UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES Y PROCESOS DE DIFUSIÓN CON SALTOS APLICADOS EN ÍNDICES BURSÁTILES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

León Felipe Gómez Zarza

TUTOR
Dr. Pablo Padilla Longoria

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX.
2019

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

Datos del Jurado

1. Datos del alumno
Gómez
Zarza
León Felipe
55 18 16 78 65
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
409065507

2. Datos del tutor
Dr
Pablo
Padilla
Longoria

3. Datos del sinodal 1
M en C
Jorge Humberto
Del Castillo
Spíndola

4. Datos del sinodal 2
Dr
María del Pilar
Alonso
Reyes

5. Datos del sinodal 3
Dr
Enrique
Lemus
Rodríguez

6. Datos del sinodal 4
Dr
Fernando
Baltazar
Larios

7. Datos del trabajo escrito
Análisis de componentes principales y procesos de difusión con saltos aplicados en índices bursátiles.
Análisis y valuación con índices bursátiles.
98 p
2019

Agradecimientos y dedicatorias

Mi profundo agradecimiento a todo el personal que conforma la Universidad Nacional Autónoma de México por confiar en mí, abrirme sus puertas y permitirme realizar la licenciatura en sus honorables instalaciones.

Así mismo, quiero expresar mi reconocimiento a los profesores que me brindaron clases, porque sin su conocimiento no hubiera sido posible realizar este trabajo de tesis. De manera especial a mi tutor, quien dedicó disposición, tiempo y guía en este trabajo. Al Maestro Humberto, quien me transmitió el gusto por los derivados financieros, Dra. María del Pilar, al Dr. Enrique y al Dr. Fernando Baltazar, quienes me brindaron su experiencia para concluir este trabajo. Sin duda, todos fueron un pilar importante para mi formación académica y profesional, por eso, a cada uno mis más sinceros agradecimientos.

Por otra parte, dedico esta tesis a mi madre, quien me ha apoyado incondicionalmente en todas mis decisiones, pues esto no hubiera sido posible sin todos los esfuerzos y sacrificios que realizó por mí. A la memoria de mi padre, quien me brindó la oportunidad de cursar esta maravillosa carrera, dejándome la fuerza y recursos más que necesarios para que todo sea ahora una realidad. A mi hermana, mi gran compañera, a quien me gustaría que este trabajo sirviera de fuente de enseñanza e inspiración.

También quiero dedicar este trabajo a mi novia Joselin Carely, quien estuvo siempre a mi lado desde el comienzo hasta la culminación de este trabajo, brindándome siempre su apoyo y cariño. A todos mis amigos con los que compartí muchas conversaciones, ,opiniones, conocimientos y momentos difíciles. Finalmente, a la memoria de Jorge Moñoz Aristizabal, de quien me llevo un recuerdo muy especial por las experiencias que vivimos en clases y que guardaré en mis pensamientos por siempre.

Índice general

Introducción

Soy capaz de calcular el movimiento de las estrellas,
pero no la locura de los hombres
Isaac Newton

El mundo financiero siempre se ha caracterizado por sus cambios rápidos y radicales. Muestra de ello es la globalización, que permite invertir en todo el mundo, además de desarrollar tecnología para realizar un gran número de compras y ventas de activos en periodos muy cortos de tiempo, y la creación de nuevos productos financieros para el creciente apetito de riesgo. Sin duda, ha tenido el interés de matemáticos y físicos. Por ejemplo, desde 1900, por ejemplo, Lois Bachelier ya estudiaba de manera cuantitativa y probabilista los precios de la bolsa de París con su tesis *Una teoría de la especulación*, y tiempo después Maury Osborne, con su trabajo *Movimiento browniano en el mercado bursátil* en 1959, comenzaba a estudiar con más seriedad las finanzas cuantitativas. Sin embargo, no fue hasta 1970 cuando Fisher Black, Myron Scholes y Robert Merton formalizaron la teoría financiera y matemática con el descubrimiento más popular e importante en el mercado de derivados financieros, el Modelo de Black-Scholes. En los últimos 20 años ha tomado más fuerza el desarrollo de modelos cuantitativos en finanzas, y uno de los ejemplos más actuales y significativos es el matemático Jim Simons, quien ha revolucionado los fondos de cobertura por medio de algoritmos de trading.

Inspirado en los autores mencionados, este trabajo se realizó con la finalidad de implementar herramientas estadísticas y probabilistas en el campo de las finanzas para tratar de reflejar de forma adecuada el comportamiento del mercado. Lo anterior se desarrolla en cuatro partes: las primeras dos brindan el contexto, la teoría y las herramientas necesarias para entender la estructura de los mercados bursátiles; la tercera parte recrea un índice bursátil; y la cuarta es una visión alternativa para la valuación de productos derivados financieros. A continuación, un recorrido breve por cada uno de los capítulos que el lector encontrará en este trabajo.

Capítulo I. Se planteará el concepto de mercado, explicando su origen, utilidad y participación dentro de la economía; asimismo, se unifica la concepción de mercado financiero. A este concepto se le dará un orden, clasificándolo según sus diversas características, tratando de crear una idea más amplia de él y de los productos que ofrece. A propósito, uno de los aspectos serán las acciones bursátiles, además de los índices conformados por ellas y el lugar donde se negocian: las bolsas de valores. Por tanto, se hará mención de la bolsa en México, conocida como Bolsa Mexicana de Valores (BMV), y el cálculo que se emplea para el índice de precios y cotizaciones (IPC), el índice bursátil que representa a México.

Capítulo II. En este apartado se brindarán las herramientas matemáticas necesarias para el estudio de variables aleatorias. Se tocarán temas como probabilidad, teoría de la medida y procesos estocásticos. Dentro de estos últimos, se mencionarán los procesos de Poisson, Wiener y de Lévy. A través de este capítulo habrá dos descubrimientos, a mi parecer, interesantes: el que dicho proceso de Wiener sea un caso particular del de Lévy y la definición de un proceso discontinuo que incluye saltos en sus trayectorias. Derivado de lo anterior, se incluirán resultados importantes como el teorema de Lévy-Khinchin y la fórmula de Itô, mismos, que brindarán el sustento teórico para la valuación de derivados financieros que incluyan saltos en la trayectoria del subyacente, descritos en el capítulo IV.

Capítulo III. El objetivo aquí es proponer una metodología para construir índices accionarios, distinta a la expuesta en la primera parte. El método alternativo que se empleará es el llamado "análisis de componentes principales", un modelo que reduce el número de variables por medio de su correlación, resumiendo así la información. Primeramente, se desarrollará la teoría y la explicación para el cálculo de este método. Así, con datos recolectados de la Bolsa, se calculará un nuevo índice financiero mediante componentes principales.

Capítulo IV. Por último, se trabajará con el producto más utilizado en el mercado de derivados, la opción de compra europea (*Call*). Existe una gran literatura financiera que incluye este producto derivado, además de ser actualmente utilizado por instituciones financieras en México. Ciertamente, la complejidad del modelo teórico para su valuación no es trivial; por suerte, Fisher Black y Myron Scholes resolvieron este problema, haciéndolos merecedores del Premio Nobel en 1997. Este fue póstumo para Black, ya que que murió de cáncer en 1995. Una de las suposiciones que tiene el modelo Black-Scholes es que el subyacente siempre toma un valor en cualquier momento, lo cual no necesariamente es cierto. Basta con observar cualquier gráfica de precios históricos referente a divisas, acciones o índices para notar cómo determinados eventos políticos, económicos u operativos producen saltos, es decir, retornos excesivamente altos entre un periodo y otro. Por esta razón, el Capítulo II presenta un proceso con saltos llamado *jump-diffusion*, y esta sección será la encargada de implementarlo en la trayectoria del subyacente. Además se desarrollarán dos métodos numéricos para valuar esta opción: Monte Carlo con saltos y la aproximación de Merton, finalizando así con la valuación de una opción de compra europea por medio de estos métodos.

Sin más preludio, espero que este trabajo sea útil para el lector y que lo disfrute tanto como yo al elaborarlo.

Capítulo 1

Mercados financieros

En este capítulo se explican conceptos básicos de los mercados financieros, con el propósito de entender sus significados, estructuras y desempeño en México. Con esto en mente, se abre camino para el concepto de acción, productos derivados financieros e índices accionarios, siendo éstos la base de nuestro objeto de estudio. Desde luego, se parte de la suposición de que el lector tiene nociones básicas sobre Economía.

1.1. ¿Qué es el mercado financiero?

Las primeras civilizaciones crearon el Código Hammurabi entre 1790 y 1750 a. C. en donde se hallan las primeras reglas de comercio y mercado, y a partir del cual los mercados financieros tuvieron una presencia importante en la civilización occidental, siendo el principal vínculo entre compradores y vendedores que comercializaban diversos productos en especie. De hecho, los primeros mercados financieros funcionaban mediante el trueque, es decir, se establecían lugares o espacios para exponer productos con el fin de intercambiarlos. Desde entonces, los mercados han tenido una evolución y expansión mundial de dimensiones inimaginables. Por consiguiente, es difícil saber quién o qué no está relacionado con los mercados financieros[1].

En primer lugar, y para avanzar en el tema, es necesario definir lo que es un mercad, entendido como un mercado es aquel lugar, físico o virtual, donde acuden las personas interesadas en intercambiar bienes y/o servicios. El diccionario de la Real Academia Española[2] define "mercado" como aquel "sitio público destinado permanentemente, o en días señalados, para vender, comprar o permutar bienes o servicios". A ese lugar acuden fundamentalmente dos tipos de personas: compradores y vendedores. Los compradores son aquellas personas que tienen como fin obtener bienes y/o servicios, creando así la demanda. Por otro lado, los vendedores son personas que ofrecen estos bienes y/o servicios a cambio de elementos, fomentando así la oferta. Cada persona, dependiendo de sus necesidades u objetivos, puede asumir estos dos perfiles de manera alterna o de forma simultánea.

Al paso de los años, el concepto de mercado ha tomado estructuras más elaboradas, al igual que los bienes y servicios que en él se negocian. Su expansión continua se debe a muchas causas, siendo una de las más significativas la globalización. De modo que el capitalismo ha creado sus propios mercados, donde se encuentra una gran variedad de artículos. Las personas, empresas o países han hecho uso de los mercados para optimizar sus recursos económicos mediante los bienes también llamados productos

[1] Para mayor información sobre la historia de los mercados financieros consultar: [1], [3], [5], [10].
[2] www.rae.es/

financieros[3].

Ahora, los mercados donde se permutan y comercializan estos productos financieros se les llama *mercados financieros.* Como se dijo al principio, los mercados pueden ser físicos o virtuales, así que la existencia de un mercado financiero no es una condición necesaria para la creación e intercambio de un producto de este tipo. Sin embargo, en la mayoría de las economías, los productos financieros se crean para después comercializarse.

Los mercados financieros tienen como principal objetivo orientar de manera directa, es decir, sin intermediarios bursátiles[4], los fondos de quienes los tienen en exceso (ahorradores) a quienes los necesitan para financiar sus gastos (deudores). De esta manera, los ahorradores toman la posición de compradores y los deudores de vendedores en un lugar llamado *mercado financiero.* Todas las personas, empresas y países que deciden participar en este mercado, ya sea como ahorradores o deudores, se les conoce como agentes económicos.

Los fondos de estos agentes se intercambian mediante productos financieros, y cuando son permutados de forma directa se les llama productos financieros primarios. El mercado donde se realiza esto es conocido como mercado spot, de ahí el término *precio spot.* De lo anterior, los principales ahorradores (parte) son las personas, y los deudores (contrapartes) más comunes son las empresas y el gobierno. Con todo, no es raro que los gobiernos y empresas tengan fondos en exceso con opción a prestarlos. Más aún, las personas se pueden convertir en deudores, ya que es común el financiamiento para la compra de casas, automóviles, computadoras, etc.

En la economía, los mercados financieros desempeñan un papel muy significativo, al poner en contacto a múltiples ahorradores con distintos deudores, con el fin de ayudar a coordinar el ahorro y la inversión. Para ilustrar mejor esto, se ocupará el siguiente ejemplo:

Supongamos que nosotros tomamos la postura de ahorradores y por ello tenemos $1,000,000.00 de pesos, los cuales queremos invertir hoy, de tal forma que dentro de un año obtengamos un rendimiento, y evitar así guardarlos en una caja fuerte sin producir ningún tipo de ganancia.

Por otro lado, tenemos a Nicolás, deudor, quien es dueño de una panadería, la cual necesita producir el doble de pan para incrementar sus ganancias en un año. Para ello, debe adquirir deuda y comprar una máquina más grande que haga la tarea.

Al existir un mercado financiero, Nicolás y nosotros nos podemos poner en contacto para que nuestro dinero esté a disposición de Nicolás, con la condición de que al final de un año nos devuelva esa cantidad más un interés anual, digamos del 10 %. Se entiende que durante ese año Nicolás comprará la máquina que necesita para obtener una mayor productividad y así generará las ganancias necesarias para pagarnos. De esta forma, nosotros tendremos un rendimiento de $100,000.00 pesos en un año, mientras que Nicolás obtuvo una máquina nueva para su empresa y sus ganancias se han duplicado. Por lo tanto, Nicolás como nos beneficiamos.

En el mundo real, los ahorradores y deudores no siempre son los mismos, así que sin un mercado financiero no habría contacto entre ellos, ni tampoco se sabría si el interés y tiempo empleado fue correcto. Este ejemplo, si se quiere muy básico, sirve como plataforma para entender que los mercados financieros desempeñan las siguientes actividades:

- **Fijar de modo adecuado los precios de los instrumentos financieros.** Determinar los

[3]Producto financiero: Un activo que representa una obligación legal sobre algún beneficio futuro. Los términos “producto”, “valor”, “activo” e “instrumento financiero” son usados intercambiablemente.

[4]Intermediarios bursátiles: Son aquellas personas morales autorizadas para realizar transacciones, con el objetivo de poner en contacto la oferta y la demanda de activos financieros.

precios de los activos financieros, dadas las interacciones de compradores y vendedores en un mercado financiero. Básicamente, las dos personas determinan el rendimiento de un activo financiero, llegando a un acuerdo entre el demandado por los ahorradores y los fondos que requieren los deudores. Así, los fondos económicos se asignan entre los activos financieros. A este proceso se le llama fijación de precios.

- **Proporcionar liquidez a los activos.** Los mercados financieros proporcionan la liquidez necesaria para que los activos financieros sean vendidos en tiempo y forma. La liquidez de mercado proporciona (sobre Nicolás y Nosotros) una característica atractiva cuando las circunstancias fuerzan o motivan a un inversionista a recuperar sus recursos antes de que cumpla el plazo acordado con la contraparte.

- **Reducir los plazos y los costes de intermediación.** Como vimos en nuestro ejemplo anterior, los mercados financieros tuvieron un importante papel en la búsqueda de información de los clientes. No obstante, este rastreo genera un costo que se requiere para anunciar las ventas o compras de los activos financieros, y el tiempo que se necesitó para encontrar a las contrapartes de cada cliente. Los costos de información se asocian con la cantidad y probabilidad del flujo de efectivo que se espera generar. En un *mercado eficiente*, [5] los precios reflejan la información recolectada por todos los participantes.

Finalmente, los crecientes montos de dinero y la distancia con que se realiza la compra/venta de productos financieros complejiza este mercado. Esto ha obligado principalmente a los países a regular sus intercambios y transacciones. Para realizar estas regulaciones, se crea un conjunto de organizaciones llamado sistema financiero. Con él, se procura mantener el orden, equilibrio y desarrollo a nivel individual, institucional y gubernamental. Y si se estructura un buen sistema financiero, se puede obtener algo semejante al mercado eficiente.

1.2. Clasificación de los mercados

Hasta ahora se ha explicado la función básica de los mercados financieros y su utilidad para la economía, por lo que ha llegado el momento de examinar su estructura.
El creciente tamaño de los mercados financieros desarrolló una compleja serie de productos financieros, generando la necesidad de crear varias clasificaciones que ilustren aspectos esenciales de cada mercado. Hay diversas maneras de categorizarlos, ya sea por activo financiero, tiempo de maduración del instrumento u obligación a la cual se refiere.

Clasificación según su estructura:

- Mercados organizados.
  Como se menciona al principio, las reglas de comercio han existido desde hace mucho tiempo y tanto los mercados como los bancos han estado sujetos a varias regulaciones y controles. Hoy en día, los mercados financieros donde se negocian instrumentos de forma simultánea y bajo ciertos requisitos normativos se les denomina mercados organizados. Un ejemplo es el instrumento financiero llamado Futuro, que definiremos más adelante.

  En los mercados organizados las partes nunca operan directamente entre sí, de modo que lo hacen a través de un intermediario bursátil, inspeccionado por una cámara de compensación,

[5] Teoría del Mercado Eficiente: Supone que la información de mercado está disponible en tiempo real y en un equilibrio de modelo, es decir, la demanda del mercado se equipara con la oferta.

que elimina el riesgo de contrapartida o insolvencia. En México, la cámara de compensación es Asigna, situada dentro de las instalaciones de la BMV.
Es por eso que este mercado reúne profesionales de forma periódica para realizar compras y ventas de valores públicos o privados. Además de que los mercados organizados tienen ciertas características atractivas para los inversionistas, como:

a) Es de carácter público.
b) Estandariza contratos donde solamente se operan títulos de aquellas entidades que han sido admitidas a cotización.
c) Cuenta con liquidación de posiciones. Existen órganos reguladores, como la cámara de compensación, que garantizan las operaciones bursátiles y la calidad de los instrumentos.
d) Las transacciones están aseguradas jurídica y económicamente.

Por dichas razones, este tipo de mercados brindan cierta confiabilidad para los ahorradores y deudores que requieran liquidez.

- Mercados no organizados u *Over The Counter (OTC).*
  Por otra parte, en el mercado no organizado los inversionistas (ahorradores y deudores) fijan las condiciones y precios, de acuerdo con sus necesidades particulares. No existe la figura de un tercero que garantice el cumplimiento de los contratos, dando como resultado negociaciones directas entre las dos partes.
  Este mercado es totalmente flexible al negociar con cualquier tipo de instrumento financiero. Éste es a medida del inversor, creado por cualquier entidad financiera, y la mayoría de contratos OTC se realizan a través de bancos o compañías financieras de inversión. La gama de productos que se negocian en este mercado es muy amplia, por mencionar algunos diremos:
  - *Swaps*: Acuerdo de dos partes para intercambiar flujos de dinero durante un tiempo predeterminado.
  - *Forward Rate Agreement (FRA)*: Acuerdo para recibir o entregar una tasa de interés que será aplicada a un monto y fecha preestablecidos.
  - *Caps*: Contrato que tiene la opción de proveer un pago cuando cierta tasa de interés especificada está por arriba de un nivel predeterminado.
  - *Floors*: Contrato que tiene la opción de proveer un pago cuando cierta tasa de interés especificada está por debajo de un nivel predeterminado.

Clasificación por tipo de obligación financiera

Se ha planteado anteriormente la idea de que un activo financiero es un contrato. Por ello, las personas que participan en él obtienen ciertos derechos y obligaciones estipuladas. Por tanto, a partir de estas obligaciones es como se clasifica a estos mercados.

- Mercado de deuda.
  Muchas veces las personas necesitan adquirir una deuda para satisfacer ciertas necesidades u objetivos; quienes usan frecuentemente este recurso son las empresas y gobiernos. Por ejemplo, si una empresa quiere construir una planta de producción nueva o el gobierno debe hacer una autopista que conecte dos estados diferentes y no tienen los fondos, es necesario emitir un instrumento de deuda. Y resulta que el mercado donde se venden y compran estos instrumentos financieros se le denomina mercado de deuda.
  Este instrumento, se vende en una cantidad de dinero determinado brindando liquidez a cambio

de la emisión de un contrato.
Al adquirir un instrumento de este tipo, el deudor se obliga a pagar al tenedor del activo una cantidad fija o flotante en intervalos regulares de tiempo (pagos de interés), hasta una fecha específica (fecha de vencimiento) donde se realiza el pago final. En este tipo de instrumentos, el inversionista conoce desde el principio el rendimiento esperado y su riesgo existente, que por lo general es pequeño. Estos productos pueden ser adquiridos en los mercados primarios o secundarios, los cuales serán definidos más adelante.

En la BMV los instrumentos de deuda están divididos[6] por:

Gubernamentales:
Cetes, udibonos, bonos de desarrollo, pagaré de indemnización carretero y BPA (Bonos de Protección al Ahorro)

Instrumentos de deuda a corto plazo:
Son aquellos que tienen fecha de vencimiento menor o igual a un año, como aceptaciones bancarias, papel comercial, pagaré con rendimiento liquidable al vencimiento y certificado bursátil de corto plazo.

Instrumentos a mediano plazo:
Son los que tienen fecha de vencimiento mayor a un año pero menor a 3, por ejemplo un pagaré a mediano plazo.

Instrumentos a largo plazo:
Son los que tienen fecha de vencimiento mayor o igual a 3 años, como Certificados de Participación Inmobiliaria (CPI´s) u Ordinarios (CPO´s), Certificado Bursátil (CB´s) y Pagaré con Rendimiento Liquidable al Vencimiento (PRLV) a plazo.

Cabe señalar que, dado el riesgo tan pequeño que conllevan los instrumentos de deuda, estos son útiles para las inversiones conservadoras.

- *Mercado de acciones o accionario.*
  Sin duda, este es el mercado donde se opera el conjunto de instrumentos más representativos de renta variable en el mundo financiero, las acciones. Aquí se negocian los derechos que tienen los inversionistas sobre las ganancias, provenientes de empresas que decidieron emitir acciones. La compra-venta de acciones está basada en la información proporcionada por los indicadores accionarios.
  Estos reflejan la evolución de precios en las acciones y tienen lugar en las bolsas de valores del mundo, en este caso la BMV.

  El comportamiento del mercado accionario es un importante factor en las inversiones que tiene una empresa, debido a que el precio de las acciones afecta su cantidad de recursos, productividad e imagen.

  En los siguientes capítulos se detallará el concepto de acción junto con su utilidad y los lugares que brindan la infraestructura para su adecuada compra-venta.

Clasificación por fecha de vencimiento de obligaciones en los instrumentos:

- *El mercado de dinero o monetario (instrumentos de deuda a corto plazo)*
  En el mercado de dinero se compran y venden activos financieros a corto plazo, es decir, su

[6] Esta información fue extraída del portal oficial de la Bolsa Mexicana de Valores: www.bmv.com.mx

vencimiento o fecha de amortización suele ser inferior a un año. Estos activos poseen un riesgo muy reducido y son muy líquidos, haciéndolos convertibles fácilmente en dinero, como los depósitos interbancarios, en los que las instituciones que conceden crédito, directamente o a través de intermediarios financieros, ceden depósitos u otros activos por un día (*overnight deposits*) o a plazos superiores, aunque generalmente menores a una semana.

Parte de la deuda emitida en este mercado está basada en papel negociable, entre los cuales tenemos las letras del tesoro, pagarés de empresas, aceptaciones bancarias, certificados bancarios de depósitos (CDs), efectos comerciales(CP), efectos comerciales en eurodivisas (ECP), europagarés (emitidos a través de NIFs, RUFs o MOFs). Entre todos estos instrumentos, los más comunes son las letras del tesoro.

- *El mercado de capitales*
  En contraste con el mercado anterior, pero con funcionamiento y estructura muy similar, el mercado de capitales es el lugar donde se negocia un conjunto de instrumentos financieros con fecha de maduración mayor a un año, también llamados activos de mediano y largo plazo. En el mercado de capitales se ha puesto cierto énfasis en sus regulaciones, de modo que en él participan instituciones del sistema financiero.

  Este mercado se divide en dos:

  1. Mercado de valores, subdividido a su vez en:
     a) Mercado de renta fija: Activos con rendimiento ya conocido para el inversor.
     b) Mercado de renta variable: Activos con rendimientos desconocidos para el inversor.
  2. Mercado de crédito a largo plazo.

  Los principales instrumentos que se operan en este mercado son las acciones, obligaciones y bonos.

Clasificación según la fase de negociación del activo

Por lo general los productos financieros se someten a una revisión por parte de las autoridades regulatorias. No obstante, los productos se pueden negociar antes y después de ser inspeccionados. De esta manera es como se crean los tres mercados siguientes.

- *Mercado gris*
  Una vez creado el instrumento financiero, como se comentó al principio, se debe sujetar a revisiones por las autoridades con el fin de tener carácter oficial. Sin embargo, muchas veces estos instrumentos se comienzan a comercializar previo a la verificación y registro de los mismos. Por consiguiente, al lugar donde se producen pactos de compraventa oculta, es decir, antes del periodo de oferta pública, se le conoce como *mercado gris*.
  Esto tiene como objetivo hacer lo antes posible la emisión de los activos. Un ejemplo de esto son los mercados internacionales, como el euromercado[7].

  El mercado "gris", en sí mismo, no suele ser ilegal, como tampoco lo son los bienes adquiridos en él. Sin embargo, al no estar regulados estos productos, suelen producir desconfianza y problemas para quienes los desean adquirir.

[7] Mercados internacionales de dinero, crédito y capital, en los que se negocian las monedas fuera de sus países de origen.

- *Mercado primario*
  En él se origina la oferta de activos previamente supervisados por las autoridades regulativas, para distribuirse por primera vez a las entidades financieras sin intermediarios bursátiles. Los activos participantes en este mercado deben ser originarios de entidades autorizadas para cotizar en la bolsa. Este mercado también es llamado mercado de emisión.

  Por lo general, el mercado primario trabaja a largo plazo y moviliza importantes sumas de capital. Por esta razón, cuando las emisiones de productos son menores, pueden existir formas más directas de colocación de mercado, a veces sin intermediación. Se habla en tales casos de colocaciones con emisiones privadas.

- *Mercado secundario*
  Por último se tiene al mercado secundario, nombre del lugar donde se compran y venden en sucesivas ocasiones, posteriores a su autorización, activos financieros ya emitidos.
  Los activos pertenecientes a este mercado provienen generalmente de entidades cotizadoras en la bolsa, y el precio de sus transacciones se fija a través del juego de la oferta y la demanda.

  Los intercambios de productos financieros en este mercado se pueden realizar de dos maneras:

  - Intercambios organizados donde los compradores y vendedores (agentes o corredores) de valores se reúnen en un local determinado, para llevar a cabo las transacciones de activos. La Bolsa Mexicana de Valores es un ejemplo de intercambios organizados.
  - Intercambios *Over The Counter*. Los negociantes, dueños de activos, se ubican en determinados lugares prestos a comprar o vender valores. La compra o venta se realiza *Over The Counter* cuando alguien acude a ellos dispuestos a aceptar sus precios y condiciones.

Clasificación según el producto que comercializan

Hasta el momento, se ha clasificado a los mercados según la característica que tienen los productos financieros que se negocian en él, no obstante, existen dos mercados que comercializan exclusivamente un solo producto. La importancia de estos productos es tal que el mercado se crea a partir del activo, y no al revés. Lo anterior se refiere a las divisas y productos financieros derivados.

- *El mercado de divisas o Forex (Foreign Exchange)*

  Este es el mercado con más presencia en todo el mundo, ya que es descentralizado e internacional. En él se compran y venden monedas extranjeras o divisas provenientes de todo el mundo, negociándose diferentes denominaciones monetarias al contado o a largo plazo, siendo la primera opción la más utilizada.

  El propósito principal del intercambio de divisas es la fácil conversión de una moneda a otra mediante el tipo de cambio, permitiendo así el desarrollo del comercio internacional y la inversión extranjera.

- *Los mercados de productos financieros derivados*
  Esto es uno de los mercados más significativos para la última década por su influencia en el crack[8] bursátil de 2008, debido a la falta de regulaciones los instrumentos financieros derivados.

  Estos se reflejan en un contrato cuyo valor depende de otro llamado activo subyacente. Por ejemplo índices, acciones, monedas extranjeras, *commodities*, tasas de interés, etc.

[8]Crisis financiera, movimientos violentos no esperados que impactan de forma negativa a los mercados.

Implementados a partir de 1972 en México, estos instrumentos surgieron como una cobertura ante fluctuaciones de precio en productos agroindustriales (*commodities*), dando la posibilidad de planear, cubrir y administrar riesgos financieros, así como optimizar el rendimiento de los portafolios en condiciones de elevada volatilidad. Además, existe un organismo regulador llamado Bolsa de Derivados de México (Mexder), quien se encarga de estandarizar los siguientes contratos (con excepción del contrato forward):

Contrato por adelantado (*Forward*): Permite pactar el día de hoy el precio futuro (*strike price*) de compra o venta vinculado a un valor subyacente de un activo financiero (dólar, euro, bonos, acciones, índices, tasas de interés, etc.).
Los forwards se negocian en los mercados no organizados (*Over The Counter*), por lo regular entre dos instituciones financieras o entre una entidad financiera y uno de sus clientes.

Futuro: Contrato con las mismas características del *Forward*, pero un Futuro si está regulado por las autoridades. Así se disminuyen considerablemente los riesgos de incumplimiento por contrapartes, entrega extemporánea o un precio no adecuado.

Opciones: Contrato que brinda a su poseedor el derecho de vender o comprar un activo subyacente, en un precio pactado al inicio, durante el periodo que dura el contrato. Básicamente existen dos tipos: las opciones americanas, en las cuales se puede ejercer dicho derecho en cualquier momento de la duración del contrato, y las opciones europeas, donde sólo se puede ejercer el derecho de compra o venta al término de la fecha del contrato.

1.3. Acciones

Una vez entendido el concepto general de los mercados financieros y su estructura, se puede explicar con detalle el instrumento financieros más famoso y negociado; **las acciones**.

La primera empresa en emitir acciones fue la Compañía de las Indias Orientales Holandesa, en 1606. Sin embargo, no fue hasta la segunda revolución industrial, a principios del siglo XX, que las empresas se expandieron generando la necesidad de hacer grandes emisiones de acciones y obligaciones, comenzando a prestar más atención a los mercados financieros.

Este instrumento nace a partir de la necesidad que tiene una empresa por obtener financiamiento. Dicha compañia toma una parte de su capital social, es decir, una porción del valor referente a los bienes o dinero que los socios aportan a la empresa, y crean títulos de propiedad derivados de este capital. A estos títulos emitidos se les llaman acciones, y al sumar el valor nominal de todas las acciones en circulación, se obtiene el precio total del capital social de una empresa.
Es importante decir que todas las acciones están documentadas por la emisión de un certificado de acciones. El documento de carácter legal especifica el importe de las acciones, la propiedad del accionista y otros detalles, tales como el valor nominal, si existe, la clase.

Estos títulos son colocados entre el gran público inversionista a través de la bolsa de valores perteneciente a cada país. En México, las acciones son emitidas por la Bolsa Mexicana de Valores.
Cabe mencionar que las acciones se gestionan en estas bolsas y sólo son vendidas bajo previa autorización de instituciones oficiales.

De hecho, las acciones no se encuentran solamente en el mercado accionario. Por su estructura y comercialización están integradas en el mercado organizado, ya que sólo las bolsas de valores del mundo están facultadas para emitirlas. Asimismo, estos activos se pueden encontrar en el mercado de capitales, a pesar de que no necesariamente son un instrumento a largo plazo, ya que el periodo de este activo no existe y la decisión de venderlo o retenerlo reside exclusivamente en el propietario. Por ende, es un instrumento con un rendimiento variable.

Para obtener estos activos se debe acudir a las instituciones organizadas, denominadas casas de bolsa. Una casa de bolsa, a su vez, compra las acciones emitidas por las bolsas de valores. Por lo tanto, es posible clasificar a las acciones dentro de los mercados primarios y secundarios.

1.3.1. Derechos que conceden las acciones

La tenencia de las acciones otorga a sus compradores ciertos derechos que los convierten en socios partícipes de los ingresos netos, después de gastos e impuestos, y de los activos de una empresa emisora. El accionista pasa a ser propietario de dicha empresa junto con el resto de los accionistas, en la proporción de dicha acción. Algunos derechos que se les conceden a los accionistas son los siguientes:

a) Derecho de participación en las decisiones: el accionista podrá decidir en cuanto a la gestión o administración de la empresa en la que invirtió, a través de la asistencia y voto en la junta general de accionistas. El número de votos que tiene un accionista es proporcional a la participación en el capital social de dicha empresa. Sin embargo, existen acciones que pueden haber sido emitidas sin derecho al voto, otorgando como compensación otros privilegios, normalmente de índole económica.

b) Derecho a la información: el accionista podrá consultar los estados financieros sobre las cuentas anuales y cualquier información que pueda ser importante en la marcha de la empresa. Este informe anual es utilizado por los inversionistas para formarse expectativas acerca de las corrientes futuras de utilidades y dividendos.

c) Derecho a participar en la parte del patrimonio resultante de la liquidación en la sociedad: cuando una sociedad decide liquidarse, en una situación de quiebra, realiza la terminación de sus actividades mercantiles, el pago de sus pasivos, y finalmente la distribución del remanente entre sus socios accionistas. En algunos casos las pérdidas habrán eliminado gran parte del valor de los fondos propios y probablemente el valor liquidativo para los accionistas será reducido o nulo. Por esto, el riesgo en que incurren los accionistas al comprometer sus recursos en la empresa es mayor que el riesgo para los acreedores.

d) Derecho de suscripción preferente de nuevas acciones en ampliaciones de capital: este derecho brinda la opción de que los antiguos accionistas puedan suscribirse a nuevas acciones o, en su caso, derecho a recibir acciones recién liberadas. El motivo de este derecho es que la participación de los antiguos accionistas de la empresa se mantenga inalterada "si lo desean" y protegerlos del efecto dilución de las reservas, es decir, la pérdida del valor teórico de la acción como consecuencia de una ampliación de capital.

e) Derecho a Dividendos: Estos son una retribución de las utilidades de la empresa, en caso de que la misma haya obtenido beneficios, y la junta general decida repartir entre los accionistas. El dividendo activo es en el que la junta general de accionistas decide pagar a los mismos. El dividendo a cuenta es el que se entrega antes de la junta general de accionistas, y el dividendo complementario es la diferencia entre el acordado y el pagado a cuenta.

