UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SOBRE LOS PROBLEMAS LLAMADOS NEUSIS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

ANATOLIO HERNÁNDEZ QUINTERO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. CARLOS ÁLVAREZ JIMÉNEZ

Ciudad Universitaria, Cd. Mx.

2019

1. Datos del alumno	1. Datos del alumno
Apellido paterno	Hernández
Apellido materno	Quintero
Nombre(s)	Anatolio
Teléfono	55 4872 9117
Universidad Nacional Autónoma de México	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	411028145
2. Datos del tutor	2. Datos del tutor
Grado	Dr.
Nombre(s)	Carlos
Apellido paterno	Álvarez
Apellido materno	Jiménez
3. Datos del sinodal 1	3. Datos del sinodal 1
Grado	Dr.
Nombre(s)	Rodolfo
Apellido paterno	San Agustín
Apellido materno	Chi
4. Datos del sinodal 2	5. Datos del sinodal 2
Grado	M. en C.
Nombre(s)	José Antonio
Apellido paterno	Gómez
Apellido materno	Ortega
5. Datos del sinodal 3	4. Datos del sinodal 3
Grado	Dr.
Nombre(s)	Óscar Alfredo
Apellido paterno	Palmas
Apellido materno	Velasco
6. Datos del sinodal 4	2. Datos del sinodal 4
Grado	M. en C.
Nombre(s)	Israel
Apellido paterno	Ramos
Apellido materno	García
7. Datos del trabajo escrito	7. Datos del trabajo escrito
Título	Sobre los problemas llamados neusis
Número de páginas	xvi + 93
Año	2019

A Claudia

נשכימה לכרמים נראה אם פרחה הגפן פתח הסמדר הנצז הרימזנים שם אתן את דדי לך

(שיר השירים, פרק יג')

Índice general

Introducción general

Algunos de los problemas más famosos de la geometría clásica pertenecen a una clase de problemas geométricos que ha sido poco estudiada a lo largo del desarrollo de la geometría, me refiero a los problemas llamados *neusis*. Se pueden reconocer dos momentos históricos en los cuales los problemas de neusis fueron estudiados. El primer momento se dio en la geometría de los antiguos griegos, en la que podemos reconocer varios ejemplos aislados de neusis pero que no tienen conexión con obras más extensas ni apenas conexión entre sí, salvo con un libro (perdido) escrito por Nicómedes sobre las curvas llamas concoides o cocloides y también con dos libros sobre neusis escritos por Apolonio. Casi todos estos ejemplos se encuentran en el libro IV de la *Colección* de Pappus y se deben a Nicómedes, a Pappus mismo y a Arquímedes (cf. [Pap10]). También hay un problema de neusis en un comentario de Simplicio sobre la *Física* de Aristóteles y hay un problema más en una recopilación de lemas en árabe (que presumiblemente son de origen griego). Sobre el libro de las concoides de Nicómedes no sabemos apenas nada, más que alguna vez existió. Sin embargo, la situación es un poco distinta con los dos libros de las *Neusis* de Apolonio, pues aunque también están perdidos, sabemos qué problemas contenían gracias a que Pappus nos habla de ellos en el libro VII de su *Colección*.

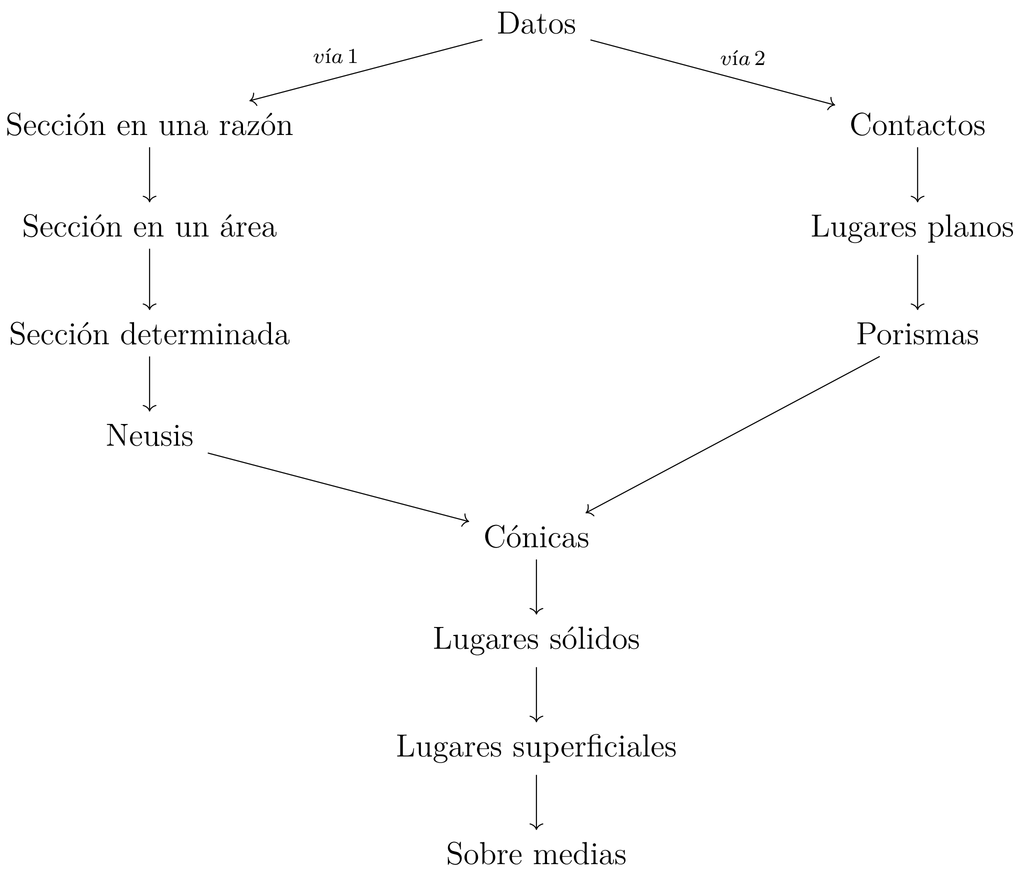
No hay evidencia de que la *Colección* de Pappus haya sido estudiada en Bizancio, pues apenas hay algunas alusiones que no entran en detalles, marginalia anónima y reseñas sobre mecánica de J. Tsetzes tomadas de *Colecc.* VIII. Sí se sabe que entre los matemáticos árabes circularon algunos fragmentos y también se tienen algunos teoremas de *Colecc.* VI en la *Perspectiva* de Vitelo. La edición definitiva de la *Colección* en el siglo XVI es la que editó y tradujo F. Commandino (1588) y por tanto esta es la versión que leyeron los matemáticos europeos del siglo XVII. Así, el segundo momento de estudio de problemas de neusis se dio en el siglo XVII y tenemos al menos dos tratados sobre esta clase de problemas. El primero de estos tratados es el *Suplemento de geometría* (1593) de F. Vieta y el segundo se encuentra en las últimas once lecciones de las *Lecciones de álgebra* (1682–1683) de I. Newton.

Mención aparte merecen los múltiples intentos de restauración de los libros de las *Neusis* de Apolonio, el primero de estos intentos fue realizado por M. Ghetaldi (1607 y 1613) y el último fue realizado por W. A. Diesterberg (1823). Hay también dos ensayos contemporáneos sobre neusis: el primero de estos ensayos se encuentra en la segunda parte de la edición del séptimo libro de la *Colección* de Pappus, a cargo de A. Jones [Pap86], donde se limita a discutir muy brevemente los posibles métodos de solución que Apolonio pudo haber empleado. El segundo ensayo, de mayor extensión que el primero, se encuentra en la edición de las obras de Arquímedes por T. L. Heath [Arc10], en el cual revisa algunos ejemplos de neusis y los relaciona con algunos problemas que aparecen en la obra sobre *Líneas espirales* de Arquímedes.

Los dos libros de las *Neusis* de Apolonio, como los presenta Pappus en el libro VII de la *Colección*, tienen cabida en un programa mucho más amplio que es el del análisis geométrico y su papel en dicho programa es doble. En primer lugar, cuando Pappus presenta las obras que componen al campo del análisis geométrico sigue estrictamente su propuesta de clasificación de problemas (en planos, sólidos y lineales) y en este sentido las *Neusis* separan los problemas planos de los problemas sólidos, de manera tal que juegan un rol de transición entre una clase de problemas y otra. El orden que da Pappus a los libros que componen al campo del análisis sugiere que los problemas sólidos pueden ser resueltos mediante alguna neusis más o menos ingeniosa, pues con ligeras variaciones de una neusis plana se obtiene una neusis sólida que puede sustituir a alguna cónica en determinada construcción geométrica. Esta primera lectura que hacemos sobre el papel de las *Neusis* en el campo del análisis queda suficientemente justificada por los ejemplos de neusis que tenemos, pues todos ellos se pueden resolver por medio de cónicas (es decir que se trata de problemas sólidos) y estas soluciones vienen motivadas precisamente por una neusis, tal como nos dice Pappus respecto a la trisección angular.

En segundo lugar, en el séptimo libro nos encontramos que Pappus ofrece un corpus de lemas auxiliares para entender mejor (casi todas) las obras que componen al campo del análisis geométrico. Los lemas que están destinados para los dos libros de las *Neusis* se encuentran entre los lemas para los seis libros de la “triple sección” (i. e. *Sección en una razón*, *Sección en un área*, *Sección determinada*) y entre los dos libros de los *Contactos*, lo cual sugiere que las neusis pueden ser empleadas para resolver los problemas de contacto que involucran círculos. Además, este orden para los lemas de Pappus sugiere que lo que se quiere estudiar mediante el análisis geométrico son las líneas *Cónicas* (8 libros) y para llevar a cabo su estudio de manera eficiente y efectiva, Pappus nos propone dos caminos o vías diferentes que se complementan entre sí: la primera vía de estudio (que podemos llamar *vía problemática*) se desarrolla por medio de las cuatro obras siguientes: *Sección en una razón*, *Sección en un área*, *Sección determinada* y *Neusis*. La segunda vía (que podemos llamar vía teoremática) se desarrolla por medio de las tres obras siguientes: *Contactos*, *Lugares planos* y *Porismas*. Una vez que se han recorrido ambas vías, se llega por fin a las *Cónicas*, y se profundiza su estudio mediante los *Lugares sólidos* y los *Lugares superficiales* (véase el siguiente diagrama).

En suma, los problemas de neusis (junto con los problemas de la triple sección) permiten al geómetra introducirse en el estudio de las secciones cónicas a través de una aproximación problemática (que debe ser complementada con una aproximación teoremática), y como tendremos oportunidad de demostrar en este trabajo, las neusis están relacionadas con otro lugar geométrico: la concoide de Nicómedes.



Tengo que aclarar también dos cuestiones que son de suma importancia histórica. La primera de estas cuestiones es que cuando estudiamos los problemas de neusis, lo hacemos a través de Pappus y este se refiere a geómetras anteriores como "los antiguos” con suficiente razón, pues por ejemplo entre Pappus y Aristeo el Viejo hay 660 años, entre Pappus y Euclides hay 615 años, entre Pappus y Arquímedes hay 577 años, entre Pappus y Apolonio hay 552 años, &c. (esto es como si nosotros habláramos hoy de matemáticos de los años 1360–1470 y de matemáticos contemporáneos en una misma obra). De tal manera que debemos tener en cuenta que entre Pappus y “los antiguos” hay seis siglos que los separan. Por esta razón, a continuación incluyo una lista que contiene a todos los matemáticos mencionados en este trabajo, con la finalidad de que el lector pueda ubicarse (y ubicarlos a ellos) temporalmente con relativa facilidad.

Tales de Mileto (c. 624–546 a. C.)

Pitágoras de Samos (c. 569–475 a. C.)

Hipócrates de Quíos (c. 470–410 a. C.)

Hipias de Élide (c. 443–399 a. C.)

Arquitas de Tarento (c. 430–360 a. C.)

Platón (c. 427–347 a. C.)

Léodamas de Tarso (c. 427–380 a. C.)

Espeusipo (c. 408–339 a. C.)

Anfinomo (c. s. IV a. C.)

Eudoxo de Cnido (c. 390–337 a. C.)

Dinóstrato (c. 390–320 a. C.)

Aristóteles (c. 384–322 a. C.)

Menecmo (c. 380–320 a. C.)

Eudemo de Rodas (c. 370–300 a. C.)

Aristeo el Viejo (c. 370–300 a. C.)

Euclides (c. 325–265 a. C.)

Arquímedes (c. 287–212 a. C)

Nicómedes (c. 280–210 a. C.)

Filón de Bizancio (c. 280–220 a. C.)

Eratóstenes de Cirene (c. 276–194 a. C.)

Apolonio de Perga (c. 262–190 a. C.)

Diocles (c. 240–180 a. C.)

Teodosio de Trípoli (s. II–I a. C.)

Gémino de Rodas (s. I a. C.)

Herón de Alejandría (c. 10–70 d. C.)

Carpo de Antioquía (s. I o s. II d. C.)

Claudio Ptolomeo (c. 100–160 d. C.)

Diofanto (c. 200/214–284/298 d. C.)

Esporo de Nicea (c. 240–300 d. C.)

Pappus de Alejandría (c. 290–350 d. C.)

Proclo (c. 412–465 d. C.)

Marino de Neapolis (c. 440–500 d. C.)

Simplicio de Cilicia (c. 490–560 d. C.)

Abu al-Juarismi (780–850 d. C.)

Thabit ibn Qurrá (826–901 d. C.)

Al-^{c}Ala (¿?–¿?)

Abu al-Jud (s. x d. C.)

Abu al-Sijzi (945–1020 d. C.)

Abu Alhacén (965–1040 d. C.)

John Tzetzes (1110–1180)

Erasmo Vitelo (1230–1280)

Luca Pacioli (1447–1517)

Gerolamo Cardano (1501–1576)

Federico Commandino (1509–1575)

Rafael Bombelli (1526–1572)

Francisco Vieta (1540–1603)

Marino Ghetaldi (1568–1626)

Willebrord Snel (1580–1626)

Girard Desargues (1591–1661)

René Descartes (1596–1650)

Isaac Newton (1643–1727)

La segunda cuestión que debo aclarar tiene que ver con la *Colección* de Pappus, y es que toda vez que me refiera a esta obra me estaré refiriendo a la edición de F. Hultsch publicada entre 1876 y 1878 [Pap78]. Mas, debemos tener siempre en cuenta que los matemáticos del siglo XVII leyeron la versión que editó y comento F. Commandino en 1588. Se da por supuesto que la edición de Hultsch es mejor que la edición de Commandino en tanto que es más fiel al original, aunque no esté exenta de múltiples equivocaciones. Hay una traducción al inglés, basada en la edición de Hultsch, del cuarto libro de la *Colección* por H. Sefrin-Weis [Pap10] y del séptimo libro por A. Jones, [Pap86]) de los que hago uso con frecuencia. Sumado a esta nota aclaratoria, debo explicar el sistema de citas que empleo en este trabajo y la manera más fácil de hacer esto es con un par de ejemplos: la cita *Colecc.* VII.27 indica que me refiero al parágrafo 27 del libro VII de la *Colección* de Pappus; la cita *Elem.* V.25 indica que me refiero a la proposición 25 del libro V de los *Elementos*. Por lo tanto, el número en romanos refiere al libro, el número en indoarábigos refiere al parágrafo de ese mismo libro y en itálicas señalo el nombre de la obra en cuestión de manera abreviada.

Ahora bien, este trabajo lo desarrollo en dos partes de la siguiente manera. En la primera parte me ocupo de los problemas de neusis que desarrollaron los geómetras de la antigüedad clásica griega. Concretamente, en §1.1 propongo la definición del término griego *neusis* y explico qué quiere decir *construir una neusis* con las condiciones bajo las cuales se puede admitir dicha construcción en geometría. En las secciones §1.2 y §1.3 expongo los ejemplos de neusis que han llegado hasta nosotros y muestro cómo resolverlos mediante la curva auxiliar conocida como concoide, vista como el *locus* generado por una neusis. En las secciones §1.4–§1.6 presento las herramientas necesarias para el estudio adecuado de los problemas de neusis estudiados por Apolonio, es decir, me ocupo del análisis geométrico de los antiguos, de *Colecc.* VII y de los *Datos* de Euclides. Concluyo la primera parte con §1.7, donde realizo un estudio crítico sobre las *Neusis* de Apolonio, con base en lo que nos cuenta Pappus en el séptimo libro de su *Colección*.

En la segunda parte de este trabajo trato de justificar el paso de la matemática antigua a la matemática moderna, que se da a lo largo de la Edad Media y del Renacimiento por muy diversos mecanismos (usando como caso de estudio los problemas de neusis) y los estudios que realizan algunos matemáticos europeos del siglo XVII. Concretamente, en §2.1 explico de manera muy breve la transición de la cultura matemática griega a la Europa latina filtrada a través de la cultura matemática árabe y motivada por muy diversas razones. En §2.2 estudio la participación de dos matemáticos premodernos que están directamente involucrados con problemas de neusis: F. Vieta y M. Ghetaldi, pues el primero desarrolla un *método analítico* con el cual pretende recuperar el método del *análisis geométrico* de los antiguos y el segundo es quien hace la primera restauración de los dos libros de las *Neusis* de Apolonio. Por tanto, en §2.3–§2.4 realizo un estudio crítico sobre la reconstrucción de los dos libros de las *Neusis* llevada a cabo por Ghetaldi y publicada en dos momentos algo alejados entre sí: *Neus.* I en 1607 y *Neus.* II en 1613. Finalmente, en la sección § 2.5 estudio la relación entre los problemas de neusis sólidas, los problemas sólidos en general y las ecuaciones algebraicas de grados tres y cuatro a través del trabajo de F. Vieta y del trabajo de I. Newton.

Por último, quiero agregar la siguiente tabla que incluye la notación empleada a lo largo de este trabajo:

reg.$[ABCD]$	Región del plano comprendida por los vértices A, B, C, D.
lun.$[ABCD]$	Luna o lúnula comprendida entre los arcos arc.$[ABC]$, arc.$[ADC]$.
seg.$[ABC]$	Segmento o sección de círculo entre A, B, C.
cir.$[O, OA]$, cir.$[ABC]$	Círculo con centro en O y radio OA, círculo por los puntos A, B, C.

arc.$[AB]$	Arco de circunferencia con extremos AB.
semicir.$[ABC]$, semicir.$[AC]$	Semicírculo por B con base AC, semicírculo sobre la base AC.
trap.$[ABCD]$	Trapecio con vértices A, B, C, D.
paral.$[ABCD]$, paral.$[AD]$	Paralelogramo con vértices A, B, C, D, paralelogramo con diagonal AD.
rom.$[ABCD]$, rom.$[AD]$	Rombo con vértices A, B, C, D, rombo con diagonal AD.
rec.$[ABCD]$, rec.$[AD]$	Rectángulo con vértices A, B, C, D, rectángulo con diagonal AD.
rec.$[AB, CD]$	Rectángulo con lados AB, CD.
cuad.$[ABCD]$, cuad.$[AB]$	Cuadrado con vértices A, B, C, D, cuadrado sobre la recta AB.
cuad.$[AB]$	Cuadrado sobre la recta AB.
tri.$[ABC]$	Triángulo con vértices A, B, C.
áng.$[ABC]$, R	Ángulo con vértice B y patas BA, BC, ángulo recto.
$AB \perp CD$	Las rectas AB, CD son perpendiculares.
$AB \parallel CD$	Las rectas AB, CD son paralelas.
$A - B - C$	Los puntos A, B, C caen en la misma recta y el punto B está entre los puntos A, C.
$a : b :: c : d$	La razón entre a, b es la misma que la razón entre c, d, i. e. a, b, c, d son proporcionales.
$a : b < c : d, a : b > c : d$	La razón entre a, b es menor o mayor que la razón entre c, d.
$a : b :: b : c :: c : d$	b, c son dos medias proporcionales continuas entre a, d.
const.	Magnitud constante.

Parte 1

Problemas de neusis en la geometría de los antiguos

§1.1 Los problemas llamados neusis

En esta sección vamos a definir lo que entenderemos por un problema de neusis pero primero debemos decir cómo los antiguos geómetras helenos entendían lo que es un problema en geometría. Pappus nos dice en *Colecc.* VII.13–14 que los antiguos geómetras distinguían tres tipos de proposiciones en geometría, a saber: **teorema** como una proposición dirigida a *demostrar* lo que se propone (por ejemplo, los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales entre sí); (b) **problema** como una proposición dirigida a *construir* lo que se propone (por ejemplo, construir un triángulo equilátero sobre una recta dada); y (c) **porisma** como una proposición dirigida a *encontrar* lo que se propone; es una proposición que puede considerarse como un teorema o como un problema de lugar si se agrega cierta hipótesis faltante (por ejemplo, encontrar el centro de un círculo dado). Esta definición de porisma difiere esencialmente de otras definiciones, en contraste con las definiciones de teorema y de problema que son más o menos unívocas. (cf. [Pap86, pág. 94–96]).

La clasificación de las proposiciones de la geometría en teoremas, problemas y porismas no fue la única clasificación entre los antiguos geómetras, pues por ejemplo sabemos que Menecmo sostuvo la interesante propuesta de que todas las proposiciones de la geometría son problemas, pero que estos tienen un doble carácter: algunas veces el objetivo de un problema es proporcionar algo que se busca y otras veces el objetivo es ver qué o de qué tipo es, o qué calidad tiene, o qué relaciones guarda lo que se busca con respecto a un objeto geométrico determinado. También sabemos que Espeusipo (sobrino de Platón) y Anfinomo sostuvieron que todas las proposiciones de la geometría son teoremas y Proclo defiende ambos puntos de vista ya que en toda proposición geométrica hay propiedades tanto de teorema como de problema (cf. [Pro92, págs. 63–67]). Así, según la clasificación que nos propone Pappus, todas las proposiciones de neusis son problemas geométricos ya que todas ellas consisten en *construir una recta* con ciertas propiedades establecidas de antemano.

El término griego **neusis** (νηῦσις) significa **inclinación**, de manera que cuando los antiguos geómetras griegos decían que una recta hace una neusis (o se inclina) desde/hacia un punto dado, lo que se quería decir es que la recta y el punto tienen una relación de *incidencia*. Además de la relación de incidencia, a la recta se le imponía una magnitud determinada, de manera que el término neusis tenía un sentido geométrico técnico muy preciso que Pappus define así en *Colecc.* VII.27: **construir una neusis** significa construir una recta PF que (prolongada) cae sobre un punto dado C y corta a dos líneas dadas l, m (o a una misma línea dos veces) en puntos

F, P de tal manera que la recta PF es igual a una recta dada a (las líneas l, m no necesariamente tienen que ser rectas o círculos (Fig. 1.1)). En consecuencia, emplearé expresiones como "inclinar una recta en", "inclinar una recta hacia", "hacer una neusis en", "hacer una neusis desde", &c. como expresiones equivalentes a la expresión "construir una neusis" y todo problema que involucre la construcción de una neusis será llamado **problema de neusis**.[1]

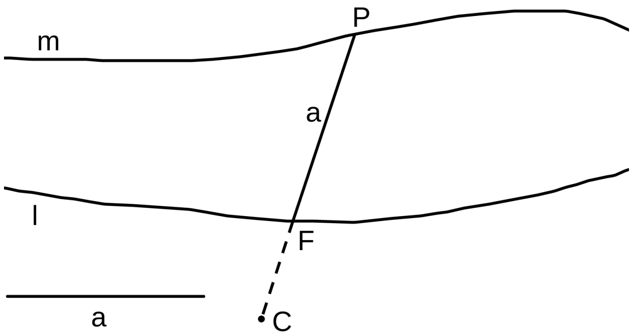


Fig. 1.1: La recta PFC hace una neusis en el punto C, pues corta a las líneas l, m en los puntos F, P determinando una recta PF igual a una recta dada a.

Tenemos al menos dos ejemplos donde una recta PF se inclina hacia un punto C cortando otras líneas con la condición de determinar *cierto par de áreas iguales* en lugar de cumplir con la condición de determinar *cierta recta igual a una recta dada*. El primero de estos ejemplos consiste en inscribir un heptágono regular, como nos ha llegado por una traducción hecha por Thabit ibn Qurrá de un supuesto trabajo de Arquímedes (cf. [Hog86, págs. 204–213] y [Kno89a]). El segundo ejemplo es la proposición *Colecc.* VII.232, que es un lema para un porisma contenido en el primer libro de los *Porismas* de Euclides (cf. [Pap86, pág. 292]). Ya que no sabemos si también esta clase de problemas (u otros problemas donde a la recta CFP se le imponen condiciones más complejas) eran llamados problemas de neusis, no

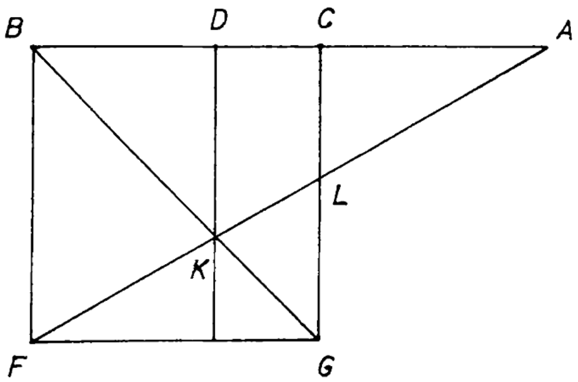


Fig. 1.2: Construcción arquimediana de un heptágono regular, donde se inclina una recta KA hacia un punto F de tal manera que hace a los triángulos tri.$[FGK]$, tri.$[CLA]$ iguales en área, cf. [Hog86].

[1]A las construcciones de neusis como las define Pappus se les suele llamar actualmente construcciones con una regla marcada, por ejemplo R. Hartshorne así las llama en [Har00, cap. 6].

nos ocuparemos de ellos en este trabajo. Mediante los ejemplos de neusis que expongo en la siguiente sección, veremos que en general la construcción de una neusis no es susceptible de llevarse a cabo solamente bajo el amparo de los axiomas y de los postulados euclidianos, ni siquiera si nos restringimos a que las líneas l, m sean rectas y/o círculos. Esto es claro dado el hecho que hay problemas tales como trisecar un ángulo cualquiera, insertar dos medias proporcionales continuas (o duplicar un cubo), inscribir un heptágono regular en un círculo dado, &c. que se pueden plantear en términos de rectas y círculos pero que no se pueden resolver solamente con rectas y/o círculos, sin embargo estos problemas *pueden ser reducidos* a uno de neusis.[2]

Debido a la poquísima información documental que tenemos acerca del desarrollo de las técnicas y de los métodos empleados en geometría (ni siquiera sabemos cómo se dio este desarrollo en el periodo más fructífero de las matemáticas griegas, el siglo III a. C.), tampoco sabemos desde cuándo ni para quiénes las construcciones de neusis tomaron un papel relevante en geometría [Pap86, págs. 527–529]. Ahora bien, dado el hecho que solamente rectas y círculos no son suficientes para construir una neusis en general, se deben dar las condiciones bajo las cuales la construcción de una neusis se acepta como una construcción válida en geometría. Y efectivamente, los antiguos geómetras helenos resolvieron que una neusis será una construcción válida si se justifica mediante alguno de los siguientes tres criterios:

1. Considerar la construcción de una neusis como un postulado adicional a los postulados euclidianos (Hipócrates, Arquímedes);

2. Asumir la posibilidad de construir líneas distintas de rectas y círculos y usar sus intersecciones para hacer una neusis (Nicómedes);

3. Asumir la posibilidad de construir superficies sencillas –planos, esferas, conos, cilindros, &c.– y las secciones que se obtienen de ellas, de las cuales usamos sus intersecciones para hacer una neusis (Arquitas).

Por tanto, se desarrollaron varias técnicas para resolver problemas de neusis (y problemas de otras clases) de una manera bastante desordenada que a la postre fue necesario organizar y clasificar. En esta dirección, Pappus propone en *Colecc.* III–IV la siguiente clasificación de los problemas en geometría: (a) los **problemas planos**

[2] Cuando digo *plantear un problema en términos de rectas y/o círculos* me refiero a que en la proposición del problema tanto los objetos dados como los objetos requeridos son rectas y/o círculos. Si además el objeto geométrico requerido que resuelve el problema se puede construir mediante rectas y círculos sujetas(os) a los axiomas y a los postulados euclidianos, entonces decimos que *el problema se puede resolver con rectas y/o círculos.*

son aquellos que se pueden resolver con rectas y círculos solamente (por ejemplo, inscribir un pentágono regular en un círculo dado); (b) los **problemas sólidos** son aquellos que se pueden resolver con rectas, círculos y cónicas (por ejemplo, inscribir un heptágono regular en un círculo dado); y (c) los **problemas lineales** son aquellos que además de rectas, círculos y cónicas requieren de otras líneas mecánicas para ser resueltos (por ejemplo, cuadrar un círculo dado). Sin embargo, esta clasificación pappusiana de problemas no parece ser tomada muy en cuenta por los antiguos geómetras, pues Pappus señala que en *Sobre espirales*, Props. 8–9 y en *Cónicas* V.51, Arquímedes y Apolonio, respectivamente, abusan de métodos sólidos para resolver problemas planos: ¡cosa indigna para un geómetra! –cf. [Pap86, págs. 529–530]-, y este hecho muestra que los intentos de organización son posteriores a Apolonio. En consecuencia puede haber tanto neusis planas como neusis sólidas y lineales (aunque de estas últimas no hay ejemplos que nos hayan llegado o de los cuales tengamos noticia) como vamos a ver en los ejemplos de la siguiente sección.

§1.2 Ejemplos de problemas de neusis

Tenemos algunos problemas de neusis aislados y dispersos que fueron planteados y resueltos antes de Apolonio pero que no representan ni son parte de un estudio sistemático sobre la clase de problemas que llamamos neusis. Los ejemplos que tenemos son estos: cuadrar una lúnula, trisecar un ángulo, insertar dos medias proporcionales continuas y un par de problemas de Arquímedes relacionados con espirales. La función principal de los ejemplos es la de indicar al lector cómo se realiza la construcción de una neusis en problemas concretos que podemos encontrar en la geometría de los antiguos, de manera que solo presento la construcción de la solución del problema y las demostraciones detalladas se pueden consultar en [Hea21a, cap. VII].

Ejemplo 1.1 (Cuadratura de lúnulas)**.** Este ejemplo tiene que ver con la cuadratura de ciertas lúnulas llevada a cabo por Hipócrates, quien es reconocido por haber sido el primero en componer un libro de *Elementos* de geometría, por demostrar que el problema de duplicar el cubo es equivalente al de insertar dos medias proporcionales continuas y por resolver seis problemas sobre cuadrar ciertas lúnulas. El primero de estos seis problemas consiste en cuadrar una lúnula cuya circunferencia interior es un cuadrante de otra circunferencia; el segundo se trata de cuadrar un semicírculo junto con tres lúnulas cuya circunferencia interior es un sextante de otra circunferencia;

los siguientes tres consisten en cuadrar una lúnula tal que su circunferencia exterior es igual, mayor y menor que una semicircunferencia, respectivamente, y el sexto problema se trata de cuadrar una lúnula y un círculo tomados juntos (cf. [Hea21a, págs. 183–200]). Esta colección de problemas sobre cuadraturas de lúnulas se encuentran en un comentario de Simplicio sobre la *Física* de Aristóteles, donde cita un fragmento de la *Historia de la geometría* de Eudemo, que los contiene, y aunque estas seis cuadraturas son todas ellas problemas planos, en la quinta cuadratura Hipócrates realiza una neusis de la siguiente manera:

Sea semicir.$[AEB]$ un semicírculo con centro K y base AB y sea $CD \perp BK$ la perpendicular que biseca al radio BK en el punto C. *Haciendo una neusis en el punto B* colocamos una recta EF entre la recta CD y la circunferencia cir.$[AEB]$ de longitud tal que

$$\text{cuad.}[EF] = \tfrac{3}{2}\,\text{cuad.}[AK], \quad (1.1)$$

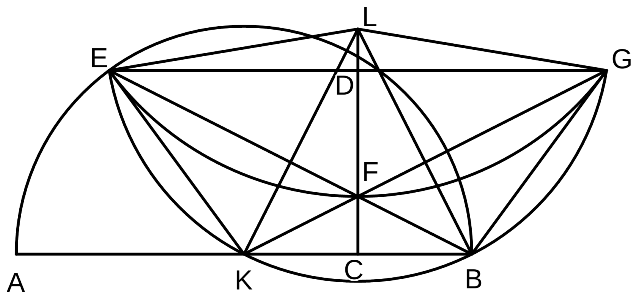


Fig. 1.3: Cuadratura de una lúnula cuya circunferencia exterior es menor que una semicircunferencia.

Unimos las rectas KE, KF y construimos la paralela $EG \parallel AB$ que corta a la recta KF prolongada en el punto G. Si unimos las rectas BF, BG, entonces el trapecio isósceles trap.$[EKBG]$ se puede inscribir en un círculo cir.$[EKBG]$ con centro L; y si cir.$[EFG]$ es el círculo que circunscribe al triángulo tri.$[EFG]$, entonces el segmento de circunferencia seg.$[EKBG]$ es menor que una semicircunferencia (porque el ángulo áng.$[EKG] < R$) (Fig. 1.3). Así, la lúnula lun.$[EKBGF]$ contenida entre las circunferencias cir.$[EKBG]$, cir.$[EFG]$ que se cortan en los puntos E, G queda cuadrada, pues se satisface la relación

$$\text{lun.}[EKBGF] = \text{reg.}[EKBGF]. \quad (1.2)$$

Esto es así porque si suponemos que ya tenemos la recta EF y realizamos la construcción anterior, entonces la lúnula lun.$[EKBG]$ es igual a la figura rectilínea reg.$[EKBGF]$ menos las dos secciones circulares iguales sobre las bases EF, FG más las tres secciones circulares iguales sobre las bases EK, KB, BG (usando el hecho de que la razón entre dos secciones circulares determinadas por una cuerda es igual a la razón entre los cuadrados de las cuerdas que las determinan). Pero como

2 cuad.$[EF] = 3$ cuad.$[AK]$, entonces 2 reg.$[EF] = 3$ reg.$[EK]$. Por lo tanto la lúnula lun.$[EKBG]$ es igual a la figura rectilínea reg.$[EKBGF]$.

