UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Posgrado en Pedagogía

Facultad de Filosofía y Letras

Enseñar los números decimales en la primaria.
Una ingeniería didáctica para maestros

Tesis

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

Doctora en Pedagogía

PRESENTA:

Ana Laura Barriendos Rodríguez

Directora de Tesis:

Lilly Patricia Ducoing Watty

Instituto de Investigaciones sobre la Universidad y la Educación

Miembros del Comité Tutor:

Gabriela de la Cruz Flores

Instituto de Investigaciones sobre la Universidad y la Educación

Patricia de Guadalupe Mar Velasco

Instituto de Investigaciones sobre la Universidad y la Educación

Ileana Rojas Moreno

Facultad de Filosofía y Letras UNAM

Margarita María Zorrilla Fierro

Universidad Autónoma de Aguascalientes

Ciudad Universitaria, CDMX   Noviembre 2019

A mis padres, a mis hijos y a mi hermano que siempre están y abrazan cuando hace falta.

A Paty Ducoing porque a pesar de los cambios de rumbo siempre tuvo confianza y me dejó hacer. A mi querida Margarita Zorrilla quien me ha apoyado de tantísimas formas. Ileana Rojas y Gabriela de la Cruz por sus sugerencias y la lectura cuidadosa del documento. A Paty Mar por aquella plática que me devolvió las ganas de seguir.

A David Block, Silvia García y Laura Reséndiz por su participación en el diseño e implementación del trabajo de campo. No habría sido posible sin ustedes.

A Tatiana Mendoza porque leyó todo el texto nomás porque me quiere. Me ayudaste mucho mija.

A los maestros que participaron en el taller, muchísimas gracias.

Resumen

La escritura, lectura, operatoria, orden, ubicación en la recta y equivalencias con números decimales forman parte de lo que se espera que los niños aprendan desde la primaria. Lograrlo requiere rupturas respecto a lo aprendido con los naturales, así que no es extraño que se ubique entre los aprendizajes que menos alumnos dominan y que incluso en investigaciones con maestros siga siendo difícil.

En el marco de una ingeniería didáctica, desarrollé una secuencia dirigida a maestros de primaria con el propósito de estudiar qué son y cómo enseñar los decimales. Constó de 18 sesiones y a cada una asistieron entre 8 y 16 maestros de primaria, supervisores, directores y asesores técnico pedagógicos de escuelas públicas en la Ciudad de México.

Los resultados mostraron que en la parte matemática los participantes tuvieron avances, especialmente respecto al ordenamiento de números y las situaciones aditivas, aunque lo abordado en el taller fue apenas un primer contacto con nociones nuevas y hacen falta más situaciones, más posibilidades de uso y solución de problemas para que tomen consistencia (Brousseau, 1976). El diseño de secuencias de actividades con todas sus fases, la utilización de actividades clásicas de la didáctica, el papel de la conductora y el trabajo en el marco del enfoque de resolución de problemas también fueron aspectos exitosos en el taller. En cambio, los avances en la parte didáctica fueron menores.

Abstract

Write, read, calculate, order, locate in the number line and make equivalences with decimal numbers are part of what children are expected to learn in elementary school. Achieving it requires ruptures with what has been learned of the integers, thus it's not strange that decimal numbers are among the mathematical contents that fewer students achieve, and this difficulty remains even with teachers.

Within the framework of didactic engineering, I developed a sequence for elementary school teachers to study what decimal numbers are and how to teach them. Between 8 and 16 teachers, supervisors, principals and pedagogical advisors of public schools in Mexico City attended to the 18 sessions.

The results showed that in the mathematical part the participants had progress, especially comparing decimal numbers and in additive situations. However, the tasks studied during the sequence were a first contact with new notions, and more situations, possibilities of use and problem solving are needed to achieve consistency in the learnings (Brousseau, 1976).

The design of sequences of activities with all the didactic phases, the use of classic didactic activities, the role of the teacher educator and the problem-solving approach were also successful aspects of the sequence. On the other hand, progress in the didactic part was less.

Contenido

Índice de tablas

Índice de ilustraciones

Introducción

Si hacemos un esfuerzo por recordar los contenidos matemáticos que nos enseñaron en la educación primaria y secundaria, quizá los más difíciles que nos vienen a la mente son las fracciones, estadística o el álgebra, pero los decimales difícilmente aparecerán en las pesadillas escolares de alguno de nosotros. A los maestros tampoco les quitan el sueño, pues a sus ojos los decimales son uno de los contenidos fáciles de enseñar en la primaria (Ávila, 2008).

Quizá nos parecen fáciles porque nos son familiares, el dinero nos pone en contacto permanente con su representación y operatoria, y como en ese contexto siempre tienen dos cifras a la derecha del punto el procedimiento para ordenarlos es similar al que seguimos con los naturales.[1] También estamos familiarizados con los decimales cuando aparecen en información técnica y científica, ahí las cantidades escritas con punto son cosa de todos los días. Cuando medimos o interpretamos el resultado de una medición también nos topamos con los puntos, aunque hemos aprendido a "darles la vuelta" de manera altamente efectiva: 0.45m lo leemos como "cuarenta y cinco centímetros" y no como "cuarenta y cinco centésimos de metro", y 0.25kg son 250 gramos y listo.

Otro elemento de familiaridad nos lo proporciona la propia escuela. En la escritura de los decimales se conservan aspectos que aprendimos con nuestros primeros números, los naturales[2]: mientras más a la izquierda se encuentre una cifra, ésta representa una potencia de 10 mayor, y viceversa, mientras más a la derecha del punto está la cifra, representa una potencia menor.[3] Con la operatoria también sentimos la familiaridad que nos otorga lo aprendido con los naturales, pues los algoritmos son los mismos y sólo agregamos algunas reglas básicas protagonizadas por el punto (bajarlo en las sumas y restas, subirlo y agregar ceros en las divisiones, y colocarlo en el producto haciendo un sencillo conteo de cifras en las multiplicaciones).

Así que nos parecen familiares, pero eso no parece indicar que los hayamos aprendido… En las evaluaciones a nivel nacional resultan ser uno de los contenidos más difíciles para los estudiantes de primaria. Según datos de PLANEA solamente la tercera

[1] En los precios se puede comparar fácilmente entre $3.50 y $3.75, pero se vuelve menos transparente si entran en juego otros aspectos de estos números, como la equivalencia ($3.50 también son 35 monedas de 10 centavos o 35/10).

[2] Son que usamos para contar como 1, 200, 3574.

[3] En el número 5456 hay un 5 en la columna de las decenas y representa 5 decenas o 50 unidades. Más a la izquierda, en la columna de las unidades de millar el mismo 5 representa 5 unidades de millar o 5 mil unidades. El 5 en la columna de las unidades es 5×10^1 mientras que el 5 en las unidades de millar es 5×10^3.

parte de los alumnos de 6° de primaria logra comparar números decimales, resolver problemas aditivos con números decimales y leer y escribir números decimales (datos nacionales, aplicación 2018) (INEE, 2019d).

¿Y los maestros? Los datos también muestran que les son difíciles. En un trabajo con futuros maestros Aguayo (2005) encontró que tenían dificultades con temas que enseñarán en la educación primaria: únicamente la mitad pudo identificar representaciones equivalentes entre una lista de números, encontrar un número que esté entre parejas de números dados y hacer operaciones con decimales. Los futuros maestros que participaron en el trabajo de Castro (2012) se encontraron con una dificultad significativamente mayor en el cálculo mental cuando involucró cantidades decimales. Contreras et al. (2012) reportan que los futuros maestros tuvieron dificultades para contrastar las propiedades de los conjuntos numéricos (específicamente con los racionales) así como para comprender significados de las operaciones con números racionales.

En trabajos con maestros en servicio también se advirtieron dificultades o una comprensión parcial al hacer afirmaciones como que un número decimal es una parte de un todo, que es un número compuesto por una parte entera y otra decimal que lleva punto (Ávila, 2008) o que consiste solamente en las cifras a la derecha del punto (Konic, 2011). Se encontraron errores como pensar que 1/3 = 0.33 (Konic, 2011) y en general la relación entre fracciones y decimales es poco clara (Gairín, 1998). Sin embargo, los maestros están convencidos de que los decimales son más fáciles que las fracciones: "Se necesita más lógica para entender numerador y denominador, los niños se confunden mucho con eso, en cambio, los decimales, como ya nada más es la transformación, es más sencillo [enseñarlos]." (Ávila, 2008, p. 19).

A muchos de nosotros también nos parecen más fáciles los decimales que las fracciones ¡y no es una apreciación equivocada! En muchos contextos es más fácil sumar 0.375 + 1.2 que 3/8 + 6/5 y de hecho, la razón principal que impulsó el desarrollo y difusión de los números decimales fue justamente facilitar el cálculo y la representación de cantidades fraccionarias en ámbitos no matemáticos, como el comercio y la banca.

¿Por qué entonces resultan casi tan difíciles como las fracciones? Lo que a muchos de nosotros nos ocurrió es que en la escuela nunca nos enteramos de que *los decimales son fracciones*, y ese ocultamiento es responsable de las dificultades que pudimos haber enfrentado a lo largo de nuestra vida escolar (y quizá también en la profesional). Los decimales son fracciones con denominador potencia de 10 (piénsese en la idea de partición en 10, 100, 1000…) y junto con éstas forman parte del conjunto numérico de los racionales.[4] Pertenecer a un conjunto numérico distinto es la otra parte responsable de nuestras dificultades al aprenderlos, pues entre un conjunto numérico y otro hay propiedades que se ganan y se pierden: en el de los naturales existe la posibilidad de encontrar un antecesor y un sucesor, lo que ya no se verifica cuando se trata de los racionales; y los racionales son densos mientras que los naturales no lo son. Así que no es raro que lleguemos a conclusiones como que los números con más cifras son siempre mayores (2.3 < 2.15 porque 3 < 15 y 5.6 < 5.60 porque 6 < 60), que el número que va inmediatamente antes de 8.9 es 8.8, y que entre 45/100 y 46/100 no hay ningún número. Lo cierto es que la enseñanza y el aprendizaje de los decimales constituyen un verdadero reto en la escuela primaria.

Antecedentes

Mientras hacía este trabajo me preguntaron por qué enfrascarme en algo de matemáticas si ya es un contenido prioritario en la educación obligatoria, ultra evaluado y estudiado. Tienen razón, sin embargo, estamos lejos de conseguir buenos resultados a nivel país. Según PLANEA matemáticas, en 3° de primaria más de la mitad de los estudiantes se encuentran en los niveles I y II (logro insuficiente y logro apenas indispensable), en 6° de primaria son tres cuartas partes (76.2%), y de 3° de secundaria al último grado de educación media superior son aproximadamente 9 de cada 10 (86.2 y 89.5%, respectivamente) (INEE, 2019a, 2019b, 2019c). Esos resultados me parecen alarmantes, pues cada uno de esos estudiantes tendrá dificultades al cursar el grado siguiente, en el ingreso a la universidad, en la búsqueda de empleo y quizá hasta leyendo el periódico. Los esfuerzos en materia educativa no han sido suficientes o nos falta mucho por comprender sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

También me preguntaron por qué centrar tanto la mirada en un contenido puntual cuando podría estudiar a las matemáticas en general. Hay dos argumentos que creo que lo justifican. El primero es que el panorama que nos deja ver PLANEA se pone incluso más difícil con algunos contenidos matemáticos, entre ellos las fracciones y los decimales, así que al interior de las matemáticas escolares hay ciertos contenidos que resultan más difíciles de aprender que otros y tiene sentido pensar que requieren mayor atención para entender qué está pasando y mejorar los resultados.

[4] Aunque los Naturales y los Racionales forman parte del conjunto de los Reales, no tienen las mismas propiedades.

El segundo tiene que ver con el desarrollo de las didácticas específicas. Anteriormente la didáctica (en algunos campos usan el término “pedagogía”) se concebía como algo general, un cúmulo de conocimientos y habilidades docentes que servían para cualquier asignatura y nivel educativo. Desde esa mirada “saber enseñar” implicaba el dominio de una caja de herramientas adaptables. El avance en ciertas líneas de investigación sobre la práctica docente puso en evidencia la necesidad de contar con conocimientos específicos, entre ellos el PCK (“pedagogical content knowledge”) que es específico de la disciplina a enseñar (Schulman, 1986). Las didácticas específicas han seguido aportando información en este sentido: para enseñar *x* se requiere saber *x* y además, la didáctica específica de *x.* Desde luego, hay conocimientos y habilidades docentes que se usan transversalmente, por ejemplo, organizar al grupo de manera eficiente, monitorear el trabajo de los estudiantes, hacer que todos participen, fomentar la argumentación, etc. Pero las que están directamente relacionadas con la enseñanza de un contenido específico (como valorar si es oportuno cambiar los números de un problema en cierto momento de la clase, determinar si el procedimiento alternativo que usó un alumno es correcto o elegir entre dos representaciones sabiendo que cada una puede llevar a la clase por un camino distinto), que además son tareas del día a día para los maestros, dependerán del contenido específico del que se trate. Así pues, si mi interés estaba puesto en los números decimales, tenía sentido enfocar la investigación en ese contenido específico.

¿De qué se trata esta investigación?

Este trabajo es el resultado de poner en juego dos de las cosas que me han apasionado a lo largo de mi vida profesional: la formación docente y los decimales como contenido a enseñar en la primaria. Inspirada en trabajos como el de Carrillo (2009) que funciona como un proyecto de formación permanente, lo que aspiraba hacer era crear un espacio de formación largo en el que además de lo matemático cupieran elementos didácticos y curriculares, y hubiera tiempo para estudiar, diseñar, poner en práctica y reflexionar. No era “dar un taller” a maestros sino estudiar juntos aquello que yo podía aportar sobre la parte matemática y didáctica, mientras que ellos hacían otros aportes como planificaciones, actividades diseñadas para sus alumnos, videograbaciones de sus clases y su experiencia con niños, materiales y escuelas reales. Idealmente, imaginé un tipo de colaboración en el que cada uno acercaba lo que podía dar para mejorar el aprendizaje de los niños.

Muchas preguntas surgieron al empezar a pensar sobre lo que habría en ese espacio de formación. ¿Convenía empezar por lo matemático para que sirviera de base a lo didáctico? ¿Serviría analizar lecciones de los libros de texto y con qué profundidad? ¿Sería útil incluir algunas actividades de las matemáticas de secundaria? ¿Sería costeable la inversión de tiempo para que los maestros diseñaran una lección? ¿Sería pertinente solicitar que se videograbaran y mostrar la clase al grupo?

El trabajo de otros investigadores ayudó a contestar algunas de esas preguntas y sentó las primeras bases para el diseño de la secuencia. Por ejemplo, me ayudó saber que para la formación docente el análisis de registros de clases "buenas" se había mostrado más útil que el de clases con dificultades (funcionan mejor los ejemplos positivos) (Lerner, 2001); y que en todos los trabajos que revisé sobre decimales (con alumnos y maestros) los hallazgos de Brousseau (1976) se verificaban: son enseñados y aprendidos como una extensión de los naturales y los obstáculos aparecían una y otra vez como "misconceptions", errores frecuentes o errores conceptuales, por lo que era esperable que los maestros que participaran en mi trabajo estuvieran también enfrentando alguno de esos obstáculos.

Otras preguntas no podían ser respondidas hasta experimentarse y en ese punto la Ingeniería Didáctica se mostró como una opción metodológica pertinente. La Ingeniería Didáctica (ID) surgió al interior de la Teoría de las Situaciones Didácticas como una manera de poner a prueba las secuencias de aprendizaje que se desarrollaban en la investigación. En términos simples, una ID busca resolver un problema en la enseñanza haciendo un diseño fundamentado teóricamente y con el que pretende que ocurran ciertos fenómenos didácticos enunciados como hipótesis. El diseño se pone a prueba comparando las hipótesis con lo ocurrido.

Elegí a la ID para hacer este trabajo porque considera de manera interdependiente a la investigación y al diseño, puesta en marcha en situaciones reales y análisis de una secuencia. Esto se materializa en las fases que la conforman: los Análisis preliminares en los que se investiga y documenta el fenómeno a estudiar construyendo un marco teórico, los Análisis a priori en los que se rescatan los elementos centrales de la fase anterior para fundamentar el diseño y se anticipan los comportamientos esperados de los alumnos (hipótesis), la puesta en marcha o Experimentación y los Análisis a posteriori que es el momento en el que se contrastan los datos arrojados por la experiencia con lo hipotetizado pudiendo reconsiderar el diseño mismo e incluso la fundamentación teórica. Es así como los resultados de una ID y la teoría didáctica se vinculan en un movimiento dialéctico.

En ese marco, **el propósito de esta investigación** fue *diseñar y experimentar, en el contexto de una ingeniería didáctica, una secuencia sobre números decimales para desarrollar conocimientos matemáticos y didácticos de maestros de primaria.*

Aportes de la revisión teórica al diseño de la secuencia

Los trabajos revisados sobre formación docente y didáctica de las matemáticas me permitieron conocer distintas experiencias y elegir las que consideré más adecuadas para la secuencia. Principalmente la estructura de Carrillo (2009) en la que el triángulo didáctico se modifica y se procura un ambiente cooperativo y redes de apoyo entre los maestros que participan en el proceso de formación, y las situaciones de doble conceptualización y la lectura de registros de clase de Lerner (2001).

Respecto a la parte matemática y didáctica de los números decimales, los obstáculos identificados por Brousseau (1976) constituyeron un aporte central para el diseño. El obstáculo, visto como evidencia de un conocimiento y no como ausencia de este, permite estudiar los cambios a los que se enfrenta un aprendiz cuando transita entre los dos conjuntos numéricos que se abordan en la primaria: los naturales y los racionales. Según Brousseau hay obstáculos que tienen origen en el sistema de enseñanza, tanto a nivel de los tomadores de decisiones en la política educativa, como a nivel de cada maestro cuando elige cómo enseñar un contenido específico. Lo que subraya al respecto es que la vinculación de origen entre los decimales y las medidas, y enseñar su escritura y operatoria como extensión de las reglas aprendidas con los naturales genera obstáculos didácticos. Pero además, existen "dificultades de origen" o como las llama Brousseau, obstáculos epistemológicos. Se trata de barreras que sí o sí enfrentarán los alumnos en su proceso de aprendizaje, pues se encontrarán con tareas nuevas o condiciones matemáticas distintas en las que lo que sabían antes ya no se verifica y tendrán que ampliar sus conocimientos anteriores para dar cabida a lo nuevo.

Los trabajos que revisé respecto a los conocimientos que tienen los maestros de los números decimales me permitieron saber que no son ajenos a las dificultades que señala Brousseau, pues no parecen tener claro qué es un número decimal (o en qué es diferente a un entero o una fracción), tienen problemas para ordenarlos, entender la densidad, justificar los algoritmos o el significado de las operaciones. Resulta difícil imaginar su labor frente a los alumnos de primaria cuando ellos mismos tienen estas complicaciones con el contenido.

El análisis de la propuesta curricular (plan 2011 lecciones de los LTG) para enseñar los decimales en primaria me permitió saber que si bien hay aciertos en algunos planteamientos (como usar áreas para representar números y operaciones), existen muchos elementos que hacen dudar de la solidez y articulación de la propuesta. Hay lecciones en las que se demanda un conocimiento que no se ha estudiado previamente, se define al mismo concepto matemático de distintas formas (lo cual no sería problemático de tratarse de algo deliberado y articulado) o a conceptos distintos con la misma definición (número entero y número natural), elementos importantes que permanecen ocultos (por ejemplo, cómo decidir por cuál número multiplicar para obtener una fracción equivalente), explicaciones de procedimientos absolutamente mecánicas que no dan significado a las acciones, etcétera. Me quedó claro que al estudiar estas lecciones con sus alumnos los maestros deberán remediar muchas lagunas y aclarar las confusiones que generan, lo cual no facilita su tarea.

Hipótesis y secuencia diseñada

La información anterior me permitió plantear las siguientes hipótesis:

H1. Los maestros de primaria entienden a los números decimales como una extensión de los naturales y tienen dificultades para distinguir sus propiedades, identificar su relación con las fracciones y comprender la diferencia entre un número y sus representaciones. Las deficiencias de las lecciones en los libros de texto no ayudan a clarificar las dudas.

H2. Un conocimiento sólido de los decimales como contenido matemático se puede alcanzar si los maestros resuelven tareas que pongan en juego sus principales características y discuten sobre ellas, se acercan a la “razón de ser” de los racionales y a aspectos básicos de los conjuntos numéricos (N y Q) y sus propiedades.

H3. Sumado a lo anterior, abordar aspectos didácticos, contar con una estructura base para elaborar lecciones y hacer conjuntamente un análisis de los programas por grados y lecciones, permitirá a los maestros diseñar y analizar una secuencia corta para sus alumnos de primaria.

A partir de las hipótesis, planteé los siguientes objetivos para la secuencia:

A. Comenzar proponiendo actividades exploratorias que movilicen los conocimientos de los maestros sobre los números decimales y ajustar en función de los resultados (H1).

B. Resolver tareas matemáticas que involucren los aspectos centrales de los decimales. Siempre que sea posible, diseñar un *milieu* que permita actividades completas (situaciones de acción, formulación y validación) (H2).
C. Emplear el planteamiento de tareas matemáticas como medio para estudiar también lo didáctico (principalmente a través de situaciones de doble conceptualización) (H2).
D. Analizar registros de clase tanto de profesores expertos como de sus propias clases (extractos en video y transcripciones) (H2).
E. Analizar el currículo, programas y lecciones para conocer la propuesta vigente en cuanto a la organización de los contenidos matemáticos que atañen a los números decimales (H3).
F. Apoyarlos en el diseño y puesta en marcha de una secuencia didáctica breve dirigida a sus alumnos de primaria. Analizarla y ajustarla en conjunto (H3).

La secuencia diseñada contempló cuatro componentes o cuestiones que habrían de abordarse lo largo de las sesiones: matemáticas, didáctica, metadidáctica y vinculación con la práctica.

Las sesiones quedaron organizadas en tres etapas: la primera dedicada al estudio de contenidos matemáticos y didácticos; la segunda para hacer una revisión de los programas y lecciones de los libros de texto, y para que los maestros diseñaran dos o tres clases sobre decimales dirigidas a sus alumnos de primaria; por último, la tercera para que los maestros experimentaran sus clases diseñadas, se observaran entre ellos y se analizara en grupo lo sucedido.

En total, la secuencia diseñada se organizó en al menos 24 sesiones de 3 horas cada una (al llevarla a cabo podrían aumentar las sesiones en función de cuántas lecciones diseñaran los maestros).

Puesta en marcha de la secuencia

Las tres etapas de la secuencia se desarrollaron a lo largo de 10 meses con reuniones semanales o quincenales y a contra turno (excepto cuando los maestros impartieron sus clases diseñadas en las primarias).

La selección de participantes la llevó a cabo la autoridad educativa local convocándolos a una junta informativa sobre “un taller de decimales”. Hubo 16 asistentes a esa junta, pero solamente 11 decidieron continuar. A esos 11 se fueron sumando otros participantes hasta tener un total de 18 incluyendo maestros, directores, asesores técnico pedagógicos y supervisores de escuelas públicas al sur de la CDMX. A cada sesión asistieron entre 8 y 16 participantes.

Entre los asistentes hubo quienes estaban en su primer año frente a grupo y otros que tenían 27 años en el sistema, y casi todos fueron mujeres (15 de 18).

Si bien se desarrollaron las tres etapas de la secuencia hubo menos participantes hacia el final. Solamente tres equipos llevaron a cabo su diseño y apenas cinco maestros implementaron esas clases con sus alumnos. Por ello decidí analizar solamente la etapa 1 completa y dos sesiones de la etapa 2.

Hallazgos y aprendizajes

¿Se confirmaron las hipótesis? Sí, parcialmente y no.

La H1 se confirmó (*Los maestros de primaria entienden a los números decimales como una extensión de los naturales y tienen dificultades para distinguir sus propiedades, identificar su relación con las fracciones y comprender la diferencia entre un número y sus representaciones. Las deficiencias de las lecciones en los libros de texto no ayudan a clarificar las dudas*). Los participantes mostraron las dificultades documentadas en la literatura, como pensar que 0.4 > 0.67 (porque los décimos son mayores que los centésimos) y que podían encontrar el antecesor de un racional. En la hipótesis también asenté que las deficiencias en los LTG hacían que estos materiales no fueran un apoyo para resolver dudas y ayudar también a los maestros a aprender. Efectivamente, cuando analizamos lecciones hubo muchos señalamientos acerca de las imprecisiones y errores, la gran cantidad de temas que abordan, lo elevado que perciben el objetivo, etc.

La H2 se confirmó parcialmente (*Un conocimiento sólido de los decimales como contenido matemático se puede alcanzar si los maestros resuelven tareas que pongan en juego sus principales características y discuten sobre ellas, se acercan a la “razón de ser” de los racionales y a aspectos básicos de los conjuntos numéricos (N y Q) y sus propiedades. La puesta en marcha de cierto tipo de actividades permitirá estudiar lo matemático y también lo didáctico*). Si bien todos los participantes mostraron avances, especialmente respecto al orden, las situaciones aditivas y la sensación de haber “vivenciado” el enfoque didáctico de resolución de problemas, la distancia entre lo que sabían al llegar y los objetivos de mi secuencia fue demasiado grande. El trabajo con cuestiones más complejas (situaciones multiplicativas, distintas representaciones de los números, la relación entre conjuntos numéricos) no fue suficiente, lo cual me hizo ver que abordar un contenido una vez en un solo contexto no es suficiente para comprenderlo y reconocerlo en otras situaciones, y esto es todavía más cierto cuando se trata de contenidos nuevos o que rompen esquemas de conocimiento previos. En el diseño también faltaron acercamientos a qué cuestiones resuelven los decimales y por qué se enseñan desde la primaria. La reflexión acerca de aspectos didácticos también se logró parcialmente, pues aunque hubo momentos en los que se abordó y los profesores reconocieron aspectos como la importancia de los números elegidos o del orden de las actividades, estas reflexiones no parecieron tener impacto en la etapa 2, cuando analizamos lecciones y comenzaron a plantearse el diseño de lecciones.

La H3 no se confirmó (*Sumado a lo anterior, abordar aspectos didácticos, contar con una estructura base para elaborar lecciones y hacer conjuntamente un análisis de los programas por grados y lecciones, permitirá a los maestros diseñar, poner en marcha y analizar una secuencia corta para sus alumnos de primaria*). El taller largo que imaginaba para tener tiempo de hacer cosas ricas y profundas resultó demasiado largo. Los maestros no pudieron sostener ese compromiso durante tanto tiempo y además, la demanda hacia ellos se iba haciendo mayor (no solo asistir a las sesiones sino ahora diseñar, poner en marcha las clases, observar a un colega, video grabar…). A pesar de la longitud, no fue suficiente para atender aspectos importantes que les permitieran enfrentar el diseño de lecciones. La secuencia no les dio elementos suficientes sobre todo respecto a lo didáctico y además, este aspecto quedó en segundo plano dado que el dominio de lo matemático era incipiente.

Esta investigación, al igual que casi todas las ID, se llevó a cabo en condiciones que no pueden repetirse. En primer lugar, porque está en la naturaleza de las ID el ajuste al propio diseño y al marco teórico que le da sustento, y deben hacerse modificaciones. Sin embargo, la secuencia diseñada aporta elementos que pueden ser de utilidad a otros trabajos de formación, como actividades específicas que funcionaron adecuadamente y aprendizajes globales, por ejemplo, las demandas que supone el diseño de lecciones y la dificultad que tuvieron los maestros con ciertos aspectos matemáticos. Quizá lo más valioso en esta investigación fue la evidencia del conjunto de condiciones necesarias para la formación, unas bastante bien logradas en este trabajo (como el clima en el grupo y el enfoque didáctico empleado) y otras no tanto (extensión, énfasis y mayor diversidad en ciertos contenidos matemáticos, mejora de la articulación entre lo matemático, didáctico y curricular).

Esta ID forma parte de un esfuerzo colectivo para abonar a nuestros conocimientos sobre la formación docente para enseñar matemáticas. Falta mucho por saber acerca de cómo enseñar los decimales a los alumnos de primaria y todavía más acerca de cómo enseñar a enseñarlos. Sin embargo, hay puntos de partida que se confirman con este trabajo: es condición necesaria saber con suficiente dominio el contenido matemático, pues de otra manera los esfuerzos en la formación son muy costosos. El trabajo con situaciones en las que se pone en juego el contenido disciplinar y se aprovechen para la reflexión didáctica (como en las situaciones de doble conceptualización) se mostraron útiles, pero con los aspectos más difíciles del contenido quizá deba dedicarse más tiempo a estudiar lo matemático antes de ampliar el foco (entender mejor la densidad antes de abordar lo relativo a su enseñanza, por ejemplo). Aunque ese parece ser el asunto prioritario con este contenido matemático (y muy probablemente con otros que forman parte de los programas de primaria), no hay que perder de vista que saber lo matemático es condición necesaria pero no suficiente para enseñarlos. Las ID de segundo nivel involucrando a los maestros parecen prometedoras en este aspecto.

Descripción de la estructura de este documento

Este documento no sigue una estructura convencional debido a que opté por organizarlo según las fases de la ID. Dejo aquí un esquema para orientar la lectura.

Tabla 1 Capítulos en el documento, ID y contenido de cada uno.

Número y nombre del capítulo	ID	Vínculo con la estructura convencional	Contenido del capítulo
Capítulo 1 La Ingeniería Didáctica		*Referente metodológico*	Aborda qué es la ID, de dónde surge y cuáles son sus principales características. Lo ubico al inicio del documento porque en adelante se estará haciendo referencia constante a sus fases.
Capítulo 2 Formación docente y didáctica de las matemáticas	**Análisis preliminares en la ID**	*Referente teórico*	Presenta ideas sobre la formación vista como un trayecto profesional, cuestiones que hacen de la enseñanza de las matemáticas una tarea difícil y aportes que la didáctica de las matemáticas ha hecho para la formación docente.
Capítulo 3 Qué son los decimales		*Referente teórico*	Hace un análisis didáctico de los números decimales como contenido a enseñar en la primaria, ¿qué son, para qué se usan y por qué son difíciles?, y toma una definición de número decimal.
Capítulo 4 Análisis curricular de la propuesta 2011 para la enseñanza de los decimales		*Referente normativo*	Describe el recorrido de los racionales a lo largo de la primaria y analiza lecciones de los LTG identificando cómo se inicia su estudio y cómo se interpretan.
Capítulo 5 Conocimientos y concepciones de los maestros respecto a los números decimales		*Referente teórico*	Presenta un análisis de los conocimientos, concepciones y dificultades de los maestros respecto a los números decimales. ¿Cuáles son decimales?, orden, propiedades y operaciones.

Capítulo 6 Secuencia diseñada	**Análisis a priori en la ID**	*Hipótesis, descripción de las actividades que componen el taller*	Plantea hipótesis sobre el comportamiento esperado de los maestros y objetivos para la secuencia. Presenta las decisiones globales (variables macro) en las que se describe qué elementos de los Análisis preliminares se tomaron para el diseño. Presenta la secuencia diseñada en sus tres etapas (variables micro).
Capítulo 7 Experimentación	**Experimentación en la ID**	*Contexto, sujetos y descripción de las sesiones*	Describe cómo se realizó la convocatoria a los participantes, sus características y el marco de funcionamiento del taller. Describe las actividades llevadas a cabo en cada sesión, así como los ajustes entre una sesión y otra.
Capítulo 8 Análisis y reflexiones finales	**Análisis a posteriori en la ID**	*Análisis, contraste con hipótesis y reflexiones finales*	Analiza lo sucedido en el taller según cinco ejes. Contrasta las hipótesis con lo ocurrido en las sesiones. Presenta reflexiones finales sobre la formación docente

1.1 La ingeniería didáctica

1.1.1 ¿Qué es la ingeniería didáctica?

> El vínculo que hacen los franceses entre enseñanza e ingeniería molesta a muchos educadores norteamericanos; especialmente a aquellos que conectan el término "ingeniería" con el conductismo basado en un modelo industrial del aprendizaje. ¿Cuáles son los aspectos productivos de la ingeniería que se requieren para informar sobre el objeto de estudio de la "didactique"? ¿Las premisas básicas de la "didactique" nos permiten pensar que se trata de una ingeniería de estudiantes –en el sentido de la producción en masa de vínculos, esquemas cognitivos o cualquier imagen general del conocimiento que actualmente existe entre los psicólogos educativos–?
> La segunda cuestión se puede responder fácilmente en términos negativos, el foco que la "didactique" pone en el conocimiento nos autoriza a hablar acerca de una ingeniería de las situaciones en las que es el conocimiento lo que está en juego y no el desarrollo psicológico de los actores. La reflexión acerca del rol del aprendiz en una situación didáctica puede ayudar a contestar la primera pregunta y a echar más luz sobre la segunda.
> Las acciones en las que un estudiante se involucra le ayudarán a dar significado al conocimiento que se dice que adquirió. Pero ese significado no necesariamente legitima esa pieza de conocimiento específica (…)
> Es un problema de ingeniería diseñar, regular y hacer observaciones controladas de situaciones experimentales en las cuales se busca que los significados sean optimizados de acuerdo con algún criterio. Pero es un problema de ingeniería que no trata con un producto de aprendizaje terminado (si es que eso existe). Lo que sea que un estudiante aprenda (o demuestre haber aprendido) es, comprensiblemente, tenido en cuenta de manera parcial por la situación (…)
> Así que, la ingeniería didáctica no se trata de "producir un estudiante", ni tampoco de "producir los significados personales que cada estudiante construye". La ingeniería didáctica se trata de la producción de significados posibles o disponibles de la actividad de un estudiante, de la oportunidad de aprender y no del aprendizaje." (Herbst y Kilpatrick, 1999, p. 7).[1]

Para desarrollar esta investigación elegí la ingeniería didáctica (ID) como opción metodológica. ¿Qué es exactamente? A finales de los años sesenta comenzó a desarrollarse la Teoría de las situaciones didácticas (TSD) inspirada en la epistemología constructivista piagetiana que entiende el aprendizaje como una adaptación (biológica) al medio cuando el sujeto enfrenta situaciones que lo desequilibran. Desde esa mirada la TSD es construc-

[1] En el texto citado los autores se refieren a la didáctica de Brousseau usando la palabra en francés ("didactique") por lo que la conservé tal cual. En este apartado tomo ideas de textos en francés e inglés. La traducción de las citas textuales es propia.

tivista, y también puede afirmarse que no está vinculada con ninguna teoría cognitiva dado que no se interesa en estudiar al sujeto que aprende sino la situación didáctica que modela las interacciones entre los tres polos del triángulo didáctico: maestro, alumno y saber (Artigue, 2002).

Estudiar esas interacciones era fundamental en la TSD para interpretar cognitivamente los comportamientos de los alumnos. Los métodos externos a la clase, las comparaciones estadísticas entre grupos experimentales y las comparaciones pretest – postest, eran claramente limitadas para los objetivos de la TSD, estudiar las interacciones requería desarrollar métodos de investigación acordes con esa teoría en ciernes.

> La ingeniería didáctica está intrínsecamente ligada a la construcción de esta ciencia nueva, y de hecho, no hay separación entre la teoría, la observación y la práctica: la teoría surge de la investigación y la observación. (Perrin-Glorian y Baltar, 2016, p. 6)

> La ingeniería didáctica jugó así un rol fundamental en el desarrollo de la didáctica de las matemáticas en Francia como metodología de investigación y está en el corazón del desarrollo de la TS y de otros marcos teóricos como la dialéctica herramienta objeto (DOO) y el juego de marcos (Duady, 1987, 1994). (Perrin-Glorian y Baltar, 2016, p. 16)

En sus primeros años la ID fue el soporte para el desarrollo de secuencias de aprendizaje, sin embargo, dado que el trabajo se hacía en condiciones de laboratorio y no en clases reales, las limitaciones de los primeros modelos fueron evidentes: el sujeto es también un niño o adolescente y un alumno, en las escuelas hay restricciones y posibilidades específicas, y el maestro -que había estado prácticamente desdibujado- también es un elemento esencial en el funcionamiento de la secuencia. Entonces se añadieron análisis didácticos que tomaran en cuenta las condiciones institucionales que implican el estudio de los contenidos matemáticos del currículo, normas escolares, tiempos, etc., y el papel del maestro (Artigue, 1995, 2002). En Chevallard (1982, citado en Artigue 2002) la ID aparece como una manera de responder a dos cuestiones: cómo lograr que en la metodología de investigación se tome en cuenta la complejidad de la clase, y cómo pensar las relaciones entre investigación y acción en el sistema de enseñanza.

A partir de los años ochenta la ID fue la manera de estudiar empíricamente los fenómenos didácticos en condiciones reales, desde la mirada de la TSD y teorías cercanas. En un texto que se volvió un clásico, Artigue (1985) afirma que la ID toma su nombre al equiparar el trabajo del didacta al de un ingeniero, quien opera haciendo ajustes entre sus conocimientos teóricos y los casos concretos a los que se enfrenta. En este mismo sentido de la adaptación, Perrin-Glorian y Baltar (2016) afirman que la ID es “el instrumento indispensable de confrontación de la ciencia didáctica y la contingencia, el instrumento y objeto de las observaciones, y el medio para poner en marcha la difusión de los resultados a los maestros y el público.” (p. 8).

Así pues, la ID fue el método desarrollado en la TSD en un movimiento dialéctico entre la propia teoría y los resultados obtenidos al probar las secuencias, con lo que método y teoría fueron transformándose para pasar de una preocupación exclusivamente centrada en las situaciones didácticas a otra en la que también se incluyera a los maestros, alumnos e instituciones en condiciones “reales”. En palabras del propio Brousseau (2006), “Nuestro trabajo coloca a la ingeniería didáctica en el centro de una ciencia cuyo propósito es tomar a la enseñanza como objeto de estudio.” (p. 117).

1.1.2 Estructura de la ingeniería didáctica

¿En qué consiste la ingeniería didáctica? Lesh y Sriramn (2010, citado en Godino, et al, 2013) se preguntan si los educadores matemáticos son psicólogos cognitivos aplicados, científicos sociales aplicados, científicos puros o más bien ingenieros y científicos orientados al diseño, cuyo propósito es resolver problemas reales y no solo elaborar teorías. El trabajo en la ID se parece más a lo segundo, pues a través del diseño y evaluación de secuencias de enseñanza teóricamente fundamentadas, se busca que ocurran ciertos fenómenos didácticos.

Por estas características, Godino, et al (2013) concluyen que la ID podría verse como un caso particular de la investigación basada en el diseño (IBD), que es “(…) una familia de aproximaciones metodológicas en el estudio del aprendizaje en contexto. Utiliza el diseño y el análisis sistemático de estrategias y herramientas instruccionales, tratando que el diseño instruccional y la investigación sean interdependientes, sobreentendiéndose que la investigación incluye no solo la fase de diseño, sino también la experimentación en contextos de clase y la evaluación de resultados.” (p. 2).

Aunque ambas aproximaciones plantean fases muy similares para su desarrollo, quizá la diferencia más importante entre ellas es que la ID está ligada a un marco teórico único que es la TSD, mientras que la IBD no parte de un referente teórico específico y avanza “(…) suponiendo que las teorías emergen de los datos” (p. 10). Esta diferencia hace que en la IBD se busquen o desarrollen recursos para la enseñanza y en la ID se analicen las características de los recursos bajo la mirada de la TSD (*milieu*, situación fundamental, dialéctica entre situación didáctica y a-didáctica, retroacción, etc.)

Tabla 2 Elaboración propia a partir de información de Godino, et al (2013)

Investigación basada en el diseño IBD	Ingeniería didáctica ID
Fase 1. Preparación del experimento - Clarificar fines instruccionales. - Documentar los puntos instruccionales iniciales. - Delimitar una trayectoria de aprendizaje previsto. - Situar el experimento en un contexto teórico.	Fase 1. Análisis preliminares - Análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza. - Análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos. - Análisis de las concepciones de los estudiantes, dificultades y obstáculos que determinan su evolución. - Análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización.
	Fase 2. Análisis a priori - Descripción de elecciones locales, su vínculo con las globales y las características de la situación didáctica que de ellas se desprenden. - Análisis de lo que podría aprender en esta situación un estudiante. - Previsión de los comportamientos posibles. De ocurrir estos, el análisis asegura que son resultado de la puesta en marcha de la situación.
Fase 2. Experimentación - Recogida de datos. - Marcos interpretativos. - Ciclos de diseño y análisis. - Teorías instruccionales específicas del dominio (o contenido).	Fase 3. Experimentación - Recogida de datos, puesta en marcha de la situación.
Fase 3. Realización de análisis retrospectivos - Gramática argumentativa. - Confiabilidad. - Repetitividad. - Generalizabilidad.	Fase 4. Análisis a posteriori y validación - Análisis de datos - Confrontación de análisis a priori y a posteriori.

Como se puede ver, la explicitación de hipótesis a priori y la validación interna también son características distintivas de la ID.

> En una ID las preguntas base aluden a lo siguiente:
> ¿Qué tipo de situaciones-problemas dan sentido a un saber matemático específico? (situaciones fundamentales)
> ¿Qué características debe tener el medio para lograr un aprendizaje autónomo del alumno de un saber específico? (dialéctica entre situaciones adidácticas y didácticas) (Godino, et al, 2013, p. 10)

Las preguntas orientan la elaboración de un marco teórico al interior de la ingeniería y el planteamiento de hipótesis. Con ellas se elabora una secuencia de aprendizaje que se pone a prueba y se valida de manera interna, es decir, contrastándola con las hipótesis.

La ID consta de cuatro fases:

- Análisis preliminares
- Análisis a priori
- Experimentación
- Análisis a posteriori

La primera fase consiste en construir un marco teórico que oriente las posteriores elecciones del diseño. Este marco contempla usualmente análisis epistemológicos de los contenidos matemáticos en juego, de la enseñanza tradicional y sus efectos, de las concepciones de los estudiantes y de las restricciones del campo en el que ocurrirá la enseñanza. Puede tratarse de estudios originales, pero también se espera que constituya un estudio sistemático de la literatura sobre la cuestión que será objeto del diseño, pues la idea es contar con un panorama suficientemente informado para la toma de decisiones. Los análisis se organizan conformando al menos tres dimensiones: la epistemológica, que está asociada al saber matemático que se pondrá en funcionamiento; la cognitiva en la que se toman en cuenta las características de los alumnos para quienes se elabora la secuencia; y la propiamente didáctica que es la que estará asociada al sistema de enseñanza (o re-enseñanza) (Artigue, 1995).

En la segunda fase, que supone el Análisis a priori, se toman decisiones acerca de las variables sobre las que se actuará, de acuerdo con las hipótesis emanadas de los análisis preliminares. Artigue (1995) distingue dos niveles: las variables macro y micro de la ingeniería son, respectivamente, aquellas referidas a la planeación de la toda la ingeniería y las locales referentes a una sesión o secuencia. Las situaciones, las variables didácticas, las reglas, elementos del contrato didáctico y su gestión, entre otros, son considerados y organizados en esta fase. Así pues, el objetivo del Análisis a priori es determinar de qué manera las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Es así que este análisis comprende una parte descriptiva en la que se explicitan las elecciones tomadas en el diseño de la secuencia de enseñanza, y se analiza lo que la situación didáctica pondrá en juego para los estudiantes en función de las posibilidades de acción y validación de las que dispondrán; y comprende también una parte predictiva de los comportamientos posibles de los estudiantes.

Las hipótesis, operacionalizadas en un conjunto de sesiones y actividades, sientan las bases de lo que permitirá llevar a cabo la validación interna, que es una de las características más importantes de la ingeniería didáctica como metodología de investigación. En vez de utilizar un esquema de evaluación pre y post intervención, o de valorar los resultados en función de algún referente externo (un sistema de estándares, por ejemplo), la ingeniería didáctica se valida al establecer una relación entre los resultados obtenidos en la fase de experimentación y los elementos considerados en el Análisis a priori.

> (…) el objetivo del análisis a priori es determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Por lo anterior, este análisis se basa en un conjunto de hipótesis. La validación de estas hipótesis está, en principio, indirectamente en juego en la confrontación que se lleva a cabo en la cuarta fase entre el análisis a priori y el análisis a posteriori. (Artigue, 1995. pp. 44-48)

La fase 3 comprende la Experimentación, que es la puesta en práctica de las situaciones diseñadas. Puede complementarse con entrevistas u otros datos que se consideren pertinentes para enriquecer el análisis.

Los datos obtenidos son analizados en la fase 4 de validación o Análisis a posteriori mediante la confrontación de lo encontrado con lo hipotetizado, es decir, se valida internamente si el *milieu* diseñado jugó el rol que se esperaba y se explican las posibles brechas encontradas. Quizá resulte que el análisis a priori fue insuficiente, pero las hipótesis se sostengan, o bien, que el *milieu* no proporcionó las retroacciones esperadas o los estudiantes carecían de conocimientos suficientes para interpretarlas. En todo caso, el análisis a posteriori permite volver a la situación diseñada para modificar el *milieu* o volver sobre la teoría para reconsiderar las hipótesis o las líneas teóricas revisadas inicialmente (Perrin-Glorian y Baltar, op cit).

Como puede verse, la ID es a la vez un producto (la secuencia diseñada) y una metodología, ambas puestas a prueba.

> Hablamos de ingeniería didáctica si, en el marco de una investigación, hay construcción e implementación de una (o varias) clases, en el tiempo escolar, de una secuencia de sesiones y si hay un control teórico de la construcción y de la realización de las sesiones. El marco teórico es puesto a prueba al mismo tiempo que las situaciones elaboradas, así como su realización. (Perrin-Glorian, 20011, p. 70).

1.1.3 La ingeniería didáctica en la actualidad

Como mencioné, en sus orígenes la TSD no problematizó el papel del maestro y las ingenierías de los primeros años eran puestas en marcha por el propio equipo de investigación o por maestros experimentados y familiarizados con la teoría. Sin embargo, la emergencia del maestro y las instituciones como agentes centrales en el funcionamiento de las situaciones fue pronto evidente y las ingenierías incluyeron aspectos didácticos.

Una de las vías que han tomado las ingenierías recientes es la que define Perrin-Glorian (2011) como "ingeniería didáctica para el desarrollo y la formación". Cuando el objetivo es la investigación solamente (IDR) la ingeniería didáctica busca resultados a partir de experimentaciones basadas en una pregunta de investigación, sin preocuparse por la difusión de las situaciones utilizadas pues de hecho se valida en condiciones de investigación y no para clases reales; mientras que en la ingeniería didáctica para el desarrollo y la formación (IDD) el objetivo es la producción de recursos para los profesores o para la formación de profesores (Godino, et al, 2013). Es decir, producen recursos para clases reales con miras a la formación docente.

Estas ingenierías de segunda generación se basan en una primera ingeniería didáctica en el sentido clásico (IDR), pero incluyen los aspectos didácticos. El trabajo de Tempier (2011) es un ejemplo de IDD. Se centra en la enseñanza de la numeración en los primeros grados de primaria e inicialmente desarrolla una IDR en la que toma decisiones respecto a ese tema matemático (1er nivel de la ingeniería). Posteriormente diseña un recurso para los maestros en el que pone a su alcance actividades para implementar en sus clases, además de información sobre aspectos matemáticos, epistemológicos y didácticos sobre el aprendizaje y la enseñanza de la numeración decimal (2do nivel de la ingeniería).

Otro tipo de ingenierías se parecen más a las IDR pero no se diseñan situaciones para que los estudiantes aprendan un contenido matemático, sino para que los maestros aprendan un contenido matemático, sobre su enseñanza o sobre la didáctica de las matemáticas en general. Aunque vaya dirigida a maestros las cuestiones paradigmáticas son similares: ¿qué tipo de situaciones - problema dan sentido a un saber matemático/matemático-didáctico específico?, ¿qué características debe tener el medio para lograr un aprendizaje autónomo del alumno/maestro?

El trabajo de Portugais (1995, citado en Ruiz y García, 2010) es una ingeniería "de sistemas de formación" en la que las situaciones van dirigidas a futuros maestros y el contenido a enseñar es la didáctica misma. Muy de la mano con la TSD y la Teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, Portugais se pregunta si existe una situación a-didáctica para la formación de profesores en didáctica de las matemáticas, cómo sería la “devolución”, si es posible pensar en la formación docente como un proceso de adaptación al medio y en qué tipo de situaciones los conocimientos sobre didáctica tendrían sentido para los profesores. Es decir, trabaja de manera análoga a cuando la pregunta está puesta para la enseñanza de un contenido matemático a los estudiantes, por ejemplo, ¿existe una situación fundamental para enseñar el conteo a estudiantes al inicio de la primaria?

Por su parte, Aké (2013) lleva a cabo una ingeniería en la que pone a prueba situaciones para desarrollar el sentido algebraico en futuros profesores de primaria. Ella busca desarrollar competencias de los futuros maestros en tareas de algebraicas, de identificación de objetos algebraicos y de asignación de niveles de algebrización a actividades escolares.

La ingeniería que desarrollo en este trabajo se parece más a esta última: una secuencia que busca desarrollar conocimientos y habilidades en los maestros, tanto de orden matemático como didáctico. No es una secuencia dirigida a los estudiantes que se utiliza como dispositivo de formación docente (como las IDD descritas), sino una que toma como objeto de estudio un “conocimiento matemático para maestros” en el que se incluye lo matemático (saber resolver tareas que involucran números decimales), lo didáctico (conceptos teóricos que pueden ser de utilidad, análisis curricular, dificultades de los estudiantes y cómo ocurre la enseñanza generalmente), y todo ello amalgamado para que los profesores diseñen una secuencia breve dirigida a sus estudiantes.

Capítulo 2. Referentes teóricos: formación docente y didáctica de las matemáticas
Análisis preliminares, primera parte

Los referentes teóricos y normativo componen los *análisis preliminares* de la ingeniería didáctica. Los presento en capítulos separados (2, 3, 4 y 5) por tratarse de temas que, si bien en su conjunto me permitieron fundamentar el diseño de la secuencia didáctica, entre sí son de naturaleza distinta.

El capítulo 2 aborda la formación docente específicamente desde los trabajos en didáctica de las matemáticas. En el primer apartado presento algunas ideas que estructuran las tendencias recientes sobre la formación docente y sus etapas. En el 2.2 planteo por qué enseñar matemáticas es una actividad compleja que requiere una formación altamente especializada, y además que el llamado "fracaso" en la formación no debería achacársele directamente a las escuelas formadoras ni a los maestros en lo individual. El apartado 2.3 presenta los trabajos que algunos investigadores en didáctica de las matemáticas han desarrollado en torno a la formación docente. Por último, recupero ideas que me ayudaron a diseñar la secuencia didáctica.

2.1 La formación como un trayecto profesional

Posturas recientes en el terreno internacional reconocen que la docencia es una actividad compleja que requiere formación específica y permanente. Cada etapa del trayecto en la vida de un maestro tiene características particulares y a su vez forma parte de un continuo, por lo que, en lugar de pensar en espacios aislados de formación tipo “un curso aquí y otro allá” la tendencia es considerar diseños que se apilen y fortalezcan toda la estructura. Desde esta mirada la formación se concibe como permanente no porque la docencia nunca se “domine”, sino porque siempre es susceptible de mejorar, pues incluso los maestros expertos revisan y ajustan sus planificaciones, actividades, evaluaciones, etcétera, a la par que las didácticas van abriendo nuevas posibilidades para la enseñanza.

La formación inicial marca pues el comienzo de un trayecto profesional e idealmente es el tramo que sienta las bases para comenzar el ejercicio de la práctica docente. ¿Qué oportunidades tienen los futuros maestros de matemáticas durante la formación inicial para aprender lo que enseñarán? En un estudio que realicé (en colaboración) en el INEE (2018a), fueron analizados los planes de formación inicial de las normales y la UPN en los que se preparan los futuros maestros de primaria y secundaria que enseñarán matemáticas, encontrando que:

- La visión de que los profesores no requieren especialización disciplinar en primaria repercute en una formación generalista[1] que dedica apenas 9% de los créditos al estudio de conocimientos matemáticos y su enseñanza (Licenciatura en Educación Primaria y Primaria intercultural bilingüe, SEP Planes 2012). El plan que ofrece la UPN dirigido a maestros de preescolar y primaria del medio indígena dedica también 9% de los créditos a las matemáticas (Licenciatura en Educación Preescolar y Primaria para el Medio Indígena, UPN Plan 1990).
- En telesecundaria la formación generalista responde a necesidades del sistema para atender la demanda educativa en zonas específicas del país. Lo hallado en el estudio respecto a la preparación que reciben sus egresados es que resulta claramente insuficiente en el terreno disciplinar al dedicar únicamente 3% de los créditos a las matemáticas y su enseñanza (Licenciatura en Educación Secundaria Especialidad: Telesecundaria, SEP Plan 1999).

[1] Se trata de una formación para preparar profesores que enseñarán todas las asignaturas del nivel educativo para el que están siendo preparados, como los de primaria.

– En el plan para formar profesores de secundaria que enseñarán únicamente matemáticas se da un mayor espacio al estudio de la asignatura y su enseñanza dedicando 23% de los créditos, sin embargo, sigue siendo menos de la cuarta parte del total, lo cual no parece muy coherente con una formación específica (Licenciatura en Educación Secundaria Especialidad: Matemáticas, SEP Plan 1999).

A lo anterior debe sumarse que en ninguna licenciatura se incluye como parte de los procedimientos de ingreso el contar con formación matemática previa, ni se realizan exámenes específicos de matemáticas.[2] Esto resulta especialmente relevante en el contexto nacional, pues según datos de PLANEA, no se puede asumir que quienes ingresan a la formación inicial tienen un dominio aceptable de las matemáticas: en 3º de primaria más de la mitad de los estudiantes se encuentran en los niveles I y II (logro insuficiente y logro apenas indispensable), en 6º de primaria son 4 de cada 5, y en 3º de secundaria y último grado de educación media superior son aproximadamente 9 de cada 10 (INEE, 2018b).

Respecto a la calidad de la formación inicial de las licenciaturas de las normales, la Secretaría de Educación Pública y el Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior (CENEVAL) elaboraron exámenes que debían aplicarse a la mitad y al final de la carrera para hacer un diagnóstico sobre lo que los estudiantes lograban aprender. Se aplicaron hasta 2013 y para ese año, los resultados del examen general (al final de la licenciatura) fueron los siguientes:

Tabla 3 Elaboración propia con datos del INEE (2015, p. 104). Cálculos con base en los resultados de los Exámenes intermedios de conocimientos, semestres 4° y 6° de la licenciatura en educación Normal, 2010 y 2013.

	Nivel Insuficiente %	Nivel Sobresaliente %
Educación Primaria	38.4	17.7
Educación Primaria Intercultural Bilingüe	66.9	6.0
Educación Secundaria: Matemáticas	28.6	26.6
Educación Secundaria: Matemáticas Modalidad Mixta	50.1	14.8

Aunque en la licenciatura de Secundaria con especialidad en Matemáticas el panorama es menos dramático al tener a cerca de tres cuartas partes de los estudiantes arriba del

[2] Para el ingreso a todas las licenciaturas (excepto la de la UPN) se aplican exámenes generales que contemplan preguntas de matemáticas, pero no son específicos para ninguna asignatura.

nivel Insuficiente, los resultados que mostró esta evaluación al término de la formación no fueron los que se esperaban.

Cabe resaltar que ningún plan de formación inicial se diseña pretendiendo que los futuros maestros aprendan todo lo que necesitarán en su práctica, sin embargo, el poco tiempo dedicado al estudio de la disciplina y su didáctica, y los bajos resultados de 2013, plantean muchas preguntas sobre la pertinencia de los planes mexicanos.[3]

Una vez en el aula, la formación continua era concebida durante los 90 como un remedio para subsanar las deficiencias de la formación inicial. México, como otros países de la región, sostuvo una mirada "remedial" de la formación continua y la mayoría de los esfuerzos se orientaron a ofrecer cursos de unas cuantas horas de duración, enfocados en temas específicos que podían ser replicados "en cascada" y a los que casi nunca se daba seguimiento. Una cantidad muy importante de maestros mexicanos participó en estos cursos de formación continua, sin embargo, no parece claro que los estudiantes hayan sido beneficiados. Los resultados de los cursos masivos y aquellos diseñados para replicarse en cascada fueron cuestionados por especialistas y por los propios maestros al considerar que no tenían vínculos claros con la práctica o el contexto del aula, carecer de continuidad y estructuras de acompañamiento (Terigi, 2010).

Los Cursos Nacionales que puso en marcha PRONAP, en cambio, fueron bien recibidos por los maestros. Se diseñaron para que pudieran estudiarlos por su cuenta o para hacerlo acompañados en los centros de maestros. A diferencia de los cursos cortos, se trató de materiales de buena calidad con duración de 200 horas en las que se incluyeron actividades y lecturas para entender la propuesta curricular de 1993 (en matemáticas, basada en la resolución de problemas) y ejercicios más vinculados con el aula (Block, et al, 2007).

Con la Reforma Educativa del 2019 se añadió a la legislación que los procesos educativos debían ser de calidad y la idoneidad de los docentes y directivos como un medio para alcanzarla (DOF, 2013). El mérito y los buenos resultados en los procesos de evaluación serían los ejes para el ingreso, la permanencia y las promociones en el servicio público educativo. Además de los procesos evaluativos, la estrategia para la calidad se basaba también en una política de formación continua que incluyó elementos innovadores como la tutoría. En los hechos, la oferta que se generó durante la vigencia de la Reforma obedeció más a los propios procesos evaluativos del Servicio Profesional Docen-

[3] En 2018 se anunció una reforma a los planes de estudio de las licenciaturas de la Normal Superior, habrá que analizar los programas para conocer la propuesta. No obstante, al menos en la distribución de créditos no se advirtieron muchos cambios con respecto a los planes anteriores.

te que al marco de buena enseñanza que la propia Secretaría generó (los Perfiles, parámetros e indicadores). Además, estuvo desarticulada conceptualmente y tuvo dificultades de operación como el traslape de oferta entre la autoridad federal y estatal. Otra característica de la oferta federal fue que sólo se ofreció la modalidad en línea con una eficiencia terminal muy baja (Cordero, et al, 2017).

La Reforma del 2013 ya no está vigente y por el rumbo que parece estar tomando la política educativa en México, seguiremos dependiendo del gobierno en turno para definir la formación docente. La legislación secundaria que aparecerá en algún momento de 2019 definirá las opciones de formación, pues ahora no hay ninguna oferta en la Dirección General de Formación Continua (SEP).

En otras latitudes la tendencia tiene una mirada distinta: considerar el desarrollo profesional como un continuo con fases concatenadas y no una “colección de eventos de formación” (Terigi, 2010). El caso australiano es un buen ejemplo de esa mirada de un continuo.

2.2 Enseñar matemáticas es difícil

Mucho se ha dicho acerca de los profesores como estructura base de cualquier sistema educativo, frecuentemente asociando de manera directa la calidad del cuerpo docente con los resultados de aprendizaje que obtienen los alumnos. Desde luego que es una postura reduccionista ante la complejidad que supone un sistema educativo, sin embargo, coincido en que al interior del salón los profesores son quienes generan las oportunidades de aprendizaje para los estudiantes pues ellos son el agente principal para moldear las interacciones que ocurran entre el conocimiento y los alumnos. A esto hay que añadir una demanda más contemporánea que los sistemas educativos hacen a los maestros de matemáticas: en las últimas décadas los currículos para la educación básica establecen como objetivo, además del aprendizaje de temas matemáticos, que los estudiantes desarrollen conocimientos y habilidades complejas como argumentar, razonar, hipotetizar, etc.

Los profesores requieren, además de un conjunto sólido de conocimientos matemáticos, un dominio suficiente en las tareas que suponen su día a día: explicar conceptos y procedimientos matemáticos, responder a las preguntas de “por qué” de los estudiantes, encontrar ejemplos para plantear tareas específicas, reconocer ventajas y desventajas entre representaciones y procedimientos, conectar el tema con uno previo u otro que se estudiará posteriormente, entender y adaptar las lecciones de los libros, modificar las actividades para volverlas más difíciles o fáciles en función de las necesidades de los estudiantes, evaluar si las intervenciones de los estudiantes son correctas (rápido), elegir y desarrollar definiciones adecuadas al nivel de los estudiantes, usar notación y lenguaje matemático y promover su uso, evaluar el conocimiento matemático, entre otras (Ball, et al, 2008).

Enseñar matemáticas hoy día demanda habilidades docentes altamente especializadas que requieren de una formación específica y robusta tanto en matemáticas como en su didáctica, es decir, conocimientos sobre el contenido ("mathematical content knowledge" o MCK) y sobre su enseñanza ("pedagogical content knowledge" o PCK), como se conocen en la literatura.[4] Incluso el propio conocimiento matemático adquiere características especiales, pues no se trata solamente de saber hacer una multiplicación, sino de, por ejemplo, entender por qué funciona el algoritmo, saber cómo explicarlo, valorar si un procedimiento alternativo es correcto, y conocer representaciones diversas.[5] Este tipo de conocimiento matemático especializado se ha mostrado como clave para explicar los aprendizajes de los estudiantes. En Hill, Rowan y Ball (citado en Ball, et al, 2005) se indagó sobre la relación entre los conocimientos matemáticos comunes (los que tendría cualquier adulto escolarizado), los conocimientos matemáticos especializados de 700 profesores, y los logros de aprendizaje de 3 000 estudiantes de 1er y 3er grado. Encontraron que el nivel de logro de los profesores al contestar preguntas de ambos tipos de conocimientos predijo significativamente el tamaño de la ganancia en las puntuaciones de sus estudiantes a lo largo de un ciclo escolar, incluso controlando el nivel socioeconómico de los estudiantes, inasistencia, nivel de estudios del profesor, años de experiencia del profesor y duración de las clases de matemáticas. En cambio, el logro en los cursos de matemáticas que toman los profesores no predijo las ganancias en el logro de sus estudiantes (National Mathematics Advisory Panel, 2008, citado en Ball, et al, 2008).

La toma de conciencia en la didáctica acerca de la importancia de la formación de los maestros comenzó a hacerse presente en la literatura en la década de los 50 del siglo pasado, y en la ICMI (Comisión Internacional para la Enseñanza de las Matemáticas) en

[4] Los trabajos de Lee Schulman fueron pioneros al destacar distintos "tipos" de conocimiento necesarios para la enseñanza. Además de los mencionados está el conocimiento sobre los alumnos, sobre el programa, sobre la escuela, entre otros que investigaciones en la misma línea han ido añadiendo.

[5] Para varios investigadores en esta línea, se trata de conocimientos matemáticos especializados para la docencia (y no conocimientos didácticos) porque aún no entra en juego ningún elemento para la enseñanza. Por ejemplo, "preparar una clase para 4° grado de primaria sobre arreglos rectangulares como modelo multiplicativo". Entender que a través de un arreglo rectangular se puede estudiar la multiplicación, es un conocimiento matemático específico de los maestros.

1969 (Hernández, et al, 2018). Preguntas específicas sobre la formación y el proceso de convertirse en profesor comenzaron a aparecer un poco después, como lo muestran Hernández, et al (op cit) citando algunas de las publicadas en 1984 en "For the Learning of Mathematics" volumen 4, números 1, 2 y 3:

> Iahia (1984) se pregunta, ¿Cómo identificar una buena enseñanza? y si esto es posible ¿Cómo encontrar sus invariantes a través de casos individuales? Es Confrey (1984) quien propone como necesario el indagar cuáles son las demandas conflictivas y los apoyos o influencias que enfrenta un profesor en formación y cómo se modifican cuando incursiona como profesional y hasta convertirse en un profesor experto. Finalmente, en Behr et al. (1984) se mencionan varios aspectos relacionados con el profesor de matemáticas: se preguntan sobre el papel que podría tener la evaluación del profesor como medio para la mejora de la enseñanza; sobre las características de un buen profesor de matemáticas y cómo lograr el cambio en sus prácticas y en su discurso matemático escolar; también cuestionan qué modificaciones hacer en los programas de formación para que se alcancen las competencias profesionales necesarias (p. 82).

La didáctica se estaba posicionando para explorar estas preguntas, participar en la formación de los maestros de matemáticas y para comenzar a buscar respuestas.

2.3 Aportes de la didáctica de las matemáticas para la formación docente

En este apartado doy cuenta de trabajos sobre formación elaborados desde la didáctica de las matemáticas. Antes de presentarlos, quiero aclarar que mi mirada sobre la formación coincide con la que sostienen investigadores de la TAD:[6] se trata de un problema de los sistemas educativos (es un problema didáctico) y no de una institución específica o de los individuos (una escuela normal, un formador o maestro en particular).

> Si la formación del profesorado fuese efectivamente el factor principal del que dependiese la calidad de la enseñanza, entonces todas las deficiencias del sistema (y, en particular, el tan publicitado aunque mal definido "fracaso escolar") tendrían su origen en las carencias de esta formación. Pero además, y éste es el punto esencial, si las competencias que se requieren para ejercer la profesión de profesor son conocidas y existe un sistema de formación que permite adquirirlas, entonces la falta de formación y, por tanto, las deficiencias del sistema de enseñanza serían achacables a la responsabilidad de los profesores como individuos. (Gascón y Bosch, 2007, p. 212).

[6] Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Los autores continúan el argumento citando a Chevallard cuando compara el desarrollo de la medicina con el de la didáctica: hace 150 años una persona con apendicitis moría casi siempre, independientemente del hospital o del médico que la atendiera; actualmente casi todas las personas que llegan al hospital con apendicitis sobreviven, independientemente de qué hospital se trate y qué médico las opere. La diferencia en uno y otro caso es que la medicina ha avanzado y tiene respuestas con las que antes no se contaba, el tratamiento para la apendicitis y la formación de los médicos en torno a ese padecimiento es un tema prácticamente resuelto. En cambio, en la didáctica casi todo son preguntas abiertas, primeramente porque la formación para enseñar *x* solo tiene sentido si se conocen las necesidades de enseñanza de *x* en una institución específica. Es decir, primero hace falta poder responder, por ejemplo, qué se enseña sobre geometría en la secundaria, qué actividades resultan más pertinentes para enseñar esos temas en ese nivel, cómo dotar de sentido a los temas de geometría para enseñarlos a los estudiantes de secundaria, entre otras cuestiones. Posteriormente, la formación docente debería hacerse acorde a estas necesidades identificadas en la enseñanza, y esto invariablemente da pie a nuevas cuestiones por responder, ¿cómo enseñar a los maestros a diseñar o elegir las actividades más pertinentes para enseñar geometría en la secundaria?, ¿cómo enseñar a los maestros a dotar de sentido a los temas de geometría para enseñarlos en secundaria? Etcétera.

Visto desde este ángulo, en la formación se tienen más preguntas que respuestas y eso es atribuible en buena medida al desarrollo de la didáctica y no tanto a los sistemas de formación. Baste recordar que, hasta hace unas décadas, en la formación inicial se estudiaban por un lado las disciplinas y por el otro, pedagogía general, buscando además que los profesores hicieran una especie de investigación in situ, como para responsabilizarlos no solamente de la reflexión sobre su labor frente a grupo, sino parecería que también del diseño y puesta en marcha de actividades de enseñanza. Unos años después empezó a permear la idea de que las didácticas eran específicas a las disciplinas y las asignaturas en la formación inicial se estructuraron de esa forma. Sin embargo, en términos de la identificación de necesidades de enseñanza sigue habiendo mayor desarrollo en algunos temas matemáticos y en otros muy poco; y respecto a la formación de maestros para enseñar considerando esos hallazgos, hay todavía más huecos.

La falta de respuestas por parte de la didáctica para estructurar la formación docente se suma a otros factores que inciden en los sistemas educativos, como el reconocimiento social de la profesión docente, las condiciones laborales de los maestros, las ideas en torno a las matemáticas en la sociedad, el perfil de los aspirantes a ser maestros, la vinculación de las escuelas formadoras con las instituciones de educación obligatoria, entre otras.

Dicho la anterior, presento enseguida cuatro aportaciones para la formación de maestros de matemáticas originadas desde la TSD y la TAD. De cada trabajo resalto las tareas formativas que propone, ya que me basé sus ideas centrales para la elaboración de las actividades de la secuencia didáctica que constituyó la parte experimental de esta ingeniería.

En dos de los trabajos hay un claro énfasis en la problematización del objeto de enseñanza en la formación docente. Desde la TSD, Portugais propone la construcción de un medio a-didáctico para la formación de profesores, es decir, una "didactificación de la didáctica" (1995, citado en Ruiz y García, 2010). En analogía con el sistema de adaptación que se diseña para los alumnos en el que el maestro se pone en segundo plano para que sea el *milieu* el que dé la retroacción al alumno, el formador tampoco se interpone entre el maestro en formación y aquello que debe aprender (el conocimiento didáctico) dejando que el *milieu* haga una devolución de la situación. Portugais se pregunta si efectivamente habrá situaciones a-didácticas para la formación de profesores, y para probarlo desarrolla una ingeniería didáctica.

Desde la TAD, Sierra (2006) se propone que los profesores en formación aprendan las "razones de ser" de las matemáticas escolares para que entonces puedan gestionarlas en las aulas. Sierra desarrolla un "recorrido de formación" que parte del análisis del currículo escolar para luego plantear a los futuros maestros actividades que les permitieran estudiar los contenidos del currículo desde su razón de ser. Por ejemplo, estudiando cuáles son los tipos de problemas que dan sentido al número natural en sus aspectos cardinal y ordinal, y cuáles son las cuestiones cuya respuesta requiere como estrategia óptima el uso de los primeros números naturales. Posteriormente discuten sobre los recursos y técnicas que tienen a la mano los alumnos de educación inicial para resolver esas cuestiones y se introducen así en la literatura didáctica. Entonces analizan situaciones de enseñanza para identificar las variables didácticas en juego, las características de los problemas propuestos a los alumnos, las soluciones posibles y quién las valida (el maestro o la propia situación). Sierra también consideró el uso de videos de clases experimentales que se discutían en grupo.

En el proyecto PIC (Proyecto de Investigación Colaborativa) de José Carrillo y colaboradores también se pone énfasis en cuál es el objeto de enseñanza en la formación y añaden un componente para su desarrollo: la colaboración entre los propios maestros y con los investigadores. El siguiente esquema (Carrillo y Climent, 2009) muestra el triángulo didáctico con el que trabajan, contempla las relaciones entre el Alumno que aprende, el Maestro que se encarga de proponer situaciones para el aprendizaje y el Saber en juego (en este caso, las matemáticas escolares). Entonces, en la formación docente la posición del que aprende es tomada por el Maestro en formación, quien enseña es el Capacitador y el saber en juego es el Saber didáctico, o sea, el primer triángulo didáctico.

Ilustración 1 El triángulo educativo. Carrillo y Climent (2009, p. 217).

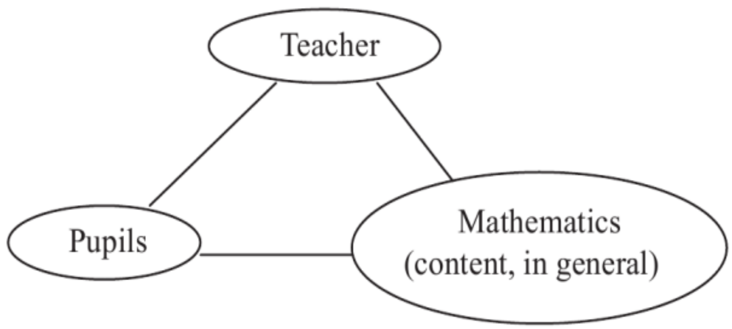
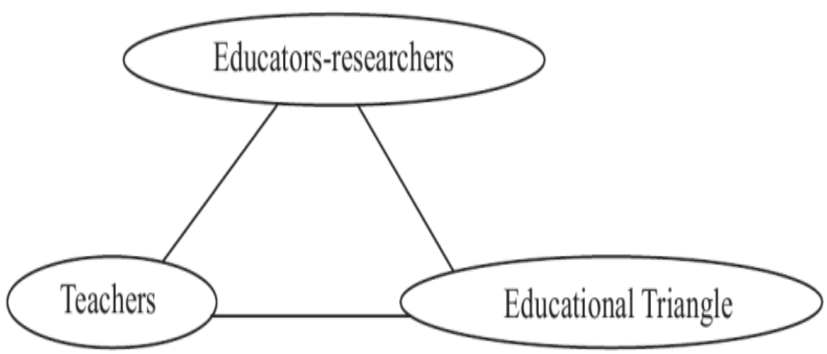


Ilustración 2 El triángulo de desarrollo profesional. Carrillo y Climent (2009, p. 217).



Ahora bien, los “entornos colaborativos” de los que hablan son una propuesta para enfrentar la complejidad que la enseñanza de las matemáticas supone, se trata de generar una comunidad que aporte a la investigación. A su vez, la colaboración posibilita la creación de una red de apoyo profesional entre los propios maestros, misma que contribuye a su desarrollo individual y colectivo.

En el PIC llevan a cabo principalmente tres tipos de tareas:

- Tareas matemáticas. En ellas se abordan los contenidos matemáticos y los maestros se encuentran en el papel de aprendices.

- Situaciones de clase. Se presentan en video para su análisis, los profesores observan críticamente situaciones reales de clase.
- Diseño, simulación y/o puesta en práctica en salones de clase. Los profesores enfrentan el problema de cómo presentar un contenido en condiciones reales o ficticias (cuando los demás profesores participan como si fueran los alumnos).

Por su parte, el trabajo de Lerner (2001) está más centrado en buscar actividades y combinaciones de estas para producir los aprendizajes esperado en los maestros. Ella propone dos instancias para el trabajo de formación, la utilización de situaciones de "doble conceptualización" apoyadas en la TSD y sus herramientas, y el análisis registros de clase. Las situaciones de doble conceptualización son, dicho de manera simple, un dispositivo en el que primeramente los profesores son puestos en una situación de aprendizaje matemático (ellos como alumnos) y posteriormente discuten las características de la tarea que se puso en juego invitándolos a reflexionar en términos didácticos sobre lo que acaban de experimentar como alumnos. Así pues, constan de dos fases:

- Planteamiento a los maestros de una o varias actividades matemáticas a resolver. Se espera que construyan conocimientos acerca de las matemáticas implicadas y los significados que pueden tomar en cierta actividad, que logren explorar distintos procedimientos y argumentar o comunicar sus hallazgos a otras personas, si fuera el caso.
- Reflexión sobre la secuencia didáctica que acaban de experimentar. Se espera que analicen las características de la actividad matemática en la que se vieron involucrados con la intención de que reflexionen sobre las condiciones didácticas requeridas para acercar ese objeto matemático a sus alumnos respondiendo preguntas como ¿habría funcionado también si se cambia el orden de las actividades?, ¿se podría usar otro material?, ¿qué cosas permite y cuáles otras restringe la consigna?, ¿en qué momentos intervino el formador?, ¿hubo procedimientos similares entre los equipos?, etc. Se busca clarificar lo que los propios maestros hacen como resolutores de problemas y las demandas que cierta actividad les hizo, con la intención de que conociendo estas cuestiones puedan emplearlas para decidir sobre las actividades que plantean a sus alumnos, los momentos y modos de intervención, las formas de organizar al grupo, entre otras.

El otro dispositivo que propone Lerner para la formación es el análisis del quehacer en el aula a partir de registros de clase en los que se observan las interacciones entre maestro, alumnos y el saber a enseñar. Afirma que esta tarea puede ser muy fructífera en casos específicos, como cuando se comparan actividades distintas que fueron diseñadas con el mismo objetivo, o cuando se enfatizan aspectos que hayan sido determinantes para la clase (como una actividad emergente, una intervención de un alumno o del maestro, una respuesta no esperada, etc.). Señala también la importancia de identificar aquellas cosas que pueden ser generalizables a otras situaciones o al repetir la misma situación, así como intentar inferir las conceptualizaciones de los alumnos sobre el saber en cuestión o sobre las intenciones del maestro al planear la clase.

Sobre el análisis de registros sugiere también lo siguiente:

- Utilizar los provenientes de clases "buenas" para resaltar las características deseables de la planeación y la interacción en una clase, que es justamente lo que se intenta comunicar a los maestros.
- Emplear los provenientes de clases que hayan impartido los propios maestros participantes más adelante en el proceso de formación, una vez que tengan conocimientos didácticos más sólidos que les permitan explicitar las razones de las decisiones que tomaron a lo largo de la clase, y se haya generado un clima de confianza y no de competencia.

Finalmente, Lerner destaca dos cuestiones que considera fundamentales para que los procesos de formación sean fecundos: que el formador o investigador se esfuerce por entender los problemas que los maestros plantean y por qué piensan lo que piensan; y lograr que los maestros se sientan autorizados a decidir y actuar de forma autónoma (pp. 189-190).

2.4 A manera de cierre

Si bien para el diseño de la secuencia didáctica que es objeto de mi trabajo busqué inspiración en las "razones de ser" de los números decimales y en la "didactificación" de la didáctica, la mayor parte tendrá más cercanía con las propuestas de Lerner y Carrillo.

De Lerner retomé las situaciones de doble conceptualización, ya que las he utilizado en trabajos previos con maestros obteniendo buenos resultados. De Carrillo la idea de un triángulo didáctico modificado en el que el sujeto que aprende es ahora el maestro en formación, el objeto de estudio son los conocimientos necesarios para la enseñanza y el maestro es el formador, y además procurar la construcción de un ambiente cooperativo que genere redes de apoyo y confianza. De ambos investigadores recuperaré la idea de trabajar con registros de clase para el análisis matemático y didáctico.

Ideas provenientes de la TAD respecto a identificar las necesidades de enseñanza y articular la formación en torno a estas tendrán presencia en algunas de las actividades a diseñar, fundamentalmente al plantear cuáles son las situaciones que los racionales resuelven, es decir, por qué existen en las matemáticas y en el currículo de la primaria.

La idea de Portugais de generar un medio adidáctico para la formación será evocada en las actividades de la etapa 3 de la secuencia didáctica al analizar los resultados de la puesta en práctica de las lecciones diseñadas por los participantes, haciendo énfasis en que sean estos quienes analicen lo sucedido y los propios resultados ofrezcan la retroalimentación necesaria.[7]

La articulación de lo anterior debe formar un hilo conductor claro para los maestros participantes y no ser un compendio de asuntos dispersos, como advierte Chevallard:

> Del mismo modo que, en la enseñanza escolar de las matemáticas, los profesores tienden a considerar la materia enseñada como una realidad totalmente preexistente, sin relación alguna con las cuestiones "vitales" de los alumnos, y que sólo se encuentran con estas cuestiones por casualidad, del mismo modo la enseñanza de la didáctica tiende muy a menudo a presentar a esta última como pudiendo tan sólo ofrecer productos previamente elaborados, cuya pertinencia en la resolución de los problemas con que se enfrenta el profesor novel no sabría garantizar. Se ofrecen así a los profesores en formación algunas horas sobre la noción de contrato didáctico, algunas horas sobre la transposición didáctica, algunas horas sobre la noción de campo conceptual, lo que acaba constituyendo una ensaladilla rusa de conocimientos cuya eficacia en el ataque directo de los problemas docentes no parece preocupar en exceso (Chevallard, 2001, p. 9).

En el capítulo 6 presento la descripción detallada de las actividades de la secuencia diseñada.

[7] Como describo en el capítulo 6, diseñé tres etapas en la secuencia didáctica. Las dos primeras tenían el propósito de abordar temas matemáticos, didácticos y de análisis curricular sobre los decimales. La tercera estuvo dedicada al diseño, puesta en marcha y análisis de una secuencia de aprendizaje sobre algún aspecto de los decimales para estudiantes de primaria.

Capítulo 3. Referentes teóricos: qué son los decimales

Análisis preliminares, segunda parte

En este capítulo presento la segunda parte de los elementos teóricos que me permitieron fundamentar el diseño de la secuencia didáctica.

Aquí muestro análisis de aspectos didácticos de los decimales comenzando por una breve descripción sobre su desarrollo histórico para explicitar el origen de las principales dificultades que han caracterizado su enseñanza y aprendizaje hasta nuestros días, siguiendo el análisis hecho por Brousseau. En el apartado 3.2 planteo una definición operativa de número decimal con base en Centeno (1997) y cierro (3.3) describiendo a detalle los obstáculos epistemológicos y didácticos que Brousseau identifica respecto a los decimales.

Como puede apreciarse, este capítulo fundamenta de manera muy importante las decisiones tomadas para la secuencia, mismas que explicitaré al describir las variables macro y micro.

3.1 ¿Para qué los números decimales?

Para estudiar las dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de los decimales es necesario entenderlos como objeto matemático situado históricamente, es decir, saber qué necesidades humanas dieron origen a su creación; y además, comprender cómo ha sido su difusión, o sea, aquello que ha caracterizado su enseñanza. Con ese fin, hago aquí un breve análisis del desarrollo histórico de estos números.

De inicio, podríamos preguntar para qué los decimales si ya existían las fracciones, cuestión que puede replantearse así, ¿qué problemáticas llevaron a la humanidad a desarrollar un sistema de representación de cantidades no enteras valiéndose de números en los que las sucesivas divisiones fueran siempre en 10 partes iguales y no con cualquier otro posible denominador?, y además, ¿para qué desarrollar una escritura con punto si esos números se pueden escribir con fracción?

Según Gairín (1998), babilonios, egipcios, chinos y griegos inventaron formas de representar y operar cantidades menores que la unidad. Las características de esas representaciones dependieron de los sistemas de numeración que habían desarrollado para los naturales (específicamente respecto a la base, posición y el uso del cero); mientras que las de los chinos y egipcios tuvieron una base decimal, las de los babilonios y griegos fue sexagesimal.[1] El cálculo con fracciones sexagesimales alcanzó un desarrollo muy importante y su empleo se generalizó y se mantuvo durante siglos en la astronomía y algunas áreas de las matemáticas como la trigonometría.

La primera representación de los números decimales[2] en la que un punto o una coma separan la parte entera de la no entera se atribuye a Francisco Pellos que publicó en 1492 “El compendio de lo ábaco”. También se menciona a Christoff Rudolff en 1525 usando un punto decimal en su libro “Exempel-büchlin” y a François Viète en 1549 con “Canon” usando una coma o una barra vertical. No obstante, se considera que Simon Stevin fue quien los difundió de forma importante (Waldegg, 1996).

[1] En las fracciones decimales la primera división de la unidad es en 10 partes (10^{-1}), la segunda es en 100 (10^{-2}), la tercera en 1 000, etc.; así que el número 0.125 o 125/1000 es la suma de 1/10 + 20/100 + 5/1000. En las fracciones sexagesimales la primera división de la unidad es en 60 partes (60^{-1}), la segunda es en 3 600 partes (60^{-2}), la tercera es en 216 000 partes (60^{-3}) y así sucesivamente; el número 0.125 en base sexagesimal sería 7/60 + 30/3600. Hoy día seguimos utilizando un sistema sexagesimal para medir el tiempo y los ángulos.

[2] Si bien en México hemos usado el punto decimal, de manera oficial el Sistema General de Unidades de Medida (NOM-008-SCFI-2002) indica el uso de la coma decimal.

Stevin nació en Brujas, Bélgica en 1548 y, como otros personajes renacentistas, incursionó en diversos ámbitos trabajando como contador, ingeniero y en las fuerzas militares. Publicó textos sobre geometría, aritmética, algebra, física, ingeniería, navegación, defensa miliar, filología, astronomía y política. Además, Stevin fue un entusiasta divulgador de la ciencia. Mientras las instituciones comerciales guardaban celosamente tablas de interés simple y compuesto en una época en la que operaciones como la multiplicación y la división estaban fuera del alcance de la mayoría de las personas, Stevin las publicó incluyendo ejercicios prácticos. Su trabajo con los números decimales también fue inspirado por la idea de difundir un método práctico para el cálculo. *The Thiende* (1585) es un manual dirigido a astrónomos, agrimensores, tapiceros, vinateros, geómetras, banqueros y todo tipo de mercaderes, para que simplificaran las operaciones aritméticas usando decimales en vez de fracciones.

En la primera parte del libro, Stevin define a los números decimales y propone cuatro maneras para representarlos.

Ilustración 3 Elaboración propia basada en Stevin y Waldegg

8 ⓪ 6 ① 3 ② 7 ③	[=8.637]
⓪ ① ② 4 2 5	[=4.25]
3671③	[=3.671]
5 ② 6 ⑤	[=0.05006]

Los números en los círculos indican la posición: el cero se pone a la parte entera e indica el “comienzo” de las divisiones decimales, el 1 “primera” o sea la razón 1/10, el 2 “segunda” o sea la razón 1/100, etc.

En la segunda parte del libro se estudian las operaciones (suma, resta, multiplicación, división y raíces). El resultado en la siguiente suma se leería como 30 enteros, dos décimas, siete centésimas y seis milésimas.

Ilustración 4 Elaboración propia basada en Stevin y Waldegg (2)

	⓪	①	②	③
2	3	4	7	1
	6	8	0	5
3	0	2	7	6

Por último, en un apéndice presenta problemas prácticos de aplicación para los decimales.

A quien se le atribuye un uso consistente del punto decimal es a John Napier quien publicó sobre logaritmos en 1617.

¿Por qué plantear la escritura de números no enteros usando como denominadores al 10 y potencias, y además desarrollar una representación distinta a la fraccionaria? Para facilitar el cálculo. Aunque el desarrollo de las matemáticas hubiese seguido por el camino de las fracciones sexagesimales, otras áreas de actividad humana, como aquellas que se daban en entornos comerciales y bancarios, demandaban maneras más sencillas de sumar y restar cantidades no enteras. La partición de los enteros usando denominadores decimales y su representación con punto o coma, paulatinamente dieron acceso al cálculo a sectores de la población que antes no lo tenían.

En paralelo, otro importante movimiento social comenzó a gestarse en aquellos años respecto a los sistemas de medida. Las medidas antiguas tenían significado en la vida de las personas, es decir, las magnitudes consideradas y las unidades empleadas respondían a realidades sociales. Por ejemplo, la tierra se medía por el tiempo de trabajo necesario para que rindiera frutos, y bajo ese parámetro se consideraban las características del terreno (plano, inclinado, rocoso, fértil, etc.) y no sólo su extensión. Otras magnitudes, como la longitud, se medían con unidades distintas dependiendo del objeto a medir: “El pie para distanciar las plantas de patatas, el paso para la longitud, el codo para las telas, jamás para maderas, que se medían en varas.” (Moszynski, citado en Kula, 1980, p. 5).

Según Kula, en muchas de las magnitudes las unidades de medida tenían múltiplos duodecimales o vigesimales; mientras que las en subunidades casi todas las divisiones eran en mitades, unas pocas en tercios. Algunas magnitudes tuvieron muchas subunidades, se sabe a través de una encuesta que realizó la Academia de Ciencias en 1791, que para medir áridos (frutos secos, legumbres, arena, etc.) la localidad de Luneville (Francia) utilizaba el *resal* que consta de ocho unidades llamadas *boichot*, que se dividen en seis *pots*, que se divide en dos *pintes*, éstos en dos *chopines*, la chopine en dos *setiers*, éste en tres *verres* (Kula, op cit). El manejo de tantas subunidades con divisores distintos debió entrañar mucha dificultad y confusiones, además de que los conflictos y fraudes en el intercambio comercial eran frecuentes.

Conforme las necesidades humanas se han transformado, las magnitudes y las unidades para medirlas también. A finales del siglo XVIII ciertos sectores plantearon la necesidad de unificar los sistemas de medidas y los decimales aportaban a los promotores de la unificación el instrumento "científico" idóneo para ello.[3] Con la revolución (1789) en Francia se propuso una unidad que tendría que usarse en todo el país para medir la longitud, y así dejar atrás los problemas comerciales que ocurrían al usar dos o más unidades distintas. Se pensó en crear una nueva unidad que ya no estuviera ligada al cuerpo humano (como el codo o el pie) sino a la Tierra, así que enviaron a varios equipos a medir cuidadosamente la distancia entre dos puntos (Barcelona y Dunquerque) determinando un arco de meridiano. Con tal medida se infirió la del meridiano y esa longitud, dividida por 40 millones, fue llamada *metro.*[4]

En un discurso dado en la Escuela Normal Superior de París en 1794, Laplace, astrónomo, matemático y profesor de dicha institución, dijo:

> Interrumpo hoy el orden de las lecciones de matemáticas para hablar del sistema de pesas y medidas que acaba de ser definitivamente decretado por la Convención Nacional. Uno de los objetos más útiles de los que se ocuparán cuando vuelvan a sus provincias será el hacer conocer a sus conciudadanos, y especialmente a los maestros de las escuelas primarias, este beneficio de las ciencias y de la revolución. Lo voy a exponer aquí en detalle debido a su importancia. Es inimaginable el número prodigioso de medidas en uso, no solamente en los distintos pueblos, sino en una misma nación: sus divisiones curiosas e incómodas para los cálculos; la dificultad de conocerlas y compararlas; en fin, los apuros y los fraudes que de ello se deduce en el comercio. Uno de los mayores servicios que las ciencias y los gobiernos podrían hacer a la humanidad es, por tanto, la adopción de un sistema métrico cuyas divisiones uniformes se presten lo más fácilmente posible al cálculo, y que se obtenga de la manera menos arbitraria posible de una medida fundamental, indicada por la misma naturaleza. El pueblo que se diera un sistema semejante de medidas uniría a la ventaja de recoger él los pri-

[3] Si bien el argumento en buena medida fue la lógica científica que "justificaba" el uso de particiones decimales en las medidas, la imposición de dichos sistemas no estuvo vacía de poder político y económico de unos países sobre otros (Kula, 1980). A la fecha, hay naciones que conservan (porque política y culturalmente pudieron hacerlo) sus sistemas de medida y no se suscribieron sistema métrico decimal.

[4] La definición ha ido cambiando. Hoy día la longitud del metro se define como el trayecto que la luz recorre en el vacío durante 1/299792458 segundos.

> meros frutos, la de ver su ejemplo seguido por los otros pueblos, de los que se convertiría así en bienhechor puesto que el imperio lento, pero irresistible de la razón, vence a la larga las envidias nacionales y todos los obstáculos que se oponen al bien de una utilidad, generalmente sentida por todos. (…)
>
> Tal es el nuevo sistema de pesas y medidas que los sabios han ofrecido a la convención nacional, que se ha apresurado a aprobarlo. Este sistema, fundado en la medida de los meridianos terrestres, conviene igualmente a todos los pueblos: no se relaciona con Francia mas que por el arco de meridiano que la atraviesa, pero la posición de este arco –cuyas extremidades llegan a los dos mares y se corta por el paralelo medio- es tan ventajosa que los sabios de todas las naciones, reunidos para fijar la medida universal, no hubieran podido hacer otra elección. Por tanto nos está permitido esperar que un día este nuevo sistema será generalmente adoptado. Es, sin comparación, más sencillo que el antiguo, tanto en sus divisiones como en su nomenclatura y presentará muchas menos dificultades a la infancia.
>
> Ustedes tendrán dificultades cuando lo expliquen a los maestros, a los que una larga costumbre ha familiarizado con las antiguas medidas. Les parecerá muy complicado, pues el hombre se inclina naturalmente a atribuir a la complicación de las cosas el esfuerzo que sus prejuicios y sus costumbres le ocasionan para concebirlas; pero su celo iluminado superará estos obstáculos. (CEDIC, 1980 citado en Centeno, 1997, p. 51).

Sin embargo, fue hasta 1840 cuando el uso del sistema decimal de medidas se hizo obligatorio en todo el país. Unos años más tarde (1889), la Convención del Metro comenzó a celebrar conferencias en las que se fueron definiendo otras unidades, como el litro (volumen equivalente a un decímetro cúbico) y el kilogramo (la masa de agua en un decímetro cúbico (litro) a cierta presión y temperatura), todas con múltiplos y submúltiplos decimales.[5]

3.2 Definición de número decimal

Tomo a Centeno (1997) para explicar la construcción que permite definir qué es un número decimal. Ella parte de la “insuficiencia” de los números naturales (los que usamos para

[5] La Conferencia de Pesos y Medidas sigue reuniéndose cada 4 años. En dichas reuniones se revisan las definiciones de las distintas unidades de medida y se incorporan otras cuando es necesario. Por ejemplo, en la de 1999 se adoptó la unidad *katal* (que equivale a un *mol* por segundo) y en la del 2007 se revisó la definición de *kelvin*.

contar, como el 1, 2, 3…) y afirma que son insuficientes en dos sentidos: en el sentido *práctico* y en el sentido *teórico.* Respecto al primero, porque al medir magnitudes continuas, sin importar la unidad que se fije siempre habrá mediciones en las que la unidad no "quepa" un número exacto de veces.

A partir de esta insuficiencia se pueden construir los racionales. Si hay una longitud (L) que se mide con cierta unidad (u), podemos decir que el resultado de la medición es $L = u \times v + s$, en donde v es el número de veces que cabe la unidad completa y s el sobrante. La unidad u puede ser dividida en n partes iguales, que representaríamos u/n. Ahora hay que hallar un número q tal que q veces u/n sea la longitud s. La longitud L respecto a la unidad u/n será $(v \times n \times u/n) + u/n$.

Como ejemplo, supongamos que L contiene 5 veces la unidad u, y tiene un sobrante s de $u/3$. Si se mide L con la unidad u, la medida será $(5 \times 3 \times u/3) + u/3 = 16/3$. Si una magnitud contiene m de esas partes, su medida será m/n o sea, una fracción, y en caso de que L y u resultaran inconmensurables, el proceso de subdivisión será infinito y siempre se obtendrán medidas aproximadas.

La insuficiencia de los naturales en el sentido *teórico* se manifiesta porque hay una necesidad dentro de las matemáticas mismas que empuja hacia la generalización y completitud de estructuras previas, quitando restricciones y ampliando hacia donde sea necesario.

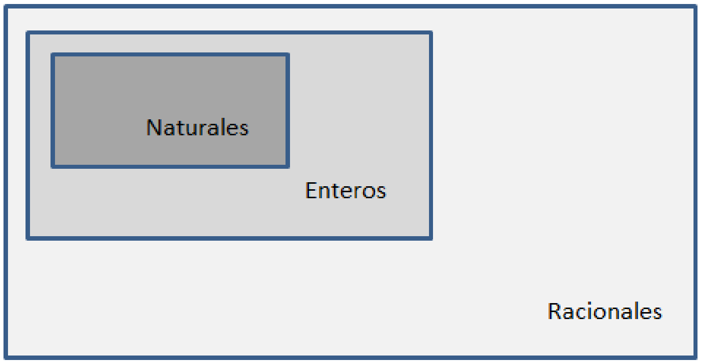
Con los *números naturales* (1, 2, 3…) hay operaciones como 5 + ___ = 3 que no tienen solución. El conjunto se amplía entonces para incluir a los negativos y al cero (…-2, -1, 0, 1, 2…) dando lugar a los *números enteros*. Con estos números ya hay solución para toda operación de la forma a + ___ = b con a y b naturales.

Sin embargo, en los enteros también hay operaciones sin solución, como 5 × ___ = 3. Aquí el número a hallar es aquel que multiplicado por 5 dé 3, o bien, el resultado de la división 3 ÷ 5 = ___. El número buscado es un cociente y se escribe 3/5, al que llamamos fracción. Estos son los *números racionales* o fracciones, que incluyen a todos los cocientes de enteros excepto a los que tienen como divisor cero,[6] así pues, en ellos está contenido el conjunto de los números enteros (como 4/1) y resuelven toda operación de la forma a × ___ = b con a y b enteros.

En un esquema, estos conjuntos numéricos se ven así:

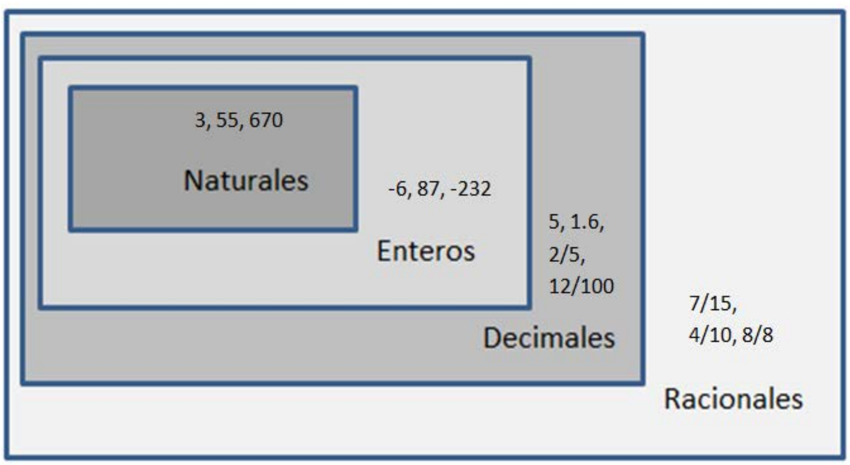
[6] Pensemos en un caso como 6/2 = 3 que puede leerse así: 3 es el número por el que multiplico a 2 (el denominador) para obtener 6 (el numerador). Si fuera 5/0 habría que hallar un número por el que se multiplicara el 0 para obtener 5, como ese número no existe se dice que la división con denominador cero no está definida.

Ilustración 5 Esquema de conjuntos numéricos. Elaboración propia



¿Y los decimales? Los decimales son un subconjunto de los números racionales, así que todo decimal es un racional. Además, los enteros y los naturales son también decimales. Sin embargo, no todo racional es decimal, o sea que hay fracciones decimales y otras que no son decimales, como se observa en este segundo esquema.

Ilustración 6 Esquema de conjuntos numéricos incluyendo a los decimales. Elaboración propia



Tomo esta definición: *un número decimal es aquel que en su forma irreducible puede escribirse como* $\frac{b}{5^{m} \times 2^{p}}$ *en la que* b *es un entero primo relativo y* m *y* p *son enteros naturales*, es decir, que un racional será decimal si, estando expresado en su forma irreducible,[7] los factores del denominador son solamente 5 y 2. Como consecuencia de esa característica, los números decimales se pueden escribir con una fracción cuyo denominador es una

[7] Una fracción está escrita en su forma irreductible si entre el numerador y el denominador no hay ningún divisor común.

potencia de 10, y representarse con una cantidad finita de cifras a la derecha del punto. Así pues, 4/5, 23, -2/8 y 0.67 son números decimales, y números como 2/7, -13/11, 0.666…, √2, por ejemplo, no lo son.

