



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE  
LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

**ESPECTRO DE LYAPUNOV PARA EL PROBLEMA DE KEPLER  
ASIMÉTRICO**

**TESIS**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
**MAESTRO EN CIENCIAS**

PRESENTA:

**PEDRO PORRAS FLORES**

**DIRECTOR:**

DR. RICARDO MÉNDEZ FRAGOSO  
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, DICIEMBRE DE 2019



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*“El científico no estudia la naturaleza por la utilidad que le pueda reportar; la estudia por el gozo que le proporciona, y este gozo se debe a la belleza que hay en ella. La belleza intelectual se basta a sí misma, y es por ella, más que quizá por el bien futuro de la humanidad, por lo que el científico consagra su vida a un trabajo largo y difícil”.*

Henri Poincaré



*A papá y mamá.*



# Índice general

<b>Índice de figuras</b>	<b>3</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>7</b>
<b>Resumen</b>	<b>9</b>
<b>1. Introducción y Antecedentes</b>	<b>11</b>
1.1. Definiciones previas . . . . .	11
1.2. Planteamiento general del problema . . . . .	12
1.3. Antecedentes . . . . .	13
1.4. El problema desde otra perspectiva . . . . .	17
1.5. Contenido de este trabajo . . . . .	20
<b>2. El Problema de Kepler en contexto de variables de ángulo acción</b>	<b>23</b>
2.1. El problema de Kepler en el espacio . . . . .	23
2.2. Variables de ángulo acción del problema de Kepler . . . . .	26
2.3. El PKA . . . . .	35
<b>3. Tratamiento para resolver el problema y métodos numéricos</b>	<b>39</b>
3.1. Integrador de Taylor . . . . .	39
3.2. Mapeo de Poincaré . . . . .	42
3.3. Espectro de Lyapunov . . . . .	44
3.3.1. El Método numérico . . . . .	46

	1
<b>4. Resultados (para valores representativos y críticos)</b>	<b>49</b>
4.1. Pozo de Potencial . . . . .	49
4.2. Espectro de Potencias para PKA . . . . .	51
4.2.1. Espectrogramas para PKA . . . . .	53
4.3. Secciones de Poincare . . . . .	57
<b>5. Discusión y conclusiones</b>	<b>61</b>
5.1. Discusión . . . . .	61
5.1.1. La integración numérica . . . . .	61
5.1.2. El espectro de Lyapunov . . . . .	63
5.2. Conclusiones . . . . .	65
<b>Apéndice A</b>	
<b>Variables angulares del Problema de Kepler</b>	<b>67</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>73</b>



# Índice de figuras

1.1. El cuerpo de masa $m_1$ tiene la restricción de moverse en el plano $xy$ , y el de masa $m_2$ tiene la restricción de moverse en el eje $z$ , además la interacción entre ellos es la gravitacional. . . . .	14
1.2. Secciones de Poincaré con $\epsilon = \frac{m_2}{m_1}$ , en todas la figuras del lado derecho se muestra un acercamiento de la sección donde se resalta algún comportamiento interesante en la sección. . . . .	16
1.3. Espectro de potencia para $\epsilon = \frac{m_2}{m_1}$ . . . . .	17
2.1. Elementos orbitales; $\Omega$ , $i$ , $\omega$ , $E$ y $f$ , cinco de los elementos orbitales. El sexto elemento que es la excentricidad de órbita $a$ no se muestra para no aglomerar el esquema. . . .	35
3.1. Trayectoria, mapeo y sección de Poincaré para el sistema (3.12). . . . .	43
4.1. Se muestra la superficie que representa el pozo de potencial para valores de $\epsilon$ y $\ell_z$ igual a 2 y 3 respectivamente, la escalas de colores representan la profundidad del pozo. . .	50
4.2. Proyección de las curvas de nivel del pozo de potencial, la región delimitada por cada curva de nivel representa los niveles de energía constante. La escala de colores está asociada a la profundidad del pozo. . . . .	50
4.3. Representación de las condiciones iniciales; el cuerpo de masa $m_2$ está situado en el origen y únicamente tiene impulso en la dirección $z$ , el cuerpo de masa $m_1$ se encuentra a una distancia $x$ del origen y éste únicamente cuenta con impulso en la dirección $y$ . .	51
4.4. Variación del espectro de Lyapunov en función del tiempo en escala semi-log, con parámetros; $\alpha = 0.4$ , $\ell_z = 1.1$ y $\epsilon = 3.1$ . En esta gráfica se observa que los exponentes del espectro dejan de variar después de un tiempo mayor a $10^3$ . . . . .	52

- 4.5. Suma de los exponentes de Lyapunov, con parámetros;  $\alpha = 0.4$ ,  $\ell_z = 1.1$  y  $\epsilon = 3.1$ . En esta gráfica se observa que la suma de los exponentes de Lyapunov fluctúa cerca del cero, pues el sistema es Hamiltoniano y el espectro de Lyapunov es una medida de la tasa de cambio de espacio fase. . . . . 52
- 4.6. Variación del espectro de Lyapunov en función del tiempo en escala semi-log, con parámetros;  $\alpha = 0.4$ ,  $\ell_z = 1.1$  y  $\epsilon = 2.0$ . En esta gráfica se observa que los exponentes del espectro dejan de variar después de un tiempo mayor a  $10^3$ , pero diferencia de la Figura 4.4 todos los exponente tienden a cero. . . . . 53
- 4.7. Suma de los exponentes de Lyapunov, con parámetros;  $\alpha = 0.4$ ,  $\ell_z = 1.1$  y  $\epsilon = 2.0$ . En este caso se tiene un comportamiento análogo al que se observa en la Figura 4.5, ya que el sistema es Hamiltoniano. . . . . 53
- 4.8. Espectrograma para los exponentes más de grandes del espectro Lyapunov dada  $\alpha = 1.0$ ,  $\epsilon$  de 0 a 5 y  $\ell_z$  de 0.1 a 5. En este caso vemos que hay una región para la cual es sistema es sensible, esta región corresponde a los tonos que van de entre morado y rojo en el espectrograma. . . . . 54
- 4.9. Espectrograma para los exponentes más de grandes del espectro Lyapunov dada  $\alpha = 0.6$ ,  $\epsilon$  de 0 a 5 y  $\ell_z$  de 0.1 a 5. Aquí se observan regiones alternadas en la cuales tenemos exponentes cercano al negro, que corresponden a valores cercanos a cero, y exponentes cercanos al amarillo. . . . . 54
- 4.10. Espectrograma para los exponentes más de grandes del espectro Lyapunov dada  $\alpha = 0.5$ ,  $\epsilon$  de 0 a 5 y  $\ell_z$  de 0.1 a 5. Para este valor de  $\alpha$  se observa el mismo comportamiento de franjas negras y de color alternadas, por lo que estabilidad del sistema depende del valor de  $\epsilon$ . . . . . 55
- 4.11. Espectrograma para los exponentes más de grandes del espectro Lyapunov dada  $\alpha = 0.4$ ,  $\epsilon$  de 0 a 5 y  $\ell_z$  de 0.1 a 5. En este espectrograma se siguen teniendo franjas negras de y de color, pero a diferencia de los espectrogramas anteriores son dominantes sobre la negras, esto significa que el sistema es más sensible a las condiciones iniciales. . . . . 55
- 4.12. Espectrograma para los exponentes más de grandes del espectro Lyapunov dada  $\alpha = 0.1$ ,  $\epsilon$  de 0 a 5 y  $\ell_z$  de 0.1 a 5. En esta imagen se observan dos franjas negras, pero en la esquina superior izquierda también se observa una región que va del negro al morado. Por lo que para estos casos el sistema no es sensible a las condiciones iniciales. . . . . 56
- 4.13. Espectrograma para los exponentes más de grandes del espectro Lyapunov dada  $\alpha = 0.0$ ,  $\epsilon$  de 0 a 5 y  $\ell_z$  de 0.1 a 5. Para condiciones tales que la energía sea el mínimo del pozo de potencial,  $\alpha = 0$  todo el espectrograma es de color negro, por lo que el sistema no muestra dependencia sensible a las condiciones iniciales. . . . . 56
- 4.14. Plano  $\theta p_\theta$  para la sección de Poincaré. En este plano se observa un segmento de recta pues  $p_\theta$  es una constante de movimiento. . . . . 57
- 4.15. Plano  $z p_z$  para la sección de Poincaré. La cantidad de movimiento en la componente del sistema cuando cruza el plano  $xy$ , un valor cercano a 0 a aproximadamente 0.85. . . 57

- 4.16. Sección de Poincaré para el plano  $\rho p_\rho$  con  $\epsilon = 0.0$  y  $\alpha = 0.4$ . En el lado derecho se observa que la sección de Poincaré en un punto, por lo que la órbita en este caso es periódica, del lado izquierdo se muestra un acercamiento en el que se puede apreciar el error numérico. . . . . 58
- 4.17. Sección de Poincaré para el plano  $\rho p_\rho$  con  $\epsilon = 0.5$  y  $\alpha = 0.4$ . Del lado derecho se observa que la sección de Poincaré está formada por cinco regiones que son recorridas por el flujo, del lado izquierdo se muestra un acercamiento en el que se puede apreciar la estructura de la sección. . . . . 58
- 4.18. Sección de Poincaré para el plano  $\rho p_\rho$  con  $\epsilon = 1.5$  y  $\alpha = 0.4$ . En esta imagen se observa que la sección de Poincaré comienza a llenar un región del plano fase  $\rho p_\rho$ , sin embargo se observan cuatro regiones sin puntos, por lo que no se puede afirmar que el sistema sea transitivo por lo tanto no es caótico. . . . . 59
- 4.19. Sección de Poincaré para el plano  $\rho p_\rho$  con  $\epsilon = 1.9$  y  $\alpha = 0.4$ . En este caso la masa aumentó pero la sección de Poincaré ya no es densa, y sólo recorre una curva del plano fase  $\rho p_\rho$ . . . . . 59
- 4.20. Sección de Poincaré para el plano  $\rho p_\rho$  con  $\epsilon = 4.0$  y  $\alpha = 0.4$ . En esta sección se observa que nuevamente se comienza a llenar una zona en el plano fase  $\rho p_\rho$ , pero sin cubrirla toda, por tanto que para estas condiciones el sistema es topológicamente transitivo. . . 60
- 4.21. Sección de Poincaré para el plano  $\rho p_\rho$  con  $\epsilon = 5.1$  y  $\alpha = 0.4$ . En esta imagen se observa un comportamiento similar a la Figura 4.20, sin embargo en este caso aparecen más regiones sin puntos. . . . . 60
- 5.1. Error relativo en la energía normalizado por el epsilon de la máquina, el cual para un tiempo de integración de  $2\pi \times 10^3$  es menor que  $5 \times 10^{-12}$ . . . . . 62
- 5.2. **Taylor vs Vern7**, en esta gráfica se comparan el integrador de **Taylor** con **Vern7**, en la cual se observa que la energía con **Vern7** desciende muy rápido comparado con **Taylor**. 63
- 5.3. Tiempo de integración para el exponente de Lyapunov. En la región naranja se observa que los exponentes del espectro fluctúan considerablemente, en la magenta los exponentes no fluctúan tanto, no obstante lo siguen haciendo y por último en la región azul los exponentes se estabilizan. . . . . 64



## Agradecimientos

Agradezco a mi tutor y director de tesis, el Dr. Ricardo Méndez Fragoso, por todo el apoyo antes, durante y muy seguramente después de la maestría, su guía y sus consejos que no sólo fueron sobre este trabajo de investigación, sino que han trascendido de manera personal. ¡Gracias por todo Rich!

A los integrantes del jurado: Dr. Luis Benet Fernández, Dr. Renato Carlos Calleja Castillo, Dr. Ricardo Méndez Fragoso, Dr. Pedro Eduardo Miramontes Vidal y Dr. Ricardo Atahualpa Solórzano Kraemer, por el tiempo que dedicaron a la revisión de mi tesis y por sus valiosos comentarios y sugerencias.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por otorgarme una beca para la realización de mis estudios de maestría.

A la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), el Posgrado en Ciencias Matemáticas de la UNAM, la Facultad de Ciencias (FC) de la UNAM y el Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y Sistemas (IIMAS) de la UNAM, por todo el apoyo que me han brindado. En particular, agradezco al Programa de Apoyo a los Estudios de Posgrado y a el proyecto *sistemas cuánticos confinados lineales y no lineales con aplicaciones en física atómica* PAPIIT IN-114518 por el apoyo económico para llevar a cabo la redacción de esta tesis. Así mismo también agradezco el apoyo del proyecto PAPIME PE 112919 para elaborar algunas aplicaciones educativas de este trabajo.

A los profesores del PCM por sus excelentes clases y su apoyo. En particular agradezco: al Dr. Ricardo Méndez Fragoso, Dr. Luis García Naranjo, al Dr. Julián Bravo Castellero y al Dr. Luis Benet Fernández, quienes han seguido cultivando en mí de manera extra-clase la pasión por la mecánica, la geometría, las ecuaciones diferenciales, los métodos numéricos y su relación con todas las áreas de la matemática y la física al grado que han sido y estoy seguro que seguirán siendo los pilares más fuertes en mi formación.

A Ximena de la Luz Contreras Méndez, por acompañarme en este proceso y hacerlo aún más lindo de lo que ya era. ¡Gracias bonita!

Finalmente, agradezco a mis amigos Miguel Angel Guadarrama Ayala, José Antonio Villa Morales y José Ángel Castellanos Reyes por su amistad y apoyo durante la maestría.



## Resumen

En este trabajo de tesis se calcula el exponente de Lyapunov para un sistema de tres grados de libertad con restricciones holonómicas formado por dos partículas con masas  $m_1$  y  $m_2$ , que interactúan mediante el potencial gravitacional. Una característica importante de este sistema es la super-integrabilidad, la cual está asociada a una simetría entre las masas, de hecho bajo esta condición el sistema se convierte en el problema de Kepler. Sin embargo, cuando se pierde dicha condición el sistema ni siquiera es integrable, pues sólo persisten la componente  $z$  del momento angular total y la función hamiltoniana como integrales de movimiento, y de ahí el nombre de Problema de Kepler Asimétrico (PKA). Uno de los resultados más importantes de este trabajo es que se generó en un mapa de calor, muy parecido a un espectrograma con el exponente de Lyapunov más grande correspondiente a un conjunto de condiciones iniciales representativas, y con ello se obtuvieron las regiones de estabilidad e inestabilidad.



# Introducción y Antecedentes

El estudio de la dinámica de diferentes sistemas proporciona entendimiento sobre el origen de su comportamiento y además nos permite identificar características universales entre diferentes tipos de fenómenos que se presentan en la naturaleza. En el presente trabajo se presenta una caracterización más rigurosa de un sistema con restricciones y una interacción gravitacional que comencé al final de mi licenciatura, y que permitió la escritura de mi tesis de licenciatura [1]. Las contribuciones en este documento van encaminadas en fortalecer las herramientas y argumentos que permitan establecer un comportamiento mucho más preciso del Problema de Kepler Asimétrico (PKA), mismo que se definirá en las secciones subsecuentes. Comenzaremos con enunciar algunas definiciones útiles y teoremas importantes que permitan poner en contexto los argumentos que se verán en los capítulos siguientes. A lo largo de este trabajo se plantea el sistema PKA y la forma de caracterizarlo con herramientas que se ven en algunos cursos de licenciatura y principalmente en el posgrado.

## 1.1. Definiciones previas

A continuación presentaremos conceptos fundamentales para este trabajo, los cuales fueron tomados de la referencia [2].

**Definición 1.1.1 (Conjunto invariante)** *Un conjunto  $\Lambda$  es invariante bajo una regla  $\varphi_t$  si  $\varphi_t(\Lambda) = \Lambda$  para todo  $t$ ; es decir, para cada  $x \in \Lambda$ ,  $\varphi_t(x) \in \Lambda$  para cualquier  $t$ .*

**Definición 1.1.2 (Transitivo)** *Un flujo  $\varphi$  es topológicamente transitivo en un conjunto invariante  $X$  si para cada par de conjuntos no vacíos,  $U, V \subset X$  existe  $t > 0$  tal que  $\varphi_t(U) \cap V \neq \emptyset$ .*

**Definición 1.1.3 (Sensible de las condiciones iniciales)** *Un flujo  $\varphi$  muestra una dependencia sensible en un conjunto invariante  $X$  si existe un  $r$  fijo tal que para cada  $x \in X$  y para cualquier  $\epsilon > 0$ ,  $y \in B_\epsilon(x) \cap X$ , tal que  $|\varphi_t(x) - \varphi_t(y)| > r$  para algún  $t \geq 0$ .*

**Definición 1.1.4 (Flujo caótico)** *Un flujo  $\varphi$  es caótico en un conjunto invariante compacto  $X$  si  $\varphi$  es transitivo y muestra una dependencia sensible sobre  $X$ .*

La **definición 1.1.4** fue propuesta por J. Auslander, y J.A. Yorke, en 1980, la cual se puede encontrar en [3], sin embargo no es la única definición otra definición muy usada es la de Devaney propuesta en 1986 ver [4], sin embargo ambas incluyen elementos comparables a la transitividad topológica y la dependencia sensible. Por lo que para fines de este trabajo que, es el cálculo de exponentes de Lyapunov emplearemos la definición de Auslander y Yorke. En este trabajo diremos que un sistema es caótico si el flujo asociado es un flujo caótico.

**Definición 1.1.5 (Integral de movimiento)** *Una función  $\Phi$  es una integral de movimiento de un sistema Hamiltoniano  $H$  si su corchete de Poisson con  $H$  es nulo.*

$$\{H, \Phi\} = 0 \quad (1.1)$$

*También se dice que  $H$  y  $\Phi$  están en involución.*

**Definición 1.1.6 (Independencia funcional)** *Sean  $\Phi_1, \dots, \Phi_K$  funciones de clase  $C^\infty$  son funcionalmente independientes si las diferenciales  $d\Phi_1, \dots, d\Phi_K$  son linealmente independientes.*

**Definición 1.1.7 (Sistema super-integrable)** *Un sistema Hamiltoniano es super-integrable si posee más integrales de movimiento que grados de libertad y éstas son funcionalmente independientes.*

**Teorema 1.1.1** *Si un sistema Hamiltoniano posee;  $I_1, I_2, \dots, I_N$ .  $N$  integrales de movimiento en involución, entonces el flujo se encuentra en una familia anidada de toros  $N$ -dimensionales, además existen coordenadas angulares  $\theta$  tal que las ecuaciones de movimiento se pueden escribir como*

$$I' = I, \quad (1.2a)$$

$$\theta' = \theta + \Omega(I), \quad (1.2b)$$

El **teorema 1.1.1** y su prueba se pueden encontrar en [5], una consecuencia inmediata de este resultado es que si el sistema Hamiltoniano tiene  $N$  de grados de libertad y  $N$  integrales de movimiento, la dinámica del sistema se restringe a la superficie de un toro de dimensión  $N$ , que es conocido como *toro invariante*.

## 1.2. Planteamiento general del problema

El problema de Kepler, el cual presentaremos con más detalle es la sección 2.1, es un caso particular del problema de dos cuerpos, en el que éstos interactúan por medio de una fuerza central que varía en intensidad inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ambos.

Este sistema es por excelencia un referente en la mecánica celeste debido a la importancia y utilidad de la solución. Ejemplo de ello es el *problema de Sitnikov* [6] que ha permitido avances en

el estudio del problema de los tres cuerpos, el cual está formado por un sistema binario, es decir, un problema de Kepler y un tercer cuerpo suficientemente pequeño que no afecta la dinámica del sistema binario, pero sí en el movimiento del tercer cuerpo. Otro ejemplo se encuentra en el estudio de sistemas tipo Kepler con perturbación, en los cuales se aprovecha la propiedad de super-integrabilidad, y con ello se aborda el estudio de dichos sistemas mediante teoría de perturbaciones. El problema de Kepler también cuenta con su análogo cuántico, un ejemplo de esto se puede ver en [7], donde muestran el que el espectro conjunto del operador Hamiltoniano para el átomo de Hidrogeno y las componentes  $z$  de los vectores cuánticos de momento angular y Laplace-Runge-Lenz obtenidos de la separación en coordenadas esferoidales prolatas tienen una monodromía cuántica para energías suficientemente cercanas al umbral de ionización. Sin lugar a dudas el problema de Kepler es un pilar en la teoría de la mecánica celeste y en otras disciplinas.

En esta tesis concluimos un trabajo que se comenzó como tesis de licenciatura [1] en la cual consideramos un sistema Hamiltoniano formado por dos cuerpos, el cual bajo cierta condición obtenemos el problema de Kepler. Al no cumplirse dicha condición el sistema deja de ser el de Kepler por lo que pierde la propiedad de super-integrabilidad para incluso no ser integrable, de ahí el nombre de *Problema de Kepler Asimétrico*. Además en el trabajo ya mencionado conjeturamos que dicho sistema podría tener un comportamiento caótico, para lo cual se necesita el cálculo del espectro de *Lyapunov*, por lo que en esta tesis realizaremos dicho cálculo, además de que se realizan cálculos con mayor eficiencia y se hace una mejor caracterización del sistema.

Definimos el Problema de Kepler Asimétrico como un sistema de dos cuerpos, como se observa en la Figura 1.1. El primero de masa  $m_1$  con la restricción de sólo moverse en el plano  $xy$ , esto es  $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, 0)$  y el segundo de masa  $m_2$  que se mueve únicamente en eje  $y$   $\vec{r}_2 = (0, 0, z_2)$ . Por lo que la Lagrangiana es:

$$L = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{z}_2^2 + \frac{Gm_1m_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_2^2}}, \quad (1.3)$$

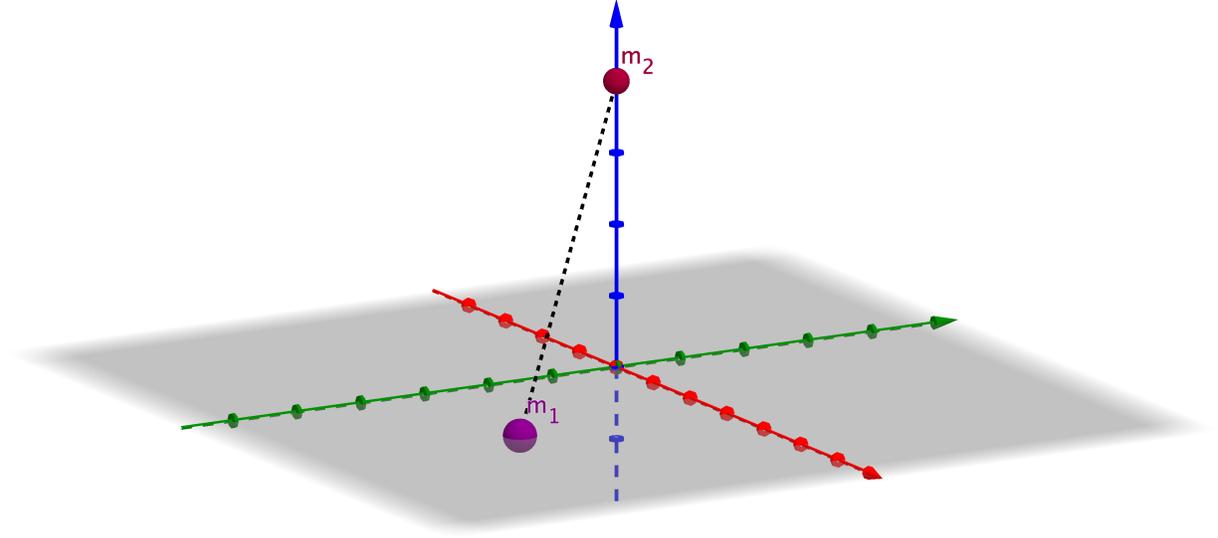
donde  $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ , y es claro que el sistema tiene tres grados de libertad. Si omitimos los subíndices en las coordenadas y velocidades, debido a las restricciones consideradas, tenemos:

$$\mathbb{L} = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{z}^2 + \frac{Gm_1m_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (1.4)$$

A continuación mostramos brevemente lo realizado previamente en [1], así como algunos los resultados obtenidos.

