



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
MAESTRÍA EN INGENIERÍA ELÉCTRICA – INSTRUMENTACIÓN

DETECTOR DE LONGITUD DE ONDA Y VELOCIDAD DE
ONDAS SUPERFICIALES MEDIANTE EL MÉTODO DE
DEFLECTOMETRÍA ÓPTICA

MODALIDAD DE GRADUACIÓN: TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
EMILIANO EHECATL GARCÍA UNZUETA

TUTOR PRINCIPAL
AUGUSTO GARCÍA VALENZUELA, ICAT

Ciudad Universitaria, CD. MX. Diciembre 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Pablo Luis Rendón Garrido

Secretario: Dr. Roberto Velasco Segura

Vocal: Dr. Augusto García Valenzuela

1 er. Suplente: Dr. Pablo Roberto Pérez Alcázar

2 d o. Suplente: Dr. Gabriel Eduardo Sandoval Romero

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: ICAT

TUTOR DE TESIS:

AUGUSTO GARCÍA VALENZUELA

FIRMA

Índice

Introducción.....	5
Capítulo 1. Marco teórico.....	7
Deflectometría óptica.....	7
Modelo matemático. Método de decolimación-deflexión de haz de luz.....	10
Capítulo 2. Experimentación.....	31
Diseño experimental.....	31
Medición de la sigma del láser.....	32
Generación de ondas superficiales.....	44
Capítulo 3. Ondas en agua.....	47
Teoría de ondas superficiales en agua.....	47
Ondas gravitacionales en agua.....	48
Detección de ondas superficiales en agua.....	52
Capítulo 4. Ondas en placas.....	67
Teoría de ondas en placas delgadas.....	67
Medición directa de longitud y amplitud de ondas en placas.....	71
Capítulo 5. Determinación teórica de longitud y amplitud de onda.....	75
Cálculo de longitud y amplitud de onda.....	75
Resultados de la simulación.....	79
Capítulo 6. Conclusiones.....	85
Bibliografía.....	89

INTRODUCCIÓN

Dentro de las vibraciones mecánicas que se presentan en sólidos y fluidos, unas de las más importantes son las ondas superficiales. Este tipo de onda se presenta debido a diferentes fenómenos elásticos dentro del material que generan una deformación en su superficie. La motivación principal del trabajo de investigación fue el planteamiento de generar un método que permitiera realizar un mapeo de la superficie de diferentes materiales para poder localizar puntos de interés como los que se plantean en el artículo “Theoretical study of the generation of screw dislocations for Rayleigh and Lamb waves in isotropic solids”. En el artículo se plantean condiciones geométricas para la superposición de ondas superficiales que generan singularidades, es decir puntos donde la elevación de la superficie es igual a cero para cualquier tiempo. Estos puntos, si existieran, podrían tener aplicaciones interesantes.

El trabajo de investigación que se realizó como proyecto de tesis consistió en el desarrollo de un modelo de detección de ondas en la superficie de sólidos o fluidos analizando el efecto en el cambio en la reflexión de un haz de láser sobre una superficie con vibración y la implementación de un arreglo experimental para comprobar su viabilidad. La novedad del modelo planteado es que la mayoría de los métodos que se encontraron en la bibliografía sólo toman en cuenta la traslación en el haz reflejado como consecuencia de la pendiente de la superficie, pero no toma en cuenta el radio de curvatura que esta presenta. Este efecto se obtiene cuando las ondas superficiales sobre las cuales se refleja el haz tienen una longitud de onda comparable con el tamaño del haz de luz.

Existen una variedad amplia de métodos de medición de perfiles superficiales entre los que destacan los de interferometría y los de deflectometría.

El método de deflectometría clásica, que se tomó como referencia para generar el modelo, supone que el cambio en la pendiente de la superficie produce una traslación en el reflejo del haz sobre el plano de detección. El modelo propuesto analiza no sólo el cambio en la pendiente de la superficie, sino que también el cambio en la concavidad de esta. Como se analizará en el desarrollo del modelo teórico, la posibilidad de emplear este método de detección depende de la relación entre el tamaño del haz y la longitud de la onda superficial.

El modelo que se planteó surgió de la necesidad de analizar la señal en el tiempo de un detector óptico cuando un haz de luz se refleja en ondas superficiales que tienen una longitud de onda comparable con el ancho del haz. Cuando un haz de luz se refleja sobre ondas de este tamaño, este no sólo presentará una traslación en el plano de detección, sino que también modificará la forma del haz reflejado (lo colimará o decolimará). El modelo propuesto propone tomar en cuenta la deformación del haz reflejado.

El modelo propuesto tiene sus bases en la óptica geométrica, en donde un haz de luz se supone como una colección de rayos paralelos (colimación perfecta) que se reflejan sobre

una superficie con radio de curvatura finito, siguiendo las leyes de reflexión de la óptica geométrica.

La diferencia del método aquí estudiado con el método de deflectometría es que al tomar en consideración longitudes de onda similares al tamaño del haz incidente, los rayos que constituyen el haz no serán reflejados todos en la misma dirección. Al no reflejarse todos los rayos en la misma dirección, la potencia registrada en el detector tendrá variaciones dependiendo de la forma de la onda. Esto quiere decir que adicionalmente de la deflexión de los rayos incidentes existirá una decolimación del haz de luz.

Una vez establecido el modelo teórico, se implementó un arreglo experimental y se caracterizó, en particular determinó el perfil de intensidad del haz láser utilizado. Después se propuso un arreglo experimental para la detección de ondas superficiales en diferentes medios. Posteriormente, se utilizó este arreglo experimental para detectar ondas mecánicas en diferentes medios.

Se investigó también un método de medición de longitud de onda directamente mediante el mapeo de la señal óptica como función de la posición a lo largo de la dirección de propagación de la onda.

Durante el proceso de experimentación se fueron planteando protocolos para obtener los resultados planteados. En primer lugar, se planteó el experimento para mostrar que el detector que se armó era capaz de detectar las vibraciones en la superficie de diferentes materiales. Este objetivo se logró y además se obtuvieron conclusiones que tienen que ver directamente con la naturaleza de las ondas generadas.

Después se trataron de analizar los parámetros que intervienen en la generación de ondas superficiales en agua y ondas en placas. En ese punto se buscó analizar la señal para encontrar una relación con los parámetros físicos de la onda. En esta parte de la experimentación se analizaron las posibles aplicaciones del método y los arreglos experimentales que podrían ayudar a mejorar el análisis de la señal.

También se buscó determinar numéricamente los valores de longitud y amplitud de onda superficial mediante arreglos diferentes para el detector. En todos los procedimientos que se realizaron, se trató de realizar simulaciones numéricas para prever los resultados que se esperaban de acuerdo con el modelo. La simulación numérica del modelo implica limitaciones debido a que los valores numéricamente no son interpretados por la computadora como los fenómenos físicos que representan.

Se concluye el trabajo con sugerencias de líneas de investigación, análisis de los resultados obtenidos y conclusiones sobre el proyecto.

CAPÍTULO 1. MARCO TEÓRICO

Deflectometría óptica

La óptica geométrica trata a una fuente de luz como una colección de fuentes puntuales en donde cada una de ellas emite ondas esféricas. Cada una de estas fuentes puntuales emite un flujo de energía radiante y la dirección de este flujo corresponde a una línea en el espacio denominada *rayo de luz*. Los rayos pueden ser divergentes si se alejan de una fuente puntual dada, o convergentes si la onda esférica colapsa a un punto.

Estos rayos de luz obedecen los principios de reflexión y refracción, pero no toman en consideración los efectos de difracción. Se supone la interacción de un haz de luz, descrito por un rayo de luz, en una interfaz de dos medios con diferentes velocidades de propagación como se indica en la figura 1.

Las velocidades de propagación son v_i , con un índice de refracción asociado n_i para el material donde se encuentran el rayo incidente y el reflejado, y v_t , con un índice de refracción n_t para el rayo refractado.

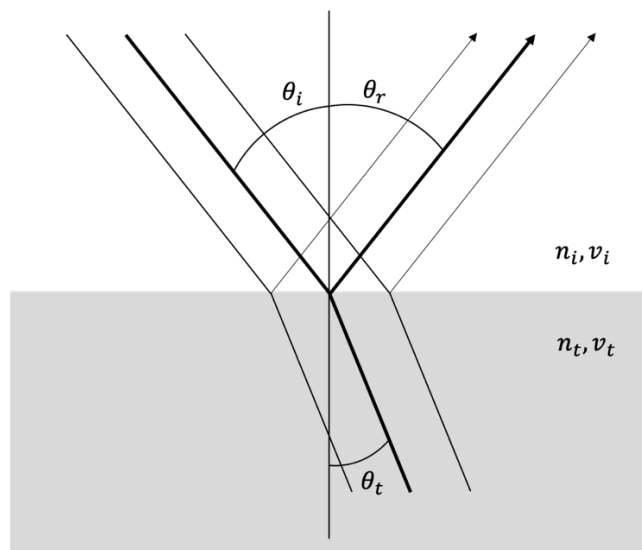


Figura 1. Reflexión y refracción sobre una superficie

El haz incide sobre la interfaz de dos materiales con diferentes índices de refracción con un ángulo de incidencia θ_i . Una parte del haz se refleja con un ángulo θ_r y velocidad v_i , y una parte del haz se transmite sobre el material con índice n_t , con un ángulo θ_t y velocidad v_t .

Del análisis geométrico del sistema se obtiene la ley de la reflexión. Los ángulos de incidencia y de reflexión son iguales con respecto a la normal de la superficie $\theta_i = \theta_r$.

Otro resultado es la ley de Snell, que compara las direcciones de propagación del rayo incidente y el refractado de la siguiente manera: $n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t$.

Cuando se tiene una fuente de luz que interactúa con superficies reflectoras o refractoras, al arreglo de estas superficies se le conoce como sistema óptico.

La porción de luz que interactúe con el sistema óptico formará una imagen modificando la forma del objeto debido las características del sistema. En un sistema real, la cantidad de luz recibida por el sistema está limitada por el tamaño de este. Existe una desviación aparente de la propagación rectilínea y las ondas serán difractadas, aún en medios homogéneos.

La condición ideal para poder utilizar la óptica geométrica para caracterizar un sistema óptico depende de los efectos de la difracción. Cuando la longitud de la onda de la energía radiante es menor que las dimensiones del sistema óptico, los efectos de la difracción son menos significativos, siendo el valor ideal cuando la longitud tiende a cero.

La óptica geométrica puede definirse como el análisis de un sistema en donde se manipulan de manera controlada frentes de onda o (rayos de luz) por medio de la interposición de cuerpos reflectores y/o refractores, siempre y cuando pueda despreciarse un efecto de difracción significativo.

El método de Deflectometría óptica tiene como base la relación entre el cambio en la pendiente de la superficie con desplazamientos del haz reflejado sobre el plano de detección.

El funcionamiento general de este método se indica en la figura 2, en donde un haz de luz emitido por una fuente se refleja sobre una superficie. Las líneas punteadas representan la reflexión del haz sobre una superficie sin inclinación.

El haz se refleja sobre la superficie punteada a un ángulo definido por la normal de la superficie y el haz. Cuando la superficie tiene una pendiente definida por el ángulo α , el haz se reflejará con un ángulo definido por la normal de la superficie y el haz. Y es mediante este cambio de ángulo sobre el plano de detección que se determina la pendiente de la superficie.

Según las leyes de reflexión, si la superficie sufre una inclinación en su pendiente de un ángulo α , entonces la imagen registrada en la pantalla de medición se desplazará un ángulo de 2α como se muestra en la figura 2.

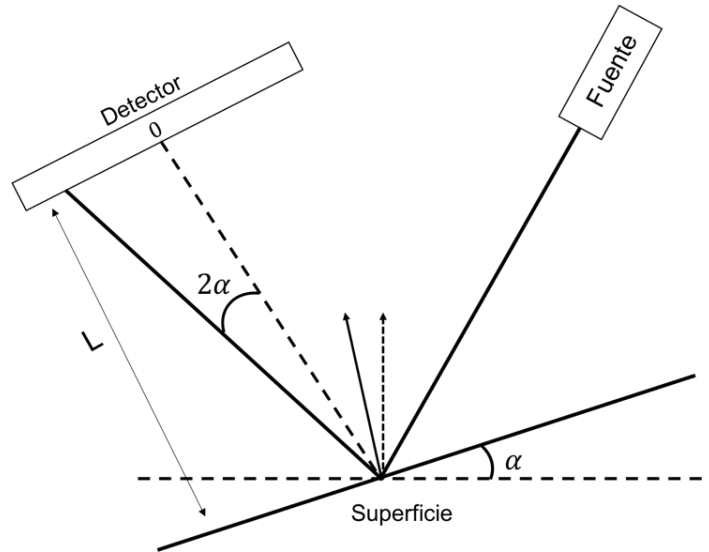


Figura 2. Método de deflectometría óptica

Si el detector está ubicado a una distancia L de la superficie, se produce un desplazamiento en el plano de proyección del haz.

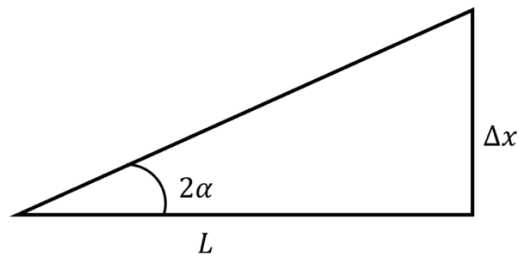


Figura 3. Desplazamiento del haz reflejado ante un cambio en la pendiente

De la figura 3 se obtiene la siguiente relación:

$$\tan(2\alpha) = \frac{\Delta x}{L} \quad (1)$$

Cuando el valor de la pendiente es pequeño, $\alpha \ll 1$, entonces,

$$\tan(2\alpha) \approx \sin(2\alpha) \approx 2\alpha = \frac{\Delta x}{L}, \quad (2)$$

de donde se obtiene la relación entre el cambio de la pendiente de la superficie y el desplazamiento que se observará en el detector como:

$$\Delta x = 2L\alpha. \quad (3)$$

De esta manera se relaciona un cambio en la pendiente con un cambio en la posición del haz en el plano de detección.

En este planteamiento se supone una reflexión sobre una superficie plana con una pendiente definida por el ángulo de inclinación. Para que esto sea válido, la superficie tiene que presentar deformaciones con una longitud de onda mucho mayores que el ancho del haz. Cuando esta condición se cumple, la pendiente de la superficie sólo modifica la dirección del haz reflejado, pero no afecta su forma.

Modelo matemático. Método de decolimación-deflexión de haz de luz

Si la superficie presenta deformaciones del orden de magnitud de la longitud de onda del láser, la reflexión no será especular. El haz se enfocará sobre el plano de detección, o bien, se dispersará sobre el mismo. Para estos casos, la relación tendrá que ver con la deformación que presente la superficie.

En el caso de que la longitud de onda y las deformaciones sean aproximadamente del mismo orden. El haz después de reflejarse sobre la superficie se dispersará o enfocará dependiendo de la forma de la superficie. La intensidad del haz sobre el plano de detección se define mediante la relación entre el haz incidente y el haz deformado después de reflejarse sobre la superficie.

El método de deflectometría no contempla estas condiciones. Se propone un nuevo modelo para realizar una medición bajo estas condiciones y se denominará "Método de decolimación-deflexión de haz de luz".

Para simplificar el desarrollo del modelo, se supone el haz del láser como una serie de líneas de láser, y que cada línea se refleja en la superficie de manera especular. Cada rayo incide sobre la superficie con un ángulo θ_i con respecto a la normal de la superficie, y se refleja con un ángulo θ_r , y la suma de ambos ángulos da el ángulo θ_s .

Los rayos del haz se reflejan con respecto a la línea normal a la superficie. La normal es la línea perpendicular a la recta tangente en ese punto. Como es una línea recta, cada una de estas líneas tienen una pendiente.

En la figura 4, se analizan los puntos x_1 y x_2 , como un par de puntos sobre la superficie en los que dos rayos del haz que se reflejan. La superficie tiene un perfil muy exagerado para poder comprender el comportamiento de los rayos incidentes.

Se indican los ángulos de incidencia y del haz reflejado relacionado mediante las pendientes de las rectas tangentes en esos puntos. Dentro del intervalo $[x_1, x_2]$ existen todos los demás rayos del haz y tienen el mismo comportamiento.

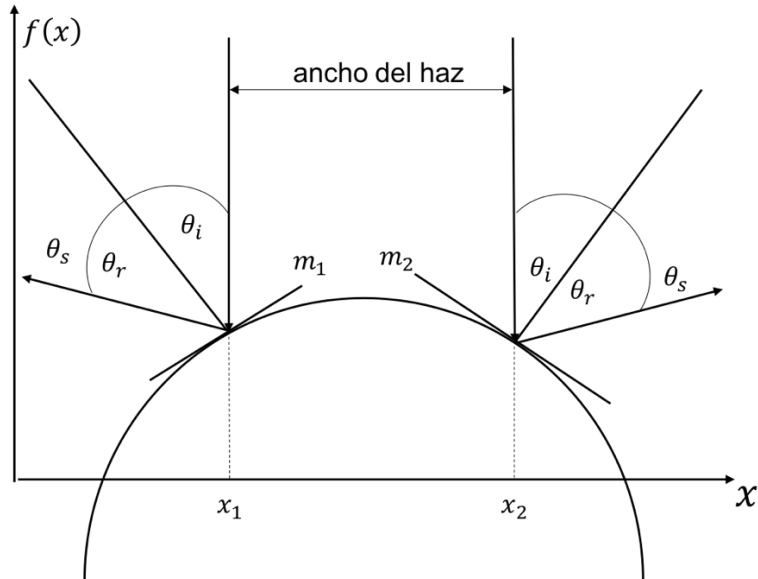


Figura 4. Modelo de descolimación-deflexión de haz de luz

Suponemos que la superficie está definida por una función de la posición. Para ejemplificar el comportamiento se supondrá una función sinusoidal.

La pendiente de la recta tangente en cada punto está dada por la derivada de esta función. Si la superficie está definida por una función $f(x)$, entonces, para dos puntos particulares en la superficie:

$$m_1 = \frac{d}{dx} f(x_1) \tag{4}$$

$$m_2 = \frac{d}{dx} f(x_2), \tag{5}$$

El valor de los ángulos de incidencia, de reflexión y la suma de estos se analizan en la figura 5, en donde l es la distancia de la superficie al plano de detección.

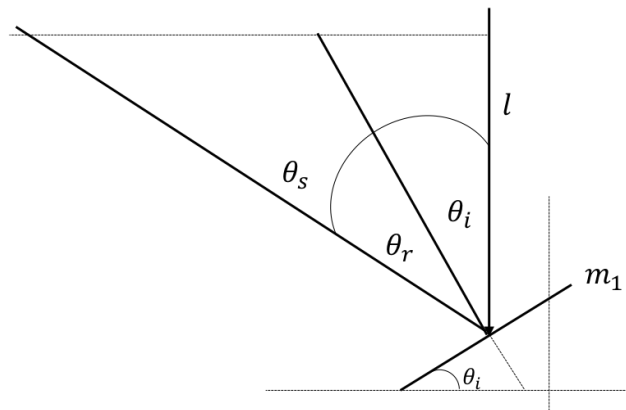


Figura 5. Reflexión de un rayo sobre la superficie

Del análisis geométrico se obtiene que $\theta_i = \theta_r$, y que $\theta_s = 2\theta_i$. El ángulo de reflexión θ_r está dado por la pendiente de la línea perpendicular a la superficie de la siguiente manera,

$$\theta_i(x_1) = \tan^{-1}(m_1) = \tan^{-1}\left(\frac{d}{dx}f(x_1)\right). \quad (6)$$

Como esto se cumple para cada punto de la reflexión sobre la superficie, puede generalizarse el valor del ángulo con el que se reflejará cada rayo del haz como:

$$\theta_i(x) = \tan^{-1}\left(\frac{df(x)}{dx}\right). \quad (7)$$

De la relación que tiene el ángulo de incidencia con el ángulo total de reflexión, se obtiene que:

$$\theta_s(x) = 2 \tan^{-1}\left(\frac{df(x)}{dx}\right). \quad (8)$$

El desplazamiento lateral sobre el plano de detección se muestra en la siguiente figura:

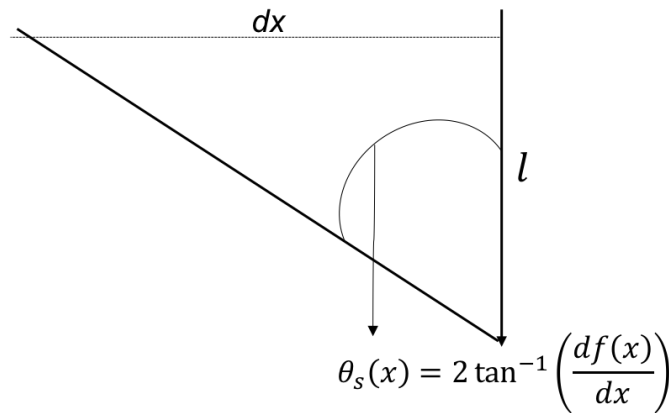


Figura 6. Desplazamiento lateral

donde dx es el desplazamiento horizontal sobre la línea de la fuente del haz, l es la distancia entre la superficie y el plano de detección, θ_s es el ángulo total de reflexión. De este análisis se obtiene la siguiente relación:

$$\tan(\theta_s(x)) = \frac{dx(x)}{l} \rightarrow dx(x) = l \tan(\theta_s(x)) = l \tan\left\{2 \tan^{-1}\left(\frac{df(x)}{dx}\right)\right\}, \quad (9)$$

por lo que es posible calcular el desplazamiento lateral que se tendrá en el plano de detección como una función de la expresión analítica que define el perfil de la superficie.

Puede hacerse una aproximación para calcular la intensidad que será detectada en el sensor como función de la posición. Por el principio de conservación de energía, la intensidad de un haz tiene la siguiente relación entre las superficies de emisión y detección:

$$I_1 A_1 = I_2 A_2, \quad (10)$$

donde I_1 es la intensidad del haz incidente, A_1 es la superficie iluminada por el haz, I_2 es la intensidad en el plano de detección, y A_2 es superficie en la cual se dispersa la intensidad en el detector.

Y, la relación entre las áreas dependerá únicamente de la dispersión del haz, y el diagrama que describe esta relación es:

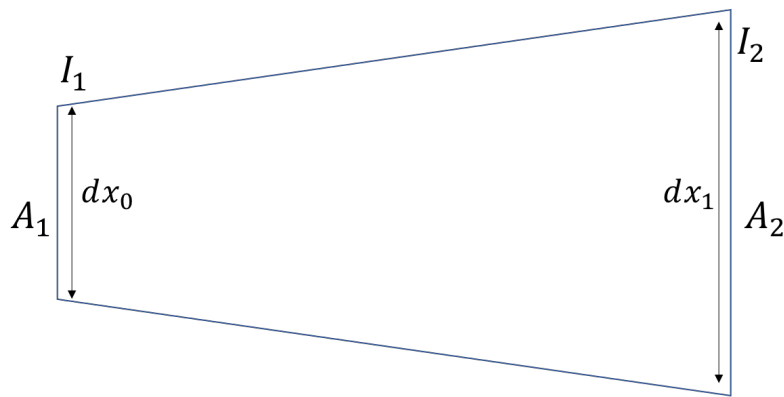


Figura 7. Relación entre áreas e intensidades del haz de luz

donde dx_0 es la longitud que mide el haz antes de reflejarse sobre la superficie, y dx_1 es la longitud que mide el haz después de reflejarse sobre la superficie.

Entonces, la intensidad en el plano de detección dependerá de la relación que tengan las áreas del haz de luz incidente y del haz reflejado en el plano de detección de la siguiente manera:

$$I_2 = I_1 \frac{dx_0}{dx_1} = I_1 \frac{1}{\frac{dx_1}{dx_0}}, \quad (11)$$

y generalizando el resultado como una función de la posición, la intensidad detectada en el sensor será:

$$I_2(x') = I_1(x) \frac{1}{\frac{dx_1}{dx_0}}. \quad (12)$$

Es posible calcular el perfil de intensidad en el plano de detección como función del cambio en las dimensiones del haz antes de reflejarse sobre la superficie y del haz disperso después de reflejarse sobre la superficie.

Suponiendo que existe una expresión analítica que defina la elevación de la superficie como función de la posición $f(x)$.

En la figura 8 se presenta una onda en la superficie con un perfil sinusoidal. Cuando la superficie del material no está siendo excitada, la distancia entre la superficie y el plano de detección es constante. Esta distancia se define como l , por lo que la distancia entre la superficie y la fuente está dada por la diferencia de las distancias $f(x)$ y l .

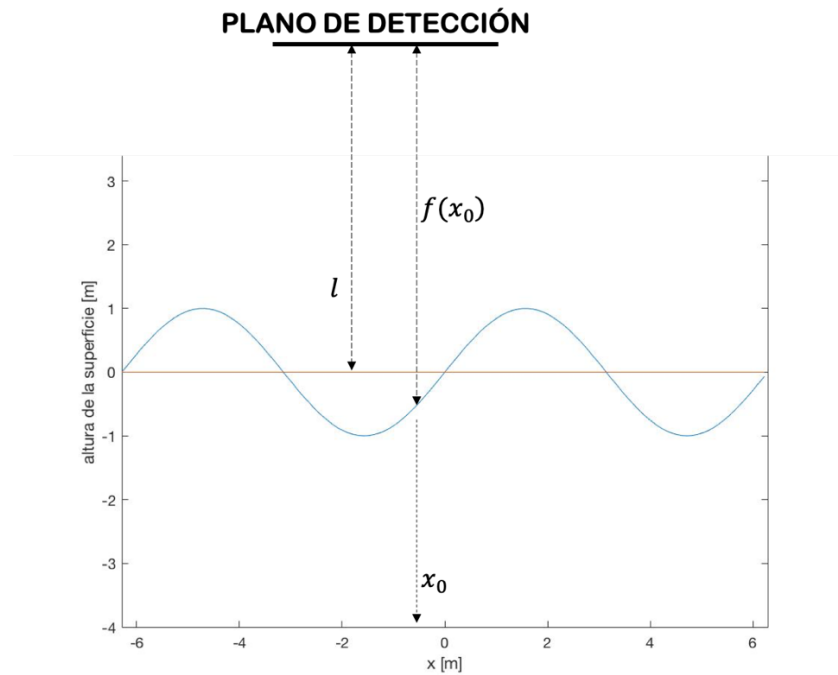


Figura 8. Distancia entre el plano de detección y la onda superficial

De este modo, la distancia entre la superficie y el plano de detección en un punto x_0 está dada por $h(x_0) = l - f(x_0)$. El análisis del desplazamiento en el plano de detección es igual que en el caso de la superficie sin desplazamiento, salvo una pequeña corrección. La figura 9 describe la nueva geometría del problema y el desplazamiento horizontal.

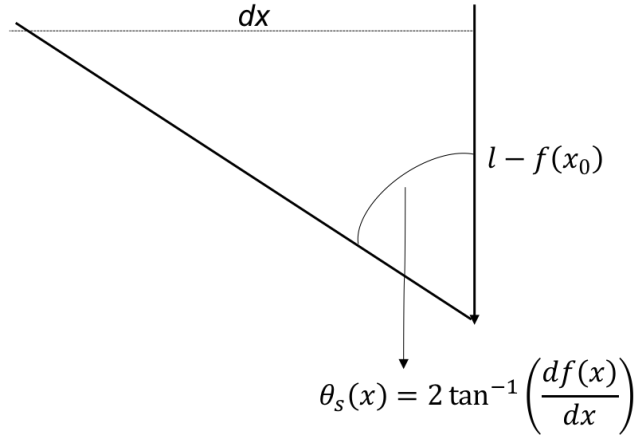


Figura 9. Análisis del desplazamiento horizontal

El valor de $\theta_s(x) = 2 \tan^{-1} \left(\frac{df(x)}{dx} \right)$ es igual que el obtenido anteriormente, ya que la pendiente de la tangente a la superficie sigue definiendo el ángulo de reflexión. La corrección se da en el valor del cateto adyacente de este ángulo porque en este caso no es constante.

Geoméricamente se trata del mismo arreglo entre las distancias, con la única corrección llevando al siguiente resultado

$$\tan(\theta_s(x_0)) = \frac{\Delta x(x_0)}{l - f(x_0)}, \quad (13)$$

$$\Delta x(x_0) = (l - f(x_0)) \tan(\theta_s(x_0)) = (l - f(x_0)) \tan \left\{ 2 \tan^{-1} \left(\frac{df(x_0)}{dx} \right) \right\}. \quad (14)$$

Este planteamiento se hizo para un solo rayo del haz incidente, sin embargo, puede generalizarse para cada uno de los rayos que lo conforman. De este modo, se encuentra una expresión analítica para cada desplazamiento del rayo reflejado como función de la posición.

$$\Delta x(x) = (l - f(x)) \tan(\theta_s(x)) = (l - f(x)) \tan \left\{ 2 \tan^{-1} \left(\frac{df(x)}{dx} \right) \right\}. \quad (15)$$

Este desplazamiento no indica la posición en la que el rayo del láser se encontrará en el plano de detección. La función que se desea encontrar es $x'(x)$, puntos en el plano de detección como función de la posición de incidencia del haz.

Suponiendo que se tiene una función sinusoidal sobre la superficie, los ángulos de reflexión del haz y los desplazamientos se calculan mediante las expresiones 13 y 15.

