



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE
LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Estructuras de Poisson en Foliaciones de Bott-Morse en Dimensión Tres

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
MIGUEL ANGEL EVANGELISTA ALVARADO

DIRECTOR:
DR. PABLO SUÁREZ SERRATO
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS-CU
UNAM

CIUDAD DE MÉXICO A 6 DE SEPTIEMBRE DE 2019.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicado a
*Mi compañera de vida **Gabriela.***

Agradecimientos

A mi padre Joaquín Evangelista, del cual siempre he recibido sabios consejos para afrontar la vida, a mi madre Marina Alvarado quién siempre me motivo a seguir adelante con mis estudios de maestría y a no renunciar a mis sueños, ella es mi ejemplo a seguir, y es la persona que más admiro. Los amo.

A mi amada esposa Gabriela Bailón Solano, por ser parte muy importante de mi vida, por brindarme su apoyo en las buenas y en las malas durante esta travesía, pero sobre agradezco su infinito amor y comprensión. Te Amo.

Al Dr. Pablo Suárez Serrato, director del trabajo realizado, por la confianza depositada en mi desde mis estudios de licenciatura, así como la orientación, el seguimiento y la supervisión continúa durante la realización de la maestría y de este trabajo.

A mis sinodales el Dr. Héctor Sánchez quien además fue mi profesor de Geometría Diferencial, el Dr. Misael Avendaño, el Dr. Jose Ruíz y la Dra. Laura Ortíz por la minuciosa revisión y el tiempo dedicado a este trabajo. Así como a sus atinadas observaciones.

A mi hermano Juan Martín y su esposa Rubí por ser parte importante en mi familia y en especial a mis sobrinos Alexis Paul y Cristian Neri que iluminan mis días cuando los veo.

A cada uno de los integrantes de la familia Bailón Solano por haberme aceptado como un miembro más de su familia y mostrarme siempre su apoyo incondicio-

nal.

A todos y cada uno de mis compañeros: Luis, Pedro, Oscar, Jimmy, Gil, Neto y Mario con los cuales pasamos momentos agradables y nos motivavamos cuando la situación estaba un poco difícil o nos íbamos a echar la cascara. Así como a mis hermanos académicos Eduardo y Haydee los cuales me acompañaron durante mi travesía en el Instituto de Matemáticas.

Al apoyo económico que me brindó la beca CONACYT y la beca del PAPIIT de la Universidad Nacional Autónoma de México para la realización del presente trabajo.

Miguel Angel Evangelista Alvarado.

Ciudad Universitaria, CDMX a 19 de noviembre de 2019.

Índice general

Agradecimientos	III
Introducción	VII
1. Foliaciones de Bott-Morse	1
1.1. Foliaciones	1
1.2. Mapeos de Morse	7
1.3. Foliaciones de Bott-Morse	11
2. Geometría de Poisson	19
2.1. Campos Multivectoriales	19
2.2. Variedades de Poisson	24
2.3. Foliación Simpléctica de una Variedad de Poisson	32
3. Estructuras de Poisson en Foliaciones de Bott-Morse en Variedades de Dimensión Tres.	41
3.1. Construcción de Estructuras de Poisson Locales	42
3.2. Estructura de Poisson Global	47
3.3. Estructuras Simplécticas Inducidas	51
A. Códigos en Python	57
A.1. Estructuras de Poisson	57
A.2. La Estructura Simpléctica Inducida	62
A.3. El Corchete de Schouten-Nijenhuis	67

Introducción

El presente trabajo tiene como finalidad construir estructuras de Poisson adaptadas a foliaciones de Bott-Morse de codimensión uno en variedades lisas de dimensión tres. Para lo anterior retomamos ideas y resultados obtenidos por Suárez y Orozco en [SSTO16], Suárez, García y Vera en [GNSSV15], y Scárdua y Seade en [SS09].

El resultado principal de esta tesis es demostrar el siguiente teorema, que se encuentra en la Sección 3.2 del Capítulo 3.

Teorema. *Sea \mathcal{F} una foliación lisa y compacta de codimensión uno con singularidades de Bott-Morse sobre una variedad lisa, conexa, cerrada y orientable M^3 , y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ el mapeo de Bott-Morse que da lugar a \mathcal{F} . Entonces, existe una estructura de Poisson completa en M^3 de rango dos tal que el tensor de Poisson asociado a ésta estructura solo se anula en dos puntos o en dos círculos que corresponden exactamente a la singularidades de la foliación \mathcal{F} .*

Este trabajo se estructura en tres capítulos y un apéndice. El Capítulo 1 explica uno de los pilares de este trabajo de investigación que son las foliaciones de Bott-Morse de codimensión uno, para entender lo anterior describimos las nociones básicas de la teoría de foliaciones singulares en la Sección 1.1 y a la teoría de Morse en la Sección 1.2, para así llegar al concepto de foliaciones de Bott-Morse de codimensión uno en la Sección 1.3, esto basado en los artículos de Scárdua y Seade en [SS09] y [SS11].

El Capítulo 2 muestra puntualmente el segundo y último pilar de este trabajo

de investigación, que es la geometría de Poisson; retomando los conceptos de campos multivectoriales en la Sección 2.1, de variedades de Poisson en la Sección 2.2 y finalmente en la Sección 2.3 demostramos que toda variedad de Poisson tiene asociada una foliación donde las hojas son variedades simplécticas y se enuncia el teorema 2.7 el cual contiene la fórmula de Flashka-Ratiu, que sirve para construir estructuras de Poisson.

El Capítulo 3 tiene como objetivo hacer converger las ideas expresadas en los Capítulos 1 y 2, para así construir las estructuras de Poisson de manera local en una singularidad de la foliación de Bott-Morse. Después extenderemos la estructura de Poisson encontrada en la Sección 3.1 a toda la variedad. Esto lo realizamos en la Sección 3.2 y por último, en la Sección 3.3, explicamos como son las formas simplécticas inducidas por las estructuras de Poisson encontradas en la Sección 3.1.

En el Apéndice A explicamos scripts escritos en lenguaje Python, los cuales utilizamos para realizar cálculo simbólico. Estos cálculos son: la fórmula de Flashka-Ratiu para encontrar estructuras de Poisson en la Sección A.1, un método para encontrar estructuras simplécticas inducidas por la estructuras de Poisson en la Sección A.2 y por último la fórmula para calcular el corchete de Schouten-Nijenhuis en la Sección A.3, de este modo incursionamos en la Geometría de Poisson computacional.

Capítulo 1

Foliaciones de Bott-Morse

Esta investigación inicia con la presentación de un panorama básico a la teoría de foliaciones con singularidades de Bott-Morse. La idea es explicar las nociones básicas de ésta teoría, la cual usaremos en los resultados presentados en el Capítulo 3.

A lo largo de este trabajo de investigación se considera que las variedades diferenciables M son de dimensión m y son de clase C^∞ , solo en caso de ser requerida una adecuación se especificará. Además se considera un **mapeo liso** de clase C^k ó simplemente liso a un mapeo $f : M \rightarrow N$ tal que para todo $p \in M$ se cumple que $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ es de clase C^k en 0, donde (V_p, ψ) es una carta de M y $(V_{f(p)}, \phi)$ es una carta de N con $f(p) = 0$. Si f es liso escribimos $f \in C^k(M, N)$ y cuando $N = \mathbb{R}$, denotamos $C^k(M, N)$ por $C^k(M)$.

1.1. Foliosaciones

Iniciamos la sección con un breve repaso a la teoría de foliaciones. Para realizar un estudio detallado de esta teoría recomendamos al lector dirigirse a los siguientes textos [CN85] o [Mol88].

Para explicar de manera intuitiva el concepto de foliación, hay que recordar que al integrar un campo vectorial no singular sobre una variedad M , obtenemos una partición de la variedad M mediante integrales del campo, que son varie-

dades diferenciables de dimensión uno. A esta partición la llamaremos foliación de M de dimensión uno y a las órbitas del flujo del campo como hojas de la foliación.

La forma natural de generalizar lo anterior a dimensiones superiores, es considerar la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales sobre una variedad bajo una condición de integrabilidad, es decir, el teorema de Frobenius.

A continuación enunciamos la definición de foliación.

Definición 1.1 *Sea M^m una variedad, decimos que una **foliación** en M^m de dimensión n es un atlas \mathcal{F} en M que cumple con las siguientes propiedades:*

1. *Si $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$, entonces $\varphi : U \rightarrow \bar{U}_1 \times \bar{U}_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, donde $\bar{U}_1 \subset \mathbb{R}^n$ y $\bar{U}_2 \subset \mathbb{R}^{m-n}$ son discos abiertos.*
2. *Si (U_1, φ_1) y $(U_2, \varphi_2) \in \mathcal{F}$ tal que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, entonces la función de transición $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$, es de la forma $(f_1(x, y), f_2(y))$ para $(x, y) \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ y algunas funciones lisas $f_1 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $f_2 : \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$.*

Para poder tener clara la definición 1.1 siempre podemos pensar en la figura 1.1, que es una variedad de dimensión dos foliada por una variedad de dimensión uno.

A las cartas $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ las llamamos **cartas foliadas** y el número $m - n$ se conoce como codimensión de la foliación.

Considere una foliación \mathcal{F} en M^m de dimensión n tal que $n < m$. Si seleccionamos un carta foliada $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ y fijamos un $c \in \bar{U}_2$, podemos considerar lo siguiente:

- el conjunto $\varphi^{-1}(\bar{U}_1 \times \{c\})$ es llamado **placas** de U o de \mathcal{F} esto depende del contexto, y
- el mapeo $\varphi|_{\bar{U}_1 \times \{c\}} : \bar{U}_1 \times \{c\} \rightarrow U$ resulta ser un encaje, así las placas son subvariedades conexas de M^m con dimensión n .

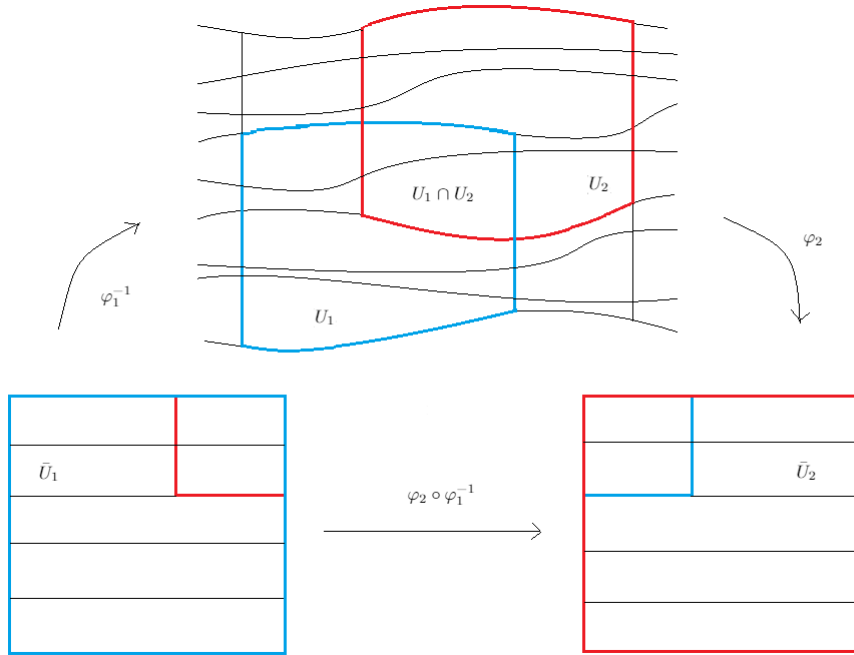


Figura 1.1: Una 2-variedad foliada por una 1-variedad.

Observar que para $c \in \bar{U}_2$ se obtienen placas de U ajenas, para esto considere c_1 y $c_2 \in \bar{U}_2$ tal que $c_1 \neq c_2$ y sus respectivas placas $\alpha = \varphi^{-1}(\bar{U}_1 \times \{c_1\})$ y $\beta = \varphi^{-1}(\bar{U}_1 \times \{c_2\})$. Ahora supongamos que $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, entonces:

$$\begin{aligned} (\alpha \cap \beta) &= \bar{U}_1 \times \{c_1\} \text{ pues } \alpha \cap \beta \subset \alpha \\ &= \bar{U}_1 \times \{c_2\} \text{ pues } \alpha \cap \beta \subset \beta, \end{aligned}$$

pero $(\bar{U}_1 \times \{c_1\}) \neq (\bar{U}_1 \times \{c_2\})$, por lo tanto $\alpha \cap \beta = \emptyset$.

Un **camino de placas** de \mathcal{F} es un sucesión $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ de placas de \mathcal{F} tal que $\alpha_i \cap \alpha_{i+1} \neq \emptyset$ para $i \in \{1, \dots, k-1\}$.

Dado que es posible cubrir a M^m por placas de \mathcal{F} , definimos la siguiente relación de equivalencia: Para $p, q \in M^m$ decimos que $p \sim q$ si y sólo si existe un camino de placas $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ tal que $p \in \alpha_1$ y $q \in \alpha_k$. A la clases de equivalencia la llamamos **hojas** de \mathcal{F} y al conjunto M/\sim el **espacio de hojas**.

Se tiene por definición que las hojas de \mathcal{F} son un subconjunto conexo por tra-

vectorias y que por cada punto $p \in M^m$ pasa una y sólo una hoja de \mathcal{F} . Además una propiedad de las hojas de \mathcal{F} no tan inmediata de su definición, es que estas son variedades diferenciables de dimensión n y de clase r , cuya estructura diferenciable la heredan de \mathcal{F} . La prueba de lo anterior se puede consultar en [Página 32, [CN85]].

Decimos que una **foliación \mathcal{F} es compacta** si cada hoja $L \in \mathcal{F}$ es compacta y de manera similar decimos que una **foliación \mathcal{F} es cerrada** si cada hoja $L \in \mathcal{F}$ es cerrada.

Con todo lo anterior, se tiene que una foliación es una descomposición de una variedad lisa en subvariedades de la misma dimensión, es decir una foliación regular. Ahora, ¿Qué ocurre cuando tenemos una descomposición de M en subvariedades pero la dimensión estas varían? Para explicar lo anterior debemos extender el concepto de foliación regular a singular.

Una **foliación lisa \mathcal{F} singular** en una variedad lisa M^m es una partición

$$\mathcal{F} = \bigcup_{p \in M} L_p$$

donde se cumple que $L_p \cap L_q = \emptyset$ si $p \neq q$ y cada L_p es una subvariedad lisa, encajada y conexa de M^m . A cada L_p lo llamamos **hoja** de M^m .

Además se cumple la siguiente propiedad: Para cada $p \in M$ existe una carta $(U_p, (y_1, \dots, y_m))$ tal que para la hoja L_p la componente conexa de $L_p \cap U_p$ esta descrita por las ecuaciones $y_{d+1} = c_{d+1}, \dots, y_m = c_m$ donde c_{d+1}, \dots, c_m son constantes. La propiedad anterior es conocida como **la propiedad de la foliación local**.

Si todas las hojas L_p de un foliación singular \mathcal{F} tienen la misma dimensión entonces decimos que \mathcal{F} es una **foliación regular**.

Una **distribución singular** en una variedad lisa M^m es una asignación tal que a cada punto $p \in M^m$ le asocia un subespacio vectorial $D_p \subset T_p M$. Notemos

que la dimensión de D_p puede depender del punto p .

Una distribución singular D en una variedad lisa M^m es llamada lisa si para cada punto $p \in M$ y cualquier vector $X_0 \in D$ existe un campo vectorial X liso definido en una vecindad U_p de p tal que $X(y) \in D_y$ para toda $y \in U_p$ y $X(p) = X_0$.

Si la dimensión de la distribución en p no depende del punto p , entonces se tiene que la distribución es una distribución regular lisa.

Ahora, de la propiedad de la foliación local se puede deducir que la distribución tangente $D^{\mathcal{F}}$ de una foliación singular es una distribución singular lisa [Página 17,[DZ05]], donde la distribución tangente $D^{\mathcal{F}}$ es la que asocia a cada punto $p \in M$ su espacio tangente $D_p^{\mathcal{F}}$ a la hoja L_p en el punto p . Es decir, cada foliación singular define una distribución singular. Es decir, cada foliación singular define una distribución singular.

Sea D una distribución singular y lisa en la variedad lisa M . Una **subvariedad integrable** W de D es una subvariedad encajada de M tal que para cada $w \in W$ el espacio tangente $T_w W \subset D_w$ es un subespacio vectorial.

Una subvariedad integrable W es llamada **maximal**, si no está contenida en ninguna otra subvariedad integrable; decimos que una subvariedad integrable es de **dimensión máxima** si su espacio tangente en cada punto $w \in W$ es exactamente D_w .

Decimos que una distribución lisa y singular D en una variedad lisa M es una **distribución integrable**, si cada punto $p \in M$ está contenido en una subvariedad integrable maximal de dimensión máxima en D .

Sea C una familia de campos vectoriales lisos definidos en M . Definimos una distribución singular suave \hat{D} tal que a cada punto $p \in M$ le asigna el espacio \hat{D}_p , donde \hat{D}_p es el espacio vectorial generado por los valores del punto p de los campos vectoriales de C .

Sea D una distribución, decimos que D es **invariante** con respecto a la familia de campos vectoriales C , si es invariante con respecto a cada elemento de C .

Dados todos los conceptos anteriores, surge de manera natural la siguiente pregunta: ¿Cuáles son las condiciones para que una distribución singular lisa sea la distribución tangente de una foliación singular?

La respuesta a la pregunta anterior se encuentran en los resultados del trabajo de Stefan [Ste74] y Sussmann [Sus73], expresados en el siguiente teorema, cuya demostración podemos encontrar en [Página 17, [DZ05]].

Teorema 1.1 *Sea D un distribución lisa y singular en un variedad lisa M^m . Entonces son equivalentes las siguientes condiciones:*

- i) D es integrable.
- ii) D es generado por un familia de campos vectoriales lisos y es invariante con respecto a dicha familia.
- iii) D es la distribución tangente $D^{\mathcal{F}}$ de una foliación singular y lisa \mathcal{F} .

Una **distribución involutiva** es una distribución D tal que si X e Y son dos campos vectoriales lisos que son tangentes a D , entonces el corchete de Lie $[X, Y]$ es tangente a D también. Es claro del teorema 1.1 que si una distribución singular es integrable, entonces es involutiva.

Hay que notar que el teorema 1.1 es un generalización del teorema de Frobenius para una distribución regular D .

Teorema 1.2 *Si una distribución regular lisa es involutiva, entonces es integrable, es decir, la distribución es la tangente distribución de una foliación regular.*

El teorema de Frobenius es resultado clásico en la literatura sobre foliaciones regulares. La prueba se puede consultar en [Página 182, [CN85]] y mientras que la de integrabilidad de foliaciones singulares se puede encontrar la página 18 de [DZ05], es decir, podemos concluir que el teorema de Frobenius es un caso particular del teorema de Stefan-Sussmann 1.1.

1.2. Mapeos de Morse

La teoría de Morse a grandes rasgos estudia la topología de las variedades diferenciables a partir de los mapeos de Morse que se pueden definir sobre ellas, para un estudio a detalle sugerimos consultar [Mil63] y [Mat02].

La teoría de Morse ha tenido una gran cantidad de aplicaciones, entre las cuales se pueden destacar la clasificación de las superficies compactas [Xu13] y el teorema del h-cobordismo [Mil15], sólo por mencionar algunas.

Comenzamos tomando una variedad diferenciable M^m y $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ un mapeo liso, decimos que un punto $p \in M^m$ es un **punto crítico** de f si la diferencial de f en p es nula. En caso contrario decimos que p es un **punto regular**.

