



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

RADIACIÓN EN THETA-ELECTRODINÁMICA

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

M. EN C. OMAR JESÚS FRANCA SANTIAGO

TUTOR PRINCIPAL:

DR. LUIS FERNANDO URRUTIA RÍOS (ICN-UNAM)

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

DR. JOSÉ DAVID VERGARA OLIVER (ICN-UNAM)

DR. HUGO AURELIO MORALES TÉCOTL (UAM-IZTAPALAPA)

CIUDAD DE MÉXICO, 9 DE DICIEMBRE DE 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

“Honor a quien honor merece” dice una voz popular. Por ello, comienzo por agradecer a mi tutor de Licenciatura, Maestría y Doctorado al Dr. Luis Fernando Urrutia Ríos, quien a lo largo de estos casi 9 años me apoyó bastante con su notable dedicación, disciplina, experiencia, consejos y paciencia, quien además me ayudó a cultivar, pulir y perfeccionar mis cualidades como científico.

Luego, quiero agradecer a mi *Alma mater* la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) quien desde la ENP 6 “Antonio Caso”, en su momento la Facultad de Ciencias y ahora el Instituto de Ciencias Nucleares me ha ofrecido un lugar donde estudiar y trabajar en mi pasión. Más aún gracias UNAM por ser mi hogar de años y por mantener vivo tu carácter público, ya que éste le da la oportunidad de acceder a estudios universitarios y de posgrado a personas con pocos recursos económicos como yo.

Quiero agradecer a todos los mexicanos que financian al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT). Doy las gracias al CONACyT por haberme otorgado la beca de doctorado # 271523, también al proyecto de CONACyT #237503 y al proyecto de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA) # IN103319 que me brindaron el apoyo económico necesario para obtener el grado de doctor. Aprovecho en este párrafo para agradecer a la UNAM y al Posgrado en Ciencias Físicas por el Programa de Apoyo a los Estudios de Posgrado (PAEP) por haberme otorgado el recurso económico para acudir a eventos nacionales e internacionales. En particular, para acudir a la *47th British Universities Summer School in Theoretical Elementary Particle Physics* (BUSSTEPP), en University College London (UCL), Londres, Reino Unido en 2017 y al *Workshop: Topological Matter Beyond the Ten-Fold Way*, en Nordic Institute for Theoretical Physics (NORDITA), Estocolmo, Suecia en 2018. De igual manera, estoy muy agradecido con el Dr. Luis Fernando Urrutia Ríos por su apoyo complementario para ir a Londres y a Estocolmo, ya que dichas oportunidades me permitieron impartir pláticas en UCL, NORDITA. También, quiero aprovechar el apoyo de la Dra. Jutta Kunz por la invitación y pago de los vuelos para impartir los seminarios en Carl von Ossietzky Universität Oldenburg.

También estoy muy agradecido con los miembros de mi Comité Tutorial: el Dr. José David Vergara Oliver y el Dr. Hugo Aurelio Morales Técotl, quienes siempre me brindaron su apoyo, consejos y discusiones para mejorar mi vocación como científico.

A los miembros del jurado: el Dr. Luis Fernando Urrutia Ríos, el Dr. José Alberto Martín Ruiz, el Dr. Mauro Cambiaso Harb, el Dr. Miguel Ángel Pérez Angon y al Dr. Rubén Gerardo Barrera Pérez les quiero agradecer por el tiempo dedicado en la revisión de esta tesis y sus valiosas aportaciones para mejorar la calidad de este trabajo. En particular, al Dr. Rubén Gerardo Barrera Pérez le quiero agradecer por las numerosas discusiones que sostuvo con el Dr. Luis Fernando Urrutia Ríos y conmigo durante el primer semestre de 2019 ya que me ayudaron a profundizar más el entendimiento físico de mi trabajo doctoral.

Nunc gratias Tibi ago pro omnibus, pro Infinito Amore, pro mea vita et pro hoc facto, Deo meo! Quoque gratias Tibi ago pro Materno Amore et pro Magna Pietate, Mater Maria!

A mi papá y a mi mamá les quiero agradecer por su inconmensurable sacrificio, amor y apoyo. Este logro indudablemente también es de ustedes. No hay palabras para agradecerle a mi hermanita Sony, mi mejor amiga y quien me motiva a ser siempre un mejor ser humano. Gracias también a la Tiny cuyo amor incondicional nos cambió la vida a mi familia y a mí.

También quiero agradecer el apoyo de mi familia adoptiva: a papá Ángel, a mamá Lulú, a mis hermanos Ángel y Fer, quienes son la prueba clara de que la familia va más allá de la sangre. Es necesario agradecer a mi abuelito Isidro, a mi abuelita Luisa, a PapáLalo y a MamáLili cuyos ejemplos de calidad humana, infinito sacrificio, trabajo duro y amor incondicional me enseñaron que el trabajo dignifica al ser humano y que nunca se debe caer en el conformismo.

Jetzt möchte ich Christine für alles bendanken, weil wirklich mein Leben von ihr gefärbt wurde. Sie hat mir immer geholfen, um ein besserer Mensch zu sein. Christine, du bist meine Motivation und alle meine Gründe. Ich liebe dich so sehr.

Espero no olvidar a nadie en los siguientes agradecimientos a mis amigos. Primero, quiero agradecer a aquellos que me acompañaron en la aventura de vivir solo y compartir el ambivalente camino del doctorado: A Chava y a Turri que en verdad son desde hace tiempo mis hermanos y ejemplos a seguir. Aprovecho para agradecerle a Omar que fue postdoc de mi tutor, quien me ayudó a madurar aún más académicamente y a quien considero un gran amigo y también un ejemplo a seguir.

A mis amigos de la vida que quiero como hermanos a Rulo y Paty, a Omar y Eden, les quiero agradecer por hacer del camino de la vida algo mucho más llevadero. Compartir con ustedes la vida desde hace años me enseña lo importante de saborear todos los matices de la vida.

A Dany le agradezco su ejemplo de lucha incansable, cuya discapacidad física no lo frena a que su eterna y buena actitud se mantenga firme como roca. A Lala por ser una guerrera de la vida, un ejemplo de entrega por su familia y una muestra de cuan importante es la lealtad en una amistad.

A mis amigos que coleccioné en mi andar de la vida: Viri, Rafa, Ale, Gerardo, Sergio, Miri, Fer y Patsy. A ustedes les quiero agradecer por soportarme en mis peores momentos, por hacerme sentir querido por ser quien soy, por hacerme sentir tan vivo con cada anécdota que experimentamos. Gracias por cada comida, bebida, risa, carcajada y tontería que hacemos.

A mis amigos de las retas de “fucho” de la prepa: Ángel mejor conocido como “Sheriff”, a Paco C. y a Hazel les agradezco mucho por seguir con la amistad. Me alegra saber que pese al pasar de los años nuestra amistad siga y que sigamos compartiendo el gusto por el fútbol aunque ahora ya no “cascareemos” tanto como antes.

También a mis amigos de la prepa que conocí por la esgrima y que comparten el gusto por la ciencia y el conocimiento: Ayesha y Juan. Gracias por las noches de pizza en Copilco, siempre debatir y discutir con ustedes es un placer.

A mis amigos de la prepa Ale y Mede, Greta y Rash, Diana, Alma, Narcy también les debo mucho. Ustedes siempre me han hecho palpar lo valioso y fundamental que es la amistad para el ser humano. Gracias por todas las reuniones para comer, jugar, beber, echar cotorreo y reír a morir.

Es turno de agradecer a mis amigos del “Call Center” del ICN y anexos con quienes compartí cubículo, comidas, trabajo, discusiones de Física, discusiones de la vida, frustraciones, alegrías, partidas de ajedrez, partidas de Go, tardes de pizza, tardes de Risk, y otros juegos de mesa más. Ellos son: Teco, Víctor Hugo, Carlos, George, Eduardo, Edgar Guzmán, JJ, Sol y Adrian, Eddie, Juan Carlos y Silvia, Edgar, Alejo, Nader, Emmanuel, Daniel, Héctor, Louis, los químicos George y Adriana, Tona, Daniel, Goyo y Rosa.

Quiero agradecer a todos mis amigos y compañeros del fútbol cuando jugué en el equipo Fútbol Club Perros de la Reserva, en el equipo varonil y mixto de la Liga de Ingeniería ya que me ayudaron siempre a despejar mi mente con el deporte mientras fui el cancerbero de dichos equipos.

Agradezco a Benito y Caroline, a Cristóbal y a Tania por haber compartido con Christine y conmigo varias tardes de pláticas, comidas y bebida. Indudablemente siempre me la pasé a gusto con ustedes.

Finalmente, quiero agradecer a mis amigos Iván, Luis, Vero, Víctor y Margarita por compartir estos últimos años el departamento conmigo. Por escucharme, apoyarme y siempre echar cotorreo. Sin duda alguna, se agradece siempre tener amigos que hagan ameno el lugar donde uno vive.

The Battle of Pelennor Fields

from Lord of the Rings: The Return of the King

Howard Shore

A

Piano

Pno.

Pno.

Pno.

Pno.

29

Pno.

35

Pno.

B

44

Pno.

52

Pno.

60

Pno.

Pno.

69

C

Pno.

Pno.

Pno.

Pno.

87

Pno.

Measures 92-95. The right hand features chords and single notes, while the left hand has a steady eighth-note accompaniment.

Pno.

Measures 96-99. The right hand has a melodic line with a slur, while the left hand continues the eighth-note accompaniment.

Pno.

Measures 100-103. The right hand has chords with a fermata, while the left hand continues the eighth-note accompaniment.

Pno.

Measures 104-107. The right hand has a melodic line with a slur, while the left hand continues the eighth-note accompaniment.

Pno.

Measures 108-111. The right hand has chords and a melodic line, while the left hand continues the eighth-note accompaniment.

Pno.

135

Pno.

139

Índice general

Abstract	13
1. Objetivo	14
2. Introducción	15
2.1. Magnetoeléctricos	15
2.2. Aislantes topológicos	17
3. θ-Electrodinámica	23
3.1. La θ -Electrodinámica como teoría efectiva de los magnetoeléctricos	23
3.2. Formulación de la θ -ED	25
3.2.1. Método de Superposición y de Condiciones a la Frontera en el caso de simetría plana	30
3.2.1.1. Aplicación: Carga eléctrica puntual estática	31
4. Función de Green dependiente del tiempo para simetría plana y un solo medio dieléctrico homogéneo	36
4.1. Método de la Función de Green	36
4.2. Integración de la Función de Green en el espacio de coordenadas	42
4.2.1. Componente $\bar{G}^0_0(x, x')$	42
4.2.2. Componentes $\bar{G}^0_i(x, x')$	45
4.2.3. Componentes $\bar{G}^i_j(x, x')$	47
4.3. Integración de la Función de Green en el régimen de campo lejano	50
4.3.1. $\bar{G}^\mu_{ED\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ en el régimen de campo lejano	50
4.3.2. $\bar{G}^\mu_{\theta\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ en el régimen de campo lejano	51
4.3.3. $\bar{G}^\mu_{\theta^2\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ en el régimen de campo lejano	65
4.3.3.1. Componentes $\bar{G}^0_{\theta^2\bar{i}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ en el régimen de campo lejano	66
4.3.3.2. Componente $\bar{G}^0_{\theta^2 0}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ en el régimen de campo lejano	75
4.3.3.3. Componentes $\bar{G}^i_{\theta^2\bar{j}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ en el régimen de campo lejano	79
4.3.3.3.1. Componentes $\bar{G}^1_{\theta^2 2}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ y $\bar{G}^2_{\theta^2 1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$	80
4.3.3.3.2. Componente $\bar{G}^1_{\theta^2 1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$	80
4.3.3.3.3. Componente $\bar{G}^2_{\theta^2 2}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$	84
4.3.3.4. Forma compacta de $\bar{G}^\mu_{\theta^2\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$	87

4.3.4.	La fase de la Función de Green en el régimen de campo lejano	88
4.3.5.	Análisis de las ondas superficiales	89
4.3.5.1.	Función de Green lejos de la interfaz Σ	90
4.3.5.2.	Función de Green cerca de la interfaz Σ	100
5.	Aplicaciones	110
5.1.	Partícula con velocidad constante y perpendicular al TI	112
5.1.1.	Solución completa en el espacio de coordenadas	112
5.1.1.1.	Cálculo de $A^3(x)$	113
5.1.1.2.	El cálculo de $A^1(x)$ y $A^2(x)$ y la elección del tiempo retardado adecuado	114
5.1.1.3.	Cálculo de $A^0(x)$	125
5.1.2.	El campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$	128
5.1.3.	El régimen de campo lejano y la Radiación electromagnética de Vavilov-Čerenkov Reversa (RVČR)	134
5.1.3.1.	El cuadripotencial $A^\mu(\mathbf{x}; \omega)$	136
5.1.3.1.1.	Obtención de $A^0(\mathbf{x}; \omega)$	137
5.1.3.1.2.	Obtención de $A^1(\mathbf{x}; \omega)$	141
5.1.3.1.3.	Obtención de $A^2(\mathbf{x}; \omega)$	143
5.1.3.1.4.	Obtención de $A^3(\mathbf{x}; \omega)$	144
5.1.3.2.	El campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{x}; \omega)$	144
5.1.3.3.	Distribución angular de la energía total radiada por unidad de frecuencia	146
5.1.3.4.	Energía total radiada	154
5.1.3.5.	Órdenes de magnitud de la RVČR	157
6.	Función de Green dependiente del tiempo para simetría plana y un medio dieléctrico inhomogéneo	159
6.1.	Ecuaciones para los modos normales en θ -Electrodinámica con simetría plana	159
6.2.	FG para los operadores \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2	164
6.2.1.	Condiciones de Borde para el operador \mathcal{O}_2	165
6.2.2.	Obtención de la FG para el operador \mathcal{O}_2	166
6.3.	Método de la FG para hallar los modos de la θ -Electrodinámica	167
6.4.	Reconstrucción del campo electromagnético a partir de las funciones escalares X y Y	169
6.5.	Verificación de las Condiciones de Borde en θ -ED	171
6.5.1.	Verificación de la condición de borde en \mathbf{D}_z	172
6.5.2.	Verificación de la condición de borde \mathbf{B}_z	173
6.5.3.	Verificación de la condición de borde \mathbf{B}_\perp	173
6.5.4.	Verificación de la condición de borde \mathbf{E}_\perp	175
6.6.	Coefficientes modificados de reflexión y transmisión en θ -ED	176

6.6.1.	Coeficientes modificados de reflexión y transmisión para la polarización TE176	
6.6.1.1.	Obtención del coeficiente $R_{TE,TE}$ a partir de $X(z > 0)$	177
6.6.1.2.	Obtención del coeficiente $T_{TE,TE}$ a partir de $X(z < 0)$	179
6.6.1.3.	Obtención del coeficiente $R_{TM,TE}$ a partir de $Y(z > 0)$	181
6.6.1.4.	Obtención del coeficiente $T_{TM,TE}$ a partir de $Y(z < 0)$	182
6.6.2.	Coeficientes modificados de reflexión y transmisión para la polarización TM	183
6.6.2.1.	Obtención del coeficiente $R_{TM,TM}$ a partir de $Y(z > 0)$	184
6.6.2.2.	Obtención del coeficiente $T_{TM,TM}$ a partir de $Y(z < 0)$	185
6.6.2.3.	Obtención del coeficiente $R_{TE,TM}$ a partir de $X(z > 0)$	186
6.6.2.4.	Obtención del coeficiente $T_{TE,TM}$ a partir de $X(z < 0)$	187
6.7.	Función de Green extendida para el campo eléctrico	188
6.7.1.	Relaciones de reciprocidad de Lorentz y Onsager para la FG extendida .	191
7.	Conclusiones	193
A.	Fórmula de Kubo para la susceptibilidad	199
B.	Conductividad Hall como respuesta a un campo externo	204
C.	La conductividad Hall como Invariante Topológico	213
D.	Obtención de la Función de Green reducida	216
E.	Función de Green en el régimen de campo lejano obtenida con el método de la fase estacionaria y de <i>steepest descent</i>	221
E.1.	Método de la fase estacionaria	221
E.1.1.	$\bar{G}_{\theta\nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ en el régimen de campo lejano	222
E.1.2.	$\bar{G}_{\theta^2\nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ en el régimen de campo lejano	225
E.1.2.1.	Componente $\bar{G}_{\theta^2 0}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ en el régimen de campo lejano . . .	225
E.1.2.2.	Componentes $\bar{G}_{\theta^2 i}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ en el régimen de campo lejano . . .	226
E.1.2.3.	Componentes $\bar{G}_{\theta^2 j}^i(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ en el régimen de campo lejano . . .	227
E.1.2.3.1.	Componente $\bar{G}_{\theta^2 1}^1(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$	228
E.1.2.3.2.	Componente $\bar{G}_{\theta^2 2}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$	229
E.2.	Método de <i>Steepest Descent</i>	230
E.2.1.	$\bar{G}_{\theta\nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$	231
E.2.2.	$\bar{G}_{\theta^2\nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$	231
F.	Tiempos retardados	233
G.	Potenciales de un monopolo magnético	234
H.	Obtención explícita de las ecuaciones de los modos normales de la θ-Electrodinámica	238

Abstract

In this doctoral thesis we study the modifications of the electromagnetic radiation at an effective level that arise when time-dependent external sources are exposed to a magnetoelectric medium [1, 2] with planar symmetry such as antiferromagnets[3], topological insulators [4, 5, 6] and Weyl semimetals [7]. To model the electromagnetic response of these materials we use θ -Electrodynamics which is a topological extension of Maxwell Electrodynamics and whose action consists of Maxwell action plus the Pontryagin electromagnetic invariant coupled to a scalar field θ . This extension has the same form as Wilczek Axion Electrodynamics [8] but the difference is that for θ -Electrodynamics the scalar field θ is piecewise and has no dynamics [9].

For this aim we take as basis the articles [10, 11, 12] that use θ -Electrodynamics to study the electromagnetic response of magnetoelectric media close to static external sources. We follow closely the article [13], which offers a first treatment of external sources with temporal dependence. The latter articles study the response of this kind of materials through the Green's function method, which is the base of this doctoral thesis. We show how to construct the Green's function in detail in order to obtain the electromagnetic field and subsequently we perform a radiation analysis for the following two configurations: (i) An external source embedded in two magnetoelectric media with planar symmetry with the same electric permittivity constant ϵ , both with magnetic permeability $\mu = 1$ and different effective parameters θ_1 and θ_2 separated by an interface Σ located at $z = 0$ and (ii) the same previous configuration but now the two magnetoelectric media have different electric permittivity constants ϵ_1 and ϵ_2 .

For the configuration (i) we establish the far-field approximation of the Green's function and apply these results to the case of a charged particle moving from one medium to the other at a high constant velocity perpendicular to the interface. From the resulting angular distribution of the radiated energy per unit frequency we provide theoretical evidence for the emergence of reversed Vavilov-Čerenkov radiation in naturally existing magnetoelectric media. In the case where one of the magnetoelectrics is a 3D topological insulator, TlBiSe₂ for example, located in front of a regular insulator, we estimate that an average forward Vavilov-Čerenkov radiation with frequency ~ 2.5 eV (~ 500 nm) will produce a highly suppressed reversed Vavilov-Čerenkov radiation which can be characterized by an effective frequency in the range of $\sim (4 \times 10^{-3} - 0.5)$ meV. However, this value compares favorably with recent measurements in left-handed metamaterials yielding reversed Vavilov-Čerenkov radiation with frequencies of the order of $(1.2 - 3.9) \times 10^{-2}$ meV.

Capítulo 1

Objetivo

El objetivo de esta tesis doctoral es estudiar las modificaciones a la radiación electromagnética a nivel efectivo que surgen cuando se exponen fuentes externas dependientes del tiempo frente a un medio magnetoeléctrico [1, 2] con simetría plana que pueden ser: antiferromagnetos [3], aislantes topológicos (TIs por su acrónimo en inglés) [4, 5, 6] y semimetales de Weyl [7]. Para modelar la respuesta electromagnética de estos materiales se usará la θ -Electrodinámica (θ -ED) que es una extensión topológica de la Electrodinámica de Maxwell, cuya acción consiste en la acción de Maxwell más el invariante de Pontryagin electromagnético acoplado a un campo escalar θ . Esta extensión tiene la misma forma que la Electrodinámica axiónica de Wilczek [8], con la diferencia de que el campo escalar θ de la θ -ED es constante por pedazos y no es dinámico [9].

Para conseguir nuestro objetivo se tomarán como base los artículos [10, 11, 12] que utilizan la θ -ED para estudiar la respuesta electromagnética de los magnetoeléctricos (MEs) ante fuentes externas estáticas y en mayor medida el artículo [13], el cual ofrece un primer análisis de cómo abordar el tratamiento de las fuentes externas con dependencia temporal. Estos artículos estudian la respuesta de los MEs desde la perspectiva del método de la función de Green (FG), la cual es el cimiento de esta tesis doctoral para poder obtener el campo electromagnético y posteriormente realizar un análisis de la radiación cuando se tienen las siguientes dos configuraciones: (i) una fuente externa inmersa en dos MEs de simetría plana con la misma constante de permitividad eléctrica ϵ , ambos con permeabilidad magnética $\mu = 1$ y diferentes parámetros efectivos θ_1 y θ_2 separados por una interfaz Σ localizada en el plano $z = 0$ y (ii) una fuente externa inmersa en dos MEs de simetría plana con diferentes permitividades eléctricas constantes ϵ_1, ϵ_2 , ambos con permeabilidad magnética $\mu = 1$ y diferentes parámetros efectivos θ_1 y θ_2 separados por una interfaz Σ localizada en el plano $z = 0$.

Capítulo 2

Introducción

En este capítulo daremos una introducción a los materiales que pretendemos describir con la teoría efectiva denominada como θ -Electrodinámica (θ -ED) y describiremos sus propiedades. En la sección 2.1 comenzamos por explicar la clasificación general de dichos materiales que reciben el nombre de magnetoeléctricos (MEs) y sus propiedades. En la sección 2.2 describiremos brevemente un grupo de materiales de los MEs que se llaman aislantes topológicos (TIs) y sus propiedades, estos materiales serán en los que más nos enfocaremos a lo largo de esta tesis doctoral.

2.1. Magnetoeléctricos

El efecto magnetoeléctrico (EME) es un fenómeno que consiste en la generación de una polarización eléctrica (magnética) debido a la presencia de un campo magnético (eléctrico). Fue predicho por primera vez por Pierre Curie [14] en 1894, mientras que el término **magnetoeléctrico** fue acuñado por Debye [15] hasta 1926. El EME puede ser lineal o no lineal con respecto a los campos electromagnéticos externos y en general depende de la temperatura T , el cual se puede expresar en la siguiente forma [2]:

$$P_i(\mathbf{H}, T) = \alpha_{ij}(T)H_j + \beta_{ijk}(T)H_jH_k, \quad (2.1)$$

$$M_i(\mathbf{E}, T) = \alpha_{ij}(T)E_j + \beta_{ijk}(T)E_jE_k, \quad (2.2)$$

donde se usa la convención de Einstein para índices repetidos, P_i son las componentes del vector de polarización eléctrica, M_i son las componentes del vector de magnetización, E_i son las componentes del campo eléctrico, H_i son las componentes del campo magnético y α_{ij} y β_{ijk} representan las susceptibilidades magnetoeléctricas lineal y no lineal respectivamente. En 1959, Dzyaloshinskii usó argumentos de simetría para derivar la forma del acoplamiento magnetoeléctrico para el material Cr_2O_3 [16], cuya confirmación experimental se dio pocos meses después [17, 18]. Otros materiales que presentan el EME son BiMnO_3 y BiFeO_3 . Desafortunadamente, dicho efecto es muy pequeño de aproximadamente $10^{-4} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$ para el Cr_2O_3 [19] que es el compuesto natural por excelencia para medir dicho efecto [16] y dicho valor es típico

para este efecto [20]. La pequeñez se debe a que el término lineal está limitado por la relación $\alpha_{ij} \leq \epsilon_{ii}\mu_{jj}$ [21], con ϵ_{ii} siendo la traza del tensor de permitividad eléctrica y μ_{jj} la traza del tensor de permeabilidad magnética.

Recientemente los acoplamientos magnetoeléctricos en sólidos han sido objeto de intensa investigación teórica y experimental [22, 23, 24]. Como ya se mencionó, los MEs lineales están caracterizados por el tensor de polarizabilidad (o susceptibilidad) magnetoeléctrica α_{ij} , el cual se define como la respuesta de la magnetización ante un cambio de un campo eléctrico o equivalentemente como la respuesta de la polarización ante un cambio de un campo de inducción magnética, i.e.

$$\alpha_{ij} = \left[\frac{\partial M_j}{\partial E_i} \right]_{\mathbf{B}=\mathbf{0}} = \left[\frac{\partial P_i}{\partial B_j} \right]_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} \equiv \tilde{\alpha}_{ij} + \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\theta}{4\pi^2} \delta_{ij}, \quad (2.3)$$

donde θ es un parámetro adimensional. La igualdad se debe a que $M_j = \partial\mathcal{E}/\partial B_j$ y $P_i = \partial\mathcal{E}/\partial E_i$, con \mathcal{E} siendo la densidad de entalpía electromagnética [4, 25]. Aquí $\tilde{\alpha}_{ij}$ denota a la parte sin traza del tensor α_{ij} . Dejando de lado las sobresalientes propiedades microscópicas de los MEs y como se mencionó en el Capítulo 1 de esta tesis doctoral, aquí nosotros sólo consideraremos la teoría efectiva del medio que describe la respuesta electromagnética que surge del término proporcional a δ_{ij} en la ec. (2.3), i. e. asumiremos un material isotrópico. Dicha descripción efectiva se logra por medio del Lagrangiano de Maxwell estándar $\mathcal{L}_{\text{ED}} = \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} J_\mu A^\mu$ más un término adicional $\mathcal{L}_\theta = -\frac{e^2}{\hbar c} \frac{\theta}{4\pi^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$. Aquí \mathbf{E} es el campo eléctrico y \mathbf{B} es el campo de inducción magnética, $\alpha = e^2/(\hbar c)$ es la constante de estructura fina y θ es un campo conocido como la polarizabilidad magnetoeléctrica (escalar) (PME) en Materia Condensada [25], o como el campo axiónico en Física de Partículas [8, 26]. De este modo, la suma de \mathcal{L}_θ al Lagrangiano de Maxwell se le refiere usualmente como la densidad Lagrangiana para la Electrodinámica Axiónica. Sin embargo, nosotros consideraremos θ como un parámetro adicional que caracterizará al material, en el mismo sentido que la permitividad ϵ y la permeabilidad μ lo hacen, lo cual nos conduce a restringir la designación de Electrodinámica Axiónica a θ -Electrodinámica (θ -ED) puesto que θ no es un campo dinámico. La naturaleza de la PME depende del tipo de material ME en consideración y está profundamente relacionada con las simetrías magnéticas de la sustancia [16, 27] y/o de las propiedades de su estructura de bandas [28]. La PME se puede calcular a través de una fórmula de tipo Kubo de respuesta lineal, una vez que el Hamiltoniano del modelo microscópico para el material se conoce. En el caso particular de los materiales que presentan PME se suele modelar su permitividad ϵ con base en el modelo de resonancia de un solo oscilador del tipo Drude-Lorentz [29]. La principal característica de los materiales MEs, la cual es responsable de la mayoría de sus efectos inusuales, es el EME que surge de la contribución adicional \mathcal{L}_θ [8, 30]. Este acoplamiento produce cargas efectivas y densidades de corriente efectivas que dependen de los campos, las cuales permiten la generación del EME. En este punto, quisiéramos enfatizar que estamos lidiando con la Electrodinámica (ED) estándar de un material derecho* ($\epsilon > 1$, $\mu > 1$ e índice de refracción $n = \sqrt{\epsilon\mu} > 1$) suplementado sólo por fuentes adicionales dependientes del campo.

*Por derecho nos referiremos a que la triada conformada por el campo eléctrico $\bar{\mathbf{E}}$, el campo magnético $\bar{\mathbf{B}}$ y el vector de onda \mathbf{k} formen una triada vectorial derecha mientras se propaga en el material en cuestión. Esto se abordará con todo detalle en la introducción del capítulo 5 en el contexto de las aplicaciones del formalismo

2.2. Aislantes topológicos

Como se mencionó en el Capítulo 1 como ejemplos de MEs se tienen: antiferromagnetos [3], aislantes topológicos (TIs por su acrónimo en inglés) [4, 5, 6] y semimetales de Weyl [7]. El descubrimiento de los TIs ha abierto una ventana para estudiar el EME, que a diferencia del descrito en la subsección previa, éste tiene un origen topológico. Por ello y porque estamos más interesados en ellos, en esta sección se le dedicará un espacio para una descripción general de dichos materiales.

Para comprender lo que es un aislante topológico (TI), comecemos por entender su nombre. Primero, recordaremos lo que es un aislante, luego abordaremos brevemente la parte topológica del nombre que lo compone.

Un aislante es un material cuyas cargas eléctricas internas no se mueven libremente, pues una corriente eléctrica muy pequeña fluye ante la influencia de un campo eléctrico. Esto contrasta con otros materiales, tales como semiconductores y conductores, los cuales conducen corrientes eléctricas más fácilmente. Estos materiales se caracterizan a través de la resistividad eléctrica, propiedad que describe qué cantidad de electrones se “oponen” a ser movidos en una dirección definida del material ante un campo eléctrico externo o también se caracterizan por medio del inverso de la resistividad eléctrica que recibe el nombre de conductividad eléctrica σ , propiedad que describe qué cantidad de electrones se “dejan” mover en una dirección definida del material ante ese campo eléctrico externo. La diferencia de esta capacidad entre un buen aislante y buen conductor es asombrosa. La resistividad eléctrica de un metal puro puede ser tan baja como $10^{-10} \Omega \cdot \text{cm}$ a una temperatura de 1K, aparte de la posibilidad de ser superconductor. La resistividad de un aislante puede ser tan grande como $10^{22} \Omega \cdot \text{cm}$. Este rango de separación de 32 órdenes de magnitud puede ser el más amplio de cualquier propiedad física común de los sólidos [31].

El origen microscópico de la resistividad eléctrica se explica en términos de las bandas de energía (ver Fig. 2.1) descritas por la Mecánica Cuántica, las cuales son las estructuras en que se ordenan los electrones en un cristal y que están separadas por regiones de energía para las cuales no existen funciones de onda de los electrones orbitales. Tales regiones prohibidas se llaman brechas de energía y resultan de la interacción entre los electrones de conducción con los núcleos de los iones del cristal [31].

Una vez que se obtiene la estructura de bandas del sólido, se llenan las bandas con los electrones yendo de menor a mayor energía hasta un cierto valor de la energía dictado por la energía de Fermi E_F . A la banda ocupada más alta se le conoce como banda de valencia, en cambio a la banda vacía más baja recibe el nombre de banda de conducción. Ahora bien, dependiendo donde se sitúe la energía de Fermi E_F en la estructura de bandas sabremos qué clase de sólido es [32].

Un cristal se comporta como aislante si la energía de Fermi E_F obliga a los electrones a

que desarrollaremos en esta tesis.

llenar exactamente una o más bandas. De este modo, un campo eléctrico externo no generará flujo de corriente en un aislante (suponiendo que el campo eléctrico no sea lo suficientemente fuerte como para alterar la estructura electrónica del material). Como siempre se tendrá que una banda llena está separada por una brecha de energía de la siguiente banda de mayor energía, no hay una manera continua de cambiar el momento total de los electrones si cada estado accesible está lleno. Es decir, nada cambia cuando el campo eléctrico externo se aplica (ver Fig. 2.1a). Por otra parte, el cristal se comportaría como metal si la energía de Fermi E_F permite a los electrones llenar parcialmente una o más bandas, lo cual se puede obtener cuando hay traslape en las bandas de energía (ver Fig. 2.1b y Fig. 2.1c) [31].

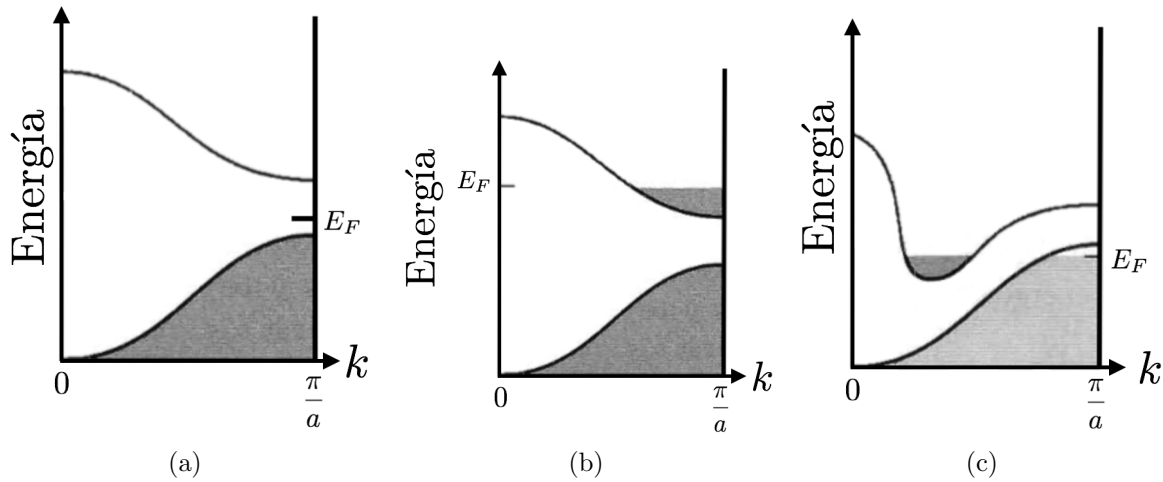


Figura 2.1: Estados de ocupación y estructura de bandas como función de la energía y de la magnitud del momento de los electrones \mathbf{k} dando lugar a: (a) un aislante, (b) un metal debido al traslape de las bandas y (c) un metal debido a la concentración de electrones. Aunque la brecha de energía aquí esquematizada puede cambiar debido a fluctuaciones térmicas o por impurezas infringidas al material en cuestión [31].

Por otro lado, la parte topológica del nombre de los TIs se remonta al descubrimiento experimental del Efecto Hall Cuántico Entero (IQHE por sus siglas en inglés) hecho por von Klitzing, Dorda y Pepper [33] en 1980, pues con éste surgió el reto de explicarlo a nivel teórico. En 1985, Kohmoto y Thouless et al. [34, 35] demostraron que la fórmula de la conductividad eléctrica σ_{xy} era un invariante topológico. Dicha fórmula para σ_{xy} se deduce a partir de la fórmula de Kubo para la susceptibilidad o función respuesta $\chi_{\hat{O},\hat{Q}}(\omega + i\delta)$ que se enuncia a continuación:

$$\chi_{\hat{O},\hat{Q}}(\omega + i\delta) = \sum_{a,b} \left(\frac{e^{-\beta E_a} - e^{-\beta E_b}}{Z_0} \right) \frac{\langle a|\hat{O}|b\rangle\langle b|\hat{Q}|a\rangle}{\hbar\omega + i\hbar\delta + E_a - E_b}, \quad (2.4)$$

cuya deducción se basa en la Teoría de Respuesta Lineal y se puede consultar en el apéndice A de esta tesis doctoral. En la ec. (2.4) E_a y E_b son las energías propias del sistema en equilibrio

con estados $|a\rangle$ y $|b\rangle$, Z_0 es la función de partición asociada al Hamiltoniano en equilibrio y no perturbado por la fuente externa \hat{Q} , la cual genera la respuesta \hat{O} .

Ahora bien, para convertir la ec. (2.4) en la ecuación apropiada para σ_{xy} se eligen $\hat{O} = \hat{j}_i$ y $\hat{Q} = \hat{j}_k$ como los operadores de densidad de corriente para una sola partícula con $i, k = x, y, z$ denotando las componentes espaciales de éstos y puesto que se está tratando con electrones se debe elegir a $Z_0^{-1}e^{-\beta E_a}$ como la distribución de Fermi-Dirac $f(E_a)$. De este modo, la ec. (2.4) se convierte en la ecuación de Nakano-Kubo [34]. La derivación detallada de dicha ecuación se encuentra en el apéndice B de esta tesis doctoral pero la escribimos enseguida:

$$\sigma_{xy} = -\frac{ie^2\hbar}{Vm^2} \sum_{E_a < E_F < E_b} \frac{\langle a|\hat{p}_x|b\rangle\langle b|\hat{p}_y|a\rangle - \langle a|\hat{p}_y|b\rangle\langle b|\hat{p}_x|a\rangle}{(E_a - E_b)^2}, \quad (2.5)$$

donde V es el volumen del sistema, E_a es ahora la energía de la banda de valencia, E_b es ahora la energía de la banda de conducción, las cuales dependerán del vector de onda \mathbf{k} y también aparece m^2 como la masa del electrón porque se cambiaron los operadores de densidad de corriente por los operadores de momento \hat{p}_x y \hat{p}_y . Dicho cambio se realizó para hacer contacto con la fórmula que utilizaron Kohmoto y Thouless et al. [34, 35] para demostrar que la ec. (2.5) era un invariante topológico. Al ser la ec. (2.5) un invariante topológico, se puede reescribir e interpretar en términos de conceptos topológicos tales como la conexión de Berry

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu dk^\mu \equiv i\langle \mathbf{k} | d\mathbf{k} \rangle, \quad (2.6)$$

donde $d = (\partial/\partial k^\mu) dk^\mu$ es la derivada exterior, de la curvatura de Berry

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} = i\langle d\mathbf{k} | \wedge | d\mathbf{k} \rangle = i\langle \partial_\mu \mathbf{k} | \partial_\nu \mathbf{k} \rangle dk^\mu \wedge dk^\nu = \mathcal{F}_{\mu\nu} dk^\mu \wedge dk^\nu \quad (2.7)$$

y del primer número de Chern asociado a la curvatura \mathcal{F} dado por

$$C_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^2} \mathcal{F}, \quad (2.8)$$

donde \mathbb{T}^2 denota al toro y es la zona de Brillouin de un cristal bidimensional con dos simetrías traslacionales independientes [32].

De esta manera, se demostró que el IQHE tenía un origen topológico por medio de la siguiente ecuación:

$$\boxed{\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} C_1}. \quad (2.9)$$

La demostración de esta ecuación y por consiguiente la invariancia topológica de σ_{xy} se encuentra en el Apéndice C. Además cabe resaltar que $C_1 \in \mathbb{Z}$ [5]. No obstante, a través del primer número de Chern C_1 es posible establecer la siguiente clasificación para los aislantes [32]: si el primer número de Chern es igual a cero se les denominará **aislantes triviales** (aquellos que no conducen corriente alguna ni longitudinal ni transversalmente, los cuales corresponden con

los aislantes comunes de la ED); mientras que aquellos que tengan su primer número de Chern distinto de cero les llamaremos **aislantes topológicos robustos**[†] [36], siendo estos últimos los que nos interesarán aquí para estudiar su comportamiento por medio de la θ -ED.

Con el nombre de los TIs aclarado, procedemos a describirlos de manera más precisa como se hace en la literatura. Los TIs tridimensionales robustos son una clase fascinante de materiales derechos[‡] que pueden albergar un estado de superficie helicoidal conductor con un número impar de fermiones en el límite de baja energía, cada uno teniendo la relación de dispersión de un cono de Dirac no degenerado con un punto de cruce en/o cerca del nivel de Fermi E_F . Estos puntos de cruce sin brecha se les llama puntos de Dirac. No obstante, los TIs se comportan como aislantes magnetoeléctricos en el bulto con una brecha de energía finita [25, 37, 38]. El estado de superficie está protegido topológicamente por la simetría de inversión temporal y/o por la de inversión espacial, acoplado con las propiedades de bloqueo de espín-momento. Lo último significa que la orientación de los espines de los electrones sobre la superficie del cono de Dirac están siempre obligados a tener una dirección perpendicular a su momento [5]. Una característica distintiva de los TIs tridimensionales robustos con respecto a otros MEs es que el parámetro adimensional θ mencionado en la sección pasada, que en este caso recibe el nombre de polarizabilidad magnetoeléctrica orbital (PMO), es de naturaleza topológica y surge de la estructura de bandas del bulto. La PMO se da por un flujo de Berry no abeliano sobre la zona de Brillouin y resulta en un múltiplo entero de π [5, 25, 39].

Vale la pena en este punto, dar un breve resumen de la incipiente pero muy efervescente y activa historia de los TIs, exhibiendo así el interés de la comunidad científica por estos materiales. La existencia de los TIs fue predicha en las Refs. [40, 41, 42] en los años 2005 y 2006 y su observación en pozos cuánticos bidimensionales de HgTe/CdTe se reportó en el artículo [43] en 2007. Luego, los autores de las Refs. [44, 45, 46] descubrieron en los años 2007 y 2009 que la caracterización del estado Hall cuántico de espín (en inglés *quantum spin Hall insulator state*) tiene una generalización natural en tres dimensiones. Muy poco después en 2007, este comportamiento se predijo en diversos materiales reales [47], que incluían al $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ así como al HgTe tensado (tensado se refiere a que el material está sometido a grandes esfuerzos externos) y el α -Sn. Posteriormente en 2008, el descubrimiento experimental del primer aislante topológico tridimensional en $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ se reportó en [48]. Más tarde en 2009, una segunda generación de TIs, tales como Bi_2Se_3 , Bi_2Te_3 and Sb_2Te_3 , fue identificada teóricamente en el artículo [49] y descubierta experimentalmente en ese mismo año en las Refs. [49, 50]. Esto llevó a la detección de una gran variedad de TIs entre los años 2009 y 2013 [51] y a su subsecuente clasificación en una tabla periódica donde se puede identificar las diferentes clases de estos materiales, que se distinguen entre sí por la presencia o ausencia de simetrías discretas como la de inversión

[†]Por robusto nos referimos a que ante cualesquiera perturbaciones externas la propiedad física (estado) permanece, gracias a la protección topológica dada por el hecho de que el número entero C_1 es invariante bajo deformaciones continuas. Si la protección fuera por simetrías dichas perturbaciones podrían romper fácilmente las simetrías. El primer ejemplo de un estado topológico observado es el ya mencionado Efecto Hall Cuántico Entero (IQHE) [33].

[‡]Ver nota al pie de página * de este capítulo.

temporal, la de hoyo-partícula y la simetría quiral [5]. Una nueva clase de TIs teorizados en 2008 en la Ref. [4] y comenzados a realizar experimentalmente en 2017 [52, 53], llamados aislantes axiónicos (AXIs por su acrónimo en inglés), han sido propuestos recientemente como una nueva arena para sondear las fases topológicas. Ellos tienen la misma PME $\theta = \pi$ que los TIs tridimensionales, con brecha en sus superficies y bulto, donde el índice topológico está protegido por inversión espacial, en vez de TRS. Se espera que se manifiesten en heteroestructuras de TI magnéticamente dopadas con una magnetización hacia adentro y hacia afuera de las interfaces superior e inferior del TI [52, 53]. También, se espera la posibilidad de tener diferentes clases de AXIs intrínsecos, los cuales no requerirían un dopamiento magnético, lo cual ya ha sido investigado en una red de pirocloro en el artículo [54] publicado en diciembre de 2018.

Cuando se rompe TRS en la interfaz generada entre un TI tridimensional robusto y un aislante convencional, sea por la aplicación de un recubrimiento magnético y/o el dopaje del TI con elementos que sean metales de transición, la apertura de la brecha en los estados de superficie induce varios fenómenos exóticos que pueden ser probados experimentalmente. Entre ellos encontramos el efecto Hall cuántico anómalo (QAH por su acrónimo en inglés), el efecto magneto-óptico cuántico, el efecto magnetoeléctrico topológico (TME por su acrónimo en inglés) y el efecto de monopolo magnético imagen, todos los cuales son consecuencia directa del cambio que sufre el parámetro θ entre las dos fases. Estos efectos también se pueden realizar en los AXIs.

El efecto QAH ya ha sido observado experimentalmente en películas delgadas del TI dopado con cromo $(\text{Bi, Sb})_2\text{Te}_3$ [55]. En la Ref. [56] la observación del efecto QAH en películas extremadamente delgadas del TI magnético $(\text{Cr}_{0.12}\text{Bi}_{0.26}\text{Sb}_{0.62}\text{Sb}_{0.62})_2\text{Te}_3$ es reportada. El comportamiento característico del efecto QAH ha sido demostrado también en películas delgadas del TI $\text{Cr}_x(\text{Bi}_{1-y}\text{Sb}_y)_{2-x}\text{Te}_3$, el cual se hizo crecer sobre sustratos semi-aislante de $\text{InP}(111)$ usando métodos de epitaxia de haz molecular [57]. También, el artículo [58] demuestra una confirmación de alta precisión del estado QAH en películas de $(\text{Bi, Sb})_2\text{Te}_3$ dopadas con V, el cual es un TI ferromagnético robusto. El efecto QAH ha sido observado también en AXIs [59]. Empleando espectroscopía en el dominio temporal de los THz, el efecto magneto-óptico cuántico ha sido observado por medio de la medición de rotaciones de Faraday y Kerr en estados QAH sobre películas del TI magnético $\text{Cr}_x(\text{Bi}_{0.26}\text{Sb}_{0.74})_{2-x}\text{Te}_3$. En este trabajo los autores también reportan la observación del efecto QAH junto con una indicación experimental del TME [60]. Las rotaciones de Faraday y Kerr cuantizadas en campos magnéticos mayores a 5 Tesla fueron observados en el TI tridimensional Bi_2Se_3 , proveyendo evidencia del TME a través de una medición indirecta del valor $\theta = \pi$ [38]. La Ref. [61] reporta una rotación de Faraday cuantizada[§] en

[§]Tanto la rotación de Faraday como la rotación de Kerr cuantizadas surgen de hacer incidir una onda electromagnética con cierta polarización sobre un TI. El efecto sobre la onda incidente consiste en dejar la onda con la misma polarización pero la fase $\phi_{F,K}$ (F de Faraday y K de Kerr) de ésta se ve modificada y su tangente es proporcional a un múltiplo entero de la constante de estructura fina α . El entero depende de los niveles de Landau más grandes que estén completamente llenos de las superficies superior e inferior de la película del TI, donde dichos niveles dependen del potencial químico y del tamaño del campo magnético que rompe TRS. En otras palabras, el TI rota el plano de polarización [4, 38].

campos magnéticos externos muy grandes cuando radiación polarizada linealmente del orden de THz pasa a través de dos superficies del TI tridimensional HgTe tensado. Esto constituye una consecuencia directa del TME, confirmando así a la Electrodinámica Axiónica como la teoría efectiva que describe la respuesta de los TIs tridimensionales robustos. Nuevamente, como hemos expuesto en la sección 2.1 es mejor designar por θ -ED a esta teoría efectiva ya que θ es un campo no dinámico. Habiendo expuesto ya las características de los materiales para los cuales la θ -ED se aplica es turno de estudiarla a fondo, lo cual será el objetivo del siguiente capítulo.

Capítulo 3

θ -Electrodinámica

En este capítulo expondremos en qué consiste la θ -Electrodinámica (θ -ED). En la Sec. 3.1 explicaremos brevemente las bases de la θ -ED como teoría efectiva de los magnetoeléctricos (MEs) que como se mencionó en el capítulo 2, los aislantes topológicos (TIs) serán la aplicación que tendremos en mayor cuenta. Por lo cual, se dedicará en esta misma sección una discusión adicional cuando se requiera que el Lagrangiano efectivo los describa. Luego, en la Sec. 3.2 plantearemos la acción que rige a la θ -ED, obtendremos las ecuaciones de Maxwell modificadas, las cuales analizaremos a fondo y además daremos las condiciones de borde modificadas que obedece la θ -ED. Después en la Sec. 3.2.1, se muestra el método de superposición y de condiciones de frontera en el caso de un TI con simetría plana. Posteriormente en la subsección 3.2.1.1, se aplica dicho método para obtener el campo eléctrico y de inducción magnética modificados cuando la fuente externa es una partícula puntual estática con carga eléctrica.

3.1. La θ -Electrodinámica como teoría efectiva de los magnetoeléctricos

Las teorías de campo efectivas (EFT por su acrónimo en inglés) juegan un papel importante en la descripción de la naturaleza porque permiten estudiar modelos dentro de un cierto rango de energías, introduciendo parámetros que toman en cuenta los efectos remanentes de las escalas de energía no consideradas [62].

Ahora bien, la θ -ED como teoría efectiva y más precisamente el Lagrangiano adicional \mathcal{L}_θ que modela el comportamiento efectivo de los MEs se puede obtener por medio de reducción dimensional a partir del modelo de un aislante con TRS en 4+1 dimensiones con un segundo número de Chern $C_2 \neq 0$. De este procedimiento, uno obtiene la teoría efectiva de los aislantes en 3+1 y 2+1 dimensiones [4]. No obstante, aquí expondremos otra forma más intuitiva. En Materia Condensada, uno se interesa en la física de los electrones sujetos a campos externos. Por ello, el Lagrangiano inicial debe tener grados de libertad fermiónicos. Luego, si el sistema es

3.1 La θ -Electrodinámica como teoría efectiva de los magnetoeléctricos 24

un aislante y los fermiones tienen una brecha*, entonces los podremos integrar para obtener una acción local efectiva para el campo electromagnético [63]. Por supuesto que muchos aislantes son triviales† y nos llevará a que $C_1 = 0$. Sin embargo, como vimos en la sección 2.2 existen muchos TIs no triviales que conllevan a un $C_1 \neq 0$, por lo que sí tendrán una contribución adicional al Lagrangiano de Maxwell. Para apreciar esto último, consideremos la siguiente función generadora:

$$Z[A_\mu] = \int D\psi D\bar{\psi} e^{\int d^4x \bar{\psi} (i\mathcal{D} - m)\psi}, \quad (3.1)$$

donde ψ y $\bar{\psi}$ son campos de Dirac de masa m que interactúan con un campo de norma abeliano externo A_μ , $\mathcal{D} = \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu)$ y γ^μ denota a las matrices de Dirac. Tras realizar la integración sobre los grados de libertad fermiónicos se obtiene el siguiente término [64]

$$\mathbb{A}[A_\mu] = -\frac{1}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}, \quad (3.2)$$

que es posible escribir en el lenguaje de formas [65]

$$\mathbb{A}[A_\mu] = -\frac{1}{8\pi^2} A \wedge dA, \quad (3.3)$$

el cual se identifica con el Pontryagin abeliano o como una densidad de Pontryagin [66] y que se asocia con la **anomalía quiral** de los fermiones de Dirac sin masa [67, 68]. Con base en este punto, vale la pena mencionar que la θ -ED no es una teoría de Maxwell-Chern-Simons como tal porque las teorías de Chern-Simons sólo están definidas en dimensiones impares [65], más bien sería una teoría Maxwell-Pontryagin.

Más aún, al expresar (3.2) en términos del campo electromagnético encontramos que

$$\mathbb{A}[\mathbf{E}, \mathbf{B}] = -\frac{1}{4\pi^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \quad (3.4)$$

que es posible identificar, salvo factores, con la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L}_\theta = -\frac{e^2}{\hbar c} \frac{\theta}{4\pi^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \quad (3.5)$$

descrita en la sección 2.1 del capítulo 2.2.

Aunque \mathcal{L}_θ es una expresión genérica que se puede aplicar a MEs como el Cr_2O_3 con $\theta \approx \pi/36$ a baja temperatura [69], su forma amerita una discusión adicional cuando se quiere aplicar a los TIs. Recordemos que el campo eléctrico y el de inducción magnética tienen dimensiones de carga por unidad de distancia al cuadrado en unidades gaussianas (por el momento retendremos los valores y unidades de \hbar y c). De esta manera, la contribución de la densidad Lagrangiana a la acción es $S_\theta = (c\hbar^2/e^4) \int dt d^3x \mathcal{L}_\theta$. Reescribiendo $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ en términos del tensor de campo

*Aunque también se puede para sistemas sin brecha de energía. [4]

†Ver Sección 2.2 para recordar lo que es un aislante trivial.

electromagnético $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$, donde A_μ es el cuatripotencial y considerando un espacio-tiempo cerrado sin fronteras, obtenemos que

$$\frac{S_\theta}{\hbar} = \frac{\theta}{32\pi^2} \int d^4x \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \frac{1}{e^2} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} = \theta C_2, \quad (3.6)$$

donde $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ es el símbolo de Levi-Civita con convención $\varepsilon^{0123} = +1$ y C_2 es un entero. Esto último se debe a que en tales espacios la integral adimensional de la ec. (3.6) es igual a $32\pi^2 C_2$, donde C_2 es el segundo número de Chern de la variedad [70]. Bajo cambios de θ , la cantidad $\exp(-iS_\theta/\hbar)$ debe permanecer invariante, lo cual significa que dos valores de θ que difieren por un múltiplo entero de 2π son equivalentes. Más aún, al imponer la simetría de inversión temporal (TRS por su acrónimo en inglés) conllevará a nuevas constricciones sobre los valores de θ . Como $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ es impar bajo TRS, uno podría pensar que el único valor permitido sería $\theta = 0$ (módulo 2π). Sin embargo, la condición $\exp(-iS_\theta/\hbar) = \exp(+iS_\theta/\hbar)$ conduce a la posibilidad de tener $\theta = \pi$. De este modo, obtenemos dos familias de materiales MEs descritos por las elecciones $\theta_1 = 0$ (aislantes triviales) y $\theta_2 = \pi$ (aislantes topológicos). Ambos valores de θ se definen módulo 2π , lo cual hace cumplir la característica fundamental de que la ED estándar sea invariante bajo la transformación $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ que encontró Wilczek [8].

Otra propiedad importante de S_θ es que el integrando en la ec. (3.6) es una derivada total, como se puede observar a partir de la identidad de Bianchi $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \partial_\beta F_{\mu\nu} = 0$. De esta forma, las modificaciones a las ecuaciones de Maxwell sólo surgen cuando $\partial_\mu \theta \neq 0$, como ocurre en la interfaz Σ de dos materiales que tienen diferentes valores constantes de θ , por ejemplo. En este caso, la acción (3.6) se puede integrar, con lo que se obtiene una acción en $2+1$ dimensiones en las fronteras que corresponde al término de Chern-Simons [71]. Esto significa que en las fronteras de un TI tridimensional tendremos el efecto Hall cuántico anómalo (QAH por su acrónimo en inglés) asociado a cada valor de θ , con la conductividad Hall dada por $\sigma_H = \theta e^2/2\pi\hbar^\dagger$. Siendo así, la contribución a la conductividad Hall total por parte de la interfaz Σ entre un TI y un aislante regular es [25, 30]

$$\sigma_H^\Sigma = \frac{e^2}{h} \left(\frac{1}{2} + m \right), \quad (3.7)$$

ya que dos valores de θ que difieren por un múltiplo entero m de 2π son equivalentes.

3.2. Formulación de la θ -ED

A lo largo del capítulo 2 se expuso los MEs en la sección 2.1 y se ahondó particularmente en lo que es un TI en la sección 2.2, materiales para los cuales la θ -ED funge como teoría efectiva, justificación que se dio en la sección previa 3.1. Con estos precedentes cubiertos, es turno de centrarnos en la formulación de la θ -ED propiamente.

[†]Comparar con la ec. 2.9

Comenzamos por establecer el sistema de unidades, el cual será el gaussiano con $\hbar = c = 1$, denotaremos por $\eta^\mu{}_\nu$ a la métrica de Minkowski con la signatura $(+, -, -, -)$ y adoptaremos la convención $\varepsilon^{0123} = 1$. Vale la pena mencionar que en el contexto de la θ -ED a los MEs (tales como los TIs, etc.) se les referirá como θ -medio también.

Consideremos un espacio-tiempo $(3+1)$ -dimensional $\mathcal{M} = \mathcal{U} \times \mathbb{R}$, donde \mathcal{U} es una variedad tridimensional y \mathbb{R} corresponde al eje temporal. Tomamos una partición del espacio en dos regiones: \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 de tal forma que dichas variedades se intersecten a lo largo de una frontera común Σ , a la cual llamaremos θ -frontera o θ -interfaz[§], por lo tanto $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ y $\Sigma = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, como se muestra en la Fig.(3.1). También asumiremos que el campo θ es constante por tramos de tal forma que adquiere el valor constante $\theta = \theta_1$ en la región \mathcal{U}_1 y el valor constante $\theta = \theta_2$ en la región \mathcal{U}_2 . Esta situación se expresa con la siguiente función característica

$$\theta(\mathbf{x}) = \begin{cases} \theta_1 & \mathbf{x} \in \mathcal{U}_1 \\ \theta_2 & \mathbf{x} \in \mathcal{U}_2 \end{cases} . \quad (3.8)$$

Ahora bien, nuestro modelo se basa en sumar el término de Pontryagin abeliano de 4 dimensiones acoplado a un campo escalar θ , que es invariante de norma y nombraremos θ -término, a la acción de la Electrodinámica de Maxwell como se describe en la siguiente acción

$$S[\Phi, \mathbf{A}] = \int_{\mathcal{M}} dt d^3\mathbf{x} \left[\frac{1}{8\pi} \left(\epsilon \mathbf{E}^2 - \frac{1}{\mu} \mathbf{B}^2 \right) - \frac{\alpha}{4\pi^2} \theta(\mathbf{x}) \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} - \rho \Phi + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \right] , \quad (3.9)$$

donde $\alpha = e^2 \simeq 1/137$ es la constante de estructura fina, ϵ es la permitividad eléctrica, μ la permeabilidad magnética, \mathbf{E} es el campo eléctrico, \mathbf{B} es el campo de inducción magnética, ρ es la densidad de carga y \mathbf{j} es la densidad de corriente. La constante de acoplamiento para el θ -término, $\alpha/4\pi^2$, se elige de tal forma que la carga eléctrica total

$$q_e = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{D} , \quad (3.10)$$

tenga que ser un múltiplo entero de la carga del electrón e , mientras que la carga magnética

$$q_m = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} , \quad (3.11)$$

debe ser un múltiplo entero de $g = e/2\alpha$ debido a la condición de cuantización de Dirac [8].

Al variar la acción (3.9) hallamos el siguiente conjunto de ecuaciones de Maxwell modificadas

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = 4\pi \rho + \tilde{\theta} \delta(\Sigma) \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{u}} , \quad (3.12)$$

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \mathbf{E}) = 4\pi \mathbf{j} + \tilde{\theta} \delta(\Sigma) \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{u}} , \quad (3.13)$$

[§]Cuando Σ sea un plano se le llamará θ -plano, cuando Σ sea una esfera se le llamará θ -esfera y así dependiendo de la geometría que presente Σ .

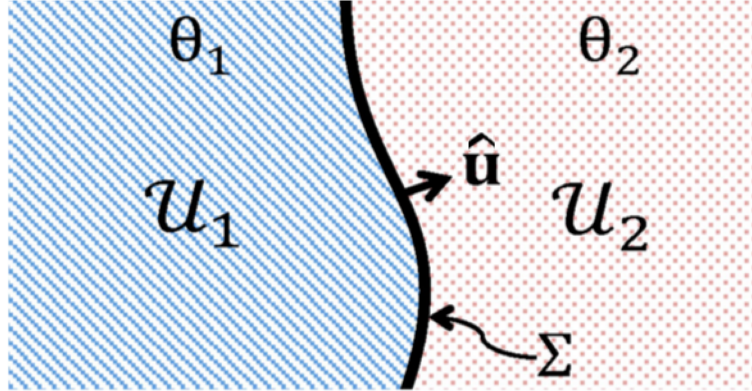


Figura 3.1: Región sobre la cual se define la θ -Electrodinámica.

lo cual hace válida la invariancia de bajo $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ descrita en la sección previa [8]. Aquí $\hat{\mathbf{u}}$ es el vector normal unitario a Σ que apunta en la dirección de la región \mathcal{U}_2 como se muestra en la Fig. (3.1) y

$$\tilde{\theta} = \frac{\alpha}{\pi}(\theta_2 - \theta_1) . \quad (3.14)$$

Cuando el θ -medio sea un TI localizado en la región \mathcal{U}_2 de la Fig. 3.1 ($\theta_2 = \pi$) frente a un aislante regular ($\theta_1 = 0$) en la región \mathcal{U}_1 , tendremos que $\tilde{\theta}$ toma la siguiente forma [25]

$$\tilde{\theta} = \alpha(2m + 1) , \quad (3.15)$$

con m un entero que dependerá de los detalles de la ruptura de TRS en la superficie.

Mientras que las ecuaciones homogéneas quedan intactas:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad (3.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 . \quad (3.17)$$

La “novedad” de estas ecuaciones de Maxwell modificadas es que introducen densidades de carga efectivas dependientes del campo

$$\rho_\theta = \frac{1}{4\pi} \tilde{\theta} \delta(\Sigma) \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{j}_\theta = \frac{1}{4\pi} \tilde{\theta} \delta(\Sigma) \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{u}}, \quad (3.18)$$

con soporte únicamente en la interfaz Σ de los dos medios. Como vemos en las ecuaciones (3.12) y (3.13), el comportamiento de la θ -ED en las regiones \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 es el mismo que en la ED estándar, es decir que las ecuaciones de Maxwell siguen siendo válidas en el bulto. Las ecuaciones (3.18) describen el EME característico de la θ -ED, a través del cual los campos eléctricos pueden generar campos magnéticos y viceversa, incluso en el caso estático. La ecuación de conservación asociada para las ecuaciones (3.18) es la siguiente

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_\theta + \frac{\partial \rho_\theta}{\partial t} = 0 , \quad (3.19)$$

cuya demostración[¶] es directa como se expone enseguida. Primero,

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{j}_\theta &= \frac{\tilde{\theta}}{4\pi} \nabla \delta(\Sigma) \cdot (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{u}}) + \frac{\tilde{\theta}}{4\pi} \delta(\Sigma) \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{u}}) , \\
&= \frac{\tilde{\theta}}{4\pi} \delta'(\Sigma) \hat{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{u}}) + \frac{\tilde{\theta}}{4\pi} \delta(\Sigma) [\hat{\mathbf{u}} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \hat{\mathbf{u}})] , \\
&= \frac{\tilde{\theta}}{4\pi} \delta(\Sigma) \hat{\mathbf{u}} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) .
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Y luego,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varrho_\theta}{\partial t} &= \frac{\tilde{\theta}}{4\pi} \delta(\Sigma) \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{u}}) = \frac{\tilde{\theta}}{4\pi} \delta(\Sigma) \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{u}} , \\
&= -\frac{\tilde{\theta}}{4\pi} \delta(\Sigma) (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{u}} ,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

donde se usó la ley de Faraday (3.17) en la última igualdad. Finalmente, sumando las ecs. (3.20) y (3.21) se verifica la ec. (3.19). Por lo tanto, la conservación de la carga total

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_T + \frac{\partial \varrho_T}{\partial t} = 0 \tag{3.22}$$

con $\mathbf{j}_T = \mathbf{j} + \mathbf{j}_\theta$ y $\varrho_T = \varrho + \varrho_\theta$ se satisface.

Por otra parte, las ecuaciones (3.12) y (3.13) también nos sugieren que la respuesta electromagnética de un sistema en presencia de un θ -término las podemos describir en términos de las ecuaciones de Maxwell en medios materiales:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi \varrho , \tag{3.23}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j} , \tag{3.24}$$

con las siguientes relaciones constitutivas

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} - \frac{\alpha}{\pi} \theta(\mathbf{x}) \mathbf{B} , \tag{3.25}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} + \frac{\alpha}{\pi} \theta(\mathbf{x}) \mathbf{E} , \tag{3.26}$$

donde $\theta(\mathbf{x})$ está dada por la ec. (3.8). Como ya se ha mencionado previamente, si $\theta(\mathbf{x})$ es globalmente constante en \mathcal{M} , no hay contribución a las ecuaciones de Maxwell por parte del

[¶]Intuitivamente es claro que $\nabla \times \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ para un θ -plano, θ -esfera ($\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{r}}$) y θ -cilindro ($\hat{\mathbf{u}} = \hat{\boldsymbol{\rho}}$). En el caso general en que $\hat{\mathbf{u}}$ correspondiera al vector normal de una interfaz Σ con geometría arbitraria parametrizada por una función $f(\mathbf{r})$, se tendría que su normal es $\hat{\mathbf{u}} = \nabla f(\mathbf{r}) / \|\nabla f(\mathbf{r})\|$ [72] de lo cual se seguiría que $\nabla \times \hat{\mathbf{u}} = \nabla \times \nabla f(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, lo cual completaría la prueba. No obstante, geometrías fuera de la plano no son de interés en esta tesis ya que nos centraremos únicamente en el caso de un θ -plano como se podrá ver a partir de la subsección siguiente.

θ -término en la acción, a pesar de que θ esté presente en las relaciones constitutivas. De hecho, las contribuciones adicionales de un θ -término globalmente constante para cada una de las ecuaciones de Maxwell modificadas (3.12) y (3.13) se cancelan debido a las ecuaciones homogéneas.

En la siguiente subsección, estudiaremos los efectos de una θ -interfaz en la respuesta electromagnética a densidades concretas de cargas y corrientes. Pero antes, estudiaremos cuáles serán las condiciones de borde para la θ -ED. Asumiendo que las derivadas de los campos son finitas en una vecindad de la superficie Σ , las ecuaciones de campo implican que la componente normal de \mathbf{E} y la tangencial de \mathbf{B} adquieren discontinuidades adicionales a aquellas producidas por las cargas libres superficiales y las corrientes, mientras que la componente normal de \mathbf{B} y las componentes tangenciales de \mathbf{E} son continuas. En ausencia de fuentes en la interfaz, las condiciones de frontera se ven así

$$[\epsilon \mathbf{E}_\perp]_{\Sigma^-}^{\Sigma^+} = \tilde{\theta} \mathbf{B}_\perp|_\Sigma \quad , \quad \left[\frac{\mathbf{B}_\parallel}{\mu} \right]_{\Sigma^-}^{\Sigma^+} = -\tilde{\theta} \mathbf{E}_\parallel|_\Sigma \quad , \quad (3.27)$$

$$[\mathbf{B}_\perp]_{\Sigma^-}^{\Sigma^+} = 0 \quad , \quad [\mathbf{E}_\parallel]_{\Sigma^-}^{\Sigma^+} = 0 \quad , \quad (3.28)$$

donde $\mathbf{E}_\perp = (\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{E}) \hat{\mathbf{u}}$ es la parte del campo eléctrico perpendicular a la interfaz y $\mathbf{E}_\parallel = \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}$ es la parte del campo eléctrico paralela a la misma. Esta notación aplica también para el campo de inducción magnética \mathbf{B} .

Las condiciones de continuidad (3.28) implican que el lado derecho de las ecuaciones (3.27) están bien definidas y representan densidades de cargas y corrientes superficiales autoinducidas. Una consecuencia inmediata de las condiciones de frontera (3.27) y (3.28) es que la presencia de un campo de inducción magnética que cruce la superficie Σ es suficiente para generar un campo eléctrico, incluso en la ausencia de cargas eléctricas. Muchos efectos magnetoeléctricos interesantes debido a una θ -frontera se han considerado en la literatura al utilizar diferentes aproximaciones. Por ejemplo, cargas eléctricas cercanas a la interfaz Σ inducen monopolos magnéticos espejo (y viceversa) [30, 73, 74]. También se ha estudiado la propagación de ondas electromagnéticas a través de una θ -frontera, encontrando que aparece una rotación de Faraday no trivial de las polarizaciones [9, 73, 74, 75]. Vale la pena mencionar que con las condiciones de frontera modificadas, muchas propiedades de los conductores todavía son válidas para campos estáticos mientras el conductor no se sitúe en la frontera Σ . Particularmente, los conductores son superficies equipotenciales y el campo eléctrico justo afuera del conductor es normal a su superficie.

De ahora en adelante, en esta tesis sólo consideraremos la geometría más simple correspondiendo al caso donde la superficie Σ es: el plano $z = 0$, eligiendo las coordenadas cartesianas para su descripción. Cabe destacar que se pueden estudiar más geometrías tales como la esférica y la cilíndrica, las cuales han sido estudiadas en el caso de fuentes estáticas en los artículos [11, 13] y cuyo estudio en el caso de fuentes dependientes del tiempo aún queda pendiente por estudiar.

3.2.1. Método de Superposición y de Condiciones a la Frontera en el caso de simetría plana

En esta subsección expondremos cómo obtener los campos eléctrico y de inducción magnética por medio del método de superposición y de condiciones de frontera para el caso estático. Dichos campos se obtendrán con ayuda de los potenciales Φ y \mathbf{A} . Pese a que las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas (3.12) y (3.13) han sido modificadas, las ecuaciones de Maxwell homogéneas son las mismas de la ED estándar. Por lo cual, es posible estudiar la θ -ED al colocar los campos en términos de los potenciales de la manera usual:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi , \quad (3.29)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} , \quad (3.30)$$

donde \mathbf{A} satisface la norma de Coulomb:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 . \quad (3.31)$$

En particular, para el ejemplo que estudiaremos en esta subsección $\mathbf{j} = \mathbf{0}$, por lo que

$$\mathbf{B} = -\nabla\Psi , \quad (3.32)$$

donde Ψ es el potencial magnético escalar.

Por otra parte, el sistema que se estudiará sólo tiene una θ -interfaz en $z = 0$, i.e., la ec. (3.8) toma la siguiente forma:

$$\theta(z) = \theta_2\Theta(z) + \theta_1\Theta(-z) , \quad (3.33)$$

donde $\Theta(z)$ es la función de Heaviside y de este modo, se dividirá el espacio en dos semi-espacios \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 como se muestra en la Figura (3.2). Siendo así, las condiciones de frontera que deben de satisfacer los campos para son [9]:

$$[\mathbf{D}_z]_{z=0^-}^{z=0^+} = \tilde{\theta}\mathbf{B}_z|_{z=0} , \quad (3.34)$$

$$[\mathbf{H}_\parallel]_{z=0^-}^{z=0^+} = -\tilde{\theta}\mathbf{E}_\parallel|_{z=0} , \quad (3.35)$$

$$[\mathbf{E}_\parallel]_{z=0^-}^{z=0^+} = 0 , \quad (3.36)$$

$$[\mathbf{B}_z]_{z=0^-}^{z=0^+} = 0 , \quad (3.37)$$

donde recordamos que $\tilde{\theta}$ está dado en forma general por la ec. (3.14).

De esta manera, tendremos que al colocar un objeto físico en la región \mathcal{U}_1 (un monopolo eléctrico o carga puntual, un dipolo eléctrico, etc.) con potencial Φ_0 que determina su fuente y también su campo eléctrico \mathbf{E}_0 completamente se generarán campos eléctricos y de inducción magnética en ambas regiones del siguiente modo:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi = -\nabla\Phi_0 - \nabla\tilde{\Phi} , \quad (3.38)$$

$$\mathbf{B} = -\nabla\Psi = -\nabla\Psi_0 - \nabla\tilde{\Psi} . \quad (3.39)$$

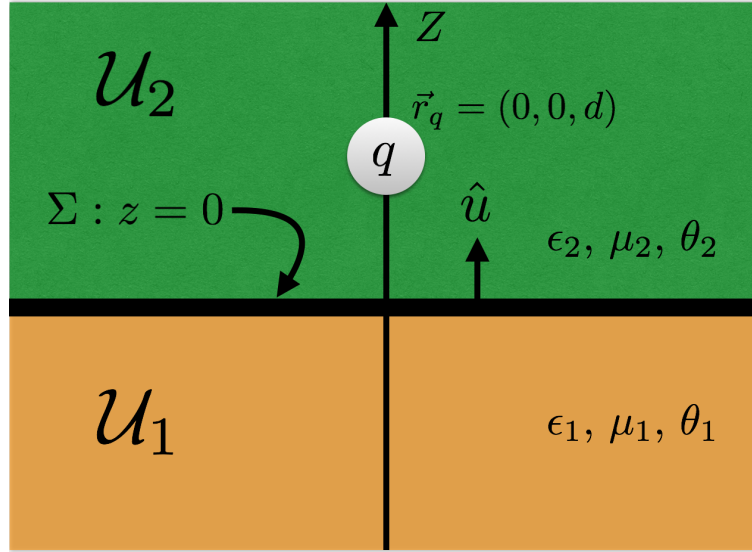


Figura 3.2: Esquemmatización de la configuración para una carga puntual q ubicada en $\mathbf{r} = (0, 0, d)$ frente a la superficie Σ situada en $z = 0$ y las dos regiones \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 en que Σ divide al espacio o la subvariedad \mathcal{U} .

Para determinar tanto $\tilde{\Phi}$ como $\tilde{\Psi}$ es necesario sustituir ambos campos en las ecuaciones de Maxwell (3.12) y (3.16) respectivamente, obteniendo que fuera de la superficie (i.e. $z \neq 0$),

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \nabla \cdot \mathbf{E}_0 - \nabla^2 \tilde{\Phi} = 4\pi \rho, \\ \Leftrightarrow 4\pi \rho - \nabla^2 \tilde{\Phi} &= 4\pi \rho, \\ \Leftrightarrow \nabla^2 \tilde{\Phi} &= 0. \end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot \mathbf{B}_0 - \nabla^2 \tilde{\Psi} = 0, \\ \Leftrightarrow \nabla^2 \tilde{\Psi} &= 0. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Ambas deducciones se siguen puesto que \mathbf{E}_0 y \mathbf{B}_0 satisfacen las ecuaciones de estándar Maxwell (3.12) y (3.16), i. e. con $\tilde{\theta} = 0$. Concluyendo que $\tilde{\Phi}$ y $\tilde{\Psi}$ satisfacen la ecuación de Laplace.

Finalmente, para obtener la expresión completa de los campos \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} y \mathbf{H} se necesitará que los potenciales $\tilde{\Phi}$ y $\tilde{\Psi}$ satisfagan las condiciones a la frontera (3.34)-(3.37).

3.2.1.1. Aplicación: Carga eléctrica puntual estática

En esta subsección usaremos el método de la sección previa para hallar los potenciales que generan los campos eléctrico y de inducción magnética de una partícula puntual de carga q situada a una distancia $d > 0$ de la superficie Σ , que será el plano $z = 0$ (Ver Fig. 3.2). Esto se hará para el caso más general que consiste en tomar en cuenta las permitividades y las permeabilidades de los dos θ -medios, siendo éstas constantes.

A partir de la Figura (3.2) observamos que las coordenadas más convenientes para este problema son las cilíndricas $\mathbf{r} = (\rho, \phi, z)$ ya que el sistema presenta simetría azimutal y al monopolo eléctrico de carga q le podemos asociar una altura d con coordenada radial cero. Dicho lo anterior, comenzamos por recordar que la solución general a la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas es [76]:

$$\tilde{\Phi}(\rho, \phi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk J_m(k\rho) e^{-k|z|} [A_m(k) \sin m\phi + B_m(k) \cos m\phi] . \quad (3.42)$$

Con base en la forma de las soluciones, es conveniente escribir el potencial Φ_0 del monopolo eléctrico con carga q en estas coordenadas como se muestra a continuación [77]:

$$\Phi_0 = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} = \frac{q}{\sqrt{\rho^2 + (z-d)^2}} = q \int_0^{\infty} dk J_0(k\rho) e^{-k|z-d|} , \quad (3.43)$$

Siendo así, los potenciales a determinar se escribirán de la siguiente manera:

$$\Phi_1 = \Phi_0 + \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk J_m(k\rho) e^{-k|z|} [A_m(k) \sin m\phi + B_m(k) \cos m\phi] , \quad (3.44)$$

$$\Phi_2 = \Phi_0 + \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk J_m(k\rho) e^{-k|z|} [C_m(k) \sin m\phi + D_m(k) \cos m\phi] , \quad (3.45)$$

$$\Psi_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk J_m(k\rho) e^{-k|z|} [E_m(k) \sin m\phi + F_m(k) \cos m\phi] , \quad (3.46)$$

$$\Psi_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk J_m(k\rho) e^{-k|z|} [G_m(k) \sin m\phi + H_m(k) \cos m\phi] . \quad (3.47)$$

Sin embargo, antes de comenzar los cálculos, observamos que el sistema presenta simetría azimutal, i.e., simetría en ϕ por lo que

$$A_m(k) = C_m(k) = E_m(k) = G_m(k) = 0, \quad \forall m , \quad (3.48)$$

$$B_m(k) = D_m(k) = F_m(k) = H_m(k) = 0, \quad \forall m > 0 . \quad (3.49)$$

Luego, como tenemos dos regiones en el espacio es importante considerar el signo correcto de z como exponemos a continuación:

$$\begin{aligned} \Phi_0 & : & z - d < 0 & \Rightarrow |z - d| = -(z - d) , \\ \text{Región } \mathcal{U}_1 & : & z < 0 & \Rightarrow |z| = -z , \\ \text{Región } \mathcal{U}_2 & : & z > 0 & \Rightarrow |z| = z , \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde se tomó $z < d$ para poder satisfacer las condiciones de frontera (3.34)-(3.37).

Por lo tanto, los potenciales se reescribirán como sigue:

$$\Phi_1 = q \int_0^\infty dk J_0(k\rho) e^{k(z-d)} + \int_0^\infty dk J_0(k\rho) e^{kz} B_0(k), \quad (3.51)$$

$$\Phi_2 = q \int_0^\infty dk J_0(k\rho) e^{k(z-d)} + \int_0^\infty dk J_0(k\rho) e^{-kz} D_0(k), \quad (3.52)$$

$$\Psi_1 = \int_0^\infty dk J_0(k\rho) e^{kz} F_0(k), \quad (3.53)$$

$$\Psi_2 = \int_0^\infty dk J_0(k\rho) e^{-kz} H_0(k). \quad (3.54)$$

De la condición de frontera (3.34) encontramos que

$$\begin{aligned} \left[-\varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right]_{z=0} &= -\tilde{\theta} \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \Big|_{z=0}, \\ \Leftrightarrow (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) q e^{-kd} + \varepsilon_2 D_0(k) + \varepsilon_1 B_0(k) &= \tilde{\theta} H_0(k). \end{aligned} \quad (3.55)$$

De la condición de frontera (3.35) se encuentra que

$$\begin{aligned} \left[-\frac{1}{\mu_2} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \rho} + \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \rho} \right]_{z=0} &= \tilde{\theta} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho} \Big|_{z=0}, \\ \Leftrightarrow -\frac{H_0(k)}{\mu_2} + \frac{F_0(k)}{\mu_1} &= \tilde{\theta} [q e^{-kd} + D_0(k)]. \end{aligned} \quad (3.56)$$

De la condición de frontera (3.36) obtenemos que

$$\left[-\frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} \right]_{z=0} = 0 \Leftrightarrow D_0(k) = B_0(k). \quad (3.57)$$

De la condición de frontera (3.37) encontramos que

$$\left[-\frac{\partial \Psi_2}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \right]_{z=0} = 0 \Leftrightarrow F_0(k) = -H_0(k). \quad (3.58)$$

Sustituyendo (3.57) en (3.55) hallamos que

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) q e^{-kd} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) D_0(k) = \tilde{\theta} H_0(k). \quad (3.59)$$

Y al sustituir (3.58) en (3.56) resulta que

$$-\left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1} \right) H_0(k) = \tilde{\theta} [q e^{-kd} + D_0(k)]. \quad (3.60)$$

Finalmente, al sustituir (3.59) en (3.60) se concluye que

$$H_0(k) = -F_0(k) = -\frac{\tilde{\theta} \left(1 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \right)}{\frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1} + \frac{\tilde{\theta}^2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}} q e^{-kd} = -\frac{2\tilde{\theta}\varepsilon_2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) + \tilde{\theta}^2} q e^{-kd}. \quad (3.61)$$

Y con este resultado el resto de los coeficientes quedan determinados de la siguiente forma

$$\begin{aligned} B_0(k) = D_0(k) &= \left[-\frac{\tilde{\theta}^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(1 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \right) - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \right] q e^{-kd}, \\ &= \left[\frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1} \right) - \tilde{\theta}^2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1} \right) + \tilde{\theta}^2} \right] q e^{-kd}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Concluyendo así que los potenciales, ya con las integrales hechas, tendrán la siguiente forma:

$$\Phi_1(\rho, z) = \frac{q}{\sqrt{\rho^2 + (z-d)^2}} - \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1} \right) + \tilde{\theta}^2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1} \right) + \tilde{\theta}^2} \frac{q}{\sqrt{\rho^2 + (z+d)^2}}, \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(\rho, z) &= \frac{q}{\sqrt{\rho^2 + (z-d)^2}} - \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1} \right) + \tilde{\theta}^2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1} \right) + \tilde{\theta}^2} \frac{q}{\sqrt{\rho^2 + (z-d)^2}}, \\ &= \frac{2\varepsilon_2 \left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1} \right)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1} \right) + \tilde{\theta}^2} \frac{q}{\sqrt{\rho^2 + (z-d)^2}}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\Psi_1(\rho, z) = -\frac{2\tilde{\theta}\varepsilon_2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) + \tilde{\theta}^2} \frac{q}{\sqrt{\rho^2 + (z+d)^2}}, \quad (3.65)$$

$$\Psi_2(\rho, z) = \frac{2\tilde{\theta}\varepsilon_2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) + \tilde{\theta}^2} \frac{q}{\sqrt{\rho^2 + (z-d)^2}}. \quad (3.66)$$

A continuación, se presentan los campos eléctricos asociados a $\Phi_1(\rho, z)$ y a $\Phi_2(\rho, z)$ calculados por medio de la ec. (3.29):

$$\mathbf{E}_1(\rho, z) = q \frac{\mathbf{x} - \mathbf{d}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{d}\|^3} - q \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1} \right) + \tilde{\theta}^2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1} \right) + \tilde{\theta}^2} \frac{\mathbf{x} + \mathbf{d}}{\|\mathbf{x} + \mathbf{d}\|^3}, \quad (3.67)$$

$$\mathbf{E}_2(\rho, z) = \frac{2q\varepsilon_2 \left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1} \right)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1} \right) + \tilde{\theta}^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{d}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{d}\|^3}, \quad (3.68)$$

donde $\mathbf{d} = d\hat{\mathbf{z}}$. También presentamos los campos de inducción magnética asociados a $\Psi_1(\rho, z)$ y a $\Psi_2(\rho, z)$ calculados a través de la ec. (3.32):

$$\mathbf{B}_1(\rho, z) = -\frac{2q\tilde{\theta}\varepsilon_2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) + \tilde{\theta}^2} \frac{\mathbf{x} + \mathbf{d}}{\|\mathbf{x} + \mathbf{d}\|^3}, \quad (3.69)$$

$$\mathbf{B}_2(\rho, z) = \frac{2q\tilde{\theta}\varepsilon_2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) + \tilde{\theta}^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{d}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{d}\|^3}. \quad (3.70)$$

Para concluir con el estudio de la carga eléctrica puntual, haremos algunos comentarios finales. Primero, recuperamos los potenciales y los campos eléctrico y de inducción magnética del caso $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \mu_1 = \mu_2 = 1$ reportados en [10], donde se utilizó el método de la función de Green. Segundo, los coeficientes que determinamos a través del método aquí empleado son los mismos que se reportan en el artículo [13] para el mismo caso de medios materiales aunque ahí todo es calculado por medio del método de la función de Green y también coinciden con los coeficientes reportados en el artículo [30] salvo un factor de ε_2 , cuya discrepancia se debe a que en dicho artículo el campo eléctrico se genera por una carga puntual efectiva q/ε_2 en el semiplano superior. Además se debe hacer la identificación $\tilde{\theta} = 2\alpha P_3$, siendo P_3 la componente en la dirección z de la PMO descrita en la sección 2.2 del capítulo 2 de esta tesis.

El último comentario y quizá el más importante sobre el campo de la carga eléctrica puntual, resulta de observar el campo de inducción magnética descrito por las ecs. (3.69) y (3.70), ya que este campo de inducción magnética corresponde a aquel de un monopolo magnético. De esta manera, hemos exhibido cómo surge el campo de inducción magnética monopolar por la presencia de la carga puntual q y también por que es el ejemplo más sencillo y usado para mostrar el EME en estos materiales. De hecho, el artículo [30], donde se exhibió este ejemplo por primera vez, también propone un experimento para medir los campos eléctrico y de inducción magnética correspondientes [30] por medio de un microscopio de fuerza magnética (MFM). Sin embargo, la obtención de los campos (3.67)-(3.70) resulta mucho más fácil de resolver por medio del método de la función de Green como se puede consultar en los artículos [10, 11, 12]. Aquí ya no se exhibirá este método ni se aplicará para la carga puntual ni ninguna otra configuración estática. En cambio, se optará por exponerlo con todo detalle en el siguiente capítulo en el caso dinámico, es decir, configuraciones cuyas fuentes dependan explícitamente del tiempo, pues el tema central de esta tesis es estudiar la respuesta de los MEs ante dichas fuentes con miras a un análisis de la radiación que éstas generen.

Capítulo 4

Función de Green dependiente del tiempo para simetría plana y un solo medio dieléctrico homogéneo

En este capítulo se estudiarán los efectos de un aislante topológico (TI) con simetría plana sobre la radiación electromagnética, cuando éste se encuentra inmerso en un medio dieléctrico homogéneo de constante ϵ en el marco de la θ -ED. El método por medio del cual se analizan estos efectos es el de la Función de Green (FG) que se describe con todo detalle en la sección 4.1. Después, en la sección 4.2 se expone la obtención y derivación de la FG en el espacio de coordenadas, más aún se logra obtener una expresión analítica para dicha FG. Sin embargo, dada la dificultad en su manejo, en la sección 4.3 se estudia a fondo la aproximación de campo lejano descrita en el espacio de frecuencias, encontrando también una expresión analítica por medio de una modificación al método de *steepest descent*. Dicha expresión resulta más fácil de manejar que la FG completa y en la subsección 4.3.4 se describen las dos posibles fases de las ondas esféricas, lo cual tendrá consecuencias en las cantidades observables. Finalmente, en la subsección 4.3.5 se describe la contribución adicional de ondas superficiales cilíndricas axialmente simétricas y de las ondas planas superficiales que presenta la FG debida a la presencia del θ -medio.

4.1. Método de la Función de Green

Motivados por los resultados del artículo [78], donde los efectos del θ -término son incrementados con respecto a las contribuciones ópticas, pediremos que ambos θ -medios tengan la misma permitividad $\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2$ y que ambos medios sean no magnéticos $\mu = \mu_1 = \mu_2 = 1$. Luego, con base en las ecuaciones de Maxwell modificadas (3.12), (3.13), (3.16) y (3.17) presentadas en el capítulo 3 y restringiéndonos al caso en que la superficie de separación sea el plano $z = 0$ (i.e.

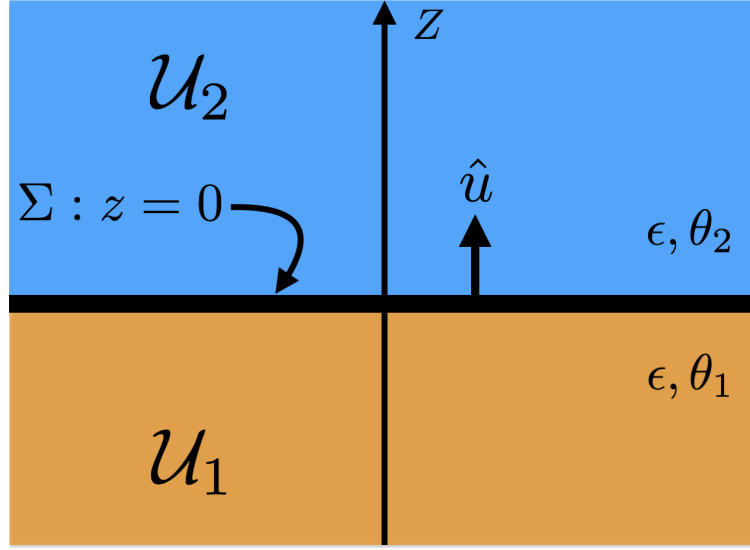


Figura 4.1: Región sobre la cual se define la θ -Electrodinámica cuando la superficie de separación Σ sea el plano $z = 0$ cuando ésta está inmersa en un medio dieléctrico homogéneo de constante ϵ .

$\theta(\mathbf{x})$ dada por la ec. (3.33)), tendremos que las ecuaciones para la θ -Electrodinámica son:

$$\epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho + \tilde{\theta} \delta(z) \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{u}}, \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (4.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi \mathbf{j} + \tilde{\theta} \delta(z) \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{u}}. \quad (4.4)$$

El plano $z = 0$ separa los medios con acoplamientos θ_1 y θ_2 constantes, tales que definen a $\tilde{\theta}$ por medio de la ec. (3.14). No obstante, en el caso de que el TI esté localizado en la región 2 de la Fig. 4.1 ($\theta_2 = \pi$) en frente de un aislante regular ($\theta_1 = 0$) situado en la región 1 de la misma figura, tendremos que $\tilde{\theta}$ estará dado por la ec. (3.15) con $m \in \mathbb{Z}$ cuyo valor dependerá de los detalles la ruptura de la simetría de inversión temporal en la interfaz.

Recordamos que $\delta(z)$ es la delta de Dirac, la cual indica que los términos que están multiplicados por ella contribuyen sólo en la superficie antes mencionada y $\hat{\mathbf{u}}$ será el vector normal unitario a dicha superficie.

Después, como las ecuaciones de Maxwell homogéneas están intactas se introducen los potenciales Φ y \mathbf{A} de ED estándar para el caso dinámico

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (4.6)$$

Luego, para campos dependientes del tiempo trabajaremos en la norma de Lorenz modificada:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 . \quad (4.7)$$

Con lo anterior, las ecuaciones de Maxwell modificadas se reescriben de la siguiente manera:

$$\epsilon \square^2 \Phi = \tilde{\theta} \delta(z) \varepsilon_{3ij} \partial_i A_j - 4\pi \varrho , \quad (4.8)$$

$$\square^2 A_i = \tilde{\theta} \delta(z) \varepsilon_{3ij} (\partial_j \Phi + \partial_0 A_j) - 4\pi j_i , \quad (4.9)$$

donde $x^0 = t$ y $\square^2 = -\nabla^2 + \epsilon \partial_t^2$ denota al D'alambertiano.

Las dos ecuaciones para Φ y A_i se pueden poner en una sola ecuación de la siguiente manera:

$$\left[[\square^2]^\mu{}_\nu - \tilde{\theta} \delta(z) \varepsilon^{3\mu\alpha}{}_\nu \partial_\alpha \right] A^\nu = 4\pi J^\mu , \quad (4.10)$$

donde definimos el operador

$$[\square^2]^\mu{}_\nu = (\epsilon \square^2, \square^2 \delta^i_j) . \quad (4.11)$$

La densidad de corriente es $J^\mu = (\varrho, \mathbf{j})$. Las condiciones de frontera (3.27) y (3.28) se reescriben en términos del 4-potencial y toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} A^\mu|_{z=0^-}^{z=0^+} = 0 \quad , \quad \epsilon \partial_z A^0|_{z=0^-}^{z=0^+} = -\tilde{\theta} \varepsilon^{30\alpha}{}_\nu \partial_\alpha A^\nu|_{z=0} , \\ \partial_z A^i|_{z=0^-}^{z=0^+} = -\tilde{\theta} \varepsilon^{3i\alpha}{}_\nu \partial_\alpha A^\nu|_{z=0} . \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ahora bien, para resolver la ec. (4.10) adecuaremos el método de la FG expuesto en los artículos [10, 11, 12, 13] para nuestro problema. Usaremos este procedimiento porque el conocimiento de la FG nos permite calcular campos electromagnéticos para una distribución arbitraria de las fuentes, así como resolver problemas con condiciones de frontera de Dirichlet, Neumann o Robin sobre superficies arbitrarias. Este es una ventaja considerable con respecto al método de Superposición y de Condiciones de Frontera expuesto en el capítulo 3, ya que éste se complica bastante cuando se tratan problemas con distribuciones arbitrarias de las fuentes. En lo subsecuente, nos restringiremos a estudiar sólo contribuciones provenientes de fuentes localizadas fuera de la interfaz Σ y sistemas sin condiciones de frontera impuestas sobre superficies adicionales, excepto por las condiciones de frontera al infinito.

Seguendo los pasos desarrollados en el artículo [12], a continuación introduciremos la FG, que propiamente es una matriz, la cual satisface la siguiente ecuación:

$$\left[[\square^2]^\mu{}_\nu - \tilde{\theta} \delta(z) \varepsilon^{3\mu\alpha}{}_\nu \partial_\alpha \right] G^\nu{}_\sigma(x, x') = 4\pi \eta^\mu{}_\sigma \delta^{(4)}(x - x') , \quad (4.13)$$

junto con las condiciones de frontera (4.12) y donde usamos x para denotar al cuadrivector de posición. Se busca que la solución general para el cuadripotencial en la norma de Lorenz sea de la siguiente forma:

$$A^\mu(x) = \int d^4 x' G^\mu{}_\nu(x, x') J^\nu(x') , \quad (4.14)$$

determinada por soluciones homogéneas de la ec. (4.10).

En lo que prosigue expondremos cómo se construye la FG $G^\mu_\nu(x, x')$. Primero, tomamos ventaja de la simetría traslacional en el tiempo y de la simetría traslacional en las direcciones paralelas a Σ (direcciones \mathcal{X} y \mathcal{Y}), mientras que dicha invariancia se rompe en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$. Explotando esta simetría, se introduce la transformada transversa de Fourier de la FG en la dirección paralela a Σ de la siguiente forma:

$$G^\mu_\nu(x, x') \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\omega G^\mu_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega), \quad (4.15)$$

$$= 4\pi \int \frac{d^2\mathbf{k}_\perp d\omega}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{R}_\perp} e^{-i\omega(t-t')} g^\mu_\nu(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega), \quad (4.16)$$

donde $\mathbf{R}_\perp = (\mathbf{x} - \mathbf{x}')_\perp$ y $\mathbf{k}_\perp = (k_x, k_y)$ es el momento paralelo a Σ [80]. De aquí en adelante, el subíndice \perp indicará que la variable marcada con él vivirá en el plano XY.

Debido a la antisimetría del símbolo de Levi-Civita, la derivada parcial que aparece en el segundo término de la ec. (4.13) introduce derivadas sólo de las coordenadas transversales \mathbf{R}_\perp y del tiempo pero no con respecto a la coordenada z . Esto permite escribir la ecuación para la FG reducida $g^\mu_\nu(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega)$:

$$\left[\mathcal{O}^\mu_\nu + i\tilde{\theta}\delta(z)\varepsilon^{3\mu\alpha} k_\alpha \right] g^\nu_\sigma(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) = \eta^\mu_\sigma \delta(z - z'), \quad (4.17)$$

donde \mathcal{O}^μ_ν es el operador dado por la ec. (4.11) pero ahora en el espacio de momentos transversos y de frecuencias, i.e. ahora $\square^2 = \mathbf{k}_\perp^2 - \omega^2\epsilon - \partial_z^2$ y $k^\alpha = (\omega, \mathbf{k}_\perp, 0)$.