La función que se utilizará como ejemplo es $f(x) = 0.1 \sin(kx)$ con $k = 1$, en el intervalo de $-\pi \leq x \leq \pi$, lo que da un ciclo completo de la función, entonces se tiene:

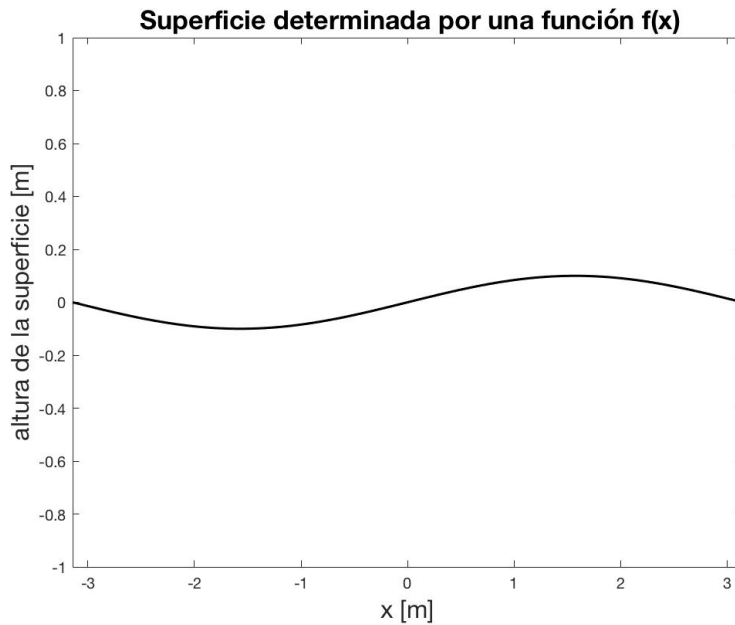


Figura 10. Superficie con perfil sinusoidal

Los ángulos del haz al reflejarse sobre la superficie se muestran en la siguiente figura:

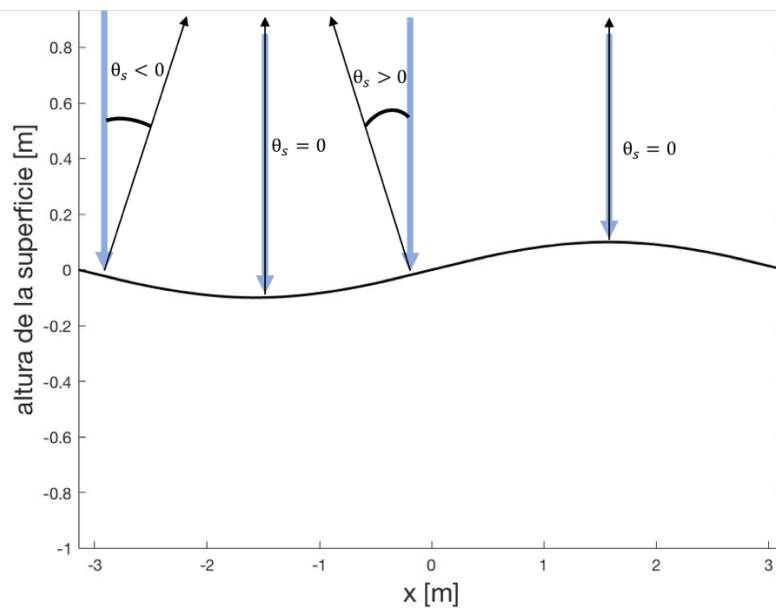


Figura 11. Valores del ángulo de reflexión del haz sobre la superficie

En la figura 11 cada línea azul representa un haz de luz incidente, y la línea negra más delgada representa la dirección que tendrá el haz después de reflejarse sobre la superficie.

Para que los ángulos y desplazamientos no sean excesivamente grandes, de manera que no represente complicaciones experimentales, las pendientes de la función tienen que ser

pequeñas. Una pendiente demasiado grande provocaría que todos los rayos reflejados en el plano de detección no se encuentren dentro del detector.

Por la manera como se planteó el modelo, cuando un haz incide sobre la superficie se refleja, el ángulo de reflexión tiene un valor negativo si en el plano de detección la posición del rayo reflejado es mayor que la del punto de incidencia. De manera análoga, el ángulo tiene un valor positivo cuando la posición del rayo reflejado en el plano de detección es menor que el punto de incidencia.

En los puntos donde la pendiente de la función es cero, el haz se refleja sobre el mismo punto y por lo tanto el ángulo $\theta_s = 0$. En el caso de la superficie que se utilizó como ejemplo, se tienen dos puntos $x = -\pi/2$, y $x = \pi/2$ donde la pendiente es cero.

El ángulo de reflexión como función de la posición se presenta en la figura 12, en este caso se utilizó un valor de $l = 2$. Este valor representa una separación entre el detector y la superficie de dos longitudes de onda en el plano de detección.

El valor del desplazamiento en el plano de detección también depende de la separación entre éste y la superficie.

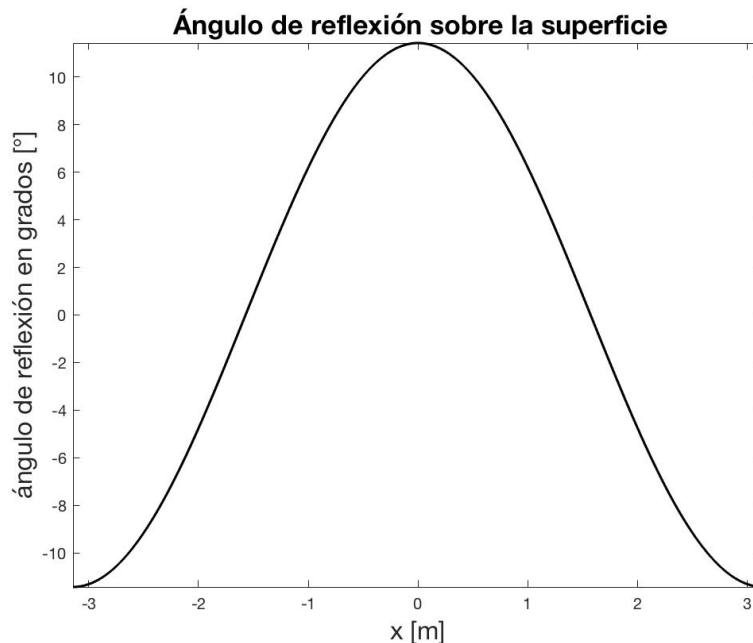


Figura 12. Ángulos de reflexión de la luz como función de la posición

La figura 12 presenta al ángulo de reflexión como función de la posición. En los puntos donde la pendiente es cero, el ángulo de reflexión también lo será, estos puntos son $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$. La función crece y decrece como lo hace también la función, llegando a un valor máximo cuando $x = 0$ y dos valores mínimos cuando $x = -\pi$ y cuando $x = \pi$. El ángulo calculado se obtiene en radianes, para la gráfica presentada en la figura 12 se realizó la conversión a grados.

Los valores mínimos y máximos del ángulo θ_s están definidos por:

$$\theta_s(x) = 2 \tan^{-1} \left(\frac{df(x)}{dx} \right) \quad (16)$$

En el caso en el que la función es $f(x) = 0.1\sin(kx)$, los valores mínimo y máximo del ángulo θ_s fueron $\theta_s(\min) = -11.42^\circ$, y $\theta_s(\max) = 11.42^\circ$. Es posible entonces delimitar los valores máximo y mínimo de reflexión del haz imponiendo condiciones a la derivada de la superficie. Si se desea que los valores de los ángulos sean $\theta_s(\min) \geq -11.42^\circ$, y $\theta_s(\max) \leq 11.42^\circ$, que en radianes son $\theta_s(\min) \geq -0.1993 \text{ rad}$, y $\theta_s(\max) \leq 0.1993 \text{ rad}$.

$$\frac{df(x)}{dx}(\min) \geq \tan \left(\frac{-0.1993 \text{ rad}}{2} \right) = -0.1 \quad (17)$$

$$\frac{df(x)}{dx}(\max) \leq \tan \left(\frac{0.1993 \text{ rad}}{2} \right) = 0.1 \quad (18)$$

Los valores mínimo y máximo del ángulo de reflexión pueden delimitarse si se impone la siguiente condición a la derivada de la función que determina la superficie.

$$-0.1 \leq \frac{df(x)}{dx} \leq 0.1 \quad (19)$$

En la experimentación no sería fácil acotar las pendientes máximas de reflexión, ya que podría no resultar sencillo controlar las vibraciones superficiales. Los ángulos máximos de reflexión podrían indicar un parámetro para la posible implementación del modelo. En otras palabras, la pendiente de la superficie podría determinar la viabilidad de aplicación del modelo. También es importante mencionar que la amplitud de las vibraciones que se pretenden medir es muy pequeña (el modelo se pensó para amplitudes del orden de cientos de nanómetros). Para amplitudes tan pequeñas, el modelo no debería presentar inconsistencias, pero la acotación de este parámetro permitiría saber hasta qué valores de amplitud el modelo funcionaría.

El modelo predice el caso en el que el ángulo de la pendiente es de tal magnitud que el haz reflejado en el plano de detección no se encuentra dentro del detector. En este caso, los haces de luz que no incidan sobre el detector no contribuirán a la potencia óptica detectada en el mismo, pero el modelo sigue prediciendo esta situación.

El único caso donde se generaría un error analítico en el modelo es cuando existan reflexiones internas sobre la superficie, ya que el modelo no predice esa situación. Cuando un haz después de reflejarse sobre la superficie vuelve a reflejarse en otro punto de esta antes de llegar al plano de detección.

Puede obtenerse una expresión que relacione la posición en el plano de detección como función del punto de incidencia del haz. A la posición del haz incidente se le resta el desplazamiento producido por la reflexión sobre la superficie. Este valor será la posición en

el plano de detección en donde se encontrará el haz reflejado. Esta posición se denominará x' y es una función de x .

$$x'(x) = x - \Delta x(x) = x - (l - f(x)) \tan \left\{ 2 \tan^{-1} \left(\frac{df(x)}{dx} \right) \right\} \quad (20)$$

Esta función $x'(x)$ es un mapeo en el plano de detección de las posiciones de los rayos reflejados sobre la superficie como función de los rayos provenientes de la fuente. Es función tanto de la posición del haz incidente, como de la función que representa la superficie y su derivada. Además, tiene una relación importante con la distancia entre la fuente y el detector.

Experimentalmente, el parámetro que puede medirse es la potencia óptica. La manera de relacionar este parámetro de medición con las características de la onda superficial es mediante un análisis en la distribución de la intensidad de luz en el plano de detección. Este análisis relacionará la localización de los rayos reflejados como función de los puntos de incidencia sobre la superficie.

En la figura 13 se presenta un mapeo de la posición de los rayos reflejados sobre la superficie que se presentó anteriormente como ejemplo. Se utiliza como referencia la línea azul que representa una superficie sin excitación.

Cuando la superficie se encuentra en reposo, es decir sin vibración, ante una incidencia normal de los rayos de láser, estos se reflejarían en la misma posición en el plano de detección. Es por esta razón que este caso se representa como la identidad en esta gráfica, la localización de los puntos en el plano de detección son los mismos que en el plano de incidencia. La línea azul representa el mapeo de cada punto sobre la superficie en el plano de detección cuando esta presenta una vibración como la mostrada en la figura 10.

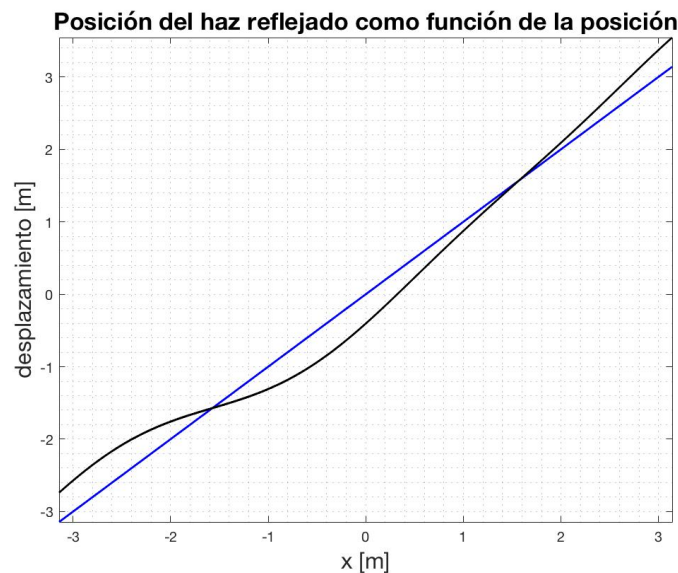


Figura 13. Mapeo de las posiciones del reflejo de la superficie

La variable que se necesitará analizar es la intensidad como función de la posición, entonces se vuelve al análisis que se había hecho con anterioridad en donde $I_0 A_0 = I_r A_r$. Para el caso unidimensional, esta condición se traduce en que:

$$I_0(x)\Delta x = I'(x)\Delta x' \quad (21)$$

en donde $I_0(x)$ representa la intensidad de la fuente en el plano de emisión, e $I'(x)$ representa la intensidad en el plano de detección. Los Δx y $\Delta x'$ son la magnitud de la longitud del haz incidente y del reflejado. Como se había comentado, los desplazamientos serán diferentes dependiendo de la función que describa a la superficie. En general estos intervalos no van a ser iguales.

La figura 14 representa el caso en el que el haz reflejado se dispersa (la intensidad total de la luz se dispersa en un área mayor) y se traslada (cambio de posición en el plano de detección) debido a la reflexión de los rayos del haz en la superficie.

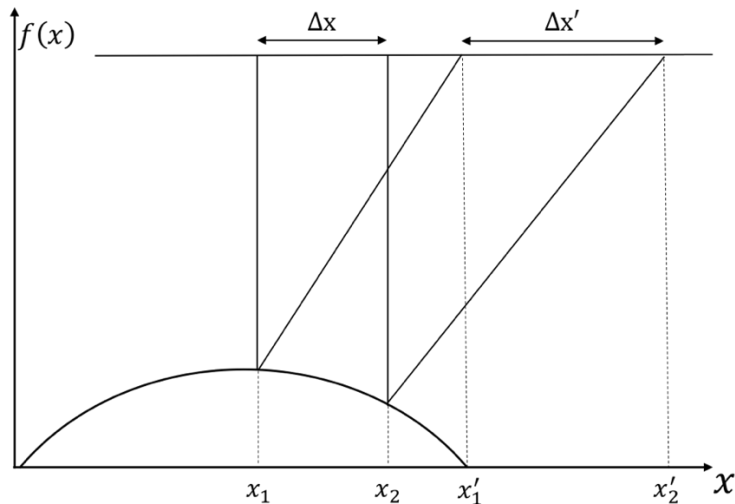


Figura 14. Ancho del haz incidente y ancho del haz reflejado sobre la superficie

Esta figura representa un caso de lo que puede ocurrir con el haz al reflejarse sobre la superficie. Un haz de luz incidente puede desplazarse sobre el plano de detección y al mismo tiempo, el ancho del haz reflejado puede ser mayor, menor o igual al del haz incidente.

La intensidad incidente es la que proviene del láser. Ya se ha calculado la expresión para encontrar las posiciones del haz reflejado. Por lo que la aportación de intensidad dependerá de la cantidad de luz que incida sobre el detector en el plano de detección.

Se necesita ahora encontrar una expresión para calcular la intensidad del haz reflejado como función de la posición. De la ecuación 21 se despeja la intensidad desconocida:

$$I(x') = I_0(x) \frac{\Delta x}{\Delta x'} = I_0(x) \frac{\Delta x'}{\Delta x} \quad (22)$$

como esta es una expresión válida para cualquier intervalo $\Delta x'$, en general también lo será cuando $\Delta x' \rightarrow 0$, de manera que:

$$\lim_{\Delta x' \rightarrow 0} \frac{\Delta x'}{\Delta x} = \frac{dx'(x)}{dx} \quad (23)$$

por lo que la expresión para encontrar la intensidad del haz reflejado es:

$$I'(x') = I_0(x) \frac{dx'(x)}{dx} \quad (24)$$

de esta manera puede calcularse la intensidad en el plano de detección como una función de la variable x . Se tiene una expresión para la posición de los rayos reflejados, por lo que sólo tiene que obtenerse su derivada y la expresión quedará completa.

$$\frac{dx'(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left[x - (l - f(x)) \tan \left\{ 2 \tan^{-1} \left(\frac{df(x)}{dx} \right) \right\} \right] \quad (25)$$

El resultado de esta derivación se presenta a continuación paso a paso:

$$\begin{aligned} \frac{dx'(x)}{dx} &= 1 - \frac{d}{dx} \left[(l - f(x)) \tan \left\{ 2 \tan^{-1} \left(\frac{df(x)}{dx} \right) \right\} \right] \\ &\rightarrow \frac{d}{dx} \left[(l - f(x)) \tan \left\{ 2 \tan^{-1} \left(\frac{df(x)}{dx} \right) \right\} \right] = \\ &\left(-\frac{df(x)}{dx} \right) \tan \left\{ 2 \tan^{-1} \left(\frac{df(x)}{dx} \right) \right\} + (l - f(x)) \frac{d}{dx} \left[\tan \left\{ 2 \tan^{-1} \left(\frac{df(x)}{dx} \right) \right\} \right] \\ &\rightarrow \frac{d}{dx} \left[\tan \left\{ 2 \tan^{-1} \left(\frac{df(x)}{dx} \right) \right\} \right] = \\ &\sec^2 \left(2 \tan^{-1} \left(\frac{df(x)}{dx} \right) \right) \frac{d}{dx} \left[2 \tan^{-1} \left(\frac{df(x)}{dx} \right) \right] \\ &\frac{d}{dx} \left[2 \tan^{-1} \left(\frac{df(x)}{dx} \right) \right] = \frac{2}{1 + \left(\frac{df(x)}{dx} \right)^2} \frac{d}{dx} \frac{df(x)}{dx} = \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2} \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

de modo que:

$$\frac{dx'(x)}{dx} = 1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right) \tan \left\{ 2 \tan^{-1} \left(\frac{df(x)}{dx}\right) \right\} - (l - f(x)) \sec^2 \left(2 \tan^{-1} \left(\frac{df(x)}{dx}\right) \right) \left\{ \frac{2}{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right\} \quad (26)$$

La expresión para la intensidad como función de la posición es:

$$I'(x) = \frac{I_0(x)}{\frac{dx'(x)}{dx}} \quad (27)$$

Este análisis se realizó suponiendo una incidencia normal, es decir, el haz incidente y la superficie plana son perpendiculares. Si se supone una incidencia no normal a la superficie, la reflexión y el ángulo de reflexión se representan en la figura 15:

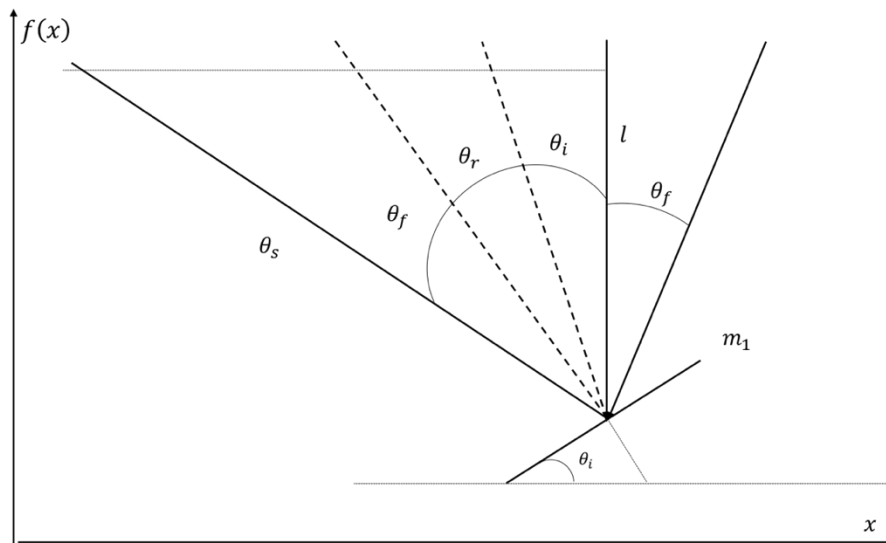


Figura 15. Incidencia oblicua del haz sobre la superficie

En este diagrama se muestran los ángulos con los que el haz se reflejará sobre la superficie. Como puede observarse, el ángulo de reflexión del haz difiere del caso de incidencia normal sólo por el valor del ángulo θ_f que es el ángulo al que se encuentra la fuente con respecto a la normal.

El ángulo con el que se refleja respecto a la normal es:

$$\theta_s = 2\theta_i + 2\theta_f \quad (28)$$

El desplazamiento en el plano de detección con respecto a la posición de incidencia normal es:

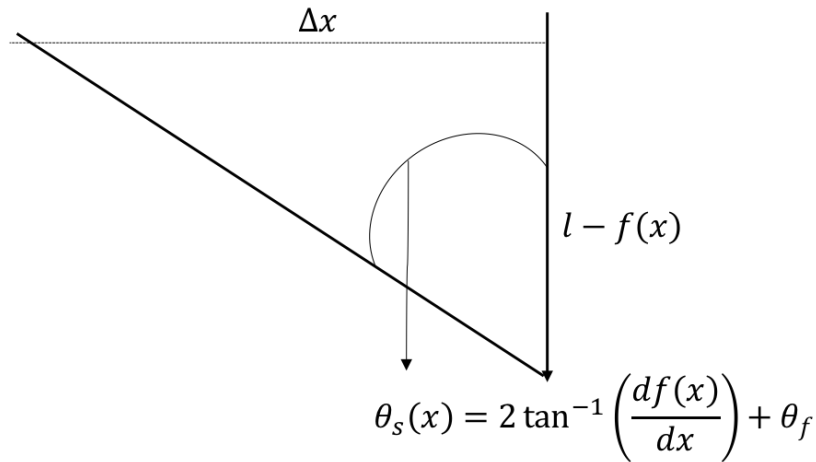


Figura 16. Desplazamiento debido a incidencia oblicua del haz sobre la superficie

por lo que el desplazamiento será:

$$\Delta x(x) = (l - f(x)) \tan \left\{ \left[2 \tan^{-1} \left(\frac{df(x)}{dx} \right) \right] + \theta_f \right\} \quad (29)$$

La posición final del haz reflejado será la suma de la posición inicial del haz más el desplazamiento, entonces:

$$x'(x) = x + \Delta x(x) = x + (l - f(x)) \tan \left\{ \left[2 \tan^{-1} \left(\frac{df(x)}{dx} \right) \right] + \theta_f \right\} \quad (30)$$

de este punto en adelante, el planteamiento tendrá sólo la corrección del ángulo como argumento de la tangente. La geometría con la que se planteó el modelo de incidencia normal, y las expresiones encontradas para describir el fenómeno son las mismas. No se continuará con este planteamiento ya que una incidencia normal implica una simplificación en el desarrollo experimental.

El modelo generado se puede describir mediante el siguiente diagrama:

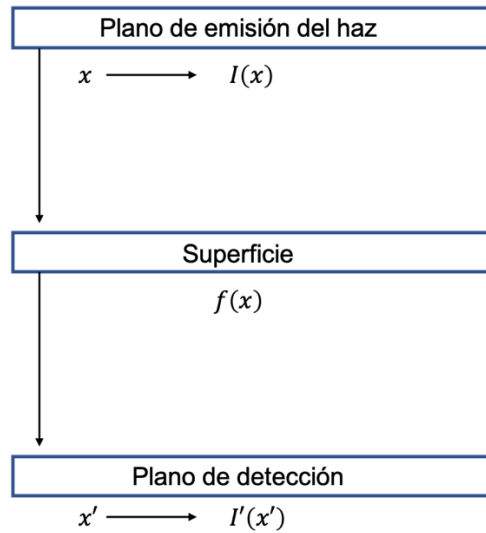


Figura 17. Diagrama explicativo del modelo

Si se supone una fuente de luz como un láser gaussiano, la intensidad en el plano de emisión como función de la posición es:

$$I(x) = I_0 e^{-(x-x_0)^2/\sigma^2} \quad (31)$$

En donde I_0 es la intensidad inicial, x_0 indica el punto sobre el cual se encuentra centrado el láser en el plano de detección, σ es el ancho de cintura del láser. $f(x)$ es la función analítica que define la superficie del material.

$$x'(x) = x - (l - f(x)) \tan \left\{ 2 \tan^{-1} \left(\frac{df(x)}{dx} \right) \right\} \quad (32)$$

x' define la posición en el plano de detección, ubicado a una distancia l entre el detector y la superficie en ausencia de excitación. Esta relación también es la colección de todos los puntos donde se encuentran los rayos del haz incidente después de reflejarse sobre la superficie.

Puede seguirse la trayectoria de cualquier punto que provenga del plano de emisión y ubicarlo en el plano de detección. El plano de emisión de la luz y el de detección en general no estarán a la misma distancia.

Suponiendo que la luz re refleja totalmente en la superficie, la intensidad en el plano de detección está dada por la expresión:

$$I'(x') = [I_0 e^{-(x-x_0)^2/\sigma^2}] / \left[1 + \left(\frac{df(x)}{dx} \right) \tan \left\{ 2 \tan^{-1} \left(\frac{df(x)}{dx} \right) \right\} - (l - f(x)) \sec^2 \left(2 \tan^{-1} \left(\frac{df(x)}{dx} \right) \right) \left\{ \frac{2}{1 + \left(\frac{df(x)}{dx} \right)^2} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right\} \right] \quad (33)$$

En este caso, $I'(x')$ es una función que depende de la variable $x'(x)$. La intensidad en el plano de detección dependerá del ángulo y la distancia de deflexión de los rayos incidentes.

Experimentalmente, la variable que se medirá es la potencia óptica, cuya expresión es:

$$P(x, y) = \iint_R I(x, y) \cdot dA \quad (34)$$

Donde dA es el elemento diferencial de área que contiene a la fuente de la radiación y la intensidad $I(x, y)$ se encuentra en el plano de detección. La integral se tomará entonces como la doble integral en la región R que contiene al detector.

En el sistema de coordenadas que se está utilizando, la potencia es función simplemente de la variable x .

$$P(x) = \int I(x) dx \quad (35)$$

Como esta es una expresión general para calcular la potencia óptica como función de la intensidad, con las expresiones encontradas en el modelo es posible calcular la potencia en el plano de emisión como función de x y la potencia en el plano de detección como función de x' .

$$P(x) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} I(x) dx \quad (36)$$

x_{\max} y x_{\min} son las dimensiones de la fuente. $I(x)$ es la intensidad dada por el láser. Se proponen los valores para x_{\max} y x_{\min} estar centrados con el origen de las coordenadas, ubicado en la fuente y que tengan un valor que permita contener la mayor cantidad de luz posible.

$$P(x') = \int_{x'_{\min}}^{x'_{\max}} I'(x') dx' \quad (37)$$

x'_{\max} y x'_{\min} son las dimensiones del detector en el plano de detección. $I'(x')$ es la intensidad recibida en el plano de detección.

Calcular la potencia óptica que será recibida en el detector requeriría resolver la integral, pero no es posible encontrar una expresión analítica para $x(x')$ o $I'(x')$, salvo que la función particular $x'(x)$ sea invertible. Aunque no pueda encontrarse una expresión analítica para la potencia en el plano de detección, es posible calcularla mediante métodos numéricos.

Simulación del cálculo de la potencia

Para lograr realizar el cálculo, se utilizó el método del trapecio para integración numérica. Se realiza una aproximación de la integral definida de una función mediante la suma de trapecios que toman en cuenta puntos sobre el eje de la variable de integración y los valores de la función evaluada en esos puntos. La expresión que representa esta aproximación es:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h_i}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})] \quad (38)$$

Donde $h_i = x_{i+1} - x_i$, cabe mencionar que el método tradicional propone intervalos igualmente espaciados para realizar el cálculo de la integral.

En el modelo, el tamaño de un intervalo en el plano de emisión x será diferente al intervalo correspondiente en el plano de detección x' , es decir, $\Delta x \neq \Delta x'$ debido a que el reflejo sobre la superficie deforma el haz incidente. Sin embargo, el tamaño de estos intervalos también puede calcularse mediante la simulación numérica del modelo. Estos intervalos pueden obtenerse directamente de las funciones x y $x'(x)$.

De esta manera es posible encontrar la potencia asociada como función del tiempo. Se obtiene una gráfica como la que se muestra en la figura 18. Los parámetros que intervienen en el modelo son: I_0 es la intensidad inicial, x_0 indica el punto sobre el cual se encuentra centrado el láser en el plano de detección, σ es el ancho de cintura del láser, x son los puntos dentro de los que se realizó la simulación, $f(x)$ representa la onda viajera sobre la que se reflejará el láser, ω es la frecuencia de oscilación de la onda, k representa al número de onda asociado con la onda, l es la separación que hay en el camino óptico de la onda con el detector, λ es la longitud de onda de la onda viajera y t es el intervalo de tiempo en el que se realizó la simulación. Se tomaron valores para los vectores de integración espacial y los intervalos temporales tales que permitieran integrar la mayor parte de la luz en el detector y permitiera la observación en la simulación de dos ciclos completos de la onda viajera. Los valores para estos parámetros que se utilizaron para simular los valores de la potencia fueron:

$$I_0 = 100 \text{ mm}$$

$$x_0 = 0$$

$$\sigma = 0.1 \text{ mm}$$

$$I = I_0 e^{-(x-x_0)^2/\sigma^2}$$

$$x = [-2\sigma, 2\sigma]$$

$$f(x) = A \cos(kx - \omega t)$$

$$\omega = 5000 \text{ Hz}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$l = 100 \text{ mm}$$

$$\lambda = 1 \text{ mm}$$

$$t = [0, 4\pi/\omega]$$

$$A = 0.001 \text{ mm} = 100 \text{ nm}$$

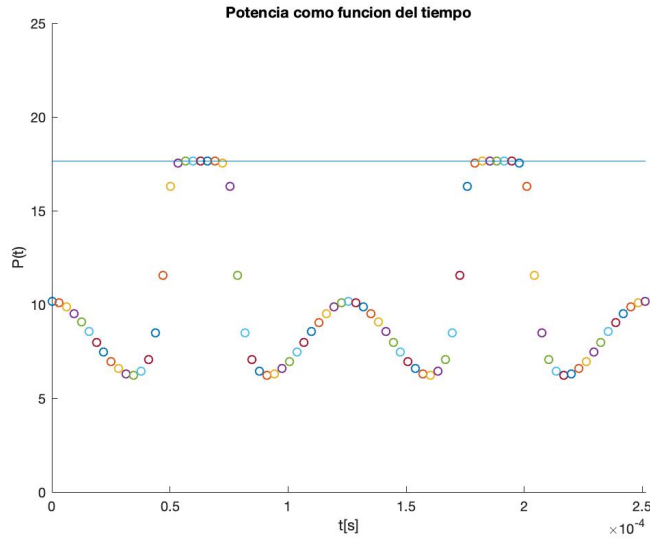


Figura 18. Potencia óptica en el plano de detección como función del tiempo

En la figura se muestran dos periodos de tiempo de la onda superficial y la potencia teórica registrada en el detector como función del tiempo. La línea azul superior corresponde a la potencia del haz en el plano de emisión, es decir, la potencia que sale del láser al emitirse.