Notemos que si tomamos una carta (U, x) alrededor de p y p es un punto crítico de f , entonces se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0.$$

El número real $f(p)$ donde p es un punto crítico lo llamamos **valor crítico**.

La restricción que le imponemos a un mapeo liso para que éste sea de Morse hará que los mapeos tengan un comportamiento muy simple en sus puntos críticos, para esto introduciremos la noción de *segunda derivada* del mapeo f en el punto $p \in M^m$.

Sean $p \in M$ y $v_p, w_p \in T_p M$. Elijamos X e Y campo vectoriales en M^m tales que $X(p) = v_p$ e $Y(p) = w_p$. Si p es un punto crítico de f entonces es claro que $v_p(Y(f)) = w_p(X(f))$, ya que

$$\begin{aligned} v_p(Y(f)) - w_p(X(f)) &= X(p)(Y(f)) - Y(p)(X(f)) \\ &= [X, Y](p)(f) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Así, podemos definir una forma bilineal $Hess_p(f)$ en $T_p M$ llamada el hessiano de f en el punto p , mediante la fórmula

$$Hess_p(f)(v_p, w_p) = v_p(Y(f)).$$

Tomando una carta (U, x) alrededor de p se puede ver que la matriz de la forma bilineal $Hess_p(f)$ en la base $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_p\}$ es la matriz

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{ij}.$$

Decimos que un punto crítico $p \in M^m$ es **no degenerado** si el hessiano de f en el punto p es una forma bilineal no degenerada, es decir que el determinante de la matriz $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{ij}$ sea distinto a 0.

El índice de f en el punto p se define como la dimensión de cualquier subespacio maximal contenido en $T_p M$ con la propiedad de que el hessiano sea definido negativo en ese subespacio.

Definición 1.2 Sea $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ un mapeo liso, diremos que f es un **mapeo de Morse** si todos sus puntos críticos son no degenerados.

Para dejar en claro la definición 1.2 observemos el siguiente ejemplo clásico.

Ejemplo 1.1 Consideramos un toro \mathbb{T} encajado en \mathbb{R}^3 y parametrizado mediante el mapeo $X : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado como

$$X(\theta, \phi) = (\text{sen}(\phi), (r + \cos(\theta))\cos(\phi), (r + \cos(\theta))\text{sen}(\phi)),$$

donde $K = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

Ahora definimos un mapeo **altura** mediante la proyección sobre el eje z , es decir, consideramos el mapeo $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ dado como

$$f(\theta, \phi) = (r + \cos(\theta))\text{sen}(\phi) \tag{1.1}$$

Para fijar ideas de cómo es el mapeo altura que acabamos de definir podemos mirar la figura 1.2.

Calculemos los valores críticos de f , para esto calculemos el gradiente de f .

$$\nabla f_{(\theta, \phi)} = \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) |_{(\theta, \phi)} = (-\text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi), (r + \cos(\theta))\cos(\phi))$$

Es fácil observar que $\nabla f = (0, 0)$ si y sólo si $\phi \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ y $\theta \in \{0, \pi\}$, es decir, tenemos los puntos críticos $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, $(\frac{3\pi}{2}, \pi)$ y $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ para el mapeo f .

Notemos que el hessiano del mapeo f es:

$$\text{Hess}(f) = \begin{bmatrix} -\text{sen}(\phi)\cos(\theta) & -\text{sen}(\theta)\cos(\phi) \\ -\text{sen}(\theta)\cos(\phi) & -(r + \cos(\theta))\sin(\phi) \end{bmatrix}$$

Basta realizar un simple cálculo para notar que $\det(\text{Hess}(f)) \neq 0$ en los puntos críticos $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, $(\frac{3\pi}{2}, \pi)$ y $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ del mapeo f , por lo que podemos concluir que f es un mapeo de Morse.

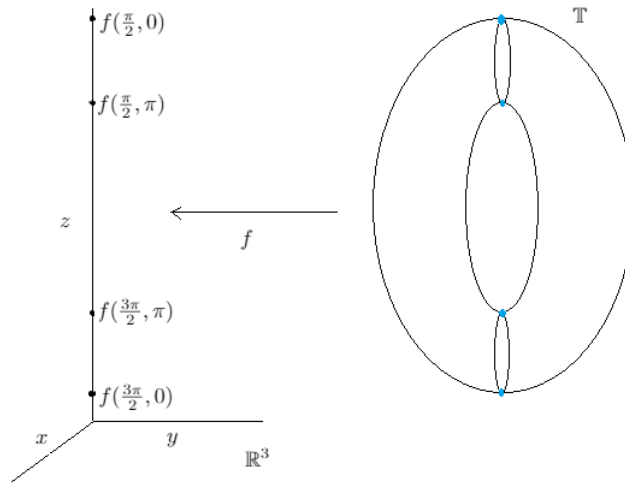


Figura 1.2: Mapeo altura f del \mathbb{T} y sus valores críticos.

El siguiente resultado nos muestra que en el caso no degenerado, el mapeo f tiene un comportamiento sencillo en un entorno del punto crítico $p \in M^m$. Más aún, muestra como el índice del punto p determina por completo este comportamiento.

Lema 1.1 (Morse) *Sea $p \in M^m$ un punto crítico no degenerado de índice k , entonces existe una carta (U, x) alrededor del punto p con $x(p) = 0$ y tal que*

$$f = f(p) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2 \quad (1.2)$$

en todo U y a k lo llamamos el **índice de Morse** de f en el punto p .

La prueba del lemma 1.1 [Morse] puede encontrarse en la página 6 de [Mat02]. A partir del lema 1.1 se pueden obtener el siguiente corolario.

Corolario 1.1 *Sea $p \in M^m$ un punto crítico no degenerado de índice k , entonces*

- *p es un mínimo si y sólo si $k = 0$, y*
- *p es un máximo si y sólo si $k = m$*

Demostración.

Al ser $p \in M^m$ un punto crítico no degenerado, entonces aplicando el lema de Morse se tiene que en un vecindad de p el mapeo $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ es de la forma 1.2 y aplicando cálculo vectorial no es difícil deducir que p es máximo cuando $k = m$, es decir, el índice de Morse es igual a la dimensión de la variedad M^m y que p es mínimo cuando $k = 0$ □.

Con todo lo anterior, del ejemplo 1.1 podemos obtener la siguiente información de sus puntos críticos, que se detallan en el cuadro 1.1.

Punto Crítico	Expresión local de f	Índice de Morse	Máximo	Mínimo
$(\frac{\pi}{2}, 0)$	$c - \theta^2 - \phi^2$	2	Si	No
$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$c + \theta^2 - \phi^2$	1	No	No
$(\frac{3\pi}{2}, \pi)$	$c + \theta^2 - \phi^2$	1	No	No
$(\frac{3\pi}{2}, 0)$	$c + \theta^2 + \phi^2$	0	No	Si

Cuadro 1.1: Información de los puntos críticos del ejemplo 1.1.

Proposición 1.1 *Sea $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ un mapeo liso con M^m una variedad lisa, entonces los puntos críticos no degenerados de f son asilados en el conjunto de los puntos críticos.*

Demostración.

Tomemos un punto crítico $p \in M$ de f y (U, x) una carta alrededor de p . Consideramos el mapeo $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ dado como $g(p) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}|_p, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}|_p)$. Notemos que $g(p) = 0$ si y sólo si p es un punto crítico de f . Ahora bien la matriz Jacobiana de g es $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]$ que es no singular en el punto p , es decir invertible,

entonces por el teorema de función inversa g es inyectiva en un vecindad de p contenida en U y como $g(p) = 0$, entonces p es el único punto crítico de f en dicha vecindad.

De la proposición 1.1 se sigue inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 1.2 *Si $p \in M^m$ es un punto crítico no degenerado de f , entonces existe un entorno de p en el cual no hay otro punto crítico de f .*

Ahora si agregamos la hipótesis de que M^m es una variedad compacta a la proposición 1.1, entonces se tiene que los puntos críticos de $f : M^M \rightarrow \mathbb{R}$ son finitos [Página 47, [Mat02]]. Sin embargo en general, no es cierto que los puntos críticos de un mapeo liso sean aislados, como podemos notar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2 *Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $f(x, y) = x^2$, entonces todos los puntos del eje y son puntos críticos degenerados y forman una subvariedad de \mathbb{R}^2 .*

Para este tipo de mapeos, donde tenemos variedades singulares es posible estudiarlos mediante la teoría de Bott-Morse, que explicamos en la sección 1.3

1.3. Foliaciones de Bott-Morse

Esta sección está inspirada en los trabajos [SS09] y [SS11] realizados por Seade y Scárdua. La idea de la sección es generalizar el concepto de mapeo de Morse.

Notemos que las singularidades de los mapeos de Morse son puntos, que pueden considerarse como variedades diferenciales de dimensión cero. Ahora nos interesa trabajar en el caso cuando las funciones tienen singularidades y éstas son variedades diferenciables de dimensión mayor o igual a cero. Para esto necesitamos una nueva idea de cómo entender que un mapeo $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ sea no degenerado.

Sea $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ un mapeo liso tal que sus puntos críticos son subvariedades ajenas de M^m . Decimos que el mapeo f es **no degenerado en el sentido**

de Bott, si para cada p en la subvariedad singular existe un disco pequeño D_p transversal a la subvariedad singular y de dimensión complementaria, tenemos que $f|_{D_p}$ es un punto crítico no degenerado. Este concepto fue introducido en 1954 por R. Bott en [Bot54].

Dado $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ un mapeo liso, denotamos al conjunto de puntos críticos de f por $\text{Sing}(f)$.

Definición 1.3 (Bott-Morse) Sea M^m una variedad lisa, decimos que el mapeo liso $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ es de Bott-Morse, si

$$\text{Sing}(f) = \bigcup_{j=1}^t N_j,$$

donde N_j es una subvariedad cerrada de M , $N_j \cap N_i = \emptyset$ si $j \neq i$ y el mapeo f es no degenerado.

Ejemplo 1.3 Consideramos un toro \mathbf{T} encajado en \mathbb{R}^3 y parametrizado mediante el mapeo $X : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado como

$$X(\theta, \phi) = (\text{sen}(\phi), (r + \cos(\theta))\cos(\phi), (r + \cos(\theta))\text{sen}(\phi)),$$

donde $K = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

Ahora, consideramos el mapeo *altura* mediante la proyección sobre el eje x , es decir, consideramos el mapeo $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ dado como

$$f(\theta, \phi) = \text{sen}(\theta) \tag{1.3}$$

Calculemos los valores críticos de f , para esto calculemos el gradiente de f .

$$\nabla f_{(\theta, \phi)} = \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) |_{(\theta, \phi)} = \left(\frac{\partial \text{sen}(\theta)}{\partial \theta}, \frac{\partial \text{sen}(\theta)}{\partial \phi} \right) |_{(\theta, \phi)} = (\cos(\theta), 0)$$

Es fácil observar que $\nabla f = (0, 0)$ si y sólo si $\theta \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$, es decir, tenemos los puntos críticos $(\frac{\pi}{2}, \phi)$ y $(\frac{3\pi}{2}, \phi)$ para el mapeo f .

Notemos que el hessiano del mapeo f es:

$$\text{Hess}(f) = \begin{bmatrix} -\text{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Al calcular el hessiano de f en los puntos $(\frac{\pi}{2}, \phi)$ y $(\frac{3\pi}{2}, \phi)$, notamos que $\det(\text{Hess}(f)) = 0$, es decir son degenerados en el sentido de Morse, sin embargo hay que notar también que al evaluar dichos puntos en el mapeo X :

- $X((\frac{\pi}{2}, \phi)) = (1, r\cos(\phi), r\sin(\phi))$,
- $X((\frac{3\pi}{2}, \phi)) = (-1, r\cos(\phi), r\sin(\phi))$,

obtenemos que estos son círculos singulares ajenos contenidos en \mathbb{T} , para esto observemos la figura 1.3 que muestra uno de los círculos singulares encontrados, así tenemos que $\text{Sing}(f)$ son dos círculos ajenos y no es difícil notar que f es no degenerada, así podemos concluir que f es de Bott-Morse.

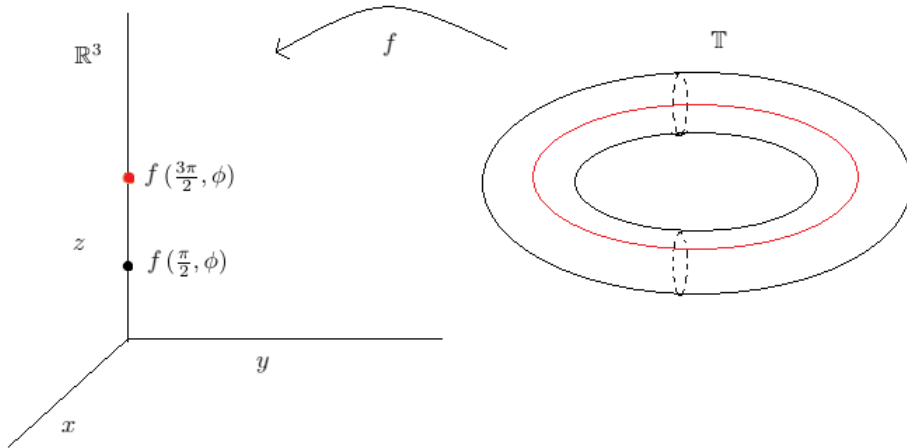


Figura 1.3: Círculo singular del mapeo f y sus valores críticos.

Análogamente a lo que ocurre con los mapeos de Morse, se tiene que los mapeos de Bott-Morse muestran un comportamiento sencillo en un entorno del punto p en la variedad crítica y muestra también como el índice del punto p determina por completo este comportamiento.

Lema 1.2 (Bott-Morse) Sea $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ un mapeo de Bott-Morse, N^n una subvariedad singular conexa y $p \in N^n$. Entonces existe una carta (U, ϕ) de M alrededor del punto p con $\phi(p) = 0$ y tal que

- $\phi(U \cap N) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \mid y = 0\}$ y

$$\blacksquare f \circ \phi^{-1}(x, y) = f(p) - y_1^2 - \dots - y_k^2 + y_{k+1}^2 + \dots + y_{m-n}^2$$

donde $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ y $k \leq m - n$ es el índice de f en p .

La demostración puede ser consultada en el artículo [BH04] de Banyaga y Hurtubise.

El concepto de Bott-Morse se puede extender a una foliación \mathcal{F} con singularidades, para esto denotemos como $\text{Sing}(\mathcal{F})$ al conjunto singular de \mathcal{F} y consideremos desde ahora hasta el final de esta sección a \mathcal{F} una foliación lisa en M^m con singularidades de codimensión uno y con $2 \leq m$.

Las singularidades de \mathcal{F} son **singularidades de Bott-Morse** sí

$$\text{Sing}(\mathcal{F}) = \bigcup_{j=1}^t N_j,$$

donde:

- N_j es una subvariedad cerrada y conexa de M ,
- $N_j \cap N_i = \emptyset$ si $j \neq i$,
- $\text{Codim}(N_j) \geq 2$,
- Para cada $p \in N_j$ existe un abierto $V_p \subset M$, donde \mathcal{F} es definida por un mapeo de Bott-Morse.

Se tiene que en una singularidad de Bott-Morse $N_j^{n_j}$ existe un difeomorfismo $\varphi : V_p \rightarrow P \times D$ donde $P \in \mathbb{R}^{n_j}$ y $D \in \mathbb{R}^{m-n_j}$ y una foliación \mathcal{G} en D cuyas fibras están dadas por un mapeo de Morse. Así φ toma la foliación $\mathcal{F}|_{V_p}$ y la envía a la foliación producto $P \times \mathcal{G}$.

En otras palabras tenemos lo siguiente:

- $\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap V_p = N_j^{n_j} \cap V_p$.
- $\varphi(N_j \cap V) = P \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n_j} \times \mathbb{R}^{m-n_j}$.
- Existen coordenadas locales

$$(x, y) = (x_1, \dots, x_{n_j}, y_1, \dots, y_{m-n_j})$$

en V_p tal que $N_j \cap V_p$ esta dado por $\{y_1, \dots, y_{m-n_j} = 0\}$ y además $\mathcal{F}|_{V_p}$ esta dado por los niveles del mapeo $J_{N_j}(\bar{x}, x) = \sum_{j=1}^{m-n_j} \lambda_j x_j^2$, donde $\lambda = \pm 1$.

Notemos que los dos últimos puntos son consecuencias de lema 1.2 de Bott-Morse, además el disco $\Sigma_p = \varphi^{-1}(x(p) \times D)$ es transversal a N_j y es transversal a \mathcal{F} fuera de N_j . La restricción de \mathcal{F} en Σ_p es una singularidad de Morse y el índice de Morse es independiente del punto p en la componente N_j y de la elección del disco transversal Σ_p .

Nos referimos a $\mathcal{G}(N_j) = \mathcal{F}|_{\Sigma_p}$ como el tipo transversal de \mathcal{F} a lo largo de N_j , la cual es una foliación de codimensión uno en Σ_p con una singularidad de Morse en $\{p\} = N_j \cap \Sigma_p$, a partir de esto es posible distinguir los siguientes tipos de variedades singulares N_j .

Definición 1.4 Una componente $N_j \subset \text{Sing}(\mathcal{F})$ es:

1. **Centro** si el tipo transversal de \mathcal{F} a lo largo de N_j es un centro, es decir, el índice de Morse de $f|_{\Sigma_p}$ es 0 o $m - n_j$.
2. **Silla** si el tipo transversal de \mathcal{F} a lo largo de N_j es una silla, es decir, el índice de Morse de $f|_{\Sigma_p}$ es diferente de 0 o $m - n_j$.

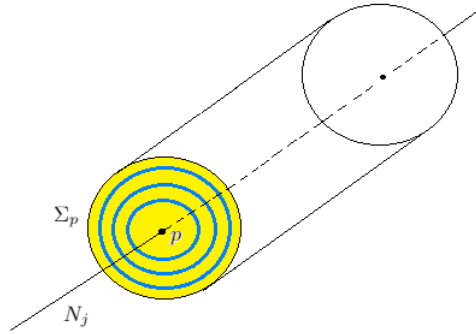
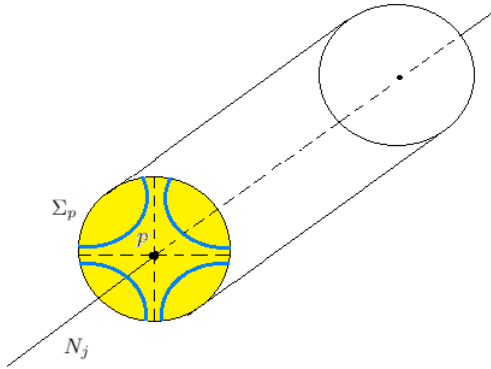
Por el lema de Bott-Morse en una vecindad de una componente N_j es centro las hojas de \mathcal{F} en el disco transversal Σ_p son difeomorfas a $S^{(m-(n_j+1))}$, para esto hay que recordar que $\dim(N_j) = n_j$. Para entender mejor lo anterior podemos observar la siguiente figura 1.4, cuando N_j es un variedad singular de dimensión uno y Σ_p es de dimensión dos.

De manera análoga, en una vecindad de la componente N_j silla, se tiene que las hojas de \mathcal{F} en el disco transversal Σ_p estan dadas de forma local por las expresiones

$$y_1^2 + \dots + y_r^2 = y_{r+1}^2 + \dots + y_{n_j}^2,$$

donde r es el índice de Morse de $f|_{\Sigma_p}$ y a dichas hojas las llamamos **separatrices** de \mathcal{F} , de igual manera observemos la figura 1.5 para el caso cuando N_j es un variedad singular de dimensión uno y Σ_p es una variedad de dimensión dos.