### 1.3. Antecedentes

Lo que hicimos en [1] fue reescalar el tiempo en la Ec.(1.4) por  $t = \tilde{t}\sqrt{Gm_1}$ , con lo cual se obtuvo un reescalamiento en las velocidades, es decir,  $\dot{q} = \dot{q}\sqrt{Gm_1}$ . Enseguida definimos el parámetro  $\epsilon = \frac{m_2}{m_1}$ , mismo que permitió escribir a la Lagrangiana como:



**Figura 1.1:** El cuerpo de masa  $m_1$  tiene la restricción de moverse en el plano  $xy$ , y el de masa  $m_2$  tiene la restricción de moverse en el eje  $z$ , además la interacción entre ellos es la gravitacional.

$$\mathbb{L} = Gm_1^2 \left( \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\epsilon\dot{z}^2 + \frac{\epsilon}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right).$$

Y dividiendo por  $Gm_1^2$  la Lagrangiana tomó la forma:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \epsilon\dot{z}^2) + \frac{\epsilon}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (1.5)$$

de la cual mediante los respectivos cambios de coordenadas y *transformaciones de Legendre* se obtuvieron las siguientes funciones hamiltonianas en coordenadas cartesianas, esféricas y cilíndricas:

$$H_{car} = \frac{1}{2} \left( p_x^2 + p_y^2 + \frac{p_z^2}{\epsilon} \right) - \frac{\epsilon}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (1.6)$$

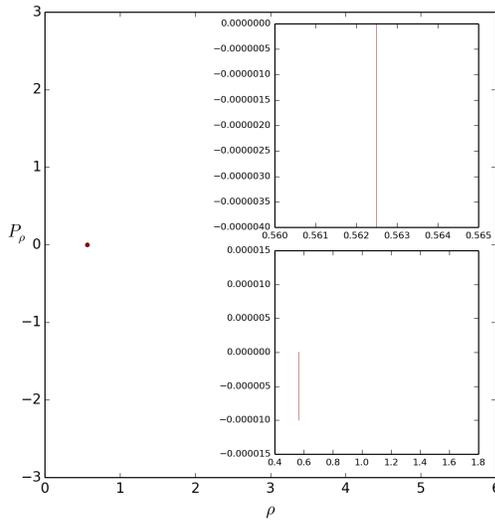
$$H_{cyl} = \frac{1}{2} \left( p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + \frac{p_z^2}{\epsilon} \right) - \frac{\epsilon}{\sqrt{r^2 + z^2}}. \quad (1.7)$$

$$H_{sph} = \frac{1}{2\epsilon} \left( p_\rho \cos \theta - \frac{p_\theta \sin \theta}{\rho} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( p_\rho \sin \theta + \frac{p_\theta \cos \theta}{\rho} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{p_\phi^2}{\rho^2 \sin^2 \theta} - \frac{\epsilon}{\rho}. \quad (1.8)$$

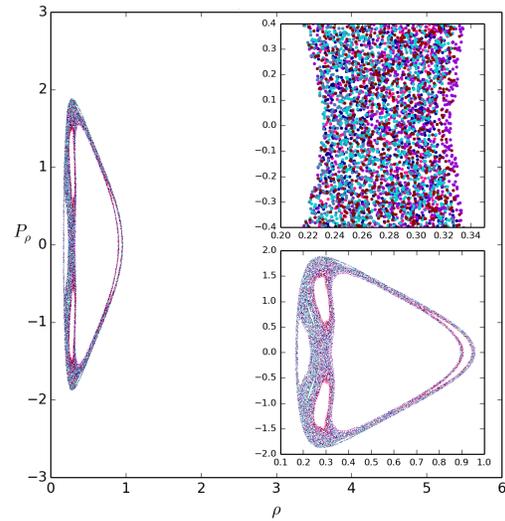
Observamos que para el caso en el que  $\epsilon = 1$ ,  $m_1 = m_2$ , la función hamiltoniana que se obtiene

es la del problema de Kepler. A partir de este hecho comenzamos el estudio del problema de Kepler Asimétrico mediante experimentos numéricos para distintos valores de  $\epsilon$  con los cuales se obtuvieron secciones de Poincaré, Figura 1.2, en coordenadas cilíndricas, ya que en éstas las integrales de movimiento aparecen de manera natural. Las secciones se realizaron cuando la partícula de masa  $m_2$  cruzaba el plano  $xy$ , es decir  $z = 0$ , con lo que conjeturamos la existencia de puntos fijos y con el espectro de potencias la existencia de caos. Además con las secciones de Poincaré obtenidas planteamos la posible existencia y ruptura de toros invariantes. En las siguientes figuras se muestran las secciones Poincaré para el plano  $\rho p_\rho$ , pues el plano  $z p_z$  no hay información relevante debido a que sobre la coordenada  $z$  se realiza la sección de Poincaré, y en el plano  $\phi p_\phi$  tampoco tenemos información relevante pues  $p_\phi$  es constante de movimiento por lo que la dinámica está representada en  $\rho p_\rho$ .

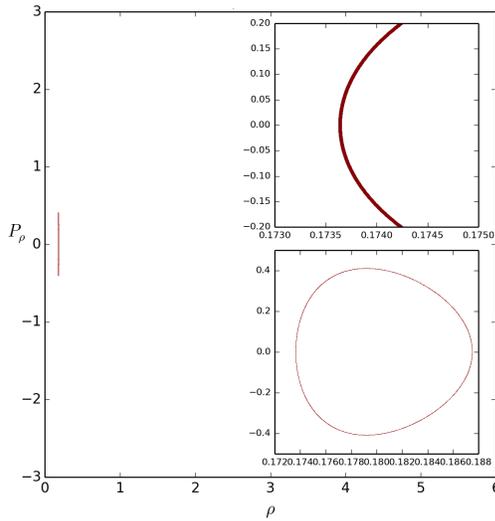
De la Figura 1.2 conjeturamos la existencia de puntos fijos tal y como se muestran en (b) y (d). Además de la persistencia de toros invariantes como en (c). También durante nuestro estudio de licenciatura hicimos el cálculo numérico del espectro de potencias para la coordenada  $z$ , esto para obtener información sobre la periodicidad del sistema. Las gráficas en la Figura 1.3 corresponden a las secciones mostradas anteriormente. La integración numérica, realizada con `odeint`, es muy sensible al parámetro  $\epsilon = \frac{m_2}{m_1}$ . Por lo anterior, y para mejorar el estudio, en este trabajo consideramos  $\epsilon$  como  $m_2 = m_1(\epsilon + 1)$ , y la integración numérica se hace con el método de Taylor.



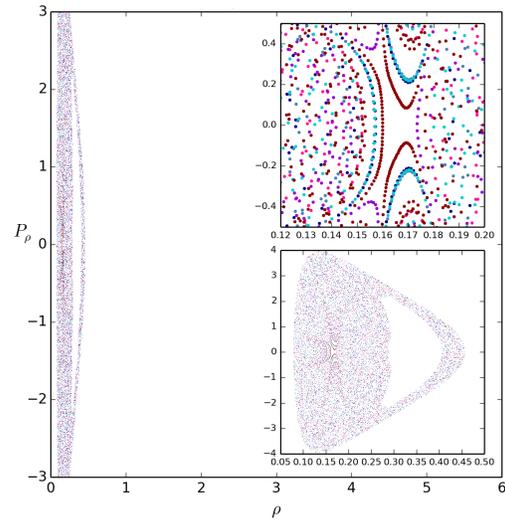
(a) Sección de Poincaré para  $\epsilon = 1$ , la sección está formada por un punto, por lo que la órbita del sistema es periódica.



(b) Sección de Poincaré para  $\epsilon = 2$ , en esta imagen observamos que la órbita recorre un conjunto del plano fase  $\rho p_\rho$  pero no lo hace densamente pues existen regiones sin puntos, por lo que conjeturamos la persistencia de un toro invariante.

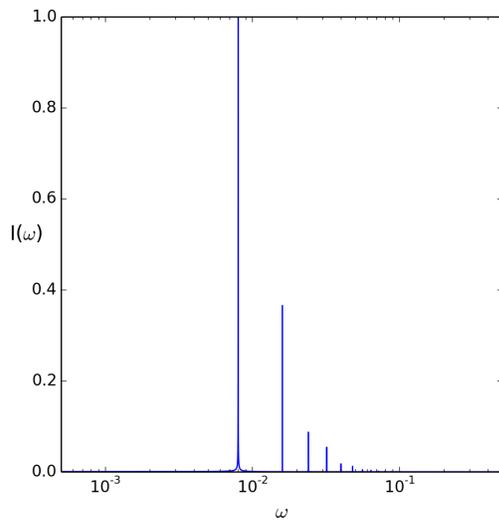


(c) Sección de Poincaré para  $\epsilon = 3$ , observamos que la órbita recorre densamente una curva del plano fase  $\rho p_\rho$ , lo que nos hace suponer que en este caso el sistema es cuasi-periódico.

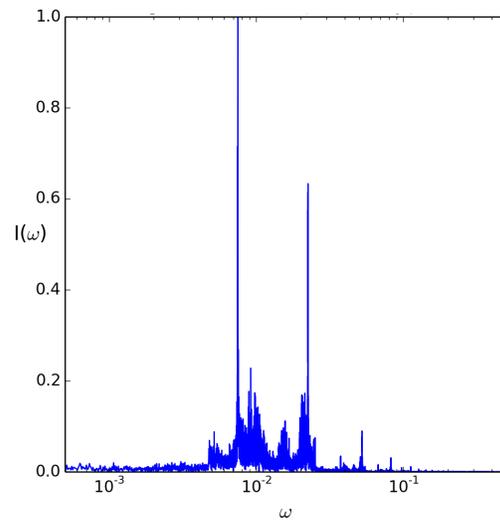


(d) Sección de Poincaré para  $\epsilon = 4.2$ , en esta imagen vemos que poco a poco se comienza a llenar densamente un región del plano fase, en la que se observa una punto silla, además de una región sin puntos.

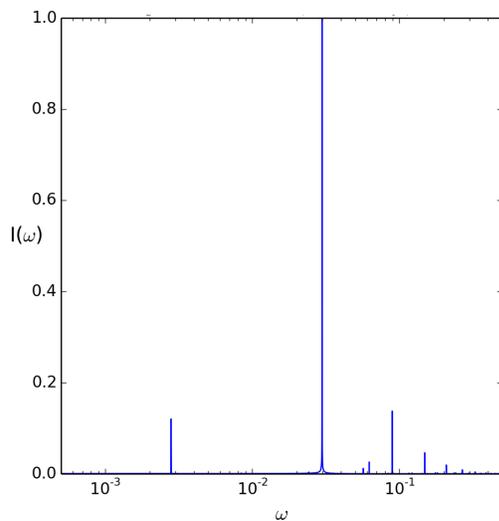
**Figura 1.2:** Secciones de Poincaré con  $\epsilon = \frac{m_2}{m_1}$ , en todas la figuras del lado derecho se muestra un acercamiento de la sección donde se resalta algún comportamiento interesante en la sección.



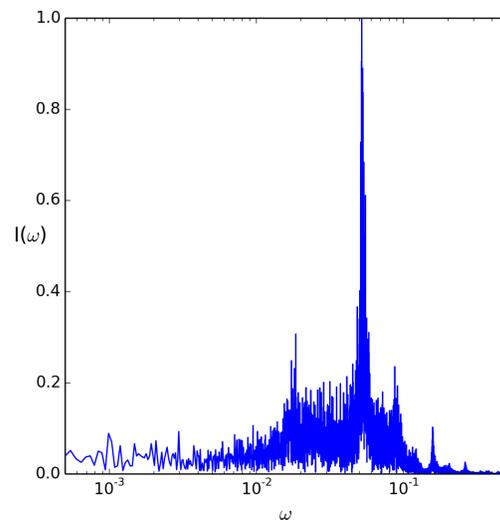
(a) Espectro de potencias para  $\epsilon = 1$ , en esta imagen tenemos una frecuencia y sus armónicos.



(b) Espectro de potencias para  $\epsilon = 2$ , aquí el espectro muestra muchas frecuencias y dos parecen ser principales.



(c) Espectro de potencias para  $\epsilon = 3$ , para este caso vemos dos frecuencias principales y sus armónicos.



(d) Espectro de potencias para  $\epsilon = 4.2$ , el espectro en este caso es más denso, pero parece haber una frecuencia que persiste.

**Figura 1.3:** Espectro de potencia para  $\epsilon = \frac{m_2}{m_1}$ .

## 1.4. El problema desde otra perspectiva

De nuevo comencemos por considerar la ecuación (1.4) y procedamos de manera análoga como en la sección anterior, pero en este caso tomemos  $m_2 = m_1(\epsilon + 1)$ , esto es:

$$\mathbb{L} = m_1 \left[ \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(\epsilon + 1)(\dot{z}^2) + \frac{Gm_1(\epsilon + 1)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right]. \quad (1.9)$$

Ahora reescalando el tiempo por  $t = \tilde{t}\sqrt{Gm_1}$ , la función lagrangiana es:

$$\mathbb{L} = Gm_1^2 \left[ \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(\epsilon + 1)(\dot{z}^2) + \frac{(\epsilon + 1)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right]. \quad (1.10)$$

Si  $L = \frac{\mathbb{L}}{Gm_1^2}$ , entonces

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(\epsilon + 1)(\dot{z}^2) + \frac{(\epsilon + 1)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (1.11)$$

Con lo que el Hamiltoniano es:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2} \frac{p_z^2}{(\epsilon + 1)} - \frac{(\epsilon + 1)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (1.12)$$

y las ecuaciones de Hamilton son;

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x, & \dot{p}_x &= -\frac{x(\epsilon + 1)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ \dot{y} &= p_y, & \dot{p}_y &= -\frac{y(\epsilon + 1)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ \dot{z} &= \frac{p_z}{\epsilon + 1}, & \dot{p}_z &= -\frac{z(\epsilon + 1)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

La solución al conjunto anterior de ecuaciones nos proporciona la dinámica completa del sistema, las cuales podemos integrar de manera numérica, pero antes de hacer esto, indagemos qué pasa en otro sistema coordenado, en particular cilíndricas y esféricas.

Si aplicamos el cambio de coordenadas a cilíndricas a la Ec.(1.11), obtenemos:

$$L_{cyl} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}(\epsilon + 1)(\dot{z}^2) + \frac{(\epsilon + 1)}{\sqrt{r^2 + z^2}}. \quad (1.13)$$

En consecuencia la función hamiltoniana en estas coordenadas es:

$$H_{cyl} = \frac{1}{2} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{p_z^2}{\epsilon + 1} - \frac{\epsilon + 1}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \quad (1.14)$$

y las ecuaciones de Hamilton-Lagrange respectivas son:

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= p_r, & \dot{p}_r &= \frac{p_\theta^2}{r^3} - \frac{r(\epsilon + 1)}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \\
\dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{r^2}, & \dot{p}_\theta &= 0 \\
\dot{z} &= \frac{p_z}{\epsilon + 1}, & \dot{p}_z &= -\frac{z(\epsilon + 1)}{(r^2 + z^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

De las ecuaciones anteriores podemos encontrar una relación entre los momentos en coordenadas cilíndricas y cartesianas, es decir:

$$\begin{aligned}
p_\theta &= r^2 \dot{\theta} = (x^2 + y^2) \frac{d}{dt} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = xy - yx = xp_y - yp_x \\
p_r &= \dot{r} = \frac{d}{dt} \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right) = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{xp_x + yp_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}
\end{aligned}$$

Si escribimos la función lagrangiana del sistema en coordenadas esféricas tenemos:

$$\begin{aligned}
L_{sph} &= \frac{1}{2} \left( \dot{\rho}^2 \sin^2(\theta) + \rho^2 \dot{\theta}^2 \cos^2(\theta) + \rho^2 \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) + 2\rho\dot{\theta}\dot{\phi} \sin(\theta) \cos(\theta) \right) \\
&+ \frac{1}{2}(\epsilon + 1) \left( \dot{\rho}^2 \cos^2(\theta) + \rho^2 \dot{\theta}^2 \sin^2(\theta) - 2\rho\dot{\theta}\dot{\phi} \sin(\theta) \cos(\theta) \right) + \frac{(\epsilon + 1)}{\rho}.
\end{aligned}$$

Al aplicar la respectiva transformación de Legendre a la función hamiltoniana en coordenadas esféricas se tiene:

$$H_{sph} = \frac{1}{2} \left( p_\rho^2 + \frac{p_\theta^2}{\rho^2} + \frac{p_\phi^2}{\rho^2 \sin^2 \theta} \right) - \frac{1}{\rho} - \frac{\epsilon}{\epsilon + 1} \left[ \frac{1}{2} \left( p_\rho \cos \theta - \frac{p_\theta \sin \theta}{\rho} \right)^2 + \frac{\epsilon + 1}{\rho} \right]. \quad (1.15)$$

Reacomodando el último término tenemos:

$$H_{sph} = \frac{1}{2} \left( p_\rho^2 + \frac{p_\theta^2}{\rho^2} + \frac{p_\phi^2}{\rho^2 \sin^2 \theta} \right) - \frac{1}{\rho} - \frac{\epsilon}{2(\epsilon + 1)} \left( p_\rho \cos \theta - \frac{p_\theta \sin \theta}{\rho} \right)^2 - \frac{\epsilon}{\rho}, \quad (1.16)$$

de donde las ecuaciones de Hamilton son:

$$\begin{aligned}
\dot{\rho} &= \frac{\epsilon p_\rho \rho \sin^2 \theta + \epsilon p_\theta \cos \theta \sin \theta + p_\rho \rho}{(\epsilon + 1)\rho} \\
\dot{p}_\rho &= -\frac{\epsilon p_\theta^2 \sin^4 \theta - \epsilon p_\rho p_\theta \rho \cos \theta \sin^3 \theta + ((\epsilon^2 + 2\epsilon + 1)r - (\epsilon + 1)p_\theta^2) \sin^2 \theta - (\epsilon + 1)p_\phi^2}{(2\epsilon + 2)\rho^3 \sin^2(\theta)} \\
\dot{\theta} &= \frac{\epsilon p_\rho \rho \cos \theta \sin \theta - \epsilon p_\theta \sin^2 \theta + (\epsilon + 1)p_\theta}{(\epsilon + 1)\rho} \\
\dot{p}_\theta &= \frac{\epsilon p_\rho p_\theta \rho \sin^5 \theta + (\epsilon p_\theta^2 - \epsilon p_\rho^2 \rho^2) \cos \theta \sin^4 \theta - \epsilon p_\rho p_\theta \rho \cos^2 \theta \sin^3 \theta + (\epsilon + 1)p_\phi^2 \cos \theta}{(\epsilon + 1)\rho^2 \sin^3 \theta} \\
\dot{\phi} &= \frac{p_\phi}{\rho^2 \sin^2 \theta} \\
\dot{p}_\phi &= 0
\end{aligned}$$

Del conjunto anterior de ecuaciones observamos que el momento  $p_\phi$  es una integral de movimiento y esta integral de movimiento es justo la componente  $z$  del momento angular, por lo que podemos concluir que la dinámica del sistema está contenida en un plano. También es importante notar que al menos tenemos dos integrales de movimiento y éstas son la función hamiltoniana y  $p_\phi$ , más adelante mostraremos que para  $\epsilon \neq 0$  sólo existen estas dos.

Con lo realizado anteriormente tenemos todo listo para comenzar el análisis del Problema de Kepler Asimétrico. Para ello consideremos  $\epsilon = 0$ , en la Ec.(1.16)

$$H_{sph} = \frac{1}{2} \left( p_\rho^2 + \frac{p_\theta^2}{\rho^2} + \frac{p_\phi^2}{\rho^2 \sin^2 \theta} \right) - \frac{1}{\rho}, \quad (1.17)$$

con lo que el Hamiltoniano resultante es el del problema de Kepler<sup>1</sup>. Y partiendo de este hecho en el siguiente capítulo revisaremos brevemente características importantes, destacando la super-integrabilidad del Problema de Kepler.

## 1.5. Contenido de este trabajo

El objetivo de este trabajo es determinar bajo qué condiciones el Problema de Kepler Asimétrico es sensible a las condiciones iniciales. En el segundo capítulo de la tesis escribimos la función hamiltoniana en variables de ángulo-acción y durante este procedimiento obtuvimos la transformación canónica de coordenadas esféricas a coordenadas de ángulo-acción, que en este caso son conocidas como coordenadas de Delaunay las cuales describen el sistemas en términos de los elementos orbitales. La intención de esto es que la función hamiltoniana de PKA sea la suma del problema de Kepler y un término perturbado, pero al realizar esto se obtiene es una expresión complicada para dicho Hamiltoniano. Además que resulta impráctico obtener soluciones a partir de ella. Sin embargo cómo trabajo a futuro podemos abordar el estudio de PKA desde la teoría de perturbaciones con otro

<sup>1</sup>En el siguiente capítulo mostraremos que efectivamente esta es la función Hamiltoniana del problema de Kepler.

enfoque que permita entender mejor el comportamiento cerca del caso super-integrable.

Debido a que nos interesa determinar cuando PKA es sensible a las condiciones iniciales, en la sección 3.3 discutimos brevemente como calcular el espectro de Lyapunov de manera numérica, además en la sección 3.1 se hace una breve introducción al método de integración de Taylor, pues de este último obtendremos el flujo de manera numérica para el cálculo del espectro de Lyapunov. En el capítulo 4 presentamos nuestros resultados del espectro de Lyapunov para un conjunto de condiciones iniciales que construimos en función de las dos cantidades de movimiento que posee el sistema y del parámetro  $\epsilon$ . Estos resultados se graficaron en un mapa de calor con el exponente de Lyapunov más grande para un cierto conjunto de condiciones iniciales y diferentes valores de  $\epsilon$ . Por último al final de la tesis en el capítulo 5 discutimos dichos mapas de calor que nos proporcionan información de cuando el sistema es caótico.



## El Problema de Kepler en contexto de variables de ángulo acción

### 2.1. El problema de Kepler en el espacio

Usualmente cuando se estudia el problema de Kepler este se aborda en un plano, esto debido a que se conserva la componente  $z$  del momento angular, lo cual ya se mencionó en la sección anterior y que se mostrará en esta sección. Pero una descripción más interesante es el estudio de dicho problema en el espacio.

El problema de Kepler describe la dinámica de dos cuerpos,  $m_1$  y  $m_2$ , sujetos al potencial gravitacional, cuyo Lagrangiano es:

$$L = \frac{1}{2}m_1|\dot{r}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\dot{r}_2|^2 + \frac{Gm_1m_2}{|r_2 - r_1|}. \quad (2.1)$$

Al escribirlo en coordenadas de centro de masa,  $R = \frac{m_1r_1 + m_2r_2}{m_1 + m_2}$  y coordenadas relativas  $r = r_2 - r_1$ , el Lagrangiano toma la forma:

$$L = \frac{1}{2} \frac{m_1}{M^2} \left( M^2 |\dot{R}|^2 + m_2^2 |\dot{r}^2| \right) + \frac{1}{2} \frac{m_2}{M^2} \left( M^2 |\dot{R}|^2 + m_1^2 |\dot{r}^2| \right) + \frac{Gm_1m_2}{|r|}, \quad (2.2)$$

donde  $M = m_1 + m_2$ , y de las ecuaciones de Euler-Lagrange observamos que  $M\dot{R} = cte$ , además en algún sistema de referencial inercial esta constante es 0, por lo que sin pérdida de generalidad tenemos:

$$L = \frac{1}{2}\mu|\dot{r}|^2 + \frac{\kappa}{|r|} \quad (2.3)$$

con  $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$ , la masa reducida y  $\kappa = Gm_1m_2$ . De la ecuación anterior podemos obtener la respectiva función hamiltoniana, es decir:

$$H = \frac{1}{2\mu} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{\kappa}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (2.4)$$

observamos que cuando tomamos  $\mu = \kappa = 1$  en la ecuación anterior coincide con la Ec. (1.12) con  $\epsilon = 0$ . Recordemos que el vector de momento angular es:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \\ &= (\ell_x, \ell_y, \ell_z) \\ &= (p_z y - p_y z, p_x z - p_z x, p_y x - p_x y) \end{aligned} \quad (2.5)$$

y el vector de Laplace-Runge-Lenz se define como:

$$\begin{aligned} A &= \vec{p} \times \vec{L} - \hat{r} \\ &= (\mathcal{A}_x, \mathcal{A}_y, \mathcal{A}_z) \\ &= \left( L_z p_y - p_z L_y - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, L_x p_z - p_x L_z - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, L_y p_x - L_x p_y - \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Como hemos mencionado ya en repetidas ocasiones el problema de Kepler es super-integrable, ya que el corchete de Poisson de la función hamiltoniana con las componentes del vector de momento angular y las componentes del vector de *Laplace-Runge-Lenz* es cero, esto es:

$$\begin{aligned} \{H, \ell_x\} &= 0 & \{H, \mathcal{A}_x\} &= 0 \\ \{H, \ell_y\} &= 0 & \{H, \mathcal{A}_y\} &= 0 \\ \{H, \ell_z\} &= 0 & \{H, \mathcal{A}_z\} &= 0 \end{aligned}$$

Por lo que tenemos siete integrales de movimiento pero sólo cinco son funcionalmente independientes, pues el rango de la matriz formada por las diferenciales de las integrales de movimiento es cinco. Estos cálculos se hicieron con *Maxima*, un sistema de álgebra computacional. A continuación se muestra la matriz.

$$\begin{bmatrix} \frac{x}{|\vec{x}|^3} & \frac{y}{|\vec{x}|^3} & \frac{z}{|\vec{x}|^3} & p_x & p_y & p_z \\ 0 & p_z & -p_y & 0 & -z & y \\ -p_z & 0 & p_x & z & 0 & -x \\ p_y & -p_x & 0 & -y & x & 0 \\ p_y^2 + p_z^2 - \frac{y^2 + z^2}{|\vec{x}|^3} & \frac{xy}{|\vec{x}|^3} - p_x p_y & \frac{xz}{|\vec{x}|^3} - p_x p_z & -(p_y y + p_z z) & 2p_y x - p_x y & 2p_z x - p_x z \\ \frac{xy}{|\vec{x}|^3} - p_x p_y & p_x^2 + p_z^2 - \frac{x^2 + z^2}{|\vec{x}|^3} & \frac{yz}{|\vec{x}|^3} - p_y p_z & 2p_x y + p_y x & -(p_x x + p_z z) & 2p_z y - p_y z \\ \frac{xz}{|\vec{x}|^3} - p_x p_z & \frac{yz}{|\vec{x}|^3} - p_y p_z & p_x^2 + p_y^2 - \frac{x^2 + y^2}{|\vec{x}|^3} & 2p_x z + p_z x & 2p_y z + p_z y & -(p_y y + p_x x) \end{bmatrix}$$

donde  $|\vec{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Una posibilidad de elegir estas constantes de movimiento, pero no la única es: La función hamiltoniana, las tres componentes del vector de momento angular y la componente  $z$  del vector de Laplace-Runge-Lenz, por lo que el problema de Kepler es super-integrable, pues se tienen cinco integrales de movimiento funcionalmente independientes y tres grados de libertad. Además vemos que se cumplen las siguientes relaciones del paréntesis de Poisson con  $L$  y  $\mathcal{A}$ :

$$\{\ell_i, \ell_j\} = \epsilon_{ijk} \ell_k \quad (2.7)$$

$$\{\mathcal{A}_i, \ell_j\} = \epsilon_{ijk} \mathcal{A}_k \quad (2.8)$$

$$\{\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j\} = -2\epsilon_{ijk} \ell_k H \quad (2.9)$$

con  $\epsilon_{ijk}$  el símbolo de *Levi-Civita*. Además las ecuaciones (2.7), (2.8) y (2.9) generan el álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)^1$ , tal y como se muestra en la referencia [8].