Si se tuviera una superficie completamente reflejante y plana, la potencia incidente sería igual a la del plano de detección para cualquier tiempo, siempre y cuando toda la luz reflejada estuviera contenida dentro del detector.

Si el reflejo del haz de luz no estuviera contenido completamente dentro del detector, la potencia óptica tendría el valor de la integral de la intensidad en los intervalos de posición donde se encuentre el detector.

Existen ciertos instantes en el tiempo donde la potencia en el plano de detección es igual a la del plano de incidencia. En estos puntos, la reflexión sobre la superficie deforma el haz de luz de tal modo que la energía incidente sobre la superficie se refleja completamente en el detector.

Cuando la superficie dispersa el haz sobre el plano de detección, la potencia en el detector será menor que la potencia incidente. Cuando el haz reflejado no se encuentre dentro del detector la potencia será cero. Cuando el haz se encuentre dentro del detector, la potencia dependerá de la cantidad de luz recibida por el detector y la dispersión que genere la superficie sobre el haz.

La longitud y la amplitud de la onda superficial no pueden ser expresadas analíticamente como función de la potencia.

Aunque analíticamente no es posible encontrar los valores para la amplitud y longitud de onda, puede hacerse un análisis sobre los efectos en la variación de estos parámetros en la potencia calculada mediante el modelo planteado.

En el capítulo dos se intentará encontrar una manera de determinar los valores para la longitud y amplitud de onda, pero en este primer capítulo sólo se observará la manera en la que se graficarán los valores de potencia calculada mediante el modelo.

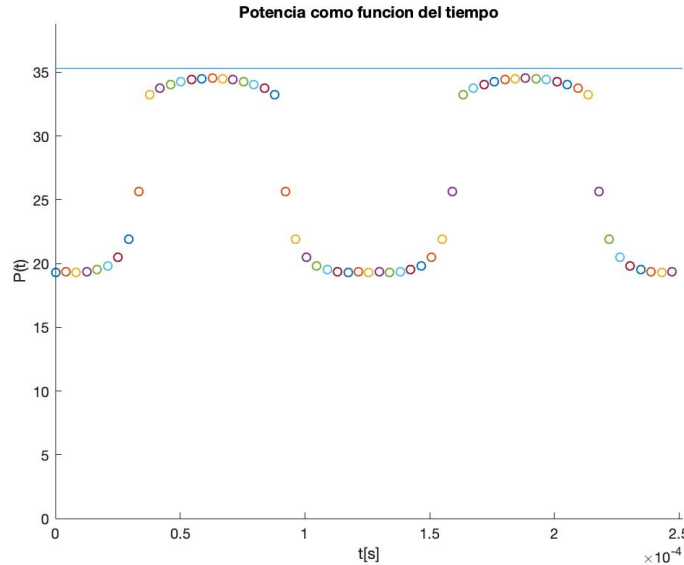


Figura 19. Potencia como función del tiempo de la primera longitud de onda

En la figura 19 se presenta la serie de datos asociados con los valores:

$$I_0 = 100, x_0 = 0, \sigma = 0.2 \text{ mm}, I = I_0 e^{-(x-x_0)^2/\sigma^2}, x = [-2\sigma, 2\sigma],$$

$$f(x) = A \cos(kx - \omega t), \omega = 5000 \text{ Hz}, k = \frac{2\pi}{\lambda}, l = 100 \text{ mm}, \lambda = 0.9 \text{ mm},$$

$$t = [0, 4\pi/\omega].$$

En la figura 19 se muestra una línea recta en la parte superior que representa la potencia de la fuente. En el modelo aún no se toma en cuenta la pérdida de energía que se presentará cuando el haz se refleje en la superficie.

Si se supone una superficie perfectamente reflejante, la potencia máxima que podría medirse en el detector sería igual a la potencia incidente y tendría una variación en su valor dependiendo de cómo sea la superficie. La potencia óptica medida en el detector tendría un comportamiento similar si se tomara en cuenta la pérdida de energía ante la reflexión de la luz en una superficie que no sea completamente reflejante. La diferencia entre la potencia en ambos casos es que para una superficie que no es completamente reflejante, la potencia óptica tendría que multiplicarse por el factor de pérdida de energía que depende

de la naturaleza de la superficie. El modelo predice que la potencia óptica medida en el detector depende de la deformación que se presente en la superficie.

En general, el haz se dispersará, sin embargo, existe la posibilidad de que el haz se enfoque y toda la luz incidente se refleje sobre el detector. Cuando esta condición se cumpla, la potencia en el detector será igual a la potencia del haz incidente.

Se realizó una variación de la longitud de onda en 0.1 mm hasta llegar a 1.7 mm. La serie de datos se presenta en la figura 20.

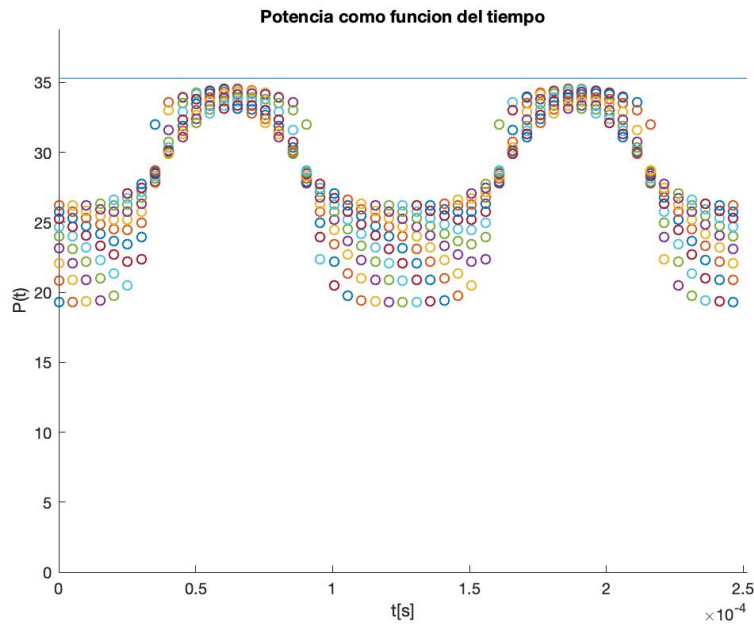


Figura 20. Potencia medida en el detector con una variación en la longitud de onda

El modelo presenta limitaciones al implementarse en una simulación, siendo una de ellas los puntos la función que define la potencia se indetermina. Estos puntos ocurren cuando alguno de los denominadores dentro de la función se hace cero en la expresión de la intensidad. Aunque matemáticamente estos puntos indeterminan el cálculo, físicamente tienen un significado diferente, y no invalidan el modelo. El significado tiene que ver con los puntos en donde, $\frac{dx'(x)}{dx} = 0$, y donde $1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2 = 0$, dentro de la expresión de esa derivada. La primera condición de indeterminación corresponde con los valores máximos de la función $x'(x)$ y sus valores máximos y mínimos, así como los puntos donde $x'(x)$ es constante. Estos puntos corresponden a puntos que representan un desplazamiento máximo en el plano de detección y puntos que no se mueven dentro del mismo. La segunda condición tiene que ver con un parámetro relacionado con el radio de curvatura. En la ecuación 33, se obtiene un término muy similar al inverso del radio de curvatura. Por lo que también puede pensarse que una de las singularidades se dará cuando el radio de curvatura sea igual a cero.

Una vez analizado el modelo, es momento de pasar a la implementación de este para determinar la viabilidad. En los siguientes capítulos se plantearán arreglos experimentales para determinar los parámetros importantes utilizados en el modelo (sigma del láser), un arreglo para la detección de ondas superficiales y por último un método de cálculo de longitud y amplitud de onda mediante la potencia, que es la variable física medible mediante el modelo.

Por último, cabe mencionar que las mediciones que se tomen en el osciloscopio representan la componente AC de la señal recibida dentro del detector. En otras palabras, las mediciones que se tomen en el osciloscopio sólo presentarán una variación alrededor del cero de amplitud de voltaje.

Sin embargo, la señal obtenida sí tendrá la misma forma que las simulaciones presentadas anteriormente. Si se desea obtener una imagen como la que se tiene en las simulaciones será necesario sumarle a la señal del osciloscopio una componente DC, que es equivalente al valor promedio de la simulación.

CAPITULO 2. EXPERIMENTACIÓN

Diseño experimental

El arreglo experimental consta de los elementos mostrados en la figura 21, y su funcionamiento se describe mediante esta:

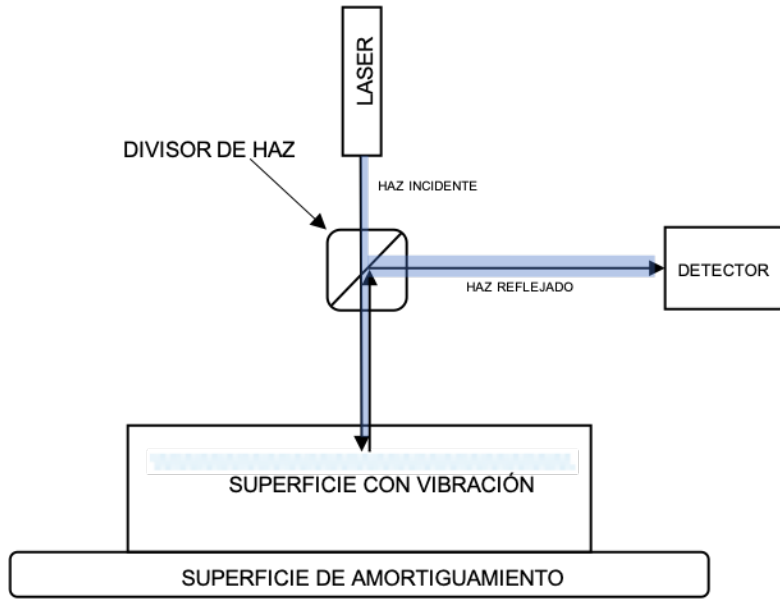


Figura 21. Esquema del experimento

El láser se hace pasar por el divisor de haz para dirigir una parte de la luz hacia la superficie y cuando el reflejo vuelva al divisor, éste lo direcciona hacia el detector en donde se realizará la medición.

La potencia que se registrará en el detector será una fracción de la emitida, ya que cada vez que el haz pasa por el divisor se direcciona sólo la mitad. Al reflejarse la luz sobre la superficie sólo una fracción de esta se reflejará.

Las variables que son importantes para la determinación de la potencia del haz reflejado son; la longitud, la amplitud y la frecuencia de la onda, la separación entre la superficie y el detector, el tamaño del detector, y la sigma del láser. La separación entre la superficie, así como el tamaño del detector puede medirse directamente. Las características de la onda serán obtenidas mediante el análisis de la potencia registrada en el detector. Por lo que la única variable que tiene que medirse de una manera diferente es la sigma del láser.

Una vez determinado el modelo experimental es necesario calcular experimentalmente la sigma del láser, ya que es un parámetro necesario para calcular la potencia óptica en el plano de detección.

Utilizando este arreglo se realizaron las mediciones que se presentan en capítulos posteriores, pero se tuvieron que hacer modificaciones que en su momento se explicarán.

Determinación del valor de la sigma del láser

Para calcular el valor de la sigma del láser, se medirá su potencia como función de la posición. Como se vio en el capítulo 1, existe una relación entre la potencia y la intensidad, como función de la posición:

$$P(x) = \int I(x)dx \quad (1)$$

A partir de esta relación, es posible calcular la intensidad como función de la posición si se conoce la potencia como función de la posición, es decir:

$$I(x) = \frac{dP(x)}{dx} \quad (2)$$

Esto determina el procedimiento que se seguirá; primero se calculará la potencia como función de la posición, y luego se calculará la derivada de esa función. No es posible calcular directamente la potencia mediante un detector como el que se utiliza. El procedimiento para calcularla consiste en dejar fijos al láser y al detector, y modificar la cantidad de luz que se permite pasar.

El resultado que quiere observarse en el detector se ilustra en la figura 22.

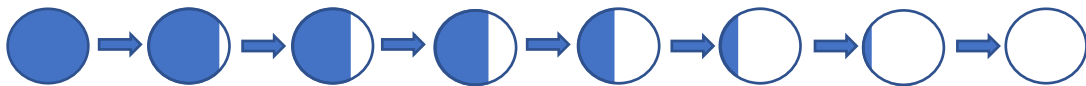


Figura 22. Procedimiento de medición

Para el proceso experimental se coloca una navaja entre el detector y el láser como se muestra en la figura 23. La navaja se moverá mediante una platina con un tornillo milimétrico para tener control sobre su desplazamiento. El movimiento de la navaja definirá la cantidad de luz.

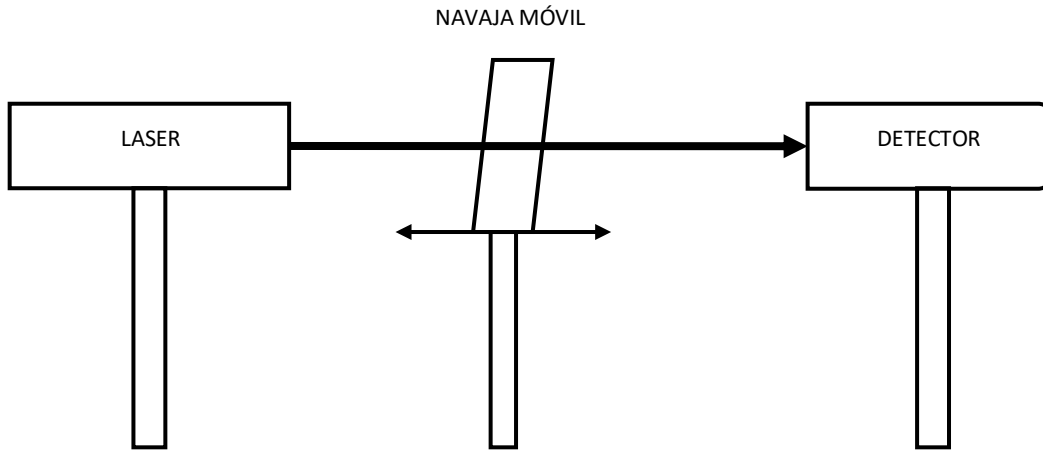


Figura 23. Esquema del experimento

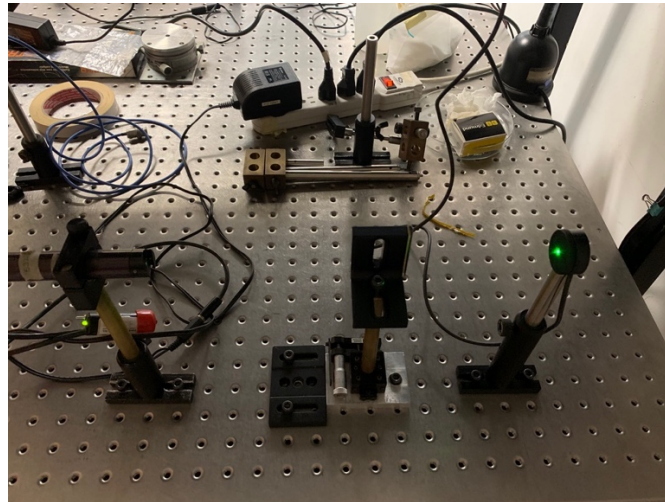


Figura 24. Arreglo experimental

Se caracterizaron dos láseres diferentes, el primero fue un verde, con longitud de onda de 532 nm, que se muestra en la figura 24. Las mediciones de este láser mostraron que no tiene una intensidad estable. Al medir la potencia en el detector, esta variaba y no llegaba a un punto de estabilidad, y cada medición arrojaba datos diferentes.

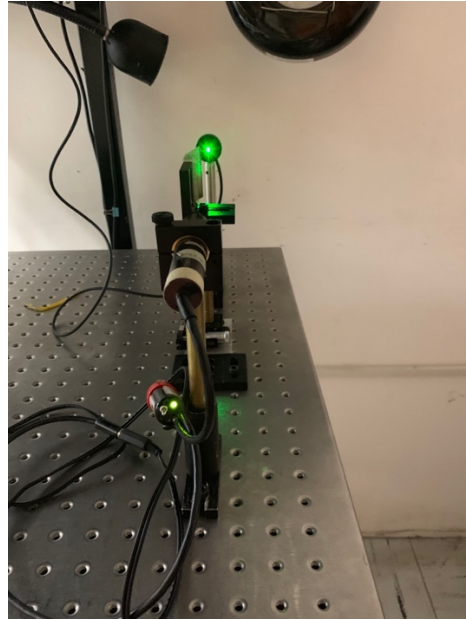


Figura 25. Arreglo experimental

Por el resultado anterior, se decidió utilizar un láser diferente, uno violeta de 405 nm. de longitud de onda. Se realizaron cuatro mediciones y los resultados obtenidos en cada una de ellas se presentan en la figura 26.

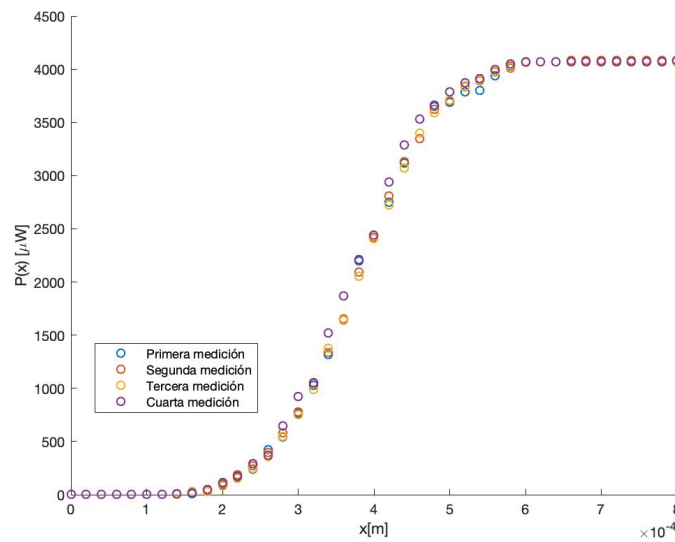


Figura 26. Potencia como función de la posición

Este es el perfil de potencia como función de la posición. Si se realiza un proceso de derivación sobre la función encontrada se obtendrá el perfil de intensidad en el intervalo

sobre el que se realizó la medición. Y encontrando esta nueva función puede determinarse el valor de la sigma del láser.

Se realizaron dos procedimientos para calcular el valor de la sigma. En el primero, se realizó un ajuste mediante el método de mínimos cuadrados para obtener la curva que más aproximara al perfil de potencias encontrado. Después se obtuvo la derivada de esta función y se graficó para observar si era posible determinar la sigma de este valor.

En el segundo método, se obtuvo la derivada numérica del perfil de potencias obtenido, y después se calculó la derivada de esa función. Ambos métodos deberían llevar al mismo resultado, pero el segundo resulta más efectivo para la determinación del valor de sigma.

A continuación, se muestra el primer procedimiento.

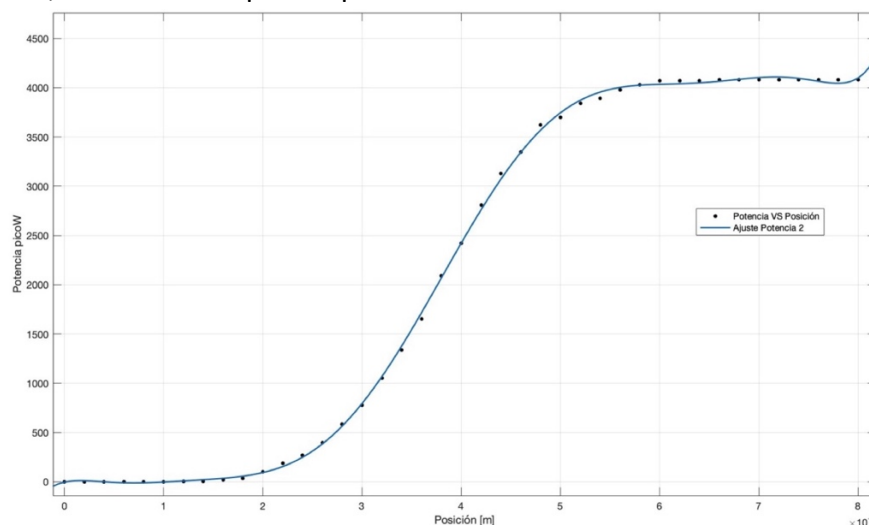


Figura 27. Ajuste del perfil de potencias

El primer método es menos efectivo porque el ajuste al perfil de potencias es polinomial por lo que la derivada del ajuste resulta otra función polinomial. Aunque es claro que el ajuste es muy parecido a un perfil Gaussiano del haz, no es esa función. En este punto cabe mencionar que se intentaron realizar diferentes tipos de ajustes, entre los cuales están: lineal, cuadrático, exponencial, polinomios de diferentes grados hasta el 9, etc, obteniendo el mejor resultado con el mostrado a continuación.

No realicé el ajuste con la función $erf(x)$ porque no encontré una manera de hacerlo con los recursos con los que contaba en el momento.

La función que graficada en la figura 5 es:

$$polinomio(x) = p1(x^9) + p2(x^8) + p3(x^7) + p4(x^6) + p5(x^5) + p6(x^4) + p7(x^3) + p8(x^2) + p9(x) + p10 \quad (3)$$

con $p_1 = 4.515 \times 10^{34}$, $p_2 = -1.57 \times 10^{32}$, $p_3 = 2.221 \times 10^{29}$, $p_4 = -1.635 \times 10^{26}$, $p_5 = 6.667 \times 10^{22}$, $p_6 = -1.50 \times 10^{19}$, $p_7 = 1.827 \times 10^{15}$, $p_8 = -1.078 \times 10^{11}$, $p_9 = 2.291 \times 10^6$, y $p_{10} = -3.78$. Este es un polinomio de grado nueve.

La relación de la intensidad con la posición, entonces, está dada por la derivada de este polinomio, que da otro polinomio de grado 8, y no es posible determinar analíticamente la sigma de esta expresión. El coeficiente de correlación es un valor estadístico que determina la calidad del ajuste ($R^2 \in [0,1]$), en donde entre más cercano sea el valor de este coeficiente a uno, el ajuste es mejor. Para el ajuste del perfil de potencia con el polinomio de grado nueve encontrado se tiene un valor de $R^2 = 0.9997$. El ajuste realizado tiene una calidad muy buena ya que valores por encima de 0.90 se consideran buenos. La derivada numérica se obtuvo mediante el método de diferencias finitas.

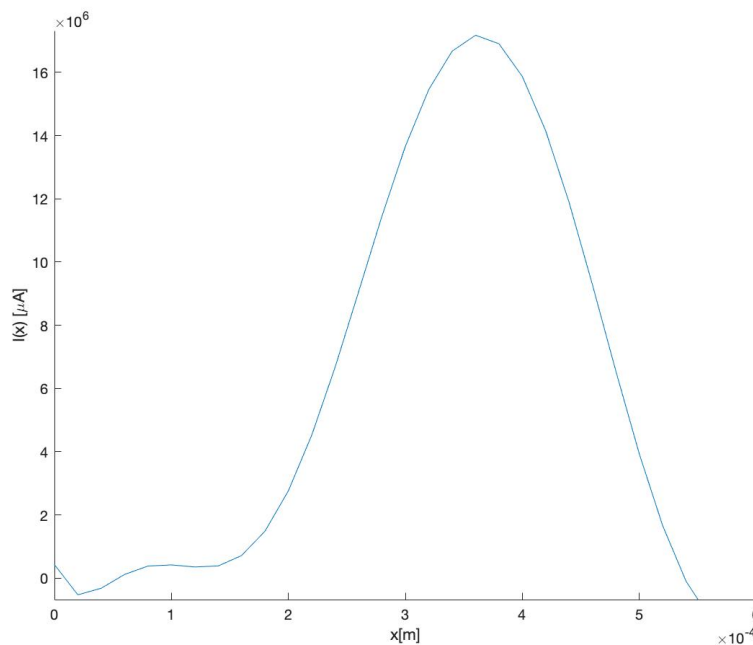


Figura 28. Derivada numérica del ajuste

En el segundo método que se utilizó, primero se derivaron los datos numéricamente y a estos datos se les realizó un ajuste Gaussiano. Para la misma medición se muestra el procedimiento:

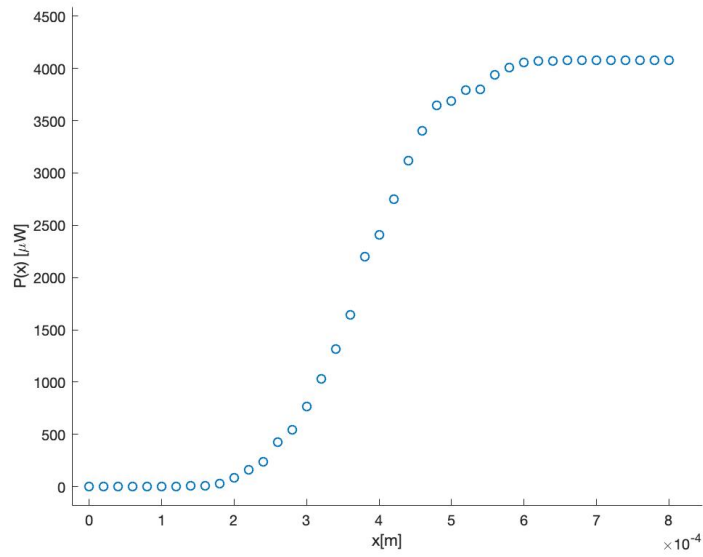


Figura 29. Perfil de potencias, primera medición

La derivada numérica de estos valores y su ajuste se muestran en la figura 30.

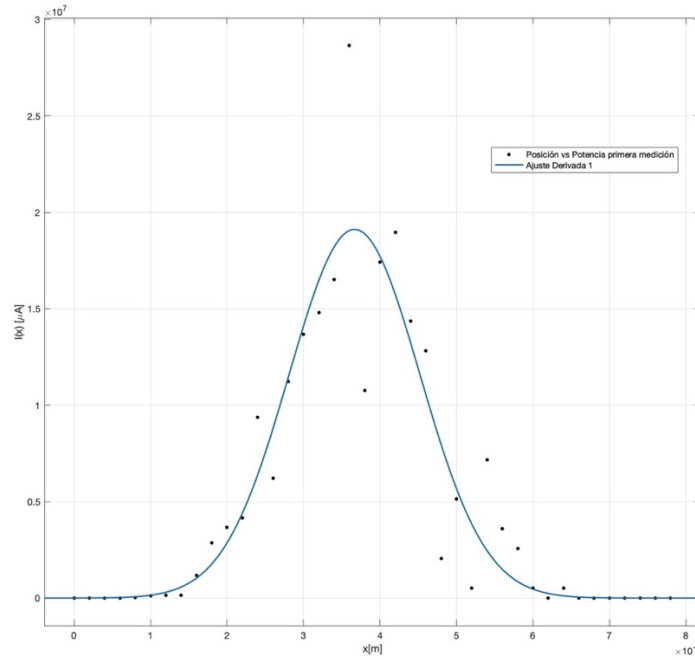


Figura 30. Ajuste de la derivada, primera medición

El ajuste Gaussiano que se realizó a la medición permitió obtener el valor de la sigma del láser se encuentra explícitamente. La expresión de la función gaussiana mostrada es:

$$f(x) = a_1 e^{-\left(\frac{x-b_1}{c_1}\right)^2} \quad (4)$$

con $a_1 = 1.911 \times 10^7$, $b_1 = 0.0003667$, y $c_1 = 0.000121$, y estos valores se relacionan con los parámetros físicos del láser mediante la expresión de la intensidad para láseres gaussianos que es:

$$I(x) = I_0 e^{-2\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2} = I_0 e^{-\left(\frac{\sqrt{2}(x-x_0)}{\sigma}\right)^2} \quad (5)$$

Por lo que, si $I(x) = f(x)$, entonces $I_0 = a_1$, $\sqrt{2}x_0 = b_1$, y $\sigma = c_1$. Como se comentó anteriormente, mediante este procedimiento, el valor de la sigma del láser se obtiene de manera explícita de la expresión.

Al igual que en el ajuste anterior, se encuentra el valor del coeficiente de correlación que determina la calidad del ajuste. En el caso de este primer ajuste, el valor de $R^2 = 0.8593$. Este valor no muestra un ajuste tan bueno como el que se obtuvo con el ajuste de la serie de datos de potencia, sin embargo, como se verá a continuación, este valor bajo puede deberse al proceso de estabilización del láser. Se realizaron dos mediciones en condiciones similares una vez estabilizado el láser. Los resultados obtenidos se muestran en las siguientes gráficas.

