



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

SISTEMAS DE  $N$  CUERPOS INTERACTUANDO CON UN  
POTENCIAL DEPENDIENTE DE LA VELOCIDAD RELATIVA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

RODRIGO FRITZ HERNÁNDEZ

TUTOR

DR. YURI BONDER GRIMBERG



CIUDAD DE MÉXICO

2019



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Jurado

Alumno

Rodrigo Fritz Hernández

rodrigofritz@gmail.com

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Carrera: Física

No. de cuenta: 302587852

Tutor

Dr. Yuri Bonder Grimberg

Sinodal 1

Dr. Eduardo Nahmad Achar

Sinodal 2

Dr. Xavier Hernández Döring

Sinodal 3

Dr. Elías Okón Gurvich

Sinodal 4

Dr. Mariano Chernichoff Minsberg

Trabajo escrito

Sistemas de N cuerpos interactuando con un potencial dependiente de la velocidad relativa

74 páginas

2019



## Resumen

En esta tesis se ha explorado la idea de describir la dinámica de sistemas gravitacionales mediante cantidades relativas, como lo es la distancia de un objeto respecto a otro, buscando así obtener la información esencial del sistema. Tomando esto como punto de partida, se experimentó con un potencial que depende de la distancia y la velocidad relativa, y que incluye al parámetro libre con unidades de aceleración de MOND, en una extensión al potencial Newtoniano. Combinamos cantidades relativas con cantidades absolutas buscando obtener una teoría que tuviera las ventajas de la descripción relacional junto con el acierto de MOND de describir las curvas de rotación de las galaxias. El resultado fue que esta teoría no permite órbitas enlazadas, por lo que no representa una descripción útil de los sistemas gravitacionales.

Como antecedente, (Bonder y Koslowski, [s.f.](#)) construyeron una descripción relacional para un sistema de  $N$  cuerpos utilizando la versión gravitacional de la fuerza electromagnética de Weber, que es una extensión a la gravedad de Newton con una constante de acoplamiento adicional: la velocidad de la luz en vacío, para mostrar que se puede obtener dicha descripción siguiendo los principios de la Dinámica de Formas (Shape Dynamics) de utilizar sólo cantidades relativas. El objetivo de presentar la dinámica de estos sistemas de forma relacional es obtener una descripción fundamental independiente de unidades de medida o sistemas de referencia.

El potencial que propusimos es similar al de Weber, ecuación (3.29), al ser una extensión al potencial Newtoniano y depender de la distancia y la velocidad relativas, la diferencia es que el término adicional al potencial Newtoniano en la gravedad de Weber es el producto del potencial Newtoniano por una combinación adimensional en la que las dimensiones de la velocidad relativa al cuadrado se cancelan con las del cuadrado de la velocidad de la luz en vacío, mientras que en el potencial que propusimos, ecuaciones (3.52) y (4.1), las dimensiones de la velocidad relativa al cuadrado dividida entre la distancia relativa cancelan las dimensiones de aceleración del parámetro libre  $a_0$  de MOND.

El contenido de esta tesis está organizado de la siguiente manera:

- Capítulo 1: Marco teórico.
- Capítulo 2: Derivamos las ecuaciones de movimiento para potenciales que sólo dependen de la coordenada radial en simetría esférica. Estudiamos los ejemplos de la partícula libre, el potencial Newtoniano, una aproximación al potencial de Schwarzschild, y el potencial de MOND.
- Capítulo 3: Derivamos las ecuaciones de movimiento en lenguaje relacional para potenciales que dependen tanto de la distancia relativa como de la velocidad relativa entre las partículas.

Como ejemplos de este tipo de potencial presentamos la versión gravitacional de la teoría electromagnética de Weber y la teoría que proponemos. Pasamos del sistema de  $N$  cuerpos a un sistema de un cuerpo orbitando en torno a una fuerza central en el cual estudiamos la gravedad de Weber.

- Capítulo 4: Desarrollamos la teoría que proponemos, presentando las ecuaciones de movimiento, las gráficas del potencial efectivo y las trayectorias.
- Capítulo 5: Conclusiones.

# Índice general

<b>Jurado</b>	<b>III</b>
<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Sistemas de Referencia Inerciales . . . . .	1
1.2. El Principio de Mach . . . . .	2
1.3. Relatividad General . . . . .	5
1.4. Curvas de rotación y materia oscura . . . . .	6
1.5. MOND . . . . .	9
<b>2. Fuerza Central</b>	<b>11</b>
2.1. Reducción al sistema equivalente de un cuerpo . . . . .	11
2.2. Fuerza central con un potencial dependiente de la distancia relativa . . . . .	13
2.3. Partícula libre . . . . .	16
2.4. Potencial Newtoniano . . . . .	19
2.5. Aproximación al potencial de Schwarzschild . . . . .	25
2.6. Potencial de MOND . . . . .	31
<b>3. Mecánica Relacional</b>	<b>39</b>
3.1. Sistemas de $N$ cuerpos con un potencial dependiente de la velocidad relativa . . . . .	39
3.2. Gravedad de Weber . . . . .	43
3.3. Potencial relacional inspirado en MOND . . . . .	45
3.4. Fuerza central con un potencial dependiente de la velocidad relativa . . . . .	48
3.5. Fuerza central de Weber . . . . .	51
<b>4. MOMOND</b>	<b>57</b>
4.1. Fuerza central en MOMOND . . . . .	57
4.2. Potencial efectivo . . . . .	61
4.3. Trayectorias . . . . .	66
<b>5. Conclusiones</b>	<b>71</b>
<b>Referencias</b>	<b>73</b>





# Capítulo 1

## Introducción

Albert Einstein estableció con la teoría de la Relatividad General la forma en la que entendemos la gravedad hasta el día de hoy: la presencia de masa o energía curva al espacio-tiempo de modo que objetos en la vecindad de dicha masa o energía siguen geodésicas libres de fuerzas determinadas por la curvatura del espacio-tiempo. Como el efecto de la gravedad es sumamente pequeño comparado con las otras interacciones fundamentales conocidas, se requiere que los objetos tengan cantidades sumamente grandes de masa o energía para que los efectos de la gravedad sean considerables, como es el caso de los planetas, las estrellas, las galaxias, los agujeros negros, etcétera.

La Relatividad General describe con bastante precisión muchos de los fenómenos relacionados con la gravedad, sin embargo, asumiendo que el modelo estándar cosmológico ( $\Lambda$ CDM) es correcto, aún no se entiende la naturaleza del 95 % de los elementos que conforman el Universo (*Dark Energy, Dark Matter s.f.*) y no se ha podido construir una descripción cuántica de la gravedad (Rovelli, 2008). En este trabajo hemos explorado la descripción relacional de sistemas gravitacionales con la intención de encontrar elementos útiles para la eventual construcción de una teoría más fundamental que la Relatividad General. En este capítulo presentamos los conceptos relacionados con esta investigación.

### 1.1. Sistemas de Referencia Inerciales

La primera ley de Newton establece que un cuerpo mantendrá su estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta (con respecto a un espacio absoluto y determinados por un tiempo absoluto), a menos que se le imprima una fuerza (Newton, 1687), a esta ley se le conoce como el principio de inercia, de modo que los sistemas de referencia inerciales son aquellos que se encuentran en reposo o en movimiento uniforme en línea recta con respecto a un espacio absoluto. Las ecuaciones de movimiento que describen a estos sistemas son invariantes ante transformaciones de coordenadas dadas por traslaciones tanto en posición, tiempo, y velocidad, y por rotaciones espaciales (grupo de Galileo). En contraste, los sistemas de referencia no-inerciales son aquellos que se encuentran acelerados o rotando, y para que sus ecuaciones de movimiento sean invariantes ante dichas transformaciones de coordenadas es necesario incluir fuerzas ficticias (Weinberg, 1972).

En Relatividad Especial, los sistemas de referencia inerciales siguen siendo aquellos no acelerados, libres de fuerzas externas, pero cuyas superficies tridimensionales de simultaneidad difieren de otro sistema de referencia inercial por una transformación de Lorentz. Ésta es la forma de implementar el

concepto fundamental de la Relatividad Especial de que no hay sistemas inerciales preferentes. Así que un sistema de referencia inercial está determinado por las funciones de sus coordenadas inerciales globales que son independientes de la elección del sistema de referencia inercial, las cuales conforman el grupo de transformaciones de Poincaré, que son las transformaciones lineales de coordenadas que dejan al intervalo espacio-temporal invariante. Las trayectorias en el espacio-tiempo que siguen los sistemas inerciales son geodésicas de la métrica del espacio-tiempo y la curvatura asociada al intervalo espacio-temporal es cero, i.e. la geometría del espacio-tiempo en Relatividad Especial es plana (Wald, 1984).

Como no hay forma de aislar a un observador, o a cualquier objeto, de los efectos de un campo gravitacional, cualquier sistema de referencia se moverá de la misma manera que una partícula de prueba, por lo que no podemos construir sistemas de referencia inerciales como los de Relatividad Especial y medir la fuerza gravitacional. En Relatividad General, la presencia de materia o energía curva a la métrica del espacio-tiempo, por lo que las trayectorias que siguen objetos que caen libremente bajo los efectos de la gravedad son simplemente las geodésicas de la métrica curva del espacio-tiempo, mientras que en la teoría de la gravedad de Newton el movimiento de estos objetos se consideraba que era debido a un campo de fuerza gravitacional (Wald, 1984). De modo que las aceleraciones en Relatividad General son absolutas pues se definen con respecto a sistemas preferenciales: las geodésicas. Se podría decir que las geodésicas juegan el papel del espacio absoluto con respecto al cual se define el movimiento en la mecánica Newtoniana, sólo que en Relatividad General el espacio y el tiempo no son absolutos sino que son entes dinámicos cuya geometría está determinada por la materia o energía presente, por lo que las geodésicas serán distintas para cada configuración particular del espacio-tiempo.

## 1.2. El Principio de Mach

En Mecánica Newtoniana y Relatividad Especial, la estructura del espacio-tiempo no se ve afectada por el contenido de materia en el Universo. Ernst Mach, entre otros, encontraba esta idea insatisfactoria, por lo que propuso que toda la materia en el Universo debía contribuir a la definición local de los sistemas inerciales (no acelerados y no rotantes). Esto significa que en un Universo desprovisto de materia, no se puede hablar de un objeto acelerado o rotante, puesto que no tiene con respecto a qué rotar o acelerarse. Esta idea motivó a Einstein a construir una teoría en la cual la estructura del espacio-tiempo esté influenciada por la presencia de materia (Wald, 1984).

En efecto, la Relatividad General es la primera teoría en proveer un espacio-tiempo dinámico (dependiente de la distribución de materia y energía) y en indicar por lo menos posibilidades de cómo la inercia y las fuerzas centrífugas pueden resultar de la interacción con los objetos cósmicos distantes. Por otro lado, la Relatividad General no logra, a pesar del nombre, satisfacer la demanda de usar solamente cantidades relativas (J. Barbour y Pfister, 1995).

Uno de los principales objetivos de Einstein al desarrollar la Relatividad General era implementar las ideas de Mach de que la dinámica debía usar sólo cantidades relativas y de que el movimiento inercial, como se expresa en la primera ley de Newton, debía surgir no como el efecto de un espacio absoluto de fondo sino del efecto dinámico del Universo como un todo. Einstein le llamó a esto *el principio de Mach* (J. Barbour, 2011).

### La cubeta de Newton

La asociación de fuerzas con el cambio del movimiento absoluto es la clave del argumento de Newton a favor del movimiento absoluto y, por extensión, del espacio y tiempo absolutos, ya que si los movimientos absolutos no son observables, en algunos casos, las fuerzas sí lo son, y cuando hay una fuerza neta, de acuerdo a la segunda ley, hay un cambio de movimiento absoluto (Maudlin, 2012). Para ilustrar esta conexión, en el esolío de los *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*, Newton propone el experimento de una cubeta de agua que cuelga de una cuerda para hacerla girar, de modo que el agua en el interior forma un remolino cóncavo en el que el agua que está en contacto directo con las paredes de la cubeta sube de nivel mientras que el agua en el centro del remolino baja de nivel. Newton argumenta que el agua que toca las paredes de la cubeta está en reposo respecto a ellas y son justo ellas las que le imprimen el movimiento al agua, así que el movimiento es con respecto al espacio absoluto.

La idea de que los sistemas inerciales se definen con respecto a un espacio absoluto es algo con lo que Leibniz y su escuela no estaban de acuerdo, y la oposición continuó por siglos. Por ejemplo, en 1883, Mach remarcó (Mach, 1883):

El experimento de Newton de la cubeta rotando con agua simplemente nos informa que la rotación del agua con respecto a las paredes de la cubeta produce fuerzas centrífugas no perceptibles, pero que tales fuerzas son producidas por su movimiento con respecto a la masa de la Tierra y los otros cuerpos celestes. Nadie puede decir cómo resultará el experimento si las paredes de la cubeta incrementaran su grosor y masa indefinidamente. El experimento yace ante nosotros, y nuestra tarea es ponerlo en acuerdo con los otros hechos que conocemos y no con las ficciones arbitrarias de nuestra imaginación.

El principio de Mach se encuentra establecido en la idea de que los sistemas inerciales se definen con respecto a *la masa de la Tierra y los otros cuerpos celestes*. Hawking y Ellis lo enuncian como: *las leyes locales que satisfacen los distintos campos físicos están determinadas por la estructura a gran escala del Universo* (Hawking y Ellis, 1973).

La sugerencia de Mach de que el movimiento inercial no está regido por el espacio y tiempo absolutos de Newton sino por la totalidad de las masas en el Universo fue el estímulo primario en el descubrimiento de la Relatividad General, y fue Einstein quien le dio el nombre de principio de Mach a esta idea y buscó darle una definición precisa en el contexto de la Relatividad General, aunque después rechazó esa idea (J. Barbour, 2010) debido a que después de que Einstein introdujo la constante

cosmológica, de Sitter encontró una solución en vacío a las ecuaciones de campo, cosa que Einstein no logró mostrar que fuera físicamente inaceptable o debido a una singularidad (Hofer, 1995). Einstein comentó que las leyes de movimiento debían ser formuladas en términos de distancias relativas y velocidades relativas pero que el desarrollo de la mecánica clásica había mostrado que los sistemas de coordenadas son indispensables (J. B. Barbour, 2001; Einstein, 1918).

El principio de Mach es difícil de aplicar si el Universo tiene una extensión infinita, pero si asumimos un Universo finito (espacialmente cerrado), encontramos que la evolución geométrica de dicho Universo en acuerdo con el principio de Mach lleva a la Relatividad General y a que las ecuaciones de campo de Einstein son una expresión directa de la naturaleza Machiana de la teoría (J. Barbour, 2010). Tanto el espacio-tiempo de Minkowski como la solución de Schwarzschild violan el principio de Mach porque ambos cuentan con una estructura métrica/inercial que no resulta de la distribución de materia al ser soluciones en vacío (Hofer, 1995). Dado que la Relatividad General no logra implementar completamente el principio de Mach, se ha trabajado en otras teorías para lograr este objetivo.

## La Dinámica de Formas

La Dinámica de Formas (Shape Dynamics) es un formalismo que pretende implementar el principio de Mach y separar las leyes físicas de la influencia de los sistemas de medición que las ponen a prueba utilizando solamente cantidades relativas. Esto se logra al invocar las leyes de la física que describen un sistema en particular al espacio de formas (shape space): un espacio matemático de cantidades adimensionales que es invariante ante cambios de escala. Uno de los sistemas más explorados en la Dinámica de Formas es el sistema de  $N$  partículas puntuales interactuando gravitacionalmente a través de un potencial Newtoniano, en el que las cantidades dimensionales son las posiciones de las partículas, el tiempo prescrito externamente, las masas constantes de las partículas y la constante gravitacional de Newton (Bonder y Koslowski, s.f.).

La mayoría de los estudios prácticos de la Dinámica de Formas requieren de una interacción Newtoniana de  $N$  cuerpos descrita por un potencial homogéneo. En un trabajo no publicado (Bonder y Koslowski, s.f.) se usa la gravedad de Weber (ver las secciones 3.2 y 3.5 de esta tesis) para mostrar que es posible trasladar interacciones no Newtonianas que poseen potenciales inhomogéneos y constantes de acoplamiento adicionales (la velocidad de la luz en este caso) a un lenguaje relacional. Con base en ese resultado, en esta tesis se buscó describir en lenguaje relacional a una extensión de la gravedad Newtoniana inspirada en MOND, donde la constante de acoplamiento adicional es el parámetro libre con unidades de aceleración  $a_0$ , y en la gravedad de Weber que está descrita por un potencial dependiente de la velocidad relativa (sección 3.3 y capítulo 4).

## 1.3. Relatividad General

La teoría del electromagnetismo de Maxwell es incompatible con las nociones Newtonianas del espacio y el tiempo, a menos que se introduzcan sistemas inerciales preferenciales. Esta incompatibilidad llevó directamente a la formulación de la Relatividad Especial, la cual relaciona al espacio y el tiempo partiendo de dos postulados:

1. Las leyes de la física deben ser las mismas para todo sistema inercial.
2. La velocidad de la luz en el vacío es la misma para todo observador, sin importar el movimiento de la fuente o del observador.

La herramienta con la cual se prueba la invariancia de las leyes físicas al pasar de un sistema inercial de coordenadas a otro son las transformaciones de Lorentz, las cuales dejan invariante al intervalo espacio-temporal.

La Relatividad General es una generalización de la Relatividad Especial a sistemas no inerciales que incluye a la gravedad. Las dos ideas clave que motivaron a Einstein a desarrollar esta teoría son (Wald, 1984):

1. **El principio de equivalencia.** Este principio surge de la observación de que todos los cuerpos son influenciados de la misma manera por la gravedad. Esto se ve reflejado en la equivalencia entre la masa inercial y la masa gravitacional, lo cual está expresado en la teoría Newtoniana con el enunciado de que la fuerza gravitacional sobre un cuerpo es proporcional a su masa inercial con la misma constante de proporcionalidad para todos los objetos. También se ve reflejado en la equivalencia entre un campo gravitacional y un sistema no inercial acelerado. Dado que el movimiento es independiente de la naturaleza de los cuerpos, las trayectorias de cuerpos en caída libre definen un conjunto de curvas preferidas en el espacio-tiempo, esto sugiere la posibilidad de adjudicarle a la estructura del espacio-tiempo algunas propiedades del campo gravitacional. En Relatividad Especial las trayectorias de cuerpos inerciales son geodésicas de la métrica del espacio-tiempo, así que podemos pensar que las trayectorias de cuerpos en caída libre siempre son geodésicas en las que el campo gravitacional corresponde a una geometría del espacio-tiempo diferente de la geometría plana de Relatividad Especial, i.e. el campo gravitacional corresponde a la curvatura de la geometría del espacio-tiempo (Wald, 1984).
2. **El principio de Mach.** Mach pensó que toda la materia en el Universo debía contribuir a la definición local de *no acelerado* y *no rotante*; que en un Universo desprovisto de materia no deberían tener sentido estos conceptos. Einstein estaba de acuerdo con esta idea por lo que buscó formular una teoría en la que la estructura del espacio-tiempo está influenciada por la presencia de materia (Wald, 1984).

La Relatividad General establece que las propiedades intrínsecas, independientes del observador, del espacio-tiempo están descritas por una métrica del espacio-tiempo, donde la curvatura de la métrica

del espacio-tiempo da cuenta de los efectos físicos originalmente adjudicados a un campo gravitacional. Más aún, la curvatura del espacio-tiempo está relacionada al tensor de energía-momento de la materia en el espacio-tiempo mediante las ecuaciones de Einstein. De esta manera, la estructura del espacio-tiempo (incluida en la métrica del espacio-tiempo) está relacionada con el contenido de materia del espacio-tiempo en concordancia con algunas de las ideas de Mach. Muchas de las predicciones de la Relatividad General se encuentran en excelente acuerdo con experimentos y observaciones (Wald, 1984), por lo que es considerada por muchos como la teoría definitiva de la gravedad.

Además de los numerosos logros de la Relatividad General en la descripción de la gravedad, existen algunos fenómenos físicos que no se entienden todavía, dos ejemplos son la materia oscura y la energía oscura, de las cuales se postula su existencia asumiendo que la Relatividad General es válida a escalas galácticas y cosmológicas, respectivamente.

#### 1.4. Curvas de rotación y materia oscura

En esta sección presentamos el problema de la materia oscura, cuyo origen se remonta a que en las curvas de rotación de las galaxias se observa que la velocidad orbital de las estrellas más alejadas del centro galáctico es prácticamente constante conforme aumenta la distancia. Esto motivó a postular la existencia de un tipo de materia que da cuenta de la gravedad adicional necesaria para predecir dicho comportamiento, asumiendo que la Relatividad General es válida en esas regiones.

El perfil de velocidades orbitales de las estrellas dentro de una galaxia está descrito por la curva de rotación de la galaxia. De acuerdo a la teoría de la gravedad Newtoniana, la intensidad del campo gravitacional  $\vec{g}$  producido por la masa de la galaxia decae como el cuadrado de la distancia. La magnitud de la velocidad orbital está relacionada con la magnitud del campo gravitacional mediante la expresión para la aceleración centrípeta

$$\frac{v^2}{r} = g = \frac{F}{m} = \frac{GM}{r^2},$$

donde  $F$  es la magnitud de la fuerza gravitacional,  $G$  es la constante de la gravitación universal,  $M$  es la masa que produce el campo gravitacional, y  $m$  es la masa de un cuerpo en órbita circular alrededor del centro de fuerza. En una primera aproximación, asumiendo que la masa ha convergido a un valor finito en la región donde se mide  $v$ , se tiene que

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}},$$

por lo que la magnitud de la velocidad orbital  $v$  debería disminuir como  $r^{-1/2}$ , sin embargo, las observaciones astronómicas indican que la velocidad orbital de las estrellas es casi constante conforme se encuentran más lejos del centro de la galaxia. Si la gravedad Newtoniana sigue siendo una buena

aproximación de la dinámica de las estrellas a escalas galácticas, esto nos dice que hay más masa en las galaxias de la que podemos detectar, esta masa es la que se postula que corresponde a la materia oscura.

Las curvas de rotación de las galaxias son la principal herramienta para determinar la distribución axisimétrica de la masa en las galaxias, la cual se infiere del movimiento orbital de sus estrellas. Para estudiar el movimiento de las estrellas en una galaxia se considera a las estrellas como masas puntuales orbitando bajo la influencia de su auto-gravitación mutua.

La magnitud de la aceleración centrípeta que experimenta una estrella de masa  $m$  a una distancia  $r$  del centro de una galaxia, debido a la masa  $M(r)$  contenida dentro de ese radio, es

$$g = \frac{F}{m} = \frac{GM(r)}{r^2} = \frac{v^2}{r},$$

por lo tanto

$$v = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}.$$

Tomando en cuenta que la mayoría de las estrellas en una galaxia espiral están concentradas en una región de 2 a 3 radios de escala del disco galáctico, podemos considerar una densidad de masa por unidad de área  $\sigma$  constante en el núcleo, entonces

$$M(r) = 4\pi r^2 \sigma \quad (\text{disco})$$

y

$$v = \sqrt{4\pi G\sigma r} \sim \sqrt{r} \quad (\text{disco}).$$

Fuera del disco podemos considerar constante a la masa  $M$  de la galaxia, entonces la velocidad orbital de una estrella fuera del núcleo es

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \sim \frac{1}{\sqrt{r}} \quad (\text{fuera del disco}).$$

En la Fig. 1.4.1 se muestra la combinación de las velocidades orbitales dentro y fuera del núcleo en función de la distancia radial  $r$ , y en la Fig. 1.4.2 se muestra la curva de rotación de una galaxia obtenida con datos de observaciones astronómicas, en la cual se observa que la velocidad orbital de la materia visible es casi constante conforme aumenta la distancia radial, por lo que se asume la existencia de un halo de materia oscura que compensa la diferencia entre la curva observada y la curva esperada según la gravedad Newtoniana que es similar a la de la Fig. 1.4.1. Nótese que la contribución del halo de materia oscura es mucho mayor conforme aumenta la distancia.



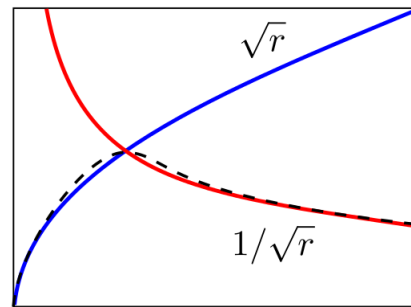


Fig. 1.4.1: Curva de rotación Newtoniana. Dentro del núcleo galáctico la magnitud de la velocidad orbital va como  $\sqrt{r}$ , mientras que fuera del núcleo va como  $1/\sqrt{r}$ . La línea segmentada es una composición suavizada de las dos curvas que describe la curva de rotación Newtoniana para las estrellas dentro de una galaxia.

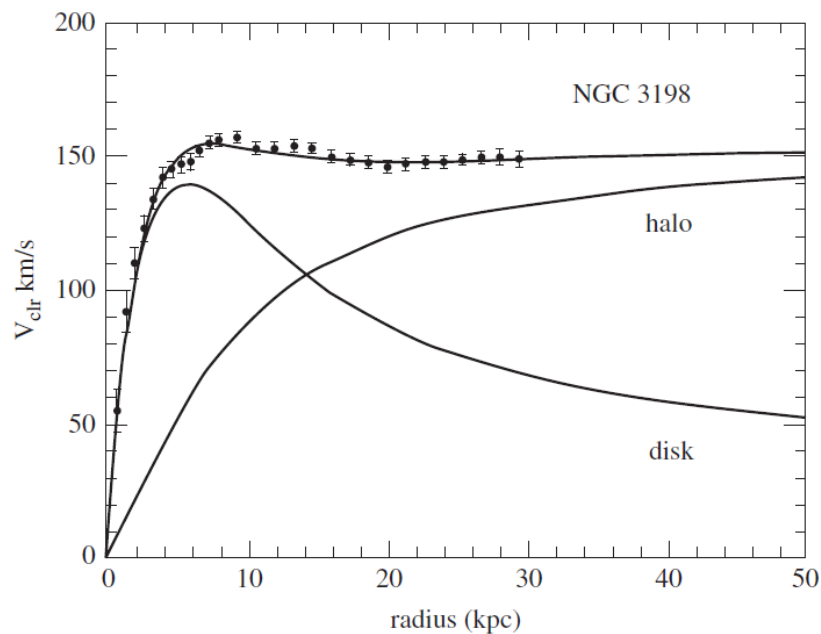


Fig. 1.4.2: Curva de rotación de la galaxia NGC 3198. Los puntos con barras de error corresponden a las líneas de emisión de 21 cm del hidrógeno (HI), mientras que la curva con etiqueta *disk* representa la contribución de materia visible del disco galáctico, y la curva con etiqueta *halo* representa el ajuste con el halo de materia oscura para compensar la curva observada (van Albada y col., 1985).

La materia oscura es un hipotético tipo de materia que se postuló para resolver el problema de la estabilidad de las galaxias y la tasa de formación de estructuras a gran escala en el Universo (Baumann, s.f.) y se piensa que domina el contenido de materia del Universo, pero no se ha podido observar por ninguno de los métodos de detección directa (Sanders, 2010), por eso teorías alternativas a la Relatividad General, que en su mayoría son extensiones de la Relatividad General, se han desarrollado para tratar de explicar estos fenómenos con la idea de que existe una teoría aún más general que da cuenta de los fenómenos observados a escalas galácticas y cosmológicas sin tener que invocar la presencia de materia oscura, y que recupera la descripción de la Relatividad General a escalas más pequeñas, como el sistema solar.

Una de las teorías extendidas de gravitación que ha resultado muy exitosa es MOND, la cual reproduce con bastante precisión las curvas de rotación de algunas galaxias sin invocar materia oscura y recupera la gravedad Newtoniana, sin embargo, no es una extensión de la Relatividad General. Jacob Bekenstein desarrolló una versión relativista de MOND que llamó TeVeS (porque incluye un campo tensorial, uno vectorial y uno escalar) pero ya ha sido descartada con ayuda de la detección de ondas gravitacionales (Boran y col., 2018). Las teorías  $f(R)$  en las que se generaliza la acción de Einstein-Hilbert para el campo gravitacional con una función arbitraria del escalar de curvatura  $R$  son otro ejemplo de teorías extendidas (Capozziello y De Laurentis, 2015), y la llamada gravedad emergente o gravedad entrópica en la que se propone que la gravedad emerge de su descripción microscópica es otro ejemplo de teoría alternativa (Verlinde, 2011).

## 1.5. MOND

Para explicar el carácter casi constante de las velocidades de rotación de las estrellas en las regiones exteriores de una galaxia, Milgrom propuso la teoría de MOND (Modified Newtonian Dynamics), en la que propuso que la fuerza gravitacional que experimentan estas estrellas ya no es proporcional a la aceleración centrípeta, como dicta la teoría Newtoniana, sino que es proporcional a una función más general de la aceleración, esto lo implementó a través de una función de interpolación adimensional  $\mu(a/a_0)$  que es función de la aceleración escalada por una constante de aceleración  $a_0$ , obteniendo

$$\frac{F}{m} = \frac{GM}{r^2} = \mu\left(\frac{a}{a_0}\right)a \quad (1.1)$$

donde  $F$  es la magnitud de la fuerza gravitacional,  $G$  es la constante de la gravitación universal,  $M$  es la masa de la galaxia,  $m$  es la masa de la estrella,  $r$  es la distancia entre ellas,  $a$  es la aceleración gravitacional, y  $\mu(a/a_0)$  es la función de interpolación definida como

$$\mu\left(\frac{a}{a_0}\right) = \begin{cases} 1 & \text{para } a \geq a_0 \\ \frac{a}{a_0} & \text{para } a < a_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

El caso Newtoniano corresponde a  $a \geq a_0$ , y el régimen de MOND es aquel en el que las aceleraciones son muy pequeñas  $a < a_0 = 1.2 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2$ , en cuyo caso, sustituyendo (1.2) en (1.1)

$$\frac{a^2}{a_0} = \frac{GM}{r^2} \quad (1.3)$$

por lo tanto

$$a = \frac{\sqrt{GMa_0}}{r} = \frac{v^2}{r} \quad (1.4)$$

donde la última igualdad se debe a que la aceleración gravitacional es igual a la aceleración centrípeta que experimenta una estrella que se encuentra en órbita circular alrededor del centro de la galaxia,

entonces

$$v = (GMa_0)^{1/4} = \text{constante.} \quad (1.5)$$

Esta formulación tan sencilla resulta ajustarse bastante bien a las curvas de rotación de muchas galaxias (Sanders, 2010). Pero, aunque MOND da cuenta de las curvas de rotación sin necesidad de agregar materia oscura, no resuelve el problema de la dinámica intergaláctica. Además, una extensión exitosa de la gravedad Newtoniana debería ser congruente con la Relatividad General.