El hecho de que este es un problema plano se sigue de la siguiente observación en términos algebraicos modernos: el problema consiste en encontrar una longitud $BF =: x$ tal que si tomamos al punto F sobre la recta BF, esta recta prolongada corta al semicírculo semicir.$[AEB]$ de radio $AK =: a$ en el punto E y determina una recta $FE = \sqrt{\frac{3}{2}}\, a$ entre la recta CD y la circunferencia de cir.$[AEB]$. Si suponemos que ya tenemos la recta BFE, entonces los triángulos tri.$[BEA]$, tri.$[BCF]$ son semejantes por el teorema AA y se satisface la relación

$$EB \cdot BF = AB \cdot BC = AK^2, \tag{1.3}$$

donde la segunda igualdad es una consecuencia inmediata de *Elem.* II.6. Esta relación es equivalente a la ecuación

$$\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\, a + x\right) x = a^2,$$

que a su vez es equivalente a la ecuación

$$\sqrt{\tfrac{3}{2}}\, a\, x + x^2 = a^2. \tag{1.4}$$

Resolver esta ecuación para x significa que, en términos de aplicación de áreas, a una recta de longitud $\sqrt{\frac{3}{2}}\, a$ se le aplica un rectángulo igual que el cuadrado a^2 y que exceda por un cuadrado x^2 (*Elem.* II.6). Por lo tanto, este es un problema plano que Hipócrates resuelve mediante una neusis: es una neusis plana. No está claro si Hipócrates conocía la relación (1.3), por lo que se ha sugerido que la recta EF se colocaba haciendo una neusis en B mediante un procedimiento "mecánico", lo cual se sigue del hecho de que Hipócrates traza la recta BF después de haber colocado la recta EF. Esto es lo que proponen tanto Zeuthen en [Zeu86, págs. 270-271] como Heath en [Hea21a, págs. 196]

Ejemplo 1.2 (Trisecar un ángulo)**.** Pappus nos narra en *Colecc.* IV.36 que los antiguos geómetras intentaron trisecar un ángulo agudo por métodos planos pero no les fue posible porque no se trata de un problema plano sino de uno sólido y dado que ellos no conocían las secciones cónicas, anduvieron errantes. Una vez que los antiguos geómetras se familiarizaron con las secciones cónicas, pudieron trisecar un ángulo dado por medio de ellas y la solución que dieron fue sugerida por la *reducción* del problema a uno de neusis.[3] Las soluciones que conocemos del problema de la trisección angular son las siguientes (cf. [Hea21a, págs. 235–244]):

1. La solución anónima por medio de neusis.
2. La solución de Pappus por medio de neusis.
3. La solución de Arquímedes por medio de neusis.
4. Las dos soluciones de Pappus por medio de cónicas.
5. La solución de Hipias y de Nicómedes mediante una cuadratriz, y
6. La solución de Pappus mediante una espiral arquimediana.

Pappus nos muestra cómo es la solución anónima y hace una generalización de esta en *Colecc.* IV.31–32 (cf. [Pap10, págs. 146–156]). Dichas soluciones van de la siguiente manera: sea áng.$[ABC]$ un ángulo agudo dado y bajamos la perpendicular $AC \perp BC$. Completamos el rectángulo paral.$[ACBF]$ y prolongamos el lado FA hasta un punto E. *Haciendo una neusis en el punto* B colocamos una recta DE entre el lado AC y el lado FA prolongado, de longitud tal que $DE = 2\,AB$. Sea H el punto que biseca a la recta DE y trazamos la recta AH (Fig. 1.4). Entonces el ángulo áng.$[ABC]$ queda trisecado por la recta BE, pues se satisface la relación

$$\text{áng.}[ABE] = 2\,\text{áng.}[EBC]. \tag{1.5}$$

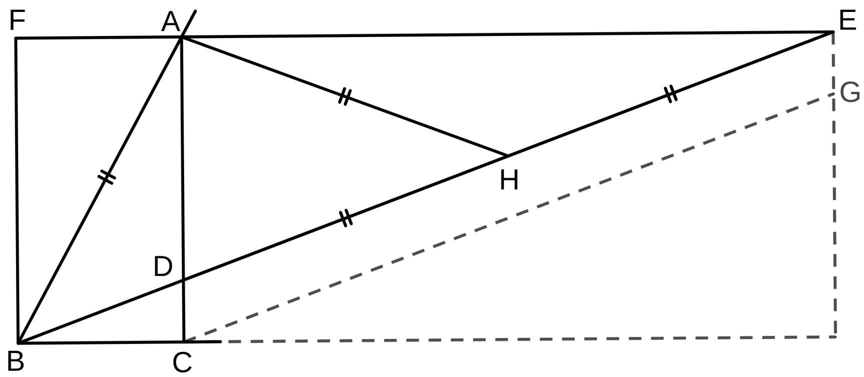


Fig. 1.4: Trisección de un ángulo agudo al modo de los antiguos.

[3]Esta reducción es pre-euclidiana y por lo tanto anónima. El hecho de que esta es pre-euclidiana se sigue del hecho de que Menecmo, el inventor de las cónicas, fue un geómetra anterior a Euclides y quizá esta solución es, a su vez, más antigua que Menecmo.

Esto es así porque si suponemos que ya tenemos la recta $DE = 2\,AB$ y realizamos la construcción anterior, entonces los triángulos tri.$[BAH]$, tri.$[AHE]$ son isósceles. De aquí se sigue que áng.$[ABE]$ = áng.$[AHB]$ = 2 áng.$[AEB]$ = 2 áng.$[EBC]$. Si el ángulo dado es obtuso, lo seccionamos en dos ángulos agudos, trisecamos a cada uno y sumamos las terceras partes. Para investigar la naturaleza de este problema, Pappus parte de la siguiente generalización de la construcción anterior: sea paral.$[ACBF]$ un paralelogramo dado (no necesariamente rectángulo) y *haciendo una neusis en el punto* B colocamos una recta $DE = k$ entre el lado AC y el lado FA prolongado, y si completamos el paralelogramo paral.$[DCEG]$, entonces $CG = DE$ (Fig. 1.5). De aquí se sigue que el punto G cae sobre la circunferencia del círculo cir.$[C, k]$ con centro C y de radio k. Además, por *Elem.* I.43 tenemos que rec.$[FA, AC]$ = rec.$[FE, DC]$. Es decir,

$$\text{rec.}[FA, AC] = \text{rec.}[FE, EG], \tag{1.6}$$

en consecuencia el punto G cae sobre la hipérbola rectangular que pasa por el punto C y cuyas asíntotas son FA, FB.

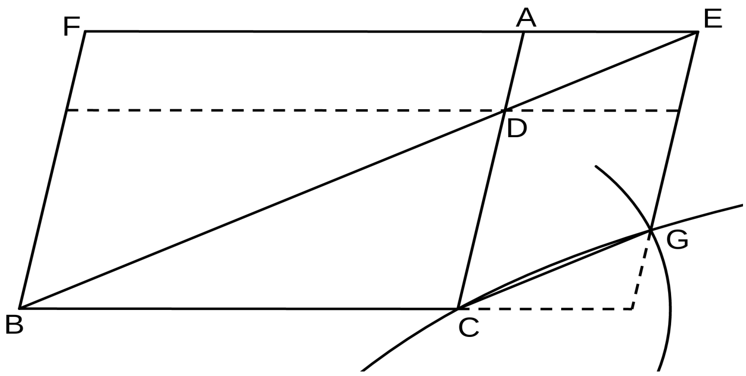


Fig. 1.5: Solución de Pappus para la trisección de un ángulo agudo.

Por tanto, para llevar a cabo la construcción de la recta BDE, tenemos que trazar la hipérbola (1.6) y el círculo cir.$[C, k]$ que se cortan en un punto G. Trazamos la paralela $GE \parallel CA$ que corta al lado FA prolongado en el punto E y por último trazamos la recta BE que corta al lado AC en el punto D. De esta construcción es evidente que si el paralelogramo paral.$[ACBF]$ es un rectángulo y si $DE = k = 2\,AB$, entonces la recta BDE es la trisectriz del ángulo áng.$[ABC]$, con lo cual queda demostrado que el problema de la trisección angular es un problema sólido[4].

[4]Si queremos seccionar el ángulo áng.$[ABC]$ en $n+1$ partes iguales entonces necesitamos que $DE = 2AB\sin(n\alpha)/\sin(2\alpha)$, donde α = áng.$[EBC]$. Esta relación se obtiene aplicando la ley de los senos a lo triángulos tri.$[ADH]$, tri.$[HEA]$ (tomando H sobre BE tal que $AH = AB$) y el teorema de Pitágoras en el triángulo tri.$[BCD]$.

En términos algebraicos modernos, lo que tenemos es que en este problema la neusis equivale a un polinomio de cuarto grado que se puede reducir a uno de tercer grado, pues si en la Fig. 1.4 hacemos a la recta FA el eje x, a la recta FB el eje y y si $FA = a, FB = b, 2\,AB = k$, entonces la solución del problema por medio de cónicas, de acuerdo a Pappus, consiste en encontrar la intersección del círculo y la hipérbola

$$\begin{cases} xy & = & ab \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 & = & 4(a^2+b^2), \end{cases} \tag{1.7}$$

o bien a encontrar las raíces de la ecuación bicuadrática

$$x^4 - 2ax^3 - 3(a^2+b^2)x^2 - 2ab^2x + a^2b^2 = 0. \tag{1.8}$$

En efecto, por una parte la ecuación del círculo (1.7) es equivalente a

$$x^2 - 2ax - 3a^2 = 3b^2 + 2by - y^2.$$

Si sumamos $0 = ax - ax$ en la parte izquierda, sumamos $0 = by - by$ en la parte derecha y asociamos, obtenemos

$$(x+a)(x-3a) = (b+y)(3b-y). \tag{1.9}$$

Por otra parte, la ecuación de la hipérbola (1.7) es equivalente a

$$xy + ay = ab + ay, \qquad \text{o bien} \qquad x + a = \frac{a(b+y)}{y}. \tag{1.10}$$

También, si en la hipérbola (1.7) si sumamos $-3ay$ y asociamos, entonces

$$x - 3a = \frac{a(b-3y)}{y}. \tag{1.11}$$

Sustituimos (1.10) y (1.11) en (1.9) para eliminar a la variable x:

$$\frac{a^2\cancel{(b+y)}(b-3y)}{y^2} = \cancel{(b+y)}(3b-y),$$

y finalmente obtenemos la ecuación cúbica

$$y^3 - 3by^2 - 3a^2y + a^2b = 0. \tag{1.12}$$

Si hacemos áng.$[ABC] =: \theta$, entonces tenemos que $\tan\theta = b/a$ y si hacemos $t = \tan[DBC]$ entonces se sigue que $t = y/a$, es decir $y = at$. Entonces, de (1.12) se sigue que

$$a^3t^3 - 3ba^2t^2 - 3a^3t + a^2b = 0. \tag{1.13}$$

Si cancelamos un factor a^2 y asociamos, se sigue que

$$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}, \quad \text{es decir} \quad t = \tan\tfrac{\theta}{3}, \tag{1.14}$$

donde la última igualdad se obtiene de la identidad trigonométrica para la tangente del triple de un ángulo. También podemos usar relaciones análogas a las ecuaciones (1.10) y (1.11) en (1.9) para eliminar a la variable y, resultando una ecuación para la variable x de la forma $x^3 - 3ax^2 - 3b^2x + ab^2 = 0$. Si hacemos $\cot\theta = a/b$ y notamos que $\cot[DBC] = \cot[FEB] = x/b = t$, es decir $x = bt$, entonces obtenemos la relación $b^3t^3 - 3ab^2t^2 - 3b^3t + b^2a = 0$. Por tanto, se sigue que $t = \cot\frac{\theta}{3}$. Concluimos por tanto que la recta BD triseca al ángulo áng.$[ABC]$.

Ejemplo 1.3 (Trisección angular arquimediana)**.** El contenido de este ejemplo es la Prop. 8 del *Libro de lemas* (*Liber assumptorum*), erróneamente atribuido a Arquímedes aunque algunos de los problemas contenidos en esta obra pueden tener su origen en Arquímedes y es casi seguro que son de origen griego,[5] cf. Jones [Pap86, pág. 528]. En particular, la Prop. 8 puede ser de origen arquimediano porque es muy parecida a las neusis que aparecen en *Sobre espirales*, Props. 5–8, como veremos en el Ejemplo 1.5 (cf. [Hea21a, págs. 240–241]).

La trisección angular que aparece en la Prop. 8 del *Libro de lemas* va de esta manera: sea arc.$[AE]$ el arco del círculo cir.$[O, r]$ con centro O y de radio r que subtiende un ángulo central áng.$[AOE]$ y prolongamos el radio EO que corta al círculo cir.$[O, r]$ otra vez en un punto D. *Haciendo una neusis en el punto* A colocamos una recta BC de longitud $BC = r$ entre el arco arc.$[AD]$ de la circunferencia cir.$[O, r]$ y el diámetro prolongado EOD (Fig. 1.6). Trazamos la cuerda paralela $EF \parallel AB$ y

[5] El *Libro de lemas* es atribuido a Arquímedes por Thabit ibn Qurrá, quien realizó una traducción del griego al árabe. La versión original en griego no se conoce pero pudo haber sido realizada por un geómetra tardío con el fin de popularizar y aclarar algunas proposiciones arquimedianas, cf. [Arc10, págs. XXXII–XXXIII].

unimos las rectas OB, OF. Entonces el diámetro prolongado EC determina un arco arc.$[BD]$ en el círculo cir.$[O, r]$ igual a una tercera parte del arco arc.$[AE]$, pues

$$\text{áng.}[FOC] = 2\ \text{áng.}[BOC]. \tag{1.15}$$

Esto es así porque si suponemos que ya tenemos la recta $BC = r$ y realizamos la construcción anterior, entonces los triángulos tri.$[EFO]$, tri.$[OCB]$ son isósceles y congruentes. De esto se sigue que áng.$[FOC] = 2$ áng.$[OEF] = 2$ áng.$[BCO] = 2$ áng.$[BOC]$ y por tanto que el ángulo áng.$[BOC]$ es una tercera parte del ángulo áng.$[BOF] =$ áng.$[AOE]$. Como veremos al final de esta sección, este es un caso particular de los problemas sólidos del Ejemplo 1.5, y en consecuencia este problema es una neusis sólida también. Es fácil ver que las dos construcciones del Ejemplo 1.2 y del Ejemplo 1.3 para trisecar un ángulo son realmente equivalentes (véase la Fig. 1.7). Por una parte, si en la Fig. 1.4 trazamos el círculo cir.$[A, AB]$, prolongamos la recta AF hasta cortar al círculo en un punto B' y trazamos la paralela $B'G' \parallel BG$, entonces obtenemos la configuración de la Fig. 1.6 y en esta nueva configuración estamos trisecando al ángulo áng.$[G'AG]$ puesto que áng.$[G'AG] =$ áng.$[B'AB] =$ áng.$[ABC]$. Por otra parte, si en la Fig. 1.6 completamos el rectángulo rec.$[AA'OO']$, entonces obtenemos la configuración de la Fig. 1.4

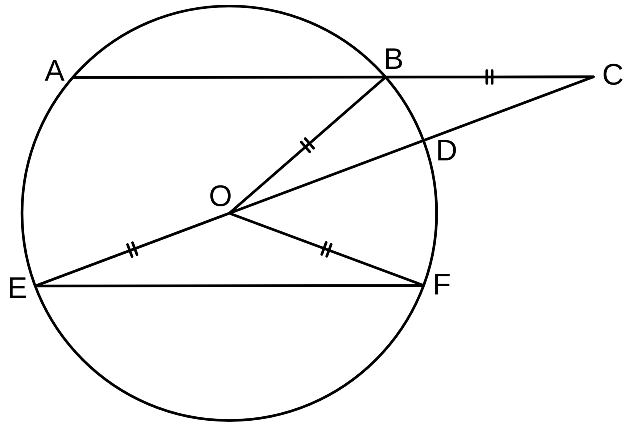


Fig. 1.6: Trisección de un ángulo agudo al modo de Arquímedes.

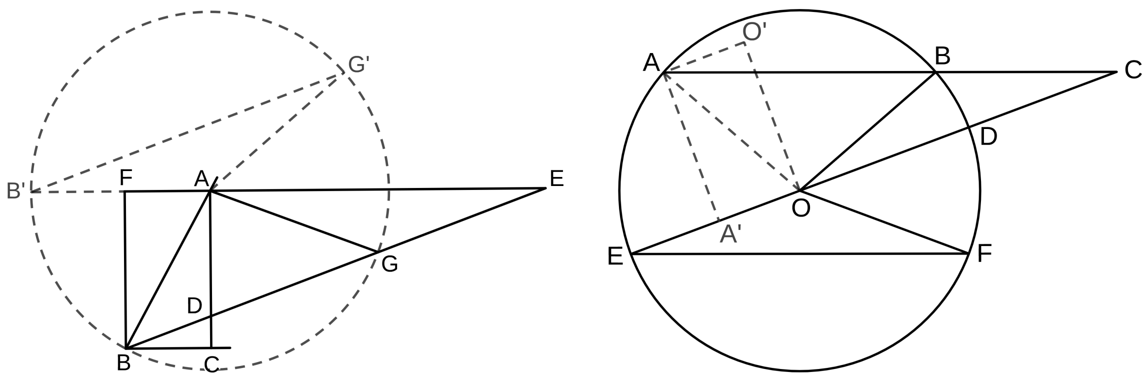


Fig. 1.7: Equivalencia entre las construcciones para trisecar un ángulo.

y estamos trisecando el ángulo áng.$[OAO']$, ya que se satisface que áng.$[OAO']$ = áng.$[AOA']$ = áng.$[BOF]$.

Ejemplo 1.4 (Duplicar un cubo)**.** Como dijimos en el primer ejemplo, Hipócrates *redujo* el problema de duplicar un cubo dado al problema de insertar dos medias proporcionales en proporción continua entre dos rectas dadas, donde la mayor es el doble de la menor. En efecto, en términos algebraicos modernos tendríamos que si x, y son dos medias proporcionales entre las rectas dadas a, b, es decir si

$$a : x = x : y = y : b, \quad \text{entonces} \quad \frac{a}{b} = \frac{xy}{b^2} = \frac{xy}{(y^2/x)^2} = \frac{x^3}{y^3}. \tag{1.16}$$

Y si $a = 2b$, entonces $x^3 = 2y^3$. Por tanto, el cubo queda duplicado.

Una vez que Hipócrates demostró la equivalencia entre la duplicación del cubo y la inserción de dos medias proporcionales continuas, los geómetras intentaron resolver lo segundo, resultando un gran número de soluciones al problema de la duplicación del cubo (cf. [Hea21a, págs. 244–270]):

1. La solución de Arquitas por medio de líneas que se obtienen intersecando un cono, un cilindro y un círculo que gira alrededor de una tangente.

2. La solución de Eudoxo por medio de ciertas líneas curvas (¿una proyección plana de la solución de Arquitas?).

3. Las dos soluciones de Menecmo intersecando dos parábolas o una parábola y una hipérbola.

4. Una solución mecánica que Simplicio atribuye a Platón.

5. La solución mecánica de Eratóstenes que emplea triángulos rectángulos congruentes (o rectángulos congruentes) entre dos paralelas, que se pueden desplazar paralelamente con respecto a su posición inicial.

6. La solución de Nicómedes, reduciendo el problema a una neusis que resuelve, a su vez, por medio de una concoide.

7. La solución de Apolonio, de Herón y de Filón –independientes entre sí– intersecando un círculo y una hipérbola.

8. La solución de Diocles, de Esporo y de Pappus –independientes entre sí– por medio de una cisoide, y

9. Una aproximación por métodos planos que Pappus expone en *Colecc.* III, que en el límite es una solución.

Nicómedes resolvió el problema mediante una neusis de la siguiente manera: sean AB, BC las dos rectas entre las cuales se quiere insertar dos medias proporcionales en proporción continua, colocadas perpendicularmente desde uno de sus extremos. Completamos el paralelogramo paral.$[ABCL]$ y bisecamos las rectas AB, BC en D, E, respectivamente. Trazamos la recta LD y la prolongamos hasta cortar a la recta CB prolongada en G. Trazamos la perpendicular $EF \perp BC$ de longitud tal que $CF = AD$ y trazamos las paralelas $GF \parallel CH$. *Haciendo una neusis en el punto* F colocamos una recta HK entre las rectas CH, BC (prolongadas), de longitud tal que $HK = CF = AD$ (Fig. 1.8). Trazamos la recta KL y la prolongamos hasta cortar a la recta BA prolongada en un punto M. Entonces las rectas CK, MA son las medias proporcionales buscadas, es decir

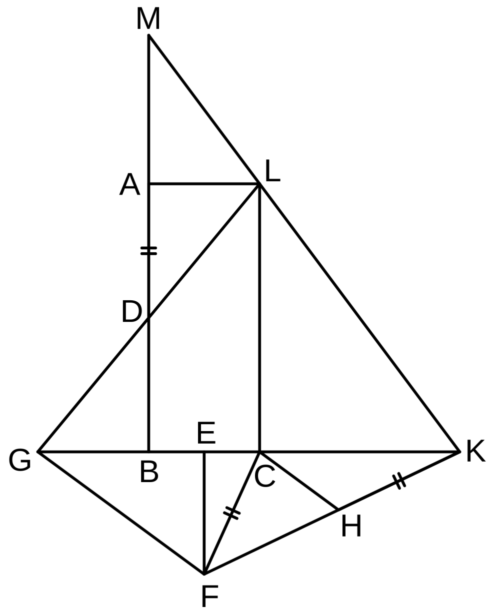


Fig. 1.8: Inserción de dos medias proporcionales continuas por el método de Nicómedes.

$$AB : CK = CK : MA = MA : BC. \tag{1.17}$$

Esto es así porque si suponemos que ya tenemos la recta $HK = AD$ y realizamos la construcción anterior, entonces por *Elem.* II.6 en la recta $BECK$ tenemos que $BK \cdot KC + CE^2 = EK^2$ y sumando el cuadrado EF^2 obtenemos la relación (1) $BK \cdot KC + CF^2 = KF^2$ y dado que $MB \parallel LC, AB = 2\,AD, GC = 2\,BC, DA = HK$, entonces obtenemos que $MD = FK$ y de nuevo por *Elem.* II.6 en la recta $BDAM$, tenemos que (2) $BM \cdot MA + DA^2 = DM^2$. De estas dos relaciones obtenemos la relación (3) $BK \cdot KC + CF^2 = BM \cdot MA + DA^2$. Pero como $DA = CF, BM \parallel CL, AL \parallel BK$, entonces concluimos que $AB : CK = CK : MA = MA : BC$.

La recta HK que se coloca entre las rectas CH, CK haciendo una neusis en el punto F se puede colocar también mediante la intersección de una circunferencia y una hipérbola siguiendo la construcción de Pappus mostrada en el Ejemplo 1.2, por lo que esta es una neusis sólida también.

Ejemplo 1.5 (Sobre espirales)**.** En este ejemplo revisamos cinco instancias de neusis en la obra arquimediana *Sobre espirales* (cf. [Arc10, págs. C–CXXII]), que se encuentran antes de las definiciones y que son resultados necesarios para establecer los resultados principales sobre las líneas espirales (en particular, construir una tangente y con ella corregir la circunferencia), aunque dichos resultados se pueden establecer sin necesidad de una neusis como bien lo demuestra W. Knorr en [Kno78a, Kno78b]. En las Props. 5–7 de *Sobre espirales*, Arquímedes hace uso de tres casos particulares de un problema general que podemos formular así:

Problema 1 (Arquímedes 1)**.** Dada una recta k y dado un punto A sobre una circunferencia dada cir.$[ABC]$ con diámetro BC, colocar una recta PR de longitud igual a k entre la circunferencia cir.$[ABC]$ y el diámetro BC prolongado (Fig. 1.9).

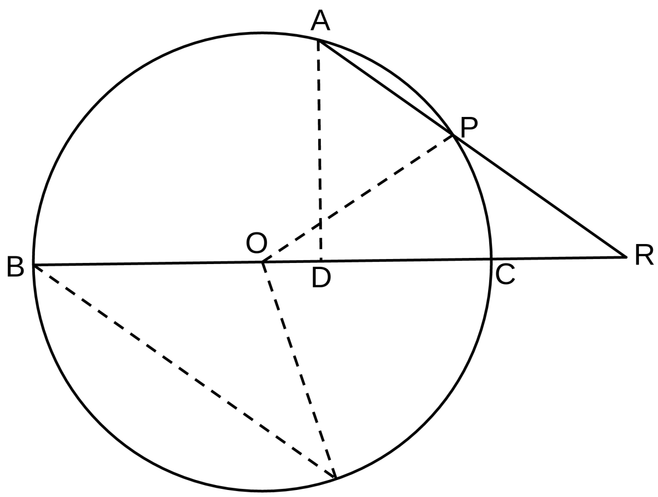


Fig. 1.9: Neusis en *Sobre espirales*, Props. 5–7.

Es claro que este es un problema de neusis entre una circunferencia y una recta secante. La Prop. 5 se trata del caso en el que la tangente por A es paralela al diámetro BC y se pide que $FP : OP <$ arc.$[AP] : c$, si el radio OP prologado corta a la tangente por A en el punto F y si c es la longitud de la circunferencia cir.$[ABC]$; la Prop. 6 se trata del caso $P - A - R$ y se pide que $FP : PA = D : E$, si F es el punto donde se cortan la cuerda paralela a BC por A y el radio OP prolongado, M es el punto medio de esta cuerda y $D : E$ es una razón dada tal que $D : E < AM : MO$; la Prop. 7 se trata del caso $A - P - R$ y se pide que $FP : PA = D : E$, si F es el punto donde se cortan la cuerda paralela a BC por A y el radio OP prolongado, M es el punto medio de esta cuerda y $D : E$ es una razón dada tal que $D : E > AM : MO$. Notemos que si en este problema hacemos $PR = k = OP$, entonces estamos en el caso del Ejemplo 1.3, donde se trata de trisecar un ángulo. De este hecho se sugiere que la Prop. 8 del *Libro de lemas* es de origen griego.

El hecho de que este problema es sólido se sigue de la siguiente observación: si hacemos $OR =: x$, con O el punto medio del diámetro BC, $OD =: a$, $AD =: b$ y $BC =: 2c$, entonces de la relación $AR{\cdot}RP = BR{\cdot}RC$ (que es válida para cualquier cuerda BC) se sigue que, en términos modernos, tenemos la ecuación

$$\sqrt{b^2 + (x-a)^2}\, k = (x+c)(x-c).$$

Después de racionalizar y asociar obtenemos una ecuación bicuadrática:

$$x^4 - (2c^2 + k^2)x^2 + 2ak^2x + c^4 - k^2a^2 - k^2b^2 = 0. \tag{1.18}$$

De otra manera: si hacemos $y := AR = \sqrt{b^2 + (x-a)^2}$, tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y^2 &= (x-a)^2 + b^2 \\ ky &= x^2 - c^2 \end{cases} \tag{1.19}$$

Es decir, los valores de x, y que satisfacen las condiciones del problema se pueden determinar como los puntos de intersección de la hipérbola rectangular y de la parábola (1.19). Por tanto, este es un problema de neusis sólido y en consecuencia el problema del Ejemplo 1.3 es un problema de neusis sólido también. Nótese además que en el caso particular en el que los puntos D, O coinciden, es decir el caso cuando el punto A es un extremo del diámetro perpendicular que biseca al diámetro BC (o cuando $a = 0$), el sistema de ecuaciones (1.19) se reduce al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y^2 &= x^2 + b^2 \\ ky &= x^2 - c^2 \end{cases}$$

Si restamos estas ecuaciones obtenemos la ecuación equivalente $y^2 - ky = b^2 + c^2$, que es una ecuación cuadrática soluble por medio de aplicación de áreas, pues si hacemos $u := y - k = AP$, entonces esta ecuación se convierte en la ecuación

$$ku + u^2 = b^2 + c^2, \tag{1.20}$$

y se trata entonces de aplicarle a la recta k un rectángulo que sea igual a un cuadrado $d^2 = b^2 + c^2$ y que exceda por un cuadrado u^2 (*Elem.*

II.6). Por lo tanto, en este caso particular el problema de neusis sólido se reduce a un problema de neusis plano y este es el único caso porque es la única forma de eliminar el término lineal $2ak^2x$ de (1.18). En términos del Ejemplo 1.3, este caso particular del problema equivale a trisecar un ángulo recto.

En la página 6, a propósito de la clasificación pappusiana de problemas, dijimos que Pappus critica las Props. 8–9 de *Sobre espirales* porque Arquímedes hace uso de una neusis sólida. Sin embargo, en la solución que Pappus propone en *Colecc.* IV, Props. 42–44 intervienen una parábola y una hipérbola como en (1.19), con lo cual queda establecido que el problema es sólido. No está claro qué es exactamente lo que critica Pappus, pero en los artículos de Knorr [Kno78a, Kno78b] se proponen soluciones planas para versiones más débiles de las Props. 8–9 que son suficientes para lo que Arquímedes hace con ellas en las Props. 17–18: corregir la circunferencia. En las Props. 8–9 Arquímedes asume otro resultado sobre neusis que podemos formular así:

Problema 2 (Arquímedes 2)**.** Dado un punto A sobre una circunferencia dada cir.$[ABEC]$ y dadas dos cuerdas perpendiculares $ADE \perp BDC$ tales que $BD > DC$, colocar una recta RP entre la circunferencia cir.$[ABEC]$ y la cuerda BC, de longitud $RP = DE$ (Fig. 1.10).

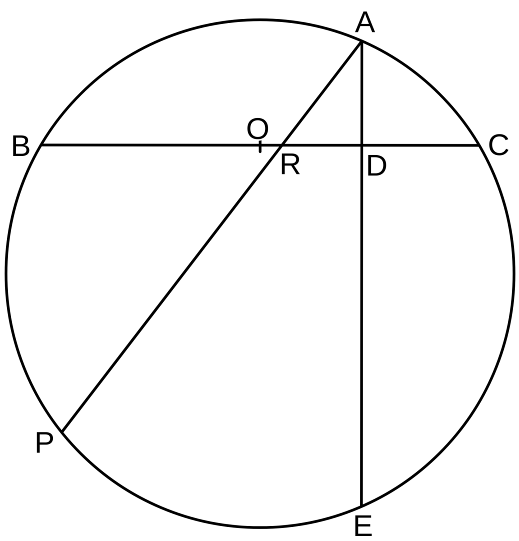


Fig. 1.10: Neusis en *Sobre espirales*, Props. 8–9.

También está claro que este es otro problema de neusis entre una circunferencia y una recta secante. En la Prop. 8 se afirma que se puede construir una recta AFG tal que $FG : DR = H : I$, con G el punto donde la recta ARP corta al círculo cir.$[A, AD]$, F el punto donde se cortan la recta ARP y la cuerda de cir.$[A, AD]$ paralela a AC por D y $H : I$ es una razón dada tal que $H : I < DM : MA$, con M el punto medio de esta cuerda. En la Prop. 9 se afirma que se puede construir una recta AGF tal que $FG : DR = H : I$, con G el punto donde la recta ARP corta al círculo cir.$[A, AD]$, F el punto donde se cortan la recta ARP y la cuerda prolongada de cir.$[A, AD]$ paralela a AB por D y $H : I$ es una razón dada tal que $H : I > DM : MA$, con M el punto medio de esta cuerda.

Como dijimos arriba, este problema también es sólido y puede generalizarse si permitimos que el segmento PR tome cualquier valor k en un intervalo entre cero y un cierto máximo, lo cual equivale a permitir que las cuerdas AE, BC no sean perpendiculares. Si hacemos $OR =: x$, con O el punto medio de la cuerda BC, $OD =: a$, $AD =: b$ y $BC =: 2c$, como en el Problema 1, entonces de la relación $AR \cdot RP = BR \cdot RC$ se sigue que en términos algebraicos modernos tenemos la relación

$$k\sqrt{b^2 + (a-x)^2} = c^2 - x^2,$$

que se obtiene exactamente de la misma manera que en el Problema 1, y racionalizando obtenemos la ecuación de cuarto grado

$$x^4 - (2c^2 + k^2)x^2 + 2ak^2x + c^4 + k^2b^2 - k^2a^2 = 0. \tag{1.21}$$

De otra manera: si hacemos $y := AR = \sqrt{b^2 + (a-x)^2}$, entonces tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y^2 &= (a-x)^2 + b^2 \\ ky &= c^2 - x^2 \end{cases} \tag{1.22}$$

Es decir, los valores de x, y que satisfacen las condiciones del problema se pueden determinar como los puntos de intersección de una hipérbola rectangular y una parábola y el valor máximo de k se alcanza cuando estas dos cónicas son tangentes. Por tanto, esta es otra neusis sólida.

También para este problema, en el caso particular en el que los puntos D, O coinciden, i. e. cuando la cuerda AE es el diámetro perpendicular que biseca a la cuerda BC (cuando $a = 0$), el sistema de ecuaciones (1.22) se reduce a la ecuación equivalente $y^2 - ky = b^2 - c^2$, que es una ecuación cuadrática soluble por medio de aplicación de áreas, pues si hacemos $u := y + k = AP$, tenemos la ecuación equivalente

$$ku + u^2 = b^2 - c^2,$$

y se trataría entonces de aplicarle a la recta k un rectángulo que sea igual a un cuadrado $d^2 = b^2 - c^2$ y que exceda por un cuadrado u^2. Por lo tanto, este es el único caso particular en el que el problema se reduce a una neusis plana porque eliminamos el término lineal de (1.21). Notemos además que este es precisamente el caso del Ejemplo 1.1 con $PR^2 = \frac{3}{8}AE^2$, donde se trata de cuadrar una lúnula.

Nota 1. Ya que en el Ejemplo 1.2 y en el Ejemplo 1.3 he hablado del problema de trisecar un ángulo agudo cualquiera y en el Ejemplo 1.4 hablamos del problema de duplicar un cubo (y de sus soluciones) y puesto que estos son dos de los llamados tres "problemas clásicos" de la geometría griega, por completud en esta nota hago un comentario sobre el tercero de los problemas clásicos: cuadrar un círculo. Este problema tuvo también varias propuestas de solución (ninguna involucra neusis), pero aquí listo sólo aquellas que efectivamente resuelven el problema (cf. [Hea21a, págs. 220–235], [Kno89b, Kno86]):

1. La solución de Dinóstrato y de Nicómedes mediante el uso de una cuadratriz.

2. La solución de Arquímedes por medio de una espiral.

3. Las soluciones de Apolonio por medio de una línea que él llamó "hermana de la concoide" (¿la hélice cilíndrica?).

4. Las soluciones de Carpo por medio de una línea de doble movimiento (¿la cicloide?).

Históricamente, las concoides de Nicómedes se ubican entre las neusis de Arquímedes contenidas en su obra *Sobre espirales* y las neusis de Apolonio que se encontraban en su obra *Neusis*. De hecho, en la solución que da Nicómedes para hallar dos medias proporcionales en proporción continua (Ejemplo 1.4), la recta HK se coloca mediante una concoide. Por esta razón, antes de empezar al estudio de las *Neusis* de Apolonio vamos a estudiar las líneas llamadas concoides o cocloides, de las cuales sabemos que Nicómedes escribió un libro que se ha perdido.

§1.3 Las concoides de Nicómedes

La definición más general de neusis que proporciona Pappus (ver págs. 3–4) nos habla de un par de líneas l, m dadas (o una sola línea cortada dos veces) y un punto C dado. Hacer una neusis en el punto C significa adecuar una recta PF de tal manera que el punto F cae sobre la línea l, el punto P cae sobre la línea m y la recta PF es igual a una recta a dada. Es fácil pensar en un "instrumento" que nos permita trazar una línea continua c sobre la que cae el punto P para cada recta que cae sobre el punto C, siempre que el punto F recorra la línea l y que se cumpla la propiedad $PF = a$. Así, la recta PF que queremos adecuar entre las líneas l, m es aquella que pasa por C cuando se prolonga y pasa por el/los punto(s) P donde se cortan las líneas c, m. A la línea auxiliar c la llamamos **concoide o cocloide de** l, a la línea l la llamamos **base**, al punto C lo llamamos **polo** y a la recta $FP = a$ la llamamos **distancia**. Las líneas m, c pueden cortarse más de una vez y cada corte determinaría una solución del problema (Fig. 1.11). De esta manera podemos ver a una concoide como el *locus o lugar* de todas las neusis entre l, m desde C.

