Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

El Laplaciano en una variedad

T E S I S

Que para obtener el título de
Matemático

Presenta
Alberto Lazcano García.

Director de tesis:
Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco.

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., Noviembre 2019

A mis papás,
mis hermanos,
mi familia,
mi tutor,
mis amigos.

Índice general

Introducción

Un problema general de la geometría de variedades consiste en encontrar maneras de caracterizar a algunos de estos objetos. En el caso de las técnicas del llamado análisis geométrico, se busca aplicar técnicas del análisis, particularmente del análisis funcional. Una de estas técnicas consiste en la introducción del operador laplaciano y el estudio de sus valores propios, el llamado *espectro del laplaciano.*

En esta tesis se presenta un resultado en esta dirección, el teorema de Lichnerowicz-Obata, (véase [12] y [13]), el cual establece una cota para el primer valor propio no nulo del laplaciano, y, lo más importante desde el punto de vista geométrico, también establece que si se alcanza dicha cota, la variedad en cuestión es una esfera.

Para exponer de manera adecuada este resultado, requeriremos otros resultados importantes en sí mismos, como son la fórmula de Bochner-Lichnerowicz (véase [4]) y las llamadas fórmulas de Minkowski (véase [12]).

En cuanto a la estructura de esta tesis, encontraremos cuatro capítulos. A continuación, veremos una descripción de cada uno de estos capítulos y sus secciones.

En el primer capítulo, aparecen los conceptos y resultados que, aunque no forman parte estrictamente del objetivo propuesto, son fundamentales para poder llevarlo a cabo.

El capítulo dos está dedicado a construir herramientas que nos permitan trabajar con funciones en una variedad. En la primera sección definiremos operadores asociados a la métrica, en particular definiremos al laplaciano en una variedad. La sección 2.2 tiene como objetivo dar las primeras propiedades del laplaciano en una variedad. En la tercera sección se definen los conceptos básicos de curvatura. Por último, en la sección cuatro daremos una expresión para el laplaciano en términos de la curvatura media, la cual nos será de gran utilidad en el capítulo cuatro.

En el tercer capítulo se aborda el problema del espectro del laplaciano en $\mathbb{R}^n$. En las primeras dos secciones se definen algunos conceptos del análisis funcional que serán de gran ayuda. En la tercera sección enunciaremos el teorema espectral (3.20), el cual será de vital importancia para construir dicho espectro. En la cuarta sección abordaremos el problema de Dirichlet y daremos una expresión para el espectro bajo estas condiciones.

El cuarto y último capítulo, dividido en seis secciones, tiene como objetivo demostrar el teorema de Lichnerowicz-Obata. Para ello, en la primera sección estudiaremos los valores propios del laplaciano y daremos una caracterización para el primer valor propio. Una vez hecho esto, en la segunda sección demostraremos las fórmulas de Minkowski, necesarias para dar las estimaciones del primer valor propio no nulo del laplaciano, las cuales se darán en la tercera sección. En la cuarta sección estudiaremos los valores propios del laplaciano en la esfera y daremos la caracterización de los mismos. Por último, en las dos secciones restantes, demostraremos las fórmulas de Bochner-Lichnerowicz, las cuales nos ayudarán a probar el teorema de Lichnerowicz-Obata.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Campos vectoriales

Definición 1.1 (Campo vectorial)**.**
Un *campo vectorial* X en una variedad diferenciable M, es una correspondencia que asocia a cada punto $p \in M$ un vector $X(p) \in T_pM$. El campo es diferenciable si el mapeo $X : M \to TM$ es diferenciable.

Si consideramos una parametrización $\varphi \colon U \subset \mathbb{R}^n \to M$, podemos escribir a X como

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} x_i(p)\partial_i, \tag{1.1}$$

donde cada $x_i : U \to \mathbb{R}$ es una función en U y $\{\partial_i\}$ es la base asociada a la parametrización φ, $i = 1, \ldots, n$. X es diferenciable, si y sólo si, las funciones x_i lo son para cualquier parametrización elegida. Al conjunto que consiste de campos vectoriales diferenciables en M lo denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$.

Podemos pensar que un campo vectorial es un mapeo $X : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ dado por

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^{n} x_i(p)\partial_i f(p), \tag{1.2}$$

donde $\mathcal{C}^\infty(M)$ es el conjunto de funciones diferenciables en M.

Lema 1.2.
Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, existe un único campo vectorial Z tal que, para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$

$$Zf = (XY - YX)f. \tag{1.3}$$

Demostración.
Primero probemos que si Z existe, entonces es único. Sean $p \in M$ y $x : U \to M$ una parametrización en M, entonces podemos escribir a X y Y como

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i\partial_i, \qquad Y = \sum_{j=1^n} y_j\partial_j,$$

entonces para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ sucede que

$$(XY)f = X\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\partial_j f\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i\partial_i y_j\partial_j f + \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j\partial_i\partial_j f,$$
$$(YX)f = Y\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\partial_i f\right) = \sum_{i,j=1}^{n} y_j\partial_j x_i\partial_i f + \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j\partial_i\partial_j f,$$

así Z está definido por

$$Zf = XYf - YXf = \sum_{i,j=1}^{n}(x_i\partial_i y_j - y_i\partial_i x_j)\partial_j f,$$

lo cual prueba la unicidad de Z.
Para probar la existencia, definamos Z_α en cada vecindad coordenada $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ mediante la expresión anterior; por unicidad $Z_\alpha = Z_\beta$ en $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, lo cual nos permite definir Z en toda la variedad. $\square$

El campo vectorial Z recibe el nombre de *corchete* y lo denotaremos por

$$[X, Y]f = XYf - YXf. \tag{1.4}$$

Proposición 1.3.
Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, entonces

a) $[X, Y] = -[Y, X]$.

b) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ *(Identidad de Jacobi).*

c) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

Demostración.
La prueba de *a)* es inmediata.
Para probar *b)* observemos que

$$[[X, Y], Z] = [XY - YX, Z] = XYZ - YXZ - ZXY + ZYX;$$
$$[[Y, Z], X] = [YZ - ZY, X] = YZX - ZYX - XYZ + XZY;$$
$$[[Z, X], Y] = [ZX - XZ, Y] = ZXY - XZY - YZX + YXZ.$$

Por lo que es fácil ver que $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.
Por último para probar *c)*, hagamos el cálculo directo

$$\begin{aligned}[fX, gY] &= fX(gY) - gY(fX) = fgXY + fX(g)Y - gfYX - gY(f)X \\ &= fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X.\end{aligned}$$

$\square$

1.2. Métricas riemannianas

Definición 1.4 (Métrica riemanniana)**.**
Dada una variedad diferenciable M, se define una *métrica riemanniana* g en M como el mapeo que asocia a cada $p \in M$, un producto interno $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ que satisface la siguiente propiedad: Si U es cualquier conjunto abierto en M y $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, entonces la función $g(X,Y) : U \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(X,Y)(p) = g_p(X_{|p}, Y_{|p}), \tag{1.5}$$

es diferenciable en U.

Definición 1.5 (Variedad riemanniana)**.**
Una *variedad riemanniana* (M, g), es una pareja donde M es una variedad diferenciable y g es una métrica riemanniana.

Observación 1.6.
Cuando sólo es una métrica riemanniana la que consideramos, la denotaremos por $\langle\ ,\rangle$ en lugar de $g(\ ,\ )$.

Sea $x : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de una variedad riemanniana M. Entonces para cada $p \in U$, la matriz $G(p)$ dada por

$$G(p) = (g_{ij}(p)), \qquad g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle, \tag{1.6}$$

es simétrica definida positiva y las funciones $g_{ij} : U \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, \dots, n$, son de clase $\mathcal{C}^\infty$ en U. Inversamente, dada cualquier variedad M de dimensión n, y una carta $x : U \to \mathbb{R}^n$ de M, éstas determinan de manera local una métrica riemanniana en U, especificando una función de clase $\mathcal{C}^\infty$ de U, al espacio de matrices simétricas positivas definidas de $n \times n$. Dada la matriz G denotamos a la inversa G^{-1} como

$$G^{-1} = (g^{ij}). \tag{1.7}$$

1.3. Conexiones

Definición 1.7 (Conexión)**.**
Una *conexión afín* en una variedad diferenciable M, es un mapeo $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, que asocia a cada pareja $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ otro campo $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$, que satisface las siguientes propiedades:

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$.
2. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$.
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$.

donde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Esta definición nos permite mostrar que la noción de conexión afín es una noción local. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ como en (1.1)

$$X = \sum_{i=1}^n x_i \partial_i, \qquad Y = \sum_{j=1}^n y_j \partial_j, \tag{1.8}$$

entonces

$$\nabla_Y X = \nabla_{\sum\limits_{j=1}^{n} y_j\partial_j} \sum_{i=1}^{n} x_i\partial_i = \sum_{i,j=1}^{n} y_j \nabla_{\partial_j} x_i\partial_i = \sum_{i,j=1}^{n} y_j\big(x_i\nabla_{\partial_j}\partial_i + \partial_j(x_i)\partial_i\big).$$

Reescribiendo $\nabla_{\partial_j}\partial_i$ como $\sum\limits_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k\partial_k$ tenemos

$$\begin{aligned}\nabla_Y X &= \sum_{i,j=1}^{n} y_j \left(x_i \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k\partial_k + \partial_j(x_i)\partial_i\right) = \sum_{i,j,k=1}^{n} y_j x_i \Gamma_{ij}^k \partial_k + \sum_{j,k=1}^{n} y_j\partial_j(x_k)\partial_k \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} y_j \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\Gamma_{ij}^k + \partial_j(x_k)\right)\partial_k.\end{aligned}$$

Finalmente lo escribiremos como

$$\nabla_Y X = \sum_{j,k=1}^{n} y_j \left(\partial_j(x_k) + \sum_{i=1}^{n} x_i\Gamma_{ij}^k\right)\partial_k, \tag{1.9}$$

lo cual prueba que dado un punto $p \in M$, la conexión $\nabla_Y X(p)$ depende de $x_i(p), y_j(p)$ y de la derivada de X en la dirección de $Y(p)$, además podemos concluir que las funciones $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$ son diferenciables; a estas funciones se les conoce como *símbolos de Christoffel*.

Ahora que hemos probado que la conexión es una noción de carácter local, usaremos este hecho para definir una "derivada a lo largo de una curva" usando una conexión ∇.

Proposición 1.8.
Sea M una variedad diferenciable con una conexión ∇. Entonces existe una única transformación que asocia a cada campo vectorial X a lo largo de una curva $\alpha : I \to M$ otro campo vectorial denotado por $\dfrac{DX}{dt}$ a lo largo de α, llamado derivada covariante de X, tal que

a) $\dfrac{D}{dt}(X+Y) = \dfrac{DX}{dt} + \dfrac{DY}{dt}$.

b) $\dfrac{D}{dt}(fX) = f\dfrac{DX}{dt} + \dfrac{df}{dt}X$, *con f una función diferenciable en I.*

c) Si $V = Y(\alpha(t))$, entonces $\dfrac{DV}{dt} = \nabla_{\alpha'(t)}Y$.

Demostración.
Supongamos primero que existe tal transformación. Podemos expresar a V y α como

$$V = \sum_{i=1}^{n} v_i\partial_i, \quad \alpha' = \sum_{j=1}^{n} a_j'\partial_j,$$

donde $v_i = v_i(t)$, $\partial_i = \partial_i(t)$ y $a_j = a_j(t)$. Por *a)* y *b)* tenemos

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dv_i}{dt}\partial_i + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{D\partial_i}{dt};$$

por *c)* y la definición (1.7)

$$\frac{D\partial_i}{dt} = \nabla_{\alpha'(t)}\partial_i = \nabla_{\sum_j a'_j \partial_i} = \sum_{i,j=1}^{n} a'_j \nabla_{\partial_j}\partial_i;$$

entonces

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dv_i}{dt}\partial_i + \sum_{i,j=1}^{n} a'_j v_i \nabla_{\partial_j}\partial_i;$$

haciendo un cambio de índice y renombrando las componentes de $\alpha'(t)$ como $a'_j = \dfrac{dx_j}{dt}$ tenemos que

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{dv_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{dx_j}{dt} v_i \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k. \tag{1.10}$$

Puesto que la expresión (1.10) sólo depende de a_j, v_i y los símbolos de Christoffel, podemos concluir la unicidad de la derivada covariante y al dar la expresión de ésta hemos probado su existencia. □

Armados con este "nuevo" operador, el concepto de *campo paralelo* surge de manera natural.

Definición 1.9 (Campo paralelo)**.**
Sea M una variedad con una conexión ∇. Un campo vectorial V a lo largo de una curva $\alpha : I \to M$, es llamado *paralelo* cuando $DV/dt = 0$, para toda $t \in I$.

Consideremos V un campo paralelo. Por (1.10) tenemos lo siguiente

$$0 = \frac{DV}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{dv_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{dx_j}{dt} v_i \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k;$$

el sistema de n ecuaciones diferenciales en v_k determinado por

$$\frac{dv_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{dx_j}{dt} v_i \Gamma_{ij}^k = 0, \tag{1.11}$$

posee una única solución siempre que tengamos una condición inicial $v_k(t_0)$, de esta forma V es único.

Proposición 1.10 (Transporte paralelo)**.**
Sean M una variedad diferenciable con una conexión ∇, $\alpha : I \to M$ una curva diferenciable en M y $v_o \in T_{\alpha(t_0)M}$. Entonces existe un único campo vectorial V paralelo a lo largo de α, tal que $V(t_0) = v_0$. $V(t)$ es llamado el transporte paralelo de v_0 a lo largo de α.

1.4. Conexiones riemannianas

Definición 1.11 (Conexión compatible)**.**
Sea M una variedad riemanniana con una conexión ∇. Diremos que la conexión es compatible con la métrica $\langle\ ,\ \rangle$, cuando para cualquier curva suave $\alpha : I \to M$ y cualquier par de campos vectoriales paralelos P y P', el producto interno $\langle P, P'\rangle$ es constante.