La consideración de MOND como una posible solución al problema de la materia oscura nos lleva a cuestionar los requerimientos de una teoría para extender la gravedad de Einstein y, por ende, a la gravedad de Newton. Bajo el enfoque de la Dinámica de Formas, el camino a seguir es extraer la física esencial al considerar sistemas independientes de unidades de medida y sistemas de referencia. Esto se logra empleando coordenadas relacionales donde sólo importan las cantidades relativas entre los objetos. En MOND,  $a_0$  es una aceleración constante para sistemas inerciales Newtonianos, por lo que se trata de una cantidad absoluta, y es por esto que MOND no se puede expresar en un lenguaje relacional. En Relatividad General las aceleraciones también son absolutas porque se miden respecto a geodésicas. Para tratar de suavizar la aparición de cantidades absolutas, hemos propuesto en esta tesis una extensión al potencial Newtoniano con una combinación de cantidades absolutas y relativas en un término adicional dado por el producto del potencial Newtoniano por un término adimensional dado por el cociente de la aceleración constante  $a_0$  entre la velocidad relativa al cuadrado sobre la distancia relativa. Sin embargo esta teoría no describe órbitas, por lo que no es útil para describir el mundo real, pero el ejercicio matemático es interesante.

# Capítulo 2

## Fuerza Central

En este capítulo estudiaremos un sistema de dos cuerpos en movimiento bajo la influencia de una fuerza central mutua como una aplicación de la formulación Lagrangiana y veremos que este sistema es equivalente al de un solo cuerpo en movimiento en torno a un centro de fuerza fijo que será tomado como el origen del sistema de coordenadas. Posteriormente aplicaremos esta formulación a los casos de la partícula libre, la gravedad Newtoniana y MOND. En todos estos casos, los potenciales sólo dependen de la distancia al origen  $r$ . En el capítulo siguiente desarrollaremos el formalismo relacional con potenciales que dependen además de la velocidad relativa  $\dot{r}$  de la partícula respecto al origen.

### 2.1. Reducción al sistema equivalente de un cuerpo

Un sistema monogénico es un sistema mecánico para el cual todas las fuerzas (excepto las fuerzas de las constricciones) son derivables a partir de un potencial escalar generalizado que puede ser función de las coordenadas, las velocidades, y el tiempo. Cuando el potencial sólo es función de las coordenadas el sistema monogénico también es conservativo (Goldstein, 1980). En la sección 3.1 veremos que un potencial general que depende de la velocidad relativa también es conservativo. Consideremos un sistema monogénico de dos masas  $m_1$  y  $m_2$  con vectores de posición  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  donde las únicas fuerzas presentes son las debidas a un potencial de interacción  $U$  que es función del vector formado por la distancia entre las dos masas

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (2.1)$$

o de la velocidad relativa entre las 2 masas

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2 \quad (2.2)$$

o de cualquier derivada temporal de orden mayor del vector de posición. El Lagrangiano en función de los vectores de posición de las dos masas es

$$L(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2 - U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dots). \quad (2.3)$$

Este sistema tiene 6 grados de libertad y por lo tanto 6 coordenadas generalizadas independientes, pero podemos cambiarlas por las 3 componentes del vector formado por la distancia del centro de masa al origen  $\vec{R}$  más las 3 componentes del vector  $\vec{r}$ . Para escribir el Lagrangiano en estas nuevas

coordenadas tenemos que

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_T} \quad (2.4)$$

donde  $m_T = m_1 + m_2$  es la masa total del sistema, sustituyendo  $\vec{r}_2$  de (2.1) en (2.4)

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 (\vec{r}_1 - \vec{r})}{m_T} = \vec{r}_1 - \frac{m_2}{m_T} \vec{r}, \quad (2.5)$$

sustituyendo  $\vec{r}_1$  de (2.1) en (2.4)

$$\vec{R} = \frac{m_1 (\vec{r}_2 + \vec{r}) + m_2 \vec{r}_2}{m_T} = \vec{r}_2 + \frac{m_1}{m_T} \vec{r}, \quad (2.6)$$

resolviendo (2.5) para  $\vec{r}_1$

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_T} \vec{r}, \quad (2.7)$$

resolviendo (2.6) para  $\vec{r}_2$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_T} \vec{r}, \quad (2.8)$$

derivando (2.7) y (2.8) respecto al tiempo y elevando al cuadrado

$$\dot{\vec{r}}_1^2 = \dot{\vec{R}}^2 + 2 \frac{m_2}{m_T} \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} + \left( \frac{m_2}{m_T} \right)^2 \dot{\vec{r}}^2, \quad (2.9)$$

$$\dot{\vec{r}}_2^2 = \dot{\vec{R}}^2 - 2 \frac{m_1}{m_T} \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} + \left( \frac{m_1}{m_T} \right)^2 \dot{\vec{r}}^2, \quad (2.10)$$

sustituyendo (2.9) y (2.10) en (2.3)

$$L(\vec{R}, \vec{r}) = \frac{1}{2} m_T \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dots) \quad (2.11)$$

donde  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  es la masa reducida del sistema.

La dependencia de (2.11) en  $\vec{R}$  la podemos desacoplar en el Lagrangiano del centro de masa que es equivalente al de una partícula libre de masa  $m_T$

$$L_{\text{CM}}(\vec{R}) = \frac{1}{2} m_T \dot{\vec{R}}^2 \quad (2.12)$$

y la dependencia en  $\vec{r}$  la podemos desacoplar en el Lagrangiano relacional que es equivalente al de una partícula de masa  $\mu$  interactuando con un potencial  $U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dots)$

$$L_{\text{rel}}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dots) \quad (2.13)$$

es decir

$$L(\vec{R}, \vec{r}) = L_{CM}(\vec{R}) + L_{rel}(\vec{r}). \quad (2.14)$$

Las 3 coordenadas de  $\vec{R}$  son cíclicas puesto que no aparecen en el Lagrangiano (sólo aparecen las coordenadas de  $\vec{R}$ ) por lo que el centro de masa o está en reposo o se mueve de manera uniforme a velocidad constante. Ninguna de las ecuaciones de movimiento para  $\vec{r}$  contendrá términos que involucren a  $\vec{R}$  o  $\dot{\vec{R}}$  por lo que el proceso de integración requiere que descartemos a  $L_{CM}(\vec{R})$  en (2.14), así que  $L(\vec{R}, \vec{r}) = L_{rel}(\vec{r})$  que corresponde al Lagrangiano de sólo una masa  $\mu$  a una distancia  $\vec{r}$  de un centro de fuerza fijo, por lo tanto el movimiento de fuerza central de dos cuerpos alrededor de su centro de masa siempre se puede reducir a un sistema equivalente de un solo cuerpo (Goldstein, 1980).

En un sistema de  $N$  cuerpos con simetría esférica se puede considerar a la masa total de  $N - 1$  partículas como una masa  $M$  fija ejerciendo una fuerza gravitacional sobre una partícula de masa  $m$ , con  $M \gg m$ , que se encuentra al exterior de dicha distribución de masa (e.g. una estrella orbitando alrededor de un disco galáctico), así que podemos resolver el sistema equivalente de una partícula con masa reducida  $\mu = \frac{Mm}{M+m} \xrightarrow{M \gg m} m$  sujeta a un potencial central  $U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dots)$ .

## 2.2. Fuerza central con un potencial dependiente de la distancia relativa

Nos restringimos ahora a una fuerza central conservativa donde el potencial sólo es función de la distancia radial  $r$ , de modo que la fuerza siempre actúa a lo largo de  $\vec{r}$ . Por los resultados de la sección anterior, basta con considerar un sistema de una sola partícula con masa reducida  $m$  que se mueve alrededor de un centro de fuerza fijo que se tomará como el origen de las coordenadas. Como la energía potencial sólo involucra a la distancia radial, el sistema tiene simetría esférica, por lo que conviene usar coordenadas esféricas en las que el Lagrangiano es

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - V(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - V(r). \quad (2.15)$$

Dada la simetría esférica el momento angular  $\vec{l}$  se conserva:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} = 0. \quad (2.16)$$

Escogemos el eje polar para la dirección constante de  $\vec{l}$ , con lo que se reducen los grados de libertad de 3 a 2, esto quiere decir que la partícula se mueve en el plano  $\theta = \frac{\pi}{2}$  entonces  $\dot{\theta} = 0$  y  $\sin \theta = 1$  con lo que el Lagrangiano se reduce a

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - V(r). \quad (2.17)$$

Las ecuaciones de movimiento se obtienen de

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\phi}), \quad (2.18)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + \frac{\partial V}{\partial r}. \quad (2.19)$$

Como el Lagrangiano no contiene a la coordenada  $\phi$  entonces esta coordenada es cíclica y su momento canónico conjugado  $p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}$ , que corresponde a la magnitud del momento angular del sistema  $l$ , se conserva, i.e.  $\frac{dp_\phi}{dt} = 0$ , que es justo la ecuación (2.18), de donde se sigue que

$$mr^2 \dot{\phi} = l = \text{cte}. \quad (2.20)$$

Como  $m$  es constante, el momento angular por unidad de masa  $\vec{\ell}$  también se conserva y su magnitud

$$\boxed{\ell = \frac{l}{m} = r^2 \dot{\phi}} = \text{cte} \quad (2.21)$$

por lo que la velocidad angular se puede expresar como

$$\boxed{\dot{\phi} = \frac{\ell}{r^2}}. \quad (2.22)$$

Sustituyendo (2.22) en (2.19) obtenemos la magnitud de la fuerza central a lo largo de  $\vec{r}$

$$F(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} = m\ddot{r} - \frac{m\ell^2}{r^3} \quad (2.23)$$

de donde la aceleración radial está dada por

$$\ddot{r} = \frac{F(r)}{m} + \frac{\ell^2}{r^3}. \quad (2.24)$$

Como se trata de una fuerza conservativa, la energía total

$$E = T + V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{m\ell^2}{2r^2} + V(r) \quad (2.25)$$

se conserva:

$$\frac{dE}{dt} = \left[ m\ddot{r} - \frac{m\ell^2}{r^3} + \frac{\partial V}{\partial r} \right] \dot{r} = \left[ F(r) - F(r) \right] \dot{r} = 0 \quad (2.26)$$

donde hemos usado (2.23). Como  $m$  es constante, la energía por unidad de masa

$$\boxed{e = \frac{E}{m}} \quad (2.27)$$

también se conserva. Definimos el potencial efectivo por unidad de masa

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{V(r)}{m} + \frac{\ell^2}{2r^2} \quad (2.28)$$

donde  $\ell^2/2r^2$  es el potencial centrífugo por unidad de masa. Sustituyendo (2.27) y (2.28) en (2.25)

$$e = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) \quad (2.29)$$

por lo tanto

$$\dot{r} = \pm \sqrt{2(e - V_{\text{eff}}(r))} \quad (2.30)$$

donde el signo positivo corresponde a un aumento en la distancia radial con respecto al tiempo, i.e. la partícula se aleja del origen, y el signo negativo corresponde a un decremento, i.e. la partícula se acerca al origen. Nótese que la velocidad radial sólo está definida para

$$e \geq V_{\text{eff}}(r). \quad (2.31)$$

El caso  $e = V_{\text{eff}}(r)$  corresponde a  $\dot{r} = 0$ , lo cual ocurre en los puntos de retorno de cualquier tipo de órbita: en una órbita elíptica esto ocurre en el radio mínimo y en el radio máximo, en una órbita circular la velocidad radial es nula pues el radio es fijo, y en una órbita abierta no hay radio máximo pero sí mínimo.

Integrando  $\dot{r}$  de (2.30) y  $\dot{\phi}$  de (2.22) con 4 constantes de integración:  $e, \ell, r_0, \phi_0$  podemos determinar la trayectoria de la partícula (Goldstein, 1980).



### 2.3. Partícula libre

Consideremos el caso más simple: una partícula libre de masa  $m$ , es decir, una partícula que no está sujeta a ninguna fuerza y entonces  $V(r) = 0$  en la ec. (2.28), por lo que el potencial efectivo se reduce al potencial centrífugo debido al momento angular que lleva la partícula con respecto al origen de las coordenadas, i.e.

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{\ell^2}{2r^2}. \quad (2.32)$$

Nótese que si  $\ell \neq 0$ , el potencial centrífugo tiende a infinito cuando  $r$  tiende a cero (cf. Fig. 2.4.1), esto implica que las coordenadas que describen el paso de la partícula por el origen no están bien definidas. Para determinar la trayectoria de la partícula libre podemos expresar al ángulo  $\phi$  en función de la distancia radial  $r$  al integrar

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi/dt}{dr/dt} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{r}}. \quad (2.33)$$

Sustituyendo (2.22) y (2.30) en (2.33)

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{\ell/r^2}{\sqrt{2e - \ell^2/r^2}} = \pm \frac{\ell}{r\sqrt{2er^2 - \ell^2}}. \quad (2.34)$$

También podemos integrar  $dr/d\phi$ , sólo que no está definida para  $\ell = 0$ . La ecuación diferencial (2.34) sólo está definida para

$$r > \frac{|\ell|}{\sqrt{2e}} \quad (2.35)$$

y

$$e > 0. \quad (2.36)$$

Integrando (2.34)

$$\phi(r) = \pm \int \frac{\ell dr}{r\sqrt{2er^2 - \ell^2}} = \mp \arctan\left(\frac{\ell}{\sqrt{2er^2 - \ell^2}}\right) \pm \arctan\left(\frac{\ell}{\sqrt{2er_0^2 - \ell^2}}\right) \quad (2.37)$$

donde la constante de integración se encontró ajustando la solución analítica con la solución numérica.

En la Fig. 2.3.1 se muestran algunas trayectorias de una partícula libre sin momento angular con respecto al origen, i.e.  $\ell = 0$ , por lo que la partícula se acerca o se aleja en línea recta con respecto al origen, si se acerca  $\dot{r} < 0$  y si se aleja  $\dot{r} > 0$ , lo que corresponde al signo de (2.30). Por (2.35)  $r > 0$  y por (2.37)  $\phi(r) = 0$  que es una solución particular de (2.34), i.e.  $d\phi/dr = 0$ , pero la solución general es  $\phi(r) = \phi_0 = \text{cte}$  para toda  $e > 0$  y  $r > 0$ , por lo tanto la partícula se mueve a un ángulo constante  $\phi_0$ . Una partícula que se acerca con  $\dot{r} < 0$  a un ángulo  $\phi_0$  pasará por  $r = 0$ , en donde no está definida (2.34), y se alejará con  $\dot{r} > 0$  a un ángulo  $\phi_0 + \pi$ .

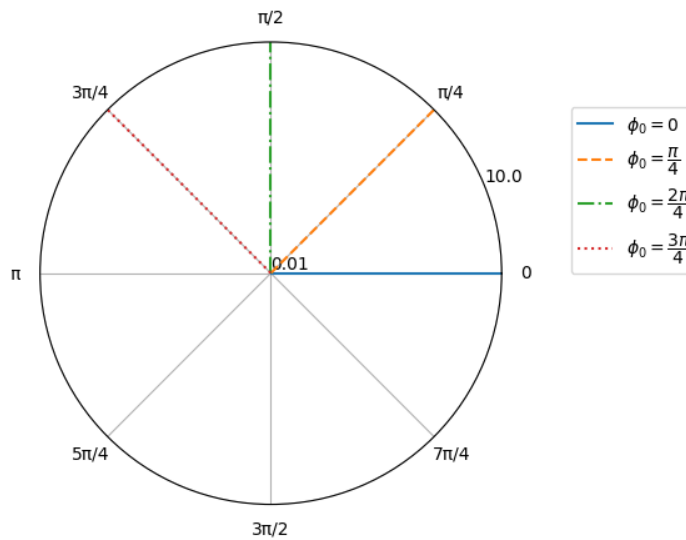


Fig. 2.3.1: Gráfica polar de las coordenadas  $(r, \phi)$  para la trayectoria de una partícula sin momento angular con respecto al origen, i.e.  $\ell = 0$ , que está descrita por  $\phi = \text{cte}$ . En esta gráfica  $r_0 = 0.01$  y  $\phi_0 = n \frac{\pi}{4}$  con  $n = 0, 1, 2, 3$ . Cualquier valor de  $e > 0$  resulta en la misma trayectoria pues  $\phi$  es constante.

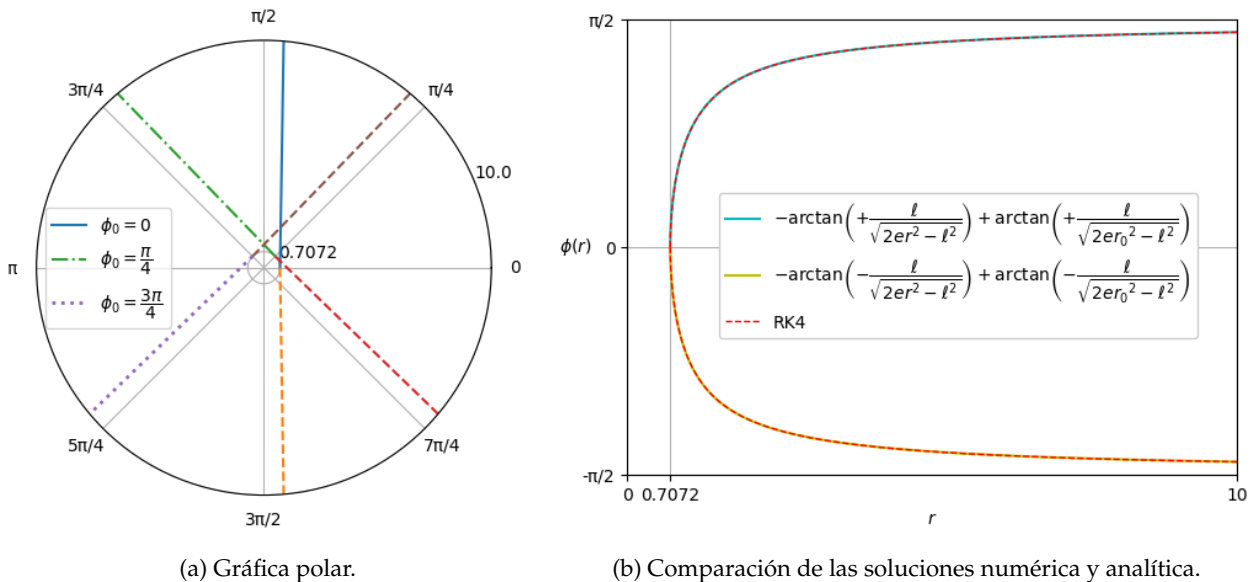


Fig. 2.3.2: Coordenadas  $(r, \phi)$  de una partícula con  $\ell = \pm 1$ , en unidades de longitud al cuadrado por unidad de tiempo, y  $e = 1$ , en unidades de velocidad al cuadrado. (a) La leyenda indica la mitad de la trayectoria, mientras que las líneas de guiones son la otra mitad de la trayectoria con el signo contrario de la velocidad radial. (b)  $\phi(r)$  con  $\phi_0 = 0$  obtenida con la solución analítica comparada con la obtenida con un Runge-Kutta de 4to orden (RK4).

Como  $\phi$  se mide en sentido antihorario y  $\ell = r^2 \dot{\phi}$  de (2.21), el momento angular es positivo si la partícula se mueve en sentido antihorario con respecto al origen, y negativo si se mueve en sentido horario. Si  $\ell \neq 0$  la distancia mínima  $r_{\min}$  a la que la partícula se acerca al origen está dada por (2.35) en función de  $\ell$  y  $e$ , y nos sirve como coordenada inicial  $r_0$  para integrar. A diferencia de la partícula

libre sin momento angular que se mantiene a un ángulo  $\phi_0$  constante, aquí la coordenada angular  $\phi$  es función de la coordenada radial  $r$ , dada por (2.37), y están relacionadas de tal forma que la partícula viaja en línea recta acercándose con  $\dot{r} < 0$  hasta llegar a  $r_{\min}$ , donde (2.33) no está definida, a partir de donde la partícula se aleja con  $\dot{r} > 0$ , por lo que es necesario graficar la trayectoria en dos partes que sólo difieren en el signo de  $\dot{r}$ .

En la Fig. 2.3.2a se muestran algunas trayectorias de una partícula libre con  $\ell^2 = 1$  y  $e = 1$  (en las unidades correspondientes) para distintos valores del ángulo inicial  $\phi_0$  medido respecto al origen en  $r_0 = 0.7072$ , pues  $r_{\min} = \sqrt{2} \approx 0.7071$  de acuerdo con (2.35). Sustituyendo  $r_0$  en la constante de integración de (2.37) se obtiene  $\phi(r)$ . En la Fig. 2.3.2b se muestra la comparación de obtener  $\phi(r)$  analítica y numéricamente. Cuando  $r \rightarrow \infty$  entonces  $|\phi(r)| \rightarrow \arctan\left(1/\sqrt{2(0.7072)^2 - 1}\right) \approx 1.5546 < 1.5708 \approx \pi/2$ . Sustituyendo  $r_0 = 1/\sqrt{2}$  en la constante de integración se tiene que  $|\phi(r)| \rightarrow \pi/2$  cuando  $r \rightarrow \infty$ .

## 2.4. Potencial Newtoniano

Consideremos ahora el potencial gravitacional Newtoniano, que es un potencial  $V(r)$  para un sistema de una partícula de masa  $m$  que se mueve alrededor de un centro de fuerza fijo de masa  $M$ , con  $M \gg m$ , el cual está dado por

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} \quad (2.38)$$

donde  $G$  es la constante de la gravitación universal de Newton, que en unidades del sistema internacional tiene un valor de  $6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ . Sustituyendo (2.38) en (2.28) obtenemos el potencial efectivo Newtoniano por unidad de masa

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2}. \quad (2.39)$$

En la Fig. 2.4.1 se muestra la gráfica del potencial efectivo (2.39) junto con el potencial Newtoniano por unidad de masa  $V(r)/m$  y el potencial centrífugo por unidad de masa  $\ell^2/2r^2$ . Si al potencial efectivo lo igualamos a cero encontramos que  $r = 1/2 \ell^2/GM$  y que  $\ell^2/GM$  es una combinación de las constantes  $G$ ,  $M$ ,  $\ell$  con dimensiones de longitud. Si sustituimos  $r = \ell^2/GM$  en el potencial efectivo obtenemos  $V_{\text{eff}} = -1/2 (GM/\ell)^2$ , donde  $(GM/\ell)^2$  tiene dimensiones de energía por unidad de masa, es decir de velocidad al cuadrado. Así que si expresamos a  $r$  en múltiplos de  $\ell^2/GM$  y dividimos a  $V_{\text{eff}}(r)$  entre  $(GM/\ell)^2$  obtenemos una gráfica independiente del valor de  $G$ ,  $M$ ,  $\ell$ .

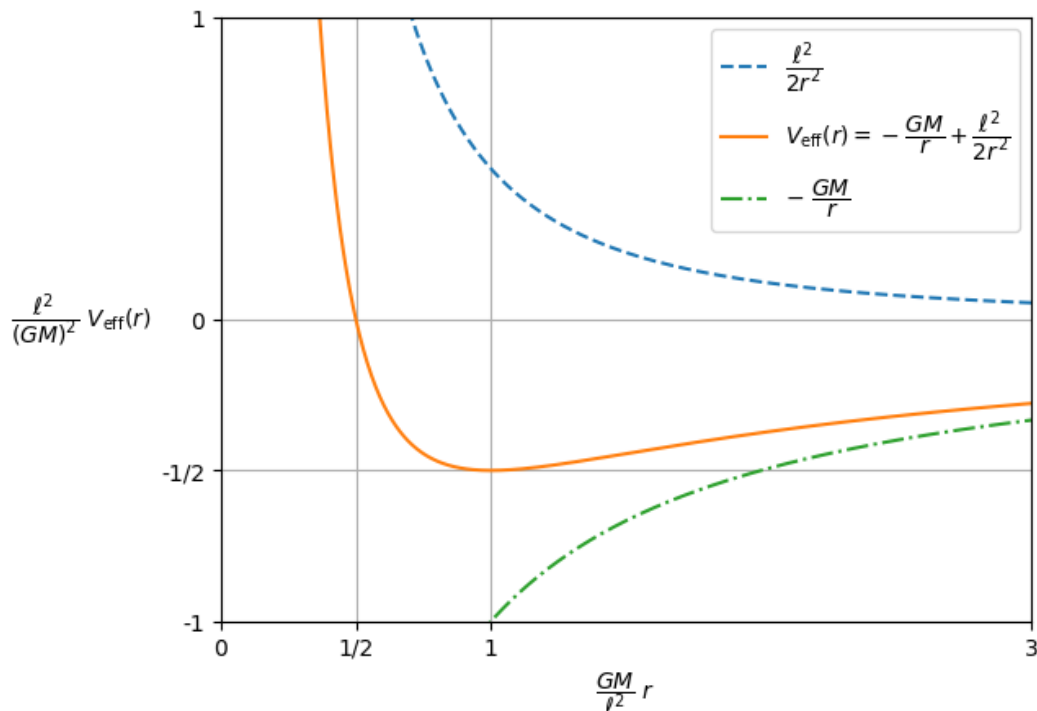


Fig. 2.4.1: Gráfica del potencial efectivo Newtoniano por unidad de masa (2.39).

Como vimos al final de la sección 2.2, la velocidad radial (2.30) sólo está definida para  $e \geq V_{\text{eff}}(r)$  donde  $e = V_{\text{eff}}(r)$  corresponde a  $\dot{r} = 0$  que corresponde a los puntos de retorno de las órbitas dados por el máximo o el mínimo de  $r$ . Para saber cuáles son estos puntos en la gravedad Newtoniana, igualamos  $e$  con el potencial efectivo (2.39)

$$e = -\frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2}, \quad (2.40)$$

multiplicando por  $r^2$  y acomodando los términos

$$er^2 + GMr - \frac{\ell^2}{2} = 0. \quad (2.41)$$

La solución de (2.41) para  $r$  viene en 3 casos:

1. Si  $e = 0$

$$r_{\text{mín}} \Big|_{e=0} = \frac{\ell^2}{2GM}. \quad (2.42)$$

2. Si  $e < 0$

$$r_{\text{mín}}^{\text{máx}} = -\frac{GM}{2e} \pm \sqrt{\left(\frac{GM}{2e}\right)^2 + \frac{\ell^2}{2e}} = -\frac{GM}{2e} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2e\ell^2}{(GM)^2}}\right). \quad (2.43)$$

3. Si  $e > 0$

$$r_{\text{mín}} = -\frac{GM}{2e} + \sqrt{\left(\frac{GM}{2e}\right)^2 + \frac{\ell^2}{2e}} = -\frac{GM}{2e} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2e\ell^2}{(GM)^2}}\right). \quad (2.44)$$

En la primera igualdad de (2.43) y (2.44) los signos de la raíz cuadrada para  $r_{\text{mín}}$  son contrarios, pero en la segunda igualdad son los mismos, así que tanto para  $e < 0$  como  $e > 0$  el máximo y el mínimo están dados por

$$r_{\text{mín}}^{\text{máx}} = -\frac{GM}{2e} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2e\ell^2}{(GM)^2}}\right). \quad (2.45)$$

Dado que  $V_{\text{eff}}(r) \rightarrow 0$  en  $r \rightarrow \infty$ , si  $e = 0$  entonces  $V_{\text{eff}}(r) \rightarrow e$  y  $\dot{r} \rightarrow 0$  en  $r \rightarrow \infty$ , es decir  $r_{\text{máx}} \rightarrow \infty$ , y si  $e > 0$  entonces  $e > V_{\text{eff}}(r)$  en  $r \rightarrow \infty$  por lo que  $\dot{r} \neq 0$ , es decir  $r$  no tiene máximo, esto corresponde a una partícula que se acerca desde infinito con velocidad radial negativa, la cual aumenta en magnitud hasta un valor máximo en  $r = 1 \ell^2 / (GM)$  a partir del cual disminuye hasta cero en  $r_{\text{mín}}$ , dado por (2.44), y de ahí se aleja hacia infinito con velocidad radial positiva, la cual es máxima de nuevo en  $r = \ell^2 / (GM)$ .

Una partícula con  $e < 0$ , donde  $e \geq V_{\text{eff}}(r)$ , sigue una órbita elíptica con el centro de fuerza ubicado en uno de los focos. Las distancias máxima y mínima al centro de fuerza están dadas por (2.45).

Sustituyendo  $e = -1/2 (GM/\ell)^2$ , que es el valor mínimo del potencial, en (2.45), obtenemos

$$r_{\text{máx}} = r_{\text{mín}} = \frac{\ell^2}{GM} \quad (2.46)$$

que es el radio de una órbita circular. Para comprobar que  $-1/2 (GM/\ell)^2$  es el mínimo del potencial igualemos a cero la derivada del potencial (2.39)

$$\frac{dV_{\text{eff}}(r)}{dr} = \frac{GM}{r^2} - \frac{\ell^2}{r^3} = 0 \quad (2.47)$$

esto ocurre cuando  $r \rightarrow \infty$ , que corresponde a un máximo, pero multiplicando (2.47) por  $r^3$  tenemos que  $GMr - \ell^2 = 0$ , esto es  $r = \ell^2/GM$ . De la Fig. 2.4.1 es claro que el mínimo del potencial se encuentra en  $r = \ell^2/GM$  pero lo podemos verificar con la segunda derivada

$$\left. \frac{d^2V_{\text{eff}}(r)}{dr^2} \right|_{\frac{\ell^2}{GM}} = \left( -\frac{2GM}{r^3} + \frac{3\ell^2}{r^4} \right) \bigg|_{\frac{\ell^2}{GM}} = \frac{(GM)^4}{\ell^6} > 0, \quad (2.48)$$

cuando  $r \rightarrow \infty$  el término de (2.48) que va como  $1/r^4$  se va a cero más rápido que el que va como  $1/r^3$  por lo que el signo de la segunda derivada es negativo antes de llegar a cero, confirmando que el potencial llega a un máximo local. De paso, multiplicando (2.48) por  $r^4$  tenemos que  $-2GMr + 3\ell^2 = 0$ , por lo tanto hay un punto de inflexión en  $r = 3/2 \ell^2/GM$ . Sustituyendo (2.46) en (2.39) vemos que el valor mínimo del potencial es  $-1/2 (GM/\ell)^2$ .

## Órbitas Newtonianas

La componente angular (2.22) de la velocidad de la partícula es la responsable del movimiento orbital: si la velocidad angular es nula, entonces el momento angular también es nulo y el potencial efectivo se reduce al potencial Newtoniano, en cuyo caso toda partícula terminará en  $r = 0$ , donde la velocidad de la partícula sólo tiene la componente radial (2.30), la cual sólo admite energías  $e > -GM/r$ . Si una partícula se encontrara en  $r = 0$ , para poder escapar de la fuerza central tendría que partir con una velocidad radial infinita, ya que en  $r = 0$  el potencial Newtoniano es infinito negativo. Si, además, la partícula parte con energía  $e < 0$ , sólo llegará a un radio máximo  $r = -GM/e$ , a partir del cual la velocidad (radial) cambia de signo y la partícula regresará a  $r = 0$ . Pero si la partícula parte con energía  $e \geq 0$  llegará hasta infinito. Por el contrario, si la componente angular de la velocidad es distinta de cero el momento angular también es distinto de cero e impide que la partícula llegue a  $r = 0$  puesto que el potencial centrífugo  $\ell^2/2r^2 \rightarrow \infty$  cuando  $r \rightarrow 0$ , esto implica que el potencial efectivo Newtoniano no admite órbitas de inmersión.