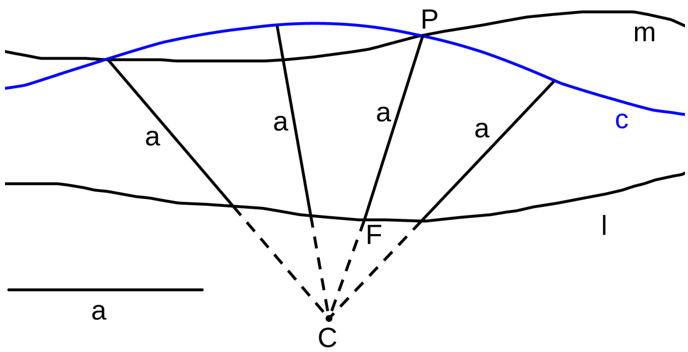


Fig. 1.11: Línea auxiliar c para resolver problemas de neusis.

Podemos considerar casos simples del problema general de neusis, por ejemplo aquellos donde las líneas dadas l, m son rectas y círculos, obteniendo así estos cuatro casos: (1) un círculo cortado dos veces, (2) un círculo (cortado una vez) y una recta, (3) dos rectas y (4) dos círculos (cortados una vez cada uno de ellos). Estos cuatro casos simples formaban el contenido de los dos libros de las *Neusis* de Apolonio cuando agregamos ciertas restricciones al punto donde se realiza la neusis tales que nos permitan construirla por métodos planos. Un quinto caso consiste de una recta l y una línea m, que en general no se puede resolver mediante rectas, círculos y cónicas. Este problema fue resuelto por Nicómedes y se trata de un problema lineal porque involucra una línea llamada **concoide de Nicómedes** (o simplemente concoide), que es una concoide cuya base es una recta l (Fig. 1.12).

La construcción de la concoide de Nicómedes puede llevarse a cabo de la siguiente manera: sea $l = AB$ una recta que tomamos como base, sea una perpendicular $FE \perp AB$ con pie en F y consideremos un punto dado C sobre la perpendicular EF prolongada, al cual tomamos como polo. Sea una recta PC tal que corta a la base en un punto D y tal que el segmento PD es igual a la distancia dada a. Si "movemos" la recta PC alrededor del polo de tal manera que el punto D recorra la base AB, entonces los puntos P caen en una línea que llamamos concoide de Nicómedes, vista como lugar geométrico o locus.

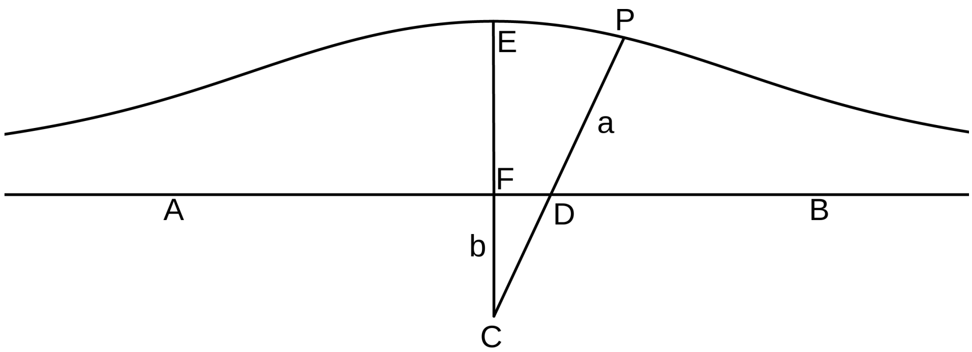


Fig. 1.12: Concoide de Nicómedes.

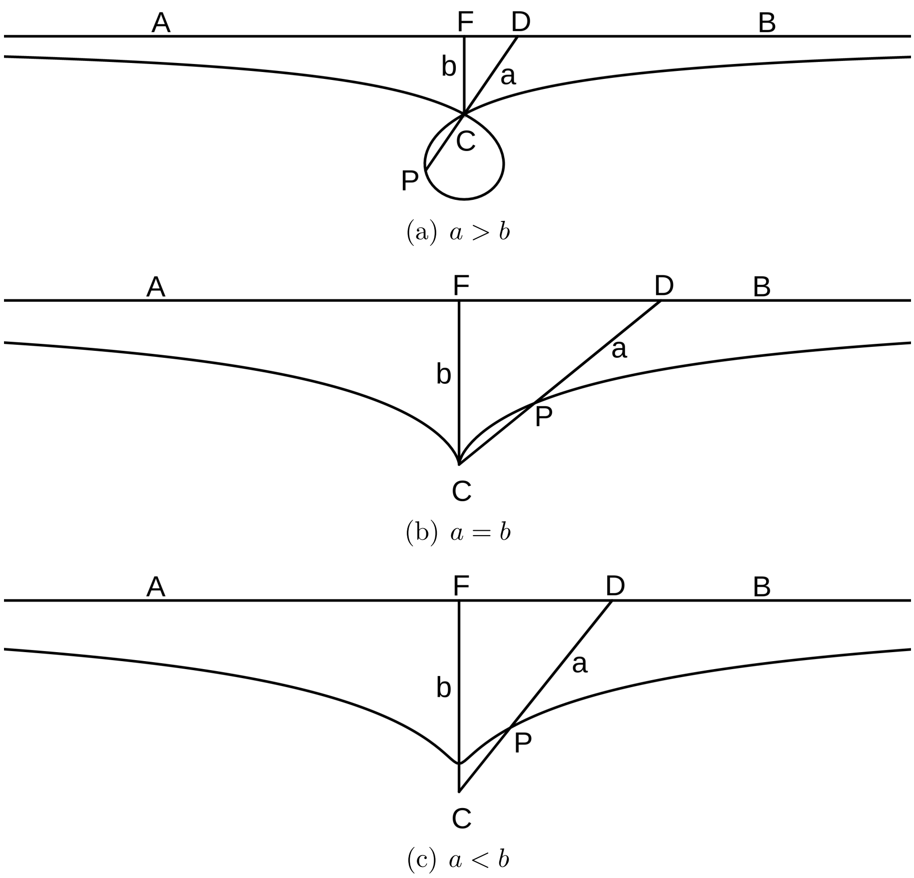


Fig. 1.13: Tres variaciones de la concoide de Nicómedes.

En *Colecc.* IV. 26–29, Pappus habla de cuatro variedades de concoides que presumiblemente fueron extraídas del tratado original de Nicómedes. La primera variedad es aquella que se empleaba para trisecar un ángulo y duplicar un cubo, por lo que debe tratarse de la que acabamos de describir (Fig. 1.12). Las otras tres variedades posiblemente corresponden a variaciones de las condiciones del problema: por ejemplo si tomamos al punto P entre el polo C y el punto D de la base, entonces tenemos tres tipos de concoide según si (a) $PD > FC$, (b) $PD = FC$ o (c) $PD < FC$ como en la (Fig. 1.13).

> La propiedad fundamental o *symptoma* de esta línea la podemos formular en términos modernos así: como cualquier radiovector $\overrightarrow{CP}$ desde el polo C corta a la base AB en un punto D y corta a la concoide en un punto P tal que $PD = \text{const.}$, si hacemos $PD =: a, FC =: b$, al polo C lo tomamos como origen, a la perpendicular $EF \perp AB$ la tomamos como eje polar (con F el pie de la perpendicular) y si áng.$[FCD] =: \theta$, entonces en coordenadas polares se tiene que el *symptoma* de la concoide es
>
> $$r = a \pm b \sec\theta. \tag{1.23}$$

Está claro que mediante una concoide podemos resolver cada uno de los problemas de neusis mostrados en los cinco ejemplos de la sección anterior, porque en todos ellos una de las dos líneas de la neusis es una recta que podemos usar como base de la concoide, el punto desde donde se realiza la neusis lo usamos como polo y la recta que deseamos colocar la tomamos como la distancia. En efecto,

1. En el Ejemplo 1.5 (Prob. 2), y en consecuencia en el Ejemplo 1.1 (cuadratura de lúnulas) por ser un caso particular, podemos colocar la recta PR por medio de una concoide con polo en A, base BC y distancia DE (o una distancia k en general), pues esta concoide corta a cir.$[ABC]$ en un punto P. Así, basta con trazar la recta ARP, donde R es la intersección de AP, BC, pues por el *symptoma* de la concoide se da que $PR = k$ (Fig. 1.14 (a)). De la misma manera, en el Ejemplo 1.5 (Prob. 1), y en el Ejemplo 1.3 como un caso particular, podemos colocar la recta PR por medio de una concoide con polo en A, base BC y distancia k, pues esta concoide corta a cir.$[ABC]$ en un punto P. De este modo, basta con trazar la recta APR, donde R es la intersección de las rectas AP, BC prolongadas, pues por el *symptoma* de la concoide se tiene que $PR = k$ (Fig. 1.14 (b)).

Estos cuatro problemas de neusis son instancias del problema general de hacer una neusis entre un círculo y una recta secante, desde un punto sobre su circunferencia. El hecho de que la concoide corta al círculo en un par de puntos P, P' indica que las rectas AP, AP' producen una solución cada una de ellas (porque la parábola y la hipérbola (1.18) se cortan en cuatro puntos).

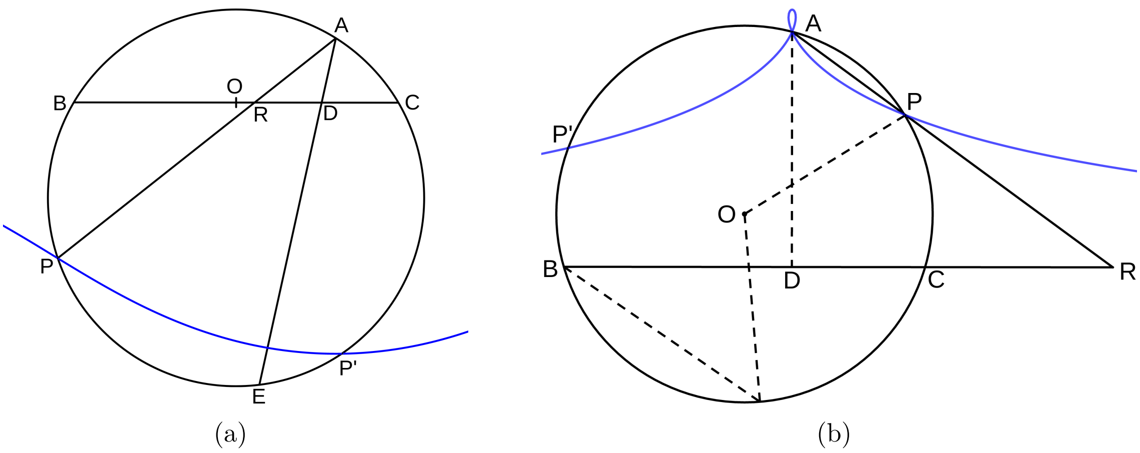


Fig. 1.14: Neusis entre un círculo y una recta secante por medio de una concoide cuando *(a)* el segmento PR está dentro de la circunferencia y *(b)* cuando el segmento PR está fuera de la circunferencia.

2. En el Ejemplo 1.2 podemos colocar la recta DE por medio de una concoide con polo en B, base FA y distancia $2\,AB$ (o una distancia k en general), pues esta concoide corta a AC en un punto D. Así, es suficiente trazar la recta BDE, pues por el *symptoma* de la concoide se tiene que $DE = k$ (Fig. 1.15 (a)). O bien, mediante una concoide con polo en B, base AC y distancia $2\,AB$ (o una distancia k en general), pues esta concoide corta a FA prolongada en un punto E y es suficiente trazar la recta BDE, pues de nuevo por el *symptoma* de la concoide se tiene que $DE = k$ (Fig. 1.15 (b)).

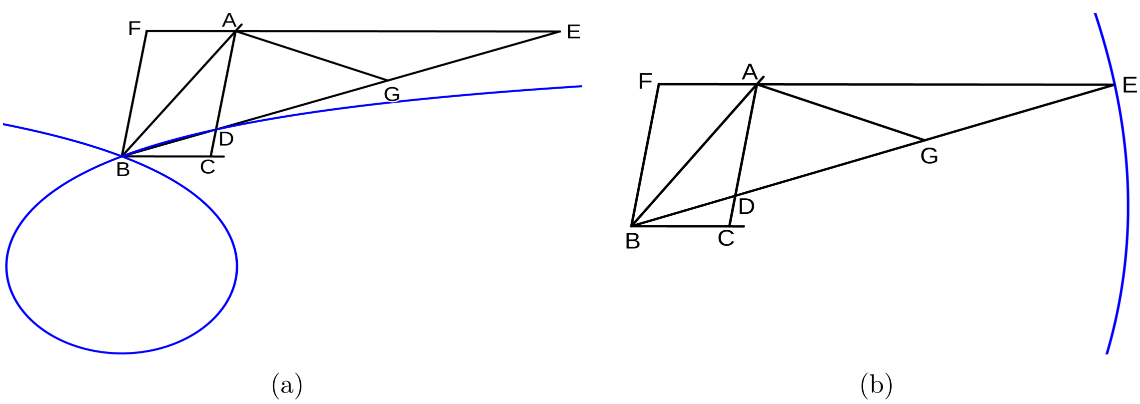
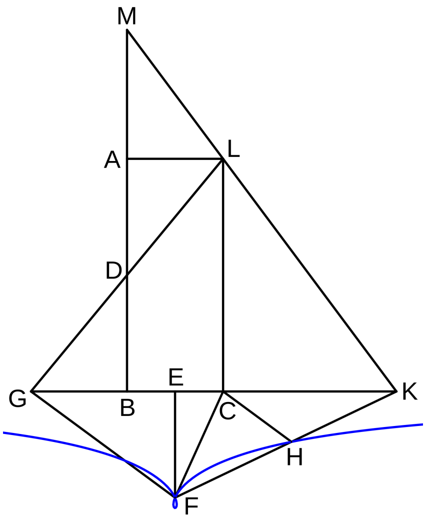
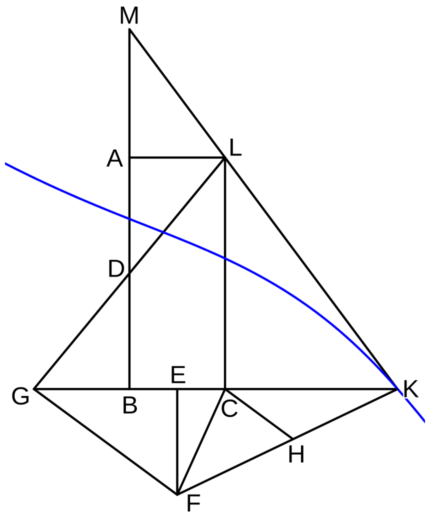


Fig. 1.15: Neusis entre dos rectas secantes por medio de una concoide para el Ejemplo 1.2.

3. En el Ejemplo 1.4 podemos colocar la recta HK por medio de una concoide con polo en F, base CG y distancia AD (o una distancia k en general), pues esta concoide corta a CH en un punto H y es suficiente trazar la recta FHK, pues por el *symptoma* de la concoide se tiene que $HK = k$ (Fig. 1.16 (a)). O bien, mediante una concoide con polo en F, base CH y distancia AD (o una distancia k en general), pues esta concoide corta a EC prolongada en un punto K y trazamos la recta FHK, pues por el *symptoma* de la concoide se tiene que $HK = k$ (Fig. 1.16 (b)).



(a)



(b)

Fig. 1.16: Neusis entre dos rectas secantes por medio de una concoide para el Ejemplo 1.4.

Estos últimos cuatro problemas de neusis son instancias del problema general de hacer una neusis entre dos rectas secantes, desde un punto que no cae en ninguna de las rectas. El caso general de hacer una neusis entre un círculo y una recta o entre dos rectas da origen a una ecuación de cuarto grado de la forma (1.18), (1.21) y (1.8), que en consecuencia tiene dos, tres o cuatro soluciones reales que se obtienen mediante las intersecciones de una concoide completa (dos variedades juntas) o mediante las intersecciones de una parábola y una hipérbola o de un círculo y una hipérbola. Notemos que visto desde el punto de vista de la concoide o el de el círculo y la hipérbola, el problema de la trisección angular y el problema de la duplicación del cubo son el mismo problema y aunque esta afirmación la formula R. Descartes en [Des54], bien pudo haber sido formulada por Nicómedes.

Hay que tener en cuenta que entre la neusis de Hipócrates para cuadrar una lúnula (ca. 440 a. C.), las neusis de Arquímedes (ca. 253 a. C.) y las concoides de

Nicómedes (ca. 245 a. C.) hay un periodo de casi dos siglos y, como decíamos arriba, las técnicas empleadas para resolver problemas de neusis se desarrollaron de manera muy desordenada. El siguiente geómetra importante en trabajar en problemas de neusis fue Apolonio hacia el año 226 a. C. en su obra sobre *Neusis*, donde organiza las neusis de Hipócrates, de Arquímedes y de Nicómedes insertándolas en un marco geométrico mucho más amplio que es el del análisis geométrico. De este modo, para entender mejor la obra de Apolonio es necesario estudiar el análisis geométrico que aparece expuesto en el séptimo libro de la *Colección* de Pappus y a esto nos aplicamos en las siguientes tres secciones.

§1.4 La *Colección* de Pappus

Hasta ahora hemos hecho algunas referencias a la *Colección* de Pappus pero para entender a Apolonio debemos revisar dicha obra con más detalle. Pappus es uno de los pocos autores de la matemática griega de quien tenemos alguna parte de sus escritos sobre geometría superior y sin duda su obra más importante es la *Colección* matemática (Συναγωγή). La edición estándar de esta obra sigue siendo la de F. Hultsch [Pap78] a pesar de su "liberalismo editorial" consistente en señalar interpolaciones injustificadamente, como lo anota Jones en [Pap86]. En cuanto a los libros que componen la *Colección*, tenemos que se ha perdido en griego el libro I, la primera parte del libro II y la última parte del libro VIII. El libro III "contiene problemas geométricos, tanto planos como sólidos". El libro IV "consiste de exquisitos teoremas planos, sólidos y lineales". El libro V "contiene comparaciones de figuras planas de igual perímetro, con respecto a cada una de ellas y al círculo y comparaciones de figuras sólidas de igual área, con respecto a cada una de ellas y a la esfera". El libro VI "contiene resoluciones de dificultades en el pequeño [campo de la] astronomía". El libro VII "contiene lemas del campo del análisis" y el libro VIII "contiene exquisitos problemas misceláneos de mecánica".

La *Colección* se ha considerado tradicionalmente como un tipo de enciclopedia de la matemática griega, donde se vertieron los logros más valiosos de los geómetras anteriores y contemporáneos a Pappus y esto en términos muy amplios es así, sin embargo me parece más correcta la interpretación de T. Heath según la cual la *Colección* es un manual o guía para la matemática griega y dejamos el honor de haber compuesto una verdadera enciclopedia matemática a Gémino, cf. [Hea21a, págs. 223–231 y cap. 19]. La obra de Pappus consiste de una colección de obras separadas e independientes puestas juntas sin mucho esfuerzo para integrarlas por parte de uno o varios autores, ya que los libros individuales son muy distintos entre sí y se presentan en una sucesión bastante desorganizada, aunque no del todo. Por ejemplo, los distintos libros no se refieren uno al otro a pesar de que varios de ellos se traslapan en varias materias; los libros V, VIII y la primera parte del libro III tienen el aspecto de estar terminados y de ser autocontenidos. Los libros II, VI y VII están hechos con la intención de ayudar a leer y comprender otros textos geométricos, de tal manera que sin esos textos rectores se vuelven casi ininteligibles y casi sin sentido por sí mismos. Además, se presentan repeticiones casi textuales de resultados ya demostrados en libros precedentes, por ejemplo el método de Nicómedes para hallar dos medias proporcionales en *Colecc.* III.24 y *Colecc.* IV.40-44 y la propia solución de Pappus en *Colecc.* III.27, *Colecc.* VIII.26 y en el "apéndice" del libro III, &c. (cf. [Pap86, Parte 1, §3]).

Casi todo lo que sabemos acerca de los problemas de neusis en la antigüedad se encuentra contenido en *Colecc.* IV y VII. Tradicionalmente del libro IV se ha dicho que no tiene estructura ni coherencia sino que se trata de una recopilación de problemas muy diversos entre sí y de poco interés matemático en general. Mucho más interesante es la propuesta de H. Sefrin-Weis en su edición del libro IV [Pap10], quien sugiere buscar la coherencia del libro IV en el *método* de exposición y resolución de problemas, y no en los problemas mismos. Esta afirmación de Sefrin-Weis se sigue del hecho que en este libro, Pappus clasifica los problemas geométricos en problemas planos, problemas sólidos y problemas lineales, como dijimos arriba (págs. 5–6). Con base en esta clasificación, Pappus quiere mostrar tanto el uso del método del análisis geométrico para la resolución de problemas, como la manera correcta de resolver un problema dado, pues como dice el epítome del libro: consiste de exquisitos problemas planos (Props. 1–18), lineales (Props. 19–30) y sólidos (Props. 31–44). Por ejemplo, entre los problemas planos se incluye una generalización del teorema de Pitágoras, el llamado problema de Apolonio (sobre círculos tangentes) y problemas arquimedianos sobre arbelos, donde Pappus quiere mostrar el estilo euclidiano, el estilo apoloniano y el estilo arquimediano de hacer geometría. Entre los problemas lineales se da el *symptoma* de la espiral de Arquímedes, el de la concoide de Nicómedes, el de la cuadratriz de Hipias y el de una espiral esférica, considerando que estas líneas se obtienen mecánicamente por movimientos combinados. Entre los problemas sólidos se trata la trisección angular, la división angular en general y sus aplicaciones, el *symptoma* de la cuadratriz obtenido de otra manera y una discusión sobre las neusis de Arquímedes.

El hecho de que la concoide sea tratada con relación a los problemas lineales y a los problemas sólidos nos indica que las construcciones de neusis pueden servir para clasificar los problemas geométricos adecuadamente. Más aún, las neusis pueden sugerir una solución para un problema sólido sin tener que usar cónicas directamente, tal y como fue el caso de la trisección angular. Esta idea de encontrar una técnica que nos permita transitar de una clase de problemas a otra se encuentra reforzada y expandida en el séptimo libro que revisamos a continuación.

§1.5 El campo del análisis

Según el epítome del séptimo libro de la *Colección*, en él encontramos lemas (proposiciones asumidas o no probadas) auxiliares para instruirse en el campo del análisis geométrico. El libro VII es un verdadero compendio de varios tratados de geometría superior, que ya para la época de Pappus debieron formar una rama de las matemáticas: el llamado **campo del análisis** (ἀναλυόμενος τόπος, literalmente *lugar analizado*), como sugiere Jones en su edición [Pap86]. Todas estas obras en conjunto equipan al geómetra con una técnica o método matemático útil para resolver problemas geométricos (entendiendo resolver en el sentido amplio de construir, demostrar o encontrar, según que la proposición presentada al geómetra sea un problema, un teorema o un porisma, respectivamente). Equipan al geómetra con un método o técnica que consiste de dos partes: la primera parte es llamada **análisis** (ανάπαλιν λύσις) y la segunda parte es llamada *síntesis*, por lo cual lo llamaremos **método análisis–síntesis**. Según Proclo en [Pro92, págs. 165–166], el método del análisis fue enseñado a un tal Léodamas por Platón, mientras que Pappus nos dice en [Pap86, pág. 82] que esta técnica o método fue cultivado después de la composición de los *Elementos*, principalmente por estos tres geómetras: Euclides, Apolonio y Aristeo el Viejo.

> “Ahora bien, el análisis es el camino desde lo que uno está buscando como si ya estuviera establecido, y por medio de sus consecuencias, [llegar] hasta algo que ya está establecido por síntesis. Es decir, en el análisis suponemos lo que se busca como si estuviese ya realizado y buscamos aquello de lo que se sigue, y de nuevo lo que viene antes de esto, hasta que, *regresando* de esta manera llegamos a algo ya conocido o que ocupa el carácter de un principio primero. Llamamos a este tipo de método *análisis*, como si dijéramos *anapalin lysis* [reducción hacia atrás]. En la síntesis, al revés,

> suponemos que lo último que se obtuvo en el análisis ya está realizado y procedemos ahora en orden natural, con precedentes lo que antes se seguía [como consecuentes], y acomodándolos entre sí obtenemos el desenlace de la construcción de lo que se proponía. Esto es lo que llamamos *síntesis*.
>
> Hay dos tipos de análisis: el uno busca la verdad y es llamado *teoremático*; mientras que el otro trata de encontrar lo que fue requerido y es llamado *problemático*. En el caso del tipo teoremático suponemos lo que se busca como hecho y verdadero, luego, regresamos por medio de sus consecuencias como si fueran hechos verdaderos de acuerdo con las hipótesis, hasta algo establecido; si esto que ya se ha establecido es verdadero, entonces aquello que se buscaba también será verdadero y su demostración será el revés del análisis, pero si nos topáramos con algo establecido como falso, entonces aquello que se buscaba también será falso. En el caso del tipo problemático, suponemos la proposición como algo que ya conocemos, después, procedemos a través de sus consecuencias como si fueran ciertas hasta algo ya establecido; si lo que se ha establecido es posible y realizable, lo cual es a lo que los geómetras llaman *dado*, aquello que fue requerido también será posible y de nuevo la demostración será el revés del análisis, pero si nos topáramos con algo establecido como imposible, entonces el problema también será imposible [demostración por reducción al absurdo]. El *diorismo* es la distinción preliminar de cuándo, cómo y de cuántas maneras el problema será posible. Tanto así con respecto al análisis y a la síntesis." (*Colecc.* VII.1–2 con mis itálicas.)

Pues bien, Pappus señala una distinción importante entre el análisis de teoremas y el análisis de problemas: el análisis teoremático no garantiza ni la veracidad de un teorema ni la posibilidad de obtener una prueba válida revirtiendo los pasos del argumento. Sin embargo, si mediante análisis llegamos a una conclusión que de antemano se sabe que es falsa o que contradice a las hipótesis, entonces es una refutación válida por *reducción al absurdo* (ή είς τὸ ἀδύνατον ἀπαγωγή o simplemente ἀποδειξις) y no se requiere invertir los pasos del argumento. En contraste con el análisis teoremático, el análisis problemático nos da efectivamente información acerca de las posibilidades y del número de soluciones de un problema y de las condiciones necesarias (diorismos) para dar una solución completa que incluya todos los casos posibles (cf. por ejemplo [Mah68, H+74]).

Una vez que Pappus nos ha aclarado en lo que consiste el método de análisis-síntesis, nos propone las siguientes obras para iniciarnos en el campo del análisis (en este orden): de Euclides los *Datos* (1 libro); de Apolonio *Sección en una razón* (2 libros), *Sección en un área* (2 libros), *Sección determinada* (2 libros), los *Contactos* (2 libros); de Euclides los *Porismas* (3 libros); de Apolonio los *Lugares planos* (2 libros), las *Neusis* (2 libros), las *Cónicas* (8 libros); de Aristeo los *Lugares sólidos* (5 libros); de Euclides los *Lugares superficiales* (2 libros) y de Eratóstenes *Sobre medias* [proporcionales] (2 libros). En total 33 libros (Pappus dice 32 libros, porque quizá la obra de Eratóstenes consistía de un solo libro). Después de la presentación del campo del análisis, viene una parte donde Pappus ofrece reseñas de cada una de las obras que lo componen, desde los *Datos* hasta las *Cónicas*, con "el número de disposiciones y de diorismos y los casos en cada libro, así como los lemas que se requieren en ellos y no hay nada que se requiera para el estudio de los libros, creo, de lo que me haya olvidado" (cf. [Pap86, pág. 84]). Inmediatamente después de estas reseñas o epítomes, Pappus propone un corpus de lemas auxiliares para apoyar la lectura de cada uno de los libros que componen al campo del análisis, sin embargo el orden de los lemas es distinto al orden de las obras, a saber, el orden de los lemas es: *Sección en una razón* y *Sección en un área* (Props. 1–21), *Sección determinada* (Props. 22–64), *Neusis* (Props. 65–95), *Contactos* (Props. 96–118), *Lugares planos* (Props. 119–126), *Porismas* (Props. 127–164), *Cónicas* (Props. 165–234), *Lugares superficiales* (Props. 235–238) y finalmente vienen tres lemas sobre el campo del análisis (Props. 239–240 y 253).[6] En suma, el orden de los libros del análisis y el de sus lemas nos dice que el objeto de estudio son las líneas cónicas: el producto mejor logrado del método de análisis–síntesis y al mismo tiempo de la geometría griega.

Para entender mejor el método de análisis–síntesis, expresado poéticamente por Pappus, veamos en qué consiste dicho método mediante un ejemplo donde se requiere resolver un caso particular de una neusis entre dos rectas perpendiculares. Este ejemplo lo tomo de *Colecc.* VII.128–129, donde Pappus expone la solución dada por un geómetra llamado Heráclito, de quien no sabemos nada más.

Ejemplo 1.6 (Método análisis–síntesis)**.** Sea cuad.$[ABCD]$ un cuadrado dado en posición con el lado AC prolongado hasta un punto E. Colocar en el ángulo externo áng.$[DCE]$ una recta EF igual a una recta dada H, haciendo una neusis en el vértice

[6] Entre este corpus de lemas se encuentran por ejemplo el llamado teorema de Pappus de la geometría proyectiva y una descripción del lugar de tres/cuatro rectas que R. Descartes resuelve en su *Geometría* (cf. [Des54, Libro I]), el teorema de Pappus sobre sólidos de revolución, entre otros resultados interesantes.

B del ángulo opuesto áng.$[DBA]$.[7]

Análisis. Supongamos que ya tenemos a la reta EF. Desde el punto E trazamos la perpendicular $EG \perp BE$, puesto que BFE es una recta. Entonces cuad.$[CD]$ + cuad.$[FE]$ = cuad.$[DG]$ (por *Colecc.* VII.127) y como las rectas CD, FE están dadas en magnitud, entonces los cuadrados construidos sobre ellas cuad.$[CD]$, cuad.$[FE]$ están dados en magnitud también, y en consecuencia el cuadrado cuad.$[DG]$ está dado en magnitud. Entonces la recta DG está dada en magnitud y por tanto todo el segmento BG está dado en magnitud también porque BD está dado en magnitud. Pero también BG está dada en posición y por lo tanto el semicírculo sobre BG, semicir.$[BKEG]$, está dado en posición y pasa por E ya que áng.$[BEG] = R$. Entonces el punto E cae sobre semicir.$[BKEG]$ y sobre AE. Luego, E está dado en posición, pero B también está dado en posición y por tanto la recta BE está dada en posición (Fig. 1.17).

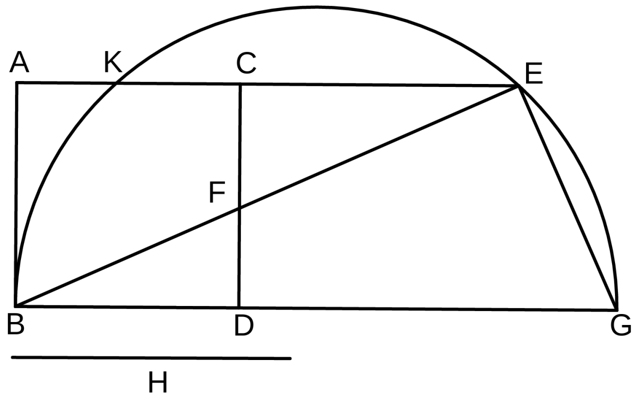


Fig. 1.17: Ejemplo del método análisis–síntesis.

Síntesis. Sea cuad.$[ABCD]$ el cuadrado dado en posición con el lado AC prolongado hasta un punto E, sea H la recta dada y sea G un punto sobre el lado BD prolongado de manera tal que cuad.$[DG]$ = cuad.$[CD]$ + cuad.$[H]$. Entonces $GD > DC$ y se sigue que rec.$[GD, DB]$ > cuad.$[DC]$, pues $DB = DC$ se satisface por ser lados de un cuadrado. En consecuencia, la semicircunferencia semicir.$[BKEG]$ sobre BG cae más allá de C (es decir $A - C - E$). Trazamos las rectas BE, EG y entonces se tiene que cuad.$[CD]$ + cuad.$[FE]$ = cuad.$[DG]$ (por *Colecc.* VII.127), de donde se sigue que cuad.$[CD]$ + cuad.$[FE]$ = cuad.$[DG]$ = cuad.$[CD]$ + cuad.$[H]$, i. e. cuad.$[FE]$ = cuad.$[H]$ y por tanto que $FE = H$. Es claro que la recta EF es la única solución porque las rectas más cercanas a C son menores que EF y las rectas más lejanas a C son mayores que EF (Fig. 1.17). Q. E. F.

En este ejemplo es evidente que la parte analítica del método de análisis–síntesis consiste en una sucesión de reducciones hasta llegar a un resultado ya establecido, en

[7]Está claro que el punto E no está dado como otra hipótesis, simplemente se quiere decir que cae en algún lugar del lado prolongado AC.

este caso la Prop. 72 o *Colecc.* VII.127. Un caso particular de reducción analítica es la reducción al absurdo (ἀποδειξις) y el tipo de reducción llamado apagogé (ἀπαγωγή). En la sección §1.1 se hace notar que ciertos problemas geométricos pueden ser reducidos a otros problemas que a su vez pueden ser resueltos mediante neusis y eso sería suficiente para justificar que los libros de las *Neusis* tengan un lugar en el campo del análisis, pero además sabemos que Apolonio practica el método de análisis-síntesis en los dos libros de las neusis. El método de reducción de un problema a otro problema más simple ha resultado muy eficaz en la geometría y en las matemáticas en general, desde que se introdujo por los primeros geómetras.

Como puede apreciar el lector, el lenguaje que se emplea en la parte analítica del Ejemplo 1.6 es muy obscuro a primera vista y esto es así porque todo análisis geométrico emplea el "lenguaje de lo dado", que se encuentra expuesto en el libro de los *Datos* de Euclides. También podemos dar por hecho que los dos libros de las *Neusis* de Apolonio están codificados en este lenguaje, así como gran parte de la geometría griega alejandrina más escolar. Por estas razones, antes de estudiar lo que Pappus nos dice acerca de los dos libros de las *Neusis* y los lemas para facilitar su lectura, vamos a revisar brevemente lo que se quiere decir cuando decimos que un objeto matemático está dado, pues esto es del todo necesario para practicar el análisis geométrico, como lo muestra el Ejemplo 1.6.

§1.6 Los *Datos* de Euclides

El libro de los *Datos* de Euclides es el libro con el cual tiene que iniciarse todo aquel que desea obtener destreza en el campo del análisis geométrico (cf. pág. 30), en tanto y cuanto que la esencia del análisis de problemas es el concepto de **lo dado**, mismo que se aplica tanto a los objetos que se suponen en el enunciado del problema, como a cualesquiera otros objetos que se determinan a partir de estos. El concepto de **lo dado** tiene múltiples acepciones en la geometría griega, pero las más comunes son las que nos resume Marino en su *Comentario sobre los* Datos:

> "[...] de entre aquellos quienes han propuesto describir *lo dado* de manera simple y por una única diferencia, tales como Apolonio en su obra sobre las *Neusis* y en su *Tratado universal* [o *Forma general de hacer las cosas*], lo definen como [algo] *fijo*; mientras que otros tales como Diodoro, lo describen como [algo] *cognoscible*, quien dice que el radio [de un círculo] y los ángulos están dados de esta forma y también todo lo accesible a cualquier

> tipo de conocimiento. Algunos lo declaran como [algo] *racional*, tales como Ptolomeo [en *Almagesto,* I.10], cuando llama dadas a aquellas magnitudes cuya medida es cognoscible, ya sea de manera exacta o aproximada.” (Cf. [Euc96], [Euc03, pág. 243]; mis itálicas.)