Hasta este momento hemos abordado el problema de Kepler en coordenadas cartesianas, pero muchas veces es útil describir la dinámica en otro sistema coordenado, en este caso son las coordenadas esféricas, ya que en éstas podemos resolver el problema de manera analítica. Pero para que la estructura de las ecuaciones hamiltonianas sea simpléctica, se debe satisfacer:

$$M^T J M = J$$

donde  $M = \frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)}$  y  $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ .

Y la transformación que cumple con lo anterior es:

---

<sup>1</sup> $\mathfrak{so}(n) = \{A | A \in \mathfrak{gl}(n, R) \text{ tal que } A^T = -A\}$ .

$$x = \rho \sin \theta \cos \phi \quad p_x = p_\rho \sin \theta \cos \phi + \frac{p_\theta}{\rho} \cos \theta \cos \phi - \frac{p_\phi \sin \phi}{\rho \sin \theta} \quad (2.10)$$

$$y = \rho \sin \theta \sin \phi \quad p_y = p_\rho \sin \theta \sin \phi + \frac{p_\theta}{\rho} \cos \theta \sin \phi + \frac{p_\phi \cos \phi}{\rho \sin \theta} \quad (2.11)$$

$$z = \rho \cos \theta \quad p_z = p_\rho \cos \theta - \frac{p_\theta}{\rho} \sin \theta. \quad (2.12)$$

Una deducción formal de la anterior se puede encontrar en [9]. De aquí que la Ec. (2.4) escrita en estas coordenadas es:

$$H = \frac{1}{2} \left( p_\rho^2 + \frac{p_\theta^2}{\rho^2} + \frac{p_\phi^2}{\rho^2 \sin^2 \theta} \right) - \frac{1}{\rho}. \quad (2.13)$$

Si calculamos las ecuaciones de Hamilton, observamos que  $p_\phi$  es una constante y justo ésta es dos veces la componente  $z$  del momento angular,  $\ell_z$ , pues:

$$\begin{aligned} \ell_z &= p_y x - p_x y \\ &= \left( p_\rho \sin \theta \sin \phi + \frac{p_\theta}{\rho} \cos \theta \sin \phi + \frac{p_\phi \cos \phi}{\rho \sin \theta} \right) (\rho \sin \theta \cos \phi) \\ &\quad - \left( p_\rho \sin \theta \cos \phi + \frac{p_\theta}{\rho} \cos \theta \cos \phi - \frac{p_\phi \sin \phi}{\rho \sin \theta} \right) (\rho \sin \theta \sin \phi) \\ &= 2p_\phi \end{aligned}$$

la cual ya mostramos que es una integral de movimiento. Por lo que ahora escribiremos a la función hamiltoniana Ec. (2.13) en coordenadas de ángulo acción, estas coordenadas nos permiten escribir el Hamiltoniano en términos de sus integrales de movimiento.

## 2.2. Variables de ángulo acción del problema de Kepler

Comencemos la construcción de las coordenadas de ángulo acción, y para ello apliquemos separación de variables a la ecuación de Jacobi<sup>2</sup> con el Hamiltoniano en coordenadas esféricas Ec.(2.13), y suponiendo sin pérdida de generalidad que  $\mu = k = 1$ . Además  $\Sigma(\rho, \theta, \phi, t) = \sigma(\rho, \theta, \phi) + h(t)$  es la función principal. Esto es:

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \phi} \right)^2 \right] - \frac{1}{\rho} = -\frac{dh}{dt} = E, \quad (2.14)$$

De donde tenemos las siguientes ecuaciones

---

<sup>2</sup>  $H \left( q, \frac{\partial S}{\partial q}; t \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$

$$\frac{dh}{dt} = -E,$$

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \phi} \right)^2 \right] - \frac{1}{\rho} = E.$$

La solución para  $h$  es

$$h(t) = -Et.$$

Por otro lado de la última ecuación tenemos

$$\rho^2 \sin^2 \theta \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right)^2 - 2\rho \sin^2 \theta - 2E\rho^2 \sin^2 \theta = - \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \phi} \right)^2 = -\ell_z^2$$

De lo anterior vemos que  $\sigma(\rho, \theta, \phi) = \sigma_1(\rho, \theta) + \sigma_\phi(\phi)$ , por lo que tenemos el siguientes de sistemas de ecuaciones

$$\left( \frac{\partial \sigma_\phi}{\partial \phi} \right)^2 = \ell_z^2$$

$$\rho^2 \sin^2 \theta \left( \frac{\partial \sigma_1}{\partial \rho} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{\partial \sigma_1}{\partial \theta} \right)^2 - 2\rho \sin^2 \theta - 2E\rho^2 \sin^2 \theta = -\ell_z^2$$

Reescribiendo la última ecuación tenemos

$$\rho^2 \left( \frac{\partial \sigma_1}{\partial \rho} \right)^2 - 2\rho - 2E\rho^2 = - \left( \frac{\partial \sigma_1}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{\ell_z^2}{\sin^2 \theta} = -\ell^2$$

Con esto observamos que  $\sigma(\rho, \theta, \phi) = \sigma_\rho(\rho) + \sigma_\theta(\theta) + \sigma_\phi(\phi)$ , por lo tanto tenemos:

$$\rho^2 \left( \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} \right)^2 - 2\rho - 2E\rho^2 = -\ell^2$$

$$\left( \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\ell_z^2}{\sin^2 \theta} = \ell^2$$

En resumen, tenemos las siguientes ecuaciones

$$\frac{dh}{dt} = -E \quad (2.15)$$

$$\left(\frac{\partial\sigma_\phi}{\partial\phi}\right)^2 = \ell_z^2 \quad (2.16)$$

$$\left(\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}\right)^2 = \ell^2 - \frac{\ell_z^2}{\sin^2\theta} \quad (2.17)$$

$$\rho^2 \left(\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho}\right)^2 - 2\rho - 2E\rho^2 = -\ell^2 \quad (2.18)$$

A partir de las últimas tres ecuaciones podemos calcular las variables de acción, es decir,  $I_\nu = \frac{1}{2\pi} \oint p_\nu dq_\nu$ . En la siguiente subsección calcularemos las variables de acción para  $\theta$ ,  $\phi$  y  $\rho$ .

### Variables de acción

Comencemos por calcular para  $\theta$ , para ello determinemos los puntos de retorno,  $p_\theta = 0$ , usando (2.17) tenemos que:

$$\theta_{min} = \arcsin \frac{\ell_z}{\ell} \quad (2.19)$$

$$\theta_{max} = \pi - \theta_{min} \quad (2.20)$$

$$I_\theta = \frac{1}{2\pi} \oint p_\theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \sqrt{\ell^2 - \frac{\ell_z^2}{\sin^2\theta}} d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_{max}}^{\theta_{min}} \sqrt{\ell^2 - \frac{\ell_z^2}{\sin^2\theta}} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_{min}}^{\pi - \theta_{min}} \sqrt{\ell^2 - \frac{\ell_z^2}{\sin^2\theta}} d\theta$$

De la última igualdad y haciendo el cambio de variable  $u = \sin^2\theta$  tenemos

$$I_\theta = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\ell_z^2}{\ell^2}}^1 \frac{1}{u} \sqrt{\frac{\ell^2 u - \ell_z^2}{1-u}} du$$

Si ahora tomamos  $x = \sqrt{\frac{\ell^2 u - \ell_z^2}{1-u}}$  la diferencial es  $dx = \frac{1}{2} \left( \frac{1-u}{\ell^2 u - \ell_z^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\ell^2 - \ell_z^2}{(1-u)^2} \right) du$  tenemos

$$I_\theta = \frac{2(\ell^2 - \ell_z^2)}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2 + \ell^2)(x^2 + \ell_z^2)} du$$

Integrando por fracciones parciales tenemos

$$I_\theta = \ell - \ell_z \quad (2.21)$$

El cálculo para  $\phi$  es más simple, ya que

$$I_\phi = \frac{1}{2\pi} \oint p_\phi d\phi = \frac{1}{2\pi} \oint \ell_z d\phi = \ell_z$$

Pues  $\oint d\phi = 2\pi$  y  $\ell_z$  es constante, por lo que

$$I_\phi = \ell_z \quad (2.22)$$

Por último hagamos el respectivo cálculo para  $\rho$

$$I_\rho = \frac{1}{2\pi} \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{1}{\rho} \sqrt{2E\rho^2 + 2\rho - \ell^2} d\rho - \frac{1}{2\pi} \int_{\rho_{max}}^{\rho_{min}} \frac{1}{\rho} \sqrt{2E\rho^2 + 2\rho - \ell^2} d\rho = \frac{1}{\pi} \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \sqrt{\frac{2E\rho^2 + 2\rho - \ell^2}{\rho^2}} d\rho$$

Al igual que para  $\theta$ ,  $\rho_{min}$  y  $\rho_{max}$  se determinan haciendo  $p_\rho = 0$ , esto es  $2E\rho^2 + 2\rho - \ell^2 = 0$ , por lo que

$$\rho_{min} = -\frac{1}{2E} \left( 1 - \sqrt{1 + 2E\ell^2} \right) \quad (2.23)$$

$$\rho_{max} = -\frac{1}{2E} \left( 1 + \sqrt{1 + 2E\ell^2} \right) \quad (2.24)$$

Si hacemos el siguiente cambio  $a = -\frac{1}{2E}$  y  $b = \frac{\ell}{\sqrt{-2E}}$ , tenemos que  $I_\rho = \frac{\sqrt{-2E}}{\pi} \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{\sqrt{-\rho^2 + 2a\rho - b^2}}{\rho} d\rho$ , es decir <sup>3</sup>;

$$I_\rho = \frac{1}{\sqrt{a}} (a - |b|) \quad (2.25)$$

Puesto que ya calculamos las variables de acción, podemos escribir a la energía  $E$ , en términos de las variables de acción.

$$\begin{aligned} I_\rho &= \frac{1}{\sqrt{a}} (a - |b|) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{-2E}}} \left[ -\frac{1}{2E} - \frac{\ell}{\sqrt{-2E}} \right] = \sqrt{-2E} \left[ \frac{\sqrt{-2E}\ell - 1}{2E} \right] \\ &= \left[ \frac{-2E\ell - \sqrt{-2E}}{2E} \right] = - \left[ \ell + \frac{\sqrt{-2E}}{2E} \right] = - \left[ \ell + \frac{1}{\sqrt{-2E}} \right]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Usando (2.21), (2.22) y (2.26) tenemos;

---


$$3 \int \frac{\sqrt{Ar^2 + Br + C}}{r} dr = \sqrt{Ar^2 + Br + C} + \frac{B}{2\sqrt{-A}} \arcsin \left( \frac{-2Ar - B}{\sqrt{B^2 - 4AC}} \right) - \sqrt{-C} \arcsin \left( \frac{Br + 2C}{r\sqrt{B^2 - 4AC}} \right)$$

$$E = -\frac{1}{2(I_\rho + I_\theta + I_\phi)^2}, \quad (2.27)$$

por lo tanto podemos escribir a  $a$  y  $b$  en términos de las variables de acción

$$\begin{aligned} a &= (I_\rho + I_\theta + I_\phi)^2, \\ b &= (I_\theta + I_\phi)(I_\rho + I_\theta + I_\phi). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Con lo anterior podemos calcular;  $\sigma_\theta(\theta)$ ,  $\sigma_\phi(\phi)$  y  $\sigma_\rho(\rho)$ , para ello usemos las ecuaciones; (2.16), (2.17) y (2.18), por que tenemos:

$$\sigma_\theta = \int \sqrt{\ell^2 - \frac{\ell_z^2}{\sin^2 \theta}} d\theta = (I_\theta + I_\phi) \int \sqrt{1 - \frac{I_\phi^2}{(I_\theta + I_\phi)^2 \sin^2 \theta}} d\theta \quad (2.29)$$

$$\sigma_\phi = \int \ell_z d\phi = \ell_z \phi \quad (2.30)$$

$$\sigma_\rho = \int \frac{1}{\rho} \sqrt{2E\rho^2 + 2\rho - \ell^2} d\rho = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{1}{\rho} \sqrt{-\rho^2 + 2a\rho - b^2} d\rho \quad (2.31)$$

Del conjunto anterior de ecuaciones podemos calcular las coordenadas angulares. Procedemos a realizar los respectivos cálculos, cuyos detalles se pueden consultar en el apéndice A.

Comencemos por calcular la variable angular con respecto a  $\rho$ .

$$\begin{aligned} \varphi_\rho &= \frac{\partial \sigma}{\partial I_\rho} = \frac{\partial}{\partial I_\rho} \left( \frac{1}{(I_\rho + I_\theta + I_\phi)} \int \frac{1}{\rho} \sqrt{-\rho^2 + 2(I_\rho + I_\theta + I_\phi)^2 \rho - (I_\theta + I_\phi)^2 (I_\rho + I_\theta + I_\phi)^2} d\rho \right) \\ &= -\frac{1}{a} \sqrt{-\rho^2 + 2a\rho - a^2(1 - e^2)} + \arcsin \left( \frac{\rho - a}{ea} \right) \end{aligned}$$

$$\text{con } e^2 = 1 - \frac{(I_\theta + I_\phi)^2}{(I_\rho + I_\theta + I_\phi)^2}.$$

Por lo que la variable angular asociada a  $\rho$  es:

$$\varphi_\rho = -\frac{1}{a} \sqrt{-\rho^2 + 2a\rho - a^2(1 - e^2)} + \arcsin \left( \frac{\rho - a}{ea} \right). \quad (2.32)$$

De la ecuación anterior podemos realizar la siguiente manipulación algebraica y obtener las *ecuaciones de Kepler*.

$$\begin{aligned}\varphi_\rho &= -\frac{e}{ea} \sqrt{-\rho^2 + 2a\rho - a^2(1-e^2)} - \arcsin\left(\frac{a-\rho}{ea}\right) = -e\sqrt{\frac{-\rho^2 + 2a\rho - a^2(1-e^2)}{a^2e^2}} - \arcsin\left(\frac{a-\rho}{ea}\right) \\ &= -e\sqrt{\frac{a^2e^2}{a^2e^2} - \frac{a^2 - 2a\rho + \rho^2}{a^2e^2}} - \arcsin\left(\frac{a-\rho}{ea}\right) = -e\sqrt{1 - \frac{(a-\rho)^2}{a^2e^2}} - \arcsin\left(\frac{a-\rho}{ea}\right),\end{aligned}$$

ahora definamos

$$y = \frac{a-\rho}{ea} \quad (2.33)$$

por lo tanto tenemos

$$\varphi_\rho = -e\sqrt{1-y^2} - \arcsin(y) \quad (2.34)$$

del cambio de variable  $y = \cos(\psi)$  obtenemos:

$$\begin{aligned}\varphi_\rho &= -e\sqrt{1-y^2} - \arcsin(y) = -e\sqrt{1-\cos^2(\psi)} - \arcsin(\cos(\psi)) \\ &= -e\sqrt{\sin^2(\psi)} - \arcsin(\sin(\pi/2 - \psi)) = -e\sin\psi - \frac{\pi}{2} + \psi\end{aligned}$$

Puesto que  $\varphi$  está indeterminada salvo una constante aditiva, la cual sin perder generalidad la podemos tomar como  $\frac{\pi}{2}$ . Tenemos el siguiente par de ecuaciones:

$$\varphi_\rho = \psi - e\sin\psi \quad (2.35)$$

$$\rho = a(1 - e\cos\psi) \quad (2.36)$$

la ecuación (2.35) es conocida como la ecuación de Kepler, ver [10, 11].

Ahora calculemos  $\varphi_\theta$

$$\varphi_\theta = \frac{\partial\sigma}{\partial I_\theta} = \frac{\partial}{\partial I_\theta} \left( (I_\theta + I_\phi) \int \sqrt{1 - \frac{I_\phi^2}{(I_\theta + I_\phi)^2} \sin^2\theta} d\theta + \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{1}{\rho} \sqrt{-\rho^2 + 2a\rho - a^2(1-e^2)} d\rho \right)$$

De las ecuaciones (5.2) y (5.3) tenemos que

$$\varphi_\theta - \varphi_\rho = \arcsin\left(\frac{\cos\theta}{\gamma} \sqrt{1 - \left(\frac{\rho - a(1-e^2)}{\rho e}\right)^2} - \frac{\rho - a(1-e^2)}{\rho e} \sqrt{1 - \left(\frac{\cos\theta}{\gamma}\right)^2}\right) \quad (2.37)$$

$$\text{con } \gamma = \sqrt{1 - \frac{I_\phi^2}{(I_\theta + I_\phi)^2}}.$$

Ahora definamos las siguientes cantidades

$$L = \frac{\rho - (1 - e^2)a}{e\rho} \quad M = \frac{L}{\gamma} \quad S = \sin(\varphi_\theta - \varphi_\rho) \quad (2.38)$$

Entonces de las definiciones anteriores y de la ecuación (2.37) tenemos

$$\cos \theta = \gamma S \sqrt{1 - M^2 \gamma^2} \pm \gamma^2 M \sqrt{1 - S^2} \quad (2.39)$$

De la definición de  $L$  y de la segunda ecuación de Kepler tenemos;

$$L = \frac{\rho - (1 - e^2)a}{e\rho} = \frac{a(1 - e \cos \psi) - (1 - e^2)a}{ea(1 - e \cos \psi)} = \frac{(1 - e \cos \psi) - (1 - e^2)}{e(1 - e \cos \psi)} = \frac{e - \cos \psi}{1 - e \cos \psi},$$

además

$$M = \frac{L}{\gamma} = \frac{e - \cos \psi}{\gamma(1 - e \cos \psi)}$$

Por lo tanto la ecuación (2.39) se puede escribir en términos de las variables de ángulo calculadas hasta el momento y de las variables de acción;

$$\cos \theta = \gamma \frac{\sin(\varphi_\theta - \varphi_\rho) \sqrt{1 - e^2} \sin \psi + \cos(\varphi_\theta - \varphi_\rho)(e - \cos \psi)}{(1 - e \cos \psi)} \quad (2.40)$$

de esta última ecuación podemos obtener una relación entre la variable  $\theta$  y variables de ángulo acción.

Por último calculemos  $\varphi_\phi = \frac{\partial \sigma}{\partial I_\phi} = \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial I_\phi} + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial I_\phi} + \frac{\partial \sigma_\psi}{\partial I_\phi}$ , estas derivadas se muestran nuevamente en el apéndice A. Por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned} \varphi_\phi &= \varphi_\rho - \arcsin \left( \frac{\rho - a(1 - e^2)}{\rho e} \right) + \phi \\ &+ \arcsin \left( \frac{\cos \theta}{\gamma} \sqrt{1 - \left( \frac{I_\phi}{(I_\theta + I_\phi) \sin \theta} \right)^2} + \left( \frac{I_\phi}{(I_\theta + I_\phi) \sin \theta} \right) \sqrt{1 - \left( \frac{\cos \theta}{\gamma} \right)^2} \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

En resumen tenemos que las variables de ángulo acción y la función hamiltoniana para el problema

de Kepler son:

$$I_\theta = \ell - \ell_z, \quad (2.42)$$

$$I_\phi = \ell_z, \quad (2.43)$$

$$I_\rho = \frac{1}{\sqrt{a}}(a - |b|) = -\left(\frac{\ell + 1}{\sqrt{-2E}}\right), \quad (2.44)$$

$$\varphi_\rho = -\frac{1}{a}\sqrt{-\rho^2 + 2a\rho - a^2(1 - e^2)} + \arcsin\left(\frac{\rho - a}{ea}\right), \quad (2.45)$$

$$\varphi_\theta = \varphi_\rho + \arcsin\left(\frac{\cos\theta}{\gamma}\sqrt{1 - \left(\frac{\rho - a(1 - e^2)}{\rho e}\right)^2} - \frac{\rho - a(1 - e^2)}{\rho e}\sqrt{1 - \left(\frac{\cos\theta}{\gamma}\right)^2}\right), \quad (2.46)$$

$$\varphi_\phi = \varphi_\rho - \arcsin\left(\frac{\rho - a(1 - e^2)}{\rho e}\right) + \phi + \quad (2.47)$$

$$+ \arcsin\left(\frac{\cos\theta}{\gamma}\sqrt{1 - \left(\frac{I_\phi}{(I_\theta + I_\phi)\sin\theta}\right)^2} + \left(\frac{I_\phi}{(I_\theta + I_\phi)\sin\theta}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{\cos\theta}{\gamma}\right)^2}\right), \quad (2.48)$$

$$H = -\frac{1}{2(I_\rho + I_\theta + I_\phi)^2}. \quad (2.49)$$

Estos resultados también consultar en [12], además de las ecuaciones (2.29) a la (2.31) se obtiene la función generatriz para el problema de Kepler:

$$W(\rho, \theta, \phi, \mathcal{L}, \ell, \ell_z) = \ell_z \phi + \int_{\pi/2}^{\theta} \left(\ell^2 - \frac{\ell_z^2}{\sin^2 \zeta}\right)^{1/2} d\zeta + \int_A^\rho \left(-\frac{\ell^2}{\xi^2} + \frac{2}{\xi} - \frac{1}{\mathcal{L}^2}\right)^{1/2} d\xi \quad (2.50)$$

De la ecuación (2.50) se obtiene el cambio de coordenadas esféricas a las coordenadas de ángulo-acción para el problema de Kepler, éstas coordenadas son conocidas como coordenadas de Delaunay, y una descripción detallada se puede encontrar en [9, 13].