Las gráficas de las órbitas Newtonianas se pueden obtener expresando a  $r$  como función de  $\phi$ , o a  $\phi$  como función de  $r$ , mediante

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\phi} = \frac{dr/dt}{d\phi/dt} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}} = \frac{r^2}{\ell} \dot{r} \quad (2.49)$$

donde sustituimos (2.22). Sustituyendo el potencial efectivo Newtoniano (2.39) en la expresión para la velocidad radial (2.30)

$$\dot{r} = \pm \sqrt{2 \left( e + \frac{GM}{r} - \frac{\ell^2}{2r^2} \right)}. \quad (2.50)$$

Sustituyendo (2.50) en (2.49) obtenemos

$$\frac{dr}{d\phi} = \pm \frac{r^2}{\ell} \sqrt{2e + \frac{2GM}{r} - \frac{\ell^2}{r^2}}. \quad (2.51)$$

Integrando numéricamente (2.51) obtenemos  $r = r(\phi)$ , y si integramos su inverso

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{\ell}{r^2 \sqrt{2e + \frac{2GM}{r} - \frac{\ell^2}{r^2}}} \quad (2.52)$$

obtenemos  $\phi = \phi(r)$ . Las órbitas circulares tienen  $\dot{r} = 0$  por lo que no se puede obtener  $\phi(r)$ , pero la integral de cero es una constante, así que sí podemos obtener  $r(\phi) = \text{cte}$ . En algunos casos es más sencillo utilizar una u otra. Al integrar (2.51) o (2.52) obtenemos arreglos numéricos de las coordenadas  $(r, \phi)$  de las órbitas, dada  $e$ , restringida por (2.31), y dada  $\ell$ , que no tiene restricción. Una partícula que viene de infinito tiene un valor de  $r$  que va disminuyendo con velocidad radial negativa hasta llegar a  $\dot{r} = 0$  donde  $r$  alcanza su valor mínimo y de ahí se vuelve a alejar, ahora con velocidad radial positiva, por lo que la trayectoria se completa al cambiar el signo de la raíz cuadrada en (2.51) o (2.52) y volviendo a integrar.

En la Fig. 2.4.2 se presentan 4 ejemplos de órbitas Newtonianas con  $e$  en orden decreciente, que es la única cantidad que determina la trayectoria de las partículas. Como vimos en la Fig. 2.4.1, si expresamos a  $r$  como un múltiplo de  $\ell^2/GM$  y a las energías por unidad de masa como múltiplos de  $(GM)^2/\ell^2$ , la forma del potencial efectivo es la misma para todo valor de  $G$ ,  $M$  y  $\ell$ . Las coordenadas  $(r, \phi)$  se obtienen al integrar numéricamente (2.51) o (2.52), sólo que en el caso de la órbita circular,  $\dot{r} = 0$ , por lo que sólo se puede usar (2.51), que, además, resulta más eficiente para la órbita elíptica, pues con (2.52) no cierra la curva. Las curvas están formadas por dos mitades simétricas debido al cambio de signo en la velocidad radial, estas mitades están separadas por  $\phi_0 = 0$ , pero la elección de  $\phi_0$  es arbitraria.

En la Fig. 2.4.2a se presenta un caso particular de  $e > 0$ :  $e = (GM)^2/\ell^2$ . La distancia mínima al centro de fuerza está dada por (2.44), lo cual se aprecia gráficamente en la Fig. 2.4.1. La interpretación

de estas curvas es que la partícula viene desde un  $r$  infinito, que en las gráficas se observa desde  $r_f = 10 \ell^2/GM$ , se acerca hasta  $r_0$  y se va a  $r$  infinito nuevamente. Sustituyendo  $e = (GM)^2/\ell^2$  en (2.44), el radio mínimo para una partícula con esta energía es  $r_{\text{mín}} = (\sqrt{3} - 1)/2 \ell^2/GM \approx 0.3660 \ell^2/GM$ . Como esta cantidad tiene más cifras decimales, el radio mínimo que podemos utilizar a 4 cifras decimales es  $r_0 = 0.3661 \ell^2/GM$ , al que le asignamos el ángulo inicial  $\phi_0 = 0$ . Escogiendo un radio final  $r_f = 10 \ell^2/GM$ , llegamos a un ángulo final  $\phi_f \approx 1.20 \times 10^2^\circ$ , el cual varía según la precisión de las cifras decimales.

En la Fig. 2.4.2b tenemos el caso  $e = 0$ , sustituyendo en (2.42), la distancia mínima al centro de fuerza es  $r_{\text{mín}} = 1/2 \ell^2/GM$ . A pesar de que este número es exacto la integración numérica requiere un valor mayor, por eso el radio inicial es  $r_0 = 0.5001 \ell^2/GM$ .

Las partículas con  $(\ell^2/(GM)^2)e \in [-1/2, 0]$  tienen órbitas elípticas. En la Fig. 2.4.2c se presenta un ejemplo de órbita elíptica con  $e = -1/4 (GM)^2/\ell^2$ . Sustituyendo  $e$  en (2.45) se tiene  $(GM/\ell^2) r_{\text{mín}} = 2 - \sqrt{2} \approx 0.5858$  y  $(GM/\ell^2) r_{\text{max}} = 2 + \sqrt{2} \approx 3.4142$ . Integrando (2.52) con una separación entre puntos de  $1 \times 10^{-4}$ , la curva no cierra, mientras que integrando (2.51) con una separación de  $1 \times 10^{-2}$ , con  $r_0 = 0.5858$  y  $\phi$  de 0 a 3.15 radianes para la mitad de arriba, y  $r_0 = 3.4142$  y  $\phi$  de 3.15 a 6.29 radianes para la mitad de abajo, la curva sí cierra, pero si integramos hasta un  $\phi$  mayor a  $\pi$ , se queda en un círculo de radio  $r = 3.4142$ .

El límite inferior  $e\ell^2/(GM)^2 = -1/2$  corresponde a una órbita circular de radio  $\ell^2/(GM)$ , la cual sólo se obtiene si se integra (2.51), en donde se tomó  $\phi_0 = 0$  y  $\phi_f = 6.28$ , y  $(GM/\ell^2) r_0 = 1$ , con lo que no se requiere partir la curva en dos mitades. Ésta órbita se presenta en la Fig. 2.4.2d.

Es importante mencionar que las órbitas elípticas Newtonianas no precesan, mientras que las órbitas de los planetas en el sistema solar, en especial la órbita de Mercurio, sí lo hacen, y el ángulo que mide la precesión del perihelio va como el inverso del semieje mayor, por lo tanto las órbitas más pequeñas tienen una mayor precesión (Hartle, 2003). En la geometría de Schwarzschild de Relatividad General, las órbitas sí precesan. En la siguiente sección estudiaremos una aproximación al potencial de Schwarzschild.



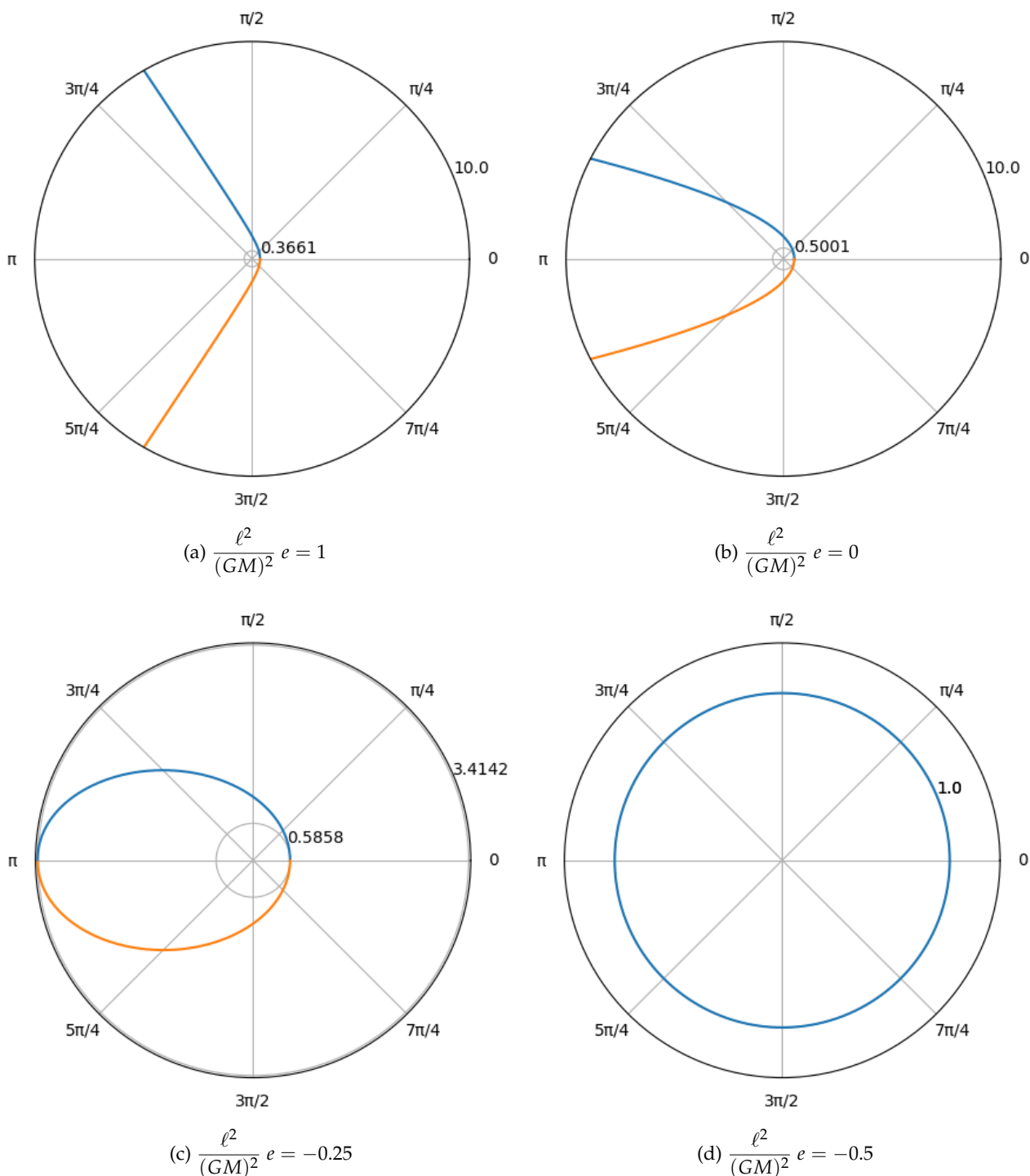


Fig. 2.4.2: Trayectorias de una partícula sobre la cual se ejerce una fuerza central Newtoniana. (a) Partícula con  $e = 1 (GM)^2/\ell^2$ . Mientras mayor sea el valor de  $e$ , más se acerca la partícula al centro de fuerza, pero nunca llega a  $r = 0$ , pues  $V_{\text{eff}} \rightarrow \infty$  conforme  $r \rightarrow 0$ . (b) Partícula con  $e = 0$ , que corresponde a una órbita elíptica cuyo  $r_{\text{máx}}$  se encuentra en infinito. (c) Órbita elíptica con  $e = -0.25 (GM)^2/\ell^2$ . (d) Órbita circular con la energía mínima permitida  $e = -0.5 (GM)^2/\ell^2$ .

## 2.5. Aproximación al potencial de Schwarzschild

En Relatividad General, la solución de Schwarzschild a las ecuaciones de Einstein aporta una corrección en la aproximación al potencial efectivo Newtoniano. Se trata de un término adicional que contrarresta al potencial centrífugo cuando  $r \rightarrow 0$  permitiendo trayectorias de inmersión para algunas combinaciones de la energía total y el momento angular de la partícula. Este potencial aproximado también permite la precesión de las órbitas (Hartle, 2003).

Analizaremos las trayectorias de partículas de prueba que siguen geodésicas temporales en la geometría de Schwarzschild. Estas partículas de prueba pueden ser los planetas del sistema solar orbitando alrededor del Sol, ya que en una excelente aproximación, el sistema solar se puede estudiar como el espacio-tiempo vacío afuera de una fuente de curvatura esféricamente simétrica. El elemento de línea en las coordenadas de Schwarzschild es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.53)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz. Esta métrica tiene simetría temporal, asociada a la conservación de energía, y simetría esférica, asociada a la conservación de momento angular, por lo que la energía adimensional por unidad de masa en reposo

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \frac{dt}{d\tau} \quad (2.54)$$

y el momento angular por unidad de masa en reposo

$$\ell = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau} \quad (2.55)$$

son cantidades conservadas. En (2.54) y (2.55),  $\tau$  es el tiempo propio de la partícula, mientras que  $t$  es el tiempo coordenado. La conservación del momento angular implica que las órbitas yacen en un plano, el cual escogemos que sea el plano ecuatorial  $\theta = \pi/2$ . Utilizando que la norma de la 4-velocidad es  $g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -1$ , eventualmente llegamos a la expresión

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left( \frac{dr}{cd\tau} \right)^2 + V_{\text{eff}}^\varepsilon(r), \quad (2.56)$$

donde hemos definido

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon^2 - 1}{2} \quad (2.57)$$

y el potencial efectivo adimensional

$$V_{\text{eff}}^\varepsilon(r) = \frac{1}{c^2} \left( -\frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM\ell^2}{c^2 r^3} \right). \quad (2.58)$$

Anticipando una correspondencia con la energía total Newtoniana, definimos  $E$  como

$$\varepsilon = 1 + \frac{E}{mc^2} = 1 + \frac{e}{c^2}, \quad (2.59)$$

donde  $e = E/m$  es la energía total Newtoniana por unidad de masa. En la aproximación en la que  $E \ll mc^2$ , es decir,  $e \ll c^2$ , tenemos que

$$\varepsilon^2 \approx 1 + \frac{2e}{c^2}, \quad (2.60)$$

entonces, de (2.57),

$$\mathcal{E} \approx \frac{e}{c^2}, \quad (2.61)$$

por lo que, de (2.56) y (2.58),

$$e \approx \frac{1}{2} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V_{\text{eff}}(r) \quad (2.62)$$

donde

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM\ell^2}{c^2 r^3} \quad (2.63)$$

es una extensión al potencial efectivo Newtoniano con una corrección relativista proporcional a  $1/r^3$ . El límite Newtoniano de la energía (2.62) se obtiene reemplazando la derivada relativista respecto al tiempo propio  $\tau$  por una derivada respecto al tiempo coordenado  $t$ , con lo que se recupera (2.29). Tomando el límite  $c \rightarrow \infty$  en (2.63) se recupera el potencial efectivo Newtoniano (2.39). El mínimo  $V_{\text{mín}}$  y el máximo  $V_{\text{máx}}$  del potencial se encuentran donde la derivada de (2.63) es igual a cero, esto sucede en

$$r_{V_{\text{mín}}}^{V_{\text{máx}}} = \frac{\ell^2}{2GM} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - 12 \left( \frac{GM}{c\ell} \right)^2} \right]. \quad (2.64)$$

La constante  $GM/c$  tiene unidades de momento angular por unidad de masa, por lo que  $\ell$  se puede expresar como un múltiplo de  $GM/c$ , de modo que  $r$  queda expresado como un múltiplo de  $GM/c^2$ , pero como en el potencial efectivo Newtoniano no aparece  $c$ , expresaremos a  $c$  como múltiplo de  $GM/\ell$  y a  $r$  como múltiplo de  $\ell^2/GM$ , como en la Fig. 2.4.1. Mientras que el potencial efectivo Newtoniano es el mismo para todo  $\ell$  habrá un potencial (2.63) distinto para cada  $\ell$  expresado en  $c$ .

En la Fig. 2.5.1 se graficó (2.63) para cuatro valores distintos de  $c$  como múltiplo de  $GM/\ell$ , donde se observa que para  $r > 1 \ell^2/GM$  el potencial efectivo en la aproximación a Schwarzschild coincide con el Newtoniano, pero para  $r \leq 1 \ell^2/GM$  difieren significativamente debido a que el momento angular produce una barrera centrífuga infinita en el potencial efectivo Newtoniano, mientras que en la aproximación a Schwarzschild la barrera centrífuga producida por  $\ell^2 > 12 (GM/c)^2$  es finita, por lo que las partículas con  $e > V_{\text{máx}}$  no tienen una restricción para el valor mínimo de  $r$ . El radio de Schwarzschild es  $r_S = 2GM/c^2$  y  $V_{\text{eff}}(r_S) = -c^2/2$ . Como  $c$  adquiere distintos valores como múltiplo de  $GM/\ell$  habrá un  $r_S$  distinto para cada  $c$  correspondiente a distintos momentos angulares.

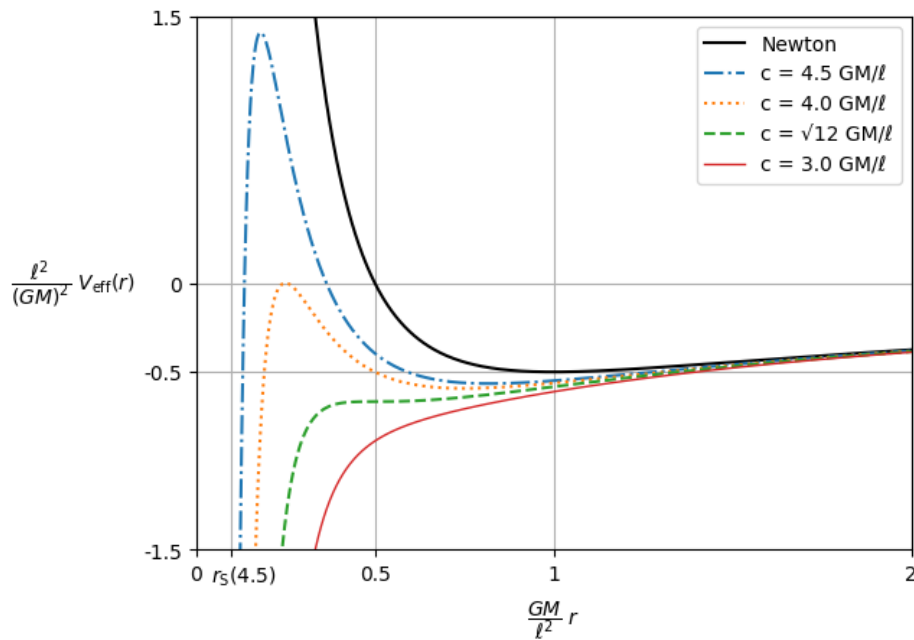


Fig. 2.5.1: Potenciales efectivos (2.63) para cuatro valores de  $c$ , expresada como múltiplo de  $GM/\ell$  para comparar con el potencial efectivo Newtoniano de la Fig. 2.4.1, que es el mismo para todo  $\ell$ . Si  $c > \sqrt{12} GM/\ell$  el potencial de Schwarzschild presenta una barrera centrífuga. En el límite  $c \gg 1 GM/\ell$  se recupera la barrera centrífuga infinita del potencial Newtoniano y  $r_S \rightarrow 0$ . Aquí se indica la posición de  $r_S$  que corresponde a  $c = 4.5 GM/\ell$ .

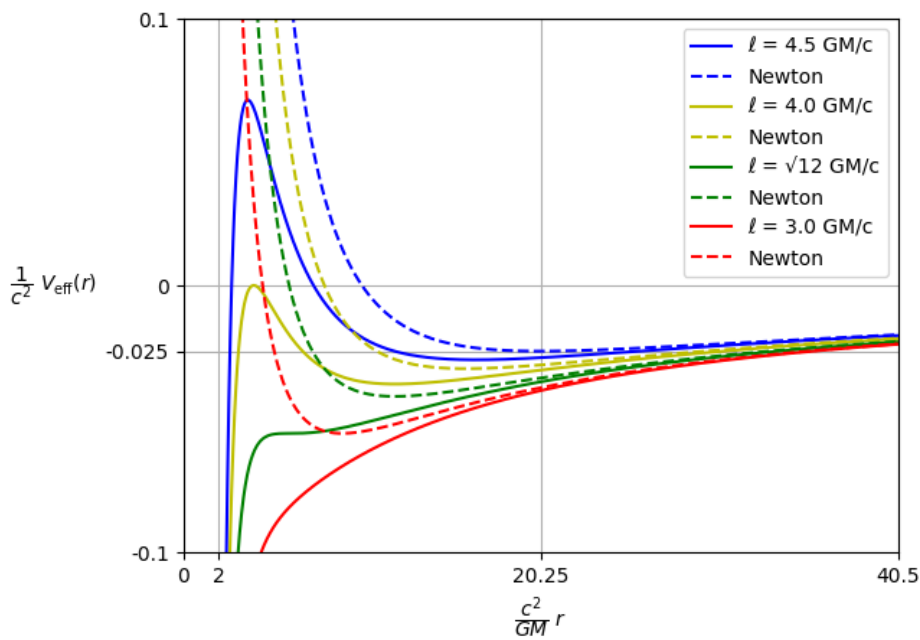


Fig. 2.5.2: Potenciales efectivos (2.63) para los cuatro valores de  $c$  de la Fig. 2.5.1 pero expresando a  $\ell$  como múltiplo de  $GM/c$ , lo que resulta en un potencial efectivo Newtoniano distinto para cada  $\ell$  y un mismo radio de Schwarzschild  $r_S = 2 GM/c^2$  para todo  $\ell$ . Como referencia se indica el mínimo del potencial efectivo Newtoniano para  $\ell = 4.5 GM/c$ , el cual se encuentra en  $r = 20.25 GM/c^2$ .

Por ejemplo, si  $c = 3 GM/\ell$  entonces  $r_S = 2/9 \ell^2/GM$ . Si  $c = 4.5 GM/\ell$  entonces  $r_S = 2/(4.5)^2 \ell^2/GM \approx 0.0987654321 \ell^2/GM$ , el cual se indica en la Fig 2.5.1. Si  $c \gg 1 GM/\ell$  se recupera el potencial Newtoniano con  $r_S \rightarrow 0$ . Una partícula con  $e = V_{\text{máx}}$  tendrá una órbita circular inestable de radio  $r_{V_{\text{máx}}}$ , mientras que una partícula con  $e = V_{\text{mín}}$  tendrá una órbita circular estable de radio  $r_{V_{\text{mín}}}$ . De (2.64) se deduce que el potencial tiene mínimo y máximo sólo si  $\ell^2 \geq 12 (GM)^2/c^2$ , donde la igualdad implica que  $r_{V_{\text{mín}}} = r_{V_{\text{máx}}}$ , lo que corresponde a un punto de inflexión en  $r = 0.5 \ell^2/GM$ , que es límite inferior para el radio de una órbita circular estable.

En la Fig. 2.5.2 se graficaron los mismos potenciales efectivos que en la Fig. 2.5.1, pero con  $\ell$  expresado como múltiplo de  $GM/c$  con lo que se tiene a  $r$  en múltiplos de  $GM/c^2$  y a  $V_{\text{eff}}(r)$  en múltiplos de  $c^2$ , y por lo tanto el radio de Schwarzschild es el mismo para todo  $\ell$ , sin embargo ahora hay un potencial efectivo Newtoniano distinto para cada  $\ell$ . Nótese que la escala de la Fig. 2.5.2 es muy distinta a la de la 2.5.1.

En la Fig. 2.5.3 se graficó el potencial efectivo de Schwarzschild para  $c = 4.5 GM/\ell$ . Se indican  $r_S$ , los radios de las órbitas circulares, y  $r_{\text{mín}}$  y  $r_{\text{máx}}$  para las órbitas de una partícula con  $e = -0.2499 (GM/\ell)^2$  y una partícula con  $e = -0.5 (GM/\ell)^2$ . Las órbitas están graficadas en las Figs. 2.5.5 y 2.5.6, respectivamente. Con estos valores de  $e$  y  $\ell$  las órbitas prácticamente cierran después de 4 y 5 vueltas, respectivamente. Una partícula con  $e = V_{\text{máx}} \approx 1.4092 (GM)^2/\ell^2$  se encontrará en una órbita circular inestable de radio  $r \approx 0.18 \ell^2/GM$ , en la Fig. 2.5.4 se graficó la trayectoria de una partícula con  $e = 1.4093 (GM)^2/\ell^2$ , ligeramente superior a  $V_{\text{máx}}$ , con lo que la trayectoria es tal que al llegar a  $r = 0.18 \ell^2/GM$  la partícula estará cerca de mantenerse en una órbita circular pero terminará por caer hacia  $r = 0$ . Con esta misma  $e$ , la barrera centrífuga infinita del potencial efectivo Newtoniano no permite que la partícula se aproxime a menos de  $0.3385 \ell^2/GM$ .

Como se aprecia en las trayectorias de las Figs. 2.5.4, 2.5.5, 2.5.6, la Relatividad General de Einstein, expresada aquí en una aproximación a la geometría de Schwarzschild, da cuenta de la precesión de las órbitas planetarias y de las trayectorias de inmersión, las cuales no eran descritas por la gravedad Newtoniana. La Relatividad General es por lo tanto una mejor descripción de la gravedad y es conceptualmente mucho más rica que la teoría Newtoniana.

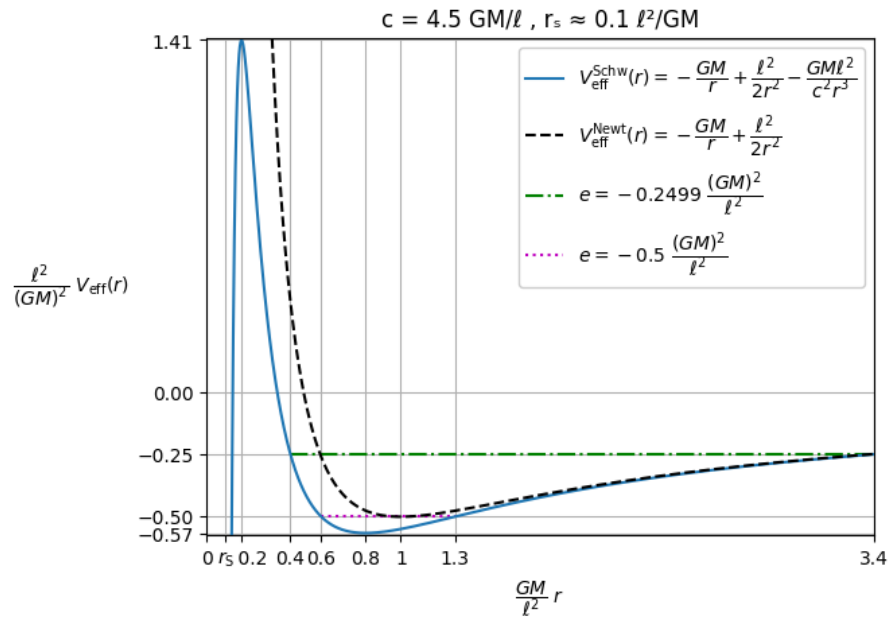


Fig. 2.5.3: Potencial efectivo (2.63) para  $c = 4.5 \text{ GM}/\ell$ , comparado con el potencial efectivo Newtoniano. El radio de Schwarzschild se encuentra en  $r_S = 2/(4.5)^2 \ell^2/\text{GM}$  con  $V_{\text{eff}}(r_S) = -10.125 (GM)^2/\ell^2$ . Los radios de las órbitas circulares están dados por (2.64) y son  $r = 0.2 \ell^2/\text{GM}$  y  $r = 0.8 \ell^2/\text{GM}$ . Se indican los valores mínimo y máximo de  $r$  para una partícula con  $e = -0.2499 (GM)^2/\ell^2$  (puntos y guiones) y con  $e = -0.5 (GM/\ell)^2$  (línea punteada), cuyas órbitas se encuentran en las Figs. 2.5.5 y 2.5.6, respectivamente.

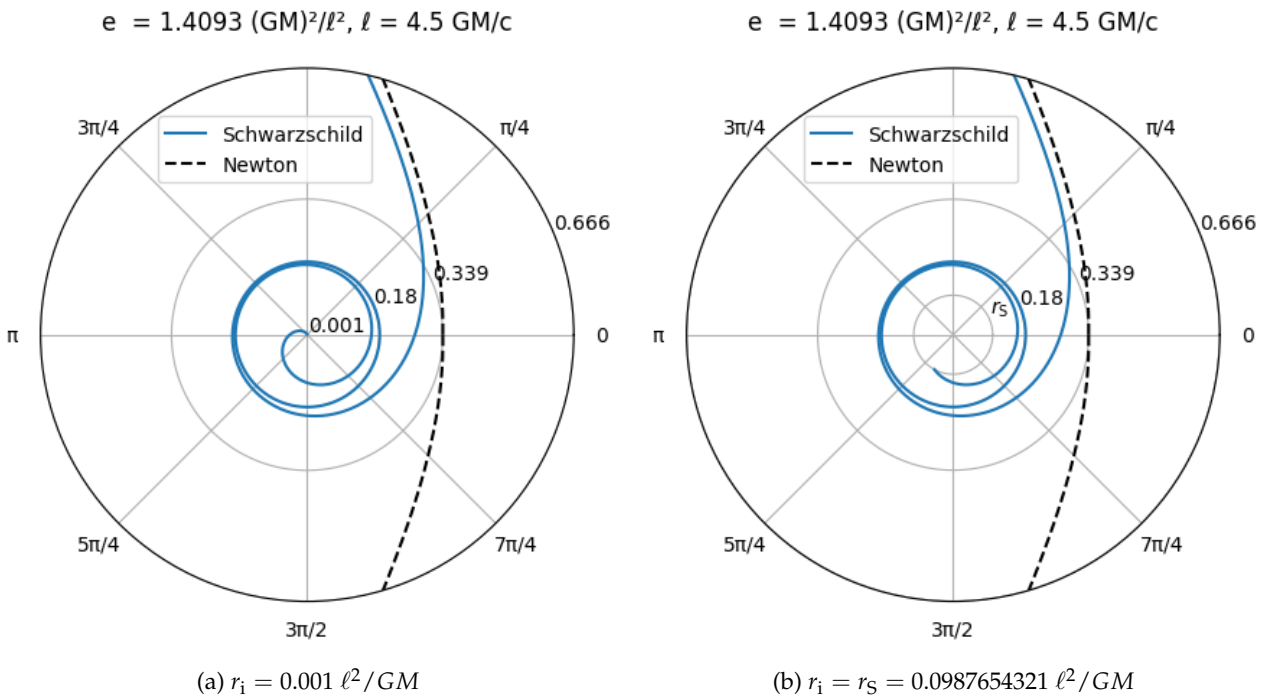


Fig. 2.5.4: Trayectoria de una partícula en el potencial efectivo de Schwarzschild con  $\ell = 4.5 \text{ GM}/c$  y  $e$  ligeramente mayor a  $V_{\text{máx}}$ , comparada con la trayectoria Newtoniana con  $r_{\text{mín}} = 0.3385 \ell^2/\text{GM}$ . (a) La partícula llega hasta  $r = 0.001 \ell^2/\text{GM}$ . (b) La trayectoria sólo está descrita para  $r > r_S$ .