Proposición 1.12.
Una conexión ∇ en una variedad riemanniana M es compatible con la métrica si y sólo si, para cualesquiera campos vectoriales V y W a lo largo de una curva diferenciable $\alpha : I \to M$

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle. \tag{1.12}$$

Demostración.
Supongamos que ∇ es compatible con la métrica.
Sea $\{P_1(t_0), \ldots, P_n(t_0)\}$ una base ortonormal de $T_{\alpha(t_0)}M$ con $t_0 \in I$. Por la proposición (1.10) podemos extender cada vector $P_i(t_0)$ a lo largo de α, como ∇ es compatible con la métrica entonces $\langle P_i(t), P_j(t)\rangle = 0$ para toda $t \in I$ si $i \neq j$, es decir $\{P_1(t), \ldots, P_n(t)\}$ es una base ortonormal de $T_{\alpha(t)}M$ para toda $t \in I$, por lo que podemos escribir a V y W como

$$V = \sum_{i=1}^{n} v_i P_i, \quad W = \sum_{i=1}^{n} w_i P_i,$$

donde v_i y w_i son funciones diferenciables en I, entonces

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dv_i}{dt} P_i, \quad \frac{DW}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dw_i}{dt} P_i,$$

pues $\dfrac{DP_i}{dt} = 0$ por la definición de campo paralelo. Así,

$$\left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dv_i}{dt} w_i + \frac{dw_i}{dt} v_i \right) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = \frac{d}{dt}\langle V, W\rangle.$$

De manera inversa, si (1.12) se cumple, es inmediato ver que ∇ es compatible con la métrica. □

Corolario 1.13.
Una conexión ∇ en una variedad riemanniana M es compatible con la métrica, si y sólo si,

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \qquad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \tag{1.13}$$

Definición 1.14 (Conexión simétrica)**.**
Una conexión ∇ en una variedad diferenciable M es *simétrica* si

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad \text{para todas } X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{1.14}$$

Observación 1.15.
Si en la definición anterior tomamos $X = \partial_j$ y $Y = \partial_i$ entonces

$$\nabla_{\partial_j}\partial_i - \nabla_{\partial_i}\partial_j = [\partial_j\partial_i - \partial_i\partial_j] = 0;$$

por otro lado

$$\nabla_{\partial_j}\partial_i - \nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_{k=1}^{n}\left\{\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k\right\}\partial_k,$$

por lo que podemos concluir que si la conexión ∇ es simétrica entonces $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Teorema 1.16 (Levi-Civita)**.**
Sea M una variedad riemanniana, entonces existe una única conexión ∇ (de ahora en adelante llamada conexión de Levi-Civita) que cumple con ser simétrica y compatible con la métrica.

Demostración.
Supongamos primero la existencia de ∇. Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, como ∇ es compatible con la métrica tenemos que

$$\begin{aligned}
X\langle Y, Z\rangle &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle;\\
Y\langle Z, X\rangle &= \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle;\\
Z\langle X, Y\rangle &= \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle;
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
2\langle \nabla_Y X, Z\rangle \quad = \quad & X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle\\
& -\langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Esto prueba la unicidad de ∇ determinada por la métrica.
Para probar la existencia definamos ∇ como en (1.15), entonces ∇ está bien definida y cumple con ser simétrica y compatible con la métrica. □

A la expresión (1.15) se de conoce como la *fórmula de Koszul* y a la conexión ∇ dada por ésta fórmula como la *conexión de Levi-Civita (o riemanniana).*

Ahora que hemos probado que dada una variedad riemanniana M existe una única conexión riemanniana, podemos dar una expresión explicita para los símbolos de Christoffel asociados a esta conexión.

Proposición 1.17.
Sea M una variedad riemanniana y ∇ su conexión riemanniana. Los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k están dados por la expresión

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} g^{km}\left\{\partial_i g_{mj} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij}\right\}. \tag{1.16}$$

Demostración.
Como ∇ es compatible con la métrica, entonces si en (1.13) hacemos $X = \partial_j, Y = \partial_i$ y $Z = \partial_m$

tenemos

$$\begin{aligned}\partial_j\langle \partial_i, \partial_m\rangle &= \langle \nabla_{\partial_j}\partial_i, \partial_m\rangle + \langle \partial_i, \nabla_{\partial_j}\partial_m\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \partial_k, \partial_m \right\rangle + \left\langle \partial_i, \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{mj}^k \partial_k \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \Gamma_{ij}^k g_{km} + g_{ik}\Gamma_{mj}^k \right\},\end{aligned}$$

es decir

$$\partial_j g_{im} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \Gamma_{ij}^k g_{km} + g_{ik}\Gamma_{mj}^k \right\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\partial_i g_{mj} &= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \Gamma_{mi}^k g_{kj} + g_{mk}\Gamma_{ji}^k \right\}; \\ \partial_j g_{im} &= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \Gamma_{ij}^k g_{km} + g_{ik}\Gamma_{mj}^k \right\}; \\ \partial_m g_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \Gamma_{im}^k g_{kj} + g_{ik}\Gamma_{jm}^k \right\};\end{aligned}$$

de manera que

$$\partial_i g_{mj} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} 2\Gamma_{ij}^k g_{km}.$$

Como la matriz (g_{km}) tiene inversa dada por (g^{km}), podemos multiplicar ambos lados de la expresión anterior por $\frac{1}{2}g^{km}$ y sumar sobre el índice m, así

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} g^{km}\left\{ \partial_i g_{mj} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij} \right\}.$$

□

Capítulo 2

Operadores en una variedad

2.1. Cuatro operadores importantes

En lo que sigue M es una variedad riemanniana y ∇ es su conexión de Levi-Civita.

Definición 2.1 (Campo gradiente)**.**
Sea $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, el *campo gradiente de* f *en* M denotado por $\operatorname{grad} f$, está definido por

$$\langle \operatorname{grad} f, X\rangle = X(f), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.1}$$

Proposición 2.2.
Sea M una variedad riemanniana. El gradiente cumple las siguientes propiedades:

a) $\operatorname{grad}(f+h) = \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} h$.

b) $\operatorname{grad}(fh) = f \operatorname{grad} h + h \operatorname{grad} f$.

para todas $f, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Definición 2.3 (Divergencia)**.**
Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Definimos la *divergencia de* X *con respecto a la métrica riemanniana*, denotada por $\operatorname{div} X$, como

$$\operatorname{div} X = \operatorname{tr}(Y \mapsto \nabla_Y X), \tag{2.2}$$

donde tr denota la traza del mapeo.

A partir de esta definición resulta sencillo obtener una primera expresión para la divergencia de un campo, pues por (1.9) sabemos que

$$\nabla_Y X = \sum_{j,k=1}^{n} y_j \left\{ \partial_j x_k + \sum_{i=1}^{n} x_i \Gamma_{ij}^k \right\} \partial_k,$$

entonces

$$\operatorname{div} X = \operatorname{tr}(Y \mapsto \nabla_X Y) = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \partial_j x_j + \sum_{i=1}^{n} x_i \Gamma_{ij}^j \right\}. \tag{2.3}$$

Proposición 2.4.
Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. La divergencia cumple las siguientes propiedades:

a) $\operatorname{div}(X+Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y$.

b) $\operatorname{div}(fX) = \langle \operatorname{grad} f, X\rangle + f \operatorname{div} X$.

Ahora que hemos dado la definición de los operadores grad y div y algunas de sus propiedades, de manera natural surge pensar en el operador *laplaciano*.

Definición 2.5 (Laplaciano)**.**
Sea $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. El *laplaciano de f* se define como

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f). \tag{2.4}$$

Notemos que el laplaciano es un operador de $\mathcal{C}^\infty(M)$ en $\mathcal{C}^\infty(M)$.

Proposición 2.6.
Sean $f, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$, el laplaciano cumple las siguientes propiedades:

a) $\Delta(f+h) = \Delta f + \Delta h$.

b) $\Delta(fh) = f\Delta h + h\Delta f + 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h\rangle$.

Demostración.
La prueba surge del uso directo de las proposiciones (2.2) y (2.4);

$$\begin{aligned}\Delta(f+h) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f+h)) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f + \operatorname{grad} h)\\ &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) + \operatorname{div}(\operatorname{grad} h) = \Delta f + \Delta h.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\Delta(fh) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}(fh)) = \operatorname{div}(f \operatorname{grad} h) + \operatorname{div}(h \operatorname{grad} f)\\ &= f \operatorname{div}(\operatorname{grad} h) + \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h\rangle + h \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) + \langle \operatorname{grad} h, \operatorname{grad} f\rangle\\ &= f\Delta h + h\Delta f + 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h\rangle.\end{aligned}$$

$\square$

Definición 2.7 (Hessiano)**.**
Dada una función $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, se define el operador *hessiano* como

$$\begin{array}{rccl}\operatorname{Hess} f: & \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \to & \mathcal{C}^\infty(M)\\ & (X,Y) & \mapsto & \operatorname{Hess} f(X,Y) = \langle \nabla_X(\operatorname{grad} f), Y\rangle.\end{array}$$

El operador laplaciano puede expresarse en función del operador hessiano de la siguiente forma

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(\operatorname{grad} f), E_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Hess} f(E_i, E_i) = \operatorname{tr}(\operatorname{Hess} f).$$

Proposición 2.8.
El operador hessiano es simétrico. Es decir, para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ se cumple que

$$\operatorname{Hess} f(X,Y) = \operatorname{Hess} f(Y,X).$$

Demostración.
Por el teorema (1.16) se tiene que, para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ se satisface

$$\begin{aligned}\operatorname{Hess} f(X,Y) &= \langle \nabla_X(\operatorname{grad} f), Y\rangle = X\langle \operatorname{grad} f, Y\rangle - \langle \operatorname{grad} f, \nabla_X Y\rangle \\ &= X\left(Y(f)\right) - \left(\nabla_X Y\right)(f).\end{aligned}$$

De manera análoga

$$\operatorname{Hess} f(Y,X) = Y(X(f)) - (\nabla_Y X)f.$$

Finalmente, por el teorema (1.16) sabemos que

$$X\left(Y(f)\right) - \left(\nabla_X Y\right)(f) = Y(X(f)) - (\nabla_Y X)f.$$

Por tanto $\operatorname{Hess} f(X,Y) = \operatorname{Hess} f(Y,X)$. □

2.2. Fórmulas de Green

Dada M una variedad riemannniana orientable, con la métrica riemanniana está asociada una teoría de integración, en la cual

1. La función f es medible si para toda carta $x : U \to \mathbb{R}^n$ en M, $f \circ x^{-1}$ es medible en la imagen de U en $\mathbb{R}^n$.

2. Para cada cubierta $\{x_\alpha : U \to \mathbb{R}^n : \alpha \in I\}$ de M, dada por cartas con partición de la unidad subordinada $\{\phi_\alpha : \alpha \in I\}$, la *medida riemanniana de M* está dada por la densidad

$$dV = \sum_\alpha \phi_\alpha \sqrt{g_\alpha} dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^n, \tag{2.5}$$

donde $dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^n$ es la densidad de la medida de Lebesgue en $x_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$ y g_α es el determinante definido por (1.6) por la carta $x_\alpha : U \to \mathbb{R}^n$. El punto es que la densidad $\sqrt{g_\alpha} dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^n$ en el dominio de U es independiente de la transformación x. La partición de la unidad es entonces el medio con el cual la medida está definida globalmente en M.

A partir de este punto M denota una variedad riemanniana orientable.

Teorema 2.9 (Teorema de la divergencia (I))**.**
Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo con soporte compacto, entonces

$$\int_M (\operatorname{div} X) dV = 0. \tag{2.6}$$

Teorema 2.10 (Teorema de la divergencia para variedades con frontera)**.**
Sea (M, g) una variedad riemanniana con frontera y sea N el campo normal unitario exterior sobre la frontera de M. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ con soporte compacto, entonces

$$\int_M \operatorname{div} X = \int_{\partial M} \langle X, N\rangle. \tag{2.7}$$

Proposición 2.11 (Fórmulas de Green I)**.**
Sean $f, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ *tales que el campo* $h \operatorname{grad} f$ *tiene soporte compacto. Entonces*

$$\int_M \{h\Delta f + \langle \operatorname{grad} h, \operatorname{grad} f\rangle\}\, dV = 0; \tag{2.8}$$

si suponemos que el campo $f \operatorname{grad} h$ *también tiene soporte compacto, tenemos*

$$\int_M \{h\Delta f - f\Delta h\}\, dV = 0. \tag{2.9}$$

Demostración.
Basta ver que por la proposición (2.4) se tiene que

$$\operatorname{div}(h \operatorname{grad} f) = h\Delta f + \langle \operatorname{grad} h, \operatorname{grad} f\rangle \ , \ \operatorname{div}(f \operatorname{grad} h) = f\Delta h + \langle \operatorname{grad} h, \operatorname{grad} f\rangle.$$

Sustituyendo estas expresiones en el *teorema de la divergencia* se obtienen fácilmente (2.8) y (2.9).
□

2.3. Curvatura

Definición 2.12 (Curvatura)**.**
El *tensor de curvatura* R de una variedad riemanniana M es la transformación $R\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \qquad \forall\, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Proposición 2.13.
Sean $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$*, el tensor* R *cumple las siguientes propiedades:*

a) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$.

b) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(X,Y)W, Z\rangle$.

c) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ *(identidad de Bianchi).*

d) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(Z,W)X, Y\rangle$.

Definición 2.14 (Tensor de Ricci)**.**
Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, se define el tensor de *Ricci* como

$$\operatorname{Ric}(X,Y) = \operatorname{tr}\left(\langle R(X,\cdot)Y, \cdot\rangle\right) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(X,E_i)Y, E_i\rangle,$$

donde $\{E_1, \ldots, E_n\}$ es un sistema de referencia ortonormal local.

Definición 2.15 (Curvatura escalar)**.**
Se define la *curvatura escalar* como la traza del tensor de Ricci, es decir,

$$S = \operatorname{tr}(\operatorname{Ric}) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Ric}(E_i, E_i),$$

donde $\{E_1, \ldots, E_n\}$ es un sistema de referencia ortonormal local.

2.4. Hipersuperficies

Definición 2.16 (Hipersuperficie).
Decimos que una variedad M^n es una *hipersuperficie inmersa* en $\overline{M}^{n+1}$ cuando existe una aplicación diferenciable

$$\psi\colon M^n \to \overline{M}^{n+1},$$

tal que su diferencial $d\psi_p$ es inyectiva para todo punto $p \in M$.

