



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA CIVIL – ESTRUCTURAS

**COMPORTAMIENTO NO LINEAL ANTE CARGAS SÍSMICAS Y EÓLICAS EN
ESTRUCTURAS**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
LUIS ENRIQUE URIBE GUERRERO

TUTOR PRINCIPAL
DR. HUGO HERNÁNDEZ BARRIOS
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

SANTA CRUZ ACATLÁN, NAUCALPAN, ESTADO DE MÉXICO, ENERO 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Rivera Vargas Darío
Secretario: M. en I. Nuñez Quiroz Luis
Vocal: Dr. Hernández Barrios Hugo
1^{er.} Suplente: Dr. López Ríos Saúl Esteban
2^{do.} Suplente: M. I. Flores Corona Leonardo Emmanuel

La tesis se realizó en Santa Cruz Acatlán, Naucalpan, Estado de México

TUTOR DE TESIS:

Dr. Hugo Hernández Barrios

FIRMA

Agradecimientos

A mi familia; mi papá José Luis Uribe García, mi mamá María Guadalupe Guerrero Cruz y mi hermano José Luis Uribe Guerrero por siempre apoyarme en alcanzar mis metas, estar ahí cuando los he necesitado y por el amor incondicional que me han brindado. Muchas gracias.

Al Dr. Hugo Hernández Barrios, por su motivación y consejos de seguir estudiando, su apoyo y confianza que me brindo durante la elaboración de este trabajo y por la paciencia que tuvo hacia mí. Muchas gracias.

Al ingeniero Ignacio Palomares Peña, el cual fue una de las primeras persona responsables en ayudarme a comenzar a forjar mi formación como ingeniero. Muchas gracias.

A mis compañeros de la Facultad de Estudios Superiores Acatlán, los cuales me brindaron su apoyo durante el trayecto de este camino. Muchas gracias.

A mis amigos que siempre me motivaron a seguir adelante y nunca darme por vencido hasta llegar a la meta. Muchas gracias.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y a la Facultad de Estudios Superiores Acatlán por darme todas las oportunidades para superarme día con día y lograr ser la persona que soy ahora. Muchas gracias

A mis sinodales por sus valiosos comentarios. Muchas gracias.

Al Conacyt por su apoyo económico durante mis estudios. Muchas gracias.

OBJETIVO Y ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

Objetivo

El presente trabajo tiene como objetivos generales:

- 1) Obtener la respuesta dinámica paso a paso en términos de desplazamientos, balance de energía, fuerza restauradora, en sistemas de un GDL y de múltiples GDL, cuando son sometidos a una excitación dinámica del tipo sísmica o eólica, en el intervalo elástico e inelástico.
- 2) Obtener la respuesta dinámica paso a paso en términos de desplazamientos, balance de energía, fuerza restauradora, en sistemas de un GDL y de múltiples GDL, cuando son sometidos a una excitación dinámica del tipo sísmica o eólica, en el intervalo elástico; considerando control de la respuesta dinámica por medio de amortiguadores viscoelásticos lineales.

Los modelos de comportamiento histeréticos empleados son: 1) elastoplástico perfecto, 2) bilineal y 3) Takeda modificado por Otani.

Organización de la tesis

Capítulo 1: Se hace una breve descripción de los sistemas de control.

Capítulo 2: Se describe la obtención de la energía del oscilador de uno y múltiples grados de libertad en el intervalo elástico.

Capítulo 3: Se describe la obtención de la energía del oscilador de uno y múltiples grados de libertad en el intervalo inelástico, y al modelo histerético elastoplástico perfecto.

Capítulo 4: Se describe la obtención de la energía del oscilador de uno y múltiples grados de libertad en el intervalo inelástico, y al modelo histerético bilineal.

Capítulo 5: Se describe la obtención de la energía del oscilador de uno y múltiples grados de libertad en el intervalo inelástico, y al modelo histerético Takeda.

Capítulo 6: Se muestran las conclusiones de los capítulos 2, 3, 4 y 5, comentando los resultados obtenidos.

Capítulo 7: Se hace descripción de la simulación numérica para la obtención de la fuerza de viento longitudinal.

Capítulo 8: Se muestra la forma de obtener las ecuaciones del oscilador tipo péndulo invertido con y sin interacción suelo – estructura y se realizan varios ejemplos para comparar las respuestas obtenidas.

Capítulo 9: Se describe la forma de cómo incorporar el amortiguamiento viscoelástico en la ecuación de movimiento y poder resolverla. Además se presentan algunos ejemplos de aplicación.

Capítulo 10: Se muestra el último ejemplo de aplicación de la tesis el cual está enfocado a un edificio prismático (oscilador de múltiples grados de libertad), mostrando la respuesta de éste en el intervalo elástico, inelástico y con amortiguadores viscoelásticos.

El Apéndice A muestra la forma de realizar el método numérico para la solución de la ecuación de movimiento obtenida del libro “*Structural Dynamics for Structural Engineers*” de Gary C. Hart y Kevin Wong (1999).

El Apéndice B muestra los diagramas de flujo para la obtención de la simulación numérica de la fuerza de viento para uno y múltiples grados de libertad.

Resumen

En este trabajo se presenta la obtención de las respuestas dinámicas paso a paso de un oscilador de un grado de libertad, de múltiples grados de libertad, excitado por una carga dinámica del tipo sísmica o eólica. La solución de la ecuación de movimiento se presenta en el intervalo elástico e inelástico del material; para lo cual se emplean tres modelos histeréticos; 1) elastoplástico perfecto, 2) bilineal y 3) Takeda modificado por Otani. En todas las estructuras analizadas en este trabajo se obtiene también el balance de energía del oscilador, considerando la energía histerética debido a la no linealidad del material y a la energía de los amortiguadores viscoelásticos lineales.

Contenido

Capítulo 1

Sistemas de control.....	1
--------------------------	---

Capítulo 2

Balance de energía en el intervalo elástico.....	4
2.1 Oscilador de un grado de libertad (1GDL) en el intervalo elástico.....	4
2.1.1 Ejemplo de aplicación	5
2.1.2 Comparación de resultados.....	7
2.1.3 Ejemplo de aplicación en monópolo espectacular, intervalo elástico	8
2.1.3.1 Análisis sísmico.....	8
2.1.3.2 Análisis eólico	10
2.2 Oscilador de múltiples grados de libertad (MGDL) en el intervalo elástico.....	12
2.2.1 Ejemplo de aplicación	15
2.2.2 Comparación de resultados.....	17

Capítulo 3

Balance de energía en el intervalo inelástico Modelo histerético: Elastoplástico perfecto..	19
3.1 Oscilador de un grado de libertad (1GDL) en el intervalo inelástico, modelo histerético elastoplástico perfecto.....	19
3.1.1 Ejemplo de aplicación	21
3.1.2 Comparación de resultados.....	22
3.1.3 Ejemplo de aplicación en monópolo espectacular, intervalo inelástico, modelo elastoplástico perfecto	22
3.1.3.1 Análisis sísmico.....	24
3.1.3.2 Análisis eólico	24
3.2 Oscilador de múltiples grados de libertad (MGDL) en el intervalo inelástico, modelo histerético elastoplástico perfecto.....	26
3.2.1 Ejemplo de aplicación	28
3.2.2 Comparación de resultados.....	28

Capítulo 4

Balance de energía en el intervalo inelástico Modelo histerético: Bilineal.....	30
---	----

4.1 Oscilador de un grado de libertad (1GDL) en el intervalo inelástico, modelo histerético bilineal	30
4.1.1 Ejemplo de aplicación	31
4.1.2 Comparación de resultados.....	33
4.1.3 Ejemplo de aplicación en monópulo espectacular, intervalo inelástico, modelo bilineal	33
4.1.3.1 Análisis sísmico.....	33
4.1.3.2 Análisis eólico	35
4.2 Oscilador de múltiples grados de libertad (MGDL) en el intervalo inelástico, modelo histerético bilineal	36
4.2.1 Ejemplo de aplicación	37
4.2.2 Comparación de resultados.....	37
Capítulo 5	
Balance de energía en el intervalo inelástico Modelo histerético: Takeda.....	39
5.1 Oscilador de un grado de libertad (1GDL) en el intervalo inelástico, modelo histerético de Takeda (Modificado por Shunsuke Otani).....	39
5.1.1 Ejemplo de aplicación	43
5.1.2 Comparación de resultados.....	46
5.1.3 Ejemplo de aplicación en columna de un puente con su tablero, intervalo inelástico, modelo de Takeda	49
5.1.3.1 Análisis sísmico.....	49
5.1.3.2 Análisis eólico	52
5.2 Oscilador de múltiples grados de libertad (MGDL) en el intervalo inelástico, modelo histerético de Takeda	54
5.2.1 Ejemplo de aplicación	55
5.2.1.1 Análisis sísmico.....	55
5.2.1.2 Análisis eólico	59
Capítulo 6	
Comparación de resultados.....	62
6.1 Conclusiones parciales	62
6.1.2 Monópulo espectacular.....	62
6.1.2 Columna de un puente con su tablero.....	63
Capítulo 7	
Simulación numérica del viento en dirección longitudinal	65

7.1	Introducción.....	65
7.2	Ecuación de movimiento para un oscilador de 1GDL ante carga eólica.....	68
7.2.1	Ecuación de movimiento (Forma 1)	68
7.2.2	Ecuación de movimiento (Forma 2)	69
7.2.3	Ecuación de movimiento (Forma 3)	72
7.3	Simulaciones de velocidades y fuerzas para un oscilador de 1GDL [Estructuras tipo punto].....	74
7.3.1	Coeficiente de arrastre [C_D].....	74
7.3.2	Velocidad media del viento	74
7.3.3	Espectro teórico de potencia de la velocidad longitudinal del viento e intervalos de frecuencia y tiempo.....	78
7.3.4	Simulación por representación espectral de Shinozuka o WAWS.....	80
7.3.5	Función de admitancia aerodinámica	80
7.3.6	Filtrado de simulaciones.....	81
7.3.7	Obtención de la velocidad total y fuerza del viento y características del viento simulado	81
7.3.8	Diagrama de flujo del programa “Simulaciones_1GDL”.....	82
7.3.9	Ejemplo de aplicación	82
7.3.10	Resultados.....	82
7.4	Ecuación de movimiento para un oscilador de MGDG ante carga eólica	83
7.4.1	Ecuación de movimiento (Forma 1)	83
7.4.2	Ecuación de movimiento (Forma 2)	84
7.4.3	Ecuación de movimiento (Forma 3)	85
7.5	Simulaciones de velocidades y fuerzas para un oscilador de MGDG [Edificios prismáticos]	85
7.5.1	Coeficiente de arrastre [C_D].....	86
7.5.2	Velocidad media del viento	86
7.5.3	Espectro teórico de potencia de la velocidad longitudinal del viento e intervalos de frecuencia y tiempo.....	86
7.5.4	Espectro cruzado y función de coherencia	87
7.5.5	Simulación por representación espectral de Shinozuka o WAWS y matriz de densidad espectral cruzada	89
7.5.6	Función de admitancia aerodinámica	90

7.5.7 Filtrado de simulaciones.....	90
7.5.8 Obtención de las velocidades totales y fuerzas del viento y características del viento simulado	90
7.5.9 Diagrama de flujo del programa “Simulaciones_MGDL”	90
7.5.10 Ejemplo de aplicación y uso del programa.....	90
7.5.11 Resultados.....	90
Capítulo 8	
Estructura tipo péndulo invertido	93
8.1 Ecuación de movimiento de una estructura tipo péndulo invertido	93
8.1.1 Ecuación de movimiento, oscilador excitado por una carga sísmica	94
8.1.2 Ecuación de movimiento, oscilador excitado por una carga eólica.....	100
8.1.3 Cálculo de la respuesta en el tiempo	100
8.1.3.1 Intervalo elástico.....	100
8.1.3.2 Intervalo inelástico	100
8.2 Ejemplos	100
8.2.1 Ejemplo de aplicación, intervalo elástico	100
8.2.2 Ejemplo de aplicación en un monópulo espectacular, intervalo elástico e inelástico con excitación en la base y en la masa	102
8.2.2.1 Intervalo elástico.....	102
8.2.2.2 Intervalo inelástico (bilineal).....	105
8.2.3 Ejemplo de aplicación en columna de un puente con su tablero, intervalo elástico e inelástico con excitación en la base y en la masa	107
8.2.3.1 Intervalo elástico.....	107
8.2.3.2 Intervalo inelástico (Takeda)	110
8.5 Conclusiones.....	112
Capítulo 9	
Amortiguamiento viscoelástico	113
9.1 Introducción.....	113
9.2 Comportamiento histerético de amortiguadores viscoelásticos	113
9.3 Ejemplo de aplicación, oscilador de 1GDL.....	120
9.3.1 Excitación en la base	120
9.3.1.1 Intervalo elástico.....	120
9.3.1.2 Intervalo inelástico (Bilineal)	124

9.3.1.3 Intervalo inelástico (Takeda)	124
9.3.2 Excitación en la masa	125
9.3.2.1 Intervalo elástico.....	125
9.3.2.2 Intervalo inelástico (Bilineal)	126
9.3.2.3 Intervalo inelástico (Takeda)	127
9.4 Ejemplo de aplicación, oscilador de 3GDL.....	129
9.4.1 Excitación en la base	129
9.4.1.1 Intervalo elástico.....	129
9.4.1.2 Intervalo inelástico (Bilineal)	131
9.4.1.3 Intervalo inelástico (Takeda)	131
9.4.2 Excitación en la masa	132
9.4.2.1 Intervalo elástico.....	133
9.4.2.2 Intervalo inelástico (Bilineal)	133
9.4.2.3 Intervalo inelástico (Takeda)	133
9.5 Conclusiones parciales del capítulo.....	136

Capítulo 10

Edificio prismático	137
10.1 Descripción del edificio.....	137
10.2 Ejemplo de aplicación, intervalo elástico	142
10.2.1 Excitación en la base (sismo):	142
10.2.1.1 Dirección en X.....	142
10.2.1.2 Dirección en Y.....	143
10.2.2 Excitación en las masas (viento):	144
10.2.2.1 Dirección en X.....	144
10.2.2.2 Dirección en Y.....	145
10.3 Ejemplo de aplicación, intervalo inelástico, bilineal.....	147
10.3.1 Excitación en la base (sismo):	147
10.3.1.1 Dirección en X.....	147
10.3.1.2 Dirección en Y.....	149
10.3.2 Excitación en las masas (viento):	150
10.4 Ejemplo de aplicación, intervalo inelástico, Takeda	151
10.4.1 Excitación en la base (sismo):	151
10.4.1.1 Dirección en X.....	151

10.4.1.2 Dirección en Y.....	152
10.4.2 Excitación en las masas (viento):	154
10.4.2.1 Dirección en X.....	154
10.4.2.2 Dirección en Y.....	155
10.5 Ejemplo de aplicación, amortiguamiento suplementario	156
10.5.1 Excitación en la base (sismo)	158
10.5.1.1 Dirección en X.....	158
10.5.1.2 Dirección en Y.....	159
10.5.2 Excitación en las masas (viento):	161
10.5.2.1 Dirección en X.....	161
10.5.2.2 Dirección en Y.....	163
Índice de figuras	164
Índice de tablas	171
Referencias	174
Apéndice A	
Respuesta de los osciladores	176
A.1 Método numérico para 1GDL en el intervalo elástico e inelástico.	177
A.2 Método numérico para MGDL en el intervalo elástico e inelástico.....	180
A.3 Notas	183
Apéndice B	
Diagramas de flujo de las simulaciones numéricas	184
B.1 Diagrama de flujo para un oscilador de 1GDL.....	185
B.2 Diagrama de flujo para un oscilador de MGDL	187

Capítulo 1

Sistemas de control

Los sismos a lo largo de los años han causado un gran impacto social y económico en las distintas regiones de mundo. Debido a este fenómeno y a los acontecimientos catastróficos, los especialistas en el tema se han enfocado a encontrar una solución, la cual puede ser mediante dispositivos sísmicos cuyo objetivo es la disminución de fuerzas y a su vez el daño provocado por un evento sísmico en la estructura, Alan Orlando (2016).

Como consecuencia a los eventos registrados y los daños que se produjeron en las estructuras en distintos países se generó la controversia de la efectividad ante presencia sísmica de los diferentes sistemas estructurales convencionales, es por esto que se han optado por tendencias en diseños estructurales con sistemas de protección estructural o sistemas de control ante un evento sísmico.

Hoy día existe un gran avance en el estudio de nuevos e innovadores sistemas de control que se encuentran en diversas etapas de desarrollo. Los sistemas modernos de control se pueden dividir en tres grupos, como se muestra en la Tabla 1.1, T. T. Soong y G.F. Dargush (1997). En general el objetivo es la reducción de daños en las estructuras con ayuda de los sistemas de control.

Una de las alternativas efectivas y confiables puede ser el sistema de aislamiento sísmico o control pasivo ya que tiene la particularidad de ser adaptado en el diseño de la estructura como parte de ella o incluso se puede implementar para la rehabilitación de una edificación.

El aislamiento sísmico está situado sobre la cimentación y soportando al edificio. Su función primordial es desacoplar parcialmente al edificio del suelo alargando el periodo fundamental de la estructura, disminuyendo la energía de entrada y por consiguiente su respuesta estructural. Esto se consigue a partir de dispositivos flexibles al movimiento horizontal y rígido al desplazamiento vertical. Este tipo de sistema de control se recomienda en estructuras rígidas sobre terrenos rígidos.

Los sistemas estructurales dentro de los cuales se implementan sistemas de control pasivo, se basan en elementos que actúen o trabajen de forma inercial a la fuerza sísmica. Dichos sistemas pasivos producen respuesta a movimientos estructurales controlando la energía total de la estructura de forma pasiva, Alan Orlando (2016). Las propiedades más valiosas de los

sistemas de control pasivo son su robustez, no dependen de fuentes de energía, son mecánicamente simples y su costo es competitivo.

Tabla 1.1. Sistemas de control.

Aislamiento sísmico	Disipación pasiva de energía	Control semi-activo y activo
Rodamientos elastoméricos (Elastomeric Bearings)	Amortiguadores metálicos (Metallic Dampers)	Sistemas de refuerzo activos (Active Bracing Systems)
	Amortiguadores de fricción (Friction Dampers)	Amortiguadores de masa activos (Active Mass Dampers)
Rodamientos de caucho de plomo (Lead Rubber Bearings)	Amortiguadores viscoelásticos (Viscoelastic Dampers)	
	Amortiguadores de fluido viscoso (Viscous Fluid Dampers)	Rigidez variable o sistemas de amortiguación (Variable Stiffness or Damping Systems)
Péndulo de fricción deslizante (Sliding Friction Pendulum)	Amortiguadores de masa sintonizada (Tuned Mass Dampers)	Materiales inteligentes (Smart Materials)
	Amortiguadores de líquido sintonizado (Tuned Liquid Dampers)	

La disipación pasiva de energía resalta como una innovación tecnológica que optimiza el desempeño de una edificación ante la acción de un sismo, añadiendo amortiguamiento al sistema estructural. La función básica de los dispositivos pasivos de disipación de energía cuando se incorporan a una estructura es absorber o consumir una parte de la energía de entrada, lo que reduce la demanda de disipación de energía en los miembros estructurales primarios y minimiza el posible daño estructural. Sin embargo, a diferencia del aislamiento sísmico, estos dispositivos pueden ser efectivos contra los movimientos inducidos por el viento y por sismo.

Los sistemas inerciales acoplados tales como el Tuned Mass Dampers (TMD) introducen masas adicionales, normalmente situadas en la parte alta de los edificios, cuya excitación absorbe parte de la energía cinética introducida por el sismo.

Los sistemas activos contrarrestan directamente los efectos del sismo mediante actuadores. La gran demanda de energía que comporta su actuación ante un sismo severo y la complejidad de los algoritmos de control los convierte en sistemas poco robustos.

Un sistema de control activo consiste en: a) Sensores situados en la propia estructura empleados para medir variables correspondientes a la excitación externa, o variables de la respuesta estructural, o de ambos tipos. b) Sistemas controladores que se basan en las medidas de los sensores y calculan la fuerza a aplicar por los actuadores para contrarrestar

los efectos sísmicos. c) Actuadores que habitualmente son alimentados por fuentes de energía externa para ejercer fuerzas.

El Active Mass Dampers (AMD), es un ejemplo de un sistema de control activo, el cual es una masa auxiliar móvil usualmente inferior al 1% de la masa total de la estructura y es instalada en una de las últimas plantas del edificio, con un actuador conectado a ella. La fuerza inercial que presenta la masa oscilante debe contrarrestar los efectos de la acción sísmica y reducir la respuesta estructural a valores aceptables.

El control semi-activo nace ante la necesidad de respuesta en una banda amplia de frecuencias y de menor consumo energético. Los sistemas semi-activos emplean dispositivos de control pasivo, sin consumo energético, cuyas características resistentes permiten ser modificadas y controladas a tiempo real mediante actuadores de bajo consumo a través de sistemas de control parecidos a los empleados en los sistemas activos.

Los sistemas semi-activos tienen un esquema de funcionamiento muy similar a los sistemas activos, diferenciándose de estos en que el control estructural se obtiene a partir de dispositivos de carácter reactivo, cuyas características mecánicas (rigidez o amortiguamiento) son controlables, lo cual permite modificar las propiedades dinámicas de la estructura con costos energéticos muy reducidos.

Como se menciona en el objetivo, en este trabajo se abordó únicamente los amortiguadores viscoelásticos, realizando comparaciones de respuestas dinámicas paso a paso en el tiempo de osciladores de uno y múltiples grados de libertad en el intervalo elástico e inelástico del material del mismo considerando el aporte de los amortiguadores viscoelásticos y a su vez solamente el oscilador sin la consideración de los amortiguadores viscoelásticos.

Capítulo 2

Balance de energía en el intervalo elástico

2.1 Oscilador de un grado de libertad (IGDL) en el intervalo elástico

Los términos que definen la energía de un oscilador de un grado de libertad en el intervalo elástico pueden obtenerse al integrar la ecuación de movimiento con respecto al desplazamiento igualada a una fuerza $P(t)$ de la siguiente manera:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = P(t) \quad (2.1)$$

$$\int_0^x m\ddot{x}(t) dx + \int_0^x c\dot{x}(t) dx + \int_0^x kx(t) dx = \int_0^x P(t) dx \quad (2.2)$$

Del lado derecho de la ecuación (2.2) se tiene la energía de entrada. Comúnmente esta fuerza $P(t)$ se maneja como el producto de la masa del oscilador por la aceleración del terreo con signo negativo $-m\ddot{x}(t)_g$, lo cual representa un movimiento en la base de la estructura. Para los alcances de esta sección, se representa también como la historia en el tiempo de una fuerza, la cual estará aplicada directamente sobre la masa del oscilador representando así una fuerza provocada por el viento.

$$E_t(t) = \int_0^x P(t) dx \quad (2.3)$$

la energía cinética es:

$$E_k(t) = \int_0^x m\dot{x}(t) dx \quad (2.4)$$

la energía disipada por el amortiguamiento:

$$E_D(t) = \int_0^x c\dot{x}(t) dx \quad (2.5)$$

y la energía potencial:

$$E_s(t) = \int_0^x kx(t) dx \quad (2.6)$$

Las formas más sencillas para resolver las integrales de la ecuación del balance de energía del oscilador pueden ser:

- 1) Un cambio de variable ayudando a que sea una integral directa (para algunos casos);
- 2) Un cambio de variable y a su vez permitir representar la integral como una sumatoria y
- 3) Una integración numérica.

Escribiendo cada término de la energía de acuerdo a como está la ecuación de movimiento queda de la siguiente forma

$$\frac{1}{2} m \dot{x}(t)_i^2 + \sum_{i=1}^l c \dot{x}(t)_i^2 \Delta t + \frac{1}{2} k x(t)_i^2 = \sum_{i=1}^l P(t)_i \dot{x}(t)_i \Delta t \quad (2.7)$$

donde $P(t) = -m\ddot{x}(t)_g$ para el caso de una excitación en la base y

$P(t) = P_D(Z, t) = \frac{1}{2} \rho C_D A [U_R(Z, t)]^2$ para el caso de una excitación en la masa.

Se realizaron dos programas en ambiente Matlab, el primer programa es para cuando se tiene una excitación en la base como una aceleración debido a un sismo y el segundo es para cuando se tiene una excitación en la masa como una fuerza provocada por el viento.

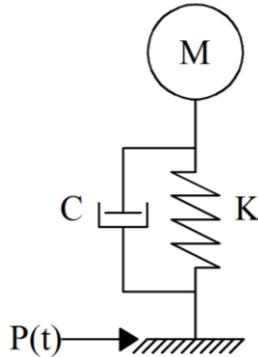


Figura 2.1. Oscilador de 1GDL con excitación en la base.

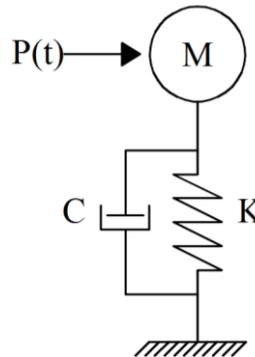


Figura 2.2. Oscilador de 1GDL con excitación en la masa.

2.1.1 Ejemplo de aplicación

Con fines comparativos se realizaron cuatro casos: 1) La respuesta en el tiempo teniendo la excitación en la base; 2) la respuesta en el tiempo con excitación en la masa; 3) la respuesta con excitación en la base con un software convencional (Sap2000) y 4) la respuesta con excitación en la masa con el mismo software.

Para las comparaciones entre los 4 casos descritos anteriormente se toma como aceleración el registro sísmico de SCT de 1985/09/19, canal número 2 “N90E” el cual se puede descargar de la base de datos de registros acelerográficos de la red sísmica mexicana. Y para la fuerza

en la masa se hace uso de la segunda ley de newton realizando el producto de la aceleración sísmica por la masa del oscilador.

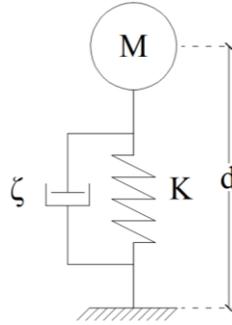
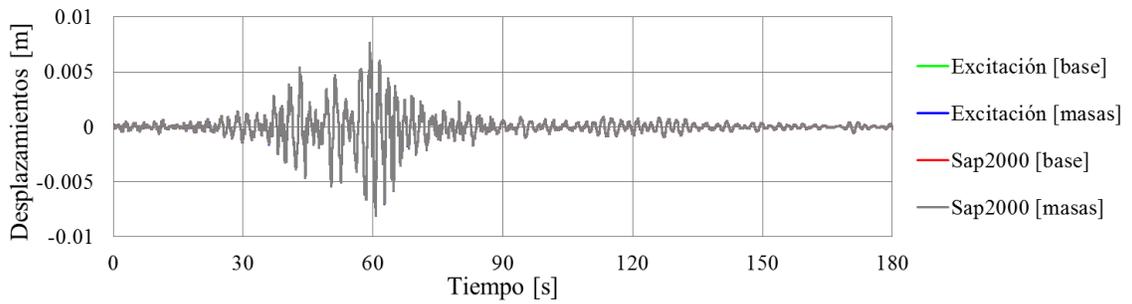
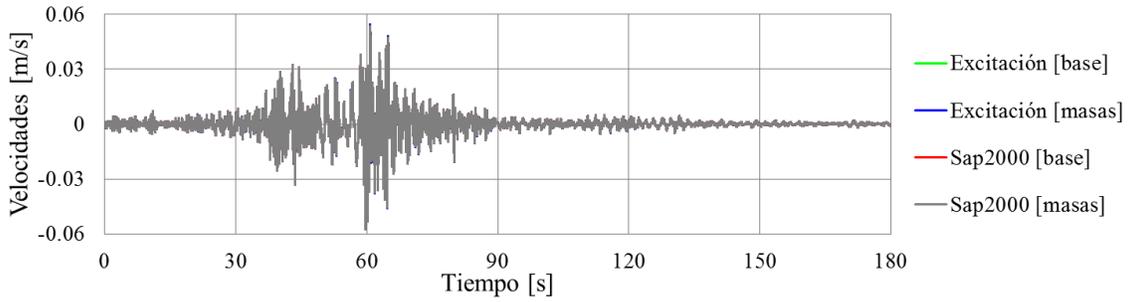


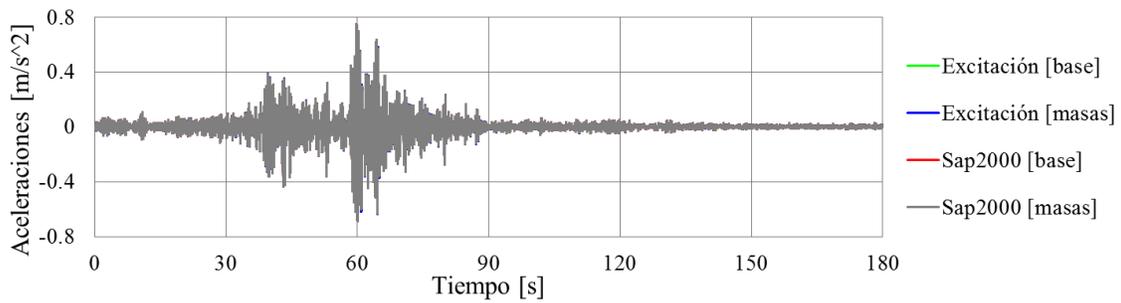
Figura 2.3. Ejemplo – oscilador de 1GDL.



a) Desplazamiento.



b) Velocidad.



c) Aceleración.

Figura 2.4. Respuestas en el tiempo, intervalo elástico (1GDL).

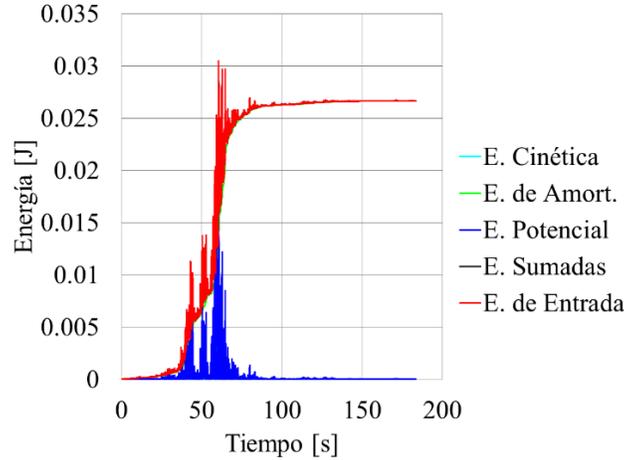


Figura 2.5. Resultados de energía (1GDL) en el intervalo elástico.

Tabla 2.1. Valores máximos de energía, oscilador de 1GDL, intervalo elástico.

Energía máxima en el tiempo	
E. Cinética (J)	0.003280
E. de amortiguamiento (J)	0.026657
E. Potencial (J)	0.016237
E. Sumadas (J)	0.030442
E. de Entrada (J)	0.030463

Las propiedades del oscilador (Figura 2.3) que se toman como ejemplo son las siguientes: masa, $M = 2 \text{ kg}$; y rigidez lateral, $K = 500 \text{ N/m}$. Se considera un porcentaje de amortiguamiento de $\zeta = 0.05$. La condición inicial del desplazamiento es, $x_0 = 0 \text{ m}$; la condición inicial de la velocidad es, $\dot{x}_0 = 0 \text{ m/s}$; y la altura al centro de masas es, $d = 3 \text{ m}$.

2.1.2 Comparación de resultados

Se presentan comparaciones de la respuesta de desplazamiento, velocidad y aceleración (Figura 2.4).

Se puede apreciar en cada una de las gráficas que las respuestas entre los dos programas en matlab y el software convencional con excitación en la base y masas son prácticamente iguales, por lo tanto la validación de los programas son aceptables.

Siendo así se muestran los resultados de la energía del oscilador (Figura 2.5) y valores máximos (Tabla 2.1).

Podemos apreciar que la igualdad de la ecuación del balance de energía (Figura 2.5), se cumple satisfactoriamente, o sea que la energía de entrada es igual a las energías sumadas del oscilador, teniendo así un buen cálculo de la energía de un oscilador de 1GDL en el intervalo elástico.

2.1.3 Ejemplo de aplicación en monópolo espectacular, intervalo elástico

Para esta sección se considera como ejemplo de aplicación una estructura monopolar tipo punto, conocido como un anuncio o letrero espectacular (Figura 2.6).

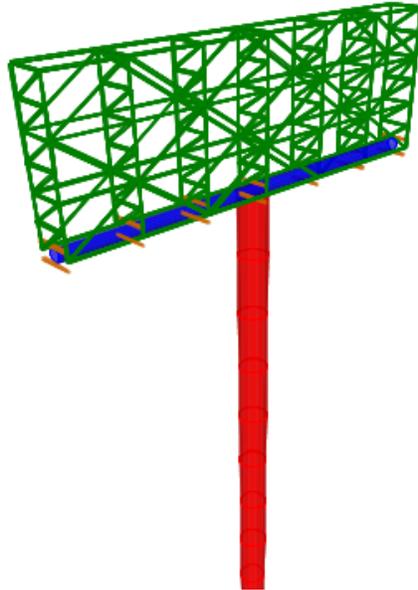


Figura 2.6. Modelo de un letrero monopolar.

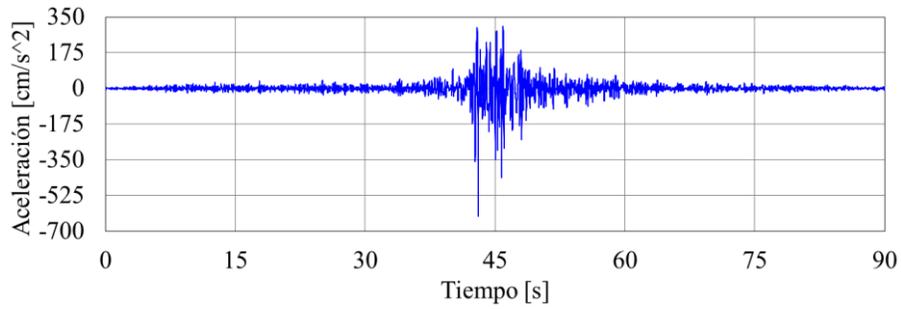
Se considera que la estructura tiene las siguientes propiedades: masa, $M = 5,340.86 \text{ kg}$; y rigidez lateral $K = 324,986.98 \text{ N/m}$. Para el análisis sísmico se tiene un porcentaje de amortiguamiento de $\xi = 0.05$ y para el análisis eólico de $\xi = 0.01$. El área expuesta del letrero es $A = 64.8 \text{ m}^2$ y una altura al centro de masas de $d = 23.75 \text{ m}$. El periodo fundamental de vibrar del sistema es de $T = 0.805 \text{ s}$ y las condiciones iniciales son 0.

El letrero espectacular se encuentra ubicado en la costa del Pacífico mexicano, en una zona potencialmente sísmica y eólica. Específicamente en la ciudad de Acapulco, Guerrero.

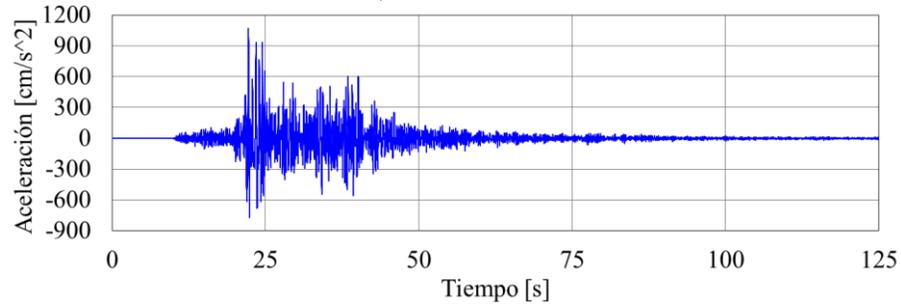
2.1.3.1 Análisis sísmico

Para realizar el análisis sísmico paso a paso se eligieron tres registros de sismos (Figura 2.7) que se han producido en la ciudad de Acapulco, Guerrero (Figura 2.8): 1) Estación “El Paraíso” con una aceleración máxima de 625.78 cm/s^2 ; 2) Estación “San Juan de los Llanos”, con una aceleración máxima de $1,073.51 \text{ cm/s}^2$; y 3) Estación “San Luis de la Loma 2” con una aceleración máxima de 418.64 cm/s^2 .

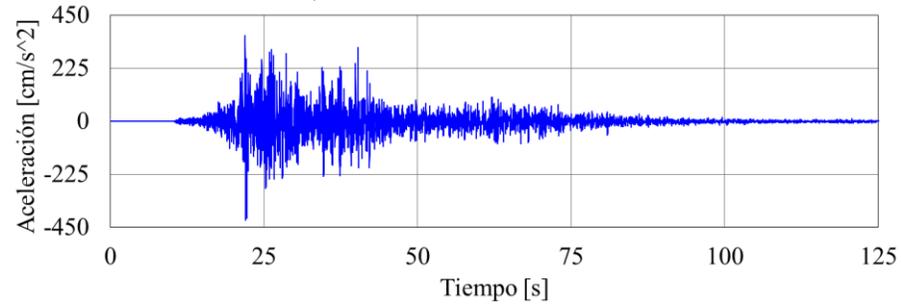
Considerando el monópolo espectacular como un oscilador de 1GDL, excitado en la base por los tres registros sísmicos (Figura 2.7) y realizado un análisis paso a paso, se obtienen los desplazamientos, velocidades, aceleraciones, energías máximas, fuerza de cortante máxima y momento de volteo máximo mostrados en la Tabla 2.2 y las historias de desplazamientos mostrados en la Figura 2.9. En dicha Figura también se reporta el resultado del balance de energía.



a) "El Paraíso".



b) "San Juan de los Llanos".



c) "San Luis de la Loma 2".

Figura 2.7. Registros sísmicos empleados en el análisis sísmico.



Figura 2.8. Localización de las estaciones.

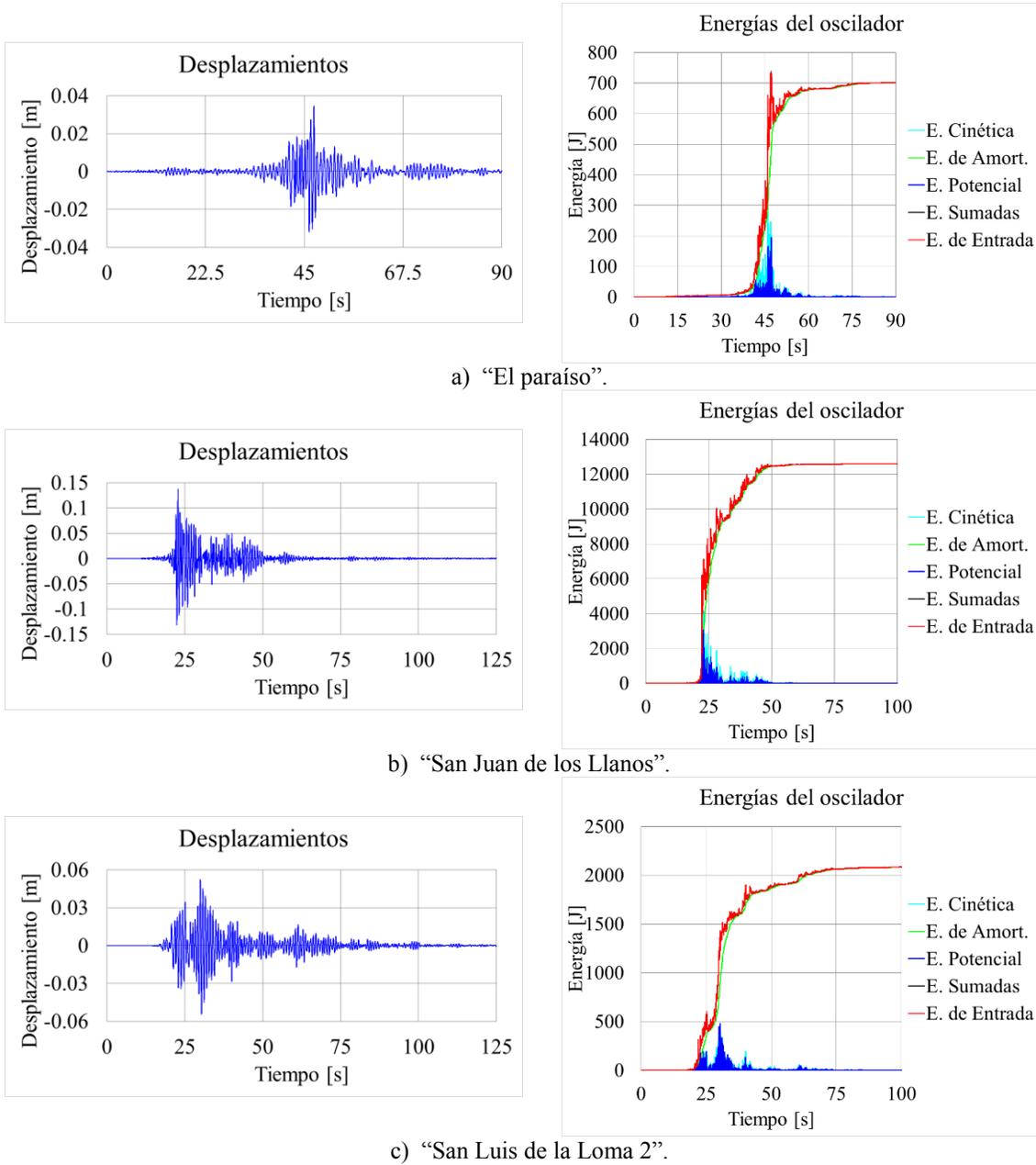


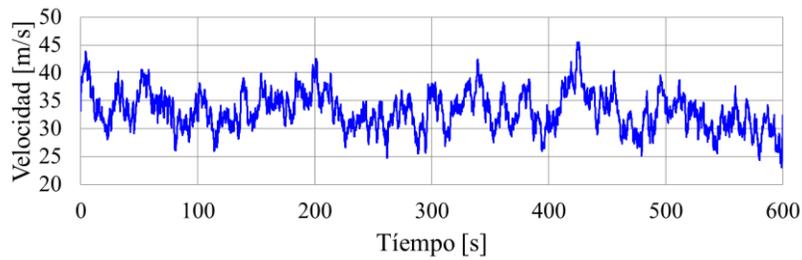
Figura 2.9. Historia de desplazamientos y balance de energía en el intervalo elástico, monópolo espectacular ante cargas sísmicas.

2.1.3.2 Análisis eólico

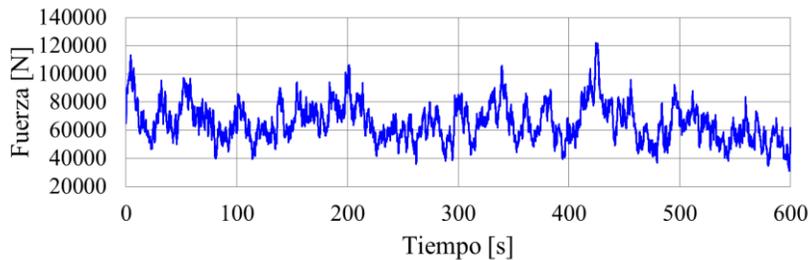
Para realizar el análisis eólico paso a paso del sistema se hacen simulaciones de viento por medio de la técnica de representación espectral de Shinozuka. Con este modelo se obtienen velocidades y fuerzas en dirección longitudinal (Figura 2.10). La ubicación del monópolo espectacular es en la ciudad de Acapulco, por lo tanto se considera una velocidad media de diseño a 10 m de altura promediada a 10 minutos de $\bar{U}(z_r)_{D,10\min} = 25.98\text{ m/s}$, una latitud de,

Tabla 2.2. Valores máximos en el intervalo elástico, monópulo espectacular ante cargas sísmicas.

Respuesta	Estaciones sísmicas		
	El Paraíso	San Juan de los Llanos	San Luis de la Loma 2
Desplazamiento máx. (m)	0.0346	0.1373	0.0544
Velocidad máx. (m/s)	0.3568	1.3718	0.3895
Aceleración máx. (m/s ²)	7.0832	15.6383	5.0051
E. Cinética (J)	339.9764	5 024.9465	405.1249
E. de amortiguamiento (J)	701.2973	1,2607.2093	2,086.1616
E. Potencial (J)	194.3157	3,062.2205	480.7498
E. Sumadas (J)	737.8279	12,607.5143	2,086.2501
E. de Entrada (J)	736.6798	12,607.5148	2,086.2500
Fuerza cortante máxima (N)	15,833.72	44,613.49	17,676.96
Momento de volteo máximo (N-m)	376,050.77	1,059,570.41	419,827.75



a) Historia de velocidades sintéticas.



b) Historia de fuerzas sintéticas.

Figura 2.10. Historia de velocidades y de fuerzas eólicas sintéticas para monópulo espectacular.

$\lambda = 16.84^\circ$, una temperatura media anual de $T = 27.9^\circ C$, con una presión barométrica de, $\Lambda = 758.4$ mm de Hg; y el tipo de terreno es categoría III. El letrero tiene un coeficiente de arrastre de $C_D = 1.5$. En las Figuras 2.10a y 2.10b se muestran los registros de velocidades y de fuerzas obtenidas con la simulación, respectivamente.

Considerando el monópulo espectacular como un oscilador de 1GDL, excitado en la masa por la historia de fuerzas sintéticas (Figura 2.10b) y realizado un análisis paso a paso, se obtuvieron los desplazamientos mostrados en la Tabla 2.3 y las historias de desplazamientos mostrados en la Figura 2.11. En dicha Figura también se reporta el resultado del balance de energía.

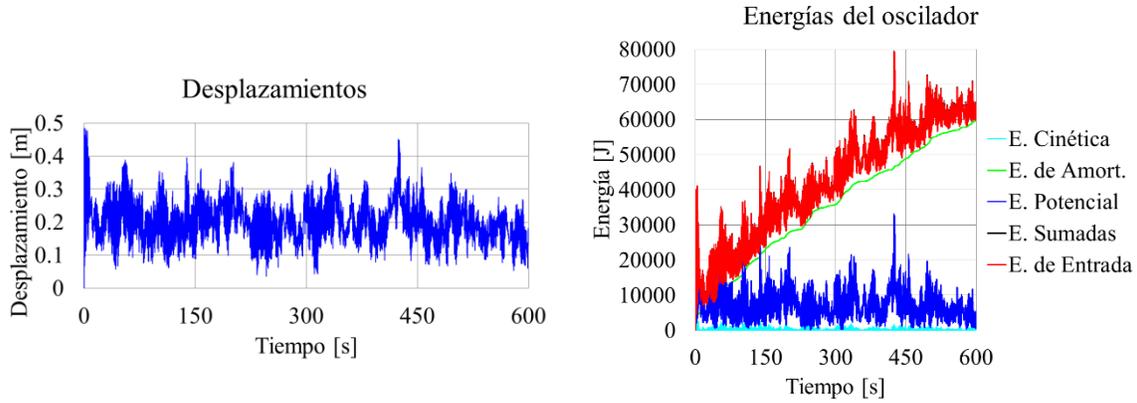


Figura 2.11. Historia de desplazamientos y balance de energía en el intervalo elástico, monópolo espectacular ante carga eólica.

Tabla 2.3. Valores máximos en el intervalo elástico, monópolo espectacular ante carga eólica.

Respuesta	Carga eólica
Desplazamiento máx. (m)	0.4852
Velocidad máx. (m/s)	1.8366
Aceleración máx. (m/s ²)	13.7846
E. Cinética (J)	9,007.3787
E. de amortiguamiento (J)	59,607.3332
E. Potencial (J)	38,259.4408
E. Sumadas (J)	79,376.4045
E. de Entrada (J)	79,261.4938
Fuerza cortante máxima (N)	157,694.77
Momento de volteo máximo (N-m)	3,745,250.75

2.2 Oscilador de múltiples grados de libertad (MGDL) en el intervalo elástico

De la ecuación de movimiento para un oscilador de más de un grado de libertad igualada a una fuerza $P(t)$, se puede definir los términos del balance de energía de un oscilador de múltiples grados de libertad en el intervalo elástico integrando la ecuación con respecto al desplazamiento como,

$$[M]\ddot{x}(t) + [C]\dot{x}(t) + [K]x(t) = P(t) \quad (2.8)$$

$$\int_0^x \{dx\}^T [M] \{\ddot{x}(t)\} + \int_0^x \{dx\}^T [C] \{\dot{x}(t)\} + \int_0^x \{dx\}^T [K] \{x(t)\} = \int_0^x \{dx\}^T \{P(t)\} \quad (2.9)$$

Del lado derecho de la ecuación (2.9) se tiene la energía de entrada. Comúnmente esta fuerza $P(t)$ se maneja como el producto de la matriz (diagonal) de masas del oscilador por un vector que acopla las direcciones de la entrada de movimiento del suelo con las direcciones de los grados de libertad de la estructura por la aceleración del terreo con signo negativo $-[M]\{r\}\ddot{x}(t)_g$, lo cual representa un movimiento en la base de la estructura. Para cubrir los

alcances de esta sección (2.2), la fuerza $P(t)$, también se representará como la historia en el tiempo de fuerzas, las cuales estarán aplicadas directamente sobre las masas de cada nivel del oscilador de MGDJ representando así la fuerza provocada por el viento.

$$E_t(t) = \int_0^x \{dx\}^T \{P(t)\} \quad (2.10)$$

la energía cinética es:

$$E_k(t) = \int_0^x \{dx\}^T [M] \{\ddot{x}(t)\} \quad (2.11)$$

la energía disipada por el amortiguamiento es:

$$E_D(t) = \int_0^x \{dx\}^T [C] \{\dot{x}(t)\} \quad (2.12)$$

Y la energía potencial:

$$E_s(t) = \int_0^x \{dx\}^T [K] \{x(t)\} \quad (2.13)$$

Escribiendo cada término de la energía de acuerdo a como está la ecuación de movimiento queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{\dot{x}(t)\}^T [M] \{\dot{x}(t)\} + \sum_{i=1}^l \{\dot{x}(t)_i\}^T [C] \{\dot{x}(t)_i\} \Delta t + \frac{1}{2} \{x(t)\}^T [K] \{x(t)\} = \\ & = \sum_{i=1}^l \{\dot{x}(t)_i\}^T \{P(t)_{ij}\} \Delta t \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde $P(t)_j = -m_j \ddot{x}(t)_g$ para el caso de una excitación en la base (Figura 2.12) y

$P(t)_j = P_D(Z, t)_j = \frac{1}{2} \rho C_{D,j} A_j [U_R(Z, t)_j]^2$ para el caso de excitaciones en las masas (Figura 2.13) y donde j se refiere a cada nivel del oscilador.

Con la ecuación (2.14) se puede obtener la energía de un oscilador de múltiples grados de libertad en el intervalo elástico, ya sea para una excitación en la base (sismo) o excitación en las masas (viento).

Los desplazamientos y velocidades que se indican en cada término de la energía son los vectores de las respuestas en el tiempo del oscilador.

Para demostrar la igualdad de la ecuación (2.14) se realizaron dos programas en Matlab en los cuales se puede obtener el balance de energía del oscilador, la respuesta en el tiempo de desplazamientos, velocidades, aceleraciones, y entre otros resultados los cuales se mencionan más adelante. El primer programa es para cuando se tiene una excitación en la base como una aceleración debido a un sismo y el segundo es para cuando se tiene una excitación en las

masas como una fuerza provocada por el viento correspondiente a cada grado de libertad o nivel del oscilador.

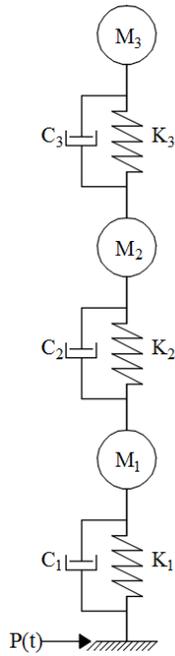


Figura 2.12. Oscilador de MGDL con excitación en la base.

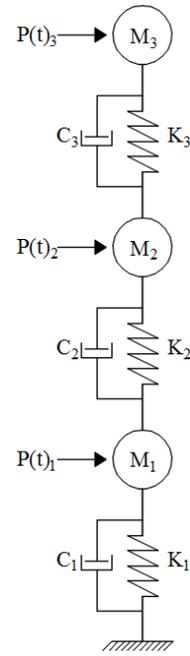


Figura 2.13. Oscilador de MGDL con excitación en la masa.

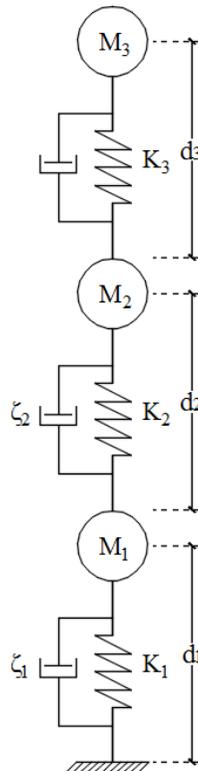
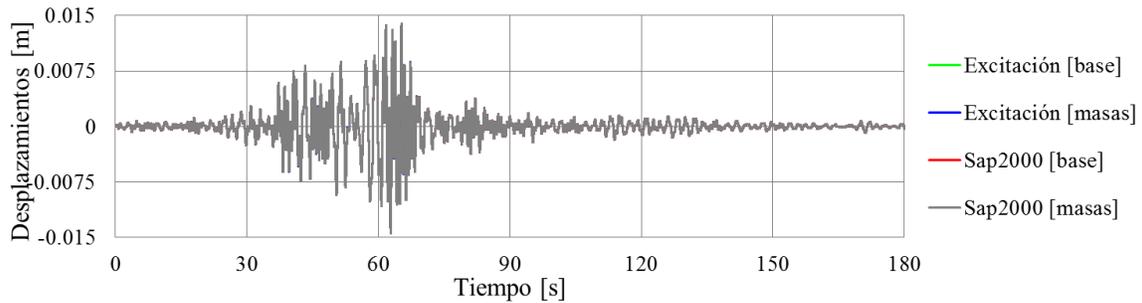


Figura 2.14. Ejemplo – oscilador de MGDL.

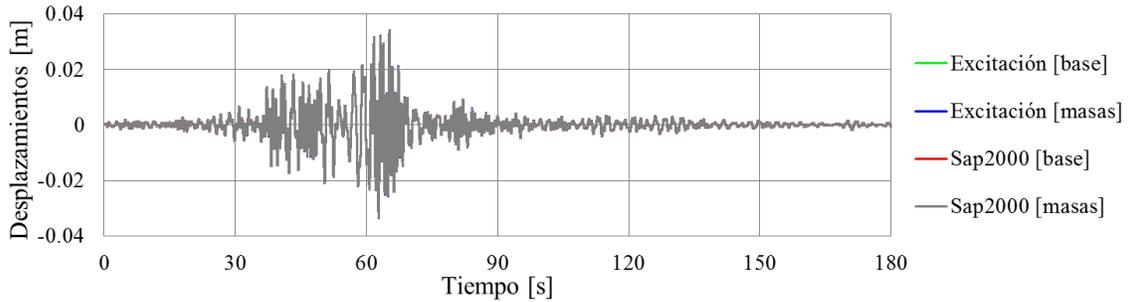
2.2.1 Ejemplo de aplicación

De igual forma que el oscilador de 1GDL y para fines comparativos se realizaron cuatro casos:

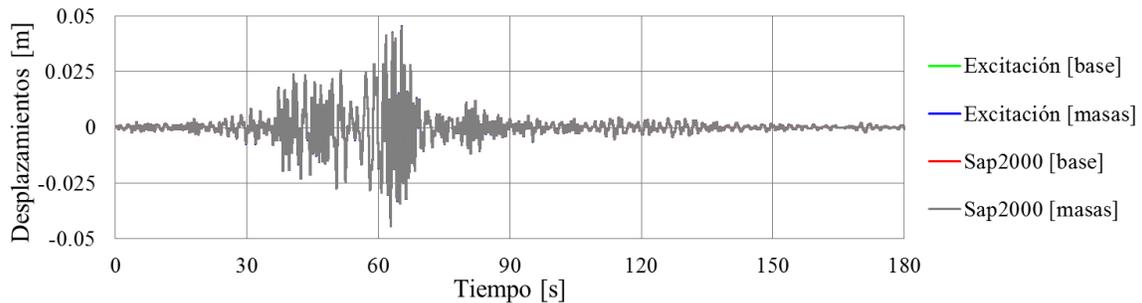
- 1) La respuesta en el tiempo teniendo la excitación en la base;
- 2) la respuesta en el tiempo con excitación en las masas;
- 3) la respuesta con excitación en la base con un software convencional (Sap2000) y
- 4) la respuesta con excitación en las masas con el mismo software.



a) Nivel 1.



b) Nivel 2.



c) Nivel 3.

Figura 2.15. Respuesta en el tiempo de desplazamiento, intervalo elástico (MGDL).

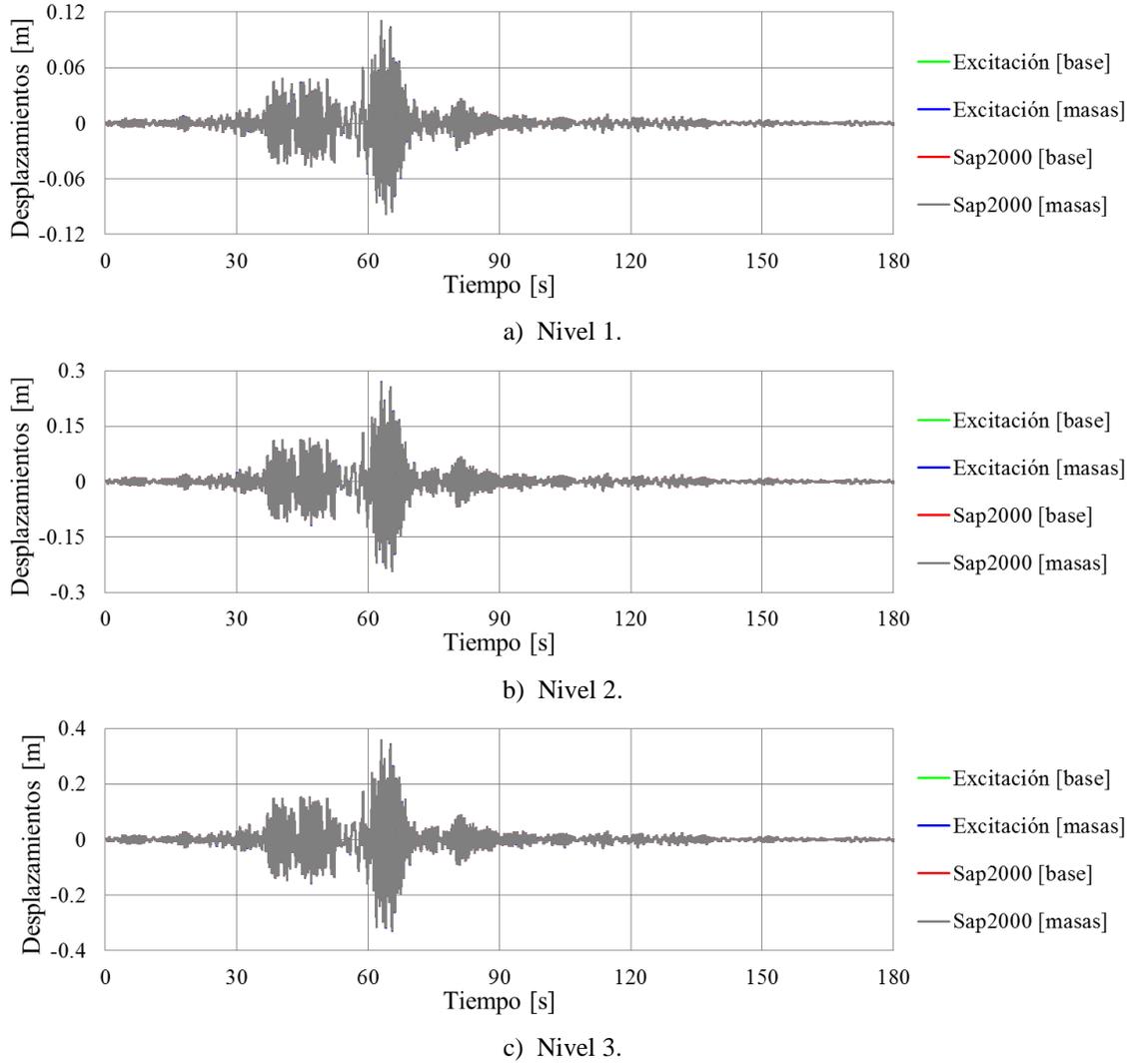


Figura 2.16. Respuesta en el tiempo de velocidad, intervalo elástico (MGDL).

El registro que se toma para realizar las comparaciones entre los 4 casos descritos anteriormente es el mismo que para el oscilador de 1GDL (SCT de 1985/09/19, canal número 2 “N90E”) y también aquí se presentan las comparaciones de las respuestas en el tiempo de desplazamiento, velocidad y aceleración de cada nivel en sus respectivas gráficas.

Las propiedades del oscilador (Figura 2.14) que se toman como ejemplo son las siguientes: masas, $M_1 = 5kg$, $M_2 = 3kg$, $M_3 = 3kg$; y rigideces laterales, $K_1 = 2000 N/m$, $K_2 = 1000 N/m$, $K_3 = 1000 N/m$. Se considera un porcentaje de amortiguamiento para el primer y segundo modo de $\zeta_1 = 0.05$ y $\zeta_2 = 0.05$, respectivamente. Las condiciones iniciales del desplazamiento para los tres niveles son de $x_0 = 0m$; las condiciones iniciales de la velocidad para los tres niveles son de $\dot{x}_0 = 0m/s$; y las alturas de entrepiso al centro de masas son, $d_1 = 3 m$, $d_2 = 3 m$ y $d_3 = 3 m$.

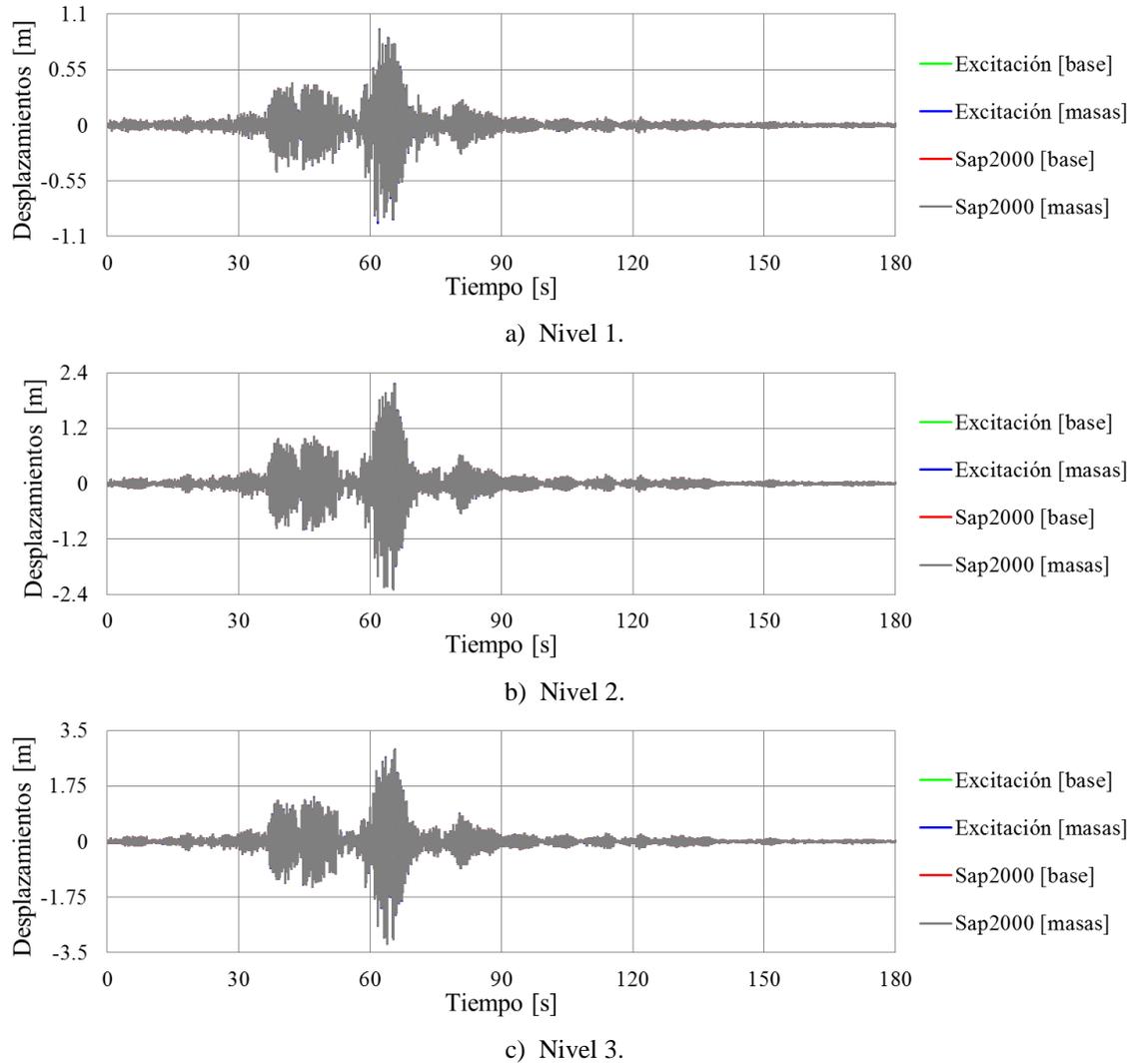


Figura 2.17. Respuesta en el tiempo de aceleración, intervalo elástico (MGDL).

2.2.2 Comparación de resultados

Se presentan comparaciones de la respuesta de desplazamiento (Figura 2.15), velocidad (Figura 2.16) y aceleración (Figura 2.17).

Tabla 2.4. Valores máximos de energía, oscilador de MGDL, intervalo elástico.

Energía máxima en el tiempo	
E. Cinética (J)	0.3306
E. de amortiguamiento (J)	1.9970
E. Potencial (J)	0.4613
E. Sumadas (J)	1.9979
E. de Entrada (J)	1.9979

Se puede apreciar en cada una de las gráficas que las respuestas entre los dos programas en matlab y el software convencional con excitación en la base y masas son prácticamente iguales, por lo tanto la validación de los programas son aceptables.

Siendo así se muestran los resultados de energía del oscilador (Figura 2.18) y valores máximos (Tabla 2.4).

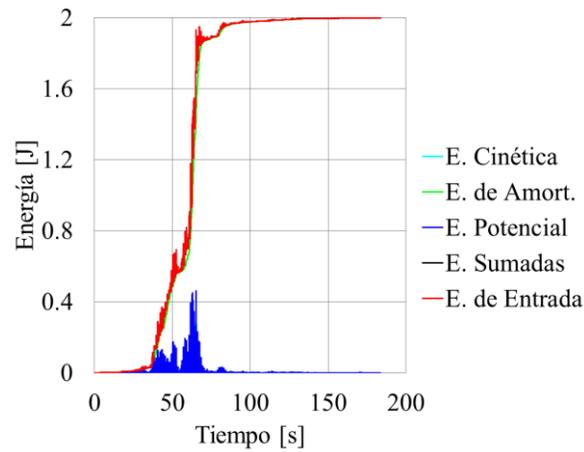


Figura 2.18. Resultados de energía (MGDL) en el intervalo elástico.

Capítulo 3

Balance de energía en el intervalo inelástico

Modelo histerético: Elastoplástico perfecto

3.1 Oscilador de un grado de libertad (1GDL) en el intervalo inelástico, modelo histerético elastoplástico perfecto

Hoy en día la importancia entre la comparación de la seguridad de una estructura con el presupuesto de la misma tienen el mismo margen al momento de considerar la construcción del proyecto. Debido a estas ideas y con la ayuda de la tecnología se han creado métodos en los cuales se pueden considerar estos dos aspectos haciendo posible crear procedimientos para construir estructuras usando secciones más esbeltas a comparación de antes, teniendo como consecuencia la reducción del presupuesto.

El camino más sencillo para lograr cumplir estos dos aspectos al mismo tiempo es teniendo un control en el daño de la estructura, que dicho en otras palabras, significa una degradación en la rigidez en los elementos de la misma.

Se sabe, que cuando se considera alguna degradación en la rigidez de una estructura, la parte de la fuerza restauradora de la ecuación de movimiento tiende a cambiar en el tiempo dependiendo el desplazamiento que se presente en la estructura además de otros aspectos.

La ecuación de movimiento del oscilador de 1GDL se considera inelástica debido a la degradación de la rigidez o cedencia del material y para representar este efecto se considera un modelo histerético, por mencionar algunos podrían ser: modelo elastoplástico perfecto, modelo bilineal, modelo trilineal, modelo de Ramberg – Osgood, modelo de takeda, etc.

En esta sección se toma un modelo idealizado con una rigidez de post – fluencia de cero, esto quiere decir que se trata de un modelo elastoplástico perfecto (Figura 3.1).

La parte de la primera rigidez k_1 del modelo es en el intervalo elástico lineal que va del punto O al punto A, donde de igual manera, se tiene claro que es hasta el punto en el cual se llega al desplazamiento Δ_y y fuerza F_y de fluencia, posteriormente del punto A al punto B es la parte donde se idealiza que la rigidez k_2 es cero o sea la parte inelástica del sistema. Cuando se llega al punto en el cual la velocidad del oscilador cambia de signo se regresa a la primera

rigidez k_1 que va del punto B al punto C, lo cual es hasta donde vuelve a llegar al desplazamiento de fluencia Δ'_y para después volver a la parte inelástica con la rigidez k_2 del punto C al punto D y así seguir ese comportamiento hasta terminar la excitación en el oscilador.

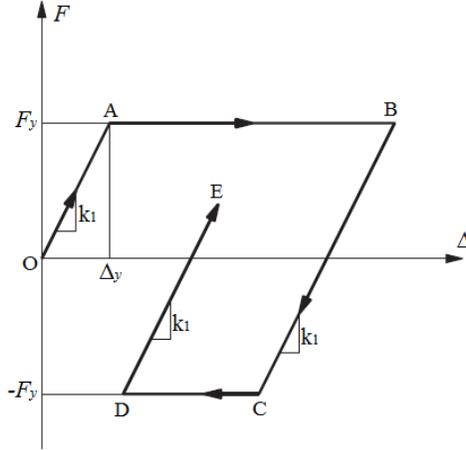


Figura 3.1. Modelo histerético elastoplástico perfecto.

La ecuación de movimiento de un oscilador de 1GDL en el intervalo inelástico es de la siguiente forma:

$$m\ddot{x}(t) + c(t)\dot{x}(t) + fs(t) = P(t) \quad (3.1)$$

donde la fuerza restauradora $fs(t)$ representa al producto de la rigidez en el intervalo elástico e inelástico del modelo que se utilice por el desplazamiento o dicho de otra forma es la fuerza restauradora del sistema calculada en cada paso de tiempo y la fuerza $P(t)$.

Para obtener los términos de energía del oscilador se debe de integrar la ecuación de movimiento con respecto al desplazamiento en el intervalo inelástico, de la misma forma en que se hace para el intervalo elástico.

$$\int_0^x m\ddot{x}(t) dx + \int_0^x c(t)\dot{x}(t) dx + \int_0^x fs(t) dx = \int_0^x P(t) dx \quad (3.2)$$

La parte derecha de la igualdad y el primer término de la ecuación (3.2) es igual que en el intervalo elástico.

El segundo término del lado izquierdo de la ecuación (3.2) es la energía disipada por el amortiguamiento. Aunque se debe tener en cuenta que el coeficiente de amortiguamiento viscoso cambia debido a que está en función de la frecuencia del oscilador y ésta, a su vez, está en función de la rigidez en el intervalo elástico e inelástico, esto depende de los parámetros del modelo histerético.

$$E_D(t) = \int_0^x c(t) \dot{x}(t) dx \quad (3.3)$$

El tercer término del lado izquierdo de la ecuación (3.2) es la suma de la energía disipada por la cedencia o energía histerética y la energía de deformación recuperable del sistema:

$$\int_0^x fs(t) dx = E_H(t) + E_S(t) \quad (3.4)$$

$$E_S(t) = \frac{[fs(t)]^2}{2k} \quad (3.5)$$

$$E_H(t) = \left[\int_0^x fs(t) dx \right] - E_S(t) \quad (3.6)$$

donde k es la rigidez en el intervalo elástico del modelo inelástico

Escribiendo cada término de la energía de acuerdo a como está la ecuación de movimiento queda de la siguiente forma

$$E_K(t) + E_D(t) + E_H(t) + E_S(t) = E_I(t) \quad (3.7)$$

o bien:

$$\frac{1}{2} m \dot{x}(t)_i^2 + \sum_{i=1}^t c(t) \dot{x}(t)_i^2 \Delta t + \sum_{i=1}^t fs(t)_i \dot{x}(t)_i \Delta t = \sum_{i=1}^t P(t)_i \dot{x}(t)_i \Delta t \quad (3.8)$$

donde $P(t) = -m\ddot{x}(t)_g$ para el caso de una excitación en la base y

$P(t) = P_D(Z, t) = \frac{1}{2} \rho C_D A [U_R(Z, t)]^2$ para el caso de una excitación en la masa.