En fin, los *Datos* de Euclides proporcionan las definiciones y los resultados más necesarios y elementales para el análisis de teoremas y principalmente de problemas, como lo sugiere F. Acerbi en [Ace11]. El análisis de los datos de un problema plano pretende mostrar que los puntos necesarios para construir un objeto geométrico requerido caen en dos lugares geométricos planos (rectas y círculos) y en consecuencia, que se obtienen como intersección de dichos lugares planos. Además, el análisis de los datos de un problema asegura que si se invierten los pasos del argumento se puede dar la síntesis en términos planos también, siempre que el análisis sea correcto. Este procedimiento *analítico* lo podemos resumir en la siguiente fórmula:

$$\text{Dado } [a, b, c, \ldots], \text{ está dado } [p, q, r, \ldots],$$

donde tanto $a, b, c, \ldots$ como $p, q, r, \ldots$ son objetos geométricos y razones. Esta fórmula sugiere una relación de tipo funcional entre los datos “iniciales” $a, b, c, \ldots$ y los datos “finales” $p, q, r, \ldots$ que se puede expresar algebraicamente por la ecuación (1.4) para el problema del Ejemplo 1.1, por (1.7) para el problema del Ejemplo 1.2 y el del Ejemplo 1.4 o bien por (1.17) para el problema del Ejemplo 1.3 y el del Ejemplo 1.5 (1) y por (1.20) para el problema del Ejemplo 1.5 (2). Pero geométricamente, esta relación funcional queda expresada por una *construcción geométrica* (que resuelve el problema). De esta manera, la relación funcional que existe entre los datos iniciales $a, b, c, \ldots$ y los datos finales $p, q, r, \ldots$ nos permite identificar una configuración geométrica con una ecuación algebraica, es decir que a una configuración geométrica le asignamos una ecuación algebraica y recíprocamente.

El libro de los *Datos* consiste de 15 definiciones y 94 proposiciones (Pappus cuenta 90 props.), donde se permite usar cualquier proposición demostrada en *Elem.* I–VI (cf. [Euc03]). De entre las definiciones que nos interesa traer a colación se encuentran las siguientes: (a) una razón está **dada** si podemos proporcionar otra razón que es igual; (b) los ángulos, las rectas y las figuras están **dados(as) en magnitud** si podemos proporcionar otros(as) que son iguales; (c) las figuras rectilíneas están **dadas en especie** si cada uno de sus ángulos está dado y si las razones entre cada par de lados están dadas; (d) los puntos, las líneas y los ángulos están **dados en posición** si siempre ocupan el mismo sitio; (e) un círculo está **dado en magnitud** si su radio está dado en magnitud y está **dado en posición y en magnitud** si su centro está dado en posición y su radio está dado en magnitud; y (f) las secciones de círculo están **dadas en magnitud** si el ángulo que las subtiende y sus bases están dados en magnitud y están **dadas en posición y en magnitud** si el ángulo que las subtiende está dado en magnitud y sus bases están dadas en posición y en magnitud. Veamos un par de proposiciones de los *Datos* y sus recíprocos, que nos serán de gran utilidad cuando estudiemos las neusis planas de Apolonio:

Dat. 58. Si un área dada se aplica a una recta dada, deficiente por una forma dada en forma, el largo y el ancho del defecto están dados.

Dat. 59. Si un área dada se aplica a una recta dada, excedente por una forma dada en forma, el largo y el ancho del exceso están dados.

Dat. 85. Si dos rectas contienen un área dada en un ángulo dado y si su diferencia está dada, cada una de ellas está dada.

Dat. 86. Si dos rectas contienen un área dada en un ángulo dado y si su suma está dada, cada una de ellas está dada.

En resumen, los *Datos* equipan al geómetra con varios resultados muy útiles para determinar algunos objetos geométricos siempre que otros objetos están dados (de cualquier forma), y esta es la esencia del análisis. En particular, el análisis de los datos de una neusis (planas, sólidas o lineales) muestra si es posible construirla y la síntesis es la construcción efectiva de la neusis, si es posible. La construcción de una neusis sólida o lineal será posible si convenimos que está dada en el sentido de estar determinada o fija, en contraste con una neusis plana que siempre está dada en cualquier sentido de estar dado. Con todo, nos encontramos ya listos para estudiar los libros de las *Neusis* de Apolonio, a través de Pappus, y a esto nos dedicamos en lo que resta de esta primera parte.

§1.7 Las *Neusis* de Apolonio

Según A. Jones en su edición del libro VII de la *Colección* de Pappus [Pap86], las únicas referencias antiguas a los dos libros de las *Neusis* de Apolonio se encuentran en el libro VII de la *Colección* y en el *Comentario sobre los* Datos de Euclides dictado por Marino (cf. [Pap86, pág. 530]). Como lo apuntamos en la pág. 30, en el libro VII de la *Colección* se distinguen tres partes: en la primera parte se presenta al campo del análisis, en la segunda parte se reseñan las obras que lo componen y en la tercera parte se encuentra un corpus de lemas auxiliares para la mayor parte de los tratados que componen al campo del análisis, entre ellas están las *Neusis*. El contenido de los dos libros de las *Neusis* consiste de los cuatro problemas para los cuales las líneas que intervienen en la neusis son rectas y círculos (cf. pág. 21) con las hipótesis necesarias y suficientes que hacen que estos problemas sean neusis planas. Quizá una de las razones por las cuales Apolonio compuso un tratado sistemático sobre estos problemas de neusis y no de otros, es que estos problemas se presentaban con mayor frecuencia que otros cuando se reducía un problema dado a un problema de neusis y por lo tanto tenían mayor utilidad que otros. Pappus nos dice en su reseña o epítome sobre las *Neusis* (*Colecc.* VII.27–29) que el primer libro (*Neus.* I) consiste de los siguientes tres problemas generales:

Problema I. Dado un círculo en posición, ajustarle una cuerda dada haciendo una neusis en un punto dado no sobre su circunferencia.

Problema II. Dado un semicírculo en posición y dada una recta perpendicular a su base (prolongada), colocar entre las dos líneas una recta dada haciendo una neusis en uno de los extremos de la base del semicírculo.

Problema III. Dado un rombo en posición con un lado prolongado, ajustar en el ángulo externo una recta dada haciendo una neusis en el vértice del ángulo opuesto.

En *Colecc.* VII.28, Pappus nos cuenta que el primer y el tercer problema vienen en dos casos cada uno y el segundo problema viene en cuatro casos. Para obtener los dos casos del tercer problema es necesario modificar el enunciado, pues tal y como aparece propuesto en *Colecc.* VII.27 acepta sólo un caso, y más aún, el segundo problema consiste realmente de cinco casos, como veremos más adelante. En cuanto al segundo libro (*Neus.* II), en él Apolonio resuelve el siguiente problema general, que consiste de 10 casos con varios subcasos cada uno, los cuales resultan de la magnitud de la recta dada y de la posición de los semicírculos.

Problema IV. Dados dos semicírculos con sus bases sobre la misma recta, poner entre las dos semicircunferencias una recta dada haciendo una neusis en uno de los extremos de las bases de los semicírculos.

En total, Pappus nos informa en *Colecc.* VII.29 que los dos libros de las *Neusis* contienen 125 teoremas o diagramas, a los que les corresponden 38 lemas (*Colecc.*

VII.120–156 o bien Props. 65–95, que hacen 34 lemas en total en la edición de A. Jones). Además de la información ya dada, en *Colecc.* VII.157 Pappus nos dice que *Neus.* I contiene nueve problemas y tres diorismos mínimos para *Neus.* I.5, 7 y 9. Mientras que *Neus.* II contiene 45 problemas y tres diorismos mínimos también, para *Neus.* II.17, 19 y 23. Los lemas auxiliares de Pappus presentan resultados que Apolonio asume en las pruebas de algunos de los $54(= 9 + 45)$ problemas. No todos los lemas de Pappus abordan resultados no probados por Apolonio, puesto que algunos presentan casos particulares de los cuatro problemas generales o bien son demostraciones distintas a las de Apolonio o bien son resultados para los lemas posteriores y observaciones de Pappus, por ejemplo, con respecto a los diorismos.

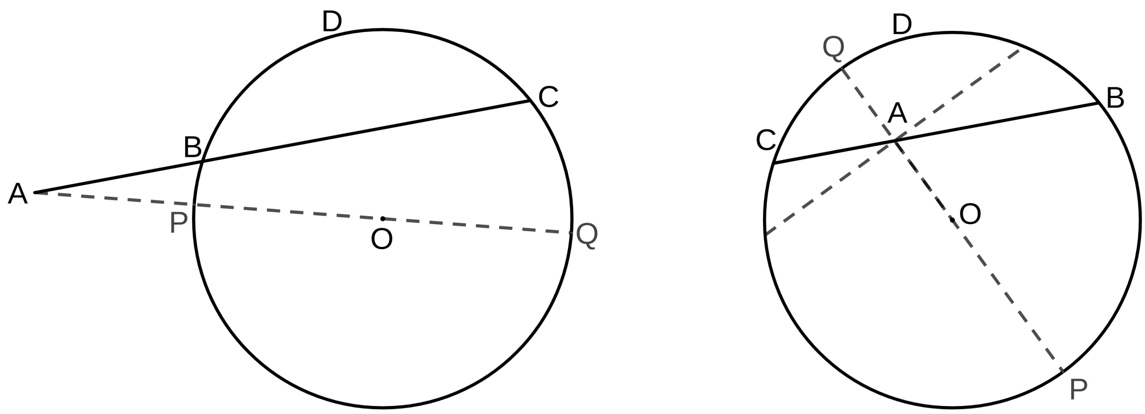
1.7.1 Sobre el Problema I.

Dado un círculo en posición, ajustarle una cuerda dada haciendo una neusis en un punto dado no sobre su circunferencia.

Del análisis del problema sabemos que una neusis en una circunferencia es un problema plano. Si el punto dado está sobre la circunferencia del círculo, la neusis es trivial, pero si el punto dado no está sobre la circunferencia del círculo, el problema es algo más interesante aunque no deja de ser sencillo. En efecto, si cir.$[BCD]$ es el círculo dado y A es el punto dado, entonces se trata de colocar una cuerda BC igual a una recta dada, haciendo una neusis en el punto A. La posición del punto A determina estos dos casos (Fig. 1.18):

Caso 1. A está afuera de la circunferencia cir.$[BCD]$ (*Neus.* I.1).

Caso 2. A está adentro de la circunferencia cir.$[BCD]$ (*Neus.* I.2).



(a) *Neus.* I.1 (b) *Neus.* I.2

Fig. 1.18: Problema I: neusis en un círculo dado cortado dos veces.

Análisis. Supongamos que ya tenemos a la recta BC. Como el círculo cir.$[BCD]$ está dado en posición, su centro O está dado en posición. Unimos AO y la prolongamos hasta cortar a cir.$[BCD]$ en P, Q. Entonces los puntos P, Q están dados en posición, y por esto las rectas PA, AQ están dadas en magnitud y en consecuencia el rectángulo rec.$[PA, AQ]$ está dado en magnitud. Además, rec.$[BA, AC]$ = rec.$[PA, AQ]$,[8] entonces las rectas BA, AC están dadas en magnitud.[9] Trazamos el círculo cir.$[A, AB]$, dado en posición, que corta a cir.$[BCD]$ en un punto B. Entonces, el punto C está dado en posición y por lo tanto la recta AB (prolongada) está dada en posición.

Como lo afirmamos arriba, el análisis del primer problema general nos permite ver que la neusis en un círculo desde un punto dado que no está sobre su circunferencia es un problema plano en cualquier caso y obtenemos los siguientes diorismos:

Neus. I.1 tiene dos soluciones si la recta dada es menor que un diámetro; tiene una solución si la recta dada es igual que un diámetro; y no tiene solución si la recta dada es mayor que un diámetro. Este caso no tiene solución mínima pero tiene una única solución máxima: el diámetro de cir.$[BCD]$ que, prolongado, pasa por A. Para este problema Pappus dedica el lema *Colecc.* VII.120.

Prop. 65 (Para *Neus.* I.1)**.** Sea $PQ > BC$ y rec.$[BA, AC]$ = rec.$[PA, AQ]$. Entonces $AB > AP$.

Neus. I.2 tiene dos soluciones si la recta dada es menor que un diámetro y mayor que la cuerda por A que es perpendicular al diámetro por A; tiene una solución si la recta dada es igual a un diámetro o si es igual a la cuerda por A que es perpendicular al diámetro por A; y no tiene solución si la recta dada es mayor que un diámetro o menor que la cuerda por A que es perpendicular al diámetro por A. En este caso la única solución mínima es la cuerda por A que es perpendicular al diámetro por A y este diámetro, a su vez, es la única solución máxima. A este diorismo mínimo Pappus dedica los siguientes tres lemas (*Colecc.* VII.121–124):

Prop. 66. Sea $BC > MN$ y sea MN bisecada por Z. Entonces se puede aplicar a BC un rectángulo igual al rectángulo rec.$[MZ, ZN]$ y deficiente por un cuadrado.

Prop. 67. Sean rec.$[BA, AC]$ = rec.$[PA, AQ]$, $BC < PQ$, $AQ < PA$ y $AC < AB$. Entonces $BA < PA$.

[8] Por *Elem.* III.36 para *Neus.* I.1 y por *Elem.* III.35 para *Neus.* I.2.

[9] Por *Dat.* 59 para *Neus.* I.1 y por *Dat.* 58 para *Neus.* I.2.

Prop. 68. Sean rec.$[BA, AC]$ = rec.$[MZ, ZN]$ y $BC > MN$ con MN partido por Z de manera tal que $MZ \geq ZN$. Entonces se puede aplicar a BC un rectángulo igual al rectángulo rec.$[MZ, ZN]$ y deficiente por un cuadrado.

> Por un lado, la Prop.65 y la Prop. 67 tienen el propósito de justificar que los círculos cir.$[A, AB]$, cir.$[BCD]$ se cortan en (al menos) un punto B. Por otro lado, la Prop. 68 reitera que podemos encontrar al punto B pero por el método de aplicación de áreas, mientras que la Prop. 66 es el caso particular de la Prop. 68 cuando el punto A coincide con el centro O de cir.$[BCD]$. En términos algebraicos modernos, tenemos que si en la Prop. 68 hacemos $BC =: k, PA \cdot AQ = MZ \cdot ZN =: a^2$, entonces se puede resolver la ecuación $kx - x^2 = a^2$. Por analogía, en el primer caso tendríamos que se puede resolver la ecuación $kx + x^2 = a^2$, es decir,
>
> **Prop. 65'** (Para *Neus.* I.1). Si rec.$[BA, AC]$ = rec.$[PA, AQ]$ y $PQ > BC$, entonces a una recta dada BC se le puede aplicar un rectángulo igual al rectángulo rec.$[PA, AQ]$ y excedente por un cuadrado.

1.7.2 Sobre el Problema II. *Dado un semicírculo en posición y dada una recta perpendicular a su base, colocar entre las dos líneas una recta dada haciendo una neusis en uno de los extremos de la base del semicírculo.*

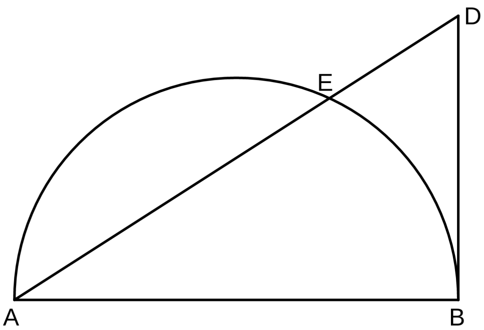
Una neusis entre un semicírculo y una recta, desde un punto dado sobre la semicircunferencia, es un problema sólido en general y es plano si y sólo si la perpendicular a la recta dada, bajada desde el punto dado, pasa por el centro del semicírculo. Esta condición es suficiente y necesaria, según vimos en el Ejemplo 1.5, porque se requieren las cónicas (1.18) o (1.21) para resolver el problema. De este hecho y por las simetrías del círculo se motiva que en el segundo problema se consideren sólo los extremos de la base de un semicírculo para realizar la neusis. Bajo estas condiciones adicionales, el segundo problema general también es fácil de resolver, pues si semicir.$[AEB]$ es el semicírculo dado con base AB y si $CD \perp AB$ es una perpendicular a la base (prolongada) con pie en el punto C, entonces se trata de colocar una recta ED, igual a una recta dada, haciendo una neusis en el punto A. La posición del pie C de la perpendicular CD determina estos cuatro casos (Fig. 1.19):

Caso 1. $A - B - B$, es decir C coincide con B (*Neus.* I.3).

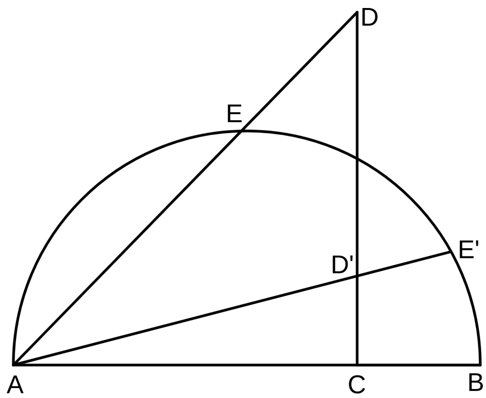
Caso 2. $A - C - B$, con ED fuera/dentro del semicírculo (*Neus.* I.4/6).

Caso 3. $A - B - C$ (*Neus.* I.5).

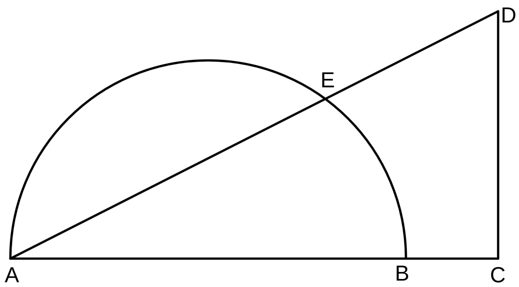
Caso 4. $C - A - B$ (*Neus.* I.7).



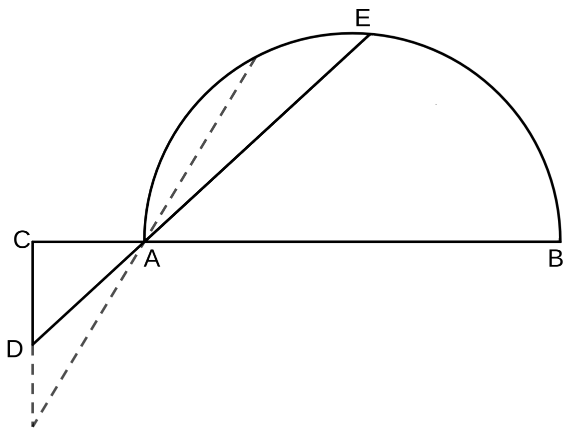
(a) *Neus.* I.3



(b) *Neus.* I.4/6



(c) *Neus.* I.5



(d) *Neus.* I.7

Fig. 1.19: Problema II: neusis plana entre un (semi)círculo y una recta.

Análisis. Supongamos que ya tenemos a la recta ED. Si unimos EB, tenemos que áng.$[AEB] = R =$ áng.$[ACD]$ y áng.$[BAE] =$ áng.$[DAC]$, de donde se sigue que los triángulos tri.$[AEB]$, tri.$[ACD]$ son semejantes (por el teorema AA). En consecuencia, rec.$[DA, AE] =$ rec.$[CA, AB]$. Como el semicírculo semicir.$[AEB]$ está dado en posición y la perpendicular $CD \perp AB$ está dada en posición también, los puntos A, B, C están dados en posición. Entonces, las rectas AB, AC están dadas en magnitud, por lo cual el rectángulo rec.$[DA, AE]$ está dado en magnitud pero también ED está dada en magnitud, y por lo tanto las rectas DA, AE están dadas en magnitud también.[10] Trazamos el círculo cir.$[A, AD]$, dado en posición, que corta a la perpendicular CD en D y en consecuencia, el punto D está dado en posición. Por lo tanto la recta AD (prolongada) está dada en posición.

[10]Por *Dat.* 85–86 pues $ED = DA \pm AE$ (en *Neus.* I.7, 3–5) o $ED = AE - DA$ (en *Neus.* I.6).

El análisis del segundo problema general nos garantiza que se trata también una neusis plana en todos los casos y podemos obtener los siguientes diorismos:

Neus. I.3 y *Neus.* I.4 tienen una solución y no tienen ni máximo ni mínimo;

Neus. I.5 tiene una solución si $DE \geq BC$ y BC es la solución mínima; no tiene solución si $DE < BC$.

Neus. I.6 tiene una solución si $DE \leq BC$ y CB es la solución máxima; no tiene solución si $DE > BC$. A este caso particular Pappus le dedica el lema *Colecc.* VII.125, que es el único lema para el segundo problema y es, de hecho, el mismo resultado que el lema de la Prop. 65, sin embargo las configuraciones a las cuales cada lema está dedicado son muy distintas:

Prop. 69 (Para *Neus.* I.6)**.** Sea $DE < BC$ y rec.$[DA, AE] =$ rec.$[BA, AC]$. Entonces $DA < BA$.

Neus. I.7 debe satisfacer la condición adicional $D - A - E$, pues los triángulos tri.$[ACD]$, tri.$[AEB]$ son semejantes, y en consecuencia debe satisfacer también que $CA \cdot AB = DA \cdot AE \leq \left(\frac{1}{2}ED\right)^2$ o bien que $4\,CA \cdot AB \leq ED^2$ (y como veremos en la segunda parte, esta condición es necesaria pero no es suficiente para determinar el número de soluciones en todos los casos). Por ahora podemos adelantar que *Neus.* I.7 puede tener hasta dos soluciones si $4\,CA \cdot AB < ED^2$; tiene una solución si $4\,CA \cdot AB = ED^2$; y no tiene solución si $4\,CA \cdot AB > ED^2$. Además, este caso tiene una única solución mínima: la recta ED que es bisecada por el punto A.

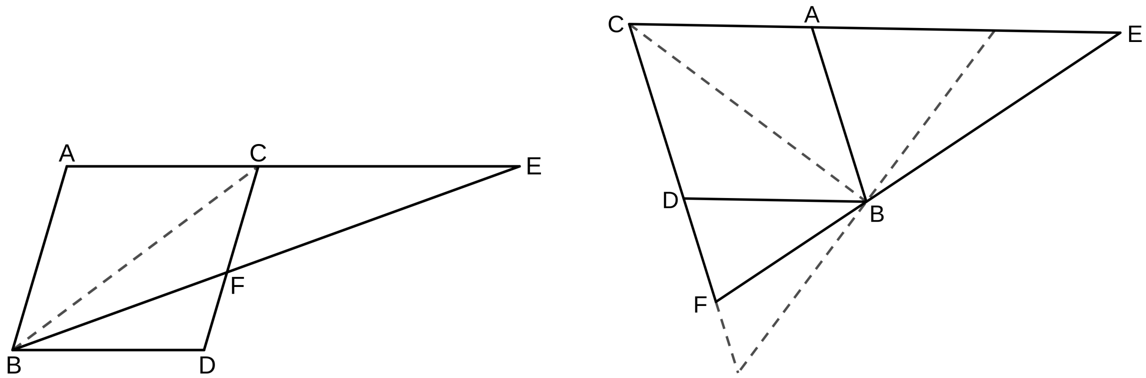
El propósito de la Prop. 69 es el de justificar que el círculo cir.$[A, AD]$ efectivamente corta a la perpendicular en un punto D. Además, es necesario un resultado similar para los otros casos del segundo problema, es decir que es necesario justificar que $DA < BA$ o $BA < DA$, según el caso. Quizá Apolonio sí lo hizo explícito para los cuatro casos donde Pappus calla.

1.7.3 Sobre el Problema III.

Dado un rombo en posición con un lado prolongado, ajustar en el ángulo externo una recta dada haciendo una neusis en el vértice del ángulo opuesto.

Este problema se trata de hacer una neusis entre dos rectas secantes, pero una neusis entre dos rectas que se cortan es un problema sólido en general porque se requieren las cónicas (1.7) para resolverlo, según vimos en el Ejemplo 1.2. Ahora bien, es claro que el punto desde el cual se realiza la neusis no puede ser el punto donde las rectas se cortan y también es claro que si el punto de la neusis está sobre alguna de las dos rectas, el problema es trivial. Pero si el punto desde el cual se hace una neusis no cae sobre ninguna de las dos rectas que se cortan, entonces el problema es plano si y sólo si el punto cae sobre la bisectriz (externa o interna) del ángulo que forman las dos rectas secantes. Más aún, un punto dado cae sobre la bisectriz del ángulo que forman dos rectas secantes (o en su complemento) si y sólo si las rectas secantes y sus paralelas por el punto dado forman un rombo.

Entonces, si rom.$[ABCD]$ es un rombo dado con el lado AC prolongado, el tercer problema general se trata de colocar una recta FE en el ángulo externo áng.$[DCE]$, igual a una recta dada, haciendo una neusis en el vértice B del ángulo opuesto áng.$[ABD]$. O bien, si los lados CA, CD del rombo rom.$[ABCD]$ se prolongan, lo que se pide es colocar una recta FE en el ángulo interno áng.$[DCE]$ haciendo una neusis en el vértice B del ángulo opuesto áng.$[ABD]$. De este modo, la condición que se le impone al punto B de ser un vértice de un rombo garantiza que la neusis entre dos rectas secantes (lados del rombo) es plana, pues el punto B cae sobre la bisectriz externa o interna BC del ángulo áng.$[DCE]$ que forman los lados prolongados del rombo CD, AC.



(a) *Neus.* I.8 (b) *Neus.* I.9

Fig. 1.20: Problema III: neusis plana entre dos rectas secantes.

Aunque la manera en la que Pappus formula este tercer problema sugiere que consideremos sólo el caso de la bisectriz externa, los lemas que él mismo nos da indican que Apolonio trató tanto el caso de la bisectriz externa como el caso de la bisectriz interna. Por tanto, se deben considerar los siguientes dos casos (Fig. 1.20):

Caso 1. B está sobre la bisectriz externa de áng.$[DCE]$ (*Neus.* I.8).

Caso 2. B está sobre la bisectriz interna áng.$[DCE]$ (*Neus.* I.9).

En contraste con los primeros dos problemas de neusis, este problema no es un problema fácil de resolver pero podemos darle una solución si tenemos en cuenta la siguiente observación que Pappus formula en *Colecc.* VII.126, a propósito del caso *Neus.* I.8 (la cual también es válida para el caso *Neus.* I.9).

Prop. 70 (Sobre *Neus.* I.8)**.** Sea rom.$[ABCD]$ un rombo con diagonal BCG prolongada hasta un punto G. Si GK es tal que $BG : GK = GK : CG$ y si trazamos el círculo cir.$[G, GK]$ que corta a los lados AC, DC en H, F, respectivamente, y prolongamos la recta HC hasta cortar a cir.$[G, GK]$ otra vez en un punto E, entonces los puntos B, F, E caen sobre la misma recta (Fig. 1.21).

Con base en esta observación de Pappus, podemos dar el análisis para los dos casos del tercer problema como sigue:[11]

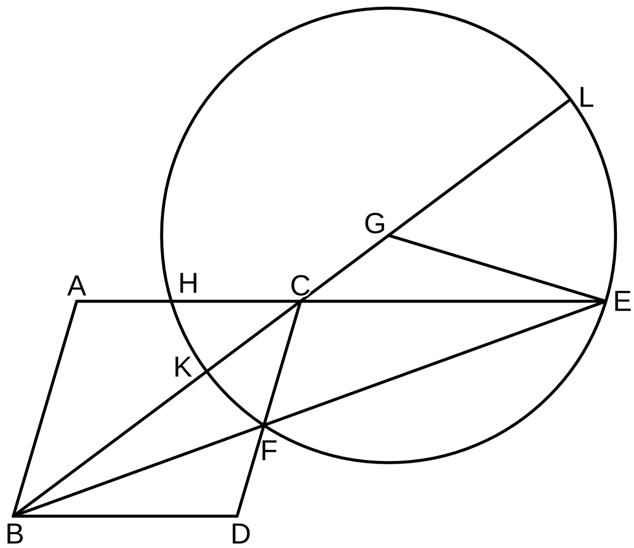


Fig. 1.21: Observación sobre *Neus.* I.8.

Análisis. Supongamos que ya tenemos la recta EF. Sea G un punto sobre la diagonal BC (prolongada) tal que áng.$[BEG]$ = áng.$[BCF]$. Entonces los triángulos tri.$[EBG]$, tri.$[CBF]$ y los triángulos tri.$[CEF]$, tri.$[AEB]$ son semejantes (por el teorema AA) y en consecuencia rec.$[EG, CB]$ = rec.$[CF, EB]$ y rec.$[EF, AB]$ = rec.$[CF, EB]$, de donde se sigue que rec.$[EG, CB]$ = rec.$[AB, EF]$. Como las rectas CB, AB, EF están dadas en magnitud, la recta EG está dada en magnitud y su cuadrado cuad.$[GE]$ está dado en magnitud también. Además, los triángulos tri.$[CEG]$, tri.$[EBG]$ son semejantes (por el teorema AA),[12] y en consecuencia rec.$[CG, BG]$ = cuad.$[EG]$. Entonces el rectángulo rec.$[CG, BG]$ está dado en magnitud porque cuad.$[GE]$ está dado en magnitud y por *Dat.* 85 se sigue que BG (y CG) está

[11] J. P. Hogendijk muestra en [Hog86, §3 y Documento I] un fragmento de la solución de Apolonio para *Neus.* I.9, conservada por Al-Sijzi debido a que Abu l-Jud le pide en una carta que demuestre el caso de la bisectriz interna. Además Al-Sijzi da su propia solución al problema al modo de Ibn al-Haytham (de hecho es la solución de un tal Al-^{c}Ala).

[12] pues áng.$[EGC]$ = áng.$[BGE]$ y áng.$[GCE]$ = áng.$[ACB]$ = áng.$[FCB]$ = áng.$[GEB]$

dada en magnitud ya que $BC = BG - GC$ está dada en magnitud y por tanto G está dado en posición porque B está dado en posición. Trazamos cir.$[G, GE]$, dado en posición, que corta a los lados (prolongados) AC, CD dados en posición en E, F. Así, los puntos E, F están dados en posición y por lo tanto la recta EF está dada en posición y, por la Prop. 70, los puntos E, F, B caen sobre la misma recta.

Del análisis del problema obtenemos los siguientes diorismos: *Neus.* I.8 tiene una solución y no tiene máximo ni mínimo. Sobre este problema Pappus escribe además el siguiente par de lemas (*Colecc.* VII.127–129):

Prop. 71 (Para la Prop. 72)**.** Sea cuad.$[ABCD]$ un cuadrado con el lado AC prolongado hasta un punto E y sea BFE una recta que corta al lado CD en F y $EG \perp BE$. Entonces $CD^2 + FE^2 = DG^2$ (ver la Fig. 1.17).

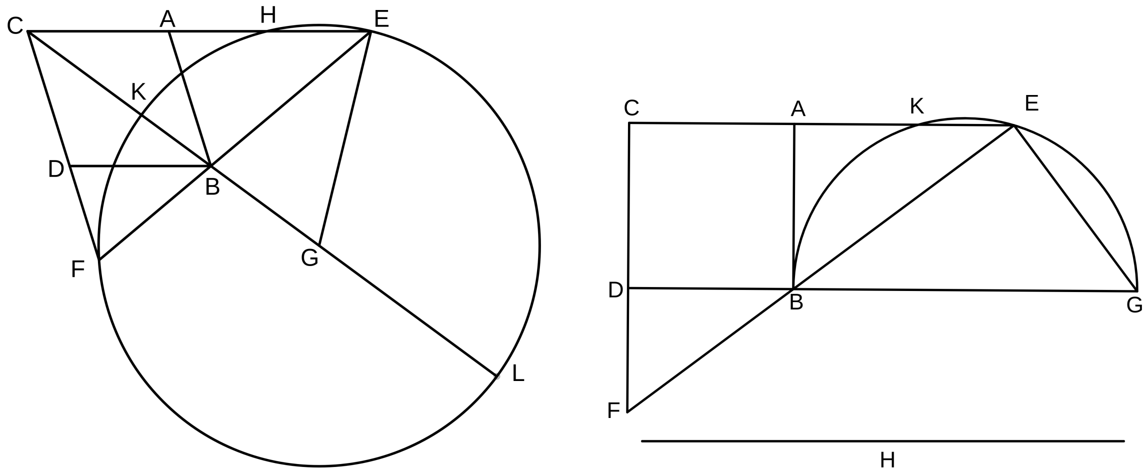
Prop. 72 (Al modo de Heráclito)**.** Sea cuad.$[ABCD]$ un cuadrado dado en posición con el lado AC prolongado hasta un punto E. Colocar en el ángulo áng.$[DCE]$ una recta EF dada, haciendo una neusis en el vértice B del ángulo opuesto áng.$[ABD]$.

La Prop. 72 ofrece una prueba alterna a la prueba de Apolonio en el caso cuando el rombo dado es un cuadrado. Esta prueba fue dada por un geómetra llamado Heráclito, anterior a Apolonio, de quien no se sabe nada más. La solución de este problema es precisamente la que dimos en el Ejemplo 1.6, con el propósito de exhibir cómo funciona el *método análisis-síntesis*. Se pueden dar proposiciones análogas a Props.71–73 para el caso de la bisectriz interna adaptando las proposiciones de la bisectriz externa como en la Fig. 1.22).

Neus. I.9 tiene dos soluciones si la recta dada es mayor que la perpendicular al diámetro BC por A; tiene una solución si la recta dada es igual a la perpendicular de BC por A; y no tiene solución si la recta dada es menor que la perpendicular de BC por A. Además, la única solución mínima es la perpendicular a BC por el punto A, es decir, la recta EF que es bisecada por B. Para demostrar este diorismo mínimo, Pappus escribe el siguiente par de lemas (*Colecc.* VII.130–131):

Prop. 73 (Para *Neus.* I.9, al modo de los antiguos)**.** Sean $CE = CF$ y EF bisecada por B. Entonces EF es la mínima de todas las rectas por B que cortan a las rectas CE, CF (prolongadas).

Prop. 74. Siendo así, el diorismo es obvio. Pues si construyo el rombo rom.$[ABCD]$ y trazo $EBF \perp BC$, con E, F sobre CA, CD, respectivamente, entonces tengo que distinguir si EBF es la máxima o la mínima de todas las rectas por B que cortan a los lados prolongados CA, CD.



(a) Prop. 70 para *Neus.* I.9

(b) Props. 71–72 para *Neus.* I.9

Fig. 1.22: Props. 70–72 para el caso de la bisectriz interna.

De nuevo, este par de proposiciones deben ser una prueba alterna a la prueba de Apolonio para la demostración del lema de *Neus.* I.9, pero esta vez Pappus la atribuye a los antiguos, siendo la Prop. 73 la parte antigua y la Prop. 74 la aplicación del resultado de la Prop. 73 al diorismo como tal. Hasta aquí con respecto al primer libro de las *Neusis*. Notemos que el orden que se ha propuesto para los nueve problemas del primer libro viene motivado por aquellos problemas que presentan diorismos mínimos: *Neus.* I.5, 7, 9. Aunque también los problemas *Neus.* I.2, 6 tienen un diorismo, Pappus no lo menciona quizá por considerarlos demasiado evidentes. Resta entonces estudiar el contenido del segundo libro de las *Neusis*: una neusis entre dos círculos cortados una vez cada uno de ellos.