De la función generadora construida anteriormente Ec.(2.50) podemos obtenemos el siguiente cambio de coordenadas:

$$p_\rho = \frac{\partial W}{\partial \rho} = \left( -\frac{\ell^2}{\rho^2} + \frac{2}{\rho} - \frac{1}{\mathcal{L}^2} \right)^{1/2} \quad (2.51)$$

$$p_\theta = \frac{\partial W}{\partial \theta} = \left( \ell^2 - \frac{\ell_z^2}{\sin^2 \theta} \right)^{1/2} \quad (2.52)$$

$$p_\phi = \frac{\partial W}{\partial \phi} = \ell_z, \quad (2.53)$$

$$l = \frac{\partial W}{\partial \mathcal{L}} = -\frac{t}{\mathcal{L}^2} = \psi - e \sin \psi \quad (2.54)$$

$$g = \frac{\partial W}{\partial \ell} = \sigma - f \quad (2.55)$$

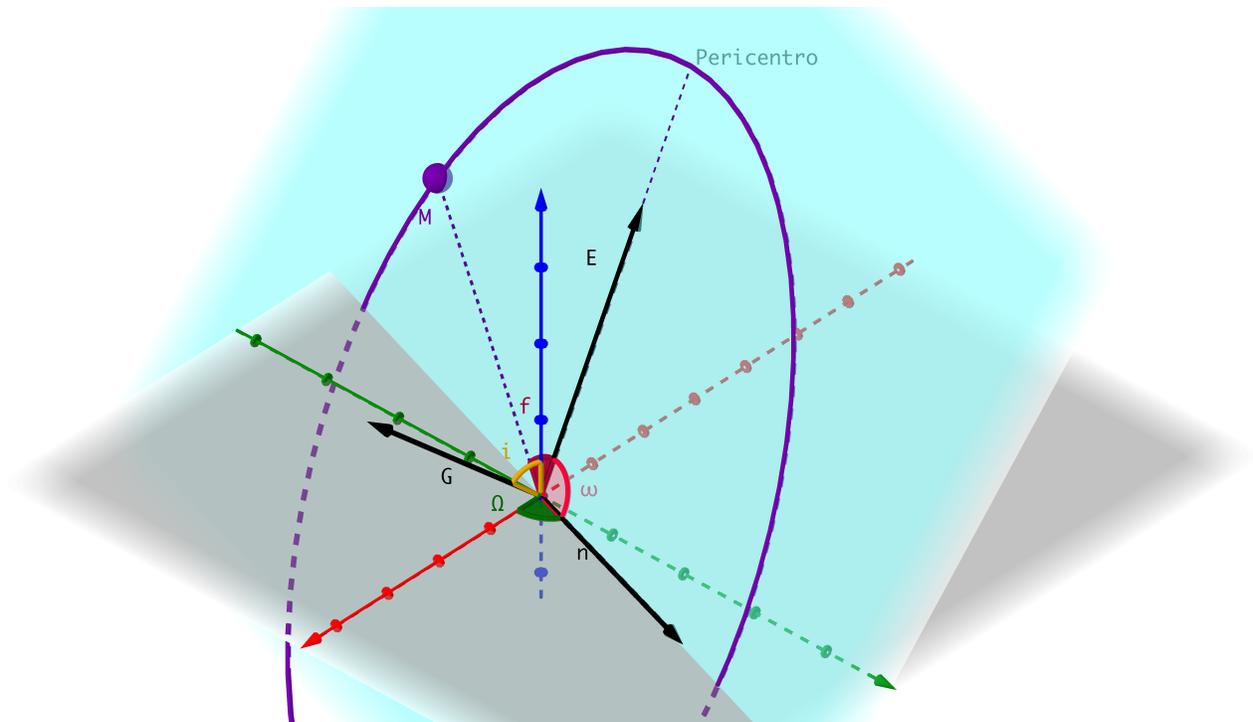
$$k = \frac{\partial W}{\partial \ell_z} = \Omega \quad (2.56)$$

De donde las variables angulares  $l, g, k$  están en términos de los elementos orbitales. Los elementos orbitales son un conjunto de seis cantidades, las cuales describen de manera única a un cuerpo celeste alrededor de foco. En la Fig. 2.1 se muestran estas seis cantidades:

- ▷ *Longitud del nodo ascendente*  $\Omega$ : Es el ángulo desde una dirección de referencia, llamada el origen de la longitud, a la dirección del nodo ascendente, medido en un plano de referencia.
- ▷ *Inclinación de la órbita*  $i$ : Es el ángulo que forma el plano de la órbita de un cuerpo con respecto a un plano de referencia.
- ▷ *Argumento del pericentro*  $\omega$ : Es el ángulo que va desde el nodo ascendente hasta el pericentro, medido en el plano orbital del objeto y en sentido de su movimiento.
- ▷ *Semieje mayor de la órbita*  $a$ .
- ▷ *Excentricidad de la órbita*  $E$ .
- ▷ *Anomalía verdadera*  $f$ : Es el ángulo entre la dirección del pericentro y la posición del cuerpo, esto desde el foco principal de la elipse. Además sabemos que la anomalía verdadera y la anomalía excéntrica  $\psi$ , se relacionan mediante  $\tan\left(\frac{f}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\left(\frac{\psi}{2}\right)$ . Recordemos que la anomalía excéntrica es el ángulo medido desde el centro de la elipse, que forma la proyección del planeta sobre la circunferencia principal, y el eje de la elipse. Esta última se relaciona con la anomalía media, que es el ángulo que se forma con el eje de la elipse un cuerpo ficticio que gira con movimiento uniforme sobre una circunferencia cuyo diámetro coincide con el eje principal de la elipse, mediante las ecuaciones de Kepler (2.35), y de estas concluimos que  $l$  es  $\varphi_\rho$ .

Para finalizar esta sección, es de llamar la atención que la ecuación (2.27) es la forma clásica que se tiene para la energía del átomo de Hidrógeno, ver la referencia [14], y su versión cuantizada es la que se obtiene de la solución de la ecuación de Schrödinger. Esto nos lleva a que el problema de mecánica cuántica asociado con el que se tiene en la tesis, puede ser estudiado en situaciones de

confinamiento atómico en el que el potencial o confinamiento introduzcan un rompimiento en algunas simetrías del sistema.



**Figura 2.1:** Elementos orbitales;  $\Omega$ ,  $i$ ,  $\omega$ ,  $E$  y  $f$ , cinco de los elementos orbitales. El sexto elemento que es la excentricidad de órbita  $a$  no se muestra para no aglomerar el esquema.

### 2.3. El PKA

En esta sección discutiremos algunas propiedades sobre nuestro sistema completo es decir el caso para  $\epsilon \neq 0$ . Comencemos por escribir la función hamiltoniana en coordenadas cartesianas la cual obtenemos de aplicar una transformada de Legendre a la Ec. (1.11)

$$H = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{p_z^2}{2(\epsilon + 1)} - \frac{\epsilon + 1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (2.57)$$

Ahora si calculamos el paréntesis de Poisson para esta función hamiltoniano tenemos:

$$\begin{aligned}
\{H, \ell_x\} &= -\frac{\epsilon p_y p_z}{\epsilon + 1} & \{H, \mathcal{A}_x\} &= \frac{\epsilon(|\vec{x}|^3 p_x p_z^2 + (\epsilon + 1)p_x z^2 - (\epsilon + 2)p_z x z + (\epsilon + 1)p_x y^2 - (\epsilon + 1)p_y x y)}{(\epsilon + 1)|\vec{x}|^3} \\
\{H, \ell_y\} &= \frac{\epsilon p_x p_z}{\epsilon + 1} & \{H, \mathcal{A}_y\} &= \frac{\epsilon(|\vec{x}|^3 p_y p_z^2 + (\epsilon + 1)p_y z^2 - (\epsilon + 2)p_z y z + (\epsilon + 1)p_y x^2 - (\epsilon + 1)p_x x y)}{(\epsilon + 1)|\vec{x}|^3} \\
\{H, \ell_z\} &= 0 & \{H, \mathcal{A}_z\} &= \frac{\epsilon(|\vec{x}|^3 p_z(p_x^2 + p_y^2) + (\epsilon + 1)p_y y z + (\epsilon + 1)p_x x z - (\epsilon + 2)p_z(y^2 + x^2))}{(\epsilon + 1)|\vec{x}|^3}
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Del cálculo anterior se observa que se han perdido cinco integrales de movimiento, con respecto al problema super-integrable. Siendo únicamente la función hamiltoniana y la componente  $z$  del vector de momento angular integrales de movimiento. Por lo que el problema con  $\epsilon \neq 0$  no es siquiera integrable.

Para comenzar con el análisis del caso no integrable, podemos estudiar el comportamiento para  $0 < \epsilon \ll 1$ , para ello podemos aprovechar la propiedades que nos proporcionan las variables de ángulo acción. Si a la Ec.(1.16) le aplicamos el cambio de coordenadas de *Delauney* tenemos:

$$\begin{aligned}
J = & -\frac{1}{2\mathcal{L}^2} \\
& -\epsilon \left\{ \frac{1}{2(\epsilon + 1)} \left[ \sqrt{-\frac{\ell^2}{\mathcal{L}^2(1 - e \cos \psi)^2} + \frac{2}{\mathcal{L}(1 - e \cos \psi)} - \frac{1}{\mathcal{L}^2}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left( \gamma \frac{\sin(\varphi_\theta - \varphi_\rho) \sqrt{1 - e^2} \sin \psi + \cos(\varphi_\theta - \varphi_\rho)(e - \cos \psi)}{(1 - e \cos \psi)} \right) \right]^2 \right. \\
& - \frac{1}{\mathcal{L}(1 - e \cos \psi)} \sqrt{\ell^2 - \ell_z^2 \left( \gamma \frac{\sin(\varphi_\theta - \varphi_\rho) \sqrt{1 - e^2} \sin \psi + \cos(\varphi_\theta - \varphi_\rho)(e - \cos \psi)}{(1 - e \cos \psi)} \right)^2 - \ell_z^2} \\
& \left. - \frac{1}{\mathcal{L}(1 - e \cos \psi)} \right\}
\end{aligned}$$

Recordemos que  $e = \sqrt{1 - \frac{\ell^2}{\mathcal{L}^2}}$ ,  $\gamma = \sqrt{1 - \frac{\ell_z^2}{\ell^2}}$ . Entonces la función hamiltoniana del Problema de Kepler Asimétrico en coordenadas de ángulo acción tiene la siguiente forma:

$$J(\mathcal{L}, \ell, \ell_z, \varphi_\rho, \varphi_\theta, \varphi_\phi) = H(\mathcal{L}) - \epsilon H_\epsilon(\epsilon, \mathcal{L}, \ell, \ell_z, \varphi_\rho, \varphi_\theta, \varphi_\phi) \tag{2.59}$$

De la ecuación (2.59), el primer término de la derecha es la función hamiltoniana del problema de Kepler, el segundo es el término perturbado. El estudio perturbativo, para  $\epsilon$  muy pequeño, se puede abordar desarrollando en Taylor el término  $\frac{1}{\epsilon + 1} \approx 1 - \epsilon + \epsilon^2 - \epsilon^3 + \dots + \Theta(\epsilon^n)$ , y a partir de esto desarrollar un cálculo perturbativo como el que se muestra en [15, 16, 17]. Sin embargo, en este

---

trabajo de tesis nos restringiremos a hacer un análisis numérico, por lo cual se opta el uso de métodos que se puedan implementar de manera numérica, tal como: el mapeo de Poincaré y el espectro de Lyapunov que se discutirán en el siguiente capítulo.



## Tratamiento para resolver el problema y métodos numéricos

En este capítulo discutiremos de manera breve las herramientas numéricas necesarias para el análisis de nuestro problema, comenzando por un poderoso integrador, del cual obtendremos la sección de Poincaré y el espectro de potencias. Además también abordaremos el estudio del exponente de Lyapunov así como el algoritmo numérico para calcularlo.

### 3.1. Integrador de Taylor

En el estudio de los sistemas dinámicos es muy importante un integrador bastante confiable, ya que la mayoría de los sistemas, y como bien describe Carles Simó en [18], poseen en mayor o menor medida caos. Un integrador bastante robusto podría reducir errores inducidos por redondeo y truncamiento intrínsecos de la aritmética de punto flotante. Además existe una amplia gama de integradores simplécticos que debido a esta naturaleza son muy útiles, pero la posible desventaja por llamarlo así es que inducen un desfase en las soluciones. Un integrador que es simpléctico y no induce desfase en las soluciones es el integrador de Taylor.

Comencemos por considerar la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \text{ con condición inicial } x(t_0) = x_0. \quad (3.1)$$

Si desarrollamos  $x(t)$  en series de Taylor centrada en  $t_0$  tenemos:

$$x(t) = x_{[0]} + x_{[1]}(t - t_0) + x_{[2]}(t - t_0)^2 + \dots + x_{[k]}(t - t_0)^k + \dots \quad (3.2)$$

donde  $x_{[n]} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} x(t) \Big|_{t_0}$

Ahora derivando la Ec.(3.2)

$$\dot{x}(t) = x_{[1]} + 2x_{[2]}(t - t_0) + \cdots + (k + 1)x_{[k+1]}(t - t_0)^k + \cdots \quad (3.3)$$

Por otro lado si también desarrollamos en Taylor el lado derecho de la Ec.(3.1)

$$f(x, t) = f(x, t)_{[0]} + f(x, t)_{[1]}(t - t_0) + f(x, t)_{[2]}(t - t_0)^2 + \cdots + f(x, t)_{[k]}(t - t_0)^k + \cdots \quad (3.4)$$

Si comparamos las últimas dos ecuaciones obtenemos una recurrencia para los coeficientes

$$x_{[k+1]} = \frac{f(x, t)_{[k]}}{k + 1}, \text{ para } k > 0 \quad (3.5)$$

como se observa de la recurrencia anterior, podemos obtener todos los coeficientes a partir de  $x_0$ , la condición inicial. Para ilustrar el método anterior consideremos la siguiente EDO:

$$\dot{x}(t) = x^2, x(0) = 3 \quad (3.6)$$

observemos que la solución analítica es  $x(t) = \frac{3}{1 - 3t}$ . Ahora ejemplifiquemos el método, por construcción tenemos  $x_{[0]} = x_0 = 3$ . Para construir el siguiente coeficiente escribamos la aproximación de la solución a primer orden.  $x(t) = x_0 + x_{[1]}(t - t_0) + \mathcal{O}(t - t_0)^2$ . Ahora derivemos y sustituyamos en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} x_{[1]} + \mathcal{O}((t - t_0)) &= [x_0 + x_{[1]}(t - t_0) + \mathcal{O}((t - t_0)^2)]^2 \\ x_{[1]} + \mathcal{O}((t - t_0)) &= x_0^2 + \mathcal{O}((t - t_0)) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $x_{[1]} = x_0^2 = \frac{f(x, t)_{[0]}}{1}$ . Ahora para el segundo coeficiente procedemos de manera análoga considerando la aproximación a la solución, además de los coeficientes previamente calculados:

$$\begin{aligned} x_0^2 + 2x_{[2]}(t - t_0) + \mathcal{O}((t - t_0)^2) &= [x_0 + x_0^2(t - t_0) + x_{[2]}(t - t_0)^2 + \mathcal{O}((t - t_0)^3)]^2 \\ x_0^2 + 2x_{[2]}(t - t_0) + \mathcal{O}((t - t_0)^2) &= x_0^2 + 2x_0^3(t - t_0) + \mathcal{O}((t - t_0)^2) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $x_{[2]} = x_0^3 = \frac{f(x, t)_{[1]}}{2}$ . Y mediante este proceso podemos construir todos los coeficientes. Una vez obtenidos todos los coeficientes podemos sustituirlos en la ecuación (3.2) y obtener la solución a (3.6):

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_{[0]} + x_{[1]}(t - t_0) + x_{[2]}(t - t_0)^2 + \cdots + x_{[k]}(t - t_0)^k + \cdots \\
&= x_0 + x_0^2(t - t_0) + x_0^3(t - t_0)^2 + \cdots + x_0^{k+1}(t - t_0)^k + \cdots \\
&= x_0 \left( 1 + x_0(t - t_0) + x_0^2(t - t_0)^2 + \cdots + x_0^k(t - t_0)^k + \cdots \right)
\end{aligned}$$

Si  $|x_0(t - t_0)| < 1$ .

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)} \\
&= \frac{3}{1 - 3t}
\end{aligned}$$

que justo es la solución analítica. Al implementar este método de manera numérica tenemos el inconveniente que es imposible hacer el cálculo de todos los coeficientes de la serie. Algo que es importante mencionar es que dicha serie es convergente esto debido al teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales, por lo que tenemos:

$$x(t) = \sum_{k=0}^p x_{[k]}(t_0)(t - t_0)^k + x_{[p+1]}(\xi)(t - t_0)^{p+1} \quad (3.7)$$

donde  $\xi \in [t, t_0]$ . Si truncamos la serie a orden  $p$  suficientemente grande, entonces el residuo será pequeño. Por lo que la pregunta es ¿cómo elegir  $p$ ? La propuesta es considerar que el término  $p$  de la serie sea menor que un cierto  $\epsilon$  menor que el *epsilon de máquina*, es decir:

$$|x_{[p]}(t - t_0)^p| \leq \epsilon \quad (3.8)$$

de la anterior podemos obtener el paso de integración

$$h = t - t_0 = \left( \frac{\epsilon}{|x_{[p]}(t_0)|} \right)^{1/p} \quad (3.9)$$

es claro que el paso de integración depende del orden  $p$  del polinomio y del punto  $t_0$  en la evolución temporal, esto es tenemos un paso variable. Una vez que tenemos los coeficientes del polinomio y el paso de integración, debemos sumar la serie para obtener  $x(t_1)$ , tal que  $t_1 = t_0 + h$ . Esto es:

$$x(t_1) = x(t_0 + h) = \sum_{k=0}^p x_{[k]}(t_0)h^k \quad (3.10)$$

La mejor manera de sumar esta serie es con el *método de Horner*, ver [19], el cual consiste en factorizar de manera apropiada el polinomio, el cual sólo se evalúa a través de productos y sumas. Esto permite, por un lado, minimizar el número de operaciones, y en el caso de series de Taylor de

orden suficientemente grande para estar en la cola convergente, considerar correctamente los términos pequeños.

Es fundamental para este integrador contar técnicas de diferenciación automática, esto para poder realizar operaciones que puedan ser requeridas con los polinomios construidos. En [20, 21, 22] se muestran los algoritmos de recursión para algunas funciones elementales. El integrador de Taylor que usamos para los cálculos de este trabajo fue el implementado por Jorge Pérez y el Dr. Luis Benet Fernández, el cual se encuentra en [23].

### 3.2. Mapeo de Poincaré

En el estudio de las ecuaciones diferenciales es igual de importante el análisis cuantitativo como cualitativo de una ODE, para este último recurrimos al espacio fase. En nuestro sistema, el PKA, el espacio fase tiene seis dimensiones por lo que resulta complicado hacer un estudio detallado de éste. Sin embargo, en 1881, Poincaré introdujo un mapeo que hoy se conoce como *el mapeo de Poincaré*, *aplicación de Poincaré* o *aplicación de primer retorno*, la cual es una aplicación de un subespacio del espacio de fase llamada *sección de Poincaré*, esta sección es de dimensión menor al espacio de fase, lo que nos permite hacer un estudio de la dinámica del sistema en este subespacio. A continuación definimos brevemente que es un mapeo de Poincaré y una sección de Poincaré, las cuales se tomaron de [2, 5].

Un *mapeo* es definido por una función  $\mathcal{P} : M \mapsto M$ , tal que  $x^* = \mathcal{P}(x)$ , donde  $x^* \in M$  es nuevo punto cuya preimagen es  $x^* \in M$ . Para un mapeo una órbita ya no es una función  $x(t)$  con  $t \in \mathbb{R}$  sino una sucesión de  $\{x_t : t \in \mathbb{Z}\}$ , por lo que la dinámica está descrita por la iteración  $x_i = \mathcal{P}(x_{i-1})$

Si consideramos un flujo en  $\mathbb{R}^n$  podemos definir una sección  $\mathcal{S}$  como la superficie de codimensión  $n - 1$  tal que el vector velocidad no es tangente a  $\mathcal{S}$ , esto sólo para garantizar que la trayectoria asociada al flujo intersecta transversalmente a la superficie en algún punto, es decir, si  $\hat{n}_x$  es normal a  $\mathcal{S}$  en  $x$ , entonces  $\mathcal{S}$  es una sección si  $\varphi_t(x) \cdot \hat{n}_x \neq 0$  para toda  $x \in \mathcal{S}$ .

Por lo tanto *un mapeo de Poincaré* para una sección  $\mathcal{S}$  se obtiene eligiendo un punto en  $\mathcal{S}$  y siguiendo el flujo para el primer retorno a  $\mathcal{S}$ , es decir, debemos encontrar el tiempo  $\tau(x)$  para el cual  $\varphi_t(x) \in \mathcal{S}$ , además de que dicho mapeo está definido por:

$$\mathcal{P}(x) = \varphi_{\tau(x)}(x) \quad (3.11)$$

Para ilustrar esto consideremos el siguiente sistema y la aplicación unidimensional sobre el segmento de recta  $\Sigma(x, y) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < \infty, y = 0\}$ :

$$\dot{x} = -y + x \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right), \quad \dot{y} = x - y \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right) \quad (3.12)$$

Si lo escribimos en coordenadas polares tenemos:

$$\dot{r} = r(1-r), \quad \dot{\theta} = 1$$

Cuya solución analítica es:

$$r(t) = \frac{1}{1 + Ce^{-t}}, \quad \theta(t) = t + \theta_0$$

Si consideramos  $r(0) = 2$  y  $\theta(0) = 0$ , como condiciones iniciales tenemos:

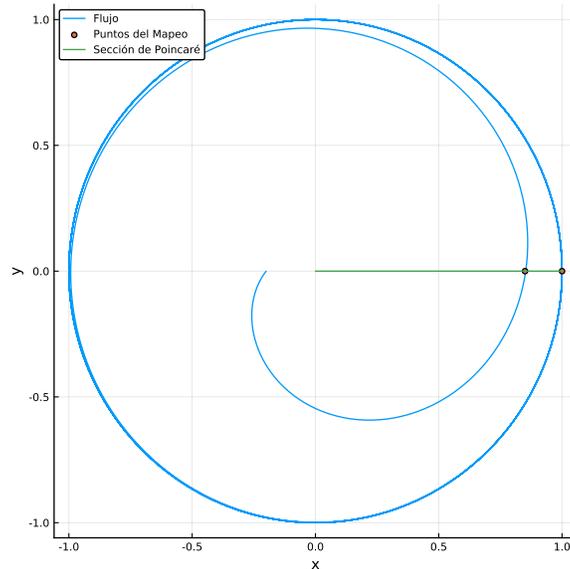
$$r(t) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-t}}, \quad \theta(t) = t$$

De estas últimas podemos escribir a  $r(t)$  como:

$$r(t) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-\theta(t)}}, \quad (3.13)$$

Si graficamos el flujo en el plano  $xy$  observamos que las trayectorias fluyen alrededor del origen con un período de  $2\pi$  es en sentido contrario a las agujas del reloj, por lo que los puntos de retorno sucesivos requeridos se producen cuando  $\theta = 2\pi, 4\pi, \dots$ . Entonces el mapeo que define estos puntos está dado por:

$$r_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-2\pi n}}, \quad (3.14)$$



**Figura 3.1:** Trayectoria, mapeo y sección de Poincaré para el sistema (3.12).

El ejemplo anterior aunque resulta muy ilustrativo no es la forma en la que procedemos habitualmente pues, casi nunca podemos obtener la solución analítica al sistema (el flujo). Del sistema

anterior podemos obtener el flujo de manera numérica <sup>1</sup> y los elementos de la sección está determinados cuando  $y = 0$ , entonces para generar estos puntos debemos encontrar cuando el flujo tiene coordenada  $y = 0$ , y para ello lo podemos hacer usando algún método para encontrar raíces en particular podemos usar el de Newton.

Con está misma idea podemos determinar los puntos de la sección de Poincaré para el Problema de Kepler Asimétrico. Para nuestro caso la sección de Poincaré será el plano  $xy$ , el flujo lo obtendremos de manera numérica con un integrador de Taylor y los puntos del mapeo serán aquellos tales que la coordenada  $z$  de la trayectoria sea cero, en [23] se puede encontrar una poderosa rutina que permite determinar estos puntos.

### 3.3. Espectro de Lyapunov

Como mencionamos anteriormente un sistema es caótico si cumple ser topológicamente transitivo y sensible a las condiciones iniciales, esta última condición puede ser verificada calculando el exponente de Lyapunov. En está sección exhibimos la definición del exponente y espectro de Lyapunov, así como el método numérico para calcularlo, lo cual fue tomado de [24].

Para ello consideremos un sistema continuo en el tiempo, para el cual la dinámica es determinada por una ecuación diferencial.