¿Qué son entonces los números cuya cantidad de cifras a la derecha del punto no es finita? De acuerdo con la definición anterior estos números no son decimales, pero independientemente de que un número sea o no decimal, todo número tiene *representaciones* decimales aproximadas.

> Debemos distinguir bien cuando hablamos de un número y cuando nos referimos a una de sus diversas formas de representarlo. Hablamos de un número cuando nos ocupamos de su función, de los problemas que permite resolver o de las propiedades que lo distinguen de otras clases de números. (Centeno, 1997, p. 22).

Es decir, que una cosa es el número y sus propiedades, y otra las distintas maneras de ser representado. 2/5, 8/20, 0.4, 4/10, 40/100, 20/50, 0.4000, etc. son el mismo número representado de formas distintas.

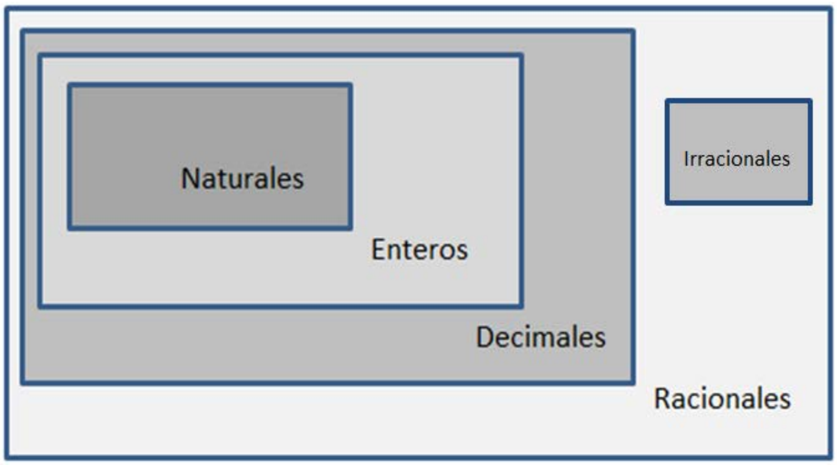
En la siguiente tabla, los números de la columna de la derecha no son decimales (tienen factores distintos de 2 y 5 en sus denominadores), pero tienen una representación aproximada con punto decimal. Algunos tienen periodo (o cifras que se repiten) el cual puede consistir en la repetición de una sola cifra (como en los cocientes de 2/3 y 5/6) o varias cifras (11/7); se llaman *periódicos puros* y en su forma irreductible el denominador nunca tendrá como factores 2 ni 5. También puede ocurrir que antes del periodo haya cifras que no se repiten (5/6 y 5/42); éstos se llaman *periódicos mixtos* y en su forma irreductible el denominador no tendrá únicamente al 2 y 5 como factores, pero puede incluirlos.

Ilustración 7 Números decimales y no decimales. Elaboración propia

Decimal	**No decimal**
5/4 = 1.25	5/6 = 0.8333… = $0.8\overline{3}$
7/14 = 0.5	11/7 = 1.571428571428… = $1.\overline{571428}$
434/62 = 7	2/3 = 0.666… = $0.\overline{6}$
195/32 = 6.09375	5/42 = 0.1190476190476… = $0.1\overline{190476}$
	$\sqrt{2}$ = 1.414213562373…

Todos los números que tienen periodo son racionales no decimales. En cambio, números como √2 o Pi no tienen periodo, no son decimales y como no proceden de una división de enteros, tampoco son racionales. Estos números se llaman Irracionales.

Ilustración 8 Esquema de conjuntos numéricos incluyendo a los decimales e irracionales. Elaboración propia



3.3 Consideraciones didácticas sobre los números decimales

Como puede apreciarse en la muy breve descripción histórica con la que inicia este capítulo, los decimales permitirían solucionar necesidades de la vida práctica tanto en lo referente al cálculo como a la medición y debían enseñarse rápidamente a todas las personas; sin embargo, la difusión fue un problema didáctico no exento de problemas políticos (Brousseau, 1976). El hecho de que en su origen estuvieran fuertemente arraigados a su difusión y vinculados con el sistema de medición decimal, ha caracterizado a la enseñanza de los números decimales hasta nuestros días.

Según Brousseau (op cit), las consecuencias de esta vinculación inicial se manifiestan en la generación de obstáculos y para estudiarlos es necesario definir a los decimales.

> El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, según se creía en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje; sino el efecto de un conocimiento anterior, que tuvo su interés, su éxito, y que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los

> errores de este tipo no son fortuitos e imprevisibles, su origen se constituye en un obstáculo. (Brousseau, 1988).

Desde esa perspectiva, un error debido a un obstáculo siempre refleja conocimiento y no la ausencia de este, ya que en determinados dominios produce respuestas correctas. Por otro lado, el conocimiento nuevo que se revela como válido en un campo más amplio no se construye sobre el conocimiento anterior sino contra éste. Ambas afirmaciones tienen importantes implicaciones en la enseñanza.

Ahora bien, Brousseau distingue tres tipos de obstáculos dependiendo del polo del sistema didáctico en el que se originen: alumno (obstáculos ontogenéticos), profesor (obstáculos didácticos) y saber (obstáculos epistemológicos) (Cid, 2000). Los obstáculos ontogenéticos son aquellos que guardan relación con las características del sujeto que aprende. En buena medida, la clasificación que hace Brousseau de este tipo de obstáculos se refiere a las capacidades y limitaciones que dependen de la edad del sujeto, es decir, a aquellas están ligadas a su desarrollo neurofisiológico. A determinada edad ciertas ideas matemáticas pueden estar fuera del rango de aprendizajes posibles para un estudiante y eso se constituye en un obstáculo que más adelante habrá de franquearse. En este trabajo, los obstáculos ontogenéticos no forman parte de la problemática a estudiar en los análisis preliminares pues la población de interés es adulta y ninguna de sus características lleva a pensar que tendrían dificultades ligadas al desarrollo.

Los obstáculos didácticos son aquellos que se generan por las características que toma la enseñanza, lo que incluye decisiones a distintos niveles, por ejemplo, que un ministerio de educación determine si cierto contenido será enseñado en la educación obligatoria, en qué grado(s), qué situaciones se utilizarán para movilizarlo, cómo habrá de evaluarse, con cuáles otros contenidos matemáticos se vinculará explícitamente, cómo se define, etc., y otras relacionadas con las decisiones que toma el maestro para enseñar ese contenido a un grupo específico de estudiantes.

Por último, hay dificultades que están estrechamente ligadas al contenido matemático ya que son inherentes a éste. Estas dificultades constituyen los obstáculos epistemológicos y es prácticamente irremediable que existan dado que en el proceso de construcción del conocimiento los alumnos habrán de toparse con tareas nuevas en las que los aprendizajes previos no serán suficientes para enfrentarlas. Además, están vinculados al desarrollo histórico de las matemáticas mismas.

> En particular, [Brousseau] califica un obstáculo de epistemológico si se puede rastrear en la historia de las matemáticas y la comunidad de ma-

temáticos de una determinada época ha tenido que tomar conciencia de él y de la necesidad de superarlo. En este caso, el rechazo explícito del obstáculo forma parte del saber matemático actual. (Cid, 2000, p. 2).

Ahora bien, el hecho de reconocer que son constitutivos del proceso de construcción del conocimiento no significa que no puedan tomarse decisiones didácticas para mejorar dicho proceso.

Enseguida presento obstáculos didácticos y epistemológicos específicos de los números decimales

3.3.1 Obstáculos didácticos

¿Qué obstáculos didácticos han generado las formas predominantes de enseñanza de los decimales? Brousseau (1976) distingue los siguientes:[8]

Respecto a su vínculo con las medidas

a) Los decimales suelen presentarse haciéndolos corresponder con las unidades de cierta magnitud: metros (unidades), decímetros (décimos), centímetros (centésimos) y milímetros (milésimos). Posteriormente desaparecen las magnitudes, generalmente sin explicación de por medio. En este sentido, existe una diferencia didáctica entre:
   - Medir una longitud con cierta unidad, ver cuántas veces cabe completa y luego fraccionar la unidad en diez, cien, mil... partes iguales para medir el residuo. La unidad puede ser convencional o no, y los décimos medirán una décima parte de la unidad elegida, los centésimos una centésima parte, etc.
   - Medir una longitud con la unidad metros, ver cuántas veces cabe completa y luego fraccionar en decímetros, centímetros, etc. para medir el residuo. Las unidades siempre serán metros y los décimos decímetros, los centésimos centímetros, y así sucesivamente.

Hacerlo de la segunda manera puede dar lugar a obstáculos ya que en un primer momento se espera que los alumnos aprendan los decimales vinculándolos con magnitudes y que luego por sí mismos logren hacer cambios de unidad (por ejemplo, que la unidad sea

[8] En esta sección tomo ideas de Brousseau, 1976; Gómez, 2011; Gairín, 1998; Ávila, 2008.

un centímetro en vez de un metro) o que los desvinculen de los contextos de medición y los usen en otros, como cuando son operadores o razones.

b) Prácticas de enseñanza en las que 4.75 metros se lee como 4 metros y 75 centímetros, suelen hacer pensar a los alumnos que los decimales indican un cambio de unidad: los metros están a la izquierda del punto y los centímetros a la derecha de éste.[9] Por ello, no son raros errores como interpretar 12.5 metros como 12 metros con 5 centímetros.

c) Si los números decimales están ligados a medidas, es fácil suponer que entre 4.75 y 4.76 metros no hay ninguna otra medida, dado que se pueden interpretar como 475 y 476 centímetros. Cuando los alumnos llegan a corregir este error en un caso particular, frecuentemente lo hacen basados en la misma idea: a los centímetros les siguen los milímetros en orden de mayor a menor, así que 475 centímetros pueden ser 4750 milímetros. Entre las dos medidas dadas están otras como 4751, 4752, 4753… milímetros.

   Este tipo de prácticas pueden transmitir a los alumnos la idea de que es posible ir encontrando una unidad más pequeña en toda magnitud, y oculta el hecho de que los racionales son densos (independientemente del contexto de medición).

Al enfatizar su escritura

a) Por lo general, la enseñanza de los decimales se apoya en lo que los alumnos saben (casi siempre de manera implícita): el sistema se organiza en potencias de 10, al juntar 10 unidades se forma una unidad de un nuevo orden, la decena; 10 decenas harán una unidad del orden centena, y así sucesivamente. Pueden entonces extender el principio a las cantidades menores que uno: la unidad se divide en 10 partes iguales con lo que cada parte es un décimo; a su vez, cada décimo puede dividirse en 10 partes iguales y cada una será un centésimo, etc. Se usa un punto para señalar la separación entre la parte entera de un número y la no entera y cada cifra adquiere un valor de acuerdo con el lugar que ocupa. Se prioriza el conocimiento de los nombres de las posiciones ocupadas por cada cifra, cosa que los alumnos suelen aprender bien, aun-

---

[9] Si bien esta práctica ocurre también fuera de la escuela, en este documento se hace referencia a los obstáculos que puede generar el hecho de que desde la escuela se permitan o incluso se promuevan.

que el significado de aquello que leen o escriben no sea comprendido por ellos mismos.

Aprender estas reglas de funcionamiento del sistema es necesario, sin embargo, puede ser un obstáculo cuando la enseñanza se sustenta primordialmente en éstas ya que los decimales dejan de ser un nuevo tipo de números para convertirse en un asunto de reglas de representación en las que quedan ocultas las diferencias conceptuales entre distintos conjuntos numéricos. Por ejemplo, los alumnos suelen pensar que los números decimales son únicamente todos aquellos que tienen punto, incluyendo racionales no decimales (como 0.333…) e irracionales (como π), y excluyendo a los enteros[10] (como -6, 15) y a los decimales representados mediante un denominador que no es potencia de 10 (como 3/5). Estas prácticas de enseñanza dificultan la comprensión de la relación entre fracciones y decimales, “hay estudiantes que no saben si se trata de una intersección, una inclusión, y en ese caso de quién sobre quién” (Gómez, 2001, p. 545).

b) Cuando 7.15 se lee "siete quince" como si fueran dos enteros, se ocultan aspectos que siguen siendo importantes en el proceso de aprendizaje, como que el “quince” son quince centésimos de la unidad empleada. Estas prácticas pueden dar lugar a errores como pensar que 37 milésimos se escriben 37000 o que 3.1000 son tres milésimos.

c) Centrar la enseñanza en el aprendizaje de la representación con punto oculta el carácter racional de los números, así que es frecuente que los alumnos extiendan los principios aprendidos con los naturales cuando se trata de compararlos. No es extraño que piensen que 0.3 < 0.101 (porque 3 < 101); 0.4 > 0.62 (porque 0.4 sólo llega hasta décimos y 0.62 a centésimos, y los centésimos son más chicos que los décimos); y que en la serie 14.08, 14.09, ____ la respuesta sea 15.

d) Vinculado a lo anterior, en 0.75 y 0.750 quedan ocultos los denominadores (75/100 = 750/1000), por lo que para los alumnos los ceros a la derecha sí alteran el valor del número (como ocurre en los naturales en los que claramente 75 ≠ 750). En ese mismo sentido, el orden entre 0.075 y 0.0075 puede no ser claro para los alumnos, ¿esos ce-

[10] Números como 1.75 pueden ser identificados como decimales, pero la parte decimal es sólo 0.75 excluyendo a los enteros.

ros alteran el valor de los números o sigue siendo válida la regla de "el cero a la izquierda no vale"?

Respecto a la operatoria

En general, los alumnos no saben por qué funcionan los algoritmos que aprenden con los números naturales (en parte se espera que sea así, ya que una de sus finalidades es dominar un procedimiento mecánico que funcione en todos los casos), pero en algún momento logran dominar la técnica. Cuando la enseñanza de los algoritmos con decimales se ve como extensión de los aprendidos con los naturales, por lo general sólo se añaden otras reglas y las cuestiones sobre sus diferencias conceptuales no son discutidas.

En el caso de la suma y la resta las cantidades se alinean de acuerdo con el punto decimal para así sumar centésimos con centésimos, décimos con décimos y así sucesivamente. Puede haber dificultades si se opera por separado la parte a la derecha del punto de la de la izquierda, como en 17.3 + 21.8 = 38.11 (lo cual revela problemas conceptuales). También cuando los números a sumar o restar tienen distinta cantidad de cifras decimales o cuando se combinan números con punto y naturales. Rellenar con ceros al resolver las operaciones es efectivo y fácil de aprender, pero permanece oculto que funciona porque 0.36 = 0.360.

En cuanto a la multiplicación con decimales no es necesario alinear los factores de acuerdo con el punto, basta con correr el punto en el producto tantos lugares a la izquierda como la suma de la cantidad de cifras a la derecha del punto que haya en ambos factores. Por ejemplo, en el producto de 37.2 × 0.56 habría que correr el punto tres cifras a la izquierda. Si esa operación se pensara como 372/10 × 56/100 sería más claro que multiplicar los factores como si fueran enteros (es decir, ignorando el punto) es equivalente a multiplicar los numeradores si se escribieran en forma fraccionaria, y contar el número de cifras que tienen los factores a la derecha del punto, es equivalente a multiplicar los denominadores (sería como decir: décimos por centésimos da milésimos, así que hay que correr el punto 3 lugares a la izquierda).

¿Qué otras dificultades pueden tener los alumnos? Como en el caso de la suma y la resta, es común que multipliquen por un lado la parte entera y por otro la no entera, por ejemplo, 2.3 × 2.3 = 4.9, 4 × 2.3 = 8.12. También suelen aplicar erróneamente las reglas para multiplicar por potencias de 10 (que consisten en correr el punto), por ejemplo, 437.56 × 10 = 437.560, o bien 3.15 × 10 = 30.150.

Respecto a la división, las cantidades con punto juegan distintos papeles en lo que a la técnica de resolución se refiere. Un caso es cuando el residuo se sigue dividiendo, lo que implica poner un punto en el cociente y agregar un cero en la(s) cifra(s) que constituyen el residuo. Centrarse exclusivamente en el aprendizaje de la técnica oculta el hecho de que, al agregar un punto en el cociente y un cero en el residuo, se indica un cambio de unidad, es una manera de "convertir" al residuo en décimos indicando lo propio en el cociente (si el residuo era 8 al ponerle un cero serán 80 centésimos que se dividirán entre el divisor, y la cifra obtenida se escribirá en el cociente después del punto).

El otro caso es cuando el divisor, el dividendo o ambos tienen cifras a la derecha del punto y se plantea una división equivalente en la que no haya puntos. Centrarse en el aprendizaje de correr los puntos y agregar ceros según sea necesario, oculta el razonamiento que está de fondo: en las divisiones 12.06 ÷ 0.4 y 1206 ÷ 40 los cocientes obtenidos serán iguales.

Otros errores que se derivan de extender los principios aprendidos con los naturales y se ocultan con las prácticas de enseñanza centradas en el aprendizaje de las reglas, son aquellos en los que los alumnos dividen por separado la parte entera de la no entera, como en 2.12 ÷ 2 = 1.6 o aplican erróneamente las reglas para dividir por potencias de diez, por ejemplo 82.40 ÷ 10 = 82.4 o 30.5 ÷ 10 = 3.5.

Elegir centrar el estudio de los decimales en su representación con punto puede simplificar la enseñanza de ciertos aspectos (como el valor posicional, la lectura y la escritura) pero suele ser fuente de obstáculos importantes. ¿Por qué entonces ha sido la forma predominante de enseñanza? Atendiendo a su origen, la representación con punto constituye una invención práctica para la medición y el cálculo (Brousseau, 1976), pero comenzar por ahí el estudio de los decimales al parecer da lugar a una desvinculación con el conjunto numérico que los contiene, los racionales.

3.3.2 Obstáculos epistemológicos

En los decimales Brousseau (1976) distingue los siguientes:

a) A los alumnos les será necesario reconocer que con los naturales no basta para dar cuenta de medidas y que deben construirse nuevos números: los racionales. Sin embargo, es posible utilizar cualquier denominador y las potencias de 10 serán una posibilidad entre muchas otras. Para los alumnos no hay ninguna razón por la que la utilización de denominadores potencia de 10 sea ventajosa con respecto a la utilización de otros denominadores. ¿Por qué habría de serlo? Más adelante será necesario que reconozcan (a nivel de la acción en un inicio) que los decimales son un subconjunto de las fracciones.

b) Los racionales indican una relación que es un cociente (el numerador entre el denominador) y a la vez son un número. Ampliar la idea de la fracción como relación (por ejemplo 1/8 es 1 parte de 8) para también darle cabida a la de fracción como números que pueden ordenarse, sumarse, restarse, etc. y a la fracción como aplicación lineal, es difícil para los alumnos. En tareas como el ordenamiento, elegir denominadores que sean potencias de 10 (siempre que sea posible) podría empezar a parecer ventajoso a los ojos de los alumnos. También será necesario que reconozcan que usando decimales pueden aproximar otras fracciones.

c) Los significados de las operaciones de división y multiplicación cambian con los racionales. Los alumnos han experimentado en numerosas ocasiones que la multiplicación "agranda", es decir, que el producto será mayor que cualquiera de los factores. De hecho, en la escuela primaria se enseña el significado de la multiplicación como "tantas veces", es decir, en lugar de sumar 4 + 4 + 4 se escribe 3 × 4 que puede leerse como "tres veces 4". Sin embargo, cuando uno o ambos factores son menores que 1, el producto no es mayor que cualquiera de los dos factores, por lo que la multiplicación deja de ser una operación que siempre agranda, y excepto cuando el multiplicador es entero, ya no tiene sentido pensarla como "tantas veces".[11] Con la división pasa algo similar, ya no siempre "achica" al dividendo porque el cociente no es necesariamente menor que este (por ejemplo en 1 ÷ 0.5). Esto tiene consecuencias en la manera en la que los alumnos entienden estas operaciones y aunque apliquen el procedimiento correctamente, suelen perder el control sobre el rango en el que estará el resultado o dudar del que obtienen.

d) Los racionales son densos y los enteros no lo son. Perder la idea de antecesor y sucesor, y aceptar que entre dos números racionales hay siempre otro racional, es complejo para los alumnos.

[11] En 0.4 × 0.06 no tiene mucho sentido decir "0.4 veces 0.06". Puede leerse como "cuatro décimos de seis centésimos", que tiene más sentido, pero sigue siendo un significado difícil de comprender para los alumnos.

¿Cómo pueden librar estos obstáculos los alumnos? Brousseau (1976) afirma que se requiere un proceso de interacciones entre el alumno y el medio en las que se lleven al límite los conocimientos anteriores para así hacerlos evolucionar hacia otros más amplios o profundos; un conocimiento se establece mediante la oposición a otro conocimiento sobre el cual se apoya y eventualmente reemplaza. Sobre los decimales en particular, realizó un estudio largo y meticuloso en el que diseñó una ruta alternativa para su enseñanza partiendo de los racionales como medidas (caracterizando a los decimales como un caso particular de fracciones), en vez de por ampliación de los naturales (extendiendo la idea de las potencias de 10 a la derecha del punto (negativas en este caso).

Lo investigado por Brousseau y colaboradores sobre los obstáculos didácticos y epistemológicos relativos a los decimales fue uno de los ejes centrales para el diseño de la secuencia didáctica.

Capítulo 4. Referente normativo: Análisis curricular de la propuesta 2011 para la enseñanza de los decimales

Análisis preliminares, tercera parte

En el primer apartado de este capítulo describo el recorrido de los racionales en el programa de estudios de 2011 para los grados tercero a sexto de primaria con el propósito de conocer qué contenidos específicos son objeto de enseñanza en la propuesta curricular oficial. Respecto a esa revisión, cabe aclarar que:

- Incluí a las fracciones en el análisis pues, como describí en el capítulo anterior, los decimales son parte del conjunto de los números racionales y por lo tanto son también una fracción (en el sentido de que expresan una relación entre dos enteros).
- Incluí los contenidos referidos directamente al estudio de los números racionales (por ejemplo, comparación de números decimales o identificación de fracciones equivalentes), así como aquellos en los que los racionales son necesarios para abordar el estudio de otros contenidos matemáticos (construcción y uso de unidades para medir la superficie, aplicación de porcentajes).
- Los racionales se estudian a partir del 3er grado en el programa del 2011 y no se concluyen sino hasta el 8vo, pero esta descripción se limita a los grados correspondientes a la primaria.

En el segundo apartado analizo aspectos didácticos relevantes sobre los decimales en los libros de texto gratuitos, específicamente describiendo imprecisiones, traslapes y cuestiones confusas en las lecciones. En el tercer apartado sintetizo las cuestiones problemáticas que encontré dando cuenta de que la propuesta plantea retos importantes para los maestros ya sea por definiciones confusas, algoritmos enseñados de forma prematura y mecánica, actividades que requieren de los alumnos algo que todavía no han aprendido y faltantes.

4.1 Los racionales en los programas de estudio de la primaria

La descripción corresponde al programa del 2011 (Reforma Integral de la Educación Básica, RIEB) en el que se buscó articular en “Campos formativos” los contenidos de estudio de preescolar, primaria y secundaria: Lenguaje y comunicación, Pensamiento matemático, Exploración y comprensión del mundo natural y social, y Desarrollo personal y para la convivencia. En preescolar los contenidos curriculares del Campo formativo Pensamiento matemático se organizan en dos aspectos: Número y forma, Espacio y medida; mientras que en la primaria y secundaria se estructuraron en torno a tres ejes temáticos: Sentido numérico y pensamiento algebraico, Forma espacio y medida, y Manejo de la información.

Tabla 4 Elaboración propia a partir de información tomada de los programas de Matemáticas 2011, 3° y 4°

<table>
<tr><th>3° primaria</th><th>4° primaria</th></tr>
<tr><td colspan="2">EJE: SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO</td></tr>
<tr><td><u>Números y sistemas de numeración</u>
● Uso de fracciones del tipo $m/2^n$ (medios, cuartos, octavos, etc.) para expresar oralmente y por escrito medidas diversas.
● Uso de fracciones del tipo $m/2^n$ (medios, cuartos, octavos, etc.) para expresar oralmente y por escrito el resultado de repartos.
● Identificación de escrituras equivalentes (aditivas, mixtas) con fracciones.
● Comparación de fracciones en casos sencillos (con igual numerador o igual denominador).
● Elaboración e interpretación de representaciones gráficas de las fracciones. Reflexión acerca de la unidad de referencia.

<u>Problemas aditivos</u>
● Resolución de problemas sencillos de suma o resta de fracciones (medios, cuartos, octavos).</td><td><u>Números y sistemas de numeración</u>
● Notación desarrollada de números naturales y decimales. Valor posicional de las cifras de un número.
● Resolución de problemas que impliquen particiones en tercios, quintos y sextos. Análisis de escrituras aditivas equivalentes y de fracciones mayores o menores que la unidad.
● Representación de fracciones de magnitudes continuas (longitudes, superficies de figuras). Identificación de la unidad, dada una fracción de la misma.
● Descomposición de números naturales y decimales en expresiones aditivas, multiplicativas o mixtas.
● Identificación de fracciones equivalentes al resolver problemas de reparto y medición.
● Uso de las fracciones para expresar partes de una colección. Cálculo del total conociendo una parte.
● Obtención de fracciones equivalentes con base en la idea de multiplicar o dividir al numerador y al denominador por un mismo número natural.
● Expresiones equivalentes y cálculo del doble, mitad, cuádruple, triple, etc., de las fracciones más usuales (1/2, 1/3, 2/3, ¾, etcétera).

<u>Problemas aditivos</u>
● Resolución de sumas y restas de números decimales en contextos de dinero. Análisis de expresiones equivalentes.
● Uso del cálculo mental para resolver sumas o restas con números decimales.
● Resolución, con procedimientos informales, de sumas o restas de fracciones con diferente denominador en casos sencillos (medios, cuartos, tercios, etcétera).
● Resolución de sumas o restas de números decimales en diversos contextos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">EJE: FORMA, ESPACIO Y MEDIDA</td></tr>
<tr><td></td><td><u>Medida</u>
● Construcción y uso del m^2, el dm^2 y el cm^2.</td></tr>
</table>

En tercer grado empieza el estudio de las fracciones a partir de situaciones de medición que son cotidianas y en las que los denominadores se obtienen haciendo divisiones a la mitad (2, 4, 8), por ejemplo, comparar cuartos y medios litros. Esas cantidades se escriben convencionalmente. También se pide a los alumnos que escriban expresiones como 1/4 + 1/8 para dar cuenta de sumas y restas, aunque no sepan todavía obtener el resultado. A través de los repartos se siguen estudiando las fracciones, por ejemplo, repartir pasteles entre niños cuidando que no sobre nada y a todos les toque lo mismo. En estas situaciones pueden explorarse distintas maneras de hacer los repartos (por ejemplo, para repartir 2 pasteles entre 4 niños se puede partir cada pastel en 4 o bien, cada pastel en 2), pueden hacer estimaciones e identificar repartos equivalentes (en el ejemplo anterior, notar que 2/4 o 1/2 es la misma cantidad de pastel).

En cuarto grado se incluyen otros denominadores como los tercios, los quintos y los sextos, que brindan nuevas situaciones para ordenar fracciones y hallar equivalencias en situaciones de reparto y medición. Las fracciones también se emplean en este grado cuando el entero es una colección (cuánto es 1/5 de 20 objetos), o saber qué fracción es cierta cantidad de elementos de una colección (qué fracción representan 4 objetos de los 20 que hay en total). También estudian fracciones mayores que 1, calculan dobles y mitades de fracciones y situaciones en las que los alumnos deben reconstruir el entero conociendo una fracción. Respecto a la operatoria, suman y restan fracciones sencillas que pueden resolverse sin utilizar el algoritmo o mediante el cálculo mental. Sobre la equivalencia, los alumnos aprenden a multiplicar o dividir el numerador y el denominador por un mismo número como una forma de obtener fracciones equivalentes.

Es en este grado cuando empieza el estudio de los números decimales, primero a partir de situaciones con dinero en las que los alumnos forman distintas cantidades que comenzarán a expresarse aditivamente (por ejemplo 0.20 + 0.50 + 0.50) lo que permitirá hacer equivalencias y ordenar números. La notación desarrollada con decimales se emplea para analizar el valor posicional y aparecen también en situaciones de medición de áreas usando submúltiplos de la unidad convencional.

Tabla 5 Elaboración propia a partir de información tomada de los programas de Matemáticas 2011, 5° y 6°

5° primaria	6° primaria
EJE: SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO	
<u>*Números y sistemas de numeración*</u> ● Conocimiento de diversas representaciones de un número fraccionario: con cifras, mediante la recta numérica, con superficies, etc. Análisis de las relaciones entre la fracción y el todo. ● Análisis del significado de la parte decimal en medidas de uso común: por ejemplo, 2.3 metros, 2.3 horas. ● Comparación de fracciones con distinto denominador, mediante diversos recursos. ● Uso de la expresión n/m para representar el cociente de una medida entera (n) entre un número natural (m): 2 pasteles entre 3, 5 metros entre 4, etcétera. <u>*Problemas aditivos*</u> ● Resolución de problemas que impliquen sumar o restar fracciones cuyos denominadores son múltiplos uno de otro. ● Uso del cálculo mental para resolver adiciones y sustracciones con números fraccionarios y decimales. ● Resolución de problemas que impliquen sumas o restas de fracciones comunes con denominadores diferentes. <u>*Problemas multiplicativos*</u> ● Resolución de problemas que impliquen una división de números naturales con cociente decimal. ● Resolución de problemas que impliquen multiplicaciones de números decimales por números naturales, con el apoyo de la suma iterada.	<u>*Números y sistemas de numeración*</u> ● Lectura, escritura y comparación de números naturales, fraccionarios y decimales. Explicitación de los criterios de comparación. ● Ubicación de fracciones y decimales en la recta numérica en situaciones diversas. Por ejemplo, se quieren representar medios y la unidad está dividida en sextos, la unidad no está establecida, etcétera. ● Identificación de una fracción o un decimal entre dos fracciones o decimales dados. Acercamiento a la propiedad de densidad de los racionales, en contraste con los números naturales. ● Conversión de fracciones decimales a escritura decimal y viceversa. Aproximación de algunas fracciones no decimales usando la notación decimal. <u>*Problemas aditivos*</u> ● Resolución de problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios, variando la estructura de los problemas. Estudio o reafirmación de los algoritmos convencionales. <u>*Problemas multiplicativos*</u> ● Resolución de problemas multiplicativos con valores fraccionarios o decimales mediante procedimientos no formales. ● Construcción de reglas prácticas para multiplicar rápidamente por 10, 100, 1000, etcétera. ● Resolución de problemas que impliquen calcular una fracción de un número natural, usando la expresión “a/b de n”. ● Resolución de problemas que impliquen una división de un número fraccionario o decimal entre un número natural.
EJE: FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	
<u>*Medida*</u> ● Conocimiento y uso de unidades estándar de capacidad y peso: el litro, el mililitro, el gramo, el kilogramo y la tonelada. ● Identificación de múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado y las medidas agrarias. ● Resolución de problemas en que sea necesaria la conversión entre los	<u>*Medida*</u> ● Relación entre unidades del Sistema Internacional de Medidas y las unidades más comunes del Sistema Inglés.

múltiplos y submúltiplos del metro, del litro y del kilogramo.	
EJE: MANEJO DE LA INFORMACIÓN	
Proporcionalidad y funciones ● Relación del tanto por ciento con la expresión “n de cada 100”. Relación del 50%, 25%, 20%, 10% con las fracciones ½, ¼, 1/5, 1/10, respectivamente.	*Proporcionalidad y funciones* ● Cálculo del tanto por ciento de cantidades mediante diversos procedimientos (aplicación de la correspondencia “por cada 100, n”, aplicación de una fracción común o decimal, uso de 10% como base). ● Resolución, mediante diversos procedimientos, de problemas que impliquen la noción de porcentaje: aplicación de porcentajes, determinación, en casos sencillos de porcentaje que representa una cantidad (10%, 20%, 50%, 25%), aplicación de porcentajes mayores que 100%. ● Comparación de razones en casos simples. ● Comparación de razones del tipo “por cada n, m” mediante diversos procedimientos y, en casos sencillos, expresión del valor de una razón mediante un número de veces, una fracción o un porcentaje. ● Resolución de problemas de comparación de razones con base en la equivalencia.

En quinto grado se representan fracciones en la recta numérica. Mediante el sombreado de áreas se estudia su significado como cocientes (en situaciones de medida o reparto), razones (como 4/10 de los alumnos de un grupo son mujeres que puede leerse como "4 de cada 10"), y casos sencillos de porcentajes (explicitando la relación entre fracciones y porcentajes como 1/2 es el 50%). En este grado, el ordenamiento y la comparación se realizan entre fracciones con distinto denominador. Respecto a los decimales, se estudia y el significado de las cifras decimales cuando cambia la unidad de referencia y se explicita la escritura con punto (le llaman "con cifras") de algunas fracciones como una forma más de representación, lo que vincula finalmente a las fracciones y los decimales.

En la operatoria, suman y restan fracciones con distinto denominador explicitando un paso intermedio en caso de que los denominadores sean distintos pero múltiplos, lo que les permite apelar a equivalencias conocidas. Se estudia también la multiplicación de decimales por un natural (pensando a la multiplicación como una suma iterada en la que $3.5 \times 4 = 3.5 + 3.5 + 3.5 + 3.5$). Se aborda la división de decimales entre naturales y la división de naturales entre naturales se extiende para que en los casos en los que hay residuo se siga dividiendo y dé lugar a un cociente con punto decimal. Hay cálculo mental con fracciones y decimales, y aparecen múltiplos y submúltiplos del metro, metro cuadrado, litro y kilogramo.

En sexto grado continúa la ubicación en la recta de fracciones y se añade la de decimales. También se comparan haciendo explícitos los criterios para ordenarlos. Se expresan fracciones con punto decimal y viceversa, se aproximan los racionales no decimales mediante una expresión con punto y se expresan fracciones como a/b de cierta cantidad. Se comienza el estudio de la densidad encontrando un tercer número entre dos fracciones o dos decimales dados.

Hay sumas y restas tanto con fracciones como con decimales, y se multiplican y dividen decimales por naturales. El estudio del Sistema Internacional de Medidas plantea situaciones en las que deben hacerse multiplicaciones y divisiones por potencias de 10, lo que eventualmente lleva a los alumnos a la técnica de correr el punto o agregar ceros. También se hacen conversiones entre unidades del Sistema Internacional de Medidas y el sistema inglés.

Aunque el estudio de los algoritmos y de situaciones más generales en las que se multiplican y dividen fracciones se reserva para la secundaria, en este grado se plantean situaciones sencillas en las que una fracción debe dividirse o multiplicarse por un número natural y se espera que los alumnos recurran a los conocimientos que ya han adquirido para resolverlas, por ejemplo, saber que 3 × 2/4 es equivalente a sumar 2/4 + 2/4 + 2/4.

4.2 Los racionales en las lecciones de los libros de texto gratuitos

Los racionales son objetos matemáticos complejos y con la misma escritura 4/10 puede representar una medida, un reparto, una razón, un porcentaje o un operador, además de ser una de las infinitas formas de representar 2/5 (que es la forma irreductible), o bien, escribirse como 0.4. Todo eso se estudia en la primaria.

Esta complejidad del objeto matemático en sí mismo supone desafíos importantes a la enseñanza, como planteé a propósito de los estudios de Brousseau. La didáctica de las matemáticas está lejos de ofrecer respuestas acabadas incluso a problemas que han sido profundamente estudiados como el de la enseñanza de los números decimales, sin embargo, con lo que sabemos es posible identificar potenciales fuentes de confusión o conflicto en una propuesta curricular o libro de texto.

En este apartado analizo lecciones de los libros de texto gratuitos correspondientes a la propuesta del 2011,[1] pues son los que estudiaban los alumnos cuando llevé a cabo la experimentación. Aclaro que no doy cuenta de todas las actividades sobre racionales sino de aquellas que pueden ser confusas o problemáticas respecto a lo matemático o lo didáctico.[2] El análisis está organizado en:

4.1.1 Definiciones de conceptos
4.1.2 Algoritmos
4.1.3 Escribir fracciones como decimales y viceversa
4.1.4 Relación con las medidas
4.1.5 Ubicación en la recta numérica
4.1.6 Orden
4.1.7 Sombreado de áreas
4.1.8 Densidad

[1] En adelante me refiero a los Libros de Texto Gratuitos de la SEP (2011) únicamente señalando el grado.
[2] Excepto lo referido al diseño gráfico y la elección de contextos para los problemas.

4.2.1 Definiciones de conceptos

En casi todas las lecciones de los libros del 2011 aparecen textos resaltados en un recuadro. En estos se hacen cierres, se formaliza un procedimiento, se ofrecen datos interesantes o se definen conceptos.

En la segunda lección dedicada al estudio de fracciones en 3er grado, el recuadro ofrece una definición de fracción:

> La fracción es **número** que se puede representar de diferentes maneras, por ejemplo, 3/4. A la cifra de arriba se le llama **numerador** y representa el número de partes que se toman de un conjunto o un todo (un pastel, una barra de chocolate, el total de canicas en una bolsa). A la cifra de abajo se le llama **denominador** porque da nombre a las partes en que se dividió el conjunto. Por ejemplo, al dividir una hoja de papel en cuatro partes iguales y tomar tres de esas partes, se tienen 3/4 de hoja. (p. 86).

La definición aparece de manera prematura porque previo a ésta los alumnos solamente han trabajado un ejercicio de repartos y cabe preguntarse si es necesario formalizar sobre las fracciones en este momento. Además, inicia con una afirmación fuera de su alcance: las fracciones son números que se pueden representar de diferentes maneras. Hasta 3er grado de primaria sólo han estudiado a los naturales y en ese conjunto un número sólo se puede representar de una forma.[3] Con el trabajo desarrollado hasta ese momento los alumnos no tienen elementos para comprenderlo y atendiendo a lo estudiado por Brousseau, esa idea requiere un largo recorrido por lo que resulta innecesario introducirla en ese momento. Por otro lado, la definición se centra en una de las nociones en las que las fracciones cobran sentido (parte-todo) pero no es la única, y asentar desde el inicio estos significados para el numerador y denominador puede obstaculizar el aprendizaje de otras nociones que aparecen posteriormente (razones, medidas, operadores).

En 6to grado aparece otra definición de fracciones centrada en la noción de reparto y en la que desaparece la idea de representaciones de un mismo número:

> Las fracciones son números que sirven para expresar cantidades que no necesariamente son enteras. Por ejemplo, al repartir 3 chocolates (dividendo o numerador) entre 5 niños (divisor o denominador) a cada uno le corresponden 3/5 de chocolate, o si se reparten 4 chocolates entre 2 ni-

[3] Ciertamente, a veces se solicita que escriban un número mediante su notación desarrollada (165 = 100 + 60 + 5) o empleando una o más expresiones aditivas (165 = 50 + 50 + 50 + 15). El signo “igual” se interpreta en este nivel educativo señalando lo del lado izquierdo como una “pregunta” o algo a resolverse, y del lado derecho el resultado, por lo que difícilmente se entendería a la notación desarrollada como una forma distinta de representar a un natural.

> ños a cada uno le corresponde 4/2 de chocolate, que es igual a 2 chocolates. (p. 14).

Esta definición añade a la anterior la idea de “cantidades que no necesariamente son enteras”. Es problemático que se usen conceptos que no se trabajan en las lecciones ni se definan, como es el caso de “cantidades enteras”. Más allá de tener elementos para comprender cuáles son las cantidades enteras, el hecho es que las fracciones con las que los alumnos han tenido más contacto no son enteras y parece difícil comprender que existan números como 4/2 o 35/35 si para expresar esas cantidades ya se contaba con los naturales. No hay ninguna reflexión al respecto en los libros. Identificar al numerador como dividendo y al denominador como divisor posiblemente obedece a un esfuerzo por vincular las nociones de razón y reparto que se trabajan en esa lección, atan las fracciones a un significado.

La noción de “equivalencia” se define en tres ocasiones en los libros de 3er y 4to grados a propósito de las fracciones. Previamente se formalizó que las fracciones son números que se pueden representar de distintas maneras, por lo que da la impresión de que se continúa con esa idea para definir a esas “distintas maneras” como fracciones equivalentes a una dada.

> Las fracciones que representan la misma cantidad reciben el nombre de **fracciones equivalentes**. (3°, p. 117).
>
> Dos fracciones son equivalentes si representan la misma cantidad. (4°, p. 88).
>
> Dos fracciones son equivalentes cuando tienen el mismo valor, aunque parezcan distintas 1/4 = 2/8. (4°, p. 89).

Nuevamente aparece la idea de “representar” que como mencioné, parece prematura en la lección de 3er grado pues solamente tuvieron oportunidad de realizar actividades con el sombreado de área en cuatro figuras para estudiar la equivalencia. La primera definición que aparece en 4to grado parafrasea esta última, pero apenas una página después (p. 118) aparece otro recuadro con una nueva definición en la que ya no se habla de “la misma cantidad” sino “el mismo valor”, ideas que parecen tomarse como sinónimos. De cualquier forma, no queda claro si 1/4 y 2/8 representan “la misma cantidad”, son el mismo número o son números distintos que por alguna razón “tienen el mismo valor”, y los alumnos podrían preguntarse si ese efecto ocurre con otras fracciones.

Las fracciones decimales aparecen en 3er grado (p. 150) como parte de uno de los recuadros en los que se proporcionan datos interesantes, y aunque no se solicita que hagan actividades con esa información, llama la atención que pasen de largo sin hacer ninguna mención a estos denominadores nuevos para los alumnos (7/10 y 2/100), máxime cuando no han hecho particiones o repartos en 100 ni en números cercanos a éste. En 5to grado (p. 48) se trabaja con la equivalencia entre fracciones decimales (por ejemplo, cuántos milésimos hay en 10/100), la ubicación en la recta y la notación desarrollada de números con punto a las que llaman “notación decimal” (y no “número decimal” o simplemente “decimal”, como en posteriores ocasiones). En la tabla se observa que se llaman “unidades” (y no “enteros”), “décimos, centésimos y milésimos” y “fracciones decimales” a las sumas de la notación desarrollada. También llama la atención que no se solicita la suma con “notación decimal” (0.3 + 0.04 + 0.005) y más aún que no se sumen las unidades (2 + 3/10 + 4/100 + 5/1000).

Ilustración 9 Fragmento de la lección 14 “Fracciones de diez en diez”, Matemáticas. Quinto grado, SEP (2011, p. 48).

2. Completa la siguiente tabla. Observa que los décimos, centésimos y milésimos están expresados tanto en fracción decimal como en notación decimal.

Notación decimal	Unidades	Décimos	Centésimos	Milésimos	Fracciones decimales
2.345	2	$\frac{3}{10}$ 0.3	$\frac{4}{100}$ ______	$\frac{5}{1\,000}$ 0.005	$\frac{3}{10}+\frac{4}{100}+\frac{5}{1\,000}$
	3	$\frac{2}{10}$ ______	______ 0.09	$\frac{6}{1\,000}$ 0.006	
1.762					
0.043					

En esa misma lección se define a las fracciones decimales usando el concepto de “potencia” que no se estudia en la primaria, y sin aludir al significado de reparto que ha estado muy presente para ir construyendo a las “otras” fracciones (las que no tienen denominador potencia de 10), es decir, no hay nada del tipo “el denominador indica en cuántas partes se dividió la unidad”:

> Las fracciones decimales son aquellas que tienen como denominador 10 o cualquiera de sus potencias (100, 1000, 10000, etc.). (5°, p. 49).

Además, se instala la idea de que las fracciones decimales son únicamente aquellas con denominador potencia de 10 y no sus expresiones equivalentes: si se escribe como 4/10 es fracción decimal, pero si se escribe como 2/5 ya no lo es. Esto tiene consecuencias para la comprensión de este conjunto numérico pues las definiciones apelan a su escritura y no al objeto matemático. La siguiente afirmación, que también aparece en el libro de 5to grado, abona a esta confusión:

> Algunos números decimales pueden escribirse de dos maneras como fracción decimal o bien, en notación decimal. Ejemplos:
>
> 2/10 = 0.2 5/100 = 0.05
>
> (5°, p. 128).

Al parecer, señalan esa característica está presente solo en “algunos números decimales” para excluir números como 7/11 que tiene una representación aproximada con punto decimal (0.636363…) pero no puede representarse mediante una fracción con denominador potencia de 10. Pero es un error afirmar que “algunos números decimales” pueden escribirse con fracción cuyo denominador es potencia de 10 y a la vez con “notación decimal”, porque lo cierto es que <u>todos</u> los números decimales pueden escribirse con denominador potencia de 10 y tienen una representación decimal finita. Una vez más, el problema es confundir la escritura o distintas representaciones de un número con las propiedades del conjunto al que pertenece. 0.636363… no es un número decimal.

La idea de reparto o particiones para dar cuenta de los decimales aparece hasta 6to grado:

> Un décimo es cada una de las diez partes iguales en que se divide un todo y se puede representar por medio de una fracción donde el numerador es 1 y el denominador 10. Si el denominador es 100 representa un centésimo y si es 1000 representa un milésimo, y así sucesivamente. (6°, p. 17).

Ilustración 10 Fragmento de la lección 3 "Ordeno números después del punto", Matemáticas. Sexto grado, SEP (2011, p. 17).

Número decimal	Fracción decimal	Se lee
0.1	$\frac{1}{10}$	Un décimo
0.01	$\frac{1}{100}$	Un centésimo
0.001	$\frac{1}{1\,000}$	Un milésimo
0.0001	$\frac{1}{10\,000}$	Un diezmilésimo
0.00001	$\frac{1}{100\,000}$	Un cienmilésimo
0.000001	$\frac{1}{1\,000\,000}$	Un millonésimo

Siguiendo esa idea se esperaría que las particiones se explicitaran para los centésimos (se parte la unidad en 100) y los milésimos (en 1000).

En 6to grado se estudia el valor posicional de las cifras que se escriben a la derecha del punto, y en el cierre de la lección se define qué es lo que está a un lado y al otro del punto:

> El valor relativo de una cifra en un número depende de su posición, y por ello también se le llama **valor posicional**. En notación decimal se toma como referencia la posición que cada número ocupa con respecto al punto decimal. A los números a la derecha del punto se les llama decimales y a la izquierda enteros. (6°, p. 50).

No es de extrañar que con esa definición el 2 no sea un número decimal y 0.333… sí, o que 6.789 tenga una parte decimal (0.789) pero la otra no lo sea (6).

En 6to grado se solicita que los alumnos escriban "con números decimales" fracciones que no tienen representación decimal finita. En ese punto no es claro con qué elementos se supone que lo hagan, pues fracciones conocidas como 1/4 o 3/8 han estado trabajándose en diversas situaciones y al menos tienen referencias concretas a las cuales podrían recurrir, pero otras como 1/7 nunca las han escrito con punto y no hay una forma intuitiva de hacerlo. "Escribe con números decimales las siguientes fracciones 1/11, 2/9, 2/3, 1/7, 1/5.” (6°, p. 51). En una lección posterior (p. 127) se solicita a los alumnos una actividad similar “Escribe como número decimal cada una de las siguientes fracciones 1/3, 5/6, 3/7, 2/5, 3/8.” En este punto de la lección a los alumnos tampoco se les ha dicho cómo pueden hacer esas diferentes escrituras. Se espera que si lo logran se percaten de que obtendrán distintos tipos de números y les piden que identifiquen en cuáles casos la representación decimal fue finita y en cuáles no. En el cierre de esa actividad se define qué es un decimal periódico:

> Un número decimal periódico es el número que tiene una o varias cifras que se repiten indefinidamente. Por ejemplo 2/3 = 0.666… (6°, p. 127).

En este caso se sigue construyendo sobre un error de base, 2/3 no es un número decimal, pero se puede usar la escritura decimal para obtener una representación aproximada. Además, es importante notar que en una de las lecciones referidas se solicita escribir <u>con</u> números decimales y en la otra escribir <u>como</u> número decimal. ¿Se buscaba establecer alguna diferencia o se trata simplemente de un descuido?

Los racionales también se emplean para describir relaciones entre cantidades, como en las razones y los porcentajes. En 5to grado se define qué es una razón y en una lección posterior se formaliza una de sus propiedades:

> Una razón es el cociente entre dos cantidades, por ejemplo, en el primer ejercicio la razón entre el precio del paquete A y el número de panes es
>
> $$\frac{precio\ del\ paquete}{número\ de\ panes\ del\ paquete\ A} = \frac{15}{5}$$
>
> El número obtenido al simplificar la fracción anterior es el precio de cada pan. Así es fácil saber el precio de 7 panes con el mismo precio unitario (precio por cada pan), pues simplemente se calcula 7 × 15/5 = 21 o 7 × 3 = 21 donde 21 pesos es el precio de 7 panes. (5°, p. 69).
>
> Por cada 30 paletas que compres te regalan 6, o cada 45, 9. Esto equivale a decir que por cada 5 te regalan una paleta. La razón entre el número de unas y otras es siempre constante.
>
> $$\frac{paletas\ regaladas}{paletas\ compradas} = \frac{6}{30} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}$$
>
> Cuando una razón es constante se llama **razón de proporcionalidad**, en este caso, la razón de proporcionalidad es 1/5. (5°, p. 163).

La razón entendida como una relación entre cantidades es un concepto que no resulta tan asequible como los repartos para los alumnos de primaria, y su estudio puede complejizarse aún más si para definirla se emplean conceptos que han sido poco estudiados o no se han estudiado en lo absoluto: cociente, simplificar una fracción, precio unitario (y no valor, como se ha llamado tradicionalmente para poder emplear la noción en contextos distintos al dinero), constante y razón de proporcionalidad. De hecho, introducir este último término parece innecesario para el objetivo matemático de la lección, porque si un fenómeno es constante quiere decir que la razón entre cualquier pareja de cantidades será la misma, así que basta con decir que hay una constante de proporcionalidad. Llama también la atención que en la última lección a la que hago referencia la "razón de proporcionalidad" elegida sea un número no entero pues dificulta la operatoria y sobre todo la comprensión. Parecería una mejor opción al inicio del trabajo con estos conceptos que la razón fuera algo como "para que te regalen 1 paleta, hay que comprar 5, así que si quieres llevarte 6 paletas regaladas debes comprar 30 (6 × 5 = 30)", de este modo la constante sería 5; lo que la lección plantea es "por cada 5 paletas compradas te dan 1 regalada, si compras 30 te regalan 6 (30 × 1/5 = 6)".

Otro dato que vale la pena hacer notar sobre el trabajo con razones es que en una lección posterior de 5to grado aparecen expresadas en forma decimal. Esto no lo estudiaron en las lecciones previas y además, no es una representación usual, pues esas relaciones suelen expresarse usando porcentajes. Para cerrar el trabajo de esa lección piden a los alumnos que ubiquen en la recta las razones halladas (cantidad de mujeres respecto a la población total por entidad federativa). No queda claro el propósito de esta actividad pues con las razones no suelen hacerse este tipo de ordenamientos, y si fuera para aprovechar los datos de la tabla para hacer un ejercicio de orden, es muy poco lo que se gana pues sólo hay cinco cantidades en juego (0.48, 0.49, 0.50, 0.51 y 0.52) que son muy fáciles de ordenar dado que tienen la misma cantidad de cifras a la derecha del punto (5°, p. 182).

El porcentaje se estudia en cinco lecciones de 5to y 6to grados. Los porcentajes son de hecho una razón en la que la cantidad que describe el "total" de algo, se asume como 100% y otras cantidades relacionadas con ese total pueden ser descritas como "de cada 100, tantos". El concepto tampoco es sencillo de comprender, sobre todo cuando las situaciones en las que se emplea comienzan a complejizarse, pero además se añade la dificultad de sus distintas formas de representación: con el símbolo % en el que el total es un número natural (100), con una fracción en la que el total es 100/100, o usando al 1 como el total. Si además, en las definiciones aparecen conceptos como “comparar de manera proporcional” o “saber en cuál […] hay proporcionalmente más […]”, la comprensión resulta incluso más compleja.

> Utilizamos los porcentajes para comparar de manera proporcional dos cantidades que de otra forma sería difícil relacionar. Por ejemplo, si en un grupo de 50 alumnos hay 7 bilingües y en otro grupo de 20 alumnos hay 5, para poder comparar en cuál de los dos salones hay proporcionalmente más alumnos bilingües se toma como unidad 100 alumnos y se calcula cuánto de esos 100 representan los alumnos bilingües en cada salón. Esto se representa así: en el grupo de 50 alumnos 14% son bilingües y en el grupo de 20 alumnos 25% son bilingües. (5°, p. 111).
>
> Es lo mismo hablar de “tantos por cada cien” que de porcentaje. Por ejemplo, 4 de cada cien = 4%. (6°, p. 40).
>
> Un por ciento es una centésima parte de algo. Por ejemplo, 10% de 50 es 5, y 10% de 25 es 2.5. Un porcentaje puede representarse con el símbolo % o escribiendo una fracción cuyo denominador es 100. 5% o 5/100. (6°, p. 104).

4.2.2 Algoritmos

Fracciones

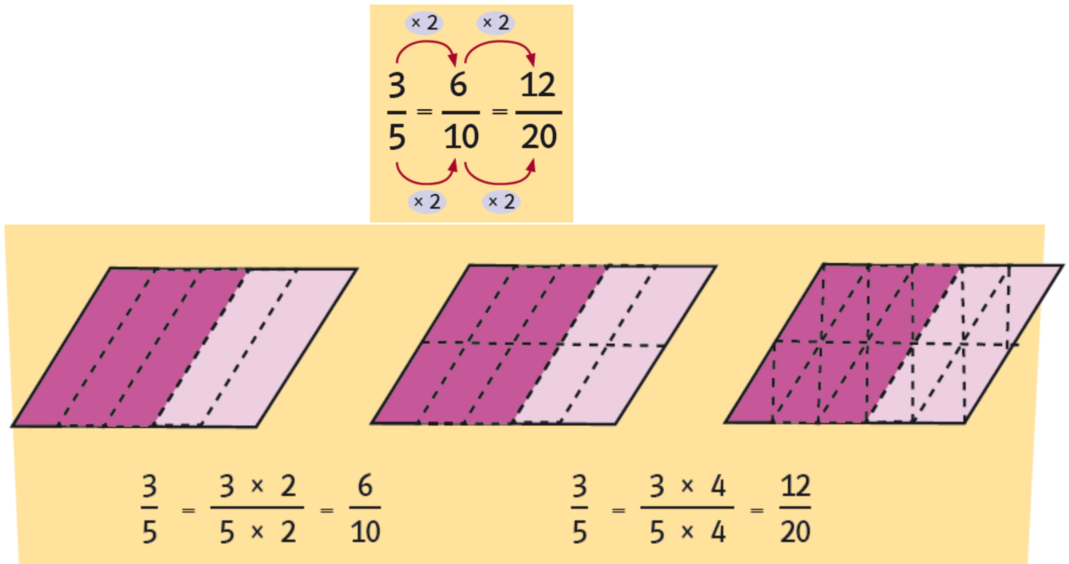
Obtener fracciones equivalentes es necesario para resolver muchas de las tareas que se enseñan en la primaria. Los algoritmos para la suma y resta de fracciones descansan en la obtención de fracciones equivalentes para operar solamente con los numeradores. En 3er grado las sumas y restas apelan a equivalencias conocidas para tener el mismo denominador en las fracciones.

> Para sumar o restar fracciones de distinto denominador, se busca la fracción equivalente de una de ellas que permita operar con la otra usando un denominador común. Por ejemplo, al sumar 1/4 + 1/2, dado que 1/2 = 2/4, entonces la suma se transforma en 1/4 + 2/4 = 3/4. (3°, p. 161).

En 4° grado el procedimiento ya no parte de equivalencias conocidas sino que busca generalizarse apelando a que si se multiplica al numerador y denominador por un mismo número se obtiene una fracción equivalente a la original.

> Una forma de obtener fracciones equivalentes es multiplicar el numerador y el denominador de una fracción por el mismo número; así, encontramos una fracción equivalente a la inicial. (4°, p. 89).

Ilustración 11 Fragmento de la lección 24 "Es mayor a 1/2", Matemáticas. Cuarto grado, SEP (2011, p. 89).



En la presentación de este algoritmo el sombreado de áreas apoya la comprensión de lo que se hace con las operaciones. Sin embargo, llama la atención que no se menciona que si se divide en vez de multiplicar, también funciona; y lo más importante, que no haya ningún trabajo para que los alumnos sepan por cuál número conviene multiplicar (o dividir) para obtener la fracción equivalente. Es decir, funciona con cualquier número, pero hallarla tiene un propósito específico: si se van a comparar fracciones con denominadores 4 y 6 deben escribirse con un denominador que sea múltiplo o divisor de ambas (2, 12, 24, 36, etc.), ¿cómo pueden saber los alumnos si hay diferencias entre las fracciones que se obtendrán o si conviene más un factor que otro en un caso específico?

El algoritmo que se presenta en 5to grado presenta una diferencia importante, ya no se trata de multiplicar numerador y denominador por el mismo número (como indican las flechitas en la lección de 4to) sino de multiplicar por un entero. Numéricamente están haciendo lo mismo, pero conceptualmente la cuestión es muy distinta: deben comprender que fracciones como 11/11 y 84/84 son representaciones del número 1; y además que con los racionales también se cumple la propiedad del elemento neutro que han experimentado con los naturales (si multiplicas cualquier número por 1 el resultado es el mismo número), pero adquiere un matiz distinto. Aunque efectivamente se obtiene el mismo número, se ve distinto porque está representado por una fracción equivalente.

> Una forma de obtener fracciones equivalentes es multiplicar una fracción por un entero representado en forma de fracción. Recuerda que un ente-

> ro es igual a una fracción cuyo numerador es igual al denominador, es decir 1= 2/2 = 3/3 = 4/4 = 5/5...
> Por ejemplo, tenemos que 3/5 × 1 equivale a multiplicar 3/5 × 3/3. (5°, p. 86).
>
> $$\frac{3}{5} \times \frac{3}{3} = \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{9}{15}$$

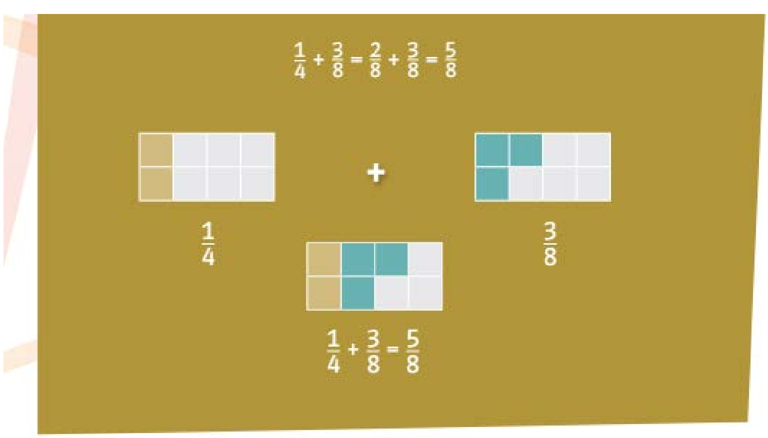
La misma idea se utiliza en un algoritmo presentado en una lección posterior, pero en la operatoria ya no se muestra el paso intermedio. Esta operación (multiplicar fracción por fracción) no forma parte del programa de primaria.

> Una forma de comparar dos fracciones entre sí es expresarlas como fracciones equivalentes de tal manera que ambas tengan el mismo denominador. Por ejemplo, en las fracciones 3/5 y 4/6 para saber qué fracción es mayor puede hacerse lo siguiente: multiplico ambas fracciones por un entero, de tal manera que el denominador común sea 30.
>
> $$\frac{3}{5} \times \frac{6}{6} = \frac{18}{30} \qquad \frac{4}{6} \times \frac{5}{5} = \frac{20}{30}$$
>
> De este modo podemos ver que 3/5 < 4/6 porque al comparar sus respectivas fracciones equivalente vemos que 18/30 < 20/30. (5°, p. 89).

Nuevamente aparece en una lección posterior sin el paso intermedio,

> Una forma de realizar la operación 1/4 + 3/8 es transformar todos los sumandos en fracciones con igual denominador. Para ello, será necesario multiplicar la fracción 1/4 por 2/2 y de este modo obtener su equivalente en octavos. Así tendríamos que 1/4 × 2/2 = 2/8 y al sumarlo a 3/8 el resultado es igual a 5/8. (5°, p. 94).

Ilustración 12 Fragmento de la lección 27 “Fracciones de la hoja”, Matemáticas. Quinto grado, SEP (2011, p. 94).



Los números que se usan como ejemplo en 5° grado no aportan mucho a lo que ya se había formalizado desde 3° y la parte gráfica ayuda a ver la equivalencia, pero no a entender el algoritmo de multiplicar por 2/2.

También aparece una multiplicación de fracción por fracción en una lección sobre equivalencia entre números decimales. Se presenta como una "comprobación" que en términos prácticos queda fuera del alcance de los alumnos.

> La expresión 25/100 es equivalente a 1/4 porque al multiplicar 1/4 × 25/25 tenemos 25/100. (6°, p. 128)

En resumen, identifico al menos tres dificultades en los algoritmos para encontrar fracciones equivalentes:

- ¿Cuál denominador debe usarse para sumar y restar fracciones? Como ocurre en las formalizaciones previas, no se explicita por qué debe buscarse que ambas fracciones tengan cierto denominador, así que los alumnos no saben si,
    - Se debe buscar que los denominadores de todas las fracciones involucradas en el problema tengan el mismo denominador que una de ellas. Por ejemplo, si al sumar 3/8 + 1/4 el objetivo es que ambas tengan el denominador 8 o 4.
    - Da igual cambiar los octavos a cuartos que cambiar los cuartos a octavos para resolver el problema y si es posible hacerlo en todos los casos. Por ejemplo, 3/8 + 1/4 y 6/8 + 2/4.
    - Se debe buscar un denominador que sea distinto al de cualquiera de las fracciones involucradas en el problema. Para comparar 3/5 y 4/6 se buscó un denominador que no era ni 5 y 6, ¿por qué?
    - Es válido multiplicar una fracción por un número y la otra por otro, como ocurre en el ejemplo de 3/5 y 4/6.
    - Se puede dividir en vez de multiplicar.
    - Se puede multiplicar por 2 en todos los casos, pues es el ejemplo más frecuente.
    - Funcionaría un denominador distinto al del ejemplo o ese es el único con el que se puede resolver el problema.
- La segunda dificultad es que el algoritmo se basa en la idea de multiplicar por un entero escrito como fracción y eso significa multiplicar fracción por fracción, tema que está fuera del programa de primaria. Las razones no son solo formales, el cambio de significado que supone el campo multiplicativo con los racionales justifica que se estudie hasta la secundaria.

- La tercera es que los libros “olvidan” lo que enseñaron antes. ¿Qué pasó con el procedimiento que aparece en 4° grado, ya no funciona multiplicar el numerador y el denominador por el mismo número? ¿Debe abandonarse esa idea para ahora multiplicar por un entero escrito en forma de fracción? No se discute, no se construye sobre lo previo para ir ampliando y profundizando, solo se enseña otra cosa y listo.

Respecto a la multiplicación de fracción por fracción, no parece necesario introducir ese algoritmo para buscar fracciones equivalentes. Esa operación tiene un significado más difícil que pensar en multiplicar el numerador y el denominador por el mismo natural para obtener una fracción equivalente.

Hay otras tareas matemáticas en la primaria que involucran multiplicar fracciones, y que no tienen que ver con la obtención de fracciones equivalentes. Se trata de la multiplicación de fracciones por un natural para saber, por ejemplo, cuánto es 5 veces 2/3. Aunque el programa señala que estas multiplicaciones deben abordarse mediante procedimientos informales a lo largo de toda la primaria, hay una formalización en 5° grado. En términos de la operatoria no es difícil para los alumnos, pero la lección no trabajó mucho sobre el tema y da el algoritmo en la primera página.

> Cuando se multiplica una fracción por cualquier número natural, el resultado se puede obtener multiplicando el número natural por el numerador de la fracción. Por ejemplo, la multiplicación 3/8 × 5.
> 3/8 × 5 = 15/8. El resultado es 15/8. (5°, p. 133).

En una lección de 6° grado se solicita a los alumnos resolver una multiplicación de fracciones en un contexto de área, 1/2km × 1 ½km (6°, p. 159) sin tener ningún procedimiento para hacerlo y además, sabiendo que obtendrán un número que los desconcertará por ser menor a uno de los factores. Esto también tiene que ver con lo que Brousseau reporta respecto al cambio de significado: en los racionales multiplicar ya no significa “aumentar”.

Otra tarea matemática que debe abordarse de manera informal es la obtención de mitades, dobles, triples, etc., de una fracción. Después de trabajar con el doblado de papel, en una lección de 4° grado llenan una tabla que tiene como objetivo centrar su atención en los denominadores cuando buscan el doble, la tercera parte, etc.

Ilustración 13 Fragmento de la lección 25 "El doble de una fracción", Matemáticas. Cuarto grado, SEP (2011, p. 92).

4. Completen la siguiente tabla.

Fracción	Mitad	Tercio	Doble	Triple	Cuádruple
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	
$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{9}$			
$\frac{1}{4}$				$\frac{3}{4}$	
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$		$\frac{6}{4}$		
$\frac{1}{5}$					$\frac{4}{5}$

- Observa los denominadores de las fracciones de las columnas "Mitad" y "Tercio", y compáralos con los de la columna "Fracción". ¿Qué relación encuentras? ______________________________

- ¿Cómo se determina la mitad o un tercio de cualquier fracción? ______________________________

- ¿Cómo se obtiene el doble o el triple de una fracción? ______________________________

Este tipo de tratamiento corresponde a lo que señala el programa. Sin embargo, en una lección del grado anterior (3°) en la que trabajan repartos y sombreado de áreas, ya había aparecido una formalización que no parece aportar mucho dado que aún no han tenido suficientes experiencias para saber que 1/8 es la mitad de 1/4.

> Una forma de calcular la mitad de una fracción es multiplicar el denominador de la fracción por 2. Por ejemplo, si la fracción es 3/4, debes multiplicar el denominador, que es 4, por 2, y obtienes 3/8. (3°, p. 87).

La formalización se amplía en 6° agregando otro elemento que además de mecánico, también recurre a la multiplicación de fracción por fracción (2/3 × 1/8).

> Para calcular la mitad de una fracción lo que se hace es multiplicar el denominador de la fracción por dos. Para dividir una fracción entre otro número se multiplica el denominador por dicho número. Por ejemplo, dividir 2/3 entre 8 equivaldría a calcular
>
> $$\frac{2}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{2}{3 \times 8} = \frac{2}{24}$$

> El resultado es igual a 2/24. (6°, p. 137).

¿De dónde salió el 1 en 1/8, no se trataba de multiplicar por 8? Además, en esta formalización se ve con claridad el conflicto que señala Brousseau, ¿por qué para dividir la operación que debe efectuarse es una multiplicación? Pregunta que los alumnos se harán en algún momento y que no aborda la lección.

Otras tareas matemáticas que involucran multiplicar una fracción por un natural son aquellas en las que se busca saber cuánto es una fracción de cierta cantidad o qué fracción es una cantidad respecto a otra. Para resolver este tipo de tareas en los libros aparecen algoritmos con explicaciones muy mecánicas y poco amigables.

En una lección de 4° grado se pide a los alumnos que determinen cuál es el procedimiento correcto para calcular 3/7 de 47: multiplicar 3 × 47 y dividir el resultado entre 7 o dividir 47 entre 7 y multiplicar el cociente por 3. Luego deben averiguar cuánto es 2/5 de 780 y 5/12 de 45 (4°, p. 127). Después se formaliza el algoritmo:

> Un procedimiento para obtener una fracción de una cantidad de elementos consiste en multiplicar la cantidad por el numerador y dividir el resultado entre el denominador de la fracción. (4°, p. 128).

En esa misma lección se formaliza un segundo algoritmo para saber qué fracción es un número de otro. Como puede apreciarse, se lee incluso más críptico que el anterior.

> Para obtener una fracción que representa una determinada cantidad de un total de elementos se puede proceder del siguiente modo: la cantidad será el numerador de la fracción y el total el denominador. Después se puede buscar si existe una fracción equivalente. (4°, p. 129).

Es decir, que si se quiere averiguar cuánto es 45 de 315 hay que determinar cuál número es “la cantidad” y cuál el total. 45 sería el numerador y 315 el denominador, así, ¿qué fracción es 45 de 315? 45/315. Funciona, pero en 4to grado es cuestionable su pertinencia pues su sentido no es transparente.

Por último, como describí en el capítulo anterior los productos y cocientes cambian cuando los factores o el divisor son menores que 1. Esta información no es fácil de comprender para los alumnos, pues tienen evidencia sustentada durante años de práctica acerca de que el producto siempre es mayor que los factores y el cociente menor que el dividendo. Sin embargo, en 5to grado se presenta como “Dato interesante” lo siguiente:

> Cuando multiplicas dos números naturales diferentes de cero y uno, el producto es mayor que cualquiera de los factores; si los divides el resultado será menor. En cambio, si multiplicas un número natural por una

fracción propia, el resultado será menor y si lo divides entre una fracción propia, el resultado será mayor. (5°, p. 135).

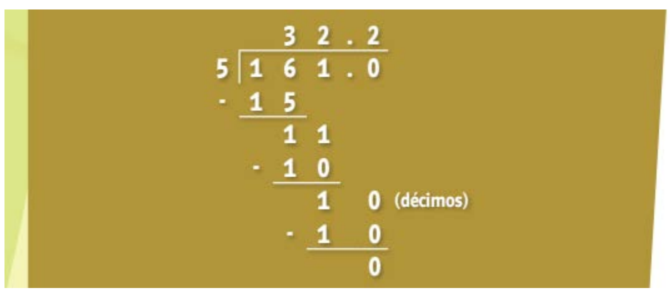
Si se toma como un dato curioso y no se profundiza sobre el tema, puede incluso pasar desapercibido, si por el contrario, se convierte en un asunto que se discuta en clase, tendrán pocos elementos para comprenderlo. Una vez más, parece información innecesaria.

Números decimales

La división de naturales con cociente decimal sí aparece en el programa como un contenido que debe enseñarse, y aunque no se explicita es esperable que se llegue al algoritmo convencional.

La formalización se aborda en una lección de 5° grado explicando el procedimiento de forma poco afortunada.

Ilustración 14 Fragmento de la lección 46 "Obtén decimales", Matemáticas. Quinto grado, SEP (2011, p. 166).



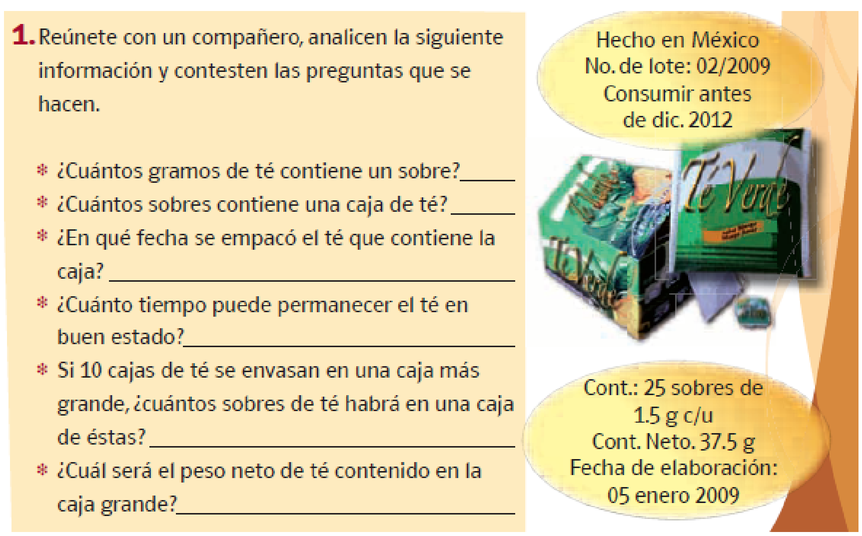
Al último residuo 1 se le agrega un 0.
Como 10 entre 5 es 2, éste se coloca después del punto decimal. (5°, p. 166).

"Al último residuo 1 se le agrega un 0", ¿por qué un cero y no otro número? "Como 10 entre 5 es 2, éste se coloca después del punto decimal", ¿qué significa esta frase? Sí, se agrega un cero y al colocar el punto se señala en el cociente que las siguientes cifras corresponden a la división de décimos, centésimos, etcétera, entre el divisor, pero la explicación no es clara. Pareciera que siempre existe la expectativa de que el maestro llene los huecos que el libro no cubre, y aunque es cierto que el maestro puede atender dudas específicas, dar más ejemplos, etc., es distinto a presentar una formalización medianamente explicada o plantear actividades que requieren emplear conocimientos que aún no se han enseñado confiando en que el maestro se hará cargo de los faltantes.

La resolución de problemas multiplicativos con números decimales debe abordarse con procedimientos no formales, según el programa. Algunas de las actividades que aparecen en las lecciones se pueden resolver sin el algoritmo, pero otras no parecen dar margen a los procedimientos intuitivos por las cantidades empleadas. Por ejemplo, resolver un problema que involucra 10 × 37.5 cuando no han estudiado nada de los números con punto (3°, p. 42); llenar una tabla de variación proporcional directa en la que la cantidad a iterar o multiplicar tiene punto sin haber aprendido procedimientos formales para hacerlo ni resultar accesible hacerlo por otros procedimientos por la cantidad involucrada (9.96) (4°, p. 23); multiplicar 15m × 1.5m cuando no lo han aprendido (4°, p. 25); multiplicar 3/8 de pulgada por la equivalencia de 1 pulgada en centímetros, medida que además no les proporcionan en la lección (4°, p. 40).

El programa señala que la multiplicación de decimales por naturales debería estudiarse con apoyo de la suma iterada. No obstante, desde 3er grado hay una lección en la que, si se atiende lo que dice el programa, los alumnos deberán sumar 10 veces 37.5 (el total de paquetes en la caja y el contenido neto por paquete) o sumar 250 veces 1.5 (el total de sobres en la caja y el contenido de cada sobre), o bien, multiplicar 10 × 37.5 o 250 × 1.5. En tercer grado no han aprendido a hacer ninguna de esas operaciones.

Ilustración 15 Fragmento de la lección 13 “En busca de información”, Matemáticas. Tercer grado, SEP (2011, p. 41).



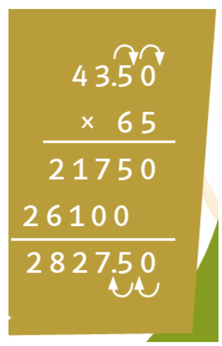
1. Reúnete con un compañero, analicen la siguiente información y contesten las preguntas que se hacen.

- ¿Cuántos gramos de té contiene un sobre?_____
- ¿Cuántos sobres contiene una caja de té?_____
- ¿En qué fecha se empacó el té que contiene la caja? _____
- ¿Cuánto tiempo puede permanecer el té en buen estado?_____
- Si 10 cajas de té se envasan en una caja más grande, ¿cuántos sobres de té habrá en una caja de éstas? _____
- ¿Cuál será el peso neto de té contenido en la caja grande?_____

En 4° grado presentan el algoritmo tras poco trabajo con la suma iterada:

> Para resolver multiplicaciones que tienen un número decimal, se procede de la misma forma que con una multiplicación con números naturales, pero en este caso se debe considerar el punto decimal para colocarlo en el lugar correcto y señalar el mismo número de cifras decimales. Por ejemplo, si multiplicas 43.50 × 65 se efectúa la operación como si se tratara de dos números naturales. Una vez obtenido el resultado, se cuentan los números que están después del punto decimal, que en este caso son dos, y se coloca entonces el punto en el producto final, contando el mismo número de lugares (o cifras) de derecha a izquierda. (4°, p. 169).

Ilustración 16 Fragmento de la lección 47 "¿Cuántos puedo comprar?", Matemáticas. Cuarto grado, SEP (2011, p. 169).



En el siguiente grado aparece nuevamente en una versión más corta:

> El procedimiento para multiplicar un número decimal por uno natural es el mismo que cuando se multiplican dos números naturales. En el producto el punto decimal se coloca de acuerdo con la cantidad de cifras decimales que tiene el número decimal. Por ejemplo: (5°, p. 135).

Ilustración 17 Fragmento de la lección 38 "Multiplicar fracciones y decimales", Matemáticas. Quinto grado, SEP (2011, p. 135).

Comprender por qué funciona este algoritmo quizá se consideró fuera del alcance de los alumnos de primaria, pero en este ejemplo se confirma lo que Brousseau y otros han estudiado, la operatoria con decimales se enseña como si fuera una extensión de la aprendida para los naturales añadiendo una que otra regla. De esta manera, permanecen ocultos los significados e incluso las razones por las que funcionan. Cabe añadir que en 6° grado se solicita a los alumnos multiplicar 5.5 × 5.60 (6°, p. 159), y llama la atención que en los ejemplos dados previamente solamente uno de los factores tiene punto decimal, por lo que los alumnos podrían preguntarse si en estos casos se procede de la misma manera.

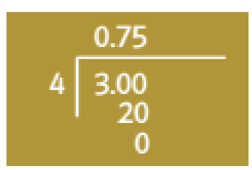
4.2.3 Escribir fracciones como decimales y viceversa

Las tareas matemáticas de este tipo se presentan desde 5° grado empleando la representación con fracción y con punto para ubicar números en la recta o describir mediciones. Incluso hay lecciones en las que piden escribir fracciones usando números decimales y no es claro cómo lo harán por los números de los que se trata: 1/11, 2/9, 2/3, 1/7 y 1/5 (6°, pp. 51 y 127).

En 6° grado se formaliza un procedimiento en el que las fracciones quedan definidas como una división que no se ha resuelto. Este significado de cociente es nuevo para los alumnos.

> Una forma de convertir un número fraccionario a su representación decimal es resolviendo la división, por ejemplo: 3/4 = 0.75.

Ilustración 18 Fragmento de la lección 32 “De decimales a fracciones”, Matemáticas. Sexto grado, SEP (2011, p. 128).



> En cambio, para convertir un número decimal a su equivalente fraccionario, se escribe como numerador el número decimal sin punto y como denominador el 1 seguido de tantos ceros como cifras después del punto tenga el decimal. Por ejemplo: 0.25 = 25/100.
> De tal forma que la lectura de ambas expresiones es la misma. 0.25 centésimos es igual a 25/100 veinticinco centésimos.
> La expresión 25/100 es equivalente a 1/4 porque al multiplicar 1/4 x 25/25 tenemos 25/100. (6°, p. 128).

La idea de “convertir” aparece reiteradamente a lo largo de las lecciones de los grados revisados, aunque en el contexto de las fracciones equivalentes éstas se “obtienen”, no se convierten. Considero que el verbo “convertir” puede ser confuso y que abonaría a la comprensión hablar de “distintas expresiones de un mismo número” en vez de algo que se convierte en otra cosa. Con los algoritmos de “conversión” parecería que la fracción 2/5 se transforma en 0.4 por algún tipo de alquimia que oculta el hecho de que son el mismo número.

4.2.4 Relación con las medidas

Además de los repartos, en 3er grado las fracciones aparecen ligadas a la medición, de hecho, su estudio comienza empleando contextos que se asumen como familiares para los alumnos (1/4 de kilo, 1/2 litro, etc.). No se trata de particiones sino de medidas (ellos no parten el kilogramo en 4 para obtener fracciones de 1/4, sino que el resultado de la medición está dado y la unidad se infiere). También reconstruyen la unidad u otras medidas a partir de sumas, por ejemplo, formar 2 litros con 1/2 y 1/4 de litro. En 4° grado se proponen actividades similares: saber cuántos metros se forman con 5 trozos de tela sabiendo que cada uno mide 3/4m, saber cuántos trozos de 2/3m se necesitan para formar 12m, etc. (pp. 165-166).

En la tercera lección dedicada a las fracciones (p. 115) se plantea una actividad en la que deben determinar quién lee más tiempo, alguien que dedica 4/8 de hora o alguien que dedica 2/3 de hora. El problema incluye el dibujo de dos relojes sin manecillas y no es muy claro cómo se espera que los usen dado que el problema implica la partición de una hora y los números en los relojes miden las horas del día.

Ilustración 19 Fragmento de la lección 35 “Comparemos fracciones”, Matemáticas. Tercer grado, SEP (2011, p. 117).

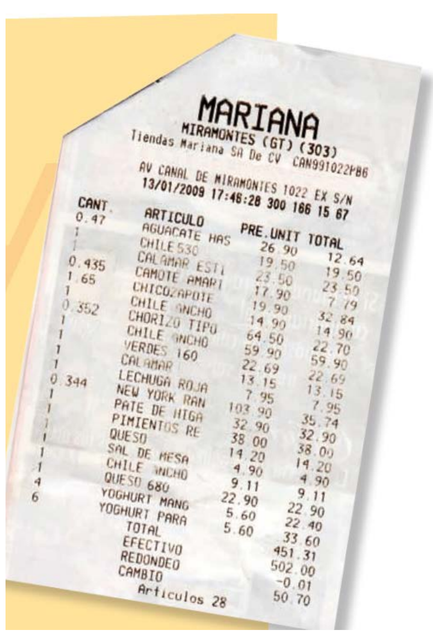
En esa misma lección aparecen más unidades (galleta, hora, litro) y los denominadores 2, 3, 4, 6 y 8.

En una lección posterior se vinculan unidades y submúltiplos de esa unidad con fracciones sin existir ningún trabajo previo. La formalización se presenta en un recuadro “1 litro (L) son 1000 mililitros (mL). Por lo tanto: 1/2L son 500mL, 1/4L son 250mL.” (p. 139).

A diferencia de las fracciones, que inician su estudio con repartos, en 4° grado inicia el estudio de los números con punto decimal en contextos de medición, específicamente en el contexto del dinero recurriendo a los centavos como un escenario natural en el que la unidad se fracciona y el resultado de la partición se expresa en números con punto decimal, como \$119.90 (p. 17). Sin embargo, las monedas no dicen “0.5 pesos” sino “50 centavos”, así que a menos que se explicite la relación, puede permanecer oculta y quedar como un cambio de unidad (del lado izquierdo del punto van los pesos y del lado derecho los centavos).

En una lección posterior, también de 4° grado, se pide a los alumnos que escriban qué significa el 0.50 en la cantidad \$26.50 y a partir de una nota de supermercado se pregunta “qué representan” las cantidades después del punto en la columna de los precios y en la columna de cantidades (donde queda reflejado el número de artículos que se compran de una misma clase o bien, el peso del producto adquirido). No hay más trabajo sobre esto.

Ilustración 20 Fragmento de la lección 12 “Los precios con centavos”, Matemáticas. Cuarto grado, SEP (2011, p. 52).


MARIANA
MIRAMONTES (GT) (303)
Tiendas Mariana SA De CV CAN991022PB6
AV CANAL DE MIRAMONTES 1022 EX S/N
13/01/2009 17:46:28 300 166 15 67

CANT.: 0.47, 1, 1, 0.435, 1.65, 1, 0.352, 1, 1, 1, 1, 0.344, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 6

ARTICULO: AGUACATE HAS, CHILE 530, CALAMAR ESTI, CAMOTE AMARI, CHICOZAPOTE, CHILE ANCHO, CHORIZO TIPO, CHILE ANCHO, VERDES 160, CALAMAR, LECHUGA ROJA, NEW YORK RAN, PATE DE HIGA, PIMIENTOS RE, QUESO, SAL DE MESA, CHILE ANCHO, QUESO 680, YOGHURT MANG, YOGHURT PARA

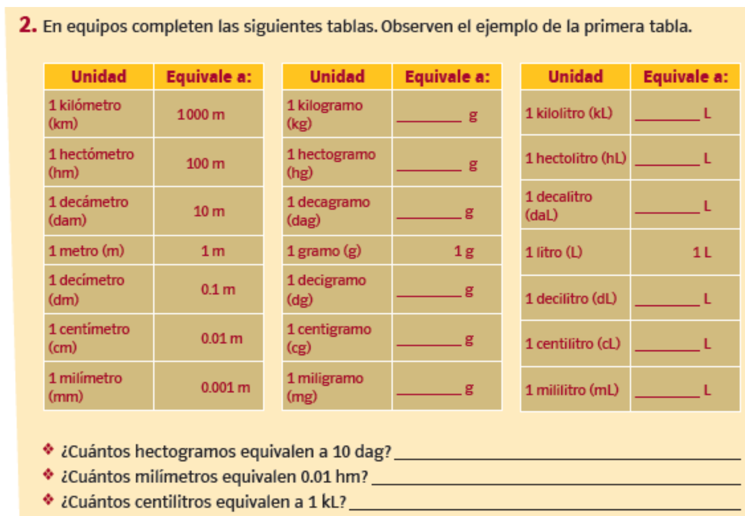
PRE.UNIT: 26.90, 19.50, 23.50, 17.90, 19.90, 14.90, 64.50, 59.90, 22.69, 13.15, 7.95, 103.90, 32.90, 38.00, 14.20, 4.90, 9.11, 22.90, 5.60, 5.60

TOTAL: 12.64, 19.50, 23.50, 7.79, 32.84, 14.90, 22.70, 59.90, 22.69, 13.15, 7.95, 35.74, 32.90, 38.00, 14.20, 4.90, 9.11, 22.90, 22.40, 33.60

TOTAL 451.31
EFECTIVO 502.00
REDONDEO -0.01
CAMBIO 50.70
Articulos 28

En 5to grado hay una actividad en la que deben comparar 17cm y 1.70dm (p. 49) y llama la atención que no ha habido trabajo previo sobre esto, por lo que será complejo darle respuesta. Es hasta una lección posterior cuando se presentan tablas con equivalencias entre unidades de distintas magnitudes (longitud, masa, capacidad) y se hacen preguntas sobre dichas equivalencias (p. 65-66).

Ilustración 21 Fragmento de la lección 20 “El metro y sus múltiplos”, Matemáticas. Quinto grado, SEP (2011, p. 65).



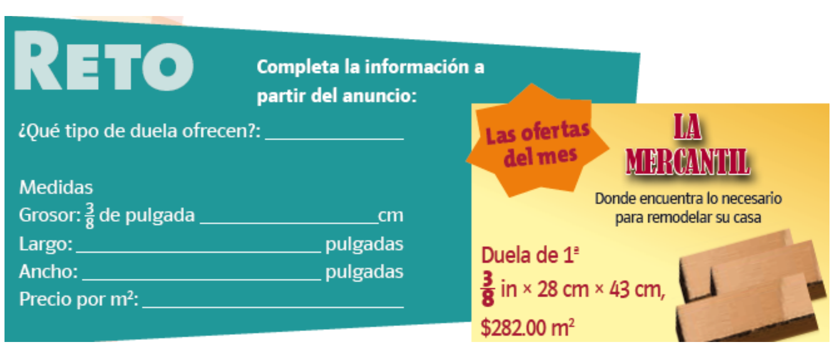
2. En equipos completen las siguientes tablas. Observen el ejemplo de la primera tabla.

Unidad	Equivale a:	Unidad	Equivale a:	Unidad	Equivale a:
1 kilómetro (km)	1000 m	1 kilogramo (kg)	______ g	1 kilolitro (kL)	______ L
1 hectómetro (hm)	100 m	1 hectogramo (hg)	______ g	1 hectolitro (hL)	______ L
1 decámetro (dam)	10 m	1 decagramo (dag)	______ g	1 decalitro (daL)	______ L
1 metro (m)	1 m	1 gramo (g)	1 g	1 litro (L)	1 L
1 decímetro (dm)	0.1 m	1 decigramo (dg)	______ g	1 decilitro (dL)	______ L
1 centímetro (cm)	0.01 m	1 centigramo (cg)	______ g	1 centilitro (cL)	______ L
1 milímetro (mm)	0.001 m	1 miligramo (mg)	______ g	1 mililitro (mL)	______ L

- ¿Cuántos hectogramos equivalen a 10 dag? ______
- ¿Cuántos milímetros equivalen 0.01 hm? ______
- ¿Cuántos centilitros equivalen a 1 kL? ______

En 4° grado aparece una medida expresada en pulgadas. No se espera que hagan operaciones con ésta, sino que interpreten la información de un anuncio. De todas formas, es cuestionable que usen esa unidad para un contenido relacionado con leer información en distintos portadores y que empleen la abreviación en inglés “in” de “inches” sin aclarar nada.

Ilustración 22 Fragmento de la lección 10 “¿Qué información contiene?”, Matemáticas. Cuarto grado, SEP (2011, p. 40).



En 6° grado se enfrenta otra dificultad al estudiar conversiones entre el sistema inglés y el sistema internacional de medidas, tema de una lección en 6to grado. Deben calcular, por ejemplo, cuántos kilómetros son 29.1 millas sabiendo que 1 milla = 1609.34m (p. 99). Al final de la lección deben completar una tabla que efectivamente es un reto y además, espera que los alumnos expresen 30 pies (una medida de longitud) en kilos (masa), litros, mililitros y galones (capacidad), lo que no tiene ningún sentido y será motivo de confusión en la clase.

Ilustración 23 Fragmento de la lección 27 "De centímetros a pulgadas", Matemáticas. Sexto grado, SEP (2011, p. 103).

RETO Completa la siguiente tabla:

Cantidades	yd	cm	kg	L	mL	gal
30 ft						
3 m						
12 L						
90 oz						
80 lb						

4.2.5 Ubicación en la recta

Este tipo de trabajo se realiza frecuentemente con los racionales pues es un recurso poderoso que permite actividades diversas y ricas como ordenar números, estudiar la equivalencia y tener un acercamiento a la propiedad de densidad. En el programa la ubicación de racionales en la recta está en 6° grado, pero en los libros aparece desde 5°.

La primera actividad (5°, p. 45) demanda ubicar 3/2, 8/3, 20/5, 18/8 y 21/6 en una recta que los alumnos deben trazar, así que no se les da ningún número ni la escala. ¿Cómo tendrían que subdividirla para poder ubicar denominadores 2, 3, 5, 6 y 8? Si a los alumnos se les ocurre simplificarlas tendrán divisiones en 12avos, pero si no estarán entre los 30avos, los 48avos o una cantidad importante de marcas que incrementarán la probabilidad de errores. ¿Para qué complejizar la primera actividad de ubicación en la recta planteando fracciones impropias con cinco denominadores distintos?

En lecciones posteriores se solicitan actividades similares con distintos niveles de dificultad: ubicar 3/5 y 6/10 en una recta con graduación dada (5°, p. 85), y ubicar 3/9, 6/18 y 9/27 en una recta dada que no tiene subdivisiones ni números (5°, p. 86).

En esa misma lección se hacen otras actividades en la recta y se formaliza el procedimiento para ubicar fracciones:

> Una fracción puede ubicarse en la recta numérica si se conoce:
> - La ubicación del cero y la unidad, o la ubicación del cero y la de una fracción cualquiera, o la ubicación de cualquier pareja de números. (5°, p. 46).

Aunque los alumnos tienen experiencia ubicando naturales en la recta, parece prematuro formalizar el procedimiento antes de haber desarrollado más actividades con fracciones. Además, hace falta explicar bastante esa formalización, por ejemplo, para encontrar lo relativo a la unidad de referencia. ¿Cómo determinar la distancia entre el 0 y 1, o entre cualquier otra pareja de números?, ¿es arbitraria cuando no hay ninguna marca en la recta o solamente se ha determinado la ubicación de un número?, ¿por qué deben conservarse las distancias una vez determinado el tamaño de la unidad?

En el siguiente grado se hace otra formalización del procedimiento para ubicar fracciones en la recta. Se enfoca a un solo caso (colocar el 0 y el 1 para determinar el tamaño de la unidad), pero es más explícita que la de 4° grado.

> Las fracciones pueden representarse en la recta numérica del siguiente modo: al inicio de la recta se coloca el 0, el 1 a su derecha y sobre la recta, dejando una longitud entre ambos números, la cual se toma como unidad, esta se utiliza como separación entre los enteros 2, 3, 4, etc. Estos se escriben en orden ascendente de izquierda a derecha. El denominador de la fracción indica en cuántas partes iguales se divide cada unidad, el numerador indica cuántas partes se toman a partir del cero. (6°, p. 53).

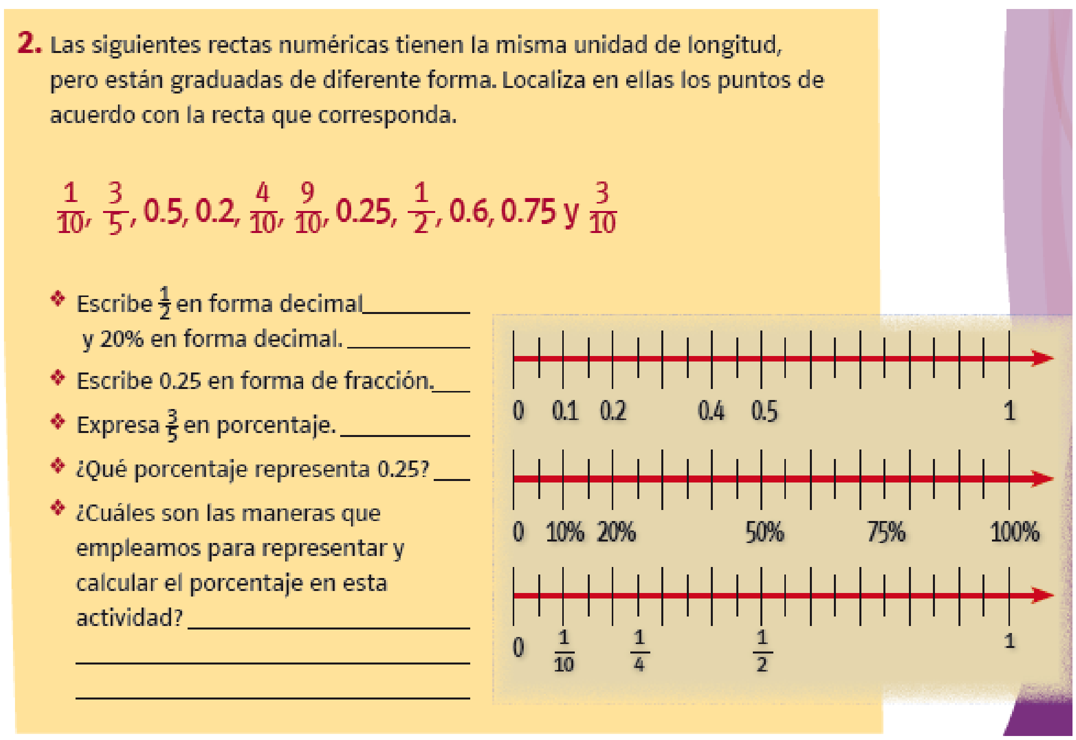
Por otro lado, la idea de que el numerador indica cuántas partes “se toman” en el contexto de ubicación en la recta, parece un tanto extraña.

La ubicación de fracciones con denominador 10 se estudia en 5° grado aprovechando también ese recurso para la equivalencia, por ejemplo, notar que 3/10 y 30/100 quedan en el mismo punto (5°, p. 47).

La ubicación de decimales en la recta también está en 5° grado. Hay actividades aisladas en la que deben ubicar números con punto: 5.6 en una recta dada con subdivisiones de 1 en 1 (5°, p. 115), decir qué número va en una recta (0.8 con subdivisiones de 0.2 en 0.2); y hay una lección posterior dedicada a ubicar números que llegan hasta centésimos en rectas divididas en décimos y centésimos (5°, p. 164). En 6° grado ubican también milésimos y añaden a la instrucción que es “de manera aproximada” pues la recta va de 0 a 5 con subdivisiones de 0.5 en 0.5 (6°, p. 16).

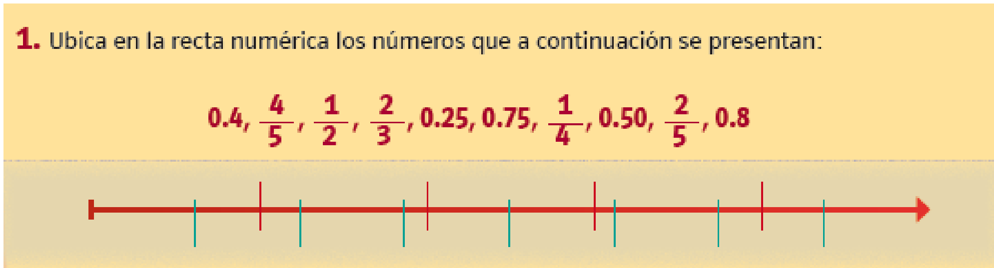
Ubicar en la misma recta fracciones y decimales aparece en 6° usando números que no son fáciles y cuestionando a los alumnos sobre la graduación empleada (hay rectas con subdivisiones no usuales (6°, pp. 51-52). En una lección posterior (6°, p. 109) también ubican simultáneamente fracciones y decimales añaden una recta que va de 0 a 100% y cuyas subdivisiones son porcentajes. En esa recta tienen que ubicar 1/10, 3/5, 0.5, 0.2, etc., tarea que se anticipa difícil para los alumnos.

Ilustración 24 Fragmento de la lección 29 “Pague sólo la mitad o 50% de su precio total”, Matemáticas. Sexto grado, SEP (2011, p. 109).



La última lección (6°, p. 126) en la que se ubican números en la recta presenta un reto importante, pues además de combinar fracciones y decimales está subdividida en quintos y octavos, y no señala ningún número.

Ilustración 25 Fragmento de la lección 32 "De decimales a fracciones", Matemáticas. Sexto grado, SEP (2011, p. 126).



4.2.6 Orden

El ordenamiento ocurre en diversas situaciones como la recta numérica, el sombreado de áreas y la vinculación con medidas cuando hay objetos o representaciones de estos en las lecciones. Las actividades que describo aquí son aquellas que no ocurren en esos marcos, sino que se centran en el ordenamiento presentando solamente los números, o bien, aquellas que se presentan en un problema que involucra alguna magnitud, pero no hay ningún tipo de trabajo sobre unidades o medición.

