ejemplo que el flujo se dirige hacia este punto atractor en línea recta o con cierta curvatura pero siempre en dirección de una forma directa hacia el punto atractor.



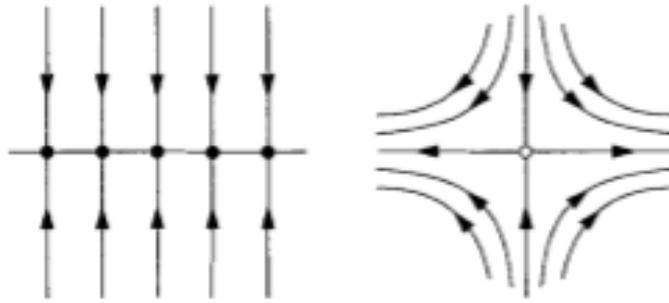


Figura 4 Atractores y el flujo hacia esté.

También existe la posibilidad de que el flujo sea hacia el punto atractor en forma de espiral al final llegando hacia el punto. O que se mantenga dando vueltas como un planeta alrededor de ese punto sin nunca pasar por él.

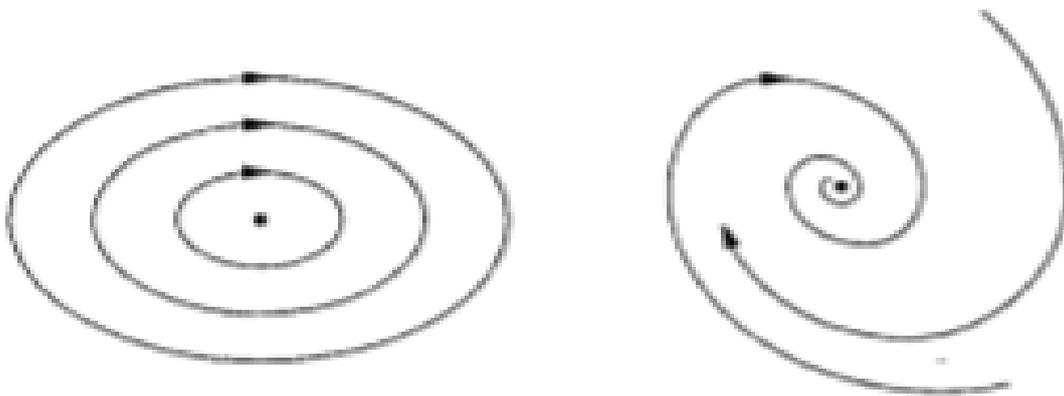
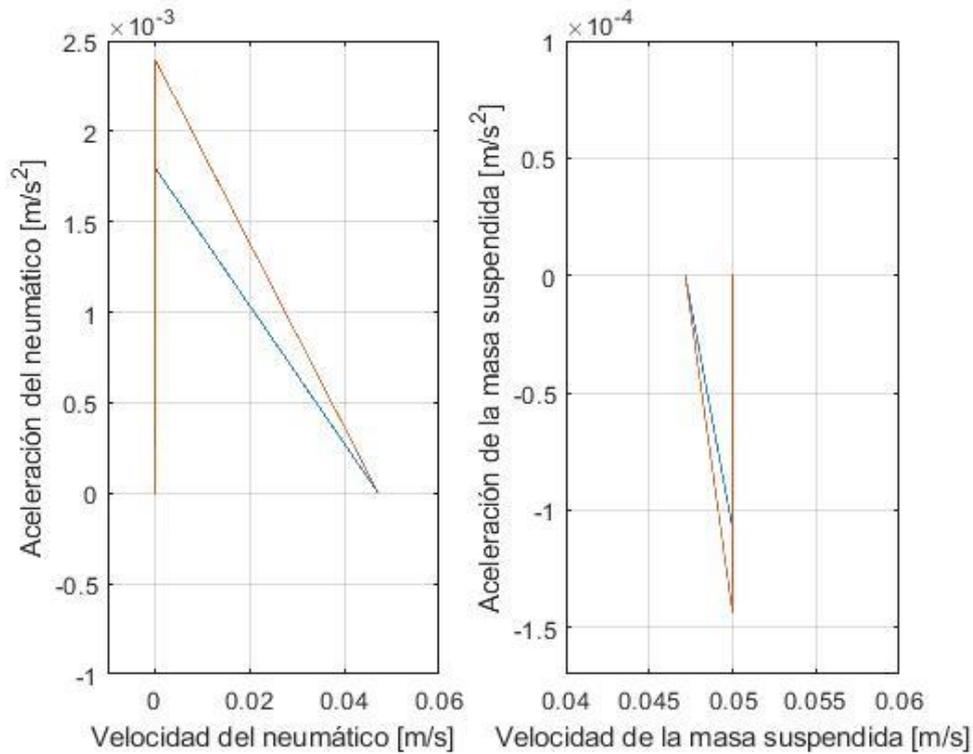


Figura 5 Puntos atractores con flujo en forma de espiral y circular, rondando el atratactor.