Para resolver la ec. (4.13), se emplea el (ahora) método estándar [79] para lidiar con interacciones tipo δ que es similar al usado para obtener la FG para un potencial tipo δ en Mecánica Cuántica, donde la FG libre se usa para integrar la ecuación de Green con la interacción tipo δ . Por libre, nos referiremos a la FG que satisfaga (4.13) cuando $\tilde{\theta} = 0$ y que esté descompuesta en el mismo modo que la Ec. (4.16). A este tipo de FG se les denotará con una letra caligráfica para distinguirla de la completa $g^\nu_\sigma(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega)$. Para este fin, consideraremos una FG libre reducida $\mathcal{H}^\mu_\nu(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega)$, asociada con el operador \mathcal{O}^μ_ν previamente definido en (4.11), que resuelva la ecuación

$$\mathcal{O}^\mu_\sigma \mathcal{H}^\sigma_\nu(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) = \eta^\mu_\nu \delta(z - z'), \quad (4.18)$$

satisfaciendo las condiciones de frontera estándar en el infinito. Separando las componentes tenemos que

$$\epsilon (\mathbf{k}_\perp^2 - \omega^2\epsilon - \partial_z^2) \mathcal{H}^0_0(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) = \delta(z - z'), \quad (4.19)$$

$$\epsilon (\mathbf{k}_\perp^2 - \omega^2\epsilon - \partial_z^2) \mathcal{H}^0_i(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) = 0, \quad (4.20)$$

$$(\mathbf{k}_\perp^2 - \omega^2\epsilon - \partial_z^2) \mathcal{H}^i_0(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) = 0, \quad (4.21)$$

$$(\mathbf{k}_\perp^2 - \omega^2\epsilon - \partial_z^2) \mathcal{H}^i_j(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) = \delta^i_j \delta(z - z'), \quad (4.22)$$

$$(4.23)$$

que implica

$$\mathcal{H}^0_i(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) = 0 = \mathcal{H}^i_0(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega), \quad (4.24)$$

dejándonos sólo con

$$\epsilon (\mathbf{k}_\perp^2 - \omega^2 \epsilon - \partial_z^2) \mathcal{H}^0_0(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) = \delta(z - z'), \quad (4.25)$$

$$(\mathbf{k}_\perp^2 - \omega^2 \epsilon - \partial_z^2) \mathcal{H}^i_j(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) = \delta^i_j \delta(z - z'). \quad (4.26)$$

$$(4.27)$$

Este sistema se resuelve por medio de la FG $\mathcal{F}_0(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega)$ que satisface

$$(\mathbf{k}_\perp^2 - \omega^2 \epsilon - \partial_z^2) \mathcal{F}_0(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) = \delta(z - z'), \quad (4.28)$$

junto con las condiciones de frontera en el infinito. A $\mathcal{F}_0(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega)$ se le conoce como la función libre de Green en 2+1 dimensiones y su expresión es [81]:

$$\mathcal{F}_0(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) = \frac{i e^{i k_z |z - z'|}}{2 k_z}, \quad (4.29)$$

con

$$k_z = \begin{cases} \sqrt{\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2} & , \text{ si } \tilde{k}_0 > \|\mathbf{k}_\perp\| \\ i \sqrt{\mathbf{k}_\perp^2 - \tilde{k}_0^2} & , \text{ si } \tilde{k}_0 < \|\mathbf{k}_\perp\| \end{cases}, \quad (4.30)$$

donde definimos $\tilde{k}_0 = \omega \sqrt{\epsilon}$ con $\omega > 0$ y $\tilde{k}^\alpha = (\tilde{k}_0, \mathbf{k}_\perp, 0)$, $\tilde{k}^\alpha \tilde{k}_\alpha = \tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2 = \tilde{k}^2$. De este modo, obtenemos

$$\mathcal{F}^0_0(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) = \frac{1}{\epsilon} g_0(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega), \quad (4.31)$$

$$\mathcal{F}^i_j(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) = \delta^i_j g_0(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega). \quad (4.32)$$

Vale la pena notar que la ec. (4.28) requiere que la derivada de \mathcal{F}_0 sea discontinua en $z = z'$, i.e., $\partial_z \mathcal{F}_0(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega)|_{z=z'^+} = -1$ y que \mathcal{F}_0 sea continua en $z = z'$ [80, 82].

Ahora, observamos que la ec. (4.17) se puede integrar directamente al usar $\mathcal{H}^\mu_\nu(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega)$ junto con las propiedades de la delta de Dirac, obteniendo

$$g^\mu_\sigma(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) = \eta^\mu_\sigma \mathcal{F}_0(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) - i \tilde{\theta} \varepsilon^{3\mu\alpha} k_\alpha \mathcal{F}_0(z, 0; \mathbf{k}_\perp, \omega) g^\nu_\sigma(0, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega), \quad (4.33)$$

con lo que hemos reducido el problema a un conjunto de ecuaciones algebraicas acopladas. Los detalles del procedimiento para resolver la ec. (4.33) se muestran en el Apéndice D de esta tesis. La solución es

$$\begin{aligned} g^0_0(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) &= \frac{1}{\epsilon} \bar{g}^0_0(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega), \\ g^i_\mu(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) &= \bar{g}^i_\mu(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega), \\ g^\mu_i(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) &= \bar{g}^\mu_i(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega), \end{aligned} \quad (4.34)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{g}^\mu_\nu(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) &= \eta^\mu_\nu \mathcal{F}_0(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) + i\varepsilon^\mu_\nu \alpha^3 k_\alpha P(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) \\ &\quad + \tilde{\theta} \mathcal{F}_0(0, 0; \mathbf{k}_\perp, \omega) [k^\mu k_\nu - (\eta^\mu_\nu + u^\mu u_\nu) k^2] P(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega), \end{aligned} \quad (4.35)$$

donde $u^\mu = (0, 0, 0, 1)$ y

$$P(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) = -\tilde{\theta} \frac{\mathcal{F}_0(z, 0; \mathbf{k}_\perp, \omega) \mathcal{F}_0(0, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega)}{\epsilon - \tilde{\theta}^2 \tilde{k}^2 \mathcal{F}_0^2(0, 0; \mathbf{k}_\perp, \omega)}. \quad (4.36)$$

Al comparar la FG reducida (4.35) con aquella de [12] encontramos sólo una diferencia entre ellas. Dicha diferencia es el factor de ϵ que aparece en todos los denominadores de los factores del parámetro efectivo, tales como $4\tilde{\theta}/(4\epsilon + \tilde{\theta}^2)$ y $2\tilde{\theta}^2/(4\epsilon + \tilde{\theta}^2)$. La razón de esto radica en que tras observar los mismos factores de la FG estática de [13], donde la función dieléctrica es $\epsilon(\mathbf{x}) = \epsilon\Theta(-z) + \Theta(z)$ y la permeabilidad es $\mu^{-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mu}\Theta(-z) + \Theta(z)$, uno puede hacer el cambio de la $\epsilon(\mathbf{x})$ de ahí por la nuestra que corresponde a un medio homogéneo $\epsilon(\mathbf{x}) = \epsilon\Theta(-z) + \epsilon\Theta(z)$ y también haciendo $\mu^{-1}(\mathbf{x}) = 1$, obtenemos los mismo factores $\tilde{\theta}/(4\epsilon + \tilde{\theta}^2)$ and $\tilde{\theta}^2/(4\epsilon + \tilde{\theta}^2)$ que aquí se presentan.

Dado que la única diferencia entre las FGs G^μ_ν y \bar{G}^μ_ν es que $G^0_0 = \bar{G}^0_0/\epsilon$, pues los otros términos se quedan igual, resulta conveniente presentar explícitamente las FG con barra que se obtienen una vez que $\bar{g}^\mu_\nu(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega)$ es sustituida en la ec. (4.16). Finalmente, la FG se puede escribir como la suma de tres términos

$$\bar{G}^\mu_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = \bar{G}^\mu_{ED\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) + \bar{G}^\mu_{\tilde{\theta}\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) + \bar{G}^\mu_{\tilde{\theta}^2\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega), \quad (4.37)$$

donde los tres sumandos son

$$\begin{aligned} \bar{G}^\mu_{ED\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \eta^\mu_\nu i4\pi \int \frac{d^2\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{R}_\perp} \frac{e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2}|z-z'|}}{2\sqrt{\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2}}, \\ \bar{G}^\mu_{\tilde{\theta}\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= i\varepsilon^\mu_\nu \alpha^3 \frac{4\pi\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int \frac{d^2\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{R}_\perp} k_\alpha \frac{e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2}(|z|+|z'|)}}{\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2}, \\ \bar{G}^\mu_{\tilde{\theta}^2\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= i \frac{4\pi\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int \frac{d^2\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} [k^\mu k_\nu - (\eta^\mu_\nu + u^\mu u_\nu) k^2] \\ &\quad \times e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{R}_\perp} \frac{e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2}(|z|+|z'|)}}{2(\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

donde hemos usado que $n = \sqrt{\epsilon}$ es el índice de refracción en los coeficientes de $\bar{G}^\mu_{\tilde{\theta}\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ y $\bar{G}^\mu_{\tilde{\theta}^2\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$.

Aquí recalamos que el cuadripotencial y los campos electromagnéticos deben ser calculados con la FG $G^\mu_\nu(x, x')$. En el límite estático ($\omega = 0$), la ecuación (4.35) se reduce al resultado reportado en [10, 11].

4.2. Integración de la Función de Green en el espacio de coordenadas

En esta sección calcularemos las componentes de la FG (4.38) en el espacio de coordenadas. Para este fin, realizaremos la transformada transversa de Fourier y después la transformada de Fourier en la FG reducida (4.35), como está indicado en la ec. (4.16). Antes de comenzar los cálculos, citamos la identidad de Weyl [83], ya que la usaremos con frecuencia en esta tesis. Ésta es

$$\frac{e^{i\tilde{k}_0 R}}{R} = 4\pi \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{R}_\perp} \frac{i e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2} |z-z'|}}{2\sqrt{\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2}}, \quad (4.39)$$

donde $R = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$, $\mathbf{R}_\perp = (\mathbf{x} - \mathbf{x}')_\perp = (x-x', y-y')$, $\mathbf{k}_\perp = (k_x, k_y)$ y $\tilde{k}_0 = \omega\sqrt{\epsilon}$.

4.2.1. Componente $\bar{G}_0^0(x, x')$

En esta subsección, comenzamos por la componente $\bar{G}_0^0(x, x')$ que es la suma de las componentes $\mu = 0$ y $\nu = 0$ de (4.38). Después de tomar la transformada de Fourier transversa de dicha componente y usando la identidad de Weyl (4.39), tenemos que

$$\bar{G}_0^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = \frac{e^{i\tilde{k}_0 R}}{R} - \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} 4\pi \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')_\perp} \frac{\mathbf{k}_\perp^2 e^{-\sqrt{\mathbf{k}_\perp^2 - \tilde{k}_0^2} \tilde{Z}}}{2(\mathbf{k}_\perp^2 - \tilde{k}_0^2)^{3/2}}, \quad (4.40)$$

donde $\tilde{Z} = |z| + |z'|$.

Esta expresión para \bar{G}_0^0 la reescribimos de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \bar{G}_0^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \frac{e^{i\tilde{k}_0 R}}{R} - \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} 4\pi \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')_\perp} \\ &\times \left[\frac{1}{2\sqrt{\mathbf{k}_\perp^2 - \tilde{k}_0^2}} + \frac{\tilde{k}_0^2}{2(\mathbf{k}_\perp^2 - \tilde{k}_0^2)^{3/2}} \right] e^{-\sqrt{\mathbf{k}_\perp^2 - \tilde{k}_0^2} \tilde{Z}}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

donde identificamos el primer término dentro de los corchetes como el integrando de la identidad de Weyl (4.39). De este modo, encontramos que

$$\begin{aligned} \bar{G}_0^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \frac{e^{i\tilde{k}_0 R}}{R} - \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 \tilde{R}}}{\tilde{R}} \\ &- \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{4\pi \tilde{k}_0^2}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')_\perp} \frac{e^{-\sqrt{\mathbf{k}_\perp^2 - \tilde{k}_0^2} \tilde{Z}}}{(\mathbf{k}_\perp^2 - \tilde{k}_0^2)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

donde $\tilde{R} = \sqrt{R_{\perp}^2 + \tilde{Z}^2}$. La integral restante será calculada al integrar dos veces la identidad de Weyl (4.39) sobre \tilde{Z} . Entonces, integrando una vez (4.39) se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{Z}}^{\infty} d\tilde{Z}' \frac{e^{i\tilde{k}_0 \tilde{R}'}}{\tilde{R}'} &= 4\pi \int \frac{d^2 \mathbf{k}_{\perp}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}_{\perp} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')_{\perp}} \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{k}_{\perp}^2 - \tilde{k}_0^2}} \int_{\tilde{Z}}^{\infty} d\tilde{Z}' e^{-\sqrt{\mathbf{k}_{\perp}^2 - \tilde{k}_0^2} \tilde{Z}'}, \\ &= 4\pi \int \frac{d^2 \mathbf{k}_{\perp}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}_{\perp} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')_{\perp}} \frac{e^{-\sqrt{\mathbf{k}_{\perp}^2 - \tilde{k}_0^2} \tilde{Z}}}{2(\mathbf{k}_{\perp}^2 - \tilde{k}_0^2)}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

donde $\tilde{R}' = \sqrt{R_{\perp}^2 + \tilde{Z}'^2}$. Integrando una vez más, obtenemos

$$\int_{\tilde{Z}}^{\infty} d\tilde{Z}' \int_{\tilde{Z}'}^{\infty} d\tilde{Z}'' \frac{e^{i\tilde{k}_0 \tilde{R}''}}{\tilde{R}''} = 4\pi \int \frac{d^2 \mathbf{k}_{\perp}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}_{\perp} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')_{\perp}} \frac{e^{-\sqrt{\mathbf{k}_{\perp}^2 - \tilde{k}_0^2} \tilde{Z}}}{2(\mathbf{k}_{\perp}^2 - \tilde{k}_0^2)^{3/2}}. \quad (4.44)$$

De este modo, hemos encontrado que

$$\bar{G}^0_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = \frac{e^{i\tilde{k}_0 R}}{R} - \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 \tilde{R}}}{\tilde{R}} - \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \tilde{k}_0^2 \int_{\tilde{Z}}^{\infty} d\tilde{Z}' \int_{\tilde{Z}'}^{\infty} d\tilde{Z}'' \frac{e^{i\tilde{k}_0 \tilde{R}''}}{\tilde{R}''}. \quad (4.45)$$

En este punto, vale la pena mencionar que al hacer $\omega = 0$, esta ecuación reproduce la componente del caso estático reportada en [10]. Luego, al recordar el siguiente resultado para la FG retardada [76]

$$G_{ED}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega \sqrt{\epsilon} R}}{R} e^{-i\omega(t-t')} = \frac{\delta(t' - t + \sqrt{\epsilon} R)}{R}, \quad (4.46)$$

seremos capaces de integrar $\bar{G}^0_0(x, x'; \omega)$ en las frecuencias como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \bar{G}^0_0(x, x') &= \frac{\delta(t' - t + \sqrt{\epsilon} R)}{R} - \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{\delta(t' - t + \sqrt{\epsilon} \tilde{R})}{\tilde{R}} \\ &\quad + \frac{\tilde{\theta}^2 n^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\tilde{Z}}^{\infty} d\tilde{Z}' \int_{\tilde{Z}'}^{\infty} d\tilde{Z}'' \frac{\delta(t' - t + \sqrt{\epsilon} \tilde{R}'')}{\tilde{R}''}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Con lo anterior, sólo resta determinar la siguiente integral:

$$\mathbb{J}(x, x') = \int_{\tilde{Z}}^{\infty} d\tilde{Z}' \int_{\tilde{Z}'}^{\infty} d\tilde{Z}'' \frac{\delta(t' - t + \sqrt{\epsilon} \tilde{R}'')}{\tilde{R}''}. \quad (4.48)$$

Para conseguirlo, necesitamos calcular primero la integral

$$\mathbb{K}(x, x') = \int_{\tilde{Z}}^{\infty} d\tilde{Z}' \frac{\delta(t' - t + \sqrt{\epsilon} \tilde{R}')}{\tilde{R}'}, \quad (4.49)$$

que se puede reescribir de la siguiente manera

$$\mathbb{K}(x, x') = \frac{\sqrt{\epsilon}}{t-t'} \int_{\tilde{z}}^{\infty} d\tilde{z}' \delta \left(t' - t + \sqrt{\epsilon} \sqrt{R_{\perp}^2 + \tilde{z}'^2} \right). \quad (4.50)$$

Aplicando la siguiente propiedad de la delta de Dirac [84]:

$$\delta[f(x)] = \sum_{n, f(x_n)=0, f'(x_n) \neq 0} \frac{\delta(x-x_n)}{|f'(x_n)|}, \quad (4.51)$$

somos capaces de reescribir $\mathbb{K}(x, x')$ como sigue

$$\mathbb{K}(x, x') = \int_{\tilde{z}}^{\infty} \frac{d\tilde{z}'}{\sqrt{(t-t')^2 - \epsilon R_{\perp}^2}} \left[\delta \left(\tilde{z}' - \sqrt{\frac{(t-t')^2}{\epsilon} - R_{\perp}^2} \right) - \delta \left(\tilde{z}' + \sqrt{\frac{(t-t')^2}{\epsilon} - R_{\perp}^2} \right) \right]. \quad (4.52)$$

Luego, sabiendo que la delta de Dirac satisface

$$\int_b^{\infty} dx \delta(x-a) f(x) = \Theta(a-b) f(a), \quad (4.53)$$

donde Θ denota a la función de Heaviside estándar, concluimos que

$$\mathbb{K}(x, x') = \frac{\Theta \left(\sqrt{\frac{(t-t')^2}{\epsilon} - R_{\perp}^2} - \tilde{z} \right)}{\sqrt{(t-t')^2 - \epsilon R_{\perp}^2}}. \quad (4.54)$$

Usando la ec. (4.54), $\mathbb{J}(x, x')$ se lee ahora como

$$\mathbb{J}(x, x') = \frac{1}{\sqrt{(t-t')^2 - \epsilon R_{\perp}^2}} \int_{\tilde{z}}^{\infty} d\tilde{z}' \Theta \left(\sqrt{\frac{(t-t')^2}{\epsilon} - R_{\perp}^2} - \tilde{z}' \right). \quad (4.55)$$

Sin embargo, la integral de la función Heaviside es la función rampa [85]

$$\text{ramp}(\xi - a) = \int_{-\infty}^{\xi} d\gamma \Theta(\gamma - a), \quad (4.56)$$

donde $\text{ramp}(\xi - a) = (\xi - a)\Theta(\xi - a)$.

Entonces, el resultado final para $\mathbb{J}(x, x')$ es

$$\mathbb{J}(x, x') = \frac{\text{ramp} \left(\sqrt{\frac{(t-t')^2}{\epsilon} - R_{\perp}^2} - \tilde{z} \right)}{\sqrt{(t-t')^2 - \epsilon R_{\perp}^2}}. \quad (4.57)$$

Por lo tanto, considerando las ecs. (4.54) y (4.57), tendremos finalmente que

$$\begin{aligned} \bar{G}_0^0(x, x') &= \frac{\delta(t' - t + \sqrt{\epsilon}R)}{R} - \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{\delta(t' - t + \sqrt{\epsilon}\tilde{R})}{\tilde{R}} \\ &+ \frac{\tilde{\theta}^2 n^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\text{ramp} \left(\sqrt{\frac{(t-t')^2}{\epsilon} - R_{\perp}^2} - \tilde{z} \right)}{\sqrt{(t-t')^2 - \epsilon R_{\perp}^2}} \right]. \end{aligned} \quad (4.58)$$

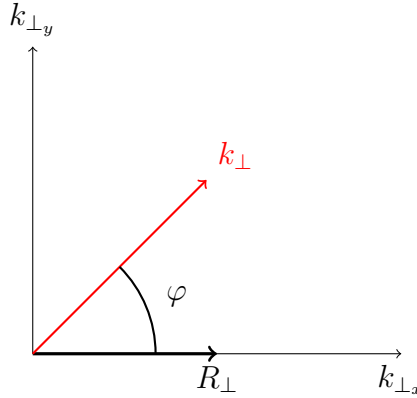


Figura 4.2: Disposición de los vectores $\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_{\perp x}, \mathbf{k}_{\perp y}$ y \mathbf{R}_\perp para integrar las componentes de la GF en el espacio de coordenadas.

4.2.2. Componentes $\bar{G}_i^0(x, x')$

Ahora calcularemos las componentes $\bar{G}_i^0(x, x')$ en el espacio de coordenadas que son la suma de las componentes $\mu = 0$ y $\nu = i$ de (4.38). De la ec. (4.35), se tiene que las componentes de la FG reducida son explícitamente las siguientes

$$g_i^0(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) = \frac{\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \left[\frac{\tilde{\theta}\omega k_i}{2\sqrt{\mathbf{k}_\perp^2 - \tilde{k}_0^2}} - i\varepsilon_i^0 j^3 k_j \right] \frac{e^{-\sqrt{\mathbf{k}_\perp^2 - \tilde{k}_0^2} \tilde{z}}}{\mathbf{k}_\perp^2 - \tilde{k}_0^2}. \quad (4.59)$$

Resulta conveniente definir los siguientes vectores

$$\mathcal{I}(\mathbf{R}_\perp, \tilde{\mathcal{Z}}; \omega) = 4\pi \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{R}_\perp} \frac{\mathbf{k}_\perp e^{-\sqrt{\mathbf{k}_\perp^2 - \tilde{k}_0^2} \tilde{z}}}{\mathbf{k}_\perp^2 - \tilde{k}_0^2}, \quad (4.60)$$

$$\mathcal{J}(\mathbf{R}_\perp, \tilde{\mathcal{Z}}; \omega) = 4\pi \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{R}_\perp} \frac{\mathbf{k}_\perp e^{-\sqrt{\mathbf{k}_\perp^2 - \tilde{k}_0^2} \tilde{z}}}{(\mathbf{k}_\perp^2 - \tilde{k}_0^2)^{3/2}}, \quad (4.61)$$

donde $\mathbf{k}_\perp = (k_{\perp x}, k_{\perp y})$. En términos de éstos se tiene que

$$\bar{G}_i^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = \frac{\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \left(\frac{\tilde{\theta}\omega}{2} \mathcal{I}_i - i\varepsilon_i^0 j^3 \mathcal{J}_j \right) \quad (4.62)$$

Para calcular las integrales que definen a los vectores \mathcal{I} y \mathcal{J} dados por las ecs. (4.60) y (4.61) respectivamente, elegimos el sistema de coordenadas de la Fig. (4.2). De este modo, el vector \mathcal{I} se escribe como se muestra enseguida

$$\mathcal{I}_k(\mathbf{R}_\perp, \tilde{\mathcal{Z}}; \omega) = 2 \int_0^\infty dk_\perp \frac{k_\perp^2 e^{-\sqrt{k_\perp^2 - \tilde{k}_0^2} \tilde{z}}}{k_\perp^2 - \tilde{k}_0^2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} e^{ik_\perp R_\perp \cos \varphi} \right], \quad (4.63)$$

donde el subíndice k denota que el vector \mathbf{k}_\perp está escrito en el sistema de coordenadas particular de la Fig. (4.2). Después de usar la representación integral de la función de Bessel [84], encontramos que

$$\mathcal{I}_k(\mathbf{R}_\perp, \tilde{\mathcal{Z}}; \omega) = -2i\hat{\mathbf{R}}_\perp \frac{\partial}{\partial R_\perp} \int_0^\infty dk_\perp \frac{k_\perp}{k_\perp^2 - \tilde{k}_0^2} J_0(k_\perp R_\perp) e^{-\sqrt{k_\perp^2 - \tilde{k}_0^2} \tilde{\mathcal{Z}}} . \quad (4.64)$$

Sin embargo, podemos escribir esta última expresión como la integral de la identidad de Weyl (4.39), de la siguiente manera

$$\mathcal{I}_k(\mathbf{R}_\perp, \tilde{\mathcal{Z}}; \omega) = -2i\hat{\mathbf{R}}_\perp \frac{\partial}{\partial R_\perp} \int_{\tilde{\mathcal{Z}}}^\infty d\tilde{\mathcal{Z}}' \frac{e^{i\tilde{k}_0 \tilde{R}'}}{\tilde{R}'}, \quad (4.65)$$

donde $\tilde{R}' = \sqrt{R_\perp^2 + \tilde{\mathcal{Z}}'^2}$. Como consecuencia del sistema de coordenadas elegido, la segunda componente de \mathcal{I}_k es cero, esto implica que este vector es paralelo a $\hat{\mathbf{R}}_\perp$. No obstante, esto se generaliza de forma directa a un sistema de coordenadas arbitrario como sigue

$$\mathcal{I}(\mathbf{R}_\perp, \tilde{\mathcal{Z}}; \omega) = -\frac{2i}{R_\perp} \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial R_\perp} \int_{\tilde{\mathcal{Z}}}^\infty d\tilde{\mathcal{Z}}' \frac{e^{i\tilde{k}_0 \tilde{R}'}}{\tilde{R}'}. \quad (4.66)$$

Usando la identidad de Weyl (4.39), uno observa que \mathcal{I} y \mathcal{J} están relacionados del siguiente modo

$$\mathcal{J}(\mathbf{R}_\perp, \tilde{\mathcal{Z}}; \omega) = \int_{\tilde{\mathcal{Z}}}^\infty d\tilde{\mathcal{Z}}' \mathcal{I}(\mathbf{R}_\perp, \tilde{\mathcal{Z}}'; \omega). \quad (4.67)$$

Más aún, utilizando (4.66) se tiene que

$$\mathcal{J}(\mathbf{R}_\perp, \tilde{\mathcal{Z}}; \omega) = -\frac{2i}{R_\perp} \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial R_\perp} \int_{\tilde{\mathcal{Z}}}^\infty d\tilde{\mathcal{Z}}' \int_{\tilde{\mathcal{Z}}'}^\infty d\tilde{\mathcal{Z}}'' \frac{e^{i\tilde{k}_0 \tilde{R}''}}{\tilde{R}''}. \quad (4.68)$$

Entonces, a través de las ecs. (4.66) y (4.68) las componentes $G^0_i(x, x'; \omega)$ se leen

$$\begin{aligned} \bar{G}^0_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{i\omega R_{\perp i}}{R_\perp} \frac{\partial}{\partial R_\perp} \int_{\tilde{\mathcal{Z}}}^\infty d\tilde{\mathcal{Z}}' \int_{\tilde{\mathcal{Z}}'}^\infty d\tilde{\mathcal{Z}}'' \frac{e^{i\tilde{k}_0 \tilde{R}''}}{\tilde{R}''} \\ &\quad - \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \varepsilon^0_{i j 3} \frac{R_{\perp j}}{R_\perp} \frac{\partial}{\partial R_\perp} \int_{\tilde{\mathcal{Z}}}^\infty d\tilde{\mathcal{Z}}' \frac{e^{i\tilde{k}_0 \tilde{R}'}}{\tilde{R}'}, \end{aligned} \quad (4.69)$$

donde $R_\perp^i = (x - x', y - y')$. En este punto, una vez más notamos que si hacemos $\tilde{k}_0 = 0$, esta ecuación reproduce la componente del caso estático reportada en [10].

Tras realizar la transformada de Fourier inversa en las frecuencias y al utilizar la FG retardada (4.46), tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{G}^0_i(x, x') &= -\frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \varepsilon^0_{i j 3} \frac{R_{\perp j}}{R_\perp} \frac{\partial}{\partial R_\perp} \int_{\tilde{\mathcal{Z}}}^\infty d\tilde{\mathcal{Z}}' \frac{\delta(t' - t + \sqrt{\epsilon} \tilde{R}')}{\tilde{R}'} \\ &\quad - \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{R_{\perp i}}{R_\perp} \frac{\partial^2}{\partial t \partial R_\perp} \int_{\tilde{\mathcal{Z}}}^\infty d\tilde{\mathcal{Z}}' \int_{\tilde{\mathcal{Z}}'}^\infty d\tilde{\mathcal{Z}}'' \frac{\delta(t' - t + \sqrt{\epsilon} \tilde{R}'')}{\tilde{R}''}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Sin embargo, a partir de esta expresión podemos identificar las integrales (4.54) and (4.57). Por lo tanto, la expresión final de estas componentes es

$$\begin{aligned} \bar{G}^0_i(x, x') = & -\frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{\varepsilon^0_i{}^{j3} R_{\perp j}}{R_{\perp}} \frac{\partial}{\partial R_{\perp}} \left[\frac{\Theta \left(\sqrt{\frac{(t-t')^2}{\epsilon} - R_{\perp}^2} - \tilde{Z} \right)}{\sqrt{(t-t')^2 - \epsilon R_{\perp}^2}} \right] \\ & - \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{R_{\perp i}}{R_{\perp}} \frac{\partial^2}{\partial t \partial R_{\perp}} \left[\frac{\text{ramp} \left(\sqrt{\frac{(t-t')^2}{\epsilon} - R_{\perp}^2} - \tilde{Z} \right)}{\sqrt{(t-t')^2 - \epsilon R_{\perp}^2}} \right]. \end{aligned} \quad (4.71)$$

4.2.3. Componentes $\bar{G}^i_j(x, x')$

Ahora determinemos las componentes $\bar{G}^i_j(x, x')$ que son la suma de las componentes $\mu = i$ y $\nu = j$ de (4.38). De la ec. (4.35) tenemos que las componentes correspondientes de la FG reducida son

$$\begin{aligned} g^i_j(z, z'; \mathbf{k}_{\perp}, \omega) = & \eta^i_j \frac{e^{-\sqrt{\mathbf{k}_{\perp}^2 - \tilde{k}_0^2} |z-z'|}}{2\sqrt{\mathbf{k}_{\perp}^2 - \tilde{k}_0^2}} \\ & - \frac{\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \left[\frac{\tilde{\theta} k^i k_j}{2\sqrt{\mathbf{k}_{\perp}^2 - \tilde{k}_0^2}} + i\omega \varepsilon^i_j{}^{03} \right] \frac{e^{-\sqrt{\mathbf{k}_{\perp}^2 - \tilde{k}_0^2} \tilde{z}}}{\mathbf{k}_{\perp}^2 - \tilde{k}_0^2}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Ahora usaremos algunos resultados previamente obtenidos para obtener $G^i_j(x, x'; \omega)$. Primero, notamos que el primer sumando se puede integrar directamente por medio de la identidad de Weyl (4.39). Segundo, la transformada de Fourier transversa del primer término dentro de los corchetes está relacionada con el vector \mathcal{J} (4.61) en el siguiente modo

$$-i\partial^i \mathcal{J}_j(\mathbf{R}_{\perp}, \tilde{Z}; \omega) = 4\pi \int \frac{d^2 \mathbf{k}_{\perp}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{R}_{\perp}} \frac{k^i k_j e^{-\sqrt{\mathbf{k}_{\perp}^2 - \tilde{k}_0^2} \tilde{Z}}}{(\mathbf{k}_{\perp}^2 - \tilde{k}_0^2)^{3/2}}. \quad (4.73)$$

Por último, la transformada de Fourier del término restante se obtiene a través de la identidad de Weyl (4.39) como se muestra enseguida

$$2i\omega \varepsilon^i_j{}^{03} \int_{\tilde{Z}}^{\infty} d\tilde{Z}' \frac{e^{i\tilde{k}_0 \tilde{R}'}}{\tilde{R}'} = 4\pi i\omega \varepsilon^i_j{}^{03} \int \frac{d^2 \mathbf{k}_{\perp}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{R}_{\perp}} \frac{e^{-\sqrt{\mathbf{k}_{\perp}^2 - \tilde{k}_0^2} \tilde{Z}}}{\mathbf{k}_{\perp}^2 - \tilde{k}_0^2}. \quad (4.74)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \bar{G}^i_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = & \eta^i_j \frac{e^{i\tilde{k}_0 R}}{R} - \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} i\omega \varepsilon^i_j{}^{03} \int_{\tilde{Z}}^{\infty} d\tilde{Z}'' \frac{e^{i\tilde{k}_0 \tilde{R}''}}{\tilde{R}''} \\ & - \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{\partial^i R_{\perp j}}{R_{\perp}} \frac{\partial}{\partial R_{\perp}} \int_{\tilde{Z}}^{\infty} d\tilde{Z}' \int_{\tilde{Z}'}^{\infty} d\tilde{Z}'' \frac{e^{i\tilde{k}_0 \tilde{R}''}}{\tilde{R}''}, \end{aligned} \quad (4.75)$$

la cual reproduce correctamente la componente en el caso estático cuando $\omega = 0$ como se reporta en [10].

Tras realizar la transformada de Fourier inversa en las frecuencias y al utilizar la FG retardada (4.46), tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{G}^i_j(x, x') = & \eta^i_j \frac{\delta(t' - t + \sqrt{\epsilon}R)}{R} + \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \varepsilon^i_{j\ 03} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tilde{z}}^{\infty} d\tilde{z}' \frac{\delta(t' - t + \sqrt{\epsilon}\tilde{R}')}{\tilde{R}'} \\ & - \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{\partial^i R_{\perp j}}{R_{\perp}} \frac{\partial}{\partial R_{\perp}} \int_{\tilde{z}}^{\infty} d\tilde{z}' \int_{\tilde{z}'}^{\infty} d\tilde{z}'' \frac{\delta(t' - t + \sqrt{\epsilon}\tilde{R}'')}{\tilde{R}''}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Finalmente, utilizamos las integrales (4.54) y (4.57) para obtener la expresión final de esta componente, la cual es

$$\begin{aligned} \bar{G}^i_j(x, x') = & \eta^i_j \frac{\delta(t' - t + \sqrt{\epsilon}R)}{R} + \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \varepsilon^i_{j\ 03} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\Theta \left(\sqrt{\frac{(t-t')^2}{\epsilon} - R_{\perp}^2} - \tilde{z} \right)}{\sqrt{(t-t')^2 - \epsilon R_{\perp}^2}} \right] \\ & - \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{\partial^i R_{\perp j}}{R_{\perp}} \frac{\partial}{\partial R_{\perp}} \left[\frac{\text{ramp} \left(\sqrt{\frac{(t-t')^2}{\epsilon} - R_{\perp}^2} - \tilde{z} \right)}{\sqrt{(t-t')^2 - \epsilon R_{\perp}^2}} \right]. \end{aligned} \quad (4.77)$$

En resumen,

$$\begin{aligned}
 \bar{G}_0^0(x, x') &= \frac{\delta(t' - t + \sqrt{\epsilon}R)}{R} - \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{\delta(t' - t + \sqrt{\epsilon}\tilde{R})}{\tilde{R}} \\
 &+ \frac{\tilde{\theta}^2 n^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\text{ramp} \left(\sqrt{\frac{(t-t')^2}{\epsilon} - R_\perp^2} - \tilde{Z} \right)}{\sqrt{(t-t')^2 - \epsilon R_\perp^2}} \right], \\
 \bar{G}_i^0(x, x') &= -\frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{\varepsilon^0_{i j^3} R_{\perp j}}{R_\perp} \frac{\partial}{\partial R_\perp} \left[\frac{\Theta \left(\sqrt{\frac{(t-t')^2}{\epsilon} - R_\perp^2} - \tilde{Z} \right)}{\sqrt{(t-t')^2 - \epsilon R_\perp^2}} \right] \\
 &- \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{R_{\perp i}}{R_\perp} \frac{\partial^2}{\partial t \partial R_\perp} \left[\frac{\text{ramp} \left(\sqrt{\frac{(t-t')^2}{\epsilon} - R_\perp^2} - \tilde{Z} \right)}{\sqrt{(t-t')^2 - \epsilon R_\perp^2}} \right], \tag{4.78} \\
 \bar{G}_j^i(x, x') &= \eta^i_j \frac{\delta(t' - t + \sqrt{\epsilon}R)}{R} + \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \varepsilon^i_{j 03} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\Theta \left(\sqrt{\frac{(t-t')^2}{\epsilon} - R_\perp^2} - \tilde{Z} \right)}{\sqrt{(t-t')^2 - \epsilon R_\perp^2}} \right] \\
 &- \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{\partial^i R_{\perp j}}{R_\perp} \frac{\partial}{\partial R_\perp} \left[\frac{\text{ramp} \left(\sqrt{\frac{(t-t')^2}{\epsilon} - R_\perp^2} - \tilde{Z} \right)}{\sqrt{(t-t')^2 - \epsilon R_\perp^2}} \right],
 \end{aligned}$$

En este punto es necesario discutir el significado físico de esta FG. Primero que nada, esta FG (4.78) ya no es una función como es en el caso de la ED estándar para la configuración ilustrada por la Fig. 4.1, sino que es una matriz de 4×4 entradas. De hecho, el primer término de las componentes $\bar{G}_0^0(x, x')$ y $\bar{G}_j^i(x, x')$ es la FG retardada de la ED estándar para la configuración mencionada [86]. Luego, las componentes $\bar{G}_i^0(x, x')$, inexistentes en la ED estándar, codifican el EME debido al θ -plano. Después, tras analizar el segundo término de la componente $\bar{G}_0^0(x, x')$ en cada semi-espacio, es decir, analizando los casos $z > 0$ y $z < 0$, se le interpreta con la imagen de la fuente puntual con magnitud proporcional a $-\tilde{\theta}^2/(4n^2 + \tilde{\theta}^2)$. Con respecto a los términos que tienen la función de Heaviside es posible interpretarlos como el potencial de un monopolo magnético puntual como se expone de forma general en la Ref. [87] y que se desarrolla con mayor profundidad en el apéndice G*. Finalmente, con respecto a los términos que involucran la función rampa, aún resta por hallar una interpretación física de lo que esta función de distribución significa en el contexto de la θ -ED.

*Comparar con las ecs. (G.27) y (G.28) del apéndice mencionado.

4.3. Integración de la Función de Green en el régimen de campo lejano

Como se ha mencionado, el propósito de esta tesis doctoral es analizar la radiación cuando exponemos una fuente externa dependiente del tiempo frente a un TI con simetría plana. Para ello, el siguiente paso sería convolucionar la FG (4.78) con una fuente específica vía la ec. (4.14) y obtener los campos electromagnéticos correspondientes. No obstante, el manejo de la FG (4.78) resulta bastante complicado ya que la convolución de ésta con cualquier fuente con dependencia temporal implicará la difícil tarea de clasificar los tiempos retardados modificados que surgen como consecuencia de las condiciones que las funciones rampa y Heaviside de la FG imponen sobre el tiempo retardado modificado. Un ejemplo de esta dificultad se exhibirá hasta el siguiente capítulo cuando se estudie el campo electromagnético de una partícula con velocidad constante v perpendicular al TI en el cual no se requiere de ninguna aproximación.

Con base en los motivos anteriores e inspirados en el tratamiento de la radiación electromagnética en la literatura estándar [76, 88], se decidió estudiar la FG en el régimen de campo lejano. La subsecuente aplicación dentro de la aproximación de campo lejano al mismo sistema descrito en el párrafo anterior se dejará para el siguiente capítulo.

Para este fin, retomaremos las expresiones (4.38) de la FG y calcularemos explícitamente la aproximación de campo lejano para los tres términos de la FG.

4.3.1. $\bar{G}_{ED\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ en el régimen de campo lejano

La aproximación para el campo lejano del término $\bar{G}_{ED\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ se conoce bien en la literatura [76, 86]. No obstante, resultará muy conveniente exponerla aquí, ya que servirá de base para el cálculo del mismo régimen para los otros dos términos de la FG.

Partimos de la siguiente ecuación

$$\bar{G}_{ED\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = \eta_\nu^\mu i4\pi \int \frac{d^2\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{R}_\perp} \frac{e^{i\sqrt{k_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2}|z-z'|}}{2\sqrt{\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2}}.$$

Luego, la doble integral en \mathbf{k}_\perp se calcula convenientemente al expresar el elemento de área en coordenadas polares $d^2\mathbf{k}_\perp = k_\perp dk_\perp d\varphi$ y eligiendo el eje $k_{\perp x}$ paralelo a la dirección del vector $\mathbf{R}_\perp = (\mathbf{x} - \mathbf{x}')_\perp$ como se puede apreciar en la Fig. (4.2). Escribiendo $\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{R}_\perp = k_\perp R_\perp \cos \varphi$ y usando la representación angular de la función de Bessel $J_0(k_\perp R_\perp)$ [89], obtenemos que

$$\begin{aligned} \bar{G}_{ED\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= i\eta_\nu^\mu \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp}{\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}} J_0(k_\perp R_\perp) e^{i\sqrt{k_0^2 - k_\perp^2}|z-z'|} \\ &= \eta_\nu^\mu \frac{e^{i\tilde{k}_0 R}}{R}, \end{aligned} \tag{4.79}$$

4.3 Integración de la Función de Green en el régimen de campo lejano 51

aquí $R = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \sqrt{R_\perp^2 + (z - z')^2}$, donde la última igualdad es una consecuencia directa de la identidad de Sommerfeld [90]. Más aún, las siguientes condiciones sobre las coordenadas

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\| \gg \|\mathbf{x}'\| \quad , \quad R_\perp = \|(\mathbf{x} - \mathbf{x}')_\perp\| \simeq \|\mathbf{x}_\perp\| = \rho \\ |z| + |z'| \simeq |z| \end{aligned} \quad (4.80)$$

en la aproximación de campo lejano produce el resultado bien conocido para $\bar{G}_{ED\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ en ED estándar [76, 86],

$$\bar{G}_{ED\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = \eta_\nu^\mu \frac{e^{i\tilde{k}_0(r - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}')}}{r} \quad , \quad (4.81)$$

con $\hat{\mathbf{n}}$ siendo un vector unitario en la dirección de \mathbf{x} y $\|\mathbf{x}\| = r$. Para propósitos futuros, será conveniente reescribir la identidad de Sommerfeld en la ec. (4.79) por medio de la relación

$$J_0(x) = \frac{1}{2} \left(H_0^{(1)}(x) + H_0^{(2)}(x) \right) \quad , \quad (4.82)$$

donde $H_0^{(1)}$ and $H_0^{(2)}$ son las funciones de Hankel, junto con la fórmula de reflexión [84]

$$H_0^{(1)}(e^{i\pi}x) = -H_0^{(2)}(x) \quad . \quad (4.83)$$

Esto nos lleva a

$$\frac{e^{i\tilde{k}_0 R}}{R} = \frac{i}{2} \oint_{C_{k_\perp}} \frac{k_\perp dk_\perp}{\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}} H_0^{(1)}(k_\perp R_\perp) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2} |z - z'|} \quad , \quad (4.84)$$

donde C_{k_\perp} denota al contorno de integración de Sommerfeld que está definido en la Fig. 4.3 que se toma de la Fig. 5 del libro de Baños [91]. En este punto vale la pena comentar que por propósitos de convergencia y para evitar cuestiones problemáticas sobre la misma, supondremos que \tilde{k}_0 tiene una parte imaginaria mucho menor a uno pero positiva $\sigma > 0$ [92] tanto en la integral de Sommerfeld (4.84) como en las integrales de este tipo que surgirán al analizar los términos $\bar{G}_{\tilde{\theta}\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ y $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$. Esto garantiza que $\text{Re} \left[i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2} \right] < 0$, es decir, el argumento de la exponencial involucrada en las integrales será negativo y entonces la exponencial decaerá rápidamente asegurando la convergencia de la integral [93].

4.3.2. $\bar{G}_{\tilde{\theta}\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ en el régimen de campo lejano

A continuación, calcularemos la aproximación de campo lejano del término $\bar{G}_{\tilde{\theta}\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ cuya expresión es

$$\bar{G}_{\tilde{\theta}\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = i\varepsilon_\nu^{\mu\alpha} \frac{4\pi\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int \frac{d^2\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{R}_\perp} k_\alpha \frac{e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2} (|z| + |z'|)}}{\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2} \quad , \quad (4.85)$$

donde recordamos que $k^\alpha = (\omega, \mathbf{k}_\perp, 0)$.

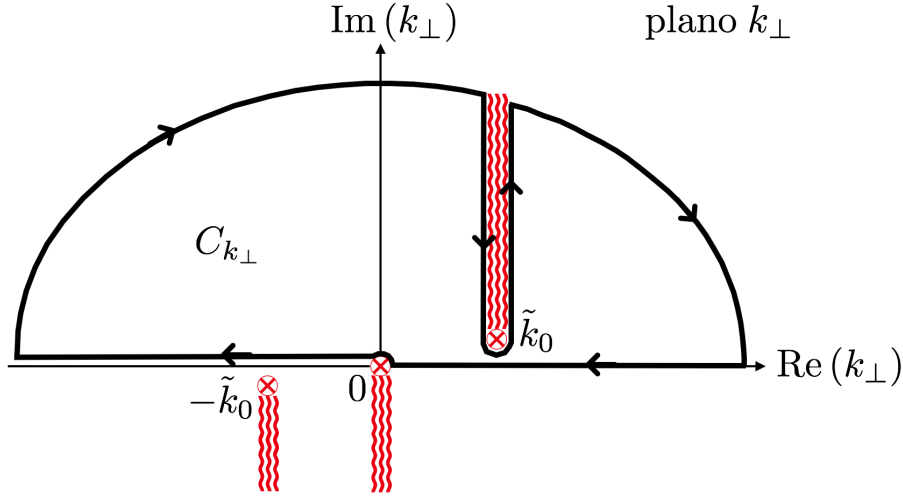


Figura 4.3: Camino de integración de Sommerfeld $C_{k_{\perp}}$ en el plano k_{\perp} . En esta figura se exhiben los cortes de rama generados por los puntos ramales $\pm\tilde{k}_0$ y 0 y una deformación posible al camino de integración. Vale la pena mencionar que este es el dibujo completo del camino de integración de la Fig. 2.2.5 del libro [94] que inicialmente se había usado.

Luego, eligiendo el sistema de coordenadas de la Fig. (4.2) usado previamente, $\bar{G}_{\theta\nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ se reescribe como sigue

$$G_{\theta\nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = i\varepsilon_{\nu}^{\mu} \alpha^3 \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} I_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega), \quad (4.86)$$

donde se definió

$$I_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = \int_0^{\infty} \frac{k_{\perp} dk_{\perp}}{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2} e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2}(|z| + |z'|)} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{ik_{\perp} R_{\perp} \cos \varphi} k_{\alpha}. \quad (4.87)$$

Después, escribimos la integral angular de la ec. (4.87) en el sistema de coordenadas de la Fig. (4.2) como se muestra enseguida

$$I_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = \omega \int_0^{\infty} \frac{k_{\perp} dk_{\perp}}{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2} e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2}(|z| + |z'|)} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{ik_{\perp} R_{\perp} \cos \varphi}, \quad (4.88)$$

$$\mathbf{I}_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = - \int_0^{\infty} \frac{k_{\perp}^2 dk_{\perp}}{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2} e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2}(|z| + |z'|)} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} e^{ik_{\perp} R_{\perp} \cos \varphi} \right], \quad (4.89)$$

donde el subíndice k indica que el vector \mathbf{I}_k está escrito en el sistema coordenado de la Fig.

(4.2). Realizando las integrales angulares, que son bien conocidas, resulta que

$$I_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = \omega \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp}{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2} J_0(k_\perp R_\perp) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z|+|z'|)} , \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= -i\hat{\mathbf{R}}_\perp \int_0^\infty \frac{k_\perp^2 dk_\perp}{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2} J_1(k_\perp R_\perp) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z|+|z'|)} , \\ &= i\hat{\mathbf{R}}_\perp \frac{\partial}{\partial R_\perp} \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp}{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2} J_0(k_\perp R_\perp) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z|+|z'|)} . \end{aligned} \quad (4.91)$$

Como consecuencia del sistema de coordenadas elegido, encontramos que $I_2 = 0$, de tal modo el vector \mathbf{I}_k se vuelve paralelo a $\hat{\mathbf{R}}_\perp$. Sin embargo, esto se generaliza directamente a cualquier sistema coordinado arbitrario como sigue

$$\mathbf{I}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = \frac{i}{R_\perp} \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial R_\perp} \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp}{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2} J_0(k_\perp R_\perp) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z|+|z'|)} . \quad (4.92)$$

A partir de las expresiones (4.90) y (4.92), encontramos que la integral fundamental a determinar es:

$$I_{\tilde{\theta}} = \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp}{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2} J_0(k_\perp R_\perp) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z|+|z'|)} . \quad (4.93)$$

Ahora usamos la ec. (4.82) junto con la ec. (4.83) para reescribir la ec. (4.93) en una forma similar a la identidad de Sommerfeld como se observa a continuación

$$I_{\tilde{\theta}} = \frac{1}{2} \oint_{C_{k_\perp}} \frac{k_\perp dk_\perp}{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2} H_0^{(1)}(k_\perp R_\perp) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z|+|z'|)} , \quad (4.94)$$

donde C_{k_\perp} denota al contorno de integración de la Fig. 4.3 que se toma de la Fig. 5 del libro de Baños [91] sólo que nuestro contorno de integración tiene un solo corte de rama. Nuevamente recalamos que para propósitos de convergencia de la integral supondremos que \tilde{k}_0 tiene una parte imaginaria $\sigma > 0$ [92].

En lo que prosigue, usaremos una combinación del método de Baños [95, 96] y Wait [97] para calcular $I_{\tilde{\theta}}$. Primero, usamos la transformación conforme[†] [98] $k_\perp = \tilde{k}_0 \sin \alpha$ y obtenemos

$$I_{\tilde{\theta}} = \frac{1}{2} \oint_{C_\alpha} d\alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} H_0^{(1)}(\tilde{k}_0 R_\perp \sin \alpha) e^{i\tilde{k}_0 \cos \alpha(|z|+|z'|)} , \quad (4.95)$$

[†]Aquí nos referimos a transformación conforme en el sentido de Variable Compleja. Para aclarar el término quizá valga la pena recordar las siguientes definiciones junto con un teorema.

Definición 1 Sea A un abierto en \mathbb{C} , se dice que una función $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable en el sentido complejo en $z_0 \in A$, si $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe. Este límite, llamado la derivada, se denota por $f'(z_0)$.

Definición 2 $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable en el sentido complejo en A , si lo es $\forall z \in A$.

Definición 3 Sea A un abierto en \mathbb{C} , $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, se dice que f es analítica u holomorfa en $z_0 \in A$, si f es diferenciable en el sentido complejo en una vecindad alrededor de z_0 .

Teorema 1 Las funciones holomorfas con derivada no nula preservan ángulos. A esta propiedad se le conoce como Conformalidad.

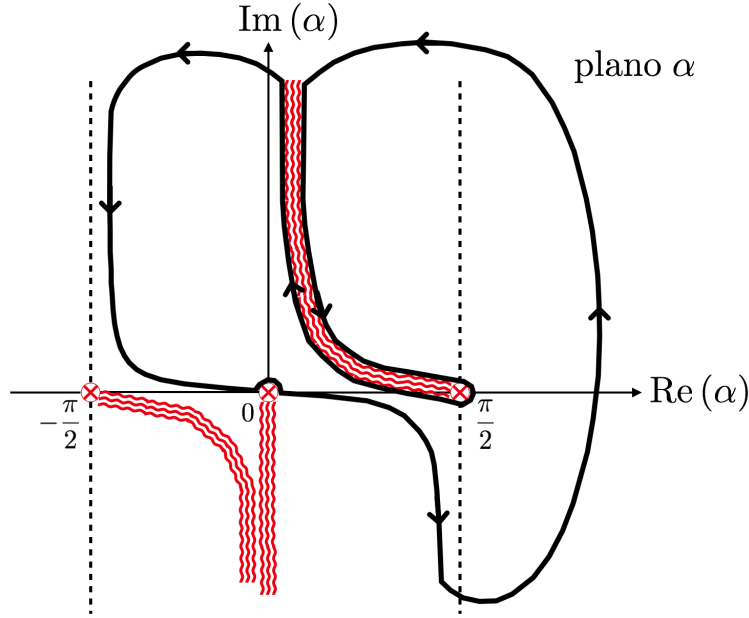


Figura 4.4: Camino de integración C_α en el plano α obtenido tras la transformación conforme $k_\perp = \tilde{k}_0 \sin \alpha$. En esta figura se exhiben los cortes de rama generados por los puntos ramales $\alpha_\pm (\pm \tilde{k}_0) = \pm \pi/2$ y $\alpha(0) = 0$. Vale la pena mencionar que este es el dibujo completo del camino de integración de la Fig. 14 del libro [99] sólo que nuestro contorno de integración tiene un solo corte de rama.

donde C_α está dado en la Fig. 4.4.

Ahora, como nos interesa estudiar cuando $\tilde{k}_0 R_\perp \rightarrow \infty$, según Wait [97] conviene usar la forma asintótica de la función de Hankel [89]

$$H_0^{(1)}(\tilde{k}_0 R_\perp \sin \alpha) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \tilde{k}_0 R_\perp \sin \alpha}} e^{i \tilde{k}_0 R_\perp \sin \alpha - i \frac{\pi}{4}}, \quad (4.96)$$

cuyo uso es permitido ya que estamos pensando en la aproximación de campo lejano, la cual es fundamental para el análisis radiativo. De este modo, tendremos

$$\begin{aligned} I_{\tilde{\theta}} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi \tilde{k}_0 R_\perp}} e^{-i\pi/4} \oint_{C_\alpha} d\alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha \sqrt{\sin \alpha}} e^{i \tilde{k}_0 R_\perp \sin \alpha + i \tilde{k}_0 \cos \alpha (|z| + |z'|)}, \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi \tilde{k}_0 R_\perp}} e^{-i\pi/4} \oint_{C_\alpha} d\alpha \frac{\sqrt{\sin \alpha}}{\cos \alpha} e^{i \tilde{k}_0 R_\perp \sin \alpha + i \tilde{k}_0 \cos \alpha (|z| + |z'|)}. \end{aligned} \quad (4.97)$$

Definición 4 Sea A un abierto conexo en \mathbb{C} y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ analítica. Se dice que f es conforme en $z \in A$, si $f'(z) \neq 0$.

4.3 Integración de la Función de Green en el régimen de campo lejano 55

Enfocándonos por el momento sólo en el hemisferio superior (i.e. $\cos \vartheta > 0$) como se hace en [96], escribimos $|z| = \mathcal{R} \cos \vartheta$ y $R_\perp = \mathcal{R} \sin \vartheta$, i.e., $\mathcal{R} = \sqrt{R_\perp^2 + z^2}$. De esta manera, encontramos que

$$\begin{aligned} I_{\tilde{\theta}} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi\tilde{k}_0\mathcal{R}\sin\vartheta}} e^{-i\pi/4} \oint_{C_\alpha} d\alpha \frac{\sqrt{\sin\alpha}}{\cos\alpha} e^{i\tilde{k}_0\mathcal{R}\sin\vartheta\sin\alpha + i\tilde{k}_0\mathcal{R}\cos\vartheta\cos\alpha + i\tilde{k}_0|z'|\cos\alpha} , \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi\tilde{k}_0\mathcal{R}\sin\vartheta}} e^{-i\pi/4} \oint_{C_\alpha} d\alpha \frac{\sqrt{\sin\alpha}}{\cos\alpha} e^{i\tilde{k}_0\mathcal{R}\cos(\alpha-\vartheta) + i\tilde{k}_0|z'|\cos\alpha} . \end{aligned} \quad (4.98)$$

En este punto, debemos calcular el punto silla, porque haremos otra transformación conforme para poner el origen del α -plano sobre él como Baños sugiere [96]. Para este fin, Baños establece que la fase estacionaria no necesita incorporar la totalidad del comportamiento exponencial contenido en la integral [100]. Siendo así, para este caso elegiremos la siguiente fase estacionaria:

$$\varphi(\alpha) = i\tilde{k}_0\mathcal{R}\cos(\alpha - \vartheta) , \quad (4.99)$$

cuyo punto silla está definido por

$$\varphi'(\alpha_s) = 0 \Leftrightarrow \sin(\alpha_s - \vartheta) = 0 \Leftrightarrow \alpha_s = \vartheta , \quad (4.100)$$

donde observamos que coincide con lo mismo que Baños tiene [101].

Luego, a esta altura del método y de acuerdo con Baños [100, 101], el camino del *steepest descent* debe ser especificado en el α -plano, dicho camino se obtiene al pedir la condición

$$\text{Im}[\varphi(\alpha)] = \text{Im}[\varphi(\alpha_s)] \Rightarrow \text{Im}\left[i\tilde{k}_0\mathcal{R}\cos(\alpha - \vartheta)\right] = \text{Im}\left[i\tilde{k}_0\mathcal{R}\right] \quad (4.101)$$

sobre C_α como se puede apreciar en la Fig. 4.5.

De este modo, corremos el origen de coordenadas al punto silla $\alpha_s = \vartheta$ al hacer $w = \alpha - \vartheta$ en $I_{\tilde{\theta}}$ como se muestra enseguida

$$I_{\tilde{\theta}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi\tilde{k}_0\mathcal{R}\sin\vartheta}} e^{-i\pi/4} \oint_{C_w} dw \frac{\sqrt{\sin(\vartheta + w)}}{\cos(\vartheta + w)} e^{i\tilde{k}_0\mathcal{R}\cos w + i\tilde{k}_0|z'|\cos(\vartheta + w)} , \quad (4.102)$$

donde C_w ahora satisface la condición de *steepest descent*

$$\text{Im}\left[i\tilde{k}_0\mathcal{R}\cos w\right] = \text{Im}\left[i\tilde{k}_0\mathcal{R}\right] \quad (4.103)$$

que se puede observar en la Fig. 4.6.

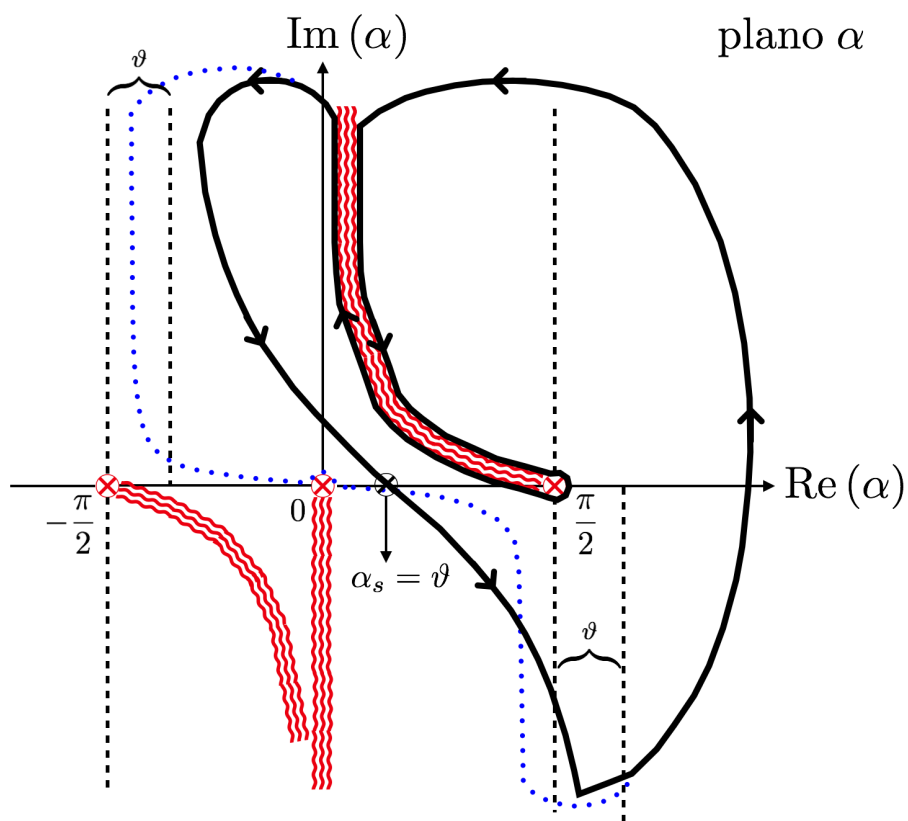


Figura 4.5: Camino de integración C_α ya con la condición de *steepest descent* (4.101) en el plano α . La curva del *steepest descent* tiene las asíntotas $\text{Re}(\alpha) = -\pi/2 + \vartheta, \pi/2 + \vartheta$ y cruza el eje real del plano α en el punto estacionario $\alpha_s = \vartheta$. La deformación entre este camino de integración y el de la Fig. 4.4 se exhibe en la línea puntuada azul.

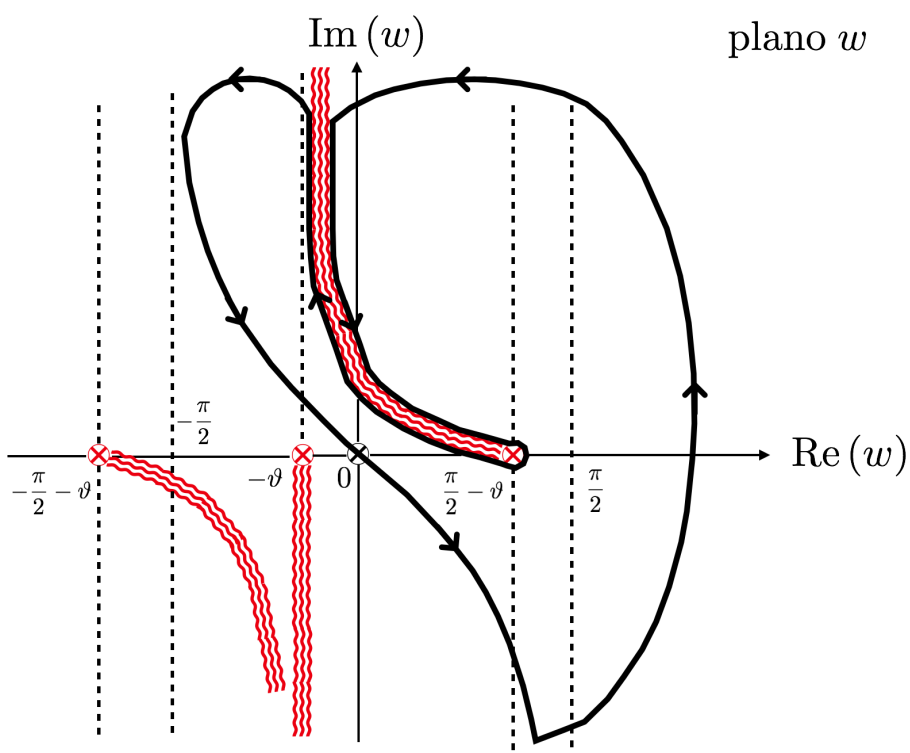


Figura 4.6: Camino de integración C_w en el plano w obtenido por medio de la traslación $w = \alpha - \vartheta$. La curva del *steepest descent* ahora tiene las asíntotas $\text{Re}(w) = \pm\pi/2$ y cruza el eje real del plano w en $w = 0$.

4.3 Integración de la Función de Green en el régimen de campo lejano 58

Siguiendo el procedimiento de Baños [100, 102], ahora introducimos la transformación conforme:[‡]

$$\frac{u^2}{2} = \varphi(0) - \varphi(w) = i\tilde{k}_0\mathcal{R}(1 - \cos w) , \quad (4.104)$$

que implica las siguientes sustituciones:

$$\cos w = 1 - \frac{u^2}{2i\tilde{k}_0\mathcal{R}} , \quad (4.105)$$

$$\sin w = \frac{u}{\sqrt{i\tilde{k}_0\mathcal{R}}} \sqrt{1 - \frac{u^2}{4i\tilde{k}_0\mathcal{R}}} , \quad (4.106)$$

$$\frac{dw}{du} = \frac{1}{\sqrt{i\tilde{k}_0\mathcal{R}} \sqrt{1 - \frac{u^2}{4i\tilde{k}_0\mathcal{R}}}} . \quad (4.107)$$

Sustituyendo estos cambios en $I_{\tilde{\theta}}$, obtenemos que

$$I_{\tilde{\theta}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi\tilde{k}_0\mathcal{R} \sin \vartheta}} e^{-i\pi/4} \oint_{C_u} du \frac{\sqrt{\sin[\vartheta + w(u)]} e^{i\tilde{k}_0|z'| \cos[\vartheta + w(u)]}}{\cos[\vartheta + w(u)] \sqrt{i\tilde{k}_0\mathcal{R}} \sqrt{1 - \frac{u^2}{4i\tilde{k}_0\mathcal{R}}}} e^{i\tilde{k}_0\mathcal{R}(1 - \frac{u^2}{2i\tilde{k}_0\mathcal{R}})} \quad (4.108)$$

$$= \frac{1}{i} \sqrt{\frac{1}{2\pi \sin \vartheta}} \frac{e^{i\tilde{k}_0\mathcal{R}}}{\tilde{k}_0\mathcal{R}} \oint_{C_u} du F_1(u) e^{-u^2/2} , \quad (4.109)$$

donde hemos definido

$$F_1(u) = \frac{\sqrt{\sin[\vartheta + w(u)]} e^{i\tilde{k}_0|z'| \cos[\vartheta + w(u)]}}{\cos[\vartheta + w(u)] \sqrt{1 - \frac{u^2}{4i\tilde{k}_0\mathcal{R}}}} , \quad (4.110)$$

el contorno C_u se puede apreciar en la Fig. 4.7.

Luego, analizamos si $F_1(u)$ tiene polos en el u -plano, que de hecho tiene porque

$$\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{4i\tilde{k}_0\mathcal{R}}} = 0 \quad , \quad \cos[\vartheta + w(u_0)] = 0 . \quad (4.111)$$

Nos enfocaremos sólo en el segundo polo,[§] porque tiene toda la información física de la interfaz y que resulta ser un polo simple. Entonces, sabiendo la relación entre w y u por medio de la ec. (4.105), tendremos que

$$w(u) = \arccos \left(1 - \frac{u^2}{2i\tilde{k}_0\mathcal{R}} \right) . \quad (4.112)$$

[‡]El objetivo de esta última transformación conforme es volver a mapear un trozo del camino de integración a la recta real para ahí utilizar las técnicas de cálculo real que ya conocemos o aproximar la integración de alguna manera.

[§]Hasta el momento no podemos establecer por qué el segundo polo no es de interés. Además, al final $I_{\tilde{\theta}}$ converge bien en $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Sólo podemos afirmar que esta contribución será importante cuando se deseen términos correctivos de orden más alto que \mathcal{R}^{-1} .

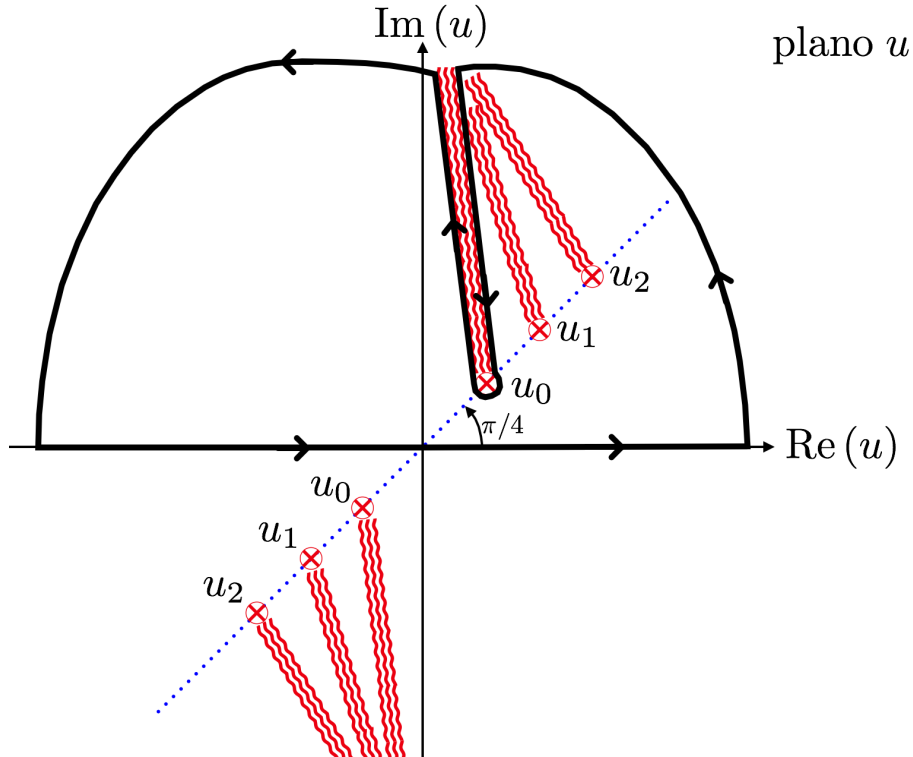


Figura 4.7: Camino de integración C_u en el plano u obtenido por medio de la transformación $u^2/2 = i\tilde{k}_0\mathcal{R}(1 - \cos w)$ dada en la ec. (4.104) cuando el ángulo $\pi/2 > \vartheta \gg 0$. La curva del *steepest descent* se mapea a la recta real del plano u . Aquí se esquematizan los cortes ramales convergentes en los puntos $\infty e^{i\pi/2}, \infty e^{-i\pi/2}$ y definidos por los siguientes puntos ramales: $u_0 = u(\pi/2 - \vartheta) = \pm\sqrt{2i\tilde{k}_0\mathcal{R}(1 - \sin \vartheta)}$ dado en la ec. (4.114), $u_1 = u(-\pi/2 - \vartheta) = \pm\sqrt{2i\tilde{k}_0\mathcal{R}(1 + \sin \vartheta)}$ y $u_2 = u(-\vartheta) = \pm\sqrt{2i\tilde{k}_0\mathcal{R}(1 - \cos \vartheta)}$. Si $\vartheta \approx 0$ los cortes ramales se posicionan sobre la recta infinita azul de pendiente $\pi/4$ y convergen en el punto $\infty e^{i\pi/4}, \infty e^{i5\pi/4}$.

4.3 Integración de la Función de Green en el régimen de campo lejano 60

Después, insertamos esta expresión dentro de la función problemática, encontrando que:

$$\cos [\vartheta + w(u_0)] = \cos \left[\vartheta + \arccos \left(1 - \frac{u_0^2}{2i\tilde{k}_0\mathcal{R}} \right) \right] = 0 . \quad (4.113)$$

Resolviendo para u_0 , obtenemos

$$u_0 = \pm \sqrt{2i\tilde{k}_0\mathcal{R}(1 - \sin \vartheta)} . \quad (4.114)$$

Después, de acuerdo con Baños [103] y el artículo de revisión [104], es necesario extraer la contribución del polo simple en u_0 , este procedimiento fue justificado matemáticamente por Van der Waerden [105]. Dado que estamos interesados en el semi-plano u superior, consideraremos sólo $u_0 = \sqrt{2i\tilde{k}_0\mathcal{R}(1 - \sin \vartheta)}$ [103]. Para realizar esta extracción, necesitamos calcular el residuo de $F_1(u)$ en u_0 . Usando técnicas estándar para hallar residuos de Variable Compleja[¶] [106], se encuentra que

$$\text{Res}(F_1; u_0) = \frac{\sqrt{\tilde{k}_0\mathcal{R}}}{i\sqrt{i}} . \quad (4.116)$$

Luego, introducimos la función

$$\psi(u) = \underbrace{F_1(u)}_{\psi_1(u)} - \frac{\text{Res}(F_1; u_0)}{u - u_0} + \underbrace{\frac{\text{Res}(F_1; u_0)}{u - u_0}}_{\psi_2(u)} . \quad (4.117)$$

Con esta función, $\psi_1(u)$ es analítica en u_0 , por lo tanto cuando la integremos, le podremos aplicar el método de *steepest descent* estándar. Mientras que $\psi_2(u)$ contendrá la contribución del polo simple que más tarde analizaremos. Siendo así, $I_{\tilde{\theta}}$ la reescribimos como se muestra enseguida

$$I_{\tilde{\theta}} = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{1}{2\pi \sin \vartheta} \frac{e^{i\tilde{k}_0\mathcal{R}}}{\tilde{k}_0\mathcal{R}}} (I_{\tilde{\theta}_{SD}} + I_{\tilde{\theta}_P}) , \quad (4.118)$$

donde

$$I_{\tilde{\theta}_{SD}} = \oint_{C_u} du \psi_1(u) e^{-u^2/2} \quad (4.119)$$

es la integral del *steepest descent* y

$$I_{\tilde{\theta}_P} = \oint_{C_u} du \psi_2(u) e^{-u^2/2} \quad (4.120)$$

¶

Proposición 1 Sean g y h funciones analíticas en z_0 y asúmase que $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ y $h'(z_0) \neq 0$. Entonces, $f(z) = g(z)/h(z)$ tiene un polo simple en z_0 y

$$\text{Res}(f; z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} . \quad (4.115)$$

es la integral del polo simple.

Concentrémonos en $I_{\tilde{\theta}_{SD}}$, que explícitamente es

$$I_{\tilde{\theta}_{SD}} = \oint_{C_u} du \left\{ \frac{\sqrt{\sin[\vartheta + w(u)]} e^{i\tilde{k}_0|z'| \cos[\vartheta + w(u)]}}{\cos[\vartheta + w(u)]} - \frac{\sqrt{\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{i\sqrt{i}(u - u_0)} \right\} e^{-u^2/2}. \quad (4.121)$$

Estamos interesados sólo en el término dominante de $I_{\tilde{\theta}_{SD}}$, por lo cual sólo expandiremos la función que está dentro de las llaves en torno a $u = 0$ ($w = 0$)^{||}.

$$\begin{aligned} I_{\tilde{\theta}_{SD}} &= \left\{ \frac{\sqrt{\sin \vartheta} e^{i\tilde{k}_0|z'| \cos \vartheta}}{\cos \vartheta} + \frac{\sqrt{\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{i\sqrt{i}u_0} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-u^2/2}, \\ &= \left\{ \frac{\sqrt{\sin \vartheta} e^{i\tilde{k}_0|z'| \cos \vartheta}}{\cos \vartheta} - \frac{1}{\sqrt{2}(1 - \sin \vartheta)} \right\} \sqrt{2\pi}, \end{aligned} \quad (4.122)$$

donde hemos sustituido u_0 de la ec. (4.114).

Si sustituimos este resultado en (4.118), obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} I_{\tilde{\theta}} &= \frac{1}{i} \sqrt{\frac{1}{2\pi \sin \vartheta}} \frac{e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{\tilde{k}_0 \mathcal{R}} \left\{ \frac{\sqrt{\sin \vartheta} e^{i\tilde{k}_0|z'| \cos \vartheta}}{\cos \vartheta} - \frac{1}{\sqrt{2}(1 - \sin \vartheta)} \right\} \sqrt{2\pi} \\ &\quad + \frac{1}{i} \sqrt{\frac{1}{2\pi \sin \vartheta}} \frac{e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{\tilde{k}_0 \mathcal{R}} I_{\tilde{\theta}_P}, \\ &= \frac{e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}} \left\{ \frac{e^{i\tilde{k}_0|z'| \cos \vartheta}}{\cos \vartheta} - \frac{1}{\sqrt{2}(\sin \vartheta - \sin^2 \vartheta)} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{i} \sqrt{\frac{1}{2\pi \sin \vartheta}} \frac{e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{\tilde{k}_0 \mathcal{R}} I_{\tilde{\theta}_P}, \end{aligned} \quad (4.123)$$

donde observamos que el primer término dentro de las llaves es justo el correspondiente al cálculo del método de *steepest descent* sin la contribución del polo simple [94, 107, 108] o por el método de la fase estacionaria como se menciona en el artículo [109] que publicamos y cuya derivación se encuentra en el apéndice E de esta tesis doctoral. También es importante decir que $1/\sqrt{\sin \vartheta}$ introduce nuevos problemas en $\vartheta = 0$. Este punto es una divergencia artificial debido a que introducimos la función de Hankel $H_0^{(1)}$ en la ec. (4.82) [110]. No obstante, demostraremos más adelante que dicha divergencia no cobra importancia cuando se analiza el límite $\tilde{k}_0 \mathcal{R} \rightarrow \infty$ con $\vartheta \ll \pi/2$.

^{||}La posibilidad de cambiar la integral de contorno por la integral real viene de que la integral sobre los cortes de rama en el u -plano es igual a la integral sobre los reales.

4.3 Integración de la Función de Green en el régimen de campo lejano 62

Como completez y consistencia, vale la pena en este punto exhibir que la función dentro de llaves de la ec. (4.124) es convergente en torno a $\vartheta = \pi/2$, lo cual se puede apreciar mejor al hacer el cambio de variable $\vartheta = \pi/2 - \xi$ y expandirla en serie de potencias de ξ en torno a $\xi = 0$ como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 \frac{e^{i\tilde{k}_0|z'|\sin\xi}}{\sin\xi} - \frac{1}{\sqrt{2}(\cos\xi - \cos^2\xi)} &\simeq \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2}} + i\tilde{k}_0|z'| + \left(\frac{1}{6} - \frac{\tilde{k}_0^2 z'^2}{2}\right)\xi, \\
 &= \frac{1}{\xi} - \frac{1}{|\xi|} + i\tilde{k}_0|z'| + \left(\frac{1}{6} - \frac{\tilde{k}_0^2 z'^2}{2}\right)\xi, \\
 &= +i\tilde{k}_0|z'| + \left(\frac{1}{6} - \frac{\tilde{k}_0^2 z'^2}{2}\right)\xi, \tag{4.125}
 \end{aligned}$$

donde se tomó $|\xi| = +\xi$ en la última igualdad ya que $\vartheta = \pi/2 - \xi \Leftrightarrow \xi = \pi/2 - \vartheta > 0$ pues ϑ vive en el hemisferio superior y observamos que la divergencia se removió.

Sólo resta calcular $I_{\tilde{\theta}_P}^{**}$, cuya forma explícita es

$$\begin{aligned}
 I_{\tilde{\theta}_P} &= \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\sqrt{\tilde{k}_0\mathcal{R}}}{i\sqrt{i}(u-u_0)} e^{-u^2/2}, \\
 &= \frac{\sqrt{\tilde{k}_0\mathcal{R}}}{i\sqrt{i}} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{-u^2/2}}{u-u_0}. \tag{4.126}
 \end{aligned}$$

La integral faltante se encuentra en [89] y también se le conoce como función de Faddeeva (o función de dispersión de plasma) [104]. A partir de la fórmula de [89], leemos que

$$\mathcal{W}(\xi) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \frac{e^{-\beta^2}}{\beta - \xi}. \tag{4.127}$$

Si introducimos una nueva variable de integración $\beta = u/\sqrt{2}$, tendremos

$$\mathcal{W}(\xi) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{-u^2/2}}{u - \sqrt{2}\xi}. \tag{4.128}$$

Haciendo $u_0 = \sqrt{2}\xi$ dada por la ec. (4.114), encontramos que

$$\mathcal{W}\left(\frac{u_0}{\sqrt{2}}\right) = \mathcal{W}\left(\sqrt{i\tilde{k}_0\mathcal{R}}(1 - \sin\vartheta)\right) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{-u^2/2}}{u - u_0}. \tag{4.129}$$

I.e.,

$$i\pi\mathcal{W}\left(\sqrt{i\tilde{k}_0\mathcal{R}}(1 - \sin\vartheta)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{-u^2/2}}{u - u_0}. \tag{4.130}$$

** $I_{\tilde{\theta}_P}$ también se reescribe como una integral real por la misma razón expuesta en la nota al pie de página pasada.

4.3 Integración de la Función de Green en el régimen de campo lejano 63

Más aún [89, 104] sugieren poner la función $\mathcal{W}(\xi)$ en términos de la función error complementaria $\text{erfc}(z)$, porque es más fácil de manejar a través de la relación

$$\mathcal{W}(\xi) = e^{-\xi^2} \text{erfc}(-i\xi) . \quad (4.131)$$

De este modo, para nuestro caso tendremos lo siguiente

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{-u^2/2}}{u - u_0} &= i\pi \mathcal{W} \left(\sqrt{i\tilde{k}_0 \mathcal{R} (1 - \sin \vartheta)} \right) , \\ &= i\pi e^{-i\tilde{k}_0 \mathcal{R} (1 - \sin \vartheta)} \text{erfc} \left[-i\sqrt{i\tilde{k}_0 \mathcal{R} (1 - \sin \vartheta)} \right] . \end{aligned} \quad (4.132)$$

Por lo tanto,

$$I_{\tilde{\theta}_P} = \sqrt{\frac{\tilde{k}_0 \mathcal{R}}{i}} \pi e^{-i\tilde{k}_0 \mathcal{R} (1 - \sin \vartheta)} \text{erfc} \left[-i\sqrt{i\tilde{k}_0 \mathcal{R} (1 - \sin \vartheta)} \right] , \quad (4.133)$$

Finalmente, sustituyendo $I_{\tilde{\theta}_P}$ en la expresión (4.124) obtendremos la forma final de $I_{\tilde{\theta}}$:

$$\begin{aligned} I_{\tilde{\theta}} &= \frac{e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}} \left\{ \frac{e^{i\tilde{k}_0 |z'| \cos \vartheta}}{\cos \vartheta} - \frac{1}{\sqrt{2} (\sin \vartheta - \sin^2 \vartheta)} \right\} \\ &+ \frac{1}{i} \sqrt{\frac{1}{2\pi \sin \vartheta}} \frac{e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{\tilde{k}_0 \mathcal{R}} \sqrt{\frac{\tilde{k}_0 \mathcal{R}}{i}} \pi e^{-i\tilde{k}_0 \mathcal{R} (1 - \sin \vartheta)} \text{erfc} \left[-i\sqrt{i\tilde{k}_0 \mathcal{R} (1 - \sin \vartheta)} \right] , \\ &= \frac{e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}} \left\{ \frac{e^{i\tilde{k}_0 |z'| \cos \vartheta}}{\cos \vartheta} - \frac{1}{\sqrt{2} (\sin \vartheta - \sin^2 \vartheta)} \right\} \\ &+ \sqrt{\frac{i\pi}{2\tilde{k}_0 \mathcal{R} \sin \vartheta}} e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R} \sin \vartheta} \text{erfc} \left[-i\sqrt{i\tilde{k}_0 \mathcal{R} (1 - \sin \vartheta)} \right] , \end{aligned} \quad (4.134)$$

donde el segundo término muestra la presencia de ondas superficiales que surgen debido a la contribución del polo simple [104, 111]. Como se ha estudiado bien en la literatura, el último término de la ec. (4.134) describe funcionalmente un tipo de ondas superficiales porque la función erfc con el argumento correspondiente hace que para valores de ϑ lejanos a la interfaz decaiga exponencialmente y su contribución sea máxima en la interfaz. El análisis de estas ondas superficiales se hará en la última subsección de este capítulo, una vez que se haya calculado la FG completa en esta aproximación.

Por otro lado, la expresión de $I_{\tilde{\theta}}$ para el hemisferio inferior se obtiene mediante un procedimiento análogo usando la transformación conforme $k_{\perp} = -\tilde{k}_0 \sin \alpha$, tomando u_0 con signo negativo en (4.114) y considerando que el contorno de integración C_u de la Fig. 4.7 se recorre en sentido contrario a las manecillas del reloj. Esto se resume a ponerle barras de valor absoluto

4.3 Integración de la Función de Green en el régimen de campo lejano 64

a $\cos \vartheta$ en la expresión previa de $I_{\tilde{\theta}}$ para obtener una expresión válida en ambos hemisferios como se muestra enseguida:

$$I_{\tilde{\theta}} = \frac{e^{i\tilde{k}_0\mathcal{R}}}{i\tilde{k}_0\mathcal{R}} \left\{ \frac{e^{i\tilde{k}_0|z' \cos \vartheta|}}{|\cos \vartheta|} - \frac{1}{\sqrt{2(\sin \vartheta - \sin^2 \vartheta)}} \right\} + \sqrt{\frac{i\pi}{2\tilde{k}_0\mathcal{R} \sin \vartheta}} e^{i\tilde{k}_0\mathcal{R} \sin \vartheta} \operatorname{erfc} \left[-i\sqrt{i\tilde{k}_0\mathcal{R}(1 - \sin \vartheta)} \right]. \quad (4.135)$$

Ya con la expresión final válida en ambos hemisferios de $I_{\tilde{\theta}}$ y tras sustituir $I_{\tilde{\theta}}$ (4.135) explícitamente en las ecs. (4.90) y (4.92), se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} I_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \omega I_{\tilde{\theta}}, \\ &= \frac{e^{i\tilde{k}_0\mathcal{R}}}{in\mathcal{R}} \left\{ \frac{e^{i\tilde{k}_0|z' \cos \vartheta|}}{|\cos \vartheta|} - \frac{1}{\sqrt{2(\sin \vartheta - \sin^2 \vartheta)}} \right\} \\ &\quad + \omega \sqrt{\frac{i\pi}{2\tilde{k}_0\mathcal{R} \sin \vartheta}} e^{i\tilde{k}_0\mathcal{R} \sin \vartheta} \operatorname{erfc} \left[-i\sqrt{i\tilde{k}_0\mathcal{R}(1 - \sin \vartheta)} \right], \quad (4.136) \\ \mathbf{I}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \frac{i(\mathbf{x} - \mathbf{x}')_{\perp}}{R_{\perp}} \frac{\partial I_{\tilde{\theta}}}{\partial R_{\perp}}, \\ &= in_{\perp} \frac{e^{i\tilde{k}_0\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} \left\{ \frac{e^{i\tilde{k}_0|z' \cos \vartheta|}}{|\cos \vartheta|} - \frac{1}{\sqrt{2(\sin \vartheta - \sin^2 \vartheta)}} - \sqrt{\frac{1 - \sin \vartheta}{2 \sin \vartheta}} \right\} \\ &\quad - \mathbf{n}_{\perp} \sqrt{\frac{i\pi\tilde{k}_0 \sin \vartheta}{2\mathcal{R}}} e^{i\tilde{k}_0\mathcal{R} \sin \vartheta} \operatorname{erfc} \left[-i\sqrt{i\tilde{k}_0\mathcal{R}(1 - \sin \vartheta)} \right] + \mathcal{O}(\mathcal{R}^{-3/2}) \quad (4.137) \end{aligned}$$

donde $\mathbf{n}_{\perp} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}')_{\perp}/\mathcal{R}$.

Ahora bien, completamos la aproximación de campo lejano al imponer las siguientes condiciones sobre las coordenadas en las expresiones previas

$$\|\mathbf{x}\| \gg \|\mathbf{x}'\| \quad , \quad \mathcal{R} = \sqrt{R_{\perp}^2 + z^2} \simeq r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}, \quad (4.138)$$

donde ahora $\mathbf{n}_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp}/r$. Como se ha manejado en esta subsección y al igual que en ED estándar, sólo deseamos el término dominante $\tilde{k}_0 r$ de la exponencial y en el inverso de la distancia bastará con reemplazar \mathcal{R} por r como en el caso usual. Con lo anterior, estamos en condiciones de dar una expresión compacta de $G_{\tilde{\theta}\nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ para exhibir las diferencias de este tratamiento completo con respecto al que publicamos en [109]. Para este fin, expresaremos el

resultado final en términos de las fases comunes que aparecen como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \bar{G}_{\tilde{\theta}^2 \nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \varepsilon_{\nu}^{\mu} \alpha^3 \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp})}}{r} \left[\frac{s_{\alpha}}{|\cos \vartheta|} e^{i\tilde{k}_0|z' \cos \vartheta|} + m_{\alpha}(r, \vartheta) \right] \\ &+ \varepsilon_{\nu}^{\mu} \alpha^3 \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 r \sin \vartheta}} e^{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) \sin \vartheta} t_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0), \end{aligned} \quad (4.139)$$

donde $s^{\alpha} = (1/n, \mathbf{n}_{\perp})$, $\mathbf{n}_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp}/r$,

$$m^{\alpha}(r, \vartheta) = \left\{ \frac{1}{n} \Lambda_1(\vartheta), \mathbf{n}_{\perp} \left[\Lambda_1(\vartheta) - \sqrt{\frac{1 - \sin \vartheta}{2 \sin \vartheta}} \right] \right\} \quad (4.140)$$

y

$$t^{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0) = \Lambda_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0) \left(\omega, \mathbf{n}_{\perp} \tilde{k}_0 \sin \vartheta \right) \quad (4.141)$$

con

$$\Lambda_1(\vartheta) = -\frac{1}{\sqrt{2} (\sin \vartheta - \sin^2 \vartheta)}, \quad (4.142)$$

$$\Lambda_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0) = \frac{\pi}{2} \operatorname{erfc} \left[-i \sqrt{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) (1 - \sin \vartheta)} \right]. \quad (4.143)$$

donde observamos que el primer término de (4.139) es el mismo que hallamos previamente con el método de la fase estacionaria y del *steepest descent* estándar sin la contribución del polo simple, lo cual se reportó en el artículo [109] y cuya derivación explícita a través de ambos métodos se expone en las secciones E.1.1 y E.2.1 del apéndice E de esta tesis doctoral.

4.3.3. $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 \nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ en el régimen de campo lejano

En esta subsección obtendremos las componentes $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 \nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ en la aproximación de campo lejano. La expresión de dichas componentes es

$$\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 \nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = i \frac{4\pi \tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int \frac{d^2 \mathbf{k}_{\perp}}{(2\pi)^2} \left[k^{\mu} k_{\nu} - (\eta^{\mu}_{\nu} + u^{\mu} u_{\nu}) k^2 \right] e^{i\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{R}_{\perp}} \frac{e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_{\perp}^2} (|z| + |z'|)}}{2 (\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_{\perp}^2)^{3/2}}. \quad (4.144)$$

Recordando que $k^{\alpha} = (\omega, \mathbf{k}_{\perp}, 0)$ y que $u^{\mu} = (0, 0, 0, 1)$ resulta inmediatamente que

$$\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 3}^0 = \bar{G}_{\tilde{\theta}^2 0}^3 = \bar{G}_{\tilde{\theta}^2 1}^3 = \bar{G}_{\tilde{\theta}^2 3}^1 = \bar{G}_{\tilde{\theta}^2 2}^3 = \bar{G}_{\tilde{\theta}^2 3}^2 = \bar{G}_{\tilde{\theta}^2 3}^3 = 0. \quad (4.145)$$

Dado que para estas componentes no se usó ningún método de aproximación, estos resultados valen también para el método de la fase estacionaria y del *steepest descent* estándar sin la contribución de los polos simple y doble como se reportó en el artículo [109].

Por facilidad de análisis, estudiaremos las componentes restantes de $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 \nu}^{\mu}$ por familias: $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 0}^0$, $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 \bar{i}}^0$, $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 \bar{j}}^{\bar{i}}$, donde $\bar{i}, \bar{j} = 1, 2$.

4.3.3.1. Componentes $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 \bar{i}}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ en el régimen de campo lejano

Haciendo $\mu = 0$ y $\nu = i$ en la ecuación (4.144) se tiene que:

$$\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 \bar{i}}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = i \frac{\omega \tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} 4\pi \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} k_i e^{i \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{R}_\perp} \frac{e^{i \sqrt{\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2} (|z| + |z'|)}}{2 \left(\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2 \right)^{3/2}}. \quad (4.146)$$

Tras escribir esta integral en coordenadas polares se tiene lo siguiente:

$$\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 \bar{i}}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = i \frac{\omega \tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp}{\left(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2 \right)^{3/2}} e^{i \sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2} (|z| + |z'|)} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{i k_\perp R_\perp \cos \varphi} k_{\bar{i}}, \quad (4.147)$$

donde recordamos que $k^i = (\mathbf{k}_\perp, 0)$.

Luego, eligiendo el sistema de coordenadas de la Fig. (4.2) usado previamente, $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 \bar{i}}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ se reescribe como sigue

$$\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 \bar{i}}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = i \frac{\omega \tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} K_{\bar{i}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega), \quad (4.148)$$

donde se definió

$$K_{\bar{i}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp}{\left(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2 \right)^{3/2}} e^{i \sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2} (|z| + |z'|)} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{i k_\perp R_\perp \cos \varphi} k_{\bar{i}}. \quad (4.149)$$

Escribiendo explícitamente la integral angular de la ec. (4.149) en el mismo sistema de coordenadas de la Fig. (4.2) tenemos que

$$\mathbf{K}_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = - \int_0^\infty \frac{k_\perp^2 dk_\perp}{\left(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2 \right)^{3/2}} e^{i \sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2} (|z| + |z'|)} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} e^{i k_\perp R_\perp \cos \varphi} \right], \quad (4.150)$$

donde el subíndice k denota que \mathbf{K}_k está descrito en el sistema descrito en la Fig. (4.2). Integrando la parte angular con ayuda de la representación angular de las funciones de Bessel de primer tipo [84, 89] obtenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= -i \hat{\mathbf{R}}_\perp \int_0^\infty \frac{k_\perp^2 dk_\perp}{\left(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2 \right)^{3/2}} J_1(k_\perp R_\perp) e^{i \sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2} (|z| + |z'|)}, \\ &= i \hat{\mathbf{R}}_\perp \frac{\partial}{\partial R_\perp} \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp}{\left(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2 \right)^{3/2}} J_0(k_\perp R_\perp) e^{i \sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2} (|z| + |z'|)}. \end{aligned} \quad (4.151)$$

Cabe destacar que como consecuencia del sistema de coordenadas elegido, la segunda componente de $\mathbf{K}_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ es igual a cero. De esta manera, el vector $\mathbf{K}_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ se vuelve paralelo a $\hat{\mathbf{R}}_\perp$. Esto puede ser generalizado a cualquier sistema de coordenadas arbitrario como sigue:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = \frac{i}{R_\perp} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')_\perp \frac{\partial}{\partial R_\perp} \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp}{(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2}} J_0(k_\perp R_\perp) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z| + |z'|)}. \quad (4.152)$$

Ahora, repetimos el mismo procedimiento para aproximar la integral en k_\perp , el cual consiste en convertir la $J_0(k_\perp R_\perp)$ en la Hankel $H_0^{(1)}(k_\perp R_\perp)$ por medio de las ecs. (4.82) y (4.83). De este modo encontramos que la integral en k_\perp que necesitamos resolver es:

$$I_{\tilde{\theta}^2} = \frac{1}{2} \oint_{C_{k_\perp}} \frac{k_\perp dk_\perp}{(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2}} H_0^{(1)}(k_\perp R_\perp) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z| + |z'|)}, \quad (4.153)$$

donde C_{k_\perp} denota al contorno de integración de la Fig. 4.3 que se toma de la Fig. 5 del libro de Baños [91] sólo que nuestro contorno de integración tiene un solo corte de rama. Nuevamente recalamos que para propósitos de convergencia de la integral supondremos que \tilde{k}_0 tiene una parte imaginaria $\sigma > 0$ [92].

En lo que prosigue, usaremos el método usado en la subsección 4.3.2 para calcular $I_{\tilde{\theta}^2}$, que como se mencionó antes es una combinación de los métodos de Baños [95, 96] y Wait [97]. Primero, usaremos nuevamente la transformación conforme^{††}

$$I_{\tilde{\theta}^2} = \frac{1}{2\tilde{k}_0} \oint_{C_\alpha} d\alpha \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} H_0^{(1)}(\tilde{k}_0 R_\perp \sin \alpha) e^{i\tilde{k}_0 \cos \alpha(|z| + |z'|)}, \quad (4.154)$$

donde C_α está dado en la 4.4.