Con la ecuación (3.8) se puede obtener el balance de energía de un oscilador de 1GDL en el intervalo inelástico.

3.1.1 Ejemplo de aplicación

Como ejemplo de aplicación se considera el ejemplo 5.5 del tema 5.7 del libro “Dynamics of structures” de Anil K. Chopra (Chopra, 2012).

Las propiedades del oscilador (Figura 2.3) son las siguientes: masa, $M = 0.2533 \text{ kip} - \text{s}^2 / \text{in}$ ($44,340.26 \text{ kg}$); y rigidez lateral, $K = 10 \text{ kip} / \text{in}$ ($1,751,267.91 \text{ N} / \text{m}$). Se considera un porcentaje de amortiguamiento de, $\zeta = 0.05$. La condición inicial del desplazamiento es, $x_0 = 0 \text{ in}$ (0 m); la condición inicial de la velocidad es, $\dot{x}_0 = 0 \text{ in/s}$ (0 m/s); la fuerza de fluencia es de, $f_y = 7.5 \text{ kip}$ ($33,361.66 \text{ N}$) y el paso de tiempo es, $dt = 0.1 \text{ s}$.

3.1.2 Comparación de resultados

Se presentan las respuestas en el tiempo en la tabla 3.1 las cuales fueron tomadas del libro y las respuestas en el tiempo en la tabla 3.2 calculadas en este trabajo.

Como se observa en la tabla 3.1 los resultados obtenidos en este trabajo y los descritos en la referencia de apoyo son iguales.

Tabla 3.1. Resultados (Chopra, 2012).

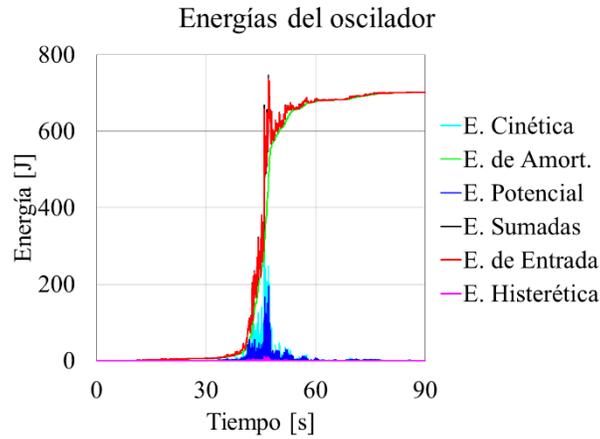
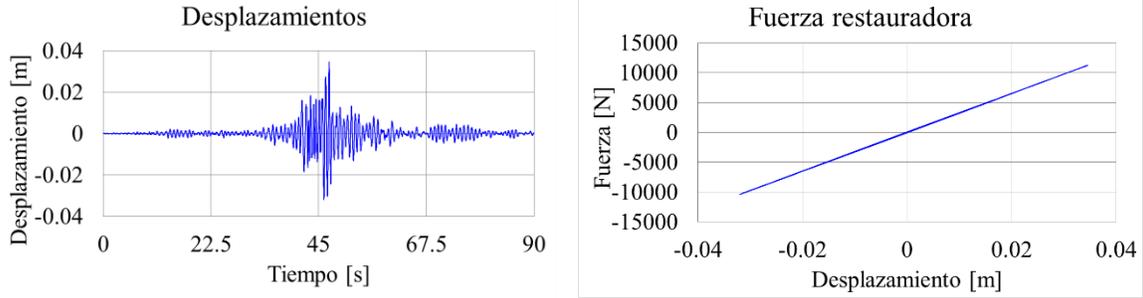
t_i	p_i	\hat{R}_i o $\hat{R}_i^{(j)}$	$(k_T)_i$ o $(k_T)_i^{(j)}$	$(\hat{k}_T)_i$ o $(\hat{k}_T)_i^{(j)}$	$\Delta u^{(j)}$	u_i o $u_i^{(j+1)}$	$(f_S)_i^{(j+1)}$	\dot{u}_i	\ddot{u}_i
0.0	0.0000		10			0.0000		0.0000	0.0000
0.1	5.0000	5.0000	10	114.504	0.0437	0.0437	0.4367	0.8733	17.4666
0.2	8.6603	21.6355	10	114.504	0.1889	0.2326	2.3262	2.9057	23.1801
0.3	10.0000	43.4481	10	114.504	0.3794	0.6121	6.1206	4.6833	12.3719
0.4	8.6603	53.8698	10	114.504	0.4705	1.0825	7.5000		
		3.3253	0	104.504	0.0318	1.1143	7.5000	5.3624	1.2103
0.5	5.0000	55.9918	0	104.504	0.5071	1.6214	7.5000	4.7792	-12.8735
0.6	0.0000	38.4230	0	104.504	0.3677	1.9891	7.5000	2.5742	-31.2270
0.7	0.0000	11.0816	0	104.504	0.1060	2.0951	7.5000	-0.4534	-29.3242
0.8	0.0000	-19.5936	0	104.504	-0.1875	1.9076	5.6251		
		1.8749	10	114.504	0.0164	1.9240	5.7888	-2.9690	-20.9876
0.9	0.0000	-41.6593	10	114.504	-0.3638	1.5602	2.1506	-4.3075	-5.7830
1.0	0.0000	-47.9448	10	114.504	-0.4187	1.1415	-2.0366	-4.0668	10.5962

Tabla 3.2. Resultados obtenidos en este trabajo.

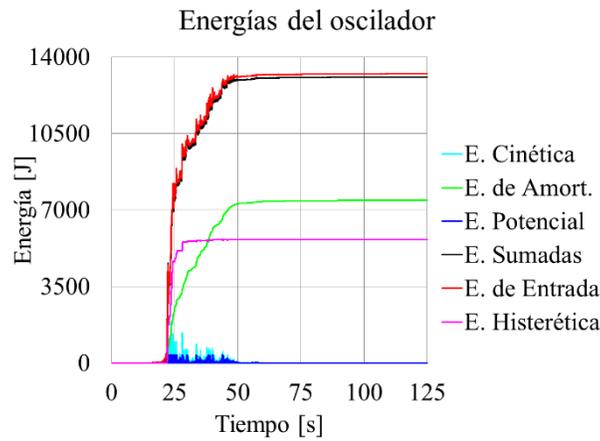
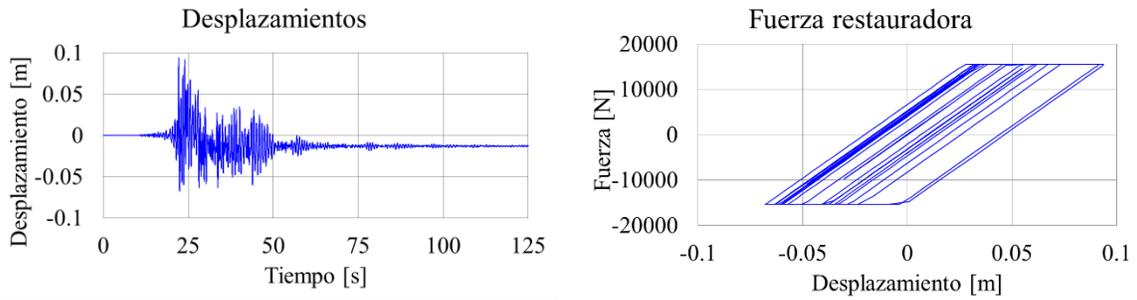
Tiempo [s]	Fuerza de excitación "P" [Kip]	Rigidez tangencial "Kt" [Kip/in]	Desplazamiento [in]	Fuerza restauradora [Kip]	Velocidad [in/s]	Aceleración [in/s^2]
0	0	0	0	0	0	0
0.1	5	10	0.0437	0.4367	0.8733	17.4668
0.2	8.6602	10	0.2326	2.3262	2.9057	23.1803
0.3	10	10	0.6121	6.1207	4.6833	12.3724
0.4	8.6602	0	1.1144	7.5	5.3625	1.2110
0.5	5	0	1.6215	7.5	4.7794	-12.8727
0.6	0	0	1.9891	7.5	2.5744	-31.2267
0.7	0	0	2.0952	7.5	-0.4531	-29.3245
0.8	0	10	1.9241	5.7890	-2.9688	-20.9891
0.9	0	10	1.5603	2.1509	-4.3075	-5.7849
1	0	10	1.1416	-2.0364	-4.0670	10.5948

3.1.3 Ejemplo de aplicación en monópulo espectacular, intervalo inelástico, modelo elastoplástico perfecto

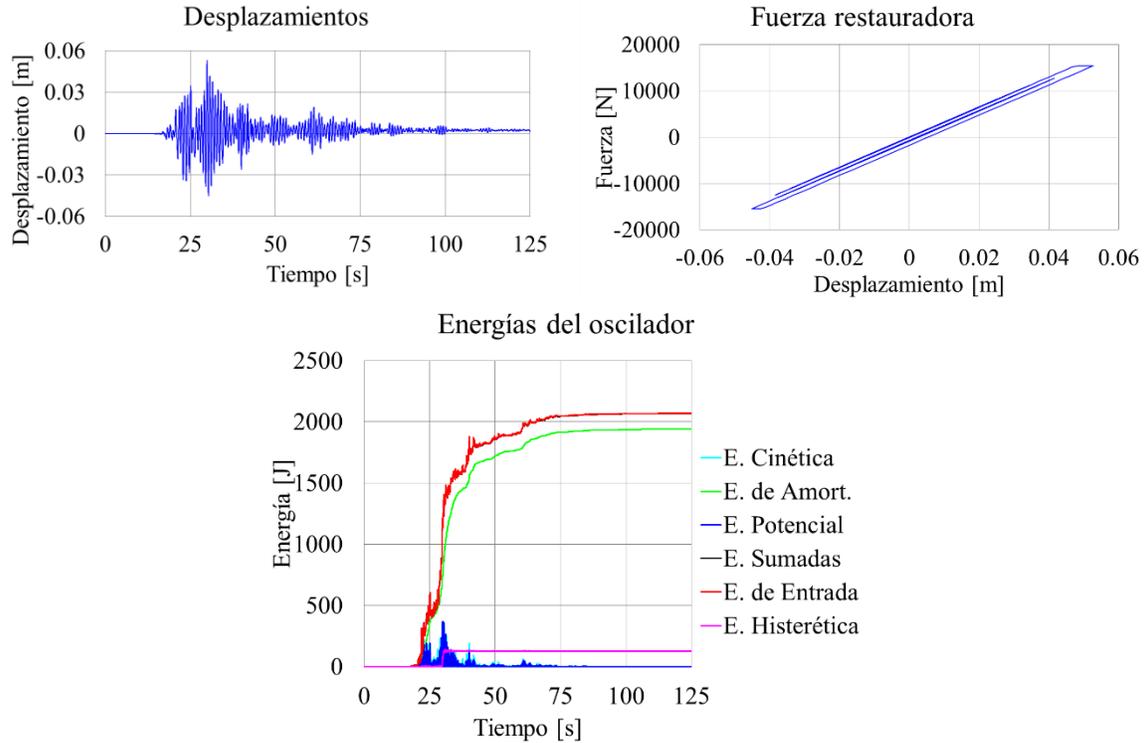
El ejemplo utilizado en esta sección en el mismo de la sección (2.1.3), únicamente que ahora se necesita el valor de la fuerza de fluencia. La fuerza de fluencia se obtiene haciendo el producto de la rigidez de la estructura por el desplazamiento de fluencia, este desplazamiento



a) "El paraíso".



b) "San Juan de los Llanos"



c) “San Luis de la Loma 2”.

Figura 3.2. Historia de desplazamientos, fuerza restauradora y balance de energía en el intervalo inelástico (modelo elastoplástico perfecto), monópolo espectacular ante cargas sísmicas.

de fluencia se obtiene realizando el producto de la altura del oscilador por la deformación unitaria del acero (0.002),

$$\Delta_y = 0.002(23.75m) = 0.0475m,$$

$$f_y = (324,986.98 \text{ N/m})(0.0475 \text{ m}) = 15,436.88 \text{ N}.$$

3.1.3.1 Análisis sísmico

El análisis sísmico paso a paso se realiza con los 3 registros descritos en la sección (2.1.3.1). Se obtienen los desplazamientos, velocidades, aceleraciones y energías máximas mostradas en la tabla 3.3 y las historias en el tiempo de desplazamientos, fuerza restauradora y balance de energía mostrados en la Figura 3.2.

3.1.3.2 Análisis eólico

La simulación del viento que se usa en el análisis eólico paso a paso es la misma que se obtiene en la sección (2.1.3.2). Los resultados que se obtienen se presentan en la tabla 3.4, mostrando los valores máximos del desplazamiento, velocidad, aceleración y energías y en la Figura 3.3 se obtiene la respuesta en el tiempo del desplazamiento, fuerza restauradora y balance de energía del oscilador.

Tabla 3.3. Valores máximos en el intervalo inelástico (modelo elastoplástico perfecto), monópulo espectacular ante cargas sísmicas.

Respuesta	Estaciones sísmicas		
	El Paraíso	San Juan de los Llanos	San Luis de la Loma 2
Desplazamiento máx. (m)	0.0346	0.0939	0.0528
Velocidad máx. (m/s)	0.3568	1.0419	0.3580
Aceleración máx. (m/s ²)	7.0832	12.9929	5.0051
Fza. Restauradora máx (N)	11,238.3127	15,436.8800	15,436.8800
E. Cinética (J)	339.9769	2,898.6520	342.2156
E. de amortiguamiento (J)	701.2958	7,437.9095	1,939.3715
E. Potencial (J)	194.3150	366.6259	366.6259
E. Histerética (J)	10.2956	5,654.9767	139.1130
E. Sumadas (J)	746.0046	13,076.5755	2,067.3043
E. de Entrada (J)	736.6791	13,227.9531	2,068.8828

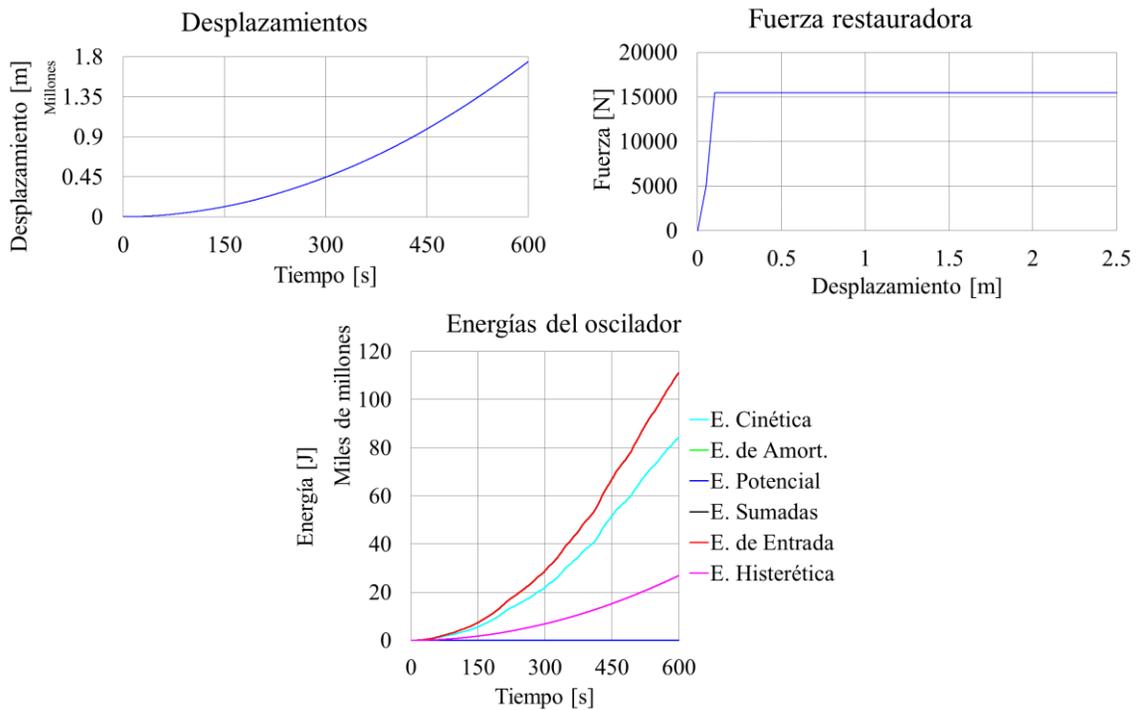


Figura 3.3. Historia de desplazamientos, fuerza restauradora y balance de energía en el intervalo inelástico (modelo elastoplástico perfecto), monópulo espectacular ante carga eólica.

En los resultados mostrados en la Figura 3.3 podemos apreciar que este comportamiento idealizado no ayuda mucho en la apreciación de los resultados buscados, ya que el oscilador jamás sale del intervalo inelástico, provocando así que los desplazamientos y la energía crezca infinitamente, y esto a su vez provoca que jamás exista un cambio de signo en la velocidad para generar un movimiento de regreso. La razón de que tenga este comportamiento se debe a que las cargas eólicas que se le presentan al oscilador tienen una magnitud grande, llevándolo a la falla en cuestión de menos del segundo. En la fuerza restauradora se muestra hasta el desplazamiento de 2.5 m, esto obviamente es irreal, pero se

Tabla 3.4. Valores máximos, oscilador de 1GDL, intervalo inelástico (modelo elastoplástico perfecto), viento.

Respuesta	Carga eólica
Desplazamiento máx. (m)	1,744,346.9316
Velocidad máx. (m/s)	5,616.0644
Aceleración máx. (m/s ²)	19.9739
Fza. Restauradora máx (N)	15,436.8800
E. Cinética (J)	8.4226E+10
E. de amortiguamiento (J)	77.4503
E. Potencial (J)	366.6259
E. Histerética (J)	2.6929E+10
E. Sumadas (J)	1.1116E+11
E. de Entrada (J)	1.1116E+11

hace para mostrar el comportamiento del modelo histerético y también para la comprensión del mismo. Una solución para evitar que el oscilador permanezca en el intervalo inelástico sería aumentando la rigidez de la estructura para que los desplazamientos, velocidades y aceleraciones sean menores.

3.2 Oscilador de múltiples grados de libertad (MGDL) en el intervalo inelástico, modelo histerético elastoplástico perfecto

El comportamiento de la Figura 3.1 puede estar referido a cualquier grado de libertad de un oscilador, esto quiere decir que cada nivel o grado de libertad tiene un modelo histerético elastoplástico perfecto. El desplazamiento que se considera es el relativo de entrepisos o de entre cada nivel y la rigidez que se toma es la de cada nivel para la obtención de la fuerza restauradora.

La ecuación que define a un oscilador de MGDL en el intervalo inelástico es similar a cuando está en el intervalo elástico, los únicos términos que cambian son el coeficiente de amortiguamiento viscoso y la parte de la rigidez que se toma directamente como la fuerza restauradora con respecto al desplazamiento

$$[M]\ddot{x}(t) + [C(t)]\dot{x}(t) + \{fs(t)\} = P(t) \quad (3.9)$$

Donde el vector de la fuerza restauradora $\{fs(t)\}$ representa al producto de la rigidez en el intervalo elástico e inelástico de cada grado de libertad del oscilador del modelo histerético que se utilice por el desplazamiento relativo de cada grado de libertad.

Definiendo los términos del balance de energía del oscilador de MGDL en el intervalo inelástico integrando la ecuación de movimiento, con respecto al desplazamiento se obtiene:

$$\int_0^x \{dx\}^T [M] \{\ddot{x}(t)\} + \int_0^x \{dx\}^T [C(t)] \{\dot{x}(t)\} + \int_0^x \{dx\}^T \{fs(t)\} = \int_0^x \{dx\}^T \{P(t)\} \quad (3.10)$$

Escribiendo cada término de la energía de acuerdo a como está la ecuación de movimiento queda de la siguiente forma

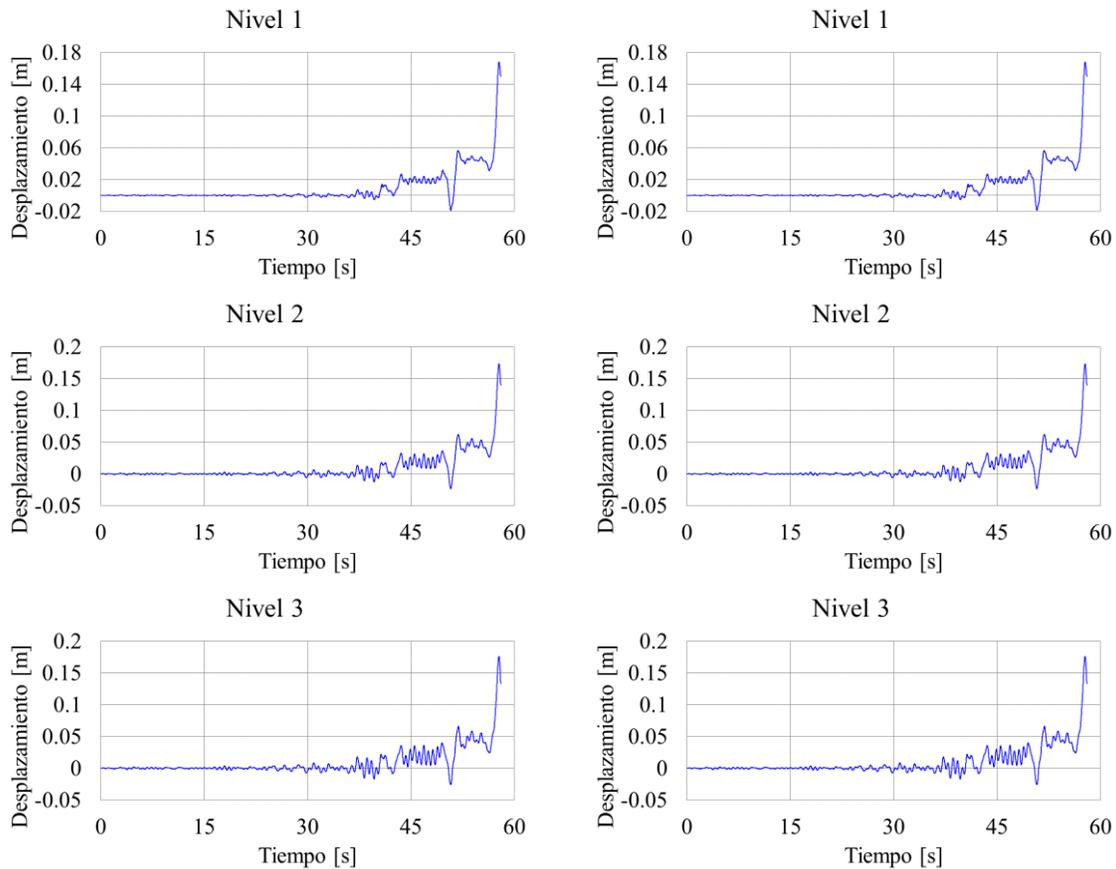
$$E_K(t) + E_D(t) + E_H(t) + E_S(t) = E_I(t) \quad (3.11)$$

Que también podría ser de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{\dot{x}(t)\}^T [M] \{\dot{x}(t)\} + \sum_{i=1}^t \{\dot{x}(t)_i\}^T [C(t)] \{\dot{x}(t)_i\} \Delta t + \sum_{i=1}^t \{\dot{x}(t)_i\}^T \{f_S(t)\} \Delta t = \\ & = \sum_{i=1}^t \{\dot{x}(t)_i\}^T \{P(t)_i\} \Delta t \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde $P(t)_j = -m_j \ddot{x}(t)_g$ para el caso de una excitación en la base y

$P(t)_j = P_D(Z, t)_j = \frac{1}{2} \rho C_D A_j [U_R(Z, t)_j]^2$ para el caso de excitaciones en las masas donde j se refiere a cada nivel del oscilador.



a) Elastoplástico perfecto.

b) Bilineal con rigidez post – fluencia igual a cero.

Figura 3.4. Comparación de respuestas de desplazamientos del oscilador de MGDL en el intervalo inelástico.

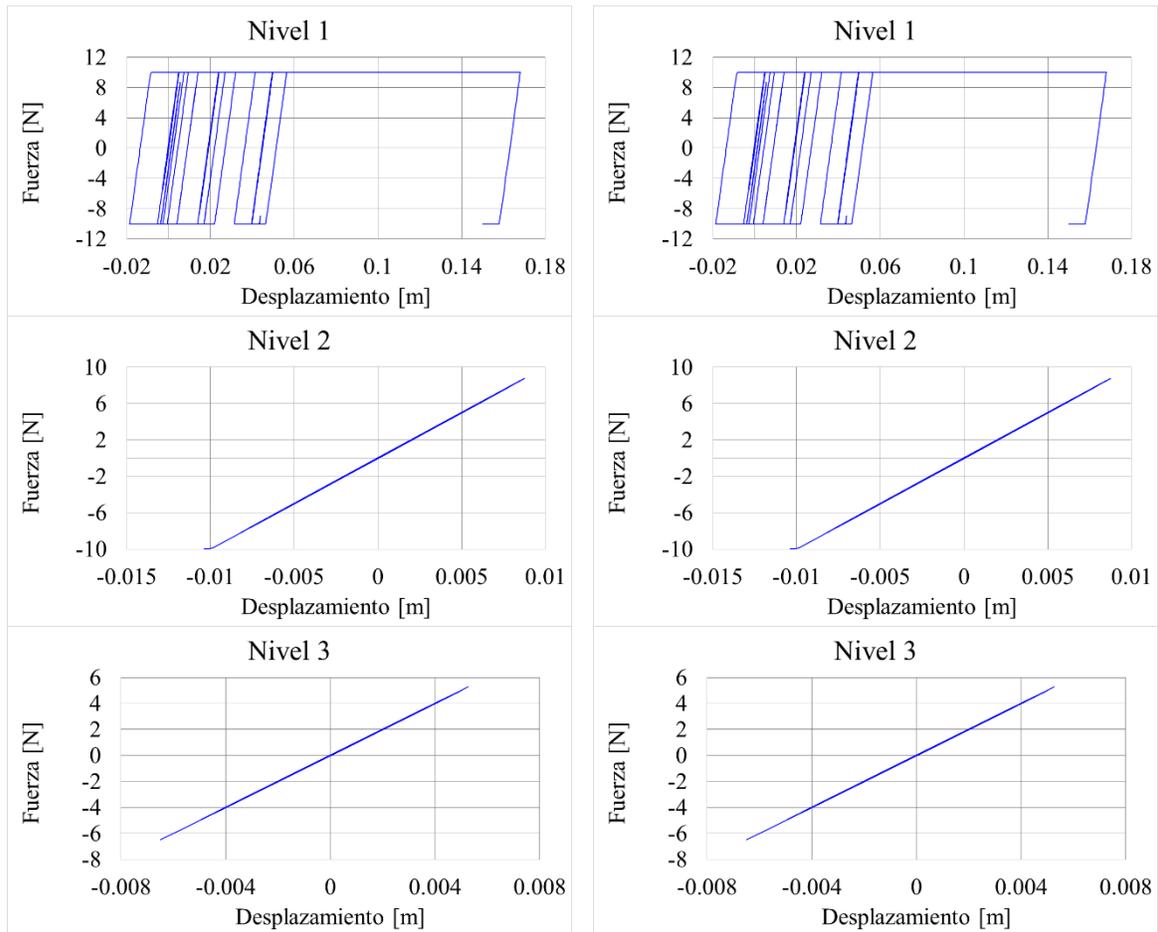
Con la ecuación (3.12) se puede obtener el balance de energía de un oscilador de MGDL en el intervalo inelástico.

3.2.1 Ejemplo de aplicación

Las propiedades del oscilador que se toman como ejemplo son las mismas que la sección (2.2.1), únicamente que la fuerza de fluencia es de, $f_{y1} = f_{y2} = f_{y3} = 10 \text{ N}$. El análisis se hace con una excitación en la base del oscilador, siendo ésta el registro de aceleraciones que se toma para el análisis sísmico paso a paso en la sección 2.2.1.

3.2.2 Comparación de resultados

Se presentan las comparaciones de la respuesta de desplazamiento (Figura 3.4), fuerza restauradora (Figura 3.5) y balance de energía (Figura 3.6) de los 3 niveles para un modelo elastoplástico perfecto y el análisis para un modelo bilineal, recordando que en el programa bilineal se toma una rigidez de post – fluencia de cero por ciento, por lo cual las respuestas deben de dar de la misma forma.

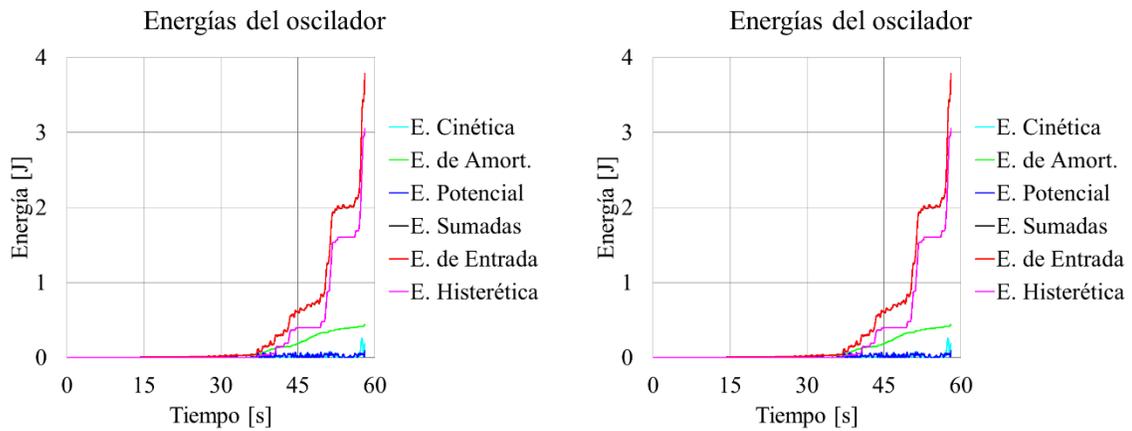


a) Elastoplástico perfecto.

b) Bilineal con rigidez post – fluencia igual a cero.

Figura 3.5. Comparación de fuerza restauradora del oscilador de MGDL en el intervalo inelástico.

En la Figura 3.6 se puede ver que es igual ecuación del balance de energía (3.12), entre la energía de entrada y las energías sumadas se cumple satisfactoriamente.



a) Elastoplástico perfecto.

b) Bilineal con rigidez post – fluencia igual a cero.

Figura 3.6. Comparación de balance de energía del oscilador de MGDL en el intervalo inelástico.

Capítulo 4

Balance de energía en el intervalo inelástico

Modelo histerético: Bilineal

4.1 Oscilador de un grado de libertad (1GDL) en el intervalo inelástico, modelo histerético bilineal

Un ingeniero debe de tener en cuenta la importancia de diseñar una estructura segura y económica, ya que son los dos factores que dominan todo el ámbito laboral. Para controlar esto se necesita tener el conocimiento detallado de cada parte de la estructura, y a su vez del tipo de material que se utiliza para que así se pueda diseñar en el intervalo inelástico del material.

El capítulo anterior muestra un modelo histerético (elastoplástico perfecto) que representa un comportamiento idealizado, para este capítulo se presenta un modelo que pueda representar el comportamiento del acero, el cual es el modelo histerético bilineal (Figura 4.1). La parte de la primera rigidez k_1 del modelo representa el intervalo elástico lineal que va del punto O al punto A, donde de igual manera el punto A es en el cual se llega al desplazamiento Δ_y y a la fuerza F_y de fluencia. Posteriormente del punto A al punto B es la parte de la segunda rigidez k_2 del modelo, o sea la parte inelástica. Cuando se llega al punto B quiere decir que la velocidad del oscilador cambia de signo y por consiguiente se regresa a la primera rigidez k_1 que va del punto B al punto C. Nuevamente se llega al desplazamiento de fluencia Δ'_y en el punto C, únicamente que ahora es en la otra dirección de la carga (descarga) para después pasar a la parte inelástica con la rigidez k_2 del punto C al punto D y así seguir ese comportamiento hasta terminar la excitación en el oscilador.

El cálculo del balance de energía para este modelo histerético es el mismo que para el capítulo 3, ya que ahí se menciona de manera general a la fuerza restauradora la cual es el problema para el cálculo del balance de energía con un comportamiento inelástico del material. La diferencia es que si fluye el material, en este caso el acero, la rigidez ya no será cero, sino más bien tendrá un valor reducido de la rigidez del intervalo elástico. Esto se hace por medio de un valor el cual está referido al porcentaje de post – fluencia del acero.

De igual forma, con la ecuación (3.10) se puede obtener el balance de energía de un oscilador de 1GDL en el intervalo inelástico.

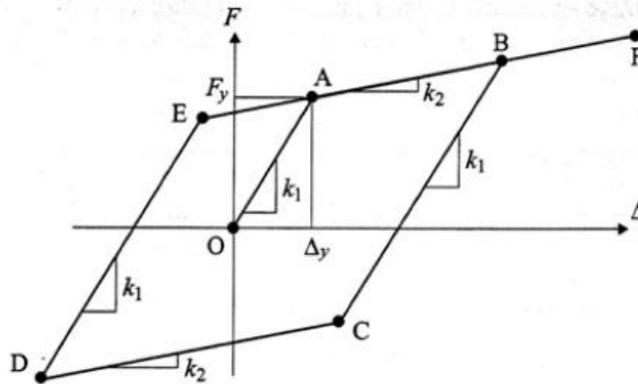
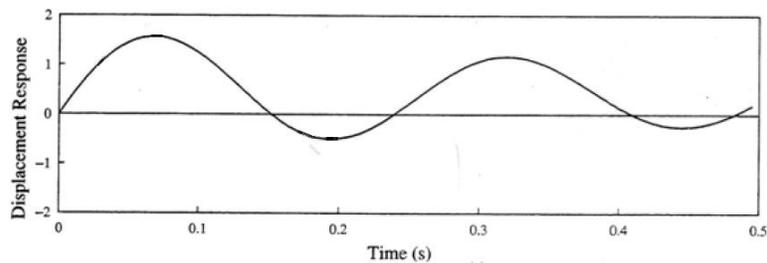
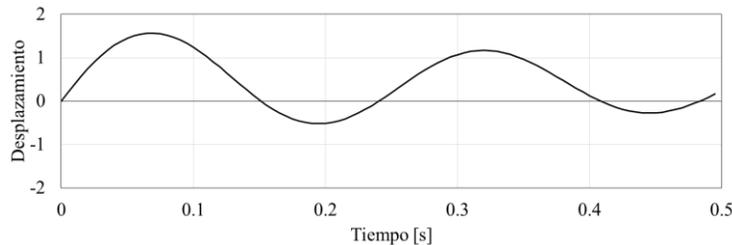


Figura 4.1. Modelo histerético bilineal.



a) Oscilador de 1GDL (Hart & Wong, 1999).



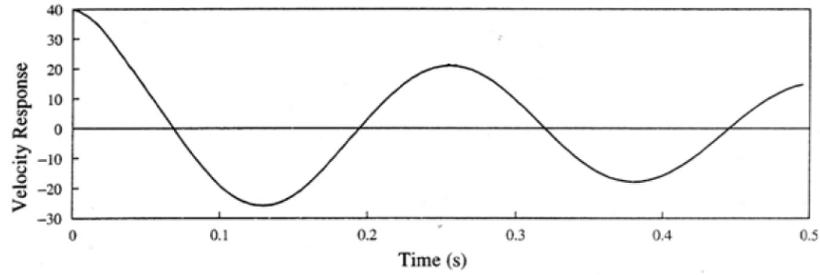
b) Oscilador de 1GDL (Programa en Matlab).

Figura 4.2. Desplazamientos del oscilador de 1GDL en el intervalo inelástico (modelo bilineal).

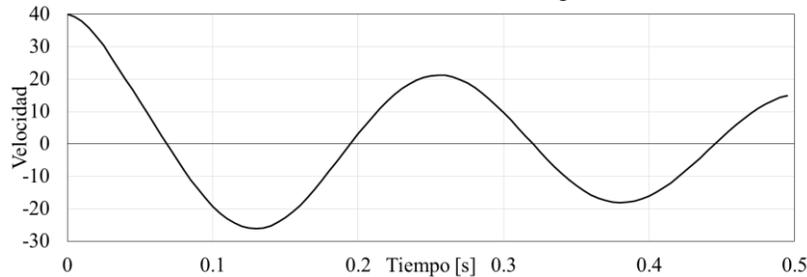
4.1.1 Ejemplo de aplicación

Como ejemplo de aplicación y validación de los resultados se considera el ejemplo 2 del tema 7.2 del libro “Structural Dynamics for Structural Engineers” de Gary C. Hart & Kevin Wong.

Las propiedades del oscilador son las siguientes: masa, $M = 1 \text{ kip} - \text{s}^2 / \text{in}$ ($175,050.36 \text{ kg}$); y rigidez lateral, $K = 631.65 \text{ kip} / \text{in}$ ($110,618,837.49 \text{ N} / \text{m}$). Se considera un porcentaje de amortiguamiento de, $\zeta = 0.05$. La condición inicial del desplazamiento es, $x_0 = 0 \text{ in}$ (0 m); la condición inicial de la velocidad es, $\dot{x}_0 = 40 \text{ in/s}$ (1.016 m/s); la fuerza de fluencia es

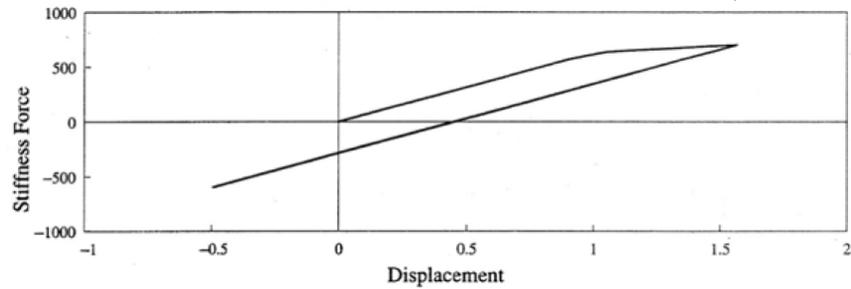


a) Oscilador de 1DGL (Hart & Wong, 1999).

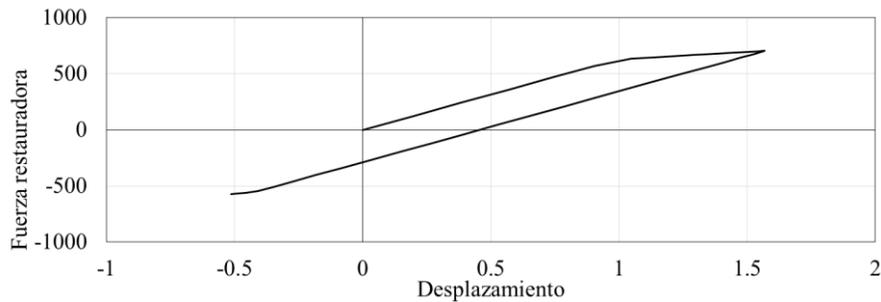


b) Oscilador de 1DGL (Programa en Matlab).

Figura 4.3. Velocidades del oscilador de 1DGL en el intervalo inelástico (modelo bilineal).



a) Oscilador de 1DGL (Hart & Wong, 1999).



b) Oscilador de 1DGL (Programa en Matlab).

Figura 4.4. Fuerza restauradora del oscilador de 1DGL en el intervalo inelástico (modelo bilineal).

de, $f_y = 631.65 \text{ kip}$ ($2,809,719.18 \text{ N}$) $f_y = 631.65 \text{ kip}$ ($2,809,719.18 \text{ N}$), el porcentaje de post – fluencia es del 20 % y el paso de tiempo es, $dt = 0.005 \text{ s}$ (Hart & Wong, 1999).

4.1.2 Comparación de resultados

Se presentan las comparaciones de la respuesta de desplazamiento (Figura 4.2), velocidad (Figura 4.3) y fuerza restauradora (Figura 4.4).

Como se logra apreciar los resultados del programa son idénticos a los resultados del libro, debido a esto se da por hecho se validan los resultados de este trabajo.

4.1.3 Ejemplo de aplicación en monópulo espectacular, intervalo inelástico, modelo bilineal

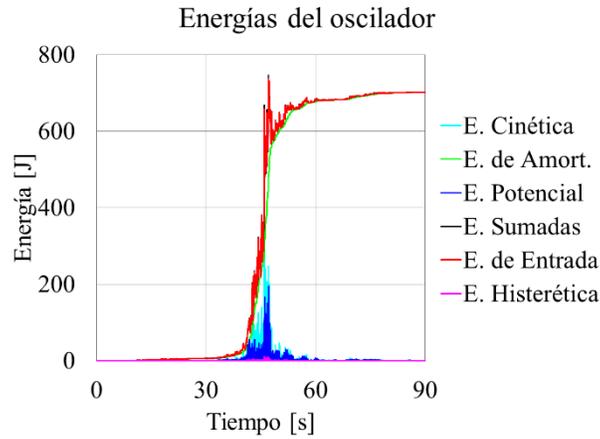
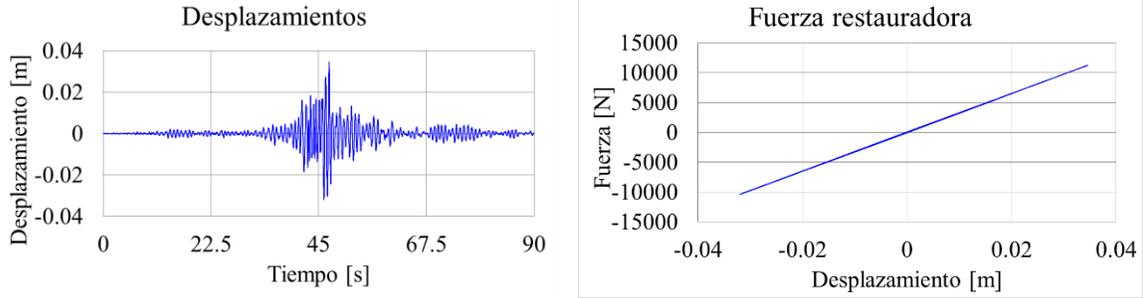
El ejemplo que se usa es el mismo que se encuentra en la sección (2.1.3), la ubicación y los valores de sus propiedades son las mismas, únicamente que ahora se necesitan dos valores extras los cuales son la fuerza de fluencia y el ponderador para la rigidez de post – fluencia. La fuerza de fluencia se obtiene haciendo el producto de la rigidez de la estructura por el desplazamiento de fluencia, este desplazamiento de fluencia se obtiene realizando el producto de la altura del oscilador por la deformación unitaria del acero (0.002), $\Delta_y = 0.002(23.75m) = 0.0475m$, $f_y = (324,986.98 \text{ N/m})(0.0475 \text{ m}) = 15,436.88 \text{ N}$ y el ponderador para la rigidez de post – fluencia de 20 %.

4.1.3.1 Análisis sísmico

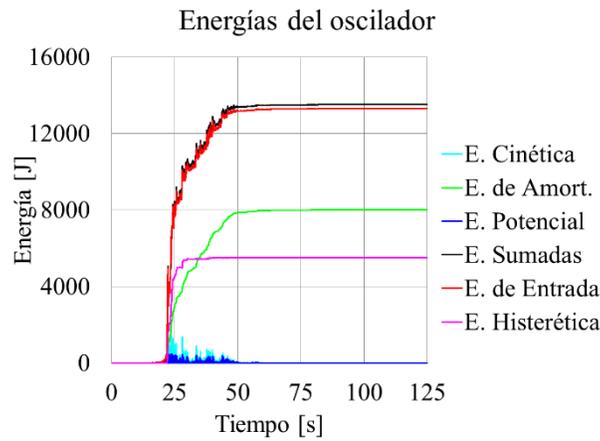
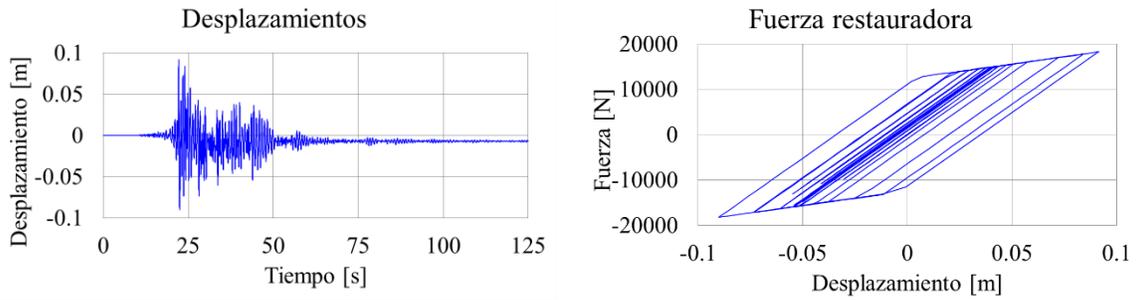
El análisis sísmico paso a paso se realiza con los 3 registros descritos en la sección (2.1.3.1). Se obtienen los desplazamientos, velocidades, aceleraciones y energías máximas mostradas en la tabla 4.1 y las historias en el tiempo de desplazamientos, fuerza restauradora y balance de energía mostrados en la Figura 4.5.

Tabla 4.1. Valores máximos en el intervalo inelástico (modelo bilineal), monópulo espectacular ante cargas sísmicas.

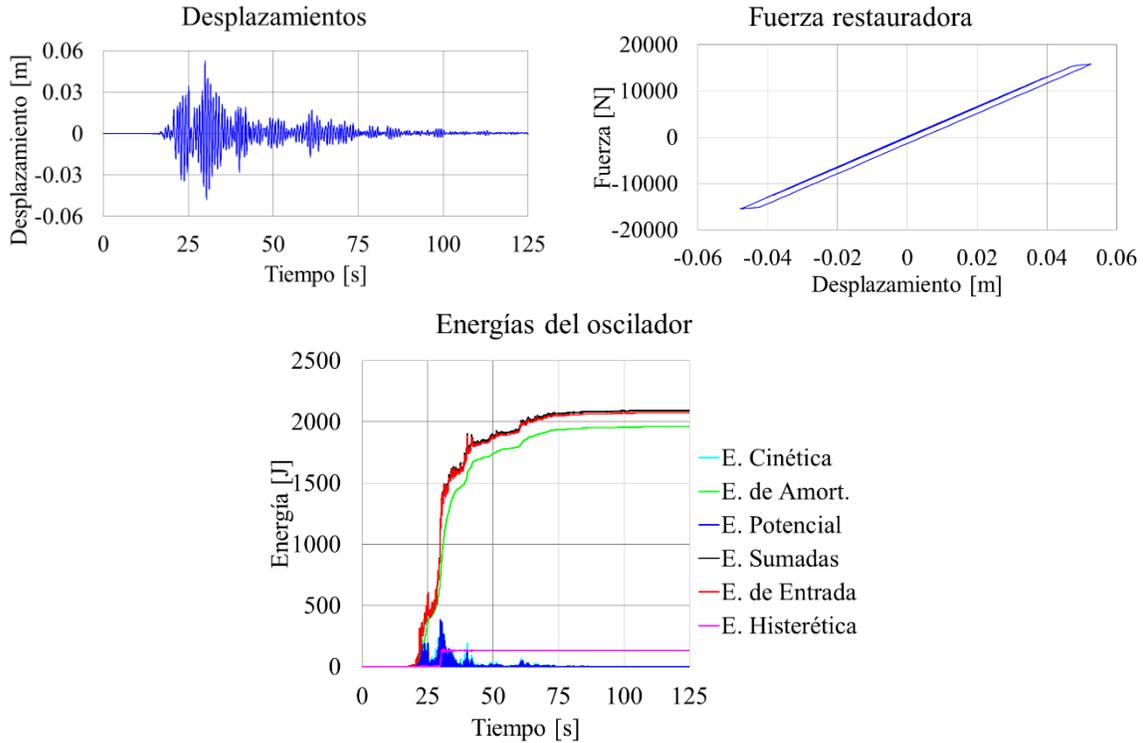
Respuesta	Estaciones sísmicas		
	El Paraíso	San Juan de los Llanos	San Luis de la Loma 2
Desplazamiento máx. (m)	0.0346	0.0916	0.0527
Velocidad máx. (m/s)	0.3568	1.1305	0.3580
Aceleración máx. (m/s ²)	7.0832	13.5023	5.0051
Fza. Restauradora máx (N)	11,238.3327	18,303.7530	15,773.6452
E. Cinética (J)	339.9764	3,412.7401	342.2149
E. de amortiguamiento (J)	701.2973	8,013.2883	1,959.5595
E. Potencial (J)	194.3157	515.4474	382.7967
E. Histerética (J)	10.2956	5,516.9669	142.6490
E. Sumadas (J)	746.0054	13,513.6198	2,090.6126
E. de Entrada (J)	736.6798	13,304.6872	2,073.9771
Fuerza cortante máxima (N)	11,238.33	29,679.49	17,118.15
Momento de volteo máximo (N-m)	266,910.40	704,887.81	406,556.08



a) "El paraíso".



b) "San Juan de los Llanos"



c) “San Luis de la Loma 2”.

Figura 4.5. Historia de desplazamientos, fuerza restauradora y balance de energía en el intervalo inelástico (modelo bilineal), monópolo espectacular ante cargas sísmicas.

4.1.3.2 Análisis eólico

La simulación del viento que se usa en el análisis eólico paso a paso es la misma que se obtiene en la sección (2.1.3.2). Los resultados que se obtienen se presentan en la tabla 4.2, mostrando los valores máximos del desplazamiento, velocidad, aceleración y energías y en la Figura 4.6 se obtiene la respuesta en el tiempo del desplazamiento, fuerza restauradora y balance de energía del oscilador.

Tabla 4.2. Valores máximos, oscilador de 1GDL, intervalo inelástico (modelo bilineal), viento.

Respuesta	Carga eólica
Desplazamiento máx. (m)	2.2228
Velocidad máx. (m/s)	3.7072
Aceleración máx. (m/s ²)	13.2060
Fza. Restauradora máx (N)	156,430.1609
E. Cinética (J)	36,699.9940
E. de amortiguamiento (J)	18,150.1305
E. Potencial (J)	37,648.2706
E. Histerética (J)	300,001.0188
E. Sumadas (J)	341,722.2916
E. de Entrada (J)	344,602.4319
Fuerza cortante máxima (N)	722,368.16
Momento de volteo máximo (N-m)	17,156,243.69

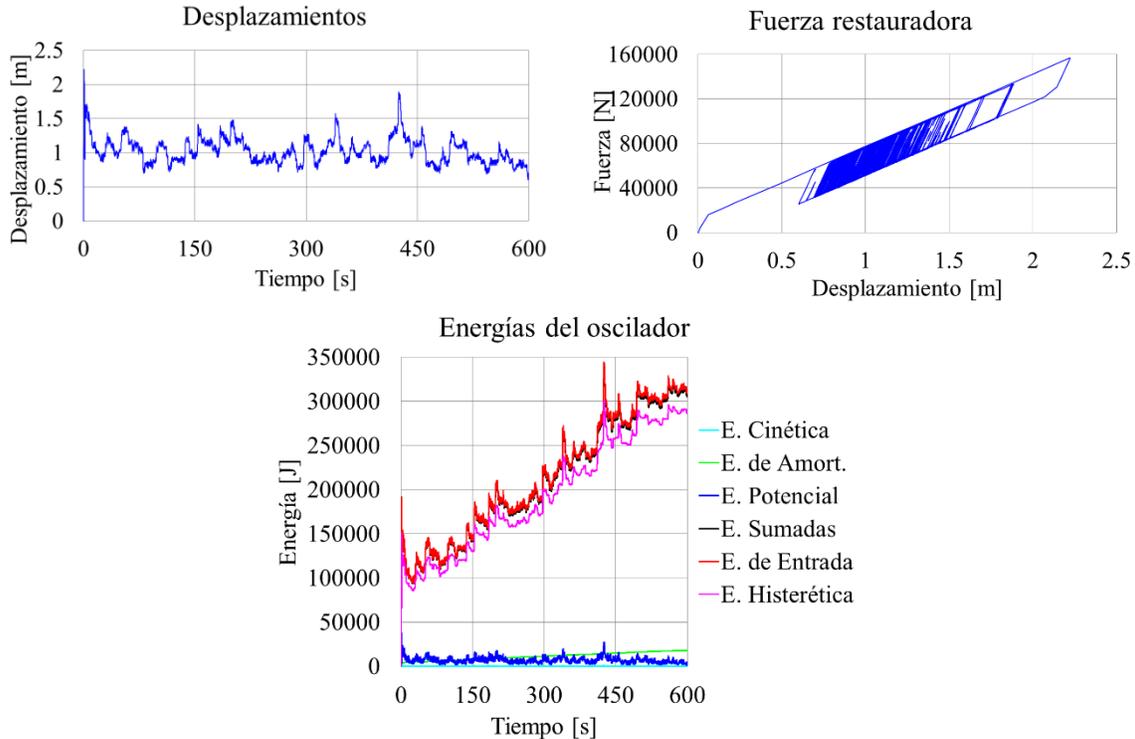


Figura 4.6. Historia de desplazamientos, fuerza restauradora y balance de energía en el intervalo inelástico (modelo bilineal), monópolo espectacular ante carga eólica.

En los resultados mostrados en la Figura 4.6 se puede apreciar que el desplazamiento máximo que llega a tener el oscilador excede los dos metros, este comportamiento es algo irreal y de igual forma que en el capítulo 3, la solución a esto sería aumentando la rigidez del oscilador provocando la reducción de desplazamientos, velocidades y aceleraciones.

4.2 Oscilador de múltiples grados de libertad (MGDL) en el intervalo inelástico, modelo hysterético bilineal

Para este punto el modelo hysterético bilineal para un oscilador de 1GDL debe de expandirse a un oscilador de MGDL. Esto quiere decir que cada grado de libertad (GDL) tiene un modelo hysterético, cada GDL tiene una fuerza restauradora dependiendo la rigidez de entrepiso o de ese GDL y el desplazamiento que se ocupa es el relativo a cada entrepiso. Una vez obtenido el desplazamiento relativo el cálculo de la fuerza restauradora es igual que para un oscilador de 1GDL.

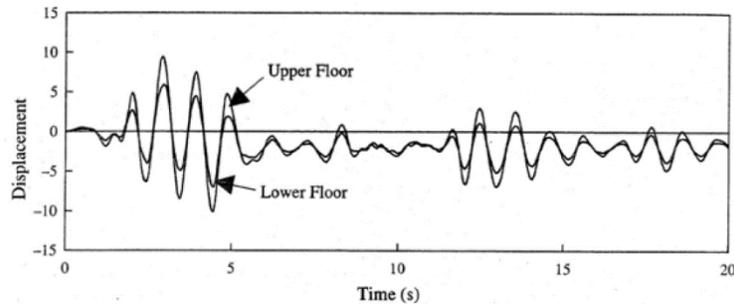
De igual manera que en la sección (4.1), el cálculo del balance de energía para este modelo hysterético, siendo para un oscilador de MGDL, es el mismo que para el capítulo 3, ya que la fuerza restauradora está expresada de manera general para cualquier modelo hysterético. El

control que se tiene para cada rigidez de post – fluencia es por medio de un porcentaje de la rigidez en el intervalo elástico, cada GDL tiene su porcentaje de post – fluencia.

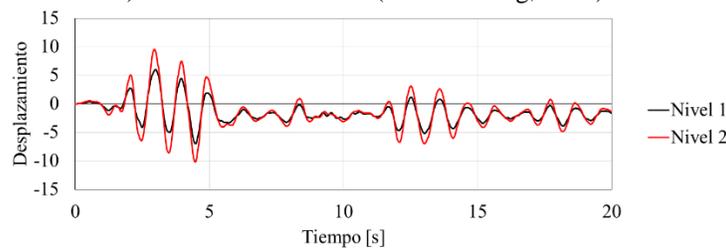
4.2.1 Ejemplo de aplicación

Para la validación de la respuesta del programa se hacen las comparaciones con los resultados del ejemplo 3 del tema 7.3 del libro “Structural Dynamics for Structural Engineers” de Gary C. Hart & Kevin Wong.

Las propiedades del oscilador (Figura 2.14) que se toman como ejemplo son las siguientes: masas, $M_1 = M_2 = 1k - s^2/in$ (175,050.36 kg) y rigideces laterales, $K_1 = K_2 = 100kip/in$ (17,512,679.09 N/m). Se considera un amortiguamiento de, $C_1 = C_2 = 1 k - s/in$ (175,050.36 kg/s). Las condiciones iniciales del desplazamiento para los dos niveles son de, $x_0 = 0 in$ (0 m); las condiciones iniciales de la velocidad para los dos niveles son de, $\dot{x}_0 = 0 in/s$ (0 m/s); la fuerza de fluencia es de, $f_{y1} = f_{y2} = 450 kip$ (2,001,699.73 N), el porcentaje de post – fluencia de los dos niveles es del 20 % y el paso de tiempo es, $dt = 0.02 s$ (Hart & Wong, 1999). El registro de aceleraciones que se toma para el análisis sísmico paso a paso es el de, El-Centro de 1940 afectado por un factor igual a 1.8 y esté está excitando la base del oscilador. El análisis llega hasta el segundo 20.



a) Oscilador de MGD (Hart & Wong, 1999).

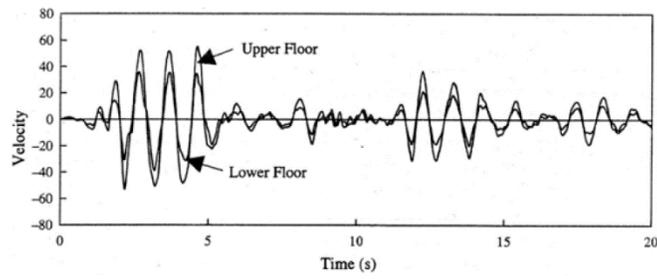


b) Oscilador de 1GD (Programa en Matlab).

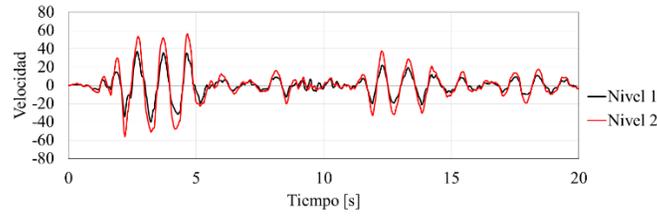
Figura 4.7. Desplazamientos del oscilador de MGD en el intervalo inelástico (modelo bilineal).

4.2.2 Comparación de resultados

Se presentan las comparaciones de la respuesta de desplazamiento (Figura 4.7) y velocidad (Figura 4.8). Las primeras gráficas, (a) respectivamente, fueron tomadas del libro y las segundas, (b) respectivamente, son los resultados del programa.



a) Oscilador de MGD (Hart & Wong, 1999).



b) Oscilador de 1GDL (Programa en Matlab).

Figura 4.8. Velocidades del oscilador de MGD en el intervalo inelástico (modelo bilineal).

Capítulo 5

Balance de energía en el intervalo inelástico

Modelo histerético: Takeda

5.1 Oscilador de un grado de libertad (1GDL) en el intervalo inelástico, modelo histerético de Takeda (Modificado por Shunsuke Otani)

En este capítulo se continúa haciendo mención e hincapié acerca de la importancia que tiene el considerar y tener conocimiento de la no linealidad del material. En el capítulo anterior se muestra un modelo histerético (bilineal) el cual hace la representación del comportamiento del acero, para este capítulo se presenta un modelo que pueda representar el comportamiento del concreto reforzado, el cual es el modelo degradante de Takeda o modelo histerético de Takeda, modificado por S. Otani.

A partir de resultados experimentales de ensayos realizados en elementos de concreto reforzado en una mesa vibradora, ante la aplicación de cargas laterales con una ligera cantidad media de carga axial en la Universidad de Illinois, Takeda, Sozen y Nielsen (1970) realizaron un modelo histerético refinado y sofisticado. Este modelo incluye tanto los cambios en la rigidez en agrietamiento por flexión y en cedencia como las características de endurecimiento por deformación. La degradación de la rigidez de descarga se controla por una función exponencial de la deformación máxima anterior.

Una de las limitantes del modelo original, es que no considera la falla o daño excesivo causado por el deterioro, por cortante o por la adherencia. Por lo tanto, el modelo de Takeda simula un comportamiento de flexión dominante.

Antes de describir detalladamente el modelo se presentan los siguientes términos para tener más claro a qué se refiere cada uno de ellos:

- Carga: Se refiere cuando el valor absoluto de la resistencia (o deformación) aumenta en la curva primaria.
- Descarga: Se refiere cuando el valor absoluto de la resistencia (o deformación) disminuye después de la carga o recarga.

- Recarga: Se refiere cuando el valor absoluto de la resistencia (o deformación) aumenta después de la descarga antes de que el punto de respuesta alcance la curva esqueleto.

Los tres términos anteriores se ilustran en la Figura 5.1.

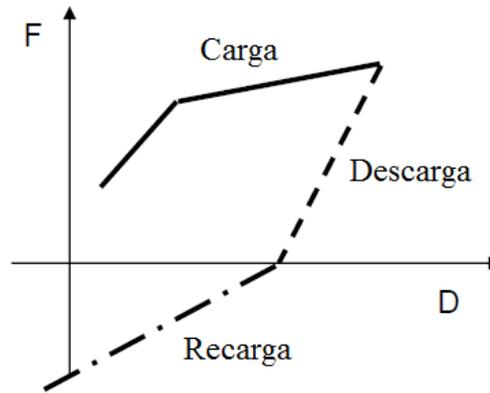


Figura 5.1. Carga, descarga y recarga.

El modelo consiste en una curva envolvente trilineal bajo cargas monotónicas, una para cada sentido de carga, con cambios de pendiente en los puntos de agrietamiento (A y A') y de cedencia (B, B'), como se muestra en la Figura 5.2 (a). El perfil de descarga (tramo C – D) a partir de la rama post – fluencia, tiene una pendiente similar a la recta que conecta el punto de fluencia con el punto de agrietamiento en la dirección opuesta (tramo A – B). La recarga se dirige hacia el punto de deformación máxima en el otro sentido, o al punto de fluencia.

Para tener más claro el comportamiento de este modelo histerético se presentan 7 condiciones para formar la gráfica completa, contemplando la carga, descarga y recarga para cada sentido de la carga.

1. Condición: La carga de agrietamiento, P_{cr} no se ha superado en una dirección. La carga se invierte de una carga P en la otra dirección. La carga P es menor que la carga de fluencia P_y .

Regla: La descarga sigue una línea recta desde la posición de la carga P al punto que representa la carga de agrietamiento en la otra dirección.

2. Condición: Una carga P_1 es alcanzada en una dirección en la curva primaria de tal manera que P_1 es mayor que P_{cr} , pero menor que la carga de fluencia P_y . Luego la carga se invierte a $-P_2$, tal que $P_2 < P_1$.

Regla: Descargar paralela a la curva de carga para ese medio ciclo.

3. Condición: Una carga P_1 es alcanzada en una dirección de tal manera que P_1 es mayor que P_{cr} , pero no mayor que la carga de fluencia P_y . Luego la carga se invierte a $-P_3$, tal que $P_3 < P_1$.

Regla: La descarga sigue una línea recta que une el punto de retorno y el punto que representa la formación de grietas en la otra dirección.

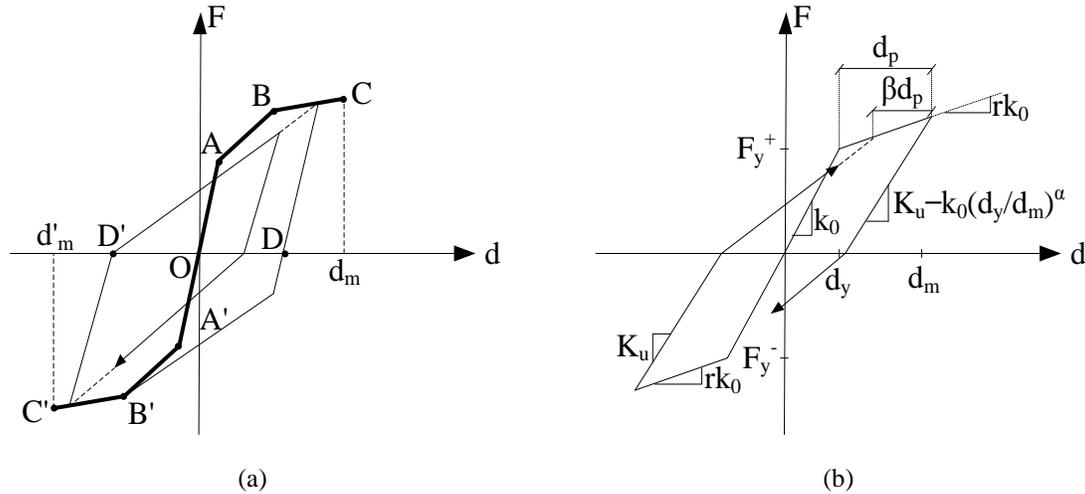


Figura 5.2. Modelo histerético de Takeda.

4. Condición: Se han producido uno o más ciclos de carga. La carga es cero.
Regla: Para construir la curva de carga, conecte el punto de carga cero hasta el punto alcanzado en el ciclo anterior, si ese punto se encuentra en la curva primaria o en una línea dirigida a un punto de la curva primaria. Si el ciclo de carga anterior no contiene tal punto, vaya al ciclo anterior y continúe el proceso hasta que se encuentre tal punto. A continuación, conecte este punto hasta el punto de carga cero.
Excepción: Si el punto de fluencia no ha sido excedido y si el punto de carga cero no se encuentran dentro de la proyección horizontal de la curva primaria para esa dirección de carga, conecte el punto de carga cero con el punto de fluencia para obtener la pendiente de carga.

5. Condición: Se supera la carga de fluencia P_y en una dirección.

Regla: La curva de descarga sigue la pendiente dada por la siguiente ecuación:

$$k_r = k_y \left(\frac{D_y}{D} \right)^{0.4} \tag{5.1}$$

donde, k_r se refiere a la pendiente de la curva de descarga, k_y a la pendiente de una línea que une el punto de fluencia en una dirección al punto de agrietamiento en la otra dirección, D_y a la deformación de fluencia y D a la deformación máxima alcanzada en la dirección de la carga.

6. Condición: La carga de fluencia se supera en una dirección, pero la carga de agrietamiento no se supera en la dirección opuesta.
Regla: La descarga sigue la regla 5. La carga en la otra dirección continúa como una extensión de la línea de descarga hasta la carga de agrietamiento. Luego, la curva de carga está dirigida al punto de fluencia.
7. Condición: Se han producido uno o más ciclos de carga.
Regla: Si el cuarto de ciclo inmediatamente anterior se mantiene en un lado del eje de carga cero, descargue en la proporción basada en la regla 2, 3 y 5 el que gobierne en la historia de carga anterior. Si el cuarto de ciclo inmediatamente anterior cruza el eje de carga, descarga el 70% de la proporción basada en la regla 2, 3, o 5, el que gobierne en la historia de carga anterior, pero no en una pendiente más plana que la pendiente de carga inmediatamente anterior.

El modelo de Takeda incluye:

- Cambios en la rigidez en el agrietamiento por flexión y fluencia,
- Las normas de histéresis para lazos de histéresis internos dentro de un lazo exterior y
- La degradación de la rigidez de descarga con deformación.

El punto de respuesta se mueve hacia un pico de un lazo de histéresis externo. La rigidez de descarga k_r después de la fluencia viene dada por:

$$K_r = \frac{F_c + F_y}{D_c + D_y} \left| \frac{D_m}{D_y} \right|^{-\alpha} \quad (5.2)$$

donde, α se refiere al parámetro de degradación de la rigidez de descarga y D_m a la deformación máxima anterior más allá de la fluencia en la dirección considerada.

El estado del arte no proporciona un método confiable para estimar la rigidez inicial, deformación de fluencia y la deformación última. La rigidez se degrada de la rigidez elástica inicial con el aumento de la deformación inelástica y el número de ciclos de carga y descarga. El módulo elástico del concreto varía significativamente con la resistencia del concreto y la preparación de éste; las grietas iniciales causan decaimiento en la rigidez. La estimación de la deformación de fluencia es más complicada por la interacción de las deformaciones por flexión, cortante y deformaciones adicionales debidas al anclaje del acero longitudinal y al deslizamiento o mala adherencia del acero de refuerzo longitudinal a lo largo del elemento. Por tanto las expresiones empíricas son necesarias para la estimación de la deformación de fluencia y deformación última.

El parámetro de degradación de la rigidez de descarga está entre los valores $0.0 \leq \alpha \leq 0.5$ y el factor que controla la rigidez de recarga está comprendido entre $0.0 \leq \beta \leq 0.6$ (Figura 5.2 (b)). El parámetro de degradación de la rigidez de descarga que ese usa comúnmente es de 0.4 para concreto reforzado.

Las reglas de histéresis son extensas y comprensibles. En la Figura 5.3 se trata de mostrar el comportamiento de algunos puntos del modelo histerético de Takeda en donde, los puntos (C y C') y (Y y Y') representan los puntos de agrietamiento y fluencia para cada sentido de carga, respectivamente.

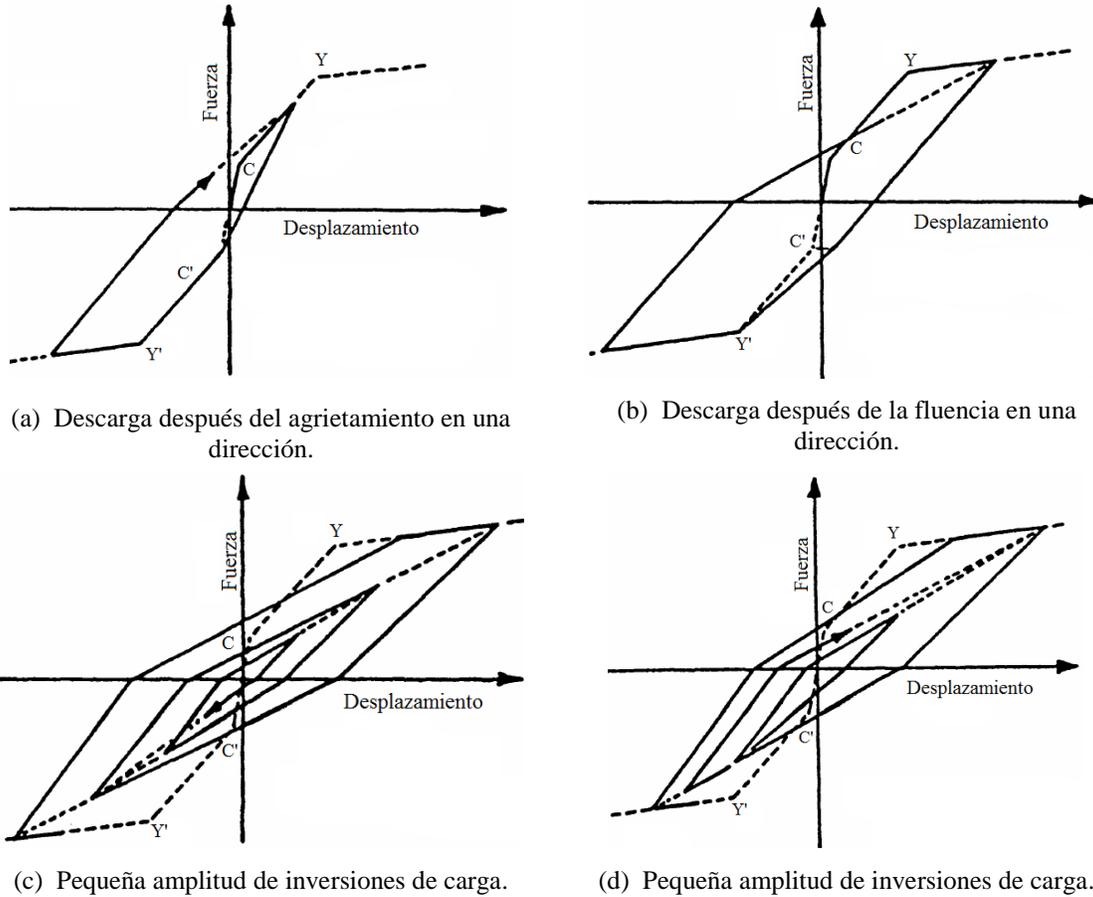


Figura 5.3. Modelo de Takeda.