Observemos también que en las hipersuperficies podemos, al menos localmente, considerar un campo vectorial diferenciable N normal y unitario. De esta manera se define el *operador de forma* A de la hipersuperficie como el endomorfismo de Weingarten asociado a N (incluso aunque M no admita un normal unitario global, A está globalmente definido salvo el signo). Así, dados dos campos tangentes $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, la fórmula de Gauss está dada por

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle AX, Y\rangle N. \tag{2.10}$$

Además como N es unitario, entonces $\nabla^{\perp}_X N = 0$ y la fórmula de Weingarten queda como

$$\overline{\nabla}_X N = -AX. \tag{2.11}$$

Otra fórmula destacable es la fórmula de Codazzi. En el caso particular que la curvatura sea constante, la ecuación está dada por

$$\left(\overline{\nabla}_X A\right) Y = \left(\overline{\nabla}_Y A\right) X, \tag{2.12}$$

donde $(\nabla_X A)Y = \nabla_X(AY) - A\nabla_X Y$.
Por otro lado la función curvatura media se define como

$$H = \frac{\operatorname{tr}(A)}{n}.$$

Por último, si tenemos una inmersión $\psi\colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$, se cumple la fórmula de *Laplace-Beltrami*:

$$\Delta\psi = nHN. \tag{2.13}$$

Una prueba de esta igualdad se puede encontrar en [16].

Proposición 2.17.
Sea M^n una hipersuperficie inmersa en una variedad $\overline{M}^{n+1}$. Sean también $F \in \mathcal{C}^{\infty}\left(\overline{M}^{n+1}\right)$ y $f = F \circ \psi = F|_M$, donde $\psi\colon M \to \overline{M}^{n+1}$ es la inmersión. Entonces, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y N el campo normal unitario, se cumple lo siguiente:

a) $\overline{\operatorname{grad}} F = \operatorname{grad} f + \dfrac{\partial F}{\partial N} N.$

b) $\overline{\nabla}_X \overline{\operatorname{grad}} F = \nabla_X \operatorname{grad} f + \langle A(\operatorname{grad} f), X\rangle N + X\left(\dfrac{\partial F}{\partial N}\right) N - \dfrac{\partial F}{\partial N} AX.$

c) $\overline{\operatorname{Hess}} F(X, Y) = \operatorname{Hess} f(X, Y) - \dfrac{\partial F}{\partial N}\langle AX, Y\rangle.$

d) $\overline{\mathrm{Hess}}F(X,N) = \langle AX, \mathrm{grad}\, f\rangle + \left\langle X, \mathrm{grad}\left(\dfrac{\partial F}{\partial N}\right)\right\rangle$.

e) $\overline{\Delta}F = \Delta f - nH\dfrac{\partial F}{\partial N} + \overline{\mathrm{Hess}}F(N,N)$.

Demostración.

a) Observemos que, dado un punto $p \in M$, se tiene que

$$\overline{\mathrm{grad}}F(p) = \left(\overline{\mathrm{grad}}F(p)\right)^T + \left\langle \overline{\mathrm{grad}}F(p), N(p)\right\rangle N(p). \tag{2.14}$$

Al ser M una hipersuperficie, sabemos que

$$\left(\overline{\mathrm{grad}}F(p)\right)^\perp = \lambda N(p),$$

y multiplicando la ecuación (2.14) por $N(p)$ se tiene que $\lambda = \left\langle \overline{\mathrm{grad}}F(p), N(p)\right\rangle$.

Para calcular $\left(\overline{\mathrm{grad}}F(p)\right)^T$, sea $v \in T_pM$ un vector fijo pero arbitrario, entonces

$$\langle \mathrm{grad}\, f(p), v\rangle = v\left(f(p)\right) = \left.\frac{d}{dt}\right| f(\alpha(t)),$$

donde $\alpha\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ es una curva con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Sin embargo, $f(\alpha(t))$ se puede escribir de la siguiente manera:

$$f(\alpha(t)) = (F \circ \psi)(\alpha(t)) = F(\beta(t)),$$

con $\beta = (-\varepsilon,\varepsilon) \to \overline{M}^{n+1}$ una curva que cumple las condiciones $\beta(0) = p$ y $\beta'(0) = v$. De esta forma

$$\langle \mathrm{grad}\, f, v\rangle = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\alpha(t)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F\left(\beta(t)\right) = \left\langle \overline{\mathrm{grad}}F(p), v\right\rangle,$$

donde $\mathrm{grad}\, f(p), v \in T_pM$ y $\overline{\mathrm{grad}}F(p) \in T_p\overline{M}^{n+1}$. Por tanto, $\mathrm{grad}\, f(p) = \left(\overline{\mathrm{grad}}F(p)\right)^T$ como queríamos demostrar.

b) Consideremos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces por el inciso (a) y usando las fórmulas de Gauss y Weingarten se tiene que

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X \overline{\mathrm{grad}}F &= \overline{\nabla}_X(\mathrm{grad}\, f) + \overline{\nabla}_X\left(\left\langle \overline{\mathrm{grad}}F, N\right\rangle N\right) = \overline{\nabla}_X(\mathrm{grad}\, f) + \overline{\nabla}_X\left(\frac{\partial F}{\partial N}N\right)\\
&= \nabla_X(\mathrm{grad}\, f) + \langle A(\mathrm{grad}\, f), X\rangle N + X\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)N + \frac{\partial F}{\partial N}\overline{\nabla}_X N\\
&= \nabla_X(\mathrm{grad}\, f) + \langle A(\mathrm{grad}\, f), X\rangle N + X\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right) - \frac{\partial F}{\partial N}AX.
\end{aligned}$$

c) Como debemos multiplicar lo obtenido en el inciso anterior por un campo tangente, de dicha fórmula sólo nos interesa la parte tangente pues la otra parte se anulará. Es decir

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{Hess}}F(X,Y) = \left\langle \overline{\nabla}_X(\overline{\mathrm{grad}}F), Y\right\rangle &= \langle \nabla_X(\mathrm{grad}\, f), Y\rangle - \frac{\partial F}{\partial N}\langle AX, Y\rangle\\
&= \mathrm{Hess}\, f(X,Y) - \frac{\partial F}{\partial N}\langle AX, Y\rangle.
\end{aligned}$$

d) De forma análoga al inciso anterior, tenemos que multiplicar la fórmula del inciso *b*) por un campo normal, por lo que la parte tangente de la fórmula se anulará.

$$\begin{aligned}\overline{\text{Hess}}F(X,N) &= \left\langle \overline{\nabla}_X(\overline{\text{grad}}F), N\right\rangle = \langle AX, \text{grad}\, f\rangle + X\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)\\ &= \langle AX, \text{grad}\, f\rangle + \left\langle X, \text{grad}\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)\right\rangle.\end{aligned}$$

e) Sea $\{E_1, \ldots, E_n\}$ una base ortonormal local de TM. Entonces $\{E_1, \ldots, E_n, N\}$ es una base ortonormal local de $T\overline{M}^{n+1}$. Basta usar la fórmula *c*) y que el operador laplaciano se puede ver como la traza del hessiano.

$$\begin{aligned}\Delta f &= \sum_{i=1}^{n} \text{Hess}\, f(E_i, E_i) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\text{Hess}}F(E_i, E_i) + \frac{\partial F}{\partial N}\,\text{tr}\, A\\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \overline{\text{Hess}}F(E_i, E_i) - \overline{\text{Hess}}F(N,N) + \frac{\partial F}{\partial N} nH\\ &= \overline{\Delta}F - \overline{\text{Hess}}F(N,N) + \frac{\partial F}{\partial N} nH.\end{aligned}$$

□

La siguiente proposición nos da información acerca del cuadrado de la función *distancia euclidiana.*

Proposición 2.18.
Sea M una hipersuperficie inmersa en $\mathbb{R}^{n+1}$ mediante la inmersión $\psi\colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$. Dado un vector fijo $a \in \mathbb{R}^{n+1}$, sea $F\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \langle x - a, x - a\rangle.$$

Además, consideremos $f = F \circ \psi$. Entonces

a) $\overline{\text{grad}}F(x) = 2(x-a)$.

b) $\overline{\Delta}F = 2(n+1)$.

c) $\text{grad}\, f(p) = 2(\psi(p) - a)^T$.

d) $\Delta f(p) = 2n\,(1 + H\langle \psi(p) - a, N\rangle)$.

Demostración.

a) Sea $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{n+1})$, entonces

$$\langle \text{grad}\, F, Z\rangle = Z(F) = Z\left(\langle x-a, x-a\rangle\right) = 2\left\langle \nabla_Z(x-a), x-a\right\rangle = \langle Z, 2(x-a)\rangle.$$

b) Sea $\{E_1, \ldots, E_{n+1}\}$ una base ortonormal local de $\mathbb{R}^{n+1}$ y sea $x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Entonces

$$\overline{\Delta}F(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \left\langle \overline{\nabla}_{E_i}\overline{\nabla}F, E_i\right\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \left\langle 2\overline{\nabla}_{E_i}(x-a), E_i\right\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \langle 2E_i, E_i\rangle = 2(n+1).$$

c) Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

$$\langle \operatorname{grad} f, X\rangle = X(f) = 2\left\langle \overline{\nabla}_X(\psi - a), \psi - a\right\rangle = \langle X, 2(\psi - a)\rangle.$$

Ahora, si tenemos en cuenta que X es tangente, se tiene que

$$\operatorname{grad} f(p) = 2\left(\psi(p) - a\right)^T.$$

d) Por estar trabajando en una hipersuperficie, sabemos que la parte normal de $\psi - a$ a lo largo de M está dada por

$$(\psi - a)^\perp = \langle \psi - a, N\rangle N.$$

Así, si tomamos $X \in \mathfrak{X}(M)$ y usamos las fórmulas de Gauss y Weingarten se tiene que

$$\begin{aligned} X &= \overline{\nabla}_X(\psi - a) = \overline{\nabla}_X(\psi - a)^T + \overline{\nabla}_X(\psi - a)^\perp \\ &= \nabla_X(\psi - a)^T + \left\langle AX, (\psi - a)^T\right\rangle N + \langle \psi - a, N\rangle \overline{\nabla}_X N \\ &= \nabla_X(\psi - a)^T + \left\langle AX, (\psi - a)^T\right\rangle N - \langle \psi - a, N\rangle AX. \end{aligned}$$

Igualando partes tangentes

$$\nabla_X(\psi - a)^T = X + \langle \psi - a, N\rangle AX \tag{2.15}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces, por el inciso anterior

$$\nabla_X \operatorname{grad} f = \nabla_X\left(2(\psi - a)^T\right) = 2X + 2\langle \psi - a, N\rangle AX.$$

Así, si tomamos una base ortonormal local de M $\{E_1, \ldots, E_n\}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta f &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, E_i\rangle = \sum_{i=1}^n \langle 2E_i, E_i\rangle + \sum_{i=1}^n \langle 2\langle \psi - a, N\rangle AE_i, E_i\rangle \\ &= 2\sum_{i=1}^n \langle E_i, E_i\rangle + 2\langle \psi - a, N\rangle \sum_{i=1}^n \langle AE_i, E_i\rangle \\ &= 2n + 2\langle \psi - a, N\rangle nH = 2n\left(1 + \langle \psi - a, N\rangle H\right). \end{aligned}$$

□

Proposición 2.19.
Sea M una hipersuperficie inmersa en $\mathbb{R}^{n+1}$ mediante la inmersión $\psi\colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$. Dado un vector $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ fijo, sea $F\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \langle x - a, N\rangle,$$

con N el campo normal unitario. Consideremos además $f = F \circ \psi$, es decir,

$$f(p)\langle \psi(p) - a, N(p)\rangle.$$

Entonces

1. $\operatorname{grad} f = -A\left((\psi - a)^T\right)$.

2. $\Delta f = -n\left\langle \operatorname{grad} H, (\psi - a)^T\right\rangle - nH - f|A|^2$.

Demostración.
Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces:

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{grad} f, X\rangle &= X(f) = X\left(\langle \psi - a, N\rangle\right) = \langle \nabla_X(\psi - a), N\rangle + \langle \psi - a, \nabla_X N\rangle \\ &= \langle X.N\rangle + \langle \psi - a, -AX\rangle = -\left\langle A(\psi - a), X\right\rangle.\end{aligned}$$

Si X es un campo tangente, se tiene la prueba del primer inciso.

Para el segundo inciso, primero haremos uso de la ecuación (2.15) y la ecuación de Codazzi para calcular $\nabla_X \operatorname{grad} f$.

$$\begin{aligned}\nabla_X \operatorname{grad} f &= \nabla_X\left(-A(\psi - a)^T\right) = -\left[(\nabla_X A)\left((\psi - a)^T\right) + A\left(\nabla_X(\psi - a)^T\right)\right] \\ &= -\left[\left(\nabla_{(\psi-a)^T} A\right)(X) + A\left(X + \langle \psi - a, N\rangle AX\right)\right] \\ &= -\left(\nabla_{(\psi-a)^T}\right)(X) - AX - \langle \psi - a, N\rangle A^2 X.\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}\Delta f &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, E_i\rangle \\ &= -\left[\sum_{i=1}^{n}\left\langle \left(\nabla_{(\psi-a)^T} A\right)(E_i) + AE_i + fA^2E_i, E_i\right\rangle\right] \\ &= -\left[\operatorname{tr}\left(\nabla_{(\psi-a)^T} A\right) + \operatorname{tr}(A) + f\operatorname{tr}\left(A^2\right)\right] \\ &= -\left[\nabla_{(\psi-a)^T}\left(\operatorname{tr}(A)\right) + nH + f|A|^2\right] \\ &= -\left[\nabla_{(\psi-a)^T}(nH) + nH + f|A|^2\right] \\ &= -\left[(\psi - a)^T(nH) + nH + f|A|^2\right] \\ &= -n\left\langle \operatorname{grad} H, (\psi - a)^T\right\rangle - nH - f|A|^2.\end{aligned}$$

□

Proposición 2.20.
Sea M una hipersuperficie inmersa en $\mathbb{R}^{n+1}$ mediante la inmersión $\psi\colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$. Sean $a, c \in \mathbb{R}^{n+1}$ fijos tales que $|a| = 1$ y sea $F\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \langle x - c, a\rangle.$$

Consideremos por último $f = F \circ \psi$. Entonces se cumple lo siguiente:

a) $\operatorname{grad} f = a^T$.

b) $|\operatorname{grad} f|^2 = 1 - \langle a, N\rangle^2$.

c) $\Delta f = nH\langle a, N\rangle$.

Demostración.

1. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo tangente, entonces
$$\langle \operatorname{grad} f, X\rangle = X(f) = \overline{\nabla}_X\left(\langle \psi - c, a\rangle\right) = \left\langle \overline{\nabla}_X \psi, a\right\rangle + \left\langle \psi - c, \overline{\nabla}_X a\right\rangle = \langle X, a\rangle,$$
por lo que $\operatorname{grad} f = a^T$.