1.3.2. Precio de las acciones y su rentabilidad

El ser propietario de una acción significa adquirir ciertos derechos y riesgos, ya que es un instrumento financiero de renta variable que conlleva una gama de riesgos de mercado, liquidez y bursatilidad, mismos que alteran el precio del activo y por consiguiente, su rentabilidad. La finalidad de estudiar la rentabilidad de una acción es tratar de explicar su comportamiento en el mercado para obtener un beneficio de inversión. Quien compra no lo hace para quedarse con las acciones, sino para esperar a que el precio suba y entonces venderlas a otro inversor. El accionista puede rentabilizar su inversión en acciones de tres formas: dividendos generados por la empresa; plusvalía producida al momento en que se venden las acciones en el mercado y hay ganancias de capital, es decir, el diferencial entre el precio de compra y el de venta de la acción; y por último, el alquiler de éstas. Por consiguiente, es de amplio interés saber las posibles causas que llevan a una acción a tener cambios en su precio, para tomar las decisiones correctas en la inversión de este instrumento.

El precio de una acción varía según el volumen de compra y venta realizada, es decir, se modifica en función de la ley de la oferta y la demanda. Esta dice que al incrementarse la demanda de una acción, su precio sube, creando así una área de oportunidad para quien esté vendiendo. Por el contrario, cuanto más oferta haya por la acción, el precio comienza a bajar para incentivar a los compradores con precios atractivos, ya que son pocos los interesados en adquirir las acciones y hay muchas por venderse.
Ahora bien, el precio de las acciones no sólo depende de la oferta y la demanda, también está en función del desempeño de la empresa emisora y las expectativas que haya sobre su desarrollo.
Al tener un precio más alto en las acciones de una empresa, ésta puede obtener una cantidad mayor de fondos y emplearlo en crecimiento e infraestructura. Asimismo, en el comportamiento del mercado influyen elementos externos, políticos, económicos y sociales.

Por lo anterior, la toma de precio de las acciones es multifactorial, debido a que no existe una sola razón por la cual las acciones tengan un precio en particular. En este sentido, los movimientos accionarios van más allá de las expectativas por el reparto de dividendos u opiniones bursátiles y económicas que se tengan de las empresas que cotizan en los mercados. Y por eso al realizar un proyecto de inversión financiero con este instrumento, se deberán tomar en cuenta distintos criterios y decisiones para adecuar los intereses y expectativas de dicho proyecto. En este caso, el inversionista debe evaluar cuidadosamente su perfil de riesgo y decidir si prefiere una inversión agresiva de acciones o una compra más conservadora, o bien, una combinación de ambas. De cualquier forma, en el mercado accionario siempre se debe invertir con miras de obtener ganancias a largo plazo, ya que junto a una buena diversificación de portafolio se puede diluir el riesgo de bajas circunstanciales del mercado, empresa o de la propia acción. En este sentido, la administración de riesgos financieros juega un papel muy importante en la pérdida que puede conllevar cada acción, debido a las causas y movimientos mencionados.

Por ello, una buena inversión debe considerar diversos y complejos factores de análisis matemático y bursátil, como el análisis técnico (metodología que trata de predecir la evolución de un valor en función de su pasado) y el análisis fundamental (revisión de la empresa emisora) para la proyección en los precios, gestionando las estrategias correctas que cubran del riesgo.
Por lo tanto, en este trabajo se propone un análisis sobre todo cuantitativo, mediante modelos matemáticos que traten de replicar los movimientos accionarios disminuyendo el riesgo, puesto que éste siempre será una variable que afectará a las decisiones de inversión.

1.4. La Bolsa

Las acciones se originan, compran y venden en un sólo lugar; la bolsa de valores. Este espacio es clave para el correcto análisis del comportamiento de las acciones. Es por eso que se profundizará en su estructura y participación en México.

El lugar donde se realizan negociaciones de compraventa de instrumentos financieros oficiales, en particular acciones, es la bolsa de valores. Este es el mercado financiero por excelencia y es parte del mercado financiero organizado. La bolsa establece los locales, instalaciones e infraestructura necesaria para que los intermediarios bursátiles, puedan llevar a cabo sus operaciones de compra y venta de instrumentos financieros.

Las responsabilidades principales de las bolsas de valores son facilitar y regular la negociación de instrumentos financieros, fomentando el desarrollo del mercado. Por esta razón, la bolsa siempre está jugando un importante papel como barómetro en la economía de un país. En este sentido, el mercado bursátil "junto con sus índices y osciladores" suele utilizarse como indicador de la evolución que está siguiendo la economía. A lo largo de la historia, los cracks bursátiles "reflejados en las bolsas de valores" han sido el aviso de un efecto dominó que da lugar al inicio de una recesión económica.

En una bolsa de valores intervienen tres personas: los demandantes de capital (compradores), oferentes de capital (vendedores) y mediadores. Estos agentes financieros reciben distintos nombres dependiendo de su forma de trabajar y operar sus activos:

- Corredor de bolsa (*Broker*)
- Mediador propio (*Dealer*)
- Hacedores de mercado (*Maket-makers*)
- Pequeños ahorradores (*Small savers*)
- Pequeños inversionistas (*Small investors*)
- Inversionistas calificados (*Qualified investors*)
- Inversionistas institucionales (*Institutional investors*)
- Gestores de activos (*Asset managers*)
- Arbitragistas (*Arbitrageurs*)
- Operador (*Trader*)

Muchas veces estos agentes desarrollan un papel de mediadores, haciendo el enlace entre oferentes y demandantes a cambio de una comisión. Para que los agentes financieros anteriormente mencionados puedan tener una óptima operatividad, las bolsas de valores se encargan de realizar las siguientes funciones:

- Facilitar el intercambio de fondos entre las partes.
- Proporcionar liquidez a los inversionistas en bolsa para garantizar el pago de posturas.
- Fijar los precios referente a los títulos a través de la ley de la oferta y la demanda.

- Facilitar información a los inversionistas sobre las empresas que cotizan en bolsa. Por este motivo, las empresas admitidas en bolsa tienen que dar a conocer sus estados financieros y evolución.

- Proporcionar confianza a los inversionistas, ya que la compraventa de valores está respaldada legalmente.

- Publicar los precios y cantidades negociadas para informar a los inversionistas y entidades interesadas.

La cotización en bolsa ofrece ciertas ventajas para las empresas en cuanto a su desarrollo, estatus, imagen, posición económica y demás cualidades de mercado. Sin embargo, existen ciertas desventajas importantes, como el riesgo bursátil, ya que a través de la historia se ha demostrado que si no hay un buen control de riesgos la empresa puede terminar quebrando. A continuación, se muestra una lista con las ventajas y desventajas que una empresa tiene al cotizar en bolsa.

Ventajas:

- Diversificación de las fuentes de financiación.

- Obtención de financiación a un menor costo.

- El capital que se negocia en la bolsa se diluye entre muchos accionistas, lo cual puede reducir las posibilidades de que un determinado grupo pase a dominar la empresa.

- Los títulos emitidos por la empresa son más líquidos, ya que sus inversionistas los pueden revender en la bolsa cuando lo deseen.

- Se mejora la imagen pública de la empresa por la continua publicidad gratuita que aparece en los medios de comunicación, los cuales informan de la marcha de la bolsa.

- Se puede saber con exactitud el valor de la empresa respecto a las otras que cotizan, dando certidumbre del desarrollo.

- El monto financiado es mucho mayor al que se podría conseguir si la empresa no cotiza en bolsa.

- Los títulos que cotizan pueden gozar de ventajas fiscales.

- Los requisitos que solicitan para cotizar en bolsa facilitan mucho la información contable de la empresa.

Desventajas:

- La emisión de acciones que cotizan en bolsa puede suponer una pérdida de poder en la empresa para los accionistas fundadores.

- Las acciones están en manos de personas totalmente ajenas para los fundadores.

- Las empresas están obligadas a proveer información necesaria para los accionistas, colocándola en una posición vulnerable ante la competencia y con un control fiscal más fuerte.

- Las empresas que cotizan están sometidas a rigurosas auditorías externas.

Por último, tras la evolución de la economía y los mercados financieros se creó una mayor necesidad de operaciones, dando origen en 1460 a la creación de la bolsa de Amberes, que fue la primera institución bursátil moderna. Posteriormente, se creó la bolsa de Londres (1570), la de Lyon (1595), la de París (1794), la de Nueva York (1792), y sucesivamente fueron apareciendo bolsas en las principales ciudades del mundo. Las bolsas se consolidaron tras el auge de las sociedades anónimas. Actualmente, las bolsas más importantes del mundo son las de Estados Unidos (Nueva York), Japón (Tokio), Reino Unido (Londres), Francia (París) y Alemania (Fráncfort).

1.4.1. Bolsa Mexicana de Valores

La Bolsa de Valores en México (BMV) S.A.B. de C.V. es el principal mercado accionario, donde se llevan a cabo las operaciones y registros del mercado de valores organizado en México. Es una entidad financiera que opera con autorización de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP), el Banco de México (Banxico) y la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV). Por esta razón, la BMV está apegada a la Ley del Mercado de Valores, la cual menciona que las bolsas deben de ser empresas establecidas como sociedades anónimas de capital variable.

Las primeras operaciones con valores que se realizaron en México datan de 1880 se realizan en las oficinas de la Compañía Mexicana de Gas con títulos, principalmente, de compañías mineras. La compraventa de estas acciones continuó de forma no institucionalizada hasta el 31 de octubre de 1894. Tiempo después se constituyó la Bolsa de Valores de México, con oficinas en la calle de Plateros, actualmente Francisco I. Madero, la cual se disolvió pocos años después.

En 1907 se inaugura la Bolsa Privada de México, que en 1910 cambió su denominación a Bolsa de Valores de México, S.C.L., y que siguió operando ininterrumpidamente hasta 1933, año en que se transformó en la Bolsa de Valores de México, S.A.B. de C.V., recibiendo autorización para operar como institución auxiliar de crédito.
En 1975 se promulgó la ley del Mercado de Valores que, como se haw mencionado antes, establece el marco legal para el funcionamiento del sistema bursátil. Por último, a principios de 1976, la Bolsa de Valores de México adoptó su denominación actual de Bolsa Mexicana de Valores, S.A. de C.V. El 19 de abril del 2010, el Consejo de Administración de la BMV aprobó una reestructura que significó pasar de una organización con base en empresas individuales a cinco divisiones de negocio: (I) Mercados e Información, (II) Depósito, Compensación y Liquidación, (III) Tecnología, (IV) Promoción y Planeación y (V) Servicios Corporativos y Relaciones Institucionales.

Desde entonces, el funcionamiento de la BMV gira en torno a las operaciones de intercambio de recursos monetarios a través de títulos-valor e instrumentos financieros, facilitando su intercambio y promoviendo el desarrollo, expansión y competitividad del mercado en México. Para lograr los objetivos anteriores, la BMV ofrece los siguientes servicios:

- Asistir en la operación y desarrollo de los mercados financieros con base en el personal capacitado y el uso de la tecnología, buscando incrementar el valor de los títulos para los accionistas.
- Establecer instalaciones y mecanismos especializados que faciliten las relaciones y operaciones entre la oferta y demanda de valores, títulos de crédito y demás documentos inscritos en el Registro Nacional de Valores (RNV), así como prestar los servicios necesarios para los procesos de emisión y colocación de empresas.
- Hacer de carácter público la información referente a los valores inscritos en la BMV, los valores listados en el Sistema Internacional de Cotizaciones de la propia Bolsa, las empresas emisoras y las operaciones que en ella se realicen.

- Crear las normas necesarias para las casas de bolsa y emisoras con valores inscritos en la BMV para que se establezcan estándares y esquemas operativos de conducta a fin de promover las prácticas justas y equitativas en el mercado de valores, así como auditorías y monitoreo de las actividades incorrectas para imponer medidas disciplinarias y correctivas.
- Garantizar que las normas necesarias en las operaciones que realicen las casas de bolsa en la BMV, sean aplicadas.

Por todo lo anterior, los mercados accionarios están regulados por la BMV, la cual se encarga de emitir todas las acciones referentes a las empresas admitidas para cotizar en México. En el cuadro A.1(del Anexo) aparecen todas las empresas que están inscritas actualmente para emitir acciones.

Finalmente, la Bolsa Mexicana de Valores también se encarga de proporcionar la información necesaria para hacer seguimiento del desempeño de los instrumentos financieros. Estos datos se pueden encontrar en los periódicos especializados, o a través de los sistemas de información impresos y electrónicos de la propia BMV.

1.5. Índices Bursátiles

Actualmente, en los mercados financieros organizados se negocian un gran número de activos y transacciones. Por eso, la información que proporcionan las bolsas de valores referente a los mercados accionarios es clave para tomar decisiones.
Las bolsas de valores calculan diariamente un conjunto de elementos de mercado llamados indicadores o índices, siendo la forma más eficiente para realizar un análisis cuantitativo del mercado accionario.

Los índices permiten reflejar y medir la evolución de precios, la compra y venta continua de los instrumentos financieros, así como las posturas y hechos de los participantes. Las medidas de mercado pueden ser de forma general o sectorial, haciendo que la construcción de un índice difiera según el objetivo de los inversionistas y sus activos.
De esta forma los índices brindan información clave para los inversionistas, permitiéndoles efectuar comparaciones entre el rendimiento de sus carteras y la marcha global del mercado.

Existen índices para casi todos los tipos de instrumentos, pero los indicadores para bonos, opciones, futuros y otros que no sean acciones son poco conocidos y seguidos por los inversionistas. Por consiguiente, esta sección centra su atención exclusivamente en los índices del mercado accionario: los bursátiles.

Los índices bursátiles son un sistema de medición estadístico diseñado para mostrar los cambios de una o más variables relacionadas a través del tiempo. En ellos se expresa un valor numérico que trata de reflejar las variaciones de precios o rentabilidades promedio de los valores que lo componen, es decir, el cambio de precio de una o más acciones que cotizan en un periodo de tiempo.

1.5.1. Cálculo del los índices bursátiles

Las fórmulas matemáticas que se emplean para construir los índices bursátiles pretenden conjuntar de manera clara, sencilla, simple y abreviada las tendencias, variaciones y alteraciones de una muestra de acciones determinada con ciertas características. Por lo regular, éstas consisten en pertenecer a una misma bolsa de valores, tener una bursatilidad similar o ser parte de un mismo sector industrial. Una vez seleccionadas las acciones, se obtiene una muestra de ellas con un elevado volumen y una alta frecuencia de negociación, con el fin de que el índice sea lo más representativo posible.

El cálculo de los índices emplea distintas técnicas, como medias geométricas, medias aritméticas o ponderaciones. No obstante, los más usuales son los índices de promedios ponderados como: **El índice de Laspeyres**, que calcula la variación del precio actual comparándolo con el precio del momento base (es decir, al momento $t = 0$), y ponderándolo por el valor proporcional que representa la emisora con respecto al total en el momento base, de la siguiente manera:

$$I_{Laspeyres} = \frac{\sum_i p_{i,t} \cdot q_{i,0}}{\sum_i p_{i,0} \cdot q_{i,0}} = \sum_i w_{i,0} \frac{p_{i,t}}{p_{i,0}} \tag{1.1}$$

Donde:

- $p_{i,t}$ precio de la i-ésimo emisora al momento t.
- $q_{i,t}$ cantidad de la i-ésimo emisora al momento t.
- $w_{i,t} = \frac{p_{i,t} \cdot q_{i,t}}{\sum p_{i,t} \cdot q_{i,t}}$ valor proporcional que tiene la i-ésimo emisora respecto al total, al momento t.

El índice de Paasche pondera en función del valor proporcional que representa la emisora con respecto al total en el momento t:

$$I_{Paasche} = \frac{\sum_i p_{i,t} \cdot q_{i,t}}{\sum_i p_{i,0} \cdot q_{i,t}} = \sum_i w_{i,t} \frac{p_{i,t}}{p_{i,0}} \tag{1.2}$$

Por último, el índice de Fisher sopesa una media de ambos valores, la base y la del momento en que se calcula el índice:

$$I_{Fisher} = \sqrt{\left(\frac{\sum_i p_{i,t} \cdot q_{i,0}}{\sum_i p_{i,0} \cdot q_{i,0}} \right) \left(\frac{\sum_i p_{i,t} \cdot q_{i,t}}{\sum_i p_{i,0} \cdot q_{i,t}} \right)} \tag{1.3}$$

Todos los índices ponderados utilizan la capitalización bursátil, capital admitido a cotización o capital total de la sociedad, y el volumen de concentración nominal o de efectivo.

Como consecuencia de la ponderación, los índices pueden descomponerse en otros índices dirigidos a ciertos sectores como la industria de los transportes, construcción entre otros.

Cada mercado y cada bolsa calcula su propio índice dependiendo de sus necesidades. Por esta razón existen muchos tipos de índices bursátiles, que difieren básicamente en los siguientes aspectos:

a) **Índice por valor:** Muestra cómo evoluciona la cotización de un valor en concreto con respecto al valor que tenía en una fecha determinada, representando así variaciones acumuladas relativas, no absolutas (como serían las que se desprenden de la última cotización).

b) **Índices sectoriales:** Muestran cómo evoluciona un determinado sector formado por una agregación de empresas en función de un determinado criterio, como el tipo de actividad.

c) **Índices generales:** Tratan de medir la evolución conjunta de un grupo de valores representativos de la evolución del mercado. Por ello, en el proceso de elaboración del índice se puede incluir el conjunto de la población de valores que conforman el mercado o por el contrario, se puede seleccionar una muestra representativa de éste facilitando su cálculo.

En cualquier caso elegido, los mercados y las bolsas pueden hacer uso de distintas expresiones matemáticas para calcular sus índices, ajustando las variaciones en las cotizaciones debido a causas ajenas al mercado, como pagos de dividendos, las ampliaciones de capital o los desdoblamientos (*splits*).

Cabe señalar que lo anterior puede tener ciertos problemas, como la creación de diversos índices que compiten para atraer la atención, las diferentes construcciones e interpretaciones que se tienen de estas y la falta de contemplación del pago de dividendos. Por ello, algunos índices pueden no brindar una buena indicación de los rendimientos totales devengados sobre las acciones, y llevar a un error de inversión.

Los índices más ampliamente conocidos en el mundo son:

Índice	País
Ibex 35	España
FTSE 100	Gran Bretaña
CAC 40	Francia
DAX 30	Alemania
Nikkei 225	Japón
Hang Seng	Hong Kong
Bovespa	Brasil
Merval	Argentina
IGBC	Colombia
IPSA	Chile
IGBVL	Perú
IPC	México
DJIA	E.U.
Nasdaq 100	E.U.
S&P 500	E.U.

Tabla de índices globales

Dentro de estos índices internacionales, destacan por su importancia:

1. El Standar & Poor's 500 (S&P 500): es un índice que recoge un amplio número de empresas estadounidenses, aunque deja fuera a las pequeñas y medianas empresas cotizadas. No capta el efecto de la rentabilidad por dividendo.

2. El Down Jones Industrial Average (DJIA): está compuesto por 30 compañías cotizadas en la bolsa de Nueva York (NYSE). Tampoco capta la rentabilidad por dividendos. A pesar de que el número de empresas que emplea es más reducido que el S&P 500, presenta una elevada fiabilidad.

3. Nikkei 225: recoge 225 empresas del mercado japonés y corrige el efecto de las ampliaciones de capital.

4. FTSE 100 (Footsie): elaborado por FTSE, empresa conjunta de Financial Times y de la Bolsa de Londres. Emplea las cien mayores empresas del mercado en ese lugar. No considera la rentabilidad de los dividendos.

5. CAC 40: es el índice de referencia del mercado francés, calculado en función de 40 empresas representativas de éste.
6. DAX 30: Es el índice de referencia de la Bolsa de Fráncfort y emplea para su cálculo 30 empresas cotizadas en ella. Incluye la rentabilidad por dividendos.

Por último, es importante precisar que el índice bursátil más importante dentro del mercado accionario es el Down Jones. Calculado desde 1896, fue creado por Charles Dow y Edward Jones para informar la evolución de las acciones pertenecientes a 30 empresas, mismas que pueden variar según los cambios económicos que sufra el mercado, pero siempre son compañías que se encuentran entre las mayores y las más poderosas industrias. Sin embargo, cada una de las 30 acciones seleccionadas tienen la misma importancia dentro de este índice. Sin duda, el DJIA es uno de los indicadores económicos de Estados Unidos más importantes, haciendo que los índices ponderados sean más utilizados que los simples.

1.5.2. Índices en México

Como ya se mencionó en la sección anterior, cada bolsa del mundo calcula sus índices accionarios y México no es la excepción. La Bolsa Mexicana de Valores cuenta con un organismo llamado Comité Técnico de Metodologías que establece las técnicas, criterios y reglas de mantenimiento utilizadas en el cálculo y operatividad de los índices accionarios de la BMV, con la finalidad de ser lo suficientemente robustos y representativos para el mercado mexicano. Todos los índices calculados en este organismo están agrupados en los siguientes bloques:

-Principales
-De rendimiento total
-Sectoriales
-De actividad económica
-Otros

Estos sectores, dependiendo de su enfoque y especialidad, son indicadores que buscan reflejar el comportamiento del mercado accionario mexicano en su conjunto, o bien en determinados sectores con empresas emisoras agrupadas que tienen alguna característica en común.
De los bloques anteriormente mencionados, se resalta el de los Principales, ya que en él se localiza el índice de interés.

Los indicadores principales, también conocidos como índices de rendimiento simple, toman para su cálculo las fluctuaciones de precios derivados de movimientos del mercado, y se dividen de la siguiente manera:

-Índice de Precios y Cotizaciones (IPC)
-Índice México (INMEX)
-Índice de la Mediana Capitalización (IMC 30)
-Índice de Vivienda (HABITA)
-Índice Compuesto del Mercado Accionario (IPC CompMx)
-Índice de Empresas de Alta Capitalización (IPC LargeCap)
-Índice de Empresas de Media Capitalización (IPC MidCap)
-Índice de Empresas de Pequeña Capitalización (IPC SmallCap)
-Índice de Dividendos (IDiv)
-Índice México-Brasil (IMeBz)
-BMV-Brasil 15

Índice VIMEX

A diferencia de los índices anteriores, VIMEX mide la volatilidad esperada para el mercado accionario mexicano en el corto plazo. Tiene como objetivo servir como referencia de la volatilidad esperada que perciben los participantes en el mercado accionario mexicano, tomando como insumo principal las opciones listadas en Mexder sobre el Futuro del IPC.

Sus características principales son:

- El nivel del índice es dado a conocer 3 veces al día entre las 8:00 y las 13:30 horas.
- El periodo de volatilidad del índice es constante. Mide la volatilidad implícita en el corto plazo para un trimestre (90 días naturales).

1.5.3. Índice de Precios y Cotizaciones (IPC)

El índice más característico e importante en México es el Índice de Precios y Cotizaciones (**IPC**). Es el principal indicador del mercado mexicano de valores desde octubre de 1978. Expresa el rendimiento del mercado accionario en función de las variaciones de precios con una muestra balanceada, ponderada y representativa de un conjunto de empresas emisoras cotizadas en la BMV. De esta manera se brinda así la oportunidad para el mercado financiero mexicano de medir los movimientos en los precios del mercado accionario, en su forma general, utilizándose como referencia y subyacente de productos financieros.

Muestra del IPC

Los criterios para seleccionar las emisoras que integren los índices bursátiles mexicanos son diversos, ya que las muestras deben tener valores con mayor bursatilidad en el mercado.

El IPC se compone de 35 empresas emisoras miembros de la BMV, tomando de cada una sólo la serie accionaria más bursátil. El criterio de selección de estas acciones se realiza en un muestreo bietápico, ya que primero se seleccionan 55 empresas y de éstas se selecciona las 35 que conformarán el índice. Las emisoras incluidas en la muestra deben ser representativas y tener en cuenta todos los sectores que cotizan en el mercado. De esta manera, las 55 series accionarias que participan en la primera etapa de selección pasan por los siguientes filtros:

1ero. Tiempo mínimo de operación. Es decir, se eligen las emisoras que tengan al menos tres meses de operación continua.

2do. Porcentaje mínimo de acciones flotantes. Se seleccionan sólo aquellas series cuyo porcentaje de acciones flotantes es igual o mayor al 12 %, o si su valor de capitalización flotado es igual o mayor a $10,000 millones de pesos.

3ero. Valor de Capitalización Flotado Mínimo. Solo se tomarán en cuenta aquellas series cuyo valor de capitalización flotado sea mayor o igual al 0.1 % del valor de capitalización, considerando los últimos tres meses previos al momento de la selección.

4to. Mayor Factor de Rotación. De las series accionarias que pasaron los 3 filtros previos, son elegibles las 55 series con mayor Factor de Rotación en los últimos 12 meses, previos al momento de la selección.

5to. Calificación conjunta de los siguientes indicadores. Factor de Rotación, Valor de Capitalización Flotado y Mediana de las medianas mensuales del importe operado en Bolsa de los últimos 12 meses.

Ya que las 55 series pasaron los cuatro primeros filtros, en el quinto se asignan tres calificaciones a cada empresa. La primera calificación se establece con el factor de rotación de cada serie accionaria, calculada como la mediana de las 12 medianas mensuales de rotación, donde la rotación es el valor que resulta de dividir el número de acciones negociadas en un periodo entre el número de acciones flotantes de la serie. La segunda calificación es el valor de capitalización flotado, obteniéndose al multiplicar el número de acciones flotantes de la serie por el precio de mercado de la acción (en el siguiente bloque se dará más detalle de esta variable). Por último, se considera la mediana de medianas mensuales que se calcula durante un mes observando el importe operado y calculando la mediana, después se repite este procedimiento para el siguiente mes durante 12 meses y se obtiene una mediana proveniente de las 12 medianas calculadas anteriormente.

De esta manera, se procede a obtener una calificación final al sumar las tres de cada una de las 55 empresas. Posteriormente se ordenan de menor a mayor según su calificación final, y sólo se seleccionan las 35 empresas emisoras que hayan alcanzado las puntuaciones más bajas. En el siguiente cuadro se pueden ver las 35 empresas que constituyen actualmente al IPC:

	Emisora		**Emisora**		**Emisora**		**Emisora**
1	AC	11	COMERCI	21	GSANBOR	31	PE&OLES
2	ALFA	12	COMPARC	22	ICA	32	PINFRA
3	ALPEK	13	ELEKTRA	23	ICH	33	SANMEX
4	ALSEA	14	FEMSA	24	IENOVA	34	TLEVISA
5	AMX	15	GAP	25	KIMBER	35	WALMEX
6	ASUR	16	GFINBUR	26	KOF		
7	BIMBO	17	GFNORTE	27	LAB		
8	BOLSA	18	GFREGIO	28	LIVEPOL		
9	CEMEX	19	GMEXICO	29	MEXCHEM		
10	CHDRAUI	20	GRUMA	30	OHLMEX		

Cuadro 1.1: Muestra del IPC, 31 de diciembre de 2013, www.bmv.com

Las muestra de este índice es revisada constantemente, puesto que las empresas están expuestas a diversos cambios administrativos, económicos, corporativos, políticos, etc., haciendo que el índice sea susceptible de ajustes con ciertos reglamentos y tiempos que establece la BMV. La revisión de las emisoras que forman parte de la muestra del IPC se realiza en el mes de agosto, una vez cada año, con datos de cierre obtenidos en el mes de julio.

Cálculo del IPC

Para calcular el IPC se contrasta la evolución de los precios que hacen referencia a las 35 empresas seleccionadas previamente. No obstante, las compañías no tienen el mismo peso dentro del cálculo del IPC, por lo que su participación “o también llamado peso relativo de cada serie accionaria” está determinado por su valor de capitalización flotado.

Este indicador se calcula haciendo el producto del número de acciones flotantes[9] por el precio de mercado de la acción, es decir:

$$VCF_{it} = (FAF_{it} \cdot Q_{it}) \cdot P_{it}$$

Donde:

$$\begin{aligned} VCF_{it} = &\quad \textit{Valor de capitalización flotado de la i-ésima serie accionaria al día t.} \\ FAF_{it} = &\quad \textit{Porcentaje de ajuste por acciones flotantes de la i-ésima serie accionaria i al día t.} \\ Q_{it} = &\quad \textit{Número de acciones inscritas en la bolsa de la i-ésima serie accionaria al día t.} \\ P_{it} = &\quad \textit{Precio de mercado de la i-ésima serie accionaria al día t.} \end{aligned}$$

De esta forma, el peso relativo de las series accionarias provenientes de cada emisora en la muestra del IPC es calculada como:

$$\omega_i = \frac{VCF_i}{VCF_{IPC}}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \omega_i = &\quad \textit{Peso relativo de la i-ésima serie accionaria en la muestra del índice.} \\ VCF_i = &\quad \textit{Valor de capitalización flotado de la i-ésima serie accionaria.} \\ VCF_{IPC} = &\quad \textit{VCF del total de las series accionarias en la muestra del IPC.} \end{aligned}$$

Y con el propósito de que el índice represente lo mejor posible el comportamiento del mercado y al mismo tiempo mantenga una alta replicabilidad, los pesos relativos de las series accionarias dentro de la muestra tienen que satisfacer:

- $\sum_{i=1}^{35} \omega_i = 1$
- $\omega_i \leq 0.25$ para $i = 1, ..., 35$
- $\sum_{l=1}^{5} \omega_l \leq 0.6$ para $l = 1, ..., 5$ donde ω_l representa una de las 5 emisoras más grandes dentro de la muestra del IPC.

Los pesos son rebalanceados y revisados de manera trimestral durante los meses de diciembre, marzo y junio. Cada empresa participante es ponderada en función del valor de capitalización de mercado ajustado por acciones flotantes.

Una vez que las 35 emisoras son cuidadosamente seleccionadas y balanceadas, se tienen los suficientes componentes para realizar el cálculo del IPC. Por lo tanto, éste se calculará con la siguiente fórmula:

$$IPC_t = IPC_{t-1} \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^{35} P_{it} \cdot (Q_{it} \cdot FAF_i)}{\sum_{i=1}^{35} P_{it-1} \cdot (Q_{it-1} \cdot FAF_i) \cdot f_{it-1}} \right)$$

Donde:

[9] Las acciones flotantes son el resultado de la diferencia del total de acciones listadas en bolsa y las acciones con derechos.

$IPC_t =$ *Índice de Precios y Cotizaciones al día t.*
$P_{it} =$ *Precio de la i-ésima serie accionaria al día t.*
$Q_{it} =$ *Acciones inscritas en la bolsa de la i-ésima serie accionaria al día t.*
$FAF_i =$ *Factor de ajuste por acciones flotantes de la i-ésima serie accionaria.*
$f_{it} =$ *Factor de ajuste por exderechos de la i-ésima serie accionaria al día t.*

En este caso se define al factor de ajuste por exderechos como el cambio en el número de acciones inscritas a raíz de un evento corporativo: recompras, pago de dividendos, canje de títulos, fusiones, entre otros.

La base con la cual se calcula el IPC impuesto desde el 30 de octubre de 1978 es de .78[10].

[10]Se puede consultar la página de la Bolsa Mexicana de Valores a travéz del siguiente enlace: www.bmv.com

Capítulo 2

Modelos Matemáticos

En este capítulo se expondrán una serie de procesos y modelos matemáticos que adecuen el dinamismo de las acciones financieras; en otras palabras, se pretenderá asignar un precio en un intervalo de tiempo a los productos financieros a travéz de métodos aleatorios. Para lo anterior, se utilizarán incrementos estacionarios independientes llamados procesos de Lévy. Ejemplos de esto son los de Poisson y Wiener, ya que cada proceso de Lévy se puede ver como superposición de uno de Wiener y un número (posiblemente infinito) de procesos independientes de Poisson.

De esta manera, se realizará un breve recorrido por temas como probabilidad, teoría de la medida, procesos estocásticos (entre ellos, proceso de difusión y de Lévy). Las definiciones y características de este proceso, además de permitir modelar precios para las acciones, ayudarán a valuar productos financieros derivados.

2.1. Herramientas básicas

La probabilidad es una medida, que expresa la factibilidad de que un evento relativo a un experimento ocurra. Tal evento estará definido en un espacio medible $(\Omega, \Im)$, en el cual se pueden definir funciones $X : \Omega \to \mathbb{R}$ con la propiedad de ser medibles también. Estas funciones del espacio de probabilidad $(\Omega, \Im)$ son mejor conocidas como variables aleatorias (v. a.). Éstas tienen gran aplicación en la simulación de experimentos y ayudan a construir gran variedad de procesos. Las v. a. más importantes para la construcción de Lévy son:

i) Distribución normal con parámetros μ y σ^2 denotada como $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ para } -\infty < x < \infty$$

Además de ser una de las v. a. más utilizadas en la estadística y las finanzas, esta distribución tiene la propiedad de descomponerse en la suma de distribuciones independientes igualmente normales, como se demuestra en la siguiente proposición.

Proposición 2.1.1. *Si X_i, $i \in \{1, ..., n\}$ son variables aleatorias normales, independientes y con parámetros μ_i y σ_i^2, $i \in \{1, ..., n\}$ respectivamente, entonces $\sum_{i=1}^{n} X_i$ es normal con parámetros $\sum_{i=1}^{n} \mu_i$ y $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$.*

Demostración. Se realiza por el método de inducción matemática [10].