Ahora, como nuevamente nos interesa estudiar cuando $\tilde{k}_0 R_\perp \rightarrow \infty$, según Wait [97] conviene usar la forma asintótica de la función de Hankel [89] dada por la ec. (4.96), cuyo uso es permitido ya que estamos pensando en la aproximación de campo lejano, la cual es fundamental para el análisis radiativo. De este modo, obtendremos

$$\begin{aligned} I_{\tilde{\theta}^2} &= \frac{1}{2\tilde{k}_0} \sqrt{\frac{2}{\pi \tilde{k}_0 R_\perp}} e^{-i\pi/4} \oint_{C_\alpha} d\alpha \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha \sqrt{\sin \alpha}} e^{i\tilde{k}_0 R_\perp \sin \alpha + i\tilde{k}_0 \cos \alpha(|z| + |z'|)}, \\ &= \frac{1}{\tilde{k}_0} \sqrt{\frac{1}{2\pi i \tilde{k}_0 R_\perp}} \oint_{C_\alpha} d\alpha \frac{\sqrt{\sin \alpha}}{\cos^2 \alpha} e^{i\tilde{k}_0 R_\perp \sin \alpha + i\tilde{k}_0 \cos \alpha(|z| + |z'|)}. \end{aligned} \quad (4.155)$$

Por ahora sólo nos enfocaremos en el hemisferio superior (i.e. $\cos \vartheta > 0$), como se hace en [96]. Para ello, escribimos $|z| = \mathcal{R} \cos \vartheta$ and $R_\perp = \mathcal{R} \sin \vartheta$, donde $\mathcal{R} = \sqrt{R_\perp^2 + z^2}$. De este

^{††}Ver la Nota al pie de página * de este capítulo.

modo, se tiene que

$$\begin{aligned}
 I_{\hat{\theta}^2} &= \frac{1}{\tilde{k}_0} \sqrt{\frac{1}{2\pi i \tilde{k}_0 \mathcal{R} \sin \vartheta}} \oint_{C_\alpha} d\alpha \frac{\sqrt{\sin \alpha}}{\cos \alpha} e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R} \sin \vartheta \sin \alpha + i\tilde{k}_0 \mathcal{R} \cos \vartheta \cos \alpha + i\tilde{k}_0 |z'| \cos \alpha} , \\
 &= \frac{1}{\tilde{k}_0} \sqrt{\frac{1}{2\pi i \tilde{k}_0 \mathcal{R} \sin \vartheta}} \oint_{C_\alpha} d\alpha \frac{\sqrt{\sin \alpha}}{\cos^2 \alpha} e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R} \cos(\alpha - \vartheta) + i\tilde{k}_0 |z'| \cos \alpha} , \tag{4.156}
 \end{aligned}$$

donde observamos que la fase es la misma que en $I_{\hat{\theta}}$ ec. (4.98). Por lo tanto, al elegir la misma fase estacionaria, el punto silla será exactamente el mismo, i.e. $\alpha_s = \vartheta$. Aclarando en este punto que el contorno C_α se particulariza al del *steepest descent* pidiendo que satisfaga la condición (4.101) [100, 101] y cuya forma sería la expuesta en la Fig. 4.5. Luego, corremos el origen de coordenadas al punto silla $\alpha_s = \vartheta$ al hacer $w = \alpha - \vartheta$ en $I_{\hat{\theta}^2}$, quedando lo siguiente:

$$I_{\hat{\theta}^2} = \frac{1}{\tilde{k}_0} \sqrt{\frac{1}{2\pi i \tilde{k}_0 \mathcal{R} \sin \vartheta}} \oint_{C_w} dw \frac{\sqrt{\sin(\vartheta + w)}}{\cos^2(\vartheta + w)} e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R} \cos w + i\tilde{k}_0 |z'| \cos(\vartheta + w)} , \tag{4.157}$$

donde C_w ahora satisface la condición de *steepest descent* (4.103) y su forma se puede apreciar en la Fig. 4.6.

Siguiendo a Baños [100, 102], introducimos la transformación conforme:^{‡‡}

$$\frac{u^2}{2} = \varphi(0) - \varphi(w) = i\tilde{k}_0 \mathcal{R} (1 - \cos w) , \tag{4.158}$$

lo cual implica las mismas sustituciones de las ecs. (4.105)-(4.107).

Sustituyendo estos cambios en $I_{\hat{\theta}^2}$, llegamos a que

$$\begin{aligned}
 I_{\hat{\theta}^2} &= \frac{1}{\tilde{k}_0} \sqrt{\frac{1}{2\pi i \tilde{k}_0 \mathcal{R} \sin \vartheta}} \oint_{C_x} dx \frac{\sqrt{\sin[\vartheta + w(u)]} e^{i\tilde{k}_0 |z'| \cos[\vartheta + w(u)]}}{\cos^2[\vartheta + w(u)] \sqrt{i\tilde{k}_0 \mathcal{R} \sqrt{1 - \frac{u^2}{4i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}}} e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R} \left(1 - \frac{u^2}{2i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}\right)} , \\
 &= \frac{1}{i\tilde{k}_0^2} \sqrt{\frac{1}{2\pi \sin \vartheta}} \frac{e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{\mathcal{R}} \oint_{C_u} du F_2(u) e^{-u^2/2} , \tag{4.159}
 \end{aligned}$$

con C_u esquematizado en la Fig. 4.7 y donde ahora hemos definido

$$F_2(u) = \frac{\sqrt{\sin[\vartheta + w(u)]} e^{i\tilde{k}_0 |z'| \cos[\vartheta + w(u)]}}{\cos^2[\vartheta + w(u)] \sqrt{1 - \frac{u^2}{4i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}} . \tag{4.160}$$

Después, analizamos si $F_2(u)$ tiene polos en el u -plano, que de hecho tiene porque

$$\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{4i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}} = 0 \quad , \quad \cos^2[\vartheta + w(u_0)] = 0 \Leftrightarrow \cos[\vartheta + w(u_0)] = 0 . \tag{4.161}$$

^{‡‡}Ver la Nota al pie de página † de este capítulo.

4.3 Integración de la Función de Green en el régimen de campo lejano 69

Estos polos son los mismos que encontramos en $I_{\tilde{\theta}}$. Por ello, una vez más nos enfocaremos sólo en el segundo polo como se hizo en la subsección previa,^{§§} ya que es el que tiene toda la información física de la interfaz y que ahora resulta ser un polo doble. Dicho polo está dado nuevamente por la ec. (4.114).

Ahora bien, de acuerdo con Baños [103], el artículo de revisión [104] y con los requisitos de la presente función $F_2(u)$, tenemos que extraer la contribución del polo simple y del polo doble en u_0 , este procedimiento para polos de orden superior ha sido justificado matemáticamente también por van der Waerden [105]. Estamos interesados sólo en el semi-plano u superior, por ello nuevamente consideraremos únicamente $u_0 = \sqrt{2i\tilde{k}_0\mathcal{R}}(1 - \sin\vartheta)$ [103]. Para realizar la extracción completa de los polos debemos calcular el residuo de $F_2(u)$ y b_2 ambos en u_0 . Usando técnicas estándar de Variable Compleja [112], encontramos el residuo de $F_2(u)$ y b_2 ,^{¶¶} cuya forma explícita es

$$\text{Res}(F_2; u_0) = \frac{\tilde{k}_0|z'|\sqrt{\tilde{k}_0\mathcal{R}}}{\sqrt{i}} + \tilde{b}_1, \quad (4.163)$$

$$b_2 = -\frac{\tilde{k}_0\mathcal{R}\cos^2\vartheta}{i\sqrt{2}(1 - \sin\vartheta)\sqrt{1 + \sin\vartheta}}. \quad (4.164)$$

donde hemos despreciado el segundo término \tilde{b}_1^{***} de $\text{Res}(F_2; u_0)$ porque el primer sumando que lo compone es de orden 1 en potencias de $\tilde{k}_0\mathcal{R}$, por lo que este término generará términos de radiación de orden $\mathcal{O}(\mathcal{R}^{-3/2})$ al final porque hay un factor global \mathcal{R}^{-1} en frente de $I_{\tilde{\theta}^2}$ en la ec. (4.159). Mientras que el segundo sumando que compone a \tilde{b}_1 , pese a tener el orden requerido al final del método resultará en una función analítica en torno a $\vartheta = \pi/2$, por lo que no ayudará a quitar la divergencia en ese punto y por ello se puede despreciar.

Luego, introducimos la función

$$\psi(u) = \underbrace{F_2(u) - \frac{\text{Res}(F_2; u_0)}{u - u_0}}_{\psi_1(u)} - \frac{b_2}{(u - u_0)^2} + \underbrace{\frac{\text{Res}(F_2; u_0)}{u - u_0} + \frac{b_2}{(u - u_0)^2}}_{\psi_2(u)}. \quad (4.166)$$

^{§§}Ver la Nota al pie de página † de este capítulo.



Proposición 2 Sean g y h analíticas en z_0 y sea $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = h'(z_0) = 0$ y $h''(z_0) \neq 0$. Entonces, $f(z) = g(z)/h(z)$ tiene un polo de segundo orden o polo doble en z_0 ,

$$\text{Res}(f; z_0) = 2\frac{g'(z_0)}{h''(z_0)} - \frac{2g(z_0)h'''(z_0)}{3[h''(z_0)]^2} \quad \text{y} \quad b_2 = \frac{2g(z_0)}{h''(z_0)}. \quad (4.162)$$

***El término que se desprecia surge del segundo término de la fórmula para el $\text{Res}(F_2; u_0)$ dada en la Nota al pie de página §§ y que es igual a

$$\tilde{b}_1 = -\frac{2g(z_0)h'''(z_0)}{3[h''(z_0)]^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}i\sqrt{1 + \sin\vartheta}} - \frac{\sqrt{\tilde{k}_0\mathcal{R}}}{2\sqrt{i}(1 - \sin\vartheta)} \left[1 - \frac{2\sin\vartheta}{1 + \sin\vartheta} \right] \cos\vartheta. \quad (4.165)$$

4.3 Integración de la Función de Green en el régimen de campo lejano 70

Con esta función, $\psi_1(u)$ es analítica en u_0 , por lo tanto cuando la integremos, podremos aplicarle el método del *steepest descent* estándar. Y $\psi_2(u)$ tendrá toda la contribución del polo simple y doble que analizaremos después. Siendo así, $I_{\tilde{\theta}^2}$ se reescribe como se muestra enseguida

$$I_{\tilde{\theta}^2} = \frac{1}{i\tilde{k}_0^2} \sqrt{\frac{1}{2\pi \sin \vartheta}} \frac{e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{\mathcal{R}} \left(I_{\tilde{\theta}_{SD}^2} + I_{\tilde{\theta}_P^2} \right), \quad (4.167)$$

donde

$$I_{\tilde{\theta}_{SD}^2} = \oint_{C_u} du \psi_1(u) e^{-u^2/2} \quad (4.168)$$

es la integral del steepest descent y

$$I_{\tilde{\theta}_P^2} = \oint_{C_u} du \psi_2(u) e^{-u^2/2} \quad (4.169)$$

es la integral de los polos.

Concentrémonos en $I_{\tilde{\theta}_{SD}^2}$, que explícitamente es

$$I_{\tilde{\theta}_{SD}^2} = \oint_{C_u} du \left\{ \frac{\sqrt{\sin [\vartheta + w(u)]} e^{i\tilde{k}_0 |z'| \cos[\vartheta + w(u)]}}{\cos^2 [\vartheta + w(u)]} - \frac{\tilde{k}_0 |z'| \sqrt{\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{(u - u_0) \sqrt{i}} \right. \\ \left. + \frac{1}{(u - u_0)^2} \frac{\tilde{k}_0 \mathcal{R} \cos^2 \vartheta}{i\sqrt{2} (1 - \sin \vartheta) \sqrt{1 + \sin \vartheta}} \right\} e^{-u^2/2} \quad (4.170)$$

Estamos interesados sólo en el término dominante de $I_{\tilde{\theta}_{SD}^2}$, por lo que sólo necesitamos expandir la función dentro de las llaves en torno a $u = 0$ ($w = 0$).^{†††} Por lo tanto, al recordar que u_0 es la raíz con signo positivo de la ec. (4.114), se obtiene que

$$I_{\tilde{\theta}_{SD}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-u^2/2} \left\{ \frac{\sqrt{\sin \vartheta} e^{i\tilde{k}_0 |z'| \cos \vartheta}}{\cos^2 \vartheta} + \frac{\tilde{k}_0 |z'| \sqrt{\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{\sqrt{i} \sqrt{2i\tilde{k}_0 \mathcal{R} (1 - \sin \vartheta)}} \right. \\ \left. + \frac{1}{\left(\sqrt{2i\tilde{k}_0 \mathcal{R} (1 - \sin \vartheta)} \right)^2} \frac{\tilde{k}_0 \mathcal{R} \cos^2 \vartheta}{i\sqrt{2} (1 - \sin \vartheta) \sqrt{1 + \sin \vartheta}} \right\} \\ = \sqrt{2\pi} \left\{ \frac{\sqrt{\sin \vartheta} e^{i\tilde{k}_0 |z'| \cos \vartheta}}{\cos^2 \vartheta} + \frac{\tilde{k}_0 |z'|}{i\sqrt{2} (1 - \sin \vartheta)} - \frac{\cos^2 \vartheta}{2\sqrt{2} (1 + \sin \vartheta) (1 - \sin \vartheta)^2} \right\}. \quad (4.171)$$

^{†††}Ver la Nota de pie de página ¶ de este capítulo.

Al sustituir este resultado en la ec. (4.167), obtenemos

$$\begin{aligned}
 I_{\tilde{\theta}^2} &= \frac{\sqrt{2\pi}}{i\tilde{k}_0^2} \sqrt{\frac{1}{2\pi \sin \vartheta}} \frac{e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{\mathcal{R}} \left\{ \frac{\sqrt{\sin \vartheta} e^{i\tilde{k}_0 |z'|}}{\cos^2 \vartheta} + \frac{\tilde{k}_0 |z'| \cos \vartheta}{i\sqrt{2(1 - \sin \vartheta)}} - \frac{\cos^2 \vartheta}{2\sqrt{2(1 + \sin \vartheta)}(1 - \sin \vartheta)^2} \right\}, \\
 &+ \frac{1}{i\tilde{k}_0^2} \sqrt{\frac{1}{2\pi \sin \vartheta}} \frac{e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{\mathcal{R}} I_{\tilde{\theta}_P^2}, \\
 &= \frac{e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{i\tilde{k}_0^2} \left\{ \frac{e^{i\tilde{k}_0 |z'| \cos \vartheta}}{\cos^2 \vartheta} + \frac{\tilde{k}_0 |z'|}{i\sqrt{2(\sin \vartheta - \sin^2 \vartheta)}} - \frac{\sqrt{1 + \sin \vartheta}}{2\sqrt{2} \sin \vartheta (1 - \sin \vartheta)} \right\} \\
 &+ \frac{1}{i\tilde{k}_0^2} \sqrt{\frac{1}{2\pi \sin \vartheta}} \frac{e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{\mathcal{R}} I_{\tilde{\theta}_P^2}, \tag{4.172}
 \end{aligned}$$

donde observamos que el primer término dentro de las llaves es justo el correspondiente al cálculo del *steepest descent* sin la contribución de los polo simple y doble o por el método de la fase estacionaria como se menciona en el artículo [109] que publicamos y cuya derivación se encuentra en el apéndice E de esta tesis doctoral. También, es importante volver a decir que $1/\sqrt{\sin \vartheta}$ introduce nuevos problemas en $\vartheta = 0$. Este punto es una divergencia artificial debido a que introducimos la función de Hankel $H_0^{(1)}$ en la ec. (4.82) [110], cuyo análisis se estudiará en la última sección de este capítulo en el límite $\tilde{k}_0 \mathcal{R} \rightarrow \infty$ con $\vartheta \ll \pi/2$.

Como completez y consistencia, vale la pena en este punto exhibir que la función dentro de llaves de la ec. (4.172) es convergente en torno a $\vartheta = \pi/2$, lo cual se puede apreciar mejor al hacer el cambio de variable $\vartheta = \pi/2 - \xi$ y expandirla en serie de potencias de ξ en torno a $\xi = 0$ como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 &\frac{e^{i\tilde{k}_0 |z'| \sin \xi}}{\sin^2 \xi} + \frac{\tilde{k}_0 |z'|}{i\sqrt{2(\cos \xi - \cos^2 \xi)}} - \frac{\sqrt{1 + \cos \xi}}{2\sqrt{2} \cos \xi (1 - \cos \xi)} \\
 &\simeq \frac{1}{\xi^2} + \frac{i\tilde{k}_0 |z'|}{\xi} - \frac{1}{\xi^2} - \frac{i\tilde{k}_0 |z'|}{\sqrt{\xi^2}} + \frac{1}{8} - \frac{\tilde{k}_0^2 z'^2}{2} + i \frac{\tilde{k}_0 |z'| - \tilde{k}_0^3 |z'|^3}{6} \xi, \\
 &= \frac{i\tilde{k}_0 |z'|}{\xi} - \frac{i\tilde{k}_0 |z'|}{|\xi|} + \frac{1}{8} - \frac{\tilde{k}_0^2 z'^2}{2} + i \frac{\tilde{k}_0 |z'| - \tilde{k}_0^3 |z'|^3}{6} \xi, \\
 &= \frac{1}{8} - \frac{\tilde{k}_0^2 z'^2}{2} + i \frac{\tilde{k}_0 |z'| - \tilde{k}_0^3 |z'|^3}{6} \xi, \tag{4.173}
 \end{aligned}$$

donde se tomó $|\xi| = +\xi$ en la última igualdad ya que $\vartheta = \pi/2 - \xi \Leftrightarrow \xi = \pi/2 - \vartheta > 0$ pues ϑ vive en el hemisferio superior y observamos que la divergencia se removió.

Sólo resta calcular la integral $I_{\tilde{\theta}^2_P}$,^{†††} cuya forma explícita es

$$\begin{aligned} I_{\tilde{\theta}^2_P} &= \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\tilde{k}_0 |z'| \sqrt{\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{\sqrt{i}(u-u_0)} e^{-u^2/2} - \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\tilde{k}_0 \mathcal{R} \cos^2 \vartheta}{i\sqrt{2}(1-\sin \vartheta) \sqrt{1+\sin \vartheta} (u-u_0)^2} e^{-u^2/2}, \\ &= \frac{\tilde{k}_0 |z'| \sqrt{\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{\sqrt{i}} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{-u^2/2}}{u-u_0} - \frac{\tilde{k}_0 \mathcal{R} \cos^2 \vartheta}{i\sqrt{2}(1-\sin \vartheta) \sqrt{1+\sin \vartheta}} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{-u^2/2}}{(u-u_0)^2}. \end{aligned} \quad (4.174)$$

La primer integral es exactamente la misma de la ec. (4.132) y la segunda integral restante se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{-u^2/2}}{(u-u_0)^2} &= \frac{\partial}{\partial u_0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{-u^2/2}}{u-u_0} \right], \\ &= \frac{\partial}{\partial u_0} \left[i\pi e^{-u_0^2/2} \operatorname{erfc} \left(-i \frac{u_0}{\sqrt{2}} \right) \right], \\ &= i\pi \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} i - u_0 e^{-u_0^2/2} \operatorname{erfc} \left(-i \frac{u_0}{\sqrt{2}} \right) \right], \\ &= i\pi \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} i - \sqrt{2i\tilde{k}_0 \mathcal{R} (1-\sin \vartheta)} e^{-i\tilde{k}_0 \mathcal{R} (1-\sin \vartheta)} \operatorname{erfc} \left[-i \sqrt{i\tilde{k}_0 \mathcal{R} (1-\sin \vartheta)} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.175)$$

donde usamos (4.132) y ya sustituimos la ec. (4.114) en la última igualdad. Para reducir la notación, definimos

$$\mathbb{F}(\mathcal{R}, \vartheta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} i - \sqrt{2i\tilde{k}_0 \mathcal{R} (1-\sin \vartheta)} e^{-i\tilde{k}_0 \mathcal{R} (1-\sin \vartheta)} \operatorname{erfc} \left[-i \sqrt{i\tilde{k}_0 \mathcal{R} (1-\sin \vartheta)} \right]. \quad (4.176)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I_{\tilde{\theta}^2_P} &= \frac{\tilde{k}_0 |z'| \sqrt{\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{\sqrt{i}} i\pi e^{-i\tilde{k}_0 \mathcal{R} (1-\sin \vartheta)} \operatorname{erfc} \left[-i \sqrt{i\tilde{k}_0 \mathcal{R} (1-\sin \vartheta)} \right] \\ &\quad - \frac{\tilde{k}_0 \mathcal{R} \cos^2 \vartheta}{i\sqrt{2}(1-\sin \vartheta) \sqrt{1+\sin \vartheta}} i\pi \mathbb{F}(\mathcal{R}, \vartheta), \\ &= \frac{\tilde{k}_0 |z'| \sqrt{\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{\sqrt{i}} i\pi e^{-i\tilde{k}_0 \mathcal{R} (1-\sin \vartheta)} \operatorname{erfc} \left[-i \sqrt{i\tilde{k}_0 \mathcal{R} (1-\sin \vartheta)} \right] \\ &\quad - \frac{\pi \tilde{k}_0 \mathcal{R} \sqrt{1+\sin \vartheta}}{\sqrt{2}} \mathbb{F}(\mathcal{R}, \vartheta). \end{aligned} \quad (4.177)$$

^{†††}Ver la Nota al pie de página || de este capítulo.

Finalmente, sustituyendo $I_{\tilde{\theta}^2}$ en la ec. (4.172) resulta que

$$\begin{aligned}
 I_{\tilde{\theta}^2} &= \frac{e^{i\tilde{k}_0\mathcal{R}}}{i\tilde{k}_0^2\mathcal{R}} \left\{ \frac{e^{i\tilde{k}_0|z'|\cos\vartheta}}{\cos^2\vartheta} + \frac{\tilde{k}_0|z'|}{i\sqrt{2}(\sin\vartheta - \sin^2\vartheta)} - \frac{\sqrt{1+\sin\vartheta}}{2\sqrt{2}\sin\vartheta(1-\sin\vartheta)} \right\} \\
 &+ \frac{1}{i\tilde{k}_0^2} \sqrt{\frac{1}{2\pi\sin\vartheta}} \frac{e^{i\tilde{k}_0\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} \left\{ \frac{\tilde{k}_0|z'|\sqrt{\tilde{k}_0\mathcal{R}}}{\sqrt{i}} i\pi e^{-i\tilde{k}_0\mathcal{R}(1-\sin\vartheta)} \operatorname{erfc} \left[-i\sqrt{i\tilde{k}_0\mathcal{R}(1-\sin\vartheta)} \right] \right\} \\
 &- \frac{1}{i\tilde{k}_0^2} \sqrt{\frac{1}{2\pi\sin\vartheta}} \frac{e^{i\tilde{k}_0\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} \frac{\pi\tilde{k}_0\mathcal{R}\sqrt{1+\sin\vartheta}}{\sqrt{2}} \mathbb{F}(\mathcal{R}, \vartheta) , \\
 &= \frac{e^{i\tilde{k}_0\mathcal{R}}}{i\tilde{k}_0^2\mathcal{R}} \left\{ \frac{e^{i\tilde{k}_0|z'|\cos\vartheta}}{\cos^2\vartheta} + \frac{\tilde{k}_0|z'|}{i\sqrt{2}(\sin\vartheta - \sin^2\vartheta)} - \frac{\sqrt{1+\sin\vartheta}}{2\sqrt{2}\sin\vartheta(1-\sin\vartheta)} \right\} \\
 &+ \sqrt{\frac{\pi}{2i\tilde{k}_0\mathcal{R}\sin\vartheta}} |z'| e^{i\tilde{k}_0\mathcal{R}\sin\vartheta} \operatorname{erfc} \left[-i\sqrt{i\tilde{k}_0\mathcal{R}(1-\sin\vartheta)} \right] \\
 &- \frac{e^{i\tilde{k}_0\mathcal{R}}}{2i\tilde{k}_0} \sqrt{\frac{\pi(1+\sin\vartheta)}{\sin\vartheta}} \mathbb{F}(\mathcal{R}, \vartheta) , \tag{4.178}
 \end{aligned}$$

donde el segundo y tercer término muestran la presencia de ondas superficiales que surgen debido a la contribución del polo simple [104, 111] y del polo doble, como se discutió brevemente en el párrafo posterior a la ec.(4.134). El análisis de estas ondas superficiales se hará en la última subsección de este capítulo, una vez que se haya calculado la FG completa en esta aproximación.

Por otro lado, la expresión de $I_{\tilde{\theta}^2}$ para el hemisferio inferior se obtiene mediante un procedimiento análogo usando la transformación conforme $k_{\perp} = -\tilde{k}_0 \sin \alpha$, tomando u_0 con signo negativo en (4.114) y considerando que el contorno de integración C_u Fig. 4.7 se recorre en sentido contrario a las manecillas del reloj. Esto se resume a ponerle barras de valor absoluto a $\cos\vartheta$ en la expresión previa de $I_{\tilde{\theta}^2}$ para obtener una expresión válida en ambos hemisferios como se muestra enseguida:

$$\begin{aligned}
 I_{\tilde{\theta}^2} &= \frac{e^{i\tilde{k}_0\mathcal{R}}}{i\tilde{k}_0^2\mathcal{R}} \left\{ \frac{e^{i\tilde{k}_0|z'|\cos\vartheta}}{\cos^2\vartheta} + \frac{\tilde{k}_0|z'|}{i\sqrt{2}(\sin\vartheta - \sin^2\vartheta)} - \frac{\sqrt{1+\sin\vartheta}}{2\sqrt{2}\sin\vartheta(1-\sin\vartheta)} \right\} \\
 &+ \sqrt{\frac{\pi}{2i\tilde{k}_0\mathcal{R}\sin\vartheta}} |z'| e^{i\tilde{k}_0\mathcal{R}\sin\vartheta} \operatorname{erfc} \left[-i\sqrt{i\tilde{k}_0\mathcal{R}(1-\sin\vartheta)} \right] \\
 &- \frac{e^{i\tilde{k}_0\mathcal{R}}}{2i\tilde{k}_0} \sqrt{\frac{\pi(1+\sin\vartheta)}{\sin\vartheta}} \mathbb{F}(\mathcal{R}, \vartheta) . \tag{4.179}
 \end{aligned}$$

Ya con la expresión final válida en ambos hemisferios de $I_{\tilde{\theta}^2}$ (4.179), la sustituimos explíci-

tamente en la ec. (4.152) y despreciando los términos de orden mayor a $\mathcal{O}(\mathcal{R}^{-1})$, resulta que:

$$\begin{aligned}
 \bar{G}_{\tilde{\theta}^2 \bar{i}}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= i \frac{\omega \tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} K_{\bar{i}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega), \\
 &= -\frac{\omega \tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')_{\perp i}}{R_{\perp}} \frac{\partial I_{\tilde{\theta}^2}}{\partial R_{\perp}}, \\
 &= \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} n_{\perp i} \frac{e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{\mathcal{R}} \left[\frac{e^{i\tilde{k}_0 |z'| \cos \vartheta}}{n \cos^2 \vartheta} + \frac{\tilde{k}_0 |z'|}{in \sqrt{2} (\sin \vartheta - \sin^2 \vartheta)} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\sqrt{1 + \sin \vartheta}}{2n \sqrt{2} \sin \vartheta (1 - \sin \vartheta)} + i\omega |z'| \sqrt{\frac{1 - \sin \vartheta}{2 \sin \vartheta}} \right] \\
 &\quad + \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} n_{\perp i} \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 \mathcal{R} \sin \vartheta}} e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R} \sin \vartheta} \frac{\pi}{2} \operatorname{erfc} \left[-i \sqrt{i\tilde{k}_0 \mathcal{R} (1 - \sin \vartheta)} \right] \\
 &\quad \times \left[-i\omega \tilde{k}_0 |z'| \sin^{3/2} \vartheta - \frac{\omega}{2} + i\omega \tilde{k}_0 \mathcal{R} (1 - \sin \vartheta) |\cos \vartheta| \right] \\
 &\quad + \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} n_{\perp i} e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}} \left[-\frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(\mathcal{R}, \vartheta) - i\omega \sqrt{\frac{1 - \sin \vartheta}{2 \sin \vartheta}} |\cos \vartheta| \right].
 \end{aligned} \tag{4.180}$$

Finalmente, completamos la aproximación de campo lejano al imponer las condiciones (4.138) sobre las coordenadas obteniendo la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 \bar{G}_{\tilde{\theta}^2 \bar{i}}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} n_{\perp i} \frac{e^{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp})}}{r} \left[\frac{e^{i\tilde{k}_0 |z'| \cos \vartheta}}{n \cos^2 \vartheta} + \frac{\tilde{k}_0 |z'|}{in \sqrt{2} (\sin \vartheta - \sin^2 \vartheta)} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\sqrt{1 + \sin \vartheta}}{2n \sqrt{2} \sin \vartheta (1 - \sin \vartheta)} + i\omega |z'| \sqrt{\frac{1 - \sin \vartheta}{2 \sin \vartheta}} \right] \\
 &\quad + \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} n_{\perp i} \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 r \sin \vartheta}} e^{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) \sin \vartheta} \\
 &\quad \times \frac{\pi}{2} \operatorname{erfc} \left[-i \sqrt{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) (1 - \sin \vartheta)} \right] \\
 &\quad \times \left[-i\omega \tilde{k}_0 |z'| \sin^{3/2} \vartheta - \frac{\omega}{2} + i\omega \tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) (1 - \sin \vartheta) |\cos \vartheta| \right] \\
 &\quad + \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} n_{\perp i} e^{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp})} \\
 &\quad \times \left[-\frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_{\perp}) - i\omega \sqrt{\frac{1 - \sin \vartheta}{2 \sin \vartheta}} |\cos \vartheta| \right].
 \end{aligned} \tag{4.181}$$

donde observamos que el primer término de (4.181) es el mismo que hallamos previamente con el método de la fase estacionaria y del *steepest descent* estándar sin la contribución de los polos

simple y doble, lo cual se reportó en el artículo [109] y cuya derivación explícita a través de ambos métodos se expone en las secciones E.1.2.2 y E.2.2 del apéndice E de esta tesis doctoral.

4.3.3.2. Componente $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 0}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ en el régimen de campo lejano

Haciendo $\mu = \nu = 0$ en la ecuación (4.144) se tiene que:

$$\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 0}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} 4\pi \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} \mathbf{k}_\perp^2 e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{R}_\perp} \frac{e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2}(|z|+|z'|)}}{2(\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2)^{3/2}}. \quad (4.182)$$

Al escribir esta integral en coordenadas polares se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \bar{G}_{\tilde{\theta}^2 0}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int_0^\infty \frac{k_\perp^3 dk_\perp}{(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2}} e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z|+|z'|)} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{ik_\perp R_\perp \cos \varphi}, \\ &= i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int_0^\infty \frac{k_\perp^3 dk_\perp}{(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2}} J_0(k_\perp R_\perp) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z|+|z'|)}, \end{aligned} \quad (4.183)$$

donde se usó la representación integral de la función de Bessel $J_0(k_\perp R_\perp)$ [84, 89].

Ahora bien, al convertir la $J_0(k_\perp R_\perp)$ en la Hankel $H_0^{(1)}(k_\perp R_\perp)$ por medio de las ecs. (4.82) y (4.83), observamos que la integral a determinar es:

$$H_{\tilde{\theta}^2} = \frac{1}{2} \oint_{C_{k_\perp}} \frac{k_\perp^3 dk_\perp}{(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2}} H_0^{(1)}(k_\perp R_\perp) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z|+|z'|)}, \quad (4.184)$$

donde C_{k_\perp} denota al contorno de integración de la Fig. 4.3 que se toma de la Fig. 5 del libro de Baños [91] sólo que nuestro contorno de integración tiene un solo corte de rama. Nuevamente recalcamos que para propósitos de convergencia de la integral supondremos que \tilde{k}_0 tiene una parte imaginaria $\sigma > 0$ [92]. Al observar la forma de la ec. (4.184), nos percatamos que es casi la misma, salvo el k_\perp^2 extra en el numerador del integrando, que la forma básica de $I_{\tilde{\theta}^2}$. Por lo tanto, el cálculo de $H_{\tilde{\theta}^2}$ será prácticamente el mismo. Por esta razón, en esta subsección omitiremos los detalles del procedimiento, los cuales se pueden consultar en la subsección 4.3.3.1.

Haciendo la transformación conforme $k_\perp = \tilde{k}_0 \sin \alpha$, resulta que

$$H_{\tilde{\theta}^2} = \frac{\tilde{k}_0}{2} \oint_{C_\alpha} d\alpha \frac{\sin^3 \alpha}{\cos^2 \alpha} H_0^{(1)}(\tilde{k}_0 R_\perp \sin \alpha) e^{i\tilde{k}_0 \cos \alpha(|z|+|z'|)}, \quad (4.185)$$

donde C_α está dado en la Fig. 4.4.

4.3 Integración de la Función de Green en el régimen de campo lejano 76

Luego, usamos la forma asintótica de la función de Hankel (4.96), cuyo uso es permitido ya que estamos pensando en la aproximación de campo lejano, la cual es fundamental para el análisis radiativo. De este modo, obtendremos

$$H_{\hat{\theta}^2} = \sqrt{\frac{\tilde{k}_0}{2\pi i R_\perp}} \oint_{C_\alpha} d\alpha \frac{\sin^{5/2} \alpha}{\cos^2 \alpha} e^{i\tilde{k}_0 R_\perp \sin \alpha + i\tilde{k}_0 \cos \alpha (|z| + |z'|)} . \quad (4.186)$$

Nuevamente, nos concentramos sólo en el hemisferio superior (i.e. $\cos \vartheta > 0$), escribimos $|z| = \mathcal{R} \cos \vartheta$ and $R_\perp = \mathcal{R} \sin \vartheta$, where $\mathcal{R} = \sqrt{R_\perp^2 + z^2}$. De este modo, encontramos que

$$H_{\hat{\theta}^2} = \sqrt{\frac{\tilde{k}_0}{2\pi i \mathcal{R} \sin \vartheta}} \oint_{C_\alpha} d\alpha \frac{\sin^{5/2} \alpha}{\cos^2 \alpha} e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R} \cos(\alpha - \vartheta) + i\tilde{k}_0 |z'| \cos \alpha} , \quad (4.187)$$

donde observamos que la fase es una vez más la misma que en $I_{\hat{\theta}}$ (4.98) y $I_{\hat{\theta}^2}$ (4.156). Por lo tanto, al elegir la misma fase estacionaria, el punto silla será exactamente el mismo, i.e. $\alpha_s = \vartheta$. Aquí pedimos que C_α satisfaga la condición de *steepest descent* (4.101) y que corresponde a la Fig.4.5. Entonces, corremos nuevamente el origen de coordenadas al punto silla $\alpha_s = \vartheta$ al hacer $w = \alpha - \theta$ [96] en $H_{\hat{\theta}^2}$ como se muestra a continuación

$$H_{\hat{\theta}^2} = \sqrt{\frac{\tilde{k}_0}{2\pi i \mathcal{R} \sin \theta}} \oint_{C_w} dw \frac{\sin^{5/2}(\theta + w)}{\cos^2(\theta + w)} e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R} \cos w + i\tilde{k}_0 |z'| \cos(\theta + w)} , \quad (4.188)$$

donde C_w ahora satisface la condición de *steepest descent* (4.103) y está esquematizado en la Fig.4.6.

Siguiendo a Baños [100, 102], introducimos la transformación conforme:

$$\frac{u^2}{2} = \varphi(0) - \varphi(w) = i\tilde{k}_0 \mathcal{R} (1 - \cos w) , \quad (4.189)$$

lo cual implica las mismas sustituciones de las ecs. (4.105)-(4.107).

Sustituyendo estos cambios en $H_{\hat{\theta}^2}$, llegamos a

$$H_{\hat{\theta}^2} = \sqrt{\frac{1}{2\pi \sin \vartheta}} \frac{e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{i\mathcal{R}} \oint_{C_u} du F_3(u) e^{-u^2/2} , \quad (4.190)$$

con C_u dado en la Fig. 4.7 y donde hemos definido

$$F_3(u) = \frac{\sin^{5/2}[\vartheta + w(u)] e^{i\tilde{k}_0 |z'| \cos[\vartheta + w(u)]}}{\cos^2[\vartheta + w(u)] \sqrt{1 - \frac{u^2}{4i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}} . \quad (4.191)$$

Después, debemos analizar si $F_3(u)$ tiene polos en el u -plano, la cual de hecho los tiene y que son exactamente los mismos que $I_{\hat{\theta}^2}$. Nuevamente y como se ha venido haciendo, sólo

nos enfocaremos en el polo doble^{§§§}, el cual está dado por la ec. (4.114). Usando las mismas técnicas estándares de Variable Compleja^{¶¶¶} [112], encontramos que el residuo y b_2 de $F_3(u)$ en u_0 son los mismos que $I_{\hat{\vartheta}2}$ y que están dados por las ecs. (4.163) y (4.164) respectivamente. De este modo, sólo necesitamos tomar los resultados de las integrales previas (4.171) y (4.177) y sustituirlos en la ec. (4.190), como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
 H_{\hat{\vartheta}2} &= \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2\pi \sin \vartheta}} \frac{e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{i\mathcal{R}} \left\{ \frac{\sin^{5/2} \vartheta e^{i\tilde{k}_0 |z'| \cos \vartheta}}{\cos^2 \vartheta} + \frac{\tilde{k}_0 |z'|}{i\sqrt{2(1 - \sin \vartheta)}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\cos^2 \vartheta}{2\sqrt{2(1 + \sin \vartheta)(1 - \sin \vartheta)^2}} \right\}, \\
 &+ \sqrt{\frac{1}{2\pi \sin \vartheta}} \frac{e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{i\mathcal{R}} \left\{ \frac{\tilde{k}_0 |z'| \sqrt{\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{\sqrt{i}} i\pi e^{-i\tilde{k}_0 \mathcal{R}(1 - \sin \vartheta)} \operatorname{erfc} \left[-i\sqrt{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}(1 - \sin \vartheta)} \right] \right\} \\
 &- \sqrt{\frac{1}{2\pi \sin \vartheta}} \frac{e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{i\mathcal{R}} \frac{\pi \tilde{k}_0 \mathcal{R} \sqrt{1 + \sin \vartheta}}{\sqrt{2}} \mathbb{F}(\mathcal{R}, \vartheta), \\
 &= \frac{e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{i\mathcal{R}} \left\{ \tan^2 \vartheta e^{i\tilde{k}_0 |z'| \cos \vartheta} + \frac{\tilde{k}_0 |z'|}{i\sqrt{2(\sin \vartheta - \sin^2 \vartheta)}} - \frac{\sqrt{1 + \sin \vartheta}}{2\sqrt{2} \sin \vartheta (1 - \sin \vartheta)} \right\} \\
 &+ \sqrt{\frac{\pi \tilde{k}_0}{2i\mathcal{R} \sin \vartheta}} \tilde{k}_0 |z'| e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R} \sin \vartheta} \operatorname{erfc} \left[-i\sqrt{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}(1 - \sin \vartheta)} \right] \\
 &+ \frac{\tilde{k}_0 e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{2i} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(\mathcal{R}, \vartheta), \tag{4.192}
 \end{aligned}$$

donde $\mathbb{F}(\mathcal{R}, \vartheta)$ está definida en la ec. (4.176) y donde observamos que el primer término dentro de las llaves es justo el correspondiente al cálculo del *steepest descent* sin la contribución de los polo simple y doble como se menciona en el artículo [109] que publicamos. Mientras que el segundo y tercer término muestran nuevamente la presencia de ondas superficiales que surgen debido a la contribución del polo simple [104, 111] y del polo doble. El análisis de estas ondas superficiales se hará en la última subsección de este capítulo, una vez que se haya calculado la FG completa en esta aproximación. También, es importante decir que el término $1/\sqrt{\sin \vartheta}$ introduce nuevos problemas en $\vartheta = 0$. Como ya se mencionó previamente en las subsecciones 4.3.2 y 4.3.3.1, este punto es una divergencia artificial debido a que introducimos la función de Hankel $H_0^{(1)}$ en la ec. (4.82) [110], el análisis de esta divergencia se hará en la última subsección de este capítulo en el límite $\tilde{k}_0 \mathcal{R} \rightarrow \infty$ con $\vartheta \ll \pi/2$.

Una vez más por completez y consistencia, vale la pena en este punto exhibir que la función dentro de llaves de la ec. (4.194) es convergente en torno a $\vartheta = \pi/2$, lo cual se puede apreciar mejor al hacer el cambio de variable $\vartheta = \pi/2 - \xi$ y expandirla en serie de potencias de ξ en

^{§§§}Ver la Nota al pie de página ‡ de este capítulo.

^{¶¶¶}Ver las Notas al pie de página §§ y ¶¶ de este capítulo.

torno a $\xi = 0$ como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 \cot^2 \xi e^{i\tilde{k}_0|z'|\sin \xi} &+ \frac{\tilde{k}_0|z'|}{i\sqrt{2(\cos \xi - \cos^2 \xi)}} - \frac{\sqrt{1 + \cos \xi}}{2\sqrt{2} \cos \xi (1 - \cos \xi)} \\
 &\simeq \frac{1}{\xi^2} + \frac{i\tilde{k}_0|z'|}{\xi} - \frac{1}{\xi^2} - \frac{i\tilde{k}_0|z'|}{\sqrt{\xi^2}} - \frac{7}{8} - \frac{\tilde{k}_0^2 z'^2}{2} - i \frac{5\tilde{k}_0|z'| + \tilde{k}_0^3 z'^3}{6} \xi, \\
 &= \frac{i\tilde{k}_0|z'|}{\xi} - \frac{i\tilde{k}_0|z'|}{|\xi|} - \frac{7}{8} - \frac{\tilde{k}_0^2 z'^2}{2} - i \frac{5\tilde{k}_0|z'| + \tilde{k}_0^3 z'^3}{6} \xi, \\
 &= -\frac{7}{8} - \frac{\tilde{k}_0^2 z'^2}{2} - i \frac{5\tilde{k}_0|z'| + \tilde{k}_0^3 z'^3}{6} \xi, \tag{4.193}
 \end{aligned}$$

donde se tomó $|\xi| = +\xi$ en la última igualdad ya que $\vartheta = \pi/2 - \xi \Leftrightarrow \xi = \pi/2 - \vartheta > 0$ pues ϑ vive en el hemisferio superior y observamos que la divergencia se removió.

Por otro lado, la expresión de $H_{\hat{\theta}2}$ para el hemisferio inferior se obtiene mediante un procedimiento análogo usando la transformación conforme $k_{\perp} = -\tilde{k}_0 \sin \alpha$, tomando u_0 con signo negativo en (4.114) y considerando que el contorno de integración C_u de la Fig.4.7 se recorre en sentido contrario a las manecillas del reloj. Esto se resume a ponerle barras de valor absoluto a $\cos \vartheta$ en la expresión previa de $H_{\hat{\theta}2}$ para obtener una expresión válida en ambos hemisferios como se muestra enseguida:

$$\begin{aligned}
 H_{\hat{\theta}2} &= \frac{e^{i\tilde{k}_0\mathcal{R}}}{i\mathcal{R}} \left\{ \tan^2 \vartheta e^{i\tilde{k}_0|z'|\cos \vartheta} + \frac{\tilde{k}_0|z'|}{i\sqrt{2(\sin \vartheta - \sin^2 \vartheta)}} - \frac{\sqrt{1 + \sin \vartheta}}{2\sqrt{2} \sin \vartheta (1 - \sin \vartheta)} \right\} \\
 &+ \sqrt{\frac{\pi \tilde{k}_0}{2i\mathcal{R} \sin \vartheta}} \tilde{k}_0|z'| e^{i\tilde{k}_0\mathcal{R} \sin \vartheta} \operatorname{erfc} \left[-i\sqrt{i\tilde{k}_0\mathcal{R}(1 - \sin \vartheta)} \right] \\
 &+ \frac{\tilde{k}_0 e^{i\tilde{k}_0\mathcal{R}}}{2i} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(\mathcal{R}, \vartheta). \tag{4.194}
 \end{aligned}$$

Una vez que se tiene la expresión final válida para ambos hemisferios de $H_{\hat{\theta}2}$ (4.194), la

sustituimos en la ec. (E.25) y resulta que

$$\begin{aligned}
 \bar{G}_{\tilde{\theta}^2 0}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} H_{\tilde{\theta}^2}, \\
 &= \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{\mathcal{R}} \left\{ \tan^2 \vartheta e^{i\tilde{k}_0 |z'| \cos \vartheta} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\tilde{k}_0 |z'|}{i\sqrt{2}(\sin \vartheta - \sin^2 \vartheta)} - \frac{\sqrt{1 + \sin \vartheta}}{2\sqrt{2} \sin \vartheta (1 - \sin \vartheta)} \right\} \\
 &\quad + i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \sqrt{\frac{\pi \tilde{k}_0}{2i\mathcal{R} \sin \vartheta}} \tilde{k}_0 |z'| e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R} \sin \vartheta} \operatorname{erfc} \left[-i\sqrt{i\tilde{k}_0 \mathcal{R} (1 - \sin \vartheta)} \right] \\
 &\quad + \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{\tilde{k}_0 e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{2} \sqrt{\frac{\pi (1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(\mathcal{R}, \vartheta). \tag{4.195}
 \end{aligned}$$

Finalmente, completamos la aproximación de campo lejano al imponer las condiciones (4.138) sobre las coordenadas obteniendo la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 \bar{G}_{\tilde{\theta}^2 0}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp)}}{r} \left\{ \tan^2 \vartheta e^{i\tilde{k}_0 |z'| \cos \vartheta} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\tilde{k}_0 |z'|}{i\sqrt{2}(\sin \vartheta - \sin^2 \vartheta)} - \frac{\sqrt{1 + \sin \vartheta}}{2\sqrt{2} \sin \vartheta (1 - \sin \vartheta)} \right\} \\
 &\quad + i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 r \sin \vartheta}} \tilde{k}_0^2 |z'| e^{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp) \sin \vartheta} \\
 &\quad \times \frac{\pi}{2} \operatorname{erfc} \left[-i\sqrt{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp) (1 - \sin \vartheta)} \right] \\
 &\quad + \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{\tilde{k}_0 e^{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp)}}{2} \sqrt{\frac{\pi (1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_\perp), \tag{4.196}
 \end{aligned}$$

donde observamos que el primer término de (4.196) es el mismo que hallamos previamente con el método de la fase estacionaria y del *steepest descent* estándar sin la contribución de los polos simple y doble, lo cual se reportó en el artículo [109] y cuya derivación explícita a través de ambos métodos se expone en las secciones E.1.2.1 y E.2.2 del apéndice E de esta tesis doctoral.

4.3.3.3. Componentes $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 \bar{j}}^{\bar{i}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ en el régimen de campo lejano

En esta subsección obtendremos el régimen de campo lejano de las componentes $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 \bar{j}}^{\bar{i}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ que serán analizadas por separado.

4.3.3.3.1. Componentes $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2_2}^1(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ y $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2_1}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$

Haciendo $\mu = 1$ y $\nu = 2$ en la ecuación (4.144) se tiene que:

$$\bar{G}_{\tilde{\theta}^2_2}^1(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} 4\pi \int \frac{d^2\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} k^1 k_2 e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{R}_\perp} \frac{e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2}(|z|+|z'|)}}{2 \left(\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2 \right)^{3/2}} . \quad (4.197)$$

Al escribir esta integral en coordenadas polares y sustituyendo los valores de k^1 y k_2 en el sistema de coordenadas descrito en la Fig. (4.2), se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \bar{G}_{\tilde{\theta}^2_2}^1(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= -i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int_0^\infty \frac{k_\perp^3 dk_\perp e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z|+|z'|)}}{\left(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2 \right)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{ik_\perp R_\perp \cos \varphi} \cos \varphi \sin \varphi , \\ &= 0 , \end{aligned} \quad (4.198)$$

donde la última igualdad se debe a que la integral angular es el producto de una función par por una impar. Siendo así, podemos ver que al intercambiar $1 \leftrightarrow 2$ en la integral (4.144) obtendríamos la misma integral angular y nos daría cero también. Por lo tanto,

$$\bar{G}_{\tilde{\theta}^2_2}^1(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = \bar{G}_{\tilde{\theta}^2_1}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = 0 . \quad (4.199)$$

Dado que para estas componentes no se usó ningún método de aproximación, estos resultados valen también para el método de la fase estacionaria y del *steepest descent* estándar sin la contribución de los polos simple y doble como se reportó en el artículo [109].

4.3.3.3.2. Componente $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2_1}^1(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$

Haciendo $\mu = 1$ y $\nu = 1$ en la ecuación (4.144) se tiene que:

$$\bar{G}_{\tilde{\theta}^2_1}^1(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} 4\pi \int \frac{d^2\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} [k^1 k_1 - (\omega^2 - \mathbf{k}_\perp^2)] e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{R}_\perp} \frac{e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2}(|z|+|z'|)}}{2 \left(\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2 \right)^{3/2}} . \quad (4.200)$$

Tras escribir esta integral en coordenadas polares y sustituyendo el valor de k^1 en el sistema

de coordenadas descrito en la Fig. (4.2), resulta lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \bar{G}_{\tilde{\theta}^2}^1(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= -i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int_0^\infty \frac{k_\perp^3 dk_\perp}{(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2}} e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z|+|z'|)} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{ik_\perp R_\perp \cos \varphi} \cos^2 \varphi \\
 &\quad -i \frac{\tilde{\theta}^2 \omega^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp}{(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2}} e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z|+|z'|)} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{ik_\perp R_\perp \cos \varphi} \\
 &\quad +i \frac{\tilde{\theta}^2 \omega^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int_0^\infty \frac{k_\perp^3 dk_\perp}{(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2}} e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z|+|z'|)} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{ik_\perp R_\perp \cos \varphi} , \\
 &= -i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int_0^\infty \frac{k_\perp^3 dk_\perp e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z|+|z'|)}}{(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2}} \left[-J_2(k_\perp R_\perp) + \frac{1}{2} {}_0\tilde{F}_1 \left(; 2; -\frac{k_\perp^2 R_\perp^2}{4} \right) \right] \\
 &\quad -i \frac{\tilde{\theta}^2 \omega^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp}{(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2}} J_0(k_\perp R_\perp) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z|+|z'|)} \\
 &\quad +i \frac{\tilde{\theta}^2 \omega^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int_0^\infty \frac{k_\perp^3 dk_\perp}{(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2}} J_0(k_\perp R_\perp) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z|+|z'|)} , \tag{4.201}
 \end{aligned}$$

donde se usó la representación angular de las funciones de Bessel de primer tipo [84, 89] y ${}_0\tilde{F}_1 \left(; 2; -\frac{k_\perp^2 R_\perp^2}{4} \right)$ denota a la función hipergeométrica confluyente regularizada que se define como:

$${}_0\tilde{F}_1 \left(; 2; -\frac{k_\perp^2 R_\perp^2}{4} \right) = \frac{1}{\Gamma(2)} {}_0F_1 \left(; 2; -\frac{k_\perp^2 R_\perp^2}{4} \right) . \tag{4.202}$$

No obstante, es deseable expresar las funciones de $k_\perp R_\perp$ de los corchetes de alguna manera en términos de la función de Bessel J_0 u otra función que en el régimen de campo lejano sea oscilatoria para poder usar el método de la fase estacionaria. De este modo, se puede encontrar que la función hipergeométrica confluyente ${}_0F_1 \left(; 2; -\frac{k_\perp^2 R_\perp^2}{4} \right)$ se puede expresar en términos de las funciones de Bessel de primer tipo a través de la siguiente relación:

$${}_0F_1 \left(; \alpha + 1; -\frac{x^2}{4} \right) = \Gamma(\alpha + 1) \left(\frac{2}{x} \right)^\alpha J_\alpha(x) , \tag{4.203}$$

que al hacer $\alpha = 1$ y $x = k_\perp R_\perp$ para nuestro caso, se tiene lo siguiente:

$${}_0F_1 \left(; 2; -\frac{k_\perp^2 R_\perp^2}{4} \right) = \Gamma(2) \left(\frac{2}{k_\perp R_\perp} \right) J_1(k_\perp R_\perp) . \tag{4.204}$$

Por lo tanto, ${}_0\tilde{F}_1 \left(; 2; -\frac{k_\perp^2 R_\perp^2}{4} \right)$ queda de la siguiente forma

$${}_0\tilde{F}_1 \left(; 2; -\frac{k_\perp^2 R_\perp^2}{4} \right) = \left(\frac{2}{k_\perp R_\perp} \right) J_1(k_\perp R_\perp) = -\frac{2}{k_\perp^2 R_\perp} \frac{\partial J_0(k_\perp R_\perp)}{\partial R_\perp} . \tag{4.205}$$

4.3 Integración de la Función de Green en el régimen de campo lejano 82

Por otra parte, al usar la siguiente fórmula de recurrencia de las funciones de Bessel de primer tipo [89, 84]:

$$\frac{2}{k_{\perp} R_{\perp}} J_1(k_{\perp} R_{\perp}) = J_2(k_{\perp} R_{\perp}) + J_0(k_{\perp} R_{\perp}) , \quad (4.206)$$

tendremos que la $J_2(k_{\perp} R_{\perp})$ se puede reescribir como sigue:

$$\begin{aligned} J_2(k_{\perp} R_{\perp}) &= \frac{2}{k_{\perp} R_{\perp}} J_1(k_{\perp} R_{\perp}) - J_0(k_{\perp} R_{\perp}) , \\ &= - \left[\frac{2}{k_{\perp}^2 R_{\perp}} \frac{\partial J_0(k_{\perp} R_{\perp})}{\partial R_{\perp}} + J_0(k_{\perp} R_{\perp}) \right] . \end{aligned} \quad (4.207)$$

Sustituyendo las expresiones para $J_2(k_{\perp} R_{\perp})$ y para ${}_0\tilde{F}_1\left(; 2; -\frac{k_{\perp}^2 R_{\perp}^2}{4}\right)$ en (4.201) resulta lo siguiente:

$$\begin{aligned} \bar{G}_{\tilde{\theta}^2}^1(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= -i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int_0^{\infty} \frac{k_{\perp}^3 dk_{\perp} e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2}(|z|+|z'|)} \left[\frac{1}{k_{\perp}^2 R_{\perp}} \frac{\partial J_0(k_{\perp} R_{\perp})}{\partial R_{\perp}} + J_0(k_{\perp} R_{\perp}) \right]}{\left(\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2\right)^{3/2}} \\ &\quad -i \frac{\tilde{\theta}^2 \omega^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int_0^{\infty} \frac{k_{\perp} dk_{\perp}}{\left(\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2\right)^{3/2}} J_0(k_{\perp} R_{\perp}) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2}(|z|+|z'|)} , \\ &\quad +i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int_0^{\infty} \frac{k_{\perp}^3 dk_{\perp}}{\left(\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2\right)^{3/2}} J_0(k_{\perp} R_{\perp}) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2}(|z|+|z'|)} , \\ &= -i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{1}{R_{\perp}} \frac{\partial}{\partial R_{\perp}} \int_0^{\infty} \frac{k_{\perp} dk_{\perp}}{\left(\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2\right)^{3/2}} J_0(k_{\perp} R_{\perp}) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2}(|z|+|z'|)} \\ &\quad -i \frac{\tilde{\theta}^2 \omega^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int_0^{\infty} \frac{k_{\perp} dk_{\perp}}{\left(\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2\right)^{3/2}} J_0(k_{\perp} R_{\perp}) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2}(|z|+|z'|)} . \end{aligned} \quad (4.208)$$

Una vez más, al convertir la $J_0(k_{\perp} R_{\perp})$ en la Hankel $H_0^{(1)}(k_{\perp} R_{\perp})$ por medio de las ecs. (4.82) y (4.83), se observa que

$$\begin{aligned} \bar{G}_{\tilde{\theta}^2}^1(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= -i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{1}{R_{\perp}} \frac{\partial}{\partial R_{\perp}} \oint_{C_{k_{\perp}}} \frac{k_{\perp} dk_{\perp}}{\left(\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2\right)^{3/2}} H_0^{(1)}(k_{\perp} R_{\perp}) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2}(|z|+|z'|)} \\ &\quad -i \frac{\tilde{\theta}^2 \omega^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \oint_{C_{k_{\perp}}} \frac{k_{\perp} dk_{\perp}}{\left(\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2\right)^{3/2}} H_0^{(1)}(k_{\perp} R_{\perp}) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2}(|z|+|z'|)} , \\ &= -i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{1}{R_{\perp}} \frac{\partial I_{\tilde{\theta}^2}}{\partial R_{\perp}} - i \frac{\tilde{\theta}^2 \omega^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} I_{\tilde{\theta}^2} , \end{aligned} \quad (4.209)$$

4.3 Integración de la Función de Green en el régimen de campo lejano 83

donde hemos identificado la integral en k_\perp con $I_{\tilde{\theta}^2}$ (4.153) que ya se calculó previamente. Por lo que al sustituir el resultado final de $I_{\tilde{\theta}^2}$ (4.179) en la ec. (4.209) tendremos que:

$$\begin{aligned}
 \bar{G}_{\tilde{\theta}^2}^1(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{\mathcal{R}} \left[-\frac{e^{i\tilde{k}_0 |z'| \cos \vartheta}}{n^2 \cos^2 \vartheta} - \frac{\tilde{k}_0 |z'|}{in^2 \sqrt{2} (\sin \vartheta - \sin^2 \vartheta)} \right. \\
 &+ \left. \frac{\sqrt{1 + \sin \vartheta}}{2n^2 \sqrt{2} \sin \vartheta (1 - \sin \vartheta)} - \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(\mathcal{R}, \vartheta) + \sqrt{\frac{1 - \sin \vartheta}{2 \sin \vartheta}} |\cos \vartheta| \right] \\
 &+ \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 \mathcal{R} \sin \vartheta}} e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R} \sin \vartheta} \frac{\pi}{2} \operatorname{erfc} \left[-i \sqrt{i\tilde{k}_0 \mathcal{R} (1 - \sin \vartheta)} \right] \\
 &\times \left[-\tilde{k}_0 (1 - \sin \vartheta) - i\omega^2 |z'| \right] \\
 &+ \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}} \frac{\omega}{2n} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(\mathcal{R}, \vartheta) , \tag{4.210}
 \end{aligned}$$

donde ya se despreciaron los términos de orden mayor a $\mathcal{O}(\mathcal{R}^{-1})$.

Finalmente, completamos la aproximación de campo lejano al imponer las condiciones (4.138) sobre las coordenadas obteniendo la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 \bar{G}_{\tilde{\theta}^2}^1(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp)}}{r} \left[-\frac{e^{i\tilde{k}_0 |z'| \cos \vartheta}}{n^2 \cos^2 \vartheta} - \frac{\tilde{k}_0 |z'|}{in^2 \sqrt{2} (\sin \vartheta - \sin^2 \vartheta)} \right. \\
 &+ \left. \frac{\sqrt{1 + \sin \vartheta}}{2n^2 \sqrt{2} \sin \vartheta (1 - \sin \vartheta)} - \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_\perp) + \sqrt{\frac{1 - \sin \vartheta}{2 \sin \vartheta}} |\cos \vartheta| \right] \\
 &+ \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 r \sin \vartheta}} e^{i\tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp) \sin \vartheta} \\
 &\times \frac{\pi}{2} \operatorname{erfc} \left[-i \sqrt{i\tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp) (1 - \sin \vartheta)} \right] \left[-\tilde{k}_0 (1 - \sin \vartheta) - i\omega^2 |z'| \right] \\
 &+ \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} e^{i\tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp)} \frac{\omega}{2n} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_\perp) , \tag{4.211}
 \end{aligned}$$

donde observamos que el primer término de (4.211) es el mismo que hallamos previamente con el método de la fase estacionaria y del *steepest descent* estándar sin la contribución de los polos simple y doble, lo cual se reportó en el artículo [109] y cuya derivación explícita a través de ambos métodos se expone en las secciones E.1.2.3.1 y E.2.2 del apéndice E de esta tesis doctoral.

4.3.3.3.3. Componente $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 2}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$

Haciendo $\mu = 2$ y $\nu = 2$ en la ecuación (4.144) se tiene que:

$$\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 2}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} 4\pi \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} [k^2 k_2 - (\omega^2 - \mathbf{k}_\perp^2)] e^{i \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{R}_\perp} \frac{e^{i \sqrt{\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2} (|z| + |z'|)}}{2 (\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2)^{3/2}}. \quad (4.212)$$

Nuevamente, escribimos esta integral en coordenadas polares y sustituyendo el valor de k_2 en el sistema de coordenadas descrito en la Fig. (4.2), resulta lo siguiente:

$$\begin{aligned} \bar{G}_{\tilde{\theta}^2 2}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= -i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int_0^\infty \frac{k_\perp^3 dk_\perp}{(\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2)^{3/2}} e^{i \sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2} (|z| + |z'|)} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{i k_\perp R_\perp \cos \varphi} \sin^2 \varphi \\ &\quad -i \frac{\tilde{\theta}^2 \omega^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp}{(\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2)^{3/2}} e^{i \sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2} (|z| + |z'|)} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{i k_\perp R_\perp \cos \varphi} \\ &\quad +i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int_0^\infty \frac{k_\perp^3 dk_\perp}{(\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2)^{3/2}} e^{i \sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2} (|z| + |z'|)} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{i k_\perp R_\perp \cos \varphi}, \\ &= -i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int_0^\infty \frac{k_\perp^3 dk_\perp e^{i \sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2} (|z| + |z'|)}}{(\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2)^{3/2}} \left[\frac{1}{2} {}_0\tilde{F}_1 \left(; 2; -\frac{k_\perp^2 R_\perp^2}{4} \right) \right] \\ &\quad -i \frac{\tilde{\theta}^2 \omega^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp}{(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2}} J_0(k_\perp R_\perp) e^{i \sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2} (|z| + |z'|)} \\ &\quad +i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int_0^\infty \frac{k_\perp^3 dk_\perp}{(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2}} J_0(k_\perp R_\perp) e^{i \sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2} (|z| + |z'|)}, \end{aligned} \quad (4.213)$$

donde se usó la representación angular de las funciones de Bessel de primer tipo [84, 89] y ${}_0\tilde{F}_1 \left(; 2; -\frac{k_\perp^2 R_\perp^2}{4} \right)$ denota a la función hipergeométrica confluyente regularizada.

Usando la relación (4.205) hallada en la subsección pasada, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \bar{G}_{\tilde{\theta}^2}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int_0^\infty \frac{k_\perp^3 dk_\perp e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z|+|z'|)} \left[\frac{1}{k_\perp^2 R_\perp} \frac{\partial J_0(k_\perp R_\perp)}{\partial R_\perp} \right] \\
 &\quad - i \frac{\tilde{\theta}^2 \omega^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp}{(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2}} J_0(k_\perp R_\perp) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z|+|z'|)} \\
 &\quad + i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int_0^\infty \frac{k_\perp^3 dk_\perp}{(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2}} J_0(k_\perp R_\perp) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z|+|z'|)} , \\
 &= i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{1}{R_\perp} \frac{\partial}{\partial R_\perp} \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp}{(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2}} J_0(k_\perp R_\perp) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z|+|z'|)} \\
 &\quad - i \frac{\tilde{\theta}^2 \omega^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp}{(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2}} J_0(k_\perp R_\perp) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z|+|z'|)} \\
 &\quad + i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int_0^\infty \frac{k_\perp^3 dk_\perp}{(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2}} J_0(k_\perp R_\perp) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z|+|z'|)} . \quad (4.214)
 \end{aligned}$$

Nuevamente, al convertir la $J_0(k_\perp R_\perp)$ en la Hankel $H_0^{(1)}(k_\perp R_\perp)$ por medio de las ecs. (4.82) y (4.83), se observa que

$$\begin{aligned}
 \bar{G}_{\tilde{\theta}^2}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{1}{R_\perp} \frac{\partial}{\partial R_\perp} \oint_{C_{k_\perp}} \frac{k_\perp dk_\perp}{(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2}} J_0(k_\perp R_\perp) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z|+|z'|)} \\
 &\quad - i \frac{\tilde{\theta}^2 \omega^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \oint_{C_{k_\perp}} \frac{k_\perp dk_\perp}{(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2}} J_0(k_\perp R_\perp) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z|+|z'|)} \\
 &\quad + i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \oint_{C_{k_\perp}} \frac{k_\perp^3 dk_\perp}{(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2}} J_0(k_\perp R_\perp) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z|+|z'|)} , \\
 &= i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{1}{R_\perp} \frac{\partial I_{\tilde{\theta}^2}}{\partial R_\perp} - i \frac{\tilde{\theta}^2 \omega^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} I_{\tilde{\theta}^2} + i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} H_{\tilde{\theta}^2} , \quad (4.215)
 \end{aligned}$$

donde se identificaron las integrales en k_\perp con $I_{\tilde{\theta}^2}$ (4.153) y $H_{\tilde{\theta}^2}$ (4.184) que ya se calcularon previamente. Por lo que al sustituir el resultado final de $I_{\tilde{\theta}^2}$ (4.179) y $H_{\tilde{\theta}^2}$ (4.194) en la ec.

(4.215) tendremos que:

$$\begin{aligned}
 \bar{G}_{\tilde{\theta}^2 2}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{\mathcal{R}} \left[-\frac{1}{n^2 \cos^2 \vartheta} + \tan^2 \vartheta \right] e^{i\tilde{k}_0 |z'| \cos \vartheta} \\
 &+ \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{\mathcal{R}} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \left[\frac{\tilde{k}_0 |z'|}{i\sqrt{2}(\sin \vartheta - \sin^2 \vartheta)} - \frac{\sqrt{1 + \sin \vartheta}}{2\sqrt{2} \sin \vartheta (1 - \sin \vartheta)} \right] \\
 &+ \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{\mathcal{R}} \left[\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(\mathcal{R}, \vartheta) - \sqrt{\frac{1 - \sin \vartheta}{2 \sin \vartheta}} |\cos \vartheta| \right] \\
 &+ \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 \mathcal{R} \sin \vartheta}} e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R} \sin \vartheta} \frac{\pi}{2} \operatorname{erfc} \left[-i\sqrt{i\tilde{k}_0 \mathcal{R} (1 - \sin \vartheta)} \right] \\
 &\times \left[\tilde{k}_0 (1 - \sin \vartheta) - i\tilde{k}_0^2 |z'| \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right] \\
 &+ \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{\tilde{k}_0 e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}}{2} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(\mathcal{R}, \vartheta) \left(1 + \frac{1}{n^2} \right), \tag{4.216}
 \end{aligned}$$

donde ya se despreciaron los términos de orden mayor a $\mathcal{O}(\mathcal{R}^{-1})$.

Finalmente, completamos la aproximación de campo lejano al imponer las condiciones (4.138) sobre las coordenadas obteniendo la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 \bar{G}_{\tilde{\theta}^2 2}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp)}}{r} \left[-\frac{1}{n^2 \cos^2 \vartheta} + \tan^2 \vartheta \right] e^{i\tilde{k}_0 |z'| \cos \vartheta} \\
 &+ \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp)}}{r} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \\
 &\times \left[\frac{\tilde{k}_0 |z'|}{i\sqrt{2}(\sin \vartheta - \sin^2 \vartheta)} - \frac{\sqrt{1 + \sin \vartheta}}{2\sqrt{2} \sin \vartheta (1 - \sin \vartheta)} \right] \\
 &+ \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp)}}{r} \left[\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_\perp) - \sqrt{\frac{1 - \sin \vartheta}{2 \sin \vartheta}} |\cos \vartheta| \right] \\
 &+ \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 r \sin \vartheta}} e^{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp) \sin \vartheta} \\
 &\times \frac{\pi}{2} \operatorname{erfc} \left[-i\sqrt{i\tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp) (1 - \sin \vartheta)} \right] \\
 &\times \left[\tilde{k}_0 (1 - \sin \vartheta) + i\tilde{k}_0^2 |z'| \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right] \\
 &+ \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{\tilde{k}_0 e^{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp)}}{2} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_\perp) \left(1 + \frac{1}{n^2} \right), \tag{4.217}
 \end{aligned}$$

donde observamos que el primer término de (4.217) es el mismo que hallamos previamente con el método de la fase estacionaria y del *steepest descent* estándar sin la contribución de los polos simple y doble, lo cual se reportó en el artículo [109] y cuya derivación explícita a través de ambos métodos se expone en las secciones E.1.2.3.2 y E.2.2 del apéndice E de esta tesis doctoral.

4.3.3.4. Forma compacta de $\tilde{G}_{\tilde{\theta}^2 \nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$

A continuación, daremos una expresión compacta para las componentes $\tilde{G}_{\tilde{\theta}^2 \nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ de la FG para exhibir las diferencias de este tratamiento completo con respecto al que publicamos en [109]. Para este fin, tomaremos los resultados (4.145), (4.181), (4.196), (4.199), (4.211) y (4.217) y los presentaremos en términos de las fases comunes que aparecen como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\tilde{\theta}^2 \nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp)}}{r} \left[C_{1 \nu}^\mu(\vartheta, \phi, n) e^{i\tilde{k}_0|z'| \cos \vartheta} + C_{2 \nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) \right] \\ &+ \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 r \sin \vartheta}} e^{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp) \sin \vartheta} C_{3 \nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) \\ &+ \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} e^{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp)} C_{4 \nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0), \end{aligned} \quad (4.218)$$

donde

$$C_{1 \nu}^\mu(\vartheta, \phi, n) = \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \begin{pmatrix} \sin^2 \vartheta & -n_{\perp 1}/n & -n_{\perp 2}/n & 0 \\ n_{\perp 1}/n & -1/n^2 & 0 & 0 \\ n_{\perp 2}/n & 0 & -1/n^2 + \sin^2 \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.219)$$

$$C_{2 \nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) = \begin{pmatrix} \psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0) & -n_{\perp 1} \psi_2(\vartheta, z', \tilde{k}_0) & -n_{\perp 2} \psi_2(\vartheta, z', \tilde{k}_0) & 0 \\ n_{\perp 1} \psi_2(\vartheta, z', \tilde{k}_0) & \psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) & 0 & 0 \\ n_{\perp 2} \psi_2(\vartheta, z', \tilde{k}_0) & 0 & \psi_4(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.220)$$

$$C_{3 \nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) = \begin{pmatrix} \chi_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) & -n_{\perp 1} \chi_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) & -n_{\perp 2} \chi_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) & 0 \\ n_{\perp 1} \chi_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) & \chi_3(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) & 0 & 0 \\ n_{\perp 2} \chi_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) & 0 & \chi_4(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.221)$$

$$C_{4 \nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0) = \begin{pmatrix} \tau_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0) & -n_{\perp 1} \tau_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0) & -n_{\perp 2} \tau_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0) & 0 \\ n_{\perp 1} \tau_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0) & \tau_3(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0) & 0 & 0 \\ n_{\perp 2} \tau_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0) & 0 & \tau_4(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.222)$$

con

$$\begin{aligned}
 \psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0) &= \frac{\tilde{k}_0 |z'|}{i\sqrt{2}(\sin \vartheta - \sin^2 \vartheta)} - \frac{\sqrt{1 + \sin \vartheta}}{2\sqrt{2} \sin \vartheta (1 - \sin \vartheta)}, \\
 \psi_2(\vartheta, z', \tilde{k}_0) &= \frac{\psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0)}{n} + i\omega |z'| \sqrt{\frac{2(1 - \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}}, \\
 \psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) &= \frac{\psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0)}{n^2} - \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_{\perp}) + \sqrt{\frac{1 - \sin \vartheta}{2 \sin \vartheta}} |\cos \vartheta|, \\
 \psi_4(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0) + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_{\perp}) - \sqrt{\frac{1 - \sin \vartheta}{2 \sin \vartheta}} |\cos \vartheta|, \\
 \chi_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) &= i\tilde{k}_0^2 |z'| \Lambda_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0), \\
 \chi_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) &= \Lambda_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0) \left[-i\omega \tilde{k}_0 |z'| \sin^{3/2} \vartheta - \frac{\omega}{2} + i\omega \tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) (1 - \sin \vartheta) |\cos \vartheta| \right], \\
 \chi_3(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) &= -\Lambda_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0) \left[i\omega^2 |z'| + \tilde{k}_0 (1 - \sin \vartheta) |\cos \vartheta| \right], \\
 \chi_4(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) &= \Lambda_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0) \left[\tilde{k}_0 (1 - \sin \vartheta) |\cos \vartheta| + i\tilde{k}_0^2 |z'| \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right], \\
 \tau_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0) &= \frac{\tilde{k}_0}{2} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_{\perp}), \\
 \tau_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0) &= -\omega \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_{\perp}) + i \sqrt{\frac{1 - \sin \vartheta}{2 \sin \vartheta}} |\cos \vartheta| \right], \\
 \tau_3(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0) &= \frac{\omega}{2n} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_{\perp}), \\
 \tau_4(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0) &= \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \frac{\tilde{k}_0}{2} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_{\perp}), \\
 \mathbb{F}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} i - \sqrt{2i\tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) (1 - \sin \vartheta)} e^{-i\tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) (1 - \sin \vartheta)} \\
 &\quad \times \operatorname{erfc} \left[-i \sqrt{i\tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) (1 - \sin \vartheta)} \right].
 \end{aligned} \tag{4.223}$$

donde $\Lambda_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0)$ está dada por la ec. (4.143) y también observamos que el primer término de (4.218) junto con la matriz (4.219) son los mismos que hallamos previamente con el método de la fase estacionaria y del *steepest descent* estándar sin la contribución de los polos simple y doble, lo cual se reportó en el artículo [109] y cuya obtención a través de ambos métodos se expone en las secciones E.1.2.3.2 y E.2.2 del apéndice E de esta tesis doctoral.

4.3.4. La fase de la Función de Green en el régimen de campo lejano

En esta subsección daremos un par de comentarios finales sobre la fase de la exponencial relacionada con las variables \mathbf{x}' de la fuente de la $\bar{G}_{\nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ dada por las ecs. (4.81), (4.139)

y (4.218). En primer lugar, encontramos la exponencial $e^{i\tilde{k}_0 R}$ en la ec. (4.81), que en la aproximación de campo lejano produce la fase $i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}' - z' \cos \vartheta)$ que es típica de la ED estándar. En segundo lugar, los términos (4.139) y (4.218) involucran las exponenciales $e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R}}$, $e^{i\tilde{k}_0(\mathcal{R} + |z' \cos \vartheta|)}$ y $e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R} \sin \vartheta}$ con $\mathcal{R} = \sqrt{R_\perp^2 + z^2}$ que en la aproximación de campo lejano se presentan como $e^{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp)}$, $e^{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp + |z' \cos \vartheta|)}$ y $e^{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp) \sin \vartheta}$ respectivamente.

La fase transversa $i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp)$ coincide con la parte transversa de la fase de la ED estándar por lo que su comportamiento será el usual en la dirección transversa. Luego, la fase $i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp) \sin \vartheta$ es la misma fase de la ED estándar que se asocia con las ondas superficiales cilíndricas axialmente simétricas [113] y también se observa que la fase transversa $i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp)$ se asocia a ondas planas superficiales* lo cual sería un resultado nuevo, el análisis más detallado dichas ondas superficiales se pospondrá para la siguiente subsección. Finalmente, la fase $i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp + |z' \cos \vartheta|)$ es casi la misma fase que presenta la ED estándar en la aproximación de campo lejano salvo el signo del argumento del valor absoluto del término $|z' \cos \vartheta|$. Observamos que si el signo es negativo coincidirá completamente con la fase de la ED estándar, mientras que si el signo es positivo no habrá coincidencia y esto dará lugar a nuevos efectos. De hecho, es posible obtener esta fase al aplicarle la aproximación de campo lejano a la distancia $\tilde{R} = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')_\perp^2 + (|z| + |z'|)^2}$ como sigue:†

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 - |z - z'|^2 + (|z| + |z'|)^2} \\ &= \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 + 2(|zz'| + zz')} \\ &= r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp + |z' \cos \vartheta|. \end{aligned} \quad (4.224)$$

De la segunda igualdad de esta ecuación, observamos que cuando el signo de zz' sea positivo, tendremos una contribución adicional a esta fase de la FG que se verá reflejada en cantidades observables, e. g. en la potencia radiada. El término adicional $(|z| + |z'|)^2$ en la fase, que difiere del usual $|z - z'|^2$, tiene origen en la forma de la FG reducida (4.35) junto con las expresiones (4.29) y (4.36) [109]. Como demostraremos en el siguiente capítulo, efectos interesantes como la Radiación de Vavilov-Čerenkov Reversa (RVČR) surgen precisamente por la contribución del término $|z' \cos \vartheta|$ a la fase de la FG derivada del término $(|z| + |z'|)^2$.

4.3.5. Análisis de las ondas superficiales

En esta subsección haremos un análisis escueto de las ondas superficiales mencionadas en las subsecciones 4.3.2, 4.3.3.1, 4.3.3.2 y en la subsección previa. Dichas ondas superficiales están ligadas al último término de $I_{\tilde{\theta}}$ (4.135), al segundo y tercer término de $I_{\tilde{\theta}^2}$ (4.179) y $H_{\tilde{\theta}^2}$ (4.194)

*Hemos denominado a estas ondas así ya que se probará en la subsección 4.3.5.1 que éstas desaparecen al alejarse de la interfaz Σ y en la subsección 4.3.5.1 se demostrará que éstas tienen la forma funcional adecuada para ser llamadas así.

†La distancia \tilde{R} aparece naturalmente al usar el método de la fase estacionaria o de *steepest descent* como se reportó en [109] y que exponemos con todo detalle en las secciones E.1 y E.2 del Apéndice E y que además aparece en la componente 00 de la FG completa como se puede apreciar en la ec. (4.78).

4.3 Integración de la Función de Green en el régimen de campo lejano 90

que se traducen en: los términos proporcionales a $t_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0)$ y $C_{3\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0)$ cuya fase es $e^{i\tilde{k}_0(r-\mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp) \sin \vartheta}$ y los términos proporcionales a $C_{4\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0)$ con fase $e^{i\tilde{k}_0(r-\mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp)}$ de la FG dada por las expresiones (4.81), (4.139) y (4.218).

A continuación, demostraremos que dichos términos en efecto se comportan como ondas superficiales. Para ello, probaremos dos características importantes de estas ondas. Primero, que para valores de $\tilde{k}_0 r \rightarrow \infty$ (naturalmente seguimos en el régimen de campo lejano) y en la región donde $\pi/2 \gg \vartheta$ y $\pi/2 \ll \vartheta$ ($\vartheta \approx 0, \pi$, i.e. lejos de la interfaz Σ situada en $z = 0$) dichas ondas desaparecen. Y en segundo lugar, también para valores de $\tilde{k}_0 r \rightarrow \infty$ y en la región donde $0 \ll \vartheta \approx \pi/2 \ll \pi$ (es decir, entorno a la interfaz Σ situada en $z = 0$) dichas ondas contribuyen máximamente. De este modo, se reflejará que su importancia radica sólo cuando se está cerca de la interfaz y se justificaría el nombre de las mismas.

4.3.5.1. Función de Green lejos de la interfaz Σ

En esta subsección obtendremos el comportamiento de la FG dada por las expresiones (4.81), (4.139) y (4.218) cuando el observador se encuentra lejos de la interfaz Σ . Para ello, debemos calcular los límites cuando $\vartheta \rightarrow 0$ y cuando $\vartheta \rightarrow \pi$ de las componentes de la FG. Comenzamos por el término $\bar{G}_{ED\nu}^\mu$ (4.81), obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \bar{G}_{ED\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \eta_\nu^\mu \frac{e^{i\tilde{k}_0(r-\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}')}}{r}, \\ &= \eta_\nu^\mu \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{r} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} e^{-i\tilde{k}_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}'} . \end{aligned} \quad (4.225)$$

Recordando que $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{x}/r = (\sin \vartheta \cos \phi, \sin \vartheta \sin \phi, \cos \vartheta)$, se obtiene finalmente que:

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \bar{G}_{ED\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = \eta_\nu^\mu \frac{e^{i\tilde{k}_0(r-\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{x}')}}{r} = \eta_\nu^\mu \frac{e^{i\tilde{k}_0(r-z')}}{r}, \quad (4.226)$$

donde podemos observar que sólo hay ondas esféricas, como era de esperarse ya que esta componente de la FG no tiene otra contribución además de ésta.

Luego, es turno de hacer lo propio con el término $\bar{G}_{\theta\nu}^\mu$ (4.139). Para ello, resultará útil calcular previamente los límites de $m_\alpha(r, \vartheta)$ (4.140) y $t_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0)$ (4.141) cuando $\vartheta \rightarrow 0$. Primero, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} m_\alpha(r, \vartheta) &= \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{n} \Lambda_1(\vartheta), \mathbf{n}_\perp \left[\Lambda_1(\vartheta) - \sqrt{\frac{1-\sin \vartheta}{2 \sin \vartheta}} \right] \right\}, \\ &= \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{n} \Lambda_1(\vartheta), \hat{\boldsymbol{\rho}} \left[\sin \vartheta \Lambda_1(\vartheta) - \sqrt{\frac{(1-\sin \vartheta) \sin \vartheta}{2}} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.227)$$

4.3 Integración de la Función de Green en el régimen de campo lejano 91

donde usamos que $\mathbf{n}_\perp = (x/r, y/r, 0) = \sin \vartheta (\cos \phi, \sin \phi, 0)$ y $\hat{\boldsymbol{\rho}} = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$. Usando la definición de $\Lambda_1(\vartheta)$ (4.142) resulta finalmente que:

$$\begin{aligned} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} m_\alpha(r, \vartheta) &= \left(\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{1}{n} \Lambda_1(\vartheta), \mathbf{0} \right), \\ &= -\frac{\delta_{\alpha 0}}{n} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2(\sin \vartheta - \sin^2 \vartheta)}}, \\ &= -\frac{\delta_{\alpha 0}}{n} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2 \sin \vartheta}}. \end{aligned} \quad (4.228)$$

Por otro lado, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} t_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0) &= \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \Lambda_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0) (\omega, -\mathbf{n}_\perp \tilde{k}_0 \sin \vartheta), \\ &= \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \Lambda_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0) (\omega, \mathbf{0}). \end{aligned} \quad (4.229)$$

Para determinar el límite restante, necesitaremos usar la expansión asintótica de la función error complementaria erfc [89] que contiene la definición de Λ_2 dada por la ecuación (4.143). Dicha expresión se puede usar ya que $\mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp \approx 0$, $1 - \sin \vartheta \approx 1$ y $\tilde{k}_0 r \rightarrow \infty$. Siendo así, usando dicha expansión asintótica [89] tendremos que:

$$\begin{aligned} \Lambda_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0) &= \frac{\pi}{2} \operatorname{erfc} \left[-i \sqrt{i \tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp) (1 - \sin \vartheta)} \right], \\ &\sim \frac{\pi}{2} \frac{e^{i \tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp) (1 - \sin \vartheta)}}{-i \sqrt{\pi} \sqrt{i \tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp) (1 - \sin \vartheta)}}, \\ &= -\frac{\sqrt{\pi} e^{i \tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp) (1 - \sin \vartheta)}}{2i \sqrt{i \tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp) (1 - \sin \vartheta)}}. \end{aligned} \quad (4.230)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} t_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0) &= \lim_{\vartheta \rightarrow 0} -\frac{\sqrt{\pi} e^{i \tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp) (1 - \sin \vartheta)}}{2i \sqrt{i \tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp) (1 - \sin \vartheta)}} (\omega, \mathbf{0}), \\ &= -\frac{e^{i \tilde{k}_0 r}}{2i} \sqrt{\frac{\pi}{i \tilde{k}_0 r}} (\omega, \mathbf{0}), \\ &= -\frac{\omega e^{i \tilde{k}_0 r}}{2i} \sqrt{\frac{\pi}{i \tilde{k}_0 r}} \delta_{\alpha 0}. \end{aligned} \quad (4.231)$$

Con los resultados previos, procedemos a calcular el límite cuando $\vartheta \rightarrow 0$ de la componente

4.3 Integración de la Función de Green en el régimen de campo lejano 92

$\bar{G}_{\tilde{\theta}\nu}^{\mu}$ como se muestra enseguida:

$$\begin{aligned}
\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \bar{G}_{\tilde{\theta}\nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \varepsilon_{\nu}^{\mu} \alpha^3 \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp})}}{r} \left[\frac{s_{\alpha}}{|\cos \vartheta|} e^{i\tilde{k}_0|z' \cos \vartheta|} + m_{\alpha}(r, \vartheta) \right] \\
&+ \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \varepsilon_{\nu}^{\mu} \alpha^3 \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 r \sin \vartheta}} e^{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) \sin \vartheta} t_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0), \\
&= \varepsilon_{\nu}^{\mu} \alpha^3 \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{r} \left[\frac{\delta_{\alpha 0} e^{i\tilde{k}_0|z'|}}{n} + \lim_{\vartheta \rightarrow 0} m_{\alpha}(r, \vartheta) \right] \\
&+ \varepsilon_{\nu}^{\mu} \alpha^3 \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 r \sin \vartheta}} t_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0), \tag{4.232}
\end{aligned}$$

donde hemos usado nuevamente que $\hat{\mathbf{n}} = (\sin \vartheta \cos \phi, \sin \vartheta \sin \phi, \cos \vartheta)$ junto con la definición de $s_{\alpha} = (1/n, \mathbf{n}_{\perp})$. Luego, sustituyendo (4.228) y (4.231) obtendremos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \bar{G}_{\tilde{\theta}\nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \varepsilon_{\nu}^{\mu} \alpha^3 \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{r} \left[\frac{\delta_{\alpha 0} e^{i\tilde{k}_0|z'|}}{n} - \frac{\delta_{\alpha 0}}{n} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2 \sin \vartheta}} \right] \\
&+ \varepsilon_{\nu}^{\mu} \alpha^3 \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 r \sin \vartheta}} \left(-\frac{\omega e^{i\tilde{k}_0 r}}{2i} \sqrt{\frac{\pi}{i\tilde{k}_0 r}} \delta_{\alpha 0} \right), \\
&= \varepsilon_{\nu}^{\mu} \alpha^3 \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{r} \left[\frac{e^{i\tilde{k}_0|z'|}}{n} - \frac{1}{n} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2 \sin \vartheta}} \right] \\
&+ \varepsilon_{\nu}^{\mu} \alpha^3 \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{r} \frac{1}{n} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2 \sin \vartheta}}, \\
&= \varepsilon_{\nu}^{\mu} \alpha^3 \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0(r+|z'|)}}{nr}, \tag{4.233}
\end{aligned}$$

donde podemos apreciar que las contribuciones de las ondas superficiales han desaparecido y sólo existen ondas esféricas en esta región. Vale la pena mencionar que debido al símbolo de Levi-Civita esta componente sólo contribuirá cuando $\mu = 1$ y $\nu = 2$ o viceversa. También, es necesario decir que mediante un proceso análogo se obtiene el mismo resultado (4.233) cuando $\vartheta \rightarrow \pi$.

Ahora es turno de hacer lo mismo con el término $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2\nu}^{\mu}$, considerando que será más laborioso el cálculo debido a las múltiples entradas (4.223) involucradas en las matrices (4.219), (4.220), (4.221) y (4.222). Comenzaremos por la matriz $C_{1\nu}^{\mu}(\vartheta, \phi, n)$ (4.219), para la cual obtenemos el siguiente límite:

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} C_{1\nu}^{\mu}(\vartheta, \phi, n) = C_{1\nu}^{\mu}(\vartheta, \phi, n) \Big|_{\vartheta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/n^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/n^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.234}$$

4.3 Integración de la Función de Green en el régimen de campo lejano 93

donde se usó que $\mathbf{n}_\perp = (x/r, y/r, 0) = \sin \vartheta (\cos \phi, \sin \phi, 0)$, $\hat{\boldsymbol{\rho}} = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$.

Luego, calculamos el mismo límite para $C_{2\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0)$ (4.220). Sin embargo, resulta más accesible calcular el límite de las componentes de esta matriz por separado, las cuales son las funciones ψ_i con $i = 1, 2, 3, 4$ definidas en las ecs. (4.223). Como se muestra enseguida:

$$\begin{aligned} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0) &= \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \left[\frac{\tilde{k}_0 |z'|}{i\sqrt{2}(\sin \vartheta - \sin^2 \vartheta)} - \frac{\sqrt{1 + \sin \vartheta}}{2\sqrt{2} \sin \vartheta (1 - \sin \vartheta)} \right], \\ &= \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \left[\frac{\tilde{k}_0 |z'|}{i\sqrt{2} \sin \vartheta} - \frac{1}{2\sqrt{2} \sin \vartheta} \right], \\ &= - \left(i\tilde{k}_0 |z'| + \frac{1}{2} \right) \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2} \sin \vartheta}, \end{aligned} \quad (4.235)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} n_{\perp i} \psi_2(\vartheta, z', \tilde{k}_0) &= \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \left[\frac{n_{\perp i} \psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0)}{n} + i\omega |z'| n_{\perp i} \sqrt{\frac{1 - \sin \vartheta}{2 \sin \vartheta}} \right], \\ &= \frac{\hat{\rho}_i}{n} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \sin \vartheta \psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0) + \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{i\hat{\rho}_i \omega |z'|}{2} \sqrt{\sin \vartheta (1 - \sin \vartheta)}, \\ &= \frac{\hat{\rho}_i}{n} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \left[\frac{\tilde{k}_0 |z'| \sqrt{\sin \vartheta}}{i\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{\sin \vartheta}}{2\sqrt{2}} \right], \\ &= 0_i. \end{aligned} \quad (4.236)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) &= \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0)}{n^2} - \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_\perp) \\ &\quad + \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1 - \sin \vartheta}{2 \sin \vartheta}} |\cos \vartheta|, \\ &= \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0)}{n^2} + \frac{i\sqrt{\pi}}{2} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_\perp)}{\sqrt{\sin \vartheta}} + \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{2 \sin \vartheta}}. \end{aligned} \quad (4.237)$$

El segundo límite de la última igualdad se puede demostrar que es cero. Para ello, necesitaremos usar la expansión asintótica de la función error complementaria erfc [89] que contiene la definición de \mathbb{F} dada por la ecuación (4.223). Dicha expresión se puede usar ya que $\mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp \approx 0$,

4.3 Integración de la Función de Green en el régimen de campo lejano 94

$1 - \sin \vartheta \approx 1$ y $\tilde{k}_0 r \rightarrow \infty$. Siendo así, usando dicha expansión asintótica [89] tendremos que:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_{\perp}) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} i - \sqrt{2i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp})(1 - \sin \vartheta)} e^{-i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp})(1 - \sin \vartheta)} \\
 &\quad \times \operatorname{erfc} \left[-i\sqrt{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp})(1 - \sin \vartheta)} \right], \\
 &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} i - \sqrt{2i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp})(1 - \sin \vartheta)} e^{-i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp})(1 - \sin \vartheta)} \\
 &\quad \times \left[-\frac{e^{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp})(1 - \sin \vartheta)}}{\sqrt{\pi} i \sqrt{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp})(1 - \sin \vartheta)}} \right], \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} i - \sqrt{\frac{2}{\pi}} i = 0.
 \end{aligned} \tag{4.238}$$

Por lo que al usar la regla de L'Hôpital junto con el resultado anterior, concluimos que:

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_{\perp})}{\sqrt{\sin \vartheta}} = 0. \tag{4.239}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) = \frac{1}{n^2} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0) + \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2 \sin \vartheta}}. \tag{4.240}$$

Del mismo modo, tendremos que:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \psi_4(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0) + \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_{\perp}) \\
 &\quad - \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1 - \sin \vartheta}{2 \sin \vartheta}} |\cos \vartheta|, \\
 &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0) - \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2 \sin \vartheta}},
 \end{aligned} \tag{4.241}$$

donde usamos el resultado (4.239) para hacer cero el segundo límite de la primera igualdad.

Por consiguiente, al juntar todos los límites anteriores, concluimos que:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\vartheta \rightarrow 0} C_{2\nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) &= \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_4(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 &= \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 1/n^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\quad + \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2 \sin \vartheta}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 &= \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2 \sin \vartheta}} \left[- \left(i\tilde{k}_0 |z'| + \frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 1/n^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\
 &\quad \left. + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]. \tag{4.242}
 \end{aligned}$$

Después, calculamos el mismo límite para $C_{3\nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0)$ (4.221). Sin embargo, otra vez resulta más fácil calcular el límite de las componentes de esta matriz por separado, las cuales son las funciones χ_i con $i = 1, 2, 3, 4$ definidas en las ecs. (4.223). Para los siguientes límites deberemos usar la expansión asintótica de la función error complementaria erfc [89] que contiene la definición de \mathbb{F} dada por la ecuación (4.223). Dicha expresión se puede usar ya que $\mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp} \approx 0$, $1 - \sin \vartheta \approx 1$ y $\tilde{k}_0 r \rightarrow \infty$. Siendo así, obtenemos lo que muestra enseguida:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \chi_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) &= \lim_{\vartheta \rightarrow 0} i \frac{\pi \tilde{k}_0^2}{2} |z'| \text{erfc} \left[-i \sqrt{i\tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) (1 - \sin \vartheta)} \right], \\
 &\simeq i \frac{\pi \tilde{k}_0^2}{2} |z'| \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \left[- \frac{e^{i\tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) (1 - \sin \vartheta)}}{\sqrt{\pi i \sqrt{i\tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) (1 - \sin \vartheta)}}} \right] \\
 &= - \frac{\tilde{k}_0^2 |z'|}{2} \sqrt{\frac{\pi}{i\tilde{k}_0 r}} e^{i\tilde{k}_0 r}, \tag{4.243}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{\vartheta \rightarrow 0} n_{\perp i} \chi_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) &= \lim_{\vartheta \rightarrow 0} n_{\perp i} \frac{\pi}{2} \operatorname{erfc} \left[-i \sqrt{i \tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp})} (1 - \sin \vartheta) \right] \\
 &\times \left[-i \omega \tilde{k}_0 |z'| \sin^{3/2} \vartheta - \frac{\omega}{2} + i \omega \tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) (1 - \sin \vartheta) |\cos \vartheta| \right], \\
 &\simeq \hat{\rho}_i \frac{\pi}{2} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \left[-\frac{e^{i \tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) (1 - \sin \vartheta)}}{\sqrt{\pi} i \sqrt{i \tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp})} (1 - \sin \vartheta)} \right] \\
 &\times \left[-i \omega \tilde{k}_0 |z'| \sin^{5/2} \vartheta - \frac{\omega \sin \vartheta}{2} \right. \\
 &\left. + i \omega \tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) (\sin \vartheta - \sin^2 \vartheta) |\cos \vartheta| \right], \\
 &= 0_i, \tag{4.244}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \chi_3(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) &= -\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\pi}{2} \operatorname{erfc} \left[-i \sqrt{i \tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp})} (1 - \sin \vartheta) \right] \\
 &\times \left[i \omega^2 |z'| + \tilde{k}_0 (1 - \sin \vartheta) |\cos \vartheta| \right], \\
 &\simeq -\frac{\pi}{2} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \left[-\frac{e^{i \tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) (1 - \sin \vartheta)}}{\sqrt{\pi} i \sqrt{i \tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp})} (1 - \sin \vartheta)} \right] \\
 &\times \left[i \omega^2 |z'| + \tilde{k}_0 (1 - \sin \vartheta) |\cos \vartheta| \right], \\
 &= \frac{1}{2} \left(\omega^2 |z'| - i \tilde{k}_0 \right) \sqrt{\frac{\pi}{i \tilde{k}_0 r}} e^{i \tilde{k}_0 r}, \tag{4.245}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \chi_4(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) &= \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\pi}{2} \operatorname{erfc} \left[-i \sqrt{i \tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp})} (1 - \sin \vartheta) \right] \\
 &\times \left[\tilde{k}_0 (1 - \sin \vartheta) |\cos \vartheta| + i \tilde{k}_0^2 |z'| \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right], \\
 &\simeq \frac{\pi}{2} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \left[-\frac{e^{i \tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) (1 - \sin \vartheta)}}{\sqrt{\pi} i \sqrt{i \tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp})} (1 - \sin \vartheta)} \right] \\
 &\times \left[\tilde{k}_0 (1 - \sin \vartheta) |\cos \vartheta| + i \tilde{k}_0^2 |z'| \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right], \\
 &= \frac{1}{2i} \left[\tilde{k}_0 + i \tilde{k}_0^2 |z'| \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right] \sqrt{\frac{\pi}{i \tilde{k}_0 r}} e^{i \tilde{k}_0 r}, \tag{4.246}
 \end{aligned}$$

donde se usó nuevamente que $\mathbf{n}_{\perp} = (x/r, y/r, 0) = \sin \vartheta (\cos \phi, \sin \phi, 0)$ y $\hat{\rho} = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$.