2. Observemos que podemos escribir a a como $a = a^T + \langle a, N\rangle N$, es decir, puede expresarse como
$$a = \operatorname{grad} f + \langle a, N\rangle N. \tag{2.16}$$
Entonces, usando el hecho que $|a| = 1$ se tiene que
$$|\operatorname{grad} f|^2 = 1 - \langle a, N\rangle^2.$$

3. Usando la ecuación (2.16) y las fórmulas de Gauss y Weingarten se tiene que
$$\begin{aligned} 0 = \overline{\nabla}_X a &= \overline{\nabla}_X\left(\operatorname{grad} f + \langle a, N\rangle N\right) = \overline{\nabla}_X(\operatorname{grad} f) + \overline{\nabla}_X\left(\langle a, N\rangle N\right) \\ &= \nabla_X(\operatorname{grad} f) + \langle AX, \operatorname{grad} f\rangle N + X\left(\langle a, N\rangle N\right) N - \langle a, N\rangle AX. \end{aligned}$$
Igualando partes tangentes en la expresión anterior se tiene que
$$\nabla_X(\operatorname{grad} f) = \langle a, N\rangle AX, \qquad \forall\, X \in \mathfrak{X}(M).$$
Así
$$\Delta f = nH\langle a, N\rangle.$$

□

Capítulo 3

El laplaciano en $\mathbb{R}^n$

Antes de iniciar este capítulo, supondremos que el lector está familiarizado con con conceptos como *medida de Lebesgue, integral de Lebesgue* y *espacios de Hilbert*. En lo que sigue daremos sólo algunas herramientas que nos serán de gran utilidad más adelante.

3.1. Espacios L^p

Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, sea el conjunto $\mathfrak{M}(\Omega)$ definido por

$$\mathfrak{M}(\Omega)\colon = \{f\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon f \text{ es medible }\},$$

y consideremos la relación de equivalencia dada por

$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x) \text{ c.t.p } x \in \mathbb{R}^n,$$

Al conjunto de clases de equivalencia lo denotaremos por

$$M(\Omega)\colon = \mathfrak{M}(\Omega)/\sim .$$

Definición 3.1.
Sea $p \in [1, \infty)$, definimos el espacio $L^p(\Omega)$ como

$$L^p(\Omega)\colon = \{f \in M(\Omega)\colon |f|^p \text{ es integrable en } \Omega\}.$$

Para $f \in L^p(\Omega)$ definimos la norma $\|\cdot\|_p$ dada por

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(\Omega)}\colon = \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{1/p}.$$

Definición 3.2.
Definimos al espacio $L^\infty(\Omega)$ como

$$L^\infty(\Omega)\colon = \{f \in M(\Omega)\colon \text{ existe } c \in \mathbb{R} \text{ tal que } |f(x)| \leq c \text{ para casi todo } x \in \Omega\}.$$

En este espacio, la norma está dada por

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}\colon = \text{ínf}\,\{c \in \mathbb{R}\colon \quad |f(x)| \leq x \text{ para casi todo } x \in \Omega\}.$$

Los dos resultados siguientes serán de vital importancia para más adelante probar que los espacios de Sobolev son espacios de Banach. Una demostración de ambas se puede encontrar en [5].

Proposición 3.3 (Desigualdad de Hölder)**.**
Sean $p, q \in [1, \infty]$ *tales que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Si* $f \in L^p(\Omega)$ *y* $g \in L^q(\Omega)$, *entonces* $fg \in L^1(\Omega)$ *y*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Proposición 3.4 (Desigualdad de Minkowski)**.**
Sea $p \in [1, \infty]$. *Si* $f, g \in L^p(\Omega)$, *entonces* $f + g \in L^p(\Omega)$ *y se cumple que*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Las siguientes definiciones nos ayudarán a construir los espacios de Sobolev.

Definición 3.5.
Un subconjunto abierto ω de $\mathbb{R}^n$ está compactamente contenido en Ω si su cerradura $\overline{\omega}$ es compacta y $\overline{\omega} \subset \Omega$; denotaremos esto por $\omega \subset\subset \Omega$. Definimos

$$L^1_{loc}(\Omega) \colon = \left\{ f \in M(\Omega) \colon f 1_\omega \quad \text{es integrable para todo abierto } \omega \subset\subset \Omega \right\}.$$

Definición 3.6 (Soporte)**.**
Sea f una función de clase $\mathcal{C}^\infty$ en Ω. El soporte de f es la cerradura en $\mathbb{R}^n$ del conjunto

$$\operatorname{sop}(f) = \{x \in \Omega \colon f(x) \neq 0\}.$$

Definimos también el conjunto

$$\mathcal{C}^\infty_c(\Omega) \colon = \{ f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \colon \operatorname{sop}(f) \text{ es compacto } \}.$$

Definición 3.7.
Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Decimos que u es débilmente diferenciable en Ω si existen $v_1, \ldots, v_n \in L^1_{loc}(\Omega)$ tales que

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_\Omega v_i \varphi = 0, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$$

para toda $i = 1, \ldots, n$.

v_i se llama la $i-$ésima derivada débil de u en Ω y se denota por

$$D_i u = v_i.$$

Además, el gradiente débil de u es el operador $\operatorname{grad} \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ dado por

$$\operatorname{grad} u \colon = (D_1 u, \ldots, D_n u).$$

Notemos que si $v, w \in L^1_{loc}(\Omega)$ son tales que satisfacen

$$-\int_\Omega v_i \varphi = \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega w_i \varphi$$

entonces $v = w$ c.t.p en Ω. Es decir, para cada $i = 1, \ldots, n$ la función v_i cumple con ser única.

La siguiente proposición nos dice que, al igual que en análisis real, la derivada débil es lineal.

Proposición 3.8.
Sean $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ débilmente diferenciables y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda u + \mu v$ es débilmente diferenciable y

$$D_i(\lambda u + \mu v) = \lambda D_i u + \mu D_i v \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Demostración.
Sea $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, entonces para cada $i = 1, \ldots, n$, se tiene que

$$\int_\Omega \left((\lambda u + \mu v) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + (\lambda D_i u + \mu D_i v)\varphi \right) = \lambda \int_\Omega \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + (D_i u)\varphi \right) + \mu \int_\Omega \left(v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + (D_i v)\varphi \right) = 0.$$

Así $\lambda u + \mu v$ es débilmente diferenciable y $D_i(\lambda u + \mu v) = \lambda D_i u + \mu D_i v$. □

3.2. Espacios de Sobolev

Definición 3.9 (Espacio de Sobolev)**.**
Sea $p \in [1, \infty]$. El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ se define como

$$W^{1,p}(\Omega) \colon = \left\{ u \in L^p(\Omega) \colon u \text{ es débilmente diferenciable en } \Omega,\ D_i u \in L^p\ \forall i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ definimos

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \colon = \begin{cases} \left(\|u\|_p^p + \|D_1 u\|_p^p + \cdots + \|D_n u\|_p^p \right)^{1/p} & \text{si} \quad p \in [1, \infty), \\ \\ \max \left\{ \|u\|_\infty, \|D_1 u\|_\infty, \ldots, \|D_n u\|_\infty \right\} & \text{si} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Proposición 3.10.
$W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio vectorial y $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ es una norma en $W^{1,p}(\Omega)$ para todo $p \in [1, \infty]$.

Demostración.
Como $L^p(\Omega)$ es un espacio vectorial, por la linealidad de la derivada débil se sigue que $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio vectorial. Probaremos ahora que $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ es una norma para este espacio.

- Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Si $u = 0$ entonces $D_i u = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y, en consecuencia, $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 0$. De manera inversa, como $\|u\|_p \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, si $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 0$ entonces $u = 0$ en $L^p(\Omega)$.

- Para cualquiera $u \in W^{1,p}(\Omega), \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \lambda \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ es consecuencia directa de la definición.

- Si $p \in [1, \infty)$, aplicando primero la desigualdad de Minkowski en $L^p(\Omega)$y después la desigualdad del tríángulo para la norma $\|\cdot\|$, obtenemos que, para cualesquiera $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\|u+v\|_{W^{1,p}(\Omega)} &= \left(\|u+v\|_p^p + \sum_{i=1}^{n}\|D_iu+D_iv\|_p^p\right)^{1/p}\\
&\leq \left(\left(\|u\|_p+\|v\|_p\right)^p + \sum_{i=1}^{n}\left(\|D_iu\|_p+\|D_iv\|_p\right)^p\right)^{1/p}\\
&\leq \left(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^{n}\|D_iu\|_p^p\right)^{1/p} + \left(\|v\|_p^p + \sum_{i=1}^{n}\|D_iv\|_p^p\right)^{1/p}\\
&= \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

La demostración de la desigualdad para el caso $p=\infty$ es análoga.

□

Con esta norma, es intuitivo pensar que $W^{1,p}(\Omega)$ sea un espacio de Banach. Para demostrar esto requerimos del siguiente lema.

Lema 3.11.
Sean $p\in[1,\infty]$ y $\{u_k\}$ una sucesión en $W^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_k\to u$ en $L^p(\Omega)$ y $D_iu_k\to v_i$ en $L^p(\Omega)$ para cada $i=1,\dots,n$. Entonces u es débilmente diferenciable en Ω, $v_i=D_iu$ para todo $i=1,\dots,n$, y $u_k\to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$.

Demostración.
Sea $\varphi\in\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Entonces $\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\in L^q$ para todo $q\in[1,\infty]$. Tomando q de modo que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ y usando la desigualdad de Hölder, se tiene que

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - \int_\Omega u_k\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right| \leq \|u-u_k\|_p\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|_q \to 0 \qquad \text{cuando } k\to\infty,\\
&\left|\int_\Omega v_i\varphi - \int_\Omega (D_iu_k)\varphi\right| \leq \|v_i-D_iu_k\|_p\|\varphi\|_p \to 0 \qquad \text{cuando } k\to\infty.
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$
\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \int_\Omega v_i\varphi = \lim_{k\to\infty}\left(\int_\Omega u_k\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \int_\Omega (D_iu_k)\varphi\right) = 0
$$

para cada $i=1,\dots,n$. Esto prueba que u es débilmente diferenciable en Ω y que $v_i=D_iu$. En consecuencia, $u\in W^{1,p}(\Omega)$. Además se tiene que

$$
\lim_{k\to\infty}\|u_k-u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p = \lim_{k\to\infty}\|u_k-u\|_p^p + \sum_{i=1}^{p}\lim_{k\to\infty}\|D_iu_k-D_iu\|_p^p = 0 \quad \text{si } p\in[1.\infty).
$$

Análogamente, $\lim_{k\to\infty}\|u_k-u\|_{W^{1.\infty}(\Omega)}=0$ si $p=\infty$. □

Teorema 3.12.
$W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach para todo $p\in[1,\infty]$.

Demostración.
Sea $\{u_k\}$ una sucesión de Cauchy en $W^{1,p}(\Omega)$. Entonces las sucesiones $\{u_k\}$ y $\{D_i u_k\}$ son de Cauchy en $L^p(\Omega)$. Como $L^p(\Omega)$ es completo, se tiene que $u_k \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $D_i u_k \to v_i$ en $L^p(\Omega)$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Del lema anterior se sigue que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $u_k \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Esto demuestra que $W^{1,p}(\Omega)$ es completo. $\square$

Definición 3.13.
Si $p = 2$, denotaremos

$$H^1(\Omega) :\ = W^{1,2}(\Omega) \qquad \text{y} \qquad \|u\|_{H^1(\Omega)} :\ = \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

En este caso la norma está inducida por el producto escalar

$$\langle u, v\rangle_{H_1(\Omega)} :\ = \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega (D_i u)(D_i v) = \int_\Omega uv + \int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v.$$

Por tanto, $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Teorema 3.14.
$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *es denso en* $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ *para todo* $p \in [1, \infty)$.

Una prueba de este teorema se puede encontrar en [5].

Definición 3.15.
Sea $p \in [1, \infty)$. El espacio de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ es la cerradura de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Para el caso $p = 2$ lo denotaremos por

$$H_0^1(\Omega) :\ = W_0^{1,2}(\Omega).$$

$W_0^{1,p}(\Omega)$ es un espacio vectorial cerrado de $W^{1,p}(\Omega)$, por tanto $W_0^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach y $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

3.3. Valores propios del laplaciano

Definición 3.16 (Valor propio)**.**
Sea H un espacio de Hilbert y sea $T\colon H \to H$ un operador. Decimos que un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de T si existe $x \in H\backslash\{0\}$ tal que $Tx = \lambda x$. Al vector x se le conoce como vector propio asociado a λ.

Notemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de T si y sólo si $\operatorname{Nuc}(T - \lambda Id) \neq \{0\}$, es decir, si y sólo si $T - \lambda Id$ no es inyectivo.

Proposición 3.17.
Sea $T\colon H \to H$ *un operador autoadjunto, entonces los vectores propios asociados a valores propios distintos de* T *son ortogonales.*

Demostración.
Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ valores propios distintos de T y sean $x, y \in H\backslash\{0\}$ sus vectores propios asociados respectivamente. Entonces:

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \mu\langle x, y\rangle.$$

Como $\lambda \neq \mu$ entonces $\langle x, y\rangle$. $\square$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de T y $x \in H\backslash\{0\}$ su vector propio asociado, se tiene que

$$\|T\|\|x\| \geq \|Tx\| = |\lambda|\|x\|,$$

así $\|T\| \geq |\lambda|$. Es decir, si T tiene al menos un valor propio λ, este cumple $|\lambda| \leq \|T\|$.

En general un operador T en un espacio de Hilbert H, no necesariamente posee valores propios. Para garantizar la existencia de al menos un valor propio, debemos pedir dos condiciones sobre T: T debe ser autoadjunto y compacto, esto último significa que para cada sucesión $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ acotada en H, la sucesión $\{Tx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente en H.

Teorema 3.18.
Sea $T\colon H \to H$ un operador compacto y autoadjunto, entonces, al menos uno de los escalares $\|T\|$ o $-\|T\|$ es un valor propio de T.