Por consiguiente, la v.a. X con distribución normal y parámetros (μ, σ^2) se puede expresar como $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ donde cada X_i tiene parámetros $(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma^2}{n})$. Esta peculiar propiedad se le conoce como infinitamente divisible y se abundará en ella en la sección 2.2.

ii) Distribución exponencial con parámetro λ denotado por $X \sim exp(\lambda)$:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En este caso se concluye lo mismo que en la anterior, ya que la suma de distribuciones exponenciales dan como resultado una distribución gamma.

iii) Distribución Poisson denotada por $X \sim Poisson(\lambda)$: Sea X una variable aleatoria discreta. Se dice que X se distribuye Poisson con parámetro $\lambda > 0$, si tiene la siguiente función de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} & \text{si } x \in \{0, 1, 2, ...\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{2.1}$$

En general, la distribución Poisson sirve para analizar eventos que ocurren aleatoriamente en el tiempo, suponiendo que es conocido el número de éxitos que en promedio ocurren en una unidad de tiempo λ. De manera que tiene más sentido modelar el precio de las acciones con esta distribución, sin embargo, no es suficiente y se deben construir procesos estocásticos para la propuesta anterior.

2.1.1. Construcción del proceso Poisson

El proceso Poisson se define como el número de ocurrencias de un evento hasta un momento menor o igual a t. El ejemplo más común usado para la aplicación de este proceso es el número de llamadas que recibe una empresa en un intervalo de tiempo. Para construir este proceso se utilizan $k_1, k_2 ... k_n$, variables aleatorias exponenciales con parámetro λ. Cada variable k_i representa el tiempo transcurrido en el cual sucedió un evento. Matemáticamente, la definición del proceso Poisson X_t se puede expresar de la siguiente forma:

$$X_t = max\{n \geq 1 | \xi_n = k_1 + k_2 + ... + k_n \leq t\}$$

Adicionalmente, este proceso inicia en 0 y por esta razón se define $\xi_0 = 0$ y $max\{\emptyset\} = 0$. Dado que las variables aleatorias k_i (o *tiempos de estancia*) son exponenciales, la variable ξ_n tendrá una distribución gamma(n,λ). Este hecho facilita encontrar una "fórmula explícita" para el proceso en cualquier tiempo t. Incluso, se determina en la proposición 2.1.2. que cada X_t tiene distribución Poisson con parámetro λt (razón por la que se le denomina Proceso Poisson), y en el caso de que el parámetro λ no cambie con el tiempo es llamado proceso Poisson homogéneo.

Proposición 2.1.2. *La variable X_t tiene distribución Poisson(λt), es decir, para cualquier $t > 0$, e $i \in \{1, .., n\}$*

$$\mathbb{P}[X_t = i] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!}.$$

Demostración. Dado que la distribución gamma es una generalización de la exponencial, se puede decir que ξ_n indicará el tiempo real en el que se observa la ocurrencia del r-ésimo evento desde $t = 0$ y su distribución viene determinada por:

$$F(\xi_n) = \mathbb{P}[\xi_n \leq t] = 1 - \mathbb{P}[\xi_n > t]$$

Se observa que para que $\mathbb{P}[\xi_n > t]$ se realice, deben ocurrir $n-1$ eventos en un tiempo $[0, t]$, por tanto, la probabilidad que suceda esto es:

$$\mathbb{P}[\xi_n > t] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}[N_t = i] = \sum_{i=0}^{n-1} e^{-t\lambda} \frac{(t\lambda)^i}{i!}$$

Donde N_t es el número de ocurrencias en el intervalo $[0, t]$. Por tal razón se sigue que:

$$F(\xi_n) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} e^{-t\lambda} \frac{(t\lambda)^i}{i!}$$

Por otra parte, al cumplirse la igualdad de eventos $(X_t \geq n) = (\xi_n \leq t)$ junto con el hecho de que ξ_n tiene una distribución $gamma(\lambda, n)$, se puede calcular la distribución del proceso Poisson de la siguiente manera;

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_t = n] &= \mathbb{P}[X_t \geq n] - \mathbb{P}[X_t \geq n+1] \\ &= \mathbb{P}[\xi_n \leq t] - \mathbb{P}[\xi_{n+1} \leq t] \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{n-1} e^{-t\lambda} \frac{(t\lambda)^i}{i!} - \left[1 - \sum_{i=0}^{n} e^{-t\lambda} \frac{(t\lambda)^i}{i!}\right] \\ &= e^{t\lambda} \tfrac{(t\lambda)^n}{n!}. \end{aligned}$$

A continuación se menciona otro de los grandes e importantes teoremas en materia de probabilidad, demostrado por Andréi Nikoláevich Kolmogórov en 1930, quien usó el concepto de convergencia casi segura[1]:

Teorema 2.1.1. *Ley Fuerte de los Grandes Números. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tal que, cada X_i tiene la misma esperanza μ.*

$$Si\ \mathbb{E}[X_i] = \mu < \infty \ entonces\ \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{c.s} \mu$$

2.1.2. Teoría de la medida para sigmas-álgebras

En la sección anterior se comenzó a usar la medida de probabilidad para mencionar las distribuciones más comunes, pero ésta no basta para los procesos con saltos que se construyen más adelante. Por tanto, se retoman las nociones de medida sobre sigmas-álgebras.

[1]Casi segura (c.s.) quiere decir que $\mathbb{P}(\underset{n \longrightarrow \infty}{Lim} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \mu) = 1$ i.e. un evento ocurre c.s. si se cumple en todo el dominio, excepto en un conjunto cuya medida de Lebesgue es cero.

Definición 2.1.1. *Sea X un conjunto no vacío fijo y* $\wp(X) = \{A : A \subset X\}$ *que denota la clase de todos los subconjuntos de X. Si S es una clase no vacía, tal que a* $S \subset \wp(X)$ *se le llama* σ*-álgebra de subconjuntos de X si cumple con lo siguiente:*

i) $X \in S$

ii) si $E \in S \Rightarrow E^c \in S$.

iii) Si (E_n) *es una sucesión de elementos de S, entonces* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in S$.

En el caso de que $X = \mathbb{R}$ tenga una topología usual, es decir, subconjuntos abiertos definidos en X y $S \subset \wp(\mathbb{R})$, la σ-álgebra generada por S es denominada σ-álgebra de Borel ($\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$) y los elementos pertenecientes a esta sigma álgebra son llamados boreleanos $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$. Finalmente, se define la σ-álgebra extendida como:

$$S(\mathbb{B}_{\mathbb{R}} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\})$$

Por consiguiente, se obtiene el par (X, S) llamado espacio medible, que será el lugar donde se establezca la posible evolución de precios accionarios. La definición general se describe a continuación.

Definición 2.1.2. *Un espacio medible es una pareja* (X, S)*en la que X es un conjunto no vacío y S es una* σ*-álgebra de subconjuntos de X.*

En el espacio medible vive una colección de mapeos llamados medidas. Una medida en (X, S) es un mapeo $\mu : S \longrightarrow [0, \infty]$ que se define de la siguiente forma:

Definición 2.1.3. *Sea* (X, S) *un espacio medible. Una medida en* (X, S) *es una función* $\mu : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ *con las siguientes propiedades:*

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) $\mu(E) \geq 0$, *para todo* $E \in S$

iii) μ *es* $\sigma-aditiva$*, es decir, si* (E_n) *es una sucesión de elementos disjuntos entre sí de* S*, entonces:*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Además, se dice que μ es finita si no toma valores extendidos $+\infty$, más aun, si se encuentra una sucesión $(E_n) \in S$, tal que $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ y $\mu(E_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces se dice que μ es $\sigma - finita$.

Definición 2.1.4. *Sea* (X, S, μ) *un espacio medible. Se le llama a* $N \in S$ *conjunto nulo o conjunto de medida 0 si* $\mu(N) = 0$.

Una definición que prosigue es el "casi donde quiera relativo a μ" (c.d rel. μ). Esto indica que μ es cierta para toda $x \in S - N$, donde N es un conjunto de medida 0.

La tripleta (X, S, μ) es llamada "espacio de medida" y como se habla de una colección de ellas, implica que se pueden definir un sinnúmero, mientras cumplan con las definiciones anteriores. Se empezará por determinar lo que es la medida aleatoria.

Definición 2.1.5. *Medida Aleatoria. Sea $E \subset \mathbb{R}^d$, $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ un conjunto de Borel y espacio $(E, \mathbb{B}_{\mathbb{R}})$. Es una medida μ, tal que para todo conjunto compacto medible $B \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$, $\mu(B) < \infty$.*

Una medida aleatoria es la de Lebegue en $\mathbb{R}$ (Boreleano). Se observa que la longitud de cualquier intervalo acotado es finito. Hasta el momento, el espacio de medidas que se ha definido es positivo, sin embargo, también es posible determinar medidas negativas,

Definición 2.1.6. *Medida con signo Sea (X, S) un espacio medible. Una medida con signo en (X, S) es una función $\mu : X \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$ con las siguientes propiedades:*

i) *μ puede tomar los valores ∞ o -∞*

ii) $\mu(\emptyset) = 0$

iii) *Para $E \in S$, μ es $\sigma - aditiva$, es decir, si (E_n) es una sucesión de elementos disjuntos entre sí de S, entonces:*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Sea un espacio de medida (X, S) y (μ_1, μ_2) medidas en (X, S). Si existe al menos una μ_i finita, entonces es una medida con signo en (X, S):

$$\mu = \mu_1 - \mu_2$$

A continuación, se enuncian las definiciones necesarias para citar uno de los teoremas más fundamentales en la valuación de instrumentos financieros derivados: Teorema de Radon Nikodym (derivada).

Definición 2.1.7. *Sean (X, S) un espacio medible. Una $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ función, se dice que f es $S-$ medible si:*

$$f^{-1}(\mathbb{B}_{\bar{\mathbb{R}}}) \subset S$$

Donde $\mathbb{B}_{\bar{\mathbb{R}}}$ es la σ-álgebra de Borel extendida. Y al conjunto de funciones reales $f : X \to \mathbb{R}$ que son $S - medibles$ se les refiere como:

$$\mathbb{M}(X, S)$$

Ahora, si se tiene un espacio de medida (X, S) y μ_1,μ_2 : $S \to \mathbb{R}$ dos medidas, se dice que μ_2 es absolutamente continua con respecto a μ_1 (denotado por $\mu_2 << \mu_1$), si $\mu_2(E) = 0$ siempre que $\mu_1(E) = 0$.

Teorema 2.1.2. *Derivada de Radon-Nikodym. Sean (X, S) un espacio medible, $\mu : S \to \bar{\mathbb{R}}$ una medida con signo σ-finita, tal que $\nu << \mu$. La única función (c.d rel. μ) $f \in \mathbb{M}(X, S)$ que satisface $\nu(E) = \displaystyle\int_E f d\mu$ para todo $E \in S$ es llamada la derivada de Rodon-Nikodym de ν con respecto a μ y se denota por $f = \frac{d\nu}{d\mu}[\mu]$, donde $[\mu]$ es la abreviación de (c.d. rel μ).*

Demostración. [12]

Definición 2.1.8. *Función Cadlag. Una función $f : [0, T] \longmapsto \mathbb{R}^d$ se dice ser cadlag si es continua por la derecha con límite por la izquierda y para cada $t \in [0, T]$ los límites*

$$f(t-) = \lim_{s \longmapsto t, s<t} f(s) \qquad\qquad f(t+) = \lim_{s \longmapsto t, s>t} f(s)$$

existen y $f(t) = f(t+)$

En el contexto financiero, el espacio de medida $(\Omega, \Im, \mathbb{P})$ tiene la siguiente interpretación: el Ω representa el conjunto de los diferentes escenarios que pueden ocurrir en el mercado. Al mismo tiempo, se equipa una σ-álgebra $\Im$, en donde se encuentra cada escenario $\omega \in \Omega$ que describe en términos de la evolución de precios los diferentes instrumentos. Este flujo de información es determinado al momento t y se revela conforme el tiempo pasa, o lo que es equivalente, dicha información se filtra al transcurrir el tiempo mediante una familia decreciente de σ-álgebras. En otras palabras, dada σ-álgebra $(\Im_t)_{t\in[0,T]}$: $\forall t \geq s \geq 0$, $\Im_s \subseteq \Im_t \subseteq \Im$, este concepto es usualmente conocido como "filtración". Finalmente, se especifica una medida de probabilidad $\mathbb{P}$ empleada para describir la incertidumbre de este dinamismo.

2.1.3. Movimiento browniano

Nacido como un fenómeno físico donde se observa un gran número de pequeños choques moleculares suspendidos en una sustancia donde realizan un movimiento irregular, el movimiento browniano observado por Robert Brown, en 1828, es uno de los proceso más importante al satisfacer la propiedad de Markov a tiempos y espacios continuos.

Al estudiar las condiciones en las cuales se desarrolla tal fenómeno, el matemático Norbert Wiener, en 1923, demostró la existencia de un proceso con las condiciones que presentaba el fenómeno. Por esta razón el modelo matemático que describe el movimiento browniano es llamado proceso de Wiener y se le denota generalmente por $\{W_t : t \geq 0\}$. Esto, a pesar de que el movimiento browniano se refiere al fenómeno físico y el proceso de Wiener al modelo matemático, es muy común usar ambos nombres para referirse a uno y otro.

Definición 2.1.9. *Movimiento browniano. El movimiento browniano unidimensional de parámetro* σ^2 *es un proceso estocástico continuo definido en un espacio de probabilidad* $(\Omega, \Im, \mathbb{P})$ *y* $\{W_t : t \geq 0\}$ *con valores en* $\mathbb{R}$*, si cumple con las siguientes propiedades:*

1. $W_0 = 0$ *c.s.*[2]

2. *Las trayectorias* $t \longmapsto W_t$ *son continuas.*

3. *El proceso tiene incrementos independientes. Dado* $W_{s+j} - W_s$ *la* σ*-álgebra generada por* W_j *es independiente de* $\Im_s$ *con* $j \leq s$*.*

3. *La variable* $W_t - W_s$ *tiene distribución* $N(0, \sigma^2(t-s))$ *bajo una medida-*$\mathbb{P}$ *para cualquier tiempo* $t \geq s \geq 0$*.*

Asimismo, se dice que este movimiento es estándar cuando $\sigma^2 = 1$. A través del cambio de variable $\tau = \sigma^2 t$, un movimiento browniano no estándar puede convertirse en uno estándar. Gracias a las propiedades anteriores, se tiene que para el movimiento browniano estándar cada variable aleatoria W_t tiene distribución $N(0,t)$, y por lo tanto $\mathbb{E}[W_t] = 0$ y $Var[W_t] = \mathbb{E}[W_t^2] = t$. En particular $\mathbb{E}[(W_t - W_s)^2] = t - s$, para $0 \leq s \leq t$. Adicionalmente, este movimiento cumple con las siguientes proposiciones:

Proposición 2.1.3. *El movimiento browniano es un proceso de Markov: Para cualesquier tiempo* $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n < t_{n+1}$ *y para cualquier evento* A *en* $\mathbb{R}$

$$\mathbb{P}[W_{t_{n+1}} \in A | W_{t_1} = x_1, ..., W_{t_n} = x_n] = \mathbb{P}[W_{t_{n+1}} \in A | W_{t_n} = x_n]$$

[2]Definición: Se dice que una propiedad del conjunto se cumple casi seguramente (c. s.) cuando el conjunto en donde no se cumple tiene medida-$\mathbb{P}$ cero.

Proposición 2.1.4. *El movimiento browniano es una martingala continua:*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W_t|\Im_s] &= \mathbb{E}[W_t - W_s + W_s|\Im_s] \\ &= W_s\end{aligned}$$

Louis Bachelier, conocido como el padre de las matemáticas financieras, fue el primero en describir el precio de las acciones financieras proponiendo el movimiento browniano, en 1900. Suponiendo que este valor es una expresión lineal del movimiento mencionado con deriva, llegó a asignar algunos precios a opciones cotizadas en Francia en aquella época y estableció comparaciones con el mercado real.

En el fondo, el proceso de Wiener es un caso particular de uno de Lévy. Este hecho se argumenta a continuación.

2.2. Procesos de Lévy

En esta sección, se describe el proceso de Lévy enfocado en las matemáticas financieras con el objetivo de modelar la evolución de un activo financiero mediante este proceso, además, de valuar opciones financieras. Lo anterior, sugiere citar importantes e interesantes teoremas como la descomposición de Lévy-Itô, el teorema de Lévy-Khinchin y cálculo estocástico para semimartingalas.

Definición 2.2.1. *Proceso de Lévy: Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico cadlag en un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, \mathbb{P})$ con valores en $\mathbb{R}^d$ tal que $X_0 = 0$, este es llamado Procesos de Lévy si posee las siguientes propiedades:*

- *Tiene incrementos independientes i. e. para toda secuencia creciente de tiempos $t_0 ... t_n$, las variables aleatorias $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son independientes.*
- *Sus incrementos son estacionarios i. e. si para un $h > 0$ con $h \in \mathbb{R}$ la variable $X_{t+h} - X_t$ solo depende del incremento h.*
- *Es estocásticamente continua i.e. $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{h\to 0} \mathbb{P}(| X_{t+h} - X_t | \geq \varepsilon) = 0$*

La propiedad de tener incrementos estacionarios implica que si se tiene un procesos de Lévy con intervalos de tiempo regulares 0, 1, 2Δ, 3Δ,..., tal que el incremento Δ es un número natural, se obtiene la caminata aleatoria definida por: $S_n(\Delta) = X_{n\Delta}$, o bien $S_n(\Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} Y_{k\Delta}$ donde $Y_k = X_{(k+1)\Delta} - X_{k\Delta}$ es una variable aleatoria i. i. d. con la misma distribución que X_Δ. Ya que el incremento Δ fue arbitrario, se obtiene toda una familia de caminatas aleatorias $S_n(\Delta)$ que corresponden simplemente a un proceso de Lévy con diferentes frecuencias.

Ahora bien, la propiedad de ser estocásticamente continua no implica de ninguna forma que las trayectorias de este proceso deben ser así. Un claro ejemplo de lo anterior es el proceso de Poisson, el cual es continuo a pedazos (Proposición 2.1.2), sin embargo, por sus propiedades lo incluyen como proceso de Lévy. Por otra parte, el movimiento browniano es continuo y se considera como un procesos de Lévy, por lo tanto, se concluye que los procesos de Lévy son aun más generales que el proceso Wiener.

Además de las propiedades anteriores, los procesos de Lévy pueden ser expresados como suma de variables aleatorias, ya que si $n\Delta = t$ para algún $t > 0$ y alguna $n \geqslant 1$, $X_t = S_n(\Delta)$, entonces se puede representar como una suma de n variables aleatorias i. i. d $X_{t/n}$. Por tanto, X_t puede ser "dividido" en n variables aleatorias i. i. d., propiedad "llamada infinitamente" divisible.

Definición 2.2.2. *Infinitamente Divisible. Una distribución de probabilidad F en $\mathbb{R}^d$ se dice que es infinitamente divisible, si para algún entero n tal que $n \geqslant 2$, existen n variables aleatorias i. i. d $Y_1, ... Y_n$ tal que $Y_1 + ... + Y_n$ tiene distribución F.*

El ejemplo más común y sencillo de la definición infinitamente divisible es la distribución Gaussiana, como se nota en la Proposición 2.1.1, ya que la suma de distribuciones normales es una distribución normal. Otros ejemplos son los casos de Gamma y Poisson.

Habría que preguntarse ahora, ¿toda distribución infinitamente divisible es un proceso de Lévy? La siguiente información ayuda a despejar dudas.

Proposición 2.2.1. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Lévy. Entonces, para toda t, X_t tiene una distribución infinitamente divisible. Inversamente, si F es una distribución infinitamente divisible, entonces existe un Proceso de Lévy X_t, tal que la distribución de X_1 está dada por F.*

Esto restringe las posibles de distribución que puede tener X_t, es decir, mientras que los incrementos en un tiempo discreto pueden tener una distribución arbitraria, la distribución de los incrementos de un proceso de Lévy tiene que ser infinitamente divisible.

Por último, es importante recordar que las funciones características medibles son definidas de la siguiente forma:

$$\phi_t(z) \equiv \phi_{X_t}(z) \equiv E[e^{izX_t}]$$

Al tomar en cuenta que los incrementos son independientes y la continuidad estocástica, se tiene que la función característica de un proceso de Lévy tiene la siguiente forma:

Proposición 2.2.2. *Función característica de un proceso de Lévy.*
Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un procesos de Lévy en $\mathbb{R}^d$. Existe una función continua $\psi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ llamada la característica exponencial de X, tal que:

$$\mathbb{E}[e^{izX_t}] = e^{t\psi(z)}, z \in \mathbb{R}^d$$

2.2.1. Procesos de Poisson compuesto

En busca de un modelo alternativo al Black-Scholes y una vez conocidos los procesos de Lévy, se pueden proponer procesos con saltos en los cuales se deja el supuesto de la continuidad en la trayectoria, pero conservando la dependencia y homogeneidad de los incrementos. Un modelo relativamente adecuado para plantear lo antes escrito, es un proceso de Lévy llamado Poisson compuesto.

Definición 2.2.3. *Proceso Poisson Compuesto. Un Proceso Poisson compuesto con intensidad $\lambda > 0$ y tamaños de saltos con distribución f es un proceso estocástico X_t, definido como:*

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

donde los tamaños de los saltos Y_i son variables aleatorias i. i. d. con distribución f y (N_t) es un proceso Poisson con intensidad λ, independiente de $(Y_i)_{i\geq 1}$

De este proceso se derivan las siguientes propiedades:

1. Las trayectorias de X_t son funciones constantes *cadlag* a trozos.
2. Los tiempos de salto $(T_i)_{i\geq 1}$ tienen la misma distribución que los tiempos de salto del Proceso Poisson N_t: Esto se puede expresar como la suma parcial de variables aleatorias, exponenciales e independientes con parámetro λ.

3. El que los tamaños de salto $(Y_i)_{i\geq 1}$ sean independientes e idénticamente distribuidos f, indica que el proceso Poisson en sí mismo puede verse como uno compuesto en $\mathbb{R}$, tal que $Y_i \equiv 1$. Por ello se le asigna el término "Poisson Compuesto".

4. Por último, otra propiedad importante es la de ser un proceso de Lévy, como se menciona al principio de esta sección, este modelo tiene todas las características necesarias para ser incluida en la familia Lévy y sus propiedades anteriores sugieren la siguiente proposición.

Proposición 2.2.3. $(X_t)_{t\geq 0}$ *es un proceso Poisson Compuesto solo si es un Proceso de Lévy y sus trayectorias son funciones constantes a trozos.*

Asimismo, como todo proceso estocástico, el proceso Poisson compuesto tiene su respectiva función característica.

Proposición 2.2.4. *Función característica de un proceso Poisson compuesto.*
Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ *un proceso Poisson Compuesto en* $\mathbb{R}^d$*. Su función característica está representada como:*

$$\mathbb{E}[e^{iuX_t}] = exp\left\{t\lambda \int_{\mathbb{R}^d} (e^{iux} - 1)\, f(dx)\right\}, \forall u \in \mathbb{R}^d,$$

Donde λ *denota la intensidad del salto y f la distribución del tamaño del salto.*

Ahora bien, el concepto de medida aleatoria puede describir el comportamiento de los saltos provenientes de un Proceso Poisson compuesto. Y es que a todo proceso *cadlag*, en particular el proceso Poisson compuesto $(X_t)_{t\geq 0}$ en $\mathbb{R}^d$, se le puede asociar una medida aleatoria en $\mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ que describa los saltos de X para todo conjunto medible $B \subset \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$, de la siguiente manera:

$$J_X(B) = \#\left\{(t, X_t - X_{t-}) \in B\right\}.$$

Donde X_{t-} es el valor justo antes de un salto, en otras palabras:

$$X_{t-} = \lim_{u\uparrow t} X_u$$

Por consiguiente, todo conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$, $J_X([t_1, t_2] \times A)$ cuenta el número de saltos de X entre t_1 y t_2 tal que los tamaños de los saltos pertenecen a A. Las medidas aleatorias asociadas a saltos provenientes de un proceso Poisson compuesto se denominan "medidas aleatorias Poisson".

Lema 2.2.1. *Sea* M *una medida aleatoria Poisson con intensidad* μ *y* A *un conjunto medible tal que* $0 < \mu(A) < \infty$*. Entonces las siguientes dos medidas aleatorias en un, subconjunto de* A*, tienen la misma distribución condicionadas en* $M(A)$*:*

- $M\,|_A$*, es la restricción de* M *a* A*.*
- $\widehat{M_A}$ *definido por* $\widehat{M_A(B)} = \#\left\{X_i \in B\right\}$ *para todo subconjunto medible* B *de* A*, donde* X_i*, con* $i = 1, ..., M(A)$ *son independientes y distribuidas en el conjunto* A *con forma* $\frac{\mu(dx)}{\mu(A)}$*. En otras palabras,* $\widehat{M_A}$ *es la medida que cuenta los puntos aleatorios independientes idénticamente distribuidos hasta* $M(A)$ *en* A*.*

En particular J_X es una medida aleatoria Poisson, como se indica en la siguiente proposición.

Proposición 2.2.5. *Medida de salto para un proceso Poisson compuesto. Sea* $(X_t)_{t\geq 0}$ *un proceso Poisson compuesto con intensidad* λ *y saltos con distribución f. La medida de salto* J_X *es una medida aleatoria Poisson en* $\mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ *con intensidad* μ *medida tal que* $\mu(dx \times dt) = \nu(dx)dt = \lambda f(dx)dt$*.*

Las medidas de salto tienen una interpretación alternativa si se considera la medida de Lévy como el promedio de saltos por unidad de tiempo. Más aún, se tiene que la medida de Lévy es mucho más general que las que utilizan las distribuciones con saltos, y se puede emplear para todos los procesos de Lévy.

Definición 2.2.4. *Medida de Lévy. Sea $(X_t)_{t\geqslant 0}$ un proceso de Lévy en $\mathbb{R}^d$. Se define la medida ν en $\mathbb{R}^d$ como:*

$$\nu(A) = E[\#\{t \in [0,1] : \Delta X_t \neq 0, \Delta X_t \in A\}], A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

Llamada como la medida de Lévy de X e interpretando a $\nu(A)$ como el número esperado, por unidad de tiempo, de los saltos con tamaño en A.

Finalmente, las medidas de salto tienen su versión exponencial, función imprescindible en la descripción de activos financieros con rendimientos no negativos.

Proposición 2.2.6. *Fórmula exponencial para medida aleatoria Poisson. Sea M una medida aleatoria Poisson con intensidad μ medida. Entonces aplica la siguiente fórmula para todo conjunto medible B, tal que $\mu(B) < \infty$ y para toda función f, tal que $\int_B e^{f(x)}\mu(dx) < \infty$:*

$$\mathbb{E}[exp\left\{\int_B f(x)M(dx)\right\}] = exp\left\{\int_B (e^{f(x)} - 1)\,\mu(dx)\right\}.$$

2.2.2. Descomposición de Lévy

Una vez conocidos los procesos de Lévy, las medidas con salto y sus peculiaridades, se puede citar la descomposición de Lévy-Itô como una de las más importantes e interesantes que tiene este proceso. La idea es descomponer al proceso de Lévy en términos de un proceso browniano bajo una combinación lineal. Sea un Movimiento browniano con deriva $\gamma_t + W_t$, independiente de X_t^0, sigue que la suma $X_t = X_t^0 + \gamma_t + W_t$ define un proceso de Lévy de la siguiente manera:

$$X_t = \gamma_t + W_t + \textstyle\sum_{s\in[0,t]} \Delta X_s = \gamma_t + W_t + \displaystyle\int_{[0,t]\times\mathbb{R}^d} xJ_X(ds \times dx)$$

Donde J_X es la medida aleatoria Poisson en $[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ con intensidad $\nu(dx)dt$. Sin embargo, la medida $\nu(A)$ es finita para algún compacto A, tal que $0 \notin A$. Si no se incluyera esta restricción, el proceso podría tener un número infinito de saltos de tamaño finito en $[0,T]$, contradiciendo la propiedad de ser cadlag. Por lo anterior, ν es definida en $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, no obstante, la medida ν no es necesariamente finita y en este caso la suma de los saltos se convierte en una serie infinita que converge cuando se imponen algunas condiciones a la medida ν, obtenidas directamente de la siguiente proposición:

Proposición 2.2.7. *Descomposición de Lévy-It$\hat{\mathbf{o}}$. Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Lévy en $\mathbb{R}^d$ y ν la medida de Lévy, donde:*

- *ν una medida aleatoria en $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ y que cumpla:*

$$\int_{|x|\leq 1} |x|^2\nu(dx) < \infty \qquad \int_{|x|\leq 1} \nu(dx) < \infty$$

- *La medida de salto de X, denotado por J_X, es una medida aleatoria Poisson en $[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ con intensidad $\nu(dx)dt$.*

- *Existe un vector γ y un movimiento browniano de dimensión d, $(B_t)_{t\geq 0}$, con matriz de covarianza A, tal que:*

$$X_t = \gamma_t + B_t + X_t^l + lim_{\varepsilon\downarrow 0}\tilde{X}_t^{\varepsilon},\ donde$$

$$X_t^l = \int_{|x|\leq 1, s\in[0,t]} xJ_X(ds\times dx)\ y$$

$$\tilde{X}_t^{\epsilon} = \int_{\epsilon\leq|x|\leq 1, s\in[0,t]} x\{J_X(ds\times dx) - \nu(dx)ds\}$$

$$\equiv \int_{\epsilon\leq|x|\leq 1, s\in[0,t]} x\tilde{J}_X(ds\times dx)$$

Los cuatro términos anteriores que componen a X_t son independientes y la convergencia en el último término es casi segura y uniforme en t para [0,T].

Se nota que la descomposición de Lévy-Itõ menciona tres parámetros para todo proceso de Lévy: un vector γ, una matriz A positiva y una medida positiva ν, que determina de manera única su distribución. El espacio (A,ν,γ) es llamado "la tripleta característica o tripleta de Lévy" del proceso X_t. Antes de la demostración, es prudente analizar el significado de cada uno de los términos que componen a $X_t = \gamma_t + B_t + X_t^l + lim_{\varepsilon\downarrow 0}\tilde{X}_t^{\varepsilon}$:

- El primer término $\gamma_t + B_t$ es un proceso de Lévy Gaussiano continuo, descrito por dos parámetros: la deriva ν y la matriz de covarianza del movimiento browniano, denotados por A.

- El segundo término X_t^l es un proceso discontinuo que incorpora los saltos de X_t y son descritos por la medida de Lévy ν. La condición $\int_{|y|\geq 1} \nu(dy) < \infty$ significa que X tiene un número finito de saltos mayor que 1 en valor absoluto, de esta forma la suma es:

$$X_t^l = \sum_{0\leq s\leq t}^{|\Delta X_s|} \Delta X_s$$

  Que contiene casi seguramente un número finito de términos, y X_t^l es un proceso Poisson compuesto.

- Al igual que el término anterior $\tilde{X}_t^l$ también es discontinuo e incorpora saltos a X_t descritos por la medida de Lévy ν. Se observa también que si X_t^l estuviera en el caso especial en que $\Delta X = 1$: para cualquier $\epsilon > 0$, la suma de saltos con amplitud entre ϵ y 1:

$$X_t^l = \sum_{0\leq s\leq t}^{1>|\Delta X_s|\geq\epsilon} \Delta X_s = \int_{\epsilon\leq|x|<1, s\in[0,t]} xJ_X(ds\times dx)$$

  Éste es de nuevo un proceso de Poisson compuesto bien definido. Sin embargo, contrariamente al caso del Poisson compuesto, ν puede tener una singularidad en cero: no puede haber una infinidad de pequeños saltos y su suma no converge necesariamente. Esto impide hacer ϵ tender a 0 directamente en la expresión anterior. Con el fin de obtener la convergencia se tiene que centrar el término, es decir, hacer una especie de compensación, restando $\nu(dx)ds$ a J_X. Por tanto, se debe reemplazar el salto integral por su versión compensada:

$$\tilde{X}_t^l = \int_{\epsilon \leq |x| < 1, s \in [o,t]} x \tilde{J}_X(ds \times dx)$$

que además es martingala.

Demostración: Para comenzar la prueba, se construye una medida aleatoria Poisson J_x en $[0,t] \times \mathbb{R}^d$ a partir de los saltos de X_t. Ya que X_t es *cadlag*, para algún $\epsilon > 0$, el conjunto $\{t : |X_t - X_{t-}| \geq \epsilon\}$ es finito y la medida aleatoria Poisson (para un conjunto cerrado que no contenga al 0) puede ser construido gracias a la proposición 2.2.5, en la medida del salto para un proceso Poisson compuesto. La intensidad de la medida para J_X es homogénea e igual para $\nu(dx)dt$. Asimismo, se supondrá, sin pérdida de generalidad, que todos los saltos de X_t son más pequeños que 1 en valor absoluto.

Para probar la independencia de los términos, deberá usarse el siguiente lema:

Lema 2.2.2. *Sea (X_t, Y_t) un proceso de Lévy. Si (Y_t) es Poisson compuesto y (X_t), (Y_t) nunca saltan en el mismo tiempo t, entonces X_t y Y_t son independientes*[3].

Para completar la prueba se considera un proceso $X_t^c = X_t - lim\tilde{X}_t^\epsilon$. El proceso X_t^c es de Lévy independiente de $lim\tilde{X}_t^\epsilon$ por el lema 2.2.2, además de ser continuo, puesto que $\tilde{X}_t^\epsilon$ converge uniformemente en t y se pueden intercambiar límites. Finalmente, el teorema del límite central de Feller-Lévy implica que el proceso anterior es Gaussiano.

Este resultado es muy importante dadas sus implicaciones tanto en la teoría como en la práctica. En él se asegura que todos los procesos de Lévy son una combinación de un movimiento browniano con deriva, además de contener una suma posiblemente infinita de procesos de Poisson compuesto independientes. Lo anterior señala que los procesos de Lévy son aproximados con precisión arbitraria mediante procesos de difusión con saltos. Este último punto es útil "tanto en la teoría como en la práctica" para describir movimientos aleatorios discontinuos.

2.2.3. Teorema de Lévy-Khinchin

Tras toda la estructura de los procesos de Lévy que se expuso anteriormente, se puede encontrar la expresión de su función característica en términos de su tripleta (A,ν,γ). El siguiente resultado dice que cualquier proceso de Lévy tiene una forma específica para su función característica. Este hallazgo se debe en gran medida a la descomposición antes vista.