En 3er grado (p. 115) se espera que los alumnos ordenen 1/2 y 3/8 sin especificar la unidad y sin elementos gráficos. En 4° grado (p. 85) deben ordenar fracciones que son resultados de repartos (2 litros entre 3 personas, 1 melón entre 6 personas, etc.). También se pide a los alumnos que ordenen: 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 2/4, 3/4, 1/5, 2/5, 4/5, 1/6, 3/6, 4/6 y 4/8. El libro de 4° grado incluye un recortable con fracciones, pero desafortunadamente no hay quintos, así que para resolver la actividad posiblemente se espera que los alumnos ya sepan lo siguiente: teniendo el mismo numerador, los denominadores mayores indican una fracción menor, entonces $1/6 < 1/5 < 1/4 < 1/3 < 1/2$, y con lo que les han enseñado sobre equivalencia $2/4 = 3/6 = 4/8 = 1/2$. Ahora bien, $2/5 < 1/2$ pero ¿dónde intercalarla? Mismo caso con 3/4 y 4/5, ambas mayores que 1/2 pero sin opciones para saber cuál de las dos es mayor. En 5° grado hay una actividad que plantea la misma dificultad, ordenar 1/5, 3/9 y 4/10. Como 3/9 es equivalente a 1/3 y 4/10 a 2/5, entonces quedan 1/5, 1/3 y 2/5. ¿Cómo podrían saber si 1/3 es mayor o menor que 2/5? (p. 14). También en 5° grado deben comparar parejas de fracciones y se enfrentarán al mismo problema (p. 88). En estos casos tendrían que sombrear áreas o ubicar las fracciones en la recta numérica, pues el procedimiento para “convertir” fracciones en decimales (y así compararlos) aparece hasta el siguiente grado.

Respecto a los decimales, cuando los números a ordenar tienen la misma cantidad de cifras a la derecha del punto las reglas que aprendieron para los naturales siguen funcionando, pero cuando no tienen la misma cantidad de cifras la actividad se complejiza y entran en juego las características de estos nuevos números. Por ejemplo, en 5° grado deben ordenar 1.80, 2, 0.40, 1.305, 1.035, 1.40 y 1.350 (p. 90, pp. 117 y 129); y en 6° grado hay actividades similares (pp. 15, 18, 51 y 150).

En 5° hay un reto en el que deben ordenar listas de números en las que hay tanto fracciones como decimales, por ejemplo, 0.45, 2/8 y 0.82 (p. 167) y en 6° grado hay actividades similares (pp. 87 y 127).

4.2.7 Sombreado de áreas

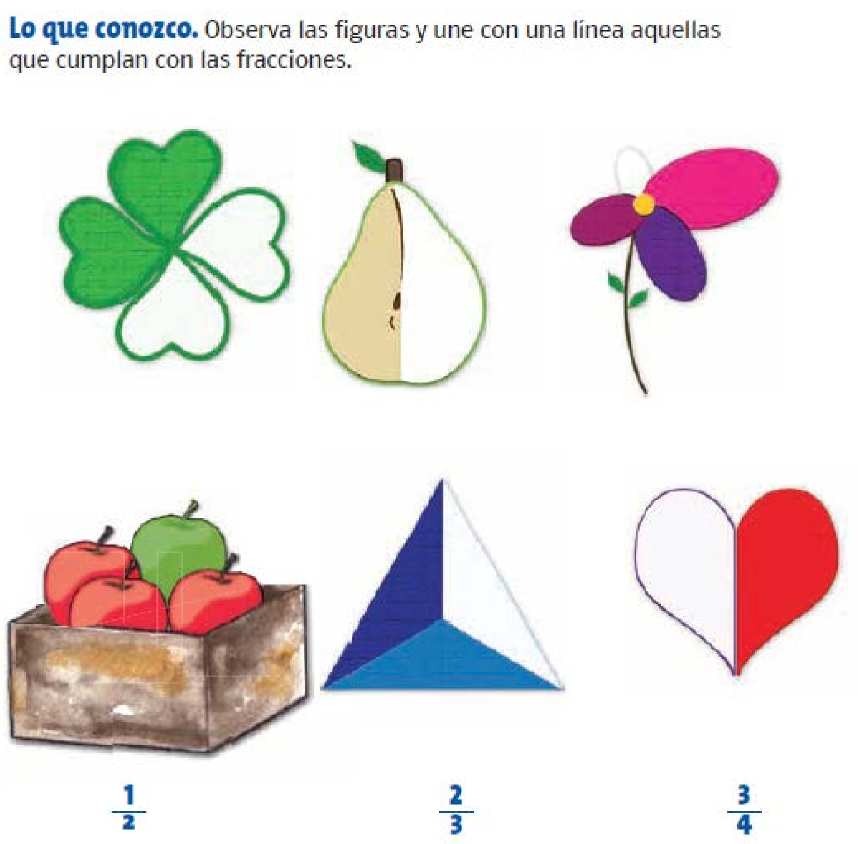
El sombreado de área es un recurso es muy utilizado en los libros pues permite dar sentido a uno de los significados de los racionales: parte – todo. Al dividir un área en cierto número de partes iguales se pueden “ver” los tamaños de cada parte y compararlo con el todo. También se estudian equivalencias con este recurso, pues permite mostrar que si dos números tienen un área con la misma medida, son equivalentes.

Este tipo de actividades comienzan desde 3er grado presentando rectángulos en los que los alumnos deben colorear la mitad o una cuarta parte (pp. 86, 87), o repartiendo unidades fraccionables (pp. 88 y 117). Sin embargo, algunas actividades no son muy afortunadas, ¿cómo utilizar esos botes de helado para sombrear 1/3 y 1/6? (obviando el hecho de que ni los tercios ni los sextos son parte del programa en 3er grado). Desde luego que puede hacerse una aproximación, pero considerando que están empezando a estudiar fracciones convendría que los elementos fueran lo más claros posibles minimizando la posibilidad de confusiones.

Ilustración 26 Fragmento de la lección 35 "Comparemos fracciones", Matemáticas. Tercer grado, SEP (2011, p. 117).

En una actividad posterior es confusa la instrucción y también los dibujos. ¿Qué significa que una figura "cumpla" con la fracción? Hay muchas mejores maneras para referirse al sombreado de áreas. Por otro lado, la pera no tiene sombreado 1/2 pero en este grado será necesario el doblado de papel para comprobarlo, y el triángulo tiene 1/3 sombreado de un color y 1/3 de otro.

Ilustración 27 Fragmento de la lección 43 "La huerta en fracciones", Matemáticas. Tercer grado, SEP (2011, p. 147).

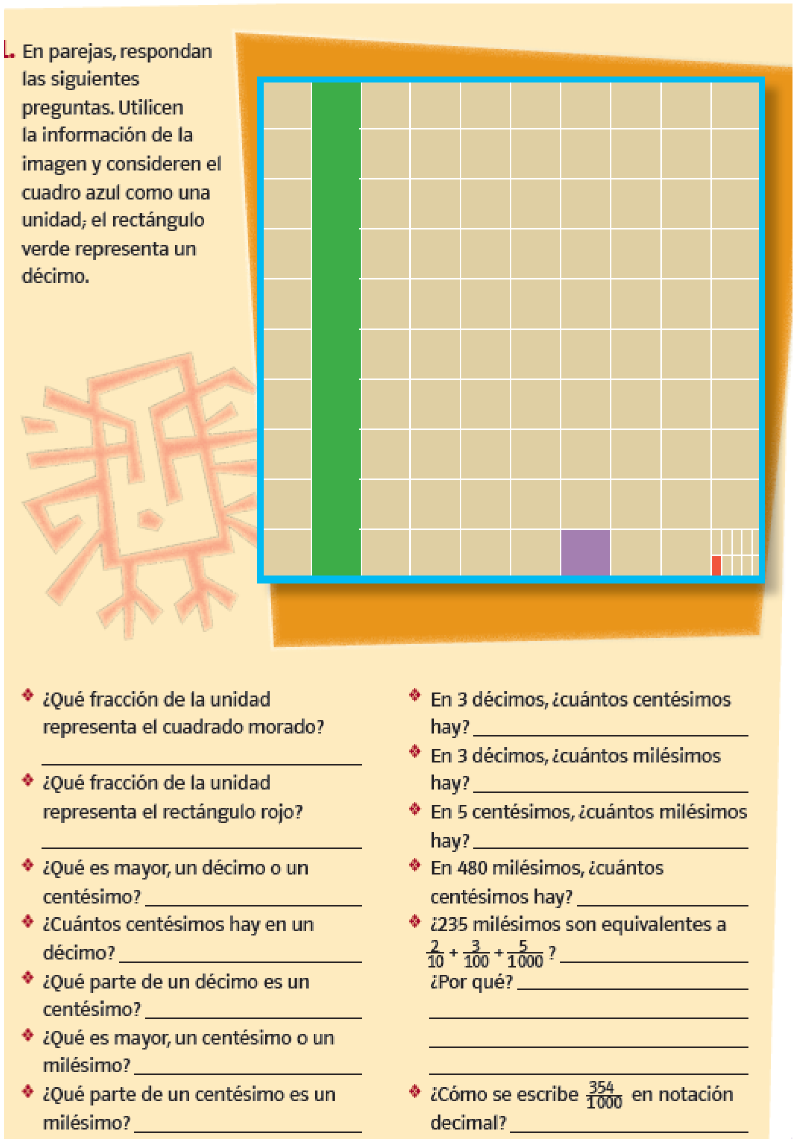


En esa misma lección el libro presenta un “Dato interesante” en el que incluyen las fracciones 7/10 y 2/100, denominadores totalmente ajenos a los alumnos en este grado. Además, en ese grado se incluye un Reto en el que deben representar 5/12 en un rectángulo dividido en 24 cuadrados, actividad interesante y necesaria, pero quizás prematura por los denominadores involucrados (p. 150).

En 4° grado continúa el trabajo con sombreado de áreas, tanto para identificar qué parte de una figura está sombreada como para sombrear cierta fracción en una figura. Hay actividades retadoras para los estudiantes, pero alcanzables (pp. 14 y 48) y otras que podrían haber sido mejor planteadas. “Dibuja (…) Una ventana en forma de octágono regular, las secciones que se abaten tienen forma de triángulos y representan 2/8 partes del área total de la ventana” (p. 49). El mero trazo del octágono regular escapa a lo que los alumnos saben hacer en ese grado, y muy probablemente no comprendan qué significa “secciones que se abaten”.

En 5° grado hay un menor número de actividades de este tipo (con fracciones) y se introduce un trabajo similar para los decimales. Se trata de un cuadrado (en propuestas curriculares anteriores era un rectángulo) que representa la unidad y sus divisiones señalan los décimos, centésimos y milésimos. Este tipo de tareas son importantes y llama la atención su escasez en los libros de 2011.

Ilustración 28 Fragmento de la lección 26 “¿Un número más pequeño que 0.1?”, Matemáticas. Quinto grado, SEP (2011, p. 91).



1. En parejas, respondan las siguientes preguntas. Utilicen la información de la imagen y consideren el cuadro azul como una unidad; el rectángulo verde representa un décimo.

- ¿Qué fracción de la unidad representa el cuadrado morado? __________
- ¿Qué fracción de la unidad representa el rectángulo rojo? __________
- ¿Qué es mayor, un décimo o un centésimo? __________
- ¿Cuántos centésimos hay en un décimo? __________
- ¿Qué parte de un décimo es un centésimo? __________
- ¿Qué es mayor, un centésimo o un milésimo? __________
- ¿Qué parte de un centésimo es un milésimo? __________
- En 3 décimos, ¿cuántos centésimos hay? __________
- En 3 décimos, ¿cuántos milésimos hay? __________
- En 5 centésimos, ¿cuántos milésimos hay? __________
- En 480 milésimos, ¿cuántos centésimos hay? __________
- ¿235 milésimos son equivalentes a $\frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{5}{1000}$? __________ ¿Por qué? __________
- ¿Cómo se escribe $\frac{354}{1000}$ en notación decimal? __________

4.2.8 Densidad

Aunque el acercamiento a la propiedad de densidad (definido así en el programa) se plantea para 6° grado, hay una actividad en el grado anterior. A partir de una recta dividida en centésimos se pregunta a los alumnos por números mayores que 7.8 pero menores que 7.9, para posteriormente extender la situación preguntándoles si habrá un número entre

7.25 y 7.26 (5°, p. 92). En 6° hay una pregunta aislada que tiene una estructura similar (p. 15).

En otra lección de 6° (p. 87) abordan la propiedad de densidad a partir de rectas numéricas en las que hay números dados (por ejemplo, 1.2 y 1.3) y se les pide ubicar un tercero entre ellos. Luego hacen el mismo tipo de trabajo usando fracciones, por ejemplo, solicitando que escriban una fracción con denominador 12 que esté entre 1/6 y 2/6. Llama la atención la formalización que aparece al final. La lección está dedicada al ordenamiento de fracciones y decimales así como a explorar la densidad, sin embargo, la formalización aborda el tema de sucesores y antecesores. Una “consecuencia” de la propiedad de densidad es que no es posible hallar el sucesor o antecesor de un racional, pero lo que trabajan los alumnos en la lección es otra idea, que entre dos racionales siempre hay otro racional. Por ello, concluir sobre antecesores y sucesores podría ser confuso.

> Los números decimales y los fraccionarios no tienen sucesor ni antecesor. (6°, p. 90).

4.3 ¿Qué dificultades hay en los libros de la propuesta 2011? Comentario final

En síntesis, la revisión de las lecciones mostró dificultades respecto a:

4.3.1 Conceptos que se usan o definen de forma distinta en las lecciones
4.3.2 Contenidos fuera del programa
4.3.3 Actividades que demandan algo que no se ha estudiado
4.3.4 Algoritmos excesivamente mecánicos
4.3.5 Faltantes

4.3.1 Conceptos que se usan o definen de forma distinta en las lecciones

Describo en la tabla el concepto y cómo se usa en la lección. Como puede apreciarse, no hay una construcción cuidadosa de los conceptos, unos se superponen a otros o simplemente aparecen ignorando el anterior.

Tabla 6 Elaboración propia a partir de lecciones de los libros de 3° a 6°, Matemáticas 2011

Concepto	Qué significa en la lección	Actividad en la que aparece o definición	Grado y página
Fracción	Resultado de un reparto. Números que se pueden representar de diferentes maneras.	"La fracción es un número que se puede representar de diferentes maneras (…) A la cifra de arriba se le llama numerador y representa el número de partes que se toman de un conjunto o un todo (…) A la cifra de abajo se le llama denominador porque da nombre a las partes en que se dividió el conjunto."	3°, p. 86
	Resultado de un reparto. Expresión de cantidades no necesariamente enteras.	"Las fracciones son números que sirven para expresar cantidades que no necesariamente son enteras. Por ejemplo, al repartir 3 chocolates (dividendo o numerador) entre 5 niños (divisor o denominador) (…)"	6°, p. 14
Fracción decimal	Fracción con denominador potencia de 10	Aparecen en un "Dato interesante"	3°, p. 150
		Tabla con notación desarrollada.	5°, p. 48
		"Las fracciones decimales son aquellas que tienen como denominador 10, o cualquiera de sus potencias (100, 1000, 10000, etcétera)."	5°, p. 49
Fracción / fracción decimal	Fracción menor que 1 con denominador potencia de 10	Escritura de decimales con punto, con fracción y con letra.	6°, p. 17
Fracción propia	Fracción menor que 1 (implícito).	En un "Dato interesante" para decir que al multiplicar un natural por una fracción propia el producto será menor.	5°, p. 135
Fracciones equivalentes	Fracciones que representan la misma cantidad	"Las fracciones que representan la misma cantidad reciben el nombre de fracciones equivalentes".	3°, p. 117
		"Dos fracciones son equivalentes si representan la misma cantidad".	4°, p. 88
	Fracciones que tienen el mismo valor.	"Dos fracciones son equivalentes cuando tienen el mismo valor."	4°, p. 89

Fracción entera	Fracción igual a 1 (implícito).	Actividad para obtener fracciones equivalentes.	5°, p. 88
Número decimal	Números (algunos) que se pueden escribir con denominador potencia de 10 o con notación decimal.	“Algunos números decimales pueden escribirse de dos maneras como fracción decimal o bien, en notación decimal.”	5°, p. 128
	Número escrito con punto, finito.	Escritura con punto, fracción y con letra.	6°, p. 17
	Cifras que están a la derecha del punto.	“A los números a la derecha del punto se les llama decimales y a la izquierda enteros”.	6°, p. 50
	Cualquier número escrito mediante su representación con punto.	“Escribe con números decimales las siguientes fracciones 1/11, 2/9 (…)”	6°, p. 51
		“Escribe como número decimal cada una de las siguientes fracciones 1/3, 5/6 (…)”	6°, p. 127
Número decimal periódico	Número que tiene una o varias cifras que se repiten indefinidamente.	División de naturales para obtener representación con punto.	6°, p. 127
Notación decimal	Número decimal escrito con punto.	Tabla con notación desarrollada. Actividad de “conversión”.	5°, p. 48 5°, p. 91
Representación decimal exacta / no exacta	Finita / no finita	División de naturales para obtener representación con punto.	6. p. 127
Número entero	Igual a 1 (excluye cualquier otro entero).	Suma de fracciones con el mismo denominador en la que deben determinar si “da un número entero”, las únicas opciones que pueden ser correctas son del tipo 1/4 + 3/4, 3/6 + 3/6.	4°, p. 60
	Igual a 1 (excluye cualquier otro entero). “Recuerda que un entero es igual a una fracción cuyo numerador es igual al denominador, es decir 1 = 2/2 = 3/3 = 4/4.”	Procedimiento para hallar fracciones equivalentes.	5°, p. 86
	Número sin cifras a la derecha del punto.	Múltiplos de naturales.	5°, p. 50
	Los números que están a la	Escribir con números cantidades	5°, p. 129

	izquierda del punto decimal.	con punto, como tres enteros nueve milésimos.	
		“A los números a la derecha del punto se les llama decimales y a la izquierda enteros”.	6°, p. 50
Cociente entero	Cociente que no tiene cifras a la derecha del punto.	División de naturales en la que se analiza el residuo.	5°, p. 97
Número natural	Número que no tiene cifras decimales (similar a “entero”).	“Para resolver multiplicaciones que tienen un número decimal, se procede de la misma manera que con una multiplicación con números naturales, pero en este caso (…)”	4°, p. 169

4.3.2 Contenidos fuera del programa

Describo brevemente cuáles contenidos se estudian en un grado que no corresponde al que señala el programa o que no forman parte del programa de educación primaria. Respecto al “cumplimiento” del programa no me pronuncio aquí acerca de si es correcto o incorrecto adelantar contenidos, pues depende del contenido en cuestión y en el apartado anterior hice comentarios puntuales. El propósito aquí es solamente recopilarlos:

- Números con punto decimal en 3er grado a propósito de precios y medidas (deberían aparecer hasta 4°).
- Denominadores 3, 5, 6 y 9 en 3er grado (deberían aparecer hasta 4°).
- Resolución de problemas que involucran la multiplicación de una fracción por otra fracción (no forma parte de los programas de primaria).
- Algoritmo de la multiplicación entre fracciones (no forma parte de los programas de primaria).
- Acercamiento a la propiedad de densidad en los números racionales en 5° grado (debería aparecer hasta 6°).

Debo aclarar una cuestión respecto a la operatoria. En algunos casos el programa señala con claridad que se espera que los estudiantes utilicen el algoritmo convencional (“Resolución de problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios, variando la estructura de los problemas. Estudio o reafirmación de los algoritmos convencionales” 6° grado), mientras que en otros es muy claro que no (“Resolución de problemas multiplicativos con valores fraccionarios o decimales mediante procedimientos no formales” 6°

grado). Sin embargo, hay unos que no lo especifican ("Resolución de problemas que impliquen una división de un número fraccionario o decimal entre un número natural" 6° grado). Tomé como una segunda referencia los Estándares que se incluyeron en la propuesta 2011. Ahí se señala que para el tercer periodo escolar (11 y 12 años de edad) los estudiantes deben resolver problemas aditivos con racionales usando el algoritmo convencional, y resolver problemas multiplicativos de racionales por naturales también usando el algoritmo convencional. Entonces, lo que queda fuera de la primaria es lo que señalo en la lista anterior, algoritmos para multiplicar y dividir fracción por fracción y decimal por decimal.

4.3.3 Actividades que demandan algo que no se ha estudiado

El enfoque didáctico basado en la resolución de problemas tiene como principio plantear actividades que sean un reto alcanzable para los estudiantes, es decir, que partan de lo que saben en el entendido de que no será suficiente y deberán explorar otras posibilidades de solución. Visto desde esa perspectiva, plantear actividades en las que se solicite a los alumnos algo que no se les ha enseñado es acorde al enfoque didáctico. Las actividades que enlisto aquí son distintas, se trata de aquellas que los alumnos no podrán resolver por sí mismos a partir de lo que saben porque los números involucrados no permiten la resolución mediante procedimientos no convencionales.

- 3er grado. Calcular 10 × 37.5 o 250 × 1.5 antes de estudiar nada sobre números decimales.
- 4° grado. Ordenar fracciones sin material concreto y ni recursos visuales (entre otras, la siguiente lista: 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 2/4, 3/4, 1/5, 2/5, 4/5, 1/6, 3/6, 4/6, 4/8).
- 4° grado. Llenar una tabla de variación proporcional en la que hay un 9.96 involucrado o multiplicar 15 × 1.5, sin saber multiplicar decimales.
- 4° grado. Escribir cuántos centímetros son 3/8 de pulgada (3/8 × 2.54).
- 5° grado. Comparar medidas dadas en cm y dm antes de estudiar las unidades de longitud.
- 6° grado. Calcular porcentajes con cifras a la derecha del punto (por ejemplo, 16.21% de 5.12) cuando solamente han aprendido procedimientos para porcentajes sin punto (calcular el 20% es x × 20%, x × 20/100 o x × 0.20).

- 6° grado. Escribir cualquier fracción usando números decimales antes de enseñarles un algoritmo (dejando de lado la discusión de que no todas las fracciones dadas son decimales). Fracciones como 1/5 son usuales e incluso 2/3, pero 1/11, 2/9 y 1/7 no podrán ser escritas con punto de manera intuitiva ni con procedimientos informales.
- 6° grado. Multiplicar 1/2km × 1 ½km sin haberles enseñado cómo y sabiendo que el producto será menor que 1 ½.

4.3.4 Algoritmos excesivamente mecánicos

Es cierto que un algoritmo pretende ser un procedimiento estandarizado que pueda aplicarse a situaciones diversas y que no requiera pensar en un método de resolución distinto cada vez, pero la investigación sobre didáctica de las matemáticas muestra que los algoritmos o conceptos que se enseñan “de memoria”, ya sea porque no hay ningún trabajo que promueva la adquisición de saberes para darle sentido al procedimiento formal o porque se presenten prematuramente, no devienen en aprendizajes profundos, se olvidan o no logran conectarse con otros conocimientos.

- Multiplicar por el mismo número el numerador y denominador, o bien, multiplicar por un entero (escrito como fracción) para hallar una fracción equivalente. Nunca se reflexiona sobre lo que está de base (no se pueden sumar directamente tercios y quintos), ni sobre por cuál número conviene multiplicar.
- Multiplicar una fracción por un natural como solamente multiplicar el numerador por el natural. No se recupera el trabajo previo que permite comprender que el algoritmo itera “tantas veces” el numerador. Multiplicar 3 × 5/8 es sumar 5/8 tres veces, por eso el denominador parece ignorarse en el algoritmo.
- Dividir una fracción por un natural como multiplicar el denominador por el natural. Al igual que con la multiplicación, hay trabajo que no se recupera para hacer comprensible el algoritmo. Dividir 1/4 ÷ 2 es buscar la mitad de 1/4, y por eso el denominador se hace más grande (y la fracción más pequeña).
- Obtener una fracción de una cantidad como multiplicar esa cantidad por el numerador y dividir el resultado entre el denominador. El algoritmo no es difícil, pero parece innecesario dado que saber cuánto es una fracción de otro número se resuel-

ve multiplicando (para obtener 1/2 de 50 se multiplica 1/2 × 50) y eso se los enseñan de forma distinta en 5° grado (multiplicar el natural por el numerador).

- Obtener qué fracción es una cantidad de otra como colocar a "la cantidad" en el numerador y el total en el denominador. La explicación es poco afortunada pues no logra recuperar el trabajo que estaban haciendo con repartos ni con hallar qué parte es un número de otro: 5 entre 2 es igual a 2/5 y 2 son 2/5 de 5.
- Dividir naturales con punto decimal en el cociente como agregar un cero al residuo. Se echa en falta el aspecto central: se agrega un cero para expresar el número como décimos y seguir dividiendo.

El algoritmo de la multiplicación de números decimales por naturales es también bastante mecánico, pero si se quiere enseñar en la primaria posiblemente no haya otro camino dado que la explicación de por qué funciona requiere conocimientos que aprenderán hasta la secundaria.

4.3.5 Faltantes

Si bien en los libros hay diversas actividades que involucran el cálculo escrito, el cálculo mental y la calculadora, los algoritmos para la suma y la resta con números decimales no aparecen en los libros. Según el programa en 4° deben abordarse la suma y la resta de decimales en contextos de dinero y hallar expresiones equivalentes, resolver problemas mediante el cálculo mental y luego utilizar otros contextos (además del de dinero). En 5° sólo se menciona la resolución de problemas usando el cálculo mental, y en 6° la resolución de problemas en general y el estudio o reafirmación de los algoritmos convencionales. Al parecer, la propuesta confió en que serían los maestros quienes enseñaran los algoritmos para sumar y restar.

Para cerrar, la revisión de los programas y libros tuvo como propósito describir qué posibles retos enfrentan los maestros desde el punto de vista didáctico, es decir, asumiendo que el aprendizaje de los racionales plantea en sí mismo obstáculos epistemológicos, saber si la propuesta curricular planteaba obstáculos didácticos. La respuesta es claramente afirmativa.

Capítulo 5. Referentes teóricos: Conocimientos y concepciones de los maestros respecto a los números decimales
Análisis preliminares, cuarta parte

En este capítulo presento la cuarta y última parte de los elementos teóricos que me permitieron fundamentar el diseño de la secuencia didáctica. En el capítulo doy cuenta de hallazgos obtenidos en otros trabajos sobre conocimientos y concepciones de maestros de primaria –en formación o en ejercicio– respecto a los números decimales. Ello me permitió identificar las dificultades centrales que otros encontraron con poblaciones objetivo semejantes a la mía, confirmar algunas hipótesis y anticipar la posible aparición de obstáculos similares a los descritos por Brousseau y otros con estudiantes de niveles básicos.

El capítulo está dividido en tres apartados en función de los conocimientos matemáticos de los números decimales sobre los que se cuestionó a los maestros o futuros maestros. El apartado 5.1 presenta resultados de investigación en torno a los conocimientos e ideas respecto a cuáles son los números decimales, ¿los que tienen punto, los que son menores que 1, los que son infinitos? Después muestro resultados respecto a otras tareas como el ordenamiento y la propiedad de densidad. En el último apartado conocimientos, habilidades de estimación y justificación de los algoritmos cuando los números son decimales.

Al analizar los datos de los trabajos que refiero conviene tener presente que saber cuáles conocimientos sobre decimales ponen en juego los maestros cuando resuelven una prueba revela una parte necesaria pero no suficiente del problema, hace falta también ir aproximando respuestas sobre qué se necesita para enseñarlos. Es decir, es importante explorar qué saben los maestros de la parte matemática para reforzarla, pues al tratarse de un objeto matemático complejo y habiendo sido formados en los sistemas educativos que conocemos no es raro que haya dificultades. Para otros propósitos de investigación, podría incluso explicar al menos en parte las dificultades que muestran los alumnos. Sin embargo, la formación ha de ocuparse también de lo didáctico partiendo por conocer cuáles son las necesidades de enseñanza, como plantea la TAD. En Ball, et al, (2001) hacen una propuesta interesante al redefinir las preguntas sobre la formación para que en vez de utilizar “maestros” y “qué saben los maestros” pongamos “enseñanza” y “qué se necesita para la enseñanza”, convirtiendo así el “problema” de los maestros que no saben lo necesario en un problema del que debe ocuparse la didáctica y los sistemas de formación. Entonces, a sabiendas de que la parte matemática es solo un aspecto de lo que se necesita para enseñar, el capítulo presenta lo que encontré al respecto.

5.1 ¿Cuáles son y cuáles no son números decimales?

Casi en todas las investigaciones que revisé se solicitó a los participantes que dijeran qué es un número decimal o bien, que clasificaran una lista de números. Las confusiones entre un número y sus posibles representaciones se evidencian en todos ellos.

Ávila (2008) aplicó cuestionarios a maestros de primaria en el contexto de un taller de formación continua buscando que respondieran qué son los números decimales. Los maestros dijeron que un decimal es parte de un todo, un número con una parte entera y una decimal que lleva punto, la décima parte de una unidad o un número que se representa después del punto (pp. 17-18). En un trabajo previo también con maestros mexicanos de primaria, Mendiola (1992) diseñó un cuestionario considerando los temas que a su juicio debiera saber todo profesor que tenga a su cargo grupos de 4° a 6° grados y encontró que 50% de los maestros dijo explícitamente que los enteros no son decimales y 57% que los decimales son los números que se escriben con punto.

El trabajo de Konic (2011) con futuros maestros españoles apuntala estos resultados. Konic aplicó un cuestionario para averiguar, entre otras cosas, qué entendían por número decimal; 45% dijo que son un número con punto. Menos del 8% los definió atendiendo a las fracciones y 15% mencionó una combinación de ambas (fracciones y números con punto). Un porcentaje similar afirmó que número decimal es solamente la parte a la derecha del punto. La autora señala que la mayoría de los futuros maestros (72%) consideró que "un número es decimal por su forma de expresión [deben escribirse con punto] más que por las propiedades que lo caracterizan", y que una parte de ellos (15%) no reconoció a los enteros como decimales (pp. 249-250). Cuando les pidió representar números expresados de distintas maneras (por ejemplo, 10/5 y 2), encontró que casi 70% cometió errores conceptuales o realizó representaciones indeterminadas. Los futuros maestros tuvieron dificultades especialmente con las fracciones, considerando a 1/3, 3/10, 10/3 y 33/10 como representaciones del mismo número (32%).

Gairín (1998) también trabajó con futuros maestros sobre racionales positivos y encontró que clasifican a los números con punto en un solo conjunto numérico (piensan, por ejemplo, que los números periódicos son decimales). También tuvieron dificultades para interpretar los resultados en la calculadora (utilizada para validar los resultados de las operaciones) al preguntarles cosas como ¿cuándo es periódico un número y cuándo hay truncamiento?, si la cifras en la pantalla no se repiten ¿es un número decimal o un irracional?

Cuando se pregunta explícitamente por la relación entre fracciones y decimales sigue evidenciándose la confusión. Ávila reporta que los maestros piensan que las fracciones y los decimales son formas equivalentes de representar a la misma cantidad, y que entre éstas hay "bastante" o "mucha" relación. Gairín afirma que para los maestros en formación las relaciones entre las representaciones fraccionarias y decimales se establecen en términos exclusivamente operatorios (en general, efectuando la división) y que las fracciones se ordenan a través de la notación decimal. El modelo privilegiado para estudiar las fracciones es el de parte-todo (pizzas, pasteles), por lo que los futuros maestros tienen dificultades cuando el numerador es mayor que el denominador (también reportado por Konic) y la notación decimal no está fuertemente asociada a ningún modelo. Lo anterior conlleva que las conexiones entre la notación fraccionaria y decimal sea débil porque para la primera los futuros maestros asocian la fracción a una parte de la unidad compuesta por partes alícuotas de la misma (1/8 es una unidad partida en 8 partes iguales de la cual se "toma" 1), pero con la decimal una fracción se interpreta como agregación de partes de la unidad de diferentes tamaños (0.125 es una unidad partida en décimos de los cuales se toma 1, luego se parte en centésimos de los cuales se toman 2, y por último se parte en milésimos de los cuales se toman 5).

Al plantear tareas que ponen en juego las relaciones entre distintos tipos de números los maestros y futuros maestros evidencian falta de conocimientos o concepciones erróneas, pues no saben qué conjunto incluye a cuál otro, si hay uniones o intersecciones. ¿Cómo se manifiestan esas dificultades? En Konic 82% de los futuros maestros clasificaron como decimales a todos los números que tenían punto observando si las cifras a la derecha de éste eran finitas y si tenían periodo, es decir, observando su representación. Como criterio de clasificación, la representación (ser un número con punto) es insuficiente pues no considera a los enteros (dos terceras partes dijeron que 3 no es decimal, resultado que también reportan Moreno, et al, 2009; Kerches y Pietropaolo, 2018) y no toma en cuenta que cualquier racional tiene representación decimal, incluso los que no son decimales. Es por ello que apenas 20% de los futuros maestros respondió bien o parcialmente bien cuando les preguntó si el número 0.454545... (45 repetido indefinidamente) era decimal, y por lo que menos de la cuarta parte contestó correctamente ante el número 4.10999… (9 repetido indefinidamente)[1].

[1] 4.10999… = 4.11 porque:
$x = 4.10999\ldots$
$100x = 410.999\ldots$
Se resta x

Esta cuestión también se manifiesta como error al considerar que todas las fracciones son decimales, afirmación que sostuvo la quinta parte de los futuros maestros con los que trabajaron Moreno, et al (2009). En el trabajo de Konic cerca de 70% afirmó que 1/3 es decimal porque pudieron representarlo como número con punto (0.333…) señalando que es una expresión finita, y dos terceras partes respondieron que π es decimal dando una aproximación con dos o tres cifras a la derecha del punto.

Ante la pregunta ¿cualquier racional escrito como fracción se puede representar en forma decimal? menos de 15% respondió correctamente. Para el caso contrario, que es ¿se puede escribir en forma fraccionaria cualquier número expresado en forma decimal? hubo aún más dificultades pues lo pudieron responder menos de 8%.

Cuando Konic solicitó que respondieran qué condición debe cumplir el denominador de una fracción irreductible para que represente a un número decimal 60% respondió incorrectamente, 3% correctamente y el resto no respondió. Con los irracionales existe el mismo tipo de confusión, como el número 0.12122122212... tiene punto, fue clasificado correctamente por menos de la tercera parte de los futuros maestros (resultado coincidente con Zazquis y Sirotic (2004) que emplearon ese mismo ítem); mientras que la pregunta "Consideremos el número 53/83. Al hacer la división la calculadora muestra 0.63855421687. ¿Es 53/83 un número racional o irracional? Justifica la respuesta." (p. 372) fue respondida correctamente por menos de 7% de los participantes. El caso de 53/83 es más complejo, pero alude a la misma dificultad derivada de centrarse en la representación: como la calculadora no permite ver el periodo, consideran que es irracional incluso sabiendo que procede de una división de enteros.

Todos estos resultados siguen señalando que el criterio principal para comprender los números es su representación, si se pregunta por 1/3 o 2/5 los maestros sostendrán que se trata de racionales, pero si se escriben mediante una representación decimal ya no son racionales sino decimales.

Moreno, et al (2009) realizaron una investigación con alumnos del primer curso de la Especialidad de Maestro de Educación Musical (en todas las especialidades, los alumnos debían acreditar una asignatura de matemática básica) y les pidieron clasificar una lista de números en: reales, irracionales, racionales, decimales, enteros y naturales (pp. 193-195).

$99x = 406.89$
$406.89/99 = 4.11$

Los criterios utilizados por los alumnos para identificar los números Naturales son:

a) Los positivos y con notación decimal, y el cero (3.6%).
b) Los positivos y el cero. En algunos casos se excluye a $3 - \sqrt{3}$ (21.4%).
c) Los expresados con notación decimal (7.1%).
d) Los que están representados con notación decimal finita (7.1%).
e) Todos, excepto las expresiones que contienen una raíz (3.6%).
f) Los que están expresados con notación decimal y fraccionaria (3.6%).
g) Todos, excepto las raíces con signo negativo (3.6%).
h) Los números naturales. En algunos casos no se establecen las igualdades: $2 = 10/5 = (\sqrt{2})^2$. Además, se excluye el 35.521 (21.4%).

Los criterios utilizados por los alumnos para identificar los números Enteros son:

a) Los enteros, pero al igual que en los naturales se dan las mismas circunstancias con el 35.521 y con las igualdades $2 = 10/5 = (\sqrt{2})^2$ (35.7%).
b) Todos, salvo los negativos y los que en su escritura llevan raíz (7.1%).
c) Los negativos. Algunos excluyen a $-\sqrt{7}$ (7.1%).
d) Los enteros y las fracciones (3.6%).
e) Los representados con notación decimal (3.6%).
f) Otros (25%).

Los criterios utilizados por los alumnos para identificar los números Racionales son:

a) Las fracciones, algunos incluyen a $(1+\sqrt{5})/2$ (10.7%).
b) Los que se expresan con notación decimal (3.6%).
c) Los números enteros (3.6%).
d) Todos, excepto 1.35 (3.6%).
e) Los que no están expresados con notación decimal (o son operaciones indicadas) (7.1%).
f) Las fracciones positivas (3.6%).
g) Las escrituras numéricas que contienen una raíz (3.6%).
h) Las fracciones decimales (7.1%).
i) Todos los que se puedan expresar con notación decimal con coma y finita (7.1%).
j) Ninguno (3.6%).
k) Los no irracionales (3.6%).
l) Otros (21%).

Los criterios utilizados por los alumnos para identificar los números Irracionales son:

a) Los que contienen en su representación una raíz. Algunos excluyen a $(1+\sqrt{5})/2$ (10.7%).
b) Los no expresados con notación decimal (3.6%).
c) Los no racionales (7.1%).
d) Ninguno (3.6%).
e) Las fracciones y a las escrituras que contienen una raíz (3.6%).

f) $-\sqrt{7}$ (3.6%).
g) Las fracciones negativas (3.6%).
h) Todos, excepto las escrituras que contienen una raíz (3.6%).
i) Los irracionales de la tabla (3.6%).
j) Los que pueden expresarse con notación decimal con coma infinita (3.6%).
k) Otros (18%).

Respecto a los decimales, este trabajo coincide con otros en que los futuros maestros eligieron principalmente a los números expresados con punto, luego por las fracciones no enteras y finalmente los expresados con notación radical. Como mencioné, los enteros no fueron considerados como decimales por casi la totalidad de los participantes (p. 199). Los investigadores analizaron las respuestas encontrando cuatro tipos de comportamientos: los decimales son sólo los que están expresados con notación decimal con punto (21.4%); los decimales son los que están expresados con notación decimal, algunas o todas las fracciones, algunas de las expresiones que contienen una raíz, y se excluyen π, π-5 y los enteros (28.6%); los decimales son todos excepto los enteros (25%); los decimales son los enteros, los que están expresados con notación decimal, con punto y finita, y todas las fracciones (3.6%) (pp. 199-200). Como puede verse, cerca de 80% de los futuros maestros que participaron en la investigación mostraron conocimientos erróneos o incompletos respecto a los números decimales.

5.2 Diferencias entre decimales y naturales

Como mencioné al inicio de este trabajo, una de las cuestiones más llamativas sobre los aspectos didácticos de los números decimales es que los maestros no los perciben como un contenido problemático de aprender ni enseñar. Según algunos de los trabajos revisados este hecho se puede explicar porque los maestros y futuros maestros han aprendido procedimientos y conceptos superficiales o aislados respecto a los números decimales que perciben como relativamente fáciles de enseñar, por ejemplo, el valor posicional de cada cifra, el orden de los números escritos con punto y la “conversión” de fracciones en decimales; pero carecen de una comprensión más profunda que les permita justificar sus procedimientos de resolución y entender las propiedades que se ganan y se pierden en el conjunto de los racionales respecto a los naturales, como describo enseguida.

Ávila (2008) encontró que para los maestros participantes el reto mayor consistía en hacer comprender a los alumnos dónde colocar el punto y el valor posicional (qué lugar ocupan los décimos, centésimos, etc.). En otro trabajo con futuros maestros mexicanos, Aguayo (2005) aplicó un cuestionario a estudiantes de la Normal que ya habían cursado la asignatura de Matemáticas y su enseñanza II (misma que destina un capítulo a los racionales) en el que incluyó tareas similares a las que habían estudiado en esa asignatura. Cerca de una tercera parte tuvo dificultades para ubicar 3/5, 7/3 y 14/3 en la recta numérica, para escribir números como 2/5, 7/4, 24/10 y “doce décimos” mediante una representación decimal; y la mitad no logró encontrar representaciones equivalentes entre una lista de números (2/3, 0.50, 10/30, 3/6, 0.25, 7/5, 12/27 y 2/8). Es además significativo que cuando el investigador preguntó a los estudiantes si se sentían capaces para enseñar las fracciones y los decimales en la escuela primaria, 57% respondió que no y de ellos 39% dijo que la razón era la falta de dominio del contenido.

Putt (1994, citado en Konic, 2011) estudió también la comprensión de los racionales en estudiantes para maestro en Estados Unidos y Australia y encontró que, después de cursar tres años del programa de formación, 39% todavía tenían dificultades para ordenar números decimales (0.606, 0.0666, 0.6, 0.66, 0.060). En el trabajo de Salinas (2007) menos de 50% de los estudiantes que están por finalizar los estudios de magisterio contestaron correctamente ítems sobre valor posicional con naturales en los que se emplearon fracciones decimales como referencia (cuántas veces mayor era un número respecto a otro según su posición: 10, 100, 1/10, 1/100). Más de la mitad de los profesores que participaron en el trabajo de Kerches y Pietropaolo (2018) utilizaron uno de los siguientes criterios al ordenar: cuanto mayor es la cantidad de dígitos en la parte decimal, mayor es el número (0.75 < 0.004), los décimos son siempre mayores que los centésimos (0.75 < 0.4), y usar una secuencia como si fueran números naturales (0.9 < 0.10 < 0.15).

La densidad es una propiedad de los números racionales que no está presente en los naturales: entre dos racionales siempre es posible encontrar otro racional, por ello la idea de antecesor y sucesor que se estudia con los naturales deja de tener sentido. Al respecto, Gairín (1988) afirma que la densidad es desconocida por casi todos los estudiantes con los que trabajó. Aguayo (2005) solicitó a los futuros maestros hallar números entre dos decimales dados (2/10 y 3/10, 15/100 y 16/100, 25/1000 y 26/1000, 0.53 y 0.54, 1.8 y 1.9) y solamente 48% pudo dar respuestas correctas. Konic (2011) analizó las ideas de los futuros maestros a través de dos ítems, uno de los cuales buscó averiguar sus ideas acerca del sucesor de un decimal y el otro que encontraran un número entre dos decimales dados. En el primero (¿Existe un número natural que siga inmediatamente a 23,5? ¿Cuál, o cuáles serían? y, ¿Existe un número decimal que siga inmediatamente a 32,13? ¿Cuál, o cuáles serían?, p. 282) más de la mitad de los participantes respondió incorrectamente y la tercera parte lo hizo de manera parcialmente correcta; hallando además que 40% consideró que el sucesor de un número decimal es un número decimal. En el segundo (¿cuáles pueden ser las marcas de salto de una joven que ganó un concurso, si su triunfo se ubicó entre 4.12m y 4.16m?, p. 287) fue respondido correctamente por 38% de los futuros maestros.

5.3 Operaciones con números decimales

En el trabajo de Aguayo también se incluyeron ítems sobre operaciones con fracciones y decimales (7/3 + 8/5 + 4/7; 15/7 – 4/8; 5/8 × 9/12; 9/8 ÷ ¾; 48.312 × 0.36; 783.75 ÷ 3) que fueron respondidas correctamente por apenas un poco más de la mitad de los futuros profesores.

Konic pidió a los participantes que justificaran un algoritmo que se anticipaba sería bien conocido por ellos, la multiplicación de números con punto. Este algoritmo funciona atendiendo a una sencilla regla que se añade al aprendido para los naturales: colocar el punto decimal en el producto recorriéndolo tantos lugares a la izquierda como cifras decimales hubiese en los factores, sin embargo, comprender por qué funciona no es trivial, como abordé en el apartado 3.1.3. Konic encontró que 74% de los futuros maestros dieron una justificación errónea (entre ellas, parafrasear la regla, poner un ejemplo como justificación y explicar atendiendo a cómo debería ser el resultado), y 25% no respondieron el ítem.

Un ítem típico para evaluar aspectos relacionados con la operatoria es solicitar a los participantes que escriban un problema que se resuelva con cierta operación. Konic incluyó un ítem pidiendo un problema de la vida cotidiana que se resolviera multiplicando 2.255 × 1.7 en un contexto de porcentajes, mismo que dejaron en blanco 57% y respondieron mal 36% de los futuros maestros. Variando las condiciones (escribir un problema de la vida cotidiana en un contexto de magnitudes, que se resuelva dividiendo 5.76 ÷ 1.8) hubo una mejoría en los porcentajes de respuestas, 38% lo dejó en blanco, 15% lo respondió mal, 20% fueron respuestas parcialmente correctas y 26% lo respondió correctamente.

Otro de los ítems en el trabajo de Konic resulta interesante por las concepciones que logra identificar en los futuros maestros sobre la operatoria con racionales. El ítem fue el siguiente:

> La madre de Lucía quiere hacerse un vestido. Para hacerlo compra un tercio de metro de tela y la mitad de un tercio de metro de tela. Si el metro de dicha tela cuesta 10 euros, ¿cuánto le costó la tela a la madre de Lucía?
>
> Isa
>
> $$\frac{1}{3} \div 2 = \frac{1}{6}; \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = 0.5; \quad 0.5 \times 10 = 5, la\ tela\ costó\ 5\ euros.$$
>
> José
>
> $\frac{1}{3} = 0.33; \ 0.33 \div 2 = 0.16; \ 0.33 + 0.16 = 0.49; \ 0.49 \times 10 =$
> $4.9; \ la\ tela\ costó\ 4.9\ euros.$
>
> Explica por qué Isa y José obtienen resultados diferentes. (p. 371)

Si bien cerca de la mitad de los futuros profesores lo respondió correctamente, vale la pena analizar el tipo de conflictos que tuvo la otra mitad. Konic encontró tres tipos, el más frecuente estuvo vinculado al hecho de asumir que 1/3 = 0.33, el segundo más frecuente se relacionó con la idea de que los resultados que tienen punto decimal son más exactos o más precisos que los que no lo tienen (4.9 es más exacto que 5), y pasa inadvertido que la diferencia en los resultados de Isa y José se debió a asumir una aproximación como un resultado exacto, y el tercero a la idea de que un problema que se resuelve por procedimientos distintos tendrá necesariamente resultados distintos (pp. 305-306). Los tres tipos de conflicto revelan confusiones profundas que no se esperaría encontrar entre personas que están próximas a convertirse en maestros.

El sentido o significado de las operaciones ha sido ampliamente estudiado en el caso de los alumnos de niveles básicos. Los trabajos en esa línea permiten acercarse a las ideas o concepciones sobre la operatoria, los distintos problemas que se resuelven con cierta operación, las variaciones en cuanto al tipo de números empleados, entre otras. Graeber, et al (1986) investigaron si estudiantes para maestro lograban seleccionar la operación correcta cuando se les presentaban problemas con números decimales en los que los datos podían contradecir las reglas implícitas aprendidas con los modelos primitivos de la multiplicación y la división, por ejemplo, que la multiplicación siempre agranda y la división siempre achica. En este trabajo, además, los ítems fueron diseñados con los mismos números y estructura en los problemas que los empleados en una investigación previa cuya población objetivo fueron adolescentes de alrededor de 15 años, con la intención de averiguar si los futuros maestros compartían algunas de las dificultades que los adolescentes mostraron. Encontraron que 39% respondió incorrectamente 4 o más de los 26 ítems propuestos, lo que significó un mejor resultado que el obtenido por los adolescentes, sin embargo, los ítems más problemáticos fueron los mismos para ambas poblaciones y estuvieron de por medio concepciones erróneas similares. De hecho, hubo participantes que manifestaron que la sola presencia de números decimales en los problemas volvía más difícil la resolución y que hasta les generaban temor (p. 97). El rol de un número decimal en la estructura del problema se mostró como un elemento que hizo variar la dificultad, lo cual es esperable dado que da cuenta de los modelos implícitos mencionados. Por ejemplo, los problemas de multiplicación fueron más fáciles cuando el decimal jugó el rol de operador (2.25 × 15) que el caso contrario; mientras que en los de división los casos en los que el dividendo es menor que el divisor fueron más difíciles (4 ÷ 10) y el error más frecuente fue cambiar de lugar los números (10 ÷ 4).

De Castro y Castro (2004) estudiaron tareas de estimación en multiplicaciones y divisiones con números naturales y decimales entre futuros maestros. Diseñaron 24 ítems de cálculo directo (sin contexto) acompañados de entrevistas a los participantes. Los tipos de errores sobre el valor posicional que encontraron coinciden con los reportados por Gómez (1995, citado en De Castro y Castro) en investigaciones sobre el cálculo mental: “(…) no recuperación de la coma decimal, no recuperación de los ceros apartados, eliminación-recuperación impropia de la coma, ubicación incorrecta de la coma decimal y contabilización incorrecta de los ceros del resultado.” (p. 8). Concluyen señalando que los futuros maestros no muestran conexiones conceptuales sólidas sobre el valor posicional y la forma de operar cuando hay puntos decimales que les permitan comprender las reglas de funcionamiento de los algoritmos, por lo que “inventan” procedimientos para completar el cálculo mental. Dichas debilidades suelen quedar ocultas al ejecutar mecánicamente los algoritmos escritos (p. 8). En un trabajo posterior, De Castro (2012) comparó la dificultad para estimar el resultado de multiplicaciones y divisiones en función de tipo de números involucrados (decimales menores que 1 comparado con naturales y decimales mayores que 1, y los decimales menores que 0.1 comparado con naturales y decimales mayores que 1). De Castro encontró diferencias significativas: estimar cuando hay cantidades menores que 1 es más difícil, y es todavía más difícil cuando son menores que 0.1; también confirmó que cuando se divide entre un número mayor, hay una diferencia significativa en la dificultad comparada con aquellas en las que se divide entre un número menor.

Cierro con dos ideas. La primera es una reflexión de Aguayo (2005) respecto a los conocimientos matemáticos de los estudiantes normalistas con los que realizó su investigación.

> (…) podemos ver que el dominio de los contenidos matemáticos es significativamente deficiente si se piensa que estos estudiantes serán profesores en un futuro cercano y que deberán utilizar praxeologías docentes para ayudar a reconstruir estas praxeologías matemáticas, en otros términos, será difícil que ayuden a los niños a reconstruir una organización matemática que difícilmente ellos mismos pueden reconstruir. (p. 393).

La segunda tiene que ver con la transparencia y naturalización de un objeto matemático, y para explicarlo tomo como ejemplo lo que pasa con los números naturales. Al ser un objeto matemático en el que los maestros son usuarios expertos (el conteo, el ordenamiento, la base 10 y la aritmética, es decir, en el bloque práctico de esas praxeologías), “adolecen de una fuerte transparencia y naturalización en cuanto a sus razones de ser (por ejemplo, las diferentes funciones del número o del sistema de numeración decimal como culmen de un proceso históricocultural de optimización en los sistemas de representación).” (Ruíz y García, 2010, p. 201). Es decir, para los maestros el uso del sistema de numeración decimal es tan natural que no se preguntan sobre su construcción, sus ventajas sobre otros sistemas, si pudiera tener una base distinta a 10, etcétera (el bloque tecnológico). Esa naturalidad vuelve transparente a un objeto matemático, simplemente “es” y se desconecta de sus razones de ser, o sea, de los problemas de la humanidad que ese objeto resuelve, las cuestiones problemáticas que motivaron su desarrollo.

En el caso de los decimales se esperaría que no ocurriera pues los maestros no son usuarios expertos, como muestran los datos que presento en este capítulo. Sin embargo, en trabajos como el de Ávila (2008) los maestros no creen que los decimales sean un tema especialmente problemático en la enseñanza al verlos como una extensión de los naturales, dando como resultado una falsa idea de naturalización y transparencia cuando en el fondo son un objeto que en buena medida desconocen.

Capítulo 6. Secuencia diseñada
Análisis a priori

En este capítulo justifico la elección de variables y situaciones para el diseño de la ingeniería didáctica con base en los análisis preliminares.

En el primer apartado retomo los hallazgos que resultaron relevantes para el diseño: aportes de la didáctica sobre la formación docente, los obstáculos identificados por Brousseau, las elecciones didácticas identificadas en los libros de texto de primaria y las contribuciones de la literatura respecto a qué saben los maestros sobre los números decimales.

De acuerdo con Artigue (2005), planifiqué la secuencia considerando dos niveles: macro y micro. En el apartado 6.2 presento las variables macro, que son aquellas que hacen referencia a la planificación de toda la secuencia didáctica explicitando los objetivos perseguidos con las elecciones hechas.

En apartado 6.3 describo las variables micro, que dan cuenta de cada actividad en la secuencia didáctica diseñada. El análisis a priori debe sentar las bases para la validación interna que se efectúa al contrastar las hipótesis planteadas en el diseño con los resultados, proceso que se efectúa en el análisis a posteriori. Por ello, al dar cuenta de la secuencia en las variables micro iré analizando cada situación para describir a detalle qué tipo de respuestas se espera obtener de los participantes.

6.1 Hipótesis, objetivos y consideraciones para el diseño

Los análisis preliminares me dieron información para plantear las siguientes hipótesis:

H1. Los maestros de primaria entienden a los números decimales como una extensión de los naturales y tienen dificultades para distinguir sus propiedades, identificar su relación con las fracciones y comprender la diferencia entre un número y sus representaciones. Las deficiencias de las lecciones en los libros de texto no ayudan a clarificar las dudas.

H2. Un conocimiento sólido de los decimales como contenido matemático se puede alcanzar si los maestros resuelven tareas que pongan en juego sus principales características y discuten sobre ellas, se acercan a la "razón de ser" de los racionales y a aspectos básicos de los conjuntos numéricos (N y Q) y sus propiedades.

H3. Sumado a lo anterior, abordar aspectos didácticos, contar con una estructura base para elaborar lecciones y hacer conjuntamente un análisis de los programas por grados y lecciones, permitirá a los maestros diseñar, poner en marcha y analizar una secuencia corta para sus alumnos de primaria.

A partir de las hipótesis, planteé los siguientes objetivos para la secuencia:

G. Comenzar proponiendo actividades exploratorias que movilicen los conocimientos de los maestros sobre los números decimales y ajustar en función de los resultados (H1).
H. Resolver tareas matemáticas que involucren los aspectos centrales de los decimales. Siempre que sea posible, diseñar un *milieu* que permita actividades completas (situaciones de acción, formulación y validación) (H2).
I. Emplear las tareas matemáticas como medio para estudiar también lo didáctico (principalmente a través de situaciones de doble conceptualización) (H2).
J. Analizar registros de clase tanto de profesores expertos como de sus propias clases (extractos en video y transcripciones) (H2).
K. Analizar los programas y lecciones para conocer la propuesta vigente en cuanto a la organización de los contenidos matemáticos que atañen a los números decimales (H3).
L. Apoyar a los maestros en el diseño y puesta en marcha de una secuencia didáctica breve dirigida a sus alumnos de primaria. Analizarla y ajustarla en conjunto (H3).

Para alcanzar los objetivos planteados partí de las siguientes consideraciones iniciales:

- El tipo de trabajo requerido para estudiar sobre los decimales con una profundidad aceptable no podía realizarse en un espacio de taller corto. El diseño debía plantearse desde el inicio como una secuencia larga y convocar a los maestros participantes con esa consigna.[1]
- Todos los participantes debían ser maestros de primaria frente a grupo para traer al espacio de formación experiencias vividas en primera persona sobre la enseñanza de los números decimales y para poner en marcha la secuencia que diseñarían.
- Todos los maestros debían atender, durante el ciclo escolar en el que se desarrollara el trabajo, alumnos de los grados 4°, 5° y 6° pues son en los que se enseñan los números decimales, de acuerdo con el Plan y programas de estudios 2011.
- En el diseño y la puesta en marcha de las sesiones del taller, el investigador y/o conductor debía esforzarse por entender por qué los maestros piensan lo que piensan y los problemas (matemáticos o de enseñanza) que los maestros plantearan. A la vez, el espacio de formación a construirse en las sesiones debía aspirar a lograr que los maestros se sintieran autorizados a decidir y actuar de forma autónoma (Lerner, 2001).
- El diseño debía contemplar espacios para hacer conexiones con el trabajo de los maestros en el aula a través de discusiones grupales sobre lo que pasa en sus clases, el análisis de registros, la reflexión sobre la viabilidad de implementar con sus alumnos de primaria algunas de las actividades realizadas, entre otras.

6.2 Variables macro: decisiones globales para el diseño

6.2.1 Componentes

Organicé las cuestiones por abordar a lo largo de la secuencia en un total de cuatro componentes. Las componentes me permitieron hacer distinciones con fines analíticos, aunque en el diseño fue frecuente que una misma actividad involucrara aspectos de dos componentes.

[1] Los detalles sobre los participantes y el tipo de trabajo al que se les invitó se describen en el capítulo 7.

Componente matemática

La secuencia incluyó actividades que pusieran en juego los aspectos que enlisto. Respecto a la profundidad con la que habrían de tratarse los contenidos matemáticos, partí de la idea de que necesitan saber muy bien aquello que habrán de enseñar, y cuando resultara indispensable o fuera posible, algo más.

– El número y sus representaciones

  Los decimales son enseñados y aprendidos como un conjunto de reglas de representación (llevan punto, la posición a la derecha indica una potencia negativa de 10, etc.) y no como números con propiedades distintas a los naturales. Ello oculta cuáles son los números decimales (se piensa que 1/5 no es decimal mientras que 1.111… sí lo es) y conlleva, entre otros, a errores en el ordenamiento y la operatoria (2.34 < 2.103). Los racionales son menores que 1 o bien, cantidades con punto decimal (pero nunca enteros ni fracciones impropias). Estas dificultades ocurren incluso entre maestros y futuros maestros.

  Los decimales no son vistos como parte del conjunto de los racionales (la división de unidades entre 10 es una de las posibles), hay una relación poco clara entre las fracciones y los decimales, incluso entre maestros y futuros maestros.

  Hay definiciones confusas y que se traslapan en los libros de texto.

– La operatoria

  Hay nuevos significados para las multiplicaciones y divisiones cuando entran en juego los racionales.

  Hay dificultades en la operatoria y cálculo mental con decimales.

  Los algoritmos se enseñan en los libros de texto casi siempre de manera exclusivamente procedimental y/o extendiendo los algoritmos de los naturales.

– Significados y propiedades nuevas

  Los significados múltiples de las fracciones (operadores, razones, medidas, repartos) las hace un objeto matemático complejo.

  Se privilegian algunas nociones de los racionales (repartos para fracciones y medición para los decimales) en los libros de texto.

  Hay dificultades respecto a la densidad.

Componente didáctica

Respecto al trabajo didáctico contemplé tres niveles vinculados entre sí: la enseñanza y el aprendizaje de los decimales (situaciones específicas para los alumnos, dificultades frecuentes, cómo se suele enseñar tal tema), los decimales en tanto contenido escolar (las relaciones de los decimales con otros contenidos matemáticos, su posición en el currículo), y los conocimientos didácticos (qué nociones o ideas generales emanadas del campo de la didáctica de las matemáticas podrían ser útiles a los maestros para sus tareas de enseñanza y cómo serían las actividades para abordarlas). Todo ello entró en juego en las actividades matemáticas diseñadas para que los participantes resolvieran, en el análisis de registros de clase, en el diseño de su secuencia y en su análisis.

Componente metadidáctica del taller

Espacios en momentos específicos de las sesiones en los que las propias actividades serían el objeto de análisis (¿qué hicimos primero?, ¿cómo fue la sesión de hoy?, ¿qué problema planteamos?, ¿qué variables se han movido al problema entre una actividad y otra?, ¿qué pasaría si en vez de tal actividad se hubiera comenzado por esta otra?). Esta componente también se puso en marcha tanto en las actividades a resolver por ellos como en diseño y análisis de la secuencia que diseñaron.

Componente de vinculación con la práctica

Espacio para compartir producciones de los alumnos, analizar lecciones y programas de estudio, leer registros de clase, etc. El análisis de lo ocurrido al implementar las secuencias diseñadas por los maestros también forma parte de esta componente.

6.2.2 Tipos de actividades

En función de los aportes de la didáctica que detallé en el apartado 2.3, consideré los siguientes tipos de actividades para la secuencia:

Situaciones de doble conceptualización (Lerner, 2001)

Constan de dos fases,

- Primera fase en la que se plantea a los maestros una actividad matemática a resolver. Se espera que construyan conocimientos acerca de las matemáticas implicadas y los significados que pueden tomar en cierta actividad, que logren explorar distintos procedimientos y argumentar o comunicar sus hallazgos a otras personas, si fuera el caso.

- Segunda fase en la que se reflexiona sobre la secuencia didáctica que acaban de experimentar. Se espera que analicen las características de la actividad matemática en la que se vieron involucrados con la intención de que reflexionen sobre las condiciones didácticas requeridas para acercar ese objeto matemático a sus alumnos respondiendo preguntas como ¿habría funcionado también si se cambia el orden de las actividades?, ¿se podría usar otro material?, ¿qué cosas permite y cuáles otras restringe la consigna?, ¿en qué momentos intervino el formador?, ¿hubo procedimientos similares entre los equipos?, etc. Se trata, en alguna medida, de clarificar lo que los propios maestros hacen como resolutores de problemas y las demandas que cierta actividad les hizo, con la intención de que conociendo estas cuestiones puedan emplearlas para decidir sobre las actividades que plantean a sus alumnos, los momentos y modos de intervención, las formas de organizar al grupo, entre otras.

Análisis de registros de clase

Permiten estudiar los aspectos relativos a la enseñanza como posibles respuestas de los alumnos, ejemplos elegidos e intervenciones docentes. Los registros estuvieron acompañados por preguntas para orientar el análisis.[2]

Discusión sobre fragmentos de textos relacionados con los decimales y su enseñanza

Elegí textos publicados en revistas académicas o dirigidas a maestros. La selección de los fragmentos estuvo acompañada por preguntas para discutir grupalmente.

Revisión curricular

Tuvo el propósito de ubicar a los racionales y revisar algunas lecciones de los libros de texto gratuitos. La idea fue dar seguimiento a las fracciones y decimales en los programas, identificar en qué grado se comienza su estudio, con qué tipo de situaciones y el alcance que tienen en la educación primaria, entre otras cuestiones. Además, seleccioné

[2] Algunos de los registros de clase fueron tomados de la literatura y otros elaborados exprofeso para este trabajo. Solicité a tres maestros de una primaria pública urbana que me permitieran videograbar una de sus clases de matemáticas con la única consigna de que ese día enseñaran algún aspecto de los números decimales. Obtuve datos de tres clases con alumnos de 6° grado, uno sobre orden en los decimales y dos sobre ubicación en la recta numérica. A partir del video seleccioné fragmentos de las clases y elaboré los registros.

algunas lecciones para analizar conjuntamente aspectos específicos, por ejemplo, cuál es la primera vez que se estudia algo de decimales o cómo se presentan los algoritmos.

Organización del grupo

Para el diseño de las situaciones consideré tanto trabajo individual como en parejas o equipos. Las puestas en común y discusiones siempre fueron grupales, al igual que varias actividades que se diseñaron para que al inicio los maestros dieran opiniones, ideas o resolvieran algún problema, etc., a manera de comienzo para el resto del trabajo.

6.2.3 Etapas

Teniendo en mente las distintas componentes que habrían de abordarse y los distintos tipos de actividades que recuperé de la revisión de la literatura, organicé la secuencia en tres etapas:

Etapa 1

Dedicada principalmente al estudio de contenidos matemáticos a través de actividades a resolver individualmente o en equipos. Una buena parte de esas actividades matemáticas permitieron también abordar aspectos didácticos.

- Ideas acerca de cuáles son los números decimales y su utilidad.
- Relaciones de orden y situaciones aditivas: orden entre decimales, la recta numérica, dificultades de los alumnos al ordenar números decimales, los decimales en la medición y el sistema de base y posición, operatoria, sumas y restas con decimales, densidad, análisis de registros de clase sobre lo anterior.
- Relaciones multiplicativas: cambios de significado en la multiplicación y la división, repartos con resultados racionales, situaciones multiplicativas como composición de operadores, decimal como operador que sintetiza a los dos operadores cuando se trata de fracciones.
- Actividades numéricas: justificación de los algoritmos con decimales, cálculo mental y estimación, actividades con la calculadora.
- Conjuntos numéricos: diferencia entre número decimal y representación decimal de un número; relación entre decimales, racionales, enteros y naturales.

- Definición “operativa” de número decimal.[3]
- Aspectos didácticos como el orden de las actividades al interior de una secuencia, las variables didácticas en juego, las ideas de los estudiantes sobre cierto tema, entre otras.

Etapa 2

Dedicada a la revisión curricular de los programas de estudio y lecciones de los libros de texto, y a que los profesores diseñen una secuencia de entre dos y tres clases sobre decimales para sus alumnos de primaria.

- Revisión de los programas de primaria y secundaria para conocer el “recorrido” de las fracciones y los decimales en la educación básica.
- Descripción de la estructura de algunas lecciones, actividades que plantean, contenidos que abordan, dificultades que presentan para los alumnos, posibles errores en la lección o aspectos poco claros.
- Lectura de textos didácticos que apoyen el diseño de una secuencia de enseñanza y aporten ideas sobre los decimales.
- Elección en equipo de un tema de decimales para elaborar la secuencia.
- Diseño en equipo de una secuencia de entre dos y tres clases para aprender o repasar un tema de decimales.

Etapa 3

Dedicada a la puesta en marcha y análisis en conjunto de su secuencia.[4]

- Desarrollo de las clases diseñadas con un grupo de primaria estando presentes un observador par y yo misma.
- Análisis en conjunto de las clases y posterior ajuste al diseño.

[3] La caracterizo así porque más que una definición formal en el sentido matemático espero llegar a una definición que se construya poco a poco en función de las actividades que se irán desarrollando, o sea, que dé cuenta de un conjunto de características que distinguen a los decimales de otros números.

[4] La etapa 3 se llevó a cabo solo parcialmente y no la incluí en el análisis por carecer de datos suficientes, como describo en el capítulo 7.

6.3 Variables micro: actividades diseñadas

6.3.1 Etapa 1

Enseguida presento el diseño de la etapa 1 de la secuencia organizada en función de los siguientes aspectos matemáticos:

- Relaciones de orden y situaciones aditivas.
- Relaciones multiplicativas.
- Actividades numéricas.
- Conjuntos numéricos.

En cada actividad señalo cuál componente (matemática, didáctica, metadidáctica o de vinculación con la práctica) es la que se enfatiza, así como las dificultades esperadas y objetivos.

Secuencia didáctica diseñada. Etapa 1

<table>
<tr><td rowspan="12">Relaciones de orden y situaciones aditivas</td><td colspan="4">Actividad 1</td></tr>
<tr><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Ordenar una lista de fracciones decimales y números decimales.
Verificar el ordenamiento mediante longitudes.
Situación de validación sobre el ordenamiento de decimales.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea</td></tr>
<tr><td colspan="2">1.1 En parejas, ordenar la siguiente lista de números.

0.40 0.8 4/10 0.177 0.65 100/1000</td><td colspan="2">Los participantes podrían tener dificultades para:
Ordenar en una misma lista fracciones y decimales.
Las observadas con alumnos y futuros maestros, los números con más cifras son mayores.</td></tr>
<tr><td colspan="2">1.2 Recortar en una tira de papel (con longitud de 1 metro) la longitud correspondiente para representar cada número (0.40 = 0.40m).
Usar una tira para cada número.
Verificar su ordenamiento.</td><td colspan="2">Se espera que las tiras permitan validar sus respuestas anteriores, y en caso de discrepancia, discutir lo que la evidencia está mostrando y las ideas que tienen respecto al orden.</td></tr>
<tr><td colspan="2">1.3 Escribir cómo le explicarían a un tercero el procedimiento para ordenar estos números.</td><td colspan="2">Una vez aclaradas las posibles discrepancias entre el ordenamiento de la lista y la verificación con longitudes (tiras), se espera que redacten sus hipótesis respecto al ordenamiento de decimales. Específicamente, sería deseable que desde este momento se abordaran casos como 0.177 y 0.8 en los que el número de cifras no es un criterio válido.</td></tr>
<tr><td colspan="2">1.4 Validación: intercambiar los papelitos en los que cada pareja escribió las instrucciones.</td><td colspan="2">El intercambio de las redacciones permitirá confrontar con terceros las hipótesis, validarlas o refutarlas, pues el equipo que recibe debe asegurar-se de que éstas sean claras y correctas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">1.5 Puesta en común.</td><td colspan="2">Se espera discutir grupalmente los hallazgos sobre el ordenamiento com-partiendo algunas de las redacciones que escribieron en el punto previo y comparándolas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">1.6 Preguntar
¿Qué errores creen que podrían cometer los alumnos? (Plantear los si-</td><td colspan="2">Discutir sobre los errores que posiblemente cometieron ellos mismos y que son compartidos por los alumnos.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="7"></td><td colspan="2">guientes, poner ejemplos).
- los números con más cifras son mayores
- los números con menos cifras son los mayores
- el papel de los ceros</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Comprender el orden de la secuencia didáctica y las implicaciones que tiene en la actividad matemática de los alumnos.
Discutir sobre la validación como recurso didáctico.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea-</td></tr>
<tr><td colspan="2">1.7 Preguntar
¿Qué habría pasado si en la instrucción se hubieran invertido los incisos 1.1 y 1.2?
¿Qué función tiene 1.3?</td><td colspan="2">No se habría dado oportunidad a que se manifestaran errores comunes, 1.2 sirve para validar lo anterior y al invertirlos 1.1 ya no tendría sentido, es decir, no habría habido anticipación.
1.3 sirve para poner por escrito lo aprendido, pensar en explicarlo a otra persona “obliga” a aclararlo para uno mismo. En 1.4 se valida.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="13">Relaciones de orden y situaciones aditivas</td><td colspan="4">Actividad 2</td></tr>
<tr><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Analizar lo que implica la ubicación de números decimales y fracciones decimales en la recta.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea</td></tr>
<tr><td colspan="2">2.1 Ordenar cada pareja de números.
Luego, ubicarlos en la recta, tanto para verificar el orden como para analizar lo que comporta la ubicación misma (equivalencia, subdivisiones).

25/100 y 3/4   3/10 y 60/100
50/1000 y 5/100   14/10 y 100/100
0.50 y 0.05   0.2 y 0.177
2/10 y 5/10   15/100 y 2/5
11/10 y 8/5   50/100 y 1/4

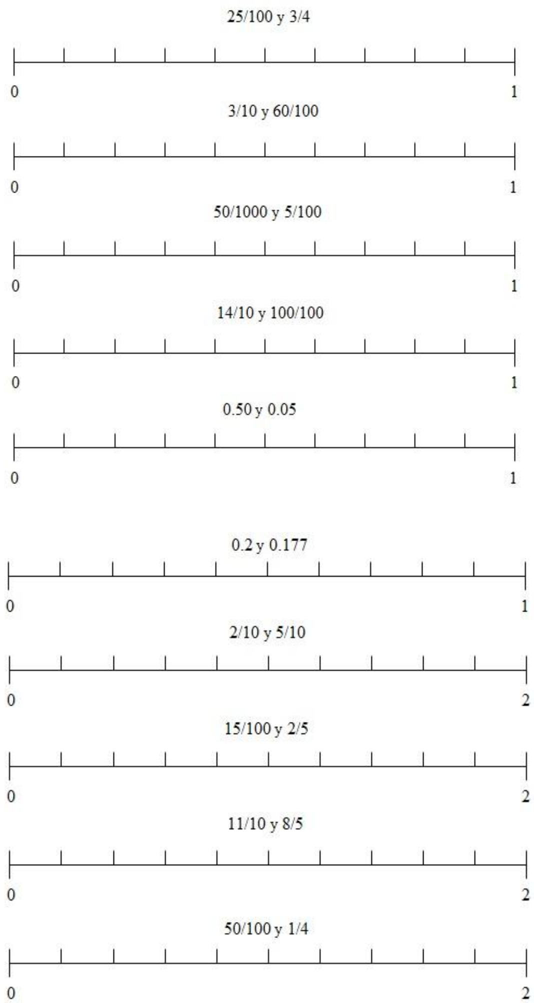
Ilustración 29. Rectas numéricas para ubicar parejas de números.</td><td colspan="2">Podrían esperarse dificultades para:
Ubicar en una misma recta fracciones con denominador potencia de 10 y fracciones comunes.
Interpretar la escala y las subdivisiones.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2.2 Comparar con un compañero.</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">2.3 Escribir en pareja cómo lo explicarían a alguien más cuál es la manera que encontraron para ubicar números en la recta numérica cuando tienen distinto denominador.</td><td colspan="2">Habiendo comparado sus respuestas con un compañero, se espera que redacten sus hipótesis respecto a la ubicación de fracciones con distinto denominador. Específicamente, sería deseable que desde este momento se abordara el asunto de las subdivisiones y la escala.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2.4 Validación: intercambiar los papelitos en los que cada pareja escribió las instrucciones.</td><td colspan="2">El intercambio de las redacciones permitirá confrontar con terceros las hipótesis, validarlas o refutarlas, pues el equipo que recibe debe asegurarse de que éstas sean claras y correctas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2.5 Puesta en común.</td><td colspan="2">Se espera discutir grupalmente los hallazgos sobre la ubicación en la recta compartiendo algunas de las redacciones que escribieron en el punto previo y comparándolas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2.6 Discutir errores comunes y el apoyo que se puede tener con la recta numérica para corregirlos:</td><td colspan="2">Confrontar posibles errores respecto a la ubicación en la recta cuando los números tienen ceros y/o distinta cantidad de cifras. Enfatizar las posibili-</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">- 0.5 no es igual que 0.05
- 0.5 es igual que 0.50
- 0.5 > 0.177</td><td colspan="2">dades que la recta ofrece para validar ordenamientos y hacer correccio-nes.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">2.7 Preguntar
¿Cuál es la diferencia entre la primera hoja con rectas y la segunda?
¿Cualquier número de los de la primera hoja se puede ubicar en la segun-da y viceversa?
¿Para qué sirve tener rectas subdivididas de diferente forma?
¿Para qué puede ser útil plantear distintas subdivisiones de la recta?</td><td colspan="2">Una está subdividida en décimos y la otra en quintos.
Sí, quizá habría que hacer otras subdivisiones.
Para ubicar distintos denominadores, simplificar las subdivisiones.
Si siempre es en décimos los alumnos no saben cómo hacerle con otras subdivisiones, no lograran ver equivalencias, no saben que una misma recta puede subdividirse de varias maneras.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td></td><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">Comprender el orden de la secuencia didáctica y las implicaciones que tiene en la actividad matemática de los alumnos. Argumentar sobre las variables didácticas del contenido (distintas subdivisiones en la recta).
Comentar sobre la utilidad de comparar resultados y procedimientos con los otros, y en qué momento de la secuencia es conveniente hacerlo.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">2.8 Preguntar
¿Qué habría pasado si en vez de ordenar los números en primer lugar se pidiera que los ubicaran en las rectas y luego los ordenaran?
¿Para qué les sirvió comparar los resultados obtenidos con un compañe-ro?
¿Qué habría pasado si se compara con un compañero después de 2.3?</td><td colspan="2">Se espera que reconozcan que ya no tendría mucho sentido ordenar los números pues el orden estaría dado en la recta. En cambio, si primero se ordenan la ubicación sirve para verificar.
Comparar los resultados con otra persona sirve para verificar, argumentar sobre las producciones propias o corregir.
Ya no tendría sentido hacer la comparación después de 2.3 En cambio, hacerlo después de ubicar individualmente los números sí puede poner en evidencia distintas respuestas y dar lugar a discutir.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td></td><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">Analizar la actividad propuesta por el profesor (ubicación de fracciones en la recta) y la relación que se da entre alumnos, maestro y contenido a propó-sito de dicha actividad.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">2.9 Leer el registro de clase, Grupo A maestra Isabel (Anexo 1.2.9) y</td><td colspan="2">Al valorar una actividad como fácil o difícil se espera que den cuenta de su</td></tr>
</table>

	posteriormente, comentar en grupo contestando las preguntas de manera verbal. ¿Creen que la actividad era difícil o era fácil para los alumnos? ¿En qué lo notan? ¿Qué dificultades tuvieron los alumnos en la ubicación de las fracciones? ¿Por qué los alumnos que hicieron dos rectas (una para ubicar 5/5 y 8/10 y otra para ubicar 10/16) no tuvieron dificultades y en cambio los que hicieron una sola recta sí las tuvieron? ¿Cuántas subdivisiones hay que hacer para poder ubicar fracciones con denominadores a y b? ¿Por qué cuando la maestra pasa a los alumnos al pizarrón a trazar sus rectas no “aparecen” las dificultades anteriores? ¿Es correcto lo que hizo A6? ¿Creen que las fracciones que propuso la maestra fueron una buena elección para la actividad de ubicación en la recta? ¿Ustedes habrían hecho algo distinto a lo que hizo la maestra Isabel?, ¿qué?	experiencia y de sus ideas sobre el contenido involucrado. Tuvieron dificultad para ubicar a 10/16 en una recta subdividida en décimos. También para prolongar una recta dividida en décimos y “revolver” esta escala con la de dieciseisavos, aunque no perdieron el control de que 5/5 es 1. Porque 16 no es múltiplo ni de 5 ni de 10. Para usar la misma recta habrían tenido que hacer nuevas subdivisiones. Si no son múltiplos, en a × b. Porque cada alumno ubica una sola fracción en su propia recta, no tuvieron que enfrentarse a los denominadores no múltiplos. Sí, localizó bien la fracción y su argumento es correcto. Sí en tanto ponen en evidencia una dificultad, pero habría que trabajar más para aclarar las dudas. Los alumnos eran bastante buenos en la ubicación, pero se toparon con dificultades al trabajar con distintos denominadores y no supieron qué hacer.
	2.10 Leer el registro de clase, **Grupo B maestra Berta (Anexo 1.2.10)** y posteriormente, comentar en grupo contestando las preguntas. ¿Qué partes de la clase fueron fáciles y qué partes fueron difíciles para los alumnos? La maestra pidió a los alumnos que propusieran números para ubicar. ¿Qué ventajas y desventajas ven a partir de lo que ocurrió en la clase? Tanto en este registro (1.2.9) como en el de la maestra Isabel (1.2.8) los alumnos tuvieron dificultades en lo relativo a la subdivisión de la recta, decidir en cuántas partes es conveniente hacerlo dependiendo de los números que vayan a ubicarse. ¿A creen que se deba?, ¿qué cosas creen que podrían proponerse para apoyar a los alumnos? ¿Qué ventajas y/o desventajas creen que tiene pedir a los alumnos que pongan letras cuando localizan los puntos en la recta en lugar de los números?	Ubicar decimales hasta décimos sin implicar a la densidad fue fácil. Fue difícil ubicar fracciones impropias y reconocer cuáles se ubicaban dentro de en la recta trazada. También fue difícil ubicar decimales hasta milésimos cuando ellos tuvieron que hacer las subdivisiones. Los alumnos participan, echan mano de los números que conocen, sin embargo, puede dar lugar a situaciones que no estaban previstas para la maestra. No obstante, puede servir para poner en evidencia errores y corregirlos. Trabajar con ellos sobre los denominadores comunes con preguntas como ¿qué número es el m.c.m. de estos dos o tres? ver que con esas subdivisiones ya se pueden ubicar todas las fracciones involucradas. Puede ser más “limpio” si hay muchos números pegaditos, pero es engorroso estar mirando la lista cada vez porque no es fácil recordar a lo largo de la clase qué número era el c), por ejemplo. Poner números en vez de letras también ayuda a “ver” más fácilmente cuestiones de orden, por

		ejemplo, si alguien se equivoca y localiza 0.45 antes de 0.415 es más fácil ver el error que si los señala como d) y f).
	La maestra dictó los números decimales que quería que los alumnos localizaran en la recta e inmediatamente ella los escribió en el pizarrón. ¿Qué ventajas y/o desventajas ven en esto?	Puede tener la ventaja de atacar un solo problema a la vez: la actividad se trataba de ubicación en la recta, escribiéndolos ella se asegura de que no haya errores en la escritura que den lugar a errores en la ubicación. Puede tener la desventaja justamente de eso: no darse cuenta de que hay errores al escribir decimales.
	Cuando los alumnos empiezan a localizar los decimales en la recta la maestra pide que den ideas sobre la subdivisión que conviene más. Algunos alumnos dicen que hay que dividirla en cuartos, otros dicen que en tres, otros que en décimos. ¿Qué creen que conviene más? La maestra permite que dividan en cuartos, pero le da mucha más importancia a la división en décimos ¿ustedes habrían hecho lo mismo?, ¿por qué? Hay un momento en la clase en el que la maestra va contando de uno en uno los décimos para localizar 0.7 y un alumno pregunta si se empieza a contar desde el cero. ¿Les ha ocurrido eso en sus clases?, ¿qué responderían a ese alumno? ¿Qué haría igual y qué haría diferente a la maestra Berta?	La subdivisión de una recta depende de los números involucrados.

Ilustración 29 Rectas numéricas para ubicar parejas de números.



<table>
<tr><td rowspan="20">Relaciones de orden y situaciones aditivas</td><td colspan="4">Actividad 3</td></tr>
<tr><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Sumar y restar en la recta numérica.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea</td></tr>
<tr><td colspan="2">3.1 Calcular mentalmente
0.9 + 0.2 =
0.99 + 0.02 =
0.7 + 0.7 + 0.7 + 0.7 =
0.03 + 0.03 + 0.03 =</td><td colspan="2">Posiblemente ocurran errores ya documentados en la literatura, por ejemplo, 0.99 + 0.02 = 0.101</td></tr>
<tr><td colspan="2">3.2 Hacer las operaciones “dando saltos” en la recta.
Verificar los resultados que obtuvieron antes.</td><td colspan="2">Se espera que la recta sirva para verificar las sumas y corregir posibles errores.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3.3 Puesta en común.</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">3.4 Discutir los errores comunes al hacer sumas y restas con decimales.
- 0.9 + 0.2 no es igual a 0.11
- 0.99 + 0.02 no es igual a 0.101</td><td colspan="2">Se espera abordar errores de orden conceptual.
Otros errores pueden proceder del algoritmo. Esto se verá más adelante.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Comprender el orden de la secuencia didáctica y las implicaciones que tiene en la actividad matemática de los alumnos. Comentar la utilidad de recursos didácticos específicos para poner en evidencia errores, verificar resultados, comprender.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea</td></tr>
<tr><td colspan="2">3.5 ¿Qué pasaría si se invierte el orden entre 3.1 y 3.2?
¿Qué función cumple el uso de la recta en esta actividad?</td><td colspan="2">Ya no tendría sentido el cálculo mental.
La recta sirve para verificar las respuestas obtenidas mediante el cálculo mental, para trabajar con los posibles errores y corregirlos.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="13">Relaciones de orden y situaciones aditivas</td><td colspan="4">Actividad 4</td></tr>
<tr><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Explorar la densidad de los decimales con y sin calculadora.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea</td></tr>
<tr><td colspan="2">4.1 Jugar en parejas “Atrapa el decimal”. Se dibuja una recta numérica en el pizarrón señalando 0 al 100. Dos jugadores, uno avanza hacia la derecha en la recta (del 0 al 100) y el otro en el sentido inverso. Cada uno dice un número y lo ubica aproximadamente en la recta. Pierde el que se “encima” o rebasa al otro.
Se hace una vez en el pizarrón para ejemplificar y luego que lo juegan en parejas en sus mesas.</td><td colspan="2">Se espera que los maestros confronten sus ideas acerca del antecesor y sucesor cuando se trata de números decimales. El propósito es recurrir a los decimales como números con los que siempre se puede dar un paso “intermedio” para no rebasar al compañero.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4.2 Jugar en parejas “Atrapa el decimal” con la calculadora.
En una calculadora, el jugador A teclea un número mayor de 100 y menor que 900, por ejemplo, 167. En otra calculadora, el jugador B debe teclear un número que sea menor que 900 pero mayor que el del jugador A, por ejemplo, 835. A continuación, se dan las consignas:
- El jugador A puede utilizar sólo la tecla (+) y cualquier número; el jugador B sólo utilizará la tecla (-) y cualquier número.
- Cada jugador realizará una operación de forma alternada comenzando por el jugador A.
- El primer jugador que llegue al número del otro jugador o que lo rebase, pierde.</td><td colspan="2">Al igual que en el ejercicio anterior, pero al emplear la calculadora se añade un componente, es necesario hacer sumas o restas y no simplemente decir un número.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4.3 Contrastar la densidad de D con la no densidad de N.</td><td colspan="2">Se espera llegar a lo siguiente: en estos juegos siempre es posible no perder (ganarlo depende de que el otro se equivoque) porque entre dos decimales siempre puede hallarse otro decimal.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4.4 Pedir que encuentren un decimal entre 0.1 y 0.2, y entre 0.00001 y 0.00002.</td><td colspan="2">Se espera que tras haber realizado las actividades anteriores ya lo puedan resolver.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Reflexionar sobre las dificultades específicas que tienen los alumnos con cierto contenido matemático debido a las características del mismo.
Argumentar sobre las variables didácticas del contenido (papel y lápiz y calculadora).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea</td></tr>
<tr><td colspan="2">4.5 Preguntar
¿Por qué creen que es difícil para los alumnos comprender que entre 4.5 y 4.6 hay infinitos números?</td><td colspan="2">Se espera llegar a una discusión sobre lo siguiente:
La densidad supone un cambio entre lo que conocían de N y lo que están aprendiendo en R. El cambio de conjunto numérico de referencia implica que los alumnos amplíen sus conocimientos anteriores y esto es un proceso que toma tiempo y requiere muchos ejemplos, contraejemplos, actividades, etc. Es una dificultad esperada, inevitable.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4.6 Preguntar
¿Sintieron o no diferencias entre las actividades planteadas en 4.1 y 4.2?
¿Qué ventajas puede tener realizar ambas versiones de la actividad?</td><td colspan="2">Se espera que reconozcan al componente aditivo como algo que se añade en la actividad 4.2.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Analizar la actividad propuesta por el profesor (densidad en la recta numérica) y la relación que se da entre alumnos, maestro y contenido a propósito de dicha actividad.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea</td></tr>
<tr><td colspan="2">4.7 Analizar la actividad propuesta por la maestra Berta (anexo 1.4.7) (densidad en la recta numérica) y contestar en grupo las preguntas.

¿Por qué creen que la maestra empezó la clase ubicando naturales entre dos naturales dados?

¿Es difícil o fácil la actividad para los alumnos de 6°?

¿Qué le dirían a un alumno que responde que entre 1.2 y 1.3 está 1.2 y medio?</td><td colspan="2">Parece que trata de hacer una especie de introducción para que los alumnos recuerden cómo usar la recta para encontrar números entre otros dos números dados. La cuestión es que con los naturales la cosa está clara: entre 6 y 7 no hay ningún número. ¿Cómo pasar de esa idea a “entre 6 y 7 hay infinitos números”?

Decir 1.2 y medio muestra que el alumno está en vías de aprender lo que la maestra pretende, su razonamiento es correcto aunque aún no haya adquirido herramientas para expresar de forma correcta lo que está pensando.</td></tr>
</table>

	¿Por qué creen que A7 duda cuando la maestra le dice que ubique donde quiera el 1.24? La maestra siempre pidió que dijeran qué número decimal estaba en medio de otros dos. Sin embargo, pudo haber dicho que hallaran un número cualquiera entre dos números dados (no necesariamente el de en medio). ¿Qué harían ustedes?, ¿qué opción consideran mejor o da igual? ¿Qué opinan sobre la explicación de la maestra acerca de ir viendo cada cifra en los dos números dados para hallar un tercer número?, ¿habrían hecho una explicación distinta?, ¿cuál? ¿Consideran que la recta numérica es un recurso útil para trabajar la propiedad de densidad en los decimales con alumnos de 6° de primaria? ¿Habrían propuesto algo diferente?	A7 duda porque a pesar de que no está dada la escala, ha aprendido que un número no puede estar "donde quiera". Necesitará comprender que la escala se fija al ubicar dos números cualquiera.
	4.8 Analizar la actividad propuesta por el profesor (anexo 1.4.8) (densidad en un problema de sumas) y contestar en grupo las preguntas. ¿Qué contenido se aborda con esta actividad? ¿En qué es diferente esta actividad de la que propuso la maestra Berta? ¿Qué usos para el desarrollo de la clase tienen las propias producciones de los alumnos? ¿Creen que el problema plantea un reto que resulta útil para los alumnos en el estudio de la densidad en los decimales? ¿Cambiarían algo a esta actividad?	Se espera que los participantes reconozcan que la densidad es el contenido que se pone en juego principalmente, aunque también hay algo de sumas con decimales. Una usa la recta, la otra las sumas. Esta se parece más a la que se resolvió en el taller (Atrapa el decimal en 4.1). Son el punto de partida para explorar el tema de manera individual, luego la maestra las retoma para plantear preguntas al grupo, para mostrar procedimientos distintos, etc.

<table>
<tr><td rowspan="15">Relaciones multiplicativas</td><td colspan="4">Actividad 5</td></tr>
<tr><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Construir nuevos significados para la multiplicación cuando el multiplicador no es entero (operador, composición de operadores).
Reconocer que la multiplicación no siempre agranda y la división no siempre achica.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea</td></tr>
<tr><td colspan="2">5.1 Redactar dos problemas para cada operación empleando contextos lo más distintos entre sí que sea posible (en hojas que puedan pegarse en el pizarrón):
a) 4 × 7
b) 4 × 0.7
c) 0.4 × 0.7</td><td colspan="2">Se espera poner de manifiesto que cuando el multiplicador de una multiplicación no es entero, la multiplicación ya no puede interpretarse como suma repetida, por lo que es necesario construir otros significados. Reconocer que lo anterior no ocurre si es el multiplicador es entero, aunque el multiplicando no lo sea.</td></tr>
<tr><td colspan="2">5.2 Preguntar
- Multiplicar por 7 puede interpretarse como sumar 7 veces. ¿Qué significa multiplicar por 0.7?
- Cuando se multiplica una cantidad, ¿siempre se agranda? Si considera que no, dé un ejemplo.</td><td colspan="2">Puede interpretarse como “0.7 de” en vez de como “veces”.
Se espera que 1.1 les haya dado elementos para darse cuenta de que la multiplicación no siempre agranda, aunque todavía no quede claro por qué sucede.</td></tr>
<tr><td colspan="2">5.3 Puesta en común
Presentar los problemas para cada operación, poniendo juntos los que se parezcan.</td><td colspan="2">Destacar la gran diferencia entre poner un número no entero como multiplicando o ponerlo como multiplicador. En un caso la interpretación de la multiplicación no cambia (4 × 7 tiene la misma interpretación que 4 × 0.7), en el otro sí porque ocurre un rompimiento del significado.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Reflexionar sobre las dificultades específicas que tienen los alumnos con cierto contenido matemático debido a características propias de dicho contenido.
Comprender el orden de la secuencia didáctica y las implicaciones que tiene en la actividad matemática de los alumnos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea</td></tr>
<tr><td colspan="2">5.4 Preguntar
¿Por qué creen que es difícil para los alumnos comprender que no todas</td><td colspan="2">Se espera llegar a una discusión en la que se aborde lo siguiente:
Supone un cambio entre lo que conocían de N y lo que están aprendien-</td></tr>
</table>

	las multiplicaciones agrandan?	do en Q. El cambio de conjunto numérico de referencia implica que los alumnos amplíen sus conocimientos anteriores y esto es un proceso que toma tiempo y requiere muchos ejemplos, contraejemplos, actividades, etc. Es una dificultad esperada e inevitable, así como lo que se vio con la densidad.
	5.5 Preguntar ¿Por qué creen que se pidió en primer lugar 1.1 y no 1.2?	Al inventar problemas para ciertas operaciones aparecen los significados que tienen las operaciones, qué tipo de cosas resuelven. Eso permite reflexionar acerca de lo que se pretende aquí: los nuevos significados de la multiplicación cuando los números involucrados no son enteros.

<table>
<tr><td rowspan="11">Relaciones multiplicativas</td><td colspan="4">Actividad 6</td></tr>
<tr><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conocer un contexto en el que se aplican multiplicadores decimales.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea</td></tr>
<tr><td colspan="2">6.1 Resolver
a) Un tren da vueltas alrededor de un circuito pequeño, de 2/5 de kilómetro.
Si el tren da 10 vueltas, ¿cuántos kilómetros recorre?
Si da 1/2 vuelta, ¿cuántos kilómetros recorre?
Si da 1/4 vuelta, ¿cuántos kilómetros recorre?
En la figura se muestra una manera de calcular 1/4 de 2/5 que consiste en dividir 2/5 entre dos, dos veces. Pon lo que falta.

Ilustraciones 30 a 33. Actividades para trabajar con escalas. Tomadas de Block y García (2006). Fractal. Secundaria. Primer grado.

b) Si el tren da 4 2/3 vueltas ¿cuántos kilómetros recorre?
En la tabla se muestra una manera de calcular 2/3 de 2/5. Primero se calcula 1/3 de 2/5, es decir, se divide 2/5 entre 3. Pon lo que falta.

c) El circuito mide ahora 3/4 de kilómetro. Calcula los datos que faltan en la tabla.

d) Completa la siguiente técnica para calcular 4/7 de 2/5 de kilómetro.</td><td colspan="2">Con estas actividades se espera que los maestros identifiquen que:
- Los multiplicadores ahora no son “constantes de proporcionalidad”.
- Los multiplicadores no enteros se alternan con multiplicadores enteros, jugando el mismo papel, lo que puede ayudar a aceptar que una operación como “5/6 de 12 km” o “1.3 de 12 km”, son multiplicaciones, como lo es “5 veces 12 km”.</td></tr>
<tr><td colspan="2">6.2 Resolver
¿Cuánto es 3/4 de pastel entre 3 personas?
¿Y entre 2?
¿Y entre 4?

¿Cuánto es 2/3 de pastel entre 3 personas?
¿Y entre 5?

_____ de pastel se repartió entre 6 personas y a cada una le tocó 1/12.</td><td colspan="2">Se espera que las actividades anteriores contribuyan a darle sentido a las situaciones multiplicativas con racionales, empleando un problema típico de reparto.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="10"></td><td colspan="2">4/5 de pastel se repartió entre _____ personas y a cada una le tocó 4/15.</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">6.3 Puesta en común.</td><td colspan="2">Además de comentar sobre los procedimientos y resultados obtenidos, la discusión debe dar lugar a identificar:
- Qué significa multiplicar por una fracción. Para calcular a cuánto equivalen 5 vueltas de 60km cada una, se multiplica. A lo que se hace para calcular a cuánto equivalen 4/7 de vuelta de 2/5 de kilómetro cada una también se le llama multiplicar. Obtener una “fracción de fracción” también es multiplicar
- Sobre las técnicas. Si se considerara necesario podría plantearse la siguiente situación.
Daniel dice que al repartir 3/5 de pastel entre 3 personas a cada una le toca 1/5, Sebastián dice que a cada una le tocan 3/15. Ambas respuestas son correctas. ¿Qué procedimientos siguieron Daniel y Sebastián?
- Concluir que (a) para dividir una fracción entre un número n se puede dividir su numerador entre n, o bien, multiplicar su denominador por n; y (b) para encontrar el resultado de una “fracción de fracción” hay que multiplicar los numeradores entre sí y multiplicar los denominadores entre sí.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Reflexionar sobre la ampliación de significados en la multiplicación de racionales.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea</td></tr>
<tr><td colspan="2">6.4 Comentar

En la primaria los alumnos aprendieron que multiplicar 4 × 5 puede interpretarse como 5 veces 4. ¿Qué significado está en juego en la actividad 2.1?

¿Por qué no basta con enseñar a los alumnos la técnica para multiplicar fracciones?</td><td colspan="2">Cuando el multiplicador es no entero puede interpretarse como ¼ de ¾, por ejemplo, en donde el multiplicador no es una constante.
Aunque la técnica es sencilla de aplicar, no ayuda a discriminar en qué casos es pertinente usarla.
Está en juego una redefinición de la noción de multiplicación. Esto no se logra asimilar con una vez que se diga. Será poco a poco, conforme de tengan más experiencias.</td></tr>
</table>

Ilustración 30 Actividades para trabajar con escalas. Tomadas de Block y García (2006). Fractal. Secundaria. Primer grado.

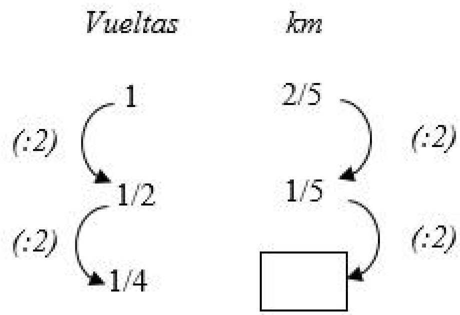


Ilustración 31 Actividades para trabajar con escalas. Tomadas de Block y García (2006). Fractal. Secundaria. Primer grado.

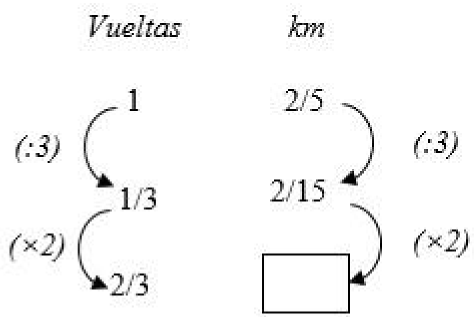


Ilustración 32 Actividades para trabajar con escalas. Tomadas de Block y García (2006). Fractal. Secundaria. Primer grado.