Para obtener el cálculo del balance de energía del oscilador de 1GDL para este modelo histerético se hace de la misma forma que en los capítulos anteriores (3 y 4). Se necesita tener el valor del desplazamiento, velocidad y aceleración en el tiempo del oscilador, además de la fuerza restauradora para cada desplazamiento, o sea, para cada paso de tiempo. Obteniendo las características anteriores el cálculo de la energía del oscilador de 1GDL se puede realizar con la ecuación (3.10) y es la que se utiliza en el programa para este modelo histerético.

5.1.1 Ejemplo de aplicación

Para la validación de los resultados de este trabajo se comparan los resultados obtenidos con los del ejemplo descrito en el capítulo 13, sección 13.11 del libro “Nonlinear Earthquake Response Analysis of Reinforced Concrete Buildings (Lecture Notes)” de Shunsuke Otani (2002).

Se analiza un oscilador con masa, $M = 1000 \text{ kg}$; y periodo, $T_n = 0.4 \text{ s}$. Se considera un porcentaje de amortiguamiento de $\zeta = 0.05$. La condición inicial del desplazamiento es, $x_0 = 0 \text{ m}$; la condición inicial de la velocidad es, $\dot{x}_0 = 0 \text{ m/s}$ y la altura a la que se encuentra la masa es, $d = 3 \text{ m}$. Para la fuerza de fluencia (F_y) se toma el 60 % del cociente de la fuerza de inercia máxima elástica ($F_e = 6,423.7 \text{ N}$) entre $\sqrt{2\mu - 1}$, donde $\mu = 4$, si el periodo del oscilador es menor de 0.5 s . Cuando el periodo es mayor de 0.5 s la fuerza de inercia máxima elástica se divide únicamente entre el factor de ductilidad μ . La fuerza de inercia máxima elástica se obtiene realizando el producto de la masa por la respuesta máxima de aceleración del oscilador ($a = 6.4237 \text{ m/s}^2$). La fuerza de agrietamiento (F_c) se toma como $\frac{1}{3} F_y = 485.59$. La rigidez antes del agrietamiento (K_c) es igual a dos veces la rigidez secante (K_s); la rigidez secante es igual que la rigidez elástica ($K_e = 246,740.11 \text{ N/m}$), la cual se puede obtener con la masa y el periodo del oscilador, siempre y cuando sea de 1GDL; la rigidez después de la fluencia (K_u) se toma como el 10 % de la rigidez secante; la rigidez antes de la fluencia (K_y) se obtiene con la ecuación de la pendiente de una recta entre los puntos “C” y “Y” siendo igual a $197,392.28 \text{ N/m}$ (Figura 5.4). El desplazamiento de agrietamiento (D_c) se obtiene con el cociente de la fuerza de agrietamiento entre la rigidez antes del agrietamiento y el desplazamiento de fluencia (D_y) se obtiene con el cociente de la fuerza de fluencia entre la rigidez secante. La manera de obtener las fuerzas y rigideces descritas anteriormente vienen explicadas en el capítulo 13 del libro mencionado en el párrafo anterior.

El registro sísmico que se ocupa para realizar el análisis paso a paso es el de “El centro 1940” componente Norte – Sur, su intervalo de tiempo es de 0.02 s .

Cabe aclarar que el registro sísmico que se presenta en este trabajo varía ligeramente con el mostrado en el libro mencionado anteriormente (Figura 5.5).

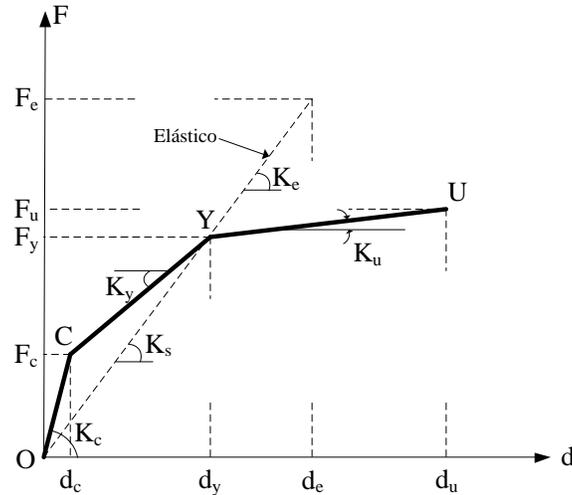
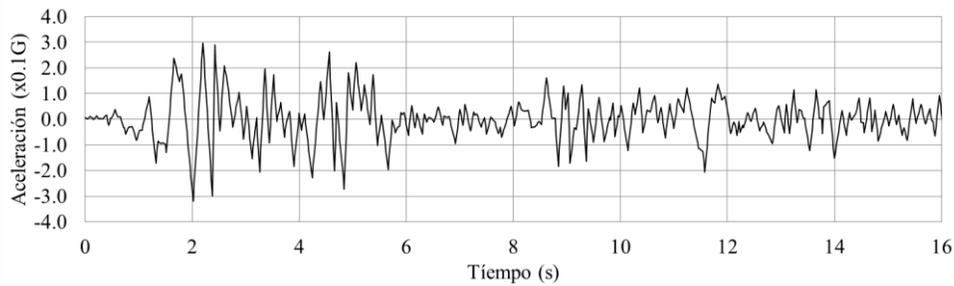
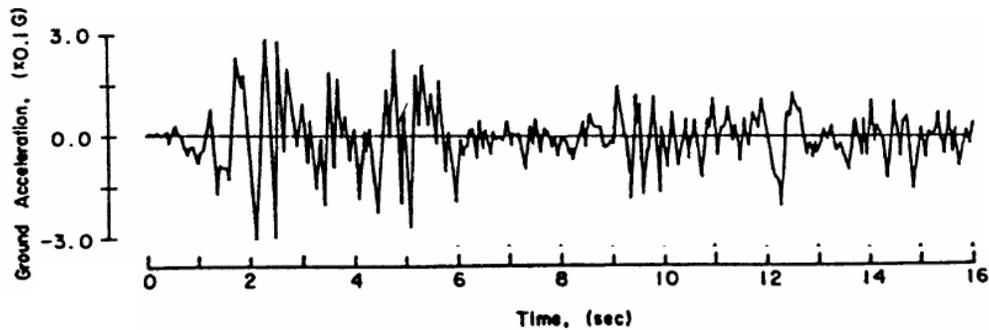


Figura 5.4. Propiedades de fuerzas y rigideces del modelo de Takeda.

El parámetro de degradación de la rigidez de descarga (α) se toma igual a 0 y a 0.5; y el factor que controla la rigidez de recarga (β) se toma igual a 1 para los dos casos de α .



(a)

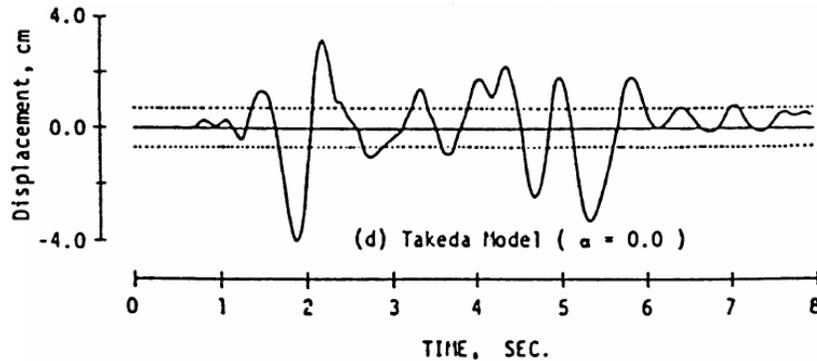


(b)

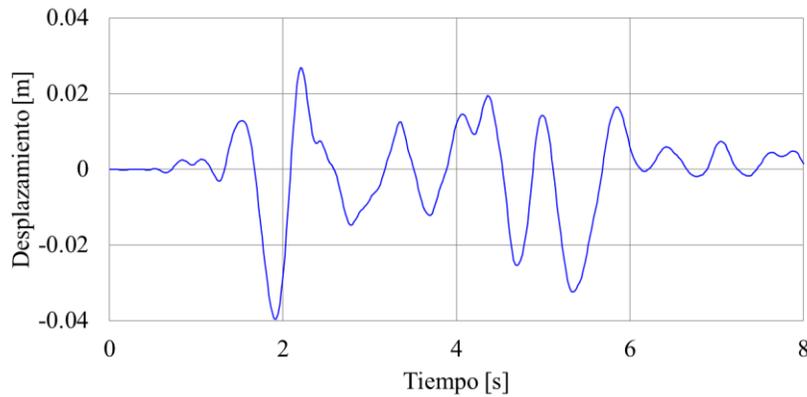
Figura 5.5. Comparación del registro sísmico "El centro 1940" componente Norte – sur. (a) Registro sísmico presentado en este trabajo; (b) Registro sísmico presentado en el libro "Nonlinear Earthquake Response Analysis of Reinforced Concrete Buildings (Lecture Notes)".

5.1.2 Comparación de resultados

Los resultados que se comparan son las respuestas de desplazamiento en el tiempo (Figura 5.6) y la fuerza restauradora del oscilador (Figura 5.7) con $\alpha = 0.0$, las respuestas de desplazamiento en el tiempo (Figura 5.8) y la fuerza restauradora del oscilador (Figura 5.9) con $\alpha = 0.5$ y las respuestas de desplazamiento tomando a la fuerza de fluencia (F_y) como el 50, 60 y 70% del cociente de la fuerza de inercia máxima elástica (F_e) entre $\sqrt{2\mu-1}$ y $\alpha = 0.0$ (Figura 5.10).

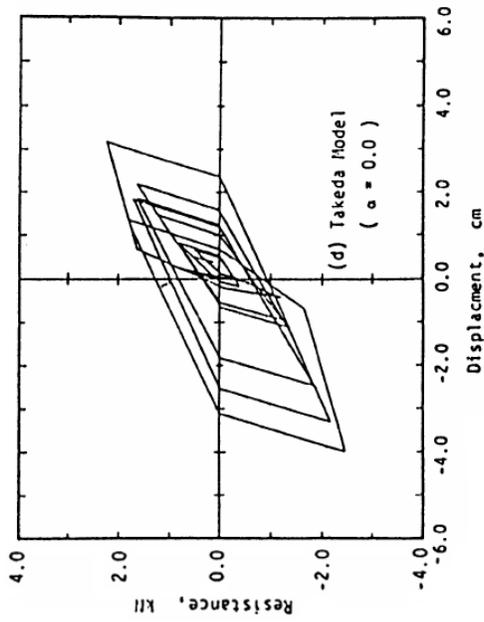


a) Oscilador de 1GDL (Shunsuke Otani, 2002).

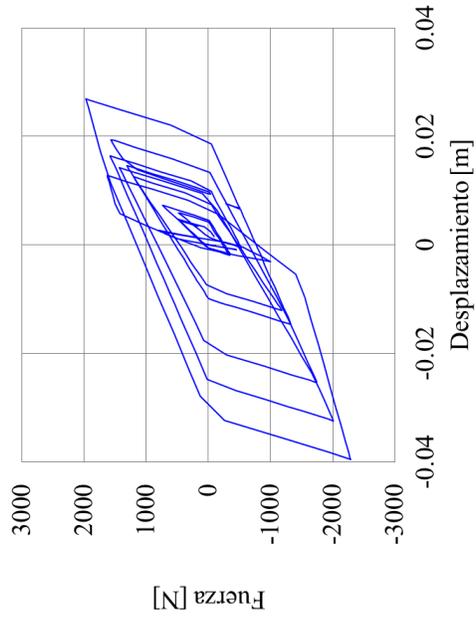


b) Oscilador de 1GDL (Programa en Matlab).

Figura 5.6. Desplazamientos del oscilador de 1GDL en el intervalo inelástico (modelo Takeda $\alpha = 0.0$).

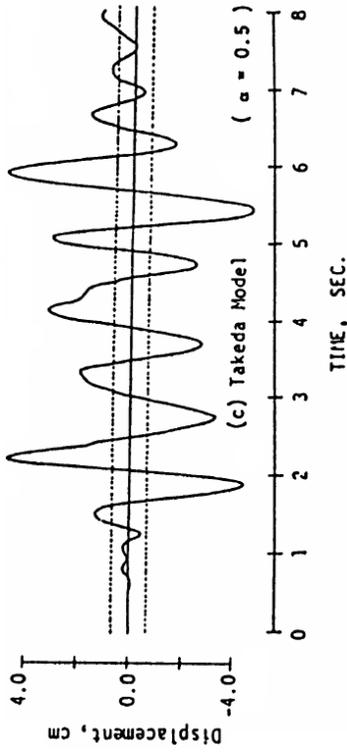


a) Oscilador de 1GDL (Shunsuke Otani, 2002).

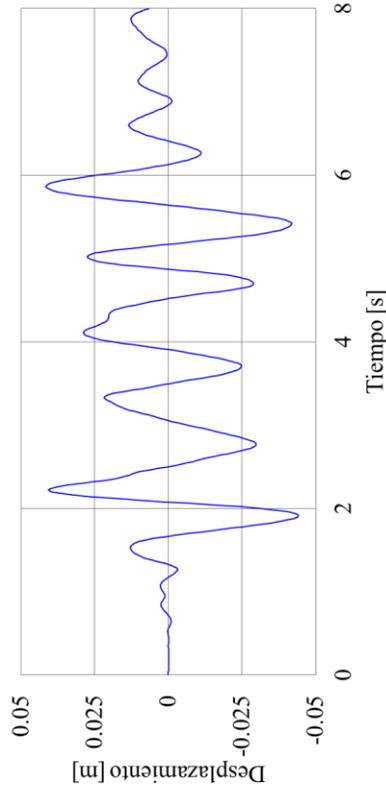


b) Oscilador de 1GDL (Programa en Matlab).

Figura 5.7. Fuerza restauradora del oscilador de 1GDL en el intervalo inelástico (modelo Takeda $\alpha = 0.0$)

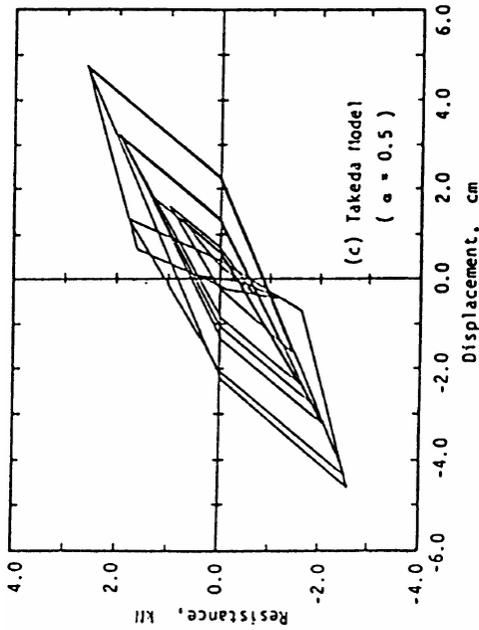


a) Oscilador de 1GDL (Shunsuke Otani, 2002).

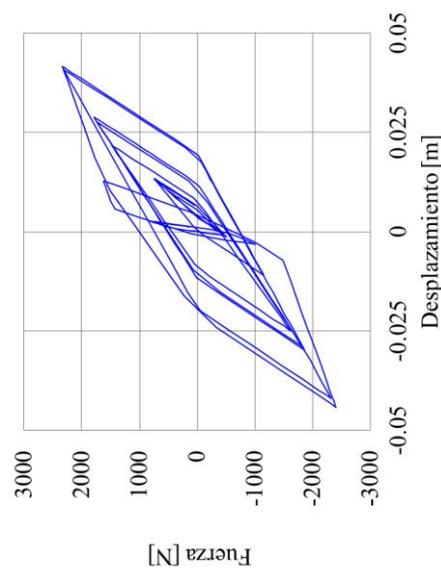


b) Oscilador de 1GDL (Programa en Matlab).

Figura 5.8. Desplazamientos del oscilador de 1GDL en el intervalo inelástico (modelo Takeda $\alpha = 0.5$).

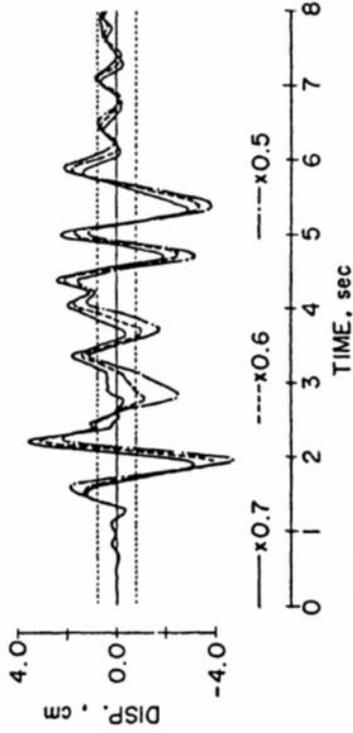


a) Oscilador de 1GDL (Shunsuke Otani, 2002).

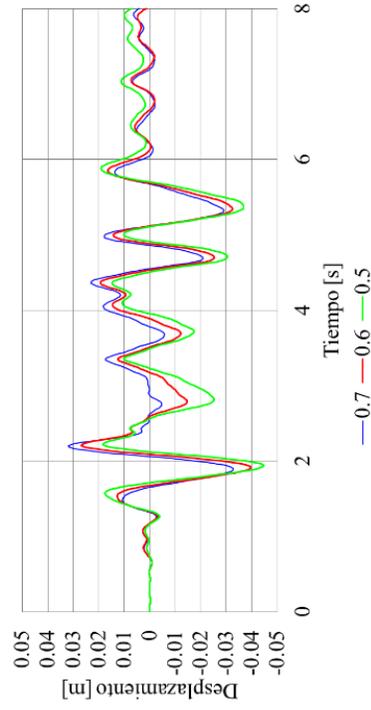


b) Oscilador de 1GDL (Programa en Matlab).

Figura 5.9. Fuerza restauradora del oscilador de 1GDL en el intervalo inelástico (modelo Takeda $\alpha = 0.5$)



a) Oscilador de 1GDL (Shunsuke Otani, 2002).



b) Oscilador de 1GDL (Programa en Matlab).

Figura 5.10. Desplazamientos del oscilador de 1GDL en el intervalo inelástico para distintos porcentajes de fuerza de fluencia (modelo Takeda $\alpha = 0.0$).

5.1.3 Ejemplo de aplicación en columna de un puente con su tablero, intervalo inelástico, modelo de Takeda

El ejemplo que se emplea para esta sección se trata de una columna de un puente con su tablero (Figura 5.11), donde la base a es igual a 14 m y la altura h es igual a 3.1 m . Las medidas del tablero vienen descritas en el apéndice 8.A, donde al área transversal del tablero es de $A_T = 14.9375\text{ m}^2$, el espesor o ancho de la sección es de 30 m y la densidad del material del tablero (concreto) es de $\rho_{\text{concreto}} = 2400\text{ kg/m}^3$. Se considera que la estructura tiene las siguientes propiedades: masa, $M = 1,075,500\text{ kg}$; y rigidez lateral $K = 88,000,000\text{ N/m}$. Para el análisis sísmico se tiene un porcentaje de amortiguamiento de $\xi = 0.05$ y para el análisis eólico de $\xi = 0.01$. El área expuesta al viento del tablero es $A = 93\text{ m}^2$ y la columna tiene un altura de $d = 12\text{ m}$. El periodo fundamental de vibrar del sistema es de $T = 0.695\text{ s}$ y las condiciones iniciales son 0.

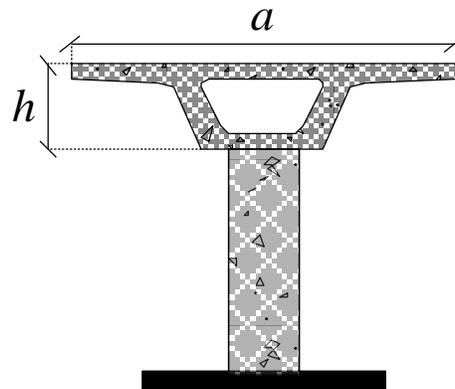


Figura 5.11. Columna de un puente con su tablero.

Los parámetros para el modelo hysterético se obtienen como se describe en la sección (5.1.1), se toma un valor de $\mu = 4$, del parámetro de degradación de la rigidez de descarga (α) se toma igual a 0.4 y el factor que controla la rigidez de recarga (β) se toma igual a 1.

5.1.3.1 Análisis sísmico

Para realizar el análisis sísmico paso a paso se toman los 3 registros descritos en la sección (2.1.3.1). Para calcular los parámetros del modelo de Takeda se necesita conocer la aceleración máxima del oscilador con cada registro sísmico, para eso, en la Figura 5.12, se muestran los espectros elásticos de aceleraciones para cada registro sísmico. El periodo del oscilador es de 0.67 s por lo tanto la aceleración máxima para el registro “El paraíso” es de 8.3088 m/s^2 , para el registro “San Juan de los Llanos” es de 21.6199 m/s^2 , y para “San Luis de la Loma 2” es de 5.4259 m/s^2 . En la tabla 5.1 se muestran los valores de los parámetros que se necesitan para el modelo de Takeda para cada registro sísmico.

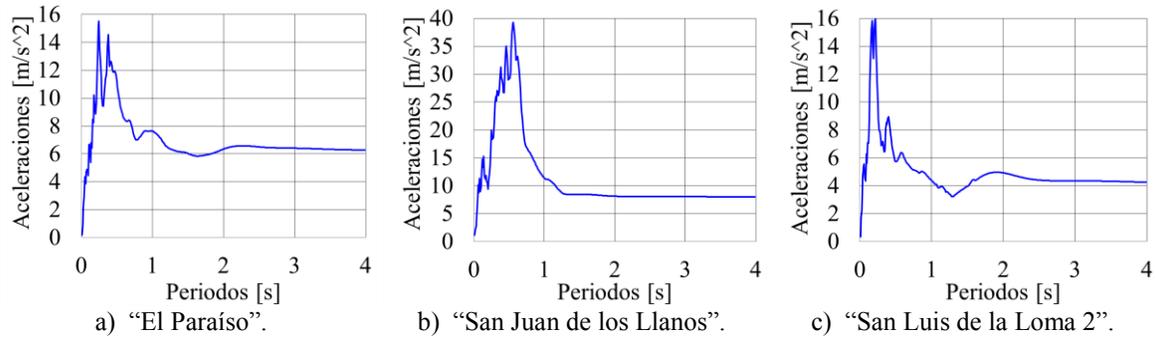


Figura 5.12. Espectros elásticos de aceleración (registros sísmicos).

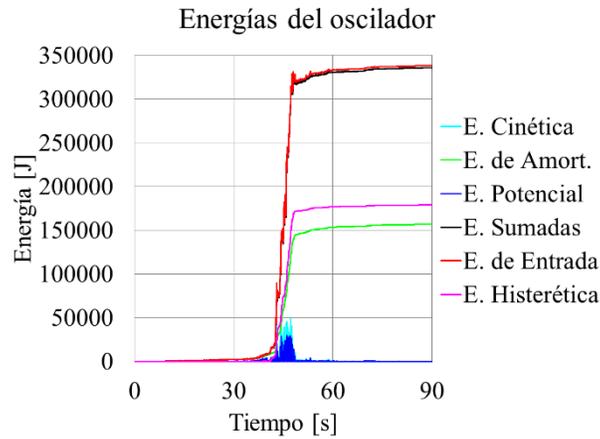
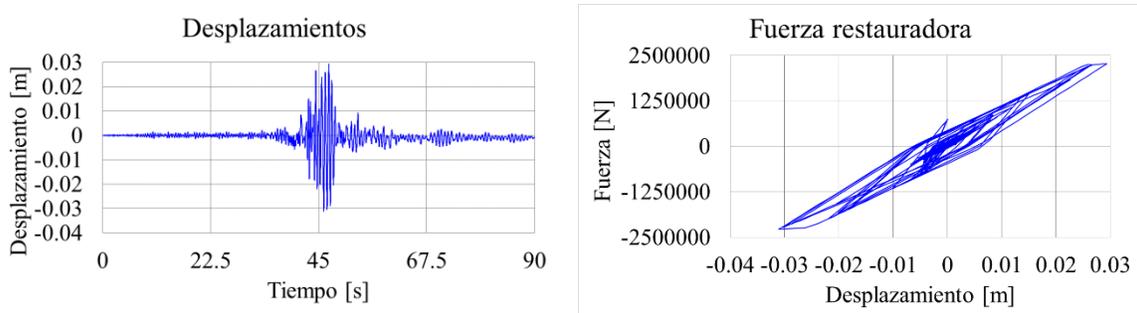
Tabla 5.1. Valores para el modelo de Takeda (cargas sísmicas).

Concepto	Estaciones sísmicas		
	El Paraíso	San Juan de los Llanos	San Luis de la Loma 2
Fuerza de inercia máxima elástica (Fe) [N]	8,936,114.4	23,252,202.45	5,835,555.45
Fuerza de fluencia (Fy) [N]	2,234,028.6	5,813,050.61	1,458,888.86
Fuerza de agrietamiento (Fc) [N]	744,676.2	1,937,683.54	486,296.29
Rigidez secante (Ks) [N/m]	88,000,000	88,000,000	88,000,000
Rigidez antes del agrietamiento (Kc) [N/m]	176,000,000	176,000,000	176,000,000
Rigidez antes de la fluencia (Ky) [N/m]	70,388,600.6	70,397,221.98	70,391,008.9
Rigidez después de la fluencia (Ku) [N/m]	8,800,000	8,800,000	8,800,000
Desplazamiento de agrietamiento (Dc) [m]	0.004231	0.01101	0.002763
Desplazamiento de fluencia (Dy) [m]	0.02539	0.06606	0.01658

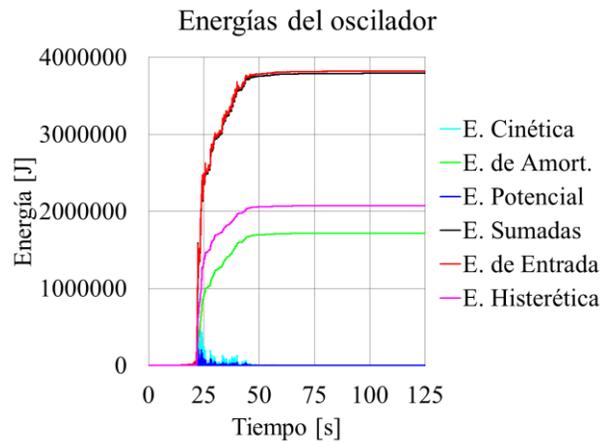
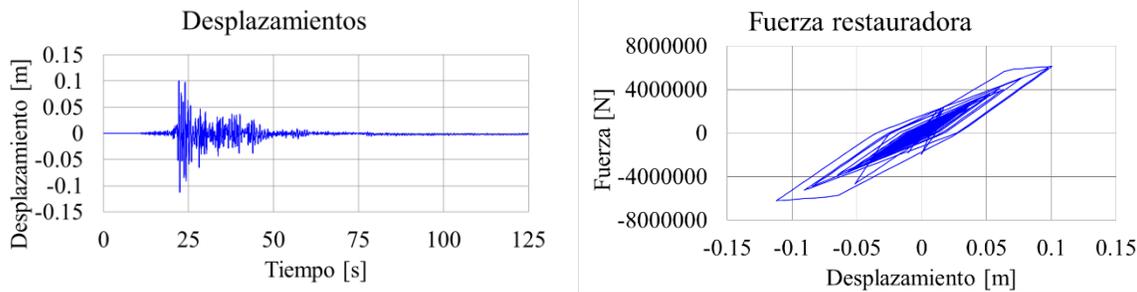
Realizado un análisis paso a paso, se obtienen los desplazamientos, velocidades, aceleraciones y energías máximas mostradas en la Tabla 5.2 y las historias en el tiempo de desplazamientos y fuerza restauradora mostrados en la Figura 5.13. En dicha Figura también se reporta el resultado del balance de energía.

Tabla 5.2. Valores máximos en el intervalo inelástico (modelo de Takeda), columna de un puente ante cargas sísmicas.

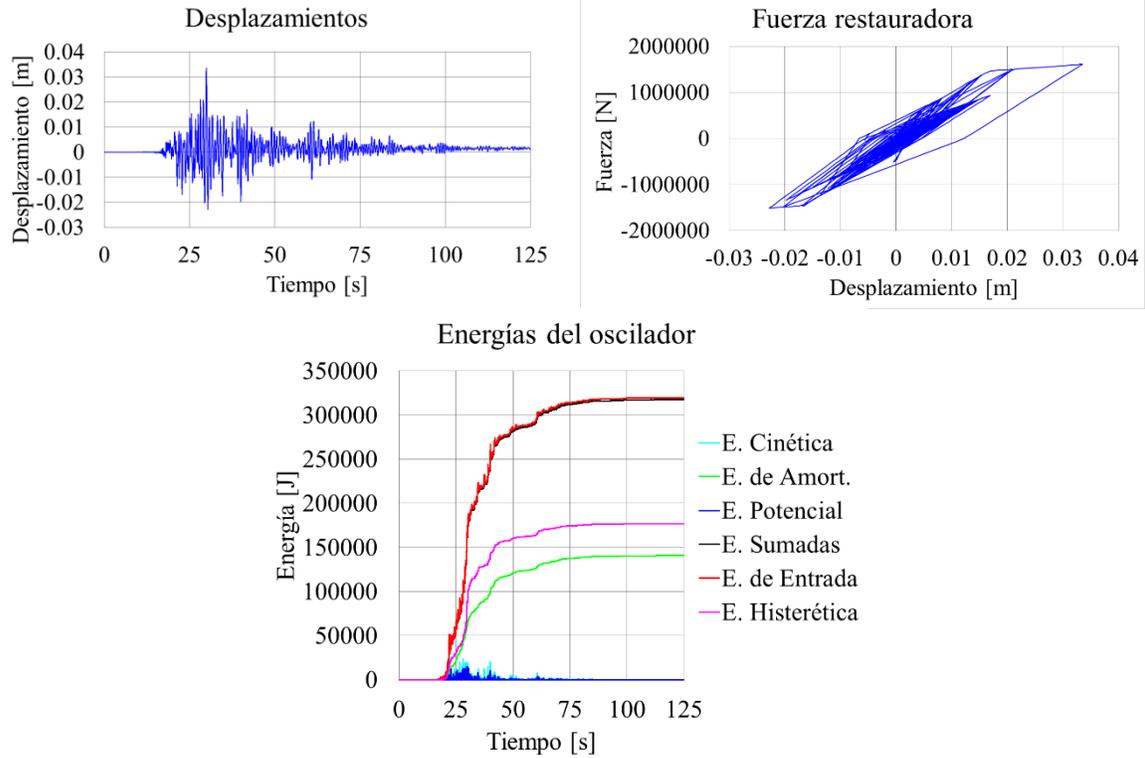
Respuesta	Estaciones sísmicas		
	El Paraíso	San Juan de los Llanos	San Luis de la Loma 2
Desplazamiento máx. (m)	0.0311	0.1121	0.0335
Velocidad máx. (m/s)	0.3033	1.3266	0.2235
Aceleración máx. (m/s ²)	7.8760	15.0323	5.1485
Fza. Restauradora máx (N)	2,284,393.3857	6,218,476.9852	1,608,154.8311
E. Cinética (J)	49,475.6213	946,352.6128	26,868.0862
E. de amortiguamiento (J)	156,869.1126	1,717,979.2306	140,676.5867
E. Potencial (J)	29,650.3019	219,712.8183	14,694.1021
E. Histerética (J)	178,912.3098	2,074,357.4056	176,903.0176
E. Sumadas (J)	335,803.2731	3,792,369.8743	317,590.3122
E. de Entrada (J)	338,356.0219	3,820,790.0215	319,656.5908
Fuerza cortante máxima (N)	15,207,279.11	9,072,500.01	2,537,799.69
Momento de volteo máximo (N-m)	182,487,349.37	108,870,000.17	30,453,596.30



a) "El paraíso".



b) "San Juan de los Llanos".



c) "San Luis de la Loma 2".

Figura 5.13. Historia de desplazamientos, fuerza restauradora y balace de energía en el intervalo inelástico (modelo de Takeda), columna y tablero de un puente ante cargas sísmicas.

5.1.3.2 Análisis eólico

Para realizar el análisis eólico paso a paso del sistema se toman las mismas simulaciones de fuerzas de viento realizadas en la sección (2.1.3.2), únicamente que el área de contacto es diferente modificando las fuerzas del viento a como se muestran en la Figura 5.14.

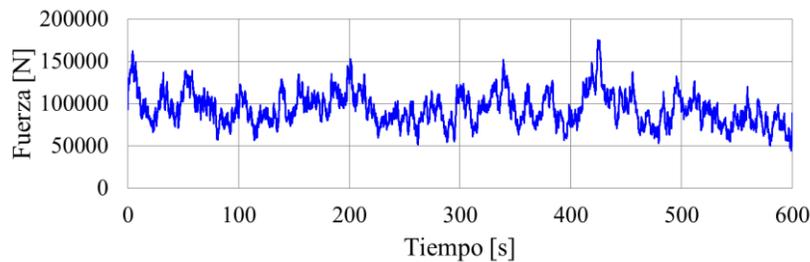


Figura 5.14. Historia de fuerzas eólicas sintéticas para columna y tablero de un puente.

Para obtener la fuerza de inercia máxima elástica no se parte de la idea de un espectro elástico de aceleraciones, ya que la excitación es directamente una fuerza (eólica), por lo tanto lo que se toma como fuerza de inercia máxima elástica es la fuerza máxima que se presenta en la simulación de fuerzas de viento, este valor es de $175,257.27 \text{ N}$. Además la rigidez antes del agrietamiento (K_c) se toma como la rigidez elástica del oscilador (K_e), la cual para este

ejemplo es la rigidez lateral K , la rigidez secante (K_s) es igual a ($\frac{1}{2} K_e$), los demás valores se toman como se describen en la sección (5.1.1).

En la tabla 5.3 se muestran los valores de los parámetros que se necesitan para el modelo de Takeda.

Tabla 5.3. Valores para el modelo de Takeda (carga eólica).

Concepto	Carga eólica
Fuerza de inercia máxima elástica (Fe) [N]	175,257.27
Fuerza de fluencia (Fy) [N]	43,814.32
Fuerza de agrietamiento (Fc) [N]	14,604.77
Rigidez secante (Ks) [N/m]	44,000,000
Rigidez antes del agrietamiento (Kc) [N/m]	88,000,000
Rigidez antes de la fluencia (Ky) [N/m]	35,192,228.92
Rigidez después de la fluencia (Ku) [N/m]	8,800,000
Desplazamiento de agrietamiento (Dc) [m]	0.000166
Desplazamiento de fluencia (Dy) [m]	0.000996

Los resultados que se obtienen se presentan en la tabla 5.4, mostrando los valores máximos del desplazamiento, velocidad, aceleración y energías y en la Figura 5.15 se obtiene la respuesta en el tiempo del desplazamiento, fuerza restauradora y balance de energía del oscilador.

Tabla 5.4. Valores máximos en el intervalo inelástico, columna y tablero de un puente ante carga eólica.

Respuesta	Carga eólica
Desplazamiento máx. (m)	0.0225
Velocidad máx. (m/s)	0.0275
Aceleración máx. (m/s ²)	0.0926
Fza. Restauradora máx (N)	233,033.8644
E. Cinética (J)	407.5888
E. de amortiguamiento (J)	3,305.8544
E. Potencial (J)	308.5499
E. Histerética (J)	2,976.9342
E. Sumadas (J)	5,761.9786
E. de Entrada (J)	5,772.3324
Fuerza cortante máxima (N)	496,113.29
Momento de volteo máximo (N-m)	5,953,359.47

Haciendo comparación de los resultados mostrados en la Figura 5.15 con los resultados de este y demás capítulos cuando se somete la estructura a una excitación eólica o excitación en la masa con fuerzas de viento se tienen desplazamientos muy elevados, haciendo pensar que los resultados de estos programas son erróneos; aquí se aprecia claramente que ante cargas fuertes de viento la estructura no sufre gran excitación como con el registro sísmico de “San Juan de los Llanos”. Esto se debe a la gran rigidez que se tiene, además de los parámetros que se toman para el modelo histerético que aquí se proponen.

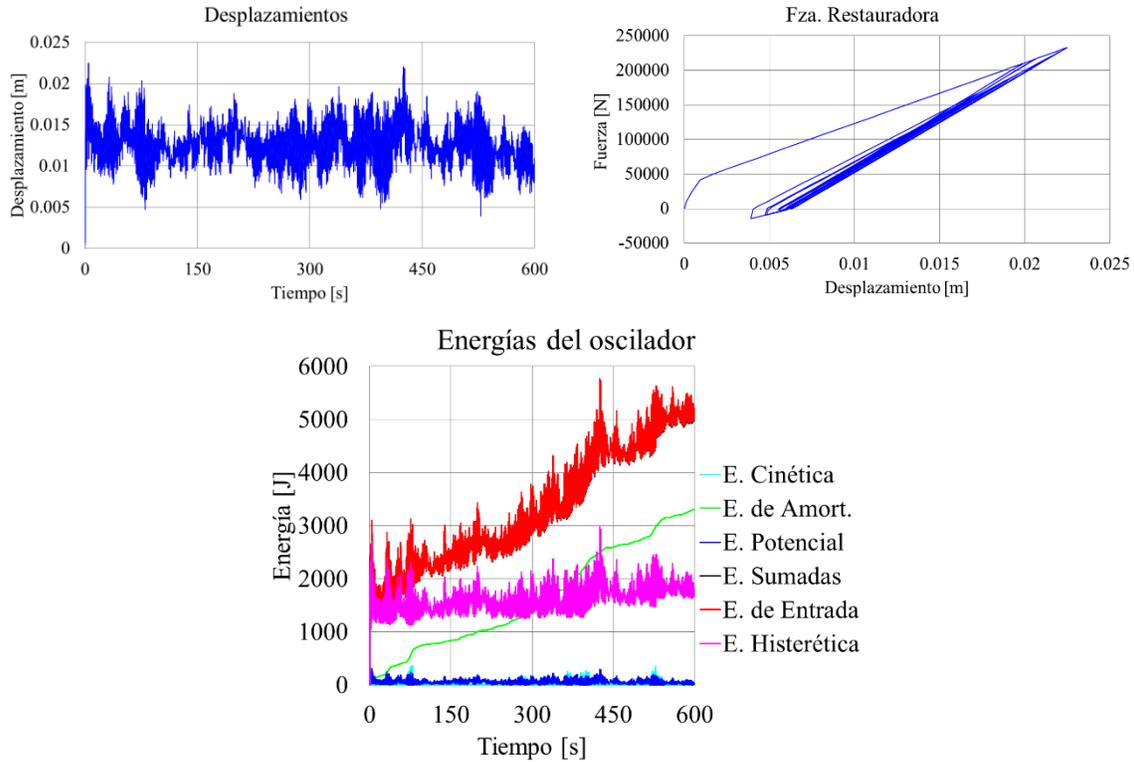


Figura 5.15. Historia de desplazamientos, fuerza restauradora y balance de energía en el intervalo inelástico (modelo de Takeda), columna y tablero de un puente ante carga eólica.

5.2 Oscilador de múltiples grados de libertad (MGDL) en el intervalo inelástico, modelo histerético de Takeda

En esta sección se muestra la forma de analizar y obtener la respuesta en el tiempo de un análisis sísmico o eólico de un sistema masa – resorte de MGDL incursionando en la no linealidad del material por medio del modelo histerético de Takeda (modificado por Shunsuke Otani). Este modelo representa al comportamiento del concreto.

El problema que se tiene y es como se menciona anteriormente, no hay un método confiable para estimar la rigidez inicial, deformación de fluencia y la deformación última.

Para esto se ayudan de pruebas a tamaño real o escalas de diferentes modelos, estimando así los valores y parámetros necesarios para el modelo histerético.

Para este trabajo y ejemplo se toma la idea que se menciona en la sección (5.1.1). Para la excitación en la base se parte de la fuerza de inercia máxima elástica, la cual se obtiene realizando el producto de la masa por la respuesta máxima de aceleración del oscilador, para esto se necesita un espectro de aceleraciones, ver cuál aceleración le corresponde según sea el periodo obtenido del oscilador y tomar como respuesta máxima de aceleración ese valor,

solo que para un oscilador de MGDL se tomará como periodo el fundamental. Siendo la fuerza de inercia máxima elástica el producto de la masa de cada GDL por la respuesta máxima de aceleración, teniendo así un modelo hysterético distinto para todos los GDL (dependiendo siempre de la masa).

Para cuando es una excitación en las masas la fuerza de inercia máxima elástica para cada GDL se toma como la fuerza máxima que se presenta en la simulación de fuerzas de viento. Los demás parámetros se obtienen como se describe en la sección (5.1.3.2).

Se toma como valor de ductilidad igual a $\mu = 2$, como parámetro de degradación de la rigidez de descarga (α) como 0.25 y como factor que controla la rigidez de recarga (β) como 1.

Cabe mencionar que los programas están diseñados para introducir los parámetros que el lector crea convenientes, ya sea calculándolos como se muestra en este trabajo o de otra forma.

5.2.1 Ejemplo de aplicación

Para las propiedades del oscilador son las mismas que la sección (2.2.1), siendo el periodo fundamental igual a $T = 0.6753s$.

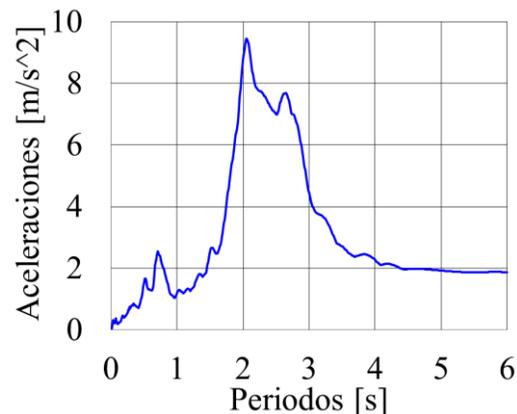


Figura 5.16. Espectro elástico de aceleración, SCT 1985/09/19.

5.2.1.1 Análisis sísmico

El registro sísmico que se toma para el análisis paso a paso es el de SCT de 1985/09/19, canal número 2 “N90E”. En la Figura 5.16 se muestra el espectro de aceleraciones del registro.

Con el periodo fundamental del oscilador se busca en el espectro qué aceleración máxima le corresponde, siendo igual a $2.0792 m/s^2$. Teniendo esto se parte el cálculo para los parámetros del modelo, estos se muestran para cada nivel en la tabla 5.5. Lo único que se cambia con respecto a la sección (5.1.1) para esta sección es el cálculo de la rigidez secante (K_s), la cual es igual a $(\frac{1}{2} K_e)$, la rigidez antes del amortiguamiento (K_c), la cual es igual a la rigidez elástica del oscilador (K_e) y (f_y) no se ve afectado por algún porcentaje.

Los resultados que se comparan son las respuestas de desplazamientos de los 3 niveles y el balance de energía (Figura 5.18). En el lado izquierdo (a) se tienen a las respuestas elásticas obtenidas en el capítulo 2 y los del lado derecho (b) son las respuestas obtenidas considerando el modelo histerético de este capítulo. Además se presentan las fuerzas de restitución de cada nivel en la Figura 5.17.

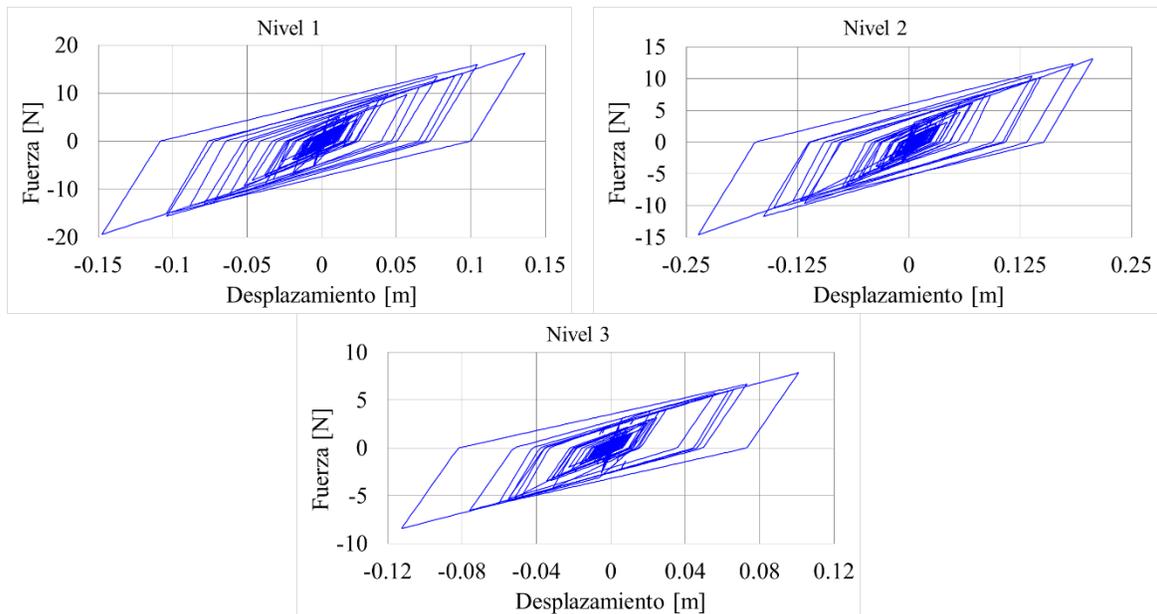


Figura 5.17. Fuerza de restitución de cada nivel del oscilador de 3GDL con excitación en la base.

Se logra apreciar el cambio significativo que se presenta debido a la consideración de la no linealidad del material, los desplazamientos aumentan considerablemente, tanto que los resultados que se obtienen son irreales, esto se debe a dos factores; el primero es la forma de cómo obtener los parámetros del modelo histerético, como se menciona en párrafos anteriores, no existe una forma cómo tal de obtener ciertos parámetros, existen varias propuestas, entre una de esas es la que se presenta en este trabajo, la forma más adecuada de obtener estos parámetros se escapa de los alcances de este trabajo. Y segundo la rigidez que se le proporciona al oscilador, ya que se podría proponer el doble o triple de rigidez por cada GDL proponiendo secciones más grandes, si fuera el caso, así los desplazamientos y toda la respuesta en general disminuiría. En la Figura 5.19 se muestran las respuestas de desplazamiento y fuerza de restitución del nivel 3 considerando el triple de la rigidez que se propone al inicio del ejemplo. También se muestra el balance de energía del oscilador.

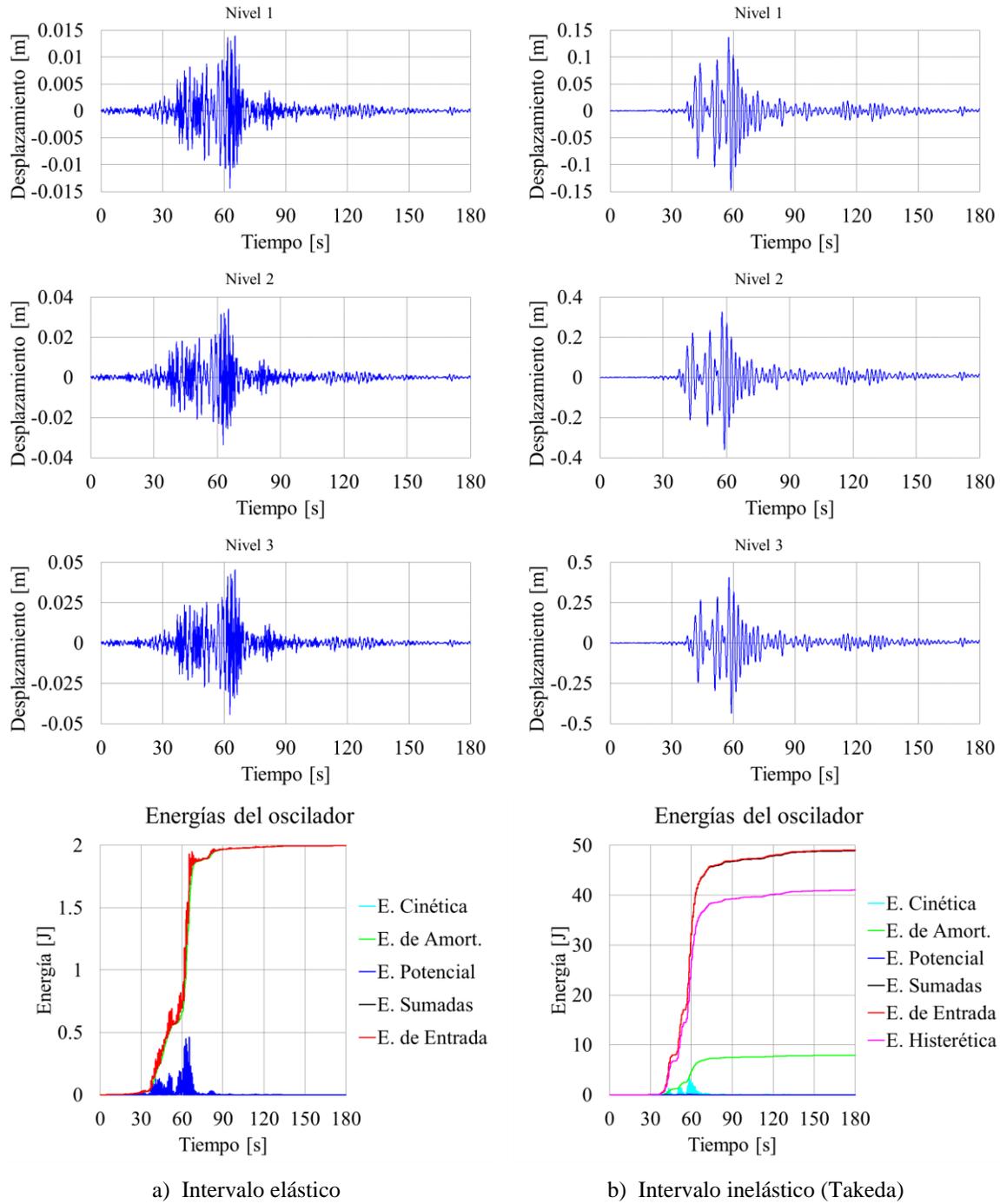
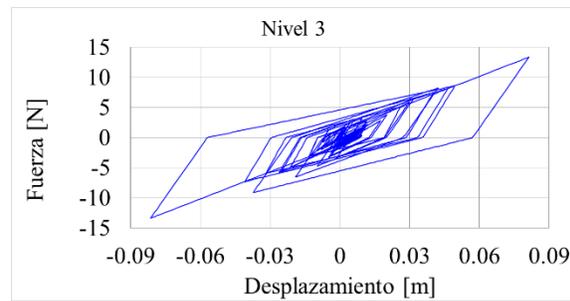
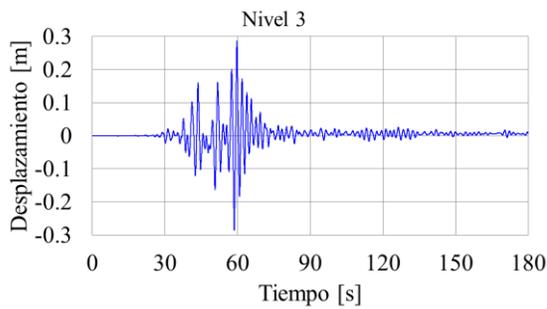


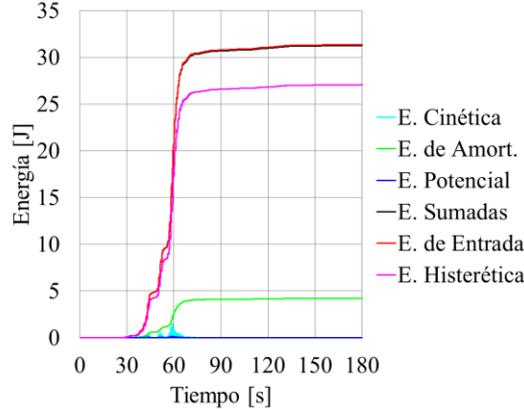
Figura 5.18. Comparación de resultados, oscilador de 3DGL intervalo inelástico (Takeda), excitación en la base.

Tabla 5.5. Valores para el modelo de Takeda, registro SCT 1985/09/19 (cargas sísmicas).

Concepto	Registro de SCT 1985/09/19		
	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Fuerza de inercia máxima elástica (Fe) [N]	10.396	6.2376	6.2376
Fuerza de fluencia (Fy) [N]	5.198	3.1188	3.1188
Fuerza de agrietamiento (Fc) [N]	1.7327	1.0396	1.0396
Rigidez secante (Ks) [N/m]	1000	500	500
Rigidez antes del agrietamiento (Kc) [N/m]	2000	1000	1000
Rigidez antes de la fluencia (Ky) [N/m]	800	400	400
Rigidez después de la fluencia (Ku) [N/m]	100	50	50
Desplazamiento de agrietamiento (Dc) [m]	0.000866	0.00104	0.00104
Desplazamiento de fluencia (Dy) [m]	0.0052	0.00624	0.00624



Respuesta de desplazamientos.



Fuerza de restitución

Balance de energía del oscilador.

Figura 5.19. Comparación de resultados, oscilador de 3GDL intervalo inelástico (Takeda), excitación en la base aumentando 3 veces la rigidez inicial.

Se observa que los desplazamientos y el balance de energía del oscilador disminuyen considerablemente comparado con la respuesta con la rigidez que se propone al principio.

5.2.1.2 Análisis eólico

Para el análisis eólico paso a paso se calcula la simulación de viento para el oscilador de tres GDL. Esta simulación se realiza en el ejemplo de la sección (7.5.10), siendo las gráficas de fuerzas de viento para cada nivel mostradas en la Figura 7.6.

Se modifican un poco las propiedades del oscilador debido a la fuerza de la excitación eólica, ya que como son fuerzas de viento muy elevadas se necesita tener un oscilador con propiedades más grandes y apegarlo un poco más a la realidad, por esto se proponen masas igual a, $M_1 = 5,000kg$, $M_2 = 3,000kg$, $M_3 = 3,000kg$; rigideces laterales igual a, $K_1 = 2,000,000 N/m$, $K_2 = 1,000,000 N/m$, $K_3 = 1,000,000 N/m$; se considera un porcentaje de amortiguamiento para el primer y segundo modo de $\zeta_1 = 0.01$ y $\zeta_2 = 0.01$, respectivamente. Las condiciones iniciales, las alturas de entrepiso y el periodo fundamental del oscilador siguen siendo las mismas.

Teniendo los 3 registros de fuerzas para cada nivel se procede a obtener la fuerza de viento máxima de cada registro, la cual representa la fuerza de inercia máxima en los parámetros del modelo hysterético. La fuerza de inercia máxima elástica para el nivel 1 es igual a $8,283.91 N$, para el nivel 2 es de $8,369.13 N$ y para el nivel 3 de $5,109.03 N$. Teniendo esta fuerza se parte el cálculo de los demás parámetros del modelo mostrados en la tabla 5.6.

Los resultados que se comparan son las respuestas de desplazamientos de los 3 niveles y el balance de energía (Figura 5.20). En el lado izquierdo (a) se tienen a las respuestas elásticas y los del lado derecho (b) son las respuestas obtenidas considerando el modelo hysterético de este capítulo. Además se presentan las fuerzas de restitución de cada nivel para el intervalo inelástico con la Figura 5.21.

Los resultados que se obtienen tienden a aumentar cuando se considera la no linealidad del material, caso similar a cuando se tiene la excitación del oscilador es en la base, pero se vuelve a recordar que se debe a la forma de obtener los parámetros del modelo.

Tabla 5.6. Valores para el modelo de Takeda, simulación numérica de viento (cargas eólicas).

Concepto	Fuerza de viento		
	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Fuerza de inercia máxima elástica (Fe) [N]	8,283.91	8,369.13	5,109.03
Fuerza de fluencia (Fy) [N]	4,141.96	4,184.57	2,554.52
Fuerza de agrietamiento (Fc) [N]	1,380.65	1,394.86	851.51
Rigidez secante (Ks) [N/m]	1,000,000	500,000	500,000
Rigidez antes del agrietamiento (Kc) [N/m]	2,000,000	1,000,000	1,000,000
Rigidez antes de la fluencia (Ky) [N/m]	800,000	400,000	400,000
Rigidez después de la fluencia (Ku) [N/m]	100,000	50,000	50,000
Desplazamiento de agrietamiento (Dc) [m]	0.000690	0.001395	0.000852
Desplazamiento de fluencia (Dy) [m]	0.004142	0.008369	0.005109

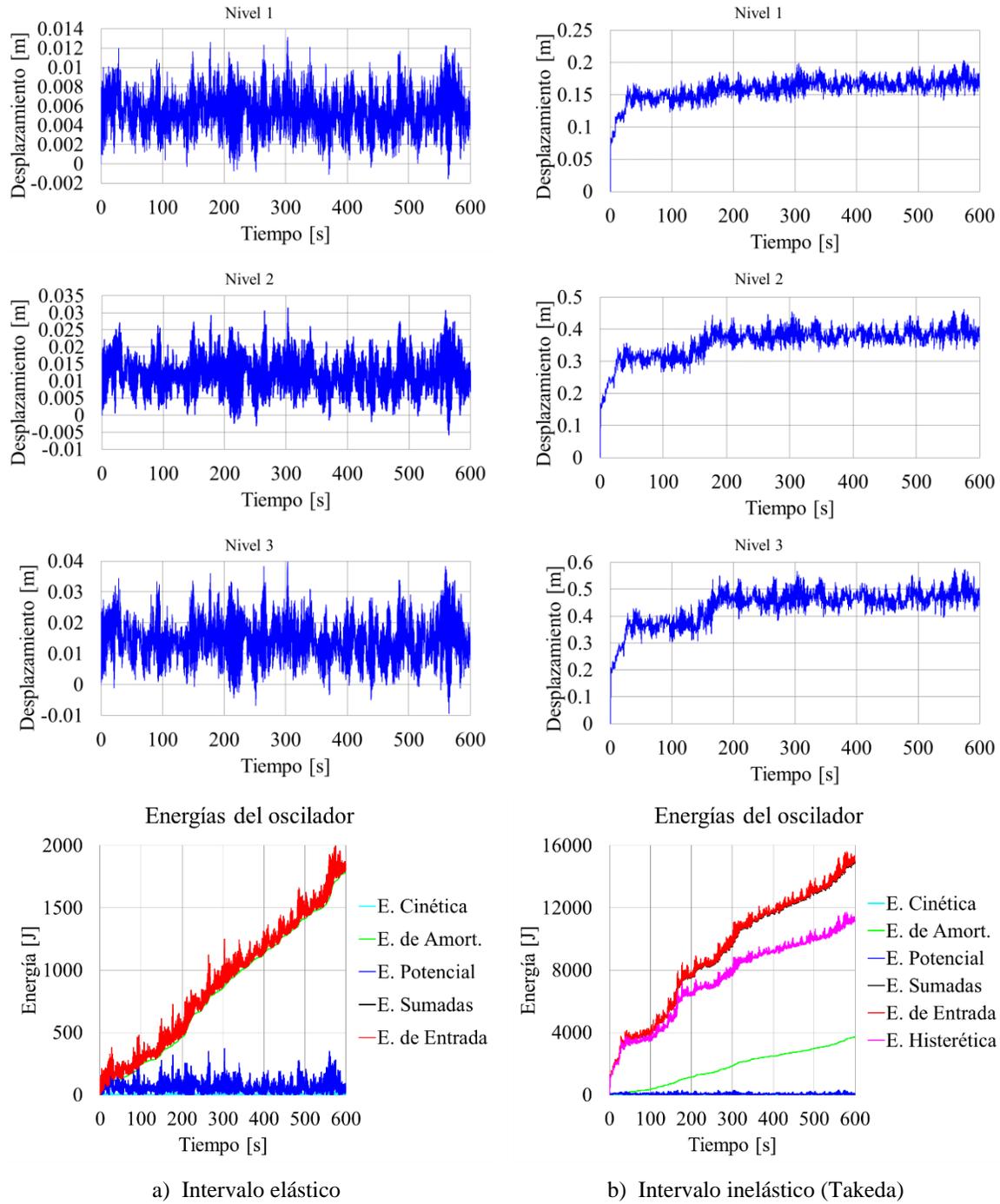


Figura 5.20. Comparación de resultados, oscilador de 3DGL intervalo inelástico (Takeda), excitación en la masa.

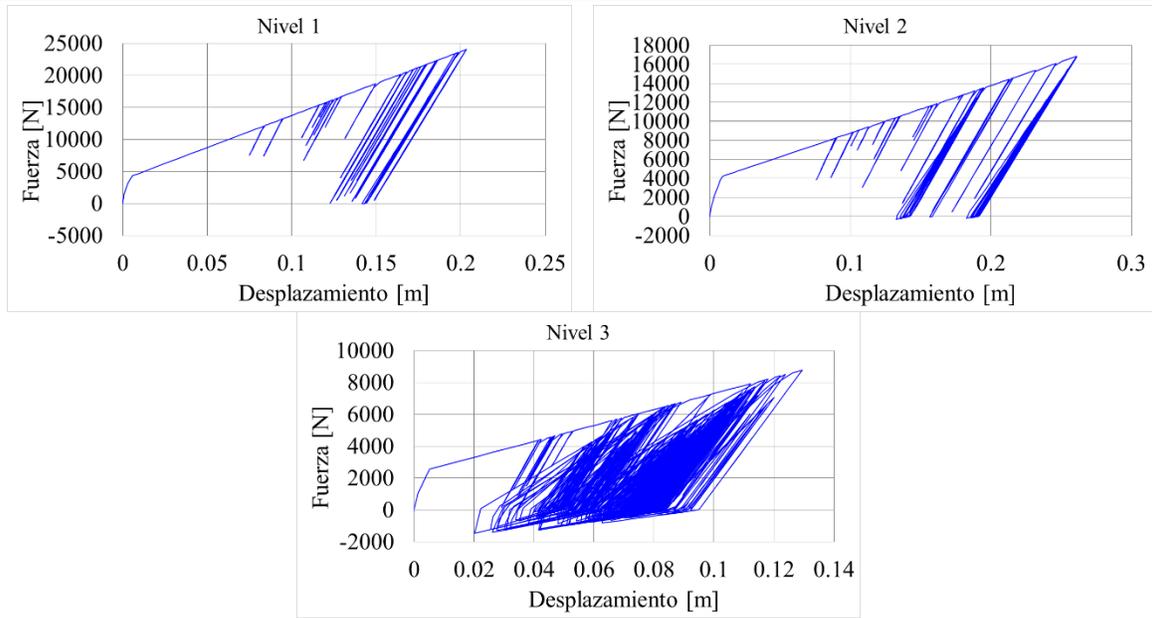


Figura 5.21. Fuerza de restitución de cada nivel del oscilador de 3GDL con excitación en la masa.

El valor que se obtiene de los parámetros son muy pequeños (Tabla 5.6) para los desplazamientos (agrietamiento y fluencia), es por eso que incursiona en el intervalo inelástico al momento de realizar el análisis, siendo esto irreal, ya que en la respuesta lineal se tiene un desplazamiento máximo de casi cuatro centímetros, tal vez ahí ya comenzaría a fluir el concreto, antes sólo sería agrietamiento, pero debido a los parámetros que se ingresan se obtienen los resultados mostrados.

Capítulo 6

Comparación de resultados

6.1 Conclusiones parciales

Después de haber realizado algunos análisis paso a paso de un sistema masa – resorte de uno o múltiples grados de libertad en el intervalo elástico e inelástico del material se genera un concepto diferente de la idea de lo que significa contemplar dichas características, ya que la respuesta en general del sistema u oscilador puede cambiar drásticamente. La respuesta de desplazamientos puede llegar a aumentar aún más del doble de la respuesta elástica o reducirse.

De igual forma un análisis paso a paso contemplando la no linealidad del material se apega más a la realidad del comportamiento del oscilador pudiendo inclusive tener más control del mismo, aprovechando esto para el beneficio del costo de la estructura sin dejar de tomar en cuenta la seguridad y las limitantes que existen al momento de construir una estructura.

6.1.2 Monópolo espectacular

Cuando se analiza la estructura monopolar tipo punto (letrero espectacular) con excitación en la base en el intervalo inelástico, modelo histerético elastoplástico perfecto o bilineal, la respuesta en general disminuye comparándola con el intervalo elástico. Se logra apreciar claramente que los desplazamientos disminuyen, pudiendo decir así que la estructura se beneficia, ya que la demanda de desplazamientos es menor; únicamente se tomaron esos dos modelos histeréticos para esa estructura ya que son los que más se apegan al comportamiento del acero.

El siguiente punto importante que se observó fue que también se logró apreciar que la energía general del oscilador aproximadamente se mantiene en el mismo rango, pero la energía de amortiguamiento disminuye y la energía histerética aparece, ayudando a que se mantenga la energía general de la estructura. Observando así que gracias al daño que recibe la estructura, los desplazamientos disminuyen. Debido a esto se crea la idea de buscar daño en las estructuras para disminuir sus respuestas teniendo dos beneficios muy importantes, los cuales son reducciones de desplazamientos y reducción en el costo de la estructura, ya que se pueden diseñar con secciones más pequeñas para que se presente el daño.

Cabe mencionar que esta ideología (generar daño para disminuir las respuestas) es únicamente a estructuras en las cuales los reglamentos permitan daños a éstas.

Cuando se presenta la excitación en la masa sucede todo lo contrario, los desplazamientos y la energía se eleva drásticamente. Aunque esto sucede debido a la rigidez del oscilador y las fuerzas eólicas que se le introducen, ya que se trató de analizar la estructura con registros sísmicos y fuerzas de viento de gran magnitud (sismos fuertes y huracanes) que pudieran presentarse en la realidad. Pudiendo decir que el monópolo espectacular no resistiría la fuerza del viento con las características que tiene, siendo éste un monópolo con propiedades reales.

Se tendría que proponer una sección más grande para aumentar su rigidez y así a su vez disminuir los desplazamientos.

Una peculiaridad que se presentó con la excitación eólica fue en la gráfica de la fuerza restauradora, la cual tiende solamente al cuadrante positivo, esto se debió a que la fuerza de excitación siempre presenta fuerzas positivas, por ende la respuesta de los desplazamientos tienden a ser siempre positivos. Por lo tanto, cuando se analice una estructura con excitación eólica en el intervalo elástico e inelástico, y estas fuerzas sean positivas, se espera que la respuesta de desplazamientos sea positiva y a su vez la fuerza restauradora para el intervalo inelástico.

Debido a lo anterior se puede concluir que se deben considerar las fuerzas de excitación eólica al momento de analizar la estructura, no dar por hecho de que la fuerza sísmica será la predominante en la respuesta dinámica de algunas estructuras.

6.1.2 Columna de un puente con su tablero

Para la siguiente estructura se toma el modelo histerético de Takeda (modificado por Shunsuke Otani), el cual representa el comportamiento no lineal del concreto.

Cuando se analiza este oscilador con una excitación en la base se observa que la respuesta de desplazamientos disminuye para cuando es un análisis paso a paso incursionando en el intervalo inelástico. La respuesta disminuyó un 50 %, pudiendo decir de nuevo que gracias al daño en la estructura los desplazamientos disminuyen.

Con respecto a las energías del oscilador se puede apreciar que disminuyen un 35 %; en este caso no se mantuvo como en la otra estructura, llegando a la conclusión de que no siempre se debe de mantener la energía del oscilador, ésta puede variar según el daño o la energía histerética que se presente, para esto depende de la rigidez y los parámetros del modelo histerético. Lo que sí vuelve a suceder es que la energía de amortiguamiento disminuye, inclusive la energía histerética es mayor que la de amortiguamiento, siendo más importante el daño que el amortiguamiento en este caso.

Cuando se tiene una excitación en la masa, igual que la anterior estructura, la respuesta de desplazamiento y energía aumentan. Aunque esto se debe mucho a los parámetros que se utilizan en el modelo histerético. La forma que se presenta en este trabajo de cómo obtener

dichos parámetros son correctos para cuando se tiene una excitación en la base y es un oscilador de un grado de libertad, pero la forma para obtenerlos cuando se tiene una excitación en la masa o es un oscilador de múltiples grados de libertad se escapa de los alcances de este trabajo. Debido a que no existe mucha información sobre esto, aquí se muestra una forma de cómo obtenerlos pero no es la correcta, sólo se propone para la presentación de los programas y los posibles resultados. Estos programas están diseñados de manera correcta para todos los casos descritos anteriormente, dejando al lector la forma de introducir los parámetros libremente.

La obtención correcta de los parámetros para los casos con excitación en la masa y un oscilador de múltiples grados de libertad se podrían obtener en un ensayo a escala real o a cierta escala, ya que esta fue la forma de cómo se obtuvo el procedimiento para cuando es un oscilador de un grado de libertad con excitación en la base.

Por lo tanto los beneficios que pudiera tener el considerar la no linealidad del material son bastantes, ya que al parecer disminuiría la respuesta, ya sea con excitación en la base y en la masa, ya que el daño en general disipa energía y esto a la vez produce una disminución en la respuesta dinámica del oscilador, independientemente de que sea una fuerza sísmica o eólica.

De igual manera cabe mencionar que los análisis por viento son importantes para estructuras con poca masa, esbeltas y por la zona en la que se encuentren, tanto que llegan a ser de más peso que los análisis por sismo.

Capítulo 7

Simulación numérica del viento en dirección longitudinal

7.1 Introducción

El viento consiste en el movimiento de aire desde un punto hasta otro. Existen diversas causas que pueden provocar la existencia del viento, pero normalmente se origina cuando entre dos puntos se establece una cierta diferencia de presión o de temperatura. Cuando existe una diferencia de presiones entre dos puntos, el aire tiende a moverse desde la zona de alta presión a la zona de baja presión.

En el caso de que sea una diferencia térmica, lo que ocurre es que cuando una masa de aire adquiere una temperatura superior a la de su entorno, su volumen aumenta, lo cual hace disminuir su densidad, por efecto de la flotación, la masa de aire caliente ascenderá, y su lugar será ocupado por otras masas de aire, que en su desplazamiento ocasionarán el viento.

Todos estos fenómenos del viento ocurren en la capa más próxima al suelo la cual es llamada tropósfera, ésta contiene más del 75% del aire presente en la Tierra. Su espesor es alrededor de 18 *km* en la zona intertropical y 7 *km* en las zonas polares.

La característica del aire que necesitamos conocer o es de nuestro interés es su densidad la cual se obtiene con la siguiente ecuación:

$$\rho = \rho_0 \frac{0.392\Lambda}{273 + \tau} \quad (7.1)$$

donde ρ_0 , Λ y τ representa la densidad del aire a nivel del mar con una temperatura de 15 °C y es igual a 1.225 *kg/m³*, la presión barométrica del sitio en *mm* de mercurio y la temperatura ambiental anual promedio en °C del sitio respectivamente.

En la mecánica de fluidos, se clasifica al movimiento del viento por el tipo de flujo que se pueda presentar, ya sea un flujo laminar o un flujo turbulento. Para el flujo laminar se refiere a que el movimiento es ordenado, estratificado y suave, esto quiere decir que su movimiento es en forma de láminas paralelas sin entremezclarse. Este flujo suele utilizarse para diseñar estructuras rígidas.

Para el flujo turbulento es totalmente distinto, se refiere a que el movimiento es de forma caótica en el cual las partículas se mueven desordenadamente y debido a esto se generan pequeños remolinos periódicos. Este comportamiento se debe a que las partículas chocan con alguna obstrucción o irregularidades de la superficie del terreno o incluso entre las mismas partículas del viento. Este flujo se utiliza para el diseño de estructuras flexibles que son susceptibles a los efectos dinámicos del viento.

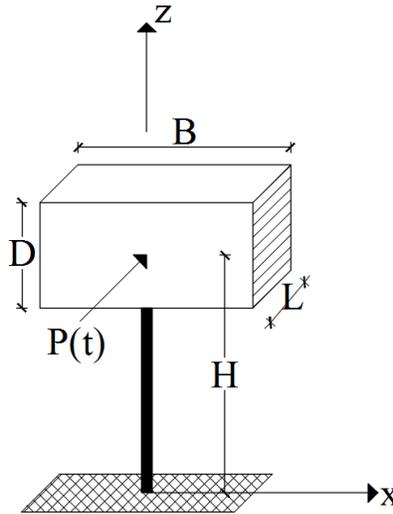


Figura 7.1. Representación esquemática de una estructura tipo punto.