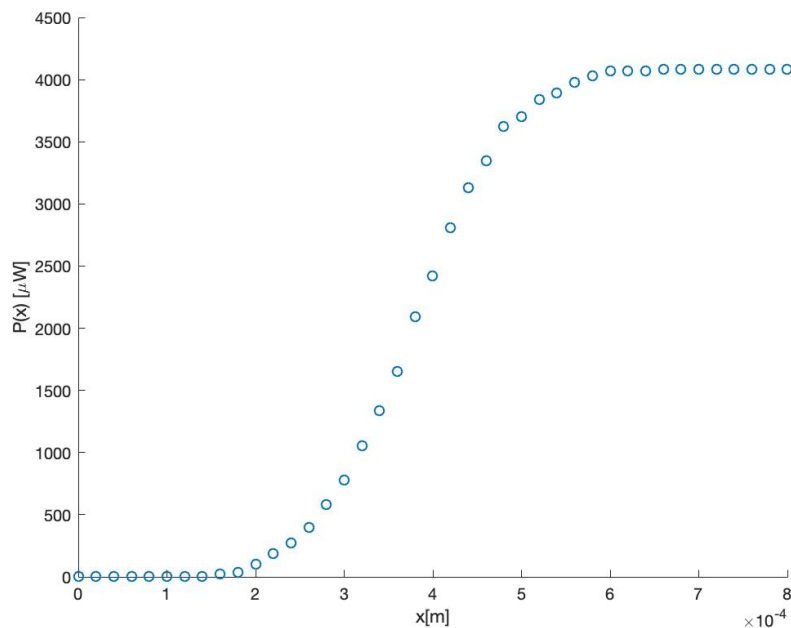


Figura 31. Perfil de potencias, segunda medición

Los valores de la derivación numérica y el ajuste gaussiano realizado se muestran en la figura 31.

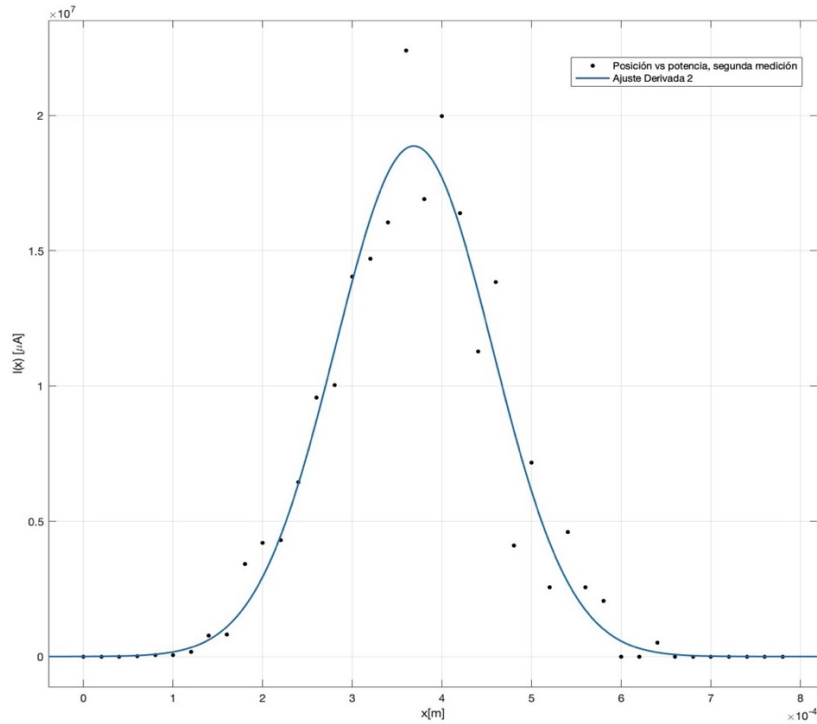


Figura 32. Ajuste de la derivada, segunda medición

Al igual que en la medición anterior, los valores encontrados para el ajuste de la derivada fueron:

$$f(x) = a_1 e^{-\left(\frac{x-b_1}{c_1}\right)^2} \quad (6)$$

con $a_1 = 1.887 \times 10^7$, $b_1 = 0.0003685$, y $c_1 = 0.0001237$. Con un coeficiente de determinación de $R^2 = 0.9567$, que ya es un valor mucho más aceptable en términos estadísticos para el ajuste de los valores a la expresión encontrada.

También cabe observar que el valor de los coeficientes b_1 , y c_1 tuvieron una variación de menos del 1%. Ya que sólo variaron su valor hasta la tercera cifra significativa.

Se realizaron un par de mediciones más, y se muestran los valores medidos y sus ajustes de las figuras 33 a la 36. Es importante mencionar que, para la tercera medición, las condiciones de medición no fueron las óptimas, ya que el laboratorio donde se realizó la medición tuvo interrupciones en el procedimiento por otros compañeros de trabajo. Además, el recinto donde se realizó no estuvo en oscuridad total durante todo el proceso de medición y puede notarse en que el ajuste tuvo más variabilidad que las mediciones anteriores.

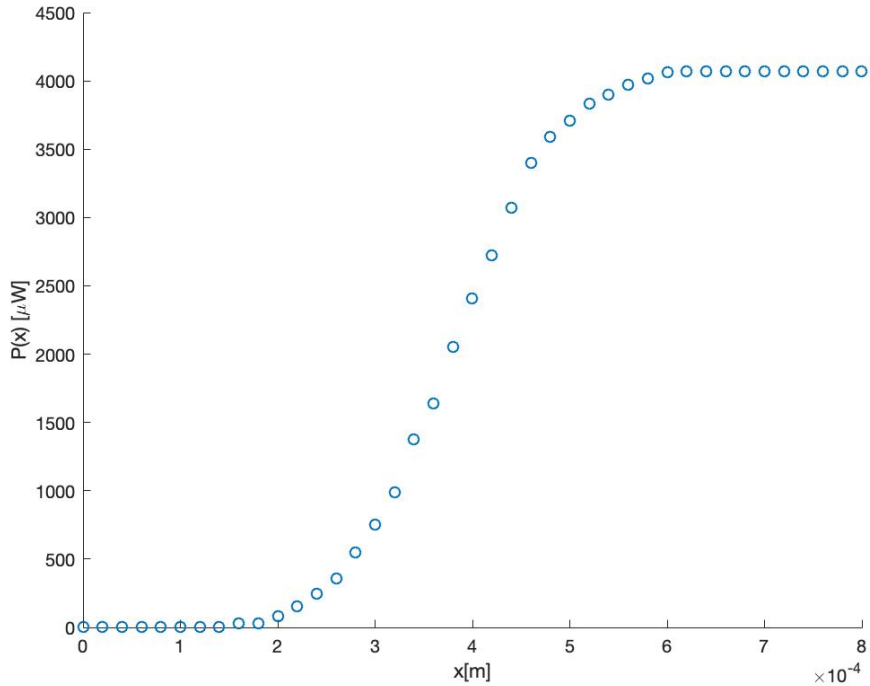


Figura 33. Perfil de potencias, tercera medición

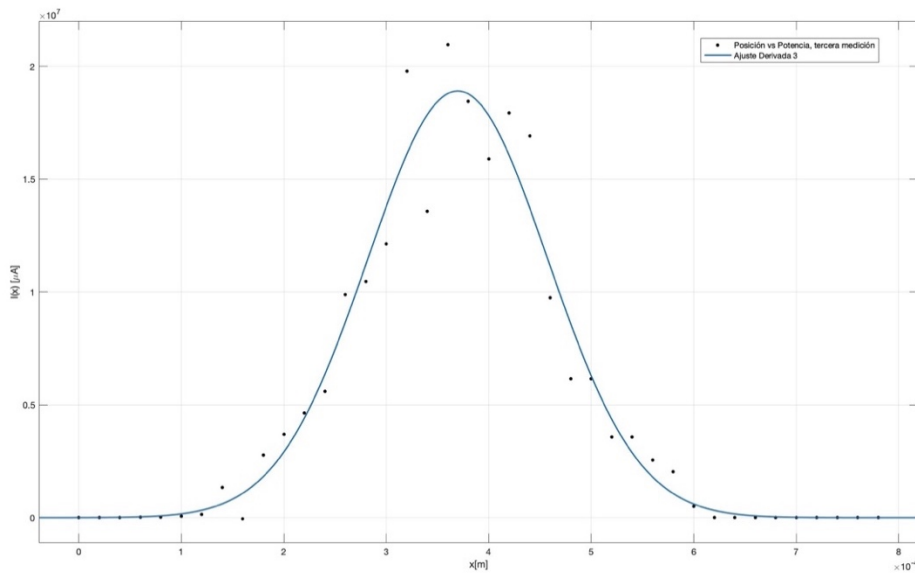


Figura 34. Ajuste de la derivada, tercera medición

Una vez más, el ajuste que se realizó fue gaussiano con la siguiente expresión:

$$f(x) = a_1 e^{-\left(\frac{x-b_1}{c_1}\right)^2} \quad (7)$$

con $a_1 = 1.891 \times 10^7$, $b_1 = 0.0003697$, y $c_1 = 0.0001241$. Con un coeficiente de determinación de $R^2 = 0.9583$. El ajuste resultó de muy buena calidad, al igual que el anterior, por lo que se tomaron estas dos mediciones para determinar el valor de la sigma, pero de igual modo se presenta la última medición.

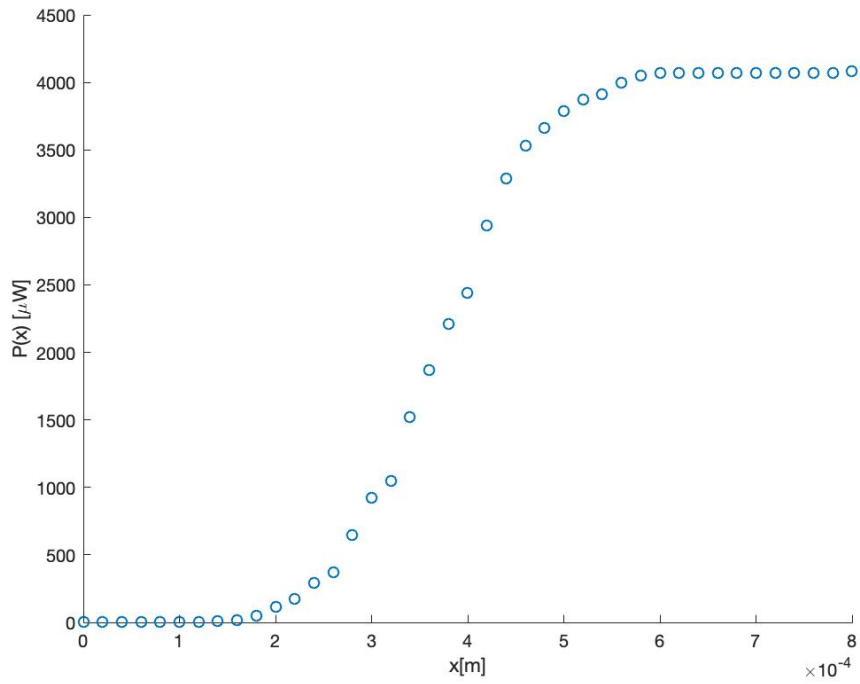


Figura 35. Perfil de potencias, cuarta medición

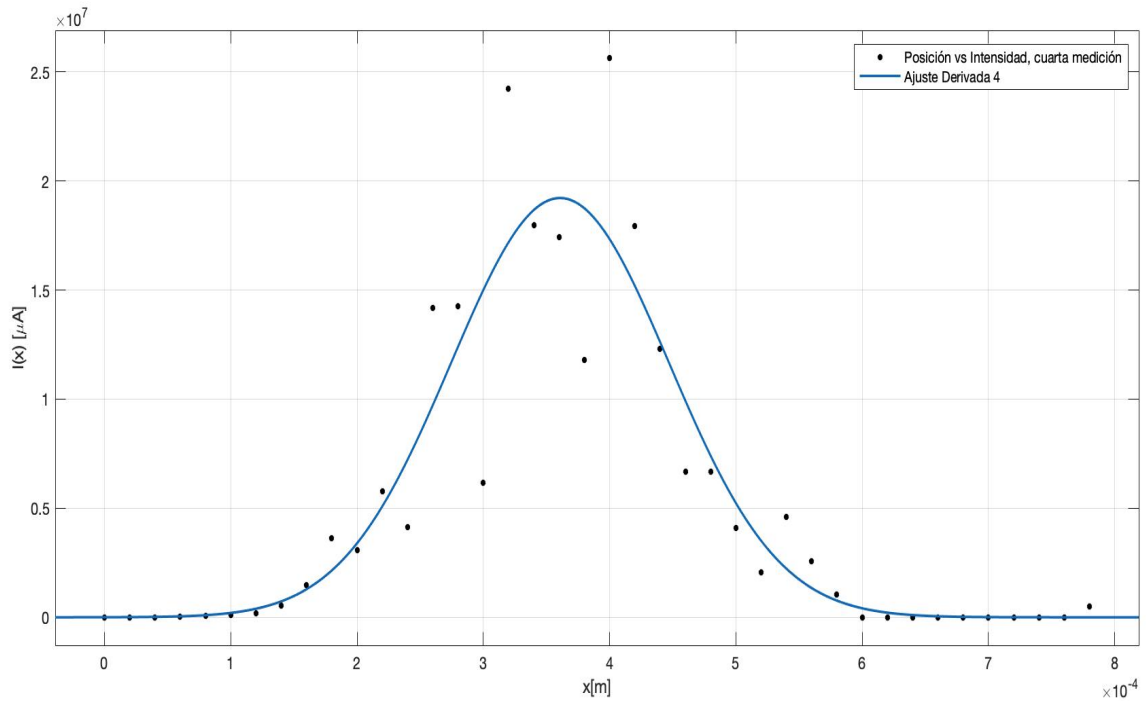


Figura 36. Ajuste de la derivada, cuarta medición

Y los resultados de esta medición fueron:

$$f(x) = a_1 e^{-\left(\frac{x-b_1}{c_1}\right)^2} \quad (8)$$

con $a_1 = 1.922 \times 10^7$, $b_1 = 0.0003608$, y $c_1 = 0.0001221$. Con un coeficiente de determinación de $R^2 = 0.8463$.

Como se mencionó, la medición no se realizó bajo las condiciones óptimas, y se afectó la calidad del ajuste de la derivada, no tanto así el perfil mismo de intensidad.

A continuación, se presentan los perfiles de potencia de las cuatro mediciones en una sola gráfica. También se muestra la gráfica con los cuatro ajustes.

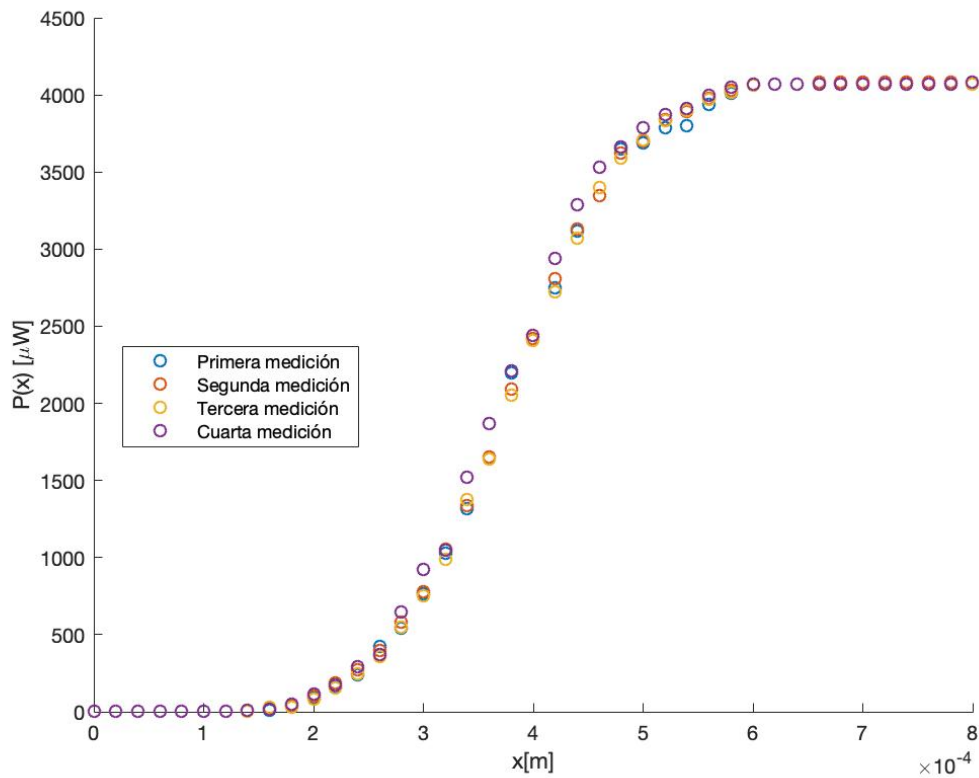


Figura 37. Perfil de potencia de todas las mediciones

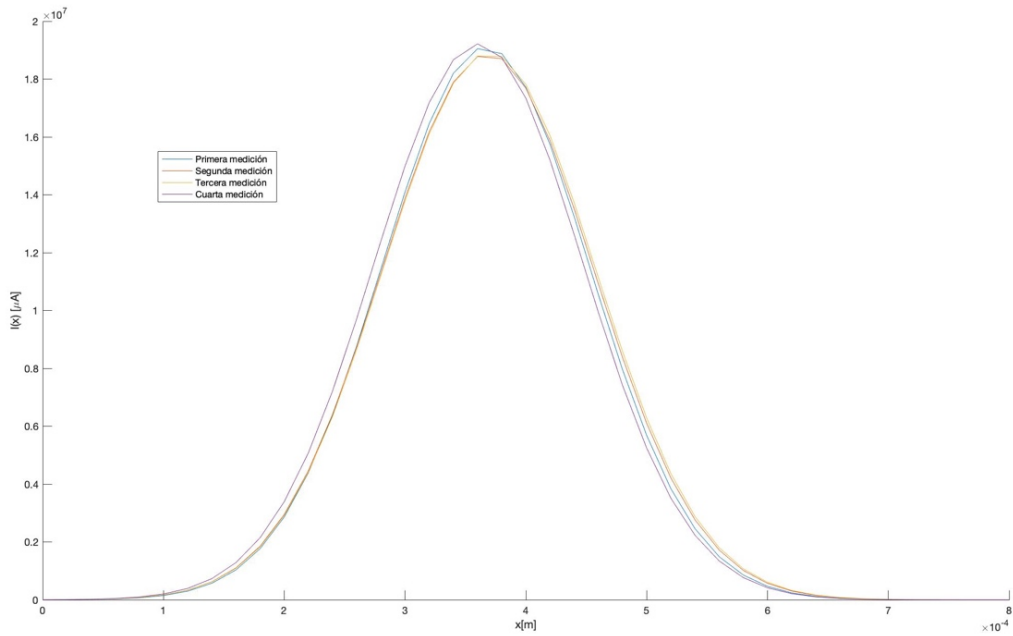


Figura 38. Perfil de intensidad de todas las mediciones

Con estos resultados es posible determinar un valor muy preciso para la sigma del láser, y de igual manera podría determinarse el centro de este, aunque para el modelo no es tan importante.

Medición	Sigma [m]
1	0.000121
2	0.0001237
3	0.0001241
4	0.0001221
Promedio	0.0001227
Desv. Estd.	0.00000144
Error porcentual	1.17210008

Tabla 1. Sigma de las mediciones y sigma reportada

De acuerdo con los resultados obtenidos, puede entonces suponerse que el valor de la sigma es de $0.0001227\text{m} \pm 0.00000144\text{m}$. O expresado en micras $\sigma = 122.7 \mu\text{m} \pm 1.440 \mu\text{m}$.

Generación de ondas superficiales

La superficie para pruebas de vibración superficial que se propuso correspondió a la del agua en un recipiente rectangular lleno hasta un nivel definido. De este modo, las ondas que se analizarán son las ondas que se presenten en la superficie y que interactúen con el láser incidente.

La intención de generar ondas superficiales en el agua es determinar si el arreglo experimental de medición es capaz de detectar las ondas superficiales.

Si el arreglo experimental que se planteó es capaz de detectar las ondas, en el osciloscopio se deberá de obtener una señal con la misma frecuencia con la que se está excitando el sistema. A continuación, se listarán todos los componentes del arreglo experimental, su funcionamiento y la disposición que tuvieron dentro del arreglo experimental.

La excitación de las ondas se produjo mediante un arreglo de un pistón conectado a un altavoz piezoeléctrico como se muestra en la figura 39. El pistón se puso en contacto con la superficie del agua y éste produjo las vibraciones en la superficie del agua. Se tuvo que recurrir al pistón, ya que en un principio se planteó inducir vibraciones por ondas acústicas, pero nunca fue posible observar alguna señal en el osciloscopio sin que el altavoz estuviera en contacto directo con la superficie. Al estar en contacto el pistón con la superficie, las ondas son generadas mecánicamente por éste y es por eso que las ondas deberían de tener la misma frecuencia que la excitación.

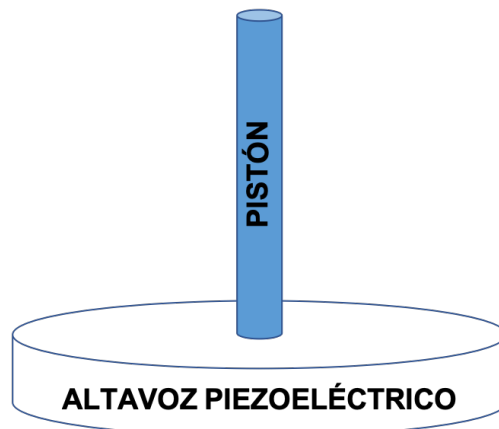


Figura 39. Excitador de ondas superficiales

Mediante este método de excitación, es posible que se presentaran ondas internas dentro del cuerpo de agua, sin embargo, el efecto que estas tienen sobre la señal observada en el osciloscopio se desprecia porque se implementó una pared absorbente dentro del tanque de agua para que, al llegar la luz, no se reflejara. Las reflexiones internas harían que el haz, después de reflejarse con el fondo del tanque se reflejaran con un comportamiento distinto que la luz reflejada en la superficie, y esta podría afectar la señal obtenida, pero al eliminar este reflejo, pueden despreciarse el efecto de ondas internas.

Las dimensiones del recipiente contenedor del agua son: 25 cm de largo, por 2.2 cm de ancho y 2.7 cm de alto. El nivel de agua se definió constante para cada medición como de 1.5 cm de la base. El volumen del agua en cada medición fue de 82.5 ml. El excitador se colocó con el pistón sumergido de dos a tres milímetros dentro del agua para producir la vibración.

Como puede observarse en la figura 40, el arreglo sigue el propuesto en la figura 1, en donde se tiene una fuente de luz (el láser), una superficie con vibración (el recipiente con agua), la superficie de amortiguamiento (arreglo mesa-hule espuma), un divisor de haz y un detector. Para poder detectar la señal se utilizaron: un amplificador de bajo ruido (Stanford Research Systems. Model SR560. Low-Noise Amplifier), y un osciloscopio (Tektronix. TDS2002B. Two Channel Digital Storage Oscilloscope). Y para la excitación de las ondas se conectó el altavoz piezoeléctrico a un generador de ondas (Stanford Research Systems. Model DS345. 30MHz Synthesized Function Generator).

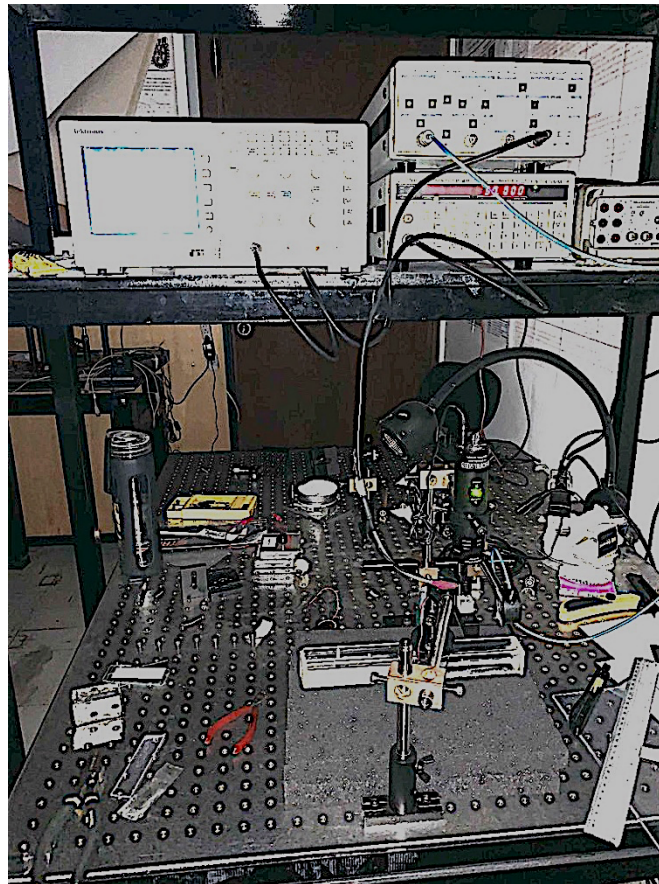


Figura 40. Arreglo experimental de ondas superficiales en agua

Con estos elementos en el arreglo experimental se trató de observar la respuesta del sistema de medición ante una excitación en la superficie. Si el sistema de medición representara la respuesta del haz del láser después de reflejarse sobre la superficie, en el

osciloscopio debería de observarse una señal con la misma frecuencia con la que se están generando las ondas superficiales.

Una vez teniendo el arreglo montado, se procedió a realizar mediciones de la superficie sin vibración y con vibración inducida por el altavoz para diferentes valores de frecuencia y voltaje suministrado por el generador de funciones.

CAPÍTULO 3. ONDAS SUPERFICIALES EN AGUA

Teoría de ondas superficiales en agua

Para poder definir el tipo de ondas que se presenta en la generación de ondas superficiales en el agua se investigará la velocidad de propagación de las ondas y su relación con la longitud de onda. La velocidad de propagación de la onda superficial detectada dependerá de la naturaleza de esta y a su vez de las condiciones que presenta el contenedor de la masa de agua.

Como se explicará a continuación, se realizará el cálculo de la velocidad de los diferentes tipos de onda de acuerdo con la relación que presenta la longitud de onda y la profundidad del contenedor.

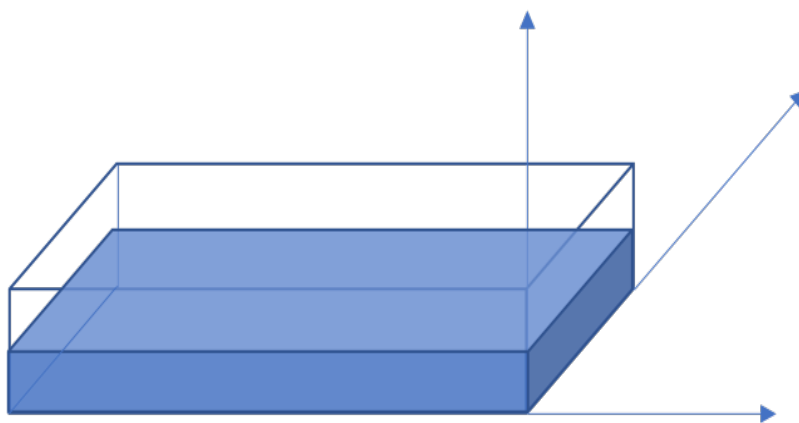


Figura 41. Contenedor del agua

Las ondas que pueden producirse dentro de un cuerpo de agua como con el que se está trabajando son: ondas de periodo largo, ondas gravitacionales y ondas capilares. Todas estas son ondas sobre cuerpos de agua y tienen asociadas diferentes fuerzas restauradoras, es decir, las que generan el movimiento oscilatorio. Para las ondas de periodo largo, la fuerza restauradora es la fuerza de Coriolis. Para las ondas gravitacionales es la fuerza de gravedad. Para las ondas capilares es la tensión superficial. Existe un caso en el que intervienen tanto la tensión superficial como la fuerza de gravedad y este tipo de onda se llama ondas de gravedad-capilares.

Las ondas que generan un reflejo del haz y que a su vez generarán una señal en el osciloscopio son las ondas superficiales gravitacionales. Este tipo de ondas se generan cuando una fluctuación genera una elevación del agua sobre el nivel de la superficie en equilibrio, entonces, la gravedad hace efecto sobre la masa del agua y se produce entonces un efecto oscilatorio alrededor del nivel de la superficie en equilibrio. También pueden existir ondas gravitacionales internas, es decir, dentro del cuerpo de agua, sin embargo, éstas nos generarían una deflexión en el haz reflejado en la superficie.

Ondas gravitacionales en agua

En el fenómeno de ondas gravitacionales, se toma en cuenta la aceleración vertical que produce la fuerza de gravedad. Mediante el estudio de las propiedades del fluido y las condiciones de frontera, será posible determinar la velocidad con las que estas ondas viajan. También se encontrará la expresión para ondas en estas condiciones y se clasificarán los casos particulares.

Para simplificar el análisis, y sin pérdida de generalidad, se piensa el desplazamiento en dos dimensiones, (x) representa el desplazamiento horizontal, y (y) el desplazamiento vertical. El desplazamiento de la masa se supone generada desde el reposo. El flujo del agua tiene que ser incompresible, condición que está representada por la ecuación 1.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Para el caso particular que se está planteando, el potencial de velocidad tiene que cumplir la condición de que la frontera sea fija. La ecuación 2 representa esta condición en la normal de la superficie η . Cabe mencionar que η en general no tiene un valor constante. La elevación y depresión de la superficie hará que η varíe alrededor de la condición de equilibrio.