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{F}(\mathbf{U}, t) \quad (3.15)$$

Del teorema de existencia y unicidad [25], dado que se pide  $\mathbf{F}$  sea de clase  $\mathcal{C}^1$  y localmente Lipschitz en un subconjunto abierto de  $J \subset \mathbb{R}^n$ , dada una condición inicial  $\mathbf{U}(0) = \mathbf{u}^*$ , tenemos una única trayectoria  $\mathbf{U}(t)$ , la cual es solución al sistema. (3.15). Ahora consideremos una perturbación infinitesimal  $\mathbf{u}(t)$  a la trayectoria y analizaremos la evolución de ésta, por lo que la Ec.(3.15) toma la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{U} + \mathbf{u}) = \mathbf{F}(\mathbf{U} + \mathbf{u}, t)$$

Si aproximamos a primer orden alrededor de  $\mathbf{U}$  tenemos:

$$\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{U}, t) + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}, t)}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{u}$$

La evolución temporal de la perturbación está dada por:

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}, t)}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{u} =: K(\mathbf{U}, t) \mathbf{u} \quad (3.16)$$

Por último podemos determinar  $\mathbf{u}$  integrando la ecuación anterior, esto ya que aproximamos a primer orden, por lo tanto:

---

<sup>1</sup>En este caso usando el integrador de Taylor.

$$\mathbf{u}(t) = H(\mathbf{U}_0, t)\mathbf{u}(0), \quad (3.17)$$

$$\text{con } H(\mathbf{U}_0, t) = \exp\left(\int_0^t K(\mathbf{U}(\tilde{t}), \tilde{t}) d\tilde{t}\right).$$

En la práctica se debe considerar un par de situaciones; la primera, la matriz  $H(\mathbf{U}_0, t)$  se obtiene al linealizar el sistema. La segunda, a menos de que se trate de un sistema con solución analítica, los cálculos requieren de una implementación numérica y para esto consideramos el tiempo de forma discreta:

$$\mathbf{U}(t+1) = \mathbf{F}(\mathbf{U}(t)) \quad (3.18)$$

Por lo que la perturbación de la trayectoria para el tiempo  $t+1$  tiene la forma:

$$\mathbf{u}(t+1) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}(t)\mathbf{u}(t) =: J(t)\mathbf{u}(t)$$

Esto es:

$$\mathbf{u}(t) = J(t-1)\mathbf{u}(t-1) = J(t-1)J(t-2)\mathbf{u}(t-2) = \cdots = \prod_{k=0}^{t-1} J(k)\mathbf{u}(0).$$

Por lo tanto

$$\mathbf{u}(t) = H(t)\mathbf{u}(0), \quad (3.19)$$

de donde  $H(t) = \prod_{k=0}^{t-1} J(k)$  y esta matriz define la evolución del sistema a cada  $t$ . Observamos que las Ecs. (3.17) y (3.19) son equivalentes por lo que podemos abordar el estudio de manera discreta. Podemos seguir simplificando el estudio si consideramos el caso unidimensional, en el cual la matriz Jacobiana es reemplazada por la derivada de la  $F'(U)$

$$u(t) = \prod_{k=0}^{t-1} F'(U(k))u(0)$$

Una forma alternativa de la ecuación anterior es tomar el logaritmo

$$\ln |u(t)| = \sum_{k=0}^{t-1} \ln |F'(U(k))| + \ln |u(0)| \quad (3.20)$$

El promedio temporal de la observable  $\ln |F'(U(k))|$  se puede representar como,

$$\frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} \ln |F'(U(k))| \longrightarrow \langle \ln |F'(U(k))| \rangle,$$

cuando  $t \rightarrow \infty$ , lo anterior debido al teorema ergódico de Birkhoff, para mas detalles sobre teoría ergódica y se puede consultar [26]. Por lo que la ecuación (3.20) se puede escribir como

$$|u(t)| = |u(0)| \exp(\langle \ln |F'(U(k))| \rangle t),$$

ahora definamos la siguiente  $\lambda = \langle \ln |F'(U(k))| \rangle$

$$|u(t)| = |u(0)| \exp(\lambda t). \quad (3.21)$$

La cantidad  $\lambda$  es conocido como el *exponente de Lyapunov*. Observamos que si el exponente es positivo dos condiciones iniciales cercanas, se alejan exponencialmente, es decir tenemos un método para saber cuando un sistema es sensible a las condiciones iniciales.

Regresando al caso general podemos estudiar como cambia la amplitud de la perturbación durante la evolución del sistema, la cual está determinada por su norma,

$$\|\mathbf{u}(t)\|^2 = \|H(t)\mathbf{u}(0)\|^2 = \mathbf{u}^T(0)H(t)^T H(t)\mathbf{u}(0),$$

la amplitud depende únicamente de la matriz  $M(t) = H(t)^T H(t)$ . Este tipo de propiedades han sido estudiadas por Oseledets concluyendo que para una sucesión de este tipo de matrices, el siguiente límite existe.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [M(t)]^{\frac{1}{2t}} = P, \quad (3.22)$$

y  $P$  es una matriz con valores propios  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_N$  positivos. Entonces para un sistema de dimensión  $N$  los  $N$  exponentes de Lyapunov se definen como

$$\lambda_k = \ln \mu_k \quad (3.23)$$

A el conjunto de todos los exponentes de un sistema se le conoce como *espectro de Lyapunov*. Y decimos que un sistema es sensible a las condiciones iniciales si el máximo de  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$  es positivo. A continuación describimos el método numérico para el cálculo del espectro de Lyapunov.

### 3.3.1. El Método numérico

Como se muestra en [24] la suma de los exponentes de Lyapunov  $S_N = \sum_{k=1}^N \lambda_k$ , estima la tasa de contracción del volumen en un conjunto invariante del espacio de fase, si consideremos que este conjunto es un paralelepípedo, entonces el promedio de esta tasa de cambio para el paralelepípedo es:

$$\mathcal{S}_m := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln V_m}{t} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \quad (3.24)$$

Sea  $Q_0$  una matriz ortogonal de  $m$  vectores ortogonales en un espacio de dimensión  $M$ , el cual corresponde a la dimensión del espacio tangente. Después de un tiempo  $t$ ,  $Q_0$  evoluciona a un paralelepípedo dado por  $P = H(t)Q_0$ , el cual podemos factorizar como el producto de un matriz ortogonal  $Q$  de  $N \times m$  con determinante igual a 1 y una matriz triangular superior  $R$  de  $m \times m$  conocida como factorización  $QR$ , dicho método se puede consultar en [27, 28]

El volumen de este conjunto es:

$$V_m = \det(P) = \det(QR) = \det(Q) \det(R) = (1) \det(R) = \prod_{i=1}^m R_{ii},$$

sustituyendo  $V_m$  en la Ec. (3.24), tenemos

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left( \prod_{i=1}^m R_{ii} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^m \ln R_{ii}$$

Para determinar  $\lambda_i$  damos valores sucesivos de  $m$ , es decir,

$$\begin{aligned} m = 1 & \quad \lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln R_{11}}{t} \\ m = 2 & \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln R_{11}}{t} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln R_{22}}{t} \quad \implies \lambda_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln R_{22}}{t} \\ m = 3 & \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln R_{11}}{t} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln R_{22}}{t} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln R_{33}}{t} \quad \implies \lambda_3 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln R_{33}}{t} \end{aligned}$$

Entonces para el  $i$ -ésimo término tenemos:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln R_{ii}}{t} \quad (3.25)$$

Ahora, si consideramos una discretización de  $t$  en  $t_k = k\Delta t$ , con  $k = 1, \dots, L$ . El cálculo para los exponente de Lyapunov es el siguiente

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^L \frac{\ln R_{ii,k}}{k\Delta t} \quad (3.26)$$

Para el cálculo numérico del espectro de Lyapunov en este trabajo se usó `lyap_taylorinteg()` esta función se encuentra en [23], cuya implementación numérica sigue lo realizado en [29].



## Resultados (para valores representativos y críticos)

En esta sección presentaremos resultados numéricos principalmente del espectro de Lyapunov y de algunas secciones de Poincaré, así como el espectro de potencias. En la primera parte de esta sección construiremos un conjunto de condiciones iniciales las cuales dependen de las dos constantes de movimiento que tenemos, la energía y la componente  $z$  del momento angular, así como del parámetro  $\epsilon$ . Y para la segunda parte mostraremos los resultados procedentes de la dinámica obtenida para la condiciones iniciales que construimos.

### 4.1. Pozo de Potencial

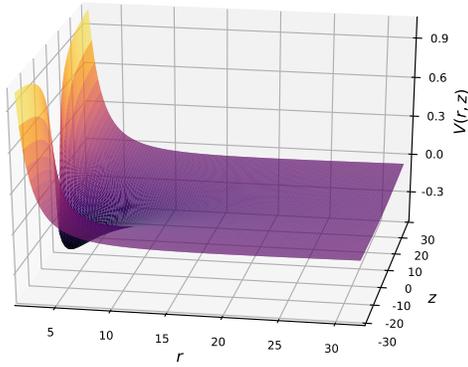
Aunque la integración numérica del sistema se hizo en coordenadas cartesianas para poder determinar las condiciones iniciales es importante hacer un análisis del potencial efectivo. Para ello recurrimos a las coordenadas cilíndricas y así obtener condiciones iniciales correspondientes a una energía que sea una fracción arriba del mínimo del potencial efectivo.

Para esto consideremos la función hamiltoniana en coordenadas cilíndricas Ec.(1.14), y de ésta obtenemos el potencial efectivo, ver Figura 4.1, es decir:

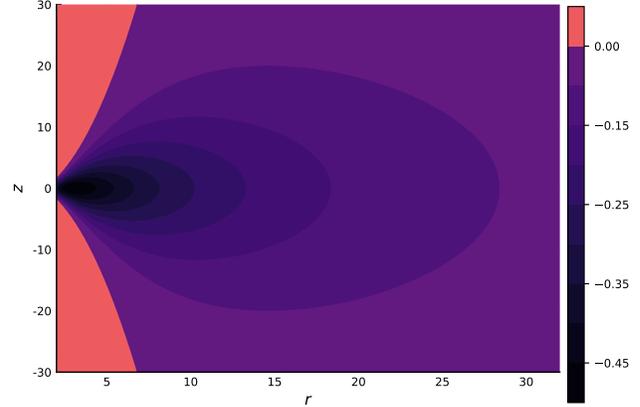
$$V_{eff} = \frac{1}{2} \left( \frac{\ell_z^2}{r^2} \right) - \frac{\epsilon + 1}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \quad (4.1)$$

de la anterior observamos que el mínimo del pozo se encuentra en  $V_0 = -\frac{1}{2} \frac{(\epsilon + 1)^2}{\ell_z^2}$ .

Las condiciones iniciales las podemos construir de tal manera que dependan de la componente  $z$  del momento angular y una fracción  $\alpha$  del mínimo del pozo de potencial efectivo. Los valores de  $\alpha$  se tomaron de tal manera que la energía estuviera entre cero y el mínimo de energía, es decir regiones de energía delimitadas por curvas de nivel del pozo de potencial, tal y como se muestra en la Figura 4.2.



**Figura 4.1:** Se muestra la superficie que representa el pozo de potencial para valores de  $\epsilon$  y  $\ell_z$  igual a 2 y 3 respectivamente, la escalas de colores representan la profundidad del pozo.



**Figura 4.2:** Proyección de las curvas de nivel del pozo de potencial, la región delimitada por cada curva de nivel representa los niveles de energía constante. La escala de colores está asociada a la profundidad del pozo.

Para un primer conjunto de condiciones iniciales podemos suponer que la partícula de masa  $m_2$  parte del origen  $z = 0$  con un impulso  $p_z$ . Para la partícula de masa  $m_1$  debido a la simetría angular podemos considerar  $y = 0$ , y además que ésta no cuenta con impulso en la dirección radial  $p_r = 0$ , por lo que basta determinar  $x, p_x, p_y$  y  $p_z$ . Para esto podemos comenzar por aprovechar el hecho de que el sistema es Hamiltoniano y como ya se mencionó que la energía sea una fracción  $\alpha$  del mínimo del potencial efectivo,

$$-\frac{\alpha(\epsilon+1)^2}{2\ell_z^2} = \frac{1}{2} \left( p_r^2 + \frac{\ell_z^2}{r^2} \right) + \frac{1}{2\epsilon+1} p_z^2 - \frac{\epsilon+1}{\sqrt{r^2+z^2}},$$

de las condiciones antes mencionadas tenemos

$$-\frac{\alpha(\epsilon+1)^2}{2\ell_z^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\ell_z^2}{r^2} + \frac{p_z^2}{\epsilon+1} \right) - \frac{\epsilon+1}{r},$$

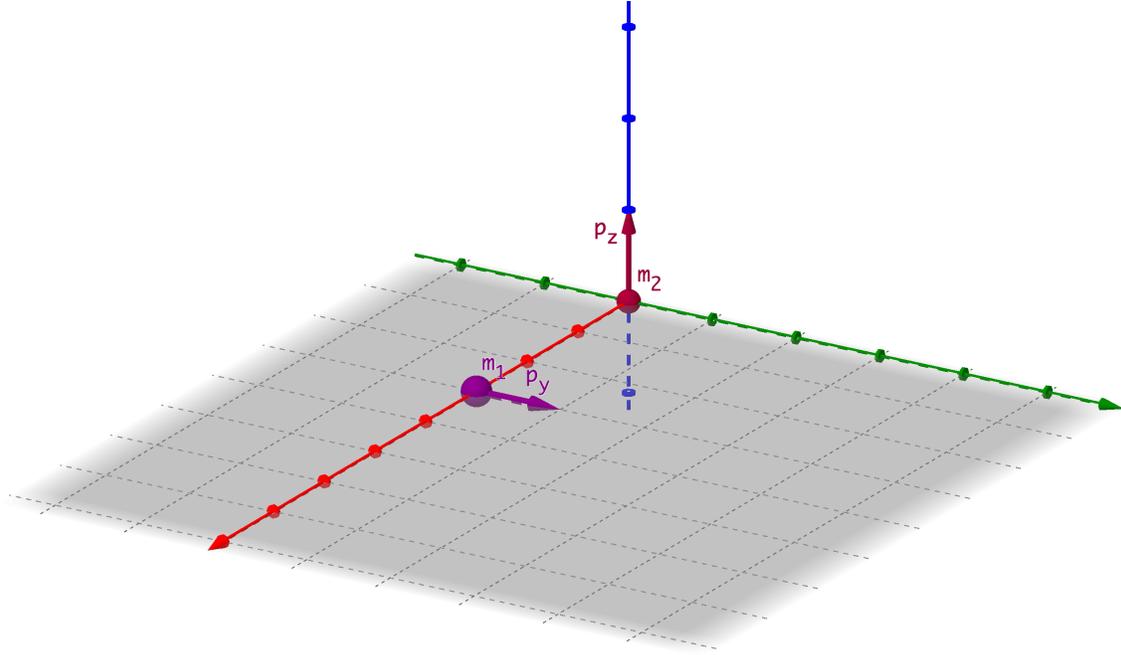
de la cual podemos escribir a  $p_z$  en función de  $r$ :

$$p_z^2 = \frac{2(\epsilon+1)^2}{r} - \frac{\alpha(\epsilon+1)^3}{\ell_z^2} - \frac{\ell_z^2(\epsilon+1)}{r^2},$$

podemos considerar como condición inicial para  $p_z$  el mínimo de la ecuación anterior, el cual se alcanza en  $p_z = \frac{\sqrt{(\epsilon+1)^3(1-\alpha)}}{\ell_z}$ , esto para  $r = \frac{\ell_z^2}{\epsilon+1}$ , además como supusimos que  $y = 0$  entonces tenemos que  $x = \frac{\ell_z^2}{\epsilon+1}$ . Por último recordemos que asumimos que  $0 = p_\rho = \frac{xp_x + yp_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , por lo tanto  $p_x = 0$ . En resumen tenemos:

$$x = \frac{\ell_z^2}{\epsilon+1}, y = 0, z = 0, p_x = 0, p_y = \frac{\epsilon+1}{\ell_z}, p_z = \frac{\sqrt{(\epsilon+1)^3(1-\alpha)}}{\ell_z}, \quad (4.2)$$

que es nuestro conjunto de condiciones iniciales y cuya representación esquemática se muestra es la Figura 4.3.



**Figura 4.3:** Representación de las condiciones iniciales; el cuerpo de masa  $m_2$  está situado en el origen y únicamente tiene impulso en la dirección  $z$ , el cuerpo de masa  $m_1$  se encuentra a una distancia  $x$  del origen y éste únicamente cuenta con impulso en la dirección  $y$ .

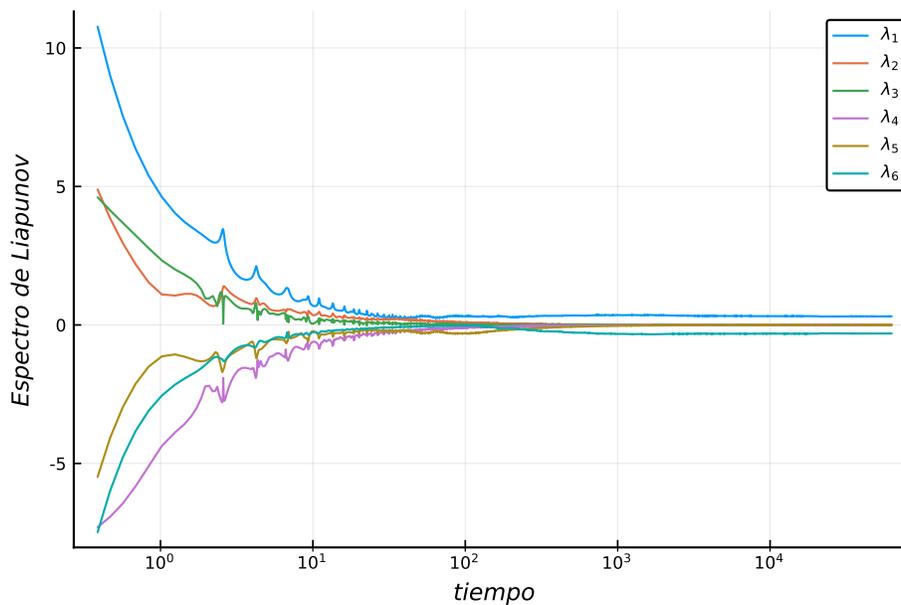
A continuación presentaremos los espectros de Lyapunov que se obtuvieron del conjunto de condiciones iniciales construidas en esta sección.

## 4.2. Espectro de Potencias para PKA

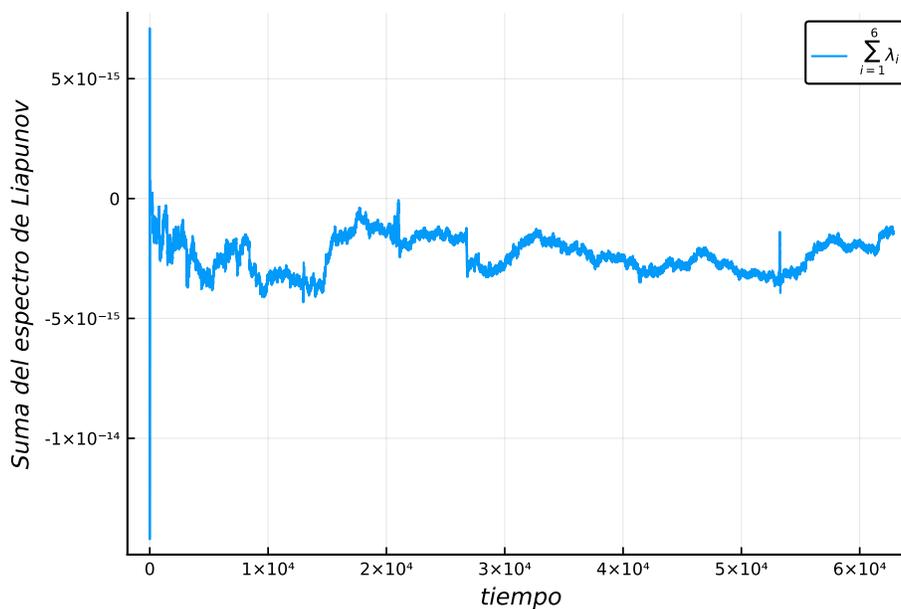
En las Figuras 4.8 a 4.13 mostramos a manera de mapas de calor el espectro de Lyapunov, el cual aquí llamamos *espectrograma*, para las condiciones descritas anteriormente, en ellas como ya habíamos planteado se fijó una fracción  $\alpha$  del mínimo del pozo de potencial. Además de barrer valores para  $\epsilon$  desde 0 hasta 5 y  $\ell_z$  de 0.1 a 5.1. En éstas graficamos en escala logarítmica el exponente más grande del espectro para un tiempo de integración de  $2\pi \times 10^3$ , este tiempo lo consideramos debido a que los exponentes muestran convergencia, tal y como se muestra en la Figura 4.4.

Del cálculo numérico se obtuvo que el exponente más grande es  $\lambda_1 \approx 0.309$ , el cual es la Figura 4.4 corresponde al trazo azul, por lo tanto en la posición correspondiente a  $\ell_z = 1.1$  y  $\epsilon = 3.1$  del mapa de calor para  $\alpha = 0.4$  pintamos dicho valor en escala logarítmica de acuerdo a escala de colores que van desde el negro al amarillo, siendo el negro los valores más pequeños y amarillo los más grandes. Un ejemplo de espectro igual a cero se ilustra en la Figura 4.6, en cual el exponente más grande es  $\lambda_1 \approx 0.0002$ , prácticamente cero, por lo que en la gráfica del espectro esta condición sería un punto

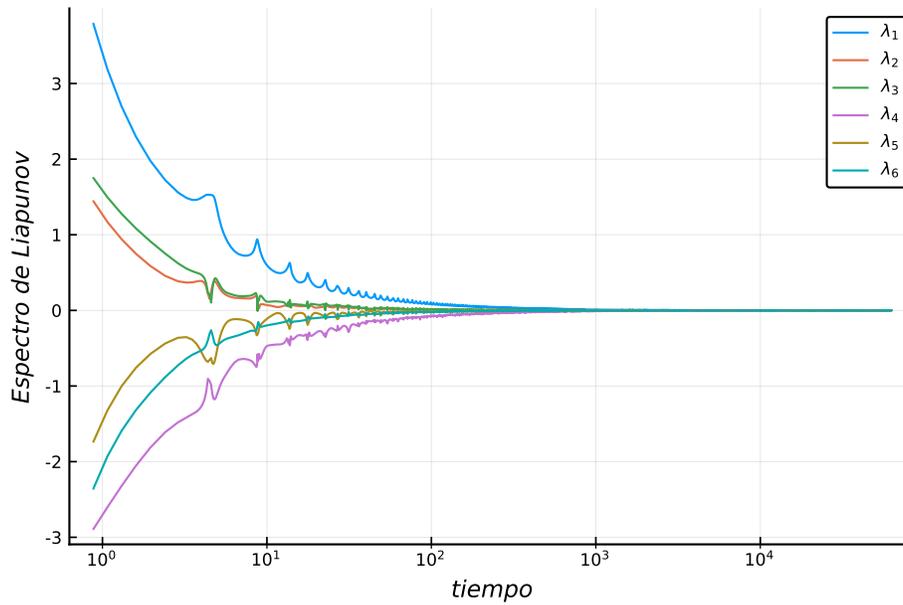
muy oscuro y el caso anterior un punto de color. Esto lo podemos ver de manera más clara en el correspondiente espectro, Figura 4.11.



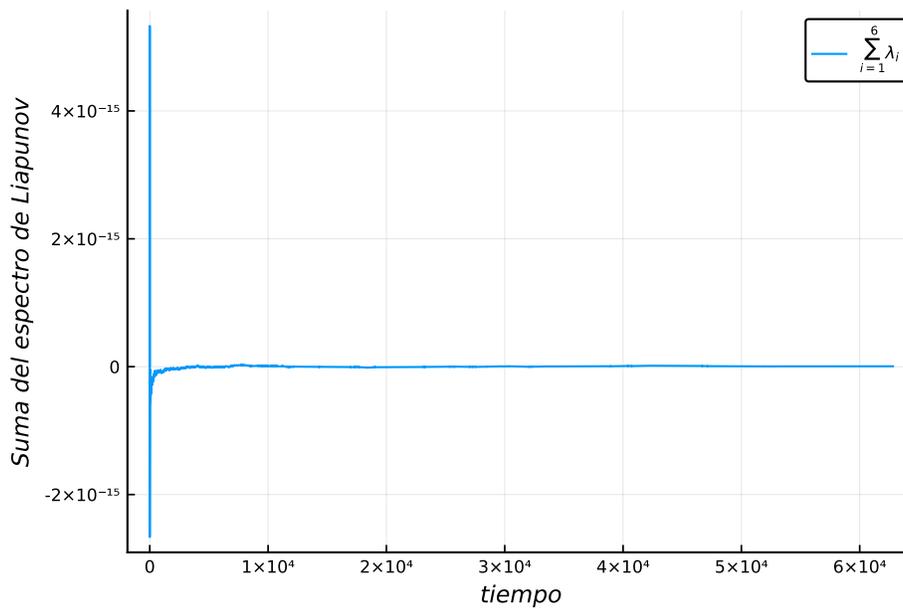
**Figura 4.4:** Variación del espectro de Lyapunov en función del tiempo en escala semi-log, con parámetros;  $\alpha = 0.4$ ,  $l_z = 1.1$  y  $\epsilon = 3.1$ . En esta gráfica se observa que los exponentes del espectro dejan de variar después de un tiempo mayor a  $10^3$ .