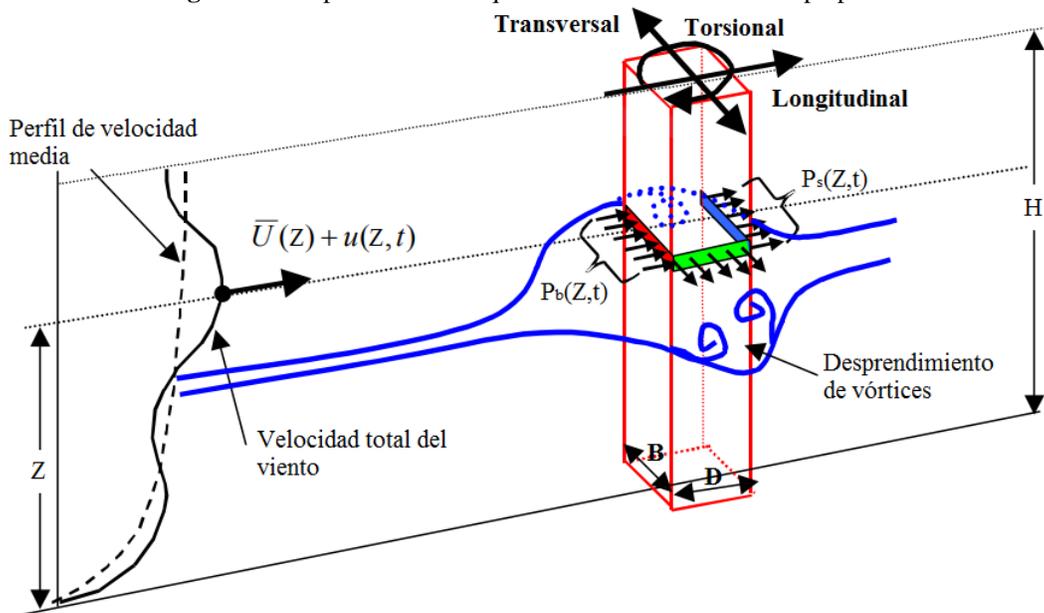


Figura 7.2. Edificio prismático expuesto a la velocidad del viento.

La determinación del tipo de flujo que se presenta en el aire está en función del número de Reynolds que se pueda presentar.

Como se mencionó, el flujo turbulento se utiliza para el diseño de estructuras flexibles que son susceptibles a los efectos dinámicos del viento, es por eso que de ahí parte el interés del comportamiento del viento en un flujo turbulento. La velocidad del viento turbulento se representa como un vector, $U(X, Y, Z, t)$, en un espacio tridimensional. Este a su vez puede descomponerse en tres componentes ortogonales las cuales serían longitudinal $U(Z, t)$, transversal $v(Z, t)$ y vertical $w(Z, t)$.

Para los alcances de este trabajo sólo se presentará la forma de simular numéricamente la velocidad y fuerzas del viento en la componente longitudinal y también se tomará como oscilador de 1GDL una estructura tipo punto (Figura 7.1) y como oscilador de MGDL a un edificio prismático el cual se muestra en la Figura 7.2, donde $P_b(Z, t)$, $P_s(Z, t)$, B y D son la presión en la cara del lado de barlovento, la succión en la cara del lado de sotavento, el ancho del edificio perpendicular al flujo del viento y el ancho del edificio paralelo al flujo del viento respectivamente.

La velocidad total de la componente longitudinal del viento se define como,

$$U(Z, t) = \bar{U}(Z) + u(Z, t) \quad (7.2)$$

donde $\bar{U}(Z)$ se refiere a la velocidad media del viento a una altura Z y $u(Z, t)$ se refiere a la componente de la turbulencia del viento en la dirección longitudinal a una altura Z en un tiempo t .

También se debe tener en cuenta que la respuesta dinámica del oscilador, o en este caso del edificio prismático, estará presente en las componentes longitudinal, transversal y torsional. No en todos los casos la respuesta longitudinal será la mayor, ya que depende de varios factores del viento y el oscilador y es por eso que se deben analizar las 3 componentes.

Para la simulación de registros de viento se necesita de un proceso aleatorio el cual pueda simular de manera estadística el comportamiento del viento tomando en cuenta la turbulencia del mismo. Los métodos de simulación usualmente usados son dos: 1) El modelo de autoregresión de media móvil (ARMA) y 2) el modelo de representación espectral de Shinosuka o dicho de otra forma, Weighted Amplitude Wave Superposition (WAWS). Para este trabajo se usará el modelo de representación espectral debido a su facilidad de poder comenzar de un espectro teórico de la potencia del viento. Cabe mencionar que los registros de viento deben simularse durante un tiempo adecuado, la recomendación de este tiempo va de 10 a 60 minutos. En las secciones (7.3) y (7.5) se explicará la forma adecuada de como realizar las simulaciones, de dónde obtener los datos necesarios para el cálculo y un diagrama de flujo en el cual se detalla el procedimiento.

7.2 Ecuación de movimiento para un oscilador de 1GDL ante carga eólica

Retomando la ecuación (2.1) siendo $P(t)$ igual a,

$$P_D(Z,t) = \frac{1}{2} \rho C_D A [U_R(Z,t)]^2 \quad (7.3)$$

donde $P_D(Z,t)$ es la fuerza producida por el viento a una altura Z en un tiempo t , ρ es la densidad del aire, C_D es el coeficiente de arraste o de presión (adimensional) que depende de varios factores como la forma y la velocidad del viento, entre otros, A es el área de contacto perpendicular al aire y $U_R(Z,t)$ es la velocidad relativa del viento a una altura Z en un tiempo t .

Sabemos que cuando un oscilador es excitado por una fuerza externa producirá en él desplazamientos, velocidades, aceleraciones y entre otras cosas más; debido a esto se puede considerar que existe una velocidad relativa entre la velocidad del viento y la estructura, o sea,

$$U_R(Z,t) = U(Z,t) - \dot{x}(Z,t) \quad (7.4)$$

donde $U(Z,t)$ se refiere a la velocidad del viento a una altura Z en un tiempo t en la dirección longitudinal descrita en la ecuación (7.2) y $\dot{x}(Z,t)$ se refiere a la velocidad del oscilador a una altura Z en un tiempo t .

El $\left(\frac{1}{2}\right)$ y el exponente al cuadrado de la ecuación (7.3) viene dado por los efectos locales de la carga debido al viento o presión dinámica,

$$q(Z,t) = \frac{1}{2} \rho [U_R(Z,t)]^2 \quad (7.5)$$

7.2.1 Ecuación de movimiento (Forma 1)

La fuerza del viento sobre un oscilador se puede escribir (Goode, 2007) como una versión modificada de la ecuación de Morison:

$$P_D(Z,t) = \frac{1}{2} \rho C_D A U_R(Z,t) |U_R(Z,t)| \quad (7.6)$$

Quedando la ecuación de movimiento del oscilador igual a

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = P_D(Z,t) = \frac{1}{2} \rho C_D A U_R(Z,t) |U_R(Z,t)| \quad (7.7)$$

donde

$$c = 2\zeta\omega_n m \quad (7.8)$$

y donde ζ es la razón del amortiguamiento crítico, ω_n es la frecuencia natural del oscilador y m es la masa del oscilador.

7.2.2 Ecuación de movimiento (Forma 2)

La forma convencional en la ingeniería eólica se tiene que la velocidad relativa $U_R(Z,t)$, elevada al cuadrado es:

$$[U_R(Z,t)]^2 = [U(Z,t) - \dot{x}(Z,t)]^2 = [U(Z,t)]^2 - 2U(Z,t)\dot{x}(Z,t) + [\dot{x}(Z,t)]^2 \quad (7.9)$$

donde la velocidad del viento $U(Z,t)$ se obtiene mediante simulaciones numéricas en la dirección longitudinal.

Sustituyendo la ecuación (7.2) en la ecuación (7.9) se llega a,

$$[U_R(Z,t)]^2 = [\bar{U}(Z) + u(Z,t)]^2 - 2[\bar{U}(Z) + u(Z,t)]\dot{x}(Z,t) + [\dot{x}(Z,t)]^2 \quad (7.10)$$

Desarrollando el exponente del primer término de la derecha

$$[U_R(Z,t)]^2 = [\bar{U}(Z)]^2 + 2\bar{U}(Z)u(Z,t) + [u(Z,t)]^2 - 2[\bar{U}(Z) + u(Z,t)]\dot{x}(Z,t) + [\dot{x}(Z,t)]^2 \quad (7.11)$$

Considerando los valores para obtener la fuerza $P_D(Z,t)$

$$P_D(Z,t) = \frac{1}{2}\rho C_D A [\bar{U}(Z)]^2 + \rho C_D A \bar{U}(Z)u(Z,t) + \frac{1}{2}\rho C_D A [u(Z,t)]^2 - \rho C_D A [\bar{U}(Z) + u(Z,t)]\dot{x}(Z,t) + \frac{1}{2}\rho C_D A [\dot{x}(Z,t)]^2 \quad (7.12)$$

El primer término del lado derecho de la ecuación (7.12) se le llama fuerza media de arrastre del viento y ésta fuerza es invariante en el tiempo aplicada con frecuencia nula o muy lentamente

$$\bar{F}(Z) = \frac{1}{2}\rho C_D A [\bar{U}(Z)]^2 \quad (7.13)$$

Se considera que la fuerza media de arrastre del viento se aplicará con frecuencia nula o muy lentamente.

Por otro lado se conoce a la fuerza de arrastre debido a las fluctuaciones del viento en la dirección longitudinal actuando sobre un área A como:

$$F_1(Z,t) = \bar{F}(Z) + \rho C_D A \bar{U}(Z) u(Z,t) + \frac{1}{2} \rho C_D A [u(Z,t)]^2 \quad (7.14)$$

Las fuerzas asociadas al amortiguamiento aerodinámico, es:

$$F_2(Z,t) = -\rho C_D A [\bar{U}(Z) + u(Z,t)] \dot{x}(Z,t) \quad (7.15)$$

Y por último se le conoce como fuerza asociada al amortiguamiento no lineal a lo siguiente:

$$F_3(Z,t) = \frac{1}{2} \rho C_D A [\dot{x}(Z,t)]^2 \quad (7.16)$$

La fuerza de arrastre que se presenta en una estructura tipo punto (Figura 7.1) con área igual a $A = BD$, perpendicular al flujo de la dirección del viento e incidiendo en el centro del área $Z = H(m)$ es:

$$P_D(H,t) = F_1(t) + F_2(t) + F_3(t) \quad (7.17)$$

Sustituyendo las ecuaciones (7.13) a (7.15) evaluándolas en $Z = H(m)$ y desarrollando se llega a

$$P_D(H,t) = \bar{F}(H) + \rho C_D A \bar{U}(H) u(t) + \frac{1}{2} \rho C_D A [u(t)]^2 - \rho C_D A \bar{U}(H) \dot{x}(t) - \rho C_D A u(t) \dot{x}(t) + \frac{1}{2} \rho C_D A [\dot{x}(t)]^2 \quad (7.18)$$

Agrupando términos comunes

$$P_D(H,t) = \bar{F}(H) + \rho C_D A \bar{U}(H) [u(t) - \dot{x}(t)] + \frac{1}{2} \rho C_D A [u(t)]^2 - \rho C_D A u(t) \dot{x}(t) + \frac{1}{2} \rho C_D A [\dot{x}(t)]^2 \quad (7.19)$$

Debido a que los términos $u(t)$ y $\dot{x}(t)$ son pequeños en comparación con $\bar{U}(H)$ y que la relación entre $u(t)/\bar{U}(H)$ raramente sobrepasa el valor de 0.20 para los intervalos de intensidad de turbulencia se desprecian dando, en forma simplificada, la fuerza del viento como:

$$P_D(H,t) = \bar{F}(H) + \rho C_D A \bar{U}(H) [u(t) - \dot{x}(t)] \quad (7.20)$$

Siendo la ecuación de movimiento del oscilador igual a

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = P_D(H,t) \quad (7.21)$$

Sustituyendo la ecuación (7.20) en la ecuación (7.21)

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = \bar{F}(H) + \rho C_D A \bar{U}(H) [u(t) - \dot{x}(t)] \quad (7.22)$$

donde m , c , k y $x(t)$ son la masa, coeficiente de amortiguamiento viscoso, rigidez lateral y desplazamiento del oscilador respectivamente y $\bar{F}(H)$ es igual a

$$\bar{F}(H) = \frac{1}{2} \rho C_D A [\bar{U}(H)]^2 \quad (7.23)$$

Ya que se está considerando que la fuerza del viento se aplica lentamente con frecuencia casi nula, la respuesta estática del oscilador está asociada a

$$k\bar{x} = \bar{F}(H) \quad (7.24)$$

y el desplazamiento estático de la estructura se calcula con:

$$\bar{x} = \frac{\bar{F}(H)}{k} \quad (7.25)$$

De esta manera se puede separar la parte estática de la dinámica en la ecuación de movimiento del oscilador. La parte fluctuante de la fuerza está relacionada con:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = \rho C_D A \bar{U}(H) [u(t) - \dot{x}(t)] \quad (7.26)$$

En términos de la razón del amortiguamiento crítico, desarrollando y tomando términos comunes

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) + 2\zeta_s \omega_n m \dot{x}(t) + kx(t) &= \rho C_D A \bar{U}(H) u(t) - \rho C_D A \bar{U}(H) \dot{x}(t) \\ m\ddot{x}(t) + 2\zeta_s \omega_n m \dot{x}(t) + \rho C_D A \bar{U}(H) \dot{x}(t) + kx(t) &= \rho C_D A \bar{U}(H) u(t) \\ m\ddot{x}(t) + [2\zeta_s \omega_n m + \rho C_D A \bar{U}(H)] \dot{x}(t) + kx(t) &= \rho C_D A \bar{U}(H) u(t) \end{aligned} \quad (7.27)$$

o bien,

$$m\ddot{x}(t) + 2\omega_n m \left[\zeta_s + \frac{\rho C_D A \bar{U}(H)}{2\omega_n m} \right] \dot{x}(t) + kx(t) = \rho C_D A \bar{U}(H) u(t) \quad (7.28)$$

donde el amortiguamiento equivalente viscoso aerodinámico es:

$$\zeta_a = \frac{\rho C_D A \bar{U}(H)}{2\omega_n m} \quad (7.29)$$

donde ω_n y m son la frecuencia natural del oscilador y la masa del oscilador respectivamente.

El amortiguamiento viscoso aerodinámico puede contribuir considerablemente en la respuesta de estructuras flexibles. La ecuación de movimiento quedaría como

$$m\ddot{x}(t) + 2\omega_n m [\zeta_s + \zeta_a] \dot{x}(t) + kx(t) = \rho C_D A \bar{U}(H) u(t) \quad (7.30)$$

De esta manera se puede representar la ecuación de movimiento de un oscilador de 1GDL considerando las razones de amortiguamiento respectivas.

Si existe un amortiguamiento externo ζ_e debido a dispositivos de disipación, la ecuación de movimiento sería:

$$m\ddot{x}(t) + 2\omega_n m \zeta_T \dot{x}(t) + kx(t) = \rho C_D A \bar{U}(H) u(t) \quad (7.31)$$

donde el amortiguamiento total del sistema es:

$$\zeta_T = \zeta_s + \zeta_a + \zeta_e \quad (7.32)$$

Se debe recordar que el desplazamiento total del oscilador se obtiene sumando la respuesta estática y la respuesta dinámica ya que se separaron desde un principio

$$x_T = \bar{x} + x(t) \quad (7.33)$$

En la mayoría de los códigos de diseño eólico, se expresa como

$$x_T = \bar{x} + x_{m\acute{a}ximo} = \bar{x} + g_f \sigma_x \quad (7.34)$$

donde g_f y σ_x son el factor pico de la respuesta, el cual se encuentra entre 3 y 4, un valor casi común de 3.5 (Y. Tamura, A. Kareem, 2013, pp. 128) y la desviación estándar de la deflexión (desplazamientos) del oscilador respectivamente.

7.2.3 Ecuación de movimiento (Forma 3)

De la ecuación (7.18) se desarrollan los términos y se obtiene

$$P_D(H, t) = \bar{F}(H) + \rho C_D A \bar{U}(H) u(t) - \rho C_D A \bar{U}(H) \dot{x}(t) + \frac{1}{2} \rho C_D A [u(t)]^2 - \rho C_D A u(t) \dot{x}(t) + \frac{1}{2} \rho C_D A [\dot{x}(t)]^2 \quad (7.35)$$

Considerando que el desplazamiento estático está asociado al término que representa la fuerza media del viento se obtiene la ecuación (7.25). De esta manera se puede separar la parte estática de la dinámica de la fuerza $P_D(H, t)$, por ende la ecuación de movimiento del oscilador, en términos de la razón de amortiguamiento crítico, queda como

$$m\ddot{x}(t) + 2\zeta_s \omega_n m \dot{x}(t) + kx(t) = \rho C_D A \bar{U}(H) u(t) - \rho C_D A \bar{U}(H) \dot{x}(t) + \frac{1}{2} \rho C_D A [u(t)]^2 - \rho C_D A u(t) \dot{x}(t) + \frac{1}{2} \rho C_D A [\dot{x}(t)]^2 \quad (7.36)$$

Pasando al lado izquierdo el término que multiplica a la velocidad del oscilador del lado derecho de la ecuación,

$$m\ddot{x}(t) + 2\zeta_s \omega_n m \dot{x}(t) + \rho C_D A \bar{U}(H) \dot{x}(t) + kx(t) = \rho C_D A \bar{U}(H) u(t) + \frac{1}{2} \rho C_D A [u(t)]^2 - \rho C_D A u(t) \dot{x}(t) + \frac{1}{2} \rho C_D A [\dot{x}(t)]^2 \quad (7.37)$$

Agrupando términos comunes,

$$m\ddot{x}(t) + [2\zeta_s \omega_n m + \rho C_D A \bar{U}(H)] \dot{x}(t) + kx(t) = \rho C_D A \bar{U}(H) u(t) + \frac{1}{2} \rho C_D A [u(t)]^2 - \rho C_D A u(t) \dot{x}(t) + \frac{1}{2} \rho C_D A [\dot{x}(t)]^2 \quad (7.38)$$

o bien

$$m\ddot{x}(t) + 2\zeta_s \omega_n m \left[\zeta_s + \frac{\rho C_D A \bar{U}(H)}{2\omega_n m} \right] \dot{x}(t) + kx(t) = \rho C_D A \bar{U}(H) u(t) + \frac{1}{2} \rho C_D A [u(t)]^2 - \rho C_D A u(t) \dot{x}(t) + \frac{1}{2} \rho C_D A [\dot{x}(t)]^2 \quad (7.39)$$

Sustituyendo la ecuación (7.29) en la ecuación (7.39)

$$m\ddot{x}(t) + 2\zeta_s \omega_n m [\zeta_s + \zeta_a] \dot{x}(t) + kx(t) = \rho C_D A \bar{U}(H) u(t) + \frac{1}{2} \rho C_D A [u(t)]^2 - \rho C_D A u(t) \dot{x}(t) + \frac{1}{2} \rho C_D A [\dot{x}(t)]^2 \quad (7.40)$$

Si existe un amortiguamiento externo ζ_e debido a dispositivos de disipación, la ecuación de movimiento sería:

$$m\ddot{x}(t) + 2\zeta_s \omega_n m [\zeta_T] \dot{x}(t) + kx(t) = \rho C_D A \bar{U}(H) u(t) + \frac{1}{2} \rho C_D A [u(t)]^2 - \rho C_D A u(t) \dot{x}(t) + \frac{1}{2} \rho C_D A [\dot{x}(t)]^2 \quad (7.41)$$

Siendo ζ_T igual que en la ecuación (7.32).

La ecuación (7.41) es una ecuación diferencial no lineal y es la que debe de resolverse para obtener una solución más correcta y precisa. Esa solución se refiere a las respuestas de desplazamiento, velocidad, aceleración, entre otras del oscilador de 1GDL. Recordando que

el desplazamiento total es la suma del desplazamiento estático más el desplazamiento dinámico, ecuación (7.33), si es que se separa de la ecuación completa.

Más adelante en este capítulo se presenta un programa listo para su uso en el cual se pueden obtener las simulaciones para un oscilador de 1GDL despreciando el término $\dot{x}(t)$, ya que como se mencionó, es un valor pequeño en comparación con la $\bar{U}(H)$, siendo la fuerza de viento igual a $P_D(Z,t) = \frac{1}{2} \rho C_D A [U(Z,t)]^2$.

7.3 Simulaciones de velocidades y fuerzas para un oscilador de 1GDL [Estructuras tipo punto]

A continuación se muestra una forma fácil y correcta de realizar simulaciones de velocidades y fuerzas producidas por el viento longitudinalmente para un oscilador de 1GDL describiendo cada paso y parámetro necesario para el cálculo y a su vez se presenta un programa listo para su uso con el nombre de “Simulaciones_1GDL”. Se tomó como estructura a analizar una “estructura tipo punto” ya que es fácil obtener su área en la cual el viento tendrá impacto.

7.3.1 Coeficiente de arrastre [C_D]

Este coeficiente se refiere a una cantidad adimensional que es usado para cuantificar la resistencia que tiene un objeto en un medio fluido, que para este trabajo está referido al aire. Este coeficiente siempre está asociado con una superficie en particular, y con el número de Reynolds, esto quiere decir que para cada forma y dependiendo el número de Reynolds habrá un coeficiente diferente.

Para la obtención de éste existen muchas tablas y gráficas en los códigos de diseño eólico, en los libros de mecánica de fluidos, etc. En el manual de diseño de obras civiles, diseño por viento 2008 se presentan algunas tablas de coeficientes de arrastre para elementos estructurales cilíndricos y para elementos prismáticos (Tabla A.1 y tabla A.2 del MDOC diseño por viento, 2008, pp. 4A. I. 2 y 4A. I. 3).

7.3.2 Velocidad media del viento

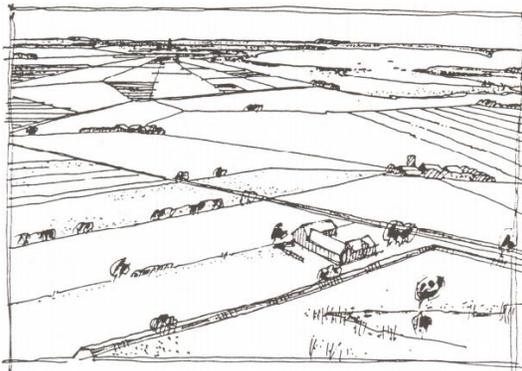
En la figura 7.2 se puede apreciar el perfil de velocidad media del viento. La velocidad media del viento aumenta de forma logarítmica conforme aumenta la altura, este aumento se mantiene hasta alrededor de 1 km (Holmes, 2004), después de ahí es constante. A esa altura límite se le conoce como altura gradiente. En ese punto la rugosidad del terreno deja de tener influencia sobre la velocidad media del viento. Dentro de la altura gradiente se presentan fenómenos de turbulencia en el viento, más cuando existe cierta rugosidad en la superficie del terreno. Debido a esta turbulencia se derivan dos conceptos importantes que servirán más

adelante los cuales son $I_u(Z)$ y $L_u(Z)$, la intensidad de turbulencia del viento y la longitud de la escala integral del tiempo que representa el tamaño de los remolinos o vórtices respectivamente.

La rugosidad en la superficie del terreno se divide en 4 categorías las cuales se muestran en la tabla 7.1.

Tabla 7.1. Categorías de terreno y parámetros del terreno.

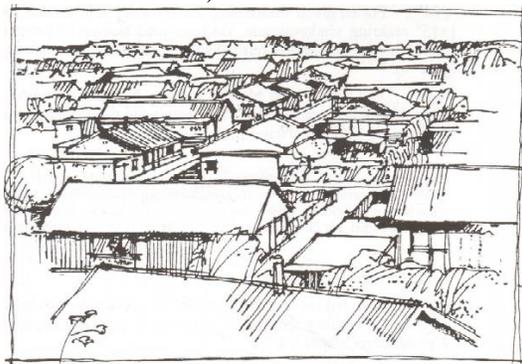
Categoría del terreno	z_o (m)	Descripción del terreno
I	0.01	Lagos o área plana con vegetación despreciable y sin obstáculos.
II	0.05	Área con pocas obstrucciones, como vegetación, hierba y obstáculos aislados (árboles, edificios, etc.).
III	0.3	Área con cobertura regular de vegetación o edificios o con obstáculos aislados (terreno suburbano, bosque permanente).
IV	1	Área en la que al menos el 15% de la superficie está cubierta con edificios y su altura promedio supera los 15 m.



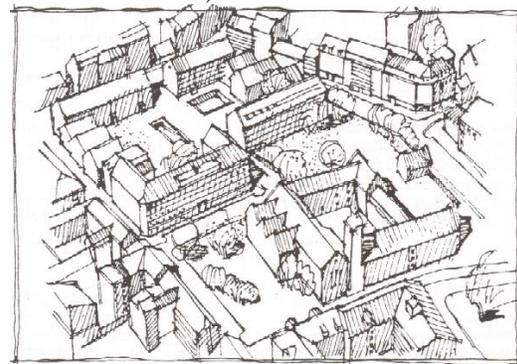
a) Terreno I.



b) Terreno II.



c) Terreno III.



d) Terreno IV.

Figura 7.3. Categoría de terrenos.

De igual manera se muestra en la figura 7.3 la representación gráfica de lo que se explica en la parte de la descripción del terreno en la tabla 7.1, esto es para que se tenga una idea más clara de lo que se refiere cada categoría del terreno, donde z_o es la longitud de rugosidad del terreno deseado.

La velocidad media se ve presente en el cálculo de la velocidad total del viento, ecuación (7.2) primer término del lado derecho.

Hoy en día existen tres modelos que permiten obtener el perfil de velocidad media del viento las cuales son: 1) Ley de potencia, 2) ley logarítmica y 3) ley logarítmica corregida. Los 3 modelos anteriores convergen correctamente hasta una altura de 200 *m*. El único que sigue teniendo un correcto comportamiento y buena descripción de perfil de velocidades a mayores alturas es el tercer modelo, ya que contempla la altura de la capa límite atmosférico del lugar de interés.

El modelo o ecuación que describe el perfil de velocidad media es el siguiente:

$$\bar{U}(Z) = \frac{u^*}{k} \left[\ln \left(\frac{Z}{z_o} \right) + 5.75b - 1.88b^2 - 1.33b^3 + 0.25b^4 \right] \quad (7.42)$$

donde:

$$u^* \approx \frac{k\bar{U}(z_r)_{D,10\min}}{\ln \left(\frac{z_r}{z_o} \right)} \quad (7.43)$$

$$k \approx 0.4 \quad (7.44)$$

$$b = \frac{Z}{z_g} \quad (7.45)$$

$$z_r = 10m \quad (7.46)$$

$$z_g = \frac{u^*}{6f_c} \quad (7.47)$$

$$f_c = 2\Omega \text{sen}(\lambda) \quad (7.48)$$

y donde, $\bar{U}(Z)$ es la velocidad media del viento en la altura Z , u^* es la velocidad de fricción del viento, k es la constante de Von Kármán, $\bar{U}(z_r)_{D,10\min}$ es la velocidad de referencia de diseño, z_r es la altura de referencia, z_g es la altura gradiente del sitio de interés, f_c es el coeficiente de Coriolis en s^{-1} , Ω es la velocidad angular de la Tierra ($2\pi/24$ horas = 7.27×10^{-5} rad/s) y λ es la latitud del sitio de interés en $^\circ$.

La velocidad de referencia de diseño se obtiene de la siguiente manera:

$$\bar{U}(z_r)_{D,10\min} = F_T F_R \bar{U}(z_r)_{R,10\min} \quad (7.49)$$

donde:

$$F_R = k_t \ln \left(\frac{z_r}{z_0} \right) \tag{7.50}$$

$$k_t = 0.19 \left(\frac{z_0}{z_{o,2}} \right)^{0.07} \tag{7.51}$$

$$\bar{U}(z_r)_{R,10\text{min}} = 0.702 \bar{U}(z_r)_{R,3s} \tag{7.52}$$

y donde, F_T es un factor de topografía, F_R es el factor de cambio de rugosidad del terreno, k_t es un parámetro de rugosidad del terreno, $z_{o,2}$ es la longitud de rugosidad de un terreno de categoría 2 (tabla 7.1), $\bar{U}(z_r)_{R,10\text{min}}$ es la velocidad media del viento medida a una altura de referencia $z_r = 10 \text{ m}$ con un tiempo de promediación de 10 minutos en un terreno de categoría 2 y se puede obtener directamente de cualquier código internacional de diseño eólico en función del periodo de retorno del viento y $\bar{U}(z_r)_{R,3s}$ es la velocidad media del viento medida a una altura de referencia $z_r = 10 \text{ m}$ con un tiempo de promediación de 3 segundos en un terreno de categoría 2.

El valor de $\bar{U}(z_r)_{R,3s}$ se puede obtener directamente del MDOC (2008) para distintas ciudades de la República Mexicana y para distintos periodos de retorno.

El factor topográfico F_T se obtiene de la siguiente tabla 7.2, la cual viene del MDOC (2008).

Tabla 7.2. Factores de topografía.

Sitios	Ejemplos de topografía local	F_T
Protegidos	Base de promontorios y faldas de serranías del lado de sotavento	0.8
	Valles cerrados	0.9
Normales	Terreno prácticamente plano: campo abierto, ausencia de cambios topográficos importantes, con pendientes menores que 5 %	1
Expuestos	Terrenos inclinados con pendiente entre 5% y 10%, valles abiertos y litorales planos	1.1
	Cimas de promontorios, colinas y montañas, terrenos con pendientes mayores que 10%, cañadas cerradas y valles que forman un embudo o cañón, islas	1.2

Tabla 7.3. Parámetros de la velocidad media del viento para un tiempo de 10 minutos.

Categoría del terreno	z_o (m)	z_{min}	k_t	F_R
I	0.01	2	0.17	1.17
II	0.05	4	0.19	1
III	0.3	8	0.22	0.77
IV	1	16	0.24	0.55

En la tabla 7.3 se presentan los parámetros necesarios para el cálculo de la velocidad media del viento para un tiempo de promediación de 10 min , donde z_{min} es la altura por debajo de la cual puede considerarse constante el perfil de velocidad media del viento.

Para el programa de uso el usuario tendrá que introducir manualmente el dato de la velocidad media del viento medida a una altura de referencia z_r , o sea, $\bar{U}(z_r)_{R,10\text{min}}$. Esto quiere decir que ese dato debe de calcularse manualmente por afuera del programa, ya que el programa está pensado para que tenga un uso internacional.

7.3.3 Espectro teórico de potencia de la velocidad longitudinal del viento e intervalos de frecuencia y tiempo

Para el cálculo del espectro de potencia del viento se debe tomar en cuenta las frecuencias características de las ráfagas de viento; y para la respuesta de cualquier oscilador, en este caso para el ejemplo que se manejará (edificio prismático), las frecuencias de vibración.

Con base a lo anterior se delimitan los números de las frecuencias teniendo así un ancho de banda del espectro que va de $f_1 = 0.001\text{Hz}$ a $f_u = 10\text{Hz}$. De acuerdo con el teorema de Nyquist, el intervalo de tiempo de las simulaciones de viento es igual a:

$$\Delta t = \frac{1}{2f_u} \quad (7.53)$$

Y el intervalo de frecuencias a:

$$\Delta f = \frac{f_u - f_1}{N - 1} = \frac{f_u - f_1}{\left[\frac{T}{\Delta t} + 1 \right] - 1} \quad (7.54)$$

donde N y T son el número de datos y la duración total de la señal simulada (600 s) respectivamente. Como se menciona anteriormente, se recomienda que los registros de viento deben simularse durante un tiempo adecuado, la recomendación de este tiempo va de 10 a 60 minutos.

A lo largo de la historia desde que comenzó el estudio del viento sobre las estructuras se han plantado bastantes modelos teóricos para el cálculo del espectro de potencia de la velocidad longitudinal del viento, por nombrar algunos autores son: Kolmogorov (1941), Von Kármán (1948), Davenport (1961), Harris (1972), Kaimal (1972), Solari (1993), entre otros.

Han sido aceptables al paso de los años pero no quiere decir que sean las más precisas ya que algunos modelos no tienen buen comportamiento a cierta altura, otros no reproducen adecuadamente la potencia del viento en frecuencias bajas o incluso subestiman la potencia del viento en frecuencias altas.

Hoy en día existe otro modelo el cual fue propuesto por Harris (1990) basándose en el espectro de Von Kármán (1948). Se ha comprobado que este espectro reproduce adecuadamente la potencia del viento sin ningún problema como los modelos anteriores, es por eso que fue propuesto en el ESDU (2001), y se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$S_u(Z, f) = \sigma_u(Z)^2 C_1 \frac{2.987 \frac{n_u}{\varepsilon}}{f \left[1 + \left(\frac{2\pi n_u}{\varepsilon} \right)^2 \right]^{5/6}} + \sigma_u(Z)^2 C_2 \frac{1.294 \frac{n_u}{\varepsilon}}{f \left[1 + \left(\frac{\pi n_u}{\varepsilon} \right)^2 \right]^{5/6}} R_1 \quad (7.55)$$

donde:

$$n_u = \frac{fL_u(Z)}{\bar{U}(Z)} \quad (7.56)$$

$$L_u(Z) = \frac{A_k^{3/2} \left[\frac{\sigma_u(Z)}{u^*} \right]^3 Z}{2.5K_z^{3/2} \left(1 - \frac{Z}{z_g} \right)^2 \left(1 + 5.75 \frac{Z}{z_g} \right)} \quad (7.57)$$

$$A_k = 0.115 \left[1 + 0.3151 \left(1 - \frac{Z}{z_g} \right)^6 \right]^{2/3} \quad (7.58)$$

$$K_z = 0.19 - (0.19 - K_o) e^{-B_k \left(\frac{Z}{z_g} \right)^{N_k}} \quad (7.59)$$

$$K_o = \frac{0.39}{R_o^{0.11}} \quad (7.60)$$

$$B_k = 24R_o^{0.155} \quad (7.61)$$

$$R_o = \frac{u^*}{f_c z_o} \quad (7.62)$$

$$N_k = 1.24R_o^{0.008} \quad (7.63)$$

$$\sigma_u(Z) = \frac{7.5\eta u^* \left[0.538 + 0.09 \ln \left(\frac{Z}{z_o} \right) \right]^p}{1 + 0.156 \ln(R_o)} \quad (7.64)$$

$$\eta = 1 - \frac{6f_c Z}{u^*} \quad (7.65)$$

$$p = \eta^{16} \quad (7.66)$$

$$\varepsilon = 0.535 + 2.76(0.138 - A_k)^{0.68} \quad (7.67)$$

$$C_1 = 2.357\varepsilon - 0.761 \quad (7.68)$$

$$C_2 = 1 - C_1 \quad (7.69)$$

$$R_1 = 1 + 0.455e^{-0.76 \left(\frac{n_u}{\varepsilon} \right)^{-0.8}} \quad (7.70)$$

y donde u^* , z_g , f_c y z_o se calculan con las ecuaciones (7.43), (7.47), (7.48) y se obtiene de la tabla 7.1 respectivamente. $\sigma_u(Z)$, $L_u(Z)$ son la desviación estándar de la componente longitudinal turbulenta y la longitud de la escala integral del tiempo teórica respectivamente.

La intensidad de turbulencia teórica se obtiene con la siguiente ecuación:

$$I_u(Z) = \frac{\sigma_u(Z)}{\bar{U}(Z)} = \frac{\sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N u_i(Z)^2}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U_i(Z)} \quad (7.71)$$

7.3.4 Simulación por representación espectral de Shinozuka o WAWS

Para calcular las simulaciones por el modelo de representación espectral de Shinosuka o WAWS se necesita tener el espectro teórico de potencia de la velocidad longitudinal del viento. La ecuación con la cuál se puede obtener las simulaciones es la siguiente:

$$u_j(Z, t) = \sum_{n=1}^N \sqrt{S_u(Z, f_n)} \sqrt{2\Delta f_n} \cos[(2\pi f_n t_n) + \varphi_n] \quad (7.72)$$

donde f_n y t_n son la frecuencia y tiempo respectivamente de cada intervalo de tiempo hasta N , φ_n es la fase aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo $[0, 2\pi]$ y j se refiere al número de datos que tendrá la simulación desde $n = 1$ hasta N .

7.3.5 Función de admitancia aerodinámica

Existe una característica muy peculiar que ocurre entre el viento y el área de contacto de éste. Se debe de evitar sobreestimar la carga eólica producida por el viento debido al contenido de frecuencias de las ráfagas que pueden llegar a presentarse, dicho en otras palabras, las ráfagas del viento se pueden presentar con frecuencias altas o con frecuencias bajas, éstas a su vez entrarán en contacto con un área. Si las ráfagas con frecuencias altas chocan contra un área de contacto, sólo una parte del área se verá afectada, por lo tanto, la influencia del viento se verá reducida. Por otro lado, si las ráfagas con frecuencia baja chocan contra un área de contacto, ésta tendrá un área mayor de influencia sobre la estructura. Debido a este efecto se debe calcular la función de admitancia aerodinámica, la cuál considera una cierta área expuesta y ayuda a no sobreestimar la carga eólica producida por el viento.

En 1968 Vickery desarrolló una ecuación que ayudaba con la sobreestimación de las cargas eólicas usando la teoría cuasi-estable, cuando la cara de barlovento del edificio es discretizada en elementos finitos con áreas equivalentes a las de un rectángulo o cuadrado, por lo tanto, es válida de igual forma para estructuras de tipo punto. En el año 2015 Castro realizó un ajuste empírico a la ecuación de Vickery obteniendo la siguiente ecuación:

$$\chi(Z, f)^2 = \left[1 + \left(\frac{2f\sqrt{A}}{\bar{U}(Z)} \right)^{4/3} \right]^{-7/6} \quad (7.73)$$

La ecuación que modificó Castro ofrece un filtro ligeramente menor para las cargas eólicas en comparación con la ecuación de Vickery. Se recomienda usar la ecuación de Castro, ya que ésta se adecua mejor para la evaluación de la respuesta dinámica de estructuras esbeltas.

7.3.6 Filtrado de simulaciones

Una vez obteniendo las simulaciones de las velocidades longitudinales del viento y la función de admitancia se procede a realizar el filtrado. El inconveniente que se tiene aquí es que la función de admitancia está en el dominio de la frecuencia y las simulaciones en el dominio del tiempo, por lo tanto se necesitan transformar las simulaciones al dominio de la frecuencia, para esto se utiliza la transformada rápida de Fourier. Después se realiza el producto de la función de admitancia por las simulaciones en el dominio de la frecuencia y de esta forma las simulaciones quedan filtradas y así se puede evitar la sobreestimación de la carga eólica, dando como resultado las simulaciones de las velocidades longitudinales del viento filtradas en el dominio de la frecuencia. A este resultado se le tiene que realizar la inversa de la transformada rápida de Fourier para regresar los resultados al dominio del tiempo.

7.3.7 Obtención de la velocidad total y fuerza del viento y características del viento simulado

Ya teniendo las simulaciones únicamente se tiene que aplicar la ecuación (7.2) para obtener la velocidad total. Y después obtener las fuerzas producidas por la velocidad del viento con la ecuación (7.3) únicamente que en lugar de tomar la velocidad relativa del viento a una altura Z en un tiempo t se tomara la velocidad de la ecuación (7.2).

Una vez que se obtienen las simulaciones del viento se puede realizar una comparación entre los datos teóricos y los simulados. Con datos se refiere a $\bar{U}(Z)$, $\sigma_u(Z)$, $I_u(Z)$ y $L_u(Z)$, velocidad media, desviación estándar de la componente longitudinal turbulenta, intensidad de turbulencia y longitud de la escala integral del tiempo respectivamente. A estos datos se les llamará características del viento.

La velocidad media simulada se obtiene haciendo el promedio de las velocidades totales simuladas sin filtro como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\bar{U}(Z)_{sim} = \frac{\sum_{n=1}^N U_n(Z, t)_{sin\ filtro}}{N} \quad (7.74)$$

La desviación estándar de la componente longitudinal turbulenta simulada se obtiene como en la ecuación (7.71), únicamente que $u_i(Z)$ se refiere a las ráfagas del viento simuladas, o sea, a la ecuación (7.72).

$$\sigma_u(Z)_{sim} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N u_j(Z, t)^2} \quad (7.75)$$

La intensidad de turbulencia simulada se obtiene con la relación entre la desviación estándar de la componente longitudinal turbulenta simulada y la velocidad media simulada

$$I_u(Z)_{sim} = \frac{\sigma_u(Z)_{sim}}{\bar{U}(Z)_{sim}} \quad (7.76)$$

Y la longitud de la escala integral del tiempo simulada se obtiene con la siguiente ecuación:

$$L_u(Z)_{sim} = T_u(Z) \bar{U}(Z)_{sim} = \left[\int_0^{\tau_o} R(Z, \tau) d\tau \right] \bar{U}(Z)_{sim} \quad (7.77)$$

donde

$$R(Z, \tau) = \frac{1}{\sigma_u(Z)_{sim} (N-r)} \sum_{j=1}^{N-r} u_j(Z) u_{j+r}(Z) \quad (7.78)$$

y donde $T_u(Z)$ es la escala del tiempo, $R(Z, \tau)$ es la función de auto-correlación de la señal simulada, τ_o es la primera raíz de la función de auto-correlación, τ es el tiempo de retraso y r es el número de retraso.

7.3.8 Diagrama de flujo del programa “Simulaciones_1GDL”

El diagrama de flujo del programa “Simulaciones_1GDL” viene descrito en la sección (B.1) del apéndice B. Cabe mencionar que no se incluyó la forma de cómo programar la salida de resultados (gráficas y datos en Excel para diferentes niveles) ya que esta parte puede ser modificada a gusto del usuario, únicamente se presenta el cálculo de las simulaciones.

7.3.9 Ejemplo de aplicación

Las propiedades para el cálculo del ejemplo son las mismas que en el capítulo 2, sección (2.1.3.2).

7.3.10 Resultados

La simulación numérica de las velocidades y fuerzas producidas por el viento se muestran en la figura 2.11 del capítulo 2.

Otro dato importante que se debe tomar en cuenta para el correcto cálculo de una simulación es la comparación entre los valores teóricos y simulados (Tabla 7.4).

Tabla 7.4. Simulaciones de velocidades y fuerzas longitudinales (1GDL).

Valores teóricos					Valores simulados				
z [m]	Gu [m/s]	Vm [m/s]	Iu [%]	Lu [m]	z [m]	Gu [m/s]	Vm [m/s]	Iu [%]	Lu [m]
23.75	5.5161	24.3494	22.6540	158.3213	23.75	5.3293	24.9188	21.3865	123.6809

Se llega a la conclusión de que las simulaciones de viento longitudinal son correctas por el hecho de que el margen de error o diferencia entre las características del viento teóricas y simuladas es pequeña.

7.4 Ecuación de movimiento para un oscilador de MGD L ante carga eólica

Retomando la ecuación (2.20) siendo $P(t)$ igual a,

$$P_D(Z, t)_j = \frac{1}{2} \rho C_{D,j} A_j [U_R(Z, t)_j]^2 \quad (7.79)$$

donde $P_D(Z, t)$ es la fuerza producida por el viento a una altura Z en un tiempo t , ρ es la densidad del aire, C_D es el coeficiente de arraste o de presión (adimensional) que depende de varios factores como la forma y la velocidad del viento, entre otros, A es el área de contacto perpendicular al aire, $U_R(Z, t)$ es la velocidad relativa del viento a una altura Z en un tiempo t y j se refiere a cada nivel del oscilador; esto quiere decir que habrá un valor o una historia en el tiempo de valores para cada nivel. O sea, para cada nivel habrá una fuerza $P_D(Z, t)_j$, un coeficiente de arrastre $C_{D,j}$, un área de contacto A_j y una velocidad relativa $U_R(Z, t)_j$, donde j va desde uno hasta el número de niveles que tenga el oscilador.

La descripción de cómo llegar a las 3 formas de las ecuaciones de movimiento son iguales que en la sección (7.2) únicamente considerando las matrices para describir a un oscilador de MGD L como se muestra a continuación.

7.4.1 Ecuación de movimiento (Forma 1)

Fuerza del viento para cada nivel del oscilador.

$$P_D(Z, t)_j = \frac{1}{2} \rho C_{D,j} A_j U_R(Z, t)_j |U_R(Z, t)_j| \quad (7.80)$$

Quedando la ecuación de movimiento del oscilador igual a

$$[M] \ddot{x}(t) + [C] \dot{x}(t) + [K] x(t) = P_D(Z, t)_j = \frac{1}{2} \rho C_{D,j} A_j U_R(Z, t)_j |U_R(Z, t)_j| \quad (7.81)$$

donde

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (7.82)$$

y donde

$$\alpha = \zeta \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \quad (7.83)$$

$$\beta = \zeta \frac{2}{\omega_1 + \omega_2} \quad (7.84)$$

y donde ζ es la razón del amortiguamiento crítico, ω_1 y ω_2 son la frecuencia del primer y segundo modo del oscilador respectivamente.

7.4.2 Ecuación de movimiento (Forma 2)

Fuerzas del viento para cada nivel del oscilador.

$$P_D(H, t)_j = \bar{F}(H)_j + \rho C_{D,j} A_j \bar{U}(H)_j [u(t)_j - \dot{x}(t)_j] \quad (7.85)$$

Fuerza estática del viento de cada nivel se representa como la siguiente ecuación:

$$\bar{F}(H)_j = \frac{1}{2} \rho C_{D,j} A_j [\bar{U}(H)_j]^2 \quad (7.86)$$

Ya que se está considerando que la fuerza del viento se aplica lentamente con frecuencia casi nula, la respuesta estática de cada nivel del oscilador está asociada a

$$k_j \bar{x}_j = \bar{F}(H)_j \quad (7.87)$$

y el desplazamiento estático de cada nivel del oscilador o estructura se calcula con:

$$\bar{x}_j = \frac{\bar{F}(H)_j}{k_j} \quad (7.88)$$

De esta manera se puede separar la parte estática de la dinámica en la ecuación de movimiento del oscilador. La parte fluctuante de la fuerza está relacionada con:

$$[M] \ddot{x}(t) + [C]_T \dot{x}(t) + [K] x(t) = \rho C_{D,j} A_j \bar{U}(H)_j u(t)_j \quad (7.89)$$

donde, en la matriz $[C]_T$, se incluye el amortiguamiento estructural, aerodinámico y externo.

Se debe recordar que el desplazamiento total de cada nivel del oscilador se obtiene sumando la respuesta estática y la respuesta dinámica ya que se separaron desde un principio

$$x_{T,j} = \bar{x}_j + x(t)_j \quad (7.90)$$

7.4.3 Ecuación de movimiento (Forma 3)

Fuerzas del viento para cada nivel del oscilador.

$$P_D(H, t)_j = \bar{F}(H)_j + \rho C_{D,j} A_j \bar{U}(H)_j u(t)_j - \rho C_{D,j} A_j \bar{U}(H)_j \dot{x}(t)_j + \frac{1}{2} \rho C_{D,j} A_j [u(t)_j]^2 - \rho C_{D,j} A_j u(t)_j \dot{x}(t)_j + \frac{1}{2} \rho C_{D,j} A_j [\dot{x}(t)_j]^2 \quad (7.91)$$

Considerando que el desplazamiento estático está asociado al término que representa la fuerza media del viento se obtiene la ecuación (7.88). De esta manera se puede separar la parte estática de la dinámica de la fuerza $P_D(H, t)_j$, por ende la ecuación de movimiento del oscilador, queda como

$$[M] \ddot{x}(t) + [C]_T \dot{x}(t) + [K] x(t) = \rho C_{D,j} A_j \bar{U}(H)_j u(t)_j + \frac{1}{2} \rho C_{D,j} A_j [u(t)_j]^2 - \rho C_{D,j} A_j u(t)_j \dot{x}(t)_j + \frac{1}{2} \rho C_{D,j} A_j [\dot{x}(t)_j]^2 \quad (7.92)$$

donde, en la matriz $[C]_T$, se incluye el amortiguamiento estructural, aerodinámico y externo.

La ecuación (7.92) es una ecuación diferencial no lineal y es la que debe de resolverse para obtener una solución más correcta y precisa. Esa solución se refiere a las respuestas de desplazamiento, velocidad, aceleración, entre otras del oscilador de MGD. Recordando que el desplazamiento total de cada nivel es la suma del desplazamiento estático más el desplazamiento dinámico, ecuación (7.90), si es que se separa de la ecuación completa.

Más adelante en este capítulo se presenta un programa listo para su uso en el cual se pueden obtener las simulaciones de un oscilador de MGD despreciando el término $\dot{x}(t)_j$, ya que como se mencionó, es un valor pequeño en comparación con la $\bar{U}(H)_j$, siendo la fuerza de viento igual a $P_D(Z, t)_j = \frac{1}{2} \rho C_{D,j} A_j [U(Z, t)_j]^2$.

7.5 Simulaciones de velocidades y fuerzas para un oscilador de MGD [Edificios prismáticos]

Como en la sección (7.3), aquí se muestra la forma de realizar las simulaciones de velocidades y fuerzas producidas por el viento en la dirección longitudinal para un oscilador de MGD. Se describirá cada paso y parámetro necesario para el cálculo mediante el uso de un programa listo para su uso que lleva el nombre de “Simulaciones_MGD”.

Se tomó como estructura a analizar un “edificio prismático” ya que la manera de obtener las áreas de cada nivel o grado de libertad en las cuales el viento impacta es sencilla.

Cabe aclarar que algunos aspectos son muy parecidos o iguales que para un oscilador de 1GDL pero es necesario explicarlo de esta manera para que quede clara la parte de cómo obtener la simulación numérica de velocidades y fuerzas ya que esta parte es totalmente distinta entre 1GDL y MGD.

7.5.1 Coeficiente de arrastre [C_D]

El concepto de este coeficiente es el mismo que para la sección (7.3.1). Lo diferente aquí es la forma de obtenerlo, ya que no se encuentra en tablas como la estructura tipo punto; para edificios prismáticos se puede obtener con la figura 7.4, donde B, D y H se refieren al ancho del edificio prismático perpendicular a la componente longitudinal del viento, al ancho del edificio paralelo a la componente longitudinal del viento y a la altura del edificio respectivamente.

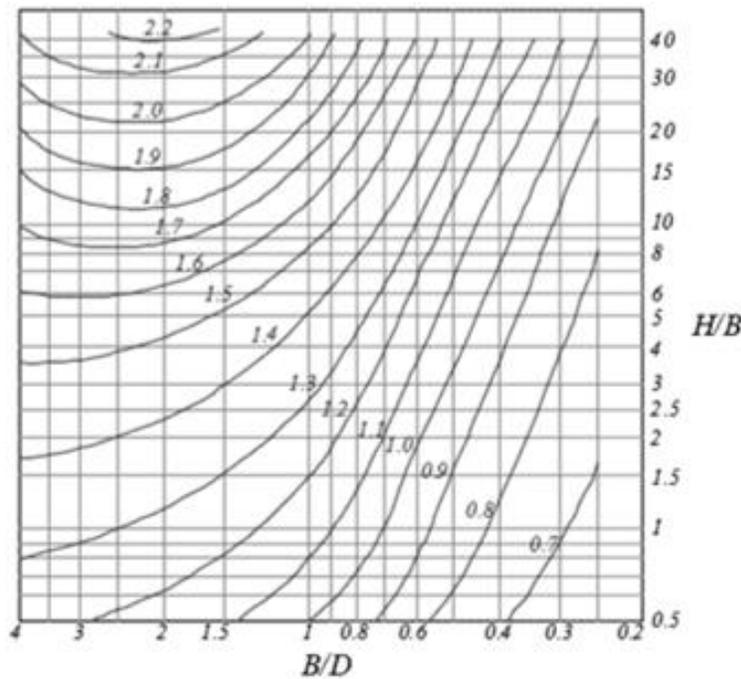


Figura 7.4. Coeficiente de arrastre para edificio prismático.

7.5.2 Velocidad media del viento

El concepto y la forma de calcularla es igual a la sección (7.3.2) únicamente que la altura va a ir variando conforme se cambie el nivel que se esté analizando.

7.5.3 Espectro teórico de potencia de la velocidad longitudinal del viento e intervalos de frecuencia y tiempo

Los intervalos de frecuencia y tiempo son los mismos que se muestran en la sección (7.3.3). Y el concepto y la forma de calcular el espectro de potencia de la velocidad longitudinal del viento también es la misma, la única diferencia que tendrá es que la altura variará conforme se vaya haciendo el análisis de cada nivel y a su vez cada nivel tendrá un espectro de potencia.

7.5.4 Espectro cruzado y función de coherencia

El hecho de realizar simulaciones numéricas lleva implícito que se deben considerar ciertos conceptos estadísticos. Uno de ellos es la correlación entre varios puntos, este concepto no se menciona en la sección (7.3), ya que sólo existe un punto en el espacio donde se realiza la simulación numérica, pero para esta sección donde se considera un oscilador de MGDL se debe tomar en cuenta debido a que con esto se puede obtener registros más apegados a la realidad. El espectro cruzado normalizado describe la dependencia estadística entre las componentes turbulentas en dos puntos en el espacio a una frecuencia dada; esta dependencia se debe a la dimensión espacial de los remolinos en el campo de viento.

La distribución espacial de la componente turbulenta longitudinal del viento es descrita de manera adimensional mediante el espectro cruzado normalizado, S_N , mostrado en la siguiente ecuación:

$$S_N = \frac{S_{uu}(p_j, p_k, f_n)}{\sqrt{S_u(p_j, f_n)S_u(p_k, f_n)}} \quad (7.93)$$

donde S_{uu} es el espectro cruzado de las dos componentes turbulentas en los puntos p_j y p_k respectivamente, es decir, se trata de un número complejo, f_n se describe en la sección (7.3.4), S_u es el espectro teórico de potencia de la velocidad longitudinal del viento para un punto en específico. La parte real del espectro cruzado normalizado es llamada co-espectro normalizado, mientras que la parte imaginaria es llamada espectro de cuadratura normalizado. Debido a que la parte imaginaria normalmente es pequeña se puede despreciar en la contribución de S_N quedando únicamente de esta manera la parte real, o sea, el co-espectro normalizado.

De la ecuación (7.93) se interesa el espectro cruzado, ya que ahí ya se estaría contemplando la correlación entre los puntos o alturas de cada nivel del oscilador. Para esto se utiliza la siguiente ecuación:

$$\sqrt{Coh} = |S_N| \quad (7.94)$$

El valor absoluto del co-espectro normalizado $|S_N|$ y la raíz cuadrada de la función de coherencia \sqrt{Coh} son iguales cuando el espectro de fase es cero. La función de coherencia define el grado de correlación de la velocidad fluctuante entre dos puntos. Esta función tiende a ser cero a medida que la distancia entre los puntos aumenta y tiende a la unidad cuando la distancia entre los puntos es pequeña.

De esta manera, el espectro cruzado se puede obtener despejando la ecuación (7.93) y sustituyendo la ecuación (7.94) en la ecuación (7.93) dando como resultado la siguiente ecuación:

$$S_{uu}(p_j, p_k, f_n) = \sqrt{S_u(p_j, f_n) S_u(p_k, f_n)} \sqrt{Coh_{jk}(f_n)} \quad (7.95)$$

En 1977 Davenport propuso una expresión para el cálculo de la raíz cuadrada de la función de coherencia entre dos puntos colocados sobre el plano $z-y$, el cual es normal o perpendicular a la componente longitudinal del viento turbulento, dicha ecuación es:

$$\sqrt{Coh_{jk}(f_n)} = e^{-\frac{f}{\bar{U}_{j,k}} \sqrt{(C_y r_y)^2 + (C_z r_z)^2}} \quad (7.96)$$

donde

$$\bar{U}_{j,k} = \frac{\bar{U}(Z_j) + \bar{U}(Z_k)}{2} \quad (7.97)$$

y donde (r_y, r_z) es la separación transversal entre los dos puntos p_j y p_k , mientras que $\bar{U}(Z_j)$ y $\bar{U}(Z_k)$ representan la velocidad media del viento en los puntos p_j y p_k respectivamente. Por otra parte C_y y C_z representan constantes de decaimiento adimensional en la dirección y y z respectivamente, aunque para la estructura que se va a analizar y debido a los alcances de este trabajo sólo se necesitará en la dirección z , por lo tanto la ecuación (7.96) se puede simplificar como en la siguiente ecuación:

$$\sqrt{Coh_{jk}(f_n)} = e^{-\frac{f}{\bar{U}_{j,k}} (C_z r_z)} \quad (7.98)$$

La ecuación (7.98) es la más utilizada para correlacionar vientos simulados en edificios, sin embargo, ésta presenta dos inconsistencias. Estas dos inconsistencias fueron removidas en el año 1995 por Krenk con base a la forma generalizada del espectro de potencia de Von Kármán. Dicha función de coherencia exponencial modificada es:

$$\sqrt{Coh_{jk}(f_n)} = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{f_m}{\bar{U}_{j,k}} \sqrt{(C_y r_y)^2 + (C_z r_z)^2} \right) e^{-\frac{f_m}{\bar{U}_{j,k}} \sqrt{(C_y r_y)^2 + (C_z r_z)^2}} \quad (7.99)$$

donde

$$f_m = \sqrt{f_n^2 + \left(\frac{\bar{U}_{j,k}}{2.68\pi L_{u,j,k}} \right)^2} \quad (7.100)$$

$$L_{u,j,k} = \frac{L_u(Z_j) + L_u(Z_k)}{2} \quad (7.101)$$

De igual forma que la ecuación (7.98), las componentes en y no son de interés, ya que la estructura que se analizará es un edificio y por lo tanto no necesita realizarse una correlación en la dirección en y , por lo tanto la ecuación queda:

$$\sqrt{Coh_{jk}(f_n)} = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{f_m}{\bar{U}_{j,k}} (C_z r_z)\right) e^{-\frac{f_m}{\bar{U}_{j,k}} (C_z r_z)} \quad (7.102)$$

donde el valor C_z está entre 7 y 10 para la ecuación de Davenport y C_z es 5 para la ecuación de Krenk.

7.5.5 Simulación por representación espectral de Shinozuka o WAWS y matriz de densidad espectral cruzada

Para obtener la correlación entre cada punto vertical j y k deseado se utiliza la ecuación (7.95), debido a que son varios puntos los deseados, cada producto de cada punto se acomodará en una matriz de la siguiente forma

$$S(f_n) = \begin{bmatrix} S_{11}(f_n) & S_{12}(f_n) & \cdots & S_{1m}(f_n) \\ S_{21}(f_n) & S_{22}(f_n) & \cdots & S_{2m}(f_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{m1}(f_n) & S_{m2}(f_n) & \cdots & S_{mm}(f_n) \end{bmatrix} \quad (7.103)$$

donde $S(f_n)$ se refiere a la matriz de densidad espectral cruzada.

Para obtener las simulaciones por el modelo de representación espectral de Shinozuka o WAWS se utiliza la siguiente ecuación:

$$u_j(Z, t) = \sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^N |H_{jk}(f_n)| \sqrt{2\Delta f} \cos[(2\pi f_n t_n) + \varphi_n] \quad (7.104)$$

donde $|H_{jk}(f_n)|$ se refiere a la matriz triangular inferior que de la descomposición de Cholesky, por lo tanto,

$$S(f_n) = H(f_n)H^T(f_n) \quad (7.105)$$

donde

$$H(f_n) = \begin{bmatrix} H_{11}(f_n) & 0 & \cdots & 0 \\ H_{21}(f_n) & H_{22}(f_n) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{m1}(f_n) & H_{m2}(f_n) & \cdots & H_{mm}(f_n) \end{bmatrix} \quad (7.106)$$

y donde m es el número de puntos en el espacio, los demás parámetros son descritos en la ecuación (7.72).

7.5.6 Función de admitancia aerodinámica

El concepto y la forma de calcularla es igual a la sección (7.3.5) únicamente que conforme vaya cambiando la altura va a ir variando la velocidad y el área en el peor de los casos y esto a su vez provocará que cada punto tenga un valor distinto.

7.5.7 Filtrado de simulaciones

La descripción de esta sección es la misma que para la sección (7.3.6), únicamente que irá variando conforme a la altura de los diferentes puntos donde se desea conocer la historia de las simulaciones de velocidad longitudinal.

7.5.8 Obtención de las velocidades totales y fuerzas del viento y características del viento simulado

De igual forma que en la sección (7.3.7) se aplica la ecuación (7.2) para la obtención de la velocidad total con respecto a cada grado de libertad que se tenga. La obtención de las fuerzas producidas por las velocidades del viento en cada grado de libertad se obtienen con la ecuación (7.79) sólo que en lugar de tomar la velocidad relativa se usará la velocidad obtenida con la ecuación (7.2).

La explicación de las características del viento simulado es la misma que en la sección (7.3.7) únicamente teniendo en cuenta que cada característica es para cada grado de libertad.

7.5.9 Diagrama de flujo del programa “Simulaciones_MGDL”

El diagrama de flujo del programa “Simulaciones_MGDL” viene descrito en la sección (B.2) del apéndice B. De igual forma que en la sección (7.3.8) no se incluye la forma de cómo programar la salida de resultados.

7.5.10 Ejemplo de aplicación y uso del programa

Se propone un edificio prismático de 3 niveles con la misma ubicación que el ejemplo de la sección (2.1.3.2), las propiedades para el cálculo del ejemplo son las mismas de dicha sección, únicamente que para la obtención del coeficiente de arrastre se realiza con la gráfica de la Figura 7.4, para esto se necesita la dimensión del ancho del edificio paralelo y perpendicular al flujo de viento, el cual es de 5 m , respectivamente y la altura total del edificio la cual es de 9 m (Figura 7.B.2), obteniendo así un coeficiente de arrastre igual a $C_D = 1.24$.

7.5.11 Resultados

Se obtuvieron tres gráficas de simulaciones de velocidades (Figura 7.5), tres de simulaciones de fuerzas (Figura 7.6) y las comparaciones teóricas y simuladas para cada nivel (Tabla 7.5).

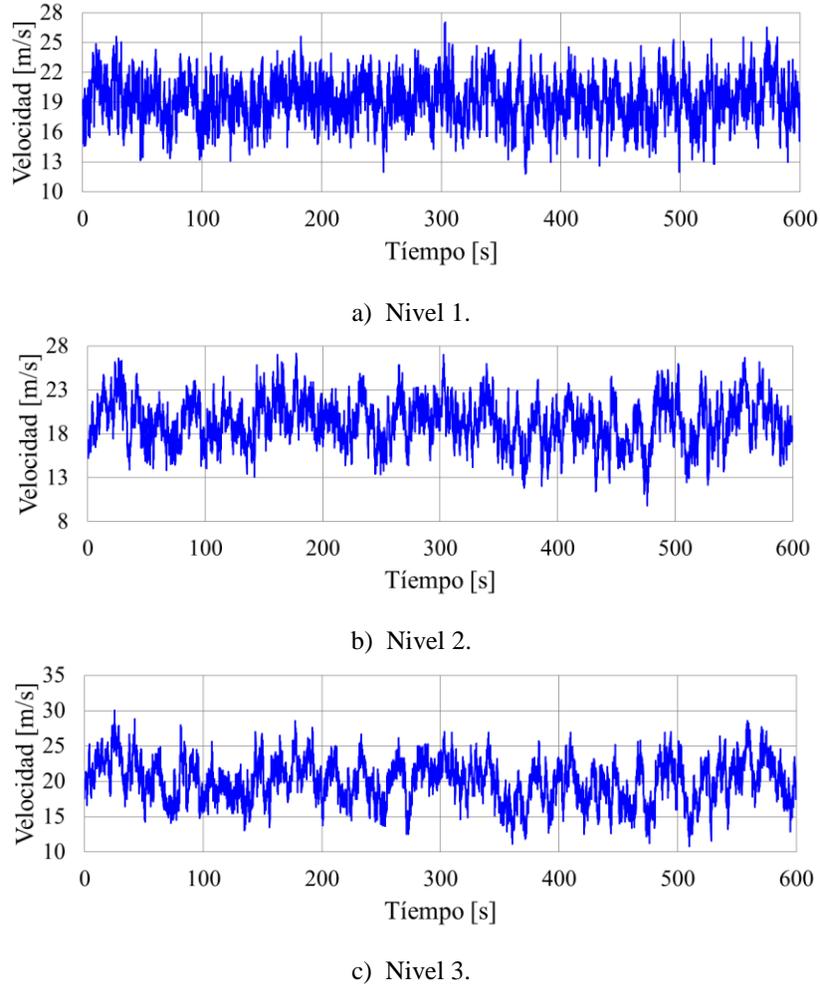
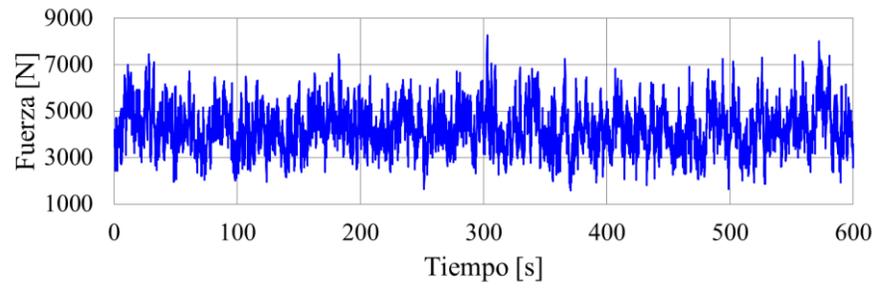


Figura 7.5. Simulaciones numéricas de velocidades (MGDL).

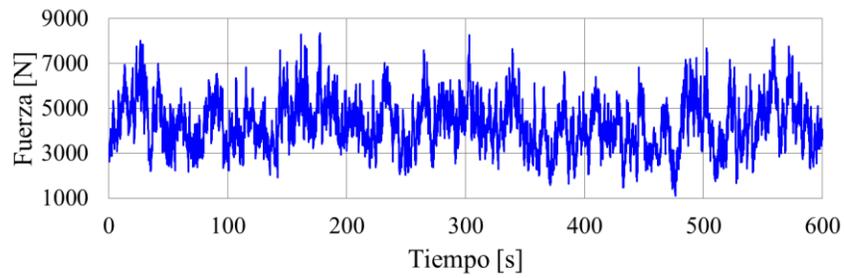
Tabla 7.5. Simulaciones de velocidades y fuerzas longitudinales (MGDL).

Valores teóricos					Valores simulados				
z [m]	Gu [m/s]	Vm [m/s]	Iu [%]	Lu [m]	z [m]	Gu [m/s]	Vm [m/s]	Iu [%]	Lu [m]
3	4.4769	19.0092	23.5514	13.4731	3	4.3353	19.1960	22.5844	17.2013
6	4.8535	19.0092	25.5322	34.0895	6	4.9498	19.3275	25.6099	50.9222
9	5.0812	19.6937	25.8011	57.9221	9	5.3214	20.0086	26.5957	92.1026

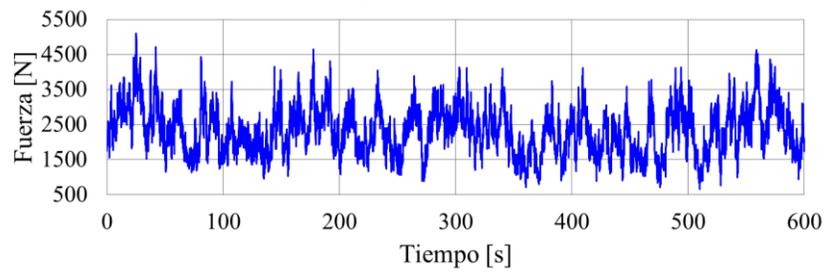
De igual forma que en la sección (7.3.10), se aprecia que la diferencia entre las características del viento teóricas y simuladas son pequeñas.



a) Nivel 1.



b) Nivel 2.



c) Nivel 3.

Figura 7.6. Simulaciones numéricas de fuerzas (MGDL).

Capítulo 8

Estructura tipo péndulo invertido

8.1 Ecuación de movimiento de una estructura tipo péndulo invertido

Cuando se habla de una estructura tipo péndulo invertido se refiere a un oscilador de 2 grados de libertad (GDL), los cuales son el desplazamiento horizontal y la rotación que se puede llegar a presentar en el oscilador debido a una carga sísmica o eólica.



Figura 8.1. Columna de un puente con su tablero.



Figura 8.2. Columna de una techumbre.



Figura 8.3. Columna de un espectacular.

Debido a esos GDL se consideran una fuerza de inercia producida por el desplazamiento horizontal de la estructura y un momento inercial debido a la rotación.

Algunas estructuras en las cuales se puede llegar a presentar este tipo de comportamiento pueden ser; la columna de un puente y su tablero (Figura 8.1), la columna de una techumbre (Figura 8.2) y la columna de un espectacular (Figura 8.3).

8.1.1 Ecuación de movimiento, oscilador excitado por una carga sísmica

Para obtener la ecuación de movimiento contemplando los 2GDL y la rigidez del cabeceo en la misma, se toma como ejemplo una columna de un puente (Figura 8.4). Algunos términos que aparecen en la ecuación de movimiento son representados en la Figura 8.4 y Figura 8.5. Cabe mencionar que la ecuación de movimiento se deja planteada para cualquier estructura tipo péndulo invertido.

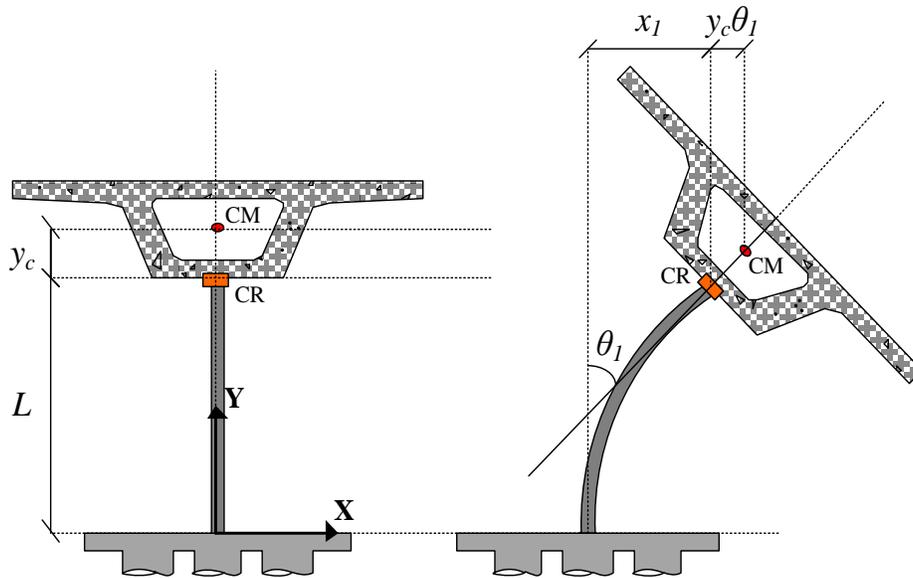


Figura 8.4. Representación gráfica de columna de un puente sin interacción suelo – estructura (ISE).

Considerando que el desplazamiento del terreno es $U_g(t)$, el desplazamiento total que tiene la masa es,

$$U = U_g + x \tag{8.1}$$

Por lo que,

$$\ddot{U} = \ddot{U}_g + \ddot{x} \tag{8.2}$$

Por otro lado tenemos a la fuerza inercial y el momento inercial los cuales son,

$$F_I = m_0 \ddot{U} = m_0 (\ddot{U}_g + \ddot{x}) = m_0 \ddot{U}_g + m_0 \ddot{x} \tag{8.3}$$

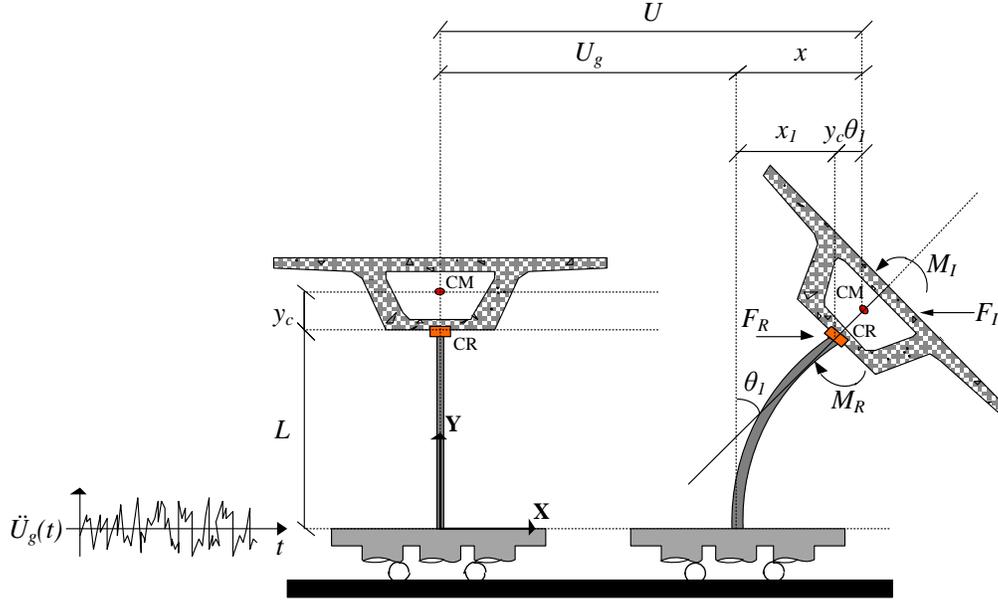


Figura 8.5. Representación gráfica de columna de un puente (desplazamiento total) sin interacción suelo – estructura (ISE).

$$M_I = I_{CM} \ddot{\theta}_1 \quad (8.4)$$

donde m_0 se refiere la masa que está sobre la columna concentrada en el centro de masas (CM), y_c es la distancia entre el centro de rigidez (CR) y el centro de masas (CM), I_{CM} es el momento másico de inercia alrededor del eje z y $\ddot{\theta}_1$ es la aceleración del giro producido por la aceleración del suelo.