Demostración.
Si $\|T\| = 0$ el resultado es claro. Supongamos entonces que $\|T\| \neq 0$.
Como $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : \|x\| = 1\}$, entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en H con $\|x_n\| = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} |\langle Tx_n, x_n\rangle| = \|T\|;$$

sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\langle Tx_n, x_n\rangle > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Primero notemos que $Tx_n - \|T\|x_n \to 0$.

$$\begin{aligned}\|Tx_n - \|T\|x_n\|^2 &= \|Tx_n\|^2 + \|T\|^2\|x_n\|^2 - 2\|T\|\langle Tx_n, x_n\rangle \\ &\leq 2\|T\|^2 - 2\|T\|\langle Tx_n, x_n\rangle \to 0.\end{aligned}$$

Luego, usando la compacidad de T, como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada (pues $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$) entonces existe una subsucesión $\{Tx_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \{Tx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{m\to\infty} Tx_{n_m} = y \in H$. Entonces

$$\|\|T\|x_{n_m} - y\| \leq \|\|T\|x_{n_m} - Tx_{n_m}\| + \|Tx_{n_m} - y\| \to 0.$$

Así $x_{n_m} \to \frac{1}{\|T\|}y$, y por la continuidad de T se tiene que

$$y = \lim_{m\to\infty} Tx_{n_m} = \frac{1}{\|T\|}Ty.$$

Luego $Ty = \|T\|y$. Además $y \neq 0$, pues

$$\|y\| = \lim_{m\to\infty} \|\|T\|x_{n_m}\| = \|T\|.$$

Por lo tanto si T tiene al menos un valor propio λ se tiene que $|\lambda| = \|T\|$.

□

Proposición 3.19.
Si V es un subespacio $T-$invariante, entonces $V^\perp$ es T^*-invariante. Es decir, si T es autoadjunto entonces $V^\perp$ es $T-$invariante.

Demostración.
Sea $v \in V^\perp$. Para todo $u \in V$ se tiene que $Tu \in V$. Entonces

$$0 = \langle Tu, v\rangle = \langle u, T^*v\rangle.$$

Así $T^*v \in V^\perp$. □

Ahora enunciaremos un teorema conocido como "*El teorema espectral*", el cual será de vital importancia para construir lo que más adelante llamaremos *el espectro del laplaciano.*

Teorema 3.20 (Teorema espectral)**.**
Sea $T\colon H \to H$ un operador compacto y autoadjunto. Entonces, existe un sistema ortonormal $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de vectores propios de T y una sucesión $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de sus correspondientes valores propios tal que para cada $x \in H$ se tiene que

$$Tx = \sum_n \lambda_n \langle x, x_n\rangle x_n.$$

Los valores propios se pueden ordenar de modo que la sucesión $\{|\lambda_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ sea decreciente y si es infinita, converge a cero.

Demostración.
Hagamos $H_1 = H$ y $T_1 = T$. Entonces, aplicando el teorema (3.18) al operador T, existe un valor propio λ_1 y un vector propio x_1 asociado a él, tales que $\|x_1\| = 1$ y $|\lambda_1| = \|T_1\|$. Vamos a buscar el siguiente vector propio en $\{x_1\}^\perp$.

Definamos $H_2 = \{x_1\}^\perp$ y $T_2 = T|_{H_2}$. Por la proposición (3.19), se tiene que $T_2 \in \mathcal{L}(H_2)$. Como T es compacto y autoadjunto, entonces T_2 también lo es. Si $\|T_2\| \neq 0$ volvemos a aplicar el teorema (3.18) y obtenemos que existe $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $x_2 \in H_2\backslash\{0\}$ con $\|x_2\| = 1$, tal que $Tx_2 = \lambda_2 x_2$ y $|\lambda_2| = \|T_2\|$ y así, $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$.

Tomemos entonces $H_3 = \{x_1, x_2\}^\perp$ y $T_3 = T|_{H_3}$ y repitamos este proceso una cantidad numerable de veces o bien hasta llegar a $\{H_n\} = \{0\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Así, tendremos una sucesión finita o numerable $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de valores propios, tal que $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y un conjunto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de vectores propios ortogonales asociados a los λ_n. Veamos que en caso de que la sucesión sea infinita, entonces $\{\lambda_n\} \to 0$.

Si suponemos que la sucesión no converge a cero, entonces como $\{|\lambda_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de números reales positivos, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $|\lambda_n| > \varepsilon$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
Sean $n \neq m$, entonces

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_m x_m\| = \sqrt{\lambda_n^2 + \lambda_m^2} > |\lambda_n| > \varepsilon.$$

Como T es un operador compacto, la sucesión $\{Tx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ debería tener una subsucesión convergente y por tanto de Cauchy, lo cual es imposible debido al cálculo anterior. Por tanto la sucesión converge a cero.

Para la representación del operador.
Sea $x \in H$, definamos $y_n = x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k\rangle x_k$.

- Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T_n = 0$, entonces

$$0 = T_n y_n = Tx - \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k\rangle Tx_k = Tx - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, x_k\rangle x_k.$$

  Así

$$Tx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, x_k\rangle x_k.$$

- Supongamos que $T_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\left\| Tx - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k \right\| = \|T_n y_n\| \leq \|T_n\| \|y_n\| = |\lambda_n| \|y_n\| = |\lambda_n| \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k \rangle x_k \right\|$$

$$= |\lambda_n| \left(\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k \rangle^2 \right)^{1/2} \leq |\lambda_n| \|x\| \to 0.$$

□

$$T_* v_* = \mu v_*,$$

Una vez enunciado usaremos dos resultados de análisis funcional. El primero es consecuencia del teorema (3.20).

Teorema 3.21.
Sean $(V, \langle\ ,\ \rangle_V)$ y $(H, \langle\ ,\ \rangle_H)$ dos espacios de Hilbert reales separables de dimensión infinita, tales que:

a) V es denso en H,

b) $V \hookrightarrow H$ con inyección compacta, es decir que todo compacto de V es relativamente compacto en H.

Sea $a(\cdot,\cdot)$ una forma bilineal continua y simétrica sobre V, verificando la condición de coercitividad

$$\exists \alpha > 0 \quad \textit{tal que} \quad a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V.$$

Entonces existe una sucesión creciente de números reales positivos

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_m \leq \cdots, \quad \textit{tal que} \quad \lim_{n\to 0} \lambda_n = \infty,$$

y existe una base ortonormal de H, $\{e_m\}$ formada por elementos de V, tal que

$$a(e_m, v) = \lambda_m \langle e_m, v \rangle_H \quad \forall v \in V, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Además, el conjunto $\left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} e_m \right\}$ constituye una base ortonormal de V si sobre este espacio se considera el producto escalar definido por la forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$.

Demostración.
Aplicaremos el teorema (3.20) a un operador lineal, el cual se construirá como sigue:

Dado que la inyección $V \hookrightarrow H$ es continua, existe $C > 0$ tal que

$$\|v\|_H \leq C \|v\|_V \quad \forall\, v \in V.$$

Por tanto, para cada $f \in H$, la transformación $v \mapsto (f, v)_H$ es un funcional lineal continuo sobre V y existe un único u_f tal que

$$a\,(u_f, v) = (f, v)_h, \quad \forall\, v \in V, \quad u_f \in V.$$

Consideremos entonces la aplicación $S\colon H \to V$ definida por

$$Sf = u_f \qquad \forall\, f \in H,$$

así

$$\|Sf\|_V \leq \frac{C}{\alpha}\|f\|_H \qquad \forall\, f \in H.$$

Definimos al operador T como la composición de S con la inyección de V en H. T es entonces, un operador lineal compacto, además, dado que $a(\cdot,\cdot)$ es simétrica y coercitiva, deducimos que T es autoadjunto y positivo. En efecto, tenemos por una parte que

$$(g, Tf)_H = a(u_g, u_f) = a(u_f, u_g) = (f, Tg)_H \quad \forall\, f, g \in H,$$

mientras que

$$(Tf, f)_H = a(u_f, u_f) \geq \|u_f\|_V^2 \quad \forall\, f \in H.$$

El operador T es también inyectivo puesto que, si $Tf = 0$, entonces

$$(f, v)_H = a(u_f, v) = 0 \quad \forall\, v \in V,$$

y entonces f es ortogonal a V (que es denso en H), de donde se deduce que $f = 0$.

Por el teorema (3.20), el conjunto de los valores propios de T puede escribirse como una sucesión $\{\bar{\mu}_n\}$ de números reales positivos que decrece estrictamente a cero. Consideremos una subsucesión $\{\mu_n\}$, donde hemos contado a cada $\bar{\mu}_n$ tantas veces como indica su multiplicidad y hagamos

$$\lambda_n = \frac{1}{\mu_n} \quad \forall\, n \geq 1.$$

Entonces $\{\lambda_n\}$ es una sucesión que tiende a $+\infty$.

Eligiendo una base ortonormal en cada uno de los espacios $\operatorname{Nuc}(T - \bar{\mu}_n I)$, conseguimos una base ortonormal $\{e_n\}$ de H. Es claro que los $e_n \in V$. En efecto, cada e_n cumple que $Te_n = \mu_n e_n$ para algún n, con $\mu_n \neq 0$. Teniendo en cuenta las definiciones de T y de los λ_n, obtenemos además que

$$a(e_n, v) = \lambda_n a(Te_n, v) = \lambda_n (e_n, v)_H \quad \forall\, n \geq 1.$$

Por tanto, para terminar la demostración del teorema, solo queda probar que $\left\{\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} e_n\right\}$ es una base ortonormal de V para el producto escalar $a(\cdot,\cdot)$.

Es inmediato ver que los $\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} e_n$ son ortonormales para este producto escalar.

Por otra parte si $v \in V$ y

$$a(e_n, v) = 0 \quad \forall\, n \geq 1,$$

entonces

$$(e_n, v)_H = \frac{1}{\lambda_n} a(e_n, v) = 0 \quad \forall\, n \geq 1,$$

de donde $v = 0$. Esto prueba que el subespacio generado por los $\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} e_n$ es denso en V para la norma inducida por el producto escalar $a(\cdot,\cdot)$. Así $\left\{\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} e_n\right\}$ es efectivamente una base ortonormal. $\square$

El siguiente resultado es una consecuencia del teorema anterior. Una demostración de éste se puede encontrar en [5].

Teorema 3.22 (Alternativa de Fredholm).
Sea $T\colon H \to H$ un operador compacto en el espacio de Hilbert H. Entonces:

a) La ecuación $u - Tu = F$ posee una y sólo una solución $u \in H$ para cada $F \in H$ si y sólo si la única solución a la ecuación homogénea es $u = 0$.

b) Si la ecuación homogénea $u - Tu = 0$ posee soluciones distintas de cero, entonces dada $F \in H$, la ecuación

$$u - Tu = F,$$

posee soluciones si y sólo si F es ortogonal a todas las soluciones $v \in H$ de la ecuación homogénea adjunta

$$v - T^* v = 0.$$

3.4. El espectro del laplaciano con condición de Dirichlet

Consideremos el siguiente problema de valores propios

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{en } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado no vacío y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definición 3.23 (Espectro).
Se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un *valor propio* del problema de Dirichlet (3.1), si éste posee una solución débil no nula. En este caso diremos que la solución u es una *función propia* asociada al valor propio λ.

Al conjunto de todos los valores propios del problema de Dirichlet se le denomina *el espectro del laplaciano*.

Observemos que si u es una función propia, entonces también lo es ku para toda $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Teorema 3.24.
Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado no vacío, el espectro del problema de Dirichlet está formado por una sucesión creciente $\{\lambda_m\}$ de números reales positivos, tales que

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_m \leq \cdots, \quad y \quad \lim_{m\to 0} \lambda_m = \infty.$$

Además existe una base ortonormal $\{e_m\}$ de $L^2(\Omega)$, formada por funciones propias asociadas a los valores propios de λ_m. Por último $\left\{\frac{e_m}{\sqrt{\lambda_m}}\right\}$ es una base ortonormal del espacio $H_0^1(\Omega)$ dotado del producto escalar

$$\langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \langle \nabla u, \nabla v\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

En consecuencia, para toda $f \in L^2(\Omega)$. la solución débil del problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad en\ \Omega, \\ u &= 0 \quad en\ \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.2}$$

está dada por

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \langle f, e_j \rangle_{L^2(\Omega)} e_j,$$

donde la serie converge en $H_0^1(\Omega)$.

Demostración.
Sean $V = H_0^1(\Omega)$ y $H = L^2(\Omega)$ del teorema (3.21), por el teorema de *Rellich-Kondrachov* (ver [9]) se tiene que V se inyecta de forma compacta en H.

Sea $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$a(u, v) = \int_\Omega (\operatorname{grad} u) \cdot (\operatorname{grad} v).$$

Entonces por el teorema (3.21) se tienen la sucesión y la base.

Para probar la última parte del teorema, en primer lugar, gracias a que $\{e_m\}$ forma una base ortonormal en $L^2(\Omega)$, u puede escribirse como

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, e_j \rangle_{L^2(\Omega)} e_j.$$

Entonces, usando que u es solución del problema de Dirichlet, se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda_j \langle u, e_j \rangle_{L^2(\Omega)} = a(u, e_j) &= \int_\Omega (\operatorname{grad} u) \cdot (\operatorname{grad} e_j) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega (\partial u)(\partial e_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle \partial_i u, \partial_i e_j \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \langle \partial_{ii} u, e_j \rangle_{L^2(\Omega)} = -\langle \Delta u, e_j \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, e_j \rangle_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Así $\langle u, e_j \rangle_{L^2(\Omega)} = \dfrac{1}{\lambda_j} \langle f, e_j \rangle_{L^2(\Omega)}$ y por tanto

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \langle f, e_j \rangle_{L^2(\Omega)} e_j.$$

□

Ahora que conocemos el espectro para el problema de Dirichlet, veamos qué condición cumple cada función propia asociada a los valores propios.

Teorema 3.25.
Sea e_j *una función propia asociada al valor propio* λ_j. *Entonces* $e_j \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ *para toda* $j \in \mathbb{N}$.

La demostración de esta proposición no se ha incluido, puesto que va más allá de los objetivos de esta tesis.

En $\mathbb{R}^n$ podemos definir el cociente de Rayleigh como sigue.