**Figura 4.5:** Suma de los exponentes de Lyapunov, con parámetros;  $\alpha = 0.4$ ,  $l_z = 1.1$  y  $\epsilon = 3.1$ . En esta gráfica se observa que la suma de los exponentes de Lyapunov fluctúa cerca del cero, pues el sistema es Hamiltoniano y el espectro de Lyapunov es una medida de la tasa de cambio de espacio fase.



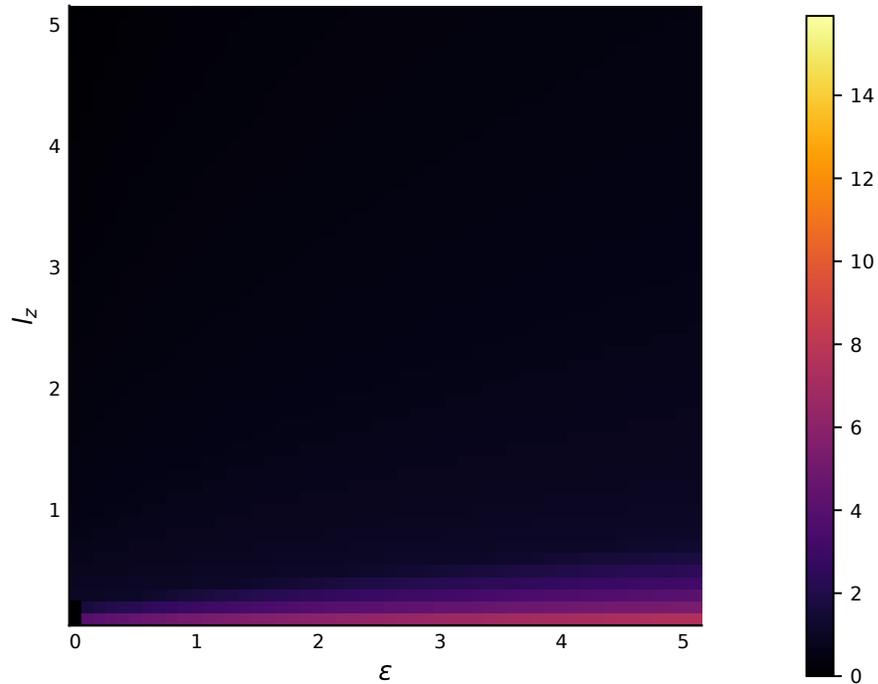
**Figura 4.6:** Variación del espectro de Lyapunov en función del tiempo en escala semi-log, con parámetros;  $\alpha = 0.4$ ,  $\ell_z = 1.1$  y  $\epsilon = 2.0$ . En esta gráfica se observa que los exponentes del espectro dejan de variar después de un tiempo mayor a  $10^3$ , pero diferencia de la Figura 4.4 todos los exponente tienden a cero.



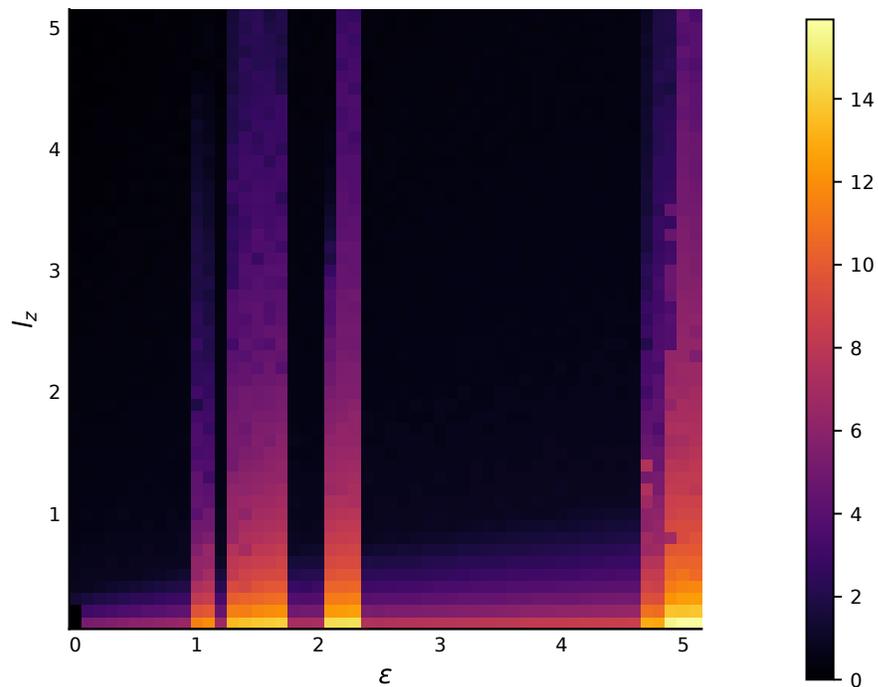
**Figura 4.7:** Suma de los exponentes de Lyapunov, con parámetros;  $\alpha = 0.4$ ,  $\ell_z = 1.1$  y  $\epsilon = 2.0$ . En este caso se tiene un comportamiento análogo al que se observa en la Figura 4.5, ya que el sistema es Hamiltoniano.

### 4.2.1. Espectrogramas para PKA

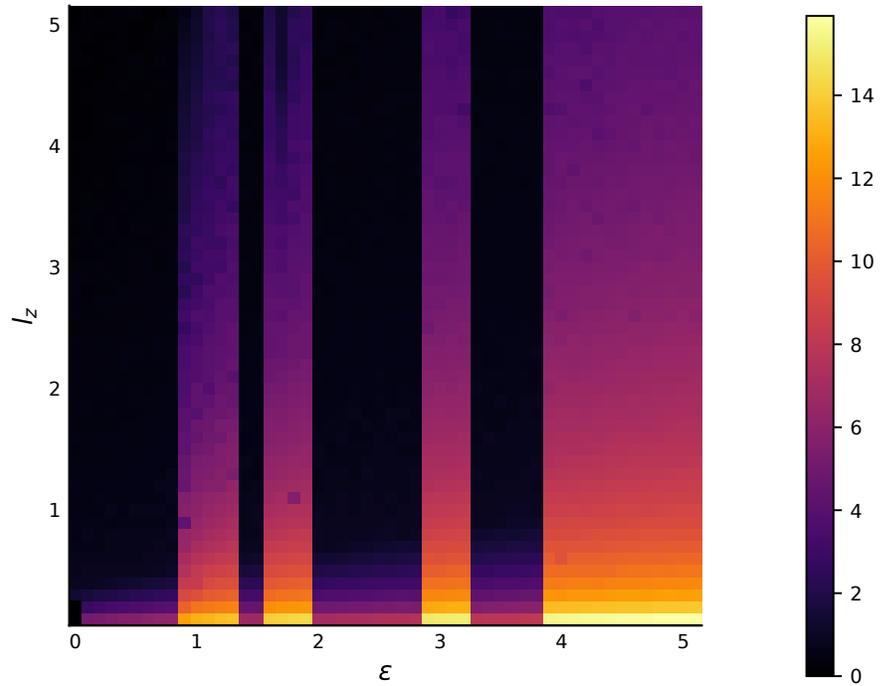
Enseguida se muestran los espectrogramas para las condiciones iniciales de la ecuación (4.2).



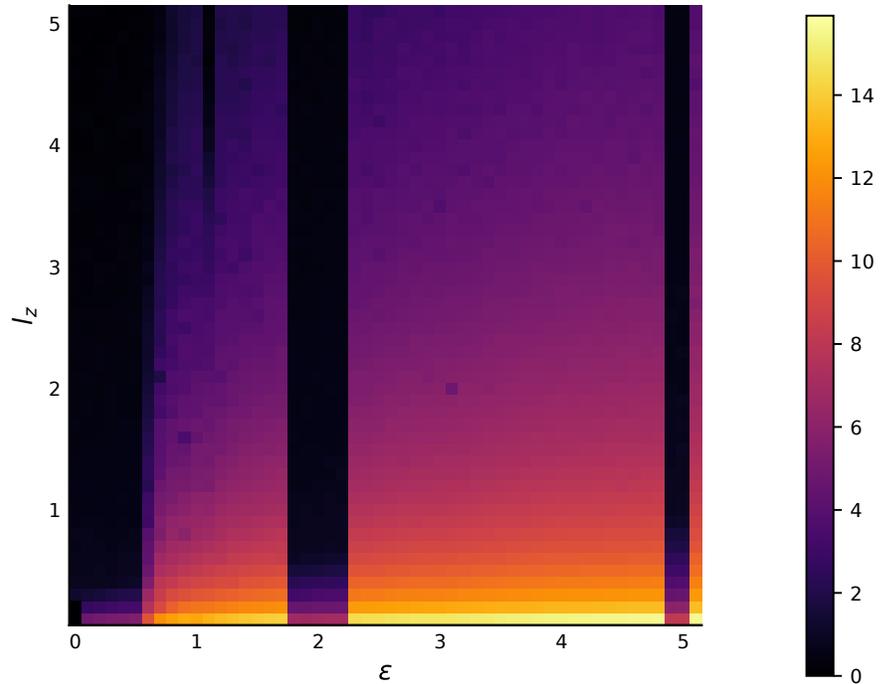
**Figura 4.8:** Espectrograma para los exponentes más de grandes del espectro Lyapunov dada  $\alpha = 1.0$ ,  $\epsilon$  de 0 a 5 y  $l_z$  de 0.1 a 5. En este caso vemos que hay una región para la cual es sistema es sensible, esta región corresponde a los tonos que van de entre morado y rojo en el espectrograma.



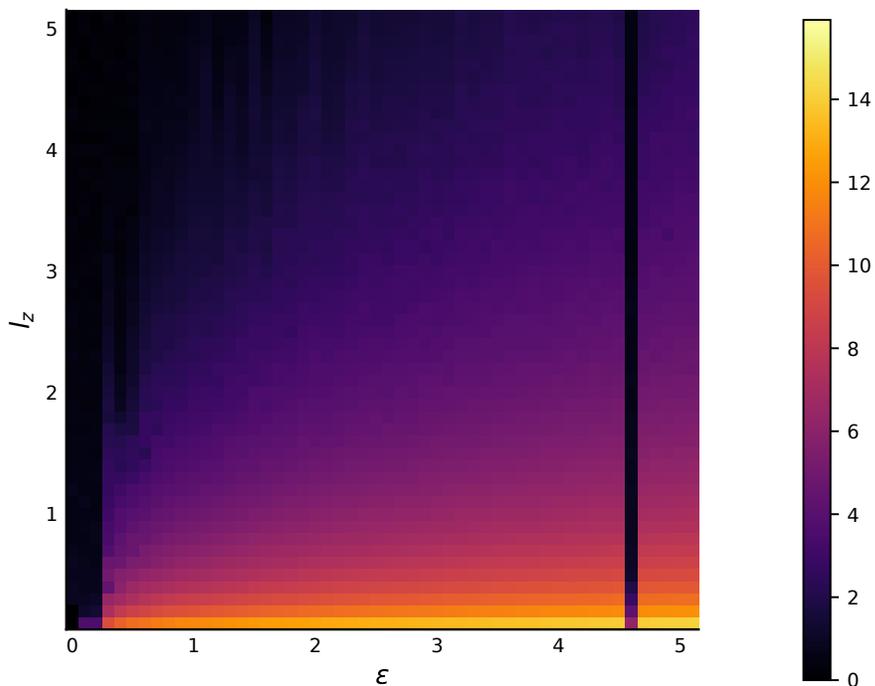
**Figura 4.9:** Espectrograma para los exponentes más de grandes del espectro Lyapunov dada  $\alpha = 0.6$ ,  $\epsilon$  de 0 a 5 y  $l_z$  de 0.1 a 5. Aquí se observan regiones alternadas en la cuales tenemos exponentes cercano al negro, que corresponden a valores cercanos a cero, y exponentes cercanos al amarillo.



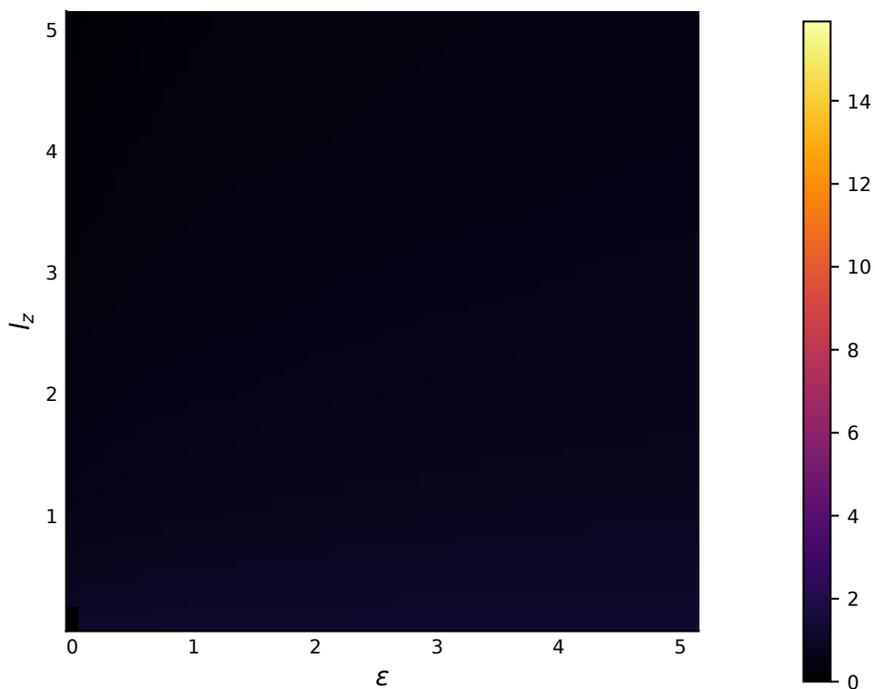
**Figura 4.10:** Espectrograma para los exponentes más de grandes del espectro Lyapunov dada  $\alpha = 0.5$ ,  $\epsilon$  de 0 a 5 y  $l_z$  de 0.1 a 5. Para este valor de  $\alpha$  se observa el mismo comportamiento de franjas negras y de color alternadas, por lo que estabilidad del sistema depende del valor de  $\epsilon$ .



**Figura 4.11:** Espectrograma para los exponentes más de grandes del espectro Lyapunov dada  $\alpha = 0.4$ ,  $\epsilon$  de 0 a 5 y  $l_z$  de 0.1 a 5. En este espectrograma se siguen teniendo franjas negras y de color, pero a diferencia de los espectrogramas anteriores son dominantes sobre la negras, esto significa que el sistema es más sensible a las condiciones iniciales.



**Figura 4.12:** Espectrograma para los exponentes más de grandes del espectro Lyapunov dada  $\alpha = 0.1$ ,  $\epsilon$  de 0 a 5 y  $l_z$  de 0.1 a 5. En esta imagen se observan dos franjas negras, pero en la esquina superior izquierda también se observa una región que va del negro al morado. Por lo que para estos casos el sistema no es sensible a las condiciones iniciales.



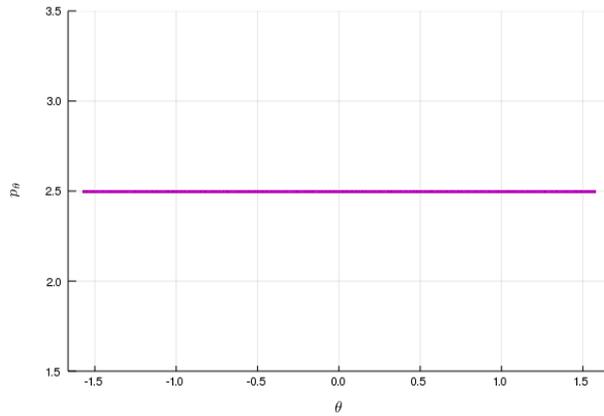
**Figura 4.13:** Espectrograma para los exponentes más de grandes del espectro Lyapunov dada  $\alpha = 0.0$ ,  $\epsilon$  de 0 a 5 y  $l_z$  de 0.1 a 5. Para condiciones tales que la energía sea el mínimo del pozo de potencial,  $\alpha = 0$  todo el espectrograma es de color negro, por lo que el sistema no muestra dependencia sensible a las condiciones iniciales.

De los espectrogramas obtuvimos los valores de  $\alpha$ ,  $\epsilon$  y  $\ell_z$  para los PKA es sensible a las condiciones iniciales. Recordemos que uno de los objetivos de este trabajo es exhibir si nuestro sistema es caótico, y si lo es bajo que condiciones. Ahora sólo faltaría mostrar si el flujo es topológicamente transitivo.

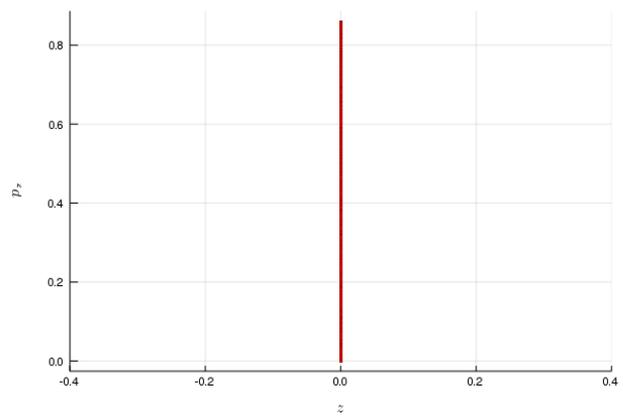
### 4.3. Secciones de Poincare

Si bien hasta el momento no contamos con una técnica numérica eficiente que nos permita saber si PKA es topológicamente transitivo, en el presente trabajo nos apoyamos de la secciones de Poincaré, la cual realizamos cuando la partícula que se mueve en el eje  $z$  cruza el plano  $xy$ .

Para saber si PKA es topológicamente transitivo bastaría con observar si la proyección del conjunto invariante en plano fase  $\rho p_\rho$  es denso, la idea de esto la siguiente; la dinámica del sistema en el plano  $\theta p_\theta$ , Figura 4.14, es un segmento de recta debido a que  $p_\theta$  es una constante de movimiento, lo que nos reduce el estudio al resto de espacio fase. Además como ya discutimos en la sección 3.2, la sección de Poincaré nos permite hacer un estudio del sistema reduciendo la dimensión de la dinámica y puesto que la sección la calculamos cuando  $z = 0$ , el plano fase correspondiente a  $z p_z$ , Figura 4.15, es un segmento de recta, por lo que sólo no queda analizar el plano fase  $\rho p_\rho$ .

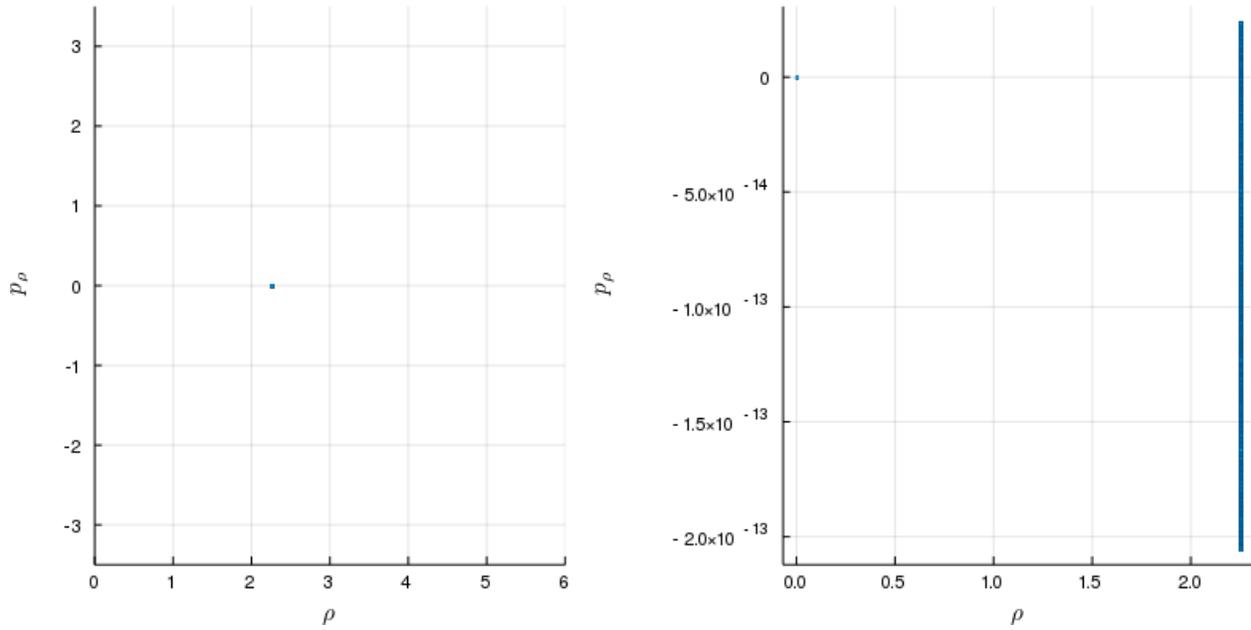


**Figura 4.14:** Plano  $\theta p_\theta$  para la sección de Poincaré. En este plano se observa un segmento de recta pues  $p_\theta$  es una constante de movimiento.

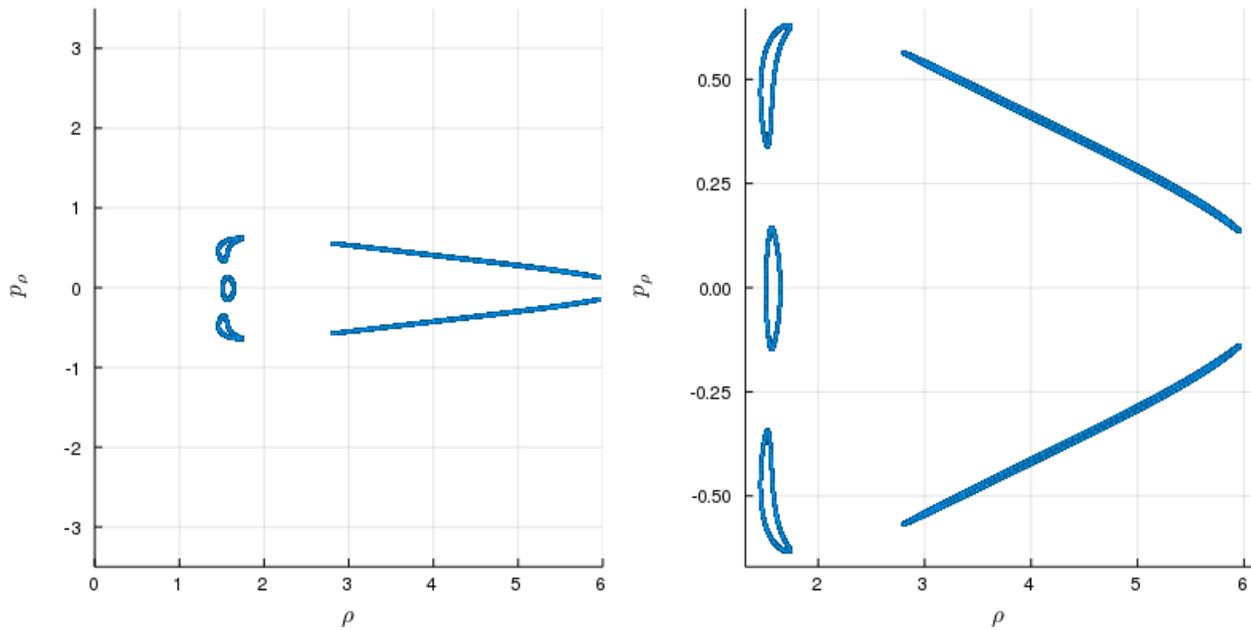


**Figura 4.15:** Plano  $z p_z$  para la sección de Poincaré. La cantidad de movimiento en la componente del sistema cuando cruza el plano  $xy$ , un valor cercano a 0 a aproximadamente 0.85.