Teorema 2.2.1. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Lévy en $\mathbb{R}^d$ con tripleta característica (A, ν, γ). Entonces*

$$E[e^{izX_t}] = e^{t\psi(z)}, z \in \mathbb{R}^d$$

$$\text{con } \psi(z) = -\tfrac{1}{2} zAz + i\gamma z + \int_{\mathbb{R}} (e^{izx} - 1 - izx1_{|x|\leq 1})\nu(dx). \qquad (2)$$

Para un proceso de Lévy con valores reales, la fórmula anterior toma la forma siguiente:

$$E[e^{izX_t}] = e^{t\psi(z)}, z \in \mathbb{R}$$

$$\text{con } \psi(z) = -\tfrac{1}{2} Az^2 + i\gamma z + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{izx} - 1 - izx1_{|x|\leq 1})\nu(dx).$$

Una versión equivalente de la representación de Lévy-Khinchin puede ser obtenida truncando los saltos más grandes que un número arbitrario ϵ:

[3] La demostración de este lema se puede consultar en: [12] Lemma 3.2.

$$\psi(z) = -\frac{1}{2}zAz + i\gamma^{\epsilon}z + \int_{\mathbb{R}^d}(e^{izx} - 1 - izx1_{|x|\leq\epsilon})\nu(dx),$$

$$\text{donde } \gamma^{\epsilon} = \gamma + \int_{\mathbb{R}^d} x(1_{|x|\leq\epsilon} - 1_{|x|\leq 1})\nu(dx).$$

Demostración: La descomposición de Lévy-Itô, nos muestra que para toda t, la variable aleatoria $X_t^c + X_t^l + X_t^{\epsilon}$ converge casi seguramente a X_t cuando ϵ tiende a 0. Por lo tanto, la convergencia casi segura implica convergencia en distribución, la función característica de $X_t^c + X_t^l + X_t^{\epsilon}$ converge a la función característica de X_t. Por tanto, X_t^c, X_t^l y X_t^{ϵ} son independientes:

$$E[exp\{iz(X_t^c + X_t^l + X_t^{\epsilon})\}] =$$
$$e\{-\frac{1}{2}tzAz + it\gamma z\} \times exp\{t\int_{|x|\geq 1}(e^{izx} - 1)\nu(dx)\}exp\{t\int_{\epsilon\leq|x|<1}(e^{izx} - 1 - izx)\nu(dx)\}$$

Esta expresión converge a *(2)*, para todo z, cuando ϵ tiende a 0.

Para resumir, se definió el proceso estocástico llamado proceso de Lévy, que incluye saltos como los de Poisson compuesto y los continuos de Weiner. Por lo anterior, la descomposición de Lévy-$It\hat{o}$ permite representar todo proceso de Lévy en un movimiento browniano, más sus respectivos saltos provenientes del Poisson compuestos. Finalmente, el teorema de Lévy-Khinchin encuentra la función característica de todo proceso de Lévy en función de su tripleta.

2.3. Cálculo estocástico

Con las propiedades del Proceso de Lévy antes mencionadas, se construirá el proceso estocástico $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$ que modele la evolución del precio subyacente de un derivado financiero. Lo anterior, siguiere hablar de dos modelos que relacionan a S_t: la estrategia de cobertura que involucra a S y la evolución en el tiempo del valor $V_t = f(t, S_t)$, el cual depende de S.

2.3.1. Estrategia de cobertura e integrales estocásticas

Para construir la estrategia de cobertura, se supondrá un portafolio dinámico al poder comprar y vender subyacente en el tiempo $(T_i)_{i\in 1,...,n+1}$, donde $T_0 = 0 < T_1 < ... < T_n < T_{n+1} = T$, conservando una cantidad de subyacente ϕ_i dentro de un periodo $(T_i, T_{i+1}]$. Entonces el capital resultante de la fluctuación del mercado está dado por:

$$\sum_{i=0}^{n}\phi_i(S_{T_{i+1}} - S_{T_i})$$

La expresión anterior es llamada la "integral estocástica" de ϕ respecto a S y se denota por $\displaystyle\int_0^T \phi_t dS_t$, representando el capital de un inversionista que sigue la estrategia ϕ. Al estar construido S_t a partir de un proceso de Lévy, las posiciones junto con las amplitudes de los saltos se describen por una medida aleatoria de Poisson, más aún, las diversas cantidades que implican los tiempos y tamaños de salto se pueden expresar como integrales con respecto a esta medida. De manera general, es posible considerar un número d de subyacentes con una cantidad $\phi = \phi^1, ..., \phi^d$ con su respectivo precio $S_t = (S_t^1, ..., S_t^d)$ en un mismo portafolio, con la propiedad de ser *cadlag*, y donde el valor del portafolio está dado por:

$$V_t(\phi) = \sum_{k=1}^{d} \phi^k S_t^k = \phi S_t.$$

Como se había mencionado, la estrategia de cobertura consiste en mantener una dinámica en el portafolio ϕ_t comprando y vendiendo activos en diferentes días. Cada transacción se realiza en el tiempo T_i, no obstante, entre dos transacciones en T_i y T_{i+1} el portafolio se mantiene sin cambios. Entonces la cantidad de instrumentos del portafolio ϕ_t, en la fecha t puede expresarse como:

$$\phi_t = \phi_0 1_{t=0} + \sum_{i=0}^{n} \phi_i 1_(T_i, T_{i+1}](t).$$

Los tiempos de transacción (T_i) pueden ser fijos, sin embargo, en la vida real un inversionista decide realizar transacciones antes de tiempo $t = T_i$ pero el portafolio sigue siendo descrito por ϕ_{i-1}. Lo correcto es que una vez hecha la transacción, el portafolio tome el nuevo valor ϕ_i después de la transacción, es decir, para $t > T_i$. Por lo tanto, los tiempos de transacción (T_i) deben definirse como aleatorios no anticipados (también llamados tiempos de paro): formando una partición aleatoria de $[0, T]$. Por ello es que la función indicadora que aparece en la fórmula anterior es de la forma $1_{(T_i,T_{i+1}]}$ (continua por la izquierda). A esta fórmula se le llama "proceso simple predecible":

Definición 2.3.1. *Proceso simple predecible. Un proceso estocástico $(\phi_t)_{[0,T]}$ es llamado simple predecible si puede ser representado como:*

$$\phi_t = \phi_0 + \sum_{i=0}^{n} \phi_i 1_{(T_i,T_{i+1}]}(t),$$

Donde $T_0 = 0 < T_1 < T_2 < ... < T_n < T_{n+1} = T$ son tiempos aleatorios no anticipados y cada ϕ_i es una variable aleatoria acotada la cual es revelada en T_i ($\Im_{T_i}$-medible).

Ahora, entre T_i y T_{i+1} la cantidad de instrumentos en el portafolio es ϕ_i y la dinámica del mercado será descrita como $(S_{T_{i+1}} - S_{T_i})$. Por eso el portafolio de cobertura viene dado por $\phi_i(S_{T_{i+1}} - S_{T_i})$. Si el inversionista comienza con ϕ_0 y sigue la estrategia ϕ, entonces acumulará al tiempo $t > 0$ un capital igual a:

$$G_t(\phi) = \phi_0 S_0 + \sum_{i=0}^{j-1} \phi_i (S_{T_{i+1}} - S_{T_i}) + \phi_j (S_t - S_{T_i}) \text{ para } T_j < t \leq T_{j+1}$$

Cuando se usa en el proceso estocástico $G_t(\phi)$ la notación del tiempo de paro, la fórmula puede ser reescrita y definida como la integral estocástica del proceso predecible ϕ con respecto a S, denotado por:

$$\int_0^t \phi_u dS_u := \phi_0 S_0 + \sum_{i=0}^{n} \phi_i (S_{T_{i+1}\wedge t} - S_{T_i \wedge t}) = \phi_0 S_0 + \sum_{i=0}^{j-1} \phi_i (S_{T_{i+1}} - S_{T_i}) + \phi_j (S_t - S_{T_i}).$$

Esto representa el capital acumulado entre 0 y t siguiendo la estrategia ϕ.

Por otra parte, si tenemos el portafolio $V_t(\phi) = \phi_t S_t$, entonces la diferencia es:

$$C_t(\phi) = V_t(\phi) - G_t(\phi) = \phi_t S_t - \int_0^t \phi_u dS_u$$

representa el costo de la estrategia ϕ hasta el momento t y $C_t(\phi)$ es llamado el costo del proceso asociado a la estrategia ϕ. Ahora, para que la estrategia sea autofinanciada, el costo debe ser igual a 0, entonces el valor del portafolio $V_t(\phi)$ es:

$$V_t(\phi) = \int_0^t \phi_u dS_u$$

Esto significa que lo único que cambia en el valor del portafolio es la cantidad de instrumentos financieros, pues todas las operaciones comerciales se financian con las ganancias de capital, reinvirtiéndose en el portafolio, sin añadir o retirar dinero de la cuenta. Es importante asegurar que está característica se cumpla para concluir que el valor $V_t(\phi)$ es correcto, al no contener oportunidades de arbitraje. De modo que ser un portafolio autofinanciado es considerado una restricción en el lema de Itô.

La integral del proceso $G_t(\phi)$ asociado a una estrategia tiene la siguiente propiedad:

Proposición 2.3.1. *Propiedad de la preservación Martingala. Si* $(S_t)_{t\in[0,T]}$ *es martingala, entonces para algún proceso predecible simple* ϕ*, la integral estocástica* $G_t = \displaystyle\int_0^t \phi dS$ *lo es también.*

Por lo tanto, se puede concluir que si el subyacente $(S_t)_{t\in[0,T]}$ es martingala, entonces el valor de cualquier estrategia autofinanciada $V_t(\phi) = G_t(\phi)$ también lo es. Otra propiedad que brinda más estabilidad al proceso, es la de ser una semimartingala:

Definición 2.3.2. *Semimartingala. Un proceso S cadlag no anticipado es llamado semimartingala, si la integral estocástica de un proceso simple predecible con respecto a S está definida de la siguiente manera:*

$$\phi = \phi_0 1_{t=0} + \sum_{i=0}^{n} \phi_i 1_{(T_i,T_{i+1}]} \mapsto \int_0^T \phi dS = \phi_0 S_0 + \sum_{i=0}^{n} \phi_i (S_{T_{i+1}} - S_{T_i})$$

y cumple con la siguiente propiedad de continuidad: para toda ϕ^n,$\phi \in \mathbb{S}([0,T])$ *si*

$$sup_{(t,w)\in[0,T]\times\Omega} |\phi_t^n(\omega) - \phi_t(\omega)|_{n\to\infty} \to 0 \ entonces \int_0^T \phi^n dS \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \int_0^T \phi dS.$$

Con lo anterior se ha construido un portafolio con subyacente modelado como proceso de Lévy, autofinanciado y con la propiedad martingala. Ahora, se tienen que desarrollar un poco más las integrales antes vistas para introducir más medidas.

2.3.2. Integrales estocásticas con respecto a una medida aleatoria Poisson

Retomando la medida Poisson en $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ con intensidad $\mu(dtdx)$ y la versión compensada de la medida aleatoria $(\tilde{M})$, como la forma centrada de la medida M: $\tilde{M}_t = M([0,t] \times A) - \mu([0,t] \times A)$, donde $A \subset \mathbb{R}^d$, $\mu([0,T] \times A) < \infty$ y $M_t(A) = M([0,t] \times A)$, se considera una función predecible similar a la anterior sección con $\phi : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$:

$$\phi(t,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \phi_{ij} 1_{(T_i,T_{i+1}]}(t) 1_{A_j}(y)$$

Donde $T_1 \leqslant T_2 \leqslant ... \leqslant T_n$ son tiempos aleatorios no anticipados, $(\phi_{ij})_{j=1...m}$ son variables aleatorias acotadas $\Im_{T_i} - medible$, y $(A_j)_{i=1...m}$ son subconjuntos disjuntos de $\mathbb{R}^d$ con $\mu([0,T] \times A_j) < \infty$. La integral estocástica $\displaystyle\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} \phi(t,y) M(dtdy)$ es entonces definida como la variable aleatoria:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \phi(t,y)M(dtdy) = \sum_{i,j=1}^{n,m} \phi_{i,j}M((T_i,T_{i+1}] \times A_j)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \phi_{i,j}[M_{T_{i+1}}(A_j) - M_{T_i}(A_j)]$$

De forma similar se puede definir el proceso $t \longmapsto \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \phi(t,y)M(dtdy)$ como:

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \phi(t,y)M(dtdy) = \sum_{i.j=1}^{n,m} \phi_{ij}[M_{T_{i+1}\wedge t}(A_j) - M_{T_i \wedge t}(A_j)].$$

Esta integral estocástica es un proceso cadlag no anticipado. Así, la integral compensada es definida como una variable aleatoria de la siguiente manera:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \phi(s,y)\tilde{M}(dsdy) = \sum_{i,j=1}^{n,m} \phi_{i,j}\tilde{M}((T_i,T_{i+1}] \times A_j)$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n,m} \phi_{i,j}[M((T_i,T_{i+1}] \times A_j) - \mu((T_i,T_{i+1} \times A_j]]$$

Si además a esta ecuación se le impone la restricción $T_i \leq t$, es decir, paramos en el tiempo t, se obtiene:

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \phi(s,y)\tilde{M}(dsdy) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i[\tilde{M}_{T_{i+1}\wedge t}(A_j) - \tilde{M}_{T_i\wedge t}(A_j)]$$

Al igual que la anterior definición, la noción de integral compensada es justificada por el resultado siguiente:

Proposición 2.3.2. *Para alguna función predecible $\phi : \omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, el proceso $(X_t)_{t\in[0,T]}$ definido por la integral compensada es:*

$$X_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \phi(s,y)\tilde{M}(dsdy)$$

Es una martingala con segundo momento finito que verifica la siguiente fórmula de isometría:

$$E[(X_t)^2] = E[\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (\phi(s,y))^2\mu(dsdy)]$$

Al Introducir las medidas Poisson en el portafolio de cobertura (o autofinanciado) que se construyó, se expusieron los resultados que se obtienen al compensar esta medida. En este sentido, es momento de citar la fórmula de Itô.

2.3.3. La Fórmula de Itô

Si se recuerda la famosa fórmula de Black-Scholes, las aportaciones que realizó Itô forman una parte importante para la valuación de opciones financieras. La idea de Itô es la siguiente:

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$g : [0,T] \to \mathbb{R}$ es función suave (C^1), entonces la fórmula del cambio de variable es:

$$f(g(t)) - f(g(0)) = \int_0^t f'(g(s))g'(s)ds = \int_0^t f'(g(s))dg(s)$$

Si se aplica lo anterior a la función $f(x) = x^2$ se obtiene:

$$g(t)^2 - g(0)^2 = 2\int_0^t g(s)dg(s)$$

Se puede asociar la fórmula de $It\hat{o}$ para integrales estocásticas Brownianas, ya que dada una función $f \in C^2$ y $X_t = \displaystyle\int_0^t \sigma_s dW_s$, entonces:

$$f(X_t) = f(0) + \int_0^t f'(X_s)\sigma_s dW_s + \int_0^t \frac{1}{2}\sigma_s^2 f''(X_s)ds$$

A continuación se aprecia la diferencia cuando el proceso de Weiner es reemplazado por uno con saltos.

2.3.4. Fórmula para procesos con saltos de variación finita

A continuación, se observa el comportamiento de la fórmula de Itô cuando son incluidos los saltos en el proceso.

Proposición 2.3.3. *La fórmula del cambio de variable para funciones suaves a trozos. Si x es una función a trozos C^1 dada por:*

$$x(t) = \int_0^t b(s) + \sum_{i=0...n+1, T_i \leq t} \Delta x_i$$

Donde $\Delta x_i = x(T_i) - x(T_i-)$, entonces para toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y C^1:

$$f(x(T)) - f(x(0)) = \int_0^T b(t)f'(x(t-))dt + \sum_{i=1}^{n+1} f(x(T_i-) + x\Delta x_i) - f(x(T_i-)).$$

Es preciso notar también que si $b = 0$ (x es constante a trozos), entonces el término de la integral es igual a cero y la fórmula es válida para funciones, sin requerir suavidad. Ahora, se considera un proceso de difusión con saltos:

$$X_t = \sigma W_t + \mu t + J_t = X^c(t) + J_t,$$

donde J es un proceso Poisson compuesto y X^c es la parte continua de X:

$$J_t = \sum_{i=1}^{N_t} \Delta X_i \qquad\qquad X_t^c = \mu t + \sigma W_t,$$

Hay que definir Y_t como $Y_t = f(X_t)$, donde $f \in C^2(\mathbb{R})$ y T_i para $i = 1, ..., N_t$ los tiempos de saltos de X. y ésta evoluciona en (T_i, T_{i+1}) de acuerdo con:

$$dX_t = dX_t^c = \sigma dW_t + \mu dt,$$

Entonces, aplicando la fórmula de $\text{It}\hat{o}$ en el caso browniano se obtiene:

$$\begin{aligned} Y_{T_{i+1}} - Y_{T_i} &= \int_{T_i}^{T_{i+1}-} \frac{\sigma^2}{2} f''(X_t)dt + \int_{T_i}^{T_{i+1}-} f'(X_t)dX_t \\ &= \int_{T_i}^{T_{i+1}-} \left\{ \frac{\sigma^2}{2} f''(X_t)dt + f'(X_t)dX_t^c \right\} \end{aligned}$$

con $dX_t = dX^c(t)$ es este intervalo. Si un tamaño de salto ΔX_t ocurre, entonces el cambio resultante en Y_t está dado por $f(X_{t-} + \Delta X_{-t}) - f(X_{t-}))$. El cambio total en Y_t puede ser escrito como la suma de estas dos contribuciones:

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s)dX_s^c + \int_0^t \frac{\sigma^2}{2} f''(X_s)ds + \sum_{0 \leq s \leq t, \Delta X_s \neq 0} [f(X_{s-} + \Delta X_s) - f(X_{s-})]. \quad (2.1)$$

Observación: Remplazando dX_s^c por $dX_s - \Delta X_s$ se obtiene la expresión equivalente:

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_{s-})dX_s + \int_0^t \frac{\sigma^2}{2} f''(X_s)ds + \sum_{0 \leq s \leq t, \Delta X_s \neq 0} [f(X_s + \Delta X_s) - f(X_s) - \Delta X_s f'(X_{s-})]. \quad (2.2)$$

Cuando el número de saltos es finito, 2.2 es equivalente a 2.1. Sin embargo, la forma 2.2 es más general y está bien definida para cualquier semimartingala, incluso si el número de saltos es infinito. Mientras que la suma de la ecuación 2.1 puede no converger si los saltos tienen variación infinita.

2.3.5. Fórmula de Itô para Procesos de Lévy

Ahora se estudia el caso general para el proceso de Lévy. Lo que impide la aplicación de los resultados anteriores directamente es que, en el caso de la variación infinita, se puede producir un número infinito de saltos en cada intervalo. En este caso, el número de términos de salto en la suma es:

$$\sum_{0 \leq s \leq t, \Delta X_s \neq 0} [f(X_{s-} + \Delta X_s) - f(X_{s-}) - \Delta X_s f'(X_{s-})]$$

En este caso se convierte en infinito y deben investigarse las condiciones bajo las cuales la serie converge. Además, los tiempos de salto forman un subconjunto denso de $[0, T]$.

Teniendo en mente lo anterior, se presentan dos formas para la fórmula de Itô donde se incluyen los saltos.

Proposición 2.3.4. *Fórmula de Itô para procesos de difusión con saltos: Sea X un proceso de difusión con saltos definido como la suma de término con deriva, una integral estocástica Browniana y un proceso Poisson compuesto de la siguiente forma:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s + \sum_{i=1}^{N_t} \Delta X_i$$

Con b_t y σ_t son procesos continuos no anticipados con:

$$E[\int_0^T \sigma_t^2 dt] < \infty$$

Entonces, para alguna función $C^{1,2}$ $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, el proceso $Y_t = f(t, X_t)$ puede ser expresado como:

$$f(t, X_t) - f(0, X_0) = \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) + \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) bs \right] ds + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) ds +$$
$$\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\sigma_s dW_s + \sum_{i \geq 1, T_i \leq t} [f(X_{T_i} + \Delta X_i) - f(X_{T_i -})].$$

Proposición 2.3.5. *Fórmula de Itô para el proceso escalar de Lévy. Sea* $(X_t)_{t\geq 0}$*un proceso de Lévy con tripleta* (σ^2, ν, γ)*, función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* C^2 *Entonces:*

$$f(X_t) = f(0)+\int_0^t \frac{\sigma^2}{2} f''(X_s)ds+\int_0^t f'(X_{s-}dX_s)+\sum_{0\leq s\leq t, \Delta X_s \neq 0} [f(X_s+\Delta X_s)-f(X_{s-})-\Delta X_s f'(X_{s-})].$$

2.4. Exponencial de un Proceso de Lévy

Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Lévy con medida de salto J_X. Aplicando la fórmula de Itô a $Y_t = e^{X_t}$ se tiene:

$$\begin{aligned} Y_t &= 1 + \int_0^t Y_{s-}dX_s + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t Y_{s-}ds + \sum_{0\leq s\leq t; \Delta X_s\neq 0} (e^{X_{s-}+\Delta X_s} - e^{X_{s-}} - \Delta X_s e^{X_{s-}}) \\ &= 1 + \int_0^t Y_{s-}dX_s + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t Y_{s-}ds + \int_{[0,t]\times\mathbb{R}} Y_{s-}(e^z - 1 - z)J_X(dsdz) \end{aligned}$$

Si se hace el supuesto adicional de que $\mathbb{E}[|Y_t|] = \mathbb{E}[e^{X_t}] < \infty$ y se considera la siguiente proposición:

Proposición 2.4.1. *Momentos exponenciales. Sea* $(X_t)_{t\geq 0}$ *un proceso de Lévy en* $\mathbb{R}$ *con tripleta* (A, ν, γ) *y sea* $u \in \mathbb{R}$*. El momento exponencial* $\mathbb{E}[e^{uX_t}]$ *es finito para algún* t *o para todo* $t > 0$*, si solo si* $\int_{|x|\geq 1} e^{ux}\nu(dx) < \infty$*. En este caso:*

$$\mathbb{E}[e^{uX_t}] = e^{t\psi(-iu)}.$$

Donde ψ *es definido como en el teorema 2.2.1.*

Entonces es equivalente decir que $\int_{|y|\geq 1} e^y \nu(dy) < \infty$, por lo que se puede descomponer a Y_t en su parte martingala y con deriva, donde la martingala es la suma de una integral respecto a un componente browniano de X y una suma de términos con saltos compensados:

Proposición 2.4.2. *Función exponencial de un proceso de Lévy. Sea* (X_t) *un proceso de Lévy con tripleta* (σ^2, ν, γ) *con la propiedad de que:*

$$\int_{|y|\geq 1} e^y \nu(dy) < \infty$$

Entonces, $Y_t = e^{X_t}$ *es una martingala con descomposición* $Y_t = M_t + A_t$*, donde la parte martingala es dada por:*

$$M_t = 1 + \int_0^t Y_{s-}\sigma dW_s + \int_{[0,t]\times\mathbb{R}} Y_{s-}(e^z - 1)\hat{J}_X(dsdz),$$

Y la variación continua finita de la parte deriva es dada por:

$$A_t = \int_0^t Y_{s-}\left[\gamma + \frac{\sigma^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} (e^z - 1 - z1_{|z|\leq 1})\nu(dz)\right].$$

Tal que (Y_t) *es una martingala si y solo si:*

$$\gamma + \tfrac{\sigma^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} (e^z - 1 - z1_{|z|\leq 1})\nu(dz) = 0$$

Otra forma exponencial es la siguiente:

Proposición 2.4.3. *La exponencial estocástica (exponencial Doléans-Dade). Sea (X_t) un proceso de Lévy con tripleta (σ^2, ν, γ). Existe un único proceso cadlag $(Z)_{t\geq 0}$, tal que:*

$$dZ_t = Z_{t-}dX_t \text{ con } Z_0 = 1$$

Z está dado por:

$$Z_t = e^{X_t - \frac{\sigma^2 t}{2}} \prod_{0\leq s\leq t} (1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s}.$$

Si $\int_{-1}^{1} |x|\nu(dx) < \infty$, entonces los saltos de X tienen variación finita y la exponencial estocástica de X puede expresarse como:

$$Z_t = e^{\sigma W_t + \gamma_0 t - \frac{\sigma^2 t}{2}} \prod_{0\leq s\leq t} (1+\Delta X_s) \text{ donde } \gamma_0 = \gamma - \textstyle\int_{-1}^{1} x\nu(dx).$$

Z es llamada la exponencial estocástica o exponencial Doléans-Dade de X y es denotada por $Z = \varepsilon(X)$.

Proposición 2.4.4. *Propiedad de la preservación martingala. Si $(X)_{t\geqslant 0}$ es un proceso de Lévy y una martingala, entonces la exponencial estocástica $Z = \varepsilon(X)$ es también una martingala.*

2.5. Cambio de medida para el proceso de Lévy

Para saber si la exponencial de Lévy es adecuada para un modelo financiero, hay que asegurarse de que no contiene oportunidades de arbitraje. Una propiedad que, por el teorema fundamental de la valoración de activos, está garantizada por la existencia de una medida martingala equivalente. En esta sección, se revisa el resultado de una sola dimensión. En el modelo de Black-Scholes, la medida martingala equivalente única podría obtenerse a través de cambiar la deriva del movimiento browniano. Esto es posible gracias a las implicaciones del siguiente teorema.

Teorema 2.5.1. *Teorema de Girsanov. Sea W_t un movimiento browniano $(\Omega, \Im, \mathbb{P})$ y $\mathbb{Q}$ una medida equivalente a $\mathbb{P}$. Se define $[\hat{W}_t, \Im_t]_{t\geq 0}$ como:*

$$\hat{W}_t := W_t + \int_0^t X(s)ds,\ 1 \leq i \leq m, t \geq 0.$$

Entonces para cada $T \in [0, \infty)$, el proceso $[\hat{W}_t, \Im_t]_{t\in[0,T]}$ es un movimiento browniano bajo $(\Omega, \Im, \mathbb{Q})$.

En los modelos con saltos, si el componente Gaussiano está ausente, esto ya no es posible, pero una variedad mucho mayor de medidas equivalentes se puede conseguir mediante la alteración de la distribución de los saltos. La siguiente proposición describe los posibles cambios de medida, en virtud del cual un proceso de Lévy sigue siendo un proceso de Lévy.

Proposición 2.5.1. *Sea $(X, \mathbb{P})$ un proceso de Lévy en $\mathbb{R}^d$ con tripleta (A, ν, γ); con $\eta \in \mathbb{R}^d$ y $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, con*

$$\int_{\mathbb{R}^d} (e^{\frac{\phi(x)}{2}} - 1)^2 \nu(dx) < \infty$$

Y se define como:

$$U_t := \eta X^c + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (e^{\phi(x)} - 1)\hat{J}_X(dsdx),$$

Donde X^c denota la parte martingala continua (movimiento browniano) de X y $\hat{J}_X$ es la medida de salto compensada de X.

Entonces, $\varepsilon(U)_t$ es una martingala positiva, tal que la medida de probabilidad $\mathbb{P}'$ definida por:

$$\frac{d\mathbb{P}'|_{\Im_t}}{d\mathbb{P}|_{\Im_t}} = \mathcal{E}(U)_t,$$

es equivalente a $\mathbb{P}$ y bajo $\mathbb{P}'$, X es un proceso de Lévy con tripleta (A, ν', γ'), donde $\nu' = e^{\phi}\nu$ y:

$$\gamma' = \gamma + \int_{|x|\leq 1} x(\nu' - \nu)(dx) + A\eta.$$

La medida martingala equivalente dentro del modelo de Black-Scholes es obtenida a partir de un cambio en la deriva. En caso de modelos con saltos se realiza algo análogo cambiando la distribución de los mismos. La transformación conveniente para obtener la medida martingala equivalente en estos modelos es proporcionada por la transformación de Esscher.

Sea X un proceso de Lévy en $\mathbb{R}^d$ con tripleta (A, ν, γ) y sea $\theta \in \mathbb{R}^d$, tal que $\int_{|x|>1} e^{\theta x}\nu(dx) < \infty$. Aplicando la medida de transformación de la proposición anterior con $\eta = \theta$ y $\phi(x) = \theta x$, se obtiene una probabilidad equivalente bajo la cual X es un proceso de Lévy con medida de Lévy $\hat{\nu}(dx) = e^{\theta x}\nu(dx)$ y el tercer componente de la tripleta $\hat{\gamma} = \gamma + A\theta + \int_{|x|\leq 1} x(e^{\theta x} - 1)\nu(dx)$. La derivada de Radon-Nikodym correspondiente a este cambio de medida es:

$$\frac{d\mathbb{P}'|_{\Im_t}}{d\mathbb{P}|_{\Im_t}} = \frac{e^{\theta X_t}}{\mathbb{E}[e^{\theta X_t}]} = e^{\theta X_t - \kappa(\theta)t}$$

Donde $\kappa(\theta) := ln\mathbb{E}[e^{\theta X_1}] = \psi(-i\theta)$.

Aunque las dos definiciones para el modelo exponencial de Lévy, exponencial ordinaria y exponencial estocástica, son equivalentes, el conjunto de procesos Lévy que conducen a modelos libres de arbitraje no coincide necesariamente. En una exponencial de Lévy, la ausencia de arbitraje consiste en encontrar la existencia de una probabilidad $\mathbb{Q}$ equivalente a una $\mathbb{P}$, tal que $\mathbb{E}[X]$ es $\mathbb{Q}$-martingala. En este caso, siempre es posible encontrar una medida de probabilidad $\mathbb{Q}$ en la que X sigue siendo un proceso Lévy, lo que significa que X en sí debe ser una $\mathbb{Q}$-martingala.

2.5.1. Modelo unidimensional.

A continuación, se explorarán los siguientes teoremas donde se puede argumentar la existencia de las probabilidades $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$, en el caso de una sola dimensión.

Teorema 2.5.2. *Ausencia de arbitraje en modelos basados en exponenciales estocásticas de una sola dimensión. Sea $(X, \mathbb{P})$proceso de Lévy con valor real en $[0, T]$ con tripleta (σ^2, ν, γ). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe una probabilidad $\mathbb{Q}$ equivalente a $\mathbb{P}$, tal que $(X, \mathbb{Q})$ es un proceso de Lévy y una martingala.*
2. *$X \equiv 0$ o $(X, \mathbb{P})$ no es casi seguramente monótona.*

3. *Una de las siguientes condiciones se satisface:*

   i) $\sigma > 0$

   ii) $\sigma = 0$ *y* $\displaystyle\int_{|x|\leq 1} |x|\nu(dx) = \infty$

   iii) $\sigma = 0$, $\displaystyle\int_{|x|\leq 1} |x|\nu(dx) < \infty$ *y* $-b \in ri(cc(supp\nu))$ *donde* $b = \gamma - \displaystyle\int_{|x|\leq 1} x\nu(dx)$ *es la deriva de* X.

La condición dos implica que si un modelo exponencial de Lévy admite arbitraje, esto puede realizarse comprando y manteniendo una estrategia, si X es creciente o corresponde a una venta en corto (si X es decreciente).
Es fácil ver que la condición iii) anterior es satisfecha si y solo si $\sigma = 0$, $\displaystyle\int_{|x|\leq 1} |x|\nu(dx) < \infty$, y una de las siguientes propiedades es cierta:

a) $\nu((-\infty, 0)) > 0$ y $\nu((0, \infty)) > 0$

b) $\nu((-\infty, 0)) > 0$ y $b > 0$

c) $\nu((0, \infty)) > 0$ y $b < 0$

d) El caso trivial de un proceso constante: $\nu = 0$ y $b = 0$

En otras palabras, cuando un proceso de Lévy con variación finita tiene saltos de un sólo lado, es libre de arbitraje si los saltos y la deriva del punto están en posición opuesta.

Corolario 2.5.1. *Ausencia de arbitraje basado en el modelo exponencial ordinario, caso unidimencional. Sea* $(X, \mathbb{P})$ *proceso de Lévy de valor real en* $[0, T]$ *con tripleta* $(\sigma^{\sigma^2}, \nu, \gamma)$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe una probabilidad* $\mathbb{Q}$ *equivalente a* $\mathbb{P}$, *tal que* $(X, \mathbb{Q})$ *es un proceso de Lévy y* e^X *es una martingala.*

2. *Cualquier* $X \equiv 0$ *o* $(X, \mathbb{P})$ *no es monótona casi seguramente.*

3. *Una de las siguientes condiciones se satisface:*

   i) $\sigma^2 > 0$

   ii) $\sigma = 0$ *y* $\displaystyle\int_{|x|} |x|\nu(dx) = \infty$

   iii) $\sigma = 0$ *y* $\displaystyle\int_{|x|\leq 1} |x|\nu(dx) < \infty$ *y* $-b \in ri(cc(supp\nu))$.

Capítulo 3

Índice accionario alternativo

Este capítulo está dedicado a construir un nuevo índice de precios y cotizaciones por medio de un método diferente al usado por la BMV, llamado análisis de componentes principales. Este método incluye variables correlacionadas que proporcionan la mejor información posible con el menor número de variables. Se realizará una descripción de este método, los pasos para calcular este nuevo índice y se analizará la información proporcionada. Finalmente, se creará un algoritmo para calcular el nuevo índice propuesto.

3.1. Análisis de Componentes Principales (ACP)

El método llamado análisis de componentes principales fue desarrollado por Hotelling en 1933, y es una técnica para analizar ciertas variables $X = (x_1, ..., x_n)$ correlacionadas en condiciones óptimas, realizándoles una transformación lineal para exponer la máxima información contenida en ellas. Se busca que la combinación lineal estandarizada original de las variables tengan la máxima varianza posible. La primera aplicación de esta técnica la realizó Karl Pearson en 1901.