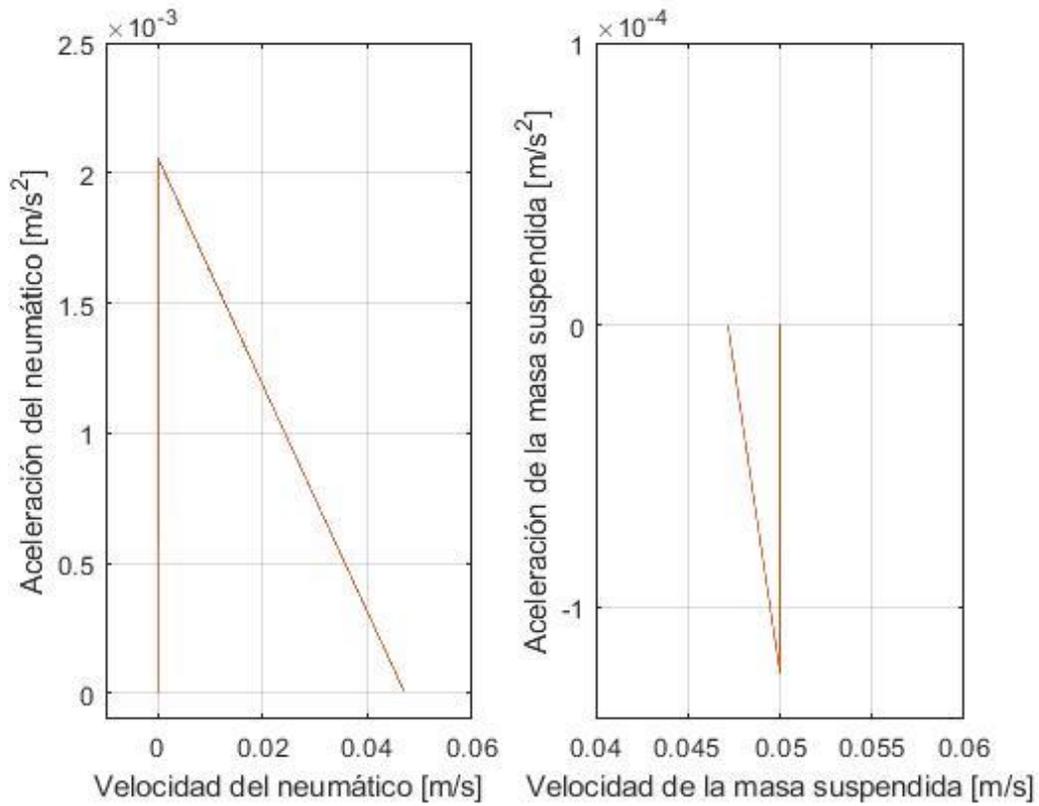
DIAGRAMA DE FASES EN RESPUESTA LIBRE.

Lo que se busca representar en los diagramas en fases es el comportamiento de la velocidad contra aceleración que se obtendrán, se podrá determinar si el sistema bajo las condiciones establecidas se comporta de manera estable o los valores tienden hacia otro valor y en donde pueden estar sus puntos atractores y sus fuentes. Empezando primero con los diagramas de fases en respuesta libre. Es decir que se comparará cómo se comporta la aceleración en cada velocidad que adquiere el sistema obteniendo para un sistema con una configuración de resorte suave amortiguador suave la como se muestra en la Gráfica 20 En donde se hace la comparación entre la suspensión McPherson (gráficas en color azul) y Doble triángulo (Gráficas en color naranja)

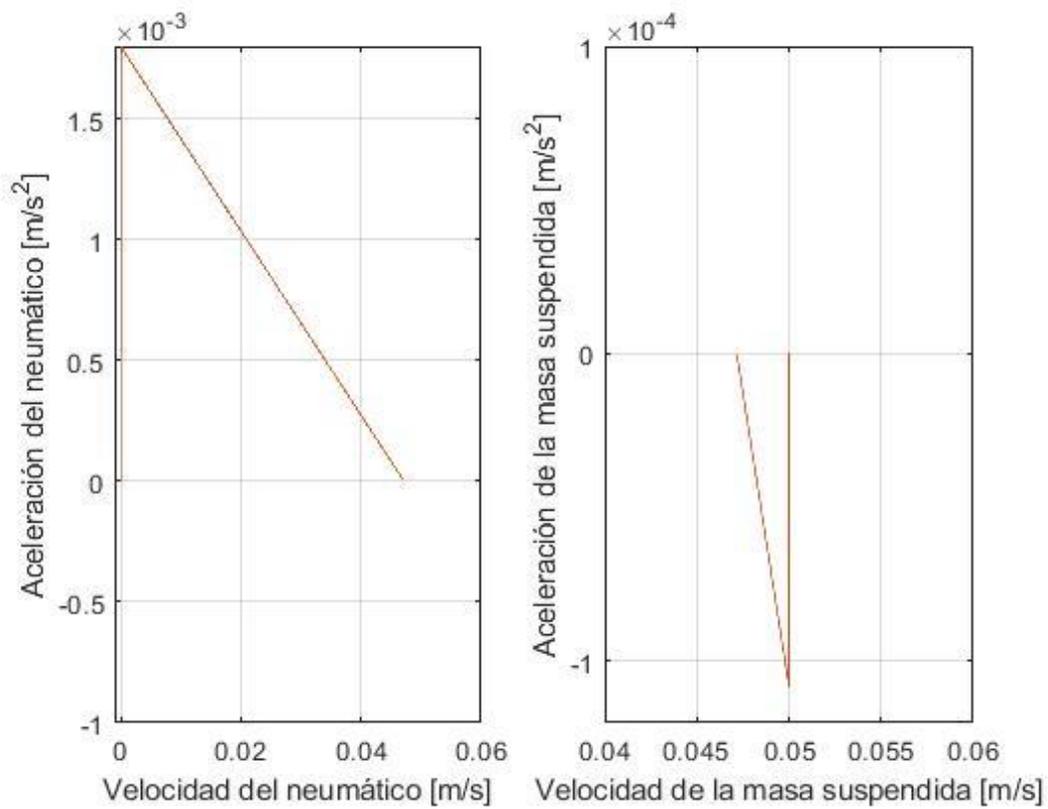


Gráfica 20 Comparación de los diagramas de fases (Velocidad vs Aceleración) de la suspensión McPherson y Doble triángulo $k_2= 64.78$, $b=1273$