Las ecuaciones (8.3) y (8.4) escritas en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} F_I \\ M_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_0 & 0 \\ 0 & I_{CM} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta}_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} m_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \ddot{U}_g \quad (8.5)$$

La ecuación (8.5) está referida al CM, pero para poder obtener el equilibrio de la ecuación de movimiento se debe de obtener la matriz de masas con respecto al CR, ya que la matriz de rigidez está referida ahí, para esto la ecuación (8.2) es,

$$\ddot{U} = \ddot{U}_g + \ddot{x} = \ddot{U}_g + \ddot{x}_1 + y_c \ddot{\theta}_1 \quad (8.6)$$

La fuerza inercial y el momento inercial con respecto al CR ahora son,

$$F_R = F_I = m_0 \ddot{U} = m_0 (\ddot{U}_g + \ddot{x}_1 + y_c \ddot{\theta}_1) = m_0 \ddot{U}_g + m_0 \ddot{x}_1 + m_0 y_c \ddot{\theta}_1 \quad (8.7)$$

$$M_R = M_I + F_I y_c = I_{CM} \ddot{\theta}_1 + (m_0 \ddot{U}_g + m_0 \ddot{x}_1 + m_0 y_c \ddot{\theta}_1) y_c = m_0 \ddot{U}_g y_c + m_0 \ddot{x}_1 y_c + (I_{CM} + m_0 y_c^2) \ddot{\theta}_1 \quad (8.8)$$

donde el momento másico de inercia con respecto a la base de la masa (se refiere al CR) es,

$$I_{CR} = I_{CM} + m_0 y_c^2 \quad (8.9)$$

La ecuación para el cálculo del momento másico de inercia para el ortoedro es la siguiente:

$$I_{CM} = \frac{m_0}{12} (a^2 + h^2) \quad (8.10)$$

donde a y h se refieren a la base y a la altura del ortoedro, respectivamente.

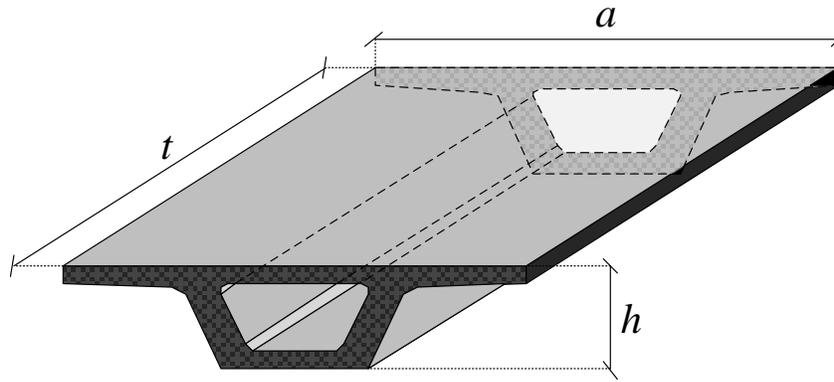


Figura 8.6. Tablero del puente.

Las ecuaciones (8.7) y (8.8) escritas en forma matricial y sustituyendo la ecuación (8.9) en la ecuación (8.8) resulta,

$$\begin{bmatrix} F_R \\ M_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_0 & m_0 y_c \\ m_0 y_c & I_{CR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} m_0 \\ m_0 y_c \end{Bmatrix} \ddot{U}_g \quad (8.11)$$

Para la obtención de la matriz de rigidez se consideran los GDL mostrados en la Figura 8.7, con los desplazamientos (positivo hacia la izquierda) y giros mostrados (positivo según la regla de la mano derecha),

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L \\ 6L & 4L^2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -12 & 6L \\ -6L & 2L^2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -12 & -6L \\ 6L & 2L^2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

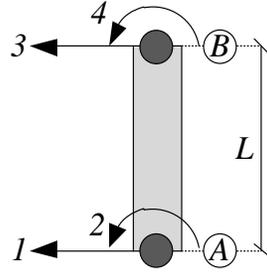


Figura 8.7. GDL para matriz de rigidez.

Entonces las fuerzas de restitución del resorte horizontal, F_R , y el momento de restitución, M_R , son:

$$\begin{bmatrix} F_R \\ M_R \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} \quad (8.13)$$

La ecuación (8.13) se puede reescribir como,

$$\begin{bmatrix} F_R \\ M_R \end{bmatrix} = \frac{3E_c I_c}{L^3} \begin{bmatrix} 4 & -2L \\ -2L & \frac{4}{3}L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = k_D \begin{bmatrix} 4 & -2L \\ -2L & \frac{4}{3}L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} \quad (8.14)$$

donde k_D es la rigidez lateral,

$$k_D = 3 \frac{E_c I_c}{L^3} \quad (8.15)$$

donde E_c , I_c y L son el módulo de elasticidad de la columna, el momento de inercia de la columna y la longitud de la columna respectivamente.

La matriz de amortiguamiento tiene la siguiente forma:

$$[C] = \begin{bmatrix} 2m_0 \omega_n \zeta & 0 \\ 0 & 2I_{CR} \omega_n \zeta \end{bmatrix} \quad (8.16)$$

donde ω_n y ζ y I_{CR} son la frecuencia natural del oscilador considerándolo con 1GDL, o sea $\omega_n = \sqrt{k/m_o}$ y la razón de amortiguamiento crítico, respectivamente. De igual forma se puede obtener la matriz de amortiguamiento por medio del amortiguamiento de Rayleigh.

La ecuación de equilibrio dinámico, tiene de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m_0 & m_0 y_c \\ m_0 y_c & I_{CR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2m_0 \omega_n \zeta & 0 \\ 0 & 2I_{CR} \omega_n \zeta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} m_0 \\ m_0 y_c \end{Bmatrix} \ddot{U}_g + \\ & + k_D \begin{bmatrix} 4 & -2L \\ -2L & \frac{4}{3}L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (8.17)$$

Ordenando:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m_0 & m_0 y_c \\ m_0 y_c & I_{CR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2m_0 \omega_n \zeta & 0 \\ 0 & 2I_{CR} \omega_n \zeta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{Bmatrix} + k_D \begin{bmatrix} 4 & -2L \\ -2L & \frac{4}{3}L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \\ & = - \begin{Bmatrix} m_0 \\ m_0 y_c \end{Bmatrix} \ddot{U}_g \end{aligned} \quad (8.18)$$

Si se considera la masa de la columna de apoyo con sección uniforme,

$$m_p = \rho_c A_c L \quad (8.19)$$

donde ρ_c y A_c son la densidad del material de la columna por unidad de longitud y el área transversal de la columna, respectivamente. La masa total ubicada en el centro de masas, considerando la masa de la pila:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_0 & m_0 y_c \\ m_0 y_c & I_{CR} \end{bmatrix} + \frac{m_p}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L \\ -22L & 4L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_0 + \frac{13}{35}m_p & m_0 y_c - \frac{11}{210}m_p L \\ m_0 y_c - \frac{11}{210}m_p L & I_{CR} + \frac{1}{105}m_p L^2 \end{bmatrix} \quad (8.20)$$

Para considerar los efectos de la carga axial en la matriz de rigidez se modifica como,

$$[K] = k_D \begin{bmatrix} 4 & -2L \\ -2L & \frac{4}{3}L^2 \end{bmatrix} + \frac{S}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ -\frac{L}{10} & \frac{2}{15}L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4k_D + \frac{6S}{5L} & -2k_D L - \frac{S}{10} \\ -2k_D L - \frac{S}{10} & \frac{4}{3}k_D L^2 + \frac{2SL}{15} \end{bmatrix} \quad (8.21)$$

donde S es la carga axial en N , es decir:

$$S = m_0 g \quad (8.22)$$

donde g se refiere a la aceleración de la gravedad.

Considerando que se pueda o no contemplar los efectos de la masa de la pila y/o la carga axial se muestra la ecuación de movimiento en forma general:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2m_0\omega_n\zeta & 0 \\ 0 & 2I_{CR}\omega_n\zeta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{Bmatrix} + k_D \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = -\{P(t)\} \quad (8.23)$$

Cabe señalar que $m_{21} = m_{12}$ y $k_{21} = k_{12}$.

Los periodos de vibrar se obtienen por medio de las frecuencias del oscilador, los cuales se determinan resolviendo el problema de valores característicos de la ecuación de movimiento en vibración libre no amortiguada, o sea que únicamente se necesita conocer la matriz de masas y de rigideces. La siguiente ecuación da como resultado los valores característicos o eigenvalores,

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(F_1 \pm \sqrt{F_1^2 - F_2} \right) \left(\frac{1}{F_3} \right) \quad (8.24)$$

donde,

$$F_1 = k_{11}m_{22} + k_{22}m_{11} - 2k_{12}m_{12} \quad (8.25)$$

$$F_2 = 4(m_{11}m_{22} - m_{12}^2)(k_{11}k_{22} - k_{12}^2) \quad (8.26)$$

$$F_3 = m_{11}m_{22} - m_{12}^2 \quad (8.27)$$

para lo cual M_{mn} y K_{mn} son las posiciones de los valores correspondientes en la matriz de masas y rigideces, respectivamente, de la ecuación (8.23).

Para obtener las frecuencias del oscilador únicamente se obtiene la raíz,

$$\omega_1 = \sqrt{\Omega_1^2} \quad (8.28)$$

y

$$\omega_2 = \sqrt{\Omega_2^2} \quad (8.29)$$

Para ω_1 se toma el valor pequeño, o sea cuando se resta la raíz de la ecuación (8.24).

Posteriormente para el cálculo de los periodos únicamente se realiza,

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad (8.30)$$

y

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} \quad (8.31)$$

8.1.2 Ecuación de movimiento, oscilador excitado por una carga eólica

Si la fuerza de excitación está aplicada en el centro de masas (CM) y se trata de una carga eólica, se tendría entonces una fuerza $P(t) = P_D(Z, t) = \frac{1}{2} \rho C_D A [U_R(Z, t)]^2$ y la ecuación de equilibrio dinámico tiene la forma siguiente:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m_0 & m_0 y_c \\ m_0 y_c & I_{CR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2m_0 \omega_n \zeta & 0 \\ 0 & 2I_{CR} \omega_n \zeta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{Bmatrix} + k_D \begin{bmatrix} 4 & -2L \\ -2L & \frac{4}{3} L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \\ & = \begin{Bmatrix} 1 \\ y_c \end{Bmatrix} P(t) \end{aligned} \quad (8.32)$$

8.1.3 Cálculo de la respuesta en el tiempo

8.1.3.1 Intervalo elástico

Para la respuesta en el tiempo en el intervalo elástico se utiliza la misma forma que en los anteriores capítulos para un oscilador de MGD. La ecuación del cálculo del balance de energía se obtiene de la misma forma que para un oscilador de MGD.

8.1.3.2 Intervalo inelástico

Para obtener la respuesta en el tiempo en el intervalo inelástico se usa el mismo método numérico que fue aplicado en capítulos anteriores para un oscilador de MGD.

Los modelos histeréticos que se usan para el intervalo inelástico son el modelo bilineal (Capítulo 4) y el modelo de Takeda (Capítulo 5).

8.2 Ejemplos

8.2.1 Ejemplo de aplicación, intervalo elástico

Las propiedades del oscilador que se toman para el ejemplo de aplicación son las mismas que las del capítulo 2, para así a su vez poder realizar una comparación entre los resultados obtenidos en esa sección con los que se obtienen en este capítulo.

Los resultados que se comparan son las respuestas en el tiempo de desplazamientos y la gráfica de energías en el tiempo del oscilador (Figura 8.8). En el lado izquierdo (a) de la gráfica se tienen los resultados del oscilador considerado con 1GD y en el lado derecho (b) se tienen los resultados del programa del péndulo invertido (2GD). Además también se compara la fuerza de cortante máxima en la base y el momento de volteo máximo (Tabla 8.1). Cabe mencionar que para el cálculo del momento de volteo se toma como la suma del producto de la fuerza cortante en la masa por la distancia a la base más el producto de la

carga axial que se ejerce sobre la columna por la distancia desplazada del oscilador más el momento inercial.

Se puede apreciar que los resultados son idénticos, esto se debe a que se están tomando valores casi nulos para las medidas de la sección de la masa y un valor de y_c casi nulo, haciendo que el efecto del cabeceo no se presente.

En la Figura 8.9 y tabla 8.2 se presentan los resultados del mismo oscilador únicamente que ahora se considera el cabeceo proponiendo una sección cuadrada, siendo su base y altura de 3 m y una distancia y_c de 0.8 m .

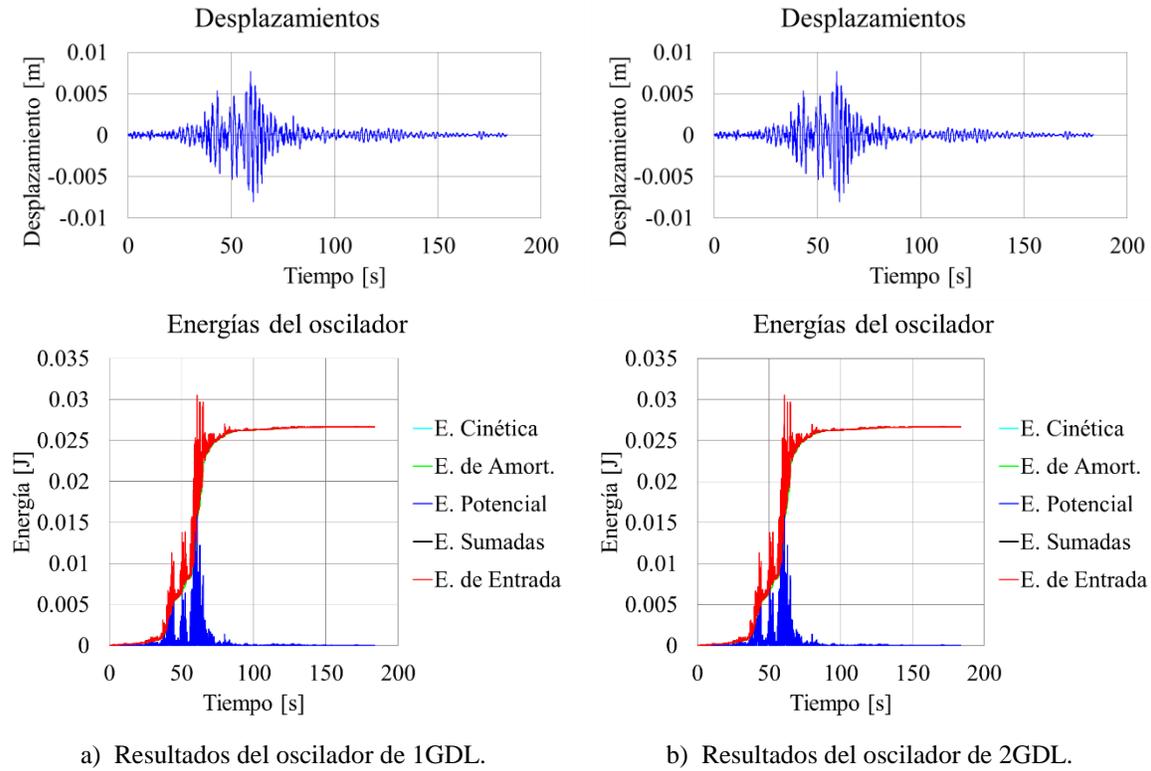


Figura 8.8. Comparación de resultados, oscilador de 1GDL y 2GDL (sin cabeceo), intervalo elástico.

Tabla 8.1. Comparación de cortantes y momentos máximos, oscilador de 1GDL y 2GDL (sin cabeceo).

Caso	a) Oscilador 1GDL	b) Oscilador 2GDL
Fuerza cortante máxima (N)	4.0295	4.0295
Momento de volteo máximo (N-m)	12.0884	12.0886

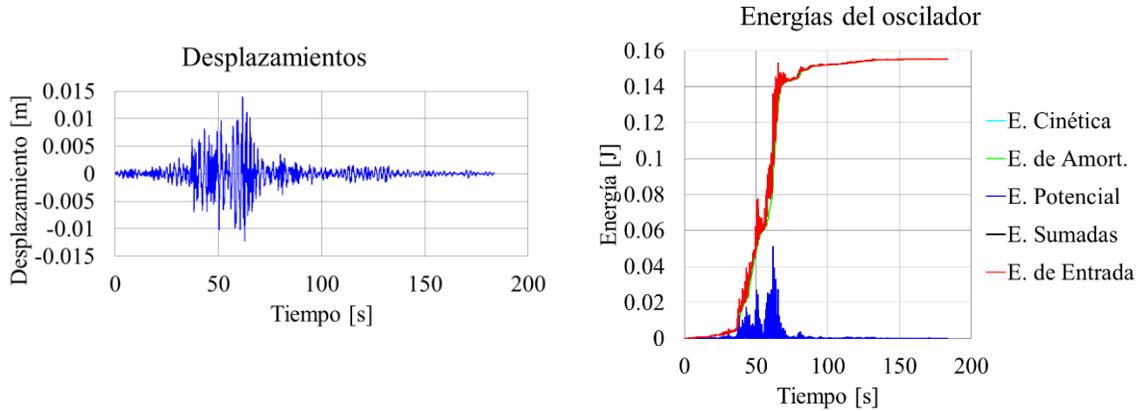


Figura 8.9. Resultados del oscilador de 2GDL considerando cabeceo, intervalo elástico.

Tabla 8.2. Cortantes y momentos máximos, oscilador de 2GDL (con cabeceo).

Caso	Oscilador 2GDL
Fuerza cortante máxima (N)	7.0043
Momento de volteo máximo (N-m)	19.8235

Como se puede ver el desplazamiento, la energía del oscilador, el cortante y momento de volteo aumentan, esto nos lleva a que es importante considerar el cabeceo que pudiera presentarse en una estructura, ya que afecta su comportamiento y por ende su diseño sería con distintas consideraciones. Todo depende de las medidas de la sección (o de su momento másico de inercia) y de la distancia de y_c que pudiera llegar a tener.

8.2.2 Ejemplo de aplicación en un monópulo espectacular, intervalo elástico e inelástico con excitación en la base y en la masa

8.2.2.1 Intervalo elástico

Las propiedades del oscilador que se toman para este ejemplo son las mismas que las del capítulo 2, para que a su vez se pueda realizar una comparación entre los resultados obtenidos en esa sección con los resultados obtenidos aquí, tanto para la excitación en la base como en la masa. Solamente que para esta parte se necesita conocer la base, altura y el ancho o espesor de la sección, que para este caso son: 0.6 m , 4.5 m y 14.4 m , respectivamente, la distancia y_c de 2.25 m , la altura de la columna 23.75 m , el módulo de elasticidad de la columna de $2.001 \times 10^{11}\text{ Pa}$ y el momento de inercia de la columna de 0.007252512 m^4 . Se considera la masa de la columna en el cálculo de la respuesta, para esto se requiere la densidad del material (acero) y al área transversal de la columna los cuales son, $7,850\text{ kg/m}^3$ y 0.052439 m^2 , respectivamente y también se consideran los efectos de la carga axial la cual es de $52,376.21\text{ N}$. Las condiciones iniciales son igual a 0.

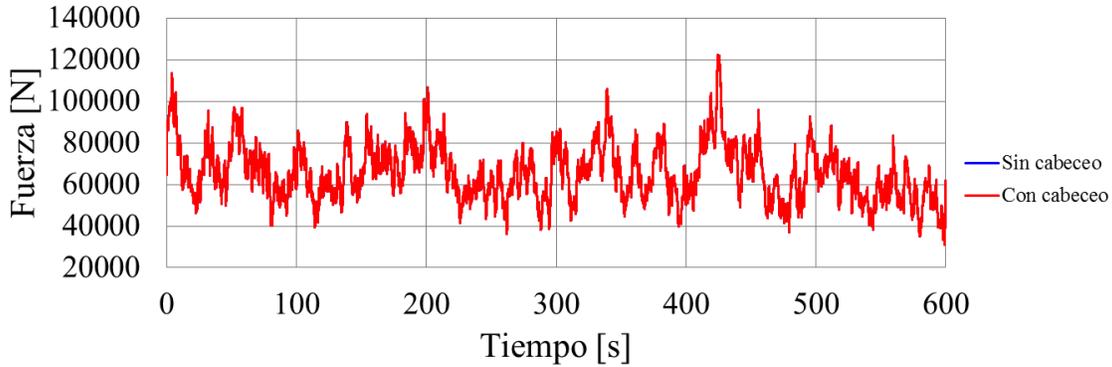


Figura 8.10. Comparación de las historias de fuerzas eólicas sintéticas para monópolo espectacular considerando y sin considerar cabeceo de la masa.

Para el análisis paso a paso con excitación en la base se toma como aceleración sísmica al registro de la estación “San Juan de los Llanos” (Figura 2.7 b). Y para la excitación en la masa se toman las fuerzas de viento longitudinal simuladas numéricamente, Figura 2.11 b, aunque en esta sección se debe contemplar el cabeceo que se presenta en el oscilador; la fuerza de viento podría llegar a cambiar debido a que el área de contacto varía con cada paso de tiempo.

Los resultados obtenidos y comparados para la excitación en la base se muestran en la Figura 8.11 y Tabla 8.3 y para la excitación en la masa se muestran en la Figura 8.12 y tabla 8.4. En el lado izquierdo (a) se tienen a las respuestas en el tiempo, fuerza de cortante máxima y momento de volteo máximo obtenidos en el capítulo 2 y los del lado derecho (b) son las respuestas, fuerza de cortante máxima y momento de volteo máximo obtenidos en este capítulo.

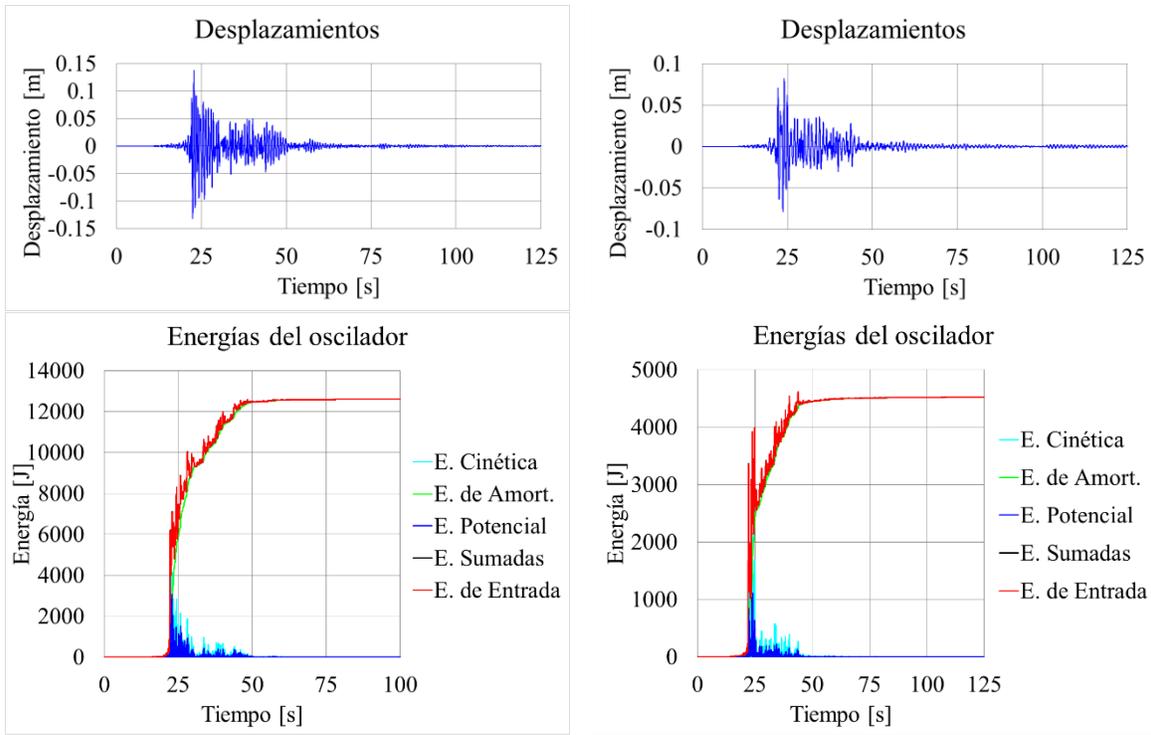
En los resultados del oscilador con excitación en la base se puede observar que la respuesta máxima de desplazamientos disminuye aproximadamente un 40 %, la respuesta máxima del balance de energía disminuye un 60 %, la fuerza cortante y el momento de volteo máximo también disminuyen aproximadamente un 40 %.

Tabla 8.3. Comparación de cortantes y momentos máximos, monópolo espectacular, intervalo elástico, excitación en la base.

Caso	a) Capítulo 2	b) Capítulo 8
Fuerza cortante máxima (N)	44,613.49	26,652.20
Momento de volteo máximo (N-m)	1,059,570.41	633,993.49

Tabla 8.4. Comparación de cortantes y momentos máximos, monópolo espectacular, intervalo elástico, excitación en la masa.

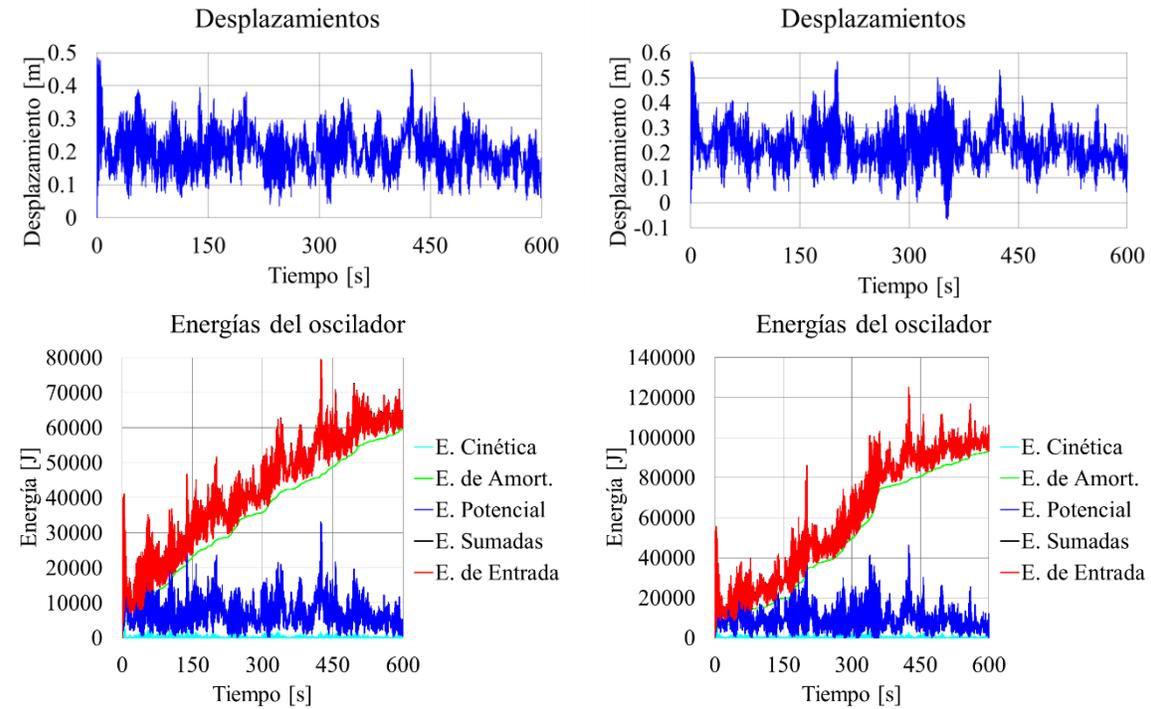
Caso	a) Capítulo 2	b) Capítulo 8
Fuerza cortante máxima (N)	157,694.77	183,487.16
Momento de volteo máximo (N-m)	3,745,250.75	4,388,040.47



a) Resultados del capítulo 2.

b) Resultados de este capítulo.

Figura 8.11. Comparación de resultados del monópolo espectacular, intervalo elástico, excitación en la base.



a) Resultados del capítulo 2.

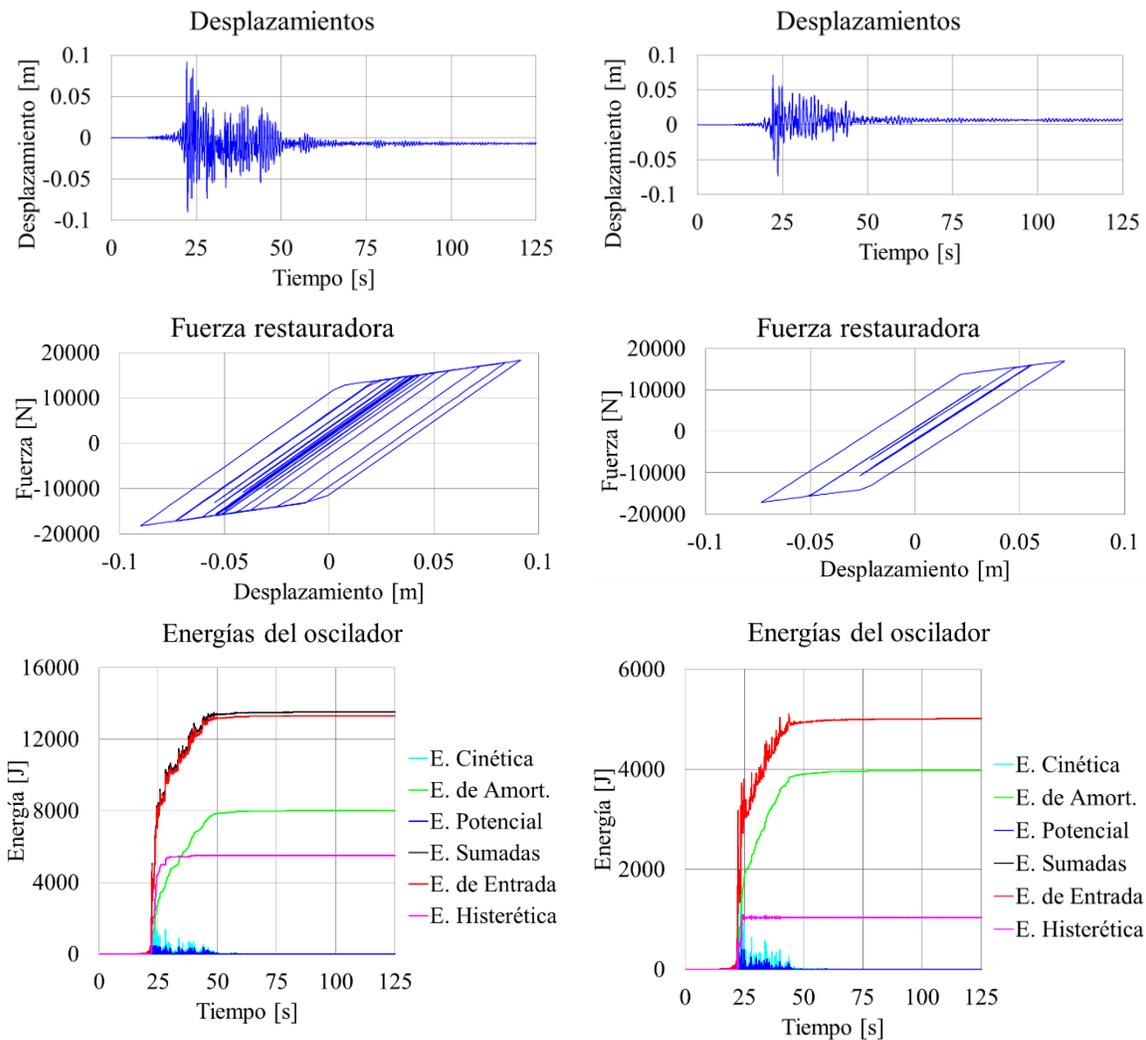
b) Resultados de este capítulo.

Figura 8.12. Comparación de resultados del monópolo espectacular, intervalo elástico, excitación en la masa.

Para la respuesta con excitación en la masa, ésta aumenta ligeramente en su respuesta máxima de desplazamiento y de igual forma la respuesta en el tiempo del balance de energía del oscilador, la fuerza cortante máxima y momento de volteo máximo.

8.2.2.2 Intervalo inelástico (bilineal)

Para la excitación en la base se toma el registro sísmico de la estación “San Juan de los Llanos” (Figura 2.7 b) y para la excitación en la masa se toman las fuerzas de la simulación numérica de viento, Figura 2.11 b. Y como se menciona en la sección anterior, las fuerzas varían debido al cabeceo en el oscilador el cual modifica el área de contacto entre las fuerzas de viento y el oscilador.



a) Resultados del capítulo 4.

b) Resultados del presente capítulo.

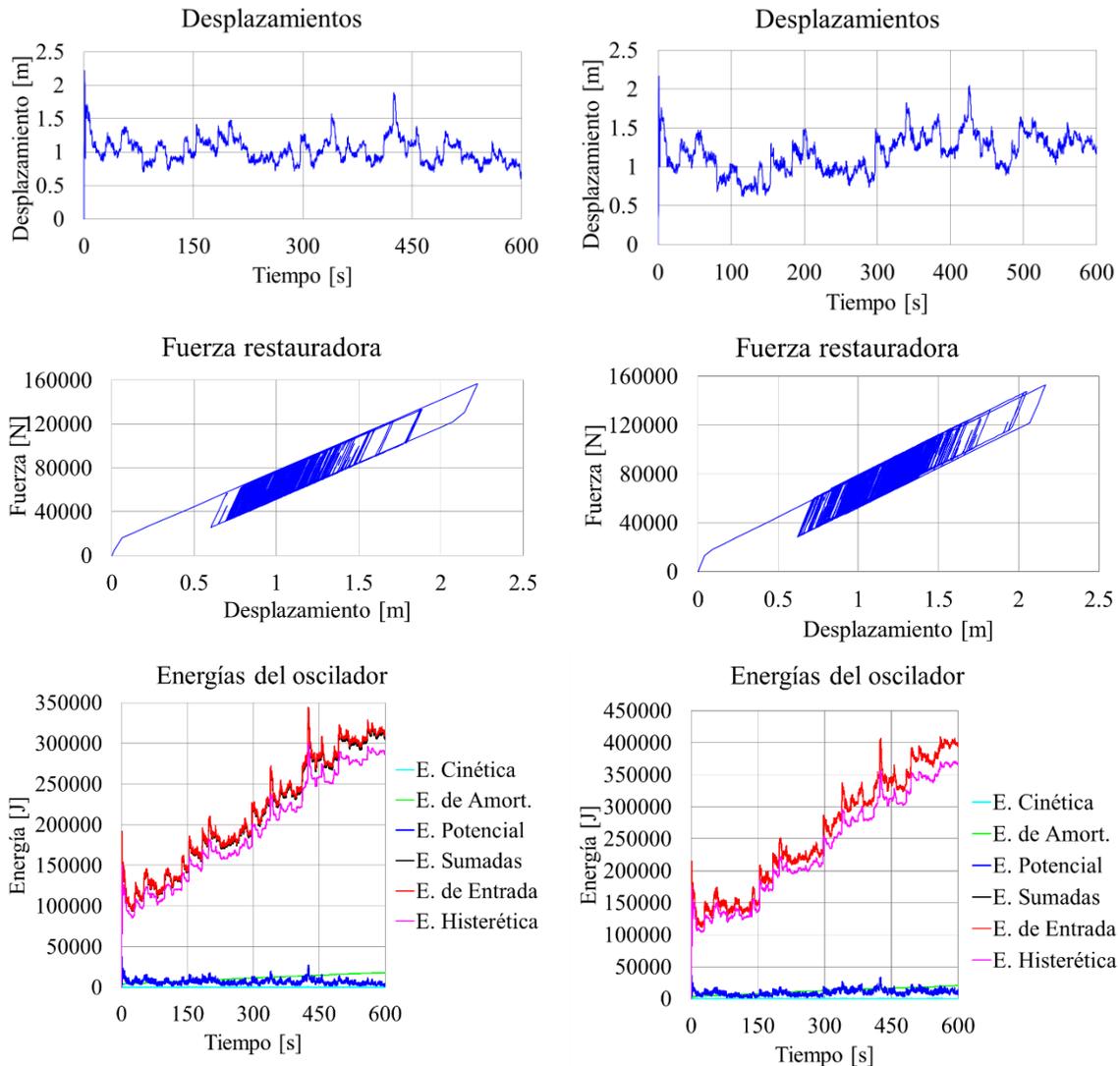
Figura 8.13. Comparación de resultados del monópulo espectacular, intervalo inelástico (Bilineal), excitación en la base.

Tabla 8.5. Comparación de cortantes y momentos máximos, monópulo espectacular, intervalo inelástico (Bilineal), excitación en la base.

Caso	a) Capítulo 4	b) Capítulo 8
Fuerza cortante máxima (N)	29,679.49	23,830.32
Momento de volteo máximo (N-m)	704,887.81	572,356.10

Tabla 8.6. Comparación de cortantes y momentos máximos, monópulo espectacular, intervalo inelástico (Bilineal), excitación en la masa.

Caso	a) Capítulo 4	b) Capítulo 8
Fuerza cortante máxima (N)	722,368.16	704,650.82
Momento de volteo máximo (N-m)	17,156,243.69	16,837,911.76



a) Resultados del capítulo 4.

b) Resultados del presente capítulo.

Figura 8.14. Comparación de resultados del monópulo espectacular, intervalo inelástico (Bilineal), excitación en la masa.

Los resultados que se obtienen en el análisis paso a paso con excitación en la base se muestran en la Figura 8.13 y tabla 8.5 donde de igual manera se comparan con los resultados obtenidos en la sección (4.1.3.1) y para el análisis paso a paso con excitación en la masa se muestran en la Figura 8.14 y tabla 8.6 con su respectiva comparación, sección (4.1.3.2). En el lado izquierdo (a) se tienen a las respuestas en el tiempo, fuerza de cortante máxima y momento de volteo máximo obtenidos en el capítulo 4 y los del lado derecho (b) son las respuestas en el tiempo, fuerza de cortante máxima y momento de volteo máximo obtenidos en este capítulo.

En los resultados del oscilador con excitación en la base se puede observar que la respuesta máxima de desplazamientos disminuye aproximadamente un 30 %, en la respuesta máxima del balance de energía disminuye un 60 %, muy similar a como sucede en el rango elástico del material, la fuerza cortante y el momento de volteo máximo también disminuyen aproximadamente un 20 %. Para el oscilador con excitación en la masa la respuesta máxima de desplazamiento, la fuerza cortante máxima y el momento de volteo máximo disminuye y la respuesta en el tiempo del balance de energía del oscilador aumenta.

8.2.3 Ejemplo de aplicación en columna de un puente con su tablero, intervalo elástico e inelástico con excitación en la base y en la masa

8.2.3.1 Intervalo elástico

Las propiedades del oscilador que se toman para este ejemplo son las mismas que las del capítulo 5. Para realizar la comparación de resultados se hará de igual forma un análisis paso a paso con las propiedades del oscilador de la sección (5.1.3) pero únicamente considerando 1GDL, tanto para la excitación en la base como en la masa. Para esta parte se necesita conocer la distancia y_c de 2.001 m, el módulo de elasticidad de la columna de 24,099,792,530 Pa, para esto se debe conocer la resistencia a compresión del concreto la cual es de $f'_c = 30 \text{ Mpa}$ y el momento de inercia de la columna de 2.1033 m^4 . Se considera la masa de la columna en el cálculo de la respuesta, para esto se requiere la densidad del material (concreto) y al área transversal de la columna los cuales son, $2,400 \text{ kg/m}^3$ y 5.1408 m^2 , respectivamente, los efectos de la carga axial la cual es de $10,547,105.85 \text{ N}$ y el momento másico de inercia de la sección del oscilador es de $I_{z_m} = 12,653,071.2 \text{ kg} - \text{m}^2$. Las condiciones iniciales son igual a 0.

La aceleración sísmica que se toma para el análisis sísmico paso a paso (excitación en la base) es el registro de la estación “San Juan de los Llanos” (Figura 2.7 b). Y para la excitación en la masa se toman las fuerzas de viento longitudinal simuladas numéricamente, Figura 5.15. Solamente que para esta parte, las fuerzas varían un poco, ya que el área de contacto entre las fuerzas de viento y el oscilador no es constante en el paso del tiempo por la presencia del cabeceo en el oscilador. El registro de fuerzas de viento las cuales consideran el cabeceo del oscilador se presenta en la Figura 8.15, en donde se muestra la comparación entre el registro de fuerzas sin considerar cabeceo en la masa y considerando el mismo.

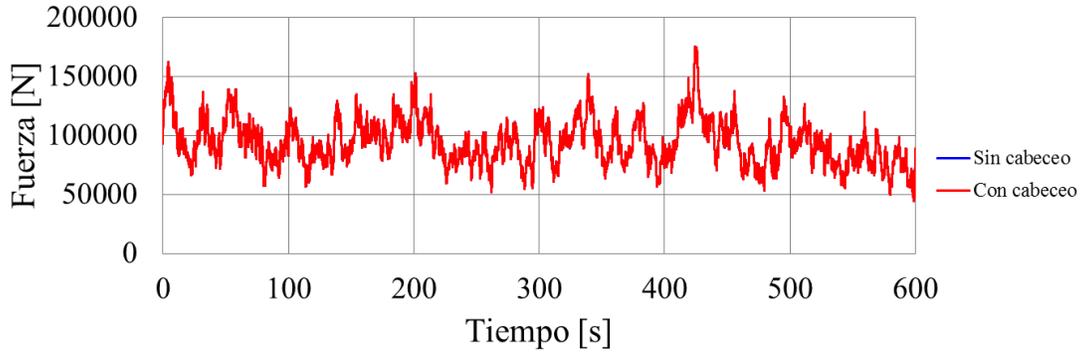
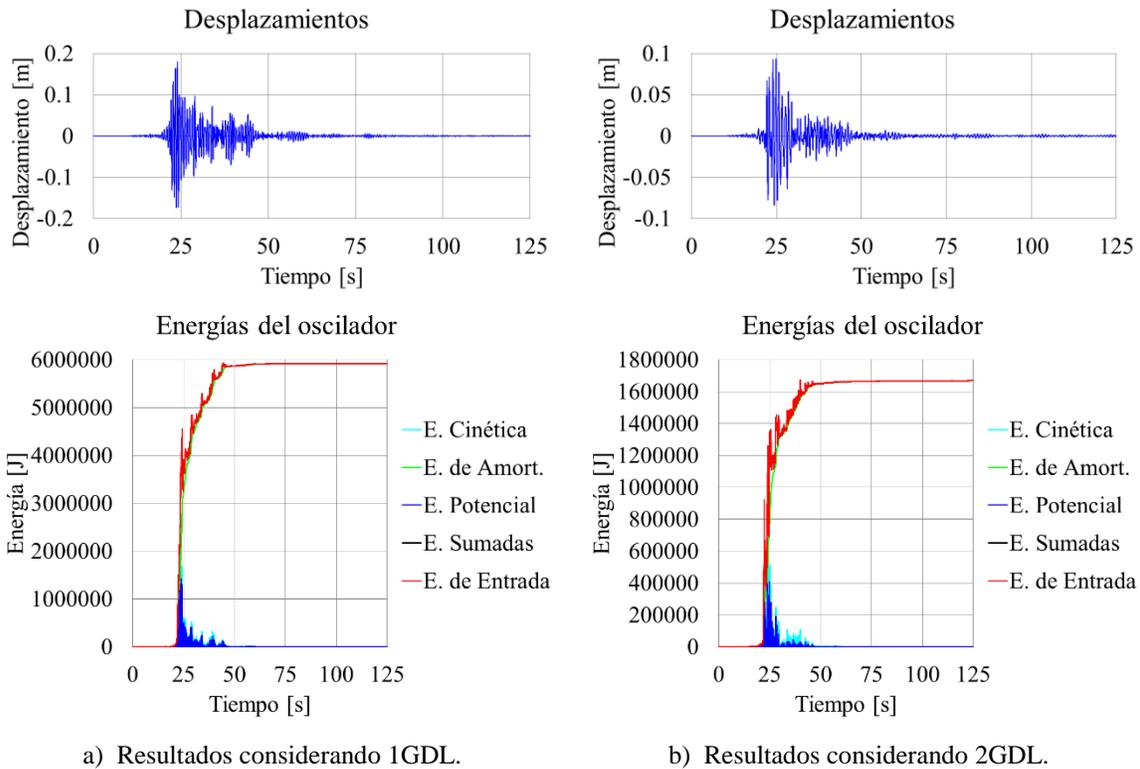


Figura 8.15. Comparación de las historias de fuerzas eólicas sintéticas para columna y tablero de un puente considerando y sin considerar cabeceo de la masa.

Los resultados que se comparan para la excitación en la base se muestran en la Figura 8.16 y tabla 8.7 y para la excitación en la masa se muestran en la Figura 8.17 y tabla 8.8. En el lado izquierdo (a) se tienen a las respuestas en el tiempo, fuerza de cortante máxima y momento de volteo máximo considerando 1GDL y los del lado derecho (b) son las respuestas, fuerza de cortante máxima y momento de volteo máximo obtenidos en este capítulo, o sea, considerando 2GDL.



a) Resultados considerando 1GDL. b) Resultados considerando 2GDL.
Figura 8.16. Comparación de resultados de la columna de un puente con su tablero, intervalo elástico, excitación en la base.

Tabla 8.7. Comparación de cortantes y momentos máximos, columna de un puente con su tablero, intervalo elástico, excitación en la base.

Caso	a) Considerando 1GDL	b) Considerando 2GDL
Fuerza cortante máxima (N)	15,787,090.90	8,213,862.85
Momento de volteo máximo (N-m)	189,445,090.75	89,119,670.68

Tabla 8.8. Comparación de cortantes y momentos máximos, columna de un puente con su tablero, intervalo elástico, excitación en la masa.

Caso	a) Considerando 1GDL	b) Considerando 2GDL
Fuerza cortante máxima (N)	235,093.44	315,213.61
Momento de volteo máximo (N-m)	2,821,121.29	3,742,826.25

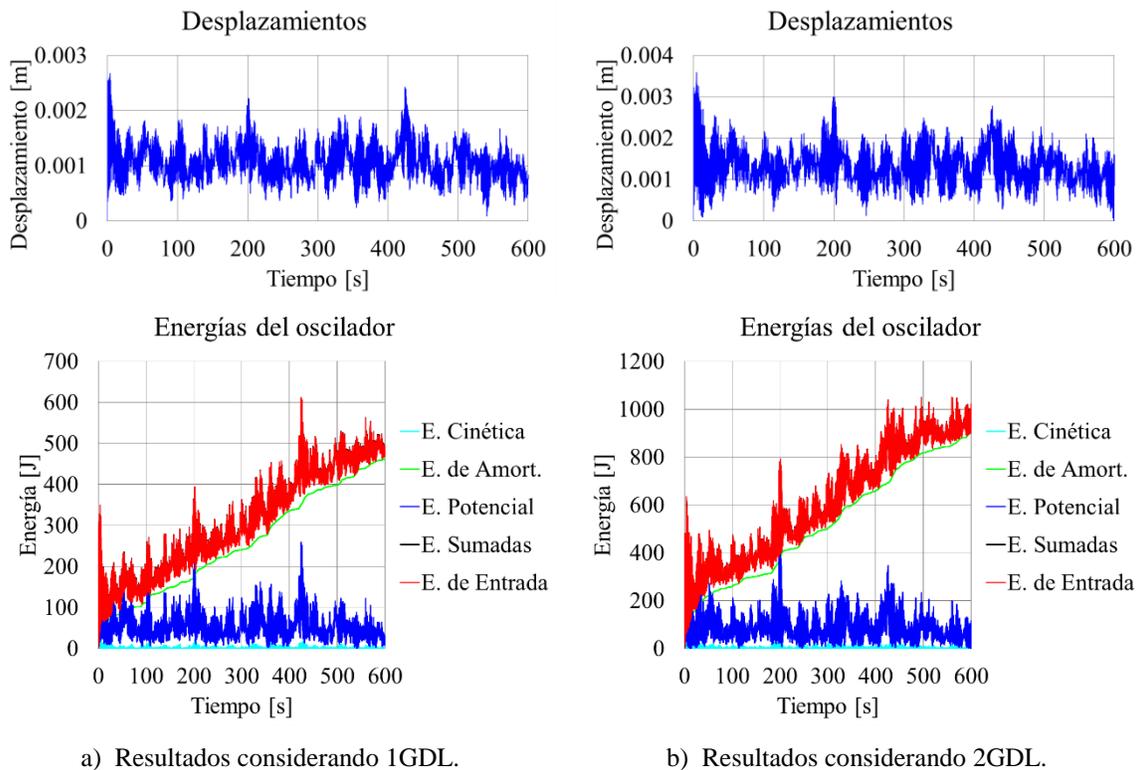
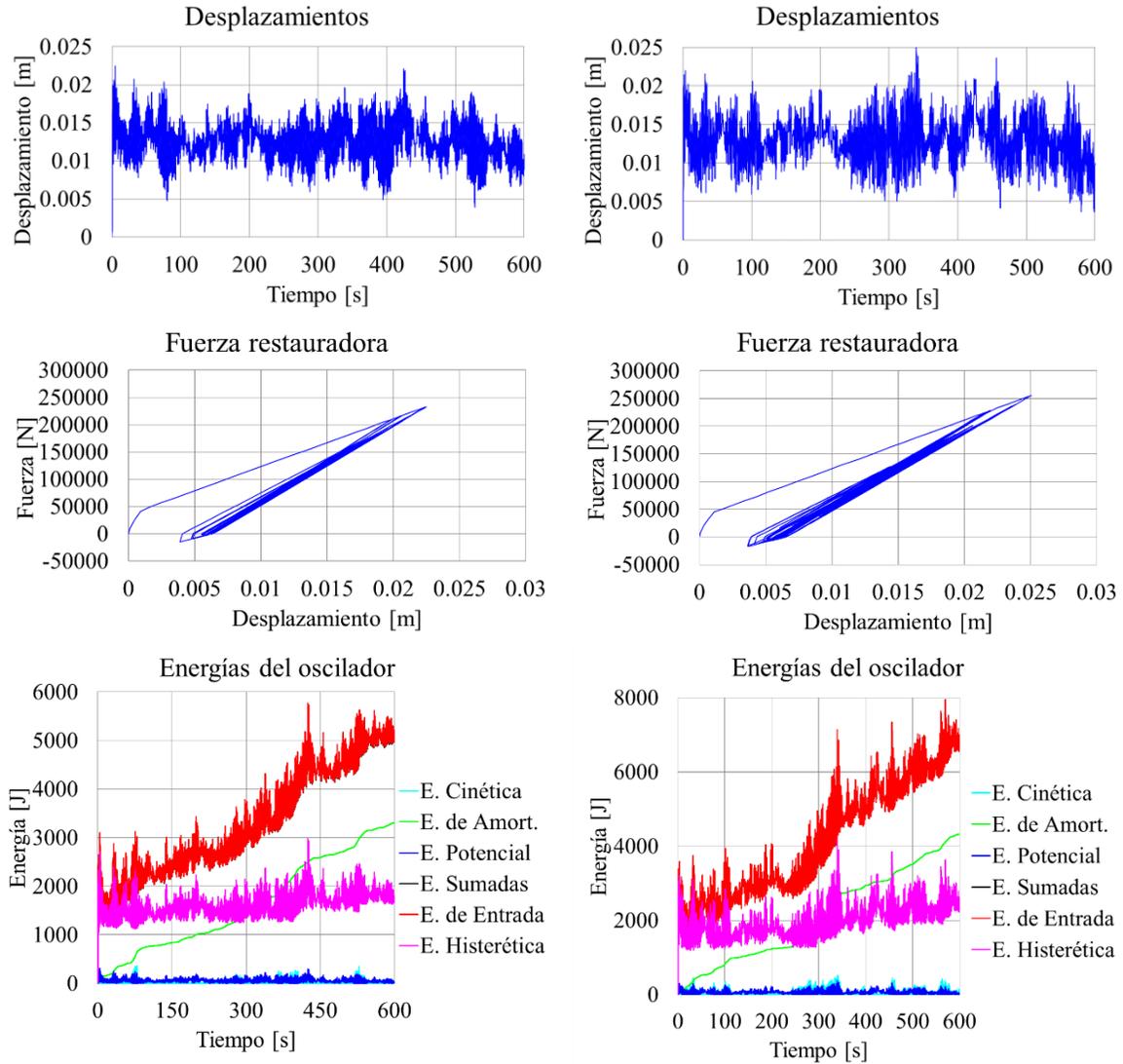


Figura 8.17. Comparación de resultados de la columna de un puente con su tablero, intervalo elástico, excitación en la masa.

Se logra apreciar que en los resultados con excitación en la base los desplazamientos se reducen aproximadamente en un 50 % y la energía igual se reduce, solo que ésta en un 70 % aproximadamente, la fuerza cortante y momento igual disminuyen alrededor de un 50 %.

Para la respuesta con excitación en la masa aumenta ligeramente todo, el desplazamiento, la energía, la fuerza cortante y el momento de volteo.



a) Resultados del capítulo 5.

b) Resultados del presente capítulo.

Figura 8.19. Comparación de resultados de la columna de un puente con su tablero, intervalo inelástico (Takeda), excitación en la masa.

Tabla 8.9. Comparación de cortantes y momentos máximos de la columna de un puente con su tablero, intervalo inelástico (Takeda), excitación en la base.

Caso	a) Capítulo 5	b) Capítulo 8
Fuerza cortante máxima (N)	9,072,500.01	11,254,410.02
Momento de volteo máximo (N-m)	108,870,000.17	178,577,663.61

Tabla 8.10. Comparación de cortantes y momentos máximos de la columna de un puente con su tablero, intervalo inelástico (Takeda), excitación en la masa.

Caso	a) Capítulo 5	b) Capítulo 8
Fuerza cortante máxima (N)	496,113.29	467,331.33
Momento de volteo máximo (N-m)	5,953,359.47	5,723,801.65

la fuerza cortante máxima aumenta y el momento de volteo máximo aumentan.

Para el oscilador con excitación en la masa la respuesta máxima de desplazamiento aumenta ligeramente, de igual forma la respuesta en el tiempo del balance de energía del oscilador y la fuerza restauradora, la fuerza cortante máxima y el momento de volteo máximo disminuyen muy poco.

8.5 Conclusiones

Para hacer más clara la comparación de los resultados obtenidos se presenta la tabla 8.11. Como se puede observar, cuando tomamos en cuenta la presencia del cabeceo en la estructura, o sea, un análisis de un péndulo invertido (P. I.) y se tiene una excitación en la base, en la mayoría de todos los casos la respuesta de desplazamientos, energías, fuerzas cortantes y momentos de volteo máximos disminuyen, el único caso que se comportó de manera distinta fue en la columna de un puente con su tablero, ya que la fuerza cortante y momento de volteo máximo aumentaron.

Para los análisis con excitación en la masa para las dos estructuras en el intervalo elástico aumentan, cuando es en el rango inelástico las respuestas son distintas, no tiene un comportamiento igual.

Tabla 8.11. Resumen de resultados.

	Caso, oscilador, intervalo, excitación	Resp. de desplaz.	Resp. de energía	F. cortante	M. de volteo
Monópolo Espect.	P. I. Monópolo espectacular, elástico, base	Disminuye	Disminuye	Disminuye	Disminuye
	P. I. Monópolo espectacular, elástico, masa	Aumenta	Aumenta	Aumenta	Aumenta
	P. I. Monópolo espectacular, inelástico (bilineal), base	Disminuye	Disminuye	Disminuye	Disminuye
	P. I. Monópolo espectacular, inelástico (bilineal), masa	Disminuye	Aumenta	Disminuye	Disminuye
Puente	P. I. Columna y tablero de un puente, elástico, base	Disminuye	Disminuye	Disminuye	Disminuye
	P. I. Columna y tablero de un puente, elástico, masa	Aumenta	Aumenta	Aumenta	Aumenta
	P. I. Columna y tablero de un puente, inelástico (Takeda), base	Disminuye	Disminuye	Aumenta	Aumenta
	P. I. Columna y tablero de un puente, inelástico (Takeda), masa	Aumenta	Aumenta	Disminuye	Disminuye
	P. I. con ISE Col. y tab. de un puente, inelástico (Takeda), base	Disminuye	Igual	Disminuye	Disminuye
	P. I. con ISE Col. y tab. de un puente, inelástico (Takeda), masa	Aumenta	Aumenta	Disminuye	Aumenta

Capítulo 9

Amortiguamiento viscoelástico

9.1 Introducción

La primera aparición del uso de materiales viscoelástico para el control de vibraciones sobre una estructura fue en las aeronaves en la década de los 50s. Posteriormente la primer aparición que tuvo en la ingeniería civil fue en el año 1969 con 10,000 amortiguadores viscoelásticos que fueron instalados en cada una de las torres gemelas del World Trade Center en Nueva York para ayudar a reducir las vibraciones debido a las cargas de viento. Con esto comenzó a despertar la incorporación de este tipo de amortiguamiento en edificios altos, enfocados solamente al control de vibraciones debido a cargas de eólicas.

La aplicación de este tipo de amortiguadores para el control de vibraciones causadas por sismos tiene un origen más reciente. Generalmente se requiere más amortiguamiento para el control de vibraciones provocadas por sismos en comparación a las vibraciones causadas por viento.

9.2 Comportamiento histerético de amortiguadores viscoelásticos

En comparación con los amortiguadores viscosos los cuales solamente proporcionan una fuerza dependiente de la velocidad, los amortiguadores viscoelásticos (AVE) proporcionan una fuerza dependiente de la velocidad (amortiguamiento viscoso suplementario) y una fuerza de restitución elástica dependiente del desplazamiento. De igual forma estos amortiguadores ayudan a reforzar la estructura y disipar la energía sísmica a través de deformaciones por cortante. Los amortiguadores viscoelásticos típicos que son usados están hechos de copolímeros o sustancia vítrea.

Un modelo que puede ser usado para representar el comportamiento de un amortiguador viscoelástico es el modelo sólido de Kelvin mostrado en la Figura 9.1.

El módulo elástico de cortante se representa con el símbolo G_E mientras que la constante de amortiguamiento viscoso de cortante se representa con G_C . $\tau_s(t)$ y $\gamma_s(t)$ se refieren al esfuerzo y a la deformación por cortante del sólido, respectivamente.

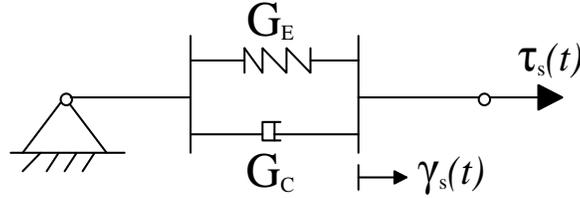


Figura 9.1. Modelo sólido de Kelvin.

Por equilibrio:

$$\tau_E(t) + \tau_C(t) = \tau_s(t) \quad (9.1)$$

donde $\tau_E(t)$ y $\tau_C(t)$ son el esfuerzo de cortante que soporta el material elástico en el tiempo t y el esfuerzo de cortante que soporta el material viscoso en el tiempo t .

Por compatibilidad de deformaciones por cortante:

$$\gamma_E(t) = \gamma_C(t) = \gamma_s(t) \quad (9.2)$$

donde $\gamma_E(t)$ y $\gamma_C(t)$ son la deformación elástica por cortante en el tiempo t y la deformación viscosa por cortante en el tiempo t . La velocidad de deformación por cortante a través del elemento se puede obtener diferenciando la ecuación (9.2) con respecto al tiempo:

$$\dot{\gamma}_E(t) = \dot{\gamma}_C(t) = \dot{\gamma}_s(t) \quad (9.3)$$

Reemplazando las relaciones constitutivas para los componentes elásticos y viscosos en la ecuación (9.3) se obtiene:

$$\frac{\dot{\tau}_E(t)}{G_E} = \frac{\tau_C(t)}{G_C} = \dot{\gamma}_s(t) \quad (9.4)$$

o también

$$\begin{aligned} \tau_E(t) &= G_E \gamma_s(t) \\ \tau_C(t) &= G_C \dot{\gamma}_s(t) \end{aligned} \quad (9.5)$$

Sustituyendo la ecuación (9.5) en la ecuación (9.1) nos lleva a la relación constitutiva de cortante para el sólido de Kelvin:

$$\tau_s(t) = G_E \gamma_s(t) + G_C \dot{\gamma}_s(t) \quad (9.6)$$

Si el material viscoelástico tiene un espesor de cortante h_s y un área de cortante A_s la ecuación (9.6) puede transformarse en una relación fuerza – desplazamiento:

$$F(t) = \hat{k}x(t) + \hat{c}\dot{x}(t) \quad (9.7)$$

donde :

$$\hat{k} = \frac{G_E A_s}{h_s} \quad (9.8)$$

$$\hat{c} = \frac{G_C A_s}{h_s} \quad (9.9)$$

Los valores G_E y G_C dependen de varios parámetros: 1) la frecuencia de excitación, 2) la temperatura del ambiente, 3) la deformación de cortante del nivel y 4) la variación de la temperatura interna dentro del material durante la operación.

Considere un marco de un nivel equipado con un amortiguador viscoelástico incorporado en el mismo de forma diagonal (arriostramiento) con un ángulo θ que va de la componente horizontal hasta el amortiguador (Figura 9.2). Se asume que el arriostramiento es infinitamente rígido.

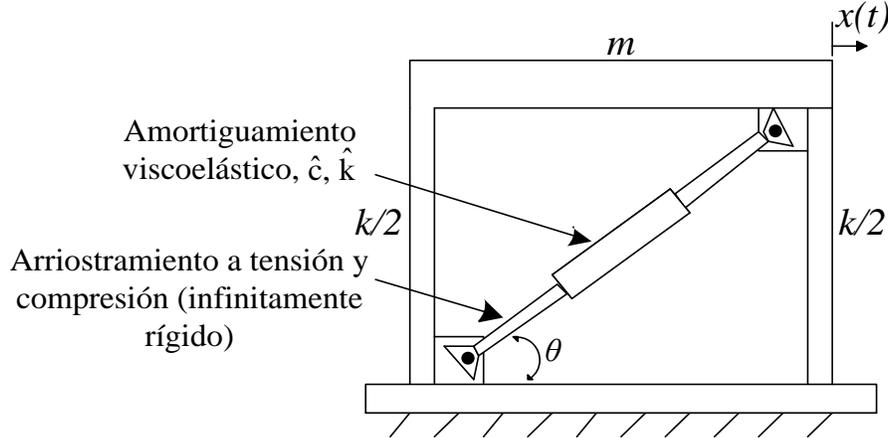


Figura 9.2. Marco de un nivel equipado con amortiguamiento viscoelástico.

La ecuación de movimiento del oscilador en el intervalo elástico se puede escribir como:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) + F_{AVE}(t) = P(t) \quad (9.10)$$

donde $F_{AVE}(t)$ es la fuerza lateral proporcionada por el amortiguador viscoelástico en el tiempo, c es el amortiguamiento viscoso del marco sin refuerzo, puede ser obtenido con el amortiguamiento de Rayleigh y la fuerza $P(t)$ puede referirse a la aceleración del suelo por

la masa del marco o a una fuerza de viento. La fuerza axial que corresponde al amortiguador se obtiene con la siguiente ecuación:

$$F(t) = \hat{k}\Delta(t) + \hat{c}\dot{\Delta}(t) \quad (9.11)$$

donde $\Delta(t)$ es el desplazamiento entre los dos extremos del amortiguador.

Por equilibrio:

$$F_{AVE}(t) = F(t) \cos\theta \quad (9.12)$$

Por compatibilidad:

$$\Delta(t) = x(t) \cos\theta \quad (9.13)$$

$$\dot{\Delta}(t) = \dot{x}(t) \cos\theta \quad (9.14)$$

Sustituyendo las ecuaciones (9.13) y (9.14) en la ecuación (9.11) y después sustituyendo la ecuación (9.11) en la ecuación (9.12) se obtiene que

$$F_{AVE}(t) = \left\{ \hat{k} [x(t) \cos\theta] + \hat{c} [\dot{x}(t) \cos\theta] \right\} \cos\theta = \left[\hat{k}x(t) + \hat{c}\dot{x}(t) \right] \cos^2\theta \quad (9.15)$$

Y sustituyendo la ecuación (9.15) en la ecuación (9.10) se llega a que

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) + \left[\hat{k}x(t) + \hat{c}\dot{x}(t) \right] \cos^2\theta = P(t) \quad (9.16)$$

O escrita de otra forma:

$$m\ddot{x}(t) + \left[c + \hat{c}\cos^2\theta \right] \dot{x}(t) + \left[k + \hat{k}\cos^2\theta \right] x(t) = P(t) \quad (9.17)$$

Obteniendo de esta forma la ecuación de movimiento del marco de un nivel o de un oscilador de 1GDL con amortiguamiento viscoelástico en el intervalo elástico del material, pudiendo apreciar que la ecuación puede resolverse como si fuera un oscilador de 1GDL sin amortiguamiento. Se puede considerar la masa del amortiguador sumándosela a la masa del oscilador.

Para obtener la energía del oscilador se puede tomar la ecuación (9.17) e integrarla con respecto al desplazamiento. De igual forma se podría tomar la ecuación (9.10), únicamente que para calcular la energía de los amortiguadores viscoelásticos

$$\begin{aligned} E_{AVE}(t) &= \int_0^x F_{AVE}(t) dx = \int_0^x \left[\hat{k}x(t) + \hat{c}\dot{x}(t) \right] \cos^2\theta dx = \cos^2\theta \int_0^x \left[\hat{k}x(t) + \hat{c}\dot{x}(t) \right] dx = \\ &= \cos^2\theta \left[\hat{k} \int_0^x x(t) dx + \hat{c} \int_0^x \dot{x}(t) dx \right] \end{aligned} \quad (9.18)$$

La integral que multiplica a la rigidez proporcionada por el amortiguador viscoelástico en la ecuación (9.18) puede resolverse de manera directa y para la otra integral se realiza un cambio de variable, obteniendo así:

$$E_{AVE}(t) = \cos^2\theta \left[\hat{k} \left(\frac{x(t)_i^2}{2} \right) + \hat{c} \int_0^t \dot{x}(t)_i^2 dt \right] = \cos^2\theta \left[\hat{k} \left(\frac{x(t)_i^2}{2} \right) + \sum_{i=1}^t \hat{c} \dot{x}(t)_i^2 \Delta t \right] \quad (9.19)$$

o también por medio de una integración numérica

$$\begin{aligned} E_{AVE}(t) &= \int_0^x F_{AVE}(t) dx = \int_0^x [\hat{k}x(t) + \hat{c}\dot{x}(t)] \cos^2\theta dx = \\ &= \sum_{i=1}^x \frac{\cos^2\theta}{2} \left\{ [\hat{k}x(t)_{i+1} + \hat{c}\dot{x}(t)_{i+1}] + [\hat{k}x(t)_i + \hat{c}\dot{x}(t)_i] \right\} \{x(t)_{i+1} - x(t)_i\} \end{aligned} \quad (9.20)$$

Obteniendo así la energía que aporta el amortiguador viscoelástico al oscilador de 1GDL.

La masa del amortiguador viscoelástico puede despreciarse, ya que es pequeña en comparación a la de la estructura. Si fuera el caso de no despreciar la masa únicamente se le suma a la masa del oscilador para realizar en análisis paso a paso y para obtener la energía de ésta, únicamente que en lugar de la masa del oscilador sería la masa del amortiguador. Una vez obtenida la energía cinética del oscilador se le suma a la energía del amortiguador viscoelástico $E_{AVE}(t)$.

La ecuación (9.17) se puede escribir para un oscilador de múltiples grados de libertad (MGDL) en el intervalo elástico del material como

$$\{[M] + [\bar{m}]\} \{\ddot{x}(t)\} + \{[C] + [\bar{c}]\} \{\dot{x}(t)\} + \{[K] + [\bar{k}]\} \{x(t)\} = P(t) \quad (9.21)$$

donde $[\bar{m}]$ es la matriz de masas correspondientes a los amortiguadores agregados al oscilador, puede ser despreciable si son pequeños comparados con la masa del oscilador, $[\bar{c}]$ es la matriz del amortiguamiento viscoso que aportan los amortiguadores viscoelásticos y $[\bar{k}]$ es la matriz de rigidez que aporta el material de los amortiguadores viscoelásticos agregados al oscilador.

La matriz de masas correspondientes a los amortiguadores tiene la siguiente forma:

$$[\bar{m}] = \begin{bmatrix} \bar{m}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{m}_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \bar{m}_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{m}_n \end{bmatrix} \quad (9.22)$$

La matriz del amortiguamiento viscoso que aportan los amortiguadores viscoelásticos tiene la siguiente forma:

$$[\bar{c}] = \begin{bmatrix} \bar{c}_1 + \bar{c}_2 & -\bar{c}_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -\bar{c}_2 & \bar{c}_2 + \bar{c}_3 & -\bar{c}_3 & \cdots & 0 \\ 0 & -\bar{c}_3 & \bar{c}_3 + \bar{c}_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\bar{c}_n \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{c}_n & \bar{c}_n \end{bmatrix} \quad (9.23)$$

donde $\bar{c}_n = \hat{c}_n \cos^2 \theta$. La matriz de rigidez que aporta el material de los amortiguadores viscoelásticos tiene la siguiente forma:

$$[\bar{k}] = \begin{bmatrix} \bar{k}_1 + \bar{k}_2 & -\bar{k}_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -\bar{k}_2 & \bar{k}_2 + \bar{k}_3 & -\bar{k}_3 & \cdots & 0 \\ 0 & -\bar{k}_3 & \bar{k}_3 + \bar{k}_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\bar{k}_n \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{k}_n & \bar{k}_n \end{bmatrix} \quad (9.24)$$

donde $\bar{k}_n = \hat{k}_n \cos^2 \theta$ y n representa el número de niveles del oscilador.

Para obtener la energía de los amortiguadores viscoelásticos se realiza con la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} E_{AVE}(t) &= \int_0^x \{dx\}^T \{F_{AVE}(t)\} = \int_0^x \{dx\}^T \{[\bar{k}]\{x(t)\} + [\bar{c}]\{\dot{x}(t)\}\} = \\ &= \int_0^x \{dx\}^T [\bar{k}]\{x(t)\} + \int_0^x \{dx\}^T [\bar{c}]\{\dot{x}(t)\} \end{aligned} \quad (9.25)$$

Sustituyendo la ecuación (2.26) en la ecuación (9.25) y ordenando se obtiene que

$$\begin{aligned} E_{AVE}(t) &= \int_0^x \{dx\}^T [\bar{k}]\{x(t)\} + \int_0^t \{\dot{x}(t)\}^T [\bar{c}]\{\dot{x}(t)\} dt \\ &= \frac{1}{2} \{x(t)\}^T [\bar{k}]\{x(t)\} + \sum_{i=1}^t \{\dot{x}(t)_i\}^T [\bar{c}]\{\dot{x}(t)_i\} \Delta t \end{aligned} \quad (9.26)$$

o también por medio de una integración numérica

$$\begin{aligned}
 E_{AVE}(t) &= \int_0^x \{dx\}^T [\bar{k}] \{x(t)\} + \int_0^x \{dx\}^T [\bar{c}] \{\dot{x}(t)\} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^x (x(t)_{i+1} - x(t)_i)^T [\bar{k}] (x(t)_{i+1} + x(t)_i) + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=1}^x (x(t)_{i+1} - x(t)_i)^T [\bar{c}] (\dot{x}(t)_{i+1} + \dot{x}(t)_i) \right)
 \end{aligned}
 \tag{9.27}$$

Obteniendo así la ecuación que define la energía del amortiguador viscoelástico. Si se desea tomar en cuenta la matriz de las masas de los amortiguadores solamente se suma a la matriz de masas del oscilador para así poder realizar el análisis paso a paso. Todo lo anterior es para cuando el material del oscilador se encuentra en el intervalo elástico. Cuando el material incursiona en la no linealidad (cualquier modelo histerético), la forma de obtener la respuesta paso a paso y el balance de energía del oscilador, ya sea con excitación en la base o en la masa para un oscilador de 1GDL es igual que como se explica en el capítulo 3, solamente que se debe considerar el aporte del amortiguador viscoelástico como se presenta en la ecuación (9.17) y para cuando es un oscilador de MGDL es igual que como se explica en el capítulo 3 y se debe considerar el aporte de los amortiguadores viscoelásticos para cada grado de libertad.