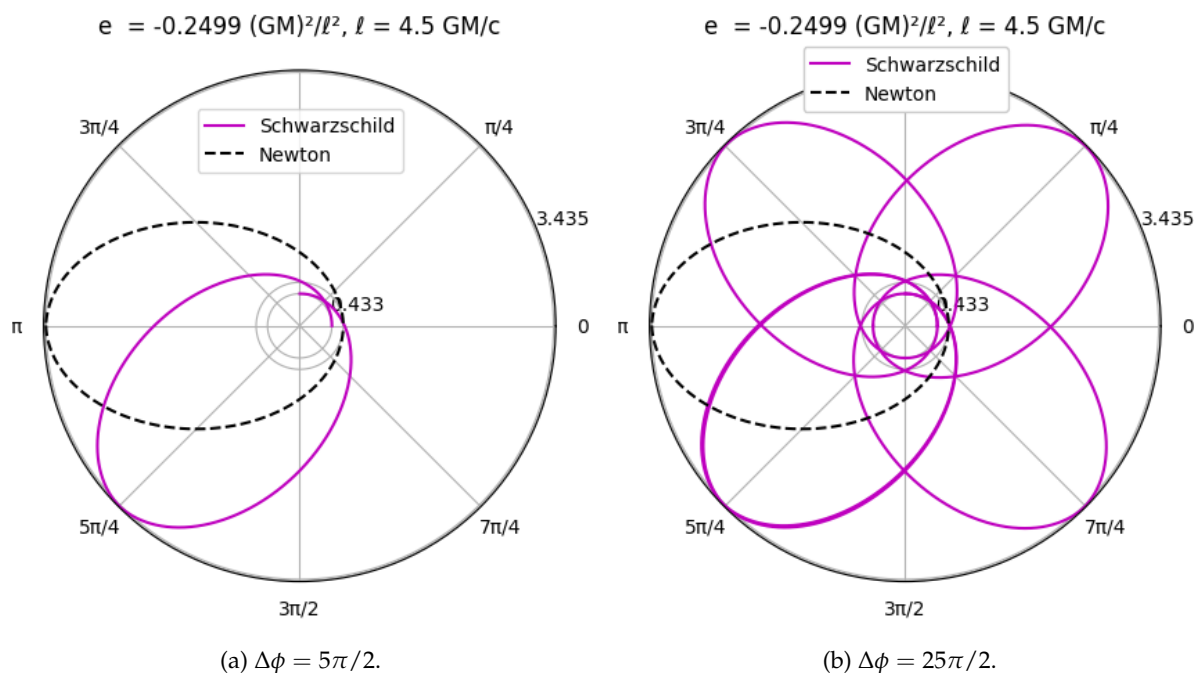


Fig. 2.5.5: Órbita de una partícula con  $\ell = 4.5 GM/c$  y  $e = -0.2499 (GM/\ell)^2$  sujeta a (2.63) comparada con la órbita Newtoniana de una partícula con la misma  $e$ . La órbita en la aproximación a Schwarzschild precesa y estos valores de  $\ell$  y  $e$  resultan en una órbita que cierra después de 4 vueltas, donde cada vuelta inicia y termina en  $r_{\min} = 0.433 \ell^2/GM$  y recorre un  $\Delta\phi = 5\pi/2$ .

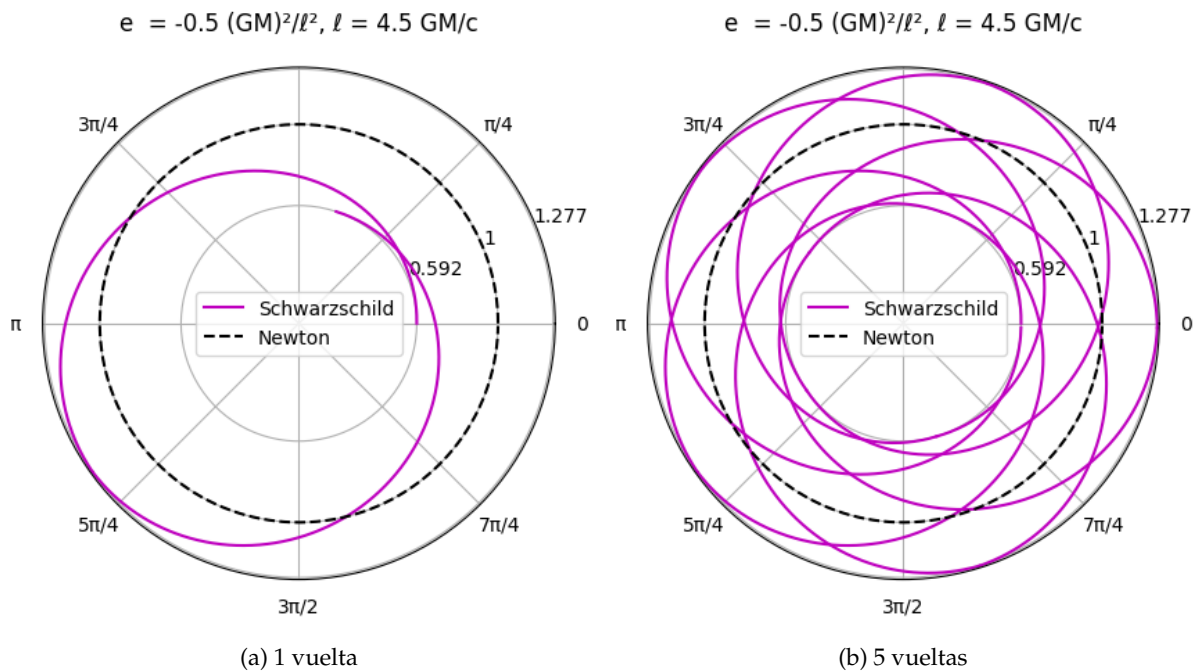


Fig. 2.5.6: En el potencial efectivo Newtoniano, una partícula con  $e = -0.5 (GM)^2/\ell^2$  tiene una órbita circular de radio  $r = 1 \ell^2/GM$ , mientras que en el potencial efectivo de Schwarzschild con  $\ell = 4.5 GM/c$ , la partícula tiene una órbita elíptica con  $r_{\min} = 0.591 \ell^2/GM$  y  $r_{\max} = 1.278 \ell^2/GM$ . Aquí cada vuelta recorre un  $\Delta\phi = 7.533$ , por lo que 5 vueltas corresponden a  $\Delta\phi = 37.663 \approx 12\pi = 37.7$

## 2.6. Potencial de MOND

Nuestro cuarto y último ejemplo de un potencial  $V(r)$  es el potencial de MOND (cf. sección 1.5). En esta teoría se considera que a partir de un radio crítico<sup>1</sup>  $r_0$  el potencial Newtoniano deja de ser válido y debe ser reemplazado por un potencial de la forma

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} f\left(\frac{r}{r_0}\right), \quad (2.65)$$

donde  $r_0$  se relaciona con el parámetro libre con unidades de aceleración  $a_0$  mediante (Milgrom, 1983a; Milgrom, 1983b)

$$a_0 = \frac{GM}{r_0^2}, \quad (2.66)$$

$$r_0 = \sqrt{\frac{GM}{a_0}}. \quad (2.67)$$

Milgrom refiere que  $a_0 = (1.2 \pm 0.2) \times 10^{-10} \text{ m/s}^2$  (Milgrom, 2015), y en (Milgrom, 1983b) describe cuatro métodos para determinar el valor de  $a_0$ . Sustituyendo  $G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$  y  $a_0 = 1.2 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2$  en (2.67) se obtiene  $r_0 \approx 0.75\sqrt{M} \text{ m} \cdot \text{kg}^{-1/2}$ . La masa estelar estimada de la Vía Láctea es  $(5.43 \pm 0.57) \times 10^{10} M_\odot$  (McMillan, 2017), así que sustituyendo la cota superior  $M = 6 \times 10^{10} M_\odot = 12 \times 10^{40} \text{ kg}$  en la expresión anterior se obtiene  $r_0 = 2.6 \times 10^{20} \text{ m} = 8.426 \text{ kpc}$ . No es claro todavía de qué tamaño es la Vía Láctea puesto que depende de los cúmulos globulares que se considere que forman parte de ella, un artículo de este año (Watkins y col., 2019) considera dos opciones para el radio de la Vía Láctea, uno es de  $21.1 \text{ kpc} = 6.51 \times 10^{20} \text{ m}$  (radio del disco), donde se observa que la velocidad circular es de  $206 \text{ km/s}$ , y otro de  $39.5 \text{ kpc} = 1.22 \times 10^{21} \text{ m}$  (radio del gas), con velocidad circular de  $214 \text{ km/s}$ , donde además se determinó que el Sol está a  $8.29 \text{ kpc} = 2.56 \times 10^{20} \text{ m}$  del centro de la Vía Láctea con una velocidad circular de  $239 \text{ km/s}$ . Por lo tanto, la distancia del Sol al centro de la Vía Láctea es cerca de la mitad del radio de la galaxia, distancia que resulta ser muy cercana al valor de  $r_0$ . Escogiendo

$$f\left(\frac{r}{r_0}\right) = -\frac{r}{r_0} \log\left(\frac{r}{r_0}\right), \quad (2.68)$$

el potencial (2.65) toma la forma

$$V(r) = \frac{GMm}{r_0} \log\left(\frac{r}{r_0}\right). \quad (2.69)$$

Las ecuaciones de movimiento están dadas por (2.18) y (2.19), de donde se obtienen  $\dot{\phi}$ , dada por (2.22), y  $\dot{r}$ , dada por (2.30). Sustituyendo (2.69) en (2.23) obtenemos la magnitud de la fuerza central a lo largo de  $\vec{r}$

$$F(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{GMm}{r_0 r} = -m \frac{\sqrt{GMa_0}}{r}. \quad (2.70)$$

<sup>1</sup>Denotado  $l_M$  en la literatura, aquí se le designa  $r_0$  para resaltar su relación con  $a_0$ .



Como  $F = ma$ , entonces  $a = -\sqrt{GMa_0}/r$ , que es la ec. (1.4). Sustituyendo (2.69) en (2.25), la energía total es

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{m\ell^2}{2r^2} + \frac{GMm}{r_0} \log\left(\frac{r}{r_0}\right), \quad (2.71)$$

por lo que la energía total por unidad de masa es

$$e = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2r^2} + \frac{GM}{r_0} \log\left(\frac{r}{r_0}\right). \quad (2.72)$$

La energía se conserva, pues

$$\frac{de}{dt} = \left[ \dot{r} - \frac{\ell^2}{r^3} + \frac{GM}{r_0 r} \right] \dot{r} = \left[ \frac{F(r)}{m} - \frac{F(r)}{m} \right] \dot{r} = 0, \quad (2.73)$$

donde hemos utilizado (2.23) y (2.70).

Sustituyendo (2.69) en (2.28), el potencial efectivo por unidad de masa MONDiano es

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{GM}{r_0} \log\left(\frac{r}{r_0}\right) + \frac{\ell^2}{2r^2}. \quad (2.74)$$

El mínimo de (2.74) se encuentra en

$$r_{V\text{mín}} = \sqrt{\frac{\ell^2}{GM}} r_0, \quad (2.75)$$

con

$$V_{\text{mín}} = \frac{GM}{r_0} \log\sqrt{\frac{\ell^2}{GMr_0}} + \frac{GM}{2r_0}. \quad (2.76)$$

Sustituyendo  $r = r_0$  en (2.74) se tiene

$$V_{\text{eff}}(r_0) = \frac{\ell^2}{2r_0^2}, \quad (2.77)$$

que difiere del potencial efectivo Newtoniano en  $-GM/r_0$ . Conforme  $r \rightarrow \infty$  el  $\log(r/r_0) \rightarrow \infty$  muy gradualmente, esto implica que para distancias (infinitamente) grandes sigue habiendo órbitas enlazadas, y es justo por eso que esta teoría es compatible con las curvas de rotación de las galaxias. Hay una separación considerable entre el potencial efectivo de MOND y el potencial efectivo Newtoniano por lo que la transición del régimen Newtoniano al régimen de MOND requiere de una función de interpolación. Milgrom ya tenía varias propuestas para esta función desde sus artículos originales (Milgrom, 1983b), y una que parece ajustarse a las observaciones astronómicas se encuentra en (Mendoza y col., 2011) y está definida como

$$\mu(x) = x \frac{1 \pm x^n}{1 \pm x^{n+1}}. \quad (2.78)$$

donde  $x = r_0/r$  y  $n$  es un número entero. A esta expresión se llega expandiendo en serie  $a/a_0$  y usando la convergencia de la serie geométrica, como se muestra a continuación. La suma de los primeros  $n$  términos de una serie geométrica con  $r \neq 1$  es

$$\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{1-r^n}{1-r}, \quad (2.79)$$

así que si  $|r| < 1$  y  $n \rightarrow \infty$  entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}. \quad (2.80)$$

El régimen de MOND corresponde a  $x \ll 1$  con  $a = \frac{\sqrt{GMa_0}}{r}$  entonces  $\frac{a}{a_0} = \frac{r_0}{r} = x$ , que se puede expandir en la serie

$$\frac{a}{a_0} \approx x(1 + x + x^2 + \dots) = \frac{x}{1-x}. \quad (2.81)$$

El régimen Newtoniano corresponde a  $x \gg 1$  con  $a = \frac{GM}{r^2}$  entonces  $\frac{a}{a_0} = \frac{r_0^2}{r^2} = x^2$ , que se puede expandir en la serie

$$\frac{a}{a_0} \approx x^2(1 + x^{-1} + x^{-2} + \dots) = x^2 \left( \frac{1}{1-x^{-1}} \right) = \frac{x^3}{x-1}. \quad (2.82)$$

Si aproximamos  $a/a_0$  con la suma de (2.81) y (2.82) se tiene que

$$\frac{a}{a_0} \equiv f(x) \approx x \frac{1-x^2}{1-x}. \quad (2.83)$$

En la ec. (1.2) vimos que en el régimen Newtoniano  $\mu(a/a_0) = 1$ , entonces  $f(x) = a/a_0 = x^2$ , mientras que en el régimen de MOND  $\mu(a/a_0) = a/a_0 = x = f(x)$ , así que en general

$$\mu(x) = \frac{x^2}{f(x)}, \quad (2.84)$$

dividiendo  $x^2$  entre (2.83) llegamos a que

$$\mu(x) = x \frac{1-x}{1-x^2}. \quad (2.85)$$

Generalizando para cualquier exponente  $n$  y considerando además signos positivos se llega a (2.78). Tomando el signo negativo y  $n = 3$  se obtiene una buena aproximación para la curva de rotación de la Vía Láctea (Mendoza y col., 2011), con lo que (2.78) toma la forma

$$\mu(x) = x \frac{1-x^3}{1-x^4}. \quad (2.86)$$

Si  $r \gg r_0$  entonces  $x \ll 1$  y  $x^3, x^4$  son despreciables, por lo que  $\mu(x) \approx x$  y  $v^2/r = a \approx GM/r_0 r$ , y sustituyendo  $r_0$  de (2.67) se tiene  $v = (GMa_0)^{1/4}$ , que es la ec. (1.5).

Si  $r \ll r_0$  entonces  $x \gg 1$  y  $(1 - x^3) \approx -x^3$ ,  $(1 - x^4) \approx -x^4$ , con lo que  $\mu(x) \approx 1$  y se recupera la gravedad Newtoniana.

De la ec. (1.1) tenemos que la magnitud de la aceleración gravitacional es

$$a(r) = \frac{1}{\mu(r)} \frac{GM}{r^2} = \frac{dV}{dr}, \quad (2.87)$$

donde hemos usado que  $\vec{F}(r) = -ma(r) = -\nabla U(r) = -dU/dr$ , con  $U(r)/m = V(r)$  y donde la fuerza tiene signo negativo al ser atractiva. Integrando (2.87) respecto a  $r$  se obtiene el potencial por unidad de masa  $V(r)$ . En la Fig. 2.6.1 se graficaron el potencial efectivo Newtoniano por unidad de masa (2.39), su análogo MONDiano (2.74), y dos potenciales efectivos por unidad de masa que se obtienen de sumar el potencial centrífugo  $\ell^2/2r^2$  a la integral de (2.87), sustituyendo  $n = 2$  y  $n = 3$  en (2.78).

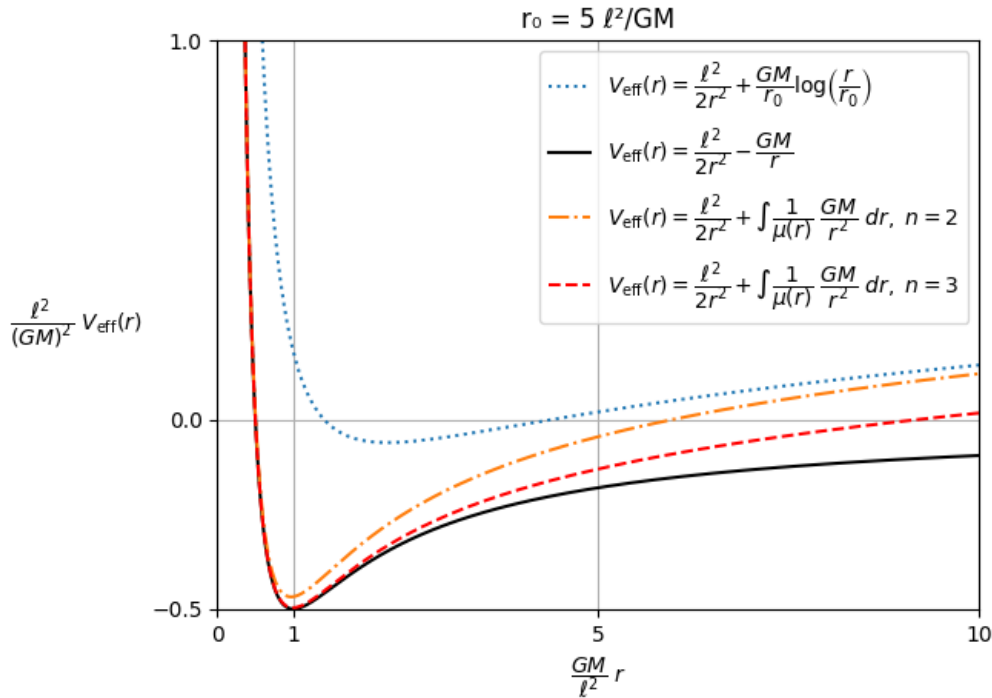


Fig. 2.6.1: Transición del potencial efectivo Newtoniano al MONDiano con  $r_0 = 5 \ell^2/GM$  mediante la función de interpolación  $\mu(r_0/r)$ . La línea azul punteada es el potencial efectivo por unidad de masa de MOND, la línea negra sólida el Newtoniano, las dos curvas en medio son una combinación de ambos potenciales mediada por la función de interpolación (2.78) tomando el signo negativo. La línea amarilla de puntos y guiones corresponde a  $n = 2$  y la línea roja de guiones a  $n = 3$ . Con  $n = 2$  el potencial resultante tiene un valor intermedio entre ambos potenciales en la región de transición, mientras que con  $n = 3$  el potencial se ajusta mejor al régimen Newtoniano.

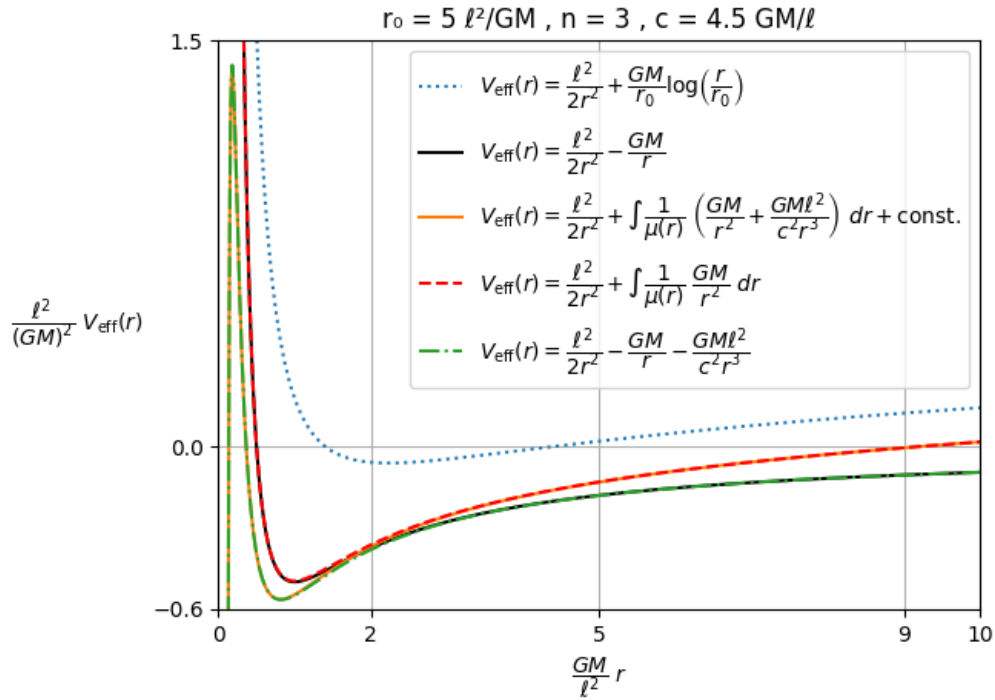


Fig. 2.6.2: Transición del potencial efectivo (2.63) con  $c = 4.5 GM/\ell$  hacia el potencial efectivo de MOND con  $r_0 = 5 \ell^2/GM$  mediante la función de interpolación (2.86).

En la Fig. 2.6.2 se agregó el potencial efectivo de la aproximación a Schwarzschild, nótese que este potencial y el de MOND difieren del Newtoniano en direcciones opuestas, esto se debe a que la corrección de la Relatividad General a la gravedad Newtoniana tiene lugar en  $r \leq 2 \ell^2/GM$ , mientras que la corrección de MOND tiene lugar en  $r > 2 \ell^2/GM$ , que es justo donde el potencial de Schwarzschild es igual al Newtoniano, por lo que la corrección de MOND también es una corrección para Schwarzschild. Incluyendo la corrección del potencial de Schwarzschild al potencial de Newton en la integral numérica de la función de interpolación, y sumando una constante, se obtiene un potencial que es igual al potencial de Schwarzschild en el régimen Newtoniano y recupera la transición al régimen de MOND que se obtuvo con el potencial Newtoniano (línea amarilla continua).

Para graficar las órbitas es necesario contar con una función explícita para integrar numéricamente, así que integrando (2.87) con  $\mu(r)$  dada por (2.86) se obtiene

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{\ell^2}{r^2} - GM \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{2r_0} \log(r^2 + rr_0 + r_0^2) + \frac{1}{\sqrt{3}r_0} \arctan\left(\frac{2r + r_0}{\sqrt{3}r_0}\right) \right]. \quad (2.88)$$

En la Fig. 2.6.3 se muestra la forma de las órbitas con la corrección de MOND al potencial efectivo Newtoniano. Dado que con  $n = 3$  el potencial interpolado es igual al Newtoniano en  $r \leq 1 \ell^2/GM$  (Fig. 2.6.1), los radios mínimos para las órbitas elípticas son los mismos que los Newtonianos, mientras que los radios máximos son menores, de modo que las órbitas resultantes son más cortas con la contribución del potencial de MOND.

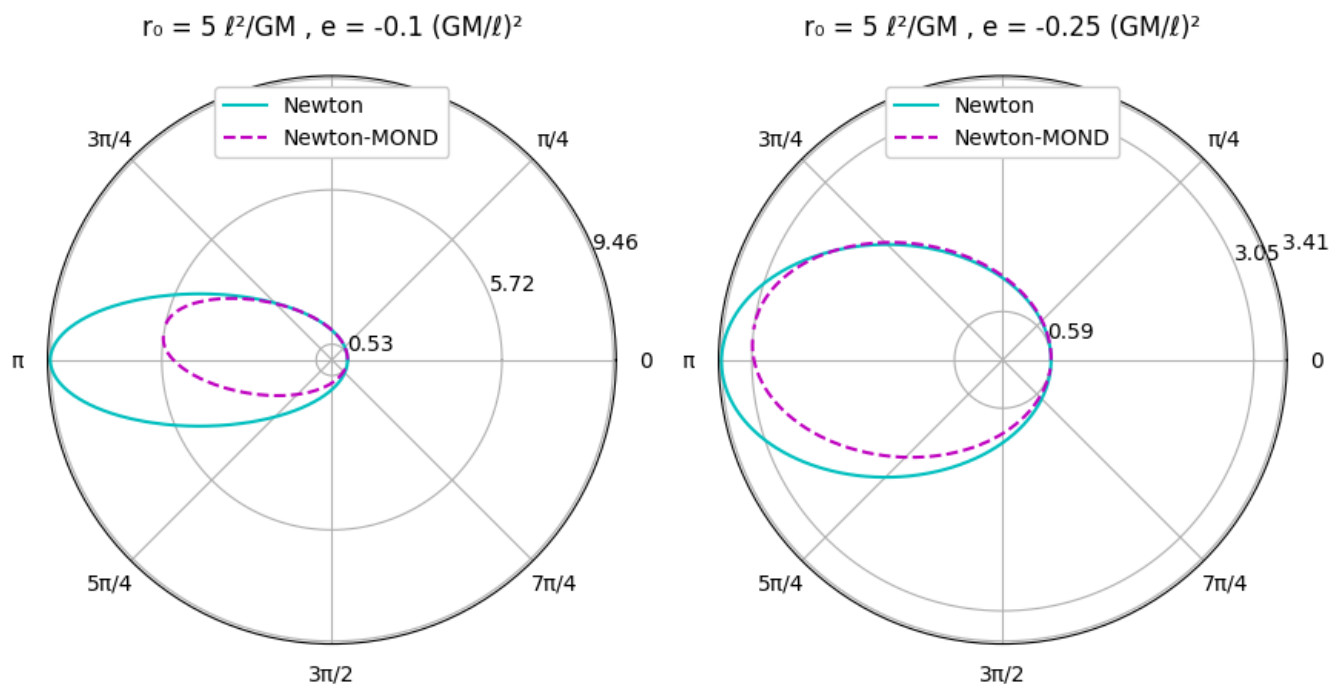


Fig. 2.6.3: Dos ejemplos de órbitas elípticas con la corrección de MOND al potencial efectivo Newtoniano (guiones color magenta), comparadas con las órbitas Newtonianas (líneas de color cian).

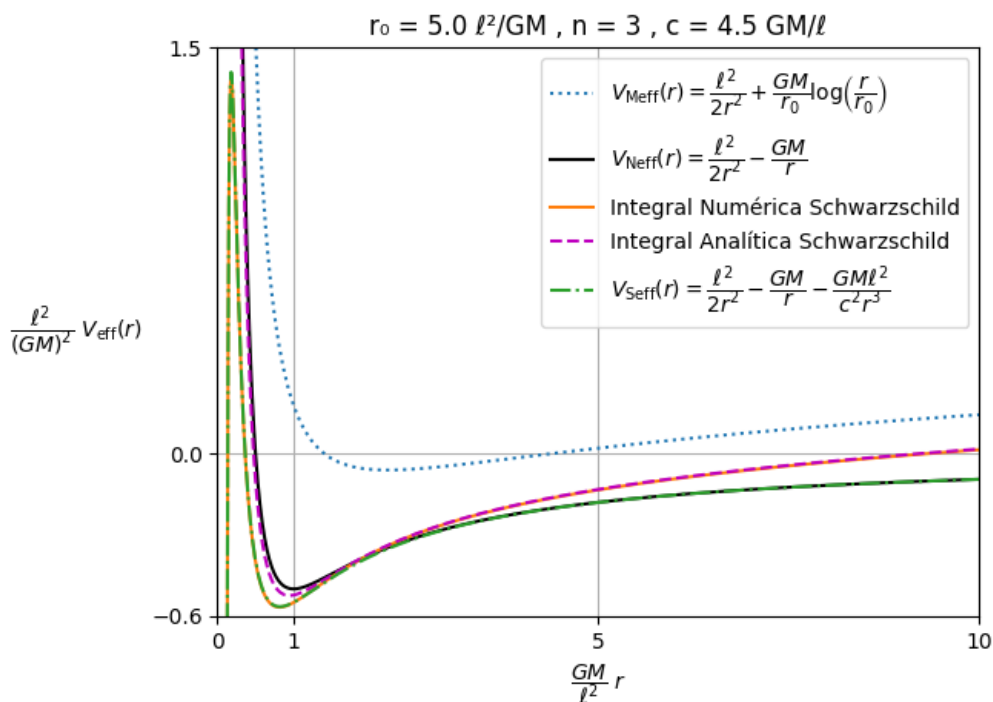


Fig. 2.6.4: En esta gráfica se incluyó la interpolación del potencial efectivo de Schwarzschild para  $c = 4.5 \text{ GM}/\ell$  con el de MOND para  $r_0 = 5 \ell^2/\text{GM}$  integrando analíticamente (2.89) con (2.86) que resulta en la ec. (2.90) y que se muestra con guiones de color magenta. Esta curva no coincide con la integral numérica de (2.89) que se muestra con la línea amarilla.

En la Fig. 2.6.4 se muestran dos curvas que interpolan el potencial de Schwarzschild con el de MOND, una se obtuvo con integración numérica (línea amarilla) y la otra con integración analítica (guiones color magenta). La integral numérica se ajusta perfectamente al potencial de Schwarzschild en  $r \leq 1 \ell^2/GM$  y al potencial de MOND interpolado en  $r > 1 \ell^2/GM$ , sin embargo, la curva obtenida con la integral analítica de

$$a(r) = \frac{1}{\mu(r)} \left( \frac{GM}{r^2} + \frac{GM\ell^2}{c^2 r^3} \right) \quad (2.89)$$

que resulta en

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{\ell^2}{r^2} - GM \left[ \frac{1}{r} + \frac{\ell^2}{2c^2 r^2} - \frac{1}{2r_0} \log(r^2 + rr_0 + r_0^2) + \frac{(r_0 - 2\ell^2/c^2)}{\sqrt{3}r_0^2} \arctan\left(\frac{2r + r_0}{\sqrt{3}r_0}\right) \right] \quad (2.90)$$

no se ajusta al potencial de Schwarzschild en  $r \leq 1 \ell^2/GM$ , a pesar de que sí se ajusta al potencial de MOND interpolado en  $r > 1 \ell^2/GM$ , por lo que no fue posible obtener las órbitas correspondientes. Nótese que (2.90) se reduce a (2.88) en el límite  $c \rightarrow \infty$ .