En donde se puede observar la diferencia entre una suspensión McPherson y doble triángulo cambiando la pendiente de las líneas pero al final convergiendo en cero tanto en la masa suspendida y la masa del neumático, pero es solamente para los valores de resorte suave y amortiguador suave ya que como se muestra en los diagramas de fases para la combinación de la constante de elasticidad suave con la constante de viscosidad media y dura, tanto en la masa del neumático y la masa suspendida en respuesta libre ambas gráficas se acoplan presentando un comportamiento idéntico y por lo tanto un tractor muy similar. Como se muestra en las Gráficas 21 y 22.

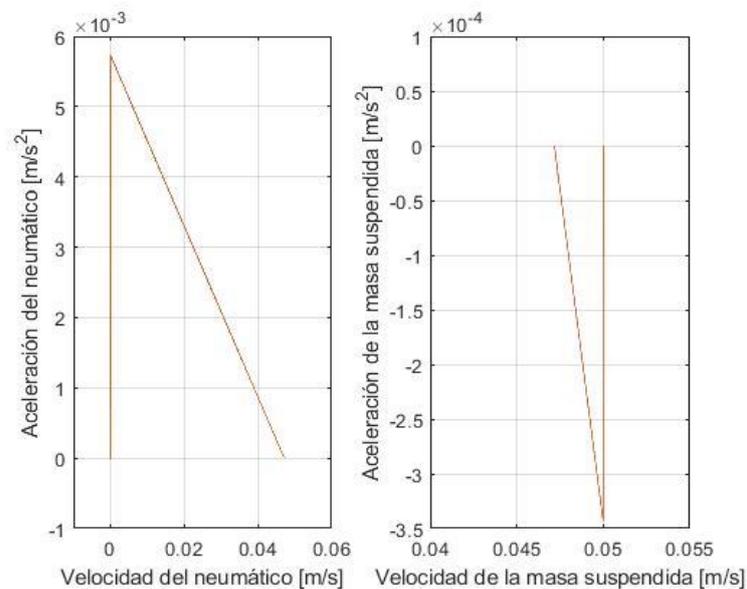


Gráfica 21 Comparación de los diagramas de fases (Velocidad vs Aceleración) de la suspensión McPherson y Doble triángulo $k_2= 64.78$, $b=1485$

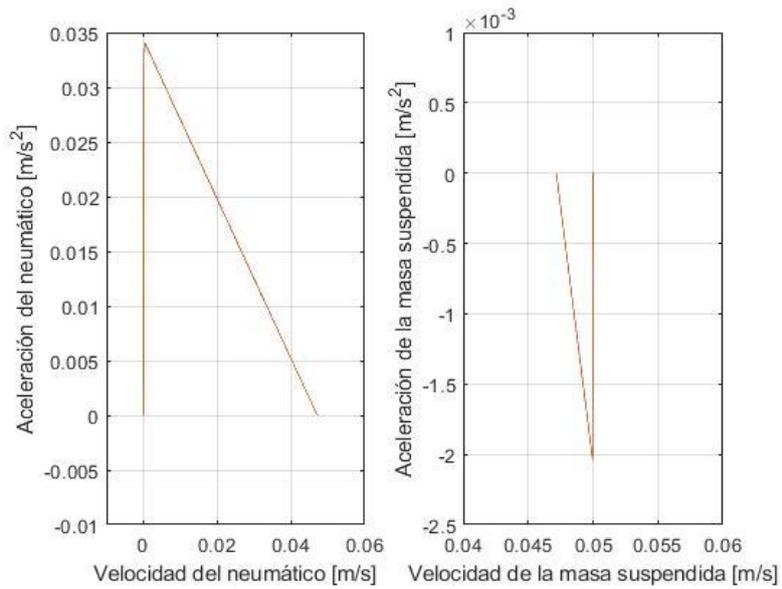


Gráfica 22 Comparación de los diagramas de fases (Velocidad vs Aceleración) de la suspensión McPherson y Doble triángulo $k_2= 64.78$, $b=1697$