La metodología que se ocupa en este capítulo permite pasar de un marco o edificios de “n” crujeías a un sistema masa – resorte incluyendo los amortiguadores viscoelásticos, para esto se necesita la matriz de masas y rigideces del edificio o marco que se analice, para los amortiguadores viscoelásticos se suman los de cada nivel respectivamente. Por ejemplo se tiene un marco como el de la Figura 9.3.

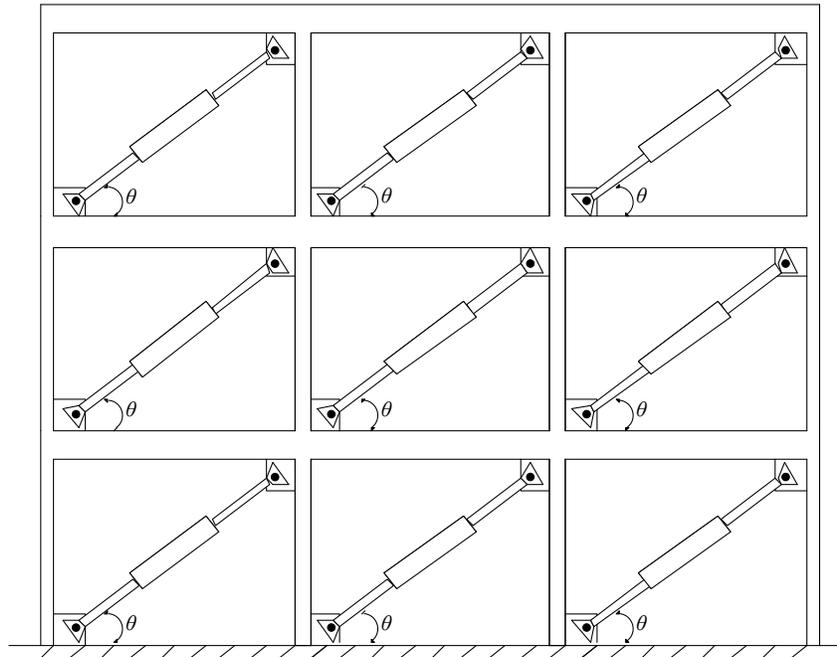


Figura 9.3. Marco de un nivel equipado con amortiguamiento viscoelástico.

Se tienen 3 amortiguadores viscoelásticos por nivel, solamente se suman las propiedades de cada amortiguador, para obtener un solo valor por nivel y posteriormente se crean las matrices.

El registro de aceleración que se usa en todos los ejemplos para excitación en la base es el de la estación “San Juan de los Llanos” (Figura 2.7 b), ya sea para el oscilador de 1GDL o para el de MGDL.

Las fuerzas de viento que se ocupan para el análisis paso a paso en todos los ejemplos de este capítulo para la excitación en la masa del oscilador de 1GDL es el de la Figura 2.11 b. Y para el oscilador de MGDL, que en este caso son 3GDL, se ocupan las fuerzas obtenidas en el capítulo 7 (Figura 7.6).

Para el oscilador de 1 GDL los resultados que se muestran en el intervalo elástico son las respuestas en el tiempo obtenidas en este trabajo y con un software convencional (Sap2000). Se comparan los desplazamientos en el tiempo y además se muestra la gráfica del balance de energías en el tiempo donde se puede apreciar claramente la energía que aporta el o los amortiguadores.

Para los resultados en el intervalo inelástico se muestran las respuestas de los desplazamientos en el tiempo, la fuerza restauradora con y sin los amortiguadores en el oscilador.

Para el oscilador de 3GDL se muestra lo mismo solamente que del nivel de arriba (nivel 3).

9.3 Ejemplo de aplicación, oscilador de 1GDL

Las propiedades del oscilador (Figura 9.4) que se toman como ejemplo son las siguientes: masa, $M = 5,000 \text{ kg}$; y rigidez lateral, $K = 800,000 \text{ N/m}$. Se considera un porcentaje de amortiguamiento de $\zeta = 0.05$ para la excitación en la base y de $\zeta = 0.01$ para la excitación en la masa, un periodo de $T_n = 0.497 \text{ s}$. La condición inicial del desplazamiento es, $x_0 = 0\text{m}$; la condición inicial de la velocidad es, $\dot{x}_0 = 0\text{m/s}$; y la altura al centro de masas es, $d = 3\text{m}$. Los propiedades del amortiguador viscoelástico que se toman son las del material tipo C a 42° , se desprecia la masa de éste.

9.3.1 Excitación en la base

9.3.1.1 Intervalo elástico

Lo primero que se necesita son los valores de \hat{k} y \hat{c} , para esto se obtienen con las ecuaciones (9.8) y (9.9), respectivamente.

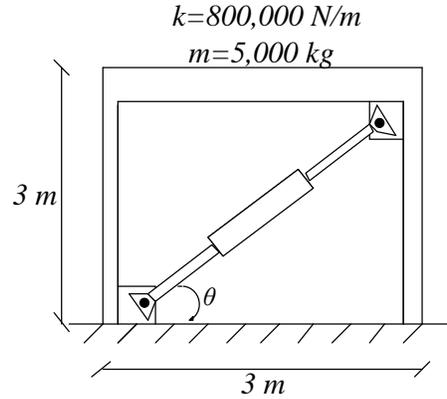


Figura 9.4. Oscilador de 1DGL con amortiguamiento viscoelástico (AVE).

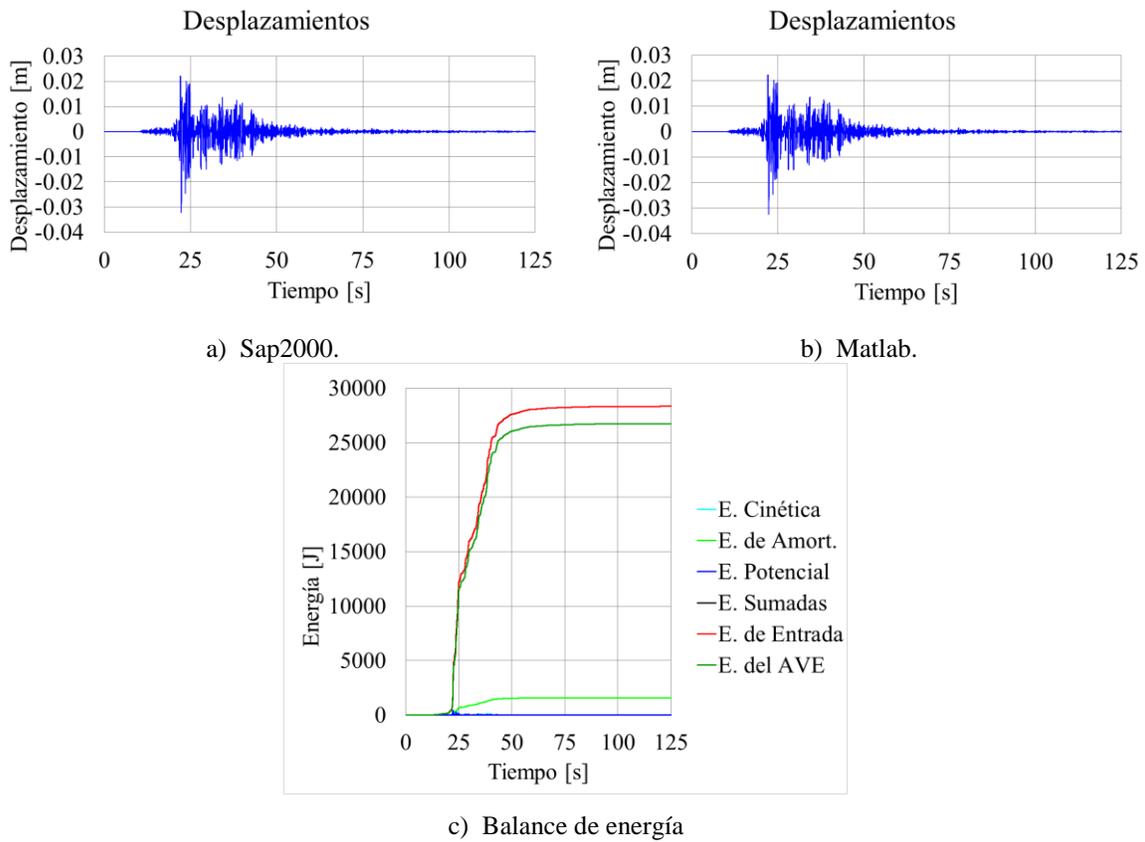


Figura 9.5. Comparación de resultados del oscilador de 1DGL, intervalo elástico, excitación en la base.

$$\hat{k} = \frac{G_E A_s}{h_s} = \frac{(110,000 Pa)(0.011613 m^2)}{0.00381 m} = 335,283.46 \frac{N}{m}$$

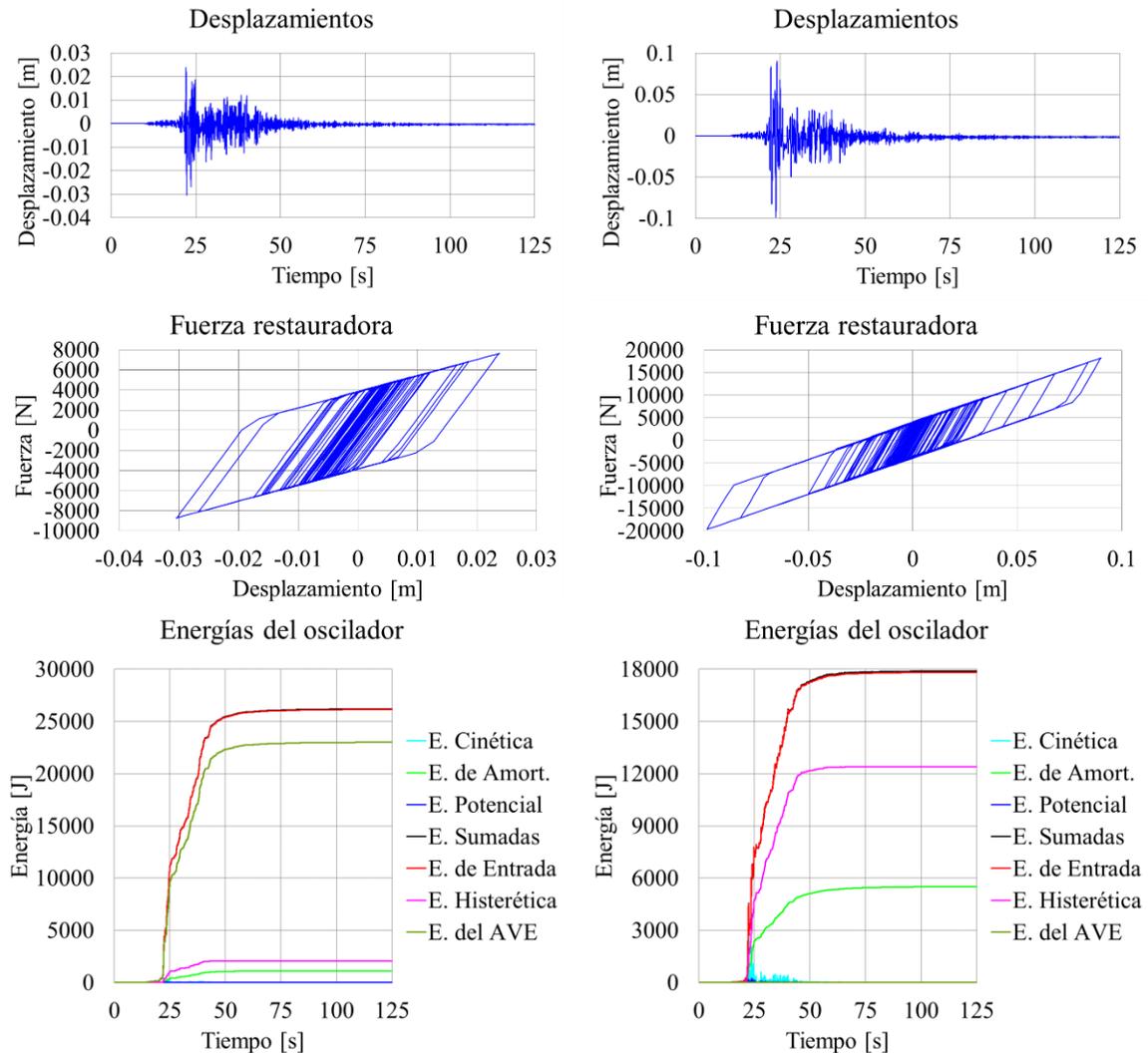
$$\hat{c} = \frac{G_C A_s}{h_s} = \frac{(70,000 Pa - s)(0.011613 m^2)}{0.00381 m} = 213,362.20 \frac{N - s}{m}$$

Posteriormente se necesita obtener el valor de la fuerza que produce el amortiguador, o dicho de otra forma se necesita obtener el valor que va dentro de la ecuación de movimiento del oscilador, ecuación (9.17). Para esto se necesita saber el ángulo θ :

$$\theta = \tan^{-1} \frac{3m}{3m} = 45^\circ$$

$$\hat{k} \cos^2 \theta = \left(335,283.46 \frac{N}{m} \right) \cos^2 (45^\circ) = 167,641.73 \frac{N}{m}$$

$$\hat{c} \cos^2 \theta = \left(213,362.20 \frac{N-s}{m} \right) \cos^2 (45^\circ) = 106,681.10 \frac{N-s}{m}$$



a) Con amortiguamiento viscoelástico.

b) Sin amortiguamiento viscoelástico.

Figura 9.6. Comparación de resultados del oscilador de 1GDL, intervalo inelástico (bilineal), excitación en la base con y sin AVE.

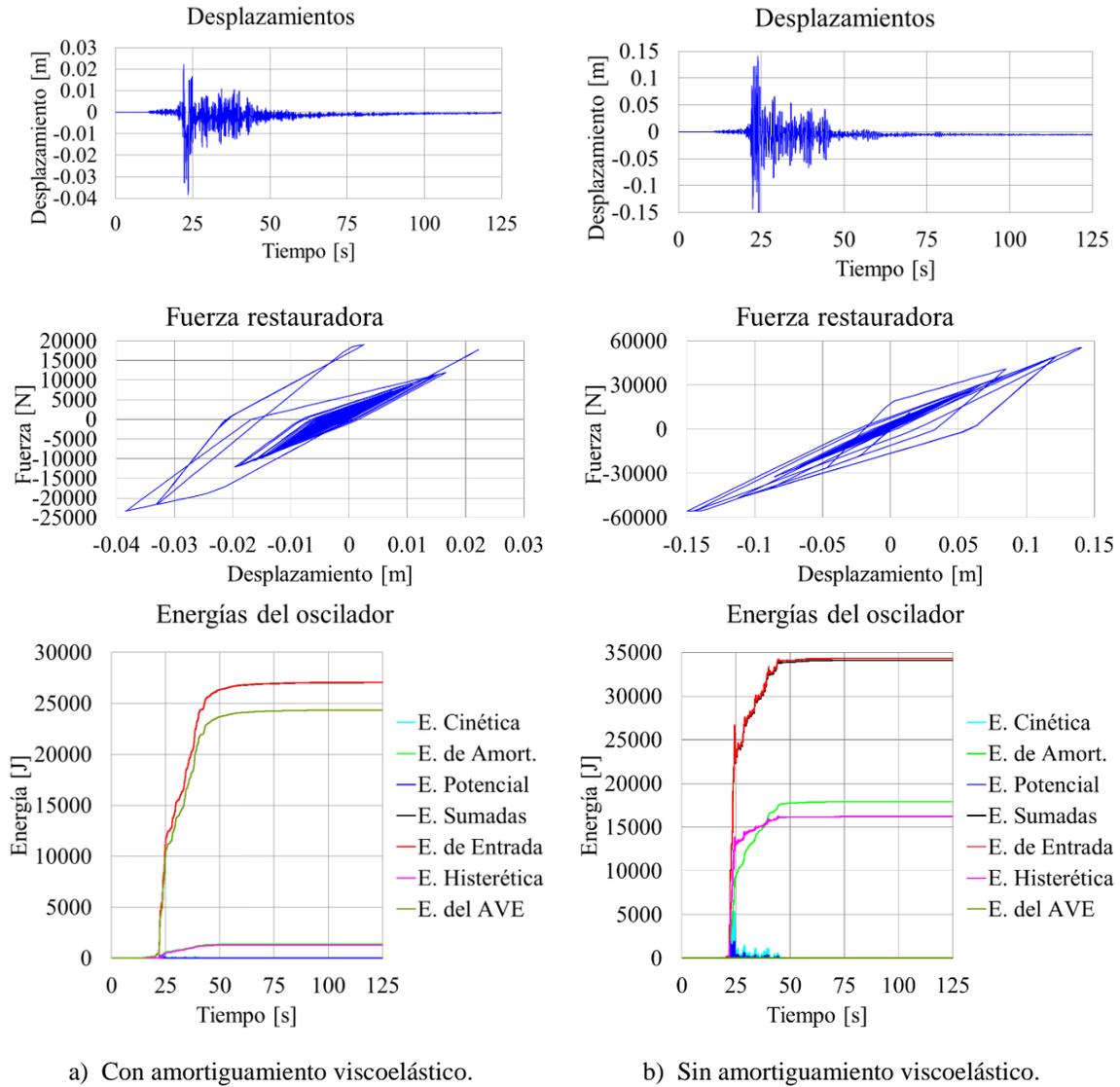


Figura 9.7. Comparación de resultados del oscilador de 1GDL, intervalo inelástico (Takeda), excitación en la base con y sin AVE.

Teniendo los valores de $\hat{k}\cos^2\theta$ y $\hat{c}\cos^2\theta$ se resuelve la ecuación diferencial. De igual forma se puede obtener la energía del amortiguador viscoelástico. En la Figura 9.5 se muestra la respuesta de desplazamientos obtenida en el software convencional y los obtenidos en este trabajo.

Se puede apreciar que da exactamente lo mismo, comprobando así que el programa en Matlab es correcto.

9.3.1.2 Intervalo inelástico (Bilineal)

En el intervalo inelástico, bilineal se obtiene una fuerza de fluencia realizando el producto de la altura del oscilador por 0.002, $\Delta_y = 0.002(3\text{ m}) = 0.006\text{ m}$ y posteriormente por la rigidez del oscilador obteniendo así $f_y = (800,000\text{ N/m})(0.006\text{ m}) = 4800\text{ N}$ y el ponderador para la rigidez de post – fluencia es de 20 %.

Los resultados que se muestran en la Figura 9.6 son las historias de desplazamientos en el tiempo, la fuerza de restitución y el balance de energía del oscilador con y sin amortiguamiento viscoelástico en el oscilador.

Podemos apreciar que ayuda bastante el amortiguador viscoelástico a disminuir la respuesta de desplazamientos del oscilador de 10 cm a 3 cm, provocando de igual manera que la energía histerética disminuya aunque la energía completa del oscilador aumente debido a la energía del amortiguador.

9.3.1.3 Intervalo inelástico (Takeda)

La forma de obtener los parámetros para el modelo de Takeda es de la misma forma que en la sección (5.1.1), únicamente que la rigidez antes del agrietamiento (K_c) se toma como la rigidez elástica del oscilador (K_e), la cual para este ejemplo es la rigidez lateral K , la rigidez secante (K_s) es igual a $(\frac{1}{2}K_e)$, y (F_y) no se ve afectado por algún porcentaje, los demás valores se toman como se describen en la sección (5.1.1). Estos valores obtenidos se muestran en la tabla 9.1. El parámetro de degradación de la rigidez de descarga (α) se toma igual 0.25; y el factor que controla la rigidez de recarga (β) se toma igual a 1. La respuesta máxima de aceleración se obtiene del espectro de aceleraciones (Figura 5.12 b) y es igual a 29.2146 m/s^2 y el valor de la ductilidad es igual a $\mu = 4$.

Tabla 9.1. Parámetros del modelo histerético de Takeda para el oscilador de 1GDL con AVE con excitación en la base.

Concepto	San Juan de los Llanos
Fuerza de inercia máxima elástica (F_e) [N]	146,073.00
Fuerza de fluencia (F_y) [N]	55,210.40
Fuerza de agrietamiento (F_c) [N]	18,403.47
Rigidez secante (K_s) [N/m]	400,000.00
Rigidez antes del agrietamiento (K_c) [N/m]	800,000.00
Rigidez antes de la fluencia (K_y) [N/m]	320,000.00
Rigidez después de la fluencia (K_u) [N/m]	40,000.00
Desplazamiento de agrietamiento (D_c) [m]	0.02300
Desplazamiento de fluencia (D_y) [m]	0.13803

Los resultados que se muestran en la Figura 9.7 son las historias de desplazamientos en el tiempo, la fuerza de restitución y el balance de energía del oscilador con y sin amortiguamiento viscoelástico en el oscilador.

Se puede apreciar que gracias al AVE la respuesta del oscilador disminuye de 15 cm a 4 cm, de igual manera la energía del oscilador disminuye un poco aunque la energía histerética casi es nula, queriendo decir que el material casi no incursiona en el intervalo inelástico del material, siendo los amortiguadores quienes disipan la mayor parte de la energía del sismo.

9.3.2 Excitación en la masa

Para la parte con excitación en la masa se toman las mismas propiedades del amortiguador viscoelástico que se utilizan para la excitación en la base.

9.3.2.1 Intervalo elástico

En la Figura 9.8 se muestran los resultados obtenidos en el software convencional y los obtenidos en este trabajo. Además del balance de energía del oscilador.

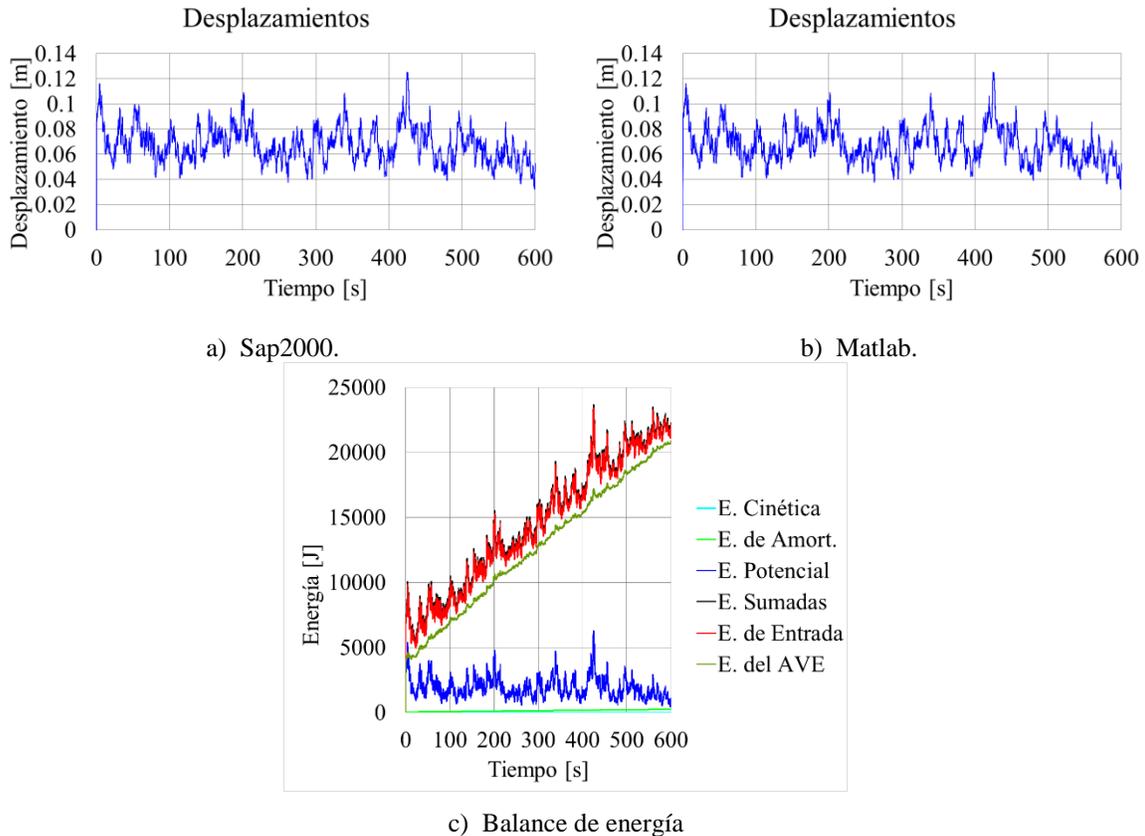
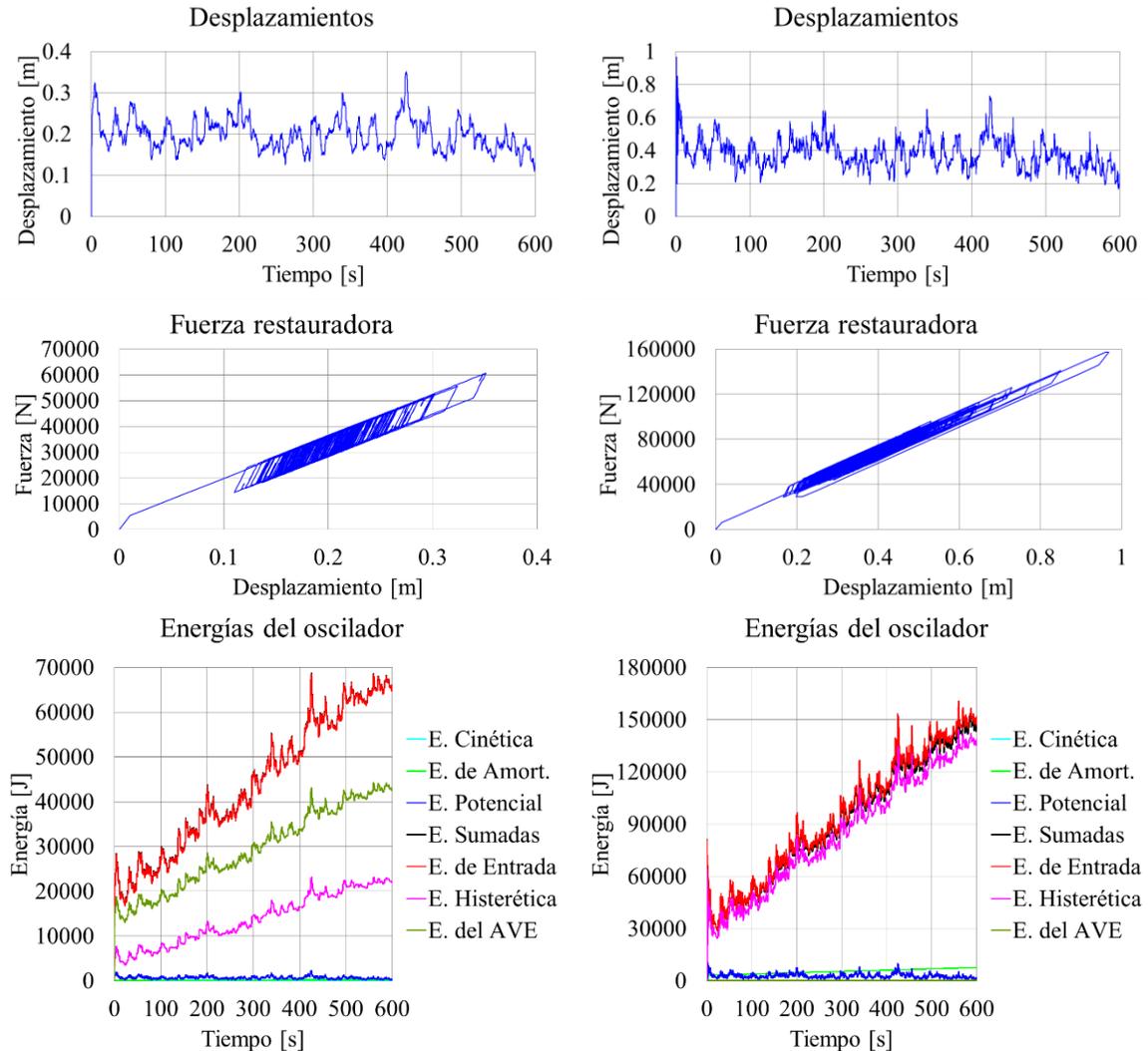


Figura 9.8. Comparación de resultados del oscilador de 1GDL, intervalo elástico, excitación en la masa.

Podemos apreciar que las respuestas son idénticas.

9.3.2.2 Intervalo inelástico (Bilineal)

La forma de cómo obtener la fuerza de fluencia que se toma en este ejemplo es la misma que la sección (9.3.1.2). Los resultados que se muestran en la Figura 9.9 son las respuestas de desplazamiento, fuerza de restitución y balance de energía con y sin AVE.



a) Con amortiguamiento viscoelástico.

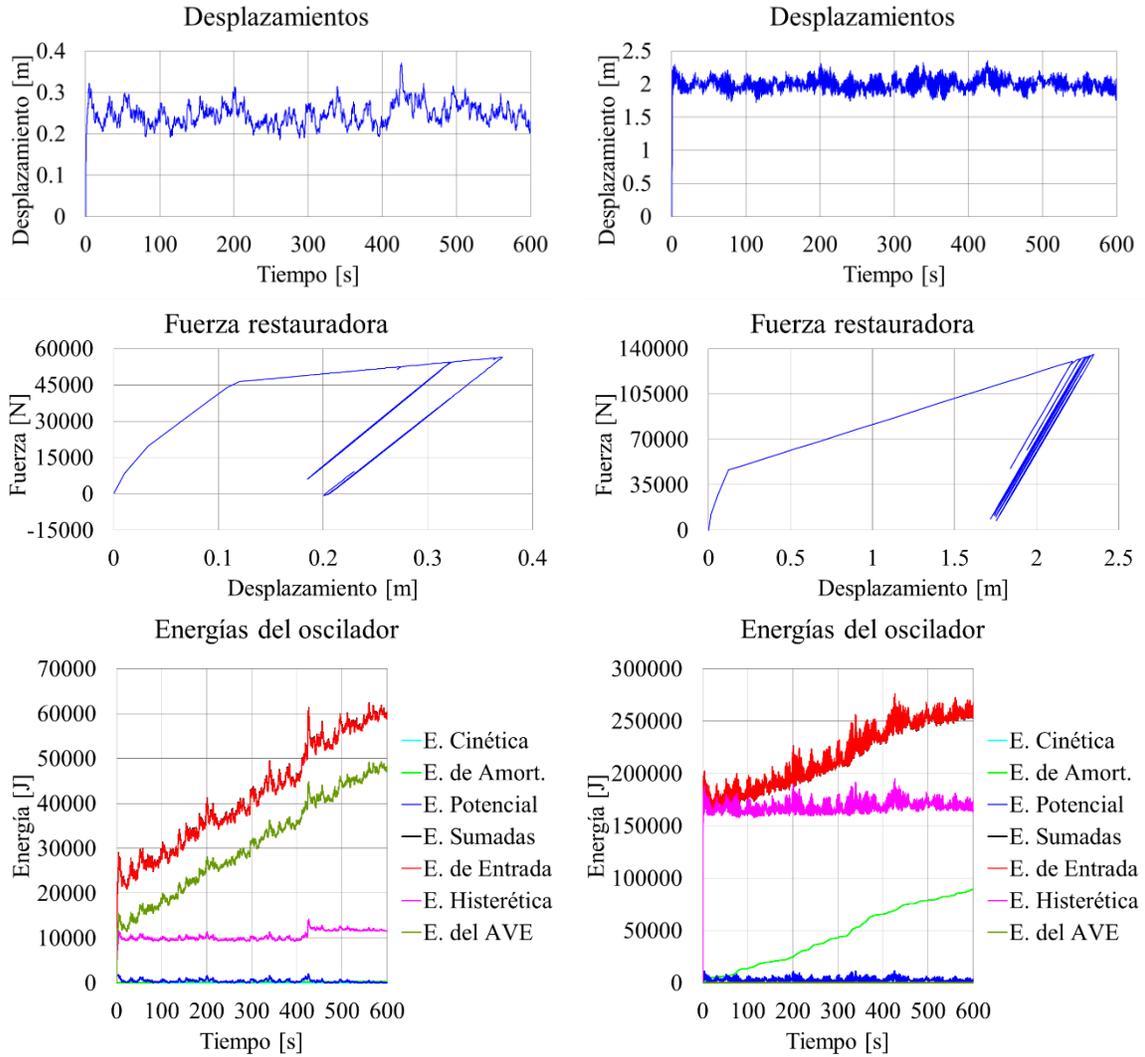
b) Sin amortiguamiento viscoelástico.

Figura 9.9. Comparación de resultados del oscilador de 1GDL, intervalo inelástico (bilineal), excitación en la masa con y sin AVE.

Podemos apreciar que los amortiguadores viscoelásticos de igual manera que para una excitación en la base, ayudan bastante a disminuir la respuesta de desplazamientos en el tiempo, además de que el balance de energía y la fuerza de restitución del oscilador también disminuyen considerablemente.

9.3.2.3 Intervalo inelástico (Takeda)

La manera de obtener los parámetros para el modelo histerético de esta sección es igual que como se presenta en la sección (9.3.1.3), solamente que para obtener la fuerza de inercia máxima elástica no se parte de la idea de un espectro elástico de aceleraciones, ya que la excitación es directamente una fuerza (eólica), por lo tanto lo que se toma como fuerza de inercia máxima elástica es la fuerza máxima que se presenta en la simulación de fuerzas de viento, este valor es de 122,114.75 N.



a) Con amortiguamiento viscoelástico.

b) Sin amortiguamiento viscoelástico.

Figura 9.10. Comparación de resultados del oscilador de 1GDL, intervalo inelástico (Takeda), excitación en la masa con y sin AVE.

Tabla 9.2. Parámetros del modelo histerético de Takeda para el oscilador de 1GDL con AVE con excitación en la masa.

Concepto	Carga eólica
Fuerza de inercia máxima elástica (F_e) [N]	122,114.75
Fuerza de fluencia (F_y) [N]	46,155.04
Fuerza de agrietamiento (F_c) [N]	15,385.01
Rigidez secante (K_s) [N/m]	400,000.00
Rigidez antes del agrietamiento (K_c) [N/m]	800,000.00
Rigidez antes de la fluencia (K_y) [N/m]	320,000.00
Rigidez después de la fluencia (K_u) [N/m]	40,000.00
Desplazamiento de agrietamiento (D_c) [m]	0.01923
Desplazamiento de fluencia (D_y) [m]	0.11539

Se puede apreciar que las 3 respuestas mostradas en la Figura 9.10 disminuyen considerablemente debido al amortiguador viscoelásticos, observando que este tipo de amortiguador ayuda bastante a reducir los desplazamientos, fuerzas de restitución y energías independientemente de dónde se encuentre la excitación.

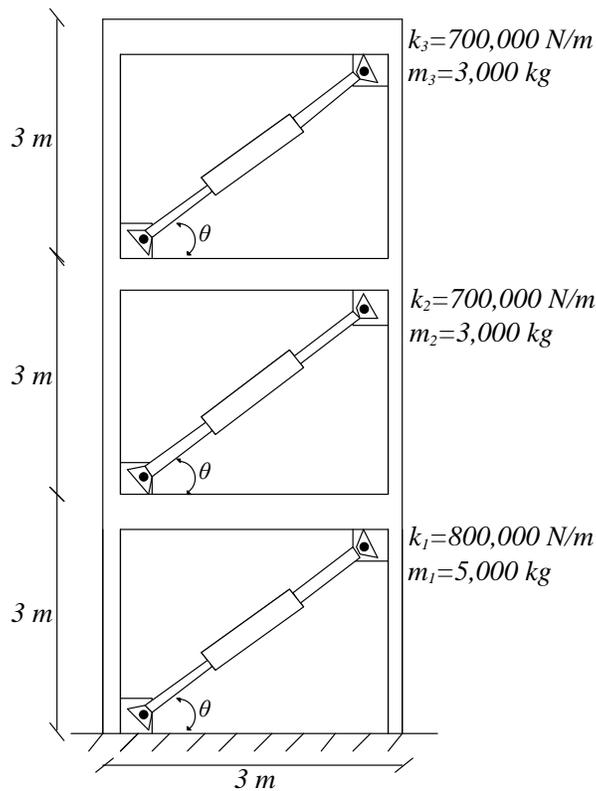


Figura 9.11. Oscilador de 3GDL con amortiguamiento viscoelástico (AVE).

9.4 Ejemplo de aplicación, oscilador de 3GDL

Las propiedades del oscilador de 3GDL (Figura 9.11) que se toman como ejemplo son las siguientes: masas, $M_1 = 5,000 \text{ kg}$, $M_2 = 3,000 \text{ kg}$, $M_3 = 3,000 \text{ kg}$; y rigideces laterales, $K_1 = 800,000 \text{ N/m}$, $K_2 = 700,000 \text{ N/m}$, $K_3 = 700,000 \text{ N/m}$. Se considera un porcentaje de amortiguamiento para el primer y segundo modo de $\zeta_{1,2} = 0.05$ para cuando es una excitación en la base, para cuando es una excitación en las masas se toma como porcentaje de amortiguamiento para el primer y segundo modo de $\zeta_{1,2} = 0.01$. Las condiciones iniciales del desplazamiento para los tres niveles son de $x_0 = 0 \text{ m}$; las condiciones iniciales de la velocidad para los tres niveles son de $\dot{x}_0 = 0 \text{ m/s}$; el periodo fundamental del oscilador sin AVE es $T_n = 0.922 \text{ s}$; las alturas de entrepiso al centro de masas son, $d_{1,2,3} = 3 \text{ m}$. Los propiedades de los AVE son iguales para los 3 que van en cada nivel, éstas son las del material tipo C a 42° , se desprecia la masa de éstos.

9.4.1 Excitación en la base

9.4.1.1 Intervalo elástico

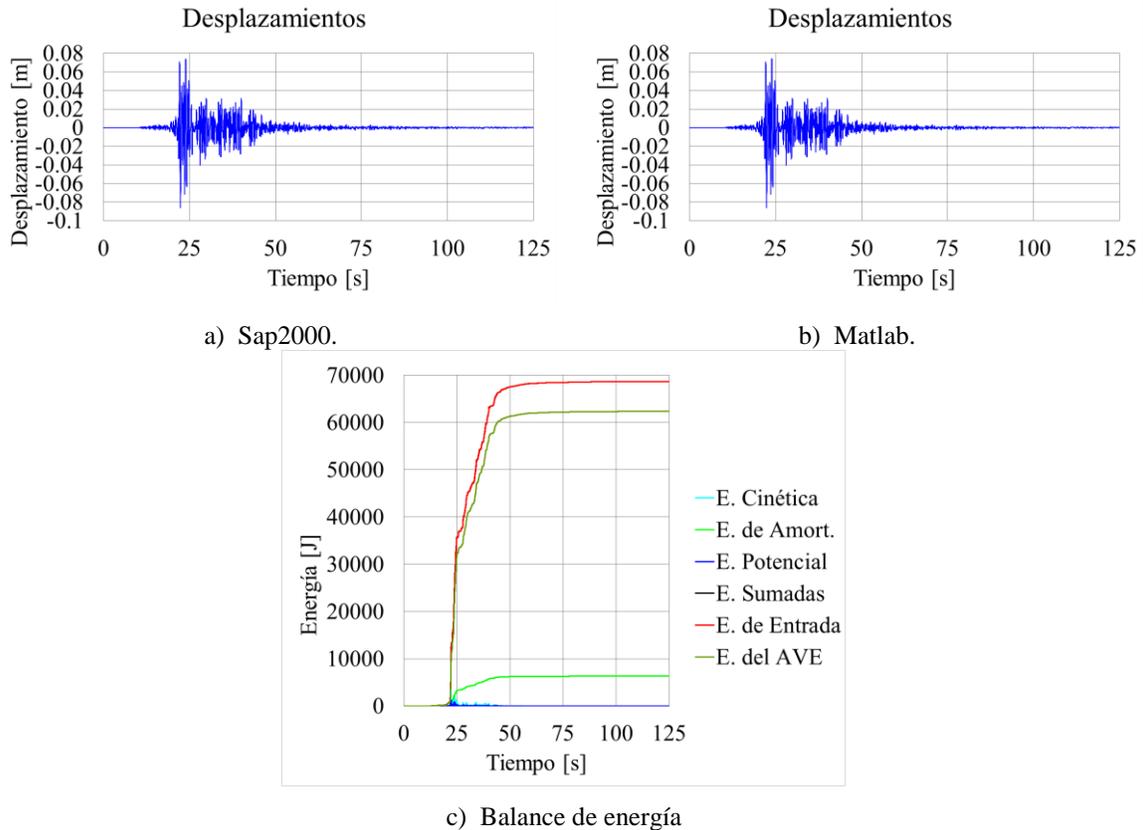
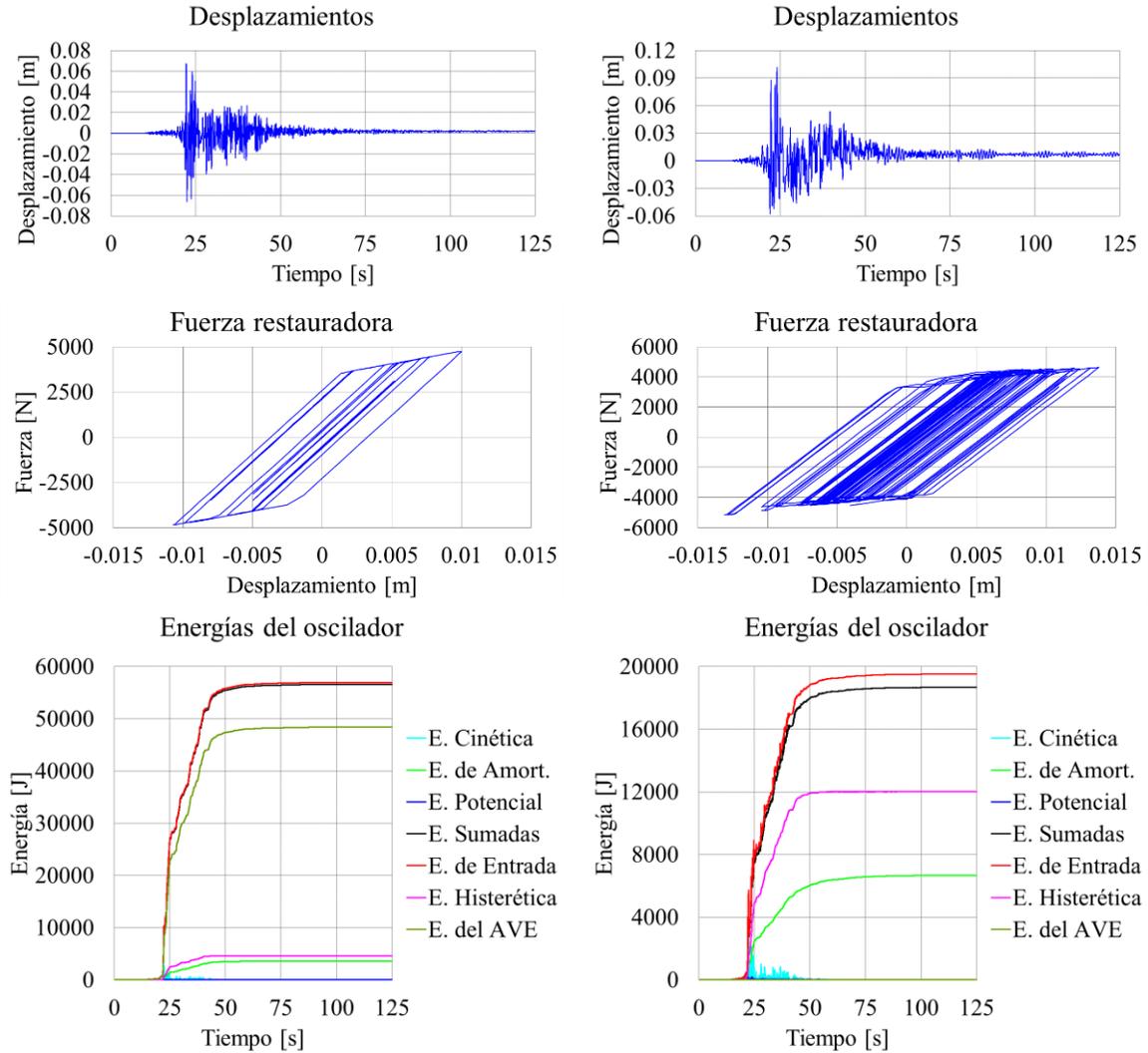


Figura 9.12. Comparación de resultados del oscilador de 3GDL, nivel 3, intervalo elástico, excitación en la base.

Para comenzar con el cálculo se necesita conocer los valores de \hat{k}_n y \hat{c}_n , estos se obtienen como en la sección (9.3.1.1), solamente que se necesita calcular para cada nivel, posteriormente se obtienen los valores \bar{k}_n y \bar{c}_n para poder realizar la matriz de rigidez y amortiguamiento de los amortiguadores viscoelásticos como se muestra en la ecuación (9.23) y (9.24), la matriz de masas de los AVE es igual a cero ya que se desprecian. Una vez obtenido las matrices se procede a obtener la respuesta de la ecuación de movimiento del oscilador, ecuación (9.21). De igual forma se puede obtener el balance de energía del oscilador contemplando el AVE con la ecuación (9.26) o (9.27).



a) Con amortiguamiento viscoelástico.

b) Sin amortiguamiento viscoelástico.

Figura 9.13. Comparación de resultados del oscilador de 3GDL, nivel 3, intervalo inelástico (bilineal), excitación en la base con y sin AVE.

En la Figura 9.12 se muestra la respuesta de desplazamientos obtenida en el software convencional y en este trabajo. Además del balance de energía del oscilador.

9.4.1.2 Intervalo inelástico (Bilineal)

Para obtener las fuerzas de fluencia de cada nivel se realiza el producto de la altura de entrepiso por 0.002, $\Delta_{y_{1,2,3}} = 0.002(3\text{ m}) = 0.006\text{ m}$, debido a que la altura de entrepiso es igual para todos los niveles, el desplazamiento de fluencia es el mismo para todos. Posteriormente se realiza el producto del desplazamiento de fluencia por la rigidez de entrepiso obteniendo la fuerza de fluencia de cada nivel, $f_{y_1} = (800,000\text{ N/m})(0.006\text{ m}) = 4800\text{ N}$, $f_{y_{2,3}} = (700,000\text{ N/m})(0.006\text{ m}) = 4200\text{ N}$, y el ponderador para la rigidez de post – fluencia es de 20 % para los 3 niveles.

Los resultados se muestran en la Figura 9.13, se muestran las historias de desplazamiento y fuerza de restitución del nivel 3 y balance de energía del oscilador con y sin AVE.

Se puede observar que debido al AVE el oscilador incursiona muy poco en el intervalo inelástico, haciendo que su respuesta sea muy parecida a cuando se realiza un análisis paso a paso en el intervalo elástico, la energía histerética disminuye pero la energía del oscilador aumenta debido a los AVE.

9.4.1.3 Intervalo inelástico (Takeda)

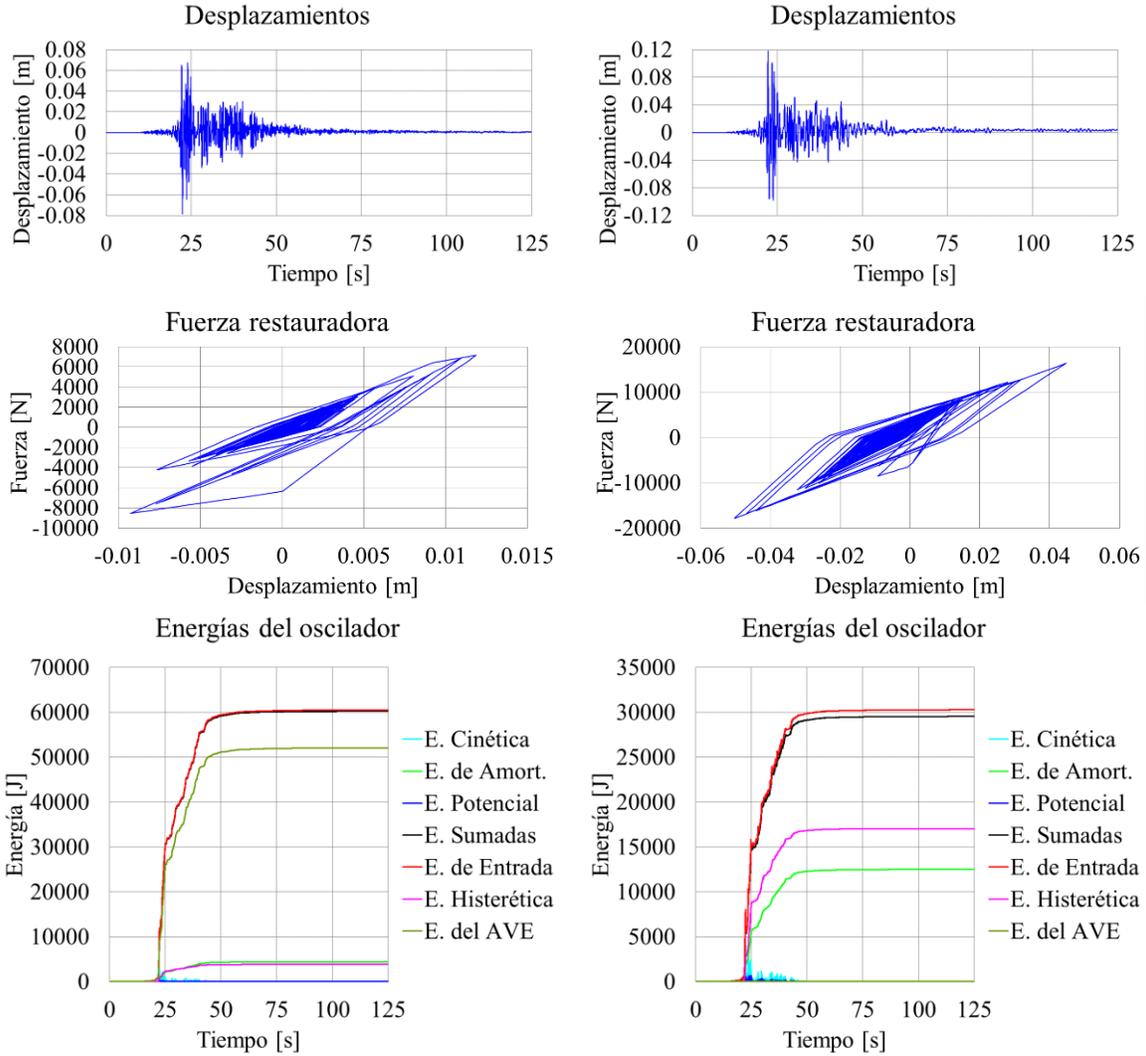
La forma de cómo obtener los parámetros del modelo histerético es igual a como se describe en el capítulo 5. El parámetro de degradación de la rigidez de descarga (α) se toma igual 0.25; el factor que controla la rigidez de recarga (β) se toma igual a 1 y el valor de la ductilidad es igual a $\mu = 2$

Con el periodo fundamental del oscilador se busca en el espectro qué aceleración máxima le corresponde, siendo igual a 12.7534 m/s^2 . Teniendo esto se parte el cálculo para los parámetros del modelo histerético, éstos se muestran para cada nivel en la tabla 9.3.

Los resultados que se muestran en la Figura 9.14 son las historias de desplazamientos en el tiempo, la fuerza de restitución y el balance de energía del oscilador con y sin

Tabla 9.3. Parámetros del modelo histerético de Takeda para el oscilador de 3GDL con AVE con excitación en la base.

Concepto	Registro de “San Juan de los Llanos”		
	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Fuerza de inercia máxima elástica (Fe) [N]	63,767.00	38,260.20	38,260.20
Fuerza de fluencia (Fy) [N]	31,883.50	19,130.10	19,130.10
Fuerza de agrietamiento (Fc) [N]	10,627.83	6,376.70	6,376.70
Rigidez secante (Ks) [N/m]	400,000.00	350,000.00	350,000.00
Rigidez antes del agrietamiento (Kc) [N/m]	800,000.00	700,000.00	700,000.00
Rigidez antes de la fluencia (Ky) [N/m]	320,000.00	280,000.00	280,000.00
Rigidez después de la fluencia (Ku) [N/m]	40,000.00	35,000.00	35,000.00
Desplazamiento de agrietamiento (Dc) [m]	0.01328	0.00911	0.00911
Desplazamiento de fluencia (Dy) [m]	0.07971	0.05466	0.05466



a) Con amortiguamiento viscoelástico.

b) Sin amortiguamiento viscoelástico.

Figura 9.14. Comparación de resultados del oscilador de 3GDL, nivel 3, intervalo inelástico (Takeda), excitación en la base con y sin AVE.

amortiguamiento viscoelástico en el oscilador.

Se puede observar que debido al AVE la respuesta de desplazamientos del oscilador es casi igual a la respuesta en el intervalo elástico. La energía histerética disminuye pero la energía del oscilador aumenta. Se observa que la respuesta disminuye aproximadamente de 12 cm a 8 cm.

9.4.2 Excitación en la masa

Las propiedades de los amortiguadores viscoelásticos son las mismas que en la sección (9.4.1)

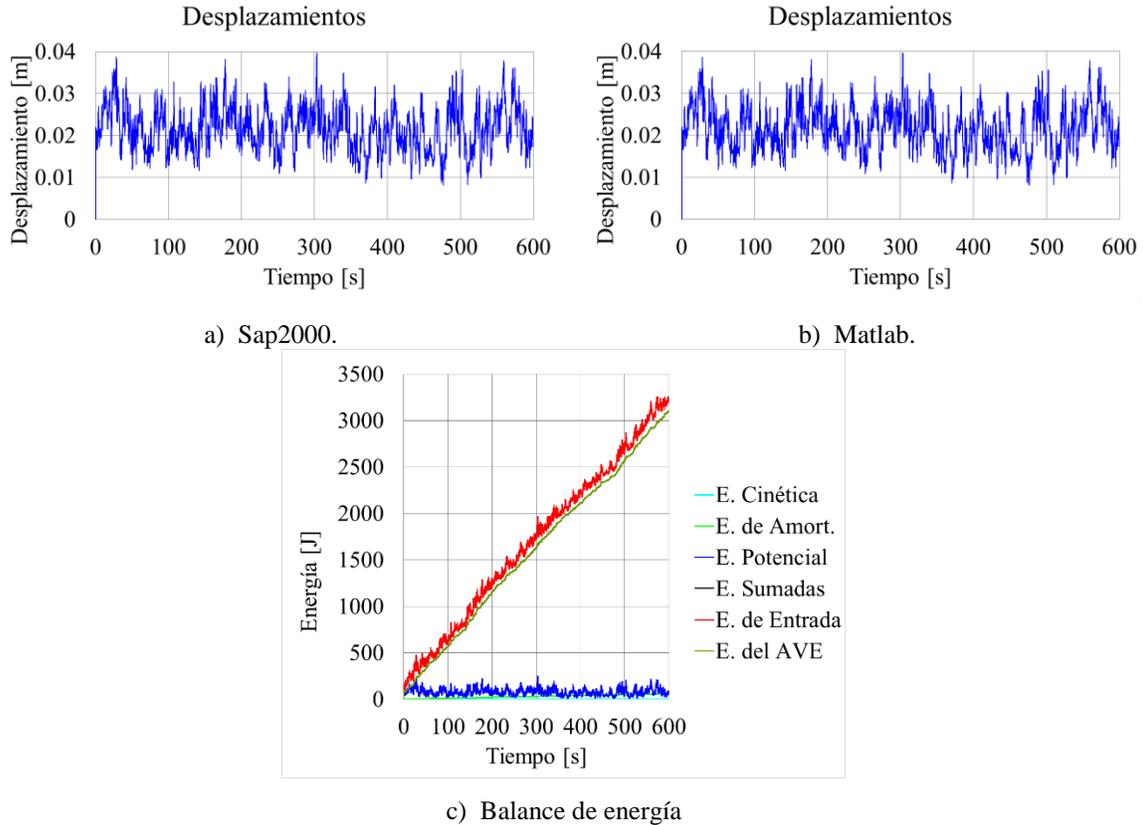


Figura 9.15. Comparación de resultados del oscilador de 3GDL, nivel 3, intervalo elástico, excitación en la masa.

9.4.2.1 Intervalo elástico

En la Figura 9.15 se muestran los resultados obtenidos. La forma de modelar el marco es igual que para la excitación en la base, de igual forma para colocar el amortiguador viscoelástico y la forma de introducir la fuerza en la masa se describe en el capítulo 2.

Se observa que las respuestas entre el software convencional y en este trabajo son iguales.

9.4.2.2 Intervalo inelástico (Bilineal)

La forma de cómo obtener la fuerza de fluencia es la misma que la sección (9.4.1.2). Los resultados que se muestran en la Figura 9.16 son las respuestas de desplazamiento, fuerza de restitución y balance de energía con y sin AVE.

9.4.2.3 Intervalo inelástico (Takeda)

Para cuando es una excitación en las masas la fuerza de inercia máxima elástica para cada GDL se toma como la fuerza máxima que se presenta en la simulación de fuerzas de viento. Los demás parámetros se obtienen como se describe en la sección (9.3.1.3).

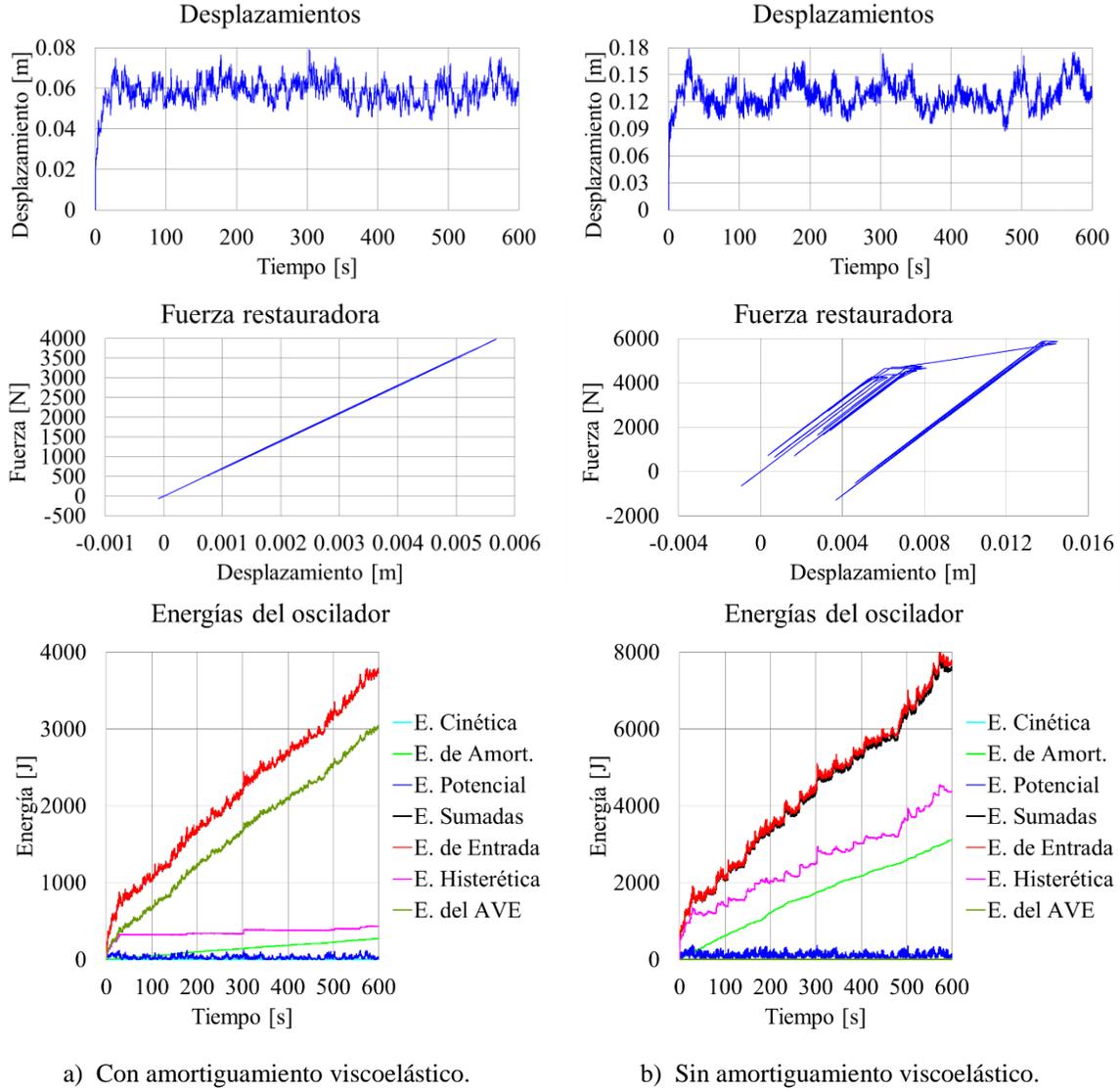


Figura 9.16. Comparación de resultados del oscilador de 3GDL, nivel 3, intervalo inelástico (bilineal), excitación en la masa con y sin AVE.

El parámetro de degradación de la rigidez de descarga (α) se toma igual 0.25; el factor que controla la rigidez de recarga (β) se toma igual a 1 y el valor de la ductilidad es igual a $\mu = 2$. En la tabla 9.4 se muestran los parámetros obtenidos para cada nivel.

Los resultados que se muestran en la Figura 9.17 son las historias de desplazamientos en el tiempo, la fuerza de restitución y el balance de energía del oscilador con y sin amortiguamiento viscoelástico en el oscilador.

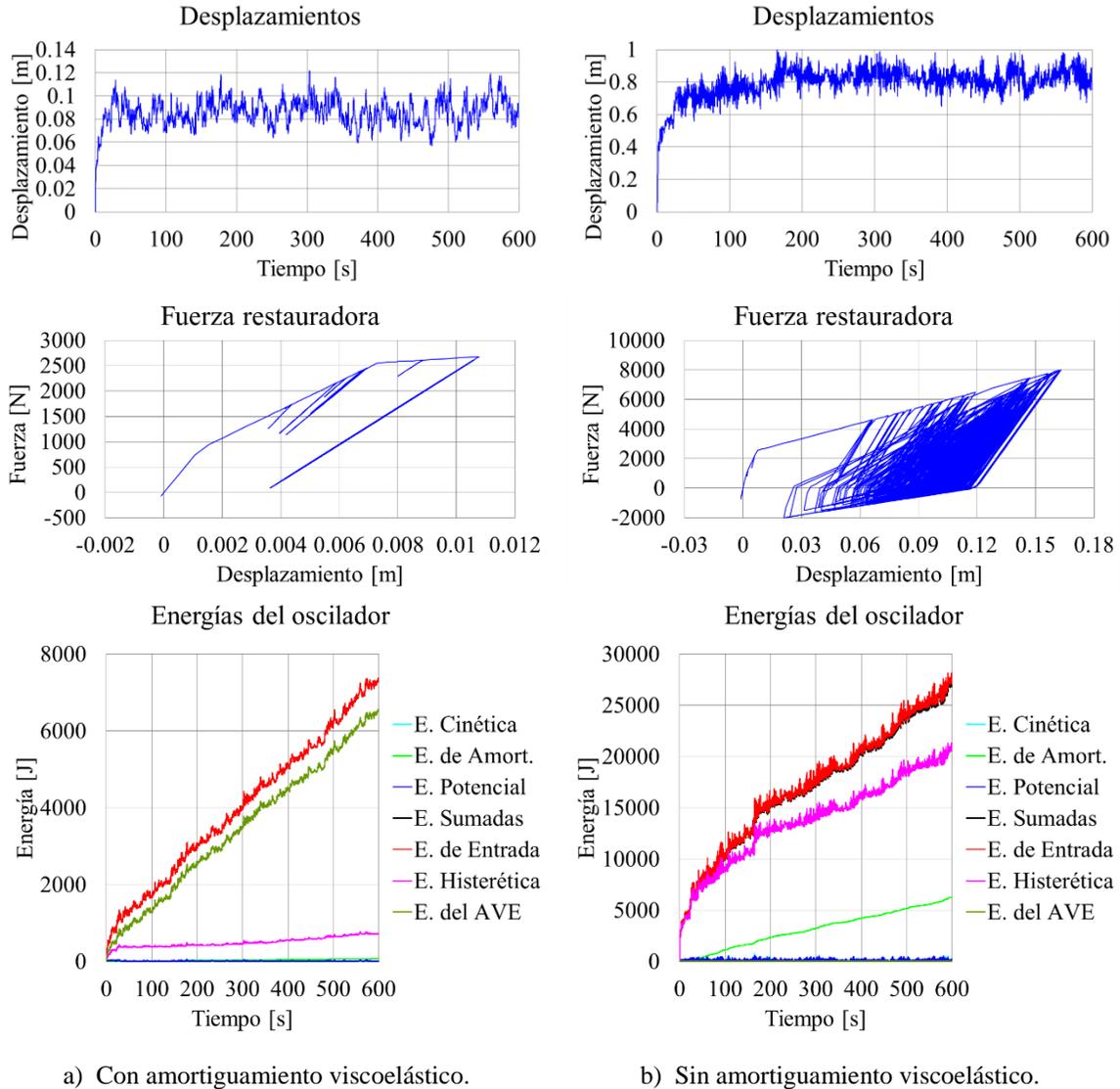


Figura 9.17. Comparación de resultados del oscilador de 3GDL, nivel 3, intervalo inelástico (Takeda), excitación en la masa con y sin AVE.

Se logra apreciar un gran aporte de los amortiguadores viscoelásticos en la disminución de la respuesta de desplazamiento, fuerza de restitución y balance de energía del oscilador. El desplazamiento disminuye aproximadamente de 1 m a 12 cm, claro que un desplazamiento de 1 m es irreal, pero analíticamente vemos el gran aporte que puede obtener el oscilador al considerarle AVE ante una carga en las masas o eólica. Como se menciona anteriormente, otro punto importante para tener un análisis real tiene que ver con la obtención de los parámetros del modelo histerético.

Tabla 9.4. Parámetros del modelo histerético de Takeda para el oscilador de 3GDL con AVE con excitación en la masa.

Concepto	Fuerza de viento		
	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Fuerza de inercia máxima elástica (F_e) [N]	8283.91	8369.13	5109.03
Fuerza de fluencia (F_y) [N]	4,141.96	4,184.57	2,554.52
Fuerza de agrietamiento (F_c) [N]	1,380.65	1,394.86	851.51
Rigidez secante (K_s) [N/m]	400,000.00	350,000.00	350,000.00
Rigidez antes del agrietamiento (K_c) [N/m]	800,000.00	700,000.00	700,000.00
Rigidez antes de la fluencia (K_y) [N/m]	320,000.00	280,000.00	280,000.00
Rigidez después de la fluencia (K_u) [N/m]	40,000.00	35,000.00	35,000.00
Desplazamiento de agrietamiento (D_c) [m]	0.00173	0.00199	0.00122
Desplazamiento de fluencia (D_y) [m]	0.01035	0.01196	0.00730

9.5 Conclusiones parciales del capítulo

El tema de amortiguamiento suplementario en nuestro país es novedoso en cierto punto, ya que aún existen personas que no creen que ayuda al comportamiento de una estructura. De igual forma debido al costo que tiene implementar estos dispositivos en las estructuras llega a ser inviable, ya que en ocasiones el costo de éstos llega a ser casi igual, sino es que igual o más, que el costo de la misma estructura.

Hoy en día se buscan innovar dispositivos que puedan cumplir con estas características pero de una manera más costeable, ya que en el mercado existe mucha variedad de estos dispositivos.

Después de realizar los ejemplos mostrados en este capítulo se puede desmentir a las personas que no creen que los amortiguadores suplementarios, o para este caso viscoelásticos, ayudan a la estructura en la disminución de la respuesta dinámica paso a paso, ya sea en el intervalo elástico o inelástico con excitación en la base o en la masa. En todos los casos la respuesta disminuyó y con toda razón, ya que analíticamente lo que está pasando es que se está incrementando el amortiguamiento y la rigidez de la estructura al momento de sumarle el amortiguamiento y rigidez que aporta el AVE como se observa en las ecuaciones (9.17) y (9.20) para un oscilador de 1GDL y MGD, respectivamente.

Capítulo 10

Edificio prismático

10.1 Descripción del edificio

Se toma como edificio prismático a un edificio ya existente ubicado en la Calle Tuxpan No. 50, Colonia Roma Sur, Delegación Cuauhtémoc, C. P. 06760, Ciudad de México, mostrado en la Figura 10.1. Su uso es destinado a oficinas, fue construido a principios de los años 70's.

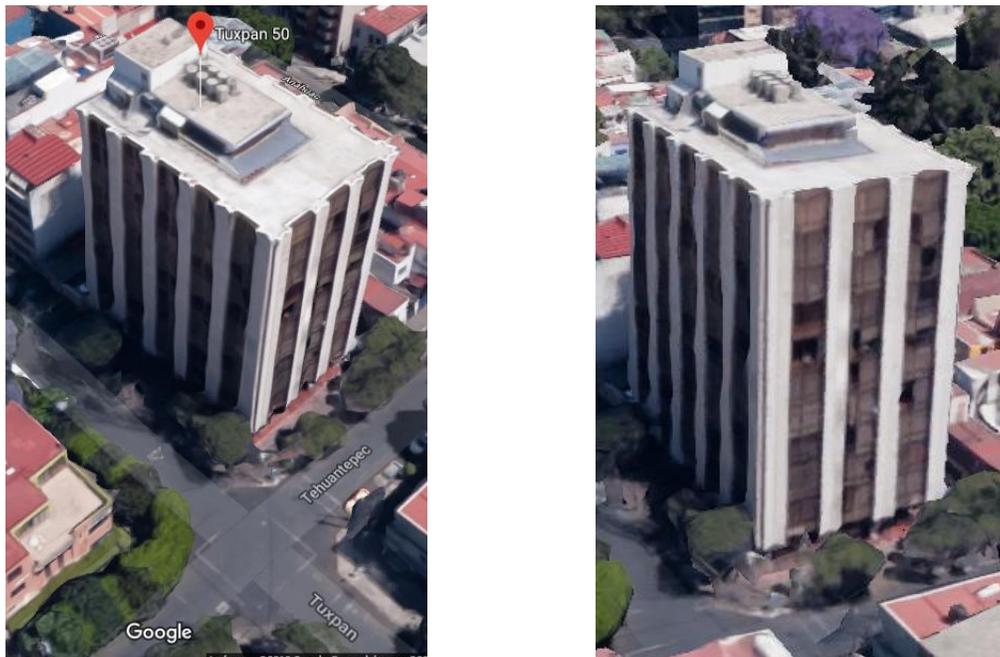


Figura 10.1. Edificio (prismático) real.

El edificio tiene 12 niveles con una altura total de 37.72 m a partir del nivel del suelo, un sótano que mide 3 m, está hecho a base de marcos simples, en el sentido corto tiene 3 crujiás y en el sentido largo 5 crujiás, el sistema de piso son losas macizas de concreto reforzado, como cimentación tiene un cajón parcialmente compensado con una altura de 5 m el cual trabaja con pilotes de fricción desplantados a 19.5 m de profundidad a partir del nivel del sótano. En la tabla 10.1 se muestran las alturas de los niveles, en la tabla 10.2 las distancias

de cada crujía en el sentido largo y en la tabla 10.3 las distancias de cada crujía en el sentido corto del edificio, la numeración de las crujías, tanto como para el sentido corto como el largo, comienza desde la esquina donde se cruzan la calle Tehuantepec y Tuxpan.

Tabla 10.1. Alturas de entrepiso del edificio prismático.

Nivel	Altura de entrepisos [m]
1	3.62
2	3.1
3	3.1
4	3.1
5	3.1
6	3.1
7	3.08
8	3.12
9	3.1
10	3.1
11	3.1
12	3.1

Tabla 10.2. Distancias de crujías en el sentido largo del edificio prismático.