Este método multivariado tiene como objetivo reducir un número n de variables a analizar. Lo anterior, se logra transformando las variables originales correlacionadas en nuevas no correlacionadas, facilitando la interpretación de los datos originales con una ligera pérdida de información. Se busca que la matriz de varianza-covarianza proveniente de los datos analizados, se reduzca a una matriz diagonal multiplicanda adecuadamente por dos matrices (una transpuesta de la otra).

Para realizar todo esto se expondrá una serie de cinco pasos que permita calcular los componentes principales de forma estructurada:

1. **Obtener los datos.** Un análisis de componentes principales tiene sentido si existen altas correlaciones entre las variables, ya que esto indica de que existe información redundante y por tanto, pocos factores explicarán gran parte de la variabilidad total. Adicionalmente, será de importancia descartar datos atípicos que puedan distorsionar la matriz de varianza-covarianza.

   Este análisis no requiere que los datos provengan de una distribución normal multivariada, aunque si esto se cumple, se puede dar una interpretación más profunda, puesto que si la correlación entre componentes es cero implica independencia; propiedad no necesariamente cierta para otras distribuciones.

2. **Calcular la media de nuestros datos.** Para que este método funcione correctamente, hay que restar la media estadística a cada uno de los datos originales. Esto produce una matriz cuya

media es cero. Hay que recordar que la media estadística viene determinada por la siguiente expresión:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

3. **Calcular la matriz de varianza- covarianza.** Como se mencionó anteriormente, este método tiene la finalidad de maximizar la matriz varianza-covarianza entre los datos, con el fin de discriminar elementos que no aportan información significativa. Así, la varianza y covarianza estadística tienen una importante participación, ya que para un conjunto de datos la varianza estadística es conocida como:

$$Var(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2}{n-1}$$

Asimismo, la covarianza estadística para una serie X e Y de datos está definida como:

$$Cov(X,Y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})(y_i-\overline{Y})}{n-1}$$

Si $X = Y$, se obtiene la matriz de covarianza-varianza:

$$\begin{pmatrix} Var(x_1) & Cov(x_1,x_2) & \cdots & Cov(x_1,x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Cov(x_n,x_1) & \cdots & \cdots & Var(x_n) \end{pmatrix}$$

Asumiendo entonces que se tienen n-observaciones con distribución idéntica, la matriz de covarianza desconocida puede ser estimada con la siguiente expresión:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})(x_i - \bar{X})'.$$

4. **Encontrar nuevas variables no correlacionadas que sean combinación lineal de las originales.** Las nuevas variables $\mathbf{z} = (z_1, z_2, ..., z_p)$, tendrán la forma:

$$z_1 = a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \tag{3.1}$$
$$... \tag{3.2}$$
$$z_i = a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n \tag{3.3}$$
$$... \tag{3.4}$$
$$z_p = a_{p,1}x_1 + \cdots + a_{p,n}x_n \tag{3.5}$$

Si los p componentes se introducen en un vector $\mathbf{z}$, estos pueden ser expresados como el producto de una matriz formada por los vectores propios A, multiplicada por el vector $\mathbf{x}$ que contiene las variables originales:

$$\mathbf{z{=}Ax} \tag{3.6}$$

Donde

$$\mathbf{z}{=} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_p \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{p,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{p,n} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$$

Para facilitar la notación de las operaciones con matrices que se realizarán más adelante, se reescribe la matriz A como:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \cdots, \mathbf{a_p}] \tag{3.7}$$

Donde

$$\mathbf{a_k} = \begin{bmatrix} a_{k,1} \\ \vdots \\ a_{k,n} \end{bmatrix}$$

Un vez definido lo anterior, se busca que la varianza de $\mathbf{z}$ sea máxima y su covarianza, cero.

Para maximizar la varianza del vector $\mathbf{z}$ se aplica el método de Lagrange, con el que se obtienen los vectores propios derivados de la matriz de varianza-covarianza.

Los vectores propios son aquellos que al multiplicarlos por otro vector compatible, sólo cambian su magnitud y no su dirección, como se observa en la siguiente ecuación:

$$\mathbf{SA} = \lambda\mathbf{A} \tag{3.8}$$

Donde λ es un escalar, denominado valor propio, y $\mathbf{a}$ es el vector propio referente a la matriz $\mathbf{S}$.

Los vectores y valores propios están estrechamente relacionados con el teorema de descomposición espectral, que es un importante resultado del Análisis de Componentes Principales (ACP). Este teorema indica que cierta matriz simétrica $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ puede ser expresada como:

$$\mathbf{M} = \Delta U \Delta'$$

Donde $\mathbf{U} = diag(\lambda_1, ..., \lambda_d)$ es la matriz diagonal de valores propios de $\mathbf{M}$, tal que, $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_d$. En tanto Δ es la matriz ortogonal satisfaciendo $\Delta\Delta' = \Delta'\Delta = I_d$, quienes son las columnas estandarizadas de los vectores propios de $\mathbf{M}$ con longitud 1.

En el caso de los componentes principales, se deben encontrar los valores y vectores propios provenientes de la matriz de varianza-covarianza $\mathbf{S}$ simétrica $p \times p$, tal que, pueda ser reducida a una matriz diagonal $\mathbf{\Lambda}$ por una matriz ortonormal $\mathbf{A}$ de la siguiente forma:

$$var(\mathbf{z}) = \mathbf{A}'\mathbf{SA} = \mathbf{\Lambda}$$

Los elementos diagonales de la matriz $\mathbf{L}$ son llamados valores propios o raíces características y las columnas de $\mathbf{A}$ son llamadas vectores propios de $\mathbf{S}$.

Las raíces características (o valores propios) λ_i, junto con los valores de la matriz A, $a_{i,j}$ para $i = \{1, 2, \cdots, n\}$ y $j = \{1, 2, \cdots, p\}$, tal que $n \geq p$ son obtenidos planteando la siguiente ecuación:

$$(\mathbf{S} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{A} = 0 \tag{3.9}$$

Ya que una solución trivial implica que $\mathbf{A}$ sea una matriz nula, se plantea lo siguiente:

$$\mid \mathbf{S} - \lambda\mathbf{I} \mid = 0 \tag{3.10}$$

Esta expresión se llama "ecuación característica".

Obtenido el valor propio λ_i que maximiza la varianza del vector $\mathbf{z}$, mediante un sistema de ecuaciones derivado a partir de 3.9, se calculan los coeficientes a_p.

5. **Escoger los componentes y el vector característicos, derivado del nuevo conjunto de datos.** Una vez obtenida las correlaciones, se decide qué tanta información se está dispuesto a perder con la finalidad de reducir el espacio de datos originales.

Una vez descrito el aspecto general de los pasos para obtener los componentes principales, se procede al detalle del primer componente.

3.1.1. Primer componente principal

Se considera un vector $\mathbf{X}$ con n variables $\mathbf{X}$=$(x_1, x_2, ..., x_n)$ adecuadas a este análisis, de tal forma que el primer componente principal será la combinación lineal de las variables originales x_n, que tenga varianza máxima. Los valores de este primer componente en los n individuos se representarán por un vector $\mathbf{z_1}$, dado por:

$$\mathbf{z_1} = \mathbf{a_1'X} = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{1,2} \\ \vdots \\ a_{1,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

El segundo paso indica calcular la media estadística de los datos y restar a cada una de las variables. De esta forma se considera que las nuevas variables calculadas tienen media cero y por ende el vector $\mathbf{z_1}$. El tercer paso es resultado de la estimación de la varianza, como:

$$Var(\mathbf{z_1}) = \mathbf{a_1'Sa_1}$$

Donde $\mathbf{S}$ es la matriz de varianza-covarianza de las observaciones.

Asimismo, se deberá maximizar la anterior expresión. Esto se puede efectuar mediante el aumento sin límite del módulo o longitud del vector $\mathbf{a_1}$. Sin embargo, para que la maximización tenga solución se debe imponer la siguiente restricción: $\mathbf{a_1'a_1}$=1 al módulo del vector. De esta forma, al conjuntar lo anterior con el multiplicador de Lagrange se plantea la siguiente ecuación:

$$M = \mathbf{a_1'Sa_1} - \lambda(\mathbf{a_1'a_1} - \mathbf{1}) \tag{3.12}$$

De modo que esta expresión se puede maximizar de forma habitual, derivando a M con respecto a $\mathbf{a_1}$ e igualando a cero:

$$\frac{\partial M}{\partial \mathbf{a_1}} = 2Sa_1 - 2\lambda a_1 = 0 \tag{3.13}$$

Cuya solución es:

$$\mathbf{S}a_1 = \lambda a_1 \tag{3.14}$$

Con esta ecuación se procede al cuarto paso, al observar que $\mathbf{a_1}$ es un vector propio de la matriz $\mathbf{S}$ y λ su valor propio. Para encontrar este último valor simplemente se multiplica por la izquierda $\mathbf{a_1'}$:

$$\mathbf{a_1'Sa_1} = \lambda\mathbf{a_1'a_1} = \lambda \tag{3.15}$$

Se concluye que λ es la varianza de $\mathbf{z_1}$.

Dado que λ es la cantidad a maximizar, será el mayor valor propio de la matriz $\mathbf{S}$. Éste se obtiene igualando la ecuación 3.7 a cero y reescribiéndola así:

$$(S - \lambda)a_1 = 0 \tag{3.16}$$

Suponiendo que a_1 no es nulo, se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$|S - \lambda| = 0 \tag{3.17}$$

Una vez conocido λ, se resuelve la ecuación 3.9. En el vector asociado $\mathbf{a_1}$ se encuentran los coeficientes de cada variable para el primer componente principal.

3.1.2. Componente principal i-ésimo

A partir del cálculo del primer componente principal, se puede generalizar los pasos anteriores para obtener los demás. De este modo, la ecuación 3.4 se puede sintetizar como:

$$M = \mathbf{a_1'Sa_1} + \mathbf{a_2'Sa_2} + ... + \mathbf{a_i'Sa_i} - \lambda_1(\mathbf{a_1'a_1} - \mathbf{1}) - \lambda_\mathbf{2}(\mathbf{a_2'a_2} - \mathbf{1})... - \lambda_\mathbf{i}(\mathbf{a_i'a_i} - \mathbf{1}) - \delta\mathbf{a_i'a_{i-1}} \tag{3.18}$$

Tal que $Var(z_i) = \mathbf{a_i'Sa_i} = \lambda_i$ y con las condiciones $a_i a_i' = 1$ y $a_i' a_j = a_j' a_i = 0$ con $i \neq j$. Adicionalmente se requiere que la covarianza entre componentes sea cero:

$$Cov(z_i, z_j) = \mathbf{a_i'Sa_j} = \mathbf{a_i'}\lambda_\mathbf{i}\mathbf{a_j} = \lambda_\mathbf{i}\mathbf{a_i'a_j} = \lambda_\mathbf{i}\mathbf{a_i a_j'} = \mathbf{0} \tag{3.19}$$

Por consecuencia se obtendrán i derivadas parciales:

$$\frac{\partial M}{\partial \mathbf{a_1}} = 2Sa_1 - 2\lambda_1 a_1 = 0 \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial M}{\partial \mathbf{a_2}} = 2Sa_2 - 2\lambda_2 a_2 = 0 \tag{3.21}$$

$$... \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial M}{\partial \mathbf{a_i}} = 2Sa_i - 2\lambda_i a_i = 0 \tag{3.23}$$

Al considerar todo en conjunto, es posible demostrar que el espacio de dimensión n "que mejor representa a las variables a estudiar" está determinado por los vectores propios asociados a los n mayores autovalores de $\mathbf{S}$. Los vectores anteriores se denominan direcciones principales y las nuevas variables definidas por ellas, "componentes principales". En general, las matrices $\mathbf{X}$ y $\mathbf{S}$ tiene rango p, por tanto, existen tantas componentes principales como el rango de la matriz de varianzas-covarianzas. Por lo anterior, los valores propios o raíces características $(\lambda_1, ..., \lambda_p)$ pueden ser calculadas mediante el determinante:

$$| S - \lambda_i I | = 0$$

Con sus vectores a_i asociados y estimados como un sistema de ecuaciones planteado por:

$$(S - \lambda_i I)\mathbf{a_i} = \mathbf{0} \tag{3.24}$$

Las raíces λ_i son reales y positivas, dado que, la matriz $\mathbf{S}$ es simétrica y definida como positiva. Incluso, el hecho de que $\mathbf{S}$ sea simétrica implica que si λ_j y λ_h son dos raíces distintas, entonces sus vectores asociados son ortogonales, es decir, si $\lambda_j \neq \lambda_i$ entonces $a_i' a_j = a_j' a_i$=0. De igual manera el i-ésimo tiene la forma $z_i = \mathbf{a_i'X}$=$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ para $i = 1, ..., p$. Al final del análisis, si con la restricción $A'A = I$ algún valor propio λ_i es igual, los correspondientes vectores propios a_i y z_i no son únicos. Ahora bien, la varianza cumple la siguiente característica:

$\sum_{i=1}^{k} Var(z_i) = tr(S) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \sum Var(z_i)$ donde $tr(\mathbf{S})$ es la traza de la matriz $\mathbf{S}$.

Este resultado indica que:

$$\frac{Var(z_i)}{\sum_{i=1}^{k} Var(z_i)} = \frac{\lambda_i}{\lambda_1+...+\lambda_k}$$

En el caso de que **S** fuese semidefinida positiva y de rango $p < n$, lo que ocurriría si $n - p$ variables fuesen combinación lineal de las demás, habría solamente p raíces características positivas, haciendo el resto ceros. En resumen, el primer componente principal de la muestra es una combinación lineal $z_1 = a_1'X$ que maximiza la varianza de z_1, restringido por la condición $a_1'a_1 = 1$. El i-ésimo componente principal de la muestra, similar a lo anterior, es una combinación lineal $z_i = a_i'X$ que maximiza la varianza de z, restringido a $a_i'a_i = 1$ y $Cov(z_i, z_j) = 0$ para $j = 1, ..., i-1$. Por lo tanto, calcular los componentes principales equivale a aplicar una transformación ortogonal a las variables X (ejes originales), con la finalidad de obtener unas nuevas variables Z que sean incorreladas entre sí.

3.2. Nuevo Índice Accionario

El análisis de componentes principales tienen diversas aplicaciones en las finanzas y la economía. Esto puede ser empleado para interpretar grupos de variables macroeconómicas. Otra aplicación es la creación de portafolios que tratan de replicar el rendimiento de un determinado índice, reduciendo el número de emisoras redundantes que compone el mismo. Esta idea es de gran ayuda para la sección, en la cual se construye un nuevo índice accionario semejante al IPC. A continuación, se obtendrán los componentes principales de los log-rendimientos y se formulará un nuevo cálculo para el índice alternativo.

3.2.1. Análisis de datos

1. Recolección de datos.
   Las variables cosechadas para este trabajo fueron los precios de cierre, con periodicidad diaria de cada una de las emisoras que conforman el IPC[1]. El tiempo de recolección fue del 16/12/2015 al 19/02/2016. Una vez obtenido el histórico de precios de cada emisora, se calculan los log-rendimientos definidos por:

   $$r_t^i = log(\frac{P_t^i}{P_{t-1}^i})$$

   Donde, r_t^i es el log-rendimiento y P_t^i es el precio de cierre de la emisora i al tiempo t. El análisis de componentes principales será aplicado a estos rendimientos. La razón para realizar el análisis con log-rendimientos, es tratar de encontrar emisoras fuertemente inducidas por otras. De modo que la información que proveen tales emisoras sea despreciable para construir un indicador.

2. Estandarizar los datos.
   Para realizar el análisis y mejorar la proporción de los datos, es necesario restar la media poblacional respectiva a cada emisora.

3. Matriz de varianza-covarianza.
   Como se indica en la sección anterior, del ACP se necesita construir, con la varianza y covarianza poblacional, la matriz de varianzas-covarianzas. En el anexo B.2 se pueden encontrar las primeras seis filas de esta matriz, donde se aprecia que la mayor parte de sus entradas son positivas, es decir, existe una relación directa entre emisoras. Una de las que presenta covarianzas más grandes

[1]Cuadro B.1, Apéndice B.

que a las demás, es ICA.

Igualmente, en el anexo B.3 se presentan las primeras seis filas de la matriz de correlaciones. En ella resalta ALFA, por tener las más altas correlaciones con respecto a siete emisoras. Otras que destacan son: LIVERPOOL, ASUR y LALA, las cuales, junto con ALFA, son mostradas en el siguiente cuadro.

Cuadro 3.1: Emisoras altamente correlacionadas

Emisoras Correlacionadas		Coeficiente de Correlación
ALFA	GCARSO	.669
ALFA	GFNORTE	.671
ALFA	MEXCHEM	.556
ALFA	PINFRA	.534
ALFA	GENTERA	.526
ALFA	GMEXICO	.501
ALFA	ALSEA	.492
LIVERPOOL	ALSEA	.488
ASUR	KOF	.477
LALA	BIMBO	.451
ASUR	ALFAO	.430

Los coeficientes presentados brindan sentido para aplicar el ACP con log-rendimientos, dado que este tipo de análisis funciona mejor cuando los datos presentan mayor correlación.

4. Calcular los vectores propios referentes a la matriz de covarianza-varianza.
Dado que se tomaron el mismo número de emisoras para este análisis, se tendrá que calcular 37 valores propios para cada componente principal; tarea nada fácil por el gran volumen de datos. Por fortuna, existe una librería llamada *Rcmdr* dentro del compilador *R-Project*, que a su vez tiene un comando denominado *prcomp()*. Éste calcula automáticamente todos los componentes principales. Al aplicar lo anterior en los log-rendimientos estandarizados, se obtienen los números mostrados en el Anexo B.4. Además con el comando *summary()* se puede saber qué desviación estándar explica cada componente, al mostrar una salida de la siguiente forma:

```
Importance of components:
                          PC1     PC2     PC3     PC4     PC5     PC6     PC7
Standard deviation     0.1144 0.05633 0.03298 0.02949 0.02714 0.02545 0.02486
Proportion of Variance 0.5264 0.12753 0.04371 0.03495 0.02960 0.02604 0.02484
Cumulative Proportion  0.5264 0.65392 0.69763 0.73258 0.76217 0.78821 0.81305
                           PC8     PC9    PC10    PC11    PC12    PC13    PC14
Standard deviation     0.02195 0.02136 0.02010 0.01897 0.01861 0.01729 0.01689
Proportion of Variance 0.01936 0.01835 0.01623 0.01446 0.01392 0.01201 0.01147
Cumulative Proportion  0.83241 0.85075 0.86698 0.88144 0.89536 0.90737 0.91884
                          PC15    PC16    PC17    PC18    PC19    PC20    PC21
Standard deviation     0.01623 0.01456 0.01412 0.01328 0.01238 0.01193 0.01127
Proportion of Variance 0.01059 0.00853 0.00801 0.00709 0.00616 0.00572 0.00511
Cumulative Proportion  0.92943 0.93796 0.94597 0.95305 0.95922 0.96494 0.97005
                         PC22    PC23     PC24    PC25   PC26    PC27   PC28
Standard deviation     0.01096 0.00997 0.00988 0.00868 0.00802 0.00756 0.00719
```

```
Proportion of Variance 0.00483 0.00399 0.00392 0.00303 0.00259 0.00230 0.00208
Cumulative Proportion  0.97488 0.97887 0.98279 0.98582 0.98841 0.99070 0.99278
                           PC29     PC30     PC31     PC32     PC33     PC34
Standard deviation     0.006862 0.005845 0.005279 0.004989 0.004509 0.003186
Proportion of Variance 0.001890 0.001370 0.001120 0.001000 0.000820 0.000410
Cumulative Proportion  0.994680 0.996050 0.997170 0.998170 0.998990 0.999400
                           PC35     PC36     PC37
Standard deviation     0.002738 0.002108 0.001759
Proportion of Variance 0.000300 0.000180 0.000120
Cumulative Proportion  0.999700 0.999880 1.000000
```

Así, se nota que el primer componente principal aporta 52.64 %, mientras que el segundo el 12.75 % de la varianza total. Ésta decrece conforme los componentes aumentan, de modo que los primeros valores son los más explicativos.

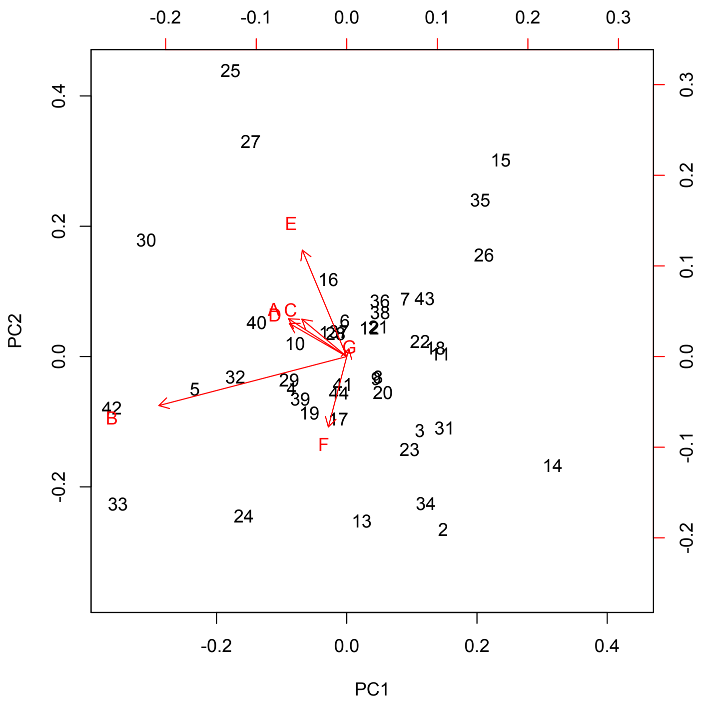

Figura 3.1: Vectores de componentes principales.

En la figura anterior se encuentra el *biplot()*, que es otra forma de representar los componentes principales y apreciar las variables en función de la componentes 1 y 2. La figura contempla un ACP con las emisoras[2] ALFA (A), CEMEX (B), PE&OLES (C), GFNORTE (D), ICA (E), LACOMER (F) y WALMEX (G). En este caso resalta el vector de ICA con respecto al de LACOMER, al formar un ángulo obtuso que indica una correlación pequeña. Por su parte, ALFA, PE&OLES y GFNORTE presentan ángulos pequeños entre sí, lo que significa mayor correlación. Por tanto, se puede decir preliminarmente que las emisoras ICA y LACOMER darán un aporte sustancial al nuevo índice.

[2]La selección de las mismas se realizó previo al análisis completo.

5. Selección de componentes principales.
   Dado que el primer componente principal ($\mathbf{z}_1$) expresa la mayor variabilidad de los datos (52.6 %) sólo se utilizará éste para determinar las emisoras y los pesos que constituirán el nuevo índice.

3.2.2. Construcción del Índice

Una vez obtenido el primer componente principal, lo que procede es conformar un portafolio con las emisoras más relevantes. Cabe recordar que los componente principales son una combinación lineal de las emisoras o suma ponderada. La ponderación viene determinada por los valores propios $\mathbf{a}_1 = (a_1, ..., a_{37})$, los cuales indicarán si la emisora tiene información relevante para el portafolio.

Para determinar las emisoras que conformaran el portafolio se deben identificar las ponderaciones que brinda sólo el primer componente principal. Esto se realiza separando los valores propios (a_i) por su signo. El hecho de dividir los valores propios sirve para encontrar la proporción que cada emisora aporta a su respectivo signo. Al ordenar cada uno de mayor a menor, se calcula la proporción o peso (w_i) del grupo positivo de valores propios, como:

$$w_i^+ = \frac{a_i}{\sum_{i=1}^{j} a_i} \tag{3.25}$$

Tal que $a_i \geq 0$. De la misma forma, los pesos de los valores negativos se calculan como:

$$w_i^- = \frac{\mid a_i \mid}{\sum_{i=1}^{k} \mid a_i \mid} \tag{3.26}$$

Tal que $a_i \leq 0$. Donde, j es el número de valores propios con signo positivo, k con signo negativo y $N = j + k$, el número total de valores propios que tiene el primer componente principal. En el Anexo B, sección B.5, se encuentran los valores propios del primer componente principal, dividido en dos grupos (negativo y positivo), con valor absoluto, ordenado y con sus respectivos pesos.

Antes de seguir con la metodología es necesario aclarar que tanto la selección como la asignación de pesos para conformar un portafolio, no tiene un criterio específico. Esto puede depender de los administradores de portafolio y de lo que se quiera describir con el índice. Las percepciones e interpretaciones de cada inversionista pueden ser un poco ambiguas, ya que están sujetas a intereses y metas por alcanzar.
De hecho, existen varias metodologías para la construcción de portafolios, y en este trabajo se tomará parte de los *Index Tracking*[3].

Dicho lo anterior, el criterio para seleccionar las emisoras será tomar el número mínimo de w_i^+, que al menos acumulen un 70 %, contando siempre desde el peso mayor al menor, sin saltarse emisoras. Es decir, seleccionar el $min\{m : m < j\}$ tal que:

$$\sum_{i=1}^{m} wi^+ \geq 70\,\% \tag{3.27}$$

Esto debe hacerse de la misa manera para el grupo w_i^-. En este caso, los pesos de las emisoras que cumplen con la anterior condición en cada grupo se muestran en el cuadro 3.2.

[3] Metodología que se emplea para construir portafolios. Methods for Solving Problems in Financial Portafolio Construction, Index Tracking and Enhanced Indexation por Hakim Mezali June 2013

Cuadro 3.2: Peso porcentual de cada emisoras.

i	**Emisoras (−)**	a_i	W_i	i	**Emisoras (+)**	a_i	W_i
1	GMEXICO	-0.0456	8.0486 %	12	WALMEX	0.0274	8.6585 %
2	BIMBO	-0.0473	8.0347 %	13	LACOMER	0.0367	8.7388 %
3	LALA	-0.0474	8.0344 %				
4	ELEKTRA	-0.0549	7.9738 %				
5	AMX	-0.0560	7.9653 %				
6	GCARSO	-0.0563	7.9627 %				
7	ALFA	-0.0690	7.8622 %				
8	CEMEX	-0.0711	7.8464 %				
9	PE&OLES	-0.0716	7.8419 %				
10	GFNORTE	-0.0719	7.8400 %				
11	ICA	-0.9703	3.1926 %				
	SUMA		**82.6027 %**		**SUMA**		**17.3973 %**

Una vez seleccionadas las emisoras que conformarán el nuevo índice se deben recalcular sus pesos, puesto que una restricción de esta metodología será que la suma de los pesos en el portafolio construido sea igual a uno:

$$\sum_{i=1}^{n} W_i = 1$$

Tal que $n < N$ es el número de emisoras que cumplieron con el porcentaje antes dicho, en este caso $n = 13$. Por ende, el cálculo del nuevo peso W_i se determina al sumar la exponencial de las a_i, esto con el fin de evitar pesos negativos, en los dos grupos:

$$U = \sum_{i=1}^{n} exp(a_i) = 11.8706$$

Y dividir cada $exp(a_i)$ entre U:

$$W_i = \frac{exp(a_i)}{U}$$

Los nuevos W_i se redondean a cuatro decimales y se multiplican por 450, dado que el IPC se presenta en miles. Por último, el valor del nuevo índice, nombrado como *Index ACP*, en el tiempo t quedará determinado al sumar los productos de cada peso W_i por el precio respectivo de su emisora i:

$$Index\ ACP_t = \sum_{i=1}^{n} W_i P_t^i$$

Cabe mencionar que no es necesario recalcular cada que t cambie. La idea es mantener estos pesos, hasta que exista algún criterio o cambio de mercado, económico o estructural que lo amerite. Para tener un punto de comparación y una idea del resultado que esta metodología produce, se incluyó la figura 3.2, en la cual se mantuvo el mismo portafolio, es decir, mismas acciones y pesos por ocho meses.

Una manera cuantitativa de comparar el Index ACP con el *benchmarked index*, en este caso el IPC, es el *Tracking Error*, definido como:

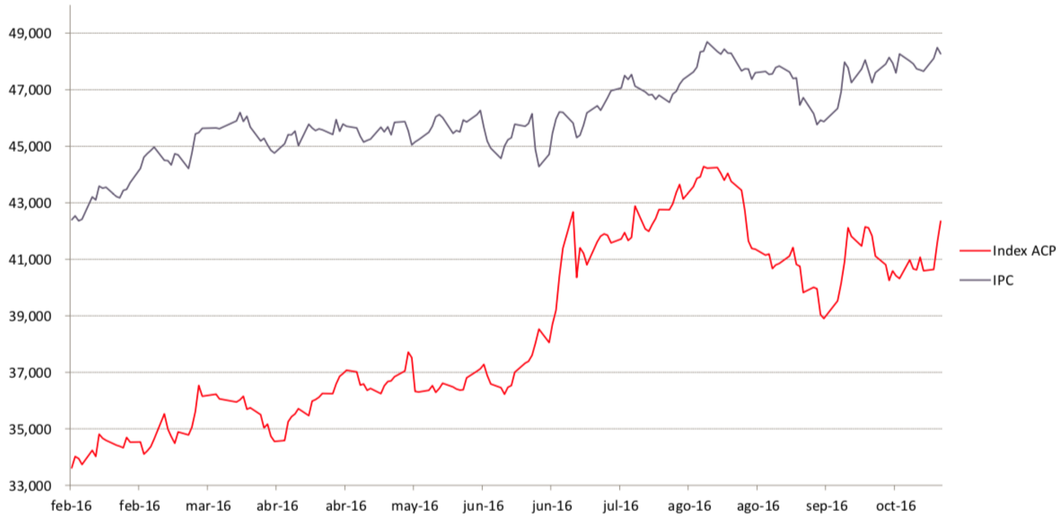

Figura 3.2: Comparación de índices

$$TE = \sqrt{\frac{\sum_t d_t - \bar{d}}{n-1}}$$

Tal que $d_t = RP_t - RB_t$ es la diferencia del rendimiento del portafolio y el *Benchmarked index* al mismo tiempo t. En otras palabras, es la desviación estándar de las diferencias en los rendimientos. Generalmente, el TE se presenta anualizado (TE multiplicado por $\sqrt{252}$) y en porcentaje. Esta medida indica qué tan diferentes son los rendimientos que obtuvo un portafolio con respecto a un *Benchmark*.

Para tener una idea, si se calcula por la misma periodicidad de tiempo; el TE del IPC con respecto al NAFTRAC[4], el $TE_{NFTvsIPC} = 1.42\,\%$ anual. Por otro lado, el TE del Index ACP con respecto al IPC es de $TE_{ACPvsIPC} = 20.88\,\%$ anual, lo cual no es necesariamente erróneo, puesto que no se empleó ninguna técnica con el objetivo de minimizar el Tracking Error.

[4] *Exchange-traded fund* (ETF) que se encarga de replicar el rendimiento del IPC

Capítulo 4

Derivados financieros y procesos con saltos

Este capítulo tiene como objetivo valuar uno de los contratos financieros más comunes que se negocia en el mercado de derivados; la opción de compra europea vainilla (*European Call Option Vanilla*), incorporándole un proceso de Lévy que incluye saltos en la trayectoria del subyacente.
El recorrido de este apartado comienza describiendo el significado de este contrato, las características y la expresión matemática con la que se trabajará para asignarle un precio. Se prosigue con la construcción de un proceso Monte Carlo y la deducción de una fórmula cerrada, similar al Black-Scholes, que implementa saltos en la trayectoria. Por último, al determinar previamente el número de saltos y suponer cierta distribución en el tamaño de cada uno de estos, será posible obtener dos opciones para valuar este derivado financiero.

4.1. Opción de compra europea

La opción de compra europea vainilla es aquel contrato que otorga al dueño el derecho, pero no la obligación, de comprar un bien subyacente a un precio y tiempo estipulado al inicio del convenio. El subyacente puede ser casi cualquier tipo de activo financiero (acciones, divisas, commodities, etc.). Esta opción que brinda el contrato se adquiere mediante el pago de una prima y puede ser ejercido únicamente al vencimiento de la Opción, por lo que se le atribuye el término Europea.

El objetivo es calcular la prima, es decir, encontrar el precio justo para este contrato. Para hacerlo se deben determinar las siguientes características: vencimiento del contrato al tiempo T, vigencia del contrato dentro de un intervalo $[0, T]$, precio del subyacente S_t, precio pactado *strike* (K) y la función de pago, o *payoff*, al final del contrato:

$$Max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+$$

Tal que S_t es el precio del subyacente al tiempo $t \in [0, T]$.

La primera observación del payoff es que está determinado por el precio a vencimiento S_T, desconocido al día de hoy $t = 0$. Para replicar el valor de este payoff a vencimiento, se tendrá que construir un portafolio autofinanciado que mantenga una cantidad (α_t) de activo subyacente S_t y (β_t) de un bono libre de riesgo B_t. Donde $S_t e^{-rt}$ deberá ser una martingala bajo una medida $\mathbb{Q}$ neutral al riesgo, lo cual se obtiene al eliminar la tendencia en una ecuación diferencial. Desarrollando estos conceptos, la prima de una opción de compra europea se puede ver como el valor esperado del payoff, condicionado

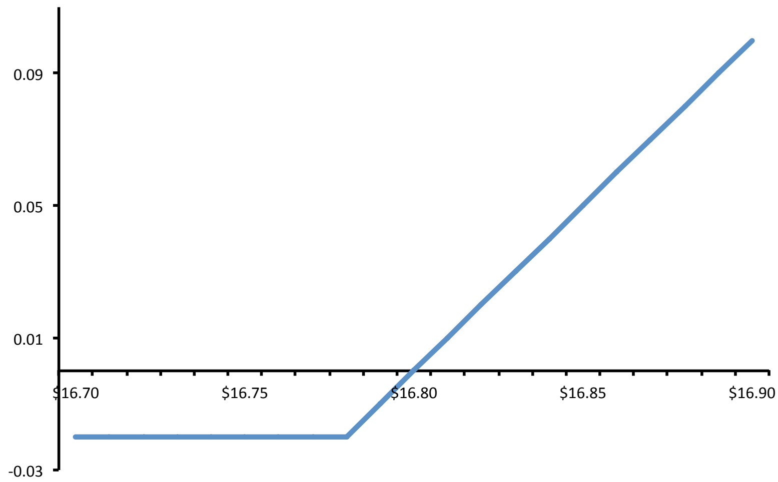

Figura 4.1: Valor del payoff de una opción de compra vainilla tomando distintos precios.

al histórico de precios F_t, sujeto a una medida $\mathbb{Q}$ neutral al riesgo. Dicho lo anterior, el problema queda plateado de la siguiente forma:

$$C(t, T, S_t, K) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)^+ \mid F_t] \tag{4.1}$$

Donde $C(t, T, S_0, K)$ es el costo de la opción al tiempo (t), con maduración (T), precio subyacente (S_0), tasa continua libre de riesgo (r) y precio pactado strike (K).