Dada una componente N_j que es silla, decimos que una **separatriz** de N_j es una hoja L tal que su cerradura \bar{L} contiene a N_j .

Figura 1.4: N_j tipo centro.Figura 1.5: N_j tipo silla.

Denotemos por $\text{Sil}(\mathcal{F})$ a la unión de N_j que son sillas contenidos en $\text{Sing}(\mathcal{F})$. Decimos que \mathcal{F} tiene **silla conectadas**, si existen componentes $N_1, N_2 \in \text{Sil}(\mathcal{F})$ tal que $N_1 \neq N_2$ y una hoja L de \mathcal{F} que es simultáneamente una separatrix de N_1 y N_2 .

Decimos que la foliación \mathcal{F} es **orientable**, si existe una forma diferenciable $\omega \in \Omega^{m-1}(M^m)$ tal que ω es no singular en $(M - \text{Sing}(\mathcal{F}))$ y $\omega|_L$ es una forma de volumen en cada hoja $L \in \mathcal{F}$. La elección de la forma ω es llamada **una orientación para \mathcal{F}** .

También tenemos que la foliación \mathcal{F} es **transversalmente orientable**, si existe un campo vectorial $X \in \mathcal{X}(M)$ tal que X es transversal a \mathcal{F} en cada punto fuera de $\text{Sing}(\mathcal{F})$. Notemos que el campo X puede tener singularidades en $\text{Sing}(\mathcal{F})$.

De lo anterior, es posible obtener una definición que extiende el concepto de singularidad de Bott-Morse a foliaciones singulares.

Definición 1.5 Decimos que una foliación \mathcal{F} lisa sobre M^m de codimensión uno es una **foliación de Bott-Morse** si:

1. $\text{Sing}(\mathcal{F})$ son singularidades de Bott-Morse.
2. \mathcal{F} es transversalmente orientable.
3. \mathcal{F} no tiene sillitas conectadas en M^m .

Los primeros ejemplos de foliaciones con singularidades de Bott-Morse son los dados por mapeos de Bott-Morse y por productos de foliaciones de Morse definidos sobre variedades cerradas. En la sección 2.3 donde se introduce el concepto de foliación característica se presentará un ejemplo de foliación de Bott-Morse.

Para el caso cuando la variedad M es de dimensión tres, que el caso que utilizaremos en este trabajo de investigación, se obtienen las siguientes posibilidades para la dimensión de la variedad singular N_j y cuando ésta es centro o silla, las distintas posibilidades se encuentran detalladas en el cuadro 1.2.

		Tipo	Índice de Morse	Modelo Local en Σ_p
		dim(M) = 3	dim(N_j) = 0	Centro
tres	$-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$			
Silla	uno		$-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$	
	dos		$-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$	
dim(N_j) = 1	Centro	cero	$x_1^2 + x_2^2$	
		dos	$-x_1^2 - x_2^2$	
	Silla	uno	$-x_1^2 + x_2^2$	

Cuadro 1.2: Posibles casos para N_j cuando $\dim(M) = 3$

Así mismo cuando la dimensión de la variedad M es tres, tenemos el siguiente resultado de Seade y Scárdura [SS09].

Teorema 1.3 Sea M^3 una variedad lisa, orientada, cerrada y conexa equipada

con una foliación compacta de Bott-Morse, entonces

$$\text{Sing}(\mathcal{F}) = \begin{cases} \{p_1, p_2\} & \circ \\ \{c_1, c_2\} & , \end{cases}$$

donde p_1, p_2 son puntos y c_1, c_2 son círculos.

La prueba del resultado anterior se puede encontrar en la página 209 de [SS09].

Capítulo 2

Geometría de Poisson

Este capítulo explica la teoría de la geometría de Poisson lo más breve posible pero sin olvidar los aspectos más importantes de ella. Para esta investigación tenemos como objetivo saber que es la foliación característica mediante hojas simplécticas inducida por una estructura de Poisson y enunciar el teorema 2.7 para poder construir estructuras de Poisson.

Para un estudio más profundo sobre la Geometría de Poisson remitimos al lector consultar la siguiente literatura [DZ05] y [LGPV13].

2.1. Campos Multivectoriales

Sea M^m una variedad lisa y q un entero positivo. Denotaremos por $\Lambda^q TM$ el espacio tangente de q -vectores de M . Se tiene que $\Lambda^q TM$ es un haz vectorial sobre M , cuyas fibras sobre cada punto $p \in M$ es el espacio $\Lambda^q T_p M$, que es el producto antisimétrico exterior de q copias del espacio tangente $T_p M$.

Tomemos un sistema local de coordenadas $(U, (x_1, \dots, x_m))$ alrededor del punto $p \in M$. Como $\Lambda^q T_p M$ es un espacio vectorial, entonces admite una base de la forma $\{\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_q}}(p) | i_1 < \dots < i_q\}$. Es posible definir un **q -campo vectorial** Π en M como una sección lisa del haz $\Lambda^q TM$, es decir, el mapeo $\Pi : M \rightarrow \Lambda^q TM$ asocia a cada punto $p \in M$ con un q -vector $\Pi(p) \in \Lambda^q T_p M$ de forma lisa.

Si $(U, (x_1, \dots, x_m))$ son coordenadas locales para M , entonces el q -vector Π tiene la siguiente expresión local:

$$\Pi = \sum_{i_1 < \dots < i_q} \Pi_{i_1 \dots i_q} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_q}} \quad (2.1)$$

donde las componentes $\Pi_{i_1 \dots i_q} \in C^\infty(M)$ son antisimétricas y son llamadas coeficientes de Π .

Recordemos que los q -campos vectoriales $\mathcal{X}^q(M)$ son objetos duales a las q -formas diferenciales $\Omega^q(M)$ de una manera natural. Si $\Pi \in \mathcal{X}$, $\alpha \in \Omega^q(M)$ y $(U, (x_1, \dots, x_m))$ un sistema local de coordenadas alrededor del punto $p \in M$, entonces podemos escribir.

$$\begin{aligned} \blacksquare \Pi &= \sum_{i_1 < \dots < i_q} \Pi_{i_1 \dots i_q} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_q}}. \\ \blacksquare \alpha &= \sum_{i_1 < \dots < i_q} \alpha_{i_1 \dots i_q} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_q}. \end{aligned}$$

Entonces podemos definir su **emparejamiento** como $\langle \alpha, \Pi \rangle$ como un mapeo definido como

$$\langle \alpha, \Pi \rangle = \sum_{i_1 < \dots < i_q} \Pi_{i_1 \dots i_q} \alpha_{i_1 \dots i_q}. \quad (2.2)$$

Es fácil notar que la definición de $\langle \alpha, \Pi \rangle$ no depende de la elección del sistema local de coordenadas.

Es particular tenemos que un k -campo vectorial liso en una variedad lisa M^m puede ser considerado como un mapeo $C^\infty(M)$ -lineal y alternante

$$\Pi : \underbrace{\Omega^1(M) \times \dots \times \Omega^1(M)}_{k\text{-veces}} \rightarrow C^\infty(M)$$

Dado lo anterior es posible establecer la siguiente proposición.

Proposición 2.1 *Para una variedad lisa M^m la asignación*

$$\bar{\Pi}(f_1, \dots, f_k) = \Pi(df_1, \dots, df_k)$$

establece una correspondencia uno a uno entre los mapeos $C^\infty(M)$ -lineales y alternantes

$$\Pi : \underbrace{\Omega^1(M) \times \dots \times \Omega^1(M)}_{k\text{-veces}} \rightarrow C^\infty(M),$$

y los mapeos \mathbb{R} -lineales y alternantes

$$\bar{\Pi} : \underbrace{C^\infty(M) \times \dots \times C^\infty(M)}_{k\text{-veces}} \rightarrow C^\infty(M).$$

Además satisfacen la regla de Leibniz en cada argumento, es decir

$$\bar{\Pi}(f_1, \dots, \bar{f}_i, \dots, f_k) = \bar{f}_i(\bar{\Pi}(f_1, \dots, f_i, \dots, f_k)) + f_i(\bar{\Pi}(f_1, \dots, \bar{f}, \dots, f_k)).$$

Demostración.

Es claro que por la construcción del mapeo $\bar{\Pi}$ que a todos los mapeos \mathbb{R} -lineales, alternantes y que satisfacen la regla de Leibniz se le puede asociar un k -campo vectorial.

Para el caso contrario sólo basta revisar que el valor de $\bar{\Pi}(f_1, \dots, f_k)$ en un punto $p \in M$ sólo depende del valor de df_1, \dots, df_k en el punto p ; esto es equivalente a verificar que si el valor $df_i(x_i) = 0$ en un punto $p \in M$ para $i = 1, \dots, k$, entonces $\bar{\Pi}(f_1, \dots, f_k) = 0$.

Si $df_i(x_i) = 0$ entonces podemos escribir de manera local a f_i como

$$f_i = \sum_{j=1}^k x_{i_j} g_{i_j} + c_i,$$

donde $x_{i_j}, g_{i_j} \in C^\infty(M)$ son mapeos que se anulan en $p \in M$ y c_i una constante.

De la regla de Leibniz se tiene que

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}(f_1, \dots, f_i, \dots, f_k)(p) &= \bar{\Pi}(f_1, \dots, \sum_{j=1}^k x_{i_j} g_{i_j} + c_i, \dots, f_k) \\ &= \bar{\Pi}(f_1, \dots, \sum_{j=1}^k x_{i_j} g_{i_j}, \dots, f_k) + \bar{\Pi}(f_1, \dots, c_i, \dots, f_k) \\ &= \bar{\Pi}(f_1, \dots, \sum_{j=1}^k g_{i_j}, \dots, f_k) + \bar{\Pi}(f_1, \dots, \sum_{j=1}^k x_{i_j}, \dots, f_k) \\ &+ \bar{\Pi}(f_1, \dots, c_i, \dots, f_k) \\ &= \bar{\Pi}(f_1, \dots, \sum_{j=1}^k g_{i_j}, \dots, f_k) + \bar{\Pi}(f_1, \dots, \sum_{j=1}^k x_{i_j}, \dots, f_k) \\ &+ c_i \bar{\Pi}(f_1, \dots, 1, \dots, f_k) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}(f_1, \dots, 1 \cdot 1, \dots, f_k) &= \bar{\Pi}(f_1, \dots, 1 \cdot 1, \dots, f_k) + \bar{\Pi}(f_1, \dots, 1 \cdot 1, \dots, f_k) \\ &= 2\bar{\Pi}(f_1, \dots, 1, \dots, f_k),\end{aligned}$$

es decir, $\bar{\Pi}(f_1, \dots, 1, \dots, f_k) = 0$. \square

Recordemos que el operador diferencial $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ juega un papel importante en la geometría diferencial. La operación que juega el papel del operador diferencial en campos multivectoriales es el corchete de Schouten-Nijenhuis, el cual lo podemos pensar cómo una extensión del corchete de Lie.

Antes de continuar con la definición de corchete de Schouten-Nijenhuis, vamos a explicar la siguiente notación: Denotemos por ξ_i a la variable $\frac{\partial}{\partial x_i}$; con esta notación es posible considerar a ξ_i como variables formales en el sentido de que no toman valores en un campo. Además forman una álgebra antisimétrica, es decir se cumple que $\xi_i \xi_j = -\xi_j \xi_i$, conmutan con la variable x_i y $\xi_i \xi_j = \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$ por tanto $\xi_i^2 = \xi_i \xi_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_i} = 0$

Si Π es un p -campo vectorial, entonces tiene la forma de la fórmula 2.1 en un sistema local, entonces ahora lo consideramos como un polinomio homogéneo de grado p en las variables formales ξ_i . Tomando la siguiente forma.

$$\Pi = \sum_{i_1 < \dots < i_q} \Pi_{i_1 \dots i_q} \xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \xi_{i_q} \quad (2.3)$$

Una pregunta inmediata, es saber si es posible derivar este tipo de polinomios homogéneos; la respuesta es positiva y para ello se aplica la siguiente fórmula:

$$\frac{\partial(\xi_{i_1} \dots \xi_{i_p})}{\partial \xi_{i_k}} = (-1)^{p-k} \xi_{i_1} \dots \hat{\xi}_{i_k} \dots \xi_{i_p},$$

donde $\hat{\xi}_{i_k}$ es el elemento que se omite en el producto y $1 < k < p$.

Partiendo de lo anterior es posible enunciar la definición de corchete de Schouten-Nijenhuis.

Definición 2.1 Sean M^m una variedad lisa, $A \in \mathcal{X}^a(M)$ y $B \in \mathcal{X}^b(M)$, definimos el **corchete de Schouten-Nijenhuis** como un mapeo $[\cdot, \cdot] : \mathcal{X}^a \times \mathcal{X}^b \rightarrow \mathcal{X}^{a+b-1}$ dado como

$$[A, B]_{SN} = \sum_i^m \frac{\partial A}{\partial \xi_i} \frac{\partial B}{\partial x_i} - (-1)^{(a-1)(b-1)} \sum_i^m \frac{\partial B}{\partial \xi_i} \frac{\partial A}{\partial x_i} \quad (2.4)$$

Notemos que el corchete $[A, B]_{SN}$ es un polinomio homogéneo de grado $a+b-1$ en la variables formales y extrañas ξ_i , es decir, es un $(a+b-1)$ -campo vectorial. Además cuando no se tenga ambigüedad sobre que corchete estamos trabajando, entonces simplemente escribiremos $[\cdot, \cdot]$ en lugar de $[\cdot, \cdot]_{SN}$

Observación 1 Existe muchas definiciones para el corchete de Schouten-Nijenhuis y todas son equivalentes, la razón por la cual se escogió la definición anterior es que fue posible hacer un algoritmo de dicho cálculo en en lenguaje de programación Python que explicamos a detalle en la sección A.3 del apéndice.

Para tener en claro cómo opera el corchete de Schouten-Nijenhuis dado en la definición 2.1 hagamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1 Consideremos el siguiente 2-campo vectorial

$$\begin{aligned} \Pi &= \left(-x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \\ &= -x_3 \xi_1 \xi_2 - x_2 \xi_1 \xi_3 + x_1 \xi_2 \xi_3. \end{aligned}$$

Ahora calculemos el corchete de Schouten-Nijenhuis de el mismo, es decir:

$$\begin{aligned} [\Pi, \Pi] &= 2 \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \xi_1} \wedge \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_2} \wedge \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} + \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_3} \wedge \frac{\partial \Pi}{\partial x_3} \right) \\ &= 2(-x_3 \xi_2 + x_2 \xi_3)(\xi_2 \xi_3) \\ &\quad + 2(x_3 \xi_1 + x_1 \xi_3)(-\xi_1 \xi_3) \\ &\quad + 2(x_2 \xi_1 - x_1 \xi_2)(-\xi_1 \xi_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Después de entender como funciona el corchete de Schouten-Nijenhuis, este cumple con las siguientes propiedades. La prueba de esto se puede encontrar en [Página 28, [DZ05]].

Teorema 2.1 (Schouten-Nijenhuis) El corchete definido en la definición 2.1 satisface las siguientes propiedades:

(i) **Anticonmutatividad:**

$$[A, B] = -(-1)^{(a-1)(b-1)}[B, A].$$

(ii) **Casi Regla de Leibniz:**

$$[A, B \wedge C] = [A, B] \wedge C + (-1)^{b(a-1)} B \wedge [A, C].$$

$$[A \wedge B, C] = A \wedge [B, C] + (-1)^{b(c-1)} [A, C] \wedge B.$$

(iii) **Casi identidad de Jacobi:**

$$(-1)^{(a-1)(c-1)}[A, [B, C]] + (-1)^{(b-1)(a-1)}[B, [C, A]] + (-1)^{(c-1)(b-1)}[C, [A, B]] = 0.$$

Para toda $A \in \mathcal{X}^a(M)$, $B \in \mathcal{X}^b(M)$ y $C \in \mathcal{X}^c(M)$. □

Para terminar esta sección definimos el producto interior de una 1-forma α con el k -vector π como el $(k-1)$ -vector $i_\alpha \pi$ definido por

$$i_\alpha \pi(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}) = \pi(\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}),$$

donde $\alpha_i \in \Omega^1(M)$.

2.2. Variedades de Poisson

Definición 2.2 *Un corchete de Poisson en una variedad diferenciable M^m , es una operación binaria*

$$\{, \} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M),$$

que satisface

(i) **\mathbb{R} -lineal** $\{f, ag + bh\} = \{f, ag\} + \{f, bh\}$.

(ii) **Antisimetría** $\{f, g\} = -\{g, f\}$.

(iii) **Identidad de Jacobi** $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$,

(iv) **Identidad de Leibniz** $\{f, g \cdot h\} = g \cdot \{f, h\} + \{f, g\} \cdot h$.

para $f, g, h \in C^\infty(M)$ y $a, b \in \mathbb{R}$.

Al par $(M, \{, \})$ lo llamamos una **variedad de Poisson** y notemos que las propiedades (i)-(iii) de la definición 2.2 nos dicen que el par $(C^\infty(M), \{, \})$ es un álgebra de Lie. También de la definición 2.2 es inmediato el siguiente lema.

Lema 2.1 *Para cualquier $f \in C^\infty(M)$ se cumple que $\{1, f\} = 0$.*

Dem.

Para la demostración sólo basta utilizar la identidad de Leibniz

$$\begin{aligned} \{1, f\} &= \{1 \cdot 1, f\} \\ &= 1 \cdot \{1, f\} + \{1, f\} \cdot 1 \\ &= 2 \cdot \{1, f\}. \end{aligned}$$

□

Cualquier variedad lisa M^n es una variedad de Poisson, dotando a M con el **corchete trivial de Poisson**, el cual está dado como $\{f, g\} = 0$ para toda $f, g \in C^\infty(M)$. A continuación procedemos a estudiar ejemplos más elaborados.

Un ejemplo inmediato de una variedad de Poisson, es definiendo el **corchete de Poisson canónico** en \mathbb{R}^{2n} .

Ejemplo 2.2 *Sea \mathbb{R}^{2n} con coordenadas locales $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ y sea*

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial g}{\partial p_i} \right). \quad (2.5)$$

Otro ejemplo interesante sería.

Ejemplo 2.3 *Sea $(\mathfrak{g}, [,]_{\mathfrak{g}})$ un álgebra de Lie finita, si $f : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$ es un mapeo liso y tomamos $\xi \in \mathfrak{g}^*$, donde \mathfrak{g}^* denota el álgebra dual de \mathfrak{g} , entonces se tiene que la diferencial $d_\xi f : T_\xi \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$ puede ser vista como un elemento de $\mathfrak{g} \cong (\mathfrak{g}^*)^*$.*

Así podemos definir un corchete de Poisson en \mathfrak{g}^* como

$$\{f, g\}(\xi) := \xi([d_\xi f, d_\xi g]_{\mathfrak{g}}).$$

Por lo tanto el par $(\mathfrak{g}^*, \{, \})$ es una variedad de Poisson.

Un corchete dado como en el ejemplo 2.3 es llamado **corchete lineal de Poisson**, pues dado un espacio vectorial V con un corchete de Poisson $\{, \}_V$ con

la propiedad de que el corchete de dos funciones lineales es una función lineal, entonces se tiene que V^* tiene una estructura natural de álgebra de Lie. Además $\{, \}_V$ coincide con el corchete de Poisson de V^* definido como en el ejemplo 2.3.

Definición 2.3 Dadas dos variedades de Poisson $(M_1, \{, \}_{M_1})$ y $(M_2, \{, \}_{M_2})$, decimos que un mapeo diferenciable $\phi : M_1 \rightarrow M_2$ es un **mapeo de Poisson**, si se cumple que

$$\{f \circ \phi, g \circ \phi\}_{M_1} = \{f, g\}_{M_2} \circ \phi$$

para toda $f, g \in C^\infty(M_2)$.