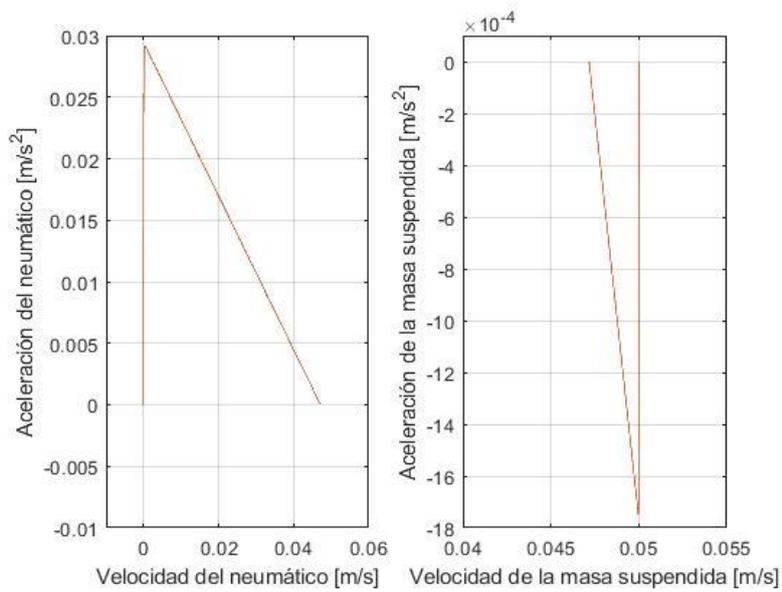
La derecha se puede apreciar que la gráfica desciende, pero en el valor de 0.05, sobre el eje de las abscisas, sube bruscamente hasta una aceleración de cero. Mientras que el caso del diagrama del lado izquierdo se puede observar una situación similar, el valor aumenta de forma muy rápida hasta alcanzar un valor aproximado de 1.8 sobre el eje de las ordenadas para después descender hasta cero cercano a un valor de 0.04 sobre el eje de las abscisas. El fenómeno se repetirá en los demás diagramas de fases para la combinación de las características de la constante de elasticidad suave, media y dura con las constantes de viscosidad suave, media y dura como se muestra en las Gráficas 24, 25, 25 y 26.



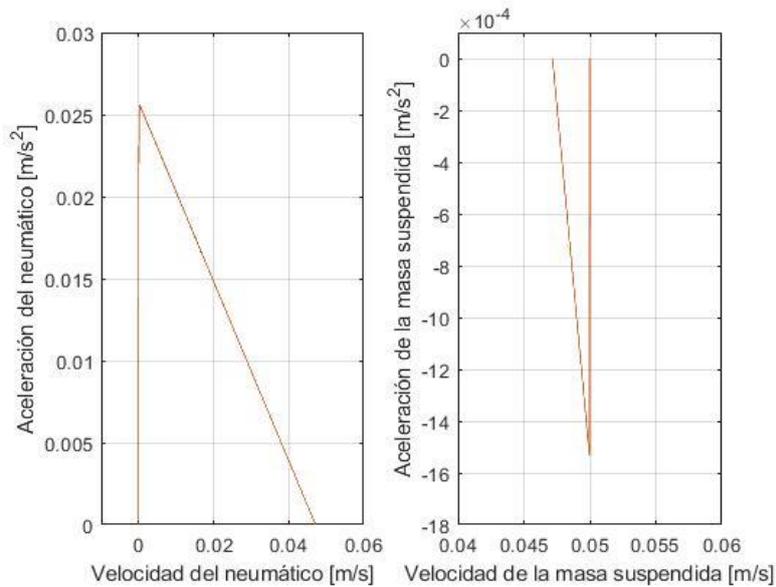
Gráfica 23 Comparación de los diagramas de fases (Velocidad vs Aceleración) de la suspensión McPherson y Doble triángulo $k_2=154.68$, $b=1273$



Gráfica 24 Comparación de los diagramas de fases (Velocidad vs Aceleración) de la suspensión McPherson y Doble triángulo $k_2= 924.97$, $b=1273$



Gráfica 25 Comparación de los diagramas de fases (Velocidad vs Aceleración) de la suspensión McPherson y Doble triángulo $k_2= 924.97$, $b=1485$



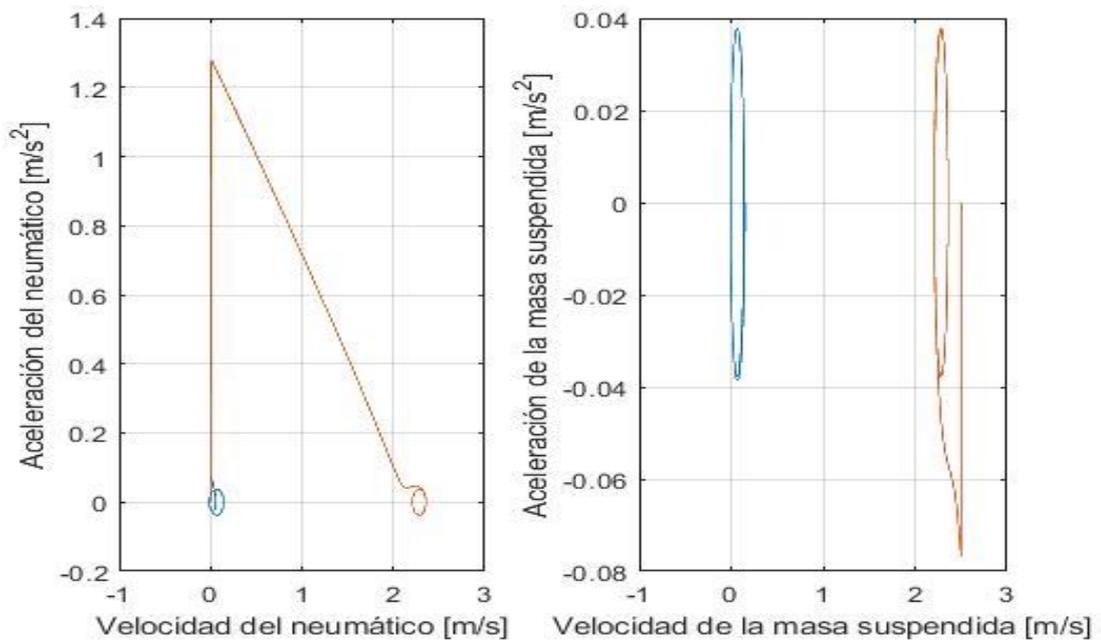
Gráfica 26 Comparación de los diagramas de fases (Velocidad vs Aceleración) de la suspensión McPherson y Doble triángulo $k_2=924.97$, $b=1697$

DIAGRAMA DE FASES EN RESPUESTA FORZADA.