Número de vueltas	¼	1/3	½	2/3	1	1 2/3	2	2 2/3	4	5 1/3
Número de kilómetros										

Ilustración 33 Actividades para trabajar con escalas. Tomadas de Block y García (2006). Fractal. Secundaria. Primer grado.

Paso 1		**Paso 2**
Calcular $\frac{1}{7}$ de $\frac{2}{5}$. Esto se hace así:	$\Rightarrow$	Multiplicar el resultado anterior por 4 Esto se hace así:

<table>
<tr><td rowspan="9">Relaciones multiplicativas</td><td colspan="4">Actividad 7</td></tr>
<tr><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conocer una segunda interpretación de la multiplicación por una fracción y por un decimal: como composición de un operador que multiplica y uno que divide.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea</td></tr>
<tr><td colspan="2">7.1 Resolver:
El siguiente dibujo del cohete se va a reproducir de manera que: en la copia A las medidas sean ¼ de las medidas del dibujo original, en la copia B sean 3 veces mayores que en la copia A.

Ilustraciones 34 a 36. Actividades para trabajar con escalas. Tomadas de Block y García (2006). Fractal. Secundaria. Primer grado.

a) Calcula y anota en la tabla las medidas que faltan.

b) Dibuja en papel cuadriculado las copias A y B.

c) ¿Cuál es el factor de escala que aplicado al original produce la copia B? Anótalo en el redondel arriba de la tabla.

d) Las medidas de la copia C son ¾ de las medidas del dibujo original. Calcula las medidas de la copia C y anótalas en la última columna de la tabla.

e) Escribir por qué las medias obtenidas en la copia C son iguales a las de la copia B.</td><td colspan="2">Con estas actividades se espera que los maestros trabajen con operadores enteros y fraccionarios, y que hagan composiciones.</td></tr>
<tr><td colspan="2">7.2 Puesta en común.

Comparar los dibujos y los escritos de e).</td><td colspan="2">Enfatizar que:
Aplicar el factor de escala ¾ equivale a producir primero un achicamiento con el factor ¼ y luego un agrandamiento con el factor 3.</td></tr>
</table>

	Preguntar qué pasaría si se cambia el orden en que se aplican los factores (primero se agranda con el factor 3 y luego se achica con el factor ¼). Puede sugerirse una tabla como las anteriores para verificar que es igual.			
	Componente			
	MATEMÁTICA	DIDÁCTICA	METADIDÁCTICA	VINCULACIÓN PRÁCTICA
	Propósitos			
	Reflexionar sobre la ampliación de significados en la multiplicación de racionales.			
	Tareas		*Dificultades esperadas y objetivos de la tarea*	
	7.3 Preguntar ¿Qué significado de la multiplicación está en juego en 7.1?		El significado que se pone en juego es la composición de operadores, multiplicar por una fracción es una composición de operadores, uno que multiplica y otro que divide. Observar que en la actividad anterior multiplicar una cantidad por una fracción, por ejemplo ¾, se definió como obtener 3/4 de esa cantidad. Ahora aparece una segunda forma de definir la multiplicación por una fracción: multiplicar por 3/4 equivale a aplicar sucesivamente dos operaciones: multiplicar por 3 y dividir entre 4 (o dividir entre 4 y multiplicar por 3).	

Ilustración 34 Actividades para trabajar con escalas. Tomadas de Block y García (2006). Fractal. Secundaria. Primer grado.

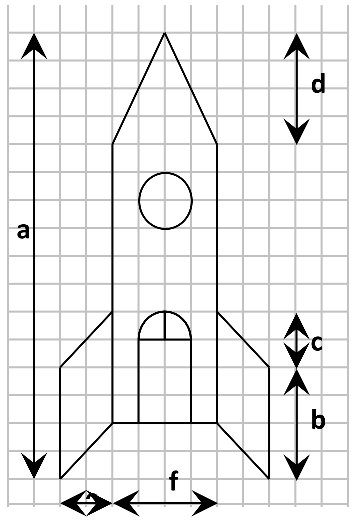
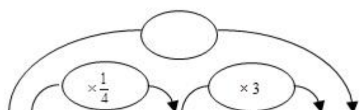


Ilustración 35 Actividades para trabajar con escalas. Tomadas de Block y García (2006). Fractal. Secundaria. Primer grado.



	Dibujo original	Copia **A**	Copia **B**	
Medida a				
Medida b				
Medida c				
Medida d				
Medida e				
Medida f				

Ilustración 36 Actividades para trabajar con escalas. Tomadas de Block y García (2006). Fractal. Secundaria. Primer grado.

$\times 3$ $\times \frac{1}{4}$

	Dibujo original	Copia **A**	Copia **B**
Medida a			
Medida b			
Medida c			
Medida d			
Medida e			
Medida f			

<table>
<tr><td rowspan="9">Relaciones multiplicativas</td><td colspan="4">Actividad 8</td></tr>
<tr><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Explorar un significado fundamental de la multiplicación, distinto al de suma iterada: el de operador en una relación de proporcionalidad.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea</td></tr>
<tr><td colspan="2">8.1 Resolver en equipos de 2 a 4 integrantes (tomado de Brousseau, 1981).

Dibujen un rompecabezas como el que se muestra y recorten las piezas.

Ilustración 37. Rompecabezas. Tomado de Brousseau, G. y Brousseau, N. (1987).

Construyan entre todos un rompecabezas a escala, más grande, de tal manera que el lado que mide 4cm en el original, mida 7cm en el rompecabezas ampliado. Repártanse las piezas en el equipo y cada uno construya la ampliación de las que le tocaron.
Armen el rompecabezas ampliado y verifiquen que las piezas embonen.</td><td colspan="2">Aunque la estrategia aditiva (sumar un mismo número de unidades a cada lado) es común entre alumnos de los niveles básicos, con los maestros no se espera que aparezca. Tras haber desarrollado las actividades anteriores, lo deseable sería que se percataran del operador fraccionario: para que una medida que en el original mide 4 en la copia a escala mida 7, se debe multiplicar cada medida por 7/4.

El hecho de que sea un rompecabezas y que cada persona construya una o dos piezas hace que la validación sea fácil, si embona es que todos multiplicaron por el mismo operador.</td></tr>
<tr><td colspan="2">8.2 Pedir que describan al menos tres procedimientos que permiten resolver la situación del rompecabezas.</td><td colspan="2">Algunos procedimientos son: Regla de tres, Encontrar el valor unitario (1→1.75, o 1→1.6), La composición de dos operadores enteros, uno que divide, uno que multiplica; Determinar el operador multiplicativo (también llamado factor de proporcionalidad), ya</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="9"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2">sea directo o bien, centrado en el incremento.</td></tr>
<tr><td colspan="2">8.3 Preguntar:

¿Cuál es el procedimiento que se busca propiciar en esta secuencia?

Multiplicar una medida por un número natural puede interpretarse como sumar esa medida *n* veces. ¿Cómo puede interpretarse la multiplicación de una medida M por una fracción *a/b*?

Encontrar la medida que corresponde a M en una relación en la que a 1 le corresponde *a/b*:</td><td colspan="2">Se busca propiciar el operador multiplicativo (× 7/4, o × 1.75).

Dividir la medida M entre *b* y luego multiplicarla por *a*.

1 → a/b
M → M × a/b

Destacar el error aditivo si aparece. Comentar que esto ocurre frecuentemente con los niños (más adelante se revisa un ejemplo) y destacar que el error obedece a que los niños no conciben que exista una multiplicación que transforme 4 en 7.</td></tr>
<tr><td colspan="4">*Componente*</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td colspan="4">*Propósitos*</td></tr>
<tr><td colspan="4">Comprender el orden de la secuencia didáctica y las implicaciones que tiene en la actividad matemática de los alumnos.
Discutir sobre la validación como recurso didáctico.
Argumentar sobre las variables didácticas del contenido (operadores).</td></tr>
<tr><td colspan="2">*Tareas*</td><td colspan="2">*Dificultades esperadas y objetivos de la tarea*</td></tr>
<tr><td colspan="2">8.4 Preguntar
La consigna original es “el lado que mide 4 debe medir 7”. ¿Qué creen que pasaría si fuera “multipliquen cada medida por 7/4”?

¿Qué habría pasado si las piezas que se construyen no fueran parte de un rompecabezas?</td><td colspan="2">Se perdería la parte exploratoria del contenido matemático en juego. La actividad sería para practicar multiplicaciones con fracciones.

No se habría dado oportunidad a que se manifestaran errores comunes, si las piezas no embonan es evidente que algo pasó.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="8"></td><td colspan="2">La consigna original es “el lado que mide 4 debe medir 7”. ¿Qué creen que pasaría si fuera “el lado que mide 4 debe medir 2”?</td><td colspan="2">Eso permite validar.

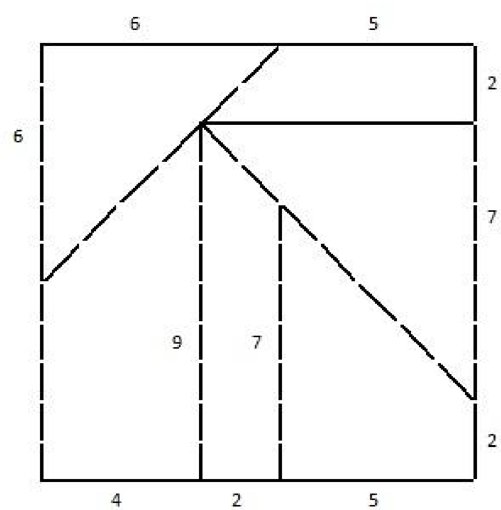
El operador, por ser muy familiar a los alumnos, quizá no pondría de manifiesto errores comunes como el aditivo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">8.5 Identificar importantes características didácticas de esta situación:

a) Implica al conocimiento que se desea enseñar (multiplicación por un racional) sin enseñarlo previamente.
b) Propicia que emerja un procedimiento erróneo muy arraigado: sumar en vez de multiplicar.
c) Pone en evidencia que la estrategia de sumar no funciona cuando el rompecabezas no embona.
d) Puede plantearse varias veces, cambiando algunos datos, para propiciar evolución.</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Analizar la actividad propuesta por el profesor (rompecabezas a escala) y la relación que se da entre alumnos, maestro y contenido a propósito de dicha actividad.
Identificar procedimientos distintos (correctos o no) de los alumnos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea</td></tr>
<tr><td colspan="2">8.6 Leer el registro de clase (Anexo 2.4.6) y posteriormente, comentar en grupo contestando las preguntas.

A lo largo de las dos sesiones, los alumnos logran varias expresiones del operador multiplicativo en juego, por ejemplo, $x \rightarrow x$ más “3 de cada 5” x. Identifiquen algunas más.</td><td colspan="2">$x \rightarrow x + 3/5$ de x
$x \rightarrow x\ (\div 5)\ (\times 8)$
$x \rightarrow 1.6x$
$x \rightarrow 8/5x$ (un sólo alumno)</td></tr>
</table>

	Identifique algunos de los errores que cometen los alumnos a lo largo de la experiencia y señale cómo se dan cuenta de que hay error, o si no se dan cuenta. ¿Cree que la actividad resultó fácil o difícil para alumnos de 6°? Comentar la importancia de plantear dos o más situaciones similares, ya que, con una sola vez, no lograrán desarrollar un recurso.	El más importante es la estrategia aditiva. Se dan cuenta de varias maneras: una, al armar el rompecabezas y ver que se deforma; otra, al observar que a dos lados del cuadrado les corresponderían medidas diferentes. Es difícil concebir que haya un número porque que se pueda multiplicar a 4 para obtener 7. Esta multiplicación ya no es "tantas veces". Tampoco significa necesariamente ampliar. Incluso para el alumno que encuentra la pertinencia del operador "8/5 de" no es fácil saber que ese es el número por el que puede multiplicar cualquier medida para obtener las nuevas medias a escala.

Ilustración 37. Rompecabezas. Tomado de Brousseau, G. y Brousseau, N. (1987).



<table>
<tr><td rowspan="14">Relaciones multiplicativas</td><td colspan="4">Actividad 9</td></tr>
<tr><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conocer otro contexto en el que puede intentarse dar sentido a la multiplicación de decimales: el cálculo del área del rectángulo, cuando las medidas de los lados son decimales.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea</td></tr>
<tr><td colspan="2">9.1 Resolver:

a) En equipos de 3 o 4. Hay que buscar las medidas del perímetro de rectángulos cuya área es 40cm^2. Cada equipo debe encontrar tantos rectángulos como sea posible.

b) En equipos de 3 o 4. Hay que buscar la medida del lado de un cuadrado cuya área es 27cm^2.</td><td colspan="2">Se espera que tras explorar la situación puedan sistematizar la búsqueda de factores: 1 × 40, 2 × 20, 4 × 10, etc. Además, que consideren factores no enteros como 0.5 × 80.

Buscar la medida del lado de un cuadrado cuya área no resulta de la multiplicación de enteros dará oportunidad de explorar con decimales. Sabrán que la medida buscada está entre 5 y 6.</td></tr>
<tr><td colspan="2">9.2 Puesta en común.

Comparar las dimensiones propuestas por todo el grupo. Hacer una tabla en el pizarrón para anotarlas.</td><td colspan="2">Enfatizar que:
En el caso de los rectángulos con área dada se pueden hallar infinitas posibilidades de dimensiones del perímetro si se emplean decimales.

En el cuadrado es una sola medida que se puede ir aproximando con decimales.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Identificar el contenido matemático en juego. Argumentar sobre las variables didácticas del contenido (dimensiones de rectángulos, dimensiones de cuadrados).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea</td></tr>
<tr><td colspan="2">5.3 Preguntar

¿Qué contenido matemático se trabaja al desarrollar esta actividad?</td><td colspan="2">Multiplicación con decimales, relaciones entre factores decimales conociendo el producto.</td></tr>
</table>

	¿En qué es distinta esta actividad a las anteriores en las que también había multiplicaciones?	Aquí hay que hallar ambos factores, no se trata de buscar constantes ni de componer operadores, sino de hallar la máxima cantidad de factores que den como resultado un número dado.
	¿Es distinto buscar las medidas de los lados del rectángulo que las del cuadrado?	Sí, aunque ambas implican la multiplicación con las del cuadrado la pregunta puede plantearse como ¿qué número multiplicado por sí mismo da 27? Y aproximarlo lo más posible con cifras decimales.
	¿Qué utilidad creen que tenga plantear ambas actividades (rectángulo y cuadrado)?	Ampliar situaciones problemáticas para los alumnos.

<table>
<tr><td rowspan="9">Relaciones multiplicativas</td><td colspan="4">Actividad 10</td></tr>
<tr><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Ampliar los significados de la multiplicación y división para casos en los que los números involucrados no son sólo enteros.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea</td></tr>
<tr><td colspan="2">10.1 Escribir problemas, en parejas.

Con la información que aparece en las tarjetas de abajo se pueden fabricar tres problemas, uno de multiplicación y dos de división. Para ello basta con proporcionar los datos de dos tarjetas y preguntar por el dato de la tercera tarjeta.

Ilustraciones 38 y 39. Tarjetas para inventar problemas. Tomadas de Block y García (2006). Fractal. Secundaria. Primer grado.

Por ejemplo, si se dan los datos 1 y 3 y se pregunta por el dato 2, se obtiene un problema como el siguiente:

“Al dar 12 pasos, Ernesto avanza 9 metros, ¿cuánto mide cada paso?” Resultado: cada paso mide ¾ de metro. Operación: 9 ÷ 12 = 3/4.

a) Escriban los otros dos problemas.

b) Para cada conjunto de tres datos, escriban los tres problemas que se obtienen al preguntar por cada uno de los datos. Escriban también el resultado de cada problema y la operación con la que se resuelve.</td><td colspan="2">

Se espera que reflexionen sobre cuántas posibilidades se tienen cuando un problema tiene tres datos y qué tipo de operaciones se ponen en juego.

Las redacciones que logre cada pareja también pueden ser objeto de discusión, ¿todos los problemas son claros?, ¿hay formas más claras de plantear un problema?</td></tr>
<tr><td colspan="2">10.2 Resolver:

Laberinto. Una pareja juega contra otra pareja considerando las siguientes reglas:
- Cada pareja empieza el juego con 100 puntos.
- Cada pareja marca en su laberinto un camino que le permita llegar a la meta con el mayor puntaje posible. Gana la pareja que</td><td colspan="2">

Esta actividad pone en juego la idea de multiplicar agranda y dividir achica. Se evidenciará que con los decimales positivos menores que 1, no ocurre.

Preguntar si habrá un camino mejor para resolver cada laberinto.</td></tr>
</table>

	logra juntar más puntos. - No se puede pasar dos veces por el mismo lugar. - Pueden usar calculadora para hacer las operaciones. *Ilustración 40. Laberinto 1 Fractal. Tomada de Block y García (2006). Fractal. Secundaria. Primer grado.*	
	10.3 Responder por escrito en parejas: El producto de una multiplicación es menor que alguno de los dos factores cuando: ____________________________ Por ejemplo: _____________________________________ El producto de una multiplicación es mayor que los dos factores cuando: ____________________________________ Por ejemplo: _____________________________________ El cociente de una división es menor que el dividendo cuando: ____ Por ejemplo: _____________________________________ El cociente de una división es mayor que el dividendo cuando: ____ Por ejemplo: _____________________________________	Los laberintos deberían servir para obtener ejemplos. Quizá las razones que expliquen el funcionamiento de las operaciones cuando hay decimales involucrados, todavía no estén claras. Pero al menos se espera que logren redactar los casos de manera general y pongan ejemplos.
	10.4 Puesta en común. Comentar algunos de los problemas que escribieron y sus experiencias con los laberintos. Preguntar en qué casos hubo cocientes mayores que el dividendo y productos menores que uno de los factores.	Enfatizar que cuando se trata de racionales los significados de agrandar y achicar construidos con los naturales, deben ampliarse para dar cabida a casos como estos. Poner ejemplos que ayuden a entender: dividir 1 entre ½ va a dar un cociente mayor, sería como servir 1 litro de agua en vasos con capacidad de ½ litro.

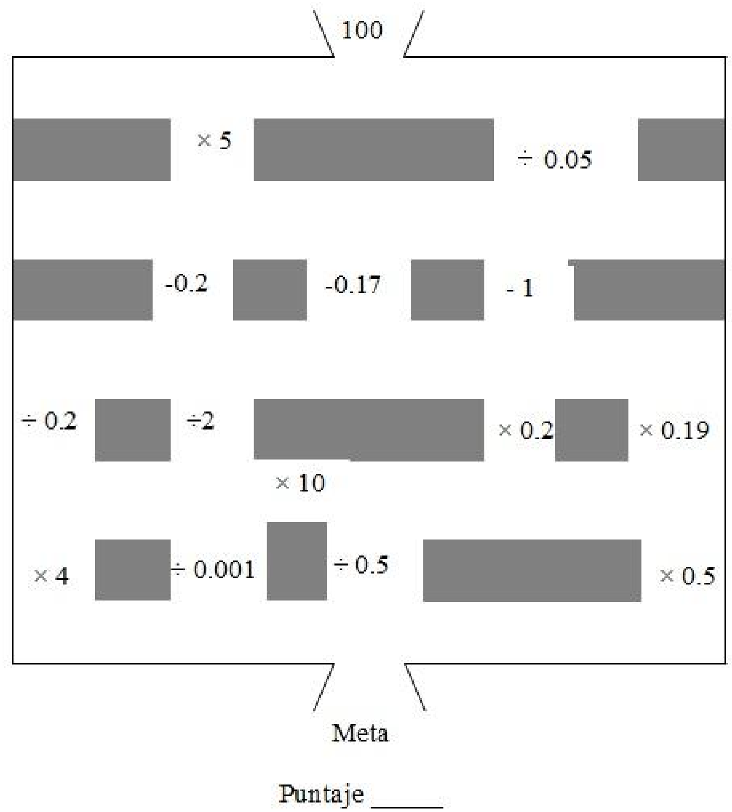
Ilustración 38 Tarjetas para inventar problemas. Tomadas de Block y García (2006). Fractal. Secundaria. Primer grado.

Dato 1	Dato 2	Dato 3
Ernesto da 12 pasos	Cada paso mide $\frac{3}{4}$ m	En total Ernesto avanza 9 m

Ilustración 39 Tarjetas para inventar problemas. Tomadas de Block y García (2006). Fractal. Secundaria. Primer grado.

Dato 1 Luis reparte 3 pasteles	Dato 2 Luis reparte entre sus 4 amigos	Dato 3 A cada amigo le tocan $\frac{3}{4}$ de pastel
Dato 1 El auto recorrió 425.6 km	Dato 2 El auto rinde 17.5 km por litro de gasolina	Dato 3 El auto consumió 24.32 litros de gasolina
Dato 1 El contenido del frasco de medicina es de 12 decilitros	Dato 2 La dosis de una toma es de 0.5 decilitros	Dato 3 El frasco alcanza para 24 tomas.
Dato 1 El factor de escala es $\times \frac{3}{4}$	Dato 2 Un lado A de la figura original mide 4 cm	Dato 3 El lado A' de la copia mide 3 cm

Ilustración 40 Laberinto 1 Fractal. Tomada de Block y García (2006). Fractal. Secundaria. Primer grado.



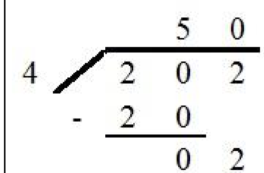
<table>
<tr><td rowspan="10">Actividades numéricas</td><td colspan="4">Actividad 11</td></tr>
<tr><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Analizar el funcionamiento de los algoritmos que involucran números decimales escritos con punto.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea</td></tr>
<tr><td colspan="2">11.1 En parejas, explicar:

Por qué se alinean las cantidades que han de sumarse o restarse de acuerdo al punto decimal y se procede como si fueran enteros “bajando” el punto.</td><td colspan="2">

Porque a ambos lados del punto el sistema funciona igual: cuando se forma un grupo de 10 se pasa a la siguiente columna. Así que hay que alinear centésimos con centésimos, décimos con décimos, unidades con unidades, etc. para empezar la suma o resta por la derecha (donde están las cifras con menor valor posicional) e ir agrupando cuando fuera necesario hacia la columna que está a la izquierda. En la resta, para desagrupar del minuendo en la columna de la izquierda cuando sea necesario.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Por qué se rellena con ceros al restar decimales que tienen distinta cantidad de cifras a la derecha del punto.</td><td colspan="2">Porque 5.2 = 5.20 así que pueden agregarse ceros a la derecha para que ambas cantidades tengan la misma cantidad de cifras a la derecha del punto y sea “más fácil” hacer la resta.</td></tr>
<tr><td colspan="2">11.2 Puesta en común.</td><td colspan="2">Se espera compartir los argumentos que cada pareja construya.</td></tr>
<tr><td colspan="2">11.3 En parejas, explicar:

Por qué en la multiplicación funciona correr a la izquierda el punto en el producto tantos lugares como la suma de cifras decimales que haya en los factores. Adelantar (para dar un punto de partida a quienes no tengan ideas al respecto) que la justificación tiene que ver con la multiplicación de fracciones.</td><td colspan="2">

La multiplicación 37.2 × 0.56 en forma fraccionaria, con denominadores que sean potencias de 10, quedaría 372/10 × 56/100 = 20832/1000. Al multiplicar décimos por centésimos se obtienen milésimos. Lo que sucede en el algoritmo que analizamos es que al multiplicar los factores como si fueran enteros (es decir, ignorando el punto) es equivalente a multiplicar los numeradores si se escribieran en forma fraccionaria, y contar el número de cifras que tienen los factores a la derecha del punto, es equivalente a multiplicar los denominadores (sería como decir: décimos por centésimos da milésimos, así que hay que correr el punto 3 lugares a la izquierda).</td></tr>
</table>

	11.4 Puesta en común.	Es probable que las argumentaciones que den los participantes no sean tan sólidas como las que han construido para la suma y la resta. Incluso podría ocurrir que no tengan manera de justificar este algoritmo. En ese caso, explicarlo al grupo y comentar qué es lo que queda oculto en la operación con números con punto.
	11.5 En parejas, comentar el algoritmo de la división entre naturales con residuo que se sigue dividiendo. Por ejemplo, 202 ÷ 4.	Se espera que los maestros logren explicar qué sucede cuando se escribe un punto en el cociente y se agregan cero en el residuo. ¿Qué es lo que se divide ahí?
	11.6 Puesta en común.	La división sirve para resolver problemas de agrupamiento (cuántas veces cabe un número en otro) y de reparto (cuánto le toca a cada quien). Cuando los problemas son de agrupamiento el cociente decimal podría entenderse como “cabe 5.4 veces”. Cuando son de reparto sería “a cada quién le tocan 5.4 algo”. Parece ser que es más fácil comprenderlo en los de reparto. Sobre el algoritmo: subir un punto y bajar un cero implica repartir décimos, luego centésimos, etc. En la división 200 ÷ 4, el divisor “cabe” 50 veces en el dividendo y hay un residuo de 2. Pensemos ahora en la división como un reparto: 202 se reparten entre 4, toca 50 a cada una de esas cuatro partes y sobran 2.  Ese residuo de 2 es posible seguirlo repartiendo, a cada una de las 4 partes le tocaría 0.5. En el algoritmo funciona así: se coloca un punto decimal a la derecha del cociente para indicar que la siguiente cifra que se obtenga serán décimos, y se añade un cero a la derecha del residuo para indicar que ya no se trata de 2 unidades sino de 20 décimos. Lo que se reparte ahora son 20 décimos en 4 partes, y a cada una le tocan 5 décimos.

<table>
<tr><td rowspan="10"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2">5 0. 5
4 ⟌ 2 0 2
- 2 0
0 2 0
- 2 0
0</td></tr>
<tr><td colspan="2">11.7 Resolver sin calculadora 0.24 ÷ 1.2 =

Al terminar, solicitar que expliquen cómo se resuelven esas divisiones.</td><td colspan="2">Se espera que logren justificar la técnica de correr el punto o agregar ceros: el cociente que se obtiene en la división 0.24 ÷ 1.2 es igual al que se obtiene en 24 ÷ 120 porque la relación entre dividendo y divisor en la misma en ambos casos.
Quizá sirva recordar una técnica para hallar fracciones equivalentes: multiplicar el numerador y el denominador por un mismo número. En este caso, multiplicar divisor y dividendo por un mismo número (en este caso, por una potencia de 10) da lugar a que entre el nuevo divisor y el nuevo dividendo exista una relación igual a la que había en las cantidades originales.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Analizar posibles dificultades de los alumnos ante la ejecución de los algoritmos que involucran cantidades con punto decimal.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea</td></tr>
<tr><td colspan="2">11.8 Preguntar
¿Cuál creen que es el propósito de que expliquen los algoritmos (que ya saben hacer)?</td><td colspan="2">Se trata de que, mediante la reconstrucción de los procedimientos que ya saben ejecutar, reflexionen sobre: las dificultades del propio algoritmo, las reglas del sistema de numeración decimal que están detrás del funcionamiento de los algoritmos y las dificultades que pueden tener los alumnos tanto en la ejecución de los mismos como en los significados que adquieren de acuerdo a la situación en la que se presentan.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
</table>

	Propósitos	
	Analizar la resolución de divisiones con decimales que llevan a cabo alumnos de 5° de primaria.	
	Tareas	*Dificultades esperadas y objetivos de la tarea*
	11.9 Leer el registro de clase (Anexo 3.1.15) y posteriormente, comentar en grupo contestando las preguntas. ¿Cuál creen que es el propósito al revisar las respuestas de estos alumnos? ¿Qué dificultades identifican en las respuestas de los alumnos? ¿Qué opinan del fragmento en el que el entrevistador pregunta si la multiplicación agranda?	Reflexionar sobre lo que comprenden los alumnos de los algoritmos, qué ideas tienen sobre el sistema de numeración decimal, qué dicen acerca de sus clases de matemáticas y lo que aprenden en ellas, etc. Recorrer el punto ¿para qué, hacia dónde, cuántos lugares? Comentar que algunos conocimientos matemáticos en los niveles básicos de enseñanza, es posible que se enseñen y se aprendan con “errores” o imprecisiones matemáticas, como en este caso. Sin embargo, al estudiarse los decimales “dejar pasar” un comentario así de un alumno, puede contribuir a la confusión.

<table>
<tr><td rowspan="9">Actividades numéricas</td><td colspan="4">Actividad 12</td></tr>
<tr><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Anticipar resultados de operaciones con decimales.
Vincular a la multiplicación con la división cuando se trata de números fraccionarios y decimales (por ejemplo, saber que multiplicar por 0.5 o ½ es lo mismo que dividir entre 2).
Utilizar propiedades diversas para hacer cálculo mental.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea</td></tr>
<tr><td colspan="2">12.1 En parejas, completan la tabla.

Ilustración 41. Actividad para estudiar relaciones multiplicativas. Tomada de Solares, A. (coord.) (2006).</td><td colspan="2">Se anticipa que puede haber dificultades para justificar sus respuestas, aunque logren responder que multiplicar por 0.25 es lo mismo que dividir entre 4.</td></tr>
<tr><td colspan="2">12.2 Resolver mentalmente

Cada operación se escribe en el pizarrón (una por una) y se les pide que no anoten nada (incluso que guarden sus cosas). Alguien dice la respuesta y la explica.

$0.5 \times 40 =$
$1.5 \times 80 =$
$10 \times 2.5 =$
$4.5 \times 0.5 =$
$0.25 \times 200 =$
$2.5 \times 8 =$
$800 \times 0.125 =$
___ + ¾ = 1
0.2 + ___ = 2
0.4 + ___ = 1.2
____ × 12 = 9
1/10 + 5/1000 = ____
11/6 + ___ = 2</td><td colspan="2">Se espera que utilicen estrategias como completar a 1, completar a ½, equivalencia, multiplicación por potencias de 10, relación entre división y multiplicación de decimales.
No todas son evidentes.</td></tr>
</table>

	95/100 + ___ = 1 2/3 + ___ = 5/6 6/10 + ___ = 80/100 Hallar el doble de 0.9 Hallar el doble de 7/10 Hallar la mitad de 1.3 Hallar la mitad de 3/100 Hallar el triple de 0.12 Hallar el triple de 18/1000 Formar 7.2 con décimos ¿cuántos hay? Formar 0.65 con milésimos, ¿cuántos hay? Formar 3.4 con centésimos, ¿cuántos hay? ¿En cuáles multiplicaciones el resultado será mayor que 1? 5 × 2 0.5 × 0.2 0.5 × 2 5 × 0.2 ¿En cuáles divisiones el resultado será mayor que 1? 5 ÷ 2 2 ÷ 5 2 ÷ 0.5 0.5 ÷ 2 0.5 ÷ 0.2 0.2 ÷ 0.5 5 ÷ 0.2 0.2 ÷ 5	
	12.3 Puesta en común. ¿Qué propiedades/estrategias utilizaron para resolver? ¿Cuáles de ellas creen que podrían enseñarse en la primaria?, ¿las enseñan?, ¿cómo?	Algunas de estas operaciones rebasan lo previsto a estudiar en la primaria. La mayoría podrían enseñarse.

Ilustración 41 Actividad para estudiar relaciones multiplicativas. Tomada de Solares, A. (coord.) (2006).

Multiplicar por:	Es lo mismo que multiplicar por la fracción:	Y es lo mismo que:
0.5	$\frac{1}{2}$	dividir entre 2
0.25		
0.1		
0.01		
0.125		
0.75		

Actividades numéricas

Actividad 13			
Componente			
MATEMÁTICA	DIDÁCTICA	METADIDÁCTICA	VINCULACIÓN PRÁCTICA
Propósitos			
Estudiar cuestiones en torno al valor posicional con decimales usando la calculadora.			

Tareas	*Dificultades esperadas y objetivos de la tarea*
13.1 En parejas, anotar en el cuaderno cada operación para llevar un registro y controlar resultados y errores. Se presionan teclas al azar para formar un número de 9 cifras con punto decimal, por ejemplo: 64 523.8917 El juego consiste en llegar a cero, para ello se hace una operación cada vez de manera que cifra por cifra vaya quedando en cero. Las cifras deben hacerse desaparecer en orden ascendente (1, 2, 3,…9). No debe alterarse el resto de las cifras. Por ejemplo, para el número propuesto primero habría que "desaparecer" el 1 que ocupa el lugar de los milésimos mediante la resta 64532.8917 – 0.001	Se espera que puedan desarrollar la actividad sin mucha dificultad y que ayude a hacer evidente el valor posicional.
13.2 En parejas, desarrollar la segunda versión del juego. El juego anterior imponiendo la condición de que sólo se puede sustraer un número cuando ocupa el lugar de las unidades, lo que obliga a hacer previamente multiplicaciones y divisiones por potencias de 10. Con esta consigna, y para el mismo número, el juego se desarrollaría de la siguiente manera: 64 523.8917 × 1000 = 64 523 891.7 - 1 = 64 523 890.7 ÷ 10 000 = 6452.38907 - 2 = 6460.38907 × 10 = 64 503.8907 -3 = 64 500.8907	

	…	
	13.3 Puesta en común. Comentar: ¿Cuál creen que sea el propósito de la actividad? ¿Qué contenidos matemáticos se abordan?	Para resolver es necesario tomar conciencia del valor posicional que ocupa cada cifra y después, hacer una resta. En la segunda versión es necesario también saber cómo “pasar” una cifra al lugar de las unidades, es decir, multiplicar o dividir por potencias de 10. Esto ayuda a reflexionar sobre el valor posicional cuando se está teniendo un primer acercamiento al contenido, y también puede ser un ejercicio para practicar temas previamente estudiados.

<table>
<tr><td rowspan="13">Conjuntos numéricos</td><td colspan="4">Actividad 14</td></tr>
<tr><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Clasificar números para ubicar a los decimales como subconjunto de los racionales y conocer su relación con otros conjuntos numéricos.
Estudiar qué es la representación decimal de un número.
Identificar las expresiones decimales finitas, infinitas periódicas, infinitas no periódicas.
Conocer dos tipos de escrituras de los decimales: fracciones decimales ($a/10^p$) y números con punto ($b + b_1 + b_2 \ldots b_p$).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea</td></tr>
<tr><td colspan="2">14.1 En equipos, llenar la tabla.

En cada caso, preguntarse: ¿la expresión representa un número natural, racional, decimal o irracional? Escribir “sí” en la casilla correspondiente. Para llenar las demás casillas, preguntarse: ¿podría escribirse como un número natural, racional o decimal? Poner “sí” o “no” según corresponda.

Ilustración 42. Tabla para actividad de clasificación de números. Elaboración propia.</td><td colspan="2">Se espera que esta actividad recoja lo estudiado en las pasadas sesiones y movilice las ideas sobre los conjuntos numéricos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">14.2 Puesta en común.
Llenado de la tabla en el proyector y discutir los criterios que utilizaron para la clasificación.

Preguntar, ¿en algún renglón llenaron con “sí” todas las casillas? ¿Se podría, existe un número así? ¿Cuál?

¿Puede haber un número que sólo tenga “sí” en una casilla? ¿Cuál? ¿Es decimal?</td><td colspan="2">Si un número no está escrito como fracción ni es un radical, entonces se puede saber sin hacer ningún cálculo: si es entero es decimal, si tiene punto y las cifras a la derecha de este son finitas, es decimal.

Si está escrito como fracción y no tiene denominador 10 o potencia de 10, hay que hacer cálculos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">14.3 En parejas, ampliar la tabla buscando dos números para cada uno de los casos siguientes:
– Natural, Entero, Racional, Decimal
– Racional
– Racional, Decimal</td><td colspan="2">Por ejemplo:
– 5/5
– 5/6
– 5/10</td></tr>
</table>

	14.4 Formalización. Explicación en el pizarrón. Los decimales son un subconjunto de los números racionales, así que **todo decimal es un racional,** pero al revés no se verifica: **no todo racional es decimal**. Y como se vio anteriormente, **todo número tiene una representación decimal** (con punto o no) pero **no todo número con punto es decimal**.	Poner ejemplos y trazar esquema de conjuntos numéricos: *Naturales* (7, 41, 568) *Enteros* incluye a N (7, 41, 56) y agrega números como -2, -53 *Decimales* incluye a N y E (7, 41, 568, -2, -53 pueden representarse como 7.0, -53.0) y agrega números como 1.24, -0.89 *Racionales* incluye a N, E y D (7, 41, 568, -2, -53, pueden representarse como 7/1, 410/10, -2/1) y agrega números como 2/3, 4/7, -9/11
	14.5 Puesta en común. Preguntar: ¿Cuál es la diferencia entre “número decimal” y “representación decimal de un número”?	Se espera llegar a lo siguiente: Cualquier número tiene una expresión decimal y ésta puede ser finita, infinita periódica o infinita no periódica (ir ubicando en el esquema anterior que quedó dibujado en el pizarrón a qué conjuntos pertenecen los números con expresión decimal finita y los infinitos periódicos). Los infinitos no periódicos no forman parte de esos conjuntos (dibujar a los irracionales y a todos los conjuntos anteriores dentro de los reales, sólo nombrarlos, no hay que definir). **Expresiones decimales finitas**. Son las que “terminan”. Corresponden a los números decimales. **Expresiones decimales infinitas** que pueden ser: **Periódicas**. No “terminan” y hay un “periodo” de una o más cifras que se repiten al infinito. Estos son números racionales (es decir, cocientes de enteros) que no son decimales. **No periódicas**. No “terminan” pero no hay cifras que se repitan en un periodo (no son cocientes de enteros, o sea, no hay ninguna fracción que los represente). Estos son números irracionales.

Ilustración 42 Tabla para actividad de clasificación de números. Elaboración propia.

	Natural	Racional	Decimal	Irracional
35.521				
3/5				
2				
1/2				
0.63				
0.63				
3.14				
π				
7/3				
0.6				
1.35				
0.5				
2/26				
0.999…				
9				

<table>
<tr><td rowspan="8">Conjuntos numéricos</td><td colspan="4">Actividad 15</td></tr>
<tr><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conocer distintos procedimientos para identificar si un número es decimal o no.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea</td></tr>
<tr><td colspan="2">15.1 Resolver.

Cociente
Hacer las divisiones para encontrar una expresión con punto de las siguientes fracciones.
11/20 8/40 11/33 4/5 1/8 12/7

Preguntar: ¿Cuáles son decimales?

Fracciones equivalentes
En los casos en los que sea posible, escribir las siguientes fracciones con denominador 10 o potencia de 10 para determinar si son o no decimales.
7/5 18/60 1/20 4/15

3/15 3/8 17/30 7/7 1/7 12/24

Descomposición en factores primos
Preguntar:
¿Cómo saber si una fracción va a poder escribirse con denominador 10 o potencia de 10?

Explicar:
Para determinar si una fracción es decimal el denominador debe tener como factores únicamente al 2 o al 5, porque multiplicando por 2 o 5 tantas veces como sea necesario se puede llegar a un denominador potencia de 10.

– En 3/8 el 8 tiene como factor al 2.</td><td colspan="2">Comentar:
Dividir el numerador entre el denominador es seguramente el procedimiento que más se enseña en la primaria para escribir una fracción como número con punto, pero se usa para pasar de una escritura a otra, no para determinar si un número es decimal o no, en esta actividad sí tiene ese propósito.

Esta técnica también se utiliza en la primaria pero con propósitos generalmente asociados a facilitar el cálculo.

Si no sale en la discusión, preguntar:
¿Hay que fijarse en el numerador, en el denominador o en ambos?
Quizá aquí convenga poner ejemplos con los números que vieron en la actividad anterior: 4/15 no es decimal pero 3/15 sí. Si se fijaran sólo en el denominador no es posible determinarlo en estas fracciones.

Comentar que con este procedimiento ya no queda duda de si un número es decimal o no, pero requiere comprender lo de la fracción irreducible y tener conocimientos sobre factorización. Para los alumnos de secundaria puede ser útil.</td></tr>
</table>

	$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$ Si se multiplica al numerador y al denominador por 5^3 se obtiene 375/1000 que es la fracción buscada. – En 3/40 el 40 tiene como factores al 2 y al 5. $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 5$. Si se multiplica al numerador y al denominador por 5^2 se obtiene 75/1000 que es la fracción buscada. Para que este procedimiento funcione la fracción debe estar escrita en su forma irreducible. Cuando sea oportuno, explicar: una fracción irreducible es aquella que ya no puede ser simplificada, o sea, que entre su numerador y denominador el máximo común divisor es 1. Las fracciones irreducibles suelen tomarse como los “representantes” de cada familia de fracciones. Por ejemplo 6/8, 15/20, 120/160 pertenecen a la misma familia (son equivalentes) y el representante de esa familia es ¾ que ya no puede simplificarse.	
	15.2 En parejas, determinar si las siguientes fracciones son decimales mediante la descomposición en factores primos y en caso de que lo sean, escribirlas con denominador 10 o potencia. – 3/20 – 4/11 – 12/14 – 20/25 – 14/32 – 7/4 – 8/42	– 3/20 sí es decimal. $20 = 2^2 \times 5$. Hay que multiplicar por 5 – 4/11 no tiene como factores únicos al 2 o al 5. – 12/14 no tiene como factores únicos al 2 o al 5. – 20/25 sí es decimal. 20/25 = 4/5 es su forma irreductible. $5 = 5^1$. Hay que multiplicar por 2 – 14/32 sí es decimal. 14/32 = 7/16 es su forma irreductible. $16 = 2^4$. Hay que multiplicar por 54 – 7/4 sí es decimal. 7/4 = 1 + ¾. El entero puede dejarse de lado porque ya se sabe que es decimal. $4 = 2^2$. Hay que multiplicar por 52 – 8/42 no tiene como factores únicos al 2 o al 5.
	15.3 En parejas: Proponer dos números decimales (escritos como fracción y cuyo denominador sea distinto de 10 o potencia) y escribirlas con denominador 10 o potencia usando este procedimiento. Intercambiarlos con otra pareja.	Se espera que la búsqueda de fracciones para la actividad promueva la exploración de las propiedades estudiadas: ¿qué denominadores pueden obtenerse usando solamente como factores al 2 y 5?

Conjuntos numéricos	Actividad 16			
	Componente			
	MATEMÁTICA	DIDÁCTICA	METADIDÁCTICA	VINCULACIÓN PRÁCTICA
	Propósitos			
	Hacer un cierre y recopilación de lo estudiado hasta este punto en el taller.			
	Tareas		*Dificultades esperadas y objetivos de la tarea*	
	16.1 Recopilación de lo visto hasta ahora mediante una presentación. Repartir hojas con “capsulitas informativas”. Plantear lo que vendrá en la etapa 2.		Se espera recordar las tareas iniciales y los cierres parciales. Será también un espacio para comentarios y dudas.	

6.3.2 Etapa 2

La etapa 2 de la secuencia contempló dos actividades principales:

- Revisión de los programas de estudio de primaria y secundaria para conocer el “recorrido de los decimales”.
- Analizar lecciones sobre decimales de los libros de texto gratuitos.
- Diseñar una secuencia de dos o tres lecciones para sus alumnos de primaria.

Con las actividades de esta etapa pretendí que los maestros participantes tuvieran una visión más amplia de los racionales al revisar los programas de varios grados y que reconocieran la estructura básica de las lecciones de los libros. Este tipo de trabajo buscó posibilitar la elección de un tema de decimales y el diseño de una secuencia que llevarían a cabo con sus alumnos en la tercera y última etapa.

<table>
<tr><td rowspan="9">Revisión de los programas de estudio</td><td colspan="4">Actividad 17</td></tr>
<tr><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conocer el “recorrido” de las fracciones y los decimales en primaria y secundaria.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea</td></tr>
<tr><td colspan="2">17.1 Organizados en 3 equipos analizan el programa de primaria y secundaria usando un material diseñado para ello en el que se extrae todo lo relativo a decimales y fracciones (anexo 1).</td><td colspan="2">Se espera que vean cómo continúa el estudio de los racionales en secundaria, que son programas que probablemente no les son familiares.
También que reconozcan cuestiones como que las fracciones se estudian primero que los decimales y otros números que se escriben con punto.</td></tr>
<tr><td colspan="2">17.2 Eligen un contenido y llenan una tabla (anexo 2) con su “recorrido” a lo largo de primaria y secundaria.

a) equivalencia, b) suma y resta, c) multiplicación y división.

Al finalizar, cada equipo lo presenta al grupo.</td><td colspan="2">Una vez hecho el recorrido general, la actividad 17.2 pretende que se enfoquen en un tema y lo analicen a detalle.</td></tr>
<tr><td colspan="2">17.3 A partir de la proyección de un mapa de contenidos con el recorrido de todo (elaborado por mí), comentar:

- Con qué tipo de situaciones se introducen las fracciones en la primaria. Qué fracciones se estudian al inicio. A qué se llega en la secundaria respecto a las fracciones.

- En qué grado y con qué situaciones empieza el estudio de los decimales. A qué se llega en la secundaria respecto a los decimales.

- En qué grado se vinculan los decimales y las fracciones y mediante qué actividades.

Opiniones, comentarios sobre el programa.</td><td colspan="2">Con las preguntas se busca que reflexionen en la propuesta curricular y opinen sobre ella, esperando también que la empiecen a ver como una propuesta y no algo dado o “verdadero” e inamovible.
No obstante, construir esa mirada es difícil. Quizá se pueda ir nutriendo con las actividades de análisis de lecciones.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="9">Revisión de lecciones</td><td colspan="4">Actividad 18</td></tr>
<tr><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Analizar lecciones para conocer su estructura.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea</td></tr>
<tr><td colspan="2">18.1 Presentar un esquema general con el que se elaboran casi todas las lecciones de los libros:

Momento inicial - lo ideal es empezar con un problema, un reto para los alumnos.
Momento de desarrollo – los alumnos tienen actividades (una o varias) para ir resolviendo el problema inicial. También puede ocurrir que se introduzcan otros contenidos o se retomen contenidos estudiados anteriormente.
Momento de puesta en común y aportes del maestro, o volver a plantear el problema
Momento de cierre – resumir, formalizar.

Comentarios grupales. ¿Habían visto una estructura similar? ¿Conocen alguna otra?</td><td colspan="2" rowspan="2">Se espera ir avanzando en el análisis de las lecciones al ponerle nombres a las secciones que sean compartidos por todos. A la par, ir discutiendo sobre el orden de esas secciones y su intención didáctica.</td></tr>
<tr><td colspan="2">18.2 Se proyecta una lección (resuelta) y la conductora explicita la estructura anterior (a manera de ejemplo de lo que ellos harán después).

Se comenta en grupo e identifican los contenidos que se abordan, recursos que se utilizan, actividades que se proponen, etc.

Dar el esquema de “Inicio – Desarrollo – Cierre” como una estructura sencilla con la que pueden trabajar para su diseño.</td></tr>
<tr><td colspan="2">18.3 Formar tres equipos para que cada uno resuelva una lección de cualquier grado y luego la analice a partir de las siguientes preguntas:

- ¿Qué contenido(s) se trabajan en la lección?</td><td colspan="2">Analizar cómo esa lección se inserta en una secuencia de lecciones (ya no un análisis de actividad por actividad sino por temas abordados).</td></tr>
</table>

	- Describir brevemente todas las tareas que resuelve el alumno en la lección. - ¿Cómo pude saber el alumno si sus respuestas son correctas o no? - ¿Puede preverse alguna dificultad que podrían tener los alumnos? En caso afirmativo, describa cuál. - ¿Se formaliza algún contenido o un aspecto de éste?, ¿cuál?, ¿cómo? - ¿Considera que las actividades anteriores constituyen un antecedente suficiente para esta formalización?, ¿por qué? - ¿Qué tiene que saber previamente el alumno para responder la lección? ¿Qué se espera que aprenda? - ¿Se utilizan recursos?, ¿cuáles?, ¿considera que la utilización de estos recursos es adecuada para lograr que los alumnos aprendan lo que se espera? - Escriba brevemente si la lección le parece “buena”, “regular” o “mala” y justifique. - ¿Se le ocurre algo para mejorarla?	

<table>
<tr><td rowspan="9">Diseño de una secuencia</td><td colspan="4">Actividad 19</td></tr>
<tr><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Elegir el tema sobre el que diseñarán la secuencia de lecciones.
Escribir individualmente un esquema o ideas sobre la secuencia.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea</td></tr>
<tr><td colspan="2">19.1 Elegir un tema sobre decimales para diseñar su secuencia.

Para la elección el tema, estarán a su disposición tanto el programa de estudios de primaria (el extracto que trabajaron en la primera actividad), los libros que lleven, lo estudiado en la etapa 1.</td><td colspan="2">Instarlos a que escojan el tema enfatizando que es conveniente que trabajen en el mismo tema los de un mismo grado (tienen referencias en común, podrían observarse entre ellos cuando desarrollen las clases con sus alumnos).</td></tr>
<tr><td colspan="2">19.2 Escribir individualmente un esquema para el diseño de 3 lecciones sobre el tema elegido usando la HT3 como apoyo (anexo 3).

Los parámetros para el diseño serían:
- Escribir una secuencia compuesta por 2 o 3 lecciones planificadas para durar una hora cada una.
- Dirigida a alumnos de 4° a 6° de primaria.
- Puede incluir el uso de materiales, calculadoras, proyector, etc., pero no es requisito.</td><td colspan="2">Se espera que esta tarea sea difícil para los maestros y que sus primeras ideas sean muy generales o poco precisas.

Puede ayudar la sugerencia de elaborar un análisis previo que permita identificar las características principales del contenido y de los estudiantes al trabajar ese contenido (lo que sepan por su experiencia, lo que hayan aprendido en la etapa 1).</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="11">Diseño de una secuencia</td><td colspan="4">Actividad 20</td></tr>
<tr><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Comentar la estructura que cada uno hizo para el diseño de la secuencia.
Definir una estructura común para el diseño de la secuencia.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea</td></tr>
<tr><td colspan="2">20.1 Organizados en equipos por grado, comentan la tarea de cada quién.</td><td colspan="2" rowspan="2">Se espera que la nueva versión elaborada en conjunto haya mejorado con respecto a las previas, sin embargo, puede seguir siendo un reto importante imaginar una secuencia y no actividades aisladas, que es lo que los maestros hacen y buscan con frecuencia.</td></tr>
<tr><td colspan="2">20.2 A partir de las ideas de todos, obtener una nueva HT 3 con la estructura consensuada.</td></tr>
<tr><td colspan="2">20.3 Cada equipo comenta con el resto del grupo su estructura señalando los cambios que hicieron para llegar a esa versión.</td><td colspan="2">Se espera que los maestros describan las mejoras que hicieron y que al escuchar lo que sucedió en otros equipos vayan teniendo más ideas y ejemplos para utilizar.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="8">Diseño de una secuencia</td><td colspan="4">Actividad 21</td></tr>
<tr><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Realizar un análisis previo para el diseño de la lección 1
Elaborar en equipo una primera versión de la lección 1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea</td></tr>
<tr><td colspan="2">21.1 Organizados en equipos por grado, completan una hoja de trabajo para definir la estructura de la lección 1 de su secuencia.
La hoja contempla un análisis previo sencillo para su diseño.

<u>Respecto al contenido</u>
- Delimitar el contenido matemático a tratar, escribir de la manera más precisa el contenido a tratar. Por ejemplo, es más claro poner “suma de números decimales utilizando la recta numérica” que sólo “operaciones con números decimales” porque permitirá tener más claro el tema específico.
- Distinguir qué conocimientos moviliza el contenido matemático a tratar, es importante tener en cuenta qué otros conocimientos requerirán los alumnos para poder resolver las situaciones que se contemplan en la planificación. Siguiendo el ejemplo anterior: “la recta numérica como un tipo de representación gráfica que permite ordenar números y hacer operaciones sencillas”.

<u>Respecto a los alumnos</u>
- Describir los procedimientos y los errores que podrían emplear los alumnos para resolver las situaciones que se plantearán. Los procedimientos y los errores frecuentes de los alumnos deben considerarse al elaborar el plan de acción. Conocerlos de antemano permite contar con una información valiosa en el diseño de la secuencia que se planea. Por ejemplo, si se sabe que al sumar decimales los alumnos suelen equivocarse con cifras como 0.5 y 0.05, la situación que se les plantee podría abordar directamente esa cuestión.

<u>Elaboración del plan de acción</u>
- Con la información obtenida en el análisis previo se traza un</td><td colspan="2">Esta seguramente será la parte más difícil del diseño. Hacer un análisis previo, aunque sea sencillo y se limite a pocos aspectos, es en realidad el centro de la tarea. Quizá en esta parte la conductora y otros investigadores tengan que intervenir más.</td></tr>
</table>

	plan de acción sobre la organización de la clase. Por ejemplo, si los estudiantes harán trabajo individual o conviene formar equipos porque se busca algún tipo de intercambio entre ellos. <u>Consigna o instrucción</u> - Debe escribirse la instrucción(es) que se les va a dar a los alumnos para que realicen lo que se tiene planeado. Hay que recordar que la instrucción o consigna debe ser muy clara para los alumnos, pero sin sugerir la solución o el procedimiento para encontrarla. Por ejemplo, en la consigna “hagan ‘brincos’ del mismo tamaño que el que está dibujado en la recta anotando el número al que llegan cada vez”, el alumno debe averiguar de qué tamaño es el ‘brinco’ que debe dar y luego escribir la serie que se va formando; en cambio en la consigna “vamos a sumar cada vez 0.5 en la recta haciendo ‘brincos’ hasta llegar a 10” el esfuerzo del alumno se reduce significativamente.	
	21. 2 A partir de su análisis previo, diseñan la primera versión de la lección 1.	En este momento la conductora e investigadores podrían analizar las lecciones producidas y hacer sugerencias antes de llevarla a sus grupos. Qué tanto intervenir seguirá siendo una pregunta en cada paso.

<table>
<tr><td rowspan="9">Diseño de una secuencia</td><td colspan="4">Actividad 22</td></tr>
<tr><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Comentar grupalmente el diseño de la lección 1 de cada equipo para obtener retroalimentaciones de todo el grupo.
Elaborar una segunda versión.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea</td></tr>
<tr><td colspan="2">Organizados en equipos por grado, presentar el diseño de la lección 1. Cada equipo contará con 10 minutos para presentar y habrá 15-20 minutos para comentarios y sugerencias.</td><td colspan="2" rowspan="2">Una vez más, habrá que estar atentos a los avances pues se espera que sea difícil llegar a una versión que esté centrada en el análisis didáctico y no en el uso de materiales o en dinámicas grupales.
Habrá que valorar siempre la intervención de los investigadores.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tras las presentaciones, muy probablemente harán ajustes a su lección 1.</td></tr>
</table>

Esta actividad se repetirá con las lecciones 2 y 3.

6.3.3 Etapa 3

En la etapa 3 de la secuencia los profesores participantes pondrán en marcha las lecciones diseñadas con sus estudiantes de primaria. Uno de sus pares fungirá como observador y yo estaré presente también haciendo registros y video grabando la clase.

Se revisarán grupalmente las experiencias de cada uno, pues los maestros que impartan clases en el mismo grado habrán desarrollado la misma secuencia con sus alumnos. La revisión podrá llevar a hacer ajustes a las lecciones.

<table>
<tr><td rowspan="7">Puesta en marcha de su secuencia en la primaria</td><td colspan="4">Actividad 23</td></tr>
<tr><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Poner en marcha con sus estudiantes de primaria las lecciones diseñadas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea</td></tr>
<tr><td colspan="2">23.1 Los maestros de un mismo grado pondrán en marcha la secuencia con sus estudiantes de primaria.
Un compañero estará presente para tomar un registro usando algunas preguntas orientadoras.

- Qué cosas funcionaron bien.
- Cuáles actividades ajustaría.
- Las actividades fueron fáciles o difíciles para los alumnos.
- Dio tiempo de hacer todo lo planificado.
- Cómo cree que se desarrolló la clase.

Las clases serán videograbadas y cada maestro podrá mirar su video.</td><td colspan="2">Poner en marcha las lecciones no se espera que sea una tarea difícil, dado que las conocerán bien y tienen experiencia con sus estudiantes. Quizá lo que pueda dificultarse es la presencia de la cámara y tener a un colega en el aula.
El papel del observador también podría ser novedoso para ellos.
La logística para coordinar que el observador esté presente (por los permisos y eso) puede ser un tema difícil de resolver administrativamente.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="9">Revisión conjunta de lo sucedido y ajustes</td><td colspan="4">Actividad 24</td></tr>
<tr><td colspan="4">Componente</td></tr>
<tr><td>MATEMÁTICA</td><td>DIDÁCTICA</td><td>METADIDÁCTICA</td><td>VINCULACIÓN PRÁCTICA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Propósitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Analizar en grupo lo que sucedió en la primaria al implementar la secuencia diseñada.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas</td><td colspan="2">Dificultades esperadas y objetivos de la tarea</td></tr>
<tr><td colspan="2">24.1 El observador y el maestro que dio la clase intercambian impresiones. Puede recurrirse al video como evidencia. No necesariamente tiene que haber acuerdos, pero sí evidencia para sustentar los argumentos.</td><td colspan="2" rowspan="3">Se espera que los registros sirvan para orientar las discusiones.

La experiencia en su conjunto puede ser un buen tema para comentar en grupo.

Los tiempos también podrían complejizar el intercambio, pues para llevar a cabo estas reuniones deben haberse puesto en marcha las 2 o 3 lecciones de cada profesor, y quizá para cuando todos terminen haya pasado mucho tiempo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">24.2 Los maestros de un mismo grado comparten impresiones acerca de qué tan bien funcionó la secuencia con sus estudiantes. Nuevamente, no se trata de llegar a acuerdos sino de discutir con base en evidencia y no en impresiones.</td></tr>
<tr><td colspan="2">24.3 De ser necesario, hacen ajustes a la secuencia.</td></tr>
</table>

Capítulo 7. Experimentación

Como describí en el capítulo anterior, diseñé una secuencia con tres etapas: en la primera se abordaría principalmente lo matemático y lo didáctico; en la segunda se analizarían los programas de estudio y lecciones de los libros de texto gratuitos, y los maestros diseñarían lecciones para sus alumnos de primaria; y en la tercera impartirían esas lecciones en sus grupos y en conjunto se analizaría lo sucedido. Las dos primeras etapas se llevaron a cabo en su totalidad, sin embargo, la tercera no se concluyó. El grupo de maestros participantes fue mermando a lo largo de la segunda etapa y para cuando llevaron las lecciones con sus alumnos ya se habían dispersado mucho y las reuniones para analizar lo sucedido nunca ocurrieron. Las razones seguramente son múltiples, pero los maestros que quedaron hasta el final me dijeron que había sido un taller muy largo y fue mucha la demanda que supuso para ellos el diseño de una secuencia (misma que el propio taller no subsanó). Así pues, al término de la experimentación la evidencia sobre las etapas 2 y 3 era poca e incompleta, por lo que tomé la decisión de incluir solamente dos sesiones de la etapa 2 y dejar fuera del análisis toda la etapa 3.

En este capítulo describo lo sucedido al implementar las etapas 1 y 2 de la secuencia que diseñé. Comienzo por caracterizar en el apartado 7.1 cómo se hizo la invitación a los maestros participantes, quiénes eran y otras precisiones metodológicas. En el apartado 7.2 describo cada actividad desarrollada destacando algunas participaciones específicas, así como los ajustes y decisiones tomadas al final de cada sesión.

7.1 Preparación para el desarrollo de la secuencia

A través del Departamento de Investigaciones Educativas (DIE) del CINVESTAV se hizo contacto con autoridades educativas locales para invitar a maestros de primaria que estuvieran a cargo de grupos de 4° a 6° por ser esos grados en los que se enseñan los decimales. El único requisito fue estar frente a grupo y pertenecer a una escuela pública, sin distinguir por años de experiencia o formación.

Realicé una reunión para explicar los propósitos del taller, la duración, día y hora en la que se llevarían a cabo las sesiones. A dicha reunión asistieron tanto maestros frente a grupo como supervisores, Asistentes Técnico Pedagógicos (ATP) y directores, además de la autoridad educativa que los había seleccionado. Les di una hoja informativa sobre el taller y qué tipo de participación se esperaba de ellos (anexo 4) y se aclaró que su participación era estrictamente voluntaria, sin embargo, la presencia de las autoridades me hizo pensar que al menos en ese momento no podrían tomar la decisión de manera libre. Respecto a la incorporación de figuras directivas, tomé la decisión de permitir su participación ya que todos tenían una amplia experiencia frente a grupo en primaria y se comprometieron a que llegado el momento podrían disponer de un grupo para llevar a cabo su secuencia.

Una vez acordado el día y hora de las reuniones y aclaradas algunas dudas, recabé datos de los asistentes sobre su formación y experiencia laboral (anexo 5): hubo 16 asistentes, once maestros frente a grupo cuya experiencia se encontraba entre 1 y 27 años, un ATP, dos supervisoras, una directora y una coordinadora sectorial (anexo 6). Cabe aclarar que seis de los asistentes no regresaron tras esa reunión, pero en las primeras sesiones del taller se incorporaron seis profesores distintos.

La primera sesión del taller comenzó aproximadamente dos semanas después de la reunión inicial y las subsecuentes se llevaron a cabo una vez por semana, con una duración aproximada de tres horas y media cada una. En total, el desarrollo de la etapa 1 ocurrió en nueve sesiones y el de la etapa 2 en cuatro.

Para conducir el taller invité a la maestra Silvia García Peña quien tiene amplia experiencia en didáctica de las matemáticas y en formación docente. Además, estuvieron presentes el Dr. David Block Sevilla con quien diseñé parte de la secuencia y la maestra Laura Reséndiz quien colabora en el área de didáctica de las matemáticas del DIE. Antes de dar inicio al taller analizamos juntos el diseño de la secuencia e hicimos ajustes, y al término de cada sesión elaboramos minutas y conversamos para tomar decisiones sobre la siguiente. Las aportaciones de todos ellos fueron muy importantes para mi trabajo.

Como nota metodológica, aclaro lo siguiente. Durante las sesiones la responsabilidad de la conducción fue de Silvia García, pero en algunos momentos también intervinimos David Block, Laura Reséndiz y yo. Sin embargo, para facilitar la tarea del lector me refiero a todas esas intervenciones como “la conductora”.

Todas las sesiones fueron video grabadas con autorización de los participantes y hubo dos grabadoras de audio en las mesas para registrar los momentos en los que hubiera trabajo en equipos. A partir de estos dos tipos de registro extraje fragmentos que transcribí para analizar las sesiones.

Los nombres de todos los maestros participantes fueron cambiados.

7.2 Descripción de las sesiones

En esta sección describo a grandes rasgos lo sucedido en cada sesión así como los ajustes que fuimos haciendo sobre la marcha.

7.2.1 Etapa 1

Sesión 0. Primer encuentro

Asistentes: 16

La persona enviada por las autoridades locales se presentó a la sesión y pasó lista a los maestros asistentes. Esto nos hizo saber que habían sido obligados a asistir y algunos se mostraron molestos porque en su escuela no les habían explicado el motivo de la reunión ni les entregaron la hoja informativa que preparamos para ese propósito.

Mientras explicábamos de qué se trataba la tensión fue bajando. Unos dijeron conocer el DIE por sus producciones escritas y se manifestaron contentos y orgullosos de poder participar. Aunque ninguno manifestó franca oposición, se enfatizó que la participación era voluntaria.

Sesión 1. Introducción a los decimales y algunas cuestiones sobre el ordenamiento

Asistentes: 13

Actividad 1 ¿Cuáles son decimales? Discusión inicial para llegar a: en la medición son necesarios los racionales

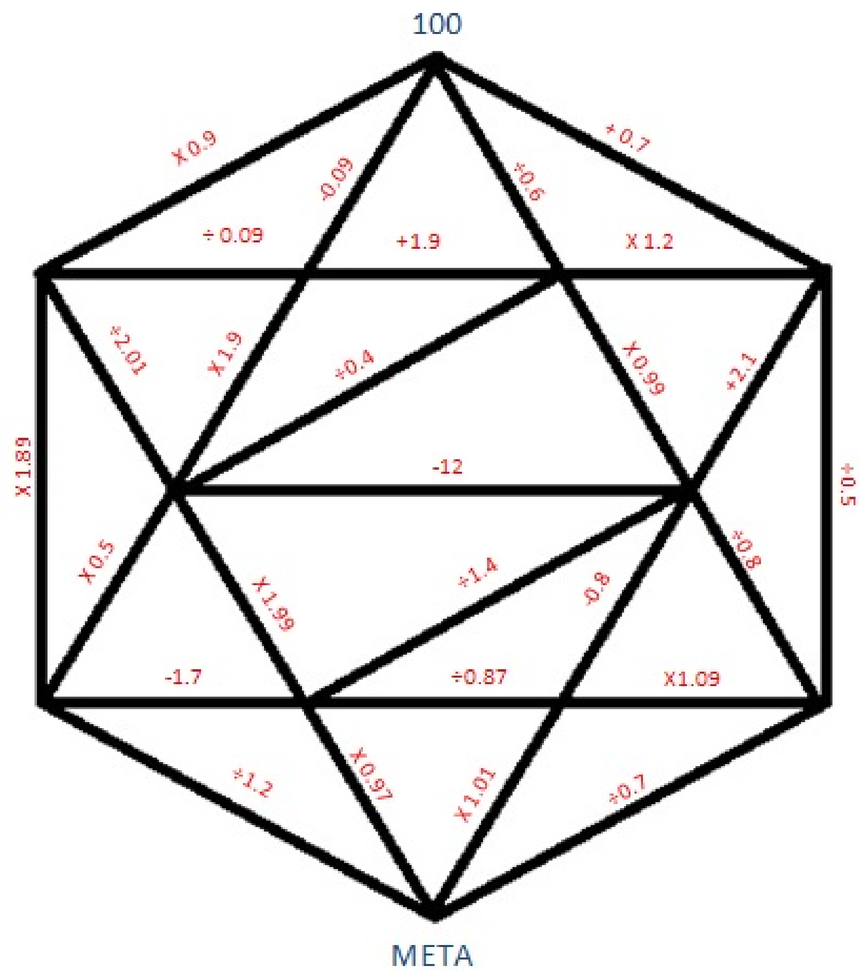
La conductora comenzó la sesión planteando problemas relacionados con averiguar el perímetro de un cuadrado, un triángulo y un círculo. Luego fue preguntando por los números que anotó en el pizarrón con la actividad de los perímetros para que determinaran cuáles eran decimales. En esa discusión se planteó lo siguiente: si 5 representa una fracción de 20, ¿es fraccionario o decimal? Algunos maestros dijeron que depende del contexto: 5 es entero, pero si cambias la unidad es decimal. Otros dijeron que 0.5 es entero porque puede ser algo completo (por ejemplo, una botella con 0.5 litros es en sí misma una botella entera). Respecto a 1.66… algunos dijeron que sí es decimal y otros que es mixto. También surgió el argumento común de que los decimales son los números que están a la derecha del punto (no todo el número, solamente esas cifras).

Una parte de los maestros manifestó querer saber qué es un número decimal y la conductora les explicó que llegaríamos a eso más adelante. Unos parecieron un poco frustrados mientras que otros dijeron que les parecía bien que no les diéramos definiciones en ese momento, posiblemente intuyendo que se trataba de alguna metodología didáctica constructivista y manifestando su apoyo a la misma.

Actividad 2 Resolver la actividad del laberinto de operaciones.[1] La consigna fue: *Trabajar en equipos de 4 o 5 integrantes. Se comienza con 100 puntos en la parte superior del laberinto y hay que elegir el camino más favorable para que al llegar a la meta tengan los más puntos posibles. Trazar el camino que seguirán en el laberinto. Sólo se puede pasar por cada lugar una vez. Una vez trazado, realizar las operaciones con una calculadora y anotar el total de puntos obtenido al llegar a la meta.*

[1] Actividad adaptada de Castro, E. (2001), "Números decimales", en Castro, E. (ed.), *Didáctica de las Matemáticas en la Educación Primaria*, Síntesis, Madrid.

Ilustración 43 Actividad del laberinto. Tomado de Castro, E. (2001).



En uno de los equipos los integrantes se mostraron muy sorprendidos cuando al multiplicar ×0.9 obtenían un producto menor. Incluso dudaron si habían hecho bien la cuenta en la calculadora y la repitieron. Tenían (al igual que en otros equipos) la teoría de que la multiplicación agranda y la división achica sin importar los números involucrados. Comentaron: ¿qué, la división es la que aumenta más?

Durante la discusión grupal opinaron que pasa al revés que con los enteros, multiplicar achica y dividir agranda. Comentaron casos específicos y se dieron cuenta de que, si el divisor es mayor que 1, el cociente va a ser menor que el dividendo (va a disminuir), “tiene que ser sin enteros”. Cuando la conductora preguntó por qué pasaba eso, una maestra dijo “entre más partes tengo que dividir el entero…”.

La conductora pidió que inventaran un problema que se resolviera con 100 ÷ 0.5 y rápidamente una maestra propuso uno con monedas. Hubo otros más con estructuras complejas o con algunos errores que se comentaron brevemente.

Actividad 3 Ordenar una lista de números decimales: 0.40, 0.8, 4/10, 0.177, 0.65, 100/1000 La consigna fue ordenar individualmente los números de menor a mayor, compararlos con otra persona y que juntos escribieran el procedimiento para realizar el ordenamiento.

Surgieron varias hipótesis: en los decimales el que tiene menos (cifras) es el mayor; "mientras más grande es el número, menor es la rebanada" (algo como mientras más cifras tiene a la derecha del punto el número es menor o cuando el denominador es un número grande la fracción es más pequeña). Al discutir grupalmente los ordenamientos salieron a relucir ejemplos que apoyaban estos argumentos: los diezmilésimos son menores que los milésimos por eso es que 0.2405 < 0.239.

Otras propuestas fueron: tomar solamente los décimos, "por ahí podemos empezar"; "para ordenarlos hay que poder asociarlos con algo habitual, como el dinero" (dijeron "¿qué prefieres, un pedazo de 10 o un pedazo de 100?"); escribirlos todos con punto decimal (para no tener fracciones y números con punto conviviendo).

La última consigna de la actividad consistió en redactar cómo le explicarían a un tercero el procedimiento que encontraron para el ordenamiento y hubo comentarios acerca de la utilidad de ese tipo de recursos, pues exigen algo distinto que solamente resolver: hacer explícito y redactar.

Decisiones para la siguiente sesión

Ante las dificultades no esperadas para el ordenamiento decidí iniciar la siguiente sesión con una actividad que permitiera comparar decimales usando longitudes. Algo para llegar a 0.571 = 5/10 + 70/100 + 1/1000.

Dado que la base 10 está muy naturalizada, decidía usar otra. La base 2 daría lugar a muchas cifras pronto, así que opté por la 4 que se previó manejable para ordenamientos y operaciones sencillas.

Sesión 2. Cambio de base

Asistentes: 11

Actividad 4 Medir con tiras usando base 4 Cada pareja recibe dos tiras de papel de 1 metro de largo (no necesitan saber su medida). Consigna: dividir una de las tiras en cuatro partes iguales. A tres de ellas les anotan su medida (con respecto a la unidad de referencia), 1/4. La cuarta la vuelven a dividir en cuatro partes iguales, a tres de ellas les anotan su medida (respecto a la unidad original de referencia), 1/16. Repiten el proceso una vez más para tener cuatro tiras de 1/64. Cada pareja mide tres objetos utilizando las tiras. Anotan sus mediciones en una tabla. Si emplearon 4 o más veces una misma tira, la deben cambiar por la tira del siguiente tamaño (1/16 + 1/16 + 1/16 + 1/16 + 1/16 deben anotarlo como 1/4 + 1/16, por ejemplo). Las medidas se escriben en la tabla utilizando números con punto (quedarán cosas como 0.102 que sería 1/4 + 0 dieciseisavos + 2/64).

La partición de las tiras generó discusiones, algunos dijeron que con la primera partición cada tira medía 1/4, con la segunda 1/16 y 1/32 con la tercera; pero otros comentaron que era 1/64 porque 1/16 × 4 = 1/64 y tenían cuatro tiras de ese tamaño. Todos parecieron estar de acuerdo con este argumento.

Cuando anotaron en la tabla trazada en el pizarrón sus mediciones, una maestra afirmó que después de las tiras completas deben escribir un punto. Una vez que anotaron las mediciones en la tabla, el ordenamiento no supuso dificultades.

Actividad 5 Ordenar mediciones con cambio de base. Consigna: las siguientes son posibles mediciones hechas con las tiras. Ordenarlas de menor a mayor: 0.21 0.021 0.210 0.13 0.003 0.3 Verificar el ordenamiento usando tiras de papel.

La conductora incluyó en la lista otros dos números: 3/16 y 15/64. El primero no causó problemas pues se puede escribir directamente en la tabla con notación con punto, pero el segundo número debían “transformarlo” planteándose ¿cuántos dieciseisavos se pueden formar con 15/64?, ¿alcanzará para formar 1/4?, etc. Algunos equipos tuvieron dificultades para hacer esto y se observó un uso generalizado de las tiras para tener presentes las equivalencias entre 1/4, 1/16 y 1/64.

Una maestra pasó al pizarrón a escribir el ordenamiento y lo hizo correctamente.

Una pareja escribió 15/64 así:

Ilustración 44 Escritura de 15/64 en una tabla en base 4.

Tiras completas	1/4 de tira	1/16 de tira	1/64 de tira	1/256 de tira
0	0	0	1	5

El grupo comentó que eso no estaba bien. Discutieron si podrían ser 264avos. Una de las maestras integrante de esta pareja pasó al pizarrón tratando de averiguar cuánto es 15/64 en 16avos mediante la comparación de razones. Sabía que:

1/16 es a 4/64 así que escribe

?/16 – 15/64

No logró terminar, alguien le sugirió que lo que hacía falta era una división (15 ÷ 4). Llama la atención que saberse una técnica más compleja y general puede también dificultar la resolución de problemas que pueden resolverse con técnicas más simples.

Otros lo hicieron así:

Ilustración 45 Escritura de 15/64 en una tabla en base 4 (2).

Tiras completas	1/4 de tira	1/16 de tira	1/64 de tira
0	0	1	5

Sin embargo, sabían que no era una escritura válida pues en base 4 el dígito máximo en cada orden es 3.

Actividad 6

“Problemas tipo” de nivel primaria con cambio de base.

Consigna: resolver los siguientes problemas.

Una tira mide 1.230 y otra mide 1.32 ¿cuál es más larga?, ¿por cuánto es más larga?

El largo de la tira A menos 0.103 es igual a 0.212, ¿cuánto mide la tira A?

¿Cuánto medirán seis tiras de 0.023 juntas?

Para resolver el primer problema en unos equipos restaron la cifra mayor sin importar si se encontraba en el minuendo o sustraendo:

Ilustración 46 Resta en una tabla en base 4.

Tiras completas	1/4 de tira	1/16 de tira	1/64 de tira
1	2	3	0
-1	3	2	0
=	1	1	

Su respuesta fue 1/4 + 1/16.

Otro equipo convirtió a base 10:

> 1.230 = 1 entero + 2/4 + 3/16 + 0/64 = 1 entero + 8/16 + 3/16 = 1 entero + 11/16
> 1.32 = 1 entero + 3/4 + 2/16 = 1 entero + 12/16 + 2/16 = 1 entero + 14/16. Así que 14/16 – 11/16 = 3/16

Los procedimientos de otros equipos estuvieron totalmente basados en el uso de las tiras. Representaron cada cantidad con las tiras y las usaron también para hacer las operaciones. Llamó nuestra atención que se disculpaban por tener que hacer las operaciones usando material pues estaban conscientes de que hay procedimientos más fáciles y “evolucionados” (los algoritmos), pero no sabían cómo usarlos en base 4.

Para el segundo problema, una pareja de maestros intentó resolver como si la cantidad A fuera una incógnita con la que debían operar, “si está sumando pasa restando”; pero otra maestra más intuitiva explicó que si a A se le quitó algo y dio 0.212, entonces A debe ser mayor que 0.212. Hicieron la suma:

$$\begin{array}{r} 0.212 \\ \underline{+0.103} \\ 0.315 \end{array}$$

Cuando la conductora las preguntó su resultado se dieron cuenta de que “el máximo es 3” y ellos pusieron un cinco. Decidieron hacer la operación usando fracciones y no números con punto. Se apoyaron en la tabla y tras algunos errores de cálculo obtuvieron el resultado.

Una maestra explicó el tercer problema (0.23 × seis) así:

Ilustración 47 0.23 × 6 en una tabla en base 4.

Tiras completas	1/4 de tira	1/16 de tira	1/64 de tira
0	0	2	3
0	0	2	3
0	0	2	3
0	0	2	3
0	0	2	3
0	0	2	3
0	0	12	18
0	0	12 4	2
0	4	0	2
1	0	0	2

La última resolución que se compartió grupalmente fue:

1 tira 0.023 = 11/64
11/64 × 6 = 66/64 = 1.002

Actividad 7

Ubicación en la recta numérica y tercios con base 4

Consigna: En parejas o equipos trazar una recta señalando el 0 y el 1. Dividirla en 4 partes iguales y escribir los números con punto que corresponden en cada rayita (0.1, 0.2, 0.3, 1). Volver a dividir en 4 partes iguales para escribir 0.01, 0.02, 0.03, 0.1. La siguiente división no podrán hacerla físicamente en la recta, pero comentar qué números irían ahí.

Hacer una lista de los números que señalaron en la recta, empezando por el 0 y terminando en 1 (sería 0, 0.001, 0.002, 0.003, 0.01, 0.011, 0.012, etc.). Si se volviera a dividir en cuatro partes iguales el tramo comprendido entre 0.001 y 0.002 ¿cuáles números corresponderían a esas rayitas de las subdivisiones?, ¿hasta qué número se puede seguir dividiendo?

Consigna: ¿cuánto mediría un tercio de una tira completa usando las tiras en base 4?

La conductora decidió hacer la recta en el pizarrón para ahorrar tiempo. No pareció haber problemas excepto con un maestro que colocó: 0.3, 0.33, 0.34, 0.35, 1. Con ayuda pudo corregir.

La actividad de seguir subdividiendo pareció plausible teóricamente, pero manifestaron dudas acerca de si ese proceso podría ser infinito. “Con aparatos especiales”, dijo una maestra.

En la actividad con los tercios hubo maestros que tuvieron dificultades para argumentar por qué no se podía llegar a una medida exacta. La conductora fraccionó el rectángulo en cuartos dos veces para mostrar que siempre sobra.

Decisiones para la siguiente sesión

La actividad de medición con tiras en base 4 fue un éxito. Si bien hubo dificultades con la base también mucha reflexión en torno a la medición, la escritura y por ende, el orden. A raíz de esta actividad se comentó grupalmente sobre el uso del material (que puede ser muy útil y también inútil), pero todos manifestaron enfáticamente que a ellos les ayudó en esta sesión. “La tablita es mágica” dijo un maestro.

La actividad de expresar tercios con números en base 4 abrió la discusión hacia un proceso de subdivisión infinito. Parecían convencidos de que se sigue dividiendo, pero no estaban seguros de que el proceso fuera infinito.

Nota de esta sesión: en algún momento un maestro dijo que 3/64 = 1/16 “pues el máximo número es 3”, confundiendo el hecho de que el máximo número que se puede escribir es 3, con el tamaño de los agrupamientos (que es 4). Habrá que volver a esto con la base 10.

Sesión 3. Números en la recta

Asistentes: 13

Actividad 8

Ordenamiento de números y ubicación en la recta

Consigna: Ordenar cada pareja de números. Luego, ubicarlos en la recta para verificar el orden y analizar lo que comporta la ubicación misma (equivalencia, subdivisiones).

25/100 y 3/4, 3/10 y 60/100, 50/1000 y 5/100, 14/10 y 100/100, 0.50 y 0.05, 0.2 y 0.177, 2/10 y 5/10, 15/100 y 2/5, 11/10 y 8/5, 50/100 y 1/4.

Escribir en pareja cómo lo explicarían a alguien más cuál es la manera que encontraron para ubicar números en la recta numérica cuando tienen distinto denominador. Intercambiar con otra pareja.

Para algunos maestros eran claras equivalencias como 50/1000 = 5/100, pero sus argumentos para explicarlas no fueron muy sólidos. Otros lograron explicar mejor sus respuestas:

> 14/10 > 100/100 porque 14/100 = 1.4 y 100/100 = 1.
> 0.50 > 0.05 porque 50 centésimos es tomar 50 partes de 100 y 5 centésimos es 5 de 100.
> 0.2 > 0.177 porque en la recta está antes.
> Para comparar 11/10 y 8/5 hay que escribir 8/5 como 16/10.
> Se puede dividir 8 entre 5 y así comparar 1.6 con 11/10.

La conductora preguntó: al dividir 8 entre 5 (hace la casita) las 3 partes que sobran ¿qué son? Unos dijeron que enteros, otros décimos, quintos, decimales…

La conductora trazó una recta con división en quintos y ubicó 8/5, luego subdividió en décimos para ver que 8/5 = 1.6. Los participantes pasaron al pizarrón a ubicar los números en las rectas sin dificultades. Luego leyeron sus procedimientos.

La conductora recuperó lo hecho hasta ese momento en la sesión para analizar la secuencia didáctica. Los maestros explicaron sus ideas acerca de por qué primero llevamos a cabo la comparación y luego la ubicación en la recta. Surgieron opiniones poco estructuradas acerca de procesos mentales, por ejemplo, qué es un problema, “interiorizar”, “conflicto cognitivo”. Posteriormente se discutió sobre contextos con magnitudes discretas para problemas con decimales y propusieron algunos como 3/4 de 20 cerdos.

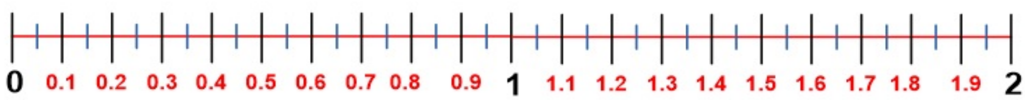
Actividad 9

Juego con fracciones

Consigna: Por turno, cada uno elige del tablero una fracción y la tacha. Después de tacharla, con la calculadora la convierte a decimal y la ubica en la recta con una flecha. Gana el primero que logre colocar tres flechas consecutivas, es decir, tres flechas sin que entre ellas haya una flecha del contrincante. Usen un lápiz de color diferente para distinguir las flechas de cada uno.

Ilustración 48 Actividad de ubicación de fracciones en la recta. Tomada de Block y García (2006).

$\frac{13}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{19}{10}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{17}{10}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{10}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{9}{20}$
$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{11}{10}$	$\frac{27}{20}$	$\frac{4}{5}$



Mientras los maestros estaban ubicando en las rectas, decidimos plantear una actividad extra ya que la comparación y ubicación parecieron fáciles tras la experiencia con las tiras de la sesión pasada. Tomamos una parte de una lección de Fractal.[2]

Tuvieron algunas dificultades para entender cómo ganar el juego, pero tras varios intentos casi todos tenían una estrategia. Mencionaron que la actividad les gustó por el formato tipo juego.

Se discutió si 1/10 es un punto en la recta o un “trayecto” y también sobre la definición de número decimal. Ante la demanda de los maestros, la conductora definió a los decimales como los que tienen denominador 10 o potencia de 10.

[2] Block, David y García, Silvia (2006). Fractal. Secundaria. Primer Grado. Ediciones SM, Ciudad de México.

Actividad 10

Lectura y comentarios sobre un registro de clase

Consigna: Leer el registro de clase, grupo A maestra Isabel (anexo 7) y posteriormente, comentar en grupo contestando las preguntas de manera verbal.

¿Creen que la actividad era difícil o era fácil para los alumnos? ¿En qué lo notan?

¿Qué dificultades tuvieron los alumnos en la ubicación de las fracciones?

¿Por qué los alumnos que hicieron dos rectas (una para ubicar 5/5 y 8/10 y otra para ubicar 10/16) no tuvieron dificultades y en cambio los que hicieron una sola recta sí las tuvieron? ¿Cuántas subdivisiones hay que hacer para poder ubicar fracciones con denominadores a y b?

¿Por qué cuando la maestra pasa a los alumnos al pizarrón a trazar sus rectas no "aparecen" las dificultades anteriores?

¿Es correcto lo que hizo A_6?

¿Creen que las fracciones que propuso la maestra fueron una buena elección para la actividad de ubicación en la recta?

¿Ustedes habrían hecho algo distinto a lo que hizo la maestra Isabel?, ¿qué?

Algunos de los comentarios que surgieron en el grupo fueron duros con la maestra del registro, por lo que la conductora intervino para que se enfocaran en entender las decisiones de esa maestra y las cuestiones que dieron lugar a dichas decisiones.

Decisiones para la siguiente sesión

Faltó destacar el propósito de la lectura de registros, ¿qué se pretende con ello?

Para evitar que hicieran juicios rápido decidí explicar que la tarea consistía en 1) Identificar el propósito posible de la actividad, y 2) Identificar las dificultades de los niños, los procedimientos diferentes, los errores. A final y con cautela, ver alternativas de conducción: ¿Qué se podría haber hecho...?

Por otro lado, fueron saliendo temas de decimales pendientes: los decimales como promedios (¿qué significa media de 2.2 hijos por familia?) y en porcentajes (¿qué significa 1.2%?).

Decidí hacer dos cambios para la siguiente sesión: cambié el formato de la actividad de cálculo mental para que fuera un juego con tarjetas dado el gusto que mostraron por este tipo de actividades; y añadí una actividad sobre operaciones con calculadora antes de las de densidad.

Sesión 4. Situaciones aditivas y densidad

Asistentes: 16

Actividad 11

Cálculo mental, sumas y restas con decimales

Consigna: formar equipos de 3 integrantes. Hay dos juegos de tarjetas por equipo, uno con operaciones y otro con resultados. Se reparten las tarjetas con resultados entre los tres integrantes, y las de operaciones se dejan boca abajo en el centro. Destapan una operación y quien tenga el resultado lo pone al centro. Gana el primero que se quede sin tarjetas. Se resuelve con cálculo mental.

Ilustración 49 Tarjetas con sumas y restas. Elaboración propia.

$0.9 + 0.2$	$0.09 + 0.02$	$2 - 0.999$	$0.02 - 0.009$
$0.99 + 0.02$	$0.9 + 0.201$	$2.101 - 0.99$	$0.2 - 0.0999$
$0.09 + 0.021$	$2.01 - 0.9$	$2.001 - 1.901$	$2.101 - 1.1009$

1.1	0.11	1.001	0.011
1.01	1.101	1.111	0.1001
0.111	1.11	0.1	1.0001

Aunque sabían que la consigna era ocupar el cálculo mental, la mayoría de los maestros resolvió la tarea pensándola como algoritmo (se imaginaban las cuentas para buscar la tarjeta correcta, sumando o hallando el complemento en las restas). Una maestra dijo que en su equipo hicieron equivalencias para resolver: 0.02 = 0.020 entonces 0.020 era fácil restarle 0.009. Hubo algunos errores que la actividad misma permitió corregir, pues al faltar una tarjeta para empatarla con otra, debieron revisar sus anteriores resultados.

Actividad 12

Sumas y restas de decimales con calculadora

Consigna: usa una calculadora sencilla para resolver.

Teclea en la calculadora:

3	.	5	+	.	4	=

¿Qué obtienes? Vuelve a teclear =, ¿qué obtienes? Teclea = = = ¿Qué observas?

Se teclea en la calculadora: 2 + .1 ¿Qué número aparecerá en la pantalla si se teclea el signo = 3 veces? ¿Y si se teclea 11 veces?

Se teclea en la calculadora: 3.4 + .01 ¿Qué número aparecerá en la pantalla si se teclea el signo = 10 veces? ¿Y si se teclea 30 veces? ¿Y si se teclea 1000 veces?

Se teclea en la calculadora: 1.08 + .2 ¿Qué número aparecerá en la pantalla si se teclea el signo = 5 veces? Si en la pantalla aparece 4.08, ¿cuántas veces se tecleó el signo =? ¿En algún momento aparecerá en la pantalla 10.20? Justifica.

Se teclea en la calculadora 4.1 - .004 ¿Cuántas veces se tiene que teclear el signo = para que aparezca en la pantalla el número 4 sin decimales? Si en la pantalla aparece 3.5 ¿cuántas veces se tecleó el signo =? ¿En algún momento aparecerá en la pantalla el número 3.912? Justifica.

Resolvieron la actividad individualmente, muy concentrados. Hubo dificultades para entender que 3 + 0.1 apretando 10 veces la tecla = es 4, no 4.1.

Comentaron que les pareció interesante y también difícil. Se discutió sobre las variables en juego: tipo de números, el lugar de la incógnita, la necesidad de estrategia para no tener que teclear 1000 veces, que se puede hacer una anticipación, que la consigna plantea un desafío al aumentar el número de veces de 30 a 1000 (en vez de ir paulatinamente), que cuando es de suma es más fácil que cuando es de resta, y que el juego permite retroalimentación.

La conductora explicó el procedimiento que siguió una maestra para 3.4 + 0.01:

10 veces aumenta 0.1 (lugar, décimos)
100 veces aumenta 1 (lugar, unidades)
1000 veces aumenta 10 (lugar, decenas)

Algunos usaron regla de 3 y en el grupo surgió la duda de si la situación era proporcional. Como no podían determinarlo, la conductora escribió en el pizarrón la siguiente tabla y excepto dos maestras, todos dijeron que sí era proporcional.

Ilustración 50 Ejemplo dado por la conductora para determinar si hay proporcionalidad.

=	R
1	4
2	5
3	6
4	7

Tras la discusión la conductora explicó que se trata de que se conserven las multiplicaciones, no las sumas.

Actividad 13

Ideas iniciales sobre la densidad

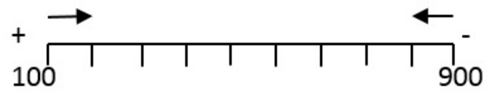
Consigna: Jugar en parejas "Conejos y cangrejos". Se dibuja una recta numérica en el pizarrón señalando 0 al 100. Participan dos jugadores, uno avanza del 100 al 0 y el otro en el sentido inverso. Cada uno dice un número. Pierde el que se "encima" o rebasa al otro. Hacerlo una vez en el pizarrón y luego lo juegan en parejas en sus mesas.

Una segunda versión es hacerlo con la calculadora. Se dibuja un segmento de recta en el pizarrón:

El jugador A hace aparecer un número mayor de 100 y menor que 900 en la pantalla, por ejemplo, 167. El jugador B debe hacer aparecer otro número que sea menor que 900 y mayor que 100 y además, que sea mayor que el que dijo el jugador A: por ejemplo, 835. Cada uno de los jugadores sitúa su número aproximadamente sobre la recta numérica. A continuación, se dan las consignas:

- El equipo A puede utilizar sólo la tecla (+) y cualquier número; el equipo B sólo utilizará la tecla (-) y cualquier número.
- Cada jugador realizará una operación de forma alternada comenzando por el jugador A.
- El primer jugador que llegue al número del otro jugador o que lo rebase, será el perdedor.

Ilustración 51 Actividad de Conejos y cangrejos. Elaboración propia.



Pasaron al frente dos maestros, uno de ellos “pescó” rápidamente lo que estaba detrás de la actividad, mientras que su compañero todavía no entendía bien lo que pasaba. El grupo le fue sugiriendo números a este último. Algunos comentaron que el juego no acabaría nunca (pues los racionales son densos).

Al terminar las dos versiones se comentó en grupo la experiencia. A algunos la versión con calculadora les gustó menos porque en la pantalla sólo caben cierto número de cifras. Para otros no quedó clara la diferencia entre hacerlo con enteros o decimales, evidenciando que la noción de densidad no estaba presente todavía.

> Conductora: ¿cuál fue el propósito aquí?
> Maestro: que hay infinitos números.
> Maestro: sucesor y antecesor.
> Conductora: ¿Qué pasa si es con enteros?
> Maestra: no es infinito
> Conductora: ¿con décimos? (limitando a que sólo se puede llegar a décimos)
> Maestro: no es infinito

Un maestro insistió en que la idea de antecesor y sucesor es un conocimiento previo, necesario para ver si ya rebasó al compañero o no.

> Conductora: ¿los decimales tienen antecesor y sucesor?
> Maestros: sí.
> Conductora: ¿cuál es el sucesor de 5.1?
> Maestra: 5.2, no, 5.11
> Maestra: en los naturales el sucesor es +1 y el antecesor -1 ¿aquí tendría que ser + 0.1?

La conductora anotó 5.1 → 5.11, 5.100 → 5.101, 5.1000 → 5.1001

Hubo dudas, dijeron que depende de si se determina que en décimos o centésimos. La conductora dejó caer una gran noticia: no hay antecesor ni sucesor, se puede saber si un número es mayor que otro, o si está antes o después en la recta, pero no inmediatamente después.

> Maestra: ¿entonces cómo puedo decir cuál es mayor o menor?
> Conductora: así como le estuvimos haciendo nosotros antes cuando ordenamos números, cada decimal lo puedo ubicar en la recta (todos están de acuerdo).

Se comentó si este juego sería igual o distinto usando fracciones en vez de decimales. Algunos opinaron que sería igual, se podría seguir "alargando".

Decisiones para la siguiente sesión

En la sesión no dio tiempo de leer los registros de clase sobre actividades en las que se estudia la densidad. Decidí iniciar con esto la siguiente sesión explicitando los objetivos que redacté previamente e intentando guiar la discusión más hacia el análisis de la actividad y las interacciones, y menos hacia los juicios sobre el desempeño docente.

Sesión 5. Densidad y actividades multiplicativas con racionales

Asistentes: 12

Actividad 14

Lectura y comentarios sobre un registro de clase

Consigna: Leer el registro de clase, maestra Berta (anexo 8) y posteriormente contestar las preguntas de manera grupal.

¿Por qué creen que la maestra empezó la clase ubicando naturales entre dos naturales dados?

¿Es difícil o fácil la actividad para los alumnos de 6°?

¿Qué le dirían a un alumno que responde que entre 1.2 y 1.3 está 1.2 y medio?

¿Por qué creen que A7 duda cuando la maestra le dice que ubique donde quiera el 1.24?

La maestra siempre pidió que dijeran qué número decimal estaba en medio de otros dos. Sin embargo, pudo haber dicho que hallaran un número cualquiera entre dos números dados (no necesariamente el de en medio). ¿Qué harían ustedes?, ¿qué opción consideran mejor o da igual?

¿Qué opinan sobre la explicación de la maestra acerca de ir viendo cada cifra en los dos números dados para hallar un tercer número?, ¿habrían hecho una explicación distinta?, ¿cuál?

¿Consideran que la recta numérica es un recurso útil para trabajar la propiedad de densidad en los decimales con alumnos de 6° de primaria?, ¿habrían propuesto algo diferente?

Consigna: Leer el registro de clase (Broitman, et al, 2003) y posteriormente contestar las preguntas de manera grupal.

¿Qué contenido matemático se aborda con esta actividad?

¿En qué es diferente esta actividad a la que propuso la maestra Berta?

¿Qué usos para el desarrollo de la clase tienen las propias producciones de los alumnos?

¿Creen que sea una actividad fácil o difícil para alumnos de 5° o 6°?

¿Creen que el problema plantea un reto a los alumnos que resulta útil para estudiar la densidad en los decimales?, ¿cambiarían algo?

Tras la lectura del primer registro, los maestros opinaron que la actividad era difícil para los alumnos. Saben que es de densidad y les parece difícil que los alumnos lleguen más allá de los milésimos. Otros comentaron las similitudes de la actividad planteada en el registro con la que ellos resolvieron la sesión pasada (atrapa el decimal), sin embargo, no hicieron explícito que detrás está la noción de densidad.

Se discutió ampliamente sobre usar problemas con o sin contexto (el que se leyó en el registro no tiene contexto). Algunos dijeron que eso no les sirve a los niños, mientras que otros (los menos) defendieron el interés de una actividad aunque no incluyera escenas de la vida cotidiana. Pusieron varios ejemplos de actividades que han planteado a sus alumnos (incluso uno dijo que ya había puesto en marcha la de “atrapa al decimal” con su grupo de 6°). No todas las intervenciones resultaron provechosas para hacer avanzar la discusión matemática ni didáctica.

La actividad de la segunda lectura les pareció más fácil para los estudiantes por razones que no fueron argumentadas con claridad. La conductora hizo una recapitulación acerca de las variables didácticas que la maestra del registro empleó destacando la forma en que fue modificando los rangos entre los cuales había que ubicar un número.

Al cerrar la conversación sobre los registros la conductora definió densidad: entre dos decimales siempre hay otro decimal.

Actividad 15

Cuando el multiplicador no es entero

Consigna: Redactar dos problemas para cada operación empleando contextos lo más distintos entre sí que sea posible (en hojas que puedan pegarse en el pizarrón), 4 × 7, 4 × 0.7 y 0.4 × 0.7.

Multiplicar por 7 puede interpretarse como sumar 7 veces, ¿qué significa multiplicar por 0.7?

Cuando se multiplica una cantidad, ¿siempre se agranda?

La conductora comentó que de cada problema se analizaría que el contexto fuera pertinente y diera lugar a la operación que se pide. Mientras los equipos fueron inventando sus problemas ella los fue transcribiendo en un archivo de Word para proyectarlo.

Una pareja de maestras multiplicó 4 × 0.7 en la calculadora, pero debido a un error obtuvieron 0.28. Dudaron, una dijo que 0.28 entre 0.7 debería dar 4. Verificaron y corrigieron procediendo a redactar el problema.

Salieron a relucir ideas aprendidas en otros espacios de formación, como que un problema debe tener “qué”, “cuál”, “dónde”, etc. Se discutió si tener contexto es requisito para que una actividad matemática sea un problema. La conductora dijo que sin contexto también puede ser problema (en el sentido de actividad matemática desafiante, modo de "entrar" a un conocimiento matemático).