Definición 3.26 (Cociente de Rayleigh)**.**
Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u \neq 0$. Definimos el *cociente de Rayleigh* como

$$R(u) = \frac{\|\operatorname{grad} u\|^2_{L^2(\Omega)^n}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}} = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2}{\displaystyle\int_\Omega u^2}. \tag{3.3}$$

Proposición 3.27.
Si e_j es una función propia asociada al valor propio λ_j, entonces $\lambda_j = R(e_j)$. Además se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \min_{u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0} R(u), \\ \lambda_k &= \max_{u \in \operatorname{span}\{e_1,\ldots,e_{k-1}\}^\perp, u \neq 0} R(u). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Demostración.
La primera parte de la proposición es consecuencia directa del teorema (3.24). Por otro lado sea $u \in H_0^1(\Omega)$, entonces nuevamente por el teorema (3.24) se tiene que

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, e_j \rangle_{L^2(\Omega)} e_j,$$

donde la serie es convergente en $H_0^1(\Omega)$, así

$$\begin{aligned} \|\operatorname{grad} u\|^2_{L^2(\Omega)^n} &= \sum_{j=1}^{\infty} |\langle u, e_j \rangle_{L^2(\Omega)}|^2 \|\operatorname{grad} e_j\|^2_{L^2(\Omega)^n} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |\langle u, e_j \rangle_{L^2(\Omega)}|^2 \\ &\geq \lambda_1 \sum_{j=1}^{\infty} |\langle u, e_j \rangle_{L^2(\Omega)}|^2 = \lambda_1 \|u\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

por lo que $\lambda_1 \leq R(u)$ para toda $u \in H_0^1(\Omega)$, y como $\lambda_1 = R(e_1)$ se sigue que

$$\lambda_1 = \min_{u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0} R(u).$$

Para probar la segunda igualdad, sea $u \in \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$, entonces $u = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} a_k e_k$. Así

$$R(u) = \frac{\|\operatorname{grad} u\|^2_{L^2(\Omega)^n}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}} = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_k^2}{\displaystyle\sum_{j=1}^{k} a_k^2} \leq \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \lambda_k a_k^2}{\displaystyle\sum_{j=1}^{k} a_k^2} = \lambda_k.$$

Nuevamente, como $\lambda_k = R(e_k)$ se sigue que

$$\lambda_k = \max_{u \in \operatorname{span}\{e_1,\ldots,e_{k-1}\}^\perp, u \neq 0} R(u).$$

$\square$

Corolario 3.28.
Sea $\Omega' \subset \Omega$ *y denotemos por* $\lambda_1(\Omega)$ *y* $\lambda_1(\Omega')$ *los primeros valores propios del problema (3.1) en* Ω *y* Ω' *respectivamente. Entonces*

$$\lambda_1(\Omega) \leq \lambda_1(\Omega').$$

Demostración.
Sea $u \in H_0^1(\Omega')$, consideremos $\widetilde{u}$ la extensión por cero de u fuera de Ω'. Entonces $\widetilde{u} \in H_0^1(\Omega)$, y así $H_0^1(\Omega') \subset H_0^1(\Omega)$. El resultado se sigue de aplicar la proposición (3.27). $\square$

Capítulo 4

El laplaciano en variedades

4.1. Valores propios del laplaciano

Definición 4.1 (Espectro de una variedad)**.**
Diremos que un número real λ es un *valor propio* del laplaciano si existe una función $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ distinta de cero tal que

$$\Delta f + \lambda f = 0.$$

En este caso diremos que f es la *función propia* asociada al valor propio λ. Al conjunto de todos los valores propios del laplaciano lo llamaremos *espectro de la variedad* y lo denotaremos por $\mathrm{Spec}(M)$.

Definición 4.2 (Espacio propio)**.**
El conjunto de todas las funciones propias asociadas a un mismo valor propio λ es un espacio vectorial real denotado por $E_\lambda(M)$, al que llamaremos *espacio propio* asociado a λ. Llamaremos *multiplicidad* de λ a la dimensión de E_λ.

Proposición 4.3.
El operador laplaciano es autoadjunto en la norma definida en $L^2(M)$.

Demostración.
Sean $f, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$, por el teorema de la divergencia y la proposición (2.4), se tiene que

$$0 = \int_M \mathrm{div}(f \,\mathrm{grad}\, h)\, dV = \int_M \left(\langle \mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, h\rangle + f\Delta h\right)\, dV.$$

Entonces

$$\int_M \langle \mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, h\rangle\, dV = -\int_M f \,\mathrm{grad}\, h\, dV.$$

De manera análoga se tiene que

$$\int_M \langle \mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, h\rangle\, dV = -\int_M h \,\mathrm{grad}\, f\, dV.$$

Entonces

$$\int_M f \,\mathrm{grad}\, h\, dV = \int_M h \,\mathrm{grad}\, f\, dV.$$

□

Proposición 4.4.
Los subespacios propios asociados a valores propios distintos, son ortogonales entre sí.

Demostración. Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ dos valores propios distintos del laplaciano y sean f, h las funciones propias asociadas a cada valor propio, es decir $f \in E_\lambda$ y $h \in E_\mu$. Por la proposición (4.3) se tiene que

$$-\lambda \int_M fh\,dV = \int_M h\Delta f\,dV = \int_M f\Delta h\,dV = -\mu \int_M fh\,dV,$$

así

$$(\lambda - \mu) \int_M fh\,dV = 0,$$

y como $\lambda \neq \mu$, entonces

$$\int_M fh\,dV = 0.$$

□

Proposición 4.5.
Todos los valores propios del laplaciano son no negativos.

Demostración.
Sea λ un valor propio del laplaciano y sea $f \in E_\lambda$. Entonces por la proposición (2.6) se tiene que

$$\Delta(f^2) = 2f\Delta f + 2|\operatorname{grad} f|^2 = -2\lambda f^2 + 2|\operatorname{grad} f|^2.$$

Ahora, usando el teorema de la divergencia, tenemos

$$0 = \int_M \Delta(f^2)\,dV = 2\int_M \left(|\operatorname{grad} f|^2 - \lambda f^2\right)\,dV.$$

Así

$$\lambda = \frac{\displaystyle\int_M |\operatorname{grad} f|^2\,dV}{\displaystyle\int_M f^2\,dV} \geq 0.$$

□

Los siguientes resultados son consecuencia de los teoremas (3.21), (3.22) y la proposición (3.27).

Teorema 4.6.
El espectro del laplaciano se puede ordenar de la siguiente forma:

$$\operatorname{Spec} M = \{\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m < \ldots\},$$

donde la sucesión tiende a infinito pero sus multiplicidades son finitas. Además $L^2(M)$ es la suma directa de los subespacios propios.

Teorema 4.7 (Caracterización del primer valor propio). *Sea λ_1 el primer valor propio no nulo del laplaciano y $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ una función tal que $\int_M f dV = 0$. Entonces*

$$\lambda_1 \leq \frac{\displaystyle\int_M |\operatorname{grad} f|^2 \, dV}{\displaystyle\int_M f^2 \, dV},$$

donde la igualdad se da si y sólo si $\Delta f + \lambda_1 f = 0$.

4.2. Las fórmulas de Minkowski

Proposición 4.8 (Primera fórmula de Minkowski).
Sea M una hipersuperficie inmersa, compacta y sin frontera, con la inmersión $\psi \colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$, entonces

$$\int_M (1 + H\langle \psi - a, N\rangle) \, dA = 0. \tag{4.1}$$

donde $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ es un punto fijo y N es el vector normal unitario.

Demostración.
Basta aplicar el teorema de la divergencia para variedades sin frontera (2.9) al laplaciano de $f = \langle \psi - a, \psi - a\rangle$, el cual gracias a la proposición (2.18) sabemos que es $\Delta f = 2n\,(1 + H\langle \psi - a, N\rangle)$. □

Proposición 4.9 (Segunda fórmula de Minkowski).
Sea M una hipersuperficie inmersa, compacta y sin frontera, con la inmersión $\psi \colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$, entonces

$$n(n-1)\int_M H \, dV + \int_M (n^2H^2 - |A|^2)\langle \psi - a, N\rangle \, dA = 0, \tag{4.2}$$

donde $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ es un punto fijo y N es el campo normal unitario.

Demostración.
Sean f_1 y f_2 las funciones dadas por

$$f_1 = \langle \psi - a, N\rangle, \qquad f_2 = \langle \psi - a, \psi - a\rangle.$$

Por la proposición (2.19) sabemos que

$$\begin{aligned}\Delta f_1 &= -n\left\langle \operatorname{grad} H, (\psi - a)^T\right\rangle - nH - f_1|A|^2\\ &= -\frac{n}{2}\langle \operatorname{grad} H, \operatorname{grad} f_2\rangle - nH - f_1|A|^2.\end{aligned}$$

Por otro lado, usando las proposiciones (2.4) y (2.18), se tiene que

$$\operatorname{div}(H \operatorname{grad} f_2) = \langle \operatorname{grad} H, \operatorname{grad} f_2\rangle + H\Delta f_2 = \langle \operatorname{grad} H, \operatorname{grad} f_2\rangle + 2nH(1 + f_1H),$$

entonces

$$\Delta f_1 = \frac{n}{2}\left(2nH(1 + f_1H) - \operatorname{div}(H \operatorname{grad} f_2)\right) - nH - f_1|A|^2,$$

y por tanto

$$\Delta f_1 + \frac{n}{2}\,\mathrm{div}\,(H\,\mathrm{grad}\,f_2) = n(n-1)H + f_1\left(n^2H^2 - |A|^2\right).$$

Finalmente, basta aplicar el teorema de la divergencia para variedades sin frontera (2.9) a la expresión anterior. □

Proposición 4.10 (Fórmula del volumen)**.**
Sea M una hipersuperficie compacta e inmersa en $\mathbb{R}^{n+1}$, con la inmersión $\psi\colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$ de tal forma que M sea la frontera de un dominio Ω con cerradura compacta $\overline{\Omega}$. Sea N el campo normal unitario a lo largo de M. Entonces

$$V(\Omega) = -\frac{1}{n+1}\int_M \langle \psi - a, N\rangle\, dV, \tag{4.3}$$

donde $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ es un punto fijo y $V(\Omega)$ es el volumen $(n+1)$-dimensional de Ω.

Demostración.
Sea $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, definamos $F(x) = \langle x-a, x-a\rangle$. Aplicando el teorema de la divergencia para variedades con frontera, se tiene que

$$\int_{\overline{\Omega}} \Delta F\, dV = -\int_M \langle \mathrm{grad}\, F, N\rangle\; dV.$$

Entonces, aplicando la proposición (2.18),

$$2(n+1)V(\Omega) = -2\int_M \langle \psi - a, N\rangle\, dV.$$

□

4.3. Estimaciones del primer valor propio

Definición 4.11 (Centro de masa)**.**
Sea M una hipersuperficie inmersa en el espacio euclidiano con la inmersión $\psi\colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$. Se define el *centro de masa* de M como

$$c = \frac{1}{A(M)}\int_M \psi\, dA,$$

donde $A(M)$ es el volumen $n-$dimensional de M.

Proposición 4.12.
Sea M una hipersuperficie inmersa en el espacio euclidiano con la inmersión $\psi\colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$. Entonces, si suponemos que M tiene centro de masa c, se cumple

$$\int_M (\psi - c)\, dA = 0.$$

Demostración.
Como c es el centro de masa, entonces

$$\int_M (\psi - c)\, dA = cA(M) - \int_M c\, dA = cA(M) - cA(M) = 0.$$

$\square$

Lema 4.13.
Sea M una hipersuperficie inmersa en el espacio euclidiano con la inmersión $\psi\colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$ y con centro de masa c. Entonces,

$$\lambda_1 \leq \frac{nA(M)}{\displaystyle\int_M |\psi - c|^2\, dA}, \tag{4.4}$$

donde la igualdad se da, si y sólo si, la hipersuperficie es igual a una esfera $\mathbb{S}^n(c,r)$ con $r > 0$.

Demostración.
Sea $F\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \langle x - c, a\rangle$, con $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ un vector fijo de norma igual a uno. Consideremos además $f = F \circ \psi$, es decir, $f(p) = \langle \psi(p) - c, a\rangle$. Usando la proposición (4.12) tenemos

$$\int_m f\, dA = \int_m \langle \psi - c, a\rangle\, dA = \left\langle \int_M (\psi - c)\, dA,\ a \right\rangle = 0.$$

Entonces, si consideramos $f_i = \langle \psi - c, e_i\rangle$ con $\{e_i\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$, estas funciones también cumplen que

$$\int_M f_i = 0,$$

para toda $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. Por el teorema (4.7) se tiene que

$$\lambda_1 \leq \frac{\displaystyle\int_M |\mathrm{grad}\, f_i|^2\, dA}{\displaystyle\int_M f_i^2\, dA}.$$

Usando ahora la proposición (2.20) se tiene que

$$\lambda_1 \leq \frac{\displaystyle\int_M \left(1 - \langle e_i, N\rangle^2\right)\, dA}{\displaystyle\int_M f_i^2\, dA} = \frac{A(M) - \displaystyle\int_M N_i^2\, dA}{\displaystyle\int_M f_i^2\, dA},$$

donde $N_i = \langle e_i, N\rangle$, entonces

$$\lambda_1 \int_M f_i^2\, dA \leq A(M) - \int_M N_i^2\, dA.$$

Sumando todas las coordenadas se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \left(\lambda_1 \int_M f_i^2\, dA\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \left(A(M) - \int_M N_i^2\, dA\right),$$

así

$$\lambda_1 \int_M \sum_{i=1}^{n+1} f_i^2 \, dA \leq \sum_{i=1}^{n+1} A(M) - \int_M \sum_{i=1}^{n+1} N_i^2 \, dA,$$

por lo que

$$\lambda_1 \int_M |\psi - c|^2 \, dA \leq (n+1)A(M) - A(M) = nA(M).$$

Ahora, por el teorema (4.7), sabemos que la igualdad se dará si para toda i, f_i es una función propia del primer valor propio no nulo del laplaciano. Esto es equivalente a decir

$$\Delta(\psi - c) + \lambda_1(\psi - c) = 0,$$

de donde, usando la fórmula de Laplace-Beltrami (2.13), se tiene que

$$nHN + \lambda_1(\psi - c) = 0. \tag{4.5}$$

Ahora, sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Usando la fórmula de Weingarten se tiene que

$$0 = \overline{\nabla}_X \left(nHN + \lambda_1(\psi - c)\right) = nX(H)N - nHAX + \lambda_1 X,$$

de donde, igualando partes normales obtenemos que $X(H) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y así podemos deducir que H es constante.

Por otro lado, si en lugar de igualar partes normales igualamos las partes tangentes, se tiene que

$$-nHAX + \lambda_1 X = 0,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, por lo que podemos deducir que $H \neq 0$, pues de lo contrario el campo X también lo sería lo cual no tiene sentido.