4.3 Integración de la Función de Green en el régimen de campo lejano 97

De esta manera, al considerar todos los límites anteriores, concluimos que:

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} C_3^\mu{}_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{i\tilde{k}_0 r}} e^{i\tilde{k}_0 r} \begin{pmatrix} -\tilde{k}_0^2 |z'| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 |z'| - i\tilde{k}_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\tilde{k}_0 + \tilde{k}_0^2 |z'| \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.247)$$

A continuación, calcularemos el mismo límite para $C_4^\mu{}_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0)$ (4.222). No obstante, nuevamente resultará más fácil calcular el límite de las componentes de esta matriz por separado, las cuales corresponden son las funciones τ_i con $i = 1, 2, 3, 4$ definidas en las ecs. (4.223). Como se muestra a continuación:

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \tau_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0) = \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\tilde{k}_0}{2} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_\perp) = 0, \quad (4.248)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} n_{\perp i} \tau_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0) &= -\lim_{\vartheta \rightarrow 0} n_{\perp i} \omega \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_\perp) + i \sqrt{\frac{1 - \sin \vartheta}{2 \sin \vartheta}} |\cos \vartheta| \right], \\ &= -\hat{\rho}_i \omega \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\pi \sin \vartheta (1 + \sin \vartheta)} \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_\perp) \right. \\ &\quad \left. + i \sqrt{\frac{\sin \vartheta - \sin^2 \vartheta}{2}} |\cos \vartheta| \right], \\ &= 0_i, \end{aligned} \quad (4.249)$$

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \tau_3(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0) = \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\omega}{2n} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_\perp) = 0, \quad (4.250)$$

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \tau_4(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0) = \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\tilde{k}_0}{2} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_\perp) = 0, \quad (4.251)$$

donde se usó nuevamente que $\mathbf{n}_\perp = (x/r, y/r, 0) = \sin \vartheta (\cos \phi, \sin \phi, 0)$, $\hat{\boldsymbol{\rho}} = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$, la ec. (4.238) y el resultado (4.239).

Siendo así, al considerar todos los límites anteriores, concluimos que:

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} C_4^\mu{}_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0) = 0^\mu{}_\nu. \quad (4.252)$$

Finalmente, calculamos el límite cuando $\vartheta \rightarrow 0$ de $\bar{G}_{\theta^2}^\mu{}_\nu$. Tras sustituir (4.234), (4.242),

(4.247) y (4.252) encontramos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \bar{G}_{\tilde{\theta}^2 \nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp})}}{r} \left[C_{1 \nu}^{\mu}(\vartheta, \phi, n) e^{i\tilde{k}_0|z'| \cos \vartheta} + C_{2 \nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) \right] \\
 &+ \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 r \sin \vartheta}} e^{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) \sin \vartheta} C_{3 \nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) \\
 &+ \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} e^{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp})} C_{4 \nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0), \\
 &= \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{r} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \left[C_{1 \nu}^{\mu}(\vartheta, \phi, n) e^{i\tilde{k}_0|z'| \cos \vartheta} + C_{2 \nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) \right] \\
 &+ \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 r \sin \vartheta}} C_{3 \nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) \\
 &+ \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} e^{i\tilde{k}_0 r} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} C_{4 \nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0), \\
 &= \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0(r+|z'|)}}{r} C_{1 \nu}^{\mu}(\vartheta, \phi, n) \Big|_{\vartheta=0} \\
 &+ \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{r} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} C_{2 \nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) \\
 &+ \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 r \sin \vartheta}} C_{3 \nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0(r+|z'|)}}{r} C_{1\nu}^\mu(\vartheta, \phi, n) \Big|_{\vartheta=0} \\
 &+ \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{r} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2 \sin \vartheta}} \left[- \left(i\tilde{k}_0|z'| + \frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 1/n^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\
 &+ \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
 &+ \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{i\tilde{k}_0 r} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2 \sin \vartheta}} \begin{pmatrix} -\tilde{k}_0^2|z'| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2|z'| - i\tilde{k}_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\tilde{k}_0 + \tilde{k}_0^2|z'| \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 &= \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0(r+|z'|)}}{r} C_{1\nu}^\mu(\vartheta, \phi, n) \Big|_{\vartheta=0} \\
 &+ \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{i\tilde{k}_0 r} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2 \sin \vartheta}} \left[- \left(i\tilde{k}_0|z'| + \frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 1/n^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\
 &+ \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i\tilde{k}_0|z'| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 + i\omega|z'|/n) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 - i\tilde{k}_0|z'| \left(1 - 1/n^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right], \\
 &= \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0(r+|z'|)}}{r} C_{1\nu}^\mu(\vartheta, \phi, n) \Big|_{\vartheta=0} \\
 &+ \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{r} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2 \sin \vartheta}} \\
 &\times \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/(2n^2) - 2i\omega|z'|/n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 + 1/(2n^2) - 2i\tilde{k}_0|z'| \left(1 - 1/n^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.253)
 \end{aligned}$$

donde observamos que las ondas superficiales han desaparecido y que sólo hay contribuciones de ondas esféricas. Al realizar un proceso análogo, este resultado se cumple también cuando $\vartheta \rightarrow \pi$. No obstante, es importante destacar que el último término diverge claramente en $\vartheta = 0$ a diferencia del término $\tilde{G}_{\tilde{\theta}\nu}^\mu$ donde la misma divergencia se cancelaba correctamente en la ec. (4.233).

Antes de concluir esta subsección, daremos unos comentarios sobre la divergencia en $\vartheta = 0, \pi$. Estrictamente hablando, la configuración asociada a la FG dada por las expresiones (4.81),

4.3 Integración de la Función de Green en el régimen de campo lejano 100

(4.139) y (4.218) sólo tiene una divergencia natural en $\vartheta = \pi/2$ cuyo origen radica en que la interfaz Σ rompe la simetría esférica necesaria para estudiar la radiación de forma estándar en el régimen de campo lejano [114]. De hecho, la reparación de la divergencia natural fue consecuencia de la correcta integración de las componentes $\bar{G}_{\hat{\theta}\nu}^\mu$ y $\bar{G}_{\hat{\theta}^2\nu}^\mu$ de la FG a través del método expuesto a lo largo de las subsecciones 4.3.2 y 4.3.3 en el régimen de campo lejano.

Por otra parte, las divergencias en $\vartheta = 0, \pi$ en las componentes $\bar{G}_{\hat{\theta}\nu}^\mu$ (4.81) y $\bar{G}_{\hat{\theta}^2\nu}^\mu$ (4.218) señaladas oportunamente en las subsecciones 4.3.2, 4.3.3.1 y 4.3.3.2 son divergencias artificiales ya que físicamente en esa región del espacio no hay ningún tipo de interfaz, la simetría esférica está prácticamente intacta y las contribuciones de las ondas superficiales desaparecen como muestran las ecs. (4.233) y (4.253). En esas mismas subsecciones, se mencionó que el origen de las divergencias artificiales se debe a la introducción de la función de Hankel $H_0^{(1)}$ en la ec. (4.82) para obtener las ecuaciones (4.95), (4.154) y (4.185) [110] y aplicar el método ahí expuesto. Pese a que las divergencias artificiales sólo permanecen en las componentes $\bar{G}_{\hat{\theta}^2\nu}^\mu$ (4.253), pues en las componentes $\bar{G}_{\hat{\theta}\nu}^\mu$ (4.233) se probó que desaparecen, esperamos que el campo eléctrico y la potencia o la energía total radiada asociados a una fuente externa de radiación no presenten problemas en $\vartheta = 0, \pi$ ya que cada una de estas cantidades aporta un factor de $\sin \vartheta$ que cancelaría dicha divergencia. Sin embargo, la demostración de esta conjetura y la aplicación concreta de esta FG a una fuente que permita la existencia de las ondas superficiales, como un dipolo eléctrico con distintas orientaciones, está fuera del alcance de esta tesis y se dejará para un trabajo posterior. Como se mencionó en la sección 4.3 y como se verá en el siguiente capítulo, en esta tesis doctoral se estudiará la aplicación de esta FG a una partícula cargada con velocidad v constante perpendicular a la interfaz Σ , configuración que no presenta ningún problema en $\vartheta = 0, \pi$ y esta será la única aplicación analizada en esta tesis doctoral.

4.3.5.2. Función de Green cerca de la interfaz Σ

En esta subsección obtendremos el comportamiento de la FG dada por las expresiones (4.81), (4.139) y (4.218) cuando el observador se encuentra cerca de la interfaz Σ . Para ello, debemos calcular el límite cuando $\vartheta \rightarrow \pi/2$ de las componentes de la FG. Comenzamos por el término $\bar{G}_{ED\nu}^\mu$ (4.81), obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \bar{G}_{ED\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \eta_\nu^\mu \frac{e^{i\tilde{k}_0(r-\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{x}')}}{r}, \\ &= \eta_\nu^\mu \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{r} \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^{-i\tilde{k}_0 \hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{x}'}. \end{aligned} \quad (4.254)$$

Recordando que $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{x}/r = (\sin \vartheta \cos \phi, \sin \vartheta \sin \phi, \cos \vartheta)$, se obtiene finalmente que:

$$\lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \bar{G}_{ED\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = \eta_\nu^\mu \frac{e^{i\tilde{k}_0(r-\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{x}')}}{r} = \eta_\nu^\mu \frac{e^{i\tilde{k}_0(r-\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{x}'_\perp)}}{r}, \quad (4.255)$$

donde podemos observar que sólo hay ondas esféricas, como era de esperarse ya que esta componente de la FG no tiene otra contribución además de ésta.

4.3 Integración de la Función de Green en el régimen de campo lejano 101

Luego, es turno de hacer lo propio con el término $\bar{G}_{\theta\nu}^{\mu}$ (4.139). Para ello, resultará útil calcular previamente los límites de $m_{\alpha}(r, \vartheta)$ (4.140) y $t_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0)$ (4.141) cuando $\vartheta \rightarrow \pi/2$. Primero, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} m_{\alpha}(r, \vartheta) &= \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{n} \Lambda_1(\vartheta), \mathbf{n}_{\perp} \left[\Lambda_1(\vartheta) - \sqrt{\frac{1 - \sin \vartheta}{2 \sin \vartheta}} \right] \right\}, \\ &= \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{n} \Lambda_1(\vartheta), \mathbf{n}_{\perp} \Lambda_1(\vartheta) - \hat{\boldsymbol{\rho}} \sqrt{\frac{(1 - \sin \vartheta) \sin \vartheta}{2}} \right\}, \end{aligned} \quad (4.256)$$

donde usamos que $\mathbf{n}_{\perp} = (x/r, y/r, 0) = \sin \vartheta (\cos \phi, \sin \phi, 0)$ y $\hat{\boldsymbol{\rho}} = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$. Resultando finalmente que:

$$\lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} m_{\alpha}(r, \vartheta) = \left(\frac{1}{n}, -\mathbf{n}_{\perp} \right) \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \Lambda_1(\vartheta) = s_{\alpha} \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \Lambda_1(\vartheta), \quad (4.257)$$

donde usamos la definición de $s_{\alpha} = (1/n, -\mathbf{n}_{\perp})$.

Por otro lado, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} t_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0) &= \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \Lambda_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0) \left(\omega, -\mathbf{n}_{\perp} \tilde{k}_0 \sin \vartheta \right), \\ &= \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \Lambda_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0) \left(\omega, -\mathbf{n}_{\perp} \tilde{k}_0 \right), \\ &= \tilde{k}_0 \left(\frac{1}{n}, -\mathbf{n}_{\perp} \right) \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \Lambda_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0), \\ &= \tilde{k}_0 s_{\alpha} \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \Lambda_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0), \end{aligned} \quad (4.258)$$

donde usamos nuevamente la definición de $s_{\alpha} = (1/n, -\mathbf{n}_{\perp})$.

Para determinar el límite restante, necesitaremos expandir en serie de Taylor la función error complementaria erfc [89] que contiene la definición de Λ_2 dada por la ecuación (4.143). Dicha expresión se puede usar ya que $\mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp} \approx \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}$ y que es una función acotada, $1 - \sin \vartheta \ll 1$ y $\tilde{k}_0 r \rightarrow \infty$. Siendo así, usando dicha serie de Taylor [89] tendremos que:

$$\begin{aligned} \Lambda_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0) &= \frac{\pi}{2} \operatorname{erfc} \left[-i \sqrt{i \tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) (1 - \sin \vartheta)} \right], \\ &\simeq \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{\sqrt{2} e^{i \tilde{k}_0 (r - \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) \frac{1}{2} (\vartheta - \frac{\pi}{2})^2}}{\sqrt{i \pi \tilde{k}_0 (r - \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) (\vartheta - \frac{\pi}{2})^2}} \left(\vartheta - \frac{\pi}{2} \right)^2 \right], \\ &= \frac{\pi}{2} \left[1 - \operatorname{sgn} \left(\vartheta - \frac{\pi}{2} \right) \frac{\sqrt{2} e^{i \tilde{k}_0 (r - \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) \frac{1}{2} (\vartheta - \frac{\pi}{2})^2}}{\sqrt{i \pi \tilde{k}_0 (r - \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \mathbf{x}'_{\perp})}} \left(\vartheta - \frac{\pi}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.259)$$

4.3 Integración de la Función de Green en el régimen de campo lejano 102

donde se usó que $\mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp \approx \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \mathbf{x}'_\perp$ cuando $\vartheta \rightarrow \pi/2$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} t_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0) &= \tilde{k}_0 s_\alpha \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} \left[1 - \operatorname{sgn} \left(\vartheta - \frac{\pi}{2} \right) \frac{\sqrt{2} e^{i\tilde{k}_0(r - \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \mathbf{x}'_\perp) \frac{1}{2} (\vartheta - \frac{\pi}{2})^2}}{\sqrt{i\pi \tilde{k}_0 (r - \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \mathbf{x}'_\perp)}} \left(\vartheta - \frac{\pi}{2} \right) \right], \\ &= \frac{\pi}{2} \tilde{k}_0 s_\alpha. \end{aligned} \quad (4.260)$$

Con los resultados previos, procedemos a calcular el límite cuando $\vartheta \rightarrow \pi/2$ de la componente $\bar{G}_{\tilde{\theta}\nu}^\mu$ como se muestra enseguida:

$$\begin{aligned} \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \bar{G}_{\tilde{\theta}\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \varepsilon_\nu^{\mu\alpha 3} \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp)}}{r} \left[\frac{s_\alpha}{|\cos \vartheta|} e^{i\tilde{k}_0|z'| \cos \vartheta} + m_\alpha(r, \vartheta) \right] \\ &\quad + \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \varepsilon_\nu^{\mu\alpha 3} \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 r \sin \vartheta}} e^{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp) \sin \vartheta} t_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0), \\ &= \varepsilon_\nu^{\mu\alpha 3} \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0(r - \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \mathbf{x}'_\perp)}}{r} \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{s_\alpha}{|\cos \vartheta|} e^{i\tilde{k}_0|z'| \cos \vartheta} + m_\alpha(r, \vartheta) \right] \\ &\quad + \varepsilon_\nu^{\mu\alpha 3} \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 r}} e^{i\tilde{k}_0(r - \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \mathbf{x}'_\perp)} \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} t_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0), \end{aligned} \quad (4.261)$$

donde hemos usado nuevamente que $\hat{\mathbf{n}} = (\sin \vartheta \cos \phi, \sin \vartheta \sin \phi, \cos \vartheta)$. Luego, sustituyendo (4.257) y (4.260) obtendremos que:

$$\begin{aligned} \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \bar{G}_{\tilde{\theta}\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \varepsilon_\nu^{\mu\alpha 3} \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0(r - \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \mathbf{x}'_\perp)}}{r} s_\alpha \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{e^{i\tilde{k}_0|z'| \cos \vartheta}}{|\cos \vartheta|} + \Lambda_1(\vartheta) \right] \\ &\quad + \varepsilon_\nu^{\mu\alpha 3} \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 r}} e^{i\tilde{k}_0(r - \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \mathbf{x}'_\perp)} \frac{\pi}{2} \tilde{k}_0 s_\alpha, \\ &= \varepsilon_\nu^{\mu\alpha 3} \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0(r - \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \mathbf{x}'_\perp)}}{r} s_\alpha \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{e^{i\tilde{k}_0|z'| \cos \vartheta}}{|\cos \vartheta|} - \frac{1}{\sqrt{2} (\sin \vartheta - \sin^2 \vartheta)} \right] \\ &\quad + \varepsilon_\nu^{\mu\alpha 3} \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 r}} e^{i\tilde{k}_0(r - \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \mathbf{x}'_\perp)} \frac{\pi}{2} \tilde{k}_0 s_\alpha, \end{aligned} \quad (4.262)$$

donde hemos sustituido la ec. (4.142). Sin embargo, al recordar que en la sección 4.3.2 se probó que dicho límite es finito y al sustituir el primer término de la ec. (4.125), obtendremos

4.3 Integración de la Función de Green en el régimen de campo lejano 103

finalmente que:

$$\begin{aligned} \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \bar{G}_{\tilde{\theta} \nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \varepsilon^{\mu \nu \alpha 3} \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0(r - \hat{\rho} \cdot \mathbf{x}'_{\perp})}}{r} i\tilde{k}_0 |z'| s_{\alpha} \\ &+ \varepsilon^{\mu \nu \alpha 3} \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 r}} e^{i\tilde{k}_0(r - \hat{\rho} \cdot \mathbf{x}'_{\perp})} \frac{\pi}{2} \tilde{k}_0 s_{\alpha}, \end{aligned} \quad (4.263)$$

donde observamos que este resultado es finito y no tiene ninguna divergencia, salvo en $r = 0$ como en ED estándar. También, podemos apreciar que en esta región las contribuciones son una superposición de ondas esféricas (primer sumando) junto con ondas superficiales (segundo término). Vale la pena mencionar que a diferencia de la ec. (4.233) sí habrán contribuciones cuando $\mu, \nu = 0, 1, 2$. Además, por la siguiente forma funcional en r de las ondas superficiales del segundo término de la ec. (4.263):

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}) = \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 r}} e^{i\tilde{k}_0(r - \hat{\rho} \cdot \mathbf{x}'_{\perp})}, \quad (4.264)$$

es posible identificar que estamos observando la aparición de ondas superficiales cilíndricas axialmente simétricas [113].

Ahora es turno de hacer lo mismo con el término $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 \nu}^{\mu}$, considerando que será más tedioso el cálculo debido a las múltiples entradas (4.223) involucradas en las matrices (4.219), (4.220), (4.221) y (4.222). Comencemos por la matriz $C_{1 \nu}^{\mu}(\vartheta, \phi, n)$ (4.219), para la cual obtenemos el siguiente límite:

$$\begin{aligned} \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} C_{1 \nu}^{\mu}(\vartheta, \phi, n) &= \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\cos^2 \vartheta} \begin{pmatrix} \sin^2 \vartheta & -n_{\perp 1}/n & -n_{\perp 2}/n & 0 \\ n_{\perp 1}/n & -1/n^2 & 0 & 0 \\ n_{\perp 2}/n & 0 & -1/n^2 + \sin^2 \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right], \\ &= \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \begin{pmatrix} 1 & -\cos \phi/n & -\sin \phi/n & 0 \\ \cos \phi/n & -1/n^2 & 0 & 0 \\ \sin \phi/n & 0 & 1 - 1/n^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.265)$$

donde hemos dejado indicado el límite en $\cos^2 \vartheta$ por propósitos futuros.

Luego, calculamos el mismo límite para $C_{2 \nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0)$ (4.220). Sin embargo, resulta más accesible calcular el límite de las componentes de esta matriz por separado, las cuales son las

4.3 Integración de la Función de Green en el régimen de campo lejano 104

funciones ψ_i con $i = 1, 2, 3, 4$ definidas en las ecs. (4.223). Como se muestra enseguida:

$$\lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0) = \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{\tilde{k}_0 |z'|}{i \sqrt{2} (\sin \vartheta - \sin^2 \vartheta)} - \frac{\sqrt{1 + \sin \vartheta}}{2 \sqrt{2} \sin \vartheta (1 - \sin \vartheta)} \right], \quad (4.266)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} n_{\perp i} \psi_2(\vartheta, z', \tilde{k}_0) &= \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{n_{\perp i} \psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0)}{n} + i \omega |z'| n_{\perp i} \sqrt{\frac{1 - \sin \vartheta}{2 \sin \vartheta}} \right], \\ &= \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\hat{\rho}_i \psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0)}{n} + \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} i \hat{\rho}_i \frac{\omega |z'|}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin \vartheta (1 - \sin \vartheta)}, \\ &= \frac{\hat{\rho}_i}{n} \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0), \end{aligned} \quad (4.267)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) &= \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0)}{n^2} - \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_{\perp}) \\ &\quad + \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - \sin \vartheta}{2 \sin \vartheta}} |\cos \vartheta|, \\ &= \frac{1}{n^2} \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0) + \frac{i}{2} \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} i, \\ &= \frac{1}{n^2} \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0) - 1, \end{aligned} \quad (4.268)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \psi_4(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0) + \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_{\perp}) \\ &\quad - \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - \sin \vartheta}{2 \sin \vartheta}} |\cos \vartheta|, \\ &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0) - \frac{i}{2} \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} i, \\ &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0) + 1, \end{aligned} \quad (4.269)$$

donde hemos dejado indicado el límite cuando $\vartheta \rightarrow \pi/2$ de $\psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0)$ por propósitos futuros, también se usó nuevamente que $\mathbf{n}_{\perp} = (x/r, y/r, 0) = \sin \vartheta (\cos \phi, \sin \phi, 0)$, $\hat{\boldsymbol{\rho}} = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$ y que

$$\lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_{\perp}) = \mathbb{F}\left(r, \frac{\pi}{2}, \mathbf{x}'_{\perp}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} i \quad (4.270)$$

con $\mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_{\perp})$ definida en la ec. (4.223) y cuyo resultado es consecuencia de $\operatorname{erfc}(0) = 1$.

4.3 Integración de la Función de Green en el régimen de campo lejano 105

De este modo, al considerar todos los límites anteriores, concluimos que:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} C_{2\nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) \\
&= \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0) & -\cos \phi \psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0)/n & -\sin \phi \psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0)/n & 0 \\ \cos \phi \psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0)/n & -\psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0)/n^2 - 1 & 0 & 0 \\ \sin \phi \psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0)/n & 0 & (1 - 1/n^2)\psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0) + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
&= \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0) \begin{pmatrix} 1 & -\cos \phi/n & -\sin \phi/n & 0 \\ \cos \phi/n & -1/n^2 & 0 & 0 \\ \sin \phi/n & 0 & 1 - 1/n^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \delta^{\mu 1} \delta_{\nu 1} + \delta^{\mu 2} \delta_{\nu 2}. \quad (4.271)
\end{aligned}$$

Después, calculamos el mismo límite para $C_{3\nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0)$ (4.221). Sin embargo, resulta más fácil calcular el límite de las componentes de esta matriz por separado, las cuales son las funciones χ_i con $i = 1, 2, 3, 4$ definidas en las ecs. (4.223). Como se muestra enseguida:

$$\begin{aligned}
\lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \chi_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) &= \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} i \frac{\pi}{2} \tilde{k}_0^2 |z'| \operatorname{erfc} \left[-i \sqrt{i \tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) (1 - \sin \vartheta)} \right], \\
&= \frac{i\pi}{2} \tilde{k}_0^2 |z'|, \quad (4.272)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} n_{\perp i} \chi_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) &= \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} n_{\perp i} \frac{\pi}{2} \operatorname{erfc} \left[-i \sqrt{i \tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) (1 - \sin \vartheta)} \right] \\
&\quad \times \left[-i \omega \tilde{k}_0 |z'| \sin^{3/2} \vartheta - \frac{\omega}{2} + i \omega \tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) (1 - \sin \vartheta) |\cos \vartheta| \right], \\
&= -\hat{\rho}_i \frac{\pi}{2} \left(i \omega \tilde{k}_0 |z'| + \frac{\omega}{2} \right), \quad (4.273)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \chi_3(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) &= -\lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} \operatorname{erfc} \left[-i \sqrt{i \tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) (1 - \sin \vartheta)} \right] \\
&\quad \times \left[i \omega^2 |z'| + \tilde{k}_0 (1 - \sin \vartheta) |\cos \vartheta| \right], \\
&= -\frac{i\pi}{2} \omega^2 |z'|, \quad (4.274)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \chi_4(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) &= \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} \operatorname{erfc} \left[-i \sqrt{i \tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) (1 - \sin \vartheta)} \right] \\
&\quad \times \left[\tilde{k}_0 (1 - \sin \vartheta) |\cos \vartheta| + i \tilde{k}_0^2 |z'| \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right], \\
&= \frac{i\pi}{2} \tilde{k}_0^2 |z'| \left(1 - \frac{1}{n^2} \right), \quad (4.275)
\end{aligned}$$

donde se usó nuevamente que $\mathbf{n}_{\perp} = (x/r, y/r, 0) = \sin \vartheta (\cos \phi, \sin \phi, 0)$, $\hat{\rho} = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$, $\operatorname{erfc}(0) = 1$ y la continuidad de las funciones involucradas.

4.3 Integración de la Función de Green en el régimen de campo lejano 106

De esta manera, al considerar todos los límites anteriores, concluimos que:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} C_3^\mu \nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) = C_3^\mu \nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) \Big|_{\vartheta=\pi/2} \\
 &= \begin{pmatrix} i\pi\tilde{k}_0^2|z'|/2 & -i\pi\omega(\tilde{k}_0|z'| - \frac{i}{2}) \cos \phi/2n & -i\pi\omega(\tilde{k}_0|z'| - \frac{i}{2}) \sin \phi/2n & 0 \\ i\pi\omega(\tilde{k}_0|z'| - \frac{i}{2}) \cos \phi/2n & -i\pi\omega^2|z'|/2 & 0 & 0 \\ i\pi\omega(\tilde{k}_0|z'| - \frac{i}{2}) \sin \phi/2n & 0 & (1 - 1/n^2)i\pi\tilde{k}_0^2|z'|/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 &= \frac{i\pi}{2} \tilde{k}_0 \begin{pmatrix} \tilde{k}_0|z'| & -(\tilde{k}_0|z'| - \frac{i}{2}) \cos \phi/n^2 & -(\tilde{k}_0|z'| - \frac{i}{2}) \sin \phi/n^2 & 0 \\ (\tilde{k}_0|z'| - \frac{i}{2}) \cos \phi/n^2 & -1/n^2 & 0 & 0 \\ (\tilde{k}_0|z'| - \frac{i}{2}) \sin \phi/n^2 & 0 & (1 - 1/n^2)\tilde{k}_0|z'| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.276)
 \end{aligned}$$

A continuación, calcularemos el mismo límite para $C_4^\mu \nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0)$ (4.222). No obstante, resultará más fácil calcular el límite de las componentes de esta matriz por separado, las cuales corresponden son las funciones τ_i con $i = 1, 2, 3, 4$ definidas en las ecs. (4.223). Como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tau_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0) &= \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tilde{k}_0}{2} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_\perp), \\
 &= \frac{\tilde{k}_0}{2} \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} i = \tilde{k}_0 i, \quad (4.277)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} n_{\perp i} \tau_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0) &= - \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \omega n_{\perp i} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_\perp) + i \sqrt{\frac{1 - \sin \vartheta}{2 \sin \vartheta}} |\cos \vartheta| \right], \\
 &= -\omega \hat{\rho}_i \left[\lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sqrt{\pi(1 + \sin \vartheta) \sin \vartheta} \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_\perp) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{i}{\sqrt{2}} \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sqrt{(1 - \sin \vartheta) \sin \vartheta} |\cos \vartheta| \right], \\
 &= -\hat{\rho}_i \frac{\omega}{2} \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} i = -\hat{\rho}_i \omega i, \quad (4.278)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tau_3(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0) &= \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{2n} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_\perp), \\
 &= \frac{\omega}{2n} \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} i = \frac{\omega i}{n}, \quad (4.279)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tau_4(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0) &= \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tilde{k}_0}{2} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_\perp), \\
 &= \frac{\tilde{k}_0}{2} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} i = i\tilde{k}_0 \left(1 + \frac{1}{n^2} \right), \quad (4.280)
 \end{aligned}$$

4.3 Integración de la Función de Green en el régimen de campo lejano 107

donde se usó nuevamente que $\mathbf{n}_\perp = (x/r, y/r, 0) = \sin \vartheta (\cos \phi, \sin \phi, 0)$, $\hat{\boldsymbol{\rho}} = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$, la ec. (4.270) y la continuidad de las funciones involucradas.

Siendo así, al considerar todos los límites anteriores, concluimos que:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} C_{4\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0) &= C_{4\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0) \Big|_{\vartheta=\pi/2} \\
 &= \begin{pmatrix} i\tilde{k}_0 & i\omega \cos \phi/n & i\omega \sin \phi/n & 0 \\ -i\omega \cos \phi/n & i\omega/n & 0 & 0 \\ -i\omega \sin \phi/n & 0 & i\tilde{k}_0(1+1/n^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 &= i\tilde{k}_0 \begin{pmatrix} 1 & \cos \phi/n^2 & \sin \phi/n^2 & 0 \\ -\cos \phi/n^2 & 1/n^2 & 0 & 0 \\ -\sin \phi/n^2 & 0 & 1+1/n^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.281)
 \end{aligned}$$

Finalmente, calculamos el límite cuando $\vartheta \rightarrow \pi/2$ de $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2\nu}^\mu$. Tras sustituir (4.265), (4.271), (4.276) y (4.281) encontramos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \bar{G}_{\tilde{\theta}^2\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0(r-\mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp)}}{r} \left[C_{1\nu}^\mu(\vartheta, \phi, n) e^{i\tilde{k}_0|z' \cos \vartheta|} + C_{2\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) \right] \\
 &+ \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \sqrt{\frac{2}{i\pi\tilde{k}_0 r \sin \vartheta}} e^{i\tilde{k}_0(r-\mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp) \sin \vartheta} C_{3\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) \\
 &+ \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} e^{i\tilde{k}_0(r-\mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp)} C_{4\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0), \\
 &= \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0(r-\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \mathbf{x}'_\perp)}}{r} \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[C_{1\nu}^\mu(\vartheta, \phi, n) e^{i\tilde{k}_0|z' \cos \vartheta|} + C_{2\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) \right] \\
 &+ \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \sqrt{\frac{2}{i\pi\tilde{k}_0 r}} e^{i\tilde{k}_0(r-\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \mathbf{x}'_\perp)} C_{3\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) \Big|_{\vartheta=\pi/2} \\
 &+ \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} e^{i\tilde{k}_0(r-\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \mathbf{x}'_\perp)} C_{4\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0) \Big|_{\vartheta=\pi/2}, \quad (4.282)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0(r-\hat{\rho}\cdot\mathbf{x}'_{\perp})}}{r} \begin{pmatrix} 1 & -\cos\phi/n & -\sin\phi/n & 0 \\ \cos\phi/n & -1/n^2 & 0 & 0 \\ \sin\phi/n & 0 & 1-1/n^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \lim_{\vartheta \rightarrow \pi/2} \left[\frac{e^{i\tilde{k}_0|z' \cos\vartheta|}}{\cos^2\vartheta} + \psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0) \right] \\
 &\quad + \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0(r-\hat{\rho}\cdot\mathbf{x}'_{\perp})}}{r} (-\delta^{\mu 1}\delta_{\nu 1} + \delta^{\mu 2}\delta_{\nu 2}) \\
 &\quad + \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \sqrt{\frac{2}{i\pi\tilde{k}_0 r}} e^{i\tilde{k}_0(r-\hat{\rho}\cdot\mathbf{x}'_{\perp})} C_{3\nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) \Big|_{\vartheta=\pi/2} \\
 &\quad + \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} e^{i\tilde{k}_0(r-\hat{\rho}\cdot\mathbf{x}'_{\perp})} C_{4\nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0) \Big|_{\vartheta=\pi/2}, \\
 &= \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0(r-\hat{\rho}\cdot\mathbf{x}'_{\perp})}}{r} C_{5\nu}^{\mu}(\phi, n) \\
 &\quad \times \lim_{\vartheta \rightarrow \pi/2} \left[\frac{e^{i\tilde{k}_0|z' \cos\vartheta|}}{\cos^2\vartheta} + \frac{\tilde{k}_0|z'|}{i\sqrt{2}(\sin\vartheta - \sin^2\vartheta)} - \frac{\sqrt{1 + \sin\vartheta}}{2\sqrt{2}\sin\vartheta(1 - \sin\vartheta)} \right] \\
 &\quad + \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0(r-\hat{\rho}\cdot\mathbf{x}'_{\perp})}}{r} (-\delta^{\mu 1}\delta_{\nu 1} + \delta^{\mu 2}\delta_{\nu 2}) \\
 &\quad + \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \sqrt{\frac{2}{i\pi\tilde{k}_0 r}} e^{i\tilde{k}_0(r-\hat{\rho}\cdot\mathbf{x}'_{\perp})} C_{3\nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) \Big|_{\vartheta=\pi/2} \\
 &\quad + \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} e^{i\tilde{k}_0(r-\hat{\rho}\cdot\mathbf{x}'_{\perp})} C_{4\nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0) \Big|_{\vartheta=\pi/2}, \tag{4.283}
 \end{aligned}$$

donde hemos sustituido explícitamente $\psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0)$ (4.223) y se definió

$$C_{5\nu}^{\mu}(\phi, n) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\phi/n & -\sin\phi/n & 0 \\ \cos\phi/n & -1/n^2 & 0 & 0 \\ \sin\phi/n & 0 & 1-1/n^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.284}$$

Sin embargo, al recordar que en la sección 4.3.3 se probó que dicho límite es finito y al

4.3 Integración de la Función de Green en el régimen de campo lejano 109

sustituir los términos de orden cero en ξ de la ec. (4.173), obtendremos finalmente que:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \bar{G}_{\tilde{\theta}^2 \nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0(r - \hat{\rho} \cdot \mathbf{x}'_{\perp})}}{r} C_{5 \nu}^{\mu}(\phi, n) \left(\frac{1}{8} - \frac{\tilde{k}_0^2 z'^2}{2} \right) \\
 &+ \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0(r - \hat{\rho} \cdot \mathbf{x}'_{\perp})}}{r} (-\delta^{\mu 1} \delta_{\nu 1} + \delta^{\mu 2} \delta_{\nu 2}) \\
 &+ \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 r}} e^{i\tilde{k}_0(r - \hat{\rho} \cdot \mathbf{x}'_{\perp})} C_{3 \nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) \Big|_{\vartheta=\pi/2} \\
 &+ \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} e^{i\tilde{k}_0(r - \hat{\rho} \cdot \mathbf{x}'_{\perp})} C_{4 \nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0) \Big|_{\vartheta=\pi/2}, \tag{4.285}
 \end{aligned}$$

donde $C_{3 \nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) \Big|_{\vartheta=\pi/2}$ y $C_{4 \nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0) \Big|_{\vartheta=\pi/2}$ están dados por las ecs. (4.276) y (4.281) respectivamente, y $C_{5 \nu}^{\mu}(\phi, n)$ está definida en (4.284). En la expresión (4.285) observamos que hemos obtenido funciones finitas y no tienen ninguna divergencia, salvo en $r = 0$ como en ED estándar. También, podemos apreciar que en esta región las contribuciones son una superposición de ondas esféricas (primer y segundo sumando) junto con ondas superficiales (tercer y cuarto término). Además, observamos que la forma funcional en r de las ondas superficiales del tercer término de la ec. (4.285) es la misma de la ec. (4.264). Por lo tanto, este término también generará ondas superficiales cilíndricas axialmente simétricas [113] como ocurrió con el término $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 \nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ (4.263). Más aún, el cuarto término claramente nos dice que también habrá generación de ondas planas superficiales[‡], lo cual sería algo nuevo e interesante por explorar. De acuerdo con [114, 115], en presencia de ondas superficiales es posible separar los campos en su parte de ondas esféricas y superficiales. Esto permite pensar en que la componente de ondas superficiales podría obtenerse a través de una FG. Lo cual abriría la búsqueda de un *Ansatz* para la densidad de corriente que genere sólo la componente del campo asociada a las ondas superficiales. Nuevamente, esto último es interesante pero reiteramos que ello está más allá del alcance de esta tesis doctoral y constituirá un trabajo futuro.

Para concluir este capítulo, es necesario decir que se requiere un estudio más profundo de las ondas superficiales descritas por la FG dada por las expresiones (4.81), (4.139) y (4.218). Esto se puede llevar a cabo, al estudiar una aplicación concreta. Por ejemplo, la radiación generada por un dipolo eléctrico infinitesimal con orientación vertical y horizontal. El estudio de esta aplicación se inició pero ya no hubo tiempo de concluirlo, por este motivo, se dejará para un trabajo futuro. Sin embargo, como se mencionó en la subsección 4.3.5.1, en esta tesis doctoral sólo se estudiará la aplicación de esta FG a una partícula cargada con velocidad v constante perpendicular a la interfaz Σ , configuración que no genera ondas superficiales y que constituirá el tema central del siguiente capítulo.

[‡]Con los análisis de la subsección 4.3.5.1, se probó que éstas desaparecen al alejarse de la interfaz Σ como se puede apreciar en la ec. (4.253). Además, la forma funcional de éstas hallada en la ec. (4.285) nos permiten justificar su nombre.

Capítulo 5

Aplicaciones

En este capítulo se aplicará la Función de Green (FG) en el régimen de campo lejano obtenida en la subsección 4.3 del capítulo 4 sólo al caso de una partícula con velocidad constante y perpendicular al TI, lo cual comprende la Sec. 5.1. En la subsección 5.1.1 se expone la obtención del cuadripotencial en el espacio de coordenadas por medio de la FG obtenida en la subsección 4.2 del capítulo 4 y en la subsección 5.1.2 se obtiene el campo eléctrico correspondiente. Luego, en la subsección 5.1.3 obtenemos el cuadripotencial y el campo electromagnético usando la FG de la subsección 4.3 del capítulo 4 en el régimen de campo lejano y se analizan la distribución angular de la energía total radiada y la energía total radiada, aquí se exhibirá la aparición de manera natural del efecto Vavilov-Čerenkov reverso y en la subsección 5.1.3.5 se darán órdenes de magnitud de este efecto en el TlBiSe_2 que es un TI tridimensional.

Antes de entrar propiamente en materia, vale la pena dedicar unos párrafos para comentar brevemente la historia de la radiación de Vavilov-Čerenkov (generada por una partícula cargada con velocidad constante pero mayor a la velocidad de propagación de la luz en el medio en que realice dicho movimiento), sus aplicaciones y el posterior descubrimiento de la radiación de Vavilov-Čerenkov reversa, la cual funge como la principal aplicación de esta tesis y cuenta con mucho interés actualmente.

Desde su descubrimiento experimental en 1934 [116, 117], la radiación de Vavilov-Čerenkov (RVČ) ha jugado un papel especial en el estudio de la Física de Altas Energías, fuentes de microondas de gran potencia y la Física de rayos cósmicos [118, 119], tanto teóricamente como fenomenológicamente. La RVČ ocurre cuando partículas cargadas son arrojadas a un medio dieléctrico y se propagan a través de dicho material con una velocidad v mayor a la velocidad de la luz en dicho medio que es igual a $c/\sqrt{\epsilon\mu}$. Aquí c es la velocidad de la luz (que a lo largo de esta tesis se ha tomado igual a 1), ϵ es la permitividad del medio, μ es la permeabilidad del mismo, que como mencionamos en la sección 4.1 del capítulo 4 hemos tomado igual a 1 también, y $n = \sqrt{\epsilon}$ es el índice de refracción de material también definido previamente. La primera descripción teórica de tal tipo de radiación en el marco de la teoría de Maxwell fue desarrollada por Frank y Tamm en la Ref. [120], la cual reveló su polarización única y sus propiedades direccionales. En particular, la RVČ se produce en un cono anverso definido por

el ángulo de Vavilov-Čerenkov ($V\check{C}$) $\vartheta_{V\check{C}} = \arccos [c/(vn)]$ con respecto a la dirección de la carga incidente. Desde el surgimiento de los aceleradores en Física Nuclear y de Altas Energías, la $RV\check{C}$ ha sido ampliamente usada para diseñar una impresionante variedad de detectores, tales como los detectores Čerenkov de imágenes de anillo [121], los cuales pueden identificar partículas cargadas y también proveen una herramienta efectiva directa para probar sus propiedades físicas como velocidad, energía, dirección de movimiento y carga [122]. Como casos sobresalientes, el antiprotón [123] y la partícula J [124] fueron descubiertas usando detectores Čerenkov.

En años recientes el estudio de la radiación de Vavilov-Čerenkov reversa ($RV\check{C}R$), un fenómeno electromagnético exótico, ha sido de considerable interés [125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133]. La $RV\check{C}R$ ocurre cuando los fotones son emitidos en la dirección reversa con respecto a la dirección de la velocidad de propagación de la partícula cargada. En consecuencia, la onda de $V\check{C}$ reversa emitida se puede separar fácilmente de la partícula que la produce, por lo que la interferencia física entre ambos se minimiza. Esta notable predicción analítica fue introducida por Veselago en la Ref. [134], al invocar materiales que tuviesen simultáneamente permitividad y permeabilidad negativas, materiales que reciben el nombre de medios izquierdos (LHM, por su acrónimo en inglés). Asimismo, la posibilidad de exhibir un índice de refracción negativo al crear una interfaz entre un LHM y un medio ordinario se consideró también en la Ref. [134], lo cual fue verificado experimentalmente más tarde en la Ref. [135]. Cuando una onda electromagnética con vector de onda \mathbf{k} , campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ y campo de inducción magnética $\vec{\mathbf{B}}$ se propaga en un medio lineal, las condiciones $\mathbf{k} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 0$ y $\mathbf{k} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$ se satisfacen. Un medio se dice que es izquierdo (o derecho) si su vector de onda \mathbf{k} es antiparalelo (o paralelo) a $\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}$.* Como los LHM, usualmente concebidos como metamateriales, no son fácilmente disponibles en la naturaleza aunque han sido construidos artificialmente en los laboratorios, e.g. combinando alambres metálicos delgados [125] con resonadores de anillo partido [126] en una estructura de celdas periódicas. También las películas delgadas plasmónicas [127] y los cristales fotónicos [128] constituyen alternativas para estos metamateriales.

Como ya mencionamos, en este capítulo y concretamente en la subsección 5.1.3 demostraremos que $RV\check{C}R$ ocurre en medios magnetoeléctricos [1], los cuales son materiales derechos (RHM, por su acrónimo en inglés) existentes de forma natural como los antiferromagnetos [3], los aislantes topológicos (TIs) [4, 5] y los semimetales de Weyl [7], por ejemplo. Es interesante observar que el efecto Čerenkov acústico reverso en TIs ya ha sido discutido en las Refs. [136].

*Les hemos colocado una barrita extra a los campos eléctrico y de inducción magnética para denotar que son ondas planas electromagnéticas que se propagan libremente en el medio lineal y distinguirlos de aquellos que son generados por una fuente externa particular.

5.1. Partícula con velocidad constante y perpendicular al TI

En esta sección estudiaremos el campo electromagnético de una partícula con velocidad constante y perpendicular a un TI. La primera subsección se destinará para el campo completo en el espacio de coordenadas i.e., sin ninguna aproximación. Mientras que la segunda se dedicará al estudio del mismo campo pero en el régimen de campo lejano. En ambas situaciones se obtendrá el campo electromagnético a través de la FG, cuya deducción y características ya se estudiaron a fondo en el capítulo 4 de esta tesis.

Antes de continuar con esta sección, vale la pena enfatizar nuevamente que los potenciales y el campo electromagnético se calculan con la FG $G_{\nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ que se obtiene a través de la FG $\tilde{G}_{\nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$. La única diferencia entre ambas FGs es que $G^0_0 = \tilde{G}^0_0/\epsilon$, pues los otros términos se quedan igual. Los detalles completos del por qué de esta diferencia se encuentran en la sección 4.1 del capítulo 4.

5.1.1. Solución completa en el espacio de coordenadas

Consideremos una partícula móvil de carga q con velocidad constante $\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{u}}$, $v > 0$ frente a un θ -plano situado en $z = 0$ (Ver Fig. 4.1), cuya densidad de carga y de corriente son:

$$\rho(x') = q\delta(x')\delta(y')\delta(z' - vt') \quad , \quad \mathbf{j}(x') = qv\delta(x')\delta(y')\delta(z' - vt')\hat{\mathbf{z}}. \quad (5.1)$$

El siguiente paso es convolucionar las fuentes externas (5.1) con la FG dada por (4.78) a través de la relación (4.14) que reescribimos enseguida

$$A^{\mu}(x) = \int d^4x' G_{\nu}^{\mu}(x, x') J^{\nu}(x'). \quad (5.2)$$

No obstante, para tener un mejor entendimiento del manejo de la FG (4.78) sólo en esta subsección por simplicidad tomaremos $\epsilon = 1$. Además, por facilidad de lectura, enunciaremos

a continuación las componentes de la FG completa con $\epsilon = 1$:

$$\begin{aligned}
\bar{G}_0^0(x, x') &= \frac{\delta(t' - t + R)}{R} - \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{\delta(t' - t + \tilde{R})}{\tilde{R}} \\
&\quad + \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\text{ramp} \left(\sqrt{(t - t')^2 - R_\perp^2} - \tilde{Z} \right)}{\sqrt{(t - t')^2 - R_\perp^2}} \right], \\
\bar{G}_i^0(x, x') &= -\frac{2\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{\varepsilon^0{}_{i j^3} R_{\perp j}}{R_\perp} \frac{\partial}{\partial R_\perp} \left[\frac{\Theta \left(\sqrt{(t - t')^2 - R_\perp^2} - \tilde{Z} \right)}{\sqrt{(t - t')^2 - R_\perp^2}} \right] \\
&\quad - \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{R_{\perp i}}{R_\perp} \frac{\partial^2}{\partial t \partial R_\perp} \left[\frac{\text{ramp} \left(\sqrt{(t - t')^2 - R_\perp^2} - \tilde{Z} \right)}{\sqrt{(t - t')^2 - R_\perp^2}} \right], \\
\bar{G}_j^i(x, x') &= \eta^i{}_j \frac{\delta(t' - t + R)}{R} + \frac{2\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} \varepsilon^i{}_{j^03} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\Theta \left(\sqrt{(t - t')^2 - R_\perp^2} - \tilde{Z} \right)}{\sqrt{(t - t')^2 - R_\perp^2}} \right] \\
&\quad - \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{\partial^i R_{\perp j}}{R_\perp} \frac{\partial}{\partial R_\perp} \left[\frac{\text{ramp} \left(\sqrt{(t - t')^2 - R_\perp^2} - \tilde{Z} \right)}{\sqrt{(t - t')^2 - R_\perp^2}} \right],
\end{aligned} \tag{5.3}$$

donde recordamos que $\tilde{\theta}$ está dado por la ec. (3.15), $\tilde{R} = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')_\perp^2 + (|z| + |z'|)^2}$, $\tilde{Z} = |z| + |z'|$ y $\text{ramp}(\xi - a) = (x - a)\Theta(\xi - a)$.

5.1.1.1. Cálculo de $A^3(x)$

En esta sección comenzaremos por la última componente del cuadripotencial ya que no hay contribución adicional debido a la presencia del θ -plano. Ahora, procedemos a demostrar esta afirmación. Para obtener esta componente, hacemos $\mu = 3$ en la ecuación (5.2):

$$\begin{aligned}
A^3(x) &= \int d^4x' G^3{}_\nu(x, x') J^\nu(x') = \int d^4x' [G^3{}_0(x, x') J^0(x') + G^3{}_3(x, x') J^3(x')] , \\
&= \int d^4x' G^3{}_3(x, x') J^3(x') .
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Sustituyendo la expresión para la componente 33 de la FG dependiente del tiempo (5.3)

junto con la densidad de corriente, tendremos que:

$$\begin{aligned}
A^3(x) &= \eta^3_3 qv \int d^4x' \frac{\delta(t' - t + R)}{R} \delta(x') \delta(y') \delta(z' - vt') \\
&\quad + \frac{2\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} \varepsilon^3_{303} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\Theta \left(\sqrt{(t-t')^2 - R_\perp^2} - \tilde{Z} \right)}{\sqrt{(t-t')^2 - R_\perp^2}} \right] \delta(x') \delta(y') \delta(z' - vt') \\
&\quad - \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{\partial^3 R_{\perp 3}}{R_\perp} \frac{\partial}{\partial R_\perp} \left[\frac{\text{ramp} \left(\sqrt{(t-t')^2 - R_\perp^2} - \tilde{Z} \right)}{\sqrt{(t-t')^2 - R_\perp^2}} \right], \\
&= qv \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta \left(t' - t + \sqrt{\rho^2 + (z - vt')^2} \right)}{\sqrt{\rho^2 + (z - vt')^2}}, \tag{5.5}
\end{aligned}$$

donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la coordenada radial de las coordenadas cilíndricas y observamos que es la misma integral de la ED estándar. Entonces, no tendremos contribuciones adicionales debido al θ -plano a ningún orden como se afirmó. De este modo, el tiempo retardado donde debemos evaluar la integral es el de la ED estándar [137]:

$$t_{r_{v=cte}} = \frac{t - vz - \sqrt{(t - vz)^2 + (1 - v^2)(x^2 + y^2 + z^2 - t^2)}}{1 - v^2}. \tag{5.6}$$

Por lo tanto, la componente $A^3(x)$ ya valuada en el tiempo retardado (5.6) es el resultado bien conocido [138]:

$$A^3(x) = \frac{qv}{\sqrt{(1 - v^2)(x^2 + y^2) + (z - vt)^2}}. \tag{5.7}$$

5.1.1.2. El cálculo de $A^1(x)$ y $A^2(x)$ y la elección del tiempo retardado adecuado

Como se observó en la subsección previa el conocimiento del tiempo retardado t_r resultó fundamental para evaluar la integral correspondiente a $A^3(x)$. De igual manera, será fundamental determinar el tiempo retardado adecuado para las componentes $A^0(x)$, $A^1(x)$ y $A^2(x)$ del cuadripotencial. Para ello, necesitamos analizar la función de Heaviside y la función rampa que están involucrada en ellas. Comencemos por estudiar la componente uno del cuadripotencial, al hacer $\mu = 1$ en la ecuación (5.2):

$$\begin{aligned}
A^1(x) &= \int d^4x' G^1_\nu(x, x') J^\nu(x') = \int d^4x' [G^1_0(x, x') J^0(x') + G^1_3(x, x') J^3(x')] , \\
&= \int d^4x' G^1_0(x, x') J^0(x') . \tag{5.8}
\end{aligned}$$

Luego, al sustituir la componente de la FG correspondiente (5.3) junto con la densidad de

carga, tendremos que:

$$\begin{aligned}
A^1(x) &= \frac{2\tilde{\theta}q}{4 + \tilde{\theta}^2} \varepsilon^1_0{}^{23} \int d^4x' \frac{R_{\perp 2}}{R_{\perp}} \frac{\partial}{\partial R_{\perp}} \left[\frac{\Theta \left(\sqrt{(t-t')^2 - R_{\perp}^2} - \tilde{z} \right)}{\sqrt{(t-t')^2 - R_{\perp}^2}} \right] \delta(x') \delta(y') \delta(z' - vt') \\
&+ \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4 + \tilde{\theta}^2} \int d^4x' \frac{R_{\perp 1}}{R_{\perp}} \frac{\partial^2}{\partial t \partial R_{\perp}} \left[\frac{\text{ramp} \left(\sqrt{(t-t')^2 - R_{\perp}^2} - \tilde{z} \right)}{\sqrt{(t-t')^2 - R_{\perp}^2}} \right] \delta(x') \delta(y') \delta(z' - vt') , \\
&= -\frac{2\tilde{\theta}q}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{y}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \left[\frac{\Theta \left(\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} - |z| - |vt'| \right)}{\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2}} \right] \\
&+ \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{x}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \rho} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \left[\frac{\text{ramp} \left(\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} - |z| - |vt'| \right)}{\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2}} \right] , \tag{5.9}
\end{aligned}$$

donde ahora $R_{\perp} = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$. Más aún, el término que involucra a la función de Heaviside coincide con la componente en la dirección $\hat{\mathbf{x}}$ de un monopolo magnético que se mueve con velocidad $\mathbf{v} = \pm v \hat{\mathbf{z}}$. Esto se puede observar con mayor detalle en el Apéndice G de esta tesis doctoral.[†] Dicha coincidencia permite hacer la identificación $g = 2\tilde{\theta}q/(4n^2 + \tilde{\theta}^2)$ con g siendo la carga magnética del monopolo “imagen”. Esto mismo pasará con el primer término de $A^2(x)$.

Ahora bien, las dos integrales sobre dt' que debemos calcular son:

$$\mathbb{I}_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{\Theta \left(\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} - |z| - v|t'| \right)}{\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2}} , \tag{5.10}$$

$$\mathbb{I}_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{\left(\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} - |z| - v|t'| \right) \Theta \left(\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} - |z| - v|t'| \right)}{\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2}} , \tag{5.11}$$

donde ya usamos la forma explícita $\text{ramp}(\xi - a) = (\xi - a)\Theta(\xi - a)$. Ambas integrales pueden ponerse juntas en la siguiente expresión:

$$\mathbb{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' W(t, \rho, z, v; t') \Theta \left(\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} - |z| - v|t'| \right) , \tag{5.12}$$

donde el punto básico del cálculo radica en determinar el intervalo de t' donde la función

$$T(t') = \sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} - |z| - v|t'| \tag{5.13}$$

sea positiva. Fácilmente se verifica que $\lim_{t' \rightarrow \pm\infty} T(t') = +\infty$. También, sabemos que $T(t')$ tiene dos ceros que corresponde a los de una función cuadrática, a los cuales los etiquetamos

[†]Comparar con las ecs. (G.27) y (G.28) del apéndice citado.

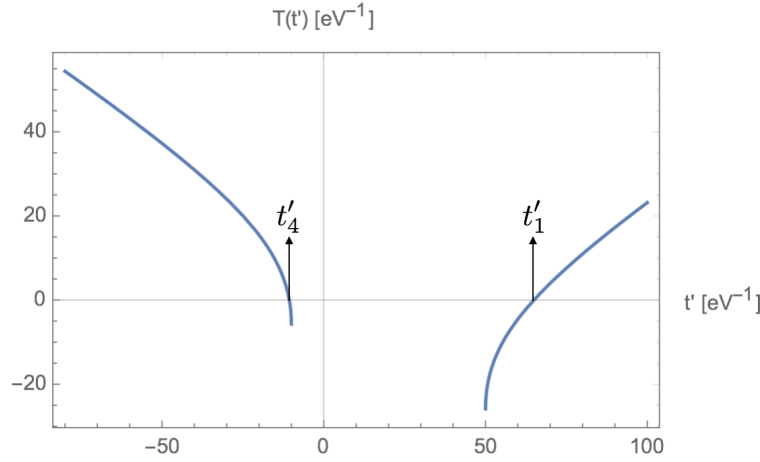


Figura 5.1: Gráfica de la función $T(t')$ dada por la ec. (5.13) que ilustra el comportamiento general de ésta. Aquí se gráfica $T(t')$ cuando $t = 20 \text{ eV}^{-1}$, $|z| = -1 \text{ eV}^{-1}$, $v = 0.5$ y $\rho = 30 \text{ eV}^{-1}$ que dan las raíces $t'_1 = 64.951 \text{ eV}^{-1}$ y $t'_4 = -10.660 \text{ eV}^{-1}$ calculadas con las ecs. (5.17) y (5.20) respectivamente.

como $t'_- < t'_+$ y que son funciones de las variables independientes t, z, ρ y v . Observamos que $T(t')$ se vuelve compleja cuando $\rho^2 > (t - t')^2$, i.e. para $-\rho < (t - t') < \rho$. El inicio de este comportamiento se da en $(t - t')^2 = \rho^2$, en cuyo caso $T(t') < 0$, lo cual queda fuera de nuestro interés. Tomando estas propiedades en consideración, concluimos que la forma general de la función $T(t')$ es aquella mostrada en la Fig. 5.1. Esto conduce a que la forma final de la integral general \mathbb{I} (5.12) sea la siguiente:

$$\mathbb{I}(t'_+, t'_-) = \int_{-\infty}^{t'_-} dt' W(t, \rho, z, v; t') + \int_{t'_+}^{+\infty} dt' W(t, \rho, z, v; t'), \tag{5.14}$$

la cual debe ser calculada en cada caso. Aún es posible proceder de forma general de acuerdo con la siguiente estrategia. Dado un tiempo de observación fijo t , un punto de observación z, ρ y una velocidad $v > 0$, clasificaremos el evento de acuerdo a las siguientes posibilidades:

$$t < -v|z| \quad , \quad -v|z| < t < +v|z|, \quad +v|z| < t \tag{5.15}$$

$$r > t \quad , \quad r < t, \tag{5.16}$$

con $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

En el Apéndice F mostramos que estas posibilidades nos permiten determinar los valores requeridos de t'_-, t'_+ para cada caso. Resumimos los resultados en la Tabla (5.1), donde los

# de Caso	t y $v z $	r y t	t'_- y t'_i	t'_+ y t'_i
Caso 1	$t < -v z $	$r > t$	$t'_- = t'_4 < 0$	$t'_+ = t'_1 > 0$
Caso 2	$t < -v z $	$r < t$	$t'_- = t'_4 < 0$	$t'_+ = t'_3 < 0$
Caso 3	$-v z < t < v z $	$r > t$	$t'_- = t'_4 < 0$	$t'_+ = t'_1 > 0$
Caso 4	$-v z < t < v z $	$r < t$	\nexists	\nexists
Caso 5	$t > v z $	$r > t$	$t'_- = t'_4 < 0$	$t'_+ = t'_1 > 0$
Caso 6	$t > v z $	$r < t$	$t'_- = t'_2 > 0$	$t'_+ = t'_1 > 0$

Cuadro 5.1: En esta tabla mostramos la clasificación de los casos que resultan de la combinación de posibilidades (5.16) que nos permiten determinar los valores requeridos de t'_- , t'_+ para cada caso.

valores de t'_i , con $i = 1, 2, 3, 4$ son

$$t'_1 = \frac{t + v|z| + \sqrt{(t + v|z|)^2 + (1 - v^2)(r^2 - t^2)}}{1 - v^2}, \quad (t' > 0), \quad (5.17)$$

$$t'_2 = \frac{t + v|z| - \sqrt{(t + v|z|)^2 + (1 - v^2)(r^2 - t^2)}}{1 - v^2}, \quad (t' > 0), \quad (5.18)$$

$$t'_3 = \frac{t - v|z| + \sqrt{(t - v|z|)^2 + (1 - v^2)(r^2 - t^2)}}{1 - v^2}, \quad (t' < 0), \quad (5.19)$$

$$t'_4 = \frac{t - v|z| - \sqrt{(t - v|z|)^2 + (1 - v^2)(r^2 - t^2)}}{1 - v^2}, \quad (t' < 0). \quad (5.20)$$

Los valores $t'_1 > t'_2$ son los ceros de $T(t')$ cuando $t' > 0$, mientras que $t'_3 > t'_4$ son los ceros de $T(t')$ cuando $t' < 0$.

Uno puede ver inmediatamente que el caso $-v|z| < t < v|z|$, $r < t$ no puede ocurrir. De hecho, se tiene que

$$\rho^2 + z^2 < t^2 < v^2 z^2 \quad \Rightarrow \quad \rho^2 < -(1 - v^2)z^2 < 0, \quad (5.21)$$

lo cual conduce a una contradicción. Los otros casos no muestran inconsistencias y serán incluidos en alguno de los casos restantes.

En esta tesis sólo exhibiremos cómo se realiza el cálculo explícito de las integrales \mathbb{I}_1 (5.10) e \mathbb{I}_2 (5.11) para el Caso 6 de la Tabla 5.1 cuando $t > v|z|$ y $r < t$, con $t'_- = t'_2 > 0$ y $t'_+ = t'_1 > 0$, los cuales se ilustran en la Fig. 5.2. Esto es porque los demás casos se calculan de manera completamente análoga. Al considerar la ec. (5.14) tendremos que la integral (5.10) es

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_1(t'_1, t'_2) &= \int_{-\infty}^{t'_2} dt' \frac{1}{\sqrt{(t - t')^2 - \rho^2}} + \int_{t'_1}^{+\infty} dt' \frac{1}{\sqrt{(t - t')^2 - \rho^2}}, \\ &= \ln \left[t - t' + \sqrt{(t - t')^2 - \rho^2} \right]_{-\infty}^{t'_2} + \ln \left[t - t' + \sqrt{(t - t')^2 - \rho^2} \right]_{t'_1}^{\infty}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

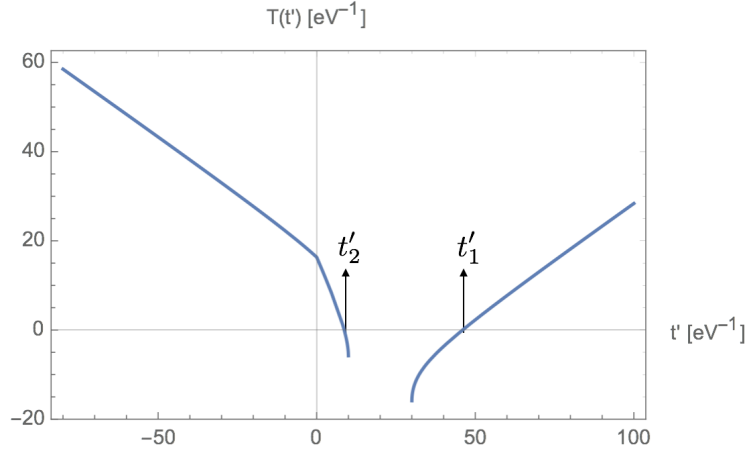


Figura 5.2: Gráfica de la función $T(t')$ dada por la ec. (5.13) que ilustra el Caso 6 de la Tabla 5.1 cuando $t > v|z|$ y $r < t$, con $t'_- = t'_2 > 0$ y $t'_+ = t'_1 > 0$. Aquí se gráfica $T(t')$ cuando $t = 20$ eV^{-1} , $|z| = -1$ eV^{-1} , $v = 0.5$ y $\rho = 10$ eV^{-1} que da las raíces $t'_1 = 46$ eV^{-1} y $t'_2 = 8.667$ eV^{-1} calculadas con las ecs. (5.17) y (5.18) respectivamente.

Sin embargo, para determinar la integral (5.11) debemos tener cuidado en el cambio de signo en $t' = 0$ (Ver Fig. 5.2) que presenta el integrando por causa de $|t'|$. Si $t' < 0$ se tendrá que

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_2(t' < 0) &= \int dt' \frac{\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} - |z| - v|t'|}{\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2}} = \int dt' \frac{\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} - |z| + vt'}{\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2}}, \\ &= v\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} + t' - (|z| - vt) \ln \left[t' - t + \sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Por otro lado, si $t' > 0$ resulta que

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_2(t' > 0) &= \int dt' \frac{\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} - |z| - v|t'|}{\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2}} = \int dt' \frac{\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} - |z| - vt'}{\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2}}, \\ &= -v\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} + t' - (|z| + vt) \ln \left[t' - t + \sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Particularmente, para el caso 6 tendremos que integrar en los siguientes intervalos: Primero, cuando $t' \in [-\infty, 0]$ con la integral (5.23). Luego, integrar $t' \in [0, t'_2]$ usando la integral (5.24) y finalmente, integrar $t' \in [t'_1, \infty]$ por medio de la integral (5.24). Estos intervalos de integración

se pueden apreciar mejor en la Fig. 5.2. De este modo, resulta que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_2(t'_1, t'_2) &= \int_{-\infty}^{t'_2} dt' \frac{\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} - |z| - v|t'|}{\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2}} + \int_{t'_1}^{\infty} dt' \frac{\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} - |z| - v|t'|}{\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2}}, \\
&= \int_{-\infty}^0 dt' \frac{\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} - |z| + vt'}{\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2}} + \int_0^{t'_2} dt' \frac{\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} - |z| - vt'}{\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2}} \\
&\quad + \int_{t'_1}^{\infty} dt' \frac{\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} - |z| - vt'}{\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2}}, \\
&= \left\{ v\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} + t' - (|z| - vt) \ln \left[t' - t + \sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} \right] \right\}_{-\infty}^0 \\
&\quad + \left\{ -v\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} + t' - (|z| + vt) \ln \left[t' - t + \sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} \right] \right\}_0^{t'_2} \\
&\quad + \left\{ -v\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} + t' - (|z| + vt) \ln \left[t' - t + \sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} \right] \right\}_{t'_1}^{\infty}. \quad (5.25)
\end{aligned}$$

La expresión de $A^1(x)$ de la ec. (5.9) nos pide evaluar la siguiente derivada parcial de \mathbb{I}_1 (5.22):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbb{I}_1(t'_1, t'_2)}{\partial \rho} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \ln \left[t - t' + \sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} \right]_{-\infty}^{t'_2} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \rho} \ln \left[t - t' + \sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} \right]_{t'_1}^{\infty}, \\
&= \frac{\partial}{\partial \rho} \ln \left[t - t'_2 + \sqrt{(t-t'_2)^2 - \rho^2} \right] \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial \rho} \ln \left[t - t'_1 + \sqrt{(t-t'_1)^2 - \rho^2} \right], \quad (5.26)
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue de evaluar el logaritmo en $\pm\infty$ cuyo valor da cero al ser derivado. Luego, usamos la ecuación que satisfacen t'_2 y t'_1 como raíces de la función $T(t')$ (5.13) de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \mathbb{I}_1(t'_1, t'_2)}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} \ln [t - t'_2 + |z| + v|t'_2|] - \frac{\partial}{\partial \rho} \ln [t - t'_1 + |z| + v|t'_1|]. \quad (5.27)$$

Pero en este caso, $t'_2 > 0$ y $t'_1 > 0$ (Ver Tabla 5.1). Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbb{I}_1(t'_1, t'_2)}{\partial \rho} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \ln [t - t'_2 + |z| + vt'_2] - \frac{\partial}{\partial \rho} \ln [t - t'_1 + |z| + vt'_1], \\
&= \frac{\partial}{\partial \rho} \ln [t + |z| - (1-v)t'_2] - \frac{\partial}{\partial \rho} \ln [t + |z| - (1-v)t'_1]. \quad (5.28)
\end{aligned}$$

Antes de sustituir los valores de t'_1 dado por (5.17) y de t'_2 dado por (5.18), los reescribimos por medio de la identidad

$$(t \pm v|z|)^2 + (1-v^2)(r^2 - t^2) = (|z| \pm vt)^2 + (1-v^2)\rho^2, \quad (5.29)$$

de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} t'_1 &= \frac{t + v|z| + \sqrt{(|z| + vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2}}{1 - v^2}, \\ t'_2 &= \frac{t + v|z| - \sqrt{(|z| + vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2}}{1 - v^2}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Sustituyendo (5.30) en la expresión (5.28), obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{I}_1(t'_1, t'_2)}{\partial \rho} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \ln \left[|z| + t - (1 - v) \left(\frac{t + v|z| - \sqrt{(|z| + vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2}}{1 - v^2} \right) \right] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial \rho} \ln \left[|z| + t - (1 - v) \left(\frac{t + v|z| + \sqrt{(|z| + vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2}}{1 - v^2} \right) \right], \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho} \ln \left[\frac{|z| + vt + \sqrt{(|z| + vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2}}{1 + v} \right] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial \rho} \ln \left[\frac{|z| + vt - \sqrt{(|z| + vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2}}{1 + v} \right], \\ &= \frac{(1 - v^2)\rho}{\left(|z| + vt + \sqrt{(|z| + vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2} \right) \sqrt{(|z| + vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2}} \\ &\quad + \frac{(1 - v^2)\rho}{\left(|z| + vt - \sqrt{(|z| + vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2} \right) \sqrt{(|z| + vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2}}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Tras racionalizar el denominador resulta lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{I}_1(t'_1, t'_2)}{\partial \rho} &= -\frac{|z| + vt - \sqrt{(|z| + vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2}}{\rho \sqrt{(|z| + vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2}} \\ &\quad - \frac{|z| + vt + \sqrt{(|z| + vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2}}{\rho \sqrt{(|z| + vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2}}, \\ &= -\frac{2(|z| + vt)}{\rho \sqrt{(|z| + vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2}}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

La expresión de $A^1(x)$ de la ec. (5.9) también nos pide evaluar las siguientes derivadas

parciales de \mathbb{I}_2 (5.25):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_2)}{\partial t \partial \rho} &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial \rho} \left\{ v \sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} + t' - (|z| - vt) \ln \left[t' - t + \sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} \right] \right\}_{-\infty}^0 \\
&+ \frac{\partial^2}{\partial t \partial \rho} \left\{ -v \sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} + t' - (|z| + vt) \ln \left[t' - t + \sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} \right] \right\}_0^{t'_2} \\
&+ \frac{\partial^2}{\partial t \partial \rho} \left\{ -v \sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} + t' - (|z| + vt) \ln \left[t' - t + \sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} \right] \right\}_{t'_1}^{\infty} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial t \partial \rho} \left\{ -v \sqrt{(t-t'_2)^2 - \rho^2} + t'_2 - (|z| + vt) \ln \left[t'_2 - t + \sqrt{(t-t'_2)^2 - \rho^2} \right] \right\} \\
&- \frac{\partial^2}{\partial t \partial \rho} \left\{ -v \sqrt{(t-t'_1)^2 - \rho^2} + t'_1 - (|z| + vt) \ln \left[t'_1 - t + \sqrt{(t-t'_1)^2 - \rho^2} \right] \right\} ,
\end{aligned} \tag{5.33}$$

donde la última igualdad se sigue de evaluar el logaritmo en $t' = 0, \pm\infty$ cuyos valores dan cero al ser derivados. Luego, usamos la ecuación que satisfacen t'_2 y t'_1 como raíces de la función $T(t')$ (5.13) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_2)}{\partial t \partial \rho} &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial \rho} \left\{ -v (|z| + v|t'_2|) + t'_2 - (|z| + vt) \ln [t'_2 - t + |z| + v|t'_2|] \right\} \\
&- \frac{\partial^2}{\partial t \partial \rho} \left\{ -v (|z| + v|t'_1|) + t'_1 - (|z| + vt) \ln [t'_1 - t + |z| + v|t'_1|] \right\} .
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Pero en este caso, $t'_2 > 0$ y $t'_1 > 0$ (Ver Tabla 5.1). Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_2)}{\partial t \partial \rho} &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial \rho} \left\{ (1 - v^2) t'_2 - (|z| + vt) \ln [|z| - t + (1 + v)t'_2] \right\} \\
&- \frac{\partial^2}{\partial t \partial \rho} \left\{ (1 - v^2) t'_1 - (|z| + vt) \ln [|z| - t + (1 + v)t'_1] \right\} .
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Sustituyendo explícitamente los valores de t'_2 y t'_1 dados en las ecs. (5.30) en esta última

expresión, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_2)}{\partial t \partial \rho} &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial \rho} \left[(1-v^2) \left(\frac{t+v|z| - \sqrt{(|z|+vt)^2 + (1-v^2)\rho^2}}{1-v^2} \right) \right] \\
&- \frac{\partial^2}{\partial t \partial \rho} \left\{ (|z|+vt) \ln \left[|z| - t + (1+v) \left(\frac{t+v|z| - \sqrt{(|z|+vt)^2 + (1-v^2)\rho^2}}{1-v^2} \right) \right] \right\} \\
&- \frac{\partial^2}{\partial t \partial \rho} \left[(1-v^2) \left(\frac{t+v|z| + \sqrt{(|z|+vt)^2 + (1-v^2)\rho^2}}{1-v^2} \right) \right] \\
&+ \frac{\partial^2}{\partial t \partial \rho} \left\{ (|z|+vt) \ln \left[|z| - t + (1+v) \left(\frac{t+v|z| + \sqrt{(|z|+vt)^2 + (1-v^2)\rho^2}}{1-v^2} \right) \right] \right\}, \\
&= \frac{\partial^2}{\partial t \partial \rho} \left(t+v|z| - \sqrt{(|z|+vt)^2 + (1-v^2)\rho^2} \right) \\
&- \frac{\partial^2}{\partial t \partial \rho} \left\{ (|z|+vt) \ln \left[\frac{|z|+vt + \sqrt{(|z|+vt)^2 + (1-v^2)\rho^2}}{1+v} \right] \right\} \\
&- \frac{\partial^2}{\partial t \partial \rho} \left(t+v|z| + \sqrt{(|z|+vt)^2 + (1-v^2)\rho^2} \right) \\
&+ \frac{\partial^2}{\partial t \partial \rho} \left\{ (|z|+vt) \ln \left[\frac{|z|+vt - \sqrt{(|z|+vt)^2 + (1-v^2)\rho^2}}{1+v} \right] \right\}. \tag{5.36}
\end{aligned}$$

Ahora, proseguiamos con las derivadas parciales:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_2)}{\partial t \partial \rho} &= -2 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{(1-v^2)\rho}{\sqrt{(|z|+vt)^2 + (1-v^2)\rho^2}} \right\} \\
&+ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{(1-v^2)\rho(|z|+vt)}{\left(|z|+vt + \sqrt{(|z|+vt)^2 + (1-v^2)\rho^2} \right) \sqrt{(|z|+vt)^2 + (1-v^2)\rho^2}} \right\} \\
&+ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{(1-v^2)\rho(|z|+vt)}{\left(|z|+vt - \sqrt{(|z|+vt)^2 + (1-v^2)\rho^2} \right) \sqrt{(|z|+vt)^2 + (1-v^2)\rho^2}} \right\}. \tag{5.37}
\end{aligned}$$

Después, se racionaliza el segundo y tercer término y resulta lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_2)}{\partial t \partial \rho} &= -2 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{(1-v^2)\rho}{\sqrt{(|z|+vt)^2 + (1-v^2)\rho^2}} \right\} \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{|z|+vt}{\rho} \left[1 + \frac{|z|+vt}{\sqrt{(|z|+vt)^2 + (1-v^2)\rho^2}} \right] \right\} \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{|z|+vt}{\rho} \left[\frac{|z|+vt}{\sqrt{(|z|+vt)^2 + (1-v^2)\rho^2}} - 1 \right] \right\}, \\
&= -2 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{(1-v^2)\rho}{\sqrt{(|z|+vt)^2 + (1-v^2)\rho^2}} \right\} - 2 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{(|z|+vt)^2}{\rho \sqrt{(|z|+vt)^2 + (1-v^2)\rho^2}} \right\}, \\
&= -\frac{2v(1-v^2)\rho(|z|+vt)}{[(|z|+vt)^2 + (1-v^2)\rho^2]^{3/2}} + \frac{2v(|z|+vt)^3}{R_\perp [(|z|+vt)^2 + (1-v^2)\rho^2]^{3/2}} \\
&\quad - \frac{4v(|z|+vt)}{R_\perp \sqrt{(|z|+vt)^2 + (1-v^2)\rho^2}}. \tag{5.38}
\end{aligned}$$

Análogamente, se pueden obtener las demás derivadas parciales de \mathbb{I}_1 e \mathbb{I}_2 para los otros casos expuestos en la Tabla 5.1, las cuales a continuación enunciamos. Para el Caso 1, Caso 3 y Caso 5 (que es el caso ilustrado en la Fig. 5.1) tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbb{I}_1(t'_1, t'_4)}{\partial \rho} &= -\frac{1}{\rho} \left[\frac{|z|-vt}{\sqrt{(|z|-vt)^2 + (1-v^2)\rho^2}} + \frac{|z|+vt}{\sqrt{(|z|+vt)^2 + (1-v^2)\rho^2}} \right], \tag{5.39} \\
\frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_4)}{\partial t \partial \rho} &= \frac{2v}{\rho} + \frac{v(1-v^2)\rho(|z|+vt)}{[(|z|+vt)^2 + (1-v^2)\rho^2]^{3/2}} - \frac{v(1-v^2)\rho(|z|-vt)}{[(|z|-vt)^2 + (1-v^2)\rho^2]^{3/2}} \\
&\quad - \frac{v(|z|+vt)^3}{\rho [(|z|+vt)^2 + (1-v^2)\rho^2]^{3/2}} + \frac{2v(|z|+vt)}{\rho \sqrt{(|z|+vt)^2 + (1-v^2)\rho^2}} \\
&\quad - \frac{v(|z|-vt)^3}{\rho [(|z|-vt)^2 + (1-v^2)\rho^2]^{3/2}} + \frac{2v(|z|-vt)}{\rho \sqrt{(|z|-vt)^2 + (1-v^2)\rho^2}}. \tag{5.40}
\end{aligned}$$

Para el Caso 2 se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbb{I}_1(t'_3, t'_4)}{\partial \rho} &= -\frac{2(|z|-vt)}{\rho \sqrt{(|z|-vt)^2 + (1-v^2)\rho^2}}, \tag{5.41} \\
\frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_3, t'_4)}{\partial t \partial \rho} &= \frac{2v(1-v^2)\rho(|z|-vt)}{[(|z|-vt)^2 + (1-v^2)\rho^2]^{3/2}} - \frac{2v(|z|-vt)^3}{\rho [(|z|-vt)^2 + (1-v^2)\rho^2]^{3/2}} \\
&\quad + \frac{4v(|z|-vt)}{\rho \sqrt{(|z|-vt)^2 + (1-v^2)\rho^2}}, \tag{5.42}
\end{aligned}$$

donde resulta curioso que la expresión (5.38) y (5.42) son simétricas en $-v$. Además todas las expresiones (5.32), (5.38), (5.39), (5.40), (5.41) y (5.42) tienen dimensiones de x^{-1} , lo cual

resultará importante cuando se determine el campo electromagnético de radiación.

De este modo, la expresión general para $A^1(x)$ que incluye todos los casos posibles dados en la Tabla 5.1 es:

$$\begin{aligned}
A^1(x) = & -\frac{2\tilde{\theta}q}{4+\tilde{\theta}^2}\frac{y}{\rho}\left\{\Theta(-v|z|-t)\Theta(r-t)\frac{\partial\mathbb{I}_1(t'_3,t'_4)}{\partial\rho}+\Theta(-v|z|-t)\Theta(t-r)\frac{\partial\mathbb{I}_1(t'_1,t'_4)}{\partial\rho}\right. \\
& +[\Theta(v|z|-t)\Theta(t+v|z|)+\Theta(t-v|z|)]\Theta(r-t)\frac{\partial\mathbb{I}_1(t'_1,t'_4)}{\partial\rho} \\
& \left. +\Theta(t-v|z|)\Theta(t-r)\frac{\partial\mathbb{I}_1(t'_1,t'_2)}{\partial\rho}\right\} \\
& +\frac{\tilde{\theta}^2q}{4+\tilde{\theta}^2}\frac{x}{\rho}\left\{\Theta(-v|z|-t)\Theta(r-t)\frac{\partial^2\mathbb{I}_2(t'_3,t'_4)}{\partial t\partial\rho}+\Theta(-v|z|-t)\Theta(t-r)\frac{\partial^2\mathbb{I}_2(t'_1,t'_4)}{\partial t\partial\rho}\right. \\
& +[\Theta(v|z|-t)\Theta(t+v|z|)+\Theta(t-v|z|)]\Theta(r-t)\frac{\partial^2\mathbb{I}_2(t'_1,t'_4)}{\partial t\partial\rho} \\
& \left. +\Theta(t-v|z|)\Theta(t-r)\frac{\partial^2\mathbb{I}_2(t'_1,t'_2)}{\partial t\partial\rho}\right\}, \tag{5.43}
\end{aligned}$$

donde las derivadas parciales involucradas en esta expresión están dadas por (5.32), (5.38), (5.39), (5.40), (5.41) y (5.42).

De manera completamente análoga, se tendrá que la expresión general para $A^2(x)$ que incluye todos los casos posibles de la Tabla 5.1 es:

$$\begin{aligned}
A^2(x) = & \frac{2\tilde{\theta}q}{4+\tilde{\theta}^2}\frac{x}{\rho}\left\{\Theta(-v|z|-t)\Theta(r-t)\frac{\partial\mathbb{I}_1(t'_3,t'_4)}{\partial\rho}+\Theta(-v|z|-t)\Theta(t-r)\frac{\partial\mathbb{I}_1(t'_1,t'_4)}{\partial\rho}\right. \\
& +[\Theta(v|z|-t)\Theta(t+v|z|)+\Theta(t-v|z|)]\Theta(r-t)\frac{\partial\mathbb{I}_1(t'_1,t'_4)}{\partial\rho} \\
& \left. +\Theta(t-v|z|)\Theta(t-r)\frac{\partial\mathbb{I}_1(t'_1,t'_2)}{\partial\rho}\right\} \\
& +\frac{\tilde{\theta}^2q}{4+\tilde{\theta}^2}\frac{y}{\rho}\left\{\Theta(-v|z|-t)\Theta(r-t)\frac{\partial^2\mathbb{I}_2(t'_3,t'_4)}{\partial t\partial\rho}+\Theta(-v|z|-t)\Theta(t-r)\frac{\partial^2\mathbb{I}_2(t'_1,t'_4)}{\partial t\partial\rho}\right. \\
& +[\Theta(v|z|-t)\Theta(t+v|z|)+\Theta(t-v|z|)]\Theta(r-t)\frac{\partial^2\mathbb{I}_2(t'_1,t'_4)}{\partial t\partial\rho} \\
& \left. +\Theta(t-v|z|)\Theta(t-r)\frac{\partial^2\mathbb{I}_2(t'_1,t'_2)}{\partial t\partial\rho}\right\}. \tag{5.44}
\end{aligned}$$

Un resultado importante que vale la pena mencionar es que $A^1(x)$ (5.43) y $A^2(x)$ (5.44) ya no son cero como en el caso de ED estándar, lo cual tendrá consecuencias en el campo electromagnético de radiación.

5.1.1.3. Cálculo de $A^0(x)$

Sólo nos falta calcular la componente cero, para ello, hacemos $\mu = 0$ en la ecuación (5.2):

$$\begin{aligned} A^0(x) &= \int d^4x' G^0_{\nu}(x, x') J^{\nu}(x') = \int d^4x' [G^0_0(x, x') J^0(x') + G^0_3(x, x') J^3(x')] , \\ &= \int d^4x' G^0_0(x, x') J^0(x') . \end{aligned} \quad (5.45)$$

Sustituyendo la expresión para la componente 00 de la FG (5.3) junto con la densidad de carga (5.1), tendremos que:

$$\begin{aligned} A^0(x) &= q \int d^4x' \frac{\delta(t' - t + R)}{R} \delta(x') \delta(y') \delta(z' - vt') \\ &\quad - \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4 + \tilde{\theta}^2} \int d^4x' \frac{\delta(t' - t + \tilde{R})}{\tilde{R}} \delta(x') \delta(y') \delta(z' - vt') \\ &\quad + \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d^4x' \left[\frac{\text{ramp} \left(\sqrt{(t-t')^2 - R_{\perp}^2} - \tilde{Z} \right)}{\sqrt{(t-t')^2 - R_{\perp}^2}} \right] \delta(x') \delta(y') \delta(z' - vt') , \\ &= q \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta \left(t' - t + \sqrt{x^2 + y^2 + (z - vt')^2} \right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - vt')^2}} \\ &\quad - \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4 + \tilde{\theta}^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta \left(t' - t + \sqrt{\rho^2 + (|z| + |vt'|)^2} \right)}{\sqrt{\rho^2 + (|z| + v|t'|)^2}} , \\ &\quad + \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \left[\frac{\text{ramp} \left(\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} - |z| - v|t'| \right)}{\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2}} \right] , \end{aligned} \quad (5.46)$$

donde nuevamente $R_{\perp} = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$.

De esta última expresión de A^0 observamos que ya conocemos dos de las tres integrales ya que la primera es aquella de ED estándar cuyo valor es bien conocido (5.5) y la última ya se determinó en la subsección 5.1.1.2 en la ecs. (5.23) y (5.24). Sin embargo, necesitamos calcular explícitamente la segunda integral. Entonces, la integral a determinar es la siguiente:

$$\mathbb{I}_3(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta[\tilde{T}(t')]}{\sqrt{\rho^2 + (|z| + v|t'|)^2}} . \quad (5.47)$$

donde

$$\tilde{T}(t') = t' - t + \sqrt{\rho^2 + (|z| + v|t'|)^2} . \quad (5.48)$$

No obstante, al usar la propiedad de la delta de Dirac enunciada en (4.51) nos percatamos que los ceros de $\tilde{T}(t')$ son los de la función $T(t')$ dada por (5.13). Esto implica que t'_1 (5.17), t'_2

(5.18), t'_3 (5.19) y t'_4 (5.20) son los ceros de la delta de Dirac de $\mathbb{I}_3(x)$. Pero al exigir causalidad en la teoría tenemos que quedarnos sólo con t'_2 (5.18) y t'_4 (5.20). Esto se debe a que al proceder de manera análoga al caso de ED estándar [137] en el límite cuando $v = 0$ tendremos que

$$t'_2(v = 0) = t - r \quad (t' > 0), \quad (5.49)$$

$$t'_4(v = 0) = t - r \quad (t' < 0), \quad (5.50)$$

mientras que

$$t'_1(v = 0) = t + r \quad (t' > 0), \quad (5.51)$$

$$t'_3(v = 0) = t + r \quad (t' < 0). \quad (5.52)$$

$$(5.53)$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y observamos que sólo t'_2 y t'_4 reproducen la forma correcta del tiempo retardado $t_r = t - r$ cuando la partícula está en reposo en el origen.

Siendo así, la integral $\mathbb{I}_3(x)$ queda como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_3(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt'}{\sqrt{\rho^2 + (|z| + v|t'|)^2}} \left[\frac{\delta(t - t'_2)}{|\tilde{T}'(t'_2)|} + \frac{\delta(t - t'_4)}{|\tilde{T}'(t'_4)|} \right], \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta(t - t'_2)}{|\sqrt{\rho^2 + (|z| + v|t'|)^2} + (|z| + v|t'|)v \operatorname{sgn}(t')|} \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta(t - t'_4)}{|\sqrt{\rho^2 + (|z| + v|t'|)^2} + (|z| + v|t'|)v \operatorname{sgn}(t')|}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Usando la función $\tilde{T}(t')$ (5.48) y recordando que $v > 0$, la expresión previa se puede reescribir como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_3(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta(t - t'_2)}{|t - t' + (|z| + v|t'|)v \operatorname{sgn}(t')|} + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta(t - t'_4)}{|t - t' + (|z| + v|t'|)v \operatorname{sgn}(t')|}, \\ &= \frac{\Theta(t - v|z|)\Theta(t - r)}{|t - t'_2 + (|z| + v|t'_2|)v \operatorname{sgn}(t'_2)|} + \frac{\Theta(-v|z| - t)\Theta(r - t)}{|t - t'_4 + (|z| + v|t'_4|)v \operatorname{sgn}(t'_4)|}, \end{aligned} \quad (5.55)$$

donde se multiplicó por $\Theta(t - v|z|)\Theta(t - r)$ y $\Theta(-v|z| - t)\Theta(r - t)$ respectivamente para garantizar el signo de t'_2 y t'_4 . Ahora, analizaremos los denominadores:

$$t - t'_2 + (|z| + v|t'_2|)v \operatorname{sgn}(t'_2) = t + v|z| - (1 - v^2)t'_2, \quad (5.56)$$

$$t - t'_4 + (|z| + v|t'_4|)v \operatorname{sgn}(t'_4) = t - v|z| - (1 - v^2)t'_4, \quad (5.57)$$

donde se usó que $t'_2 > 0$ y $t'_4 < 0$. Sustituyendo explícitamente los valores de t'_2 y t'_4 reescritos como en la ec. (5.30) a través de (5.29), se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} t - t'_2 + (|z| + v|t'_2|)v \operatorname{sgn}(t'_2) &= t + v|z| - \left(t + v|z| - \sqrt{(|z| + vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2} \right), \\ &= \sqrt{(|z| + vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2}, \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} t - t'_4 + (|z| + v|t'_4|)v \operatorname{sgn}(t'_4) &= t - v|z| - \left(t - v|z| - \sqrt{(|z| - vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2} \right), \\ &= \sqrt{(|z| - vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Sustituyendo estas expresiones en la integral $\mathbb{I}_3(x)$ (5.55), resulta que:

$$\mathbb{I}_3(x) = \frac{\Theta(t - v|z|)\Theta(t - r)}{\sqrt{(|z| + vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2}} + \frac{\Theta(-v|z| - t)\Theta(r - t)}{\sqrt{(|z| - vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2}}, \quad (5.60)$$

donde se quitaron las barras de valor absoluto ya que la raíz cuadrada siempre es positiva.

Ahora bien, procedemos a sintetizar la tercera integral de la expresión de $A^0(x)$ (5.46). Mediante un procedimiento análogo al expuesto en la subsección 5.1.1.2, es posible determinar las siguientes derivadas parciales de \mathbb{I}_2 que la expresión de $A^0(x)$ (5.46) requiere para todos los casos posibles dados en la Tabla 5.1:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_2)}{\partial t^2} &= -\frac{2v^2(1 - v^2)\rho^2}{[(|z| + vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2]^{3/2}} + \frac{6v^2(|z| + vt)^2}{(1 - v^2)\rho^2 \sqrt{(|z| + vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2}} \\ &\quad - \frac{2v^2(|z| + vt)^4}{(1 - v^2)\rho^2 [(|z| + vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2]^{3/2}}, \end{aligned} \quad (5.61)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_4)}{\partial t^2} &= -v^2 \left[\frac{1}{\sqrt{(|z| - vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2}} + \frac{1}{\sqrt{(|z| + vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2}} \right] \\ &\quad + \frac{v(1 - 2v)(|z| - vt)}{(1 - v^2)\rho^2} \left[1 + \frac{|z| - vt}{\sqrt{(|z| - vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2}} \right] \\ &\quad + \frac{v(1 + 2v)(|z| + vt)}{(1 - v^2)\rho^2} \left[1 + \frac{|z| + vt}{\sqrt{(|z| + vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2}} \right] \end{aligned} \quad (5.62)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_3, t'_4)}{\partial t^2} &= \frac{2v^2(1 - v^2)\rho^2}{[(|z| - vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2]^{3/2}} - \frac{6v^2(|z| - vt)^2}{(1 - v^2)\rho^2 \sqrt{(|z| - vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2}} \\ &\quad + \frac{2v^2(|z| - vt)^4}{(1 - v^2)\rho^2 [(|z| - vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (5.63)$$

donde nuevamente observamos que todas estas derivadas parciales tienen dimensiones de x^{-1} como se encontró en las derivadas parciales involucradas en las componentes $A^1(x)$ y $A^2(x)$, lo cual resultará de importancia cuando calculemos el campo eléctrico en la siguiente subsección.

Finalmente, al sustituir la integral de la ED estándar dada en (5.5), la integral (5.60) en (5.46), resulta que la expresión para $A^0(x)$ que considera todos los casos posibles de la Tabla

5.1 es

$$\begin{aligned}
A^0(x) = & \frac{q}{\sqrt{(1-v^2)\rho^2 + (z-vt)^2}} \\
& - \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4 + \tilde{\theta}^2} \left[\frac{\Theta(t-v|z|)\Theta(t-r)}{\sqrt{(|z|+vt)^2 + (1-v^2)\rho^2}} + \frac{\Theta(-v|z|-t)\Theta(r-t)}{\sqrt{(|z|-vt)^2 + (1-v^2)\rho^2}} \right] \\
& + \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4 + \tilde{\theta}^2} \left\{ \Theta(-v|z|-t)\Theta(r-t) \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_3, t'_4)}{\partial t^2} + \Theta(-v|z|-t)\Theta(t-r) \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_4)}{\partial t^2} \right. \\
& + [\Theta(v|z|-t)\Theta(t+v|z|) + \Theta(t-v|z|)] \Theta(r-t) \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_4)}{\partial t^2} \\
& \left. + \Theta(t-v|z|)\Theta(t-r) \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_2)}{\partial t^2} \right\}. \tag{5.64}
\end{aligned}$$

donde las derivadas parciales involucradas en esta expresión están dadas por (5.61), (5.62) y (5.63).

5.1.2. El campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$

En esta subsección determinaremos el campo eléctrico de radiación del cuadripotencial $A^\mu(x)$ definido por las expresiones (5.7), (5.43), (5.44) y (5.64) a través de la relación (4.5).