1.7.4 Sobre el Problema IV. *Dados dos semicírculos con sus bases sobre la misma recta, poner entre las dos semicircunferencias una recta dada haciendo una neusis en uno de los extremos de las bases de los semicírculos.*

Una neusis entre dos semicírculos no es un problema plano en general pero se puede resolver mediante una concoide con base en uno de los dos semicírculos y con polo en el punto de la neusis. Ahora bien, el problema es plano si y sólo si el punto desde donde se hace la neusis está en alguno de los cuatro extremos de las bases de los semicírculos. No nos han llegado ejemplos de este problema general, así como tampoco del primer problema general. Si semicir.$[ABC]$, semicir.$[DEF]$ son los dos semicírculos dados con sus bases AC, DF sobre la misma recta, el cuarto problema general consiste en colocar una recta EB entre las dos semicircunferencias y tal que sea igual a una recta dada, haciendo una neusis en el punto F. Pappus nos dice que Apolonio trató este problema en 45 casos diferentes que en general es muy difícil saber exactamente cuáles fueron estos y más difícil aún es saber el orden que les dio Apolonio. Sin embargo, los lemas que el mismo Pappus nos proporciona permiten reconocer los siguientes cuatro esquemas del problema general:

Esquema 1. Los semicírculos son tangentes (*Neus.* II.1–4);

Esquema 2. Un semicírculo está dentro del otro (*Neus.* II.5, 7, 9, 11, 17, 19);

Esquema 3. Un semicírculo está afuera del otro (*Neus.* II.21, 23);

Esquema 4. Los semicírculos son secantes (*Neus.* II.24, 25, 26, 29, 31, 34).

Pappus ya no ofrece lemas para los problemas *Neus.* II.35–45, pero podemos decir que quizá se trataba de configuraciones con semicírculos tangentes. De la misma manera que el problema del rombo, este problema no es para nada trivial y por ello, para dar la solución al modo de Apolonio, tenemos que considerar el siguiente par de lemas (*Colecc.* VII.132–133) que Pappus escribe como dos resultados previos y necesarios para todos los demás lemas que dedica al problema general de los dos semicírculos porque ocurren con mucha frecuencia (aunque demuestra el mismo resultado cada vez que aparece). Primero prolongamos la recta de las bases FA hasta un punto G de manera que $AG = DC$ y trazamos las semicircunferencias auxiliares semicir.$[GHF]$, semicir.$[A\Delta F]$, semicir.$[C\Theta F]$. Así, tenemos la

Prop. 75. Dado el semicírculo semicir.$[ABKC]$ sobre AC, sean HE una recta a través de él y $A\Delta, C\Theta$ dos perpendiculares a HE, entonces $\Delta B = K\Theta$.

En la **Prop. 76** se considera el caso en el que la recta HE es tangente a semicir.$[ABKC]$, es decir cuando los puntos B, K coinciden. De estas dos proposiciones se sigue que $H\Delta : GA = \Theta E : CD$ (por teorema de Tales en las paralelas $GH \parallel A\Delta$, $C\Theta \parallel DE$ con las secantes FH, FG) y de aquí que $H\Delta = \Theta E$. Entonces concluimos que $HB = KE$. Por todo lo anterior, podemos afirmar que el análisis en la solución de Apolonio para todos los casos del cuarto problema debió haber sido esencialmente la misma y la podemos formular de la siguiente manera (Fig. 1.23):[13]

[13]Hogendijk muestra en [Hog86, §4 y Documento II] fragmentos de lo que posiblemente fueron

Análisis. Supongamos que ya tenemos la recta EB. Sea G un punto sobre FA (prolongada) tal que $AG = DC$ y trazamos el semicírculo auxiliar sobre FG, semicir.$[FHG]$. Sea T un punto sobre la transversal FH tal que $KH : TE = FH : FE$. Como $FH : FE = FG : FD$ (porque los triángulos tri.$[FHG]$, tri.$[FED]$ son semejantes) y como los puntos F, D, G están dados en posición, la razón $FH : FE$ está dada porque la razón $FG : FD$ está dada, pues las rectas FG, FD están dadas en magnitud. Luego, la razón $KH : TE$ está dada y como la recta KH está dada en magnitud (pues $KH = EB$), entonces TE está dada en magnitud. Además,

$$\begin{aligned} \frac{FG}{FD} = \frac{KH}{TE} = \frac{FH}{FE} &= \frac{FH - KH}{FE - TE} \\ &= \frac{FK}{FT} = \frac{FK \cdot FB}{FT \cdot FB} = \frac{FC \cdot FA}{FT \cdot FB}, \end{aligned}$$

es decir, la razón rec.$[FC, FA]$: rec.$[FT, FB]$ está dada y como los puntos F, C, A están dados en posición, el rectángulo rec.$[FC, FA]$ está dado en magnitud porque las rectas FC, FA están dadas en magnitud. Se sigue entonces que el rectángulo rec.$[FT, FB]$ está dado en magnitud también. Además, las rectas TE, EB están dadas en magnitud y así toda la recta TB está dada en magnitud. Entonces, las rectas FT, FB están dadas en magnitud, por *Dat.* 59 (pues $TB = FB - FT$ está dado en magnitud) y de aquí se sigue que el punto T está dado en posición. Construimos el círculo cir.$[F, FB]$, dado en posición, que corta al semicírculo dado en posición semicir.$[ABC]$ en el punto B y de este modo, el punto B está dado en posición también. Por lo tanto, la recta $FB = FT + TB$ está dada en posición.

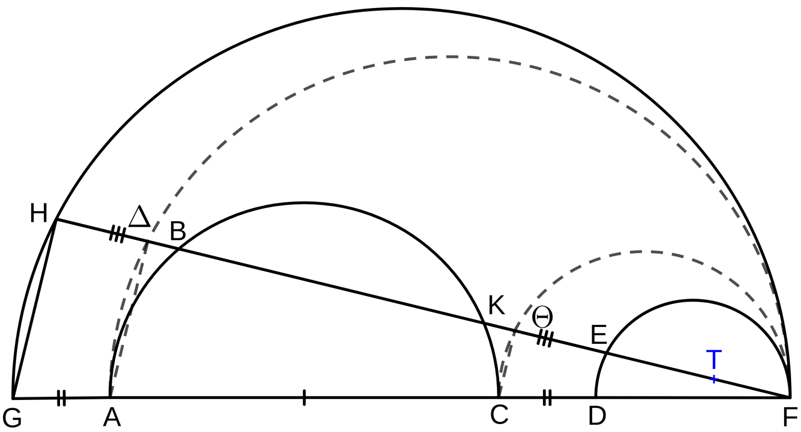


Fig. 1.23: Problema IV: neusis plana entre dos semicírculos.

las soluciones de Apolonio a los problemas *Neus.* II.1–4. Estos fragmentos se conservan en unas *Anotaciones geométricas* de Al-Sijzi.

Del análisis del cuarto problema general podríamos, en principio, obtener los diorismos de cada caso, por ejemplo: los problemas del Esquema 1 (*Neus.* II.1–4) se obtienen como casos particulares de los otros tres Esquemas, todos tienen una solución y todos tienen una única solución máxima (algunos también tienen una solución mínima, como el de la Fig. 1.24 y cuando los semicírculos están en lados contrarios respecto a la recta de las bases). Pappus no propone lemas para este esquema.

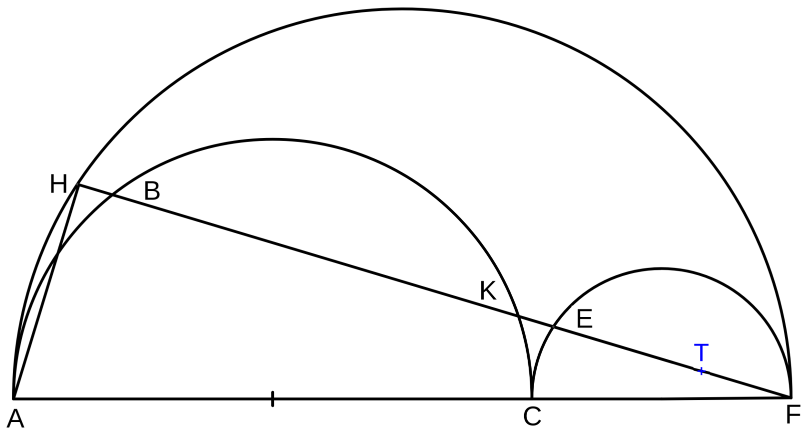


Fig. 1.24: Un representante del Esquema 1.

Los problemas del Esquema 2 (*Neus.* II.5, 7, 9, 11, 17, 19) tienen una única solución mínima y una única solución máxima, por lo cual algunos casos pueden tener hasta dos soluciones (como II.17 y II.19). Pappus ofrece diez lemas para este esquema (*Colecc.* VII.134–146 o Props. 77–87), de los cuales reproduzco aquí *Colecc.* VII.137 o **Prop. 80** (para *Neus.* II.21): si $CG = DA, GH \perp EF$, entonces $EB = KH$ (Fig. 1.25).

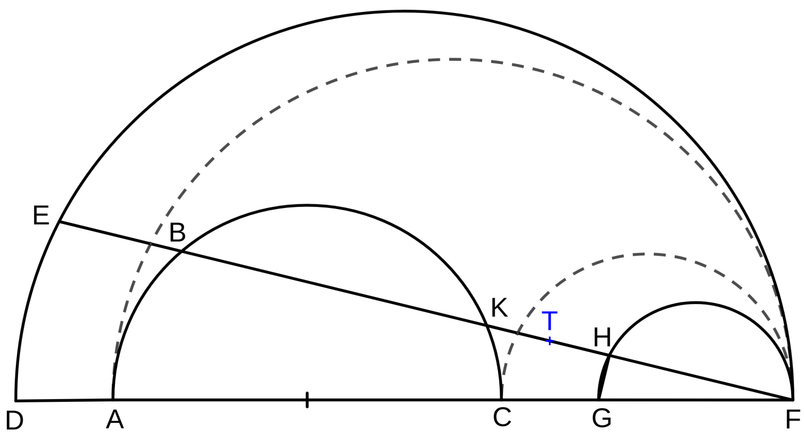


Fig. 1.25: lema para *Neus.* II.9.

Los problemas del Esquema 3 (*Neus.* II.21, 23) también tienen una única solución mínima y una única solución máxima, por lo cual algunos casos pueden tener hasta dos soluciones (como *Neus.* II.23). Pappus proporciona tres lemas para este esquema (*Colecc.* VII.147–149 o Props. 88–90), de los cuales reproduzco aquí *Colecc.* VII.147 o **Prop. 88** (para *Neus.* II.21) si $GA = CD, GH \perp FB$, entonces $HB = KE$ (Fig. 1.26).

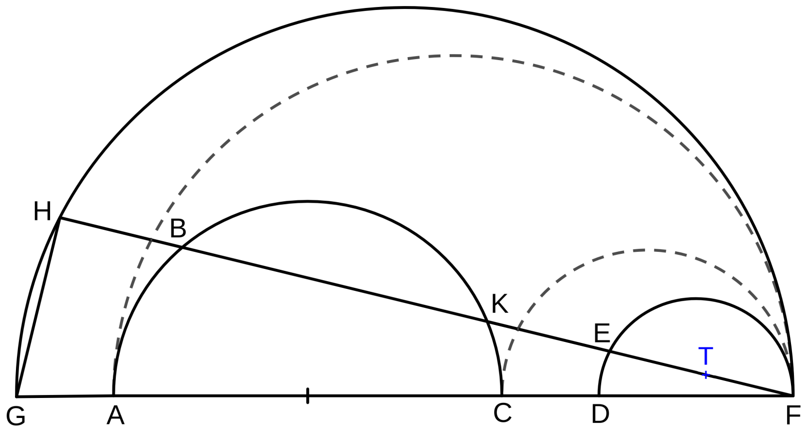


Fig. 1.26: lema para *Neus.* II.21.

Finalmente, los problemas del Esquema 4 (*Neus.* II.24, 25, 26, 29, 31, 34) también tienen una única solución mínima y una única solución máxima, por lo cual algunos casos pueden tener hasta dos soluciones (aunque de esto ya no habla Pappus). Pappus ofrece siete lemas para este esquema (*Colecc.* VII.150–156 o Props. 91–95), de los cuales reproduzco aquí *Colecc.* VII.151 o **Prop. 92** (para *Neus.* II.25): si $AD > DC, AG = DC, GH \perp BF$, entonces $BH = EK$ (Fig. 1.27).

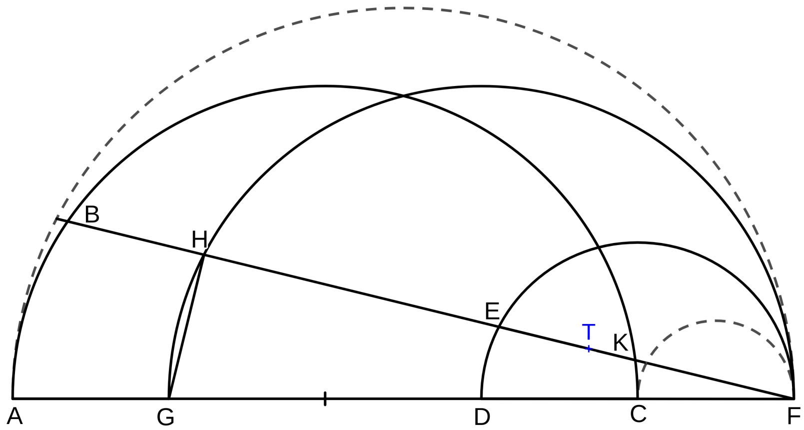


Fig. 1.27: Lema para *Neus.* II.25.

Parte 2

Problemas de neusis en la geometría de los modernos

§2.1 El surgimiento de las matemáticas modernas

Alrededor del año 1100 los europeos mantenían contacto importante con los árabes del área mediterránea y del Oriente Próximo y con los bizantinos del Imperio Romano de Oriente (debido al comercio, a múltiples viajes comerciales, a las Cruzadas &c.) y de este contacto surgió un primer periodo en el cual los europeos comenzaron a conocer los trabajos griegos (además de los *Elementos*) gracias a las obras que circulaban entre los árabes y entre los griegos bizantinos. De las relaciones con árabes y bizantinos surgió un novedoso interés por la búsqueda de trabajos griegos originales, de sus versiones árabes (si no existían versiones griegas disponibles) y de textos escritos por propios árabes. En la medida en que se obtuvieron copias de aquellas obras, los europeos se propusieron traducirlas al latín de forma gradual pero sostenida y de manera creciente. Se acepta que en general las traducciones del griego al latín realizadas en los siglos XII–XIII no fueron buenas, quizá porque el griego no se conocía muy bien, pero al mismo tiempo se acepta que eran mejores que las traducciones de las obras griegas que habían pasado a través del árabe, por su poca similitud con el griego y con el latín. De cualquier manera, de estas primeras traducciones en la Europa latina se pudieron conocer los trabajos de Euclides y de Ptolomeo, la *Aritmética* y el *Álgebra* de Al-Juarismi, la *Esférica* de Teodosio, algunos trabajos de Aristóteles, de Herón, de Arquímedes y después el siglo XIII también fueron traducidos algunos trabajos de Apolonio y de Diofanto. De hecho, hasta bien entrado el siglo XVII hubo una producción ininterrumpida de nuevas y mejores traducciones de obras matemáticas griegas (cf. [Kli92, cap. 10]).

Durante el siglo XV se produjo un segundo periodo de absorción de la matemática griega y árabe, más intenso que el primero de los tres siglos anteriores y en el cual llegaron a Europa obras griegas en enormes cantidades desde el Imperio Bizantino donde se encontraba la mayor colección de documentos griegos. Este segundo periodo de absorción fue promovido por las fuertes y estrechas relaciones con Roma y por la amenaza que representaba el poder creciente de los turcos y la decadencia del poderío árabe, además del renovado interés que mostraron los europeos por las matemáticas. Cuando los turcos conquistaron Constantinopla (1453), muchos estudiosos griegos marcharon principalmente a Italia llevando más manuscritos griegos con ellos, muchos de los cuales eran bastante mejores que los adquiridos previamente en los siglos XII–XIII. Las traducciones ulteriores de estos nuevos manuscritos realizadas directamente del griego al latín eran más fiables que las realizadas del árabe al latín y mejores que las traducciones de los siglos pasados. Más aún, la difusión de estas nuevas traducciones se vio fuertemente ampliada debido al uso del papel en lugar del pergamino (desde s. XII), a la invención de la imprenta (1450), a las publicaciones en lenguas vernáculas y a la fundación creciente de bibliotecas públicas en varias ciudades europeas importantes. De manera que se publicaron las primeras ediciones impresas de algunos trabajos de los matemáticos griegos más sobresalientes, por ejemplo: la primera edición impresa de los *Elementos* se publicó en 1482, *Esfera y cilindro* de Arquímedes en 1558, las *Cónicas* de Apolonio en 1566, la *Aritmética* de Diofanto en 1575, la *Colección* de Pappus en 1588, &c. (cf. [Kli92, cap. 11]).

A pesar de las cada vez mejores traducciones de obras griegas, los desarrollos que experimentó la geometría durante el Renacimiento (s. XV–XVI), aparte de la perspectiva, no fueron muy impresionantes ni sobresalientes y hasta la publicación de la *Ars magna* (1545) de G. Cardano no hubo desarrollos trascendentes ni en álgebra ni en aritmética, aunque se puede reconocer que la trigonometría plana y esférica junto con la aritmética experimentaron cierto desarrollo con respecto a lo que había llegado a Europa desde el mundo árabe. A pesar del poco desarrollo de las matemáticas, propiamente europeo, durante la segunda mitad de la Edad Media y durante el Renacimiento, los matemáticos europeos prepararon el terreno para el surgimiento de investigaciones originales y novedosas en aquella Europa. Las nuevas investigaciones en matemáticas tendrían sus cimientos en trabajos enciclopédicos de compilación del conocimiento existente (v. gr. la *Summa de arithmetica, geometria, proportione et proporcionalita* (1494) de Luca Pacioli) que se desprendían directamente de las traducciones de trabajos tanto griegos como árabes, de manera que el Renacimiento no fue tanto un renacimiento como una recuperación-absorción de la cultura matemática grecoárabe (cf. [Kli92, cap. 12]). Con todo, las nuevas investigaciones en matemáticas a lo largo de todo el siglo XVII, en el caso particular de la geometría, se vieron fuertemente motivadas y promovidas principalmente por los trabajos de recuperación-restauración de las obras resumidas en la *Colección* de Pappus, editada y comentada por F. Commandino en 1588. Esto es así puesto que los mejores matemáticos del siglo XVII participaron activamente en la recuperación-restauración de las obras que componían el campo del análisis, por ejemplo los siguientes:

La *Sección en una razón* fue restaurada por W. Snel (1607), E. Halley (1706), W. Diesterberg (1824), A. Richter (1836), G. Paucker (1837) y F. von Lühmann (1882).

La *Sección en un área* fue restaurada por W. Snel (1607), E. Halley (1706), W. Diesterberg (1827), G. Paucker (1837) y F. von Lühmann (1882).

La *Sección determinada* fue restaurada por W. Snel (1608), W. Lawson (1772), P.

Giannini (1773), R. Simson (1776), W. Diesterberg (1822), M. Grabow (1828), A. Richter (1828), G. Paucker (1837), J. Ley (1845) y F. von Lühmann (1882).

Los *Contactos* fueron restaurados por A. van Roomen (1596), F. Vieta (1600), W. Lawson (1771), J. Camerer (1795), C. Haumann (1817) y G. Christmann (1821).

Los *Porismas* fueron restaurados por P. de Fermat (¿1629?), I. Newton (c. 1693), R. Simson (1776), P. Breton de Champ (1855) y M. Chasles (1860).[1]

Las *Neusis* fueron restauradas por M. Ghetaldi (1607 y 1613), A. Anderson (1612), S. Horsley (1770), R. Burrow (1779) y W. Diesterberg (1823).

Los *Lugares planos* fueron restaurados por P. de Fermat (1629),[2] F. van Shooten (1657), R. Simson (1749) y J. Camerer (1796).

Las *Cónicas* fueron restauradas por F. Maurolico (1654), V. Viviani (1659), E. Halley (1710) y ¿R. Descartes (1637)?.

Esta lista de restauraciones (que no pretende ser completa) justifica mi afirmación arriba de que las investigaciones matemáticas europeas del siglo XVII estuvieron guiadas por la recuperación-restauración de obras griegas de las que nadie había tenido noticia hasta la publicación de la *Colección* de Pappus (y estos intentos de recuperación-restauración, cada vez más completos, se extendieron hasta la segunda mitad del siglo XIX). Con respecto a los problemas de neusis, lo que se sabe en la Europa latina ya en las postrimerías del siglo XVI es lo que nos dice Pappus sobre los dos libros de Apolonio, sobre la trisección angular y sobre las concoides de Nicómedes en *Colecc.* IV y VII.

§2.2 Francisco Vieta y Marino Ghetaldi

La absorción de la matemática grecoárabe, llevada a cabo en mayor cantidad y profundidad durante el Renacimiento, alcanzó su madurez en la última parte del siglo XVI. Esto queda claramente manifestado por el dominio y coordinación sistemática de los principales resultados del álgebra árabe y de la geometría griega. De entre los primeros en dar muestras de esta coordinación se encuentran R. Bombe-

[1] Fermat y Newton no produjeron restauraciones como tal sino que trabajaron sobre diversos porismas y de Champ hace una serie de nuevas observaciones al respecto. También merecen mención los trabajos de Newton sobre la triple sección y sobre las *Cónicas*.

[2] Circuló su manuscrito *Methodus ad disquirendam maximam et minimam et de tangentibus linearum curvarum*(1636) basado en resultados de 1629. Fue publicado de manera póstuma como *Ad locos planos et solidos isagoge*(1679)

lli en su *Álgebra* (1572) y P. Bonasoni en su *Álgebra geométrica* (1587). Pero es F. Vieta quien aplica sistemáticamente el álgebra en la resolución de problemas geométricos contrastando su *logistica numerosa* (aritmética) contra su *logistica especiosa* (álgebra) y distinguiendo más o menos claramente entre constantes, parámetros y variables como enseña en *De aequationum recognitione et emendatione tractatus duo* (1615). Concretamente, Vieta asigna una ecuación algebraica a cierto problema geométrico, como se puede ver por ejemplo en su *Ad logisticam speciosam notae priores* (1631) y en su *Zeteticorum libri quinque* (1591) (cf. [Boy56, cap. 3]).

En suma, Vieta representa la supervivencia de la clásica geometrización griega del álgebra, pues su obra se trata de un álgebra geométrica en el sentido de que las ecuaciones algebraicas se resuelven por medios geométricos, pues su *arte analítico* consiste de tres partes: (1) **zetética** o determinación de las propiedades de los objetos requeridas de los objetos dados (plantear una ecuación); (2) **porística** o verificación (determinar condiciones de solución y resolver la ecuación); y (3) **exegética** o demostración de la proposición (*construcción* de las soluciones de la ecuación). Por ejemplo, en su *Effectionum geometricarum canonica recensio* (1593) muestra que las raíces de una ecuación cuadrática se pueden encontrar insertando una media proporcional; en su *Supplementum geometriae* (1593) muestra que las raíces de una ecuación cúbica o bicuadrática se pueden encontrar trisecando ángulos o insertando dos medias proporcionales continuas (o duplicando cubos); en *Ad angularium sectionum analyticen theoremata* (1615) muestra que las raíces de una ecuación de grado n se pueden encontrar seccionando un ángulo en n partes iguales o insertando $n-1$ medias proporcionales continuas, &c. Así, queda justificado que una configuración geométrica concreta es representada por una ecuación algebraica.

En contraste con el sentido que Platón y Pappus dan al concepto de análisis como una vía para descubrir la verdad y al de síntesis como una vía para exponerla, Vieta llama *nuevo análisis* a su álgebra geométrica y este nombre queda justificado porque su zetética (es decir, el abordaje algebraico de un problema geométrico), procede de manera indirecta suponiendo que ya se tiene lo que se quiere construir y operando con las cantidades desconocidas como si fueran conocidas amalgamadas en una ecuación algebraica. Por tanto, el álgebra parece ser la herramienta adecuada para recorrer el camino analítico en geometría y lo que es más, el arte analítico de Vieta es tanto una vía para investigar lo que se busca como una vía para exponerlo.[3]

[3]Aunque la mezcla de geometría y álgebra podría sugerirle a un lector contemporáneo una geometría analítica, C. Boyer se esfuerza en mostrar en su [Boy56, caps. 3–4] que en todas las obras sobre álgebra geométrica tanto de Vieta, de Cataldi, de Benedetti, de Ghetaldi como de

A pesar de que muchos de los trabajos de Vieta no se publicaron y los que fueron publicados circularon muy poco, su discípulo M. Ghetaldi fue heredero del nuevo análisis de Vieta y él mismo desarrolló su álgebra geométrica. Ghetaldi hizo de la zetética de Vieta un instrumento sistemático para la resolución de problemas geométricos, y recíprocamente, dio pruebas geométricas de algunas identidades algebraicas. Construyó geométricamente las raíces de determinadas ecuaciones algebraicas en su obra póstuma *De resolutione et compositione mathematica* (1630), misma que es reconocida como el primer libro de texto sobre álgebra geométrica. Esta obra de álgebra geométrica tiene además un interés particular en el tema que nos ocupa, pues en ella Guetaldi resuelve los cuatro problemas generales de neusis que presentamos en la sección §1.7 al modo del álgebra geométrica, que ya había resuelto geométricamente en su reconstrucción de 1607 y 1613. Para ilustrar este punto, tomo el siguiente ejemplo del capítulo 4 del libro V de su *Compositione mathematica* [Ghe30], en el cual Ghetaldi se ocupa de los problemas que no caen en el dominio del álgebra, es decir, de los problemas que no tienen una ecuación algebraica asociada (sin considerar a las funciones trigonométricas). El ejemplo consiste en hacer una neusis entre dos rectas secantes que son lados de un rombo o a un paralelogramo general.

Ejemplo 2.1. Dado un paralelogramo en posición con uno de sus lados prolongado, ajustarle una recta dada en el ángulo externo que forma el lado prolongado, haciendo una neusis en el ángulo opuesto.

Si paral.$[ABCD]$ es el paralelogramo dado con el lado AC prolongado hasta un punto E, se trata de colocar una recta FE en el ángulo áng.$[DCE]$ que corta al lado CD en el punto F, haciendo una neusis en el vértice B del ángulo opuesto áng.$[ABD]$ (Fig. 2.1). Supongamos que ya tenemos la recta EF y sean $a := AC$, $b := AB$, $k := FE$, $\alpha :=$ áng.$[CDB]$ y $x := CE$. Como los triángulos

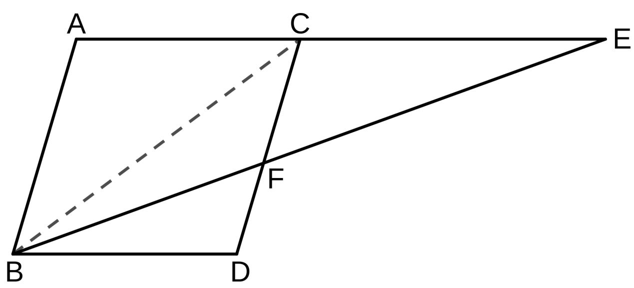


Fig. 2.1: Neusis entre dos rectas (lados de un paralelogramo).

Girard, de Harriot y de Oughtred, no se encuentra ninguna anticipación de la geometría analítica, pues falta en todas ellas el elemento esencial que resume muy bien Fermat en su *Ad locos planos et solidos isagoge*: “Siempre que en una ecuación final se encuentran dos cantidades desconocidas, tenemos un lugar (geométrico), y el extremo de una de estas describe una línea recta o curva”.

tri.$[FBD]$, tri.$[FEC]$ y tri.$[CFE]$, tri.$[ABE]$ son semejantes por el teorema AA,

$$FB = \frac{ak}{x} \quad \text{y} \quad FD = CD - CF = b - \frac{bx}{x+a} = \frac{ab}{x+a}.$$

Pero en el triángulo tri.$[FBD]$ el teorema del coseno dice que

$$FB^2 = BD^2 + FD^2 - 2\ BD \cdot FD \cdot \cos\alpha,$$

es decir
$$\left(\frac{ak}{x}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{ab}{x+a}\right)^2 - 2a \cdot \frac{ab}{x+a} \cdot \cos\alpha.$$

Multiplicando la ecuación por $x^2(x+a)^2$ y simplificando obtenemos la ecuación de cuarto grado asociada a la configuración geométrica del problema:

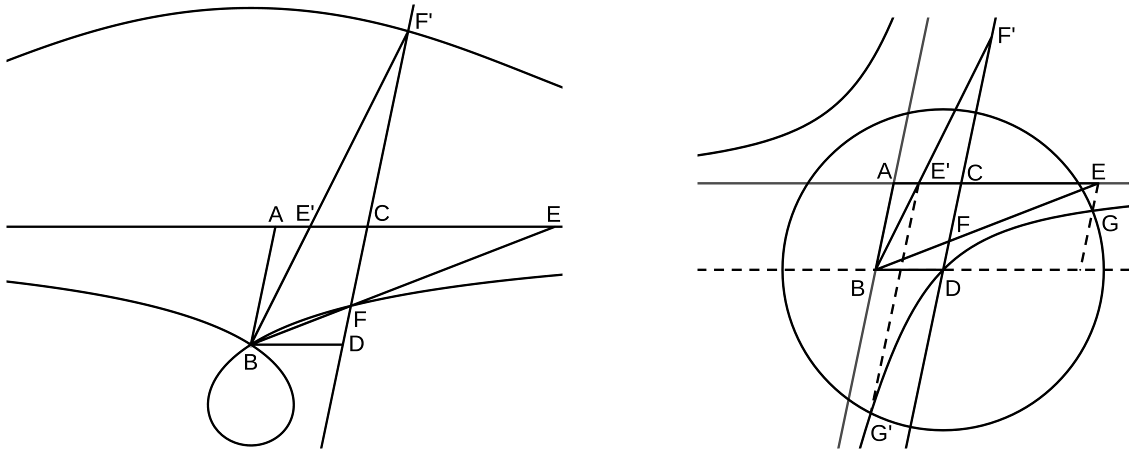
$$(x+a)^2(x^2-k^2) = (2b\,\cos\alpha(x+a) - b^2)x^2, \tag{2.1}$$

Si el paralelogramo paral.$[ABCD]$ es un romboide, la ecuación que representa al problema es la ecuación bicuadrada (2.1); si es un rombo, tenemos que $a = AC = AB = b$; si es un rectángulo, tenemos que $\cos\alpha = 0$; y si es un cuadrado, tenemos que $a = AC = AB = b$ y $\cos\alpha = 0$. Por ejemplo, si el paralelogramo paral.$[ABCD]$ es un rectángulo y la recta dada es de magnitud $k^2 = 4(a^2+b^2)$, entonces se tiene que

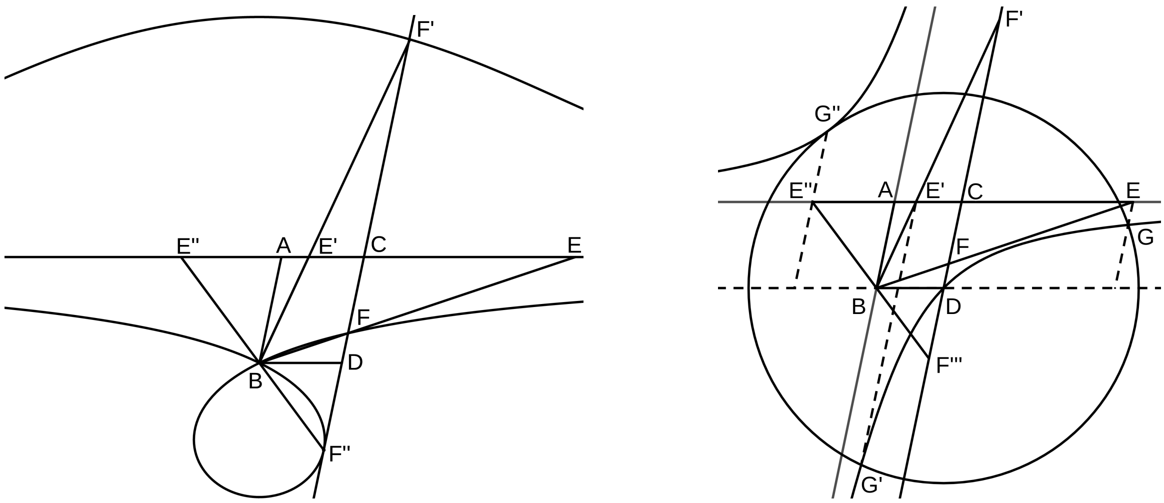
$$x^4 + 2ax^3 - 3(a^2+b^2)x^2 - 8a(a^2+b^2)x - 4a^2(a^2+b^2) = 0. \tag{2.2}$$

Esta ecuación es equivalente a la ecuación (1.8) del problema de la trisección angular,[4] aunque Ghetaldi no resuelve de este modo el problema ya que se niega a emplear funciones trigonométricas porque prefería practicar el análisis y la síntesis al modo de Pappus, según nos explica Cantor en [Can92, págs. 251–254]. Ahora bien, en el problema de colocar una recta dada entre dos rectas secantes, el número de soluciones está dado por el número de intersecciones entre un círculo y una hipérbola (como en la Fig. 1.5) o bien por el número de intersecciones de una de las rectas y una concoide (como en la Fig. 1.15). Dado que una rama de la hipérbola pasa por el centro del círculo, hay necesariamente al menos dos soluciones y puede haber hasta cuatro. Del mismo modo, la concoide es cortada al menos dos veces y puede ser cortada hasta cuatro veces (Fig. 2.2).

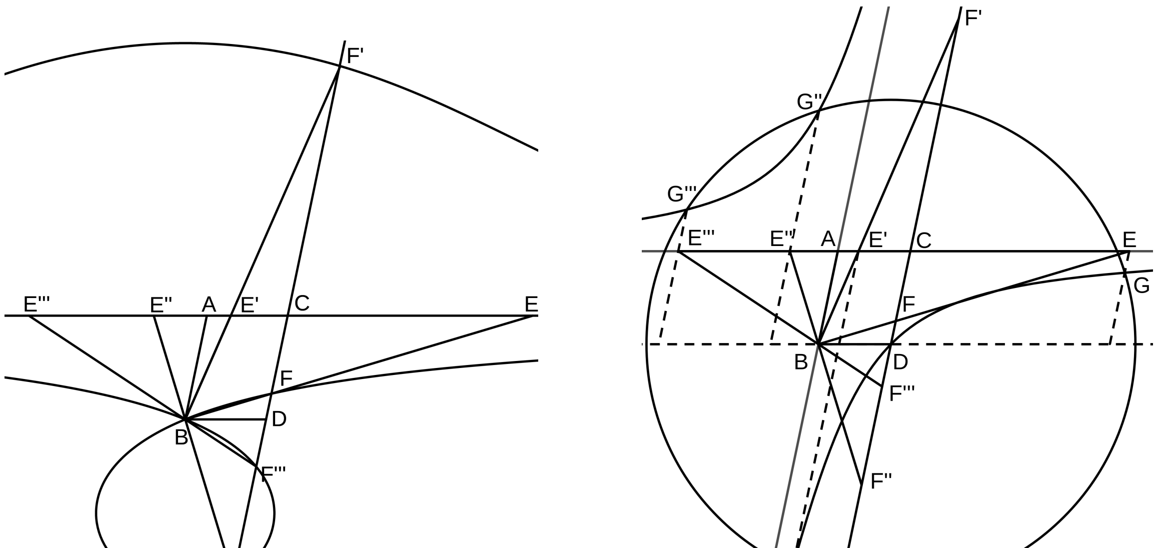
[4] En realidad los coeficientes de (2.2) son permutaciones de las raíces de los coeficientes de (1.8), como de hecho lo demuestra J.-L. Lagrange (1736–1813) al final de su famosa memoria *Reflexiones sobre la resolución algebraica de las ecuaciones* (1770–1771).