Objeto	$r$ (m)	$v$ (km/s)	$\ell$ (m <sup>2</sup> /s)	$\ell^2/GM$	$\frac{GM}{\ell^2} r_0$
Mercurio	$5.79 \times 10^{11}$	47	$2.74 \times 10^{15}$	$5.67 \times 10^{10}$	$4.56 \times 10^9$
Tierra	$1.5 \times 10^{11}$	30	$4.46 \times 10^{15}$	$1.53 \times 10^{11}$	$1.69 \times 10^9$
Neptuno	$4.5 \times 10^{12}$	5	$2.44 \times 10^{16}$	$4.50 \times 10^{12}$	$5.74 \times 10^7$
Sol	$2.56 \times 10^{20}$	239	$6.12 \times 10^{25}$	$4.67 \times 10^{20}$	0.543
Radio 1	$6.51 \times 10^{20}$	206	$1.34 \times 10^{26}$	$2.25 \times 10^{21}$	0.115
Radio 2	$1.22 \times 10^{21}$	214	$2.61 \times 10^{26}$	$8.51 \times 10^{21}$	0.030

Tabla 2.1: Algunos datos astronómicos.

En la Tabla 2.1 se muestran los datos de algunos objetos astronómicos para obtener su momento angular por unidad de masa  $\ell$  en términos del cual se expresa  $r_0$ . Los dos últimos renglones se refieren a los datos que reportan (Watkins y col., 2019) como posibles límites de la Vía Láctea. Para los planetas del Sistema Solar,  $M$  es la masa del Sol  $M_\odot$  entonces  $GM = GM_\odot = 1.327 \times 10^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2$ . Para los demás,  $M$  es la masa estelar de la Vía Láctea entonces  $GM = 8 \times 10^{30} \text{ m}^3/\text{s}^2$ . El estimado para el  $r_0$  de la Tierra debe ser muy malo pues debe haber un porcentaje importante de esa masa a distancias mayores a la de la Tierra, pero sirve de cota superior pues una masa menor corresponde a un  $\ell^2/GM$  mayor y a un  $r_0$  expresado como un múltiplo menor. Los múltiplos de  $\ell^2/GM$  para expresar a  $r_0$  son muy grandes para los planetas del Sistema Solar por lo que la influencia del potencial de MOND es despreciable, mientras que los objetos que orbitan en torno al centro de la Vía Láctea resultan en múltiplos menores a 1, lo que implica que el efecto del potencial de MOND es muy grande.

En la Fig. 2.6.5 se muestran los potenciales efectivos por unidad de masa con  $r_0 = 1 \ell^2/GM$ , que es más cercano al  $r_0$  de los tres últimos objetos de la Tabla 2.1. Estos potenciales son muy distintos a los de la Fig. 2.6.2, en los que la región  $r \leq 1 \ell^2/GM$  está descrita por los potenciales de Newton y

Schwarzschild, mientras que aquí esa misma región ya está influenciada por el potencial de MOND. Nótese que el radio de la órbita circular se ha recorrido de  $r = 1 \ell^2/GM$ , en la teoría Newtoniana, a  $r = 0.82 \ell^2/GM$  en el potencial de Schwarzschild y en el potencial interpolado de Newton con MOND.

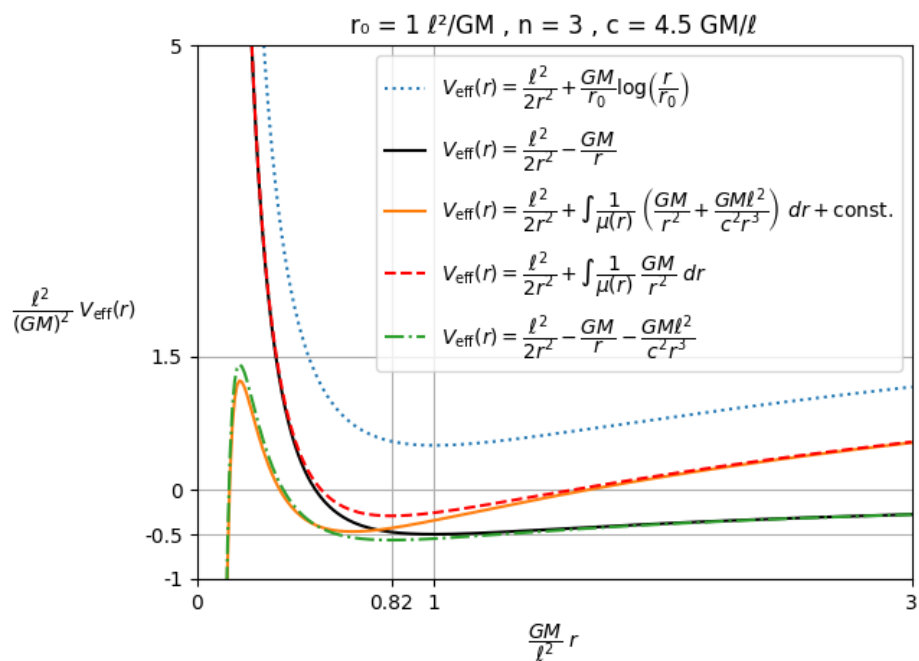


Fig. 2.6.5: Potenciales efectivos con  $r_0 = 1 \ell^2/GM$ .

# Capítulo 3

## Mecánica Relacional

En este capítulo deducimos las ecuaciones de movimiento relacionales para un sistema de  $N$  cuerpos donde el potencial depende tanto de la posición relativa como de la velocidad relativa de las partículas. Cuando un potencial es función de las velocidades, además de las posiciones, entonces la fuerza entre ellas es igual y opuesta (ley débil de acción y reacción) pero no necesariamente se ejerce en dirección de la línea entre las partículas (ley fuerte de acción y reacción) (Goldstein, 1980). Al final de esta sección llegamos a la conclusión de que la fuerza entre dos partículas que se deriva de un potencial general que depende de la posición y la velocidad relativas sí se ejerce en dirección de la línea que las une. Después presentamos dos ejemplos de potenciales que dependen de la velocidad relativa: el potencial de Weber, en la sección 3.2, y un potencial que incluye al parámetro libre con unidades de aceleración de MOND, en la sección 3.3. Al final del capítulo consideramos el caso general de una fuerza central con un potencial dependiente de la velocidad en la sección 3.4 y lo aplicamos a la gravedad de Weber en la sección 3.5.

### 3.1. Sistemas de $N$ cuerpos con un potencial dependiente de la velocidad relativa

El Lagrangiano  $L = T - V$  para un sistema gravitacional de  $N$  cuerpos está dado por

$$L = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \dot{\vec{r}}_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N V_{ij}, \quad (3.1)$$

donde  $V_{ij}$  es un potencial general ejercido en la partícula  $i$  debido a la partícula  $j$ , y donde hemos tomado la mitad de la suma de  $V_{ij}$  para no contar doble, pues el potencial es simétrico, i.e.  $V_{ij} = V_{ji}$ . A partir del Lagrangiano (3.1) se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange para la componente  $\alpha$  de la partícula  $k$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x_k^\alpha} = 0. \quad (3.2)$$

Primero derivemos el término cinético de (3.1), como el vector de posición en un espacio Euclidiano es  $\vec{r}_k = (x_k^1, x_k^2, x_k^3)$ , entonces

$$\dot{\vec{r}}_k^2 = (\dot{x}_k^1)^2 + (\dot{x}_k^2)^2 + (\dot{x}_k^3)^2 = \sum_{\alpha=1}^3 (\dot{x}_k^\alpha)^2, \quad (3.3)$$



esto es,  $\dot{\vec{r}}_k = \dot{\vec{r}}_k(x_k^\alpha)$ , entonces  $\frac{\partial \dot{\vec{r}}_k^2}{\partial x_k^\alpha} = 0$ . Para calcular  $\frac{\partial \dot{\vec{r}}_k^2}{\partial \dot{x}_k^\alpha}$  renombramos el índice  $\alpha$  de la suma (3.3) como  $\beta$ , y entonces

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_k^2}{\partial \dot{x}_k^\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k^\alpha} \sum_{\beta=1}^3 (\dot{x}_k^\beta)^2 = 2 \sum_{\beta=1}^3 \dot{x}_k^\beta \delta_\beta^\alpha = 2\dot{x}_k^\alpha, \quad (3.4)$$

donde

$$\frac{\partial \dot{x}_k^\alpha}{\partial \dot{x}_k^\beta} = \delta_\beta^\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases}, \quad (3.5)$$

por lo tanto

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k^2}{\partial \dot{x}_k^\alpha} = 2\ddot{x}_k^\alpha, \quad (3.6)$$

así que las ecuaciones de movimiento para la componente  $\alpha$  de la partícula  $k$  son

$$m_k \ddot{x}_k^\alpha - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \dot{x}_k^\alpha} - \frac{\partial V_{ij}}{\partial x_k^\alpha} \right) = 0, \quad (3.7)$$

donde el potencial depende de la posición relativa y la velocidad relativa, i.e.

$$V_{ij} = V_{ij}(r_{lm}(x_l^\alpha, x_m^\alpha), \dot{r}_{lm}(x_l^\alpha, x_m^\alpha; \dot{x}_l^\alpha, \dot{x}_m^\alpha)), \quad (3.8)$$

y donde hemos definido  $\vec{r}_{lm} = \vec{r}_l - \vec{r}_m$ , entonces

$$r_{lm} = |\vec{r}_{lm}| = \left[ \sum_{\alpha=1}^3 (x_l^\alpha - x_m^\alpha)^2 \right]^{1/2} = r_{ml}. \quad (3.9)$$

De (3.8),

$$\frac{\partial V_{ij}}{\partial x_k^\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{l,m=1 \\ l \neq m}}^N \left( \frac{\partial V_{ij}}{\partial r_{lm}} \frac{\partial r_{lm}}{\partial x_k^\alpha} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \dot{r}_{lm}} \frac{\partial \dot{r}_{lm}}{\partial x_k^\alpha} \right) \quad (3.10)$$

y

$$\frac{\partial V_{ij}}{\partial \dot{x}_k^\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{l,m=1 \\ l \neq m}}^N \frac{\partial V_{ij}}{\partial \dot{r}_{lm}} \frac{\partial \dot{r}_{lm}}{\partial \dot{x}_k^\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{l,m=1 \\ l \neq m}}^N \frac{\partial V_{ij}}{\partial \dot{r}_{lm}} \frac{\partial r_{lm}}{\partial x_k^\alpha}. \quad (3.11)$$

En (3.11) hemos usado que  $\frac{\partial \dot{r}_{lm}}{\partial \dot{x}_k^\alpha} = \frac{\partial r_{lm}}{\partial x_k^\alpha}$ , para demostrarlo empecemos por derivar  $r_{lm}$  respecto a sólo una componente de la partícula  $k$ , digamos la componente  $\alpha = 1$ , es decir, respecto a  $x_k^1$ , esto es

$$\frac{\partial r_{lm}}{\partial x_k^1} = \frac{\partial}{\partial x_k^1} \left[ \sum_{\beta=1}^3 (x_l^\beta - x_m^\beta)^2 \right]^{1/2} = \frac{1}{r_{lm}} \sum_{\beta=1}^3 (x_l^\beta - x_m^\beta) \delta_\beta^1 (\delta_k^l - \delta_k^m) = \frac{(x_l^1 - x_m^1)}{r_{lm}} (\delta_k^l - \delta_k^m), \quad (3.12)$$

esto es análogo para  $x_k^2$  y  $x_k^3$ , por lo tanto

$$\boxed{\frac{\partial r_{lm}}{\partial x_k^\alpha} = \frac{(x_l^\alpha - x_m^\alpha)}{r_{lm}} (\delta_k^l - \delta_k^m)}. \quad (3.13)$$

Ahora,

$$\dot{r}_{lm} = \frac{d}{dt} r_{lm} = \frac{d}{dt} \left[ \sum_{\beta=1}^3 (x_l^\beta - x_m^\beta)^2 \right]^{1/2} = \sum_{\beta=1}^3 \frac{(x_l^\beta - x_m^\beta)(\dot{x}_l^\beta - \dot{x}_m^\beta)}{r_{lm}}, \quad (3.14)$$

si la derivamos respecto a sólo una componente  $\dot{x}_k^\alpha$ , digamos  $\dot{x}_k^1$ , tenemos

$$\frac{\partial \dot{r}_{lm}}{\partial \dot{x}_k^1} = \frac{(x_l^1 - x_m^1)}{r_{lm}} (\delta_k^l - \delta_k^m), \quad (3.15)$$

donde ahora

$$\frac{\partial \dot{x}_l^1}{\partial \dot{x}_k^1} = \delta_k^l = \begin{cases} 1 & \text{si } l = k \\ 0 & \text{si } l \neq k \end{cases}, \quad (3.16)$$

esto es análogo para  $\dot{x}_k^2$  y  $\dot{x}_k^3$ , entonces

$$\boxed{\frac{\partial \dot{r}_{lm}}{\partial \dot{x}_k^\alpha} = \frac{(x_l^\alpha - x_m^\alpha)}{r_{lm}} (\delta_k^l - \delta_k^m)}, \quad (3.17)$$

comparando (3.13) con (3.17), vemos que

$$\boxed{\frac{\partial \dot{r}_{lm}}{\partial \dot{x}_k^\alpha} = \frac{\partial r_{lm}}{\partial x_k^\alpha}}. \quad (3.18)$$

Sustituyendo (3.10) y (3.11) en (3.7), tenemos que

$$m_k \ddot{x}_k^\alpha = \frac{1}{4} \sum_{\substack{ij=1 \\ i \neq j}}^N \sum_{\substack{l,m=1 \\ l \neq m}}^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V_{ij}}{\partial \dot{r}_{lm}} \frac{\partial r_{lm}}{\partial x_k^\alpha} \right) - \left( \frac{\partial V_{ij}}{\partial r_{lm}} \frac{\partial r_{lm}}{\partial x_k^\alpha} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \dot{r}_{lm}} \frac{\partial \dot{r}_{lm}}{\partial x_k^\alpha} \right) \right]. \quad (3.19)$$

Para obtener  $\frac{\partial \dot{r}_{lm}}{\partial x_k^\alpha}$  calculemos primero  $\frac{\partial \dot{r}_{lm}}{\partial \dot{x}_k^1}$  a partir de (3.14), esto es

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{r}_{lm}}{\partial \dot{x}_k^1} &= \frac{(\dot{x}_l^1 - \dot{x}_m^1)}{r_{lm}} (\delta_k^l - \delta_k^m) - \sum_{\beta=1}^3 \frac{(x_l^\beta - x_m^\beta)(\dot{x}_l^\beta - \dot{x}_m^\beta)}{r_{lm}^2} \frac{\partial r_{lm}}{\partial \dot{x}_k^1} \\ &= \left[ (\dot{x}_l^1 - \dot{x}_m^1) - (x_l^1 - x_m^1) \sum_{\beta=1}^3 \frac{(x_l^\beta - x_m^\beta)(\dot{x}_l^\beta - \dot{x}_m^\beta)}{r_{lm}^2} \right] \frac{(\delta_k^l - \delta_k^m)}{r_{lm}}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

análogo para  $x_k^2$  y  $x_k^3$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{r}_{lm}}{\partial x_k^\alpha} &= \frac{(\dot{x}_l^\alpha - \dot{x}_m^\alpha)}{r_{lm}} (\delta_k^l - \delta_k^m) - \sum_{\beta=1}^3 \frac{(x_l^\beta - x_m^\beta)(\dot{x}_l^\beta - \dot{x}_m^\beta)}{r_{lm}^2} \frac{\partial r_{lm}}{\partial x_k^\alpha} \\ &= \left[ (\dot{x}_l^\alpha - \dot{x}_m^\alpha) - (x_l^\alpha - x_m^\alpha) \sum_{\beta=1}^3 \frac{(x_l^\beta - x_m^\beta)(\dot{x}_l^\beta - \dot{x}_m^\beta)}{r_{lm}^2} \right] \frac{(\delta_k^l - \delta_k^m)}{r_{lm}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

De (3.13) y (3.14),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial r_{lm}}{\partial x_k^\alpha} &= \left[ \frac{(\dot{x}_l^\alpha - \dot{x}_m^\alpha)}{r_{lm}} - \frac{(x_l^\alpha - x_m^\alpha)}{r_{lm}^2} \dot{r}_{lm} \right] (\delta_k^l - \delta_k^m) \\ &= \left[ (\dot{x}_l^\alpha - \dot{x}_m^\alpha) - (x_l^\alpha - x_m^\alpha) \frac{\dot{r}_{lm}}{r_{lm}} \right] \frac{(\delta_k^l - \delta_k^m)}{r_{lm}} \\ &= \left[ (\dot{x}_l^\alpha - \dot{x}_m^\alpha) - (x_l^\alpha - x_m^\alpha) \sum_{\beta=1}^3 \frac{(x_l^\beta - x_m^\beta)(\dot{x}_l^\beta - \dot{x}_m^\beta)}{r_{lm}^2} \right] \frac{(\delta_k^l - \delta_k^m)}{r_{lm}}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

comparando (3.21) con (3.22), vemos que

$$\boxed{\frac{\partial \dot{r}_{lm}}{\partial x_k^\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial r_{lm}}{\partial x_k^\alpha}.} \quad (3.23)$$

Sustituyendo (3.13) y (3.23) en (3.19),

$$\begin{aligned} m_k \ddot{x}_k^\alpha &= \frac{1}{4} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \sum_{\substack{l,m=1 \\ l \neq m}}^N \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \dot{r}_{lm}} - \frac{\partial V_{ij}}{\partial r_{lm}} \right] \frac{(x_l^\alpha - x_m^\alpha)}{r_{lm}} (\delta_k^l - \delta_k^m) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \left( \sum_{\substack{m=1 \\ k \neq m}}^N \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \dot{r}_{km}} - \frac{\partial V_{ij}}{\partial r_{km}} \right] \frac{(x_k^\alpha - x_m^\alpha)}{r_{km}} - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \dot{r}_{lk}} - \frac{\partial V_{ij}}{\partial r_{lk}} \right] \frac{(x_l^\alpha - x_k^\alpha)}{r_{lk}} \right), \end{aligned} \quad (3.24)$$

cambiando  $m \rightarrow l$ , y dado que  $r_{kl} = r_{lk}$  y  $\dot{r}_{kl} = \dot{r}_{lk}$ ,

$$\boxed{m_k \ddot{x}_k^\alpha = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \dot{r}_{kl}} - \frac{\partial V_{ij}}{\partial r_{kl}} \right] \frac{(x_k^\alpha - x_l^\alpha)}{r_{kl}}.} \quad (3.25)$$

Notemos que  $(x_k^\alpha - x_l^\alpha)$  es la componente  $\alpha$  del vector  $\vec{r}_{kl} = (\vec{r}_k - \vec{r}_l)$  y que  $\frac{\vec{r}_{kl}}{r_{kl}} = \hat{r}_{kl}$ , y como (3.25) se cumple para cada componente  $\alpha = 1, 2, 3$ , entonces podemos escribir la ecuación vectorial

$$m_k \ddot{\vec{r}}_k = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \dot{r}_{kl}} - \frac{\partial V_{ij}}{\partial r_{kl}} \right] \hat{r}_{kl}. \quad (3.26)$$

Éstas son las ecuaciones de movimiento de la partícula  $k$  sobre la cual las otras  $N - 1$  partículas ejercen una fuerza que se deriva de un potencial general que depende de la posición y la velocidad relativas. Notemos que la fuerza se ejerce en la dirección de la línea que une a la partícula  $k$  con la partícula  $l$ , por lo tanto se cumple la ley fuerte de acción y reacción.

### 3.2. Gravedad de Weber

En esta sección presentamos la versión gravitacional del electromagnetismo de Weber que está descrita por un potencial relacional que depende de la posición y la velocidad relativas (Assis, 1995; Assis, 1999). A mediados del siglo XIX, Wilhelm Weber propuso una teoría del electromagnetismo que, generalizando la fuerza de Coulomb, reproducía los efectos de las fuerzas actuando sobre partículas cargadas. Este sistema está descrito por un espacio-tiempo Newtoniano donde hay una noción de tiempo y una norma euclidiana. Notablemente, la fuerza de Weber cuenta con un parámetro libre con unidades de velocidad, el cual al ajustarse con datos experimentales coincide con la velocidad de la luz (Bonder y Koslowski, s.f.). La teoría electromagnética de Weber establece que la fuerza ejercida en una carga  $q_i$  debida a una carga  $q_j$  es

$$\vec{F}(r_{ij}, \dot{r}_{ij}, \ddot{r}_{ij}) = -\frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}_{ij}}{r_{ij}^2} \left( 1 - \frac{\dot{r}_{ij}^2}{2c^2} + \frac{r_{ij} \ddot{r}_{ij}}{c^2} \right), \quad (3.27)$$

donde  $\epsilon_0$  es la permitividad del vacío y  $c$  es la velocidad de la luz en vacío, o la razón entre las cargas unitarias electromagnéticas y las electrostáticas (Bunchaft y Carneiro, 1997; Assis, 1999). A continuación se enlistan las virtudes de esta fuerza (Assis, 1995; Assis y Clemente, 1992):

1. Sigue la tercera ley de Newton, por lo que se tiene conservación de momento lineal y angular, a diferencia de la electrodinámica de Maxwell en la que los campos electromagnéticos deben ser tomados en cuenta.
2. La dirección de la fuerza de Weber siempre es a lo largo de la línea que conecta a las dos cargas, lo que lleva a la conservación del momento angular.
3. Puede derivarse de un potencial dependiente de la velocidad relativa y se conserva la energía.
4. En la situación estática  $\dot{r} = \ddot{r} = 0$  se recupera la ley de Coulomb.

5. La ley de inducción de Faraday para circuitos cerrados se puede derivar de la ley de Weber.
6. La ley de Ampère para la fuerza entre dos elementos de corriente se puede derivar de la ley de Weber.
7. Como sólo depende de  $r$ ,  $\dot{r}$  y  $\ddot{r}$ , es completamente relacional por lo que tiene el mismo valor en todos los sistemas de referencia, incluso los no-inerciales.

En su contra, se ha encontrado que debería existir un campo eléctrico cerca de una corriente neutral, estacionaria y continua, y que cargas dentro de un capacitor superan la velocidad de la luz (Assis y Caluzi, 1991). El principal acierto del electromagnetismo de Maxwell sobre el de Weber es la formulación de una teoría de campos en lugar de partículas, con lo que es posible describir la interacción electromagnética con una velocidad de propagación finita, en lugar de la acción instantánea a distancia de las partículas.

La versión gravitacional de la fuerza de Weber se obtiene al reemplazar las cargas por masas, la constante de Coulomb  $k_e = 1/4\pi\epsilon_0$  por la constante de Newton  $G$ ,

$$\vec{F}(r_{ij}, \dot{r}_{ij}, \ddot{r}_{ij}) = -G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \hat{r}_{ij} \left( 1 - \mu \frac{\dot{r}_{ij}^2}{c^2} + \gamma \frac{r_{ij} \ddot{r}_{ij}}{c^2} \right), \quad (3.28)$$

donde  $\gamma = 2\mu = 6$  da el mejor ajuste para la precesión del perihelio de los planetas (Bunshaft y Carneiro, 1997). Esta fuerza también modela el efecto del retraso de la interacción gravitacional de cuerpos materiales (Assis y Caluzi, 1991) y describe la pérdida de energía asociada a radiación gravitacional (Bonder y Koslowski, s.f.), sin embargo, no produce lentes gravitacionales (Bonder y Koslowski, s.f.). Otros valores para  $\mu$  y  $\gamma$  llevan a resultados como la deflexión de la luz pero no conservan la energía. Las únicas fuerzas tipo Weber conservativas son aquellas tales que  $\gamma = 2\mu$  (Bunshaft y Carneiro, 1997). Esta fuerza se puede derivar de un potencial Lagrangiano

$$V_{ij}(r_{ij}, \dot{r}_{ij}) = -G \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \left( 1 + \mu \frac{\dot{r}_{ij}^2}{c^2} \right), \quad (3.29)$$

donde  $\mu = 3$ , o de un potencial de interacción igual a (3.29) pero con  $\mu = -3$  (Bunshaft y Carneiro, 1997; Assis, 1999). Para demostrarlo podemos sustituir (3.29) en (3.26), para lo cual hay que calcular

$$\frac{\partial V_{ij}}{\partial r_{kl}} = G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \frac{\partial r_{ij}}{\partial r_{kl}} \left( 1 + 3 \frac{\dot{r}_{ij}^2}{c^2} \right) = G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \left( 1 + 3 \frac{\dot{r}_{ij}^2}{c^2} \right) (\delta_k^i \delta_l^j + \delta_k^j \delta_l^i) \quad (3.30)$$

y

$$\frac{\partial V_{ij}}{\partial \dot{r}_{kl}} = -6G \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \left( \frac{\dot{r}_{ij}}{c^2} \right) \frac{\partial \dot{r}_{ij}}{\partial \dot{r}_{kl}} = -6G \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \left( \frac{\dot{r}_{ij}}{c^2} \right) (\delta_k^i \delta_l^j + \delta_k^j \delta_l^i), \quad (3.31)$$

donde hemos usado que la posición y la velocidad son simétricas, i.e.  $r_{ij} = r_{ji}$  y  $\dot{r}_{ij} = \dot{r}_{ji}$ , y por lo tanto

$$\frac{\partial r_{ij}}{\partial r_{kl}} = (\delta_k^i \delta_l^j + \delta_k^j \delta_l^i) = \frac{\partial \dot{r}_{ij}}{\partial \dot{r}_{kl}}. \quad (3.32)$$

De (3.31),

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \dot{r}_{kl}} = 6 \frac{G m_i m_j}{c^2 r_{ij}^2} \left( \dot{r}_{ij}^2 - \ddot{r}_{ij} r_{ij} \right) (\delta_k^i \delta_l^j + \delta_k^j \delta_l^i). \quad (3.33)$$

Sustituyendo (3.30) y (3.33) en (3.26),

$$m_k \ddot{\vec{r}}_k = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \left( 1 - \frac{3}{c^2} \dot{r}_{ij}^2 + \frac{6}{c^2} \ddot{r}_{ij} r_{ij} \right) (\delta_k^i \delta_l^j + \delta_k^j \delta_l^i) \hat{r}_{ij}, \quad (3.34)$$

$$m_k \ddot{\vec{r}}_k = -\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N G \frac{m_k m_l}{r_{kl}^2} \left( 1 - \frac{3}{c^2} \dot{r}_{kl}^2 + \frac{6}{c^2} \ddot{r}_{kl} r_{kl} \right) \hat{r}_{kl}, \quad (3.35)$$

$$\ddot{\vec{r}}_k = -\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \frac{G m_l}{r_{kl}^2} \left( 1 - \frac{3}{c^2} \dot{r}_{kl}^2 + \frac{6}{c^2} \ddot{r}_{kl} r_{kl} \right) \hat{r}_{kl}. \quad (3.36)$$

Éstas son las ecuaciones de movimiento de la partícula  $k$  sobre la cual las otras  $N - 1$  partículas ejercen una fuerza de Weber. En el límite  $c \rightarrow \infty$  se recupera la versión Newtoniana. Como  $m_k$  se cancela, el movimiento no depende de la masa de la partícula de prueba y, como se vio en (3.26), la fuerza sobre la partícula  $k$  está en dirección de la línea que la une con la partícula  $l$ .