Para observar ejemplos de mapeos de Poisson, retomaremos los ejemplos dados anteriormente.

Ejemplo 2.4 Tomemos la variedad de Poisson dada en el ejemplo 2.2 y el siguiente mapeo $\phi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ definido como

$$\phi(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n) = (q^1, \dots, q^m, p_1, \dots, p_m),$$

con $n \geq m$. Entonces ϕ es un mapeo de Poisson, para probarlo veamos que se cumple la propiedad pedida en la definición 2.3

$$\begin{aligned} \{f \circ \phi, g \circ \phi\}_{\mathbb{R}^{2m}} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial(f \circ \phi)}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial(g \circ \phi)}{\partial q^i} - \frac{\partial(f \circ \phi)}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial(g \circ \phi)}{\partial p_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_j \frac{\partial f(\phi)}{\partial \phi_j} \cdot \frac{\phi_j}{p_i} \cdot \frac{\partial g(\phi)}{\partial \phi_j} \cdot \frac{\phi_j}{\partial q^i} \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left(\sum_j \frac{\partial f(\phi)}{\partial \phi_j} \cdot \frac{\phi_j}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial g(\phi)}{\partial \phi_j} \cdot \frac{\phi_j}{\partial p_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f(\phi)}{p_i} \cdot \frac{\partial g(\phi)}{\partial q^i} - \frac{\partial f(\phi)}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial g(\phi)}{\partial p_i} \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{p_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) \right) \circ \phi \\ &= \{f, g\}_{\mathbb{R}^{2n}} \circ \phi. \end{aligned}$$

Por lo tanto ϕ es un mapeo de Poisson.

Ejemplo 2.5 Ahora consideremos la variedad de Poisson dada en el ejemplo 2.3 y un homomorfismo de álgebras de Lie $\Phi : \mathfrak{g} \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$, entonces el homomorfismo transpuesto $\Phi^* : \bar{\mathfrak{g}}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ es un mapeo de Poisson. Para mostrar esta afirmación tomemos $\xi \in \bar{\mathfrak{g}}^*$ veamos que se cumple con la condición pedida en la

definición 2.3,

$$\begin{aligned}
\{f \circ \Phi^*, g \circ \Phi^*\}_{\mathfrak{g}^*}(\xi) &= \xi([d_\xi(f \circ \Phi^*), d_\xi(g \circ \Phi^*)]_{\mathfrak{g}}) \\
&= \xi([\Phi(d_{\Phi^*(\xi)}f), \Phi(d_{\Phi^*(\xi)}g)]_{\mathfrak{g}}) \\
&= \xi(\Phi([d_{\Phi^*(\xi)}f, d_{\Phi^*(\xi)}g]_{\mathfrak{g}})) \\
&= \Phi^*(\xi)([d_{\Phi^*(\xi)}f, d_{\Phi^*(\xi)}g]_{\mathfrak{g}}) \\
&= \{f, g\}_{\mathfrak{g}^*} \circ \Phi^*(\xi)
\end{aligned}$$

Por lo cual el mapeo Φ^* es un mapeo de Poisson.

Ahora veremos como se ve la expresión local del corchete de Poisson mediante la siguiente proposición.

Proposición 2.2 Sea $(M, \{, \})$ una variedad de Poisson de dimensión n , si (U, φ) es una carta de M con $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$, entonces para cualquier $f, g \in C^\infty(M)$ se tiene que el corchete de Poisson de M en coordenadas locales se ve como:

$$\{f, g\}|_U = \sum_{i,j=1}^{n=1} \{x_i, x_j\} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}.$$

Demostración.

Se tiene por el lema 2.1 que $\{c, f\} = c\{1, f\} = 0$ para toda $c \in \mathbb{R}$, ahora sólo basta probar lo anterior para un mapeo liso. Sea $f \in C^\infty(U)$ y tomemos su desarrollo de Taylor de orden dos alrededor del punto $\bar{x} \in U$:

$$f(x) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})(x_i - \bar{x}_i) + \sum_{i,j=1}^m F_{ij}(x)(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j),$$

para algunas funciones lisas $F_{ij} \in C^\infty(U)$, entonces para $f, g \in C^\infty(M)$ el corchete de Poisson esta dado por:

$$\begin{aligned}
\{f, g\}(x) &= \{f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})(x_i - \bar{x}_i) \\
&+ O(2), g(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{x})(x_i - \bar{x}_i) + O(2)\} \\
&= \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) \frac{\partial g}{\partial x_j}(\bar{x}) \{x_i, x_j\}(x) + \sum_{i=1}^m H_i(x)(x_i - \bar{x}_i)
\end{aligned}$$

para algunas funciones lisas $H_i \in C^\infty(U)$. Por lo tanto, en $x = \bar{x}$ se tiene que

$$\{f, g\}(\bar{x}) = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) \frac{\partial g}{\partial x_j}(\bar{x}) \{x_i, x_j\}(\bar{x})$$

donde \bar{x} era un punto arbitrario en U . □

Tenemos que en una variedad de Poisson $(M, \{, \})$ podemos restringir el corchete de Poisson a un conjunto $U \subset M$ abierto obteniendo como resultado un nuevo corchete $\{, \}_U$ tal que para cualquier $f, g \in C^\infty(M)$ se cumple que $\{f, g\}|_U = \{f|_U, g|_U\}_U$. Por esta razón no haremos distinción entre $\{, \}$ y $\{, \}_U$, tal y como se hizo en la proposición 2.2.

La propiedad (iv) de la definición 2.2 nos permite definir para cada función $H \in C^\infty(M)$ un campo vectorial $X_H \in \mathcal{X}(M)$ definido como:

$$X_H(f) := \{H, f\} \tag{2.6}$$

para toda $f \in C^\infty(M)$. El campo vectorial X_H es llamado **campo Hamiltoniano** con mapeo Hamiltoniano H . Una mapeo f es llamado una **integral primera** de un campo vectorial X , si f es constante a lo largo cada órbita de X . Se puede probar que f es integral primera si y sólo si $X(f) = 0$.

Dadas integrales primeras es posible encontrar nuevas integrales primeras, esto es un resultado de Poisson que puede ser consultado en [Poi09].

Proposición 2.3 [Poisson] *Si g y h son integrales primeras de un campo vectorial hamiltoniano X_f es una variedad de Poisson $(M, \{, \})$, entonces $\{g, h\}$ es una integral primera.*

Demostración.

Sean g y h primeras integrales de un campo vectorial X_f , entonces se tiene que

- $X_f(g) = \{X_f, g\} = 0$,
- $X_f(h) = \{X_f, h\} = 0$.

Aplicando la identidad de Jacobi para h, g y X_f tenemos

$$\{h, \{X_f, g\}\} + \{X_f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, X_f\}\} = 0,$$

y se sigue que $\{X_f, \{g, h\}\} = 0$. Por lo tanto $\{g, h\}$ es una integral primera. □

Otra consecuencia inmediata de la definición 2.2 es que la asignación de un mapeo liso $f \in C^\infty(M)$ a un campo vectorial $X_f \in \mathcal{X}(M)$ es morfismo de álgebras de Lie y la siguiente proposición.

Proposición 2.4 *Sea $(M; \{, \})$ una variedad de Poisson, entonces para cada $f, g \in C^\infty(M)$ se tiene que $X_{\{f, g\}} = [X_f, X_g]$.*

Demostración.

Para cualquier $f, g, h \in C^\infty(M)$ calculamos:

$$\begin{aligned} X_{\{f, g\}}(h) &= \{\{f, g\}, h\} = \{\{f, h\}, g\} + \{f, \{g, h\}\} = \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} \\ &= X_f(X_g(h)) - X_g(X_f(h)) = [X_f, X_g](h). \end{aligned}$$

□

Se dice que un mapeo $f \in C^\infty(M)$ es un **mapeo Casimir** si cumple que $\{f, g\} = 0$ para toda $g \in C^\infty(M)$.

Dada una variedad de Poisson $(M^m, \{, \})$ es posible definir un 2-campo vectorial $\pi \in \mathcal{X}^2(M)$ mediante la asignación:

$$\pi(df, dg) = \{f, g\} \quad (2.7)$$

donde $f, g \in C^\infty(M)$ y $d : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$ es la derivada exterior.

De manera inversa también es posible lograrlo mediante la proposición 2.1. A saber, si tenemos un 2-campo vectorial $\pi \in \mathcal{X}^2(M)$ es posible definir un corchete de mapeos lisos como en la ecuación 2.7; es claro notar que dicho corchete cumple con la propiedades (i), (ii) y (iv) de la definición 2.2, es decir, un bivector π en general no cumple con la identidad de Jacobi.

Notemos que al calcular el corchete de Schouten-Nienhuis del 2-campo vectorial π consigo mismo, obtenemos que la identidad de Jacobi para el corchete $\{, \}$ es equivalente a que $[\pi, \pi] = 0$, dando pie a la siguiente proposición.

Proposición 2.5 *Sea $(M, \{, \})$ una variedad de Poisson, entonces el 2-campo vectorial π asociado a $\{, \}$ por la ecuación 2.7 satisface:*

$$[\pi, \pi] = 0. \quad (2.8)$$

Recíprocamente, cada 2–campo vectorial π que satisfaga la ecuación 2.8 define un corchete de Poisson en $C^\infty(M)$ por $\{f, g\} := \pi(df, dg)$.

Un 2–campo vectorial $\pi \in \mathcal{X}^2(M)$ que cumple con la condición dada en la proposición 2.5 es llamada una **estructura de Poisson** sobre M^m y al par (M, π) lo llamamos una variedad de Poisson. De ahora en adelante sólo escribiremos que M^m es una variedad Poisson, pasando por alto el corchete o la estructura de Poisson.

Si consideramos $(U, (x_1, \dots, x_m))$ coordenadas locales para M alrededor del punto $p \in M$, entonces de la ecuación 2.1 el 2–campo vectorial π tiene la siguiente expresión local:

$$\pi|_U = \sum_{i < j} \pi_{ij}(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (2.9)$$

donde $\pi_{ij}(p) = \{x_i, x_j\}(p)$.

De igual manera considerando $(U, (x_1, \dots, x_m))$ coordenadas locales para M alrededor del punto $p \in M$, se tiene que la ecuación 2.8 tiene la siguiente expresión local:

$$\sum_{h=1}^m \left(\pi_{hi} \frac{\partial \pi_{jk}}{\partial x_h} + \pi_{hj} \frac{\partial \pi_{ki}}{\partial x_h} + \pi_{hi} \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_h} \right) = 0 \quad (2.10)$$

Notemos que en la ecuación 2.10 es un sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineales, donde tenemos $\binom{m}{3}$ ecuaciones con $\binom{m}{2}$ funciones variables π_{ij} . Es por esta razón que el estudio de las estructuras de Poisson en una variedad dada, incluso localmente, es un tema no trivial y difícil.

Ahora notemos que dado un 2–campo vectorial $\pi \in \mathcal{X}^2(M)$ este define un mapeo $\pi^\# : \Omega^1(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ definido como $\pi^\#(\alpha) = i_\alpha \pi$ con $\alpha \in \Omega^1(M)$, dado que el mapeo producto interior es una operación puntual, este mapeo es inducido por un mapeo de haces lisos que denotaremos con el mismo símbolo $\pi^\# : TM \rightarrow T^*M$ y que en cada punto $p \in M$ esta dado como

$$\begin{aligned} \pi_p^\# : T_p^*M &\rightarrow T_pM \\ \alpha &\mapsto i_\alpha \pi_p. \end{aligned}$$

Al mapeo $\pi^\#$ lo llamaremos el **mapeo ancla de π** . Un 2–campo vectorial π es llamado **no degenerado en el punto $p \in M$** , si el mapeo $\pi_p^\# : T_p^*M \rightarrow T_pM$

es un isomorfismo de fibrados vectoriales y decimos que π es **no degenerado** si es no degenerado en cada punto $p \in M$.

Lema 2.2 *Existe una correspondencia uno a uno de los 2-campos vectoriales no degenerados $\pi \in \mathcal{X}^2(M)$ con las 2-formas no degeneradas $\omega \in \Omega^2(M)$.*

Demostración.

Dada una 2-forma no degenerada $\omega \in \Omega^2(M)$, podemos determinar el mapeo $\omega^b : TM \rightarrow T^*M$ tal que en cada punto $p \in M$ esta dado como:

$$\begin{aligned} \omega_p^b : T_pM &\rightarrow T_p^*M \\ v &\mapsto i_v\omega_p, \end{aligned}$$

donde una 2-forma ω es no degenerada en $p \in M$, si el mapeo $\omega_p^b : T_pM \rightarrow T_p^*M$ es un isomorfismo de fibrados vectoriales y decimos que el mapeo ω es **no degenerado** si es no degenerado en cada punto $p \in M$.

Ahora tomamos el mapeo biyectivo $\pi^\# : T^*M \rightarrow TM$ y notamos que $\pi^\# = (\omega^b)^{-1}$ y que $\omega^b = (\pi^\#)^{-1}$. \square

Definición 2.4 *Sea M^m una variedad lisa, entonces decimos que una **estructura simpléctica para M^m** es una 2-forma cerrada y no degenerada $\omega \in \Omega^2(M)$, donde ω es **cerrada** si se cumple que $d\omega = 0$. Al par (M^m, ω) lo llamamos una **variedad simpléctica**.*

Las primeras propiedades que se obtienen de una variedad simpléctica, es que la dimensión de la variedad M^m es siempre es par, es decir, $m = 2n$. Además se cumple que si ω es una estructura simpléctica para M^m entonces $\underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{m\text{-veces}} \neq 0$ y viceversa.

Proposición 2.6 *Existe una correspondencia uno a uno entre las estructuras de Poisson no degeneradas y las estructuras simplécticas en una variedad M^m .*

Demostración.

Sólo basta recordar que por la proposición 2.1 existe una correspondencia uno a uno entre los 2-campos vectoriales y las estructuras de Poisson en una variedad M^m y concluimos la prueba utilizando el lema 2.2. \square

Recordemos que de la ecuación 2.9 un 2-campo vectorial tiene la siguiente expresión local

$$\pi|_U = \sum_{i < j} \pi_{ij}(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$$

y si además π es no degenerado en un punto $p \in M$, entonces tenemos que la matriz $[\pi_{ij}(p)]$ es invertible; así pues, tenemos que la expresión local de la estructura simpléctica es

$$\omega|_U = \sum_{i < j} \omega_{ij} dx_i \wedge dx_j, \quad (2.11)$$

donde $\omega_{ij} = (\pi_{ij}(p))^{-1}$.

Terminaremos la sección dando un ejemplo de una variedad simpléctica.

Ejemplo 2.6 *El ejemplo estándar para una variedad simpléctica es tomar \mathbb{R}^{2n} con coordenadas locales $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ y considerar la siguiente estructura simpléctica*

$$\omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i. \quad (2.12)$$

A lo anterior lo llamamos la **estructura simpléctica canónica** de \mathbb{R}^{2n} .

Cabe mencionar que la estructura de Poisson dada en 2.2 es no degenerada y su estructura simpléctica correspondiente coincide con la estructura simpléctica dada en 2.6.

2.3. Foliación Simpléctica de una Variedad de Poisson

Si consideramos $(U, (x_1, \dots, x_m))$ coordenadas locales para M^m en un punto $p \in M$ se tiene que el mapeo $\pi_p^\#$ tiene la siguiente expresión local

$$\begin{aligned} \pi_p^\# \left(\sum_{i=1}^m a_i dx_i \right) &= \sum_{ij} \{x_i, x_j\} a_i \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \sum_{ij} \pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Así obtenemos que el mapeo $\pi^\#$ está dado por la matriz $[\pi_{ij}]$ en las bases lineales $\{dx_1, \dots, dx_m\}$ y $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\}$.

Dado el mapeo $\pi^\#$ definimos

$$C_p = \text{Ima}(\pi_p^\#) \quad (2.13)$$

al espacio C_p y lo llamaremos el **espacio característico de $p \in M$** de la estructura de Poisson π .

A la dimensión de C_p lo llamamos el **rango de π en $p \in M$** , de la antisimetría del mapeo $\pi^\#$ se tiene que el rango de π en cada punto $p \in M$ es par y en general el rango de π puede variar en cada punto.

Un punto $p_0 \in M$ es llamado un **punto regular de π** , si existe una vecindad U_{p_0} tal que el rango de π en p y el rango de π en p_0 coinciden para todo $p \in U_{p_0}$. En caso contrario diremos que p_0 es un **punto singular de π** .

Definición 2.5 *Decimos que una estructura de Poisson $\pi \in \mathcal{X}^2(M)$ es una estructura regular, si el rango de π es constante en toda M .*

El espacio característico de $\pi^\#$ una distribución regular lisa $C = \{C_p : p \in M\}$ está generada por campos vectoriales de la forma $X_f = \pi^\#(df)$, es decir, por los campos vectoriales hamiltonianos. Esta distribución es llamada la **distribución característica de una estructura de Poisson**.

Si la estructura de Poisson π es regular, entonces decimos que la distribución característica es **regular**, si π no es regular, entonces decimos que la distribución característica es **singular**.

La distribución característica resulta ser una distribución integrable. Por tanto, toda variedad de Poisson M es foliada por hojas L de la distribución característica. Más aún la estructura de Poisson de M induce la estructura simpléctica en las hojas L . Probaremos lo anterior para ambos casos.

Para el primer caso donde consideramos una estructura de Poisson regular π , probaremos el siguiente teorema.

Teorema 2.2 *La distribución característica C_p inducida por un 2-campo vectorial π definido en M es integrable y la estructura de Poisson π induce estructuras simplécticas en sus hojas.*

Demostración.

La distribución C es involutiva, ya que es generada por campos vectoriales hamiltonianos, hay que recordar que

$$C_p = \pi_p^\#(df) = X_f(p) = \text{Span}(\{X_f(p) : f \in C^\infty(M)\})$$

y por la proposición 2.3 se tiene que el corchete de Lie de campos hamiltonianos es hamiltoniano, entonces por el teorema de Frobenius 1.2 se tiene que la distribución es integrable, es decir, es la distribución tangente de una foliación regular.

Sea L_p una hoja para algún $p \in M$ entonces tenemos que $C_p \subset T_p L_p$ y la estructura de Poisson inducida $\pi|_{L_p}$ satisface para toda $\alpha \in T_p^* L_p$

$$\pi^\#(\alpha) = \pi|_{L_p}(\alpha|_{L_p}).$$

Esto muestra que $C_p = T_p L_p$, por lo tanto $\pi|_{L_p}$ es no degenerada, es decir, es simpléctica. \square .

Para el segundo caso donde consideramos una estructura de Poisson singular π , primero es necesario enunciar el teorema de Darboux-Weinstein que es uno de los teoremas fundamentales en la geometría de Poisson.

Teorema 2.3 *[Darboux-Weinstein] Se (M, π) una variedad de Poisson y asumamos que el rango de π en el punto x_0 es igual a $2n$. Entonces existe un entorno coordinado $(U, (p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_s, z_1, \dots, z_{m-2s}))$ alrededor de x_0 tal que*

$$\pi|_U = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial p_i} \wedge \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_{a,b=1}^s \phi_{ab}(x) \frac{\partial}{\partial x_a} \wedge \frac{\partial}{\partial x_b}, \quad (2.14)$$

donde $\phi_{ab}(x)$ son mapeos lisos de (f_1, \dots, f_s) tal que $\phi_{ab}(0) = 0$.

El teorema de Darboux-Weinstein muestra que una estructura de Poisson π alrededor de cualquier punto $x_0 \in M$ se divide como un producto de una estructura simpléctica de dimensión igual al rango de π en el punto x_0 (por el teorema de Darboux de geometría simpléctica) y una estructura Poisson transversal que se anula en el punto x_0 .