(a) Dos soluciones.



(b) Tres soluciones.



(c) Cuatro soluciones.

Fig. 2.2: EF son las soluciones de una neusis entre dos rectas secantes por medio de una concoide (izq.) y por intersecciones de cónicas (der.).

Así como Vieta tomó parte activa en el movimiento de reconstrucción-restauración de los trabajos perdidos de Apolonio en el siglo XVII (por ejemplo reconstruyendo los *Contactos* en su *Apollonius gallus* (1600)), Ghetaldi siguiendo a su maestro también en este punto se aplicó en la reconstrucción de las *Neusis* en su *Apolonius rediuiuus* (1607 y 1613), de la manera que vamos a estudiar en el siguiente par de lecciones.

§2.3 *Apollonius rediuiuus, liber primus* (1607)

Como indicamos arriba, en la sección §2.1, la primera reconstrucción de las *Neusis* de Apolonio fue realizada por M. Ghetaldi, en dos partes. La primera parte fue publicada en 1607 [Ghe07] y en ella Ghetaldi reconstruye el primer libro de las *Neusis* con sus nueve problemas (aunque en un orden distinto al que hemos propuesto en §1.7, con base en los lemas de Pappus, concretamente en el orden *Neus.* I.1, I.2, I.5, I.7, I.6, I.4, I.3, I.8, I.9). La segunda parte fue publicada en 1613 [Ghe13] y en ella Ghetaldi reconstruye el segundo libro de las *Neusis* en 48 casos o diagramas, en contraste a los 45 problemas que contenía el tratado original. De manera global, podemos hacer las siguientes observaciones sobre la reconstrucción de Ghetaldi:

1. La manera en la que procede Apolonio en sus llamados "trabajos menores" (los que presenta Pappus como parte del campo del análisis, pág. 30) es muy sistemática, monótona y repetitiva, pues aplica el mismo método de resolución en todos los casos donde es posible hacerlo. Además, para resolver un problema siempre realiza el análisis y de este obtiene los diorismos (cuando los hay) para después realizar la síntesis y dar así la solución completa del problema con todos sus casos. De esta manera de proceder se comprende que su obra sobre las *Neusis* haya consistido originalmente de 125 teoremas o diagramas (pero sólo cuatro problemas generales divididos en 54 casos), según nos dijo Pappus. En contraste con el método tan exhaustivo practicado por Apolonio, Ghetaldi es mucho más breve en sus soluciones, pues expone solamente la síntesis y no presenta ni el análisis ni los diorismos, aunque su solución de cada problema pretende ser completa en el sentido de cubrir todos los casos posibles añadiendo las condiciones de solución.

2. La reconstrucción del primer libro *Neus.* I contiene los nueve problemas que contenía el primer libro de Apolonio, aunque en otro orden y aunque la solución del tercer problema no hace ningún uso de los lemas de Pappus, pues se trata de una solución (ahora sabemos) completamente distinta de aquella dada por Apolonio. En el segundo libro *Neus.* II, Apolonio muy seguramente utilizó el mismo método

para resolver cada uno de los 45 problemas, excepto quizá en los casos triviales cuando los semicírculos son tangentes; en contraste, Ghetaldi no siempre usa el mismo método y obtiene 48 problemas. En la solución de cada problema, Ghetaldi incorpora los diorismos mínimos durante el desarrollo de la demostración pero no es claro para el lector cómo se han obtenido dichas condiciones de solución (a la manera de los *Elementos*). Hay que decir que Ghetaldi tampoco intenta recuperar el método de Apolonio ni el orden de los problemas, sino los resultados geométricos mismos, así como tampoco es claro de qué manera practica el análisis geométrico de los antiguos geómetras y siempre que el problema tiene más de una solución no dice cómo construirla, así como tampoco habla de las soluciones mínimas ni máximas.

3. Ghetaldi usa los lemas auxiliares de Pappus solamente como una sugerencia para su reconstrucción pero no intenta dar el posible orden original de los 125 diagramas que Apolonio compuso en sus dos libros de *Neusis* ni intenta tampoco dar la solución que Apolonio pudo haber dado (si esto fuera posible, solamente los lemas de Pappus no son suficientes para hacerlo). Los lemas de Pappus son usados para dar orden a los problemas del primer libro y quizá para sugerir una solución, aunque no está claro si esto efectivamente fue así porque Ghetaldi no se refiere en ningún momento a los lemas de Pappus (ni a ninguna obra de Pappus). No es fácil tampoco determinar la manera en la que Ghetaldi usa los lemas para el segundo libro, pues son muy útiles para establecer el orden de los primeros problemas pero no son útiles para por lo menos imaginar la solución de Apolonio u otra solución cualquiera, de manera que Ghetaldi arregla los problemas del segundo libro en un orden que no sigue en nada los Esquemas que propusimos en la primera parte de este trabajo, ya que propone tres "esquemas" en su solución.

A pesar de las diferencias que hemos señalado entre la reconstrucción de Ghetaldi y lo que se sabía de Apolonio hacia inicios del siglo XVII (que no era mucho más de lo que se contiene en la *Colección* de Pappus), el trabajo general de reconstrucción-restauración llevado a cabo por Ghetaldi tiene ciertas virtudes matemáticas y históricas, pues como hemos señalado, la intención de Ghetaldi no es la de dar una reconstrucción fiel de la obra de Apolonio, en el sentido más estricto de la palabra, sino la de recuperar la "geometría de inclinación" de los antiguos reconstruyendo sus resultados principales. Concretamente, sobre la reconstrucción del primer libro de las *Neusis*, Ghetaldi procede de la manera que estudiamos a continuación.

2.3.1 Sobre el primer problema. *Se trata de ajustar una cuerda igual a una recta dada, en un círculo dado en posición, haciendo una neusis en un punto dado* *que no cae en la circunferencia del círculo.*

Ghetaldi resuelve este problema en dos casos, cf. [Ghe07, págs. 1–4]. El primer caso corresponde a *Neus.* I.1 (el punto dado está afuera de la circunferencia) y el segundo caso corresponde a *Neus.* I.2 (el punto dado está adentro de la circunferencia). En la solución, Ghetaldi aprovecha la invarianza de la potencia del punto dado con respecto al círculo dado y considera los diorismos necesarios de cada caso para que el problema tenga solución: para el primer caso, que la recta dada no sea mayor que un diámetro del círculo dado y para el segundo caso que la recta dada no sea mayor que un diámetro del círculo dado y que no sea menor que la cuerda perpendicular al diámetro por el punto dado. Aunque Ghetaldi no da el número de soluciones en cada configuración, es evidente a partir de la construcción que hay dos soluciones. La solución del primer caso es como sigue (Fig. 2.3): sean cir.$[BCD]$ el círculo dado y O su centro, A un punto dado fuera de la circunferencia de cir.$[BCD]$ y sea K una recta dada en magnitud menor o igual que el diámetro de cir.$[BCD]$. (I) Si K es igual que el diámetro de cir.$[BCD]$, entonces el problema queda resuelto después de trazar el diámetro de cir.$[BCD]$ que prolongado pasa por A y esta es la única solución. (II) Si K es menor que el diámetro de cir.$[BCD]$, entonces trazamos una tangente AD que toca a cir.$[BCD]$ en D y trazamos el radio OD, por lo que áng.$[ADO] = R$. Sobre el radio DO colocamos la recta $DE = \frac{1}{2}K$ y trazamos la transversal AE. Trazamos el círculo cir.$[E, EF]$ que corta a la transversal AE prolongada en F, G y que es a su vez tangente a la recta AD en D porque áng.$[ADE]$ = áng.$[ADO] = R$. Trazamos el círculo cir.$[A, AF]$ que corta al círculo cir.$[BCD]$ en B, B' y trazamos la recta ABC que corta a cir.$[BCD]$ en B, C. Como

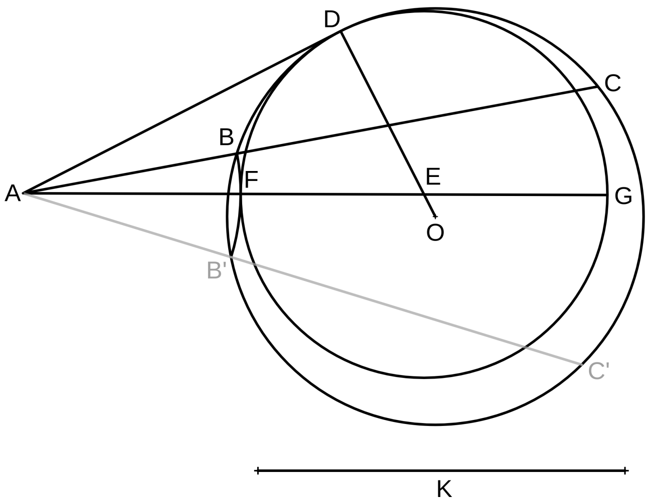


Fig. 2.3: Solución del Problema I, caso 1 (*Neus.* I.1).

$$\cancel{BA} \cdot AC = AD^2 = \cancel{FA} \cdot AG,$$

y como $BA = FA$, entonces $AC = AG$.

Restando iguales a iguales, concluimos que $BC = FG = K$. Q. E. F.

La solución del segundo caso (Fig. 2.4) es esta: sean cir.$[BCD]$ el círculo dado con centro en O, A un punto dado dentro de la circunferencia de cir.$[BCD]$ y sea K una recta dada en magnitud no mayor que el diámetro de cir.$[BCD]$ y no menor que la cuerda DH perpendicular al diámetro GAI en A (que trazamos). (I) Si $K = GI$, entonces el problema queda resuelto y esta es la única solución. (II) Si $K < GI$, entonces trazamos por A la perpendicular $DAH \perp GAI$. (II.1) Si $DH = K$, el problema queda resuelto y esta es la única solución. (II.2) Si $DH < K$, ponemos entre las rectas AG, AA una recta $DE = \frac{1}{2}K$ y hacemos $EF = ED$ con el punto F sobre el diámetro GI. Trazamos el círculo cir.$[A, AF]$ que corta a cir.$[BCD]$ en B, B', trazamos la recta BAC que corta a cir.$[BCD]$ en B, C y colocamos sobre GI prolongada la recta $EL = EF = ED$. Así, tenemos que la recta FL es bisecada por E y seccionada en partes desiguales por A, por lo cual de *Elem.* II.5 se sigue que $FA \cdot AL + EA^2 = EF^2$. Pero también $EF^2 = ED^2 = EA^2 + DA^2$ y en consecuencia se tiene que

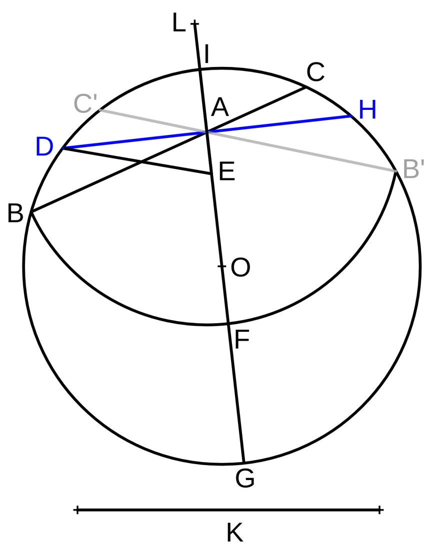


Fig. 2.4: Solución del Problema I, caso 2 (*Neus.* I.2).

$$FA \cdot AL + \cancel{EA^2} = \cancel{EA^2} + DA^2.$$

Además se satisface que $DA^2 = DA \cdot AH = BA \cdot AC$, de donde

$$\cancel{FA} \cdot AL = \cancel{BA} \cdot AC,$$

y como $FA = BA$, entonces se tiene que $AL = AC$
Sumando iguales a iguales concluimos que $BC = FL = K$. Q. E. F.

En el primer caso (*Neus.* I.1), la demostración consiste en hacer ver que $AC = AG$, aprovechando la potencia del punto A con respecto a las circunferencias cir.$[BCD]$, cir.$[FGD]$, y por lo tanto poder concluir que $BC = FG = K$. De la construcción es evidente que la recta $AB'C'$ que corta a cir.$[BCD]$ en B', C' es una segunda solución. También es claro que la construcción funciona tanto en el caso $A - E - G$ como en el caso $A - G - E$, o de manera equivalente, en lugar de trazar el círculo cir.$[A, AF]$, podemos trazar el círculo cir.$[A, AG]$. Es igualmente claro que la construcción funciona para cualquiera de las dos tangentes desde A, como se puede demostrar fácilmente por un argumento de simetría.

En el segundo caso (*Neus.* I.1), la demostración consiste en hacer evidente que $AL = AC$, lo cual se da por *Elem.* II.5 en la recta $FEAL$, por *Elem.* I.45 en el triángulo tri.$[EDA]$ y por la potencia del punto A con respecto a cir.$[BCD]$, y por tanto poder concluir que $BC = FL = K$. De la construcción es evidente que la recta $B'AC'$ que corta a cir.$[BCD]$ en B', C' es una segunda solución. También es claro que esta construcción funciona tanto en el caso $A - E - F$ como en el caso $F - A - E$, o equivalentemente, en lugar de trazar el círculo cir.$[A, AF]$, podemos trazar el círculo cir.$[A, AL]$ con centro A y radio AL.

Como vimos en la Parte 1, Pappus proporciona un lema para el primer caso y tres lemas para los diorismos del segundo caso. En estos lemas Pappus nos dice que es necesario resolver la ecuación $kx - x^2 = a^2$, donde $k := BC, x := AB, a^2 = DA{\cdot}AH$, mientras que en el primer caso se tendría que resolver la ecuación $kx + x^2 = a^2$, donde $k := BC, x := AB, a^2 = FA \cdot AG$. Creemos que Ghetaldi emplea estos lemas para ordenar los dos casos del primer problema, pero no es claro si los emplea de alguna forma para obtener la solución que propone aunque su solución es coherente con el análisis que dimos en la sección §1.7.

2.3.2 Sobre el segundo problema. *Se trata de ajustar una recta igual a una recta dada, entre un semicírculo dado en posición y una recta perpendicular a su base (prolongada) dada en posición también, haciendo una neusis en un extremo de la base del semicírculo.*

Ghetaldi resuelve este problema general en cinco casos (cf. [Ghe07, págs. 4–17]) que corresponden a *Neus.* I.5, I.7, I.6, I.4 y I.3, en este orden. Para dar la solución en cada caso, Ghetaldi aprovecha la semejanza de los triángulos rectángulos que forman la base (prolongada) del semicírculo, la recta que ajustamos por neusis y la perpendicular a la base. Además, propone los diorismos de cada caso (cuando los hay) para que el problema tenga solución. La solución de los casos $1, 3, 4$ y 5 es esencialmente la misma y, de nuevo, el único lema que Pappus da para (*Neus.* I.6) difícilmente puede emplearse para construir una solución con base en él.

La construcción para la solución de los casos primero, tercero y cuarto (*Neus.* I.5, I.6, I.4, respectivamente) la podemos formular de esta manera (Fig. 2.5): sean semicir.$[AEB]$ el semicírculo dado, CD la perpendicular a su base AB en C y K la recta dada ($\leq CB$ para *Neus.* I.6 y $\geq BC$ para *Neus.* I.5). [(I) Si $K = BC$, el problema queda resuelto para *Neus.* I.5 y I.6. (II) En cualquier otro caso,] sea F el punto donde la perpendicular CD corta a semicir.$[AEB]$ [o donde la perpendicular $BF \perp AC$ corta al semicírculo semicir.$[AC]$, para *Neus.* I.5] y trazamos la recta BFG con $FG = \frac{1}{2}K$ [o la recta CFG, para *Neus.* I.5]. Trazamos el círculo cir.$[G, GF]$ y la recta AG que (prolongada) lo corta en I, H, por lo cual $IH = K$ (por ser un diámetro de cir.$[FHI]$). Trazamos la recta AF, que es tangente a cir.$[FHI]$ = cir.$[G, GF]$ en F, pues áng.$[AFB] = R =$ áng.$[AFG]$ [en *Neus.* I.5 se tiene áng.$[AFC] = R =$ áng.$[AFG]$]. Entre las rectas (prolongadas) AC, CD ponemos una recta $AD = AI$ (lo cual es posible porque $AC < AI$). Sea E el punto donde la recta AD (prolongada) corta a semicir.$[AEB]$ y trazamos la recta EB. [Para *Neus.* I.3 colocamos la recta $FG = BG$ sobre la perpendicular BD, pues los puntos B, C, F coinciden, y es claro que AF es tangente a cir.$[G, GF]$ porque $AF \perp FD$]. Entonces tenemos que $IA \cdot AH = AF^2$ y como los triángulos tri.$[BFA]$, tri.$[FCA]$ son semejantes por el teorema AA, entonces también tenemos que $AF^2 = AC \cdot AB$, de donde se sigue que

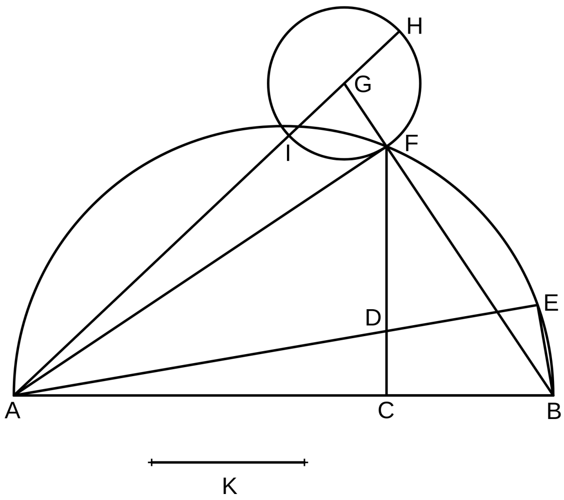


Fig. 2.5: Solución del Problema II, casos 1, 3–5 (*Neus.* I.5–6 y I.4–3).

$$IA \cdot AH = AC \cdot AB. \tag{2.3}$$

Pero también los triángulos tri.$[AEB]$, tri.$[ACD]$ son semejantes por AA, es decir

$$AC \cdot AB = AD \cdot AE. \tag{2.4}$$

De las dos relaciones (2.3)–(2.4) se sigue que

$$\cancel{IA} \cdot AH = AC \cdot AB = \cancel{AD} \cdot AE,$$

y del hecho que $AD = AI$, se sigue que $AH = AE$.
Restando iguales a iguales concluimos que $DE = IH = K$. Q. E. F.

La solución del segundo caso (*Neus.* I.7) es diferente de la solución de los otros cuatro casos, aunque es de cierta manera parecida a la del caso *Neus.* I.2, pues va como sigue (Fig. 2.6): sean semicir.$[AEB]$ el semicírculo dado, CD la perpendicular a su base BA prolongada y sea K la recta dada tal que $2\ AF \leq K$, donde $AF^2 = BA \cdot AC$ (es decir, AF es la media proporcional de BA, AC) y trazamos el semicírculo semicir.$[BFC]$ sobre la recta BC. Entonces la semicuerda perpendicular a BC por A es igual a la recta AF. Entre las rectas AF, AC ponemos una recta $FG = \frac{1}{2}K$ (lo cual es posible porque $2\,AF \geq K$). Sea una recta $GH = GF$ con el punto G sobre la base BC (prolongada) y entre las rectas CD, CB ponemos una recta $AD = AH$ y la prolongamos hasta cortar a semicir.$[AEB]$ en el punto E. Trazamos la recta EB y colocamos una recta $GI = GH$, con el punto I sobre la base BC (prolongada) y del otro lado de H con respecto al punto A, por lo cual $IH = K$. Así tenemos que la recta IH es bisecada por G y es seccionada en partes desiguales por A, de manera que por *Elem.* II.5 se sigue que

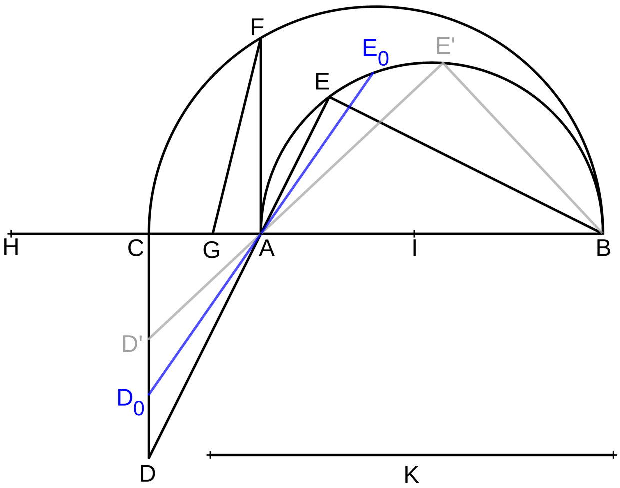


Fig. 2.6: Solución del Problema II, caso 2 (*Neus.* I.7).

$$IA \cdot AH + AG^2 = GH^2 = GF^2.$$

Pero también se satisface que

$$GF^2 = AG^2 + AF^2 = AG^2 + BA \cdot AC,$$

y en consecuencia

$$IA \cdot AH + \cancel{AG^2} = \cancel{AG^2} + BA \cdot AC. \tag{2.5}$$

Además los triángulos tri.$[AEB]$, tri.$[ACD]$ son semejantes por el teorema AA, i. e.

$$BA \cdot AC = EA \cdot AD. \tag{2.6}$$

Entonces, de (2.5)–(2.6) se sigue la relación

$$IA \cdot \cancel{AH} = EA \cdot \cancel{AD},$$

y como $AD = AH$, tenemos que $AI = AE$. Sumando iguales a iguales concluimos que $DE = HI = K$.

Notemos que si $AD \leq BA$, entonces podemos colocar una recta $AE' = AD$ con E' sobre semicir.$[AEB]$, la prolongamos hasta cortar a la perpendicular CD en D' y trazamos la recta $E'B$. Así tenemos que los triángulos tri.$[AEB]$, tri.$[ACD]$ y los triángulos tri.$[AE'B]$, tri.$[ACD']$ son semejantes (por el teorema AA), es decir

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AB} \qquad \text{y} \qquad \frac{AD'}{AC} = \frac{AB}{AE'}.$$

Multiplicando ambas ecuaciones y dado que $AE' = AD$, obtenemos

$$\frac{\cancel{AC}}{\cancel{AD}} \cdot \frac{AD'}{\cancel{AC}} = \frac{AE}{\cancel{AB}} \cdot \frac{\cancel{AB}}{\cancel{AE'}},$$

y sumando iguales a iguales concluimos que $D'E' = DE$. Por lo tanto la recta $D'E'$ es otra solución del problema.

Notemos además que si $AF \leq AB$, entonces podemos colocar una recta $AE_0 = AF$, con E_0 sobre semicir.$[AEB]$, prolongarla hasta cortar a la recta perpendicular CD en un punto D_0 y trazar la recta E_0B. Entonces los triángulos tri.$[AE_0B]$, tri.$[ACD_0]$ son semejantes (por el teorema AA), es decir $AB \cdot AC = AE_0 \cdot AD_0$. Pero por hipótesis se tiene $AF^2 = BA \cdot AC$, y en consecuencia

$$AE_0^2 = AF^2 = BA \cdot AC = AE_0 \cdot AD_0,$$

es decir $AE_0 = AD_0$. Por lo tanto la recta D_0E_0 es bisecada por A.

Más aún, D_0AE_0 es la recta mínima que puede colocarse entre CD y semicir.$[AEB]$ por A, pues si DAE es otra recta tal, entonces los triángulos tri.$[AEB]$, tri.$[ACD]$ y tri.$[AE_0B]$, tri.$[ACD_0]$ son semejantes (por el teorema AA), es decir

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AB} \qquad \text{y} \qquad \frac{AD_0}{AC} = \frac{AB}{AE_0}.$$

Multiplicando ambas ecuaciones obtenemos

$$\frac{\cancel{AC}}{AD} \cdot \frac{AD_0}{\cancel{AC}} = \frac{AE}{\cancel{AB}} \cdot \frac{\cancel{AB}}{AE_0},$$

Además, dado que $AF = AE_0 = AD_0$, se sigue que si AE es máxima entonces AD es mínima y recíprocamente. De este hecho y por *Elem.* V.25, concluimos que

$$DE = DA + AE > D_0A + AE_0 = D_0E_0,$$

Por lo tanto, la única recta mínima entre CD y semicir.$[AEB]$ por el punto A queda bisecada por A y es igual a $2\,AF$. Q. E. F.

La demostración de los casos $1, 3, 4$ y 5 consiste básicamente en hacer ver que $AH = AE$ usando la potencia del punto A con respecto a cir.$[IFH]$ y el hecho de que los triángulos tri.$[BFA]$, tri.$[FCA]$ y tri.$[AEB]$, tri.$[ACD]$ son semejantes, y por tanto poder concluir que $DE = IH = K$. Estos cuatro casos tienen una única solución. La demostración del caso 2 consiste en mostrar que $EA = IA$, aprovechando *Elem.* II.5 en la recta $HGAI$, *Elem.* I.45 en el triángulo tri.$[GAF]$ y la semejanza de los triángulos tri.$[AEB]$, tri.$[ACD]$, para poder concluir que $DE = HI = K$.

Ahora bien, Pappus nos dice que *Neus.* I.5 y I.7 tienen un diorismo mínimo y nos propone un lema para *Neus.* I.6. De esta información podemos concluir que el caso 1 corresponde a *Neus.* I.5, el caso 2 corresponde a *Neus.* I.7, el caso 3 corresponde a *Neus.* I.6 y (suponemos) que los casos 4 y 5 corresponden a *Neus.* I.4 y *Neus.* I.3, respectivamente. Es suficientemente claro que el caso 1 posee una solución mínima (que es igual a BC) y que el caso 3 posee una solución máxima (que es igual a CB). No es igualmente claro que el caso 2 posee una solución mínima y que puede tener hasta dos soluciones, sin embargo Pappus no aporta lemas auxiliares para el diorismo de este caso posiblemente porque Apolonio fue explícito en este punto. Por su parte, Ghetaldi proporciona una manera para construir la segunda solución $D'E'$ a partir de la primera solución DE y muestra cómo construir la solución mínima D_0E_0. En resumen, podemos formular las condiciones de solución o diorismos así:

1. El problema tiene dos soluciones si $BA > AC$ y $2\,AF < K \leq BC$, pues (no es difícil demostrar que) en este caso siempre sucede que $AD \leq BA$ y $AD = BA$ cuando $K = BC$.

2. El problema tiene una solución si $BA \geq AC$ y $K = 2\,AF$ (la solución mínima que es bisecada por A) o si $K \geq BC$ (y $K = BC$ cuando $BA = AC$). También hay una solución si $BA \leq AC$ y $K \geq BC$, siendo

BC la solución mínima.

3. El problema no tiene solución si $K < 2\,AF$.

Una vez resuelto el problema general (en cinco casos), Ghetaldi propone el siguiente **corolario:** *colocar una recta igual a una recta dada entre una sección de (semi)círculo dada y una recta dada que corta su base (prolongada), haciendo una neusis en un extremo de la base de la sección circular.* La solución es inmediata ya que consiste en completar la sección hasta un semicírculo tal que su base (prolongada) sea perpendicular a la recta dada.

2.3.3 Sobre el tercer problema. *Se trata de ajustar una recta igual a una recta dada, en el ángulo externo (interno) de un rombo dado en posición con un lado prolongado (con dos lados adyacentes prolongados), haciendo una neusis sobre el vértice del ángulo opuesto.*

Los cuatro lemas que Pappus propone para el tercer problema general de neusis permiten dar cuenta de que dicho problema consistía de dos casos, como lo señalamos en §1.7. Guetaldi resuelve primero el caso de la bisectriz externa (Problema III o *Neus.* I.8) y en segundo lugar resuelve el caso de la bisectriz interna (Problema IIII o *Neus.* I.9), cf. [Ghe07, págs. 17–22]. La solución de Ghetaldi para el caso de la bisectriz interna es la misma que da Al-^{c}Ala y conservada por Al-Sijzi, con la única diferencia de que un segmento LM es construido utilizando dos casos del segundo problema general, mientras que Al-^{c}Ala lo hace mediante una construcción auxiliar (cf. pie de la pág. 42). Aunque la solución conservada por Al-Sijzi contiene únicamente un fragmento del caso de la bisectriz interna, esta se puede adaptar fácilmente al caso de la bisectriz externa, como de hecho lo hace Ghetaldi. La solución y su adaptación muestran que Ghetaldi tuvo acceso a una fuente árabe que me es desconocida, además de tener acceso a la traducción latina de la version griega de la *Colección* de Pappus editada por Commandino.

La solución árabe está compuesta al modo de la *Compleción de las Cónicas* de Ibn al-Haytham, que consiste básicamente en construir una configuración semejante (en nuestro caso, congruente) a la configuración que se desea. Debido a que Ghetaldi contaba con una fuente árabe, no quiso o no pudo utilizar los lemas que Pappus propone para el tercer problema, pues en *Colecc.* VII, Prop. 70, Pappus da de hecho la solución de Apolonio y esto pasa desapercibido por Ghetaldi (y para ser justos, pasa desapercibido por todo el mundo hasta que J. P. Hogendijk encuentra aquellos fragmentos árabes que nos confirman cuál fue la solución de Apolonio, publicados en 1986 en su [Hog86]). Esta fuente árabe desconocida de la que hace uso Ghetaldi no puede ser la carta donde Al-Sijzi responde a Abu al-Jud con la solución de *Neus.* I.9 porque la misma carta contiene un fragmento de la propia solución de Apolonio citada explícitamente y nos parece que Ghetaldi habría preferido la solución griega.

La solución del tercer problema es la siguiente (Fig. 2.7): sea rom.$[ABCD]$ el rombo dado con el lado AC [y el lado CD] prolongado(s) y sea IG la recta dada [mayor o igual que la perpendicular E_0F_0 al diámetro BC por B. (I) Si $IG = E_0F_0$, el problema (de la bisectriz interna) queda resuelto. (II) Si $IG > E_0F_0$,] sobre IG describimos el segmento circular seg.$[IKG]$ [el segmento circular seg.$[IHG]$] que es descrito por un ángulo igual a áng.$[DCE]$ y lo completamos hasta la circunferencia cir.$[IKGH]$ cuyo diámetro KH es perpendicular a la cuerda IG en el punto V. Trazamos una recta desde K que corta a cir.$[IKGH]$ otra vez en L y que corta a la cuerda GI (prolongada) en M de tal manera que $LM = BC$ (usando *Neus.* I.4 para el caso de la bisectriz externa y usando *Neus.* I.6 para el caso de la bisectriz externa). Trazamos las rectas LG y $CE = LG$ y unimos BE que (prolongada) corta al lado CD (prolongado) en el punto F.

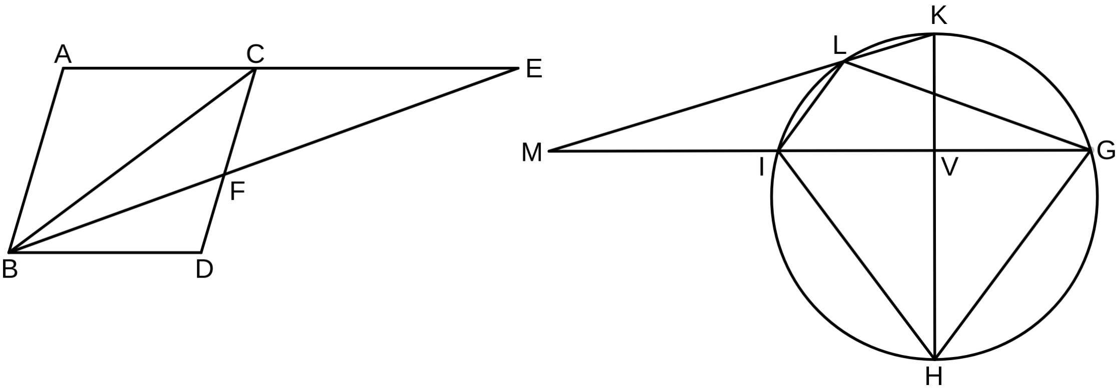


Fig. 2.7: Solución del Problema III (*Neus.* I.8).

Entonces, en el caso de la bisectriz externa (*Neus.* I.8) tenemos que

$$\text{áng.}[IHG] + \cancel{\text{áng.}[ILG]} = 2R = \text{áng.}[ACD] + \cancel{\text{áng.}[DCE]}.$$

Además,

$$\text{áng.}[ACB] = \text{áng.}[BCD] = \tfrac{1}{2}\,\text{áng.}[ACD],$$

y como arc.$[IK]$ = arc.$[KG]$, entonces también se tiene que

$$\text{áng.}[IHK] = \text{áng.}[KHG] = \tfrac{1}{2}\,\text{áng.}[IHG],$$

y en consecuencia áng.$[BCD]$ = áng.$[IHK]$. Además se satisface que

$$\text{áng.}[IHK] = \text{áng.}[KHG] = \text{áng.}[KLG] = \text{áng.}[MLI],$$

es decir áng.$[BCD]$ = áng.$[MLI]$ y como áng.$[DCE]$ = áng.$[ILG]$, sumando iguales a iguales concluimos que áng.$[BCE]$ = áng.$[MLG]$. Por tanto, los triángulos tri.$[BCE]$, tri.$[MLG]$ son congruentes por el teorema LAL y en particular áng.$[CEB]$ = áng.$[LGM]$. De aquí se sigue que los triángulos tri.$[FCE]$, tri.$[ILG]$ también son congruentes por el teorema ALA y por lo tanto $FE = IG$. Q. E. F.

Para la demostración del caso de la bisectriz interna (*Neus.* I.9) basta notar que como áng.$[DCA]$ = áng.$[ILG]$ y arc.$[IK]$ = arc.$[KG]$ (Fig. 2.8), entonces

$$\text{áng.}[ILK] = \text{áng.}[KLG] = \tfrac{1}{2}\,\text{áng.}[ILG].$$

También se tiene que

$$\text{áng.}[DCB] = \text{áng.}[BCA] = \tfrac{1}{2}\,\text{áng.}[DCA],$$

y en consecuencia que áng.$[KLG]$ = áng.$[BCA]$, es decir áng.$[MLG]$ = áng.$[BCE]$. Por tanto, los triángulos tri.$[BCE]$, tri.$[MLG]$ son congruentes (por el teorema LAL) y en particular se tiene que áng.$[CEB]$ = áng.$[LGM]$, es decir áng.$[CEF]$ = áng.$[LGI]$ y en consecuencia los triángulos tri.$[FCE]$, tri.$[ILG]$ son congruentes también (por el teorema ALA) y por lo tanto $EF = IG$.