Luego, la conductora comentó sobre la dificultad con el cambio de significado: si la medida de "veces" es entera es fácil, pero si el multiplicador es no entero el significado conocido cambia. Esta idea fue planteada por ella, pero no muy discutida por los participantes. Evidentemente, les resultó difícil hacer un problema con 0.4×0.7 (no todos lo lograron y solamente uno de los problemas inventados fue claro para todos), pero las razones de la dificultad encontrada con esa operación no parecieron ser comprendidas aún por los maestros.

Decisiones para la siguiente sesión

Los multiplicadores no enteros se seguirían estudiando, así que habría oportunidad de retomar el tema en las siguientes sesiones por lo que no modifiqué las actividades planificadas.

Sesión 6. Multiplicaciones y divisiones con fracciones

Asistentes: 10

Actividad 16
Las vueltas del tren
Consigna: resuelve.
Un tren da vueltas alrededor de un circuito pequeño, de 3/4 de kilómetro. Calcula los datos que faltan en la tabla.
¿Cuánto es 3/4 de pastel entre 3 personas? ¿Y entre 2? ¿Y entre 4?
¿Cuánto es 2/3 de pastel entre 3 personas? ¿Y entre 5?
_______ de pastel se repartió entre 6 personas y a cada una le tocó 1/12.
4/5 de pastel se repartió entre _______ personas y a cada una le tocó 4/15.

Ilustración 52 Vueltas de un tren en un circuito. Tomada de Block y García (2006).

Número de vueltas	1/4	1/3	½	2/3	1	1 2/3	2	2 2/3	4	5 1/3
Número de kilómetros					¾					

Número de vueltas	0.2	0.6	1.3	1.5	2.4	3	3.1	3.125	4.25	$5.\bar{3}$
Número de kilómetros										

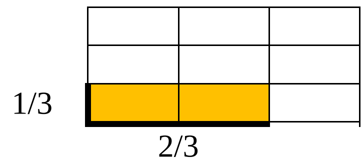
Aunque todos los participantes parecían tener a la mano los algoritmos para multiplicar fracciones, casi ninguno las utilizó pues representaron las fracciones usando números con punto. Otros usaron procedimientos vinculados a la proporcionalidad, como el valor unitario y las razones internas.

Explicaron al frente los procedimientos. La conductora fue resaltando algunos hechos importantes, como que multiplicar por 2/3 es lo mismo que dividir entre 3 y luego multiplicar el resultado por 2.

Con los problemas de pasteles algunos sabían que era necesario buscar numeradores o denominadores divisibles entre el entero que estaba en juego, despegándose un poco de los algoritmos. Emergió que para dividir una fracción entre un entero se puede dividir el numerador o multiplicar el denominador.

La conductora explicó procedimientos gráficos: 2/3 ÷ 3 está relacionado con 2/3 × 1/3.

Ilustración 53. Ejemplo dado por la conductora para 2/3 × 1/3.



Para resolver ____ ÷ 6 = 1/12, una maestra explicó que multiplicó 1/12 × 6, apoyándose en lo que ya sabe de las operaciones aritméticas para encontrar solución a un problema nuevo.

Actividad 17[3]

El cohete: multiplicar por un racional es una composición de operadores

Consigna: resuelve

El siguiente dibujo del cohete se va a reproducir de manera que: en la copia A las medidas sean 1/4 de las medidas del dibujo original, y en la copia B sean 3 veces mayores que en la copia A.

Calcula y anota en la tabla las medidas que faltan.

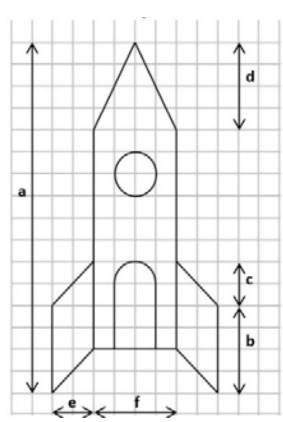
Dibuja en papel cuadriculado las copias A y B.

¿Cuál es el factor de escala que aplicado al original produce la copia B? Anótalo en el redondel que está arriba de la tabla.

Las medidas de la copia C son 3/4 de las medidas del dibujo original. Calcula las medidas de la copia C y anótalas en la última columna de la tabla.

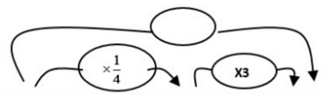
Explicar por qué las medias obtenidas en la copia C son iguales a las de la copia B.

Ilustración 54. El cohete a escala. Tomadas de Block y García (2006).



[3] Actividad tomada de Block y García (2006).

Ilustración 55 El cohete a escala. Tomadas de Block y García (2006).



	Dibujo original	Copia **A**	Copia **B**	
Medida a				
Medida b				
Medida c				
Medida d				
Medida e				
Medida f				

El llenado de tablas se hizo en equipos, no pareció haber dificultades.

La conductora preguntó cuál era el propósito de la actividad. “Para razonar” dijo una maestra, “la cuarta parte y luego multiplicar por 3 es lo mismo que multiplicar por 3/4”, idea que ya se había discutido a partir de la actividad anterior.

Decisiones para la siguiente sesión

En la sesión se lograron terminar las actividades planificadas y de manera general, los maestros participaron en las discusiones acerca de los multiplicadores racionales como composición de operadores (uno que multiplica y otro que divide) sin tener que recurrir únicamente al algoritmo para resolver. Para la siguiente sesión estaban programadas actividades en las que los racionales son operadores y no modificamos el plan.

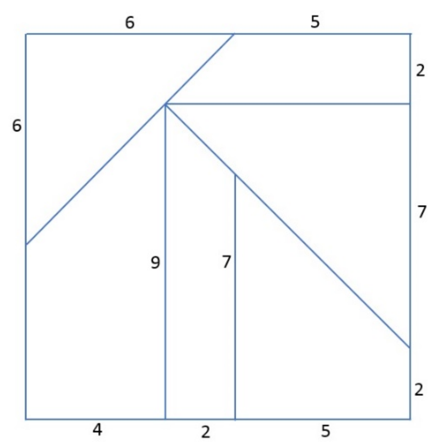
Por otro lado, los maestros comentaron cuestiones sobre las “obligaciones” a las que algunos se habían visto sometidos respecto a compartir con sus colegas lo que estaban aprendiendo en el taller. Manifestaron dudas al respecto, pero no se notaban forzados ni en franco rechazo, más bien buscando orientación con nosotros.

Sesión 7. Otras tareas multiplicativas

Asistentes: 16

Actividad 18 La multiplicación como operador en una relación de proporcionalidad Consigna: Resolver en equipos. Dibujar un rompecabezas[4] como el que se muestra y recortar las piezas. Van a construir entre todos un rompecabezas a escala, más grande, de tal manera que el lado que mide 4cm en el original, mida 7cm en el rompecabezas ampliado. Repártanse las piezas en el equipo y cada uno construya la ampliación de las que le tocaron. Armen el rompecabezas ampliado y verifiquen que las piezas embonen.

Ilustración 56 El rompecabezas a escala. Tomada de Brousseau, G. y Brousseau, N. (1987).



En un equipo comenzaron empleando una estrategia aditiva (sumar 3 a cada medida), aunque no todos los integrantes estaban de acuerdo en que funcionaría. El argumento que terminó por convencer a quienes querían emplear esa estrategia fue la medida del cuadrado: al sumar 3 a cada figura ya no se conserva el cuadrado, "no sale".

Sin embargo, ningún equipo siguió la consigna de repartirse las piezas y agrandarlas individualmente. Todos los equipos trazaron el cuadrado agrandado y dentro, las figuras, lo que imposibilitó que hubiera la parte de armado de rompecabezas.

Al comentar grupalmente los procedimientos, la explicación de un equipo dio cuenta del empleo de razones internas, aunque no lo nombraron así (si medía 4 y ahora debe medir 7, debe conservarse esa razón en todas las demás medidas). Otro equipo lo resol-

[4] Tomado de Brousseau y Brousseau (1987).

vió usando la regla de tres: si 4 es 100%, 7 es 175%. Así, la escala es 75% más grande, todas las medidas se multiplican por 0.75 y al resultado le añaden la medida original (habría sido más directo multiplicar por 1.75 pero no lograron vincular el aumento de 175% con multiplicar por 1.75). Otro maestro dijo que vieron la proporción de aumento, que es 3/4, 0.75 o 75%. Hicieron:

Ilustración 57 Esquema para una ampliación de 3/4.

	÷ 4		× 3	
original		___		ampliación

La conductora preguntó cómo pasar de la medida original a la ampliación (o sea, que vean que se puede multiplicar por 1.75 o por 7/4). No todos parecieron entender la pregunta, como si no alcanzaran a imaginar un único operador para llevar a cabo la ampliación. Una maestra dijo que 3/4, pero pronto se dio cuenta de que es igual a 75%. Otra dijo que era 1.75 fijándose en la tabla que dibujó la conductora: 3.5 ÷ 2.

Ilustración 58 Ejemplo dado por la conductora para una ampliación de 1.75

× 1.75		
× 0.75		
Original		Copia
2	1.5	3.5
5	3.75	8.75

La conductora preguntó cuál sería el propósito de esta actividad.

Escala, variación proporcional.
Para resolver los alumnos tendrían que saber tablas de variación y escala.
Uso de instrumentos de medición. 19.25 ¿dónde está?
Lo más probable es que usen razones internas.
Si el aumento hubiera sido de 4 a 8 sería más fácil, no habría reto.
Pensé en un aumento de 4 a 7 era de 7/4, pero no lo logré.

La conductora comentó que hay que permitir a los alumnos explorar procedimientos distintos y no decirles “multipliquen por 1.75”, así es como se apoya la construcción de que un aumento no entero es multiplicar por un número no entero. Además, se pueden compartir procedimientos distintos (como hicimos ahí).

Actividad 19

Lectura y comentarios sobre un registro de clase

Consigna: Leer el registro de clase de un grupo de 6° primaria que resolvió esta actividad (anexo 10) y posteriormente, comentar en grupo contestando las preguntas de manera verbal.

A lo largo de las dos sesiones, los alumnos logran varias expresiones del operador multiplicativo en juego, por ejemplo, x → x más “3 de cada 5” x. Identifiquen algunas más.

Identifiquen algunos de los errores que cometen los alumnos a lo largo de la experiencia y señalen cómo se dan cuenta de que hay error o si no se dan cuenta.

¿Creen que la actividad resultó fácil o difícil para alumnos de 6°?

El registro se leyó en voz alta durante la sesión, la conductora fue haciendo pausas pues iba señalando que algunos procedimientos empleados por los alumnos eran los mismos que ellos utilizaron.

La lectura en voz alta permitió notar que no conocían algunas expresiones usadas en el texto, como 5 : 3, 5 → 3, x → 3x

Causó dudas la solución que dio un equipo en el registro (de hecho, ese equipo planteó dos soluciones, como si no se hubieran puesto de acuerdo entre ellos). Especularon qué habrá sucedido y comentamos que a veces el maestro no puede estar pendiente de todos y cada uno de los alumnos y pasan cosas así.

Durante la discusión salió a cuenta el típico procedimiento para expresar fracciones mediante un número con punto: dividir el numerador entre el denominador. Aunque es un algoritmo fácil, entender a una fracción como una división es distinto que entenderla como tomar una parte de un todo, es decir, no es lo mismo pensar en 3/4 como “divido la unidad en 4 partes y tomo 3” que pensarlo como “tengo 3 enteros y los voy a dividir entre 4”. La conductora explicó esa diferencia con la recta numérica: dibujó una recta de 0 a 4, subdividió el tramo 0 a 1 en cuartos y señaló 3/4), y para la división 3 ÷ 4 dibujó una recta de 0 a 4, subdividió el tramo de 0 a 3 en cuatro partes (3/4, 6/4, 9/4, 12/4) y señaló la primera subdivisión. Numéricamente coinciden (en los dos casos se señala el mismo punto en la recta), pero son dos significados distintos que no quedan claros para los alumnos.

La conductora explicó otro método para comparar fracciones sin pasar por la división: encontrar denominadores con potencia de 10. Por ejemplo, 3/4 es 75/100 porque se multiplica tanto el numerador como el denominador por 25 y se encuentra una fracción equivalente que es evidentemente decimal.

Actividad 20

¿Cuánto pueden medir los lados?

Consigna: Resolver en equipos

Buscar medidas del perímetro de rectángulos cuya área sea $40cm^2$. Cada equipo debe encontrar tantos rectángulos como sea posible.

Buscar la medida del lado de un cuadrado cuya área es $27cm^2$.

La conductora planteó los problemas de forma oral. Los equipos comenzaron a probar números y preguntaron si se valía usar decimales.

En un equipo usaron calculadora para dividir 40 entre cualquier decimal, pero no estaban muy seguros de su estrategia. Después notaron cierta regularidad en los enteros que ya tenían:

5 × 8 = 40
2 × 20 = 40
1 × 40 = 40
4 × 10 = 40

La conductora resaltó este hecho para que encontraran más parejas de números: si una medida aumenta la otra debe disminuir.

En la puesta en común una maestra explicó que buscó primero medidas enteras. 8 × 5, 10 × 4, luego dividió 40 entre cualquier decimal, obteniendo números con muchos decimales que no daban exactamente 40 en la multiplicación, por ejemplo, 7.92 × 4.95 = 39.20. La conductora anotó 7.925 × _____ = 40 para resumir esta estrategia.

Otra maestra explicó que buscó enteros y cuando se le acabaron prosiguió con decimales apoyándose en una tabla de proporcionalidad inversa. Otro equipo mencionó que también habían utilizado este tipo de tabla para encontrar más parejas de números.

La conductora preguntó: ¿habrá un número que si pongo 3 × ____ = 40 y que me dé exacto?” los maestros lo pensaron unos minutos. Alguien dijo que debía ser una fracción, otro propuso 3/4, pero vieron que no funcionó. La conductora les recuerdó que 4 × ____ = 7 es ×7/4), entonces una maestra propone 40/3. “En las fracciones siempre habrá una que multiplicada por otra dé exacto”, dijo la conductora.

Sobre el cuadrado de área $27cm^2$ una maestra dijo “no va a ser exacto”, encontró 5.1962. En su argumentación no quedó claro cómo llegó a la idea de que no va a ser exacto, ¿sabía que es un irracional o lo dijo porque no llegó a un decimal finito usando la calculadora?

Decisiones para la siguiente sesión

No alcanzó el tiempo para todo lo planificado, por lo que la conductora dejó de tarea la actividad Fábrica de problemas.

Sesión 8. Fabricar tres tipos de problemas con racionales y analizar los algoritmos con decimales

Asistentes: 14

Actividad 18

Fábrica de problemas

Consigna: Escribir problemas con los datos dados.

Con la información que aparece en las tarjetas de abajo se pueden fabricar tres problemas, uno de multiplicación y dos de división. Para ello basta con proporcionar los datos de dos tarjetas y preguntar por el dato de la tercera tarjeta. Por ejemplo, si se dan los datos 1 y 3 y se pregunta por el dato 2, se obtiene un problema como el siguiente: “Al dar 12 pasos Ernesto avanza 9 metros, ¿cuánto mide cada paso?” Resultado: cada paso mide 3/4 de metro. Operación: 9 ÷ 12 = 3/4.

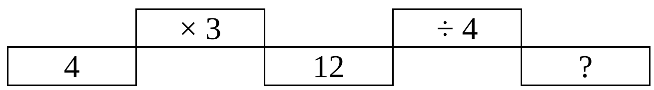
Para cada conjunto de tres datos, escriban los tres problemas que se obtienen al preguntar por cada uno. Escriban también el resultado de cada problema y la operación con la que se resuelve.

Ilustración 59 Tarjetas para fabricar problemas. Tomadas de Block y García (2006).

La sesión comenzó proyectando una presentación en la que se hizo una recapitulación de las siete sesiones pasadas.[5] Cuando la conductora mencionó lo del reparto de pasteles pareció que los participantes ya no lo recordaban (dividir por una fracción es dividir el numerador entre el divisor o multiplicar el denominador por el divisor).

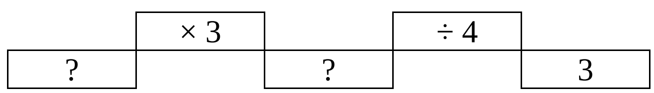
La conductora pidió la tarea de Fábrica de problemas. Dos maestras presentaron los que inventaron y a todos les resultaron claros. Otra maestra comentó que quiso usar los diagramas de composición de factores para multiplicar fracciones, pero no lo logró excepto para un caso (4 × 3/4 es multiplicar por 3 y dividir el resultado entre 4).

Ilustración 60 Esquema para multiplicar ×3/4.



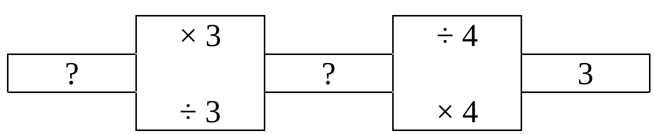
Con ayuda de la conductora se dan cuenta de que su segundo problema también se resuelve multiplicando por 3/4, pero el dato faltante está en otro lugar.

Ilustración 61 Esquema para multiplicar ×3/4 (2).



La conductora preguntó cómo averiguar los números que faltan y la maestra trazó lo siguiente explicando que se puede ir “por arriba” en el diagrama, o “por abajo”.

Ilustración 62 Ejemplo dado por la conductora para resolver ×3/4.



[5] ¿Qué son los números decimales, para qué sirven, se comportan como los enteros?; estrategias para ordenar números decimales; el trabajo con la base 4 para reflexionar sobre los decimales; las bases 4 y 10 no permiten “atrapar” todos los números pero pueden aproximarse; los decimales en la recta numérica; lectura de registros de clases; definición: los decimales son los que se pueden escribir con denominador potencia de 10; sumar y restar con decimales; aproximación a la propiedad de densidad; definición: los racionales no tienen antecesor ni sucesor; el reto de inventar problemas con decimales; “por” ya no significa solamente “veces” sino “de” o bien, multiplicar también puede pensarse como “tomar una parte de otra”; para dividir una fracción se puede dividir el numerador o multiplicar el denominador; la multiplicación y la división de fracciones vistas como composiciones de operadores; fracciones como operadores o factor de escala; actividades para trabajar con 3 × ___ = 40 es 40/3.

Actividad 19

Cómo funcionan los algoritmos con decimales

Consigna: En parejas, explicar:

Por qué se alinean las cantidades que han de sumarse o restarse de acuerdo al punto decimal y se procede como si fueran enteros "bajando" el punto.

Por qué se rellena con ceros al restar decimales que tienen distinta cantidad de cifras a la derecha del punto.

Por qué funciona el algoritmo de la división entre naturales con residuo en el que se pone un punto y sigue dividiendo.

Las parejas fueron presentando sus explicaciones sobre las sumas y restas de números con punto.

> Se baja el punto en la suma y en la resta porque se suman plátanos con plátanos, manzanas con manzanas (hace un dibujo de sumas con frutas por columnas).
> Es por el valor posicional.
> Cada uno va en un huacal.
> Les explico a mis alumnos que a cada uno le toca una silla: si alguien ya está en la silla de las unidades no se puede sentar otra persona.

Al final, se comentaron cuestiones como la direccionalidad al efectuar las operaciones, la cuestión de "llevar", el nombre de los órdenes, la confusión entre décimos con decenas, milésimos con miles, etc.

Sobre el algoritmo de la multiplicación hubo más dificultades, de hecho, solamente lograron explicarlo quienes interactuaron con la conductora mientras trabajaban.

$3.4 \times 2.8 = 3.4$ veces 2.8

$$
\begin{array}{rr}
 & 2.8 \\
+ & 2.8 \\
 & 2.8 \\
 & \underline{1.12} \\
 & 9.52
\end{array}
$$

1.12 es 4/10 de 2.8

$4.5 \times 3.4 = 4.5$ veces 3.4

$$
\begin{array}{rr}
 & 3.4 \\
+ & 3.4 \\
 & 3.4 \\
 & 3.4 \\
 & \underline{1.7} \\
 & 15.3
\end{array}
$$

1.7 es 5/10 de 3.4

En este último caso, al multiplicar décimos por décimos se obtienen décimos (0.5 × 0.4 = 0.2), razón por la que dos equipos se confundieron.

3.82 × 4.6 así:
6 décimos × 2 centésimos = 12 ¿?

La conductora explicó que esta pareja "vio" al número como 3 + 8/10 + 2/100 × 4 + 6/10, aunque no lograron averiguar cuánto daba.

En resumen, con las explicaciones que dieron los participantes observamos que intentaron justificar el procedimiento que ya sabían, más que argumentar por qué se obtiene un resultado correcto cuando se recorre el punto.

Una maestra comentó que a sus alumnos les puso la siguiente operación y que un alumno le dijo que el 9 es entero y debe ir debajo del 4, para lo que ella no tuvo respuesta.

$$\begin{array}{r} 24.05 \\ \times \quad\; 9 \\ \hline \end{array}$$

Alguien más planteó la duda de otro alumno: ¿es lo mismo multiplicar 3.75 × 1.80 que 0.75 × 0.80 + 3 × 1? La conductora explicó mediante el sombreado de áreas que no es lo mismo.

La conductora cerró la discusión del punto en la multiplicación con 0.5 × 0.4 = 1/2 de 0.4 = 0.2, o 5/10 × 4/10 = 20/100.

Una maestra dijo que los programas son para expertos, "es la trampa de los programas", aludiendo a que esas cosas les parecen ocultas. La conductora matizó la discusión: no saber la justificación de algo no es un pecado. Enseñar y aprender esa justificación puede ser muy costoso y hay que decidir en cada caso si vale la pena "pagar el precio", si hay condiciones (por ejemplo, tiempo o conocimientos previos suficientes).

Sobre la división, un maestro pasó al pizarrón y resolvió:

$$\begin{array}{rcccc} & 5 & 0. & & 5 \\ \cline{2-5} 4 \big) & 2\,0 & 2 & & \\ - & 2\,0 & & & \\ \cline{2-2} & 0 & 2 & & \\ & & \mathbf{2} & & \mathbf{0} \\ & & & & 0 \end{array}$$

La conductora preguntó si el 20 son décimos, centésimos o qué:

> No sé…
> Al bajar el 2 son 2 enteros.
> Agregar el 0 son 20 centésimos.
> ¿Son enteros?

La conductora puso un ejemplo con panes: “si fueran 2 panes divididos en 10 partes iguales…” y así les quedó claro. Entonces les preguntó cómo explicar a los alumnos que se pone un punto y se van agregando tantos ceros como se quiera al residuo.

Desde el pizarrón, fueron resolviendo en conjunto la división 0.24 ÷ 1.2 y fue evidente que conoce bien el procedimiento, pero no por qué funciona. Una maestra dijo:

> Al recorrer los puntos se deja “en igualdad de condiciones” (refiriéndose a la equivalencia).

La conductora explicó dos procedimientos:

3/4 = 3 ÷ 4

0.24 ÷ 1.2 = 0.24/1.2

Ilustración 63 Ejemplo dado por la conductora para resolver 0.24 ÷ 1.2

	× 10		× 10	
$\frac{0.24}{1.2}$		$\frac{2.4}{12}$		$\frac{24}{120}$
	× 10		× 10	

Y otro:

30 panes ÷ 15 niños = 2 panes por niño

300 panes ÷ 150 niños = 2 panes por niño

150 panes ÷ 75 niños = 2 panes por niño

Aclaró que el residuo no es igual en esas divisiones equivalentes, pero el cociente sí (entender esto requiere más trabajo, con la explicación dada es poco plausible que esto haya quedado claro). Cerró diciendo que recorrer el punto es encontrar cantidades equivalentes multiplicándolas por 10, 100, 1000.

Una maestra preguntó cómo explicarlo a los alumnos y la conductora sugirió ejemplos como el de los panes y los niños.

Actividad 20

Lectura y comentarios sobre un registro (fragmentos de entrevistas a alumnos de 5° de primaria)

Consigna: Leer el registro (anexo 11) y posteriormente comentar en grupo contestando las preguntas de manera verbal.

¿Cuál creen que es el propósito al revisar las respuestas de estos alumnos?

¿Qué dificultades identifican en las respuestas de los alumnos?

¿Qué opinan del fragmento en el que el entrevistador pregunta si la multiplicación agranda?

El registro se leyó individualmente, al terminar una maestra dijo que estaba aprendiendo mucho del taller y que no todo, pero muchas cosas de las que están viviendo ahora les pasan o pasarán a los niños. Otra preguntó para qué estudian esto los niños (refiriéndose a la clase del registro, correr el punto y agregar ceros para hacer operaciones).

Decisiones para la siguiente sesión

El registro y los comentarios grupales dejaron la sensación de que el tema del cambio de significado en la multiplicación y división es algo muy complejo (y lo es). En la siguiente sesión habría más actividades al respecto, por lo que decidí que no era oportuno ampliar las explicaciones.

Para la siguiente sesión decidí recortar la última actividad de cálculo mental y comenzar con la siguiente parte que era Conjuntos numéricos.

Sesión 9. ¿Qué número es éste?

Asistentes: 15

Actividad 21 Multiplicar por 0.5 o dividir entre 2 Consigna: En parejas, completar la tabla.

Ilustración 64 Actividad para estudiar relaciones multiplicativas. Tomada de Solares, A. (coord.) (2006).

Multiplicar por:	Es lo mismo que multiplicar por la fracción:	Y es lo mismo que:
0.5	$\frac{1}{2}$	dividir entre 2
0.25		
0.1		
0.01		
0.125		
0.75		

Los maestros dedicaron unos minutos al llenado de la tabla y la discusión en parejas, no les resultó tan automático encontrar la relación entre la multiplicación y la división cuando hay decimales y fracciones involucrados. Verificaron con la calculadora cada paso.

En la discusión grupal siguió habiendo dudas con equivalencias entre fracciones, ¿es equivalente 1/8 a 125/1000? Otra cosa que ya se discutió y todavía no estaba clara para todos es que ×3/4 es ÷4 × 3 o bien, ×3 ÷ 4. La conductora puso más ejemplos.

Actividad 22 Los conjuntos numéricos Consigna: en parejas, completar la tabla.

Ilustración 65 Tabla para actividad de clasificación de números. Elaboración propia.

	Natural	Racional	Decimal	Irracional
35.521				
3/5				
2				
1/2				
0.63				
$0.\overline{63}$				
3.14				
π				
7/3				
$0.\overline{6}$				
$1.3\overline{5}$				
0.5				
2/26				
0.999...				
9				

Hubo mucha discusión interna para el llenado de la tabla. Las parejas constantemente pidieron ayuda a la conductora para resolver dudas.

Acerca de cuáles son irracionales y racionales, se comentó en las parejas:

> Cuando un número no es racional, ¿entonces es irracional?
> El 2 es no racional.
> ¿Irracional es que no puede ser dividido?
> Racional es de ración, que se puede partir… mi mamá me decía (para saber si es racional) acuérdense si se puede dividir.
> Irracional porque no se puede razonar de ninguna manera.
> A lo mejor todos estos (con sombrero) son irracionales.
> ¿Si es irracional no puede ser racional también?
> Decíamos que los números medios raros eran los irracionales.

¿7/3 es decimal?

> No, porque debe ser "base 10" y si lo dividimos da 3333…
> No, pues los decimales terminan.

Cuando llegó el momento de la discusión grupal, la conductora dibujó un esquema de los reales para ubicar a los naturales, enteros, racionales e irracionales y también fue poniendo ejemplos en la recta. La explicación ayudó para que los maestros revisaran sus respuestas en la tabla. No obstante, es un tema complejo y eso se notó en las preguntas que hacían.

La conductora hizo énfasis en los decimales, ¿dónde quedan?

> Coincidirían con los racionales porque un decimal es racional.
> Pero no todos los racionales son decimales.

La conductora pidió que los maestros marcaran en el esquema dónde quedarían los decimales. Con ayuda de todo el grupo un maestro lo marcó correctamente. Después pasaron varios al pizarrón para anotar en el esquema dónde quedarían los números de la tabla.

Actividad 23 Distintas maneras para saber si una fracción es decimal Consigna: probar con distintos métodos (fracciones equivalentes, hacer la división, factores primos).

La conductora puso a discusión cuáles denominadores dan lugar a fracciones decimales para llegar a los factores primos 2 y 5. Aunque el algoritmo es sencillo, hay de fondo un tema complejo.

Decisiones para la siguiente sesión

Con esta actividad se cerró la etapa 1. Solicitamos a los participantes que dijeran cómo se habían sentido. Hubo muy buenos comentarios respecto a las actividades, la conductora, el ambiente en el grupo.

> Me encantó, estaba esperando poder enseñárselas a mis alumnos.
>
> Me sirvió saber qué aplicación le puedo dar a esto, desempolvé muchos conocimientos.
>
> Llegué con una idea y me voy con otra, no sabíamos a qué veníamos. No sabía por qué a otros les gustan las matemáticas, ahora entendí por qué. Ya quiero ir a un grupo para enseñárselas. Hasta ahora, después de la maestría, entendí estas cosas. Tuvimos libertad para dudar, me hizo apreciar eso y pensar en cómo me gustaría dirigir una clase.
>
> A mí no me gustaban las matemáticas, siempre pedí grados bajos para no tener que estudiarlas. Pero ya me dieron 6° y fue un reto. Lo que más me gustó de este taller es ver los errores de forma positiva, como crítica constructiva, no decirte que no sabes. Vemos estas cosas con nuestros alumnos y no lo podemos evitar… la parte de cómo llegar al conocimiento por medio de ejercicios,

buscar por aquí y por allá. Si no hay un vínculo con la vida cotidiana, no lo voy a volver a usar, para qué me sirve y a mí me sirvió para trabajarlo con los alumnos.
Aparte de la temática interesante y re aprender, una cosa que se me hizo muy enriquecedora fue vivenciar el enfoque, trabajar en equipo, ver cómo le hacía cada quién. No hacerles caras a los niños cuando están mal. Y la lección de que para dar un tema tenemos que saberlo bien, en vez de darlo solo como viene en el libro y pobre de aquél niño que nos pregunte de dónde salió, "investiga". Gracias a todos por compartir, por exponerse.

Me sorprenden las matemáticas, siempre tienen respuestas. Me gusta no perder la capacidad de asombro con ellas. Me pregunto por qué no nos lo enseñaron así, en la secundaria reprobé matemáticas, pero luego tuve una buena maestra.

Me redujo la ansiedad y el miedo para estos números porque a mí no me los enseñaron, no sé cómo sé lo que sé. Antes nada más te lo enseñaban, pero no razonabas mucho. Como docentes nos cuesta trabajo decir que no sabemos, aquí lo vimos todo juntos, fallábamos porque teníamos razonamientos que nos inventamos para poder enseñar. Cuando vi que había densidad en 6° me quise morir, ¿cómo se los iba a enseñar? Todavía no creo poder hacerlo bien, pero me voy a arriesgar. Cada lunes aquí, sufrimos. Nos volteábamos a ver… ¿quién quiere pasar? En serio sufrimos. No me arrepiento de haber venido.

Los invitamos a participar en la siguiente fase comentando qué cosas se abordarían (revisión del programa de primaria para ver dónde están los decimales y de algunas lecciones), para posteriormente realizar el diseño de una secuencia de lecciones, la puesta en marcha de estas y que entre ellos fungieran como observadores; y posteriormente, volver al grupo y hacer ajustes al diseño.

7.2.2 Etapa 2

Sesión 10. Los decimales en el programa de primaria

Asistentes: 8

Actividad 24 Revisión de los programas oficiales de 3° a 8° grados. La actividad consiste en que, organizados en equipos, analicen los programas de primaria y secundaria (extracto) para llenar una tabla (anexo 2) con el recorrido de un contenido a elegir: equivalencia, suma y resta o multiplicación y división (fracciones y decimales). Al finalizar, cada equipo lo presenta al grupo. Después, la conductora presenta un mapa de contenidos mostrando todos los recorridos y resaltando: a) Con qué tipo de situaciones se introducen las fracciones en la primaria, qué fracciones se estudian al inicio, a qué se llega en la secundaria respecto a las fracciones. b) En qué grado y con qué situaciones empieza el estudio de los decimales, a qué se llega en la secundaria respecto a los decimales. c) En qué grado se vinculan los decimales y las fracciones y mediante qué actividades.

Revisamos el programa de educación básica sobre fracciones y decimales. Una pareja eligió equivalencia, otra suma y resta y los maestros restantes multiplicación y división.

Identificaron "equivalencia" algunos contenidos que no esperábamos, por ejemplo: encontrar dobles o triples de un número. La conductora preguntó por qué se empieza en tercero con equivalencia de fracciones, pero no de decimales, y un maestro respondió que los decimales serían "una consecuencia de ese tema". La conductora retomó diciendo que es un camino posible tomar a las fracciones para justificar los decimales, aunque también se podría empezar con los decimales, por ejemplo, con el dinero. Además, las fracciones son muchas para un mismo número, mientras que los decimales escritos con punto tienen una sola representación (a excepción de añadir ceros a la derecha). La equivalencia que "vive" en las fracciones es muy fuerte y no lo es tanto en los decimales.

Continuando la revisión del recorrido, los maestros también identificaron como equivalencia "diversas representaciones gráficas…". Por ejemplo, en los porcentajes 5% es igual a 5/100 o 0.05. La conductora aclaró que eso puede usarse como recurso para ver equivalencia, pero que también puede ser para otras cosas (en el programa no viene como equivalencia). Otros no estuvieron de acuerdo en que eso fuera equivalencia. La conductora agrega que el término “equivalencia” en las matemáticas de la primara tienen un significado muy específico, aunque es cierto que lo de los porcentajes y sus distintas representaciones podrían entenderse como equivalencia. También identificaron “ubicación de números en la recta numérica…” y la conductora aclaró que sí puede utilizarse para eso, pero que el programa no lo dice explícitamente.

Dijeron que no habían encontrado con claridad cuándo aprenden a hacer equivalencias, sugiriendo que debido a la redacción en el programa parecería que se estudian cosas que los niños ya tendrían que saber y no dice cuándo lo van a aprender.

Con la revisión del recorrido de suma y resta no hubo tanta confusión, pero identificaron ubicación de fracciones en la recta como suma y resta (misma cosa que la pareja que revisó equivalencia: ven las potencialidades del recurso y le atribuyen un contenido).

El equipo que trabajó con división y multiplicación identificó con facilidad algunos de los contenidos y con otros tuvo dudas, por ejemplo, si los repartos entraban en división. La conductora intervino para decir que podría ser un antecedente para la división, pero que no es automáticamente división de fracciones. También se preguntaron si el algoritmo para obtener fracciones equivalentes (multiplicar numerador y denominador por un mismo número) era un contenido de multiplicación.

La conductora proyectó el mapa con todo el recorrido de 3° a 8° y fue haciendo un recorrido horizontal y luego por grado.

Un maestro manifestó estar sorprendido de que en las lecciones se diga una cosa y en el programa otra. También dijo no estar de acuerdo con la afirmación de que sea gradual el abordaje de los contenidos, a veces en el libro hay lecciones fáciles que vienen después de otras más difíciles. La conductora aclaró que hay que distinguir entre el libro y el programa (aunque debería ser coherente en ambos elementos).

Una maestra comentó que el libro es para aterrizar el contenido, pero no para aprenderlo ahí. Dijo que los maestros tienen que buscar por otros lados materiales para que los alumnos aprendan los contenidos y luego ya resuelvan la lección. Varios opinaron igual.

También comentaron que el programa del 93 era más fácil de seguir, pero que con el nuevo “se pierden”. Un maestro mencionó que para él los Aprendizajes esperados eran el referente.

Actividad 25
Revisión de lecciones
Comentar el esquema general de lecciones:
Momento inicial - lo ideal es empezar con un problema, un reto para los alumnos.
Momento de desarrollo – los alumnos tienen actividades (una o varias) para ir resolviendo el problema inicial. También puede ocurrir que se introduzcan otros contenidos o se retomen contenidos estudiados anteriormente.
Momento de puesta en común y aportes del maestro, o volver a plantear el problema
Momento de cierre – resumir, formalizar.

Proyectar una lección (resuelta) y comentar su estructura (a manera de ejemplo de lo que ellos harán después): contenidos que se abordan, recursos que se utilizan, actividades que se proponen, etc. Dar el esquema de Inicio – Desarrollo – Puesta en común – Cierre. Después, formar equipos para que elijan una lección a analizar llenando la HT2.

La conductora cerró la revisión del programa para pasar a la introducción del "modelo" para la estructura de las lecciones: Momento inicial, desarrollo, puesta en común, cierre. Respecto al momento inicial hubo comentarios interesantes sobre cómo lo entienden:

Es motivación.
Es recuperación de saberes previos.
Es poner un contexto.
Es dar una introducción al tema.

La conductora dijo que el momento inicial es una situación de matemáticas, un reto para que el alumno resuelva y en el que está involucrado el contenido que queremos que aprenda. Hay varias maneras de llamarlo: actividad introductoria, actividad inicial, actividad detonadora… Aclaró que no es lo mismo una introducción al tema (a manera de breve historia o cuentito), si se usa como parte del momento inicial se tiene que volver una actividad que realicen. Una maestra intervino para aclarar que esas ideas no son lo mismo, que en otros modelos se hablaba de introducción, motivación, etc., y ahora es "ahí te va el problema".

Sobre el cierre, una maestra comentó que en algunas lecciones puede quedar abierto, en el sentido de que a lo mejor hace falta avanzar más para llegar al cierre posteriormente.

Un maestro sugirió añadir al modelo presentado un momento de evaluación. La conductora dijo que puede incluirse.

Se revisó conjuntamente una lección (26 de 3°, La mitad, de la mitad, de la mitad…) No es una lección sólida por lo que recibió malos comentarios cuando se utilizó el modelo de análisis. Se comentó lo confusos que resultan los recuadros de institucionalización, pues se dan prematuramente e incluso sin corresponder a lo estudiado en la lección. También sobre las preguntas de ¿cómo lo hiciste?, que aparecen insistentemente en las lecciones y su verdadera utilidad (a veces son pertinentes, a veces estorban o son muy difíciles de contestar). La conductora insistió en que “nos podemos ensañar” con las lecciones de los libros oficiales porque son para todo el país, las elabora un equipo de expertos, etc., pero que al analizar una lección que hizo un maestro la actitud debe ser otra, se puede criticar para mejorarla, pero considerando otros elementos.

No dio tiempo de que la conductora revisara con detalle las preguntas propuestas para analizar lecciones, pero aclaró que es un guion que les puede ayudar sin eliminar la posibilidad de que pongan otras cosas o no contesten algo del mismo.

Comentaron que es interesante analizar lecciones, la conductora añadió que ellos, teniendo una mirada crítica pueden tomar mejores decisiones sobre qué cosas ver en clase, cuáles saltarse, etc.

Decisiones para la siguiente sesión

No dio tiempo de hacer todo lo que esperábamos en la sesión. Se llevaron de tarea las preguntas para analizar lecciones usándolas para revisar otra. Acordamos comentarla en la siguiente semana.

Sesión 11. Preparación para el diseño de una secuencia

Asistentes: 8

La sesión comenzó revisando las lecciones que se llevaron de tarea. Los que tenían la lección de 4° no asistieron y otros no hicieron la tarea (o no completa).

El equipo encargado de analizar la lección de 5° (lección 38 Multiplicar fracciones y decimales) comentó su trabajo. Con la identificación de contenidos no tuvo dificultades, el único asunto que se discutió fue si para calcular cuántos kilos son en total 7 trozos de 1/5 se necesitan saber cosas del SIM, como saber cuántos gramos son 1/5 de kilo. La conductora aclaró que podría ser útil pero que no es necesario para resolver el problema.

Comentaron nuevamente que resolver la lección es difícil para los alumnos porque les falta saber cosas previas. Nuevamente se manifestó esa sensación general hacia los libros de matemáticas de que son para cuando ya aprendieron algo.

La conductora comentó que al inicio de la lección aparece "1/4 de tal…" y no es transparente que ese tipo de problemas tenga que ver con la multiplicación, que es el tema de la lección. Por ello, es extraño que en la lección pregunten a los alumnos cómo hicieron las multiplicaciones cuando quizá ellos no las vieron como tales, y que esos pequeños detalles pueden ser muy importantes para el conocimiento de ellos (los maestros), así como saber cuál es el entero: el multiplicando o el multiplicador.

Otro equipo revisó la de 6° (32, De decimales a fracciones) y comentaron lo atiborrada que está de contenidos en poquitas páginas. Hay orden de fracciones y decimales y luego multiplicación y división. Tuvieron la impresión de que entra y sale de un tema con cositas aisladas y manifestaron que para ellos funciona mejor dedicarse por entero a un tema a la vez. También dijeron que en los libros no hay lugar para la práctica, se ve un tema y luego, si acaso, otra leccioncita en otro bloque, por eso se les olvida a los alumnos. Dijeron que les gustaría mucho hacer con los niños las tiras que trabajaron ellos, la recta numérica, las actividades de densidad, etc.

La lección tiene partes difíciles (como la recta con subdivisiones no usuales). Efectivamente, hay varios temas y consignas extrañas, formalizaciones confusas o con conceptos erróneos. Uno de los maestros comentó los contenidos que encontró: conversiones, ubicación, equivalencias en la recta, número decimal periódico, fracciones menores que la unidad, mayores que la unidad, fracciones decimales equivalentes, situaciones problemáticas con fracciones y decimales, comparación entre el valor de una fracción y un decimal. La conductora aclaró que está bien que los haya sacado todos, pero que algunos no son tan importantes en la lección.

Se discutió sobre la graduación de la recta que aparece al principio. No tiene números, pero sí subdivisiones verdes en octavos y rojas en quintos. Una maestra comentó que donde coinciden los números equivalentes, las rayitas son las mismas y eso da una pista de que la recta va del 0 al 1. La conductora explicó que no necesariamente, si toda la recta fuera del 0 al 1/2 cada una de las rojas sería 1/10 y las verdes serían dieciseisavos, resaltando que la cuestión importante no es si en la lección está mal eso, sino que es distinto decidir no poner los números o no hacerlo por olvido o descuido. En esta lección sí parecen necesarios, porque los niños se pueden confundir.

La etapa 1 del taller les permitió notar cosas extrañas o erróneas en las lecciones: en el libro se refieren a "números decimales" para casos como el cociente de 1/3 y ellos ya saben que no es un decimal, aunque tenga representación decimal. La conductora intervino para considerar otra cuestión, qué tanto vale la pena con los alumnos en primaria meterse en la finura de llamarles representaciones decimales y no números decimales, o dejarlo para que lo aprendan en la secundaria. Un maestro dijo que él está optando por desde la primaria decirles que no son decimales, que desde chiquitos lo sepan, porque si no a los niños les va a pasar lo que a ellos, llegar a la adultez y a ser maestros con esos errores. Otra maestra dijo que lo que han aprendido es por talleres como éste, y ahora sí están muy pendientes de cualquier cosa que vean sobre decimales, tienen más información.

La conductora les aclaró que el análisis que están haciendo tiene la intención de que utilicen lo que aprendieron en el taller para analizar las lecciones y así poder tomar mejores decisiones en sus salones (qué lecciones tienen problemas, son difíciles, actividades que deberían hacerse más o actividades que es mejor saltárselas), además de ir tomando ideas de qué hacer y qué no hacer para cuando ellos empiecen el diseño de sus lecciones.

Otra maestra dijo que la presencia de los Aprendizajes esperados (un elemento curricular controvertido) los lleva a la desesperación, pues quieren alcanzarlo todo en un día. Afirmó que las cosas estaban mejor planteadas en los libros del 93, conocieron su estructura, la parte introductora, la de descubrimiento y la de práctica.

Actividad 26

Elección del grado y tema para el diseño de su secuencia

Escribir individualmente un esquema o ideas sobre la secuencia de tres lecciones que diseñarán. Para la elección el tema, estarán a su disposición tanto el programa de estudios de primaria (extracto que trabajaron en la primera actividad), los libros que lleven, la secuencia que estudiaron en el Taller de la fase 1.

En la hoja de trabajo 3 (anexo 3) se presenta un pequeño guion para organizar la secuencia de tres lecciones.

Al término de la revisión de las lecciones comenzó la definición de equipos para el diseño. Las directoras y supervisoras se posicionaron como comodines dado que no tienen grupo. En cambio, los maestros con grupo se mostraron interesados en hacer algo interesante para sus alumnos y algunos ya tenían ideas. Rápidamente quedaron definidos dos equipos: tres maestros para quinto grado, otros tres para cuarto y dos equipos de sexto, uno con tres integrantes y otro con dos. Faltaba definir un contenido y llenar la hoja de trabajo 3.

Sexto A: sin ninguna intervención eligieron ubicación de decimales y fracciones en la recta. La conductora solamente las apoyó para el llenado de la hoja. Discutieron diversas posibilidades que podían abordar con la recta: orden, equivalencia, operaciones. Preguntaron si podían usar lecciones o partes de lecciones del libro y la conductora respondió afirmativamente.

Quinto: empezaron eligiendo la multiplicación y tras la intervención de la conductora (les volvió a explicar la diferencia entre tener solamente al multiplicando decimal o a los dos factores decimales) y al parecer las convenció la idea de ir a algo más básico. Al final eligieron conversión entre múltiplos y submúltiplos del SIM en medición de longitud.

Sexto B: conversión entre unidades del SIM y del sistema inglés.

Cuarto: tuvieron muchas dificultades para comunicarse. Finalmente eligieron un contenido con fracciones: saber qué parte es una fracción de cierta colección y averiguar la colección total conociendo una parte. Las ideas iniciales fueron poco convencionales: iniciar averiguando su concepto de fracción o si saben qué es una colección, por ejemplo. La conductora se acercó para averiguar a qué se referían con eso, qué les preguntarían, para qué serviría hacerlo al inicio de la lección, etc.

Se acordó que para el inicio de la siguiente sesión tendrían un rato para terminar este trabajo y luego presentarlo a los demás.

Capítulo 8. Resultados: aspectos específicos encontrados
Análisis a posteriori

En este capítulo, que corresponde a los análisis a posteriori, reflexiono sobre ocurrido en taller, reviso las hipótesis y planteo ideas de cierre.

En el apartado 8.1 utilizo cuatro ejes de análisis para dar cuenta de aspectos específicos identificados en el taller. Los ejes tienen que ver con ideas que los maestros manifestaron y en su caso, cómo fueron cambiando en las sesiones: qué son los números decimales, cómo se ordenan, cómo y por qué funcionan las operaciones con decimales, y sobre el enfoque didáctico y la enseñanza.

En el apartado 8.2 contrasto lo hipotetizado contra lo obtenido en la experimentación y resalto aspectos importantes del taller, como el ambiente de colaboración y las características que mostró la conductora. Finalmente, en el apartado 8.3 planteo reflexiones de cierre acerca de la formación de los maestros de primaria.

8.1 Análisis de las sesiones

En este apartado analizo lo sucedido en el taller agrupando ideas o cuestionamientos que hicieron los maestros sobre temas específicos, mismas que aparecen destacadas entre dos líneas.

8.1.1 Los decimales son…

La parte decimal es la que está a la derecha del punto.
Dependiendo del contexto, un número puede ser decimal o no.
Las fracciones y los decimales no son enteros.
No todos los números que tienen punto son iguales.

Al inicio del taller la conductora indagó sobre las ideas de los maestros sobre los decimales. La primera actividad se acercó a la “razón de ser” de los racionales explorando cuestiones como ¿para qué se necesitan?, ¿qué problemas resuelven?

La conductora anotó en el pizarrón una tabla con las medidas del perímetro de un cuadrado y pidió a los maestros que dijeran la medida del lado, pues la necesidad de números no enteros es evidente en tareas de medición como esta. Además, por la forma en la que está planteado el problema (cuánto es 7 dividido entre 4) también se puede ver que genera una necesidad matemática (encontrar qué número resuelve esa operación), como describí en el capítulo 3 (Centeno, 1997).

Ilustración 66. Medidas de lados y perímetros de cuadrados.

Medida del perímetro	Medida del lado
20	*5*
12	*3*
36	*9*
2	*0.5* *5/10* *0.50* *0.500*
3	*75/100*
7	*1.75*
5	*1.5* *Corrigen 1.25*

Con el perímetro del cuadrado los maestros obtuvieron las respuestas efectuando la división y como esperaba, nadie usó fracciones (*perímetro/4*).

La conductora planteó entonces el mismo ejercicio con un triángulo equilátero usando medidas para el perímetro que complejizaban la división entre 3, pero tampoco usaron fracciones para expresar la respuesta.

Ilustración 67 Medidas de lados y perímetros de triángulos.

Medida del perímetro	Medida del lado
5	1.666…
7	2.333…
11	11/3

Cuando la conductora planteó un perímetro de 11 modificó la tarea al indicando que la respuesta (la medida del lado) no debía tener punto decimal. Después de unos minutos un maestro dijo 11/3.

Luego hizo el ejercicio con un círculo encontrando la medida del diámetro, tarea que es más difícil porque requiere pensar en la fracción como una división indicada que es a la vez un número y por lo tanto, una respuesta válida.[1]

Ilustración 68 Medidas de diámetros y perímetros de círculos.

Medida del perímetro	Medida del diámetro
15	15/3.14…
17	$17/\pi$

La conductora señaló que hubo divisiones en las que el resultado no era entero, enfatizando que hay problemas en los que los enteros no son suficientes. Enseguida, la conductora preguntó si alguien sabía cómo se llaman los números que no son enteros, dijeron: fracciones, decimales, racionales, irracionales. La noción de que los racionales son necesariamente no enteros se manifestó aquí por primera vez.

El siguiente intercambio muestra la fuerte asociación entre un número y los contextos en los que está involucrado. La conductora fue señalando los números de la actividad anterior (medidas de los perímetros y lados) para preguntar a los maestros caso por caso si era un número decimal, no decimal o no estaban seguros.

Conductora: el 5.

[1] 3/4 indica una división de 3 entre 4 y a la vez es el número tres cuartos.

Roberto: sí.
Graciela: no.
Leticia: el 5 puede ser 5 partes de otro entero.
Edgar: el 5 puede estar formado por varios decimales, pero así como está es entero.
Esther: 5 representa una fracción del 20.
Sara: si el 20 es el todo, el 5 es una parte.
Carina: depende del contexto. Así es un entero.
Conductora: saco el 5 de aquí [de la tabla], ya no es un lado del cuadrado. ¿Es o no decimal?
[No están seguros. La conductora escribe el signo de interrogación]
Graciela: ¿qué es un número decimal? Nada más le estamos atinando.
(…)
Roberto: también 0.5 puede ser un entero si yo digo que con 0.5 se llena una botella.
Edgar: tiene una parte decimal.
Maestros: sí.

Con el 3 y 9 quedó la misma duda, pero afirmaron que 0.5, 5/10, 0.50, 75/100, 1.75 y 1.25 son decimales. A los números 11/3, 15/π y 17/π los dejaron con un signo de interrogación para señalar que no estaban seguros de si eran decimales.

Cuando siguieron revisando la lista hubo más dudas, ¿cuáles son los números decimales mixtos?, ¿todo el número es decimal o solamente las cifras a la derecha del punto?

Conductora: 1.6…
Maestros: sí.
María: es mixto.
Roberto: es entero y decimal.
Edgar: me imagino que ese [1.6…] tiene otro nombre.
(…)
Graciela: la parte decimal es la que está a la derecha del punto.

Esta tarea generó bastantes interrogantes entre ellos y demandaron una definición de número decimal. No estaba planificado definir nada en ese momento, así que la conductora aclaró que se podía trabajar con los números decimales sin todavía definirlos. Sin embargo, las dudas continuaron pues en la siguiente actividad uno de los equipos prefirió escribir “número con punto” porque ya no estaban seguros de cuáles eran los decimales.

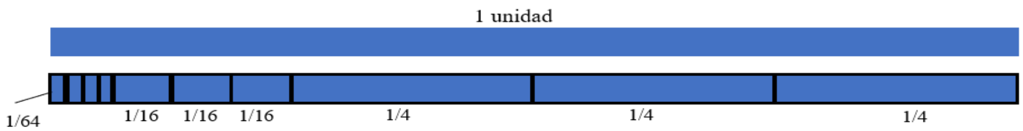
Las demás actividades de la primera sesión mostraron importantes carencias en los conocimientos de los maestros respecto al ordenamiento y la operatoria,[2] así que decidimos insertar una actividad que abordara el principio del sistema en base 10 y la escritura con punto. Para eliminar la transparencia que supone la base 10 diseñé una actividad

[2] Se describen en los apartados siguientes.

sencilla de medición con tiras y registro de resultados (como las que harían alumnos de 4° grado), pero en base 4.

Como describí en el apartado anterior, cada equipo recibió dos tiras de papel del mismo tamaño. Una de ellas se quedó entera (mide 1 unidad) y la otra la partieron de la siguiente forma:

Ilustración 69 Partición de tiras.



La consigna fue medir objetos usando esas tiras y registrar las mediciones en una tabla. En el registro "no se vale" escribir números mayores que 3 porque cada vez que juntan 4 tiras del mismo tamaño, las "cambian" por la que es inmediatamente mayor. Es decir, si algo medía 5 tiras de 1/4 debían escribir que mide 1 tira completa y 1 tira de 1/4. En el llenado de la tabla, una maestra afirmó que "el cero a la izquierda no vale", lo que es cierto en el caso de los naturales, pero no aquí.

Anotaron sus mediciones en el pizarrón. La conductora fue leyendo cada una agregando una columna para la escritura con punto. El peine midió 0 unidades, 0 cuartos, 2 dieciseisavos y 2 sesentaicuatroavos.

Ilustración 70 Mediciones usando las tiras.

	Tiras completas	1/4 de tira	1/16 de tira	1/64 de tira	
Paraguas	0	1	0	0	0.100
Largo pizarrón	1	0	2	0	1.020
Largo mesa	1	0	1	1	1.011
Lápiz	0	0	2	1	0.021
Largo tele	0	3	3	0	0.330
Goma	0	0	0	1	0.001
Peine	0	0	2	2	0.022

Para los maestros la escritura con punto no fue difícil, pero sí novedosa. Trabajar con otra base los ayudó a ver esa regla del sistema: agrupamientos y particiones de tamaño 4, escritura en columnas con un tamaño máximo 3; y además que a la derecha del punto la primera cifra representa la primera partición en tantas partes como el tamaño de la base (4^1 en este caso), la segunda es 4^2, luego 4^3, etcétera.

Los decimales son números para medir cosas diminutas.

Los decimales son números con muchas cifras, pero que son pequeñas porciones.

Se pueden ir haciendo tan pequeños como sea necesario porque "la numeración es infinita".

En el trabajo con las tiras surgió otra idea al parecer muy vinculada a los decimales: que se usan para expresar cantidades muy pequeñas de objetos muy pequeños.

Conductora: ¿llegaremos al resultado exacto?
Sara: si seguimos, sí.
Leticia: si la numeración es infinita, quizá con aparatos especializados como los que dividen la célula, las moléculas (…)

Esa misma idea la expresa otra maestra en sesiones posteriores:

Lidia: (…) entre el 0 y el 1 hay infinitos números (…) el hecho de poner números grandes, pero a la vez son pequeñas porciones, están representando cantidades muy grandes que hay entre uno y otro. Esto se tiene que construir, no se tiene que decir "los números bla bla", dar el recetario, sino que a través de esto el niño tiene que ver que entre más ceros tenga, es la cantidad más grande, pero es más pequeña, entonces cabe entre el 1 y el 2.

Lidia: (…) pero eso es con enteros, los decimales normalmente les digo [a los alumnos] esto de vas partiendo hasta que ya no lo ves, no lo ves, pero ahí está. Saca la lupa o el microscopio y seguramente lo encontrarás, lo que estamos dividiendo.

Lo que parece subyacer es que con "números grandes" se refiere a muchas cifras a la derecha del punto, por eso son "pequeñas porciones". Aunque esa idea no es necesariamente incorrecta, los decimales aparecen vinculados frecuentemente a la idea de que se usan para cosas pequeñas y no como la representación de la división de la unidad en potencias de 10.[3]

Se pueden ir haciendo tan pequeños como sea necesario para medir de manera exacta.

No se puede encontrar una fracción con potencia de 10 que sea igual a 1/3.

[3] Se divide la unidad en potencias de 10 porque el sistema que usamos tiene esa base (potencias positivas a la izquierda del punto y negativas a la derecha). Pero la unidad puede dividirse en cualquier número de partes, como ocurre con las fracciones.

Aproveché el trabajo con las tiras en base 4 para abordar un tema central cuando se quiere saber si un número es decimal o no, ¿se puede medir exactamente 1/3 usando las tiras? La conductora les pidió que partieran la tira completa en tercios y midieran uno de esos tercios con las tiras. Los maestros se fueron dando cuenta de la dificultad con esas particiones, pero no parecían tener claro por qué.[4]

Sara:	pero es que no queda porque este es base 4 [las tiras] y este es base 3 [el tercio].
Leticia:	tiene que ser 0.1111…

La última intervención no fue atendida por el grupo, quizá todavía necesitaban trabajar un rato en la tarea antes de que pudieran aceptar esa solución como correcta.

Al comparar resultados, manifestaron:

Carina:	1/4 + 1/16 + 1/64 más quién sabe qué.
María:	un tercio es 21.33/64
Esther:	1/4 + 1/16 + 1/64 + 1/256 = 0.332
Leticia:	nosotros dividimos la recta, el metro pues, en cuatro partes. Si estamos en base 4 tenemos cuartos, si yo quiero un tercio, entonces va a ser… con 4 yo formo 1 y voy a tener 0.3333333 y así va a ser hacia el infinito. Si a un 256avo le agregamos el que sigue, dará 0.3333 etcétera.
Conductora:	¿llegaremos al resultado exacto?
Sara:	si seguimos, sí.
	(…)
Sara:	quién sabe si sea exacto.
Roberto:	porque si yo agrego uno [un sumando] sería 1024avos, el resultado sería 1/4 + 1/16 + 1/64 + 1/256 + 1/1024 que es 85/256 + 1/1024 = 341/1024 = 0.33300781(sigue). Pero no exacto.

Las intervenciones de algunos maestros sugieren que su noción de infinito hacia la derecha del punto significa que todo se puede medir de manera exacta con subdivisiones en potencias de 10. Bajo esa idea, 0.333… podría ser interpretado como "se escriben los puntos para abreviar, pero si pones muchos 3 en algún momento llegas a la medida exacta". No obstante, otros maestros usaron técnicas aritméticas e intuyeron que no es así, nunca se llegaría a la medida exacta.

Mediante la división con galera, que es un recurso muy conocido por ellos, la conductora mostró que nunca se llega a 1/3 exacto porque siempre hay residuo, pero el cociente se aproxima cada vez más. Tras esta explicación algunos parecían estar convencidos de que no se puede dar un resultado exacto, y que eso era similar a lo que ocurre con

[4] Dado que no son múltiplos, medir 1/3 usando la base 4 dará lugar a una medida aproximada, como sucede con la base 10. 1/3 está entre 1/4 y 2/4, más precisamente entre 5/16 y 6/16, más precisamente entre 21/64 (16/64 + 4/64 + 1/64) y 22/64, etcétera. Otra forma de verlo es sumar 1/4 + 1/16 + 1/64 que en números decimales sería 0.25 + 0.0625 + 0.015625, etc., y ver que cada vez se acerca más a 0.333… pero no llega nunca.

la base 10 cuando se expresa 1/3 usando un número con punto. Sin embargo, aunque la explicación sea tan "transparente" como dividir 10 entre 3, las concepciones o intuiciones que las personas construimos sobre estas cuestiones siguen teniendo peso. Por eso, aceptar que 0.333… no es decimal resulta difícil, máxime cuando todavía no saben en dónde meterlo, o sea, si no es decimal ¿qué es?

En la siguiente sesión fue mayor la presión para que les diéramos una definición de número decimal, así que la conductora tomó la decisión de dar una que en ese momento estaba al alcance de todos: un número decimal es aquel que se puede escribir como una fracción cuyo denominador es una potencia de 10. La definición fue muy efectiva para discutir sobre las tareas previas.

Conductora:	¿De cuáles teníamos duda? 1/3, que lo escribimos 0.333… a simple vista podríamos pensar que sí es. ¿0.333 es igual a 1/3?
	[No hay respuesta]
Conductora:	¿1/3 es igual a 3/10?
Maestros:	no.
Conductora:	¿puedo encontrar una fracción con potencia de 10 que sea igual a 1/3?
Graciela:	siempre le va a ir faltando.
Roberto:	no, ninguna me puede llegar a ese.
Graciela:	no, porque tiene que quedar exacto ¿no?, siempre nos estaría faltando, aunque lleguemos a millones y millones.
Conductora:	entonces no es.
Graciela:	con base en la definición así tal cual, no es, pero sí puedo representarlo porque tengo 0.333 milésimos.
Conductora:	lo dijiste bien, una cosa es si se puede representar o si es número decimal, que a lo mejor no es lo mismo. Puede tener una expresión decimal. Aquí hay dos cosas, el número y su representación.
	[Algunos maestros se ven desconcertados y se ríen con nervios].
Conductora:	los decimales permiten una aproximación muy buena, se puede acercar tanto como se quiera.

Algunos enteros son decimales y otros no.

Continuando la revisión de distintos números a la luz de la definición (es decimal si se puede expresar con un denominador potencia de 10), la conductora trajo a la discusión a los naturales:

Conductora:	¿el 8 es decimal?
	[No hay respuesta].
Conductora:	nos vamos a la definición [la repite].
Rosa:	80/10
Conductora:	entonces sí es decimal, porque también lo podemos escribir como 8.0000.
	(…)
Roberto:	¿entonces todos los enteros son decimales?

Conductora: muy buena pregunta, ¿cómo ven?
Graciela: pues sí.
Roberto: los escribo con denominador 1 y lo multiplico por 10.
Berta: unos sí y otros no.
Conductora: ¿cómo podrías saberlo?
Berta: así, el que no es divisible entre 10. O por los números primos.
Conductora: bueno, el 2 y el 5 son primos.
Berta: entonces ya no…

Como se ve, algunos maestros empezaron a ampliar sus ideas sobre los decimales para incluir otros números que no habían considerado, sin embargo, todavía está en construcción. En la última sesión de la etapa 1 todavía hubo muchas dudas al respecto.

Conductora: fíjate, estos son los que se pueden escribir como fracción [racionales]. ¿El 9 lo puedes escribir como una fracción?
Isela: 9, número natural… no te entiendo.
Conductora: ¿habrá una fracción que sea igual a 9?
Rosa: sí, 9/1
Isela: ¿pero entonces también es natural? ¿puede ser los dos?
Conductora: sí. ¿Lo puedes escribir como un decimal, una fracción denominador 10, 100 o 1000?
Rosa: ¿pero no quedamos que el 9 no es número decimal? [al parecer se refiere a otras cuestiones abordadas como 1/9 o que dan lugar a 0.999…]
Conductora: 1/9 no es decimal porque nunca lo vas a poder poner con un denominador potencia de 10. ¿El 9 lo puedes poner como una fracción con denominador 10, 100, etc.?
Rosa: 90/10
Conductora: entonces, también es decimal.
Rosa: pueden ser varias cosas al mismo tiempo. Pero los únicos que no se pueden repetir es “racional” con “irracional”.
[Siguen revisando la tabla]
Isela: 0.63 es decimal y también es racional. Este [$0.\overline{63}$] es periódico.
Rosa: debe ser irracional, porque si 0.63 es racional este es irracional.
Isela: pero también es racional.
Rosa: no, porque no puede ser.
Isela: luego 7/3 es 2 enteros 1/3. Entonces es racional.
Rosa: y también decimal.
Isela: no, porque 1/3 no es decimal.
Rosa: ah, sí. Entonces nada más es racional.

Siguió siendo difícil aceptar que un natural (o un entero) es decimal, lo cual confirmó que se trata de un contenido matemático complejo y que quizá las actividades abordadas no fueron suficientes.

Cómo se escriben los números periódicos.

Uno de los números que introduje en un problema de multiplicación con racionales fue 5 1/3 y también lo escribí en otro problema como $5.\overline{3}$. Supuse que esa notación sería desconocida para algunos, pero ya se había discutido el tema de los decimales periódicos, especialmente 0.333… y se había hablado de notación o distintas representaciones de un número.

Durante la puesta en común, la conductora preguntó por ese número:

María:	tiene una mancha rara, lo tomamos como 5.3.
Efraín:	nosotros también.
Conductora:	¿pensaron que era una mancha? ¡No!
	[Risas]
Conductora:	a ver, entonces resolvámoslo acá todos juntos.
Sara:	primero calculamos las 5 vueltas.
Carina:	a lo mejor tomo los 3 cuando me haga falta… los 3, los 3, los 3.
Conductora:	¿y cuándo te detienes?
Carina:	¡pues le pongo la rayita arriba!
	[Risas]
Graciela:	yo lo transformé hasta 33 centésimos (…)
Conductora:	ahí lo cortaste, pero no es el que me están pidiendo.
	(…)
Conductora:	¿se les hizo difícil calcular los kilómetros cuando da 1/3 de vuelta?
Maestros:	no.
Conductora:	se les hizo conocido, sí sienten que lo pueden ocupar. Pero 5.333… hasta el infinito, no.
	(…)
Conductora:	es que estos dos (5 1/3 y $5.\overline{3}$) son lo mismo, pero no se habían dado cuenta.
	(…)
Roberto:	¿[los niños] podrían poner 0.3∞?
Conductora:	a lo mejor la idea que tienen en la cabeza está bien, pero esa notación no es usual, sería 1/3 = 0.333… o 1/3 ≈ 0.3 que quiere decir “aproximadamente”.

Si 1/3 no es decimal, entonces qué es.

1/3 no es “exacto”.

Hasta dónde truncar un número periódico.

La actividad con las tiras en la que 1/3 no podía ser expresado de manera finita con la base 4 ni con la 10 movilizó ideas en los maestros respecto a la base y su relación con números que no son múltiplos de esa base. Eso dio pie al siguiente intercambio en el que además manifestaron que 1/3 no es exacto, dando cuenta de la dificultad de la relación entre un número y sus distintas representaciones (la representación de 1/3 usando números con punto es infinita y nos interesaba mostrar que no es “exacta” porque siempre sobra algo, pero 1/3 es exactamente la tercera parte de una unidad).

Leticia: pues en la segunda sesión vimos que 1/3 es el .3333 infinito. No nos da el exacto. 1/3 de un entero, nunca vamos a tener el exacto.

Conductora: se puede tener 1/3 como una medida, como 1/3 de cartulina. Lo que parece que quisiste decir es que con decimales nunca vas a poder “atrapar” a los tercios de manera exacta.

Roberto: por cada 3 que aumente [0.3, 0.33, 0.333] se va acercando más [se va haciendo más preciso].

(…)

Conductora: 4/10 es una fracción decimal y por eso puedo encontrar una notación exacta con punto,[5] también 3/4. Pero 1/3 no es decimal.

Roberto: ¿entonces cómo se llamaría?

Conductora: son fracciones, son números racionales y tienen expresión con punto decimal y tiene un decimal infinito con periodo, el periodo es el número que se repite.

[La conductora pone otros ejemplos de periodos: puros de varias cifras ($0.\overline{14}$) e impuros ($0.4\overline{21}$). Les de risa lo de “impuros” y ella dice que también se llaman mixtos]

El tema del truncamiento también salió a relucir en esa conversación, ¿cómo decidir hasta dónde “cortar” una operación? Porque tenían claro que no es práctico hacer una división larga para obtener muchas cifras decimales en el cociente, pero no sabían cómo expresar esos resultados o cuándo conviene dar una aproximación redondeando o truncando un número con punto.

Graciela: pero esta periodicidad, ¿hasta dónde podríamos tomarla? Considerando milésimos (hasta 5.333) me da un resultado muy distinto que con 5.3. (…) Este símbolo sí entiendo lo que significa, pero ¿en qué momento lo podría aplicar? Hasta décimas, centésimas…

¿Los números irracionales pueden ser exactos?

En problemas de multiplicación y división con racionales incluí uno cuya solución era un número irracional. Se trataba de buscar la medida del lado de un cuadrado que tiene 27cm^2 de área y pretendí que exploraran que esos números no serían exactos ni periódicos.

[5] Matemáticamente 1/3 = 0.333… = $0.\overline{3}$, es decir, 0.333… no es una aproximación de 1/3 sino que son el mismo número, 0.333… es exactamente 1/3. Lo que nos interesaba resaltar en estas actividades es que la representación con punto de 1/3 no es finita y por ello no es decimal según la definición empleada en este trabajo. Es por ello que usamos con cierta flexibilidad el término “exacto”, refiriéndonos aquí a que al dividir 1 entre 3 el residuo nunca será cero.

Graciela:	sería encontrar la raíz de ese 27 que no se encontraría exacta, entonces lo más exacto sería que cada lado midiera 5.1962.
Leticia:	podrían ser dos fracciones multiplicadas…
Conductora:	¿pero habrá?, ¿dos fracciones iguales que multiplicadas nos diera 27?
Berta:	yo busqué 3/9 pero me fui nada más por las fracciones, ya no pensé que tenía que ser cuadrado [dos fracciones iguales].
Conductora:	hay números que me permiten resolver cierto tipo de problemas. En este no hay ningún par de fracciones y ningún par de decimales que nos dé 27.
Fátima:	pero a mí sí me dio, con… 13 dígitos.
Conductora:	a ver, dímelo.
Fátima:	5.1961524227066
Conductora:	cuando tú multiplicas eso en tu calculadora, que tiene 8 o 10 lugares, te lo redondea a 27. Si tuvieras una calculadora con 20 lugares no daría. Pero es una buena aproximación.
	[Se hace la multiplicación en una computadora para que haya más dígitos en la calculadora].
Conductora:	ese número multiplicado por sí mismo da 26.999999999996686 etcétera.
Fátima:	nos vamos a enfrentar con el uso de la calculadora, porque damos por hecho que sí sale.
Conductora:	(…) este tipo de números que no tienen periodo se llaman irracionales.
Carina:	con razón…
María:	es que no entienden razones.
	[Risas]
Conductora:	hasta aquí quedamos el día de hoy.
Sara:	entonces, ¿no hay, del 27?
Conductora:	no, no hay. A ver, ¿sabes cuál sería? Si yo quiero poner un numerito aquí que me dé la respuesta, lo único que pudo poner es $\sqrt{27} \times \sqrt{27}$
Carina:	¡ah! pero encuentra esa raíz.
	[Risas]

Dejar un problema aparentemente “sin solución” causa extrañeza. Ya había pasado antes cuando la respuesta era una fracción que surge como una división (por ejemplo, cuando buscaron qué número resuelve 7 × ___ = 4), y se añade la dificultad que originan los propios irracionales. La idea de un número periódico es relativamente asequible (siempre queda un residuo y se tiene que continuar dividiendo), pero un número que no procede de una división de enteros y cuyas cifras a la derecha del punto no tienen periodo, es una idea más compleja. No obstante, el propósito de esta actividad era tener un acercamiento a esos otros números para completar a los Reales cuando se discutieran los conjuntos numéricos.

Los naturales son los enteros.

Si es racional, no es irracional.

Es infinito, entonces es irracional.

Tiene periodo, entonces es irracional.

“Racionales” es de ración [porción].

Ningún número multiplicado por 3 me va a dar una potencia de 10.

La última sesión de la etapa 1 tuvo como propósito profundizar en lo aprendido sobre los decimales y sus propiedades, e identificar sus diferencias y similitudes con otros conjuntos numéricos. Para ello, trabajaron con una tabla y la instrucción fue que escribieran “sí” o “no” en todas las casillas, según correspondiera. Así pues, un número podía quedar con “sí” en más de una casilla, pero eso no fue muy claro al principio (aunque ya se habían discutido cuestiones como que los enteros también eran decimales).

Ilustración 71. Tabla para actividad de clasificación de números. Elaboración propia.

	Natural	Racional	Decimal	Irracional
35.521				
3/5				
2				
1/2				
0.63				
$0.\overline{63}$				
3.14				
π				
7/3				
$0.\overline{6}$				
$1.3\overline{5}$				
0.5				
2/26				
0.999...				
9				

Rosa: los naturales son números enteros.
Isela: decimal, pues nada más hay uno [0.5].
Rosa: y está 6/10 [3/5], pero no está como 6/10… es que no manejo esos conceptos… π, pi es un número decimal… o es racional… porque tiene una parte entera y otra decimal. Sería igual que este [35.521] ¿no?
Isela: ahora, π es 3.14 [también está en la tabla]
Rosa: pero π es infinito, ¿te acuerdas?
Isela: ah, sí.
Rosa: este y este [3.14 y 35.521] son iguales porque son finitos.
Isela: sería racional.

Rosa: no sé… a ver, naturales son los enteros, pero no hay fraccionarios… y este [$0.\overline{63}$] es decimal periódico, pero aquí [en la tabla] no dice periódicos.

Isela: pero es decimal.

Rosa: sí es decimal. Pero… hace ocho días dijeron que cuando se repite…

Isela: ¡ah!

Rosa: 2/26 es fracción común, pero aquí… pues también yo digo que es racional (…) Este es infinito [0.999…]

Isela: es infinito, entonces es irracional.

Rosa: pues sí, yo digo que sí. Este [pi] es periódico, pero cómo se le puede poner ahí.

Isela: 3.1416, 3.1416

Rosa: 3/5 se puede transformar en decimal, sería 6/10

Isela: sería decimal.

Rosa: 7/3 es una fracción impropia.
[Llaman a la conductora]

Estas dos maestras mostraron mucha dificultad para acomodar los números dados en los conjuntos numéricos. Ciertamente, es un contenido difícil y la instrucción para el llenado no les quedó clara, pues hasta este momento no habían considerado la posibilidad de que un número quedara marcado como “sí” en más de un conjunto, o sea, que un decimal también fuera un racional, por ejemplo.

Además de lo anterior, en su intercambio se observaron muchas dudas respecto a lo ya estudiado en el taller, por ejemplo ¿los periódicos son decimales? También intentaron usar los conocimientos que ya tenían sobre algunos de esos números, clasificándolos como fracciones comunes, fracciones impropias y decimales, pero no les ayudó para completar la tabla.

Isela: ya me quedó claro que si es racional no es irracional [oyeron que la conductora se lo dijo al equipo de al lado].

Conductora: ajá.
[Risas]

Rosa: naturales son números enteros. En “racional” tenemos la duda de que son fracciones, pero en decimal… este es una fracción va en “racional”, pero que también la podemos poner en decimal.

Conductora: son las dos cosas, pueden tener varias palomitas.

Rosa: irracional es los periodos que se repiten.

Conductora: no, los irracionales no tienen periodo.

Isela: ¿entonces este [$0.\overline{63}$] no es irracional, cuando son infinitos? 3.1416 y hasta que… ¿Pi no?

Conductora: los irracionales sí son infinitos, pero no tienen periodo.

Isela: entonces en este estamos bien [0.999…]

Conductora: no, porque ese tiene periodo.

Isela: ah… porque se está repitiendo y repitiendo lo mismo, el 9 se repite infinito.

Rosa: entonces sería racional.

Conductora: fíjate, estos son los que se pueden escribir como fracción [racionales]. ¿9 lo puedes escribir como fracción?
[Revisan toda su tabla y van corrigiendo].

En los demás equipos tampoco fue fácil esta tarea. Cuando la conductora organizó la puesta en común les recordó el propósito del taller que es identificar a los decimales, saber dónde están y cómo son. Estudiar otros números tuvo que ver con eso, diferenciarlos. Ella trazó un esquema en el pizarrón en el que fue ubicando a los conjuntos numéricos. Conforme mencionaron los conjuntos, escribió en el lugar correspondiente el nombre y los ubicó en una recta numérica.

Primero ubicaron a los naturales (N) y los definieron como los números para contar, con los que se empieza a enseñar matemáticas a los niños. Luego los enteros (E), ella explicó que son los simétricos de los naturales más el cero y ubicó algunos en la recta (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3). Añadió que para los problemas que no pueden resolver los enteros, como 5 × __ = 1 hay otros números. Varios maestros sabían que estaba hablando de los racionales (Q) y ella escribió varias fracciones aclarando que pueden ser positivas o negativas.

Conductora:	los racionales son lo que normalmente conocemos como fracciones, todas las fracciones.
Sara:	¿todas las fracciones son racionales?
Conductora:	todas.

A pesar de que esta cuestión se había discutido desde la primera sesión, siguió siendo problemático reconocer que los racionales son las fracciones, todas.

La conductora resaltó que en el esquema los naturales y los enteros están dentro de los racionales, porque son todas las fracciones y todos los otros números que se pueden escribir como fracción.

Conductora:	(…) puedo escribir el 6 como 30/5 y es un racional, y es entero y natural. -15/3 es -5 que es entero y racional (…) si yo les digo 0.3, ¿lo puedo escribir como fracción?
Carina:	sí, 1/3
María:	3/10

Es la sesión 9 del taller y todavía hubo una maestra que pensaba que 0.3 es 1/3.

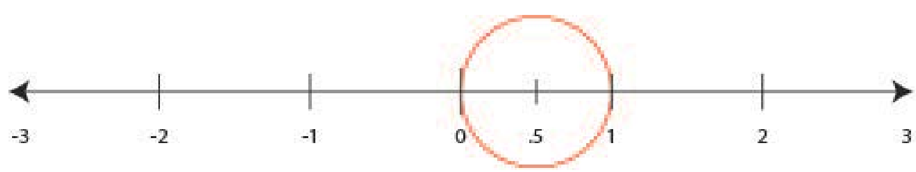
Era importante mostrar que los números con periodo son racionales porque proceden de una división de enteros, o sea, fracciones. La conductora dio un procedimiento rápido para obtener la fracción cuando se tiene un periódico puro, como $0.\overline{63}$ = 63/99. Esa información los sorprendió y probaron la técnica en otros casos.[6] Después la conductora habló de Pi para ubicarlo en el esquema.

[6] Más adelante en la sesión, la conductora explicó el algoritmo:
Para hallar la fracción que da lugar a 0.636363…
x = 0.636363…

Conductora:	Hay números, como Pi, ¿a qué es igual?
Maestros:	3.14
	3.1416
	3.14159
Conductora:	también tiene una parte infinita de decimales, pero no hay nada que se repita, no tiene ningún periodo.
Carina:	esos se llaman irracionales.
Conductora:	ese es un irracional [anota “irracional” en el rectángulo que corresponde en el esquema].
Carina:	ay mira, decíamos que los números así medio raros eran irracionales.
Sara:	pues sí porque están difíciles de razonar.
	(…)
Isela:	en el cuadrito estoy viendo que el irracional queda fuera de todos los demás, ahora sí ya entendí por qué si es irracional no puede ser racional.
Carina:	no puede ser ni entero, ni natural.

La conductora agregó en la recta a los racionales y explicó que van llenando los “huecos” que dejan los enteros. Los racionales son densos, así que siempre habría un racional entre dos racionales, sin embargo, de todas formas hay huecos en los que están los irracionales. Puso en la recta un ejemplo: una circunferencia cuyo diámetro es 1 unidad, entonces su perímetro será igual a π.

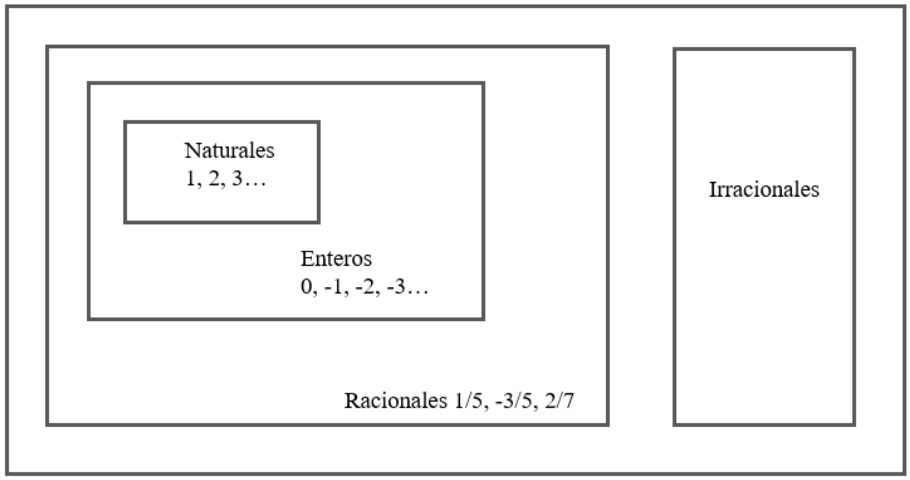
Ilustración 72 Ejemplo dado por la conductora para mostrar un círculo con perímetro Pi.



Entre los naturales, enteros, racionales e irracionales, se forma el conjunto de los reales (R). El esquema quedó así.

Se multiplica por una potencia de 10 (en este caso 100, porque el periodo es de dos cifras).
$100x = 63.636363\ldots$
Se resta x
$99x = 63$
$x = 63/99$

Ilustración 73 Ubicación de conjuntos numéricos en un esquema.



La conductora preguntó en dónde quedarían los decimales.

Graciela: coincidirían con los racionales (…) porque un número decimal es racional.
Conductora: sí, tienes razón. Un decimal es racional, ¿por qué es racional?
María: pero no todos los racionales son decimales.
Graciela: pero yo nada más dije la primera, que todos los decimales son racionales. [Risas]

La conductora anotó en el pizarrón “todos los decimales son racionales” y les recordó que los racionales son los que se pueden escribir como fracción, así pues, todos los decimales se pueden escribir como fracción. Enseguida anotó también lo que dijo una de las maestras “no todos los racionales son decimales”.

Isela: porque pueden ser irracionales, ¿no?
Conductora: no, los racionales nunca van a ser irracionales [los señala en el esquema]
Isela: ¿no es lo que decías que se llenan los puntitos… con los otros…?
Conductora: todavía no. ¿Un ejemplo de que no todos los racionales son decimales?
María: 1/3
Conductora: 1/3 es $0.\overline{3}$. Esto mete mucho ruido porque vemos un punto decimal y pensamos que sí es decimal.
Carina: eso es lo que decíamos.

La conductora les recordó que los racionales quedaron definidos como fracciones cuyo numerador es un entero y cuyo denominador es una potencia de 10. Escribió $\frac{1}{3} = \frac{x}{10}$ para mostrar que no es posible hallar esa fracción. Entonces explicó que los números pueden escribirse en cualquier base (como hicieron ellos en la segunda sesión), pero que cuando se trata de decimales se apela a la base 10, por eso el denominador debe ser una potencia de 10. Trazó una tabla de posiciones para mostrarlo.

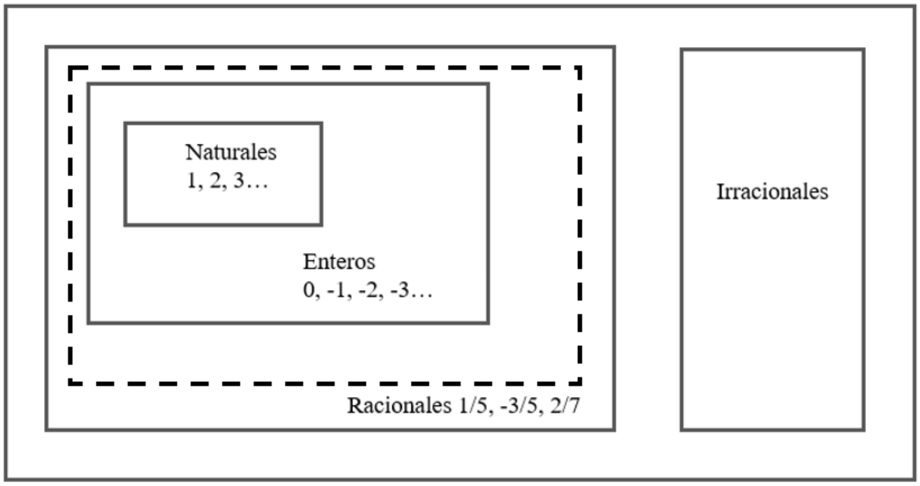
Ilustración 74 Tabla propuesta por la conductora para mostrar potencias de 10.

Millares	Centenas	Decenas	Unidades	•	Decimos	Centésimos	Milésimos
1000	100	10	1		1/10	1/100	1/1000
10^3	10^2	10^1	10^0		10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}

La conductora pidió que alguno de los participantes señalara en el esquema dónde irían los números decimales. Manifestando dudas, Edgar se animó a pasar al frente.

Edgar: a ver, los decimales son los que están en base 10 ¿no?
Conductora: a lo mejor te ayuda esto “todos los decimales son racionales, pero no todos los racionales son decimales”.
Edgar: parte por parte. “Todos los decimales son racionales, pero no todos los racionales son decimales”. Pues sería todo esto [señala el mismo rectángulo de los racionales].
Conductora: pero no todos los racionales son decimales.
Edgar: pues que se ponga un asterisco en racionales que diga “nota” [en broma].
[Risas]
Conductora: pues sí, sería una solución. A ver, ¿lo pondrías adentro de los irracionales?
Edgar: no.
Conductora: ¿los naturales estarían adentro?
Edgar: sí.
Conductora: ¿los enteros van a estar adentro de los decimales?
Edgar: también, ¿no?
Conductora: ¿todos?
Edgar: todos.
Conductora: ¿todos los racionales van a estar adentro de los decimales?
Edgar: no, bueno…
Maestros: no.
sí.
Edgar: [duda] Hasta aquí sí iría [señala el rectángulo de los enteros]
Conductora: si yo tuviera 1/3, lo dejas afuera.
Edgar: ese no.
Conductora: pero si tuvieras 1/5
Edgar: ese sí.
Conductora: si tuvieras 3/10
Edgar: también.
Conductora: ¿alguien ya visualizó cómo quedaría ese rectángulo de los decimales?
Edgar: sería como la mitad de estos [los racionales]
[El maestro traza el rectángulo en el lugar correcto]
Conductora: ¿ya vieron dónde están los decimales? Todo lo que hemos estudiado está ahí. Todos los naturales y los enteros son decimales.
Carina: y parte de los racionales.
Conductora: lo dijiste muy bien.
Isela: ¡oh, dios mío!

Ilustración 75 Ubicación de conjuntos numéricos en un esquema incluyendo a los decimales.



Los maestros revisaron la tabla que llenaron previamente y fueron pasando al pizarrón para escribir en el esquema dónde quedaría cada uno. La conductora los apoyó en esta tarea, especialmente con los periódicos e irracionales.

	[Le toca acomodar π]
Isela:	no es natural, no es entero, no es decimal y sí es racional.
Maestros:	no.
Conductora:	si es racional entonces lo podrías escribir como fracción.
Edgar:	no tiene periodo.
	(…)
Isela:	entonces el racional no tiene periodo.
Conductora:	el racional que no es decimal, fíjense en todos lo que colocaron ahí, sí tienen periodo, pero los racionales que sí son decimales, terminan. No son infinitos. Pueden tener muchas cifras, pero terminan.

La maestra que debía acomodar 0.5 lo hizo correctamente, y comentó que su mamá le enseñó que “racionales” viene de “ración” porque está “partida”. Efectivamente, es el significado que predomina en la primaria y de hecho, antes se les llamaba “quebrados”, que viene de esa misma idea de partición.

Para cerrar la etapa 1 abordamos una definición más formal de los números decimales. La conductora recordó que previamente una maestra había preguntado: dada una fracción ¿cómo saber, sin hacer la división, si va a ser finita o infinita periódica? Otra forma de plantear esa pregunta es, ¿cómo saber si una fracción es decimal o no? La conductora propuso hacer una lluvia de idas al respecto y escribió en el pizarrón dos fracciones para empezar a pensar, 3/10 y 1/3.

Rosa: no sé si sea una barbaridad, pero que el número, en este caso 3 [el denominador de 1/3], no hay un número que multiplicado por el denominador me dé una potencia de 10.

La conductora quiere llevarlos a explorar los denominadores de la fracción para determinar cómo será el cociente al efectuar la división. Para que funcione, aclaró que la fracción tiene que estar "simplificada", es decir, escrita en su forma irreducible. Entonces va preguntando por los denominadores empezando por el 2. ¿Los medios darán lugar a una expresión decimal finita o infinita? ¿Los tercios? Etcétera.

Cuando llegan a los cuartos una maestra manifestó su hipótesis: los denominadores pares son los que dan lugar a una expresión finita (tiene como casos el 2 y el 4). Sin embargo, la conductora pidió que siguieran con los quintos y sextos. La maestra vio que no se verificaba su hipótesis.[7]

Surgió una segunda hipótesis a cargo de un maestro: los denominadores que son múltiplos de 3 darán lugar a expresiones decimales infinitas. La conductora le dijo que es cierto, pero siguieron avanzando y los séptimos les hicieron ver que hay casos que la hipótesis no contempla.

La tercera hipótesis fue que los denominadores "se puedan duplicar".

Conductora: ¿y si se fijan en las finitas? [las señala 2, 4, 5, 8, 10] ¿Quién me dice otra que sea finita? Aunque no vayamos en orden. Que digan, cuando tengo esto en el denominador…
Sara: es que aquí hay relación, porque una finita es 2 y la otra es 4, luego 5 y 10. Cuando se pueden duplicar (…) 2, 4, 8, 16, 32, 64 y 5, 10, 20, 40, 80.
Conductora: ¿qué les notan?
Sara: que duplican.
Conductora: ella dice que esos denominadores son los que se van multiplicando por 2, esos dan una expresión finita. ¿alguna otra idea?

Las ideas se iban acercando a encontrar la condición que deben cumplir los denominadores, pero el tiempo de la sesión estaba por concluir y la conductora aceleró la discusión para llegar al punto que buscábamos diciendo que las expresiones finitas ocurren cuando los factores en los que se descompone el denominador son únicamente 2 y 5.[8] Después de probar algunos casos, la conductora cerró la sesión explicando que los denominadores que son potencia de 10 van a tener un número igual de doses y de cincos. Por ejemplo, 100 tiene $2 \times 2 \times 5 \times 5$ (que también puede interpretarse como $2 \times 5 \times 2 \times 5 = 10 \times 10$), y 10000 tiene $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$ ($10 \times 10 \times 10 \times 10$). Entonces, a un denominador

[7] Los quintos darán lugar a una expresión finita (3/5 = 0.6) y los sextos una infinita $5/6 = 0.8\overline{3}$).
[8] 4 es 2^2, 10 es 2×5, 40 es $2^3 \times 5$, por ejemplo.

como 2 × 2 × 2 × 5 que es 40, le faltan dos cincos para que sea una potencia de 10, en este caso, 1000.

Sara: ¿Por qué no nos explicaron esto desde el principio?
[Risas]

A manera de cierre

Respecto a qué son los números decimales destaco en primer término la fuerte asociación que hicieron los maestros entre estos números y el contexto en el que se utilizan:

- Un número es racional o entero dependiendo del contexto.
- Los decimales sirven para medir cosas pequeñas.
- Los decimales sirven para lograr que las mediciones sean exactas.

Por ello, 3/4 puede ser un entero si se trata de una botella completa de jugo y 2 puede ser una fracción si es el número de kilogramos que quedan en un paquete en el que había 4. Las otras asociaciones también tuvieron que ver con la medición y como se trata de fraccionar la unidad, es la medición de cosas diminutas. Los maestros afirmaron, por ejemplo, que los aparatos especializados usan números decimales para dar cuenta de cosas muy pequeñas, también que al medir el resultado podía tener muchas cifras, pero son "pequeñas porciones", y que siempre pueden irse agregando decimales hasta llegar a una medida exacta (de lo muy pequeño).

La confusión entre decimales y medidas es producto de decisiones didácticas como señala Brousseau (1976). Estos números están fuertemente asociados a la medición desde su origen, así que no es raro dicho efecto. La vinculación con cosas pequeñas no la había encontrado en la literatura, pero no resulta extraño pensar que también es fruto de decisiones didácticas, pues casi todos los acercamientos a la construcción de los decimales ocurren en contextos de medida usando unidades como el kilogramo, el metro y el litro, así que los fraccionamientos son en miligramo, milímetro, mililitro, etc., que en términos prácticos son "cosas" pequeñas. Esto hace que para los maestros (y los alumnos) sea difícil que convivan dos ideas aparentemente contradictorias: el número 2 es entero aunque sea la mitad de algo, y 0.5 es la mitad de la unidad, así que si la unidad es el año luz 0.5 son 4 730 365 236 290.4 kilómetros.

No tengo datos que me permitan dar cuenta de posibles cambios a lo largo del taller respecto a esta vinculación, pues aunque hubo actividades en las que midieron o emplearon unidades de medida involucradas en problemas, la medición y las unidades de medida no fueron objeto de trabajo en sí mismas.

Ahora bien, estar tan “revueltos” con el contexto quizá no sea la parte más problemática que encontré. Las dificultades para comprender las diferencias entre un número y sus representaciones, las propiedades de los decimales y la relación entre los conjuntos numéricos que se estudian en la primaria (los racionales y los naturales) son fuente de muchos problemas para los maestros. Me refiero a ideas como:

- Los decimales son (solamente) las cifras a la derecha del punto.
- Las fracciones que son decimales son únicamente aquellas con denominador potencia de 10.
- Los enteros no son decimales ni fracciones.
- Los enteros y los naturales, ¿son lo mismo?
- Las fracciones son particiones, porciones, quebrados, etc. (significado que dificulta dar sentido a fracciones como 7/4).
- Hay números decimales (con punto) distintos (finitos e infinitos).
- Los números mixtos, periódicos, irracionales, racionales y decimales, ¿son lo mismo?
- 1/3 no es exacto.

No es extraño que tengan estas dificultades sabiendo que las decisiones didácticas no han sido las ideales y que además, estamos hablando de uno de los conocimientos matemáticos más complejos de aprender en la educación primaria.

En las ideas de la lista se advierten confusiones entre un número y sus posibles representaciones, y entre distintos conjuntos numéricos. Respecto a lo primero, es cierto que el 2 es un entero y no hay más que agregar, pero para un maestro es útil saber que ese número tiene infinitas representaciones en el conjunto de los racionales (por ejemplo, 16/8, 200/100 y 2.0), que estando en los enteros el 2 tiene las propiedades de ese conjunto, pero representado en los racionales 16/8 ya no tiene antecesor ni sucesor, además de que en cualquiera de sus representaciones se trata de un número decimal (se puede expresar con una fracción cuyo denominador es una potencia de 10 y su escritura con punto tiene una cantidad finita de cifras a la derecha del punto). Comprender todo eso, como han señalado múltiples trabajos, es complejo. Sobre lo segundo (distintos conjuntos numéricos), entender cómo se relacionan unos con otros (cuál contiene a cuál o si hay o no intersecciones) tampoco es trivial. En el taller hubo avances en estas cuestiones, específicamente:

- Sabían que **las fracciones con denominador potencia de 10 son decimales**, pero si estaban escritas con una fracción equivalente cuyo denominador no fuera potencia de 10, ya no era un número decimal. Cuando los maestros demandaron una definición de número decimal en la sesión 3 la conductora revisó distintos números para aclarar el asunto: si se puede escribir con denominador potencia de 10, es decimal. Así pues, los maestros pudieron incluir en los decimales a números como 3/4 y excluir a 1/3. No hicimos más actividades específicas para estudiar esto.
- Al inicio del taller los maestros dijeron que **los decimales son todos los números que se escriben con un punto** o bien, que **son las cifras a la derecha del punto**. Aunque no todos los maestros avanzaron igual, conforme transcurrieron las sesiones ampliaron estos conocimientos para incluir a los enteros (como lograron hacer Rosa y Roberto) y así considerar a todo el número (2.04 es todo decimal, no solamente .04). Con menor éxito, algunos lograron excluir a los periódicos y los irracionales (para varios maestros la sola presencia del punto siguió siendo un argumento suficiente para que un número sea decimal).

En otros aspectos el avance fue menor:

- Sabían que **los enteros y los naturales** no eran fracciones ni irracionales (estos últimos son demasiado raros como para confundirse con un natural), pero no tenían claro si eran lo mismo o cuál podría ser la diferencia entre unos y otros. Esto puede explicarse porque en la primaria no se estudia el conjunto de los enteros, pero tras el análisis de lecciones que llevé a cabo hay evidencia de que la confusión no solo tiene que ver con el desconocimiento de los negativos, sino porque al estudiar a los racionales se le llama "número entero" a los naturales (en el número 9.4 el 9 es entero porque no está dividido). Así que 9 es natural y es entero… y en términos prácticos esas dos formas de nombrarlos aluden a las mismas propiedades para ellos (son los números para contar, son positivos, tienen antecesor y sucesor, y no están fraccionados).
- Los maestros sabían que las fracciones tienen nombres distintos si son menores o mayores que 1, y dependiendo de su escritura. Las **fracciones comunes o propias** son menores que 1 (como 4/5), las **fracciones impropias** son mayores que 1 (como 6/5), y si se escriben "combinándolas" con un natural se llaman **números mixtos**

(como 1 1/5). Estas son clasificaciones en las que los maestros confiaban, pues las han utilizado por largo tiempo y verificado su veracidad. Hacer convivir sus formas de entender los números no enteros con la clasificación en conjuntos numéricos que les propusimos en el taller, fue difícil para los maestros. Cuando alguna tarea de las que les propusimos movilizaba este tipo de conocimientos (por ejemplo, determinar si 7/3 es natural, entero, decimal, racional, irracional), volvieron a los conocimientos en los que confiaban (los maestros decían "fracción impropia").

- A partir de comentarios hechos en las sesiones sabían que **si un número es racional no puede ser irracional**. Pero esa distinción posiblemente la hicieron por los nombres de los conjuntos y no por sus propiedades, pues en sus explicaciones no era evidente que la diferencia es que los irracionales no proceden de una división de enteros. Otro dato que me hizo suponer que la distinción no era aún comprendida, fue que se referían los irracionales o los "no racionales" como aquellos que no se podían dividir, en contraposición a los racionales que son los que se fraccionan o dividen.
- Al término del taller **los números periódicos y los irracionales** siguieron siendo un misterio para la mayoría de los participantes. Algunos mostraron ciertas reservas para incluirlos en el conjunto de los decimales lo que dio cuenta de un avance; pero otros siguieron manifestando muchas dudas: los que tienen "sombrero" son los irracionales, Pi y 0.333… son decimales porque llevan punto, o que los decimales infinitos son lo mismo que los periódicos.