De hecho, la prueba del teorema de Darboux-Weinstein por lo regular se deduce como un corolario del teorema de división de Weinstein para los transversales de Poisson [Página 17, [DZ05]], dicho resultado es más general y su prueba puede ser consultada en [Página 530, [Wei83]].

Teorema 2.4 [Teorema de Descomposición] Sean (M, π) una variedad de Poisson, el rango de π en el punto $p \in M$ es igual $2s$, la dimensión del espacio característico C_p en el punto p es igual a $2s$ y $N^{m-2s} \subset M$ una subvariedad lisa que contiene a p y es transversal a C_p en el punto p . Entonces existe un entorno coordinado $(U, (p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_s, z_1, \dots, z_{m-2s}))$ alrededor de p tal que se satisfacen las siguientes condiciones :

1. $p_i(N_p) = q_i(N_p) = 0$, donde N_p es una vecindad de p en N .
2. $\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$, para toda i, j y $\{p_i, q_j\}$ es cero si $i \neq j$ o es uno si $i = j$.
3. $\{z_i, q_j\} = \{z_i, p_j\} = 0$, para toda i, j .
4. $\{z_i, z_j\}(p) = 0$, para toda i, j . □

Ahora si estamos listos para enunciar el teorema relacionado con el segundo caso, es decir, cuando consideramos una estructura de Poisson singular π .

Teorema 2.5 La distribución característica C de una variedad de Poisson M es integrable (en el sentido de Stefan-Sussman). La estructura de Poisson induce en las hojas una estructura simpléctica.

Demostración.

Se tiene que la distribución C es completamente integrable y le corresponde una foliación singular, basta recordar el teorema 1.1 y notar que C es generada por campos vectoriales hamiltonianos, éstos preservan la estructura de Poisson y a

su vez preservan la distribución característica.

Para cada punto $p \in M$ consideramos la hoja L_p , por el teorema de división de Weinstein 2.4 tenemos que si

$$(U, (p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_s, z_1, \dots, z_{m-2s}))$$

es un entorno abierto para p , entonces la subvariedad $\{z_1 = 0, \dots, z_{m-2s} = 0\} \subset L_p$ es abierta y existe una estructura simpléctica natural en las coordenadas $(p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_s)$ por el Teorema de Darboux.

Cabe mencionar que dicha estructura simpléctica no depende de la elección de coordenadas; es más en cada punto de la subvariedad $\{z_1 = 0, \dots, z_{m-2s} = 0\}$ coincide con la forma simpléctica del espacio característico L_p , así en cada hoja tenemos una única estructura simpléctica natural. Nuevamente del teorema de división de Weinstein se tiene que el encaje $i : \mathcal{F} \rightarrow M$ es un morfismo de Poisson; así tenemos que si $f, g \in C^\infty(M)$ y $x \in L_p$ entonces

$$\{f, g\}(x) = \{f|_{L_p}, g|_{L_p}\}_p(x),$$

donde $\{, \}_p$ es el corchete de Poisson de la forma simpléctica en \mathcal{F} . □

Para ambos casos se tiene que las hojas de la foliación característica son conocidas como **hojas simplécticas de la foliación** u **hojas de la variedad de Poisson**. De hecho podemos describir la estructura simpléctica en ellas de la siguiente manera. Utilizando que el mapeo $\pi_{C_p}^\#$ es biyectivo, para X, Y dos vectores en $C_p = T_p C_p$ definimos la estructura simpléctica ω_{C_p} en C_p como:

$$\omega_{C_p}(X, Y) := \beta(X) = \pi|_{C_p}(\alpha, \beta) = \langle \alpha, Y \rangle = -\langle \beta, X \rangle = -\omega_{C_p}(Y, X), \quad (2.15)$$

donde $\beta, \alpha \in T_p^* M$ son tales que $\pi_p^\#(\alpha) = X$ y $\pi_p^\#(\beta) = Y$.

Cabe notar que a medida de que el rango de π varía, también lo hacen las dimensiones de las hojas simplécticas de la foliación.

Abrimos un paréntesis para cumplir con lo que se prometió en la sección 1.3 del capítulo 1; que es mostrar un ejemplo de una foliación de Bott-Morse.

Ejemplo 2.7 Una variedad de Poisson $(M^m, \{, \})$, donde M^m es una variedad lisa y $\{, \}$ es un álgebra de Lie en $C^\infty(M)$ y satisface la identidad de Leibniz. Existiendo así un morfismo $\psi : T^*M \rightarrow TM$ de haces vectoriales asociado con $\{, \}$ que satisface una condición de integrabilidad, cuyo rango en cada punto es llamado el rango de la estructura de Poisson.

Si dicho rango es constante, entonces la condición de integrabilidad implica la existencia de una foliación en M^m de dimensión igual al rango, donde el espacio tangente de la foliación en cada punto $p \in M$ es la imagen de $\psi(T_p^*M)$ en T_pM . Ahora bien, si el rango no es constante aún así tenemos una foliación con singularidades en los puntos donde el rango cambia. En dichos puntos tenemos hojas de dimensión igual a la dimensión del rango en el punto y su espacio tangente de igual manera es la imagen de $\psi(T_p^*M)$ en T_pM , es decir, tenemos un concepto generalizado de foliación en el sentido de [Sus73].

El teorema de descomposición de Weisntein [Página 530, [Wei83]], nos dice que en los puntos donde el rango cambia, la estructura transversal desempeña un papel importante y de una manera natural la estructura transversal viene dada por mapeos de Morse.

Cerramos el paréntesis abierto para mostrar un ejemplo de una foliación de Bott-Morse.

Una pregunta interesante es determinar bajo que condiciones una distribución singular C de una variedad M tiene una estructura de Poisson cuya distribución característica sea precisamente C . El siguiente resultado responde a lo anterior y se puede consultar en [Página 26, [Vai94]].

Teorema 2.6 Sea M^m una variedad lisa y C un distribución singular en M tal que

1. Cada hoja L_p de C viene dotada de una estructura simpléctica ω_{L_p} .
2. Dado $h \in C^\infty(M)$, el campo vectorial X_h definido como $X_h(x)$ el campo vectorial hamiltoniano de $h|_{L_p}$ en la variedad simpléctica (L_p, ω_{L_p}) en p es un campo vectorial liso en M .

Entonces M tiene una única estructura de Poisson cuya foliación simpléctica inducida por la estructura de Poisson es C . \square .

Decimos que una variedad de Poisson M^m es **completa**, si cada campo vectorial hamiltoniano en M es completo. Se tiene que M es completo si y sólo si cada hoja simpléctica está acotada en el sentido de que su cerradura es compacta.

Los siguientes resultados son fundamentales para la investigación, éstos los utilizaremos en la sección 3.2 para construir una estructura de Poisson global en una variedad lisa M de dimensión 3 con ciertas condiciones y terminamos con un resultado que nos muestra una manera de construir variedades de Poisson con mapeos Casimir predeterminados.

Lema 2.3 Sean (M, π_1) y (M, π_2) una variedades de Poisson regulares tal que el rango del de π_1 y π_2 es igual a dos. Suponga que la foliación simpléctica inducida por las estructuras π_1 y π_2 coinciden, entonces existe un mapeo liso no cero $k \in C^\infty(M)$ tal que $\pi_1 = k\pi_2$.

Demostración.

Para esto utilizaremos el teorema de división 2.4 de Weinstein, el cual nos dice que dado un punto $p \in M$ existe un entorno coordinado

$$(U, (p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_s, z_1, \dots, z_{m-2s})),$$

al restringirnos al conjunto $U \cap L_p^{\pi_1}$, donde $L_p^{\pi_1}$ es la hoja simpléctica de la foliación inducida por π_p y π_2 en el punto p . Recordemos que por hipótesis que éstas tienen dimensión dos y coinciden, así que sólo basta considerar a cualquiera de las dos.

Tenemos que las coordenadas $(p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_s)$ pertenecen a la hoja $L_p^{\pi_1}$ y las coordenadas (z_1, \dots, z_{m-2s}) pertenecen a la transversal. Entonces se tiene que en las hojas $L_p^{\pi_1}$ por el teorema de Darboux tenemos que π_1 y π_2 tienen la siguiente forma local

$$\begin{aligned} \blacksquare \pi_1 &= \sum_{i=1}^s k_1(p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_s, z_1, \dots, z_{m-2s}) \frac{\partial}{\partial p_i} \wedge \frac{\partial}{\partial q_i} \\ \blacksquare \pi_2 &= \sum_{i=1}^s k_2(p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_s, z_1, \dots, z_{m-2s}) \frac{\partial}{\partial p_i} \wedge \frac{\partial}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

Para algunos mapeos no cero $k_1, k_2 \in C^\infty(M)$, ahora sólo basta definir a $g = \frac{k_1}{k_2}$
 \square .

Lema 2.4 *Sea (M, π) una variedad de Poisson regular de rango dos y $g \in C^\infty(M)$ un mapeo no cero. Entonces $(M, g\pi)$ es una variedad de Poisson regular de rango dos y las hojas de la foliación simpléctica inducida por el 2–campo vectorial $g\pi$ coincide con la foliación simpléctica inducida por el 2–campo vectorial π .*

Demostración.

Notemos que las imágenes de los mapeos anclas $\pi^\# : T_p^*M \rightarrow T_pM$ y $(g\pi)^\# : T_p^*M \rightarrow T_pM$ coinciden, pues el mapeo ancla es lineal y el mapeo $g \in C^\infty(M)$ es no cero.

Es posible concluir que los 2–campos vectoriales π y $g\pi$ poseen la misma distribución característica, que es integrable ya que π es de Poisson. Además tenemos que ésta es una distribución regular de rango 2 por hipótesis, pues π es regular de rango dos.

Por lo tanto, ambos 2–campos vectoriales admiten la misma foliación simpléctica inducida por el 2–campo vectorial π mediante por hojas de dimensión dos y por lo tanto $g\pi$ es de Poisson. \square .

De hecho se tiene que cualquier 2–campo vectorial de rango dos cuya distribución característica es integrable, entonces dicho 2–campo vectorial debe ser de Poisson [Página 5, [GNSSV15]].

Terminamos la sección enunciando el siguiente teorema que es parte fundamental de este trabajo de investigación. Con él nos ayudamos a construir las estructuras de Poisson.

Teorema 2.7 *Sean M^m y N^{n-2} variedades lisas y con orientaciones μ y Ω respectivamente y $f : M \rightarrow N$ un mapeo liso. El corchete en M definido como:*

$$\{g, h\}_\mu = kdg \wedge dh \wedge f^*\Omega \quad (2.16)$$

donde k es un mapeo no cero en M es de Poisson. Además, las hojas simplécticas son

- a) las hojas de dimensión dos $f^{-1}(s)$, donde $s \in N$ es un valor regular de f ,
- b) las hojas de dimensión dos $f^{-1}(s) - \{\text{Cri}(f)\}$, donde $s \in N$ es un valor singular de f y $\text{Cri}(f)$ son los puntos críticos de f ,
- c) las hojas de dimensión cero corresponden a cada punto crítico. \square .

La demostración del teorema anterior se puede encontrar en el trabajo [Página 6, [GNSSV15]] de Suárez, Vera y García.

La fórmula 2.16 es conocida como **fórmula de Flaschka-Ratui**. El teorema anterior demuestra una manera de construir variedades de Poisson con mapeos Casimir predeterminados.

Capítulo 3

Estructuras de Poisson en Foliaciones de Bott-Morse en Variedades de Dimensión Tres.

A partir de ahora consideramos a M como una variedad lisa, conexa, cerrada y orientable de dimensión tres, dotada de una foliación lisa y compacta \mathcal{F} de codimensión uno con singularidades de Bott-Morse y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ el mapeo de Bott-Morse que induce la foliación \mathcal{F} .

La idea de cómo construir la estructura de Poisson en M , se sigue de las ideas utilizadas por Suárez-Vera-García en [GNSSV15] en 2015, y por Suárez-Orozco en [SSTO16] en 2016.

Consideramos el espacio $X = M \times \mathbb{S}^1$ y el mapeo $F : X \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ dado como

$$F((x, y, z), t) = (f(x, y, z), t),$$

donde $(x, y, z) \in M$, $t \in \mathbb{S}^1$ y $F|_M$ es un mapeo de Bott-Morse. Además no es difícil notar que F es una fibración de X sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$.

Nuestro propósito es construir estructuras de Poisson en foliaciones de Bott-Morse. Para lograrlo procedemos de la siguiente manera:

1. Construir una estructura de Poisson en una vecindad alrededor de un punto singular de M , (Sección 3.1).
2. Extender la estructura de Poisson a todo M , (Sección 3.2).

Además, en la sección 3.2 vamos a describir las formas simplécticas en la hojas de la foliación inducidas por las estructuras de Poisson encontradas en la sección 3.1.

3.1. Construcción de Estructuras de Poisson Locales

El objetivo de esta sección es construir de manera local estructuras de Poisson en una vecindad abierta de una singularidad de Bott-Morse.

La estrategia general que vamos a utilizar para encontrar 2–campos vectoriales de Poisson de manera local, es a partir del teorema 2.7 y para cuando $n = 4$.

- i) Consideramos dos mapeos Casimir C_1 y C_2 para la estructura de Poisson que vamos a encontrar. Éstos describen de manera local a la singularidad de la fibración.
- ii) Calculamos las diferenciales dC_1 y dC_2 .
- iii) Con la fórmula de Flaschka-Ratiu 2.16 dada en el teorema 2.7, calculamos la matriz antisimétrica Π con entradas

$$\Pi_{ij} = \{x_i, x_j\}\mu = dx_i \wedge dx_j \wedge dC_1 \wedge dC_2,$$

donde $\{x_i, x_j\}$ son las componentes del 2–campo vectorial, $\{e_i\}_{i=1,2,3,4}$ es la base canónica de \mathbb{R}^4 y los consideramos como vectores columnas. Además es fácil deducir que $\{x_i, x_j\} = \det(e_i, e_j, dC_1, dC_2)$.

- iv) Escribimos el 2–campo vectorial de Poisson utilizando la matriz encontrada en el paso anterior.

Notemos que Π es la matrix del mapeo ancla $\pi^\#$ asociado con la estructura de Poisson π que vamos a encontrar y que tiene como mapeos Casimir a C_1 y C_2 , así pues se tiene que Π se anula en las diferenciales dC_1 y dC_2 , es decir $\Pi \cdot dC_1 = \Pi \cdot dC_2 = 0$.

Consideramos un punto $(p, t) \in X$ con $p \in N_j \subset \text{Sing}(\mathcal{F})$ y vecindades $U_p \subset M$ y $V_t \subset \mathbb{S}^1$. Se tiene en el cuadro 3.1 que en una vecindad $U_p \times V_t$ alrededor del punto (p, t) tenemos los siguientes modelos locales:

$\dim(N_j)$	Tipo	Índice de Morse	Modelo local en $U_p \times V_t$
cero	centro	cero	$(x^2 + y^2 + z^2, t)$
		tres	$(-x^2 - y^2 - z^2, t)$
	silla	uno	$(-x^2 + y^2 + z^2, t)$
		dos	$(-x^2 - y^2 + z^2, t)$
uno	centro	cero	$(x^2 + y^2, t)$
		dos	$(-x^2 - y^2, t)$
	silla	uno	$(-x^2 + y^2, t)$

Cuadro 3.1: Modelos locales para $(p, t) \in X$ con $p \in N_j \subset \text{Sing}(\mathcal{F})$

Siguiendo la estrategia general anterior realizamos los siguientes pasos:

Primer Paso Considerar los mapeos Casimir expresados en el cuadro 3.1 en la columna: Modelo local en $U_p \times V_t$. Éstos mapeos Casimir dependen de la dimensión y del tipo de la singularidad N_j .

Segundo Paso Calcular las diferenciales dC_1 y dC_2 de los mapeos Casimir dependiendo en el caso que nos encontremos. Así obtenemos lo siguiente en el cuadro 3.3.

Tercer Paso Con la fórmula de Flaschka-Ratiu 2.16 y con ayuda de un código realizado en Python explicado en la sección A del apéndice A, tenemos las siguiente matrices Π en el cuadro 3.4.

Es fácil notar que la matriz Π es de rango dos y anula a dC_1 y dC_2 .

$\dim(N_j)$	Tipo	Índice de Morse	Mapeos Casimir
cero	centro	cero	$C_1(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2$ $C_2(x, y, z, t) = t$
		tres	$C_1(x, y, z, t) = -x^2 - y^2 - z^2$ $C_2(x, y, z, t) = t$
	silla	uno	$C_1(x, y, z, t) = -x^2 + y^2 + z^2$ $C_2(x, y, z, t) = t$
		dos	$C_1(x, y, z, t) = -x^2 - y^2 + z^2$ $C_2(x, y, z, t) = t$
uno	centro	cero	$C_1(x, y, z, t) = x^2 + y^2$ $C_2(x, y, z, t) = t$
		dos	$C_1(x, y, z, t) = x^2 + y^2$ $C_2(x, y, z, t) = t$
	silla	uno	$C_1(x, y, z, t) = -x^2 + y^2$ $C_2(x, y, z, t) = t$

 Cuadro 3.2: Mapeos Casimir para cada N_j .

Cuarto Paso Con la matriz Π encontrada en el cuadro 3.4 dependiendo el caso, podemos describir su 2-campo vectorial asociado π dependiendo el caso.

- Si $\dim(N_j) = 0$, N_j es del tipo centro y su índice de Morse es cero o tres, entonces el 2-campo vectorial de Poisson es

$$\pi = k \left(z \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + x \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.1)$$

- Si $\dim(N_j) = 0$, N_j es del tipo silla y su índice de Morse es uno, entonces el 2-campo vectorial de Poisson es

$$\pi = k \left(-z \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + x \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.2)$$

- Si $\dim(N_j) = 0$, N_j es del tipo silla y su índice de Morse es dos, entonces el 2-campo vectorial de Poisson es

$$\pi = k \left(-z \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + x \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.3)$$

$\dim(N_j)$	Tipo	Índice de Morse	Diferenciales de C_1 y C_2
cero	centro	cero	$dC_1 = 2x \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial y} + 2z \frac{\partial}{\partial z}$. $dC_2 = \frac{\partial}{\partial t}$.
		tres	$dC_1 = -2x \frac{\partial}{\partial x} - 2y \frac{\partial}{\partial y} - 2z \frac{\partial}{\partial z}$. $dC_2 = \frac{\partial}{\partial t}$.
	silla	uno	$dC_1 = -2x \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial y} + 2z \frac{\partial}{\partial z}$. $dC_2 = \frac{\partial}{\partial t}$.
		dos	$dC_1 = -2x \frac{\partial}{\partial x} - 2y \frac{\partial}{\partial y} + 2z \frac{\partial}{\partial z}$. $dC_2 = \frac{\partial}{\partial t}$.
uno	centro	cero	$dC_1 = 2x \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial y}$. $dC_2 = \frac{\partial}{\partial t}$.
		dos	$dC_1 = -2x \frac{\partial}{\partial x} - 2y \frac{\partial}{\partial y}$. $dC_2 = \frac{\partial}{\partial t}$.
	silla	uno	$dC_1 = -2x \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial y}$. $dC_2 = \frac{\partial}{\partial t}$.

Cuadro 3.3: Diferenciales de los mapeos Casimir considerados en el cuadro 3.2.