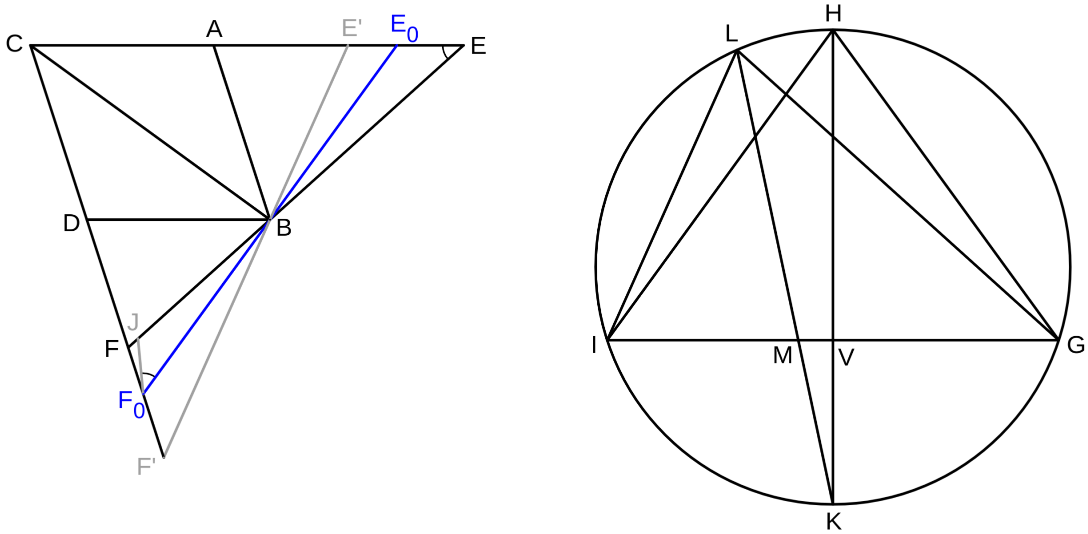


Fig. 2.8: Solución del Problema IIII (*Neus.* I.9).

Debemos aclarar en este punto que podemos colocar la recta $LM = BC$ porque $BC \leq VH$. Más aún, podemos poner una recta $CF' = LG$ sobre el lado CD prolongado y de manera análoga podemos demostrar que los triángulos tri.$[BCF']$, tri.$[MLG]$ y tri.$[E'CF']$, tri.$[ILG]$ son congruentes, es decir $E'F' = IG$. Por lo tanto, en el caso de la bisectriz interna hay dos soluciones si $IG > E_0F_0$.

Notemos además que si E_0F_0 es la perpendicular de BC por B, entonces el triángulo tri.$[CE_0F_0]$ es isósceles. Como áng.$[CF_0B]$ = áng.$[CE_0B]$ > áng.$[E_0EB]$, entonces podemos restar a áng.$[CF_0B]$ un ángulo igual a áng.$[E_0EB]$. Sea J un punto sobre la recta EF tal que áng.$[E_0FB]$ = áng.$[BF_0J]$ y como áng.$[EBE_0]$ = áng.$[JBF_0]$ (porque son opuestos), se sigue que los triángulos tri.$[EBE_0]$, tri.$[F_0BJ]$ son semejantes por el teorema AA, es decir $EB \cdot BJ = F_0B \cdot BE_0$. Pero $BE_0 = BF_0$ y como $EB > BE_0$ y $F_0B > BJ$, entonces $EB > BJ$, es decir que EB es máxima y BJ es mínima. Por lo anterior y por *Elem.* V.25, tenemos que $EJ > E_0F_0$. Pero tenemos también que $E-J-F$, en consecuencia $EF > EJ$, y por tanto $EF > E_0F_0$, es decir que E_0F_0 es la única recta mínima entre los lados prolongados CA, CD y es bisecada por A. Q. E. F.

La demostración en ambos casos consiste en notar que los triángulos tri.$[FCE]$, tri.$[ILG]$ son congruentes por el teorema ALA y por la congruencia de los triángulos tri.$[BCE]$, tri.$[MLG]$, para poder concluir que $FE = IG$. Debido a que Pappus proporciona observaciones para el caso en el que el rombo es un cuadrado, Ghetaldi agrega diagramas para estos problemas particulares, pues en estos subcasos la recta IG es un diámetro de la circunferencia cir.$[IKGH]$.

Es claro que *Neus.* I.8 no tiene ni mínimo ni máximo y todo lo que nos ofrece Pappus es un par de lemas para el subcaso en el que el rombo es un cuadrado. Para *Neus.* I.9 Pappus nos ofrece otro par de lemas donde demuestra el diorismo mínimo, pues no es evidente que el problema tiene una solución mínima ni es evidente tampoco que necesariamente posee dos soluciones. Ghetaldi no demuestra el diorismo del Problema IIII (*Neus.* I.9) ni proporciona las dos soluciones del problema, aunque aclara que $IG \geq E_0F_0$ y si se da el caso que $IG = E_0F_0$, entonces la perpendicular E_0F_0 es la solución del problema. El diorismo mínimo de este caso se trata del hecho que FE es mínima cuando queda bisecada por B, es decir, la perpendicular $E_0F_0 \perp CB$ por B es la solución mínima. La demostración del diorismo que dimos arriba es precisamente la demostración que proporciona Pappus en los lemas correspondientes a las Props. 73–74 y podemos agregar que el hecho de que Pappus proporcione lemas para el diorismo mínimo indica que Apolonio no lo demuestra por completo o lo hace de otra manera. Cabe aclarar también que la solución árabe tampoco contiene la justificación del diorismo ni contiene las dos soluciones del problema (cf. [Hog86]).

Finalmente, Ghetaldi escribe sobre el cuarto problema general, al cual se refiere como Problema V en [Ghe07, pág. 23], y del cual dice que consiste de muchos casos resultantes tanto de la posición de los semicírculos como de la magnitud de la recta dada (45 casos en total según Pappus). La solución de este problema no la da en esta obra suya, sino seis años después en [Ghe13] y es la que vamos a analizar en la siguiente sección.

§2.4 *Apollonius rediuiuus, liber secundus* (1613)

La segunda parte de la reconstrucción de las *Neusis* fue publicada en 1613 (cf. [Ghe13]) y en ella Ghetaldi reconstruye el segundo libro, *Neus.* II, de una manera bastante libre pues por ejemplo no sigue el orden de los esquemas que propusimos en la sección §1.7 con base en el orden de los lemas de Pappus. La totalidad de esta segunda publicación está dedicada al cuarto problema general sobre una neusis entre dos semicírculos. El mismo Ghetaldi nos cuenta en el prefacio de su [Ghe13] que recuperó el interés por escribir sobre el cuarto problema general de las neusis planas, a pesar de la gran dificultad que supone dicho problema, debido a un ejemplar del *Supplementum Apollonii rediuiui* (1612) de A. Anderson que recibe con motivo de visitas diplomáticas inglesas en la desaparecida República de Ragusa (hoy Yugoslavia). Anderson resuelve el problema de forma algebraica (al modo del álgebra geométrica) y obtiene ecuaciones de tercer grado, sin embargo, con gran dificultad por ejemplo para hallar los máximos y los mínimos y para determinar (i. e. construir) la solución. En este trabajo, Anderson no hace ningún intento por recuperar nada del primer libro de Apolonio pues considera que la restauración de Ghetaldi de 1607 es suficiente, de ahí el título y propósito de su obra.

2.4.1 Sobre el cuarto problema. *Se trata de poner una recta igual a una recta dada, entre dos semicírculos dados en posición con sus bases sobre la misma recta, haciendo una neusis en un extremo de una de las bases de los semicírculos.*

Ghetaldi dedica la segunda parte de su *Apollonius rediuiuus* a resolver este problema, en sus múltiples casos. Se distinguen claramente dos partes de esta obra: la primera parte va desde el Lema I hasta el Lema XX (cf. [Ghe13, págs. 1–59]) y trata la cuestión de los máximos y los mínimos en diferentes configuraciones de los semicírculos, de donde recupera los tres diorismos mínimos para *Neus.* II.17, 19, 23. En la segunda parte se trata la solución del cuarto problema general en tres partes y la demostración se apoya en los lemas auxiliares XXI–XXIX (cf. [Ghe13, págs. 59–92]). La estructura de la restauración del segundo libro de las *Neusis* es la siguiente:

Lemas I–II: son dos lemas auxiliares para el resto del libro. De hecho, el Lema II es el primer lema que Pappus propone sobre el cuarto problema, incluyendo el caso en el que la secante se convierte en tangente (*Colecc.* VII, Props. 75–76) y el Lema I es una variación del teorema de Tales. Lemas III, VII–XII: son lemas aritméticos auxiliares para los lemas sobre máximos y mínimos, del mismo estilo que *Elem.* V.25. Lemas IV–VI: son lemas geométricos auxiliares para los lemas sobre máximos y mínimos cuando los semicírculos son secantes (Lema IV), cuando el punto F de la neusis cae afuera de la base CA del otro semicírculo (Lema V) y cuando cae sobre ella (Lema VI). Estos lemas dan una caracterización de la recta de la neusis en términos de la tangente FLN (desde el punto de la neusis) o de la perpendicular FN a la base AC del segundo semicírculo. Lemas XIII–XX: son lemas sobre los máximos y los mínimos cuando el punto F de la neusis cae afuera de la base CA (Lemas XIII–XVI) y cuando cae sobre la base CA (Lemas XVII–XX) del otro semicírculo. Como ejemplo de este grupo de lemas tomemos el siguiente par.

Lema XV. Dados $\text{semicir.}[ABC]$, $\text{semicir.}[DEF]$ dos semicírculos con sus bases AC, DF sobre la misma recta, FN tangente a $\text{semicir.}[ABC]$ en N y secante a $\text{semicir.}[DEF]$ en L y si desde el centro O de $\text{semicir.}[ABC]$ hacemos $OG = OD, FG : FD = FN^2 : FI^2$ y si además $FI \geq \text{máx}\{FA, FN\}$ o $FI \leq \text{mín}\{FA, FN\}$, entonces $\text{máx}\{LN, DA\}$ es la mayor de todas las rectas por F que cortan a los arcos $\text{arc.}[NA]$, $\text{arc.}[LD]$ y $\text{mín}\{LN, DA\}$ es la menor. Las otras rectas por F están tanto más cerca de la máxima cuanto mayor es su magnitud (Fig. 2.9).

Lema XVI. Con las mismas hipótesis del Lema XV, si en el arco $\text{arc.}[NA]$ tomamos un punto M tal que $FM = FI$ y prolongamos FM hasta cortar a $\text{semicir.}[DEF]$ en M', entonces $\text{máx}\{LN, DA\}$ es la mayor de todas las rectas por F que cortan a los arcos $\text{arc.}[NA], \text{arc.}[LD]$ y MM' es la menor. Las otras rectas por F están tanto más cerca de la mínima cuanto menor es su magnitud por ambos lados (Fig. 2.10).

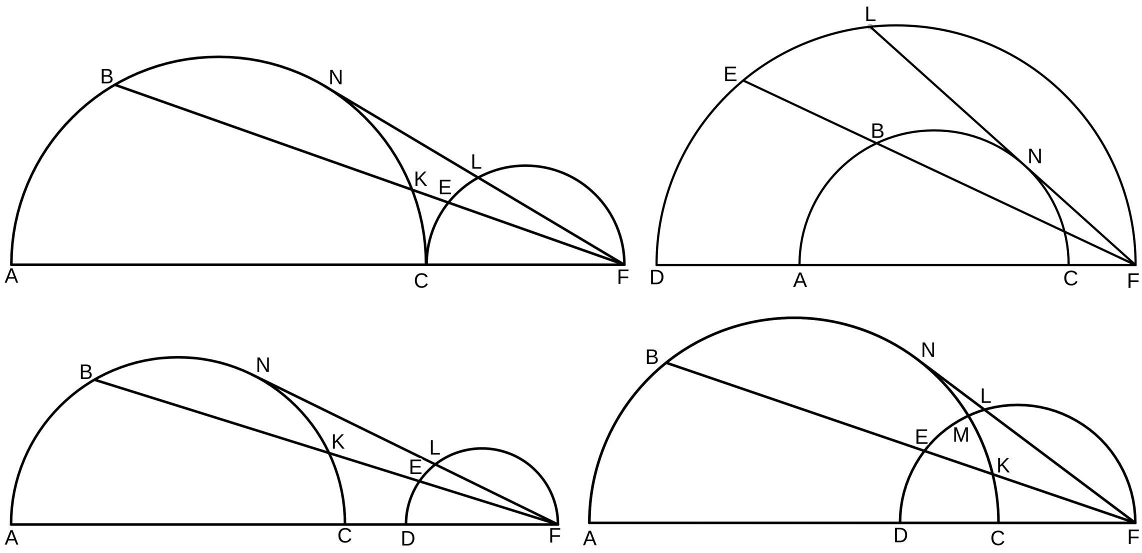
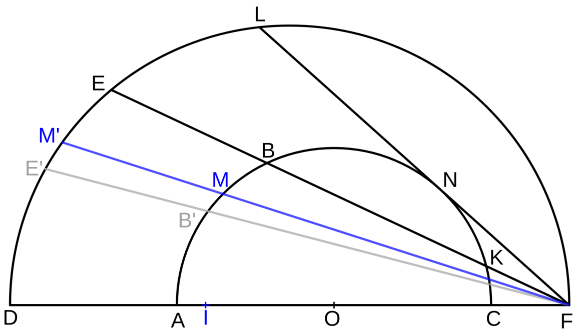
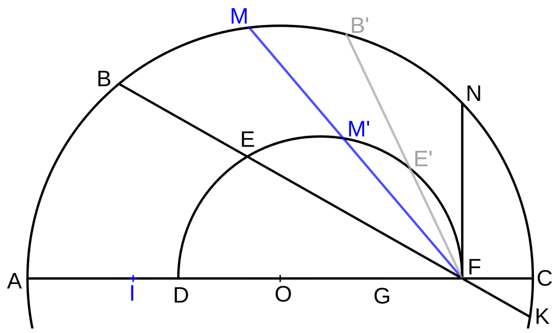


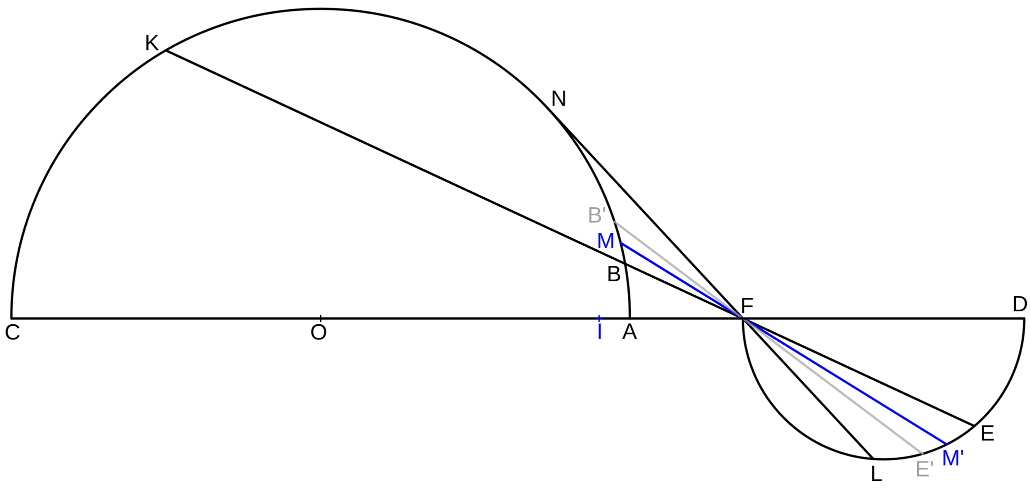
Fig. 2.9: Cuatro configuraciones representativas para el Lema XV. No se muestran los puntos O, G, I para mayor claridad del diagrama.



(a) *Neus.* II.17



(b) *Neus.* II.19



(c) *Neus.* II.23

Fig. 2.10: Dos diagramas representativos para el Lema XVI (a y c); y un diagrama representativo para el Lema XX (b).

Tanto en el Lema XVI como en el Lema XX, Ghetaldi analiza aquellos casos que tienen un diorismo mínimo, es decir *Neus.* II.17, 19 y 23. El estudio de tales configuraciones muestra las condiciones bajo las cuales el cuarto problema puede tener dos, una o ninguna solución y muestra cómo construir la solución mínima MM'. Por lo tanto, queda claro que
1. Hay dos soluciones si la recta dada ZZ' que se quiere colocar entre semicir.$[ABC]$, semicir.$[DEF]$ es de magnitud tal que $MM' < ZZ' \leq \text{mín}\{LN, DA\}$;
2. Hay una solución si $ZZ' = MM'$ o si $\text{mín}\{LN, DA\} < ZZ' \leq \text{máx}\{LN, DA\}$;
3. No hay solución si $ZZ' < \text{mín}\{LN, DA\}$ o si $ZZ' > \text{máx}\{LN, DA\}$.

En el resto de la obra, Ghetaldi formula el cuarto problema de neusis y da la solución en tres partes. La solución va de esta manera: sean semicir.$[ABC]$, semicir.$[DEF]$ los dos semicírculos dados en posición con sus bases AC, DF sobre la misma recta y sea ZZ' la recta dada tal que $\text{mín}\{LN, DA\} \leq ZZ' \leq \text{máx}\{LN, DA\}$. Si F cae sobre la base AC trazamos $FN \perp AC$ tal que corta a semicir.$[ABC]$ en N [para el Esquema 2, donde F, L coinciden] y si F cae fuera de la base AC trazamos FN tangente a semicir.$[ABC]$ en N [para el Esquema 3] y la prolongamos hasta cortar a semicir.$[DEF]$ en L. (I) Si $ZZ' = \text{mín}\{LN, DA\}$ o si $ZZ' = \text{máx}\{LN, DA\}$, el problema queda resuelto. (II) Si $\text{mín}\{LN, DA\} < ZZ' < \text{máx}\{LN, DA\}$, entonces desde el centro O de semicir.$[ABC]$ colocamos una recta $OG = OD$ y sean T el punto medio de ZZ' y FI, ZU dos rectas tales que

$$\frac{FG}{FD} = \frac{FN^2}{FI^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{FG}{FD} = \frac{TZ}{ZU}, \tag{2.7}$$

con el punto I sobre la recta FA o sobre la recta FN (prolongadas).

En la primera parte de la solución [Ghe13, págs. 51–73] se tratan casos del Esquema 2 (un semicírculo dentro del otro) cuando los semicírculos están del mismo lado con respecto a la recta de las bases con $CF < DA$ y cuando están en lados opuestos con respecto a la recta de las bases con $CF > DA$. También se tratan casos del Esquema 3 (los semicírculos son ajenos) cuando los semicírculos están en lados opuestos con respecto a la recta de las bases con $CF < DA$ y con $CF > DA$. En total Ghetaldi considera 16 diagramas para esta primera parte de la demostración (doce corresponden al Esquema 2 y cuatro corresponden al Esquema 3). Para la primera parte de la demostración se requiere además la siguiente construcción auxiliar (Fig. 2.11): si F está afuera de la base AC hacemos $TU = TZ - ZU$ o $TU = ZU - TZ$ y si F está sobre la base AC hacemos $TU = TZ + ZU$. Trazamos el semicírculo semicir.$[TbU]$ y le colocamos una cuerda $Tb = FI$ (lo cual es posible pues $FI < TU$, por el Lema XXI). Trazamos el círculo cir.$[U, Ub]$ que corta a TU (prolongada) en P, Q y desde el punto F trazamos una recta $FB = TP$ en el arco arc.$[NA]$, donde $TP = TU - Ub$ o bien $TP = TU + Ub$. Sea E el punto donde la recta FB (prolongada) corta a semicir.$[DEF]$ y sea K el punto donde EF (prolongada) corta a semicir.$[ABC]$ (completado). Por último, trazamos las paralelas $DS \parallel GK$, donde S es el punto donde la recta DS corta a la recta BF (prolongada) y sea $RU = TU$. Entonces tenemos que $TP = QR$, $QT \cdot TP = Tb^2$ y por los Lemas V–VI tenemos también que $BF \cdot FS = FI^2$. Como $FI = Tb$ y $FB = TP$, se satisface que

$$QT \cdot \cancel{TP} = Tb^2 = FI^2 = BF \cdot FS = \cancel{TP} \cdot FS. \tag{2.8}$$

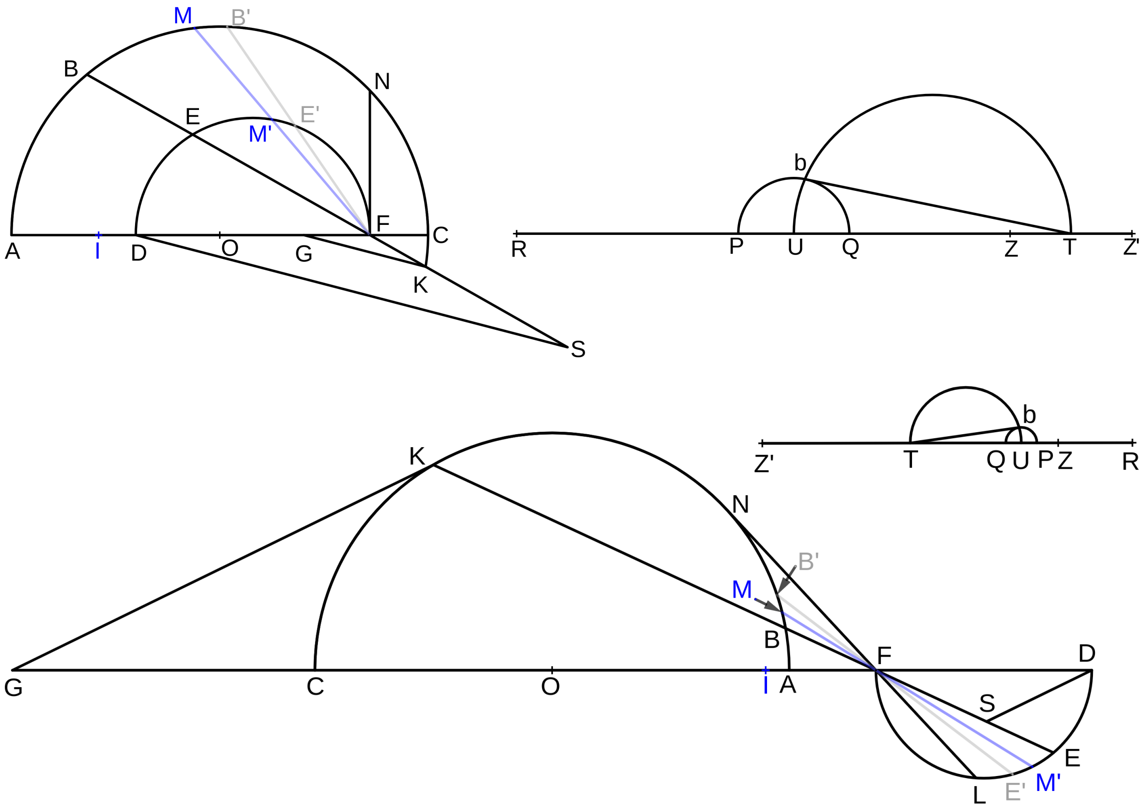


Fig. 2.11: Diagramas para dos casos representativos y su construcción auxiliar para la primera parte de la solución del Problema IV.

Como $QT = RP$, entonces de (2.8) se sigue que $FS = RP$. Pero de la igualdad $BF = TP$ se sigue que $BS = BF + FS = TP + PR = TR$. Además, por (2.7) y por los Lemas V–VII tenemos las relaciones

$$\frac{FG}{FD} = \frac{TZ}{ZU} \quad \text{y} \quad \frac{FG}{FD} = \frac{BE}{ES}, \quad \text{es decir,} \quad \frac{BE}{ES} = \frac{TZ}{ZU}. \tag{2.9}$$

Como tenemos además que

$$S{-}E{-}B \longleftrightarrow T{-}Z{-}U \quad \text{o} \quad E{-}B{-}S \longleftrightarrow Z{-}U{-}T \quad \text{o} \quad B{-}S{-}E \longleftrightarrow U{-}T{-}Z, \tag{2.10}$$

entonces componiendo razones de acuerdo a (2.10), de la ecuación (2.9) se sigue

$$\frac{BE}{\cancel{BS}} = \frac{TZ}{TU} = \frac{2\,TZ}{2\,TU} = \frac{ZZ'}{\cancel{TR}}.$$

Por lo tanto concluimos que $BE = ZZ'$. Q. E. F.

Hay cierta ambigüedad aparente cuando se tiene que elegir entre $TP = TU - Ub$ y $TP = TU + Ub$. Ghetaldi aclara mediante las siguientes cuatro reglas, en cuáles casos se debe elegir $TP = TU - Ub$ y en cuáles casos se debe elegir $TP = TU + Ub$ (cf. [Ghe07, págs. 56–57]) y en los Lemas XXII–XXV justifica a cada una de estas reglas, es decir, demuestra que efectivamente la recta $TP = FB$ se puede colocar desde el punto F hasta el arco arc.$[NA]$, porque $FN < TP < FA$ o $FA < TP < FN$ según el caso.

Regla I. Si $FI \geq \text{máx}\{FA, FN\}$, hacemos $TP = TU - Ub$.

Regla II. Si $FI \leq \text{mín}\{FA, FN\}$, hacemos $TP = TU + Ub$.

Regla III. Si $\text{mín}\{FA, FN\} < FI < \text{máx}\{FA, FN\}$, debemos hacer $TP = TU - Ub$ o $TP = TU + Ub$ de tal modo que $\text{mín}\{LN, DA\} < ZZ' < \text{máx}\{LN, DA\}$.

Regla IV. Si $\text{mín}\{FA, FN\} < FI < \text{máx}\{FA, FN\}$ y $\text{mín}\{LN, DA\} < ZZ' < \text{máx}\{LN, DA\}$, hacemos $TP = TU - Ub$ si $FA < FN$ y hacemos $TP = TU + Ub$ si $FA > FN$.

En la segunda parte de la demostración (cf. [Ghe13, págs. 74–91]) se tratan casos del Esquema 2 cuando los semicírculos están del mismo lado con respecto a la recta de las bases con $DA < CF$ y cuando están en lados opuestos con respecto a la recta de las bases con $CF < DA$. También se tratan casos del Esquema 3 cuando los semicírculos están del mismo lado con respecto a la recta de las bases con $DA < CF$ y con $CF < DA$. Además se tratan casos del Esquema 4 (los semicírculos son secantes) cuando los semicírculos están del mismo lado y cuando están en lados opuestos con respecto a la recta de las bases. Más aún, se tratan también los subcasos correspondientes cuando los puntos A, D coinciden y cuando los puntos C, D coinciden, es decir cuando los semicírculos son tangentes (casos del Esquema 1). En total Ghetaldi considera 30 diagramas para la segunda parte de la demostración (seis corresponden al Esquema 2, dos corresponden al Esquema 3, catorce corresponden al Esquema 4 y ocho corresponden al Esquema 1). La construcción auxiliar para la segunda parte de la demostración es la siguiente (Fig. 2.12): trazamos la perpendicular $TV \perp TU$ con $TV = FI$, trazamos la recta UV y el círculo cir.$[U, UT]$ con centro U y radio UT que se cortan en P, Q (con UV prolongada), donde tenemos que elegir entre $TU = TZ - ZU$ y $TU = ZU - TZ$ si el punto F está afuera de la base AC y tomamos $TU = TZ + ZU$ si el punto F está sobre la base AC. Desde el punto F trazamos una recta $FB = VP$ en el arco arc.$[NA]$, donde $VP = VU - UP$ o bien $VP = VU + UP$. Sean E, K los puntos donde la recta FB (prolongada) corta a semicir.$[DEF]$, semicir.$[ABC]$ (completado), trazamos las paralelas $DS \parallel GK$ y sea S el punto donde la recta DS corta a la recta BF (prolongada). Con esta construcción auxiliar podemos concluir que $EB = ZZ'$. Q. E. F.

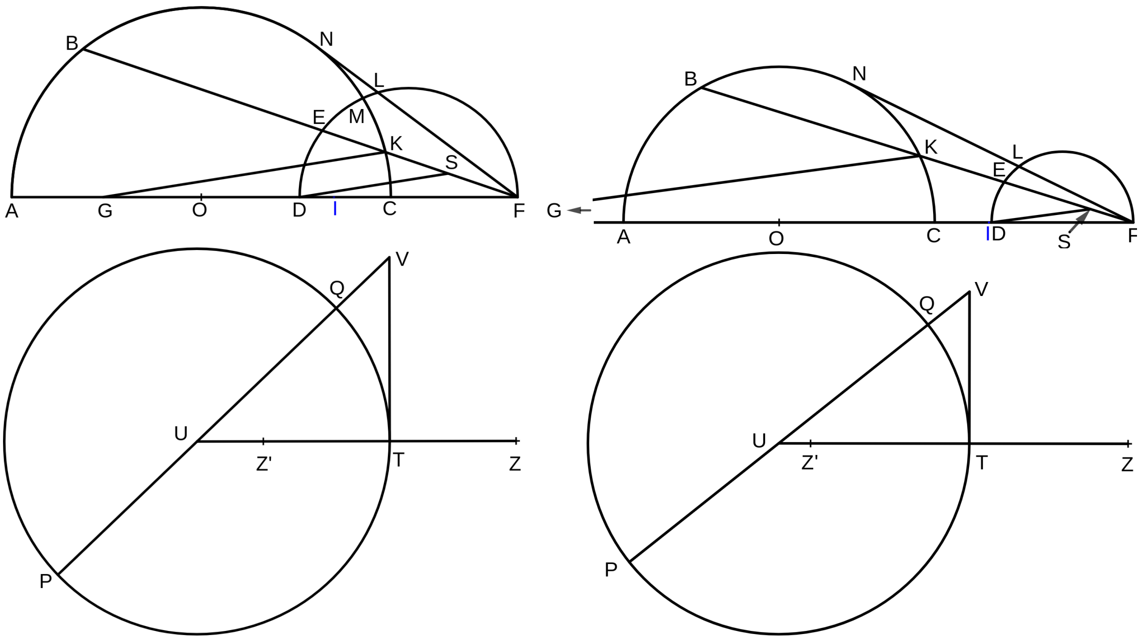


Fig. 2.12: Diagramas de dos casos representativos y su construcción auxiliar para la segunda parte de la solución del Problema IV.

La demostración de esta segunda parte es del todo similar a la demostración de la primera parte, pues consiste en notar que de la potencia del punto V con respecto a cir.$[U, UT]$ y del hecho que $BF \cdot FS = FI^2$ (Lemas V–VI), obtenemos $BS = PQ$. Además, otra vez por los Lemas V–VI, se satisface la relación $\frac{FG}{FD} = \frac{BE}{ES}$ y en consecuencia tenemos que $\frac{EB}{\cancel{BS}} = \frac{TZ}{TU} = \frac{ZZ'}{\cancel{PQ}}$, es decir que $EB = ZZ'$. De nuevo, la ambigüedad en elegir entre $VP = VU - UP$ y $VP = VU + UP$ se disuelve por medio de otras cuatro reglas análogas a las de la primera parte (cf. [Ghe07, págs. 75–76]) y que se justifican en los Lemas XXVI–XXIX, es decir que en dichos lemas, Ghetaldi demuestra que la recta $VP = FB$ se puede colocar desde el punto F hasta el arco arc.$[NA]$ porque $FN < VP < FA$ o $FA < VP < FA$, según sea la configuración.

Finalmente, en la tercera parte de la solución (cf. [Ghe13, pág. 92]) se abordan los subcasos correspondientes a las configuraciones de la primera parte de la demostración cuando los puntos F, C coinciden, es decir cuando los semicírculos son tangentes en el punto de la neusis (y corresponden a dos casos del Esquema 1). En estos casos no se necesita una construcción auxiliar para hacer la neusis porque la solución es muy sencilla: si consideramos una recta XX' tal que $\frac{AD}{DF} = \frac{ZZ'}{XX'}$ y en semicir.$[DEF]$ colocamos una recta $EF = XX'$, que prolongada corta a semicir.$[ABC]$ en B, y si unimos BA, ED, entonces el teorema de Tales nos dice que

$$\frac{AD}{DF} = \frac{BE}{EF}, \qquad \text{es decir,} \qquad \frac{BE}{\cancel{EF}} = \frac{ZZ'}{\cancel{XX'}}.$$

Por lo tanto, $BE = ZZ'$ (Fig. 2.13). Q. E. F.

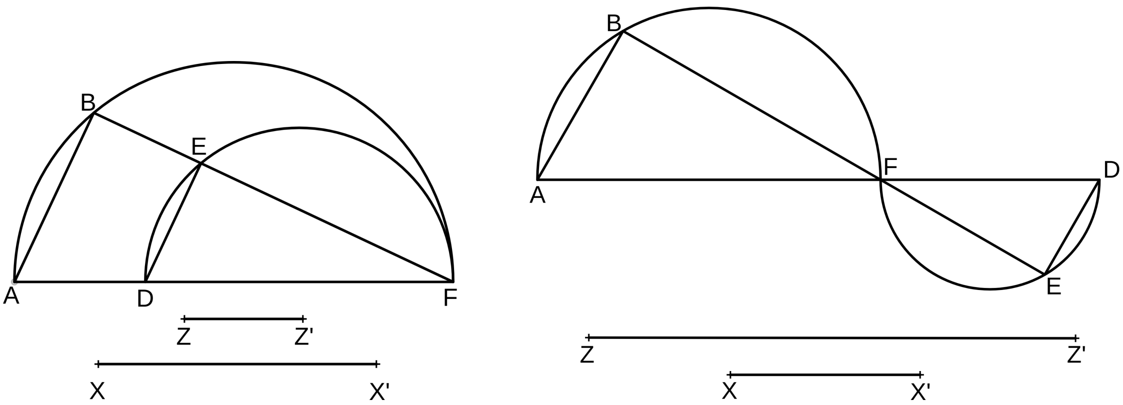


Fig. 2.13: Diagramas para la tercera parte del Problema IV.

Es claro que la demostración dada en la primera parte no es aplicable a los casos tangentes porque el punto F no cae fuera de la base AC ni cae sobre la base AC: cae en un extremo de la base AC. Debido a este hecho, la perpendicular/tangente FN queda indefinida y la relación (2.10) pierde su sentido.

En la reconstrucción del primer libro, Ghetaldi recupera los nueve problemas que contenía *Neus.* I. Aunque es casi seguro que la solución de Ghetaldi no es la solución que pudo haber dado Apolonio, se puede percibir de manera muy clara que su solución se adapta más o menos bien al análisis de cada problema que propusimos en la sección §1.7 de la primera parte de este trabajo, sin contar los dos casos del problema del rombo. En la reconstrucción del segundo libro, *Neus.* I, Ghetaldi recupera 48 casos (10 para el Esquema 1, 18 para el Esquema 2, 6 para el Esquema 3 y 14 para el Esquema 4) pero no podemos concluir nada sobre si recupera o no los 45 casos que contenía el tratado original y su análisis parece más complejo que el de Apolonio ya que diverge definitivamente del análisis que propusimos en §1.7.

Los problemas de neusis de Apolonio tenían un rol que Pappus les asignó dentro del campo del análisis con relación al resto de obras que lo componen, tal como está expuesto principalmente en *Colecc.* VII y en menor medida en *Colecc.* II–V. A esta colección de resultados y todo lo relacionado con ellos, Ghetaldi la llama *geometría de la inclinación* y tales resultados fueron recuperados por Vieta (en relación a las ecuaciones algebraicas que los representan) y por Newton (en relación a los lugares geométricos que involucran) como veremos en el resto de este trabajo.