Entonces, usando el hecho de que H es constante en la ecuación (4.5), se tiene que

$$|\psi - c|^2 = \frac{n^2 H^2}{\lambda_1^2}.$$

Por lo tanto, M es una esfera $\mathbb{S}(c, r)$ con $r = nH/\lambda_1$ como se quería probar. $\square$

Teorema 4.14.
Sea M una hipersuperficie compacta e inmersa en el espacio euclidiano con la inmersión $\psi\colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$. Entonces, el primer valor propio no nulo del laplaciano, λ_1, cumple lo siguiente:

a) $\lambda_1 \leq \dfrac{n}{A(M)} \displaystyle\int_M H^2 \, dA.$

b) $\lambda_1 \leq \dfrac{nA(M)}{n^2(n-1)^2 \left(\displaystyle\int_M H^2 \, dA\right)^2} \displaystyle\int_M S^2 \, dA.$

c) $\lambda_1 \leq \dfrac{nA(M)^2}{\left(\displaystyle\int_M \langle \psi - c, N \rangle \, dA\right)^2}.$

Donde -como antes- c es el centro de masa de la hipersuperficie y S es la curvatura escalar. Además, en cualquiera de las desigualdades la igualdad se da, si y sólo si, M es una esfera $\mathbb{S}^n(c,r)$ con $r > 0$.

Demostración.

a) Primero observemos que

$$H\langle\psi - c, N\rangle \leq |H\langle\psi - c, N\rangle| \leq |H||\psi - c|. \tag{4.6}$$

Ahora, consideremos la desigualdad (4.4) y multipliquemos ambos lados por la integral de curvatura media al cuadrado. Así, usando la desigualdad de Schwarz junto con la primera fórmula de Minkowski y la observación anterior tenemos que

$$\begin{aligned} nA(M)\int_M H^2\,dA &\geq \lambda_1\left(\int_M |\psi - c|^2\,dA\right)\left(\int_M H^2\,dA\right) \\ &\geq \lambda_1\left(\int_M |H||\psi - c|\,dA\right)^2 \geq \lambda_1\left(\int_M H\langle\psi - c, N\rangle\,dA\right)^2 \\ &= \lambda_1\left(-\int_M dA\right)^2 = \lambda_1 A(M)^2. \end{aligned}$$

b) Nuevamente consideremos la desigualdad (4.4), pero esta vez multiplicaremos por la integral de la curvatura escalar al cuadrado y usaremos la segunda fórmula de Minkowski.

$$\begin{aligned} nA(M)\int_M S^2\,dA &\geq \lambda_1\left(\int_M |\psi - c|\,dA\right)\left(\int_M S^2\,dA\right) \\ &\geq \lambda_1\left(\int_M |S||\psi - c|\,dA\right) \geq \lambda_1\left(\int_M S\langle\psi - c, N\rangle\,dA\right)^2 \\ &= \lambda_1\left(-n(n-1)\int_M H\,dA\right)^2 = \lambda_1 n^2(n-1)^2\left(\int_M H\,dA\right)^2. \end{aligned}$$

c) De manera análoga a las dos pruebas anteriores, usaremos la desigualdad (4.4), y multiplicaremos por $A(M)$.

$$\begin{aligned} nA(M)^2 &\geq \lambda_1\left(\int_M |\psi - c|\,dA\right)A(M) = \lambda_1\left(\int_M |\psi - c|^2\,dA\right)\left(\int_M dA\right) \\ &\geq \lambda_1\left(\int_M |\psi - c|\,dA\right)^2 \geq \lambda_1\left(\int_M \langle\psi - c, N\rangle\,dA\right)^2. \end{aligned}$$

En los tres casos, la igualdad es consecuencia directa del lema (4.13). □

Corolario 4.15.
Si $\psi\colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$ es un encaje de manera que $M = \partial\Omega$ con Ω un dominio con cerradura compacta, entonces

$$\lambda_1 \leq \frac{nA(M)^2}{(n+1)^2 V(\Omega)^2}.$$

Demostración.
Si aplicamos la fórmula del volumen (4.10) a la última desigualdad del teorema anterior, se tiene que
$$nA(M)^2 \geq \lambda_1 \left(\int_M \langle \psi - c, N \rangle \, dA \right)^2 = \lambda_1 (n+1)^2 V(\Omega)^2.$$
La igualdad ocurre si y sólo si, Ω es una bola y M es una esfera. $\square$

4.4. Los valores propios del laplaciano en la esfera

Proposición 4.16.
Sea M^n una hipersuperficie en $\overline{M}^{n+1}$ y sea $F \in \mathcal{C}^\infty(\overline{M}^{n+1})$. Sea $\alpha(t)$ una curva en M tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Entonces
$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} (F(\alpha(t))) = \overline{\operatorname{grad}} F_p(v, v) = \left\langle \overline{\operatorname{grad}} F(p), \alpha''(0) \right\rangle.$$

Demostración.
Sean F y α como en el enunciado, entonces sabemos que se cumple lo siguiente:
$$\frac{d}{dt} (F(\alpha(t))) = \left\langle \overline{\operatorname{grad}} F(p), \alpha'(0) \right\rangle.$$
Derivando la expresión anterior tenemos
$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (F(\alpha(t))) &= \left\langle \overline{\nabla}_{\alpha'(t)} \overline{\operatorname{grad}} F(\alpha(t)), \alpha'(t) \right\rangle + \left\langle \overline{\operatorname{grad}} F(\alpha(t)), \alpha''(t) \right\rangle \\ &= \operatorname{Hess} F_{\alpha(t)} (\alpha'(t), \alpha'(t)) + \left\langle \overline{\operatorname{grad}} F(\alpha(t)), \alpha'' \right\rangle. \end{aligned}$$
Finalmente, evaluando en $t = 0$ y usando las condiciones iniciales de la curva α, obtenemos el resultado. $\square$

Teorema 4.17.
Sean $F \in \mathcal{C}^\infty(R^{n+1})$ y $f = F|_{\mathbb{S}^n(r)}$, entonces para todo punto $p \in \mathbb{S}^n(r)$ se cumple
$$\Delta f(p) = \overline{\Delta} F(p) - \frac{n}{r^2} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(p + tp) - \frac{1}{r^2} \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} F(p + tp).$$

Demostración.
Sabemos que en la esfera $\mathbb{S}^n(r)$ se cumple que $N(p) = p/r$ para todo $p \in \mathbb{S}^n(r)$. Entonces
$$AX = -\overline{\nabla}_X N = -\overline{\nabla}_X \left(\frac{p}{r} \right) = -\frac{1}{r} X,$$
por lo que $A = -I_n/r$ y por tanto $H = -1/r$.

Usando la proposición (2.17), con estos valores, se tiene que
$$\begin{aligned} \Delta f(p) &= \overline{\Delta} F(p) + nH \left\langle \overline{\operatorname{grad}} F(p), N(p) \right\rangle - \overline{\operatorname{Hess}} F(N(p), N(p)) \\ &= \Delta F(p) - \frac{n}{r^2} \left\langle \overline{\operatorname{grad}} F(p), p \right\rangle - \frac{1}{r^2} \overline{\operatorname{Hess}} F(p, p). \end{aligned}$$

Ahora calculemos $\left\langle \overline{\mathrm{grad}} F(p), p \right\rangle$ y $\overline{\mathrm{Hess}} F(p,p)$. Primero

$$\left\langle \overline{\mathrm{grad}} F(p), p \right\rangle = p(F(p)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(\alpha(t)),$$

donde $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n+1}$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = p$. Si tomamos la curva $\alpha(t) = p + tp$, se tiene que

$$\left\langle \overline{\mathrm{grad}} F(p), p \right\rangle = p(F(p)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(p + pt).$$

Para calcular $\overline{\mathrm{Hess}} F(p,p)$ basta usar la proposición (4.16) tomando la curva $\alpha(t) = p + tp$.

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} (F(p + tp)) = \overline{\mathrm{Hess}} F_p(p,p) + \left\langle \overline{\mathrm{grad}} F(p), \alpha'' \right\rangle = \overline{\mathrm{Hess}} F_p(p,p).$$

Así, dado $p \in \mathbb{S}^n(r)$ tenemos

$$\begin{aligned} \Delta f(p) &= \Delta F(p) - \frac{n}{r^2} \left\langle \overline{\mathrm{grad}} F(p), p \right\rangle - \frac{1}{r^2} \overline{\mathrm{Hess}} F(p,p) \\ &= \overline{\Delta} F(p) - \frac{n}{r^2} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(p + tp) - \frac{1}{r^2} \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} F(p + tp). \end{aligned}$$

□

Ahora vamos a imponer condiciones sobre F. Supongamos que $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ es una función homogénea de grado $k \geq 0$ con $k \in \mathbb{N}$, es decir, tal que $F(\lambda x) = \lambda^k F(x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, si calculamos los términos de la fórmula dada por el teorema (4.17), se tiene que

$$\begin{aligned} F(p + tp) &= (1 + t)^k F(p), \\ \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(p + tp) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (1 + t)^k F(p) = \left. k(1 + t)^{k-1} F(p)\right|_{t=0} = kF(p) = kf(p), \text{ y} \\ \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} F(p + tp) &= \left. k(k-1)(1 + t)^{k-2} F(p)\right|_{t=0} = k(k-1)F(p) = k(k-1)f(p). \end{aligned}$$

Por tanto, el laplaciano de f está dado por

$$\Delta f(p) = \overline{\Delta} F(p) - \frac{n}{r^2} kf(p) - \frac{1}{r^2} k(k-1)f(p) = \overline{\Delta} F(p) - \frac{k(n + k - 1)}{r^2} f(p).$$

Así

$$\Delta f + \frac{k(n + k - 1)}{r^2} f = \overline{\Delta} F.$$

Si ahora pedimos que F sea armónica además de homogénea tendremos que para todo $k \geq 0$, $f = F|_{\mathbb{S}^n(r)}$ cumple

$$\Delta f + \lambda_k f = 0 \quad \text{con} \quad \lambda_k = \frac{k(n + k - 1)}{r^2}.$$

Con esto ya sabemos cómo calcular los valores propios del operador laplaciano en la esfera y con ello, podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 4.18.
Los valores propios λ_k con $k \geq 0$ del operador laplaciano en la esfera se pueden escribir como

$$\lambda_k = \frac{k(n+k-1)}{r^2},$$

y sus funciones propias asociadas son la restricción a $\mathbb{S}^n(r)$ de los polinomios armónicos homogéneos de grado k en $n+1$ variables.

4.5. Fórmulas de Bochner-Lichnerowicz

Teorema 4.19.
Sean $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, se verifican las siguientes fórmulas:

$$\operatorname{div}(\nabla_X X) = |B_X|^2 + X(\operatorname{div} X) + \operatorname{Ric}(X, X), \tag{4.7}$$

$$\frac{1}{2}\Delta|\operatorname{grad} f|^2 = |\operatorname{Hess} f|^2 + \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad}(\Delta f)\rangle + \operatorname{Ric}(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f), \tag{4.8}$$

donde B_X es el endomorfismo dado por

$$\begin{array}{rccc} B_X: & \mathfrak{X}(M) & \to & \mathfrak{X}(M) \\ & Y & \mapsto & \nabla_Y X \end{array}$$

y $|B_X|^2 = tr\left|B_X^2\right|$

Demostración.
Para demostrar la primera fórmula, debemos calcular los términos de la igualdad uno a uno. Sea $\{E_1, \ldots, E_n\}$ un sistema de referencia ortonormal local. Entonces para el primer término se tiene que

$$\operatorname{div}(\nabla_X X) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(\nabla_X X), E_i\rangle .$$

Para el segundo término notemos que si $X = \operatorname{grad} f$, entonces B_X es autoadjunto, pues

$$\begin{aligned} \langle B_X(Y), Z\rangle &= \langle \nabla_Y(\operatorname{grad} f), Z\rangle = \operatorname{Hess} f(Y, Z) = \operatorname{Hess} f(Z, Y) \\ &= \langle \nabla_Z(\operatorname{grad} f), Y\rangle = \langle B_X(Z), Y\rangle , \end{aligned}$$

ya que, por la proposición (2.8) sabemos que el hessiano es un operador autoadjunto. Así

$$\begin{aligned} |B_X|^2 = \operatorname{tr}(B_X^2) &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle B_X^2(E_i), E_i\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle B_X(B_X(E_i)), E_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{B_X(E_i)X, E_i}\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{\nabla_{E_i} X} X, E_i\right\rangle . \end{aligned}$$

Para el tercer término tenemos que

$$\begin{aligned} X(\operatorname{div} X) = X(\operatorname{tr}(B_X)) &= X\left(\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, E_i\rangle\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_X(\nabla_{E_i} X), E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, \nabla_X E_i\rangle . \end{aligned}$$

Para el último término, usando la definición del tensor de curvatura se tiene que

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(X,X) &= \sum_{i=1}^{n} \langle R(X,E_i)X, E_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{[X,E_i]}X - [\nabla_X, \nabla_{E_i}]\, X, E_i\right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{\nabla_X E_i} X - \nabla_{\nabla_{E_i} X} X - \nabla_X(\nabla_{E_i} X) + \nabla_{E_i}(\nabla_X X), E_i\right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{\nabla_X E_i} X, E_i\rangle - \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{\nabla_{E_i} X} X, E_i\right\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_X(\nabla_{E_i} X), E_i\rangle \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(\nabla_X X), E_i\rangle \,.\end{aligned}$$

Ahora, sumaremos lo obtenido en cada uno de los términos.