Crujía en el sentido largo	Distancia [m]
1	5.9
2	5.36
3	5.36
4	5.36
5	5.36

Tabla 10.3. Distancias de crujías en el sentido corto del edificio prismático.

Crujía en el sentido corto	Distancia [m]
1	5.55
2	5.55
3	5.55

Este edificio se encuentra dañado debido a los sismos que se han presentado hasta el día de hoy en la ciudad de México desde los años 70's. Debido a esto, parte uno de los objetivos de este trabajo el cual es proponer un amortiguamiento suplementario (amortiguamiento viscoelástico) adecuado para el reforzamiento del mismo, controlando las respuestas del edificio ante cargas eólicas y sísmicas, estas respuestas con el amortiguamiento suplementario incluido se comparan con las respuestas del edificio sin amortiguamiento y a su vez se requiere pasar de un edificio en el espacio a un sistema masa – resorte, o dicho en otras palabras a un oscilador de MGD, esto se logra teniendo la matriz de masas, ecuación (10.1) y la matriz de rigidez, ecuación (10.2).

Para obtener la matriz de rigidez se considera que se trata de un edificio de cortante, para esta idealización, los sistemas de vigas y pisos son infinitamente rígidos y las deformaciones

axiales de las vigas, columnas y los efectos de la fuerza axial sobre las columnas se desprecian. El edificio tiene dos matrices de rigidez, una para cada dirección (X y Y).

En la tabla 10.4 se presentan los valores de las masas y rigideces de cada nivel en dirección X y Y de cada nivel del oscilador de MGDL en el estado actual. La dirección X va referida en el sentido largo del edificio y la dirección Y en el sentido corto.

Tabla 10.4. Masas y rigideces del edificio prismático.

Nivel	M [Kg]	Kx [N/m]	Ky [N/m]
1	564,820.30	1,707,575,757.58	1,262,121,212.12
2	546,025.40	1,172,500,000.00	784,255,042.29
3	546,025.40	913,604,336.04	669,449,715.37
4	546,025.40	913,604,336.04	669,449,715.37
5	546,025.40	913,604,336.04	599,885,583.52
6	545,823.80	913,604,336.04	599,885,583.52
7	546,025.40	810,400,682.01	592,688,168.72
8	536,406.20	684,274,438.37	455,340,045.24
9	526,383.80	684,274,438.37	441,695,839.64
10	526,383.80	662,731,481.48	439,596,639.34
11	396,152.70	522,660,481.95	318,842,980.60
12	88,429.80	169,700,149.93	111,966,113.55

Recordando que la matriz de masas es de la siguiente forma:

$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & M_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{12} \end{bmatrix} \quad (10.1)$$

Y la matriz de rigidez:

$$[K_n] = \begin{bmatrix} K_{n1} + K_{n2} & -K_{n2} & 0 & \dots & 0 \\ -K_{n2} & K_{n2} + K_{n3} & -K_{n3} & \dots & 0 \\ 0 & -K_{n3} & K_{n3} + K_{n4} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -K_{n12} \\ 0 & 0 & 0 & -K_{n12} & K_{n12} \end{bmatrix} \quad (10.2)$$

donde n quiere decir si es en la dirección X o dirección Y. Para obtener la matriz de amortiguamiento se realizó con el amortiguamiento de Rayleigh.

El edificio perdió cierta rigidez debido a los daños que se le presentaron en las columnas y vigas provocando que su periodo actual sea de 1.27 s.

Una vez aclaradas las propiedades del edificio se propone que su ubicación sea en una zona potencialmente sísmica y eólica para poder obtener resultados más críticos. La ubicación es en las costas del pacífico, específicamente en la ciudad de Acapulco, Guerrero.

Se realiza un análisis sísmico y eólico paso a paso en el intervalo elástico e inelástico (Bilineal y Takeda) en la dirección en X y en Y.

Los resultados que se comparan para el intervalo elástico son la historia de desplazamientos del nivel de hasta arriba (nivel 12), el valor máximo del desplazamiento y se muestra la historia en el tiempo de la energía del oscilador. Los resultados de estos cuatro análisis se comparan con los resultados obtenidos en un software convencional (Sap2000). De igual forma se comparan los periodos fundamentales para comprobar que las matrices de masas y rigideces son correctas.

Para los resultados en el intervalo inelástico (Bilineal y Takeda) se presentan los mismos que se describen en el párrafo anterior solo que aquí se le agrega la historia de respuestas en el tiempo de la fuerza restauradora. Los periodos fundamentales se muestran cuando se analiza en el intervalo elástico del material.

Y por último se presenta el comportamiento del edificio implementando un amortiguamiento suplementario (amortiguamiento viscoelástico) a éste, provocando una reducción de desplazamientos y de energía en el intervalo elástico del material.

El registro sísmico que se toma para todos los análisis es el registro de la estación “San Juan de los Llanos”, se describe a detalle en la sección (2.1.3.1).

Para las fuerzas eólicas se realizan simulaciones numéricas de viento longitudinal por medio de la técnica de representación espectral de Shinozuka, también conocido como WAWS, Weighted Amplitude Wave Superposition. La velocidad media de diseño a 10 m de altura promediada a 10 minutos, la latitud, la temperatura media anual, la presión barométrica y la categoría del tipo de terreno son iguales a los que se mencionan en la sección (2.1.3.2), el

Tabla 10.5. Áreas de entrepiso en la dirección X y Y.

Nivel	Área de entrepiso [m ²] Dirección X (Perpendicular al sentido corto)	Área de entrepiso [m ²] Dirección Y (Perpendicular al sentido largo)
1	55.944	91.862
2	51.615	84.754
3	51.615	84.754
4	51.615	84.754
5	51.615	84.754
6	51.4485	84.481
7	51.615	84.754
8	51.7815	85.027
9	51.615	84.754
10	51.615	84.754
11	34.41	67.301
12	8.6025	24.924

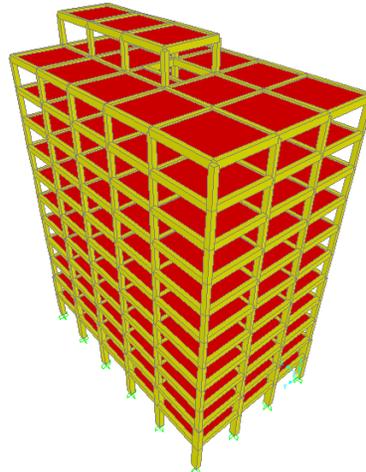


Figura 10.2. Edificio (prismático) modelo.

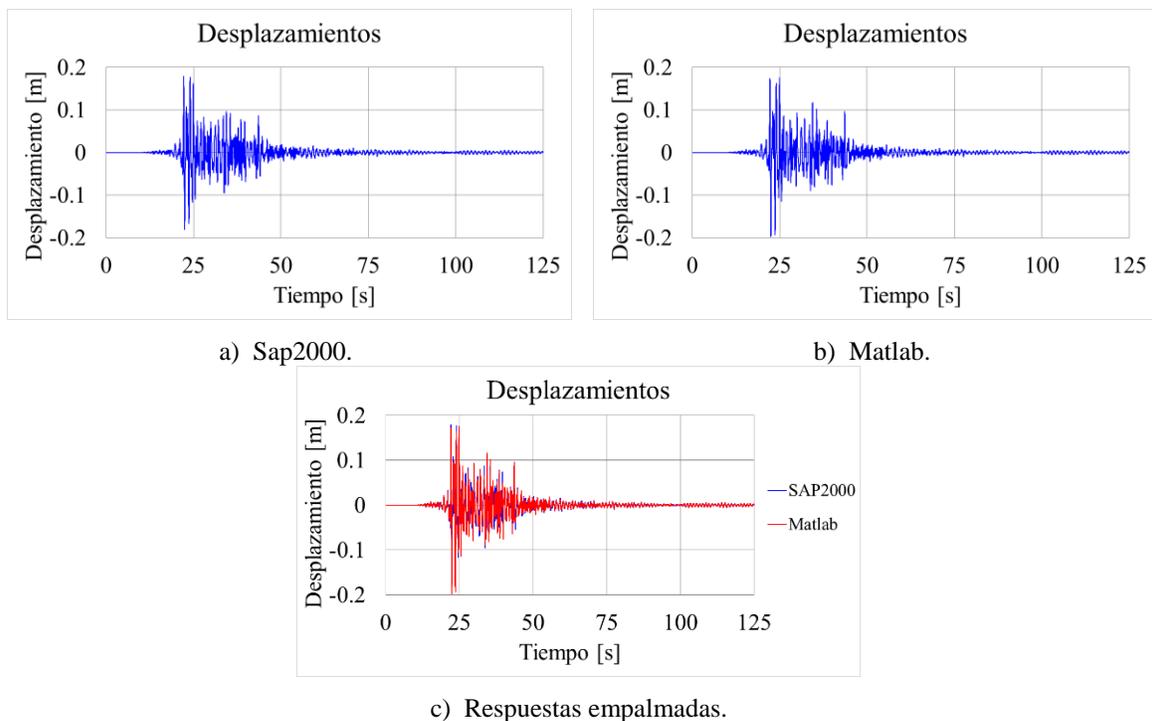


Figura 10.3. Comparación de desplazamientos, excitación en la base, dirección X, intervalo elástico.

Tabla 10.6. Desplazamientos máximos (Sap2000 y Matlab) y periodos fundamentales, excitación en la base, dirección X, intervalo elástico.

Caso	Desplazamiento máximo [m]	Periodo fundamental [s]
Sap2000	0.1811	1.0665
Matlab	0.1969	1.0646

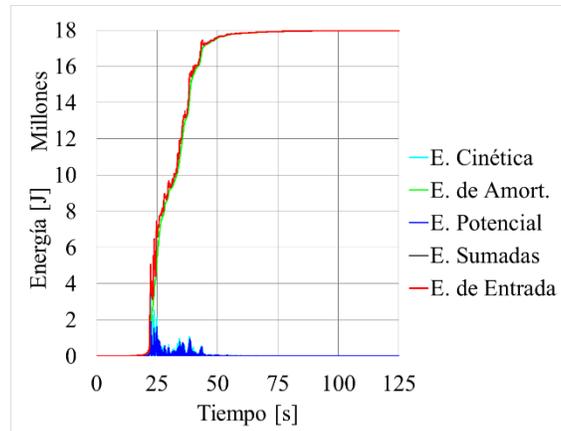


Figura 10.4. Historia de energías del oscilador, excitación en la base, dirección X, intervalo elástico.

coeficiente de decaimiento vertical es de $C_z = 5$, el coeficiente de arrastre para cuando el viento es paralelo al eje X es igual a $C_D = 1.05$ y cuando es paralelo al eje Y es de $C_D = 1.28$.

Las áreas correspondientes a cada nivel en las dos direcciones (X y Y) se muestran en la tabla 10.5.

El modelo en el software convencional es el mostrado en la Figura 10.2

10.2 Ejemplo de aplicación, intervalo elástico

10.2.1 Excitación en la base (sismo):

10.2.1.1 Dirección en X.

Como se menciona anteriormente, la dirección en X se toma como el sentido largo del edificio.

La historia de la respuesta de desplazamientos en el tiempo se muestra en la Figura 10.3, del lado izquierdo (a) tenemos a la respuesta obtenida en el software convencional (Sap2000), del lado derecho (b) a la respuesta en el programa de Matlab y en la parte inferior (c) las dos respuestas empalmadas.

En la tabla 10.6 se muestran los desplazamientos máximos y los periodos fundamentales obtenidos en Matlab y en el software convencional. Y en la Figura 10.4 se muestra la historia de las energías del oscilador en el tiempo.

Se logra ver que el periodo fundamental obtenido en el software convencional y en el programa en Matlab son prácticamente iguales, esto quiere decir que la matriz de rigidez en el sentido de X es correcta, además de que la historia de desplazamientos y el desplazamiento máximo dan muy similares en los valores.

Tabla 10.7. Desplazamientos máximos (Sap2000 y Matlab) y periodos fundamentales, excitación en la base, dirección Y, intervalo elástico.

Caso	Desplazamiento máximo [m]	Periodo fundamental [s]
Sap2000	0.1626	1.2759
Matlab	0.1707	1.2777

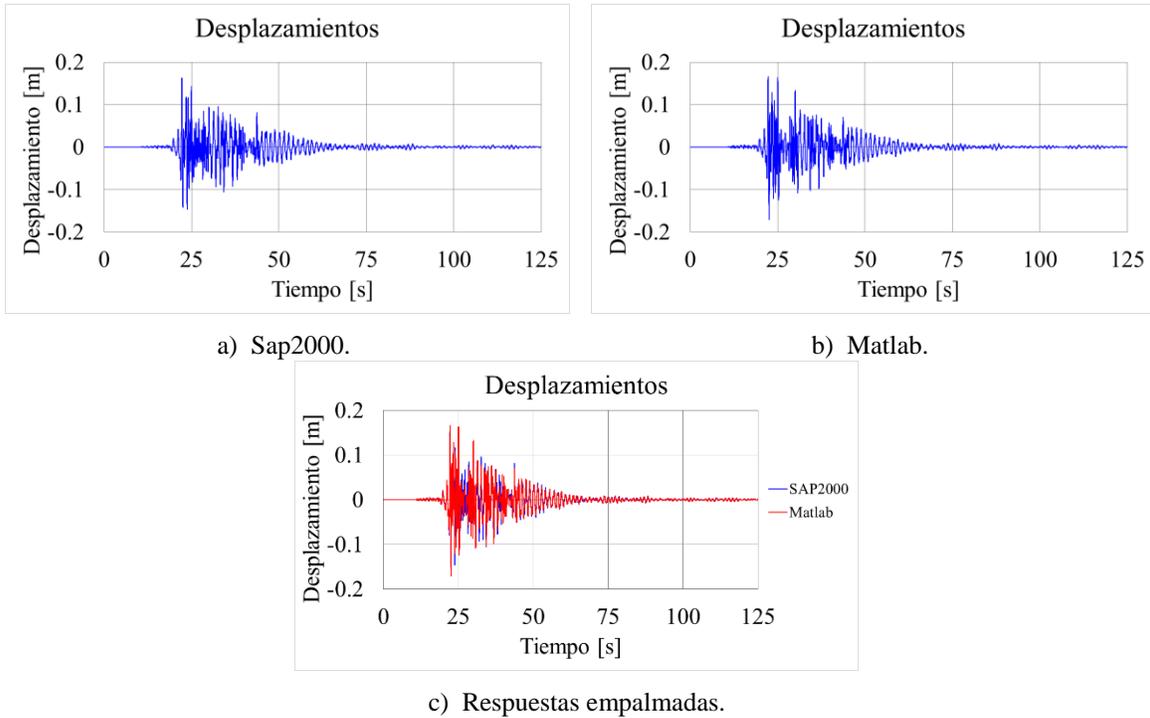


Figura 10.5. Comparación de desplazamientos, excitación en la base, dirección Y, intervalo elástico.

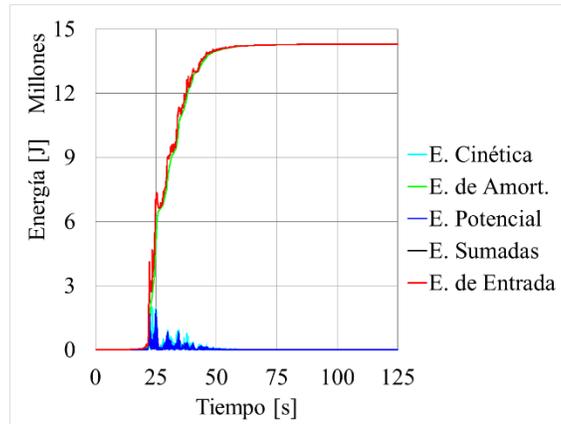


Figura 10.6. Historia de energías del oscilador, excitación en la base, dirección Y, intervalo elástico.

10.2.1.2 Dirección en Y.

Recordando la mención anterior de que la dirección en Y se toma como el sentido corto del edificio.

La historia de la respuesta de desplazamientos en el tiempo se muestra en la Figura 10.5, del lado izquierdo (a) tenemos a la respuesta obtenida en el software convencional (Sap2000), del lado derecho (b) a la respuesta en el programa de Matlab y en la parte inferior (c) las dos respuestas empalmadas.

En la tabla 10.7 se muestran los desplazamientos máximos y los periodos fundamentales obtenidos en Matlab y en el software convencional. Y en la Figura 10.6 se muestra la historia de las energías del oscilador en el tiempo.

Se logra ver que el periodo fundamental obtenido en el software convencional y en el programa en Matlab son prácticamente iguales, esto quiere decir que la matriz de rigidez en el sentido de Y es correcta, además de que la historia de desplazamientos y el desplazamiento máximo dan muy similares en los valores.

10.2.2 Excitación en las masas (viento):

10.2.2.1 Dirección en X.

La dirección en X se toma como el sentido largo del edificio, se considera un valor de la razón de amortiguamiento el cual es 0.01 para los dos primeros modos. La historia de la respuesta de desplazamientos en el tiempo se muestra en la Figura 10.7, del lado izquierdo

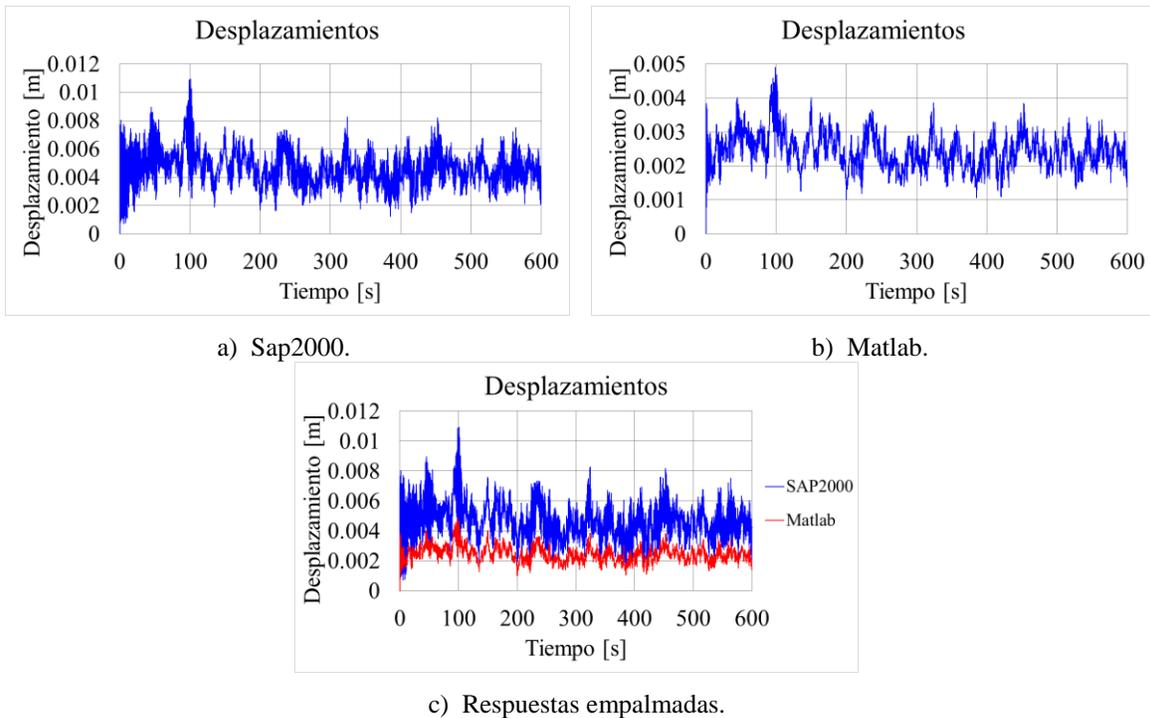


Figura 10.7. Comparación de desplazamientos, excitación en la masa, dirección X, intervalo elástico.

Tabla 10.8. Desplazamientos máximos (Sap2000 y Matlab) y periodos fundamentales, excitación en la masa, dirección X, intervalo elástico.

Caso	Desplazamiento máximo [m]
Sap2000	0.0109
Matlab	0.0049

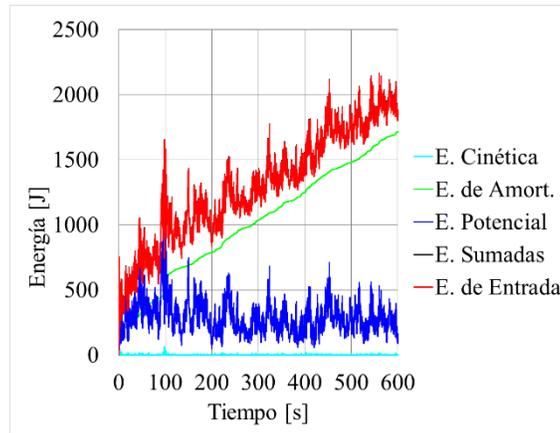


Figura 10.8. Historia de energías del oscilador, excitación en la masa, dirección X, intervalo elástico.

(a) tenemos a la respuesta obtenida en el software convencional (Sap2000), del lado derecho (b) a la respuesta en el programa de Matlab y en la parte inferior (c) las dos respuestas empalmadas.

En la tabla 10.8 se muestran los desplazamientos máximos obtenidos en Matlab y en el software convencional, los periodos fundamentales son los mismos que se presentan en la tabla 10.6. Y en la Figura 10.8 se muestra la historia de las energías del oscilador en el tiempo.

Se logra apreciar que las respuestas en el tiempo de desplazamientos y los desplazamientos máximos no son muy parecidos, con respecto a la forma de cómo se comporta en el paso del tiempo si es muy parecida. Esto se debe a que el software convencional (Sap2000) considera los efectos de torsión que se presentan debido a la irregularidad del sistema de piso, ya que tiene algunos huecos, provocando que el centro de torsión no esté ubicado en un punto simétrico del edificio, además de que el periodo fundamental en esta dirección es por flexo-torsión. Las fuerzas de viento fueron colocadas en el centro del claro, es por eso que se presentan los efectos de torsión, esto a su vez provoca que los desplazamientos sean un poco más elevados.

10.2.2.2 Dirección en Y.

La dirección en Y se toma como el sentido corto del edificio. La historia de la respuesta de desplazamientos en el tiempo se muestra en la Figura 10.9, del lado izquierdo (a) tenemos a la respuesta obtenida en el software convencional (Sap2000), del lado derecho (b) a la respuesta en el programa de Matlab y en la parte inferior (c) las dos respuestas empalmadas.

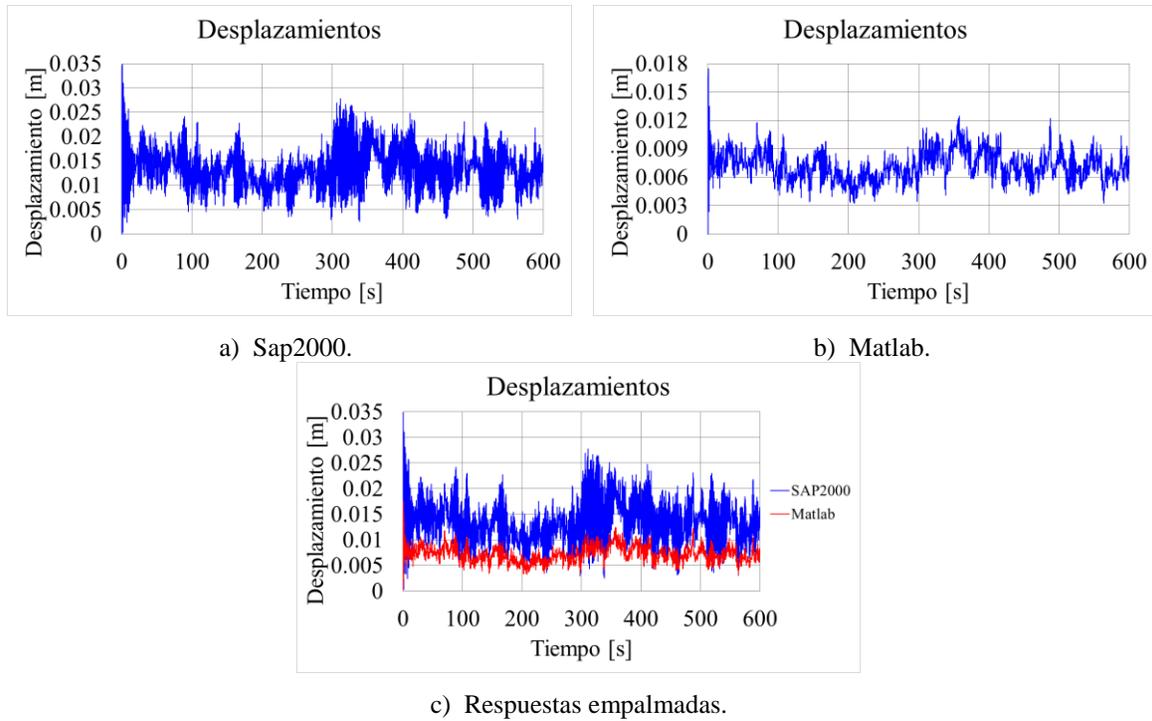


Figura 10.9. Comparación de desplazamientos, excitación en la base, dirección Y, intervalo elástico.

Tabla 10.9. Desplazamientos máximos (Sap2000 y Matlab) y periodos fundamentales, excitación en la base, dirección Y, intervalo elástico.

Caso	Desplazamiento máximo [m]
Sap2000	0.0348
Matlab	0.0175

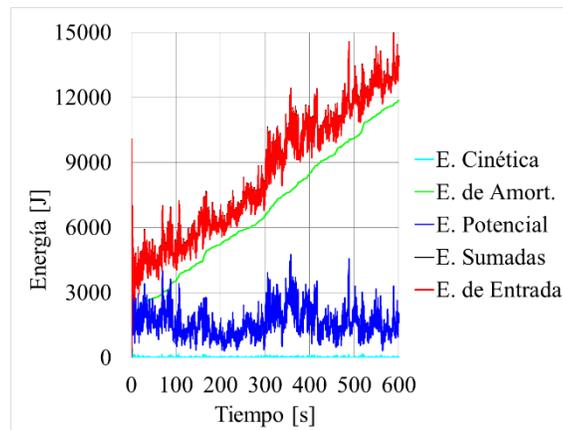


Figura 10.10. Historia de energías del oscilador, excitación en la base, dirección Y, intervalo elástico.

En la tabla 10.9 se muestran los desplazamientos máximos obtenidos en Matlab y en el software convencional, los periodos fundamentales son los mismos que se presentan en la tabla 10.7. Y en la Figura 10.10 se muestra la historia de las energías del oscilador en el tiempo.

De igual forma que en la dirección en X, las respuestas en el tiempo de desplazamientos y los desplazamientos máximos no son muy parecidos. La forma de la gráfica es similar, solo que en magnitud cambia. Se vuelve a mencionar que esto se debe a que el software convencional (Sap2000) considera los efectos de torsión que se presentan debido a la irregularidad del sistema de piso, esto provoca que las respuestas sean diferentes a como si no hubiera efectos de torsión, lo cual sucede en el programa en Matlab, ya que para el programa se considera un sistema masa – resorte.

10.3 Ejemplo de aplicación, intervalo inelástico, bilineal

10.3.1 Excitación en la base (sismo):

10.3.1.1 Dirección en X.

En este caso se propone que los desplazamientos de fluencia sean iguales a $\Delta_{yn} = 0.002(h_n)$, donde h_n se refiere a la altura de entrepiso de cada nivel. Posteriormente con ese desplazamiento de fluencia se obtiene la fuerza de fluencia para cada nivel n , realizando el producto de la rigidez de cada nivel por el desplazamiento de fluencia, $f_{yn} = K_{xn}\Delta_{yn}$, la fuerza de fluencia para cada nivel se muestra en la tabla 10.10.

Tabla 10.10. Fuerzas de fluencia en la dirección X con excitación en la base para el modelo histerético bilineal.

Nivel	Altura de entrepiso [M]	Δ_y	Kx [N/m]	Fy [N] Dirección X
1	3.62	0.00724	1,707,575,757.58	12,362,848.48
2	3.1	0.00620	1,172,500,000.00	7,269,500.00
3	3.1	0.00620	913,604,336.04	5,664,346.88
4	3.1	0.00620	913,604,336.04	5,664,346.88
5	3.1	0.00620	913,604,336.04	5,664,346.88
6	3.1	0.00620	913,604,336.04	5,664,346.88
7	3.08	0.00616	810,400,682.01	4,992,068.20
8	3.12	0.00624	684,274,438.37	4,269,872.50
9	3.1	0.00620	684,274,438.37	4,242,501.52
10	3.1	0.00620	662,731,481.48	4,108,935.19
11	3.1	0.00620	522,660,481.95	3,240,494.99
12	3.1	0.00620	169,700,149.93	1,052,140.93

Se consideró un valor del ponderador para la rigidez de post – fluencia la cual es de 20 % para todos los niveles.

Se muestra la respuesta de desplazamientos en el tiempo y la gráfica de fuerza restauradora vs desplazamientos en la Figura 10.11.

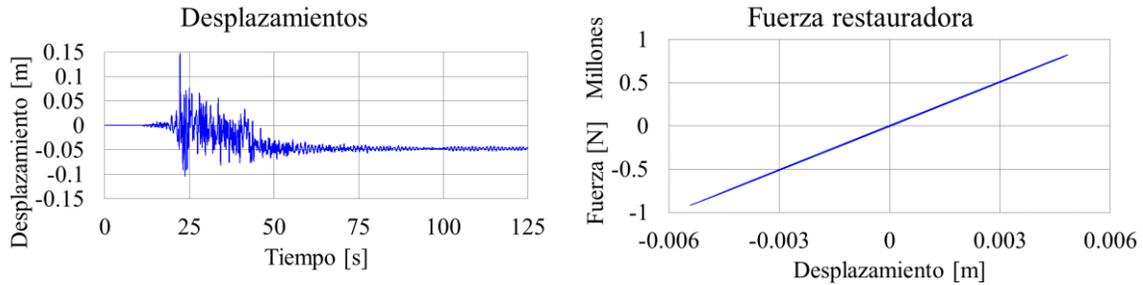


Figura 10.11. Respuesta de desplazamientos y fuerza restauradora en el tiempo, excitación en la base, dirección X, intervalo inelástico (bilineal).

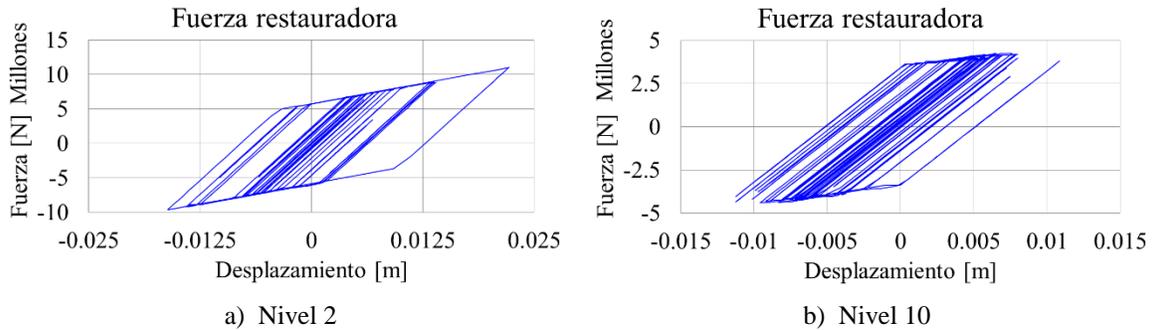


Figura 10.12. Fuerza restauradora del nivel 2 y 10, excitación en la base, dirección X, intervalo inelástico (bilineal).

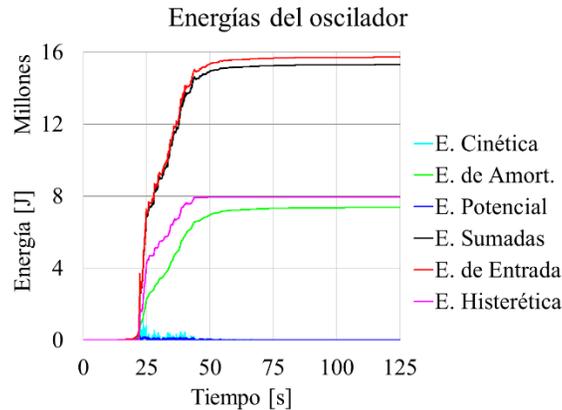


Figura 10.13. Historia de energías del oscilador, excitación en la base, dirección X, intervalo inelástico (bilineal).

También se presentan la gráfica de fuerza restauradora vs desplazamientos del nivel 2 y 10 en la Figura 10.12 y la historia de las energías en el tiempo en la Figura 10.13.

Se puede apreciar que la respuesta de desplazamiento disminuye un poco a comparación de la respuesta en la Figura 10.3. De igual forma se observa en la Figura 10.11 que la rigidez se mantiene en el intervalo elástico en todo el análisis, aunque en la respuesta de desplazamientos se aprecian los desplazamientos residuales de los anteriores niveles provocando que parezca que la rigidez del nivel 12 incursiona en la no linealidad del material.

Como se menciona en el párrafo anterior, podemos ver que el nivel 2, 10 (Figura 10.12) y otros más incursionan en la no linealidad del material provocando los desplazamientos residuales mencionados anteriormente.

Y en la Figura 10.13 se muestra la historia de las energías del oscilador en el tiempo, agregando la energía histerética que se presenta en el oscilador debido a la no linealidad del material, siendo inclusive más grande que la energía de amortiguamiento.

10.3.1.2 Dirección en Y.

Tabla 10.11. Fuerzas de fluencia en la dirección Y con excitación en la base para el modelo histerético bilineal.

Nivel	Altura de entrepiso [M]	Δ_y	Ky [N/m]	Fy [N] Dirección Y
1	3.62	0.00724	1,262,121,212.12	9,137,757.58
2	3.1	0.00620	784,255,042.29	4,862,381.26
3	3.1	0.00620	669,449,715.37	4,150,588.24
4	3.1	0.00620	669,449,715.37	4,150,588.24
5	3.1	0.00620	599,885,583.52	3,719,290.62
6	3.1	0.00620	599,885,583.52	3,719,290.62
7	3.08	0.00616	592,688,168.72	3,650,959.12
8	3.12	0.00624	455,340,045.24	2,841,321.88
9	3.1	0.00620	441,695,839.64	2,738,514.21
10	3.1	0.00620	439,596,639.34	2,725,499.16
11	3.1	0.00620	318,842,980.60	1,976,826.48
12	3.1	0.00620	111,966,113.55	694,189.90

Se muestra la respuesta de desplazamientos en el tiempo y la gráfica de fuerza restauradora vs desplazamientos en la Figura 10.14.

De igual forma se presentan la gráfica de fuerza restauradora vs desplazamientos del nivel 2 y 7 en la Figura 10.15 y la historia de las energías en el tiempo en la Figura 10.16.

Se puede apreciar que la respuesta de desplazamiento, de igual forma que en la dirección X, disminuye a comparación de la respuesta en la Figura 10.5. También se observa que la rigidez se afectó ligeramente debido a que comenzaba a incursionar en el intervalo inelástico el comportamiento de este nivel.

Podemos ver que el nivel 2 y 7 (Figura 10.15) también incursionan en la no linealidad del material, y en la Figura 10.16 se muestra la historia de las energías del oscilador en el tiempo, agregando la energía histerética provocada por la no linealidad del material, siendo ésta un poco más grande que la energía de amortiguamiento.

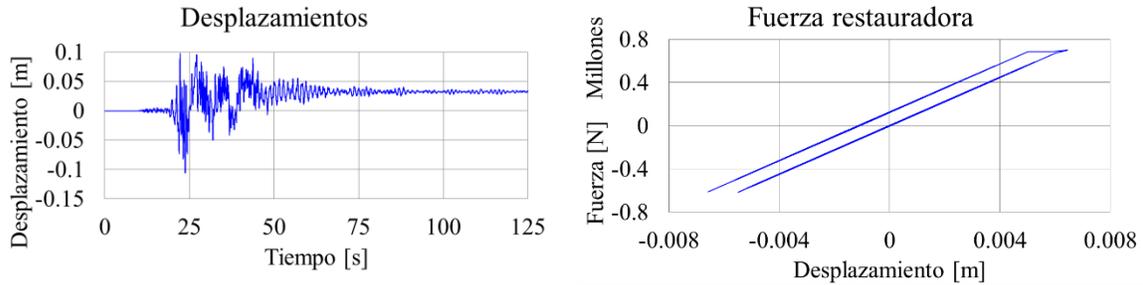


Figura 10.14. Respuesta de desplazamientos y fuerza restauradora en el tiempo, excitación en la base, dirección Y, intervalo inelástico (bilineal).

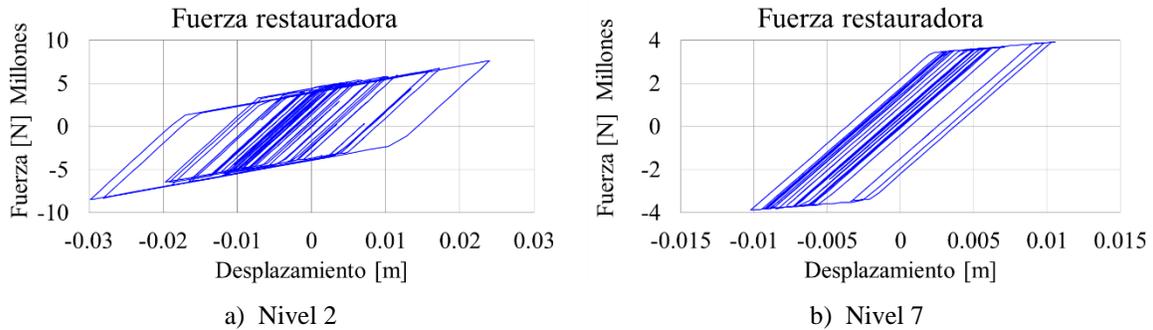


Figura 10.15. Fuerza restauradora del nivel 2 y 10, excitación en la base, dirección Y, intervalo inelástico (bilineal).

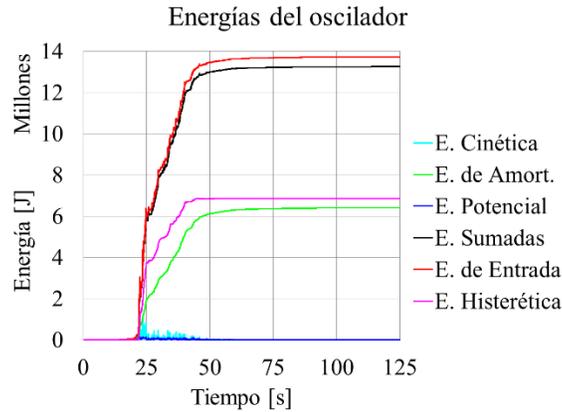


Figura 10.16. Historia de energías del oscilador, excitación en la base, dirección Y, intervalo inelástico (bilineal).

10.3.2 Excitación en las masas (viento):

Para la excitación en la masa se realizaron los análisis correspondientes en la dirección en X y en Y. Las fuerzas de fluencia para cada nivel fueron iguales que en la sección (10.3.1) y las respuestas no incursionaron en el intervalo inelástico, siempre se mantiene un comportamiento elástico del material dando los mismos resultados que en la sección (10.2.2).

10.4 Ejemplo de aplicación, intervalo inelástico, Takeda

10.4.1 Excitación en la base (sismo):

10.4.1.1 Dirección en X.

El programa que se utiliza es el mismo que se presenta en la sección 10.3.1 (modelo hysterético bilineal), la forma de uso y entrada de datos es la misma, solamente que ahora se escoge el modelo hysterético de Takeda y se necesita introducir los parámetros de éste.

Para obtener los parámetros se toma la idea que se explica en la sección (5.2). Por lo tanto se necesita el espectro de aceleraciones del registro sísmico el cual se muestra en la Figura 10.17.

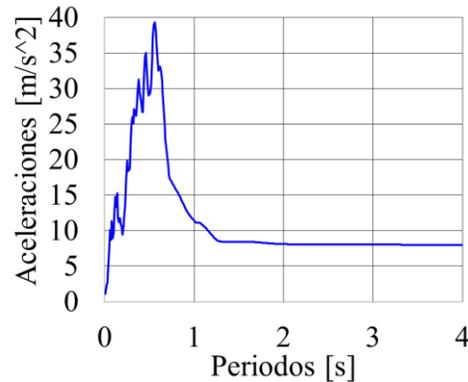


Figura 10.17. Espectro elástico de aceleraciones, “San Juan de los Llanos”.

El periodo fundamental del oscilador en la dirección X igual a $T_n = 1.06$ s, por lo tanto la aceleración que le corresponde es igual a 11.0864 m/s^2 . Ahora se calculan los parámetros del modelo hysterético, éstos se presentan en la tabla 10.A.1.

Se muestra la respuesta de desplazamientos en el tiempo y la gráfica de fuerza restauradora vs desplazamientos en la Figura 10.18.

También se presentan la gráfica de fuerza restauradora vs desplazamientos del nivel 2 y 10 en la Figura 10.19 y la historia de las energías en el tiempo en la Figura 10.20.

La respuesta de desplazamientos disminuye aproximadamente un 50 % a comparación de cuando se considera elásticamente el material (Figura 10.3) y también se observa el comportamiento que tiene la fuerza restauradora al paso del tiempo.

Podemos ver que el nivel 2, 10 (Figura 10.19) y prácticamente todos los niveles incursionan en la no linealidad del material.

Y en la Figura 10.20 se muestra la historia de las energías del oscilador en el tiempo, donde aparece la energía hysterética que se presenta en el oscilador debido a la no linealidad del material, siendo ésta más grande que la energía de amortiguamiento.

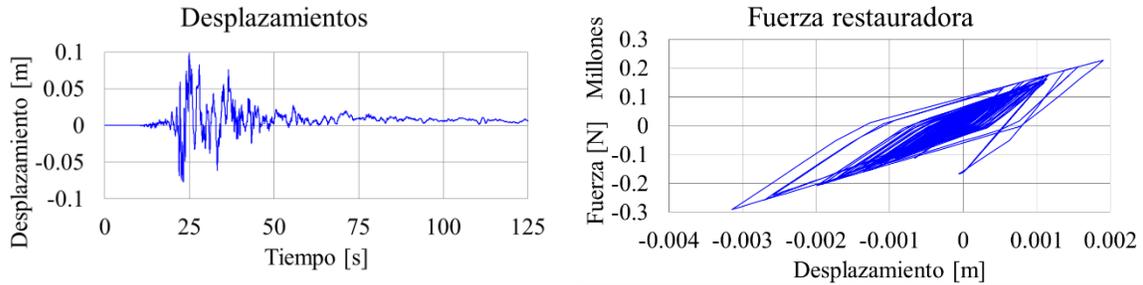


Figura 10.18. Respuesta de desplazamientos y fuerza restauradora en el tiempo, excitación en la base, dirección X, intervalo inelástico (Takeda).

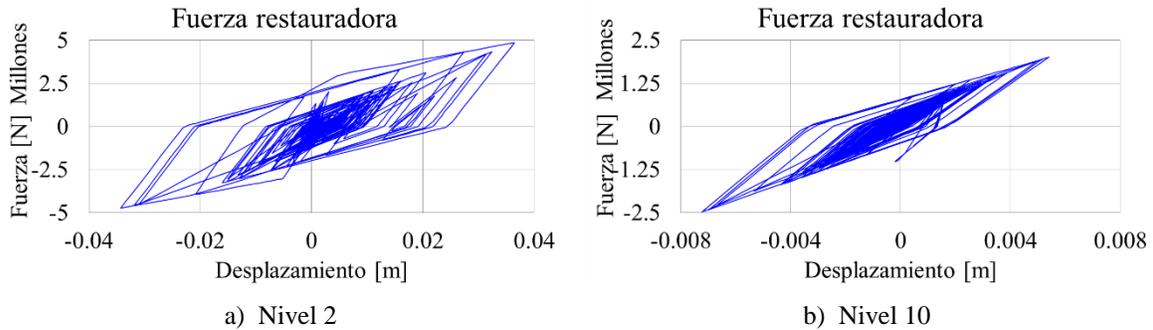


Figura 10.19. Fuerza restauradora del nivel 2 y 10, excitación en la base, dirección X, intervalo inelástico (Takeda).

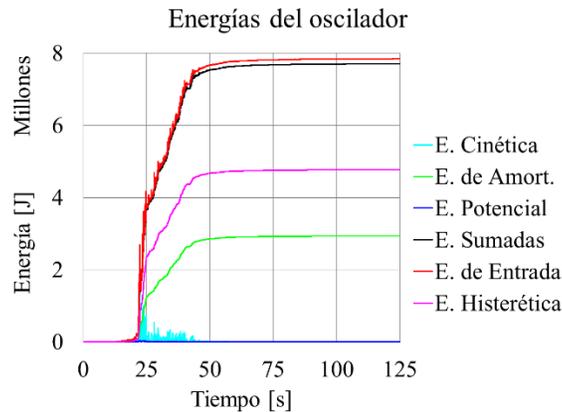


Figura 10.20. Historia de energías del oscilador, excitación en la base, dirección X, intervalo inelástico (Takeda).

10.4.1.2 Dirección en Y.

La dirección en Y se toma como el sentido corto del edificio. Para obtenerlos se necesita conocer el periodo en esta dirección el cual es $T_n = 1.27 s$, se entra al espectro de aceleraciones y se obtiene una aceleración de $8.5428 m/s^2$.

En la Figura 10.21 se muestra la respuesta de desplazamientos en el tiempo y la gráfica de fuerza restauradora vs desplazamientos.

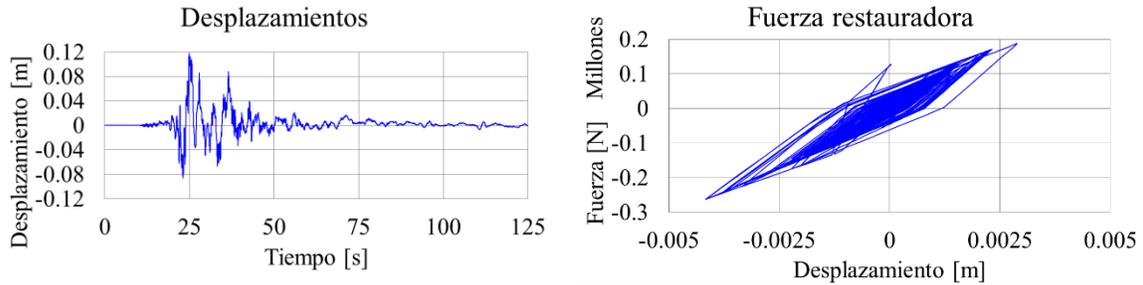


Figura 10.21. Respuesta de desplazamientos y fuerza restauradora en el tiempo, excitación en la base, dirección Y, intervalo inelástico (Takeda).

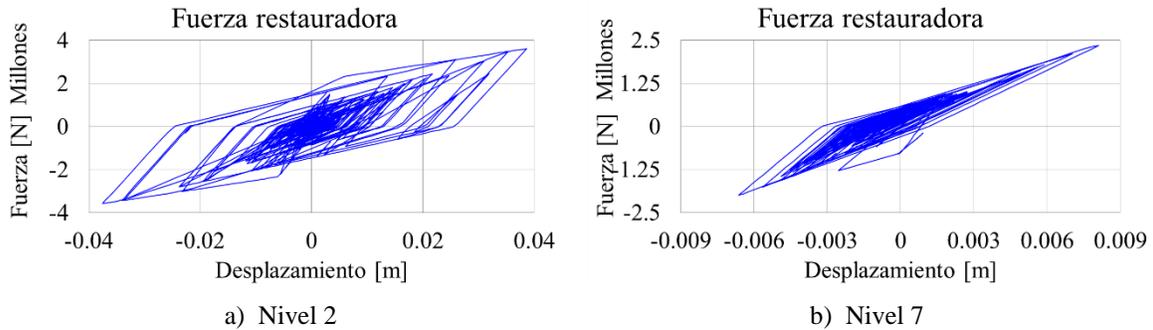


Figura 10.22. Fuerza restauradora del nivel 2 y 7, excitación en la base, dirección Y, intervalo inelástico (Takeda).

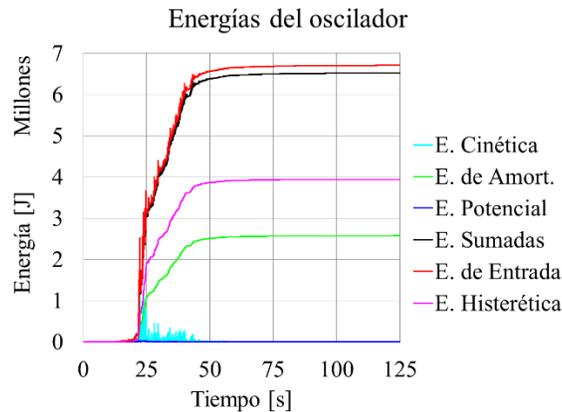


Figura 10.23. Historia de energías del oscilador, excitación en la base, dirección Y, intervalo inelástico (Takeda).

También se presentan la gráfica de fuerza restauradora vs desplazamientos del nivel 2 y 7 en la Figura 10.22 y la historia de las energías en el tiempo en la Figura 10.23.

La respuesta de desplazamientos disminuye a comparación de cuando se considera elásticamente el material (Figura 10.3) aunque si se compara con el modelo histerético bilineal resulta ser más grande. También se observa el comportamiento que tiene la fuerza restauradora al paso del tiempo.

Podemos ver que el nivel 2, 7 (Figura 10.22) y en realidad todos los niveles incursionan en la no linealidad del material. De igual forma que para la dirección en X, la cuestión de que incursionen en la no linealidad tiene que ver en la forma de obtener los parámetros.

Y en la Figura 10.23 se muestra la historia de las energías del oscilador en el tiempo, donde la energía histerética tiene mayor magnitud, inclusive más que la energía de amortiguamiento, esta energía se presenta debido a la no linealidad del material.

10.4.2 Excitación en las masas (viento):

10.4.2.1 Dirección en X.

La forma de cómo se obtienen es la misma que se describe en la sección (5.2.1.2) en donde se parte de la fuerza inercia máxima tomándola como la fuerza máxima de cada registro de fuerzas de viento para cada nivel. Teniendo esta idea se procede con el cálculo de los demás parámetros los cuales se presentan en la tabla 10.A.3.

Se muestra la respuesta de desplazamientos en el tiempo y la gráfica de fuerza restauradora vs desplazamientos en la Figura 10.24.

También se presentan la gráfica de fuerza restauradora vs desplazamientos del nivel 2 y 10 en la Figura 10.25 y la historia de las energías en el tiempo en la Figura 10.26.

La respuesta de desplazamientos aumenta considerablemente a comparación con la respuesta del oscilador en el intervalo elástico, también la fuerza restauradora muestra un comportamiento diferentes al que suele observarse, esto es debido a que la fuerza de excitación es una carga eólica y las fuerzas siempre son positivas.

En la Figura 10.25 se aprecia la fuerza restauradora de los niveles 2 y 10, los cuales tienen una forma parecida y en la Figura 10.26 se muestra la historia de las energías donde claramente se aprecia que la energía histerética es la más grande.

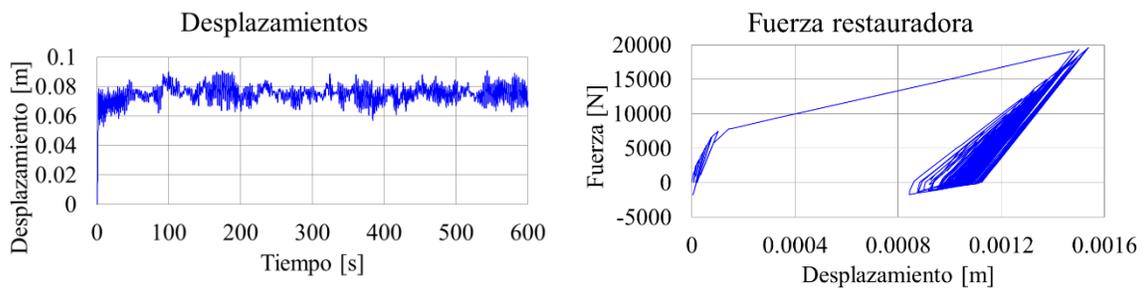


Figura 10.24. Respuesta de desplazamientos y fuerza restauradora en el tiempo, excitación en las masas, dirección X, intervalo inelástico (Takeda).

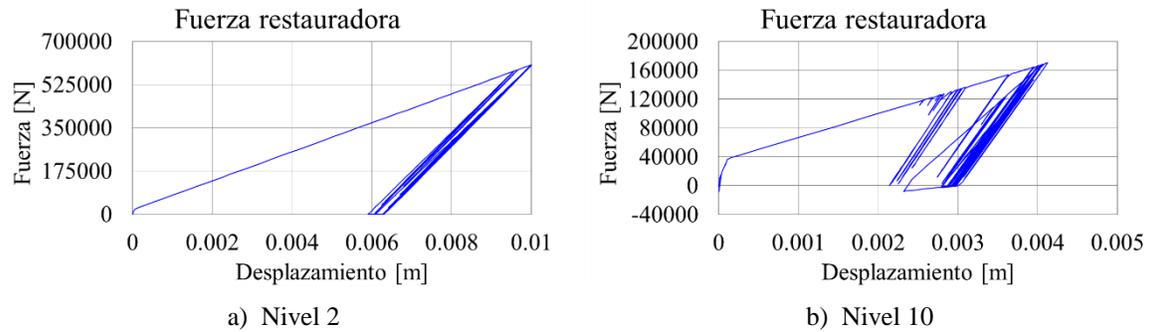


Figura 10.25. Fuerza restauradora del nivel 2 y 10, excitación en las masas, dirección X, intervalo inelástico (Takeda).

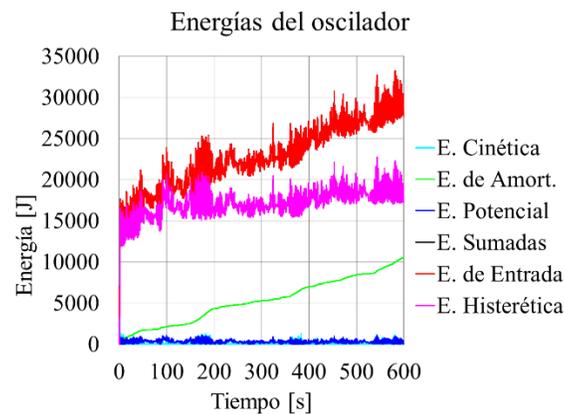


Figura 10.26. Historia de energías del oscilador, excitación en las masas, dirección X, intervalo inelástico (Takeda).

El desplazamiento crece bastante debido a los parámetros que se obtienen para el modelo histerético, ya que lo que se presenta es una propuesta, no quiere decir que sea la indicada, se podría usar otra forma de obtenerlos e ingresar esos datos al programa, ya que el programa está diseñado para eso, solamente se comprueba que la forma de uso y los resultados que arroja son correctos.

10.4.2.2 Dirección en Y.

Para la dirección Y se realiza de la misma forma que la sección anterior (10.4.2.1), solamente que las fuerzas de viento, rigideces y parámetros para el modelo histerético son los indicados para esta dirección.

Los resultados que se muestran son la respuesta de desplazamientos en el tiempo y la gráfica de fuerza restauradora vs desplazamientos en la Figura 10.27.

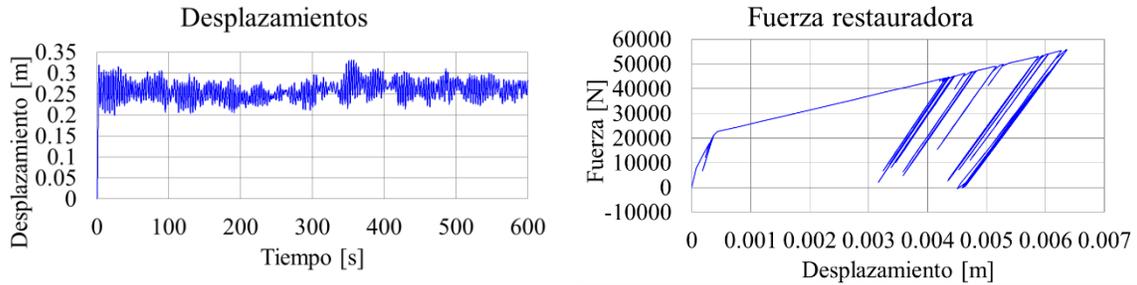


Figura 10.27. Respuesta de desplazamientos y fuerza restauradora en el tiempo, excitación en las masas, dirección Y, intervalo inelástico (Takeda).

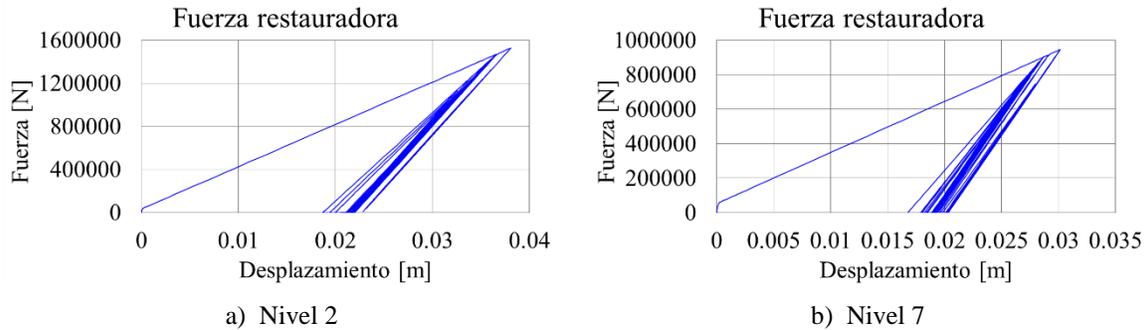


Figura 10.28. Fuerza restauradora del nivel 2 y 7, excitación en las masas, dirección Y, intervalo inelástico (Takeda).

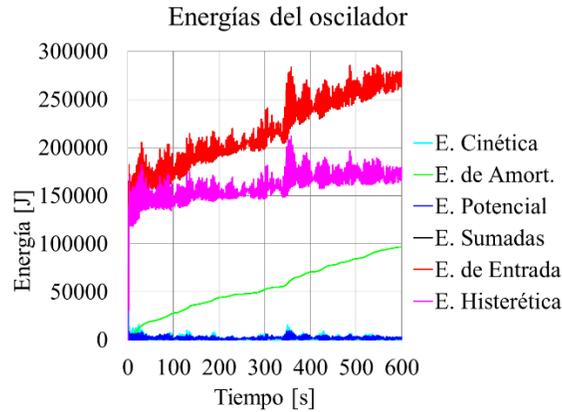


Figura 10.29. Historia de energías del oscilador, excitación en las masas, dirección Y, intervalo inelástico (Takeda).

También se presentan la gráfica de fuerza restauradora vs desplazamientos del nivel 2 y 7 en la Figura 10.28 y la historia de las energías en el tiempo en la Figura 10.29.

10.5 Ejemplo de aplicación, amortiguamiento suplementario

La forma de implementar el amortiguamiento viscoelástico (AVE) es de la misma forma como se presenta en el capítulo 9. Se obtiene las rigideces y los amortiguamientos de los

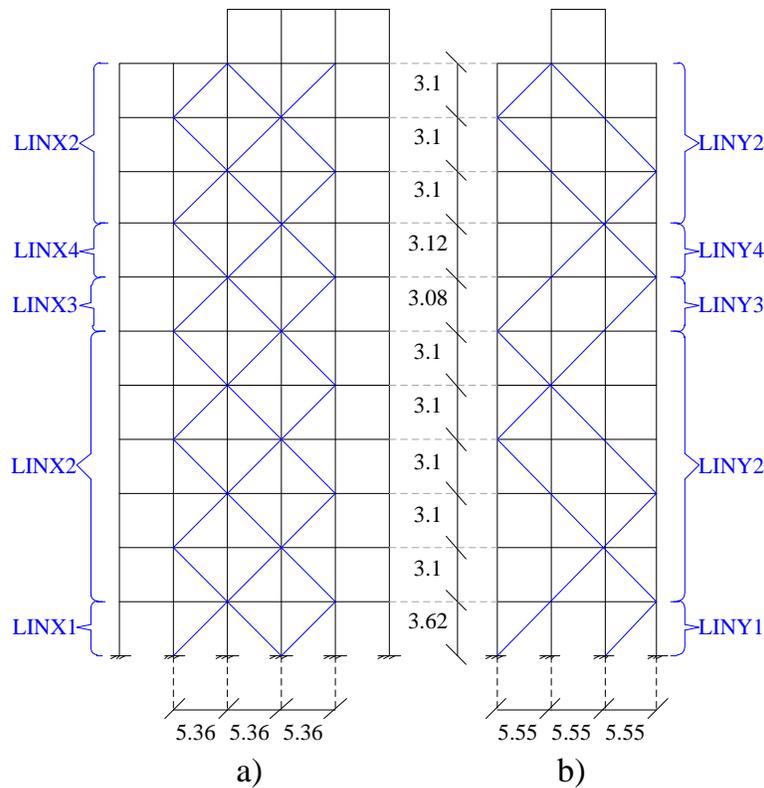


Figura 10.30. Distribución de amortiguamientos.

Tabla 10.12. Valores del ángulo, rigidez y amortiguamiento de los AVE en las dos direcciones.

Nivel	Dirección X			Dirección Y		
	Ángulos	K [N/m]	C [N-s/m]	Ángulos	K [N/m]	C [N-s/m]
1	34.03	363,829.52	393,930.52	33.11	371,667.03	402,416.46
2	30.04	396,978.81	429,822.38	29.19	403,731.01	437,133.21
3	30.04	396,978.81	429,822.38	29.19	403,731.01	437,133.21
4	30.04	396,978.81	429,822.38	29.19	403,731.01	437,133.21
5	30.04	396,978.81	429,822.38	29.19	403,731.01	437,133.21
6	30.04	396,978.81	429,822.38	29.19	403,731.01	437,133.21
7	29.88	398,258.88	431,208.35	29.03	404,988.52	438,494.76
8	30.2	395,694.62	428,431.94	29.34	402,548.16	435,852.50
9	30.04	396,978.81	429,822.38	29.19	403,731.01	437,133.21
10	30.04	396,978.81	429,822.38	29.19	403,731.01	437,133.21
11	30.04	396,978.81	429,822.38	29.19	403,731.01	437,133.21
12	30.04	396,978.81	429,822.38	29.19	403,731.01	437,133.21

amortiguadores para cada nivel, se recuerda que el ángulo θ para cada nivel se obtiene con las medidas descritas del edificio. La distribución de los amortiguadores se muestra en la Figura 10.30 donde solamente se muestra un lado del edificio, ya que del otro lado tiene la misma distribución de amortiguadores, siendo entonces dos ejes en cada dirección que tienen amortiguadores. En la Figura 10.30 se observa del lado “a)” a la dirección del edificio que se toma como X y del lado “b)” se tiene a la dirección del edificio que se toma como Y.

Se resaltan los tipos de amortiguadores que deben de ir para cada nivel, ya que en algunos entresijos la altura no es la misma. Se refiere a que por ejemplo, en el primer nivel se tiene a “LINX1”, quiere decir que los amortiguadores de ese nivel llevan esa propiedad del amortiguador, los niveles donde aparece “LINX2” llevan las propiedades de ese amortiguador y así sucesivamente para los demás niveles y para la otra dirección.

Posteriormente se obtienen las matrices de la ecuación de movimiento del oscilador y se calcula la respuesta en el tiempo paso a paso en el intervalo elástico del material del oscilador.

En la tabla 10.12 se muestra el ángulo, rigidez y amortiguamiento de cada nivel en la dirección en X y en Y.

10.5.1 Excitación en la base (sismo)

10.5.1.1 Dirección en X.

La dirección para X se refiere al sentido largo del edificio. Los resultados que se presentan son una comparación entre la historia de respuestas de desplazamientos del nivel 12 (Figura 10.31). En la Figura 10.32 se muestra la comparación entre la respuesta de desplazamientos y balance de energía del edificio sin y con amortiguadores viscoelásticos (AVEs) y en la tabla 10.13 se muestran los desplazamientos máximos con y sin AVE.

El balance de energía del oscilador tiende a elevarse debido a la aportación de los AVEs.

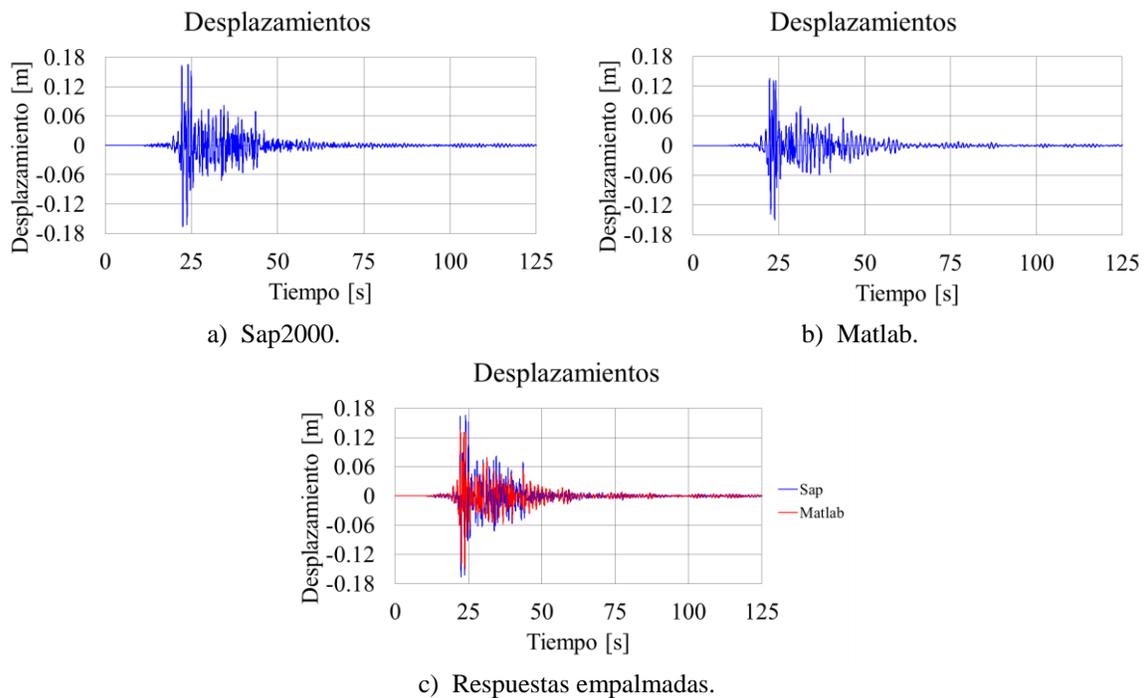


Figura 10.31. Comparación de desplazamientos con AVE entre Matlab y Sap2000, excitación en la base, dirección X, intervalo elástico.

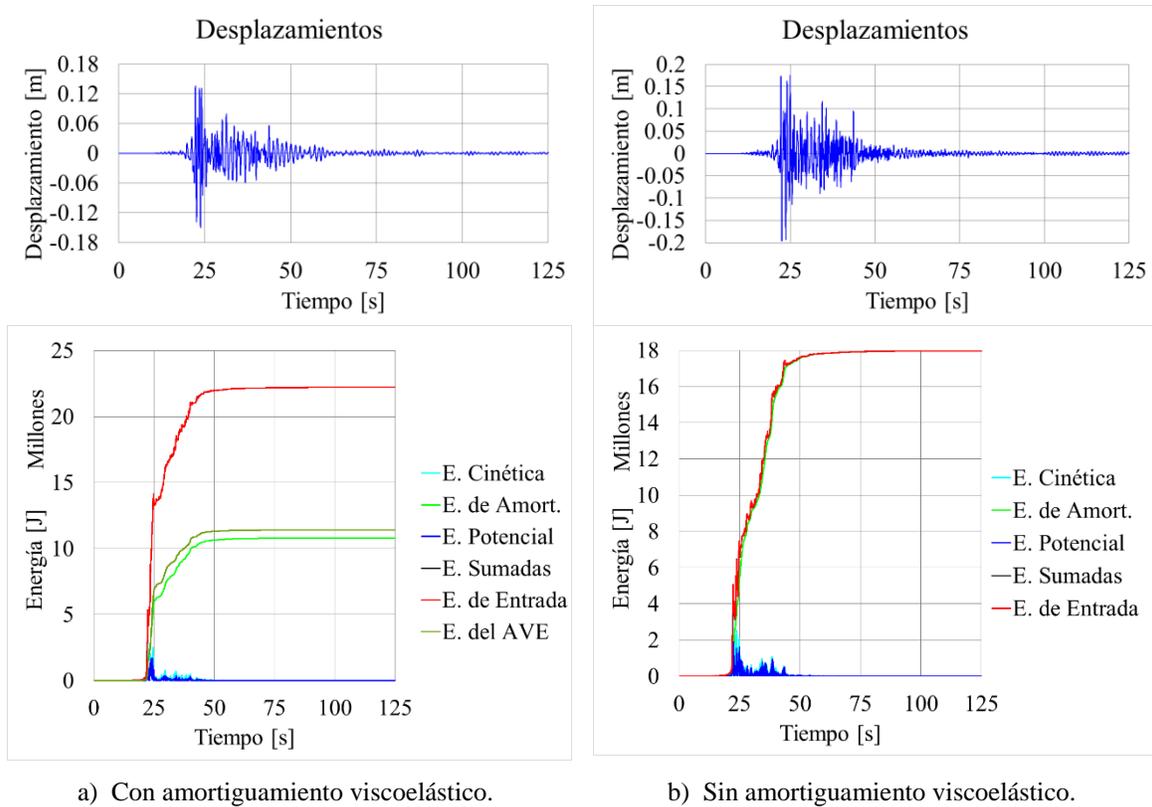


Figura 10.32. Comparación de desplazamientos y balance de energía obtenidos en Matlab con y sin AVE en el edificio, excitación en la base, dirección X, intervalo elástico.

Tabla 10.13. Desplazamientos máximos con amortiguamiento viscoelástico, excitación en la base, dirección X, intervalo elástico.

Caso	Desp. con amort. visco. [m]	Desp. sin amort. visco. [m]
Sap2000	0.1664	0.1805
Matlab	0.1503	0.1969

10.5.1.2 Dirección en Y.

La dirección Y se refiere al sentido corto del edificio. La forma en cómo se muestran los resultados para esta dirección es la misma que para la dirección X, una comparación entre la historia de respuestas de desplazamientos del nivel 12, Figura 10.33. En la Figura 10.34 se muestra la comparación entre la respuesta de desplazamientos y balance de energía del edificio sin y con AVEs y en la tabla 10.14 se muestran los desplazamientos máximos obtenidos con y sin AVE.

Los resultados que se obtienen para este sentido tienen un comportamiento más parecido entre sí a comparación con la dirección en X.

Lo que se logra apreciar es que sí disminuye el desplazamiento pero muy poco, la energía se mantiene casi igual a como si no tuviera AVEs. Aunque cabe mencionar que para esta dirección la respuesta es más crítica y se propusieron en total 4 amortiguadores por nivel, se

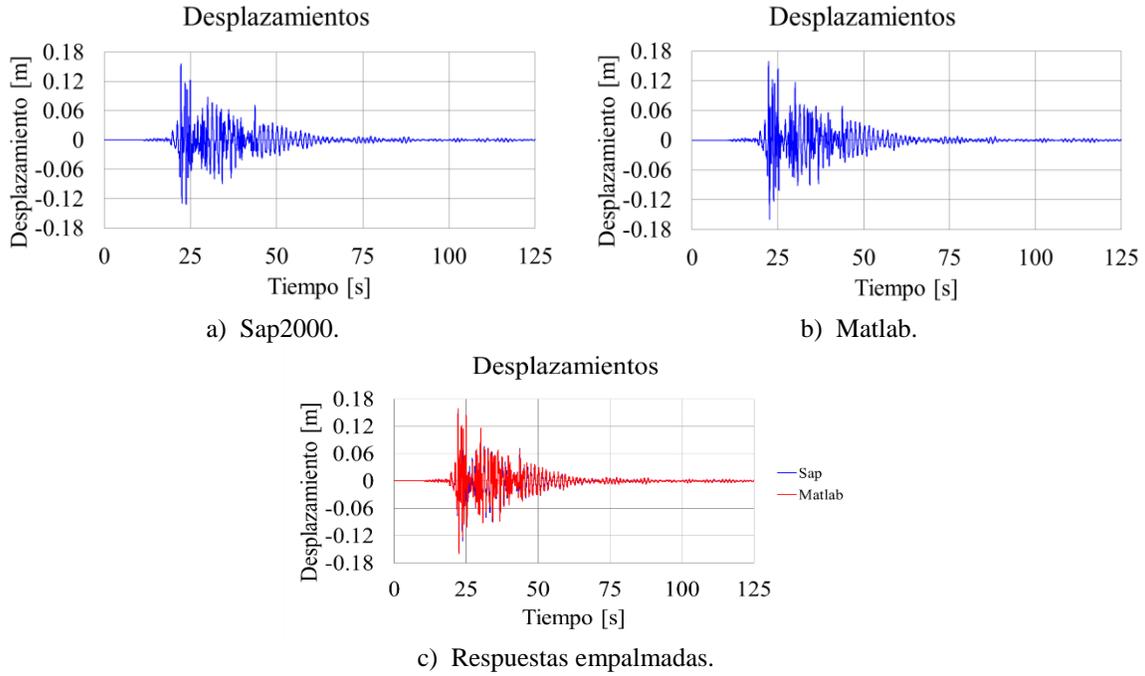


Figura 10.33. Comparación de desplazamientos con AVE entre Matlab y Sap2000, excitación en la base, dirección Y, intervalo elástico.