### 3.3. Potencial relacional inspirado en MOND

En esta sección proponemos un potencial relacional similar al de Weber en tanto que también depende de la posición y la velocidad relativas y también es una extensión al potencial Newtoniano. En este potencial hemos incluido al parámetro libre con unidades de aceleración  $a_0$  de la teoría de MOND en un término adimensional y, dado que es un potencial distinto al de MOND, a esta teoría la hemos llamado MOMOND (Modified MOND). Para no introducir segundas derivadas en el tiempo, consideramos la combinación  $\dot{r}_{ij}^2/r_{ij}$ , la cual tiene unidades de aceleración con las que podemos cancelar las unidades de  $a_0$ . En MOND, el régimen  $a \gg a_0$  corresponde a la gravedad Newtoniana, es decir donde  $a_0$  es despreciable, así que en nuestro potencial colocamos a  $a_0$  en el numerador para que un  $a_0 = 0$  recupere la gravedad Newtoniana, el potencial que proponemos es entonces de la forma

$$V_{ij}(r_{ij}, \dot{r}_{ij}) = V_{Nij} [1 + f(x)] \quad (3.37)$$

donde  $f$  es función de

$$x = a_0 \frac{r_{ij}}{\dot{r}_{ij}^2}, \quad (3.38)$$

con  $f(0) = 0$ , en particular cuando  $a_0 = 0$ , y

$$V_{Nij}(r_{ij}) = -G \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (3.39)$$

es el potencial Newtoniano entre la partícula  $i$  y la partícula  $j$  en un sistema de  $N$  cuerpos, con masas  $m_i$  y  $m_j$ , respectivamente, y separadas a una distancia  $r_{ij}$ . Para obtener las ecuaciones de movimiento relacionales sustituiremos  $\frac{\partial V_{ij}}{\partial r_{kl}}$  y  $\frac{d}{dt} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \dot{r}_{kl}}$  en (3.26), tomando en cuenta que  $f = f(r_{ij}, \dot{r}_{ij})$ , entonces

$$\frac{\partial V_{ij}}{\partial r_{kl}} = \frac{\partial V_{Nij}}{\partial r_{kl}} (1 + f) + V_{Nij} \frac{\partial f}{\partial r_{kl}}, \quad (3.40)$$

con

$$\frac{\partial f}{\partial r_{kl}} = \frac{df}{dx} \frac{\partial x}{\partial r_{kl}} \equiv f' \frac{\partial x}{\partial r_{ij}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial r_{kl}} = f' \frac{x}{r_{ij}} (\delta_k^i \delta_l^j + \delta_k^j \delta_l^i), \quad (3.41)$$

donde  $f'(x) = \frac{df}{dx}$  y

$$\frac{\partial V_{Nij}}{\partial r_{kl}} = G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} (\delta_k^i \delta_l^j + \delta_k^j \delta_l^i). \quad (3.42)$$

Sustituyendo (3.41) y (3.42) en (3.40),

$$\boxed{\frac{\partial V_{ij}}{\partial r_{kl}} = G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \left[ 1 + f - f' a_0 \frac{r_{ij}}{\dot{r}_{ij}^2} \right] (\delta_k^i \delta_l^j + \delta_k^j \delta_l^i)}. \quad (3.43)$$

Ahora,

$$\frac{\partial V_{ij}}{\partial \dot{r}_{kl}} = V_{Nij} \frac{\partial f}{\partial \dot{r}_{kl}} = V_{Nij} \frac{df}{dx} \frac{\partial x}{\partial \dot{r}_{ij}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial \dot{r}_{kl}} = -2V_{Nij} f' a_0 \frac{r_{ij}}{\dot{r}_{ij}^3} (\delta_k^i \delta_l^j + \delta_k^j \delta_l^i), \quad (3.44)$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \dot{r}_{kl}} &= -2a_0 \left[ \frac{d}{dt} (V_{Nij} f') \frac{r_{ij}}{\dot{r}_{ij}^3} + V_{Nij} f' \frac{d}{dt} \left( \frac{r_{ij}}{\dot{r}_{ij}^3} \right) \right] (\delta_k^i \delta_l^j + \delta_k^j \delta_l^i) \\ &= -2a_0 \left[ \left( \dot{V}_{Nij} f' + V_{Nij} \dot{f}' \right) \frac{r_{ij}}{\dot{r}_{ij}^3} + V_{Nij} f' \left( \frac{\dot{r}_{ij}}{\dot{r}_{ij}^3} - 3 \frac{r_{ij}}{\dot{r}_{ij}^4} \dot{r}_{ij} \right) \right] (\delta_k^i \delta_l^j + \delta_k^j \delta_l^i), \end{aligned} \quad (3.45)$$

como

$$\dot{V}_{Nij} \equiv \frac{d}{dt} V_{Nij} = G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \dot{r}_{ij} = -V_{Nij} \frac{\dot{r}_{ij}}{r_{ij}}, \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \dot{r}_{kl}} &= -2a_0 V_{Nij} f' \left[ -\frac{1}{\dot{r}_{ij}^2} + \frac{\dot{f}' r_{ij}}{f' \dot{r}_{ij}^3} + \frac{1}{\dot{r}_{ij}^2} - 3 \frac{r_{ij}}{\dot{r}_{ij}^4} \ddot{r}_{ij} \right] (\delta_k^i \delta_l^j + \delta_k^j \delta_l^i) \\ &= -G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} a_0 \left[ -2\dot{f}' \frac{r_{ij}^2}{\dot{r}_{ij}^3} + 6f' \frac{r_{ij}^2}{\dot{r}_{ij}^4} \ddot{r}_{ij} \right] (\delta_k^i \delta_l^j + \delta_k^j \delta_l^i), \end{aligned} \quad (3.47)$$

donde

$$\dot{f}' \equiv \frac{df'}{dt} = \frac{df'}{dx} \frac{dx}{dt} = f'' \frac{d}{dt} \left( a_0 \frac{r_{ij}}{\dot{r}_{ij}^2} \right) = f'' a_0 \left( \frac{1}{\dot{r}_{ij}} - 2 \frac{r_{ij}}{\dot{r}_{ij}^3} \ddot{r}_{ij} \right), \quad (3.48)$$

por lo tanto

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \dot{r}_{kl}} = -G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \left[ f'' a_0^2 \left( 4 \frac{r_{ij}^3}{\dot{r}_{ij}^6} \ddot{r}_{ij} - 2 \frac{r_{ij}^2}{\dot{r}_{ij}^4} \right) + f' a_0 \left( 6 \frac{r_{ij}^2}{\dot{r}_{ij}^4} \ddot{r}_{ij} \right) \right] (\delta_k^i \delta_l^j + \delta_k^j \delta_l^i). \quad (3.49)$$

Sustituyendo (3.43) y (3.49) en (3.26),

$$m_k \ddot{r}_k = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \left[ f'' a_0^2 \left( 4 \frac{r_{ij}^3}{\dot{r}_{ij}^6} \ddot{r}_{ij} - 2 \frac{r_{ij}^2}{\dot{r}_{ij}^4} \right) + f' a_0 \left( 6 \frac{r_{ij}^2}{\dot{r}_{ij}^4} \ddot{r}_{ij} \right) + 1 + f - f' a_0 \frac{r_{ij}}{\dot{r}_{ij}^2} \right] (\delta_k^i \delta_l^j + \delta_k^j \delta_l^i) \hat{r}_{kl}, \quad (3.50)$$

por lo tanto la ecuación de movimiento de la partícula  $k$  es

$$\ddot{r}_k = - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N G \frac{m_l}{r_{kl}^2} \left[ 1 + f + f' a_0 \left( 6 \frac{r_{kl}^2}{\dot{r}_{kl}^4} \ddot{r}_{kl} - \frac{r_{kl}}{\dot{r}_{kl}^2} \right) + f'' a_0^2 \left( 4 \frac{r_{kl}^3}{\dot{r}_{kl}^6} \ddot{r}_{kl} - 2 \frac{r_{kl}^2}{\dot{r}_{kl}^4} \right) \right] \hat{r}_{kl}. \quad (3.51)$$

Veamos el caso más simple:  $f(x) = x$  entonces  $f' = 1$ ,  $f'' = 0$  y (3.37) toma la forma

$$V_{ij}(r_{ij}, \dot{r}_{ij}) = V_{Nij} \left( 1 + a_0 \frac{r_{ij}}{\dot{r}_{ij}^2} \right) \quad (3.52)$$

y de (3.51)

$$\ddot{r}_k = - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N G \frac{m_l}{r_{kl}^2} \left[ 1 + 6a_0 \frac{r_{kl}^2}{\dot{r}_{kl}^4} \ddot{r}_{kl} \right] \hat{r}_{kl}. \quad (3.53)$$

Si  $a_0 = 0$  se recupera la ecuación de movimiento Newtoniana. De nuevo, la trayectoria no depende de la masa de la partícula de prueba y la fuerza se ejerce a lo largo de la línea que une a las partículas.



Veamos otro ejemplo: si  $f(x) = x + \frac{x^2}{2}$  entonces  $f'(x) = 1 + x$ ,  $f''(x) = 1$  y (3.37) toma la forma

$$V_{ij}(r_{ij}, \dot{r}_{ij}) = V_{Nij} \left( 1 + a_0 \frac{r_{ij}}{\dot{r}_{ij}^2} + \frac{1}{2} a_0^2 \frac{r_{ij}^2}{\dot{r}_{ij}^4} \right) \quad (3.54)$$

y de (3.51)

$$\ddot{\vec{r}}_k = - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \frac{Gm_l}{r_{kl}^2} \left[ 1 + 6a_0 \frac{r_{kl}^2}{\dot{r}_{kl}^4} \ddot{r}_{kl} + a_0^2 \left( 10 \frac{r_{kl}^3}{\dot{r}_{kl}^6} \ddot{r}_{kl} - \frac{5}{2} \frac{r_{kl}^2}{\dot{r}_{kl}^4} \right) \right] \hat{r}_{kl}. \quad (3.55)$$

La ecuación (3.55) es una extensión de (3.53) que a su vez es una extensión de la gravedad Newtoniana. De nuevo, la trayectoria no depende de la masa de la partícula de prueba y la fuerza se ejerce a lo largo de la línea que une a las partículas, y si  $a_0 = 0$  se recupera la ecuación Newtoniana.

### 3.4. Fuerza central con un potencial dependiente de la velocidad relativa

Al final de la sección 2.1 vimos que si un sistema de  $N$  cuerpos tiene simetría esférica se puede estudiar a una partícula de prueba gravitando en torno a una fuerza central debida a la masa de las  $N - 1$  partículas restantes, así que reduciremos el sistema de  $N$  cuerpos con un potencial dependiente de la posición y la velocidad relativas del capítulo anterior al sistema de una fuerza central. En el capítulo siguiente estudiaremos el potencial de MOMOND propuesto en la sección anterior, para ello desarrollaremos primero el formalismo Lagrangiano de una partícula sujeta a una fuerza central donde el potencial es función de la posición y la velocidad relativas.

Consideremos una partícula de masa  $m$  sujeta a una fuerza central que proviene de un potencial  $V(r, \dot{r})$  que sólo depende de la coordenada radial  $r$  y su derivada temporal, i.e. la velocidad radial  $\dot{r}$ , entonces tenemos simetría esférica y el momento angular se conserva (cf. secc. 2.2). Como el potencial depende de la velocidad relativa podemos cuestionar si la fuerza se ejerce a lo largo de  $\vec{r}$  (Goldstein, 1980), pero el resultado de la sección 3.1, es decir la ecuación (3.26), nos dice que esto sí se cumple. Dada la simetría esférica (cf. secc. 2.2), el Lagrangiano que describe a esta partícula es

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - V(r, \dot{r}) \quad (3.56)$$

cuya única diferencia con (2.17) es que el potencial ahora depende de  $\dot{r}$ . Las ecuaciones de movimiento son entonces

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\phi}), \quad (3.57)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{r}} - mr\dot{\phi}^2 + \frac{\partial V}{\partial r}. \quad (3.58)$$

De (3.57),

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \boxed{mr^2\dot{\phi} = l} = \text{cte}, \quad (3.59)$$

que es la misma ecuación que (2.18), donde  $l$  es la magnitud del momento angular. Dado que la masa  $m$  es constante y el momento angular  $\vec{l}$  se conserva, entonces el momento angular por unidad de masa también se conserva y su magnitud

$$\ell = \frac{l}{m} = r^2\dot{\phi} \quad (3.60)$$

es constante, de donde

$$\dot{\phi} = \frac{\ell}{r^2}. \quad (3.61)$$

Sustituyendo (3.61) en (3.58) obtenemos la magnitud de la fuerza central

$$F = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial V}{\partial r} = m\ddot{r} - m \frac{\ell^2}{r^3}. \quad (3.62)$$

De (3.26), sabemos que la dirección de esta fuerza es a lo largo de  $\vec{r}$ . La componente radial del vector de aceleración está dada por

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} \cdot \hat{r} &= \frac{d^2}{dt^2} (r \cos \phi, r \sin \phi) \cdot (\cos \phi, \sin \phi) \\ &= \cos \phi \frac{d}{dt} (\dot{r} \cos \phi - r\dot{\phi} \sin \phi) + \sin \phi \frac{d}{dt} (\dot{r} \sin \phi + r\dot{\phi} \cos \phi) \\ &= \ddot{r} \cos^2 \phi - \dot{r}\dot{\phi} \sin \phi \cos \phi - \dot{r}\dot{\phi} \sin \phi \cos \phi - r\ddot{\phi} \sin \phi \cos \phi - r\dot{\phi}^2 \cos^2 \phi \\ &\quad + \ddot{r} \sin^2 \phi + \dot{r}\dot{\phi} \sin \phi \cos \phi + \dot{r}\dot{\phi} \sin \phi \cos \phi + r\ddot{\phi} \sin \phi \cos \phi - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \phi \\ &= \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = \ddot{r} - \frac{\ell^2}{r^3}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

y la componente angular está dada por

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} \cdot \hat{\phi} &= \frac{d^2}{dt^2} (r \cos \phi, r \sin \phi) \cdot (-\sin \phi, \cos \phi) \\ &= -\sin \phi \frac{d}{dt} (\dot{r} \cos \phi - r\dot{\phi} \sin \phi) + \cos \phi \frac{d}{dt} (\dot{r} \sin \phi + r\dot{\phi} \cos \phi) \\ &= -\ddot{r} \sin \phi \cos \phi + \dot{r}\dot{\phi} \sin^2 \phi + \dot{r}\dot{\phi} \sin^2 \phi + r\ddot{\phi} \sin^2 \phi + r\dot{\phi}^2 \sin \phi \cos \phi \\ &\quad + \ddot{r} \sin \phi \cos \phi + \dot{r}\dot{\phi} \cos^2 \phi + \dot{r}\dot{\phi} \cos^2 \phi + r\ddot{\phi} \cos^2 \phi - r\dot{\phi}^2 \sin \phi \cos \phi \\ &= 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

donde

$$\ddot{\phi} = \frac{d\dot{\phi}}{dt} = \frac{d}{dr} \left( \frac{\ell}{r^2} \right) \frac{dr}{dt} = -\frac{2\ell}{r^3} \dot{r} = -\frac{2\dot{\phi}\dot{r}}{r}, \quad (3.65)$$

entonces

$$r\ddot{\phi} = -2\dot{r}\dot{\phi}, \quad (3.66)$$

por lo tanto

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \hat{\phi} = 0, \quad (3.67)$$

esto es, la aceleración es solamente radial. Definimos el potencial por unidad de masa

$$U(r, \dot{r}) = \frac{V(r, \dot{r})}{m}, \quad (3.68)$$

entonces, de (3.62), la ecuación de movimiento es

$$\dot{r} = \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\ell^2}{r^3}. \quad (3.69)$$

La función de energía  $h$  está dada por (Goldstein, 1980)

$$\begin{aligned} h &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \dot{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - L \\ &= m\dot{r}^2 - \frac{\partial V}{\partial \dot{r}} \dot{r} + mr^2 \dot{\phi}^2 - \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{mr^2 \dot{\phi}^2}{2} + V(r, \dot{r}), \end{aligned} \quad (3.70)$$

esto es

$$h = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{m\ell^2}{2r^2} + V(r, \dot{r}) - \frac{\partial V}{\partial \dot{r}} \dot{r}. \quad (3.71)$$

La función de energía difiere de la energía total  $E = T + V$  por el término  $-\dot{r} \partial V / \partial \dot{r}$  que es el responsable de que  $E$  no sea una cantidad conservada pero  $h$  sí:

$$\frac{dh}{dt} = \left( m\ddot{r} - \frac{m\ell^2}{r^3} + \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial \dot{r}} \frac{\ddot{r}}{\dot{r}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial V}{\partial \dot{r}} \frac{\ddot{r}}{\dot{r}} \right) \dot{r} = (F - F) \dot{r} = 0, \quad (3.72)$$

donde hemos utilizado (3.62). Definimos la función de energía total por unidad de masa

$$e = \frac{h}{m}, \quad (3.73)$$

de (3.71),

$$e = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{\ell^2}{2r^2} + U(r, \dot{r}) - \frac{\partial U}{\partial \dot{r}} \dot{r}. \quad (3.74)$$

Como  $m$  es constante,  $e$  también se conserva:

$$\frac{de}{dt} = \left( \dot{r} - \frac{\ell^2}{r^3} + \left[ \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial \dot{r}} \frac{\ddot{r}}{\dot{r}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial U}{\partial \dot{r}} \frac{\ddot{r}}{\dot{r}} \right] \right) \dot{r} = \left( \frac{F}{m} - \frac{F}{m} \right) \dot{r} = 0. \quad (3.75)$$

Definimos el potencial efectivo por unidad de masa

$$V_{\text{eff}}(r, \dot{r}) = U(r, \dot{r}) - \frac{\partial U}{\partial \dot{r}} \dot{r} + \frac{\ell^2}{2r^2}, \quad (3.76)$$

entonces, de (3.74),

$$e = \frac{\dot{r}^2}{2} + V_{\text{eff}}(r, \dot{r}), \quad (3.77)$$

por lo tanto

$$\dot{r} = \pm \sqrt{2[e - V_{\text{eff}}(r, \dot{r})]}. \quad (3.78)$$

Al igual que en la sección 2.2, integrando  $\dot{r}$  de (3.78) y  $\dot{\phi}$  de (3.61) con 4 constantes de integración:  $e, \ell, r_0, \phi_0$ , podemos determinar la trayectoria de la partícula.

### 3.5. Fuerza central de Weber

En la sección 3.2 vimos que el potencial dependiente de la velocidad de la gravedad de Weber está dado por la ecuación (3.29), consideremos ahora el sistema de una partícula de masa  $m$  gravitando en torno a una fuerza central debida a una masa  $M$ , donde el potencial de Weber es

$$V(r, \dot{r}) = -\frac{GMm}{r} \left( 1 + 3\frac{\dot{r}^2}{c^2} \right) \quad (3.79)$$

y denotamos al potencial de Weber por unidad de masa como

$$U(r, \dot{r}) = \frac{V(r, \dot{r})}{m} = -\frac{GM}{r} \left( 1 + 3\frac{\dot{r}^2}{c^2} \right), \quad (3.80)$$

sustituyendo (3.80) en (3.62) obtenemos

$$\frac{F}{m} = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{GM}{r^2} \left( 1 - 3\frac{\dot{r}^2}{c^2} + 6\frac{r\ddot{r}}{c^2} \right) = \ddot{r} - \frac{\ell^2}{r^3} \quad (3.81)$$

que es análoga a la magnitud de (3.36). Resolviendo (3.81) para  $\ddot{r}$  se obtiene la ecuación de movimiento

$$\ddot{r} = \frac{-\frac{GM}{r^2} \left( 1 - 3\frac{\dot{r}^2}{c^2} \right) + \frac{\ell^2}{r^3}}{1 + \frac{6GM}{c^2 r}}. \quad (3.82)$$

Sustituyendo (3.80) en el potencial efectivo por unidad de masa (3.76) obtenemos

$$V_{\text{eff}}(r, \dot{r}) = -\frac{GM}{r} \left( 1 - 3\frac{\dot{r}^2}{c^2} \right) + \frac{\ell^2}{2r^2}, \quad (3.83)$$

donde el término que aporta  $-(\partial U/\partial \dot{r})\dot{r}$  resulta en un cambio de signo del término con  $\dot{r}$  respecto a  $U(r, \dot{r})$ , dado por (3.80).

Por último,  $\dot{r}$  se obtiene al sustituir (3.83) en (3.78)

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2[e - V_N(r)]}{1 + 6GM/c^2r}} \quad (3.84)$$

donde  $V_N(r)$  es el potencial efectivo Newtoniano (2.39). Como  $\sqrt{1 + 6GM/c^2r} \geq 1$  entonces  $|\dot{r}| \leq \sqrt{2[e - V_N(r)]}$ , la velocidad radial Newtoniana (2.50). Dado que el potencial de Weber depende de  $\dot{r}$ , el cual no está definido para  $V_N(r) > e$ , el potencial efectivo de Weber (3.83) sólo está definido para  $V_N(r) \leq e$ , como se observa en la Fig. 3.5.1. Cuando  $V_N(r) = e$  entonces  $\dot{r} = 0$  y por lo tanto  $V_{\text{eff}}(r, \dot{r} = 0) = V_N(r) = e$ .

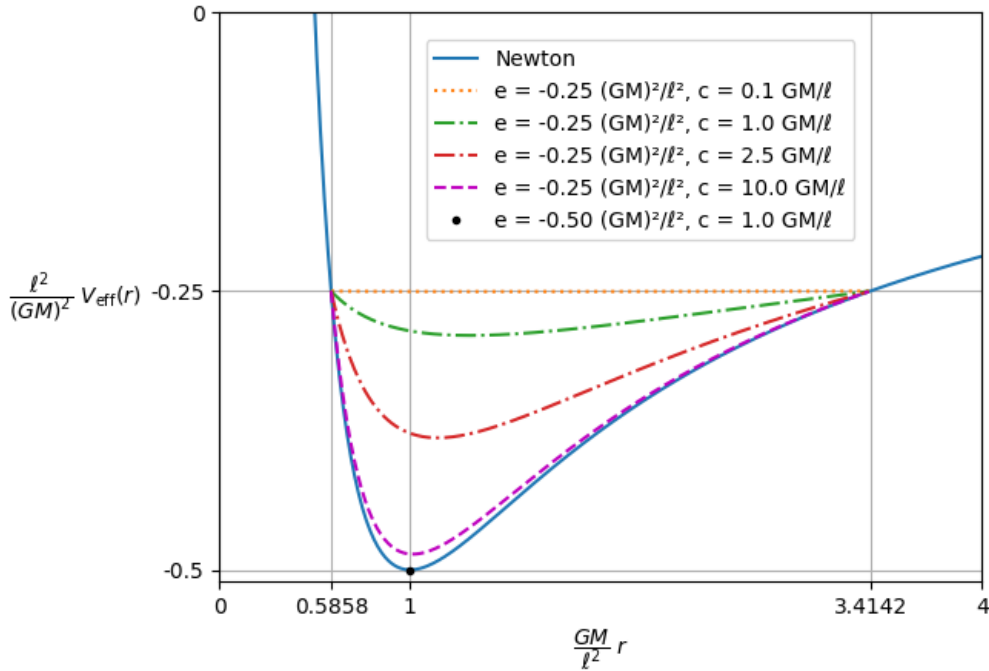


Fig. 3.5.1: Potencial efectivo de Weber (3.83) para  $e = -0.25 (GM)^2/\ell^2$  con cuatro valores de  $c$  en términos de  $GM/\ell$ , y para  $e = -0.5 (GM)^2/\ell^2$ , donde cualquier valor de  $c$  da sólo el punto del mínimo del potencial efectivo Newtoniano (2.39).

Como el potencial depende de la velocidad relativa, la cantidad que se conserva no es la energía total sino la función de energía (3.71), y la función de energía por unidad de masa se obtiene de sustituir (3.80) en (3.74)

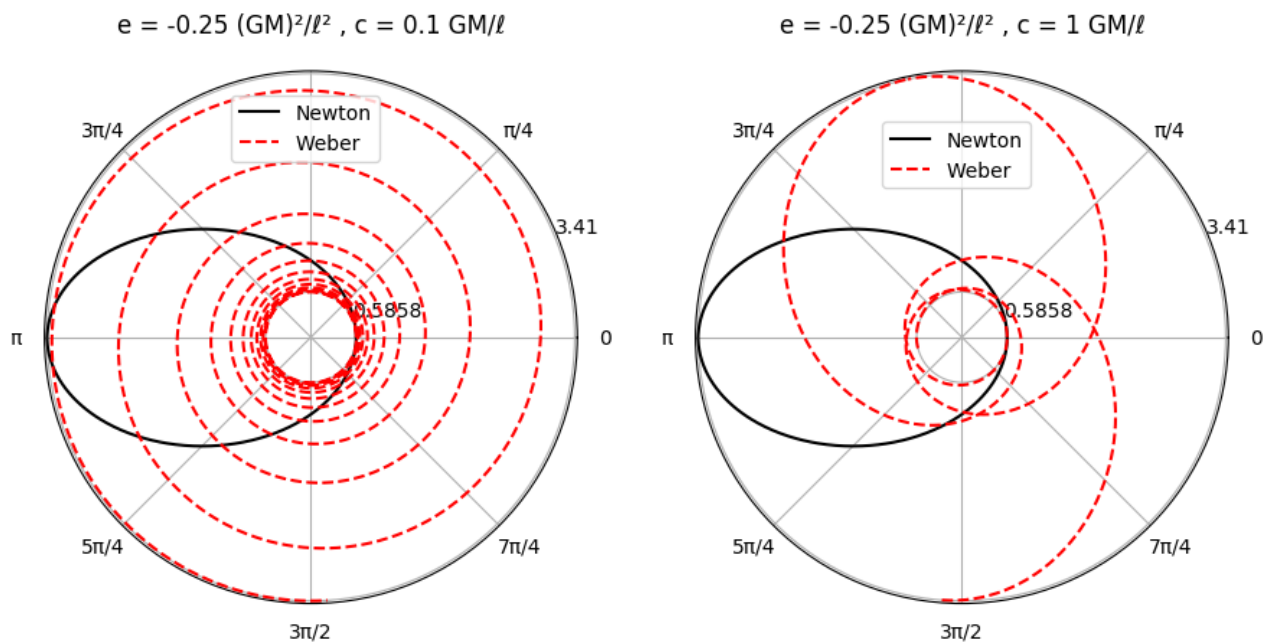
$$e = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} \left( 1 - 3\frac{\dot{r}^2}{c^2} \right) \quad (3.85)$$

con

$$\frac{de}{dt} = \left[ \ddot{r} - \frac{\ell^2}{r^3} + \frac{GM}{r^2} \left( 1 - 3\frac{\dot{r}^2}{c^2} + 6\frac{r\ddot{r}}{c^2} \right) \right] \dot{r} = \left[ \frac{F}{m} - \frac{F}{m} \right] \dot{r} = 0. \quad (3.86)$$

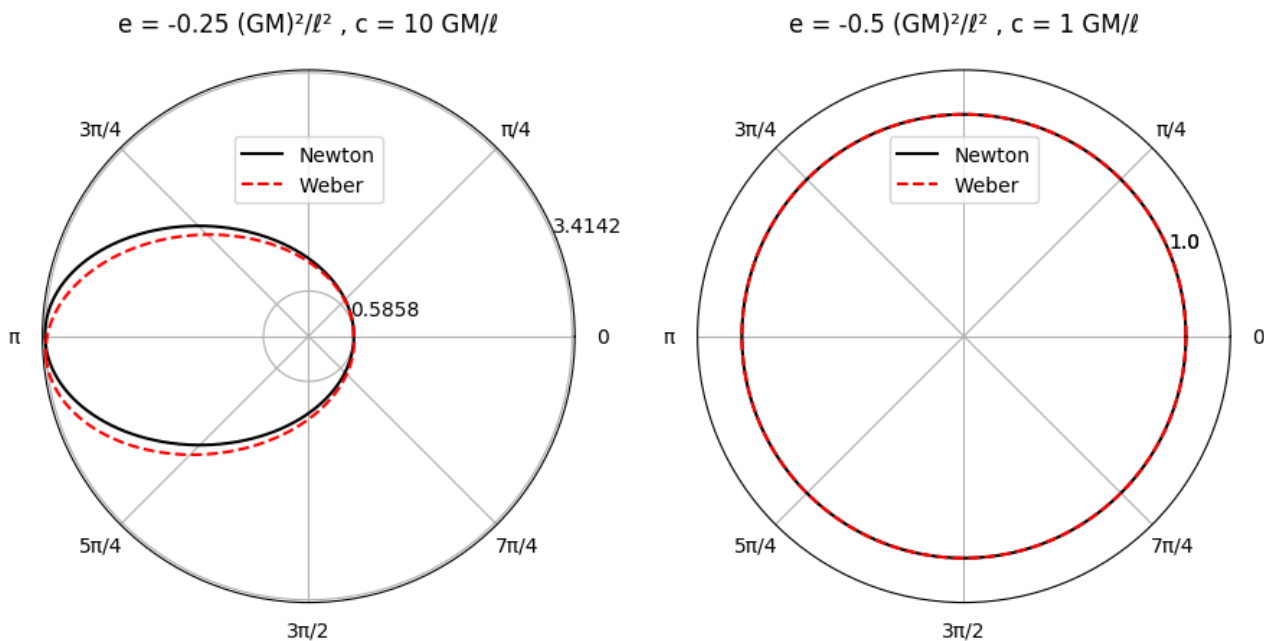
### Órbitas Weberianas

Las órbitas se obtienen integrando numéricamente  $\dot{r}/\dot{\phi}$  o su inverso, donde  $\dot{\phi}$  está dado por (3.61) y  $\dot{r}$  por (3.84). En la Fig. 3.5.2 se muestran cuatro ejemplos de trayectorias determinadas por el potencial de Weber comparadas con las trayectorias Newtonianas. Para  $c \leq 1 \text{ GM}/\ell$  las trayectorias difieren drásticamente de las Newtonianas, excepto para  $e = -0.5 (GM)^2/\ell^2$  donde el potencial efectivo de Weber sólo está definido en  $r = 1 \ell^2/GM$ . En el límite  $c \rightarrow \infty$  se recupera la gravedad Newtoniana. Con  $e = -0.25 (GM)^2/\ell^2$  y  $c = 10 \text{ GM}/\ell$  (Figs. 3.5.1 y 3.5.2c), la diferencia con respecto al potencial Newtoniano es pequeña pero evidente y, notablemente, da lugar a la precesión de las órbitas, así que para energías similares, que corresponden a órbitas elípticas, y mientras mayor sea la proporción de  $c$  respecto a  $10 \text{ GM}/\ell$ , las órbitas se aproximarán cada vez más a las Newtonianas.



(a) La partícula cae en un espiral desde  $r = 3.412 \ell^2/GM$  hasta  $r = 0.5858 \ell^2/GM$  y después vuelve a salir hasta  $r = 3.412 \ell^2/GM$ , y así sucesivamente.

(b) La partícula precesa y cuando llega a  $r_{\min}$  presenta una trayectoria casi circular y después se abre hasta  $r_{\max}$ .



(c) Para un valor más adecuado de  $c$ , se tiene la precesión de la órbita elíptica.

(d) Para cualquier valor de  $c$  se recupera la órbita circular Newtoniana, pues el potencial efectivo de Weber sólo existe en  $r = 1 \ell^2/GM$ , donde coincide con el potencial efectivo Newtoniano.

Fig. 3.5.2: Trayectorias Weberianas.

Comparando con datos astronómicos del sistema solar, el parámetro de masa solar es  $GM_{\odot} = 1.327 \times 10^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2$  (*Selected Astronomical Constants 2018*) y  $c = 299,792,458 \text{ m/s}$ , por lo que  $GM_{\odot}/c = 4.4268 \times 10^{11} \text{ m}^2/\text{s}$ . El momento angular por unidad de masa de Mercurio orbitando el Sol es  $\ell = rv = (5.79 \times 10^{10} \text{ m})(47,362 \text{ m/s}) = 2.74 \times 10^{15} \text{ m}^2/\text{s}$ , por lo tanto  $\ell = 6,195.7 GM_{\odot}/c$ . En la última columna de la Tabla 3.1 se enlistan los valores de  $\ell$  en términos de  $GM/c$  para distintos objetos astronómicos.

Objeto	$r$ (m)	$v$ (km/s)	$\ell$ ( $\text{m}^2/\text{s}$ )	$\ell^2/GM$	$c\ell/GM$
Mercurio	$5.79 \times 10^{11}$	47	$2.74 \times 10^{15}$	$5.67 \times 10^{10}$	6,195.7
Tierra	$1.5 \times 10^{11}$	30	$4.46 \times 10^{15}$	$1.53 \times 10^{11}$	10,063.8
Neptuno	$4.5 \times 10^{12}$	5	$2.44 \times 10^{16}$	$4.50 \times 10^{12}$	55,209.3
Sol	$2.56 \times 10^{20}$	239	$6.12 \times 10^{25}$	$4.67 \times 10^{20}$	$1.38 \times 10^{14}$
Radio 1	$6.51 \times 10^{20}$	206	$1.34 \times 10^{26}$	$2.25 \times 10^{21}$	$3.03 \times 10^{14}$
Radio 2	$1.22 \times 10^{21}$	214	$2.61 \times 10^{26}$	$8.51 \times 10^{21}$	$5.90 \times 10^{14}$

Tabla 3.1: Mismos datos astronómicos que en la Tabla 2.1, salvo la última columna donde ahora aparece el parámetro  $c\ell/GM$ . Para los últimos tres renglones  $GM = 8 \times 10^{30} \text{ m}^3/\text{s}^2$ .

La distancia promedio de Mercurio al Sol es de  $5.8 \times 10^{10} \text{ m}$ , que en términos de  $\ell^2/GM_{\odot} = 5.67 \times 10^{10} \text{ m}$  es aproximadamente 1.02, mientras que su perihelio es 0.81 y su afelio 1.23. En la Fig. 3.5.3 se graficó una aproximación a la órbita de Mercurio con estos datos, donde no se obtuvieron los valores del perihelio y el afelio sino valores cercanos, y donde no se observa precesión dado que  $c \gg 1 GM/\ell$ .