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0 \quad (2)$$

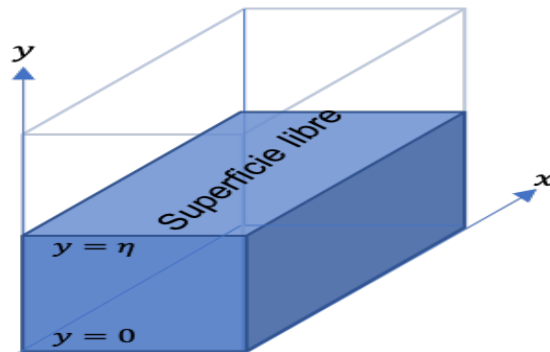


Figura 42. Condiciones del contenedor

Por otro lado, en la superficie libre, tiene que cumplirse la condición $P = \cos nt$. Del análisis dinámico de fluidos, aplicado para las condiciones de frontera y del fluido, en términos de la presión p , la densidad ρ , la gravedad g y un componente de fuerza externo $\bar{F}(t)$, la ecuación de movimiento se escribe, como:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \phi}{\partial t} - gy + \bar{F}(t) \quad (3)$$

Mediante simplificaciones en las condiciones de frontera, sin entrar en el desarrollo que se da maneja de manera completa en la referencia¹. La ecuación de movimiento queda como:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

En el caso de una oscilación armónica, con el factor temporal $e^{i(\omega t + \theta)}$, esta ecuación se convierte en

$$\omega^2 \phi = g \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (5)$$

Por último, se aplica la condición de que la profundidad del contenedor tenga un valor constante h . Asumiendo la velocidad potencial ϕ como una función armónica simple dependiente de x . La expresión que corresponde a esta suposición es:

$$\phi = P \cos kx e^{i(\omega t + \theta)} \quad (6)$$

Entonces, la ecuación 4 se escribe como:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - k^2 P = 0 \quad (7)$$

Por las condiciones del contenedor, que son $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$ cuando $y = -h$, la solución de este sistema es:

$$\phi = C \cosh k(y + h) \cos kx (e^{i(\omega t + \theta)}) \quad (8)$$

Entonces, la frecuencia que es solución del sistema planteado en la ecuación 7 es:

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad (9)$$

Recordando la relación que tienen la frecuencia, el número de onda y la velocidad de propagación de las ondas puede obtenerse una expresión analítica para esta última. Entonces:

$$c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{gk \tanh kh}{k^2} = \frac{g \tanh kh}{k} \quad (10)$$

Entonces, la velocidad en términos de la longitud de onda es:

$$c = \left(\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

¹ Lamb, Horace. "Hydrodynamics". Cambridge University Press. Trinity College, Cambridge. 1916.

En el caso general, la velocidad es función de la longitud de onda. Para un valor dado de la profundidad del contenedor, la función c queda completamente definida como función de la longitud de onda. Cuando $h = 0.015m$, la gráfica de la velocidad queda representada en la figura 43.

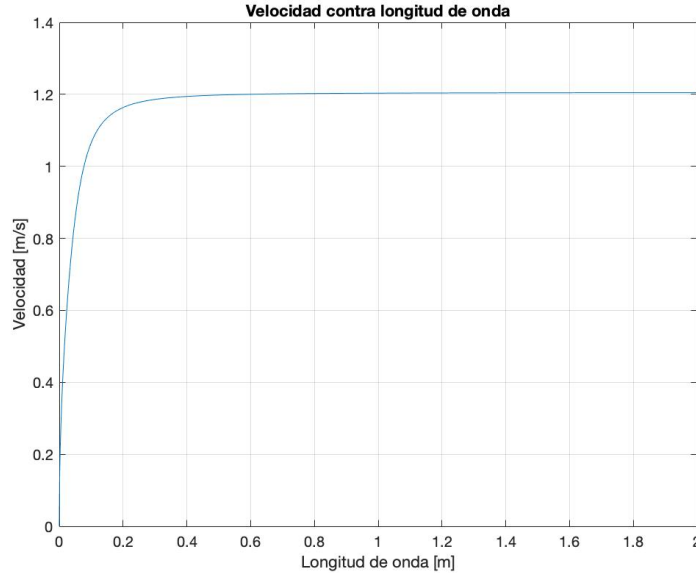


Figura 43. Velocidad como función de la longitud de onda

Como puede observarse en la figura 43, a partir de 0.4 m, la velocidad permanece prácticamente constante con un valor de 1.2 m/s. Es por esta razón que puede pensarse que, para valores superiores a este, la velocidad dejará de ser función de la longitud de onda. Este comportamiento quedará definido únicamente por la relación entre la longitud de onda y la profundidad del contenedor.

El parámetro kh es el determinante para la clasificación de la velocidad con la que se propagarán estas ondas. Por la relación entre el número de onda y la longitud de la misma, $\lambda = 2\pi/k$, esta relación también puede escribirse como h/λ .

Entonces, podrán definirse tres zonas diferentes con velocidades de propagación diferentes. La primera de ellas corresponde a la expresión general de la velocidad, ecuación número 11.

Cuando la longitud de onda es menor que el doble de la profundidad h . Se tiene que $\tanh kh = 1$. Y entonces, la velocidad de propagación es aproximadamente:

$$c = \left(\frac{g\lambda}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{g}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

Cuando la longitud de onda es relativamente grande comparada con la distancia h , o escrita como un parámetro adimensional cuando $kh \ll 1$, se tiene que $\tanh kh = kh$. Entonces la velocidad de propagación puede aproximarse como:

$$c = (gh)^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

Es importante notar que la velocidad de onda en este caso es independiente de la longitud de onda de la vibración. Las ondas viajarán siempre a la misma velocidad. Debido a este resultado, la variación en la longitud de onda o frecuencia no influyen en la velocidad de la onda.

Entonces, la clasificación de las velocidades de propagación depende de estos valores extremos, y cada uno de estos casos tienen nombres y se presentan en la siguiente tabla.

Nombre de clasificación	Aguas profundas	Aguas intermedias	Aguas someras
Velocidad de propagación	$c = \left(\frac{g\lambda}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$	$c = \left(\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}$	$c = (gh)^{\frac{1}{2}}$

Tabla 2. Clasificación de velocidad de ondas

Para el caso que desea estudiarse, se supone que la longitud de onda en la superficie del agua sea mayor que la profundidad del agua. Por lo que se tratarán como ondas someras, entonces, la velocidad de propagación de estas ondas estará dada por $c = (gh)^{\frac{1}{2}}$.

En las condiciones en las que se realizó el experimento, el valor de la velocidad depende exclusivamente de la profundidad, entonces:

$$c = (gh)^{\frac{1}{2}} = \left((9.81 \frac{m}{s^2})(0.015m)\right)^{\frac{1}{2}} = 0.3836 \frac{m}{s} \quad (14)$$

La velocidad de propagación de éstas ondas es de 38.36 centímetros por segundo. Puede hacerse la suposición de que la frecuencia que se obtiene en ausencia de vibración corresponde a la respuesta de la primera frecuencia de resonancia del contenedor para poder realizar un análisis sobre modos normales de vibración. La longitud de onda asociada con esta frecuencia para la velocidad de onda que se supuso en un principio sería dos veces la longitud del contenedor mismo. Entonces: $\lambda = 0.5m$, $c = 0.3836 \frac{m}{s}$. De modo que la frecuencia asociada con esta vibración es:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{0.3836 \frac{m}{s}}{0.5m} = 0.7672 \text{ Hz} \quad (15)$$

La frecuencia asociada con la primera frecuencia de resonancia del contenedor corresponde a una frecuencia de 0.7672 Hz.

Este análisis es bidimensional, ya que el tanque tiene vibraciones superficiales a lo largo y a lo ancho de este. Se tomó la longitud de onda como el doble del largo del tanque que era de 25 cm porque si se tomara el ancho como longitud de onda, la frecuencia variaría mucho. Las condiciones de frontera del contenedor son que las paredes son inmóviles, por lo que al llegar la onda superficial a esta, debería reflejarse de manera especular.

A continuación, se inició la detección de ondas superficiales en el agua y se compararon los resultados encontrados experimentalmente con los desarrollados en esta sección.

DetECCIÓN DE ONDAS SUPERFICIALES EN AGUA

El primer objetivo era encontrar una señal medible en el osciloscopio que tuviera relación con la vibración inducida por el altavoz. Este objetivo se cumplió y además se encontraron valores de frecuencia para los cuáles se presentó un fenómeno de resonancia.

Las frecuencias de resonancia se determinaron observando la señal medida en el osciloscopio al realizar un barrido en un intervalo de frecuencias. Cuando la señal medida en el osciloscopio presentaba un valor de voltaje pico-pico máximo para una frecuencia en el intervalo analizado, se determinaba que esa frecuencia era una frecuencia de resonancia.

Se mostrarán a continuación las mediciones realizadas en las frecuencias de resonancias y en donde se varió el voltaje de excitación hasta un voltaje cero que implicaba la ausencia de vibración externa. Las frecuencias en las que se realizaron estas mediciones fueron 93 Hz, 180 Hz, 235 Hz y 397 Hz.

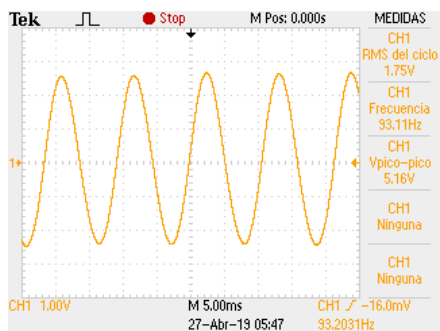


Figura 44. Vibración a 93 Hz con un voltaje de 10 V RMS en el altavoz

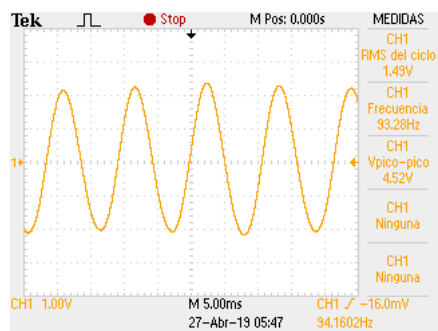


Figura 45. Vibración a 93 Hz con un voltaje de 9 V RMS en el altavoz

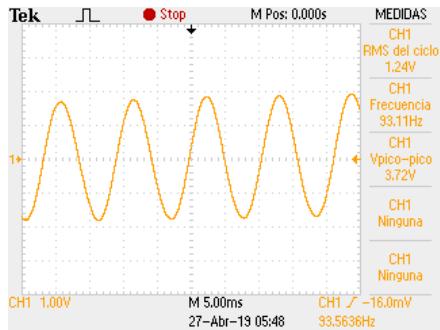


Figura 46. Vibración a 93 Hz con un voltaje de 8 V RMS en el altavoz

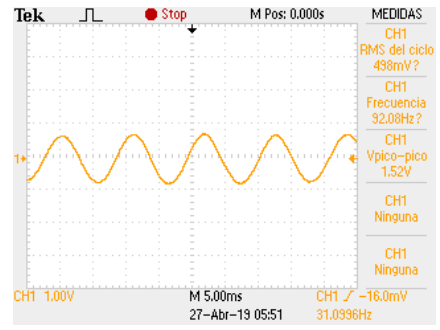


Figura 50. Vibración a 93 Hz con un voltaje de 4 V RMS en el altavoz

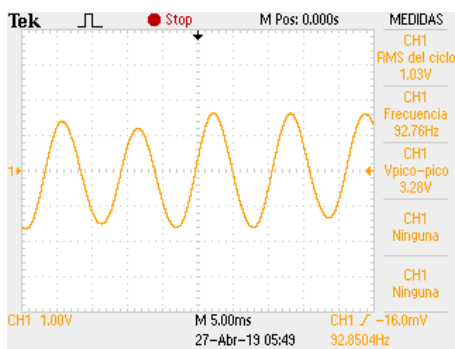


Figura 47. Vibración a 93 Hz con un voltaje de 7 V RMS en el altavoz

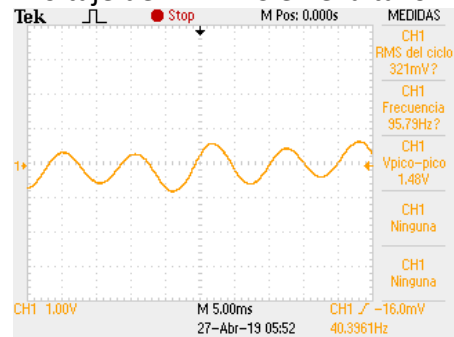


Figura 51. Vibración a 93 Hz con un voltaje de 3 V RMS en el altavoz

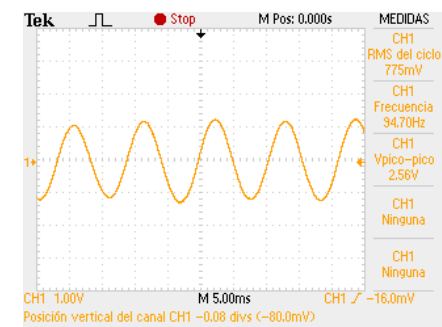


Figura 48. Vibración a 93 Hz con un voltaje de 6 V RMS en el altavoz

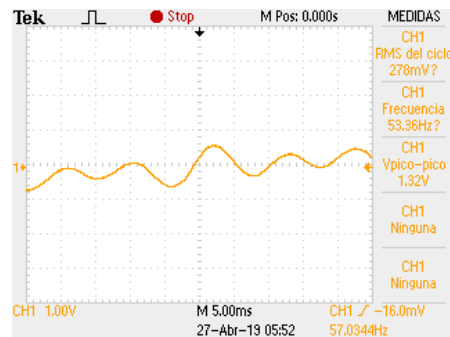


Figura 52. Vibración a 93 Hz con un voltaje de 2 V RMS en el altavoz

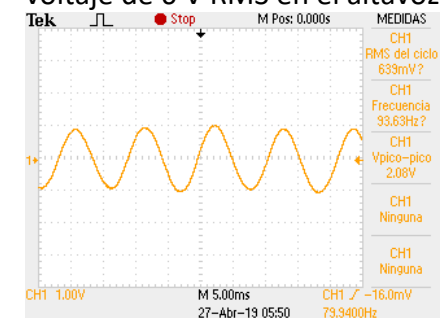


Figura 49. Vibración a 93 Hz con un voltaje de 5 V RMS en el altavoz

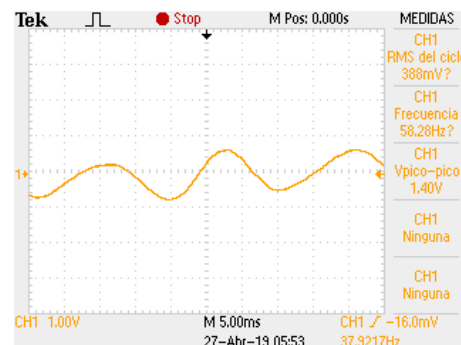


Figura 53. Vibración a 93 Hz con un voltaje de 1 V RMS en el altavoz

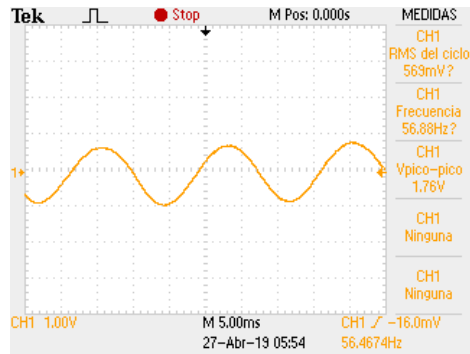


Figura 54. Excitador con un voltaje de 0 V RMS, sin vibración

Para esta primera frecuencia de resonancia se encontraron señales relacionadas con dos vibraciones distintas. La primera de estas señales claramente se relaciona con la vibración producida por el sistema de excitación, ya que tiene la misma frecuencia. La segunda de las señales se obtuvo cuando se dejaba de producir una excitación sobre el sistema, por lo que se puede pensar que es una vibración que está presente, aunque no se esté excitando el sistema. Es por esta razón que no pudo determinarse un estado de reposo absoluto, ya que, aunque el sistema no fuera excitado de ninguna manera, era posible observar una señal en el osciloscopio. En teoría, cuando el sistema estuviera en reposo, en el osciloscopio debería observarse una señal constante, con una amplitud de 0 V. Esta dificultad en la experimentación se debe completamente a la vibración que siempre se encuentra presente en la señal.

También puede observarse en la secuencia de imágenes presentada que existe una relación entre los valores de voltaje registrados en el osciloscopio y los suministrados al altavoz. La relación se mostrará en las siguientes gráficas. Estos valores se tomaron para la señal obtenida en 93 Hz.

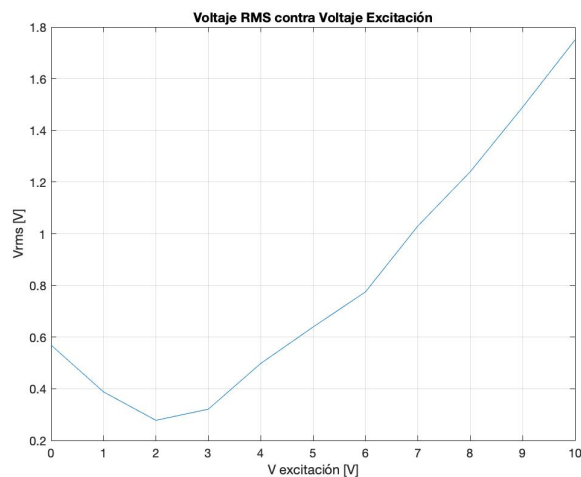


Figura 55. Respuesta RMS contra voltaje de excitación

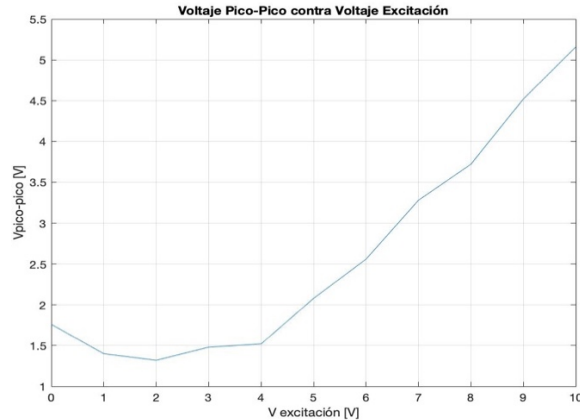


Figura 56. Respuesta V pico-pico contra voltaje de excitación

Al analizar el comportamiento de la respuesta ante variaciones en diferentes frecuencias de excitación y realizando el mismo procedimiento de variación en el voltaje de excitación, se encontró un comportamiento particular. Existe una relación casi lineal entre el valor de los voltajes en el detector y el voltaje de excitación a partir de los 4 V. y hasta los 10 V. en el voltaje de excitación. Para valores más bajos que este, una señal diferente es la que se registra en el detector.

Como se muestra en la siguiente sucesión de imágenes, existe una señal que está presente en el detector, aunque no se esté excitando la superficie de ninguna manera por el sistema pistón-altavoz.

En la secuencia puede observarse como la respuesta primero sí se relaciona con la excitación sobre el sistema cuando en la primera imagen la frecuencia en la señal es igual a la frecuencia de excitación, pero conforme el voltaje de excitación disminuye, otra señal se observa.

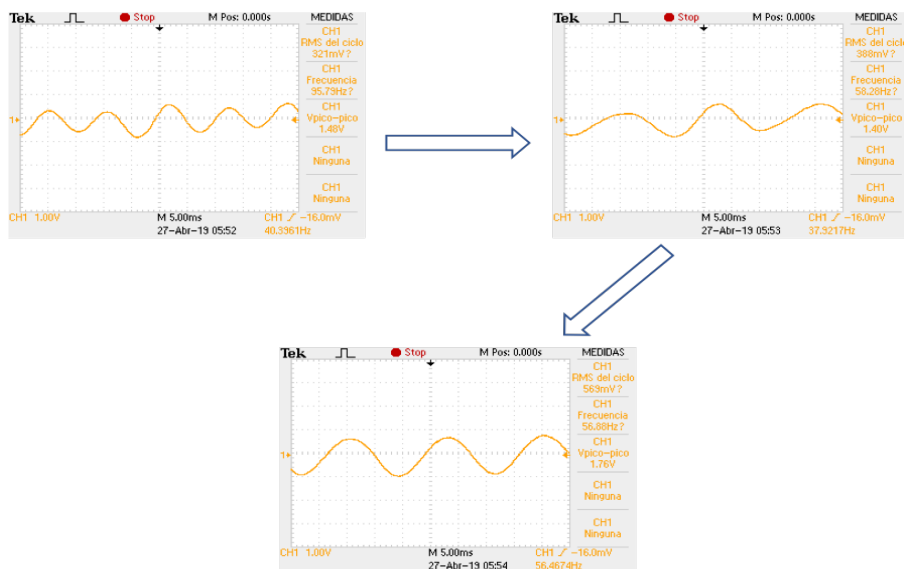


Figura 57. Superposición de una señal en ausencia de vibración

En la secuencia se muestran mediciones con un voltaje de excitación cada vez menor, hasta que en la última medición no se excita la superficie, sin embargo, aparece una señal bien definida con una frecuencia de 56 Hz que no corresponde a los valores de excitación. Después de realizar mediciones para diferentes valores de frecuencia, se encontró que, en ausencia de excitación externa, existe una vibración que no puede eliminarse. Esta señal, para algunas frecuencias, tiene valores de voltaje mayores que los registrados como respuesta del sistema de excitación externa.

Se tiene la hipótesis de que esta vibración que se registra en ausencia de excitación externa corresponde a una frecuencia de resonancia del contenedor. El fenómeno de resonancia se produce cuando un sistema responde a una excitación externa con una frecuencia de oscilación que coincide con una de sus frecuencias naturales de vibración.

Una de las excitaciones externas que pueden estar interviniendo en el proceso de medición es la vibración del edificio que no es completamente aislada mediante la superficie de amortiguamiento del modelo experimental. Si es esta vibración la que está excitando el contenedor, es posible que coincida con alguna frecuencia de resonancia del contenedor mismo.

Se presentarán las mediciones registradas para las frecuencias 180 Hz, 235 Hz y 397 Hz en sus secuencias de variación en el voltaje de excitación. Cada una de las series de imágenes presentan la señal que se obtiene en el detector iniciando con el valor máximo de excitación del altavoz, que es de 10 V_{RMS} hasta 0 V_{RMS}, valor en donde no se excita el sistema.

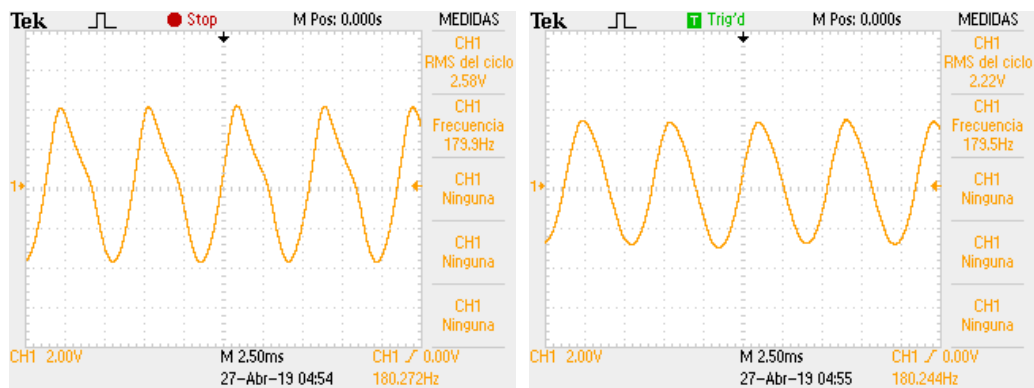


Figura 58. Frecuencia de excitación 180 Hz y voltajes 10V y 9V, respectivamente

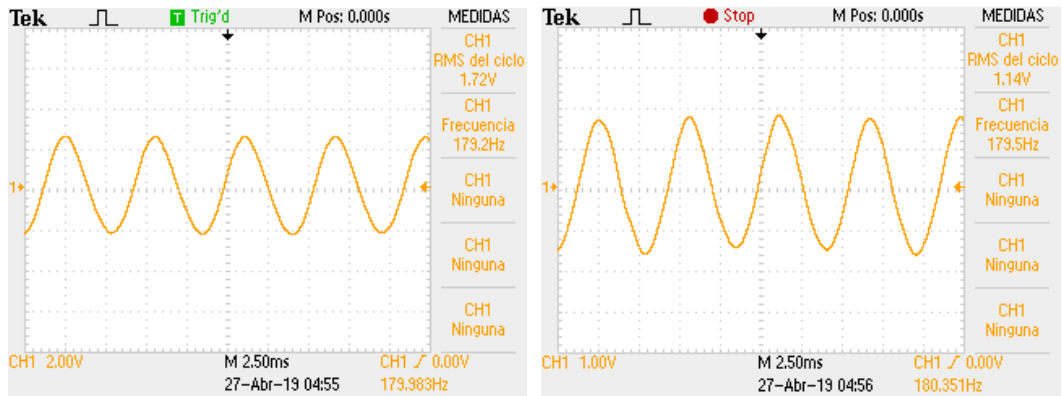


Figura 59. Frecuencia de excitación 180 Hz y voltajes 8V y 7V, respectivamente

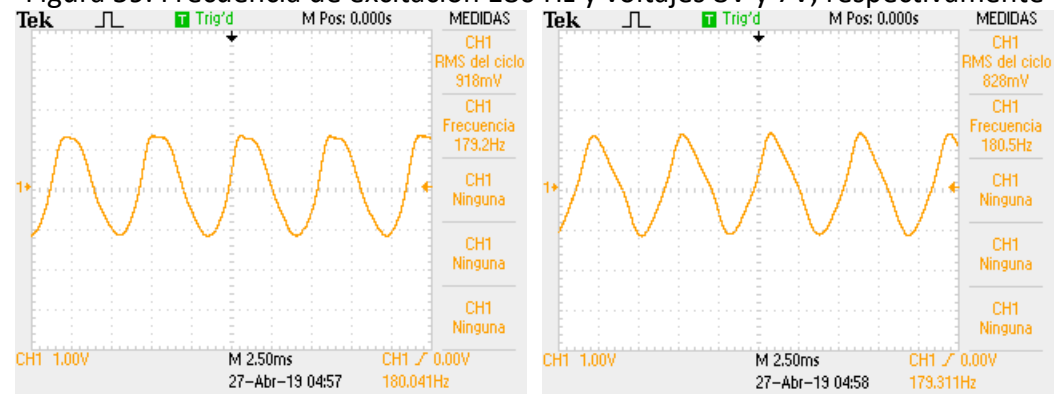


Figura 60. Frecuencia de excitación 180 Hz y voltajes 6V y 5V, respectivamente

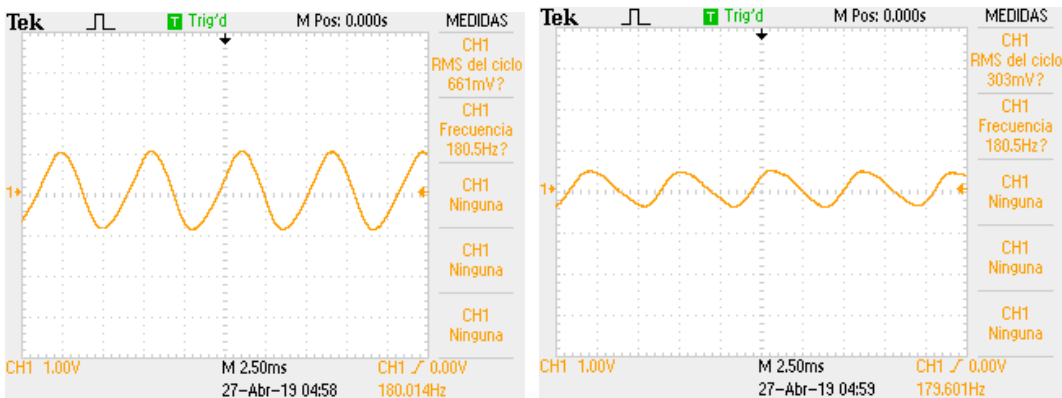


Figura 61. Frecuencia de excitación 180 Hz y voltajes 4V y 3V, respectivamente

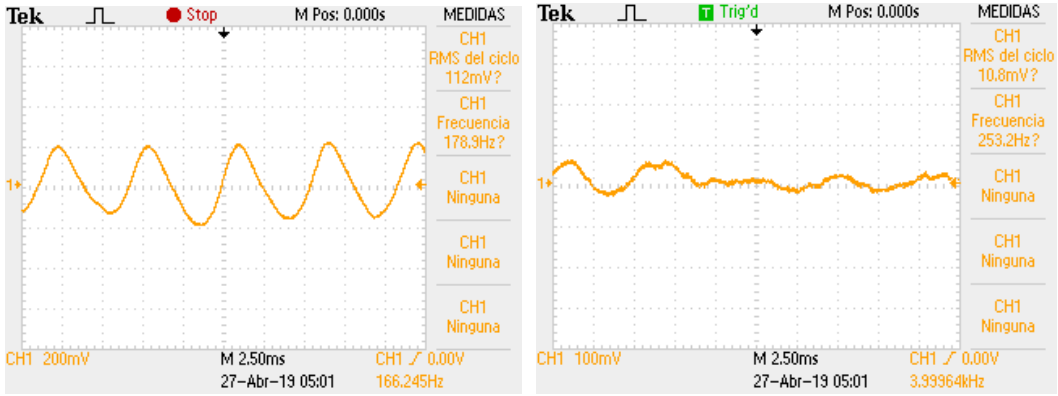


Figura 62. Frecuencia de excitación 180 Hz y voltajes 2V y 1V, respectivamente

Para la frecuencia de excitación de 180 Hz la señal no se logró medir una señal de voltaje de excitación menor que 1V.