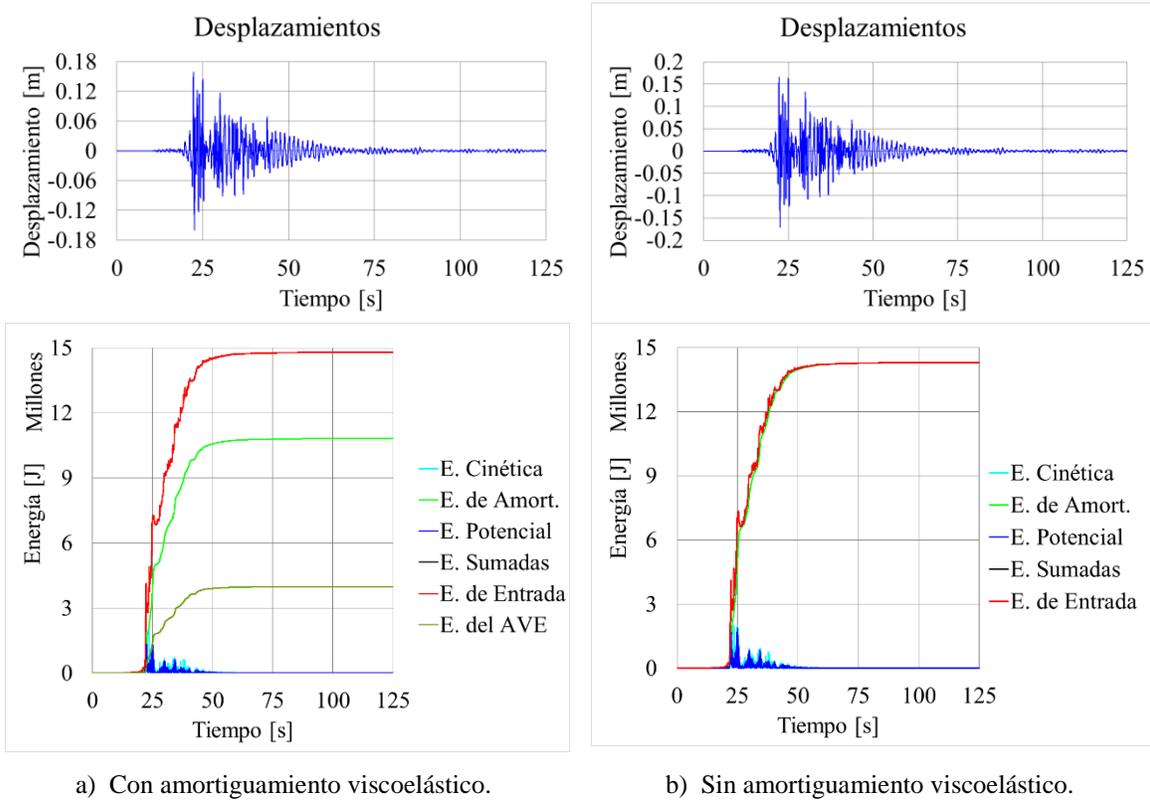


Figura 10.34. Comparación de desplazamientos y balance de energía obtenidos en Matlab con y sin AVE en el edificio, excitación en la base, dirección Y, intervalo elástico.

Tabla 10.14. Desplazamientos máximos (Sap2000 y Matlab) con amortiguamiento viscoelástico, excitación en la base, dirección Y, intervalo elástico.

Caso	Desp. con amort. visco. [m]	Desp. sin amort. visco. [m]
Sap2000	0.1564	0.1629
Matlab	0.1592	0.1707

podrían colocar más AVEs y ver que tanto podría ayudar en la disminución de la respuesta dinámica de la estructura, aunque por otro lado se debe de ver si es factible el número de AVEs que se propongan con el costo de estos.

10.5.2 Excitación en las masas (viento):

10.5.2.1 Dirección en X.

Para esta dirección se refiere a l sentido largo del edificio. Los resultados que se obtienen y presentan son los mismos que la sección (10.5.1), se tiene una comparación entre la historia de respuestas de desplazamientos en el tiempo del nivel 12 obtenidas los cuales se muestran en la Figura 10.35, la comparación entre la respuesta de desplazamientos y balance de energía del edificio sin y con amortiguadores viscoelásticos (AVEs) obtenidos en Matlab en la Figura 10.36 y los desplazamientos máximos con y sin AVE en la tabla 10.15.

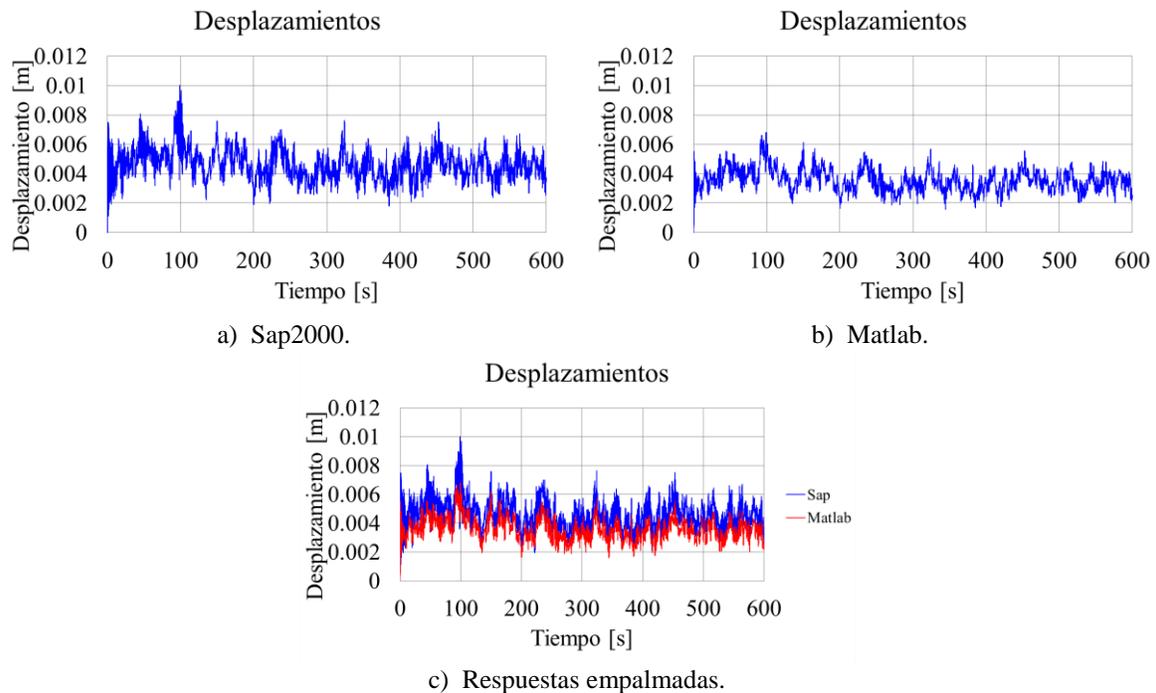


Figura 10.35. Comparación de desplazamientos con AVE entre Matlab y Sap2000, excitación en la masa, dirección X, intervalo elástico.

Tabla 10.15. Desplazamientos máximos (Sap2000 y Matlab) con amortiguamiento viscoelástico, excitación en la masa, dirección X, intervalo elástico.

Caso	Desp. con amort. visco. [m]	Desp. sin amort. visco. [m]
Sap2000	0.0100	0.0109
Matlab	0.0068	0.0049

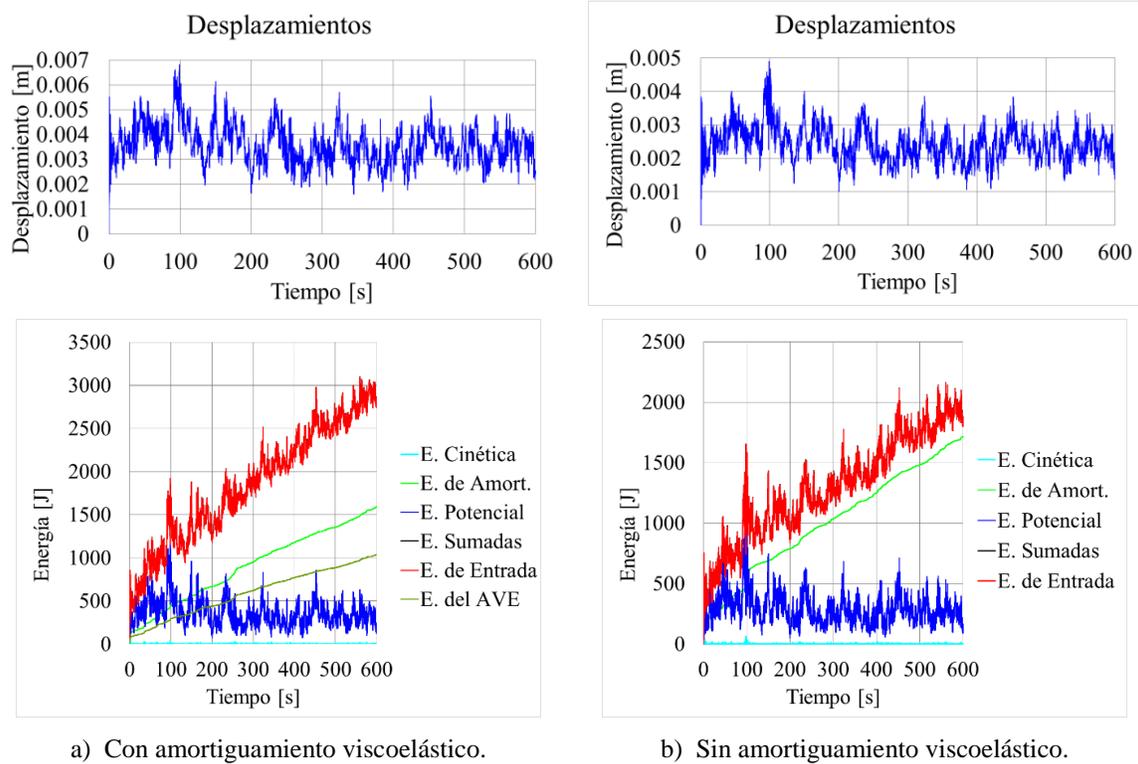


Figura 10.36. Comparación de desplazamientos y balance de energía obtenidos en Matlab con y sin AVE en el edificio, excitación en la masa, dirección X, intervalo elástico.

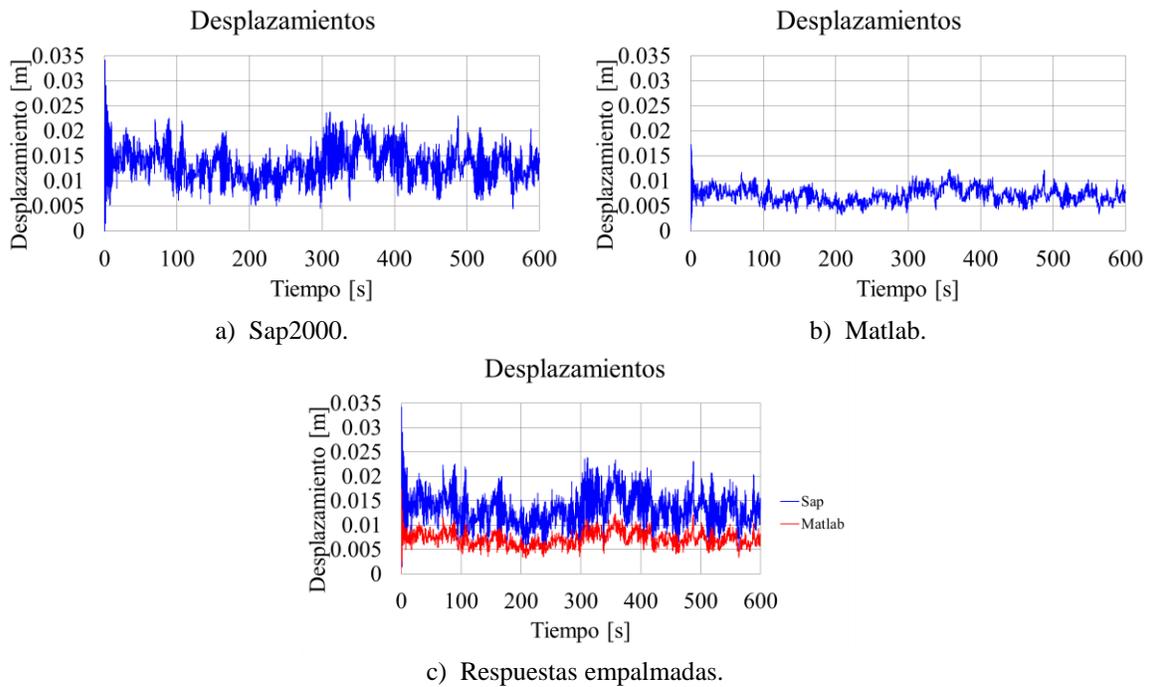


Figura 10.37. Comparación de desplazamientos con AVE entre Matlab y Sap2000, excitación en la masa, dirección Y, intervalo elástico.

10.5.2.2 Dirección en Y.

La dirección en Y se toma como el sentido corto del edificio. Los resultados que se muestran son los mismos que se mencionan en la dirección X. En la Figura 10.37 se muestra la comparación entre la historia de respuestas de desplazamientos del nivel 12, en la Figura 10.38 se muestra la comparación entre la respuesta de desplazamientos y balance de energía del edificio sin y con AVEs y en la tabla 10.14 se muestran los desplazamientos máximos con y sin AVE.

Tabla 10.16. Desplazamientos máximos (Sap2000 y Matlab) con amortiguamiento viscoelástico, excitación en la masa, dirección Y, intervalo elástico.

Caso	Desp. con amort. visco. [m]	Desp. sin amort. visco. [m]
Sap2000	0.0341	0.0348
Matlab	0.0173	0.0175

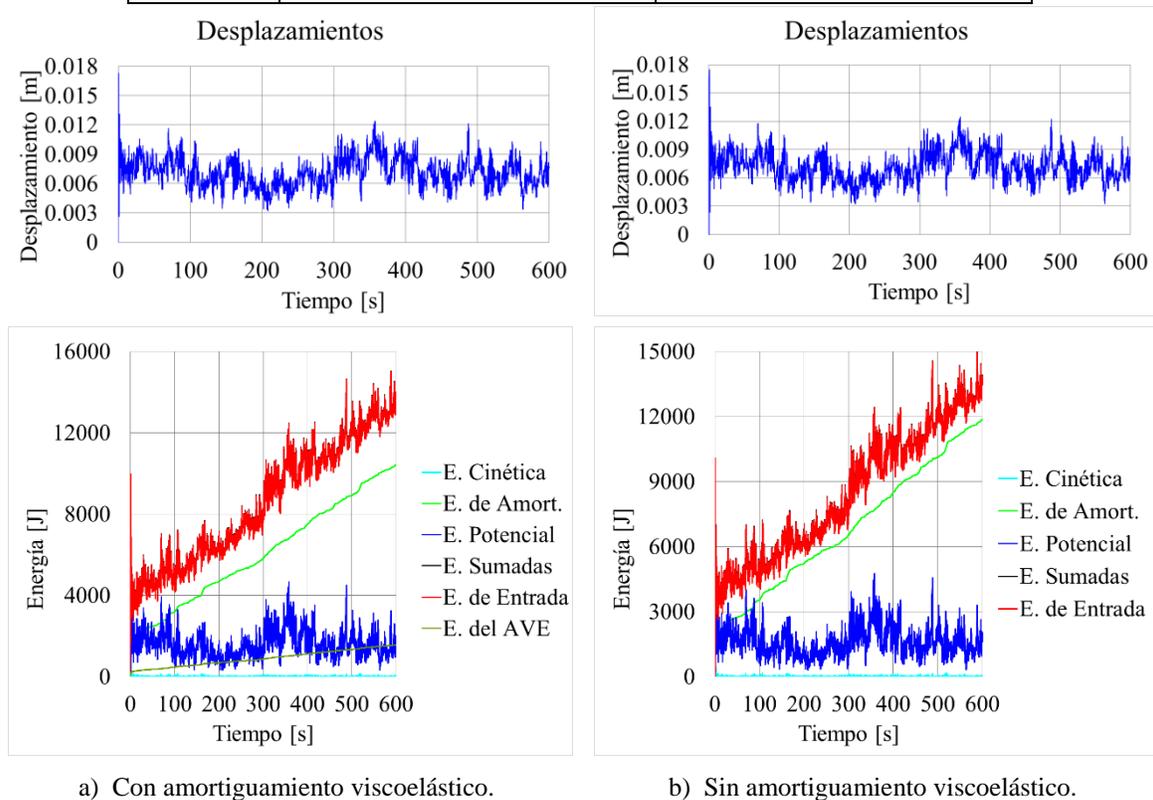


Figura 10.38. Comparación de desplazamientos y balance de energía obtenidos en Matlab con y sin AVE en el edificio, excitación en la masa, dirección Y, intervalo elástico.

El efecto del viento no genera desplazamientos grandes a comparación del sismo, esto podría ser una causa por la cual no aparece un cambio en la respuesta de desplazamientos, a comparación con la excitación en la base. Un dato que se sabe es que este tipo de amortiguadores ayudan a disminuir la vibración por las cargas eólicas, pero se ha implementado en edificios altos, donde sus periodos son grandes a comparación del edificio presentado en este capítulo. Para edificios pequeños y con excitación en la masa los AVEs no aportan ninguna ayuda a la estructura.

Índice de figuras

Figura 2.1. Oscilador de 1GDL con excitación en la base.	5
Figura 2.2. Oscilador de 1GDL con excitación en la masa.	5
Figura 2.3. Ejemplo – oscilador de 1GDL.	6
Figura 2.4. Respuestas en el tiempo, intervalo elástico (1GDL).	6
Figura 2.5. Resultados de energía (1GDL) en el intervalo elástico.	7
Figura 2.6. Modelo de un letrero monopolar.	8
Figura 2.7. Registros sísmicos empleados en el análisis sísmico.	9
Figura 2.8. Localización de las estaciones.	9
Figura 2.9. Historia de desplazamientos y balance de energía en el intervalo elástico, monópulo espectacular ante cargas sísmicas.	10
Figura 2.10. Historia de velocidades y de fuerzas eólicas sintéticas para monópulo espectacular.	11
Figura 2.11. Historia de desplazamientos y balance de energía en el intervalo elástico, monópulo espectacular ante carga eólica.	12
Figura 2.12. Oscilador de MGDL con excitación en la base.	14
Figura 2.13. Oscilador de MGDL con excitación en la masa.	14
Figura 2.14. Ejemplo – oscilador de MGDL.	14
Figura 2.15. Respuesta en el tiempo de desplazamiento, intervalo elástico (MGDL).	15
Figura 2.16. Respuesta en el tiempo de velocidad, intervalo elástico (MGDL).	16
Figura 2.17. Respuesta en el tiempo de aceleración, intervalo elástico (MGDL).	17
Figura 2.18. Resultados de energía (MGDL) en el intervalo elástico.	18
Figura 3.1. Modelo histerético elastoplástico perfecto.	20
Figura 3.2. Historia de desplazamientos, fuerza restauradora y balance de energía en el intervalo inelástico (modelo elastoplástico perfecto), monópulo espectacular ante cargas sísmicas.	24
Figura 3.3. Historia de desplazamientos, fuerza restauradora y balance de energía en el intervalo inelástico (modelo elastoplástico perfecto), monópulo espectacular ante carga eólica.	25

Figura 3.4. Comparación de respuestas de desplazamientos del oscilador de MGDL en el intervalo inelástico.....	27
Figura 3.5. Comparación de fuerza restauradora del oscilador de MGDL en el intervalo inelástico.....	28
Figura 3.6. Comparación de balance de energía del oscilador de MGDL en el intervalo inelástico.....	29
Figura 4.1. Modelo hysterético bilineal.	31
Figura 4.2. Desplazamientos del oscilador de 1GDL en el intervalo inelástico (modelo bilineal).....	31
Figura 4.3. Velocidades del oscilador de 1GDL en el intervalo inelástico (modelo bilineal).....	32
Figura 4.4. Fuerza restauradora del oscilador de 1GDL en el intervalo inelástico (modelo bilineal).....	32
Figura 4.5. Historia de desplazamientos, fuerza restauradora y balance de energía en el intervalo inelástico (modelo bilineal), monópulo espectacular ante cargas sísmicas.....	35
Figura 4.6. Historia de desplazamientos, fuerza restauradora y balance de energía en el intervalo inelástico (modelo bilineal), monópulo espectacular ante carga eólica.	36
Figura 4.7. Desplazamientos del oscilador de MGDL en el intervalo inelástico (modelo bilineal).....	37
Figura 4.8. Velocidades del oscilador de MGDL en el intervalo inelástico (modelo bilineal).....	38
Figura 5.1. Carga, descarga y recarga.	40
Figura 5.2. Modelo hysterético de Takeda.	41
Figura 5.3. Modelo de Takeda.....	43
Figura 5.4. Propiedades de fuerzas y rigideces del modelo de Takeda.	45
Figura 5.5. Comparación del registro sísmico “El centro 1940” componente Norte – sur. (a) Registro sísmico presentado en este trabajo; (b) Registro sísmico presentado en el libro “Nonlinear Earthquake Response Analysis of Reinforced Concrete Buildings (Lecture Notes)”.....	45
Figura 5.6. Desplazamientos del oscilador de 1GDL en el intervalo inelástico (modelo Takeda $\alpha = 0.0$).	46
Figura 5.7. Fuerza restauradora del oscilador de 1GDL en el intervalo inelástico (modelo Takeda $\alpha = 0.0$)	47
Figura 5.8. Desplazamientos del oscilador de 1GDL en el intervalo inelástico (modelo Takeda $\alpha = 0.5$).	47

Figura 5.9. Fuerza restauradora del oscilador de 1GDL en el intervalo inelástico (modelo Takeda $\alpha = 0.5$)	48
Figura 5.10. Desplazamientos del oscilador de 1GDL en el intervalo inelástico para distintos porcentajes de fuerza de fluencia (modelo Takeda $\alpha = 0.0$).	48
Figura 5.11. Columna de un puente con su tablero.	49
Figura 5.12. Espectros elásticos de aceleración (registros sísmicos).	50
Figura 5.13. Historia de desplazamientos, fuerza restauradora y balance de energía en el intervalo inelástico (modelo de Takeda), columna y tablero de un puente ante cargas sísmicas.	52
Figura 5.14. Historia de fuerzas eólicas sintéticas para columna y tablero de un puente. ..	52
Figura 5.15. Historia de desplazamientos, fuerza restauradora y balance de energía en el intervalo inelástico (modelo de Takeda), columna y tablero de un puente ante carga eólica.	54
Figura 5.16. Espectro elástico de aceleración, SCT 1985/09/19.	55
Figura 5.17. Fuerza de restitución de cada nivel del oscilador de 3GDL con excitación en la base.	56
Figura 5.18. Comparación de resultados, oscilador de 3GDL intervalo inelástico (Takeda), excitación en la base.	57
Figura 5.19. Comparación de resultados, oscilador de 3GDL intervalo inelástico (Takeda), excitación en la base aumentando 3 veces la rigidez inicial.	58
Figura 5.20. Comparación de resultados, oscilador de 3GDL intervalo inelástico (Takeda), excitación en la masa.	60
Figura 5.21. Fuerza de restitución de cada nivel del oscilador de 3GDL con excitación en la masa.	61
Figura 7.1. Representación esquemática de una estructura tipo punto.	66
Figura 7.2. Edificio prismático expuesto a la velocidad del viento.	66
Figura 7.3. Categoría de terrenos.	75
Figura 7.4. Coeficiente de arrastre para edificio prismático.	86
Figura 7.5. Simulaciones numéricas de velocidades (MGDL).	91
Figura 7.6. Simulaciones numéricas de fuerzas (MGDL).	92
Figura 8.1. Columna de un puente con su tablero.	93
Figura 8.2. Columna de una techumbre.	93
Figura 8.3. Columna de un espectacular.	93
Figura 8.4. Representación gráfica de columna de un puente sin interacción suelo – estructura (ISE).	94

Figura 8.5. Representación gráfica de columna de un puente (desplazamiento total) sin interacción suelo – estructura (ISE).....	95
Figura 8.6. Tablero del puente.....	96
Figura 8.7. GDL para matriz de rigidez.	97
Figura 8.8. Comparación de resultados, oscilador de 1GDL y 2GDL (sin cabeceo), intervalo elástico.....	101
Figura 8.9. Resultados del oscilador de 2GDL considerando cabeceo, intervalo elástico.....	102
Figura 8.10. Comparación de las historias de fuerzas eólicas sintéticas para monópolo espectacular considerando y sin considerar cabeceo de la masa.	103
Figura 8.11. Comparación de resultados del monópolo espectacular, intervalo elástico, excitación en la base.....	104
Figura 8.12. Comparación de resultados del monópolo espectacular, intervalo elástico, excitación en la masa.....	104
Figura 8.13. Comparación de resultados del monópolo espectacular, intervalo inelástico (Bilineal), excitación en la base.....	105
Figura 8.14. Comparación de resultados del monópolo espectacular, intervalo inelástico (Bilineal), excitación en la masa.....	106
Figura 8.15. Comparación de las historias de fuerzas eólicas sintéticas para columna y tablero de un puente considerando y sin considerar cabeceo de la masa.	108
Figura 8.16. Comparación de resultados de la columna de un puente con su tablero, intervalo elástico, excitación en la base.....	108
Figura 8.17. Comparación de resultados de la columna de un puente con su tablero, intervalo elástico, excitación en la masa.....	109
Figura 8.18. Comparación de resultados de la columna de un puente con su tablero, intervalo inelástico (Takeda), excitación en la base.	110
Figura 8.19. Comparación de resultados de la columna de un puente con su tablero, intervalo inelástico (Takeda), excitación en la masa.	111
Figura 9.1. Modelo sólido de Kelvin.....	114
Figura 9.2. Marco de un nivel equipado con amortiguamiento viscoelástico.	115
Figura 9.3. Marco de un nivel equipado con amortiguamiento viscoelástico.	119
Figura 9.4. Oscilador de 1GDL con amortiguamiento viscoelástico (AVE).	121
Figura 9.5. Comparación de resultados del oscilador de 1GDL, intervalo elástico, excitación en la base.	121
Figura 9.6. Comparación de resultados del oscilador de 1GDL, intervalo inelástico (bilineal), excitación en la base con y sin AVE.	122

Figura 9.7. Comparación de resultados del oscilador de 1GDL, intervalo inelástico (Takeda), excitación en la base con y sin AVE.	123
Figura 9.8. Comparación de resultados del oscilador de 1GDL, intervalo elástico, excitación en la masa.	125
Figura 9.9. Comparación de resultados del oscilador de 1GDL, intervalo inelástico (bilineal), excitación en la masa con y sin AVE.	126
Figura 9.10. Comparación de resultados del oscilador de 1GDL, intervalo inelástico (Takeda), excitación en la masa con y sin AVE.	127
Figura 9.11. Oscilador de 3GDL con amortiguamiento viscoelástico (AVE).	128
Figura 9.12. Comparación de resultados del oscilador de 3GDL, nivel 3, intervalo elástico, excitación en la base.	129
Figura 9.13. Comparación de resultados del oscilador de 3GDL, nivel 3, intervalo inelástico (bilineal), excitación en la base con y sin AVE.	130
Figura 9.14. Comparación de resultados del oscilador de 3GDL, nivel 3, intervalo inelástico (Takeda), excitación en la base con y sin AVE.	132
Figura 9.15. Comparación de resultados del oscilador de 3GDL, nivel 3, intervalo elástico, excitación en la masa.	133
Figura 9.16. Comparación de resultados del oscilador de 3GDL, nivel 3, intervalo inelástico (bilineal), excitación en la masa con y sin AVE.	134
Figura 9.17. Comparación de resultados del oscilador de 3GDL, nivel 3, intervalo inelástico (Takeda), excitación en la masa con y sin AVE.	135
Figura 10.1. Edificio (prismático) real.	137
Figura 10.2. Edificio (prismático) modelo.	141
Figura 10.3. Comparación de desplazamientos, excitación en la base, dirección X, intervalo elástico.	141
Figura 10.4. Historia de energías del oscilador, excitación en la base, dirección X, intervalo elástico.	142
Figura 10.5. Comparación de desplazamientos, excitación en la base, dirección Y, intervalo elástico.	143
Figura 10.6. Historia de energías del oscilador, excitación en la base, dirección Y, intervalo elástico.	143
Figura 10.7. Comparación de desplazamientos, excitación en la masa, dirección X, intervalo elástico.	144
Figura 10.8. Historia de energías del oscilador, excitación en la masa, dirección X, intervalo elástico.	145
Figura 10.9. Comparación de desplazamientos, excitación en la base, dirección Y, intervalo elástico.	146

Figura 10.10. Historia de energías del oscilador, excitación en la base, dirección Y, intervalo elástico.	146
Figura 10.11. Respuesta de desplazamientos y fuerza restauradora en el tiempo, excitación en la base, dirección X, intervalo inelástico (bilineal).	148
Figura 10.12. Fuerza restauradora del nivel 2 y 10, excitación en la base, dirección X, intervalo inelástico (bilineal).	148
Figura 10.13. Historia de energías del oscilador, excitación en la base, dirección X, intervalo inelástico (bilineal).	148
Figura 10.14. Respuesta de desplazamientos y fuerza restauradora en el tiempo, excitación en la base, dirección Y, intervalo inelástico (bilineal).	150
Figura 10.15. Fuerza restauradora del nivel 2 y 10, excitación en la base, dirección Y, intervalo inelástico (bilineal).	150
Figura 10.16. Historia de energías del oscilador, excitación en la base, dirección Y, intervalo inelástico (bilineal).	150
Figura 10.17. Espectro elástico de aceleraciones, “San Juan de los Llanos”.	151
Figura 10.18. Respuesta de desplazamientos y fuerza restauradora en el tiempo, excitación en la base, dirección X, intervalo inelástico (Takeda).	152
Figura 10.19. Fuerza restauradora del nivel 2 y 10, excitación en la base, dirección X, intervalo inelástico (Takeda).	152
Figura 10.20. Historia de energías del oscilador, excitación en la base, dirección X, intervalo inelástico (Takeda).	152
Figura 10.21. Respuesta de desplazamientos y fuerza restauradora en el tiempo, excitación en la base, dirección Y, intervalo inelástico (Takeda).	153
Figura 10.22. Fuerza restauradora del nivel 2 y 7, excitación en la base, dirección Y, intervalo inelástico (Takeda).	153
Figura 10.23. Historia de energías del oscilador, excitación en la base, dirección Y, intervalo inelástico (Takeda).	153
Figura 10.24. Respuesta de desplazamientos y fuerza restauradora en el tiempo, excitación en las masas, dirección X, intervalo inelástico (Takeda).	154
Figura 10.25. Fuerza restauradora del nivel 2 y 10, excitación en las masas, dirección X, intervalo inelástico (Takeda).	155
Figura 10.26. Historia de energías del oscilador, excitación en las masas, dirección X, intervalo inelástico (Takeda).	155
Figura 10.27. Respuesta de desplazamientos y fuerza restauradora en el tiempo, excitación en las masas, dirección Y, intervalo inelástico (Takeda).	156
Figura 10.28. Fuerza restauradora del nivel 2 y 7, excitación en las masas, dirección Y, intervalo inelástico (Takeda).	156

Figura 10.29. Historia de energías del oscilador, excitación en las masas, dirección Y, intervalo inelástico (Takeda).	156
Figura 10.30. Distribución de amortiguamientos.	157
Figura 10.31. Comparación de desplazamientos con AVE entre Matlab y Sap2000, excitación en la base, dirección X, intervalo elástico.	158
Figura 10.32. Comparación de desplazamientos y balance de energía obtenidos en Matlab con y sin AVE en el edificio, excitación en la base, dirección X, intervalo elástico.	159
Figura 10.33. Comparación de desplazamientos con AVE entre Matlab y Sap2000, excitación en la base, dirección Y, intervalo elástico.	160
Figura 10.34. Comparación de desplazamientos y balance de energía obtenidos en Matlab con y sin AVE en el edificio, excitación en la base, dirección Y, intervalo elástico.	160
Figura 10.35. Comparación de desplazamientos con AVE entre Matlab y Sap2000, excitación en la masa, dirección X, intervalo elástico.	161
Figura 10.36. Comparación de desplazamientos y balance de energía obtenidos en Matlab con y sin AVE en el edificio, excitación en la masa, dirección X, intervalo elástico.	162
Figura 10.37. Comparación de desplazamientos con AVE entre Matlab y Sap2000, excitación en la masa, dirección Y, intervalo elástico.	162
Figura 10.38. Comparación de desplazamientos y balance de energía obtenidos en Matlab con y sin AVE en el edificio, excitación en la masa, dirección Y, intervalo elástico.	163

Índice de tablas

Tabla 1.1. Sistemas de control.....	2
Tabla 2.1. Valores máximos de energía, oscilador de 1GDL, intervalo elástico.	7
Tabla 2.2. Valores máximos en el intervalo elástico, monópulo espectacular ante cargas sísmicas.....	11
Tabla 2.3. Valores máximos en el intervalo elástico, monópulo espectacular ante carga eólica.....	12
Tabla 2.4. Valores máximos de energía, oscilador de MGDL, intervalo elástico.	17
Tabla 3.1. Resultados (Chopra, 2012).	22
Tabla 3.2. Resultados obtenidos en este trabajo.	22
Tabla 3.3. Valores máximos en el intervalo inelástico (modelo elastoplástico perfecto), monópulo espectacular ante cargas sísmicas.....	25
Tabla 3.4. Valores máximos, oscilador de 1GDL, intervalo inelástico (modelo elastoplástico perfecto), viento.....	26
Tabla 4.1. Valores máximos en el intervalo inelástico (modelo bilineal), monópulo espectacular ante cargas sísmicas.	33
Tabla 4.2. Valores máximos, oscilador de 1GDL, intervalo inelástico (modelo bilineal), viento.	35
Tabla 5.1. Valores para el modelo de Takeda (cargas sísmicas).	50
Tabla 5.2. Valores máximos en el intervalo inelástico (modelo de Takeda), columna de un puente ante cargas sísmicas.	50
Tabla 5.3. Valores para el modelo de Takeda (carga eólica).....	53
Tabla 5.4. Valores máximos en el intervalo inelástico, columna y tablero de un puente ante carga eólica.	53
Tabla 5.5. Valores para el modelo de Takeda, registro SCT 1985/09/19 (cargas sísmicas).	58
Tabla 7.1. Categorías de terreno y parámetros del terreno.	75
Tabla 7.2. Factores de topografía.	77
Tabla 7.3. Parámetros de la velocidad media del viento para un tiempo de 10 minutos.....	77
Tabla 7.4. Simulaciones de velocidades y fuerzas longitudinales (1GDL).....	83
Tabla 7.5. Simulaciones de velocidades y fuerzas longitudinales (MGDL).	91

Tabla 8.1. Comparación de cortantes y momentos máximos, oscilador de 1GDL y 2GDL (sin cabeceo).....	101
Tabla 8.2. Cortantes y momentos máximos, oscilador de 2GDL (con cabeceo).	102
Tabla 8.3. Comparación de cortantes y momentos máximos, monópulo espectacular, intervalo elástico, excitación en la base.....	103
Tabla 8.4. Comparación de cortantes y momentos máximos, monópulo espectacular, intervalo elástico, excitación en la masa.	103
Tabla 8.5. Comparación de cortantes y momentos máximos, monópulo espectacular, intervalo inelástico (Bilineal), excitación en la base.	106
Tabla 8.6. Comparación de cortantes y momentos máximos, monópulo espectacular, intervalo inelástico (Bilineal), excitación en la masa.	106
Tabla 8.7. Comparación de cortantes y momentos máximos, columna de un puente con su tablero, intervalo elástico, excitación en la base.	109
Tabla 8.8. Comparación de cortantes y momentos máximos, columna de un puente con su tablero, intervalo elástico, excitación en la masa.	109
Tabla 8.9. Comparación de cortantes y momentos máximos de la columna de un puente con su tablero, intervalo inelástico (Takeda), excitación en la base.	111
Tabla 8.10. Comparación de cortantes y momentos máximos de la columna de un puente con su tablero, intervalo inelástico (Takeda), excitación en la masa.	111
Tabla 8.11. Resumen de resultados.	112
Tabla 9.1. Parámetros del modelo histerético de Takeda para el oscilador de 1GDL con AVE con excitación en la base.	124
Tabla 9.2. Parámetros del modelo histerético de Takeda para el oscilador de 1GDL con AVE con excitación en la masa.	128
Tabla 9.3. Parámetros del modelo histerético de Takeda para el oscilador de 3GDL con AVE con excitación en la base.	131
Tabla 9.4. Parámetros del modelo histerético de Takeda para el oscilador de 3GDL con AVE con excitación en la masa.	136
Tabla 10.1. Alturas de entrepiso del edificio prismático.	138
Tabla 10.2. Distancias de crujías en el sentido largo del edificio prismático.....	138
Tabla 10.3. Distancias de crujías en el sentido corto del edificio prismático.....	138
Tabla 10.4. Masas y rigideces del edificio prismático.	139
Tabla 10.5. Áreas de entrepiso en la dirección X y Y.	140
Tabla 10.6. Desplazamientos máximos (Sap2000 y Matlab) y periodos fundamentales, excitación en la base, dirección X, intervalo elástico.....	141

Tabla 10.7. Desplazamientos máximos (Sap2000 y Matlab) y periodos fundamentales, excitación en la base, dirección Y, intervalo elástico.....	143
Tabla 10.8. Desplazamientos máximos (Sap2000 y Matlab) y periodos fundamentales, excitación en la masa, dirección X, intervalo elástico.....	145
Tabla 10.9. Desplazamientos máximos (Sap2000 y Matlab) y periodos fundamentales, excitación en la base, dirección Y, intervalo elástico.....	146
Tabla 10.10. Fuerzas de fluencia en la dirección X con excitación en la base para el modelo histerético bilineal.....	147
Tabla 10.11. Fuerzas de fluencia en la dirección Y con excitación en la base para el modelo histerético bilineal.....	149
Tabla 10.12. Valores del ángulo, rigidez y amortiguamiento de los AVE en las dos direcciones.....	157
Tabla 10.13. Desplazamientos máximos con amortiguamiento viscoelástico, excitación en la base, dirección X, intervalo elástico.....	159
Tabla 10.14. Desplazamientos máximos (Sap2000 y Matlab) con amortiguamiento viscoelástico, excitación en la base, dirección Y, intervalo elástico.....	161
Tabla 10.15. Desplazamientos máximos (Sap2000 y Matlab) con amortiguamiento viscoelástico, excitación en la masa, dirección X, intervalo elástico.....	161
Tabla 10.16. Desplazamientos máximos (Sap2000 y Matlab) con amortiguamiento viscoelástico, excitación en la masa, dirección Y, intervalo elástico.....	163

Referencias

1. T. T. Soong & G. F. Dargush (1997), “*Passive Energy Dissipation Systems in Structural Engineering*”, John Wiley & Sons Ltd.
2. <https://es.slideshare.net/alan0116/sistemas-de-control-pasivo>
3. <https://es.slideshare.net/galvanilego/edificacin-con-disipadores-de-energa-dr-genner-villarreal-c-msc-ricardo-oviedo-s>
4. Constantin Christopoulos y André Filiatrault (2006), “*Principles of Passive Supplemental Damping and Seismic Isolation*”, IUSS PRESS, Pavia – Italy.
5. Gary C. Hart y Kevin Wong (1999), “*Structural Dynamics for Structural Engineers*”, John Wiley & Sons Inc.
6. Anil K. Chopra (2013), “*Dinámica de Estructuras*”, Pearson Educación, Edición 4.
7. <http://aplicaciones.iingen.unam.mx/AcelerogramasRSM/RedAcelerografica.aspx>
8. Hugo Hernández Barrios, Iván Huergo Ríos y Carlos Arce León (2018), “*Respuesta eólica de estructuras para celdas solares móviles*”, SMIE, México.
9. Yukio Tamura y Ahsan Kareem (2013), “*Advanced structural wind engineering*”, Springer Japan.
10. <https://cab.inta-csic.es/uploads/culturacientifica/adjuntos/20130121115236.pdf>
11. T. Kijewski, F. Haan, A. Kareem (2000), “*Wind-induced vibrations*”, en: Encyclopedia of vibration, Academic Press.
12. Comisión Federal de Electricidad (2008), “*Manual de diseño de obras civiles, Diseño por viento*”, México.
13. Eurocode 1 (2005): “*Actions on structures - Part 1-4: General actions - Wind actions*”, English version
14. Iván Huergo Ríos, Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Tesis doctoral en proceso, 2019.
15. Yesenia Fragoso del Río, Facultad de Estudios Superiores Acatlán, Universidad Nacional Autónoma de México, Tesis de licenciatura en proceso, 2019.
16. Notas de clases de Ingeniería Eólica, Maestría en estructuras, Facultad de Estudios Superiores Acatlán, segundo semestre.
17. https://fotos.habitissimo.com.mx/foto/columnas-y-trabes-para-la-construccion-del-puente-vallejo_107838
18. <https://www.contramuro.com/irregulares-70-de-espectaculares-en-morelia/>
19. <https://tdx.cat/bitstream/handle/10803/6230/06CAPITULO5.pdf?sequence=6>

-
20. Shunsuke Otani (2002), "*Nonlinear Earthquake Response Analysis of Reinforced Concrete Buildings*", Department of Architecture, University of Tokyo.
 21. Ramón Cárdenas Soto (2010), "*Estudio comparativo de análisis sísmicos simplificados y el análisis dinámico incremental en el cálculo de la curva de capacidad*", Tesis de maestría en ingeniería, Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.
 22. <http://www.vibrationdata.com/elcentro.htm>
 23. [https://fotos.habitissimo.com.mx/foto/columnas-y-trabes-para-la-construccion-del-
puente-vallejo_107838](https://fotos.habitissimo.com.mx/foto/columnas-y-trabes-para-la-construccion-del-puente-vallejo_107838)
 24. <https://www.contramuro.com/irregulares-70-de-espectaculares-en-morelia/>
 25. Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston Jr. & Phillip J. Cornwell (2010), "*Mecánica vectorial para ingenieros, Dinámica*", McGraw-Hill, novena edición
 26. Roberto Aguiar Falconi, "*Dinámica de estructuras con CEINCI – LAB*", Segunda edición, Ecuador, 2012.
 27. Juan Carlos Botero, "*Respuesta de Sistemas Suelo – Estructura con amortiguamiento en la base*", Revista Universidad EAFIT No. 125, 2002.

Apéndice A
Respuesta de los osciladores

Hoy en día la forma más común y sencilla de obtener la respuesta de un oscilador de 1GDL o MGDG ante cualquier carga es por medio de un método numérico. En la literatura existen muchos métodos, cada uno con sus respectivas características. En este trabajo se presenta el método beta de Newmark.

En este método se necesita aproximar la función continua de la aceleración para poder discretizar la integral que da solución a la ecuación diferencial de movimiento; para esto se necesita discretizar la función continua. Las tres formas más comunes utilizadas en la ingeniería estructural son: 1) aceleración constante, 2) aceleración promedio constante y 3) aceleración lineal.

Para este trabajo se utiliza la segunda forma (aceleración promedio constante), ya que tiene un alto grado de estabilidad numérica. Las constantes de esta solución son $\delta = \frac{1}{2}$ y $\alpha = \frac{1}{4}$.

Otra característica que se debe tomar en cuenta es la exactitud numérica a la que se llega, eso se logra con el intervalo de tiempo al que se realiza el método numérico. Investigaciones previas han mostrado que el paso de tiempo de $\Delta t \leq (T_n/10)$ dan un resultado muy preciso. Por ejemplo para un oscilador de 1GDL con un periodo natural de vibrar no amortiguado de 0.5s, el paso de tiempo en el análisis numérico debe ser de igual o menor que 0.05s. Cuando no se cumple con ese paso de tiempo para cuando se tiene el periodo ya dicho existe menos precisión en el cálculo.

En las siguientes secciones se presenta la forma de resolver la ecuación diferencial de movimiento con el método de beta de Newmark partiendo de las siguientes ecuaciones:

$$\dot{x}_{k+1} = \dot{x}_k + (1 - \delta)\ddot{x}_k \Delta t + \delta \ddot{x}_{k+1} \Delta t \quad (\text{A.1})$$

$$x_{k+1} = x_k + \dot{x}_k \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\ddot{x}_k \Delta t^2 + \alpha \ddot{x}_{k+1} \Delta t^2 \quad (\text{A.2})$$

A.1 Método numérico para 1GDL en el intervalo elástico e inelástico.

Considerando la ecuación de movimiento igual a:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + k_e x(t) = F_e(t) \quad (\text{A.3})$$

donde k_e representa la rigidez elástica. En un tiempo $t = t_k$, la ecuación (A.3) se puede escribir como

$$m\ddot{x}_k + c\dot{x}_k + k_e x_k = F_k \quad (\text{A.4})$$

O también de la siguiente manera ya que se realizan discretizaciones en el tiempo

$$m\Delta\ddot{x} + c\Delta\dot{x} + k_e \Delta x = \Delta F \quad (\text{A.5})$$

donde

$$\Delta\ddot{x} = \ddot{x}_{k+1} - \ddot{x}_k \quad (\text{A.6})$$

$$\Delta\dot{x} = \dot{x}_{k+1} - \dot{x}_k \quad (\text{A.7})$$

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k \quad (\text{A.8})$$

$$\Delta F = F_{k+1} - F_k \quad (\text{A.9})$$

De las ecuaciones (A.1) y (A.2) se puede obtener lo siguiente:

$$\Delta\dot{x} = \dot{x}_{k+1} - \dot{x}_k = (1 - \delta)\dot{x}_k\Delta t + \delta\ddot{x}_{k+1}\Delta t \quad (\text{A.10})$$

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k = \dot{x}_k\Delta t + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\ddot{x}_k\Delta t^2 + \alpha\ddot{x}_{k+1}\Delta t^2 \quad (\text{A.11})$$

Sustituyendo las ecuaciones (A.10) y (A.11) en la ecuación (A.5) se obtiene que

$$m\Delta\ddot{x} + c\left[(1 - \delta)\ddot{x}_k\Delta t + \delta\ddot{x}_{k+1}\Delta t\right] + k_e\left[\dot{x}_k\Delta t + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\ddot{x}_k\Delta t^2 + \alpha\ddot{x}_{k+1}\Delta t^2\right] = \Delta F \quad (\text{A.12})$$

De la ecuación (A.6) se obtiene que

$$\ddot{x}_{k+1} = \Delta\ddot{x} + \ddot{x}_k \quad (\text{A.13})$$

Sustituyendo la ecuación (A.13) en la ecuación en la ecuación (A.12) y desarrollando los términos se llega a

$$m\Delta\ddot{x} + c(1 - \delta)\ddot{x}_k\Delta t + c\delta\ddot{x}_k\Delta t + c\delta\Delta\ddot{x}\Delta t + k_e\dot{x}_k\Delta t + k_e\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\ddot{x}_k\Delta t^2 + k_e\alpha\ddot{x}_k\Delta t^2 + k_e\alpha\Delta\ddot{x}\Delta t^2 = \Delta F \quad (\text{A.14})$$

Agrupando términos semejantes de la ecuación (A.14):

$$\left[m + c\delta\Delta t + k_e\alpha\Delta t^2\right]\Delta\ddot{x} + c\left[(1 - \delta)\ddot{x}_k\Delta t + \delta\ddot{x}_k\Delta t\right] + k_e\left[\dot{x}_k\Delta t + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\ddot{x}_k\Delta t^2 + \alpha\ddot{x}_k\Delta t^2\right] = \Delta F \quad (\text{A.15})$$

Simplificando la ecuación (A.15):

$$\left[m + c\delta\Delta t + k_e\alpha\Delta t^2\right]\Delta\ddot{x} + c\ddot{x}_k\Delta t + k_e\left[\dot{x}_k\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{x}_k\Delta t^2\right] = \Delta F \quad (\text{A.16})$$

Despejando $\Delta\ddot{x}$ de la ecuación (A.16) se obtiene:

$$\Delta\ddot{x} = \frac{\Delta F - c\ddot{x}_k\Delta t - k_e\left[\dot{x}_k\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{x}_k\Delta t^2\right]}{m + c\delta\Delta t + k_e\alpha\Delta t^2} \quad (\text{A.17})$$

donde

$$\beta = m + c\delta\Delta t + k_e\alpha\Delta t^2 \quad (\text{A.18})$$

Reescribiendo la ecuación (A.17) se llega a

$$\Delta\ddot{x} = \left(\frac{1}{\beta}\right)\Delta F - \left(\frac{k_e\Delta t}{\beta}\right)\dot{x}_k - \left(\frac{c\Delta t + \frac{1}{2}k_e\Delta t^2}{\beta}\right)\ddot{x}_k \quad (\text{A.19})$$

Sustituyendo la ecuación (A.19) en (A.13) se obtiene:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{k+1} &= \ddot{x}_k + \left(\frac{1}{\beta}\right)\Delta F - \left(\frac{k_e\Delta t}{\beta}\right)\dot{x}_k - \left(\frac{c\Delta t + \frac{1}{2}k_e\Delta t^2}{\beta}\right)\ddot{x}_k \\ &= \left(\frac{1}{\beta}\right)\Delta F - \left(\frac{k_e\Delta t}{\beta}\right)\dot{x}_k + \left(\frac{\beta - c\Delta t - \frac{1}{2}k_e\Delta t^2}{\beta}\right)\ddot{x}_k \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Sustituyendo la ecuación (A.20) en la ecuación (A.1) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{k+1} &= \dot{x}_k + (1-\delta)\ddot{x}_k\Delta t + \delta\Delta t \left[\left(\frac{1}{\beta}\right)\Delta F - \left(\frac{k_e\Delta t}{\beta}\right)\dot{x}_k + \left(\frac{\beta - c\Delta t - \frac{1}{2}k_e\Delta t^2}{\beta}\right)\ddot{x}_k \right] \\ &= \left(\frac{\delta\Delta t}{\beta}\right)\Delta F + \left(\frac{\beta - \delta k_e\Delta t^2}{\beta}\right)\dot{x}_k + \left(\frac{\beta\Delta t - c\delta\Delta t^2 - \frac{1}{2}k_e\delta\Delta t^3}{\beta}\right)\ddot{x}_k \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Sustituyendo la ecuación (A.20) en la ecuación (A.2) se obtiene:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \dot{x}_k\Delta t + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\ddot{x}_k\Delta t^2 + \alpha\Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{\beta}\right)\Delta F - \left(\frac{k_e\Delta t}{\beta}\right)\dot{x}_k + \left(\frac{\beta - c\Delta t - \frac{1}{2}k_e\Delta t^2}{\beta}\right)\ddot{x}_k \right] \\ &= \left(\frac{\alpha\Delta t^2}{\beta}\right)\Delta F + x_k + \left(\frac{\beta\Delta t - k_e\alpha\Delta t^3}{\beta}\right)\dot{x}_k + \left(\frac{\frac{1}{2}\beta\Delta t^2 - c\alpha\Delta t^3 - \frac{1}{2}k_e\alpha\Delta t^4}{\beta}\right)\ddot{x}_k \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Teniendo las ecuaciones (A.20), (A.21) y (A.22) se puede expresar de forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} x_{k+1} \\ \dot{x}_{k+1} \\ \ddot{x}_{k+1} \end{Bmatrix} = F_N \begin{Bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ \ddot{x}_k \end{Bmatrix} + H_N \Delta F \quad (\text{A.23})$$

donde

$$F_N = \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} \beta & \beta\Delta t - k_e\alpha\Delta t^3 & \frac{1}{2}\beta\Delta t^2 - c\alpha\Delta t^3 - \frac{1}{2}k_e\alpha\Delta t^4 \\ 0 & \beta - \delta k_e\Delta t^2 & \beta\Delta t - c\delta\Delta t^2 - \frac{1}{2}k_e\delta\Delta t^3 \\ 0 & -k_e\Delta t & \beta - c\Delta t - \frac{1}{2}k_e\Delta t^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

$$H_N = \frac{1}{\beta} \begin{Bmatrix} \alpha\Delta t^2 \\ \delta\Delta t \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

Simplificando la ecuación (A.23) se obtiene:

$$q_{k+1} = F_N q_k + H_N \Delta F \quad (\text{A.26})$$

donde:

$$q_k = \begin{Bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ \ddot{x}_k \end{Bmatrix} \quad (\text{A.27})$$

Para la parte inelástica se considera el cambio de rigidez y el cálculo del coeficiente de amortiguamiento viscoso en cada paso de tiempo.

A.2 Método numérico para MGD L en el intervalo elástico e inelástico.

Las ecuaciones (A.1) y (A.2) cambian de la siguiente forma:

$$\dot{X}_{k+1} = \dot{X}_k + (1 - \delta) \ddot{X}_k \Delta t + \delta \ddot{X}_{k+1} \Delta t \quad (\text{A.28})$$

$$X_{k+1} = X_k + \dot{X}_k \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \ddot{X}_k \Delta t^2 + \alpha \ddot{X}_{k+1} \Delta t^2 \quad (\text{A.29})$$

Considerando la ecuación de movimiento igual a:

$$[M] \ddot{X}(t) + [C] \dot{X}(t) + [K_e] X(t) = F(t) \quad (\text{A.30})$$

donde $[K_e]$ representa la matriz de rigidez elástica. En un tiempo $t = t_k$, la ecuación (A.30) se puede escribir como

$$[M] \ddot{X}_k + [C] \dot{X}_k + [K_e] X_k = F_k \quad (\text{A.31})$$

O también de la siguiente manera ya que se realizan discretizaciones en el tiempo

$$[M] \Delta \ddot{X} + [C] \Delta \dot{X} + [K_e] \Delta X = \Delta F \quad (\text{A.32})$$

donde

$$\Delta \ddot{X} = \ddot{X}_{k+1} - \ddot{X}_k \quad (\text{A.33})$$

$$\Delta \dot{X} = \dot{X}_{k+1} - \dot{X}_k \quad (\text{A.34})$$

$$\Delta X = X_{k+1} - X_k \quad (\text{A.35})$$

$$\Delta F = F_{k+1} - F_k \quad (\text{A.36})$$

De las ecuaciones (A.28) y (A.29) se puede obtener lo siguiente:

$$\Delta\dot{X} = \dot{X}_{k+1} - \dot{X}_k = (1-\delta)\ddot{X}_k\Delta t + \delta\ddot{X}_{k+1}\Delta t \quad (\text{A.37})$$

$$\Delta X = X_{k+1} - X_k = \dot{X}_k\Delta t + \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\ddot{X}_k\Delta t^2 + \alpha\ddot{X}_{k+1}\Delta t^2 \quad (\text{A.38})$$

Sustituyendo las ecuaciones (A.37) y (A.38) en la ecuación (A.32) se obtiene que

$$\begin{aligned} [M]\Delta\ddot{X} + [C]\left[(1-\delta)\ddot{X}_k\Delta t + \delta\ddot{X}_{k+1}\Delta t\right] + \\ + [K_e]\left[\dot{X}_k\Delta t + \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\ddot{X}_k\Delta t^2 + \alpha\ddot{X}_{k+1}\Delta t^2\right] = \Delta F \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

De la ecuación (A.33) se obtiene que

$$\ddot{X}_{k+1} = \Delta\ddot{X} + \ddot{X}_k \quad (\text{A.40})$$

Sustituyendo la ecuación (A.40) en la ecuación en la ecuación (A.39) y desarrollando los términos se llega a

$$\begin{aligned} [M]\Delta\ddot{X} + [C](1-\delta)\ddot{X}_k\Delta t + [C]\delta\ddot{X}_k\Delta t + [C]\delta\Delta\ddot{X}\Delta t + k_e\dot{X}_k\Delta t \\ + [K_e]\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\ddot{X}_k\Delta t^2 + [K_e]\alpha\ddot{X}_k\Delta t^2 + [K_e]\alpha\Delta\ddot{X}\Delta t^2 = \Delta F \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Agrupando términos semejantes de la ecuación (A.41):

$$\begin{aligned} \left\{[M] + [C]\delta\Delta t + [K_e]\alpha\Delta t^2\right\}\Delta\ddot{X} + [C]\left[(1-\delta)\ddot{X}_k\Delta t + \delta\ddot{X}_k\Delta t\right] + \\ + [K_e]\left[\dot{X}_k\Delta t + \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\ddot{X}_k\Delta t^2 + \alpha\ddot{X}_k\Delta t^2\right] = \Delta F \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Simplificando la ecuación (A.42):

$$\left\{[M] + [C]\delta\Delta t + [K_e]\alpha\Delta t^2\right\}\Delta\ddot{X} + [C]\ddot{X}_k\Delta t + [K_e]\left[\dot{X}_k\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{X}_k\Delta t^2\right] = \Delta F \quad (\text{A.43})$$

Despejando $\Delta\ddot{X}$ de la ecuación (A.43) se obtiene:

$$\Delta\ddot{X} = \left\{[M] + [C]\delta\Delta t + [K_e]\alpha\Delta t^2\right\}^{-1} \left\{\Delta F - [C]\ddot{X}_k\Delta t - [K_e]\dot{X}_k\Delta t - \frac{1}{2}[K_e]\ddot{X}_k\Delta t^2\right\} \quad (\text{A.44})$$

donde

$$B = [M] + [C]\delta\Delta t + [K_e]\alpha\Delta t^2 \quad (\text{A.45})$$

Reescribiendo la ecuación (A.44) y agrupando términos se llega a

$$\Delta\ddot{X} = [B]^{-1}\Delta F - \Delta t[B]^{-1}[K_e]\dot{X}_k - \left\{\Delta t[B]^{-1}[C] + \frac{1}{2}\Delta t^2[B]^{-1}[K_e]\right\}\ddot{X}_k \quad (\text{A.46})$$

Sustituyendo la ecuación (A.46) en (A.41) se obtiene:

$$\begin{aligned}\ddot{X}_{k+1} &= \ddot{X}_k + [B]^{-1} \Delta F - \Delta t [B]^{-1} [K_e] \dot{X}_k - \left\{ \Delta t [B]^{-1} [C] + \frac{1}{2} \Delta t^2 [B]^{-1} [K_e] \right\} \ddot{X}_k \\ &= [B]^{-1} \Delta F - \Delta t [B]^{-1} [K_e] \dot{X}_k + \left\{ [I] - \Delta t [B]^{-1} [C] - \frac{1}{2} \Delta t^2 [B]^{-1} [K_e] \right\} \ddot{X}_k\end{aligned}\quad (\text{A.47})$$

Sustituyendo la ecuación (A.47) en la ecuación (A.28) se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{X}_{k+1} &= \dot{X}_k + (1 - \delta) \ddot{X}_k \Delta t + \\ &+ \delta \Delta t \left\{ [B]^{-1} \Delta F - \Delta t [B]^{-1} [K_e] \dot{X}_k + \left\{ [I] - \Delta t [B]^{-1} [C] - \frac{1}{2} \Delta t^2 [B]^{-1} [K_e] \right\} \ddot{X}_k \right\} \\ &= \left\{ \delta \Delta t [B]^{-1} \right\} \Delta F - \left\{ [I] - \delta \Delta t^2 [B]^{-1} [K_e] \right\} \dot{X}_k + \\ &\quad + \left\{ \Delta t [I] - \delta \Delta t^2 [B]^{-1} [C] - \frac{1}{2} \delta \Delta t^3 [B]^{-1} [K_e] \right\} \ddot{X}_k\end{aligned}\quad (\text{A.48})$$

Sustituyendo la ecuación (A.47) en la ecuación (A.29) se obtiene:

$$\begin{aligned}X_{k+1} &= X_k + \dot{X}_k \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \Delta t^2 \ddot{X}_k + \\ &+ \alpha \Delta t^2 \left\{ [B]^{-1} \Delta F - \Delta t [B]^{-1} [K_e] \dot{X}_k + \left\{ [I] - \Delta t [B]^{-1} [C] - \frac{1}{2} \Delta t^2 [B]^{-1} [K_e] \right\} \ddot{X}_k \right\} \\ &= \left\{ \alpha \Delta t^2 [B]^{-1} \right\} \Delta F + X_k + \left\{ \Delta t [I] - \alpha \Delta t^3 [B]^{-1} [K_e] \right\} \dot{X}_k + \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{2} \Delta t^2 [I] - \alpha \Delta t^3 [B]^{-1} [C] - \frac{1}{2} \alpha \Delta t^4 [B]^{-1} [K_e] \right\} \ddot{X}_k\end{aligned}\quad (\text{A.49})$$

Teniendo las ecuaciones (A.47), (A.48) y (A.49) se puede expresar de forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} X_{k+1} \\ \dot{X}_{k+1} \\ \ddot{X}_{k+1} \end{Bmatrix} = F_N \begin{Bmatrix} X_k \\ \dot{X}_k \\ \ddot{X}_k \end{Bmatrix} + H_N \Delta F \quad (\text{A.50})$$

donde

$$F_N = \begin{bmatrix} I & \Delta t [I] - \alpha \Delta t^3 [B]^{-1} [K_e] & \frac{1}{2} \Delta t^2 [I] - \alpha \Delta t^3 [B]^{-1} [C] - \frac{1}{2} \alpha \Delta t^4 [B]^{-1} [K_e] \\ 0 & [I] - \delta \Delta t^2 [B]^{-1} [K_e] & \Delta t [I] - \delta \Delta t^2 [B]^{-1} [C] - \frac{1}{2} \delta \Delta t^3 [B]^{-1} [K_e] \\ 0 & -\Delta t [B]^{-1} [K_e] & [I] - \Delta t [B]^{-1} [C] - \frac{1}{2} \Delta t^2 [B]^{-1} [K_e] \end{bmatrix} \quad (\text{A.51})$$

$$H_N = \begin{Bmatrix} \alpha \Delta t^2 [B]^{-1} \\ \delta \Delta t [B]^{-1} \\ [B]^{-1} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.52})$$

Simplificando la ecuación (A.50) se obtiene:

$$Q_{k+1} = F_N Q_k + H_N \Delta F \quad (\text{A.53})$$

donde:

$$Q_k = \begin{Bmatrix} X_k \\ \dot{X}_k \\ \ddot{X}_k \end{Bmatrix} \quad (\text{A.54})$$

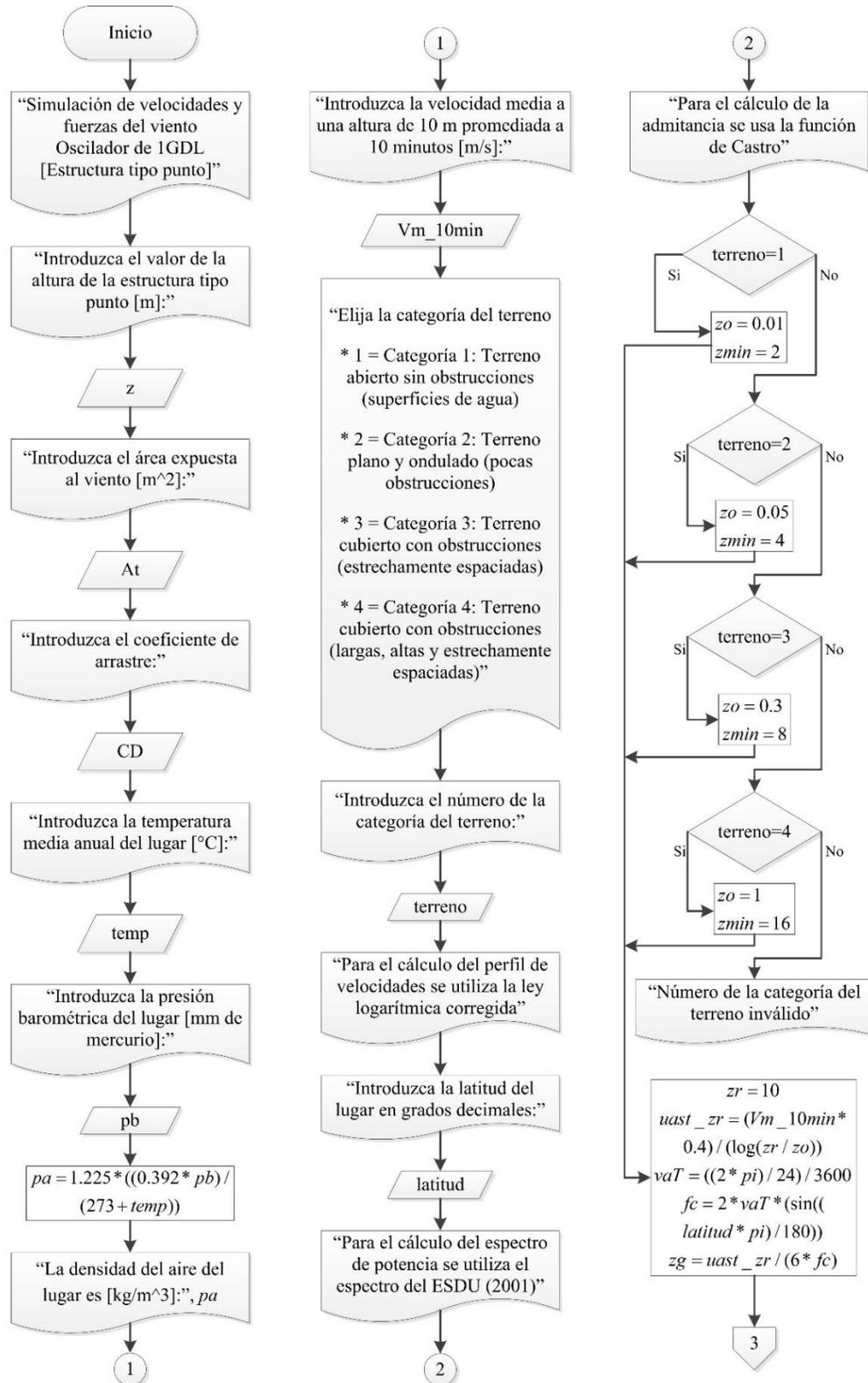
Para la parte inelástica se considera el cambio de rigidez en la matriz de rigidez tomando en cuenta cada grado de libertad. Para el cálculo de la matriz de amortiguamiento viscoso se realiza con el amortiguamiento de Rayleigh para cada paso de tiempo.

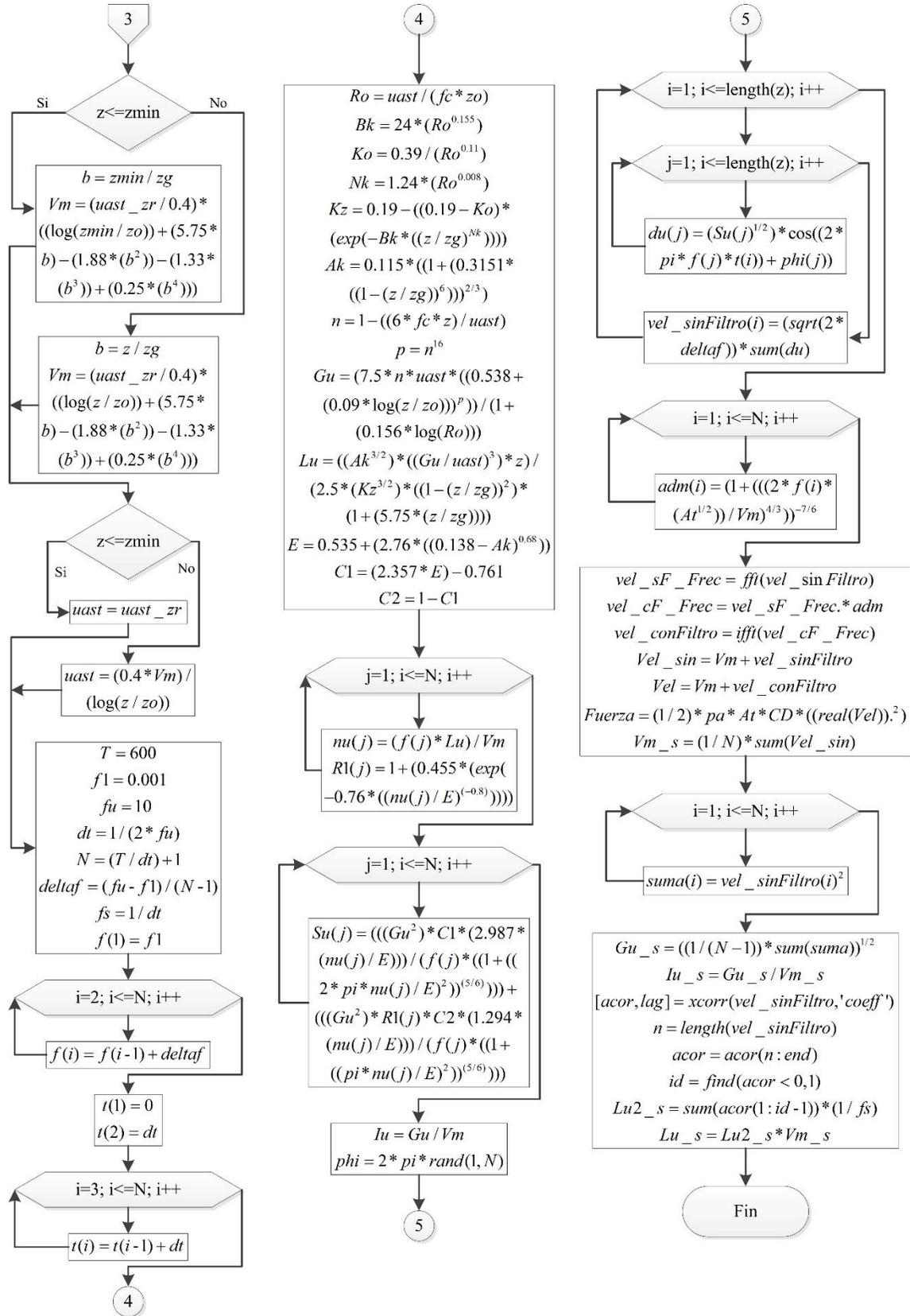
A.3 Notas

- La forma de calcular la fuerza cortante para un oscilador de 1GDL se obtiene realizando el producto de la rigidez por el desplazamiento. La rigidez puede ser constante cuando es elástico y únicamente se tiene un solo valor en todo el análisis, o por el otro lado puede ir variando con respecto al tiempo siendo así un comportamiento inelástico .
- Para un oscilador de MGDG se obtiene realizando el producto de la rigidez de cada grado de libertad por el desplazamiento relativo de ese mismo grado de libertad. Cuando se analiza en el intervalo elástico la rigidez de cada grado de libertad es constante en todo el análisis; para cuando es inelástico la rigidez de cada grado de libertad variará dependiendo el desplazamiento relativo que se tenga y a su vez esa rigidez será la que se tomará para obtener la fuerza cortante de cada grado de libertad o entrepiso.
- La temperatura media anual, la altura de la ciudad sobre el nivel del mar (msnm) y la latitud del lugar de estudio puede ser obtenida del manual de diseño de obras civiles, 2008, de la página 4C. I. 6 a la 4C I. 9.
- La presión barométrica del lugar de estudio se puede obtener en el manual de diseño de obras civiles, 2008, página 4.2 I. 16
- La velocidad regional para el lugar de estudio y para distintos periodos de retorno se puede obtenerse directamente de los mapas que vienen en el manual de diseño de obras civiles, 2008, página 4.2 I. 4 a la 4.2 I. 6 o también de una tabla que se encuentra de la página 4C. I. 1 a la 4C. I. 5.

Apéndice B
Diagramas de flujo de las
simulaciones numéricas

B.1 Diagrama de flujo para un oscilador de 1GDL





B.2 Diagrama de flujo para un oscilador de MGDL