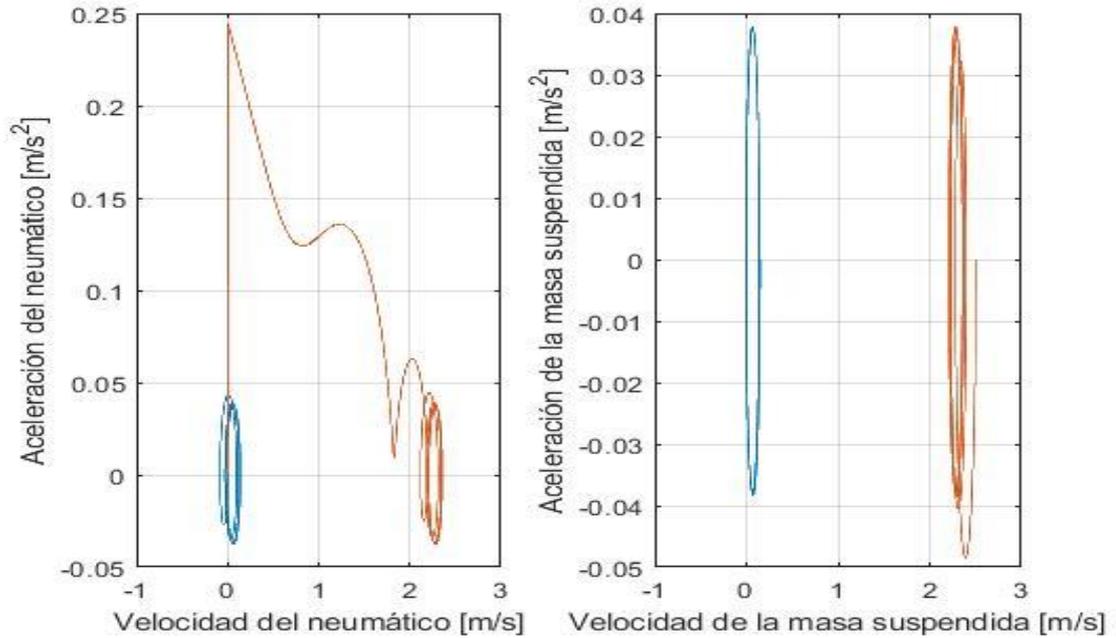
Ahora que se conoce como son las gráficas en respuesta libre podemos decir que los puntos atractores del sistema se encuentran para la masa del neumático entre 0.04 y 0.06 en el eje de las abscisas y cero en el eje de las ordenadas y para la masa suspendida en 0.05 en el eje de las abscisas y el eje de las ordenadas. Pero como se vio, ambas configuraciones muestran un comportamiento idéntico por lo que para poder realizar una mejor elección también se considera conveniente conocer cómo se comportan los diagramas de fases de aceleración contra velocidad con una respuesta total. Empezando primero con las características, para el conjunto resorte amortiguador, como duro-suave. Como se muestra en la Figura 46.

Gráfica en la cual se puede apreciar de una mejor manera como se comporta la aceleración en donde McPherson encuentra un punto de semiestabilidad cercano al punto cero, mientras que la doble triángulo con una configuración de resorte duro, amortiguador duro presenta una mayor rigidez alcanzando un punto de semiestabilidad entre los 2 y los 2.5 [m/s] Pero se puede apreciar de una mejor manera en la gráfica de la suspensión doble triángulo (gráfica en color naranja), que las características de estos elementos no permiten una oscilación prolongada, que representada en la gráfica como una línea recta que termina en un pequeño círculo, lo que se entiende como un funcionamiento similar a una

columna rígida que permite una pequeña oscilación y por lo tanto se entiende que la oscilación y por lo tanto la mayoría las entradas son como un golpe al chasis pero el neumático permanece en contacto con el suelo. Limitando las oscilaciones que se pueden apreciar. Por otro lado tenemos el caso de un conjunto de resorte amortiguador con valores medios. Como se muestra en la Gráfica 27.