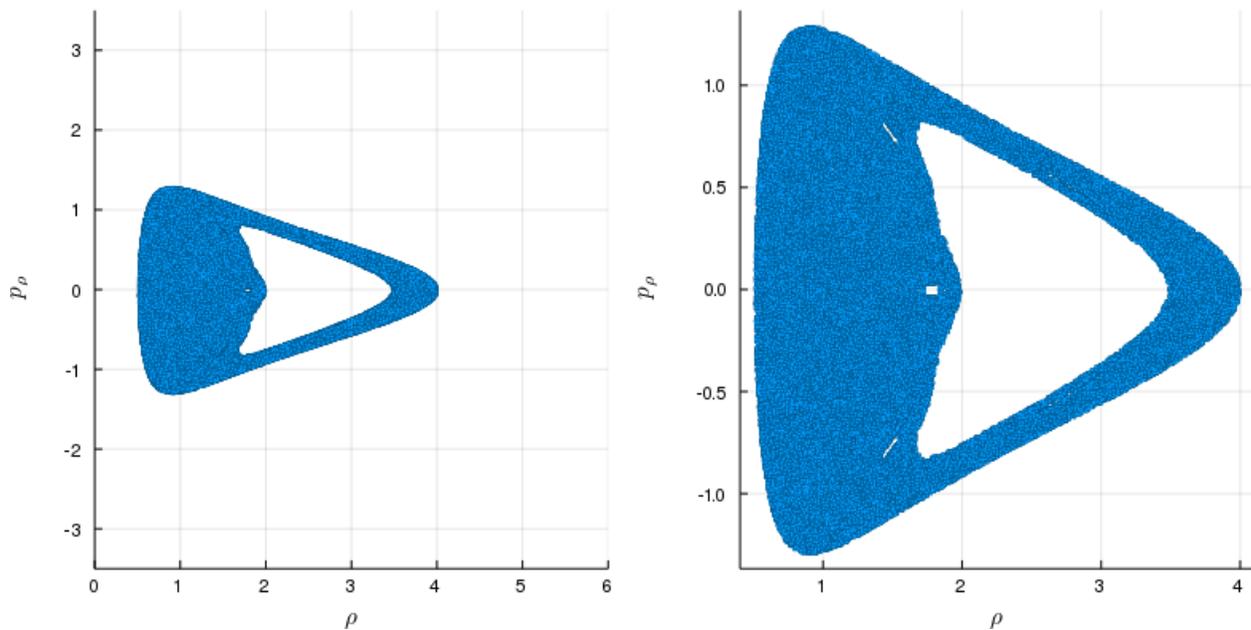
De la Fig. 4.16 a la Fig. 4.21 se muestran secciones de Poincaré para ejemplificar el comportamiento del sistema, esto para una fracción de la energía de  $\alpha = 0.4$ , en las cuales del lado izquierdo se muestran a la misma escala, y del lado derecho la escala es la que proporciona el graficador esto con fin de apreciar mejor las secciones.



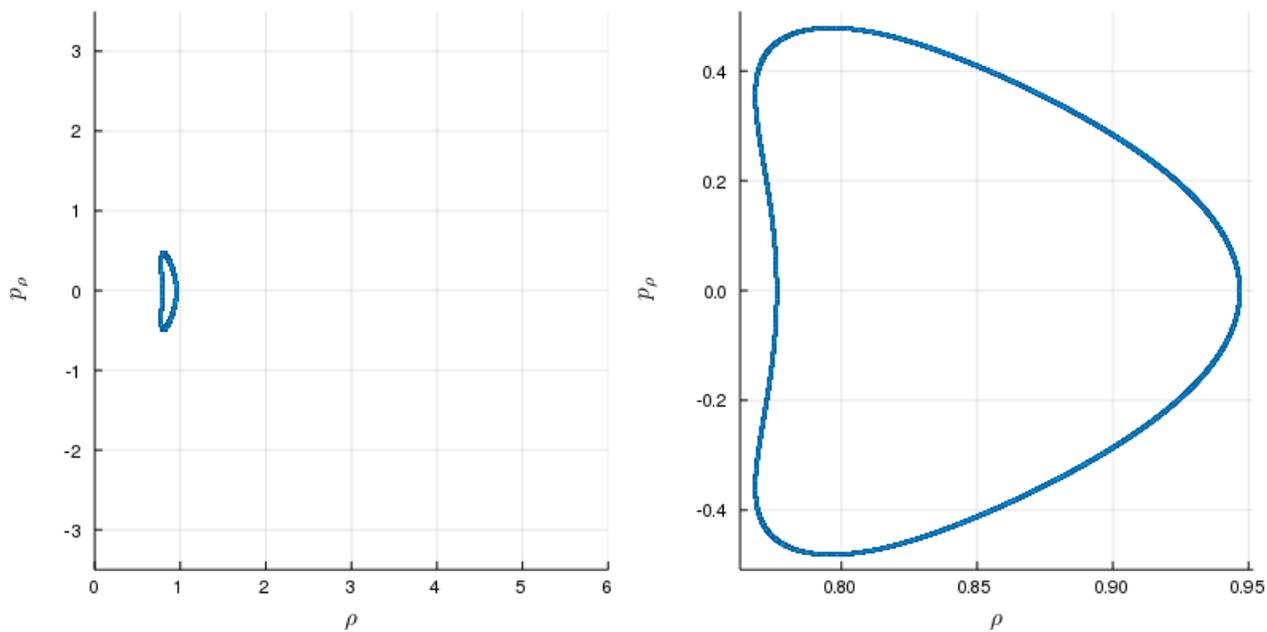
**Figura 4.16:** Sección de Poincaré para el plano  $pp_\rho$  con  $\epsilon = 0.0$  y  $\alpha = 0.4$ . En el lado derecho se observa que la sección de Poincaré en un punto, por lo que la órbita en este caso es periódica, del lado izquierdo se muestra un acercamiento en el que se puede apreciar el error numérico.



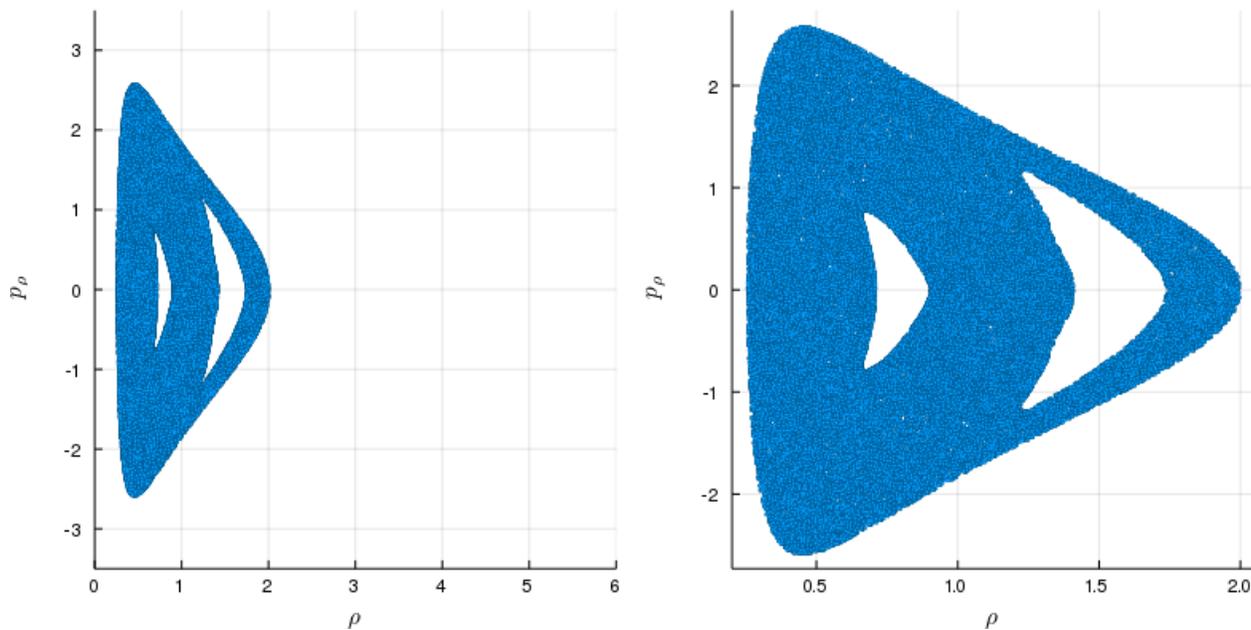
**Figura 4.17:** Sección de Poincaré para el plano  $pp_\rho$  con  $\epsilon = 0.5$  y  $\alpha = 0.4$ . Del lado derecho se observa que la sección de Poincaré está formada por cinco regiones que son recorridas por el flujo, del lado izquierdo se muestra un acercamiento en el que se puede apreciar la estructura de la sección.



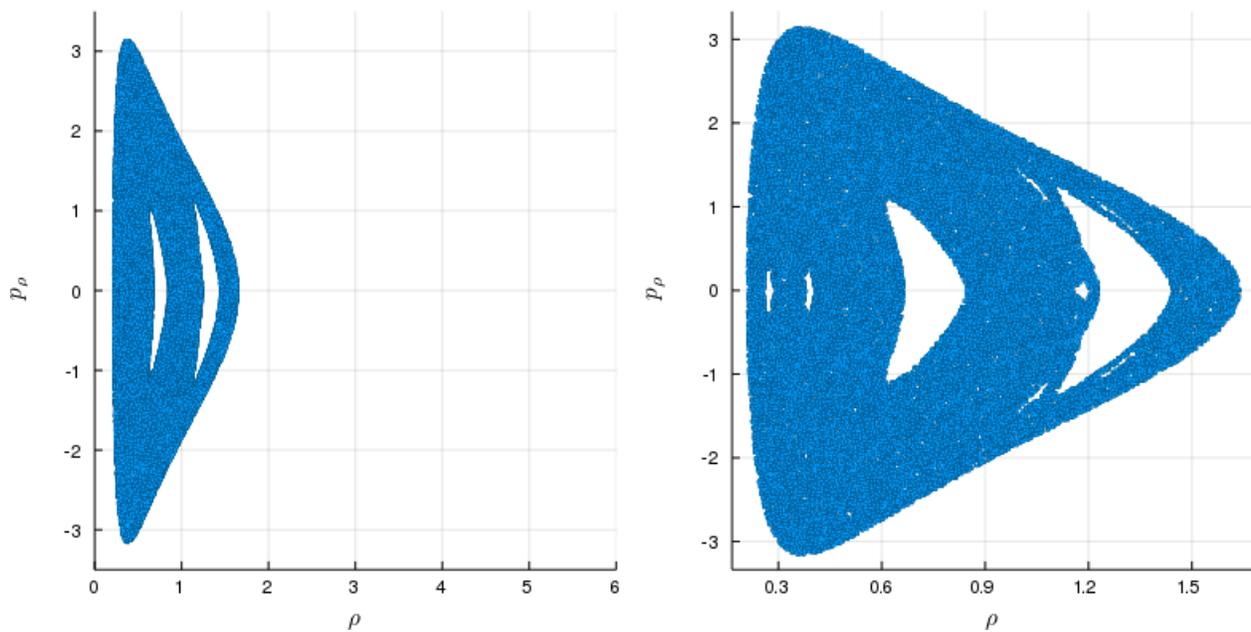
**Figura 4.18:** Sección de Poincaré para el plano  $\rho p_\rho$  con  $\epsilon = 1.5$  y  $\alpha = 0.4$ . En esta imagen se observa que la sección se Poincaré comienza a llenar un región del plano fase  $\rho p_\rho$ , sin embargo se observan cuatro regiones sin puntos, por lo que no se puede afirmar que el sistema sea transitivo por lo tanto no es caótico.



**Figura 4.19:** Sección de Poincaré para el plano  $\rho p_\rho$  con  $\epsilon = 1.9$  y  $\alpha = 0.4$ . En este caso la masa aumentó pero la sección de Poincaré ya no es densa, y sólo recorre una curva del plano fase  $\rho p_\rho$ .



**Figura 4.20:** Sección de Poincaré para el plano  $\rho p_\rho$  con  $\epsilon = 4.0$  y  $\alpha = 0.4$ . En esta sección se observa que nuevamente se comienza a llenar una zona en el plano fase  $\rho p_\rho$ , pero sin cubrirla toda, por tanto que para estas condiciones el sistema es topológicamente transitivo.



**Figura 4.21:** Sección de Poincaré para el plano  $\rho p_\rho$  con  $\epsilon = 5.1$  y  $\alpha = 0.4$ . Es esta imagen se observa un comportamiento similar a la Figura 4.20, sin embargo en este caso aparecen más regiones sin puntos.

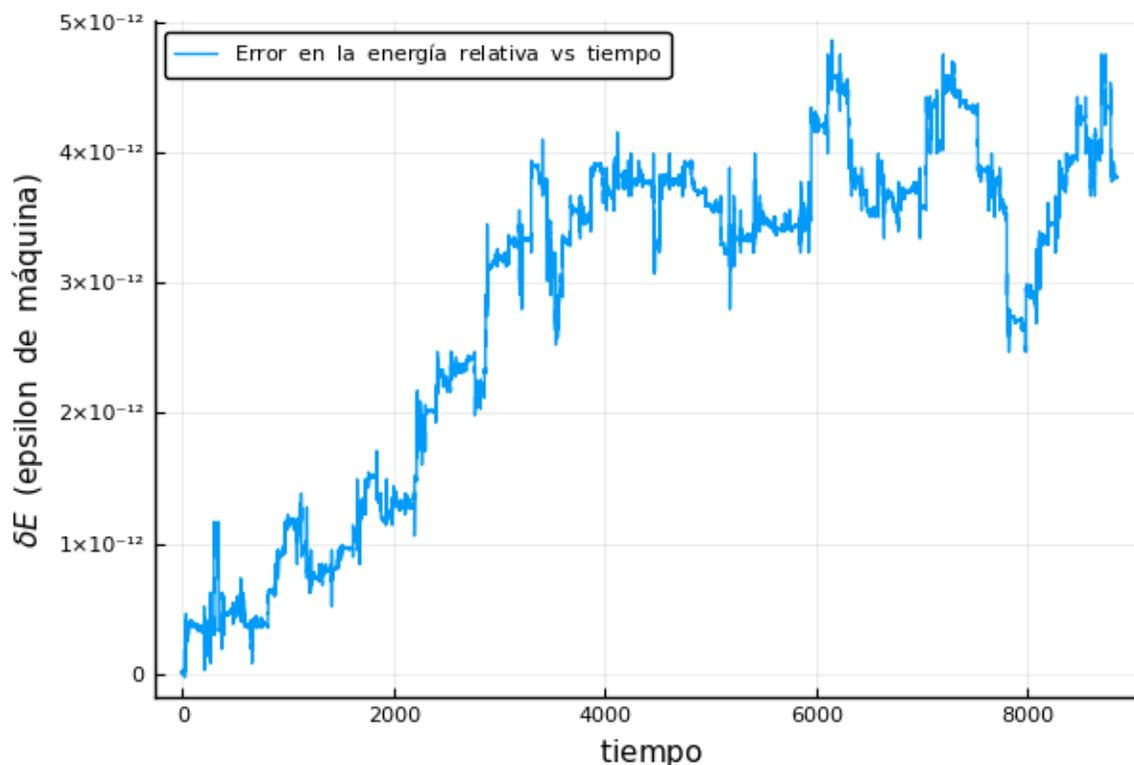
## Discusión y conclusiones

En esta sección haremos una breve discusión de los resultados obtenidos, principalmente del espectro de Lyapunov, seguido de las secciones Poincaré para un caso particular. Por último presentaremos las conclusiones a las que hemos llegado con este trabajo.

### 5.1. Discusión

#### 5.1.1. La integración numérica

El pilar más importante para el desarrollo de este trabajo fue el uso del integrador de Taylor, el cual nos permite pasos de integración variables y suficientemente grandes, eso para reducir en gran medida el error numérico intrínseco de la aritmética de punto flotante, situación que podemos observar en la Figura 5.1, en la cual graficamos el error relativo en la energía normalizado por el epsilon de la máquina,  $\varepsilon_{mach} = 2.220446049250313e-16$ , como función del tiempo para Taylor de orden 32. En esta imagen vemos que el error relativo después de un tiempo de  $2\pi \times 10^3$  es menor que  $5 \times 10^{-12}$ .

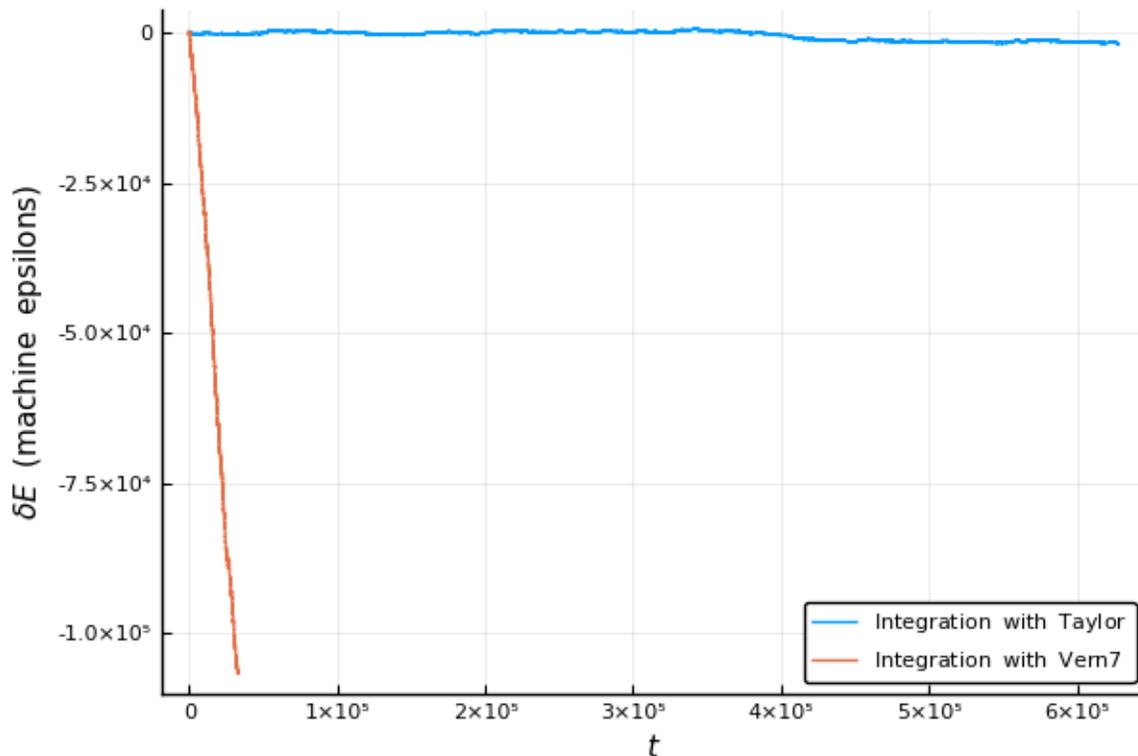


**Figura 5.1:** Error relativo en la energía normalizado por el epsilon de la máquina, el cual para un tiempo de integración de  $2\pi \times 10^3$  es menor que  $5 \times 10^{-12}$ .

Para dimensionar de mejor manera lo anterior, en la Figura 5.2 comparemos el integrador Taylor con `Vern7()`, el integrador más preciso recomendado por Chirs Rackauks desarrollador de `DiffEquations.jl` [30]. Como se puede observar, la elección del integrador de Taylor es el adecuado.

Con anterioridad ya hemos discutido brevemente sobre método de Taylor y aquí hemos exhibido la precisión de éste, ahora mostraremos cómo fue que empleamos este poderoso integrador en nuestro estudio. Para obtener nuestros datos, usamos para la integración al igual que en el caso anterior polinomios grado 32, un número máximo de pasos de  $2 \times 10^5$ , esto en un tiempo de integración de  $2\pi \times 10^3$ , lo anterior pues al realizar las primeras pruebas para el espectro de Lyapunov obtuvimos gráficas como las que se muestran en la Figura 4.4, la cual discutiremos a continuación.

En la Figura 5.3, se observa que la región sombreada en naranja, correspondiente a un tiempo entre 0 y 10, los exponentes calculados son inicialmente grandes, pero a medida que transcurre el tiempo de integración tienden a una región cercana a cero, por lo que considerar un tiempo de integración en esta región es una mala elección pues los exponentes aún no tienden a estabilizarse. En la región magenta vemos algunos de los exponentes calculados alcanzan valores muchos más pequeños que los tomarían al estabilizarse, por lo que de nueva cuenta considerar tiempos de integración en la región magenta sigue siendo una mala elección. Por último para tiempos mayores a  $10^2$  que corresponden a la región azul todos los exponentes se estabilizan, por lo que considerar tiempos de integración en esta región resulta confiable para el cálculo del espectro de Lyapunov, es por esta razón que la



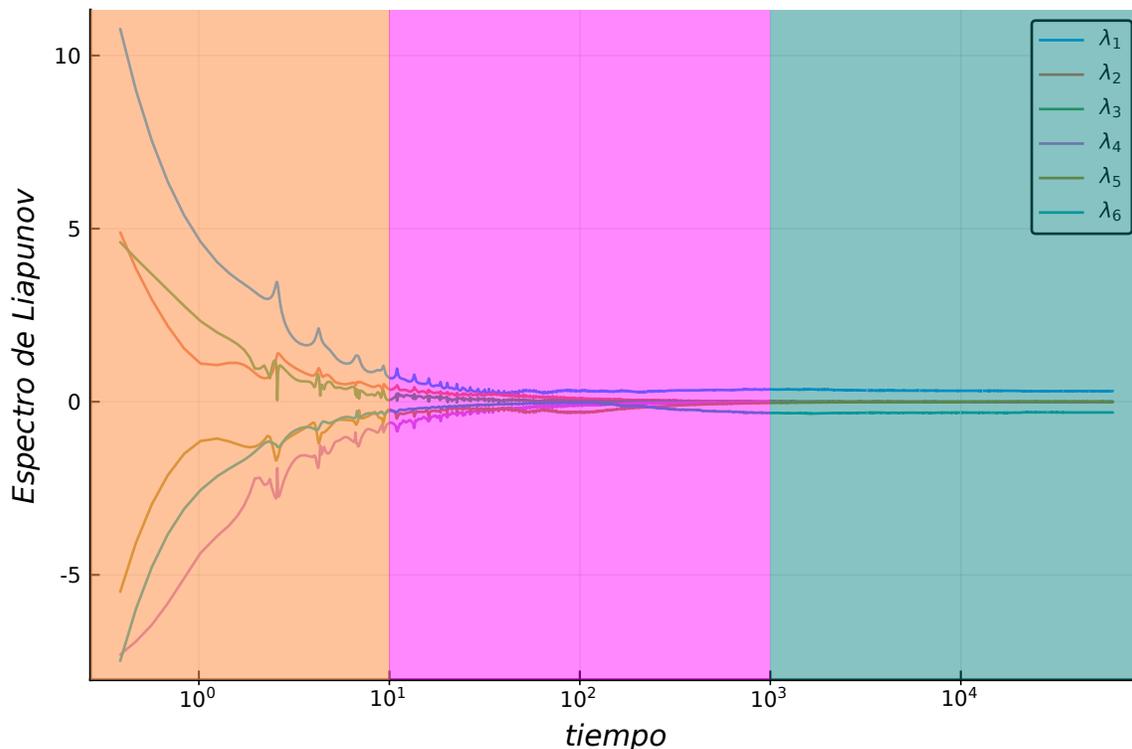
**Figura 5.2:** Taylor vs Vern7, en esta gráfica se comparan el integrador de Taylor con Vern7, en la cual se observa que la energía con Vern7 desciende muy rápido comparado con Taylor.

integración se hizo para tiempos de  $2\pi \times 10^3$ . Es importante mencionar que las condiciones iniciales fueron tomadas de tal manera que la dinámica estuviera restringida en una región de confinamiento por lo que ninguna de las partículas podría escapar, con lo que podemos asegurar que todos los espectros de Lyapunov después de un tiempo se estabilizan, haciendo válido el tratamiento anterior.

Para las secciones de Poincaré también las obtuvimos de la integración con el método de Taylor. Como mencionamos anteriormente, la sección se hizo cuando el cuerpo de masa  $m_2$  cruzaba el plano  $xy$ , y este tenía velocidad positiva, es decir cuándo  $z = 0$  y  $p_z > 0$ . Para esto durante la integración se busca el cambio de signo de  $z$  y luego con el método de Newton-Raphson se intenta encontrar la raíz.

### 5.1.2. El espectro de Lyapunov

Antes de calcular los espectros de Lyapunov esperábamos un par situaciones. La primera que los coeficientes mas pequeños fueran aquellos para los cuales  $\ell_z$  sea grande y valores de  $\epsilon$  pequeños, es decir, arriba y a la izquierda. Pues si  $\epsilon$  es cercano a cero, nuestro problema es muy parecido al problema de Kepler, por otro lado si la componente  $z$  del momento angular es grande la partícula que se mueve en el plano mantendrá su movimiento alejado del origen, con lo cual se evita que las partículas pasen muy cerca entre ellas y esto haga que se complique la dinámica.



**Figura 5.3:** Tiempo de integración para el exponente de Lyapunov. En la región naranja se observa que los exponentes del espectro fluctúan considerablemente, en la magenta los exponentes no fluctúan tanto, no obstante lo siguen haciendo y por último en la región azul los exponentes se estabilizan.