Para finalizar, respecto a cuáles son los números decimales hubo avances importantes como incluir en los decimales a fracciones con denominador distinto a una potencia de 10 y excluir a otras como 1/3. Ese logro permitió que pudieran "entrar" a actividades posteriores del taller. Sin embargo, como señala Brousseau (1976, p. 104) "(…) el aprendizaje se hace por la puesta a prueba de concepciones sucesivas, provisoria y relativamente buenas, que será necesario rechazar sucesivamente o retomar en una verdadera epistemología, nueva cada vez". Las oportunidades que los maestros tuvieron para utilizar y validar estas nociones constituyeron un primer acercamiento y hace falta más trabajo para que se vuelvan un escalón firme que además modifique nociones previas.

8.1.2 Orden en los decimales

En los decimales el 1 vale más que el 9 [todo es al revés que en los enteros].
Para comparar racionales hay que escribirlos todos con punto o todos con fracción decimal.
Al comparar dos números: el menor es el que tiene más cifras a la derecha del punto porque el entero está dividido en partes más pequeñas o, el mayor es el que tiene menos cifras a la derecha del punto porque las partes son más grandes.
Para saber cuál número es mayor se compara la cifra de los décimos de ambos números, luego la de los centésimos, etcétera. El mayor será el número que en total tenga más cifras mayores (no considera el valor posicional).
Para comparar números con punto se puede “rellenar” con ceros donde haga falta (porque 0.4 y 0.40 son iguales).

En la primera sesión la conductora planteó actividades relacionadas con el ordenamiento para conocer las ideas de los maestros y avanzar hacia tareas más complejas. Lo primero que noté es que ordenar una lista de números en la que había fracciones y números con punto, no fue trivial.

Para esta tarea seguí un diseño didáctico cuidadoso que consiste en varios tipos de situaciones didácticas: primero solicitar la resolución individual (situación de acción), luego comparar la resolución en parejas y lograr una respuesta conjunta, describir el procedimiento empleado (situaciones de formulación) e intercambiarlo con otra pareja que lo valoraría (situación de validación) (Brousseau, 2007).[9] Esta forma de trabajo tiene un potencial didáctico importante pues el medio con el que interactúan los sujetos va cambiando y ello demanda adaptaciones, y además la autoridad del maestro no ha aparecido para decir si algo es correcto o no, sino que “devuelve” el problema a los alumnos.

Así pues, la primera consigna fue hacer el ordenamiento de forma individual y luego compararlo con el de otra persona para lograr uno de manera conjunta. La lista incluyó los números 0.65, 0.40, 0.8, 4/10, 0.177 y 100/1000.

En el momento de comparación que ocurrió entre dos maestros pude apreciar algunas de las dificultades que se estarían poniendo en juego en el taller:

Conductora: ¿cuál es tu duda?

[9] Estos diseños se han implementado y se siguen desarrollando al interior de la TSD, como describí a propósito del trabajo de Lerner (2001).

Efraín: dividí [en la calculadora] 100/1000 y me salió esto [0.001 cometió un error al teclear] pero no sé si va arriba o abajo [si es el mayor o el menor de la lista].

Carina: hasta abajo no va [no es el menor] (…) lo que pasa es que yo los convertí a decimales y pues es décimos, centésimos y milésimos [se fija en el denominador, pero no en el numerador]. Pero es entre… ¡ay, estoy mal aquí!

Efraín: ¿ese [100/1000] dónde lo pusiste? (…) El que es entre 1000.

[Carina anota 100/1000 y tacha dos ceros en el numerador y dos en el denominador obteniendo 1/10]

Carina: entonces va hasta acá [es el menor].

Efraín: es más chiquitito ¿no?

Carina: no, es más grande. Un decimal es más grande que 4 decimales [0.1 > 0.4]. Aquí [a la derecha del punto] es inverso.

(…)

Efraín: porque .1 es menor que .40 [los lee como “punto uno y punto cuarenta”]

(…)

Conductora: ¿entonces, el más chiquito cuál es?

Efraín: 100/1000, yo digo…

Conductora: entonces un décimo es el más chiquito.

Carina: no, un décimo es el mayor.

Conductora: ya me confundí…

[Carina los escribió todos con punto obteniendo 0.177 > 0.65 > 0.40 > 0.8 > 0.4 > 1/10]

[Efraín escribió 0.177 > 0.65 > 0.40 > 0.8 > 0.40 > 100/1000]

(…)

Carina: recuerda que aquí después de los decimales el 1 vale más que el 9.

En este breve intercambio se aprecian varias cuestiones problemáticas: no reconocer con seguridad que 100/1000 = 1/10, no lograr ubicarlo en la lista (a veces pensaban que era el mayor y otras el menor), no tener la certeza de que la técnica de tachar ceros fuera válida en esta situación, no reconocer que 0.40 es el mismo número que 4/10, pensar que 0.40 es mayor y también menor que 0.8, pensar que 0.177 es mayor que todos los demás números de la lista, pensar que a la derecha del punto las cosas funcionan “de manera inversa” respecto a los enteros y por eso 1 vale más que el 9.

Los ordenamientos de todos los equipos quedaron así:

1 equipo: 100/1000 < 0.177 < 4/10 < 0.65 < 0.8 [correcto, obviaron la igualdad]

1 equipo: 0.177 > 0.65 > 0.40 > 0.8 > 0.4 > 0.1 [ordenado como si fueran naturales]

2 equipo: 100/1000 < 0.177 < 0.40 < 4/10 < 0.65 < 0.8 [no reconocen la igualdad de 0.40 y 4/10]

3 equipo: 100/1000 < 0.177 < 0.40 = 4/10 < 0.65 < 0.8 [correcto]

En este punto la conductora no hizo ninguna corrección de los errores que había notado en el trabajo individual ni en el de parejas, para permitir que esa discusión se hiciera conjuntamente al detectar inconsistencias.

Al equipo de Efraín y Carina se unió Fátima para realizar la siguiente tarea, que consistió en escribir conjuntamente un "instructivo" para explicarle a un tercero cómo se ordenan números como los de la lista. Carina está consciente de sus dudas pues ella y su equipo no han sido consistentes con los criterios de ordenamiento (unas veces dijeron que 0.1 era el menor de la lista y otras que era el mayor). Querían empezar a trabajar, pero escribir ese procedimiento demandaba que hicieran explícitos criterios que no tenían nada claros. Hasta ese momento la conductora no había intervenido para corregir ni enseñar nada, el momento de conflicto que estaban viviendo fue posible gracias al diseño de la situación: comunicar a otra persona un razonamiento o procedimiento demanda la clarificación de los criterios propios.

Al verlos dudar, se acercó la conductora.

Conductora: ¿está difícil?
Carina: no, más que nada la diferente forma que tenemos de haber aprendido los decimales… los errores que nos trascienden.

Los procedimientos que escribieron los equipos fueron:

Equipo A (Graciela y Sara)

1. Convertir todas las cantidades en fracción con denominador o número decimal utilizando punto.
2. Ordenar revisando el primer dígito después del punto entre menor sea el número, menor la cantidad.

Equipo B (Edgar y Esther)

Convertir todos los números a decimales (números con punto).
Enseguida analizarlos empezando a observar a partir del punto recordar que el número que está después del punto entre mayor sea, mayor es el decimal. Después seguir con el siguiente que son los centésimos y comparar en caso de que tengan = décimas. Así hasta el que tenga más cifras.

Equipo C (Lidia, Leticia y Berta)

- Convertir todos a decimales.
- Escribirlos de forma vertical.
- Iniciar comparando décimos.
- Si hay décimos iguales, comparar centésimos y así sucesivamente.

Equipo D (Efraín, Carina y Fátima)

1. Se ordena de menor a mayor.
2. El # menor es aquel que tiene más cifras y de mayor valor absoluto.
3. El mayor es el que tiene menor # posicional.

Equipo E (María y Nancy)

1. Convertir a fracciones o a decimales las cantidades.
2. Después compararlos y ordenarlos de acuerdo al criterio.
3. Para facilitar, asociarlo con algo habitual como dinero, partir pastel, etc.

Equipo F (Isela y Roberto)

Convertir las fracciones a decimales (dividiéndolas).
Agregamos ceros hasta llegar a milésimos.
Vamos ordenándolos.

En los equipos A, B, C y F se reconoce algún criterio de ordenamiento, como escribirlos todos con punto o con fracción decimal, escribirlos verticalmente para facilitar la comparación o rellenar con ceros para que tengan la misma cantidad de cifras. En este punto, no estaba segura de si comprendían lo que había detrás de estos criterios, pero al menos en estos equipos había claridad sobre cómo funciona el sistema del lado derecho del punto decimal y qué hacer cuando también hay fracciones. Resalto dos cuestiones de los procedimientos de estos cuatro equipos: el B escribió "números decimales (números con punto)" como para enfatizar, sin embargo, en la discusión grupal aclararon que lo escribieron así porque a partir de lo trabajado en la sesión ya no estaban seguros de cuáles eran los decimales; y la segunda cuestión es señalar que el procedimiento que produjo el equipo C es muy claro y completo.

Las redacciones de los equipos D y E no fueron tan claras. El equipo E en realidad no escribió un criterio de comparación, pero ordenaron correctamente los números de la lista. Las mayores dificultades se mostraron en el equipo D, integrado por Efraín, Carina y Fátima. En su procedimiento se reconoce un error común entre los alumnos de primaria que es pensar que a la derecha del punto los números con más cifras son menores, y un error que no había encontrado en otros trabajos con maestros: pensar que a la derecha del punto las cifras con mayor valor absoluto valen menos que las de menor valor absoluto ($9 < 1$).

Una vez que cada equipo escribió su procedimiento, debían intercambiarlo con otro para que lo interpretara y dijera si era claro y correcto. Ahí esperábamos que surgiera otro momento de discusión y posible aclaración de conflictos.

Al leer el procedimiento que recibieron, Carina y Efraín siguieron planteando hipótesis:

Efraín: entre más números tenga de derecha a izquierda, es menor [del lado del punto]

Conductora: ¿es menor?

Efraín: es lo que siempre he pensado.

Carina: o sea, si tiene más números de derecha a izquierda es menor. Sí [con duda]. ¿Entonces dónde dejamos a este número [100/1000]?

Efraín: Como ya lo dividimos, pues queda .1

Carina: y cambia de lugar…

En ese intercambio se aprecia otro elemento importante: que un número puede tener valores distintos según la representación que se use para escribirlo. Da la impresión de que confían en que 100/1000 = 0.1 y a la vez pensaran que 0.1 < 100/1000.

Al momento de la puesta en común se discutió con todo el grupo la idea de que el valor de un número se determina según su cantidad de cifras a la derecha del punto:

Carina: en decimales el número mayor es el menor, es lo contrario a los números enteros, si yo tengo 276 [0.276] y 56 [0.56] ¿cuál es el mayor? Pues .56 porque mi entero se reduce en menos… se divide en menos partes y .256 se divide en más partes. Por eso, si es mayor el número vale menos, después del punto.

Conductora: ¿lo que estás queriendo decir es que mientras más cifras tenga a la derecha del punto, es un número menor?

Carina: sí, porque se divide más…

Conductora: y cualquier número que tenga dos cifras a la derecha del punto es mayor que uno que tenga tres.

Carina: sí.

Conductora: ¿estamos de acuerdo?

Maestros: no.

Sara: no es tanto el número de cifras sino el valor de… el número de las cifras, porque 0.100 y 0.177 tienen 3 cifras, pero son diferentes cantidades, entonces más bien dependiendo de eso.

María: la posición que ocupa cada cifra.

Esther: de mi lado izquierdo tengo lo enteros, de mi lado derecho los decimales. A partir del punto, la primera… orden son los décimos y un décimo me indica que la unidad se dividió en 10, el siguiente número indica que la unidad se dividió en 100 (…) el número mayor después del punto es el que me va a indicar… va a dar el punto de partida para indicarme cuál es mayor.

Conductora: Carina, ¿nos das un ejemplo de lo que tú estabas diciendo? [anota en el pizarrón 0.240 y 0.239]

Carina: ahorita los dos tienen tres cifras, si yo le aumento a… al 240 le aumento 5

Conductora: [escribe 0.2405 y 0.239] ¿Para ti cuál es mayor?

Carina: para mí es el 0.239

Conductora: ¿cuál es tu regla para determinar que ese el mayor?

Carina: porque 0.2405 lo dividió en mil… no, en diez mil partes.

La conductora explicó al grupo el razonamiento de Carina: cuando un número tiene más cifras a la derecha del punto significa que “se dividió” en partes más pequeñas. No todos estuvieron de acuerdo en que eso fuera correcto, Sara ya había comentado que depende del valor de las cifras y durante la discusión Esther comentó que rellenar con ceros (que fue uno de los pasos que escribió su equipo en el procedimiento) podía ayudar a ver el error de Carina.

Efraín y Carina no fueron los únicos que centraron su razonamiento en el número de cifras. María formuló la misma idea, pero hacia el otro sentido (los números con menos cifras son mayores).

Leticia: se nos hace complicado convertirlos a fracciones porque les costaría más trabajo a los niños [se refiere a fracciones decimales].

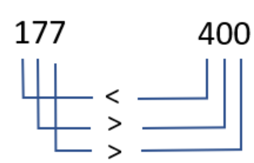
[La conductora propone escribirlos todos con fracciones en el pizarrón y María pasa al frente].

María: vamos a pensarlo en pastel: un pastel partido en 10 pedazos [8/10] y un pastel partido en 100 pedazos [65/100]. ¿Qué rebanada será más grande? Esta [señala 8/10]. Entre menor sea el número, más grande la rebanada. Ahora, con dinero: 8 décimos es casi 1 peso y esto [0.177] es mucho menos que un centavo. Aquí ya casi son 50 centavos [0.40], aquí es un poquito más de los 50 centavos [0.65]. Si yo lo pienso de esa manera, con dinero, me va a ser más fácil ordenarlos (…).

María también centró su razonamiento en el denominador y no en la relación entre numerador y denominador, como lo hizo notar la conductora posteriormente. Además, también mostró dificultades para relacionar a los decimales escritos con punto con el dinero, pues 0.177 pesos son casi 18 centavos.

En ese momento de la sesión, Efraín pidió pasar al pizarrón pues llevaba un rato haciendo anotaciones en su cuaderno y quería compartirlas, “yo manejo mucho esto y no sé por qué me confundí”, afirmó. Tomó dos números de la lista y trazó las líneas que se muestran en las que compara cifra por cifra (décimos con décimos, centésimos con centésimos y milésimos con milésimos).

Ilustración 76 Procedimiento de Efraín para comparar decimales.



Afirmó que ese sistema le permite saber que 0.400 es menor que 0.177, porque 0.177 tiene dos “mayores” (>).[10] Otros maestros no estuvieron de acuerdo. La conductora preguntó por qué seguir comparando cuando al comparar las primeras cifras (décimos) ya se ve que 1 < 4. Él no respondió a eso, sólo reafirmó que al comparar todas las cifras, el que

[10] Aunque no se explicita, está comparando 0.177 y 0.400, no 177 y 400.

tenga más “menores”, es menor. Parece que Efraín quiso decir lo siguiente: comparo cifra por cifra y sé que el número mayor será el que tenga más cifras mayores. Bajo ese razonamiento, 0.1999 sería mayor que 0.9111, pues no considera el valor posicional. Al plantear esta hipótesis Efraín transgrede un elemento clave del sistema de numeración decimal que es considerar la posición de cada cifra: un 5 en la posición de los centésimos no “vale” lo mismo que en la posición de los décimos, entonces la comparación requiere fijarse primero en las cifras de mayor orden, y si son iguales se prosigue hacia la derecha hasta encontrar cifras distintas en el mismo orden.

La conductora puso otro ejemplo para confrontar la hipótesis de Efraín, comparar 0.6534 y 0.1897 con su sistema (también obviando los puntos). Cuando resultó mayor 1897 dudó, pero tras pensarlo dos veces se mantuvo en su hipótesis: 1897 es mayor. La conductora verificó si esto también lo aplicaba con los naturales, pero dijo que solamente con los decimales. La conductora tomó un paso más con Efraín para llevar al límite su razonamiento: plantear un par de números en los que su sistema arrojara un mismo número de > y <. Modificó una cifra al ejemplo anterior quedando 0.6534 y 0.1397.

Conductora:	¿cómo decides en ese caso?
Efraín:	[no contesta]
Conductora:	no podríamos decir que son iguales, ¿verdad?
Efraín:	no
María:	es más la primera [es mayor 0.634]
Conductora:	bueno, vamos armando ideas y ¡salen muchas ideas!
María:	¿y si nada más tomamos de los decimales la primera cifra? Ahí nos podemos dar cuenta. Ignorando los demás, nada más comparo los décimos
Conductora:	por allá proponían eso, convertir todos a decimales y ponerlos en columna [Leticia pasó al pizarrón y anotó los números de la lista alineados según el punto. Explicó que en su equipo compararon los décimos y sólo en caso de que fueran iguales, seguían con los centésimos; o bien, la técnica que sugirió otro miembro del equipo que consiste en convertirlos a milésimos agregando ceros a la derecha para que todos los números tengan tres cifras]

Ilustración 77 Procedimiento de Leticia para comparar decimales.

0.650

0.400

0.800

0.400

0.177

0.100

Como puede apreciarse, el procedimiento de Efraín se expuso ante el grupo y la conductora ayudó a aclararlo para que todos entendieran su razonamiento, además buscó ejemplos y contraejemplos para poner a prueba sus ideas, pero decidió no explicitar que era incorrecto permitiendo que otros maestros argumentaran a favor o en contra.

La conductora aprovechó el tema de rellenar con ceros para hablar sobre equivalencia.

Conductora: ¿se dan cuenta de las ideas "fuertes" que están manejando? El hecho de convertir a punto decimal, y también esta otra parte que implica un conocimiento más fuerte, que implica que puedo agregar ceros. Me gustaría que lo explicaran, ¿a poco 0.4 y 0.40000 son lo mismo?

Maestros: [algunos contestan que sí y otros dudan]

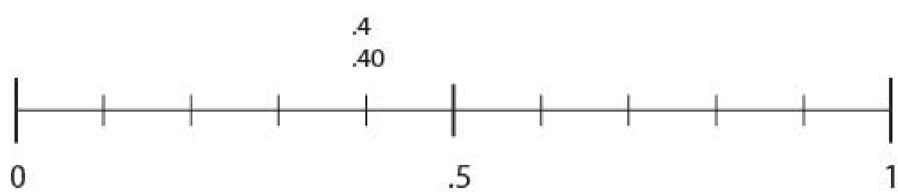
Conductora: ¿quién nos autoriza a poner ceros?, ¿cómo pueden explicarlo?

Isela: eso siempre me ha costado trabajo, y lo que hago con mis niños es ir a la recta numérica (…) a mí lo del pastel me complica porque no lo veo concreto (…).

Isela parecía referirse a que el sombreado de enteros o los repartos no permiten una comparación tan directa como ubicar números en la recta numérica. La conductora insistió en el tema: por qué se vale poner ceros a la derecha en los números con punto. Isela pasó al pizarrón, trazó una recta del 0 al 1 y señaló las subdivisiones correspondientes a los décimos. "Si yo vuelvo a dividir aquí [del 0 a 0.1] serían 10 centésimos".

Isela: Si yo vuelvo a dividir aquí [del 0 al 0.1] en otros 10, son 10 centésimos y entonces sería .40 porque son 10, 20, 30, 40 [suma los centésimos hasta llegar a 0.4]. Y sería seguir dividiendo aquí para que me dé .40, .400, .4000, etc.

Ilustración 78 Ubicación de 0.4 y 0.40 en la recta.



La conductora puntualizó que en la recta puede verse lo siguiente, si se divide en décimos ese punto es 0.4, pero si el tramo se divide en centésimos el punto es 0.40, y en milésimos 0.400. Añadió otra reflexión sobre "agregar ceros" o la equivalencia entre esos números: si a 0.4 le sumas 0 centésimos, en realidad no le estás agregando nada, así que puede considerarse que es el mismo número.

Carina intervino para decir que estaba de acuerdo con que 0.4 = 0.40 lo que mostró un avance, pues en su ordenamiento inicial no lo había reconocido. La conductora aprovechó la intervención de Carina para recordar su razonamiento anterior: los números con más cifras a la derecha del punto son menores que los que tienen menos cifras. La conductora aclaró que es cierto que los diezmilésimos son más chicos que los milésimos y que hasta ese momento nadie había rebatido la idea de Carina que la llevó a afirmar que 0.2405 < 0.239.

> Conductora: ¿están de acuerdo en que 0.239 es mayor porque son milésimos? Y si no están de acuerdo, ¿cómo lo pueden explicar?
>
> María: autorizamos un cero ¿no? Y ahí sí se ve la diferencia [se refiere a escribir 0.2390].
> [risas]
>
> Graciela: hace rato nos preguntaron si todos estábamos de acuerdo con ese orden [el que expuso Leticia] y dijimos que sí. Aplicando la regla que decía Efraín debería ser diferente o si llegaron al mismo punto me gustaría saber cómo fue
>
> Carina: no… salió igual [en realidad su ordenamiento fue distinto].
>
> Conductora: a ver, tenemos dos procedimientos que no nos convencen mucho [los de Efraín y Carina]. ¿Cómo argumentamos si estamos o no de acuerdo?
>
> Graciela: partiendo de la explicación del entero dividido, si vamos haciendo el comparativo de la primera cifra junto al punto decimal tenemos lo mismo [2], pero cuando pasamos a la siguiente cifra 4 > 3 centésimos, si nos mantenemos en la recta y está dividida en 100 partes, va a ser mayor si tomo 24 que si tomo 23.

Carina no pareció convencida con ese argumento, así que la conductora tomó otro camino para atender esta dificultad: usar fracciones para mostrar la relación entre el número de partes en las que está dividido el entero (denominador) y cuántas partes se "toman" (numerador). Escribió ambos números como fracción 2405/10000 y 239/1000, y explicó que el razonamiento de Carina se centra en ver de qué tamaño es el denominador, pero no se fija en el numerador, y dado que las fracciones son un solo número hay que fijarse en ambos.

> Conductora: cuando nos encontramos con niños que dicen que 0.177 > 0.4 se no se están fijando en el denominador, sólo están comparando el 177 y el 4, pero no están viendo de qué tamaño son las partecitas. Creo que lo que haces aquí Carina es sólo fijarte en el denominador, en cuántas partes hay y tienes razón cuando dices que entre más cifras tengo después del punto divido en cachos más chiquitos (…) pero se te está olvidando tener en cuenta que también depende de cuántos de esos cachos agarre, porque por muy chiquitos que sean, si tomo muchisísimos puedo tener una cantidad mayor que con cachos más grandes de los que tomo muy poquitos. Hay que tener en cuenta las dos cosas (…)
>
> Carina: ajá

No quedó claro que Efraín hubiera descartado su procedimiento a partir de lo trabajado en la sesión, pero Carina sí dio muestras de haber comprendido argumentos nuevos para ella como la igualdad entre 0.4 y 0.40, e incluso estuvo de acuerdo con el orden cuando la conductora escribió los números del último ejemplo agregando un cero (como sugirió María), 0.2405 > 0.2390.

15/1000 se escribe 0.0015

Hay un orden o una secuencia en la numeración con punto.

Como mencioné, en la sesión 2 del taller los maestros trabajaron con tiras de cartulina para medir objetos y registrar las medidas en una tabla usando la base 4. La conductora anotó en el pizarrón las medidas que tomaron todos los equipos: 1.011, 1.020, 0.330, 0.100, 0.022, 0.021, 0.001. Dado que todos los números tenían la misma cantidad de cifras no les fue difícil ordenarlas.

Después, la conductora pidió que ordenaran la siguiente lista de números, aclarando que también estaban escritos en base 4: 0.21, 0.021, 3/16, 0.210, 15/64, 0.13, 0.003, 0.3. Esta tarea fue más difícil debido a la presencia de fracciones. Varios maestros la resolvieron usando las tiras, pues para emplear el procedimiento previo (comparar observando cifra por cifra) necesitaban escribir las fracciones como números con punto y en un primer momento no lograron hacerlo o no estaban seguros de sus producciones.

El equipo de Sara, Nancy y Efraín comenzó el ordenamiento representando cada número con las tiras, así que lo que en realidad comparaban era la longitud.[11] Trabajar inicialmente con las tiras les permitió obviar el uso de éstas cuando llegaron a 0.3, supieron que era el mayor de la lista porque "aquí tenemos 3 de 1/4" dijo Sara.

Lo aprendido en la sesión pasada les ayudó a entender que 0.21 y 0.210 eran iguales.

Efraín:	¿ese qué número es?, ¿veintiuno?
Sara:	dos diez [0.210]
Efraín:	¡ah!
Sara:	entonces este [0.21] y este [0.210] es lo mismo, porque aquí le falta el cero.
Efraín:	sí es lo mismo.
Sara:	porque no tiene nada anotado después.
Nancy:	no, no es igual.
Sara:	sí mira, porque después del punto hay un 2 y aquí hay un 2 [va comparando cifra por cifra en ambos números], luego hay un 1 y un 1, y este no tenía cero, pero es lo mismo.

[11] Usando la base 10 sería algo como lo siguiente: para comparar 203 y 195 se toman 2 tiras de 100 unidades más 3 tiras de 1 unidad, y luego 1 tira de 100 unidades más 9 tiras de 10 unidades más 5 tiras de 1 unidad. Entonces el número mayor es aquel cuya representación con las tiras tenga mayor longitud.

Para ordenar la lista completa siguieron observando cifra por cifra y usaron las tiras solamente cuando alguien tenía dudas. Cuando terminaron de ordenar los números con punto repararon en las fracciones, pues las escribieron aparte y no las habían incluido en el ordenamiento. 3/16 la ubicaron rápidamente porque con punto sería “cero tiras completas, cero tiras de 1/4 y 3 tiras de 1/16”, o sea, 0.03. La fracción que representó un reto importante para todos los equipos fue 15/64 dado que el 15 tiene una escritura distinta en la base 4.[12]

Uno de los equipos no logró expresarlo correctamente con punto, pero pudieron establecer que 15/64 > 3/16.

Nancy:	¿entonces cuál es mayor?
Sara:	es que mira, tenemos 15 de 64, entonces si aquí [en la tira de 1/4] hay 4/64 + 4/64 + 4/64 + 4/64 [toma la tira de 1/64 y la va superponiendo sobre la de 1/4], pero son 15 entonces le quitamos 1 [porque en la tira de 1/4 caben 16/64]. Y en la otra son 3 de 16 [pone 3 tiras de 1/16 sobre la de 1/4 mostrando que es una longitud menor que 15/64].

En otro equipo sí lograron escribir 15/64 con punto.

Leticia:	vimos que 1/16 tiene 4/64 [usa las tiras para mostrar la equivalencia]. Intuimos que si tenemos 3/16 son 4, 8, 12 sesentaicuatroavos, y 13, 14, 15 [cuenta 3 tiras más de 1/64] ya nos dan 15/64.

Para escribir 15/64 con punto otro equipo hizo una tabla similar a la que les propusimos para ordenar las mediciones con las tiras. Lidia incluso comentó “la tabla te está diciendo cuántos tiene de éste o de éste” señalando 1/4 y 1/16 (figura 71). Es la misma idea que subyace en las tareas que ellos ponen para sus alumnos: una tabla de valor posicional en la que los números se ordenan por columnas “dice” cuántas centenas hay en esa columna, cuántas decenas, etc.

Los ordenamientos quedaron como se muestra. Ninguno de los equipos señaló la igualdad de 0.21 y 0.210 aunque la hubieran tenido presente antes.

Equipo A [correcto, pero obviaron la igualdad]
0.300, 0.210, 0.21, 0.130, 15/64, 3/16, 0.021, 0.003

Equipo B [correcto, el formato no permite evidenciar la igualdad]

[12] El conteo en base 4 es: 1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, etc.

Ilustración 79 Ordenamiento del equipo B usando una tabla de valor posicional en base 4.

1/4	1/16	1/64
.3		
.2	1	
.2	1	0
.1	3	
.0	3	3
.0	3	
.0	2	1
.0	0	3

Equipo C [correcto, pero obviaron la igualdad]

0.3, 0.21, 0.210, 0.13, 0.033, 0.03, 0.21, 0.003

Equipo D [error al escribir con punto 15/64]

0.3, 0.21, 0.210, 0.13, 0.03, 0.21, 0.003, 0.0015

En la puesta en común María dijo que en su equipo el orden quedó diferente porque escribieron distinto 15/64. Pasó al pizarrón y anotó en una tabla:

Ilustración 80 María escribe 15/64 en una tabla de valor posicional en base 4 (1).

TC	1/4	1/16	1/64
	0	0	15

La conductora la preguntó si lo escribieron exactamente así [0.0015]. "Tendría que ser así", respondió añadiendo una columna.

Ilustración 81 María escribe 15/64 en una tabla de valor posicional en base 4 (2).

TC	1/4	1/16	1/64	1/256
	0	0	1	5

Para María el 5 era una cifra que indica la siguiente partición en 4. La conductora preguntó al resto del grupo qué opinaban y Graciela explicó que en su equipo lo hicieron diferente. Ellos notaron que:

4/64 = 1/16

12/64 = 3/16

15/64 = 3/16 + 3/64

María no estaba convencida, el grupo la animó a explorar las equivalencias. Anotó:

1/16 - 4/64

x/16 - 15/64

Al parecer quería llegar al resultado usando la regla de 3, pero con ese planteamiento le fue imposible resolver. Esther le acercó al pizarrón sus tiras para que fuera contando: 1 tira de 1/16 es 4/64, 2 tiras son 8, 3 tiras son 12, más 3/64. María se sorprendió al no encontrar fallas en el argumento, pero siguió intentado resolverlo numéricamente.

La conductora escribió una nueva tabla en base 10 para explicar el error de María: si tiene 15/1000 se escribe 0.015 y no 0.0015. Roberto dio otro argumento:

15/1000 = 10/1000 + 5/1000

10/1000 = 1/100

15/1000 = 1/100 + 5/1000

Estas dificultades con el cambio de base pusieron en evidencia cuestiones que no son comprendidas en su totalidad y que quedan ocultas por la familiaridad que todos tenemos con la base 10. Una más fue la relación entre fracciones y números con punto en cualquier base, pues no es tan evidente como pareciera.

Esther: es difícil quitarse de la mente a los decimales. Cuando vemos sesentaicuatroavos nos imaginamos al entero partido en 64, por eso es que no… hasta que ya lo restructuramos.

Conductora: sí es un entero dividido en 64 y tomas 15. Cuando lo escribimos con punto ahí sí cambia porque nuestros órdenes ya no son décimos, centésimos, etc., porque dividimos en 4 (…) En el sistema decimal el número máximo que puedo escribir es 9, aquí estamos en base 4, ¿cuál es el número máximo que puedo escribir?

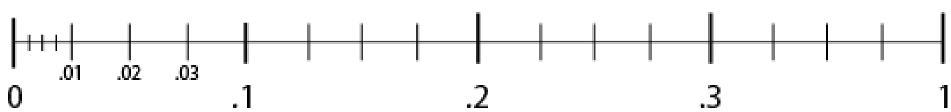
Maestros: 4

Estas ideas no son sencillas. La base y posición definen la escritura decimal, pero las fracciones reposan en principios distintos. Más adelante volvieron sobre este punto para corregir, pues el número mayor que se puede escribir en la base 4 es el 3.

Propusimos verificar el ordenamiento anterior ubicando los números en la recta. A pesar de haber estado trabajando con la tabla de valor posicional, no fue fácil para todos los maestros señalar qué números con punto corresponden a cada subdivisión.

La conductora trazó una recta del 0 al 1 con cuatro subdivisiones. María escribió 1/4 en la primera, pero la conductora le recordó que debía usar número con punto. Entonces ella escribió correctamente 0.1 y en las siguientes 0.2 y 0.3. La conductora trazó la siguiente subdivisión en cuatro partes y Sara escribió 1/16. Otros maestros dijeron que era 0.01 y ella escribió 0.02 y 0.03 correctamente. Los números de la siguiente subdivisión los escribió Roberto sin problemas (64avos). Varios más pasaron a llenar las subdivisiones faltantes en el resto de la recta y solamente Efraín tuvo dificultades al anotar 0.33, 0.34 y 0.35, en vez de 0.31, 0.32 y 0.33. La conductora le hizo ver que 0.3 son 3/4 y 0.03 son 3/16, con lo que Efraín logró corregir.

Ilustración 82 Recta en base 4 propuesta por la conductora.



La conductora señaló tres puntos en la recta entre 0.21 y 0.22 y pidió a Graciela que pasara a escribir los números que van ahí.

Graciela: [escribe 0.211, 0.212 y 0.213] porque hasta acá tenemos 2/4 y 1/16 [0.21] pero como se subdivide entonces ya entraríamos al siguiente orden, sería uno más. Aquí tomamos 1 [0.211], aquí tomamos 2 [0.212] y aquí son 3 [0.213].

Graciela tenía claro cómo están funcionando las subdivisiones en la recta y los números con punto que les corresponden, pero no todos los maestros lo habían comprendido. María pasó a escribir qué número va en cierto punto del orden de los 64avos (0.122), como tuvo dudas apoyó su razonamiento escribiendo con fracciones los números que ya estaban en las subdivisiones (1/4 + 1/16 + 1/64), pero sólo lo logró con la ayuda de Roberto quien le fue señalando las subdivisiones entre 0.12 y 0.13 diciéndole “la primera rayita ahí ya son los 64avos”, o sea, 0.121.

Durante esa discusión Carina encontró un patrón.

Carina: sí, nada más ves la secuencia y así…
Conductora: ¿cómo?
Carina: hay un orden.
Conductora: ¿cómo va esa secuencia o ese orden?
Carina: bueno, lo que entendí es el 2 [0.2], luego sigue el 1 [2.01], el 2 [2.02], en ese caso sería el 3 [2.03], va como ascendente ¿no? La secuencia va subiendo,

	como es la primera fracción [subdivisión] va el 1, si fuera la segunda sería el 2. Bueno, yo así le entendí.
Conductora:	aprovechando lo que dice Carina, hay dos maneras de encontrar los numeritos que faltan. Una es ir partiendo en 4, tengo cuartos, luego dieciseisavos… tienen la tablita en la cabeza. Esa es una buena manera porque van entendiendo que en 0.112 el último 2 son 2/64. La otra manera es encontrar las regularidades que dice Carina, después de 0.112 va el 0.113 y luego 0.114… no, porque no se puede, entonces debe ser 0.12.
Roberto:	y también ahí se comprueba lo que decíamos, el máximo número en este sistema es 3 porque ahí llega.

Lo que Carina encontró es que 0.11 es 1/4 + 1/16, luego sigue 1/4 + 2/16 que es 0.12, y luego 1/4 + 3/16 que es 0.13. Estos patrones los usan de manera natural en la base 10 pero posiblemente hace tiempo que se volvieron transparentes para ellos. El cambio de base ayudó a visibilizar estas reglas del sistema que sirven para pensar en cómo funciona.

Los ceros a la derecha en los decimales no tienen ningún valor (porque 0.4 y 0.40 son iguales).

Si dos números se ubican en el mismo punto en la recta, son iguales.

Quitar ceros en las fracciones es dividir entre potencias de 10.

En la sesión 3 continuaron el trabajo con el orden. El primer paso fue resolver en equipo una hoja de trabajo con parejas de números para que en cada caso escribieran >, < o =.

50/1000	___	5/100
0.3	___	0.30
14/10	___	100/100
0.50	___	0.05
0.2	___	0.177
11/10	___	8/5
50/100	___	1/4

Cuando todos terminaron pasaron directamente a la puesta en común solicitando argumentos sobre la decisión tomada con cada pareja de números. Aunque hubo algunos errores en el trabajo por equipos, los corrigieron durante la puesta en común:

– Esther explicó que 50/1000 y 5/100 son iguales quitando ceros, “estamos dividiendo el numerador y denominador de 50/1000 entre 10” [se obtiene una fracción equivalente]. También dijo que al dividir los centésimos en 10 partes se tienen milésimos, entonces en vez de ser 5 centésimos ahora son 50 milésimos porque también dividí el numerador. Pero en longitud [en la recta] son iguales.

- Edgar usó su calculadora para verificar que se obtiene el mismo resultado al dividir 50 ÷ 1000 que al dividir 5 ÷ 100.
- Rosa explicó que al dividir en numerador y el denominador entre 10 se obtiene una fracción equivalente porque los ceros a la derecha [en los decimales] no tienen ningún valor, “al dividir se los quito”.
- Lidia anotó en el pizarrón que 0.3 y 0.30 son iguales escribiéndolos con fracción (3/10 y 30/100) y mostrando que en la recta quedan en el mismo lugar.
- Roberto pasó al pizarrón y escribió 14/10 > 100/100 porque el segundo es igual a 1 y el primero es mayor que 1.
- Rosa explicó que 0.50 > 0.05 porque ambos están divididos en 100, pero en el primer caso “tomas” 50 y en el segundo “tomas” 5.
- Isela anotó que 0.2 > 0.177 porque en la recta numérica 2 décimos estaría más a la derecha que 0.177.
- Sara dijo que 50/100 > 1/4 porque el primero es 1/2 y es mayor que 1/4.
- Rosa dijo que escribió 8/5 con décimos para que tuvieran el mismo denominador y poder compararlos, 16/10 > 11/10.
- Edgar dijo que 8/5 > 11/10 porque 8 ÷ 5 = 1.6 y es mayor que 11 ÷ 10 = 1.1.
- Sara dijo que con las fracciones 8/5 y 11/10 no sabía cuál era mayor. Lo que sí sabía es que si son 11 de 10 eso es un entero con un décimo, y 8/5 es un entero y 3 “partes que les sobran”. El problema es que 11/10 está partido en fracciones más pequeñas [décimos] y los quintos son más grandes.

La conductora retomó la última explicación de Sara acerca de las “partes que le sobran” planteando una división con galera.

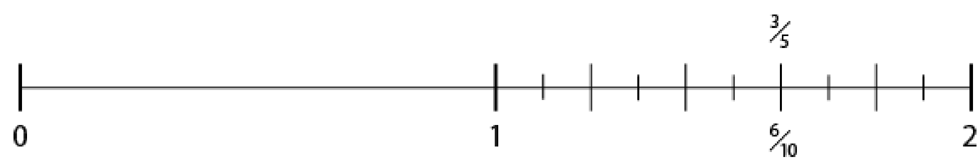
$$\begin{array}{rl} & 1 \\ 5 & \overline{)\,8\quad} \\ & 3 \end{array}$$

Conductora: ¿estos 3 pedazos qué son? [el residuo]
Sara: décimos.
Rosa: son enteros.
Maestros: no.
Sara: tengo un entero más 3 partes.
Roberto: ¿quintos?
(…)

Conductora:	una primera duda de Sara es esa, tiene un entero y tres partes que son quién sabe qué, ¿entonces es 1.3?
Leticia:	son quintos, el divisor es 5. Nos quedan 3/5 y si hacemos el procedimiento de la maestra [encontrar una fracción equivalente con denominador 10] entonces vemos que es 6/10.
Roberto:	y 3/5 es 0.6
	(…)
Sara:	ya vi, es que esas tres partes, como son quintos y son grandes, las puedo partir en 10 y ya tengo 6 [3/5 = 6/10].

Al parecer Sara aclaró su duda con el ejemplo de la división, sin embargo, la conductora propuso también verlo en la recta. Señaló 5/5 que es el entero y luego los 3/5 restantes los dividió en décimos.

Ilustración 83 Ubicación de 8/5 en la recta dado por la conductora.

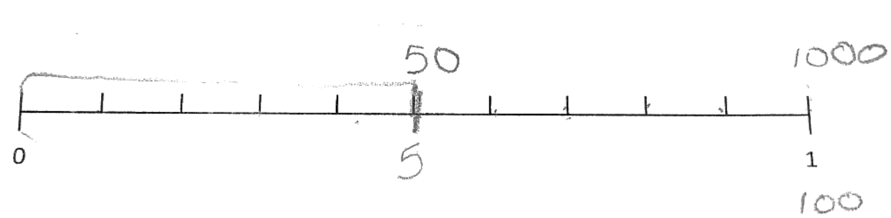


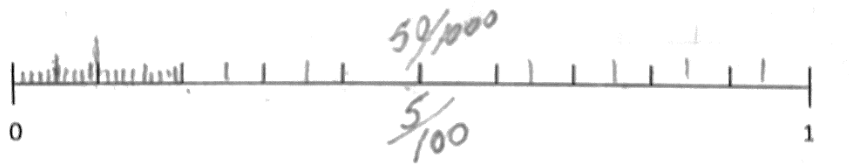
Algunos de los argumentos que usaron se apoyan en las discusiones previas a propósito de 0.4 y 0.40, pero otros dieron cuenta de razonamientos y estrategias de los propios maestros, como el uso de la división y de equivalencias conocidas.

El tercer paso fue ubicar esas mismas parejas números en la recta como método de verificación del ordenamiento anterior. Esperaba que fuera muy fácil dado que ya se habían presentado las respuestas correctas y argumentos para sostenerlas. Roberto incluso preguntó si esa actividad "tenía truco" porque se le hizo muy fácil, sin embargo, para otros todavía supuso retos pues hubo errores al ubicar tres de las parejas de números.

Dos equipos (Nancy y Efraín, Lidia y Berta) ubicaron mal 50/1000 y 5/100. Sabían que eran equivalentes, pero señalaron 5/10.

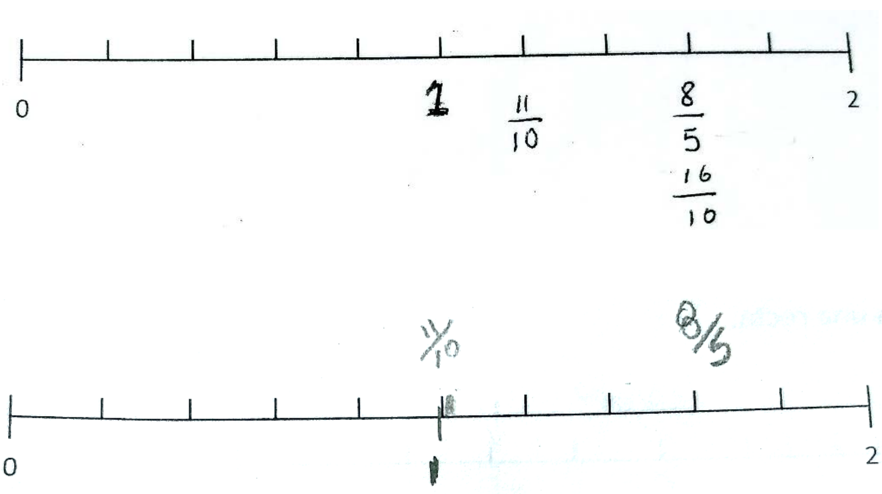
Ilustración 84 Errores al ubicar 50/1000 y 5/100 en la recta.





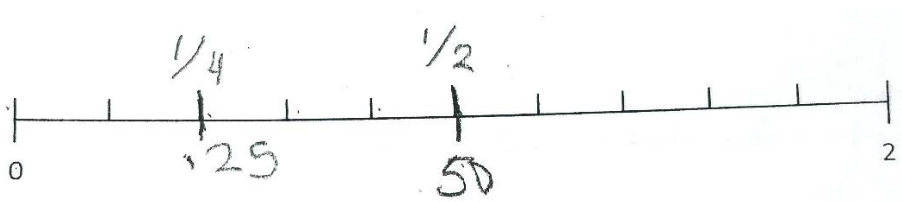
Al ubicar 11/10 Eloy no consideró que estaba dividida en quintos, sin embargo, colocó correctamente 8/5. Algo similar les ocurrió a Lidia y Berta.

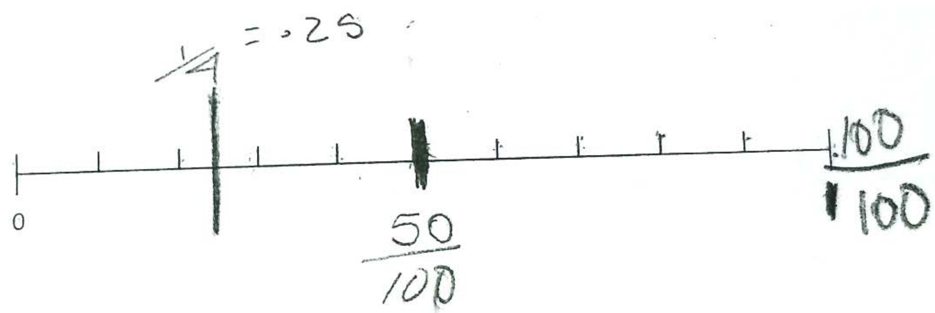
Ilustración 85 Errores al ubicar 11/10 en la recta.



El error al ubicar 1/4 y 50/100 también tiene origen en las divisiones de esa recta. Nancy y Efraín la tomaron como si estuviera dividida en décimos e hicieron un intento con 1/4, mientras que Sara e Isela se percataron de que a la derecha había un 2 y decidieron eliminar el conflicto tachándolo y anotando en su lugar al 1.

Ilustración 86 Errores al ubicar 1/4 y 50/100 en la recta.





La siguiente tarea buscó capitalizar lo trabajado con el orden y la ubicación en la recta solicitando que escribieran en equipo un procedimiento para ubicar en la recta numérica fracciones con diferente denominador. A diferencia de lo que hicimos en la sesión 1, escribieron el procedimiento después de haber trabajado grupalmente con varias actividades que involucraron la ubicación en la recta en las que se corrigieron errores y aclararon dudas. Esta forma es más directa y reduce la posibilidad de errores, aunque también es cierto que la riqueza de estrategias que surgen es menor y que puede encubrir errores que sigan vigentes.

Los procedimientos escritos por los equipos fueron:

Equipo A (Esther y Leticia)

1. Observar la recta para saber cómo está dividida (unidad de medida).
2. Es importante detenernos en cada fracción de recta para obtener la imagen mental de la misma
3. Comenzar a trabajar con los primeros números.
4. Reducir con el algoritmo de la división las fracciones quitando los ceros innecesarios para su mejor manejo recordando que si quitamos un cero al denominador debemos hacer lo mismo con el numerador.
5. Ahora sí ubicar la fracción en el lugar correspondiente.

Equipo B (Edgar y Roberto)

- Convertir a decimales todas las fracciones.
- Checar 1 o 2 enteros en la recta.
- Hacer divisiones o subdivisiones (ubicarlas).
- Pensarle…

Equipo C (Ileana, Rosa, Graciela)

1. Identificar el número de partes en las que está dividida la unidad.
2. Ubicar en la recta numérica cada una de las fracciones.
3. Realizar la comparación de las distancias con respecto al cero.
4. Llegar a la conceptualización de fracciones equivalentes, mayor o menor.

Equipo D (Lidia y Berta) 1. Observar la fracción para saber en cuántas partes está dividido el entero. 2. Analizar el tipo de fracciones que se van a localizar en la recta numérica, observar cuál es mayor y cuál menor.

Equipo E (Nancy y Efraín) • Tomamos la recta como entero. • Dividimos el entero en fracciones. • Luego convertimos en equivalencias con el mismo denominador.

Equipo F (Eloy) Obtener fracciones equivalentes, dividir la recta en el número de partes que indica el denominador y localizar las fracciones.

Con excepción del equipo D, todos incluyeron en su procedimiento algo sobre las divisiones de la recta (hacerlas o identificarlas en caso de que estén dadas), aunque en algunas propuestas no hay mucha claridad al respecto. Los equipos A, B y F consideraron algún paso en el que hay que simplificar o “convertir” la fracción en otra equivalente o en un número con punto. Llama la atención que los demás equipos no lo hayan incluido considerando que la instrucción fue escribir un procedimiento para ubicar en la recta fracciones con diferente denominador. Otros procedimientos incluyeron imprecisiones o mostraron énfasis en aspectos poco relevantes. ¿Qué significa “tomar la recta como entero”, “obtener una imagen mental de la recta” o “llegar a la conceptualización de fracciones equivalentes”?

El último paso en esta secuencia de actividades fue que cada equipo leyera su procedimiento ante el grupo. Con este formato para compartir las producciones no esperábamos un proceso de validación como el que hicieron en la sesión 1, sino algo más directo y expedito, principalmente porque anticipé que habría menores dificultades que al inicio del taller. La conductora hizo preguntas para ayudar a precisar algunos aspectos, específicamente si daba igual “convertir” a cualquier fracción equivalente o hacer cualquier división en la recta, con la intención de que notaran que conviene encontrar denominadores múltiplos.

Conductora: cuando yo obtengo esas fracciones equivalentes, ¿son las fracciones equivalentes que yo quiera?

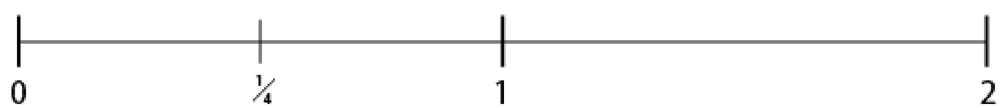
Rosa: para mí es más fácil hacerlo siempre en decimal o fracciones decimales [dividir el numerador entre el denominador y obtener un número con punto].

Conductora:	pero cuando aquí hablamos de equivalencia mi pregunta es ésta, si yo tengo 5/8 y 3/4, de 5/8 hay un montón de fracciones equivalentes y de 3/4 también, si mi instrucción dice que saque fracciones equivalentes…
Rosa:	que compartan el mismo denominador.
Conductora:	¿por qué es importante que compartan el mismo denominador?
Edgar:	para hacer las divisiones [en la recta].

Enseguida la conductora planteó una actividad en la que se movilizaron los conocimientos anteriores sobre el orden y la ubicación de números en la recta. Se trató de un juego en el que se da una lista de fracciones y una recta con divisiones en décimos. Un jugador elige una fracción, la escribe como decimal y la ubica en la recta. Gana quien logre colocar en la recta tres números sin que haya entre ellos ningún número del contrincante.

La actividad les pareció interesante y se mostraron involucrados en el juego. En la puesta en común la conductora destacó algunas dificultades que fue observando, como ubicar 1/4 a la mitad entre 0 y 1 (pues consideraron a la recta como un entero ignorando al 2), error que ya se había presentado en la actividad anterior de ubicación de pares de números en la recta.

Ilustración 87 Error al ubicar 1/4 en la recta.



Otro caso que destacó fue el siguiente. Un jugador eligió 9/10 y lo ubicó correctamente, en su siguiente tirada eligió 1/10 y lo ubicó en el 1 (porque la distancia entre 9/10 y 1 = 1/10) para así tener dos números juntos. Los demás no estuvieron de acuerdo en que esa estrategia fuera válida en el contexto de las instrucciones del juego, pero dio lugar a discutir sobre dos miradas que suele haber al ubicar números en la recta: una es como punto en el que se ubica un número (0.5 está a la mitad entre 0 y 1) , y la otra es como distancia o longitud entre un punto y otro (desde el 0 hasta el 0.5 hay una distancia de 0.5).

En los decimales siempre puedes seguir aumentando, se pueden hacer más subdivisiones, es infinito (son densos).
Cómo se ordenan los racionales si no hay antecesor ni sucesor.

La primera actividad de la sesión 4 tuvo como propósito trabajar la propiedad de densidad de los racionales. Tomé un juego clásico para ese tema que es “Conejos y cangrejos” en la recta numérica. Se traza una recta (que en este caso fue del 0 al 100) y el juego consiste en que un jugador se sitúa en el cero y va sumando números (avanza hacia la derecha) mientras que el otro se sitúa en el 100 y va restando números (avanza hacia la izquierda) y pierde quien “rebase” el número del contrincante o se “encime”. El objetivo es que opere la densidad, pues como entre un racional y otro siempre se puede encontrar otro número nadie debería perder.

Dos maestros pasaron al pizarrón para jugarlo primero al frente y ejemplificarlo. En las primeras tiradas todavía estaban muy lejos uno del otro así que otros maestros les sugirieron “arrinconar” al contrincante (sumando o restando un número que los acercara mucho). Con la siguiente suma de Eloy quedaron en 38.9 y 39.

Edgar: resto 9 centésimos… [piensa en la cuenta unos segundos]. Sí [llega a 38.91]
Conductora: o sea que estamos entre 38.9 y 38.91, ay ¡qué malo Edgar!
[risas]
Eloy: si lo supero pierdo, ¿verdad?
Conductora: si sumas y lo superas o caes en el mismo número, ya perdiste.
Leticia: le puedes sumar milésimos.
Conductora: a ver Eloy, qué estás pensando. ¿Puedes ganar todavía?
Eloy: es que la cantidad que sumara tendría que ser… (…) ¿un milésimo?
Conductora: ¿a dónde llegarías?
[Eloy piensa alrededor de un minuto y luego escribe en la recta 39.901]
Leticia: ahora se van a ir de uno en uno [milésimos].
María: al 38.91 ponle un cero [a Edgar], ya sería 38.910 y Eloy está en 39.901
[Edgar hace un “zoom” a la recta, resta 8 milésimos y coloca el número 38.902].
Edgar: ¿puede ser empate?
Leticia: suma un diezmilésimo Eloy, y te toca 38.9010 y él tiene 38.9020
[Edgar un cero más en su número quedando 38.9020]
Conductora: ¿todavía le puedes ganar?
[Eloy escribe y borra, no está seguro. Alguien le dice que ponga 38.9019]
Carina: todavía se puede más.
Conductora: ahora sí Edgar, cuánto vas a restar.
[Edgar escribe 38.9019 que es el mismo número que puso Eloy. Algunos de los maestros se dan cuenta y le dicen que ya perdió. Edgar corrige inmediatamente y escribe 38.90191]
Carina: y así se va a ir de zoom en zoom.
Conductora: ¿hasta cuándo Carina? ¿Va a llegar algún momento en el que alguien ya tendrá que perder?
Roberto: va a seguir aumentando [añadiendo cifras a la derecha del punto].
Rosa: pienso que es infinito, pero no sé.
Isela: si veo la densidad del número, pues entre uno y otro es una cantidad infinita de divisiones, pues se va a seguir dividiendo y dividiendo.
Carina: solamente que pongas condiciones, de que no se puede aumentar o quitar más de tanto. Pero así, pues no.
Edgar: si lo dejamos libre, abierto, siempre podemos seguir aumentando.

El juego permitió ver que entre dos números racionales siempre hay otro número racional. Algunos maestros entendieron lo que implicaba y por eso sabían que nadie iba a perder (a menos que cometiera un error). También lo jugaron en su versión con calculadoras en vez de usar la recta. Los maestros detectaron las limitaciones del recurso, pues cuando iban añadiendo cifras llegó un momento en el que la calculadora ya no las podía mostrar y redondeaba.

Cuando lo jugaron en parejas usando las dos versiones vi algunas dificultades para que los maestros pensaran en un número les permitiera seguir en el juego y cuánto restar o sumar para llegar a este, pero la idea de fondo, que es la densidad, parecía haber quedado clara. Sin embargo, más adelante María preguntó si esa actividad la podía llevar a cabo con sus alumnos y de hacerlo, si convenía usar fracciones o enteros. El hecho de que imaginara que el juego podía funcionar con enteros nos hizo pensar que la densidad era una idea con la que apenas estaba teniendo contacto y debía trabajarse más. Otros maestros también expresaron ideas similares cuando discutimos sobre las características del juego.

Conductora:	María proponía tres cosas. Una es que en la recta no era necesario sumar y restar, sino ubicar un decimal que estuviera muy cercano de su contrincante (…) ¿les parece que es mejor así la consigna?
Esther:	nosotros tomamos reglas, no usar más de un decimal, o sea, hasta décimos (…) solo enteros y décimos. Llegó un momento en el que nos acercamos y a la que le tocaba el turno, perdió.
Roberto:	a lo mejor eso está bien, delimitar las reglas.
Isela:	porque si no, acabas en dos segundos.
Esther:	y que la suma no exceda a 10. La otra es que los números estén de acuerdo al objetivo, porque si es para ejercitar los números decimales, pues se ponen en la instrucción [que en la consigna se diga que se deben sumar o restar números decimales].
Roberto:	también a lo mejor no del 0 al 100
Conductora:	¿ustedes querían que alguien ganara?
Esther:	era para que fuera más rápido.
Conductora:	depende del propósito, si quiero trabajar cálculo mental con enteros seguramente va a haber un ganador. Pero ¿cuál creen que es el propósito de este juego?
Rosa:	que entre un número decimal y otro hay una infinidad de números.
Conductora:	entonces según el propósito serán las condiciones y números que voy a dar (…) Con enteros, qué va a pasar si yo digo que solo pueden usar enteros, ¿se hace infinito?
Maestros:	no.
Conductora:	al que le toque tirar ya perdió. Con décimos, pasa lo mismo.

Desde la mirada de diseñar un juego con intenciones didácticas, entendí que era extraño tener un juego en el que lo que se determina es quién pierde, es decir, solamente se puede ganar el juego si el contrincante comete un error. Pero en el fondo, el objetivo del juego es justo ese, que los participantes se den cuenta de que siempre habrá otro número entre dos racionales. Didácticamente, se “gana” el juego cuando nadie pierde.

En una sesión posterior leyeron un registro de clase en el que se llevó a cabo una actividad sobre densidad con alumnos de 6° grado.

> Graciela: es como el ejercicio que hicimos de Conejos y cangrejos, cuándo se iba a lograr que alguien ganara, es que hay tal cantidad de números que pueden estar entre dos puntos, que hasta que uno se canse o se rinda (…) aquí también, alguien empieza con los decimales, pero dice “los centésimos son más”, luego van a los milésimos (…) podrían agregar más ceros y no acabar o sacar una cantidad más grande de sumandos.
> Conductora: ¿alguien tiene 6° año? ¿Cómo la ven para sus alumnos?
> Rosa: bueno, mis pequeños han llegado hasta milésimos, pero de ahí en adelante les es más complicado.
> (…)
> Roberto: yo no me hubiera ido hasta el 10, hasta el 1 nada más [en la actividad del registro los alumnos debían hacer sumas para llegar a 10 y ganaba el que encontrara más sumandos].
> Conductora: ¿por qué creen que la maestra puso hasta 10?
> Leticia: porque creo que no se les hubiera ocurrido irlo partiendo hasta llegar a los decimales (…) ahorita que iba llegando pensé “qué nos tocará ver” y pensé en cómo ponerles ejemplos a los niños (…) en el libro viene un ejemplo de para qué me sirve eso, como en la clasificación de libros en la biblioteca, cuando hay varios de un mismo autor, 1.1, 1.155, 1.111

Es interesante la manera que tiene Graciela para nombrar al infinito como “tal cantidad de números”. No es posible saber si pensó que son muchísimos y por eso se vuelve una tarea imposible de realizar, o si los concibe como infinitos. También subrayo la intervención de Rosa al pensar en que los niños no podrían aprender órdenes más allá de los milésimos. Aunque en tareas de cálculo o medición quizá no sea necesario, en la primaria podría explorarse la idea de que siempre se pueden seguir haciendo particiones de 10 en 10.

A la discusión sobre la densidad se añadió otra característica de los racionales: al ser densos ya no es posible determinar un antecesor y sucesor.

> Roberto: tengo que ver mi tirada y la de mi compañero (…) son antecesores y sucesores. Yo ahí me confundo (…)
> Conductora: ahorita que estuvieron jugando, ¿hiciste uso de antecesor y sucesor?
> Roberto: sí, porque tengo que saber si ya lo rebasé o no, es un conocimiento previo que debo tener.
> (…)
> Conductora: [los racionales] ¿tienen antecesor y sucesor?
> Maestros: sí [con duda].
> Conductora: por ejemplo, cuál es el sucesor de 5.1
> [Comentan entre ellos]

Maestros:	5.2, 5.11
	[la conductora los anota en el pizarrón]
Carina:	pero depende de si va a ser en decimales, en décimos, centésimos, milésimos.
Esther:	no, el sucesor de ese número [5.1].
Rosa:	a ver, la regla dice en los números naturales, el antecesor es restar una unidad y el sucesor sumar una unidad. Entonces aquí si yo resto un décimo, tendría que restar un centésimo… no sé.
Conductora:	Carina dice “si veo el 5.1 como décimo, sería 5.2” [durante los comentarios grupales Carina se acercó a la conductora para decirle esa idea]. Pero el 5.1 es también 5.10, entonces el sucesor sería
Maestros:	5.11
Conductora:	también lo puedo escribir como 5.100, entonces sería…
Maestros:	5.111
Edgar:	es que depende cómo lo pida.
	[risas]
Conductora:	pero Rosa dio una definición para los naturales, porque el sucesor es el número que sigue y en los naturales es aumentar una unidad. Y qué tal si alguien me dice, le aumento una unidad y eso es .1
Carina:	no, ya no porque ahí ya me cambió.
Conductora:	eso que dice Rosa de que la regla dice que es aumentar una unidad, es porque el sucesor es el número que sigue, el inmediato siguiente, y en los naturales se obtiene sumando una unidad. Aquí la pregunta sería no cuánto sumar sino si puedes tener uno siguiente, inmediato siguiente.
Julia:	pues es que ahí tienes que decir, si vas a trabajar en centésimos pues vas a dar el resultado en centésimos, o milésimos o décimos.
Conductora:	a ver, en los decimales no podemos decir qué número sigue, no hay antecesor ni sucesor. No podemos decir qué número sigue porque ya vimos que siguen un montón. No lo hay.
	[ruido y comentarios]
Edgar:	hay varios, ¿no?
Berta:	¿entonces cómo es que los ordenamos de mayor a menor?
Conductora:	ah, bueno. Sí hay un orden. Pero no sé cuál sigue, cuál va luego luego.
María:	no tienen orden.
Conductora:	orden sí tienen (…) No hay un sucesor en los decimales como lo hay en los enteros y es una propiedad muy importante de los decimales y que los hace muy diferentes de los enteros (…) En los naturales no pasa eso, entre dos números no hay nada, por eso siempre tienen un siguiente, y aquí entre dos números hay un infinito (…) A pesar de que es raro no poder decir cuál va inmediatamente antes e inmediatamente después, no les quita la posibilidad de ordenarse, que es algo que hemos estado haciendo.
	(…)
Roberto:	bajo ese criterio [la pérdida de antecesor y sucesor], cómo le explico al niño qué sigue después de 6.0… Ahorita estoy viendo, en el libro viene una recta y están el 6 y 7, y tienes que ordenar qué números están en ese intervalo.
Isela:	pero es ordenar.
Roberto:	no, es poner los números que faltan del 6 al 7.
Isela:	sí, pero la densidad del número es la división que puedas hacer del 6 al 7, nada más, lo que cabe ahí, puedes poner un signo de infinito (…) Pero cuando es el sucesor del 6 es el 7 y el antecesor es en 5 cuando estás hablando de naturales. Si te vas a los decimales hay una cantidad infinita de números, que se pueden ordenar, pero es infinito.

Conductora: (…) si tienes un segmento dividido en décimos pues sí, va 6.1, 6.2, 6.3. Pero no quiere decir que el sucesor de 6 sea 6.1

Fue claro que la densidad resultó una idea compleja que debe ponerse en juego en situaciones diversas para ir construyéndola de manera sólida, no sólo respecto a sus propios conocimientos sino a la preocupación de cómo enseñarlo. Si bien más adelante hubo momentos en los que los participantes usaron esa propiedad para resolver una tarea o reconocieron que la densidad estaba en juego en cierta actividad, hubo otros en los que manifestaron dudas o no lograron emplearla.

A manera de cierre

Un primer aspecto que quiero destacar es la riqueza que puede brindar un diseño como el que utilicé. Aprovechar lo que otros han explorado en la formación docente al interior de la TSD fue de gran utilidad para mi trabajo y corroboro que tiene un gran potencial tanto para la investigación como para la formación.

Hago un breve **recuento de la primera secuencia de actividades sobre el orden** de racionales:

- Primera tarea: resolver individualmente. Ordenar una lista de números racionales. La resolución individual pone al sujeto en una situación de acción (Brousseau, 2007), debe interactuar con el medio para completar la tarea, sin embargo, el medio no le proporciona ninguna retroalimentación.
- Segunda tarea: comparar con otro y lograr una respuesta conjunta. El ordenamiento que cada uno realizó fue sometido a la mirada de otra persona en una situación de formulación (Brousseau, 2007), se encontraron coincidencias y conflictos por lo que hubo diálogo y argumentos para convencer.
- Tercera tarea: escribir conjuntamente un procedimiento. Una vez que dieron argumentos y lograron una respuesta conjunta, la situación de formulación continuó para escribir un instructivo o pasos que permitieran resolver la tarea teniendo como destinatario a un tercero. Esto puso en juego todo lo ocurrido previamente y sacó a relucir los conocimientos y justificaciones de los maestros respecto al contenido.
- Cuarta tarea: poner a juicio la producción de otros. Cuando fungieron como destinatarios de un mensaje estaban en una situación de validación (Brousseau, 2007) en la que debían determinar la veracidad y claridad de esa producción. Aquí también operaron argumentos para sostener la posición propia.

- Quinta tarea: puesta en común con la conductora y formalización del contenido en juego. Cuando fueron sacando conclusiones y la conductora estableció relaciones entre las producciones y el saber matemático para formalizar lo estudiado, estaban en una situación de institucionalización (Brousseau, 2007).

El diseño permitió que las ideas matemáticas, correctas o incorrectas, vivan muy claramente en la clase. La conductora no corrigió nada y dejó que cada uno utilizara y compartiera lo que sabía respecto al orden de números racionales. Esas ideas se discutieron y ante el conflicto, debían emplearse argumentos que las validaran o refutaran. En esos diseños una idea es tan válida como otra y puede ponerse a prueba.

Recupero contribuciones de Carina, Efraín y María para dar cuenta de esas ideas que la secuencia permitió poner en juego respecto al orden.

Carina fue una de las participantes que más avanzó a lo largo del taller. Como mostré en este apartado, desde la primera sesión manifestó conflictos importantes y conocimientos erróneos respecto a los racionales. Quizá el más llamativo es su visión de "espejo": todo lo que está a la derecha del punto funciona al revés que en los enteros, las cifras mayores tienen menor valor (9 < 1), y a mayor cantidad de cifras a la derecha del punto el número es menor. Esas ideas le trajeron múltiples conflictos mientras iba resolviendo las tareas, pues aparecían contradicciones constantemente. Desde que hizo pareja con Efraín para lograr un ordenamiento conjunto empezó a notar esas contradicciones y le fue difícil sostener sus argumentos, pero aún no contaba con otros para sustituirlos. Las ideas de Carina permitieron al grupo una discusión muy importante de la que todos, incluyéndola, nos beneficiamos.

Carina y **Efraín** hicieron una combinación explosiva respecto a ideas erróneas sobre los racionales, lo que fue muy interesante presenciar cuando intentaban lograr un ordenamiento conjunto. El procedimiento que con mucha seguridad mostró Efraín para comparar decimales jamás lo había encontrado con niños o maestros ni en la literatura. Construyó su propia hipótesis de que debía comparar una a una todas las cifras y determinar el orden según la cantidad de cifras mayores y menores (el número que tiene más > es mayor). Que lo haya compartido con el grupo también propició un intercambio muy valioso, pues otros maestros no entendían por qué continuar la comparación cuando en la primera cifra ya tenía la respuesta, y eso tuvo que justificarse. Efraín también avanzó mucho considerando lo que manifestó saber de los decimales en la primera sesión. Con el juego de "Conejos y cangrejos" que apela a la densidad, participó activamente en el equipo y explicó su estrategia para seguir encontrando números decimales entre dos números dados:

> Efraín: yo luego me confundo, así ya tantos números, me empiezo a confundir, pero cuando los dos compañeros estaban jugando [el primer juego con Eloy y Edgar al frente] me di cuenta de que nada más es jugar con los dos últimos números [cifras], o con el último, ya no necesito más. Yo no me había dado cuenta, porque me decía María, “pero ¿lo sabes leer?” [el número], le digo “no, pero ya me di cuenta”.

Efectivamente, en el juego estuvieron operando con números que podían tener 8 o más cifras a la derecha del punto y se vuelven difíciles de leer (¿son cienmillonésimos?). Lo importante es que Efraín hiciera ese descubrimiento pues representa un avance notable respecto al procedimiento que mostró en la primera sesión para comparar decimales.

María también manifestó un conocimiento erróneo en la sesión 1 respecto al orden. Al contrario que Carina, ella pensaba que el número mayor es el que tiene menos cifras a la derecha del punto porque las partes en que está dividido son más grandes. Lo explicó con pastel: un pastel partido en 10 o un pastel partido en 100, ¿cuál rebanada es mayor?, por eso para ella “entre menor sea el número [el denominador], más grande la rebanada”. Sin embargo, dio argumentos para refutar las ideas de Efraín y Carina y fue una entusiasta promotora de agregar un cero a la derecha de los números en el juego de “Conejos y cangrejos”, pues se sentaba al frente y le “soplaba” respuestas a quien estaba en el pizarrón. Pasó de pensar que los números con menos cifras eran siempre mayores a usar con fluidez el cero a la derecha porque comprendió que 38.567 = 38.5670.

De manera general, la equivalencia entre números como 0.4 y 0.40 parece haber sido comprendida dado el uso que los maestros hicieron de ellas en tareas posteriores de comparación (rellenar con ceros), ubicación en la recta (quedan en el mismo punto) y en los juegos de densidad. Vinculado con la idea anterior, pudieron justificar la técnica de quitar ceros en el numerador y denominador para simplificar fracciones. Aunque con menos oportunidades de uso, los principios de base y posición se “renovaron” dando pie a afirmaciones como que hay un orden o una secuencia en los números con punto o que cuando el tamaño del agrupamiento es 4 el número máximo que se puede escribir es 3.

Por otro lado, la relación entre fracciones y decimales todavía presentó algunos “misterios”, como cuando trataron de entender 15/64 en base 4. La ubicación en la recta también mostró retos pendientes, sobre todo con cambios de base y cuando las divisiones no eran en décimos u otra división conocida. Si bien con la densidad hubo un buen acercamiento, es una idea que representa un obstáculo (Brousseau, 1976) y hacen falta más oportunidades para trabajarla. Muestra de ello fue el desconsuelo grupal ante la pérdida de antecesor y sucesor. Una idea tan apreciada, comprendida y útil en la primaria se les desvaneció dejándolos con muchas dudas sobre los racionales: “no tienen orden” dijo Berta a pesar de que llevábamos cuatro sesiones ordenándolos, y “cómo le explico al niño qué sigue después de 6.0” pregunta de Roberto. Vuelvo a Brousseau (1976) para cerrar:

> Si [una noción aprendida] tiene éxito suficientemente bien y por un tiempo suficiente, toma un valor, una consistencia, una significación, un desarrollo que hacen cada vez más difícil su modificación, su reconsideración, su generalización o su rechazo: se convierte a la vez, para las adquisiciones posteriores, un obstáculo pero también un punto de apoyo. Esto muestra: por qué el aprendizaje no puede hacerse según el esquema clásico de la adquisición progresiva y continua (…). (p. 103).

8.1.3 Operatoria

Las divisiones siempre “achican” y las multiplicaciones siempre “agrandan”.

Algunas divisiones “agrandan” y algunas divisiones “achican” por motivos desconocidos.

Cuando el divisor es menor que 1, salen más partes (el cociente es mayor que el dividendo).

Otro aspecto que se abordó en la primera sesión fue la operatoria cuando involucra números con punto decimal, pues según lo expuesto previamente las multiplicaciones y divisiones amplían sus significados con los racionales, cambio que supone un obstáculo epistemológico (Brousseau, 1976).

Para explorarlo elegí el laberinto, una actividad “clásica” para este tema[13]. El juego comienza en la parte superior de la figura y cada jugador tiene 100 puntos. Desde ese lugar, el jugador debe encontrar el mejor “camino” para que al efectuar las operaciones elegidas termine el recorrido con la mayor cantidad de puntos posibles, en el entendido de que sólo se puede pasar por cada operación una vez. En la consigna se solicitó que:

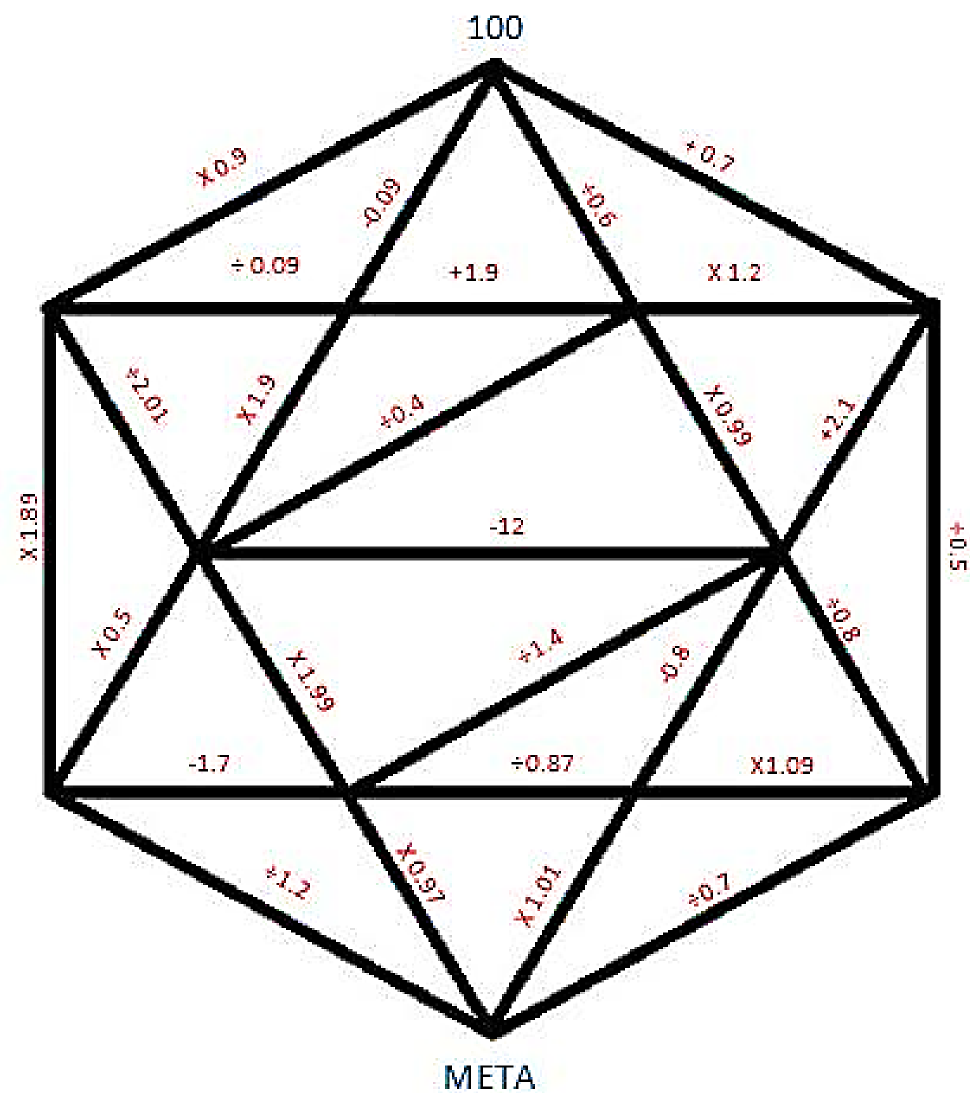
- lo hicieran en equipo,
- trazaran primero el recorrido,

[13] Actividad adaptada de Castro, E. (2001), “Números decimales”, en Castro, E. (ed.), *Didáctica de las Matemáticas en la Educación Primaria*, Síntesis, Madrid.

– una vez trazado efectuaran las operaciones con calculadora.

Me interesaba que primero se concentraran en encontrar el mejor camino posible haciendo uso de sus conocimientos sobre las operaciones. Efectuar el cálculo al final debía servir como medio de verificación de sus hipótesis, y usar la calculadora nos permitiría que se concentraran en el significado de la operación y sus estimaciones, y no en el cálculo, además de que serían resultados más “confiables” para ellos al descartar cualquier posible error en las cuentas. Cada equipo contó con varias copias del laberinto para que pudieran hacer más de un intento.

Ilustración 88 Actividad del laberinto. Tomada de Castro, E. (2001).



Efraín, Isela, Carina y Fátima se juntaron para conformar un equipo. Su primera hipótesis consistió en elegir caminos que pasaran por sumas y multiplicaciones porque son operaciones que “agrandan”, y por consiguiente evitaron las restas y divisiones. Esto no fue necesariamente lo que hicieron los demás equipos, como se verá más adelante. En su primer laberinto eligieron 100 + 0.7 × 1.2 + 1.9 × 1.9 × 1.99 × 0.97 = 450.157.

Carina:	Yo aquí deduje porque vamos sumando, sumamos y multiplicar, porque ‘entre’ pues nos va a dividir, va a salir menos.

Varios equipos estaban concluyendo el primero de sus laberintos y la conductora comentó al equipo de Carina que en otros habían alcanzado un puntaje mucho mayor al de ellos. Con la duda instalada, en el segundo laberinto eligieron operaciones por las que “vale la pena pasar”, por ejemplo, preferir una multiplicación sobre una suma o asumir una pérdida teniendo que pasar por una división con tal de llegar a una multiplicación favorable.

Carina:	¿cuánto te da más, multiplicarlo o sumarlo?
Efraín:	sumar.
Carina:	no, multiplicado (…) sí, porque sumado nada más le sumas.
Efraín:	× 1.2
Carina:	este [× 0.99] ya casi es el entero (…) aunque piérdamos unas décimas, a la siguiente le sumamos (…) lo que yo iba a decir es que podemos dividir ÷ 1.4 aunque piérdamos para que se multiplique × 1.99

El equipo no aceptó todas las ideas de Carina, pero estuvo de acuerdo en asumir el costo de dividir ÷0.8 con tal de llegar a ×1.09. Otra cosa que probaron en este intento fue ir anotando los resultados parciales a lo largo del laberinto, pero no fueron sistemáticos y se perdió la oportunidad de contrastar sus hipótesis con los resultados. Su segundo laberinto fue 100 + 0.7 × 1.2 × 0.99 ÷ 0.8 × 1.09 × 1.01 = 164.62.[14] Cuando Efraín hizo las operaciones con la calculadora se dio cuenta de que habían obtenido un puntaje menor que en el primer intento y dijo “bajamos”. Entre risas responsabilizaron a la operación ÷0.8 asumiendo que lo que podrían haber ganado con las multiplicaciones lo perdieron con esa división. Efraín propuso un camino con puras multiplicaciones, pero Fátima le dijo que ya había probado eso y tampoco salía un resultado mayor que el primero.

La conductora comentó a todo el grupo que un equipo había llegado a 10 mil puntos causando asombro en el equipo de Carina al contrastarlo con sus 164.62. Discutieron para diseñar una nueva estrategia: hacer un camino más largo que les permitiera pasar por más operaciones.

[14] La primera vez lo calcularon bien, pero Efraín verificó y cometió algún error porque obtuvo 16.4628

Isela:	Tenemos que buscar los caminos que sumen y multipliquen, si tenemos que arriesgar, arriesgamos en menos [en las restas] no en división.

Mientras Isela y Carina discutían para trazar el tercer laberinto, Efraín hacía cuentas con la calculadora y las interrumpió para decirles:

Efraín:	oye no, está loca esta calculadora. A ver, ponle en tu calculadora 100 ÷ 0.6 [Fátima hizo la operación en su propia calculadora] ¿cuánto te salió?
Fátima:	166 [muestra a todos el resultado en la calculadora].
Efraín:	está mejor éste [÷0.6] que multiplicarlo.
Fátima:	da más el entre [división].
Isela:	¿y acá qué pasó entonces? [señala una división en otro laberinto]
Efraín:	sumé [0.7], multiplicar [1.2] y le divides [0.8]… da menos porque este… ya sumaste y multiplicaste, los puntos ya se recorrieron, o sea, al dividirlo tú le das… mira, simplemente este [100] y este [0.6] da 166.

Efraín se esfuerza por producir un discurso que explique qué pasa, pero no tiene elementos para justificar esos resultados. El equipo entero se notaba muy confundido porque su idea de que multiplicación y suma agrandan mientras que la división y resta achican, no se verificaba en sus intentos y no podían explicarse por qué.

En ese momento se acercó la conductora al equipo a preguntar cuántos puntos llevaban, pero todos estaban enfrascados en la división, verificando con tres calculadoras el resultado inesperado.

Fátima:	100 entre punto 6 [lo van tecleando]
Carina:	ah, 166
Efraín:	está mal…
Conductora:	¿está mal?
Efraín:	la calculadora está mal.
	[risas]
Efraín:	cómo es posible que me dé una numeración más alta que multiplicarle [100 ÷ 0.6 > 100 × 0.9].
Conductora:	entonces la calculadora…
Efraín:	está mal la calculadora.
Conductora:	a ver, otra, pruébale con otra [calculadora].
Efraín:	100 × 0.9 me da 90 si me voy por acá, y si me voy por acá [100 ÷ 0.6] ¡166!
Conductora:	¿cuál conviene?
Fátima:	la división.
Efraín:	es que… no queríamos dividir nunca.
Isela:	tiene que ser con décimos, si vamos a dividir tiene que ser con décimos.

Efraín volvió a dividir 100 ÷ 0.6 en la calculadora y el resultado lo dividió ÷ 0.4 (que es otra posibilidad del laberinto en ese punto) diciendo “no creo que salga la misma belleza” (que el cociente resultara mayor que el dividendo). Todo el equipo se sorprendió al ver la belleza pues obtuvo 416.666… y resultado los animó a buscar otras divisiones en el laberinto.

El equipo pasó bastante rápido de desconfiar de la retroacción del medio (el resultado de la calculadora) a cuestionar sus estrategias para proponer una nueva: las divisiones deben tener décimos (probablemente Isela quiso decir “decimales”). El avance fue enorme, pero todavía faltaba precisar: se trata de dividir entre números que sean $0 < n > 1$. La siguiente división que probaron lo puso en evidencia, pues con ÷2.01 el puntaje bajó.

Carina:	porque aquí es de enteros [2.01], ah bueno, ya… [con tono de alivio].
Isela:	entonces no deben de ser más que decimales.

Isela y Carina parecían tener una nueva hipótesis, las divisiones tenían que ser entre números que no tuvieran enteros, o sea, menores que 1. Comenzaron un nuevo laberinto sin evadir las divisiones y en algún punto Efraín dijo “mira, ya llevamos un numerototote, ya no sé cuánto, como nunca he tenido ese dinero…”. También notaron que algunas multiplicaciones no les convenían, pues ×0.97 los hizo bajar. Aunque no alcanzaron el puntaje de otros equipos, “batieron su récord” con 46 768.827 puntos con el recorrido 100 ÷ 0.6 ÷ 0.4 × 1.9 ÷ 0.09 × 0.9 + 0.7 × 1.2 × 0.99 + 2.1 ÷ 0.5 ÷ 0.8 - 0.8 × 1.09 ÷ 0.7.

Como puede verse, las estrategias del equipo fueron cambiando:

a) Elegir solamente sumas y multiplicaciones sin importar los números involucrados.
b) Elegir multiplicaciones y sumas, prefiriendo a las primeras (porque aumentan más).
c) Hacer caminos más largos (más operaciones) como método para aumentar el puntaje.
d) Si no queda otro remedio y hay que pasar por una operación desfavorable, preferir a la resta que a la división.
e) Elegir divisiones en las que el divisor tiene cifras a la derecha del punto decimal, pues la evidencia muestra que agrandan.
f) Descartar las divisiones en las que el divisor es mayor que 1 (aunque tenga cifras a la derecha del punto decimal), pues la evidencia muestra que achican.
g) Elegir multiplicaciones, aunque por falta de tiempo no llegaron a discernir cuáles habían sido las que achicaron su puntaje (multiplicar por números mayores o menores que 1).

Los laberintos de los demás equipos quedaron de la siguiente manera:[15]

[15] Transcribo los resultados que los maestros anotaron en sus laberintos, aunque no todos son correctos.

Equipo A (Sara, Graciela y María)

Laberinto 1: 100 – 0.09 × 1.9 × 0.97 = 366.4269
Laberinto 2: 100 ÷ 0.6 + 1.9 × 1.9 × 1.99 ÷ 0.87 × 1.09 ÷ 0.7 = 1140.77 [en este intento fueron anotando resultados parciales de cada operación, quizá eso los hizo notar cosas]
Laberinto 3: 100 ÷ 0.6 + 1.9 ÷ 0.09 × 1.89 – 1.7 ÷ 0.87 × 1.09 ÷ 0.7 = 6332.73 [todo apunta a que descubrieron las entre $n < 1$ pues las eligieron más]
Laberinto 4: 100 ÷ 0.6 ÷ 0.4 × 1.9 ÷ 0.09 × 1.89 – 1.7 ÷ 0.87 – 0.8 + 2.1 ÷ 0.5 ÷ 0.7 [no anotaron el resultado, pero definitivamente encontraron esas divisiones]

Equipo B (Esther, Roberto y Edgar)

Laberinto 1: 100 – 0.09 ÷ 0.09 ÷ 2.01 ÷ 0.4 ÷ 0.6 + 0.7 ÷ 0.5 ÷ 0.8 ÷ 1.4 ÷ 0.87 × 1.09 ÷ 0.7 = 146.799315
Laberinto 2: 100 ÷ 0.6 ÷ 0.4 × 1.9 ÷ 0.09 × 1.89 – 1.7 ÷ 0.87 – 0.8 + 2.1 ÷ 0.5 ÷ 0.7 = 450.157
Laberinto 3: 100 ÷ 0.6 × 1.2 + 2.1 ÷ 0.8 × 1.09 ÷ 0.87 – 1.7 ÷ 1.2 = 262.339
Laberinto 4: 100 ÷ 0.6 + 1.9 ÷ 0.09 ÷ 2.1 – 12 ÷ 1.4 ÷ 0.87 – 0.8 ÷ 0.8 ÷ 0.7 = 722.619 [no evitan las divisiones entre $n < 1$, pero también las eligen cuando $n > 1$]

Equipo C (Leticia, Berta y Lidia)

Laberinto 1: 100 × 0.9 × 1.89 × 0.5 × 1.9 + 1.9 × 1.2 + 2.1 ÷ 0.8 × 1.09 × 1.01 = 273.81839 [van por las multiplicaciones y fueron anotando resultados parciales]
Laberinto 2: 100 ÷ 0.6 × 1.2 ÷ 0.5 ÷ 0.8 – 12 × 1.9 ÷ 0.09 × 1.89 – 1.7 ÷ 0.87 × 1.09 ÷ 0.7 = 34846.881
Laberinto 3: 100 NO LO COMPLETAN
Laberinto 4: 100 ÷ 0.6 ÷ 0.4 × 1.9 ÷ 0.09 × 1.89 – 1.7 ÷ 0.87 – 0.8 + 2.1÷ 0.5 ÷ 0.7 [no anotaron el resultado final ni los de las operaciones parciales]

Equipo D (Efraín, Carina, Isela y Fátima)

Laberinto 1: 100 + 0.7 × 1.2 + 1.9 × 1.9 × 1.99 × 0.97 = 450.15754 [van por las sumas y multiplicaciones]
Laberinto 2: 100 + 0.7 × 1.2 × 0.99 ÷ 0.8 × 1.09 × 1.01 = 16.4628
Laberinto 3: 100 × 0.9 ÷ 0.09 × 1.9 ÷ 0.4 × 1.2 + 0.7 ÷ 0.6 × 0.99 + 2.1 ÷ 0.5 ÷ 0.8 – 0.8 × 1.09 ÷ 0.7 = 46768.827
Laberinto 4: 100 ÷ 0.6 ÷ 0.4 × 1.9 ÷ 0.09 × 1.89 – 1.7 ÷ 0.87 – 0.8 + 2.1 ÷ 0.5 ÷ 0.7 [no anotaron el resultado]

En la puesta en común la conductora preguntó cómo habían resuelto la tarea.

Graciela: bueno, en la idea de que multiplicar aumenta y dividir reduce, por ahí empezamos buscando los caminos, y probando nos equivocamos porque en los números decimales es a la inversa, cuando multiplicamos se reduce la cantidad y al dividir aumenta. Fue un hallazgo muy importante para buscar otra ruta.
(…)

Carina: pero aquí nos dimos cuenta que al dividir, si tiene enteros, nos va a disminuir. Era dividir sin enteros para que nos aumentara.
(…)

Conductora:	Efraín, ¿qué dijiste cuando dividiste 100 entre 0.6?
Efraín:	que estaba mal la calculadora.
Conductora:	y María, cuando hiciste 100 por 0.9
María:	también.
Conductora:	¿alguien podría dar una explicación de por qué sucede eso?
Leticia:	a lo mejor no tengo las palabras adecuadas para decirlo de corrido, pero… entre más partes divido el entero más cachitos tengo. Por eso.
	(…)
	[A partir de una pregunta de Efraín, la conductora puso ejemplos de multiplicaciones en las que uno de los factores es menor que 1].
Conductora:	[100 × 0.8] ¿qué está pasando con la multiplicación?, ¿por qué cuando multiplico por un número menor que la unidad el producto es menor que uno de los factores, cuando yo esperaría que fuera mayor que los dos?
Carina:	recorro el punto.
Conductora:	pero ¿qué explicación tiene?
Graciela:	está aumentando ahí, sí aumenta, pero estoy aumentando una cantidad muy pequeña que está fraccionada, es menos de un entero, entonces por eso, aunque la estoy aumentando 100 veces, es una cantidad reducida.

En los comentarios de los maestros es posible apreciar que la experiencia con el laberinto los hizo darse cuenta de cómo funciona la multiplicación y la división con los racionales a nivel empírico, digamos. Sin embargo, aunque confiaran en la calculadora eso no significó que comprendieran lo que estaba pasando con esas operaciones, así que las ideas construidas con los naturales siguieron apareciendo. Graciela, por ejemplo, generó un discurso que explicara lo que estaba pasando sin soltar completamente lo que sabía de la multiplicación con naturales (la multiplicación agranda, pero aquí agranda poquito). Leticia posiblemente tampoco tenía en ese momento una justificación sobre lo que pasa al dividir entre números menores que 1, pero notó algo importante: mientras más pequeño es el divisor se hacen más partes, o sea, el cociente resulta mayor que el dividendo.

El sistema posicional y los algoritmos para efectuar las operaciones básicas no son transparentes cuando se cambia la base, e incluso problemas con estructuras sencillas se vuelven un reto.

Cuando operar números con punto se complejiza por el cambio de base, se puede recurrir a las fracciones.

En las actividades en base 4 realizadas en la sesión 2 incluí algunas operaciones sencillas para seguir reflexionando sobre las reglas del sistema posicional.

a. Una tira mide 1.230 y otra mide 1.32. ¿Cuál es más larga? ¿Por cuánto es más larga?
b. El largo de la tira A menos 0.103 es igual a 0.212, ¿cuánto mide la tira A?

c. ¿Cuánto medirán seis tiras de 0.023?

La estructura de estos problemas es muy conocida para los maestros y sus alumnos comienzan a resolverlos desde los primeros grados de primaria. Lo que resultó un reto importante en la sesión fue el cambio de base, pues aunque suponían que el mecanismo de las operaciones debía verificarse en otras bases, no estaban seguros de como “llevar”. Por ejemplo, al sumar 3 + 2 (problema b), ¿cómo escribir el resultado? Dado que no “se vale” escribir 5 y lo que dice la regla es que al formar un grupo de 4 se pone 0 y se “lleva” 1 en la columna de la izquierda. Costó bastante tiempo e intentos para que los maestros obtuvieran alguna respuesta, todos intentaron con los algoritmos y en algún momento usaron las tiras o las dibujaron.

Cuando llegó el momento de la puesta en común todavía había equipos trabajando para resolver los problemas. Con el problema a) estuvieron de acuerdo en que la tira más larga es la que mide 1.32. Cuando Lidia pasó a explicar por cuánto era más larga dibujó una tabla en el pizarrón y explicó que la diferencia entre ambas tiras es igual a 1/4 + 1/16 porque 2 < 3 en la columna de los cuartos y 3 > 2 en la columna de los dieciseisavos.

Ilustración 89 Resolución de Lidia para 1.230 – 1.32

	1/4	1/16	1/64
1.	2	3	0
1.	3	2	0

Lo que hizo Lidia es un error que aparece comúnmente en los alumnos: restar el dígito mayor al menor independientemente de si se encuentra en el minuendo o en el sustraendo.

Esther también acomodó las cantidades en la tabla para hacer una resta, pero ella puso al minuendo arriba y al sustraendo abajo.

Ilustración 90 Resolución de Esther para 1.230 – 1.32

	1/4	1/16	1/64
1.	3	2	0
1.	2	3	0

Esther: efectivamente, no le puedo quitar al 2… entonces pido 1 prestado y cuando lo paso acá [columna de los 64avos] se transforma en 6 [6/64]. 6 – 3 son 3. Este 3 quedó en 2 [columna de los 16avos] entonces 2 – 2 es 0.

El tema de “pedir prestado” y que eso aumente 4 y no 10, no fue tan claro para muchos, pero Esther usó correctamente las reglas del algoritmo para resolver.

Edgar explicó que hizo conversiones para resolver.

1.23 = 1 + 2/4 + 3/16
2/4 = 8/16
8/16 + 3/16 = 11/16
0.23 = 11/16 [obviando los enteros]

1.32 = 1 + 3/4 + 2/16
3/4 = 12/16
12/16 + 2/16 = 14/16
0.32 = 14/16 [obviando los enteros]

Entonces 14/16 – 11/16 = 3/16

El grupo estuvo de acuerdo en que la respuesta correcta era 3/16 y ya no regresaron a tratar de entender la respuesta de Lidia.

Graciela dijo que resolvió el problema b) con una suma. La escribió en forma vertical usando la base 4, pero utilizó el algoritmo para resolver, sino que utilizó fracciones:

$$\begin{array}{r} 0.103 \\ \underline{+0.212} \end{array}$$

3/4 + 2/16 + 1/64 = 0.321

En la resolución de Graciela es interesante ver cómo integró ambas representaciones para solucionar. Probablemente tampoco tenía a la mano el algoritmo en base 4, pero las fracciones le eran familiares y pudo “traducir” con facilidad que 5/64 = 1/16 + 1/64.

El problema requería una multiplicación o una suma reiterada. Ningún maestro efectuó una multiplicación usando el algoritmo, pero Edgar multiplicó la fracción y luego escribió el resultado con punto:

Cada tira mide 0.023 = 11/64
Son 6 tiras, entonces 11/64 × 6 = 66/64
66/64 es 1 entero y sobran 2/64 o 1.002

Leticia hizo una suma reiterada en la tabla posicional. Sabía que no podía escribir 18 en el resultado final, pero es una estrategia válida para los cálculos parciales. Esos 18/64 son 4/16 + 2/64, entonces en la columna de los 64avos se escribe el 2 y los otros 16/64 “se llevan” en la columna de los 16avos como 4/16, y así hacia las columnas de la izquierda.

Ilustración 91 Resolución de Leticia para 0.023 × 6

TC	¼	1/16	1/64
0	.0	2	3
0	.0	2	3
0	.0	2	3
0	.0	2	3
0	.0	2	3
0	.0	2	3
		12	~~18~~
		~~16~~	2
	~~4~~	0	2
1	.0	0	2

A veces conviene más hacer una suma para resolver una resta.

Se pueden usar representaciones equivalentes de un número para operar con este más fácilmente.

En una sesión posterior trabajaron con algoritmos de las operaciones básicas (base 10). Saber por qué funcionan los algoritmos da cuenta del conocimiento del sistema posicional y su base. Decidí comenzar con operaciones aditivas y la primera actividad fue un juego en el que cada equipo tenía dos mazos de tarjetas: uno con operaciones y otro con resultados. Las operaciones se ponen boca abajo y las tarjetas con resultados se reparten entre los integrantes del equipo, se destapa una operación y quien tenga el resultado lo pone y gana ese par de tarjetas. La estrategia para resolver era el cálculo mental y los números de las tarjetas fueron:

Ilustración 92 Tarjetas para juego de sumas

1.1	0.9 + 0.2
0.11	0.09 + 0.02
1.01	0.99 + 0.02
1.101	0.9 + 0.201
0.111	0.09 + 0.021
1.11	2.01 – 0.9
1.001	2 – 0.999
0.011	0.02 – 0.009
1.111	2.101 – 0.99
0.1001	0.2 – 0.0999
0.1	2.001 – 1.901
1.0001	2.101 – 1.1009

En los equipos observé dos procedimientos para encontrar los pares de tarjetas: hacer el algoritmo escrito rápidamente en un papelito o resolver el algoritmo mentalmente (operando por columnas como en el cálculo escrito), o bien, usar el cálculo mental. En todos los casos noté que los números involucrados promovieron la discusión al interior de los equipos pues las respuestas no eran obvias. Después de unos minutos o al darse cuenta de algún error en el emparejamiento de tarjetas, los maestros abandonaron la estrategia del juego propuesto y voltearon todas las tarjetas para resolverlo juntos.

En la puesta en común comentaron algunas de las estrategias empleadas.

Graciela:	no en todas usamos el algoritmo… en donde están diferentes las cifras, por ejemplo, sumar centésimos con diezmilésimos o décimos con milésimos, ahí sí es donde más conflicto tuvimos para ver hasta dónde teníamos que completar la cantidad. Otras eran más sencillo (…)
Conductora:	¿puedes dar un ejemplo?
Graciela:	0.09 + 0.02
Conductora:	esa cómo la hacemos
Graciela:	es que son 11
Conductora:	11 centésimos (…) ¿algún otro procedimiento que quieran compartir?
Esther:	en la resta nosotros sumábamos, sea, cuando era resta nosotros sumábamos [sumar la diferencia al sustraendo para obtener el minuendo].
Lidia:	ver en el campo de las fracciones comunes y buscar equivalencias (…) Ahí [0.02 – 0.009] hicimos la equivalencia, serían 20 milésimos y 9 milésimos, a 20 le quitas 9 y ya [0.02 – 0.009 = 0.020 – 0.009]

En el ejemplo de Graciela está en juego sumar “iguales”, en este caso décimos con décimos. Pero también saber que 11 décimos no se escriben 0.11 (que fue un error que ocurrió en un equipo) sino 1.1 porque con 10 décimos se forma un entero. La estrategia de

Esther se basa en el conocimiento de que la suma y la resta son operaciones inversas, por lo tanto, puede emplear la que más le convenga cuando se enfrenta a una resta. El procedimiento de Lidia da cuenta de algo ya estudiado en sesiones previas: 0.02 = 2/100 = 20/1000, por eso pueden restar “iguales”.