- Si $\dim(N_j) = 1$, N_j es del tipo centro y su índice de Morse es cero o dos, entonces el 2–campo vectorial de Poisson es

$$\pi = k \left(-y \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + x \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.4)$$

- Si $\dim(N_j) = 1$, N_j es del tipo silla y su índice de Morse es uno, entonces su 2–campo vectorial de Poisson es

$$\pi = k \left(y \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + x \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.5)$$

Notemos que todos los 2–campos vectoriales π de la forma 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 son estructuras de Poisson en X , al no depender del parámetro t , podemos restringir a $\pi|_{M \times \{t\}} \simeq \pi|_M$, es decir, las estructuras de Poisson locales que hemos encontrado son también estructuras de Poisson sobre M .

Observación 2 Además se tiene que el mapeo $k = k(x, y, z, t)$ es un mapeo liso no cero en X . Si consideramos a $k = k(x, y, z)$ un mapeo liso no cero en M , por el lema 2.4 tenemos que hemos encontrado una familia de estructuras de

$\dim(N_j)$	Tipo	Índice de Morse	Matriz π
cero	centro	cero	$\begin{pmatrix} 0 & z & -y & 0 \\ -z & 0 & x & 0 \\ y & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
		tres	$\begin{pmatrix} 0 & z & -y & 0 \\ z & 0 & x & 0 \\ y & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
	silla	uno	$\begin{pmatrix} 0 & -z & y & 0 \\ z & 0 & x & 0 \\ -y & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
		dos	$\begin{pmatrix} 0 & -z & -y & 0 \\ z & 0 & x & 0 \\ y & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
uno	centro	cero	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -y & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ y & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
		dos	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -y & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ y & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
	silla	uno	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ -y & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Cuadro 3.4: Matriz Π para cada caso de N_j

Poisson sobre $U_p = \Sigma_p^3 \times \bar{N}_j^0$ o $U_c = \Sigma_p^2 \times \bar{N}_j^1$ (dependiendo el caso donde este definido π) que sólo dependen de un mapeo k y donde $\bar{N}_j^{n_j}$ es una vecindad

abierto de N_j de dimensión n_j .

3.2. Estructura de Poisson Global

Ahora vamos a extender las expresiones locales de los 2–campos vectoriales de Poisson definidos en las vecindades de las singularidades $N_j \subset \text{Sing}(\mathcal{F})$.

Consideramos la foliación lisa y compacta \mathcal{F} de codimensión uno con singularidades de Bott-Morse sobre una variedad M lisa, conexa, cerrada y orientable, y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ el mapeo de Bott-Morse que induce dicha foliación \mathcal{F} .

Empecemos notando que una de las consecuencias del teorema 1.3 es que el conjunto singular de \mathcal{F} es igual a:

- $\{p_1, p_2\}$, donde p_1, p_2 son puntos o
- $\{c_1, c_2\}$, donde c_1 y c_2 son círculos.

Ahora buscamos un abierto $W \subset M$ que no contenga puntos o conjuntos singulares (dependiendo cual sea el caso) y una estructura de Poisson regular en W . Esto lo hacemos en la siguiente proposición y para ello consideramos vecindades U_{p_1} y U_{p_2} de p_1 y p_2 respectivamente, y vecindades tubulares U_{c_1} y U_{c_2} de c_1 y c_2 respectivamente. Además las vecindades U_{p_i} y U_{c_i} son como en la observación 2.

Proposición 3.1 *Sea \mathcal{F} una foliación lisa compacta de codimensión uno con singularidades de Bott-Morse sobre una variedad lisa conexa cerrada y orientable M . Entonces existen:*

- a) *Un abierto $W \subset M$ que no contiene a $\text{Sing}(\mathcal{F})$.*
- b) *Una estructura de Poisson $\hat{\pi}$ regular de rango dos sobre W de tal manera que la hojas simplécticas de la foliación inducida por $\hat{\pi}$ coinciden con la intersección de las hojas de \mathcal{F} con W . Además la región W satisface*
 - $M = W \cup U_{p_1} \cup U_{p_2}$, cuando $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \{p_1, p_2\}$,
 - $M = W \cup U_{c_1} \cup U_{c_2}$, cuando $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \{c_1, c_2\}$.

Demostración.

Para la parte *a*) consideremos primero el caso cuando $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \{p_1, p_2\}$. Ahora sea V_{p_i} una vecindad del punto singular $p_i \in M$ de tal manera que satisfaga $V_{p_i} \subset U_{p_i}$ para $i = 1, 2$. Definimos

$$W = M - (U_{p_1} \bar{\cap} U_{p_2}),$$

donde la barra denota la clausura en el sentido topológico. Para el caso cuando $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \{c_1, c_2\}$, se procede de manera análoga.

Para la parte *b*) notemos que $\mathcal{F}|_W$ no tiene singularidades sin importar para qué caso calculamos a W . Además se tiene que las hojas de \mathcal{F} son variedades simplécticas de dimensión dos, pues \mathcal{F} es de codimensión uno y es orientable.

Por lo tanto aplicando el teorema 2.6, existe una estructura de Poisson $\hat{\pi}$ definida en W cuyas hojas simplécticas de la foliación inducida por $\hat{\pi}$ coinciden con la intersección de las hojas de la foliación \mathcal{F} con W . \square

Para tener en claro los conjuntos con los que vamos a trabajar, recomendamos al lector observar la figura 3.1 en caso cuando sea necesario.

Ahora vamos a definir una estructura de Poisson global $\hat{\Pi}$ en M cuyas hojas simplécticas de la foliación inducida por $\hat{\Pi}$ están relacionadas con la foliación \mathcal{F} en el siguiente sentido. El rango de $\hat{\Pi}$ es dos en M excepto en $\text{Sing}(\mathcal{F})$, donde el rango desciende a cero. Las hojas simplécticas de la foliación inducida por $\hat{\Pi}$ son las hojas de la foliación \mathcal{F} que son variedades simplécticas, pues \mathcal{F} es de codimensión uno y orientable.

Si $p_i \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ para $i = 1, 2$ contenido en la hoja singular \mathcal{F}_p de la foliación \mathcal{F} , entonces $\mathcal{F}_p - \{p\}$ es una hoja simpléctica de dimensión dos de $\hat{\Pi}$. Ahora sí estamos listos para probar el resultado central de este trabajo de investigación expresado en el siguiente teorema.

Teorema 3.1 *Sea \mathcal{F} una foliación lisa y compacta de codimensión uno con singularidades de Bott-Morse sobre una variedad lisa, conexa, cerrada y orientable M^3 , y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ el mapeo de Bott-Morse que da lugar a \mathcal{F} . Entonces, existe*

una estructura de Poisson completa en M^3 de rango dos tal que el tensor de Poisson asociado a ésta estructura solo se anula en dos puntos o en dos círculos que corresponden exactamente a la singularidades de las foliación \mathcal{F} .

Demostración

La idea de la prueba es utilizar el teorema 1.3 de Seade y Scárdura, y definir una estructura de Poisson $\hat{\Pi}$ como:

- $\hat{\pi}$ para puntos lejanos del conjunto $\text{Sing}(\mathcal{F})$,
- π de la forma 3.1, 3.2 ó 3.3 para puntos en $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \{p_1, p_2\}$,
- π de la forma 3.4 ó 3.5 para puntos en $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \{c_1, c_2\}$,

y definir una transición lisa de $\hat{\pi}$ a π y viceversa. Ésto con ayuda de los lemas 2.3 y 2.4.

Notemos que en algún momento tenemos que utilizar una interpolación lisa entre $\hat{\pi}$ y π , es decir, necesitamos una manera de como ir de una estructura de Poisson a otra. Esto lo hacemos de la siguiente manera.

Recordemos que la estructura de Poisson π es de la forma 3.1, 3.2 ó 3.3 si $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \{p_1, p_2\}$ ésta definida sobre $U_p = U_{p_1} \cap U_{p_2}$. ó π es de la forma 3.4 ó 3.5 si $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \{c_1, c_2\}$ ésta definida sobre $U_c = U_{c_1} \cap U_{c_2}$.

Además, recordemos de la proposición 3.1 que el subconjunto $W \subset M$ está dado en términos del conjunto U_p o U_c que cumplen que $\text{Sing}(\mathcal{F}) \subset U_p$ o $\text{Sing}(\mathcal{F}) \subset U_c$, respectivamente.

Si $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \{p_1, p_2\}$ definimos $\hat{\Pi}$ por

$$\hat{\Pi}(p) = \begin{cases} \hat{\pi}(p) & \text{si } p \in (W - U_p), \\ \pi(p) & \text{si } p \in \bar{U}_p, \end{cases} \quad (3.6)$$

donde π puede ser de la forma 3.1, 3.2 ó 3.3.

Para el caso en que $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \{c_1, c_2\}$ entonces $\hat{\Pi}$ es definida como

$$\hat{\Pi}(p) = \begin{cases} \hat{\pi}(p) & \text{si } p \in (W - U_c) \\ \pi(p) & \text{si } p \in \bar{U}_c \end{cases} \quad (3.7)$$

donde π puede ser de la forma 3.4 ó 3.5.

Ahora basta definir a $\hat{\Pi}$ en el conjunto $W \cap U_p$ cuando $\text{Sing}(f) = \{p_1, p_2\}$. Debemos recordar que en este conjunto tenemos definidos los 2–campos vectoriales $\hat{\pi}$ por la proposición 3.1 y π por la construcción realizada en la sección 3.1.

Notemos que la construcción que a continuación vamos a realizar para el otro caso, es decir, cuando $\text{Sing}(f) = \{c_1, c_2\}$, es completamente análoga.

Cabe recordar que $\hat{\pi}|_{W \cap U_p}$ y $\pi|_{W \cap U_p}$ tienen rango dos y poseen la misma foliación simpléctica. Por el lema 2.3 existe un mapeo $g \in C^\infty(W \cap U_p)$ tal que $\hat{\pi} = g\pi$.

Podemos asumir que g es positiva y consideramos una familia de mapeos lisos $\tau_i : Z \rightarrow [0, 1]$ para $i = 1, 2$ y definidas como

$$\tau_1(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \in U_p \\ 1 & \text{si } p \notin W \end{cases} \quad \text{y} \quad \tau_2(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \notin U_p \\ 0 & \text{si } p \in W \end{cases}$$

La familia τ_i es una partición dominada por $\{W, U_p\}$ y donde $Z \subset W \bar{\cap} U_p$ en un conjunto abierto. En la figura 3.1 podemos observar como es el comportamiento de τ_1 y τ_2 en los conjuntos definidos anteriormente.

Ahora podemos extender el mapeo $\hat{\Pi}$ definido en 3.6 como

$$\hat{\Pi}(p) = \begin{cases} \hat{\pi}(p) & \text{si } p \in (W - \{U_p\}) \\ \pi(p) & \text{si } p \in \bar{U}_p \\ (g(p)\tau_1(p) + \tau_2(p))\pi & \text{si } p \in (W \cap U_p) \end{cases} \quad (3.8)$$

Cabe resaltar que $\hat{\Pi}(p)$ para $p \in W \cap U_p$ es una interpolación lisa de la definición de $\hat{\Pi}$ en \bar{U}_p y $\hat{\Pi}$ en $W - \{U_p\}$.

Por el lema 2.4, podemos concluir que $\hat{\Pi}$ es una estructura de Poisson en $W \cap U_p$, pues el mapeo $g\tau_1 + \tau_2$ es no negativo. Además las hojas simplécticas de la foliación inducida por el 2–campo vectorial $\hat{\Pi}$ coinciden con las hojas simplécticas de la foliación inducida por el 2–campo vectorial $\hat{\pi}$.

Por la proposición 3.1 obtenemos que las hojas simplécticas de la foliación in-

ducida por $\hat{\pi}$ en $W \cap U_p$ coincide con la intersección de las hojas de la foliacion \mathcal{F} con $W \cap U_p$.

Por lo tanto hemos construido una estructura de Poisson en una variedad lisa M^3 orientable, conexa y cerrada dotada de una foliación \mathcal{F} de codimensión uno con singularidades de Bott-Morse. \square

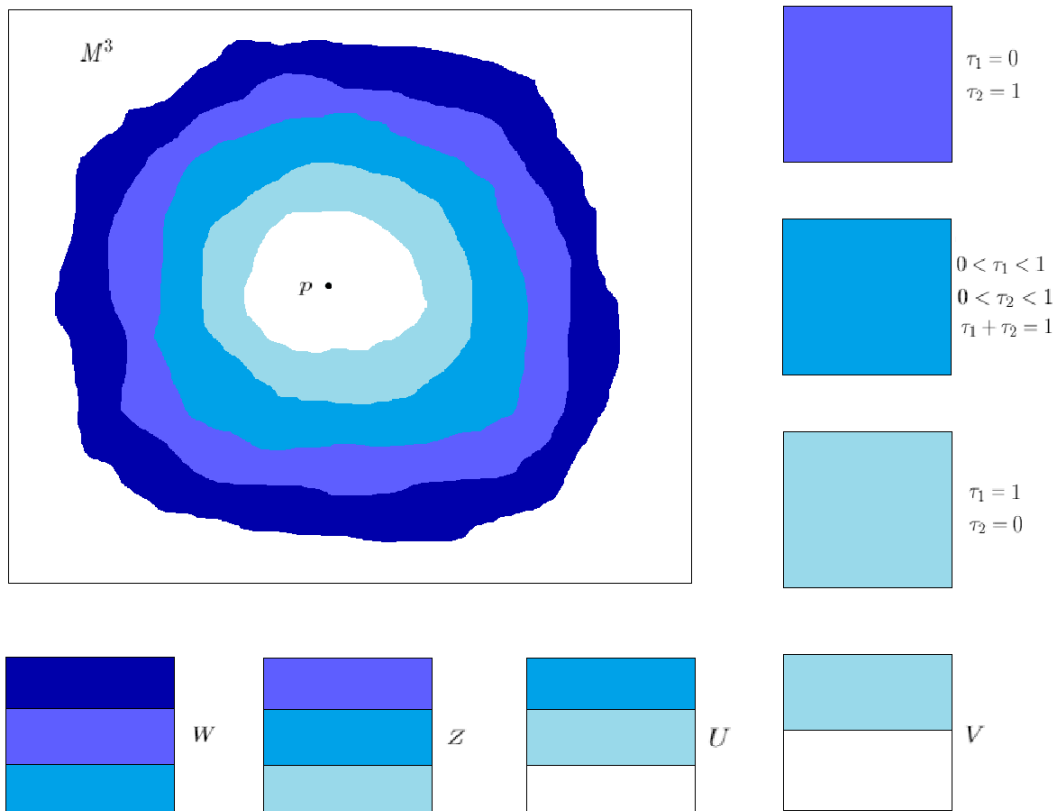


Figura 3.1: Comportamiento de τ_1 y τ_2 , y descripción de los conjuntos U , V , W y Z .

3.3. Estructuras Simplécticas Inducidas

Terminaremos este trabajo de investigación describiendo cómo son las estructuras simplécticas en la hojas simplécticas de la foliación característica inducida

por los 2–campos vectoriales locales encontrados en la sección 3.1.

Explicaremos brevemente el procedimiento general que utilizaremos para encontrar dichas estructuras simplécticas.

- i) Seleccionamos el 2–campo vectorial π como en 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5.
- ii) Seleccionamos los mapeos casimires C_1 y C_2 para π .
- iii) Obtenemos los vectores tangentes u_p y v_p a la hoja simpléctica L_p en el punto $p \in M$, calculando el espacio nulo de las diferenciales dC_1 y dC_2 .
- iv) Utilizamos el 2–campos vectorial π para encontrar α_p y β_p tal que $\pi_p^\#(\alpha_p) = u_p$ y $\pi_p^\#(\beta_p) = v_p$.
- v) Calcular la forma simpléctica utilizando la ecuación 2.15.

Proposición 3.2 *Sea $p = (x, y, z, t) \in M^3 \times \mathbb{S}^1$ y π de la forma 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 ó 3.5. La forma simpléctica inducida por π en la hoja simpléctica L_p a través del punto p de la foliación simpléctica inducida por el 2–campo vectorial π está dada como:*

$$\frac{x}{k(x, y, z, t)\sqrt{x^2 + y^2}}\omega_{area}(p) \quad (3.9)$$

donde ω_{area} es la forma de área en la hoja L_p iducida por la métrica euclideana en $M^3 \times \mathbb{S}^1$.

Demostración.

Asumamos que $x^2 + y^2 \neq 0$ y elegimos los mapeos Casimir dependiendo del 2–campo vectorial π elegido.

Con ayuda del programa escrito en código de Python explicado a detalle en A.2, tenemos los siguientes vectores tangentes u_p y v_p mostrados en el siguiente cuadro 3.6.

Notemos que estos vectores son anulados por $dC_1(q)$ y $dC_2(q)$. Además estos vectores son ortogonales con respecto a la métrica euclideana $dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2$.

	Tipo	Índice de Morse	Mapeos Casimir
$\dim(N_j) = 0$	centro	cero	$C_1(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2$ $C_2(x, y, z, t) = t$
		tres	$C_1(x, y, z, t) = -x^2 - y^2 - z^2$ $C_2(x, y, z, t) = t$
	silla	uno	$C_1(x, y, z, t) = -x^2 + y^2 + z^2$ $C_2(x, y, z, t) = t$
		dos	$C_1(x, y, z, t) = -x^2 - y^2 + z^2$ $C_2(x, y, z, t) = t$
$\dim(N_j) = 1$	centro	cero	$C_1(x, y, z, t) = x^2 + x^2$ $C_2(x, y, z, t) = t$
		dos	$C_1(x, y, z, t) = x^2 + x^2$ $C_2(x, y, z, t) = t$
	silla	uno	$C_1(x, y, z, t) = -x^2 + y^2$ $C_2(x_1, x_2, x_3, t) = t$

Cuadro 3.5: Mapeos Casimir consideramos para cada caso de N_j .

	Tipo	Índice de Morse	u_q	v_q
$\dim(N_j) = 0$	centro	cero	$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-y\partial_1 + x\partial_2)$	$\frac{-1}{x^2+y^2}(x^2z\partial_1 + xyz\partial_2) + x\partial_3$
		tres	$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-y\partial_1 + x\partial_2)$	$\frac{-1}{x^2+y^2}(x^2z\partial_1 + xyz\partial_2) + x\partial_3$
	silla	uno	$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(y\partial_1 + x\partial_2)$	$\frac{-1}{x^2+y^2}(x^2z\partial_1 - xyz\partial_2) + x\partial_3$
		dos	$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-y\partial_1 + x\partial_2)$	$\frac{-1}{x^2+y^2}(x^2z\partial_1 + xyz\partial_2) + x\partial_3$
$\dim(N_j) = 1$	centro	cero	$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-y\partial_1 + x\partial_2)$	$x\partial_3$
		dos	$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-y\partial_1 + x\partial_2)$	$x\partial_3$
	silla	uno	$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(y\partial_1 + x\partial_2)$	$x\partial_3$

Cuadro 3.6: Vectores tangentes a las fibras.

Ahora para cada caso utilizamos la estructura de Poisson local para encontrar cada α_p dependiendo el caso mostrados en el cuadro 3.7, con el programa escrito en código Python, es fácil verificar que $\pi_p^\#(\alpha_p) = u_p$.

De la misma manera obtenemos β_q tal que $\mathcal{B}_q(\beta_q) = v_q$.