No obstante, como se mencionó en las subsecciones 5.1.1.2 y 5.1.1.3 las expresiones finales de $A^0(x)$ (5.64), $A^1(x)$ (5.43) y $A^2(x)$ (5.44) incluyen todos los casos posibles de la Tabla 5.1. Debido a lo anterior, por propósitos de simplicidad y con el fin de exhibir cómo se comporta el campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$, en esta tesis sólo obtendremos el campo eléctrico de radiación para el Caso 6 de la Tabla 5.1, i. e., cuando $t > v|z|$ y $r < t$. Esto quiere decir, que tras haber hecho las derivaciones necesarias que la ec. (4.5) nos pide realizar y tras desprestigiar los términos de orden $\mathcal{O}(r^{-2})$, deberemos pedir que $\Theta(t-v|z|) = 1$ y $\Theta(t-r) = 1$ y todas las demás funciones de Heaviside deberán ser cero. Con lo anterior, las expresiones del campo eléctrico de radiación para el Caso 6 son:

$$\begin{aligned}
E^1(\mathbf{x}, t) = & \frac{2\tilde{\theta}q}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{y}{\rho} \left\{ -\delta(-v|z|-t) \frac{\partial \mathbb{I}_1(t'_1, t'_4)}{\partial \rho} - \delta(t-r) \frac{\partial \mathbb{I}_1(t'_1, t'_4)}{\partial \rho} \right. \\
& \left. + [\delta(t-v|z|) + \delta(t-r)] \frac{\partial \mathbb{I}_1(t'_1, t'_2)}{\partial \rho} \right\} \\
& + \frac{\tilde{\theta}^2 q x}{4 + \tilde{\theta}^2} \left\{ \frac{\delta(t-r)}{r \sqrt{(|z|+vt)^2 + (1-v^2)\rho^2}} + \frac{\delta(-v|z|-t)}{\rho} \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_4)}{\partial t \partial \rho} \right. \\
& - \frac{\delta(t-v|z|)}{\rho} \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_2)}{\partial t \partial \rho} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_4)}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_4)}{\partial t \partial \rho} \right] \delta(t-r) \\
& \left. - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_2)}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_2)}{\partial t \partial \rho} \right] \delta(t-r) \right\}, \tag{5.65}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E^2(\mathbf{x}, t) = & -\frac{2\tilde{\theta}q}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{x}{\rho} \left\{ -\delta(-v|z| - t) \frac{\partial \mathbb{I}_1(t'_1, t'_4)}{\partial \rho} - \delta(t - r) \frac{\partial \mathbb{I}_1(t'_1, t'_4)}{\partial \rho} \right. \\
& \left. + [\delta(t - v|z|) + \delta(t - r)] \frac{\partial \mathbb{I}_1(t'_1, t'_2)}{\partial \rho} \right\} \\
& + \frac{\tilde{\theta}^2 q y}{4 + \tilde{\theta}^2} \left\{ \frac{\delta(t - r)}{r \sqrt{(|z| + vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2}} + \frac{\delta(-v|z| - t)}{\rho} \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_4)}{\partial t \partial \rho} \right. \\
& - \frac{\delta(t - v|z|)}{\rho} \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_2)}{\partial t \partial \rho} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_4)}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_4)}{\partial t \partial \rho} \right] \delta(t - r) \\
& \left. - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_2)}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_2)}{\partial t \partial \rho} \right] \delta(t - r) \right\}, \tag{5.66}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E^3(\mathbf{x}, t) = & -\frac{\tilde{\theta}^2 q}{4 + \tilde{\theta}^2} \left[\frac{v \operatorname{sgn}(z) \delta(t - v|z|)}{\sqrt{(|z| + vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2}} + \frac{z \delta(t - r)}{r \sqrt{(|z| + vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2}} \right] \\
& + \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4 + \tilde{\theta}^2} \left[v \operatorname{sgn}(z) \delta(-v|z| - t) + \frac{z}{r} \delta(t - r) \right] \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_4)}{\partial t^2} \\
& + \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4 + \tilde{\theta}^2} \left[v \operatorname{sgn}(z) \delta(t - v|z|) + \frac{z}{r} \delta(t - r) \right] \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_2)}{\partial t^2}, \tag{5.67}
\end{aligned}$$

donde las derivadas parciales involucradas están dadas por (5.32), (5.38), (5.39), (5.40), (5.61) y (5.62). Además, observamos que todas las deltas de Dirac nos permitirán sustituir $t = r$ o

$t = \pm v|z|$ (según sea el caso) en todas las derivadas parciales como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} E^1(\mathbf{x}, t) \\ E^2(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} &= \frac{2\tilde{\theta}q}{4 + \tilde{\theta}^2} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \left\{ \delta(-v|z| - t) \frac{\partial \mathbb{I}_1(t'_1, t'_4)}{\partial \rho} \Big|_{t=-vr|\cos \vartheta|} \right. \\
&+ \delta(t - r) \frac{\partial \mathbb{I}_1(t'_1, t'_4)}{\partial \rho} \Big|_{t=r} - \delta(t - v|z|) \frac{\partial \mathbb{I}_1(t'_1, t'_2)}{\partial \rho} \Big|_{t=vr|\cos \vartheta|} \\
&- \left. \delta(t - r) \frac{\partial \mathbb{I}_1(t'_1, t'_2)}{\partial \rho} \Big|_{t=r} \right\} \\
&+ \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4 + \tilde{\theta}^2} \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \phi \\ \sin \vartheta \sin \phi \end{pmatrix} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\delta(t - r)}{|1 + v|\cos \vartheta|} \right. \\
&+ \frac{\delta(-v|z| - t)}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_4)}{\partial t \partial \rho} \Big|_{t=-vr|\cos \vartheta|} - \frac{\delta(t - v|z|)}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_2)}{\partial t \partial \rho} \Big|_{t=vr|\cos \vartheta|} \\
&+ \left[\frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_4)}{\partial t^2} \Big|_{t=r} - \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_4)}{\partial t \partial \rho} \Big|_{t=r} \right] \delta(t - r) \\
&- \left. \left[\frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_2)}{\partial t^2} \Big|_{t=r} - \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_2)}{\partial t \partial \rho} \Big|_{t=r} \right] \delta(t - r) \right\}, \tag{5.68}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E^3(\mathbf{x}, t) &= -\frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{q}{r} \left[\frac{v \operatorname{sgn}(r \cos \vartheta) \delta(t - vr|\cos \vartheta|)}{\sqrt{(1 + v^2)^2 \cos^2 \vartheta + (1 - v^2) \sin^2 \vartheta}} + \frac{\cos \vartheta \delta(t - r)}{|1 + v|\cos \vartheta|} \right] \\
&+ \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4 + \tilde{\theta}^2} v \operatorname{sgn}(r \cos \vartheta) \delta(-vr|\cos \vartheta| - t) \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_4)}{\partial t^2} \Big|_{t=-vr|\cos \vartheta|} \\
&+ \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4 + \tilde{\theta}^2} \cos \vartheta \delta(t - r) \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_4)}{\partial t^2} \Big|_{t=r} \\
&+ \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4 + \tilde{\theta}^2} v \operatorname{sgn}(r \cos \vartheta) \delta(t - vr|\cos \vartheta|) \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_2)}{\partial t^2} \Big|_{t=vr|\cos \vartheta|} \\
&+ \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4 + \tilde{\theta}^2} \cos \vartheta \delta(t - r) \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_2)}{\partial t^2} \Big|_{t=r}, \tag{5.69}
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \mathbb{I}_1(t'_1, t'_4)}{\partial \rho} \right|_{t=-vr|\cos\vartheta|} &= -\frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{(1+v^2)|\cos\vartheta|}{\sqrt{(1-v^2)^2 \cos^2 \vartheta + (1-v^2) \sin^2 \vartheta}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(1-v^2)|\cos\vartheta|}{\sqrt{(1+v^2)^2 \cos^2 \vartheta + (1-v^2) \sin^2 \vartheta}} \right], \\
\left. \frac{\partial \mathbb{I}_1(t'_1, t'_4)}{\partial \rho} \right|_{t=r} &= -\frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{|\cos\vartheta| - v}{|1-v|\cos\vartheta|} + \frac{|\cos\vartheta| + v}{|1+v|\cos\vartheta|} \right], \quad (5.70) \\
\left. \frac{\partial \mathbb{I}_1(t'_1, t'_2)}{\partial \rho} \right|_{t=vr|\cos\vartheta|} &= -\frac{2|\cos\vartheta|(1+v^2)}{r \sin \vartheta \sqrt{(1+v^2)^2 \cos^2 \vartheta + (1-v^2) \sin^2 \vartheta}}, \\
\left. \frac{\partial \mathbb{I}_1(t'_1, t'_2)}{\partial \rho} \right|_{t=r} &= -\frac{2(|\cos\vartheta| + v)}{r \sin \vartheta |1+v|\cos\vartheta|},
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_4)}{\partial t \partial \rho} \right|_{t=-vr|\cos\vartheta|} &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{2v}{\sin \vartheta} + \frac{v(1-v^2)^2 \sin \vartheta |\cos \vartheta|}{[(1-v^2)^2 \cos^2 \vartheta + (1-v^2) \sin^2 \vartheta]^{3/2}} \right. \\
&\quad - \frac{v(1-v^4) \sin \vartheta |\cos \vartheta|}{[(1+v^2)^2 \cos^2 \vartheta + (1-v^2) \sin^2 \vartheta]^{3/2}} \\
&\quad - \frac{v(1-v^2)^3 |\cos \vartheta|^3}{\sin \vartheta [(1-v^2)^2 \cos^2 \vartheta + (1-v^2) \sin^2 \vartheta]^{3/2}} \\
&\quad + \frac{2v(1-v^2) |\cos \vartheta|}{\sin \vartheta \sqrt{(1+v^2)^2 \cos^2 \vartheta + (1-v^2) \sin^2 \vartheta}} \\
&\quad - \frac{v(1+v^2)^3 |\cos \vartheta|^3}{\rho [(|z| - vt)^2 + (1-v^2)\rho^2]^{3/2}} \\
&\quad \left. + \frac{2v(1+v^2) |\cos \vartheta|}{\sin \vartheta \sqrt{(1+v^2)^2 \cos^2 \vartheta + (1-v^2) \sin^2 \vartheta}} \right\}, \quad (5.71)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_2)}{\partial t \partial \rho} \right|_{t=vr|\cos\vartheta|} &= \frac{1}{r} \left\{ -\frac{2v(1-v^2)(1+v) \sin \vartheta |\cos \vartheta|}{[(1+v^2)^2 \cos^2 \vartheta + (1-v^2) \sin^2 \vartheta]^{3/2}} \right. \\
&\quad + \frac{2v(1+v^2)^3 |\cos \vartheta|^3}{\sin \vartheta [(1+v^2)^2 \cos^2 \vartheta + (1-v^2) \sin^2 \vartheta]^{3/2}} \\
&\quad \left. - \frac{4v(1+v^2) |\cos \vartheta|}{\sin \vartheta \sqrt{(1+v^2)^2 \cos^2 \vartheta + (1-v^2) \sin^2 \vartheta}} \right\}, \quad (5.72)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_4)}{\partial t^2} \right|_{t=r} &= \frac{1}{r} \left\{ -\frac{v^2}{|1-v|\cos\vartheta|} - \frac{v^2}{|1+v|\cos\vartheta|} \right. \\
&+ \frac{v(1-2v)(|\cos\vartheta|-v)}{(1-v^2)\sin^2\vartheta} \left[1 + \frac{|\cos\vartheta|-v}{|1-v|\cos\vartheta|} \right] \\
&+ \left. \frac{v(1+2v)(|\cos\vartheta|+v)}{(1-v^2)\sin^2\vartheta} \left[1 + \frac{|\cos\vartheta|+v}{|1+v|\cos\vartheta|} \right] \right\}, \tag{5.73}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_4)}{\partial t \partial \rho} \right|_{t=r} &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{2v}{\sin\vartheta} \right. \\
&+ \frac{v(1-v^2)(|\cos\vartheta|+v)\sin\vartheta}{|1+v|\cos\vartheta|^3} - \frac{v(1-v^2)(|\cos\vartheta|-v)\sin\vartheta}{|1-v|\cos\vartheta|^3} \\
&- \frac{v(|\cos\vartheta|+v)^3}{\sin\vartheta|1+v|\cos\vartheta|^3} + \frac{2v(|\cos\vartheta|+v)}{\sin\vartheta|1+v|\cos\vartheta|} \\
&- \left. \frac{v(|\cos\vartheta|-v)^3}{\sin\vartheta|1-v|\cos\vartheta|^3} + \frac{2v(|\cos\vartheta|-v)}{\sin\vartheta|1-v|\cos\vartheta|} \right\}, \tag{5.74}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_2)}{\partial t^2} \right|_{t=r} &= \frac{1}{r} \left\{ -\frac{2v^2(1-v^2)\sin^2\vartheta}{|1+v|\cos\vartheta|^3} + \frac{6v^2(|\cos\vartheta|+v)^2}{(1-v^2)\sin^2\vartheta|1+v|\cos\vartheta|} \right. \\
&- \left. \frac{2v^2(|\cos\vartheta|+v)^4}{(1-v^2)\sin^2\vartheta|1+v|\cos\vartheta|^3} \right\}, \tag{5.75}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_2)}{\partial t \partial \rho} \right|_{t=r} &= \frac{1}{r} \left\{ -\frac{2v(1-v^2)(|\cos\vartheta|+v)\sin\vartheta}{|1+v|\cos\vartheta|^3} + \frac{2v(|\cos\vartheta|+v)^3}{\sin\vartheta|1+v|\cos\vartheta|^3} \right. \\
&- \left. \frac{4v(|\cos\vartheta|+v)}{\sin\vartheta|1+v|\cos\vartheta|} \right\}, \tag{5.76}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_4)}{\partial t^2} \right|_{t=-vr|\cos\vartheta|} &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{v^2}{\sqrt{(1+v^2)^2 \cos^2 \vartheta + (1-v^2) \sin^2 \vartheta}} \right. \\
&+ \frac{v^2}{\sqrt{(1-v^2)^2 \cos^2 \vartheta + (1-v^2) \sin^2 \vartheta}} \\
&+ \frac{v(1-2v)(1+v^2)|\cos\vartheta|}{(1-v^2) \sin^2 \vartheta} \\
&\times \left[1 + \frac{(1+v^2)|\cos\vartheta|}{\sqrt{(1+v^2)^2 \cos^2 \vartheta + (1-v^2) \sin^2 \vartheta}} \right] \\
&+ \frac{v(1+2v)(1-v^2)|\cos\vartheta|}{(1-v^2) \sin^2 \vartheta} \\
&\times \left. \left[1 + \frac{(1-v^2)|\cos\vartheta|}{\sqrt{(1-v^2)^2 \cos^2 \vartheta + (1-v^2) \sin^2 \vartheta}} \right] \right\}, \\
\left. \frac{\partial^2 \mathbb{I}_2(t'_1, t'_2)}{\partial t^2} \right|_{t=vr|\cos\vartheta|} &= \frac{1}{r} \left\{ -\frac{2v^2(1-v^2) \sin^2 \vartheta}{[(1+v^2)^2 \cos^2 \vartheta + (1-v^2) \sin^2 \vartheta]^{3/2}} \right. \\
&+ \frac{6v^2(1+v^2)^2 \cos^2 \vartheta}{(1-v^2) \sin^2 \vartheta \sqrt{(1+v^2)^2 \cos^2 \vartheta + (1-v^2) \sin^2 \vartheta}} \\
&- \left. \frac{2v^2(1+v^2)^4 \cos^4 \vartheta}{(1-v^2) \sin^2 \vartheta [(1+v^2)^2 \cos^2 \vartheta + (1-v^2) \sin^2 \vartheta]^{3/2}} \right\} \quad (5.77)
\end{aligned}$$

donde se substituyó $x = r \sin \vartheta \cos \phi$, $y = r \sin \vartheta \sin \phi$ y $z = r \cos \vartheta$, lo cual conlleva a que todas las derivadas parciales decaigan como r^{-1} .

De las expresiones (5.68) y (5.69) observamos que el campo eléctrico proporcional a $2\tilde{\theta}q/(4+\tilde{\theta}^2)$ está en la dirección $\hat{\phi}$, lo cual es de esperarse porque como se puede apreciar de las ecs. (G.27) y (G.28) del Apéndice G, la derivada parcial con respecto al tiempo de esos términos corresponde con los términos proporcionales a $2\tilde{\theta}q/(4+\tilde{\theta}^2)$ del campo eléctrico. Es decir, como consecuencia del EME, a los términos proporcionales a $2\tilde{\theta}q/(4+\tilde{\theta}^2)$ se les puede asociar un origen magnético siendo $g = 2\tilde{\theta}q/(4+\tilde{\theta}^2)$ la “carga magnética” asociada. Luego, como el campo eléctrico dado por las ecs. (5.68) y (5.69) decae como r^{-1} , concluimos que dicho campo sí radiará pues tiene la dependencia en r adecuada, lo cual es un resultado nuevo e interesante que contrasta con el caso de la ED estándar donde no hay radiación como se puede observar al hacer $\tilde{\theta} = 0$. Sin embargo, aún resta estudiar más a fondo las características de este campo eléctrico en el espacio de coordenadas, su distribución angular y su potencia total radiada. Pero esto se hará en el espacio de frecuencias y en el régimen de campo lejano, lo cual constituye el objetivo de la siguiente sección de este capítulo.

5.1.3. El régimen de campo lejano y la Radiación electromagnética de Vavilov-Čerenkov Reversa (RVČR)

En esta segunda subsección calcularemos el cuadripotencial $A^\mu(\mathbf{x}; \omega)$ usando la FG de la subsección 4.3 del capítulo 4 en el régimen de campo lejano. Con dicho cuadripotencial obtendremos el campo electromagnético $\mathbf{E}(\mathbf{x}; \omega)$. Luego, se analizará la distribución angular de la energía total radiada y la energía total radiada para dicho campo eléctrico, aquí se exhibirá la aparición de manera natural del efecto Vavilov-Čerenkov reverso y en la subsección 5.1.3.5 se darán órdenes de magnitud de este efecto en el TlBiSe₂ que es un TI tridimensional.

Antes de comenzar esta subsección, vale la pena recordar que la FG en el campo lejano consiste en la suma de tres términos

$$\bar{G}^\mu_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = \bar{G}^\mu_{ED\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) + \bar{G}^\mu_{\tilde{\theta}\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) + \bar{G}^\mu_{\tilde{\theta}^2\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega), \quad (5.78)$$

donde los tres sumandos están dados por las ecs. (4.81), (4.139) y (4.218). No obstante, por facilidad de consulta para el lector, volveremos a escribir dichos sumandos enseguida:

$$\begin{aligned} \bar{G}^\mu_{ED\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \eta^\mu_\nu \frac{e^{i\tilde{k}_0(r-\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{x}')}}{r}, \\ \bar{G}^\mu_{\tilde{\theta}\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \varepsilon^\mu_\nu \alpha^3 \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0(r-\mathbf{n}_\perp\cdot\mathbf{x}'_\perp)}}{r} \left[\frac{s_\alpha}{|\cos\vartheta|} e^{i\tilde{k}_0|z'\cos\vartheta|} + m_\alpha(r, \vartheta) \right] \\ &\quad + \varepsilon^\mu_\nu \alpha^3 \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \sqrt{\frac{2}{i\pi\tilde{k}_0 r \sin\vartheta}} e^{i\tilde{k}_0(r-\mathbf{n}_\perp\cdot\mathbf{x}'_\perp) \sin\vartheta} t_\alpha(r, \vartheta, \mathbf{x}'_\perp), \\ \bar{G}^\mu_{\tilde{\theta}^2\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0(r-\mathbf{n}_\perp\cdot\mathbf{x}'_\perp)}}{r} \left[C_{1\nu}^\mu(\vartheta, \phi, n) e^{i\tilde{k}_0|z'\cos\vartheta|} + C_{2\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) \right] \\ &\quad + \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \sqrt{\frac{2}{i\pi\tilde{k}_0 r \sin\vartheta}} e^{i\tilde{k}_0(r-\mathbf{n}_\perp\cdot\mathbf{x}'_\perp) \sin\vartheta} C_{3\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) \\ &\quad + \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} e^{i\tilde{k}_0(r-\mathbf{n}_\perp\cdot\mathbf{x}'_\perp)} C_{4\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0), \end{aligned} \quad (5.79)$$

donde $\hat{\mathbf{n}} = (x/r, y/r, z/r)$, $\tilde{\theta}$ está definido en la ec. (3.15), $s^\alpha = (1/n, \mathbf{n}_\perp)$,

$$m^\alpha(r, \vartheta) = \left\{ \frac{1}{n} \Lambda_1(\vartheta), \mathbf{n}_\perp \left[\Lambda_1(\vartheta) + \sqrt{\frac{1 - \sin\vartheta}{2 \sin\vartheta}} \right] \right\}, \quad (5.80)$$

$$t^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0) = \Lambda_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0) \left(\omega, \mathbf{n}_\perp \tilde{k}_0 \sin\vartheta \right) \quad (5.81)$$

con

$$\Lambda_1(\vartheta) = -\frac{1}{\sqrt{2(\sin\vartheta - \sin^2\vartheta)}}, \quad (5.82)$$

$$\Lambda_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_\perp, \tilde{k}_0) = \frac{\pi}{2} \operatorname{erfc} \left[-i \sqrt{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp)} (1 - \sin\vartheta) \right]. \quad (5.83)$$

Y donde también se definieron

$$C_{1\nu}^\mu(\vartheta, \phi, n) = \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \begin{pmatrix} \sin^2 \vartheta & -n_{\perp 1}/n & -n_{\perp 2}/n & 0 \\ n_{\perp 1}/n & -1/n^2 & 0 & 0 \\ n_{\perp 2}/n & 0 & -1/n^2 + \sin^2 \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.84)$$

$$C_{2\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) = \begin{pmatrix} \psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0) & -n_{\perp 1}\psi_2(\vartheta, z', \tilde{k}_0) & -n_{\perp 2}\psi_2(\vartheta, z', \tilde{k}_0) & 0 \\ n_{\perp 1}\psi_2(\vartheta, z', \tilde{k}_0) & \psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) & 0 & 0 \\ n_{\perp 2}\psi_2(\vartheta, z', \tilde{k}_0) & 0 & \psi_4(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.85)$$

$$C_{3\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) = \begin{pmatrix} \chi_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) & -n_{\perp 1}\chi_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) & -n_{\perp 2}\chi_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) & 0 \\ n_{\perp 1}\chi_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) & \chi_3(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) & 0 & 0 \\ n_{\perp 2}\chi_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) & 0 & \chi_4(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.86)$$

$$C_{4\nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0) = \begin{pmatrix} \tau_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0) & -n_{\perp 1}\tau_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0) & -n_{\perp 2}\tau_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0) & 0 \\ n_{\perp 1}\tau_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0) & \tau_3(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0) & 0 & 0 \\ n_{\perp 2}\tau_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0) & 0 & \tau_4(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.87)$$

con

$$\begin{aligned}
\psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0) &= \frac{\tilde{k}_0 |z'|}{i\sqrt{2}(\sin \vartheta - \sin^2 \vartheta)} - \frac{\sqrt{1 + \sin \vartheta}}{2\sqrt{2} \sin \vartheta (1 - \sin \vartheta)}, \\
\psi_2(\vartheta, z', \tilde{k}_0) &= \frac{\psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0)}{n} + i\omega |z'| \sqrt{\frac{2(1 - \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}}, \\
\psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) &= -\frac{\psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0)}{n^2} + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_{\perp}) + \sqrt{\frac{2(1 - \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} |\cos \vartheta|, \\
\psi_4(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0) - \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_{\perp}) - \sqrt{\frac{2(1 - \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} |\cos \vartheta|, \\
\chi_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) &= i\frac{\pi}{2} \tilde{k}_0^2 |z'| \operatorname{erfc} \left[-i\sqrt{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) (1 - \sin \vartheta)} \right], \tag{5.88} \\
\chi_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) &= \frac{\pi}{2} \omega \operatorname{erfc} \left[-i\sqrt{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) (1 - \sin \vartheta)} \right] \\
&\quad \times \left\{ i\tilde{k}_0 |z'| \sin \vartheta + |\cos \vartheta| \left[1 - \frac{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp})}{\sqrt{\pi}} \right] \right\}, \\
\chi_3(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) &= -\frac{\pi}{2} \operatorname{erfc} \left[-i\sqrt{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) (1 - \sin \vartheta)} \right] \left[i\omega^2 |z'| + \tilde{k}_0 (1 - \sin \vartheta) |\cos \vartheta| \right], \\
\chi_4(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tilde{k}_0) &= i\frac{\pi}{2} \operatorname{erfc} \left[-i\sqrt{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) (1 - \sin \vartheta)} \right] \\
&\quad \times \left[i \left(\tilde{k}_0^2 - \omega^2 \right) |z'| + \tilde{k}_0 (1 - \sin \vartheta) |\cos \vartheta| \right], \\
\tau_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0) &= \frac{\tilde{k}_0}{2} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_{\perp}), \\
\tau_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0) &= -\frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \left[\mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_{\perp}) - i2\sqrt{\frac{2}{\pi}} (1 - \sin \vartheta) \right], \\
\tau_3(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0) &= \frac{\omega}{2n} \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_{\perp}), \\
\tau_4(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0) &= -\frac{1}{2} \left(\tilde{k}_0 - \frac{\omega}{n} \right) \sqrt{\frac{\pi(1 + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}} \mathbb{F}(r, \vartheta, \mathbf{x}'_{\perp}), \\
\mathbb{F}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_{\perp}, \tilde{k}_0) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} i - \sqrt{2i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) (1 - \sin \vartheta)} e^{-i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp})(1 - \sin \vartheta)} \\
&\quad \times \operatorname{erfc} \left[-i\sqrt{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp}) (1 - \sin \vartheta)} \right].
\end{aligned}$$

5.1.3.1. El cuadripotencial $A^{\mu}(\mathbf{x}; \omega)$

Consideremos la misma partícula con carga q moviéndose a velocidad constante $v\hat{\mathbf{u}}$ (Ver Fig. 4.1) de la primera subsección 5.1.1 de este capítulo con $v > 1/\sqrt{\epsilon} > 0$, perpendicular a

la interfaz Σ . Las densidades de carga y corriente de dicho sistema están dadas en (5.1), sin embargo aquí necesitamos las transformadas de Fourier en las frecuencias de las densidades (5.1), cuyas expresiones son:

$$\varrho(\mathbf{x}'; \omega) = \frac{q}{v} \delta(x') \delta(y') e^{i\omega \frac{z'}{v}} \quad , \quad \mathbf{j}(\mathbf{x}'; \omega) = q \delta(x') \delta(y') e^{i\omega \frac{z'}{v}} \hat{\mathbf{z}}. \quad (5.89)$$

Lo que prosigue es convolucionar (5.89) con la FG dada por (5.79) a través de la relación (4.14) que en el espacio de frecuencias se reescribe como sigue:

$$A^\mu(\mathbf{x}; \omega) = \int d^3 \mathbf{x}' G^\mu{}_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) J^\nu(\mathbf{x}'; \omega). \quad (5.90)$$

Aquí cabe destacar que en vez de considerar una trayectoria infinita para la carga, tomaremos su movimiento en el intervalo $z \in (-\zeta, \zeta)$, con $\zeta \gg v/\omega$. La condición para ζ será explicada más adelante cuando calculemos la distribución angular de la energía total radiada por unidad de frecuencia.

5.1.3.1.1. Obtención de $A^0(\mathbf{x}; \omega)$

Comencemos por la componente $A^0(\mathbf{x}; \omega)$. De acuerdo con la ec. (5.90) al hacer $\mu = 0$ y utilizar la ec. (5.79), resulta lo siguiente

$$\begin{aligned} A^0(\mathbf{x}; \omega) &= \int d^3 \mathbf{x}' G^0{}_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) J^\nu(\mathbf{x}'; \omega) = \frac{1}{n^2} \int d^3 \mathbf{x}' \bar{G}^0{}_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) J^0(\mathbf{x}'; \omega), \\ &= \frac{q}{vn^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{r} \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' e^{-i\tilde{k}_0 z' \cos \vartheta} e^{i\omega \frac{z'}{v}} \\ &\quad + \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{vn^2 r} \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' \left[C_{1\ 0}^0(\vartheta, \phi, n) e^{i\tilde{k}_0 |z' \cos \vartheta|} + C_{2\ 0}^0(\mathbf{x}, 0, 0, z', \tilde{k}_0) \right] e^{i\omega \frac{z'}{v}} \\ &\quad + \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{q}{vn^2} \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 r \sin \vartheta}} e^{i\tilde{k}_0 r \sin \vartheta} \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' C_{3\ 0}^0(\mathbf{x}, 0, 0, z', \tilde{k}_0) e^{i\omega \frac{z'}{v}} \\ &\quad + \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{vn^2} \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' C_{4\ 0}^0(\mathbf{x}, \mathbf{0}_\perp, \tilde{k}_0) e^{i\omega \frac{z'}{v}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{q}{vn^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{r} \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' e^{i\frac{\omega z'}{v}(1-vn \cos \vartheta)} \\
&\quad + \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{vn^2 r} \tan^2 \vartheta \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' e^{i(\tilde{k}_0 |z'| \cos \vartheta + \omega \frac{z'}{v})} \\
&\quad + \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{vn^2 r} \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' \psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0) e^{i\omega \frac{z'}{v}} \\
&\quad + \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{q}{vn^2} \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 r \sin \vartheta}} e^{i\tilde{k}_0 r \sin \vartheta} \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' \chi_1(\mathbf{x}, 0, 0, z', \tilde{k}_0) e^{i\omega \frac{z'}{v}} \\
&\quad + \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{vn^2} \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' \tau_1(\mathbf{x}, \mathbf{0}_{\perp}, \tilde{k}_0) e^{i\omega \frac{z'}{v}} , \tag{5.91}
\end{aligned}$$

donde se usó que $n = \sqrt{\epsilon}$ y se utilizaron las expresiones de las matrices (5.84), (5.85), (5.86) y (5.87). Vale la pena hacer notar que $A^0(\mathbf{x}; \omega)$ tiene cuatro contribuciones adicionales a la usual. Para determinar completamente $A^0(\mathbf{x}; \omega)$ sólo resta calcular cinco integrales, dos de las cuales son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1(\omega, \vartheta) &= \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' e^{i(-\tilde{k}_0 z' \cos \vartheta + \omega \frac{z'}{v})} , \\
\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta) &= \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' e^{i(\tilde{k}_0 |z'| \cos \vartheta + \omega \frac{z'}{v})} . \tag{5.92}
\end{aligned}$$

No obstante, al observar las expresiones explícitas de $\psi_1(\vartheta, z', \tilde{k}_0)$, $\chi_1(\mathbf{x}, 0, 0, z', \tilde{k}_0)$ y $\tau_1(\mathbf{x}, \mathbf{0}_{\perp}, \tilde{k}_0)$ dadas por las ecs. (5.88), las otras tres integrales restantes darán lugar a integrales de los siguientes dos tipos:

$$\mathcal{I}_3(\mathbf{x}, \tilde{k}_0) = f(\mathbf{x}, \tilde{k}_0) \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' |z'| e^{i\omega \frac{z'}{v}} , \tag{5.93}$$

$$\mathcal{I}_4(\mathbf{x}, \tilde{k}_0) = g(\mathbf{x}, \tilde{k}_0) \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' e^{i\omega \frac{z'}{v}} . \tag{5.94}$$

Primero, calculemos explícitamente $\mathcal{I}_1(\omega, \vartheta)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1(\omega, \vartheta) &= \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' e^{i(-\tilde{k}_0 z' \cos \vartheta + \omega \frac{z'}{v})} = \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' e^{i\frac{\omega z'}{v}(1-vn \cos \vartheta)} , \\
&= \frac{2 \sin(\zeta \Xi_-)}{\zeta \Xi_-} . \tag{5.95}
\end{aligned}$$

donde

$$\Xi_- = \frac{\omega}{v} (1 - vn \cos \vartheta) . \tag{5.96}$$

Ahora, calcularemos $\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta) &= \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' e^{i(\tilde{k}_0|z' \cos \vartheta| + \omega \frac{z'}{v})}, \\
&= \int_{-\zeta}^0 dz' e^{i \frac{z'}{v} \omega (1 - vn |\cos \vartheta|)} + \int_0^{\zeta} dz' e^{i \frac{z'}{v} \omega (1 + vn |\cos \vartheta|)}, \\
&= \frac{-iv e^{i \frac{\omega \zeta'}{v} (1 - vn |\cos \vartheta|)}}{\omega (1 - vn |\cos \vartheta|)} \Big|_{-\zeta}^0 + \frac{-iv e^{i \frac{\omega \zeta'}{v} (1 + vn |\cos \vartheta|)}}{\omega (1 + vn |\cos \vartheta|)} \Big|_0^{\zeta}, \\
&= \frac{-iv}{\omega (1 - vn |\cos \vartheta|)} + \frac{iv}{\omega (1 + vn |\cos \vartheta|)} \\
&\quad + \frac{ie^{-i \frac{\omega \zeta}{v} (1 - vn |\cos \vartheta|)}}{\frac{\omega}{v} (1 - vn |\cos \vartheta|)} - \frac{ie^{i \frac{\omega \zeta}{v} (1 + vn |\cos \vartheta|)}}{\frac{\omega}{v} (1 + vn |\cos \vartheta|)}.
\end{aligned} \tag{5.97}$$

No obstante por propósitos futuros, conviene reescribir $\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta)$ en sus partes real e imaginaria de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta) &= \frac{i}{\frac{\omega}{v} (1 - vn |\cos \vartheta|)} \left[-1 + e^{-i \frac{\omega \zeta}{v} (1 - vn |\cos \vartheta|)} \right] \\
&\quad - \frac{i}{\frac{\omega}{v} (1 + vn |\cos \vartheta|)} \left[-1 + e^{i \frac{\omega \zeta}{v} (1 + vn |\cos \vartheta|)} \right], \\
&= \frac{\sin \left[\frac{\omega \zeta}{v} (1 - vn |\cos \vartheta|) \right]}{\frac{\omega}{v} (1 - vn |\cos \vartheta|)} + \frac{\sin \left[\frac{\omega \zeta}{v} (1 + vn |\cos \vartheta|) \right]}{\frac{\omega}{v} (1 + vn |\cos \vartheta|)} \\
&\quad + i \frac{\cos \left[\frac{\omega \zeta}{v} (1 - vn |\cos \vartheta|) \right] - 1}{\frac{\omega}{v} (1 - vn |\cos \vartheta|)} - i \frac{\cos \left[\frac{\omega \zeta}{v} (1 + vn |\cos \vartheta|) \right] - 1}{\frac{\omega}{v} (1 + vn |\cos \vartheta|)}, \\
&= \frac{\sin \left[\frac{\omega \zeta}{v} (1 - vn |\cos \vartheta|) \right]}{\frac{\omega}{v} (1 - vn |\cos \vartheta|)} + \frac{\sin \left[\frac{\omega \zeta}{v} (1 + vn |\cos \vartheta|) \right]}{\frac{\omega}{v} (1 + vn |\cos \vartheta|)} \\
&\quad + i \frac{\sin^2 \left[\frac{\omega \zeta}{2v} (1 - vn |\cos \vartheta|) \right]}{\frac{\omega}{2v} (1 - vn |\cos \vartheta|)} - i \frac{\sin^2 \left[\frac{\omega \zeta}{2v} (1 + vn |\cos \vartheta|) \right]}{\frac{\omega}{2v} (1 + vn |\cos \vartheta|)},
\end{aligned} \tag{5.98}$$

donde se aplicó la fórmula del ángulo doble a la parte imaginaria de $\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta)$ en la última igualdad. Implementando una notación similar a la usada con $\mathcal{I}_1(\omega, \vartheta)$ (5.95) tendremos que la expresión final de $\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta)$ será

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta) &= \frac{\sin \left(\zeta \tilde{\Xi}_- \right)}{\tilde{\Xi}_-} + \frac{\sin \left(\zeta \tilde{\Xi}_+ \right)}{\tilde{\Xi}_+} \\
&\quad + 2i \frac{\sin^2 \left(\frac{\zeta}{2} \tilde{\Xi}_- \right)}{\tilde{\Xi}_-} - 2i \frac{\sin^2 \left(\frac{\zeta}{2} \tilde{\Xi}_+ \right)}{\tilde{\Xi}_+},
\end{aligned} \tag{5.99}$$

donde

$$\tilde{\Xi}_{\pm} = \frac{\omega}{v} (1 \pm vn|\cos\vartheta|) . \quad (5.100)$$

A continuación, calculamos $\mathcal{I}_3(\mathbf{x}, \tilde{k}_0)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_3(\mathbf{x}, \tilde{k}_0) &= f(\mathbf{x}, \tilde{k}_0) \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' |z'| e^{i\omega \frac{z'}{v}} = f(\mathbf{x}, \tilde{k}_0) \left[- \int_{-\zeta}^0 dz' z' e^{i\omega \frac{z'}{v}} + \int_0^{\zeta} dz' z' e^{i\omega \frac{z'}{v}} \right] , \\ &= f(\mathbf{x}, \tilde{k}_0) \left[- \frac{e^{i\omega \frac{z'}{v}} (v - iz'\omega)}{\omega^2} \Big|_{-\zeta}^0 + \frac{e^{i\omega \frac{z'}{v}} (v - iz'\omega)}{\omega^2} \Big|_0^{\zeta} \right] , \\ &= -f(\mathbf{x}, \tilde{k}_0) \left\{ \frac{2v^2}{\omega^2} \left[1 - \cos\left(\frac{\zeta\omega}{v}\right) \right] + \frac{2\zeta v}{\omega} \sin\left(\frac{\zeta\omega}{v}\right) \right\} , \\ &= -f(\mathbf{x}, \tilde{k}_0) \left[\frac{4v^2}{\omega^2} \sin^2\left(\frac{\zeta\omega}{2v}\right) + \frac{2\zeta v}{\omega} \sin\left(\frac{\zeta\omega}{v}\right) \right] , \end{aligned} \quad (5.101)$$

Y finalmente, calculamos $\mathcal{I}_4(\mathbf{x}, \tilde{k}_0)$:

$$\mathcal{I}_4(\mathbf{x}, \tilde{k}_0) = g(\mathbf{x}, \tilde{k}_0) \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' e^{i\omega \frac{z'}{v}} = 2g(\mathbf{x}, \tilde{k}_0) \frac{\sin\left(\frac{\zeta\omega}{v}\right)}{\frac{\omega}{v}} . \quad (5.102)$$

Sin embargo, resulta conveniente observar que en el límite $\zeta \gg v/\omega$, que efectivamente implica $\zeta \rightarrow \infty$, las funciones $\mathcal{I}_1(\omega, \vartheta)$ (5.95) e $\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta)$ (5.99) presentan expresiones de la forma [139]

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{\sin(\zeta aN)}{aN} = \pi \delta(aN) . \quad (5.103)$$

Tomando ventaja de este comportamiento tipo delta de Dirac, hacemos cero todas las contribuciones altamente oscilatorias que surjan de aquellas funciones cuyo argumento no se pueda anular jamás, como ocurre con el argumento $\tilde{\Xi}_+$. Esto es relevante para la expresión final de $\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta)$, la cual se simplifica como

$$\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta) = \frac{\sin\left(\zeta \tilde{\Xi}_-\right)}{\tilde{\Xi}_-} + 2i \frac{\sin^2\left(\frac{\zeta}{2} \tilde{\Xi}_-\right)}{\tilde{\Xi}_-} , \quad (5.104)$$

donde $\tilde{\Xi}_-$ se definió en la ec. (5.100).

También en el mismo límite $\zeta \gg v/\omega$, encontramos que las integrales $\mathcal{I}_3(\omega, \vartheta)$ e $\mathcal{I}_4(\omega, \vartheta)$ se reescriben de la siguiente forma:

$$\mathcal{I}_3(\mathbf{x}, \tilde{k}_0) = -f(\mathbf{x}, \tilde{k}_0) \left[\pi^2 \delta^2\left(\frac{\omega}{2v}\right) + 2\pi\zeta \delta\left(\frac{\omega}{v}\right) \right] , \quad (5.105)$$

$$\mathcal{I}_4(\mathbf{x}, \tilde{k}_0) = 2g(\mathbf{x}, \tilde{k}_0) \delta\left(\frac{\omega}{v}\right) , \quad (5.106)$$

donde observamos el surgimiento de la condición $\omega/v = 0$ que se cumpliría si $\omega = 0$ o $v \rightarrow \infty$. No obstante, dichos requisitos no se pueden satisfacer porque $\omega = 0$ no es posible ya que estamos

tratando con un sistema dinámico que pide $\omega \neq 0$ y $v \rightarrow \infty$ no es permitido porque $v < 1$ debido a la Relatividad Especial (recordamos que en la sección 3.1 mencionamos que usaríamos unidades gaussianas con $c = \hbar = 1$). De este modo, todos los términos que tengan integrales del tipo $\mathcal{I}_3(\mathbf{x}, \tilde{k}_0)$ o $\mathcal{I}_4(\mathbf{x}, \tilde{k}_0)$ serán cero, entonces al quitar estos términos obtendremos

$$A^0(\mathbf{x}; \omega) = \frac{q}{vn^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{r} \mathcal{I}_1(\omega, \vartheta) + \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{vn^2 r} \tan^2 \vartheta \mathcal{I}_2(\omega, \vartheta), \quad (5.107)$$

donde $\mathcal{I}_1(\omega, \vartheta)$ e $\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta)$ están dadas por las ecs. (5.95) y (5.104) respectivamente.

5.1.3.1.2. Obtención de $A^1(\mathbf{x}; \omega)$

Es turno de calcular $A^1(\mathbf{x}; \omega)$. De acuerdo con la ec. (5.90) al hacer $\mu = 1$ y utilizar la ec. (5.79), tendremos lo siguiente

$$\begin{aligned} A^1(\mathbf{x}; \omega) &= \int d^3 \mathbf{x}' G^1_{\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) J^{\nu}(\mathbf{x}'; \omega) = \int d^3 \mathbf{x}' \bar{G}^1_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) J^0(\mathbf{x}'; \omega), \\ &= \varepsilon^1_0{}^{23} \frac{2\tilde{\theta}q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{vr} \frac{s_2}{|\cos \vartheta|} \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' e^{i\tilde{k}_0 |z' \cos \vartheta|} e^{i\omega \frac{z'}{v}} \\ &\quad + \varepsilon^1_0{}^{23} \frac{2\tilde{\theta}q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{vr} m_2(r, \vartheta) \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' e^{i\omega \frac{z'}{v}} \\ &\quad + \varepsilon^1_0{}^{23} \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{q}{v} \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 r \sin \vartheta}} e^{i\tilde{k}_0 r \sin \vartheta} t_2(\mathbf{x}, \mathbf{0}_{\perp}, \tilde{k}_0) \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' e^{i\omega \frac{z'}{v}} \\ &\quad + \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{vr} \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' \left[C^1_{10}(\vartheta, \phi, n) e^{i\tilde{k}_0 |z' \cos \vartheta|} + C^1_{20}(\mathbf{x}, 0, 0, z', \tilde{k}_0) \right] e^{i\omega \frac{z'}{v}} \\ &\quad + \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{q}{v} \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 r \sin \vartheta}} e^{i\tilde{k}_0 r \sin \vartheta} \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' C^1_{30}(\mathbf{x}, 0, 0, z', \tilde{k}_0) e^{i\omega \frac{z'}{v}} \\ &\quad + \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{v} \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' C^1_{40}(\mathbf{x}, \mathbf{0}_{\perp}, \tilde{k}_0) e^{i\omega \frac{z'}{v}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\tilde{\theta}q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{vr} \frac{\sin \vartheta \sin \phi}{|\cos \vartheta|} \mathcal{I}_2(\omega, \vartheta) \\
&+ \frac{2\tilde{\theta}q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{vr} n_{\perp 2} \left[\Lambda_1(\vartheta) - \frac{i|\cos \vartheta|}{\sqrt{\sin \vartheta}} \right] \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' e^{i\omega \frac{z'}{v}} \\
&+ \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{q}{v} \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 r \sin \vartheta}} e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R} \sin \vartheta} n_{\perp 2} \Lambda_2(\mathbf{x}, \mathbf{0}_{\perp}, \tilde{k}_0) \tilde{k}_0 \sin \vartheta \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' e^{i\omega \frac{z'}{v}} \\
&+ \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{nvr} \frac{n_{\perp 1}}{\cos^2 \vartheta} \mathcal{I}_2(\omega, \vartheta) \\
&+ \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{vr} n_{\perp 1}^1 \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' \psi_2(\vartheta, 0, 0, z') e^{i\omega \frac{z'}{v}} \\
&+ \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{q}{v} n_{\perp 1}^1 \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 r \sin \vartheta}} e^{i\tilde{k}_0 r \sin \vartheta} \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' \chi_2(\mathbf{x}, 0, 0, z', \tilde{k}_0) e^{i\omega \frac{z'}{v}} \\
&+ \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} n_{\perp 1}^1 \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{v} \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' \tau_2(\mathbf{x}, \mathbf{0}_{\perp}, \tilde{k}_0) e^{i\omega \frac{z'}{v}}, \tag{5.108}
\end{aligned}$$

donde se usaron las ecs. (5.79)-(5.88) y (5.89), además de que ya se identificó la aparición de $\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta)$ dada por (5.99) en la última igualdad. Al considerar que las integrales del tipo $\mathcal{I}_3(\omega, \vartheta)$ (5.93) e $\mathcal{I}_4(\omega, \vartheta)$ (5.94) son cero en el límite $\zeta \gg v/\omega$ como dictan las ecs. (5.105) y (5.106), resulta que la expresión final de $A^1(\mathbf{x}; \omega)$ es

$$A^1(\mathbf{x}; \omega) = \frac{2\tilde{\theta}q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{vr} \frac{\sin \vartheta \sin \phi}{|\cos \vartheta|} \mathcal{I}_1(\omega, \vartheta) + \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{nvr} \frac{\sin \vartheta \cos \phi}{\cos^2 \vartheta} \mathcal{I}_2(\omega, \vartheta), \tag{5.109}$$

donde ya sustituimos las componentes del vector $\mathbf{n}_{\perp} = (x/r, y/r, 0)$ por sus equivalentes en coordenadas esféricas y observamos que esta componente es distinta de cero a diferencia de lo ocurrido en la ED estándar.

5.1.3.1.3. Obtención de $A^2(\mathbf{x}; \omega)$

Proseguimos con la componente $A^2(\mathbf{x}; \omega)$. Haciendo $\mu = 2$ en la ec. (5.90) y utilizando la ec. (5.79), obtenemos que

$$\begin{aligned}
A^2(\mathbf{x}; \omega) &= \int d^3\mathbf{x}' G^2_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) J^\nu(\mathbf{x}'; \omega) = \int d^3\mathbf{x}' \bar{G}^2_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) J^0(\mathbf{x}'; \omega) , \\
&= \varepsilon^2_0 \frac{2\tilde{\theta}q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{vr} \frac{s_1}{|\cos \vartheta|} \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' e^{i\tilde{k}_0 |z' \cos \vartheta|} e^{i\omega \frac{z'}{v}} \\
&\quad + \varepsilon^2_0 \frac{2\tilde{\theta}q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{vr} m_1(r, \vartheta) \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' e^{i\omega \frac{z'}{v}} \\
&\quad + \varepsilon^2_0 \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{q}{v} \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 r \sin \vartheta}} e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R} \sin \vartheta} t_1(\mathbf{x}, \mathbf{0}_\perp, \tilde{k}_0) \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' e^{i\omega \frac{z'}{v}} \\
&\quad + \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{vr} \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' \left[C^2_{10}(\vartheta, \phi, n) e^{i\tilde{k}_0 |z' \cos \vartheta|} + C^2_{20}(\mathbf{x}, 0, 0, z', \tilde{k}_0) \right] e^{i\omega \frac{z'}{v}} \\
&\quad + \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{q}{v} \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 r \sin \vartheta}} e^{i\tilde{k}_0 r \sin \vartheta} \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' C^2_{30}(\mathbf{x}, 0, 0, z', \tilde{k}_0) e^{i\omega \frac{z'}{v}} \\
&\quad + \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{v} \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' C^2_{40}(\mathbf{x}, \mathbf{0}_\perp, \tilde{k}_0) e^{i\omega \frac{z'}{v}} , \\
&= -\frac{2\tilde{\theta}q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{vr} \frac{\sin \vartheta \cos \phi}{|\cos \vartheta|} \mathcal{I}_2(\omega, \vartheta) \\
&\quad - \frac{2\tilde{\theta}q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{vr} n_{\perp 1} \left[\Lambda_1(\vartheta) - \frac{i|\cos \vartheta|}{\sqrt{\sin \vartheta}} \right] \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' e^{i\omega \frac{z'}{v}} \\
&\quad - \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{q}{v} \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 r \sin \vartheta}} e^{i\tilde{k}_0 \mathcal{R} \sin \vartheta} n_{\perp 1} \Lambda_2(\mathbf{x}, \mathbf{0}_\perp, \tilde{k}_0) \tilde{k}_0 \sin \vartheta \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' e^{i\omega \frac{z'}{v}} \\
&\quad + \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{nvr} \frac{n^2_\perp}{\cos^2 \vartheta} \mathcal{I}_2(\omega, \vartheta) \\
&\quad + \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{vr} n^2_\perp \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' \psi_2(\vartheta, 0, 0, z') e^{i\omega \frac{z'}{v}} \\
&\quad + \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{q}{v} n^2_\perp \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 r \sin \vartheta}} e^{i\tilde{k}_0 r \sin \vartheta} \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' \chi_2(\mathbf{x}, 0, 0, z', \tilde{k}_0) e^{i\omega \frac{z'}{v}} \\
&\quad + \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{n^2_\perp}{v} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{v} \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' \tau_2(\mathbf{x}, \mathbf{0}_\perp, \tilde{k}_0) e^{i\omega \frac{z'}{v}} . \tag{5.110}
\end{aligned}$$

donde se usaron nuevamente las ecs. (5.79)-(5.88) y (5.89), además de que ya se identificó la aparición de $\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta)$ dada por (5.99) en la última igualdad. Al considerar otra vez que las integrales del tipo $\mathcal{I}_3(\omega, \vartheta)$ (5.93) e $\mathcal{I}_4(\omega, \vartheta)$ (5.94) son cero en el límite $\zeta \gg v/\omega$ como dictan

las ecs. (5.105) y (5.106), resulta que la expresión final de $A^2(\mathbf{x}; \omega)$ es

$$A^2(\mathbf{x}; \omega) = -\frac{2\tilde{\theta}q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{vr} \frac{\sin \vartheta \cos \phi}{|\cos \vartheta|} \mathcal{I}_1(\omega, \vartheta) + \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{nvr} \frac{\sin \vartheta \sin \phi}{\cos^2 \vartheta} \mathcal{I}_2(\omega, \vartheta), \quad (5.111)$$

donde ya sustituimos las componentes del vector $\mathbf{n}_\perp = (x/r, y/r, 0)$ por sus equivalentes en coordenadas esféricas y observamos de nueva cuenta que esta componente es distinta de cero a diferencia de lo ocurrido en la ED estándar.

5.1.3.1.4. Obtención de $A^3(\mathbf{x}; \omega)$

Finalmente, calculamos la componente $A^3(\mathbf{x}; \omega)$. Para ello, hacemos $\mu = 3$ en la ec. (5.90), utilizamos la ec. (5.79) y obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} A^3(\mathbf{x}; \omega) &= \int d^3 \mathbf{x}' G^3_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) J^\nu(\mathbf{x}'; \omega), \\ &= \int d^3 \mathbf{x}' \bar{G}^3_3(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) J^3(\mathbf{x}'; \omega), \\ &= \eta^3_3 q \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{r} \int dz' e^{-i\tilde{k}_0 z' \cos \vartheta} e^{i\omega \frac{z'}{v}} \\ &\quad + \varepsilon^3_{\alpha 3} \frac{2\tilde{\theta}q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{r} \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' \left[\frac{s_\alpha}{|\cos \vartheta|} e^{i\tilde{k}_0 |z' \cos \vartheta|} + m_\alpha(\mathcal{R}, \vartheta) \right] e^{i\omega \frac{z'}{v}} \\ &\quad + \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{r} \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' \left[C^3_{13}(\vartheta, \phi, n) e^{i\tilde{k}_0 |z' \cos \vartheta|} + C^3_{23}(\mathbf{x}, 0, 0, z', \tilde{k}_0) \right] e^{i\omega \frac{z'}{v}} \\ &\quad + \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \sqrt{\frac{2}{i\pi \tilde{k}_0 r \sin \vartheta}} e^{i\tilde{k}_0 r \sin \vartheta} \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' C^3_{33}(\mathbf{x}, 0, 0, z', \tilde{k}_0) e^{i\omega \frac{z'}{v}} \\ &\quad + \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} e^{i\tilde{k}_0 r} \int_{-\zeta}^{\zeta} dz' C^3_{43}(\mathbf{x}, \mathbf{0}_\perp, \tilde{k}_0) e^{i\omega \frac{z'}{v}}, \\ &= q \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{r} \mathcal{I}_1(\omega, \vartheta), \end{aligned} \quad (5.112)$$

donde $\mathcal{I}_1(\omega, \vartheta)$ está dada por la ec. (5.95) y se usaron las ecs. (5.79)-(5.88) y (5.89). Además, observamos que esta componente del 4-potencial es la misma que la de ED estándar.

Vale la pena mencionar que es directo comprobar que las cuatro componentes del cuadripotencial (5.107), (5.109), (5.111) y (5.112) satisfacen la norma de Lorenz (4.7) que en el espacio de coordenadas y en el régimen de campo lejano se reescribe así:

$$nA^0(\mathbf{x}; \omega) - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}; \omega) = 0. \quad (5.113)$$

5.1.3.2. El campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{x}; \omega)$

A continuación, procedemos a calcular el campo eléctrico generado por el cuadripotencial $A^\mu(\mathbf{x}; \omega)$ cuyas componentes son (5.107), (5.109), (5.111) y (5.112), por medio de la ec. (4.5)

que en el régimen de campo lejano y en el espacio de frecuencias se reescribe de la siguiente manera:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}; \omega) = -i\tilde{k}_0 \hat{\mathbf{n}} A^0(\mathbf{x}; \omega) + i\omega \mathbf{A}(\mathbf{x}; \omega), \quad (5.114)$$

donde $\hat{\mathbf{n}} = (x/r, y/r, z/r)$.

Comencemos por la primer componente $E^1(\mathbf{x}; \omega)$. Según la ec. (5.114), tendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} E^1(\mathbf{x}; \omega) &= -i\tilde{k}_0 \frac{q}{vn^2} \sin \vartheta \cos \phi \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{r} \mathcal{I}_1(\omega, \vartheta) \\ &\quad - i\tilde{k}_0 \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{\tan^2 \vartheta}{vn^2} \sin \vartheta \cos \phi \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{r} \mathcal{I}_2(\omega, \vartheta) \\ &\quad - i\omega \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{q \sin \vartheta \sin \phi}{v |\cos \vartheta|} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{r} \mathcal{I}_2(\omega, \vartheta) \\ &\quad + i\omega \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{q \sin \vartheta \cos \phi}{vn \cos^2 \vartheta} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{r} \mathcal{I}_2(\omega, \vartheta) \\ &= -\sin \vartheta \frac{i\omega q e^{i\tilde{k}_0 r}}{vrn} \left[\cos \phi \mathcal{I}_1(\omega, \vartheta) + \frac{2\tilde{\theta}n}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \mathcal{I}_2(\omega, \vartheta) \left(\frac{\sin \phi}{|\cos \vartheta|} - \tilde{\theta} \frac{\cos \phi}{2n} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.115)$$

donde se utilizó que $\tan^2 \vartheta - \sec^2 \vartheta = 1$ para obtener la última igualdad.

Ahora, calculemos la componente $E^2(\mathbf{x}; \omega)$. De acuerdo con la ec. (5.114), tendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} E^2(\mathbf{x}; \omega) &= -i\tilde{k}_0 \frac{q}{vn^2} \sin \vartheta \sin \phi \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{r} \mathcal{I}_1(\omega, \vartheta) \\ &\quad - i\tilde{k}_0 \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{\tan^2 \vartheta}{vn^2} \sin \vartheta \sin \phi \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{r} \mathcal{I}_2(\omega, \vartheta) \\ &\quad + i\omega \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{q \sin \vartheta \cos \phi}{v |\cos \vartheta|} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{r} \mathcal{I}_2(\omega, \vartheta) \\ &\quad + i\omega \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{q \sin \vartheta \sin \phi}{vn \cos^2 \vartheta} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{r} \mathcal{I}_2(\omega, \vartheta) \\ &= -\sin \vartheta \frac{i\omega q e^{i\tilde{k}_0 r}}{vrn} \left[\sin \phi \mathcal{I}_1(\omega, \vartheta) - \frac{2\tilde{\theta}n}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \mathcal{I}_2(\omega, \vartheta) \left(\frac{\cos \phi}{|\cos \vartheta|} + \tilde{\theta} \frac{\sin \phi}{2n} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.116)$$

donde se volvió a utilizar que $\tan^2 \vartheta - \sec^2 \vartheta = 1$ para obtener la última igualdad.

Finalmente, obtendremos la componente $E^3(\mathbf{x}; \omega)$. Según la ec. (5.114), tendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
E^3(\mathbf{x}; \omega) &= -i\tilde{k}_0 \frac{q}{vn^2} \cos \vartheta \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{r} \mathcal{I}_1(\omega, \vartheta) \\
&\quad - i\tilde{k}_0 \frac{\tilde{\theta}^2 q}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{\tan^2 \vartheta}{vn^2} \cos \vartheta \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{r} \mathcal{I}_2(\omega, \vartheta) \\
&\quad + i\omega q \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{r} \mathcal{I}_1(\omega, \vartheta) \\
&= \sin \vartheta \frac{iq\omega e^{i\tilde{k}_0 r}}{vrn} \left[(vn - \cos \vartheta) \frac{\mathcal{I}_1(\omega, \vartheta)}{\sin \vartheta} - \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta)}{\cot \vartheta} \right]. \quad (5.117)
\end{aligned}$$

Se puede verificar que las tres componentes del campo eléctrico (5.115), (5.116) y (5.117) satisfacen que $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} = 0$ como es requerido por los campos de radiación. La expresión para el campo de inducción magnética no será necesaria, sin embargo se puede obtener por medio de la ley de Faraday (4.3) que en la aproximación de campo lejano y en el espacio de frecuencias se reescribe como

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}; \omega) = \sqrt{\epsilon} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}(\mathbf{x}; \omega). \quad (5.118)$$

En este punto, cabe destacar que dentro de la aproximación de campo lejano las ecuaciones de Maxwell (4.1) y (4.2) se reescriben como sigue

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (5.119)$$

Éstas junto con la ec. (5.118) definen una triada derecha para los vectores $\hat{\mathbf{n}}$, \mathbf{E} y \mathbf{B} por medio del vector de Poynting estándar en medios materiales con $\mu = 1$,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad (5.120)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ coincide con la dirección de la velocidad de fase de la onda saliente, como es apropiado para materiales derechos que definiremos como aquellos cuya triada formada por los vectores $\hat{\mathbf{n}}$, \mathbf{E} y \mathbf{B} sea derecha.

5.1.3.3. Distribución angular de la energía total radiada por unidad de frecuencia

Es turno de calcular la distribución angular de la energía total radiada por unidad de frecuencia. No obstante, haremos un breve resumen de cómo calcular dicha distribución para que esta tesis quede consistente y sea de facilidad al lector.

El flujo instantáneo de energía, a un tiempo particular t , está dado por el vector de Poynting [76, 140]

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t), \quad (5.121)$$

por lo que la energía total radiada que cruza una unidad de área de la superficie normal a \mathbf{S} es

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \mathbf{E}^*(\mathbf{x}; \omega) e^{i\omega t} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t), \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \mathbf{E}^*(\mathbf{x}; \omega) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}; \omega), \\
 &= \hat{\mathbf{n}} \frac{\sqrt{\epsilon}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} |\mathbf{E}(\mathbf{x}; \omega)|^2,
 \end{aligned} \tag{5.122}$$

donde se usó la ec. (5.118) junto con el hecho de que $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B} = 0$. La energía fluye en la dirección de $\hat{\mathbf{n}}$ y la energía radiada por unidad de área perpendicular a esta dirección será

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \frac{\sqrt{\epsilon}}{4\pi^2} \int_0^{\infty} |\mathbf{E}(\mathbf{x}; \omega)|^2, \tag{5.123}$$

donde se usó la propiedad de simetría del campo eléctrico $\mathbf{E}^*(\mathbf{x}; \omega) = \mathbf{E}(\mathbf{x}; -\omega)$. Al estudiar radiación, resulta más útil considerar la energía total radiada dentro del ángulo sólido $d\Omega$, como se muestra enseguida

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} dt (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}) r^2 d\Omega &= d\Omega \frac{\sqrt{\epsilon} r^2}{4\pi^2} \int_0^{\infty} |\mathbf{E}(\mathbf{x}; \omega)|^2, \\
 &\equiv d\Omega \frac{dE}{d\Omega} \equiv d\Omega \int_0^{\infty} \frac{d^2 E}{d\omega d\Omega}.
 \end{aligned} \tag{5.124}$$

Por lo tanto [76, 141],

$$\frac{d^2 E}{d\omega d\Omega} = \frac{\sqrt{\epsilon} r^2}{4\pi^2} |\mathbf{E}(\mathbf{x}; \omega)|^2. \tag{5.125}$$

Una vez obtenida la expresión para la distribución angular de la energía total radiada por unidad de frecuencia (5.125), lo que prosigue es sustituir las componentes (5.115), (5.116) y (5.117) en dicha ecuación.

Dicho lo anterior, procedemos a calcular la cantidad $|\mathbf{E}(\mathbf{x}; \omega)|^2$ explícitamente. A partir de

las componentes (5.115), (5.116) y (5.117) tendremos que:

$$\begin{aligned}
|E^1(\mathbf{x}; \omega)|^2 &= \frac{q^2 \omega^2 \sin^2 \vartheta}{v^2 r^2 n^2} \left\{ \cos^2 \phi \mathcal{I}_1^2(\omega, \vartheta) \right. \\
&+ \frac{2n\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \left(\frac{\sin \phi}{|\cos \vartheta|} - \tilde{\theta} \frac{\cos \phi}{2n} \right) \cos \phi \mathcal{I}_1(\omega, \vartheta) [\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta) + \mathcal{I}_2^*(\omega, \vartheta)] \\
&\left. \frac{4n^2 \tilde{\theta}^2}{(4n^2 + \tilde{\theta}^2)^2} |\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta)|^2 \left(\frac{\sin \phi}{|\cos \vartheta|} - \tilde{\theta} \frac{\cos \phi}{2n} \right)^2 \right\}, \quad (5.126)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|E^2(\mathbf{x}; \omega)|^2 &= \frac{q^2 \omega^2 \sin^2 \vartheta}{v^2 r^2 n^2} \left\{ \sin^2 \phi \mathcal{I}_1^2(\omega, \vartheta) \right. \\
&- \frac{2n\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \left(\frac{\cos \phi}{|\cos \vartheta|} + \tilde{\theta} \frac{\sin \phi}{2n} \right) \sin \phi \mathcal{I}_1(\omega, \vartheta) [\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta) + \mathcal{I}_2^*(\omega, \vartheta)] \\
&\left. \frac{4n^2 \tilde{\theta}^2}{(4n^2 + \tilde{\theta}^2)^2} |\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta)|^2 \left(\frac{\cos \phi}{|\cos \vartheta|} + \tilde{\theta} \frac{\sin \phi}{2n} \right)^2 \right\}, \quad (5.127)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|E^3(\mathbf{x}; \omega)|^2 &= \frac{q^2 \omega^2 \sin^2 \vartheta}{v^2 r^2 n^2} \left\{ (vn - \cos \vartheta)^2 \frac{\mathcal{I}_1^2(\omega, \vartheta)}{\sin^2 \vartheta} \right. \\
&- \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} (vn - \cos \vartheta) \frac{\mathcal{I}_1(\omega, \vartheta)}{\sin \vartheta \cot \vartheta} [\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta) + \mathcal{I}_2^*(\omega, \vartheta)] \\
&\left. \frac{\tilde{\theta}^4}{(4n^2 + \tilde{\theta}^2)^2} \frac{|\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta)|^2}{\cot^2 \vartheta} \right\}. \quad (5.128)
\end{aligned}$$

Cuya suma nos da lo siguiente:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{E}(\mathbf{x}; \omega)|^2 &= \frac{q^2 \omega^2 \sin^2 \vartheta}{v^2 r^2 n^2} \left\{ \left[\cos^2 \phi + \sin^2 \phi + \frac{(vn - \cos \vartheta)^2}{\sin^2 \vartheta} \right] \mathcal{I}_1^2(\omega, \vartheta) \right. \\
&+ \left[\frac{2n\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{|\cos \vartheta|} - \tilde{\theta} \frac{\cos^2 \phi}{2n} - \frac{\cos \phi \sin \phi}{|\cos \vartheta|} - \tilde{\theta} \frac{\sin^2 \phi}{2n} \right) \right. \\
&- \left. \left. \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{vn - \cos \vartheta}{\sin \vartheta \cot \vartheta} \right] 2\mathcal{I}_1(\omega, \vartheta) \operatorname{Re} [\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta)] \right. \\
&+ \left[4n^2 \left(\frac{\sin \phi}{|\cos \vartheta|} - \tilde{\theta} \frac{\cos \phi}{2n} \right)^2 + 4n^2 \left(\frac{\cos \phi}{|\cos \vartheta|} + \tilde{\theta} \frac{\sin \phi}{2n} \right)^2 \right. \\
&+ \left. \left. \frac{\tilde{\theta}^2}{\cot^2 \vartheta} \right] \frac{\tilde{\theta}^2}{(4n^2 + \tilde{\theta}^2)^2} |\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta)|^2, \right. \tag{5.129} \\
&= \frac{q^2 \omega^2 \sin^2 \vartheta}{v^2 r^2 n^2} \left\{ \left[1 + \frac{(vn - \cos \vartheta)^2}{\sin^2 \vartheta} \right] \mathcal{I}_1^2(\omega, \vartheta) \right. \\
&- \left[1 + \frac{vn - \cos \vartheta}{\cos \vartheta} \right] \frac{2\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \mathcal{I}_1(\omega, \vartheta) \operatorname{Re} [\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta)] \\
&+ \left[4n^2 \left(\frac{1}{\cos^2 \vartheta} + \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2} \right) + \frac{\tilde{\theta}^2}{\cot^2 \vartheta} \right] \frac{\tilde{\theta}^2}{(4n^2 + \tilde{\theta}^2)^2} |\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta)|^2 \left. \right\}. \tag{5.130}
\end{aligned}$$

Simplificamos los términos que se encuentran entre corchetes y reescribimos $|\mathbf{E}(\mathbf{x}; \omega)|^2$ como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{E}(\mathbf{x}; \omega)|^2 &= \frac{q^2 \omega^2 \sin^2 \vartheta}{v^2 r^2 n^2} \left\{ \left[\frac{1 + v^2 n^2 - 2vn \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \right] \mathcal{I}_1^2(\omega, \vartheta) \right. \\
&- \frac{vn}{\cos \vartheta} \frac{2\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \mathcal{I}_1(\omega, \vartheta) \operatorname{Re} [\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta)] \\
&+ \left. \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \sec^2 \vartheta |\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta)|^2 \right\}. \tag{5.131}
\end{aligned}$$

Recordando la ec. (5.103), observamos que el comportamiento tipo delta de Dirac de las funciones $\mathcal{I}_1(\omega, \vartheta)$ e $\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta)$ conduce a la condición de VČ $\sin^2 \vartheta_{\text{VČ}} = 1 - 1/(v^2 n^2)$. Lo cual implicará que la expresión final de $|\mathbf{E}(\mathbf{x}; \omega)|^2$ es la siguiente:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{E}(\mathbf{x}; \omega)|^2 &= \frac{q^2 \omega^2}{r^2} \left(1 - \frac{1}{v^2 n^2} \right) \left\{ \mathcal{I}_1^2(\omega, \vartheta) - \frac{2\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \mathcal{I}_1(\omega, \vartheta) \operatorname{Re} [\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta)] \right. \\
&+ \left. \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} |\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta)|^2 \right\}. \tag{5.132}
\end{aligned}$$

Luego, al sustituir (5.132) en la ec. (5.125) tendremos que la distribución angular de la energía total radiada por unidad de frecuencia en el intervalo $-\zeta < z < \zeta$ con $\zeta \rightarrow \infty$ para el campo dado por las componentes (5.115), (5.116) y (5.117) se puede presentar como la siguiente suma de tres términos

$$\frac{d^2 E}{d\omega d\Omega} = \frac{d^2 E_1}{d\omega d\Omega} + \frac{d^2 E_{12}}{d\omega d\Omega} + \frac{d^2 E_2}{d\omega d\Omega}, \quad (5.133)$$

donde

$$\frac{d^2 E_1}{d\omega d\Omega} = \frac{n\omega^2 q^2}{4\pi^2} \left(1 - \frac{1}{v^2 n^2}\right) \mathcal{I}_1^2(\omega, \vartheta), \quad (5.134)$$

$$\frac{d^2 E_{12}}{d\omega d\Omega} = -\frac{n\omega^2 q^2}{2\pi^2} \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \left(1 - \frac{1}{v^2 n^2}\right) \mathcal{I}_1(\omega, \vartheta) \operatorname{Re} [\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta)], \quad (5.135)$$

$$\frac{d^2 E_2}{d\omega d\Omega} = \frac{n\omega^2 q^2}{4\pi^2} \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \left(1 - \frac{1}{v^2 n^2}\right) |\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta)|^2. \quad (5.136)$$

Observamos que las distribuciones de arriba tienen simetría azimutal y que son funciones pares del ángulo ϑ y de $\tilde{\theta}$ (ver ecs. (5.95) y (5.100)). En otras palabras, los términos dominantes inducidos por el EME son correcciones de orden $\tilde{\theta}^2$. También, queremos enfatizar que la distribución $d^2 E_{12}/d\omega d\Omega$ es un término de interferencia que surge debido a la interferencia entre las dos fases de la FG cuya presencia está codificada por las funciones $\mathcal{I}_1(\omega, \vartheta)$ e $\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta)$. Haciendo $\tilde{\theta} = 0$ recuperamos la distribución de Vavilov-Čerenkov (VČ) conocida [142]:

$$\frac{d^2 E_1}{d\omega d\Omega} = \frac{n\omega^2 q^2}{\pi^2} \left(1 - \frac{1}{v^2 n^2}\right) \frac{\sin^2(\zeta \Xi_-)}{\Xi_-^2}. \quad (5.137)$$

Sustituyendo $\mathcal{I}_1(\omega, \vartheta)$ (5.95) e $\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta)$ (5.104), tendremos que:

$$\frac{d^2 E_{12}}{d\omega d\Omega} = -\frac{n\omega^2}{\pi^2} \frac{\tilde{\theta}^2 q^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \left(1 - \frac{1}{v^2 n^2}\right) \frac{\sin(\zeta \Xi_-) \sin(\zeta \tilde{\Xi}_-)}{\Xi_- \tilde{\Xi}_-}, \quad (5.138)$$

$$\frac{d^2 E_2}{d\omega d\Omega} = \frac{n\omega^2}{4\pi^2} \frac{\tilde{\theta}^2 q^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \left(1 - \frac{1}{v^2 n^2}\right) \left[\frac{\sin^2(\zeta \tilde{\Xi}_-)}{\tilde{\Xi}_-^2} + \frac{\sin^4\left(\frac{\zeta}{2} \tilde{\Xi}_-\right)}{\frac{1}{4} \tilde{\Xi}_-^2} \right]. \quad (5.139)$$

La suma de las ecuaciones (5.137), (5.138) y (5.139) nos da la distribución angular de la energía total radiada por unidad de frecuencia:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E}{d\omega d\Omega} = & \frac{n\omega^2 q^2}{\pi^2} \left(1 - \frac{1}{v^2 n^2}\right) \frac{\sin^2\left[\frac{\omega\zeta}{v}(1 - vn \cos \vartheta)\right]}{\left[\frac{\omega}{v}(1 - vn \cos \vartheta)\right]^2} \\ & - \frac{n\omega^2}{\pi^2} \frac{\tilde{\theta}^2 q^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \left(1 - \frac{1}{v^2 n^2}\right) \frac{\sin\left[\frac{\omega\zeta}{v}(1 - vn \cos \theta)\right] \sin\left[\frac{\omega\zeta}{v}(1 - vn |\cos \theta|)\right]}{\frac{\omega}{v}(1 - vn \cos \theta) \frac{\omega}{v}(1 - vn |\cos \theta|)} \\ & + \frac{n\omega^2}{4\pi^2} \frac{\tilde{\theta}^2 q^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \left(1 - \frac{1}{v^2 n^2}\right) \left\{ \frac{\sin^2\left[\frac{\omega\zeta}{v}(1 - vn |\cos \vartheta|)\right]}{\frac{\omega^2}{v^2}(1 - vn |\cos \vartheta|)^2} + \frac{\sin^4\left[\frac{\omega\zeta}{2v}(1 - vn |\cos \vartheta|)\right]}{\frac{\omega^2}{4v^2}(1 - vn |\cos \vartheta|)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (5.140)$$

donde hemos escrito explícitamente la definición de Ξ_- (5.96) y $\tilde{\Xi}_-$ (5.100) para que sea más clara la discusión de los párrafos siguientes para el lector.

Como ya se mencionó previamente, el comportamiento tipo delta de Dirac de las funciones $\mathcal{I}_1(\omega, \vartheta)$ e $\mathcal{I}_2(\omega, \vartheta)$ conduce a la condición de VČ $\sin^2 \vartheta_{V\check{C}} = 1 - 1/(v^2 n^2)$, la cual muestra claramente que las distribuciones (5.137) y (5.138) contribuyen sólo a la radiación de Vavilov-Čerenkov anversa (RVČA) con $\cos \vartheta_{V\check{C}} = 1/(nv) > 0$. Por el contrario, la distribución $d^2 E_2/d\omega d\Omega$ contribuye tanto al cono de VČ delantero ($\cos \vartheta > 0$) como al cono de VČ trasero ($\cos \vartheta < 0$) precisamente por la dependencia en $|\cos \vartheta|$ que permite valores positivos y negativos del ángulo ϑ . En otras palabras, la radiación se puede detectar en la dirección trasera, i.e., $\cos \vartheta < 0$, de acuerdo con la distribución angular (5.139), que define el cono de VČ reverso y que constituye el resultado más importante de esta tesis doctoral.

La radiación anversa recibe correcciones del orden $\tilde{\theta}^2$ con respecto al caso estándar. La radiación de Vavilov-Čerenkov reversa es puramente del orden de $\tilde{\theta}^2$ y en general será fuertemente suprimida con respecto a la producción delantera, sin embargo es diferente de cero. Si el ángulo del cono delantero es ϑ_0 , entonces el ángulo correspondiente al cono trasero será $\pi - \vartheta_0$. Como todo esto es ED estándar sólo con fuentes adicionales en la interfaz, el vector de Poynting y el frente de ondas se propagan en la misma dirección como ya se había mencionado después de la ec. (5.120). De hecho, este modelo provee la interpretación usual de la radiación de un sistema observado en un ángulo sólido arbitrario $d\Omega$.

Las Figs. 5.3a y 5.3b muestran la distribución angular de la energía radiada por unidad de frecuencia en el caso de RVČA correspondiente a la ec. (5.137) para un dieléctrico con $n = 2$ y $\tilde{\theta} = 0$, para la frecuencia promedio de $\omega = 2.5$ eV (500 nm) en el espectro de VČ. En cada figura, la partícula se mueve de izquierda a derecha a lo largo de la línea $\pi - 0$. En la Fig. 5.3a la línea sólida cyan se asocia a $v = 0.5009$ y $\zeta = 2.8$ eV $^{-1}$, y la línea punteada morada corresponde a $v = 0.9$ y $\zeta = 1.0$ eV $^{-1}$. Estos valores bajos de ζ fueron elegidos para ilustrar cómo emergen los lóbulos de la radiación delantera. En la Fig. 5.3b la línea sólida cyan corresponde a $v = 0.5009$ y $\zeta = 4830$ eV $^{-1}$, y la línea punteada morada se asocia a $v = 0.9$ y $\zeta = 340$ eV $^{-1}$. Tal incremento en el valor de ζ es suficiente para mostrar la formación de un cono de Vavilov-Čerenkov delantero en cada caso, pues dicho incremento mejora la aproximación a la delta de Dirac como se puede ver en la ec. (5.103).

Las Figs. 5.4a y 5.4b incluyen la distribución angular para la energía radiada por unidad de frecuencia que surge de la contribución de la ec. (5.139), donde claramente se muestra la RVČR. A partir de estas figuras, este término también provee correcciones a la RVČA. Ambas correcciones están fuertemente suprimidas con respecto a la RVČA, por ello las escalas en estas figuras se eligieron adecuadamente para hacer visible estas contribuciones diferentes de cero. Aquí tomamos nuevamente la frecuencia $\omega = 2.5$ eV y la carga se propaga ahora en un θ -medio con $n = 2$ y $\tilde{\theta} = 11\alpha$, de izquierda a derecha a lo largo de la línea $\pi - 0$. En la Fig. 5.4a la línea sólida cyan corresponde a $v = 0.5009$ y $\zeta = 2.8$ eV $^{-1}$, mientras que la línea punteada morada se asocia a $v = 0.9$ y $\zeta = 1.0$ eV $^{-1}$. La contribución correspondiente a los conos de

Vavilov-Čerenkov delantero y trasero es manifiesta en la Fig. 5.4b donde sólo el parámetro ζ es modificado con respecto a la Fig. 5.4a al incrementarlo a 4800 eV^{-1} y 340 eV^{-1} respectivamente. Todas las distribuciones angulares que graficamos se calcularon a partir de sus correspondientes expresiones $d^2E/d\omega d\Omega$ divididas por el factor común $q^2/\pi^2 = 7.4 \times 10^{-4}$ para $q = \sqrt{\alpha}$.

La distribución angular de la energía total radiada por unidad de frecuencia (5.140) tiene una gráfica prácticamente idéntica a las Figs. 5.3a y 5.3b, ya que las correcciones al RVČA provenientes de las ecs. (5.138) y (5.139) están fuertemente suprimidas por el factor $\tilde{\theta}^2$. Por esta razón, es que hemos realizado la Fig. 5.5 con la gráfica polar de la RVČ completa junto con una gráfica donde muestra un zoom a la escala para evidenciar la diferencia de escalas entre la RVČA y la RVČR. Sin embargo, queremos enfatizar que la contribución negativa de la ec. (5.138) sólo disminuye la radiación en la dirección delantera pero no afecta a la RVČR, que pese a estar fuertemente suprimida, siempre será distinta de cero.

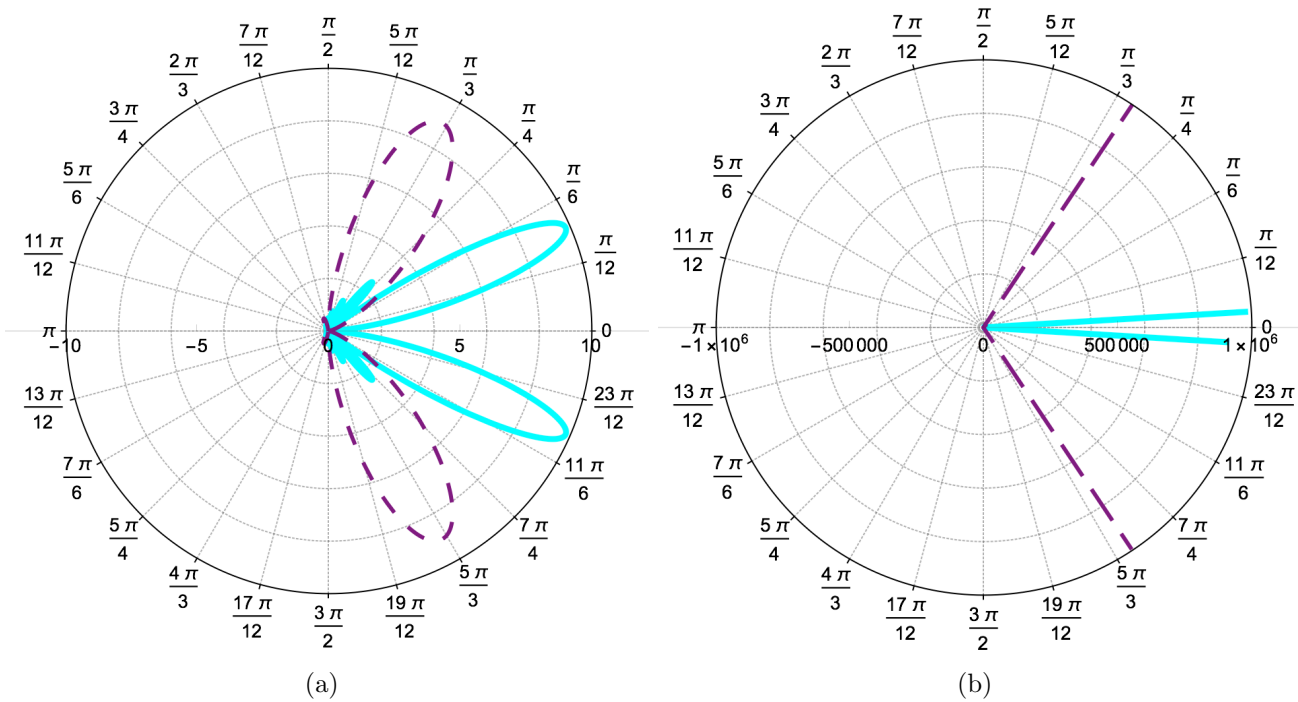


Figura 5.3: Distribución angular de la energía radiada por unidad de frecuencia en el caso de pura radiación de Vavilov-Čerenkov anversa para $n = 2$, $\omega = 2.48 \text{ eV}$ y $\tilde{\theta} = 0$. (a) La línea sólida cyan se asocia a $v = 0.5009$ y $\zeta = 2.8 \text{ eV}^{-1}$, y la línea punteada morada corresponde a $v = 0.9$ y $\zeta = 1.0 \text{ eV}^{-1}$. (b) La línea sólida cyan se asocia a $v = 0.5009$ y $\zeta = 4830 \text{ eV}^{-1}$, y la línea punteada morada corresponde a $v = 0.9$ y $\zeta = 340 \text{ eV}^{-1}$.

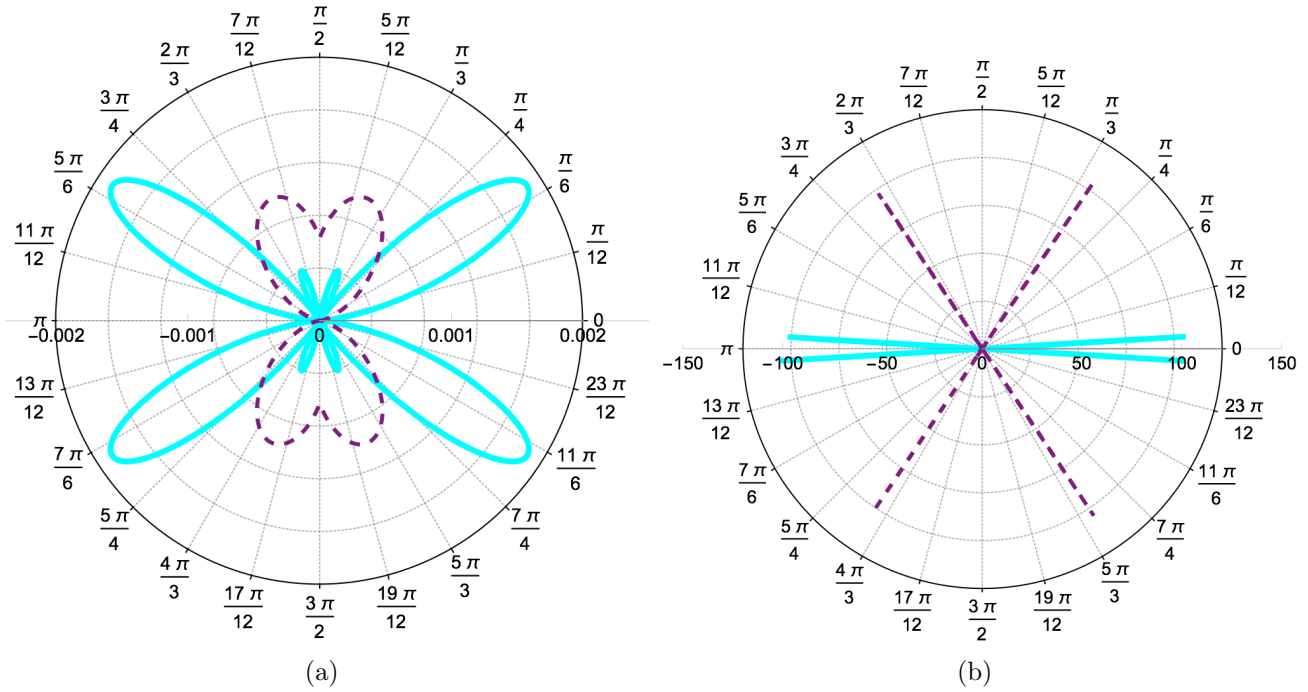


Figura 5.4: Distribución angular de la energía radiada por unidad de frecuencia en el caso de pura radiación de Vavilov-Čerenkov reversa para $n = 2$, $\omega = 2.48$ eV y $\tilde{\theta} = 11\alpha$. (a) La línea sólida cyan se asocia a $v = 0.5009$ y $\zeta = 2.8$ eV $^{-1}$, y la línea punteada morada corresponde a $v = 0.9$ y $\zeta = 1.0$ eV $^{-1}$. (b) La línea sólida cyan se asocia a $v = 0.5009$ y $\zeta = 4830$ eV $^{-1}$, y la línea punteada morada corresponde a $v = 0.9$ y $\zeta = 340$ eV $^{-1}$.

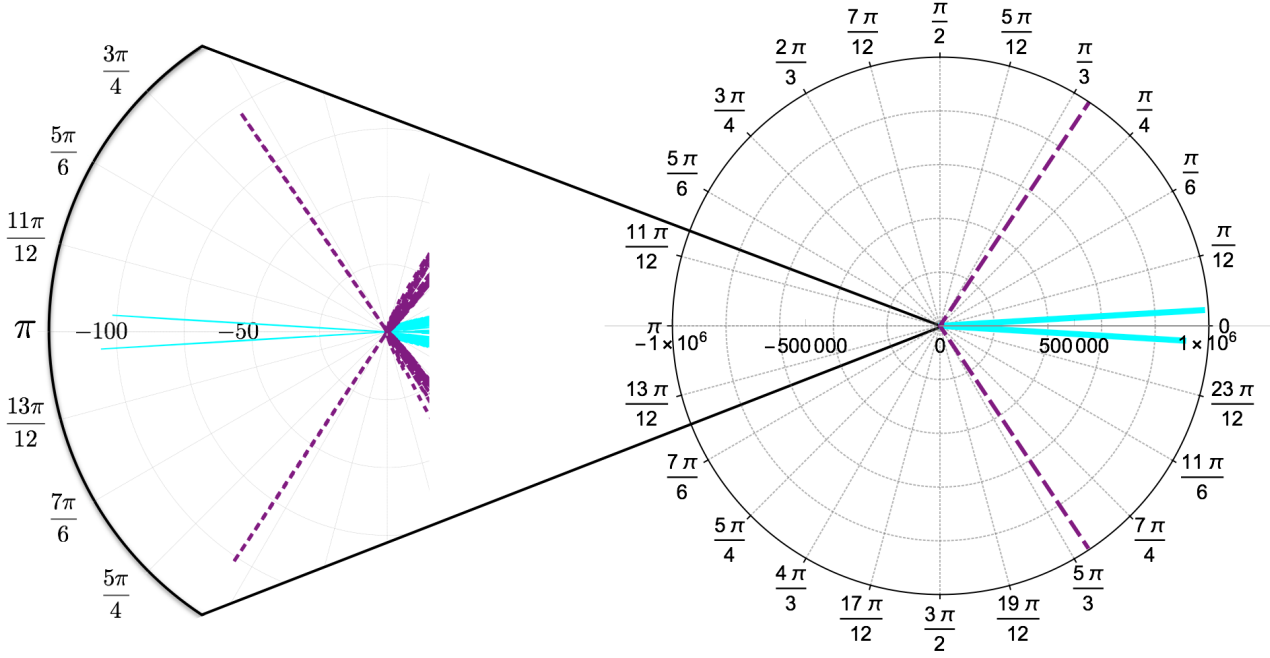


Figura 5.5: Distribución angular de la energía radiada por unidad de frecuencia en el caso de pura radiación de Vavilov-Čerenkov reversa para $n = 2$, $\omega = 2.48 \text{ eV}$ y $\tilde{\theta} = 11\alpha$. La línea sólida cian se asocia a $v = 0.5009$ y $\zeta = 4830 \text{ eV}^{-1}$, y la línea punteada morada corresponde a $v = 0.9$ y $\zeta = 340 \text{ eV}^{-1}$.

5.1.3.4. Energía total radiada

En esta subsección, presentamos la energía total radiada por unidad de frecuencia de la partícula con una trayectoria $z \in [-\zeta, \zeta]$ cuya longitud total es $z = 2\zeta$. Dado que el procedimiento a seguir es una calca del usado para obtener la energía total radiada $dE_1/d\omega$, daremos un repaso detallado a dicho procedimiento que se encuentra en [142]. Integrando la expresión (5.137) con respecto al ángulo sólido, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{dE_1}{d\omega} &= \int_{\Omega} \frac{d^2 E_1}{d\omega d\Omega} d\Omega, \\
 &= \frac{n\omega^2 q^2}{\pi^2} \left(1 - \frac{1}{v^2 n^2}\right) \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta \frac{\sin^2 \left[\frac{\omega \zeta}{v} (1 - vn \cos \vartheta) \right]}{\left[\frac{\omega}{v} (1 - vn \cos \vartheta) \right]^2}, \\
 &= -\frac{2n\omega^2 q^2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{v^2 n^2}\right) \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) \frac{\sin^2 \left[\frac{\omega \zeta}{v} (1 - vn \cos \vartheta) \right]}{\left[\frac{\omega}{v} (1 - vn \cos \vartheta) \right]^2}. \quad (5.141)
 \end{aligned}$$

Recordando que el integrando presenta un comportamiento tipo delta de Dirac en el límite $\zeta \gg v/\omega$, esto hará que la radiación se localice bruscamente en un lóbulo principal alrededor del ángulo $\vartheta_{V\check{C}}$ determinado por $\cos \vartheta_{V\check{C}} = 1/(vn)$, conllevando a una contribución únicamente en la dirección delantera. Por lo tanto, haciendo el cambio de variable $u = \frac{\omega \zeta}{v} (1 - vn \cos \vartheta)$

podremos extender los límites de u a $\pm\infty$ de manera segura siempre que incluyamos el máximo localizado en $u = 0$. Obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\frac{dE_1}{d\omega} &= \frac{2\omega q^2 \zeta}{\pi} \left(1 - \frac{1}{v^2 n^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\sin^2 u}{u^2}, \\ &= q^2 \omega z \left(1 - \frac{1}{v^2 n^2}\right),\end{aligned}\quad (5.142)$$

donde se introdujo la longitud total $z = 2\zeta$ que ha viajado la partícula, con lo cual se recupera el resultado estándar [142]. En otras palabras, estamos estimando la contribución de cada lóbulo bruscamente localizado como

$$\int_{\text{lóbulo}} d(\cos \vartheta) \frac{\sin^2(\zeta \Xi_-)}{\Xi_-^2} = \frac{\zeta}{\omega n} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\sin^2 u}{u^2} = \frac{\zeta \pi}{\omega n}.\quad (5.143)$$

Ahora, aplicaremos el procedimiento previo al siguiente término a integrar que corresponde a la ec. (5.138). Integrando con respecto al ángulo sólido tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{dE_{12}}{d\omega} &= \int_{\Omega} \frac{d^2 E_{12}}{d\omega d\Omega} d\Omega, \\ &= -\frac{\tilde{\theta}^2 q^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{2n\omega^2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{v^2 n^2}\right) \\ &\quad \times \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta \frac{\sin\left[\frac{\omega\zeta}{v}(1 - vn \cos \vartheta)\right]}{\frac{\omega}{v}(1 - vn \cos \vartheta)} \frac{\sin\left[\frac{\omega\zeta}{v}(1 - vn|\cos \vartheta|)\right]}{\frac{\omega}{v}(1 - vn|\cos \vartheta|)}, \\ &= \frac{\tilde{\theta}^2 q^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{2n\omega^2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{v^2 n^2}\right) \\ &\quad \times \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) \frac{\sin\left[\frac{\omega\zeta}{v}(1 - vn \cos \vartheta)\right]}{\frac{\omega}{v}(1 - vn \cos \vartheta)} \frac{\sin\left[\frac{\omega\zeta}{v}(1 - vn|\cos \vartheta|)\right]}{\frac{\omega}{v}(1 - vn|\cos \vartheta|)}.\end{aligned}\quad (5.144)$$

La presencia de $|\cos \vartheta|$ en el integrando requiere que separemos la integral con respecto a ϑ en las regiones $0 < \vartheta < \pi/2$ y $\pi/2 < \vartheta < \pi$. Después de separar las integrales y hacer cero las contribuciones altamente oscilatorias que son proporcionales a $\sin\left[\frac{\omega\zeta}{v}(1 - vn \cos \vartheta)\right]$ en la región $\pi/2 < \vartheta < \pi$, resulta que

$$\frac{dE_{12}}{d\omega} = \frac{\tilde{\theta}^2 q^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{2n\omega^2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{v^2 n^2}\right) \int_0^1 d(\cos \vartheta) \frac{\sin^2\left[\frac{\omega\zeta}{v}(1 - vn \cos \vartheta)\right]}{\left[\frac{\omega}{v}(1 - vn \cos \vartheta)\right]^2}.\quad (5.145)$$

De nuevo, esta contribución a la radiación sólo es en la dirección delantera y está concentrada en $\vartheta_{V\tilde{C}}$. Haciendo el cambio de variable $u = \frac{\omega\zeta}{v}(1 - vn \cos \vartheta)$ y usando de la ec. (5.143), obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{dE_{12}}{d\omega} &= -\frac{\tilde{\theta}^2 q^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{2\omega\zeta}{\pi} \left(1 - \frac{1}{v^2 n^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\sin^2 u}{u^2}, \\ &= -\frac{\tilde{\theta}^2 q^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \omega z \left(1 - \frac{1}{v^2 n^2}\right),\end{aligned}\quad (5.146)$$

donde se utilizó la longitud total $z = 2\zeta$.

Finalmente, procedemos a determinar $dE_2/d\omega$, cuyo cálculo contiene dos contribuciones:

$$\frac{d^2 E_{2a}}{d\omega d\Omega} = \frac{n\omega^2}{4\pi^2} \frac{\tilde{\theta}^2 q^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \left(1 - \frac{1}{v^2 n^2}\right) \frac{\sin^2 \left[\frac{\omega\zeta}{v} (1 - vn|\cos\vartheta|) \right]}{\frac{\omega^2}{v^2} (1 - vn|\cos\vartheta|)^2}, \quad (5.147)$$

$$\frac{d^2 E_{2b}}{d\omega d\Omega} = \frac{n\omega^2}{4\pi^2} \frac{\tilde{\theta}^2 q^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \left(1 - \frac{1}{v^2 n^2}\right) \frac{\sin^4 \left[\frac{\omega\zeta}{2v} (1 - vn|\cos\vartheta|) \right]}{\frac{\omega^2}{4v^2} (1 - vn|\cos\vartheta|)^2}. \quad (5.148)$$

La presencia de $|\cos\vartheta|$ en estas contribuciones indica algo muy importante, ya que la radiación se concentra ahora en dos lóbulos principales, uno alrededor de $\vartheta_{V\check{C}}$, que contribuye a la radiación anversa, y el otro en torno a $\pi - \vartheta_{V\check{C}}$, que contribuye a la radiación reversa (RVČR). Tomando en cuenta ambos lóbulos y usando el mismo procedimiento que usamos para calcular $dE_{12}/d\omega$, encontramos que

$$\frac{dE_{2a}}{d\omega} = \frac{\tilde{\theta}^2 q^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{\omega z}{2} \left(1 - \frac{1}{v^2 n^2}\right). \quad (5.149)$$

El término $d^2 E_{2b}/d\omega d\Omega$ (5.148) también contribuye tanto a la radiación anversa como a la reversa y difiere del caso (5.147) sólo por las sustituciones $u \rightarrow u/2$ y $\sin^2 u \rightarrow \sin^4 u$ al momento integrar y usar la ec. (5.143). De este modo, resulta que

$$\frac{dE_{2b}}{d\omega} = \frac{\tilde{\theta}^2 q^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{\omega z}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2 v^2}\right). \quad (5.150)$$

Por lo tanto, la energía total radiada por unidad de frecuencia es la suma de las ecs. (5.142), (5.146), (5.149) y (5.150) cuyo resultado final es

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\omega} &= \frac{dE_1}{d\omega} + \frac{dE_{12}}{d\omega} + \frac{dE_a}{d\omega} + \frac{dE_b}{d\omega}, \\ &= q^2 \omega z \left(1 - \frac{1}{n^2 v^2}\right). \end{aligned} \quad (5.151)$$

que corresponde a la misma expresión para la radiación de Vavilov-Čerenkov en ausencia del θ -medio. En este punto no sabemos la razón fundamental de la cancelación en la ec. (5.151) de los θ -términos, cuya investigación será el propósito para trabajos futuros. Para nuestros propósitos, el punto principal es que esta distribución de energía total radiada se separa en dos partes: la del RVČR es

$$\begin{aligned} \frac{dE_{RV\check{C}R}}{d\omega} &= \frac{1}{2} \frac{dE_a}{d\omega} + \frac{1}{2} \frac{dE_b}{d\omega}, \\ &= q^2 \omega z \left(1 - \frac{1}{n^2 v^2}\right) \left[\frac{1}{2} \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \right], \end{aligned} \quad (5.152)$$

donde multiplicamos por 2 porque sólo queremos la radiación reversa. Mientras que la RVČA es

$$\begin{aligned} \frac{dE_{RV\check{C}A}}{d\omega} &= \frac{1}{2} \frac{dE_1}{d\omega} + \frac{1}{2} \frac{dE_a}{d\omega} + \frac{1}{2} \frac{dE_b}{d\omega}, \\ &= q^2 \omega z \left(1 - \frac{1}{n^2 v^2}\right) \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2}\right], \end{aligned} \quad (5.153)$$

donde nuevamente se multiplicó por 2 porque sólo se quiere la radiación anversa. Podemos expresar la ec. (5.152) en términos del número de fotones radiados por unidad de longitud por unidad de frecuencia como sigue

$$\frac{d^2 N_{RV\check{C}R}}{dz d\omega} = \alpha \left(1 - \frac{1}{n^2 v^2}\right) \left[\frac{1}{2} \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2}\right]. \quad (5.154)$$

Y otro parámetro relevante para comparaciones experimentales es la potencia radiada por unidad de frecuencia en la dirección trasera

$$\frac{d^2 E_{RV\check{C}R}}{dt d\omega} = v \frac{d^2 E_{RV\check{C}R}}{dz d\omega} = q^2 \omega v \left[\frac{1}{2} \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2}\right], \quad (5.155)$$

cuyo análisis y estimación de órdenes de magnitud será el propósito de la siguiente subsección con el objeto de comparar con predicciones de RVČR alternas.