La conductora hizo notar que las cantidades de las tarjetas son muy parecidas (sólo están en juego el 0, 1, 2 y 9) y preguntó cuál pensaban que sería la intención de hacerlo así.

Rosa:	para confundirnos.
	[risas]
Conductora:	aparte de confundirlos.
	(…)
Lidia:	para hacer una reflexión del sistema decimal porque había unos que sí son equivalentes, pero para la necesidad de la operación se requería ponerle el punto en otra parte. En valor posicional no es mismo que “lo mesmo”, realmente el 1 que está al principio vale algo y el que está al final vale otra cuestión (…) a mí me parece que es de valor posicional.
Conductora:	valor posicional.
Maestros:	sí.
Conductora:	¿hubiera sido la misma reflexión si ponemos los números muy diferentes?
Graciela:	no, es que algunos ya incluso de manera mecánica uno puede decir el resultado y en cambio aquí, coincido con la maestra Esther, hay que estar muy atentos para ver cuántas cifras tiene, dónde están los ceros, si es suma o resta, y ver cómo se va agrupando. A nosotros nos pasó, “ésta es ésta” [señala dos tarjetas], pero ya cuando se nos terminaron las tarjetas, pues no checaba, nos pusimos a revisar y decíamos que daban lo mismo y ya vimos que nos había faltado agregar un cero. Es la atención y el manejo adecuado del valor posicional (…)
Lidia:	aparte, eso de ver todo el tiempo 2, 9, 1, 0 (…) [se ríe].

La conductora explicó que había una intención de que no lo resolvieran estimando (por eso las mismas cifras siempre), pues aunque desarrollar el sentido numérico es muy importante, queríamos que ellos se fijaran en las cifras, los lugares que ocupan y los puntos.

10 veces un centésimo es como sumar 1 décimo. 1000 veces un centésimo es como sumar una decena.

En la sesión 4 continuó el trabajo con operaciones aditivas basadas en el funcionamiento de la calculadora y usándola para verificar resultados. Las actividades consistieron en sumar o restar *n* veces un número a otro buscando encontrar un patrón, por ejemplo, restar 3 décimos 100 veces es igual a restar 30. Utilizaron la siguiente hoja de trabajo:

Ilustración 93 Actividad de sumas con calculadora.

Responde las siguientes preguntas sin hacerlo en la calculadora.

2. Se teclea en la calculadora:

$\boxed{2}\ \boxed{+}\ \boxed{.}\ \boxed{1}$

a) ¿Qué número aparecerá en el pantalla si se teclea el signo **=** 3 veces? __________________

b) ¿Y si se teclea 11 veces? _________________

3. Se teclea en la calculadora:

$\boxed{3}\ \boxed{.}\ \boxed{4}\ \boxed{+}\ \boxed{.}\ \boxed{0}\ \boxed{1}$

a) ¿Qué número aparecerá en el pantalla si se teclea el signo **=** 10 veces? __________________

b) ¿Y si se teclea 30 veces? _________________

c) ¿Y si se teclea 1000 veces? _________________

4. Se teclea en la calculadora:

$\boxed{1}\ \boxed{.}\ \boxed{0}\ \boxed{8}\ \boxed{+}\ \boxed{.}\ \boxed{2}$

a) ¿Qué número aparecerá en el pantalla si se teclea el signo **=** 5 veces? __________________

b) Si en la pantalla aparece 4.08, ¿cuántas veces se tecleó el signo **=** ? ____________________

c) ¿En algún momento aparecerá en la pantalla 10.20? _______________

d) Justifica tu respuesta anterior ____

____

5. Se teclea en la calculadora:

$\boxed{4}\ \boxed{.}\ \boxed{1}\ \boxed{-}\ \boxed{.}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{4}$

a) ¿Cuántas veces se tiene que teclear el signo **=** para que aparezca el número 4 sin decimales en la pantalla? __________________

b) Si en la pantalla aparece 3.5, ¿cuántas veces se tecleó el signo **=** ? ____________________

c) ¿En algún momento aparecerá en la pantalla 3.912? _______________

d) Justifica tu respuesta anterior ____

____

El problema 2 puede resolverse incluso sin tratar de encontrar el patrón porque sumar 11 veces en la calculadora es viable. Las estrategias de resolución se ponen en marcha con el problema 3 pues hay que sumar 1000 veces y eso ya no es práctico. Llamó la atención que para resolver ese problema hubo equipos que apelaron a la proporcionalidad directa, posiblemente porque en las multiplicaciones hay una función lineal. Sin embargo, hay un término independiente que no estaban considerando.[16]

En el problema 3 (3.4 + 0.01) Edgar y Roberto calcularon correctamente 10 y 30 veces tecleando en la calculadora. Para llegar a 100 veces siguieron presionando la tecla "igual" y cada 10 veces anotaban el resultado. Obtuvieron 4.4, entonces plantearon:

$$100 \rightarrow 4.4$$
$$1000 \rightarrow 44$$

Sin embargo, Edgar siguió haciendo operaciones en su calculadora porque dudó del 44 obtenido. Planteó otra regla de 3 para con datos que ya conocía (el resultado de sumar 10 veces) como para cerciorarse de que ese procedimiento fuera válido y vio que no iba a obtener el 3.5 que arrojaron las sumas con la calculadora. Le dijo a Roberto "pero por qué aquí no sale la regla".

$$1 \rightarrow 3.41 \ [+ 0.01]$$
$$10 \rightarrow x$$

La conductora les ayudó a ver que al sumar 0.01 tres veces no obtuvieron el triple de 3.4 y entonces cambiaron de estrategia. Su procedimiento consistió en ir sumando en partes, al sumar una vez 0.01 se obtiene 3.41, al sumar 100 veces se obtiene 4.4, 101 veces 4.41, 200 veces 5.4, 300 veces 6.4 (…) y 1000 veces 13.4.

Conductora:	a ver, explíquenme.
Edgar:	empecé a ver, para 1 [vez] es 3.41, para 2 es 3.42, para 100 es 4.4, entonces si para 1 es 3.41 y para 100 es 4.4, pues lo que se aumenta es el entero [la columna de las unidades]. Y luego ya me fui, para 200 (…) vas aumentando ahí (…) y así hasta el 1000, 13.4.
	(…)
Conductora:	1000 veces un centésimo cuánto da.
	[no responden].
Conductora:	100 veces un centésimo.
Edgar:	es un entero.
Conductora:	y 1000 veces un centésimo.
Roberto:	10 enteros.
Conductora:	tenían 3.4 más 10 enteros, que son 1000 veces 1 centésimo.
Edgar:	menos choro, ¿verdad? [refiriéndose a que ellos lo resolvieron con un procedimiento más largo]

Para ese mismo problema Leticia y Berta también plantearon la regla de 3 y no pudieron avanzar:

[16] El problema 3 podría resolverse con una función lineal del tipo $y = mx + b$
$y = (0.01 \times 1000) + 3.4$
La dificultad de los maestros ocurrió al tratar el término independiente.

30 → 3.7
1000 → 123.33

Explicaron a la conductora que fueron sumando de 10 en 10 centésimos, 3.4, 3.5, 3.6 (…) hasta llegar a 100 obteniendo 4.4. La conductora les preguntó cuánto aumentó cuando sumaron 100 veces, Leticia respondió que 1 pero Berta no estaba segura. Después de otras preguntas de la conductora Leticia llegó al mismo razonamiento de Edgar (con 100 es 4.4, con 200 es 5.4, etcétera).

Conductora: cuántos aumentó en total si tenían 3.4 y llegó a 13.4
Leticia: una decena.
Conductora: entonces 1000 veces un centésimo es una decena.
Leticia: ¡no inventes! [risas] un centésimo es una decena… mil veces un décimo.
Berta: oye pero, entonces la calculadora… bueno, se aproxima [se refiere a su intento con regla de 3].
Conductora: ¿esto lo hicieron con regla de 3? [1000 veces es 123.33].
Berta: sí. ¿No coincidirá?
Conductora: bueno, la calculadora hizo la cuenta que ustedes le dijeron que hiciera. Porque mira, te dio 123 (…) entonces parece que aquí la regla de 3 no la podemos aplicar. Habría que analizar después por qué.
[Leticia sigue consternada. Anota 1000/100 = 1 decena]
Conductora: sí, porque si divides 1000 entre 100 te da 10.

Si bien encontraron la solución, todavía no tenían claro por qué la regla de 3 no funciona en este problema.

Esther lo resolvió de una manera distinta. Ella planteó:

3.4 + 0.01
Cuando aumenta 10 veces, aumenta en 1 el dígito en la columna de los décimos [3.4 es ahora 3.5]
Cuando aumenta 100 veces, aumenta en 1 el dígito en la columna de las unidades [3.4 es ahora 4.4]
Cuando aumenta 1000 veces, aumenta en 1 el dígito en la columna de las decenas [03.4 es ahora 13.4]

Este procedimiento es interesante porque apela a las reglas del sistema posicional sin tener que recurrir a la operatoria.

En la puesta en común comentaron que les fue difícil esta tarea, especialmente el problema 3, pero tenían claro que se trataba de encontrar una estrategia pues no iban a teclear 1000 veces la operación. A solicitud de los maestros la conductora dedicó un tiempo de la sesión a explicar por qué la regla de 3 no es una estrategia pertinente para estos problemas.

Se suma y resta por columnas alineadas respecto al punto decimal porque cada orden tiene su lugar.

Se podría sumar y restar sin considerar las columnas, pero sería mucho trabajo.

En la sesión 8 la conductora solicitó a los maestros que justificaran los algoritmos. Respecto a la suma y resta, la pregunta específica fue por qué se alinean las cantidades respecto al punto decimal y si podía hacerse de manera distinta.

Lidia:	pues todos los sistemas que conocemos tienen un orden, en este caso los enteros son los que te ponen del lado izquierdo y lo que esté debajo de ellos en decimales, es punto y van acá [derecha]. Así como alineamos unidades, decenas y centenas también alineamos décimos, centésimos y milésimos. Los enteros, el punto y los números más pequeños. De un lado los enteros y del otro los décimos, centésimos.
Berta:	es el valor posicional de los números.
Isadora:	(…) hemos visto desde primer año unidades, decenas, centenas, que las decenas están formadas por 10 unidades, 10 decenas forman una centena. De igual manera los números más pequeños de una unidad van formando este entero, 10 décimos igual a una unidad, 100 centésimos igual a una unidad, 1000 milésimos una unidad. Se los explicaba por frutas, los números son números todos, y las frutas son frutas, pero cada una se acomoda en un huacal para no maltratarlas y hacer más fácil ese entendimiento. Los décimos van en un huacal, los centésimos van en otro huacal, los milésimos van en otro y las unidades van en otro.
Lidia:	yo les digo "unidad es 1, entonces este es el asiento de las unidades, para las decenas pues no caben 2, o a ver, siéntate aquí en mis piernas, no ¿verdad? Entonces otra silla y esas son las decenas" (…) Pero eso es con enteros, los decimales normalmente les digo esto de vas partiendo hasta que ya no lo ves, no lo ves, pero ahí está. Saca la lupa o el microscopio y seguramente lo encontrarás, lo que estamos dividiendo.
Conductora:	pero yo puedo sumar 2 decenas de un sumando más los 5 milésimos del otro sumando. Se puede, pero es mucho trabajo (…)
Graciela:	de poderse sumar, sí se puede, pero a lo mejor implicaría mucha habilidad para el cálculo mental para ir agrupando. Y si hacemos una colocación tomando como referencia el punto decimal, se facilita.
Sara:	la pregunta es por qué, pues se facilita, necesitamos desde el número más pequeño ir sumando para que se vayan convirtiendo en cosas más grandes [órdenes menores hacia órdenes mayores].
Isela:	nosotros pusimos que hay que ordenar los enteros del punto a la izquierda y los decimales del punto a la derecha, y vamos juntando decimales para formar enteros (…) se van a ir juntando pedacitos que nos van a ir dando uno más grande para llegar al entero (…)

Sus argumentos dieron cuenta de que comprenden que en estos algoritmos ir operando por columnas es lo más conveniente, pero fue difícil llevar la conversación a la justificación, ¿se podría hacer de otra manera, por ejemplo, empezar a sumar de izquierda a derecha? Los maestros comentaban que eso sería muy difícil para sus alumnos, pero la intención de la tarea no era proponerles nuevos algoritmos para usar en sus clases, sino reflexionar acerca de que, si bien es más conveniente empezar por los órdenes menores al sumar o restar, podrían sumarse cifras de órdenes distintos o empezar por la izquierda, como se hace frecuentemente en el cálculo mental. Por otro lado, en estos argumentos también se aprecia la idea de que los decimales son pedacitos que se pueden ir agrupando.

Si se multiplican décimos por décimos, el resultado debería de ser décimos también. La multiplicación con decimales achica.

En la sesión 5 comenzó el trabajo con operaciones multiplicativas. La primera actividad consistió en inventar problemas que se resolvieran con multiplicaciones dadas: 4 × 7, 4 × 0.7, 0.4 × 0.7).

Como era de esperarse, los equipos tuvieron menos dificultad para inventar problemas con el primer caso (aunque el último problema no es muy claro).

4 × 7 En la granja de Luis hay 4 gallinas y cada una ha puesto 7 huevos (blanquillos), ¿cuántos blanquillos hay en total? Tengo 4 estantes con 7 libros cada uno, ¿cuántos libros tengo en total? En una granja hay 4 gallinas y cada una puso 7 huevos. ¿Cuántos huevos puedo recolectar? La mamá de Bety quiere poner encaje a un mantel rectangular que mide 4 metros, si tiene tiras de 7 colores, ¿cuánto medirán todas las tiras?

El segundo caso fue más difícil pues ya intervenía un número con punto. En el equipo de Julia, Rosa y Graciela decidieron emplear un contexto de dinero, pero discutieron un rato sobre si 0.7 se entendería como $0.70.

4 × 0.7 Si para hacer una tortilla, se necesitan 0.7 kg de masa ¿qué cantidad de masa se necesitará para hacer 4 tortillas? Compré 4 caramelos, cada uno cuesta $0.70, ¿cuánto se pagó en total? ¿Cuál es el cuádruple de 0.7?

Calcula el perímetro de un rectángulo que mide de largo 0.4 m y de ancho 0.7 m?

Localiza en la recta ¿hasta qué punto llego si doy 4 saltos de 0.7 de longitud cada uno?

Ilustración 94 Recta para resolver un problema con 4 × 0.7

Los tres primeros problemas cumplen con la condición dada, sin embargo, el cuarto no. Durante la puesta en común el equipo que lo escribió lo pudo cambiar sin dificultad modificando el 0.4 por 4 y diciendo que era un cuadrado en vez de un rectángulo. El problema de la recta resultó muy claro para todos y en un contexto distinto.

El tercer caso fue sin duda el más difícil pues los maestros se esforzaron para ponerle contextos escolares a los problemas con 0.4 × 0.7 y esa operación resultaba ajena en casi todos los casos.

0.4 × 0.7= 0.28

Se tiene que tomar un medicamento, 0.4 del medicamento al día. El tratamiento es de 10 días pero sólo se lo tomó 7 días, o sea 0.7. ¿Cuánto medicamento tomó en total? R= 0.28

¿Qué cantidad de papel se necesita para forrar la cubierta de una mesa que mide 0.4 de metro de ancho y 0.7 m de largo?

¿Cuánto es el área de una tabla que tiene de largo 0.7 m y de ancho 0.4 m?

En un laboratorio están acomodados los recipientes en un cajón de la siguiente manera: los contenedores tienen 0.01 g y están acomodados en 4 hileras de 7 contenedores cada una. ¿Cuántos gramos hay en total? 28 contenedores con 0.01 gramos son 0.28 gramos

Se hace una mezcla de 0.4 mg de mercurio y 0.7 mg de azufre… [no lograron terminarlo]

Un chapulín avanza 0.4 cm en cada salto [no lograron terminarlo]

Tienes 0.4 de una cartulina y cada décimo lo quiero dividir en 7 décimos, ¿cuántos décimos obtengo?

Respecto al primer problema, se discutió lo siguiente:

Conductora: ¿el resultado de 0.28 es menor o mayor que 0.4?
Edgar: menor.
Conductora: cómo ven que tomó menos medicina en todo el tratamiento que en un día. [risas]
Leticia: por 7 días serían 2.8

Conductora: la operación que resuelve en 0.4 × 7 que efectivamente es 2.8, o sea, dos medicamentos completos y 0.8 del tercero. Luego, el problema dice que debía tomar 10 días el medicamente y solo lo tomó 7, o sea, tomó 0.7 de la dosis que debería, pero eso es una segunda cosa que ya no entra en el cálculo que pide el problema.
[Edgar y Roberto están de acuerdo en que su problema no cumplió la condición]

Sobre este mismo problema, Rosa comentó algo interesante. Para ella, 0.7 × 0.4 es multiplicar décimos y debería dar como resultado 28 décimos, algo así como manzanas por manzanas debe dar manzanas. Rosa sabe ejecutar el algoritmo, pero eso no la ha ayudado a entender qué significa el resultado. La conductora optó por justificar el algoritmo de la multiplicación de números con punto escribiéndolos con fracción (7/10 × 4/10) para mostrar que al multiplicar los denominadores da 100 y por eso el resultado es 28 centésimos. En este momento del taller no se habían abordado otras maneras de entender esas multiplicaciones, pero el último problema de esta actividad lo permitió.

Para el segundo problema Julia, Rosa y Graciela comenzaron a trabajar con un contexto de áreas (rectángulo cuya base y altura miden 0.4 y 0.7), pero no estaban muy convencidas pues les sonaba muy “matemático” y lejano de contextos más sugerentes para los decimales como células, insectos u otras cosas pequeñas. Intentaron algo de células, pero no lograron terminarlo, así que volvieron a las áreas con un contexto que les gustó más (la cubierta de una mesa). El problema iba bien, pero se toparon con una complicación no prevista: las unidades. ¿Qué unidad se obtiene para el área al multiplicar décimos de metro por décimos de metro?[17] Al igual que Rosa, ellas pensaron que la solución era 0.4m × 0.7m = 28 décimos de metro cuadrado o 2.8m^2.

El problema de los recipientes del laboratorio tuvo un error similar al del medicamento: la operación que resuelve es 4 × 7 y luego hay que considerar que en esos 28 contenedores hay 0.01 gramos en cada uno, así que el total son 0.28 gramos. El problema es llamativo porque los maestros desglosaron 0.4 × 0.7 en 0.01 × 4 × 7 para conservar la multiplicación con naturales y un contexto típico.

A propósito del problema inconcluso del chapulín Graciela comentó que en el equipo se confundieron al recordar que en la sesión 1 estudiamos multiplicaciones con decimales en las que “disminuye” (el producto es menor que uno o los dos factores). En-

[17] Los décimos y los decímetros aluden a una partición en 10 de la unidad. Un décimo es 0.1 de un entero y un decímetro es 0.1m. Entonces, 0.4m son 4 décimos de un metro y al multiplicarse por 0.7 décimos de metro, se obtiene un área de 0.28m^2, es decir, 28 centésimos^2 o 28 centímetros cuadrados.

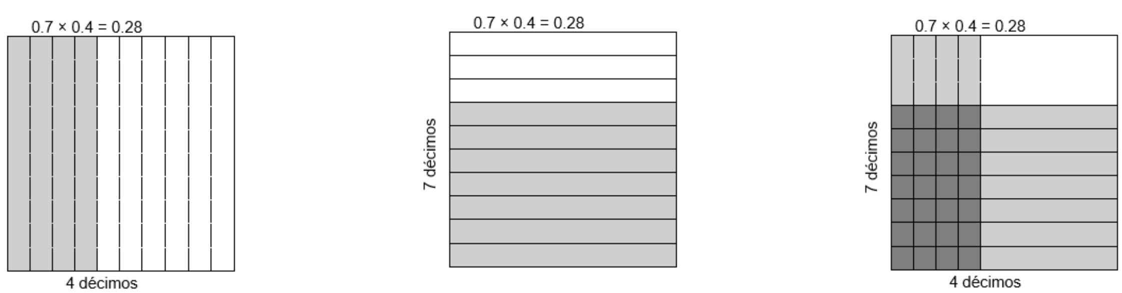
tonces, al plantearse un problema de “cuánto avanza el chapulín” ya no les salió. El grupo comentó que funcionaría para la operación anterior 0.4 × 7.

El último problema (cartulina) se construyó grupalmente a partir del planteamiento inicial que hizo Leticia. El modelo de áreas es muy conocido por ellos para explicar la multiplicación con naturales (por ejemplo, con problemas de filas y columnas de asientos o chocolates en una caja).

Ilustración 95 Ejemplo dado por la conductora para explicar con áreas 7 × 4.

Usarlo con decimales requiere concebirlo de una manera distinta, por lo que no es raro que a muchos de los maestros les haya costado trabajo siquiera entenderlo, ¿qué significa dividir en décimos algo que ya son décimos? María dijo que el resultado serían centésimos, pero requirieron ayuda de la conductora para reconstruir el problema: el rectángulo es un entero y las filas y columnas se dividen en décimos, cada cuadradito resultante es un centésimo del rectángulo entero, y la intersección entre filas y columnas es el resultado de la multiplicación.

Ilustración 96 Ejemplo dado por la conductora para explicar con áreas 0.7 × 0.4



La conductora les recordó algo que se discutió previamente, el significado de “veces” ya no es pertinente con los racionales y que en ciertos problemas puede cambiarse por "de".[18] También introdujo una nueva idea a propósito del problema de la cartulina: tomar un decimal de otro decimal, es una multiplicación.

Multiplicar por 1/3 es lo mismo que dividir entre 3.
Para "tomar una parte de otra" hay que dividir.
En decimales multiplicar disminuye y dividir aumenta.
Obtener primero la cuarta parte y luego multiplicarlo por 3 es lo mismo que multiplicar por 3/4.
Multiplicar por 1.75 es lo mismo que multiplicar por 0.75 y sumar la medida original.

Para trabajar más sobre la multiplicación entre racionales incluí la actividad del tren en un circuito. Consiste en calcular la distancia que recorre el tren al dar determinado número de vueltas sabiendo que el circuito mide 3/4km. El número de vueltas también estaba dado en racionales (fracciones y números con punto).

Ilustración 97 Vueltas de un tren en un circuito. Tomado de Block y García (2006).

a) Un tren da vueltas alrededor de un circuito pequeño, de 3/4 de kilómetro. Calcula los datos que faltan en la tabla.

Número de vueltas	1/4	1/3	½	2/3	1	1 2/3	2	2 2/3	4	5 1/3
Número de kilómetros					¾					

Número de vueltas	0.2	0.6	1.3	1.5	2.4	3	3.1	3.125	4.25	$5.\overline{3}$
Número de kilómetros										

En los cálculos que observé durante el trabajo en equipo hubo confusión respecto a las unidades de magnitud. La longitud del circuito estaba dada en kilómetros y no hacía falta cambiarla (la respuesta se solicita en km), pero algunos maestros intentaron dar todas sus respuestas en metros.

Además del tema de las unidades, llamó mi atención que para el llenado de la primera tabla solamente un equipo utilizó la multiplicación de fracciones a pesar de que era

[18] 4 × 7 puede leerse como "4 veces 7" pero en 0.4 × 0.7 el "veces" ya no tiene sentido.

el procedimiento más directo dado que el número de vueltas está dado también en fracciones (en el primer caso sería 1/4 × 3/4). En vez de multiplicar, los demás equipos utilizaron estrategias relacionadas con la proporcionalidad como la regla de 3 o el valor unitario (y algo parecido al valor unitario que fue hallar el valor de 1/10), dividir cuando la fracción es conocida (obtener 1/4 es igual a dividir la cantidad entre 4), fijarse en las relaciones internas.

La conductora recopiló los procedimientos empleados cuando el número de vueltas está dado en fracciones:

- Usar el valor unitario escribiendo los kilómetros recorridos en 1 vuelta como decimal (0.75) y usándolo para multiplicar (obtener el doble es multiplicar por 2) o dividir (obtener un tercio es dividir entre 3)
- La regla de 3. Al multiplicar por decimales se hace algo parecido a cuando son fracciones:

  0.75 × 3/10
  0.75 ÷ 10 = 0.075
  0.075 × 3 = 0.225

  Al revés también funciona,

  0.75 × 3 = 2.25
  2.25 ÷ 10 = 0.225

- Usar las relaciones internas, es decir, buscar los valores faltantes (como dobles, mitades, triples, etcétera) a partir de los valores ya obtenidos.

Durante este intercambio grupal de procedimientos Roberto afirmó que multiplicar por 2/3 es igual que dividir entre 3 y multiplicar por 2, y se planteó en el grupo si daba igual multiplicar primero por el numerador y luego dividir entre el denominador. Primero dijeron que no, pero al comprobarlo vieron con sorpresa que se obtiene el mismo resultado.

Con la segunda tabla en la que el número de vueltas estaba dado en decimales, la tarea fue resuelta principalmente usando una variante del valor unitario (cuántos km o m recorre al dar 0.1 vuelta), aunque también emplearon la regla de 3 y las razones internas. Identifiqué un par de procedimientos interesantes para calcular la distancia recorrida en 3.125 vueltas:

> María se dio cuenta de que 0.125 = 125/1000 = 1/8. Entonces dividió 0.75 ÷ 8 y al resultado le sumó lo de 3 vueltas.
> Berta dijo que 3.125 es 3.1 + 0.02 + 0.005, así que buscó cuánta distancia recorre el tren en 0.1, 0.01 y 0.001 vueltas para luego hacer las sumas.

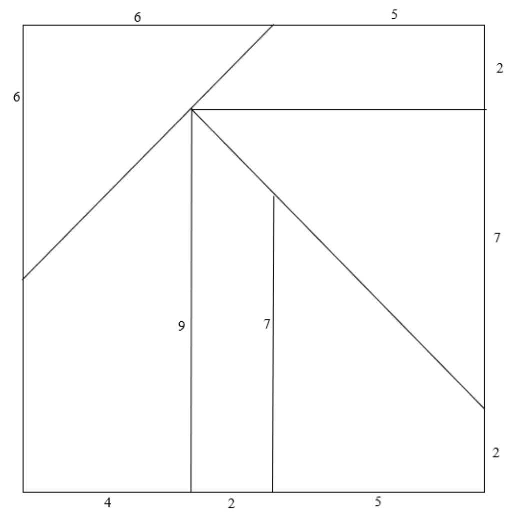
La conductora mencionó que para obtener 0.02 de 750m, en un equipo dividieron 750 ÷ 0.02 y les dio como resultado un “numerotototе”, lo que los hizo sospechar que habían cometido un error, pero no sabían cuál era.

Conductora:	¿esto de dividir entre 0.02 es lo mismo que hicieron en los otros procedimientos?
Maestros:	no.
Leticia:	pues no nos dio.
	[risas]
Conductora:	¿qué error estaban teniendo?
Roberto:	¿que dividieron?
Carina:	a lo mejor no se acordaban de la vez pasada que hicimos ese jueguito de avanzar [el laberinto]… que nosotros pensábamos que multiplicando avanzábamos más y esto es al revés, dividiendo aumenta y multiplicando disminuye en decimales.
Conductora:	si un niño les hace esto, ¿qué le dirían?
Edgar:	lo mando a desayunar.
	[risas]
Edgar:	que no hay que confundir… que el numerador no se divide, sino que se multiplica.
Berta:	es que queremos tomar… de un…
Conductora:	queremos tomar una parte de otra (…) Cuando divido no estoy tomando, estoy viendo cuántas veces cabe. ¿Cuántas veces cabe 0.02 en todo el circuito? Pues muchas, pero no es el problema que queremos.

La actividad del laberinto que resolvieron en la primera sesión causó un impacto importante en los maestros, pues a lo largo de las sesiones la mencionaron varias veces. Aquí Carina pensó que el error podía tener algo que ver con ese cambio de sentido (la división aumenta) y tenía razón, pero la dificultad no fue esa sino que eligieron una operación que no era pertinente para resolver el problema. La multiplicación también amplía sus significados no solo en cuanto a qué pasa con el resultado, sino a que con los racionales “tomar una parte de otra” es multiplicar.

Más adelante resolvieron otra actividad de multiplicación para explorar lo que dijo Roberto antes, multiplicar por 2/3 es como dividir entre 3 y multiplicar el resultado por 2. Utilicé el contexto de las reproducciones a escala con una figura trazada en cuadrícula y luego con las piezas de un rompecabezas. Para el rompecabezas la consigna fue que debían armar otro más grande, si en el original un lado medía 4 unidades en la ampliación debía medir 7.

Ilustración 98 El rompecabezas a escala. Tomada de Brousseau, G. y Brousseau, N. (1987).



Detecté estrategias de resolución aditivas y multiplicativas. Las primeras no funcionan para resolver este problema, pero al principio no fue obvio para todos los maestros. Al interior de su equipo Raquel insistió en seguir esa estrategia, sin embargo, Carina y María lograron convencerla de que eso no iba a funcionar argumentando que si sumaban 3 a cada lado no se iba a formar un cuadrado (en el rompecabezas original el lado del cuadrado mide 11 unidades, si se suma 3 a cada figura dos lados del rompecabezas medirían 17 y los otros 20). Eso convenció a Raquel para cambiar de estrategia.

Los demás se fijaron en la relación entre 4 y 7 para determinar las medidas del rompecabezas ampliado.

- Aumenta 75% porque 3 es 75% de 4. Usaron la calculadora para obtener 75% de cada medida y al resultado le sumaron la medida original.
- 4 es a 7, 2 es a 3.5, 1 es a 1.75 (razones internas para obtener el valor unitario).
- Regla de 3: si 4 es 100%, 7 es 175%. Multiplicaron todas las medidas por 0.75 y al resultado le sumaron la medida original.
- La "proporción de aumento" es 0.75, 3/4 o 75%. Dividieron entre 4 y multiplicaron por 3, y al resultado le sumaron la medida original.

Con ayuda de la conductora identificaron que el valor unitario les permitía calcular en un solo paso la medida ampliada (sin tener que sumar la original).

Si bien la actividad funcionó bien para el propósito buscado, todos los equipos siguieron una estrategia que no preví: trazar el cuadrado agrandado y dentro, las figuras del rompecabezas. Es una estrategia más económica para el resolutor, pero impide que se confronte el trazado de pieza por pieza para intentar armar el rompecabezas, que es el medio de verificación. Para bloquear la estrategia de ampliar el cuadrado quizá debí presentar las piezas por separado y mostrar en una escala muy pequeña el rompecabezas armado, para que vieran cómo debe quedar.

Dividir entre 2 es lo mismo que dividir entre 2/1

Para encontrar una fracción equivalente se multiplica el numerador y el denominador por el mismo número.

Después del trabajo con la multiplicación resolvieron tareas de división usando otro modelo clásico en la primaria: reparto de pasteles. A diferencia de las tareas para alumnos en las que se reparte un número natural entre otro natural, aquí se repartía una fracción entre un natural que no siempre era múltiplo.

Ilustración 99 Actividad de reparto de pasteles.

¿Cuánto es 3/4 de pastel entre 3 personas? ________

¿Y entre 2? ________

¿Y entre 4? _________

¿Cuánto es 2/3 de pastel entre 3 personas? _______

¿Y entre 5? _______

_______ de pastel se repartió entre 6 personas y a cada una le tocó 1/12.

4/5 de pastel se repartió entre _______ personas y a cada una le tocó 4/15.

Durante la resolución observé varias estrategias.

- La principal fue el **algoritmo** de la división de fracciones. Muchos maestros lo emplearon sin dificultad incluso teniendo que añadir un 1 a los denominadores para hacer las multiplicaciones cruzadas.

  $3/4 \div 2 = 3/4 \div 2/1$
- Otros buscaron una **fracción equivalente** multiplicando el numerador y el denominador por un mismo número, como hizo Julia para dividir $3/4 \div 4$. Todos los que

usaron esta estrategia lograron resolver los problemas excepto Julia, pues tras obtener 12/16 dividió tanto el numerador como el denominador entre 4 y no lograba entender por qué obtenía el número original y no la solución de 3/4 ÷ 4.

$$\frac{3\times4}{4\times4}=\frac{12}{16} \qquad \frac{12}{16}\div\frac{4}{4}=\frac{3}{4}$$

Podría parecer un error obvio, pero para Julia dividir entre 4 era igual a dividir entre 4/4. Para usar el algoritmo cuando el divisor es un entero hay que saber que 4 = 4/1 (lo que mencioné que hicieron correctamente quienes usaron el algoritmo).

- **Dividir el denominador** fue otra estrategia empleada. Graciela dijo que para repartir 3/4 entre 2 personas los cuartos se dividen en octavos, y para repartir entre 4 personas los cuartos se dividen en dieciseisavos. La estrategia de Sara para “4/5 de pastel se reparten entre ___ y a cada una le tocó 4/15” también se centra en dividir el denominador. Ella buscó un número que multiplicado por 5 le diera 15, y es 3. Es decir, observó el denominador y utilizó lo que sabe del algoritmo: si se reparte entre 3 entonces el resultado es una fracción 3 veces menor.
- Una parte menor de los maestros resolvió las actividades mediante el **sombreado de áreas**. Esa era una de las estrategias que buscábamos al elegir el contexto de reparto de pasteles, pues permite “ver” el reparto.

  Para repartir 3/4 entre 2 Edgar trazó un rectángulo y lo dividió en cuartos. Luego subdividió los cuartos para obtener octavos. “Sería por 2, entonces mi entero lo partimos en octavos para tener ya la fracción equivalente”. Señaló 3/4 que ya está subdividido en 6/8, mismos que ya pueden dividirse entre 2.

  Para repartir 2/3 entre 3 Rosa sombreó 2/3 de un entero y dividió cada tercio en 3 partes. Quedaron 6/9 y le dio 2 a cada persona.

  Para el problema “___ de pastel se repartió entre 6, cada una le tocó 1/12” Gaby trazó un rectángulo que es el pastel completo. Como son 6/12 los que se repartieron dividió el entero en doceavos. Dado que son 6 personas, entonces 1/12 + 1/12… seis veces.

  Para el problema “4/5 de pastel se reparten entre ___ y a cada una le tocó 4/15” Rosa sombreó 4/5 de un entero y luego dividió en quinceavos porque es el denominador del resultado. Los 4/5 resultaron 12/15 y a cada una de las 3 personas les tocó 4/15.

El intercambio en la puesta en común permitió resaltar algunas cosas, como que dividir entre 3 es igual que multiplicar por 1/3, o visto desde otro ángulo, para dividir una fracción entre un entero el numerador se achica o se agranda el denominador, ideas que eventualmente permitirían justificar el algoritmo.

Aprendimos el algoritmo para multiplicar sin saber cómo funciona.
Si multiplicamos décimos por décimos nos tiene que dar centésimos.
Al recorrer los puntos en la división se deja "en igualdad de condiciones".
Cuando "bajamos" un cero en la división ya no estamos repartiendo enteros, sino partes de un entero.

Para abordar la justificación de multiplicaciones en las que hay cifras con punto decimal, la conductora pidió a Isadora que resolviera una operación en el pizarrón. A partir de la explicación de Isadora (se multiplica como si no hubiera puntos y en el producto el punto se coloca contando cuántas cifras decimales hay en los factores), la conductora solicitó que dijeran por qué se hace así. Ningún maestro lo sabía y tampoco lograron justificarlo después de un rato de trabajo durante la sesión, sin embargo, hicieron exploraciones interesantes.

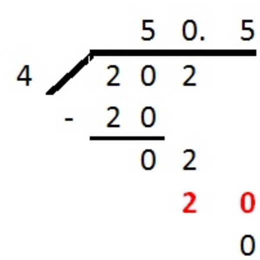
- **Suma reiterada**. Sara y Rosa partieron de lo que saben sobre la relación entre la multiplicación y la suma. Sumaron una cantidad con punto decimal de manera reiterada para ver cuántas cifras decimales resultaban en el resultado.
- **Las cifras a la derecha del punto se agrandan para formar enteros**. Nancy e Isela tenían una hipótesis para empezar a buscar: los dígitos a la derecha del punto se multiplican y eso los agranda, después de cierto número de veces quizá se junte un entero y por eso se recorre el punto.
- **Propiedad distributiva**. Roberto, Rosa y Sara intentaron otro camino.
  $3.4 \times 2.8 = 3.4$ veces $2.8 =$
  $2.8 + 2.8 + 2.8 + 1.12 = 9.52$
  1.12 es 4/10 de 2.8
  Obtuvieron el resultado correcto, pero siguieron sin saber por qué si se hace multiplicando se recorre el punto dos lugares. Con ayuda de la conductora, hicieron la multiplicación con fracciones para encontrar los denominadores potencias de 10 y su relación con recorrer el punto en el producto.
- **El número de cifras a la derecha del punto en los factores**. En su equipo Leti-

cia buscó una multiplicación en la que el número de cifras a la derecha del punto en el producto no fuera igual a la suma de cifras en los factores, es decir, un caso en el que no se cumpliera la regla. Dijo “vinieron a hacernos la luz” cuando la conductora les sugirió que lo escribieran como fracciones decimales. Entonces multiplicaron décimos por décimos y dio centésimos, con lo cual pudieron empezar a pensar en la relación entre número de lugares que se recorre el punto en el producto y número de cifras a la derecha del punto en los factores.

– **Qué se multiplica por qué**. Ana planteó la multiplicación 3.82 × 4.6 e intentó ver qué es lo que multiplica al decir 6 × 2, 6 × 8, 6 × 3. Con ayuda de la conductora vio que al multiplicar el 6 × 2 en realidad está multiplicando 6 décimos por 2 centésimos y da 12 milésimos, 6 décimos por 8 décimos da 48 centésimos, 6 décimos por 3 unidades y da 18 décimos.

Para comprender qué hay detrás de “recorrer el punto” en el producto se necesitó la intervención de la conductora, pues es difícil inferir lo que justifica la técnica. Los maestros estaban sorprendidos por saber algo “de memoria” y enseñarlo así, sin entenderlo. La opción en términos didácticos no está clara en este caso respecto a los alumnos de primaria, pero comentamos que ellos como maestros se benefician al entender los contenidos con mayor profundidad.

Para el algoritmo de la división la conductora también comenzó pidiendo a un maestro que pasara a explicarlo. Ella resaltó el procedimiento: cuando “baja” el 2 de las unidades en el dividendo dice “no alcanza”, pone un cero a su derecha para volverlo 20 y un punto en el cociente y puede seguir aumentando ceros. Al igual que con la multiplicación, tuvieron tiempo para que trabajaran en equipo buscando una justificación.



Rosa: porque estamos dividiendo en décimos, en 10 partes iguales, ya no estamos repartiendo enteros sino partes de un entero. En el reparto ya no voy a dar 2 enteros porque no me alcanza, los divido en 20 partes iguales y voy a entregar 5 a cada uno.

Conductora: esas partes cómo se llaman.

Rosa:	décimos.
Conductora:	entonces ¿este veinte qué es?
Maestros:	¿décimos?
	¿centésimos?
Isela:	ya no quiero pensar, me estoy haciendo bolas… [risas] Cuando bajas el 2 sin el punto, sobran 2 enteros, cuando pongo el punto y agrego el cero estoy diciendo que son 20… centésimos ¿no?
Conductora:	pero eran 2 enteros.
Isela:	eran, pero entonces ya le pusimos el punto.
Lidia:	necesito más para poder repartir, siguen siendo…
Conductora:	si fueran panes y los tengo que repartir entre 4, los parto en pedacitos, pero siguen siendo 2 panes.
Maestros:	sí.
Conductora:	creo que están de acuerdo en que el 2 es 2 enteros. ¿Y el 20?
Rosa:	décimos.
Conductora:	cada pan se partió en 10 partecitas, entonces tenemos 20 décimos.
Isela:	con los panes ya me quedó claro.

Así como pasó con la multiplicación, el algoritmo de la división se basa en propiedades de posición y base que no son obvias al seguir el procedimiento. ¿Por qué en el cociente se pone un cero y un punto, y en el residuo se añade un cero? Probablemente los maestros no se lo habían preguntado antes.

El otro caso de la división, cuando se eliminan los puntos agregando ceros, también mostró que desconocían la justificación.

	[La conductora anota la división 0.24 ÷ 1.2]
Rosa:	se va a recorrer el punto un lugar a la derecha, queda 2.4 entre 12
Conductora:	¿por qué puedo hacer eso?
Graciela:	eso de recorrer los puntos significa que está multiplicando, y tendría que hacerlo también con el otro número… es como las equivalencias, tengo que multiplicar por el mismo el de arriba y el de abajo… al recorrer los puntos se deja “en igualdad de condiciones”.
Conductora:	en la multiplicación no puedo hacer eso ¿verdad? Si tengo cantidades con punto decimal y recorro el punto para librarme de los decimales, no voy a obtener el mismo resultado. Pero en la división sí lo puedo hacer, ¿por qué será?
Roberto:	ni idea.

En los comentarios de Rosa y Graciela se advierte que intuyen lo que está en juego: plantear una división equivalente multiplicando el divisor y el dividendo por potencias de 10, sin embargo, la conductora intervino para explicarlo.

A manera de cierre

Quiero resaltar tres aspectos respecto a la operatoria con racionales: conocimientos previos que los profesores manifestaron, conocimientos nuevos que jugaron un papel en el taller y qué tan "confiable" era una técnica o conocimiento al final de las sesiones.

La actividad del laberinto puso a prueba las diferencias entre enteros y racionales en el campo multiplicativo, y como era esperable utilizaron conocimientos previa y sólidamente construidos sobre la operatoria para abordar la tarea, sin embargo, con esas ideas no lograron aumentar el puntaje. La retroacción que les proporcionó la calculadora sacudió esos conocimientos y se encontraron con evidencia empírica difícil de justificar, así que culparon a la calculadora. Finalmente, aceptaron que hay divisiones que agrandan y multiplicaciones que achican buscando una justificación que se apoyara en sus conocimientos previos sobre la operatoria con naturales: la multiplicación aumenta, pero como son decimales (números diminutos) aumentan poquito, tan poquito que más bien achica.

Graciela: está aumentando ahí, sí aumenta, pero estoy aumentando una cantidad muy pequeña que está fraccionada, es menos de un entero, entonces por eso, aunque la estoy aumentando 100 veces, es una cantidad reducida.

La idea de que los decimales funcionan como espejo de los naturales la comenté en apartados anteriores y respecto a la operatoria también surgió: si con los decimales la multiplicación achica y la división agranda es porque del lado derecho del punto todo funciona al revés. "(…) en los números decimales es a la inversa, cuando multiplicamos se reduce la cantidad y al dividir aumenta" [Graciela], "(…) nosotros pensábamos [antes del laberinto] que multiplicando avanzábamos más y esto es al revés, dividiendo aumenta y multiplicando disminuye en decimales" [Carina].

Otra idea que parece venir de los naturales es la de que al multiplicar dos "cosas" iguales el producto tiene la misma unidad de medida que los factores. Por ejemplo:

30 unidades × 2 unidades = 60 unidades

30 decenas × 2 decenas = 60 decenas

Así que es esperable que para Rosa 30 décimos × 2 décimos = 60 décimos.

¿Cómo dejar a un lado conocimientos confiables y añejos sobre los efectos de la multiplicación y la división?, ¿con qué sustituirlos? Al respecto, Brousseau afirma que:

> El obstáculo está constituido como un conocimiento de objetos, relaciones, métodos de aprehensión, previsiones con evidencias, consecuencias olvidadas, ramificaciones imprevistas… Va a resistir el rechazo, intentará, como debe ser, adaptarse localmente, modificarse al menor precio, optimizarse sobre

> un campo reducido siguiendo un proceso de acomodamiento bien conocido. (1976, p. 106).

En el taller estudiamos cosas nuevas con las que buscábamos confrontar esos obstáculos para ampliar los conocimientos previos de los maestros. Específicamente respecto a la operatoria vimos lo relativo a los nuevos significados (la multiplicación no es sinónimo de una suma reiterada y en la división el cociente no siempre será menor que el divisor o el dividendo), los racionales en distintos significados (operadores, razones, medidas y resultado de repartos) y justificaciones de los algoritmos con decimales.

La actividad del laberinto fue el punto de partida para explorar la multiplicación en actividades posteriores como "tomar una parte de otra" o usar "de" en vez de "por". También hubo trabajo para redefinir la relación entre la multiplicación y la división como operaciones inversas. Los maestros ya sabían que para "deshacer" una multiplicación como $4 \times 3 = 12$ entonces hay que dividir $12 \div 4 = 3$, pero ahora estaban incursionando en ideas como que es lo mismo multiplicar por 1/5 que dividir entre 5 o que multiplicar por 3/5 es igual a dividir entre 5 y multiplicar el resultado por 3. Con la búsqueda de fracciones equivalentes para resolver distintas situaciones también se discutió la técnica de multiplicar numerador y denominador por el mismo número, que es multiplicar por 1 y por eso se obtiene una representación distinta de la fracción original.

De manera similar a lo que describí en los dos apartados anteriores, los conocimientos nuevos sobre la operatoria estaban en construcción. En una sesión algo parecía haber quedado claro y lo usaban con soltura, y cuando posteriormente aparecía lo habían olvidado o se acordaban apenas. La sacudida que supusieron actividades como el laberinto o el cambio de base hizo que los maestros volvieran incluso a estrategias muy iniciales como las que se ven en los niños de primaria. Por ejemplo, restar siempre el dígito mayor al menor independientemente de si se encuentra en el minuendo o sustraendo, dudar de la calculadora o teclear 100 veces una suma reiterada en la calculadora para estar seguros del resultado de una multiplicación.

Dejo nuevamente a Brousseau para analizar lo sucedido:

> Un obstáculo se manifiesta, por tanto, por sus errores, pero esos errores no son debidos al azar. Fugaces, erráticos, son reproducibles, persistentes.
> Además esos errores, en un mismo sujeto, están ligados entre ellos por una fuente común, una manera de conocer, una concepción característica, coherente sino correcta, antigua y que ha tenido éxito en todo un dominio de acciones.
> Esos errores no son forzosamente explicitables.

> Sucede que no desaparecen radicalmente, de un solo golpe, que resisten, que persisten, luego resurgen, se manifiestan mucho tiempo después de que el sujeto haya rechazado de su sistema cognoscitivo consciente el modelo defectuoso. (1976, pp. 105-106).

8.1.4 Enfoque didáctico, aprendizaje y enseñanza de las matemáticas

¿Cómo han interpretado el enfoque didáctico los maestros a casi 30 años de haberse propuesto? Aunque la ingeniería didáctica no contempló aspectos sobre la enseñanza de las matemáticas en general, en las sesiones surgieron ideas al respecto que recupero en este apartado. También incluyo opiniones que manifestaron respecto a cómo se percibieron ellos mismos como usuarios de las matemáticas y adultos encargados de enseñarlas.

Constructivismo y gestión de la clase

El término "constructivismo" lleva muchos años en el vocabulario docente y en matemáticas está bastante ligado al enfoque de "resolución de problemas". ¿Qué es construir el conocimiento matemático o qué características tiene la enseñanza basada en un enfoque constructivista?

Una idea fuerte que se manifestó varias veces fue justamente que el conocimiento debía ser "construido" o elaborado por los alumnos, a diferencia de un modelo en el que el maestro lo presenta y espera que los alumnos lo memoricen. Por ende, para que el constructivismo opere hay cosas que deben hacerse y otras que ya no deben hacerse.

Isela: en este enfoque constructivo lo tienen que entender, antes se lo aprendían mecánico y ahora es al revés, primero lo entienden para que ya lo puedan hacer mecánico.

Graciela: ¿qué es un número decimal? Nada más le estamos atinando.
Conductora: no, estamos explorando el concepto que tienen de decimal.
Roberto: esto es constructivismo.

Sara: (…) en cuanto sea interiorizado y no memorizado es más fuerte.

Graciela: los niños van aprendiendo las cosas mecánicamente pero no han entendido, si se hiciera con modelos u otras estrategias, sería mejor.

Isela: yo aprendí como todos, "apréndetelo así", pero ahora los niños te preguntan.

Conductora: pero casos como 0.636363… la pregunta es, si se puede escribir como fracción, ¿cuál es el numerador y cuál el denominador? Les voy a dar un procedimiento exageradamente mecánico y sin sentido, pero que resulta.
[risas]
Lidia: es lo que hacemos los maestros.
Roberto: sin sentido.

Lidia: los dos ejercicios [dos actividades sobre densidad que analizamos] cumplen la función de problematizar un asunto y es "cómo lo resolverías". Es algo que nosotros no vivimos como alumnos de primaria y secundaria, no lo vivimos, y como maestros tampoco se los dimos a los niños mucho tiempo, o sea, siempre es dar fórmulas y cosas hechas (…) siempre somos muy conductuales. Entonces al decirles vamos a hacer sumas y no se pueden pasar del 10 pero tiene que haber muchos sumandos ¿cómo le haces?

Graciela: está bien que los alumnos se encarguen de lo que van aprendiendo, no hay que darles todo.

Lidia: (…) obviamente las maestras de mi época, hace mucho tiempo, no sabían de muchas cosas, pero las enseñaban de maneras prácticas, para qué entrar en tanta situación y además era "tú apréndetelo".

Nancy: (…) para mí las matemáticas no son accesibles, entonces es un tema que los maestros evadimos o lo damos mecánicamente, o como en el libro. Y pobre de aquel niño que nos diga ¿y de dónde salió? Investiga (risas).

Muy pegada a la idea de construir el conocimiento matemático está la de usar material concreto. Se construye partiendo de lo concreto para avanzar hacia lo abstracto, por lo tanto, las matemáticas tienen que verse y tocarse, así que tener material se vuelve un imperativo.

Lidia: el error cognitivo se puede dar más fácil con la cuestión concreta. En la primaria tenemos el metro ranurado y tiene los décimos separados y dentro de los décimos tiene los centésimos. Entonces tú puedes quitarle una parte y enseñarles cómo hay cosas más chiquitas entre el 1 y el 10, y esto lo puedes hacer, pero concreto, porque la matemática nosotros siempre nos habíamos ido al abstracto y toda la primaria es concreta (…) me acuerdo que la SEP dio unas reglas y ¡la rana!, era maravillosa porque tenías la rana que estaba bien bonita y brincabas con la rana.
Conductora: ¿pero te tocó como alumna?
Lidia: sí, me gustó mucho y efectivamente, pese a ser conductista toda mi educación esa parte siempre la recuerdo. Entonces siempre me llevo una rana, chapulín o busco un caracol que vaya dándole los pasitos a los niños precisamente para darle una imagen, porque si no le das una imagen concreta es bien difícil llegar al abstracto.

Edgar: a nosotros nos sirvió mucho el material concreto para hacer las operaciones, medir cuántos caben en cuánto y cuántos tenemos [actividades en base 2].

Isela: a mí me hizo ruido eso de que el material concreto no es la panacea. Pero hoy yo necesité esto [la tira] igual que los niños de la primaria, yo creo que sí se necesita. Los niños necesitan manejar mucho material, que vean lo de las particiones (…) para mí sí es la panacea porque es para que entienda lo que es difícil de entender porque es abstracto.

[qué hacer cuando un alumno se equivoca]
Roberto: (…) yo me regresaría al material concreto (…)

Otra idea es que para operar el constructivismo hay que modificar la gestión en el aula. Al respecto, los maestros hicieron comentarios sobre acciones puntuales que vale la pena hacer en clase y que dan cuenta de un cambio en las interacciones respecto a cómo se concebían en un modelo “tradicional”.

Isela: (…) también en vez de poner tú el problema haces que los niños hagan el problema.
Roberto: pero eso ya es otra fase.
Lidia: puedes plantear una problemática cuando tienes el dominio del conocimiento, así están planteadas las secuencias didácticas de los libros (…) al final de las lecciones dice “inventa un problema igual estos”.
Isela: pero si tú los haces redactar su propio problema estás metiendo muchas cosas, porque primero tienen que ver cómo lo van a redactar, de qué estamos hablando para eso ya tienes los previos, qué es lo que saben y qué van a poder redactar. Sí pueden redactar, aunque no lo tengan en el manejo como clase, sí lo saben fuera de la escuela. Entonces sí queda comprobado que es mejor cuando ellos redactan su propio problema a que tú llegues y les pongas tu problema (…) A la hora de que ellos están ordenando lo que necesitan para hacer su problema ya les cae el veinte.

Isela: para aplicar un conflicto cognitivo con los niños lo haría de manera inversa, pondría el resultado de la operación y les pediría las operaciones para llegar a 0.28.

Roberto: (…) me gustó el razonamiento de un niño que tengo, dijo “no se compliquen, si tenemos 0.01 un centésimo, siempre vean el primer número que va después del punto y es el que me va a dar la razón de dónde ubicarlo. Me gustó cómo se los explicó a sus compañeros (…)

Berta: (…) cuando ya no me entiende le pongo a un igual (un par) y él le explica.

Sara: compartir las respuestas y procedimientos con todo el grupo es una buena estrategia de la maestra (…) ustedes lo han hecho aquí [en el taller].

Graciela: cuando alguno se equivoca se puede preguntar al grupo si están de acuerdo, y que ahí no falta alguno que diga que no.

Sara: cuando veo una clase en la que el diálogo es entre un alumno y el maestro dejando de lado al grupo, se pierde mucho. Es mejor que esas cosas se compartan, retomarlo con todos.

Esther: (…) cuando un alumno no sabe contestar uno tiene que deducir que otros tampoco van a saber.

En el taller incluí cuestiones específicas sobre la gestión. Una de ellas fue la reflexión didáctica acerca de las actividades de enseñanza (que llamé “metadidáctica” en el capítulo 6), por ejemplo, identificar que ciertos cambios en una actividad supondrán una interacción distinta entre los estudiantes y el contenido matemático. Si bien esto es algo que los maestros hacen constantemente en sus planificaciones y durante la clase, quise enfatizarlo reflexionando sobre los números involucrados en una actividad o el orden de las actividades en una secuencia didáctica.

En el apartado 8.1.2 describí a detalle la secuencia que seguimos para ordenar una lista de números: resolver individualmente, comparar con alguien y lograr una sola respuesta, escribir un procedimiento genérico y pedir a otros que lo leyeran y valoraran (fases de acción, formulación y validación en términos de Brousseau). Cuando terminó la secuencia la siguiente actividad fue reflexionar sobre la secuencia misma, que es la propuesta de Lerner (2001) sobre la doble conceptualización. Lo importante era que identificaran que el orden en las actividades en buena medida determinó cómo salieron las cosas y que los números que ordenaron no estaban ahí por casualidad, sino que fueron cuidadosamente elegidos. Conocer el impacto de ese tipo de decisiones tiene un potencial didáctico del que ellos pueden echar mano.

Conductora: primero escribí en el pizarrón números y les pedí que los ordenaran, luego que los compararan con la pareja y escribieran juntos un procedimiento. Después intercambiaron el procedimiento y lo socializamos. ¿Creen que los procedimientos que salieron tuvieron que ver con los números que puse?
[no contestan]
Conductora: ¿si hubieran sido sólo enteros?
Maestros: no.

Conductora: si hubieran sido solamente números con punto decimal, ¿algunos pasos de su procedimiento habrían cambiado?
Esther: no estarían los de cambiarlos todos [escribirlos todos con punto o con fracción]
Conductora: ¿qué hicieron con 100/1000?
Roberto: tachamos ceros.
Conductora: ¿qué hubiera pasado si primero les pido que escriban los procedimientos?
María: a lo mejor nos hubiéramos convencido uno al otro del procedimiento.
Conductora: quiere decir que los números y el orden de la secuencia van a influir en lo que pase.

En el siguiente intercambio se discutió sobre el propósito de usar la base 4 (favorecer ciertas acciones y bloquear otras).

Conductora: ¿por qué creen que trabajaron con base 4 y no con base 10?
Leticia: para ver las reglas, porque no importa la base van a ser las mismas reglas.
Esther: para entender los retos a los que se enfrentan los niños, nosotros les decimos ¿cómo no entiendes? Aquí le pides prestado, así nosotros nos enfrentamos a la misma problemática.
Conductora: ¿qué hubiera pasado si en vez de trabajar con la base 4 traemos el metro y usamos la base 10?
Graciela: no hubiera sido lo mismo, trabajar con una base distinta nos hace reflexionar sobre las reglas del sistema. Mueve el esquema que tenemos muy fijo, nos permite ir entendiendo agrupar y desagrupar, a nosotros adultos nos costó trabajo.
Lidia: lo tenemos muy mecanizado, uno dice cuartos, octavos, dieciseisavos (…) en la primaria se comparan sistemas, los egipcios y los arábigos y eso es muy bueno, y eso fue lo que hicimos aquí. Estábamos en el punto de qué era un número decimal, y ahí estamos.

Lo que se discute enseguida tiene que ver con dos variables didácticas que estaban en juego en cierta actividad: dar la escala en la recta numérica o dejar que los alumnos la definan, y pedir que ubiquen varias fracciones en la misma recta (la escala tiene que ser múltiplo de todos los denominadores) o que ubiquen cada fracción en una recta distinta.

Rosa: a los alumnos les es muy complicado [ubicar varias fracciones en la recta cuando no está definida la escala] (…) Entonces yo como maestra… esto es muy rico [leer registros y discutirlos], porque es replantearse cuál debe ser la secuencia para llevarlos a experimentar, porque en general les damos ya las rectas preestablecidas, difícilmente un niño traza por sí solo una recta de x dimensión, en los libros vienen las rectas trazadas y ellos ya toman esa dimensión y la fragmentan, pero lo rico de esto es que el niño tiene que planear cuál es la dimensión de su recta y dividirla en el número de partes que me indica, y no sólo eso, sino que todavía en la misma recta ubicar "n" fracciones. Yo siento que para ellos es muy complejo.
Conductora: ¿les parece que la actividad era difícil o fácil para ese grado?
Roberto: fácil.
Graciela: para nosotros de adultos puede ser fácil porque tenemos ya mucha información para poder responder algo así, pero viendo el proceso que se dio [en la clase del registro], fue difícil (…)

	(…)
Rosa:	fue difícil ubicar quintos, décimos y dieciseisavos en la misma recta.
	(…)
Roberto:	por practicidad, es mejor dar la recta, así ya nada más los ubica [el alumno ubica los números]
Conductora:	cuáles serán los “contras” de no dar la recta, de dejarlo más abierto.
Graciela:	pues si no se la damos tiene que decir cómo lo va a dividir (…) yo creo que sí se puede lograr si va de manera gradual, debe saber representarlo.
Edgar:	en un primer momento sí darles la recta, ya en junio que ellos tengan la iniciativa y hagan las divisiones que ellos crean (…)

Al hacer hincapié en las decisiones que habíamos tomado para el taller no pretendíamos definir cuál es el mejor camino para enseñar algo, sino conversar acerca de las opciones didácticas que cada decisión conlleva para que ellos estuvieran conscientes del potencial que tienen esas elecciones y optaran por alguna de manera informada.

Vida real

Además de las ideas constructivistas hay otras que se fueron instalando en el pensamiento docente en las últimas décadas, como que las matemáticas escolares ya no deben ser un cúmulo de contenidos aislados que existen por y para sí mismos, sino que deben ser prácticos y tener utilidad en la vida diaria de los alumnos.

Roberto:	les pongo ejercicios de este tipo y me dicen que para qué les va a servir, hay que hacerles las matemáticas lo más práctico, para qué quiero hasta cienmilésimos, les digo que es otra forma y la tienen que conocer, pero en mi grupo es más de practicidad.

Leticia:	ahorita que iba llegando pensé “qué nos tocará ver” y pensé en cómo ponerles ejemplos a los niños (…) en el libro viene un ejemplo de para qué me sirve eso, como en la clasificación de libros en la biblioteca, cuando hay varios de un mismo autor (…)

Isela:	es un tema muy difícil (…) mejor hay que preguntar ¿para qué me va a servir esto?, ¿cómo lo conecto con mi vida cotidiana?, en vez de ¿por qué?

Isela:	(…) para qué enseñamos todo eso tan complicado a los niños y no le veo utilidad para la vida diaria. Tengo niños que no entienden nada, sufren y van a sufrir más en la prepa (…)

Leticia:	yo pondría el problema al principio.
Roberto:	(…) se supone que el enfoque problematizador… tenemos que darle una aplicación a esto porque si no los niños no lo ven como suyo.
Leticia:	no le ven la utilidad.

Si las matemáticas se deben poder utilizar en la vida diaria, los contextos utilizados en los problemas escolares deben ser familiares para los alumnos. Cuando pedimos a los maestros que inventaran problemas casi siempre usaron contextos como los de los libros de texto, aunque fueran forzados o artificiales.

4 × 7

En la granja de Luis hay 4 gallinas y cada una ha puesto 7 huevos (blanquillos), ¿cuántos blanquillos hay en total?

En una granja hay 4 gallinas y cada una puso 7 huevos. ¿Cuántos huevos puedo recolectar?

4 × 0.7

Si para hacer una tortilla, se necesitan 0.7 kg de masa ¿qué cantidad de masa se necesitarán para hacer 4 tortillas?

Huevos y gallinas es ciertamente un contexto muy escolar, sin embargo, comentamos si en verdad las gallinas pueden poner 7 huevos diarios, o si es “real” que todas las gallinas pongan el mismo número de huevos y nadie supo responder a esas preguntas. Con el problema de la masa algunos maestros se dieron cuenta del abuso del contexto, Edgar dijo “¡qué tortillota!”, “ha de ser una memela” respondió Roberto. No obstante, el problema efectivamente se resolvía con la operación 4 × 0.7 y el contexto de cantidad de masa para hacer tortillas fue un buen esfuerzo de los maestros para darle sentido a esa multiplicación.

En cambio, los problemas “sin contexto” no los dejaban muy satisfechos, aunque matemáticamente fueran correctos. Por ejemplo, un problema como el siguiente lo consideraban sin contexto y por ello menos valioso o útil.

4 × 0.7

¿Cuál es el cuádruple de 0.7?

Localiza en la siguiente recta ¿hasta qué punto llego si doy 4 saltos de 0.7 de longitud cada uno?

Ilustración 100 Recta para resolver un problema con 4 × 0.7

Sin embargo, también hubo otras voces que en las que no estaba presente la exigencia de la practicidad a las matemáticas.

Graciela: [la maestra] debió tener un propósito para llegar a ese dato, creo que precisamente para que fueran descubriendo cuántas posibilidades hay de fraccionar el número. A lo mejor no vamos a utilizarlo de manera cotidiana, pero tenemos la noción de que existe. Me acuerdo cuando trabajábamos en primaria los números fraccionarios y nos ponían sumas como de 21/87 + 15/134 que en la vida hemos usado eso de manera práctica pero que sabemos que eso existe por ahí (…)

Lo que no sabíamos y las condiciones para aprenderlo

Otro aspecto que recupero en este apartado tiene que ver con el reconocimiento que los maestros hicieron acerca de sus debilidades en el dominio de las matemáticas que estábamos trabajando. En la primera sesión, Efraín comentó una anécdota relacionada con los intereses de una tarjeta de crédito que le estaban ofreciendo. La conductora "cachó" el problema y decidió resolverlo al frente, a pesar de que tendría que lidiar con un tema de porcentaje además de los decimales.

Efraín: es que un día le comenté a un compañero que me ofrecen una tarjeta… me van a dar 100 mil pesos, pero de esa tarjeta me van a cobrar el 0.8, me dice "no seas menso, que no te cobren el punto 8, que te cobren mejor 1, 2, 3 por ciento", le dije "no, cómo crees", "sí, porque mientras más chiquito sea el número, menos pagas". Le digo, ¿es…? ¿Cómo dijo que se llamaban? [a la conductora]

Conductora: tasativo.[19]

Efraín: "¿es tasativo?", me dijo "pues no sabría qué decirte, pero es algo así, pero mientras menos tengas… chiquitos, vas a pagar más".
[risas]

Conductora: cuando a ti te dicen que te van a cobrar un porcentaje de 0.8 pues tendríamos que discutirlo bien, pero a mí me late que 0.8% es menor que 1% o 2%. La otra que decías es que te van a cobrar 1, 2, 3, pero ya no nos dijiste si eran porcentajes.

Efraín: sí, porcentajes. Por eso ya no le agarré la tarjeta, porque con los puntos… mejor estudio.
[risas]

Berta: es que lo hemos platicado, cuando damos 1°, 2°, 3° nos encasillamos en ciertos conocimientos, cuando nos pasan a 5° y 6° hay que refrescarse (…) ver diferentes técnicas, preparar la clase y muchas cosas. Ahorita vemos que eso no lo habíamos manejado porque no viene en el libro.

[19] Unos minutos antes la conductora introdujo este término para distinguir dos tipos de problemas de división: los que son de reparto (tengo 15, lo reparto entre 3, cuántos le tocan a cada uno) y lo que son tasativos (tengo 15, si le doy 5 a cada uno a cuántas personas les puedo dar). El uso que hizo Efraín en este intercambio no fue correcto, quizá recordó la palabra "tasa" en contextos de interés bancario.

Sara:	a mi familia le gustan las matemáticas, a mí no porque me gusta la vida fácil (risas) Si a mí me sacaron adelante… porque yo trato de ocupar lo menos que puedo las matemáticas (…)

Isela:	a mí en lo personal no me gustaban las matemáticas, siempre fui la que "denme 1° o 2°" porque es fácil y así no tengo otra cosa qué hacer" y sí, 25 años fue 1°, 2°, 3°. Del año pasado para acá que entré a la escuela oficial me dan 6° entrando, fue un reto, dije "matemáticas".

Carina:	(…) pensamos que ya lo sabemos y no es cierto.
Sara:	o que no lo puedes aprender.

Lidia:	(…) cuando encontré la densidad de los números decimales en el libro de 6° me quise morir porque dije "de dónde sacaron eso", en mi vida como maestra lo he dado (…) todavía no creo que pueda hacerlo bien, pero sí me voy a arriesgar (…).

Lidia:	(…) a mí no me lo enseñaron y no sé cómo sé lo que sé.

Generar un ambiente de confianza para aprender es un asunto central en los procesos formativos. Cuando los niños se acercan a la escuela saben que no saben, así que no se sienten mal por desconocer quién era Luis XIV o qué es dicotiledóneo, en cambio los maestros están en una posición distinta, ellos deberían saber los contenidos de la primaria y además saber enseñarlos. Lidia se refirió a eso como "el docente es la línea de la sociedad, no puede fallar". Así que considerando las carencias formativas que muy probablemente tuvieron cuando eran estudiantes y cuando eran estudiantes para maestro, y las altas expectativas que se tienen sobre ellos como profesionales de la educación, en los espacios de formación docente es necesario brindar un ambiente seguro, de colaboración y respeto. El grupo de participantes tuvo mucho éxito en esta empresa a pesar de que no sólo había maestros frente a grupo, sino que también estaban sus supervisoras o ATPs. Para que ese ambiente se instalara en el grupo hubo momentos críticos. Enseguida detallo dos que me parecieron significativos.

Uno de ellos ocurrió en la primera sesión del taller. Durante el desarrollo de las actividades la conductora nunca descalificó o tachó de incorrecta una idea, sino por el contrario, impulsó a todos los participantes a que la exploraran en los momentos individuales y a que se argumentara a favor o en contra en los momentos grupales. Por ejemplo, cuando Efraín dijo que la calculadora estaba mal la conductora lo invitó a probar con otra, y en las discusiones grupales dio espacio a que se presentaran las distintas explicaciones e invitó a todos a opinar. Cuando ella o el grupo argumentaron y pusieron contraejemplos para descartar las ideas incorrectas sobre el ordenamiento de números, fue difícil para Efraín, Carina y María sostenerlas y ya sospechaban que algo andaba mal. En un intercambio con Carina sobre su idea de que los números con menos cifras a la derecha del punto son siempre mayores que los que tienen más cifras, ocurrió lo siguiente:

> Carina: (…) lo mismo me da 0.4 que 0.40000, para mí eso sí está claro, a lo mejor me falta precisar y decir "cuando sean los ceros…"
>
> Conductora: permíteme decirte, y eso es también para los demás, que una duda o un error que aparezca de alguno de ustedes es una ocasión muy buena para todos para poder profundizar en el conocimiento, entonces, si cometen un error o nosotros lo cometemos [incluyó a los observadores] aunque se sienta uno un poco incómodo, es una oportunidad para profundizar y ese es el chiste ahorita.

El otro momento que me parece importante ocurrió varias sesiones después. La razón por la que lo considero importante es que fue el propio grupo quien reguló el tono y la intención de los intercambios. Tras la lectura de un registro de clase, Isadora hizo comentarios muy críticos sobre las decisiones de la maestra del registro. Por ejemplo, dijo que le había parecido una clase totalmente improvisada, que había perdido el control y que se le había ido de las manos la actividad. Si bien lo que yo pretendía a partir de la lectura de registros invitaba a la crítica y reflexión sobre lo sucedido en esa clase, era importante instalar un clima respetuoso y positivo hacia las intenciones de alumnos y maestros. En el taller la conductora lo describió como "pensar bien" del otro y sus acciones, considerar que incluso si algo había salido mal, la intención original era buena. Con gusto vi que el propio grupo se encargó de ello, pues después de los comentarios de Isadora las siguientes participaciones no solo resaltaron hechos positivos de la clase que leímos en el registro, sino que tuvieron interpretaciones más solidarias con la maestra en cuestión.

> Graciela: bueno, yo difiero, aquí se observa ya que hay buen dominio de información de los muchachos […] cuando ella les pide que representen los decimales lo hacen perfecto, tienen bien la noción de ir fraccionando y lo hacen correctamente […] sí lograron la instrucción, se hicieron muchas participaciones y sí se iba logrando.
>
> Esther: totalmente de acuerdo. Cuando llega a la parte de fracción se le pierden un poquito, pero ella los vuelve a jalar […] siento que sí es una construcción, que el maestro los está llevando […] la trasladé a lo que has hecho con nosotros [en el taller].
>
> Berta: pues como maestra, cuando saben hacer esto uno se siente… ¡pero como coliflor!

Considero que haber instalado ese ambiente de trabajo posibilitó que se animaran a mostrar sus ideas y dudas sabiendo que serían tratadas como aportaciones valiosas de las que todos podíamos aprender. Este solo hecho me parece un logro muy importante del grupo.

Isela: (…) Lo que más me gustó de este taller es esta parte de… los errores verlos de forma positiva, la crítica constructiva, así la llamo con mis niños, cuando te van a decir que estás mal pero no te dicen que no sabes. Esa parte es la que a mí me gustó, que uno aprende aquí y luego lo puede decir con los niños de manera que no se sientan mal y que no salgan como yo de la primaria, que no quería ver nada de matemáticas (…) Esa parte de cómo llegar al conocimiento por medio de ejercicios y llegar, aunque nos costara trabajo, es lo que más me gustó. Y así es como me gusta hacerlo con los niños […] Me gustó que viéramos clases de diferentes personas y aguantar a ver qué decían y es un reto que te vayan a observar y luego me va a criticar medio mundo, pues también se siente raro.[20]

Sara: (…) en algún momento ya me sentía como alumna, con las notas, con dudas y quería opinar, y yo misma me tapaba la boca porque así estamos condicionados. El hecho de que tuviéramos aquí un poquito de libertad para dudar, porque no tiene nada de malo, a mí me hizo apreciar ciertas cosas y cambiar en cuanto a dirigir una clase. Estamos muy con las competencias y todo, pero creo que aquí con esto, ahora que reviso planeaciones pues dónde está el reto cognitivo y órale a ver cómo le haces tú solito, movilizan saberes, o sea, todo lo que se debe hacer en una clase lo vivencié yo como alumna y espero poder reproducirlo y que los profesores también lo hagan (…)

Nancy: (…) gracias a todos por compartir, los quiero felicitar porque son muy buenos, el compartir las estrategias y decir “yo le hago así” y el exponerse, porque no todos tienen la capacidad de exponerse y aquí lo hicieron.

Lidia: (…) el confrontarnos como docentes que no sabíamos algo nos cuesta trabajo, de repente no podía decir “qué va a decir de mí, cómo que no sé” y nos costó trabajo aceptar que no sabíamos y que aquí en grupo lo podíamos solventar todos juntos, que es algo que no nos damos la oportunidad. El docente es la línea de la sociedad, no puede fallar. ¿Cómo que no sabes? Fallábamos porque teníamos razonamientos que nos habíamos inventado para poder hacerlo, aquí nos están dando leyes, reglas, hechos que nosotros no hemos entrado a mucho a la ciencia, tenemos una barnizada de bachillerato y otro tanto de pedagogía […] Esto fue un reto, cada lunes sufrimos, aquí en pareja cotorreamos, “esto fue sufrir”. Nos volteábamos a ver y ¿quién quiere pasar?, “tú”, “no, yo no”, eso siempre nos alteró porque no queríamos fallar.

Roberto: ¡no me graben! [en tono de broma]
Conductora: ¿cómo van? Mil veces un centésimo cuánto da.
[no responden]

[20] Antes de comenzar el taller, le pedí a Isela que me dejara grabarla dando clase. Luego solicitó asistir al taller y estuvo de acuerdo en que se analizara su clase cambiando su nombre.

Conductora:	cien veces un centésimo.
Edgar:	es un entero.
Conductora:	mil veces un centésimo.
Roberto:	10
Conductora:	tenían 3.4 + 10
Edgar:	menos choro, ¿verdad? [refiriéndose a que ellos lo resolvieron con un procedimiento más largo]
Conductora:	pero qué padre, sí llegaron al resultado. [voltean orgullosos a la cámara y sonrientes]
Edgar:	ahora sí, fílmame [levanta su hoja y la pone ante la cámara riendo]
Conductora:	di tu nombre completo, tu zona.
Roberto:	eso no lo tienen que hacer [señala en su hoja el procedimiento erróneo] [risas]

En plan de diversión, Carina se mostró dispuesta a aprovechar lo aprendido para impresionar a sus alumnos cuando la conductora explicó el algoritmo para obtener la fracción que da lugar a un periódico.

Conductora:	esto es para ustedes, no para los niños ¿eh?
Carina:	sí, para apantallarlos, "¡oh, qué operación es!" dirían. [risas]

A manera de cierre

Puntualizo sobre tres aspectos que se abordaron en el taller: "vivir" y analizar el enfoque didáctico de resolución de problemas, reflexiones sobre la utilidad de las matemáticas escolares en la vida diaria de los alumnos y la experiencia de los maestros como aprendices.

La implementación del enfoque de resolución de problemas supuso un cambio muy importante para los maestros de primaria (Ávila, *et al*, 2004). No es que antes enseñar matemáticas fuera fácil, pero la demanda se incrementó notablemente con la reforma de 1993. Como dijeron los maestros, ahora los alumnos tienen que entender, ahora te preguntan y nosotros no aprendimos así. Sin embargo, apuestan por el constructivismo y se esfuerzan para gestionar la clase de forma cercana al enfoque, como cuando dicen "no hay que darles todo hecho a los alumnos", que no hay que "irse" con el alumno experto pensando que todos los demás también le entendieron y que vale la pena compartir las dudas de un niño con todo el grupo. Aunque lleva muchos años en la educación básica y ha habido cambios en los programas de formación y en el discurso de los maestros, enseñar matemáticas con el enfoque de resolución de problemas sigue siendo un reto.

Las actividades que compusieron el taller fueron diseñadas para desarrollarse en el marco del enfoque, es decir, constituir un reto o problema a resolver y algunas de ellas fueron secuencias compuestas por varias fases. Además, la conductora siempre tuvo un papel como el que se espera de los maestros, dando consignas claras, conociendo bien el propósito de cada actividad, ajustando sobre la marcha cuando fue necesario, "devolviendo" el problema a los participantes, coordinando discusiones grupales, enfatizando los aspectos importantes, "traduciendo" intervenciones o producciones de los participantes, formalizando conceptos, etc. Los maestros lo notaron y fue una parte importante de sus aprendizajes:

> Nancy: (…) lo que se me hizo más enriquecedor fue vivenciar el enfoque que nos cuesta mucho trabajo como maestros, aquí construimos en equipo, confrontamos, aquí nos decíamos "a ver y cómo le haces tú", y compartir las diferentes estrategias de todos, y la excelente conducción de Silvia. Me acuerdo cuando estaba frente a grupo, era muy a descalificar, no le decía "estás mal" pero por mi cara el niño sabía "chin, estoy mal" [risas]. Silvia no, esa parte fue lo que más me gustó, vivenciar el enfoque, vivenciar la metodología. Los maestros nos dicen "es que no se puede, me gustaría verte a ti con mi grupo", bueno, pues sí se puede.

Respecto a las actividades del taller que estuvieron más centradas en el análisis metadidáctico y la vinculación con la práctica, que también tiene que ver con el enfoque, pude identificar avances. Por ejemplo, cuando los maestros reconocieron que la tarea cambia si piden a sus alumnos que ordenen una lista de números en la que sólo hay fracciones, en la que solo hay decimales o en la que sólo hay decimales y además todos tienen tres cifras a la derecha del punto. Debido a que no se completó el análisis de la etapa 2 no tengo evidencia de hasta qué punto los maestros habrían retomado este tipo de aprendizajes para diseñar sus propias lecciones, pero hubo momentos en la etapa 1 que mostraron la importancia de tener un buen dominio del contenido matemático para identificar variables didácticas y elegir la que se ajuste a su propósito. Me refiero a la sesión en la que jugaron "Conejos y cangrejos", actividad diseñada para estudiar la densidad en los racionales. Como describí antes, los maestros se sintieron emocionados con lo que estaban aprendiendo y pensaron en posibles versiones para llevar el juego a sus alumnos. Las versiones no son más que la modificación de una variable didáctica, y lo que los maestros proponían variar era usar números naturales en vez de decimales o incluir en la consigna que sólo se pueden sumar o restar números de hasta dos cifras decimales. Ambas tiran por tierra el propósito de la actividad pues bloquean el conocimiento que se está tratando de construir (la densidad).

Sobre la utilidad de las matemáticas escolares, considero que es una expectativa que en muchos aspectos rebasa el margen de actuación de los maestros, pues ellos no pueden tomar decisiones sobre los contenidos del programa, las lecciones de los libros ni las características de las generaciones de estudiantes que hoy día conforman sus grupos en la primaria. Así que cuando un alumno les pregunta “¿y esto para qué me va a servir?” se ven obligados a responder por algo que ellos no decidieron, y claramente, muchas de las cosas que estudian en las matemáticas de primaria tienen poca utilidad para alguien de 12 años.

¿Deberían al menos tener un contexto familiar todos los problemas matemáticos que se estudien en la educación básica? Si bien es cierto que las matemáticas escolares requieren contextos para dar sentido a conceptos, operaciones y resultados, a la vez necesitan despegarse éstos para ampliarse y profundizarse, la proporcionalidad no siempre debería estar ligada a tablas de precios ni las fracciones al reparto de pasteles. Idealmente, los especialistas que elaboran los programas de estudio y las lecciones son quienes asumen la responsabilidad de ese tipo de decisiones. Para los maestros quizá sea útil contar con o elaborar buenos problemas con y sin contexto para usarlos en función de las necesidades de sus alumnos, y además, ofrecer ejemplos y contraejemplos de contextos familiares durante la clase para enriquecer el trabajo.

Antes de cerrar traigo nuevamente a cuenta el ambiente generado en el grupo, pues permitió mucho del avance observado. Los comentarios de los maestros respecto a “vivenciar” el enfoque, a no sentirse juzgados, a enfrentarse a los problemas sin haberles dado previamente “la clase”, a identificar actitudes en la conductora que promovieron su participación y razonamientos, etcétera, excedieron lo previsto en mi diseño. Añado que tuve que renunciar a que ciertas actividades se llevaran a cabo como las había diseñado, pues si las había marcado como trabajo individual era seguro que los maestros se iban a juntar con el de al lado para resolverlas; incluso tratándose de un juego, pues dejaron de intentar ganar para resolver la tarea juntos.

Quiero añadir una reflexión respecto a los libros de texto analizados. En diversos espacios de formación me resultaba sorprendente lo que para mí era una contradicción: por un lado, ver a los maestros convencidos de que los alumnos necesitan “construir” el conocimiento y por otro, creer que no podrán “entrar” a las situaciones matemáticas que se les plantean en los libros de texto. Me sonaba a algo como “está bien que exploren y todo, pero después de que yo les haya explicado cómo se hace”. Durante las sesiones algunos manifestaron ideas en este mismo sentido:

Lidia: (…) el libro es para reafirmar el contenido, tú lo debiste haber dado como clase antes.

Berta: primero este conocimiento bien cimentado [densidad], luego ya me puedo ir a esto [actividades que lo ponen en juego como las que planteamos en el taller].

Esther: (…) debe haber primero una construcción y nos lo marca muy bien, los libros son el aterrizaje de esa construcción.

Antes del taller yo me explicaba estas ideas -como lo han hecho otros investigadores- atribuyendo la contradicción a que el enfoque de resolución de problemas implica pérdida de control en la clase (pues podrían salir procedimientos no previstos, múltiples respuestas que analizar y una gestión compleja en la puesta en común), así que creen en ello pero en su práctica no siempre se refleja. Sin embargo, tras el análisis de los libros de texto fui más sensible a sus argumentos. El nivel de desarticulación entre las lecciones y los temas de los números racionales, las imprecisiones, las distintas definiciones para un mismo concepto, etc., hacen muy complejo basar la enseñanza en los libros de texto gratuitos.

La importancia de tener materiales de buena calidad y que permanezcan en las aulas durante varias generaciones es altísima principalmente por el beneficio directo que representa para los alumnos, pero también porque son un recurso con el que los maestros aprenden o refuerzan su propio conocimiento matemático y didáctico (dijo Berta "cómo lo voy a saber si ni siquiera viene en el libro"). Los cambios en los programas, como "pasar" un contenido para la secundaria, adelantar un contenido uno o dos grados o incluir algo totalmente nuevo (como las gráficas de caja-brazos o la densidad), tienen tremendas repercusiones en las aulas. ¿Dónde se espera que los maestros aprendan sobre la densidad para poder enseñarla?

Por último respecto a los libros, una propuesta que se mantiene durante varias generaciones representa una ventaja para los maestros en el sentido de que han podido enseñar cada lección más de una vez y acumulan experiencia que les permite modificar sus decisiones para la siguiente, identifican dificultades específicas, preguntas que no son muy claras, etc. Cambiar los libros cada pocos años no es una buena decisión.

8.2 Hipótesis a la luz de la evidencia

Enseguida presento lo relativo a la hipótesis 1 y los objetivos asociados a esta:

H1. Los maestros de primaria entienden a los números decimales como una extensión de los naturales y tienen dificultades para distinguir sus propiedades, identificar su relación con las fracciones y comprender la diferencia entre un número y sus representaciones. Las deficiencias de las lecciones en los libros de texto no ayudan a clarificar las dudas.

Objetivo A. Comenzar proponiendo actividades exploratorias que movilicen los conocimientos de los maestros sobre los números decimales y ajustar en función de los resultados (H1).

A lo largo de las sesiones obtuve evidencia que permite confirmar la H1. Efectivamente, los participantes mostraron dificultades que se asocian al hecho de conceptualizar a los números decimales como una extensión de los naturales, como está documentado en la literatura. Por ejemplo, afirmaron que:

- ni los naturales ni los enteros son decimales,
- mientras más cifras tenga, mayor es el número (como en los naturales),
- mientras menos cifras tenga, mayor es el número (porque se divide en menos partes),
- 0.4 > 0.67 porque los décimos son mayores que los centésimos (que es similar, pero no idéntico al argumento anterior),
- hay números con punto que terminan y otros que no terminan, pero todos son decimales.

En las sesiones analizadas de la etapa 2, los maestros identificaron algunas imprecisiones o errores en las lecciones de los libros de texto gratuito, como llamar decimal al resultado de dividir el numerador entre el denominador de 1/3. Aunque el análisis de las lecciones no fue amplio durante el taller, mi propio análisis previo y algunas ideas comentadas en la etapa 2 me permiten inferir que no resultan de mucha ayuda para que los maestros aclaren dudas respecto al contenido matemático y que incluso pueden agrandar la confusión.

Respecto a las propiedades de los racionales, algunos o todos los maestros participantes:

- pensaban que era posible hallar un antecesor y sucesor,
- desconocían qué era la densidad,
- desconocían que la densidad es una propiedad que no poseen los naturales,
- desconocían que con los racionales siempre es posible hallar un número para resolver $a \times \_\_ = b$

- pensaban que las divisiones siempre achican y las multiplicaciones siempre agrandan,
- sabían que se puede hallar una fracción equivalente a una dada, pero al cambiar la representación de un número cambiaban también sus ideas respecto a este (por ejemplo, podían reconocer la equivalencia entre 5/10 y 1/2, pero solamente el primero lo concebían como decimal).

Respecto a las relaciones numéricas, ninguno de los maestros participantes sabía cómo se relacionan los distintos números que utilizan: las fracciones con los decimales, los naturales con los enteros, los naturales con las fracciones, los decimales con los irracionales, los racionales con los irracionales.

La hipótesis 2 y los objetivos asociados fueron:

H2. Un conocimiento sólido de los decimales como contenido matemático se puede alcanzar si los maestros resuelven tareas que pongan en juego sus principales características y discuten sobre ellas, se acercan a la "razón de ser" de los racionales y a aspectos básicos de los conjuntos numéricos (N y Q) y sus propiedades. La puesta en marcha de cierto tipo de actividades permitirá estudiar lo matemático y también lo didáctico.
Objetivo B. Resolver tareas matemáticas que involucren los aspectos centrales de los decimales. Siempre que sea posible, diseñar un "milieu" que permita actividades completas (situaciones de acción, formulación y validación) (H2).
Objetivo C. Emplear las tareas matemáticas como medio para estudiar también lo didáctico (principalmente a través de situaciones de doble conceptualización) (H2).
Objetivo D. Analizar registros de clase tanto de profesores expertos como de sus propias clases (extractos en video y transcripciones) (H2).

Esta hipótesis se confirma parcialmente. El diseño de la secuencia contempló actividades sobre los aspectos que consideré centrales respecto a los decimales: qué tipo de problemas resuelven, cómo se ordenan, cómo se opera con ellos, qué los distingue de otros números y cómo se relacionan con otros conjuntos numéricos. Los maestros participantes mostraron avances, con diferentes ritmos y alcances entre ellos, pero hubo evidencia de aprendizajes logrados respecto a la parte matemática, especialmente en el orden y las situaciones aditivas. Otro aspecto positivo de la secuencia fue el alto nivel de aceptación e involucramiento que se logró en la etapa 1, pues todos los participantes manifestaron haber aprendido mucho de matemáticas y haber “vivenciado” el enfoque didáctico.

Un aspecto que no alcancé a dimensionar en el diseño fue que la brecha entre los conocimientos matemáticos de los maestros participantes y los objetivos planteados en la etapa 1, fue mayor que lo esperado. A pesar de los avances (algunos notables, como el de Carina), también hubo evidencia de que faltó más trabajo con temas específicos, como las situaciones multiplicativas y los conjuntos numéricos. Resalto aquí un hecho importante del que di cuenta en los apartados anteriores: aunque en una de las sesiones los participantes mostraran evidencia de que habían comprendido algo, cuando se presentaba en una sesión posterior volvían a tener dudas o incluso olvidaban lo ya estudiado. Como ocurre con los alumnos, abordar un contenido matemático una vez y en un solo contexto no es suficiente para que se comprenda de manera profunda y se pueda reconocer en otras situaciones (Brousseau, 1976). Paradójicamente, a decir de los propios maestros el taller fue muy extenso, lo que me lleva a pensar en alternativas, por ejemplo, dividir los objetivos generales en objetivos parciales y plantear espacios formativos seriados de menor duración.

Respecto a las “razones de ser” considero que el diseño se quedó corto, según se definen en la TAD. Es decir, faltó hacer reflexiones más profundas acerca de qué cuestiones matemáticas resuelven los decimales que no tienen solución (o es más engorrosa) con otros números, y sobre todo, por qué se enseñan desde la primaria y qué aspectos son los que se estudian en los programas y libros.

Sobre las situaciones de doble conceptualización, hubo varias a lo largo del taller con resultados modestos pero positivos. Por ejemplo, cuando la actividad pedía que después de llevar a cabo las fases de acción, formulación y validación, reflexionaran acerca de la propia actividad haciendo preguntas como ¿por qué hicimos primero tal cosa?, ¿habría sido igual si nos saltamos tal paso?, hubo avances evidentes al reconocer aspectos esenciales del diseño (como que si ellos no hubieran resuelto primero el problema difícilmente se les habrían ocurrido todos los aspectos a considerar al escribir el procedimiento), pero no parecieron tener impacto al discutir otras actividades o en el análisis de lecciones. Algo similar puedo concluir respecto a la lectura y discusión de registros, hubo momentos valiosos en los que se resaltaron aspectos didácticos (como plantearse cuál sería la demanda a los alumnos si se les pide que ubiquen en la recta dos o más fracciones con denominadores no múltiplos), pero no tengo datos suficientes para valorar su impacto en la etapa 2. Claramente, el trabajo planteado en el taller para lograr estos propósitos requiere un mayor énfasis y un dominio más firme de la parte matemática.

Un aspecto que considero logrado de la H2 fue el clima de trabajo del grupo. No solo posibilitó un ambiente adecuado para la exploración cognitiva (amplío esta idea en el siguiente apartado), sino que los compañeros fueron un referente esencial en el desarrollo de las actividades. Por ejemplo, en la actividad del laberinto (sesión 1, actividad realizada 2) cada equipo buscó una respuesta óptima al problema (obtener el mayor puntaje posible en el laberinto), sin embargo, hasta que se compartieron los puntajes de los demás pudieron cuestionar su procedimiento y la validez de sus ideas respecto a las divisiones y las multiplicaciones que involucran números mayores que 0 y menores que 1. Si otros equipos no hubieran obtenido resultados mayores, es posible que el camino trazado en el primer laberinto figurara como el más favorable. Para esa y muchas otras actividades, compartir de manera verbal o mostrar en el pizarrón distintas estrategias de solución posibilitó la exploración matemática del grupo, los cuestionamientos sobre las ideas previas y corregir errores conceptuales o procedimentales.

La hipótesis 3 y los objetivos asociados fueron:

H3. Sumado a lo anterior, abordar aspectos didácticos, contar con una estructura base para elaborar lecciones y hacer conjuntamente un análisis de los programas por grados y lecciones, permitirá a los maestros diseñar, poner en marcha y analizar una secuencia corta para sus alumnos de primaria.
Objetivo E. Analizar los programas y lecciones para conocer la propuesta vigente en cuanto a la organización de los contenidos matemáticos que atañen a los números decimales (H3).
Objetivo F. Apoyar a los maestros en el diseño y puesta en marcha de una secuencia didáctica breve dirigida a sus alumnos de primaria. Analizarla y ajustarla en conjunto (H3).

La H3 no se confirma por varias razones. Según lo hipotetizado, el trabajo previo, el análisis de programas y lecciones, y dar a los maestros una estructura base a manera de molde para diseñar una lección, posibilitaría que elaboraran una secuencia breve para sus alumnos. Como dije antes, una de las dificultades para lograrlo fue la duración del taller pues fue demasiado extenso y los participantes dejaron de asistir. En total, el taller completo duró 10 meses: la etapa 1 comenzó en octubre y constó de 9 sesiones más una plática informativa inicial, la etapa 2 comenzó en febrero y se desarrolló en 6 sesiones, y la etapa 3 comenzó en mayo y terminó en junio realizando 2 sesiones de taller y la video grabación de 10 clases con sus alumnos de primaria. Al finalizar quedaron cinco participantes únicamente.

Sin embargo, a pesar de que fue un taller largo lo planificado no fue suficiente para lograr que los maestros aprendieran toda la parte matemática con un buen dominio, ni para brindar los elementos necesarios que les permitieran enfrentar su diseño de lecciones. Las actividades metadidácticas y de análisis didáctico (como la lectura y discusión de registros de clase) supusieron avances, pero hizo falta más trabajo. Además, los débiles conocimientos matemáticos supusieron un obstáculo para este fin, ya que en el diseño imaginé escenarios en los que se discutía sobre opciones didácticas, por ejemplo, qué tipo de procedimientos provocaría en los alumnos la elección de ciertos números, a cuáles obstáculos epistemológicos se estarían enfrentando al ordenar decimales, qué proponen los libros de texto para estudiar tal tema, etc. Aunque hubo discusiones de ese estilo, por ejemplo, qué implicaciones para los alumnos tendrá iniciar el estudio de la densidad con una actividad de sumas o hacerlo con “conejos y cangrejos” o en qué es diferente jugar “conejos y cangrejos” cuando se hace con calculadora o en papel, los maestros se planteaban llevar esas actividades con sus alumnos haciéndolas “más fáciles” al modificar aspectos clave, como jugar “conejos y cangrejos” usando naturales en vez de decimales (lo cual invalida el potencial de la actividad). Esto me mostró lo ambicioso de mi diseño y que el tipo de reflexiones que esperaba poder hacer son posibles una vez que el contenido matemático se ha comprendido firmemente.

En retrospectiva, aunque hubo buenos avances en la parte matemática de la etapa 1, mi secuencia fue muy ambiciosa y lo planificado en la etapa 2 debe revisarse especialmente. La didáctica de las matemáticas como disciplina tiene poco camino andado respecto a la didactificación de la didáctica y hay todavía mucho por investigar.

8.3 Reflexiones finales sobre la formación de maestros de primaria

Es una obviedad afirmar que los conocimientos del maestro son importantes para el aprendizaje de los alumnos. En las últimas décadas algunas líneas de investigación han buscado medir esa obviedad, ¿qué tan potente es el impacto del conocimiento del maestro en los aprendizajes de los estudiantes?, ¿qué conocimientos específicos del maestro son los que tienen mayor impacto en el aprendizaje? Aunque las variables socioeconómicas del hogar y de la escuela explican mayormente la diferencia de aprendizaje entre los estudiantes, algunos trabajos atribuyen una parte de esas diferencias a los conocimientos específicos para enseñar matemáticas (Hill, et al, 2005; Ball, et al, 2005; Kersting, et al, 2012; Rodríguez, 2019), mientras que otros afirman que al interior de la escuela el maestro es el factor más influyente para explicar las diferencias entre estudiantes (Bruns y Luque, 2014). Los resultados no son concluyentes en esa línea de investigación, pues no todos los trabajos encuentran relación entre los conocimientos del maestro, las prácticas de enseñanza que lleva a cabo y el aprendizaje de sus alumnos (las dificultades metodológicas que eso implica son importantes), sin embargo, es un campo prometedor en aras de lograr una formación más pertinente.

Por otro lado, hay numerosos trabajos que muestran lo que los maestros no saben y las implicaciones que eso tiene en la enseñanza, como carecer de autonomía para decidir sobre cómo abordar un contenido, depender de los programas y los libros, y no tener idea del "horizonte" de aquello que enseñan (Climent y Carrillo, 2003). No obstante, como señalan Gascón y Bosch (2007), se ha puesto demasiado peso al papel del profesor en lo individual: si la calidad del sistema educativo depende de lo que logra hacer cada maestro, entonces el problema está en la formación; y si el sistema ofrece programas formativos y los maestros y futuros maestros no aprenden, es responsabilidad de cada uno como individuo.

> (…) se pone el acento en el profesor como *individuo* más que como *sujeto o agente de una institución* y, entonces, se reduce la capacidad educativa del *sistema de enseñanza* a la suma de lo que cada profesor puede ofrecer en su clase. (p. 211).

El reto de la formación no es individual sino sistémico, y no debería analizarse a partir de lo que haga, deje de hacer o sepa un maestro, un formador o una escuela normal.

> Un error cometido por el maestro es interesante para el investigador solamente si puede ver en este un prototipo de un fenómeno que puede ser reproducido por otros en circunstancias que ocurren con frecuencia (…) La enseñanza requiere poner en juicio a los errores, no a sus autores. (Brosseau, 2006, citado en Perrin-Glorian y Baltar, 2016).

Además, hay un asunto que generalmente pasa de largo en la política educativa y el desarrollo curricular, pero que es quizá el objeto de estudio más importante en la didáctica. La didáctica estudia la generación y transmisión del conocimiento matemático entre instituciones e individuos, y una de sus líneas de estudio es explorar los efectos que tales o cuales decisiones didácticas tienen en los estudiantes. Hay muchos avances en ese terreno, pero se siguen abriendo nuevas preguntas acerca de cómo enseñar contenidos específicos. Si en ese nivel hay mucho por explorar, en el de la formación docente hay todavía más interrogantes, pues se suma un nivel didáctico: *cómo enseñar a enseñar x*. Como expuse en el capítulo 2 "(…) es ilusorio pretender que conocemos y que tenemos perfectamente determinado el conjunto de competencias en torno a las que se debe estructurar la formación de los profesores de matemáticas (…) (Gascón y Bosch, op cit, p. 180).

Reconociendo que hay mucho por investigar, contamos con algunas certezas: para enseñar *x*, saber *x* es condición necesaria pero no suficiente (también se necesitan conocimientos sobre la didáctica de *x*). ¿Qué pasa cuando esa condición necesaria no está dada? Si los conocimientos matemáticos de los maestros son pobres, los esfuerzos formativos resultan muy costosos y se dificulta considerablemente abordar temas profundos sobre la enseñanza (Ruiz y García, 2010) o la reflexión curricular, como pasó en el taller. No afirmo que entonces la opción sea volver a las tendencias pasadas en las que la formación era casi estrictamente disciplinar y se acompañaba de un poco de pedagogía general, lo que digo es que la didáctica es siempre didáctica de "algo", y ese algo es el punto de partida para la reflexión sobre la enseñanza. ¿Qué respuestas pueden ofrecerse en este momento?