Una vez adquirida la opción Call Vanilla, el precio subyacente va cambiando conforme al tiempo, de modo que el valor de la opción también. Dependiendo del comportamiento del mercado, la opción se nombra de las siguientes formas:

a. $(S_T - K)^+$ es llamado valor intrínseco de la opción.

b. $C(t, S_0; T, K) - (S_t - K)^+$ es llamado valor extrínseco.

c. A vencimiento, se dice que una opción europea está *at the money* si $K = S_t$.

d. *At the money forward* si $K = S_0 e^{r(T-t)}$.

e. *Out the money* si $S_T < K$.

f. *In the money* si $S_T > K$.

Comúnmente en el ambiente financiero, por su fórmula cerrada y la facilidad de cálculo, se ha utilizado el modelo Black-Scholes[16] expuesto en la última parte de este capítulo para calcular el precio de este derivado. El problema es que supone una trayectoria continua que no considera cambios estructurales importantes de mercado y que pueden impactar de forma trascendente en el comportamiento del subyacente.

4.2. Simulación para procesos de difusión con saltos

Para solventar el problema anterior, se propone un modelo exponencial de Lévy. Al contrario del modelo Black-Scholes, la exponencial de Lévy no cuenta con una fórmula explícita para el precio de

una opción de compra europea. Esto es porque la densidad de probabilidad de un proceso de Lévy es mayormente desconocido en forma cerrada, ya que el número de saltos en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ es incierto.
En este sentido, existen diversos métodos para implementar una exponencial de Lévy en el cálculo de la prima para una opción financiera. Entre ellos se encuentra la evaluación de la transformada de Fourier para modelos exponenciales de Lévy[15] o suponer cierta distribución en los saltos del proceso para calcular una fórmula cerrada. En este trabajo se opta por condicionar los saltos.

Para desarrollar el modelo de Black-Scholes, se comienza por suponer que el precio del subyacente al momento t, denotado anteriormente por S_t, está descrito bajo una medida $\mathbb{P}$ y a través de un movimiento browniano estándar ($\hat{W}_t \sim N(0,t)$) exponencial con deriva:

$$\mathbb{P} : S_t = exp(\mu t + \sigma \hat{W}_t) \tag{4.2}$$

El valor de S_t al día de hoy, es decir, el valor descontado toma la forma $S_t e^{-rt}$, y al aplicar la fórmula de It$\hat{o}$, mencionada en la sección 2.3.3, se obtiene:

$$dS_t e^{-rt} = S_t e^{-rt}((\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma \hat{W}_t) \tag{4.3}$$

Usando el Teorme de Merton “mencionado en el capítulo 2” es posible encontrar una medida $\mathbb{Q}$, tal que $\tilde{W}_t$ es un $\mathbb{Q}$-movimiento browniano y $S_t e^{-rt}$ es una $\mathbb{Q}$ martingala:

$$dS_t e^{-rt} = \sigma S_t e^{-rt} d\tilde{W}_t \tag{4.4}$$

Al desarrollar el lado izquierdo de 4.4, se obtiene dS_t:

$$e^{-rt} dS_t + S_t(-r)e^{-rt}dt = \sigma S_t e^{-rt} d\tilde{W}_t \tag{4.5}$$

$$Medida^{\mathbb{Q}} : dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t \tag{4.6}$$

Al aplicar de nuevo la fórmula de It$\hat{o}$, la solución de la ecuación diferencial bajo una medida $\mathbb{Q}$ libre de riesgo es:

$$\mathbb{Q} : S_t = S_0 e^{[r - \frac{\sigma^2}{2}]t + \sigma \tilde{W}_t} \tag{4.7}$$

La expresión $\frac{dS_t}{S_t}$ se puede interpretar como el porcentaje de cambio del subyacente, descrita por el incremento de un movimiento browniano estándar. El parámetro σ es la volatilidad del subyacente, S_0 el precio *spot* (último valor conocido del subyacente) y r es la tasa de retorno referente a un bono libre de riesgo, tal que si se toman estos parámetros constantes para toda t, se tiene una dinámica neutral al riesgo (*risk-neutral*) con respecto al precio del subyacente.

El siguiente aspecto trata de incorporar saltos en la ecuación 4.7 bajo una medida $\mathbb{P}$, al reemplazar $[r - \frac{\sigma^2}{2}]t + \sigma \tilde{W}_t$ por $X_t = \gamma t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$, de la siguiente manera:

$$\mathbb{P} : S_t = S_0 e^{X_t} \tag{4.8}$$

Donde X_t es un proceso Lévy y $\sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ es un proceso Poisson compuesto con intensidad λ que determina el número de saltos y los tamaños de saltos por Y_i. Y de esta manera S_t se encuentra descrito, bajo una medida $\mathbb{P}$, por un nuevo proceso conocido como *jump-diffusion*.

En la sección 2.4 se menciona la exponencial estocástica (*Doléans-Dade*), la cual brinda una forma diferencial de la ecuación 4.8[1]:

$$\frac{dS_t}{S_{-t}} = (\mu - \lambda k)dt + \sigma d\hat{W}_t + kdH(t) \tag{4.9}$$

Donde $d\hat{W}_t$ y $dH(t)$ son independientes, λ es el número promedio de saltos por unidad, $k = \mathbb{E}[Y(t) - 1]$ y $Y(t) - 1$ es la variable aleatoria que representa el tamaño de salto en el precio del subyacente, si el evento Poisson ocurre. Al hacer la suposición de que las variables $Y(t)$ son una familia de variables aleatorias con distribución log-normal, garantiza la capacidad de análisis, y por otro lado se tiene que:

$$Y(t) - 1 > -1 \tag{4.10}$$

Esto descarta un precio con valor no positivo.

Si r, α, k y σ son constantes para toda t, por la formula de Itô para *jump-diffusion*, la solución de la ecuación diferencial estocásticas viene dada por:

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \lambda k - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma \hat{W}_t} \cdot \prod_{i=1}^{N(t)} Y_{t_i} \tag{4.11}$$

En este memento vale la pena preguntarse: ¿por qué agregar saltos al proceso? Pues bien, dentro de las finanzas los saltos se pueden interpretar como *crashes*[2], grandes *drawdowns*[3] o una sobre reacción positiva ante una noticia, provenientes de cambios estructurales, económicos o políticos.

Hasta el momento S_t es un proceso incompleto pues debe encontrarse la medida neutral al riesgo, es decir, una $\mathbb{Q}$, tal que la nueva dS_t sea martingala. En este sentido, Merton propuso un modelo Black-Scholes con cambios en la deriva del proceso de Wiener, fijando el número de saltos gracias a la independencia de N_t y con una distribución i. i. d. Gaussiana $Y_i = log(y_i) \sim N(m, \delta^2)$ en cada salto, pero dejando los otros términos sin cambios:

$$Medida^{\mathbb{Q}} : \frac{dS_t}{S_{-t}} = \mu^1 t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} log(y_i) \tag{4.12}$$

Donde μ^1 es una variable que hace martingala bajo la medida $\mathbb{Q}$ por medio de:

$$\mu^1 = r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \mathbb{E}[e^{Y_i - 1}] = r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda[exp(m + \frac{\delta^2}{2}) - 1] \tag{4.13}$$

En la ecuación 4.13 se observa cómo la medida $\mathbb{Q}$ martingala equivalente, se obtiene desplazando la deriva del movimiento browniano, pero dejando la parte con saltos sin cambios. Merton justifica la deriva μ^1 suponiendo que el “riesgo de salto” es diversificable, por lo tanto no hay prima de riesgo adherente a ello. En términos matemáticos, esto significa que las propiedades neutrales al riesgo del componente de salto de S_t tienen las mismas características.

De manera que la trayectoria del subyacente para valuar la opción bajo una medida $\mathbb{Q}$ estará determinada por:

$$\mathbb{Q} : S_t = S_0 e^{\mu^1 + \sigma \tilde{W}_t + \sum_{i=1}^{N_t} log(y_i)} \tag{4.14}$$

[1] Utilizada por Merton en [18].
[2] Caída brusca en los precios.
[3] Disminución en la rentabilidad de la acción.

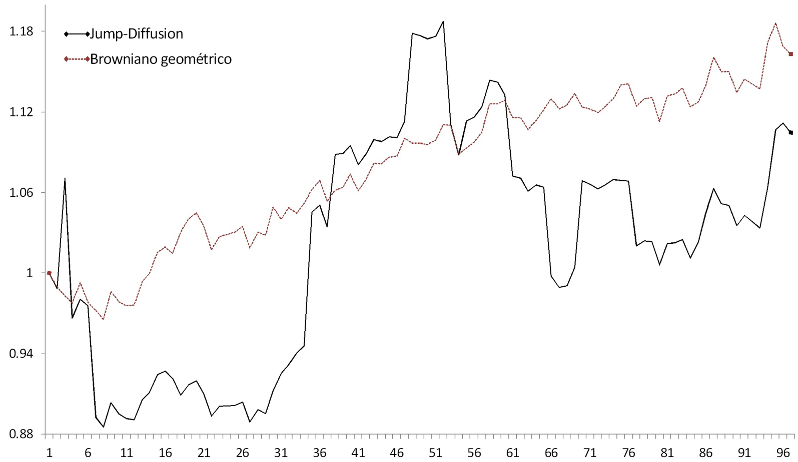

Figura 4.2: Trayectoria por un proceso *jump-diffusion* (línea negra) vs browniano geométrico (línea roja).

A continuación se muestra el algoritmo para simular dicha trayectoria:

Algoritmo para simulación de un proceso jump-diffusion

1. Simular W_t como variables aleatorias Gaussianas independientes con media $\mu = 0$ y desviación estándar σ. Dado que la variable aleatoria $W_t \sim N(0,t)$ se puede normalizar y calcular como $\sqrt{t}Z$, tal que $Z \sim N(0,1)$.

2. Simular una variable aleatoria N_t y distribución Poisson con parámetro λt. N_t será el número total de saltos en el intervalo $[t-1,t]$.

3. Simular $n = N_t$ variables aleatorias $log(y_i)$. Suponiendo que $log(y_i) \sim N(m,\delta^2) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} log(y_i) \sim N(nm, n\delta^2) = nm + \delta\sqrt{n}Z$. Por lo tanto, se simulan n variables $Z \sim N(0,1)$, para obtener $nm + \delta\sqrt{n}Z$ y conseguir los tamaños de salto en cada tiempo.

4. Calcular S_t como sigue: $S_t = S_0 exp[(r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda(exp(m + \frac{\delta^2}{2}) - 1))t + \sigma\sqrt{t}Z + M]$, tal que $M = nm + \delta\sqrt{n}Z$

Como se ve, en la figura 4.2 se puede apreciar la trayectoria de un proceso *Jump-Diffusion* dibujado de color negro con parámetros: $r = 2.5\,\%$, $\sigma = 20\,\%$, $m = .20\,\%$, $\delta = 4.20\,\%$, $t = \frac{1}{360}$ y $\lambda = 150$. De echo, la trayectoria de color rojo de la misma figura proviene de un proceso browniano Geométrico con deriva, con los mismos parámetros r, σ y números aleatorios.
En este sentido, los dos procesos vienen de los mismos números aleatorios, por lo tanto siguen la misma tendencia. No obstante, en la trayectoria de color negro se notan los saltos que realiza el proceso al ser calculado con el algoritmo *jump-diffusion*. La siguiente figura (4.3) también refleja trayectorias provenientes del mismo algoritmo.

4.3. Precio de una opción call europea

En la primera parte de este capítulo se menciona que $C(t,T,S_t,K)$ se puede expresar como una esperanza en función del tiempo $\tau = T - t$, que indica la valuación en cualquier periodo dentro de la

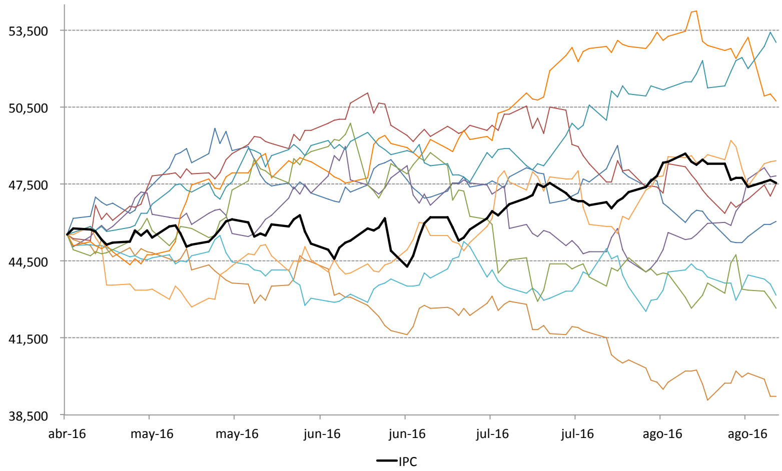

Figura 4.3: Simulaciones con algoritmo *Jump-diffusion* con parámetros de mercado y la trayectoria real (línea negra) que siguió el IPC durante el periodo indicado en el eje x.

vigencia de la opción. Si además se condiciona el número de saltos se obtiene la siguiente expresión:

$$C(\tau, T = t + \tau, S_0, K) = e^{-r\tau}\mathbb{E}[(S_T - K)^+ \mid N_t = n] = e^{-r\tau}\mathbb{E}[(S_0 e^{r\tau + X_\tau} - K)^+] = e^{-r\tau}\mathbb{E}[H(S_T)] \tag{4.15}$$

Dada la definición anterior, donde el número de saltos es conocido y se supone que el logaritmo del tamaño de salto se distribuye $log(Y_i) \sim N(m, \delta^2)$ se puede calcular el costo de la opción de dos formas: evaluar la condición de pago en un número J de trayectorias construidas a partir del algoritmo de la sección anterior o encontrar una fórmula cerrada en términos del modelo Black-Scholes.

a) Evaluación Monte Carlo

Este método se basa en la convergencia de los *payoff* a su esperanza. Una vez obtenidos J trayectorias con el algoritmo 4.1, se deberá evaluar en cada una de ellas el payoff de la opción de compra *call*. El argumento de lo anterior es el siguiente: Sea $(S_T^i - K)^+$, tal que, S_T^i es el precio simulado a vencimiento de la opción, correspondiente a la trayectoria i, entonces el costo es aproximado como:

$$e^{-r\tau}\frac{1}{J}\sum_{i}^{J}(S_T^i - K)^+ = C_J \approx C(t, T, S_t, K) = e^{-r\tau}\mathbb{E}[H(S_T)] \tag{4.16}$$

Por el teorema 2.1.1 implica que el promedio aritmético de los J *payoff* a valor presente, converge casi seguramente al costo de la opción:

$$C_J \xrightarrow{c.s} C(t, T, S_t, K) \tag{4.17}$$

Así es como el precio puede ser aproximado a partir de evaluar 4.16 con una J suficientemente grande.

En la siguiente figura (4.4) se puede apreciar de manera gráfica la valuación de una prima tomando $1, 2, 3 ... 1,000$ trayectorias, pues la convergencia del precio se obtiene conforme el número de simulaciones aumenta. También se puede observar que el promedio de 0 a 100 simulaciones, no tiene un comportamiento definido, sin embargo, para simulaciones entre 0 a 1,000, el precio de la prima comienza a estabilizarse en su media.

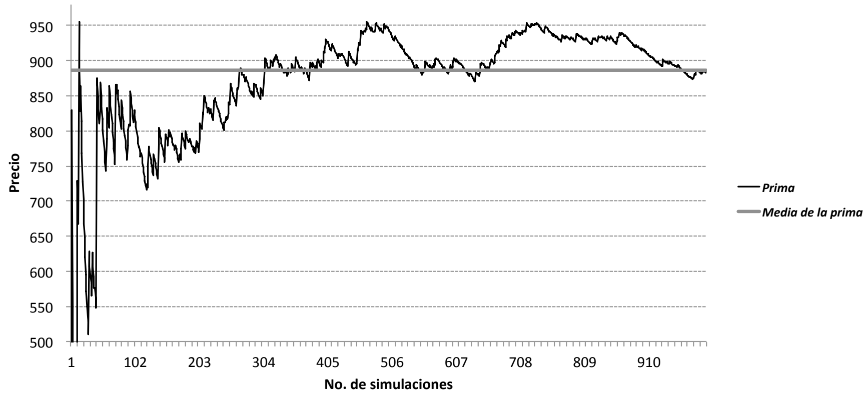

Figura 4.4: Convergencia de la prima mediante evaluación Monte Carlo.

b) Modelo *jump-diffusion* de Merton

Los primeros modelos que incorporan saltos en la valuación de opciones financieras fueron introducidos por Robert Merton alrededor de 1976. Él interpreta los saltos como perturbaciones individuales de cada compañía, y no como saltos de mercado en conjunto. Este modelo es planteado a partir de la ecuación 4.6. Al recordar que el número de saltos es fijo, vale la pena mencionar el siguiente enunciado:

Teorema 4.3.1. *Si* $(\omega, \Im, \mathbb{P})$ *es un espacio de medida y sea* $\{A_1, A_2, ...\}$ *una partición de* ω *por el teorema de la probabilidad total, tenemos que:*

$$\mathbb{P}[B] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[B \mid A_n]\mathbb{P}[A_n] \tag{4.18}$$

Por tanto, la distribución del precio subyacente S_t puede condicionar a un número de saltos $(N_t = n)$ conocidos, bajo la medida martingala $\mathbb{Q}$ antes mencionada:

$$\mathbb{Q}[S_t \leq x] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}[N_t = n]\mathbb{Q}[S_t \leq x | N_t = n] \tag{4.19}$$

Donde:

$$\mathbb{Q}[S_t \leq x | N_t = n] \sim LN(log(S_0) + \mu^1 t + mn, \sigma^2 t + \delta^2 n) \tag{4.20}$$

Y

$$\mathbb{Q}[N_t = n] \sim Poisson(\lambda\tau) \tag{4.21}$$

Si S_t es un proceso de Markov bajo la medida $\mathbb{Q}$, el precio de la opción puede determinarse como una suma ponderada de los precios Black-Scholes de la siguiente manera:

$$C^M(\tau, T, S_0, K) = e^{-r\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}[N_t = n]\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H(S_T)]$$

$$= e^{-r\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}[N_t = n]\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H(S_0 exp[(r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda(exp(m + \frac{\delta^2}{2}) - 1))t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i])]$$

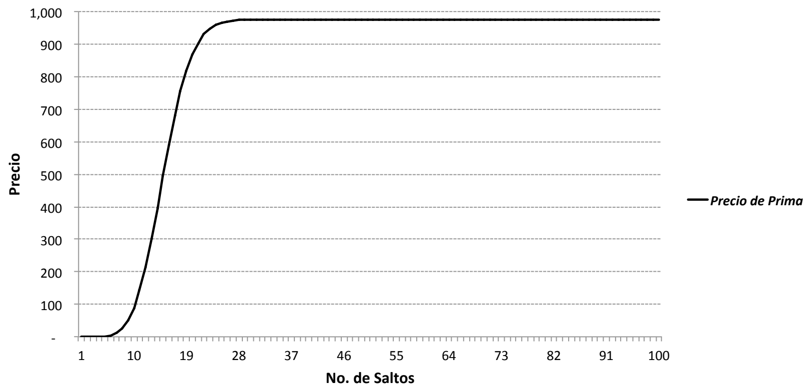

Figura 4.5: Convergencia de la prima, modelo de Merton.

Puesto que $N_t \sim Poisson(\lambda\tau)$ y $\sum_{i=1}^{n} Y_i \sim N(nm, n\delta^2)$ se tiene que:

$$= e^{-r\tau}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H(S_0 e^{nm+\frac{n\delta^2}{2}-\lambda\tau exp(m+\frac{\delta^2}{2})+\lambda\tau} e^{r\tau-\frac{\sigma_n^2\tau}{2}+\sigma_n W_\tau})]$$
$$= e^{-r\tau}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H(S_n e^{r\tau-\frac{\sigma_n^2\tau}{2}+\sigma_n W_\tau})]$$

$$= e^{-r\tau}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!}C_{BS}(\tau, S_n, \sigma_n, K)$$

Donde

- $\sigma_n^2 = \sigma^2 + \frac{n\delta^2}{\tau}$
- $S_n = S_0 e^{nm+\frac{n\delta^2}{2}-\lambda\tau exp(m+\frac{\delta^2}{2})+\lambda\tau}$
- $C_{BS}(\tau, S_n, \sigma_n, K) = S_n N(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2)$

$C_{BS}(\tau, S_n, \sigma_n, K)$ es el costo de una opción *call* determinado con la fórmula de Black-Scholes, cuyas variables están definidas por:

- $d_1 = \frac{ln(\frac{S_n}{K})+(r+\frac{\sigma_n^2}{2})\tau}{\sigma_n\sqrt{\tau}}$
- $d_2 = \frac{ln(\frac{S_n}{K})+(r-\frac{\sigma_n^2}{2})\tau}{\sigma_n\sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma_n\sqrt{\tau}$
- $N(d_i) = \int_{-\infty}^{d_i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-u^2}{2}}$ distribución de una variable aleatoria normal estándar.

La similitud de este modelo con el de Black-Scholes, es que en ambos casos la valuación depende del mismo tiempo que le reste a la opción para su maduración y al igual que el anterior método, esta serie converge de manera exponencial cuando $N_t = n \to \infty$. Esto se puede apreciar en la figura 4.5.

Para concluir, se valuó una opción de compra con los siguientes parámetros de mercado: subyacente=

Prima de un Call Europea	
Modelo	**Precio**
Fórmula Black-Scholes	\$602.46
Monte Carlo Black-Scholes	\$602.21
Jump Difussion de Merton	\$967.20
Monte Carlo *Jump-Diffussion*	\$971.01

Cuadro 4.1: Precio de una Opción de Compra Europea.

IPC, precio *Spot*= $45,528.93$, *strike*=$47,563.34$, plazo= 90 días, tasa de $r = 3.81\,\%$, tasa de dividendos $q = 1.73\,\%$, $\sigma = 13.23\,\%$, $m = -.10\,\%$, $\delta = 1.48\,\%$ y $\lambda = 62$.
Cabe mencionar que la tasa r es la de Cetes a 90 días que publicó Banxico[4] (de 3.83 %) el día 28/04/2016, convertida a una tasa continua. Así como también λ se calculó con ayuda de la tasa efectiva que otorga el Cete al mismo plazo, es decir, todo retorno del IPC que fuera más grande que $(3.83\,\%(\frac{90}{360}))$, se consideró un salto. En cuanto a la tasa de dividendos, fue tomada del aviso correspondiente al ejercicio del 2015, publicado por la página de Mexder[5]. En este sentido, la figura (4.6) contiene una gráfica anual del subyacente, donde cada punto de color negro representa un salto con respecto al cierre anterior, dando un total de 62 saltos. Los parámetros m y δ son la media y la desviación estándar, respectivamente, de los retornos considerados como saltos.

Finalmente, en el cuadro 4.1 se muestran los resultados obtenidos al evaluar una opción de compra europea vainilla con cuatro distintas metodologías.
Se realizaron 100 mil simulaciones para cada método Monte Carlo y la tasa para traer a valor presente todas las primas fue de $r = 3.81\,\%$ anual. Para probar la consistencia del método Monte Carlo con *Jump Difussion*, se realizó el mismo número de simulaciones con idénticos parámetros, exceptuando los de salto (m,δ, λ), los cuales se igualaron a cero, con la finalidad de que al eliminar tales parámetros, se obtuviera de regreso el modelo de Black-Scholes (cuadro 4.1).

[4]Fuente: www.banxico.org.mx
[5]Fuente:www.mexder.com.mx

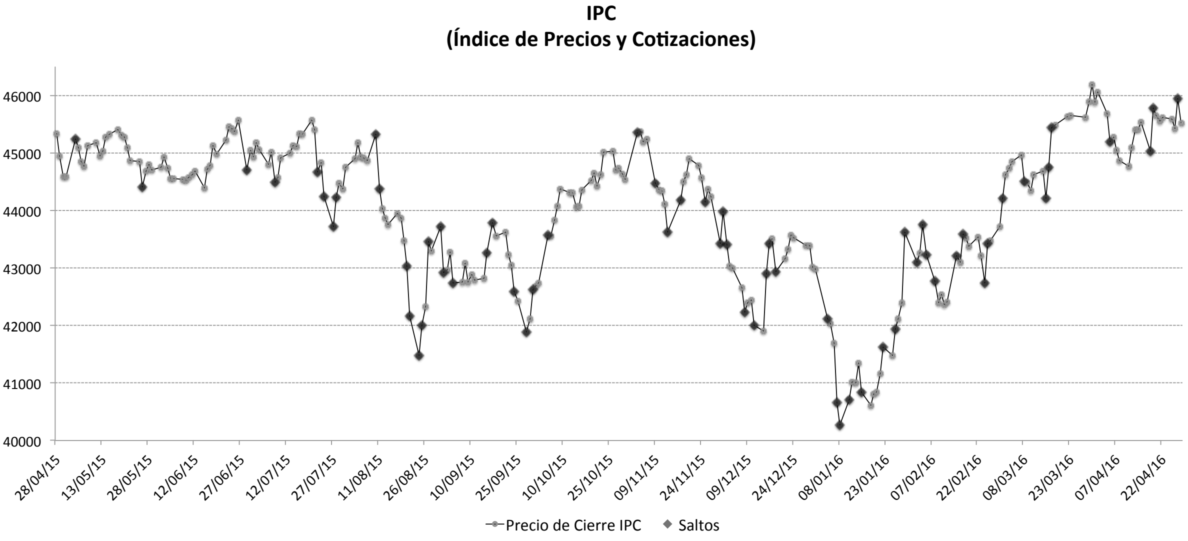

Figura 4.6: Gráfica de los precios de cierre diario del IPC correspondientes al periodo del 28/04/2015 al 28/04/2016.

Conclusiones

En esta tesis se implementaron herramientas estadísticas y probabilistas en el campo de las finanzas para reflejar de forma más adecuada el comportamiento del mercado. Lo anterior se logró de la siguiente forma:

Resultados y conclusiones particulares

1. Se detalló el significado de "mercado", particularmente el del mercado financiero, mediante el desarrollo de los elementos necesarios para construir un mapa mental suficientemente amplio, a fin de entender entender la conformación de este concepto. Un aspecto a resaltar es que los mercados financieros cuentan con un sistema fundamental para el correcto intercambio de productos financieros. Además de dar un orden, el hecho de tener un buen sistema financiero brinda las ventajas de estar cerca de un mercado eficiente, fijar precios justos, contar con liquidez y optimizar la intermediación.

   El mercado financiero evoluciona junto con la sociedad, la economía, la tecnología y los productos financieros, haciéndose más grande conforme crecen las necesidades de los inversionistas. Por tanto, se agrupó este gran concepto en cinco clasificaciones; así se puede desarrollar mas fácilmente una idea del funcionamiento y los productos que lo componen.
   De los elementos mencionados se detallaron dos: las acciones y los índices. De las acciones, se puede decir que son títulos que ofrecen una renta variable, puesto que el precio está determinado por la oferta y la demanda, que a su vez son afectados por múltiples factores. Con respecto a los índices, el precio y la rentabilidad de las acciones son seguidos por medio de indicadores financieros. Estos pueden expresar información de más de una sola acción, como lo hace el IPC. Por tanto, son capaces de expresar también el estado económico de un país, la volatilidad, la política monetaria y las correlaciones entre mercados nacionales e internacionales.

2. Las herramientas matemáticas utilizadas para la valuación de derivados financieros son la probabilidad y los procesos estocásticos. Por tal razón, se citaron las distribuciones normal, exponencial y Poisson, las cuales forman parte importante de la construcción de los procesos estocásticos que se presentaron en este trabajo. Las peculiaridades en la distribución exponencial son: la única que no es infinitamente divisible, ya que la suma de $n's$ exponenciales representa una distribución gamma, además de que se pueden expresar tiempos de paro en un proceso.
   Las distribuciones anteriores están determinadas por la medida de probabilidad, sin embargo, no es suficiente para describir los procesos desarrollados en este trabajo, por lo que fue necesario retomar las medidas sobre σ-álgebras, para definir dos tipos: la medida aleatoria y la compensada, que se encuentran en un conjunto llamado "espacio de medida". Aunada a esta teoría se mencionó la derivada de Radon-Nikodym, misma que fue utilizada para encontrar un modelo martingala y libre de riesgo.

Con respecto a los proceso estocásticos se utilizaron los siguientes: Movimiento browniano o proceso de Wiener, Proceso Poisson y Poisson compuesto; todos pertenecientes a la familia Lévy. Los procesos de Lévy, una vez definidos, tienen características interesantes y relevantes. Una de ellas es ser infinitamente divisible, sin embargo, no toda distribución con esta propiedad induce un proceso de Lévy, a menos que X_1 esté determinada por una distribución infinitamente divisible. Otra característica sustancial, es descomponerse en una combinación lineal de un movimiento browniano con deriva y un proceso discontinuo que incorpora los saltos descritos por la medida de Lévy. Este resultado es llamado "descomposición de Lévy-It$\hat{o}$". Ahora bien, para encontrar la función característica de este proceso, se usó el teorema de Lévy-Khinchin.

Para introducir los procesos de Lévy al cálculo estocástico, se construyó una estrategia de cobertura con el objetivo de definir la integral estocástica. La solución de esto no es directa, por ende, se expuso la Fórmula de It$\hat{o}$ para integrales Brownianas y procesos de difusión con saltos. Hasta ahora, ya se tenía un proceso estocástico que incluyera saltos en su trayectoria, pero faltaba tomar la exponencial de este proceso. Los precios del subyacente de un derivado nunca toman valores negativos, por lo que se definió la exponencial estocástica. Por último, este nuevo proceso se convirtió en uno libre de riesgo, gracias a la existencia de las medidas equivalentes $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$. Con ellas se encontró la $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{X_t}]$, bajo la medida $\mathbb{Q}$ martingala.

3. Emplear el Análisis de Componentes Principales (ACP) como herramienta para estudiar los rendimientos de cada emisora que constituye el IPC. Lo anterior fue con objeto de despreciar emisoras que tengan rendimientos similares o afectados por otras. Se obtuvieron 37 componentes principales, de los cuales sólo se usó el primero, porque expresa la mayor variabilidad de los datos. Los valores propios de este componente fueron utilizados para seleccionar las emisoras del nuevo índice, llamado Índice ACP.

   Con las emisoras seleccionadas, se construyó un portafolio para el nuevo índice, de la siguiente forma: ordenado el primer componente principal de menor a mayor, separando los valores por su signo, obteniendo el porcentaje para saber qué peso tiene cada emisora en su grupo, seleccionando el mínimo de emisoras que acumulen 70 % de su peso, recalculando los mismos para construir el portafolio y finalmente, sumando la multiplicación de los pesos recalculados por los respectivos de cada emisora. Del resultado obtenido (figura 3.2) se puede decir que:

   - El nuevo índice quedó conformado por sólo 13 emisoras, 65 % menos de las 37 que conforma el IPC.
   - El Tracking Error del Index ACP con respecto al IPC es de 20.88 %. Más alto con respecto al $TE = 1.42\,\%$ del NAFTRAC.
   - El rendimiento promedio[6] del Index ACP es de .1373 %, con una volatilidad histórica anual del 18.37 %, mientras que el rendimiento promedio del IPC es de .0761 %, con una volatilidad del 11.67 %. Cabe destacar que el Index ACP mantiene una misma tendencia, a pesar de contar sólo con 13 emisoras y una volatilidad 6.70 % más alta que la del IPC.

   Posibles observaciones que tiene esta metodología:

   - Los componentes dependen de una historia, la cual brinda información importante sobre la trayectoria de las emisoras, sin embargo, puede ser ambiguo determinar qué intervalo de historia es correcto tomar.

[6]Calculado del 09/02/2016 al 20/10/2016.

- No cumple con todas las condiciones que la BMV indica en el capítulo 1 para la distribución de los pesos w_i.
- Sin embargo, la principal diferencia es la asignación de pesos por medio de los componentes principales.
- La asignación de peso es mucho más cuantitativa, pues no depende del número de acciones y por ende, es más justa.
- La tendencia indica que el análisis de componentes reduce de buena forma la cantidad de emisoras redundantes.
- La construcción es sencilla tanto teórica como en el aspecto computacional.
- Este método puede ser usado para la conformación de un portafolio.
- ETF y portafolios de inversiones, emplean técnicas similares para replicar índices.

La proposición de una nueva metodología tiene lugar cuando los pesos que calcula la BMV dependen del número de acciones y precios. Esto no necesariamente brinda una información tan relevante para conformar un indicador. Por otro lado, la correlación de los rendimientos históricos brinda datos más precisos del comportamiento de los mercados, lo cual es mucho mejor cuando se tiene una percepción de un mercado conductual.