5.1.3.5. Órdenes de magnitud de la RVČR

Pese a haber encontrado que existe RVČR en esta clase de materiales, es necesario analizar y dar estimaciones numéricas de la magnitud de la RVČR. Justo este será el propósito de esta subsección, además de que se comparará con las mediciones experimentales de la RVČR obtenidas por otras vías. Para ello, usaremos la configuración de la Fig. 4.1, donde el medio 1 es un aislante estándar con $\epsilon = 4$ ($n = \sqrt{\epsilon} = 2$), $\mu = 1$, $\theta_1 = 0$ y el medio 2 es el aislante topológico TlBiSe₂ con $\epsilon = 4$ ($n = \sqrt{\epsilon} = 2$), $\mu = 1$, $\theta_2 = \pm(2m + 1)\pi$ con $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m < 7$ [143]. Valores más grandes de θ_2 requerirán correcciones adicionales al término \mathcal{L}_θ en la acción (3.9). Esto conduce a valores de $\tilde{\theta}$ en el intervalo $[\alpha, 15\alpha]$, los cuales suprimen fuertemente la radiación reversa con respecto a la anversa. Nuestras estimaciones numéricas no consideran a un índice de refracción con dependencia en las frecuencias. De esta manera,

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &\equiv \frac{dE_{RV\check{C}R}}{d\omega} \bigg/ \frac{dE_{RV\check{C}A}}{d\omega} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2}\right]^{-1} \simeq \frac{1}{8} \left(\frac{\tilde{\theta}}{n}\right)^2, \end{aligned} \quad (5.156)$$

donde se tomó también que $4n^2 \gg \tilde{\theta}^2$. Para TlBiSe₂ los rangos de la razón previa yacen entre 1.6×10^{-6} y 3.2×10^{-4} para las elecciones $m = 1$ y $m = 7$ respectivamente.

ω [eV]	$d^2 E_{\text{RVČR}}/dtd\omega$ [$\mu W/eV$]
2	3.5×10^{-3}
4	7.0×10^{-3}
6	1.0×10^{-2}
8	1.4×10^{-2}

Cuadro 5.2: Esta tabla muestra los órdenes de magnitud para la potencia radiada por unidad de frecuencia en la dirección trasera de la radiación cuando el medio derecho es el TlBiSe₂ con $n = 2$, $\theta_2 = 11\alpha$ y para una partícula con $v = 0.8$ y carga $q = \sqrt{\alpha}$.

En el Cuadro 5.2 mostramos la potencia radiada por unidad de frecuencia en la dirección trasera dada por la ec. (5.155) para TlBiSe₂ en unidades de [$\mu W/eV$] con $\omega \in [2eV, 8eV]$. Este rango incluye el sector principal del espectro de frecuencias para la radiación de Vavilov-Čerenkov anversa. El factor de conversión que se usó es $1\mu W/eV = 4.11 \times 10^{-4}eV$.

Capítulo 6

Función de Green dependiente del tiempo para simetría plana y un medio dieléctrico inhomogéneo

En este capítulo se estudiarán los efectos de un aislante topológico (TI) con simetría plana sobre la radiación electromagnética, cuando éste se encuentra inmerso en un medio dieléctrico inhomogéneo. Se particularizará al caso en que el dieléctrico presente su inhomogeneidad sólo en la dirección de $\hat{\mathbf{z}}$ y cuya discontinuidad coincida con la del TI en $z = 0$. El método por medio del cual se analizarán estos efectos será nuevamente el de la FG. Aquí se expondrá la obtención y derivación de la FG en el espacio de coordenadas y frecuencias. El desarrollo aquí presentado pretende estudiar cómo se modifican los modos normales de la θ -ED con respecto a los de la ED estándar, con miras a una posterior aplicación a ejemplos concretos con densidades de corriente bien definidas.

6.1. Ecuaciones para los modos normales en θ -Electrodinámica con simetría plana

Con base en la acción (3.9) y considerando que $\epsilon = \epsilon(\mathbf{x}, t)$, $\mu = \mu(\mathbf{x}, t)$ y θ como en la ec. (3.33), que corresponde al caso de simetría plana con interfaz en $z = 0$, las ecuaciones de Maxwell modificadas que se obtienen son:

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = 4\pi\rho + \tilde{\theta}\delta(z)\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{u}}, \quad (6.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (6.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (6.3)$$

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \mathbf{E}) = 4\pi\mathbf{j} + \tilde{\theta}\delta(z)\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{u}}. \quad (6.4)$$

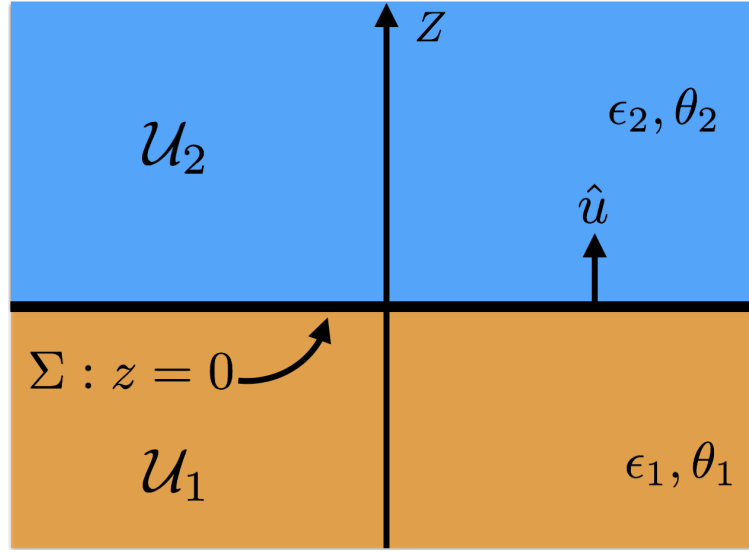


Figura 6.1: Región sobre la cual se define la θ -Electrodinámica cuando la superficie de separación Σ sea el plano $z = 0$ cuando ésta está inmersa en un medio dieléctrico inhomogéneo. Aquí se ilustra el caso más simple de dicha inhomogeneidad, es decir, cuando $\epsilon(\mathbf{x}, t) = \epsilon_2\Theta(z) + \epsilon_1\Theta(-z)$ con ϵ_1, ϵ_2 constantes y $\Theta(z)$ como la función de Heaviside.

donde $\tilde{\theta}$ está definida por la ec. (3.14). En caso de que se tenga un TI localizado en la región 2 como se muestra en la Fig. 6.1 ($\theta_2 = \pi$) en frente de un aislante trivial* ($\theta_1 = 0$) situado en la región 1 de la misma figura, tendremos que $\tilde{\theta}$ estará dado por la ec. (3.15) con $m \in \mathbb{Z}$ cuyo valor dependerá de los detalles la ruptura de la simetría de inversión temporal en la interfaz.

Dado que $\epsilon = \epsilon(\mathbf{x}, t)$ y $\mu = \mu(\mathbf{x}, t)$, vale la pena escribir las relaciones constitutivas asociadas al campo eléctrico \mathbf{E} , al campo de inducción magnética \mathbf{B} , al campo de desplazamiento eléctrico \mathbf{D} y al campo magnético \mathbf{H} dadas en las ecs. (3.25) y (3.26) para este caso, las cuales son las siguientes:

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \epsilon(\mathbf{x}, t)\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\alpha}{\pi}\theta(z)\mathbf{B}(\mathbf{x}, t), \quad (6.5)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\mu(\mathbf{x}, t)} - \frac{\alpha}{\pi}\theta(z)\mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \quad (6.6)$$

donde $\theta(z)$ está definida en la ec. (3.33).

Antes de proceder, excluirémos de nuestro análisis las ecuaciones con divergencia ya que notamos que las ecuaciones escalares (6.1) y (6.2) no son independientes del conjunto de ecua-

*Ver Sección 2.2 para recordar lo que es un aislante trivial.

ciones vectoriales (6.3) y (6.4), pues al tomar la divergencia de éstas encontramos que

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Leftrightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}) , \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) \right] &= \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \mathbf{E}) + 4\pi \nabla \cdot \mathbf{j} + \tilde{\theta} \nabla \cdot [\delta(z) \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{u}}] \\ \Leftrightarrow 0 &= \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E})] + 4\pi \nabla \cdot (\mathbf{j} + \mathbf{j}_\theta) , \end{aligned} \quad (6.8)$$

donde se usó la definición dada por (3.18). Luego, al usar la conservación de la carga (3.22) en la ec.(6.8), obtenemos finalmente el siguiente par de ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0 , \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) - 4\pi \rho - 4\pi \rho_\theta] = 0 , \quad (6.10)$$

donde ρ_θ está definida en la ec. (3.18) y apreciamos que son las derivadas parciales con respecto al tiempo de las ecs. (6.1) y (6.2).

Entonces, excluyendo el caso estático, las leyes de Gauss eléctrica y magnética modificadas (6.1) y (6.2) ya están incorporadas dentro de la ley de Faraday (6.3) y de Ampère-Maxwell (6.4) modificadas.[†]

Ahora bien, al concentrarnos en una frecuencia ω definida de la luz, procedemos a realizar nuestros estudios en el espacio de Fourier para las frecuencias. Si además, consideramos que $\mu(\mathbf{x}, \omega) \approx 1$ y que $\epsilon(\mathbf{x}, \omega) = \epsilon(z)$, las ecuaciones (6.3) y (6.4) se reescriben de la siguiente forma:

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B} , \quad (6.11)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = -i\omega \epsilon(z) \mathbf{E} + 4\pi \left[\mathbf{j} - \frac{\tilde{\theta}}{4\pi} \delta(z) \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E} \right] . \quad (6.12)$$

De estas ecuaciones observamos que la única diferencia con respecto a las ecuaciones usuales es la corriente efectiva \mathbf{j}_θ adicional dada por la ec. (3.18). Por ello, a continuación repetiremos el procedimiento de la Ref. [144] considerando dicha corriente efectiva.

[†]Estrictamente hablando, se debería pedir que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\nabla \cdot \mathbf{B}) &= 0 , \\ \frac{d}{dt} [\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) - 4\pi \rho - 4\pi \rho_\theta] &= 0 \end{aligned}$$

para garantizar que las ecs. (6.1) y (6.2) se satisfagan siempre. Para ello deberíamos realizar un análisis Hamiltoniano de la θ -ED donde se pudieran identificar las constricciones primarias y secundarias de la θ -ED como el realizado en [145]. No obstante, esto está más allá del propósito de esta tesis doctoral y se dejará para un trabajo a futuro.

Luego, como el medio dieléctrico y la interfaz en $z = 0$ presentan invariancia traslacional en los ejes \mathcal{X} y \mathcal{Y} , es conveniente reintroducir la transformada de Fourier transversa que se usó en la subsección 4.1 del capítulo 4:

$$F(z; \mathbf{k}_\perp, \omega) \equiv \int d\mathbf{r}_\perp e^{-i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{R}_\perp} F(\mathbf{r}, \omega) = \int dx dy e^{-i(k_\perp x + k_\perp y)} F(\mathbf{r}, \omega). \quad (6.13)$$

Sea $\hat{\mathbf{z}}$ el vector unitario en la dirección del eje \mathcal{Z} , entonces al considerar la transformada de Fourier transversa, es posible reemplazar el gradiente de la siguiente forma:

$$\nabla = \nabla_\perp + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow i\mathbf{k}_\perp + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (6.14)$$

De este modo, resulta natural proyectar las ecuaciones de Maxwell (6.11) y (6.12) en espacios paralelos y perpendiculares a $\hat{\mathbf{z}}$. Las componentes longitudinales (paralelas a $\hat{\mathbf{z}}$) de las ecs. (6.11) y (6.12) son:

$$\begin{aligned} -i\mathbf{k}_\perp \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}_\perp) &= -i\omega\epsilon(z)E_z + 4\pi j_z, \\ i\mathbf{k}_\perp \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_\perp) &= -i\omega B_z, \end{aligned} \quad (6.15)$$

donde observamos que no hay ninguna contribución extra debido a la presencia del θ -plano.

Mientras que las componentes transversales (perpendiculares a $\hat{\mathbf{z}}$) son:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathbf{B}_\perp}{\partial z} + i\mathbf{k}_\perp B_z + \tilde{\theta}\delta(z)\mathbf{E}_\perp &= -i\omega\epsilon(z)\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_\perp + 4\pi\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{j}_\perp, \\ \frac{\partial \mathbf{E}_\perp}{\partial z} - i\mathbf{k}_\perp E_z &= -i\omega\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}_\perp. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Para $\omega \neq 0$, las ecs. (6.15) determinan E_z y B_z en términos de \mathbf{E}_\perp y \mathbf{B}_\perp , como se muestra enseguida:

$$B_z = -\frac{1}{\omega} \mathbf{k}_\perp \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_\perp), \quad (6.17)$$

$$E_z = \frac{1}{\omega\epsilon(z)} \mathbf{k}_\perp \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}_\perp) - i\frac{4\pi}{\omega\epsilon(z)} j_z. \quad (6.18)$$

Ahora, sustituimos estas expresiones en el conjunto de ecs. (6.16) y obtenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial \mathbf{B}_\perp}{\partial z} + i\omega\epsilon(z)\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_\perp + \frac{i}{\omega} [\mathbf{k}_\perp \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_\perp)] \mathbf{k}_\perp - \tilde{\theta}\delta(z)\mathbf{E}_\perp = -4\pi\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{j}_\perp, \quad (6.19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}_\perp}{\partial z} + i\omega\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}_\perp - \frac{i}{\omega\epsilon(z)} [\mathbf{k}_\perp \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}_\perp)] \mathbf{k}_\perp = \frac{4\pi}{\omega\epsilon(z)} j_z \mathbf{k}_\perp. \quad (6.20)$$

Luego, como una forma alternativa a las ecuaciones previas, les tomaremos el producto cruz con $\hat{\mathbf{z}}$, resultando que:

$$\frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}_\perp + i\omega\epsilon(z)\mathbf{E}_\perp + \frac{i}{\omega} [\mathbf{k}_\perp \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_\perp)] \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{k}_\perp - \tilde{\theta}\delta(z)\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_\perp = 4\pi\mathbf{j}_\perp, \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_\perp - i\omega\mathbf{B}_\perp - \frac{i}{\omega\epsilon(z)} [\mathbf{k}_\perp \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}_\perp)] \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{k}_\perp = \frac{4\pi}{\omega\epsilon(z)} j_z \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{k}_\perp. \quad (6.22)$$

A continuación, proyectaremos estas ecuaciones vectoriales sobre \mathbf{k}_\perp . De las ecuaciones (6.19) y (6.22) encontramos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{B}_\perp - i\omega\epsilon(z) \left[1 - \frac{k_\perp^2}{\omega^2\epsilon(z)} \right] \mathbf{k}_\perp \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_\perp) = -4\pi \mathbf{k}_\perp \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{j}_\perp) - \tilde{\theta}\delta(z) \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{E}_\perp, \quad (6.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}_\perp \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_\perp) - i\omega \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{B}_\perp = 0, \quad (6.24)$$

donde se observa que a diferencia de la ED estándar, este sistema de ecuaciones no sólo relaciona $\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{B}_\perp$ con $\mathbf{k}_\perp \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_\perp)$ sino que también involucra a $\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{E}_\perp$.

Por otra parte, de las ecuaciones (6.20) y (6.21) encontramos este otro sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{E}_\perp + i\omega \left[1 - \frac{k_\perp^2}{\omega^2\epsilon(z)} \right] \mathbf{k}_\perp \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}_\perp) = k_\perp^2 \frac{4\pi}{\omega\epsilon(z)} j_z, \quad (6.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}_\perp \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}_\perp) + i\omega\epsilon(z) \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{E}_\perp = 4\pi \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{j}_\perp - \tilde{\theta}\delta(z) \mathbf{k}_\perp \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_\perp), \quad (6.26)$$

donde nuevamente observamos que a diferencia de la ED estándar, este sistema de ecuaciones no sólo relaciona $\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{E}_\perp$ con $\mathbf{k}_\perp \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}_\perp)$ sino que también involucra a $\mathbf{k}_\perp \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_\perp)$.

Si ahora tomamos la siguiente notación:

$$X(z; \mathbf{k}_\perp, \omega) = \hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{E}_\perp(z; \mathbf{k}_\perp, \omega), \quad (6.27)$$

$$Y(z; \mathbf{k}_\perp, \omega) = \hat{\mathbf{k}}_\perp \cdot \mathbf{E}_\perp(z; \mathbf{k}_\perp, \omega), \quad (6.28)$$

$$Z(z; \mathbf{k}_\perp, \omega) = \hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{B}_\perp(z; \mathbf{k}_\perp, \omega), \quad (6.29)$$

$$W(z; \mathbf{k}_\perp, \omega) = \hat{\mathbf{k}}_\perp \cdot \mathbf{B}_\perp(z; \mathbf{k}_\perp, \omega), \quad (6.30)$$

donde se ha escrito explícitamente su dependencia funcional. Sin embargo, en lo sucesivo se omitirá la dependencia completa de las proyecciones, a menos que sea necesario.

Considerando la notación anterior, tendremos que las ecuaciones (6.23)-(6.26) para las proyecciones de los campos eléctrico y de inducción magnética se reescribirán como sigue:

$$\frac{\partial W}{\partial z} - i\omega\epsilon(z) \left[1 - \frac{k_\perp^2}{\omega^2\epsilon(z)} \right] X = -4\pi \hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{j}_\perp - \tilde{\theta}\delta(z) Y, \quad (6.31)$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} - i\omega W = 0, \quad (6.32)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} + i\omega \left[1 - \frac{k_\perp^2}{\omega^2\epsilon(z)} \right] Z = k_\perp \frac{4\pi}{\omega\epsilon(z)} j_z, \quad (6.33)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z} + i\omega\epsilon(z) Y = 4\pi \hat{\mathbf{k}}_\perp \cdot \mathbf{j}_\perp - \tilde{\theta}\delta(z) X. \quad (6.34)$$

Combinando las ecuaciones (6.31) y (6.32) obtenemos la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$\mathcal{O}_1 X(z) + i\omega\tilde{\theta}\delta(z)Y(z) = J_1(z), \quad (6.35)$$

donde

$$\mathcal{O}_1 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2\epsilon(z) - k_{\perp}^2, \quad (6.36)$$

$$J_1(z) = -i\omega 4\pi\hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{j}_{\perp}. \quad (6.37)$$

Por otra parte, al combinar las ecuaciones (6.33) y (6.34) a través del despeje de \mathcal{Z} , se obtiene esta otra ecuación diferencial de segundo orden:

$$\mathcal{O}_2 Y(z) - i\omega\tilde{\theta}\delta(z)X(z) = J_2(z), \quad (6.38)$$

donde

$$\mathcal{O}_2 = \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\eta(z)} \frac{\partial}{\partial z} + \omega^2\epsilon(z), \quad (6.39)$$

$$\eta(z) = 1 - \frac{k_{\perp}^2}{\omega^2\epsilon(z)} = \frac{\omega^2\epsilon(z) - k_{\perp}^2}{\omega^2\epsilon(z)}, \quad (6.40)$$

$$J_2(z) = -i\omega 4\pi\hat{\mathbf{k}}_{\perp} \cdot \mathbf{j}_{\perp} + 4\pi k_{\perp} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{j_z}{\eta(z)\omega\epsilon(z)} \right]. \quad (6.41)$$

Las ecuaciones (6.35) y (6.38) forman un sistema de 2×2 cuyas incógnitas son $X(z)$ y $Y(z)$ las cuales representan las proyecciones (6.27) y (6.28) del campo electromagnético. Éstas nos permitirán estudiar los modos normales de la θ -ED. No obstante, al observar el sistema de ecuaciones formado por (6.35) y (6.38) nos percatamos que dichos modos están acoplados entre sí, lo cual contrasta claramente con el caso de la ED estándar cuyos modos están desacoplados naturalmente para esta configuración como se puede apreciar al hacer $\tilde{\theta} = 0$ en el sistema de ecuaciones antes mencionado que es la situación expuesta en [146].

6.2. FG para los operadores \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2

Para resolver el sistema de ecuaciones dado por (6.35) y (6.38) por medio del método de la Función de Green (FG) es necesario saber las FGs libres de los operadores \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 , dichas FGs serán denotadas por $\mathcal{F}_{0_{\perp}}$ y $\tilde{\mathcal{F}}_{0_{\parallel}}$ respectivamente. Recordando que por libre, nos referiremos a las FGs que satisfagan el sistema de ecuaciones formado por (6.35) y (6.38) cuando $\tilde{\theta} = 0$. Nuevamente, siendo consistentes con la notación usada en el capítulo 4 a ambas FGs libre se les ha denotado con letras caligráficas para distinguirlas de la FG completa.

Al considerar la situación particular en que el medio material presenta una inhomogeneidad en la función dieléctrica debido a una interfaz plana entre dos medios con diferente constante dieléctrica, como se puede apreciar en la Fig. 6.1, lo cual se describe de la siguiente forma:

$$\epsilon(z) = \epsilon_2\Theta(z) + \epsilon_1\Theta(-z), \quad (6.42)$$

Se tendrá que $\mathcal{F}_{0\perp}(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega)$ satisface la siguiente ecuación:

$$-\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_z^2(z; \mathbf{k}_\perp, \omega)\right] \mathcal{F}_{0\perp}(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) = \delta(z - z'), \quad (6.43)$$

donde $k_z^2(z; \mathbf{k}_\perp, \omega) = \omega^2 \epsilon(z) - k_\perp^2$. Las condiciones de borde son:

$$\mathcal{F}_{0\perp}|_{z=0^+} = 0 \quad , \quad \left.\frac{\partial \mathcal{F}_{0\perp}}{\partial z}\right|_{z=0^-}^{z=0^+} = 0, \quad (6.44)$$

$$\mathcal{F}_{0\perp}|_{z=z'^+} = 0 \quad , \quad -\left.\frac{\partial \mathcal{F}_{0\perp}}{\partial z}\right|_{z=z'^-}^{z=z'^+} = 1. \quad (6.45)$$

La función de Green $\mathcal{F}_{0\perp}$ tiene la siguiente expresión [147]:

$$\mathcal{F}_{0\perp}(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) = \Theta(z) \left[\frac{i}{2k_{z,2}} e^{ik_{z,2}|z-z'|} + \frac{ir_\perp}{2k_{z,2}} e^{ik_{z,2}(z+z')} \right] + \Theta(-z) \left[\frac{it_\perp}{2k_{z,2}} e^{-ik_{z,1}z} e^{ik_{z,2}z'} \right], \quad (6.46)$$

donde

$$k_{z,1} = \sqrt{\omega^2 \epsilon_1 - k_\perp^2} \quad , \quad k_{z,2} = \sqrt{\omega^2 \epsilon_2 - k_\perp^2} \quad (6.47)$$

$$r_\perp = -\frac{k_{z,1} - k_{z,2}}{k_{z,1} + k_{z,2}} \quad , \quad t_\perp = \frac{2k_{z,2}}{k_{z,1} + k_{z,2}}. \quad (6.48)$$

Sin embargo, necesitamos obtener la función de Green $\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega)$ que obedece la siguiente ecuación:

$$-\left[\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\eta(z)} \frac{\partial}{\partial z} + \omega^2 \epsilon(z)\right] \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) = \delta(z - z'), \quad (6.49)$$

donde observamos que no es la misma ecuación de la $\mathcal{F}_{0\parallel}(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega)$ que viene en [146]. Por este motivo, estudiaremos primero sus condiciones de borde y luego la forma que tiene $\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega)$ en las siguientes subsecciones.

6.2.1. Condiciones de Borde para el operador \mathcal{O}_2

En esta subsección estudiaremos qué condiciones debe satisfacer la FG del operador \mathcal{O}_2 . Como se vio en la subsección 6.1 de este capítulo, $\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}$ es proporcional a $Y = \hat{\mathbf{k}}_\perp \cdot \mathbf{E}_\perp$ y como \mathbf{E}_\perp es continuo [76, 148], entonces tendremos que:

$$\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}|_{z=0^-}^{z=0^+} = 0. \quad (6.50)$$

Luego, por medio de la definición de $\eta(z)$ (6.40) reescribimos la ec. (6.33) como sigue:

$$\frac{1}{\eta(z)} \frac{\partial Y}{\partial z} + i\omega Z = k_\perp \omega \frac{4\pi}{\epsilon(z)\eta(z)} j_z. \quad (6.51)$$

Después, al evaluar esta ecuación en el intervalo $z \in [0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon]$ con $\varepsilon > 0$, obtenemos que:

$$\frac{1}{\eta(z)} \frac{\partial Y}{\partial z} \Big|_{z=0^-}^{z=0^+} + i\omega Z \Big|_{z=0^-}^{z=0^+} = 4\pi k_{\perp} \omega \frac{j_z}{\omega^2 \epsilon(z) - k_{\perp}^2} \Big|_{z=0^-}^{z=0^+}. \quad (6.52)$$

Como $Z = \hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{B}_{\perp}$ es continuo [76, 148] y j_z también, resulta que:

$$\frac{1}{\eta(z)} \frac{\partial Y}{\partial z} \Big|_{z=0^-}^{z=0^+} = 0. \quad (6.53)$$

Recordando que $\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}$ es proporcional a Y , concluimos que

$$\frac{1}{\eta(z)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}}{\partial z} \Big|_{z=0^-}^{z=0^+} = 0. \quad (6.54)$$

Ahora, procedemos a obtener las condiciones de borde en $z = z'$. Nuevamente, por continuidad de Y y por consiguiente de $\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}$ tendremos que:

$$\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel} \Big|_{z=z'^-}^{z=z'^+} = 0. \quad (6.55)$$

La última condición de frontera la obtenemos de integrar la ec. (6.49) en el intervalo $z \in [z' - \varepsilon, z' + \varepsilon]$ como se muestra a continuación:

$$- \int_{z'^-}^{z'^+} dz \left[\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\eta(z)} \frac{\partial}{\partial z} + \omega^2 \epsilon(z) \right] \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z'; \mathbf{k}_{\perp}, \omega) = \int_{z'^-}^{z'^+} dz \delta(z - z'). \quad (6.56)$$

Recordando que $z' > 0$ y al utilizar también la ec. (6.50) en el segundo sumando del lado izquierdo concluimos que:

$$- \frac{1}{\eta_2} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}}{\partial z} \Big|_{z=z'^-}^{z=z'^+} = 1. \quad (6.57)$$

6.2.2. Obtención de la FG para el operador \mathcal{O}_2

A continuación procedemos a encontrar la forma de la FG para el operador \mathcal{O}_2 . La ec. que la FG $\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}$ satisface es la siguiente:

$$- \left[\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\eta(z)} \frac{\partial}{\partial z} + \omega^2 \epsilon(z) \right] \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z'; \mathbf{k}_{\perp}, \omega) = \delta(z - z'). \quad (6.58)$$

Ahora bien, al utilizar la definición de $\eta(z)$ en la ec. (6.40) encontramos que:

$$\eta(z) = \frac{\omega^2 \epsilon(z) - k_{\perp}^2}{\omega^2 \epsilon(z)} = \frac{k_z^2(z)}{\omega^2 \epsilon(z)} \Leftrightarrow \omega^2 \epsilon(z) = \frac{k_z^2(z)}{\eta(z)}. \quad (6.59)$$

Sustituyendo esta última relación en la ecuación que $\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}$ satisface encontramos que:

$$-\left[\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\eta(z)}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{k_z^2(z)}{\eta(z)}\right]\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) = \delta(z - z'). \quad (6.60)$$

Al observar esta ecuación y comparar con la ec. que la FG $\mathcal{F}_{0\parallel}$ satisface en el libro de Schwinger [146], nos percatamos que es la misma ecuación salvo la sustitución $\epsilon(z) \rightarrow \eta(z)$. De este modo, al considerar que $z' > 0$ y haciendo la sustitución antes mencionada encontramos que $\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}$ tiene la siguiente forma:

$$\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) = \Theta(z) \left[\frac{i\eta_2}{2k_{z,2}} e^{ik_{z,2}|z-z'|} + \frac{i\eta_2\tilde{r}_\parallel}{2k_{z,2}} e^{ik_{z,2}(z+z')} \right] + \Theta(-z) \left[\frac{i\eta_2\tilde{t}_\parallel}{2k_{z,2}} e^{-ik_{z,1}z} e^{ik_{z,2}z'} \right], \quad (6.61)$$

donde

$$\tilde{r}_\parallel = -\frac{\frac{k_{z,1}}{\eta_1} - \frac{k_{z,2}}{\eta_2}}{\frac{k_{z,1}}{\eta_1} + \frac{k_{z,2}}{\eta_2}}, \quad \tilde{t}_\parallel = \frac{2\frac{k_{z,2}}{\eta_2}}{\frac{k_{z,1}}{\eta_1} + \frac{k_{z,2}}{\eta_2}}. \quad (6.62)$$

Sin embargo, al usar nuevamente la definición de $\eta(z)$ es posible reescribir tanto $\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}$ como \tilde{r}_\parallel y \tilde{t}_\parallel en términos de ϵ_2 de la siguiente forma:

$$\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) = \Theta(z) \left[\frac{ik_{z,2}}{2\omega^2\epsilon_2} e^{ik_{z,2}|z-z'|} + \frac{ik_{z,2}\tilde{r}_\parallel}{2\omega^2\epsilon_2} e^{ik_{z,2}(z+z')} \right] + \Theta(-z) \left[\frac{ik_{z,2}\tilde{t}_\parallel}{2\omega^2\epsilon_2} e^{-ik_{z,1}z} e^{ik_{z,2}z'} \right], \quad (6.63)$$

donde

$$k_{z,1} = \sqrt{\omega^2\epsilon_1 - k_\perp^2}, \quad k_{z,2} = \sqrt{\omega^2\epsilon_2 - k_\perp^2} \quad (6.64)$$

$$\tilde{r}_\parallel = -\frac{\frac{\epsilon_1}{k_{z,1}} - \frac{\epsilon_2}{k_{z,2}}}{\frac{\epsilon_1}{k_{z,1}} + \frac{\epsilon_2}{k_{z,2}}}, \quad \tilde{t}_\parallel = \frac{2\frac{\epsilon_2}{k_{z,2}}}{\frac{\epsilon_1}{k_{z,1}} + \frac{\epsilon_2}{k_{z,2}}}. \quad (6.65)$$

6.3. Método de la FG para hallar los modos de la θ -Electrodinámica

En esta sección utilizaremos el método de la Función de Green desarrollado en [10, 11, 12, 109] para resolver el sistema conformado por las ecuaciones (6.35) y (6.38). El método de la FG se aplicará a la misma configuración cuya función dieléctrica está dada por la ec. (6.42).

Usando las funciones de Green $\mathcal{F}_{0\perp}$ y $\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}$ junto con sus respectivas ecuaciones (6.43) y (6.49) procedemos a resolver dicho sistema por medio del (ahora) procedimiento estándar [79] para lidiar con interacciones tipo δ que es similar al usado para obtener la FG para un potencial tipo δ en Mecánica Cuántica, donde la FG libre se usa para integrar la ecuación de Green con

la interacción tipo δ . Los cálculos explícitos de la solución al sistema de ecs. (6.35) y (6.38) se encuentran en el Apéndice H. Los resultados del método son los siguientes:

$$-X(z) + i\omega\tilde{\theta}\mathcal{F}_{0\perp}(z, 0)Y(0) = \int dz' \mathcal{F}_{0\perp}(z, z')J_1(z'), \quad (6.66)$$

$$-Y(z) - i\omega\tilde{\theta}\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)X(0) = \int dz' \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z')J_2(z'), \quad (6.67)$$

donde el intervalo de integración en z' corre sobre la dimensión de la fuente que se encuentra en la región $z > 0$ y también hemos omitido la dependencia en \mathbf{k}_\perp y ω .

El sistema conformado por las ecuaciones (6.66) y (6.67) resulta ser un sistema algebraico cuyas incógnitas son $X(0)$ y $Y(0)$. Al resolver para éstas últimas encontramos que:

$$X(0) = - \int dz' \mathcal{F}_{0\perp}(0, z')J_1(z') + i\omega\tilde{\theta}\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0) \frac{\int dz' \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, z')J_2(z') - i\omega\tilde{\theta}\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \int dz' \mathcal{F}_{0\perp}(0, z')J_1(z')}{\omega^2\tilde{\theta}^2\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0) - 1}, \quad (6.68)$$

$$Y(0) = \frac{\int dz' \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, z')J_2(z') - i\omega\tilde{\theta}\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \int dz' \mathcal{F}_{0\perp}(0, z')J_1(z')}{\omega^2\tilde{\theta}^2\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0) - 1}. \quad (6.69)$$

Finalmente, sustituimos (6.68) y (6.69) en (6.66) y (6.67) respectivamente, resultando que:

$$X(z) = - \int dz' \mathcal{F}_{0\perp}(z, z')J_1(z') - i\omega\tilde{\theta}\mathcal{F}_{0\perp}(z, 0) \frac{\int dz' \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, z')J_2(z')}{1 - \omega^2\tilde{\theta}^2\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} - \omega^2\tilde{\theta}^2\mathcal{F}_{0\perp}(z, 0) \frac{\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \int dz' \mathcal{F}_{0\perp}(0, z')J_1(z')}{1 - \omega^2\tilde{\theta}^2\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)}, \quad (6.70)$$

$$Y(z) = - \int dz' \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z')J_2(z') + i\omega\tilde{\theta}\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0) \int dz' \mathcal{F}_{0\perp}(0, z')J_1(z') - \omega^2\tilde{\theta}^2\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0) \frac{\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0) \int dz' \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, z')J_2(z')}{1 - \omega^2\tilde{\theta}^2\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} + i\omega^3\tilde{\theta}^3\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0) \frac{\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \int dz' \mathcal{F}_{0\perp}(0, z')J_1(z')}{1 - \omega^2\tilde{\theta}^2\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)}. \quad (6.71)$$

Dado que en las siguientes dos secciones estudiaremos únicamente la dependencia en z del campo electromagnético, resultará útil reescribir (6.70) y (6.71) en la siguiente forma compacta:

$$X(z) = -X_0(z) - i\omega\tilde{\theta}\mathcal{F}_{0\perp}(z, 0)X_1(0) - \omega^2\tilde{\theta}^2\mathcal{F}_{0\perp}(z, 0)X_2(0), \quad (6.72)$$

$$Y(z) = -Y_0(z) + i\omega\tilde{\theta}\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)Y_1(0) - \omega^2\tilde{\theta}^2\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)Y_2(0) + i\omega^3\tilde{\theta}^3\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)Y_3(0), \quad (6.73)$$

donde

$$\begin{aligned}
 X_0(z) &= \int dz' \mathcal{F}_{0\perp}(z, z') J_1(z') , \\
 X_1(0) &= \frac{\int dz' \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, z') J_2(z')}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \\
 X_2(0) &= \frac{\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \int dz' \mathcal{F}_{0\perp}(0, z') J_1(z')}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \\
 Y_0(z) &= \int dz' \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z') J_2(z') , \\
 Y_1(0) &= \int dz' \mathcal{F}_{0\perp}(0, z') J_1(z') \\
 Y_2(0) &= \frac{\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0) \int dz' \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, z') J_2(z')}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \\
 Y_3(0) &= \frac{\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0) \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \int dz' \mathcal{F}_{0\perp}(0, z') J_1(z')}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)}
 \end{aligned} \tag{6.74}$$

Vale la pena notar que al observar estas últimas ecuaciones (6.74) se encuentran las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 Y_1(0) &= X_0(0) , \\
 Y_2(0) &= \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0) X_1(0) , \\
 Y_3(0) &= \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0) X_2(0) .
 \end{aligned} \tag{6.75}$$

6.4. Reconstrucción del campo electromagnético a partir de las funciones escalares X y Y

En esta sección mostraremos cómo reconstruir el campo electromagnético una vez que se conocen las funciones escalares $X(z; \mathbf{k}_\perp, \omega)$ y $Y(z; \mathbf{k}_\perp, \omega)$. Con base en las ideas de [144], mostraremos cómo reconstruir los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} a partir estas dos componentes transversales del campo eléctrico.

Primero, determinemos las componentes transversales $W(z)$ y $Z(z)$ del campo de inducción magnética. A partir de la ec. (6.32) se obtiene la componente $W(z)$ del siguiente modo:

$$W = \frac{1}{i\omega} \frac{\partial X}{\partial z} . \tag{6.76}$$

Sustituyendo la expresión para $X(z)$ dada en la ec. (6.72), obtenemos que:

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{1}{i\omega} \frac{\partial}{\partial z} \left[- \int dz' \mathcal{F}_{0\perp}(z, z') J_1(z') - i\omega \tilde{\mathcal{F}}_{0\perp}(z, 0) X_1(0) - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \mathcal{F}_{0\perp}(z, 0) X_2(0) \right], \\ &= -\frac{1}{i\omega} \int dz' \frac{\partial \mathcal{F}_{0\perp}(z, z')}{\partial z} J_1(z') - \tilde{\theta} \frac{\partial \mathcal{F}_{0\perp}(z, 0)}{\partial z} X_1(0) + i\omega \tilde{\theta}^2 \frac{\partial \mathcal{F}_{0\perp}(z, 0)}{\partial z} X_2(0). \end{aligned} \quad (6.77)$$

Luego, al sustituir $Y(z)$ dada por la ecuación (6.73) en la expresión (6.34) y usando la definición de $\eta(z)$ dada por (6.40), obtendremos $Z(z)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Z(z) &= \frac{4\pi k_{\perp}}{ik_z^2(z)} j_z - \frac{1}{i\omega \eta(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left[- \int dz' \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z') J_2(z') + i\omega \tilde{\theta} \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0) Y_1(0) \right] \\ &\quad - \frac{1}{i\omega \eta(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left[-\omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0) Y_2(0) + i\omega^3 \tilde{\theta}^3 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0) Y_3(0) \right] \\ &= \frac{4\pi k_{\perp}}{ik_z^2(z)} j_z + \frac{1}{i\omega \eta(z)} \int dz' \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z')}{\partial z} J_2(z') - \frac{\tilde{\theta}}{\eta(z)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)}{\partial z} Y_1(0) \\ &\quad - \frac{i\omega \tilde{\theta}^2}{\eta(z)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)}{\partial z} Y_2(0) - \frac{\omega^2 \tilde{\theta}^3}{\eta(z)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)}{\partial z} Y_3(0). \end{aligned} \quad (6.78)$$

Finalmente, obtendremos las componentes en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$ del campo electromagnético. Al sustituir $X(z)$ de la ecuación (6.72) en la expresión para B_z (6.17) resulta que:

$$\begin{aligned} B_z &= -\frac{k_{\perp}}{\omega} \left[- \int dz' \mathcal{F}_{0\perp}(z, z') J_1(z') - i\omega \tilde{\mathcal{F}}_{0\perp}(z, 0) X_1(0) - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \mathcal{F}_{0\perp}(z, 0) X_2(0) \right], \\ &= \frac{k_{\perp}}{\omega} \int dz' \mathcal{F}_{0\perp}(z, z') J_1(z') + ik_{\perp} \tilde{\theta} \mathcal{F}_{0\perp}(z, 0) X_1(0) + k_{\perp} \omega \tilde{\theta}^2 \mathcal{F}_{0\perp}(z, 0) X_2(0). \end{aligned} \quad (6.79)$$

De igual manera, al sustituir $Z(z)$ dada por (6.78) en la ec. (6.18) para E_z obtendremos que:

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{i4\pi}{\omega \epsilon(z)} j_z + \frac{k_{\perp}}{\omega \epsilon(z)} \left[\frac{4\pi k_{\perp}}{ik_z^2(z)} j_z + \frac{1}{i\omega \eta(z)} \int dz' \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z')}{\partial z} J_2(z') - \frac{\tilde{\theta}}{\eta(z)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)}{\partial z} Y_1(0) \right], \\ &\quad + \frac{k_{\perp}}{\omega \epsilon(z)} \left[-\frac{i\omega \tilde{\theta}^2}{\eta(z)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)}{\partial z} Y_2(0) - \frac{\omega^2 \tilde{\theta}^3}{\eta(z)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)}{\partial z} Y_3(0) \right], \\ &= -\frac{i4\pi j_z}{\omega \epsilon(z)} \left[\frac{k_{\perp}^2}{k_z^2(z)} + 1 \right] + \frac{k_{\perp}}{ik_z^2(z)} \int dz' \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z')}{\partial z} J_2(z') - \frac{\tilde{\theta} k_{\perp} \omega}{k_z^2(z)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)}{\partial z} Y_1(0) \\ &\quad - \frac{ik_{\perp} \omega^2 \tilde{\theta}^2}{k_z^2(z)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)}{\partial z} Y_2(0) - \frac{k_{\perp} \omega^3 \tilde{\theta}^3}{k_z^2(z)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)}{\partial z} Y_3(0), \\ &= -\frac{i4\pi \omega}{k_z^2(z)} j_z + \frac{k_{\perp}}{ik_z^2(z)} \int dz' \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z')}{\partial z} J_2(z') - \frac{\tilde{\theta} k_{\perp} \omega}{k_z^2(z)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)}{\partial z} Y_1(0) \\ &\quad - \frac{ik_{\perp} \omega^2 \tilde{\theta}^2}{k_z^2(z)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)}{\partial z} Y_2(0) - \frac{k_{\perp} \omega^3 \tilde{\theta}^3}{k_z^2(z)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)}{\partial z} Y_3(0), \end{aligned} \quad (6.80)$$

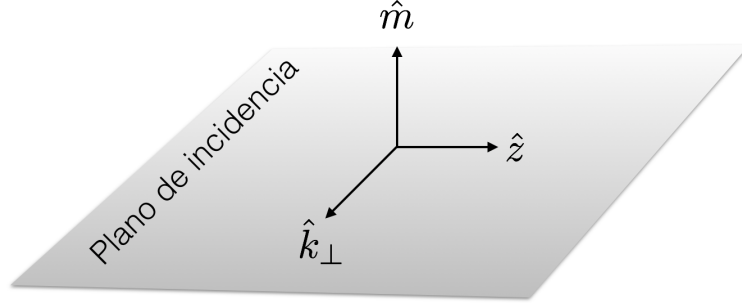


Figura 6.2: En esta figura se muestra la disposición espacial de la triada de vectores independientes $\hat{\mathbf{k}}_{\perp}$, $\hat{\mathbf{m}} = \hat{\mathbf{k}}_{\perp} \times \hat{\mathbf{z}}$ y $\hat{\mathbf{z}}$ por medio de la cual se describe al campo eléctrico y de inducción magnética. Los dos vectores transversales $\hat{\mathbf{k}}_{\perp}$ y $\hat{\mathbf{z}}$ definen un plano, al que se le llama plano de incidencia.

donde se usaron las definiciones de $\eta(z)$ dada en la ec. (6.40) y $k_z^2(z) = \omega^2 \epsilon(z) - k_{\perp}^2$ para simplificar esta expresión.

De esta manera, el campo \mathbf{E} en forma compacta queda completamente determinado con las ecuaciones (6.72), (6.73) y (6.80):

$$\mathbf{E}(z; \mathbf{k}_{\perp}, \omega) = Y(z; \mathbf{k}_{\perp}, \omega) \hat{\mathbf{k}}_{\perp} + X(z; \mathbf{k}_{\perp}, \omega) \hat{\mathbf{m}} + E_z(z; \mathbf{k}_{\perp}, \omega) \hat{\mathbf{z}}. \quad (6.81)$$

Análogamente, el campo \mathbf{B} en forma compacta queda completamente determinado con las ecuaciones (6.77), (6.78) y (6.79):

$$\mathbf{B}(z; \mathbf{k}_{\perp}, \omega) = W(z; \mathbf{k}_{\perp}, \omega) \hat{\mathbf{k}}_{\perp} + Z(z; \mathbf{k}_{\perp}, \omega) \hat{\mathbf{m}} + B_z(z; \mathbf{k}_{\perp}, \omega) \hat{\mathbf{z}}. \quad (6.82)$$

En la Fig. (6.2) se puede observar una representación de la base en la que se describe a los campos \mathbf{E} (6.81) y \mathbf{B} (6.82).

6.5. Verificación de las Condiciones de Borde en θ -ED

En esta sección probaremos que las componentes transversales y longitudinales de los campos eléctrico y de inducción magnética satisfacen las condiciones de borde de la θ -ED [13]. Dichas condiciones de borde para nuestro caso son:

$$[\mathbf{D}_z]_{z=0^-}^{z=0^+} = \tilde{\theta} \mathbf{B}_z|_{z=0}, \quad (6.83)$$

$$[\mathbf{B}_z]_{z=0^-}^{z=0^+} = \mathbf{0}, \quad (6.84)$$

$$[\mathbf{B}_{\perp}]_{z=0^-}^{z=0^+} = -\tilde{\theta} \mathbf{E}_{\perp}|_{z=0}, \quad (6.85)$$

$$[\mathbf{E}_{\perp}]_{z=0^-}^{z=0^+} = \mathbf{0}. \quad (6.86)$$

6.5.1. Verificación de la condición de borde en D_z

Sustituimos las ecuaciones (6.79) y (6.80) en la primer condición de borde (6.83), como sigue:

$$\begin{aligned}
& -i4\pi\omega \left[\frac{\epsilon(z)}{k_z^2(z)} j_z \right]_{z=0^-}^{z=0^+} + \frac{k_\perp}{i} \left[\frac{\epsilon(z)}{k_z^2(z)} \right]_{z=0^-}^{z=0^+} \int dz' \left[\frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z')}{\partial z} \right]_{z=0^-}^{z=0^+} J_2(z') \\
& -\tilde{\theta} k_\perp \omega \left[\frac{\epsilon(z)}{k_z^2(z)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)}{\partial z} \right]_{z=0^-}^{z=0^+} Y_1(0) - ik_\perp \omega^2 \tilde{\theta}^2 \left[\frac{\epsilon(z)}{k_z^2(z)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)}{\partial z} \right]_{z=0^-}^{z=0^+} Y_2(0) \\
& -k_\perp \omega^3 \tilde{\theta}^3 \left[\frac{\epsilon(z)}{k_z^2(z)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)}{\partial z} \right]_{z=0^-}^{z=0^+} Y_3(0) \\
& = \frac{\tilde{\theta} k_\perp}{\omega} \int dz' \mathcal{F}_{0\perp}(z, z') \Big|_{z=0} J_1(z') + i\tilde{\theta}^2 k_\perp \mathcal{F}_{0\perp}(z, 0) \Big|_{z=0} X_1(0) + \tilde{\theta}^3 k_\perp \omega \mathcal{F}_{0\perp}(z, 0) \Big|_{z=0} X_2(0) .
\end{aligned} \tag{6.87}$$

Luego, como j_z es continua tenemos que:

$$\begin{aligned}
& \frac{k_\perp}{i} \left[\frac{\epsilon(z)}{k_z^2(z)} \right]_{z=0^-}^{z=0^+} \int dz' \left[\frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z')}{\partial z} \right]_{z=0^-}^{z=0^+} J_2(z') - \tilde{\theta} k_\perp \omega \left[\frac{\epsilon(z)}{k_z^2(z)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)}{\partial z} \right]_{z=0^-}^{z=0^+} Y_1(0) \\
& -ik_\perp \omega^2 \tilde{\theta}^2 \left[\frac{\epsilon(z)}{k_z^2(z)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)}{\partial z} \right]_{z=0^-}^{z=0^+} Y_2(0) - k_\perp \omega^3 \tilde{\theta}^3 \left[\frac{\epsilon(z)}{k_z^2(z)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)}{\partial z} \right]_{z=0^-}^{z=0^+} Y_3(0) \\
& = \frac{\tilde{\theta} k_\perp}{\omega} \int dz' \mathcal{F}_{0\perp}(0, z') J_1(z') + i\tilde{\theta}^2 k_\perp \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0) X_1(0) + \tilde{\theta}^3 k_\perp \omega \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0) X_2(0) .
\end{aligned} \tag{6.88}$$

Ahora bien, a partir de las condiciones de frontera (6.54) y (6.57) concluimos que $\frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z')}{\partial z}$ es continua en $z = 0$, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned}
& -\tilde{\theta} k_\perp \omega \left[\frac{\epsilon(z)}{k_z^2(z)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)}{\partial z} \right]_{z=0^-}^{z=0^+} Y_1(0) - ik_\perp \omega^2 \tilde{\theta}^2 \left[\frac{\epsilon(z)}{k_z^2(z)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)}{\partial z} \right]_{z=0^-}^{z=0^+} Y_2(0) \\
& -k_\perp \omega^3 \tilde{\theta}^3 \left[\frac{\epsilon(z)}{k_z^2(z)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)}{\partial z} \right]_{z=0^-}^{z=0^+} Y_3(0) \\
& = \frac{\tilde{\theta} k_\perp}{\omega} \int dz' \mathcal{F}_{0\perp}(0, z') J_1(z') + i\tilde{\theta}^2 k_\perp \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0) X_1(0) + \tilde{\theta}^3 k_\perp \omega \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0) X_2(0) .
\end{aligned} \tag{6.89}$$

Después, utilizamos la condición de borde (6.57)[‡] y encontramos lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \tilde{\theta} k_{\perp} \omega \left[\frac{\epsilon(z)}{k_z^2(z)} \eta(z) \right]_{z=0^-}^{z=0^+} Y_1(0) + i k_{\perp} \omega^2 \tilde{\theta}^2 \left[\frac{\epsilon(z)}{k_z^2(z)} \eta(z) \right]_{z=0^-}^{z=0^+} Y_2(0) \\ & + k_{\perp} \omega^3 \tilde{\theta}^3 \left[\frac{\epsilon(z)}{k_z^2(z)} \eta(z) \right]_{z=0^-}^{z=0^+} Y_3(0) \\ = & \frac{\tilde{\theta} k_{\perp}}{\omega} \int dz' \mathcal{F}_{0\perp}(0, z') J_1(z') + i \tilde{\theta}^2 k_{\perp} \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0) X_1(0) + \tilde{\theta}^3 k_{\perp} \omega \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0) X_2(0). \end{aligned} \quad (6.90)$$

Al utilizar la definición de $\eta(z)$ dada por la ec. (6.40), esta última expresión se reescribe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{\theta} k_{\perp}}{\omega} Y_1(0) + i \tilde{\theta}^2 k_{\perp} Y_2(0) + \tilde{\theta}^3 k_{\perp} \omega Y_3(0) \\ = & \frac{\tilde{\theta} k_{\perp}}{\omega} \int dz' \mathcal{F}_{0\perp}(0, z') J_1(z') + i \tilde{\theta}^2 k_{\perp} \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0) X_1(0) + \tilde{\theta}^3 k_{\perp} \omega \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0) X_2(0). \end{aligned} \quad (6.91)$$

Finalmente, recordando las relaciones (6.75) concluimos que la igualdad se verifica.

6.5.2. Verificación de la condición de borde \mathbf{B}_z

Sustituyendo (6.79) en la segunda condición de borde (6.84), tenemos que:

$$\begin{aligned} -\frac{k_{\perp}}{\omega} [X(z)]_{z=0^-}^{z=0^+} &= \frac{k_{\perp}}{\omega} \int dz' [\mathcal{F}_{0\perp}(z, z')]_{z=0^-}^{z=0^+} J_1(z') + i \tilde{\theta} k_{\perp} [\mathcal{F}_{0\perp}(z, 0)]_{z=0^-}^{z=0^+} X_1(0) \\ &+ \tilde{\theta}^2 k_{\perp} \omega [\mathcal{F}_{0\perp}(z, 0)]_{z=0^-}^{z=0^+} X_2(0). \end{aligned} \quad (6.92)$$

Como las condiciones de borde (6.44) nos dicen que $\mathcal{F}_{0\perp}$ es continua para toda z . Por lo tanto, concluimos que:

$$-\frac{k_{\perp}}{\omega} [X(z)]_{z=0^-}^{z=0^+} = 0. \quad (6.93)$$

Es decir, que la segunda condición de borde (6.84) se satisface.

6.5.3. Verificación de la condición de borde \mathbf{B}_{\perp}

A continuación, probaremos que la condición de frontera (6.85) se cumple. Al sustituir la componente transversal del campo de inducción magnética (6.82) encontrando que:

$$\begin{aligned} [\mathbf{B}_{\perp}]_{z=0^-}^{z=0^+} &= -\tilde{\theta} \mathbf{E}_{\perp} \Big|_{z=0}, \\ [W(z)]_{z=0^-}^{z=0^+} \hat{\mathbf{k}}_{\perp} + [Z(z)]_{z=0^-}^{z=0^+} \hat{\mathbf{m}} &= -\tilde{\theta} Y(z) \Big|_{z=0} \hat{\mathbf{k}}_{\perp} - \tilde{\theta} X(z) \Big|_{z=0} \hat{\mathbf{m}}. \end{aligned} \quad (6.94)$$

[‡]Dado que aquí $z' = 0$ la condición de borde (6.57) se modifica ligeramente del siguiente modo $-\frac{1}{\eta(z)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}}{\partial z} \Big|_{z=0^-}^{z=0^+} = 1$, esto debido a que $\eta(z)$ es discontinua en $z = 0$.

Esto se traduce en probar el siguiente par de condiciones:

$$[W(z)]_{z=0^-}^{z=0^+} = -\tilde{\theta}Y(z)|_{z=0}, \quad (6.95)$$

$$[Z(z)]_{z=0^-}^{z=0^+} = -\tilde{\theta}X(z)|_{z=0}. \quad (6.96)$$

Sustituyendo $W(z)$ (6.77) y $Y(z)$ (6.73) en (6.95) se tendrá que:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{i\omega} \int dz' \left[\frac{\partial \mathcal{F}_{0\perp}(z, z')}{\partial z} \right]_{z=0^-}^{z=0^+} J_1(z') - \tilde{\theta} \left[\frac{\partial \mathcal{F}_{0\perp}(z, 0)}{\partial z} \right]_{z=0^-}^{z=0^+} X_1(0) \\ & + i\omega \tilde{\theta}^2 \left[\frac{\partial \mathcal{F}_{0\perp}(z, 0)}{\partial z} \right]_{z=0^-}^{z=0^+} X_2(0) \\ & = \tilde{\theta}Y_0(0) - i\omega \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)Y_1(0) + \omega^2 \tilde{\theta}^3 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)Y_2(0) - i\omega^3 \tilde{\theta}^4 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)Y_3(0). \end{aligned} \quad (6.97)$$

Al considerar las condiciones de borde (6.44), obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \tilde{\theta}X_1(0) - i\omega \tilde{\theta}^2 X_2(0) \\ & = \tilde{\theta}Y_0(0) - i\omega \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)Y_1(0) + \omega^2 \tilde{\theta}^3 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)Y_2(0) - i\omega^3 \tilde{\theta}^4 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)Y_3(0). \end{aligned} \quad (6.98)$$

Para verificar la igualdad, procedemos a sumar el término que tiene $Y_0(0)$ con aquel de $Y_2(0)$ utilizando explícitamente los valores dados por (6.74), obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \tilde{\theta}Y_0(0) + \omega^2 \tilde{\theta}^3 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)Y_2(0) = \int dz' \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z')J_2(z') + \frac{\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0) \int dz' \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, z')J_2(z')}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \\ & = \int dz' \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z')J_2(z') \left[1 + \frac{\omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \right] \\ & = \frac{\int dz' \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z')J_2(z')}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \\ & = \tilde{\theta}X_1(0), \end{aligned} \quad (6.99)$$

donde se usó (6.74) en la última igualdad.

Análogamente, al sumar el término que tiene $Y_1(0)$ con aquel de $Y_3(0)$, resulta que:

$$\begin{aligned} & -i\omega \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)Y_1(0) - i\omega^3 \tilde{\theta}^4 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)Y_3(0) = -i\omega \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \left[Y_1(0) + \omega^2 \tilde{\theta}^2 Y_3(0) \right] \\ & = -i\omega \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \left[\int dz' \mathcal{F}_{0\perp}(0, z')J_1(z') + \omega^2 \tilde{\theta}^2 \frac{\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \int dz' \mathcal{F}_{0\perp}(0, z')J_1(z')}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \right] \\ & = -i\omega \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \int dz' \mathcal{F}_{0\perp}(0, z')J_1(z') \left[1 + \frac{\omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \right] \\ & = -\frac{i\omega \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \int dz' \mathcal{F}_{0\perp}(0, z')J_1(z')}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \\ & = -i\omega \tilde{\theta}^2 X_2(0), \end{aligned} \quad (6.100)$$

donde se usó (6.74) en la última igualdad. De esta manera, hemos probado que se verifica la igualdad (6.95).

Por otra parte, sustituyendo $X(z)$ (6.72) y $Z(z)$ (6.78) en (6.96) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
& \frac{4\pi k_{\perp}}{i} \left[\frac{j_z}{k_z^2(z)} \right]_{z=0^-}^{z=0^+} + \frac{1}{i\omega} \left[\frac{1}{\eta(z)} \right]_{z=0^-}^{z=0^+} \int dz' \left[\frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z')}{\partial z} \right]_{z=0^-}^{z=0^+} J_2(z') \\
& - \tilde{\theta} \left[\frac{1}{\eta(z)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)}{\partial z} \right]_{z=0^-}^{z=0^+} Y_1(0) - i\omega \tilde{\theta}^2 \left[\frac{1}{\eta(z)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)}{\partial z} \right]_{z=0^-}^{z=0^+} Y_2(0) \\
& - \omega^2 \tilde{\theta}^3 \left[\frac{1}{\eta(z)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)}{\partial z} \right]_{z=0^-}^{z=0^+} Y_3(0) \\
& = \tilde{\theta} X_0(z) \Big|_{z=0} + i\omega \tilde{\theta}^2 \mathcal{F}_{0\perp}(z, 0) \Big|_{z=0} X_1(0) + \omega^2 \tilde{\theta}^3 \mathcal{F}_{0\perp}(z, 0) \Big|_{z=0} X_2(0). \quad (6.101)
\end{aligned}$$

Usando que j_z es continua junto con las condiciones de borde (6.54) y (6.57), se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
& \tilde{\theta} Y_1(0) + i\omega \tilde{\theta}^2 Y_2(0) + \omega^2 \tilde{\theta}^3 Y_3(0) \\
& = \tilde{\theta} X_0(0) + i\omega \tilde{\theta}^2 \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0) X_1(0) + \omega^2 \tilde{\theta}^3 \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0) X_2(0). \quad (6.102)
\end{aligned}$$

Finalmente, al utilizar las relaciones (6.75) encontramos que (6.96) se satisface. Por lo tanto, al cumplirse las condiciones (6.95) y (6.96), entonces la condición de borde (6.85) se satisface.

6.5.4. Verificación de la condición de borde \mathbf{E}_{\perp}

Para concluir esta sección, probaremos que la condición de frontera (6.86) se cumple. Al sustituir la componente transversal del campo eléctrico (6.81) encontrando que:

$$[\mathbf{E}_{\perp}]_{z=0^-}^{z=0^+} = [Y(z)]_{z=0^-}^{z=0^+} \hat{\mathbf{k}}_{\perp} + [X(z)]_{z=0^-}^{z=0^+} \hat{\mathbf{m}} = \mathbf{0}. \quad (6.103)$$

Lo cual se traduce en probar el siguiente par de relaciones:

$$[Y(z)]_{z=0^-}^{z=0^+} = 0 \quad (6.104)$$

$$[X(z)]_{z=0^-}^{z=0^+} = 0. \quad (6.105)$$

Evaluando $Y(z)$ (6.73) a ambos lados del θ -plano tenemos que:

$$\begin{aligned}
[Y(z)]_{z=0^-}^{z=0^+} & = - \int dz' \left[\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z') \right]_{z=0^-}^{z=0^+} J_2(z') + i\omega \tilde{\theta} \left[\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, a) \right]_{z=0^-}^{z=0^+} Y_1(0) \\
& \quad - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \left[\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0) \right]_{z=0^-}^{z=0^+} Y_2(0) + i\omega^3 \tilde{\theta}^3 \left[\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0) \right]_{z=0^-}^{z=0^+} Y_3(0), \quad (6.106)
\end{aligned}$$

donde ya se sustituyó $Y_0(z)$ de la ec. (6.74).

Al considerar las condiciones de borde (6.50) y (6.55) que $\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}$ satisface, encontramos que la ec. (6.104) se satisface.

Análogamente, evaluamos $X(z)$ (6.72) a ambos lados del θ -plano tenemos que:

$$\begin{aligned} [X(z)]_{z=0^-}^{z=0^+} &= - \int dz' [\mathcal{F}_{0\perp}(z, z')]_{z=0^-}^{z=0^+} J_1(z') - i\omega \left[\tilde{\theta} \mathcal{F}_{0\perp}(z, 0) \right]_{z=0^-}^{z=0^+} X_1(0) \\ &\quad - \omega^2 \tilde{\theta}^2 [\mathcal{F}_{0\perp}(z, 0)]_{z=0^-}^{z=0^+} X_2(0), \end{aligned} \quad (6.107)$$

donde ya se substituyó $X_0(z)$ de la ec. (6.74).

Al considerar las condiciones de borde de continuidad (6.44) que $\mathcal{F}_{0\perp}$ satisface, encontramos que la ec. (6.105) se satisface. Por lo tanto, al satisfacerse (6.104) y (6.105) la condición de borde (6.86) se cumple.

6.6. Coeficientes modificados de reflexión y transmisión en θ -ED

En esta sección estudiaremos cómo se modifican los modos normales TE y TM (\perp y \parallel los etiquetan en la FG respectivamente) de la ED estándar [144] cuando se encuentran frente a un θ -plano situado en $z = 0$ y la función dieléctrica ϵ tiene una discontinuidad en $z = 0$ también, como se describe por medio de las ecs. (3.33), y (6.42). Concretamente, procederemos a obtener los ocho coeficientes modificados de reflexión y transmisión que vienen en el artículo [149] para ambas polarizaciones TE y TM con el formalismo de la FG.

6.6.1. Coeficientes modificados de reflexión y transmisión para la polarización TE

En esta subsección nos enfocaremos en la polarización TE. Consideramos luz incidente en el plano $\hat{\mathbf{k}}_{\perp} - \hat{\mathbf{z}}$ y definimos la polarización TE como la polarización con $E_m \neq 0$ y $E_{k_{\perp}} = E_z = 0$, como se puede observar en la Fig. (6.3). De esta manera, para que $E_m = X \neq 0$ y poder recuperar la polarización TE de ED estándar, deberemos pedir que $J_1 \neq 0$ y $J_2 = j_z = 0$.

Por ahora, nos interesa saber cómo la interfaz refleja o transmite la luz en presencia del θ -plano, sin estudiar la radiación. Por ello, en las regiones a la izquierda de la fuente debemos reagrupar los factores de ambas FG $\mathcal{F}_{0\perp}$ (6.46) y $\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}$ (6.63) en cada componente del campo

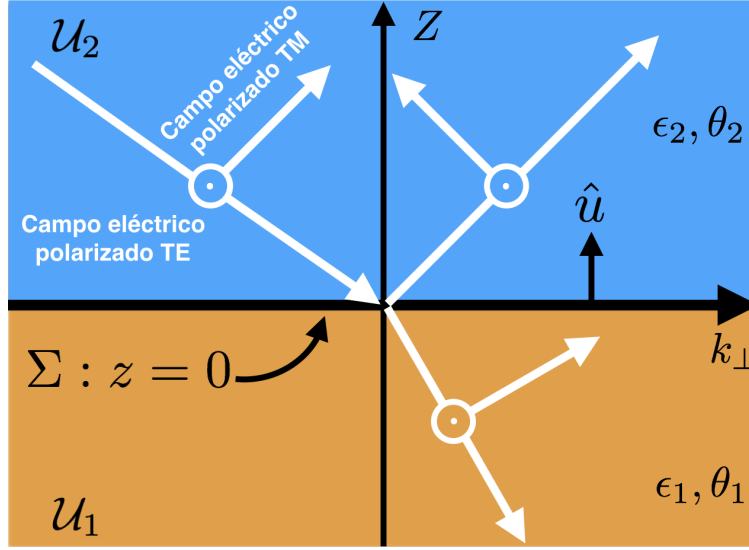


Figura 6.3: En esta figura se muestra la interfaz entre dos aislantes topológicos y la interfaz entre los dos medios dieléctricos ante la presencia de un campo eléctrico polarizado TM o polarizado TE.

electromagnético de la siguiente manera:

$$0 < z < z' : \mathcal{F}_{0\perp}(z, z') = (e^{-ik_{z,2}z} + r_{\perp}e^{ik_{z,2}z}) \left(\frac{i}{2k_{z,2}} e^{ik_{z,2}z'} \right), \quad (6.108)$$

$$z < 0 : \mathcal{F}_{0\perp}(z, z') = t_{\perp}e^{-ik_{z,1}z} \left(\frac{i}{2k_{z,2}} e^{ik_{z,2}z'} \right). \quad (6.109)$$

$$0 < z < z' : \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z') = (e^{-ik_{z,2}z} + \tilde{r}_{\parallel}e^{ik_{z,2}z}) \left(\frac{ik_{z,2}}{2\omega^2\epsilon_2} e^{ik_{z,2}z'} \right), \quad (6.110)$$

$$z < 0 : \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z') = \tilde{t}_{\parallel}e^{-ik_{z,1}z} \left(\frac{ik_{z,2}}{2\omega^2\epsilon_2} e^{ik_{z,2}z'} \right). \quad (6.111)$$

6.6.1.1. Obtención del coeficiente $R_{TE,TE}$ a partir de $X(z > 0)$

Considerando lo anterior para la región $z > 0$ y al usar la ec. (6.70) se tiene que:

$$\begin{aligned} X(z > 0) &= - (e^{-ik_{z,2}z} + r_{\perp}e^{ik_{z,2}z}) \left[\frac{i}{2k_{z,2}} \int dz' e^{ik_{z,2}z'} J_1(z') \right] \\ &\quad - \frac{i\omega^2\tilde{\theta}^2}{2k_{z,2}} (e^{ik_{z,2}z} + r_{\perp}e^{ik_{z,2}z}) \frac{\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0) \int dz' \frac{i}{2k_{z,2}} [e^{ik_{z,2}z'} + r_{\perp}e^{ik_{z,2}z'}] J_1(z')}{1 - \omega^2\tilde{\theta}^2\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0)\mathcal{F}_{0\perp}(0,0)}, \\ &= -E_0 (e^{-ik_{z,2}z} + r_{\perp}e^{ik_{z,2}z}) - E_0 e^{ik_{z,2}z} \frac{i\omega^2\tilde{\theta}^2}{2k_{z,2}} \frac{(1 + r_{\perp})^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0)}{1 - \omega^2\tilde{\theta}^2\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0)\mathcal{F}_{0\perp}(0,0)}, \end{aligned} \quad (6.112)$$

donde hemos definido

$$E_0 = \frac{i}{2k_{z,2}} \int dz' e^{ik_{z,2}z'} J_1(z'). \quad (6.113)$$

Ahora bien, recordando la definición (6.46), nos percatamos que

$$\mathcal{F}_{0\perp}(0,0) = \frac{i(1+r_\perp)}{2k_{z,2}}. \quad (6.114)$$

Entonces, la última expresión para $X(z > 0)$ queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} X(z > 0) &= -E_0 (e^{-ik_{z,2}z} + r_\perp e^{ik_{z,2}z}) - E_0 e^{ik_{z,2}z} \omega^2 \tilde{\theta}^2 \frac{(1+r_\perp)\mathcal{F}_{0\perp}(0,0)\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0)}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0)\mathcal{F}_{0\perp}(0,0)}, \\ &= -E_0 e^{-ik_{z,2}z} - E_0 e^{ik_{z,2}z} \left[r_\perp + \omega^2 \tilde{\theta}^2 \frac{(1+r_\perp)\mathcal{F}_{0\perp}(0,0)\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0)}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0)\mathcal{F}_{0\perp}(0,0)} \right]. \end{aligned} \quad (6.115)$$

Observando esta última expresión para $X(z > 0)$ y tras comparar con la expresión para $E_{y,1}$ del artículo [149], encontramos que ambas tienen la misma dependencia funcional en z y que sólo resta demostrar que la expresión dentro de los corchetes es el coeficiente $R_{TE,TE}$ del mismo artículo.

Entonces, analicemos la expresión que está dentro de los corchetes:

$$r_\perp + \omega^2 \tilde{\theta}^2 \frac{(1+r_\perp)\mathcal{F}_{0\perp}(0,0)\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0)}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0)\mathcal{F}_{0\perp}(0,0)} = \frac{r_\perp + \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0)\mathcal{F}_{0\perp}(0,0)}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0)\mathcal{F}_{0\perp}(0,0)}. \quad (6.116)$$

Analicemos detalladamente el término $\omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0)\mathcal{F}_{0\perp}(0,0)$ que es común del denominador y del numerador de esta última expresión. Luego, si recordamos la definición (6.63), nos percatamos que

$$\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0) = \frac{ik_{z,2}(1+\tilde{r}_\parallel)}{2\omega^2\epsilon_2}. \quad (6.117)$$

De esta manera, dicho término se reescribe como sigue:

$$\begin{aligned} \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0)\mathcal{F}_{0\perp}(0,0) &= \omega^2 \tilde{\theta}^2 \frac{ik_{z,2}(1+\tilde{r}_\parallel)}{2\omega^2\epsilon_2} \frac{i(1+r_\perp)}{2k_{z,2}}, \\ &= -\frac{\tilde{\theta}^2}{4\epsilon_2} (1+\tilde{r}_\parallel)(1+r_\perp), \\ &= -\frac{\tilde{\theta}^2}{4\epsilon_2} \tilde{t}_\parallel t_\perp, \end{aligned} \quad (6.118)$$

donde la última igualdad resulta de la continuidad (6.44) y (6.50) que $\mathcal{F}_{0\perp}$ y $\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}$ satisfacen respectivamente.

Si sustituimos las expresiones (6.48) y (6.65) para \tilde{t}_{\parallel} y t_{\perp} respectivamente, resulta que:

$$\begin{aligned} \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0) \mathcal{F}_{0\perp}(0,0) &= -\frac{\tilde{\theta}^2}{4\epsilon_2} \frac{2k_{z,2}}{k_{z,1} + k_{z,2}} \frac{2\frac{\epsilon_2}{k_{z,2}}}{\frac{\epsilon_1}{k_{z,1}} + \frac{\epsilon_2}{k_{z,2}}}, \\ &= -\frac{\tilde{\theta}^2 k_{z,1} k_{z,2}}{(k_{z,1} + k_{z,2})(\epsilon_2 k_{z,1} + \epsilon_1 k_{z,2})}. \end{aligned} \quad (6.119)$$

Finalmente, sustituyendo este resultado en la ecuación (6.116) junto con la definición de r_{\perp} (6.48) encontramos que:

$$\begin{aligned} \frac{r_{\perp} + \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0) \mathcal{F}_{0\perp}(0,0)}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0) \mathcal{F}_{0\perp}(0,0)} &= \frac{-\frac{k_{z,1} - k_{z,2}}{k_{z,1} + k_{z,2}} - \frac{\tilde{\theta}^2 k_{z,1} k_{z,2}}{(k_{z,1} + k_{z,2})(\epsilon_2 k_{z,1} + \epsilon_1 k_{z,2})}}{1 - \left[-\frac{\tilde{\theta}^2 k_{z,1} k_{z,2}}{(k_{z,1} + k_{z,2})(\epsilon_2 k_{z,1} + \epsilon_1 k_{z,2})} \right]}, \\ &= \frac{(k_{z,2} - k_{z,1})(\epsilon_2 k_{z,1} + \epsilon_1 k_{z,2}) - \tilde{\theta}^2 k_{z,1} k_{z,2}}{(k_{z,1} + k_{z,2})(\epsilon_2 k_{z,1} + \epsilon_1 k_{z,2}) + \tilde{\theta}^2 k_{z,1} k_{z,2}}. \end{aligned} \quad (6.120)$$

Al comparar esta última expresión con la del artículo [149] encontramos que son la misma salvo el cambio $1 \leftrightarrow 2$, esto último se debe a que en ese artículo el medio con ϵ_1 se define para $z > 0$ y el medio con ϵ_2 se define para $z < 0$ como se puede contrastar con nuestra definición para $\epsilon(z)$ en la ec. (6.42).

Por lo tanto, podemos concluir que:

$$R_{TE,TE} = r_{\perp} + \omega^2 \tilde{\theta}^2 \frac{(1 + r_{\perp}) \mathcal{F}_{0\perp}(0,0) \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0)}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0) \mathcal{F}_{0\perp}(0,0)}, \quad (6.121)$$

$$X(z > 0) = -E_0 e^{-ik_{z,2}z} - E_0 e^{ik_{z,2}z} R_{TE,TE} = -E_0 (e^{-ik_{z,2}z} + e^{ik_{z,2}z} R_{TE,TE}). \quad (6.122)$$

6.6.1.2. Obtención del coeficiente $T_{TE,TE}$ a partir de $X(z < 0)$

A continuación, analizaremos la misma componente que en la subsección pasada pero en la región $z < 0$. Recordando que $J_1 \neq 0$ y $J_2 = j_z = 0$, junto con la separación descrita en la ec. (6.109), tendremos que la expresión para $X(z)$ (6.70) en esta región del espacio es:

$$\begin{aligned} X(z < 0) &= -t_{\perp} e^{-ik_{z,1}z} \int dz' \left[\frac{i}{2k_{z,2}} e^{ik_{z,2}z'} J_1(z') \right] \\ &\quad - \omega^2 \tilde{\theta}^2 t_{\perp} e^{-ik_{z,1}z} \left(\frac{i}{2k_{z,2}} \right) \frac{\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0) t_{\perp} \int dz' \left[\frac{i}{2k_{z,2}} e^{ik_{z,2}z'} J_1(z') \right]}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0) \mathcal{F}_{0\perp}(0,0)}, \\ &= -E_0 t_{\perp} e^{-ik_{z,1}z} - E_0 e^{-ik_{z,1}z} \left(\frac{i}{2k_{z,2}} \right) \frac{\omega^2 \tilde{\theta}^2 t_{\perp}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0)}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0) \mathcal{F}_{0\perp}(0,0)}, \end{aligned} \quad (6.123)$$

donde se usó la definición (6.113). Ahora bien, al recordar la expresión de $\mathcal{F}_{0\perp}$ (6.46), se tiene que:

$$\mathcal{F}_{0\perp}(0,0) = \frac{it_{\perp}}{2k_{z,2}}, \quad (6.124)$$

donde (6.114) y esta última expresión son iguales debido a la condición de continuidad (6.44).

Entonces, la última expresión para $X(z < 0)$ queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} X(z < 0) &= -E_0 t_{\perp} e^{-ik_{z,1}z} - E_0 e^{-ik_{z,1}z} \frac{\omega^2 \tilde{\theta}^2 t_{\perp} \mathcal{F}_{0\perp}(0,0) \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0)}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0) \mathcal{F}_{0\perp}(0,0)} \\ &= -E_0 e^{-ik_{z,1}z} \left[t_{\perp} + \frac{\omega^2 \tilde{\theta}^2 t_{\perp} \mathcal{F}_{0\perp}(0,0) \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0)}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0) \mathcal{F}_{0\perp}(0,0)} \right]. \end{aligned} \quad (6.125)$$

Observando esta última expresión para $X(z < 0)$ y tras comparar con la expresión para $E_{y,2}$ del artículo [149], encontramos que ambas tienen la misma dependencia funcional en z y que sólo resta demostrar que la expresión dentro de los corchetes es el coeficiente $T_{TE,TE}$ del mismo artículo.

Entonces, analicemos la expresión que está dentro de los corchetes:

$$t_{\perp} + \frac{\omega^2 \tilde{\theta}^2 t_{\perp} \mathcal{F}_{0\perp}(0,0) \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0)}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0) \mathcal{F}_{0\perp}(0,0)} = \frac{t_{\perp}}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0) \mathcal{F}_{0\perp}(0,0)}. \quad (6.126)$$

Sin embargo, al sustituir el valor del término $\omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0) \mathcal{F}_{0\perp}(0,0)$ dado por la ec. (6.119), junto con la definición de t_{\perp} (6.48) encontramos que:

$$\begin{aligned} \frac{t_{\perp}}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0) \mathcal{F}_{0\perp}(0,0)} &= \frac{\frac{2k_{z,2}}{k_{z,1} + k_{z,2}}}{1 - \left[-\frac{\tilde{\theta}^2 k_{z,1} k_{z,2}}{(k_{z,1} + k_{z,2})(\epsilon_2 k_{z,1} + \epsilon_1 k_{z,2})} \right]} \\ &= \frac{2k_{z,2}(\epsilon_2 k_{z,1} + \epsilon_1 k_{z,2})}{(k_{z,1} + k_{z,2})(\epsilon_2 k_{z,1} + \epsilon_1 k_{z,2}) + \tilde{\theta}^2 k_{z,1} k_{z,2}}. \end{aligned} \quad (6.127)$$

Al comparar esta última expresión con la del artículo [149] encontramos que son la misma salvo el cambio $1 \leftrightarrow 2$, esto último se debe a que en ese artículo el medio con ϵ_1 se define para $z > 0$ y el medio con ϵ_2 se define para $z < 0$ como se puede contrastar con nuestra definición para $\epsilon(z)$ en la ec. (6.42).

Por lo tanto, podemos concluir que:

$$T_{TE,TE} = \frac{t_{\perp}}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0) \mathcal{F}_{0\perp}(0,0)}, \quad (6.128)$$

$$X(z < 0) = -E_0 e^{-ik_{z,1}z} T_{TE,TE}. \quad (6.129)$$

6.6.1.3. Obtención del coeficiente $R_{TM,TE}$ a partir de $Y(z > 0)$

En esta subsección estudiaremos la componente Y del campo en la región $z > 0$. Recordando que $J_1 \neq 0$ y $J_2 = j_z = 0$, tendremos que la expresión para $Y(z)$ dada por (6.71) es:

$$\begin{aligned}
Y(z) &= i\omega\tilde{\theta}\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0) \int dz' \mathcal{F}_{0\perp}(0, z') J_1(z') \\
&\quad + i\omega^3\tilde{\theta}^3\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0) \frac{\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \int dz' \mathcal{F}_{0\perp}(0, z') J_1(z')}{1 - \omega^2\tilde{\theta}^2\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)}, \\
&= i\omega\tilde{\theta}\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0) \left[1 + \frac{\omega^2\tilde{\theta}^2\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)}{1 - \omega^2\tilde{\theta}^2\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \right] \int dz' \mathcal{F}_{0\perp}(0, z') J_1(z'), \\
&= \frac{i\omega\tilde{\theta}\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)}{1 - \omega^2\tilde{\theta}^2\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \int dz' \mathcal{F}_{0\perp}(0, z') J_1(z'). \tag{6.130}
\end{aligned}$$

Después, usando las separaciones descritas en las ecs. (6.108) y (6.110), la expresión anterior se reescribe como:

$$\begin{aligned}
Y(z > 0) &= \frac{i\omega\tilde{\theta} (e^{ik_{z,2}z} + \tilde{r}_{\parallel}e^{ik_{z,2}z}) \left(\frac{ik_{z,2}}{2\omega^2\epsilon_2} \right)}{1 - \omega^2\tilde{\theta}^2\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} (1 + r_{\perp}) \int dz' \left[\frac{i}{2k_{z,2}} e^{ik_{z,2}z'} J_1(z') \right], \\
&= E_0 \frac{k_{z,2}}{2\omega\epsilon_2} e^{k_{z,2}z} \left[-\frac{\tilde{\theta}(1 + \tilde{r}_{\parallel})(1 + r_{\perp})}{1 - \omega^2\tilde{\theta}^2\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \right], \\
&= E_0 \frac{k_{z,2}}{k_2} e^{k_{z,2}z} \left[-\frac{\tilde{\theta}}{2n_2} \frac{(1 + \tilde{r}_{\parallel})(1 + r_{\perp})}{1 - \omega^2\tilde{\theta}^2\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \right], \tag{6.131}
\end{aligned}$$

donde se usaron las definiciones de (6.113), del índice de refracción $n_2 = \sqrt{\epsilon_2}$ y de número de onda $k_2 = \omega n_2$.

Al observar esta última expresión para $Y(z > 0)$ y tras comparar con la expresión para $E_{x,1}$ del artículo [149], encontramos que ambas tienen la misma dependencia funcional en z y que sólo resta demostrar que la expresión dentro de los corchetes es el coeficiente $R_{TM,TE}$ del mismo artículo.

Entonces, analicemos la expresión que está dentro de los corchetes:

$$-\frac{\tilde{\theta}}{2n_2} \frac{(1 + \tilde{r}_{\parallel})(1 + r_{\perp})}{1 - \omega^2\tilde{\theta}^2\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} = -\frac{\tilde{\theta}}{2n_2} \frac{\tilde{t}_{\parallel}t_{\perp}}{1 - \omega^2\tilde{\theta}^2\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)}, \tag{6.132}$$

donde se utilizó la continuidad (6.44) y (6.50) que $\mathcal{F}_{0\perp}$ y $\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}$ satisfacen respectivamente.

Sustituyendo el valor del término $\omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0) \mathcal{F}_{0\perp}(0,0)$ dado por la ec. (6.119), junto con la definición de t_{\perp} (6.48) y \tilde{t}_{\parallel} (6.65) encontramos que:

$$\begin{aligned} -\frac{\tilde{\theta}}{2n_2} \frac{\tilde{t}_{\parallel} t_{\perp}}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0) \mathcal{F}_{0\perp}(0,0)} &= -\frac{\tilde{\theta}}{2n_2} \frac{\frac{2k_{z,2}}{k_{z,1}+k_{z,2}} \frac{2\frac{\epsilon_2}{k_{z,2}}}{\frac{\epsilon_1}{k_{z,1}} + \frac{\epsilon_2}{k_{z,2}}}}{1 - \left[\frac{\tilde{\theta}^2 k_{z,1} k_{z,2}}{(k_{z,1}+k_{z,2})(\epsilon_2 k_{z,1} + \epsilon_1 k_{z,2})} \right]} \\ &= -\frac{2n_2 \tilde{\theta} k_{z,1} k_{z,2}}{(k_{z,1} + k_{z,2})(\epsilon_2 k_{z,1} + \epsilon_1 k_{z,2}) + \tilde{\theta}^2 k_{z,1} k_{z,2}}. \end{aligned} \quad (6.133)$$

Al comparar esta última expresión con la del artículo [149] encontramos que son la misma salvo el cambio $1 \leftrightarrow 2$, esto último se debe a que en ese artículo el medio con ϵ_1 se define para $z > 0$ y el medio con ϵ_2 se define para $z < 0$ como se puede contrastar con nuestra definición para $\epsilon(z)$ en la ec. (6.42).

Por lo tanto, podemos concluir que:

$$R_{TM,TE} = -\frac{\tilde{\theta}}{2n_2} \frac{\tilde{t}_{\parallel} t_{\perp}}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0) \mathcal{F}_{0\perp}(0,0)}, \quad (6.134)$$

$$Y(z > 0) = E_0 \frac{k_{z,2}}{k_2} e^{ik_{z,2}z} R_{TM,TE}. \quad (6.135)$$

6.6.1.4. Obtención del coeficiente $T_{TM,TE}$ a partir de $Y(z < 0)$

A continuación, analizaremos la misma componente que en la subsección pasada pero en la región $z < 0$. Recordando que $J_1 \neq 0$ y $J_2 = j_z = 0$ nos dio la expresión (6.130), entonces al sustituir las separaciones descritas en las ecs. (6.109) y (6.110), tendremos que esa expresión para $Y(z)$ (6.71) en esta región del espacio es:

$$\begin{aligned} Y(z < 0) &= \frac{i\omega \tilde{\theta} \left(\frac{ik_{z,2}}{2\omega^2 \epsilon_2} \right) e^{-ik_{z,1}z}}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0) \mathcal{F}_{0\perp}(0,0)} \tilde{t}_{\parallel} t_{\perp} \left[\int dz' \frac{i}{2k_{z,2}} e^{ik_{z,2}z'} J_1(z') \right], \\ &= -E_0 e^{-ik_{z,1}z} \frac{k_{z,2}}{2\omega \epsilon_2} \left[\frac{\tilde{\theta} \tilde{t}_{\parallel} t_{\perp}}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0) \mathcal{F}_{0\perp}(0,0)} \right], \end{aligned} \quad (6.136)$$

donde se usó la definición de (6.113).

Sustituyendo el valor del término $\omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0) \mathcal{F}_{0\perp}(0,0)$ dado por la ec. (6.119), junto con

la definición de t_{\perp} (6.48) y \tilde{t}_{\parallel} (6.65) encontramos que:

$$\begin{aligned}
Y(z < 0) &= -E_0 e^{-ik_{z,1}z} \frac{k_{z,2}}{2\omega\epsilon_2} \left[\frac{\tilde{\theta} \frac{2\epsilon_2}{k_{z,2}} \frac{2k_{z,2}}{k_{z,1} + k_{z,2}}}{1 + \frac{\tilde{\theta}^2 k_{z,1} k_{z,2}}{(k_{z,1} + k_{z,2})(\epsilon_2 k_{z,1} + \epsilon_1 k_{z,2})}} \right], \\
&= -E_0 e^{-ik_{z,1}z} \frac{k_{z,2}}{\omega} \frac{2\tilde{\theta} k_{z,1} k_{z,2}}{(k_{z,1} + k_{z,2})(\epsilon_2 k_{z,1} + \epsilon_1 k_{z,2}) + \tilde{\theta}^2 k_{z,1} k_{z,2}}, \\
&= -E_0 e^{-ik_{z,1}z} \frac{k_{z,1}}{k_1} \frac{2\tilde{\theta} n_1 k_{z,2}^2}{(k_{z,1} + k_{z,2})(\epsilon_2 k_{z,1} + \epsilon_1 k_{z,2}) + \tilde{\theta}^2 k_{z,1} k_{z,2}}, \quad (6.137)
\end{aligned}$$

donde se usaron las definiciones del índice de refracción $n_1 = \sqrt{\epsilon_1}$ y de número de onda $k_1 = \omega n_1$ en la última igualdad.

Al comparar esta última expresión para $Y(z < 0)$ y tras comparar con la expresión para $E_{x,2}$ del artículo [149], encontramos que ambas tienen la misma dependencia funcional en z y que el coeficiente es el mismo, salvo el cambio $1 \leftrightarrow 2$. Esto último se debe a que en ese artículo el medio con ϵ_1 se define para $z > 0$ y el medio con ϵ_2 se define para $z < 0$ como se puede contrastar con nuestra definición para $\epsilon(z)$ en la ec. (6.42). Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
T_{TM,TE} &= \frac{k_1 k_{z,2}}{2k_2 k_{z,1} n_1 n_2} \frac{\tilde{\theta} \tilde{t}_{\parallel} t_{\perp}}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0) \mathcal{F}_{0\perp}(0,0)}, \\
&= \frac{k_{z,2}}{2k_{z,1} n_2^2} \frac{\tilde{\theta} \tilde{t}_{\parallel} t_{\perp}}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0) \mathcal{F}_{0\perp}(0,0)}, \quad (6.138)
\end{aligned}$$

$$Y(z < 0) = -E_0 e^{-ik_{z,1}z} \frac{k_{z,1}}{k_1} T_{TM,TE}. \quad (6.139)$$

6.6.2. Coeficientes modificados de reflexión y transmisión para la polarización TM

En esta subsección nos enfocaremos en la polarización TM con la misma configuración considerada para la polarización TE. Luego, consideramos luz incidente en el plano $\hat{\mathbf{k}}_{\perp} - \hat{\mathbf{z}}$ y definimos la polarización TM como la polarización con $E_{k_{\perp}} \neq 0$, $E_z \neq 0$ y $E_m = 0$, como se puede observar en la Fig. (6.3). De esta manera, para que $E_{k_{\perp}} \neq 0$, $E_z \neq 0$ y poder recuperar la polarización TM de ED estándar, deberemos pedir que $J_1 \neq 0$ y $J_2 = j_z = 0$.

Nuevamente, como sólo nos interesa saber cómo la interfaz refleja o transmite la luz en presencia del θ -plano, sin estudiar la radiación, usaremos la separación de los factores de ambas FG $\mathcal{F}_{0\perp}$ y $\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}$ en cada componente del campo electromagnético como se muestra en las ecuaciones (6.108)-(6.111).

6.6.2.1. Obtención del coeficiente $R_{TM, TM}$ a partir de $Y(z > 0)$

Considerando lo anterior para la región $z > 0$ y al usar la ec. (6.71) se tiene que:

$$\begin{aligned}
Y(z > 0) &= - (e^{-ik_z,2z} + \tilde{r}_{\parallel} e^{ik_z,2z}) \left[\frac{ik_{z,2}}{2\omega^2\epsilon_2} \int dz' e^{ik_z,2z'} J_2(z') \right] \\
&\quad - \frac{i\omega^2\tilde{\theta}^2 k_{z,2}}{2\omega^2\epsilon_2} (e^{ik_z,2z} + \tilde{r}_{\parallel} e^{ik_z,2z}) \frac{\mathcal{F}_{0\perp}(0,0) \int dz' \frac{ik_{z,2}}{2\omega^2\epsilon_2} [e^{ik_z,2z'} + \tilde{r}_{\parallel} e^{ik_z,2z'}] J_2(z')}{1 - \omega^2\tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0)\mathcal{F}_{0\perp}(0,0)}, \\
&= -\tilde{E}_0 \frac{k_{z,2}}{k_2} (e^{-ik_z,2z} + \tilde{r}_{\parallel} e^{ik_z,2z}) - \tilde{E}_0 e^{ik_z,2z} \frac{k_{z,2}}{k_2} \frac{ik_{z,2}}{2\omega^2\epsilon_2} \frac{\omega^2\tilde{\theta}^2(1 + \tilde{r}_{\parallel})^2 \mathcal{F}_{0\perp}(0,0)}{1 - \omega^2\tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0)\mathcal{F}_{0\perp}(0,0)},
\end{aligned} \tag{6.140}$$

donde hemos definido

$$\tilde{E}_0 = \frac{i}{2\omega\sqrt{\epsilon_2}} \int dz' e^{ik_z,2z'} J_2(z') = \frac{i}{2k_2} \int dz' e^{ik_z,2z'} J_2(z'). \tag{6.141}$$

Ahora bien, recordando la ecuación (6.117), se tendrá que la última expresión para $X(z > 0)$ queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
Y(z > 0) &= -\tilde{E}_0 \frac{k_{z,2}}{k_2} (e^{-ik_z,2z} + \tilde{r}_{\parallel} e^{ik_z,2z}) - \tilde{E}_0 e^{ik_z,2z} \frac{k_{z,2}}{k_2} \frac{\omega^2\tilde{\theta}^2(1 + \tilde{r}_{\parallel})\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0)\mathcal{F}_{0\perp}(0,0)}{1 - \omega^2\tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0)\mathcal{F}_{0\perp}(0,0)}, \\
&= -\tilde{E}_0 \frac{k_{z,2}}{k_2} e^{-ik_z,2z} - \tilde{E}_0 e^{ik_z,2z} \frac{k_{z,2}}{k_2} \left[\tilde{r}_{\parallel} + \frac{\omega^2\tilde{\theta}^2(1 + \tilde{r}_{\parallel})\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0)\mathcal{F}_{0\perp}(0,0)}{1 - \omega^2\tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0)\mathcal{F}_{0\perp}(0,0)} \right].
\end{aligned} \tag{6.142}$$

Al observar esta última expresión para $Y(z > 0)$ y tras comparar con la expresión para $E_{x,1}$ del artículo [149], encontramos que ambas tienen la misma dependencia funcional en z y que sólo resta demostrar que la expresión dentro de los corchetes es el coeficiente $R_{TM, TM}$ del mismo artículo.

Entonces, analicemos la expresión que está dentro de los corchetes:

$$\tilde{r}_{\parallel} + \frac{\omega^2\tilde{\theta}^2(1 + \tilde{r}_{\parallel})\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0)\mathcal{F}_{0\perp}(0,0)}{1 - \omega^2\tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0)\mathcal{F}_{0\perp}(0,0)} = \frac{\tilde{r}_{\parallel} + \omega^2\tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0)\mathcal{F}_{0\perp}(0,0)}{1 - \omega^2\tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0)\mathcal{F}_{0\perp}(0,0)}. \tag{6.143}$$

Sin embargo, al sustituir el valor del término $\omega^2\tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0)\mathcal{F}_{0\perp}(0,0)$ dado por la ec. (6.119), junto con la definición de \tilde{r}_{\parallel} (6.65) encontramos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{r}_{\parallel} + \omega^2\tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0)\mathcal{F}_{0\perp}(0,0)}{1 - \omega^2\tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0)\mathcal{F}_{0\perp}(0,0)} &= \frac{-\frac{\frac{\epsilon_1}{k_{z,1}} - \frac{\epsilon_2}{k_{z,2}}}{\frac{\epsilon_1}{k_{z,1}} + \frac{\epsilon_2}{k_{z,2}}} - \frac{\tilde{\theta}^2 k_{z,1} k_{z,2}}{(k_{z,1} + k_{z,2})(\epsilon_2 k_{z,1} + \epsilon_1 k_{z,2})}}{1 - \left[-\frac{\tilde{\theta}^2 k_{z,1} k_{z,2}}{(k_{z,1} + k_{z,2})(\epsilon_2 k_{z,1} + \epsilon_1 k_{z,2})} \right]}, \\
&= \frac{(k_{z,1} + k_{z,2})(\epsilon_1 k_{z,2} - \epsilon_2 k_{z,1}) + \tilde{\theta}^2 k_{z,1} k_{z,2}}{(k_{z,1} + k_{z,2})(\epsilon_2 k_{z,1} + \epsilon_1 k_{z,2}) + \tilde{\theta}^2 k_{z,1} k_{z,2}}.
\end{aligned} \tag{6.144}$$

Al comparar esta última expresión con la del artículo [149] encontramos que son la misma salvo el cambio $1 \leftrightarrow 2$, esto último se debe a que en ese artículo el medio con ϵ_1 se define para $z > 0$ y el medio con ϵ_2 se define para $z < 0$ como se puede contrastar con nuestra definición para $\epsilon(z)$ en la ec. (6.42).

Por lo tanto, podemos concluir que:

$$R_{TM, TM} = \tilde{r}_{\parallel} + \frac{\omega^2 \tilde{\theta}^2 (1 + \tilde{r}_{\parallel}) \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)}, \quad (6.145)$$

$$Y(z > 0) = -\tilde{E}_0 \frac{k_{z,2}}{k_2} e^{-ik_{z,2}z} - \tilde{E}_0 e^{ik_{z,2}z} \frac{k_{z,2}}{k_2} R_{TM, TM} = -\tilde{E}_0 \frac{k_{z,2}}{k_2} (e^{-ik_{z,2}z} + e^{ik_{z,2}z} R_{TM, TM}). \quad (6.146)$$

6.6.2.2. Obtención del coeficiente $T_{TM, TM}$ a partir de $Y(z < 0)$

A continuación, analizaremos la misma componente que en la subsección pasada pero en la región $z < 0$. Recordando que $J_2 \neq 0$ y $J_1 = j_z = 0$, junto con la separación descrita en la ec. (6.111), tendremos que la expresión para $Y(z)$ (6.71) en esta región del espacio es:

$$\begin{aligned} Y(z < 0) &= -\tilde{t}_{\parallel} e^{-ik_{z,1}z} \left[\frac{ik_{z,2}}{2\omega^2 \epsilon_2} \int dz' e^{ik_{z,2}z'} J_2(z') \right] \\ &\quad - e^{-ik_{z,1}z} \frac{ik_{z,2}}{2\omega^2 \epsilon_2} \frac{\omega^2 \tilde{\theta}^2 \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0) \tilde{t}_{\parallel}^2 \int dz' \frac{ik_{z,2}}{2\omega^2 \epsilon_2} e^{ik_{z,2}z'} J_2(z')}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)}, \\ &= -\tilde{E}_0 \frac{k_{z,2}}{k_2} e^{-ik_{z,1}z} \left[\tilde{t}_{\parallel} + \frac{\omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0) \tilde{t}_{\parallel}}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \right], \\ &= -\tilde{E}_0 \frac{k_{z,2}}{k_2} e^{-ik_{z,1}z} \left[\frac{\tilde{t}_{\parallel}}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \right]. \end{aligned} \quad (6.147)$$

donde se usó la definición (6.141), junto con (6.117) y la continuidad de $\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}$ (6.50).