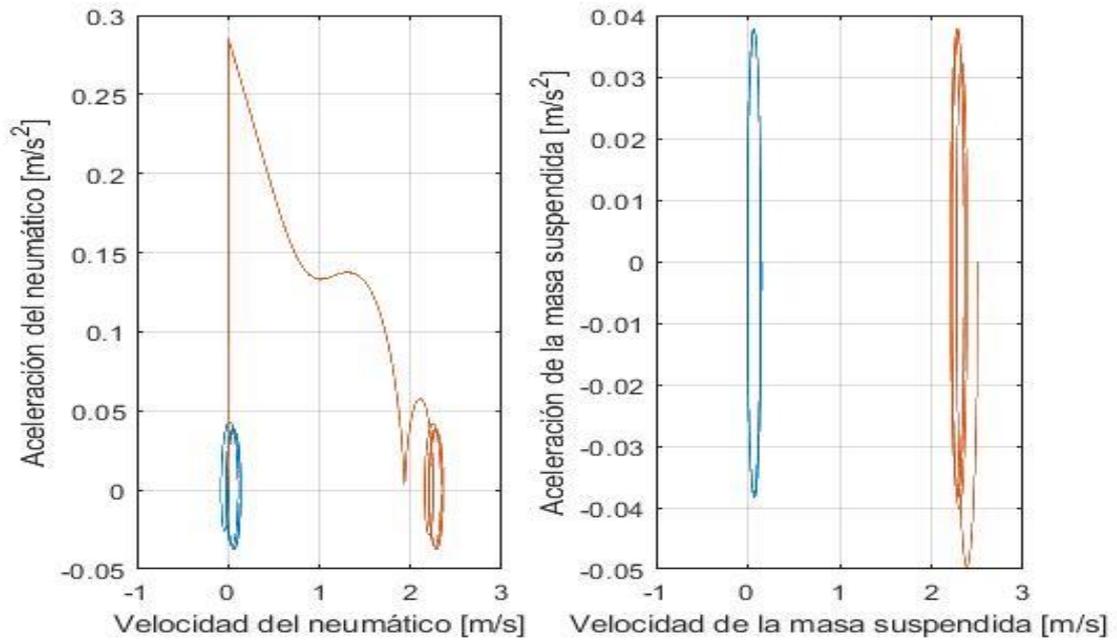


Gráfica 27 Comparación de los diagramas de fases (Velocidad vs Aceleración) de la suspensión McPherson y Doble triángulo $k_2=924.97$, $b=1697$



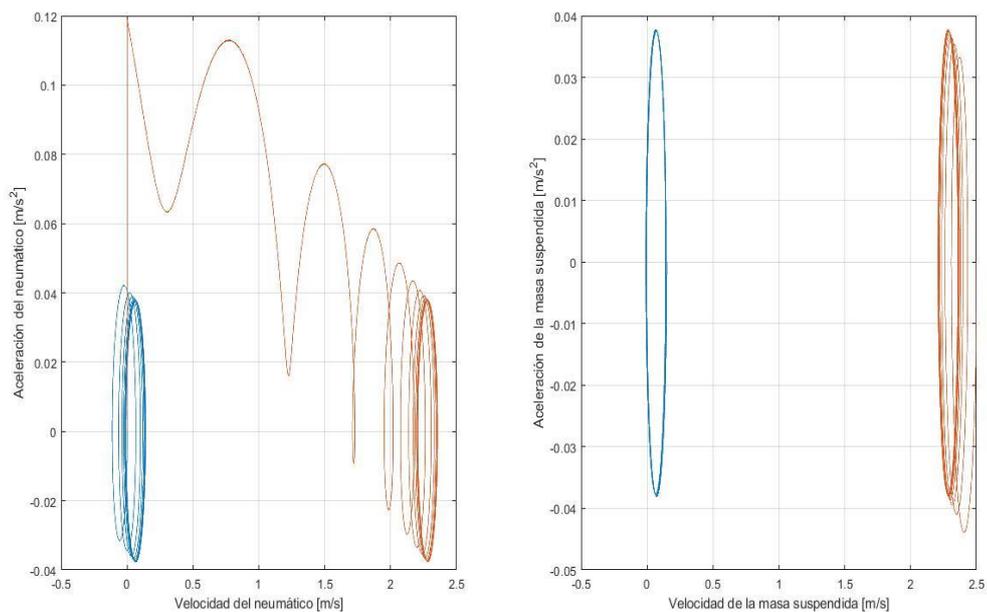
Gráfica 28 Comparación entre los diagramas de fases (Aceleración vs Velocidad) entre una suspensión McPherson y una Doble triángulo $k_2=154.68$, $b= 1485$.

En donde se pueden apreciar una mayor cantidad de oscilaciones para ambas configuraciones de suspensión aun así se puede apreciar que el amortiguador está disipando la energía ya que al final las oscilaciones se mantienen al redor del punto atractor. Otro caso similar sería para un resorte medio y un amortiguador suave como se muestra en la Gráfica 28 en donde la constante de elasticidad se considera media y el amortiguador suave.



Gráfica 29 Comparación entre los diagramas de fases (Aceleración vs Velocidad) entre una suspensión McPherson y una Doble triángulo $k_2=154.68$, $b=1273$

En donde también se puede apreciar que el amortiguador continúa haciendo su trabajo al restringir la cantidad de oscilaciones y permite algunas al no ser tan difícil deformar el resorte y cumple con la función de mantener el neumático pegado al suelo. Caso contrario a lo que sucede con un amortiguador suave resorte suave en donde la cantidad de oscilaciones en el neumático son mucho mayores como se muestra en la Gráfica 29.



Gráfica 30 Comparación entre los diagramas de fases (Aceleración vs Velocidad) entre una suspensión McPherson y una Doble triángulo $k_2=64.75$, $b=1273$.

En donde se puede apreciar una mayor cantidad de oscilaciones tanto en el neumático como en el chasis son mayores en comparación con unas características más rígidas, por lo que se entiende que el neumático estaría rebotando constantemente lo que afectaría el desempeño del vehículo de forma considerable.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Se observa que los diagramas de fases en respuesta forzada presentan un comportamiento similar a los diagramas en respuesta libre, en particular los diagramas de fases de la suspensión Doble triángulo, con la principal diferencia, en las oscilaciones que rondan el punto de estabilidad. Se entiende que estas son producto de la entrada al sistema y que varían dependiendo de las características del conjunto resorte amortiguador.