4. Del mercado de derivados mencionado en el capítulo 1 se retomó el producto financiero llamado opción de compra "Call Vanilla". De éste se puede decir que es pionero y uno de los más usados por instituciones financieras. Este producto tiene como característica la opción de adquirir, o no, el bien subyacente al final del contrato a un precio preestablecido, mediante el pago de una prima. El cálculo justo de este valor fue desarrollado en este trabajo, ya que no se sabe el precio futuro del subyacente.
Para lo anterior se mencionó la formula de Black-Scholes, la cual determina la prima de este derivado mediante la siguiente ecuación estocástica:

$$S_t = S_{t-1}e^{[r-\frac{\sigma^2}{2}]dt+\sigma W_t} \tag{4.22}$$

No obstante, esta fórmula supone un subyacente con una trayectoria continua, la cual no es necesariamente cierta. Basta con recordar eventos atípicos como el Brexit, un referéndum sobre la permanencia del Reino Unido en la Unión Europea, realizado el 23 de junio de 2016, donde el 51.90 % de los ingleses votaron por abandonar la Unión Europea, mientras que un 48.10 % eligieron permanecer. Esta decisión causó una caída relativamente fuerte en la trayectoria de las bolsas del mundo, incluyendo el IPC.

Los cambios estructurales de mercado o políticos, como el antes mencionado, llevaron a introducir discontinuidades o saltos en la trayectoria de la predicción del subyacente, para reflejar de mejor forma el comportamiento del mercado. Por tal motivo, se propuso una ecuación estocástica con un proceso *jump-diffusion*:

$$S_t = S_{t-1}exp(\mu^1 + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i) \tag{4.23}$$

Donde $\mu^1 = r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda[exp(m + \frac{\delta^2}{2}) - 1]$ es una traslación de la deriva del modelo Black-Scholes y $\sum_{i}^{N_t} Y_i$ los saltos del proceso. Cabe recordar que fue necesario fijar primero el número de saltos que tendría el subyacente, para que la ecuación diferencial estocástica tuviera solución cerrada. De esta manera, con el Algoritmo 4.1 fue posible la simulación junto con la gráfica de la trayectoria de la ecuación 4.9. Si además de fijar el número de saltos, se asigna una distribución normal al tamaño de estos, es posible desarrollar dos métodos para valuar derivados: el de Monte Carlo para *jump-diffusion* y la fórmula de Merton.

La valuación Monte Carlo consiste en realizar un número computacionalmente grande de simulaciones y promediar todos los posibles pagos que pueda tener el derivado. Con ello se obtiene la prima y va convergiendo cuando el número de simulaciones aumenta. Por otra parte se obtuvo la fórmula de Merton, la cual converge cuando el número de saltos aumenta:

$$C^M(\tau, T, S_0, K) = e^{-r\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!} C_{BS}(\tau, S_n, \sigma_n, K) \tag{4.24}$$

Ambos métodos fueron aplicados para valuar una opción de compra Call con parámetros reales de mercado. Los resultados fueron los siguientes:

- En Monte Carlo, la prima comienza a converger a partir de mil simulaciones, mientras que con la fórmula de Merton lo hace a partir de 28 saltos.
- Los saltos en Monte Carlo hacen más lenta la convergencia, teniendo que realizar mucho más simulaciones. Por otro lado, con el modelo Black-Scholes la prima comienza a ser estable con cien simulaciones.
- Además de la volatilidad, se agregan tres nuevos parámetros para el cálculo de la opción de compra *Call Vanilla*: $\lambda\tau$ (número de saltos), m (media) y δ (varianza), para el tamaño de los saltos.
- Los tres parámetros anteriores, pueden ser un poco ambiguos y difíciles de calcular, puesto que el criterio para determinar la magnitud del retorno que implica un salto es percepción del inversionista. A pesar de esto, se pueden usar como parámetros de riesgo cuando se determinan rendimientos no tolerables o que representan una posible amenaza para el portafolio. También pueden ser parámetros conductuales, es decir, que signifiquen conductas de los participantes del mercado.
- Las primas o precios obtenidos con estos dos métodos son más caros con respecto al Black-Scholes. Lo anterior es por el efecto que tienen los saltos en el proceso.
- Los métodos desarrollados en el capítulo 4 no sólo sirven para valuar opciones de compra *Call Vanilla*, también pueden ser empleados para valuar opciones con *payoff* distinto a los *plain Vainilla*, como el método Monte Carlo, que además de ser útil para ese tipo de opciones, lo es para las americanas.

5. Precisión en la prima. El número de fenómenos económicos que producen discontinuidades en el precio de una acción, aumenta conforme el intervalo de tiempo observado en la cotización es más grande. Por consiguiente, una prima obtenida a partir de un modelo con saltos contempla más escenarios en el subyacente y por tanto, es recomendable para opciones con plazos iguales o mayores a un año. Más aún, los parámetros de frecuencia y tamaño de salto requeridos en el cálculo, permiten de forma cuantitativa incluir los fenómenos que producen discontinuidades, complementándose con la volatilidad.

6. Gestión del riesgo. Si se logran identificar las discontinuidades en el precio de una acción, los modelos de valuación expuestos en esta tesis estarían contemplando algunos riesgos como:

Riesgo sistémico: peligro inherente a una inestabilidad financiera altamente catastrófica, causada por el comportamiento colectivo de los participantes en el mercado.
Riesgo sistemático: causado por el mercado en su totalidad.
Riesgo no sistemático: las empresas producen discontinuidad en su cotización derivado de actividades internas, como el lanzamiento de un producto nuevo.

Otra ventaja para la administración de riesgos es la inclusión de saltos en la distribución del modelo que implica colas más pesadas, valores extremos mas densos y medidas de riesgo más confiables como VaR (Value at Risk) y ESF (Expected Short Fall).

7. Costo computacional: Para obtener una prima, la fórmula de Merton y el método Monte Carlo requieren un número de saltos y simulaciones considerablemente grandes. Lo anterior implica un gran costo computacional, ya que el cálculo relacionado a cada número de saltos y simulaciones es independiente. Esto en contraste con la fórmula cerrada de Black-Scholes que arroja un resultado inmediato, una vez conocidos los parámetros.

Conclusiones generales

Una pequeña parte del mundo en el que vivimos es el mercado financiero, por eso este trabajo tuvo la necesidad de estructurar y definirlo con el objetivo de entenderlos de mejor forma. Al tener un poco más de conocimiento sobre este mercado fue posible desarrollar herramientas matemáticas enfocadas a mejorar la administración financiera. La estadística, el análisis multivariado y los procesos estocásticos fueron las herramientas primordiales para la construcción de modelos financieros. Los resultados obtenidos reafirmaron la estrecha relación que existe entre los mercados financieros y las matemáticas.

Gracias a esta relación se creó un nuevo índice que extrajo a las emisoras más representativas que la muestra que el IPC recoge. Por otro lado, al introducir saltos en la trayectoria del subyacente de un derivado financiero fue posible contemplar comportamientos de mercado atípicos. Con todo ello, se concluye que las acciones no sólo son precios que representan el comportamiento de las empresas, sino que también son indicadores micro y macroeconómicos, lo que hace que este trabajo cumpla con el objetivo de mejorar la percepción de los movimientos en el mercado financiero.

Mi opinión

A lo largo de la licenciatura de matemáticas, no encontré ninguna clase académica que explicara de forma concisa la estructura de los mercados financieros; así fue como nació el primer capítulo de esta tesis. Mi motivación es que compañeros académicos interesados en estos temas puedan consultar el trabajo y así puedan desarrollar un buen concepto de mercado.

Mi idea sobre esto es que todo mundo tiene una percepción distinta de la realidad, incluso dentro de las matemáticas se perciben las cosas de una forma, mientras que en las finanzas es de otra. Un ejemplo es la volatilidad histórica e implícita; dos formas matemáticamente correctas que reflejan el mismo concepto financiero.

Al final me parece muy difícil que las matemáticas repliquen de forma correcta a los mercados. Todo esto depende del objetivo financiero buscado y sólo cuando es alcanzado, por medio de herramientas cuantitativas, las matemáticas pueden reflejar óptimamente la realidad.
No obstante, hay que recordar que a través de la historia se han generado muchas crisis financieras, las cuales, a mi forma de pensar, son una mala percepción de la realidad en que vivimos. Por esto, los modelos matemáticos deben ser empleados con precaución y de forma plenamente racional.

Dado que las percepciones son producto de los inversionistas que participan en el mercado, significa que existen conductas y emociones que obligan a los mercados a comportarse de alguna forma; por ello vivimos en una economía conductual. Esto requiere encontrar formas de mezclar los modelos financieros matemáticos existentes con las conductas de los inversionistas. Por lo anterior, recomiendo no sólo contemplar desde un punto de vista cuantitativo, sino también económico, tanto a este trabajo como a cualquier otro que incluya modelos matemáticos aplicados a finanzas.

Lo aprendido

La mayor parte de esta tesis fue nuevo para mí. Los procesos de Lévy y los análisis de componentes principales fueron dos temas que no había visto a lo largo de mi carrera. Sin embargo, este desconocimiento fomentó el interés de investigarlos y desarrollarlos.

La redacción de este trabajo también fue novedosa, dado que en mi facultad, al estudiar la licenciatura en matemáticas, no practicas tanto esta buena costumbre. Este fue un intento aleccionador para redactar clara y estructuradamente mis planteamientos, ideas y conclusiones.

Una dificultad a resaltar fue la comprensión de nuevas teorías en el campo del cálculo estocástico y la recolección de precios para los cálculos y gráficas presentadas en el capítulo 3.

Qué prosigue a este trabajo

Este proyecto tiene muchos más temas que discutir, sin embargo, si se plasmara todo sería excesivamente largo. No obstante, lo expuesto tiene secuelas interesantes:

En primer lugar, la posibilidad de soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticos con solución cerrada que no considere supuesto de normalidad en el tamaño de los saltos.

En segundo lugar, la creación de un nuevo índice con la técnica explicada es válida para otros países, simplemente adaptando los pesos de cada acción con los estándares y regulaciones que cada bolsa de valores dictamina. Además, usando el ACP como criterio para seleccionar emisoras se puede desarrollar un ETF que mejore el manejo de portafolios de inversiones.

Por último, existen muchos productos financieros interesantes disponibles en el mercado de derivados, entre ellos los exóticos y las notas estructuradas, los cuales tienen formas y valuaciones más complejas. Para esto Monte Carlo (con saltos) pueden ser de gran utilidad.

En este sentido debe enfatizarse que los parámetros usados para valuar cualquier producto financiero: volatilidad, número y tamaño de los saltos, son el reflejo del comportamiento esperado del mercado. Por tal motivo deben desarrollarse técnicas dedicadas sólo a calcular estos parámetros, pues su calibración es de gran importancia a la hora de determinar la prima. Adicionalmente, en estos parámetros se puede reflejar la economía conductual.

Como se ve, existe mucho material para seguir estudiando la relación de las matemáticas y las finanzas, con la finalidad de mejorar la descripción del comportamiento del mercado o de la realidad en la que vivimos. Esta tesis buscó allanar ese camino.

Capítulo 5

Apéndice

Apéndice A

Mercados Financieros

A.1. Tipo de acciones

- *Acción al portador:* se entrega a quien la compre, obteniendo todos los derechos que vengan con ella.
- *Acción amortizable:* aquella que la sociedad puede retirar de circulación.
- *Acción bursátil:* aquella que tiene un nivel elevado de operación, garantizando la liquidez de la misma.
- *Acción con liquidez:* esta acción tiene la característica de ser fácil de vender sin afectar su precio de mercado.
- *Acción de circulación restringida:* aquella que tiene ciertas condiciones para ser transferida.
- *Acción de crecimiento:* las empresas generalmente reinvierten sus utilidades generadas, de tal forma que se produzcan crecimientos reflejados en la cotización en bolsa.
- *Acción de fundador:* son las emitidas para el creador.
- *Acciones ordinarias o comunes:* son las que tienen los derechos estándar y son de igual valor.
- *Acciones de goce:* acciones emitidas que sustituyen a las amortizadas según lo decida la empresa.
- *Acciones de industria o trabajo:* aquellas que son entregadas a los empleados de la misma empresa que las emitió.
- *Acciones de rendimiento:* denominadas así porque entregan continuamente dividendos en efectivo a sus accionistas.
- *Acciones de tesorería:* pagadoras de las cuales no se ha efectuado ninguna exhibición.
- *Acción de voto limitado:* aquella que tiene derecho a votar en ciertos casos estipulados en su contrato.
- *Acción sin derecho de voto:* es aquella en donde se tienen privilegios económicos, pero no de voto.
- *Acción liberada:* acción totalmente cubierta o pagada.

- *Acción suscrita:* aquella que está comprometida para pagar su valor en una fecha futura.
- *Acción no suscrita:* aquella que no tiene compromiso de pago.
- *Acción normativa:* van a nombre de su poseedor y la sociedad emisora mantiene un registro de accionistas.
- *Acción nominativa:* aquella que está a nombre del propietario y para transferirse debe cumplirse ciertos requisitos.
- *Acción pagadora:* no están totalmente pagadas o exhibidas y deberán ser nominativas, mientras no estén saldadas.
- *Acción volátil:* se le llama así porque su precio de mercado es muy variable con respecto a las demás acciones.
- *Acciones pagadas en especie:* estas acciones son pagadas de forma parcial o total en especie y deben estar depositadas durante dos años.
- *Acciones preferente:* es aquella que sólo tiene voto en las asambleas extraordinarias.
- *Acciones preferentes acumulativas:* los dividendos se acumulan hasta cubrirlos totalmente con base en las utilidades de la empresa.
- *Acciones preferentes convertibles:* acciones emitidas como preferentes, pero intercambiables por otro valor.
- *Acciones preferentes no acumulativas:* aquella que no está obligada a pagar la parte o el total de los dividendos. Esto dependerá de la reunión de fondos necesarios para pagar los dividendos por parte de la empresa.
- *Acciones preferentes no participantes:* son las que perciben el dividendo asignado exclusivamente para ellas.
- *Acciones preferentes participantes:* aquellas que reciben un dividendo preestablecido y además pueden participar en otro.
- *Acciones sin expresión de valor nominal:* aquella que su valor nominal se fija.
- *Acciones sindicadas:* son aquellas que no pueden ser trasmitidas libremente, si no hay que hacer previa oferta a los actuales accionistas. Cabe notar que para la cotizar en bolsa no puede haber sindicación.

A.2. Bolsa Mexicana de Valores

Cuadro A.1: Empresas emisoras de la BMV al 2014.

Clave de la emisora	Razón social
AC	ARCA CONTINENTAL, S.A.B. DE C.V.
ACCELSA	ACCEL, S.A.B. DE C.V.
ACTINVR	CORPORACION ACTINVER, S.A.B. DE C.V.
AEROMEX	GRUPO AEROMÉXICO, S.A.B. DE C.V.
AGRIEXP	AGRO INDUSTRIAL EXPORTADORA, S.A. DE C.V.
AHMSA	ALTOS HORNOS DE MEXICO, S.A. DE C.V.
ALFA	ALFA, S.A.B. DE C.V.
ALPEK	ALPEK, S.A.B. DE C.V.
ALSEA	ALSEA, S.A.B. DE C.V.
AMX	AMERICA MOVIL, S.A.B. DE C.V.
ARA	CONSORCIO ARA, S.A.B. DE C.V.
ARISTOS	CONSORCIO ARISTOS, S.A.B. DE C.V.
ASUR	GRUPO AEROPORTUARIO DEL SURESTE, S.A.B. DE C.V.
AUTLAN	COMPAÑIA MINERA AUTLAN, S.A.B. DE C. V.
AXTEL	AXTEL, S.A.B. DE C.V.
AZTECA	TV AZTECA, S.A.B. DE C.V.
BACHOCO	INDUSTRIAS BACHOCO, S.A.B. DE C.V.
BAFAR	GRUPO BAFAR, S.A.B. DE C.V.
BBVA	BANCO BILBAO VIZCAYA ARGENTARIA, S.A.
BEVIDES	FARMACIAS BENAVIDES, S.A.B. DE C.V.
BIMBO	GRUPO BIMBO, S.A.B. DE C.V.
BOLSA	BOLSA MEXICANA DE VALORES, S.A.B. DE C.V.
C	CITIGROUP INC.
CABLE	EMPRESAS CABLEVISION, S.A. DE C.V.
CEMEX	CEMEX, S.A.B. DE C.V.
CERAMIC	INTERNACIONAL DE CERAMICA, S.A.B. DE C.V.
CHDRAUI	GRUPO COMERCIAL CHEDRAUI, S.A.B. DE C.V.
CIDMEGA	GRUPE, S.A.B. DE C.V.
CIE	CORPORACION INTERAMERICANA DE ENTRETENIMIENTO, S.A.B. DE C.V.
CMOCTEZ	CORPORACION MOCTEZUMA, S.A.B. DE C.V.
CMR	CMR, S.A.B. DE C.V.
COLLADO	G COLLADO, S.A.B. DE C.V.
COMERCI	CONTROLADORA COMERCIAL MEXICANA, S.A.B. DE C.V.
COMPARC	COMPARTAMOS, S.A.B. DE C.V.
CONVER	CONVERTIDORA INDUSTRIAL, S.A.B. DE C.V.
CREAL	CREDITO REAL, S.A.B. DE C.V., SOFOM, E.N.R.
CULTIBA	ORGANIZACIÓN CULTIBA, S.A.B. DE C.V.
CYDSASA	CYDSA, S.A.B. DE C.V.
DANHOS	BANCO NACIONAL DE MÉXICO, S.A. INTEGRANTE DEL GRUPO FINANCIERO BANAMEX, DIVISIÓN FIDUCIARIA
DINE	DINE, S.A.B. DE C.V.
EDOARDO	EDOARDOS MARTIN, S.A.B. DE C.V.
ELEKTRA	GRUPO ELEKTRA, S.A.B. DE C.V.
FEMSA	FOMENTO ECONÓMICO MEXICANO, S.A.B. DE C.V.
FIBRAMQ	DEUTSCHE BANK, S.A., INSTITUCION DE BANCA MULTIPLE
FIHO	DEUTSCHE BANK MÉXICO, S.A. INSTITUCIÓN DE BANCA MÚLTIPLE, DIVISIÓN FIDUCIARIA
FINAMEX	CASA DE BOLSA FINAMEX, S.A.B. DE C.V.
FINDEP	FINANCIERA INDEPENDENCIA, S.A.B. DE C.V. SOFOM, E.N.R.
FINN	DEUTSCHE BANK MÉXICO. S.A. INSTITUCIÓN DE BANCA MÚLTIPLE, DIVISIÓN FIDUCIARIA
FRAGUA	CORPORATIVO FRAGUA, S.A.B. DE C.V.
FRES	FRESNILLO PLC
FSHOP	THE BANK OF NEW YORK MELLON, S.A., INSTITUCION DE BANCA MULTIPLE
FUNO	DEUTSCHE BANK MEXICO, S.A., INSTITUCION DE BANCA MULTIPLE
GAP	GRUPO AEROPORTUARIO DEL PACIFICO, S.A.B. DE C.V.
GBM	CORPORATIVO GBM, S.A.B. DE C. V.
GCARSO	GRUPO CARSO, S.A.B. DE C.V.
GCC	GRUPO CEMENTOS DE CHIHUAHUA, S.A.B. DE C.V.

GENSEG	GENERAL DE SEGUROS, S.A.B.
GEO	CORPORACION GEO, S.A.B. DE C.V.
GFAMSA	GRUPO FAMSA, S.A.B. DE C.V.
GFINBUR	GRUPO FINANCIERO INBURSA, S.A.B. DE C.V.
GFINTER	GRUPO FINANCIERO INTERACCIONES, S.A. DE C.V.
GFMULTI	GRUPO FINANCIERO MULTIVA S.A.B. DE C.V.
GFNORTE	GRUPO FINANCIERO BANORTE, S.A.B DE C.V.
GFREGIO	BANREGIO GRUPO FINANCIERO, S.A.B. DE C.V.
GIGANTE	GRUPO GIGANTE, S.A.B. DE C.V.
GISSA	GRUPO INDUSTRIAL SALTILLO, S.A.B. DE C.V.
GMACMA	GRUPO MAC MA, S.A.B. DE C.V.
GMD	GRUPO MEXICANO DE DESARROLLO, S.A.B.
GMDR	GMD RESORTS, S.A.B.
GMEXICO	GRUPO MEXICO, S.A.B. DE C.V.
GMODELO	GRUPO MODELO, S.A.B. DE C.V.
GNP	GRUPO NACIONAL PROVINCIAL, S.A.B.
GOMO	GRUPO COMERCIAL GOMO, S.A. DE C.V.
GPH	GRUPO PALACIO DE HIERRO, S.A.B. DE C.V.
GPROFUT	GRUPO PROFUTURO, S.A.B. DE C.V.
GRUMA	GRUMA, S.A.B. DE C.V.
GSANBOR	GRUPO SANBORNS, S.A.B. DE C.V.
HCITY	HOTELES CITY EXPRESS, S.A.B. DE C.V.
HERDEZ	GRUPO HERDEZ, S.A.B. DE C.V.
HILASAL	HILASAL MEXICANA S.A.B. DE C.V.
HOGAR	CONSORCIO HOGAR, S.A.B. DE C.V.
HOMEX	DESARROLLADORA HOMEX, S.A.B. DE C.V.
IASASA	INDUSTRIA AUTOMOTRIZ, S.A. DE C.V.
ICA	EMPRESAS ICA, S.A.B. DE C.V.
ICH	INDUSTRIAS CH, S.A.B. DE C.V.
IDEAL	IMPULSORA DEL DESARROLLO Y EL EMPLEO EN AMERICA LATINA, S.A.B. DE C.V.
IENOVA	INFRAESTRUCTURA ENERGETICA NOVA, S.A.B. DE C.V.
INCARSO	INMUEBLES CARSO, S.A.B. DE C.V.
INVEX	INVEX CONTROLADORA, S.A.B. DE C.V.
KIMBER	KIMBERLY - CLARK DE MEXICO S.A.B. DE C.V.
KOF	COCA-COLA FEMSA, S.A.B. DE C.V.
KUO	GRUPO KUO, S.A.B. DE C.V.
LAB	GENOMMA LAB INTERNACIONAL, S.A.B. DE C.V.
LALA	GRUPO LALA, S.A.B. DE C.V.
LAMOSA	GRUPO LAMOSA, S.A.B. DE C.V.
LASEG	LA LATINOAMERICANA SEGUROS, S.A.
LIVEPOL	EL PUERTO DE LIVERPOOL, S.A.B. DE C.V.
MASECA	GRUPO INDUSTRIAL MASECA, S.A.B. DE C.V.
MAXCOM	MAXCOM TELECOMUNICACIONES, S.A.B. DE C.V.
MEDICA	MEDICA SUR, S.A.B. DE C.V.
MEGA	MEGACABLE HOLDINGS, S.A.B. DE C.V.
MEXCHEM	MEXICHEM, S.A.B. DE C.V.
MFRISCO	MINERA FRISCO, S.A.B. DE C.V.
MINSA	GRUPO MINSA, S.A.B. DE C.V.
MONEX	HOLDING MONEX, S.A.B. DE C.V.
NUTRISA	GRUPO NUTRISA, S.A.B. DE C. V.
OHLMEX	OHL MEXICO, S.A.B. DE C.V.
OMA	GRUPO AEROPORTUARIO DEL CENTRO NORTE, S.A.B. DE C.V.
PAPPEL	BIO PAPPEL, S.A.B. DE C.V.
PASA	PROMOTORA AMBIENTAL, S.A.B. DE C.V.
PE & OLES	INDUSTRIAS PEÑOLES, S. A.B. DE C. V.
PINFRA	PROMOTORA Y OPERADORA DE INFRAESTRUCTURA, S.A.B. DE C.V.
POCHTEC	GRUPO POCHTECA, S.A.B. DE C.V.
POSADAS	GRUPO POSADAS, S.A.B. DE C.V.
PROCORP	PROCORP, S.A. DE C.V., SOCIEDAD DE INV. DE CAPITAL DE RIESGO
PV	PEÑA VERDE S.A.B.
QBINDUS	Q.B. INDUSTRIAS, S.A. DE C.V.
QC	QUÁLITAS CONTROLADORA, S.A.B. DE C.V.
QUMMA	GRUPO QUMMA, S.A. DE C.V.
RCENTRO	GRUPO RADIO CENTRO, S.A.B. DE C.V.
REALTUR	REAL TURISMO S.A. DE C.V.
SAB	GRUPO CASA SABA, S.A.B. DE C.V.

SAN	BANCO SANTANDER, S.A.
SANLUIS	SANLUIS CORPORACION, S.A.B. DE C. V.
SANMEX	GRUPO FINANCIERO SANTANDER MEXICO, S.A.B. DE C.V.
SARE	SARE HOLDING, S.A.B. DE C.V.
SAVIA	SAVIA, S.A. DE C.V.
SIMEC	GRUPO SIMEC, S.A.B. DE C.V.
SORIANA	ORGANIZACION SORIANA, S.A.B. DE C.V.
SPORT	GRUPO SPORTS WORLD, S.A.B. DE C.V.
TEAK	PROTEAK UNO, S.A.B. DE C.V.
TEKCHEM	TEKCHEM, S.A.B. DE C.V.
TERRA	THE BANK OF NEW YORK MELLON, S.A., INSTITUCIÓN DE BANCA MÚLTIPLE
TLEVISA	GRUPO TELEVISA, S.A.B.
TMM	GRUPO TMM, S.A.
TS	TENARIS S.A.
URBI	URBI DESARROLLOS URBANOS, S.A.B. DE C.V.
VALUEGF	VALUE GRUPO FINANCIERO, S.A.B. DE C.V.
VASCONI	GRUPO VASCONIA S.A.B.
VESTA	CORPORACIÓN INMOBILIARIA VESTA, S.A.B. DE C.V.
VITRO	VITRO, S.A.B. DE C.V.
VOLAR	CONTROLADORA VUELA COMPAÑÍA DE AVIACIÓN, S.A.B. DE C.V.
WALMEX	WAL-MART DE MEXICO, S.A.B. DE C.V.

Fuente: Bolsa Mexicana de Valores (www.bmv.com.mx)

Apéndice B

Construcción de Índices Accionarios

B.1. Emisoras que conforman el IPC

Cuadro B.1: Datos al cierre del 09/02/2016.

Emisoras del IPC		
AC	GFNORTE	MEXCHEM
ALFA	GFREGIO	NEMAK
ALSEA	GMEXICO	OHLMEX
AMX	GRUMA	OMA
ASUR	ICA	PE&OLES
BIMBO	ICH	PINFRA
CEMEX	IENOVA	SANMEX
ELEKTRA	KIMBER	SIMEC
FEMSA	KOF	SITES
GAP	LAB	TLEVISA
GCARSO	LACOMER	WALMEX
GENTERA	LALA	
GFINBUR	LIVEPOL	

Fuente: Bolsa Mexicana de Valores (www.bmv.com.mx)

B.2. Matriz varianza-covarianza

Primeras seis filas de la matriz de varianza-covarianza de los log-rendimientos.

	AC	ALFA	ALSEA	AMX	ASUR
AC	1.221600e-04	4.274274e-05	-2.798523e-06	1.850524e-05	8.239299e-06
ALFA	4.274274e-05	4.058160e-04	1.628898e-04	1.425292e-04	1.131832e-04
ALSEA	-2.798523e-06	1.628898e-04	2.691668e-04	6.254992e-05	8.587888e-05
AMX	1.850524e-05	1.425292e-04	6.254992e-05	5.238162e-04	4.486962e-05
ASUR	8.239299e-06	1.131832e-04	8.587888e-05	4.486962e-05	1.703537e-04
BIMBO	3.614063e-05	9.570647e-05	7.251180e-05	4.323193e-05	2.238289e-05

	BIMBO	CEMEX	ELEKTRA	FEMSA	GAP
AC	3.614063e-05	7.638723e-05	2.343202e-05	4.582689e-05	3.093204e-05
ALFA	9.570647e-05	3.423669e-04	1.265645e-04	6.872936e-05	1.335474e-04
ALSEA	7.251180e-05	1.828953e-04	1.348055e-04	7.495577e-05	4.474100e-05
AMX	4.323193e-05	4.218166e-04	-1.184369e-06	2.668162e-05	3.053961e-05
ASUR	2.238289e-05	1.971378e-04	5.122318e-05	4.728429e-05	3.814936e-05
BIMBO	2.010604e-04	1.085567e-04	4.539160e-05	8.420367e-05	2.806894e-05

	GCARSO	GENTERA	GFINBUR	GFNORTE	GFREGIO
AC	4.700473e-05	5.531072e-05	2.554493e-05	3.708537e-05	2.663305e-06
ALFA	2.995485e-04	2.274378e-04	1.264967e-04	2.835938e-04	9.125169e-05
ALSEA	8.987991e-05	1.247195e-04	4.481230e-05	1.327273e-04	2.306622e-05
AMX	1.431156e-04	1.641832e-04	9.872799e-05	8.590155e-05	1.511454e-05
ASUR	8.907532e-05	1.262271e-04	9.038956e-05	1.011966e-04	4.120400e-05
BIMBO	1.448134e-04	6.961757e-05	8.784204e-05	9.654585e-05	3.300168e-05

	GMEXICO	GRUMA	ICA	ICH	IENOVA
AC	1.481675e-05	5.800526e-05	-0.0000587674	-1.953902e-05	1.290755e-05
ALFA	2.097123e-04	8.192120e-05	0.0007247127	3.613889e-05	-5.779472e-05
ALSEA	2.387599e-05	1.555082e-05	0.0003733368	5.843287e-05	-2.486524e-05
AMX	2.160014e-04	7.781772e-06	0.0006087442	5.691794e-05	5.789994e-05
ASUR	8.811806e-05	5.069814e-05	0.0002004875	-9.731996e-07	-6.622529e-06
BIMBO	6.403974e-05	8.967731e-05	0.0005413171	1.845778e-05	4.049674e-05

	KIMBER	KOF	LAB	LACOMER	LALA
AC	3.522024e-05	3.267902e-05	6.248454e-08	-1.006854e-05	1.144726e-05
ALFA	1.050507e-04	8.769584e-05	5.421589e-05	-6.261130e-05	1.134583e-04
ALSEA	8.681912e-05	3.432628e-05	6.901255e-05	-4.834824e-05	5.221953e-05
AMX	5.129255e-05	8.088741e-05	-1.629810e-06	-7.761081e-07	-2.585747e-05
ASUR	7.107074e-05	8.366227e-05	-3.096344e-06	1.387822e-05	2.509395e-05
BIMBO	5.851754e-05	3.491021e-05	1.361001e-05	-5.723918e-06	9.385137e-05

	LIVEPOL	MEXCHEM	NEMAK	OHLMEX	OMA
AC	1.617546e-05	2.961314e-06	-4.347856e-06	-2.699498e-05	4.802802e-05
ALFA	1.031752e-04	1.934195e-04	8.471952e-05	4.749639e-05	9.990415e-05
ALSEA	1.191976e-05	9.466571e-05	1.071093e-04	1.001494e-04	8.450576e-05
AMX	7.448016e-05	1.738978e-04	5.340054e-05	4.835205e-05	9.684276e-05
ASUR	6.433308e-05	7.192533e-05	6.817441e-05	4.174446e-05	2.992684e-05
BIMBO	9.810328e-05	6.875642e-05	2.453778e-05	4.994373e-05	5.813221e-05

	PE.OLES	PINFRA	SANMEX	SIMEC	SITES
AC	-5.906653e-06	-2.097306e-05	1.185515e-06	-6.364145e-06	4.970335e-05
ALFA	1.305627e-04	1.569190e-04	1.088074e-04	1.074850e-04	-2.498577e-05

```
ALSEA  1.040351e-05  5.960717e-05 8.501661e-05  6.638581e-05 -5.126770e-05
AMX    3.437733e-05  1.070409e-04 1.091254e-04  8.515427e-05  1.949259e-05
ASUR   3.274060e-05  6.034813e-05 7.147662e-05  5.124412e-05 -5.722339e-05
BIMBO  1.209723e-04  6.126537e-05 2.429245e-05  1.417857e-05  1.347581e-05
           TLEVISA        WALMEX
AC    2.768306e-05  2.612657e-05
ALFA  4.828919e-05  6.766842e-05
ALSEA 8.430073e-05  7.037943e-05
AMX   1.167995e-04  9.026053e-05
ASUR  7.851582e-05 -1.099557e-05
BIMBO 7.507000e-05  2.132933e-05
```

B.3. Matriz de correlaciones

Primeras seis filas de la matriz de correlaciones referentes a los log-rendimientos.