Observando esta última expresión para $Y(z < 0)$ y tras comparar con la expresión para $E_{x,2}$ del artículo [149], encontramos que ambas tienen la misma dependencia funcional en z y que sólo resta demostrar que la expresión dentro de los corchetes es el coeficiente $T_{TM, TM}$ del mismo artículo.

Entonces, al sustituir el valor del término $\omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)$ dado por la ec. (6.119),

junto con la definición de \tilde{t}_{\parallel} (6.65) encontramos que:

$$\begin{aligned}
Y(z < 0) &= -\tilde{E}_0 \frac{k_{z,2}}{k_2} e^{-ik_{z,1}z} \left[\frac{\frac{2\epsilon_2}{k_{z,1} + k_{z,2}}}{1 - \left[-\frac{\tilde{\theta}^2 k_{z,1} k_{z,2}}{(k_{z,1} + k_{z,2})(\epsilon_2 k_{z,1} + \epsilon_1 k_{z,2})} \right]} \right], \\
&= -\tilde{E}_0 \frac{k_{z,2}}{k_2} e^{-ik_{z,1}z} \left[\frac{2(k_{z,1} + k_{z,2})k_{z,1}\epsilon_2}{(k_{z,1} + k_{z,2})(\epsilon_2 k_{z,1} + \epsilon_1 k_{z,2}) + \tilde{\theta}^2 k_{z,1} k_{z,2}} \right], \\
&= -\tilde{E}_0 \frac{k_{z,1}}{k_1} e^{-ik_{z,1}z} \left[\frac{n_1}{n_2} \frac{2(k_{z,1} + k_{z,2})k_{z,2}\epsilon_2}{(k_{z,1} + k_{z,2})(\epsilon_2 k_{z,1} + \epsilon_1 k_{z,2}) + \tilde{\theta}^2 k_{z,1} k_{z,2}} \right], \quad (6.148)
\end{aligned}$$

donde se usaron las definiciones del índice de refracción $n_{1,2} = \sqrt{\epsilon_{1,2}}$ y de número de onda $k_{1,2} = \omega n_{1,2}$ en la última igualdad.

Al comparar esta última expresión con la del artículo [149] encontramos que son la misma salvo el cambio $1 \leftrightarrow 2$, esto último se debe a que en ese artículo el medio con ϵ_1 se define para $z > 0$ y el medio con ϵ_2 se define para $z < 0$ como se puede contrastar con nuestra definición para $\epsilon(z)$ en la ec. (6.42).

Por lo tanto, podemos concluir que:

$$T_{TM,TM} = \frac{\tilde{t}_{\parallel}}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0) \mathcal{F}_{0\perp}(0,0)}, \quad (6.149)$$

$$Y(z < 0) = -\tilde{E}_0 \frac{k_{z,1}}{k_1} e^{-ik_{z,1}z} T_{TM,TM}. \quad (6.150)$$

6.6.2.3. Obtención del coeficiente $R_{TE,TM}$ a partir de $X(z > 0)$

En esta subsección estudiaremos la componente X del campo en la región $z > 0$. Recordando que $J_2 \neq 0$ y $J_1 = j_z = 0$, junto con las separaciones descritas en las ecs. (6.108) y (6.110), tendremos que la expresión para $Y(z)$ (6.71) en esta región del espacio es:

$$\begin{aligned}
X(z > 0) &= -i\omega \tilde{\theta} \frac{i(1+r_{\perp})}{2k_{z,2}} e^{ik_{z,2}z} \frac{(1+\tilde{r}_{\parallel}) \int dz' \frac{ik_{z,2}}{2\omega^2 \epsilon_2} e^{ik_{z,2}z'} J_2(z')}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0) \mathcal{F}_{0\perp}(0,0)}, \\
&= \tilde{E}_0 \frac{e^{ik_{z,2}z}}{2n_2} \frac{\tilde{\theta}(1+r_{\perp})(1+\tilde{r}_{\parallel})}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0) \mathcal{F}_{0\perp}(0,0)}, \quad (6.151)
\end{aligned}$$

donde se utilizó la definición (6.141) y la de índice de refracción $n_2 = \sqrt{\epsilon_2}$.

Luego, utilizamos la continuidad de $\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}$ y $\mathcal{F}_{0\perp}$ y encontramos que:

$$X(z > 0) = \tilde{E}_0 e^{ik_{z,2}z} \left[\frac{1}{2n_2} \frac{\tilde{\theta} t_{\perp} \tilde{t}_{\parallel}}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0,0) \mathcal{F}_{0\perp}(0,0)} \right]. \quad (6.152)$$

Al observar el término del corchete con la ec. (6.134) encontramos que son iguales. Por lo que $R_{TE, TM} = R_{TM, TE}$, lo cual es consistente con el artículo [149].

Por lo tanto, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} R_{TE, TM} &= \frac{1}{2n_2} \frac{\tilde{\theta} t_{\perp} \tilde{t}_{\parallel}}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)}, \\ X(z > 0) &= \tilde{E}_0 e^{ik_{z,2} z} R_{TM, TE}. \end{aligned} \quad (6.153)$$

6.6.2.4. Obtención del coeficiente $T_{TE, TM}$ a partir de $X(z < 0)$

En esta subsección analizaremos la misma componente de la subsección pasada pero en la región $z < 0$. Recordando que $J_2 \neq 0$ y $J_1 = j_z = 0$, junto con las separaciones descritas en las ecs. (6.109) y (6.111), tendremos que la expresión para $X(z)$ (6.70) en esta región del espacio es:

$$\begin{aligned} X(z < 0) &= -i\omega \tilde{\theta} \frac{\tilde{t}_{\perp} \tilde{t}_{\parallel}}{2k_{z,2}} e^{-ik_{z,1} z} \frac{\int dz' \frac{ik_{z,2}}{2\omega^2 \epsilon_2} e^{ik_{z,2} z'} J_2(z')}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)}, \\ &= \tilde{E}_0 e^{-ik_{z,1} z} \frac{\tilde{\theta}}{2n_2} \frac{t_{\perp} \tilde{t}_{\parallel}}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)}, \end{aligned} \quad (6.154)$$

donde se utilizó la definición (6.141) y la de índice de refracción $n_2 = \sqrt{\epsilon_2}$.

Luego, al sustituir el valor de $\omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)$ dado por la ec. (6.119), junto con la definición de t_{\perp} (6.48) y \tilde{t}_{\parallel} (6.65) encontramos que:

$$\begin{aligned} X(z < 0) &= \tilde{E}_0 e^{-ik_{z,1} z} \left[\frac{\tilde{\theta}}{2n_2} \frac{t_{\perp} \tilde{t}_{\parallel}}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \right], \\ &= -\tilde{E}_0 e^{-ik_{z,1} z} \left[\frac{-2\tilde{\theta} n_2 k_{z,1} k_{z,2}}{(k_{z,1} + k_{z,2})(\epsilon_2 k_{z,1} + \epsilon_1 k_{z,2}) + \tilde{\theta}^2 k_{z,1} k_{z,2}} \right]. \end{aligned} \quad (6.155)$$

Al comparar esta última expresión con la del artículo [149] encontramos que son la misma salvo el cambio $1 \leftrightarrow 2$, esto último se debe a que en ese artículo el medio con ϵ_1 se define para $z > 0$ y el medio con ϵ_2 se define para $z < 0$ como se puede contrastar con nuestra definición para $\epsilon(z)$ en la ec. (6.42).

Por lo tanto, podemos concluir que:

$$T_{TE, TM} = \frac{\tilde{\theta}}{2n_2} \frac{t_{\perp} \tilde{t}_{\parallel}}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)}, \quad (6.156)$$

$$X(z < 0) = -\tilde{E}_0 e^{-ik_{z,1} z} T_{TE, TM}, \quad (6.157)$$

$$(6.158)$$

6.7. Función de Green extendida para el campo eléctrico

En esta sección procederemos a extraer la FG extendida del campo eléctrico (6.81) para una fuente arbitraria. Sabiendo la relación que existe entre cada componente y las corrientes J_1 (6.37), J_2 (6.41) y j_z . El objetivo es encontrar una expresión del siguiente tipo:

$$E^i(z; \mathbf{k}_\perp, \omega) = \int dz' G^i_j(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) j^j(z'; \mathbf{k}_\perp, \omega), \quad (6.159)$$

donde $G^i_j(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega)$ denota a la función de Green extendida y $j^j(z; \mathbf{k}_\perp, \omega) = (j_{k_\perp}, j_m, j_z)$. En esta notación $i = 1$ etiqueta a la componente que apunta en la dirección del vector $\hat{\mathbf{k}}_\perp$, $i = 2$ rotula a la componente que apunta en la dirección del vector $\hat{\mathbf{m}}$ e $i = 3$ etiqueta a la componente que apunta en la dirección del vector $\hat{\mathbf{z}}$. Vale la pena hacer énfasis en que la $G^i_j(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega)$ de este capítulo no es la misma que la FG (4.38) del Capítulo 4 pues aquella conecta el cuadripotencial A^μ con las fuentes J^μ y esta conecta el campo eléctrico con las fuentes J^1 (6.37), J_2 (6.41) y j_z .

Comencemos por la componente $E^1 = Y(z)$ (6.71), la cual se puede reescribir como sigue:

$$\begin{aligned} E^1(z) &= \int dz' \left[-\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z') - \frac{\omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0) \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, z')}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \right] J_2(z') \\ &\quad + \int dz' \left\{ i\omega \tilde{\theta} \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, z') \left[1 + \frac{\omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \right] \right\} J_1(z'), \\ &= \int dz' \left[-\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z') - \frac{\omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0) \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, z')}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \right] J_2(z') \\ &\quad + \int dz' \left[\frac{i\omega \tilde{\theta} \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, z')}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \right] J_1(z'), \end{aligned} \quad (6.160)$$

donde se omitió la dependencia en \mathbf{k}_\perp y ω .

Después, sustituimos las corrientes J_1 y J_2 dadas por las ecuaciones (6.37) y (6.41) respec-

tivamente, como se muestra enseguida:

$$\begin{aligned}
E^1(z) &= \int dz' \left[-\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z') - \frac{\omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0) \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, z')}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \right] [-i\omega 4\pi \hat{\mathbf{k}}_{\perp} \cdot \mathbf{j}_{\perp}(z')] \\
&+ \int dz' \left[-\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z') - \frac{\omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0) \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, z')}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \right] \\
&\times \left[4\pi k_{\perp} \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{j_z(z')}{\eta(z') \omega \epsilon(z')} \right) \right] \\
&+ \int dz' \left[\frac{i\omega \tilde{\theta} \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, z')}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \right] [-i\omega 4\pi \hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{j}_{\perp}(z')] , \\
&= \int dz' \left[\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z') + \frac{\omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0) \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, z')}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \right] [i\omega 4\pi j^1(z')] \\
&+ \int dz' \left[-\frac{i\omega \tilde{\theta} \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, z')}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \right] [i\omega 4\pi j^2(z')] \\
&+ \int dz' \left[-\frac{ik_{\perp}}{k_z^2} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z')}{\partial z'} - \frac{ik_{\perp}}{k_z^2} \frac{\omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, z')}{\partial z'} \right] \\
&\times [i\omega 4\pi j^3(z')] ,
\end{aligned} \tag{6.161}$$

donde ya se sustituyó $j^1 = \hat{\mathbf{k}}_{\perp} \cdot \mathbf{j}_{\perp}$, $j^2 = \hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{j}_{\perp}$, $j^3 = j_z$ y se integró por partes el término con la derivada parcial con respecto a z' en la última igualdad.

Tras realizar el mismo procedimiento para la componente $E^2 = X(z)$ (6.70), se tendrá lo siguiente:

$$\begin{aligned}
E^2(z) &= \int dz' \left[\frac{i\omega \tilde{\theta} \mathcal{F}_{0\perp}(z, 0) \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, z')}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \right] [i4\pi \omega j^1(z')] \\
&+ \int dz' \left[\mathcal{F}_{0\perp}(z, z') + \frac{\omega^2 \tilde{\theta}^2 \mathcal{F}_{0\perp}(z, 0) \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, z')}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \right] [i\omega 4\pi j^2(z')] \\
&+ \int dz' \left[\frac{\omega k_{\perp}}{k_z^2} \frac{\tilde{\theta} \mathcal{F}_{0\perp}(z, 0)}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, z')}{\partial z'} \right] [i4\pi \omega j^3(z')] .
\end{aligned} \tag{6.162}$$

Análogamente, para la componente $E^3 = E_z$ (6.80), resulta lo siguiente:

$$\begin{aligned}
E^3(z) = & \int dz' \left[\frac{ik_{\perp}}{k_{z'}^2} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z')}{\partial z} + \frac{ik_{\perp}\omega^2}{k_{z'}^2} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)}{\partial z} \frac{\tilde{\theta}^2 \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0) \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, z')}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \right] [i4\pi\omega j^1(z')] \\
& + \int dz' \left[\frac{k_{\perp}\omega}{k_{z'}^2} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)}{\partial z} \frac{\tilde{\theta} \mathcal{F}_{0\perp}(0, z')}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \right] [i4\pi\omega j^2(z')] \\
& + \int dz' \left[\frac{k_{\perp}^2}{k_z^2 k_{z'}^2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z')}{\partial z' \partial z} \right. \\
& \left. + \frac{k_{\perp}^2 \omega^2}{k_z^2 k_{z'}^2} \frac{\tilde{\theta}^2 \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)}{\partial z} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, z')}{\partial z'} \right] [i4\pi\omega j^3(z')] .
\end{aligned} \tag{6.163}$$

Cabe destacar que en todas estas expresiones se factorizó $i4\pi\omega j^i$, para leer explícitamente los términos con $\tilde{\theta}$ y también para propósitos de comparación con los resultados expuestos en [114] para la ED estándar.

Finalmente, a partir de la relación (6.159) se lee de las ecuaciones (6.161), (6.162) y (6.163)

que las componentes de la FG extendida del campo eléctrico son:

$$\begin{aligned}
G^1_1(z, z') &= \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z') + \frac{\omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0) \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, z')}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)}, \\
G^1_2(z, z') &= -\frac{i\omega \tilde{\theta} \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, z')}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)}, \\
G^1_3(z, z') &= -\frac{ik_{\perp}}{k_z^2} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z')}{\partial z'} - \frac{ik_{\perp}}{k_z^2} \frac{\omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, z')}{\partial z'}, \\
G^2_1(z, z') &= \frac{i\omega \tilde{\theta} \mathcal{F}_{0\perp}(z, 0) \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, z')}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)}, \\
G^2_2(z, z') &= \mathcal{F}_{0\perp}(z, z') + \frac{\omega^2 \tilde{\theta}^2 \mathcal{F}_{0\perp}(z, 0) \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, z')}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)}, \\
G^2_3(z, z') &= \frac{\omega k_{\perp}}{k_z^2} \frac{\tilde{\theta} \mathcal{F}_{0\perp}(z, 0)}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, z')}{\partial z'}, \\
G^3_1(z, z') &= \frac{ik_{\perp}}{k_z^2} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z')}{\partial z} + \frac{ik_{\perp}}{k_z^2} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)}{\partial z} \frac{\omega^2 \tilde{\theta}^2 \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0) \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, z')}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)}, \\
G^3_2(z, z') &= \frac{k_{\perp} \omega}{k_z^2} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)}{\partial z} \frac{\tilde{\theta} \mathcal{F}_{0\perp}(0, z')}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)}, \\
G^3_3(z, z') &= \frac{k_{\perp}^2}{k_z^2 k_z'^2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z')}{\partial z' \partial z} + \frac{k_{\perp}^2 \omega^2}{k_z^2 k_z'^2} \frac{\tilde{\theta}^2 \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)}{1 - \omega^2 \tilde{\theta}^2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0) \mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)}{\partial z} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, z')}{\partial z'},
\end{aligned} \tag{6.164}$$

donde podemos observar que las componentes G^1_2 , G^2_1 , G^2_3 y G^3_2 son proporcionales a $\tilde{\theta}$ y entonces estarán relacionados con los coeficientes de mezcla $R_{TM,TE}$ (6.134), $T_{TM,TE}$ (6.138), $R_{TE,TM}$ (6.153) y $T_{TE,TM}$ (6.156). Esto deberá generar nuevos efectos, ya que en ED estándar estos coeficientes son cero (pues no hay mezcla de modos en esta configuración), lo cual se recupera al hacer al hacer $\tilde{\theta} = 0$.

6.7.1. Relaciones de reciprocidad de Lorentz y Onsager para la FG extendida

En ED estándar la relación de reciprocidad o principio de reciprocidad de Lorentz que establece la reversibilidad de los caminos ópticos, es decir, la simetría ante intercambio de posiciones y orientaciones de las fuentes y los campos se satisface para un material recíproco. Dicha relación para una FG \mathbb{G}^{μ}_{ν} que describa a dicho material es la siguiente [150, 151]:

$$\mathbb{G}^{\mu}_{\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = \mathbb{G}^{\nu}_{\mu}(\mathbf{x}', \mathbf{x}; \omega). \tag{6.165}$$

A los materiales cuya FG cumplan esta ecuación, se dice que respetan la simetría de inversión temporal.

Sin embargo, de acuerdo con el artículo [150] un medio que consista en dos partes isotrópicas (como el que estudiamos en este trabajo) se le denomina medio no recíproco si los parámetros de mezcla de los campos eléctrico y de inducción magnética tienen una contribución con valores reales, en nuestro caso dicho parámetro es $\tilde{\theta}$ asociado al θ -plano (aislante topológico) el cual rompe la simetría de inversión temporal. Entonces, esto implicaría que la relación de reciprocidad (6.165) no se debería de satisfacer para la FG extendida de la ec. (6.159).

Con base en lo anterior, a continuación procederemos a verificar que las componentes de la FG extendida (6.164) no satisfacen (6.165). Comencemos por las componentes G^1_2 y G^2_1 :

$$\begin{aligned} G^2_1(z, z'; \omega) &= \frac{i\omega\tilde{\theta}\mathcal{F}_{0\perp}(z, 0)\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, z')}{1 - \omega^2\tilde{\theta}^2\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)}, \\ \Rightarrow G^2_1(z', z; \omega) &= \frac{i\omega\tilde{\theta}\mathcal{F}_{0\perp}(z', 0)\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, z)}{1 - \omega^2\tilde{\theta}^2\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)}. \end{aligned} \quad (6.166)$$

Comparando con la expresión para G^1_2 :

$$G^1_2(z, z'; \omega) = -\frac{i\omega\tilde{\theta}\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)\mathcal{F}_{0\perp}(0, z')}{1 - \omega^2\tilde{\theta}^2\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(0, 0)\mathcal{F}_{0\perp}(0, 0)}, \quad (6.167)$$

se puede concluir que:

$$G^2_1(z', z; \omega) \neq G^1_2(z', z; \omega). \quad (6.168)$$

Como basta con que una componente no cumpla con la relación, entonces concluimos que la FG extendida no cumple con (6.165).

Pese a que tratamos con un medio no recíproco, existe una relación más general que el principio de reciprocidad de Lorentz: la relación de Onsager [150, 151], la cual contiene a la anterior como caso particular y que se enuncia a continuación para una cierta FG \mathbb{G}^μ_ν :

$$\mathbb{G}^\nu_\mu^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}; \omega) = \mathbb{G}^\nu_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}; -\omega^*). \quad (6.169)$$

Esta relación resulta fácil de probar para las componentes de la FG extendida (6.164) ya que $\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}, \mathcal{F}_{0\perp}, k_z^2$ dependen de $\omega^2 \in \mathbb{R}$, lo cual hace que todos esos términos se queden iguales. Luego, tras hacer los conjugados que afecten sólo a los factores de i , se puede ver que se verifica la relación de (6.169).

Capítulo 7

Conclusiones

La θ -Electrodinámica (θ -ED) es una extensión topológica de la Electrodinámica de Maxwell, cuya acción consiste en la acción de Maxwell más el invariante de Pontryagin abeliano de 4 dimensiones acoplado a un campo escalar θ . Esta extensión tiene la misma forma que la Electrodinámica axiónica de Wilczek [8], salvo que el campo escalar θ de la θ -ED es constante por pedazos [9]. Se trata de un modelo efectivo de la respuesta electromagnética de materiales magnetoeléctricos [1] que pueden ser: los antiferromagnetos [3], los aislantes topológicos [4, 5, 6] y semimetales de Weyl [7], por mencionar algunos.

En esta tesis hemos estudiado la respuesta electromagnética de los materiales magnetoeléctricos ante fuentes externas dependientes del tiempo por medio de la θ -ED, lo cual consiste en la generalización del trabajo hecho en los artículos [10, 11, 12] que están destinados al estudio de la respuesta de dichos materiales ante fuentes externas estáticas, materiales que en el contexto de la θ -ED se denominan θ -medios. Ahora bien, tomando como base el artículo [13], que fungió como una primera extensión del estudio al caso de fuentes externas dinámicas, en esta tesis adaptamos el método de la Función de Green (FG) de ese mismo artículo [13] para estudiar la respuesta electromagnética de los θ -medios con simetría plana con miras a analizar con detalle las modificaciones a la radiación electromagnética para dos configuraciones generales: (i) dos θ -medios con la misma permitividad eléctrica constante ϵ y diferentes parámetros efectivos θ separados por una interfaz Σ localizada en el plano $z = 0$ y (ii) dos θ -medios con diferentes permitividades eléctricas constantes ϵ_1, ϵ_2 y diferentes parámetros efectivos θ separados por una interfaz Σ localizada en el plano $z = 0$. Cabe destacar que en ambas configuraciones la permeabilidad μ de los medios se tomó igual a 1.

En el capítulo 4 determinamos la FG dependiente del tiempo para simetría plana y un solo medio dieléctrico homogéneo que corresponde a la configuración (i) descrita en el párrafo anterior. Esta FG conecta el cuadripotencial con las fuentes externas y una vez calculado el 4-potencial se puede obtener el campo electromagnético. Se logró obtener una expresión analítica de la FG en el espacio de coordenadas dada por la ec. (4.78), la cual respeta la causalidad estándar de la Electrodinámica de Maxwell. Se encontró que esta FG ya no es una función como es en el caso de la ED estándar, sino que es una matriz de 4×4 entradas. De hecho, el

primer término de las componentes $\bar{G}_0^0(x, x')$ y $\bar{G}_j^i(x, x')$ en (4.78) es la FG retardada de la ED estándar para la configuración mencionada [86]. Luego, las componentes $\bar{G}_i^0(x, x')$, inexistentes en la ED estándar, codifican el EME de los θ -medios. Después, tras analizar el segundo término de la componente $\bar{G}_0^0(x, x')$ en cada semi-espacio, es decir, analizando los casos $z > 0$ y $z < 0$, se le interpreta con la imagen de la fuente puntual con magnitud proporcional a $-\tilde{\theta}^2/(4n^2 + \tilde{\theta}^2)$. También, se logró indentificar que los términos que tienen la función de Heaviside de (4.78) se interpretan como el potencial de un monopolo magnético puntual como se expone en [87] y en el apéndice G de esta tesis doctoral. Finalmente, los términos que involucran la función rampa, aún no les fue posible hallar una interpretación física de lo que esta función de distribución significa en el contexto de la θ -ED. Pese a no cubrir este detalle importante, la obtención de una forma analítica de esta FG no se ha reportado en la literatura que conocemos y representa un paso importante en el objetivo de esta tesis. Sin embargo, la falta de este detalle y su difícil manejo operacional, particularmente el de la función rampa y la de Heaviside nos llevaron a estudiar la FG en la aproximación de campo lejano.

En la segunda parte del capítulo 4 se determinó la FG dependiente del tiempo para simetría plana y un solo medio dieléctrico homogéneo que corresponde a la primera configuración (i) descrita dos párrafos arriba en la aproximación de campo lejano. Recalcamos que esta FG conecta el cuadripotencial con las fuentes externas y una vez calculado el 4-potencial, se puede obtener el campo electromagnético. Se logró obtener una expresión analítica para dicha FG al aproximar las integrales correspondientes por medio de una modificación del método de *steepest descent* que constituye una combinación de las ideas de Baños [95, 96] y Wait [97]. Esto dio como resultado la expresión analítica de las ecs. (4.79), (4.139) y (4.218). Los resultados arrojados por este método generalizan los resultados obtenidos previamente por el método de la fase estacionaria [94, 107, 108] y por el método de *steepest descent* [94, 108] reportados en el artículo que publicamos [109] y que conforman las ecs. (4.79), (E.21) y (E.43) del Apéndice E. La FG definida por las ecs. (4.79), (4.139) y (4.218) está bien regularizada en $\vartheta = \pi/2$ y contiene la contribución de los polos que se traduce en la presencia de ondas superficiales cilíndricas axialmente simétricas [113] y ondas planas superficiales como se expuso en la subsección 4.3.5. Una estupenda aplicación para analizar a profundidad el comportamiento de este tipo de ondas sería el estudio de la radiación de un dipolo eléctrico o magnético con distintas orientaciones ante estos θ -medios. Pero esto se pospondrá para un trabajo futuro. Otra característica importante de esta FG es la presencia de dos fases debida al término $\tilde{R} = r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp + |z' \cos \vartheta|$ en la primera exponencial de los términos (4.139) y (4.218). Si el argumento del valor absoluto es negativo, entonces se recupera la fase de la ED estándar. Mientras que si el argumento del valor absoluto es positivo, entonces se tendrá una fase diferente que se verá reflejada en cantidades observables, e.g. la potencia radiada.

En el capítulo 5 hemos considerado la radiación producida por una partícula cargada que se propaga con velocidad v constante en la dirección perpendicular a la interfaz Σ entre los dos θ -medios, dicha dirección está dada por el vector $\hat{\mathbf{u}}$ en la Fig. 4.1, cuyas respuestas electromagnéticas se rigen por medio de las ecs. de Maxwell modificadas (4.1)-(4.4). En la primera parte de este capítulo, se estudió el caso del campo electromagnético en el espacio de coord-

nadas con $\epsilon = 1$ y al restringirnos sólo al análisis del Caso 6 de la Tabla 5.1 se pudo descubrir que sí habrá radiación ya que el campo eléctrico dado por las ecs. (5.68) y (5.69) decae como r^{-1} , lo cual es un resultado nuevo e interesante que contrasta con el caso de la ED estándar donde no hay radiación como se puede observar al hacer $\tilde{\theta} = 0$ en dichas expresiones. También, se observó que el campo eléctrico proporcional a $2\tilde{\theta}q/(4 + \tilde{\theta}^2)$ en las ecs. (5.68) y (5.69) está en la dirección $\hat{\phi}$ y que coincide con la derivada parcial con respecto al tiempo del potencial vectorial del monopolo magnético de las ecs. (G.27) y (G.28) del Apéndice G, lo cual permite asociarle un origen magnético a esos términos e identificando $g = 2\tilde{\theta}q/(4 + \tilde{\theta}^2)$ como la “carga magnética” asociada, todo como consecuencia del EME. Sin embargo, aún resta estudiar más a fondo las características de este campo eléctrico en el espacio de coordenadas, su distribución angular y su potencia total radiada. Además de analizar los otros casos de la Tabla 5.1.

Luego, en la segunda parte del mismo capítulo, se estudió el caso de la aproximación de campo lejano, para la misma partícula pero con velocidad constante y mayor que la velocidad de la luz en los medios, descubrimos la emisión de RVČ reversa, codificada en la distribución angular dada por la ec. (5.139) e ilustrada en la Fig. 5.4. Estos θ -medios son derechos y se encuentran en la naturaleza en forma de materiales magnetoeléctricos y artificialmente en forma de aislantes topológicos, que tienen permitividad, permeabilidad e índice de refracción positivos.

Las principales características de la RVČ reversa que descubrimos ahí son: (i) La condición umbral $v > c/n$ para la velocidad de la partícula se debe satisfacer como en el caso estándar. (ii) La RVČ ocurre para todas las frecuencias en el espectro de la RVČ y está siempre acompañada de la RVČ anversa. (iii) La pérdida de energía por unidad de frecuencias de la RVČ reversa está fuertemente suprimida con respecto a la salida de la RVČ anversa de acuerdo con la ec. (5.156). Una comparación con las mediciones de RVČ reversa en metamateriales por medio de la interpretación de la supresión del efecto como la detección de radiación con una frecuencia efectiva $\omega_{eff} = \omega\tilde{\theta}^2/8n^2$, de acuerdo con la ec. (5.156). Los detectores Čerenkov estándares trabajan en el rango de 140 – 800 nm que corresponde a 8.9 – 1.6 eV respectivamente. Tomando un promedio de 500 nm (2.5 eV), esperamos RVČ reversa detectable a una frecuencia ω_{eff} en el rango de 4×10^{-3} meV para $\tilde{\theta} = \alpha$ hasta 0.5 meV para $\tilde{\theta} = 11\alpha$ respectivamente, usando TlBiSe₂ como θ -medio. Sin embargo, mediciones recientes de la RVČ reversa muestran que nuestras estimaciones están dentro de las capacidades experimentales. Por otro lado, la RVČ ha sido recientemente medida a una frecuencia de 2.85 GHz, que equivale a 1.2×10^{-2} meV en un metamaterial *all-metal* que consiste de una guía de onda cuadrada llenada con anillos resonadores divididos y eléctricamente complementarios [132]. Aparte, la RVČ reversa en el rango $(3.4 - 3.9) \times 10^{-2}$ meV también ha sido corroborada en un arreglo de dipolos electromagnéticos en fase usado como modelo de una partícula móvil cargada [130].

Nuestras estimaciones para $d^2E_{RCR}/dt d\omega$ reportadas en la Tabla 5.2 están en el rango de $10^{-3} - 10^{-2}$ $\mu\text{W}/\text{eV}$ en el intervalo completo de frecuencias 1 – 8 eV. Las magnitudes aquí reportadas son más pequeñas por un factor de 10^{-3} que la máxima salida predicha teóricamente en el intervalo de 5.7 – 6.5 eV en una guía de onda metal-aislante-metal [133]. Dicha guía de onda tiene un espesor de núcleo de $a = 20$ nm, los polaritones plasmónicos superficiales

se excitan a través de un electrón que se mueve a una velocidad $v = 0.8$ y producen RVČ reversa.

Un argumento cualitativo para la existencia de la radiación Vavilov-Čerenkov reversa en θ -medios se puede dar al extender la interpretación de los campos estáticos producidos por una partícula cargada y localizada en frente de un aislante topológico en términos de sus imágenes eléctricas y magnéticas [8, 10, 11, 13, 30, 152]. Cuando la carga q se mueve de la región 1 a la región 2, como hemos asumido aquí, el efecto de la interfaz Σ se puede reemplazar al introducir una carga imagen, cargada y móvil de magnitud $\tilde{q} = -q\tilde{\theta}^2/(4n^2 + \tilde{\theta}^2)$ junto con un monopolo magnético imagen también móvil con magnitud $\tilde{g} = 2q\tilde{\theta}/(4n^2 + \tilde{\theta}^2)$, ambos localizados en la región 2 y moviéndose hacia la región 1. Estas imágenes contribuirían a los campos físicos sólo en la región 1 con su propia RVČ anversa en la zona de campo lejano, la cual resulta tener la dirección opuesta con respecto a la carga incidente. Como se muestra en la Ref. [86], un monopolo magnético g propagándose a una velocidad $v > 1/n$ también produce un cono de VČ anverso, con energía radiada por unidad de longitud y por unidad de frecuencia dada por

$$\frac{dE_{\text{monopolo}}^2}{dzd\omega} = \frac{g^2\epsilon}{\pi} \left(1 - \frac{1}{v^2n^2} \right), \quad (7.1)$$

en completa analogía con la ec. (5.137). Desde este punto de vista la contribución dominante a la RVČ reversa surgiría del monopolo magnético imagen ya que $g \sim \tilde{\theta}$ y la carga imagen eléctrica contribuiría con términos de orden más alto pues $\tilde{q}^2 \sim \tilde{\theta}^4$. Es claro que se necesita un cálculo más detallado de los campos de radiación en la región 1 producidos por esta configuración para probar esta interpretación, en particular para verificar que el factor final que depende de $\tilde{\theta}$ tendrá la forma correcta dada en la ec. (5.152). Como es bien sabido, las cargas imágenes son sólo herramientas matemáticas muy útiles en la descripción de fenómenos electromagnéticos y no representan entes físicamente existentes. En nuestro caso, la respuesta física del medio se da a través de densidades de carga eléctrica que varían en el tiempo y también por corrientes de Hall inducidas en la superficie Σ debido al efecto magnetoeléctrico. La verificación de la interpretación de arriba está más allá del alcance de la presente tesis doctoral y se pospondrá para un trabajo futuro.

En el capítulo 6 determinamos la FG dependiente del tiempo para simetría plana y un medio dieléctrico inhomogéneo cuya discontinuidad coincide con la de los θ -medios en $z = 0$ que corresponde a la configuración (ii) descrita al final del segundo párrafo de este capítulo. Esta FG conecta las fuentes externas J_1 (6.37), J_2 (6.41) y j_z con el campo eléctrico. A diferencia de la FG del capítulo 4 aquí no se pudo hallar una expresión analítica para el espacio de coordenadas ni para el espacio de frecuencias ya que no existe una expresión cerrada ni para el caso de ED estándar [114]. No obstante, se logró determinar las ecs. de los modos normales de la θ -ED dadas por (6.35) y (6.38). Más aún, debido a que dichas ecuaciones están acopladas entre sí, se encontró que los modos normales \perp y \parallel de la ED estándar [144] se mezclan cuando $\theta \neq 0$. Luego, se logró determinar las expresiones de los ocho coeficientes de reflexión y transmisión modificados dados por las ecs. (6.121), (6.128), (6.134), (6.138), (6.145), (6.149), (6.153) y (6.156), los cuales están dados en términos de las FGs libre, el parámetro efectivo θ y los coeficientes de reflexión y transmisión de la ED estándar. Además, en la sección 6.6

se exhibió que las ocho expresiones de dichos coeficientes modificados se pueden reescribir en términos de las permitividades ϵ_1 y ϵ_2 , las componentes en la dirección \mathcal{Z} del vector de onda en cada semiespacio $k_{z,1}$ y $k_{z,2}$, de los índices de refracción n_1 y n_2 , y del parámetro efectivo $\tilde{\theta}$. De este modo, se reprodujeron en su totalidad los resultados del artículo [149].

A diferencia de las FGs del capítulo 4, la FG del capítulo 6, cuyas componentes están dadas por la ec. (6.164), sólo se pudo determinar hasta cuadraturas ya que se debe recordar que las dependencias explícitas en \mathbf{k}_\perp y ω han sido omitidas a lo largo de este capítulo. De la FG (6.164) se encontró que sus componentes G^1_2 , G^2_1 , G^2_3 y G^3_2 son proporcionales a $\tilde{\theta}$ y entonces estarían relacionados con los coeficientes de mezcla $R_{TM,TE}$ (6.134), $T_{TM,TE}$ (6.138), $R_{TE,TM}$ (6.153) y $T_{TE,TM}$ (6.156). De este modo, se deberán generar nuevos efectos, ya que en ED estándar estos coeficientes son cero pues no hay mezcla de los modos normales en esta configuración, lo cual se recupera al hacer al hacer $\tilde{\theta} = 0$. Luego, con las componentes de la FG dadas por la ec. (6.164), se procedió a analizar si éstas satisfarían la relación de reciprocidad o de Lorentz (6.165) y encontramos que no se satisfizo dicha relación. Lo anterior implica que la FG dada por la ec. (6.164) no respeta la simetría de inversión temporal como se discutió en la subsección 6.7.1 con base en las Refs. [150, 151].

Aquí es justo mencionar que un pendiente por cubrir y que constituirá un trabajo futuro, será estudiar el régimen de campo lejano para la FG dada por la ec. (6.164). Para ello, el método de *steepest descent* modificado de Baños [95, 96] y Wait [97] expuesto en el capítulo 4 resulta adecuado para hallar una expresión analítica en dicho régimen. Más aún, de acuerdo con las Refs. [90, 94, 104, 107, 113] la aparición de ondas superficiales cilíndricas axialmente simétricas es inevitable en ED estándar cuando hay una fuente electromagnética inmersa en un medio dieléctrico con una inhomogeneidad sólo en la dirección de $\hat{\mathbf{z}}$. Esto implica que la FG dada por la ec. (6.164) debe ser capaz de reproducir estas ondas superficiales al hacer $\theta = 0$ y este método nos permitiría obtenerlas y describirlas como se hizo en la subsección 4.3.5 de esta tesis doctoral.

Pese a no haber logrado hallar una expresión analítica para la FG dada por la ec. (6.164) en el régimen de campo lejano y por consiguiente no haber realizado una aplicación concreta, vale la pena hacer un último comentario sobre su posible aplicación a la radiación producida por una partícula cargada que se propaga con velocidad v constante en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$ perpendicular a la interfaz Σ entre los dos θ -medios (el mismo sistema estudiado en el capítulo 5). En ED estándar dicho sistema no sólo genera radiación Vavilov-Čerenkov sino también radiación de transición [153, 154]. Considerando esto y el hecho precedente de que el campo eléctrico radiado por esta partícula dado por las ecs. (5.115), (5.116) y (5.117) estudiado en la sección 5.1.3.2 del capítulo 5 dio lugar a radiación Vavilov-Čerenkov reversa [109] en los MEs aparte de la anversa usual, es posible esperar que en la configuración más general con MEs con $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ del capítulo 6 no sólo se vuelva a presentar la radiación Vavilov-Čerenkov reversa sino que venga acompañada de radiación de transición reversa. La verificación de esta conjetura está más allá del alcance de la presente tesis doctoral y se pospondrá para un trabajo futuro.

Finalmente, es necesario dar unos comentarios sobre el campo de aplicación de los resulta-

dos obtenidos en esta tesis doctoral. Todos los resultados de esta tesis se aplican para cualquier material que presente el efecto magnetoelectrico, de tal forma que su respuesta electromagnética se pueda describir por medio de la θ -ED. En el caso particular de un aislante topológico, las condiciones para la realización de tal efecto son: (i) la capa de aislante topológico debe estar en el régimen tridimensional, (ii) todas las superficies necesitan tener una brecha con el potencial químico yaciendo dentro de dicha brecha y (iii) la dinámica del interior del aislante topológico debe ser invariante bajo la simetría de inversión temporal o bajo la simetría de inversión espacial, para mantener $\theta = \pi$ en el bulto [52]. En esta tesis doctoral hemos resaltado el caso de aislantes topológicos 3D robustos, los cuales requieren ruptura de la simetría de inversión temporal en las superficies para llevar a cabo el efecto magnetoelectrico topológico. Esto se puede lograr al abrir una brecha magnéticamente en todas las interfaces, de modo que toda la muestra se comportará como un aislante que tiene un acoplamiento magnetoelectrico exactamente de $\theta = \pi$ [155].

En el caso de la configuración para la radiación $V\check{C}$ como estamos haciendo incidir partículas cargadas a través del material, las cuales suponemos que se mueven en una línea recta, será recomendable romper la simetría de inversión temporal por medio del recubrimiento de las superficies con películas delgadas ferromagnéticas en vez de usar un campo magnético externo para lograrlo. De cualquier manera, la velocidad de las partículas incidentes tienen el límite inferior c/n pero la velocidad debe ser suficientemente grande para que no exista una deflexión apreciable sobre la carga, cuando ésta pase a través del material dopado magnéticamente. Esta velocidad externa y relevante no está del todo relacionada con la velocidad de Fermi sobre las superficies 2D y la energía de Fermi puede yacer cómodamente en la mitad de la brecha entre los conos de Dirac.

Esperamos que nuestros resultados se valgan también en el caso de los aislantes axiónicos dopados magnéticamente. Estos son heteroestructuras en las cuales se agregan iones magnéticos en la vecindad de la interfaz superior e inferior de un aislante topológico 3D robusto, como $(\text{Bi,Sb})_2\text{Te}_3$, por ejemplo. De este modo, su respuesta electromagnética está todavía codificada en la θ -ED. A pesar de que el recubrimiento ascendente-descendente en las interfaces opuestas producirá un cambio de signo de $\theta = \pi$ cuando se vaya de una interfaz a la otra, esto hará que la contribución de ambas interfaces se sume a la distribución espectral de la radiación $V\check{C}$ reversa. Esto es porque cada contribución depende de $\tilde{\theta}^2$, respectivamente, de acuerdo con las ecs. (3.15) y (5.139). Hasta donde sabemos, la teoría efectiva de la respuesta de los aislantes axiónicos intrínsecos no ha sido desarrollada todavía y nuestros resultados pueden no ser aplicables a este caso.

Apéndice A

Fórmula de Kubo para la susceptibilidad

En este apéndice se estudiarán las ideas básicas de la Teoría de Respuesta Lineal que permiten la deducción de la Fórmula de Kubo para la susceptibilidad (o función respuesta) establecida en la ec. (2.5).

La Teoría de Respuesta Lineal sirve como alternativa a la ecuación de Boltzmann para describir procesos fuera del equilibrio en Física Estadística y sobretodo en Física del Estado Sólido. Consideremos un sistema de muchos cuerpos descrito por un Hamiltoniano \hat{H}_0 que se encuentra bajo la influencia de una perturbación externa dependiente del tiempo

$$\hat{H}_f(t) = \hat{Q}(t)\phi(t) , \quad (\text{A.1})$$

donde el subíndice se refiere a la fuente externa, $\hat{Q}(t)$ es el operador que acopla la fuente dependiente del tiempo $\phi(t)$ a la materia. Dicha fuente puede ser por ejemplo: una fuente térmica, un campo electromagnético, etc. De esta manera, el Hamiltoniano total que describirá al sistema es:

$$\hat{H}_T(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}_f(t) . \quad (\text{A.2})$$

Sin perturbación alguna, es decir, a un tiempo muy remoto en el pasado $t \rightarrow -\infty$ supondremos el sistema en equilibrio y lo describiremos por medio de un ensamble de partículas cuyo operador de densidad (en el ensamble canónico o gran canónico) en equilibrio termodinámico está dado por:

$$\hat{\rho}(t \rightarrow -\infty) = \hat{\rho}_0 = \frac{e^{-\beta\hat{H}_0}}{Z_0} , \quad (\text{A.3})$$

donde Z_0 es la función de partición, que está definida como sigue:

$$Z_0 = \text{Tr} e^{-\beta\hat{H}_0} = \sum_n e^{-\beta E_n} , \quad (\text{A.4})$$

y donde n es el número de partículas que conforman el ensamble.

Por otra parte, el operador de densidad dependiente del tiempo $\hat{\rho}(t)$ satisface la ecuación de von Neumann

$$i\hbar\dot{\hat{\rho}}(t) = \left[\hat{H}_T(t), \hat{\rho}(t) \right] . \quad (\text{A.5})$$

Para este operador de densidad $\hat{\rho}(t)$ el sistema completo no está en equilibrio por causa de la dependencia temporal de $\hat{H}_T(t)$, pese a ello los valores esperados de las variables termodinámicas se toman como es usual en Física Estadística [156]. De esta manera, el valor esperado de la observable \hat{O} sería:

$$\langle \hat{O} \rangle(t) = \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(t)} = \text{Tr} \left[\hat{\rho}(t) \hat{O} \right] . \quad (\text{A.6})$$

Es conveniente trabajar en el cuadro de interacción, donde los estados evolucionan temporalmente así:

$$|\psi_I(t)\rangle = e^{\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}} |\psi_S(t)\rangle . \quad (\text{A.7})$$

Para cualquier operador en la imagen de Schrödinger su representación en el cuadro de interacción es:

$$\hat{O}_I(t) = e^{\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}} \hat{O} e^{-\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}} . \quad (\text{A.8})$$

Entonces, el valor esperado de una variable termodinámica será:

$$\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(t)} = \text{Tr} \left[\hat{\rho}(t) \hat{O} \right] = \text{Tr} \left[e^{\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}} \hat{\rho}(t) e^{-\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}} e^{\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}} \hat{O} e^{-\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}} \right] = \text{Tr} \left[\hat{\rho}_I(t) \hat{O}_I(t) \right] . \quad (\text{A.9})$$

La última igualdad se sigue de la propiedad cíclica de la traza. De esta forma, observamos que los valores esperados son independientes del cuadro en el que se trabaje. Equivalentemente, a la ecuación de von Neumann en el cuadro de Schrödinger la ecuación de movimiento para el operador de densidad en el cuadro de interacción será:

$$\frac{d\hat{\rho}_I(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_{f_I}(t), \hat{\rho}_I(t) \right] , \quad (\text{A.10})$$

con la condición inicial dada por (A.3).

Al convertir la ecuación diferencial ordinaria (A.10) en la siguiente ecuación integral:

$$\hat{\rho}_I(t) = \hat{\rho}_0 - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \left[\hat{H}_{f_I}(t'), \hat{\rho}_I(t') \right] dt' , \quad (\text{A.11})$$

será posible resolverla de forma iterativa. Al hacer esto y cortando a orden \hbar^{-2} , obtenemos:

$$\hat{\rho}_I(t) \simeq \hat{\rho}_0 - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \left[\hat{H}_{f_I}(t'), \hat{\rho}_0 \right] dt' . \quad (\text{A.12})$$

Entonces, para el valor esperado de \hat{O} se tendrá:

$$\begin{aligned} \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(t)} &= \text{Tr} \left[\hat{\rho}_I(t) \hat{O}_I(t) \right] = \text{Tr} \left\{ \left(\hat{\rho}_0 - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \left[\hat{H}_{f_I}(t'), \hat{\rho}_0 \right] dt' \right) \hat{O}_I(t) \right\} , \\ &= \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_0} - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \text{Tr} \left\{ \left[\hat{H}_{f_I}(t'), \hat{\rho}_0 \right] \hat{O}_I(t) \right\} dt' . \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Al utilizar la propiedad cíclica de la traza se encuentra que:

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{\hat{\rho}(t)} = \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{\hat{\rho}_0} - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \left\langle \left[\hat{H}_{f_I}(t'), \hat{\mathcal{O}}_I(t) \right] \right\rangle_{\hat{\rho}_0} . \quad (\text{A.14})$$

Sustituyendo explícitamente el valor del Hamiltoniano (A.1) obtenemos que:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{\hat{\rho}(t)} - \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{\hat{\rho}_0} &= -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \left\langle \left[\hat{\mathcal{Q}}_I(t'), \hat{\mathcal{O}}_I(t) \right] \right\rangle_{\hat{\rho}_0} \phi(t') , \\ &= \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \left\langle \left[\hat{\mathcal{O}}_I(t), \hat{\mathcal{Q}}_I(t') \right] \right\rangle_{\hat{\rho}_0} \phi(t') \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Extendiendo el dominio de integración para cualquier tiempo por medio de una función de Heaviside se tiene lo siguiente:

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{\hat{\rho}(t)} - \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{\hat{\rho}_0} = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi_{\hat{\mathcal{O}}, \hat{\mathcal{Q}}}(t, t') \phi(t') = \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \Theta(t-t') \left\langle \left[\hat{\mathcal{O}}_I(t), \hat{\mathcal{Q}}_I(t') \right] \right\rangle_{\hat{\rho}_0} \phi(t') , \quad (\text{A.16})$$

donde hemos definido:

$$\chi_{\hat{\mathcal{O}}, \hat{\mathcal{Q}}}(t, t') = \frac{i}{\hbar} \Theta(t-t') \left\langle \left[\hat{\mathcal{O}}_I(t), \hat{\mathcal{Q}}_I(t') \right] \right\rangle_{\hat{\rho}_0} , \quad (\text{A.17})$$

como la función de susceptibilidad o función de respuesta. A esta última expresión se le conoce como fórmula de Kubo para la susceptibilidad.

Ahora consideremos una función $\phi(t)$ con la siguiente dependencia específica del tiempo:

$$\phi(t) = \phi_0 e^{-i(\omega+i\delta)t} . \quad (\text{A.18})$$

El término $\delta > 0$ se introduce para asegurar la convergencia de las componentes de Fourier. Al hacer esto, se introduce la siguiente condición inicial:

$$\phi(t \rightarrow -\infty) = 0 . \quad (\text{A.19})$$

Es decir, que en el pasado remoto determinado cuando $t \rightarrow -\infty$, no hay perturbación externa cumpliendo con que el sistema está en equilibrio termodinámico. Al término δ se le conoce como término adiabático, pues causa un aumento lento y gradual de la perturbación con el tiempo a partir de la condición inicial en $t \rightarrow -\infty$.

Dado que la función de susceptibilidad contiene toda la información de cómo responde el sistema a la perturbación externa, entonces adquiere mucha importancia su estudio en el contexto de la Teoría de Respuesta Lineal. Por ello, es conveniente estudiar su comportamiento en el espacio de frecuencias. Esto lo haremos ayudándonos de la ec. (A.18) que al ser sustituida en la expresión (A.16) se obtiene que:

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{\hat{\rho}(t)} - \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{\hat{\rho}_0} = \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \Theta(t-t') \left\langle \left[\hat{\mathcal{O}}_I(t), \hat{\mathcal{Q}}_I(t') \right] \right\rangle_{\hat{\rho}_0} \phi_0 e^{-i(\omega+i\delta)t'} \quad (\text{A.20})$$

que es posible interpretar como una convolución [84]. Entonces, si utilizamos en la ecuación previa la propiedad de conmutatividad de la convolución resulta lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{\hat{\rho}(t)} - \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{\hat{\rho}_0} &= \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \Theta(t') \left\langle \left[\hat{\mathcal{O}}_I(t), \hat{\mathcal{Q}}_I(t-t') \right] \right\rangle_{\hat{\rho}_0} \phi_0 e^{-i(\omega+i\delta)(t-t')}, \\
&= \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \Theta(t') \left\langle \left[\hat{\mathcal{O}}_I(t), \hat{\mathcal{Q}}_I(t-t') \right] \right\rangle_{\hat{\rho}_0} e^{i(\omega+i\delta)t'} \right\} \phi_0 e^{-i(\omega+i\delta)t}, \\
&= \chi_{\hat{\mathcal{O}}, \hat{\mathcal{Q}}}(\omega+i\delta) \phi_0 e^{-i(\omega+i\delta)t}, \tag{A.21}
\end{aligned}$$

donde se identificó la transformada de Fourier en las frecuencias de la susceptibilidad en la última igualdad.

Ahora bien, concentrémonos en la expresión dentro de las llaves de la ec. (A.21). Al elegir $t = t'$ tendremos que:

$$\begin{aligned}
\chi_{\hat{\mathcal{O}}, \hat{\mathcal{Q}}}(\omega+i\delta) &= \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \Theta(t') \left\langle \left[\hat{\mathcal{O}}_I(t'), \hat{\mathcal{Q}}(0) \right] \right\rangle_{\hat{\rho}_0} e^{i(\omega+i\delta)t'}, \\
&= \frac{i}{\hbar} \int_0^{\infty} dt' \left\langle \left[\hat{\mathcal{O}}_I(t'), \hat{\mathcal{Q}} \right] \right\rangle_{\hat{\rho}_0} e^{i(\omega+i\delta)t'}. \tag{A.22}
\end{aligned}$$

El subíndice I del operador $\hat{\mathcal{Q}}$ ya no se escribe pues al ser evaluado en $t = t'$ coincide con su representación en el cuadro de Schrödinger, por esta razón $\hat{\mathcal{Q}}(0) = \hat{\mathcal{Q}}$ en la última igualdad. De esta expresión, observamos que más que una transformada de Fourier, es una transformada de Laplace. Dicha transformada existe debido a que el término adiabático asegura la convergencia de la integral. Entonces, lo que resta es calcular explícitamente esta integral, como se muestra enseguida:

$$\begin{aligned}
\chi_{\hat{\mathcal{O}}, \hat{\mathcal{Q}}}(\omega+i\delta) &= \frac{i}{\hbar} \int_0^{\infty} dt' \left\langle \left[\hat{\mathcal{O}}_I(t'), \hat{\mathcal{Q}} \right] \right\rangle_{\hat{\rho}_0} e^{i(\omega+i\delta)t'}, \\
&= \frac{i}{\hbar} \int_0^{\infty} dt' \text{Tr} \left(\frac{e^{-\beta \hat{H}_0}}{Z_0} \left[\hat{\mathcal{O}}_I(t'), \hat{\mathcal{Q}} \right] \right) e^{i(\omega+i\delta)t'}, \tag{A.23}
\end{aligned}$$

donde hemos usado la condición inicial de equilibrio termodinámico del sistema dada por la ecuación (A.3). Luego, al usar explícitamente la representación del operador $\hat{\mathcal{O}}$ en el cuadro de interacción tendremos:

$$\chi_{\hat{\mathcal{O}}, \hat{\mathcal{Q}}}(\omega+i\delta) = \frac{i}{\hbar} \int_0^{\infty} dt' \text{Tr} \left[\frac{e^{-\beta \hat{H}_0}}{Z_0} \left(e^{\frac{i\hat{H}_0 t'}{\hbar}} \hat{\mathcal{O}} e^{-\frac{i\hat{H}_0 t'}{\hbar}} \hat{\mathcal{Q}} - \hat{\mathcal{Q}} e^{\frac{i\hat{H}_0 t'}{\hbar}} \hat{\mathcal{O}} e^{-\frac{i\hat{H}_0 t'}{\hbar}} \right) \right] e^{i(\omega+i\delta)t'}. \tag{A.24}$$

Introduciendo dos bases de energía completas y usando la propiedad cíclica de la traza, resulta que:

$$\begin{aligned}
\chi_{\hat{\mathcal{O}}, \hat{\mathcal{Q}}}(\omega+i\delta) &= \frac{i}{\hbar} \sum_{a,b} \frac{e^{-\beta E_a}}{Z_0} \int_0^{\infty} dt' \left[\langle a | \hat{\mathcal{O}} | b \rangle \langle b | \hat{\mathcal{Q}} | a \rangle e^{\frac{i}{\hbar}(\hbar\omega+i\hbar\delta+E_a-E_b)t'} \right. \\
&\quad \left. - \langle a | \hat{\mathcal{Q}} | b \rangle \langle b | \hat{\mathcal{O}} | a \rangle e^{\frac{i}{\hbar}(\hbar\omega+i\hbar\delta+E_b-E_a)t'} \right]. \tag{A.25}
\end{aligned}$$

Al integrar sobre el tiempo, obtenemos finalmente la siguiente expresión para la susceptibilidad:

$$\chi_{\hat{\mathcal{O}},\hat{\mathcal{Q}}}(\omega + i\delta) = \sum_{a,b} \left(\frac{e^{-\beta E_a} - e^{-\beta E_b}}{Z_0} \right) \frac{\langle a|\hat{\mathcal{O}}|b\rangle\langle b|\hat{\mathcal{Q}}|a\rangle}{\hbar\omega + i\hbar\delta + E_a - E_b}, \quad (\text{A.26})$$

donde E_a y E_b son las energías propias del sistema y podemos observar que la ec. (2.4) es justo la expuesta en la Sec. 2.2 del Capítulo 2.

Apéndice B

Conductividad Hall como respuesta a un campo externo

Para contactar con las ideas expuestas sobre los aislantes en la sección 2.2, podríamos plantearnos la siguiente pregunta: ¿Cómo reacciona un metal o un aislante ante el Efecto Hall? Para responder a esta pregunta, supongamos que sometemos una muestra del aislante en consideración a un gradiente de voltaje en una dirección que llamamos \mathcal{X} . Un sistema metálico respondería a esta perturbación con un flujo de corriente, principalmente en una dirección paralela al gradiente de voltaje. No obstante, un aislante no tiene esta opción, de lo contrario no sería un aislante. Sin embargo, algunos aislantes (los aislantes topológicos particularmente) responden con un flujo de corriente $I_{\mathcal{Y}}$, en una dirección \mathcal{Y} , transversal a \mathcal{X} (Ver Fig. B.1). La aparente contradicción se resuelve por la observación de que la corriente sólo es transportada por los llamados estados superficiales que se forman en las fronteras metálicas efectivas del bulto del material aislante (Círculo interior de la Fig. B.1). Aquí no se revisará la formación de estos estados en el material aislante, sólo remitimos a consultar el artículo de revisión [32].

No obstante, estudiar con mayor detenimiento la respuesta de un material (en particular un aislante topológico) frente a un campo electromagnético y analizar cómo se genera el transporte de la corriente a nivel microscópico en él, nos permitirá entender mejor el IQHE y más que ello, nos permitirá sentar las bases para la conexión con los invariantes topológicos. Para lograr este fin, será conveniente estudiar la conductividad Hall (el recíproco de R_H) como una función de respuesta ante una perturbación electromagnética externa.

Para alcanzar este objetivo, nos basaremos en la Teoría de Respuesta Lineal, que como su nombre lo indica, estudia la respuesta lineal de un sistema de muchos cuerpos descrito por un ensamble de partículas ante una fuente externa $\phi(t)$, lo cual se describe por medio de la siguiente ecuación:

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{\hat{\rho}(t)} - \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{\hat{\rho}_0} = \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \Theta(t - t') \left\langle \left[\hat{\mathcal{O}}_I(t), \hat{H}_{f_I}(t') \right] \right\rangle_{\hat{\rho}_0}, \quad (\text{B.1})$$

donde $\hat{\mathcal{O}}$ representa al operador asociado a la observable de interés. Además $\hat{\rho}_0$ es el operador

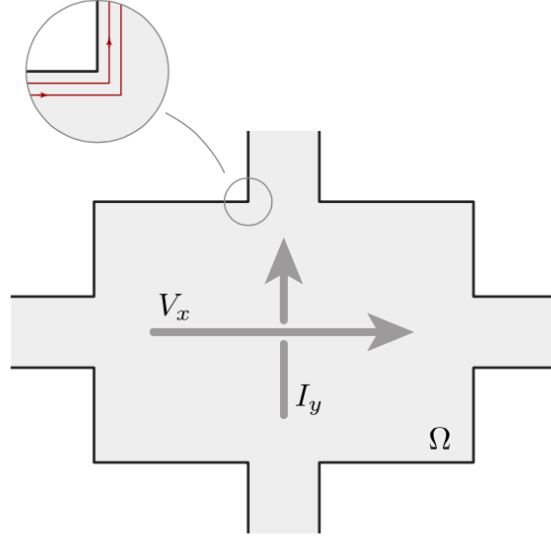


Figura B.1: Esquemmatización de la Conductividad Hall como respuesta a un gradiente de voltajes V_x dentro de un aislante topológico (TI) de volumen V .

de densidad que funge como condición inicial para el ensamble. También $\hat{H}_{f_I}(t') = \hat{Q}_I(t')\phi(t')$ es el Hamiltoniano que describe la perturbación externa escrito en el cuadro de interacción, donde \hat{Q}_I es el operador que acopla la fuente dependiente del tiempo $\phi(t')$ a la materia y que también está escrito en el cuadro de interacción.

La respuesta del sistema (lo que se mide en el laboratorio) representado por el lado izquierdo de la ec. (B.1) y la fuente externa $\hat{H}_{f_I}(t')$ en el lado derecho de la misma, se conectan por medio de la susceptibilidad $\chi_{\hat{O},\hat{Q}}(t,t')$ (o también denominada función respuesta) de la siguiente forma:

$$\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(t)} - \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_0} = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi_{\hat{O},\hat{Q}}(t,t') \phi(t'). \quad (\text{B.2})$$

Utilizando las ecuaciones (B.1) y (B.2), es posible hallar la siguiente expresión general para la susceptibilidad :

$$\chi_{\hat{O},\hat{Q}}(t,t') = \frac{i}{\hbar} \Theta(t-t') \left\langle \left[\hat{O}_I(t), \hat{Q}_I(t') \right] \right\rangle_{\hat{\rho}_0}. \quad (\text{B.3})$$

A esta última fórmula se le conoce como Fórmula de Kubo para la susceptibilidad, estudiar dichas susceptibilidades es el objetivo central de la Teoría de Respuesta Lineal. Para la deducción detallada de las ecuaciones (B.1), (B.2) y (B.3) y las ideas físicas detrás de éstas, remitimos a la consulta del Apéndice A y concretamente la ec. (A.17).

A continuación, estudiaremos la respuesta de un sistema de N_e -electrones ante un campo electromagnético externo en el contexto de esta teoría. Para ello, identificaremos en la ecuación (B.1) a la observable \hat{O} con las componentes de la corriente total $\hat{\mathbf{J}}$, es decir que por ahora

incluiremos todas las contribuciones que dan lugar tanto a efectos eléctricos y magnéticos, relacionaremos al operador \hat{Q} con las componentes de la corriente $\hat{\mathbf{j}}$ simetrizada por razones de hermiticidad y también con la densidad de partículas \hat{n} . Además, en este caso la fuente ϕ se describirá por los potenciales eléctrico Φ y magnético \mathbf{A} . También mostraremos que en este sistema la susceptibilidad $\chi_{\hat{\phi}, \hat{Q}}(t, t')$ dada por (B.3) será la conductividad eléctrica σ .

Primero, debemos determinar el Hamiltoniano \hat{H}_f requerido en (B.1) que acople correctamente las fuentes electromagnéticas Φ y \mathbf{A} con la corriente simetrizada $\hat{\mathbf{j}}$ y la densidad de partículas \hat{n} . Para tal fin, partimos de la cuantización de un sistema de un sistema de N_e electrones cuyo Hamiltoniano en unidades gaussianas es:

$$\hat{H} = \sum_{a=1}^{N_e} \left\{ \frac{[\hat{\mathbf{p}}_a - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_a, t)]^2}{2m} + e\Phi(\mathbf{r}_a, t) \right\} + V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N_e}), \quad (\text{B.4})$$

donde $V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N_e})$ es el potencial coulombiano entre los N_e electrones y para este Hamiltoniano despreciaremos la interacción entre los electrones y los núcleos atómicos del sistema.

Luego, el Hamiltoniano (B.4) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{H}_f(t), \\ &= \hat{H}_0 + \int d^3\mathbf{r}' \left[-\frac{1}{c} \hat{J}_k(\mathbf{r}', t) A^k(\mathbf{r}', t) + e\hat{n}(\mathbf{r}')\Phi(\mathbf{r}', t) - \frac{e^2}{2mc^2} \hat{n}(\mathbf{r}') \mathbf{A}^2(\mathbf{r}', t) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

donde $k = x, y, z$ es un índice que etiqueta a las tres componentes espaciales de los vectores involucrados y cuando esté repetido indicará que se está sumando sobre él,

$$\hat{H}_0 = \sum_{a=1}^{N_e} \frac{\hat{\mathbf{p}}_a^2}{2m} + V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N_e}) \quad (\text{B.6})$$

es el Hamiltoniano no perturbado por el campo electromagnético externo,

$$\hat{J}_k(\mathbf{r}', t) = \hat{j}_k(\mathbf{r}', t) - \frac{e^2}{mc} A_k(\mathbf{r}', t), \quad (\text{B.7})$$

es el operador de corriente total compuesto por el operador simetrizado de densidad de corriente*

$$\hat{j}_k(\mathbf{r}', t) = \frac{e}{2m} \sum_{a=1}^{N_e} [\hat{p}_k^a \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_a) + \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_a) \hat{p}_k^a], \quad (\text{B.8})$$

y el segundo sumando de la ec. (B.7)

$$\hat{j}_k^{dia}(\mathbf{r}', t) = -\frac{e^2}{mc} A_k(\mathbf{r}', t) \quad (\text{B.9})$$

*En otras referencias tales como el libro [158], a $\hat{j}_k(\mathbf{r}', t)$ se le suele llamar contribución paramagnética del operador de densidad de corriente. Sin embargo, aquí no se seguirá esa notación.

suele recibir el nombre de término diamagnético [156, 158]. También se definió el operador

$$\hat{n}(\mathbf{r}') = \sum_{a=1}^{N_e} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_a) , \quad (\text{B.10})$$

denominado como operador de densidad de partículas.

Pero, en Teoría de Respuesta Lineal se busca estudiar únicamente los comportamientos a orden lineal en las fuentes externas, que en este caso son $A_k(\mathbf{r}', t)$ y $\Phi(\mathbf{r}', t)$, por lo que al cortar a orden lineal en los potenciales tendremos finalmente que $\hat{H}_f(t)$ será

$$\hat{H}_f(t) = \int d^3\mathbf{r}' \left[-\frac{1}{c} \hat{J}_k(\mathbf{r}', t) A^k(\mathbf{r}', t) + e \hat{n}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}', t) \right] . \quad (\text{B.11})$$

Luego, para obtener la Fórmula de Kubo para la conductividad eléctrica se sustituye el $\hat{H}_f(t)$ en la fórmula (B.1) y se hace $\hat{\mathcal{O}}_I = \hat{J}_i(\mathbf{r}', t)$. Teniendo así, el siguiente conmutador a determinar:

$$\begin{aligned} [\hat{J}_i(\mathbf{r}', t), \hat{H}_f(t')] &= \int d^3\mathbf{r}' \left[\hat{j}_i(\mathbf{r}, t) - \frac{e^2}{mc} A_i(\mathbf{r}, t), -\frac{1}{c} \hat{j}_k(\mathbf{r}', t') A^k(\mathbf{r}', t') \right] , \\ &+ \int d^3\mathbf{r}' \left[\hat{j}_i(\mathbf{r}, t) - \frac{e^2}{mc} A_i(\mathbf{r}, t), e \hat{n}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}', t') \right] . \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Teniendo en cuenta que los operadores $\hat{j}_i(\mathbf{r}, t)$ actúan sólo sobre las coordenadas de cada partícula y quedándonos sólo con los conmutadores a orden lineal en las fuentes, resulta que:

$$[\hat{J}_i(\mathbf{r}', t), \hat{H}_f(t')] = -\frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r}' \left[\hat{j}_i(\mathbf{r}, t), \hat{j}_k(\mathbf{r}', t') \right] A^k(\mathbf{r}', t') + e \int d^3\mathbf{r}' \left[\hat{j}_i(\mathbf{r}, t), \hat{n}(\mathbf{r}') \right] \Phi(\mathbf{r}', t') . \quad (\text{B.13})$$

Entonces, la ecuación (B.1) toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \langle \hat{J}_i(\mathbf{r}) \rangle_{\hat{\rho}(t)} - \langle \hat{J}_i(\mathbf{r}) \rangle_{\hat{\rho}_0} &= -\frac{i}{\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3\mathbf{r}' \Theta(t-t') \left\langle \left[\hat{j}_i(\mathbf{r}, t), \hat{j}_k(\mathbf{r}', t') \right] \right\rangle_{\hat{\rho}_0} A^k(\mathbf{r}', t') , \\ &+ \frac{ie}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3\mathbf{r}' \Theta(t-t') \left\langle \left[\hat{j}_i(\mathbf{r}, t), \hat{n}(\mathbf{r}') \right] \right\rangle_{\hat{\rho}_0} \Phi(\mathbf{r}', t') . \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Luego, por medio de la ecuación (B.3), identificamos las susceptibilidades (que más adelante observaremos explícitamente como la conductividad eléctrica) y reescribimos la última expresión como sigue:

$$\begin{aligned} \langle \hat{J}_i(\mathbf{r}) \rangle_{\hat{\rho}(t)} - \langle \hat{J}_i(\mathbf{r}) \rangle_{\hat{\rho}_0} &= -\frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3\mathbf{r}' \chi_{\hat{j}_i(\mathbf{r}), \hat{j}_k(\mathbf{r}')} (t, t') A^k(\mathbf{r}', t') , \\ &+ e \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3\mathbf{r}' \chi_{\hat{j}_i(\mathbf{r}), \hat{n}(\mathbf{r}')} (t, t') \Phi(\mathbf{r}', t') . \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

De ahora en adelante, consideremos campos eléctricos oscilantes en el tiempo, olvidaremos la dependencia espacial y no tomaremos en cuenta los efectos inducidos por campos magnéticos externos ya que sólo queremos estudiar la respuesta eléctrica del sistema. Esto último se justifica siempre y cuando la longitud de onda del campo electromagnético sea más grande que la constante de la red. Entonces, el campo eléctrico con estas consideraciones está dado por:

$$E_i = E_{0i} e^{-i(\omega+i\delta)t}, \quad (\text{B.16})$$

donde $i = x, y, z$, ω es la frecuencia, δ es el parámetro adiabático y cabe destacar que el exponente negativo en la fase asegura que en el pasado remoto ($t \rightarrow -\infty$) el campo eléctrico se anule, i.e., no hay perturbación y el sistema esté realmente en equilibrio.

Elijamos $\Phi = 0$ y obtengamos el potencial vectorial. Como el campo eléctrico se relaciona con el potencial vectorial de la siguiente manera:

$$E_i(t) = -\partial_i \Phi(t) - \frac{\dot{A}_i(t)}{c} = -\frac{\dot{A}_i(t)}{c}, \quad (\text{B.17})$$

Obtenemos que

$$A_i(t) = \frac{-ic}{\omega + i\delta} E_{0i} e^{-i(\omega+i\delta)t}. \quad (\text{B.18})$$

Debido a la homogeneidad espacial en promedio del sistema, nos interesaremos solamente en el valor esperado de la corriente media, es decir, promediamos de la siguiente manera:

$$\langle \hat{J}_i \rangle = \frac{1}{V} \int d^3\mathbf{r} \langle \hat{J}_i(\mathbf{r}) \rangle \quad y \quad \langle \hat{n} \rangle = \frac{1}{V} \int d^3\mathbf{r} \langle \hat{n}(\mathbf{r}) \rangle, \quad (\text{B.19})$$

donde V es el volumen del sistema.

Considerando estos promedios y sustituyendo la forma del potencial vectorial, tendremos que

$$\begin{aligned} \langle \hat{J}_i \rangle_{\hat{\rho}(t)} - \langle \hat{J}_i \rangle_{\hat{\rho}_0} &= \frac{i}{\omega + i\delta} \frac{1}{V} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{r}' \chi_{\hat{j}_i(\mathbf{r}), \hat{j}_k(\mathbf{r}')} (t, t') E_{0k} e^{-i(\omega+i\delta)t'}, \\ &= \frac{i}{\omega + i\delta} \frac{1}{V} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi_{\hat{j}_i, \hat{j}_k} (t, t') E_{0k} e^{-i(\omega+i\delta)t'}. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Ahora bien, como el sistema es invariante ante traslaciones temporales, la susceptibilidad cumple con la siguiente propiedad:

$$\chi_{\hat{j}_i, \hat{j}_k} (t, t') = \chi_{\hat{j}_i, \hat{j}_k} (t - t'). \quad (\text{B.21})$$

Esta propiedad se justifica al interpretar la susceptibilidad como una función de Green y al exigir la causalidad se cumple con la expresión anterior [156, 157]. Sustituyendo la ecuación (B.21) en (B.20) obtenemos lo siguiente

$$\langle \hat{J}_i \rangle_{\hat{\rho}(t)} - \langle \hat{J}_i \rangle_{\hat{\rho}_0} = \frac{i}{\omega + i\delta} \frac{1}{V} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi_{\hat{j}_i, \hat{j}_k} (t - t') E_{0k} e^{-i(\omega+i\delta)t'}. \quad (\text{B.22})$$

Esta integral se puede reducir a una forma más simple al identificarla como una convolución [84] y utilizar la propiedad de conmutatividad de ésta, resulta que

$$\begin{aligned}
\langle \hat{J}_i \rangle_{\hat{\rho}(t)} - \langle \hat{J}_i \rangle_{\hat{\rho}_0} &= \frac{i}{\omega + i\delta} \frac{1}{V} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi_{\hat{j}_i, \hat{j}_k}(t') E_{0k} e^{-i(\omega+i\delta)(t-t')}, \\
&= \frac{i}{\omega + i\delta} \frac{1}{V} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi_{\hat{j}_i, \hat{j}_k}(t') e^{i(\omega+i\delta)t'} \right] E_{0k} e^{-i(\omega+i\delta)t}, \\
&= \frac{i}{\omega + i\delta} \frac{1}{V} \chi_{\hat{j}_i, \hat{j}_k}(\omega + i\delta) E_{0k} e^{-i(\omega+i\delta)t}, \tag{B.23}
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que el término dentro del corchete fue identificado con la transformada de Fourier de la susceptibilidad (como en el apéndice A). Entonces, recordando que la densidad de corriente J_i y el campo eléctrico se relacionan por medio de la conductividad eléctrica σ_{ij} de la siguiente forma

$$J_i = \sigma_{ik} E_k, \tag{B.24}$$

el tensor de conductividad eléctrica dependiente de la frecuencia se lee a partir de la ec. (B.23) como sigue:

$$\sigma_{ik}(\omega + i\delta) = \frac{i}{\omega + i\delta} \frac{1}{V} \chi_{\hat{j}_i, \hat{j}_k}(\omega + i\delta). \tag{B.25}$$

A esta ecuación se le conoce como Fórmula de Nakano-Kubo [34].

Sin embargo, aún no hemos estudiado a fondo la respuesta del sistema (aislante topológico) a nivel microscópico. Para ello, necesitamos el siguiente resultado de la Teoría de Respuesta Lineal (la deducción se encuentra en el Apéndice A):

$$\chi_{\hat{O}, \hat{Q}}(\omega + i\delta) = \sum_{a,b} \left(\frac{e^{-\beta E_a} - e^{-\beta E_b}}{Z_0} \right) \frac{\langle a | \hat{O} | b \rangle \langle b | \hat{Q} | a \rangle}{\hbar\omega + i\hbar\delta + E_a - E_b}, \tag{B.26}$$

que aplicaremos a la ec. (B.25) con $\hat{O} = \hat{j}_i$ y con $\hat{Q} = \hat{j}_k$ como nos pide la Fórmula de Nakano-Kubo (B.25) en cuya derivación ya hemos promediado sobre el volumen del sistema como se aprecia en las ecuaciones (B.19). De este modo, deberemos hacer lo mismo para el operador simetrizado de densidad de corriente (B.8) que se reescribirá como sigue:

$$\hat{j}_k(\mathbf{r}', t) = \frac{e}{m} \sum_{a=1}^{N_e} \hat{p}_k^a. \tag{B.27}$$

Con todo lo anterior, el tensor de conductividad se reescribe como:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ik}(\omega + i\delta) &= \frac{i}{\omega + i\delta} \frac{1}{V} \sum_{a,b} \left(\frac{e^{-\beta E_a} - e^{-\beta E_b}}{Z_0} \right) \frac{\langle a | \hat{j}_i | b \rangle \langle b | \hat{j}_k | a \rangle}{\hbar\omega + i\hbar\delta + E_a - E_b}, \\
&= \frac{i}{\omega + i\delta} \frac{1}{V} \sum_{a,b} \frac{e^{-\beta E_a}}{Z_0} \left[\frac{\langle a | \hat{j}_i | b \rangle \langle b | \hat{j}_k | a \rangle}{\hbar\omega + i\hbar\delta + E_a - E_b} - \frac{\langle a | \hat{j}_k | b \rangle \langle b | \hat{j}_i | a \rangle}{\hbar\omega + i\hbar\delta + E_b - E_a} \right]. \tag{B.28}
\end{aligned}$$

Dado que los portadores de carga involucrados en el transporte de la corriente son los electrones, identificaremos a $Z_0^{-1}e^{-\beta E_a}$ como la distribución de Fermi-Dirac $f(E_a)$ que contendrá la información física del sistema sin perturbar descrito por \hat{H}_0 (B.6). De este modo, la conductividad dependiente de la frecuencia se expresa como:

$$\sigma_{ik}(\omega + i\delta) = \frac{i}{\omega + i\delta} \frac{1}{V} \sum_{a,b} f(E_a) \left[\frac{\langle a|\hat{j}_i|b\rangle\langle b|\hat{j}_k|a\rangle}{\hbar\omega + i\hbar\delta + E_a - E_b} - \frac{\langle a|\hat{j}_k|b\rangle\langle b|\hat{j}_i|a\rangle}{\hbar\omega + i\hbar\delta + E_b - E_a} \right]. \quad (\text{B.29})$$

Sin embargo, para propósitos futuros, aún es necesario calcular el límite estático de la conductividad $\sigma_{ik}(\omega + i\delta)$, i.e. cuando $\omega \rightarrow 0$ y $\delta = 0$, además del límite a bajas temperaturas $T \rightarrow 0$. Comencemos por el límite estático. Para esto, tendremos que hacer la siguiente expansión a primer orden en las frecuencias en los denominadores de $\sigma_{ik}(\omega + i\delta)$:

$$\frac{1}{\pm\hbar\omega + E_a - E_b} = \frac{1}{E_a - E_b} \left(1 \pm \frac{\hbar\omega}{E_a - E_b} \right)^{-1} \simeq \frac{1}{E_a - E_b} \left(1 \mp \frac{\hbar\omega}{E_a - E_b} \right). \quad (\text{B.30})$$

Donde ya se tomó $\delta = 0$. Al sustituir (B.30) en la expresión (B.29), además de hacer $i = x$; $k = y$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = \sigma_{xy}(\omega \rightarrow 0) &= \frac{i}{V\omega} \sum_{a,b} f(E_a) \left[\frac{\langle a|\hat{j}_x|b\rangle\langle b|\hat{j}_y|a\rangle + \langle a|\hat{j}_y|b\rangle\langle b|\hat{j}_x|a\rangle}{E_a - E_b} \right], \\ &\quad - \frac{i\hbar}{V} \sum_{a,b} f(E_a) \left[\frac{\langle a|\hat{j}_x|b\rangle\langle b|\hat{j}_y|a\rangle - \langle a|\hat{j}_y|b\rangle\langle b|\hat{j}_x|a\rangle}{(E_a - E_b)^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Estudiemos el primer sumando. Si consideramos que $\hat{j}_i = e \sum_{a=1}^{N_e} \hat{v}_i^a$, tendremos lo siguiente

$$\begin{aligned} &\frac{i}{V\omega} \sum_{a,b} f(E_a) \left[\frac{\langle a|\hat{j}_x|b\rangle\langle b|\hat{j}_y|a\rangle + \langle a|\hat{j}_y|b\rangle\langle b|\hat{j}_x|a\rangle}{E_a - E_b} \right] \\ &= \frac{ie^2}{V\omega} \sum_{a,b} \sum_{c,d=1}^{N_e} f(E_a) \left[\frac{\langle a|\hat{v}_x^c|b\rangle\langle b|\hat{v}_y^d|a\rangle + \langle a|\hat{v}_y^d|b\rangle\langle b|\hat{v}_x^c|a\rangle}{E_a - E_b} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

Como \hat{v}_x^c en $t = 0$ está en el cuadro de Schrödinger, entonces al tiempo $t = 0$ lo podemos pensar en el cuadro de Heisenberg, i.e., $\hat{v}_x^c = \hat{v}_x^c(S) = \hat{v}_x^c(H)(0)$. Siendo así, usamos su ecuación de movimiento en el cuadro de Heisenberg:

$$\hat{v}_x^c = \frac{d\hat{x}^c}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_0, \hat{x}^c] + \frac{\partial \hat{x}^c}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_0, \hat{x}^c]. \quad (\text{B.33})$$

Luego, sustituimos esta relación en uno de los valores esperados de la ec. (B.32), resultando que

$$\langle a|\hat{v}_x^c|b\rangle = \frac{i}{\hbar} \langle a| [\hat{H}_0, \hat{x}^c] |b\rangle = \frac{i}{\hbar} \langle a| (\hat{H}_0 \hat{x}^c - \hat{x}^c \hat{H}_0) |b\rangle = \frac{i(E_a - E_b)}{\hbar} \langle a|\hat{x}^c|b\rangle. \quad (\text{B.34})$$

Sustituyendo este valor esperado en la ec. (B.32) encontramos que:

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{V\omega} \sum_{a,b} f(E_a) \left[\frac{\langle a|\hat{j}_x|b\rangle\langle b|\hat{j}_y|a\rangle + \langle a|\hat{j}_y|b\rangle\langle b|\hat{j}_x|a\rangle}{E_a - E_b} \right] \\
&= -\frac{e^2}{\hbar\omega V} \sum_{a,b} \sum_{c,d=1}^{N_e} f(E_a) (\langle a|\hat{x}^c|b\rangle\langle b|\hat{v}_y^d|a\rangle - \langle a|\hat{v}_y^d|b\rangle\langle b|\hat{x}^c|a\rangle) , \\
&= -\frac{e^2}{\hbar\omega V} \sum_a \sum_{c,d=1}^{N_e} f(E_a) \langle a|(\hat{x}^c\hat{v}_y^d - \hat{v}_y^d\hat{x}^c)|a\rangle , \\
&= -\frac{e^2}{\hbar\omega V} \sum_a \sum_{c,d=1}^{N_e} f(E_a) \langle a|[\hat{x}^c, \hat{v}_y^d]|a\rangle , \\
&= 0 , \tag{B.35}
\end{aligned}$$

donde hemos usado la completez de los estados $|b\rangle$ y el hecho de que $[\hat{x}^c, \hat{v}_y^d] = 0 \forall c, d$. Por lo tanto,

$$\sigma_{xy} = -\frac{i\hbar}{V} \sum_{a,b} f(E_a) \left[\frac{\langle a|\hat{j}_x|b\rangle\langle b|\hat{j}_y|a\rangle - \langle a|\hat{j}_y|b\rangle\langle b|\hat{j}_x|a\rangle}{(E_a - E_b)^2} \right] . \tag{B.36}$$

Usando que $\hat{j}_i = \frac{e}{m}\hat{p}_i$, tendremos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy} &= -\frac{ie^2\hbar}{Vm^2} \sum_{a,b} f(E_a) \left[\frac{\langle a|\hat{p}_x|b\rangle\langle b|\hat{p}_y|a\rangle - \langle a|\hat{p}_y|b\rangle\langle b|\hat{p}_x|a\rangle}{(E_a - E_b)^2} \right] , \\
&= -\frac{ie^2\hbar}{Vm^2} \sum_{a,b} [f(E_a) - f(E_b)] \frac{\langle a|\hat{p}_x|b\rangle\langle b|\hat{p}_y|a\rangle}{(E_a - E_b)^2} . \tag{B.37}
\end{aligned}$$

Finalmente, tomamos el límite cuando $T \rightarrow 0$. Recordando que la distribución de Fermi-Dirac es

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{\beta(E-\mu)}} , \tag{B.38}$$

cuya gráfica es la de la Fig. (B.2), y donde es posible apreciar que en el límite cuando $T \rightarrow 0$ es posible aproximarla por una función de Heaviside (línea punteada de la Fig. B.2). Por lo cual, podemos concluir que

$$f(E_a) - f(E_b) = \begin{cases} 1, & E_a < E_F < E_b, \\ -1, & E_b < E_F < E_a, \\ 0, & o.c. \end{cases}$$

Por lo tanto, la expresión final para la conductividad eléctrica es

$$\sigma_{xy} = -\frac{ie^2\hbar}{Vm^2} \sum_{E_a < E_F < E_b} \frac{\langle a|\hat{p}_x|b\rangle\langle b|\hat{p}_y|a\rangle - \langle a|\hat{p}_y|b\rangle\langle b|\hat{p}_x|a\rangle}{(E_a - E_b)^2} , \tag{B.39}$$

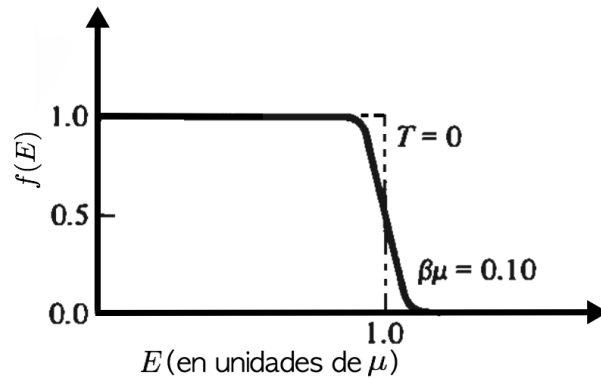


Figura B.2: Distribución de Fermi-Dirac como función de la energía E (en unidades de μ) para $T = 0$ y $\beta\mu = 0.10$.

donde E_a y E_b son las energías propias del sistema como ya se mencionó en la ec. (A.26) del Apéndice A. Sin embargo, en esta última expresión dichas energías pueden depender de otras variables continuas del sistema tales como el vector de onda \mathbf{k} . Lo anterior ocurre cuando se incorpora la información de la estructura de bandas del sistema y esto se apreciará mejor en el siguiente Apéndice de esta tesis doctoral. Además, esta última ecuación es precisamente la expresión a partir de la cual Kohmoto [34] y Thouless et al. [35] demuestran la invariancia topológica de la conductividad eléctrica y es la ec. (2.5) citada en la Sec. 2.2 del Capítulo 2.

Apéndice C

La conductividad Hall como Invariante Topológico

Demostración:

La demostración de la ec. (2.9) se basa en la aplicación directa de la Teoría de Perturbaciones Independientes del tiempo de la Mecánica Cuántica. Recordando que estamos estudiando el sistema más simple, un asilante bidimensional, conformado por sólo dos bandas: una de valencia y otra de conducción, cuyas ecuaciones de eigenvalores son:

$$\hat{H}_{\mathbf{k}}|\psi_0(\mathbf{k})\rangle = E_0(\mathbf{k})|\psi_0(\mathbf{k})\rangle \quad , \quad (\text{Banda de Valencia}) \quad , \quad (\text{C.1})$$

$$\hat{H}_{\mathbf{k}}|\psi_1(\mathbf{k})\rangle = E_1(\mathbf{k})|\psi_1(\mathbf{k})\rangle \quad , \quad (\text{Banda de Conducción}) \quad , \quad (\text{C.2})$$

donde $E_0(\mathbf{k}) < E_1(\mathbf{k})$ y el Hamiltoniano es:

$$\hat{H}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} + \mathbf{k})^2 + \hat{U}(\hat{\mathbf{x}}) \quad , \quad (\text{C.3})$$

donde $\hat{U}(\hat{\mathbf{x}})$ es el potencial periódico del sistema tal que $\hat{U}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{U}(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{a})$ con \mathbf{a} siendo la periodicidad de las celdas unitarias asociadas al sistema.

Comenzamos por expresar la fórmula de la conductividad eléctrica (2.5) en la base de Bloch [159]:

$$|a\rangle = e^{i\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{x}}}|\psi_0(\mathbf{k})\rangle \quad , \quad (\text{C.4})$$

$$|b\rangle = e^{i\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{x}}}|\psi_1(\mathbf{k})\rangle \quad , \quad (\text{C.5})$$

donde $|a\rangle$ y $|b\rangle$ están en la banda de valencia y de conducción respectivamente. Usamos $\hat{\mathbf{x}}$ como el operador de posición de dos componentes cuyo vector recíproco de dos componentes es $\hat{\mathbf{k}}$. El operador $\hat{\mathbf{x}}$ satisface la relación de conmutación canónica $[\hat{x}^{\bar{i}}, \hat{p}_{\bar{j}}] = i\hbar\delta_{\bar{j}}^{\bar{i}}$, donde los índices $\bar{i}, \bar{j} = 1, 2$. Tenemos que calcular las siguientes cantidades:

$$\langle a|\hat{p}_x|b\rangle = \langle \psi_0(\mathbf{k})|e^{-i\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{x}}}\hat{p}_xe^{i\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{x}}}| \psi_1(\mathbf{k})\rangle \quad , \quad (\text{C.6})$$

$$\langle b|\hat{p}_y|a\rangle = \langle \psi_1(\mathbf{k})|e^{-i\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{x}}}\hat{p}_ye^{i\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{x}}}| \psi_0(\mathbf{k})\rangle \quad . \quad (\text{C.7})$$

Usando la relación Baker-Campbell-Hausdorff [160], se tiene que $e^{-i\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{x}}}\hat{p}_j e^{i\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{x}}} = \hat{p}_j + k_{\bar{j}} = m\partial_{\mathbf{k}}\hat{H}_{\mathbf{k}}$. Entonces, es posible representar o reescribir la expresión para la conductividad eléctrica (2.5) como sigue:

$$\sigma_{xy} = -\frac{ie^2}{\hbar V} \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\bar{i}\bar{j}} \frac{\langle \psi_1(\mathbf{k}) | \partial_{\bar{i}} \hat{H}_{\mathbf{k}} | \psi_0(\mathbf{k}) \rangle \langle \psi_0(\mathbf{k}) | \partial_{\bar{j}} \hat{H}_{\mathbf{k}} | \psi_1(\mathbf{k}) \rangle}{[E_1(\mathbf{k}) - E_0(\mathbf{k})]^2}, \quad (\text{C.8})$$

donde $\varepsilon_{\bar{i}\bar{j}}$ es el tensor de Levi-Civita con la convención $\varepsilon^{12} = 1$, además estamos tomando la notación $\partial_{\bar{j}} = \partial/\partial k^{\bar{j}}$.

Lo siguiente es establecer la relación con la curvatura de Berry. Para este fin, tomamos un punto $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^2$ y consideramos un vector en el espacio tangente al toro en el punto \mathbf{k} , i.e. $\mathbf{q} \in T_{\mathbf{k}}^*\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2$. Luego, definimos la forma diferencial $|d\psi_0(\mathbf{k})\rangle \equiv |d\psi_0(\mathbf{k})\rangle$ valuada sobre \mathbb{C}^2 . Que se evaluará de la siguiente forma:

$$|d\psi_0(\mathbf{k})\rangle_{\mathbf{q}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|\psi_0(\mathbf{k} + \varepsilon\mathbf{q})\rangle - |\psi_0(\mathbf{k})\rangle}{\varepsilon}. \quad (\text{C.9})$$

No obstante, el estado $|\psi_0(\mathbf{k} + \varepsilon\mathbf{q})\rangle$ es solución a la siguiente ecuación de Schrödinger:

$$\hat{H}_{\mathbf{k}+\varepsilon\mathbf{q}}|\psi_0(\mathbf{k} + \varepsilon\mathbf{q})\rangle = E_{0,\mathbf{k}+\varepsilon\mathbf{q}}|\psi_0(\mathbf{k} + \varepsilon\mathbf{q})\rangle. \quad (\text{C.10})$$

Luego, sabemos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{H}_{\mathbf{k}+\varepsilon\mathbf{q}} - \hat{H}_{\mathbf{k}}}{\varepsilon} = \mathbf{q} \cdot \partial_{\mathbf{k}} \hat{H}_{\mathbf{k}}. \quad (\text{C.11})$$

Al aproximar (C.11) a orden lineal se tiene que

$$\hat{H}_{\mathbf{k}+\varepsilon\mathbf{q}} - \hat{H}_{\mathbf{k}} \simeq \varepsilon\mathbf{q} \cdot \partial_{\mathbf{k}} \hat{H}_{\mathbf{k}}. \quad (\text{C.12})$$

Si consideramos que ε es muy pequeño podremos pensar que $\hat{H}_{\mathbf{k}+\varepsilon\mathbf{q}}$ es el Hamiltoniano total del sistema y que $\hat{H}_{\mathbf{k}}$ es el Hamiltoniano no perturbado y $\varepsilon\mathbf{q} \cdot \partial_{\mathbf{k}} \hat{H}_{\mathbf{k}}$ es una perturbación al sistema. De esta manera, al aplicarle la Teoría de Perturbaciones Independientes del Tiempo [161] obtendremos que:

$$\begin{aligned} |\psi_0(\mathbf{k} + \varepsilon\mathbf{q})\rangle &= |\psi_0(\mathbf{k})\rangle + \varepsilon\mathbf{q} \cdot \frac{\langle \psi_1(\mathbf{k}) | \partial_{\mathbf{q}} \hat{H}_{\mathbf{k}} | \psi_0(\mathbf{k}) \rangle}{E_1(\mathbf{k}) - E_0(\mathbf{k})} |\psi_1(\mathbf{k})\rangle, \\ \Leftrightarrow |\psi_0(\mathbf{k} + \varepsilon\mathbf{q})\rangle - |\psi_0(\mathbf{k})\rangle &= \varepsilon\mathbf{q} \cdot \frac{\langle \psi_1(\mathbf{k}) | \partial_{\mathbf{q}} \hat{H}_{\mathbf{k}} | \psi_0(\mathbf{k}) \rangle}{E_1(\mathbf{k}) - E_0(\mathbf{k})} |\psi_1(\mathbf{k})\rangle, \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

donde $\partial_{\mathbf{q}} \hat{H}_{\mathbf{k}} \equiv \partial_{\mathbf{q}}|_{\mathbf{q}=\mathbf{k}} \hat{H}_{\mathbf{k}}$. Sustituyendo esta última expresión en la definición que dimos para $|d\psi_0(\mathbf{k})\rangle_{\mathbf{q}}$ se sigue que para $\mathbf{q} \in T^*\mathbb{T}^2$ tendremos que

$$|d\psi_0(\mathbf{k})\rangle = \frac{\langle \psi_1(\mathbf{k}) | \partial_{\bar{i}} \hat{H}_{\mathbf{k}} | \psi_0(\mathbf{k}) \rangle}{E_1(\mathbf{k}) - E_0(\mathbf{k})} |\psi_1(\mathbf{k})\rangle dk^{\bar{i}}. \quad (\text{C.14})$$

Después, calculamos la curvatura de Berry:

$$\mathcal{F} = -i \langle d\psi_0(\mathbf{k}) | \wedge | d\psi_0(\mathbf{k}) \rangle = -i \frac{\langle \psi_0(\mathbf{k}) | \partial_{\bar{i}} \hat{H}_{\mathbf{k}} | \psi_1(\mathbf{k}) \rangle \langle \psi_1(\mathbf{k}) | \partial_{\bar{j}} \hat{H}_{\mathbf{k}} | \psi_0(\mathbf{k}) \rangle}{[E_1(\mathbf{k}) - E_0(\mathbf{k})]^2} dk^{\bar{i}} \wedge dk^{\bar{j}}. \quad (\text{C.15})$$

Ahora, integramos esta expresión sobre \mathbb{T}^2 :

$$\int_{\mathbb{T}^2} \mathcal{F} = -i \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\langle \psi_0(\mathbf{k}) | \partial_{\bar{i}} \hat{H}_{\mathbf{k}} | \psi_1(\mathbf{k}) \rangle \langle \psi_1(\mathbf{k}) | \partial_{\bar{j}} \hat{H}_{\mathbf{k}} | \psi_0(\mathbf{k}) \rangle}{[E_1(\mathbf{k}) - E_0(\mathbf{k})]^2} dk^{\bar{i}} \wedge dk^{\bar{j}}, \quad (\text{C.16})$$

$$= -i \int_{\mathbb{T}^2} \varepsilon_{\bar{i}\bar{j}} \frac{\langle \psi_0(\mathbf{k}) | \partial_{\bar{i}} \hat{H}_{\mathbf{k}} | \psi_1(\mathbf{k}) \rangle \langle \psi_1(\mathbf{k}) | \partial_{\bar{j}} \hat{H}_{\mathbf{k}} | \psi_0(\mathbf{k}) \rangle}{[E_1(\mathbf{k}) - E_0(\mathbf{k})]^2} dk^1 \wedge dk^2. \quad (\text{C.17})$$

Considerando que el volumen del sistema es $V = \prod_{\bar{i}=1}^2 L_{\bar{i}}$, podremos considerar la partición $dk^{\bar{i}} = \frac{2\pi}{L_{\bar{i}}}$ para poder pasar la doble integral sobre \mathbb{T}^2 a una doble suma de Riemann sobre k_1 y k_2 . Es decir,

$$\int_{\mathbb{T}^2} dk^{\bar{i}} dk^{\bar{j}} \rightarrow \frac{(2\pi)^2}{L_1 L_2} \sum_{k_1, k_2} = \frac{(2\pi)^2}{V} \sum_{\mathbf{k}}. \quad (\text{C.18})$$

Aplicando lo anterior a la ecuación (C.17) y multiplicando por e^2/\hbar esa misma ecuación, obtendremos:

$$\frac{e^2}{\hbar} \int_{\mathbb{T}^2} \mathcal{F} = -\frac{ie^2(2\pi)^2}{\hbar V} \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\bar{i}\bar{j}} \frac{\langle \psi_0(\mathbf{k}) | \partial_{\bar{i}} \hat{H}_{\mathbf{k}} | \psi_1(\mathbf{k}) \rangle \langle \psi_1(\mathbf{k}) | \partial_{\bar{j}} \hat{H}_{\mathbf{k}} | \psi_0(\mathbf{k}) \rangle}{[E_1(\mathbf{k}) - E_0(\mathbf{k})]^2}. \quad (\text{C.19})$$

Por lo tanto, al usar la expresión para la conductividad eléctrica (C.8) y la del primer número de Chern (2.8) concluimos que:

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{\hbar} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^2} \mathcal{F} &= -\frac{ie^2}{\hbar V} \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\bar{i}\bar{j}} \frac{\langle \psi_0(\mathbf{k}) | \partial_{\bar{i}} \hat{H}_{\mathbf{k}} | \psi_1(\mathbf{k}) \rangle \langle \psi_1(\mathbf{k}) | \partial_{\bar{j}} \hat{H}_{\mathbf{k}} | \psi_0(\mathbf{k}) \rangle}{[E_1(\mathbf{k}) - E_0(\mathbf{k})]^2}, \\ \Leftrightarrow \frac{e^2}{\hbar} C_1 &= \sigma_{xy}. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Quod erat demonstratum.