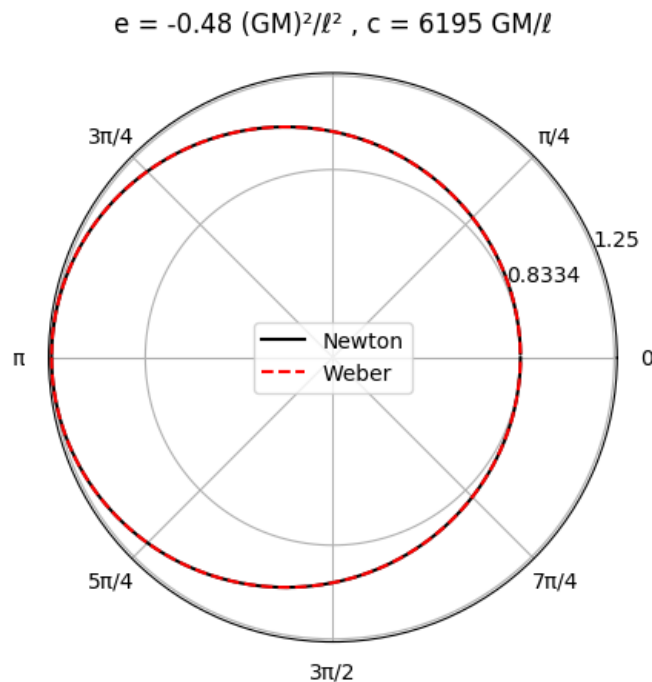


Fig. 3.5.3: Aproximación de la órbita de Mercurio según el potencial Newtoniano y el Weberiano.





# Capítulo 4

## MOMOND

En la sección 3.3 introdujimos el potencial dependiente de la velocidad relativa que hemos propuesto y cuya teoría hemos llamado MOMOND (Modified MOND), puesto que insertamos el parámetro libre con unidades de aceleración  $a_0$  de MOND en una extensión a la gravedad Newtoniana. En el potencial (3.37) que describe a esta teoría, hemos cancelado las unidades de  $a_0$  con el cuadrado de la velocidad relativa sobre la distancia relativa entre dos partículas. La idea de hacer esto es suavizar mediante cantidades relativas el hecho de que  $a_0$  es una cantidad absoluta.

### 4.1. Fuerza central en MOMOND

En la sección 3.4 vimos que el sistema de  $N$  cuerpos con un potencial que depende de la distancia relativa y la velocidad relativa se puede reducir al sistema equivalente de una partícula bajo la influencia de una fuerza central. En este capítulo nos concentraremos en el caso  $f(x) = x$  en (3.37) que nos da el potencial (3.52), y que en el sistema de una fuerza central toma la forma

$$V(r, \dot{r}) = -\frac{GMm}{r} \left(1 + a_0 \frac{r}{\dot{r}^2}\right) = -\frac{GMm}{r} - \frac{GMma_0}{\dot{r}^2}, \quad (4.1)$$

entonces la magnitud de la fuerza (3.62), en este sistema, es

$$F = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{d}{dt} \left( \frac{2GMma_0}{\dot{r}^3} \right) - \frac{GMm}{r^2} = -6GMma_0 \frac{\ddot{r}}{\dot{r}^4} - \frac{GMm}{r^2}, \quad (4.2)$$

esto es

$$\boxed{F(r, \dot{r}, \ddot{r}) = -\frac{GMm}{r^2} \left(1 + 6a_0 \ddot{r} \frac{r^2}{\dot{r}^4}\right) = m\ddot{r} - m \frac{\ell^2}{r^3}.} \quad (4.3)$$

Notemos que  $F(r, \dot{r}, \ddot{r})/m$  es equivalente a la magnitud de la aceleración (3.53). Resolviendo para  $\ddot{r}$ , tenemos que

$$\ddot{r} = \frac{-\frac{GM}{r^2} + \frac{\ell^2}{r^3}}{1 + \frac{6GMa_0}{\dot{r}^4}}, \quad (4.4)$$

tomando el límite  $a_0 \rightarrow 0$  se recupera (2.24) con  $F(r)/m = -GM/r^2$ . En analogía con MOND, donde el régimen MONDiano está caracterizado por aceleraciones centrípetas menores a  $a_0$  en órbitas circulares, podemos considerar aquí que la magnitud de la aceleración centrípeta en el régimen MOMONDiano es

$$\frac{v^2}{r} = 6GMa_0 \frac{\dot{r}}{\dot{r}^4} \quad (4.5)$$

donde  $v$  es la magnitud de la velocidad tangencial, por lo tanto

$$v = \frac{\sqrt{6GMa_0 \dot{r} r}}{\dot{r}^2} \quad (4.6)$$

la cual diverge porque  $\dot{r} = 0$  en una órbita circular, además de que no satisface la relación de Tully-Fisher que dice que la masa bariónica es proporcional a la velocidad orbital a una potencia de alrededor de 4, cf. (Torres-Flores y col., 2011). Para que se cumpla la relación de Tully-Fisher podemos proponer

$$\frac{V(r, \dot{r})}{m} = -\frac{GM}{r} \left[ 1 + \frac{r}{r_0} \log \frac{\dot{r}}{\sqrt{a_0 r_0}} \right] = -\frac{GM}{r} - \sqrt{GMa_0} \log \frac{\dot{r}}{(GMa_0)^{1/4}} \quad (4.7)$$

donde sustituimos  $r_0 = \sqrt{GM/a_0}$ , entonces

$$F = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\sqrt{GMa_0}}{\dot{r}^2} m \ddot{r} - \frac{GMm}{r^2} = m \ddot{r} - m \frac{\ell^2}{r^3} \quad (4.8)$$

y

$$\dot{r} = \frac{-\frac{GM}{r^2} + \frac{\ell^2}{r^3}}{1 - \frac{\sqrt{GMa_0}}{\dot{r}^2}} \quad (4.9)$$

De (4.8), la magnitud de la aceleración centrípeta en el régimen MOMONDiano es

$$\frac{v^2}{r} = \frac{\sqrt{GMa_0}}{\dot{r}^2} \ddot{r} \quad (4.10)$$

por lo tanto

$$v = (GMa_0)^{1/4} \frac{\sqrt{\dot{r} r}}{\dot{r}} \quad (4.11)$$

la cual es constante sólo si  $\dot{r}^2 = \dot{r} r$ , en cuyo caso se cumple la relación de Tully-Fisher, pero en general el potencial (4.7) tampoco cumple la relación Tully-Fisher, por lo que continuaremos el ejercicio matemático con el potencial (4.1) por simplicidad.

Un teorema de conservación establece que la función de energía (Goldstein, 1980)

$$\begin{aligned} h &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \dot{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - L \\ &= m\dot{r}^2 - \frac{\partial V}{\partial \dot{r}} \dot{r} + mr^2 \dot{\phi}^2 - \frac{mr^2}{2} - \frac{mr^2 \dot{\phi}^2}{2} + V(r, \dot{r}) \\ &= \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{2GMma_0}{\dot{r}^2} + \frac{mr^2 \dot{\phi}^2}{2} - \frac{GMm}{r} - \frac{GMma_0}{\dot{r}^2} \\ &= \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{m\ell^2}{2r^2} - \frac{GMm}{r} \left( 1 + 3a_0 \frac{r}{\dot{r}^2} \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

se conserva. Dado que la condición para que la función de energía sea igual a la energía total del sistema es que el potencial no dependa de la velocidad, en este caso  $h \neq E = T + V$ , donde la energía total  $E$  no se conserva:

$$\frac{dE}{dt} = \left[ m\ddot{r} - \frac{m\ell^2}{r^3} + \frac{GMm}{r^2} \left( 1 + 2a_0\dot{r}\frac{r^2}{\dot{r}^4} \right) \right] \dot{r} = -4GMma_0\frac{\dot{r}}{\dot{r}^3} \neq 0. \quad (4.13)$$

Tomando el límite  $a_0 = 0$  en (4.1) se recupera el potencial Newtoniano (2.38), y tomando este límite en (4.12) se obtiene la energía total (2.25). Si denotamos a la función de energía por unidad de masa como  $e = h/m$ , entonces

$$e = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} \left( 1 + 3a_0\frac{r}{\dot{r}^2} \right). \quad (4.14)$$

Verifiquemos que la función de energía se conserva:

$$\frac{dh}{dt} = \left[ m\ddot{r} - \frac{m\ell^2}{r^3} + \frac{GMm}{r^2} \left( 1 + 6a_0\dot{r}\frac{r^2}{\dot{r}^4} \right) \right] \dot{r} = (F - F)\dot{r} = 0, \quad (4.15)$$

donde hemos utilizado (4.2). Como  $m$  es constante,  $e$  también se conserva:

$$\frac{de}{dt} = \left[ \ddot{r} - \frac{\ell^2}{r^3} + \frac{GM}{r^2} \left( 1 + 6a_0\dot{r}\frac{r^2}{\dot{r}^4} \right) \right] \dot{r} = \left[ \frac{F}{m} - \frac{F}{m} \right] \dot{r} = 0. \quad (4.16)$$

Si denotamos por  $V_N(r)$  al potencial efectivo Newtoniano por unidad de masa (2.39) entonces (4.14) toma la forma

$$e = \frac{\dot{r}^2}{2} + V_N(r) - \frac{3GMa_0}{\dot{r}^2}, \quad (4.17)$$

multiplicando por  $2\dot{r}^2$  obtenemos

$$\dot{r}^4 - 2(e - V_N(r))\dot{r}^2 - 6GMa_0 = 0, \quad (4.18)$$

por lo tanto

$$\dot{r}^2 = e - V_N(r) + \sqrt{(e - V_N(r))^2 + 6GMa_0}, \quad (4.19)$$

donde hemos descartado el signo negativo de la raíz cuadrada que implica  $\dot{r}^2 < 0$ , pues  $6GMa_0 > 0$ . Tomando el límite  $a_0 = 0$  en (4.19), si  $e \geq V_N(r)$  se recupera la velocidad radial Newtoniana (2.30), y si  $e < V_N(r)$ , entonces  $\dot{r} = 0$ , mientras que la velocidad radial Newtoniana se indetermina en ese caso.

En la Fig. 4.1.1a se graficó la velocidad radial en función de la distancia radial para cuatro valores distintos de  $a_0$  como múltiplo de  $(GM)^3/\ell^4$ , que es la combinación de esas constantes que tiene unidades de aceleración. Como  $V_N(r) \leq 0$  para  $r \geq 0.5 \ell^2/GM$ , si  $e = 0$ , la velocidad radial Newtoniana no está definida para  $r < 0.5 \ell^2/GM$ . Sustituyendo  $a_0 = 0$  en (4.19),  $\dot{r} = 0$ , por lo que la velocidad radial MOMONDiana sí está definida para  $r < 0.5 \ell^2/GM$ . Si  $a_0 \neq 0$ , las curvas son incluso continuas,

contrario a  $a_0 = 0$  donde la transición es abrupta. Le asignamos distintos valores a  $a_0$  para comparar con el caso  $a_0 = 0$ , pero en realidad lo que cambia es  $\ell$  en términos de  $[(GM)^3/a_0]^{1/4}$ , pues  $a_0$ ,  $G$  y  $M$  son constantes.

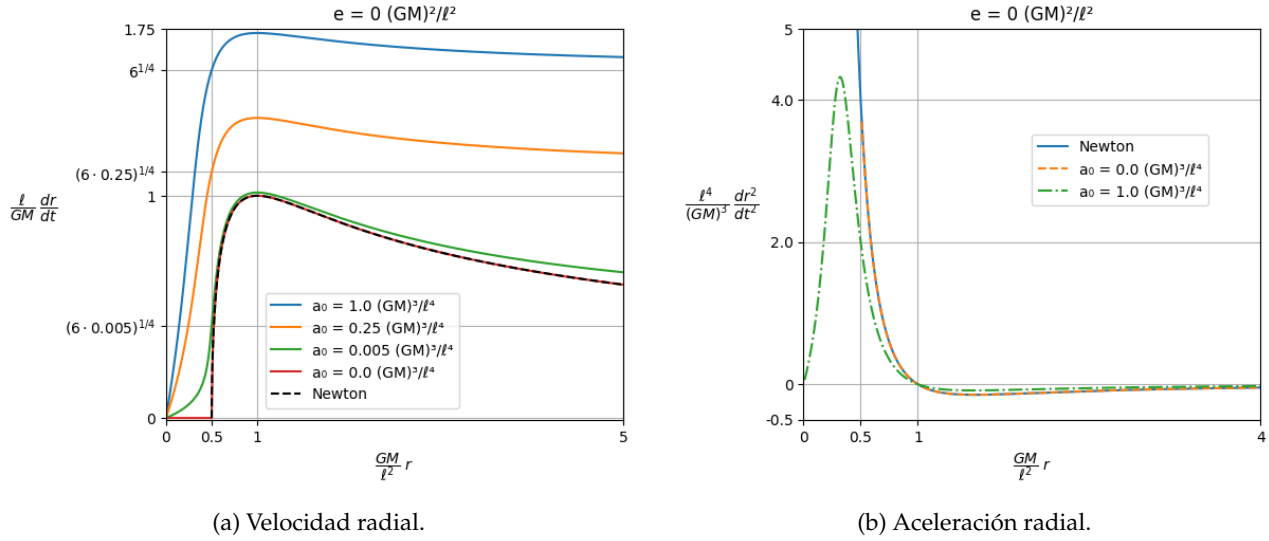


Fig. 4.1.1: Velocidad y aceleración radiales de una partícula con  $e = 0$ .

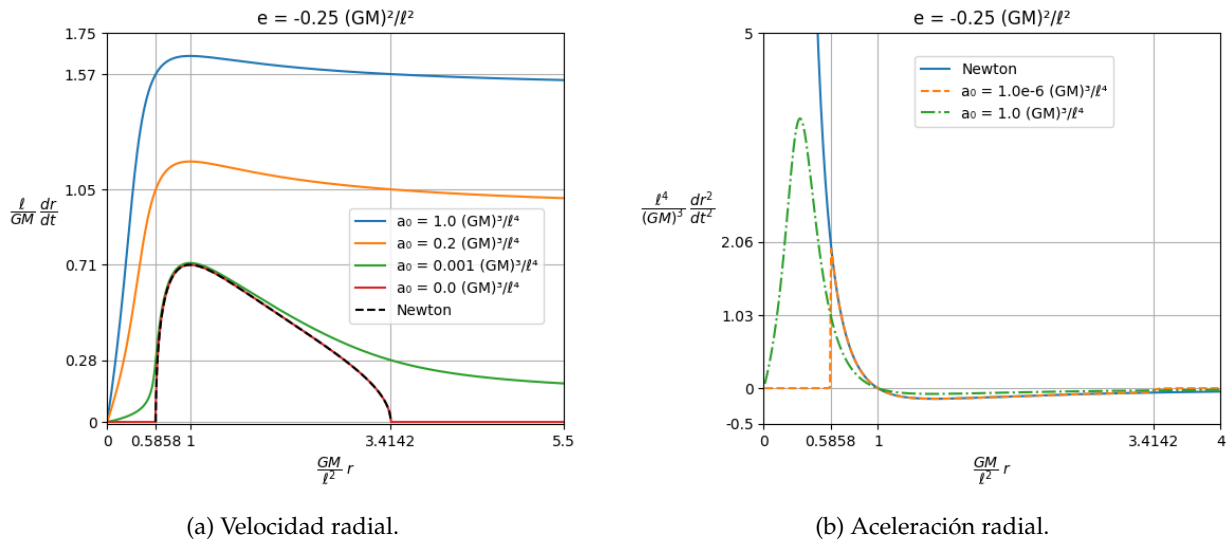


Fig. 4.1.2: Velocidad y aceleración radiales de una partícula en una órbita elíptica con  $e = -0.25 (GM)^2/\ell^2$ .

En la Fig. 4.1.1b se graficó la aceleración radial MOMONDiana (4.4) en comparación con la Newtoniana (2.24). En el límite  $a_0 = 0$  de (4.19), si  $V_N(r) \geq e$ , entonces  $\dot{r} = 0$ , sustituyendo en (4.4) tenemos una indeterminación, por lo que la aceleración radial no está determinada para  $r < r_{\min}$ , dado por (2.42) o (2.45), por eso la curva con  $e = 0$  y  $a_0 = 0$  sólo llega hasta  $r = 0.5 \ell^2/GM$ , esto no ocurre para  $a_0 \neq 0$ . En el caso del potencial Newtoniano (2.39), los valores mínimo y máximo de  $r$  se encuentran en  $\dot{r} = 0$  cuando  $V_N(r) = e$ , sustituyendo esto en (4.19) se obtiene  $\dot{r}^2 = \sqrt{6GMa_0}$ , es decir, la velocidad radial

MOMONDiana no se anula en esos puntos si  $a_0 \neq 0$ , pero tiene el mismo valor para  $r_{\min}$  que para  $r_{\max}$ , como se observa en la Fig. 4.1.2a. Donde sí se anula es en  $r = 0$ , con  $V_N(r) \rightarrow \infty$ . En  $r \rightarrow \infty$  no se anula, pues  $V_N(r) \rightarrow 0$  y  $\dot{r}^2 \rightarrow e + \sqrt{e^2 + 6GMa_0}$ . Regresando a  $V_N(r) = e$ , tenemos que  $\dot{r}^4 = 6GMa_0$ , sustituyendo esto en (4.4) se obtiene la mitad del valor de la aceleración radial Newtoniana en  $r_{\min}$  y en  $r_{\max}$ , como se observa en las Figs. 4.1.1b y 4.1.2b.

## 4.2. Potencial efectivo

Definimos el potencial efectivo

$$V_M(r, \dot{r}) = V_N(r) - \frac{3GMa_0}{\dot{r}^2}, \quad (4.20)$$

entonces (4.17) es simplemente

$$e = \frac{\dot{r}^2}{2} + V_M(r, \dot{r}). \quad (4.21)$$

Sustituyendo  $\dot{r}^2$  de (4.19) en (4.20),

$$V_M(r) = V_N(r) - \frac{3GMa_0}{e - V_N(r) + \sqrt{(e - V_N(r))^2 + 6GMa_0}}, \quad (4.22)$$

y sustituyendo (2.39) en (4.22) obtenemos la expresión explícita del potencial efectivo por unidad de masa

$$V_M(r; \ell, e) = -\frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{3GMa_0}{e + \frac{GM}{r} - \frac{\ell^2}{2r^2} + \sqrt{\left(e + \frac{GM}{r} - \frac{\ell^2}{2r^2}\right)^2 + 6GMa_0}}. \quad (4.23)$$

Notemos las siguientes características de este potencial efectivo:

1. Para cada valor de  $e$  habrá un potencial efectivo distinto.
2. El mínimo del potencial se encuentra en  $r = 1 \ell^2 / GM$ , al igual que el mínimo Newtoniano.
3. Si  $a_0 = 0$  en (4.20) se recupera el potencial Newtoniano (2.39) para  $\dot{r} > 0$ , esto se cumple para  $V_N(r) < e$  en (4.19), pero si  $V_N(r) > e$ , y  $a_0 = 0$ , entonces  $\dot{r} = 0$  y (4.20) no está determinada, lo cual es congruente con que  $V_N(r) > e$  no es válido en (2.30). Ver la Fig. 4.2.3.
4. En los puntos en los que  $e = V_N(r)$ , sustituyendo en (4.22),  $V_M(r) = e - \sqrt{(3/2)GMa_0}$  y, sustituyendo en (4.19),  $\dot{r} \rightarrow \pm(6GMa_0)^{1/4}$ .

5. Si  $r \rightarrow \infty$  entonces  $V_N(r) \rightarrow 0$ , sustituyendo en (4.22)  $V_M(r) \rightarrow \frac{-3GMa_0}{e + \sqrt{e^2 + 6GMa_0}}$  y sustituyendo en (4.19)  $\dot{r} \rightarrow \pm \sqrt{e + \sqrt{e^2 + 6GMa_0}}$ .
6. Si  $a_0 \rightarrow 0$  y  $V_N(r) \rightarrow e$  en (4.19) entonces  $\dot{r} \rightarrow 0$  y, de (4.21),  $V_M(r) \rightarrow e$ .
7. Si  $a_0$  y  $e$  son finitos y  $r \rightarrow 0$ , entonces  $V_N(r) \rightarrow \infty$  y  $\dot{r}^2 \rightarrow -V_N(r) + \sqrt{(-V_N(r))^2} = 0$  en (4.19), por lo tanto, de (4.21),  $V_M(r) \rightarrow e$ .
8. Si  $V_N(r) \gg \sqrt{6GMa_0} + e$  entonces  $V_M(r) \approx e$ .
9. Si  $e \gg \sqrt{6GMa_0} + V_N(r)$  entonces  $V_M(r) \approx V_N(r)$ .

Para probar el punto 2 debemos encontrar el mínimo del potencial efectivo (4.23). Su derivada es

$$\frac{dV_M(r)}{dr} = \frac{dV_N(r)}{dr} \left\{ 1 - \frac{3GMa_0 \left[ 1 + \frac{e - V_N(r)}{\sqrt{(e - V_N(r))^2 + 6GMa_0}} \right]}{\left( e - V_N(r) + \sqrt{(e - V_N(r))^2 + 6GMa_0} \right)^2} \right\}. \quad (4.24)$$

En (2.46) - (2.48) verificamos que  $dV_N(r)/dr = 0$  en  $r = 1 \ell^2/GM$  y que corresponde al mínimo del potencial efectivo Newtoniano. Ahora, de (4.24),

$$\frac{dV_M(r)}{dr} \propto \frac{dV_N(r)}{dr}, \quad (4.25)$$

entonces

$$\left. \frac{dV_M(r)}{dr} \right|_{\frac{\ell^2}{GM}} = 0, \quad (4.26)$$

en *Mathematica* verificamos que

$$\left. \frac{d^2V_M(r)}{dr^2} \right|_{\frac{\ell^2}{GM}} > 0, \quad (4.27)$$

por lo tanto, el mínimo de  $V_M(r)$  también se encuentra en  $r = \frac{\ell^2}{GM}$ .

Para probar el punto 8 tenemos que si  $(e - V_N(r))^2 \gg (GM)^4/\ell^4 > 6GMa_0$  entonces

$$\begin{aligned} \sqrt{(e - V_N(r))^2 + 6GMa_0} &= |e - V_N(r)| \left[ 1 + \frac{6GMa_0}{(e - V_N(r))^2} \right]^{1/2} \\ &\approx |e - V_N(r)| \left[ 1 + \frac{3GMa_0}{(e - V_N(r))^2} \right] \\ &= |e - V_N(r)| + \frac{3GMa_0}{|e - V_N(r)|}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

por lo tanto

$$V_M(r) \approx V_N(r) - \frac{3GMa_0}{e - V_N(r) + |e - V_N(r)| + \frac{3GMa_0}{|e - V_N(r)|}}. \quad (4.29)$$

Si además  $V_N(r) > e$  entonces  $|e - V_N(r)| = V_N(r) - e$ , sustituyendo en (4.29),

$$V_M(r) \approx V_N(r) - V_N(r) + e = e, \quad (4.30)$$

por lo tanto  $V_M(r) \approx e$  si  $V_N(r) \gg \sqrt{6GMa_0} + e$ .

Pero si  $V_N(r) < e$  entonces  $|e - V_N(r)| = e - V_N(r) \gg (GM)^2/\ell^2 > \sqrt{6GMa_0} > 6GMa_0 > 3GMa_0$ , dado que el cuadrado de un número menor a 1 (aquí en términos de  $(GM)^2/\ell^2$ ) es menor que dicho número. Sustituyendo en (4.29),

$$V_M(r) \approx V_N(r) - \frac{3GMa_0}{2(e - V_N(r)) + \frac{3GMa_0}{e - V_N(r)}} \approx V_N(r), \quad (4.31)$$

por lo tanto  $V_M(r) \approx V_N(r)$  si  $e \gg \sqrt{6GMa_0} + V_N(r)$ , que es el punto 9.

En el punto 7 vimos que  $\dot{r} \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow 0$  por lo que, de (4.20), el potencial no está bien definido en  $r = 0$ . Con  $a_0 > 0$  el potencial es menor a  $e$  para toda  $r > 0$  por lo que  $r_{\text{máx}} \rightarrow \infty$  y  $r_{\text{mín}} = 0$ , esto implica que no hay órbitas sino sólo trayectorias que van desde infinito hasta  $r = 0$ .

En la Fig. 4.2.1 se graficó el potencial efectivo (4.23) con  $e = 1 (GM)^2/\ell^2$  para dos valores distintos de  $\ell$ . Si  $r_0 = 1 \ell^2/GM$  (guiones rojos), cuando  $r \rightarrow \infty$  entonces  $V_M(r) \rightarrow -3GMa_0/(e + \sqrt{e^2 + 6GMa_0}) \approx -0.82 (GM)^2/\ell^2$ , por lo que el máximo del potencial es mucho menor que el máximo del potencial efectivo Newtoniano (línea sólida negra) que se encuentra en cero. Si  $r_0 = 10 \ell^2/GM$  (puntos y guiones azules) el potencial se aproxima al Newtoniano en la región en la que  $V_N(r) < e$ , pero cuando  $V_N(r) = e$  entonces  $V_M(r) = e - \sqrt{(3/2)GMa_0}$  (punto 4), y cuando  $V_N(r) > e$  entonces  $V_M(r) \rightarrow e$  (punto 8), y en  $r \rightarrow 0$  da saltos porque no está bien definido. Nótese que no ocurre nada especial en  $r_0 = 10 \ell^2/GM$  y que cuando  $r \rightarrow \infty$  entonces  $V_M(r) \rightarrow -3GMa_0/(e + \sqrt{e^2 + 6GMa_0}) \approx$



$-0.015 (GM)^2/\ell^2$ .

En la Fig. 4.2.2 se graficó el potencial efectivo (4.23) para  $e > 0$  con  $e = -0.25 (GM)^2/\ell^2$  para tres valores distintos de  $\ell$ . Para  $\ell^2 = 1/5 GM r_0$  que se expresa en términos de  $r_0 = 5 \ell^2/GM$  (guiones verdes) el potencial se separa notablemente del potencial Newtoniano. Para  $r_0 = 50 \ell^2/GM$  (puntos amarillos) el potencial se aproxima notablemente al Newtoniano pero se separa en las dos regiones en las que  $V_N(r) \rightarrow e$ . Y para  $r_0 = 500 \ell^2/GM$  (puntos y guiones azules) el potencial es prácticamente igual al Newtoniano mientras  $V_N(r) < e$ , pero para  $V_N(r) \geq e$  el potencial adquiere el valor constante de  $e$  pues  $V_M(r) \rightarrow e$  cuando  $a_0 \rightarrow 0$  y  $V_N(r) \rightarrow e$  como se indica en el punto 6.

En la Fig. 4.2.3 se graficó el potencial efectivo (4.23) con  $e = -0.25 (GM)^2/\ell^2$  y  $a_0 = 0$ . Sustituyendo  $V_N(r) \geq e$  y  $a_0 = 0$  en (4.19) obtenemos  $\dot{r} = 0$  por lo que, de (4.20), el potencial queda indeterminado, así que sólo está determinado para  $V_N(r) < e$ , por lo tanto cuando  $a_0 = 0$  entonces  $V_M(r) = V_N(r) < e$  por lo que no hay restricción para  $r$ , sin embargo las órbitas se obtienen integrando hasta un  $\epsilon > 0$  antes de llegar a  $\dot{r} = 0$ , por lo que en este caso sí se recuperan las órbitas Newtonianas.

En la Fig. 4.2.4 se graficó el potencial efectivo (4.23) con  $a_0 = 10^{-6} (GM)^3/\ell^4$  y  $e = -0.5 (GM/\ell)^2$  que corresponde al mínimo del potencial Newtoniano y por lo tanto a una órbita circular. El potencial es igual a  $e$  excepto en  $r \rightarrow 0$  y en una vecindad de  $r = 1 \ell^2/GM$  donde difiere del potencial Newtoniano en  $0.001 (GM)^2/\ell^2$  y presenta un pequeño pozo, el cuál sólo se puede apreciar con un acercamiento.

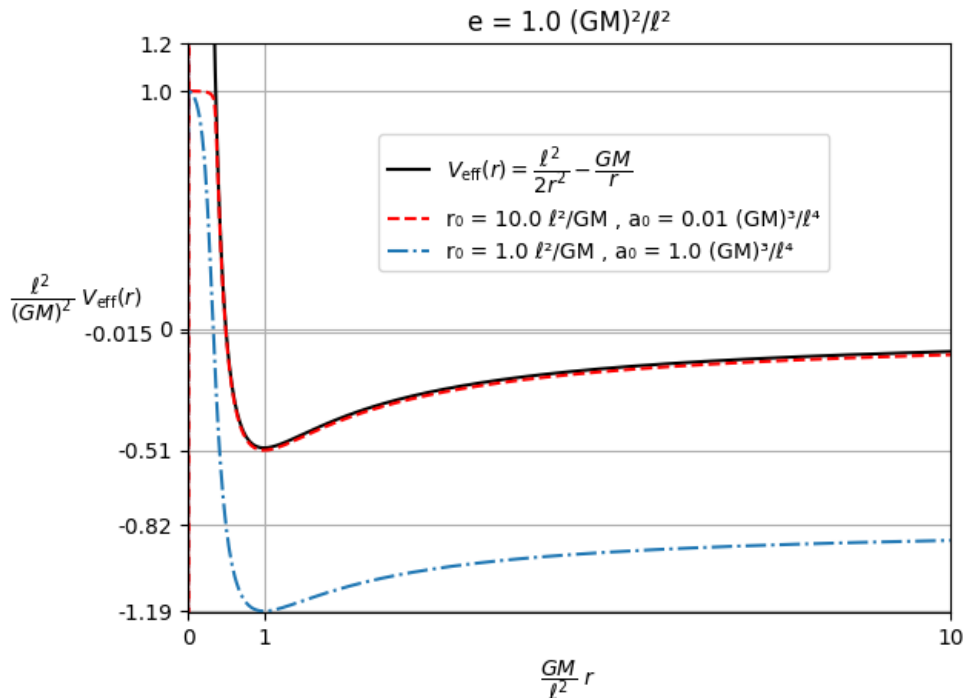


Fig. 4.2.1: Potencial efectivo (4.23) con  $e = 1 (GM)^2/\ell^2$  para  $r_0 = 10 \ell^2/GM$  (guiones rojos) donde  $V_M(r) \approx -0.015 (GM/\ell)^2$  cuando  $r \rightarrow \infty$ , y para  $r_0 = 1 \ell^2/GM$  (puntos y guiones azules) donde  $V_M(r) \approx -0.82 (GM/\ell)^2$  cuando  $r \rightarrow \infty$ . La línea negra sólida es el potencial efectivo Newtoniano (2.39).