Por un lado

$$\begin{aligned}&\mathrm{div}(\nabla_X X) - X(\mathrm{div}\, X) \\ &\quad = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(\nabla_X X), E_i\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_X(\nabla_{E_i} X), E_i\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, \nabla_X E_i\rangle\,;\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ric}(X,X) + |B_X|^2 \\ &\quad = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{\nabla_X E_i} X, E_i\rangle - \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{\nabla_{E_i} X} X, E_i\right\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_X(\nabla_{E_i} X), E_i\rangle \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(\nabla_X X), E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{\nabla_{E_i} X} X, E_i\right\rangle \\ &\quad = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{\nabla_X E_i} X, E_i\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_X(\nabla_{E_i} X), E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(\nabla_X X), E_i\rangle \,.\end{aligned}$$

Para que se cumpla (4.7), tendría que suceder que

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{\nabla_X E_i} X, E_i\rangle = -\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, \nabla_X E_i\rangle \,.$$

En efecto, primero observemos que por la fórmula de Koszul se tiene que $\langle \nabla_X E_i, E_j\rangle = -\langle E_i, \nabla_X E_j\rangle$, entonces.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{\nabla_X E_i}, E_i \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{\sum_{j=1}^{n} \langle \nabla_X E_i, E_j \rangle E_j} X, E_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle \nabla_X E_i, E_j \rangle \left\langle \nabla_{E_j} X, E_i \right\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle E_i, \nabla_X E_j \rangle \left\langle \nabla_{E_j} X, E_i \right\rangle = -\sum_{j=1}^{n} \left\langle \nabla_{E_j} X, \sum_{i=1}^{n} \langle E_i, \nabla_X E_j \rangle E_i \right\rangle \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \left\langle \nabla_{E_j} X, \nabla_X E_j \right\rangle = -\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, \nabla_X E_i \rangle .
\end{aligned}$$

Para demostrar (4.8) hagamos $X = \operatorname{grad} f$ en (4.7), así

$$\operatorname{div}\left(\nabla_{\operatorname{grad} f}(\operatorname{grad} f)\right) = |\nabla(\operatorname{grad} f)|^2 + \operatorname{grad} f(\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)) + \operatorname{Ric}(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f).$$

Ahora, comparemos término a término. Para el primer término, notemos que

$$\frac{1}{2}\Delta\left|\operatorname{grad} f\right|^2 = \frac{1}{2}\operatorname{div}\left(\operatorname{grad}\left|\operatorname{grad} f\right|^2\right) = \operatorname{div}\left(\frac{1}{2}\operatorname{grad}\left|\operatorname{grad} f\right|^2\right).$$

Ahora necesitamos calcular $\operatorname{grad}|\operatorname{grad} f|^2$. Para ello, sea $Y \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

$$\begin{aligned}
\left\langle \operatorname{grad}\left|\operatorname{grad} f\right|^2, Y \right\rangle &= Y\left(\left|\operatorname{grad} f\right|^2\right) = Y\left(\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f \rangle\right) = 2\left\langle \nabla_Y(\operatorname{grad} f), \operatorname{grad} f \right\rangle \\
&= 2\operatorname{Hess} f(Y, \operatorname{grad} f) = 2\operatorname{Hess} f(\operatorname{grad} f, Y) = \left\langle 2\nabla_{\operatorname{grad} f}(\operatorname{grad} f), Y \right\rangle .
\end{aligned}$$

Así

$$\operatorname{grad}\left|\operatorname{grad} f\right|^2 = 2\nabla_{\operatorname{grad} f}(\operatorname{grad} f),$$

y por tanto

$$\frac{1}{2}\Delta\left|\operatorname{grad} f\right|^2 = \operatorname{div}\left(\nabla_{\operatorname{grad} f}(\operatorname{grad} f)\right),$$

Para el segundo término, retomemos la notación B_X que usamos para probar (4.7). Así

$$\begin{aligned}
|\nabla(\operatorname{grad} f)|^2 = \left|B_{\operatorname{grad} f}\right|^2 = \operatorname{tr}\left(B^2_{\operatorname{grad} f}\right) &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle B^2_{\operatorname{grad} f}(E_i), E_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle B_{\operatorname{grad} f}(E_i), B_{\operatorname{grad} f}(E_i) \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \left|B_{\operatorname{grad} f}(E_i)\right|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left|\nabla_{E_i}(\operatorname{grad} f)\right|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(\operatorname{grad} f), E_j \rangle E_j \right|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Hess} f(E_i, E_j) E_j \right|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\operatorname{Hess} f(E_i, E_j)\right)^2 \\
&= \left|\operatorname{Hess} f\right|^2 .
\end{aligned}$$

Para el tercer término, se tiene que

$$\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad}(\Delta f) \rangle = \operatorname{grad} f(\Delta f) = \operatorname{grad} f(\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)).$$

$\square$

4.6. El teorema de Lichnerowicz y Obata

Una de las principales aplicaciones de la fórmula de Bochner-Lichnerowicz es el teorema de Lichnerowicz y Obata. En este resultado se da una cota inferior para el primer valor propio no nulo del operador laplaciano y también se ve que la igualdad se da en el caso de estar trabajando con una esfera.

Proposición 4.20.
Sean $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 ,$$

donde la igualdad se da si, y sólo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Demostración.
Para probar la desigualdad basta tomar los vectores $v = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ y $W = (1, \dots, 1)$ y aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz, es decir, que $\langle v, w \rangle^2 \leq |v|^2 |w|^2$. La igualdad se da cuando los vectores v y w son colineales. □

Esta proposición se puede aplicar en matrices.

Proposición 4.21.
Sea B una matriz autoadjunta en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\operatorname{tr}\left(B^2\right) \geq \frac{1}{n} \left(\operatorname{tr} B\right)^2 ,$$

donde la igualdad se da si, y sólo si, $B = \lambda I_n$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración.
Tomando a B, la matriz del enunciado, sabemos que ésta es diagonalizable (por resultados de álgebra lineal), por lo que podemos considerar que es de la forma $B = \operatorname{diag}\{b_1, \dots, b_n\}$. Así, aplicando la proposición (4.20) a los elementos de la diagonal obtenemos el resultado. □

Lema 4.22.
Para todo $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ se tiene que

$$|\operatorname{Hess} f|^2 \geq \frac{1}{n} (\Delta f)^2 ,$$

donde la igualdad se da si, y sólo si, $\operatorname{Hess} f = \phi\langle\, , \rangle$ *con $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M)$. En este caso, necesariamente $\phi = \Delta f / n$.*

Demostración.
Usando la proposición (4.21) con $B = \operatorname{Hess} f$ (en su forma matricial) , como el hessiano visto de esta forma es autoadjunto, podemos aplicar la proposición (4.21). Para ello, primero calcularemos $\operatorname{tr}\left(B^2\right)$ y $(\operatorname{tr} B)^2$.

$$\operatorname{tr}\left(B^2\right) = |B|^2 = |\operatorname{Hess} f|^2 .$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} B &= \operatorname{tr}(\operatorname{Hess} f) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Hess} f(E_i, E_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(\operatorname{grad} f), E_i\rangle = \operatorname{tr}(X \mapsto \nabla_X(\operatorname{grad} f)) \\ &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f.\end{aligned}$$

De esta manera, obtenemos los que queríamos demostrar, es decir,

$$|\operatorname{Hess} f|^2 \geq \frac{1}{n}(\Delta f)^2.$$

Ahora, para la igualdad, podemos suponer directamente que B es diagonalizable. Así

$$B = \lambda I \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Hess} f = \lambda I \quad \Rightarrow \quad \Delta f = \operatorname{tr}(\operatorname{Hess} f) \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\Delta f}{n}.$$

Entonces, la igualdad se dará si, y sólo si,

$$\operatorname{Hess} f = \frac{\Delta f}{n}\langle\ ,\ \rangle. \qquad \square$$

Ahora vamos a ver la demostración propuesta por Obata en [13]. Para ello necesitamos enunciar un teorema que aparece en dicho artículo. No incluimos aquí la demostración del teorema porque es bastante técnica y sobrepasaría los objetivos de esta tesis.

Teorema 4.23 (Obata).
Para que una variedad riemanniana completa M de dimensión $n \geq 2$ admita una función no constante f con $\operatorname{Hess} f = -k^2 f$ donde k es constante, es necesario y suficiente que la variedad sea isométrica a una esfera $\mathbb{S}^n(r)$ de radio $r = 1/k$.

Teorema 4.24 (Lichnerowicz-Obata).
Sea M^n una variedad riemanniana compacta. Supongamos que existe una constante $c > 0$ que satisface la desigualdad $\operatorname{Ric}(X,X) \geq (n-1)c|X|^2$, con $X \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces, el primer valor propio no nulo del laplaciano cumple $\lambda_1 \geq nc$. Además. la igualdad se da si, y sólo si, M es isométrica a una esfera $\mathbb{S}^n(r)$ de radio $r = 1/c$.

Demostración.
Sea $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tal que $\Delta f + \lambda_1 f = 0$ con λ_1 el primer valor propio no nulo del laplaciano, es decir, f es la primera función propia no constante. Vamos a usar la fórmula de Bochner-Lichnerowicz (4.8), la proposición (2.6) y el lema (4.22) para calcular el laplaciano de la función

$$g = |\operatorname{grad} f|^2 + \frac{\lambda_1}{n} f^2,$$

obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\Delta g &= \Delta \left|\operatorname{grad} f\right|^2 + \frac{\lambda_1}{n}\Delta f^2 \\
&= 2\left|\operatorname{Hess} f\right|^2 + 2\left\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad}(\Delta f)\right\rangle + 2\operatorname{Ric}\left(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f\right) + \frac{\lambda_1}{n}\Delta f^2 \\
&= 2\left|\operatorname{Hess} f\right|^2 + 2\left\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad}(\Delta f)\right\rangle + 2\operatorname{Ric}\left(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f\right) + \frac{\lambda_1}{n}\left(2f\Delta f + 2\left|\operatorname{grad} f\right|^2\right) \\
&= 2\left|\operatorname{Hess} f\right|^2 - 2\lambda_1\left|\operatorname{grad} f\right|^2 + 2\operatorname{Ric}\left(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f\right) + \frac{\lambda_1}{n}\left(-2\lambda_1 f^2 + 2\left|\operatorname{grad} f\right|^2\right) \\
&= 2\left|\operatorname{Hess} f\right|^2 + 2\operatorname{Ric}\left(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f\right) + 2\left(-\lambda_1 + \frac{\lambda_1}{n}\right)\left|\operatorname{grad} f\right|^2 - \frac{2\lambda_1^2}{n}f^2 \\
&= 2\left|\operatorname{Hess} f\right|^2 + 2\operatorname{Ric}\left(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f\right) + 2\left(\frac{-\lambda_1 n + \lambda_1}{n}\right)\left|\operatorname{grad} f\right|^2 - \frac{2\lambda_1^2}{n}f^2 \\
&\geq 2\left|\operatorname{Hess} f\right|^2 + 2(n-1)c\left|\operatorname{grad} f\right|^2 + 2\left(-\frac{\lambda_1(n-1)}{n}\right)\left|\operatorname{grad} f\right|^2 - \frac{2\lambda_1^2}{n}f^2 \\
&= 2\left|\operatorname{Hess} f\right|^2 + 2(n-1)\left(c - \frac{\lambda_1}{n}\right)\left|\operatorname{grad} f\right|^2 - \frac{2\lambda_1^2}{n}f^2 \\
&\geq \frac{2\left(\Delta f\right)^2}{n} + 2(n-1)\left(c - \frac{\lambda_1}{n}\right)\left|\operatorname{grad} f\right|^2 - \frac{2\lambda_1^2}{n}f^2 \\
&= \frac{2\lambda_1^2}{n}f^2 + 2(n-1)\left(c - \frac{\lambda_1}{n}\right)\left|\operatorname{grad} f\right|^2 - \frac{2\lambda_1^2}{n}f^2 \\
&= +2(n-1)\left(c - \frac{\lambda_1}{n}\right)\left|\operatorname{grad} f\right|^2.
\end{aligned}$$

Ahora, supongamos que $c - (\lambda_1/n) > 0$. Entonces, como M es compacta, por el teorema de la divergencia (2.9), se tiene que

$$0 = \int_M \Delta g \geq 2(n-1)\left(c - \frac{\lambda_1}{n}\right)\int_M \left|\operatorname{grad} f\right|^2 > 0,$$

Al suponer que $c - (\lambda_1/n) > 0$ hemos llegado a una contradicción, por tanto se cumple que $c - (\lambda_1/n) \leq 0$, y esto es equivalente a decir que $\lambda_1 \geq nc$.

Para caracterizar la igualdad haremos uso del teorema (4.23). Por el lema (4.22) sabemos que

$$\operatorname{Hess} f = \frac{\Delta f}{n}\langle\, , \,\rangle.$$

Así, usando el hecho de que f es la primera función propia del laplaciano, si $\lambda_1 = nc$, entonces

$$\operatorname{Hess} f = -\frac{\lambda_1 f}{n} = -cf = -\sqrt{c}^2 f.$$

Es decir, hemos encontrado una función f que cumple la hipótesis del teorema de Obata (4.23) y por tanto M es isométrica a la esfera $\mathbb{S}^n(r)$ con $r = 1/\sqrt{c}$. □

Bibliografía

[1] Robert A. Adams and John J. F. Fournier. *Sobolev spaces*, volume 140 of *Pure and Applied Mathematics*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.

[2] Luis J. Alías and J. Miguel Malacarne. Hypersurfaces with constant higher order mean curvature in Euclidean space. In *Differential geometry, Valencia, 2001*, pages 28–58. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002.

[3] Marcel Berger, Paul Gauduchon, and Edmond Mazet. *Le spectre d'une variété riemannienne.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 194. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[4] S. Bochner. Vector fields and Ricci curvature. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52:776–797, 1946.

[5] Haïm Brézis, Philippe G. Ciarlet, and Jacques-Louis Lions. *Analyse fonctionnelle: Théorie et applications.* Dunod, Paris, 1999.

[6] Isaac Chavel. *Eigenvalues in Riemannian geometry*, volume 115 of *Pure and Applied Mathematics.* Academic Press, Inc., Orlando, 1984.

[7] Hyeong In Choi and Ai Nung Wang. A first eigenvalue estimate for minimal hypersurfaces. *J. Differential Geom.*, 18(3):559–562, 1983.

[8] Jean Dieudonné. *Fundamentos de análisis moderno.* Reverté, Barcelona, 1979.

[9] Manfredo P. do Carmo. *Riemannian geometry.* Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992.

[10] Lawrence C. Evans. Partial differential equations and Monge-Kantorovich mass transfer. In *Current developments in mathematics, 1997 (Cambridge, MA)*, pages 65–126. Int. Press, Boston, MA, 1999.

[11] Oscar J. Garay. An application of Reilly's formula. *Bull. London Math. Soc.*, 21(2):176–178, 1989.

[12] André Lichnerowicz. *Géométrie des groupes de transformations.* Travaux et Recherches Mathématiques, III. Dunod, Paris, 1958.

[13] Morio Obata. Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere. *J. Math. Soc. Japan*, 14:333–340, 1962.

[14] Robert C. Reilly. On the first eigenvalue of the Laplacian for compact submanifolds of Euclidean space. *Comment. Math. Helv.*, 52(4):525–533, 1977.

[15] Héctor Sánchez and Oscar Palmas. *Geometría riemanniana.* UNAM, México, 2007.

[16] Hajime Urakawa. *Spectral Geometry of the Laplacian: Spectral Analysis and Differential Geometry of the Laplacian.* World Scientific, 2017.

[17] Paul C. Yang and Shing Tung Yau. Eigenvalues of the Laplacian of compact Riemann surfaces and minimal submanifolds. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 7(1):55–63, 1980.