Concluimos este apéndice con los siguientes comentarios. Primero traduzcamos en términos físicos lo que esta demostración nos dice. La invariancia topológica de σ_{xy} en términos físicos nos dice que aunque le apliquemos deformaciones físicas continuas al material, por ejemplo esfuerzos mecánicos o plegamientos, la topología de la estructura de bandas no se afectará. Es decir, lo esencial para que un material sea TI o no radica en cómo están dispuestas las bandas en la zona de Brillouin y no la simetría que el material pudiera presentar. Por esta razón es que pueden existir TIs con diferentes geometrías mientras la la topología de la estructura de bandas se mantenga. Segundo, el primer número de Chern C_1 es una huella topológica del estado base. Esto implica que dos estados base $|\mathbf{k}\rangle$ y $|\mathbf{k}'\rangle$ de dos Hamiltonianos \hat{H} y \hat{H}' , respectivamente, no son homotópicos (deformados continuamente) si tienen diferentes números de Chern. De este modo, los dos aislantes descritos por \hat{H} y \hat{H}' son topológicamente diferentes. Por lo tanto, la única forma de deformar un sistema en otro sistema con diferente huella topológica es cerrando la brecha de la banda, i.e., vía una configuración metálica intermedia.

Apéndice D

Obtención de la Función de Green reducida

A partir de la expresión (D.4) podemos observar una diferencia sustancial entre este caso dinámico y el caso estático porque las entradas 12 y 21 son diferentes de cero. Esto se puede ver al comparar con la expresión de la FG en las Refs. [10, 11].

La matriz asociada a la función de Green

$$G^\mu{}_\nu(x, x') = \begin{pmatrix} G_0^0 & G_1^0 & G_2^0 & 0 \\ G_0^1 & G_1^1 & G_2^1 & 0 \\ G_0^2 & G_1^2 & G_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_3^3 \end{pmatrix} \quad (\text{D.1})$$

debe satisfacer la ec. (4.13) que reescribimos a continuación:

$$\left[[\square^2]^\mu{}_\nu - \tilde{\theta}\delta(z)\varepsilon^{3\mu\alpha}{}_\nu\partial_\alpha \right] G^\nu{}_\rho(x, x') = 4\pi\delta^\mu{}_\rho(x, x')\delta^4(x - x'). \quad (\text{D.2})$$

Ahora, realizamos la transformada de Fourier, obteniendo que

$$G^\mu{}_\nu(x, x') = 4\pi \int \frac{d^2\mathbf{k}_\perp d\omega}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{R}_\perp} e^{-i\omega(t-t')} g^\mu{}_\nu(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\omega G^\mu{}_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega). \quad (\text{D.3})$$

Al hacer las sustituciones $\partial_j = ik_j$ y $\partial_0 = -i\omega$ en la ec. (D.2), obtenemos

$$\begin{pmatrix} \epsilon(k_\perp^2 - \tilde{k}_0^2 - \partial_z^2) & i\tilde{\theta}\delta(z)k_2 & -i\tilde{\theta}\delta(z)k_1 & 0 \\ i\tilde{\theta}\delta(z)k_2 & k_\perp^2 - \tilde{k}_0^2 - \partial_z^2 & -i\tilde{\theta}\delta(z)\omega & 0 \\ -i\tilde{\theta}\delta(z)k_1 & i\tilde{\theta}\delta(z)\omega & k_\perp^2 - \tilde{k}_0^2 - \partial_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_\perp^2 - \tilde{k}_0^2 - \partial_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0^0 & g_1^0 & g_2^0 & 0 \\ g_0^1 & g_1^1 & g_2^1 & 0 \\ g_0^2 & g_1^2 & g_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_3^3 \end{pmatrix} \\ = \delta(z - z')\mathbf{1}_4, \quad (\text{D.4})$$

donde $\tilde{k}_0 = \omega\sqrt{\epsilon}$.

A continuación, procederemos a hallar las componentes de la FG por familias. Para las componentes g^0_0 , g^0_1 y g^0_2 tenemos que resolver

$$\epsilon(k_\perp^2 - \tilde{k}_0^2 - \partial_z^2)g^0_0 + i\tilde{\theta}\delta(z)k_2g^1_0 - i\tilde{\theta}\delta(z)k_1g^2_0 = \delta(z - z'), \quad (\text{D.5})$$

$$i\tilde{\theta}\delta(z)k_2g^0_0 + (k_\perp^2 - \tilde{k}_0^2 - \partial_z^2)g^1_0 - i\tilde{\theta}\delta(z)\omega g^2_0 = 0, \quad (\text{D.6})$$

$$-i\tilde{\theta}\delta(z)k_1g^0_0 + i\tilde{\theta}\delta(z)\omega g^1_0 + (k_\perp^2 - \tilde{k}_0^2 - \partial_z^2)g^2_0 = 0, \quad (\text{D.7})$$

donde hemos omitido la dependencia en \mathbf{k}_\perp y ω de g^μ_ν , por facilidad de escritura y notación. Esto se hará para otras funciones que compartan esa dependencia también en lo subsecuente de este apéndice.

Usando que $(k_\perp^2 - \tilde{k}_0^2 - \partial_z^2)\mathcal{F}_0(z, z') = \delta(z - z')$, la solución de la ec. (D.5) se reescribe como

$$\epsilon g^0_0(z, z') = \mathcal{F}_0(z, z') - i\tilde{\theta}k_2g^1_0(0, z') + i\tilde{\theta}k_1g^2_0(0, z'), \quad (\text{D.8})$$

donde $\mathcal{F}_0(z, z')$ es la función de Green libre [80, 81] (recordamos que la notación caligráfica se destina a las funciones que no tienen ninguna contribución del término $\tilde{\theta}$) y depende también de \mathbf{k}_\perp y ω pero su dependencia explícita se omitirá como ya se mencionó previamente. Esta $\mathcal{F}_0(z, z')$ está dada por

$$\mathcal{F}_0(z, z') = \frac{ie^{ik_z|z-z'|}}{2k_z}, \quad (\text{D.9})$$

y para $\omega > 0$,

$$k_z = \begin{cases} \sqrt{\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2} & , \text{ if } \tilde{k}_0 > k_\perp, \\ i\sqrt{\mathbf{k}_\perp^2 - \tilde{k}_0^2} & , \text{ if } \tilde{k}_0 < k_\perp. \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

Del mismo modo, tendremos que las ecs. (D.6)-(D.7) se reescriben como

$$g^1_0(z, z') = i\tilde{\theta}\omega\mathcal{F}_0(z, 0)g^2_0(0, z') - i\tilde{\theta}k_2\mathcal{F}_0(z, 0)g^0_0(0, z'), \quad (\text{D.11})$$

$$g^2_0(z, z') = i\tilde{\theta}k_1\mathcal{F}_0(z, 0)g^0_0(0, z') - i\tilde{\theta}\omega\mathcal{F}_0(z, 0)g^1_0(0, z'). \quad (\text{D.12})$$

Resolviendo para $g^1_0(0, z')$ y $g^2_0(0, z')$ encontramos que

$$\begin{pmatrix} g^1_0(0, z') \\ g^2_0(0, z') \end{pmatrix} = \frac{i\tilde{\theta}\mathcal{F}_0(0, 0)g^0_0(0, z')}{1 - \omega^2\tilde{\theta}^2\mathcal{F}_0^2(0, 0)} \begin{pmatrix} -1 & i\tilde{\theta}\omega\mathcal{F}_0(0, 0) \\ i\tilde{\theta}\omega\mathcal{F}_0(0, 0) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_2 \\ k_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.13})$$

Reinsertando $g^1_0(0, z')$ y $g^2_0(0, z')$ en la ec. (D.8), obtenemos

$$\epsilon g^0_0(z, z') = \mathcal{F}_0(z, z') - \frac{\mathbf{k}_\perp^2\tilde{\theta}^2\mathcal{F}_0(0, 0)}{1 - \omega^2\tilde{\theta}^2\mathcal{F}_0^2(0, 0)}\mathcal{F}_0(z, 0)g^0_0(0, z'). \quad (\text{D.14})$$

Evaluando en $z = 0$, resulta que

$$\frac{g^0_0(0, z')}{1 - \omega^2\tilde{\theta}^2\mathcal{F}_0^2(0, 0)} = \frac{\mathcal{F}_0(0, z')}{\epsilon + (\mathbf{k}_\perp^2 - \tilde{k}_0^2)\tilde{\theta}^2\mathcal{F}_0^2(0, 0)} = \frac{4\mathcal{F}_0(0, z')}{4\epsilon + \tilde{\theta}^2}. \quad (\text{D.15})$$

Por lo tanto, a partir de la ec.(D.14) leemos que

$$g^0_0(z, z') = \frac{1}{\epsilon} \left[\mathcal{F}_0(z, z') - \frac{2\tilde{\theta}^2}{4\epsilon + \tilde{\theta}^2} \frac{\mathbf{k}_\perp^2}{\sqrt{\mathbf{k}_\perp^2 - \tilde{k}_0^2}} \mathcal{F}_0(z, 0) \mathcal{F}_0(0, z') \right]. \quad (\text{D.16})$$

Reinsertando una vez más $g^1_0(0, z')$ y $g^2_0(0, z')$ en las ecs.(D.11)-(D.12) y usando la ec.(D.15) hallamos las siguientes expresiones finales para $g^1_0(z, z')$ y $g^2_0(z, z')$:

$$\begin{pmatrix} g^1_0(z, z') \\ g^2_0(z, z') \end{pmatrix} = -\frac{4i\tilde{\theta}\mathcal{F}_0(z, 0)\mathcal{F}_0(0, z')}{4\epsilon + \tilde{\theta}^2} \begin{pmatrix} -\frac{i\omega\tilde{\theta}}{2\sqrt{\mathbf{k}_\perp^2 - \tilde{k}_0^2}} & 1 \\ 1 & \frac{i\omega\tilde{\theta}}{2\sqrt{\mathbf{k}_\perp^2 - \tilde{k}_0^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.17})$$

Ahora debemos determinar las componentes g^0_1, g^1_1 y g^2_1 . Sus ecuaciones acopladas son

$$\epsilon(k_\perp^2 - \tilde{k}_0^2 - \partial_z^2)g^0_1 + i\tilde{\theta}\delta(z)k_2g^1_1 - i\tilde{\theta}\delta(z)k_1g^2_1 = 0, \quad (\text{D.18})$$

$$i\tilde{\theta}\delta(z)k_2g^0_1 + (k_\perp^2 - \tilde{k}_0^2 - \partial_z^2)g^1_1 - i\tilde{\theta}\delta(z)\omega g^2_1 = \delta(z - z'), \quad (\text{D.19})$$

$$-i\tilde{\theta}\delta(z)k_1g^0_1 + i\tilde{\theta}\delta(z)\omega g^1_1 + (k_\perp^2 - \tilde{k}_0^2 - \partial_z^2)g^2_1 = 0. \quad (\text{D.20})$$

Otra vez, tras usar $\mathcal{F}_0(z, z')$ en la ec.(D.19), tenemos lo siguiente

$$g^1_1(z, z') = \mathcal{F}_0(z, z') - i\tilde{\theta}k_2\mathcal{F}_0(z, 0)g^0_1(0, z') + i\tilde{\theta}\omega\mathcal{F}_0(z, 0)g^2_1(0, z'). \quad (\text{D.21})$$

Y también las ecs. (D.18)-(D.20) se podrán reescribir de la siguiente forma:

$$\epsilon g^0_1(z, z') = i\tilde{\theta}\omega\mathcal{F}_0(z, 0)g^2_1(0, z') - i\tilde{\theta}k_2\mathcal{F}_0(z, 0)g^1_1(0, z'), \quad (\text{D.22})$$

$$g^2_1(z, z') = i\tilde{\theta}k_1\mathcal{F}_0(z, 0)g^1_1(0, z') - i\tilde{\theta}\omega\mathcal{F}_0(z, 0)g^0_1(0, z'). \quad (\text{D.23})$$

La solución del sistema previo para $g^0_1(0, z')$ y $g^2_1(0, z')$ será

$$\begin{pmatrix} g^0_1(0, z') \\ g^2_1(0, z') \end{pmatrix} = -\frac{i\tilde{\theta}\mathcal{F}_0(0, 0)g^1_1(0, z')}{\epsilon + k_1^2\tilde{\theta}^2\mathcal{F}_0^2(0, 0)} \begin{pmatrix} 1 & i\tilde{\theta}k_1\mathcal{F}_0(0, 0) \\ i\tilde{\theta}k_1\mathcal{F}_0(0, 0) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_2 \\ \omega \end{pmatrix} \quad (\text{D.24})$$

Al sustituir $g^0_1(0, z')$ y $g^2_1(0, z')$ en (D.21) nos da

$$g^1_1(z, z') = \mathcal{F}_0(z, z') - \frac{\tilde{\theta}^2\mathcal{F}_0(0, 0)(k_2^2 - \omega^2\epsilon)}{\epsilon + \tilde{\theta}^2k_1^2\mathcal{F}_0^2(0, 0)} \mathcal{F}_0(z, 0)g^1_1(0, z'). \quad (\text{D.25})$$

Resolviendo para $g^1_1(0, z')$, obtenemos

$$\frac{g^1_1(0, z')}{\epsilon + \tilde{\theta}^2k_1^2\mathcal{F}_0^2(0, 0)} = \frac{\mathcal{F}_0(0, z')}{\epsilon + \tilde{\theta}^2(\mathbf{k}_\perp^2 - \tilde{k}_0^2)\mathcal{F}_0^2(0, 0)} = \frac{4\mathcal{F}_0(0, z')}{4\epsilon + \tilde{\theta}^2}. \quad (\text{D.26})$$

Por lo tanto, la forma final de $g^1_1(z, z')$ es

$$g^1_1(z, z') = \mathcal{F}_0(z, z') - \frac{2\tilde{\theta}^2}{4\epsilon + \tilde{\theta}^2} \frac{k_2^2 - \tilde{k}_0^2}{\sqrt{\mathbf{k}_\perp^2 - \tilde{k}_0^2}} \mathcal{F}_0(z, 0)\mathcal{F}_0(0, z'). \quad (\text{D.27})$$

Tras sustituir los valores de $g^0_1(0, z')$ y $g^2_1(0, z')$ junto con la ec. (D.26), se encuentran las expresiones finales para $g^0_1(z, z')$ y $g^2_1(z, z')$:

$$\begin{pmatrix} g^0_1(z, z') \\ g^2_1(z, z') \end{pmatrix} = -\frac{i4\tilde{\theta}}{4\epsilon + \tilde{\theta}^2} \mathcal{F}_0(z, 0) \mathcal{F}_0(0, z') \begin{pmatrix} 1 & i\tilde{\theta}k_1\mathcal{F}_0(0, 0) \\ i\tilde{\theta}k_1\mathcal{F}_0(0, 0) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_2 \\ \omega \end{pmatrix} \quad (\text{D.28})$$

Finalmente, determinamos las componentes g^0_2, g^1_2 y g^2_2 . Sus ecuaciones acopladas son

$$\epsilon(k_\perp^2 - \tilde{k}_0^2 - \partial_z^2)g^0_2 + i\tilde{\theta}\delta(z)k_2g^1_2 - i\tilde{\theta}\delta(z)k_1g^2_2 = 0, \quad (\text{D.29})$$

$$i\tilde{\theta}\delta(z)k_2g^0_2 + (k_\perp^2 - \tilde{k}_0^2 - \partial_z^2)g^1_2 - i\tilde{\theta}\delta(z)\omega g^2_2 = 0, \quad (\text{D.30})$$

$$-i\tilde{\theta}\delta(z)k_1g^0_2 + i\tilde{\theta}\delta(z)\omega g^1_2 + (k_\perp^2 - \tilde{k}_0^2 - \partial_z^2)g^2_2 = \delta(z - z'). \quad (\text{D.31})$$

Una vez más, usamos $\mathcal{F}_0(z, z')$ en la ec. (D.31) obteniendo que

$$g^2_2(z, z') = \mathcal{F}_0(z, z') + i\tilde{\theta}k_1\mathcal{F}_0(z, 0)g^0_2(0, z') - i\tilde{\theta}\omega\mathcal{F}_0(z, 0)g^1_2(0, z'). \quad (\text{D.32})$$

Del mismo modo, las ecs. (D.29)-(D.30) se reescriben como sigue

$$\epsilon g^0_2(z, z') = -i\tilde{\theta}k_2\mathcal{F}_0(z, 0)g^1_2(0, z') + i\tilde{\theta}k_1\mathcal{F}_0(z, 0)g^2_2(0, z'), \quad (\text{D.33})$$

$$g^1_2(z, z') = -i\tilde{\theta}k_2\mathcal{F}_0(z, 0)g^0_2(0, z') + i\tilde{\theta}\omega\mathcal{F}_0(z, 0)g^2_2(0, z'). \quad (\text{D.34})$$

Resolviendo este último sistema para $g^0_2(0, z')$ y $g^1_2(0, z')$, resulta que

$$\begin{pmatrix} g^0_2(0, z') \\ g^1_2(0, z') \end{pmatrix} = \frac{i\tilde{\theta}\mathcal{F}_0(0, 0)g^2_2(0, z')}{\epsilon + k_2^2\tilde{\theta}^2\mathcal{F}_0^2(0, 0)} \begin{pmatrix} 1 & -i\tilde{\theta}k_1\mathcal{F}_0(0, 0) \\ -i\tilde{\theta}k_1\mathcal{F}_0(0, 0) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \omega \end{pmatrix} \quad (\text{D.35})$$

La sustitución de $g^0_2(0, z')$ y de $g^1_2(0, z')$ en la ec. (D.32) nos da

$$g^2_2(z, z') = \mathcal{F}_0(z, z') - \frac{\tilde{\theta}^2\mathcal{F}_0(0, 0)(k_1^2 - \omega^2\epsilon)}{\epsilon + \tilde{\theta}^2k_2^2\mathcal{F}_0^2(0, 0)} \mathcal{F}_0(z, 0)g^2_2(0, z'). \quad (\text{D.36})$$

Resolviendo para $g^2_2(0, z')$, obtenemos que

$$\frac{g^2_2(0, z')}{\epsilon + \tilde{\theta}^2k_2^2\mathcal{F}_0^2(0, 0)} = \frac{\mathcal{F}_0(0, z')}{\epsilon + \tilde{\theta}^2(\mathbf{k}_\perp^2 - \tilde{k}_0^2)\mathcal{F}_0^2(0, 0)} = \frac{4\mathcal{F}_0(0, z')}{4\epsilon + \tilde{\theta}^2}. \quad (\text{D.37})$$

Por lo que la expresión final de $g^2_2(z, z')$ es

$$g^2_2(z, z') = \mathcal{F}_0(z, z') - \frac{2\tilde{\theta}^2}{4\epsilon + \tilde{\theta}^2} \frac{k_1^2 - \tilde{k}_0^2}{\sqrt{\mathbf{k}_\perp^2 - \tilde{k}_0^2}} \mathcal{F}_0(z, 0) \mathcal{F}_0(0, z'). \quad (\text{D.38})$$

Finalmente, si sustituimos las expresiones para $g^0_2(0, z')$ y $g^2_2(0, z')$ junto con la ec. (D.37), encontramos las expresiones final de $g^0_2(z, z')$ y $g^1_2(z, z')$:

$$\begin{pmatrix} g^0_2(z, z') \\ g^1_2(z, z') \end{pmatrix} = \frac{i4\tilde{\theta}}{4\epsilon + \tilde{\theta}^2} \mathcal{F}_0(z, 0) \mathcal{F}_0(0, z') \begin{pmatrix} 1 & -i\tilde{\theta}k_2\mathcal{F}_0(0, 0) \\ -i\tilde{\theta}k_2\mathcal{F}_0(0, 0) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \omega \end{pmatrix} \quad (\text{D.39})$$

Sólo por completez escribimos que

$$g^3_3(z, z') = \mathcal{F}_0(z, z') . \quad (\text{D.40})$$

Con todas las componentes halladas (D.16), (D.17), (D.27), (D.28), (D.38), (D.39) y (D.40), somos capaces de establecer la forma covariante de la FG, la cual se muestra enseguida con las dependencias explícitas en \mathbf{k}_\perp y ω

$$g^\mu_\nu(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) = \eta^\mu_\nu \mathcal{F}_0(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) + i\varepsilon^\mu_\nu{}^{\alpha\beta} k_\alpha P(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) + \tilde{\theta} \mathcal{F}_0(0, 0; \mathbf{k}_\perp, \omega) \left[\tilde{k}^\mu \tilde{k}_\nu - (\eta^\mu_\nu + u^\mu u_\nu) \tilde{k}^2 \right] P(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) , \quad (\text{D.41})$$

donde $u^\mu = (0, 0, 0, 1)$ es el vector normal al ϑ -plano (interfaz Σ) que apunta en la dirección de la región \mathcal{U}_1 (ver la Fig. 3.1 del capítulo 4) y

$$P(z, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega) = -\tilde{\theta} \frac{\mathcal{F}_0(z, 0; \mathbf{k}_\perp, \omega) \mathcal{F}_0(0, z'; \mathbf{k}_\perp, \omega)}{\epsilon - \tilde{\theta}^2 \tilde{k}^2 \mathcal{F}_0^2(0, 0; \mathbf{k}_\perp, \omega)} , \quad (\text{D.42})$$

que es la misma FG mostrada en la ec. (4.35).

Apéndice E

Función de Green en el régimen de campo lejano obtenida con el método de la fase estacionaria y de *steepest descent*

En este apéndice exhibiremos de manera explícita cómo se obtienen las componentes $\bar{G}_{\theta\nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ y $\bar{G}_{\theta^2\nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ de la FG en el régimen de campo lejano cuando se utiliza el método de la fase estacionaria y del *steepest descent* estándar sin la contribución de los polos simple y doble, lo cual se reportó en el artículo [109]. La primera sección de este apéndice se destinará al método de la fase estacionaria y la segunda subsección se destinará al método del *steepest descent* estándar.

E.1. Método de la fase estacionaria

En esta sección demostraremos explícitamente cómo obtener las componentes $\bar{G}_{\theta\nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ y $\bar{G}_{\theta^2\nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ de la FG en el régimen de campo lejano por medio del método de la fase estacionaria con base en las referencias [94, 107, 108]. Además, se omitirá el tratamiento de la componente $\bar{G}_{ED\nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ porque su tratamiento ya se expuso en la subsección 4.3.1 y cuyo resultado es la ec. (4.81). No obstante, de dicho tratamiento resulta muy útil la expresión (4.84), la cual se enuncia nuevamente

$$\frac{e^{i\tilde{k}_0 R}}{R} = \frac{i}{2} \oint_{C_S} \frac{k_{\perp} dk_{\perp}}{\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2}} H_0^{(1)}(k_{\perp} R_{\perp}) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2} |z - z'|}, \quad (\text{E.1})$$

ya que se utilizará reiteradamente a lo largo de este apéndice y donde C denota al contorno de integración que está definido en la Fig. 4.3 que por facilidad de lectura se vuelve a poner en la Fig. E.1 de este apéndice y que se tomó de la Fig. 2.2.5 del libro [94].

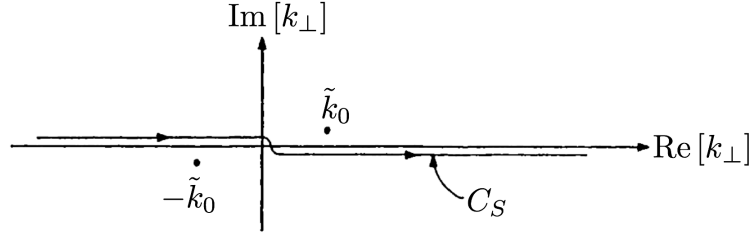


Figura E.1: Camino de integración de Sommerfeld.

E.1.1. $\bar{G}_{\tilde{\theta}\nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ en el régimen de campo lejano

A continuación, calcularemos la aproximación de campo lejano del término $\bar{G}_{\tilde{\theta}\nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$. Partimos de la ec. (4.86) que se enuncia nuevamente

$$G_{\tilde{\theta}\nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = i\varepsilon^{\mu\nu} \alpha^3 \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} I_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega), \quad (\text{E.2})$$

donde se encontró en la subsección 4.3.2 que $I_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ es

$$I_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = \omega \int_0^{\infty} \frac{k_{\perp} dk_{\perp}}{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2} J_0(k_{\perp} R_{\perp}) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2}(|z| + |z'|)}, \quad (\text{E.3})$$

$$\mathbf{I}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = \frac{i}{R_{\perp}} \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial R_{\perp}} \int_0^{\infty} \frac{k_{\perp} dk_{\perp}}{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2} J_0(k_{\perp} R_{\perp}) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2}(|z| + |z'|)}. \quad (\text{E.4})$$

Ahora, usamos la ec. (4.82) enunciada enseguida

$$J_0(x) = \frac{1}{2} \left(H_0^{(1)}(x) + H_0^{(2)}(x) \right), \quad (\text{E.5})$$

donde $H_0^{(1)}$ and $H_0^{(2)}$ son las funciones de Hankel, junto con la fórmula de reflexión (4.83) enunciada enseguida también [84]

$$H_0^{(1)}(e^{i\pi}x) = -H_0^{(2)}(x), \quad (\text{E.6})$$

para reescribir las ecs. (E.3) y (E.4) en una manera similar al integrando de la identidad de Sommerfeld (E.1) como se observa a continuación

$$I_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = \frac{\omega}{2} \oint_{C_S} \frac{k_{\perp} dk_{\perp}}{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2} H_0^{(1)}(k_{\perp} R_{\perp}) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2}(|z| + |z'|)}, \quad (\text{E.7})$$

$$I_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = \frac{i}{2R_{\perp}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')_{\perp} \frac{\partial}{\partial R_{\perp}} \oint_{C_S} \frac{k_{\perp} dk_{\perp}}{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2} H_0^{(1)}(k_{\perp} R_{\perp}) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2}(|z| + |z'|)}, \quad (\text{E.8})$$

donde C denota otra vez al mismo contorno de integración que está definido en la Fig. E.1 que se tomó de la Fig. 2.2.5 del libro [94].

Ahora, procedemos a implementar las aproximaciones de campo lejano:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\| \gg \|\mathbf{x}'\| \quad , \quad R_{\perp} = \|(\mathbf{x} - \mathbf{x}')_{\perp}\| \simeq \|\mathbf{x}_{\perp}\| = \rho \\ |z| + |z'| \simeq |z|. \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Por consiguiente, en el límite cuando $\rho \rightarrow \infty$, la función $H_0^{(1)}(k_{\perp}R_{\perp})$ se convierte en una función altamente oscilante de k_{\perp} porque

$$H_0^{(1)}(k_{\perp}\rho) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k_{\perp}\rho}} e^{ik_{\perp}\rho - i\frac{\pi}{4}} \quad (\text{E.10})$$

y en el límite cuando $z \rightarrow \infty$ la exponencial $e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2}(|z| + |z'|)}$ también se vuelve una función altamente oscilante de k_{\perp} . Por lo que el producto de ambas funciones queda como

$$H_0^{(1)}(k_{\perp}\rho) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2}|z|} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k_{\perp}\rho}} e^{ik_{\perp}\rho - i\frac{\pi}{4} + i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2}|z|}, \quad \rho, z \rightarrow \infty, \quad (\text{E.11})$$

el cual deberá ser sustituido en las ecs. (E.7) y (E.8). El comportamiento altamente oscilatorio en k_{\perp} de este producto nos permite aplicar el método de la fase estacionaria para obtener la contribución dominante [94]. La fase que tenemos que analizar se lee del producto antes mencionado y es

$$\varphi(k_{\perp}) = k_{\perp}\rho - \frac{\pi}{4} + \sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2}|z|, \quad (\text{E.12})$$

cuyo punto estacionario se obtiene a partir de

$$\frac{d\varphi}{dk_{\perp}} = \frac{d}{dk_{\perp}} \left(k_{\perp}\rho - \frac{\pi}{4} + \sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2}|z| \right) = 0. \quad (\text{E.13})$$

Recordando que $k_z = \sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2}$, se encuentra que el punto estacionario es

$$k_{\perp s} = \frac{\tilde{k}_0\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \frac{\tilde{k}_0\rho}{r}, \quad (\text{E.14})$$

el cual implica que

$$k_{z s} = \frac{\tilde{k}_0|z|}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \frac{\tilde{k}_0|z|}{r}, \quad (\text{E.15})$$

donde $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$. Además, en las ecs. (E.7) y (E.8), podemos aproximar $\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2 = k_z^2 \simeq (k_z)_s k_z$ alrededor del punto estacionario. Considerando esto y usando otra vez la identidad de

Sommerfeld (E.1), llegamos a las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} I_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \frac{\omega}{i} \left[\frac{1}{k_{zs}} \frac{e^{i\tilde{k}_0 \tilde{R}}}{\tilde{R}} \right] \\ &= \frac{r}{i\sqrt{\epsilon}|z|} \frac{e^{i\tilde{k}_0 \tilde{R}}}{\tilde{R}}, \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \frac{1}{R_\perp} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')_\perp \frac{\partial}{\partial R_\perp} \left[\frac{1}{k_{zs}} \frac{e^{i\tilde{k}_0 \tilde{R}}}{\tilde{R}} \right] \\ &= \frac{1}{R_\perp} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')_\perp \frac{r}{\tilde{k}_0 |z|} \left[\frac{i\tilde{k}_0 R_\perp}{\tilde{R}^2} - \frac{R_\perp}{\tilde{R}^3} \right] e^{i\tilde{k}_0 \tilde{R}}, \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

donde $\tilde{R} = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')_\perp^2 + (|z| + |z'|)^2} = \sqrt{R_\perp^2 + (|z| + |z'|)^2}$.

Finalmente, completamos la aproximación de campo lejano en las ecs. (E.16) y (E.17) al escribir

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')_\perp^2 + (|z| + |z'|)^2}, \\ &= \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 - (z - z')^2 + (|z| + |z'|)^2}, \\ &= \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 + 2(zz' + |zz'|)}, \\ &\simeq r \left(1 - \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{x}'}{r} + \cos \vartheta \frac{z'}{r} + \left| \cos \vartheta \frac{z'}{r} \right| \right), \\ &= r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp + |z' \cos \vartheta|, \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

con $\mathbf{n}_\perp = \sin \vartheta (\cos \phi, \sin \phi, 0)$. Al igual que en ED estándar, sólo deseamos el término dominante $\tilde{k}_0 r$ de la exponencial y en el inverso de la distancia bastará con reemplazar por r como en el caso usual. De este modo, encontramos que

$$I_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{inr |\cos \vartheta|} e^{i\tilde{k}_0 (-\mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp + |z' \cos \vartheta|)}, \quad (\text{E.19})$$

$$I_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = s_j \frac{\sin \vartheta e^{i\tilde{k}_0 r}}{ir |\cos \vartheta|} e^{i\tilde{k}_0 (-\mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp + |z' \cos \vartheta|)}, \quad (\text{E.20})$$

donde hemos despreciado términos de $\mathcal{O}(r^{-2})$ y superiores.

Por lo tanto, al sustituir las ecs. (E.19) y (E.20) en la ec. (E.2) encontramos la expresión final para $G_{\tilde{\theta} \nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ que es

$$\bar{G}_{\tilde{\theta} \nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = \varepsilon_\nu^{\mu \alpha 3} \frac{2\tilde{\theta}}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{s_\alpha}{|\cos \vartheta|} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{r} e^{i\tilde{k}_0 (-\mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp + |z' \cos \vartheta|)}, \quad (\text{E.21})$$

donde $s_\alpha = (1/n, \hat{\mathbf{n}})$ y $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario en la dirección de \mathbf{x} . Además, al comparar con el primer término de la ec. (4.139) observamos que se trata del mismo término, i.e. es el término dominante cuando no se considera la contribución del polo simple.

E.1.2. $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 \nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ en el régimen de campo lejano

En esta subsección obtendremos las componentes $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 \nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ en la aproximación de campo lejano. La expresión de dichas componentes es la ec. (4.144) que a continuación se enuncia

$$\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 \nu}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = i \frac{4\pi\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int \frac{d^2\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} [k^\mu k_\nu - (\eta^\mu_\nu + u^\mu u_\nu) k^2] e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{R}_\perp} \frac{e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2}(|z|+|z'|)}}{2(\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2)^{3/2}}. \quad (\text{E.22})$$

Recordando que $k^\alpha = (\omega, \mathbf{k}_\perp, 0)$ y $u^\mu = (0, 0, 0, 1)$, en la subsección 4.3.3 resultó de forma general que

$$\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 3}^0 = \bar{G}_{\tilde{\theta}^2 0}^3 = \bar{G}_{\tilde{\theta}^2 1}^3 = \bar{G}_{\tilde{\theta}^2 3}^1 = \bar{G}_{\tilde{\theta}^2 2}^3 = \bar{G}_{\tilde{\theta}^2 3}^2 = \bar{G}_{\tilde{\theta}^2 3}^3 = 0. \quad (\text{E.23})$$

Por facilidad del análisis, así como se hizo en la subsección 4.3.3, estudiaremos las componentes restantes de $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 \nu}^\mu$ por familias: $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 0}^0$, $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 i}^0$, $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 j}^i$, donde $i, j = 1, 2$.

E.1.2.1. Componente $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 0}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ en el régimen de campo lejano

Haciendo $\mu = \nu = 0$ en la ecuación (E.22) se tiene que:

$$\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 0}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} 4\pi \int \frac{d^2\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} \mathbf{k}_\perp^2 e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{R}_\perp} \frac{e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2}(|z|+|z'|)}}{2(\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2)^{3/2}}. \quad (\text{E.24})$$

Al escribir esta integral en coordenadas polares se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \bar{G}_{\tilde{\theta}^2 0}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int_0^\infty \frac{k_\perp^3 dk_\perp}{(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2}} e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z|+|z'|)} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{ik_\perp R_\perp \cos \varphi}, \\ &= i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int_0^\infty \frac{k_\perp^3 dk_\perp}{(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2}} J_0(k_\perp R_\perp) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z|+|z'|)}, \end{aligned} \quad (\text{E.25})$$

donde se usó la representación integral de la función de Bessel $J_0(k_\perp R_\perp)$ [84, 89].

Ahora bien, al convertir la $J_0(k_\perp R_\perp)$ en la Hankel $H_0^{(1)}(k_\perp R_\perp)$ por medio de las ecs. (E.5) y (E.6), observamos que la integral tiene la misma fase que I^α en las ecs. (E.7) y (E.8). Entonces, al aplicarle el método de la fase estacionaria, se obtendrá el mismo punto estacionario $k_{\perp s}$ (E.14) y k_{zs} (E.15). Como en torno al punto estacionario $(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2} = k_z^3 \simeq k_{zs}^2 k_z$, $k_\perp^3 \simeq k_{\perp s}^2 k_\perp$ y

con la identidad de Sommerfeld (E.1) podremos escribir $G_{\tilde{\theta}^2 0}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ como sigue:

$$\begin{aligned} \bar{G}_{\tilde{\theta}^2 0}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{k_{\perp s}^2}{k_{z_s}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 \tilde{R}}}{\tilde{R}}, \\ &= \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{\rho^2}{|z|^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 \tilde{R}}}{\tilde{R}}, \end{aligned} \quad (\text{E.26})$$

donde ya se sustituyeron los valores de $k_{\perp s}$ (E.14) y k_{z_s} (E.15) en la última igualdad.

Después, hacemos las aproximaciones (E.9) y sustituyendo tanto $\rho = r|\sin \vartheta|$ como $|z| = r|\cos \vartheta|$, concluimos que:

$$\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 0}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \tan^2 \vartheta \frac{e^{i\omega r}}{r} e^{i\omega(-\mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp} + |z' \cos \vartheta|)}. \quad (\text{E.27})$$

Además, al comparar esta expresión con el primer término de la ec. (4.196) observamos que se trata del mismo término, i.e. es el término dominante cuando no se considera la contribución de los polos simple y doble.

E.1.2.2. Componentes $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 \bar{i}}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ en el régimen de campo lejano

Haciendo $\mu = 0$ y $\nu = i$ en la ecuación (E.22) se tiene que:

$$\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 \bar{i}}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = i \frac{\omega \tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} 4\pi \int \frac{d^2 \mathbf{k}_{\perp}}{(2\pi)^2} k_i e^{i\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{R}_{\perp}} \frac{e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_{\perp}^2}(|z| + |z'|)}}{2(\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_{\perp}^2)^{3/2}}. \quad (\text{E.28})$$

Tras repetir el mismo procedimiento de la subsección 4.3.3.1 se llega a la ec. (4.148) que nuevamente enunciamos:

$$\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 \bar{i}}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = i \frac{\omega \tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} K_{\bar{i}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega), \quad (\text{E.29})$$

donde $K_{\bar{i}}$ está dado por la ec. (4.152) y que se enuncia enseguida

$$K_{\bar{i}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = \frac{i}{R_{\perp}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')_{\perp \bar{i}} \frac{\partial}{\partial R_{\perp}} \int_0^{\infty} \frac{k_{\perp} dk_{\perp}}{(\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2)^{3/2}} J_0(k_{\perp} R_{\perp}) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2}(|z| + |z'|)}. \quad (\text{E.30})$$

Ahora, repetimos el mismo procedimiento para aproximar la integral en k_{\perp} , el cual consiste en convertir la $J_0(k_{\perp} R_{\perp})$ en la Hankel $H_0^{(1)}(k_{\perp} R_{\perp})$ por medio de las ecs. (E.5) y (E.6). Como se obtiene la misma fase que I^{α} en las ecs. (E.7) y (E.8). Entonces, se puede aplicar el método de la fase estacionaria y se obtendrá el mismo punto estacionario $k_{\perp s}$ (E.14) y k_{z_s} (E.15).

Luego, como en torno al punto estacionario $\left(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2\right)^{3/2} = k_z^3 \simeq k_{z_s}^2 k_z$ y con la identidad de Sommerfeld (E.1) podremos escribir $\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ como sigue:

$$\begin{aligned} K_{\bar{i}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \frac{1}{R_\perp} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')_{\perp \bar{i}} \frac{\partial}{\partial R_\perp} \left(\frac{1}{k_{z_s}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 \tilde{R}}}{\tilde{R}} \right), \\ &= \frac{1}{R_\perp} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')_{\perp \bar{i}} \frac{\partial}{\partial R_\perp} \left(\frac{r^2}{\tilde{k}_0^2 z^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 \tilde{R}}}{\tilde{R}} \right), \\ &= \frac{1}{R_\perp} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')_{\perp \bar{i}} \frac{r^2}{\tilde{k}_0^2 z^2} \left(\frac{i\tilde{k}_0 R_\perp}{\tilde{R}^2} - \frac{R_\perp}{\tilde{R}^3} \right) e^{i\tilde{k}_0 \tilde{R}}, \end{aligned} \quad (\text{E.31})$$

donde se sustituyó el valor de k_{z_s} (E.15) en la segunda igualdad.

Después, completamos las aproximaciones de campo lejano (E.9) y sustituyendo tanto $R_\perp \simeq \rho = r |\sin \vartheta|$ como $|z| = r |\cos \vartheta|$, encontramos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \frac{1}{|\sin \vartheta|} \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \phi \\ \sin \vartheta \sin \phi \end{pmatrix} \frac{1}{\tilde{k}_0^2 \cos^2 \vartheta} \left(\frac{i\tilde{k}_0 |\sin \vartheta|}{r} - \frac{|\sin \vartheta|}{r^2} \right) e^{i\tilde{k}_0 \tilde{R}}, \\ &= i \frac{\sin \vartheta}{\tilde{k}_0 \cos^2 \vartheta} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{r} e^{i\tilde{k}_0 (-\mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp + |z' \cos \vartheta|)} + \mathcal{O}(r^{-2}), \end{aligned} \quad (\text{E.32})$$

donde se ha despreciado el segundo término en la última igualdad ya que los campos de radiación decaen como r^{-2} y este término decaería como r^{-4} en el campo.

Sustituyendo este último valor de \mathbf{K} en la expresión (E.29) para $G_{\hat{\theta}^2 \bar{i}}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ y recordando que $\hat{\mathbf{n}} = (\sin \vartheta \cos \phi, \sin \vartheta \sin \phi, \cos \vartheta) = (x/r, y/r, z/r)$, obtendremos finalmente que

$$\bar{G}_{\hat{\theta}^2 \bar{i}}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{\hat{n}_{\bar{i}}}{n \cos^2 \vartheta} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{r} e^{i\tilde{k}_0 (-\mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp + |z' \cos \vartheta|)}. \quad (\text{E.33})$$

Además, al comparar esta expresión con el primer término de la ec. (4.181) observamos que se trata del mismo término, i.e. es el término dominante cuando no se considera la contribución de los polos simple y doble.

E.1.2.3. Componentes $\bar{G}_{\hat{\theta}^2 \bar{j}}^{\bar{i}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ en el régimen de campo lejano

En esta subsección obtendremos el régimen de campo lejano de las componentes $\bar{G}_{\hat{\theta}^2 \bar{j}}^{\bar{i}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ que serán analizadas por separado.

Vale la pena recordar que en la subsección 4.3.3.3.1 se encontró de forma general que

$$\bar{G}_{\hat{\theta}^2 \bar{2}}^{\bar{1}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = \bar{G}_{\hat{\theta}^2 \bar{1}}^{\bar{2}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = 0. \quad (\text{E.34})$$

E.1.2.3.1. Componente $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 1}^1(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$

Haciendo $\mu = 1$ y $\nu = 1$ en la ecuación (E.22) se tiene que:

$$\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 1}^1(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} 4\pi \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} [k_\perp^1 k_1 - (\omega^2 - \mathbf{k}_\perp^2)] e^{i \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{R}_\perp} \frac{e^{i \sqrt{\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2} (|z| + |z'|)}}{2 (\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2)^{3/2}}. \quad (\text{E.35})$$

Tras repetir el mismo procedimiento de la subsección 4.3.3.2 se encuentra la ec. (4.208) que a continuación volvemos a enunciar:

$$\begin{aligned} \bar{G}_{\tilde{\theta}^2 1}^1(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= -i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{1}{R_\perp} \frac{\partial}{\partial R_\perp} \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp}{(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2}} J_0(k_\perp R_\perp) e^{i \sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2} (|z| + |z'|)} \\ &\quad - i \frac{\tilde{\theta}^2 \omega^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp}{(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2}} J_0(k_\perp R_\perp) e^{i \sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2} (|z| + |z'|)}. \end{aligned} \quad (\text{E.36})$$

Una vez más, al convertir la $J_0(k_\perp R_\perp)$ en la Hankel $H_0^{(1)}(k_\perp R_\perp)$ por medio de las ecs. (E.5) y (E.6), se observa que es la misma fase que I^α en las ecs. (E.7) y (E.8). Entonces, al aplicar el método de la fase estacionaria tendremos el mismo punto estacionario $k_{\perp s}$ (E.14) y $k_{z s}$ (E.15). Después, como en torno al punto estacionario $(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2} = k_z^3 \simeq k_{z s}^2 k_z$, $k_\perp^3 \simeq k_{\perp s}^2 k_\perp$ y con la identidad de Sommerfeld (E.1) podremos escribir a $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 1}^1$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \bar{G}_{\tilde{\theta}^2 1}^1(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= -\frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{1}{R_\perp} \frac{\partial}{\partial R_\perp} \left[\frac{1}{k_{z s}^2} \frac{e^{i \tilde{k}_0 \tilde{R}}}{\tilde{R}} \right] \\ &\quad - \frac{\tilde{\theta}^2 \omega^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{1}{k_{z s}^2} \frac{e^{i \tilde{k}_0 \tilde{R}}}{\tilde{R}}, \\ &= -\frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{r^2}{\tilde{k}_0^2 R_\perp z^2} \left(\frac{i \tilde{k}_0 R_\perp}{\tilde{R}^2} - \frac{R_\perp}{\tilde{R}^3} \right) e^{i \omega \tilde{R}} \\ &\quad - \frac{\tilde{\theta}^2 \omega^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{r^2}{\tilde{k}_0^2 z^2} \frac{e^{i \tilde{k}_0 \tilde{R}}}{\tilde{R}}, \end{aligned} \quad (\text{E.37})$$

donde ya se sustituyeron los valores de $k_{\perp s}$ (E.14) y $k_{z s}$ (E.15) en la última igualdad.

Después, hacemos las aproximaciones (E.9) y sustituyendo tanto $R_\perp \simeq \rho = r |\sin \vartheta|$ como $|z| = r |\cos \vartheta|$, encontramos que:

$$\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 1}^1(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = -\frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{1}{n^2 \cos^2 \vartheta} \frac{e^{i \tilde{k}_0 r}}{r} e^{i \tilde{k}_0 (-\mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp + |z' \cos \vartheta|)}. \quad (\text{E.38})$$

donde se han despreciado el primer y segundo término en la última igualdad ya que los campos de radiación decaen como r^{-2} y estos términos decaerían como r^{-4} y r^{-6} en el campo. Nuevamente, al comparar esta expresión con el primer término de la ec. (4.211) observamos que se

trata del mismo término, i.e. es el término dominante cuando no se considera la contribución de los polos simple y doble.

E.1.2.3.2. Componente $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 2}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$

Haciendo $\mu = 2$ y $\nu = 2$ en la ecuación (E.22) se tiene que:

$$\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 2}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} 4\pi \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} [k^2 k_2 - (\omega^2 - \mathbf{k}_\perp^2)] e^{i \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{R}_\perp} \frac{e^{i \sqrt{\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2} (|z| + |z'|)}}{2 (\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}_\perp^2)^{3/2}}. \quad (\text{E.39})$$

De nueva cuenta, tras repetir el mismo procedimiento de la subsección 4.3.3.3 se encuentra la ec. (4.214) que a continuación volvemos a enunciar:

$$\begin{aligned} \bar{G}_{\tilde{\theta}^2 2}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{1}{R_\perp} \frac{\partial}{\partial R_\perp} \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp}{(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2}} J_0(k_\perp R_\perp) e^{i \sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2} (|z| + |z'|)} \\ &\quad - i \frac{\tilde{\theta}^2 \omega^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp}{(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2}} J_0(k_\perp R_\perp) e^{i \sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2} (|z| + |z'|)} \\ &\quad + i \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \int_0^\infty \frac{k_\perp^3 dk_\perp}{(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2}} J_0(k_\perp R_\perp) e^{i \sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2} (|z| + |z'|)}. \end{aligned} \quad (\text{E.40})$$

Nuevamente, al convertir la $J_0(k_\perp R_\perp)$ en la Hankel $H_0^{(1)}(k_\perp R_\perp)$ por medio de las ecs. (E.5) y (4.83), se observa que es la misma fase que I^α en las ecs. (E.7) y (E.8). Entonces, al aplicar el método de la fase estacionaria tendremos el mismo punto estacionario $k_{\perp s}$ (E.14) y $k_{z s}$ (E.15). Después, como en torno al punto estacionario $(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2} = k_z^3 \simeq k_{z s}^2 k_z$, $k_\perp^3 \simeq k_{\perp s}^2 k_\perp$ y con la identidad de Sommerfeld (E.1) podremos escribir a $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2 2}^2$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \bar{G}_{\tilde{\theta}^2 2}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{1}{R_\perp} \frac{\partial}{\partial R_\perp} \left[\frac{1}{k_{z s}^2} \frac{e^{i \tilde{k}_0 \tilde{R}}}{\tilde{R}} \right] \\ &\quad - \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{\omega^2}{k_{z s}^2} \frac{e^{i \tilde{k}_0 \tilde{R}}}{\tilde{R}} + \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{k_{\perp s}^2}{k_{z s}^2} \frac{e^{i \tilde{k}_0 \tilde{R}}}{\tilde{R}}, \\ &= \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{r^2}{\tilde{k}_0^2 R_\perp z^2} \left(\frac{i \tilde{k}_0 R_\perp}{\tilde{R}^2} - \frac{R_\perp}{\tilde{R}^3} \right) e^{i \tilde{k}_0 \tilde{R}} \\ &\quad - \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{r^2}{n^2 z^2} \frac{e^{i \tilde{k}_0 \tilde{R}}}{\tilde{R}} + \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{\rho^2}{z^2} \frac{e^{i \tilde{k}_0 \tilde{R}}}{\tilde{R}}, \end{aligned} \quad (\text{E.41})$$

donde ya se substituyó el valor de $k_{\perp s}$ (E.14) y $k_{z s}$ (E.15) en la última igualdad.

Después, hacemos las aproximaciones (E.9) y sustituyendo tanto $R_{\perp} \simeq \rho = r|\sin \vartheta|$ como $|z| = r|\cos \vartheta|$, encontramos que:

$$\bar{G}_{\tilde{\theta}^2}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \left(-\frac{1}{n^2 \cos^2 \vartheta} + \tan^2 \vartheta \right) \frac{e^{i\omega r}}{r} e^{i\omega(-\mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp} + |z' \cos \theta|)}, \quad (\text{E.42})$$

donde se han despreciado el primer y segundo término en la última igualdad ya que los campos de radiación decaen como r^{-2} y estos términos decaerían como r^{-4} y r^{-6} en el campo. Nuevamente, al comparar esta expresión con el primer término de la ec. (4.217) observamos que se trata del mismo término, i.e. es el término dominante cuando no se considera la contribución de los polos simple y doble.

Juntando los resultados de estas subsecciones dados por las ecs. (E.23), (E.27), (E.33), (E.34), (E.38) y (E.42) es posible escribir las componentes $\bar{G}_{\tilde{\theta}^2}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ de la siguiente manera:

$$\bar{G}_{\tilde{\theta}^2}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = \frac{\tilde{\theta}^2}{4n^2 + \tilde{\theta}^2} \frac{e^{i\tilde{k}_0 r}}{r \cos^2 \vartheta} C_{\nu}^{\mu}(\mathbf{x}, n) e^{i\tilde{k}_0(-\mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp} + |z' \cos \theta|)}, \quad (\text{E.43})$$

donde hemos definido

$$C_{\nu}^{\mu}(\mathbf{x}, n) = \begin{pmatrix} \sin^2 \vartheta & -x/rn & y/rn & 0 \\ x/rn & -1/n^2 & 0 & 0 \\ y/rn & 0 & -1/n^2 + \sin^2 \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.44})$$

En la ec. (E.44) se introdujo la notación $x = r \sin \vartheta \cos \phi$ y $y = r \sin \vartheta \sin \phi$ de coordenadas esféricas. Finalmente, al hacer la identificación $C_{\nu}^{\mu}(\mathbf{x}, n) = \cos^2 \vartheta C_{1\nu}^{\mu}(\vartheta, \phi, n)$ y tras comparar (E.43) con la ec. (4.218) encontramos que es exactamente el primer término de dicha ecuación, i.e. es el término dominante cuando no se considera la contribución de los polos simple y doble.

E.2. Método de *Steepest Descent*

En esta sección apéndice, demostraremos que el método de la fase estacionaria utilizado en la sección E.1 de este apéndice y el método steepest descent dan los mismo resultados. Siguiendo las ideas de los libros [94, 108], este método nos permitirá calcular la contribución dominante de la integral

$$I = \int_{\gamma} e^{\lambda h(t)} f(t) dt. \quad (\text{E.45})$$

cuando una exponencial que oscile rápidamente module el integrando. El término dominante de dicha integral según este método es

$$I \sim e^{\lambda h(t_0)} f(t_0) \sqrt{\frac{-2\pi}{\lambda h''(t_0)}}, \quad (\text{E.46})$$

donde t_0 es tal que $h'(t_0) = 0$ y se le conoce como punto estacionario [94, 108].

E.2.1. $\bar{G}_{\hat{\theta}^2 \nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$

Comenzamos por aplicar dicho método a las componentes $\bar{G}_{\hat{\theta}^2 \nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$. Luego, identificamos de las ecs. (E.7) y (E.8) que la integral a determinar es

$$L_1(\mathbf{x}; \omega) = \int_{-\infty_C}^{\infty} \frac{k_{\perp} dk_{\perp}}{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2} H_0^{(1)}(k_{\perp} R_{\perp}) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2}(|z|+|z'|)}, \quad (\text{E.47})$$

cuyo comportamiento asintótico es

$$K_1(\mathbf{x}; \omega) \sim \int_{-\infty_C}^{\infty} \frac{k_{\perp} dk_{\perp}}{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2} \sqrt{\frac{2}{\pi k_{\perp} \rho}} e^{ik_{\perp} \rho - i\frac{\pi}{4}} e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2}|z|}, \quad \tilde{k}_0^2 > k_{\perp}^2. \quad (\text{E.48})$$

Luego, encontramos que en el régimen de campo lejano el punto estacionario coincide con aquel del método de la fase estacionaria dado en la ec. (E.14) y también k_{z_s} (E.15) es el mismo. Ahora, evaluamos la fase en el punto estacionario

$$e^{ik_{\perp} R_{\perp} - i\frac{\pi}{4}} e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2}(|z|+|z'|)} \Big|_{k_{\perp}=k_{\perp_s}} = e^{i\tilde{k}_0 \tilde{R} - i\frac{\pi}{4}}. \quad (\text{E.49})$$

Después de esto, se requiere calcular la segunda derivada de la fase en el punto estacionario dentro del régimen de campo lejano, obteniendo que

$$\frac{d^2}{dk_{\perp}^2} \left(k_{\perp} \rho - \frac{\pi}{4} + \sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_{\perp}^2} |z| \right) \Big|_{k_{\perp}=k_{\perp_s}} = -\frac{r^3}{\tilde{k}_0 z^2}. \quad (\text{E.50})$$

Juntando los resultados (E.49), (E.50) en la fórmula (E.46), obtenemos que el término dominante de este método es

$$\begin{aligned} L_1(\mathbf{x}; \omega) &\sim e^{i\tilde{k}_0 \tilde{R} - i\frac{\pi}{4}} \frac{\rho r}{i\tilde{k}_0 z^2} \sqrt{\frac{2r}{\pi \tilde{k}_0 \rho^2}} \sqrt{\frac{2\pi \tilde{k}_0 z^2}{r^3}}, \\ &\sim e^{i\tilde{k}_0 (r - \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{x}'_{\perp} + |z' \cos \theta|)} \frac{2}{i\tilde{k}_0 |z|}, \end{aligned} \quad (\text{E.51})$$

donde hemos despreciado a $\frac{\pi}{4}$ porque es mucho más pequeño que $\tilde{k}_0 r$ y hemos usado la aproximación de campo lejano (E.18) en la fase en la última ecuación.

Insertando este resultado en las expresiones (E.7) y (E.8), obtenemos los resultados dados por las ecs. (E.19) y (E.20) obtenidos por el método de la fase estacionaria.

E.2.2. $\bar{G}_{\hat{\theta}^2 \nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$

Es turno de aplicar este método a las componentes $\bar{G}_{\hat{\theta}^2 \nu}^{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$ y verificar que da los mismos resultados que el método de la fase estacionaria. Nuevamente, seguimos las ideas de

[94, 108] e identificamos de las ecs. (E.25), (E.30), (E.36) (E.40), que fueron obtenidas tras emplear la identidad de Sommerfeld (E.1), que las integrales a determinar son

$$K_2(\mathbf{x}; \omega) = \int_0^\infty \frac{k_\perp^3 dk_\perp}{(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2}} J_0(k_\perp R_\perp) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z|+|z'|)}, \quad (\text{E.52})$$

$$K_3(\mathbf{x}; \omega) = \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp}{\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}} J_0(k_\perp R_\perp) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z|+|z'|)}. \quad (\text{E.53})$$

Al usar la ec. (E.5) y la fórmula de reflexión (E.6), las integrales previas $K_2(\mathbf{x}; \omega)$ y $K_3(\mathbf{x}; \omega)$ se reescriben del siguiente modo

$$K_2(\mathbf{x}; \omega) = \frac{1}{2} \oint_{C_S} \frac{k_\perp^3 dk_\perp}{(\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2)^{3/2}} H_0^1(k_\perp R_\perp) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z|+|z'|)}, \quad (\text{E.54})$$

$$K_3(\mathbf{x}; \omega) = \frac{1}{2} \oint_{C_S} \frac{k_\perp dk_\perp}{\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}} H_0^1(k_\perp R_\perp) e^{i\sqrt{\tilde{k}_0^2 - k_\perp^2}(|z|+|z'|)}, \quad (\text{E.55})$$

donde C_S denota al contorno de integración de la Fig. E.1 usado previamente. A partir de estas ecuaciones observamos que la fase es exactamente la misma que la analizada en K_1 (E.47). En consecuencia, el punto estacionario es el mismo de la ec. (E.14) que discutimos previamente. Entonces, ahora sólo resta aplicar las fórmulas de este método (E.46) y encontramos que el término dominante de cada integral es

$$\begin{aligned} K_2(\mathbf{x}; \omega) &\sim e^{i\tilde{k}_0 \tilde{R} - i\frac{\pi}{4}} \frac{\rho^3}{2i|z|^3} \sqrt{\frac{2r}{\pi \tilde{k}_0 \rho^2}} \sqrt{\frac{2\pi \tilde{k}_0 z^2}{r^3}}, \\ &\sim e^{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp + |z' \cos \theta|)} \frac{\rho^2}{ir|z|^2}, \end{aligned} \quad (\text{E.56})$$

$$\begin{aligned} K_3(\mathbf{x}; \omega) &\sim e^{i\tilde{k}_0 \tilde{R} - i\frac{\pi}{4}} \frac{\rho r^2}{2i\tilde{k}_0^2 |z|^3} \sqrt{\frac{2r}{\pi \tilde{k}_0 \rho^2}} \sqrt{\frac{2\pi \tilde{k}_0 z^2}{r^3}}, \\ &\sim e^{i\tilde{k}_0(r - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp + |z' \cos \theta|)} \frac{r^2}{i\tilde{k}_0^2 |z|^2}, \end{aligned} \quad (\text{E.57})$$

donde hemos despreciado a $\frac{\pi}{4}$ porque es mucho más pequeño que $\tilde{k}_0 r$ y también usamos (E.18) en la fase.

Insertando estos resultados en las expresiones (E.7) y (E.8), obtenemos los mismos resultados de las ecs. Eqs. (E.21) y (E.43) por medio del método de la fase estacionaria.

Apéndice F

Tiempos retardados

Aquí daremos algunos detalles que se deben tener en cuenta con respecto a los tiempos retardados al realizar el cálculo de los potenciales electromagnéticos producidos por una partícula cargada que se mueve perpendicularmente con respecto a la θ -frontera con velocidad constante $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{u}}$ (Ver Fig. 4.1). Aquí expondremos un solo ejemplo de dicho procedimiento.

Consideremos el caso $t > v|z|$ y $t > r$ que corresponde con el Caso 6 de la Tabla 5.1. Dada una situación concreta, nosotros somos capaces de determinar el signo de las variables requeridas como se muestra enseguida:

$$t + v|z| > 0, \quad t - v|z| > 0, \quad r^2 - t^2 < 0. \quad (\text{F.1})$$

De este modo, los ceros de la función $w(t')$ en cada región se determinan por

$$t'_1 = \frac{t + v|z| + \sqrt{(t + v|z|)^2 - (1 - v^2)(t^2 - r^2)}}{1 - v^2} \quad (t' > 0), \quad (\text{F.2})$$

$$t'_2 = \frac{t + v|z| - \sqrt{(t + v|z|)^2 - (1 - v^2)(t^2 - r^2)}}{1 - v^2} \quad (t' > 0), \quad (\text{F.3})$$

$$t'_3 = \frac{t - v|z| + \sqrt{(t - v|z|)^2 - (1 - v^2)(t^2 - r^2)}}{1 - v^2} \quad (t' < 0), \quad (\text{F.4})$$

$$t'_4 = \frac{t - v|z| - \sqrt{(t - v|z|)^2 - (1 - v^2)(t^2 - r^2)}}{1 - v^2} \quad (t' < 0). \quad (\text{F.5})$$

Por inspección y usando (F.1) determinamos que $t'_1 > 0$, $t'_2 > 0$, $t'_3 > 0$, $t'_4 > 0$. Sin embargo, las soluciones t'_3 , t'_4 deben ser desechadas porque se espera que vivan en el sector negativo de t' . Por otro lado, $t'_1 > t'_2 > 0$ cumple la condición requerida y entonces se determina que $t'_- = t'_2 < t'_+ = t'_1$. Las asignaciones restantes de los demás casos de la Tabla (5.1) se llevan a cabo de manera análoga. En la realización de este análisis resulta útil recordar la identidad (5.29) que se reescribe a continuación

$$(t \pm v|z|)^2 + (1 - v^2)(r^2 - t^2) = (|z| \pm vt)^2 + (1 - v^2)\rho^2, \quad (\text{F.6})$$

la cual muestra que la función radicando en las expresiones para los t'_i es siempre positiva para cualquier elección de t, z, ρ y $v < 1$.

Apéndice G

Potenciales de un monopolo magnético

En este apéndice, mostraremos cuál es la forma de los potenciales de un monopolo magnético para así justificar que los términos con la función de Heaviside de la FG (4.78) describen la contribución de un monopolo magnético cuyo origen se debe al EME.

Si hipotéticamente las cargas magnéticas existieran* y si ϱ_m fuese la densidad de tales cargas magnéticas, entonces el conjunto completo de ecuaciones de Maxwell se modificaría del siguiente modo [162]:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{j}_e, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \varrho_e, \quad (\text{G.1})$$

$$-\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{j}_m, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi \varrho_m, \quad (\text{G.2})$$

donde hemos usado consistentemente los subíndices e y m para las densidades de carga y corriente eléctrica y magnética respectivamente. Además, estas densidades satisfarán sus propias leyes de conservación de carga:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho_{e,m} + \nabla \cdot \mathbf{j}_{e,m} = 0. \quad (\text{G.3})$$

Ahora bien, supongamos que un monopolo magnético con carga magnética g se mueve según $z'(t) = -vt$, de tal modo que su densidad de carga y corriente magnéticas son

$$\varrho_m(x) = g\delta(x)\delta(y)\delta(z + vt), \quad \mathbf{j}_m(x) = -vg\delta(x)\delta(y)\delta(z + vt)\hat{\mathbf{z}}. \quad (\text{G.4})$$

Después, de acuerdo con la Ref. [162] definimos

$$\mathbf{B}(x) = \nabla \times \mathbf{A}_m + 4\pi g\delta(x)\delta(y)\Theta(z + vt)\hat{\mathbf{z}}, \quad (\text{G.5})$$

$$\mathbf{E}(x) = -\frac{\partial \mathbf{A}_m}{\partial t} - \nabla\Phi, \quad (\text{G.6})$$

donde $\Theta(z + vt)$ representa la función de Heaviside y la forma de \mathbf{B} (G.5) garantiza el cumplimiento de la ley de Gauss magnética (G.2) [162].

*Un muy breve resumen de la historia de la carga magnética y de los estudios sobre ella se puede consultar en la Sec. 2.1 de [162].

Dado que sólo estamos interesados en la contribución magnética, fijamos $\mathbf{j}_e = \mathbf{0}$ y $\varrho_e = 0$. Siendo así, las ecuaciones de Maxwell (G.1) y (G.2) se reescriben de la siguiente manera:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (\text{G.7})$$

$$-\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{j}_m, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi \varrho_m. \quad (\text{G.8})$$

Sustituyendo (G.5) y (G.6) en la ecuación de Ampère-Maxwell (G.7), obtendremos que:

$$\begin{aligned} \nabla \times [\nabla \times \mathbf{A}_m + 4\pi g \delta(x) \delta(y) \Theta(z + vt) \hat{\mathbf{z}}] &= \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \mathbf{A}_m}{\partial t} - \nabla \Phi \right), \\ \Leftrightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}_m) + \nabla \times [4\pi g \delta(x) \delta(y) \Theta(z + vt) \hat{\mathbf{z}}] &= -\frac{\partial^2 \mathbf{A}_m}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi, \\ \Leftrightarrow \square^2 \mathbf{A}_m = -\nabla \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{A}_m) \right] - \nabla \times [4\pi g \delta(x) \delta(y) \Theta(z + vt) \hat{\mathbf{z}}], \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

donde $\square^2 = \partial_t^2 - \nabla^2$.

Al escoger la norma de Lorenz

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{A}_m) = 0, \quad (\text{G.10})$$

llegamos a la siguiente ecuación para el potencial magnético \mathbf{A}_m :

$$\square^2 \mathbf{A}_m = -\nabla \times [4\pi g \delta(x) \delta(y) \Theta(z + vt) \hat{\mathbf{z}}]. \quad (\text{G.11})$$

Por otra parte, al sustituir la ec. (G.6) en la ley de Gauss eléctrica (G.7) la ecuación para el potencial escalar Φ resulta ser:

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A}_m = 0, \quad (\text{G.12})$$

que en la norma de Lorenz (G.10) adquiere la siguiente forma:

$$\square^2 \Phi = 0, \quad (\text{G.13})$$

cuya solución para el caso sin fuentes eléctricas tiene como solución

$$\Phi \equiv 0. \quad (\text{G.14})$$

Antes de hallar la solución de la ec. (G.11), verifiquemos que los potenciales vectorial y escalar satisfacen la ley de Faraday (G.8). Al sustituir las ecs. (G.5) y (G.6) en dicha ecuación tendremos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A}_m &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A}_m + \frac{\partial}{\partial t} [4\pi g \delta(x) \delta(y) \Theta(z + vt) \hat{\mathbf{z}}] \\ &\quad + 4\pi [-vg \delta(x) \delta(y) \delta(z + vt) \hat{\mathbf{z}}], \\ \Leftrightarrow \mathbf{0} &= 4\pi g \delta(x) \delta(y) \frac{\partial}{\partial t} \Theta(z + vt) \hat{\mathbf{z}} - 4\pi (vg \delta(x) \delta(y) \delta(z + vt) \hat{\mathbf{z}}). \end{aligned} \quad (\text{G.15})$$

Ya con la garantía de que los potenciales (G.5) y (G.6) satisfacen las ecs. (G.7) y (G.8), nos resta resolver la ec. (G.13) (derivada de la ec. de Ampère-Maxwell (G.7) en la norma de Lorenz (G.10)). Usando que una función f satisface la relación:

$$-\nabla \times (f\hat{\mathbf{z}}) = +\hat{\mathbf{y}} \frac{\partial f}{\partial x} - \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (\text{G.16})$$

Tendremos que al aplicarla a cada una de las componentes de la ec. (G.13), resulta lo siguiente

$$\square^2 A_{m_x}(x) = -4\pi g \delta(x) \delta'(y) \Theta(z + vt), \quad (\text{G.17})$$

$$\square^2 A_{m_y}(x) = +4\pi g \delta'(x) \delta(y) \Theta(z + vt), \quad (\text{G.18})$$

$$\square^2 A_{m_z}(x) = 0, \quad (\text{G.19})$$

donde observamos inmediatamente que $A_{m_z}(x) \equiv 0$. Lo anterior resulta interesante, porque el potencial vectorial $\mathbf{A}_e(x)$ (5.7) de la carga eléctrica está en la dirección de la velocidad $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{z}}$, el cual volvemos a escribir enseguida:

$$\mathbf{A}_e(x) = \frac{qv\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{(1-v^2)(\rho^2) + (z-vt)^2}}, \quad (\text{G.20})$$

donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Mientras que el $\mathbf{A}_m(x)$ del monopolo determinado por las ecs. (G.17)-(G.19) está en la dirección perpendicular a la velocidad.

Para hallar la solución de la ec. (G.17) usamos la FG de la ED estándar [86] asociada al operador \square^2 donde la fuente externa será el lado derecho de la ec. (G.17). De este modo, resulta que:

$$\begin{aligned} A_{m_x}(x) &= \int d^4x' \frac{\delta(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| - t + t')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} [-g\delta(x')\delta'(y')\Theta(z' + vt')] , \\ &= -g \frac{d}{dy} \int dz' dt' \left[\frac{\delta\left(\sqrt{\rho^2 + (z-z')^2} - t + t'\right)}{\sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}} \right] \Theta(z' + vt'). \end{aligned} \quad (\text{G.21})$$

Luego, integramos en z' . Para ello, identificamos los ceros del argumento de la delta de Dirac que son

$$|z - z'_\pm| = \sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} \Leftrightarrow z'_\pm = z \mp \sqrt{(t-t')^2 - \rho^2}. \quad (\text{G.22})$$

Al usar la propiedad de la delta de Dirac enunciada en (4.51) en la expresión de $A_{m_x}(x)$ (G.21), obtenemos lo siguiente:

$$A_{m_x}(x) = -g \frac{d}{dy} \int dz' dt' \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}} \frac{[\delta(z' - z'_+) + \delta(z' - z'_-)]}{\left| \frac{z-z'}{\sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}} \right|}. \quad (\text{G.23})$$

Al integrar en z' y sustituyendo los valores de z_{\pm} (G.22), la expresión de $A_{m_x}(x)$ (G.21), encontramos que

$$A_{m_x}(x) = -g \frac{d}{dy} \int dt' \frac{\Theta \left(z + vt' + \sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} \right)}{\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2}} - g \frac{d}{dy} \int dt' \frac{\Theta \left(z + vt' - \sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} \right)}{\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2}}. \quad (\text{G.24})$$

$$(\text{G.25})$$

Finalmente, al hacer el siguiente cambio de variable

$$\frac{d}{dy} = \frac{d\rho}{dy} \frac{d}{d\rho} = \frac{y}{\rho} \frac{d}{d\rho}, \quad (\text{G.26})$$

encontramos que la expresión final de $A_{m_x}(x)$ es:

$$A_{m_x}(x) = -\frac{gy}{\rho} \frac{d}{d\rho} \int dt' \frac{\Theta \left(z + vt' + \sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} \right)}{\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2}} - \frac{gy}{\rho} \frac{d}{d\rho} \int dt' \frac{\Theta \left(z + vt' - \sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} \right)}{\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2}}. \quad (\text{G.27})$$

Mediante un procedimiento análogo, se encuentra que la solución de la ec. (G.18) es:

$$A_{m_y}(x) = \frac{gx}{\rho} \frac{d}{d\rho} \int dt' \frac{\Theta \left(z + vt' + \sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} \right)}{\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2}} + \frac{gx}{\rho} \frac{d}{d\rho} \int dt' \frac{\Theta \left(z + vt' - \sqrt{(t-t')^2 - \rho^2} \right)}{\sqrt{(t-t')^2 - \rho^2}}. \quad (\text{G.28})$$

Observamos que las componentes $A_{m_x}(x)$ y $A_{m_y}(x)$ se pueden poner en un solo potencial magnético que apunte en la dirección del vector $\hat{\phi}$. Más aún, las funciones que aparecen bajo la integral sobre t' en las ecuaciones (G.27) y (G.28) son unas de las funciones de distribución que tiene la FG (4.78). Además, la expresión de $A_{m_x}(x)$ (G.27) es justo el primer término en la ec. (5.9) del capítulo 5 al hacer la identificación general $g = 2\tilde{\theta}q/(4n^2 + \tilde{\theta}^2)$, siendo g la carga magnética del monopolo “imagen”. Lo mismo se tendrá para $A_{m_y}(x)$ (G.28) con respecto a la componente $A^2(x)$ del mismo capítulo.

Apéndice H

Obtención explícita de las ecuaciones de los modos normales de la θ -Electrodinámica

En este apéndice solucionaremos el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones (6.35) y (6.38) que a continuación se vuelve a enunciar:

$$\mathcal{O}_1 X(z) + i\omega\tilde{\theta}\delta(z)Y(z) = J_1(z), \quad (\text{H.1})$$

$$\mathcal{O}_2 Y(z) - i\omega\tilde{\theta}\delta(z)X(z) = J_2(z), \quad (\text{H.2})$$

donde hemos omitido la dependencia en \mathbf{k}_\perp y ω y

$$\mathcal{O}_1 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2\epsilon(z) - k_\perp^2, \quad (\text{H.3})$$

$$\mathcal{O}_2 = \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\eta(z)} \frac{\partial}{\partial z} + \omega^2\epsilon(z), \quad (\text{H.4})$$

$$J_1(z) = -i\omega 4\pi \hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{j}_\perp, \quad (\text{H.5})$$

$$J_2(z) = -i\omega 4\pi \hat{\mathbf{k}}_\perp \cdot \mathbf{j}_\perp + 4\pi k_\perp \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{j_z}{\eta(z)\omega\epsilon(z)} \right], \quad (\text{H.6})$$

$$\eta(z) = 1 - \frac{k_\perp^2}{\omega^2\epsilon(z)} = \frac{\omega^2\epsilon(z) - k_\perp^2}{\omega^2\epsilon(z)}. \quad (\text{H.7})$$

Para ello, es necesario conocer las FGs $\mathcal{F}_{0\perp}(z, z')$ (6.46) y $\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z')$ (6.63) que solucionan las siguientes ecuaciones de Green de los operadores \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 :

$$-\mathcal{O}_1 \mathcal{F}_{0\perp}(z, z') = \delta(z - z'), \quad (\text{H.8})$$

$$-\mathcal{O}_2 \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z') = \delta(z - z'). \quad (\text{H.9})$$

Lo que prosigue es multiplicar por la izquierda la ec. (H.1) por $\mathcal{F}_{0\perp}(z, z'')$ como sigue

$$\mathcal{F}_{0\perp}(z, z'') \mathcal{O}_1 X(z'') + i\omega\tilde{\theta}\delta(z'') \mathcal{F}_{0\perp}(z, z'') Y(z'') = \mathcal{F}_{0\perp}(z, z'') J_1(z''), \quad (\text{H.10})$$

donde la notación biprima en el operador $\mathcal{O}_{1''}$ indica que actúa sobre z'' . Usando la ec. (H.8) encontramos que

$$- \delta(z - z'')X(z'') + i\omega\tilde{\mathcal{F}}_{0\perp}(z, z'')\delta(z'')Y(z'') = \mathcal{F}_{0\perp}(z, z'')J_1(z'') . \quad (\text{H.11})$$

Luego, integramos con respecto a z'' y resulta finalmente que:

$$- X(z) + i\omega\tilde{\mathcal{F}}_{0\perp}(z, 0)Y(0) = \int dz'' \mathcal{F}_{0\perp}(z, z'')J_1(z'') , \quad (\text{H.12})$$

que al renombrar la variable muda z'' por z' coincide con la ec. (6.66).

Falta hacer lo propio con la ec. (H.2). De manera análoga, multiplicamos por la izquierda la expresión (H.2) por $\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z'')$ como se muestra enseguida

$$\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z'')\mathcal{O}_{2''}Y(z'') - i\omega\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z'')\delta(z'')X(z'') = \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z'')J_2(z'') \quad (\text{H.13})$$

donde nuevamente la notación biprima en el operador $\mathcal{O}_{2''}$ indica que actúa sobre z'' . Usando la ec. (H.9) encontramos que

$$- \delta(z - z'')Y(z'') - i\omega\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z'')\delta(z'')X(z'') = \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z'')J_2(z'') . \quad (\text{H.14})$$

Luego, integramos con respecto a z'' y resulta finalmente que:

$$- Y(z) - i\omega\tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, 0)X(0) = \int dz'' \tilde{\mathcal{F}}_{0\parallel}(z, z'')J_2(z'') . \quad (\text{H.15})$$

que al renombrar la variable muda z'' por z' coincide con la ec. (6.67).

Bibliografía

- [1] T. H. O'Dell, *The Electrodynamics of Magneto-Electric Media* (North-Holland, Amsterdam, 1970).
- [2] L. D. Landau, E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, *Electrodynamics of Continuous Media (Course of Theoretical Physics vol. 8)* (Oxford: Pergamon Press, 1984).
- [3] Y. N. Obukhov and F. W. Hehl, *Phys. Lett. A* **341**, 357 (2005); Q. N. Meier et al., *Phys. Rev.* **X**,011011 (2019).
- [4] X. L. Qi, T. L. Hughes and S. Ch. Zhang, *Phys. Rev. B* **78**, 195424 (2008).
- [5] M. Z. Hasan and C. L. Kane, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 3045 (2010).
- [6] X. L. Qi, *Field Theory Foundations of Topological Insulators*, in *Topological Insulators (Contemporary Concepts of Condensed Matter Science)*, eds. M. Franz and L. Molenkamp, Vol. 6 (Amsterdam: Elsevier, 2013), Chapter 4.
- [7] N. P. Armitage, E. J. Mele and A. Vishwanath, *Rev. Mod. Phys.* **90**, 015001 (2018).
- [8] F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1799 (1987).
- [9] L. Huerta and J. Zanelli, *Phys. Rev. D* **85**, 085024 (2012).
- [10] A. Martín-Ruiz, M. Cambiaso and L. F. Urrutia, *Phys. Rev. D* **92**, 125015 (2015).
- [11] A. Martín-Ruiz, M. Cambiaso and L. F. Urrutia, *Phys. Rev. D* **93**, 045022 (2016).
- [12] A. Martín-Ruiz, M. Cambiaso and L. F. Urrutia, *Phys. Rev. D* **94**, 085019 (2016).
- [13] A. Martín-Ruiz, M. Cambiaso and L. F. Urrutia, *Europhysics Letters* **113**, 60005 (2016).
- [14] P. Curie, *J. de Physique (3rd Series)* **3**, 393 (1894).
- [15] P. Debye, *Z. Phys.* **36**, 300 (1926).
- [16] I. E. Dzyaloshinskii, *Zh. Exp. Teor. Fiz.* **37**, 881 (1959) [*Soviet Phys. JETP* **10**,628 (1960)].
- [17] D. N. Astrov, *J. Exptl. Teor. Fiz.* **38**, 984 (1960); *Sov. Phys. JETP* **11**, 708 (1960).

- [18] V. J. Tolen, G. T. Rado and E. W. Stalder, Phys. Rev. Lett. **6**, 607 (1961).
- [19] F. W. Hehl, Y. N. Obukhov, J.-P. Rivera and H. Schmid, Phys. Rev. A **77**, 022106 (2008).
- [20] A. S. Borovik-Romanov and H. Grimmer, *Magnetic Properties*, Sec.1.5, pp.105-149, ver en particular, *Magnetoelectric effect*, Sec.1.5.8, pp.137-149 de *International Tables for Crystallography*, editado por A. Authier, Vol. **D**, Physical Properties of Crystals, Kluwer, Dordrecht/ Boston/London (2003).
- [21] W. F. Brown, R. M. Hornreich and S. Shtrikman, Phys. Rev **168**, 574 (1968).
- [22] N. A. Spaldin and M. Fiebig, Science 309, 391 (2005).
- [23] M. Fiebig, J. Phys. D **38**, R123 (2005).
- [24] F. W. Hehl, Y. N. Obukhov, J.-P. Rivera and H. Schmid, Phys. Lett. A **372**, 1141 (2008).
- [25] A. M. Essin, J. E. Moore and D. Vanderbilt, Phys. Rev. Lett. **102**, 146805 (2009).
- [26] R. D. Peccei and H. R. Quinn, Phys. Rev. Lett. **38**, 1440 (1977).
- [27] J.-P. Rivera, Eur. Phys. J. B **71**, 299 (2009).
- [28] M. Z. Hasan and C. L. Kane, Rev. Mod. Phys. **82**, 3045 (2010).
- [29] G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen and V. M. Mostepanenko, Rev. Mod. Phys. **81**, 1827 (2009).
- [30] X. L. Qi, R. Li, J. Zang and S. C. Zhang, Science **323**, 1184 (2009).
- [31] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley & Sons, Inc. 8th ed. USA, 2005
- [32] A. Altland, Lars Fritz. *Primer on topological insulators*. www.sfbtr12.uni-koeln.de/files/top_ins.pdf
- [33] K. von Klitzing, G. Dorda and M. Pepper, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980).
- [34] M. Kohmoto. Annals of Physics **60**, 343-353 (1985).
- [35] Q. Niu, D. Thouless, Y. S. Wu. Phys. Rev. B **31**, 3372 (1985).
- [36] Y. Tokura, K. Yasuda and A. Tsukazaki. Nature Reviews Physics **1**, 126-143 (2019).
- [37] X. L. Qi, T. Hughes and S. C. Zhang, Phys. Rev. B **78**, 195424 (2008).
- [38] L. Wu et al., Science **354**, 1124-1127 (2016).
- [39] X. L. Qi and S. C. Zhang, Rev. Mod. Phys. **83**, 1057 (2011).
- [40] C. L. Kane and E. J. Mele, Phys. Rev. Lett. **95**, 226801 (2005).

- [41] C. L. Kane and E. J. Mele, Phys. Rev. Lett. **95**, 146802 (2005).
- [42] B. A. Bernevig, T. A. Hughes and S. C. Zhang, Science **314**, 1757 (2006).
- [43] M. König et al., Science **318**, 766 (2007).
- [44] L. Fu, C. L. Kane and E. J. Mele, Phys. Rev. Lett. **98**, 106803 (2007).
- [45] J. E. Moore and L. Balents, Phys. Rev. B **75**, 121306(R) (2007).
- [46] R. Roy, Phys. Rev. B **79**, 195322 (2009).
- [47] L. Fu and C. L. Kane, Phys. Rev. B **76**, 045302 (2007).
- [48] D. Hsieh et al., Nature (London) **452**, 970 (2008).
- [49] Y. Xia et al., Nat. Phys. **5**, 398 (2009).
- [50] H. Zhang et al., Nat. Phys. **5**, 438 (2009).
- [51] Y. Ando, *Topological Insulator Materials*, J. Phys. Soc. Japan **82**, 102001 (2013).
- [52] Di Xiao et al., Phys. Rev. Lett. **120**, 056801 (2018).
- [53] M. Mogi et al., Sci. Adv. **3**, 1669 (2017).
- [54] N. Varnava and D. Vanderbilt, Phys. Rev. B **98**, 254117 (2018).
- [55] C. Z. Chang et al., Science **340**, 167 (2013).
- [56] X. F. Kou et al., Phys. Rev. Lett. **113**, 137201 (2014).
- [57] J. G. Checkelsky et al., Nat. Phys. **10**, 731 (2014).
- [58] C. Z. Chang et al., Nat. Mater. **14**, 473 (2015).
- [59] M. Mogi et al., Nat. Mater. **16**, 516-521 (2017).
- [60] K. N. Okada et al. Nat. Commun. **7**, 12245 (2016).
- [61] V. Dziom et al., Nat. Commun. **8**, 15197 (2017).
- [62] Ver por ejemplo: C. P. Burgess, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **57** 329 (2007); ibíd. Living Rev. Rel. **7** 5 (2004).
- [63] B. A. Bernevig, T. L. Hughes. *Topological Insulators and Topological Superconductors*. Princeton University Press. EUA, 2013. *Chapter 13. Quantum Hall Effect and Chern Insulators in Higher Dimensions*. p. 164-175
- [64] K. Fujikawa, Phys. Rev. Lett. **42**, 1195 (1979); ibíd. Phys. Rev. D **21**, 2848 (1980).

- [65] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Institute of Physics. 2a. ed. Gran Bretaña, 2003.
- [66] R. Bertlmann. *Anomalies on Quantum Field Theory*. Oxford University Press, Gran Bretaña, 2000.
- [67] S. L. Adler, Phys. Rev. **177**, 2426 (1969).
- [68] J. S. Bell and R. Jackiw, Nuovo Cim. A **60**, 47 (1969).
- [69] F. W. Hehl, Y. N. Obukhov, J.-P. Rivera and H. Schmid, Eur. Phys. J. B **71**, 312-329 (2009).
- [70] K. Fujikawa and H. Suzuki, *Path Integral and Quantum Anomalies*, (Clarendon Press, Oxford, 2004).
- [71] S. S. Chern and J. Simons, Annals Math. **99**, 48 (1974).
- [72] J. E. Marsden and A. Tromba. *Vector Calculus*. Pearson Addison-Wesley. 5a. ed. EUA, 2004.
- [73] C. Kim, E. Koh and K. Lee, J. High Energy Phys. 06 (2008) 040.
- [74] C. Kim, E. Koh and K. Lee, Phys. Rev. D **79**, 126013 (2009).
- [75] Y. N. Obukhov and F. W. Hehl, Phys. Lett. A **341**, 357 (2005).
- [76] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley. 3a. ed. Nueva York, 1999.
- [77] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series and Products* Academic Press, Elsevier. 7a. ed., 2007.
- [78] A. Martín-Ruiz and L. F. Urrutia, Phys. Rev. A **87**, 022502 (2018).
- [79] C. Grosche, Phys. Rev. Lett. **71**, 1 (1993).
- [80] J. Schwinger et al. *Classical Electrodynamics*. Perseus Books. EUA,1998. *Chapter 13. Electrostatics in Free Space*. p. 143-145. *Chapter 43. Cylindrical Coordinates*. p. 449-450.
- [81] Ibid., p. 450.
- [82] J. Schwinger et al. Op. cit., *Chapter 13. Electrostatics in Free Space*. p. 141-146. *Chapter 14. Semi-Infinite Dielectric*. p.147-156. *Chapter 15. Application of Green's Function*. p. 157-164. *Chapter 17. Parallel Conducting Plates*. p. 1177-192. *Chapter 31. Retarded Green's Function*. p. 341-350.
- [83] Weyl H., *Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über einem ebenen Leiter* Ann. der Physik **60**, 481-500 (1919).

- [84] G. Arfken, H. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier Academic Press. 6a. ed. EUA, 2005.
- [85] Weisstein, E. W. *Ramp Function*. From MathWorld-A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/RampFunction.html>
- [86] J. Schwinger et al. Op. cit., *Chapter 31. Retarded Green's Function*. p. 345.
- [87] J. Schwinger et al. Op. cit., *Chapter 30. Magnetic Charge II*. p. 337-340.
- [88] J. Schwinger et al. Op. cit., *Chapter 32. Radiation-Field Point of View*. p. 351-360. *Chapter 33. Radiation-Source Point of View*. p. 361-366.
- [89] M. Abramowitz, I. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Dover Publications. Nueva York, 1972.
- [90] A. Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics*, Academic Press, New York, 1964.
- [91] A. Baños. *Dipole radiation in the presence of a conducting half-space*. New York, USA, Pergamon Press, 1966. *Chapter 2. Integral Representations*. p. 55.
- [92] A. Baños. Op. cit., p. 21.
- [93] Ibid., p. 19.
- [94] Chew, Weng Cho. *Waves and Fields in Inhomogenous Media*, IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory. New York, 1990.
- [95] A. Baños. Op. cit., *Chapter 3. On the Saddle-Point Method of Integration*. p. 63-75.
- [96] A. Baños. Op. cit., *Chapter 6. Expansions Valid Over an Entire Hemisphere*. p. 173-194.
- [97] J.R. Wait. *Electromagnetic waves in stratified media*. New York, USA, Pergamon Press, 1970.
- [98] A. Lascurain. *Curso básico de variable compleja*. Las prensas de ciencias. UNAM, México, 2007. p. 47, 63-65.
- [99] A. Baños. Op. cit., *Chapter 5. Expansions Valid in the Vicinity of the Vertical Axis*. p. 160.
- [100] A. Baños. Op. cit., p. 65.
- [101] A. Baños. Op. cit., p. 175.
- [102] Ibid., p. 176.
- [103] A. Baños. Op. cit., p. 71.

- [104] K. A. Michalski and J. R. Mosig. *The Sommerfeld half-space problem revisited: from radio frequencies and Zenneck waves to visible light and Fano modes*, Journal of Electromagnetic Waves and Applications, 30:1, 1-42, 2016.
- [105] B. L. Van der Waerden. *Appi. Sci. Res.* **B 2**, No. 7, 33-45, 1950.
- [106] Véase por ejemplo: J. E. Marsden and M. J. Hoffman. *Basic Complex Analysis*. W. H. Freeman, 3rd. ed. New York, USA, 1999; A. Lascurain. *Curso básico de variable compleja*. Las prensas de ciencias. UNAM, México, 2007.
- [107] W. C. Chew, *IEEE Transactions on Antenas and Propagation* **36**, 1654 (1988).
- [108] Mandel, L. and Wolf E. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1995.
- [109] O. J. Franca, L. F. Urrutia and Omar Rodríguez-Tzompantzi. *Reversed electromagnetic Vavilov-Čerenkov radiation in naturally existing magnetoelectric media*. *Phys. Rev. D* **99**, 116020 (2019).
- [110] A. Baños. *Op. cit.*, *Chapter 4. Expansions Valid in the Vicinity of the Interface*. p. 100-101.
- [111] *Ibid.*, p. 149-158.
- [112] J. E. Marsden and M. J. Hoffman. *Op. cit.*, p. 247.
- [113] A. Baños. *Op. cit.*, p. 151.
- [114] L. Novotny and B. Hecht. *Principles of Nano-optics*. Cambridge University Press, 2006.
- [115] K. A. Norton, *The physical reality of space and surface waves in the radiation field of radio antennas*. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*. Vol. **25**, Number 9. September 1937.
- [116] P. A. Čerenkov, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **2**, 451 (1934).
- [117] S. I. Vavilov, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **2**, 457 (1934).
- [118] V. P. Jelley, *Br. J. Appl. Phys.* **6**, 227 (1955).
- [119] V. P. Jelley 1958 *Cerenkov Radiation and its Applications* (Oxford: Pergamon).
- [120] I. M. Frank and I. E. Tamm, *Dokl. Akad. Nauk.* **14**, 107 (1937) [*Compt. Rend. (Dokl)* **14**, 109 (1937)].
- [121] Ypsilantis, T. and Seguinot, J. *Theory of ring imaging Cherenkov counters*. *Nucl. Instrum. Meth.* **A 343**, 30-51 (1994).

- [122] See for example the section 35.5 in C. Patrignani et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C **40**, 100001 (2016) and 2017 update.
- [123] Chamberlain, O., Segre, E., Wiegand, C. and Ypsilantis, T. Observation of antiprotons. Phys. Rev. **100**, 947 (1955).
- [124] Aubert, J. J. et al. Experimental observation of a heavy particle. J. Phys. Rev. Lett. **33**, 1404 (1974).
- [125] J.B. Pendry, A.J. Holden, W.J. Stewart, I. Youngs, Phys. Rev. Lett. **76**, 4773 (1996).
- [126] J.B. Pendry, A.J. Holden, D.J. Robbins, W.J. Stewart, IEEE Trans. Microwave Theory Tech. **47**, 2075 (1999).
- [127] J. Lu, et al., Optics Express **11**, 723 (2003).
- [128] C. Luo et al., Science **229**, 368(2003).
- [129] Z.Y. Duan, B.-I. Wu, S. Xi, H. S. Chen and M. Chen, Progress in Electromagnetic Research **90**, 75 (2009).
- [130] S. Xi et al., Phys. Rev. Lett.**103**, 194801 (2009).
- [131] H. Chen and M. Chen, Materials Today, **14** , 34 (2011).
- [132] Z. Duan et al., Nature Communications,**8**, 14901 (2017).
- [133] J. Tao, Q. J. Wang, J. Zhang and Y. Luo. Scientific Reports **6**,30704 (2016).
- [134] V. G. Veselago, Soviet Physics Uspekhi **10**, 509 (1968).
- [135] R. A. Shelby, D. R. Smith and S. Schultz, Science **292**, 77 (2001).
- [136] S. Smirnov, Phys. Rev. B **88**, 205301 (2013); S. Smirnov, Phys. Rev. B **90**, 125305 (2014).
- [137] D. J. Griffiths *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall. EUA, 1999.
- [138] J. Schwinger et al. Op. cit., p. 346-347.
- [139] M. J. Lighthill. *Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions*. Cambridge University Press, London, 1958.
- [140] J. Schwinger et al. Op. cit., *Chapter 3. Conservation Laws*. p. 22.
- [141] J. Schwinger et al. Op. cit., *Chapter 35. Spectral distribution of Radiation*. p. 378.
- [142] W. K. H. Panofsky and M. Phillips. *Classical Electricity and Magnetism*. Addison-Wesley Publishing, Inc., 2nd ed., 1962, USA.

- [143] L. Chen and S. Wan, Phys. Rev. B **85**, 115102 (2012); W. Nie, R. Zeng, Y. Lan and S. Zhu, Phys. Rev. B **88**, 085421 (2013); R. Zeng, L. Chen, W. Nie M. Bi, Y. Yang and S. Zhu, Phys. Lett. A **380**, 2861 (2016).
- [144] J. Schwinger et al. Op. cit., *Chapter 41. Propagation in a Dielectric Medium*. p. 427-448.
- [145] O. J. Franca, R. Montemayor and L. F. Urrutia. Phys. Rev. D **85**, 085008 (2012).
- [146] J. Schwinger et al. Op. cit., p. 430.
- [147] Ibid., p. 433.
- [148] Ibid., p. 436.
- [149] A. Crosse, S. Fuchs, S. Y. Buhmann. Phys. Rev. A **92**, 063831 (2015).
- [150] S. Fuchs, A. Crosse, S. Y. Buhmann. Phys. Rev. A **95**, 023805 (2017).
- [151] S. Y. Buhmann. *Dispersion Forces I- Macroscopic Quantum Electrodynamics and Ground-State Casimir, Casimir-Polder and van der Waals Forces*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2012.
- [152] A. Martín-Ruiz, Phys. Rev. D **98**, 056012 (2018).
- [153] V. L. Ginzburg and I. M. Frank, ZhETF 16 (1946) 15, una versión más corta en inglés en Journ. Phys. USSR 9 (1945) 353.
- [154] V. L. Ginzburg and V. N. Tsytovich, Phys. Rep. **49**, 1 (1979).
- [155] S. Coh et al., Phys. Rev. B **83** , 085108 (2011).
- [156] Gerd Czycholl, *Theoretische Festkörperphysik: Von den klassischen Modellen zu modernen Forschungsthemen*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [157] A. Altland, B. Simons. *Condensed Matter Field Theory*. Cambridge University Press, 2a. ed. Nueva York, 2010.
- [158] C. A. Ullrich. *Time-Dependent Density-Functional Theory: Concepts and Applications*. Oxford University Press, Oxford Graduate Texts. Great Britain, 2012.
- [159] Neil W. Ashcroft, N. David Mermin. *Solid State Physics*. Harcourt College Publishing. EUA, 1976.
- [160] E. Merzbacher. *Quantum Mechacnics*. John Wiley & Sons Inc. 3a. ed. EUA. 1998.
- [161] J. J. Sakurai, J. Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley. 2a. ed. San Francisco, EUA. 2012.
- [162] J. Schwinger et al. Op. cit., *Chapter 2. Magnetic Charge I*. p. 17-20.