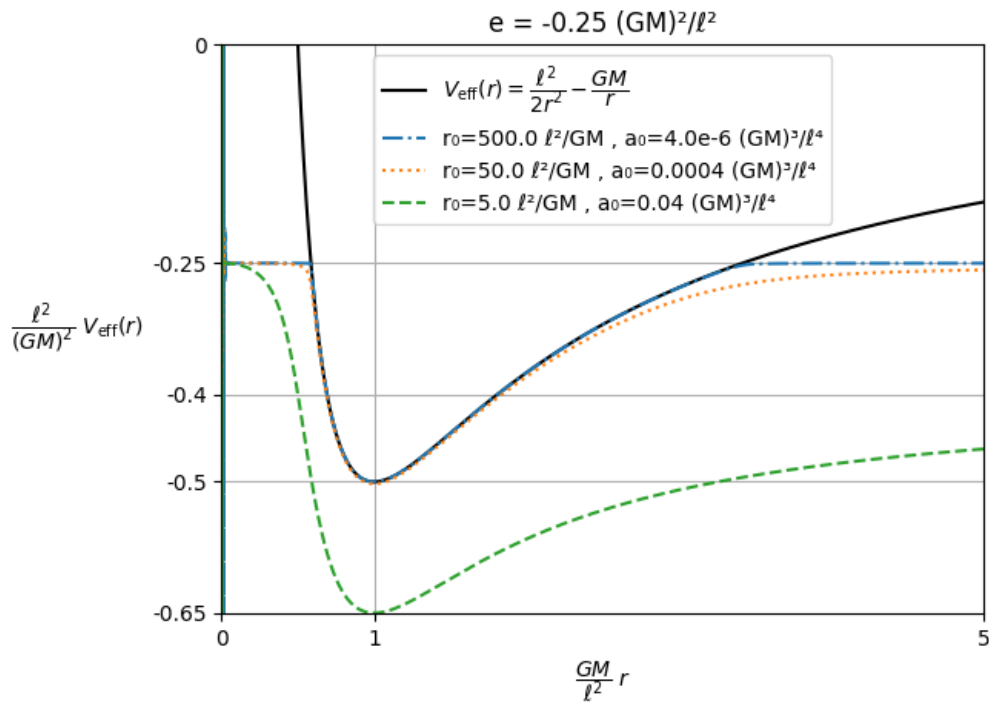


Fig. 4.2.2: Potencial efectivo (4.23) con  $e = -0.25 (GM)^2/\ell^2$  para tres valores distintos de  $\ell$  expresados en  $r_0$ . Con  $r_0 = 5 \ell^2/GM$ , cuando  $r \rightarrow \infty$  entonces  $V_M(r) = -0.4 (GM/\ell)^2$  exactamente.

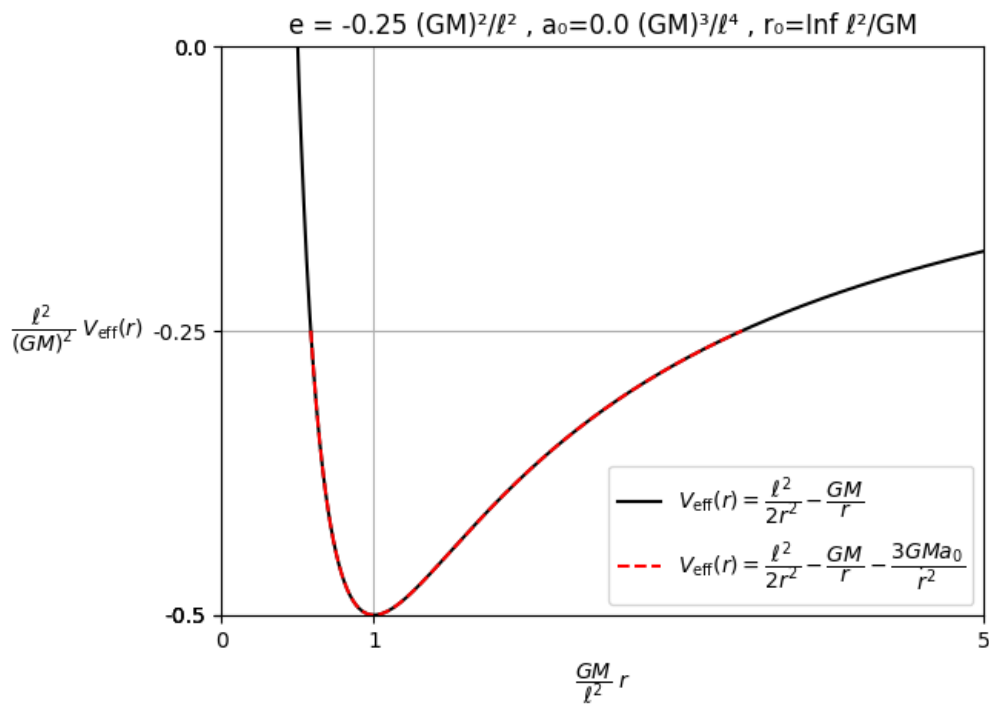


Fig. 4.2.3: Potencial efectivo (4.23) con  $e = -0.25 (GM)^2/\ell^2$  y  $a_0 = 0$ , en guiones rojos, comparado con el potencial efectivo Newtoniano (2.39), línea negra sólida.

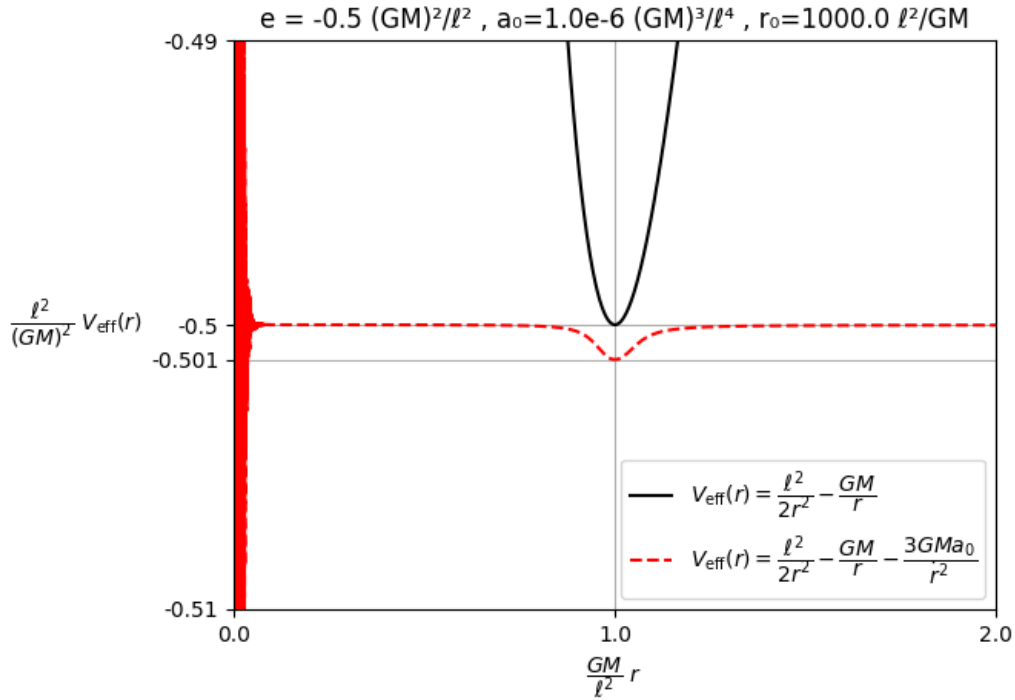


Fig. 4.2.4: Potencial efectivo (4.23), guiones rojos, con la energía correspondiente a una órbita circular Newtoniana, comparado con el potencial efectivo Newtoniano (2.39), línea negra sólida. Nótese que el rango del potencial en la gráfica es  $-0.5 \pm 0.01$  para poder apreciar que el potencial presenta un pozo en  $r = 1 \ell^2/GM$ . La trayectoria correspondiente a este potencial se graficó en la Fig. 4.3.3b.

En la sección 2.6 vimos que las velocidades orbitales en la Vía Láctea corresponden a  $\ell^2 > GMr_0$  i.e.  $r_0 < 1 \ell^2/GM$ , por lo que el potencial efectivo (4.20) es mucho menor al Newtoniano y como ya sabemos que no se obtiene una relación tipo Tully-Fisher para la velocidad orbital entonces este potencial no reproduce la dinámica de las galaxias.

### 4.3. Trayectorias

Para obtener la forma de las órbitas en MOMOND podemos expresar a  $\phi$  como función de  $r$  mediante

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi/dt}{dr/dt} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{r}}. \quad (4.32)$$

Sustituyendo  $\dot{\phi}$  de (3.61) y  $\dot{r}$  de (4.19) en (4.32),

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{\ell}{r^2} \left[ \left( e + \frac{GM}{r} - \frac{\ell^2}{2r^2} \right) + \sqrt{\left( e + \frac{GM}{r} - \frac{\ell^2}{2r^2} \right)^2 + 6GMa_0} \right]^{-1/2}. \quad (4.33)$$

Integrando numéricamente (4.33) obtenemos la forma de las trayectorias determinadas por el potencial efectivo MOMONDiano (4.23). Inversamente, podemos expresar a  $r$  como función de  $\phi$  mediante

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{dr/dt}{d\phi/dt} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}} \quad (4.34)$$

donde ahora integramos numéricamente al inverso de (4.33),

$$\frac{dr}{d\phi} = \pm \frac{r^2}{\ell} \left[ \left( e + \frac{GM}{r} - \frac{\ell^2}{2r^2} \right) + \sqrt{\left( e + \frac{GM}{r} - \frac{\ell^2}{2r^2} \right)^2 + 6GMa_0} \right]^{1/2}. \quad (4.35)$$

En las Figs. 4.3.1 - 4.3.3 se presenta la comparación de las trayectorias en MOMOND con respecto a las trayectorias Newtonianas, y en las cuales se observa que con  $a_0 = 0$  se recuperan las órbitas Newtonianas, pero con  $a_0 \neq 0$  se tiene que  $\dot{r} \rightarrow 0$  sólo cuando  $r \rightarrow 0$ , como se observa en la Fig. 4.1.1a, esto quiere decir que no hay puntos de retorno y por lo tanto no hay órbitas sino que todas las trayectorias empiezan en infinito y se acercan a  $r = 0$ .

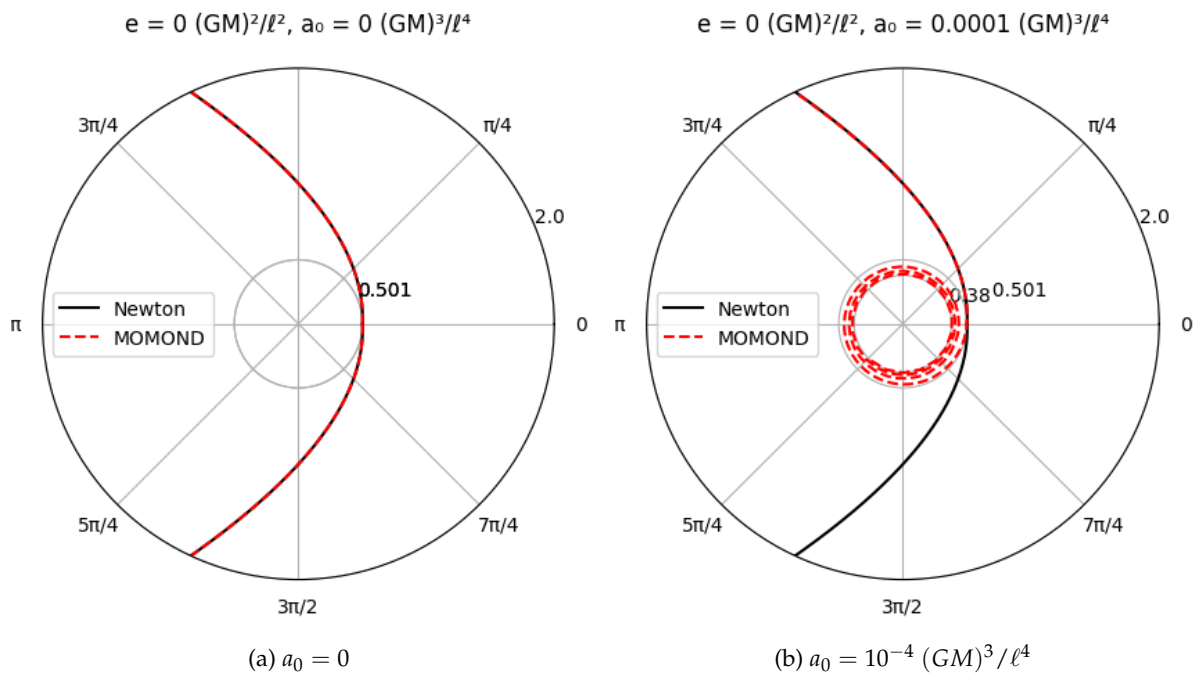


Fig. 4.3.1: Trayectorias de una partícula con  $e = 0$ .

En la Fig. 4.3.1 se graficó la trayectoria determinada por el potencial efectivo (4.23) en comparación con la trayectoria determinada por el potencial efectivo Newtoniano (2.39), con el que la trayectoria es parabólica y  $r_{\min} = 0.5 \ell^2/GM$ . (a) Sustituyendo  $a_0 = 0$  en el potencial efectivo (4.23) se recupera el potencial Newtoniano y por lo tanto la trayectoria es la misma. (b) Con  $a_0 \neq 0$ , cuando  $r \rightarrow 0$  entonces  $V_M(r) \rightarrow e$  (punto 7) y aunque las trayectorias de (2.39) y (4.23) son iguales para  $r > 0.5 \ell^2/GM$ , el potencial (4.23) no cuenta con la barrera centrífuga del potencial efectivo Newtoniano por lo que la partícula atraviesa  $r = 0.5 \ell^2/GM$  y cae en una espiral muy cerrada.

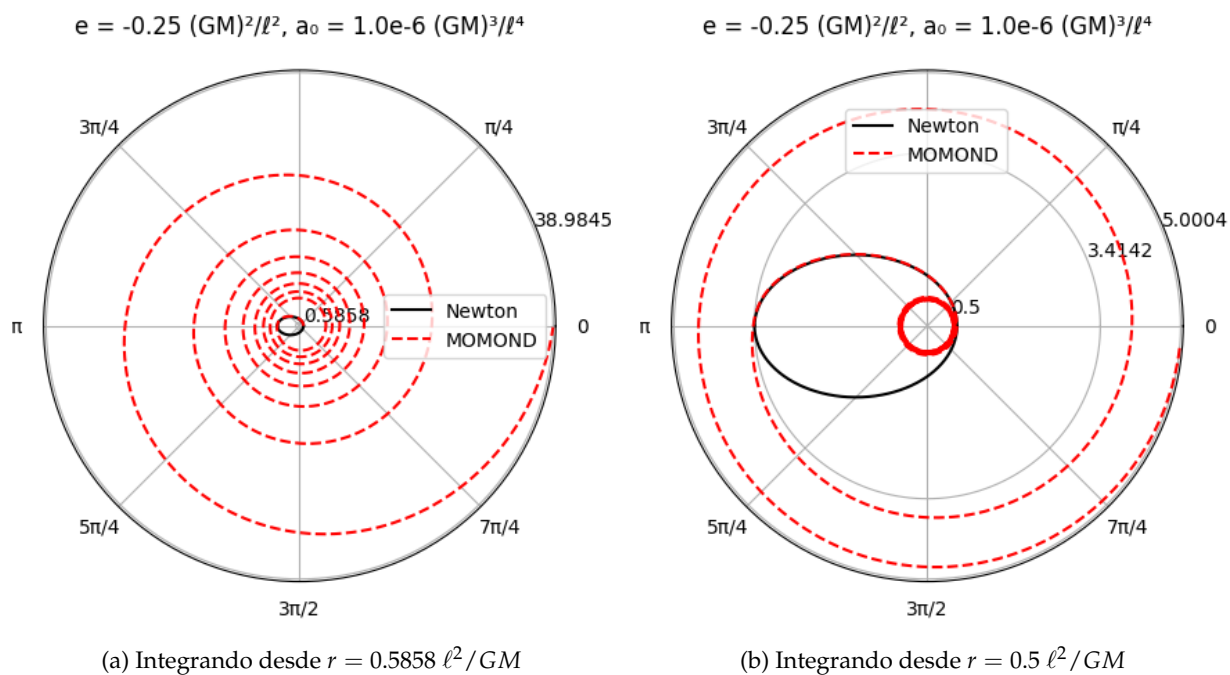


Fig. 4.3.2: Trayectorias con  $e = -0.25 (GM/\ell)^2$  y  $a_0 = 10^{-6} (GM)^3/\ell^4$ .

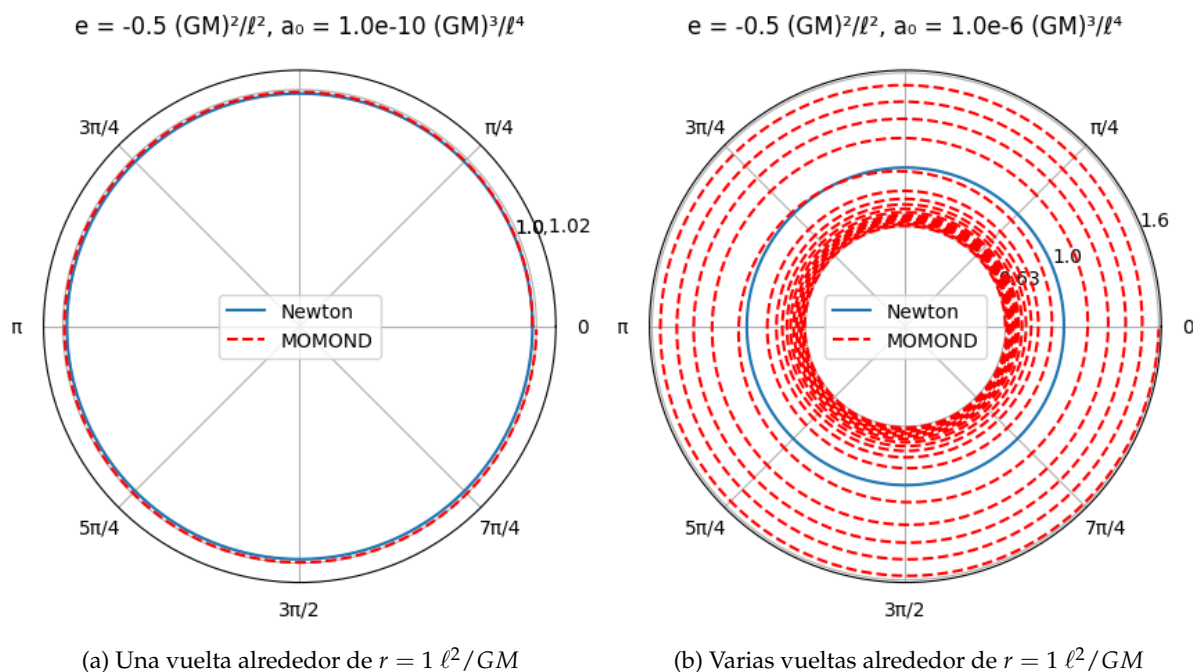


Fig. 4.3.3: Trayectorias alrededor de  $r = 1 \ell^2/GM$ .

En la Fig. 4.3.2 tenemos: (a) La trayectoria se obtuvo integrando desde el radio menor de la elipse Newtoniana  $r = 0.5858 \ell^2/GM$  en un rango de 50.27 radianes que equivale a 8 veces  $2\pi$ . La partícula cae en espiral desde infinito hasta llegar a trazar la mitad de la elipse Newtoniana que se obtiene con

esa misma  $e$ . La trayectoria continúa en (b) que se obtiene integrando desde  $r = 0.5 \ell^2/GM$  hasta  $r = 5.0004 \ell^2/GM$  en un rango de 69.03 radianes que equivale a casi 11 veces  $2\pi$ . La espiral se deforma en la mitad de la elipse Newtoniana para después continuar cayendo en una espiral mucho más cerrada.

En la Fig. 4.3.3 tenemos: (a) A pesar de que  $a_0$  es tan pequeño como  $10^{-10} (GM)^3/\ell^4$ , la trayectoria de la partícula sigue siendo una espiral que se hace circular en  $r = 1 \ell^2/GM$  y luego sigue siendo espiral, aunque aquí sólo se aprecia la parte circular que no cierra en  $\phi = 2\pi$ . La trayectoria sólo será Newtoniana si  $a_0 = 0$ . (b) Trayectoria extendida con un valor no tan pequeño de  $a_0$  donde se observa que la trayectoria se aproxima a la órbita circular Newtoniana para  $r$  alrededor de  $\ell^2/GM$  y luego continúa cayendo al centro de fuerza en una trayectoria cada vez más cerrada, por lo que fue necesario empezar la integración a un radio no demasiado pequeño ( $r = 0.63 \ell^2/GM$ ) para reducir tiempo de cómputo. En la Fig. 4.2.4 se presenta el potencial efectivo correspondiente, donde se observa un pequeño pozo en  $r = 1 \ell^2/GM$  que resulta en una perturbación de la homogeneidad de la trayectoria espiral.



# Capítulo 5

## Conclusiones

Esta tesis surgió de cuestionar el empleo de una aceleración independiente del sistema de referencia en la teoría de MOND. Como experimento, la propuesta fue combinar esta aceleración absoluta con cantidades relativas en una extensión al potencial Newtoniano en un intento de encaminarnos hacia una teoría relacional. Sin embargo, el resultado fue una teoría que no produce órbitas. En la teoría Newtoniana las órbitas son resultado de que la velocidad radial se anula en las posiciones en las que  $e = V_N$ , restringiendo a la partícula a moverse dentro de un rango de la coordenada radial. En la teoría que propusimos, y que llamamos MOMOND, la velocidad radial no se anula cuando  $e = V_N$  sino que, de la ecuación (4.19),  $\dot{r} = \pm(6GMa_0)^{1/4} \neq 0$ , el único caso en que  $\dot{r} \rightarrow 0$  es cuando  $r \rightarrow 0$ , por lo que las trayectorias no están acotadas en  $r$  y por lo tanto no hay órbitas.

Recapitulando podemos encontrar las razones por las cuales MOMOND no funcionó. El potencial que se propuso en esta tesis fue construido en analogía al potencial de Weber, donde se tiene un potencial de la forma

$$V(r, \dot{r}) = V_N(r) [1 + f(\dot{r})] \quad (5.1)$$

donde  $f(\dot{r})$  es un término adimensional, mientras que la implementación del potencial de MOND se logra mediante una función de interpolación que determina cómo es la transición del potencial de Newton hacia el de MOND. En el régimen de MOND, donde  $a < a_0$ , esta función es  $\mu = a/a_0$ . Trasladando esta idea al potencial (4.1) se obtiene que la función de interpolación en el régimen de MOMOND es  $\mu = \dot{r}^4/6a_0\ddot{r}r^2$ , que no es tan amigable como la de MOND. A lo largo del desarrollo de esta tesis no se tomó en cuenta relación de Tully-Fisher,  $v \propto M^{1/4}$ , por lo que el potencial de MOMOND estaba destinado al fracaso, sin embargo, el potencial (4.7) fue construido con la intención de cumplir esta relación pero la velocidad orbital (4.11) sigue dependiendo de  $r$ ,  $\dot{r}$  y  $\ddot{r}$  donde  $\dot{r}$  se encuentra en el denominador lo que imposibilita tener una velocidad orbital bien definida para una órbita circular con  $\dot{r}$ .

Un resultado interesante es que un sistema de  $N$  partículas con un potencial general dependiente de la velocidad relativa cumple con la ley fuerte de acción y reacción, es decir, la fuerza entre cada una de las partículas se ejerce en dirección de la línea recta que las une, como se demostró en la sección 3.1.

El empleo de cantidades relativas en combinación con cantidades absolutas no arrojó buenos resultados con el potencial propuesto, pero ésta no es la razón de su fallo pues otras teorías han resultado



útiles empleando esta combinación, por ejemplo la gravedad de Weber, cuyo potencial contiene una combinación adimensional de la velocidad relativa y la velocidad de la luz, o el potencial en el régimen de MOND (2.69) donde el argumento del logaritmo es  $r/r_0$ .

Nociones como la simultaneidad, la acción a distancia, y el espacio y tiempo absolutos fueron suficientes para construir una teoría que describe en una buena aproximación la gravedad en el sistema solar. La tarea no era empresa fácil, así que era de esperarse que la primera teoría que lograra dicha hazaña fuera una versión simplificada de una posterior teoría más sofisticada. Una revisión de estas nociones y la propuesta y desarrollo de conceptos más elaborados llevó a una mejora sustancial de la descripción de la gravedad en la Relatividad General, sin embargo, se siguen teniendo sistemas de referencia preferenciales, que son las geodésicas, por lo que no se tiene una física realmente independiente del sistema de referencia. La Relatividad General tampoco implementa completamente el principio de Mach puesto que se tienen diferentes soluciones en vacío que determinan diferentes geometrías del espacio-tiempo a pesar de contar con un mismo contenido de materia nulo.

Newton planteó que el movimiento ocurre con respecto al espacio absoluto y que el tiempo es el mismo para todos, sin embargo, de acuerdo al enfoque relacional, el movimiento de un objeto sólo se da en relación a otro objeto. A pesar de que Einstein comulgaba con las ideas de Mach, se vio en la necesidad de establecer otro escenario de fondo con respecto al cual se pudiera definir el movimiento, esta vez se trata de un espacio-tiempo dinámico, cuya desviación de un espacio-tiempo plano, es decir su curvatura, es la responsable de la atracción gravitacional.

La Relatividad General, sin implementar completamente el principio de Mach ni ser relacional, es una teoría con predicciones considerablemente más precisas que las de la teoría Newtoniana, pero aún hay muchos fenómenos en espera de ser descritos adecuadamente. Una teoría que implemente completamente el principio de Mach y que sea relacional podría ser más precisa y conceptualmente más sólida que la Relatividad General.

## Referencias

- Assis, André Koch Torres (1995). «Mach's Principle: From Newton's Bucket to Quantum Gravity». En: ed. por Julian Barbour y Herbert Pfister. Birkhäuser. Cap. Weber's Law and Mach's Principle, págs. 159-171.
- (1999). *Relational Mechanics*. Apeiron. Cap. 2.8, 3.2.3, 6.7, 17.1, 24.5.8, 25.3.
- Assis, André Koch Torres y João José Caluzi (1991). «A limitation of Weber's law». En: *Phys. Lett. A* 160, págs. 25-30.
- Assis, André Koch Torres y Roberto Antonio Clemente (1992). «The Ultimate Speed Implied by Theories of Weber's Type». En: *Int. J. Theor. Phys.* 31.6, págs. 1063-1073.
- Barbour, Julian (2010). «The Definition of Mach's Principle». En: *Found. Phys.* 40, págs. 1263-1284.
- (2011). *Shape Dynamics. An Introduction*. arXiv: 1105.0183 [gr-qc].
- Barbour, Julian B. (2001). *The Discovery of Dynamics*. Oxford University Press, pág. 6.
- Barbour, Julian y Herbert Pfister, eds. (1995). *Mach's Principle: From Newton's Bucket to Quantum Gravity*. Birkhäuser. Cap. General Introduction, págs. 1-5.
- Baumann, Daniel (s.f.). *Cosmology: Part III Mathematical Tripos*. URL: <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/db275/Cosmology/Lectures.pdf>.
- Bonder, Yuri y Tim Koslowski (s.f.). «Shape Dynamics with additional coupling constants». Sin publicar.
- Boran, S. y col. (2018). «GW170817 falsifies dark matter emulators». En: *Phys. Rev. D* 97 (4), pág. 041501.
- Bunchaft, Fernando y Saulo Carneiro (1997). «Weber-like interactions and energy conservation». En: *Found. Phys. Lett.* 10.4, págs. 393-401.
- Capozziello, S. y M. De Laurentis (2015). «f(R) theories of gravitation». En: *Scholarpedia* 10.2. Revisión #147843, pág. 31422. DOI: 10.4249/scholarpedia.31422.
- Dark Energy, Dark Matter* (s.f.). Sitio web de la NASA. URL: <https://science.nasa.gov/astrophysics/focus-areas/what-is-dark-energy>.
- Einstein, Albert (1918). En: *Naturwissenschaften* 48. Passage on p. 699, pág. 697.
- Goldstein, Herbert (1980). *Classical Mechanics*. Addison-Wesley. Cap. 1.2, 2.6, 2.7 y 3.2.
- Hartle, James (2003). *An Introduction To Einstein's General Relativity*. Pearson Education. Cap. 9.3, Appendix A, págs. 191-199.
- Hawking, Stephen y George Ellis (1973). *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press.
- Hofer, Carl (1995). «Mach's Principle: From Newton's Bucket to Quantum Gravity». En: ed. por Julian Barbour y Herbert Pfister. Birkhäuser. Cap. Einstein's Formulations of Mach's Principle, págs. 67-90.
- Mach, Ernst (1883). *Die Mechanik in ihrer Entwicklung*. Brockhaus.
- Maudlin, Tim (2012). *Philosophy of Physics. Space and Time*. Princeton University Press. Cap. 6.

- McMillan, Paul J. (2017). «The mass distribution and gravitational potential of the Milky Way». En: *MNRAS* 465.1, págs. 76-94.
- Mendoza, S. y col. (2011). «A natural approach to extended Newtonian gravity: tests and predictions across astrophysical scales». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 411.1, págs. 226-234.
- Milgrom, Mordehai (1983a). En: *Ap. J.* 270, págs. 365-370.
- (1983b). En: *Ap. J.* 270, págs. 371-383.
- (2015). En: *Can. J. Phys.* 93, págs. 107-118.
- Newton, Isaac (1687). *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*.
- Rovelli, C. (2008). «Quantum gravity». En: *Scholarpedia* 3.5. revision #170369, pág. 7117. DOI: 10.4249/scholarpedia.7117.
- Sanders, Robert (2010). *The Dark Matter Problem. A Historical Perspective*. Cambridge University Press.
- Selected Astronomical Constants* (2018). <http://asa.usno.navy.mil/SecK/Constants.html>. The Astronomical Almanac Online.
- Torres-Flores, S. y col. (2011). «GHASP: an H $\alpha$  kinematic survey of spiral and irregular galaxies – IX. The near-infrared, stellar and baryonic Tully–Fisher relations». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 416.3, págs. 1936-1948.
- van Albada, Tjeerd Sicco y col. (1985). «Distribution of dark matter in the spiral galaxy NGC 3198». En: *Ap. J.* 295, págs. 305-313.
- Verlinde, Erik (2011). «On the origin of gravity and the laws of Newton». En: *J. High Energy Phys.* 2011.4.
- Wald, Robert (1984). *General Relativity*. The University of Chicago Press. Cap. 1, 4, Appendix F.
- Watkins, Laura L. y col. (2019). «Evidence for an Intermediate-mass Milky Way from Gaia DR2 Halo Globular Cluster Motions». En: *Ap. J.* 873.2, pág. 118.
- Weinberg, Steven (1972). *Gravitation and Cosmology*. Wiley. Cap. 1.3.