> ¿Cuál es el modelo epistemológico de referencia para describir el conocimiento matemático-didáctico del alumnomaestro en formación? Obviamente no disponemos de una respuesta definitiva a esta cuestión, pero la deconstrucción del proceso de formación nos lleva a formular la hipótesis de que este saber debe ser una intersección de: transposiciones didácticas de praxeologías matemáticas en la institución de FM [formadoras de maestros] y saberes nucleares de la didáctica de las matemáticas articulados entre sí en función de los procesos de estudio escolares de las OM [organizaciones matemáticas] que estos saberes didácticos permiten poner en práctica y justifican. (Ruíz y García, 2010, p. 206).

Dicen los autores que esta amalgama entre transposiciones didácticas de praxeologías matemáticas y saberes de la didáctica es conocida en las instituciones formadoras, sin embargo, debe seguirse investigando cómo articularlas para no caer en una ilusión de "transparencia" con la que podría inferirse que basta con mostrar a los profesores aquello que queremos que aprendan para que ellos lo transfieran a sus tareas docentes. Tempier (2011) diseñó un sitio electrónico con recursos para maestros en el que podían aprender sobre matemáticas y didáctica, y tenían acceso a distintos tipos de actividades para armar lecciones. Aunque los maestros manifestaron buenas opiniones del recurso, Tempier observó dificultades en el diseño de las lecciones pues los maestros no lograron armar secuencias con una OM puntual completa (tarea/técnica/tecnología).

> (…) incluso si los maestros se han apropiado del tema matemático, esto no es suficiente para plantear prácticas armonizadas en el nivel de la institucionalización del conocimiento en cuestión (sesión), proponer un trabajo de entrenamiento con las técnicas encontradas en las situaciones principales y construir una secuencia teniendo en cuenta la descontextualización necesaria del conocimiento (p. 129).[21]

En el taller esto se vio más de una vez, por ejemplo, abordar la lectura y discusión de un registro para analizar la consigna y las variables didácticas en juego no produjo en los maestros la capacidad de argumentar sobre la situación de enseñanza.

Una vía para seguir explorando cómo hacer esta amalgama son las ingenierías de segundo nivel involucrando a los profesores. Las etapas 2 y 3 de mi trabajo tenían ese propósito, pues al diseñar lecciones, llevarlas a cabo y analizarlas en conjunto pretendí probar dispositivos para *enseñar a enseñar* los números decimales.

Lo que este trabajo aporta

Comenté en capítulos anteriores que la secuencia diseñada fue tan larga que resultó inviable para los profesores en servicio y a la vez, que hubo aspectos a los que no dedicamos suficiente tiempo. Para futuros trabajos de formación no plantearía una duración menor sino una modalidad como las que desarrollan con sus equipos Carrillo y Sadovsky (por ejemplo, Carrillo y Climent, 2009; y Sadovsky, et al, 2019). Ellos conforman grupos de maestros que se inscriben a un proyecto largo de colaboración (de todo un ciclo escolar) pudiendo incluso reunirse en la escuela. Es decir, en vez de extender una invitación a un taller (que se asume como un compromiso de unas cuantas sesiones y punto), proponer un trabajo permanente en la escuela con reuniones una o dos veces por mes.

Otro aspecto que modificaría es la cantidad de objetivos planteados (mi secuencia incluyó aprender las matemáticas que hicieran falta, aprender a enseñar lo relativo a los números decimales, estudiar los programas y lecciones, diseñar lecciones, llevarlas a cabo y analizar los resultados), pues fueron muchos y no logramos alcanzarlos todos. Aún pensando en un proyecto de formación largo, los objetivos tienen que acotarse.

[21] En este apartado tomo citas de textos publicados en inglés y francés. La traducción es propia.

Además de plantear menos objetivos reduciría el alcance de algunos. Por ejemplo, el diseño de lecciones requiere no solamente mucho tiempo sino mucho trabajo previo. Aunque no analicé las sesiones en las que los maestros abordaron esta tarea, una mirada superficial a la evidencia me hizo saber que pedirles que usaran los esquemas que yo elaboré para diseñar lecciones fue un reto demasiado alto para ellos. En ese sentido, Sadovsky y su equipo han hecho otras propuestas como trabajar con fragmentos de clase que los maestros aportan para el análisis conjunto buscando entender "(…) las relaciones matemáticas implicadas en lo que el niño hace y el modo en que las incorporarán a su enseñanza" (Sadovsky, et al, 2019, p. 110). Aunque en su equipo también tuvieron la intención de abordar la planificación de lecciones, ese objetivo se fue diluyendo en la medida en que se involucraron en el análisis de los conocimientos que los alumnos mostraban ante tareas que habían planificado los maestros por su cuenta, y en cómo hacer mejores intervenciones (Sadovsky, et al, 2016, p. 19).

Otro aspecto que me gustaría modificar es el enfoque o tipo de trabajo a desarrollar en un taller. Que los maestros asumieran un papel de alumnos aprendiendo matemáticas y viviendo el enfoque de resolución de problemas (como ellos lo describieron) funcionó muy bien para la etapa 1 en lo referente al contenido matemático (describí previamente el importante papel que tuvieron las secuencias de actividades diseñadas y la conductora para este objetivo). Sin embargo, con aspectos más centrados en lo didáctico esa modalidad no fue tan exitosa. Siguiendo nuevamente las propuestas de Carrillo y Sadovsky, para futuros trabajos propondría un esquema en el que nos colocáramos todos en una posición de colaboración (que no significa que todo mundo sabe, hace o espera lo mismo) y problematizáramos la enseñanza tratando de responder preguntas como ¿de qué manera ayudar a los alumnos que no han entendido?, ¿cómo decidir cuándo vale la pena compartir la idea de un alumno con el resto del grupo?, ¿qué condiciones se podrían variar a un problema para hacerlo más fácil o más difícil?

Por último, la experiencia del taller me hizo tomar conciencia de aspecto importante en el trabajo con maestros al que algunos investigadores llaman "transferencia". Inicié el diseño de la secuencia teniendo como objetivo, entre otros, que los maestros lograran distinguir cuáles son números decimales y cuáles son expresiones con punto de un número racional no decimal o irracional. Desde mi mirada, ellos se beneficiarían al conocer esta distinción, pues podrían comprender por qué al efectuar la división de numerador entre denominador unos números resultan finitos y otros periódicos. Con los alumnos de primaria no se ha buscado que aprendan esta distinción y yo estoy de acuerdo con esa decisión didáctica, pues coincido en que no es un tema que valga la pena estudiar en esos grados (lo cual no exime a los libros de las diferentes definiciones incongruentes entre sí que plantean a los estudiantes sobre qué es un número decimal).

El caso es que durante la revisión de lecciones que hicieron los maestros en el taller, Roberto notó que en los libros les llamaban "números decimales" a números que según la definición que usamos en el taller, no lo son (por ejemplo, escribir 1/3 como número decimal). La conductora intervino para decir que es una pregunta didáctica válida plantearse si desde la primara deberían llamárseles "números con punto" o "representaciones decimales", o bien dejar esa distinción para más adelante y decirles a todos "número decimal". Roberto dijo que mejor "desde chiquititos".

> Roberto: pues a mí sí me gustaría que desde chiquititos ya se les llamara bien, yo ya estoy empezando con mis alumnos, porque si nosotros, por ejemplo, a todo le llamábamos "decimal" y qué feo que ellos lleguen a nuestra edad y digan que eso es un decimal [risas], y vengan a un curso y digan que tal número es decimal.

Lidia continuó el argumento añadiendo que los profesores de niveles superiores les "reclaman" a los de primaria por no enseñar las cosas correctamente. La transferencia aquí consistió en tomar un conocimiento que fue preparado para la formación docente y llevarlo tal cual al salón de clases. Algo similar pasó cuando la conductora les hizo aclaraciones de que tal o cual actividad era "para maestros", o sea, para que ellos comprendieran algo más profundamente y entonces pudieran enseñar mejor la versión para alumnos en sus aulas. Hacer estas transferencias parece muy difícil de evitar en la formación, pues la experiencia de aprendizaje puede ser tan intensa y reveladora para ellos que les es imposible no llevar exactamente la misma versión a los niños. Creo se trata de un aspecto que no hay que perder de vista y me gustaría explorar si puede discutirse de forma más productiva cuando los maestros participan en espacios más orientados a la colaboración, como los que describí a propósito de los trabajos de Carrillo y Sadovsky.

Por otro lado, hubo aspectos que salieron bastante bien en el taller. El más importante fue el avance en los conocimientos matemáticos que lograron los participantes. El cambio en algunos fue grande y notorio, como Carina, María y Efraín. Aunque como señalé, lo abordado en el taller fue apenas un primer contacto con nociones nuevas y hacen falta más situaciones, más posibilidades de uso y solución de problemas para que tomen consistencia (Brousseau, 1976).

El diseño de secuencias de actividades con todas sus fases y la utilización de actividades clásicas de la didáctica (aunque hubieran sido originalmente desarrolladas para estudiantes) también fueron aspectos exitosos en el taller. Desarrollar todas las fases de una situación (sesión 1, ordenar una lista de números) permitió que emergieran ideas y procedimientos que posiblemente habrían pasado de largo en otro diseño. Aunque con otras actividades no desarrollamos todas las fases (por ejemplo, laberinto y densidad), también movilizaron los conocimientos de los maestros y permitieron un intercambio rico en las discusiones grupales. Ciertas actividades requieren ajustes (como la de ampliar un rompecabezas), pero en general las situaciones diseñadas para aprender temas de números racionales fueron aspectos bien logrados en el taller.

En el capítulo anterior describí ampliamente los aspectos positivos que tuvo el papel de la conductora y el trabajo en el marco del enfoque de resolución de problemas, que también considero un aporte de esta investigación.

Como siempre ocurre en este tipo de trabajos, está presente la pregunta de la generalización, ¿es posible "replicar" el taller? Así como sucede en cada clase de un salón de primaria, las condiciones específicas no pueden repetirse ni pueden darse soluciones universales. Pero ciertos aspectos constituyen evidencia positiva hacia el logro de objetivos de formación que sí pueden ser considerados criterios para el desarrollo de futuras experiencias: construir un ambiente de confianza, emplear un enfoque didáctico similar al que se espera que los maestros usen con sus alumnos (al menos para los objetivos de aprendizaje matemático), incluir actividades que contemplen distintas fases (acción, formulación, validación e institucionalización) e incluir actividades que constituyan situaciones problemáticas para los maestros.

> Esa es la generalización que un trabajo como el presentado puede ofrecer: la existencia de un caso como base de fundamentación para un nuevo caso. El trabajo de reelaboración es ineludible. Y ahí se halla el reaseguro para preservar la vitalidad del trabajo de enseñar. (Sadovsky, et al, 2019, p. 48).

Replicar las actividades en su zona escolar

Desde las primeras sesiones del taller supe que algunos maestros o supervisoras estaban llevando las actividades del taller para "ponérselas" a sus colegas, tanto en la escuela como en la zona. Aunque la conductora les recordó que el propósito del taller era que ellos estudiaran sobre un tema de matemáticas y su didáctica, y no aprender a darlo a otros, Sara comentó que para ellos era una gran oportunidad tomar un taller así y no encontraba ninguna contradicción en hacerlo extensivo a otros, por lo que en su zona lo estaban replicando con 120 maestros. Graciela comentó que ella logró pausar momentáneamente esa exigencia diciéndole a las autoridades educativas que todavía no estábamos viendo cosas para los alumnos, que eso vendría después. Aunque sabía que los maestros asistentes estaban apenas construyendo buena parte de los conocimientos en juego y que en ese estado tratar de enseñarlos a otros podría dar lugar a confusiones, también entendí que no era mi papel decir cómo debería usarse lo que estaban aprendiendo.

Decidí hacer dos cosas al respecto: preguntarles si les sería de utilidad contar con la planificación completa de la etapa 1 para que no solamente tuvieran la hojita con la actividad (varios comentaron que solamente estaban esperando a que terminara todo el taller para ya llevarlo con los demás maestros), y ayudarlos si tenían dudas. Les compartí en versión electrónica todos los materiales que trabajamos en las 9 sesiones de la etapa 1 y les propuse entrevistarlos para conocer qué cosas estaban haciendo con sus colegas y cómo les iba. Lamentablemente, la asistencia disminuyó en la etapa 2 y no me fue posible conocer qué había pasado con esta iniciativa.

Los maestros de primaria mexicanos están a cargo de enseñar a sus alumnos los racionales y ellos mismos tienen aún dificultades para entenderlos (lo cual evidencia la dificultad matemática que supone incluso para los adultos). Esto los coloca en una posición complicada dentro del aula, como reconoció Lidia: "(…) teníamos razonamientos que nos habíamos inventado para poder hacerlo, aquí nos dieron reglas para hacerlo. Cuando encontré la densidad de los decimales en el libro de 6° me quise morir, pues yo no sabía eso. Todavía no creo que pueda hacerlo bien."

Referencias

Aguayo, Luis (2005). *La transposición del "saber didáctico". Un estudio con profesores en formación en el contexto de los números racionales*. Tesis para obtener el grado de Doctor en Educación por la Universidad Pedagógica Nacional, dirigida por Alicia Ávila.

Aguayo, Carmen (2018). *El análisis didáctico en la formación Inicial de maestros de primaria.* Tesis para obtener el grado de Doctor en Ciencias de la Educación por la Universidad de Granada, dirigida por Pablo Flores Martínez y Antonio Javier Moreno Verdejo.

Ávila, Alicia (directora); Aguayo, Luis; Eudave, Daniel; Estrada, José; Hermosillo, Asunción; Mendoza, Jesús; Saucedo, María y Becerra, Edgar (2004). *La reforma realizada. La resolución de problemas como vía del aprendizaje en nuestras escuelas*. CDMX, SEP-Subsecretaría de Educación Básica y Normal.

Aké, Lilia (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación.* Tesis doctoral dirigida por Juan D. Godino en la Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada.

Artigue, Michèle (1995). "Ingeniería didáctica" en: Artigue, Michèle; Douady, Règine; Moreno, Luis y Gómez, Pedro (eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Iberoamérica, Bogotá.

Artigue, Michèle (2002). "Ingénierie diactique : quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui?" *Revue Internationale des Sciences de l'Education*, Número 8, pp. 59-72.

Ávila, Alicia (2008). "Los profesores y los decimales. Conocimientos y creencias de un contenido de saber cuasi invisible." *Educación Matemática*, Volumen 20, Número 2, pp. 5-33.

Ball, Deborah; Lubienski, Sarah and Mewborn, Denise (2001). "Research on teaching mathematics: the unsolved problem of teachers' mathematical knowledge", in Richardson, V. (ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed.), New York, Macmillan, pp. 443-456.

Ball, Deborah; Hill, Heather. y Bass, H. (2005). Knowing Mathematics for Teaching. Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide?, American Educator, Fall, pp. 14-46.

Ball, Deborah; Hoover, M., y Phelps, G. (2008). "Content knowledge for teaching. What makes it Special?", Journal of Teacher Education, 59 (5), pp. 389-407, Sage Publications.

Block, Badillo, Martínez y Mendoza (2009). La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros. 2: las fracciones. DIE Cinvestav-SEPEN Nayarit.

Block, David y García, Silvia (2006). *Fractal. Secundaria. Primer Grado*. CDMX, Ediciones SM.

Block, David; Moscoso, Antonio; Ramírez, Margarita y Solares, Diana (2007). "La apropiación de innovaciones para la enseñanza de las matemáticas por maestros de educación primaria", *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, Abril-Junio, Volumen 12, Número 33, pp. 263-294.

Bosch, Mariana y Gascón, Josep (2002). "Organiser l'étude 2. Théories & empiries", in Dorier, J.-L., Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R., Floris, R. (eds). Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques, Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 23-40.

Brousseau, Guy (1976). "Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques", In Vanhamme, J. & Vanhamme, W. (eds.), *La problématique et l'enseignement des mathéma-*

tiques. Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre organisée par la Commission Internationa-le pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques. Louvain la Neuve, pp. 101-117.

Brousseau, Guy y Brousseau, Nadinne (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire. Document pour les enseignants et pour les formateurs.* Université de Bordeaux. IREM de Bordeaux.

Brousseau, Guy (1988). « Le contrat didactique: le milieu », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9 (3), pp. 309-336.

Brousseau, Guy (2006). "Mathematics, didactical engineering and observation" In Novotna. J., Moraova H., Kratka, M. & Stehlíková N. (Eds.) *Proceedings 30th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*. Vol. I. pp. 3-18. Prague: PME.

Brousseau, Guy (2007). *Iniciación al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas.* Buenos Aires, Libros del Zorzal. Traducido por Dilma Fregona.

Bruns, Bárbara y Luque, Javier (2014), *Docentes excelentes: Cómo mejorar el aprendizaje en América Latina y el Caribe*, Washington DC, Banco Mundial.

Carrillo, José y Climent, Nuria (2009). "From professional tasks in collaborative environments to educational tasks in mathematics teacher education", *Mathematics Teacher Education*, Volume 4, Número 3, pp. 215-234.

Castro, E. (2001), "Números decimales", en Castro, E. (ed.), *Didáctica de las Matemáticas en la Educación Primaria*, Síntesis, Madrid.

Centeno, Julia (1997). *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?* Madrid, Editorial Síntesis.

Chamorro, María del Carmen (2003). "Herramientas de análisis en didáctica de las matemáticas", en Chamorro, M. (coord.) *Didáctica de las matemáticas para primaria*, Madrid, Pearson Educación, pp. 69-94.

Chevallard, Yves (2001). "Aspectos problemáticos de la formación docente". Conferencia impartida en las XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en *Didáctica de las Matemáticas* (SI-IDM), Escuela de Magisterio de Huesca, Universidad de Zaragoza, 1 de abril.

Cid, Eva (2000). "Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos", *Actas de las XV Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Boletín del SI-IDM,* 10, pp. 1-15.

Climent, Nuria y Carrillo, José (2003). "El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. Una experiencia en matemáticas con maestras", *Enseñanza de las Ciencias*, 21 (3), pp. 387–404.

Cordero, Graciela; Jiménez, Alfonso; Navarro, Claudia y Vázquez, María (2017). *Diagnóstico de la política pública de formación y desarrollo profesional del personal educativo de educación básica de la reforma educativa*. Ciudad de México: INEE

De Castro, Carlos y Castro, Enrique (2004). "Errores en el ajuste del valor posicional en tareas de estimación: estudio con maestros en formación", en *Actas del VIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM),* Granada, pp. 1-9.

De Castro, Carlos (2012). *Estimación en cálculo con números decimales: dificultad de las tareas y análisis de estrategias y errores con maestros en formación*, Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada.

Diario Oficial de la Federación (2013). *Ley General de Educación*. http://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/ref/lge/LGE_orig_13jul93_ima.pdf

Gairín, José María (1998). *Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación*. Tesis Doctoral, Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza. Director Luis Rico Romero.

Gascón, Josep y Bosch, Marianna (2007). "La miseria del 'generalismo pedagógico' ante el problema de la formación del profesorado" en Ruíz, Luisa; Estepa, Antonio y García, Francisco (coords.) *Sociedad, escuela y matemáticas: aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén, pp. 201-240.

Godino, Juan; Batanero, Carmen; Contreras, Ángel; Estepa, Antonio; Lacasta, Eduardo; y Wilhelmi, Miguel (2013). *La ingeniería didáctica como investigación basada en el diseño.* Comunicación presentada en el CERME 8 (Turquía, 2013) con el título, "Didactic engineering as design-based research in mathematics education".

Graeber, Anna; Tirosh, Dina and Glover, Roseanne (1986). "Preservice teachers' misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division", Working Paper Number 67 of the Tel Aviv University Unit of Human Development and Education, pp. 95-102.

Herbst, Patricio and Kilpatrick, Jeremy (1999). "*Pour Lire* Brousseau", *For the Learning of Mathematics*, Vol. 19, No. 1, March, pp. 3-10.

Hernández, Judith; Reyes-Gasperini, Daniela; Ibarra, Silvia; Aké, Lilia; Angulo, Rita; y Lezama, Francisco (2018). "Algunas perspectivas teóricas utilizadas para la formación y desarrollo profesional de profesores de matemáticas en México", *Innovación e Investigación en Matemática Educativa*, Vol. 3, núm.1, Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa AC, pp. 80-98.

Hill, Heather; Rowan, Brian and Ball, Deborah (2005). "Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement", *American Educational Research Journal Summer*, Vol. 42, No. 2, pp. 371-406.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) (2009). *El aprendizaje en tercero de secundaria en México. Español, Matemáticas, Biología y Formación cívica y ética*. INEE, Ciudad de México.

INEE (2015). *Los docentes en México. Informe 2015.* México: autor.

INEE (2017a). *Informe de resultados PLANEA 2015. El aprendizaje de los alumnos de sexto de primaria y tercero de secundaria en México. Lenguaje y Comunicación y Matemáticas*. México: autor.

INEE (2017b). Planea Resultados nacionales 2017, Educación Media Superior, Lenguaje y Comunicación y Matemáticas. Enero 2018, Ciudad de México. Consultado en http://publicaciones.inee.edu.mx/buscadorPub/P2/A/328/P2A328.pdf

INEE (2018a). *¿Qué oportunidades tienen los futuros maestros de matemáticas para aprender lo que enseñarán? Evaluación de planes de formación inicial para maestros de matemáticas*. México: autor.

INEE (2018b). *La educación obligatoria en México. Informe 2018*. México: autor.

INEE (2018c). *Planea Resultados nacionales 2018, 6º de primaria, Lenguaje y Comunicación y Matemáticas*. Noviembre 2018, Ciudad de México. Consultado en https://www.inee.edu.mx/images/stories/2018/planea/PLANEA06_Rueda_de_prensa_27nov2018.pdf

INEE (2018d). *Planea Resultados nacionales 2017, 3º de secundaria, Lenguaje y Comunicación y Matemáticas*. Enero 2018, Ciudad de México. Consultado en https://publicaciones.inee.edu.mx/buscadorPub/P2/A/336/P2A336.pdf

INEE, (2019a). *Informe de resultados PLANEA 2017. El aprendizaje de los alumnos de tercero de secundaria en México. Lenguaje y Comunicación y Matemáticas*. México: autor.

INEE (2019b). *Informe de resultados PLANEA EMS 2017. El aprendizaje de los alumnos de educación media superior en México. Lenguaje y Comunicación y Matemáticas*. México: autor.

INEE (2019c). *Panorama Educativo de México 2018. Indicadores del Sistema Educativo Nacional. Educación básica y media superior*. México: autor.

INEE (2019d). *PLANEA 2018, 6° de primaria. Resultados de logro para Matemáticas. Base de datos.* México: autor. https://www.inee.edu.mx/bases-de-datos-inee-2019#planea

Kerches, Norma y Pietropaolo, Ruy (2018). "Conhecimentos de Professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental Sobre os Números Racionais e Sobre seu Ensino na Educação Básica", *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, volumen 11, No. 3, pp. 253-260.

Kersting, Nicole; Givvin, Karen; Thompson, Belinda; Santagata, Rossella and Stigler, James (2012). "Measuring Usable Knowledge: Teachers' Analyses of Mathematics Classroom Videos Predict Teaching Quality and Student Learning", *American Educational Research Journal*, June, Vol. 49, No. 3, pp. 568-589.

Konic, Patricia (2011). *Evaluación de los conocimientos de futuros profesores para la enseñanza de los números decimales*. Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada.

Lerner, Delia (2001). "El papel del conocimiento didáctico en la formación del maestro" en *Leer y escribir en la escuela. Lo real, lo posible y lo necesario*. SEP, Ciudad de México.

Llinares, Salvador (2011). *Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes.* Presentado en la XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, CIAEM, Recife-Brasil.

Mendiola, Elsa (1992). *Un estudio sobre el conocimiento de los números decimales en maestros de primaria.* Tesis para obtener el grado de Maestría. CINVESTAV, Matemática Educativa.

Moreno, Ma D., Hernández, V. M., Socas, M. M. (2009). "Interpretación y análisis de los resultados obtenidos antes y después de un programa de formación sobre el concepto de número decimal", *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática X*, pp.179-221.

Perrin-Glorian, M. J. (2011). "L‟ingénierie didactique à l‟interface de la recherche avec l‟enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants", Margolinas, C.; Abboud-Blanchard, M.; Bueno-Ravel, L.; Douek, N.; Fluckiger, A.; Gibel, P.; Vandebrouck, F.; and Wozniak, F. (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques.* Grenoble, La Pensée Sauvage. (pp. 57-78).

Perrin-Glorian, Marie-Jeanne y Baltar Bellemain, Paula Moreira (2016). "L'ingenierie didactique entre recherche et ressource pour l'enseignement et la formation des maitres". I Simpósio

Latino-Americano de Didática da Matemática 01 a 06 de novembro de 2016 Bonito - Mato Grosso do Sul – Brasil.

Robert, Aline (2001). “Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l’exercice du métier d’enseignant”, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 21, No. 1.2, pp. 57-80.

Robert, Aline (2007). “Stabilité des pratiques des enseignants de mathemátiques (second degré): une hypothèse, des inferences en formation”, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 27, No. 3, pp. 271-312.

Robert, Aline y Rogalsky, Janine (2002). “Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche”. *Revue canadienne de l'ensegnment des sciences, des mathématiques et des technologies*, Vol. 2, No. 4, pp. 505-528.

Rodríguez, Palmenia (2019). *El conocimiento del profesor como variable explicativa del aprendizaje del alumno en la conceptualización de las fracciones*. Tesis para optar al Grado de Doctor en Didáctica de la Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Ruíz, Luisa y García, Francisco (2010). “Didáctica de las matemáticas y formación de maestros: respuestas y desafíos (desde la TAD)”, en Bronner, A., Larguier, M., Artaud, M., Bosch, M., Chevallard, Y., Cirade, G. & Ladage, C. (Éds). *Diffuser les mathèmatiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissaince et d’action*. IIe congrès international sur la TAD, Uzès, 31 oct.-3 nov. 2007, pp. 171-213.

Sadovsky, Patricia; Quaranta, María; García, Patricia; Becerril, María e Iztocovich, Horacio (2019). “Trabajo colaborativo entre docentes e investigadores en didáctica de la matemática. Reflexiones metodológicas”, *Contextos de Educación*, Núm. 26, Año 19, pp. 41-52.

Sadovsky, Patricia; Itzcovich, Horacio; Becerril, María; Quaranta, María y García, Patricia (2019). “Trabajo colaborativo entre docentes e investigadores en Didáctica de la Matemática: de la reflexión sobre las prácticas a la elaboración de ejes de análisis para la enseñanza”, *Educación Matemática*, Vol. 31, Núm. 2, Agosto, pp. 105-131.

Sadovsky, Patricia; Itzcovich, Horacio; Becerril, María; Quaranta, María y García, Patricia (2016). “Tensiones y desafíos en la construcción de un trabajo colaborativo entre docentes e investigadores en didáctica de la matemática”, *Educación Matemática*, Vol. 28, Núm. 3, Diciembre, pp. 1-21.

Salinas, Ma. Jesús (2007). “Errores sobre el sistema de numeración decimal en estudiantes de magisterio”, *Investigación en Educación Matemática XI*, pp. 381-390.

Shulman, Lee. “Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching.”, *Educational Researcher* Vol. 15, No. 2, February, pp. 4-14.

Sierra, Tomás (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes continuas.* Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid.

Secretaría de Educación Pública (SEP) (2011). *Tercer grado. Matemáticas.* CDMX, SEP.

SEP (2011). *Cuarto grado. Matemáticas.* CDMX, SEP.

SEP (2011). *Quinto grado. Matemáticas.* CDMX, SEP.

SEP (2011). *Sexto grado. Matemáticas.* CDMX, SEP.

Solares, A. (coord.) (2006). *Matemáticas I. 1er grado. Volumen I. Telesecundaria*. Secretaría de Educación Pública, Ciudad de México.

Tempier, Frédérick (2011). “Une ingénierie didactique de développement sur la numération décimale. Présentation de choix de conception d’une ressource et de difficultés rencontrées par les enseignants lors de son utilisation.”, en Luc Trouche, Hamid Chaachoua, Magali Hersant, Yves Matheron, Giorgos Psycharis. *Faire ensemble des mathématiques: une approche dynamique de la qualité des ressources pour l’enseignement*. Journées mathématiques de l’Institut françai de l’éducation, ENS de Lyon, France. Jun 2011, pp. 123-130.

Terigi, Flavia (2010). *Desarrollo profesional continuo y carrera docente en América Latina*. Serie Documentos Nº 50, Programa de Promoción de la Reforma Educativa en América Latina y el Caribe (PREAL).

Waldegg, Guillermina (1996). “Sobre el origen y significado de los números decimales”, *Básica. Revista de la escuela y del maestro*. Número 11, Fundación SNTE, Ciudad de México, pp. 54-60.

Anexos

Anexo 1

BÁSICA. RACIONALES

<table>
<tr><th></th><th>3°</th><th>4°</th><th>5°</th><th>6°</th><th>7°</th><th>8°</th></tr>
<tr><td rowspan="7">FRACCIONES</td><td>Fracciones en medición, m/2n de forma oral y escrita</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Fracciones en repartos, m/2n en forma oral y escrita</td><td>Particiones en tercios, quintos y sextos.</td><td rowspan="2">Expresión de fracciones como n/m a partir de repartos</td><td rowspan="2">Calcular qué fracción es una parte como a/b de n</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Fracciones como partes de una colección</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Equivalencia mediante repartos y escrituras aditivas</td><td>Equivalencia con escrituras aditivas, con fracciones menores y mayores a la unidad</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>Equivalencia de fracciones mediante repartos</td></tr>
<tr><td>Equivalencia de fracciones en situaciones de medición</td></tr>
<tr><td>Equivalencia multiplicando numerador y denominador por un mismo natural</td></tr>
</table>

	Orden en fracciones con igual denominador o igual numerador		Orden de fracciones con distinto denominador	Orden de fracciones con distinto denominador		
FRACCIONES	Representaciones gráficas de fracciones mediante sombreado de superficies	Representaciones gráficas de fracciones en magnitudes continuas	Representaciones gráficas de fracciones mediante sombreado de superficies, ubicación en la recta numérica	Ubicación de fracciones en la recta	Ubicación de fracciones en la recta	
				Acercamiento a la densidad		
	Situaciones aditivas con fracciones m/2n	Situaciones aditivas con fracciones cuyos denominadores son múltiplos	Situaciones aditivas con fracciones cuyos denominadores son o no múltiplos	Situaciones aditivas y algoritmos de la suma y resta	Situaciones aditivas y algoritmos de la suma y resta	
		Descomposición aditiva de fracciones	Situaciones aditivas resueltas mediante cálculo mental		Problemas que impliquen dos o más sumas y restas de fracciones	
		Descomposiciones multiplicativas de fracciones	Porcentajes expresados como “n de cada 100” y su relación con fracciones	Multiplicación de fracciones por un natural mediante procedimientos no formales	Multiplicación de fracciones mediante el algoritmo	Resolución de problemas de porcentaje
				División de fracciones entre un natural mediante procedimientos no formales	División de fracciones mediante el algoritmo	
				Comparación de razones en casos simples expresado como “por cada n, m” con fracciones y porcentajes	Regla de tres usando valores enteros y fraccionarios	

				Aplicación de porcentajes sencillos mayores y menores que 100%	Situaciones de proporcionalidad con factores constantes fraccionarios	
				Porcentajes expresados como “n de cada 100” y su relación con fracciones y decimales		
		Doble, mitad, triple, etc. de fracciones sencillas		Equivalencia de razones	Análisis del factor inverso en una relación de proporcionalidad	
DECIMALES		Valor posicional	Análisis de lo que representan las cifras a la derecha del punto	Lectura y escritura de decimales	Fracciones decimales escritas mediante números con punto y viceversa	
				Orden de decimales		
				Ubicación en la recta		
				Fracciones decimales escritas mediante números con punto	Ubicación en la recta	
		Descomposición aditiva	Situaciones aditivas resueltas mediante cálculo mental	Situaciones aditivas resueltas con algoritmos	Situaciones aditivas resueltas con algoritmos	
		Descomposición multiplicativa	Multiplicación de decimales por naturales mediante sumas iteradas	Multiplicación de decimales por naturales mediante procedimientos no formales	Situaciones multiplicativas resueltas mediante los algoritmos convencionales	

				Multiplicación por potencias de 10		
			Conversión entre múltiplos y submúltiplos del SIM	Relación entre unidades del SIM y el Sistema Inglés		
			División de naturales con cociente decimal	División de decimales entre naturales		

Anexo 2

HOJA DE TRABAJO 1

Contenido:						
	3°	4°	5°	6°	7°	8°
Fracciones						
Decimales						

Anexo 3

HOJA DE TRABAJO 3

Grado: Contenido elegido:		
Lección 1	Lección 2	Lección 3
Tema:	Tema:	Tema:
Propósito(s):	Propósito(s):	Propósito(s):
Ideas sobre actividad principal de la lección:	Ideas sobre actividad principal de la lección:	Ideas sobre actividad principal de la lección:

Anexo 4

Una experiencia de formación de maestros en torno al tema de números decimales

Proyecto

Se trata de llevar a cabo una experiencia de formación docente integrando un pequeño grupo de maestros y de especialistas en didáctica, quienes conjuntamente diseñarían una secuencia de situaciones sobre la noción de números decimales dirigida a alumnos de cuarto, quinto o sexto grado de primaria, misma que los maestros pondrían en práctica con sus grupos para posteriormente analizar los resultados colectivamente.

Propósitos

a) Para la formación de los maestros

- Enriquecer los conocimientos sobre la noción de números decimales.
- Profundizar los conocimientos sobre la didáctica de los números decimales al analizar secuencias de enseñanza y registros de clase.
- Utilizar los aprendido sobre decimales y sobre su didáctica para diseñar junto con sus compañeros y los especialistas, una secuencia para la enseñanza de dicha noción que incorpore la experiencia del grupo de maestros y los aportes de los especialistas.
- Desarrollar herramientas para analizar la puesta en práctica de la secuencia.

b) Para la investigación

Aportar conocimientos sobre una modalidad de formación de maestros que consiste en la conformación de un grupo de trabajo integrado por maestros e investigadores para diseñar y poner en práctica una secuencia didáctica. Nos preguntamos específicamente:

- ¿En qué medida se integran los aportes de maestros e investigadores durante la construcción de la secuencia y en el análisis de clases?, ¿cómo evoluciona el proceso de interacción entre los participantes?
- ¿Qué características didácticas tiene una secuencia diseñada por los maestros?
- Con respecto a las clases impartidas por cada maestro ¿en qué medida sucede lo previsto?, ¿qué semejanzas y qué diferencias se manifiestan?, ¿a qué se deben los cambios que cada maestro tuvo que imprimir a la secuencia?, ¿qué puede decirse de los aprendizajes posibles de los alumnos?
- En las sesiones que maestros e investigadores llevarán a cabo para analizar las sesiones de clase ¿qué se expone?, ¿qué se analiza?, ¿se logran identificar problemáticas didácticas?, ¿se logra avanzar en la comprensión de lo ocurrido?, ¿qué decisiones se toman para adaptar mejor las situaciones que siguen y cómo es la participación de los distintos actores en ellas?

- Finalmente ¿qué conocimientos es posible inferir que los maestros adquirieron con la experiencia?, ¿qué conocimientos adquirieron los especialistas?

Plan de trabajo

Se prevén tres etapas: 1) la realización de un taller sobre la noción de números decimales y su didáctica; 2) la preparación de la secuencia didáctica y 3) la puesta en práctica de la misma. La duración total aproximada del trabajo conjunto de maestros e investigadores será de entre 14 y 16 semanas (a razón de una sesión semanal). El día y la hora de la reunión semanal se fijará más adelante, en función de las posibilidades de los interesados en participar.

Etapa 1. Taller sobre la noción de número decimal y su didáctica

En este taller se estudiará la noción de número decimal y la problemática de su enseñanza. Se prevén ocho sesiones de trabajo en las instalaciones del DIE o en la sede que convenga más a los participantes. El equipo del DIE prepara un guion de trabajo. El tiempo estimado es de dos meses.

Etapa 2. Diseño de la secuencia

Para el diseño se mantendrá la dinámica de una sesión semanal con un total de 3 o 4 sesiones, en las que los participantes elaborarán colectivamente una secuencia de situaciones sobre los números decimales. El tiempo estimado es de un mes.

Etapa 3. Puesta en práctica y análisis

Cada maestro participante pondrá en práctica, con su grupo, la secuencia preparada colectivamente, haciendo las adaptaciones que juzgue necesarias. Se prevén cuatro sesiones, una por semana.

Uno de los investigadores y al menos un maestro, estarán presentes como observadores en las clases de uno o dos maestros participantes, previo consentimiento de éstos.

Así mismo, se mantendrá la reunión semanal con el grupo para el análisis de la puesta en práctica. En cada reunión se comentará la sesión anterior y se harán ajustes para siguiente. Cada maestro hará un relato de lo ocurrido en la clase, detallando en la medida de lo posible procedimientos de alumnos, errores, dificultades, cambios a la secuencia prevista. El relato se acompañará con documentos que puedan resultar útiles (hojas de trabajo de los alumnos, fotografías, video).

En resumen, el proyecto requerirá a los maestros participantes lo siguiente:

- Asistir a entre 14 y 16 sesiones de trabajo, una vez por semana, a lo largo de entre 3 y 4 meses.
- Poner en práctica la secuencia con sus alumnos en al menos una clase semanal durante cuatro semanas.
- Hacer reportes de las propias clases.
- Asistir a la clase de otro maestro participante y participar en el análisis de la misma

A cada maestro participante se le entregará una constancia del Departamento de Investigaciones Educativas del CINVESTAV, por su participación en el proyecto.

Anexo 5

Una experiencia de formación de maestros en torno al tema de números decimales

Cuestionario inicial

A. DATOS PERSONALES

Nombre ____

Lugar de trabajo actual ____

Teléfonos ____

Correo electrónico ____

B. EXPERIENCIA PROFESIONAL

Grado que imparte actualmente ______

Años de experiencia como maestro de primaria _______

Por grado escolar (aproximado)

1º _______2º ______ 3º _______ 4º_______ 5º _______ 6º________

Años de experiencia como maestro de secundaria _________

Otros trabajos ____

____

C. FORMACIÓN

Estudios realizados (marque los que correspondan):

Normal básica ☐

Licenciatura: Escuela Normal ☐ UPN ☐

Normal Superior ☐ (señalar especialidad) ___________________________________

Otra Licenciatura ☐ (señalar cuál) ____________________________________

Posgrados:

Especialización ☐ (señalar cuál) _____________________________________

Diplomado ☐ (señalar cuál) ____

Maestría ☐ (señalar cuál) ____

Cursos de actualización en el área de matemáticas:

____

____

____

Anexo 6

DATOS PARTICIPANTES[1]

	Nombre	Experiencia profesional										Formación			
		Experiencia primaria años	1°	2°	3°	4	5°	6°	Grado actual	Experiencia secundaria años	Otros trabajos	Normal Básica	Licenciatura	Posgrados	Cursos actualización
1	*Daniel*	3		1				2	2°	2			UPN	UPN Maestría en Educación	
2	*Luz Alejandra*	10				4	4	2	6°	2	Docente medio superior, docente informática, administrativo		UNAM Pedagogía	FES Maestría en Pedagogía	FES "Estrategias en el área lógico-matemática en el aula"
3	*María Eugenia*	21	6	2	1	4	4	4	2°	3	Coordinadora de inglés, docente computación		UPN Lic. en educación LE94	Diplomado en Gestión Educativa	"Matemáticas divertidas"
4	*José Héctor*	20			2	4	5	5	6°	3	Director de secundaria, abogado litigante		UPN Lic. en Derecho	Maestría El género en la práctica docente Especialización La gestión y administración escolar	"Matemáticas divertidas"
5	*Trinidad*	25	8	8	4				ATP			X			(de la administración federal ¿?)

[1] Cambié los nombres de todos los participantes.
Los nombres que aparecen en cursivas corresponden a los maestros que asistieron a la reunión explicativa, pero no participaron en el taller.

6	Roberto_	5				1	1	3	6°	2			Escuela Normal. Primaria	Diplomado en el taller de las matemáticas de la BENM	Maestro misionero… “Matemáticas sin dolor” Planteamiento y resolución de problemas matemáticos de suma y resta de fracciones mixtas” Matemáticas con valores
7	Carina_	19	2	4	3		2	5	5°				Escuela Normal. Primaria	Maestría en Educación Familiar (cursando)	Fracciones comunes
8	Lidia_	25	1	2	2	2	2	2	Dirección	1		X	UPN INBA Lic. En actuación	Diplomado RIEB 2011	Congreso de matemáticas profesor Froylán Congreso de tecnología Pronap. Enseñanza de las matemáticas
9	María_	3				1		1	4°		Docente preescolar (20 años)		UNAM pedagogía	Diplomado Sexualidad Diplomado Lecto escritura Maestría en Educación Famliar (cursando)	Las matemáticas en preescolar Save de children Área de las matemáticas en preescolar FAI Nuestros niños
10	Edgar_	1					1		4° y 5°				Escuela Normal. Primaria		
11	*Carmen Patricia*	27	6	3	4		6	8	6°		Docente en licenciaturas de administración y contaduría	X	Lic. Psicología	Maestría en Terapia Familiar	Pronap

12	Efraín_	3						3	6°		Universidades privadas		UPN		
13	Berta_	26	8	8	4	2	3	1	5°			X	UPN		Pronap Enseñanza de las matemáticas
14	Graciela_	15	1		2	2	5	5	supervisora			X	UPN Lic. Lengua y literatura hispá-nicas	UPN Maestría en Educación ITESM Diplomado Estrategias sobre la enseñanza de las matemáticas UPN Especializa-ción Estudios de Género	Pronap
15	Sara_	28							Supervisora			X	UPN	Maestría (cursan-do) UNAM Diplomado RIEB 1° y 6° y 2° y 5° UIA Diplomado Supervisión Tec Monterrey Diplomado Lide-razgo	Estrategias para la enseñanza de las matemáticas SEP
16	Raquel_	32							Coord. sectorial	ATP		X	UPN	Especialización Política y Gestión Educativa	
17	Julia_	6			3	3			4°				Escuela Nor-mal. Primaria		
18	Rosa_	26							ATP			X	Escuela Nor-mal. Primaria	Diplomado en Gestión educativa	

19	Fátima_	14	5	6			3		2°				Escuela Nor- mal. Primaria		“Matemáticas divertidas” Pronap
20	Nancy_	27							ATP			X		Diplomado en estrategias para la lectura y escritura Diplomado RIEB	Pronap Cursos de la SEP
21	Leticia_	19			6		8	5				X			Congreso de matemáticas Taller de ciencias naturales
22	Isela_	24	9	10			2	3	6°				Escuela Nor- mal. Primaria	Diplomado “La ciencia en tu escuela” UNAM	Pronap
23	Esther_	31							Supervisora			X		Diplomado RIEB Especialización en Gestión escolar	Pronap Talleres SEP

Anexo 7

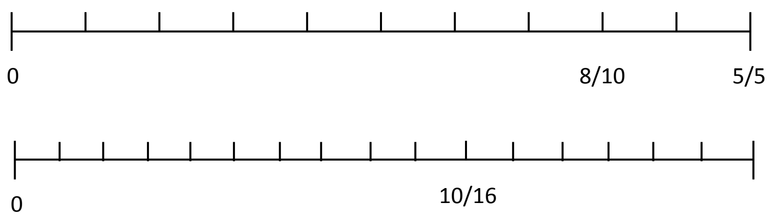
REGISTRO 1.2.5.1

Fragmento de registro de clase, grupo A de 6° de primaria. Junio 1°, 2011

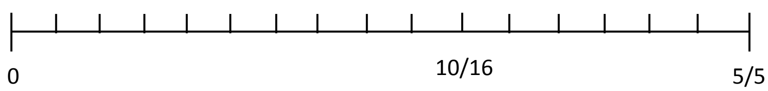
Maestra Isabel: Localicen en la recta las siguientes fracciones, 8/10, 10/16, 5/5.

Los alumnos trabajan de manera individual, pero cuando tienen dificultades se comunican entre ellos.

Alumno 1 (A_1)
Traza dos rectas. En una ubica 8/10 y 5/5, en la otra 10/16.

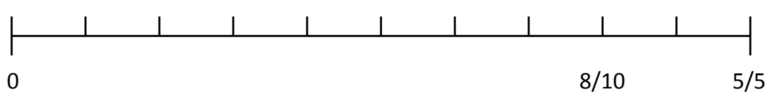


A_2
Traza una recta para ubicar las tres fracciones.

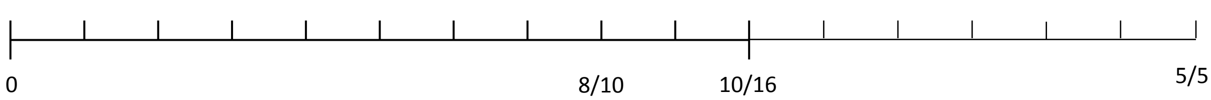


Sabe que 5/5 = 1 pero no logra señalar 8/10 en esa recta.

A_3
Traza una recta para ubicar las tres fracciones.



Se queda pensando, comenta con su compañero de banca y deciden preguntarle a otra compañera cómo ubicar 10/16. Con la información que ella les da (inaudible) deciden añadir 6 subdivisiones más a la derecha de la recta.



Cuando los alumnos terminan M pide voluntarios para trazar sus rectas en el pizarrón.

Pasa A_4 traza una recta subdividida en décimos y señala correctamente 8/10.

M: ¿cómo le harían para escribir 8/10 en número decimal?
Los alumnos se quedan en silencio, comentan cosas entre ellos.

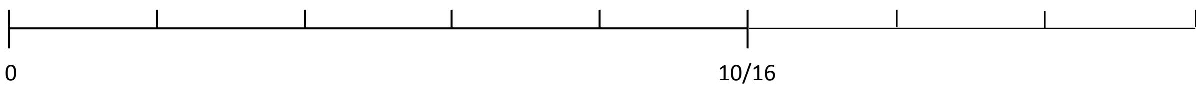
Pasa A_5 y divide 8 entre 10.

$$\begin{array}{r|l} & 0.\ 8 \\ \hline 10 & 8\ \ 0 \\ & \ \ \ \ \ 0 \end{array}$$

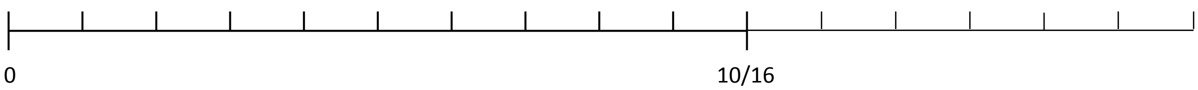
M: ¿sale lo mismo?
Alumnos (Aos): sí

Pasa A_6 a ubicar 10/16. Traza una recta que subdividió en 8 partes.

M: ¿por qué en 8?
A_6 : porque 8 es la mitad de 16



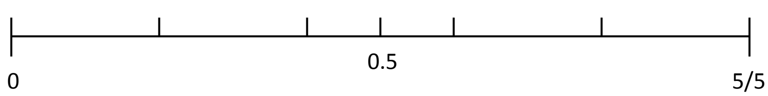
A_6 traza después otras subdivisiones.



M: si lo quisiéramos poner en decimales ¿qué haríamos?
A_6 divide 10 entre 16. Comete un error en la división.

$$\begin{array}{r|llll} & & 0. & 6 & 2\ \ 1 \\ \hline 16 & 1 & 0 & 0 & \\ & & & 4 & 0 \\ & & & & 2\ \ 0 \\ & & & & \ \ \ \ \ 4 \end{array}$$

Pasa A_7 a ubicar 5/5.
A_7 : yo lo dividí en 5, son 5/5.



A_7 : ahí es 0.5.
M: ¿y en decimal?

A_7 divide 5 entre 5 y obtiene 1.

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 5 & 5 \end{array}$$

M: ¿qué quiere decir ese 1?
Aos: un entero

Anexo 8

REGISTRO 1.4.4.1

Fragmento de registro de clase, grupo B de 6° de primaria. Junio 1°, 2011

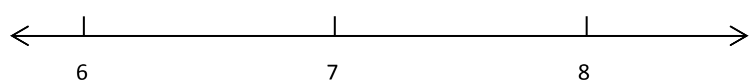
La maestra Berta selecciona de las lecciones del libro de texto unas rectas numéricas y las proyecta.

M lee las instrucciones que aparecen en la lección: representen en una recta numérica cada pareja de números naturales e indiquen entre ellos un tercer número natural. Los alumnos copian el dictado en su cuaderno.

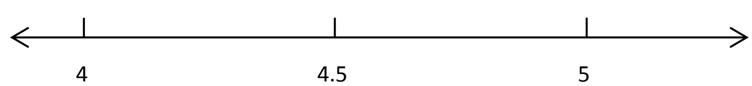
M: hagan cinco rectas numéricas.

M va al pizarrón y señala las rectas proyectadas. No tienen marcas de números.

M: Van a localizar otro número, puede ser cualquiera, tienen todo este espacio (toda la recta) para hacerlo. Estas flechas (los extremos de las rectas son flechas) me indican que la recta continúa para atrás y para adelante. Por ejemplo, si yo pongo aquí el 6 y aquí el 8 (los ubica en la recta) ¿dónde estará el 7?
Aos: en medio.
M: más o menos le calculo.



M: la recta numérica se puede hacer tan chiquita o tan grande como ustedes deseen. Ahora, entre el 4 y el 5 ¿qué número encuentran?
Aos: el 3, 4.5

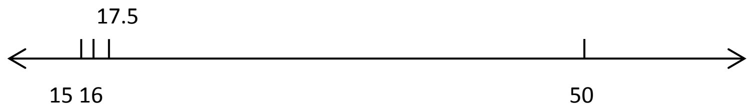


M: ahora, en la que sigue. El 10 y el 20 pongan. En la que sigue 18 y 24. En la que sigue 15 y 50. ¿Qué hago para encontrar un número entre 15 y 50?
A_1: lo divido a la mitad.
M: ¿la mitad de 15?
Aos: ¡no!
M: ¿la mitad de 50? El 15 ya tiene números atrás.

M va al pizarrón y señala en una recta dos puntos, el 15 y el 50.

M: necesito la mitad de lo que va de aquí a aquí (señala el tramo comprendido entre el 15 y el 50).
A_2: 17.5
M: ¿cómo le hiciste?
A_2: porque le resté el 15 al 50 y me salió 35.
M: a ver (escribe 50 – 15 = 35)
A_2: y luego lo dividí entre 2
M: ¿así? (escribe la división 35 entre 2 con “casita”). ¿Y qué salió?
Aos: 17.5

M: entonces aquí está 15 (señala en la recta) y cuento 16, 17 ½ ¿así es?... estás bien, pero piénsale.



M: ¿qué hago con ese 17.5?
A_3: lo sumo al 15.
M: lo sumo al 15, son 32.5 (lo señala en la recta).

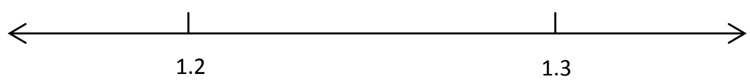
M proyecta otras rectas y dicta: representar en una recta numérica una pareja de números decimales e identificar entre ellos un tercer número decimal.

Como en las anteriores, las rectas tienen flechas en los extremos y no está localizado ningún número. En la primera se pide que señalen 1.2 y 1.3, en la segunda 1.23 y 1.24.

M: vamos a identificar estos dos puntos, pon 1.2 y 1.3 donde tú quieras.

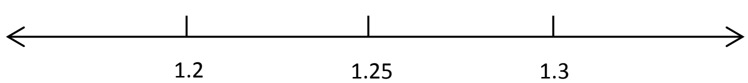
A_3 pasa al pizarrón.

M: escribe donde quieras 1.2 y 1.3.
El alumno los ubica.



M: ¿qué número está en medio?
A_4: ¿1.2 y medio?
A_5: 1.25
M: ¡uy! ¿cómo lo supiste? A ver, pásale.

A_5 lo ubica.



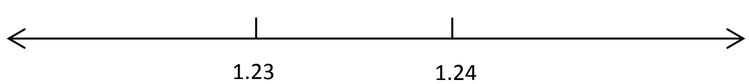
A_5: no lo sé explicar, yo diría que… 1.25 para llegar a 1.3 es lo mismo que para llegar a 1.2.
El resto del grupo aplaude. M lo felicita.

M: entre estos dos números (señala 1.2 y 1.3) se va a centésimos.

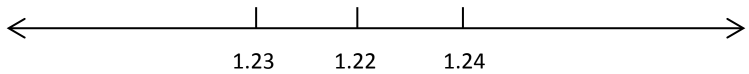
Pasa A_6 a ubicar 1.24 y 1.25.

M: ubícame esos dos puntos donde tú quieras.

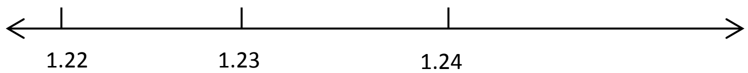
A_6 duda y se tarda bastante en ubicar el segundo punto.



M: yo quiero que aquí (señala el tramo entre 1.23 y 1.24) me ubiques un punto en medio.
A_6 lo ubica.

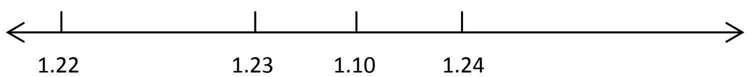


M: a ver, su compañera puso aquí (lo señala) el 1.22, pero yo necesito un número que esté en medio. Este número yo lo podría ubicar aquí (lo coloca a la izquierda de 1.23).



M va contando y señalando en la recta: 1.22, 1.23, 1.24.

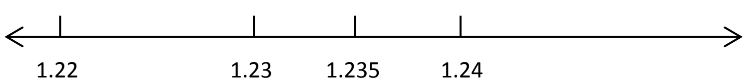
M: pero yo necesito un número aquí (señala el tramo de 1.23 a 1.24).
A_6 no sabe qué escribir, tarda un rato. Finalmente, escribe 1.10 en donde antes escribió 1.22.



M: si tú me pones 1.10 tendría que hacer una recta numérica más atrás. El 1 (el entero) sí está bien.
A_6 borra el 1.10.
M vuelve a contar señalando cada número: 1.22, 1.23, 1.24.
M: ¿cuál crees que sea el número que va aquí? (señala el punto a la mitad entre 1.23 y 1.24). Fíjate en el entero, y ahora décimos y estoy con el 2, centésimos 2, 3, 4 (va señalando cada número en la recta). Ahora milésimos ¿cuál sería el número que estuviera aquí?

Otros niños levantan la mano. A_6 todavía no sabe qué escribir. La maestra la espera hasta que finalmente pasa otra alumna.

A_7 escribe en el lugar señalado 1.235.



El resto del grupo aplaude. M le explica a A_6 en el pizarrón (inaudible).

Anexo 9

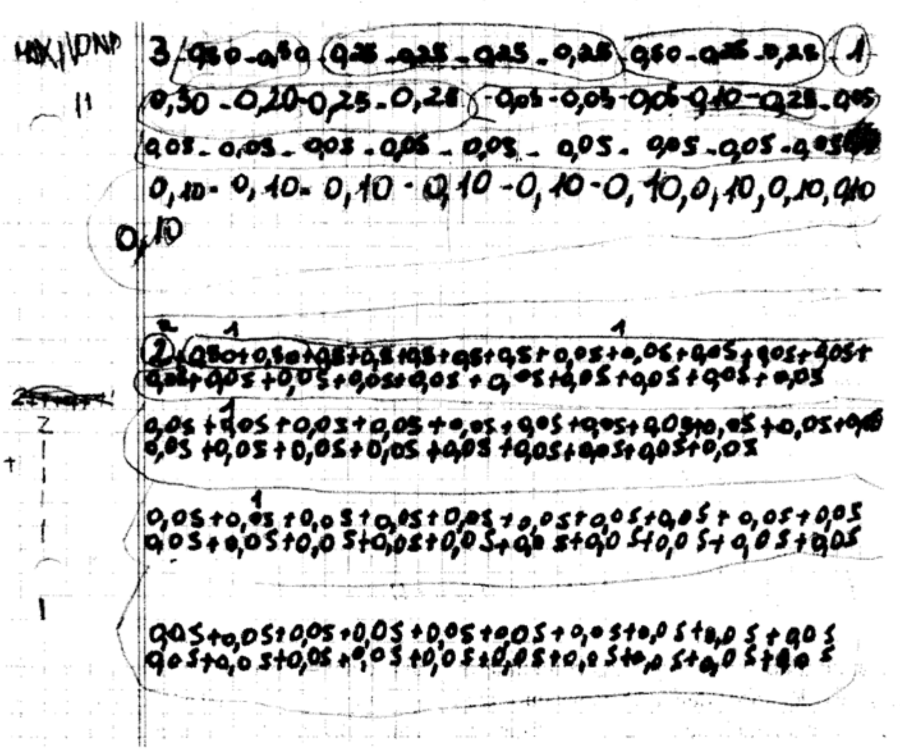
REGISTRO 1.4.4.2

Fragmento de registro de clase, tomado de Broitman (et al) (2003)[1].

El primer problema planteado es el siguiente: el docente anota el número 3 en el pizarrón e indica a los alumnos que deben sumarle la mayor cantidad de números posibles, sin pasarse de 10. Al llegar o pasarse de 10, deben detener las sumas, y entonces, gana quien logre la mayor cantidad de sumandos. Para llevar un mejor control, deben anotar la cantidad de sumandos. Los alumnos pueden utilizar la calculadora si lo desean.

Algunos alumnos, como Guido y Ornella, comienzan sumando los números 1 hasta llegar a 9. Luego advierten que, usando decimales, utilizan más números. Así es como se escucha preguntar: "¿se puede con punto?". Afinan entonces su apuesta[2] y prueban sumar de a 0.5.
3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
3 + 0.5 = 3.5 + 0.5 = 4 + 0.5…

Maxi comienza con 0.50. Luego, mediante descomposiciones de 0.50 utiliza números cada vez menores, y así, logra aumentar la cantidad de sumandos. Procede a partir de descomposiciones de 1; luego de 0.50; de 0.25; 0.10.

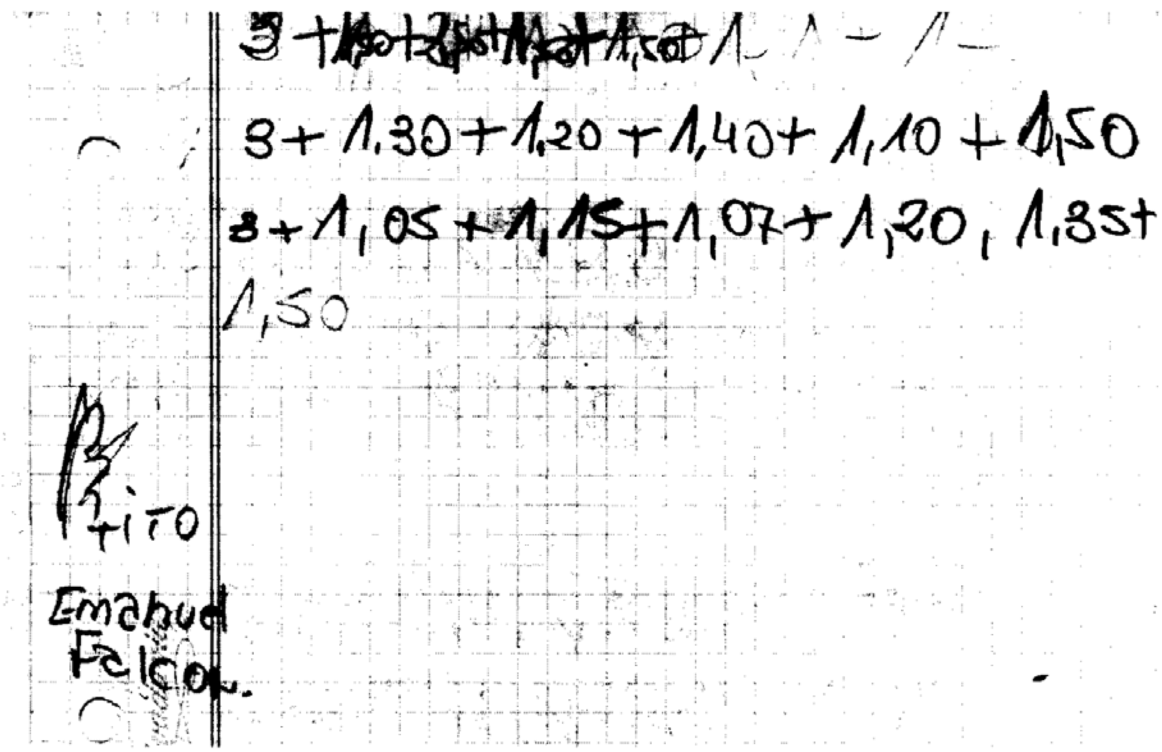


En un segundo intento, el alumno avanza descomponiendo cada 1 en sumas reiteradas de 20 veces 0.05. Obsérvese, sin embargo, la escritura de los primeros (0.5), error que pasa inadvertido para el niño y cuenta como cinco centésimos del mismo modo que hace con el resto. Esto no

[1] Broitman (et al) (2003). "La enseñanza de los números decimales: el análisis del valor posicional y una aproximación a la densidad" en Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 6 No. 1, Marzo, pp. 5-26.
[2] La expresión se refiere a algo como "redefinen su estrategia".

impide que guarde control de la equivalencia entre 20 veces 0.05 y 1; o quizás esté pensando en la equivalencia entre 10 veces 0.05 y 0.50, como puede suponerse por la distribución en dos grupos en diez de sus notaciones.

Tito suma decimales –probablemente porque escuchó en clase que estaban usando decimales- pero, a diferencia de sus compañeros, utiliza números mayores que 1. Lo interesante es observar cómo en los sucesivos intentos busca números menores –si bien mayores que 1- que los sumandos precedentes, y de esta manera intenta incrementar la cantidad de sumandos.



Pamela llega a 9 sumando de 1. Luego agrega décimos hasta alcanzar 9.9. Para no llegar a 10, le suma 0.09 y ahí se detiene.

13

$\boxed{3}$ 1 1 1 1 1 1 0,10 0,10 0,10 0,10

0,10 0,10 0,10 0,10 0,10 0,09 -

(1)

(9) - 1 = 8 - 0,50 = 7,50 - 0,50 = 7 - 0,25 - 0,25 -

Pamela 0,25 - 0,25 = 6 - 0,10 - 0,10 - 0,10 - 0,10 - 0,10 -

Maneltrado 0,10 - 0,10 - 0,10 0,10 = 5 - 0,01 - 0,01 - 0,01 -

0,01 - 0,01 - 0,01 - 0,01 - 0,01 - 0,01 - 0,01

= 4,90 - 0,01 - 0,01 - 0,01 - 0,01 - 0,01 - 0,01

0,01 - 0,01 - 0,01 - 0,01 = 4,80 - 0,01 - 0,01 -

0,01 - 0,01 - 0,01 - 0,01 - 0,01 - 0,01 -

0,01 - 0,01 = 4,70 - 0,01 - 0,01 - 0,01 -

0,01 - 0,01 - 0,01 - 0,01 - 0,01 - 0,01 -

0,01 = 4,60 - 0,01 - 0,01 - 0,01 - 0,01 - 0,01 -

0,01 - 0,01 - 0,01 - 0,01 - 0,01 = 4,60 -

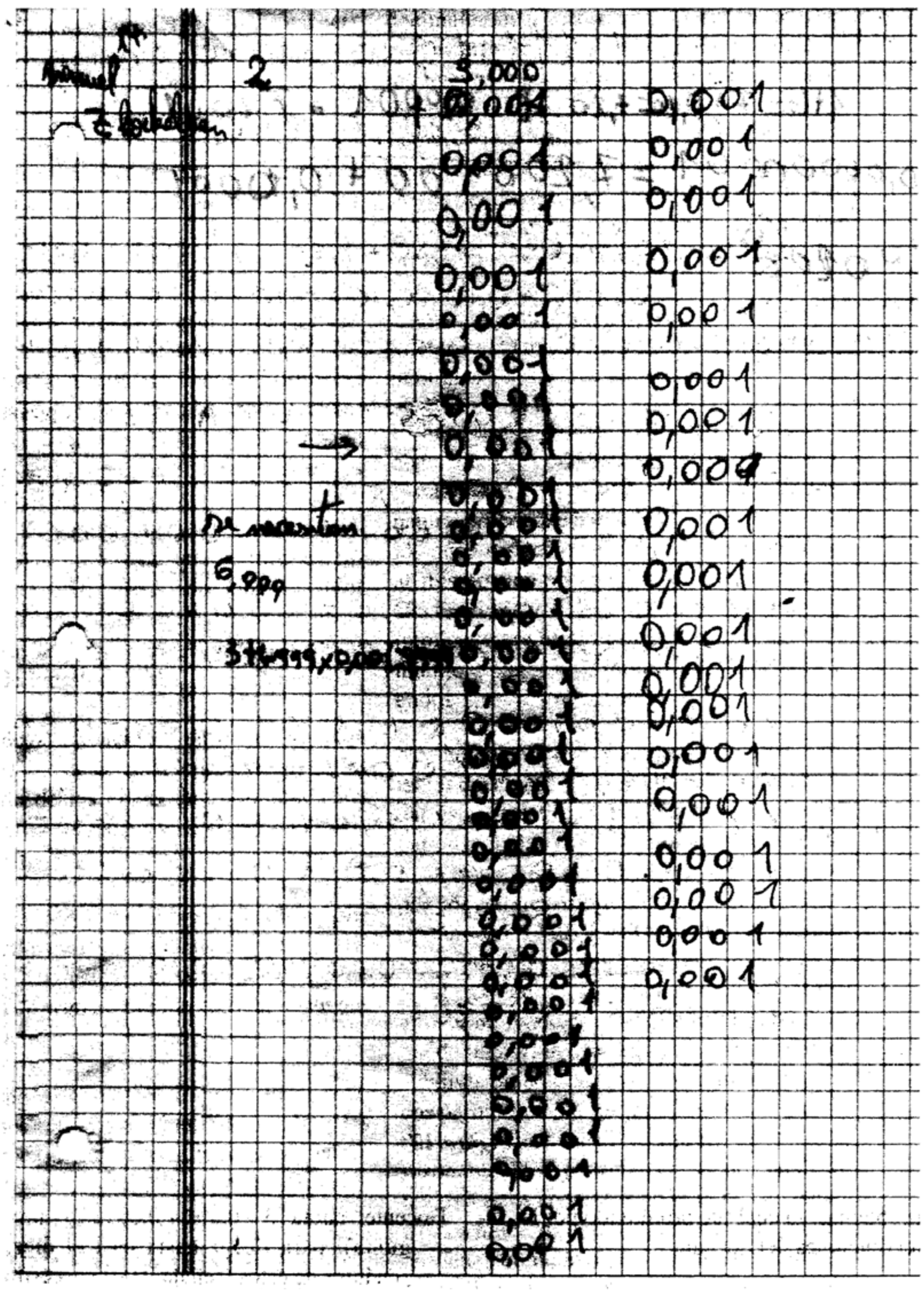
0,01 - 0,01 - 0,01 - 0,01 - 0,01 - 0,01 -

0,01 - 0,01 - 0,01 - 0,01 = 4,50 - 0,50 = 4 - 0,50 -

0,50 = 3 - 0,50 - 0,50 = 2 - 0,50 = 1,50 - 0,10 - 0,10 -

0,10 - 0,10 0,09 = 1,01 -

Manuel, de entrada, se propone sumar milésimos. Abandona sus anotaciones cuando advierte lo extenso que es escribirlos todos. Marca, en un costado de la hoja, la cantidad que necesita.



Quizá por esa razón, Camila y Justina, quienes también han comenzado sumando milésimos, continúan con números mayores: décimos y luego 25 centésimos para aproximarse, fácilmente, al

10. Obsérvese que, amplíany acotan los sumandos a su voluntad; con ello tratan de acercarse a 10, y de lograr una mayor cantidad de sumandos. Llegan a utilizar hasta diez milésimos, controlan, perfectamente, lo que están agregando.

Después de haber mostrado algunos procedimientos, el maestro comenta la resolución que no concluyó Manuel:

Maestra: anota “3 + 0.001 + 0.001…” (y pregunta): para llegar hasta casi el diez, ¿cuántos de éstos (señala 0.001) necesito sumar?

Alumno: mil

M: si yo sumo mil de estos, ¿qué número tengo?

A: Mil de esos suman uno.

Alumnos: Entonces, siete mil

Otros: seis mil

Otros: seis mil novecientos noventa y nueve.

M: ¿vas a escribirlos todos, Manuel? Si yo sumo seis mil novecientos noventa y nueve de estos (mientras anota en el pizarrón “3 + 6999 × 0.001 =”) pero voy a escribirlo así para no escribirlos todos. ¿Qué número me da todo esto?

A: nueve punto nueve, nueve, nueve

M: ¿y podré hacer con más sumas?

Ornella: Y claro, porque si le agregas un cero más a ese (pasa y escribe 0.0001)

A: Así sumas más.

A: y si le agregas otro cero…

A: Y si le agregas otro cero y otro cero y otro cero y así…

M: ¡Para! ¿Cuántas veces tengo que sumar este? (señala el 0.0001)

A: sesenta y nueve mil novecientas noventa y nueve

M: sesenta y nueve mil novecientas noventa y nueve veces. ¿Y qué número obtengo?

Alumnos: (gritan) nueve punto nueve, nueve, nueve

M: ¿y tú decías algo?

A: otro cero más

M: otro cero más (anota 0.00001). ¿Y cuántas veces podré sumar ese?

A: seiscientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve

M: (anota el cálculo, 699.999 × …) ¿Hay posibilidad de sumar más números que seiscientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve?

Alumnos: (gritan) sí, agregando otro cero

M: agregando otro cero más.

A: y otro y otro

Tito: hay infinitos ceros que se pueden poner ahí.

M: Tito agrega algo más, dice que hay infinitos ceros que se pueden poner ahí.

A: también serían infinitos nueves.

M: También aparecen infinitos nueves. O sea, ¿puedo hacerlo y no llegar nunca al diez?

A: sí (los demás se ríen)

M: porque me va a quedar nueve punto… ¿cuántos nueves?

A: nueve, nueve, nueve, nueve, nueve…

A: infinitos

Anexo 10

REGISTRO 2.4.6

Fragmento de registro de clase, 6° de primaria[3]

Primera sesión

Desde que el maestro[4] estaba dando la consigna algunos alumnos hicieron anticipaciones:

Maestro: *...queremos que el lado que mide 4 en este rompecabezas, mida...*
Alumno: *ocho en el otro...*

El alumno expresa saber que, en el agrandamiento, está en juego la multiplicación, y escoge el agrandamiento en el que es más fácil identificar el operador: × 2.

Maestro: ...queremos que el lado que mide 4 cm en este rompecabezas, mida 7cm en el otro.
Alumno: y el lado que mide 5cm, mida 8cm, el que mida 6cm, mida 9cm…

Al bloquearse la multiplicación por un entero, el alumno toma un recurso aditivo.

En la clase se desarrollan seis procedimientos, dos incorrectos y cuatro correctos.

Procedimientos incorrectos

<u>Procedimiento aditivo: Sumar la constante 3</u>

Por lo menos en tres equipos utilizan este procedimiento y comprueban que las piezas se deforman. Llama la atención la reflexión de Audiel: propone que el lado del nuevo cuadrado mida 20, que es el resultado de (2+3) + (7+3) + (2+3), pero enseguida dice: “Quien sabe, porque al más grande le debe tocar más, como la mitad de su valor”. Supongo que se refiere al 7, le debería corresponder un incremento como de “la mitad de su valor”, razón que por cierto no se acerca a la que guarda la medida 4 con el incremento 3. El hecho es que antes de llevar a cabo su estrategia, la pone en duda, al parecer porque incrementa la misma cantidad absoluta a todas las medidas (y de esta manera, la razón que guardan los incrementos con respecto a las medidas no sería constante).

Por su parte, Arsenio también descubre que la estrategia no funciona porque arroja la medida 20 para el lado del cuadrado formado por 2cm-7cm-2cm., mientras que arroja 17 para el lado formado por 5cm y 6cm.

<u>La regla de correspondencia × → 2x - 1</u>

Por lo menos en dos equipos (Rodrigo Iñaqui) descubren que dos veces el 4 menos 1 da 7 y la aplican a las demás medidas, por ejemplo, a 5cm le corresponderían 9 cm (en general, x→ 2x -1). En uno de los equipos logran ver, al armar el rompecabezas que algo no funciona. En la confrontación se dan tres intentos de explicar el motivo por el que no puede ser correcto el procedimiento.
(…)
Audiel, retomando su intuición acerca de la necesidad de una razón constante entre medida e incremento, dice “está mal porque no siempre de todo es...el doble menos uno, no puede ser porque al grande le toca de más y al más chico le toca menos”.

[3] Tomado de Block, Badillo, Martínez y Mendoza, 2009. La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros. 2: las fracciones. DIE Cinvestav-SEPEN Nayarit.
[4] Un maestro familiarizado con el enfoque didáctico subyacente y con la situación misma condujo estas dos clases.

Rodrigo logra dar una prueba empírica para invalidar esta estrategia: Aplicando la regla x → 2x-1, se obtienen dos medidas diferentes para el lado del cuadrado:

2→ 3;
7→13;

Por lo tanto al lado de 2+7+2 = 11 le corresponde 3+ 13 + 3 = 19.
Mientras que

5→9
6→11

Por lo tanto, al lado de 5 + 6 = 11 le corresponde = 9 + 11 = 20.

Notemos que los razonamientos más explícitos e interesantes, provienen de los intentos de algunos alumnos por mostrar que las estrategias de sus compañeros son incorrectas y no funcionan.
Notemos también la ventaja de que el cuadrado tenga lados subdivididos de diferentes maneras (uno como 2 + 7 + 2 y el otro como 5 + 6), pues esto permite poner en evidencia que las estrategias aditivas no funcionan.

Procedimientos correctos

Aparecen dos procedimientos, uno se centra en lo que hay que incrementar a cada medida, considerando que los incrementos deben ser proporcionales a las medidas, el otro establece la composición de operadores (÷4) (×7) que permite generar las medidas de la reproducción a escala.

Procedimientos centrados en el incremento

En el grupo logran establecer dos procedimientos para que los incrementos sean proporcionales a las medidas. En una aumentan "tres por cada cuatro", y en la otra "3/4 de la medida".

<u>Tres por cada cuatro</u>

Nuevamente en el equipo de Audiel, después de invalidar la estrategia +3, y con la hipótesis de que "al grande le toca más", acaban proponiendo esta estrategia (habría sido interesante seguir sus razonamientos):

Con la ayuda del maestro (la explicación del equipo no resultó muy clara), se muestra el procedimiento:

4→ +3
2→ +1.5 (porque 2 es la mitad de 4)
5→ +3.75 (supongo que porque a 1 le corresponde la mitad que a 2, es decir +.75)

No les dio tiempo de hacer el rompecabezas.

Cada medida aumenta ¾ de sí misma

Irma: Como a 4 se le aumentaron 3 y 3 equivale a 3/4...
Netzaí: (es de otro equipo, él pensó también en esta estrategia, pero en su equipo ganó la de +3): para llegar de 4 a 7 son 3, y el 3 de 4 equivalen a ¾
Maestro: Ah!, 3 es ¾ de 4...
Netzaí: Entonces a todas las medidas les sumas ¾ de las mismas.

Calculan la imagen de 6 (6 más 3/4 de 6):
6:4 = 1.5 y 1.5 + 1.5 + 1.5 = 4.5, luego 4.5 + 6 = 10.5

No se sabe cómo encontraron que 3 es ¾ de 4.

Estos alumnos lograron expresar la razón “tamaño del incremento/medida original” con una fracción, misma que utilizan como operador para obtener las demás medidas.

La composición “entre 4, por 7”

En el equipo de Rodrigo, Esteban, Minerva y Karla, obtienen las medidas dividiendo cada una entre 4 y multiplicando por 7. Así, para calcular la imagen de 5 hacen:

$$5 \xrightarrow{\div \mathbf{4}} 1.25 \xrightarrow{\mathbf{X7}} 8.75$$

Se les preguntó por qué y dijeron que porque si hicieran 5÷5 y luego por 7, “nos daría 7 acá y 7 acá” Parece que lo que explican es algo que intentaron previamente y observaron que no funcionaba:

$(4 \div 4) \times 7 = 7$, entonces
$(5 \div 5) \times 7 = 7$
$(6 \div 6) \times 7 = 7$

En la confrontación, Rodrigo dice: *Lo que hicimos fue todas las medidas entre 4 y por 7*, en lugar de sacar primero el entero.

¿A qué se refiere con “en lugar de sacar primero el entero”? Quizás a que no calcularon el incremento por separado.

La alumna Irma les pregunta de dónde salió el 7, a lo que Rodrigo responde: Porque 4 entre 4 da uno y por siete da siete.

No logra explicarse. Quizá ellos mismos no saben bien por qué funciona su estrategia. Han encontrado la composición de transformaciones multiplicativas que permiten pasar de 4 a 7, pero, ¿qué significan para ellos?

Uno de los significados posibles, que se explicita en la sesión siguiente, es el de hacer primero, hipotéticamente, una reducción 4→1 (es decir, lo que mide 4 en el original, medirá 1 en la reducción) y después una ampliación 1→7:

$$4 \xrightarrow{\div \mathbf{4}} 1 \xrightarrow{\mathbf{X7}} 7$$

Enseguida, Irma pregunta a los autores de este procedimiento: Si nos hubiesen dicho que el 6 tenía que ser 10.5, ¿cómo le hubieran hecho?
Rodrigo libra bien el cuestionamiento: *Lo mismo, todo lo dividimos entre 6, y después lo multiplicamos por la medida* (es decir, por 10.5).

Veamos ahora lo que sucede en la segunda sesión.

Segunda sesión

El maestro dibujó en el pizarrón el rompecabezas original en rojo y el “ampliado” en azul (representaciones sin las medidas exactas). Pidió a los alumnos que recordaran las medidas del original. Se las fueron diciendo, las fue anotando en las partes correspondientes del rompecabezas original.

Explicó entonces que el nuevo rompecabezas que se quiere hacer, **lo que mide 5 en el original, debe medir 8**. Anotó el 8 junto a la parte correspondiente en la reproducción.

Explicó que esta vez primero calcularían las medidas, después se compararían las medidas obtenidas por cada equipo, y al final construirían el rompecabezas. La consigna resultó muy clara.

Además de las estrategias de la vez pasada, aparece una más, la que pone en juego el operador función "8/5 de". Además, se logran explicitar mejor los razonamientos subyacentes.

Cuando los alumnos terminaron de calcular las medidas, el maestro vació en un cuadro, en el pizarrón, las respuestas de todos los equipos y organizó la discusión de los mismos. Las respuestas fueron las siguientes:

medidas	**eq.1**	**eq.2**	**eq.3**	**eq.4**	**eq.5**	**eq.6**	**eq.7**	**eq.8**
5	8	8	8	8	8	8	8	8
2	3.2	3.2	3.2		3.2	3.2	5	3.2 y 3.4
7	11	11.2	11.2		11.2	11.2	7	11,2 y 4.4
4	6.4	6.4	6.4		6.4	6.4	7	6.4 y 3.8
6	9.6	9.6	9.6		9.6	9.6	9	9.6 y 1.20
9	14.1	14.4	14.4		14.4	14.4	12	14.4 y 13
(11)				16.625				

Procedimientos incorrectos

<u>Aditiva, x→x + 3, y ajustes</u>

Renata explica lo que hicieron: primero sumaron 3,

+3
5------------>8
6------------>9
11---------->17

Con la imagen de 5 y de 6 sacaron la imagen de 11, que es un lado del cuadrado.
Después, dicen que esa medida (17) la dividieron para obtener las medidas en que está subdividido el otro lado del cuadrado:

4--------> 7
2--------> 2
5--------> 8
11------> 17

(…)

Procedimientos correctos

Cuando el maestro vacía los resultados en el cuadro algunos alumnos hacen comentarios:

Nacxit señala que “nada más de verlas”, están mal porque se supone que tienen que salir más grandes. Se refiere a 1.2, valor que el equipo ocho asoció a 6.

Enseguida se identifican otros errores, por ejemplo Renata señala 4→ 3.8, Arsenio 7→ 7.

El valor unitario (imagen de un cm)

Nacxit, Sergio, Arsenio. Después de decir que el incremento es de 3 por cada 5, Arsenio explica que “sacaron el valor unitario”, dividiendo 8 entre 5.

Parece que lo que finalmente hicieron fue[5]:

5---------------->8
1---------------->1.6
6---------------->9.6

El observador preguntó acerca de lo que significa el 1.6

Sergio, Nacxit, Itzel: Es el valor unitario...es lo que vale uno...es lo que necesitamos, uno, porque de cada 5, aumenta 3, pero que tal que para 7, necesitamos lo de dos...

Intuyen el significado del 1.6, pero les resulta difícil formularlo. La expresión “valor unitario”, muy general, importada de otros problemas cuya similitud intuyen, no es tan clara para ellos en este contexto.

Finalmente se les preguntó qué medida correspondería, en la reproducción, a 1cm de la figura original. Dicen rápidamente que 1.6, y se muestran sorprendidos. Parece que se aclara que 1.6 es lo que corresponde a un cm en la reproducción (es el “valor de uno”, como dijo Sergio).

Para el cálculo de 2cm, Sergio propone duplicar lo de 1:

1-------->1.6
2--------> 3.2

Y para el cálculo de 7, propone sumar lo de 5 y lo de 2:

5-------->8
2-------->3.2
7-------->11.2

Myriam, Moira y Karla. Después de señalar que el incremento esta vez será 3 por cada 5, lo que hacen es obtener el “valor unitario”, 1.6, y multiplican todas las medidas por ese valor.

Se les preguntó también “¿qué es el valor unitario?”, a lo que responden “Lo que mide uno”.

Después, en la confrontación, Moira explica que calcularon el valor unitario, 8 entre 5 es 1.6, y eso lo multiplicaron por cada medida.

Maestro: ¿Y qué significa el valor unitario?
Moira: Que cada centímetro vale 1.6.

[5] Los esquemas que aparecen a continuación son descripciones nuestras de lo que hicieron los alumnos. Ellos aún no los utilizan

Maestro: ¿A qué centímetro te estás refiriendo?
Moira: A las medidas.
Arsenio: Un centímetro del original vale 1.6 centímetros en el rompecabezas que se va a reproducir.
Moira: Así es más fácil.

Al obtener el "valor unitario", los alumnos obtienen implícitamente el factor de proporcionalidad x → 1.6 x.
El decimal 1.6 juega el papel de operador multiplicativo.

<u>La composición de operadores (÷5) (x8) (o pasar por la figura intermedia en la que a 5 le corresponde 1)</u>

Esteban usó este procedimiento la vez pasada pero no logró fundamentarlo. Esta vez dice que ellos dividieron 5 entre 5 y lo multiplicaron por ocho. Agrega que hicieron esto mismo con todas las medidas.

Al pedirle una explicación muestra mucha dificultad, pero finalmente lo logra:

Es que es como la escala (...), queremos pasar por uno (dibuja un cuadrado pequeño, luego uno grande (...) necesitamos la escala de uno para luego pasar a la que quieras.

Logró explicitar el razonamiento que está detrás de la composición (:5) (× 8). El operador (:5) permite hacer una reproducción en la que a 5 le corresponde 1. Luego, (× 8) permite pasar de esa a otra en la que a 1 le corresponde 8. Implícitamente, aceptan que la composición de dos transformaciones, una "entre" y la otra "por", da una transformación que no altera las formas, una nueva relación de proporcionalidad.

Augusto explica: *Todo se divide entre 5 y el resultado es un quinto, y luego por 8.*

Ante las preguntas del maestro, Augusto da un ejemplo, calcula la imagen de 2, que es 0.4, y explica:

Augusto: "el dos se tiene que dividir entre 5 porque así sacaríamos un quinto".

A Rodrigo le cuesta trabajo explicar el porqué de su procedimiento, pero finalmente logra una explicitación en la que destaca dos transformaciones: (…) *para que nos saliera un quinto de la medida original, después la multiplicamos por ocho para que nos saliera la medida reproducida*.

Notemos que, aunque las operaciones que se hacen aquí y las que se hacen en el procedimiento del "valor unitario" son casi las mismas (dividir entre 5, multiplicar por 8), las ideas que subyacen no lo son:

- La estrategia del "valor de uno" se basa en ver qué imagen corresponde, en la reproducción, a un cm de la figura original (8cm entre 5=1.6cm). Con ese valor, obtienen, implícitamente, la regla de correspondencia x→ 1.6x Cada medida será multiplicada por ese valor.

- La estrategia de la composición se basa en la idea de formar otra figura a escala, en la que a 5 le corresponde 1, para posteriormente pasar de esa a la figura en la que a 1 le corresponde 8. La composición de dos operadores que resulta no se sintetiza en la compuesta (X 8/5 ó X1.6). Cada medida será dividida entre 5 y multiplicada por 8.

<u>El operador "8/5 de"</u>

Arsenio empieza por aclarar que el 0.4 que obtuvo Augusto al dividir 2 entre 5 es 1/5 de 2. Continúa explicando que de 5 a 8 hay 3 y que, por lo tanto el aumento es de 3/5 de 5. Dice también que 8 es 8/5 de 5.

Arsenio: Lo que queremos sacar son 8/5". "0.4 es 1/5 y eso se multiplica por 8" (para obtener la imagen de 2).
Maestro: ¿Tú crees que eso se hizo para pasar de 5 a 8?
Arsenio: Sería entre 5, 5 entre 5 es 1, 1 por 8 es 8, son 8/5 de 5.
Arsenio: Aunque lo que yo hice es parecido, la diferencia entre el 2 y el otro número es 3/5, 3/5 de 2 es 1.2.
Maestro: Entonces, ¿cuánto es 3/5 de 5?
Arsenio: Uno.
Maestro: ¿3/5 de uno?
Arsenio: 3/5

Arsenio fue el único que identificó qué fracción de 5cm representa el aumento de 3cm: 3/5. Si un lado aumenta 3/5 de sí mismo, los demás lados deben aumentar 3/5 de sí mismos. Va incluso más allá: *lo que queremos sacar son 8/5.* Tiene claro que el operador en juego es "8/5 de", y que éste consiste en dividir entre 5 y multiplicar por 8.

Así, Arsenio establece claramente los dos operadores posibles, el que da el incremento y el que da directamente la imagen:

$x \rightarrow x + 3/5x$
$x \rightarrow 8/5x$

¿Por cuánto multiplicar la medida original...?

Al final, el maestro lanza esta pregunta: ¿En total, podrían decir por cuánto multiplicar la medida original para obtener la medida de la copia?

Rodrigo: No la multiplicamos luego luego, primero la dividimos, ¡ah!, ¡ya sé que quieres decir!
Maestro: Ya sé, primero dividimos, después multiplicamos, pero ¿podrían decir en total por cuánto multiplicamos al original?
(silencio)

Rodrigo: No...Nada más por uno, por uno y fracción.
(Creo que por ahí se escucha "por 1.6")

Maestro: Sí, por 1.6, es lo que encontraron en uno de los procedimientos, pero ustedes dicen que se divide entre 5 y se multiplica por 8, ¿se podría decir por cuánto se multiplica?
Al: No
Maestro: Bueno piénsele.

Llama mucho la atención de que quienes usaron la estrategia de multiplicar por 1.6 hayan tardado tanto en contestar, y sólo uno de ellos lo hizo.

Arsenio, quien supo que las medidas de la reproducción son 8/5 de las de la original, no pudo contestar tampoco. Es claro que sacar 8/5 de algo no es todavía lo mismo que multiplicarlo por 8/5. Con dificultad se acepta que se puede multiplicar por 1.6. Sin embargo aparecen sospechas de que sí puede haber un factor fracción.

Anexo 11

REGISTRO 1.3.1.15

Fragmentos de entrevistas a alumnos de 5° grado de primaria[6]

Problema: Con 573.75 Bs[7] compré 67.6 kg de arroz. ¿Cuál es el precio por kg?

Entrevistador (E) - ¿qué estás haciendo?

Henry – Convirtiéndolo en entero

67.6 × 10 = 676

573.75 × 10 = 5737.5

E - ¿tú podrías multiplicar por 100?

H - no

E - ¿por qué?

H - Porque hay un solo decimal

E - ¿Entonces lo que tú tomas en cuenta es el divisor para convertirlo en entero?

H - sí

E - ¿por qué crees tú que es importante convertir en entero el divisor?

H - porque no hay… porque si esto fuera persona, no hay 67.6 personas. (Prueba primero por 5, no le da, luego por 6, por 7 y por 8)

				8	4
676	5	7	3	7.	5
	5	4	0	8	
		3	2	9	5
		2	7	0	4
		0	5	9	1

E - de acuerdo, Henry. ¿Tú crees que cada kilo te cueste 84 Bs?

H - no

E - ¿y qué habrá pasado ahí?

H - ¿ah! (coloca el punto)

E - ¿por qué será que uno no puede dividir cuando hay punto aquí en el divisor?

Juan - no sé, ahí sí me ganó

C - cuando dieron la clase ¿no hablaron sobre eso?, ¿no se te ocurre algo?

J - …

---

[6] Tomados de Lerner, Delia (1997). *La matemática en la escuela. Aquí y ahora.* Aique Grupo Editor, Buenos Aires.

[7] Bolívares, la moneda venezolana.

Evelyn comienza a resolver la cuenta así:

			0	.8	5
67.6	5	7	3.	7	5
	5	3	6	8	
	0	3	6	9	5
		3	3	8	0
		0	3.	5	

E - ¿y el arroz estará así tan barato?

Ev - … (Coloca 573.75 ÷ 67.6 y aparte, 573.75 × 10 = 5737.5
67.6 × 10 = 676 mientras comenta)

Esta clase me la dieron el otro día

E - ¿cuál clase te dieron el otro día?

Ev - de divisiones así, como ésta. Lo que pasa es que éste no tenía punto

E - cuando el de este lado tiene punto (divisor) ¿tú hiciste esto para eliminar el punto?

Ev - sí

E - ¿cómo se hace?

Ev - se multiplica éste por 10 y éste también por 10… lo que pasa es que tengo una duda aquí… esta clase me la dieron, pero éste (dividendo) nunca tenía punto. En éste no queremos eliminar el punto… o sea, no sé si ponerlo o eliminarlo (se refiere al punto que quedó en el dividendo, a pesar de que lo multiplicó por 10)

E - olvidándonos del punto. No vamos a hablar de decimales. Si yo tuviera que dividir este entero 573 entre 67 ¿el resultado daría 0 punto algo?

Ev - (duda) no

E - daría un número entero ¿verdad?

Ev - (observa) daría un número entero

E - ajá. Entonces ¿cómo es posible que aquí haya dado 0?

Ev - porque cuando lleva punto, antes de subir el punto hay que poner un punto aquí y un 0

E - pero si este entero (dividendo) es mayor que éste que está aquí (divisor) ¿habrá que ponerle 0?

Ev - …

E - ¿ustedes están viendo ahora división de decimales?

Ev - (afirma)

E - ¿y tú dices que antes de subir el punto hay que poner siempre un 0?

Ev - no, pero como aquí no daba, hay que ponerle 0

E - ¿cómo que aquí no daba?

Ev - porque 573 entre 676 (en seiscientos setenta y seis en lugar de 67.6)…

E - pero es que tú estás quitándole el punto a éste (divisor) y a éste no

Ev - ¡ah! Verdad

Jenny – a nosotros la profesora de matemática nos enseñó que para poder poner este número entero (el divisor) cuando tiene decimales, hay que multiplicar primero esto por esto…

E - ¿qué tienes que multiplicar?

Je - ella nos enseñó con 0, por ejemplo 10.0 por lo menos, entonces se multiplica esto por esto… Esto (dividendo) como tiene dos 0, se puede multiplicar por 100 y aquí, después éste (divisor) por 100

E - éste, el 67.6 ¿cuántos decimales tiene?

Je - uno, le quito el punto

E - y si multiplicas éste (divisor) por 10, ¿puedes multiplicar éste (dividendo) por 100 o tienes que multiplicarlo por 10 también?

Je - ése lo multiplico por 10 y éste también por 10

E - ¿y cómo lo multiplicas por 10?

Je - no, lo tengo que poner aparte porque…

E - ¿aquí mismo puedes hacerlo?

Je - aquí está la división

E - ¿y no puedes hacer como hicimos antes, que multiplicamos sin hacer cuenta aparte?, ¿qué tienes que hacer aquí (67.6) para multiplicar por 10?

Je - le agrego un 0

E - ¿y el punto?

Je - se quita

E - o sea que lo que vas a hacer es correr el punto un espacio

Je - (asiente)

E - bueno, quitarla. ¿Y hay que poner el 0?

Je - ¿no?... aquí (dividendo) da 573.75 pero en el resultado total da 573.750

E - ¿y por qué?

Je - a esto se le agrega el 0 y se le quita el punto

E - ¿se le quita?

Je - ¡ah! No…

E - ¿cuántos espacios vas a correr el punto si vas a multiplicar por 10?

Je - uno

E - bueno, hazlo

Je - (le queda 5737.50)

E - ¿y tienes que dejar el 0?

Je - sí

E - ese 0 después del punto ¿vale algo?

Je - no

E - entonces ¿habrá necesidad de agregarlo o solamente se corre el punto?

Je - la profesora siempre nos hace ponerlo ahí

El entrevistador le propone a Juan que resuelva 8 ÷ 100

Juan escribe la operación

$$100 \;\big|\overline{\;8\;}$$

Borra y escribe nuevamente

$$8 \;\big|\overline{\;100\;}$$

La resuelve

E - ¿da 12?, ¿qué hiciste tú?, ¿qué te piden ahí?

J - que yo resolviera 8 entre 100

E - ¿y eso será lo mismo que 100 entre 8?, ¿dará lo mismo?

J - propiedad conmutativa, profe…

E - ¡ah! Propiedad conmutativa… ¿y eso se podrá aplicar a la división?

J - creo que no

E - ¿será lo mismo que tú tengas 10 Bs y los repartas entre 2 niños a que tengas 2 Bs y los repartas entre 10 niños?, ¿te dará lo mismo?

J - no

E - entonces no le podemos aplicar la propiedad conmutativa a la división ¿Cómo se hará 8 entre 100?, ¿habrá que sacar la cuenta o se podrá sacar directamente?

J - …

E - ¿no te acuerdas si viste esto alguna vez?

J - no

E - vamos a pasar a los de multiplicación para ver. (Propone)

235 × 10

235 × 1000

238.50 × 100

238.50 × 1000

J - esto es fácil

E - ¿cómo se hace?

J - es fácil. A 235 le agrego un 0 y da 2350. A este 235 como es por 1000 le agrego tres 0 y da 235000. Este otro… (el siguiente) corro dos espacios (escribe 23850). En este caso (siguiente) corro el punto dos espacios pero como hay tres agrego un 0 (escribe 238500)

E - a ver, ¿cómo fue que hiciste éste?

J - esto creo que me lo dieron en 4°

E - en este caso, corriste el punto dos espacios… ¿y por qué agregaste además un 0?

J - porque eran 3 espacios y el punto

E - bueno, ahora vamos a volver a éste para ver cómo será con la división. ¿Qué hiciste aquí para multiplicar por 10 y por 100?

J - agregar los 0 que hay después del 1

E - y aquí en la división ¿qué habrá que hacer? Si en la multiplicación hay que agregar 0, en la división ¿qué habrá que hacer?

J - …

E - Si tú divides 8 entre 100 ¿te dará más de 8 o menos de 8? Suponte que divides 8 Bs entre 100 personas. Más o menos, ¿cuánto les irá a tocar?

J - una puya[8]

E - les tocará muy poquito ¿no? Con ese dato, ¿no se te ocurre cómo se hará?

J - ¡ay profe!...

E - si en la multiplicación colocaste los 0 a la derecha, ¿aquí no será al revés?

J - ¿a la izquierda? Aquí debería ser 08. Bueno, punto 08 (0.08)

E - ¡claro! ¿por qué 0 punto 08 y no 0 punto 8, por ejemplo?

J - porque tiene dos 0

E - vamos a ver con la que sigue (750.50 ÷ 100)

J - aquí sería correr el punto

E - ¿te acuerdas que con la multiplicación corriste el punto?, ¿cómo lo vas a hacer aquí?

J – aquí, dos espacios, el 0 y el 5 (7.5050)

E - ¿y aquí abajo?

J - (coloca 0.00895)

Evelyn escribe 235 × 10 = 23.5

E - ¿en qué grado te lo dieron?

Ev - a mí se me olvidó esto, en tercero

[8] Puya: denominación de la moneda de 0.05 Bs

E - cuando tú multiplicas un número por otro ¿te da más o menos?

Ev - más

E - ¿y ésta (23.5) es mayor o menor que ésta (235)?

Ev - menor (corrige) 235 × 10 = 0.235

E - pero tú me dijiste que debía darte un número mayor

Ev - lo que pasa es que esto (señalando lo que hizo) es de la división que nos están dando ahorita

E - ¿y para la multiplicación?

Ev - es para acá (derecha) y la división para allá (izquierda)

E - ¿entonces?

Ev - 235 × 10 = 2350

E - ¿y por qué te da eso?

Ev - porque agregas un 0

E - muy bien, pero ¿por qué agregas un 0?

Ev - porque 2 × 0 = 0 y 2 × 1 = 2, entonces 2 × 10 = 20

E - ¿y ésta? (238.50 × 100)

Ev - (ella agrega primero los 0: dos cuando multiplica por 100 y tres cuando multiplica por 1000, y sólo después corre el punto)

238.50 × 100 = 23850.00

238.50 × 1000 = 238500.00

750.50 ÷ 100 = 007.5050 (siguiendo el mismo procedimiento que antes pero colocando los 0 a la izquierda, porque está dividiendo)