La segunda, que los espectros más grandes fueran aquellos para los que  $\ell_z$  sea pequeño y  $\epsilon$  grande, abajo y a la derecha. Pues en contraste a lo anterior, la interacción gravitacional provoca que la partícula en el plano tienda hacia el origen dando lugar a que estas pasen muy cerca una de la otra con un momento grande y esto haga que se alejen mucho complicando la dinámica del sistema. Y justo esto se puede observar en los espectrogramas, de la Figura 4.8 a la Figura 4.13.

También era de esperarse que para energías equivalentes al mínimo del pozo de potencial,  $\alpha = 1$ , el sistema no fuera sensible pues en el mínimo tendríamos órbitas periódicas ya que la región de confinamiento, Fig. 4.2, degeneró en un punto. Esto también lo podemos ver de la Ec.(4.2), ya que si  $\alpha = 1$  tenemos que  $p_z = 0$ . La interpretación física de esto es la siguiente; la partícula de masa  $m_2$  permanecería en reposo en el origen, por lo que el momento angular total del sistema es el momento angular de la partícula y este sólo tiene componente en  $z$ , es decir la órbita que describe la masa  $m_1$  es periódica. Considerar  $\alpha = 1$  es equivalente a imponer una restricción mas sobre la partícula  $m_2$ , por lo que el sistema ahora tendría dos grados de libertad y debido a que tiene dos integrales de movimiento entonces para este caso  $PKA$  es integrable.

Sin embargo, el comportamiento más interesante es la aparición de franjas oscuras entre franjas de color, las cuales están asociadas a exponentes pequeños. Este comportamiento es muy similar a la duplicación de periodo que exhibe el mapeo logístico.

## 5.2. Conclusiones

Como bien sabemos, cuando comenzamos el estudio de un nuevo problema es importante apoyarnos en uno ya conocido, en nuestro caso éste es el de Kepler que como ya mostramos es super-integrable y esta característica nos permitió tener una referencia en nuestros cálculos, pues si observamos tanto las secciones de Poincaré y los espectros de Lyapunov para  $\epsilon = 0$ , obtuvimos un punto referente a que la órbita es periódica y estable para el caso de los mapeos, y en el caso de los espectros se obtiene un pixel negro asociado a un exponente cero, es decir el sistema no es sensible a las condiciones iniciales.

Con lo realizado en este trabajo concluimos una parte importante sobre el estudio del problema de Kepler asimétrico pues determinamos la sensibilidad a las condiciones iniciales mediante el espectro de Lyapunov, Figuras 4.8 a 4.13. En ellas observamos cómo aparecen franjas de estabilidad, exponentes cero, alternadas con franjas en las que tenemos exponentes grandes. También concluimos que el sistema es más estable cuando la componente  $z$  del momento angular es grande.

Con lo hecho en el presente trabajo, cuando  $\epsilon > 0$  el sistema no es integrable y en algunas regiones del espacio fase es sensible a las condiciones iniciales, es decir, tenemos señales de la existencia de caos. Otro resultado obtenido, fue que el sistema es integrable para cuando la energía es igual al mínimo del pozo de potencial. Resumiendo tenemos un sistema Hamiltoniano que dependiendo de condiciones de simetría el sistema va de ser super-integrable pasando por la integrabilidad hasta ser sensible a las condiciones iniciales y muy probablemente caótico.

Con respecto al integrador utilizado, el de Taylor, resultó muy útil pues este nos permitió hacer cálculos muy precisos, al grado que la energía es casi constante. El siguiente paso es implementar un método de Taylor garantizado tal como se muestra en [31], para tener resultados precisos y, además garantizados, tomando en cuenta que el precio a pagar por estas técnicas es el considerable tiempo de cómputo. Por lo que como trabajo a futuro investigaremos la posibilidad de implementar estos métodos en algoritmos paralelizados, o realizarlos en GPU's.

Escribir nuestro sistema en coordenadas de Delaunay no lo simplificó del todo, por lo que sería interesante intentar técnicas de reducción Lie-Poisson o Marsden-Weinstein como las que se muestran en [32]. Sin embargo con la función hamiltoniana escrita en coordenadas de Delaunay nos abre la oportunidad para poder estudiar nuestro sistema desde la óptica de la teoría de perturbaciones, lo cual por cuestiones de tiempo no pudimos realizar en este trabajo. De las secciones de Poincaré observamos la persistencias de toros invariantes, sin embargo no contamos con un método formal para demostrar la existencia de estos, pero a futuro tenemos la intención de aprender técnicas para exhibirlo.

Sin duda sería interesante entender cuando los toros invariantes persisten o son destruidos considerando  $\epsilon$  pequeño, algo que podemos apreciar en la secciones de Poincaré obtenidas. Y es justo el *Teorema de KAM* (ver [33, 34, 35]) que nos proporciona la respuesta a esto, pues el teorema establece que los toros que persisten a una perturbación pequeña son aquellos que tienen un cociente de frecuencias suficientemente irracional. Como parte de mi trabajo a futuro tengo la intención de aprender teoría de KAM y aplicarla a este sistema.



# Apéndice A

## Variables angulares del Problema de Kepler

En este apéndice mostraremos algunos detalles en los cálculos que se omitieron en el capítulo 2.1

**Variable Angular con respecto a  $\rho$**

$$\begin{aligned}
 \varphi_\rho &= \frac{\partial \Sigma}{\partial I_\rho} = \frac{\partial}{\partial I_\rho} \left( \frac{1}{(I_\rho + I_\theta + I_\phi)} \int \frac{1}{\rho} \sqrt{-\rho^2 + 2(I_\rho + I_\theta + I_\phi)^2 \rho - (I_\theta + I_\phi)^2 (I_\rho + I_\theta + I_\phi)^2} d\rho \right) \\
 &= -\frac{1}{a} \int \frac{1}{\rho} \sqrt{-\rho^2 + 2a\rho - b^2} d\rho + \frac{1}{(I_\rho + I_\theta + I_\phi)} \left[ \int \frac{[4\rho - 2(I_\theta + I_\phi)^2] (I_\rho + I_\theta + I_\phi)}{2\rho \sqrt{-\rho^2 + 2a\rho - b^2}} d\rho \right] \\
 &= -\frac{1}{a} \int \frac{\sqrt{-\rho^2 + 2a\rho - b^2}}{\rho} d\rho + \int \frac{2}{\sqrt{-\rho^2 + 2a\rho - b^2}} d\rho - \frac{b^2}{a} \int \frac{1}{\rho \sqrt{-\rho^2 + 2a\rho - b^2}} d\rho
 \end{aligned}$$

Si consideramos el siguiente cambio de variable  $e^2 = 1 - \frac{(I_\theta + I_\phi)^2}{(I_\rho + I_\theta + I_\phi)^2}$ , tenemos

$$\varphi_\rho = -\frac{1}{a} \int \frac{\sqrt{-\rho^2 + 2a\rho - a^2(1 - e^2)}}{\rho} d\rho + \int \frac{2}{\sqrt{-\rho^2 + 2a\rho - a^2(1 - e^2)}} d\rho - \int \frac{a(1 - e^2)}{\rho \sqrt{-\rho^2 + 2a\rho - a^2(1 - e^2)}} d\rho$$

Luego de realizar las correspondientes integrales tenemos <sup>1</sup>

<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sqrt{Ar^2 + Br + C}} dr &= \frac{1}{\sqrt{-A}} \arcsin \left( \frac{-2Ar - B}{\sqrt{B^2 - 4AC}} \right) \\
 \int \frac{1}{r\sqrt{Ar^2 + Br + C}} dr &= \frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsin \left( \frac{Br + 2C}{r\sqrt{B^2 - 4AC}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\varphi_\rho = -\frac{1}{a}\sqrt{-\rho^2 + 2a\rho - a^2(1 - e^2)} + \arcsin\left(\frac{\rho - a}{ea}\right) \quad (5.1)$$

### Variable Angular con respecto a $\theta$

Para el calculo de  $\varphi_\theta$  se necesitan la siguientes derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma_\theta}{\partial I_\theta} &= \frac{\partial}{\partial I_\theta} \left( (I_\theta + I_\phi) \int \sqrt{1 - \frac{I_\phi^2}{(I_\theta + I_\phi)^2 \sin^2 \theta}} d\theta \right) = \frac{\partial}{\partial I_\theta} \left( \int \sqrt{(I_\theta + I_\phi)^2 - \frac{I_\phi^2}{\sin^2 \theta}} d\theta \right) \\ &= \int \frac{\partial}{\partial I_\theta} \left( \sqrt{(I_\theta + I_\phi)^2 - \frac{I_\phi^2}{\sin^2 \theta}} \right) d\theta = \int \frac{2(I_\theta + I_\phi)}{2} \left( (I_\theta + I_\phi)^2 - \frac{I_\phi^2}{\sin^2 \theta} \right)^{-\frac{1}{2}} d\theta \\ &= (I_\theta + I_\phi) \int \frac{d\theta}{\sqrt{(I_\theta + I_\phi)^2 - \frac{I_\phi^2}{\sin^2 \theta}}} = (I_\theta + I_\phi) \int \frac{d\theta}{(I_\theta + I_\phi) \sqrt{1 - \frac{I_\phi^2}{(I_\theta + I_\phi)^2 \sin^2 \theta}}} \\ &= \int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{I_\phi^2}{(I_\theta + I_\phi)^2 \sin^2 \theta}}} = \int \frac{\sin \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta - \frac{I_\phi^2}{(I_\theta + I_\phi)^2}}} d\theta = \int \frac{du}{\sqrt{\left(u - \frac{I_\phi^2}{(I_\theta + I_\phi)^2}\right) (1 - u)}} \\ &= \arcsin \left( \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{I_\phi^2}{(I_\theta + I_\phi)^2}}} \right) \end{aligned}$$

Si renombramos a  $\sqrt{1 - \frac{I_\phi^2}{(I_\theta + I_\phi)^2}}$  como  $\gamma$ , de las igualdades anteriores tenemos:

$$\frac{\partial \Sigma_\theta}{\partial I_\theta} = \arcsin \left( \frac{\cos \theta}{\gamma} \right) \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Sigma_\rho}{\partial I_\theta} &= \frac{\partial}{\partial I_\theta} \left( \frac{1}{(I_\rho + I_\theta + I_\phi)} \int \frac{1}{\rho} \sqrt{-\rho^2 + 2(I_\rho + I_\theta + I_\phi)^2 \rho - (I_\theta + I_\phi)^2 (I_\rho + I_\theta + I_\phi)^2} d\rho \right) \\
 &= -\frac{1}{(I_\rho + I_\theta + I_\phi)^2} \int \frac{1}{\rho} \sqrt{-\rho^2 + 2(I_\rho + I_\theta + I_\phi)^2 \rho - (I_\theta + I_\phi)^2 (I_\rho + I_\theta + I_\phi)^2} d\rho \\
 &\quad + \frac{1}{(I_\rho + I_\theta + I_\phi)} \int \frac{\partial}{\partial I_\theta} \left( \frac{1}{\rho} \sqrt{-\rho^2 + 2(I_\rho + I_\theta + I_\phi)^2 \rho - (I_\theta + I_\phi)^2 (I_\rho + I_\theta + I_\phi)^2} \right) d\rho \\
 &= -\frac{1}{(I_\rho + I_\theta + I_\phi)^2} \int \frac{1}{\rho} \sqrt{-r^2 + 2(I_\rho + I_\theta + I_\phi)^2 \rho - (I_\theta + I_\phi)^2 (I_\rho + I_\theta + I_\phi)^2} d\rho \\
 &\quad + \frac{1}{(I_\rho + I_\theta + I_\phi)} \int \frac{2(I_\rho + I_\theta + I_\phi)[2\rho - (I_\theta + I_\phi)(I_\rho + I_\theta + I_\phi) - (I_\theta + I_\phi)^2]}{2\rho \sqrt{-\rho^2 + 2(I_\rho + I_\theta + I_\phi)^2 \rho - (I_\theta + I_\phi)^2 (I_\rho + I_\theta + I_\phi)^2}} d\rho \\
 &= -\frac{1}{a} \int \frac{1}{\rho} \sqrt{-\rho^2 + 2a\rho - a^2(1 - \varepsilon^2)} d\rho + \int \frac{2\rho - (a\sqrt{1 - \varepsilon^2} + a(1 - \varepsilon^2))}{\rho \sqrt{-\rho^2 + 2a\rho - a^2(1 - \varepsilon^2)}} d\rho \\
 &= -\frac{1}{a} \int \frac{1}{\rho} \sqrt{-\rho^2 + 2a\rho - a^2(1 - \varepsilon^2)} d\rho + 2 \int \frac{d\rho}{\rho \sqrt{-\rho^2 + 2a\rho - a^2(1 - \varepsilon^2)}} \\
 &\quad - a(1 - \varepsilon^2) \int \frac{d\rho}{\rho \sqrt{-\rho^2 + 2a\rho - a^2(1 - \varepsilon^2)}} - a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \int \frac{d\rho}{\rho \sqrt{-\rho^2 + 2a\rho - a^2(1 - \varepsilon^2)}}
 \end{aligned}$$

Observamos que los primeros tres sumandos en la última igualdad es justo  $\varphi_\rho$  y la última integral ya la habíamos calculado, por lo que

$$\frac{\partial \Sigma_\rho}{\partial I_\theta} = \varphi_\rho - \arcsin \left( \frac{\rho - a(1 - \varepsilon^2)}{\rho \varepsilon} \right) \tag{5.3}$$

**Variable Angular con respecto a  $\phi$**

Para calcular  $\varphi_\phi$  necesitaremos  $\frac{\partial \Sigma_\rho}{\partial I_\phi}$ ,  $\frac{\partial \Sigma_\theta}{\partial I_\phi}$  y  $\frac{\partial \Sigma_\phi}{\partial I_\phi}$ .

$$\frac{\partial \Sigma_\rho}{\partial I_\phi} = \frac{\partial}{\partial I_\theta} \left( \frac{1}{(I_\rho + I_\theta + I_\phi)} \int \frac{1}{\rho} \sqrt{-\rho^2 + 2(I_\rho + I_\theta + I_\phi)^2 \rho - (I_\theta + I_\phi)^2 (I_\rho + I_\theta + I_\phi)^2} d\rho \right)$$

Pero justo el cálculo de la ecuación anterior es análoga al cálculo de  $\frac{\partial \Sigma_\rho}{\partial I_\theta}$ , por lo tanto

$$\frac{\partial \Sigma_\rho}{\partial I_\phi} = \varphi_\rho - \arcsin \left( \frac{\rho - a(1 - \varepsilon^2)}{\rho \varepsilon} \right) \tag{5.4}$$

Ahora calculemos  $\frac{\partial \Sigma_\theta}{\partial I_\phi}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Sigma_\theta}{\partial I_\phi} &= \frac{\partial}{\partial I_\phi} \left( (I_\theta + I_\phi) \int \sqrt{1 - \frac{I_\phi^2}{(I_\theta + I_\phi)^2 \sin^2 \theta}} d\theta \right) = \int \frac{\partial}{\partial I_\phi} \left( \sqrt{(I_\theta + I_\phi)^2 - \frac{I_\phi^2}{\sin^2 \theta}} \right) d\theta \\
&= \int \frac{1}{2} \frac{2 \left( (I_\theta + I_\phi) - \frac{I_\phi}{\sin^2 \theta} \right)}{\sqrt{(I_\theta + I_\phi)^2 - \frac{I_\phi^2}{\sin^2 \theta}}} d\theta = \int \frac{\left( 1 - \frac{I_\phi}{(I_\theta + I_\phi) \sin^2 \theta} \right)}{\sqrt{1 - \frac{I_\phi^2}{(I_\theta + I_\phi)^2 \sin^2 \theta}}} d\theta \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{I_\phi}{(I_\theta + I_\phi) \sin \theta} \right)^2}} d\theta - \int \frac{\frac{I_\phi}{(I_\theta + I_\phi) \sin^2 \theta}}{\sqrt{1 - \left( \frac{I_\phi}{(I_\theta + I_\phi) \sin \theta} \right)^2}} d\theta
\end{aligned} \tag{5.5}$$

La primer integral ya la calculamos, esta es:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{I_\phi}{(I_\theta + I_\phi) \sin \theta} \right)^2}} d\theta = \arcsin \left( \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{I_\phi^2}{(I_\theta^2 + I_\phi^2)^2}}} \right)$$

Ahora calculemos la segunda integral

$$\int \frac{\frac{I_\phi}{(I_\theta + I_\phi) \sin^2 \theta}}{\sqrt{1 - \left( \frac{I_\phi}{(I_\theta + I_\phi) \sin \theta} \right)^2}} d\theta = - \int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du = - \arcsin(u) = - \arcsin \left( \frac{I_\phi}{(I_\theta + I_\phi) \sin \theta} \right)$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial \Sigma_\theta}{\partial I_\phi} = \arcsin \left( \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{I_\phi^2}{(I_\theta^2 + I_\phi^2)^2}}} \right) + \arcsin \left( \frac{I_\phi}{(I_\theta + I_\phi) \sin \theta} \right)$$

Usando que  $\arcsin(a) + \arcsin(y) = \left( x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} \right)$ , tenemos;

$$\frac{\partial \Sigma_\theta}{\partial I_\phi} = \arcsin \left( \frac{\cos \theta}{\gamma} \sqrt{1 - \left( \frac{I_\phi}{(I_\theta + I_\phi) \sin \theta} \right)^2} + \left( \frac{I_\phi}{(I_\theta + I_\phi) \sin \theta} \right) \sqrt{1 - \left( \frac{\cos \theta}{\gamma} \right)^2} \right) \tag{5.6}$$

Por último calculemos  $\frac{\partial \Sigma_\phi}{\partial I_\phi}$ , esto es;

$$\frac{\partial \Sigma_\phi}{\partial I_\phi} = \frac{\partial}{\partial I_\phi} \left( \int \ell_z d\phi \right) = \frac{\partial}{\partial I_\phi} \left( \int I_\phi d\phi \right) = \phi$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \varphi_\phi &= \varphi_\rho - \arcsin \left( \frac{\rho - a(1 - \varepsilon^2)}{\rho\varepsilon} \right) + \phi \\ &+ \arcsin \left( \frac{\cos \theta}{\gamma} \sqrt{1 - \left( \frac{I_\phi}{(I_\theta + I_\phi) \sin \theta} \right)^2} + \left( \frac{I_\phi}{(I_\theta + I_\phi) \sin \theta} \right) \sqrt{1 - \left( \frac{\cos \theta}{\gamma} \right)^2} \right) \end{aligned} \quad (5.7)$$

En resumen las variables angulares son:

$$\begin{aligned} \varphi_\rho &= -\frac{1}{a} \sqrt{-\rho^2 + 2a\rho - a^2(1 - \varepsilon^2)} + \arcsin \left( \frac{\rho - a}{\varepsilon a} \right), \\ \varphi_\theta &= \varphi_\rho + \arcsin \left( \frac{\cos \theta}{\gamma} \sqrt{1 - \left( \frac{\rho - a(1 - \varepsilon^2)}{\rho\varepsilon} \right)^2} - \frac{\rho - a(1 - \varepsilon^2)}{\rho\varepsilon} \sqrt{1 - \left( \frac{\cos \theta}{\gamma} \right)^2} \right), \\ \varphi_\phi &= \varphi_\rho - \arcsin \left( \frac{\rho - a(1 - \varepsilon^2)}{\rho\varepsilon} \right) + \phi + \\ &+ \arcsin \left( \frac{\cos \theta}{\gamma} \sqrt{1 - \left( \frac{I_\phi}{(I_\theta + I_\phi) \sin \theta} \right)^2} + \left( \frac{I_\phi}{(I_\theta + I_\phi) \sin \theta} \right) \sqrt{1 - \left( \frac{\cos \theta}{\gamma} \right)^2} \right). \end{aligned}$$



## Bibliografía

- [1] Pedro Porras. El problema de kepler asimétrico, 2015.
- [2] James D Meiss. *Differential dynamical systems*, volume 14. Siam, 2007.
- [3] Joseph Auslander and James A Yorke. Interval maps, factors of maps, and chaos. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 32(2):177–188, 1980.
- [4] Robert L Devaney and Stephen Wiggins. A review of: “an introduction to chaotic dynamical systems” (benjamin/cummings, menlo park, 1986), 1987.
- [5] JD Meiss. Symplectic maps, variational principles, and transport. *Reviews of Modern Physics*, 64(3):795, 1992.
- [6] K Sitnikov. The existence of oscillatory motions in the three-body problem. In *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, volume 133, pages 303–306, 1960.
- [7] Holger R Dullin and Holger Waalkens. Defect in the joint spectrum of hydrogen due to monodromy. *Physical review letters*, 120(2):020507, 2018.
- [8] Peter Collas. Algebraic solution of the kepler problem using the runge-lenz vector. *American Journal of Physics*, 38(2):253–255, 1970.
- [9] Kenneth Meyer, Glen Hall, and Dan Offin. *Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N-body problem*, volume 90. Springer Science & Business Media, 2008.
- [10] Rudolf Dvorak and Christoph Lhotka. *Celestial dynamics: chaoticity and dynamics of celestial systems*. John Wiley & Sons, 2013.
- [11] Harry Pollard. Mathematical introduction to celestial mechanics. *Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall [1966]*, 1966.
- [12] Jorge Mahecha Gomez. *Mecánica clásica avanzada*. Universidad de Antioquia, 2006.

- [13] Bruno Cordani. *The Kepler problem: group theoretical aspects, regularization and quantization, with application to the study of perturbations*, volume 29. Birkhäuser, 2012.
- [14] Albert Messiah. Quantum mechanics, two volumes, 1999.
- [15] Bruno Cordani. Perturbations of the kepler problem in global coordinates. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 77(3):185–200, 2000.
- [16] Alessandra Celletti. Perturbation theory in celestial mechanics. *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*, pages 6673–6686, 2009.
- [17] Juan LG Guirao, Jaume Llibre, and Juan A Vera. Periodic orbits of hamiltonian systems: Applications to perturbed kepler problems. *Chaos, solitons & fractals*, 57:105–111, 2013.
- [18] Carles Simó Torres. La omnipresencia del caos. In *Horizontes culturales: las fronteras de la ciencia: 1998*, pages 187–203. Espasa Calpe, 2000.
- [19] William George Horner. Xxi. a new method of solving numerical equations of all orders, by continuous approximation. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, (109):308–335, 1819.
- [20] Àngel Jorba and Maorong Zou. A software package for the numerical integration of odes by means of high-order taylor methods. *Experimental Mathematics*, 14(1):99–117, 2005.
- [21] A Haro. Automatic differentiation methods in computational dynamical systems: Invariant manifolds and normal forms of vector fields at fixed points. *IMA Note*, 2008.
- [22] Warwick Tucker. *Validated numerics: a short introduction to rigorous computations*. Princeton University Press, 2011.
- [23] Jorge A. Pérez-Hernández and Luis Benet. PerezHz/TaylorIntegration.jl: TaylorIntegration v0.4.1, February 2019.
- [24] Arkady Pikovsky and Antonio Politi. *Lyapunov exponents: a tool to explore complex dynamics*. Cambridge University Press, 2016.
- [25] Gerald Teschl. *Ordinary differential equations and dynamical systems*, volume 140. American Mathematical Soc., 2012.
- [26] Peter Walters. *An introduction to ergodic theory*, volume 79. Springer Science & Business Media, 2000.
- [27] Karen Shimakawa and Robert Plato. *Concise numerical mathematics*. Number 57. American Mathematical Soc., 2003.
- [28] Josef Stoer and Roland Bulirsch. *Introduction to numerical analysis*, volume 12. Springer Science & Business Media, 2013.

- [29] Giancarlo Benettin, Luigi Galgani, Antonio Giorgilli, and Jean-Marie Strelcyn. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. part 1: Theory. *Meccanica*, 15(1):9–20, 1980.
- [30] Christopher Rackauckas and Qing Nie. Differentialequations. jl—a performant and feature-rich ecosystem for solving differential equations in julia. *Journal of Open Research Software*, 5(1), 2017.
- [31] Nediialko S Nediialkov, Kenneth R Jackson, and George F Corliss. Validated solutions of initial value problems for ordinary differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 105(1):21–68, 1999.
- [32] Jerrold E Marsden and Tudor S Ratiu. *Introduction to mechanics and symmetry: a basic exposition of classical mechanical systems*, volume 17. Springer Science & Business Media, 2013.
- [33] Andrey Nikolaevich Kolmogorov. On conservation of conditionally periodic motions for a small change in hamilton’s function. In *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, volume 98, pages 527–530, 1954.
- [34] Vladimir I Arnol’d. Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics. *Russian Mathematical Surveys*, 18(6):85, 1963.
- [35] Vladimir I Arnold. Proof of a theorem of an kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the hamiltonian. *Collected Works: Representations of Functions, Celestial Mechanics and KAM Theory, 1957–1965*, pages 267–294, 2009.