	AC	ALFA	ALSEA	AMX	ASUR	BIMBO	CEMEX
AC	1.00000000	0.1919699	-0.01543312	0.07315447	0.05711498	0.2306046	0.1678023
ALFA	0.19196995	1.0000000	0.49285425	0.30913608	0.43046871	0.3350529	0.4126376
ALSEA	-0.01543312	0.4928542	1.00000000	0.16658144	0.40105127	0.3116984	0.2706658
AMX	0.07315447	0.3091361	0.16658144	1.00000000	0.15020598	0.1332146	0.4474823
ASUR	0.05711498	0.4304687	0.40105127	0.15020598	1.00000000	0.1209420	0.3667210
BIMBO	0.23060461	0.3350529	0.31169845	0.13321462	0.12094196	1.0000000	0.1858809

	ELEKTRA	FEMSA	GAP	GCARSO	GENTERA	GFINBUR	GFNORTE
AC	0.104672892	0.33560175	0.18218043	0.1914485	0.2334090	0.1366389	0.1599947
ALFA	0.310196128	0.27615062	0.43154726	0.6693871	0.5265878	0.3712349	0.6712734
ALSEA	0.405682153	0.36979640	0.17752216	0.2466191	0.3545655	0.1614808	0.3857596
AMX	-0.002554974	0.09436068	0.08686236	0.2814960	0.3345893	0.2550264	0.1789694
ASUR	0.193766978	0.29323069	0.19026950	0.3072249	0.4510761	0.4094273	0.3697066
BIMBO	0.158052429	0.48065784	0.12886068	0.4597484	0.2289963	0.3662464	0.3246666

	GFREGIO	GMEXICO	GRUMA	ICA	ICH	IENOVA
AC	0.01675209	0.06459434	0.33778740	-0.04763178	-0.119265478	0.07211232
ALFA	0.31491174	0.50160897	0.26174131	0.32227463	0.121028229	-0.17715506
ALSEA	0.09774131	0.07012239	0.06100747	0.20385195	0.240282957	-0.09358621
AMX	0.04591113	0.45475032	0.02188415	0.23827049	0.167778448	0.15621352
ASUR	0.21947047	0.32530832	0.25000970	0.13760573	-0.005030401	-0.03133128
BIMBO	0.16180249	0.21761670	0.40706131	0.34198990	0.087819854	0.17635459

	KIMBER	KOF	LAB	LACOMER	LALA	LIVEPOL
AC	0.2139790	0.2201497	0.0002740576	-0.035859792	0.07071583	0.09846611
ALFA	0.3501691	0.3241365	0.1304654889	-0.122347133	0.38454867	0.34459195
ALSEA	0.3553433	0.1557864	0.2039158748	-0.116004701	0.21732108	0.04888225
AMX	0.1504902	0.2631510	-0.0034520836	-0.001334868	-0.07713940	0.21895036
ASUR	0.3656441	0.4772736	-0.0115002452	0.041856558	0.13127224	0.33162945
BIMBO	0.2771189	0.1833170	0.0465295286	-0.015890434	0.45191516	0.46549470

	MEXCHEM	NEMAK	OHLMEX	OMA	PE.OLES	PINFRA
AC	0.01552009	-0.02573054	-0.1252740	0.2776993	-0.02415098	-0.1302153
ALFA	0.55617309	0.27507875	0.1209312	0.3169301	0.29289532	0.5345344
ALSEA	0.33423837	0.42702633	0.3130978	0.3291700	0.02865675	0.2493173
AMX	0.44012788	0.15261398	0.1083597	0.2704097	0.06787979	0.3209410
ASUR	0.31921290	0.34165187	0.1640460	0.1465311	0.11336232	0.3172873
BIMBO	0.28088223	0.11319053	0.1806592	0.2619981	0.38554966	0.2964944

	SANMEX	SIMEC	SITES	TLEVISA	WALMEX
AC	0.006550791	-0.03822647	0.26103275	0.1550747	0.12261329
ALFA	0.329871627	0.35421897	-0.07199493	0.1484146	0.17423728
ALSEA	0.316478460	0.26862918	-0.18138730	0.3181353	0.22251262
AMX	0.291197407	0.24700494	0.04943721	0.3159678	0.20456346
ASUR	0.334456266	0.26064955	-0.25449051	0.3724540	-0.04369803
BIMBO	0.104630677	0.06638312	0.05516524	0.3277890	0.07802495

B.4. Componentes principales

```
Standard deviations:
 [1] 0.114439968 0.056329711 0.032977548 0.029486699 0.027135402 0.025452311 0.024858996
 [8] 0.021946840 0.021364176 0.020096617 0.018965183 0.018610144 0.017287844 0.016893187
[15] 0.016229135 0.014564051 0.014117857 0.013277272 0.012383615 0.011933907 0.011274279
[22] 0.010961510 0.009966332 0.009876368 0.008680263 0.008021788 0.007562198 0.007193727
[29] 0.006862020 0.005845087 0.005278972 0.004988651 0.004509361 0.003186492 0.002737814
[36] 0.002107963 0.001758748

Rotation:
                 PC1         PC2          PC3          PC4          PC5          PC6
AC       0.002277514  0.04369484 -0.048393496  0.056690970 -0.005754371  0.067960648
ALFA    -0.069039858  0.21616305 -0.212824009  0.143377244  0.062960013  0.058972716
ALSEA   -0.035752926  0.11275942 -0.132998417 -0.057737800  0.257937841  0.132173499
AMX     -0.056011819  0.18403586  0.030224004 -0.064638293 -0.397389360  0.142554952
ASUR    -0.021518197  0.11318769 -0.028908233  0.083981236  0.083756048  0.040505395
BIMBO   -0.047333333  0.06735499 -0.093704928  0.114375187  0.058094762 -0.132220503
CEMEX   -0.071052517  0.63721091  0.408344766 -0.305009812 -0.140598557  0.025473094
ELEKTRA -0.054942073  0.11262475 -0.032242816 -0.306832594  0.236644872 -0.023041771
FEMSA   -0.021190498  0.04401783 -0.124358486  0.126700885  0.095036330  0.019514798
GAP     -0.036177203  0.07078616 -0.200333817  0.045285893 -0.051062121  0.036665443
GCARSO  -0.056342918  0.22069621 -0.245295420  0.135679656 -0.190727814 -0.082753630
GENTERA -0.032953200  0.25325735 -0.080259183  0.241147178  0.110405619  0.055620313
GFINBUR -0.029971734  0.16403511 -0.100245045  0.075296671 -0.023353014 -0.088859378
GFNORTE -0.071871956  0.19371042 -0.102547697  0.263241640  0.263185923  0.115108159
GFREGIO -0.013844320  0.08178686  0.052409627  0.024850381  0.228384303 -0.031842525
GMEXICO -0.045607540  0.24384751  0.034339819  0.051610648 -0.274999566  0.010925044
GRUMA   -0.031853940  0.06378516 -0.067215436  0.229886198  0.067673339  0.111647774
ICA     -0.970279244 -0.19627824  0.061442187 -0.008941161 -0.043362851  0.047275247
ICH     -0.016285735  0.03744538 -0.065347117 -0.157497150  0.020137902 -0.022675482
IENOVA  -0.022158978 -0.02186583  0.084344650 -0.175631617  0.004178300 -0.320582290
KIMBER  -0.038222971  0.08543993  0.004081893  0.173094959  0.168623901  0.202661139
KOF      0.001866336  0.11288935 -0.050708117  0.191067312 -0.070452485 -0.020608621
LAB     -0.015808147  0.06443193  0.116592273 -0.302199520  0.350732215  0.133189869
LACOMER  0.036661517  0.03783836  0.586136390  0.442485106  0.058902922  0.013660189
LALA    -0.047378947  0.05742283 -0.137726730  0.012331155  0.153737853 -0.112506973
LIVEPOL -0.040163916  0.07053862 -0.048217081  0.196535274 -0.086382225 -0.105696413
MEXCHEM -0.043248592  0.17941964 -0.107091623 -0.040657636 -0.174006161  0.003091118
NEMAK   -0.014569950  0.09063396 -0.166701868 -0.197967567  0.078208395  0.094723447
OHLMEX  -0.030855258  0.08999222 -0.020867324 -0.037991027  0.288356301 -0.318454178
OMA     -0.032076637  0.08653576 -0.033596420  0.061505556  0.173489911  0.079101710
PE.OLES -0.071622493  0.10183231 -0.011238369  0.086063155  0.004893146 -0.720498009
PINFRA  -0.041296441  0.12739548 -0.038357114  0.003647967  0.072971076 -0.165322168
SANMEX  -0.043184437  0.16631649  0.081066638 -0.008579577  0.082139901  0.139936607
SIMEC   -0.017362624  0.13500050 -0.057726245 -0.115015879  0.001339750 -0.052253735
SITES    0.004847817 -0.03287031 -0.123292826 -0.041486646 -0.180475420  0.094638996
TLEVISA -0.041446800  0.07969599 -0.063369026 -0.116486752  0.125820086  0.055953537
```

WALMEX	0.027434546	0.06363209	-0.370688891	-0.073937685	-0.139960648	0.033504453

	PC7	PC8	PC9	PC10	PC11	PC12
AC	-0.07227637	0.14328777	-0.139087985	0.063208844	-0.096007760	-0.2145336590
ALFA	-0.14135799	-0.08802622	0.049485637	-0.213793614	0.123980114	0.1833949985
ALSEA	0.11233376	-0.05558184	-0.006032796	-0.159160814	-0.254009282	0.2121660364
AMX	0.38325342	0.26685857	-0.168920687	-0.268655660	0.040171714	0.1367253458
ASUR	0.04238377	0.01510732	0.097519988	-0.012804534	-0.115556678	0.0895577592
BIMBO	-0.04903417	0.08159350	-0.232139320	-0.104794773	-0.092880901	-0.1124382814
CEMEX	-0.10752528	-0.08453924	-0.103803805	0.279794780	-0.072231358	-0.0417059509
ELEKTRA	-0.37093772	0.16133134	0.113808626	-0.039704935	-0.438856944	0.0620300031
FEMSA	0.08751481	0.05937405	-0.106336302	0.013922828	-0.282289281	-0.0004130246
GAP	-0.10748844	-0.06707749	-0.035980101	0.321148911	0.057238414	-0.0224411866
GCARSO	-0.33272784	-0.04335395	0.049199020	-0.387969964	0.036130180	-0.0854308217
GENTERA	0.20081273	0.03764945	0.211303783	0.148026578	0.025236181	-0.3317373001
GFINBUR	-0.09398662	0.18624767	0.131520570	0.033963635	0.120858155	0.0951463566
GFNORTE	-0.13067562	0.16329113	0.087123054	0.101756866	0.096924872	0.2832754985
GFREGIO	-0.10778944	0.21590324	0.116313258	0.007286306	0.276999946	0.1927814389
GMEXICO	-0.01302428	0.05916794	0.253629243	-0.077750616	0.230814233	-0.1917433549
GRUMA	-0.03685225	-0.23031981	-0.273891733	0.095568680	-0.051043533	-0.2897677252
ICA	0.01345159	-0.03500233	0.008918622	0.015708001	-0.000247056	0.0016289156
ICH	0.06813003	-0.20668475	0.206060708	-0.250949744	-0.198639474	-0.2228054490
IENOVA	0.06638066	0.35472892	-0.109626117	-0.180944502	-0.203179520	-0.0860715659
KIMBER	0.05338687	0.10427460	-0.003689816	-0.055346912	-0.178916059	-0.1185100344
KOF	0.08027916	0.03853521	0.009163604	-0.191138073	-0.150339493	-0.0628015048
LAB	-0.14184272	-0.12166853	-0.389805684	-0.272473156	0.383799575	-0.1482454621
LACOMER	-0.01904542	-0.10343732	-0.199269825	-0.210538702	-0.144690922	0.1427216311
LALA	-0.05772686	-0.19753030	-0.171947176	0.031701204	0.164387917	-0.2041412628
LIVEPOL	-0.04984867	0.08505014	-0.235259528	0.122125939	-0.112950111	0.0069207829
MEXCHEM	0.02750674	-0.13878853	-0.085032215	-0.071813407	0.116657322	0.3382689414
NEMAK	0.05062544	0.03494712	0.029966185	-0.036976974	-0.043337324	0.0494845239
OHLMEX	0.44333407	0.05770801	0.022590176	0.069596180	0.183626762	0.0178220677
OMA	0.16634049	0.27436898	-0.077910882	-0.126723839	0.101367021	-0.2377885308
PE.OLES	-0.06091861	-0.05706401	-0.040110048	0.100776440	-0.029534085	0.0078992122
PINFRA	0.04204041	-0.07721816	-0.134646330	-0.088642243	0.026974874	0.1412408392
SANMEX	0.14619360	-0.10240641	0.143547847	0.258194974	-0.124310763	0.0160858667
SIMEC	0.17116178	-0.24515362	0.209019161	-0.180672411	-0.059648566	-0.2006801795
SITES	-0.22581351	0.38629586	-0.192869515	0.139329311	0.027235856	-0.1903570480
TLEVISA	0.19917790	0.23100773	-0.131010868	0.083673755	0.048272105	0.0217250827
WALMEX	0.18293338	-0.21481229	-0.375159791	0.134420746	-0.146397176	0.1877295440

	PC13	PC14	PC15	PC16	PC17	PC18
AC	0.016964126	0.034254203	0.04558042	-0.04625070	-0.255533378	0.094272051
ALFA	-0.155465957	-0.271122857	0.01868661	-0.00549566	-0.020693514	-0.080133628
ALSEA	-0.019358237	-0.071495791	-0.16527370	-0.08029729	-0.186972451	-0.375351110
AMX	-0.231588973	-0.047209433	0.31154091	-0.13868537	0.112010756	-0.010514931
ASUR	0.343251419	-0.041126123	-0.02585061	-0.18650341	0.162243953	0.029777489
BIMBO	0.146021012	0.193365184	0.03748325	0.12635729	-0.044062144	-0.261912867
CEMEX	0.036356596	0.060266892	-0.11740134	0.04518405	-0.079923869	0.021476399

ELEKTRA	-0.136055701	-0.020572489	0.06038732	0.03445225	0.054030149	0.048392673
FEMSA	0.001689025	0.214616350	0.08585135	0.09440218	-0.124323925	-0.149376444
GAP	-0.010083877	-0.359862478	0.17361297	-0.06481540	-0.334059607	-0.023801703
GCARSO	0.025029965	0.198341844	-0.16635185	-0.12915891	0.012076288	-0.009413056
GENTERA	-0.115294394	-0.088373178	0.07270661	-0.43900969	0.085732820	-0.224386789
GFINBUR	0.125818609	0.507456154	0.08880846	-0.12583259	-0.039097683	0.192777003
GFNORTE	-0.113711320	-0.051047433	0.12835415	0.26913189	0.038187635	0.286305935
GFREGIO	-0.073317446	0.128192285	0.26963417	-0.05248248	-0.063064655	0.038059709
GMEXICO	0.166268425	-0.189507143	-0.04136736	0.46337011	0.061776191	-0.098127092
GRUMA	0.075627544	0.194119064	0.07434887	-0.13453918	0.164694413	0.261090517
ICA	0.000605116	0.027456486	-0.03661341	-0.01600971	-0.021963844	0.025410735
ICH	-0.206712710	0.089417039	0.34985846	0.13796508	0.007866785	-0.109967722
IENOVA	0.144318961	-0.171248830	0.07757189	0.00556927	-0.083028006	0.215960395
KIMBER	0.077146963	-0.125619551	-0.10557889	0.20457876	0.186146022	-0.037871193
KOF	0.163592908	0.001908919	-0.11761999	-0.03260916	-0.176977998	0.180146711
LAB	-0.008191878	-0.059104185	0.09037062	-0.21488508	0.044048409	0.003461346
LACOMER	-0.078995629	-0.012760579	-0.04425906	0.04758633	-0.114313053	-0.035279459
LALA	0.090929275	-0.013686326	0.06917830	0.34355442	-0.049644037	-0.144240864
LIVEPOL	0.090066633	-0.233569306	0.05987327	-0.04536852	0.349489768	0.012253479
MEXCHEM	0.141636413	0.062741107	-0.13706876	-0.09548435	-0.231534466	-0.159018116
NEMAK	0.220635935	-0.209334394	-0.33996972	-0.16162563	0.221740607	0.184298562
OHLMEX	-0.133049347	0.197510604	-0.39366669	0.11221956	0.022827233	-0.028868180
OMA	-0.194228399	-0.167160150	-0.15602413	0.04946755	-0.331770624	0.262783300
PE.OLES	-0.107468854	-0.194199788	0.08997890	-0.17662263	-0.046043699	-0.063658073
PINFRA	-0.183833243	0.006207036	0.03015167	0.13326012	0.474035514	0.005924379
SANMEX	-0.191515418	0.114945398	0.06099773	-0.03958360	0.057142390	-0.006512511
SIMEC	-0.025692395	0.042689589	0.05300175	0.05807448	-0.029178030	0.255674434
SITES	-0.362653915	0.131206105	-0.28071404	0.03580652	0.113381014	-0.254736093
TLEVISA	0.449653838	0.055806266	0.31206418	0.09843022	0.022035203	-0.233901473
WALMEX	-0.146683469	0.043604670	0.01680489	0.16094753	-0.077865075	0.256883227

	PC19	PC20	PC21	PC22	PC23	PC24
AC	0.122997551	0.0456946285	-0.143355599	-0.409541437	0.22432842	0.02818880
ALFA	0.133896894	0.1637001372	0.041673277	-0.328139095	0.27799371	-0.07183598
ALSEA	-0.181445427	-0.1360871602	0.311413603	-0.041670709	-0.03874132	-0.01250501
AMX	-0.067964795	-0.2596441321	-0.028991766	-0.063674532	0.04610945	0.01499976
ASUR	0.216930694	0.0647324736	0.201724150	0.230984632	0.39064032	-0.23506944
BIMBO	-0.437190535	0.1232633023	-0.034584578	-0.055330144	-0.17215135	-0.01489372
CEMEX	-0.061362978	-0.0195498994	-0.008429173	-0.125090154	0.06379251	-0.10228442
ELEKTRA	0.146211231	-0.1083863889	0.121356346	-0.007063035	-0.02570817	0.19895589
FEMSA	0.183394643	0.2891408076	0.010727468	-0.086809445	-0.02742617	-0.20197109
GAP	0.001204705	-0.1792851436	0.028681512	0.325565110	0.03410158	-0.02185717
GCARSO	-0.129566945	-0.0854183652	-0.080136792	0.059524348	0.16079544	0.33106328
GENTERA	0.112822469	-0.1344400597	-0.003737238	-0.139702600	-0.20793519	-0.08766086
GFINBUR	0.051398744	-0.2029229352	0.307402999	0.086591867	-0.28651696	-0.13884224
GFNORTE	-0.110402012	-0.0963165068	-0.117108697	-0.078940098	-0.14611912	0.04763254
GFREGIO	-0.178211187	0.1467593537	-0.166365575	0.120346215	0.19606713	-0.32557248
GMEXICO	0.017196693	0.0435392535	0.260108176	0.043192268	-0.06842563	0.07870559
GRUMA	-0.123432118	-0.0573906469	-0.067796588	-0.068025438	0.20973093	0.10099800

ICA	0.018140010	-0.0066444679	0.022065355	-0.003718747	0.00058469	-0.03022079
ICH	-0.195742802	-0.0256883693	-0.122029574	0.297841029	0.12510847	-0.15766547
IENOVA	0.037915057	-0.0004935139	-0.156683642	-0.023450499	0.02781944	-0.13870132
KIMBER	0.146171031	-0.1537424351	-0.371454159	0.015758339	-0.36181022	-0.03639510
KOF	0.323149487	-0.0365683816	-0.068688244	0.347623604	-0.01050417	0.04575772
LAB	0.164821559	0.0662039661	0.119312417	0.136639985	-0.25194155	0.04384845
LACOMER	-0.024305833	-0.1488892897	0.078303755	0.142297484	0.06338943	-0.09542003
LALA	0.065058304	-0.3045618380	-0.091793243	0.051442879	0.15032926	-0.24473157
LIVEPOL	-0.228844637	0.3727196331	0.279281769	0.082630448	-0.09938059	-0.06918250
MEXCHEM	0.122675661	0.2845273635	-0.409355604	0.094722946	-0.20693359	-0.03366776
NEMAK	-0.368734563	-0.1424005892	-0.224339162	0.075103014	0.04048760	-0.21807075
OHLMEX	0.007320117	-0.1029202431	0.045614557	-0.025603230	0.20193315	0.07880736
OMA	-0.138395328	0.2424151866	0.141745437	0.161720596	0.03262655	0.17266086
PE.OLES	0.008267690	-0.0453814106	-0.077854049	0.026794402	-0.12065945	0.10279956
PINFRA	0.281719919	0.0640905918	-0.061720065	0.050903879	0.06383320	0.07601228
SANMEX	-0.077221940	0.2718055988	-0.170796692	0.312025535	0.06647955	0.34482303
SIMEC	0.062762398	0.2910285836	0.087456224	-0.135366331	-0.17426648	-0.24775948
SITES	0.144919268	0.0612458745	-0.023933276	0.231450400	0.08029756	-0.25204866
TLEVISA	0.091834917	0.0154535097	-0.008900861	0.022080749	0.14223155	0.33729802
WALMEX	0.039564110	-0.1101629941	0.175672994	0.046623801	-0.08017741	-0.05352114

	PC25	PC26	PC27	PC28	PC29	PC30
AC	0.01701647	0.004796645	0.219001514	-4.172217e-01	-0.130037463	-0.064714702
ALFA	0.10063823	0.242178813	0.069062794	-1.448866e-01	0.067355138	-0.043826871
ALSEA	-0.16077572	0.013179348	0.133799502	5.126239e-02	0.182848335	0.079727855
AMX	-0.03505254	-0.129829150	-0.151367107	3.598208e-02	-0.237386443	0.156650854
ASUR	-0.16915663	0.070327367	0.039858375	-2.500146e-02	-0.168181592	0.186822157
BIMBO	0.09162491	0.229634854	-0.214464968	-2.053606e-01	0.079027214	0.238942307
CEMEX	-0.11619402	0.018253487	0.146337792	1.425462e-01	0.028719950	0.071099251
ELEKTRA	0.13447945	-0.185706718	-0.325214080	-7.498790e-02	-0.164298286	0.062986264
FEMSA	0.15570346	-0.122116576	-0.245332833	1.883218e-01	-0.326722395	-0.118169892
GAP	-0.21095052	0.196771833	-0.296629762	-5.631604e-02	-0.142283436	-0.294605606
GCARSO	-0.01868044	-0.005363858	0.135786435	3.023082e-01	-0.080350527	-0.208600330
GENTERA	0.25871930	0.005013599	-0.057266929	1.348588e-01	0.194547098	-0.063536383
GFINBUR	-0.09136303	0.295334431	0.037428656	-1.475871e-01	-0.048907412	-0.060987242
GFNORTE	-0.05532717	-0.264016136	0.044475515	1.507622e-01	0.159334874	-0.144830607
GFREGIO	0.13600869	-0.083145788	0.073968650	-6.928215e-02	-0.014991456	0.176354375
GMEXICO	0.24261248	-0.020928354	-0.152682266	-2.591262e-01	-0.069711449	-0.030970089
GRUMA	-0.14175385	-0.079089381	-0.284071588	-6.491314e-02	0.040108310	0.015286279
ICA	0.02654503	-0.003269962	0.027263928	-1.308462e-02	0.026482821	-0.005267978
ICH	-0.12556011	-0.032438148	0.242924845	-1.768799e-01	-0.040666643	-0.224140277
IENOVA	0.17396605	0.383447190	0.001413494	2.666342e-01	0.185823885	-0.286644295
KIMBER	-0.26780374	0.177089093	0.267711878	-1.050006e-01	-0.292237376	0.056044714
KOF	0.25084405	-0.244705629	0.131070425	-7.615475e-02	0.176547630	0.233604579
LAB	0.14918080	-0.042316908	0.083206745	-9.473343e-02	-0.131595358	-0.115101669
LACOMER	0.06849454	-0.034916600	-0.133728036	-1.508218e-01	0.124047445	-0.259990808
LALA	0.14677280	-0.037804994	-0.017591536	3.690303e-01	-0.052503435	0.243463298
LIVEPOL	0.01878880	-0.149560213	0.252169269	1.443685e-01	-0.212626490	-0.177533765
MEXCHEM	-0.09207145	-0.071708554	-0.182695262	-1.806634e-03	-0.056767848	-0.082258829

NEMAK	0.18139979	-0.101526261	-0.177615277	-2.396498e-01	0.056913449	-0.070589802
OHLMEX	0.01847911	-0.081000066	-0.021651610	-7.811283e-02	-0.281982750	-0.305908241
OMA	-0.24761516	0.083633149	-0.072560630	1.178990e-01	-0.012094012	0.277264519
PE.OLES	-0.12135292	-0.216127600	0.101748255	-2.199767e-01	-0.009342658	0.209164720
PINFRA	-0.18798723	0.312630490	-0.219782425	-4.661078e-02	0.215472047	0.093622178
SANMEX	0.31804590	0.259808413	0.069094827	-6.251666e-03	0.003898098	0.041682031
SIMEC	-0.25296365	-0.195111703	-0.155462089	4.007313e-05	0.232275856	-0.105776718
SITES	-0.11434870	-0.147533882	0.012125725	-9.600073e-02	0.278483510	-0.103493058
TLEVISA	-0.14316613	-0.195628532	0.054964766	-6.784508e-02	0.331091803	-0.191063526
WALMEX	0.25881101	0.048750958	0.224051715	-1.157782e-01	0.112871960	-0.006188606

	PC31	PC32	PC33	PC34	PC35	PC36
AC	-0.111994038	0.43205264	0.051629208	0.096466638	0.2406782147	-0.005756083
ALFA	0.021702358	-0.43739595	0.243704335	-0.003268826	-0.2278029229	0.063771628
ALSEA	-0.261296349	0.08316764	-0.260003470	0.129121474	0.0273411091	-0.257868807
AMX	-0.113174398	-0.04062607	0.133575629	-0.048336279	0.0683954745	-0.106842385
ASUR	-0.195110333	0.16692960	0.026282053	-0.357816509	0.0831131915	0.083606723
BIMBO	-0.033409183	-0.09492280	0.198826868	-0.025913585	0.2846713627	0.049332885
CEMEX	0.095318928	-0.07187810	0.005481575	0.154496329	-0.0588960775	0.001681097
ELEKTRA	0.064924068	-0.12659988	-0.035445783	-0.107158488	0.1592837227	0.263863954
FEMSA	0.150601549	0.14707174	0.004191245	0.129148305	-0.4016575630	-0.295974781
GAP	0.092919592	-0.05718081	0.053014482	0.139456292	0.2193088797	-0.196121348
GCARSO	0.232698582	0.13512257	-0.060045090	-0.139998080	0.1070594018	-0.167503042
GENTERA	0.116777436	0.10921349	-0.126017694	-0.037194571	0.0698808532	0.267350980
GFINBUR	-0.034139181	-0.01392594	0.177131887	0.069464962	-0.1936507254	0.066681723
GFNORTE	-0.343049655	0.17841918	0.118358579	0.003105653	0.0008034331	0.001477451
GFREGIO	0.276414214	-0.09692435	-0.418786305	-0.001158220	0.1966336289	-0.161353869
GMEXICO	-0.149116254	0.10540385	-0.329178916	-0.064729018	-0.0953760458	-0.081345293
GRUMA	-0.280318355	-0.29439441	-0.356961950	0.027244319	-0.1763164899	-0.020806612
ICA	0.038828726	0.01569783	-0.017643357	0.009311356	0.0096238680	0.007933611
ICH	-0.082579542	0.05330362	-0.009952191	0.180461655	-0.1767157112	0.304020947
IENOVA	-0.256279518	-0.07055922	-0.184848627	-0.074863229	-0.0201468171	-0.045124015
KIMBER	0.158067655	-0.21117952	-0.113204246	-0.168333164	0.0118375372	-0.119388740
KOF	-0.042591344	-0.23018545	0.101263633	0.453045863	0.1425024390	-0.081407999
LAB	-0.131815689	0.05506140	0.034414852	-0.025841072	-0.0183808969	-0.127792786
LACOMER	0.164881646	0.09084160	0.073779464	-0.191571935	-0.0049385221	0.075422909
LALA	-0.069214978	0.09891786	0.241427462	-0.087251013	0.0403704508	0.097609713
LIVEPOL	-0.002074094	-0.05720660	0.060824867	0.189031134	0.1794012966	0.161443315
MEXCHEM	-0.204111680	0.05110280	-0.152783753	-0.068467477	0.0297555426	0.393250654
NEMAK	0.166698886	0.19187478	0.186083829	0.059846070	-0.2424895684	-0.078086807
OHLMEX	-0.046455266	-0.19820264	0.003639267	0.053622998	0.1994203555	0.062174368
OMA	0.177864707	0.12810786	-0.004430446	-0.035430534	-0.2142591171	0.261486411
PE.OLES	-0.049112959	0.05467962	0.007325003	-0.184475500	-0.2757569320	-0.172759702
PINFRA	0.149139106	0.33959147	-0.091498724	0.346480971	0.1014543869	-0.026258542
SANMEX	-0.200014649	0.03815879	0.210757572	-0.212381558	0.0008637451	-0.237863493
SIMEC	0.069366147	-0.06249916	0.177869703	-0.243057215	0.3042247214	-0.257141202
SITES	-0.131964638	-0.07506511	0.055281534	-0.158948037	-0.0402186859	-0.074563033
TLEVISA	0.257477100	-0.07503415	0.090450840	-0.104600604	-0.1149295640	0.032877379
WALMEX	0.227292649	0.03225806	-0.228346459	-0.285155488	0.0205132340	0.099621272

	PC37
AC	-0.185686577
ALFA	-0.026254852
ALSEA	-0.224514734
AMX	-0.050424778
ASUR	0.307025702
BIMBO	0.348995272
CEMEX	0.169994657
ELEKTRA	-0.133832198
FEMSA	0.149347356
GAP	0.066579611
GCARSO	0.053037090
GENTERA	0.091286368
GFINBUR	-0.274030012
GFNORTE	0.288755668
GFREGIO	-0.124068596
GMEXICO	-0.039837592
GRUMA	-0.114384143
ICA	0.019854942
ICH	0.118516040
IENOVA	-0.018621670
KIMBER	-0.056371039
KOF	0.062978076
LAB	0.142798865
LACOMER	-0.133409471
LALA	-0.373097053
LIVEPOL	-0.273532210
MEXCHEM	-0.173092591
NEMAK	-0.110708950
OHLMEX	0.068604809
OMA	-0.059966892
PE.OLES	-0.002561025
PINFRA	-0.029028917
SANMEX	-0.227354484
SIMEC	-0.147981402
SITES	-0.013876936
TLEVISA	-0.081948789
WALMEX	0.128772165

B.5. Primera componente principal

Cuadro B.2: Primer componente ordenado, separado por signos y con sus respectivos pesos.

Emisoras(−)	a_i	**Emisoras(+)**	a_i	**Emisoras(−)**	w_i^-	**Emisoras(+)**	w_i^+
GFREGIO	-0.01384	KOF	0.00187	GFREGIO	0.63 %	KOF	2.55 %
NEMAK	-0.01457	AC	0.00228	NEMAK	0.67 %	AC	3.12 %
LAB	-0.01581	SITES	0.00485	LAB	0.72 %	SITES	6.63 %
ICH	-0.01629	WALMEX	0.02743	ICH	0.75 %	WALMEX	37.54 %
SIMEC	-0.01736	LACOMER	0.03666	SIMEC	0.80 %	LACOMER	50.16 %
FEMSA	-0.02119	**TOTAL**	**0.07309**	FEMSA	0.97 %	**TOTAL**	**100 %**
ASUR	-0.02152			ASUR	0.99 %		
IENOVA	-0.02216			IENOVA	1.02 %		
GFINBUR	-0.02997			GFINBUR	1.37 %		
OHLMEX	-0.03086			OHLMEX	1.41 %		
GRUMA	-0.03185			GRUMA	1.46 %		
OMA	-0.03208			OMA	1.47 %		
GENTERA	-0.03295			GENTERA	1.51 %		
ALSEA	-0.03575			ALSEA	1.64 %		
GAP	-0.03618			GAP	1.66 %		
KIMBER	-0.03822			KIMBER	1.75 %		
LIVEPOL	-0.04016			LIVEPOL	1.84 %		
PINFRA	-0.04130			PINFRA	1.89 %		
TLEVISA	-0.04145			TLEVISA	1.90 %		
SANMEX	-0.04318			SANMEX	1.98 %		
MEXCHEM	-0.04325			MEXCHEM	1.98 %		
GMEXICO	-0.04561			GMEXICO	2.09 %		
BIMBO	-0.04733			BIMBO	2.17 %		
LALA	-0.04738			LALA	2.17 %		
ELEKTRA	-0.05494			ELEKTRA	2.52 %		
AMX	-0.05601			AMX	2.57 %		
GCARSO	-0.05634			GCARSO	2.58 %		
ALFA	-0.06904			ALFA	3.16 %		
CEMEX	-0.07105			CEMEX	3.26 %		
PEÑOLES	-0.07162			PEÑOLES	3.28 %		
GFNORTE	-0.07187			GFNORTE	3.29 %		
ICA	-0.97028			ICA	44.48 %		
TOTAL	**-2.18143**			**TOTAL**	**100 %**		

Bibliografía

[1] *"Ingeniería Financiera I"*. Lawrence Galitz, 1994.

[2] *"Prontuario Bursátil y Financiero"*. Gonzalo Cortina Ortega, 1986. (reimpresión 1999)

[3] *"El Dinero y la Política Monetaria en México"*. Ernesto Ramírez Solano, 2009.

[4] *"Mercados e Instituciones Financieras"*, Frank J. Fabozzi, Franco Modigliani, Michael G. Ferri, 1996.

[5] *"La Bolsa: Funcionamiento y técnicas para invertir"*, Oriol Amat Salas, 2004

[6] *"Inversiones"*, Robert W. Kolb, 2001

[7] *"Invierte en la Bolsa: Guía Para Inversiones Seguras Y Productivas"*, Alfedro Díaz Mata, 1988

[8] *"El Mercado Mexicano de Dinero, Capitales y productos Derivados: Sus instrumentos y usos"*, Francisco Javier Vega Rodríguez, Luz Elvira Quiroz, Margarita Araux, 1998

[9] *"Los Mercados de Valores: Organización y funcionamiento"*, Joaquín López Pascual, Javier Rojo Suárez, 2004.

[10] *"A first Course in Probability"*, Sheldon Ross, 5th ed.

[11] *"Teoría de la medida"*, Gravinsky, th ed.

[12] *"Financial Modelling with jump processes"*, Rama Cont, Peter Tankov

[13] *"Quantitative risk management"*, Alexander J. McNeil, Rudiger Frey y Paul Embrechts

[14] *"Analysis of Financial Time Series"*, Ruey S. Tsay, Second Edition

[15] *"Options, Futures and Other Derivates"*, Jhon C.Hull.

[16] *"Monte Carlo Methods in Financial Engineering"*, Paul Glasserman.

[17] *"Monte Carlo Methods and Models in Finance and Insurance"*, Ralf Korn, Elke Korn and Gerald Kroisandt.

[18] *"Option Pricing when Underlying Stock returns are Discontinuous (Journal of Financial Economics 3 (1976))"*, Robert C. Merton