	Tipo	Índice de Morse	α_q
$\dim(N_j) = 0$	centro	cero	$\frac{-1}{k(x,y,z,t)z\sqrt{x^2+y^2}}(x\partial_1 + y\partial_2)$
		tres	$\frac{-1}{k(x,y,z,t)z\sqrt{x^2+y^2}}(x\partial_1 + y\partial_2)$
	silla	uno	$\frac{1}{k(x,y,z,t)z\sqrt{x^2+y^2}}(x\partial_1 - y\partial_2)$
		dos	$\frac{1}{k(x,y,z,t)z\sqrt{x^2+y^2}}(x\partial_1 + y\partial_2)$
$\dim(N_j) = 1$	centro	cero	$\frac{1}{k(x,y,z,t)\sqrt{x^2+y^2}}(x\partial_3)$
		dos	$\frac{1}{k(x,y,z,t)\sqrt{x^2+y^2}}(x\partial_3)$
	silla	uno	$\frac{1}{k(x,y,z,t)\sqrt{x^2+y^2}}(x\partial_3)$

Cuadro 3.7: $\mathcal{B}_p(\alpha_q) = u_p$

	Tipo	Índice de Morse	β_q
$\dim(N_j) = 0$	centro	cero	$\frac{1}{k(x,y,z,t)x^2+y^2}(xy\partial_1 - x^2\partial_2)$
		tres	$\frac{1}{k(x,y,z,t)x^2+x^2}(xy\partial_1 - x^2\partial_2)$
	silla	uno	$\frac{-1}{k(x,y,z,t)x^2+y^2}(xy\partial_1 + x^2\partial_2)$
		dos	$\frac{1}{k(x,y,z,t)x^2+y^2}(xy\partial_1 - x^2\partial_2)$
$\dim(N_j) = 1$	centro	cero	$\frac{1}{k(x,y,z,t)y}(x\partial_1)$
		dos	$\frac{1}{k(x,y,z,t)y}(x\partial_1)$
	silla	uno	$\frac{-1}{k(x,y,z,t)y}(x\partial_1)$

Cuadro 3.8: $\mathcal{B}_q(\beta_q) = v_q$

Es fácil notar que al calcular la expresión de la forma simpléctica para cada caso está dada:

$$\begin{aligned}
\omega_{\Gamma_p}(u_p, v_p) &= \langle \alpha_p, v_p \rangle \\
&= -\langle \beta_p, u_p \rangle \\
&= \frac{x}{k(x,y,z,t)\sqrt{x^2+y^2}}\omega_{area}(p)
\end{aligned}$$

Para terminar notemos que al restringir el mapeo $k(x,y,z,t)|_{M^3}$ obtenemos que $\omega_{\Gamma_p}(u_p, v_p)$ es una forma simpléctica para la hoja L_p de la foliación simpléctica inducida por los 2-campos vectoriales π definidos en M^3 , encontrados en la sección 3.1. \square .

Así concluimos este trabajo de investigación dejando la siguiente pregunta:

¿Qué podemos decir de la cohomología de Poisson de los 2–campos vectoriales de Poisson encontrados?

En esta pregunta nos encontramos trabajando para darle pronta respuesta; cabe mencionar que el problema de calcular cohomologías de Poisson es complicado.

Apéndice A

Códigos en Python

En el siguiente apartado describiremos los códigos que fueron desarrollados durante la elaboración de esta tesis. En la sección A.1 se presenta un código que fue utilizado para hacer los cálculos correspondientes para encontrar las estructuras de Poisson dadas en 3.1. El código que aparece en la sección A.2 se usa para las estructuras simplécticas inducidas por las estructuras de Poisson dadas en 3.2. En la sección A.3 se presenta un código que fue desarrollado para comprobar cuando un bivector es de Poisson, es decir, calculamos $[\pi, \pi]$.

Todos los códigos presentados aquí fueron elaborados en el lenguaje de programación Python, utilizando los módulos Sympy [MSP⁺17] y Galgebra [Bro16].

A.1. Estructuras de Poisson

A continuación explicaremos como funciona el código que calcula la estructura de Poisson mediante pequeños *scripts*. El código está basado de la fórmula 2.16 de Flaska-Ratiu, recordemos que dicho código necesita de dos funciones Casimir para poder calcular la estructura de Poisson.

Empezamos importando el módulo `sympy`¹, el cual se utiliza para desarrollar cálculo simbólico en python.

¹Para más información sobre `sympy` consultar <http://docs.sympy.org/latest/index.html>

```
import sympy as sym
```

Definimos las variables simbólicas x , y , z y t con las cuales describimos los modelos locales de las singularidades de la foliación $M \times \mathbb{S}^1$, así como las variables simbólicas a_{12} , a_{13} , a_{14} , a_{23} , a_{24} y a_{34} que serán las entradas de la matriz P , que definiremos más adelante.

```
x = sym.Symbol('x')
y = sym.Symbol('y')
z = sym.Symbol('z')
t = sym.Symbol('t')
k = sym.Symbol('k')

a12 = sym.Symbol('a12')
a13 = sym.Symbol('a13')
a14 = sym.Symbol('a14')
a23 = sym.Symbol('a23')
a24 = sym.Symbol('a24')
a34 = sym.Symbol('a34')
```

Escribimos los modelos locales de las singularidades de foliación $M \times \mathbb{S}^1$ que son:

$$F(x, y, z, t) = \begin{cases} (x^2 + y^2 + z^2, t) & \text{si } \dim(N_j) = 0 \quad y \quad im = 0 \\ (-x^2 + y^2 + z^2, t) & \text{si } \dim(N_j) = 0 \quad y \quad im = 1 \\ (-x^2 - y^2 + z^2, t) & \text{si } \dim(N_j) = 0 \quad y \quad im = 2 \\ (-x^2 - y^2 - z^2, t) & \text{si } \dim(N_j) = 0 \quad y \quad im = 3 \\ (x^2 + y^2, t) & \text{si } \dim(N_j) = 1 \quad y \quad im = 0 \\ (-x^2 + y^2, t) & \text{si } \dim(N_j) = 1 \quad y \quad im = 1 \\ (-x^2 - y^2, t) & \text{si } \dim(N_j) = 1 \quad y \quad im = 2 \end{cases}$$

donde im denotará el índice de Morse de $f(x, y, z)$. Así tenemos que $\mathbf{faux} = t$ y $\mathbf{f0} = x^2 + y^2 + z^2$ en esta caso, ya que es la única que no esta comentada en el código.

```
faux = t
f0 = x**2+y**2+z**2
```

```
# Esto es un comentario en python
# f0 = -x**2+y**2+z**2
# f0 = -x**2-y**2+z**2
# f0 = -x**2-y**2-z**2
# f0 = x**2+y**2
# f0 = -x**2+y**2
# f0 = -x**2-y**2
```

Definimos la matriz antisimétrica

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix}.$$

```
P = sym.Matrix ([[0, a12, a13, a14, ], [-a12, 0, a23, a24], [-a13, -
a23, 0, a34], [-a14, -a24, -a34, 0]])
```

Definimos una función que llamaremos `EstPoisson` e inmediatamente calculamos el gradiente de la función `f0`.

```
def EstPoisson():
    Gra = sym.Matrix ([[sym.diff(faux,x), sym.diff(f0,x)], [sym.
diff(faux,y), sym.diff(f0,y)], [sym.diff(faux,z), sym.diff(f0,z)
], [sym.diff(faux,t),sym.diff(f0,t)]])
```

De lo anterior obtenemos

$$Gra = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial x} & \frac{\partial f_0}{\partial y} & \frac{\partial f_0}{\partial z} & \frac{\partial f_0}{\partial t} \\ \frac{\partial faux}{\partial x} & \frac{\partial faux}{\partial y} & \frac{\partial faux}{\partial z} & \frac{\partial faux}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Ahora calculamos

$$S1 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial x} \\ \frac{\partial f_0}{\partial y} \\ \frac{\partial f_0}{\partial z} \\ \frac{\partial f_0}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

```
A = (M*Gra[:,0]).row(0)[0]
B = (M*Gra[:,0]).row(1)[0]
C = (M*Gra[:,0]).row(2)[0]
D = (M*Gra[:,0]).row(3)[0]
```

y

$$S2 = \begin{pmatrix} 0 & a12 & a13 & a14 \\ -a12 & 0 & a23 & a24 \\ -a13 & -a23 & 0 & a34 \\ -a14 & -a24 & -a34 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial faux}{\partial x} \\ \frac{\partial faux}{\partial y} \\ \frac{\partial faux}{\partial z} \\ \frac{\partial faux}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

```
E = (P*Gra[:,1]).row(0)[0]
F = (P*Gra[:,1]).row(1)[0]
G = (P*Gra[:,1]).row(2)[0]
H = (P*Gra[:,1]).row(3)[0]
```

Resolvemos simultáneamente los sistemas $S1 = 0$ y $S2 = 0$, y guardamos los valores obtenidos en las variables simbólicas $A12$, $A13$, $A14$, $A23$, $A24$ y $A34$.

```
A12, A13, A14, A23, A24, A34 = list(sym.linsolve([A,B,C,D,E,F,G,
H], (a12, a13, a14, a23, a24, a34))) [0]
```

Para finalizar la función `EstPoisson`, asignamos los valores $A12$, $A13$, $A14$, $A23$, $A24$ y $A34$ a una nueva matriz N , que es la matriz de Poisson buscada.

```
N = sym.Matrix ([[0, A12, A13, A14,], [-A12, 0, A23, A24],
[-A13, -A23, 0, A34], [-A14, -A24, -A34, 0]])
return N
```

Al unir todos los bloques de scripts anteriores, nuestro código de Python se verá de la siguiente manera.

```
1 import sympy as sym
2
```

```

3 x = sym.Symbol('x')
4 y = sym.Symbol('y')
5 z = sym.Symbol('z')
6 t = sym.Symbol('t')
7 k = sym.Symbol('k')
8
9 a12 = sym.Symbol('a12')
10 a13 = sym.Symbol('a13')
11 a14 = sym.Symbol('a14')
12 a23 = sym.Symbol('a23')
13 a24 = sym.Symbol('a24')
14 a34 = sym.Symbol('a34')
15
16 faux = t
17 f0 = x**2+y**2+z**2
18 # f0 = -x**2+y**2+z**2
19 # f0 = -x**2-y**2+z**2
20 # f0 = -x**2-y**2-z**2
21 # f0 = x**2+y**2
22 # f0 = -x**2+y**2
23 # f0 = -x**2-y**2
24
25 P = sym.Matrix ([[0, a12, a13, a14, ], [-a12, 0, a23, a24], [-a13, -
    a23, 0, a34], [-a14, -a24, -a34, 0]])
26
27 def EstPoisson():
28     Gra = sym.Matrix ([[sym.diff(faux,x), sym.diff(f0,x)], [sym.diff
    (faux,y), sym.diff(f0,y)], [sym.diff(faux,z), sym.diff(f0,z)], [
    sym.diff(faux,t),sym.diff(f0,t) ]])
29     A = (P*Gra[:,0]).row(0)[0]
30     B = (P*Gra[:,0]).row(1)[0]
31     C = (P*Gra[:,0]).row(2)[0]
32     D = (P*Gra[:,0]).row(3)[0]
33     E = (P*Gra[:,1]).row(0)[0]
34     F = (P*Gra[:,1]).row(1)[0]
35     G = (P*Gra[:,1]).row(2)[0]
36     H = (P*Gra[:,1]).row(3)[0]
37     A12,A13,A14,A23,A24,A34 = list(sym.linsolve([A,B,C,D,E,F,G,H],(
    a12,a13,a14,a23,a24,a34)))[0]
38     N = sym.Matrix ([[0, A12, A13, A14, ], [-A12, 0, A23, A24], [-
    A13, -A23, 0,A34], [-A14, -A24, -A34, 0]])
39     return N

```



```

40
41 print(EstPoisson())

```

Para poder ejecutar el código copie y pegue el script anterior, configure el archivo en las variables correspondientes, guarde el archivo con el nombre `poisson.py` por ejemplo y por último abra la consola (ventana de comandos) en el directorio donde se encuentra el archivo `poisson.py` y escriba `python poisson.py`.

A.2. La Estructura Simpléctica Inducida

Para explicar el código que hace el cálculo de la estructura simpléctica inducida por una estructura de Poisson, debemos tener presente que necesitamos del código presentado en la sección A.1. En esta sección sólo nos limitamos a explicar la función `EstSimplectica`.

Definimos la función, obtenemos el gradiente del mapeo `f0` y calculamos una base para su espacio nulo.

```

def EstSimplectica():
    Gra = sym.Matrix ([[sym.diff(f0,x), sym.diff(faux,x)], [sym.
diff(f0,y), sym.diff(faux,y)], [sym.diff(f0,z), sym.diff(faux,z)
], [sym.diff(f0,t), sym.diff(faux,t) ]])
    Ker1 = (Gra.T).nullspace()[0]
    Ker2 = (Gra.T).nullspace()[1]

```

Dada la base del espacio nulo del gradiente de `f0`, obtenemos una base ortonormal mediante el proceso de Gram-Schmidt, para así obtener los vectores U_q y V_q . Esta base ortogonal ayudará a facilitar los cálculos.

```

GS = sym.GramSchmidt([Ker1, Ker2], orthonormal=False)
Uq = GS[0]/(sym.sqrt(GS[0].dot(GS[0])))
Vq = sym.simplify(GS[1])

```

Llamamos la función `EstPoisson` definida en A.1.

```
N = EstPoisson()
```

Definimos las variables simbólicas a, b, c y d , para obtener el vector columna

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

```
a = sym.Symbol('a')
b = sym.Symbol('b')
c = sym.Symbol('c')
d = sym.Symbol('d')
alfa = sym.Matrix([[a],[b],[c],[d]])
```

Ahora calculamos

$$S1 = \begin{pmatrix} 0 & A12 & A13 & A14 \\ -A12 & 0 & A23 & A24 \\ -A13 & -A23 & 0 & A34 \\ -A14 & -A24 & -A34 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} U_{q_1} \\ U_{q_2} \\ U_{q_3} \\ U_{q_4} \end{pmatrix},$$

mediante el siguiente script.

```
X = (N*alfa)-Uq
X1 = ((N*alfa)-Uq).row(0)[0]
X2 = ((N*alfa)-Uq).row(1)[0]
X3 = ((N*alfa)-Uq).row(2)[0]
X4 = ((N*alfa)-Uq).row(3)[0]
```

Resolvemos el sistema $S1 = 0$ y asignamos los valores encontrados a las variables A, B, C y D para formar el vector

$$\alpha = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}.$$

```
A,B,C,D = list(sym.linsolve([X1,X2,X3,X4],(a,b,c,d)))[0]
alpha = sym.Matrix([[A],[B],[C],[D]])
```

Definimos las variables simbólicas e , g , h y j , para obtener el vector columna

$$\begin{pmatrix} e \\ g \\ h \\ j \end{pmatrix}.$$

```
e = sym.Symbol('e')
g = sym.Symbol('g')
h = sym.Symbol('h')
j = sym.Symbol('j')
betha = sym.Matrix([[e],[g],[h],[j]])
```

Ahora calculamos

$$S2 = \begin{pmatrix} 0 & A12 & A13 & A14 \\ -A12 & 0 & A23 & A24 \\ -A13 & -A23 & 0 & A34 \\ -A14 & -A24 & -A34 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e \\ g \\ h \\ j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} V_{q1} \\ V_{q2} \\ V_{q3} \\ V_{q4} \end{pmatrix}.$$

```
Y = (N*betha)-Vq
Y1 = ((N*betha)-Vq).row(0)[0]
Y2 = ((N*betha)-Vq).row(1)[0]
Y3 = ((N*betha)-Vq).row(2)[0]
Y4 = ((N*betha)-Vq).row(3)[0]
```

Resolvemos el sistema $S2 = 0$ y asignamos los valores encontrados a las variables

A , B , C y D para formar el vector

$$\beta = \begin{pmatrix} E \\ G \\ H \\ J \end{pmatrix}$$

```
E,G,H,J = list(sym.linsolve([[Y1,Y2,Y3,Y4],[e,g,h,j]])[0])
beta = sym.Matrix([[E],[G],[H],[J]])
```

Calculamos la formas simplécticas como sigue, $w_1 = \langle \alpha, V_q \rangle$ y $w_2 = \langle \beta, U_q \rangle$.

```
w1 = sym.simplify(alpha.dot(Vq))
w2 = sym.simplify(-beta.dot(Uq))
Comp = sym.simplify(w1-w2)
```

Por último la función EstSimplectica no debe regresar la forma simpléctica w_1 , w_2 y la comprobación que las mismas son iguales.

```
return [w1, w2, Comp]
```

Juntando todos los scripts anteriores, el programa para calcular la estructura simpléctica inducida por una estructura de Poisson se ve de la siguiente forma.

```
1 def EstSimplectica():
2     Gra = sym.Matrix([[sym.diff(f0,x), sym.diff(faux,x)],[sym.diff
3     (f0,y), sym.diff(faux,y)],[sym.diff(f0,z), sym.diff(faux,z)],[
4     sym.diff(f0,t),sym.diff(faux,t)]]))
5
6     Ker1 = (Gra.T).nullspace()[0]
7     Ker2 = (Gra.T).nullspace()[1]
8
9
10    GS = sym.GramSchmidt([Ker1,Ker2], orthonormal=False)
11    Uq = GS[0]/(sym.sqrt(GS[0].dot(GS[0])))
12    Vq = sym.simplify(GS[1])
13
14    N = EstPoisson()
15    a = sym.Symbol('a')
16    b = sym.Symbol('b')
```

```

13     c = sym.Symbol('c')
14     d = sym.Symbol('d')
15     alfa = sym.Matrix([[a],[b],[c],[d]])
16     X = (N*alfa)-Uq
17     X1 = ((N*alfa)-Uq).row(0)[0]
18     X2 = ((N*alfa)-Uq).row(1)[0]
19     X3 = ((N*alfa)-Uq).row(2)[0]
20     X4 = ((N*alfa)-Uq).row(3)[0]
21     A,B,C,D = list(sym.linsolve([X1,X2,X3,X4],[a,b,c,d]))[0]
22     alpha = sym.Matrix([[A],[B],[C],[D]])
23
24     e = sym.Symbol('e')
25     g = sym.Symbol('g')
26     h = sym.Symbol('h')
27     j = sym.Symbol('j')
28     betha = sym.Matrix([[e],[g],[h],[j]])
29     Y = (N*betha)-Vq
30     Y1 = ((N*betha)-Vq).row(0)[0]
31     Y2 = ((N*betha)-Vq).row(1)[0]
32     Y3 = ((N*betha)-Vq).row(2)[0]
33     Y4 = ((N*betha)-Vq).row(3)[0]
34     E,G,H,J = list(sym.linsolve([Y1,Y2,Y3,Y4],[e,g,h,j]))[0]
35     beta = sym.Matrix([[E],[G],[H],[J]])
36
37     w1 = sym.simplify(alpha.dot(Vq))
38     w2 = sym.simplify(-beta.dot(Uq))
39     Comp = sym.simplify(w1-w2)
40     _return [w1, w2, Comp]

```

Para poder ejecutar el código copie y pegue la función `EstPoisson` de la sección A.1 antes de la función `EstSimplectica` configure el archivo en las variables correspondientes, guarde el archivo con el nombre `poisson.py` por ejemplo y por último abra la consola (ventana de comandos) en el directorio donde se encuentra el archivo `poisson.py` y escriba `python poisson.py`.