Los valores en las gráficas arrojan datos numéricos adecuados pero no se obtiene una solución general que describe el comportamiento. La forma más adecuada para obtener la solución general del sistema sería a través de la ecuación de transferencia obteniendo así otra forma para la validación del modelo. Tomando en cuenta que los desplazamientos solo se considerarán verticales y que los ángulos que se presentan en una suspensión real se consideran nulos.

Y con base en los datos obtenidos, los modelos realizados y establecidos en variables de estado, así como con la ayuda de la función ODE 45, se obtuvo la resolución numérica de los sistemas de ecuaciones diferenciales para cada configuración de suspensión. La limitante de MATLAB es que no arroja las soluciones generales para los modelos, lo que ayudaría a realizar una visualización más completa de lo que ocurre en la solución y en el fenómeno, por lo que se entiende como una limitante del programa y que es tema para desarrollar en un trabajo a futuro sería obtener dichas ecuaciones para así obtener la función de transferencia y poder implementar algún sistema de control; es decir, realizar una suspensión semi activa o activa.

Finalmente y con base en todo lo anterior, datos e información recopilada, entendida y analizada, así como en las gráficas y diagramas analizados se establece que la configuración más adecuada para la suspensión de un vehículo eléctrico de competencia es la configuración de suspensión doble triángulo ya que su diagrama en fases de respuesta total es muy similar al diagrama en fases para la respuesta libre, lo que indica que su comportamiento con un estímulo de entrada es similar a uno sin el estímulo.

Permite un mayor desplazamiento del neumático sin alterar el comportamiento de la masa suspendida cosa contraria a lo descrito en los diagramas de fases de la configuración McPherson en donde se aprecia que la masa suspendida se comporta de una manera similar a la masa del neumático esto se debe a que actúa como una columna telescópica. Y aunque en los diagramas de fases en respuesta libre tanto en la configuración doble triángulo como la McPherson se comportaran de una manera idéntica si hay una diferencia para la configuración McPherson en respuesta libre y respuesta total. Esto se interpreta ya que los efectos suministrados al neumático pasaran directamente a la masa suspendida.

Estas ventajas son suficientes, como para que el costo reducido y el mantenimiento de una suspensión McPherson, no afecten a la decisión de selección entre las dos configuraciones. Pero si se debe de tener en cuenta que un diseño de la suspensión doble triángulo requiere de mayor experiencia por lo que trabajo a futuro para el equipo desarrollador es que se enfoquen en el comportamiento de esta configuración con programas especializados o algún otro acercamiento al problema como los que se mencionaron anteriormente.

Las características de los elementos que se proponen para este conjunto resorte amortiguador son un resorte medio (154.68 [N/m]) y un amortiguador que puede ser Medio (1485 [N/m/s]) o duro (1697 [N/m/s]) Pero debido a que los catálogos solo presentan el valor de la constante de elasticidad sin embargo no presentan el valor de la constante de viscosidad. Por lo que si se escoge algún conjunto resorte amortiguador solo con base en la constante de elasticidad es preciso que se realice una caracterización de dicho elemento para conocer completamente ambos valores y en caso de que la constante de viscosidad cambie puede ser remplazado en el programa para poder conocer su comportamiento y así saber a qué atenerse.

CONCLUSIONES

Se obtienen las condiciones iniciales a partir de lo que establecen los reglamentos y el manual para el desarrollo de un vehículo eléctrico que pretende competir en el certamen del Electrón, así como las condiciones físicas de la pista y la competencia en general que involucran al sistema de la suspensión.

Se aplicó la teoría de dinámica de sistemas para la creación de los modelos matemáticos de ambas configuraciones de suspensión, expresados en ecuaciones diferenciales lineales. Expresando finalmente las ecuaciones diferenciales lineales en variables de estado.

Se programaron las ecuaciones expresadas en variables de estado para que con la ayuda de la función ODE 45 Se resolviera de manera numérica y obtener gráficas que expresan el comportamiento del sistema bajo las condiciones establecidas previamente.

Finalmente a través de lo que se revisó se concluye que la configuración adecuada para este vehículo es la configuración del mecanismo de suspensión conocido como doble triángulo o por su nombre en inglés como “*Dobuble wishbone*”. Las características de la constante de elasticidad del resorte que se selecciona es medio (154.68 [N/m]) y una constante de viscosidad del amortiguador adecuada para la aplicación se encuentra entre el coeficiente medio (1485 [N/m/s]) y duro (1697 [N/m/s])