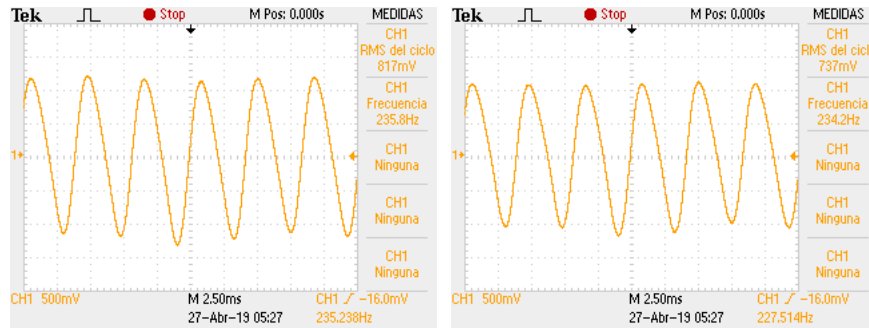


Figura 63. Frecuencia de excitación 235 Hz y voltajes 10V y 9V, respectivamente

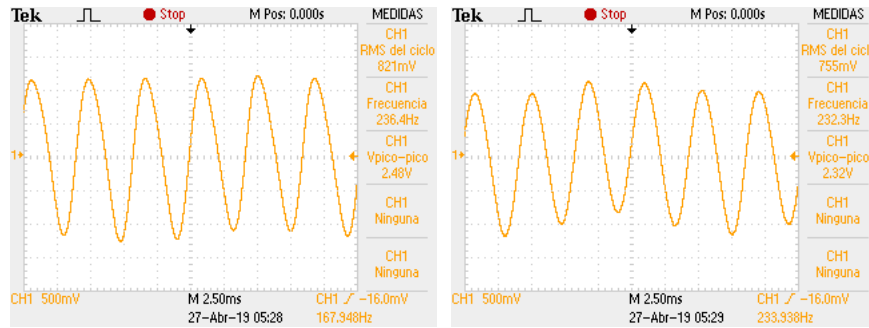


Figura 64. Frecuencia de excitación 235 Hz y voltajes 8V y 7V, respectivamente

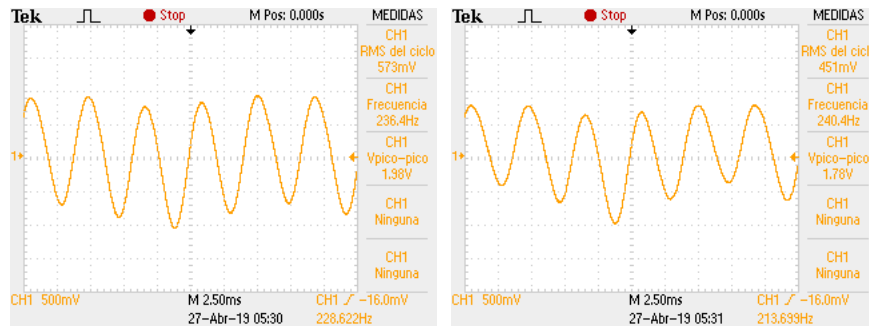


Figura 65. Frecuencia de excitación 235 Hz y voltajes 6V y 5V, respectivamente

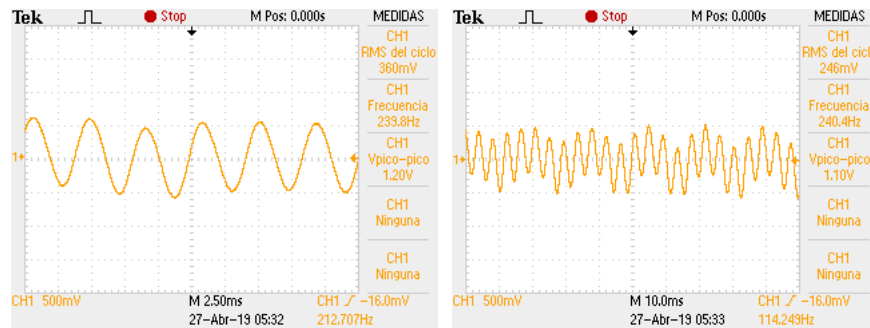


Figura 66. Frecuencia de excitación 235 Hz y voltajes 4V y 3V, respectivamente



Figura 67. Frecuencia de excitación 235 Hz y voltajes 2V y 1V, respectivamente

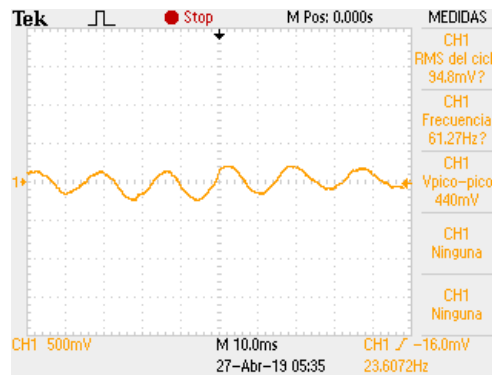


Figura 68. Señal sin excitación

A diferencia de la señal registrada para 180 Hz, en este caso es posible encontrar la señal que se observa en ausencia de vibración externa, la señal es muy variable, pero en general tiene una frecuencia de aproximadamente 60 Hz. Incluso puede notarse como la señal de excitación se encuentra dentro de la señal que se espera en ausencia de vibración y en cuanto la excitación desaparece, la señal de 60 Hz se queda como única señal.

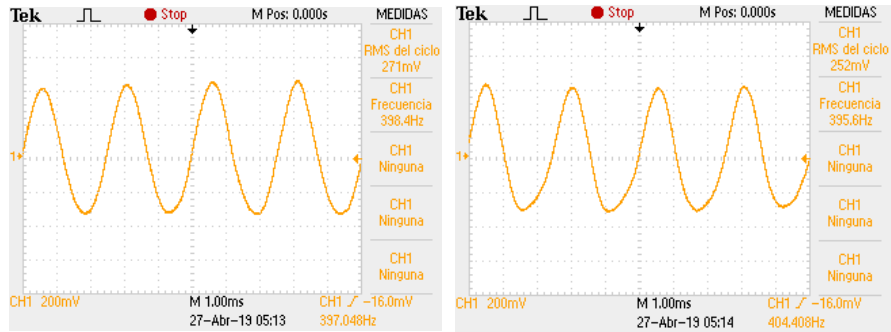


Figura 69. Frecuencia de excitación 397 Hz y voltajes 10V y 9V, respectivamente

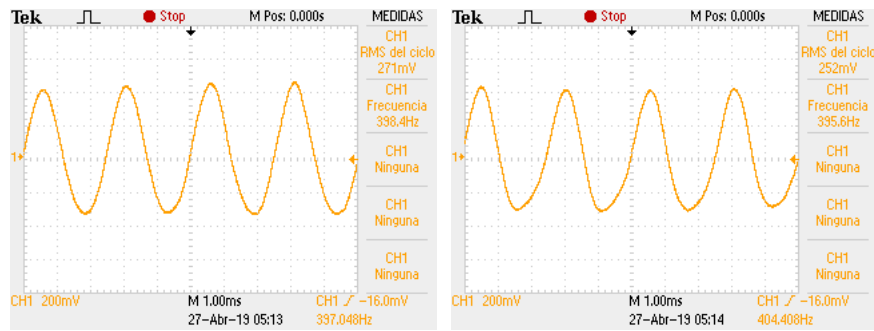


Figura 70. Frecuencia de excitación 397 Hz y voltajes 8V y 7V, respectivamente

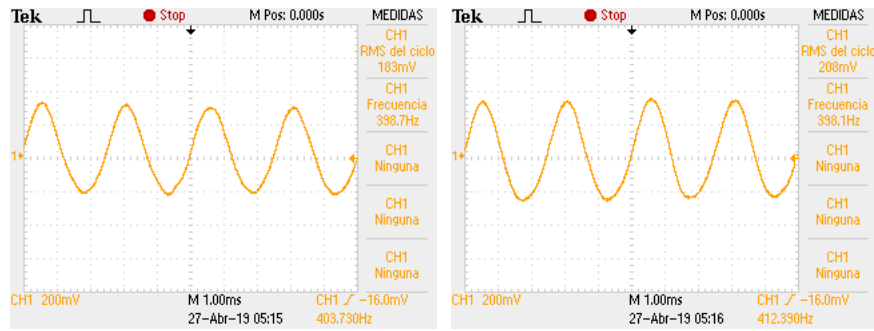


Figura 71. Frecuencia de excitación 397 Hz y voltajes 6V y 5V, respectivamente

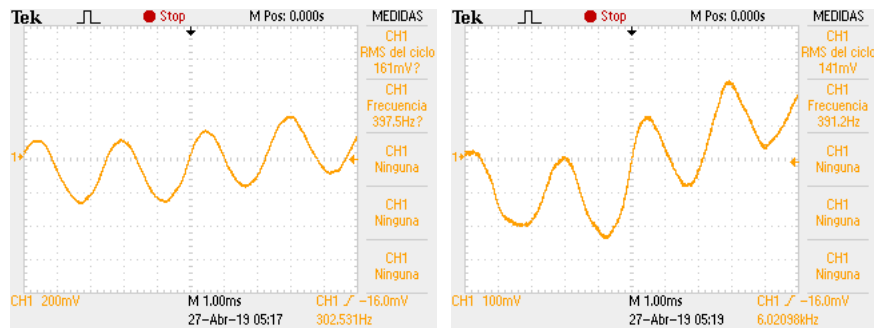


Figura 72. Frecuencia de excitación 397 Hz y voltajes 4V y 3V, respectivamente

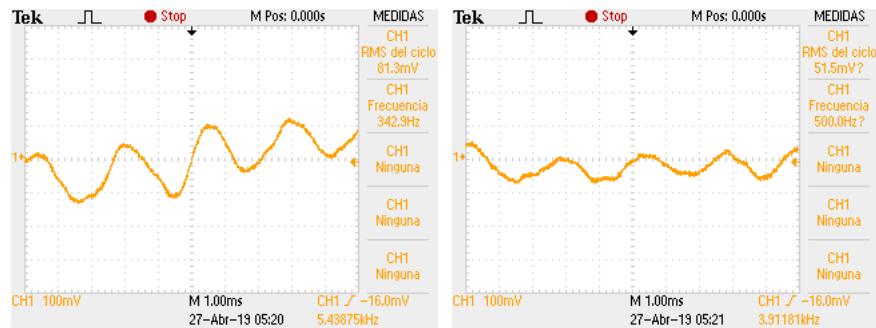


Figura 73. Frecuencia de excitación 397 Hz y voltajes de 2V y 1V, respectivamente

Por último, se nota que la amplitud de la señal y la frecuencia de excitación tienen una relación inversa, entre más alta sea la frecuencia, la amplitud de la señal es menor. También esa parece ser una razón para que al excitar con una mayor frecuencia la señal sea más difícil de detectar por el osciloscopio. El altavoz piezoeléctrico tiene una respuesta en frecuencias superior a los 14 KHz, pero para frecuencias altas, la señal de la respuesta de la superficie del agua en el osciloscopio no se diferencia de la señal en ausencia de vibración.

El sistema de medición es capaz de medir ondas superficiales en el agua, ya sea que estas sean respuesta de una excitación externa controlada (la excitación producida por el pistón) o respuesta de una excitación externa que no puede eliminarse como la que se presenta en ausencia de excitación por parte del pistón. Además, el sistema de medición permite encontrar frecuencias de resonancia, ya que la respuesta medida en el osciloscopio presenta una variación en amplitud de voltaje cuando se varía la frecuencia. Es posible determinar estas frecuencias de resonancia realizando un barrido de frecuencias para encontrar el valor máximo de voltaje en la señal de respuesta.

Una vez cumplido el objetivo de determinar que el sistema de medición registra la interacción que presenta el haz incidente en la superficie con las ondas superficiales se planteó la posibilidad de determinar la amplitud y longitud de onda.

De acuerdo con la teoría desarrollada al inicio de esta sección, la velocidad de propagación de las ondas se supone como la correspondiente a ondas someras.

La frecuencia no corresponde con el valor de la medición de 56 Hz. Para la frecuencia de la señal que se registró sin vibración, la longitud de onda tendría un valor de:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{0.3836 \frac{m}{s}}{56 \frac{1}{s}} = 6.85 \times 10^{-3} m = 0.00685 m = 0.685 cm = 68.5 mm \quad (16)$$

Lo que implica que la señal que se detectó es respuesta de una excitación con una frecuencia de 56 Hz, y corresponde a una longitud de onda de 68.5 mm. Por lo que se está generando dentro del contenedor una onda estacionaria con una longitud de onda de 68.5 mm. Las frecuencias en las que se obtuvo una señal fueron 93 Hz, 180 Hz, 235 Hz y

397Hz. Suponiendo que se trata de ondas someras, corresponden a una longitud de onda que se listará en la siguiente tabla.

Frecuencia [Hz]	Longitud de onda asociada [m]
93	4.1279×10^{-3}
180	2.1311×10^{-3}
235	1.6323×10^{-3}
397	9.6624×10^{-4}

Tabla 3. Longitudes de onda medidas

La suposición sobre la que se obtuvieron estos datos era que la relación entre longitud de onda y profundidad del contenedor correspondía al comportamiento de aguas someras. El valor de la velocidad que corresponde al comportamiento de aguas someras para la configuración del experimento es de aproximadamente 1.204 m/s.

El valor que se calculó con la suposición de que se trataban de aguas someras fue de $c = 0.3836 \frac{m}{s}$. Este valor que no es igual, ni cercano al valor calculado teóricamente. Sin embargo, se trabajó con este valor ya que para poder calcular la velocidad en el caso particular en el que la clasificación no fuera de aguas someras se tendría que conocer a priori el valor de la longitud de onda. O cuando menos para las expresiones de la tabla 2 para ondas gravitacionales en donde, con excepción de las aguas someras, la expresión para la velocidad de propagación de las ondas depende de la longitud de onda.

El no conocer a priori el valor de longitud de onda de las ondas superficiales complica el análisis que se tiene que realizar. Sin conocer el valor de la longitud de onda es imposible determinar el valor de la velocidad de propagación.

Para tratar de solucionar esta dificultad se planteó realizar la medición de la intensidad de la respuesta del sistema a una excitación con valores de voltaje y frecuencia de excitación fijos, generando de esta manera ondas superficiales estacionarias. Una vez generadas las ondas estacionarias se pretendió realizar un barrido sobre la superficie para determinar la posición de máximos y mínimos y con esos valores poder determinar la longitud de onda de la onda superficial directamente.

El sistema se modificó nuevamente para que todo el montaje de medición (laser, divisor de haz y detector) fuera móvil y graduado.

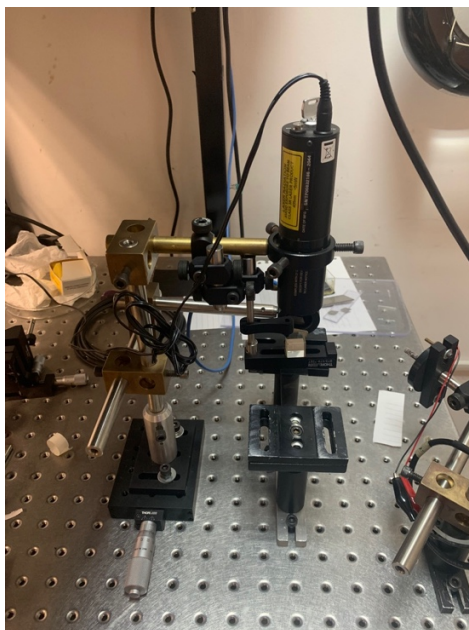


Figura 74. Montaje móvil de detección

En la figura 74 se muestran los componentes montados sobre una platina que cuenta con un micrómetro para realizar desplazamientos laterales.

Como se muestra en la figura 75, para un valor determinado de frecuencia se genera una onda estacionaria debido a las condiciones de reflexión en la frontera. En esta figura, se muestra una onda que viaja hacia la derecha superponiéndose con la que viaja hacia la izquierda después del reflejo en la pared del contenedor. En la figura 75 se muestra la superposición de ondas viajeras.

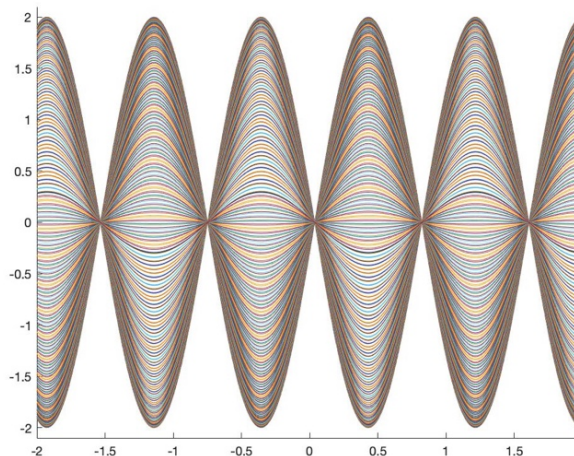


Figura 75. Superposición de ondas. Ondas estacionarias

Estas ondas estacionarias sólo variarán en la posición en las que se encuentran sus nodos y antinodos. La distancia entre dos nodos consecutivos de una onda estacionaria corresponderá a la mitad de la longitud de onda de la excitación.

Con base en este principio, sería posible determinar de manera experimental la longitud de onda, aún sin determinar la velocidad de propagación de la onda. Las ondas inducidas mediante la excitación producen una onda estacionaria que se verá aproximadamente como la que se muestra en la figura 75. Según el modelo que se planteó, en los antinodos de la onda estacionaria el reflejo de la luz no presentará el fenómeno de traslación en su reflejo, sino que sólo se enfocará o dispersará la luz. En los nodos se tendrá el fenómeno opuesto, en donde el haz presentará una traslación en su reflejo. Aunque el haz también se disperse o enfoque, el efecto predominante será el de la traslación. El nuevo montaje se muestra en la figura 76.

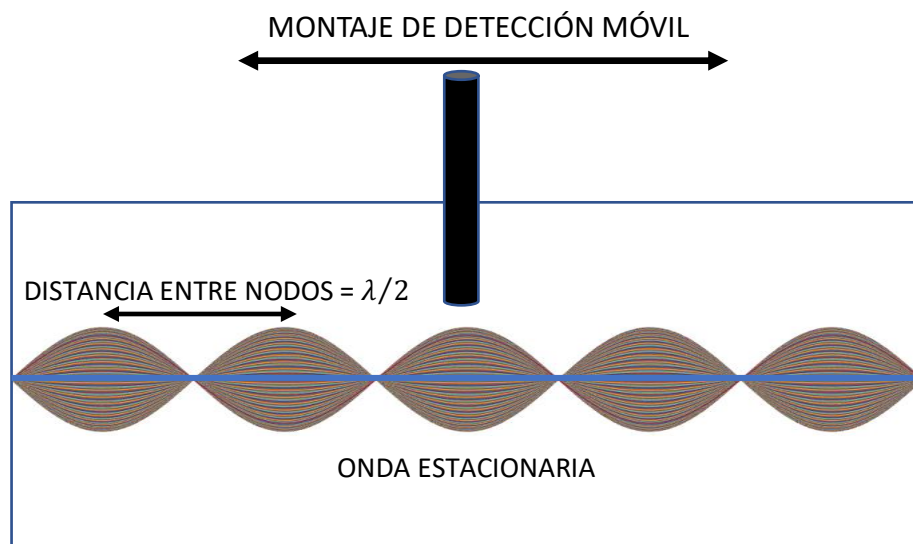


Figura 76. Montaje de medición de longitud de onda

En la medición experimental se trató de encontrar estos puntos para las frecuencias de excitación que ya se habían medido anteriormente.

El procedimiento resultó demasiado difícil de aplicar ya que la superficie del agua tiene una sensibilidad muy alta. Ante cualquier perturbación, la señal registrada en el osciloscopio tenía un comportamiento completamente caótico.

Al mover el montaje de detección, la señal que se detectaba en el osciloscopio correspondía a una frecuencia diferente y oscilaba entre valores que no eran los de excitación. Por esta razón no se pudo encontrar un valor máximo y uno mínimo.

Cuando se llegó a este punto en la experimentación, se tomó en consideración medir otro tipo de ondas. Las ondas superficiales en el agua presentan complicaciones experimentales que no permitieron obtener una relación clara entre la señal que se estaba obteniendo y los valores de longitud de onda, velocidad y amplitud de las ondas. La sensibilidad del cuerpo de masa de agua responde ante cualquier excitación, por lo que en general podría

presentar una ventaja si se empleara como un indicador de presencia de vibraciones externas. Sin embargo, para poder probar el modelo matemático que se planteó, esta sensibilidad tan grande presentó muchos obstáculos para la determinación de los valores de velocidad y frecuencia.

La señal que se registró en el osciloscopio es la respuesta del sistema al excitador de ondas superficiales. Esto puede comprobarse porque la frecuencia de la señal que se registró corresponde con la frecuencia de excitación. También es claro que existe una relación entre la amplitud de excitación y la amplitud de la señal registrada en el osciloscopio.

El objetivo de la determinación de la longitud y amplitud de onda resultó en diferentes complicaciones que no se pudieron superar aunque se realizaron diferentes ajustes al modelo. Por esta razón, se tomó la decisión de optar por realizar la comprobación del modelo en otro tipo de ondas.

Sin embargo, la frecuencia de onda sí fue determinada en cada una de las mediciones. La señal que se observaba en el osciloscopio correspondía a la frecuencia de excitación, por lo que si se tuviera una vibración y se deseara determinar su frecuencia, el método resulta efectivo.

Se analizaron diferentes materiales y configuraciones del mismo para generación de ondas superficiales. Se necesita que el material que presenta una deformación en su superficie sea reflejante para observar el comportamiento del haz de luz reflejado.

CAPÍTULO 4. ONDAS EN PLACAS

Teoría de ondas en placas

Después de investigar diferentes tipos de ondas, se optó por la generación de ondas en una placa rectangular. El análisis teórico de la placa rectangular presenta menos parámetros desconocidos que las vibraciones en agua. El modelo no presenta una velocidad que depende de la longitud de onda, por lo que a diferencia de las vibraciones en agua no es necesario conocerla a priori. Para simular este tipo de vibración se utilizó un portaobjetos, que cumple las características requeridas por el modelo y del cuál se conocen las propiedades físicas.

El modelo se llama Teoría Clásica de placas o Teoría de Kirchhoff y tiene que cumplir la siguientes condiciones:

1. El espesor de la placa (h) tiene que ser pequeño en comparación a sus dimensiones laterales.
2. El plano intermedio de la placa no presenta deformaciones. Esto quiere decir que este plano se mantiene como plano neutral después de una deformación.
3. La vibración superficial de la placa es pequeña en comparación a su espesor.
4. La influencia de los esfuerzos de deformación transversal se desprecia.
5. El efecto de inercia rotacional se desprecia.

El tratamiento de este problema se presenta a profundidad en la sección 3.6 del libro *Vibration of Continuous Systems*². Las ecuaciones para el momento transversal resultante, obtenidas en la referencia, son las siguientes:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -(1 - \nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3)$$

Con $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ como la rigidez flexural de la placa. En esta expresión se encuentran las características físicas del material: E es el módulo de Young, ν es la razón de Poisson del material y h es el espesor de la placa. La función $w(x, y, t)$ representa la deformación de la placa.

La ecuación de movimiento en términos del desplazamiento transversal es:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x, y, t) \quad (4)$$

² Singiresu S. Rao. "Vibration of Continuous Systems". John Wiley & Sons, Inc. 2007

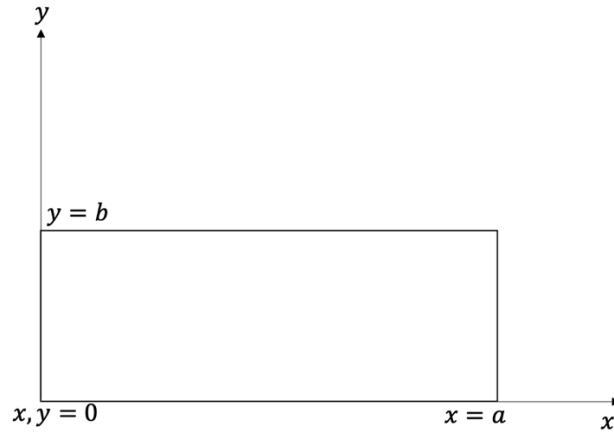


Figura 77. Plano XY de la placa

Esta expresión se presenta cuando el movimiento está bajo la influencia de una vibración. Cuando se tiene una vibración libre, entonces $f(x, y, t) = 0$. La ecuación de movimiento es:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

Definiendo el operador $\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} = \Delta^4$. La ecuación 5 se convierte en:

$$D \Delta^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

Para una placa de las características de la figura 77, las condiciones de frontera estarán definidas por las líneas $x = 0, a$ y $y = 0, b$. En ausencia de una fuerza externa, se tiene la ecuación 6. Se propone la solución:

$$w(x, y, t) = W(x, y)T(t) \quad (7)$$

Aplicando esta solución a la ecuación de movimiento, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -\omega^2 \quad (8)$$

$$\frac{\beta_1^2}{W(x, y)} \Delta^4 W(x, y) = -\omega^2 \quad (9)$$

Donde $\beta_1^2 = \frac{D}{\rho h}$. La solución se obtiene del desarrollo de las ecuaciones diferenciales 8 y 9, y las soluciones son:

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (10)$$

$$W(x, y) = A_1 \sin \alpha x \sin \beta y + A_2 \sin \alpha x \cos \beta y + A_3 \cos \alpha x \sin \beta y + A_4 \cos \alpha x \cos \beta y + A_5 \sin \theta x \sin \phi y + A_6 \sin \theta x \cos \phi y + A_7 \cos \theta x \sin \phi y + A_8 \cos \theta x \cos \phi y \quad (11)$$

Con la condición $\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \theta^2 + \phi^2$. La solución general $w(x, y, t) = W(x, y)T(t)$
Se obtiene de la multiplicación de las ecuaciones 10 y 11.

Al igual que en el caso del agua, se intentará identificar las frecuencias de resonancia para el modelo que se presenta. Para encontrar las frecuencias de resonancia se requieren analizar las condiciones de frontera del sistema. En este caso, se tratan de las siguientes:

$$w(x, y, t) = M_x(x, y, t) = 0 \quad \text{para } x = 0, x = a \quad (12)$$

$$w(x, y, t) = M_y(x, y, t) = 0 \quad \text{para } y = 0, y = b \quad (13)$$

Estas condiciones de frontera expresadas en términos de la componente espacial de la solución $W(x, y)$, están dadas en las siguientes ecuaciones:

$$W(0, y) = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \quad \text{para } x = 0 \quad (14)$$

$$W(a, y) = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \quad \text{para } x = a \quad (15)$$

$$W(x, 0) = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad \text{para } y = 0 \quad (16)$$

$$W(x, b) = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad \text{para } y = b \quad (17)$$

Sobre los ejes, W es constante, por lo que su derivada es cero. Entonces las condiciones pueden simplificarse a:

$$W(0, y) = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(0, y) = W(a, y) = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(a, y) = 0 \quad (18)$$

$$W(x, 0) = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}(x, 0) = W(x, b) = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}(x, b) = 0 \quad (19)$$

Utilizando estas condiciones de frontera, se encuentra que todas las constantes de la solución general (11) son iguales a cero, con excepción de A_1 . Y se obtienen entonces condiciones que deben satisfacerse:

$$\sin \alpha a = 0 \quad (20)$$

$$\sin \beta b = 0 \quad (21)$$

Por lo que deben de cumplirse las siguientes relaciones de los ángulos de los senos:

$$\alpha_m a = m\pi \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

$$\beta_n b = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (23)$$

Cuando se realiza la separación de variables para encontrar la solución, se obtiene la relación $\lambda^4 = \frac{\omega^2}{\beta_1^2}$. Por lo que es posible encontrar una relación entre la longitud de onda y sus frecuencias naturales de oscilación de la siguiente manera:

$$\omega^2 = \lambda^4 \beta_1^2 \rightarrow \omega = \lambda^2 \left(\frac{D}{\rho h}\right)^{1/2} \quad (24)$$

$$\rightarrow \omega_{mn} = \lambda_{mn}^2 \left(\frac{D}{\rho h}\right)^{1/2} = \pi^2 \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right] \left(\frac{D}{\rho h}\right)^{1/2} \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (25)$$

Experimentalmente, la placa que se utilizó fue un portaobjetos de vidrio. Las dimensiones del portaobjetos se midieron con un micrómetro. La masa se midió con una balanza y, con las dimensiones físicas y la masa, se obtuvo la densidad. Una vez conocida la densidad, se investigó el material del que está hecho el portaobjetos y se buscaron en la literatura los valores para el módulo de Young (E) y la razón de Poisson (ν). Los valores se presentan a continuación.

$$\left. \begin{array}{l} a = 76.2 \text{ mm} = 0.0762 \text{ m} \\ b = 26.2 \text{ mm} = 0.0262 \text{ m} \\ h = 1.066 \text{ mm} = 0.001066 \text{ m} \\ \rho = 2503.89 \text{ kg/m}^3 \\ E = 7 \times 10^{10} \text{ Pa} = 7 \times 10^{10} \text{ kg/ms}^2 \\ \nu = 0.2 \end{array} \right\} \quad (26)$$

En la tabla 3 se muestran las primeras frecuencias de resonancia, utilizando la ecuación 48, las características del portaobjetos, y la relación $\omega = 2\pi f \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$. La longitud del portaobjetos es $a = 0.0615 \text{ m}$, ya que está montado sobre un par de soportes. La ecuación que se utilizó para calcular las frecuencias de resonancia es:

$$f_{mn} = \frac{\pi}{2} \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right] \left(\frac{D}{\rho h}\right)^{1/2} \quad (27)$$

ÍNDICES		FRECUENCIA
m	n	f [Hz]
1	0	785.86
2	0	3143.42
0	1	4330.02
1	1	5115.88
3	0	7072.70
2	1	7473.45
3	1	11402.72
0	2	17320.10
1	2	18105.95
2	2	20463.52
3	2	24392.79
0	3	38970.21
1	3	39756.07
2	3	42113.64
3	3	46042.91

Tabla 3. Resonancias del portaobjetos

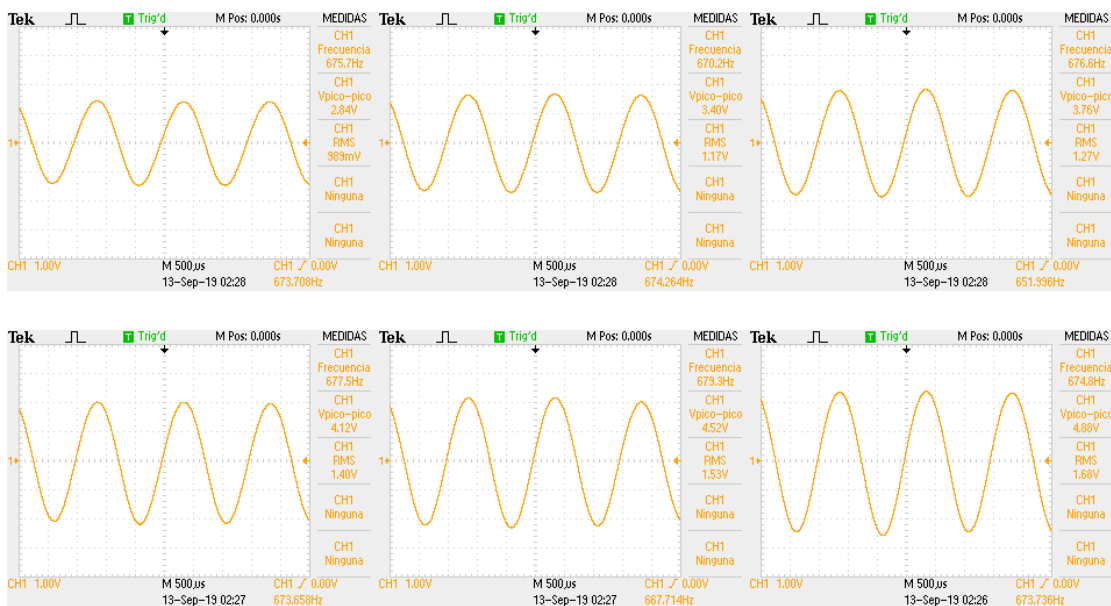
Las frecuencias están ordenadas en orden creciente. Puede observarse que la primera frecuencia de resonancia corresponde al modo $m, n = 1,0$, La segunda al modo $m, n = 2,0$, y el primer modo $m, n = 0,1$ corresponde a una frecuencia mucho más alta. Se muestran los primeros 15 modos y sus frecuencias correspondientes.