A.3. El Corchete de Schouten-Nijenhuis

Explicaremos a detalle mediante scripts como funciona el código para calcular el corchete de Schouten-Nijenhuis (definido como en la sección 2.2) de un 2-campo vectorial consigo mismo y poder determinar cuando un bivector es de Poisson. Empezamos importando los módulos `sympy` y `ga2(galgebra)`, el cual ocupamos para poder operar el producto exterior.

```
import ga
import sympy as sym
```

Definimos las variables que vamos a utilizar, donde $dij := \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$, con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ y $j \in \{2, 3, 4\}$

```
x1 = sym.Symbol('x1')
x2 = sym.Symbol('x2')
x3 = sym.Symbol('x3')
x4 = sym.Symbol('x4')

d12 = sym.Symbol('d12')
d13 = sym.Symbol('d13')
d14 = sym.Symbol('d14')
d23 = sym.Symbol('d23')
d24 = sym.Symbol('d24')
d34 = sym.Symbol('d34')
```

Definimos una métrica en \mathbb{R}^4 , utilizando un método de `ga`.

```
g4coords = (x1, x2, x3, x4)
g4 = ga.Ga('dx1 dx2 dx3 dx4', g=[1,1,1,1], coords=g4coords)
(dx1, dx2, dx3, dx4) = g4.mv()
```

Recordemos que un bivector se puede escribir como

$$\begin{aligned} \pi = & f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3} + f_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_4} \\ & + f_4 \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3} + f_5 \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_4} + f_6 \frac{\partial}{\partial x_3} \wedge \frac{\partial}{\partial x_4}, \end{aligned}$$

²Para más información sobre `ga` recomendamos consultar <https://github.com/brombo/galgebra>

donde $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$.

```
f1 = 0
f2 = -x2
f3 = 0
f4 = x1
f5 = 0
f6 = 0

Pi = f1*(dx1^dx2) + f2*(dx1^dx3) + f3*(dx1^dx4) + f4*(dx2^dx3) + f5
    *(dx2^dx4) + f6*(dx3^dx4)
Piaux = f1*d12 + f2*d13 + f3*d14 + f4*d23 + f5*d24 + f6*d34
```

Definimos la función SN

```
def SN():
```

Ahora vamos a calcular $\frac{\partial \Pi}{\partial \xi_1}$ con el siguiente script.

```
dEspPix1a = (sym.diff(Piaux,d12))*(dx2) #dPi/d(dx1) para la
forma dx1^dx2
dEspPix1b = (sym.diff(Piaux,d13))*(dx3) #dPi/d(dx1) para la
forma dx1^dx3
dEspPix1c = (sym.diff(Piaux,d14))*(dt) #dPi/d(dx1) para la
forma dx1^dx4
```

Análogamente, calculamos el resto de las derivadas parciales con los scripts que se muestran a continuación.

■

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1}$$

```
dNorPix1a = (sym.diff(f1,x1))*(dx1^dx2) #(df1/dx1)^(dx1^
dx2)
dNorPix1b = (sym.diff(f2,x1))*(dx1^dx3) #(df2/dx1)^(dx1^
dx3)
dNorPix1c = (sym.diff(f3,x1))*(dx1^dx4) #(df3/dx1)^(dx1^
dx4)
```

$$\begin{aligned}
dNorPix1d &= (\text{sym. diff}(f4, x1)) * (dx2 \wedge dx3) \#(df4/dx1) \wedge (dx2 \wedge dx3) \\
dNorPix1e &= (\text{sym. diff}(f5, x1)) * (dx2 \wedge dx4) \#(df5/dx1) \wedge (dx2 \wedge dx4) \\
dNorPix1f &= (\text{sym. diff}(f6, x1)) * (dx3 \wedge dx4) \#(df6/dx1) \wedge (dx3 \wedge dx4)
\end{aligned}$$

■

$$\frac{\partial \pi}{\partial \xi_2}$$

$$\begin{aligned}
dEspPix2a &= -(\text{sym. diff}(Piaux, d12)) * (dx1) \#dPi/d(dx2) \text{ para la forma } dx1 \wedge dx2 \\
dEspPix2b &= (\text{sym. diff}(Piaux, d23)) * (dx3) \#dPi/d(dx2) \text{ para la forma } dx2 \wedge dx3 \\
dEspPix2c &= (\text{sym. diff}(Piaux, d24)) * (dx4) \#dPi/d(dx2) \text{ para la forma } dx3 \wedge dx4
\end{aligned}$$

■

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_2}$$

$$\begin{aligned}
dNorPix2a &= (\text{sym. diff}(f1, x2)) * (dx1 \wedge dx2) \#(df1/dx2) \wedge (dx1 \wedge dx2) \\
dNorPix2b &= (\text{sym. diff}(f2, x2)) * (dx1 \wedge dx3) \#(df2/dx2) \wedge (dx1 \wedge dx3) \\
dNorPix2c &= (\text{sym. diff}(f3, x2)) * (dx1 \wedge dx4) \#(df3/dx2) \wedge (dx1 \wedge dx4) \\
dNorPix2d &= (\text{sym. diff}(f4, x2)) * (dx2 \wedge dx3) \#(df4/dx2) \wedge (dx2 \wedge dx3) \\
dNorPix2e &= (\text{sym. diff}(f5, x2)) * (dx2 \wedge dx4) \#(df5/dx2) \wedge (dx2 \wedge dx4) \\
dNorPix2f &= (\text{sym. diff}(f6, x2)) * (dx3 \wedge dx4) \#(df6/dx2) \wedge (dx3 \wedge dx4)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \xi_3}$$

```
dEspPix3a = -(sym.diff(Piaux, d13))*(dx1) #dPi/dx3 para la
forma dx1^dx3
dEspPix3b = -(sym.diff(Piaux, d23))*(dx2) #dPi/dx3 para la
forma dx2^dx3
dEspPix3c = (sym.diff(Piaux, d34))*(dx4) #dPi/dx3 para la
forma dx3^dx4
```

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_3}$$

```
dNorPix3a = (sym.diff(f1, x3))*(dx1^dx2) #(df1/dx3)^(dx1^
dx2)
dNorPix3b = (sym.diff(f2, x3))*(dx1^dx3) #(df2/dx3)^(dx1^
dx3)
dNorPix3c = (sym.diff(f3, x3))*(dx1^dx4) #(df3/dx3)^(dx1^
dx4)
dNorPix3d = (sym.diff(f4, x3))*(dx2^dx3) #(df4/dx3)^(dx2^
dx3)
dNorPix3e = (sym.diff(f5, x3))*(dx2^dx4) #(df5/dx3)^(dx2^
dx4)
dNorPix3f = (sym.diff(f6, x3))*(dx3^dx4) #(df6/dx3)^(dx3^
dx4)
```

$$\frac{\partial \pi}{\partial \xi_4}$$

```
dEspPix4a = -(sym.diff(Piaux, d14))*(dx1) #dPi/d(dx4) para
la forma dx1^dx4
dEspPix4b = -(sym.diff(Piaux, d24))*(dx2) #dPi/d(dx4) para
la forma dx2^dx4
```

```
dEspPix4c = -(sym. diff (Piaux , d34)) *(dx3) #dPi/d(dx4) para
la forma dx3^dx4
```

■

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_4}$$

```
dNorPix4a = (sym. diff (f1 , x4)) *(dx1^dx2) #(df1/dx4)^(dx1^
dx2)
dNorPix4b = (sym. diff (f2 , x4)) *(dx1^dx3) #(df2/dx4)^(dx1^
dx3)
dNorPix4c = (sym. diff (f3 , x4)) *(dx1^dx4) #(df3/dx4)^(dx1^
dx4)
dNorPix4d = (sym. diff (f4 , x4)) *(dx2^dx3) #(df4/dx4)^(dx2^
dx3)
dNorPix4e = (sym. diff (f5 , x4)) *(dx2^dx4) #(df5/dx4)^(dx2^
dx4)
dNorPix4f = (sym. diff (f6 , x4)) *(dx3^dx4) #(df6/dx4)^(dx3^
dx4)
```

Con todos los scripts anteriores podemos calcular el corchete Schouten-Nijenhuis, que para este caso queda de la siguiente manera:

$$[\pi, \pi] = \sum_{i=1}^4 2 \left(\frac{\partial \pi}{\partial \xi_i} \wedge \frac{\partial \pi}{\partial x_i} \right),$$

donde $\xi_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Obteniendo como resultado de la función $[\pi, \pi]$, definida por:

```
SNPi = 2*((dEspPix1a+dEspPix1b+dEspPix1c)^(dNorPix1a+dNorPix1b+
dNorPix1c+dNorPix1d+dNorPix1e+dNorPix1f)) + 2*((dEspPix2a+
dEspPix2b+dEspPix2c)^(dNorPix2a+dNorPix2b+dNorPix2c+dNorPix2d+
dNorPix2e+dNorPix2f)) + 2*((dEspPix3a+dEspPix3b+dEspPix3c)^(
dNorPix3a+dNorPix3b+dNorPix3c+dNorPix3d+dNorPix3e+dNorPix3f)) +
2*((dEspPita+dEspPitb+dEspPitc)^(dNorPita+dNorPitb+dNorPitc+
dNorPitd+dNorPite+dNorPitf))
return SNPi
```

Uniendo todos los scripts anteriores tenemos que el programa para calcular el corchete de Schouten-Nijenhuis queda así.

```

1 import ga
2 import sympy as sym
3
4 x1 = sym.Symbol('x1')
5 x2 = sym.Symbol('x2')
6 x3 = sym.Symbol('x3')
7 x4 = sym.Symbol('x4')
8
9 d12 = sym.Symbol('d12')
10 d13 = sym.Symbol('d13')
11 d14 = sym.Symbol('d14')
12 d23 = sym.Symbol('d23')
13 d24 = sym.Symbol('d24')
14 d34 = sym.Symbol('d34')
15
16 g4coords = (x1, x2, x3, x4)
17 g4 = ga.Ga('dx1 dx2 dx3 dx4', g=[1,1,1,1], coords=g4coords)
18 (dx1, dx2, dx3, dx4) = g4.mv()
19
20 f1 = 0
21 f2 = -x2
22 f3 = 0
23 f4 = x1
24 f5 = 0
25 f6 = 0
26
27 Pi = f1*(dx1^dx2)+f2*(dx1^dx3)+f3*(dx1^dx4)+f4*(dx2^dx3)+f5*(dx2^
    dx4)+f6*(dx3^dx4)
28
29 Piaux = f1*d12+f2*d13+f3*d14+f4*d23+f5*d24+f6*d34
30
31 def SN():
32     # Derivada especial de Pi para dx1
33     dEspPix1a = (sym.diff(Piaux, d12))*(dx2) # dPi/d(dx1) para la
    forma dx1^dx2
34     dEspPix1b = (sym.diff(Piaux, d13))*(dx3) # dPi/d(dx1) para la
    forma dx1^dx3
35     dEspPix1c = (sym.diff(Piaux, d14))*(dx4) # dPi/d(dx1) para la
    forma dx1^dx4

```

```

36 # Derivada normal de Pi para x1
37 dNorPix1a = (sym. diff(f1 , x1))*(dx1^dx2) # (df1/dx1)^(dx1^dx2)
38 dNorPix1b = (sym. diff(f2 , x1))*(dx1^dx3) # (df2/dx1)^(dx1^dx3)
39 dNorPix1c = (sym. diff(f3 , x1))*(dx1^dx4) # (df3/dx1)^(dx1^dx4)
40 dNorPix1d = (sym. diff(f4 , x1))*(dx2^dx3) # (df4/dx1)^(dx2^dx3)
41 dNorPix1e = (sym. diff(f5 , x1))*(dx2^dx4) # (df5/dx1)^(dx2^dx4)
42 dNorPix1f = (sym. diff(f6 , x1))*(dx3^dx4) # (df6/dx1)^(dx3^dx4)
43
44 # Derivada especial de Pi para dx2
45 dEspPix2a = -(sym. diff(Piaux , d12))*(dx1) # dPi/d(dx2) para la
forma dx1^dx2
46 dEspPix2b = (sym. diff(Piaux , d23))*(dx3) # dPi/d(dx2) para la
forma dx2^dx3
47 dEspPix2c = (sym. diff(Piaux , d24))*(dx4) # dPi/d(dx2) para la
forma dx3^dx4
48 # Derivada normal de Pi para x2
49 dNorPix2a = (sym. diff(f1 , x2))*(dx1^dx2) # (df1/dx2)^(dx1^dx2)
50 dNorPix2b = (sym. diff(f2 , x2))*(dx1^dx3) # (df2/dx2)^(dx1^dx3)
51 dNorPix2c = (sym. diff(f3 , x2))*(dx1^dx4) # (df3/dx2)^(dx1^dx4)
52 dNorPix2d = (sym. diff(f4 , x2))*(dx2^dx3) # (df4/dx2)^(dx2^dx3)
53 dNorPix2e = (sym. diff(f5 , x2))*(dx2^dx4) # (df5/dx2)^(dx2^dx4)
54 dNorPix2f = (sym. diff(f6 , x2))*(dx3^dx4) # (df6/dx2)^(dx3^dx4)
55
56 # Derivada especial de Pi para dx3
57 dEspPix3a = -(sym. diff(Piaux , d13))*(dx1) # dPi/dx3 para la
forma dx1^dx3
58 dEspPix3b = -(sym. diff(Piaux , d23))*(dx2) # dPi/dx3 para la
forma dx2^dx3
59 dEspPix3c = (sym. diff(Piaux , d34))*(dx4) # dPi/dx3 para la
forma dx3^dx4
60 # Derivada normal de Pi para x3
61 dNorPix3a = (sym. diff(f1 , x3))*(dx1^dx2) # (df1/dx3)^(dx1^dx2)
62 dNorPix3b = (sym. diff(f2 , x3))*(dx1^dx3) # (df2/dx3)^(dx1^dx3)
63 dNorPix3c = (sym. diff(f3 , x3))*(dx1^dx4) # (df3/dx3)^(dx1^dx4)
64 dNorPix3d = (sym. diff(f4 , x3))*(dx2^dx3) # (df4/dx3)^(dx2^dx3)
65 dNorPix3e = (sym. diff(f5 , x3))*(dx2^dx4) # (df5/dx3)^(dx2^dx4)
66 dNorPix3f = (sym. diff(f6 , x3))*(dx3^dx4) # (df6/dx3)^(dx3^dx4)
67
68 # Derivada especial de Pi para dt
69 dEspPix4a = -(sym. diff(Piaux , d14))*(dx1) # dPi/d(dx4) para la
forma dx1^dx4
70 dEspPix4b = -(sym. diff(Piaux , d24))*(dx2) # dPi/d(dx4) para la

```

```

71     forma dx2^dx4
       dEspPix4c = -(sym.diff(Piaux, d34))*(dx3) # dPi/d(dx4) para la
       forma dx3^dx4
72     # Derivada normal de Pi para t
73     dNorPix4a = (sym.diff(f1, x4))*(dx1^dx2) # (df1/dx4)^(dx1^dx2)
74     dNorPix4b = (sym.diff(f2, x4))*(dx1^dx3) # (df2/dx4)^(dx1^dx3)
75     dNorPix4c = (sym.diff(f3, x4))*(dx1^dx4) # (df3/dx4)^(dx1^dx4)
76     dNorPix4d = (sym.diff(f4, x4))*(dx2^dx3) # (df4/dx4)^(dx2^dx3)
77     dNorPix4e = (sym.diff(f5, x4))*(dx2^dx4) # (df5/dx4)^(dx2^dx4)
78     dNorPix4f = (sym.diff(f6, x4))*(dx3^dx4) # (df6/dx4)^(dx3^dx4)
79
80     # Corchete S-N
81     SNPi = 2*((dEspPix1a+dEspPix1b+dEspPix1c)^(dNorPix1a+dNorPix1b+
       dNorPix1c+dNorPix1d+dNorPix1e+dNorPix1f)) + 2*((dEspPix2a+
       dEspPix2b+dEspPix2c)^(dNorPix2a+dNorPix2b+dNorPix2c+dNorPix2d+
       dNorPix2e+dNorPix2f)) + 2*((dEspPix3a+dEspPix3b+dEspPix3c)^(
       dNorPix3a+dNorPix3b+dNorPix3c+dNorPix3d+dNorPix3e+dNorPix3f)) +
       2*((dEspPita+dEspPitb+dEspPitc)^(dNorPita+dNorPitb+dNorPitc+
       dNorPitd+dNorPite+dNorPitf))
82     return SNPi
83
84     print(SN())

```

Para poder ejecutar el código copie y pegue el script anterior, configure el archivo en las variables correspondientes, guarde el archivo con el nombre `sn.py` por ejemplo y por último abra la consola (ventana de comandos) en el directorio donde se encuentra el archivo `sn.py` y escriba `python sn.py`.

Bibliografía

- [BH04] A. Banyaga and D. E. Hurtubise. A proof of the morse-bott lemma. *Expositiones Mathematicae*, 22(4):365 – 373, 2004.
- [Bot54] R. Bott. Nondegenerate critical manifolds. *Annals of Mathematics*, 60(2):248–261, 1954.
- [Bro16] Alan Bromborsky. Galgebra. <https://github.com/brombo/galgebra>, 2016.
- [CN85] C. Camacho and A. L. Neto. *Geometric Theory of Foliations*. Birkhäuser Boston, 1 edition, 1985.
- [DZ05] J.-P. Dufour and N. T. Zung. *Poisson Structures and Their Normal Forms*. Progress in Mathematics 242. Birkhäuser Basel, 1 edition, 2005.
- [GNSSV15] Luis C. García-Naranjo, Pablo Suárez-Serrato, and Ramón Vera. Poisson structures on smooth 4-manifolds. *Letters in Mathematical Physics*, 105(11):1533–1550, Nov 2015.
- [LGPV13] C. Laurent-Gengoux, A. Pichereau, and P. Vanhaecke. *Poisson structures*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 347. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 2013.
- [Mat02] Y. Matsumoto. *An Introduction to Morse Theory*. Europe and Central Asia Poverty Reduction and Economic Manag. American Mathematical Society, 2002.
- [Mil63] J. Milnor. *Morse Theory*. Annals of Mathematics Studies 51. Princeton University Press, 1 edition, 1963.

- [Mil15] J. Milnor. *Lectures on the H-Cobordism Theorem*. Princeton Legacy Library. Princeton University Press, 2015.
- [Mol88] P. Molino. *Riemannian Foliations*. Progress in Mathematics 73. Birkhäuser Basel, 1 edition, 1988.
- [MSP⁺17] Aaron Meurer, Christopher P. Smith, Mateusz Paprocki, Ondřej Čertík, Sergey B. Kirpichev, Matthew Rocklin, AMiT Kumar, Sergiu Ivanov, Jason K. Moore, Sartaj Singh, Thilina Rathnayake, Sean Vig, Brian E. Granger, Richard P. Muller, Francesco Bonazzi, Harsh Gupta, Shivam Vats, Fredrik Johansson, Fabian Pedregosa, Matthew J. Curry, Andy R. Terrel, Štěpán Roučka, Ashutosh Saboo, Isuru Fernando, Sumith Kulal, Robert Cimrman, and Anthony Scopatz. Sympy: symbolic computing in python. *PeerJ Computer Science*, 3:e103, January 2017.
- [Poi09] S.-D. Poisson. Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mecanique. *J. Ecole Polytechnique* 8, 15:266–344, 1809.
- [SS09] B. Scárdua and J. Seade. Codimension one foliations with Bott–Morse singularities I. *J. Differential Geom.*, 83(1):189–212, 09 2009.
- [SS11] B. Scárdua and J. Seade. Codimension one foliations with Bott–Morse singularities II. *Journal of Topology*, 4(2):343–382, 2011.
- [SSTO16] P. Suárez-Serrato and J. Torres Orozco. Poisson structures on wrinkled fibrations. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 22(1):263–280, 2016.
- [Ste74] P. Stefan. Accessible sets, orbits, and foliations with singularities. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3-29(4):699–713, 1974.
- [Sus73] H. J. Sussmann. Orbits of families of vector fields and integrability of distributions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 180:171–188, 1973.

- [Vai94] I Vaisman. *Lectures on the geometry of Poisson manifolds*. Progress in Mathematics. Birkhäuser Basel, 1 edition, 1994.
- [Wei83] A. Weinstein. The local structure of poisson manifolds. *J. Differential Geom.*, 18(3):523–557, 1983.
- [Xu13] Jean H Gallier; Dianna Xu. *A guide to the classification theorem for compact surfaces*. Geometry and computing. Springer, 2013.