REFERENCIAS

1. León Cazares F.Daniel y Xoconostle Luna Daniel, *A student approach to mathematical simulation of an electric vehicle*, american journal of undergraduated reserch, pp 20-26, 2014.
2. Newman Perran (1993), *The history of electrathon (electric vehicle racing)*. Institution of engineering and thecnology, 1993, Londres.
3. Electrathon (2019), *Reglamento de competencia 2019*, Electrathon, Ciudad de México obtenido de <https://www.electrathon.com/index.php/reglamentos/>.
4. Lewis Michel (2018), *Electrathon America handbook*, obtenido de <https://www.electrathonamerica.org/> 05/07/2019.
5. Gosselin-Brison Samuel (2006), *Étude d'un système de control pour suspension automobile*, Universidad de Quebec, tesis para obtener el grado de maestría en ingeniería.
6. Electrathon (2019), *Reglamento 2019 categoría A*, obtenido de: [https://www.electrathon.com/wp-content/uploads/2019/05/2019-Reglamento Tecnico Categoria A rev00.pdf15/07/2019](https://www.electrathon.com/wp-content/uploads/2019/05/2019-Reglamento_Tecnico_Categoria_A_rev00.pdf15/07/2019)
7. Harty, Damian y Blundell Mike(2004), *The multybody system approach to vehicle dynamics*, ELSEVIER, USA, pp. 518.
8. Bhise, R. Ankita, Desai G. Rutuja, Yerrawar Mr R. N., Mitra, Dr A. C. y Arakerimath Dr R. R., *Comparison between passive and semi-active suspension system using Matlab/Simulink*, Journal of Mechanical and Civil Engineering. Volume 13, Issue 4, Ver I(Jul. – Aug 2016) pp 1-6
9. Mohd Riduan Aizuddin Fahmi, TamaldinNoreffendy, Sudrajat Ajat, y Fauzi Ahmad (2018), *Review on active suspension system*, SHS web of conferences 49, 02008 recuperado de https://www.researchgate.net/publication/328024713_Review_on_active_suspension_system_17/07/2019
10. Abela Posada Fernando Ricardo (2014), *Diseño de suspensión adaptativa para vehículo híbrido*, Universidad Nacional Autónoma de México, México, Tesis para obtener el grado, pp.83.
11. Kučera M., Helexa M., y Čedík J. (2016), *Link between static radial tire stiffness and the size of its contact Surface and contact pressure*, Agronomy Reserch 14 (4), 1361-1371
12. Tukackinky A, Schworm D amd Isayev, A.I (1996).*Devulcanization of waste tire tubber by powerful ultrasound*.Rubbrt chemistry and technology, 69 (1), 92-103.
13. Güler, Duygu (2006), *Dynamic analysis of doublé wishbone suspension*, Instituto tecnológico de Izmir, Turquía, tesis para obtener el grado de maestro en ciencias, pp 39.
14. Muhammad Zahir Hassan, Mohd Kamarul Hafis Abdul Aziz, Frank Delbressine and Matthias Rauterberg (2016), *Numerical analysis of spring stiffness in vehicle design development stage*, International Journal of Applied Engineering Reserch Volume 11, Number 7 pp. 5163-5168.
15. Choon-Tae Lee, Byung-Young Moon (2006), *Simulation and experimental validation of vehicle dynamic characteristics for displacement-sensitive shock absorber using fluid flow modelling*,Machanical Systems and Signal Processing 20, pp. 373-388.
16. Attia Ali Hazem (2001), *Dinamic modelling of the doublé wishbone motor-vehicle suspension system*. European Journal of Mechanics A/solids 21 (2002) pp. 167-174.

17. Strogatz, H. Steven (1994), *Non linear Dynamics and Chaos: with applications to physics, biology, chemistry and engineering*, PERSEUS BOOKS, Estados Unidos, pp.498
18. Ogata, Katsuhiko(2010), *Ingeniería de control moderna*, PEARSON EDUCACIÓ, Madrid, pp.904
19. Ogata Katsuhiko (1987), *Dinámica de sistemas*, PRENTICE-HALL, México, pp. 629.
20. Rodríguez Ramírez, Francisco J. (1989), *Dinámica de sistemas*, Trillas, Mexico, pp. 657.
21. Math Works recuperado de <https://www.mathworks.com/products/matlab.html> el 28 de Agosto del 2019.
22. Wilson H. Rymond(1968), *Numerical Analysis abstracts presentations*, Estados Unidos, pp. 38
23. Sarvadnya Ajinkya Thakare, Prasad C Antapurkar, Divyaj S Shah, P R Dhamangaonkar and S N Sapali(2015), *Design and Analysis of Modified Front Double Wishbone Suspension for a Three Wheel Hybrid Vehicle*, Proceedings of the World Congress on Engineering Vol II, Reino Unido, pp.
24. Jorge Hurel , Anthony Mandow & Alfonso García-Cere (2013), *Kinematic and dynamic analysis of the McPherson suspension with a planar quarter-car model*, Vehicle System Dynamics, 51:9, 1422-1437, DOI: 10.1080/00423114.2013.804937
25. Beer P. Ferdinand, Johnston E Rusell, Mazurek F. David, Eisenberg R. Elliot (2010), *Mecánica vectorial para ingenieros Estática*, McGrawHill, México, pp. 625.
26. Nise S. Norman (2006), *Sistemas de control para ingeniería*,CECSA, México pp.970
27. Zill G: Dennis (2017),*Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*, CANGAGE Learning, México, pp.375.
28. Chalco Criollo Freddy Marcelo, Sinchi Viñazaca Eddy Gabriel (2016), *Estudio de la rigidez radial estática del neumático en vehículos turismo y desarrollo del modelo matemático para su obtención según las características del neumático*, Universidad Salesiana Sede Matriz Cuenca, trabajo para obtener el grado de ingeniero mecánico,
29. Norton Robert L. (1999), *Diseño de Máquinas*, PRENTICE HALL, México, pp. 1080.
30. White Frank M. (2008),*Mecánica de fluidos*, Mc Graw Hill, México, pp.829
31. NTN-SNR(2015), *suspensión*, NTN-SNR internacional