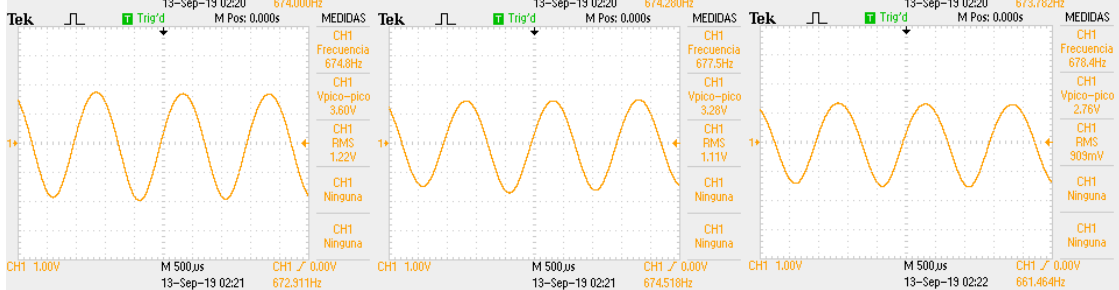
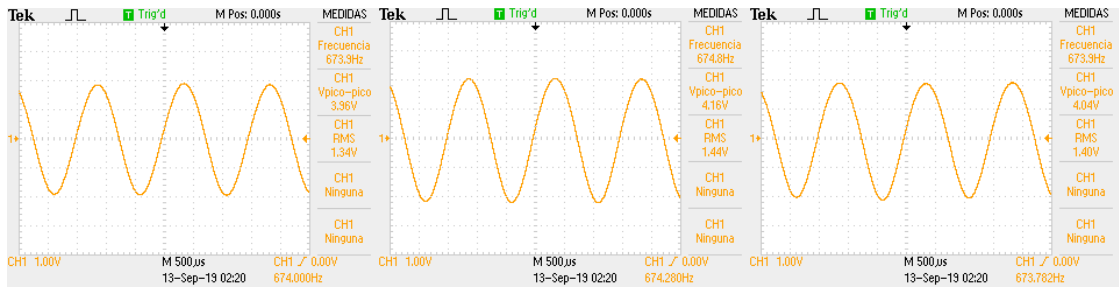
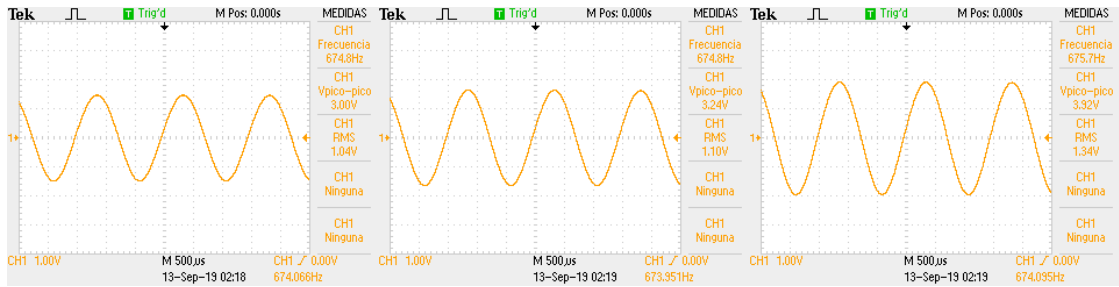
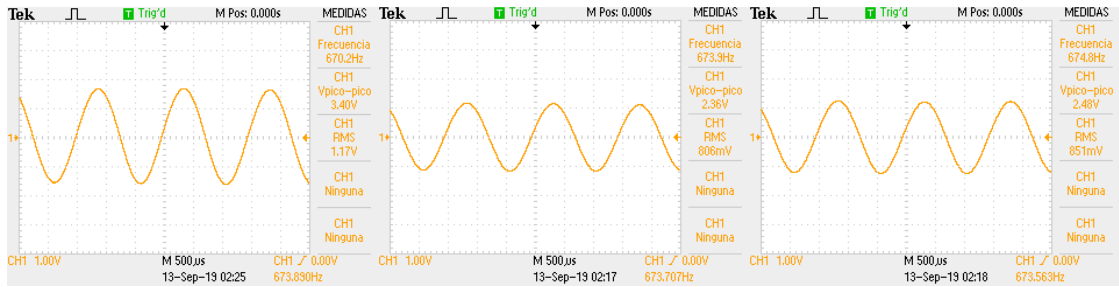
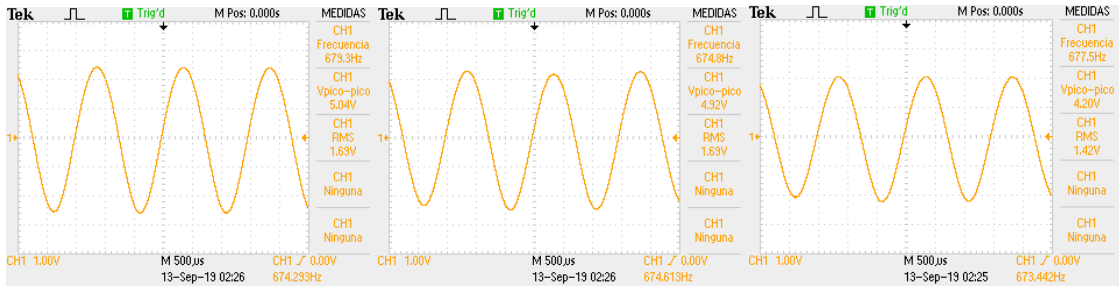
En la experimentación se observó otra ventaja sobre el agua, y esta es que ante la ausencia de excitación externa, la señal observada en el osciloscopio no tiene una variación, por lo que no existe una vibración “parásita” como en el agua. Se trataron de localizar las frecuencias de resonancia, comprobar que fueran frecuencias de resonancia, y se realizó una medición a lo largo del portaobjetos para determinar longitud de onda, como se planteaba en el agua.

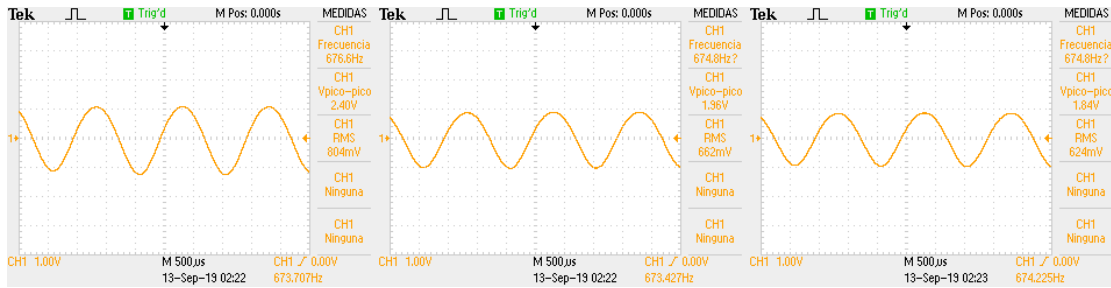
Medición directa de la longitud de onda y la amplitud de onda

Se realizó un barrido a lo largo del portaobjetos en las frecuencias en donde la señal observada en el osciloscopio era clara y tenía menos variación en el tiempo. El montaje experimental es el que se muestra en la figura 76. Todo el sistema de detección se desplazó sobre una platina micrométrica para tener control en los intervalos de desplazamiento.

Como se observó en la simulaciones del modelo, los máximos y mínimos de potencia óptica en el detector corresponden con media longitud de onda. El barrido se realizó primero cada 0.5 mm. y luego cada 0.1 mm. Se mostrará una de estas series de mediciones en donde se observa claramente la presencia de máximos y mínimos en la potencia, después se determinará la longitud de onda y por último se presentarán los valores de longitud de onda medido por este método para diferentes frecuencias.







Serie 1. Barrido para la medición de longitud de onda

En la serie se observan mínimos de potencia en el detector después de mover el sistema de detección a lo largo del portaobjetos. La longitud medida mediante este método es de: $\lambda = 2.8 \text{ mm}$. Se realizó la medición en diferentes puntos a lo largo del portaobjetos y la longitud de onda se conservó. Una vez medida esta longitud de onda, se procedió a cambiar la frecuencia de excitación del sistema a otro valor donde la señal fuera medida con claridad y poder realizar el barrido.

Después de realizar el barrido sobre el portaobjetos para 10 valores diferentes de frecuencia, y midiendo de manera directa la longitud de onda, se obtuvo la tabla que se presenta a continuación. Cada uno de los barridos a lo largo del portaobjetos consistió de alrededor de 100 mediciones cada una con una separación de 0.1 mm en diferentes puntos dentro del recorrido de la platina micrométrica.

Frecuencia [Hz]	longitud [mm]
350	7.5
407	7
443	5.4
478	3
500	4.2
560	3.6
600	3.3
674	1.8
750	1.2
879	0.8

Tabla 4. Medición directa de la longitud de onda de vibración.

Para analizar estos valores medidos se realizó una gráfica de dispersión, en donde se ve claramente una relación de crecimiento inversamente proporcional entre la longitud de onda y la frecuencia. Entre más grande fue la frecuencia de la excitación de las ondas superficiales, la longitud de onda decrecía.

En la expresión que relaciona la velocidad de propagación de una onda con la frecuencia y la longitud de onda, estas se relacionan de manera inversa. Se presenta también en la

gráfica el ajuste por medio de mínimos cuadrados de una recta que una los valores encontrados y se calcula el coeficiente de correlación que indica la calidad de este ajuste.

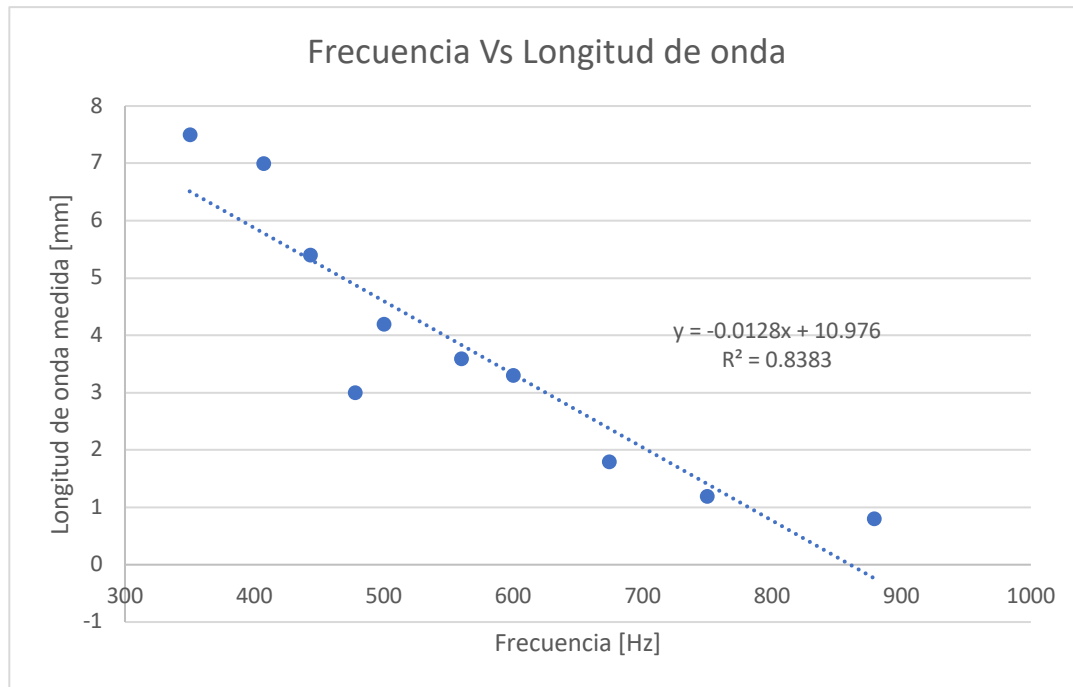


Figura 78. Frecuencia contra longitud de onda medidas

El objetivo de medir directamente la longitud de onda mediante el arreglo experimental que se propuso resultó en una serie de longitudes de onda medidas directamente de la superficie, apoyándose en la detección de mínimos y máximos en la potencia medida en el detector. El arreglo experimental resulta entonces útil para la determinación de longitudes de onda realizando un barrido sobre una superficie. De este modo, el funcionamiento del método resulta muy similar al de un microscopio de barrido, ya que la información obtenida de la superficie se obtiene de medir la señal al realizar un barrido sobre la misma.

CAPÍTULO 5. DETERMINACIÓN TEÓRICA DE LONGITUD Y AMPLITUD DE ONDA

Cálculo de longitud de onda y amplitud de onda

Como continuación del análisis teórico del modelo, se plantea un método para determinar numéricamente los valores para la longitud y la amplitud de onda. Los resultados para el cálculo de la potencia óptica obtenidos en el modelo no permiten obtener de manera analítica ni la amplitud de onda ni la longitud de onda de la potencia medida en el detector. Es por esta razón que es necesario plantear alguna manera de calcular numéricamente estos valores. La única variable física medible experimentalmente con el arreglo experimental propuesto es la potencia óptica capturada por el detector. La señal de la potencia óptica después de la reflexión sobre la superficie es una señal de voltaje periódica con una frecuencia medible y valores de voltajes medibles. Es con estos dos parámetros físicos que se plantea estimar valores para la longitud y la amplitud de onda.

Para realizar este método se pensó en la relación que existe entre dos diferentes métodos de captura de información del detector.

La hipótesis es que dos diferentes arreglos en el detector permitirían determinar numéricamente la amplitud y la longitud de onda. El primer arreglo propuesto es que después de la reflexión sobre la superficie el haz incida sobre el detector completo. El segundo arreglo propuesto es que después de la reflexión con la superficie, el haz incida sobre el detector pero con éste cubierto para permitir el paso de sólo la mitad de la luz. La disposición se presenta en la figura 79. En el primer detector la luz se deja incidir sobre el detector totalmente, mientras que en el segundo sólo se deja pasar la mitad de la luz.

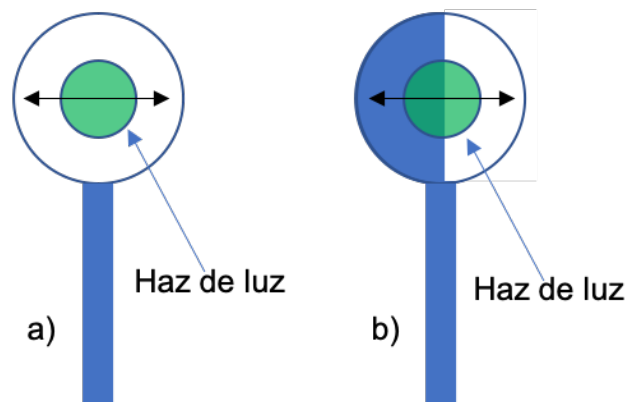


Figura 79 a). Detector que permite el paso completo de la luz
b) Detector que permite el paso de sólo la mitad de la luz

La hipótesis es que la diferencia en las señales detectadas mediante este arreglo dependerá de diferentes factores para cada uno de ellos. En el arreglo en el que se tiene el detector completamente descubierto, se plantea que la señal tendrá una relación proporcional con la segunda derivada de la función que determinar la onda superficial.

Para el segundo arreglo, se plantea la hipótesis de que la señal será proporcional a la primera derivada de esta función. La motivación de estas hipótesis es que cuando el detector permita el paso total del haz de luz, cuando se presenten los efectos de traslación y de deformación del reflejo del haz, el que tendrá un mayor impacto sobre la señal será la deformación del mismo. La deformación del láser está relacionada con el radio de curvatura de la superficie que depende principalmente de la segunda derivada de la función que define la superficie. Cuando el detector sólo permita el paso a la mitad del haz de luz, se plantea como hipótesis que cuando se presenten los efectos de deformación y traslación del haz reflejado, la traslación de este tendrá un impacto mayor sobre la señal que se mida. Si la hipótesis es correcta, realizando una medición simultánea de la reflexión del haz en la onda superficial mediante ambos arreglos se obtendrían señales que relacionen la primera derivada de la función y la segunda derivada de la función que caracteriza la onda superficial.

Que se permita el paso de sólo la mitad de la luz significa que el detector estará cubierto hasta la mitad de su diámetro. La mancha de luz que iluminará el detector se moverá como se indica en la figura 42. Como las amplitudes de oscilación son pequeñas (se suponen amplitudes de $\sim 10^{-8}m$) la mancha de luz no saldrá completamente del detector, por lo que la variación en la potencia estará relacionada con la forma del reflejo.

La primera derivada de una función relaciona físicamente este valor con la pendiente de la función. Para el modelo que se está proponiendo, la primera derivada relacionaría un movimiento de traslación en el plano de detección del haz reflejado. Cuando el haz de luz se refleja sobre una superficie, dependiendo de la pendiente de la misma en el plano de detección se observará una traslación.

La segunda derivada de la función relaciona físicamente este valor con la concavidad de la función. La concavidad de la función tendrá como consecuencia en el haz reflejado un dispersión del haz o un enfoque del mismo. Las hipótesis planteadas matemáticamente se representarían como:

$$\left. \begin{aligned} P_{com} &\approx \beta_1 f''(x, t) \\ P_{med} &\approx \beta_2 f'(x, t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

con P_{com} la potencia medida en el detector cuando el detector permite el paso del haz de luz reflejado completamente, $f''(x, t)$ la segunda derivada de la función que caracteriza a la superficie, y β_1 es la constante de proporcionalidad. P_{med} es la potencia medida en el detector cuando el detector permite el paso sólo a la mitad del haz de luz reflejado, $f'(x, t)$ es la primera derivada de la función que determina la onda superficial, y β_2 es la constante de proporcionalidad.

El motivo de plantear estas hipótesis es resolver el problema de la medición de la longitud y de la amplitud de la onda superficial numéricamente. Se supone para la superficie de la

onda superficial una expresión periódica de la forma $f(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$. Y puede generalizarse que una función periódica de la forma $f(x, t) = Af(kx - \omega t)$. En donde la función f puede ser una función sinusoidal, exponencial, etc. Suponiendo que la función es del tipo sinusoidal, puede obtenerse numéricamente el valor para la amplitud de onda y para la longitud de onda. Las expresiones para las derivadas de la función son:

$$\left. \begin{aligned} f(x, t) &= A \sin(kx - \omega t) \\ f'(x, t) &= kA \cos(kx - \omega t) \\ f''(x, t) &= -k^2 A \sin(kx - \omega t) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Los valores máximos de cada una de las funciones están determinados por los valores máximos del seno y coseno. Por lo que el valor máximo se alcanzará cuando el coseno y el seno valgan uno y menos uno, respectivamente.

$$\left. \begin{aligned} \max(f'(x, t)) &= kA \\ \max(f''(x, t)) &= k^2 A \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Es posible determinar los valores de la longitud y de la amplitud de onda si se conocen los valores máximos de la primera derivada y de la segunda. Se desarrolla el procedimiento y las expresiones finales para este cálculo:

$$\begin{aligned} \frac{\max(f'(x, t))}{\max(f''(x, t))} &= \frac{kA}{k^2 A} = \frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi} \\ \rightarrow \lambda &= 2\pi \frac{\max(f'(x, t))}{\max(f''(x, t))} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \max(f'(x, t)) &= kA \\ \rightarrow A &= \frac{\max(f'(x, t))}{k} = \max(f'(x, t)) \left(\frac{\max(f'(x, t))}{\max(f''(x, t))} \right) \\ A &= \left(\frac{\max(f'(x, t))^2}{\max(f''(x, t))} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Es de esta manera que es posible determinar los valores de la longitud y de la amplitud de onda mediante las mediciones de los valores máximos de la primera y segunda derivadas de la función. Sin tener conocimiento previo de la función misma. Se presenta el código que se realizó para el cálculo de estos valores.

```
w = 10;
T = 1/w;
nT = 50;
deltaT = T*2*pi/nT;
lambda = 3; k = 2*pi/lambda;
n = 100; ini = -2*pi/k; fin = 2*pi/k; delta = (fin-ini)/n;
x = ini:delta:fin-delta;
A = 5;
```

```

maxdf = zeros(3,size(0:deltaT:2*pi*T,2));
for t = 0:deltaT:2*pi*T
    fx = A*sin(k*x-w*t);
    dfx = A*k*cos(k*x-w*t);
    ddfx = -A*(k^2)*sin(k*x-w*t);
    indt = round((t+deltaT)/deltaT);
    maxdf(1,indt) = max(fx);
    maxdf(2,indt) = max(dfx);
    maxdf(3,indt) = max(ddfx);
end
lambdacalc = 2*pi*max(maxdf(2,:))/max(maxdf(3,:));
Acalc = (max(maxdf(2,:))^2)/(max(maxdf(3,:)));

```

Se realizó un programa en Matlab para calcular los valores de la longitud y amplitud de onda a partir de los valores máximos de la función. En el programa se obtienen los valores máximos de las funciones primera derivada y segunda derivada, después se realiza el cálculo de las expresiones 4 y 5, y se obtienen los siguientes resultados:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= 3.0059 \\ A &= 5.0099 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Los valores obtenidos son muy cercanos a los definidos como parámetros originales de la función, con un error porcentual del 0.1966% para la longitud de onda 0.198% para la amplitud de onda.

De esta manera se prueba que la longitud y la amplitud de onda pueden determinarse utilizando los valores máximos de la primera derivada y la segunda derivada.

Una vez analizado el procedimiento para el cálculo de los parámetros de la onda, se vuelve a la hipótesis que se tiene sobre el modelo y su implementación matemática. De modo que si se cumplen las relaciones:

$$\left. \begin{aligned} P_{com} &\approx \beta_1 f''(x, t) \\ P_{med} &\approx \beta_2 f'(x, t) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Entonces la longitud y la amplitud de onda podrían determinarse mediante una expresión similar a la obtenida en las expresiones 4 y 5.

$$\lambda \approx \frac{\beta_1}{\beta_2} 2\pi \left(\frac{\max(P_{com})}{\max(P_{med})} \right) \quad (8)$$

$$A \approx \frac{(\beta_1)^2}{\beta_2} \left(\frac{\max(P_{com})^2}{\max(P_{med})} \right) \quad (9)$$

en donde $\max(P_{com})$ es la potencia máxima medida en el detector que permite el paso completamente de la luz, $\max(P_{med})$ es la potencia máxima en el detector cuando sólo se permite el paso a la mitad del haz reflejado, y $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ y $\frac{(\beta_1)^2}{\beta_2}$ son las constantes de

proporcionalidad que relacionan a la función que caracteriza la superficie con los diferentes valores para la potencia medida en el detector.

Este método para calcular la longitud de onda y la amplitud de onda dependerá de dos condiciones muy importantes. La primera tiene que ver con la proporcionalidad lineal entre la potencia medida en los detectores y las derivadas de la función que define la onda superficial en el material.

Puede que en las mediciones, haya valores para los que la potencia y las derivadas de la función no guarden una proporción lineal. Un trabajo importante es determinar el intervalo en el que se mantiene esta proporcionalidad.

La segunda de las condiciones tiene que ver con las constantes de proporcionalidad β_1 y β_2 . Estas constantes tienen que poder determinarse para calibrar el sistema y tener un medición correcta de la amplitud y longitud de onda. Si no es posible determinar el valor para estas constantes, los valores estimados serán proporcionales a los reales, pero no será posible dar el valor real de la longitud ni de la amplitud de onda.

Un tratamiento más a profundidad de este problema representa un trabajo mucho más extenso que el que se propone en un proyecto de tesis, pero el problema queda abierto para su implementación física y comprobación. En la presente sección se intentara simular estas situaciones mediante programas de Matlab que representen el fenómeno que se desea estudiar.

Resultados de simulación

Para la simulación se utilizaron los siguientes valores: $I_0 = 100$, $x_0 = 0$, $\sigma = 0.1227 \text{ mm}$, $I = I_0 e^{-(x-x_0)^2/\sigma^2}$, $x = [-3\sigma, 3\sigma]$, $f(x) = A \cos(kx - \omega t)$, $\omega = 340 \text{ Hz}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $l = 140 \text{ mm}$, $\lambda = 1 \text{ mm}$, $t = [0, 4\pi/\omega]$.

Para la simulación del cálculo de la amplitud, todos estos valores se dejaron fijos, y se realizó una variación en la amplitud de $A = 0.00001 \text{ mm}$ hasta $A = 0.00003 \text{ mm}$. Se realizaron simultáneamente los cálculos para la potencia medida con el detector permitiendo el paso de la mitad de la luz reflejada y para el detector que permitía el paso completo de la luz. En las figuras 80 y 81 se muestran las series de potencias calculadas para la variación de amplitud en el arreglo de detector completo y medio detector, respectivamente.

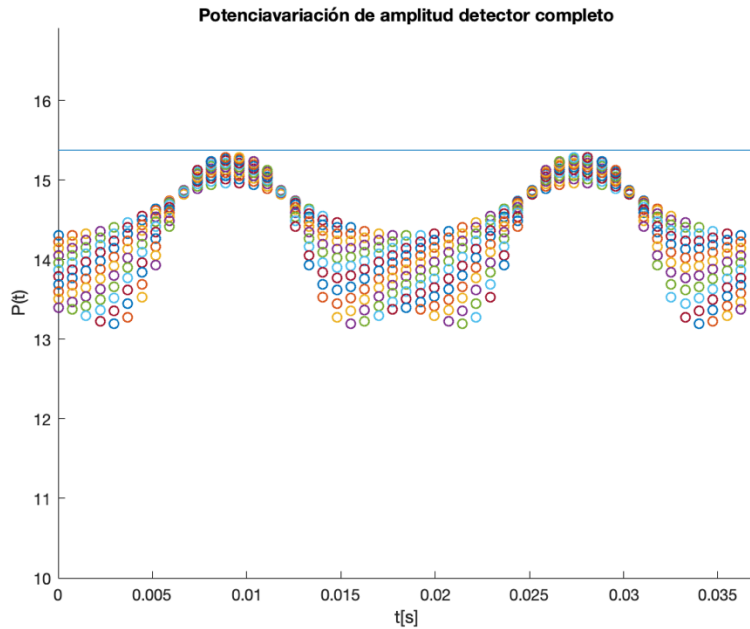


Figura 80 Potencia para una variación en la amplitud en detector completo

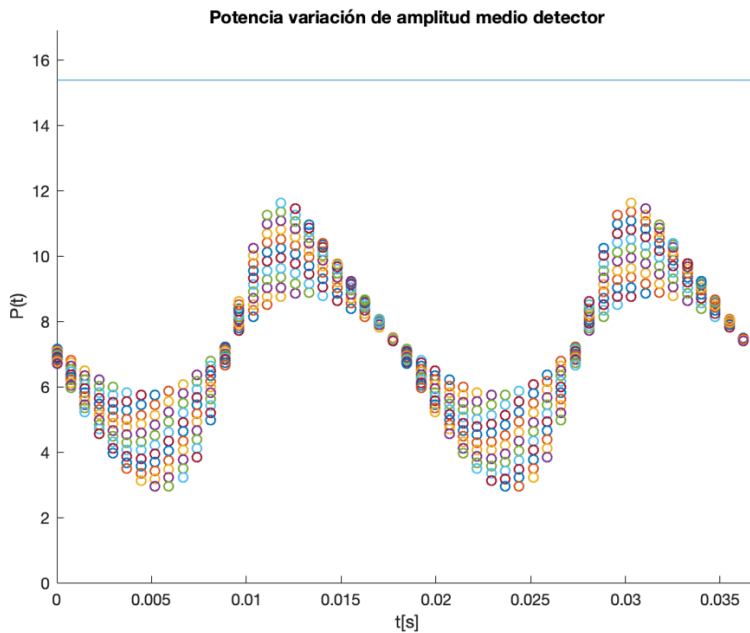


Figura 81. Potencia para una variación en la amplitud en medio detector

Como puede observarse en las series de potencia, hay un desfase entre ambas señales. El desfase es de medio ciclo. Se realizó el cálculo la amplitud para cada una de las series de potencia y se graficó contra las amplitudes que sobre las que se varió la amplitud teórica. Utilizando la expresión:

$$A \approx \frac{(\beta_1)^2}{\beta_2} \left(\frac{\max(P_{com})^2}{\max(P_{med})} \right) \quad (10)$$

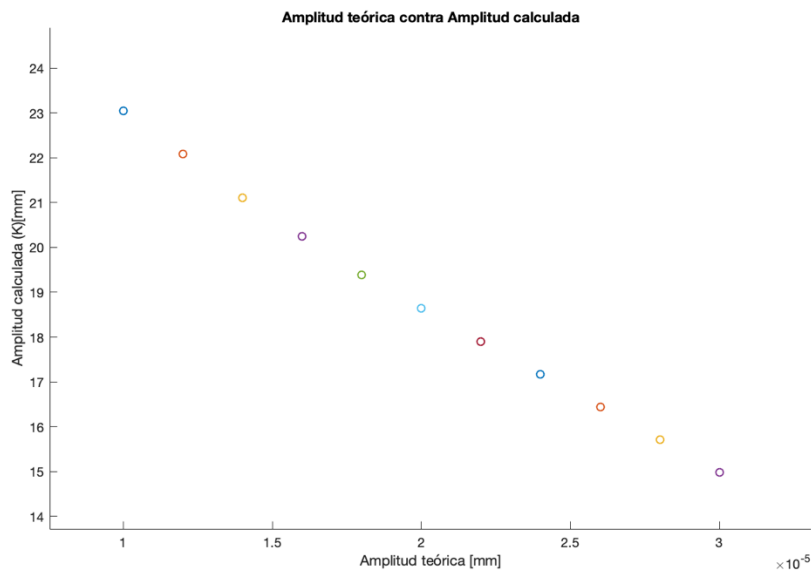


Figura 82. Amplitud teórica contra amplitud calculada

En la figura 82 se puede observar una relación casi lineal entre los valores de amplitud introducidos en la simulación y la amplitud calculada mediante el modelo matemático. Se realizó un análisis de ajuste lineal para poder calcular los valores de su ecuación de recta.