§2.5 Relación entre los problemas de neusis, los problemas sólidos y las ecuaciones de tercero y cuarto grado

En la sección §2.2 hacíamos un balance muy breve y general acerca de la obra de F. Vieta, pues también tiene una participación importante en los problemas de neusis ya que su obra *Supplementum geometriae* (1593) es esencialmente una obra sobre esta clase de problemas y ahora vamos a revisarla con más detalle. Por una parte, Vieta demuestra en *De aequationum recognitione* [Vie46, cap. VI] que una ecuación de cuarto grado completa, es decir una ecuación de la forma

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx = e \tag{2.11}$$

se puede transformar en una ecuación sin término cúbico de la forma

$$y^4 + c'y^2 + d'y = e',$$

si se hace el cambio de variable $y = x + \frac{b}{4}$. Más aún, demuestra que una ecuación de cuarto grado sin término cúbico de la forma

$$x^4 + cx^2 + dx = e$$

se puede transformar en una ecuación cúbica completa de la forma

$$w^3 + b'w^2 + c'w = d', \tag{2.12}$$

si escribimos $x^4 + cx^2 = e - dx$ y si agregamos los términos necesarios para completar en la parte izquierda el cuadrado $\left(x^2 + \frac{c}{2} + \frac{y^2}{2}\right)^2$ y hacemos los cambios de variable $\frac{d}{2y} - xy = x^2 + \frac{c}{2} + \frac{y^2}{2}$, es decir, hacemos $y^3 + 2xy^2 + 2x^2y + by = c$ con $w = y^2$. Por lo tanto, demuestra que *toda ecuación algebraica de cuarto grado se puede transformar en una ecuación algebraica de tercer grado*. Además demuestra que una ecuación de tercer grado completa, es decir una ecuación de la forma (2.12) se puede transformar en una ecuación cúbica sin término cuadrado de la forma

$$y^3 + b'y = d', \tag{2.13}$$

si se hace el cambio de variable $y = x + \frac{b}{3}$.

Por otra parte, en su *Supplementum geometriae*, Vieta propone las siguientes neusis como postulados adicionales a los postulados euclidianos:

Postulado V1. Se puede colocar una recta de magnitud dada entre dos rectas secantes, haciendo una neusis en un punto dado.

Postulado V2. Se puede ajustar una recta de magnitud dada entre un círculo y una recta secante, haciendo una neusis en un punto dado.

El primer postulado V1 se trata de una neusis entre dos rectas secantes y este es el caso interesante, pues cuando las rectas son paralelas la neusis es un problema plano muy fácil de resolver, y en consecuencia no podríamos sacar nada nuevo de una neusis plana entre dos rectas paralelas que nos sirva para poder resolver problemas no planos. El segundo postulado V2 se trata de una neusis entre una recta y un círculo que se cortan, aunque no es necesario restringirlo a estos casos, pues podemos considerar también que la recta y el círculo sean tangentes o bien que no se corten. Estos nuevos postulados que propone Vieta son las generalizaciones del segundo y del tercer problema, respectivamente, de las *Neusis* de Apolonio y Vieta sabe que estos problemas-postulados se pueden resolver mediante alguna concoide de Nicómedes, tal como lo mostramos en la sección §1.3. Ahora bien, con estos postulados adicionales, Vieta quiere mostrar que se pueden resolver todos los problemas sólidos de la geometría euclidiana lo cual constituiría un suplemento para la geometría plana que haría de la geometría un campo completo en el sentido de no existir problema sin solución.[5] Entre los resultados que demuestra Vieta en su *Supplementum geometriae* (*SG*) podemos mencionar los siguientes tres (cf. [Vie46]):

***SG*, Prop. 5.** *Se pueden construir dos medias proporcionales continuas entre dos rectas dadas.* Esto lo hace con una construcción diferente de aquella dada por Nicómedes en el Ejemplo 1.4, aunque equivalente. Vieta demuestra además que este problema geométrico es equivalente a resolver una ecuación cúbica de la forma

$$x^3 = a^2 b, \tag{2.14}$$

donde a, b satisfacen que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$, pues es una consecuencia inmediata de la observación de Hipócrates (1.16).

***SG*, Prop. 9.** *Se puede seccionar un ángulo dado en tres partes iguales.* Aquí Vieta utiliza la misma construcción que se atribuye a Arquímedes en el *Libro de lemas* (que explicamos en el Ejemplo 1.3) y muestra que este problema es equivalente a resolver una ecuación cúbica de la forma

$$x^3 - 3a^2 x = a^2 b, \tag{2.15}$$

si el ángulo dado es agudo (**Prop. 16**, Fig. 2.14(a)); y a una ecuación de la forma

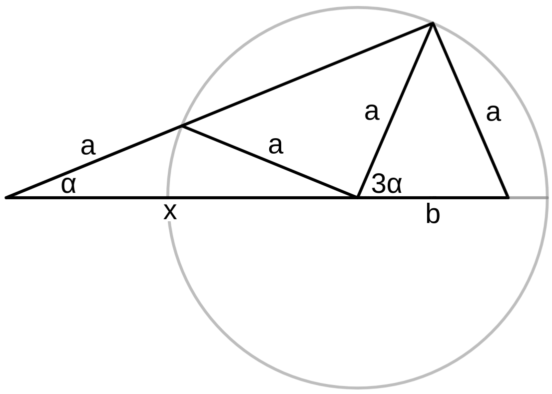
$$3a^2 x - x^3 = a^2 b, \tag{2.16}$$

si el ángulo dado es obtuso (**Prop. 17**, Fig. 2.14(b)). En ambos casos la ecuación algebraica corresponde a una configuración geométrica que consiste de dos triángulos isósceles que tienen sus lados iguales a iguales entre sí y tales que cada uno de los ángulos de la base b de uno es el triple de cada uno de los ángulos de la base x del otro. Si los triángulos son equiláteros y de lados unitarios, es decir $a = 1 = b$, entonces obtenemos las ecuaciones

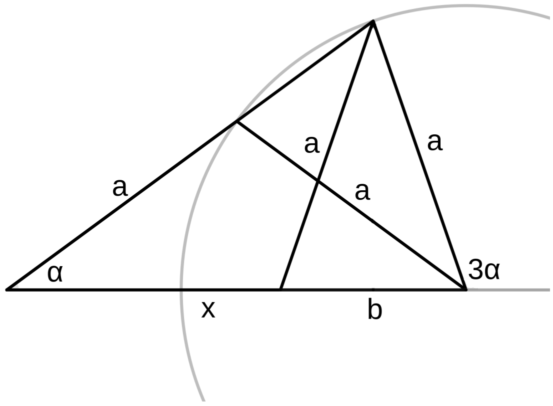
$$x^3 - 3x = 1 \qquad \text{y} \qquad 3x - x^3 = 1, \tag{2.17}$$

que Vieta obtiene también en su *Angularium sectionum* (1615).

[5] Aquí la expresión *geometría plana* la uso para referirme a todos los resultados que se pueden obtener con rectas y círculos bajo los postulados y los axiomas euclidianos, es decir, todas las proposiciones que son planas. De manera análoga, la expresión *geometría sólida* se refiere a todas las proposiciones geométricas sólidas (que involucran rectas, círculos y cónicas).



(a) $3\alpha < R$



(b) $3\alpha > R$

Fig. 2.14: Trisección de un ángulo dado 3α.

***SG*, Prop. 24.** *Se puede inscribir un heptágono regular en un círculo dado.* Este problema equivale a resolver la ecuación cúbica

$$x^3 + ax^2 - 2a^2x = a^3, \tag{2.18}$$

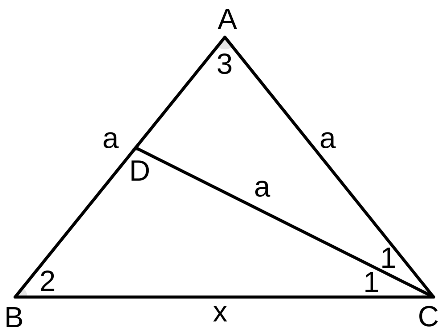


Fig. 2.15: Construcción equivalente a la inscripción de un heptágono regular.

donde $x = BC$ es la base de un triángulo isósceles tri.$[ABC]$ tal que $a = AB = AC$ y áng.$[BAC] = \frac{3}{2}$ áng.$[ABC] = \frac{3}{2}$ áng.$[ACB]$. Notemos que si en el ángulo C se traza una recta $CD = CA = a$, entonces CD es la bisectriz del ángulo áng.$[ACB]$ (**Prop. 21**), de tal manera que cada uno de los ángulos de la base de tri.$[ABC]$ es el doble del ángulo áng.$[ACD]$ y cada uno de los ángulos de la base de tri.$[DAC]$ es el triple del ángulo áng.$[ACD]$ (Fig. 2.15). Si hacemos $a = 1$ y el cambio de variable $y = x + \frac{1}{3}$, la ecuación (2.18) se reduce a la ecuación equivalente

$$y^3 - 21y = 7, \tag{2.19}$$

que es una ecuación de la forma (2.15).

Vieta concluye entonces que *todos los problemas geométricos que llevan a una configuración representada por una ecuación de cuarto grado o de tercer grado –con al menos dos raíces reales– se pueden resolver construyendo dos medias proporcionales continuas y seccionando ángulos en tres partes iguales.* En otras palabras, *todos* *los problemas representados por ecuaciones algebraicas de tercero y cuarto grado son problemas (sólidos) de neusis (entre dos rectas o entre una recta y un círculo).*

El último de los matemáticos modernos (del siglo XVII) que realizó investigaciones sobre los problemas de neusis fue I. Newton, quien es completamente heredero de la tradición geométrica griega a través de Pappus. También Newton prefiere, como Pappus, utilizar líneas mecánicas *simples de describir* antes que curvas algebraicas de grado pequeño, lo que lo coloca en una posición que está directamente en contra de la posición cartesiana, pues por ejemplo para construir una ecuación cúbica como (2.13), Descartes emplea intersecciones de círculos y parábolas (cf. [Des54, libro 3]) mientras que Newton prefiere usar la concoide de Nicómedes. Las investigaciones de Newton sobre problemas de neusis se encuentran en sus *Lecturas lucasianas de álgebra*, desde la lección 10 del año 1682 titulada *La construcción lineal de ecuaciones* (cf. [New72, págs. 420–491]) hasta la lección 10 del año 1683. En estas once lecciones, Newton muestra cómo construir ecuaciones cúbicas[6] mediante concoides de Nicómedes, ya que para él la concoide es la curva más simple (de describir) después de la recta y la circunferencia y en consecuencia es más simple y preferible que cualquiera de las cónicas. La construcción de estas ecuaciones se puede realizar si agregamos a los postulados euclidianos el siguiente postulado:

Postulado N. Se puede trazar una concoide con polo en un punto dado, con base en una recta dada y con distancia igual a un intervalo dado.

Con este postulado adicional a los postulados euclidianos, Newton resuelve el problema de construir la ecuación cúbica $x^3 + qx = r$ haciendo una neusis (mediante una concoide) entre dos rectas secantes de este manera: trazamos una recta KA de longitud arbitraria igual a n y la prolongamos hasta un punto B tal que $KB = \frac{q}{n}$, en el mismo sentido de KA si se tiene $+q$ y en sentido opuesto si se tiene $-q$. Bisecamos el segmento BA en C y trazamos el círculo cir.$[K, KC]$ con centro en K y radio KC y le colocamos una cuerda $CX = \frac{r}{n^2}$ que prolongamos en ambos sentidos. Unimos AX y la prolongamos en ambos sentidos también. Entre las rectas CX, AX colocamos una recta $EY = CA$ por medio de una concoide con polo en K, base CX o AX y distancia CA. Entonces $x = XY$ es una raíz de la

[6] Entre 1650 y 1750 la *construcción de ecuaciones* era un área de investigación matemática reconocida y los mejores matemáticos trabajaron en ella. Construir una ecuación polinomial de la forma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ consiste en realizar una construcción geométrica que involucra rectas tales que sus magnitudes son las raíces de la ecuación. H. J. M. Bos en su artículo [Bos84] hace un balance general de los logros y las dificultades en tales problemas desde su inicio hasta su término.

ecuación $x^3 + qx = r$, y más aún, las raíces que caen en el lado de C con respecto al punto X son positivas y las que caen del otro lado son negativas si tenemos $+r$ y al revés si tenemos $-r$ (Fig. 2.16). La demostración se basa en los siguientes tres lemas:

$$\text{(I)}\quad \frac{XY}{KA} = \frac{CX}{KE}, \qquad \text{(II)}\quad \frac{XY}{KA} = \frac{CY}{KA+KE}, \qquad \text{(III)}\quad \frac{XY}{KA} = \frac{KE-KB}{XY},$$

pues del lema (III) se sigue que $XY^2 = KA(KE-KB)$ y del lema (I) que

$$\frac{XY^3}{KA} = \frac{CX}{KE}\, KA(KE-KB),$$

es decir

$$XY^3 = KA^2 \cdot CX - KA \cdot KB \cdot XY$$

o bien

$$x^3 = \cancel{n^2}\,\frac{r}{\cancel{n^2}} - \cancel{n}\,\frac{q}{\cancel{n}}\,x.$$

Por lo tanto podemos concluir que $x^3 + qx = r$. Q. E. F.

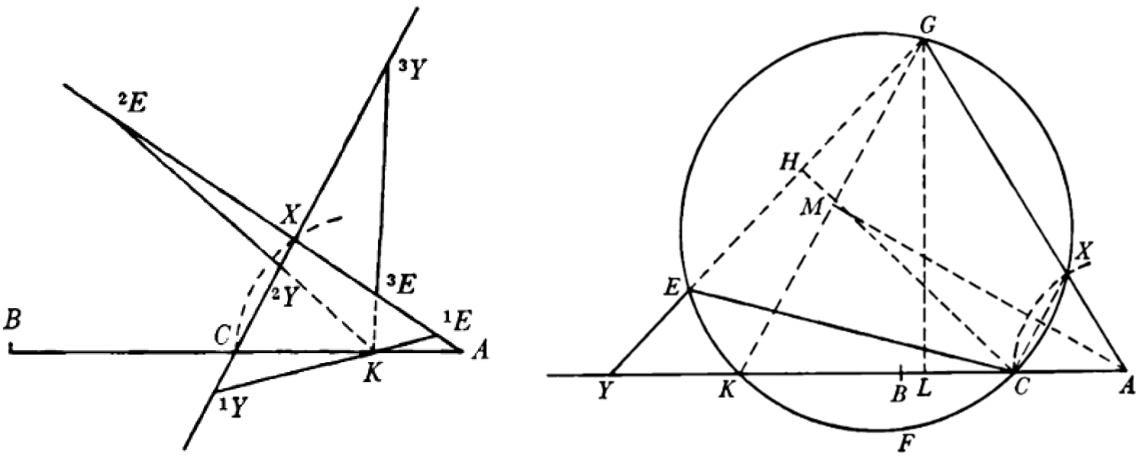


Fig. 2.16: Construcciones newtonianas de la cúbica $x^3+qx=r$. Imágenes tomadas de [New72, págs. 432 y 442].

Newton propone una construcción alternativa que consiste en hacer una neusis entre un círculo y una recta secante que va de esta manera: trazamos una recta KA de longitud arbitraria igual a n y la prolongamos hasta un punto B tal que $KB = \frac{q}{n}$, en el mismo sentido de KA si se tiene $-q$ y en sentido opuesto si se tiene $+q$. Bisecamos el segmento BA en C y trazamos el círculo cir.$[A, AC]$ con centro en A y radio AC. En el círculo cir.$[A, AC]$ colocamos una cuerda $CX = \frac{r}{n^2}$ y trazamos el círculo cir.$[KCX]$. Unimos la recta AX y la prolongamos hasta cortar otra vez al círculo cir.$[KCX]$ en un punto G. Entre la recta AK y la circunferencia cir.$[KCX]$ colocamos una recta $EY = AC$ por medio de una concoide con polo en G, base AK y distancia AC. Entonces $x = CE$ es una raíz de la ecuación $x^3 - qx = r$. Más aún, las raíces que caen dentro de la sección circular mayor seg.$[KCG]$ son positivas y las que caen dentro de la sección circular menor seg.$[KFC]$ son negativas si tenemos $-r$ y al revés si tenemos $+r$ (Fig. 2.16). La demostración de esta segunda solución se basa en los siguientes tres lemas:

$$\text{(I)}\ \ \frac{CX}{KY} = \frac{CE}{AK} = \frac{CE + CX}{AY}, \qquad \text{(II)}\ \ 2HE \cdot EY = CE \cdot CX, \qquad \text{(III)}\ \ \frac{BY}{CE} = \frac{CE}{AK},$$

donde $CH \perp GY$, con H sobre GE. En efecto, del lema (I) se sigue que

$$\frac{AK \cdot CX}{CE} + BK = KY + BK = BY,$$

y del lema (III)

$$CE^2 = BY \cdot AK = \frac{AK^2 \cdot CX}{CE} + BK \cdot AK,$$

es decir

$$CE^3 = AK \cdot BK \cdot CE + AK^2 \cdot CX,$$

o bien

$$x^3 = \cancel{n}\,\frac{q}{\cancel{n}}\,x + \cancel{n^2}\,\frac{r}{\cancel{n^2}},$$

Por lo tanto concluimos que $x^3 - qx = r$ (con esta configuración).[7] Q. E. F.

Newton también muestra cómo construir la ecuación cúbica sin término lineal, $x^3 + px^2 + r = 0$ y la ecuación cúbica completa $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ (considerando todas sus variaciones) utilizando tanto una concoide entre dos rectas secantes (primer método) como una concoide entre un círculo y una recta secante (segundo método). Por ejemplo, si queremos construir la ecuación cúbica completa con el segundo método, $x^3 + px^2 + qx = r$, debemos hacer una neusis entre un círculo y una recta secante mediante una concoide que tiene su polo dentro o fuera de la circunferencia, según sea el signo de los coeficientes p, q, r.

Una vez que sabemos construir cualquier ecuación cúbica, Newton proporciona como ejemplos algunas aplicaciones de esto problemas: hallar dos medias proporcionales entre dos rectas dadas a, b (equivalente a construir la ecuación cúbica pura

[7]Está claro que si queremos la cúbica $x^3 + qx = r$, entonces las rectas AK, BK deben estar en lados opuestos respecto a K.

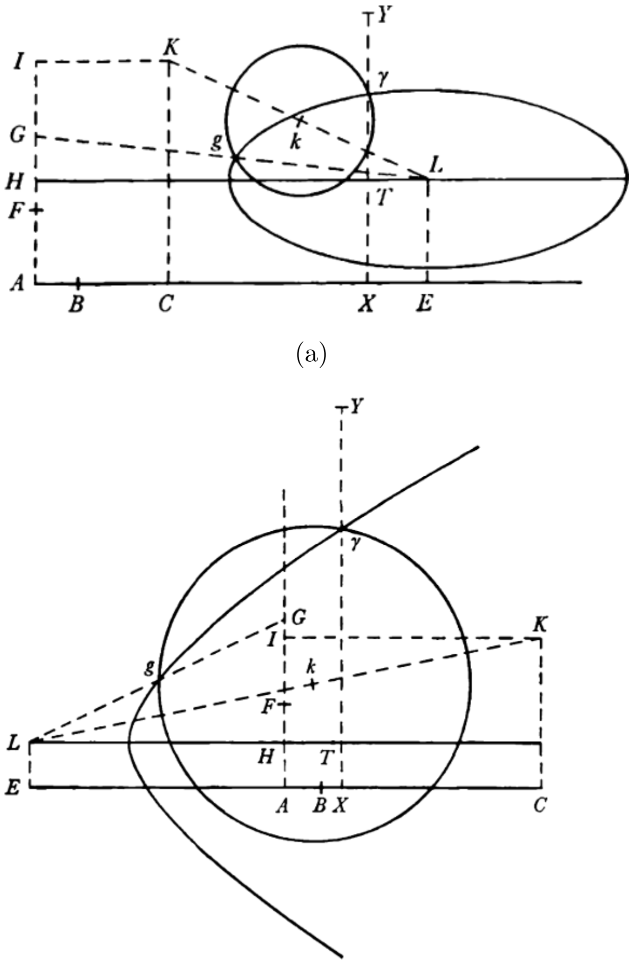
$x^3 = a^2b$), trisecar un ángulo dado (equivalente a construir una ecuación cúbica sin término cuadrático de la forma $x^3 - 3a^2x + a^2b = 0$) y más aún, muestra también cómo construir la ecuación cúbica completa $x^3 \pm px^2 - qx + r = 0$ por medio de una *cisoide de Diocles*[8] (cf. [New72, págs. 465–467]). En este sentido, el trabajo de Newton extiende el trabajo de Vieta y va más lejos ya que comprende que de esta manera se puede recuperar la "geometría de inclinación" de los antiguos y así concluye que *toda ecuación algebraica de grado tres se puede construir mediante una concoide (es decir, mediante neusis entre dos rectas o entre una recta y un círculo).*

Newton argumenta que la construcción lineal de ecuaciones cúbicas por medio de una concoide de Nicómedes es más simple y más elegante que la construcción sólida (mediante cónicas) y por ello es preferible la construcción lineal sobre la construcción sólida. Para justificar estas afirmaciones, Newton construye la ecuación cúbica completa $x^3 = px^2 + qx + r$ mediante una elipse, postulando que siempre una elipse está descrita *in plano* y compara esta construcción con la que emplea una concoide. A pesar de que el problema de construir la ecuación cúbica completa se puede resolver con cualquiera de las cónicas, Newton considera una elipse porque para él la elipse es la más simple de las cónicas, le sigue la hipérbola en simplicidad y por último la parábola –de nuevo en este punto es anticartesiano, pues la parábola es para Descartes la cónica más simple, incluso es más simple que otras líneas como la concoide o el círculo–. Algunas páginas más adelante, Newton propone la siguiente construcción de una ecuación cúbica completa mediante cualquier cónica:

Supongamos que se quiere construir cualquier ecuación cúbica de la forma $x^3 = px^2 + qx + r$, para cualesquiera magnitudes p, q, r, con ayuda de una cónica cualquiera descrita *in plano*. Para esto, desde un punto arbitrario B en una recta BCE (prolongada indefinidamente en ambos sentidos) trazamos las rectas BC, BE (del mismo lado respecto a B si la cónica es una elipse y en lados distintos si la cónica es una hipérbola) tales que $BC : BE =$ lado recto principal : eje mayor$(= 1 - e^2$, donde e es la excentricidad de la cónica). Hacemos $BC = n$ y sea $BA = \frac{q}{n}$ con A en el mismo lado de C respecto a B si se tiene $-q$ y en el lado opuesto si se tiene $+q$. Trazamos $AI \perp EC$ y sobre AI trazamos $AF = p$, $FG = AF$ y $FI = \frac{r}{n^2}$ en el mis-

[8] La cisoide de dos líneas l, m con polo en un punto C es el lugar geométrico de los puntos P tales que $CP = LM$, donde L, M son los punto donde un recta del haz en C corta a l, m (se entiende que el punto P se toma sobre esta recta). Si l es un círculo, m una recta tangente y C el punto diametralmente opuesto al punto de tangencia, la cisoide de l, m se llama **cisoide de Diocles** o simplemente **cisoide**; si l es un círculo con centro en C y m una línea arbitraria, la cisoide de l, m es la concoide de m con polo en C y distancia igual al radio del círculo l. Por lo tanto, una concoide es una cisoide.

lado de I respecto a A si p y r tienen el mismo signo y del otro lado si tienen signos distintos. Hacemos $\frac{FH}{FI} = \frac{BC}{BE}$, con FH del mismo lado de I respecto a F si tenemos una elipse y en el otro lado si tenemos una hipérbola. Completamos la hipérbola, completamos los rectángulos rec.$[IACK]$, rec.$[HAEL]$ y superponemos esta configuración sobre la cónica dada de tal manera que su eje mayor coincida con la recta LH y su centro con el punto L. Trazamos la recta GL que corta a la cónica en un punto g, trazamos la recta LK y sobre ella colocamos una recta Lk tal que $\frac{LK}{Lk} = \frac{LG}{Lg}$. Trazamos la circunferencia cir.$[k, kg]$ con centro en k y radio kg y desde el otro punto γ donde corta a la cónica dada, trazamos la perpendicular $\gamma T \perp LH$. En la recta $T\gamma$ colocamos la recta TY tal que $\frac{TY}{T\gamma} = \frac{LG}{Lg}$ y la prolongamos hasta cortar a la recta AB (prolongada) en el punto X. Entonces la recta $\frac{1}{2}XY$ es una de las raíces de la ecuación. Las raíces positivas están en el lado de la recta FI respecto a AB si tenemos $+r$ y del otro lado si tenemos $-r$.



(a)

(b)

Fig. 2.17: Construcción newtoniana de la cúbica $x^3 = px^2 + qx + r$ con (a) una elipse y con (b) una hipérbola. Imágenes tomada de [New72, pág. 486–7].

Si la cónica descrita *in plano* es una parábola, tomamos el lado recto como 2 BC y trazamos la circunferencia cir.$[K, KG]$ con centro K y radio KG. Superponemos esta configuración sobre la parábola de tal manera que los puntos A, G caen sobre ella, la recta AC es paralela a su eje, el punto F cae sobre ella y su vértice está en el mismo lado de B respecto a F. De este modo las perpendiculares bajadas desde las intersecciones de la parábola y la circunferencia cir.$[K, KG]$ hasta BC y sus mitades son las raíces de la ecuación cúbica que queremos construir.

Para cualquier cónica se satisfacen los siguientes cuatro lemas:

(I) $2\,AC \cdot AX - AX^2 = XY^2 - 2\,AI \cdot XY + 2\,AG \cdot FI$,

(II) $2\,A\epsilon \cdot AX - AC^2 = \dfrac{FI}{F\eta}\,XY^2 - 2\,\dfrac{FI}{F\eta}\,A\eta \cdot XY + 2\,AG \cdot FI$,

donde ϵ es un punto sobre la recta AE tal que $\dfrac{KY}{k\gamma} = \dfrac{A\epsilon}{AE}$ y η es un punto sobre la recta AI tal que $\dfrac{F\eta}{FI} = \dfrac{B\epsilon}{F\eta}$;

(III) $\dfrac{AX}{XY - AG} = \dfrac{XY}{2\,BC}$, y (IV) $\dfrac{2\,FI}{AX - 2\,AB} = \dfrac{XY}{2\,BC}$.

Del lema (IV) se sigue que

$$\frac{XY}{2\,BC} = \frac{2\,FI}{AX - 2\,AB} = \frac{4\,BC \cdot FI}{2\,BC \cdot AX - 4\,BC \cdot AB,} \tag{2.20}$$

y como $2\,AF = AG$, del lema (III) se sigue

$$2\,BC \cdot AX = XY^2 - 2\,AF \cdot XY. \tag{2.21}$$

De estas dos relaciones (2.20)–(2.21) se sigue la ecuación

$$\frac{XY}{2\,BC} = \frac{4\,BC \cdot FI}{XY^2 - 2\,AF \cdot XY - 4\,BC \cdot AB},$$

es decir

$$XY^3 = 2\,AF \cdot XY^2 + 4\,BC \cdot AB \cdot XY + 8\,BC^2 \cdot FI,$$

o bien

$$\cancel{8}x^3 = \cancel{8}px^2 + \cancel{8n}\,\frac{q}{\cancel{n}}\,x + \cancel{8n^2}\,\frac{r}{\cancel{n^2}}.$$

Por lo tanto tenemos que $x^3 = px^2 + qx + r$. Q. E. F.

De esta manera Newton concluye que *todos los problemas representados por ecuaciones de tercer grado se pueden resolver con rectas, círculos y una cónica, i. e. son problemas sólidos* pero también sabíamos que mediante neusis (o concoides) podemos construir cualquier ecuación cúbica. Por lo tanto, *todo problema geométrico que involucra una configuración relacionada con una ecuación de grado tres o cuatro se puede resolver mediante una neusis (o una concoide) o bien mediante una cónica (que lo clasifica como problema sólido).*

Conclusiones

En este trabajo he estudiado los problemas que fueron (y son) llamados neusis en los dos periodos históricos en los cuales se desarrollaron. En la primera parte he estudiado las neusis en la geometría de los antiguos, desde la definición con la generalidad que se encuentra en Pappus, pasando por ejemplos de problemas concretos y sus soluciones alternativas por medio de cónicas y concoides. Con estos resultados en la mano y con los lemas de Pappus estudiamos todas las neusis planas que se pueden plantear entre círculos y rectas (lo que era el tema de los dos libros de las *Neusis* de Apolonio) desde el punto de vista del análisis geométrico de los antiguos. Al mismo tiempo hice ver que el análisis geométrico de los antiguos puede ser un método tan fructífero como lo fue de antaño y desde mi punto de vista debe practicarlo todo aquél que desee obtener alguna destreza en geometría.

En la segunda parte de este trabajo he estudiado las neusis en la matemática moderna, concrétamente del siglo XVII, que está caracterizado por los intentos de reconstrucción de la geometría de los antiguos. Estudiamos cómo el análisis algebraico fue la manera en la que los matemáticos modernos pudieron codificar el análisis geométrico de los antiguos y estudiamos detalladamente la reconstrucción de los dos libros de las *Neusis* realizada por Ghetaldi y la comparamos con la que pudo haber sido la obra de Apolonio (según sabemos hoy por diversos fragmentos en árabe publicados por Hogendijk en [Hog86]) utilizando los lemas de Pappus como referencia para realizar la comparación. Además estudiamos el *Suplemento de geometría* de Vieta y de él sacamos en claro que

(1) *todos los problemas representados por una ecuación polinomial de grado tres o cuatro se pueden resolver por medio de una neusis sólida.*

Por otro lado, de las *Lecciones lucasianas de álgebra* de Newton concluimos que

(2) *toda ecuación polinomial de grado tres se puede construir mediante una concoide o bien mediante una cónica.*

Del trabajo conjunto de Vieta y de Newton se sigue inmediatamente que

(3) *todo problema sólido se puede resolver mediante una neusis (entre dos rectas o entre una recta y un círculo) o bien mediante una concoide.*

Este resultado nos permite comprender el papel de las *Neusis* en la obra apoloniana y su papel en el campo del análisis: las neusis son un método para resolver problemas sólidos sin tener que lidiar con cónicas explícitamente. También nos permite comprender cuáles fueron las razones por las que las neusis tuvieron importancia capital en la geometría de los antiguos *antes* de que contaran con una teoría de cónicas más o menos completa y las razones por las que se abandonó el estudio de los problemas de neusis *después* de que se tuviera la caracterización cartesiana de las cónicas por medio de la geometría analítica (cf. [Bos84]).

Bibliografía

[Ace11] Fabio Acerbi. The language of the “givens”: its forms and its use as a deductive tool in Greek mathematics. *Archive for History of Exact Sciences*, 65(2):119–153, 2011.

[Arc10] Archimedes. *The Works of Archimedes. Edited with Modern Notation with Introductory Chapters.* Cambridge Library Collection. Cambridge University Press, 2010. Editado por Heath, Thomas L.

[Bos84] H. J. M. Bos. Arguments on motivation in the rise and decline of a mathematical theory; the “construction of equations”, 1637–ca.1750. *Archive for History of Exact Sciences*, 30(3):331–380, 1984.

[Boy56] Carl B. Boyer. *History of Analytic Geometry.* Number 6–7 in The Scripta Mathematica Studies. Scripta Mathematica, 1956.

[Can92] Moritz Cantor. *Vorlesungen Über Geschichte der Mathematik*, volume 2 von 1200–1668. B. G. Teubner, 1892.

[Des54] René Descartes. *Geometry.* Dover publications, Inc., 1954. Traducido del francés y del latín por Smith, D. E. y Latham, M. L.

[Euc96] Euclides. *Euclidis Opera Omnia VI: Data.* Leipzig, 1896. Traducido y comentado por Heiberg I. L. y Menge, H.

[Euc03] Euclides. $\Delta E\Delta OMENA$ *Euclid’s Data, or, the Importance of Being Given*, volume 45 of *Acta Historica Scientiarum Naturalium et Medicinalium.* Museum Tusculanum Press, 2003. Traducido y comentado por Taisbak, Christian M.

[Ghe07] Marino Ghetaldi. *Apollonii Rediuiuus seu Restituta Apollonii Pergaei Inclinationum Geometria (Liber I).* Venecia, 1607.

[Ghe13] Marino Ghetaldi. *Apollonii Rediuiuus seu Restituta Apollonii Pergaei Inclinationum Geometria Liber II.* Venecia, 1613.

[Ghe30] Marino Ghetaldi. *De Resolutione et Compositione Mathematica.* Roma, 1630.

[H$^+$74] Jaakko Hintikka et al. The method of analysis. Its geometrical origins and its general sinificance. In Robert S. Cohen et al., editors, *Boston Studies in the Philosophy of Science*, volume XXV. D. Reidel Publishing Company, 1974.

[Har00] Robin Hartshorne. *Geometry: Euclid and Beyond.* Springer-Verlag New York, Inc., 2000.

[Hea21a] Thomas L. Heath. *A History of Greek Mathematics. Volume I, From Tales to Euclid.* Oxford University Press, 1921.

[Hea21b] Thomas L. Heath. *A History of Greek Mathematics. Volume II, From Aristarchus to Diophantus.* Oxford University Press, 1921.

[Hog84] Jan P. Hogendijk. Greek and Arabic constructions of the regular heptagon. *Archive for History of Exact Sciences*, 30(3/4):197–330, 1984.

[Hog86] Jan P. Hogendijk. Arabic traces of lost works of Apollonius. *Archive for History of Exact Sciences*, 35(3):187–253, 1986.

[Kli92] Morris Kline. *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días. 3 Vols.* Alianza, 1992. Versión española traducida por Martínez, M., Torres, J., y Casal A.

[Kno78a] Wilbur R. Knorr. Archimedes and the spiral: The heuristic background. *Historia Mathematica*, 5:43–75, 1978.

[Kno78b] Wilbur R. Knorr. Archimedes' neusis-constructions in spiral lines. *Centaurus*, 22(2):77–98, 1978.

[Kno86] Wilbur R. Knorr. *The Ancient Tradition of Geometric Problems.* Dover Publications Press, 1986.

[Kno89a] Wilbur R. Knorr. On Archimedes' construction of the regular heptagon. *Centaurus*, 32:257–271, 1989.

[Kno89b] Wilbur R. Knorr. *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry*. Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry. Birkhauser Boston, 1989.

[Mah68] Michael S. Mahoney. Another look at Greek geometrical analysis. *Archive for History of Exact Sciences*, 5(3/4):318–348, 1968.

[New72] Isaac Newton. *The Mathematical Papers of Isaac Newton. Volume 5, 1683–1684*. Cambridge University Press, 1972. Editado y comentado por Whiteside, D. T.

[Pap78] Pappus. *Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt, 3 Vols.* Berlin, 1876-1878. Traducido y comentado por Hultsch, Fridericus.

[Pap86] Pappus. *Pappus of Alexandria. Book 7 of the Collection in Two Parts. Part I. Introduction, Text, and Translation. Part II. Commentary, Index, and Figures.* Number 8 in Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences. Springer Science+Business Media New York, 1986. Traducido y comentado por Jones, Alexander.

[Pap10] Pappus. *Pappus of Alexandria: Book 4 of the Collection*. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. Springer-Verlag London Limited, 2010. Traducido y comentado por Sefrin-Weis, Heike.

[Pro92] Proclus. *A Commentary on the First Book on Euclid's Elements*. Princeton University Press, 1992. Traducido y comentado por Morrow, Glenn R.

[Vie46] F. Vieta. *Opera mathematica*. Ex officina Bonaventurae & Abrahami Elzeviriorum, 1646. Compilado por Schooten, van F.

[Zeu86] H. G. Zeuthen. *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*. Verlag von Andr. Fred. Höst & Sohn, 1886.