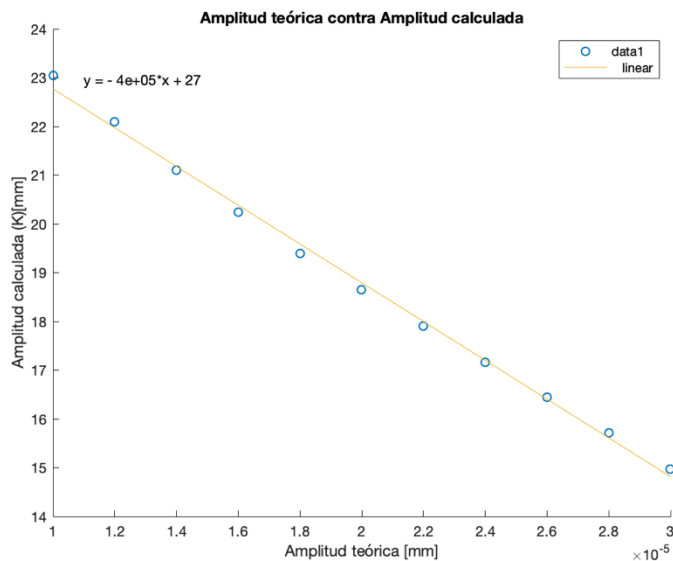


Figura 83. Ajuste de la serie de datos

Se obtuvo la recta $y = -3.9769 \times 10^{-5}x + 26.747$. El ajuste a una ecuación lineal es bastante bueno, y era justo la comprobación de la hipótesis que se planteaba para poder

realizar el cálculo. De igual manera, la constante de proporcionalidad fue calculada también mediante el ajuste de la serie de datos, sin embargo, existen dos factores que vale la pena analizar.

En primer lugar, en una relación entre las amplitudes teórica y calculada se esperaría que ambas crecieran, sin embargo el comportamiento es opuesto. Cuando la amplitud teórica crece la amplitud calculada decrece, y esto es claramente consecuencia de la pendiente de la recta que ajusta a los datos. La pendiente se relaciona directamente con la constante β_2 que surgió al encontrar la expresión para el cálculo de la amplitud en la ecuación 9. De igual modo, este valor no niega que sea posible calcular la amplitud a partir del arreglo propuesto para el detector. El segundo valor que resulta interesante analizar es que en una extrapolación, cuando la amplitud teórica sea igual a cero, se tendrá una amplitud calculada de 26.747, y este valor no tiene relación con el modelo.

A continuación se trató de calcular la longitud de onda mediante la ecuación:

$$\lambda \approx \frac{\beta_1}{\beta_2} 2\pi \left(\frac{\max(P_{com})}{\max(P_{med})} \right) \quad (11)$$

Para encontrar una relación entre los valores calculados y los introducidos directamente en la simulación se realizó el cálculo para una variación de longitud de onda. Los valores con los que se realizó la simulación fueron los mismos que en el caso anterior, sólo que se dejó la amplitud fija con un valor de $A = 1 \text{ mm}$. La longitud se varió desde $\lambda = 0.4 \text{ mm}$ hasta $\lambda = 2.4 \text{ mm}$. Los demás parámetros fueron; $I_0 = 100$, $x_0 = 0$, $\sigma = 0.1227 \text{ mm}$, $I = I_0 e^{-(x-x_0)^2/\sigma^2}$, $x = [-3\sigma, 3\sigma]$, $f(x) = A \cos(kx - \omega t)$, $\omega = 340 \text{ Hz}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $l = 140 \text{ mm}$, $t = [0, 4\pi/\omega]$.

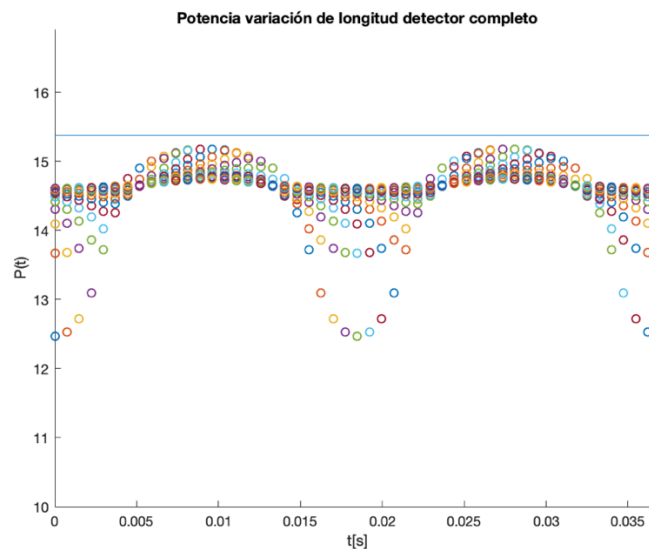


Figura 84. Potencia en detector completo para una variación de la longitud de onda

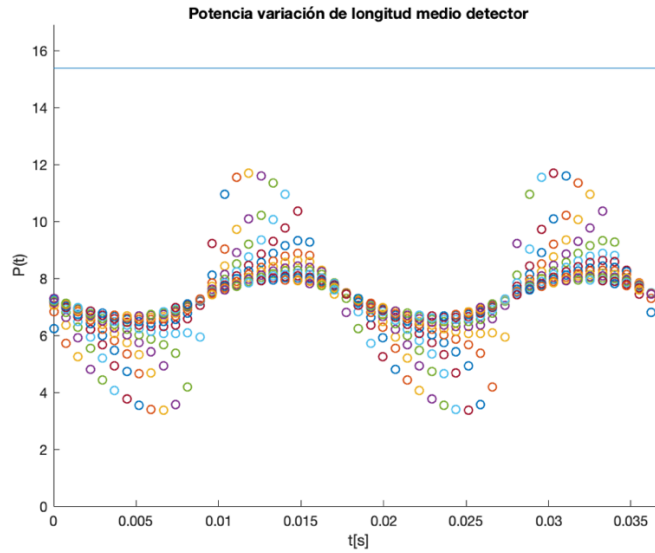


Figura 85. Potencia en medio detector para una variación de la longitud de onda

Por último, se calculó la longitud de onda mediante la ecuación 11, después se graficó contra la variación de frecuencia en la simulación y se realizó el ajuste para encontrar la ecuación que relacione estas cantidades.

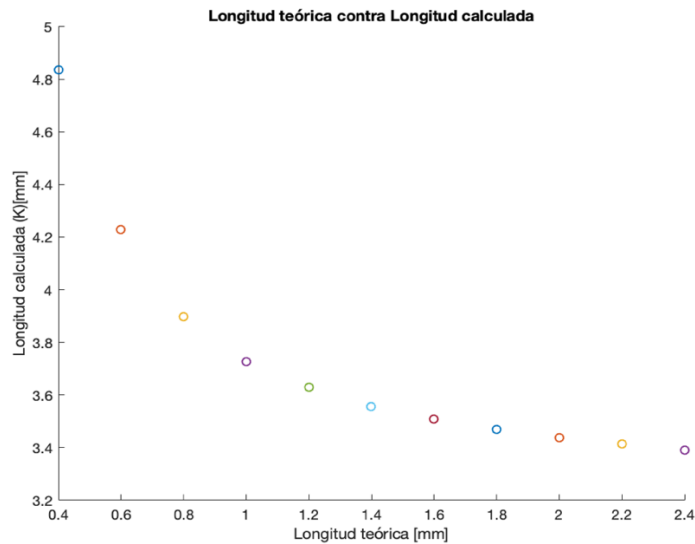


Figura 86. Longitud teórica contra longitud calculada

A diferencia del cálculo de la amplitud, para al determinar la longitud de onda no se encuentra una relación lineal, en la gráfica incluso puede apreciarse como una relación exponencial. Después del análisis realizado en esta sección se concluye que es posible determinar la amplitud de la onda superficial mediante el arreglo de dos detectores que permiten el paso a diferentes cantidades de luz.

Sin embargo, es posible encontrar una expresión lineal en diferentes intervalos, una posibilidad de hacerlo es como se muestra en la figura 87. En donde la gráfica presenta dos ajustes de rectas para dos intervalos de puntos diferentes. En el primero se nota que el ajuste mediante una recta no resulta tan bueno como cuando se calculó la amplitud. En el segundo intervalo, el ajuste a la recta es bastante bueno.

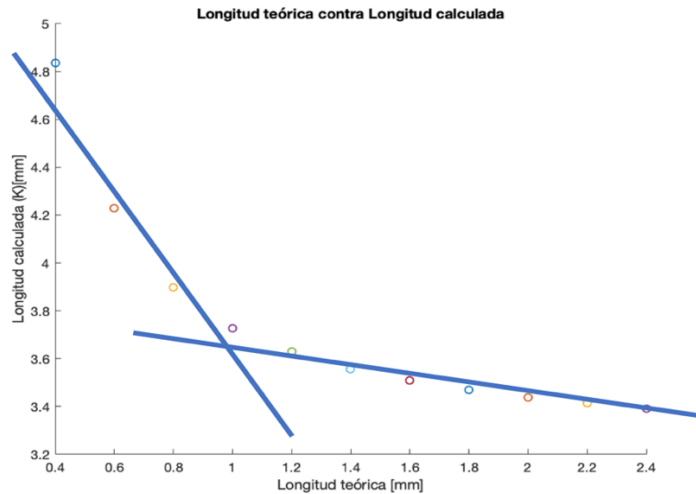


Figura 87. Ajuste de rectar para el cálculo de la longitud de onda

De esta manera se concluye esta sección del trabajo de investigación que se realizó, y se concluye que parece ser posible determinar el valor de la longitud y la amplitud de onda mediante la medición simultánea de la misma señal mediante dos arreglos diferentes en el detector. Para poder lograrlo, es necesario realizar un análisis mucho más profundo de los resultados obtenidos, ya que es indispensable determinar las regiones en la que sea posible calcular ambos valores y la relación que tienen las constantes de proporcionalidad para fines de calibración. Esta sección se propuso como consecuencia de los resultados obtenidos en otras secciones, y aún falta mucho trabajo de investigación en este sentido.

Como trabajos a futuro se propone realizar un modelo para determinar la relación analítica que se supuso para realizar estos cálculos, es decir, encontrar la razón por la cuál parece que la suposición de que las relaciones siguientes se cumplen:

$$\left. \begin{aligned} P_{com} &\approx \beta_1 f''(x, t) \\ P_{med} &\approx \beta_2 f'(x, t) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

También se propone intentar determinar de manera analítica las constantes que intervienen en el cálculo tanto de la amplitud como de las longitud de onda. Si se encontrara una relación teórica para estos valores, podría implementarse protocolo de calibración en el proceso experimental.

CAPÍTULO 6. DISCUSIÓN DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Se listarán las conclusiones de cada uno de los capítulos presentados en el trabajo de investigación que se realizó.

En el primer capítulo se analizó teóricamente la deflexión-decolimación de la luz al reflejarse sobre una superficie que presenta una onda superficial y se obtuvo un modelo de la señal como función del tiempo registrada por un detector de ancho variable colocado a una distancia fija de la superficie. Para argumentar el desarrollo del modelo se tomó como base la óptica geométrica. Los argumentos físicos de la reflexión de rayos sobre una superficie llevaron a concluir que los resultados obtenidos en las simulaciones eran representativos del fenómeno físico que se estaba presentando en la superficie de vibración.

Muchos factores intervienen en el modelo: la longitud de onda, la amplitud de onda, la frecuencia de oscilación, la distancia al detector, la sigma del láser, etc. Al tener tantos parámetros dentro del modelo, es complicado aislarlos para encontrar la relación de ellos con la señal óptica en el detector.

La última conclusión del modelo es que no es posible encontrar una expresión analítica para el cálculo de la longitud y amplitud de onda directamente de la señal. Por lo que se necesitaron emplear métodos de cálculo numérico para solventar este problema. Aún con esta complicación, el modelo que se encontró representa el fenómeno que se quería estudiar; el efecto que produce sobre un haz reflejado en una superficie, si esta presentara vibraciones con longitud de onda del orden del tamaño del haz de luz. Este objetivo se logró y se pudo simular para casos particulares de ondas superficiales.

Para el segundo capítulo, se planteó la generación de un arreglo experimental para tratar de detectar ondas superficiales y si fuera posible comprobar el modelo. Se presentan con mucho detalle todos los elementos que intervienen en el arreglo que se ocupó para realizar las mediciones. También se presentaron esquemas del funcionamiento básico del sistema de medición y los componentes que lo conforman. Algunos de los elementos que se ocuparon fueron: osciloscopio, altavoz piezo-eléctrico, láser, generador de funciones, amplificador de bajo ruido, etc.

El modelo que se planteó presentaba una cantidad considerable de parámetros de los cuales depende el comportamiento del haz de luz reflejado. Uno de estos parámetros, que era muy importante, era la sigma del láser, ya que esta serviría para relacionar el tamaño de las ondas superficiales con el tamaño del haz de luz. Una vez propuesto el arreglo experimental que se pretendía utilizar para este trabajo se procedió a calcular experimentalmente este parámetro. Los resultados obtenidos fueron consistentes con lo que se supuso en un principio, las mediciones realizadas arrojaron resultados que podrían pensarse congruentes con el modelo debido a que se tuvo un incertidumbre muy baja.

En el capítulo tres, se propuso determinar si el detector propuesto en el capítulo anterior era capaz de detectar ondas superficiales en agua. Pero antes de proceder a la experimentación se desarrolló la teoría de ondas en agua, donde primero se da una breve introducción de los diferentes tipos de ondas que puede existir en el agua. Los parámetros que definen los diferentes tipos de ondas en agua dependen de la relación entre la profundidad del contenedor del agua y la longitud de las ondas superficiales. De acuerdo a la teoría investigada, se determinó que se tratan de ondas gravitacionales de agua y que se encuentran en el régimen de aguas someras.

Se implementó un método para generar ondas superficiales en un tanque de agua y después, utilizando el detector armado, se trataron de detectar estas ondas. De las mediciones se obtuvieron varias conclusiones, la primera de ellas es que es posible detectar ondas superficiales mediante el arreglo de medición propuesto. Puede concluirse esto porque se obtuvieron señales en el osciloscopio, muy por encima del ruido del sistema, que provenían del reflejo de la luz sobre la superficie y que correspondían con la frecuencia con la que se estaba excitando el sistema. La segunda conclusión tiene que ver con la sensibilidad del tanque de agua ante vibraciones externas, ya que ante cualquier perturbación en el medio (gente pasando por los pasillos, abertura y cierre de puertas cercanas, movimiento dentro del mismo recinto de medición, etc.) Los modos normales de vibración del tanque de agua eran fácilmente observables con el sensor óptico implementado. Se realizó una variación en el voltaje de excitación para observar la relación entre el voltaje de excitación y el voltaje de respuesta en el osciloscopio y se observó que tiene una relación lineal después de que el voltaje de excitación alcanza un valor de aproximadamente 4 V. La respuesta de por qué hasta este valor se explica en la tercera conclusión.

La tercera conclusión está relacionada con la segunda, ya que se observó que el tanque de agua presentaba siempre una vibración aunque el sistema no estuviera siendo excitado. Se calculó el valor de la frecuencia de esta vibración y se encontró que estaba alrededor de los 60 Hz de frecuencia, cabe mencionar que se verificó que no fuera ruido eléctrico de la línea de corriente. Como la frecuencia de esta vibración se supuso que esta podía ser resultado de dos posibles fuentes: la excitación del primer modo de vibración del tanque para ese tipo de ondas o una vibración mecánica que provenía del edificio mismo. Cualquiera que fuera la naturaleza de esta vibración complicó mucho la experimentación, ya que la señal que correspondía a esta vibración, en muchos casos generaba una medición en el osciloscopio con un voltaje mayor que el que producía la excitación del sistema mediante el altavoz.

Ya con las mediciones realizadas y la teoría desarrollada se trató de calcular la longitud y la amplitud de las ondas superficiales, sin embargo, fue imposible determinarla con exactitud ante su naturaleza tan compleja en cuanto a sensibilidad y a que las conclusiones a las que se llegaron no corresponden completamente con la teoría. Se propuso después un arreglo experimental para determinar la longitud de onda mediante una medición directa. Este arreglo no funcionó para este tipo de ondas, pero resultó muy útil para hacer esta medición en otro material.

Como conclusiones del capítulo se tienen que:

- El sistema de medición es capaz de detectar ondas superficiales en el agua imperceptibles a simple vista.
- El agua es un medio muy sensible a vibraciones mecánicas, ya que responde de una manera muy notable en el detector a cualquier excitación mecánica de los alrededores.
- Existe una relación lineal entre el voltaje de excitación y el de respuesta cuando la señal de excitación rebasa una señal de vibración mecánica que siempre está presente.
- Existe una vibración parásita que no es posible eliminar en las condiciones que se realizó el experimento. Estas vibraciones, son los modos normales del cubo de agua y se excitan continuamente por el ruido ambiental.
- Tanto la complejidad teórica como la sensibilidad del sistema hicieron difícil la determinación de la longitud y amplitud de las ondas que se generaron.

Debido a las complicaciones que se encontraron en la experimentación en el agua, se buscó otro tipo de ondas, de donde se llegó a la propuesta de realizar el experimento reflejando el haz de luz sobre un portaobjetos. La teoría y experimentación sobre este sistema están escritos en el capítulo cuatro.

Primero se desarrollo la teoría sobre las vibraciones en placas delgadas. El experimento que se planteó cumple con las características para que se considere una vibración de este tipo. Se realizaron las mediciones correspondientes a los parámetros involucrados en este tipo de vibraciones y se realizaron cálculos para las longitudes de onda y frecuencias de resonancia de los modos normales de vibración del sistema. Los resultados obtenidos no correspondieron con la teoría estudiada por lo que se planteó una manera diferente de relacionar las mediciones con la teoría. Lo que se propuso entonces fue realizar la medición directa de la longitud de onda, y se tomó esta decisión porque las vibraciones en placas no presentaban la vibración “parásita” que complicó tanto las mediciones en agua. Para medir la longitud de onda directamente se realizó un barrido sobre uno de los ejes de vibración y se midió directamente la separación en los máximos de voltaje medidos en el osciloscopio para poder determinar el valor de la longitud de onda.

Los resultados que se obtuvieron presentan una relación como la que se esperaba teóricamente, en donde mientras la frecuencia de vibración crece, la longitud de onda decrece. Como consecuencia de este resultado, es posible también concluir el modelo teórico aplicado en este arreglo experimental permitirían una medición directa de la longitud de onda. El sistema también permite la medición de la frecuencia de vibración, que es la frecuencia de la señal que se presenta en el osciloscopio cuando el sistema se excita.

En el capítulo cinco y el último del desarrollo teórico-experimental se planteó la posibilidad de medir de la señal que se obtiene en el osciloscopio la amplitud y la longitud de las ondas generadas. Para el cálculo de estos valores fue necesario generar la hipótesis de que la señal

de dos arreglos diferentes del detector son proporcionales a dos magnitudes físicas de la vibración. Las maneras de utilizar el detector para la medición fueron haciendo que la luz incidiera completamente dentro del detector, y la otra fue que se tuviera una disposición en la que sólo se permitiera el paso a la mitad de la luz. Las magnitudes físicas de la vibración con las que se relacionan estos modos de medición son la primera derivada de la función que define la superficie y que está relacionada con la pendiente de esta, y la segunda derivada de la función que está relacionada con su concavidad.

Para comprobar que esta suposición tiene cierta validez se realizó la simulación del cálculo de una función, su derivada numérica, su segunda derivada numérica y el cálculo de la longitud y amplitud de onda a partir de los valores máximos de estas funciones. El resultado se muestra en el desarrollo y resulta que es posible recuperar los valores de amplitud y longitud de onda si se conocen la primera derivada de la función y la segunda derivada esta.

Como la hipótesis que se planteó es que las mediciones en los diferentes arreglos del medidor son proporcionales a las derivadas de la función se necesita encontrar una relación lineal también entre la longitud de onda teórica y la calculada mediante las mediciones. También requiere una relación lineal entre la amplitud de onda teórica y la calculada mediante las mediciones.

Los resultados que se obtuvieron en las simulaciones hacen pensar que las hipótesis planteadas son válidas cuando menos dentro de un intervalo de valores de amplitud y frecuencia. El propósito de este capítulo era determinar si era posible recuperar valores para la amplitud y longitud de onda de mediciones con dos distintos arreglos en el detector. Según las evidencias encontradas, parece que es posible recuperar estos valores, sin embargo, para analizar las condiciones en que esto puede hacerse y establecer límites para estas mismas condiciones es un trabajo que se propone como posible línea de investigación a futuro ya que resolver estos problemas correspondería a un trabajo de tesis por sí mismo.

Como futuras líneas de investigación de lo obtenido se proponen las siguientes:

- Realizar el proceso de medición para distintos tipos de ondas superficiales en donde sea posible determinar más concretamente la naturaleza de estas vibraciones. Se sugiere para realizar estas mediciones un ambiente mucho más controlado, ya que las fuentes de vibración externas representaron un problema para obtener datos completamente confiables.
- Consultar con expertos en vibraciones mecánicas la naturaleza exacta de estas para conocer a priori los valores aproximados de longitud y amplitud de onda para comprobar mediante el modelo teórico y arreglo experimental que los valores teóricos correspondan con los medidos. Una dificultad que se presentó en el proceso de investigación fue que no se pudieron determinar previamente los valores para la longitud y amplitud de onda. Las mediciones que se obtuvieron fueron las que se intentaron hacer coincidir con la teoría.
- Realizar el análisis teórico del cálculo de la longitud y amplitud de ondas en la superficie mediante dos diferentes arreglos en el detector, ya que esta línea puede presentar una buena alternativa para solventar los problemas que surgieron a lo

largo de todo el proceso de investigación. Resolver este problema permitiría establecer un protocolo para la calibración de un dispositivo de medición que podría emplearse de manera más general.

Bibliografía

1. H. E. Gutiérrez-Hernández, P. L. Rendón, R. Marchiano. "Theoretical study of the generation of screw dislocations for Rayleigh and Lamb waves in isotropic solids". Science Direct. Wave Motion 62. 2016.
2. R. Leach. "Optical measurement of surface topography". Springer. National Physical Laboratory, Reino Unido. 2011.
3. L. Huang, M. Idir, C. Zuo, A. Asundi. "Review of phase measuring deflectometry". Optics and Lasers in Engineering 107. 247-257. New York, Nanjing, Singapore. 2018.
4. A. Moreno, J. Campos. "Revisión de diferentes técnicas de metrología óptica". Dept. Física, Universidad Autónoma de Barcelona. España. 2007.
5. Y. Wang, F. Xie, S. Ma, L. Dong. "Review of surface profile measurement techniques based on optical interferometry". Optics and Lasers in Engineering 93. 164-170. Beijing China. 2017.
6. R.W. Herfst, W.A. Klop, M. Eschen. "Systematic characterization of optical beam deflection measurement system for micro and nanomechanical systems". Netherlands Organization for Applied Scientific Research. Holanda. 2014.
7. J. F. Fernandez, O. D. D. Soares, M. Perez-Amor, J. Blanco. "Curvature radius measurement of reflecting surfaces by Moire Deflectometry". Industrial Optoelectronic Measurement Systems Using Coherent Light (June 1988). Francia. 1987.
8. W. Li, M. S. Achim, J. Burke. "Absolute optical surface measurement with deflectometry". Interferometry XVI: Applications. San Diego, California, Estados Unidos. 2012.
9. S. Kammel, F. Puente León. "Deflectometric measurement of specular surfaces". IEEE Transactions on instrumentation and measurement, Vol. 57. Alemania. 2004.
10. J. Higuier, T. Valier-Bresier, T. Dehoux, B. Audoin. "Beam distortion detection and deflectometry measurements of gigahertz surface acoustic waves". Review of scientific instruments 82. Francia. 2011.
11. M. C. Knauer, J. Kaminski, G. Häusler. "Phase measuring deflectometry: a new approach to measure specular free-form surfaces". Institute of Optics, University of Erlangen-Nuremberg. Alemania. 2004.
12. E. Hetch. "Optics". 5th Edition. Pearson. Adelphi University. 2017.
13. K. Thyagarajan, A. Ghatak. "Lasers. Fundamentals and Applications". Springer. New Delhi. 2010.
14. "Gaussian Beam Optics". <http://marketplace.idexop.com>. Sitio de compra de equipo óptico.
15. S. S. Rao. "Vibration of continuous Systems". Florida. John Wiley & Sons, Inc. 2007.
16. D. J. Acheson. "Elementary Fluid Dynamics". Oxford University Press, Oxford. 1990.
17. H. Bateman "Partial Differential Equations of Mathematical Physics". Cambridge University Press, Cambridge. 1932.
18. O. Kolditz. "Computational methods in environmental fluid mechanics". Springer, Berlin, Heidelberg. 2002
19. H. Lamb. "Hydrodynamics". Cambridge University Press. Trinity College, Cambridge. 1916.
20. J. J. Stoker. "Water Waves. The Mathematical Theory with Applications". Institute Of Mathematical Sciences New York University, New York. Wiley Classics Library, 1992.

21. R. S. Johnson. "A modern introduction to the mathematical theory of water waves". Cambridge Texts in Applied Mathematics. Reino Unido. 1997.
22. R. Perriáñez. "Fundamentos de Oceanografía Dinámica". Secretariado de publicaciones de la Universidad de Sevilla. España. 2010.
23. R. H. Stewart. "Introduction to Physical Oceanography". Texas A & M University. Departament of Oceanography. Estados Unidos. 2000.
24. B. Cushman-Roisin. "Environmental Fluid Mechanics". Thayer School Of Engineering Dartmouth College. Hanover, New Hampshire. John Wiley & Sons, Inc. 2019.
25. G. Colombero, G. Sosa. "Altavoz Piezoeléctrico". Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Córdoba (UTN. FRC), -Depto. Ingeniería Electrónica
26. Hsin-Yuan Chiang, Yu-Hsi Huang. "Resonance mode and sound pressure produced by circular diaphragms of electrostatic and piezoelectric speakers". Department of Mechanical Engineering, National Taiwan University of Science and Technology, No. 43, Sec. 4, Keelung Rd., Taipei 10607, Taiwan, ROC.
27. W. Nowacki. "Dynamics of Elastic Systems". Jon Wiley. New York. 1963.
28. E. Ventsel, T. Krauthammer. "Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications". Marcel Dekker. New York. 2001.
29. K. F. Graff. "Wave Motion in Elastic Solids" Ohio State University Press. Columbus. OH. 1975.
30. R. Szilard. "Theory and Analysis of Plates: Classical and Numerical Methods". Prentice-Hall. Englewood Cliffs. NJ. 1974.
31. L. Hetiegan, C. Hatiegan, G. R. Gillich, C. O. Hamar. "Natural Frequencies of. Thin rectangular plates clamped on contour using the Finite Element Method". IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 294. Romania. 2017.
32. M. A. Gharaibeh, A. M. Obeidat. "Vibrations Analysis of Rectangular Plates with Clamped Corners". Open Eng. 8. 275-283. 2018.
33. I. Senjanovic, M. Tomic, N. Vladimir, N. Hadzic. "An analytical solution to free rectangular plate natural vibrations by beam modes -ordinary and missing plate modes". Transactions of Famena XL-3. 2016.
34. K. Kookhyun. "Free vibration analysis of rectangular plate with arbitrary edge constraints using characteristic orthogonal polynomials in assumed mode method". Department of Naval Architecture, Tongmyong University, Busan, Korea. 2013.
35. Y. Narita. "Free vibration of elastic plates with various shapes and boundary conditions". Doctoral Dissertation. Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers. 1980.
36. S. S. Rao and A. S. Prasad. "Vibrations of annular plates including the effects of rotatory inertia and transverse shear deformation". Journal of Sound and Vibration, Vol. 42, No. 3, pp. 305–324, 1975.